

**MIT 2011**

Matematičke i informacione tehnologije

**ZBORNİK RADOVA**  
KONFERENCIJE MIT 2011







**ZBORNİK RADOVA  
KONFERENCIJE MIT 2011**

## ZBORNIK RADOVA KONFERENCIJE MIT 2011

ISBN 978-86-83237-90-6 (AU)

Urednik:

Dragan Aćimović

Radovi su prezentirani na Konferenciji MIT 2011 u Vrnjačkoj Banji od 28. do 31. avgusta i u Budvi od 31. avgusta do 5. septembra 2011. godine

Redakcija:

Jurij Ivanovič Šokin

Leonid Čubarov

Hranislav Milošević

Dojčin Petković

Nataša Radenković

Aleksandar Valjarević

Dragan Aćimović

Grafička obrada:

Dragan Aćimović

Štampa:

Graficolor, Kraljevo

Izdavači:



**ALFA**  
UNIVERZITET  
(Beograd, Srbija)



**Društvo matematičara Kosova i Metohije**  
(Kosovska Mitrovica, Srbija)



**Institute of Computational Technologies,  
Siberian Branch of the Russian Academy  
of Sciences**  
(Novosibirsk, Rusija)

Sekretar Društva matematičara Kosova i Metohije:  
prof. dr Dojčin Petković

Predsednik Organizacionog odbora:  
prof. dr Hranislav Milošević

Beograd, 2012.



# P R E D G O V O R

## ZBORNIKU RADOVA KONFERENCIJE MIT 2011

Međunarodna konferencija MIT 2011 iz oblasti matematičkih, informacionih i telekomunikacionih nauka koja je održana u periodu od 27.08 - 5.09 2011. godine pokazala je da nauka i prava prijateljstva nemaju granice.

Za kratko vreme Srbi, Rusi i Kazahstanci su organizovali zajedno sa naučnicima iz 14 zemalja sveta uspešnu Konferenciju, koja je i osnov za sve dalje naučne saradnje i ostvarenja, koja imaju za cilj dobrobit čovečanstva.

Programski komitet MIT 2011

Organizacioni komitet MIT 2011

Beograd, mart 2012. godine





## Table of Contents:

- 12 AN APPROACH IN LINEAR ANTENNA ARRAY SYNTHESIS BASED ON ARTIFICIAL NEURAL NETWORK MODELING (AGATONOVIC M., STANKOVIC Z., MILOVANOVIC B., DONCOV N.)
- 17 ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЗОНАЛЬНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ ЮГА СИБИРИ (АНДРЕЕВА Н. М., НАЗИМОВА Д. И.)
- 23 ИНТЕГРАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ БИОРАЗНООБРАЗИЯ БАЙКАЛЬСКОГО РЕГИОНА В РАМКАХ ГЕОПОРТАЛА (АНТОНОВ И. А., БЫЧКОВ И. В., ВЛАДИМИРОВ И. Н., ГАЧЕНКО А. С., РУЖНИКОВ Г. М., СОРОКОВОЙ А. А., ФЁДОРОВ Р. К., ХМЕЛЬНОВ А. Е., ШИГАРОВ А. О)
- 31 AN INEQUALITY FOR THE HAAR MEASURE (ARANDJELOVIC I., KECKIC D.)
- 33 COMPLEX NUMBERS IN MATEMATICALS PACKAGE "GEOGEBRA" AND "MATHEMATICA" (ARITONOVIC M., HERCEG D., NEDIC D.)
- 36 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПОЛЗНЕВЫХ ВОЛН ЦУНАМИ В РЕАЛЬНЫХ АКВАТОРИЯХ (БЕЙЗЕЛЬ С. А., ЧУБАРОВ Л. Б.)
- 43 МОДИФИЦИРОВАННАЯ ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕЗОННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СОЛЕНОГО ОЗЕРА (БЕЛОЛИПЕЦКИЙ В. М., ГЕНОВА С. Н., ДЕГЕРМЕНДЖИ А. Г., РОГОЗИН Д. Ю.)
- 48 MATRIX REPRESENTATION OF TETRAHEDRAL EDGE FLOWS (VJELICA M.)
- 52 КОРРЕКЦИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ РЕГИСТРАЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ (БОРЗОВ С. М., ПОТАТУРКИН О. И.)
- 57 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛИНДРУ (ЦВЕЛОДУБ О. Ю., БОЧАРОВ А. А.)
- 63 MULTICRITERIA DECISION-MAKING ON SITE SELECTION DURING CONSTRUCTION MINI HYDRO POWER PLANTS USING PROMETHEE-GAIA METHODOLOGY (CVETKOVIC M., CVETKOVIC S.)
- 67 VIRTUAL MATHEMATICS ENVIRONMENTS FOR LEARNING INTEGRATION (DIKOVIC LJ., RADOSAVLJEVIC D.)
- 73 PREDICTION OF STUDENT'S SUCCESS ANALYZING THEIR ACTIVITIES ON THE MOODLE COURSE (DIMIC G., KUK K., PROKIN D., SPALEVIC P.)
- 78 CODIMENSION ONE COINCIDENCES (DIMOVSKI D.)
- 84 DEVELOPMENT A SYSTEM FOR MONITORING ACCESS TO BUILDINGS (DJOSIC D., MICIC A.)
- 89 NOVEL HIGHLY ACCURATE FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR TWO-DIMENSIONAL FIELD COMPUTATIONS IN ELECTROMAGNETICS (DJURDJEVIC D. Z.)
- 96 THE APPLICATION OF THE DU FORT FRANKEL BEAM PROPAGATION METHOD IN PHOTONICS (DJURDJEVIC D. Z.)
- 102 ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ В ИСМА (ДОСТОВАЛОВ Д. Н., ШОРНИКОВ Ю. В.)
- 108 ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОРТИРОВКИ СЛОЕВ КАРТЫ ПРИ СОЗДАНИИ ЦИФРОВЫХ ТОПОПЛАНОВ (ЕРЕМЕЕВ С. В.)

- 111 MATHEMATICAL EDUCATION MATERIALS DEVELOPMENT APPROACH FOR DISTANCE LEARNING SYSTEMS (GAVRILOVIC J., SAVIC A., KOSTIC KOVACEVIC I.)
- 117 ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ЗАЩИТЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ОТ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ОСКОЛКОВ (ГЕРАСИМОВ А. В., ДОБРИЦА Д. Б., ПАШКОВ С. В., ХРИСТЕНКО Ю. Ф.)
- 122 РАСЧЕТ НА ОСНОВЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ НАНОЧАСТИЦЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ (ГЕШЕВ П. И.)
- 128 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИБРОСЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДАХ ХАРАКТЕРНЫХ ДЛЯ ГРЯЗЕВЫХ ВУЛКАНОВ (ГЛИНСКИЙ Б. М., КАРАБАЕВ Д. А.)
- 134 LIGHTNING MODELING IN TRANSMISION LINES (GRUJIC A.)
- 138 О ПРИНЦИПАХ СОЗДАНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ СБОРА ДАННЫХ НА ОСНОВЕ МДА-ПОДХОДА (ГУСЬКОВ А. Е., ВАСИЛЬКОВ А. В., НОВОСЁЛОВ Е. В.)
- 143 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СХЕМЫ ДЛЯ ЕЕ МОНОТОНИЗАЦИИ (ХАКИМЗЯНОВ Г. С., ШОКИНА Н. Ю.)
- 149 МАСШТАБИРУЕМАЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННАЯ МУЛЬТИКЛАСТЕРНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА (ХОРОШЕВСКИЙ В. Г., КУРНОСОВ М. Г., МАМОЙЛЕНКО С. Н.)
- 155 MATRIX MODEL TO DETERMINE RELIABILITY FUNCTION OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS (IVANOVIC G., STEVOVIC S.)
- 161 FORMULAE OF REDUCTION FOR SOME SYSTEMS OF OPERATOR EQUATIONS (Jovovic I.)
- 167 БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ (КАМАЕВ Д. А., ЧЕПУРКО С. В.)
- 173 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С ЧАСТИЧНО ЗАГЛУБЛЕННЫМ ЭКРАНОМ (КАМЫНИН Е. Ю., МАКСИМОВ В. В., НУДНЕР И. С., СЕМЁНОВ К. К., ХАКИМЗЯНОВ Г. С.)
- 179 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА АССИМИЛЯЦИЮ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ (КАРЕПОВА Е. Д., ШАЙДУРОВ В. В., ДЕМЕНТЬЕВА Е. В.)
- 185 О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА СПЕКТРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ (КАШИРИН А. А., СМАГИН С. И.)
- 191 SPECIAL CUBE MODEL FOR MULTIPLE REGRESSION IN TRIANGULAR COORDINATES (KOLAREVIC M., MINIC D., RAJOVIC M., VJELIC M., PETROVIC Z.)
- 198 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОЗЕРЕ ШИРА В ЛЕТНИЙ ПЕРИОД (КОМПАНИЕЦ Л. А., ЯКУБАЙЛИК Т. В.)
- 204 ADAPTIVE APPROACH TO SPARE PARTS INVENTORY MANAGEMENT SYSTEM IN AIRCRAFT MAINTENANCE (KONTREC N., MILOSEVIC H., LAZOVIC G., DESPOTOVIC M.)
- 211 ИНТЕГРАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭНЕРГЕТИКИ (КОПАЙГОРОДСКИЙ А. Н., МАССЕЛЬ Л. В.)
- 217 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (КОРОБИЦЫН В. А.)

- 222 ПОСТРОЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА РАБОЧИХ СТАНЦИЯХ НА ПЛАТФОРМАХ CONDOR И WINDOWS HPC SERVER (КОСЯКОВ Д. В., МАРТЬЯНОВ А. С., ТЕЙТЕЛЬБАУМ Д. В.)
- 226 АДАПТИВНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ (КОЗИК В. И., НЕЖЕВЕНКО Е. С., ФЕОКТИСТОВ А. С.)
- 232 MODEL FOR ASSESSMENT OF KNOWLEDGE OF STUDENTS IN AN EDUCATIONAL ENVIRONMENT BASED ON THE GAME (КУК К., DIMIĆ G., PROKIN D., SPALEVIC P.)
- 238 THE SOFTWARE TESTING OPTIMIZATION MODEL (LAZIĆ LJ., MILINKOVIĆ S.)
- 246 NON-REPRODUCTIVE AND REPRODUCTIVE SOLUTIONS OF SOME MATRIX EQUATIONS (MALESEVIC B. J., RADIĆIĆ B. M.)
- 252 A CONSTRUCTION WEIGHTED PROJECTIVE PLANE OF ORDER 9 AND  $(2, 9 - 1)$  - QUASIGROUP (MANDAK A.)
- 257 INITIATIVE GIGA URB RAS: МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ И АРХИТЕКТУРА НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ МАГИСТРАЛИ УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН (МАСИЧ А. Г., МАСИЧ Г. Ф., МАТВЕЕНКО В. П., ТИРОН Г. Г.)
- 266 ПОТОКОВАЯ ОБРАБОТКА БОЛЬШИХ МАССИВОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА УДАЛЕННОМ СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ (МАСИЧ А. Г., МАСИЧ Г. Ф., ЦАПОВ В. А., СТЕПАНОВ Р. А.)
- 271 ИНТЕГРАЦИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ИТ-ИНФРАСТРУКТУРУ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭНЕРГЕТИКИ (МАССЕЛЬ А. Г.)
- 275 MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF MAKING FIREPROOF PROTECTIVE COVERINGS BY TWO-PHASE JETS (MILOSEVIC H., PETKOVIĆ D., KONTRAC N.)
- 283 INFORMATION TECHNOLOGIES THROUGH MOODLE SOFTWARE PLATFORM (Milosevic H., Petrovic V. V.)
- 289 РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПРОТЕКАНИЯ В КАНАЛАХ ПРИ ЗАДАННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ (МИЛОШЕВИЧ Х., ШОКИН Ю. И., ЗАХАРОВ Ю. Н., ГЕЙДАРОВ Н. А.З, ГУММЕЛЬ Е. Э.)
- 298 EQUIVALENCE OF INTRINSIC SHAPE AND SHAPE (MISAJLESKI Z., SHEKUTKOVSK N.)
- 305 СОГЛАСОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНЫХ МЕТОДОВ (НОВИКОВ Е. А., НОВИКОВ А. Е.)
- 311 ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ МГД ВОЛН В ЗОНЕ ЭКВАТОРА (ПЕРЕГУДИН С. И., ХОЛОДОВА С. Е.)
- 317 GLOBAL SEARCH PSO-LIKE ALGORITHM RC1 (PETKOVIĆ A.)
- 325 LOCAL DOUBLE LOGARITHMIC RECONSTRUCTION TECHNIQUE (PETROVIC M.)
- 330 INFORMATION TECHNOLOGY IN THE MEASURING AND CONTROL SYSTEMS (PETROVIC V. V., MUMOVIC G., KISIC E.)
- 335 THE DISTRIBUTION OF SPLIT-SV(1) MODEL (ПОРОВИЧ С. В., СТОЈАНОВИЧ С. В.)
- 341 CREATION OF EFFICIENT INTERACTIVE SIMULATIONS IN HIGHER EDUCATION USING EASY JAVA SIMULATIONS SOFTWARE TOOL (ПОРОВИЧ Н., ПОРОВИЧ В., ПАВЛОВИЧ Н.)

- 347 DETERMINING THE CONDITIONS FOR OCCURRENCE OF JUMP PHENOMENON IN PHASE LOCKED LOOPS (*RAICEVIC M. A., POPOVIC M. B.*)
- 351 APPLICATION OF NUMERICAL ANALYSIS SOFTWARE IN TEACHING PROBABILITY AND STATISTICS (*SAVIC A., ZEKOVIC A.*)
- 355 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ БАЗ ГЕОДАННЫХ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ТЕРРИТОРИЙ (*ШОКИН Ю. И., МОСКВИЧЕВ В. В., НОЖЕНКОВА Л. Ф., НИЧЕПОРЧУК В. В.*)
- 360 FUZZY LOGIC, NEURAL NETWORKS, EXPERT SYSTEMS AND ITS APPLICATIVE CORRELATION MODELS (*STEVOVIC S.*)
- 372 ALGORITHMS AND SOFTWARE'S IMPLEMENTATION OF ESTIMATIONS PROCEDURE IN SOME CHAOTICALLY MODELS (*STOJANOVIC V., BOZINOVIC M.*)
- 379 ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ (*ВОЛКОВ Ю. С.*)
- 385 ITERATIVE ASPECTS IN CONJUGATED VEKUA EQUATION (*VUJAKOVIC J., PETKOVIC D.*)
- 391 ZEROS SOLUTIONS OF THE COMPLEX BERNOULLI EQUATION (*VUJAKOVIC J., RAJOVIC M.*)
- 396 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ВЕБ-СЕРВИСОВ ГЕОПОРТАЛА (*ЯКУБАЙЛИК О. Э.*)
- 403 Index

## AN APPROACH IN LINEAR ANTENNA ARRAY SYNTHESIS BASED ON ARTIFICIAL NEURAL NETWORK MODELING

---

*The capacity of wireless communication systems can be substantially increased using space division multiple access (SDMA) technique. This channel access method exploits spatial separation between different users in order to suppress unwanted interference signals. Antenna arrays have crucial role in the realization of such space filtering. For that purpose, effects of the spatial distribution of the array elements on the radiation pattern are investigated in this paper. Linear antenna array consisted of four by one (4x1) microstrip rectangular patch antennas at operating frequency of 2.4 GHz, is considered. If the synthesis process is performed using one of the available 3D EM solvers, it can be computationally expensive and time-consuming. A demand for new design methodologies that are both accurate and fast at the same time has appeared. An alternative solution to overcome the existing problem is to employ an artificial neural network (ANN) model, where an EM solver is utilized only to generate training and test data for the model. Employing both EM solver and the neural model, optimal inter-element spacing between array elements, providing minimum values of sidelobe level (SLL) and half-power beamwidth (HPBW), is determined. The total time required to obtain data for developing ANN model and to perform synthesis process is significantly reduced.*

---

### INTRODUCTION

In wireless communication systems, antenna radiation properties are critical for system coverage and performance. To mitigate negative environmental impacts and to increase capacity, efficient antenna systems must be employed. The radiation pattern of an antenna system describes how it focuses or directs the energy it radiates or receives. All antennas, regardless of pattern shape or gain, do not radiate the total energy delivered to their input connectors. Actually, they act as directional amplifiers, transmitting and receiving the energy in one specific region of space [1]. The challenge in the design of a suitable system is to overcome the inherent relationships between gain, pattern beamwidth, presence of side- and backlobes and size of the antenna.

In practice, antenna arrays consisted of a number of antenna elements are utilized. Antenna arrays represent complex radiating structures whose radiation patterns can be considered as the interference between electromagnetic fields of each radiating element. Different radiation schemes can be designed by choosing appropriate inter-element spacing, or by modifying amplitudes and phases of the excitations applied to the elements of the array. Usually, it is desirable to minimize both the antenna half-power beamwidth and the sidelobe

level. Unfortunately, this is an inverse relationship between two array characteristics, and therefore, in the designing process a compromise must be made. To achieve desired sidelobe level (SLL) or half-power beamwidth (HPBW), or a combination of both, synthesis problem must be solved. It consists of finding the distribution of excitation of the antenna array elements or inter-element spacing between different elements. Since the analysis problem is considered as determination of the radiation pattern from a given excitation or geometrical law using numerical tools, the synthesis problem can be solved as the inverse problem of the analysis one [1]-[4].

ANN models can be successfully used to modify or optimize different electromagnetic structures [5], [6]. Application of neural networks in the field of antenna arrays offers an efficient way to incorporate the real radiating properties of antenna, and coupling effects between antenna elements in the synthesis process without increasing the model complexity. Unlike computationally intensive and time-consuming EM models, once developed neural models give responses almost instantaneously due to performing only basic mathematical operations and calculating elementary mathematical functions (such as an exponential or hyperbolic tangent function) [5]. The most important charac-

---

<sup>1</sup> Faculty of Electronic Engineering, Nis, Serbia

teristic of neural models is their generalization capability. In practice, ANNs are able to provide correct response even for the input values that have not been used during the training process. Therefore, developed models can be used for a reliable prediction over a wide range of input parameters. In this paper, ANNs are trained to estimate the separation of antenna array elements in order to obtain desired radiation pattern. Half-power beamwidth and sidelobe levels resulting from various space distributions of antenna elements can be easily determined.

### ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

A classic multilayer perceptron (MLP) neural network is shown in Fig. 1. MLP-ANN is a feedforward artificial neural network trained using the standard back-propagation algorithm. The MLP-ANN is built up of a number of elementary processing units, called neurons, which are organized into layers. Every neuron in each layer in the network is connected to every neuron in the adjacent forward layer but no connections are permitted between the neurons belonging to the same layer. A neuron communicates with others by weights, and it is able to activate itself according to the received signals.

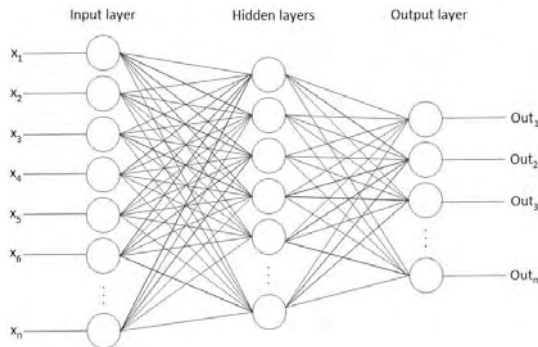


Fig.1. Multilayer perceptron neural network

All neurons take their decisions simultaneously by taking into the consideration changes of the neural network global state. The MLP-ANN usually consists of an input layer, an output layer as well as several hidden layers. With one or two hidden layers, they can approximate virtually any input-output mapping.

To develop a neural network model, input and output variables of the structure must be defined. All IO data are generated using full wave EM simu-

lation. The generated data are separated into two groups - training data and test data.

The MLP-ANN training is performed in two steps. The first one consists of presenting the training set to the network, then propagating this configuration gradually from the input layer through the hidden layers up to the output layer. The output of the  $l$ -th layer can be written as

$$Y_l = F(W_L Y_{l-1} + B_l) \quad (1)$$

Where  $Y_l$  and  $Y_{l-1}$  are outputs of  $l$ -th and  $(l-1)$ -th layer, respectively,  $W_l$  is a weight matrix between  $(l-1)$ -th and  $l$ -th layer and  $B_l$  is a bias matrix between  $(l-1)$ -th and  $l$ -th layer. Function  $F$  is the activation function of each neuron and, it is linear for input and output layer and sigmoid for hidden layers

$$F(u) = (1 - e^{-u}) / (1 + e^{-u}) \quad (2)$$

The neural network is trained to learn relationship between sets of IO data that represent characteristics of the structure under consideration. After the input vectors are presented to the input neurons, output vectors are computed. These output vectors are then compared with desired values and errors are computed. Error derivatives are then calculated and summed up for each weight and bias until whole training set has been presented to the network. The error derivatives are used to update the weights and biases for neurons in the model. The training process continues until errors are lower than the prescribed values or until the maximum number of epochs is reached. Once trained, the network provides fast response for different input vectors, even for those not included in the training set.

To determine accuracy of the ANN model, average test error (ATE [%]), worst-case error (WCE [%]), and correlation coefficient,  $r$ , between the referent and the modeled data are calculated, [5].

The Pearson Product-Moment correlation coefficient  $r$  is defined by:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3)$$

where  $x_i$  represents the referent value,  $y_i$  is the neural network computed value,  $\bar{x}$  is the referent sample mean, and  $\bar{y}$  is the neural network sample mean. The correlation coefficient is an indicator in which extent the modeled values match the

referent ones. If a correlation coefficient is close to one than the MLP-ANN has excellent predictive ability, while a coefficient close to zero indicates poor predictive ability.

### DESIGN OF AN ANTENNA ARRAY

In the four-element antenna array, coax-fed microstrip rectangular patch antennas are employed. The antenna design, shown in Fig. 2, has the radiating patch of length of 40 mm and width of 30 mm. Coaxial probe position relative to the antenna center is (5.5 mm, 0). In the simulation, to design rectangular patch antenna, the following substrate parameters were chosen: dielectric constant ( $\epsilon_r$ ) - 2.33, thickness (h) - 1.57mm, loss tangent (TgD) - 0.0036. The Method of Moment (MoM) based software WIPL-D is used to analyze the microstrip patch antenna. The antenna resonating at 2.4 GHz has the input impedance of 62  $\Omega$ . Also, the patch antenna has 7 dBi of gain and 30 MHz of bandwidth.

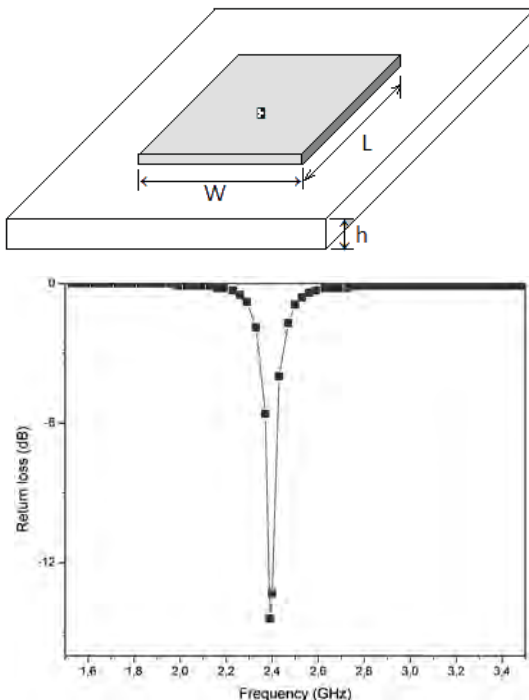


Fig. 2. Rectangular patch element and corresponding return loss

Further, the rectangular patch antenna is used as an element in the design of a linear antenna array [4], [7]. For equally spaced antenna elements the separation distance between patches is chosen

to be 65 mm ( $0.62\lambda$ ). Antenna elements are excited with unit amplitude and zero phases. In this case, the array has sidelobe level of -13.32 dB and HPBW of  $15^\circ$ .

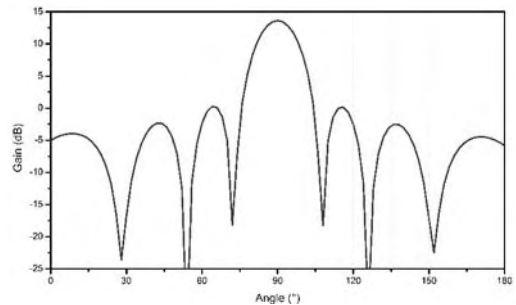


Fig. 3. E-plane radiation pattern of antenna array with equally spaced elements

It can be noticed that more sidelobes are generated as the length of the antenna array is increased. Since our objective was to design an array with greater inter-element spacing in order to have more freedom to manipulate with them in the experiments, at the same time, we had to avoid grating lobes in the radiation pattern (Fig. 3). The increased length of the array would also affect the half-power beamwidth. For these reasons, the separation distance of  $0.62\lambda$  is chosen.

### SIMULATION RESULTS

Although sidelobes in the radiation pattern of an antenna array can be controlled to some extent by employing window functions, trade-off with half-power beamwidth must be satisfied. Having in mind that rectangular window function gives uniform weighting to the array, it provides minimum HPBW at the expense of a relatively high SLL. In this work, we made an investigation on how much the SLL and the HPBW can be improved if we keep unit excitations while changing the positions of array elements. In the experiments being performed, each element in the antenna array could take an arbitrary position in the range of 25 mm ( $0.2\lambda$ ). For a certain number of training samples that adequately cover the position range of antenna elements, EM simulations are done and radiation patterns are analyzed.

First, MLP-ANN models are developed to find an antenna array configuration with optimal SLL value. Input set contained coordinates of antenna array elements while the appropriate output

set was consisted of SLL for each position. After intensive experimentation, it is found that the MLP-ANN with 8 and 7 neurons in the first and the second hidden layer, respectively, provides the most accurate results. The Pearson Product Moment correlation coefficient in this case has value of 99.87 % (Table 1, Fig. 4). Further, the ANN model MLP1-8-7 has been used in the simulation process. The objective was to find the positions of radiating patches in the linear antenna array that provide the optimal radiation pattern regarding SLL. In the simulation process, each antenna element could take an arbitrary position in the range of 25 mm. Coordinate changes are taken to be 0.1 mm. An iterative process is performed and ANN responses of all combinations are calculated to determine inter-element spacing. The elements of new antenna array have offsets of 12.5 mm, 7.2 mm, -7.2 mm and -12.5 mm, when compared to the positions in the original array. It is interesting to notice that the new antenna array is symmetric relative to its central point. In this case, the SLL value is reduced to -14.76 dB (Fig. 5), while the HPBW did not change significantly. At the same time, zeros in the radiation pattern are not deep, as they used to be in the previous configuration.

**Table 1.** The worst case error, the average case error and the correlation coefficient of different MLP-NN models (SLL)

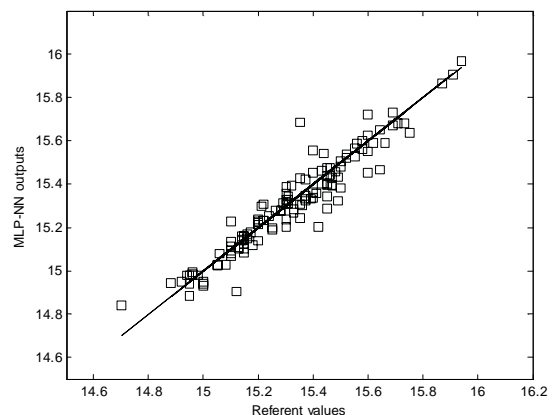
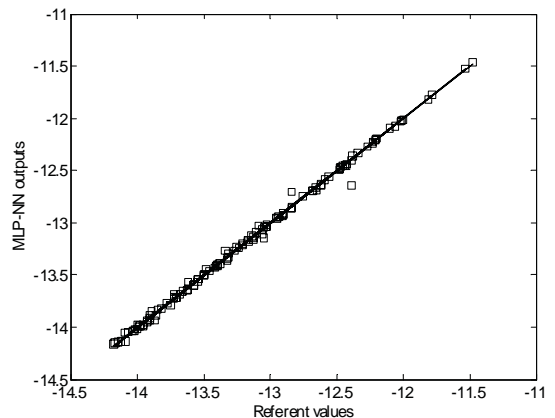
Neural network model	WCE (%)	ACE (%)	r
MLP-ANN1-8-7	9.3678	0.6720	0.9987
MLP-ANN1-8-6	13.5862	0.4733	0.9986
MLP-ANN1-10-5	13.7446	0.4889	0.9986
MLP-ANN1-8-8	12.7093	0.5032	0.9986
MLP-ANN1-12-12	6.1478	0.8426	0.9986

Second, a number of MLP-ANN models are trained to determine positions of antenna elements that provide optimum HPBW in the radiation pattern. As in the previous procedure, input set contained coordinates of antenna elements in the array while the appropriate output set was consisted of HPBW values for each position. It is found that MLP-ANN with 10 and 4 neurons in the first and the second hidden layer, respectively, provides acceptable results. The obtained Pearson Product Moment correlation coefficient is 95.26 % (Table 2, Fig. 4). In the next step, the ANN model MLP1-10-4 has been used in an iterative process to find positions of radiating patches in the array

that provide optimal radiation pattern regarding HPBW. Each antenna element could take an arbitrary position in the range of 25 mm with the coordinate change step of 0.1 mm. Finally, inter-element spacing is determined. The positions of new antenna array elements differ by 9.5 mm, -1 mm, -8 mm and -2.5 mm, compared to the original one. The antenna array became more directive since the HPBW decreased to 14.47°. From the other side, the SLL is deteriorated and increased to -11.33 dB (Fig. 6).

**Table 2.** The worst case error, the average case error and the correlation coefficient of different MLP-NN models (HPBW)

Neural network model	WCE (%)	ACE (%)	r
MLP-ANN2-10-4	26.9486	4.0264	0.9526
MLP-ANN2-12-10	29.5216	4.7142	0.9354
MLP-ANN2-14-11	29.5216	4.8500	0.9352
MLP-ANN2-15-11	30.0539	5.0439	0.9331
MLP-ANN2-9-5	22.5551	5.2715	0.9285



**Fig. 4.** Correlation diagrams of test data of MLP-ANN1-8-7 (SLL optimization) and MLP-ANN2-10-4 (HPBW optimization), respectively



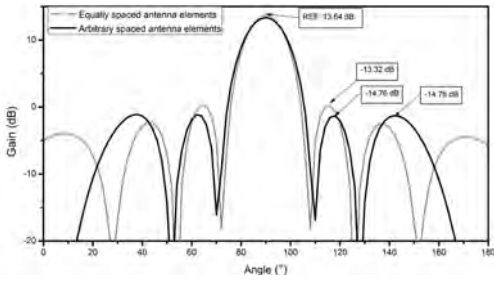


Fig. 5. E-plane radiation pattern of optimized antenna array (SLL)

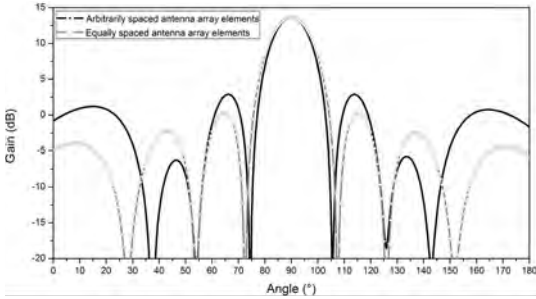


Fig. 6. E-plane radiation pattern of optimized antenna array (HPBW)

## CONCLUSION

In this paper, investigations on a linear antenna array with arbitrary distributed antenna elements are reported. Artificial neural network (ANN) models were developed to synthesize a four-element antenna array with desired values of SLL and HPBW in the radiation pattern, respectively. The MLP-ANNs of the highest accuracy are then used to find the positions of antenna elements in the array that provide optimum SLL and HPBW. Finally, outputs obtained from ANN modeling were compared to the simulation results and good agreement has been achieved.

## LITERATURE

- [1] Ayestarán R. G, Las-Heras F, Martínez J. A. Non uniform-antenna array synthesis using neural networks. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. Vol.21. No.8. P. 1001-1011. 2007.
- [2] Merad L, Bendimerad F. T, Meriah S. M, Djennas S. A. Neural networks for synthesis and optimization of antenna arrays. *Radioengineering*, Vol.16. No.1. April 2007.
- [3] Christodoulou C, Georgiopoulos M. *Application of neural networks in electromagnetics*. Artech House. 2001.
- [4] Agatonović M, Stanković Z, Milovanović B, Dončov N. A linear antenna array synthesis using artificial neural networks. *YUINFO*. 6-9 March, Kopaonik. Serbia.
- [5] Q. J. Zhang, K. C. Gupta. *Neural Networks for RF and Microwave Design*. Artech House. 2000.
- [6] Agatonović M, Stanković. Modeling of microwave pyramidal absorber using software WIPL-D. *ETRAN*. 7-10 June. Donji Milanovac. Serbia. 2011.
- [7] Anitha V. R, Narayana Reddy S. Design of an 8X1 square microstrip patch antenna array. *International Journal of Electronic Engineering Research*. Vol.1. No.1. 2009. P. 71-77.

## ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЗОНАЛЬНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ ЮГА СИБИРИ

---

*The structure of the database "BIOM", examples of expert validation of the accumulated information with the use of scatterplots are represented. An algorithm for estimating the representativeness of the sample is developed.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Для лесных экосистем Сибири актуальной задачей является определение или уточнение ключевых характеристик климата (диапазона значений тепло- влагообеспеченности, дефицита увлажнения и т.д.) и тех пороговых значений (состояний), при которых растительность переходит из одного зонального класса или биома в другой, например, лес в степь, либо одна доминирующая лесная формация - в другую. В Институте леса СО РАН накоплен опыт биоклиматического моделирования секторно-зональных категорий растительного покрова Сибири с использованием многолетних данных гидрометслужбы (Поликарпов и др., 1986; Чебакова, 2008; Назимова и др., 2006; Андреева и др., 2001; Nazimova et al., 2010).

Начало создания базы данных «БИОМ» относится к середине 1990-х гг. Накопленная информация позволяет выявить современные связи между растительностью и климатом на широком географическом фоне, определить статистическую достоверность полученных результатов. Основная задача авторов - оценить репрезентативность климатических параметров таксонов растительного покрова разного уровня.

### СТРУКТУРА БАЗЫ ДАННЫХ «БИОМ»

Объектом предметной области служит территориальная единица (тест-полигон) с однородной зональной растительностью, ее реперными точками служат посты ГМС и метеостанции. Показатели каждой реперной точки, фиксированные в многолетних наблюдениях, отражают усредненные характеристики климата по данным метеостанции и соответствующего ей лесного теста-полигона, охарактеризованного признаками состава и структуры лесного массива.

База данных «БИОМ» реализована в среде электронных таблиц MS Excel. Корректность ввода информации обеспечивают справочники, они содержат параметры зональных классов, серии типов леса, доминирующие лесные формации и индексы почв.

Строка ссылочной таблицы соответствует одной реперной точке. В строку включены показатели климата, сектор, зона, доминирующие лесные формации, серии типов леса и индексы почв, характеризующие точку и ее тест-полигон [1], всего более 50 характеристик реперной точки:

- географические координаты, название метеостанции;
- таксоны зональной классификации и названия лесорастительных регионов: зона, сектор континентальности, провинция, округ;
- параметры влагообеспеченности: среднегодовые суммы осадков в мм/год, показатель потенциальной эвапотранспирации (относительное увлажнение), среднее количество осадков по месяцам, коэффициент увлажнения по Мезенцеву, радиационный индекс сухости по Будыко;
- параметры теплообеспеченности: среднегодовая температура - разница между средними

---

1 ФГАОУ ВПО СФУ Институт математики, Россия

2 ФГБУ Институт леса СО РАН, Красноярск, Россия

температурами января и июля, средняя температура по месяцам, сумма средних месячных температур, сумма температур выше 10 градусов Цельсия (активного периода вегетации), сумма температур выше 5 градусов Цельсия;

- параметры континентальности: средняя годовая амплитуда температур, индекс континентальности Конрада;
- серии типов леса, показатели продуктивности, структуры почвенного покрова и др.;
- четыре доминирующих вида лесообразователей, перечисленные в порядке убывания степени доминирования.

Ввод информации в таблицу организован с помощью функции MS Excel «Ввод данных с проверкой», она обеспечивает проверку данных по справочникам базы данных «БИОМ». В базу данных входят справочники лесообразователей, секторов и лесорастительных зон, провинций и округов.

Справочник лесообразователей (видов древесных пород) базы данных «БИОМ» включает 17 позиций: нет лесообразователей, лиственница сибирская (*Larix sibirica Ledeb.*), лиственница Гмелина (*Larix gmelinii-Rupr.*), лиственница Каяндера (*Larix cajanderi Mayr*), лиственница Чекановского (*Larix czekanowskii Szaf.*), сосна обыкновенная (*Pinus sylvestris L.*), береза повислая (*Betula pendula Roth*), береза (*Betula spp*), ерники (*Betula spp, Salix spp*), кедр сибирский (*Pinus sibirica Du Tour*), кедровый стланик (*Pinus pumila -Pal. Rgl.*), пихта сибирская (*Abies sibirica Ledeb.*), ель сибирская (*Picea obovata Ledeb.*), осина (*Populus tremula L.*), сосна интразональная (*Pinus sylvestris L.*), степи зональные, степи экстразональные.

В справочник секторов вошли наименования: Западная Сибирь, Средняя Сибирь, Восточная Сибирь, Южная Сибирь. Последняя объединяет 4 климатических фации.

Справочник лесорастительных зон включает семь позиций: тундра, редколесье, тайга, подтайга, лесостепь, степь, черневые леса.

К настоящему времени база данных включает характеристики 620 реперных точек и тест-полигонов возле них.

При построении статистических моделей каждая характеристика реперной точки интерпретируется как случайная величина. Случайные величины «Название метеостанции», «Сектор», «Зона», «Провинция», «Округ» измеряются в номинальной шкале. Они используются только для качественной классификации, т.е. анализируется их принадлежность к некоторым, существенно различным классам.

Формационная структура лесного покрова в каждой реперной точке моделируется четверкой главных доминирующих лесообразователей (N1, N2, N3, N4), каждый из которых измеряется в номинальной шкале. Порядок следования породы в четверке лесообразователей соответствует степени ее доминирования по убыванию. В статистических исследованиях эта четверка лесообразователей трактуется как новый обобщенный признак, он характеризует качественный состав структуры доминирующих лесообразователей лесного массива, служащего объектом учета.

Остальные числовые атрибуты базы данных «БИОМ» (географические координаты, индекс континентальности, параметры влагообеспеченности, параметры теплообеспеченности - всего более 30) измеряются по относительной шкале.

## ДИАГРАММЫ РАССЕЯНИЯ РЕПЕРНЫХ ТОЧЕК В КЛИМАТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Диаграммы рассеяния реперных точек в климатических координатах интерпретируются как графические портреты зональных, секторных подразделений растительного покрова, а также ареалов формаций и субформаций. Они служат основой для первичной оценки степени однородности и степени перекрытия классов, выбраковки данных. Дальнейшая классификация проводится для конкретных точек и позволяет уточнить принятую классификацию на более детальном уровне с учетом особенностей местообитания: структуры почвенного покрова, мезоклимата и др.

На диаграмме рассеяния реперных точек Сибири в климатических координатах «Теплообеспеченность,  $C^{\circ}$ » и «Индекс континентальности Конрада» (рис. 1) представлены климаареалы лесных формаций: кедра, лиственницы, сосны, и пихты. Учтены зональные хвойные формации: кедровники (леса с участием кедра от 3 до 10 единиц в составе по запасу), пихтарники и смешанные темнохвойные леса из ели, пихты и кедра (сосны сибирской), лиственничники с доминированием всех лиственниц (сибирской, Гмелина, Каяндера), сосняки.

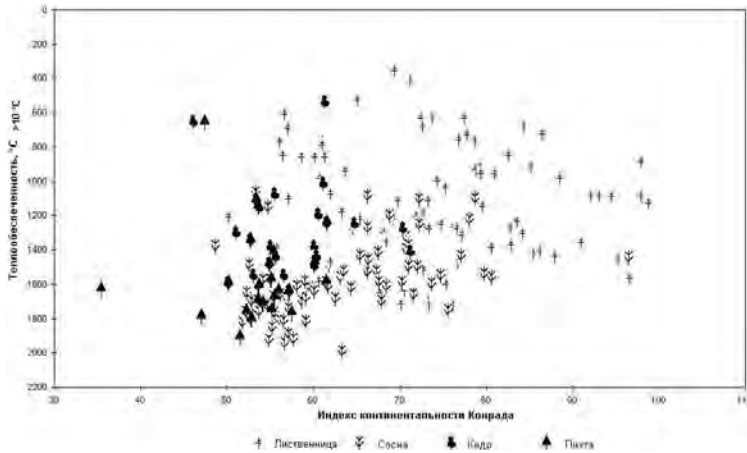


Рис. 1. Климаареалы лесных хвойных формаций в климатических осях

Область местообитаний сосны в климатическом пространстве Сибири сдвинута в сторону максимальных значений теплообеспеченности, имеет широкий размах значений по индексу континентальности. Темнохвойные формации (с кедром, пихтой, елью), приуроченные к области менее континентального климата (до 60-65), конкурируют в центральной части своего общего климаареала, при этом ареал пихты сдвинут в более теплую и наименее континентальную часть климатического пространства. Кедр более устойчив при низкой теплообеспеченности. Наиболее широкий интервал доминирования имеет лиственница, она демонстрирует высокую толерантность в этих климатических координатах и не имеет конкурентов при значениях индекса континентальности выше 70 (на севере) и 80 (на юге).

Визуальный анализ диаграммы рассеяния согласуется с экспертной оценкой [2]. Реперные точки кедровых станций со значением индекса континентальности более 70 (рис. 1) заставили эксперта провести более тщательный анализ всего набора их характеристик. Выяснилось, что эти метеостанции расположены в горных районах Восточной Сибири, где разница мезоклиматов в долинах и на склонах гор, покрытых кедровниками, по индексу континентальности достигает максимума: по расчетам климатологов, порядка 15 единиц. «Подозрительные» данные тем не менее остаются в выборке, точки не выбраковываются, чтобы вернуться к учету мезоклиматов при более детальном анализе.

По такой же схеме были проанализированы данные в климатических осях теплообеспеченность - осадки, осадки - индекс континентальности. Добавлены недостающие станции [3].

Диаграмма рассеяния точек станций Сибири в осях тепло- и влагообеспеченности: «Сумма активных температур,  $C^{\circ}$ » и «Сумма осадков за год, мм» (рис. 2) иллюстрирует степень однородности и степень перекрытия секторно-зональных классов растительности. Четко выделяются области господства массивов темнохвойных горно-таежных лесов и черневых осиново-пихтовых и кедрово-пихтовых лесов, горных и котловинных лесостепей и степей. Менее четко разграничены лесостепные и подтаежные высотно-пооясные комплексы, или ВПК. Их целесообразно объединить в один «подтаежно-лесостепной» класс, что сделано в биоклиматической классификации лесных экосистем гор Южной Сибири. Все эти классы переходят последовательно один в другой по мере

снижения теплообеспеченности и сокращения сроков вегетации (по оси теплообеспеченности), а также замещаются другими вариантами при изменении увлажнения (гумидности климата).

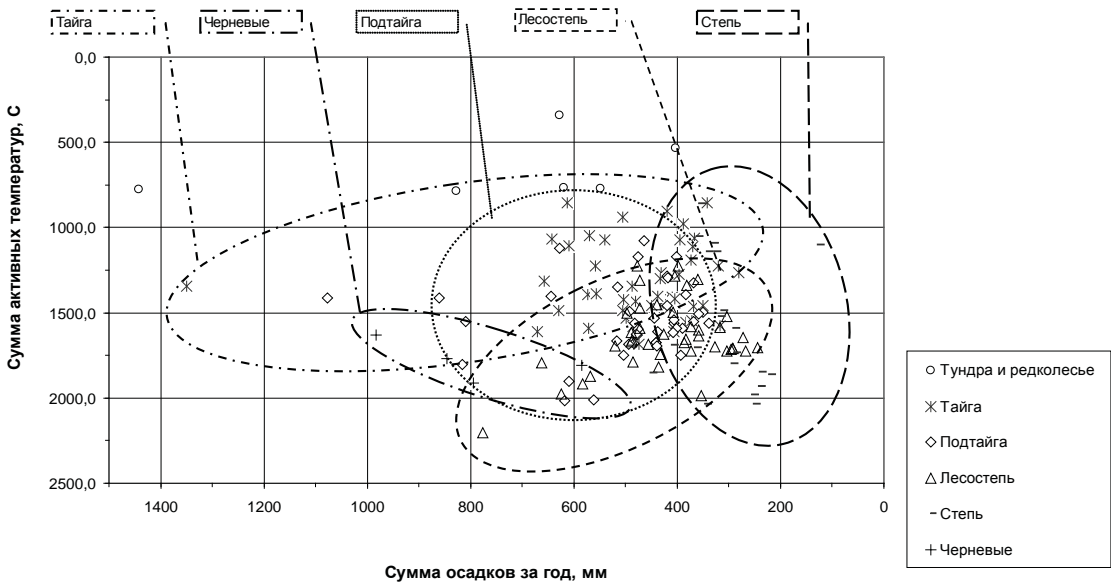


Рис. 2. . Климатические ареалы зональных классов Сибири в климатических осях

В целом, полученная схема не противоречит результатам, приведенным ранее на основании специальных расчетов показателей климата в горном рельефе [4, 5]. Некоторые точки требуют пояснения в рамках ограничений, возникающих при решении задач биоклиматического моделирования. Так, ареал горно-таежных лиственничников с осадками менее 400 мм в год накладывается на ареал лесостепи и даже степи - там, где при очень близких показателях атмосферного увлажнения есть мерзлота и мерзлотные почвы. Это - районы южного Забайкалья, отмеченные высокой контрастностью гидротермического режима, свойственной резко-континентальному климату. Здесь требуются дополнительные данные о почвенных температурах и влажности, приобретающих роль лимитирующего фактора.

### ОЦЕНКА РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТИ НАКОПЛЕННЫХ ДАННЫХ

Из базы данных «БИОМ» выбираются значения климатического параметра для одного из изучаемых объектов: зонального, секторного подразделения растительного покрова или лесной формации. Этот набор значений климатических параметров интерпретируется как реализации независимых одинаково распределенных случайных величин, измеренных по относительной шкале, т.е. некоторая выборка из генеральной совокупности значений этого климатического параметра для выбранного объекта. Так как реперные точки базы данных приурочены к постам ГМС и метеостанциям, выборка носит стихийный (естественный) характер. Необходимо оценить ее репрезентативность, способность представлять структуру генеральной совокупности в целом и ее характеристики, значимые с точки зрения задач исследования.

Для проверки гипотезы о нормальном распределении выборки и оценки репрезентативности выборки разработан расчетный сценарий MS Excel.

Сначала рассчитываются параметры описательной статистики для выбранного ряда данных, затем определяется значение коэффициента вариации (показателя относительной изменчивости значений):

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad \sigma - \text{среднеквадратическое отклонение, } \bar{x} - \text{среднее арифметическое.}$$

Более точная проверка гипотезы о соответствии распределения нормальному закону проводит-

ся с помощью критерия  $\chi^2$  Пирсона. Диапазон значений параметра разбивается на интервалы (число интервалов равно  $k$ ), ширина интервала рассчитывается по формуле Стёрджеса, для каждого интервала определяется наблюдаемая ( $f_i$ ) и теоретическая ( $\hat{f}_i$ ) частота распределения. Значение критерия Пирсона рассчитывается по формуле:

$$\chi^2_{\text{факт}} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(f_i - \hat{f}_i)^2}{\hat{f}_i}$$

Полученное значение  $\chi^2_{\text{факт}}$  сравнивается с табличным значением критерия при уровне значимости  $\alpha$  (обычно  $\alpha = 0,05$  или  $\alpha = 0,01$ ) с числом степеней свободы, равном числу интервалов за минусом трех (по числу фиксированных параметров в формуле нормального распределения и с учетом равенства сумм теоретических и фактических частот). Если  $\chi^2_{\text{факт}} \geq \chi^2_{\text{табл}}$ , то нулевая гипотеза (о нормальности закона распределения) должна быть отвергнута при принятом уровне значимости с вычисленным числом степеней свободы. Если гипотеза о нормальном распределении с заданным уровнем значимости не отвергнута, то методом максимального правдоподобия по данным выборки рассчитываются оценки среднеквадратического отклонения и среднего арифметического генеральной совокупности.

Абсолютная величина предельной оценки ошибки выборки ( $\Delta$ ), доверительный уровень ( $t$ ) и объем выборки ( $n$ ), обеспечивающей требуемую точность, связаны соотношением:  $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta^2}$ .

Значение доверительного уровня ( $t$ ) определяет вероятность того, что среднее по генеральной совокупности не будет отличаться от среднего по выборке больше чем на  $\Delta$ . С другой стороны, предельная ошибка выборки ( $\Delta$ ) определяет точность, гарантируемую с заданным уровнем значимости ( $\alpha$ ). Таким образом, предельная ошибка выборки позволяет одновременно и взаимосвязанно указать точность и надежность результатов выборочного исследования [6].

**Таблица 1.** Интервальные оценки средних значений климатических параметров кедра (используется коэффициент доверия из таблиц интеграла Лапласа)

	Доверительный уровень	Коэффициент доверия	Стандартная ошибка среднего по выборке	Среднее по выборке	Предельная ошибка выборки	Нижняя граница доверительного интервала	Верхняя граница доверительного интервала	Величина доверительного интервала
<b>R год. - количество осадков в течение года</b>								
	90%	1,64	7,84	580	13	568	593	26
	95%	1,96	7,84	580	15	565	596	31
	99%	2,57	7,84	580	20	560	601	40
<b>GDD10 - годовая сумма температур выше 10 градусов Цельсия</b>								
	90%	1,64	31	1467	50	1417	1517	101
	95%	1,96	31	1467	60	1407	1527	121
	99%	2,57	31	1467	79	1388	1546	158
<b>ППЭ - коэффициент потенциальной эвапотранспирации</b>								
	90%	1,64	0,09	0,50	0,15	0,35	0,65	0,30
	95%	1,96	0,09	0,50	0,18	0,32	0,68	0,36
	99%	2,57	0,09	0,50	0,24	0,26	0,74	0,48

Пример: оценка репрезентативности накопленных в базе данных климатических параметров кедра: теплообеспеченность (GDD10), годовая сумма осадков в течение года (Rгод.), коэффициент потенциальной эвапотранспирации (ППЭ). Каждый изучаемый ряд значений (GDD10, Rгод., ППЭ) - реализация независимых одинаково распределенных случайных величин. Функция распределения произвольна.

С помощью расчетных сценариев и электронных таблиц MS Excel определены (табл.1) точечная и интервальная оценки среднего, предельные ошибки выборки по каждому ряду климатических параметров кедра. Более широкому доверительному интервалу соответствует более высокий доверительный уровень.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Создана информационная база «БИОМ», которая включает показатели климата тест-полигонов, их зональную классификацию, серии типов леса, доминирующие лесные формации и индексы почв. Каждая реперная точка отражает особенности метеостанции и, вместе с тем, характеризует показатели климата соответствующего ей лесорастительного пояса (зоны). Климаареалы таксонов классификации перекрываются в большей или меньшей степени, отражая реальный континуум климатического пространства. Тем не менее выявляется их обособленность в многомерном пространстве признаков, что позволяет строить биоклиматические модели разного тематического содержания.

Проведена экспертная проверка корректности накопленной информации.

Для оценки репрезентативности климатических параметров зональных, секторных подразделений растительного покрова, а также ареалов формаций и других таксонов растительного покрова построены расчетные сценарии электронных таблиц.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН «Биологическое разнообразие», проект СО РАН № 27.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Андреева Н.М., Назимова Д.И., Поликарпов Н.П., Степанов Н.В. Информационная биоклиматическая модель состава лесного покрова, Математические модели и методы их исследования, Материалы междунар. Конф. Красноярск, 16-21 авг. 2001 г. ИВМ СО РАН, 2001. - С. 27-31.
- [2] Nazimova D.I., Tsaregorodtsev V.G., Andreeva N.M. Forest vegetation zones of southern Siberia and current climate change, *Geography and natural resources*. 31 (2010) 124-131.
- [3] Назимова Д.И., Андреева Н.М., Кофман Г.Б., Ноженкова Л.Ф., Поликарпов Н.П., Степанов Н.В. Портретные модели структурного биоразнообразия лесного покрова, Биоразнообразие и динамика экосистем: Информационные технологии и моделирование. Новосибирск: Наука, СО. 2006. - С. 75-83, 157-162, 517-536.
- [4] Чебакова Н.М. Возможная трансформация растительного покрова Сибири при различных сценариях изменения климата. Красноярск: Автореф. дис.... докт. биол. наук: 03.00.16. Ин-т леса СО РАН, 2006. - 60с.
- [5] Поликарпов Н.П., Чебакова Н.М., Назимова Д.И. Климат и горные леса Южной Сибири. Новосибирск: Наука, 1986. - 225 с.
- [6] Орлов А.И. Прикладная статистика: учебник, А.И.Орлов - М:Издательство «Экзамен», 2006. - 671 с.

Антонов И. А.<sup>1</sup>, Бычков И. В.<sup>2</sup>, Владимиров И. Н.<sup>3</sup>, Гаченко А. С.<sup>2</sup>, Ружников Г. М.<sup>2</sup>, Сороковой А. А.<sup>3</sup>, Фёдоров Р. К.<sup>2</sup>, Хмельнов А. Е.<sup>2</sup>, Шигаров А. О.<sup>2</sup>

## ИНТЕГРАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ БИОРАЗНООБРАЗИЯ БАЙКАЛЬСКОГО РЕГИОНА В РАМКАХ ГЕОПОРТАЛА

*In the paper an approach to integration of information resources for Baikal region biodiversity is presented. The approach is based on a geoportal providing an attractive set of services. The proposed geoportal uses as well-known third-party technologies and original technologies being developed by the authors. A number of information resources based on the geoportal have been developed in the ISC SB RAS.*

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в институтах Иркутского научного центра (ИНЦ) СО РАН ведутся научные исследования, базирующиеся на уникальных проблемно- и предметно-ориентированных базах пространственных данных [1,2,3]. В большинстве случаев сами данные и технологии их анализа являются закрытыми для совместного использования. Для включения больших объёмов научных пространственных данных и оригинальных алгоритмов, накопленных учреждениями СО РАН в процесс проведения междисциплинарных научных исследований геосистем и биоразнообразия Прибайкалья и Забайкалья актуально создание информационно-телекоммуникационной инфраструктуры, включающей территориально-распределенную систему сбора, обработки, хранения и предоставления базовых пространственных и тематических данных и метаданных, предоставляющей пользователям удаленный доступ к БПД, метаданным и сервисам.

Обработка геоданных изначально считалась прерогативой настольных программных систем. Это происходило из-за большого объема обрабатываемых данных, низкой скорости передачи данных через Интернет, недостаточным развитием средств пользовательского интерфейса Интернет приложений. На сегодняшний день сети передачи данных, интернет технологии активно развиваются, повсеместно улучшая возможности Интернет приложений. Существует тенденция перехода от локальных

вычислений к распределенным. В частности, активно развиваются облачные вычисления [5] (технологии обработки данных, в которых компьютерные ресурсы и мощности предоставляются пользователю как Интернет-сервис). Перенос обработки и хранения данных на удаленные серверы имеет ряд преимуществ: для работы пользователю часто достаточно иметь только браузер, пользователь не привязан к рабочему месту, значительно проще обновление и обслуживание систем. Примером таких сервисов является система хранения и редактирования документов Google (<http://docs.google.com>).

В этом направлении развиваются географические информационные системы (ГИС), например FreeGIS Database (<http://freegis.org>), Quantum GIS Project (<http://www.qgis.org/>), Advanced Geographical Information System for the Web (<http://www.cartoweb.org/>), а также геопорталы, являющиеся важным элементом инфраструктуры пространственных данных (ИПД) [5,6,7]. Необходимо заметить, что в ИПД геопорталы реализуют в основном функции, связанные с публикацией данных в Интернет, т.е. загрузку и визуализацию данных, формирование метаинформации и т.д. Применение алгоритмов геообработки (для выполнения задач анализа) в технологиях облачных вычислений развито достаточно слабо. Хотя существуют программы, реализующие функции геообработки, в открытом доступе.

Применение технологий облачных вычисле-

1 Сибирский институт физиологии и биохимии растений СО РАН, Иркутск, Россия

2 Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

3 Институт географии СО РАН, Иркутск, Россия



ний для проведения научных исследований является перспективным направлением развития геоинформатики и обладает рядом преимуществ:

- Обеспечение надежного хранения данных, что способствует накоплению научных данных.
- Открытый доступ к алгоритмам, моделям и методам геообработки данных, возможность постоянного расширения банка алгоритмов.
- Отсутствие необходимости установки у пользователя сложного (уникального) программного обеспечения и его обслуживания. Для работы достаточно наличие браузера и сети Интернет.
- Использование вычислений в распределенной среде (многопроцессорные системы) для ресурсоемких приложений геообработки.

Перечисленное выше подчёркивает актуальность использования технологии облачных вычислений при создании ГИС и ИПД и её элементов.

## ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОПОРТАЛА

Рассмотрим основные принципы (требования) построения геопортала, соответствующего технологиям облачных вычислений.

- Удобство работы. Геоportal должен обеспечивать: использование набора сервисов геообработки и пространственных данных, распределенных на различных серверах (Рис 1.); для пользователя использование сервисов, расположенных на удаленных серверах, не должно отличаться от работы с локальными сервисами; поддержку большинства распространенных форматов пространственных данных и проекции; предоставление удобного, интуитивно понятного пользовательского интерфейса; возможность быстрой публикации в Интернет как данных, так и метаданных.
- Надежность. Обеспечение надежного хранения данных на сервере и предоставление функций работы с файловой системой сервера. Обеспечение регламентирован-

ного доступа к пользовательским сервисам геообработки и пространственным данным. Самостоятельное определение поставщиком регламента доступа к его сервисам и данным.

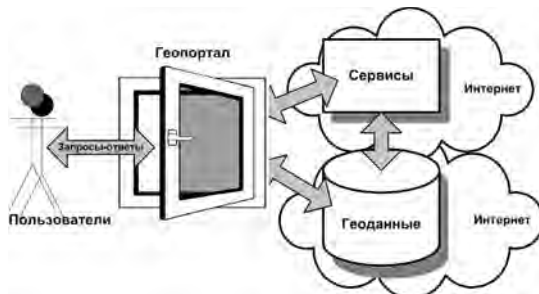


Рис. 1. Геоportal как единая точка доступа к сервисам геообработки и пространственным данным

- Расширяемость. Использование открытой архитектуры, которая позволяет расширять функциональность геопортала путем добавления новых сервисов, находящихся локально на сервере геопортала, так и удаленно на других серверах. Поддержка стандартов в области геоинформатики для учёта новых программных систем, реализующих функции анализа и обработки, что увеличивает интероперабельность программных систем.

## СТАНДАРТЫ И ЭТАЛОННАЯ АРХИТЕКТУРА ГЕОПОРТАЛА

С целью содействия в реализации геопорталов, основанных на стандартах и совместимых с ИПД, организацией OGC (Open Geospatial Consortium) опубликован проект стандарта [8], в котором дано описание эталонной архитектуры геопортала (Geospatial Portal Reference Architecture, GPRA). В документе [8] GPRA рассматривается, как основная архитектурная платформа геопорталов, которые предоставляют Интернет-доступ к геопространственным данным (ПД) и сервисам геообработки (СГ). Такие геопорталы могут строиться из различных совместимых продуктов, которые используют интерфейсы, протоколы и схемы, реализующие OGC OpenGIS стандарты.

Предлагаемая в проекте [8] архитектура основана на SOA (Service Oriented Architecture) и включает 5 следующих класса сервисов.

1. Сервисы портала (Portal Services) организуют на портале единую точку доступа к ПД и СГ, обеспечивают управление и администрирование порталом. К таким сервисам относятся клиенты визуализации ПД, публикации и поиска ПД и СГ, указателя географических названий, извлечения и управления ПД, управления стилями, аутентификации и управления доступом к ПД и СГ.
2. Сервисы визуализации (Portrayal Services) обеспечивают визуализацию ПД. Например, к таким сервисам относятся серверы визуализации карт с поддержкой стандартов OGC Web Map Server (WMS) [9] и OGC Styled Layer Descriptors (SLD) [10], а также серверы визуализации покрытий (растров) с поддержкой обсуждаемого стандарта OGC Web Coverage Service (WCS) [11].
3. Сервисы каталогов (Catalogue Services) обеспечивают публикацию, поиск и просмотр метаданных о ГД и СГ. Например, одним из таких сервисов является каталог метаданных GeoNetwork [12].
4. Сервисы доступа к данным (Data Services) предоставляют геопространственной наполнение и обработку данных, обеспечивают доступ к различным хранилищам геопространственной информации (репозиториям и базам данных). В частности, такие сервисы обеспечивают запросы и получение пространственных объектов и атрибутов клиентской частью приложения с использованием OGC Geography Markup Language (GML) [13] на основе стандарта OGC Web Feature Service (WFS) [14].
5. Сервисы геообработки пространственных данных обеспечивают обработку пространственных данных, в частности выполнение таких операций как создание буферных зон, оверлейные операции и т.д. на основе стандарта OGC Web Processing Service (WPS) [15].

## АРХИТЕКТУРА ГЕОПОРТАЛА ИНЦ СО РАН

Основываясь на приведенных принципах построения геопортала и существующих стандартах, разработана следующая архитектура (рис 2).

Архитектура разрабатываемой системы яв-

ляется клиент-серверной. Основным компонентом на стороне пользователя является Web-клиент, работающий на основе браузера. Предполагается, что с помощью его можно выполнить большинство функций геопортала. Кроме Web-клиента, возможно использование различных ГИС и прочих программ, поддерживающих стандарты OGC. На серверной стороне находится расширяемый комплекс различных компонентов. Рассмотрим более подробно основные серверные компоненты системы.



Рис. 2. Архитектура геопортала

Система управления сервисами и геоданными (СУСГ) осуществляет общее управление над геопорталом. Предоставляет следующие функции: файловый менеджер, управление доступом к данным и сервисам, публикацию и отображение пространственных данных, запуск методов геообработки данных. СУСГ разработан на основе свободно-распространяемой системы управления содержимым Drupal.

Система хранения данных (СХД) - программно-аппаратное обеспечение надежного хранения данных на основе SAN ReadyStorage 3994 с общей стартовой дисковой емкостью 62 Тбайт, которое гарантирует надежное хранение пользовательских данных, бесперебойную работу и достаточно высокую скорость чтения/записи данных. Доступ к СХД производится с помощью файлового менеджера.

Система управления базами данных PostgreSQL (с расширением для обработки пространственных данных PostGIS) предназначена для хранения пользовательских наборов данных и служебной информации геопортала. Расширение PostGIS позволяет хранить пространственные данные и реализует поддержку стандартов

OGC. Управление над базами данных (БД) осуществляется с помощью СУСГ: создание пользователей БД на основе регистрации в портале, создание схем данных, предоставление соответствующих прав доступа, конвертацию данных и т.д.

SMDServer - предназначен для визуализации карт в сети Интернет. Обеспечивает высокую скорость отображения графической и атрибутивной информации.

Сервисы предоставляют обработку пространственных данных, т.е. это программные единицы, выполняющие различные функции и предоставляющие некоторый интерфейс. Архитектура разработана таким образом, чтобы обеспечить возможность расширения функциональности путем добавления новых сервисов. Большинство функций геопортала реализовано в виде сервисов, например конвертация данных из одного формата в другой.

Рассмотрим более подробно основные функции геопортала, реализованные компонентами архитектуры.

## УПРАВЛЕНИЕ ДАННЫМИ

Хранение данных пользователей осуществляется на основе СХД SAN ReadyStorage 3994 в виде файловой системы. Каждому пользователю предоставляется директория в рамках СХД. Создание директории и выделение соответствующих прав выполняет СУСГ. Управление файловой системой в рамках выделенной директории пользователь производит с помощью файлового менеджера (Рис. 3.).

### Файловый менеджер

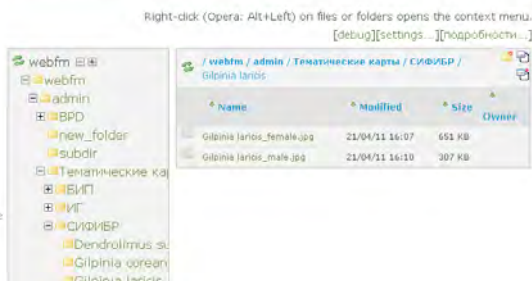


Рис. 3. Файловый менеджер

Файловый менеджер является частью СУСД и позволяет производить все основные опера-

ции с файловой системой через Web-клиента, а также загрузку и выгрузку данных с компьютера пользователя. Для удобства данные можно загружать и выгружать в архивированном виде. Имеются специализированные сервисы, позволяющие архивировать/разархивировать данные в СХД.

## ПУБЛИКАЦИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ

Для визуализации пространственных данных разработан оригинальный сервис, называемый SMDServer, который, в том числе, реализует WMS стандарт. Поэтому для работы с SMDServer может использоваться любой клиент визуализации пространственных данных с поддержкой WMS, например, широко распространенный web-клиент OpenLayers или настольная ГИС MapInfo.

SMDServer базируется на следующих принципах:

- данные не требуется редактировать, поэтому они рассматриваются как неизменяемые;
- программа просмотра должна отображать весь объём данных, как единое целое;
- время отображения любого фрагмента карты должно быть максимально сокращено;
- основная задача - поиск информации на карте;
- при необходимости более сложной обработки выбранный фрагмент может быть экспортирован.

В SMDServer используется оригинальный формат представления векторных данных, названный SMD (Static Map Data). Это формат позволяет эффективно (по времени отображения на экран) визуализировать пространственные данные, включая сверхбольшие массивы таких данных. Также SMD позволяет хранить и обрабатывать семантическую информацию, как для реляционного, так и для тегового представления. Основными операциями, производимыми над данными в формате SMD, являются просмотр и выборка карт. При этом предполагается, что пространственные данные подготавливаются в других ГИС с использованием их аналитических возможностей. Для преобразо-

вания таких данных в формат SMD разработан ряд конверторов из следующих форматов: SXF/RSC (ГИС Панорама), APR/Shape (ГИС ArcView), WOR/TAB (ГИС MapInfo), ГИС KAMAT. При этом SMD поддерживает импорт не только метрической и семантической информации, но и способ визуализации.

Для сокращения в SMDServer времени визуализации пространственных данных используется: пространственная индексация (ускоряет отображение фрагментов карты); а также сортировка списков объектов по предельным масштабам (ускоряет отображение всей карты). При сортировке по предельным масштабам каждый пространственный объект характеризуется диапазоном масштабов, в котором он отображается. Списки объектов упорядочиваются по убыванию знаменателя Mmin (от крупных объектов к мелким). Как только встречается объект, который слишком мал, чтобы отображаться при текущем масштабе ( $Mcur > Mmin[i]$ ), просмотр списка можно прервать, т.к. это условие будет выполняться и для всех последующих объектов. Для минимизации времени загрузки представление в формате SMD включает в себя образ оперативной памяти, содержащий неизменяемые пространственные данные (компиляцию структур данных). Файл SMD содержит образ памяти с данными объектов и информацию о перемещаемых адресах, находящихся в этой памяти. При этом отсутствует информация о разбиении области данных на отдельные объекты. Данный подход аналогичен подходу, используемому в исполняемых файлах, и позволяет многократно ускорить загрузку данных в память.

Часто для представления семантической информации в ГИС каждый слой карты рассматривается, как таблица БД, а объект, связанный с записью, рассматривается в качестве значения специального поля этой таблицы. Также для этого применяется теговый формат представления семантики, при использовании которого в одном слое могут находиться объекты, относящиеся к разным классам, и характеризующиеся различными наборами атрибутов.

Для представления семантической информации в SMD используется статическая БД, которая позволяет хранить неизменяемые табли-

цы, поддерживает возможность эффективного включения в таблицу большого количества необязательных полей, и допускает наличие в одной записи нескольких значений одного необязательного поля. Неизменяемость этих данных используется для оптимизации хранения строковых значений.

За счет этих способов ускорения скорость работы SMDServer на Pentium IV 3GHz при работе с картой Иркутска, которая содержит 820 тыс. объектов (данные занимают 125 Mb) составляет: вся карта отображается за 3с., загрузка этой карты в память выполняется за 10 с.

Название: \*

srId:

Предметная область:

Путь к набору данных:  
/webfm/admin/Тематические\_карты/СИФИБР/Военное\_образование

Информация об источнике, из которого был получен описываемый информационный ресурс:

Коды классификатора UDK/УДК (Universal Decimal Classification, <http://www.udcc.org>, <http://teacode.com/online/udc>) (можно указать несколько кодов):

Авторы, создавшие информационный ресурс:

Рис. 4. Публикация набора данных

При загрузке популярных форматов карт в СХД производится автоматическая конвертация в формат SMD и регистрация в SMDServer. Файловый менеджер при изменении содержимого той или иной директории отправляет сообщение модулю публикации, который при изменении содержащихся картографических файлов в директории производит их конвертацию или удаление соответствующих SMD файлов. Затем производится их регистрация в инициализационном файле SMDServer. Просмотр данных в этом случае доступен только владельцу данных. Для просмотра данных другими пользователями необходима их публикация, т.е. пользователь должен подтвердить на специальной форме, что он желает данные опубликовать (Рис. 4). Публикация производится наборами

данных. Набор данных это директория с семантически связанными картографическими слоями, находящимися в одной проекции на одну территорию. Во время публикации пользователь должен указать, в какой директории находятся данные, и ввести метаданные, описывающие создаваемый ресурс.

### УПРАВЛЕНИЕ МЕТАДАННЫМИ

Стандарты метаданных устанавливают регламент взаимодействия участников информационного обмена и разработчиков в сфере создания геопорталов. С их помощью можно создавать словари и классификаторы, специфичные для междисциплинарных научных исследований. За основу представления и хранения метаданных в рамках геопортала выбран известный стандарт FGDC-STD-001-1998 (Content Standards for Digital Geospatial Metadata) - американский прототип ISO 19115, стандарт содержания на цифровые пространственные метаданные. Механизмы хранения и обработки метаданных реализованы на основе GeoNetwork [6] стандартизированной и децентрализованной среды управления пространственной информацией, разработанной для доступа к базам геоданных, картографическим продуктам и связанным с ними метаданным из различных источников, повышающей эффективность обмена пространственной информацией между институтами и ее совместное использование посредством Интернета. Такой подход обеспечивает увеличение доступности пространственных данных различного масштаба при проведении междисциплинарных исследований.

### СЕРВИСЫ ГЕООБРАБОТКИ

Методы обработки пространственных данных геопортала реализуются в виде сервисов. Разработанная архитектура геопортала позволяет добавлять сервисы, путем их регистрации в каталоге метаданных. После регистрации с помощью Web-клиента пользователь может воспользоваться сервисами, используя свои данные, и получить результаты обработки. Входные данные могут быть в виде файлов, строковых и числовых параметров. Результаты обработки сохраняются в виде файлов в СХД. Сервисы могут быть встроенными (т.е. программными модулями, выполняющими обра-

ботку данных на локальном сервере геопортала) и внешними (выполняются на удаленных серверах и должны поддерживать стандарт WPS). С точки зрения пользователя работа с встроенными и внешними сервисами не отличается. При обращении к определенному сервису модуль управления сервисами генерирует форму для ввода пользователем параметров (Рис. 5). Затем формируется запрос и запускается обработка.

Shape файл, на основе которого создается грид:

Название грида на выходе:

Экстенст карты, для которой создается грид:

Название поля с Z координатой:

Рис. 5. Вызов сервиса создания GRID покрытия на основе SHP файла

Регистрируемый сервис должен реализовывать программные интерфейсы взаимодействия с геопорталом. Для внешних сервисов должен быть реализован интерфейс, определенный стандартом WPS. В качестве встроенных сервисов предполагается использовать существующее программное обеспечение, которое обычно не поддерживает стандарт WPS. Поэтому для организации взаимодействия геопортала с существующим программным обеспечением требуется создание специальных компонентов-посредников (PHP Proxy), необходимых для запуска, сбора и передачи данных.

Разработан ряд сервисов обработки геоданных. В частности разработаны ниже следующие сервисы.

Формирование GRID данных, где в каждой ячейке подсчитывается количество находящихся в ней векторных объектов.

Трансляция GRID данных в текстовый формат и обратно. Существует текстовый формат представления GRID данных, который используется в некоторых библиотеках обработки данных.

Моделирование распространения загрязнений. Данный сервис на основе входных данных об источниках загрязнений, рельефе, направлении ветра и т.д. позволяет сформировать

прогноз концентрации загрязняющих веществ в ячейках GRID.



Рис. 6. Взаимодействие сервисов с геопорталом

Формирование векторной карты расположения объектов круглой формы на растровом изображении. Данный сервис выполняет распознавание объектов на космоснимках высокого разрешения.

Методы обработки библиотеки GDAL. Библиотека GDAL представляет большой набор функций анализа GDAL данных.

Разработан ряд вспомогательных сервисов, в частности, архивирование данных, конвертация данных из формата в формат.

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

На основе предлагаемого геопортала институтами Иркутского и Бурятского научных центров СО РАН реализованы следующие информационные ресурсы.

1. Интерпретационная карта “Природные геосистемы Байкальского региона и их использование”, которая отражает структуру геосистем, условия функционирования, гидротермические параметры, биологическую продуктивность, геоэкологический потенциал, чувствительность к антропогенным нагрузкам и социально-экономические функции (Институт географии СО РАН).
2. Хранилище тематических векторных геоданных для территории дельтовых районов рек Селенга и Верхняя Ангара, которое содержит тематические слои по природным и социально-экономическим условиям состояния территории, геофизические и геохимические характеристики террито-

рии, а также планово-высотные метрические параметры пространственных объектов, и является информационной основой для междисциплинарных научных исследований дельтовых районов озера Байкал (Байкальский институт природопользования (БИП) СО РАН).

3. Цифровые модели рельефа на территорию бассейна озера Байкал и дельты реки Верхняя Ангара, которые являются GRID-покрытиями, созданными на основе изолиний рельефа и отметок высот и глубин векторной топографической основы масштаба 1:1000000, размер стороны пространственной ячейки - 300 м (БИП СО РАН).
4. Карты потенциального стока углерода трех видов хвойных деревьев, созданные на основе анализа стока углерода по годичной фотосинтетической продуктивности хвойных древостоев Иркутской области (Сибирский институт физиологии и биохимии растений (СИФИБР) СО РАН).
5. Информационно-аналитическая база показателей трансформации углерода в разных агроэкосистемах, позволяющая с учетом структуры посевных площадей в отдельных районах дать оценку баланса углерода в агроэкосистемах и эмиссии CO<sub>2</sub> из агроэкосистем за год (СИФИБР СО РАН).
6. База данных по хвоегрызущим насекомым Байкальской Сибири, включающая сведения о 141 виде хвоегрызущих насекомых из 14 семейств. По каждому виду вредителей выделены ландшафты, в которых возникают очаги их массовых размножений в пределах отдельных лесопатологических районов Байкальской Сибири, указывается повреждаемая порода и степень вредности, библиографическая сводка (СИФИБР СО РАН).
7. Тематические пространственные базы данных по древесно-кольцевым хронологиям Прибайкалья с точными географическими координатами и по флоре Байкальского региона (фотоматериалы растений в природе и в гербарии) (СИФИБР СО РАН).
8. База данных по сосудистым растениям (оригинальные материалы, собранные авторами, материалы гербариев NSK (Гер-

барий им. М.Г. Попова, ЦСБС СО РАН, г. Новосибирск) и IRK (Гербарий СИФИБР СО РАН, г. Иркутск); все данные о конкретных местонахождениях видов внесены в базу данных, которая сейчас включает более 14700 записей; подготовлено свыше 10000 цифровых фотографий гербарных листов и около 1000 фотографий растений в природе) (СИФИБР СО РАН).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый геопортал является важной частью ИПД, формируемой в ИНЦ СО РАН. Важной особенностью разрабатываемого геопортала является использование не только известных технологий построения ИПД (например, GeoServer, MapServer, OpenLayers), но также и оригинальных технологий, включая сервисы визуализации и геообработки (например, SMDServer). При этом геопортал ИНЦ СО РАН основан на использовании международных стандартов OpenGIS OGC. Это обеспечивает возможность широкого применения данного геопортала в ИПД.

В настоящее время продолжается развитие геопортала (<http://geos.icc.ru>) в направлении расширения сервисов обработки геоданных. В частности реализуется система ввода и редактирования пространственных данных, а также сервисов обработки GRID данных (рельефа). Создаются сервисы обработки растровых карт, в частности, распознавание и выделение различных пространственных объектов.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-07-00426-а, 11-07-92204-Монг\_а, проекта ОНИТ СО РАН №3 2009-2011, и интеграционного проекта СО РАН № 121 2009-2011.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Плешанов А.С., Бычков И.В., Антонов И.А., Гаченко А.С., Каверзина А.С., Агафонова Т.А. Опыт применения геоинформационных баз данных для анализа энтомофауны Байкальской Сибири, Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2010. - Т. 12, № 15. - С. 1331 - 1334.
- [2] Бешенцев А.Н. Картографический мониторинг природопользования, Геодезия и картография. № 3, 2011, С. 14-18.

- [3] Бычков И. В., Кузнецова Т. И., Батуев А. Р., Плюснин В. М., Ружников Г. М., Хмельнов А. Е. Структурно-типологические характеристики и экологический потенциал геосистем Байкальского региона, География и природ. ресурсы. - 2011.- №4.- С.20-28.
- [4] Armburst M. et al. Above the Clouds: A Berkeley View of Cloud Computing. Tech. report UCB/EICS-2009-28, Electrical Eng. and Computer Science Dept., Univ. of California, Berkeley, 2009. p. 23.
- [5] The SDI Cookbook. Eds: D.D. Nebert. Global Spatial Data Infrastructure (GSDI) Association. 2009. <http://www.gsdi.org/gsdicookbookindex>
- [6] Бычков И.В., Ружников Г.М., Хмельнов А.Е., Шигаров А.О., Гаченко А.С., Фёдоров Р.К., Фереферов Е.С., Попова А.К., Новицкий Ю.А. Интеграция информационно-аналитических ресурсов и обработка пространственных данных в задачах управления территориальным развитием, Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2011 369 с.
- [7] Бычков И. В., Ружников Г. М., Хмельнов А. Е., Гаченко А. С., Фёдоров Р. К., Плюснин В. М., Батуев А. Р., Сороковой А. А., Воронин В. И., Бешенцев А. Н. Междисциплинарные научные исследования геосистем и биоразнообразия Байкальского региона: инфраструктура и сервисы пространственных данных, Тематическое картографирование для создания инфраструктур пространственных данных IX Научная конференция по тематической картографии. - Иркутск: Издательство Института географии им. В.Б. Сочавы СО РАН, 2010. - Т. I, - С. 85 - 87.
- [8] Geospatial Portal Reference Architecture. A Community Guide to Implementing Standards-Based Geospatial Portals, Ed. Louis C. Rose. Open Geospatial Consortium Inc. OGC 04-039 Ver. 0.2. 2004.
- [9] OGC Web Map Server (WMS). <http://www.opengeospatial.org/standards/wms>
- [10] OGC Styled Layer Descriptors (SLD). <http://www.opengeospatial.org/standards/sld>
- [11] OGC Web Coverage Service (WCS). <http://www.opengeospatial.org/standards/wcs>
- [12] GeoNetwork. <http://geonetwork-opensource.org>
- [13] OGC Geography Markup Language (GML). <http://www.opengeospatial.org/standards/gml>
- [14] OGC Web Feature Service (WFS). <http://www.opengeospatial.org/standards/wfs>
- [15] OGC Web Processing Service (WPS). <http://www.opengeospatial.org/standards/wps>

# AN INEQUALITY FOR THE HAAR MEASURE

In [Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math. **15** (2004), 85-86], the first author of this paper proved a new inequality for the Lebesgue measure and gave some applications. In this talk we present its generalization for the Haar measure. As its applications we give a new proof of Weil's theorem.

## 1. INTRODUCTION

Let  $M$  be a nonempty set, let  $R$  be a  $\sigma$ -ring of its subset and let  $\mu$  be a measure on  $R$ . For a sequence  $A_n \subseteq R$  of measurable sets, we have the following inequality:

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n)$$

However, in order to prove the inequality

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \leq \overline{\lim} \mu(A_n)$$

we must suppose that  $\mu(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i) < +\infty$  for at least one value of  $n$  (see [5, p.40]).

By  $l$  we denote Lebesgue measure on the set of real numbers  $\mathbf{R}$ .

**Example 1.1.** For a family of intervals

$I_n = [n, n+1)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , we have:  $\overline{\lim} l(A_n) = 1$  and  $l(\overline{\lim} A_n) = 0$ .

In [1] the first author presented the following inequality for Lebesgue measure and gave some its applications.

**Theorem 1.2. (I. Arandjelović [1])** Let  $A \subseteq \mathbf{R}$  be a Lebesgue measurable set with positive measure and let  $\{x_n\}$  be a bounded sequence of real numbers. Then

$$l(A) \leq l(\overline{\lim} (x_n + A)).$$

Further applications of this inequality was given in [3], [4] and [2]. Here, we present its generalization for the Haar measure. As its applications we give a new proof of Weil's theorem.

## 2. PRELIMINARY NOTES

Let  $X$  be a Hausdorff topological space, let  $S$  be a  $s$ -algebra of subsets of  $X$  and let  $m$  be a positive measure defined on  $S$ . Then  $m$  is called a Borel measure if  $\Sigma = \mathbf{B}(X)$ , the  $s$ -algebra of Borel sets

generated by open sets in  $X$ , and a topological measure if  $\mathbf{B}(X) \subseteq \Sigma$ , i.e. if every open set is in  $S$ . A topological measure is regular if for any  $A \in \Sigma$  there holds:

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(O) : A \subseteq O, O \text{ is open} \}$$

and

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq A, K \text{ is compact} \}$$

A Radon measure is a regular topological measure for which  $\mu(K) < +\infty$  for every compact set  $K$ . Note that in Hausdorff topological spaces with a Radon measure every point has a neighborhood of finite measure because any singleton is compact.

If  $m$  is a topological measure,  $A \in \Sigma$  and  $x_0 \in X$ , we say that  $A$  is of positive measure at  $x_0$  if  $\mu(A \cap U) > 0$  for all open neighborhoods  $U$  of  $x_0$ . Every compact set of positive measure contains a point at which it is of positive measure.

Topological measure  $m$  on a topological group  $X$  is left-invariant if  $\mu(A) = \mu(xA)$  for all  $A \in \Sigma$  and  $x \in X$ . A left-Haar measure is a left-invariant Radon measure which is not identically zero. Left Haar measure exists exactly for locally compact topological groups and they are unique on  $\mathbf{B}(X)$  up to multiplicative constant (see [5]).

The identity in group will be denoted by  $e$ .

## 3. RESULTS

Now we present our main result which generalizes Theorem 1.2.

**Theorem 3.1.** Let  $X$  be a locally compact topological group, let  $m$  be a left Haar measure, let  $A \subseteq X$  be a measurable set such that  $0 < \mu(A) < +\infty$  and let  $\{x_n\} \subseteq X$  be a sequence such that  $\{x_n\}$  is

<sup>1</sup> University of Belgrade - Faculty of Mechanical Engineering

<sup>2</sup> University of Belgrade - Faculty of Mathematics



compact. Then

$$\mu(A) \leq \mu(\overline{\lim}(x_n A)) \quad (1)$$

**Proof.** Let  $K \subseteq A$  be a compact set. From

$$\overline{\lim}(x_n K) \subseteq \overline{\lim}(x_n A)$$

it follows

$$\mu(\overline{\lim}(x_n K)) \leq \mu(\overline{\lim}(x_n A)).$$

Now we have

$$\mu(K) = \overline{\lim}\mu(x_n K) \leq \mu(\overline{\lim}(x_n K)) \leq \mu(\overline{\lim}(x_n A)) \quad (2)$$

Since

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ is the compact subset of } A\},$$

(2) implies (1).  $\diamond$

Now we give a new proof of Weil's theorem.

**Corollary 3.2. (A. Weil [6])** Let  $X$  be a locally compact topological group, let  $\mu$  be a left Haar measure and let  $A \subseteq X$  be a measurable set such that  $0 < \mu(A) < +\infty$ . Then its difference set  $AA^{-1} = \{x \mid x = a_1 a_2^{-1}, a_1, a_2 \in A\}$  contains a neighborhood of zero.

**Proof.** Assume that the statement is not true. Then there exists a compact set of positive measure  $K \subseteq A$  such that the difference set  $KK^{-1}$  does not contain a neighborhood of zero. Consequently, there exists a convergent sequence  $\{x_n\} \subseteq X$  such that  $\lim x_n = e$  and  $\{x_n\} \cap KK^{-1} = \emptyset$ . From

$$0 < \mu(K) \leq \mu(\overline{\lim}(x_n^{-1} K))$$

it follows that the set  $\overline{\lim}(x_n^{-1} K)$  is nonempty which implies that there exists  $t \in X$  such that  $\{x_n t\} \in K$  for infinitely many values of  $n$ . From  $\lim x_n = e$  it follows that  $t \in K$ , since  $K$  is a closed set. Thus we have that there exists infinite sequences  $\{a_j\} \subseteq K$  and  $\{x_{n_j}\} \subseteq \{x_n\}$  such that  $x_{n_j} = a_j t^{-1} \in KK^{-1}$ , which is a contradiction.  $\diamond$

## REFERENCES

- [1] I. Aranđelović, An inequality for the Lebesgue measure, *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math.* **15** (2004), 85-86.
- [2] I. Aranđelović, On the Haan's uniform convergence theorem, *Mathematica Moravica* **12** (2008) 15-17.
- [3] I. Aranđelović and D. Petković, An inequality for the Lebesgue measure and its applications, *Facta Universitatis Ser. Math. Inform.* **22** (2007) 11-14.

[4] I. Aranđelović and D. Petković, An inequality for the Lebesgue measure and its further applications, *Krag. J. Math.* **31** (2008), 53-57.

[5] P.R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N.Y., **1950**.

[6] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* Hermann et Cie., Paris **1940**.

## COMPLEX NUMBERS IN MATHEMATICALS PACKAGE “GEOGEBRA” AND “MATHEMATICA”

---

*Mathematical package “GeoGebra” allows us graphical two-dimensional algebraic display of complex numbers, while in “Mathematica” complex numbers are displayed as three-dimensional. Advantage of these packages is a creative to methods of teaching mathematics to students, approaching the subject as interesting and accessible way. Here are some notable examples of these packages.*

---

### INTRODUCTION

Contemporary mathematics teaching is relying more and more on use of computers and education software. Traditional teaching of maths is being changed by introducing GeoGebra and *Mathematica* in aspects of speed, quality and quantity of problems. With assistance of these mathematical programs, students have to adapt to new environment in which mathematical terms, rules and procedures are developed in cooperation with the teacher, and discover respective characteristics along the way.

In order for students to switch from mechanical to creative thinking, we used these programs as a medium in teaching maths in several classes of a third grade in Secondary school in Kosovska Mitrovica. In this article we showed gradual development of ideas of students during forming of up lets in which, with teacher’s assistance, they described characteristics of complex numbers.

### ABOUT GEOGEBRA

GeoGebra is software with DGS features - Dynamic Geometry System and CAS - Computer Algebra System, which connects geometry, algebra and analysis. Window for communication (interface) with GeoGebra consists of three parts: algebraic, geometric and tabulatory. Tasking and object manipulation can be done via all three windows. GeoGebra is cost-free and widespread software, accessible for everybody via Internet, it can be downloaded from website [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), and it is translated into Serbian, which is additional advantage for use of this program.

Students are familiar with similar programs in secondary schools, so there were no difficulties with accepting the GeoGebra as additional package. More serious issue was preparation of teachers to use GeoGebra during lectures. Basic problem is reluctance in accepting new technologies in teaching process as well as adapting to new way of work. However, with generous help of IT and maths teacher, this problem was successfully circumvented. Although the primary results were very positive, it was obvious that introducing GeoGebra in classroom did not give progress per se. It is necessary to adjust GeoGebra in a meaningful and successful manner into study material.

### ON COMPLEX NUMBERS AND SOLVING PROBLEMS IN GEOGEBRA

In third grade of secondary school students learn how to solve equation model  $x^2 + 1 = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , since this equation has no solution in set of real numbers. By expanding the set of real numbers into set of complex numbers, this equation, as well as other similar models, can be solved. Starting with the definition of a complex number and presentation of basic features of real numbers, and ending with solving of problems of that type, complex numbers represent new and relatively difficult topic for students.

Set of all complex numbers  $C$  we define as a set of all ordered pairs of real numbers:  $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ . Operations + (addition) and (multiplication) we introduce through

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu),$$

---

1 High school, Kosovska Mitrovica, Serbia

2 Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia

3 Faculty of Traffic Engineering, University of East Sarajevo, Republic of Srpska, Bosnia and Herzegovina

And inverted value of complex number  $z = (x, y)$  through

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Curriculum provides to adopt addition, subtraction, multiplication and division of complex numbers written in different forms (as ordered pairs, in algebraic and trigonometric forms).

Since real numbers are represented as dots of a straight line (numeric line), complex numbers are represented as dots of a plane. Such plane that contains complex dots is called complex plane. In this system, numbers with form  $(x, 0)$  are represented by dots of  $x$  – axis. So, we identify complex number  $(x, 0)$  by real number  $x$ , complex number  $(0, 0)$  by real number 0; complex number  $(1, 0)$  by real number 1. Complex number  $(0, 1)$  is imaginary unit and we mark it with:  $(0, 1) = i$  where :  $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ . If complex number  $z = (x, y)$  we present in algebraic form  $z = x + iy$ , than complex numbers  $z = x + iy$  and  $w = u + iv$  would be:

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

$$z - w = (x + iy) - (u + iv) = (x - u) + i(y - v)$$

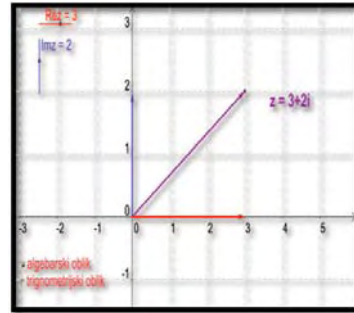
and

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

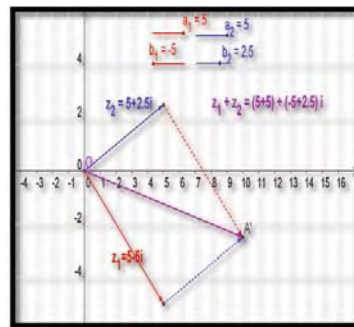
$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}$$

In GeoGebra, complex numbers are presented by related vectors. Complex number  $z = \text{Re } z + \text{Im } z$  we present by dot  $(\text{Re } z, \text{Im } z)$ . Two sliders  $\text{Re } z$  and  $\text{Im } z$  enable us to present different complex numbers, as shown on Picture 1. In GeoGebra, first we must define independent particles (sliders)  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , then dots  $A = (a_1, b_1)$  and  $B = (a_2, b_2)$ , which depend on sliders. With  $(0, 0)$  we mark coordinate beginning, and  $u = \overline{OB}$  with  $v = \overline{OA}$  are vectors of positions of dots  $A$  and  $B$ . Dot  $A'$  is defined by translation of dot  $A$  for vector  $v$  and matches with dot  $B'$  defined by translation of dot  $B$  for vector  $u$ . Vector  $\overline{OA'}$ , and vector  $\overline{OB'}$ , is summation of vectors  $u$  and  $v$ , i.e. vectors  $\overline{OA'}$  and  $\overline{OB'}$  ( $\overline{OA} = \overline{OB'}$ ) represent summation of complex numbers  $(a_1, b_1)$  and  $(a_2, b_2)$ . After adding text and so-called “decoration” of work,

students successfully adopted first phase of using GeoGebra. Process we described gives final result shown on Picture 2.



Pic. 1.



Pic. 2.

Complex number  $z = x + iy \neq 0$  we can present in trigonometric form

$$z = \rho \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

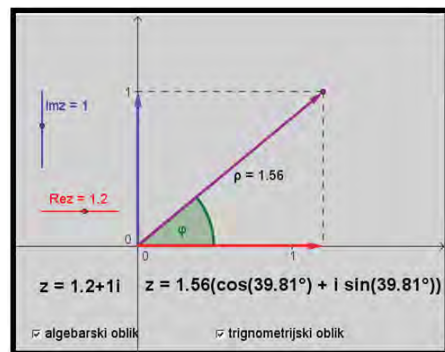
where

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

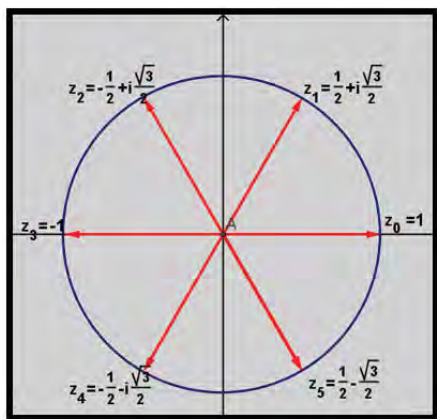
And angle  $\varphi$  is determined by

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} \text{ and } \cos \varphi = \frac{x}{\rho}.$$

On Picture 3 we showed complex number in algebraic and trigonometric forms.



Pic. 3.



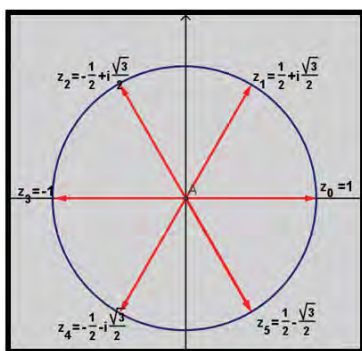
Pic. 4.

In GeoGebra is possible to present all complex roots of one. On Picture 5 we showed sixth roots of one. Students defined independent particle (slider)  $k$  that has values  $0,1,2,3,4,5$  and drew a circle. According to Moaver's formula:

$$\sqrt[6]{1} = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}, \quad k = 0,1,\dots,5,$$

In this way we get sixth root of number one. These roots could be presented by dots:

$$A_k = \left( \cos \frac{2k\pi}{6}, \sin \frac{2k\pi}{6} \right), \quad k = 0,1,\dots,5.$$



Pic. 5.

During the lecture on complex numbers with use of GeoGebra, we referred students also to use "GeoGebra Help: official instruction 3.2" written by Markus and Judith Hohenwarter, and translated into Serbian by Dragoslav and Djordje Herceg, as well as to work of Sima Suljic: "Complex numbers in GeoGebra".

Mathematical package GeoGebra enables us to show students complex numbers and operations

both in graphical and algebraic manner. There we can see advantages of this program, because it allows us to have more creative approach to teaching maths as well as better visualization of terms we introduce. Also, this way of work is more interesting to students and gives them an opportunity to experiment as well.

## ON MATHEMATICA

Mathematica is a program package for mathematical and other use. It is especially suitable for processing of numerical data, enables symbolical processing and has a system for graphical presentation of data and functions, since it has a lot of different operations. These are reasons why this program is popular with professionals who deal with natural, mathematical and technical sciences. *Mathematica* is present in education, especially *Mathematica Player* which is cost-free and contains thousands of applications prepared for teaching.

Introducing of *Mathematica* into lecturing is very demanding work, especially having in mind the fact that commands in this program package are not translated from English into Serbian language. Even bigger problem than language barrier is the fact that teachers of mathematics are very reluctant to use this program in lecturing. Those were the reasons why we presented this program to students in this school year through various examples given.

## LITERATURE

- [1] Vojvodić, G., Paunić, Đ., Tošić, R., Matematika sa zbirkom zadataka za treći razred srednje škole, Beograd : Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 2005.
- [2] Bogoslavov, V., Zbirka zadataka za treći razred srednje škole, Beograd : Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 2005.
- [3] Ognjanović, S., Ivanović, Ž., Matematika 3 zbirka zadataka i testova za treći razred Gimnazija i tehničkih škola, Beograd: Krug 2008.
- [4] Hohenwarter, M., Hohenwarter J., „GeoGebra pomoć-zvanično upustvo 3.2“ , Prevod na srpski jezik Herceg D., Herceg Đ., [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) .
- [5] Šuljić Š., "Kompleksni brojevi u GeoGebra-i", [www.nor-mala.hr](http://www.nor-mala.hr).
- [6] Stanimirović, P., Milovanović G., Programski paket Mathematica i primene, Beograd 2002.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПОЛЗНЕВЫХ ВОЛН ЦУНАМИ В РЕАЛЬНЫХ АКВАТОРИЯХ

---

*This paper presents the results of simulations of the historical landslide tsunami in 1998 off the coast of Papua New Guinea using the model of the landslide as a quasi-nondeformable body moving along a spatially inhomogeneous slope under the influence of a set of forces. The comparison is shown with results obtained for the initial data, calculated using the well-known software package, TOPICS, as well as with the simulation results of this event by other authors. Based on the computational results and their comparison with field data the most likely trajectories of landslide are identified.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что цунами у побережья Папуа-Новой Гвинеи 17 июля 1998 г. было порождено сходом большого подводного оползня. Это событие хорошо исследовано и документировано [1,2], что позволяет использовать его в качестве тестового примера для оценки различных подходов к моделированию оползневой генерации цунами.

В работе излагаются результаты применения предложенной Г.С. Хакимзяновым [3] модели движения подводного оползня по склону произвольной формы к задаче воспроизведения этого события. В рассматриваемой модели оползень представляется квазинедеформируемым телом, движущимся вдоль пространственно неоднородного склона под действием заданного набора сил. Волны на поверхности покрывающего оползень слоя воды моделируются с использованием классических нелинейных уравнений мелкой воды. Численные алгоритмы основаны на методе Эйлера и конечно-разностной схеме Мак-Кормака на равномерной сетке.

Проведено сопоставление с результатами, полученными на основе начальных данных, рассчитанных известным программным пакетом TOPICS, а также с материалами моделирования этого события другими авторами [2,4,5] и натурными данными [1,2]. По результатам этого сравнения определены наиболее вероятные трассы движения оползня.

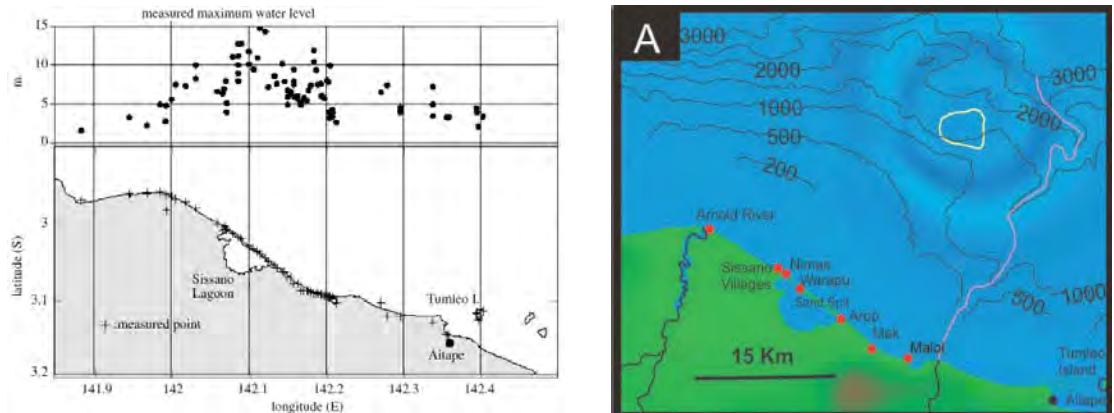
### НАТУРНЫЕ ДАННЫЕ

В первую очередь, оползневое происхождение рассматриваемого исторического события подтверждается тем, что сопоставляемое этому цунами землетрясение по своим энергетическим характеристикам не могло породить волн наблюдавшейся амплитуды. Его первый, основной, толчок имел магнитуду порядка 7.1, и, как показали результаты моделирования [2], при этом на побережье могли возникнуть волны высотой не более двух метров, в то время как в реальности они достигали отметки 15 метров. Второй факт, свидетельствующий в пользу оползневой происхождения, - время прихода волн. Из показаний очевидцев следует, что максимальные волны подошли к побережью только через 20-25 минут после первого толчка, в то время как в случае сейсмического характера их генерации волны должны были прийти практически сразу. Третий аргумент основан на анализе распределения максимальных высот волн вдоль берега, характерном именно для оползневых событий. Реальное (натурное) распределение высот волн вдоль побережья [2] приведено ниже на Рис. 1 слева. Как видно, основной пик высот (до 15 метров) приходится непосредственно на залив Сиссано (Sissano Lagoon); второй пик, чуть меньший (12 метров), наблюдается примерно на 0.1 градуса восточнее. Далее по обеим сторонам амплитуды резко уменьшаются, так что протяженность береговой линии, где зафиксированы высоты более 8

---

<sup>1</sup> Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

метров, не превышает 0.2-0.3 градуса. Такая узость участка побережья, испытывавшего воздействие волн, является характерной чертой именно для оползневых событий. Как было показано последующими экспедиционными натурными исследованиями [1,2], наиболее вероятным и, фактически, уже доказанным окончательным расположением оползня, вызванного землетрясением и послужившего причиной образования катастрофических волн, является так называемый «амфитеатр» с глубинами от 600 до 2500 метров, расположенный напротив залива в направлении на северо-восток. На Рис. 1 справа показан соответствующий контур оползня на склоне из работы [1].



**Рис. 1.** Схематическое изображение расчетной области (слева, внизу) с отмеченными (+) положениями точек измерения высот волны цунами, распределение этих высот вдоль берега (слева, вверх). Изолинии глубин расчетной области с отмеченным (белый контур) конечным положением оползневой массы (справа).

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При проведении вычислительных экспериментов в качестве гидродинамической модели распространения поверхностных волн использовались классические нелинейные уравнения мелкой воды в декартовой системе координат, аппроксимированные с использованием аналога конечно-разностной схемы Мак-Кормака на равномерной сетке. Движение оползня описывалось моделью квазинедеформируемого тела [3], движущегося по пространственно неоднородному рельефу дна под действием сил тяжести, выталкивания, гидродинамического сопротивления и донного трения с учетом присоединенной массы.

Исходное распределение глубин в расчетной области, полученное на основе билинейной интерполяции массива батиметрической информации Gebco (<http://www.gebco.net/>), приведено на Рис. 2 слева. Использование этого распределения для расчета траектории движения оползня оказалось невозможным в силу недостаточной гладкости соответствующей дискретной функции. Поэтому в ходе вычислительных экспериментов для моделирования движения оползня использовался массив, полученный в результате применения процедуры сглаживания девятиточечным фильтром Гаусса из инструментальных средств пакета Golden Software Surfer (см. Рис. 2, справа), в то время как для расчета распространения порожденных оползнем поверхностных волн вполне достаточной оказалась гладкость исходной батиметрии. Дополнительные тестовые расчеты показали, что применение упомянутого сглаживания не приводит к существенному искажению искомой траектории.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Известен ряд результатов моделирования цунами 17 июля 1998 г., полученных с использованием различных подходов к моделированию движения как оползня, так и окружающей его жидкости. Так, например, в статье [4] моделирование всего процесса проводилось в рамках модели двухслойной жидкости со слоями различной плотности и вязкости, в то время как авторы работы [5] использовали для расчета начальных полей пакет TOPICS с последующим моделированием

распространения волн и их наката на берег как по классическим уравнениям мелкой воды, так и в рамках нелинейно-дисперсионных приближений. При этом надо отметить, что в первой из этих работ движение оползня задавалось в северо-восточном направлении, и получившееся в результате таких расчетов распределение высот волн вдоль побережья, на наш взгляд, ближе к натурному, так как имеет ярко выраженный один пик как раз в районе залива Сиссано, в то время как во второй работе, где движение задавалось в северо-западном направлении, наблюдается еще и «побочный» ошутимый пик существенно восточнее этого залива.

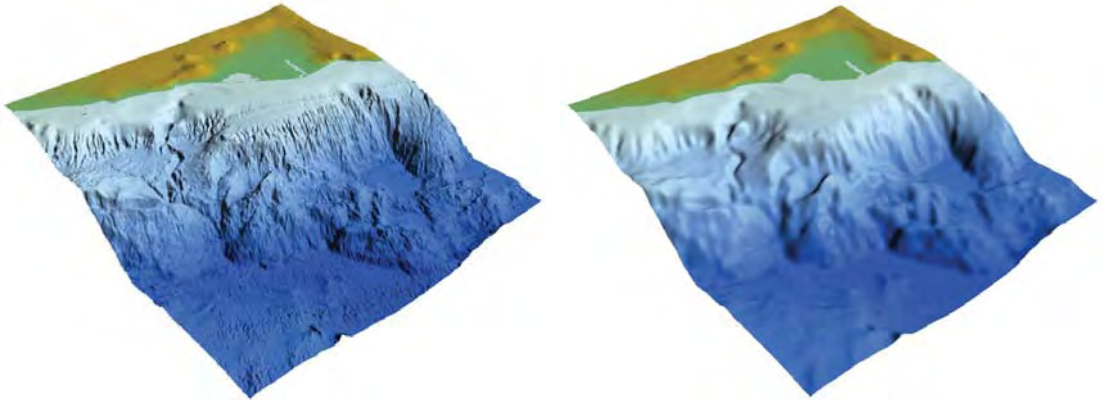
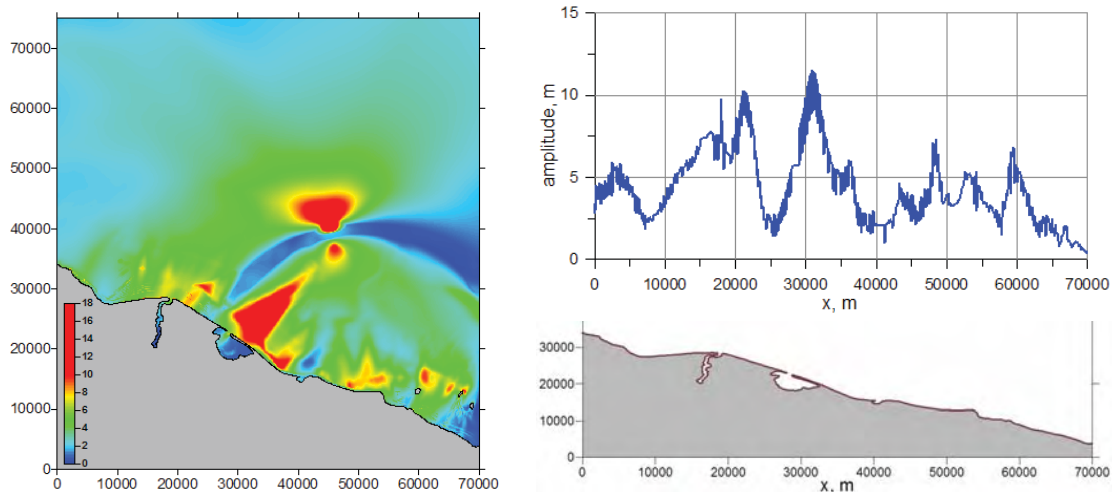


Рис. 2. Рельеф дна и суши в расчетной области: слева - исходная батиметрия, справа - сглаженный рельеф, использованный для расчета траектории движения оползня.

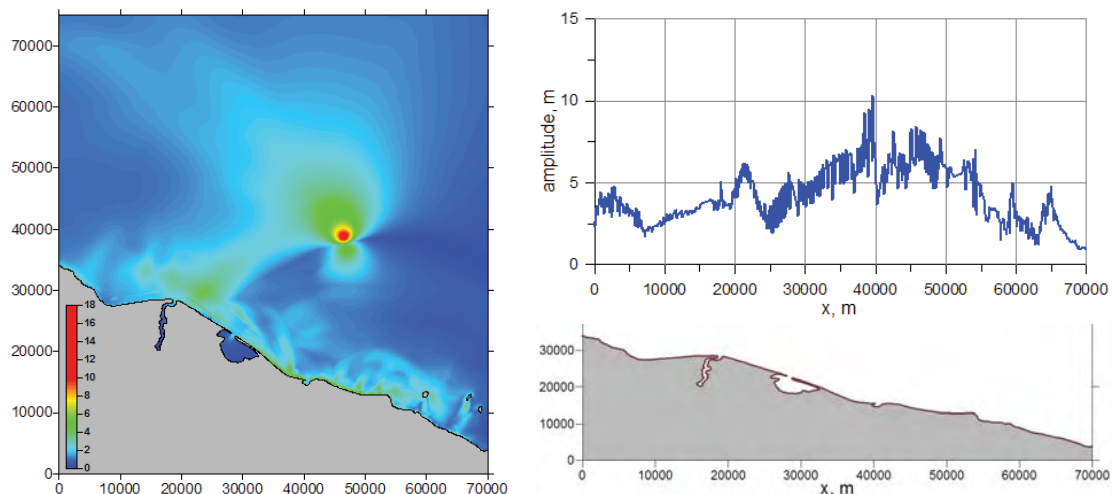
Целью первого этапа настоящего исследования стало сопоставление с натурными данными результатов расчетов, в которых для задания начальных данных использовался программный пакет TOPICS. Значения параметров оползневого движения, подаваемых на вход пакета TOPICS, соответствовали значениям, использованным в аналогичной ситуации авторами работ [5, 6]. В первом случае это были: длина оползня - 4200 м, ширина - 4500 м, толщина - 760 м, относительная плотность - 2.1463, начальное заглубление - 1420 м, начальное ускорение -  $0.51 \text{ м/с}^2$ , максимальная скорость - 23 м/с, время движения - 88 с, длина пути - 980 м, азимут траектории - 11 градусов против часовой стрелки от направления на север.

Как показывают приведенные на Рис. 3 картина свечения и распределение максимальных высот волн вдоль береговой линии, в сторону побережья распространяется два основных «луча» энергии - из задней части начального возвышения и из передней. При этом если первый из них, как и следовало ожидать, направлен в сторону залива Сиссано, то связанный с передней частью возмущения экстремум в распределении высот волн к западу от залива наблюдениями не замечен. Принципиальное отличие используемой авторами модели оползневых цунами от моделей, использующих пакет TOPICS, состоит в том, что этот пакет рассчитывает начальные поля смещений уровня воды и горизонтальных скоростей по эмпирическим соотношениям на основе заданного на основе «умозрительных» оценок исследователя набора значений параметров, в то время как модель авторов воспроизводит собственно движение оползня (определяя в том числе характеристики движения, являющиеся входными параметрами пакета TOPICS), которое, в свою очередь, порождает волновые поля, в зависимости от реального распределения глубин и местоположения всего оползня, а не только его центра масс. В рамках этой модели воспроизвести движение с перечисленными выше характеристиками не удалось. Наиболее близким оказалось движение с начальным ускорением  $0.34 \text{ м/с}^2$ , максимальной скоростью 16 м/с, временем движения 190 с, длиной пути 1500 м, азимутом траектории - 9 градусов к западу от направления на север. Такой результат соответствует оползню с длиной 4500 м, шириной 5000 м, толщиной 760 м; при этом относительная плотность равнялась 2.1463, коэффициенты присоединенной массы и гидродинамического сопротивления были нулевыми, угол трения равнялся 6.25 градусов, а начальное заглубление - 1600 м.



**Рис. 3.** Моделирование цунами от начального «оползневое» возмущения, определенного с помощью пакета TOPICS: слева - распределение максимальных высот волн за все время расчета, справа - схематическое изображение расчетной области (внизу) и распределение высот волн вдоль побережья (сверху).

Приведенные ниже (Рис. 4) картина свечения и распределение максимальных высот волн вдоль береговой линии демонстрируют значительное уменьшение амплитуд волн, определенных с использованием модели квазинедеформируемого оползня, как во всей акватории в расчетной области, так и вблизи побережья.



**Рис. 4.** Результаты, полученные с использованием модели квазинедеформируемого оползня: слева - распределение максимальных высот волн за все время расчета, справа - схематическое изображение расчетной области (внизу) и распределение высот волн вдоль побережья (сверху).

На следующем этапе работы была предпринята попытка определить начальное положение оползня, порождающего волну цунами, проявление которой у берега наиболее соответствует результатам натурных обследований.

При постановке задач вычислительного эксперимента было рассмотрено 11 вариантов такого начального положения, в том числе и маловероятные (Рис. 5); характерные параметры задачи были таковы: длина оползня - 4500 м, ширина - 5000 м, толщина - 760м, относительная плотность - 2.1463, коэффициенты присоединенной массы и гидродинамического сопротивления - 1.0, угол трения - 5 градусов. С учетом заданного рельефа дна оползни с начальными положениями цен-



тра масс в точках 1, 2, 3, 10 стартовали с одинаковой глубины 2000 метров, в точках 4-9 - с глубины 1400 метров, а в точке 11 - с глубины 1750 метров. Получившиеся в результате расчетов траектории движения (Рис. 5) демонстрируют как возможность остановки оползня посередине склона в «амфитеатре» на глубине порядка 2500 метров (траектории 1-6), так и его движение до самой глубокой части (свыше 3500 метров) акватории (траектории 7-11).

Наиболее соответствующими произошедшему в 1998 г. событию оказались траектории движения и распределения высот волн вдоль береговой линии для начальных положений оползня в точках «5» и «6», с остановкой оползня в «амфитеатре».

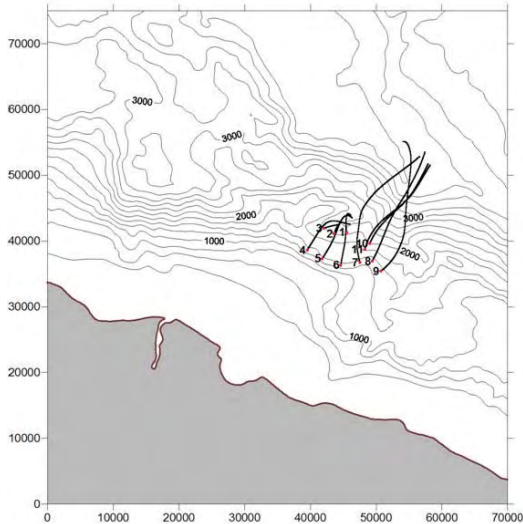


Рис. 5. Начальные положения центров масс вероятных оползней и соответствующие траектории движения.

Для уточнения результатов была проведена еще одна серия расчетов, в которых использовался набор дополнительных 11 модельных оползней, центры масс которых с номерами 1' - 11' в начальный момент располагались в окрестности упомянутых выше точек «5» и «6» (Рис. 6). Расстояния между новыми точками были намного меньше, и они лежали на двух различных глубинах, что, впрочем, слабо влияло на характер распределения высот волн на берегу.

Некоторые изменения были внесены и в значения параметров задачи. На этот раз они были заданы в соответствии с выбором авторов статьи [4], которым удалось добиться наилучшего совпадения результатов моделирования с наблюдаемыми. Таким образом, длина оползня была задана равной 3000 м, ширина - 5000 м, толщина - 450 м, угол сухого трения - 12 градусам. Коэффициенты присоединенной массы и гидродинамического сопротивления были приняты равными нулю в соответствии с полученными ранее авторами настоящей статьи результатами [7] сравнения моделей твердого и жидкого оползней, показавшими, что при этом центры масс жидкого и твердого оползней двигаются практически одинаково.

Анализ рассчитанных в ходе вычислительных экспериментов траекторий центра масс (Рис. 6) «5» и «6», показал, что чем выше в начальный момент времени оползень находится, тем большее расстояние он успевает пройти до своей остановки. Это объясняется тем, что при движении он успевает набрать большую скорость до того момента, как выйдет на участок с относительно малым углом наклона дна и начнет замедляться.

Сопоставляя распределение высот волн вдоль побережья, рассчитанное для оползня, центр масс которого в начальный момент располагался в точке №11' (Рис. 7), с данными натурных наблюдений (Рис. 1), можно сделать вывод о близости рассчитанных характеристик к наблюдаемым и, таким образом, о построении адекватной модели реального оползневого цунами с использова-

нием модели мелкой воды над изменяющимся рельефом дна.

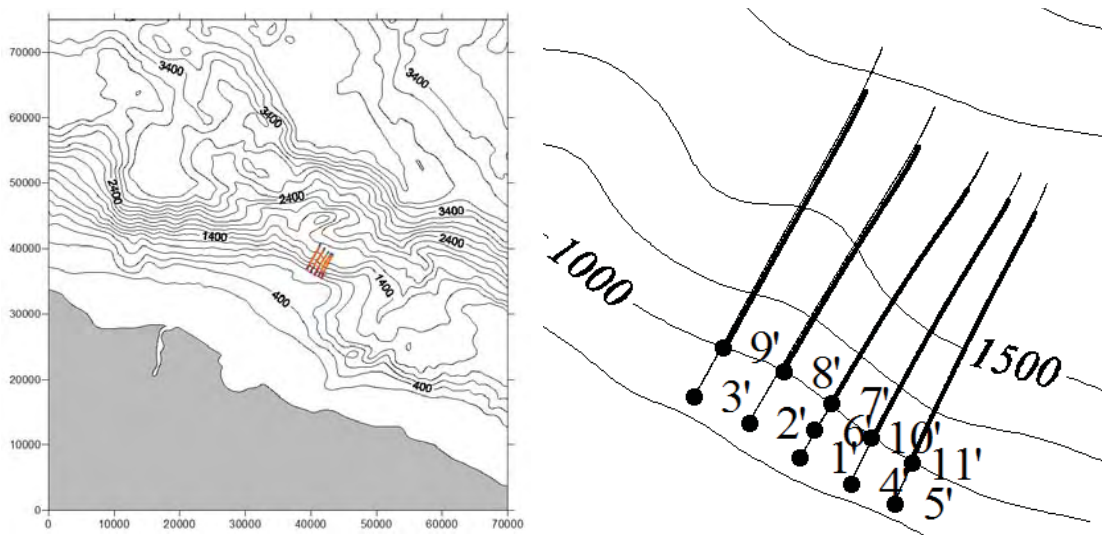


Рис. 6. Уточняющий расчет: начальные положения центров масс вероятных оползней и соответствующие траектории движения.

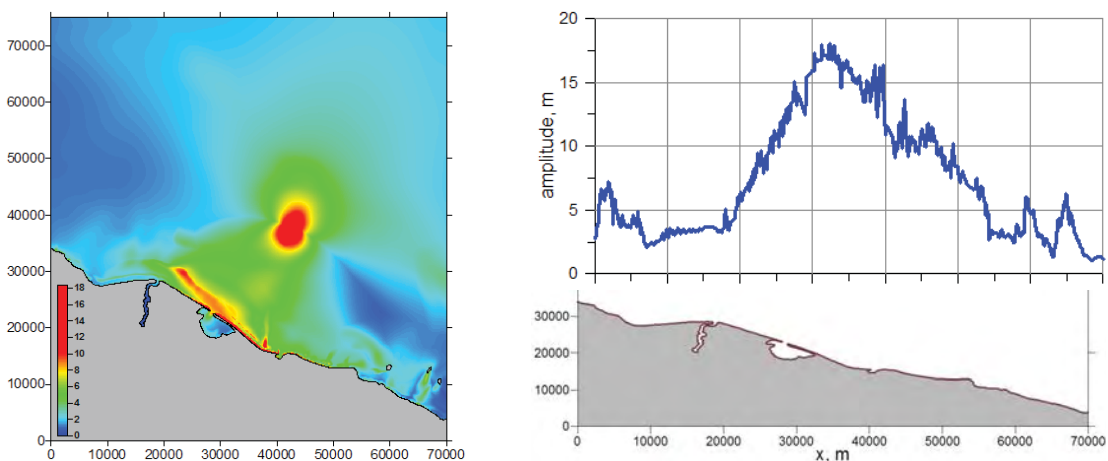


Рис. 7. Уточняющий расчет: результаты, полученные для квазинедеформируемого оползня, расположенного в начальный момент в точке № 11'; слева - распределение максимальных высот волн за все время расчета, справа - схематическое изображение расчетной области (внизу) и распределение высот волн вдоль побережья (сверху).

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 09-05-00294, 10-05-91052-НЦНИ), программы Интеграционных исследований СО РАН (проект 116) и президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-931.2008.9).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tappin D. R., Watts P., McMurtry G.M., Lafoy Y., Matsumoto T. The Sissano, Papua New Guinea Tsunami of July 1998 - offshore evidence on the source mechanism, *Mar. Geol.* 2001, 175, P. 1-23.
- [2] Synolakis C.E., Bardet J.-P., Borrero J.C., Davies H.L., Okal E.A., Silver E.A., Sweet S., Tappin D.R. The slump origin of the 1998 Papua New Guinea Tsunami, *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2002, 458, P. 763-789.
- [3] Бейзель С.А., Хакимянов Г.С., Чубаров Л.Б. Моделирование поверхностных волн, порождаемых подводным оползнем, движущимся по пространственно неоднородному склону, *Вычислительные технологии.* 2010. Т. 15, № 3. С. 39-51.

- [4] Heinrich P., Piatanesi A., Hebert H. Numerical modeling of tsunami generation and propagation from submarine slumps: the 1998 Papua New Guinea event, *Geophys. J. Intern.* 2001, 145, P. 97-111.
- [5] Tappin D.R., Watts P., Grilli S.T. The Papua New Guinea tsunami of 17 July 1998: anatomy of a catastrophic event, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2008, 8, P. 243-266.
- [6] P. Watts, S.T. Grilli, J.T. Kirby, G.J. Fryer, D R. Tappin. Landslide tsunami case studies using a Boussinesq model and a fully nonlinear tsunami generation model, *Natural Hazards and Earth System Sciences.* 2003, 3, P. 391-402.
- [7] Бейзель С.А., Худякова В.К. Моделирование оползневых цунами в рамках двухслойной модели мелкой воды, Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. Тезисы докладов. Новосибирск, 2011. С. 83.

## МОДИФИЦИРОВАННАЯ ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕЗОННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СОЛЕННОГО ОЗЕРА

---

*It is proposed a modification of a one-dimensional (in the vertical direction) model for calculation of the temperature and salinity regimes of the lake taking into account a change of water's depth. Examples of calculations and field measurements for the lakes Shunet and Shira are given.*

---

### ОДНОМЕРНАЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ МОДЕЛЬ СОЛЕННОГО ОЗЕРА

Вертикальные распределения температуры и солености воды в глубоководной зоне в различные сезоны можно определить по одномерной модели, предложенной в работах [1, 2]. Одномерная модель для периода отсутствия ледяного покрова основывается на решении одномерных в вертикальном направлении уравнений диффузии относительно температуры и солености воды. Коэффициент вертикального турбулентного обмена определяется по формуле Прандтля - Обухова с учетом приближения Экмана. Тепловой поток на водной поверхности вычисляется по известным эмпирическим формулам.

В зимний период по вертикали выделяются слой льда, слой конвективного перемешивания и придонный слой. Для определения динамики толщины ледяного покрова применяется упрощенная модель, основанная на квазистационарном температурном режиме в затвердевшей области. В соленых озерах при образовании льда в результате кристаллизации воды высвобождается соль. Формируется неустойчивая плотностная стратификация, приводящая к интенсивной вертикальной циркуляции и образованию слоя конвективного перемешивания. В этом слое происходит выравнивание температуры и солености. Уравнение состояния соленой воды принимается в приближении Буссинеска, (плотность линейно зависит от температуры и солености воды). Предполагается, что конвективное перемешивание распространяется до такого горизонта, на котором плотность воды становится равной плотности подстилающего слоя воды. Так как в зимний период температура воды мало изменяется по глубине, то плотность воды в основном зависит от солености. С учетом этих предположений выведены расчетные формулы для определения глубины распространения конвекции и значений температуры, солености, плотности воды в конвективном слое.

Выполнена модификация одномерной модели, учитывающая изменение глубины озера в летний период. Весной температура льда повышается до температуры фазового перехода и происходит таяние ледяного покрова как снизу, так и сверху. После таяния льда образуется слой опресненной воды, который под воздействием ветра перемешивается с нижними слоями воды.

### МОДИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ

#### Период отсутствия ледяного покрова

Вертикальные распределения температуры и солености в глубоководной области озера определяются из одномерного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial C}{\partial z} \right) + f, \quad (1)$$

1 ИВМ СО РАН, Красноярск, Россия

2 СФУ, Красноярск, Россия

3 Институт биофизики СО РАН, Красноярск, Россия

здесь  $t$  - время,  $z$  - вертикальная координата, направленная вниз,  $H$  - глубина озера,  $K$  - коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $C(t, z)$  - температура  $T$  (соленость  $S$ ) воды,  $f(t, z)$  - внутренние источники.

Граничные условия

$$K \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} = -F_C, \quad K \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=H} = -F_{CH} \text{ (или } C|_{z=H} = C_H \text{)}, \quad (2)$$

начальное условие

$$C(0, z) = C_0(z). \quad (3)$$

### Зимний период

Толщина слоя конвективного перемешивания определяется с учетом толщины ледяного покрова. Так как в зимний период плотностная стратификация под ледяным покровом, в основном, зависит от солености воды, то изменение солености воды в слое конвективного перемешивания на временном шаге  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  определяется по формуле

$$\Delta S_k^{n+1} = \frac{(S_k^n - S_w)(\xi_w^{n+1} - \xi_w^n)}{0.5(h^{n+1} + h^n) - \xi_w^{n+1}}, \quad (4)$$

где  $S_k^n$  - соленость в слое конвективного перемешивания при  $t = t^n$ ,  $\xi_i^n, \xi_i^{n+1}$  - толщины льда при  $t = t^n$  и  $t = t^{n+1}$  соответственно,  $\xi_w = \rho_i \xi_i / \rho_w$ ,  $S_w = \rho_w S_i / \rho_i$ ,  $S_i$  - соленость льда,  $\rho_w$  - плотность воды,  $\rho_i$  - плотность льда,  $z = h^n$  и  $z = h^{n+1}$  - заглубления слоя конвективного перемешивания при  $t = t^n$  и  $t = t^{n+1}$  соответственно.

Изменение толщины льда рассчитывается с использованием упрощенной модели [1, 2].

Упрощенное уравнение состояния соленой воды для зимнего периода:

$$\rho(S) = \rho_0 \left( \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{T_*}{T_0} + \varepsilon_3 \frac{S}{S_0} \right). \quad (5)$$

Здесь  $\rho_0 = 1.0254$  г/см<sup>3</sup>,  $\varepsilon_1 = 0.9753$ ,  $\varepsilon_2 = -0.00317$ ,  $\varepsilon_3 = 0.02976$ ,  $T_0 = 17.5^\circ\text{C}$ ,  $S_0 = 35^\circ/\text{oo}$ ,  $T_*$  - характерное значение температуры.

Заглубление слоя конвективного перемешивания определяется из условия

$$\rho|_{z=h^{n+1}} = \rho(S_k^n + \Delta S_k^{n+1}), \quad (6)$$

$\rho(S(z))$  - вертикальный профиль плотности перед ледообразованием.

Вертикальные профили солености и температуры воды перед началом ледообразования представляются в виде:

$$S(z) = \begin{cases} \bar{S}, & 0 \leq z \leq h^0, \\ \bar{S} + \gamma_S(z - h^0), & h^0 \leq z \leq z_*, \\ S_{bt}(z), & z_* \leq z \leq H, \end{cases}$$

$$T(z) = \begin{cases} T_{ph}, & 0 \leq z \leq h^0, \\ T_{ph} + \gamma_T(z - h^0), & h^0 \leq z \leq z_*, \\ T_{bt}(z), & z_* \leq z \leq H, \end{cases} \quad (7)$$

здесь  $z = h^0$  - толщина верхнего перемешанного слоя перед ледообразованием,  $T_{ph}$  - температура замерзания соленой воды,  $\bar{S}$  - соленость воды в поверхностном слое.

Из уравнений (4) - (6) определяются  $h^{n+1}, S_k^{n+1}, T_k^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
 h^{n+1} &= \xi_w^{n+1} + \sqrt{(\xi_w^{n+1})^2 + A^n}, \\
 A^n &= \frac{2(S_k^n - S_{ice})(\xi_w^{n+1} - \xi_w^n)}{\gamma_S} + (h^n)^2 - 2\xi_w^{n+1}h^n, \\
 S_k^{n+1} &= S_k^n + \gamma_S(h^{n+1} - h^n), \\
 T_k^{n+1} &= T_{ph} \frac{h^{n+1} - h^n}{h^{n+1} - \xi_w^{n+1}} + T_k^n \frac{h^n - \xi_w^{n+1}}{h^{n+1} - \xi_w^{n+1}} + \frac{2\gamma_T(h^{n+1} + h^n - 2h^0)(h^{n+1} - h^n)}{h^{n+1} - \xi_w^{n+1}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Из соотношений (8) следует, что толщина слоя конвективного перемешивания не зависит от коэффициентов уравнения состояния соленой воды (5).

### Летний период в случае увеличения глубины озера

Предполагается, что увеличение глубины происходит за счет притока пресной воды. В этом случае средняя соленость в озере уменьшается. Увеличение глубины учитывается добавлением сверху слоя пресной воды толщиной  $\Delta H$ . Динамика вертикального распределения температуры и солености воды определяется из решения задачи (1) - (3).

### Летний период в случае уменьшения глубины

Предполагается, что уменьшение глубины связано с превышением испарения над притоком и после испарения вся соль остается в озере. В этом случае средняя соленость в озере возрастает (при условии постоянства запасов соли в водоеме).

Пусть за летний период глубина озера уменьшится на  $\Delta H$ . В этом случае при испарении выделится соли (на единицу площади)  $\bar{S} \cdot \Delta H$ , где  $\bar{S}$  - соленость поверхностного слоя. Тогда соленость в слое  $\Delta H \leq z \leq 2\Delta H$  изменится на величину  $\Delta S = \bar{S}$ .

### Примеры расчетов.

Выполнена серия расчетов динамики вертикальных распределений температуры и солености воды в озере Шира для разных лет. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными натурных измерений. Расчеты показали, что для определения толщины слоя конвективного перемешивания под ледяным покровом и значений температуры и солености воды в нем можно применять упрощенное уравнение состояния воды (5).

На рис. 1, 2 приведены примеры расчетов вертикальных распределений солености в озере Шира. Расчеты показали, что при уменьшении глубины озера слой конвективного перемешивания в зимние периоды может достигать дна (рис. 2б).

На рис. 3 приводятся вертикальные распределения солености воды в озере Шунет для случая трехслойной вертикальной плотностной структуры.

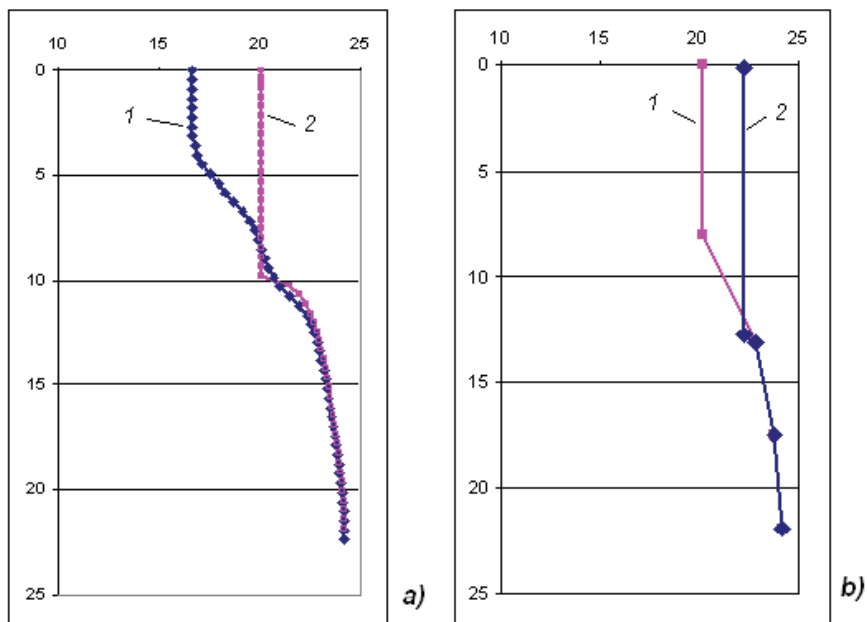
Описанную математическую модель можно применять для оценки динамики вертикальных распределений температуры и солености воды с учетом изменения глубины озера.

### ВЫВОДЫ

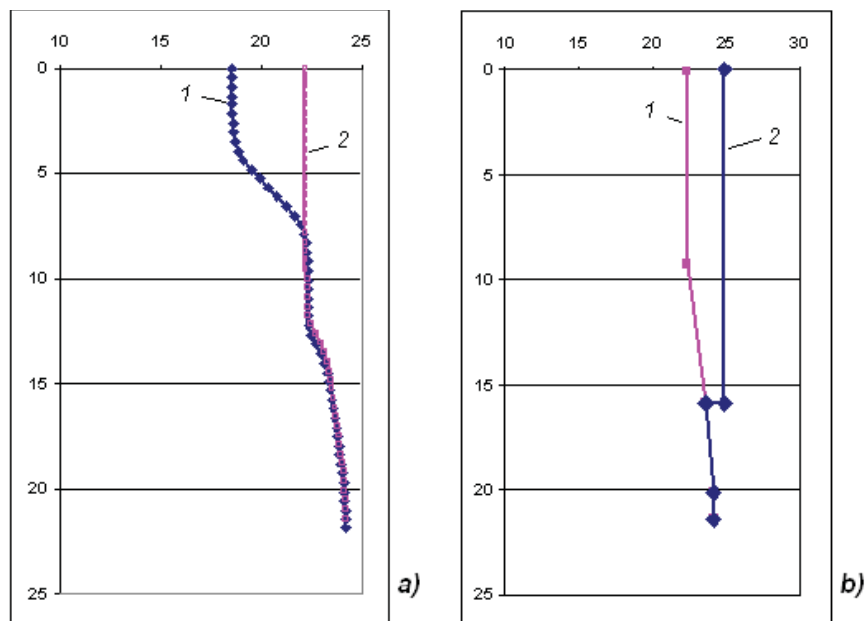
Построенная математическая модель позволяет:

- оценить сезонные изменения вертикальных распределений температуры и солености воды в озерах в зависимости от метеословий;

- оценить динамику термоклина и халоклина в зависимости от стратификации и метеоусловий;
- определить возможность распространения слоя конвективного перемешивания до дна при уменьшении глубины озера;
- описать случаи образования трехслойной вертикальной гидрофизической структуры озера.



**Рис. 1.** Вертикальные распределения солености воды: а) осенний период (1 - до изменения глубины, 2 - глубина уменьшена на 0,5 м); б) зимний период (1 - начало зимы, 2 - окончание зимнего периода).



**Рис. 2.** Вертикальные распределения солености воды: а) осенний период (1 - до изменения глубины, 2 - глубина уменьшена на 1 м); б) зимний период (1 - начало зимы, 2 - окончание зимнего периода, конвективное перемешивание распространяется до дна).

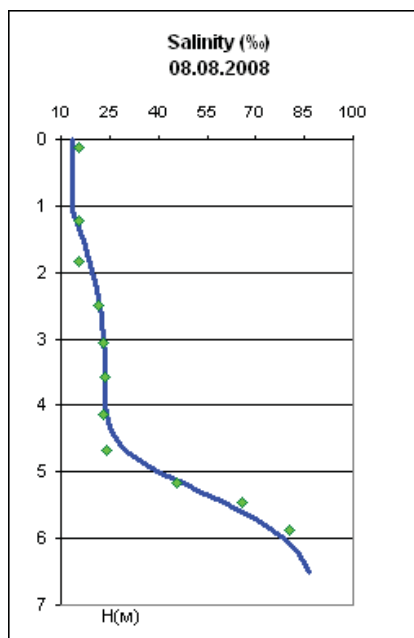


Рис. 3. Вертикальное распределение солености в озере Шунет (точками обозначены измеренные значения, сплошная линия - рассчитанные).

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-05-00552).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белолипецкий В.М., Генова С.Н. Численное моделирование годовой динамики вертикальной структуры соленого озера, Вычислительные технологии. 2008. Т.9. №4. С. 34-43.
- [2] Genova S.N., Belolipetskii V.M., Rogozin D.Y., Degermendzhi A.G. A one-dimensional model of vertical stratification of Lake Shira focussed on winter conditions and ice cover, Aquat Ecol, 2010. 44. P. 571-584.



## MATRIX REPRESENTATION OF TETRAHEDRAL EDGE FLOWS

The impuls, which flows on an edge of a tetrahedron, divides at a vertex into two edge flows. Matrix representation of such process is presented. Distributon of excitations at the vertices is characterised by a Fibonacci like recurrence relation. The propagation defines a kind of genetic evolution process. General case of  $n$ -dimensional simplex is also considered.

### Introduction

Let  $E_n = \mathfrak{R}^n$  be  $n$ -dimensional Eclidean space. A convex envelope of vectors is defined by

$$\text{conv} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \} := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i : \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

Let  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$  be orts. The  $(n-1)$ -dimensional simplex is a convex envelope of orts [1]

$$\Delta_{n-1} := \text{conv} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}.$$

For the firt case, consider the 3-dimensional simplex i.e. a tetrahedron

$$\Delta_3 := \text{conv} \{ A, T, G, C \},$$

which is spanned over the orts

$$A = \vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad T = \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad G = \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad C = \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

We identify a vector with its end point.

### TETRAHEDRAL FLOWS

Let an unit impuls  $I$  starts at some vertex pointed by some  $\vec{e}_i$ , where  $1 \leq i \leq 4$ . The impuls flows towards a vertex  $\vec{e}_j$ , where  $j \neq i$ , without any loses of intensity. At the vertex  $\vec{v}_j$  the impuls  $I$  divides into two flows going towards vertices  $\vec{v}_k$  and  $\vec{v}_l$ , where  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . At vertices  $\vec{v}_k$  and  $\vec{v}_l$  we obtain two impulses of intensity  $I/2$ . The process of propagation and division continues. For the sake of simplicity, at this moment, we suppose that intensity of the impuls does not divides at vertices.

In this paper we consider a combinatorial problem of determination of propagation i.e. distribution of impulses over vertices of the tetrhedron  $\Delta_3$  through the time. One can consider this propagation as an evolution combinatorial process going on an complete graph over four vertices [2].

Let  $V_4 = [v_{ij}]_{4 \times 4}$  be a matrix of scintilations of vertices  $\vec{e}_j$ , where  $1 \leq j \leq 4$ , of a tetrahedron  $\Delta_3$ . An element  $v_{ij}$ , where  $1 \leq i \leq 4$ ,  $1 \leq j \leq 4$ , is a nonnegative integer which indicates a number of impulses detected at the vertex  $\vec{e}_j$  which come from the vertex  $\vec{e}_i$ . Of course,  $v_j$  is a number of impulses i.e. intensity of impulses on oriented edge  $\vec{v}_i \vec{v}_j$  of tetrahedron.

Suppose that some impuls  $I$  originates at vertex  $\vec{e}_1$ , and let  $I$  flows towards the vertex  $\vec{e}_2$ . At  $\vec{v}_j$  where impuls  $I$  divides into two halves, and farther propagates along the edges of tetrahedron. The process is described by a sequence of matrices of scintilations of edges

$$V_4^{(n)} = [v_{ij}^{(n)}]_{4 \times 4}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

<sup>1</sup> University of Novi Sad, TF Mihajlo Pupin, Zrenjanin, Serbia

The beginning of this sequence is

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 14 & 11 & 11 \\ 12 & 0 & 14 & 14 \\ 7 & 11 & 0 & 8 \\ 7 & 11 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 14 & 19 & 19 \\ 22 & 0 & 25 & 25 \\ 22 & 13 & 0 & 25 \\ 22 & 19 & 25 & 0 \end{bmatrix}, \dots
 \end{aligned} \tag{1'}$$

**Proposition.** The elements  $v_j^{(n)}$  of matrices of scintilations  $V_4^{(n)}$  related by the equality

$$v_{ij}^{(n+1)} = (1 - \delta_{ij}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 v_{ki}^{(n)}, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq 4, \tag{2}$$

where  $\delta_{ij}$  is a Kronecker delta symbol.

**Notice.** Since  $v_{ii} = 0$ , for all  $1 \leq i \leq 4$  and  $n \geq 1$ , the sums in (2) contain at most two nonzero addends.

**Proof of Proposition.** Formula (2) can be simplified

$$v_{ij}^{(n+1)} = v_{pi}^{(n)} + v_{qi}^{(n)}, \quad \{i, j, p, q\} = \{1, 2, 3, 4\}. \tag{2'}$$

$v_{ij}^{(n+1)}$  is a number of impulses flowing from vertex  $v_i$  towards vertex  $v_j$ , at iteration  $n+1$ ,

$v_{pi}^{(n+1)}$  is a number of impulses flowing from vertex  $v_p$  towards vertex  $v_i$ , at iteration  $n$ ,

$v_{qi}^{(n+1)}$  is a number of impulses flowing from vertex  $v_q$  towards vertex  $v_i$ , at iteration  $n$ .

Hence, the relation (2') can be easily derived from next tree of vertices



The sums of elements of columns of a matrix of scintilations of edges  $V_4^{(n)}$  (cf. (1)) compose a vector  $S_4^{(n)}$  of scintilations  $s_j^{(n)}$  of vertices  $v_j$

$$S_4^{(n)} := (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}, s_4^{(n)}), \quad s_j^{(n)} = \sum_{i=1}^4 v_{ij}^{(n)}, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

It is convenient to take  $S_4^{(0)} = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ , and consequently, e.g.  $V_4^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Lemma.**  $\sum_{i,j=1}^4 v_j^{(n)} = \sum_{j=1}^4 s_j^{(n)} = 2^{n-1}$ ,  $n \geq 0$ .  $\square$

Summing of columns in (1') gives the sequence of scintilations of vertices

$$\begin{aligned}
 & (\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 1), (2, 4, 1, 1), (2, 4, 5, 5), (10, 4, 9, 9), (18, 20, 13, 13), \\
 & (26, 36, 33, 33), (66, 52, 69, 69), (148, 132, 121), (252, 276, 253), \dots
 \end{aligned}$$



meanwhile tetrahedron has four vertices. The recurrence (3) is a recurrence of Fibonacci type - which has biological model. The general case of  $n$ -dimensional simplex i.e.  $n$ -complete graph. We obtained an connection between  $n$ -complete graph and binar trees which are developed over the graph.

#### LITERATURE

- [1] Moon J.W. Topics on Tournaments, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1968
- [2] Valentine F.A. Convex sets, Robert E. Krieger Publishing Company, New York, 1976.

## КОРРЕКЦИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ РЕГИСТРАЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

---

*To correct image distortion caused by moving registration system the background component estimation by averaging of current frame and previous and next frames with per-pixel motion compensation taking into account vectorial fields of local displacements is proposed. Efficiency of this method and methods based on estimation of picture displacement (as a whole, using correlation or blocks voting) by example of low-sized dynamic objects detection is investigated. It is shown that using of suggested approach results in more effective suppression of background in differential frames.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

В основу алгоритмов обнаружения динамических изменений на поверхности Земли положено, как правило, определение фоновой составляющей изображений и ее вычитание из кадров видеоряда. Так в [1] предложен оптимальный в статистическом смысле алгоритм реального времени, адаптивный к изменениям содержания сцены и условий наблюдения. В [2] рассматривается алгоритм обнаружения точечных динамических объектов при движении камеры, основанный на оценке геометрических искажений фона в виде сдвига с помощью разложения яркости изображения в ряд Тейлора.

Данный класс алгоритмов показал свою перспективность при анализе последовательностей изображений со стационарным или медленноменяющимся фоном (смещение фона между кадрами не превосходит величины шага дискретизации). Однако при обработке изображений с подвижных камер необходимо выделять отличия между кадрами видеоряда с учетом возможности существенного изменения поля зрения [3,4].

В настоящее время широкое распространение получили два подхода к оценке параметров преобразований фона. Первый из них основан на вычислении межкадровой корреляции и использует некоторую центральную область каждого кадра, чтобы найти величины вертикальных и горизонтальных сдвигов изображения сцены в текущем кадре относительно

предыдущего. Для определения угла поворота используются несколько периферийных областей. Второй подход основан на оценке и последующем анализе величин смещения каждого небольшого фрагмента (блока) для определения параметров преобразования изображения, удовлетворяющих большинству из набора полученных векторов локального движения (далее будем называть данную процедуру голосованием блоков).

Однако на практике не редко возникают ситуации, когда данные методы оказываются малоэффективными. Это может быть связано со значительным изменением фоновой составляющей изображений от кадра к кадру, с наличием изотропных или периодически повторяющихся фрагментов. Еще более сложная ситуация возникает, если параметры движения фона на отдельных участках наблюдаемой сцены различны, в частности, при наблюдении пересеченной местности или земной поверхности с большим перепадом высот. В таких условиях в последовательности регистрируемых изображений помимо изменений, вызванных движением обнаруживаемых объектов, происходят постоянные смещения различных участков фона, расположенных на разной дальности. Компенсация смещения фона без учета его возможных пространственных искажений в подобной ситуации, очевидно, не позволяет эффективно выделить малоразмерные динамические объекты. Для решения этой проблемы целесообразно использовать поблочную компенсацию деформации фона на основе ана-

---

1 Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

2 Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

лиза предыдущих и/или последующих кадров и полей локальных смещений.

## **МЕТОД ПОБЛОЧНОЙ КОМПЕНСАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ФОНА**

Проблеме оценки локального движения посвящено большое количество работ, например [4,5,6]. В частности разработан метод, позволяющий осуществлять данную процедуру в темпе поступления данных [7]. На стадии анализа, оценивается деформация фона путем сличения блоков и определения векторов движения. Изображения разделяются на малые фрагменты (размерности 8x8 - 16x16 пикселей) и для каждого из них в текущем кадре ищется наиболее подобный блок в предыдущем (или последующем) кадре. Относительное смещение этих фрагментов и определяет вектор движения. Основной мерой подобия является сумма абсолютных разностей (SAD) всех пикселей двух сравниваемых блоков.

При реализации этой процедуры, как правило, применяются иерархические многоуровневые методы анализа изображения (от крупного масштаба к мелкому) с учетом временной и пространственной связности движения. Первоначально определяется набор векторов-кандидатов. За первый из них принимается вектор данного блока в предыдущем кадре. Следующий кандидат - средний вектор для текущего кадра на более крупном масштабе. Третьим, четвертым и пятым являются вектора, полученные для соседних, уже обработанных, блоков данного кадра (при последовательном анализе с верхнего левого угла изображения это левый, верхний и правый-верхний). Последний (шестой) формируется как вектор, компоненты которого равны медианам компонент 3-5 кандидатов. Кандидат с максимальной мерой подобия определяет наиболее вероятное смещение данного блока в текущем кадре, которое далее уточняется путем минимизации SAD по локальной (в пределах нескольких пикселей) зоне.

Полученное поле смещений анализируется с целью устранения ошибок в определении величины и направления отдельных векторов. Так вектора, параметры которых существенно отличаются от соседних, замещаются на соседние. Данная процедура получила назва-

ние фильтрации векторов. Далее вычисляются вектора движения каждого пикселя путем билинейной интерполяции векторов текущего и трех ближайших блоков (с учетом положения пикселя относительно их центров). Затем каждый пиксель предыдущего (последующего) кадра смещается вдоль полученного вектора движения на соответствующую величину, чтобы сформировать компенсированный кадр, соответствующий по времени текущему.

Первоначально подобный метод разрабатывался для преобразования частоты кадров видеопоследовательности путем построения промежуточных интерполированных кадров. В настоящей работе предлагается использовать его для выделения малоразмерных динамических объектов при неизвестном движении фона (или системы наблюдения). Изложенные процедуры в значительной степени позволяют восстановить фоновую составляющую текущего кадра на основе предыдущего (последующего) с попиксельной (а не поблочной) компенсацией движения. В то же время положение малоразмерных объектов на каждом из них будет соответствовать предыдущим (следующим) точкам их траекторий. Действительно, движение таких объектов вследствие незначительных размеров и применения процедуры фильтрации векторов не влияет на результат построения полей смещений и, следовательно, не будет скомпенсировано (размер блоков при построении полей смещений больше размера объектов). Это позволяет оценивать фоновую составляющую (при неизвестных параметрах движения системы наблюдения) путем совместного анализа нескольких последовательных изображений сцены. При этом для снижения уровня шума предлагается вычислять медиану отсчетов, как минимум, пары компенсированных (по движению вперед и назад) и текущего кадров. Вычитание сформированного таким образом кадра из текущего позволяет подавить фон и выделить динамические объекты.

Отметим, что для многих практических задач методы анализа изображений, основанные на расчете векторов смещений, недостаточно эффективны при обработке реальных данных из-за высокого уровня ошибок в определении

направлений и величин векторов. Однако, при обнаружении малоразмерных динамических объектов не требуется высокая точность построения истинных полей смещений, поскольку предлагаемый метод определения блоков с минимальной мерой подобия SAD приводит к тому, что уровень фона в разностном кадре оказывается низким.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОВ КОМПЕНСАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ФОНА

Исследование эффективности различных методов обнаружения малоразмерных динамических объектов осуществлялось на двух модельных последовательностях: со стационарным и динамическим фоном длительностью 100 кадров. В качестве стационарного фона выбрано многоградационное изображение (рис.1), полученное при сканировании земной поверхности (радиометр «Агрос», размерность - 1000x1000 пикселей, градаций яркости - 256,  $\lambda=8-12$  мкм). В качестве динамического фона использована последовательность изображений реальной сцены (размерность - 720x576 пикселей, градаций яркости - 256), зарегистрированных подвижной телевизионной камерой. На эти кадры вносился малоразмерный движущийся объект и случайный аддитивный шум, с последующим смещением изображений последовательности по определенному закону, эмитирующему движение системы наблюдения.

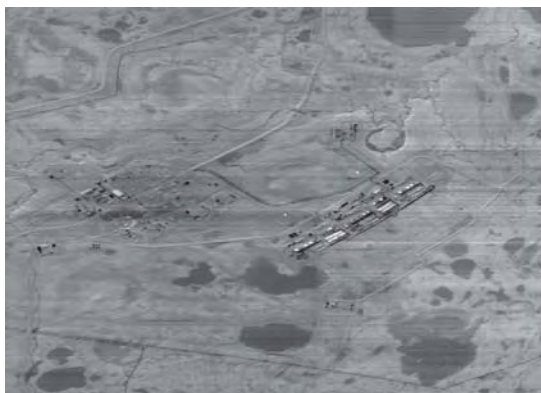


Рис.1. Изображение земной поверхности

Выделение динамического объекта осуществлялось тремя различными методами, рассмотренными выше. Первые два учитывали сме-

щение и поворот изображения как целого (с использованием процедур корреляции или голосования блоков), а в третьем реализована предложенная попиксельная компенсации движения фона на основе анализа полей локальных смещений. Для оценивания эффективности методов определялось количество отсчетов в разностном кадре, превышающих пороговое значение и не соответствующих объекту (количество ложных тревог). При этом порог  $h$  выбирался на уровне 55 единиц градаций яркости исходных изображений (так, чтобы объект выделялся на всех кадрах последовательности).

Результаты обнаружения динамического малоразмерного объекта в каждой из последовательностей с использованием корреляции для оценки общего движения фона при различном уровне СКО шума приведены на рис.2. Видно, что данный метод работоспособен для стационарных изображений в широком диапазоне СКО (вплоть до 0.5h), но, в тоже время, обладает низкой эффективностью в случае динамического фона.

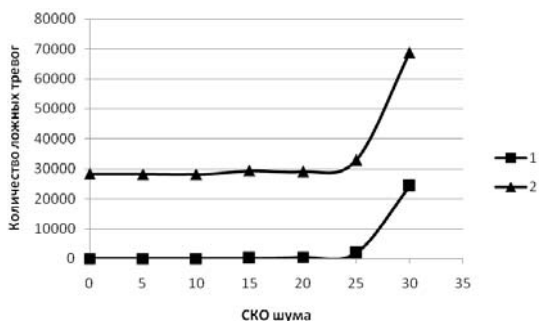
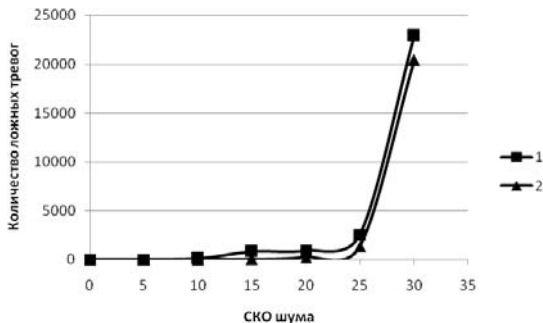


Рис.2. Эффективность выделения малоразмерного динамического объекта на стационарном (1) и динамическом (2) фоне при различном уровне аддитивного шума (с использованием корреляции для оценки общего движения фона)

Результаты выделения динамического малоразмерного объекта на стационарном фоне методами компенсации общего (с использованием голосования блоков) и локального движения для различного уровня СКО шума приведены на рис. 3.

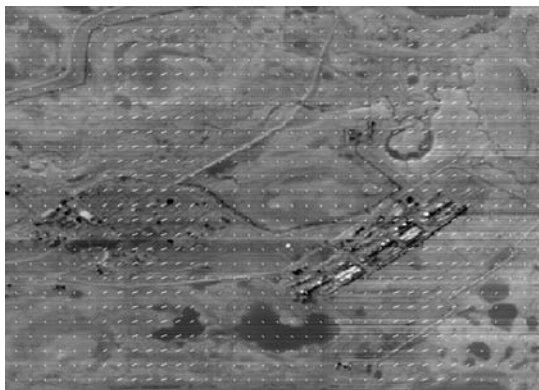
Анализ представленных данных показывает, что, несмотря на отсутствие относительных смещений фрагментов фона, в широком диапазоне изменения СКО шума метод локальной

компенсации движения при выделении динамического малоразмерного объекта обладает определенным преимуществом. Так в диапазоне 10-20 градаций яркости он обеспечивает уменьшения количества ложных тревог как минимум в пять раз.

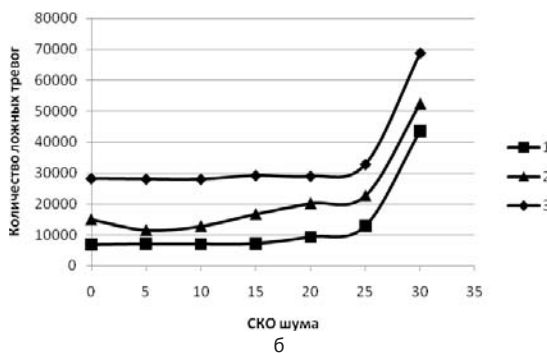
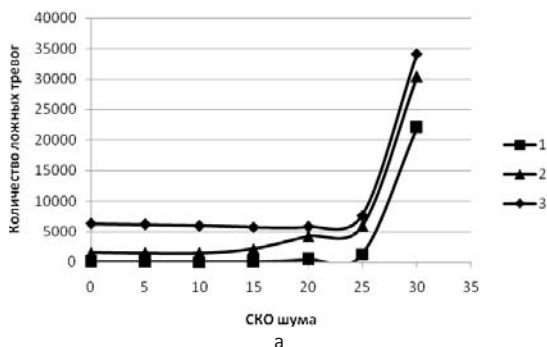


**Рис.3.** Эффективность выделения малоразмерного динамического объекта на стационарном фоне при различном уровне аддитивного шума: 1 - оценка общего движения фона (голосованием блоков), 2 - оценка локального движения

Эффективность данных методов исследовалась также для обнаружения объектов при наличии геометрических искажений фоновой составляющей, вид которых (сжатие и растяжение отдельных зон изображения) продемонстрирован векторами локальных смещений (рис. 4). Подобный тип искажений характерен, в частности, для случая наблюдения горной поверхности из движущегося летательного аппарата. Результаты обработки приведены на рис.5а, где видно, что наличие деформации привело к увеличению количества ложных тревог, однако, при этом, преимущество локального метода компенсации еще более очевидно. Для широкого диапазона изменения шума компенсация локального движения оказалась эффективнее методов компенсации общего смещения как минимум на порядок. На рис.5, б приведены результаты, полученные при использовании в качестве фона последовательности изображений реальной сцены. Характер зависимостей аналогичен, при этом достигнуто снижение количества ложных тревог в 2, 3 раза. Видно, что в обоих случаях применение метода оценки фоновой составляющей, реализующего по-пиксельную компенсацию движения на основе анализа полей локальных смещений, позволило повысить эффективность обнаружения малоразмерного динамического объекта.



**Рис.4.** Поле смещений блоков



**Рис.5.** Эффективность выделения малоразмерного динамического объекта при наличии геометрических искажений изображения (а) и на реальном фоне (б) при различном уровне аддитивного шума: 1 - оценка локального движения, 2 - оценка общего движения (голосованием блоков), 3 - оценка общего движения (с использованием корреляции)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено для обнаружения малоразмерных динамических объектов при неизвестном движении системы наблюдения оценивание фоновой составляющей осуществлять на основе усреднения текущего и компенсированных по движению кадров, сформированных с уче-



том полей локальных смещений фрагментов (блоков). Проведено исследование эффективности методов обнаружения динамических малоразмерных объектов, основанных на оценивании смещения и поворота изображения как целого, и метода, реализующего попиксельную компенсацию локального движения.

Показано что при применении предложенного подхода, вычитание усредненного и текущего кадров приводит к подавлению не только стационарного, но также в значительной степени и нестационарного фона, при условии, что он представлен крупными зонами, деформирующимися или смещающимися как целое относительно друг друга. Компенсация локального движения при выделении динамического малоразмерного объекта в широком диапазоне изменения уровня шума позволила снизить количество ложных тревог в пять раз на стационарном фоне и как минимум на порядок при наличии геометрических искажений. При использовании в качестве фона реальной динамической сцены достигнуто снижение этого параметра в 2, 3 раза.

Следует отметить, что при близких характеристиках искомым объектов и пространственно-временного шума в результате предложенной процедуры происходит также выделение элементов шума. В этом случае с целью повышения эффективности обнаружения объектов целесообразно проследивать их траектории по последовательности изображений.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-07-00202, №11-07-12083-офи-м-2011).

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Иванов В.А., Киричук В.С. Выделение движущихся объектов по последовательности изображений в реальном времени. *Автометрия* 2009. Т 45. №5. С.14-21.
- [2] Киричук В.С., Шакенов А.К. Обнаружение точечных динамических объектов, регистрируемых движущейся камерой. *Автометрия* 2004. Т 40. №1. С.3-14.
- [3] Horn B.K.P. and Schunck B.G. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*. V 17. 1981. P.185-203.
- [4] Murray D. and Basu A. Active tracking. *Proc. 1993 IEEE/RSJ Int. Conf. in Intelligent Robot and Systems Yokohama, Japan*. V 2. 1993. P.1021-1028.
- [5] G. de Haan and H. Huijgen. New Algorithm for Motion

Estimation. *Signal Processing of HDTV*. Vol. II. L. Chiariglione (Ed.). Elsevier Science Publishers. 1990. P. 109-116.

- [6] G. de Haan and H. Huijgen. Motion Estimation for TV Picture Enhancement. *Signal Processing of HDTV*. Vol. III. H. Yasuda and L. Chiariglione (Eds.). Elsevier Science Publishers. 1992. P. 241-248.
- [7] R.A. Braspenning and G. de Haan. True-motion estimation using feature correspondence. *SPIE. Proceedings of VCIP*. 2004. P. 396-407.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛИНДРУ

*Flows of a viscous liquid film on the outer surface of a vertical cylinder are considered. In the case of small flow rates and large radius of the cylinder the study of wave perturbations is reduced to analysis of solutions of a non-linear evolution equation for film thickness. It has a countable set of families of stationary traveling solutions. Most of them are in turn unstable to two- and three-dimensional perturbations. For this reason, the evolution of initial perturbations differs significantly in the different regions of the parameter values. The paper presents some typical scenarios of evolution of perturbations. Special cases are the initial perturbations with certain symmetries. These symmetries are stored in the process of evolution. In these cases the solutions are attracted to the stationary traveling solutions possessing the same symmetries.*

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к волновым режимам стекающих пленок вязких жидкостей, начиная с пионерских экспериментов П.Л. Капицы [1], не ослабевает у многих исследователей до сих пор. Уже при достаточно малых числах Рейнольдса, вследствие неустойчивости течения пленки с плоской свободной границей, на ее поверхности возникает сложная волновая картина. Относительно простое ламинарное течение волновой пленки демонстрирует большое разнообразие как регулярных, так и хаотичных волновых режимов. Использование при их изучении различных теоретических подходов позволяет получать интересные упрощенные модели, которые в то же время обладают достаточной универсальностью, так как появляются и в других разделах физики. В силу этого вязкие пленки жидкости можно классифицировать как уникальные объекты для изучения фундаментальных закономерностей развития нелинейных волновых структур.

Как показывает большинство экспериментов, зарождающиеся двухмерные волны очень быстро становятся трехмерными и нерегулярными. Поэтому с физической точки зрения даже при изучении двухмерных волновых режимов нужно проводить исследование их на устойчивость к трехмерным возмущениям. Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию волновых режимов на поверхности жидкости, в настоящее время трехмерные волновые режимы в стекающих пленках изучены далеко недостаточно.

## МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование трехмерных волновых режимов, возникающих на поверхности пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру. В случае малых расходов и больших сил поверхностного натяжения эту проблему можно свести к исследованию одного уравнения для толщины пленки. В [2] при этих предположениях для цилиндров больших радиусов было получено одно нелинейное уравнение, которое для случая возмущений малой, но конечной амплитуды, описывает эволюцию отклонения толщины пленки от невозмущенного уровня. После некоторых преобразований это уравнение записывается в виде [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S^4 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H = 0 \quad (1)$$

1 Новосибирский государственный университет

2 Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

3 Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН, Новосибирск, Россия

$$S = L / R = 1 / (1 + 0,8 \text{Re} / \text{We} \delta_0^2)^{1/2} < 1$$

Здесь  $\text{Re} = V_0 h_0 / \nu \sim 1$  - число Рейнольдса,  $\text{We} = \sigma / \rho g h_0^2 \sim 1 / \varepsilon^2$  - число Вебера,  $h_0$  - толщина невозмущенной пленки,  $R$  - радиус цилиндра,  $L$  - характерный масштаб возмущений,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения,  $x$  - аксиальная цилиндрическая координата, ее направление совпадает с направлением вектора силы тяжести,  $\varphi$  - азимутальная цилиндрическая координата,  $\tau$  - безразмерное и преобразованное время, функция  $H$  - трансформированное определенным образом, безразмерное отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Предположение об использовании цилиндров больших радиусов, означает, что справедливо неравенство  $\delta_0 = h_0 / R < 1$ . Полагается также, что выполнено условие длинноволновости возмущений, т.е. характерная длина возмущений свободной поверхности много больше толщины пленки -  $\varepsilon = h_0 / L < 1$ . Характерная скорость  $V_0 = g h_0^2 / 2\nu$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  равна скорости поверхности пленки при безволновом режиме течения.

Уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью нейтральных аксиально-симметричных возмущений. В результате проведенных преобразований оно содержит один варьируемый параметр  $S$ , характеризующий геометрию цилиндра.

Из линейного анализа устойчивости тривиального решения  $H \equiv 0$  уравнения (1) к возмущениям вида

$$H \sim \exp(i\alpha(x - c\tau)) \{ \exp(i n_\varphi \varphi) + \exp(-i n_\varphi \varphi) \} + K.C. \quad (2)$$

следует, что оно неустойчиво, если волновые числа  $(\alpha, n_\varphi)$  удовлетворяют условию

$$\alpha^2 + S^4 n_\varphi^2 - (\alpha^2 + S^2 n_\varphi^2)^2 > 0 \quad (3)$$

В выражении (2)  $\alpha$  - компонента волнового числа в направлении оси  $x$ ,  $n_\varphi$  - азимутальная компонента волнового числа. Из физических соображений, очевидно, что  $n_\varphi$  принимает только целочисленные значения.

Из неравенства (3) следует, что неустойчивые волновые числа лежат внутри конечных интервалов  $(\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2})$ .

Таким образом, для фиксированного значения  $S$  область неустойчивости представляет собой дискретный набор интервалов для волновых чисел  $\alpha$ , соответствующих  $n_\varphi = 0, 1, 2, \dots$ . Число таких интервалов и их размеры зависят от конкретных значений  $S$ . Так, из формулы (4) следует, что при заданном  $n_\varphi \geq 1$  соответствующий интервал неустойчивых волновых чисел  $\alpha$  существует, если значения параметра  $S$  удовлетворяют неравенству

$$S < S_c(n_\varphi) = \sqrt{(n_\varphi - \sqrt{n_\varphi^2 - 1}) / 2n_\varphi} \quad (4)$$

Из неравенства (4) следует, что при  $S > S_c(1) \approx 0.707$  тривиальное решение  $H \equiv 0$  устойчиво по отношению ко всем пространственным возмущениям вида (2). В этом случае могут нарастать только аксиально-симметричные возмущения с  $n_\varphi = 0$  и волновыми числами  $\alpha < 1$ .

## МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Метод численного нахождения стационарно-бегущих решений ( $H(x, \varphi, \tau) = H(\xi, \varphi)$ ,  $\xi = x - c\tau$ ,  $c$  - фазовая скорость волны) уравнения (1) подробно описан в [4]. Отметим здесь, что фазовая скорость  $c$  является собственным значением задачи и для заданных волновых чисел может принимать только дискретный набор значений.

Метод исследования устойчивости стационарно-бегущих решений  $H(\xi, \varphi)$  и использования этих результатов для анализа бифуркаций, т.е. ветвления новых решений, вполне аналогичен, изложенному в работах [5,6]. Поэтому поясним его здесь кратко на примере аксиально-симметричных решений  $H = H(\xi)$ . Пусть  $H_0(\xi)$  - периодическое решение уравнения (1) с волновым

числом  $\alpha$ . Для исследования его устойчивости подставим в (1)

$$H = H_0(\xi) + h(\xi, \varphi, \tau)$$

и линеаризуем его по возмущению  $h(\xi, \varphi, \tau)$ . Учитывая, что переменные  $\tau$  и  $\varphi$  не входят в уравнение (6) явно, его решение представляется в виде:

$$h(\xi, \varphi, \tau) = \exp(-\gamma t) \{ \exp(in_\varphi \varphi) + \exp(-in_\varphi \varphi) \} h_1(\xi) + C.C. \quad (5)$$

Здесь  $C.C.$  - комплексно сопряженное выражение.

В результате для  $h_1(\xi)$  приходим к обыкновенному линейному уравнению с периодическими коэффициентами. Из теоремы Флоке следует, что физически разумные решения для этого уравнения, ограниченные на бесконечностях, имеют вид:

$$h_1(\xi) = \exp(iQ\alpha\xi)\phi(\xi)$$

где  $\phi(\xi)$  - периодическая функция того же периода, что и  $H_0(\xi)$ ;  $Q$  - вещественный параметр. Таким образом, исследование устойчивости аксиально-симметричных, стационарно-бегущих решений уравнения (1) сводится к изучению при различных значениях  $Q$  и  $n_\varphi$  спектра собственных значений  $\gamma$ , при которых уравнение для  $\phi(\xi)$  имеет периодические решения. Как видно из (5), волна устойчива, если для любых значений  $Q$  и  $n_\varphi$  у всех  $\gamma$  вещественные части  $\gamma_r > 0$ . Новые стационарно-бегущие режимы отвечают от решения  $H_0(\xi)$ , если в некоторой точке  $(\alpha, n_\varphi, Q)$  какое-нибудь из собственных значений  $\gamma$  обращается в ноль:  $\gamma(\alpha, n_\varphi, Q) = 0$ . Если  $\gamma_r(\alpha, n_\varphi, Q) = 0$ , а  $\gamma_i(\alpha, n_\varphi, Q) \neq 0$ , то возможно рождение нестационарных режимов.

Обобщение метода анализа устойчивости на случай пространственных решений очевидно.

Для нахождения нестационарных решений уравнения (1) функция  $H$  представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, \varphi, \tau) = \sum_{n,m} H_{nm}(\tau) \exp(i\alpha nx + imn_\varphi \varphi) \quad (6)$$

После подстановки (6) в уравнение (1) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье-гармоники  $H_{nm}(\tau)$ . Полагая, что все  $H_{nm}(\tau)$  с индексами  $|n| \geq N$ ,  $|m| \geq M$  равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу:

$$\dot{H}_{nm} = -2i\alpha n \sum_{n_1=n-N}^N \sum_{m_1=m-M}^M H_{n-n_1, m-m_1} H_{n_1 m_1} + (\alpha^2 n^2 + n_\varphi^2 S^4 m^2 - (\alpha^2 n^2 + n_\varphi^2 S^2 m^2)^2) H_{nm}$$

$$n = 0, \dots, N; \quad m = 1, \dots, M$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Результаты расчетов стационарно-бегущих волн показывают, что пространственное семейство решений с азимутальным волновым числом  $n_\varphi = 1$  отвечает от тривиального решения  $H \equiv 0$  в окрестности нейтрального волнового числа  $\alpha_n = \sqrt{1 - 2S^2}$ . Это семейство будем называть первым пространственным семейством (семейством  $I$ ). Область неустойчивых волновых чисел  $\alpha$  в этом случае лежит в интервале  $(0, \alpha_n)$ . Для этого семейства зависимость амплитуды решений  $\Delta H = H_{\max} - H_{\min}$  от волнового числа  $\alpha$  и параметра  $S$  представлена в виде поверхности на рис. 1. Из этого рисунка видно, что в случае, когда  $\alpha_n > 0.5$ , первое пространственное семейство непрерывно продолжается внутрь области неустойчивости, и, наоборот, в случае, когда  $\alpha_n < 0.5$ , это семейство продолжается в область устойчивости тривиального решения  $H \equiv 0$  к малым трехмерным возмущениям. При  $\alpha_n = 0.5$  семейство  $I$  вырождается в решение с нулевой амплитудой. Фазовая скорость волн  $c$  этого семейства тождественно равна нулю. Линия  $p$  на рис. 1 является проекцией края поверхности «амплитуд решений  $\Delta H$ » на плоскость  $(\alpha, S)$ . При значениях  $\alpha, S$ , принадлежащих этой линии  $p$ , трехмерные волны семейства  $I$  вырождаются в аксиально-симметричные волны с удвоенным волновым числом  $2\alpha$ . Оказывается, что эти волны принадлежат аксиально-симметричному семейству решений, отвечающему от тривиального решения  $H \equiv 0$  в окрестности точки  $\alpha_n = 1$ . Это семейство в дальнейшем будем называть пер-

вым аксиально-симметричным семейством (семейством  $Ia$ ).

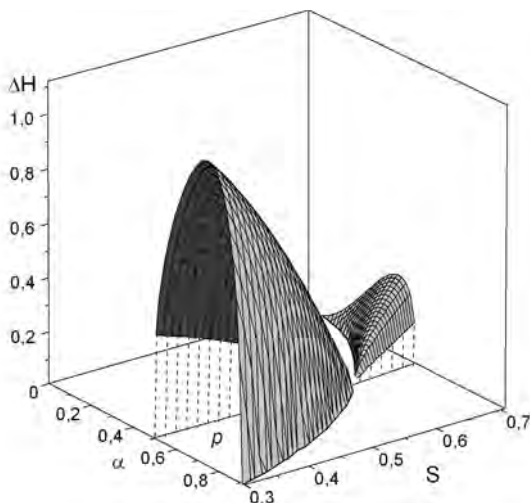


Рис. 1. Зависимость амплитуда решений первого пространственного семейства решений от волнового числа  $\alpha$  и параметра  $S$ .

Решения первого стационарно-бегущего пространственного семейства имеют три симметрии  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые для функции  $H(x, \varphi)$  при определенном выборе начала координат имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 : H(\lambda/2 - x, \varphi) &= -H(x, \varphi) \\ A_2 : H(-x, \varphi + \pi) &= -H(x, \varphi) \\ A_3 : H(x + \lambda/2, \varphi + \pi) &= H(x, \varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\lambda$  - длина волны в направлении оси  $x$ . Если этими симметриями обладает начальное возмущение, то они сохраняются в процессе эволюции так же и у любых функций  $H$ , являющихся решениями уравнения (1). Информация о стационарно-бегущих решениях уравнения (1) позволяет лучше понять особенности эволюции некоторых нестационарных решений. Наиболее полно удастся это сделать в случаях, когда начальные возмущения лежат в области умеренных волновых чисел  $\alpha \sim 0.5 \div 1$ . Это обусловлено прежде всего тем, что в области умеренных волновых чисел имеется лишь несколько стационарно-бегущих семейств решений, каждое из которых можно однозначно охарактеризовать симметриями (7).

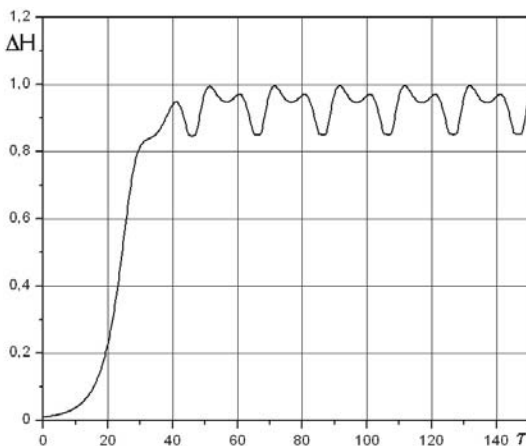


Рис. 2. Зависимость амплитуды от времени для решения, притягивающегося к осциллирующему волновому режиму.  $\alpha = 0.52$ ,  $S = 0.4$ .

В работе представлены типичные примеры различных эволюционных перестроек для таких волновых чисел. С уменьшением волнового числа происходит быстрый рост числа стационарно-бегущих семейств решений, в результате чего поведение нестационарных решений становится существенно более сложным и практически хаотическим.

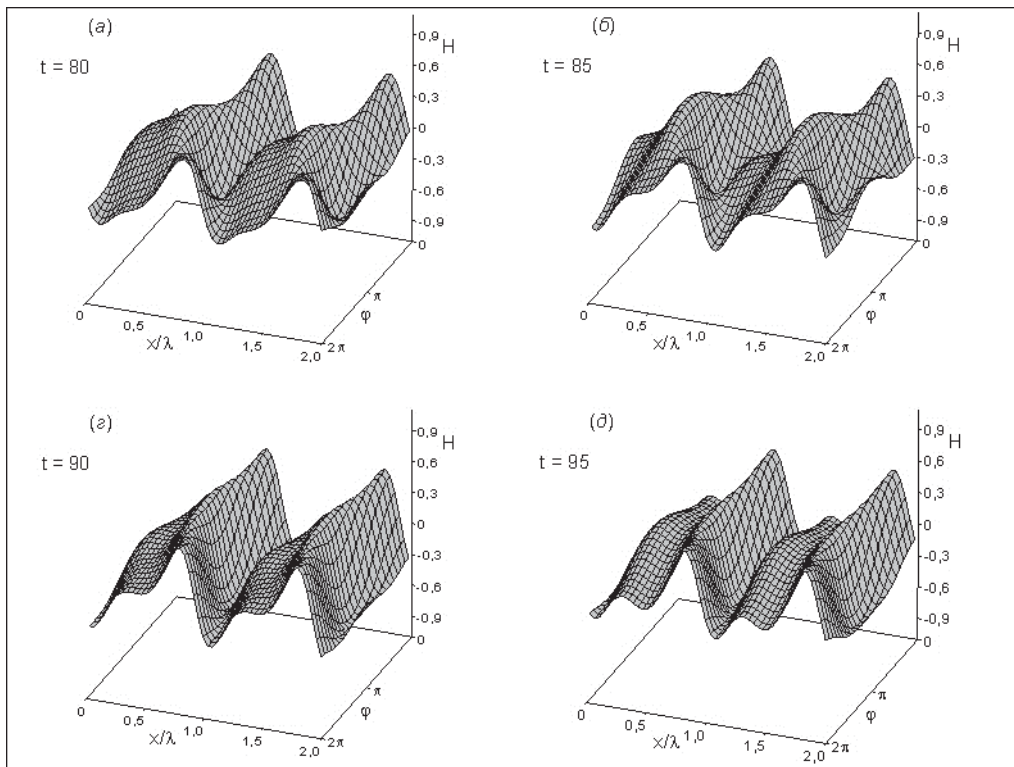


Рис. 3. Профили волн нестационарного решения, представленного на рис. 2.

На рис. 2, 3 приведен пример эволюции начального возмущения к осциллирующей во времени волне. Здесь волновое число  $\alpha = 0.52$ . Такой волновой режим ответвляется от стационарно-бегущего семейства в точке, для которой у одного из собственных значений обращается в ноль  $\gamma_r$ , но при этом его  $\gamma_i \neq 0$ . Как видно из рис. 2, период осцилляций данного волнового режима равен примерно 20 единицам безразмерного времени  $\tau$ . Профили волн такого решения в последовательные моменты времени, принадлежащие одному временному периоду, показаны на рис. 3.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используемые в настоящей статье подходы могут оказаться полезными для изучения широкого класса нелинейных активно-диссипативных эволюционных уравнений в частных производных. Эти подходы заключаются в построении стационарно-бегущих семейств решений, исследованию их устойчивости и проведению с использованием этой информации исследования нестационарных решений.

Представленные результаты демонстрируют, как в области, в которой существует лишь небольшое число стационарно-бегущих семейств решений, удастся выявить и проанализировать типичные сценарии эволюции начальных возмущений. Для рассматриваемого уравнения (1) этот анализ основывается на наличии или отсутствии сохраняющихся в процессе эволюции симметрий исследуемых решений, которыми однозначно классифицируются волновые режимы.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет») и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ. т.18. вып.1. 1948. С.3-28.
- [2] Shlang T., Sivashinsky G.J. Irregular flow of a liquid film down a vertical column. J.Phys. V.43. 1982. P.459-466.
- [3] Цвелодуб О. Ю. Спиральные волны на поверхности пленки, стекающей по поверхности цилиндра. ПМТФ. Т. 35. № 6. 1994. С. 56-63.
- [4] Бочаров А.А., Цвелодуб О.Ю. Волновые режимы течения вязкой пленки, стекающей по вертикальному цилиндру. Изв. РАН. МЖГ. № 2. 2003. С. 176-183.
- [5] Tselodub O.Yu., Trifonov Yu.Ya. On steady-state traveling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media. Physica D. Vol.39. 1989. P.336-351.
- [6] Tselodub O.Yu., Kotychenko L.N. Spatial wave regimes on a surface of thin viscous liquid film Physica D. 1993. Vol. 63. P.361-377.

# MULTICRITERIA DECISION-MAKING ON SITE SELECTION DURING CONSTRUCTION MINI HYDRO POWER PLANTS USING PROMETHEE-GAIA METHODOLOGY

---

*This paper deals with the strategic importance of the location of mini hydro power plants and its impact on business. One of the most important criteria is to reduce the development cost and multipurpose hydropower used. Selection of mini hydro power plants location was carried out using PROMETHEE-GAIA methodology, that is successfully applied in solving the problem of multicriteria decision making. The paper outlined the basic theoretical assumptions of PROMETHEE-GAIA methodology. The calculation was performed using Decision Lab program and an analysis of the results.*

---

## INTRODUCTION

In our country, there are many great locations for building a hydro power plants. Based on the experience from the EU countries, projectants formulated an idea that we need to use hydropotential, in a multipurpose way, i.e. hydropotential should be used for electric power production, but also for tourism development, for flood protection, , for water supply, irrigation, fishing, water recreation etc. In a dynamic of a design realization, priority is given to more profitable part of a system(hydroeneretical objects), where the main goal is that this parts, with their economical effects, enable space design for a touristic purpose, as well as for a space protection.

There are many method, that are developed for decision making. These methods enable mathematical way of problem solving. Because there are many computer softwers, many of these methods are also available in an electronic form, what makes this decision making process even easier. One of these methods is PROMETHEE, and this method is one of the multiatribut decision making methods. The main term in terminology of a multicriteria decision making is an atribut, that has a purpose to provide a means for evaluation of one criteria level. Every alternative is characterized by numerous atributes, that we chose based on criteria that decision maker picked. There are many differences between atributes, but the most important are precision in measuring them and

direction of correlation, between atribut values and usefulness that they give.

## PROMETHEE-GAIA METHOD APPLICATION

Problem about choice of location for mini hydro electric plants building and alternative ranking is not easy at all. Basics of methodological access to planning of building mini hydro electric plants is through individual access to every single object. Condition for investment risk reduction:

- Individually defining of all impacts and restrictions, based on some potential location.
- Including professional teams from different areas, biological, ecological and many other sciences, architecture at the beginning of project elaboration- evaluation and assessment of some project realization opportunities, and defining of conditions under what building is possible.
- Active participating of all subjects, that recognize their interest in those (local government and association, business subjects, non-governmental organization and association,...) from the beginning of project starting.

Mainly, there is no optimal solution, and also, there doesn't exist the best alternative for every criteria. In other words, people don't react in the same way to given criteria. We should take into account a compromise solution, but let it be the best compromise. Recently, there are a few well

---

1 PMF, Niš, Srbija

2 Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica, Srbija



developed decision (*decision aid methods*) i.e support systems in decision making (*decision support systems*), whose role is to help a decision maker in process of the most optimal alternative choice. PROMETHEE I (partial ranking) and PROMETHEE II (complete ranking) methods are well developed by J.P Brans and presented for the first time in 1982. at the conference that was organized at the University Laval Quebec, Canada (L' Ingenierie de la Decision. Elaboration d'instruments d'Aide a la Decision)[1]. During the same year, a few practical application of this method were presented by G. Davignon, and a few years later J.P. Brans and B. Mareschal developed PROMETHEE III i PROMETHEE IV methods. The same authors in the 1988. Suggested vizual interactive modulation GAIA, that represent graphical interpretation of PROMETHEE method, and in 1992. and 1995. year, they suggested two more additions - PROMETHEE V and PROMETHEE VI .

We have many evidenced examples of successful application of this method. PROMETHEE GAIA method found it's application in banking, in industrial location choice, investments, medicine, tourism. The success of these methods we attribute to mathematical properties and individual ease of use.

Practical application of PROMETHEE-GAIA method is presented in the example about choice of location for mini hydro electric plants. Choice of location is done by following eight criteria:

1. Power of the power plant
2. Total installed flow
3. Decrease of river flow
4. Speed of water flow
5. Geology of hydrographical basin
6. Village, industrial and agricultural water supply
7. Flood regulation
8. Ecological impact

$$O = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ 300000 & 300 & 0.85 & 1 & 0.85 & 1000 & 0 & 1 \\ 20000 & 300 & 0.85 & 0.4 & 1 & 1500 & 1 & 1 \\ 40000 & 200 & 0.4 & 0.85 & 0.4 & 900 & 0.85 & 1 \\ 30000 & 200 & 0 & 0.85 & 0.4 & 800 & 0.85 & 1 \\ 250000 & 400 & 1 & 0.4 & 0.4 & 1000 & 0.4 & 1 \\ 300000 & 400 & 0.85 & 1 & 1 & 1100 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

There are six offered location: A, B, C, D, E, F. Values of alternative by given criteria are presented in following equation. Qualitative and quantitative valuation of these attributes, for some location, are presented in following matrix of decision:

Quantification of attributes is done in the following way:

Very bad-0; Good-0.4; Very good-0.85; Great-1.

Type I: Ordinary criterion

Type II: Quasi criterion

Type III: Criterion with a linear preference

Type IV: Level criterion

Type V: Linear preference criterion with an indifference area

Type VI: Gauss criterion

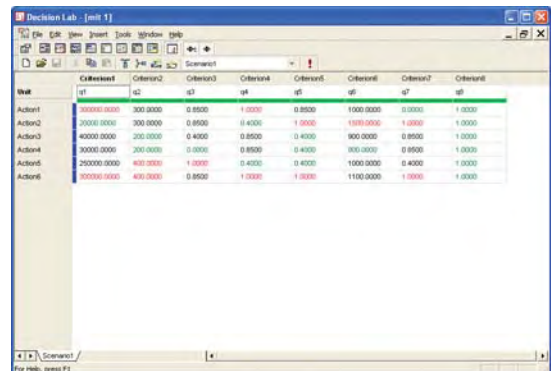
All criteria are assigned an ordinary preference function, i.e an ordinary criterion (type I) based on the table 1, in the following way:

**Table 1.** Preference function, parameters and weights

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	K <sub>7</sub>	K <sub>8</sub>
<b>Tip</b>	I	V	IV	III	IV	II	I	II
<b>m</b>	/	0,2	0,2	/	1,0	3	/	3
<b>n</b>	/	0,5	0,3	2,5	2,0	/	/	/
<b>t</b>	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

### PROMETHEE GAIA analysis

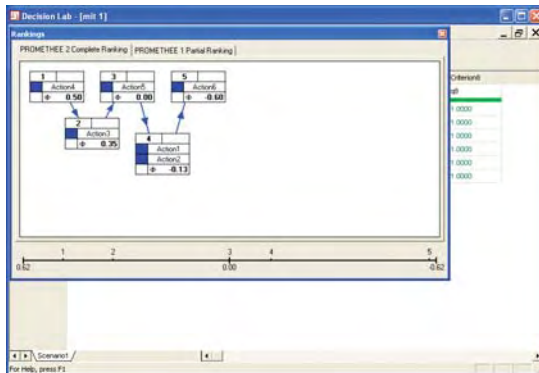
For the calculation, based on this example, we use a Decision Lab software, that can graphically present the alternatives ranking results. Firstly, on the picture 1, there we have the display of the initial (table) data in a given software.



**Fig. 1.** Initial data for alternatives and criteria

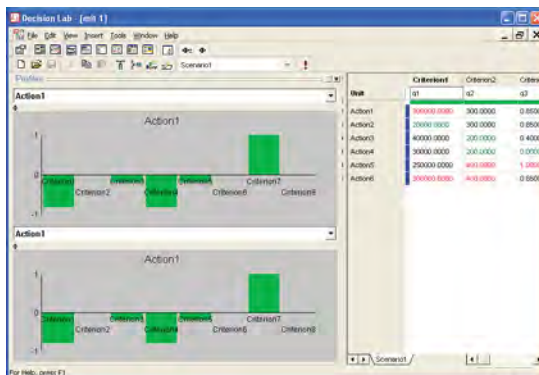
PROMETHEE II method gives decision maker a chance for complete ranking of alternatives, as we

see in a picture 2. Based on this picture, it can be concluded that the complete alternative order is:



Pic. 2. PROMETHEE II ranking

Both methods give decision maker a strong support in problem solving process. Obviously, PROMETHEE I and PROMETHEE II methods do the ranking, based on assigned weighted coefficient. Special software option called „THE WALKING WEIGHTS“ provides a modification of initial weights and also provide us to watch the result modification during the ranking, with the help of PROMETHEE II method (picture 3). In this way, decision maker can simply conduct the sensitivity analysis of derived results.

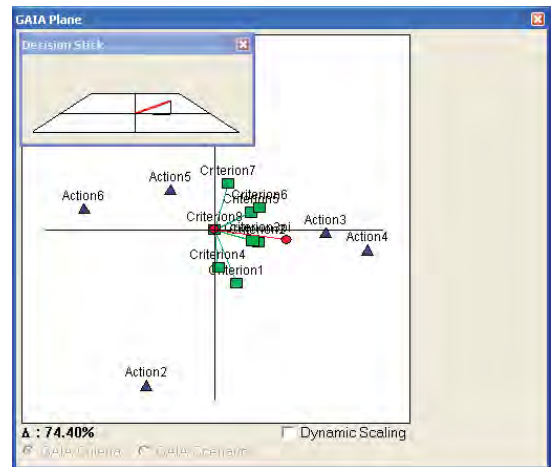


Pic. 3. WALKING WEIGHTS -option that we use in a data sensitivity analysis

Graphical analysis of a derived data can be seen in a picture 4.

The information about complex decision problem that contains k criteria, can be presented in a k-dimensional space. GAIA plane is a plane that is derived through the projection of a overall information in a two-dimensional space. In a GAIA plane, alternatives are represented in by triangles

and the criteria are represented like squares. Conflict criteria characteristics are clearly presented at the diagram. Conflict criteria are oriented in the opposite direction, while criteria that have a similar preferences are oriented in the same direction. As addition in presenting alternative and criteria, weight vectors projection in a GAIA plane has appropriate Pi vector, that shows a direction of a compromise results.



Pic. 4. Alternative graphic ranking (based on derived data)

In this way, the decision maker is allowed to make a decision about choosing an alternative. If weight coefficients are changed, the allocation of alternatives and criteria remain the same, but direction of the decision axis Pi changes.

If Pi vector is longer, then decision axis has strong decision power, i.e. decision maker is given more offered solutions. If vector is shorter, then decision axis is poorer with offered solutions, what means that criteria are very conflict and that the choice of the best compromise is very hard problem. Program provides us using of weighted vector in the form of *decision stick*, because of easier decision orientation in the plane.

PROMETHEE DECISION STICK and PROMETHEE DECISION AXIS provide quality result sensitivity analysis. Before the best compromise choice, the decision maker is recommended a simulation of different weighted coefficients. However, the situation can be easily evaluated in the GAIA plane. Offered alternatives are located in the direction of decision axis. If alternatives and criteria remain the same when PROMETHEE DECISION STICK is

moving, sensitivity analysis is very clear and easy to navigate and select the best compromise.

On the basis of the position of Pi vector in the GAIA plane, we can conclude that the best alternative is alternative 3, and with that conclusion we confirm the choice with PROMETHEE I and PROMETHEE II methods.

## CONCLUSION

In this paper, there are presented theoretical properties of PROMETHEE methods, as well as their application, which is illustrated through the example about choice location for mini hydro power plant. Application of this method is made much easier by using of the software Decision Lab. Using this software, it is very easy and very fast to get final results and it provides detailed display of derived results in graphical way.

Beside great quality, it should be emphasized that success of PROMETHEE method application in decision process depends on following factors:

- possibilities and experiences of decision maker, that his preferences between the alternatives by every considered criteria, express at interval scale.
- decision maker is sure that in the decision process he wants to take into account all relevant criteria and he is aware that derived solution will represent the best compromise between all analyzed criteria.

## ACKNOWLEDGEMENT

This paper was based on research conducted within the Project nr. 042006 funded by the Ministry of Science and Technological Development of the Republic of Serbia.

## REFERENCES

- [1] Prvulović, S., Manasijević, D., Teorija odlučivanja sa primerima, Tehnički fakultet, Bor, 2007.
- [2] Čupić M., Tummala R.V.M., Suknović M., Odlučivanje: formalni pristup, FON, Beograd, 2001.
- [3] Prvulović, S., Tolmač, D., Skladišta podataka kao sistem za podršku odlučivanju, IV Skup Privrednika i Naučnika - Menadžment tehnologije i inovacije, Zbornik radova, p.247-255, FON, Beograd, 2006.
- [4] Brans, J.P., *L'ingenierie de la decision la methode promethee, instruments et perspectives avenir*, p.183-213, Presses del Universitete Lavel, 1982.
- [5] J.P.Brans, B. Mareschal, P. Vincke, Promethee: a new family of outranking methods in multicriteria analysis, *Operational Research '84*, p.477-490, Amsterdam, 1984.
- [6] J.P. Brans and P. Vincke., A preference ranking organisation method: The Promethee method for MCDM management Science, 31(6), p.647-656, 1985.
- [7] J. P. Brans, B. Mareschal, P. Vincke, The Promethee method, *European Journal of Operational Research* 24(2), p.228-238, 1986.
- [8] J.P. Brans and P. Mareschal., The PROMETHEE-GAIA decision support system for multicriteria investigations , *Investigation operativa*, 4(2), p.107-117, 1994.
- [9] Visual Decision, Decision Lab 2000, Multicriteria decision aid software, <http://www.visualdecision.com>

## VIRTUAL MATHEMATICS ENVIRONMENTS FOR LEARNING INTEGRATION

---

*Virtual mathematics learning environments (VMLE) are being created by organizing the learning environment in new ways, based on different technological configurations for learning math and communicating between students and teachers. The dynamic nature of integration, could be in a conjunction with dynamic method of visualization. Although VMLE provides multiple representations of mathematical objects, it can help students to discover connections between mathematical objects and their graphical representation. The contribution of this paper is that new trends in technology and learning are shown in the integration field. The aim of this paper is to show how concepts of dynamic geometry can be applied for topics in integration (Riemann sum, Simpson's rules, Trapezoidal rule, approximation of areas,...) with suggested software tools.*

---

### INTRODUCTION. POTENTIAL OF TECHNOLOGY FOR MATHEMATICS INSTRUCTION

Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning. [14]

Technology environments allow teachers to adapt their instruction and teaching methods more effectively to their students' needs. Additionally, students can develop and demonstrate deeper understanding of mathematical concepts and are able to deal with more advanced mathematical contents than in "traditional" teaching environments. [1],[2]

Technology helps students to "visualize certain math concepts better" and that it adds "a new dimension to the teaching of mathematics". Teachers should support students developing these skills and provide attractive opportunities to enrich learning.

New applications of technology have the potential to support learning across the curriculum and allow effective communication between teachers and learners in ways that have not been possible before.

A virtual learning environment (VLE) is a system that creates an environment designed to facilitate teachers in the management of educational courses for their students, especially a system using computer hardware and software, which involves distance learning. [17]

The system can often track the learners' progress, which can be monitored by both teachers and learners. While frequently thought of as primarily tools for distance education, they are most often used to supplement the face-to-face classroom. [18]

The main focus of the paper is applets; small computer programs that run over the internet. The applets are small interactive learning tools which students can use for several purposes, such as to explore a problem situation, to discover a representation or a concept, to construct and explore 3D-objects, or to practice a skill. [20]

The Java applets as parts of VLEs can be divided into two classes: model applets, which help to develop mathematical understanding (concepts), and exercise applets, which support the development of mathematical skills.

Model applets have an open structure in order to allow students to work on the basis of their own ideas and to experiment freely. Exercise applets, on the other hand, have a more closed structure. In exercise applets, a number of tasks of certain type are given to the students, their work is checked and feedback is provided. [19]

---

<sup>1</sup> High Business Technical School of Vocational Studies, Uzice, Serbia

In this paper we will only briefly present the work realized with model applets as instructional modules of VLE.

### NUMERICAL APPROXIMATIONS OF AREA

In the high school mathematics concept of definite integral  $\int_a^b f(x)dx$  is almost introduced as the Riemann integral, which is always defined in terms of Riemann sums, and its geometric interpretation. In a calculus class integration is introduced as “finding the area under a curve”, i.e. we instead want to think of “integration” as more sophisticated form of summation. For many high school students, this definition is hard to understand without visualization through adequate mathematical software.

The basic problem considered by numerical integration (quadrature) is to compute an approximate solution to a definite integral. There are several reasons for applying numerical integration.

A formula for the integrand may be known, but it may be difficult or impossible to find an anti derivative using normal algebraic integration. In this case, integral of a function cannot be expressed with elementary functions, i.e. polynomial, trigonometric, exponential, logarithmic, or a suitable combination of these.

It may be possible to find an anti derivative symbolically, but it may be easier to compute a numerical approximation than to compute the anti derivative.

A large class of quadrature rules can be derived by constructing interpolating functions which are easy to integrate. Typically these interpolating functions are polynomials.

### JAVA APPLETS IN THE FUNCTION OF RIEMANN SUMS

An integral can be approximated as a sum in many ways. The simplest numerical approximations to the definite integral  $\int_a^b f(x)dx$  are the left and right Riemann sums. The Riemann sum approximates the area between the graph of a function and the  $x$ -axis as a sum of areas of rectangles. At first, it is absolutely essential that student understand how to construct a Riemann Sum and its geometrical interpretation.

Let  $f(x)$  be a function that is continuous on the interval  $a \leq x \leq b$ . The interval  $[a, b]$  has been split into  $n$  smaller intervals all with width  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , and where endpoints of each intervals are  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $x_i = a + i\Delta x$ ,  $i = 1, n-1$ .

The left  $L_n \approx \int_a^b f(x)dx$  and right Riemann sum  $R_n \approx \int_a^b f(x)dx$  is defined as

$$L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x, \quad R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Each term in the sum is the product of the value of the function at a given point, and the length of an interval. Consequently, each term represents the area of a rectangle with height  $f(x_i)$  and width  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ .

If we take the limit as  $n$  approaches infinity and  $\Delta x$  approached zero, we get the exact value for the area under the curve represented by the function. This is called the definite integral (note that in the limit as  $n$  approaches infinity, the left-hand and right-hand Riemann sums become equal) and is written as:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \right)$$

Since they are difficult to evaluate by hand when  $n$  (the number of smaller intervals) is big, it would be nice to find out how to do this using applets.

The purpose of the applet below is to demonstrate how Riemann sums approximate the value of a definite integral. The applet is designed for a visual exploration of Riemann sums and helps develop the visual intuition of this mathematical concept. Experimenting on a computer with the approximation for finding the area using rectangles is fascinating. As the number of rectangles increases, the approximation improves.

The applet usually allows to experiment with Riemann sums and approximating the area between the x-axis, the graph of  $y = f(x)$ , the vertical lines  $x = a$  and  $x = b$ . The user gets to specify the function  $y = f(x)$ , the values of  $a$ ,  $b$  and the number  $n$  of subintervals  $[a, b]$  is to be divided into. The user also specifies what kind of Riemann sum is to be used. The applet will then draw the graph of the function, and the rectangles corresponding to the partition and the kind of Riemann sum being used.

On the address [3] the applet shows a graph of a portion of a hyperbola defined as  $f(x) = 1/x$ , i.e.  $\int_1^5 \frac{1}{x} dx$ .

Student can increase the intervals to 4, 10, 100, then 1000 and watch what happens to the left and right estimates. This Java applet allows users to see a visual representation of numerical approximations for the area under a sample curve (see figure 1).

For  $n = 4$ ,

$x_i$	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	1	1/2	1/3	1/4	1/5

$$L_4 = \sum_{i=0}^4 f(x_i) \Delta x = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4) \cdot 1 \approx 2.0833$$

$$R_4 = \sum_{i=1}^5 f(x_i) \Delta x = (1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5) \cdot 1 \approx 1.2833$$

For comparison, the exact value of the integral is  $\int_1^5 \frac{1}{x} dx = \ln 5 \approx 1.6094$ .

Thus, for  $n = 4$  the left- and right-hand Riemann sums give poor approximations.

Figure 1 below illustrates the link between left- and right-hand Riemann sums and monotony of function  $y = f(x)$ .

By using applet student can easily introduced some geometrical principles i.e. when  $y = f(x)$  is decreasing ( $R_n$  is an underestimate and  $L_n$  is an overestimate) (see figure 1),

$$R_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq L_n,$$

and when  $y = f(x)$  is increasing ( $L_n$  is an underestimate and  $R_n$  is an overestimate)

$$L_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq R_n.$$

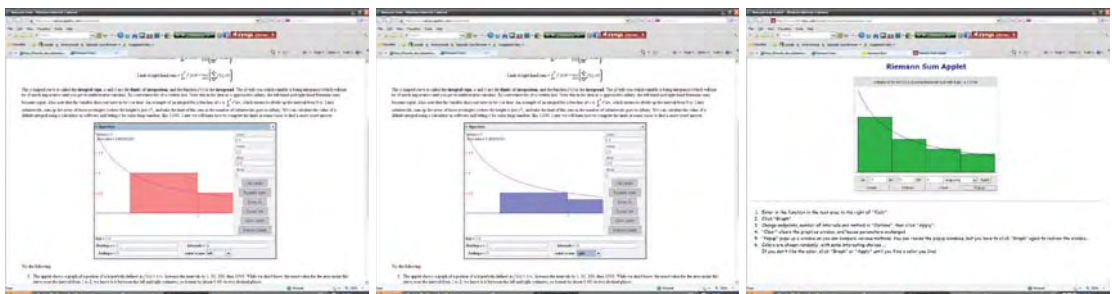


Fig.1.

If we select the interval division point to be mid-points  $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ ,  $i = 1, n$ , we obtain midpoint approximation given by  $M_n = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot \Delta x$ , i.e.  $M_n \approx \int_a^b f(x) dx$ .

For  $\int_1^5 \frac{1}{x} dx$  and  $n = 4$ ,

$x_i$	1.5	2.5	3.5	4.5
$f(x_i)$	2/3	2/5	2/7	2/9

$$M_4 = \sum_{i=1}^5 f(x_i) \Delta x = (2/3 + 2/5 + 2/7 + 2/9) \cdot 1 \approx 1.5746$$

We can conclude that midpoint rule approximates with rectangles on each subdivision that are partly above and partly below the graph, so the errors tend to balance out.

Figure 1 show  $L_4, R_4, M_4$  for  $n = 4, a = 1, b = 5$ , and  $f(x) = 1/x$ .

Note that if the graph of  $f(x)$  is concave up on  $[a, b]$  then  $M_n$  is an underestimate of  $\int_a^b f(x) dx$  since the midpoint rectangle and the trapezoid constructed by drawing the tangent line to the graph at the midpoint have the same area since the triangles ABC and CEF are equal. (See Figure 2) [15]

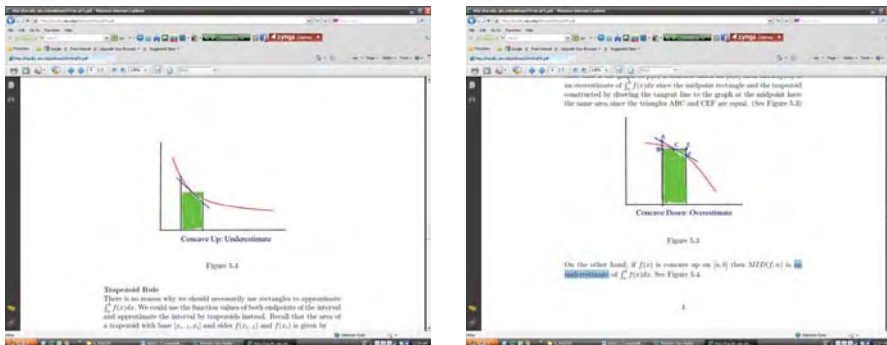


Fig. 2.

On the address [4], [5], [7], [8] are located javascript applets for further introducing Riemanns sums on interactive ways.

## AN INTERACTIVE APPROACH TO TRAPEZOIDAL RULE AND SIMPSON'S RULE

Trapezoidal approximation results from averaging the approximations  $L_n$  and  $R_n$ , given by

$$T_n \approx \int_a^b f(x) dx, T_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta x = \frac{L_n + R_n}{2}$$

$$\text{For } \int_1^5 \frac{1}{x} dx \text{ and } n = 4, T_4 = \sum_{i=1}^5 \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta x = \frac{L_4 + R_4}{2} \approx 1.6833$$

This answer is fairly close to the exact answer.

A graphical approach of the trapezoidal integration rule is given in this example (see figure 3, [10]). The reason for this name can be seen from Figure 3, where is given Trapezoidal Rule for  $n = 4, a = 1, b = 5$ , and  $f(x) = 1/x$ .

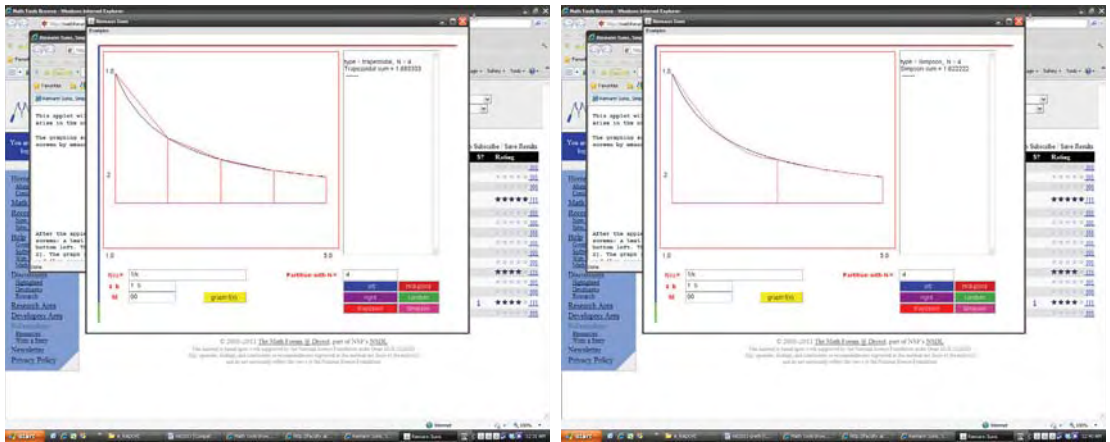


Fig. 3.

Note that if the graph of  $y = f(x)$  is concave up then the area of each trapezoid is larger than the area under the graph so that  $T_n$  is an overestimate of  $\int_a^b f(x)dx$ . Similarly, if the graph of  $y = f(x)$  is concave down then the area of each trapezoid is smaller than the area under the graph so that  $T_n$  is an underestimate of the  $\int_a^b f(x)dx$ .

It follows from the above discussions that:

(i) If  $y = f(x)$  is concave up and increasing on  $[a, b]$  then

$$L_n \leq M_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq T_n \leq R_n$$

(ii) If  $y = f(x)$  is concave up and decreasing on  $[a, b]$  then

$$R_n \leq M_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq T_n \leq L_n.$$

Simpson's rule approximates a definite integral over an interval by partitioning the interval into an even number of subintervals, approximating the given function on consecutive pairs of subintervals by quadratic functions, and then computing the integral corresponding to the quadratic functions. [11],[12],[13] (see figure 3) In Simpson's Rule, we use parabolas to approximate each part of the curve. Let us consider a dividing the default interval  $[a, b]$  into  $n$  ( $n$ -even number) subintervals, where

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad n = 2k, \quad a \leq x_0 \leq x_2 \leq x_4 \leq \dots \leq x_{n-2} \leq x_n = b \quad \text{and} \quad x_{2i-1} = \frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}.$$

In Simpson formula we use quadratic approximation instead of the linear approximation of some function.

Some function  $y = f(x)$  on the interval  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  would be approximated with quadratic parabola,  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , which passes through three neighboring points  $(x_{2i-2}, y_{2i-2}), (x_{2i-1}, y_{2i-1}), (x_{2i}, y_{2i})$ . Definite integral of the parabola  $p(x) = ax^2 + bx + c$  on the interval  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  is equal to the

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{\Delta x}{3} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

Finally, summing the integral for  $i = 1, \dots, n$ , we get Simpson formula



$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n) \quad , \quad S_{2n} = \frac{T_n + 2M_n}{3}$$

The Trapezoidal Rule is an improvement over using rectangles because we used straight lines to model the curve. In Simpson's Rule, we use parabolas to approximate each part of the curve, which is very efficient. After working through these materials, the student should be able to visualize how Simpson's Rule approximates a definite integral.

## CONCLUSION

The software tools in math classes makes it easier to organize our teaching and improves learning outcomes by presenting calculus as a study of just four fundamental concepts - limits, derivatives, definite integrals, and indefinite integrals. Use of virtual learning environments could be important supplement when working with students who have difficulties to understanding algebraically aspect of solving a mathematical problem. The general goals of the paper are to create a new curriculum that develop mathematical sense for the students who are preparing for a job, i.e. implement use of new technology for new, alternative ways of learning and doing mathematics. This paper is presented the position that the choice between technology and traditional methods is not exclusively "one or the other" but correctly both.

## REFERENCES

- [1] P. Foerster, Calculus Concepts and Applications, <http://www.keypress.com/x5224.xml>
- [2] T. S. Vinuesa, R. M. Fornos, A virtual mathematics learning environment for engineering students, Interactive Educational Multimedia, Number 14 (2007), pp. 1-18, link [www.ub.edu/multimedia/iem](http://www.ub.edu/multimedia/iem)
- [3] <http://www.calculusapplets.com/riemann.html>
- [4] <http://www.intmath.com/Integration/Riemann-sums.php>
- [5] <http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc2/Riemann.html>
- [6] <http://www.math.tamu.edu/AppliedCalc/Classes/Riemann/index.html>
- [7] <http://curvebank.calstatela.edu/areabetcur/areabetcur.htm>
- [8] <http://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/numint.html>
- [9] <http://www.math.dartmouth.edu/~klbooksite/4.06/406examples/406trapcubic.htm>
- [10] <http://mathforum.org/mathtools/cell/c,15.16,ALL,ALL/>
- [11] <http://www.csun.edu/~hcmth018/SiM.html>
- [12] <http://www.math.psu.edu/dlittle/java/calculus/area.html>
- [13] [http://highereds.wiley.com/legacy/college/anton/0470183454/applets/ch7/figure7\\_7\\_1/trapsimp1.htm](http://highereds.wiley.com/legacy/college/anton/0470183454/applets/ch7/figure7_7_1/trapsimp1.htm)
- [14] <http://www.nctm.org>
- [15] <http://faculty.atu.edu/mfinan/2924/cal75.pdf>
- [16] <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/22/tm1215.pdf>
- [17] <http://www.nationmaster.com/encyclopedia/Virtual-learning-environment>
- [18] <http://www.ofsted.gov.uk/resources/virtual-learning-environments-evaluation-of-their-development-sample-of-educational-settings>
- [19] [http://staff.science.uva.nl/~heck/Research/art/ICTMT8\\_1.pdf](http://staff.science.uva.nl/~heck/Research/art/ICTMT8_1.pdf)
- [20] <http://www.fi.uu.nl/wisweb>

## PREDICTION OF STUDENT'S SUCCESS ANALYZING THEIR ACTIVITIES ON THE MOODLE COURSE

---

*This paper describes the application of specific methods of educational data mining to analyze the activities of students in the Moodle LMS system in the course Programmable logic devices. It was determined pattern by which a professor can predict success and evaluation of students, helps students who have problems in learning and thus improve the efficiency of learning in general. To implement the method of data mining over the data was used open - source software Weka.*

---

### INTRODUCTION

Understanding of large and complex data sets is of great importance in various fields: from business to science and systems engineering. In the business world, information about customers is one of the most important strategic resources. The ability to extract useful information hidden in the data as well as actions and behavior based on the detected becomes increasingly important in a competitive world. Data mining and knowledge discovery in databases are two terms, but often the two terms are used interchangeably. In essence, data mining is the process of extraction patterns or models from observed data. It is defined as "non-trivial process of identifying valid, novel, potentially useful, and understandable patterns in data". [1] Data mining refers to the process of finding interesting patterns in data that are not explicitly part of the data. [2] The resulting patterns can be used to display the new information and for specific predictions.

[3] describes data mining as a multidisciplinary field of work that includes schematic database technology, artificial intelligence, machine learning, neural networks, statistics, pattern recognition, knowledge-based systems, knowledge acquisition, information retrieval, computation and visualization of high-performance data. Data mining has its roots in various disciplines of classical analysis of data from which the most important statistics and machine learning. Statistics, as part of mathematics, putting emphasis on the application of mathematical methods for determining the reasonableness and consistency of the test solutions before testing is carried out in practice.

In contrast, machine learning and application of its origin is mainly in computer practice, leading to a practical orientation and readiness for testing solutions to problems without a formal mathematical proof of effectiveness.

In the last few years has developed numerous systems for online learning, known as e-learning systems based on static and interactive materials for learning. Some of them consider the diversity of students using intelligent and adaptive techniques. To personalize the learning environment, these systems build a model based on the characteristics of students, their activities in the system and realized knowledge. Educational data mining is a discipline concerned with the development of methods for knowledge discovery based on data available from the education environment [4]. The data necessary for research in this area can be obtained from databases of educational institutions or from e-learning system [5]. Educational data mining uses techniques such as decision trees, neural networks, k-nearest neighbors, support vector machines and others to extract the associative rules, classification groups and clusters from data set. Discovered knowledge can be used to understand the behavior of students, improving e-learning system and curricula as well as many other benefits [6].

Application of educational data mining techniques in e-learning systems can be generally categorized as follows:

- The formation of patterns that show associative connections within the data set
- The classification of instances of the analyzed data set in a pre-defined categories

---

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies, Belgrade, Serbia

- Grouping instances into clusters without prior knowledge of the categories
- Discovering patterns in the data based on which to make specific predictions

E-learning systems have the ability to track profiles and registering any kind of user activities [7]. Student activities such as access to the system, the use of static and interactive resources (lessons, assignments, tests), the interaction and communication with other participants of the course are stored in the database of e-learning systems. E-learning systems can generate reports that consist of large amounts of data so that their analysis difficult and time consuming. Some platforms offer special tools to create reports but in the case of analyzing large data sets, the process of extraction of useful information is still complicated. Offered tools do not provide thorough monitoring and evaluation of all activities performed by students, evaluation of the structure and content of the course and its effectiveness in the learning process [8].

### CASE STUDY

This paper describes the implementation of one educational data mining method on the data set extracted from the online course Programmable logic devices implemented in Moodle e-learning system and held at the School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies in Belgrade in the summer semester of 2008/09. It is demonstrated what kind of data can be collected, how to perform pre-processing of data, how to apply data mining methods on the data and how it can be used discovered knowledge.

### DATA COLLECTION

We collected data from the course Programmable logic devices [9] implemented in Moodle environment. The course was chosen by 112 students with the different study programs. Moodle [10], Learning Management System for e-learning, was installed on the server under the Linux platform and a PostgreSQL database and is in the process of data collection used an administrative tool for managing PostgreSQL databases. Data about students' activities (access log, use of static and interactive course resources (lessons, interactive assignments, tests)) were extracted from the

Moodle database [11].

### PREPROCESSING OF DATA

For this step, the collected data were prepared in tables in a format that it is suitable for the implementation of data mining techniques. Data were integrated in a summary table so that rows contain all the information referring to students' activities. Summary table was made executing SQL queries against the appropriate tables Moodle database. Generated reports were exported from the PostgreSQL database in CSV format and imported into the Weka data mining tool.

With the selected discretization filter, the CSV file is transformed into a text file format ARFF (*Attribute-Relation File Format*) which is an ASCII text file. This file describes a list of instances split among the set of attributes and has two separate sections [12]. The first is a header containing information (name relation, a list of attributes and their types) followed by information about the data (the line contains the data declarations and the actual line of the instances).

Data discretization is performed in order to obtain discrete and nominal data. Through discretization procedure numerical data are divided into appropriate classes that will be more understandable, but there is a possibility to lose a piece of information during this procedure. It is therefore very important to perform the discretization procedure in the best possible way.

Some of discretization methods for transformation of continual attributes into discreet ones are the following [13]:

- *Equal-width* method by which the attribute range is divided into a fixed number of equally length
- *Equal-frequency* method by which the attribute range is divided into a fixed number of intervals with equal or approximately equal number of instances
- *Manual* method in which the user has to specify the cut-off points

By applying discretization method equal-width, the range of numerical values attributes of lessons, tasks [14] is divided into intervals of equal length and were obtained nominal values. For numerical values of attributes *preparatory\_tests* and

*exam\_test* was applied discretization manually method. The maximum number of points that students could gain in the test is 15, and were therefore cut off a certain point. Points scored by the students at the examinations and tests defined the cut-off point and grouped into five groups: *failed, passed, good, very good, excellent*.

## **PREDICTING STUDENTS' SUCCESS USING J48 CLASSIFICATION ALGORITHM**

This paper describes use of classification method for predict the students' success based on their activities in the Moodle environment. We used the Weka tool for the implementation J48 classification algorithm. Weka [15] is an open-source tool that provides a collection of machine learning and data mining algorithms for the data preprocessing, classification, regression, clustering, associative rules, and visualization. Classification is a data mining task that implies affiliation of an instance with certain group [3]. It belongs to the type of supervised learning, which means that formerly unmarked patterns are found and marked on the basis of pre-classified patterns. Pre-classified patterns are used to classify classes used for finding and marking new patterns. On the basis of a collection of formerly defined categories, mapping of existing data is performed. There are several algorithms used in the classification process, such as: linear discriminatory functions (linear programming, support of vector machines), decision trees (ID3, C45, J48, CART), single linear classifiers, closest neighbor-classifiers, etc. Classification rules represent an alternative to decision tree. Prerequisite rules are a series of tests (just like the nodes in the tree). Preconditions are usually connected by logical "AND". The conclusion gives the class or classes that correspond to the examples that satisfy the rule. Decision tree is easily transformed into a classification rule for each leaf represents one rule, but rules are extremely complex obtained. It is difficult to transform the classification rules in a decision tree. Classification rules make it easy to add new rules to the existing set of rules.

In order to determine the motivations behind the students' activities in the Moodle course, we chose Weka's J48 algorithm based on the C4.5 algorithm from the machine learning, for the reason that it is a classification algorithm offering an advanced equilibrium between precision,

speed and interpretability of results. The basic algorithm for decision tree induction represents a greedy algorithm which generates decision trees in a top-down recursive divide and conquer manner. Before implementation J48 algorithm it was necessary to set the values of some parameters so the minimum value of confidence factors was set to 0.5, the minimum number of examples per leaf was 2, do not use the binary distribution, reduced tree is used, the method of reduction is to increase tree and is not used reduce error. The results consisted in decision trees based on the initial data set, then on a number of filtered instances.

Application of decision tree algorithm can be summarized as follows[16]:

1. Choose an attribute that best differentiates the output attribute values.
2. Create a separate tree branch for each value of the chosen attribute.
3. Divide the instances into subgroups so as to reflect the attribute values of the chosen node.
4. For each subgroup, terminate the attribute selection process if:
  - a. All members of a subgroup have the same value for the output attribute, terminate the attribute selection process for the current path and label the branch on the current path with the specified value.
  - b. The subgroup contains a single node or no further distinguishing attributes can be determined. As in (a), label the branch with the output value seen by the majority of remaining instances.
5. For each subgroup created in (3) that has not been labeled as terminal, repeat the above process.

There were generated values of several performance measures for the classification problems Kappa statistic, MAE (mean absolute error), RMSE (root mean square error), RAE (relative absolute error, %), RRSE (root relative squared error,%). Weka system displays data about the number of leaves on the tree, size tree, number and percentage of correctly and incorrectly classified instances and so on. For the J48 classification learning based on the training set, we obtained a 67,7083% success rate (the correctly classified instances), and a 56,25% success rate for the cross-validation

experiment. *Cross-validation* parameter is set at the value 10 and selects the class attribute for the prediction. Cross-validation represents the classifier that evaluate using a cross validation with different number of “bandaging” that can be specified. First, the entire data set is divided into k subsets of data of equal length. The resulting subsets of data are used as a model for training and are called k-fold cross - validation. The division on the 10 parts (k = 10) proved to be the best. Table 1 shows the values of characteristic measures of use training set.

**Table 1.** Values of characteristic measures of use training set

Correctly classified instances	67.7083 %
Incorrectly classified instances	32.2917 %
Kappa statistic	0.5828 %
Mean absolute error	0.1749 %
Root mean squared error	0.2957 %
Relative absolute error	56.2886 %
Root relative squared error	75.0817 %

One of the resulting classification model is the view of decision tree (Fig. 1) in graphic and textual form. Some examples of the suggestive interpretation of branches decision tree in Figure 1 are:

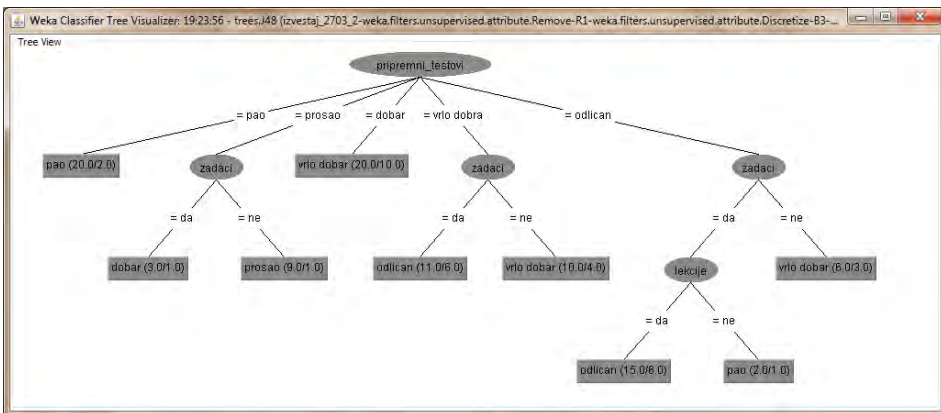
- If the students not passed the preparatory tests, then did not pass the exam test.
- If the students achieved grade *passed* at the preparatory tests and done exercises then they achieved a *good* grade on the exam test.
- If the students achieved grade *passed* at the preparatory tests and done exercises then they achieved a *pass* grade on the exam test.
- If the students achieved grade *good* at the preparatory tests then they achieved grade

*very good* on the exam test.

- If the students achieved grade *very good* at the preparatory tests and done exercises then they achieved grade *excellent* on the exam test.
- If the students achieved grade *very good* at the preparatory tests and did not do exercises then they achieved grade *very good* on the exam test.
- If the students achieved grade *excellent* at the preparatory tests and done exercises and read lessons then they achieved grade *excellent* on the exam test.

## CONCLUSION

In this paper we illustrate the application educational data mining classification methods on data separated from courses Programmable logic circuits implemented in Moodle environment. Since the classifications rules are the predictions rules and describing the future situation, in this way it is possible to predict students’ performance on the exam. The teacher can assess students’ knowledge bases on their activities. Generated rules can be used for the classification new students. We have shown that the classification model should be accurate and understandable for the teacher. In future experiments, we want to measure the compressibility of each classification model that uses information from more information about the students (more monitoring activity and resources in the course). In this way it is possible to measure both the quantity and quality of data affects the efficiency and performance of the algorithm.



**Fig. 1.** Decision tree for determining students’ success on the exam based on their activities in Moodle course

## ACKNOWLEDGEMENTS

This paper is part of the research Project No. TR35026, Project No. TR32039, Project No. TR32047 and subproject 3 in Project No. III 47016, supported by the Ministry of Science and Technological Development of the Republic of Serbia.

## REFERENCES

- [1] Fayyad U.M, Piatetsky-Shapiro G, Smyth P. From data mining to knowledge discovery in databases. *AI Magazine*. 17(3). 1996. P. 37-54.
- [2] Witten I.H, Frank E. *Data mining: practical machine learning tools and techniques*. Morgan-Kaufman Series of Data Management Systems. San Francisco. Elsevier. 2005.
- [3] Han J, Kamber M. *Data Mining: Concepts and Techniques*. 2nd edition. The Morgan Kaufmann Series in Data Management Systems. Jim Gray, Series Editor. 2006.
- [4] Romero C, Ventura S, Garcia E. Data mining in course management systems: Moodle case study and tutorial. *Computers & Education*. Vol. 51. No. 1. 2008. P. 368-384.
- [5] Machado L, Becker K. Distance Education: A Web Usage Mining Case Study for the Evaluation of Learning Sites. *Third IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT03)*. 2003.
- [6] Romero C, Ventura S. Educational data mining: A Survey from 1995 to 2005. *Expert Systems with Applications*. (33). 2007. P. 135-146.
- [7] Mostow J, Beck J. Some useful tactics to modify , map and mine data from intelligent tutors. *Natural Language Engineering* 12(2). 2006. P. 195-208.
- [8] Zorrilla M. E, Menasalvas E, Marin D, Mora E, Segovia J. Web usage mining project for improving web-based learning sites. In *Web mining workshop*. Cataluna. 2005.
- [9] Gabrijela D, Dragana P, Kristijan K, Petar S. The Use of Data Mining Methods for Analyzing and Evaluating Course Quality in the Moodle System. *Международна научна konferencija "УНИТЕХ'10" - Габрово*. 2010. P. 309-315.
- [10] Rice W.H. *Moodle E-learning Course Development. A complete guide to successful learning using Moodle*. Packt publishing. 2006.
- [11] Kristijan K, Dragana P, Gabrijela D, Boris S. New Approach in Realization of Laboratory Exercises in the Subject Programmable Logic Devices in the System for Electronic Learning - Moodle. *Facta Universitatis Series: Electronics and Energetics*. Vol. 24. Issue. 1. 2011. P. 133-142
- [12] Witten I.H, Frank E. *Data mining: practical machine learning tools and techniques*. 2005.
- [13] Dougherty J, Kohavi M, Sahami M. Supervised and unsupervised discretization of continuous features. *Int. Conf. Machine Learning Tahoe City, CA*. 1995. P.194-202.
- [14] Gabrijela D, Dragana P, Kristijan K, Petar S. *Obrazovni data mining u sistemima za e-učenje*. Infoteh-Jahorina Vol. 10. Ref. E-V-6. March 2011. P. 775-779.
- [15] Weka. <http://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/>
- [16] [http://grb.mnsu.edu/grbts/doc/manual/J48\\_Decision\\_Trees.htm](http://grb.mnsu.edu/grbts/doc/manual/J48_Decision_Trees.htm)

## CODIMENSION ONE COINCIDENCES

---

We generalize and apply results and techniques about one-parameter fixed point indices from [8] and [4], and apply the geometric description of spin manifolds and spin structures given in [7], to codimension one coincidences. Let  $F, G: X \rightarrow Y$  be PL maps where  $X$  and  $Y$  are connected PL manifolds,  $X$  is  $(n + 1)$ -dimensional closed and spin,  $Y$  is  $n$ -dimensional, compact submanifold of  $\mathbb{R}^n$ , and  $n \geq 4$ . A coincidence of  $F$  and  $G$  is a point  $a \in X$  such that  $F(a) = G(a)$ . The set of all the coincidences is denoted by  $Coin(F, G)$ . For a family  $V$  of isolated circles of coincidences of  $F$  and  $G$ , we define two indices:  $ind_1(F, G; V)$  - which is an element in the first homology group  $H_1(E)$ , where  $E$  is the space of paths in  $X \times Y$  from the graph of  $F$  to the graph of  $G$ ; and  $ind_2(F, G; V)$  - which is an element in the group  $\mathbb{Z}_2$  with two elements. We prove that for a family  $V$  of isolated circles of coincidences of  $F$  and  $G$  in the same coincidence class there is a neighborhood  $N$  of  $V$  and a homotopy from  $F$  to  $H$  rel  $X \setminus N$  such that  $Coin(H, G) = Coin(F, G) \setminus V$  if and only if  $ind_1(F, G; V) = 0$  and  $ind_2(F, G; V) = 0$ .

---

### INTRODUCTION

In this paper we define two indices for codimension one coincidences, generalizing and applying the results and the techniques about one-parameter fixed point indices from [8] and [4], and then show that these indices provide us with necessary and sufficient conditions for removing some or all of the coincidences, with control. The main new idea used for the definition of these indices is the geometric description of spin manifolds and spin structures given in [7].

Let  $F, G: X \rightarrow Y$  be PL maps where  $X$  and  $Y$  are connected PL manifolds,  $X$  is  $(n + 1)$ -dimensional, closed and spin,  $Y$  is  $n$ -dimensional compact submanifold of  $\mathbb{R}^n$ , and  $n \geq 4$ . A coincidence of  $F$  and  $G$  is a point  $x \in X$  such that  $F(x) = G(x)$ . The set of all the coincidences is denoted by  $Coin(F, G)$ . If  $X = Y \times I$  and  $G$  is the projection  $P$ , defined by  $P(y, t) = y$ , then  $Coin(F, G)$  is  $Fix(F)$  - the set of the fixed points of  $F$ , as defined in [8]. In this setting, isolated circles of coincidences are the generic form of coincidences, as isolated coincidences are in the classical case, i.e. for two maps between manifolds of the same dimension. Two indices,  $ind_1(F, G; V)$  and  $ind_2(F, G; V)$  are defined for a family  $V$  of finitely many isolated coincidences and isolated circles of coincidences of  $F$  and  $G$ . The first index,  $ind_1(F, G; V)$ , is an element in the first homology group  $H_1(E)$ , where  $E$  is the space of paths in  $X \times Y$  from the graph of  $F$  to the graph of  $G$ , and  $ind_2(F, G; V)$  is an element in the group  $\mathbb{Z}_2$  with two elements.

For the definition of the one-parameter fixed point indices in [4], we assumed that  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ , and so  $Y \times I \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Then we were able, for each embedded oriented circle  $C \subseteq Y \times I$  and a regular neighborhood  $W$  of  $C$  in  $Y \times I$  to choose a preferred isotopy class  $\{\varphi\}$  of orientation preserving embeddings of pairs,  $\varphi: (S^1 \times \Delta^n, S^1 \times \{\mathbf{0}\}) \rightarrow (W, C)$ , by isotopy of the standard embedding  $SE$  (see [4]). For an isolated circle  $C$  of fixed points of a homotopy  $F: Y \times I \rightarrow Y$ , we defined  $i_1(F; C)$  and  $i_2(F; C)$  as  $deg_1(\psi)$  and  $deg_2(\psi)$  where  $\psi$  is the restriction of the map  $(P - F) \circ \varphi$  to  $S^1 \times S^{n-1} = \partial(S^1 \times \Delta^n)$  and  $\Delta^n$  is the standard  $n$ -simplex, i.e.  $n$ -ball. There we used the fact that  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ , so that the map  $P - F$  is defined.

So in order to apply the techniques and the results from [8] and [4] to codimension one coincidences between  $F, G: X \rightarrow Y$ , we need the following:

C1) For each oriented circle  $C$  in  $X$  and a regular neighborhood  $W$  of  $C$ , to be able to choose a “preferred” isotopy class  $\{\varphi\}$  of orientation preserving embeddings of pairs,

$$\varphi: (S^1 \times D^n, S^1 \times \{\mathbf{0}\}) \rightarrow (W, C).$$

The choice of a “preferred” isotopy class as in C1) led to the geometric description of spin manifolds and spin structures given in [7]. If  $X$  is a spin manifold, then a spin structure on  $X$  gives us such a “preferred” isotopy class of embeddings.

<sup>1</sup> Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University “Ss Cyril and Methodius”, Skopje, Macedonia

After we define the two indices, the results and their proofs are completely analogous to the ones in [4].

Let  $F, G: X \rightarrow Y$  be as above. Two coincidences  $a$  and  $b$  are in the same coincidence class if there is an arc  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  from  $a$  to  $b$  and a homotopy between  $F \circ \alpha$  and  $G \circ \alpha \text{ rel} \{0, 1\}$ . The relation of being in the same coincidence class is an equivalence relation. It follows directly from the definition, that if  $a, b$  belong to a circle of coincidences, then they are in the same coincidence class. Two circles of coincidences are in the same coincidence class iff their points are in the same coincidence class.

**Theorem 5.3.** Let  $V$  be a family of isolated circles of coincidences and isolated coincidences of  $F$  and  $G$ , in the same coincidence class. Then, there is a neighborhood  $N$  of  $V$  and a homotopy from  $F$  to  $H \text{ rel} X \setminus N$  such that  $\text{Coin}(H, G) = \text{Coin}(F, G) \setminus V$  if and only  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$  and  $\text{ind}_2(F, G; V) = 0$ .

We would like to mention that a similar result to Theorem 5.3 was obtained by Jerzy Jezierski in [9].

### SPIN MANIFOLDS AND SPIN STRUCTURES

A manifold  $M$  is called **spin** if it is orientable (i.e. the first Stiefel-Whitney class  $w^1(M) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2)$  is trivial) and also the second Stiefel-Whitney class  $w^2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}/2)$  is trivial.

We state several characterizations for spin manifolds. Let  $M$  be an  $n$ -dimensional, closed, orientable PL manifold,  $L$  its triangulation,  $K$  the first barycentric subdivision of  $L$ .

(CS) ([5])  $M$  is spin iff it is possible to assign to each  $\sigma \in K^{n-1}$  a 0 or 1, such that for any  $\tau \in K^{n-2}$  the sum of all those numbers of all the  $\sigma \in K^{n-1}$  that have  $\tau$  as a face is odd, i.e. it is  $1 \pmod{2}$ .

(CS1) ([7])  $M$  is spin iff for each oriented embedded circle  $C = S^1$  in general position with respect to  $K$  in  $M$ , it is possible to assign  $t_C \in \{0, 1\}$ , such that for any embedded oriented surface  $F$  in general position with respect to  $K$ ,

$$\#(F \cap K^{n-2}) \equiv \sum t_C \pmod{2},$$

where the sum is over all the boundary circles  $C$  of the surface  $F$ .

For the next characterization (CS2) we need to have a standard surface  $F(r, k)$  of genus  $r$  and  $k$  boundary circles and its regular neighborhood in  $\mathbb{R}^n$ . It is a disc in  $\mathbb{R}^2$  with  $k$  holes,  $r$  handles pointing to the positive, and a half 2-sphere pointing to the negative third coordinate of  $\mathbb{R}^n$ .

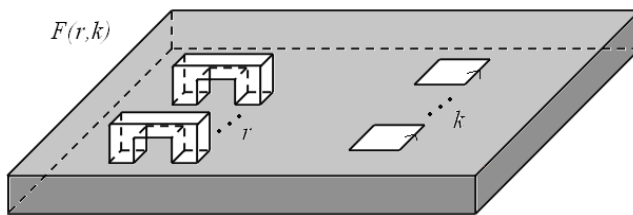


Fig. 1. The standard surface  $F(r, k)$

Let  $N = N(F)$  be a chosen regular neighborhood of  $F(r, k)$  in  $\mathbb{R}^n$ . For each boundary circle  $C$  of  $F(r, k)$ , we chose a regular neighborhood pair  $(N(F), N(C))$ , and the homeomorphism

$$g(C): (S^1 \times \Delta^{n-1}, S^1) \rightarrow (N(C), C),$$

from the standard  $S^1 \times \Delta^{n-1}$  in  $\mathbb{R}^n$  to  $(N(C), C)$  obtained by translation and homotety. Let the restriction of  $g(C)$  to the boundary be  $f(C): S^1 \times \partial \Delta^{n-1} \rightarrow \partial N(C)$ .

(CS2) ([7])  $M$  is spin iff for each embedding  $h: S^1 \rightarrow M$  in “good” general position with respect to  $K$ , there is an isotopy class of embeddings  $u(h): S^1 \times \Delta^{n-1} \rightarrow M$ , that extend to a pairwise orientation preserving embeddings  $v(h): (S^1 \times \Delta^{n-1}, S^1) \rightarrow (M, h(S^1))$ , such that each embedding  $w: F(r, k) \rightarrow M$  in general position with respect to  $K$ , together with the embeddings  $u((w \circ g(C))^{-1} \circ (f(C))^{-1})$  for all the boundary circles  $C$  of  $F(r, k)$ , extends to an orientation preserving embedding from  $N(F(r, k))$  to a regular neighborhood of  $w(F)$ , where  $(w \circ g(C))^{-1}$  is the composition of the restriction of  $g(C)$  on  $S^1 \times \{0\}$  followed by  $w$ .



(CS3) A simple connected manifold  $M$  is spin iff the regular neighborhood of each embedded  $S^2$  in  $M$  is homeomorphic to  $S^2 \times \Delta^{n-1}$ .

**A Spin structure** for a spin manifold is a choice of the embeddings given in (CS2).

### DEGREES OF MAPS

The well know (Brouwer) degree of a map  $f: S^n \rightarrow S^n$  is the unique integer  $deg(f)$  such that  $f_*(u) = deg(f) \cdot u$  for all  $u$  belonging to  $H_n(S^n)$ .

**Theorem 3.1.** (Brouwer) Two maps  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  are homotopic iff  $deg(f) = deg(g)$ .

Let  $f: S^1 \times S^n \rightarrow S^n$  be a continuous map,  $n \geq 3$ . In [4], two maps

$$f_1: S^n \rightarrow S^n \text{ and } f_2: S^{n+1} \rightarrow S^n,$$

are defined and two degrees for  $f$  are defined as:

$$deg_1(f) = deg(f_1) \text{ and } deg_2(f) = [f_2],$$

where  $[f_2]$  is the element in  $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ , determined by  $f_2$ .

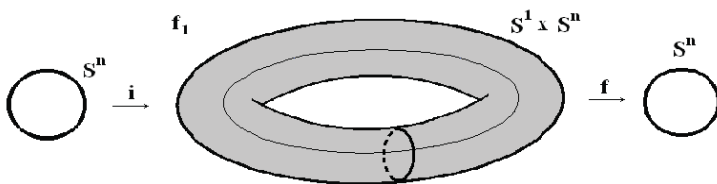


Fig. 2. The map  $f_1$

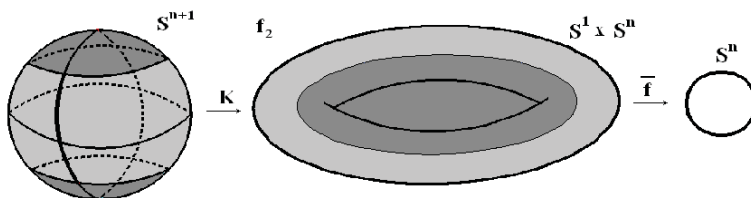


Fig. 3. The map  $f_2$

**Theorem 3.2.** ([4]) Two maps  $f, g: S^1 \times S^n \rightarrow S^n$ ,  $n \geq 3$ , are homotopic, iff  $deg_1(f) = deg_1(g)$  and  $deg_2(f) = deg_2(g)$ .

### LOCAL INDICES 1 AND 2

Let  $F, G: X \rightarrow Y$  be as above, and let  $X$  be given fixed orientation and spin structure.

Let  $C \subseteq X$  be an isolated circle of coincidences of  $F$  and  $G$ , which has a regular neighborhood  $W$  such that the only coincidences of  $F$  and  $G$  in  $W$  are the points of  $C$ . We are going to define two indices  $i_1(F, G; C)$  and  $i_2(F, G; C)$ .

For given  $\epsilon > 0$ , we can choose a neighborhood  $W$  of  $C$ , such that  $F$  and  $G$  are  $\epsilon$ -close on  $W$ , and so we have the map  $G - F: (W, C) \rightarrow (\Delta_\epsilon^n, \mathbf{0})$ , denoted by  $\rho(G, F)$ , where  $\Delta_\epsilon^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \epsilon\}$ , as in [4]. Since  $C$  is an isolated circle of coincidences, we have  $\rho(G, F)^{-1}(\mathbf{0}) = C$ . There are two orientations on  $C$ ; denoted by  $O_1$  and  $O_2$ . Let  $\varphi: (S^1 \times \Delta^n, S^1 \times \{\mathbf{0}\}) \rightarrow (W, C)$ , be an embedding from the spin structure for  $X$ . Then we have the map  $\zeta \circ \rho(G, F) \circ \varphi: S^1 \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ , where  $\zeta: \Delta_\epsilon^n \rightarrow \Delta^n$  is the homeomorphism defined by multiplication by  $1/\epsilon$ . Let  $\mu(G, F): S^1 \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  be the map  $\mu(G, F) = \zeta \circ \zeta \circ \rho(G, F) \circ \varphi_1$  where  $\zeta: \Delta^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow S^{n-1}$  is

defined by  $\xi(x) = \frac{1}{|x|} \cdot x$ , and  $\varphi_1$  is the restriction of  $\varphi$  to  $S^1 \times S^{n-1}$ .

**Proposition 4.1.** Let  $\mu(G, F)$  and  $\mu'(G, F)$  be defined as above, for two choices of embeddings  $\varphi, \varphi': (S^1 \times \Delta^n, S^1 \times \{0\}) \rightarrow (W, C)$  in the same spin structure. Then,  $\deg_j(\mu(G, F)) = \deg_j(\mu'(G, F))$ , for  $j=1, 2$ .

**Proof.** Since  $\varphi$  and  $\varphi'$  are in the same isotopy class, they are homotopic, and so  $\mu(G, F)$  and  $\mu'(G, F)$  are homotopic, and then by Proposition 1.3 from [4], they have the same degrees 1 and 2.  $\square$

**Proposition 4.2.** Let  $\mu_1(G, F)$  and  $\mu_2(G, F)$  be defined as above, for the two orientations  $O_1$  and  $O_2$  on  $C$ , respectively. Then,  $\deg_1(\mu(G, F)) = -\deg_1(\mu_2(G, F))$ , and  $\deg_2(\mu_1(G, F)) = \deg_2(\mu_2(G, F))$ .

**Proof.** The proof follows from Proposition 2.1 and Proposition 3.1 from [4].  $\square$

For a chosen orientation  $O$  on  $C$ ,  $\deg_1(\mu(G, F))$  will be denoted by  $i_1(F, G; C, O)$ . We say that an orientation on  $C$  is the natural orientation on  $C$ , if  $i_1(F, G; C, O) \geq 0$ , and we say that  $\deg_1(\mu(G, F))$  for this orientation is index 1 of  $G$  and  $F$  at  $C$ , denoted by  $i_1(F, G; C)$ .

Directly from the definition it follows that when  $C$  is a transverse circle of coincidences, i.e. if the graphs of  $F$  and  $G$  intersect transversely at  $C$ , then  $i_1(F, G; C) = 1$ .

**Remark.** By the definition,  $i_1(F, G; C) \geq 0$ . In the case  $\deg_1(\mu(G, F)) = 0$ , both of the two orientations on  $C$  are natural, or using different words,  $C$  does not have a natural orientation.

The following notion is well defined by Proposition 4.2.

We define index 2 of  $F$  and  $G$  at  $C$ , denoted by  $i_2(F, G; C)$ , to be  $\deg_2(\mu(G, F))$ .

Propositions 4.1 and 4.2 show that  $i_1(F, G; C)$  and  $i_2(F, G; C)$  do not depend on the choice of the embedding  $\varphi$  in the spin structure, but they do not imply that  $i_1(F, G; C)$  and  $i_2(F, G; C)$  are independent of the choice of spin structure. Since the embeddings in a spin structure are pairwise orientation preserving and  $\deg_1$  depends only on the orientations,  $i_1(F, G; C)$  does not depend on the choice of the spin structure. But, in general,  $i_2(F, G; C)$  does depend on the choice of spin structure, i.e. it is possible to have a circle  $C$  such that  $i_2(F, G; C)$  for one spin structure is not the same with  $i_2(F, G; C)$  for another spin structure. The dependence of  $i_2(F, G; C)$  (which is a local index at  $C$ ) on the spin structure is analogous to the dependence on the orientation of the local index at an isolated codimension zero coincidence for two maps between two orientable manifolds of the same dimension.

We define a local index at an isolated coincidence. Let  $A \in \text{Coin}(F, G)$  be an isolated coincidence. Let  $N(A)$  be a small  $(n+1)$ -ball neighborhood of  $A$  in  $X$ , such that  $F(x) \neq G(x)$  for every  $x \in N(A) \setminus \{A\}$ , and let  $N(F(A))$  be a small  $n$ -ball neighborhood of  $F(A)$  in  $Y$ . Let  $\varphi: \Delta^{n+1} \rightarrow N(A)$  be an orientation preserving homeomorphisms. Then the map  $G \circ \varphi - F \circ \varphi$  determines an element in the group  $\pi_n(S^{n-1})$ . This element will be denoted by  $i_2(F, G; A)$ . Since two orientation preserving homeomorphisms of spheres are isotopic [11], it follows that  $i_2(F, G; A)$  is well defined.

Next we state several propositions analogous to the corresponding propositions from [4], and whose proofs are the same as in [4].

**Proposition 4.3.** (P.3.3. [4]) Let  $F, G$  be as above and let  $C$  be an isolated circle of coincidences. Then,  $i_1(F, G; C) = 0 = i_2(F, G; C)$  iff for a small neighborhood  $W$  of  $C$ ,  $F$  is homotopic to a map  $H$  rel  $X \setminus W$ , with  $H(x) \neq G(x)$  for each  $x \in W$ .  $\square$

**Proposition 4.4.** (P.3.4. [4]) Let  $C$  be an isolated circle of coincidences for  $F$  and  $G$ . Let  $B$  be an embedded disk in  $X$ , with  $\partial B = C$ , and let  $h: (X \times \{0\}) \cup (B \times I) \rightarrow Y$  be a partial homotopy such that  $h(x, 0) = F(x)$  for all  $x \in X$ ,  $h(x, 1) = G(x)$  for all  $x \in B$ , and  $h(x, t) = G(x) = F(x)$  for all  $x \in C$  and all  $t$ . Then, there is a neighborhood  $N$  of  $B$ , and a map  $H: X \rightarrow Y$  homotopic to  $F$  rel  $X \setminus N$  such that  $\text{Coin}(H, G) = (\text{Coin}(F, G) \setminus C) \cup \{A\}$  and  $i_2(F, G; C) = i_2(H, G; A)$ , where  $A$  is an isolated coincidence for  $G$  and  $H$ . Moreover, if  $i_2(F, G; C) = 0$ , the map  $H$  can be chosen such that  $\text{Coin}(H, G) = \text{Coin}(F, G) \setminus C$ .  $\square$

**Proposition 4.5.** (T.3.5. [4]) In a neighborhood of an isolated circle of coincidences, it is possible to introduce several "parallel" circles of coincidences with prescribed  $i_1$  and  $i_2$ . Moreover, if the prescribed  $i_1$ 's

are equal to 1, it is possible to make the introduced circles of coincidences to be transverse.  $\square$

## WECKEN THEORY FOR CODIMENSION ONE COINCIDENCES

Let  $F, G: X \rightarrow Y$  be as above. Let  $E$  be the space of paths in  $X \times Y$  from the graph of  $F$  to the graph of  $G$ . If  $C$  is an embedded oriented circle of coincidences, then  $C$  determines an element  $\{C'\}$  in the first integer homology group  $H_1(E)$ , where  $C'$  is the map from  $S^1$  into  $E$  by taking the constant paths at the points of  $C$ . Now, let  $V$  be a family of isolated circles of coincidences  $C_1, C_2, \dots, C_i$  (not necessarily transverse) and isolated coincidences  $A_1, A_2, \dots, A_i$  in the same coincidence class. Let  $C_j$  be oriented by the natural orientation. We define index 1 of  $V$  denoted by  $\text{ind}_1(F, G; V)$  to be the element  $\sum i_1(F, G; V) \cdot \{C'_j\}$  in  $H_1(E)$ , and define index 2 of  $V$  denoted by  $\text{ind}_2(F, G; V)$  to be the element  $\sum i_2(F, G; C_j) + \sum i_2(F, G; A_i)$  in  $\mathbb{Z}_2$ .

**Theorem 5.1.** Let  $V = \{C_1, C_2, \dots, C_i\}$  be a family of isolated transverse circles of coincidences of  $F$  and  $G$  in the same coincidence class. Then, there is a neighborhood  $N$  of  $V$  and a homotopy from  $F$  to  $H$  rel  $X \setminus N$  such that  $\text{Coin}(H, G) = \text{Coin}(F, G) \setminus V$  iff  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$  and  $\text{ind}_2(F, G; V) = 0$ .

**Proof:** The proof is similar to the proof of Theorem 4.1 in [4]. Let  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$  and  $\text{ind}_2(F, G; V) = 0$ . Then the geometric 1-cycle determined by  $V$  is  $\mathbb{Z}$ -homologous to zero and  $\sum i_2(F, G; C_j) = 0$ . The fact that the geometric 1-cycle determined by  $V$  is zero implies, by the same methods and results as in [8], the existence of an embedded, oriented, compact, connected surface  $S \subseteq X$  spanning  $V$  and inducing the natural orientation on the circles in  $V$ , together with a partial homotopy  $h: (X \times \{0\}) \cup (S \times I) \rightarrow Y$ , with  $h(x, 0) = F(x, 0)$  for all  $x \in X$ ,  $h(x, 1) = G(x)$  for all  $x \in S$ , and  $h(x, t) = G(x) = F(x)$  for all  $x \in V$  and all  $t$ . Moreover  $h$  can be altered, in the same way as in [8], to obtain a new  $h$ , such that  $h_1: X \times \{0\} \cup (S \times [0, 1 - \delta]) \rightarrow Y$  is a special homotopy with respect to  $G$ , for any  $\delta > 0$ , where a homotopy  $h: M \times I \rightarrow N$  is special homotopy with respect to  $g$ , if  $h(x, s) = g(x)$ , for some  $s \in I$  implies  $h(x, t) = g(x)$  for all  $t \in I$ . Since  $S$  is a surface of genus  $r$  and  $k$  boundary components, there is an embedding  $\varphi$  of the standard oriented surface  $F(r, k)$  into  $X$  whose image is  $S$ , which is orientation preserving. For each circle in  $V$  we extend the restriction of  $\varphi$  to an embedding in the chosen spin structure for  $X$ , and then extend them to an embedding from the standard neighborhood of  $F(r, k)$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  to a neighborhood of  $S$  in  $X$ . From now on, the proof is completely analogous to the proof of Theorem 4.1. in [4]. By considering the maps  $F \circ \varphi$  and  $G \circ \varphi$ , we obtain a homotopy from  $F \circ \varphi$  to  $F''$ , and composing this homotopy with  $\varphi^{-1}$  we obtain a homotopy from  $F$  to a map  $H$ , rel  $X \setminus N$  for a neighborhood  $N$  of  $S$  in  $X$  such that  $\text{Coin}(H, G) = \text{Coin}(F, G) \setminus V$ .

Conversely, let there exist a neighborhood  $N$  of  $V$  in  $X$  and a homotopy from  $F$  to  $H$  rel  $X \setminus N$ , such that  $\text{Coin}(H, G) = \text{Coin}(F, G) \setminus V$ . Then, as is shown in [8] the 1-cycle in  $E$  determined by  $V$  is  $\mathbb{Z}$ -homologous to zero, i.e.  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$ , and there exists a surface  $S$  as above, whose associated  $\mathbb{Z}_2$ -obstruction (as in [8]) is zero. The associated  $\mathbb{Z}_2$ -obstruction for  $S$  is obtained by a cutting argument (as in [8]), which by Propositions 3.9 and 3.10 of [4], implies that the  $\mathbb{Z}_2$ -obstruction for  $S$  is equal to  $\text{ind}_2(F, G; V)$ , and hence,  $\text{ind}_2(F, G; V) = 0$ .  $\square$

**Theorem 5.2.** (T.4.2. [4]) Let  $V$  be a family of isolated circles of coincidences and isolated coincidences of  $F$  and  $G$  in a single coincidence class. Then there is a neighborhood  $N$  of  $V$  missing other coincidences and a homotopy from  $F$  to  $H$  rel  $X \setminus N$  such that:  $\text{Coin}(H, G) = (\text{Coin}(F, G) \setminus V) \cup C$ , where  $C$  is an isolated circle of coincidences of  $H$  and  $G$ ;  $\text{ind}_1(H, G; C) = 0$  iff  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$ ; and  $\text{ind}_2(H, G; C) = \text{ind}_2(F, G; V)$ .  $\square$

**Theorem 5.3.** Let  $V$  be a family of isolated circles of coincidences and isolated coincidences of  $F$  and  $G$ , in the same coincidence class. Then, there is a neighborhood  $N$  of  $V$  and a homotopy from  $F$  to  $H$  rel  $X \setminus N$  such that  $\text{Coin}(H, G) = \text{Coin}(F, G) \setminus V$  if and only if  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$  and  $\text{ind}_2(F, G; V) = 0$ .

**Proof:** Follows from Theorems 5.2 and 5.1.  $\square$

At the end, we remark that Theorem 5.3 implies that for a family  $V$  of isolated circles of coincidences of  $F$  and  $G$  in the same coincidence class, if  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$  and  $\text{ind}_2(F, G; V) = 0$  for one spin structure, then  $\text{ind}_1(F, G; V) = 0$  and  $\text{ind}_2(F, G; V) = 0$  for any spin structure.

We say that a coincidence class  $V$  is essential if  $\text{ind}_1(F, G; V) \neq 0$  or  $\text{ind}_2(F, G; V) \neq 0$ .

The number of essential coincidence classes is denoted by  $N(G, F)$ , and called Nielsen number for  $G$  and  $F$ . The following theorem follows from Theorem 5.3.

**Theorem 5.4.** For two maps  $F, G: X \rightarrow Y$  as above, the number of isolated coincidence circles or points is at least  $N(G, F)$ .  $\square$

#### LITERATURE

- [1] Jiang, B.: On the least number of fixed points, Amer. J. Math. 102 (1980), 749-763
- [2] Jiang, R: Fixed point classes from a differential viewpoint. In: Fixed Point Theory, LNM Vol. 886, (1981), 163-170
- [3] Jiang, B.: Lectures on Nielsen fixed point theory, Contemporary Mathematics, Vol.14, Providence (1983)
- [4] Dimovski, D.: One-parameter fixed point indices, Pacif. J. of Math., Vol. 161. No. 2, (1994), 263-297
- [5] Dimovski, D.: Combinatorial description of spin manifolds, Math. Zbornik, Skopje, 1-6, 1995.
- [6] Dimovski, D.: Canonical embeddings of  $S^1 \times \Delta^n$  into closed, connected orientable PL manifolds (preprint)
- [7] Dimovski, D.: Geometric characterization of spin manifolds and spin structures (preprint)
- [8] Dimovski, D., Geoghegan, R.: One-parameter Fixed Point Theory. Forum Math. 2 (1990), 125-154
- [9] Jezierski J.: One codimensional Wecken type theorems, Forum Math, 5 (1993), 121-439
- [10] Rolfsen D.: Knots and links, Publish and Perish, Inc. (1976)
- [11] Rourke, C.: Sanderson, B.: Piecewise linear topology, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1972)
- [12] Whitehead, G.: Elements of homotopy theory. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1978)

## DEVELOPMENT A SYSTEM FOR MONITORING ACCESS TO BUILDINGS

---

*In this paper we were developed a system for monitoring access to buildings. Software package MS Project, which have geat features, was used for developing a project for managing a realization such a complex task.*

---

### INTRODUCTION

In everyday life we manage various types of projects. Some of them are obvious, as you account for their performance received from direct supervisors, such as the project of introducing a new information system, or placing a new product to market. On the other hand, there are projects that are not so obvious, and with which we encounter every day: going to the supermarket or organization vacation for you and your family. Understanding what all projects, regardless of how much their size, have a common understanding is the basis of everything that they can do projects for our daily lives.

All projects are: general objective, the manager, individual tasks, time constraints, resources and budget. Project management is, in simple terms, be seen as a process of managing all elements of the project, regardless of its size [1].

Research must begin by *analyzing* the problem, ie. to break down problems into parts that we can understand and with which we try to resolve. A key component is the development of communication between the customer and the designer, if the communication failure experienced the same thing will happen to the system. In order to eliminate a lot about nedumica realization, we need to do a detailed plan [2]. The aim of this work, the *plan of planning and project management system for monitoring access to buildings*. In our case should be provided access only to authorized persons and keep a record of access to the building.

The systematic approach includes the analysis and synthesis: breaking the problem into parts, the formulation of solutions for each part and assembling these parts into a coherent whole. Break-

ing into parts of our project would give the following results:

- Review of system
- Requirements analysis,
- Design,
- Construction,
- Testing,
- Install,
- Maintenance,
- Education of users,
- Preparation of documentation.

Business start working with customers and potential customers that we understand their wants and needs. At the same time check whether they are satisfied with our knowledge of their needs. Exactly this is the first step in our project review system.

### RECORDS OF REQUIREMENTS

Understanding the function and purpose of the system begins by examining the request. Requirements analysis involves more than simply recording what the client wants. It is necessary to find the demands around which we can agree with the client and for which we can formulate test procedures. The access control system for the building plan collection requirements are decomposed to collect user requirements:

- Interview,
- Analysis of the facility,
- Processing of documentation,
- Documentation of tasks.

The analysis, discussion and defining user requirements:

- Analysis of the user requirements,
- Planning to collect additional user requirements,

---

<sup>1</sup> Faculty of Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia

- The collection of additional user requirements,
- Defining user requirements,
- Summarize all user requirements,
- Documentation of user requirements,
- Confirmation of user requirements by users and managers.

We distinguish between functional and nonfunctional requirements. Functional requirement describes the behavior of the function of necessary activities. Functional requirements define the boundaries that surround the solution to our problem, while the non functional requirements, the demand for quality. The design constraint is the decision made in advance, for example, the choice of platform or interface components, which limits the set of possible solutions to the considered problem. Process constraint is the constraint that refers to the techniques and resources that can be used in building systems.

### **STAFF ON THE PROJECT**

In order to determine the deadlines for the project and assess the needs and expenses, we know people who will work on the project, on what works, as well as specialty and experience that they must possess to overall performance of assigned tasks. Regardless of the model, there are certain activities that are necessary in any project that in his work contains part of the software. The key activities include:

- Requirements analysis,
- System design,
- The design of the program,
- Implementation of the program,
- Testing,
- Training,
- Maintenance,
- Quality Assurance.

Assign tasks of workers depends on the size of the project, experience and training of staff. There is a great advantage assigning different responsibilities to different groups of people, thus enabling checks and balance, which provides error detection in the early stages of development. After making decisions about the roles of project team members, it is necessary to make a decision about the people who are for each of them needed. In a development project, the de-

velopment team members communicate with clients and with the client.

### **REQUIRED WORK**

One of the turning point of view of planning in the management system is the understanding about how the project would cost. Cost overruns could lead to abandonment of the project, while underestimating the costs can force the project team that a lot of time spent without financial compensation. Good cost estimates early in the project helps the project manager to determine the number of people needed to develop and agree that appropriate personnel are available precisely when needed. From the budget of the project covers more types of costs: funds, personnel, methods and tools. Cost of funds include: hardware, space, furniture, telephones, modems, heating and air conditioning, cables, disks, paper, pens, copiers and all other items that make up the physical environment in which they will work the project team.

Other project costs include the purchase of software and tools to support development activities. In addition to tools for designing and coding system for the project can be acquired and software for processing, organization, documentation, testing and tracking code changes, and generate test data, and support group meetings and so on.

### **THE PROJECT PLAN**

To transfer the results to clients of the risk analysis and proposed management of, anticipated costs in connection with the project, terms and organization of this system, we make a project plan. Written plan includes customer needs / requirements regarding our intentions and to meet those needs / requirements. The contracting authority analyzes the plan to get information on activities during the development process, which allows him to easily monitor progress of the project. The plan also could be grounds for confirmation on committed assumptions, especially those related to costs and deadlines. After completion of work related to the consideration of system requirements, and staff to determine the start of project planning work will continue designing software structures, where we find the follow-

ing phases (activities).

1. Development of specifications of the system:
  - The development of functional specifications,
  - The development of the behavior of the system (diagram)
  - The development of data models,
  - The development of non-functional specifications,
  - Creation of a preliminary user manual.
2. Designing the structure of the system:
  - Designing the structure of the software,
  - Defining the interface software with the appropriate environment,
  - Defining the resources required to realize software,
  - Designing the hardware structure,
  - Defining the hardware interface with the environment,
  - Defining the resources required for implementation of hardware,
  - Designing the structure of the network,
  - Defining the resources required for the network,
3. Development of the system:
  - Designing the system to control access to buildings,
  - Designing the system for authorization,
  - Design of the central management,
  - Designing the control system output,
  - Designing the system to identify the areas of management powers.

With this system we have defined boundaries, and these define what will encompass the system and what is not. It guarantees the Employer that we understand what the project requires. Time limits can be expressed through the structures of work and deadlines, to show what will happen at any point during the project lifetime. Gantt chart is useful to illustrate the parallel nature of some tasks in the development process. So the parallel phase of construction includes planning and overseeing the development of software and hardware development.

Software development includes:

- Presentation of the plan and division of tasks,
- Verification of the developed structure of the software,
- Design and implementation of software (de-

tailed structure of the software),

- Design and implementation of databases,
- Design and implementation of software for authorization and access control,
- Design and implementation of software to work with the cards (issuance, modification and destruction of cards)
- Design and implementation of software for working with reports, schedules, and archives,
- Design and implementation of software for security and monitoring,
- Design and implementation of software for automatic control devices,
- Design and implementation of network software,
- Coding software,
- A preliminary assessment of software functionality,
- Testing of software modules,
- The identification of errors,
- Change the code,
- Testing of the revised code.

Technical description contains hardware and software, including compilers, interfaces, and equipment or special purpose software. The process of developing hardware would include the following stages: acquisition of hardware, the hardware implementation of the system, testing of system hardware, design and implementation of network infrastructure and network infrastructure testing. In the event that the system sets the requirements for safety, sometimes it is necessary and a special security plan. Security includes confidentiality, availability and integrity, and therefore the plan must explain how each of these segments affect the development of the system. To test it effectively, you must be well planned. Therefore, the project plan should include a comprehensive approach to testing in the project. Or testing the system for monitoring access to buildings include: the implementation of the new system in hardware infrastructure, parallel operation of old and new systems, suspension of work of the old system.

During the development phase, several documents will be generated, especially in the case of large projects in which information about design solutions must be available to all project

team members. The project plan lists the documents that need to be developed, who will explain them when you make, and also in accordance with the configuration management plan, describes how to edit documents.

To make the training process started immediately after the delivery system, and sometimes before, usually for training courses and supporting documents prepared under development, rather than after delivery systems. The project plan defines the manner of conducting the training, course content, supporting software and documentation, as well as the necessary background of each student, ie. installation, user training and maintenance. Finally, if the project team will maintain the system after delivery, the project plan should consider the responsibility for editing code, hardware repairs and updating of supporting documentation and training materials.

### MANAGEMENT PLAN

Project managers are taking steps to ensure that their projects are completed on time and within the constraints of work and costs. However, governance involves far more monitoring and prematurely. We need to determine whether an adverse event may occur during the development or maintenance, so make plans to avoid these things, or, if they are unavoidable, minimize the negative consequences. We need to engage in risk management to understand the differences and manage them in your project.

There are two main sources of risk: risks and general risks that are specific for the envisaged project. The general risks are risks that are common to all projects in your area contain software, such as misunderstanding of requirements, the departure of key employees, or insufficient time for testing. Risks specific to the project are the threats that are a consequence of the weak points of a specific project.

Computer software can contribute significantly to the risk management and managed the project, as a tool for recording, calculating, analysis, presentation preparation itself to help connect the project details. Microsoft® Project (MS Project), Figure 1, is a management software program that is designed to assist project managers in developing plans, assigning resources to tasks, track-

ing progress, managing budgets and analyzing workload [3].

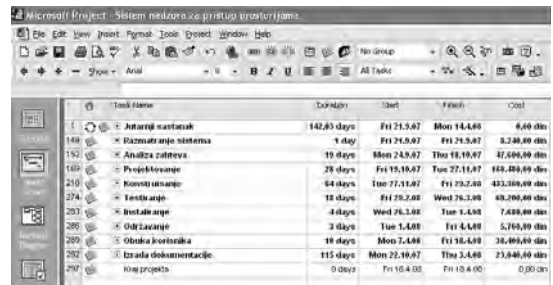


Fig. 1. Microsoft Project

But can not produce, nor guarantee a successful project plan. However, in many ways, can be invaluable in planning and managing projects. It helps us to develop a good plan. Since the software required to accurately determine the tasks necessary to meet the objectives of the project, we must carefully consider the details of the project. The discipline imposed on an understanding of these details helps us to organize a good plan. Display screens provide an organized presentation of details of the plan, which facilitates us to visualize, organize and refine the plan.

Microsoft Project makes calculating much easier and more reliable projections. Based on the information we provide, which calculates the project schedule, showing when each task should start and finish when I have the resources (including people, equipment, facilities etc..) arranged to perform certain tasks. If you have provided all necessary information, this schedule also shows the likely costs of the project [4].

In this way we are enabled to easily test various "what-if" scenarios. The project allows us to experiment with different elements of the plan to get us to the best plan. The project detects when sources take more time than is available or when the far end deadlines impossible to meet the constraints that we have entered [5].

### CONCLUSION

The system for monitoring access to buildings helps us to justify the plan to others. The project provides printed reports and facilitate the approval of our plan by the client or senior management. Similarly, the project plan makes it easier exposition of supervisors to workers, to simpli-



fy obtaining their consent and cooperation.

MS Project helps us to monitor progress and detect potential problems. Once the project started, working on tasks that begins and ends, the date for the tasks in the schedule replacing the actual dates. Software update schedule so you enter the actual dates and end dates, provides a new project and its costs. The new forecasts provide valuable warning us about potential delays or cost overruns. However, it must be emphasized that the project management software, like any other software, useful only as reliable complete data that we have entered.

Another very important fact must be emphasized for the system to control access to buildings, which is designed to provide access only to authorized persons and keep a record of access to the building in several categories, with very small corrections we can use for different sizes of buildings and business property.

## ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by Ministry of Science and Technological Development, Republic of Serbia, under Grant No. III 47016.

## REFERENCES

- [1] Stokić, M. *Pojam upravljanja projektima*.(2008), [http://www.link-elearning.com/dlmaterijali/materijali/Project\\_2007/SadrzajNjpdf/PRJ\\_01.pdf](http://www.link-elearning.com/dlmaterijali/materijali/Project_2007/SadrzajNjpdf/PRJ_01.pdf)
- [2] Shari L. P., & Joanne M. A. *Softversko inženjerstvo (teorija i praksa)*, Cet, Beograd 2006.
- [3] Wikipedia, World Geodetic System. [http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft\\_Project](http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Project)
- [4] Chatfield, C., & Johnson, T. *Microsoft Project 2010 korak po korak*, CET i Portalibris, Beograd 2010.
- [5] Letić, D. i Jevtić, V. *Upravljanje softverima, metode i softver*. Zrenjanin 2007.

## NOVEL HIGHLY ACCURATE FINITE-DIFFERENCE FORMULAS FOR TWO-DIMENSIONAL FIELD COMPUTATIONS IN ELECTROMAGNETICS

---

*Novel highly accurate finite-difference (FD) formulas with accuracy higher than 8th-order have been derived and used for two-dimensional (2D) field computations in electromagnetics. The FD formulas derivation is made upon a power series expansion of the transverse electric field components in the case of uniform rectangular discretization mesh. The use of novel FD formulas provides highly accurate solutions of physical problems which can be described with 2D Laplace's equation. Derived FD formulas enable very cost-effective numerical field simulations and therefore they are ideally suited for implementation in CAD applications. Reported formulas have not been used in the FD method formulations in literature.*

---

### INTRODUCTION

The finite-difference method (FDM) is one of the oldest numerical techniques applied to solve partial differential equations (PDEs) [1-4]. The FDM is known for its conceptual simplicity, flexibility and applicability in computer aided design (CAD) codes [5-6]. The FDM provides us with powerful tools for generating numerical solutions to the PDEs in a various engineering disciplines and mathematical physics. By using the FDM, the physical domain where the (scalar or vector) physical field has to be determined (the computational domain or window) is firstly discretized (sampled) in a certain number of points by using the finite-difference (FD) grid lines (FD meshing), and then the difference approximation of the governing PDE is applied at every discrete sampled point within the domain, simplifying the solution of the problem to the linear one: to the solution of set of linear algebraic equations with a size equal to the number of sampled FD points.

The usual way to solve an electrostatic system is to calculate the electric scalar potential distribution inside the system. This can be done by solving the Laplace equation with respect to the imposed spatial boundary conditions. The charge distribution on the conductive boundaries and the electric field can be then easily calculated from the known potential distribution. When the FDM is chosen as the method of solution, the centered-difference approximation of the Laplace equation is usually applied. The centered-difference approximation of the Laplace equation for FD mesh with evenly spaced sampled points (so-called the standard five-point FD formula for the uniform FD mesh) is second-order accurate. The simplest way to obtain the better order of accuracy, but the most expensive in terms of memory and computer run-time costs, is to refine the FD grid. In the standard implementation of the FDM in the rectangular co-ordinate system in two-dimensional (2D) cases the refinement of the FD mesh in both  $x$  and  $y$  direction is required.

Several FD approaches have been developed so far in attempt to obtain the better order of accuracy or faster and more efficient algorithms with still modest FD meshsizes. The operator splitting techniques like altering-direction implicit (ADI) method or local one-dimensional (LOD) method is an efficient alternative [7]. Compact FD schemes [8] only use the minimum three FD mesh points in one dimension in the FD formulas and usually are aimed to be implemented with ADI algorithms resulting in the fast non-iterative solution of sets of linear algebraic equations (by using non-iterative tri-diagonal Thomas' algorithm). The multi-grid methods are almost always the method of choice for solution of large elliptic PDEs problems [6]. The accuracy of the FD methods is usually dependent on inevitable so-called staircase approximation, which can be overcome by using improved FD formulas [9], or by applying the FD discretization in the non-standard co-ordinate systems [10-14].

---

<sup>1</sup> University of Pristina, Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia

Contrary to the standard “first-potential” solution techniques, the electric field can be calculated first. It appears that this “first-field” solution approach has many advantages over the standard and well-established “first-potential” solution techniques when the FDM is chosen to be the method of the solution. The main advantage of the “first-field” approach is the possibility to derive and use the difference approximations of the Laplace equation (i.e. the field FD formulas) with much better order of accuracy. In the present paper the field approach is adopted and a set of highly accurate FD formulas for the electric field computation in 2D electrostatic cases is derived. The similar field FD approach has been recently used in [9] to design accurate field FD formulas near dielectric boundaries. The field FD approach is based on the fact that both electric field components obey Laplace’s equation and Maxwell’s equations in electrostatics. Both electric field components are expanded in the finite power series and Maxwell’s equations are used to calculate unknown coefficients of the power series. The simple collocation method is used to match power series representations of the field components at the multiple of neighbouring points. The described procedure results in derivation of novel field FD formulas employing 9, 17, or 25 neighbouring FD sampled points thus yielding the 8th-, 11th- and the 16th-order of accuracy.

Certain numerical experiments are conducted to test accuracy, numerical stability and convergence characteristics of novel field FD formulas. Some of obtained numerical results are given in the present paper. The FD formulas of such high degree of accuracy, to the best knowledge of the author, are not published in the literature so far.

## OUTLINE OF THE METHOD

In the linear, isotropic and homogeneous source-free media, from Maxwell’s equations for the 2D static transverse electric field  $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ ,

$$\nabla \times \mathbf{E}_t = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_t = 0, \quad (1)$$

it is an easy task to derive the vector differential equation,

$$\nabla^2 \mathbf{E}_t = 0. \quad (2)$$

In the Cartesian co-ordinate system (the rectangular  $xy$ -co-ordinate system) the vector equation (2) for  $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t(x, y)$  can be rewritten in the scalar form as

$$\nabla^2 E_x = 0, \quad \nabla^2 E_y = 0. \quad (3)$$

Both scalar electric field components  $E_x$  and  $E_y$  obey Laplace’s equation, in the same way as the scalar electric potential  $V$  does,  $\nabla^2 V = 0$ . Instead of solving one Laplace’s equation for the electric scalar potential  $V$ , we can solve two Laplace’s equations for the field components  $E_x$  and  $E_y$ , this can be referred as *the field approach* in electrostatics. Seemingly, the field approach complicates the solution of the problem by doubling the number of unknowns. However, it turns out that *the field FD approach* makes it possible to obtain the difference approximation of Laplace’s equation (the field FD formulas) with the high order of accuracy.

The power series expansions of the electric field components  $E_x$  and  $E_y$ , as the functions of the Cartesian co-ordinates  $x$  and  $y$ , are

$$E_x(x, y) = a_0' + a_1'x + a_2'y + a_3'x^2 + a_4'xy + a_5'y^2 + a_6'x^3 + a_7'x^2y + a_8'xy^2 + a_9'y^3 + \dots, \quad (4)$$

$$E_y(x, y) = b_0' + b_1'x + b_2'y + b_3'x^2 + b_4'xy + b_5'y^2 + b_6'x^3 + b_7'x^2y + b_8'xy^2 + b_9'y^3 + \dots. \quad (5)$$

The power series expansion coefficients  $a'$  and  $b'$  in (4) and (5) can be evaluated from the scalar forms of the Maxwell equations (1),

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

by equating the coefficients with the same  $x^n y^m$  terms. The new more suitable forms of power series expansions (4) and (5) up to 4th-order are

$$E_x(x, y) = a_0 + a_1x + b_1y + a_2x^2 + 2b_2xy - a_2y^2 + a_3x^3 + 3b_3x^2y - 3a_3xy^2 - b_3y^3 + a_4x^4 + 4b_4x^3y - 6a_4x^2y^2 - 4b_4xy^3 + a_4y^4 + \dots, \quad (7)$$

$$E_y(x, y) = b_0 + b_1x - a_1y + b_2x^2 - 2a_2xy - b_2y^2 + b_3x^3 - 3b_3x^2y - 3b_3xy^2 + a_3y^3 + b_4x^4 - 4a_4x^3y - 6b_4x^2y^2 + 4a_4xy^3 + b_4y^4 + \dots. \quad (8)$$

Note that both expansions (7) and (8) for  $E_x$  and  $E_y$  obey Maxwell's equations (1) and the Laplace equations (3) in 2D case. In general,  $n$ th-order expansions in (4) and (5) require  $(n+1)(n+2)$  unknown coefficients  $a'_k$  and  $b'_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , while expansions (7) and (8) result in only  $(n+1)$  unknown coefficients  $a_k$  and  $b_k$ . For instance, the 8th-order field expansions in terms of (7) and (8) require only 18 unknown coefficients  $a_k$  and  $b_k$ , instead of 90 unknown coefficients  $a'_k$  and  $b'_k$  in terms of (4) and (5).

The expansions (7) and (8) can be utilized within simple collocation procedure to enable the derivation of the very accurate difference approximations of Laplace's equation (i.e. the field FD formulas) for the electric field components  $E_x$  and  $E_y$ . If the uniform rectangular FD mesh of the meshsize  $h$  with stencil diagrammed in Fig. 1 is considered, the values of the field components  $E_x$  and  $E_y$  in terms of expansions (7) and (8) up to the 8th-order have to be collocated at eight adjacent points to the central point O (where the field has to be calculated) to obtain the field FD formulas with the 8th-order of accuracy. For the  $E_x$  component of the electric field, expansion (7) up to 8th-order can be evaluated at points O,1,2,3,...,8 of the FD mesh stencil shown in Fig. 1, in the systematic way

$$E_{x0} = E_x(0, 0) = a_0, \quad (9)$$

$$E_{x1} = E_x(h, 0) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + a_4h^4 + a_5h^5 + a_6h^6 + a_7h^7 + a_8h^8, \quad (10)$$

$$E_{x2} = E_x(h, h) = a_0 + a_1h + b_1h + 2b_2h^2 - 2a_3h^3 + 2b_3h^3 - 4a_4h^4 - 4a_5h^5 - 4b_5h^5 - 8b_6h^6 + 8a_7h^7 - 8b_7h^7 + 16a_8h^8, \quad (11)$$

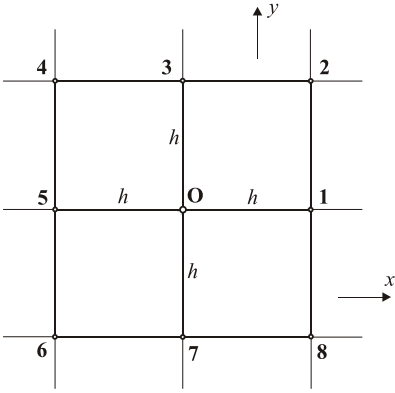
and similarly for  $E_{x3}$ ,  $E_{x4}$ , ...,  $E_{x8}$ . The collocation procedure for the  $E_y$  component of the electric field can be performed in the similar way to give values for  $E_{y0}$ ,  $E_{y1}$ ,  $E_{y2}$ , ...,  $E_{y8}$ . The described collocation procedure results in a set of 18 linear algebraic equations,

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (12)$$

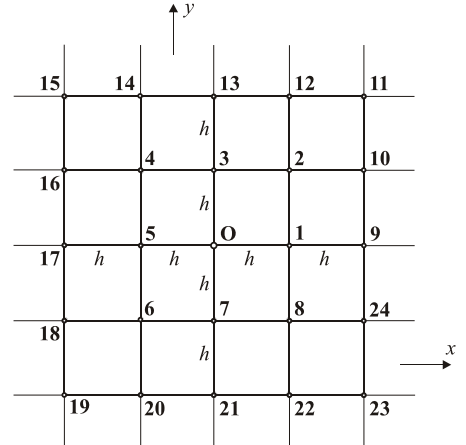
Unknowns  $a_0, a_1, \dots, a_8$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_8$  can be calculated by inverting square matrix  $[\mathbf{H}]$  in (12). The unknown coefficients  $a_k$  and  $b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 8$ , present (but are not equal to!) derivatives in  $x$  and  $y$  of the electric field components  $E_x$  and  $E_y$  for the uniform FD mesh. The difference approximation of Laplace's equation, i.e. the field FD formulas, for the field components  $E_x$  and  $E_y$  at the point O, are obtained by putting  $a_8=0$  and  $b_8=0$ ,

$$E_{x0} = \frac{1}{20} [4 \cdot (E_{x1} + E_{x3} + E_{x5} + E_{x7}) + E_{x2} + E_{x4} + E_{x6} + E_{x8}] + O(h^8), \quad (13)$$

$$E_{y0} = \frac{1}{20} [4 \cdot (E_{y1} + E_{y3} + E_{y5} + E_{y7}) + E_{y2} + E_{y4} + E_{y6} + E_{y8}] + O(h^8). \quad (14)$$



**Fig. 1.** The nine-point uniform FD mesh stencil used in the collocation procedure in derivation of the 9-point field FD formulas.



**Fig. 2.** The 25-point uniform FD mesh stencil used in the collocation procedure in derivation of the 17-point and 25-point field FD formulas.

Formulas (13) and (14) are well-known 9-point difference approximations of Laplace's equation at the point  $O(x_0, y_0)$  in terms of values of the scalar 2D function at nine neighbouring points for the case of the uniform Cartesian FD mesh [2-3]. FD formulas (13) and (14) are usually considered as 6th-order accurate [1]. However, according to the collocation procedure used, those field FD formulas give the 8th-order of accuracy.

The field FD formulas with higher order of accuracy can be obtained if more neighbouring points to the point O are taken into account. Applying the collocation procedure on the 25-point uniform FD mesh stencil diagrammed in Fig. 2, the field FD formulas with 11th- and 16th-order of (estimated) accuracy are obtained. The 17-point field FD formulas are

$$E_{x0} = \frac{1}{19500} [4096 \cdot (E_{x1} + E_{x3} + E_{x5} + E_{x7}) + 832 \cdot (E_{x2} + E_{x4} + E_{x6} + E_{x8}) - 52 \cdot (E_{x9} + E_{x13} + E_{x17} + E_{x21}) - (E_{x11} + E_{x15} + E_{x19} + E_{x23})] + O(h^{11}), \quad (15)$$

$$E_{y0} = \frac{1}{19500} [4096 \cdot (E_{y1} + E_{y3} + E_{y5} + E_{y7}) + 832 \cdot (E_{y2} + E_{y4} + E_{y6} + E_{y8}) - 52 \cdot (E_{y9} + E_{y13} + E_{y17} + E_{y21}) - (E_{y11} + E_{y15} + E_{y19} + E_{y23})] + O(h^{11}). \quad (16)$$

The 25-point field FD formulas are

$$E_{x0} = \frac{1}{119340} [24480 \cdot (E_{x1} + E_{x3} + E_{x5} + E_{x7}) + 5440 \cdot (E_{x2} + E_{x4} + E_{x6} + E_{x8}) - 180 \cdot (E_{x9} + E_{x13} + E_{x17} + E_{x21}) - (E_{x11} + E_{x15} + E_{x19} + E_{x23}) + 48 \cdot (E_{x10} + E_{x12} + E_{x14} + E_{x16} + E_{x18} + E_{x20} + E_{x22} + E_{x24}) - 16 \cdot (E_{y10} - E_{y12} + E_{y14} - E_{y16} + E_{y18} - E_{y20} + E_{y22} - E_{y24})] + O(h^{16}), \quad (17)$$

$$E_{y0} = \frac{1}{119340} [24480 \cdot (E_{y1} + E_{y3} + E_{y5} + E_{y7}) + 5440 \cdot (E_{y2} + E_{y4} + E_{y6} + E_{y8}) - 180 \cdot (E_{y9} + E_{y13} + E_{y17} + E_{y21}) - (E_{y11} + E_{y15} + E_{y19} + E_{y23}) + 48 \cdot (E_{y10} + E_{y12} + E_{y14} + E_{y16} + E_{y18} + E_{y20} + E_{y22} + E_{y24}) + 16 \cdot (E_{x10} - E_{x12} + E_{x14} - E_{x16} + E_{x18} - E_{x20} + E_{x22} - E_{x24})] + O(h^{16}). \quad (18)$$

## NUMERICAL RESULTS

A number of numerical experiments were performed to validate the accuracy and convergence characteristics of novel field FD formulas. The 2D electrostatic systems with known analytical solutions are chosen and obtained numerical results are compared to the exact analytical solutions. Both electric field components  $E_x$  and  $E_y$  are numerically calculated at the interior points of the square computational domain  $\Omega$ . The field source in the numerical example 1. is kept outside the computational domain. The spatial boundary conditions at the edges of the computational domains are taken to be of a Dirichlet type, hence values of the electric field components  $E_x$  and  $E_y$  at points at the edges of the computational domain are calculated analytically thus eliminating the possible non-physical numerical reflections. It is obvious that the use of the 17-point and 25-point field FD formulas requires two layers of pre-computed field values at FD grid points at the boundaries. To enable the efficient numerical experiments the fast pointer oriented C++ codes are written and run on the TOSHIBA TECRA A10 notebook model with 4 GB of RAM and clock at 2.0 GHz.

Numerical experiments are performed for the uniform FD mesh with the same number of the FD sampled points in the  $x$ - and  $y$ -direction,  $N_x = N_y = N$ , and the FD meshsize  $h_x = h_y = h$ . The accuracy and efficiency of novel 9-point, 17-point and 25-point field FD formulas are compared against the accuracy and efficiency of the standard 5-point FD approximations,

$$E_{xO} = \frac{1}{4}(E_{x1} + E_{x3} + E_{x5} + E_{x7}) + O(h^4), \quad E_{yO} = \frac{1}{4}(E_{y1} + E_{y3} + E_{y5} + E_{y7}) + O(h^4). \quad (19)$$

According to the derivation procedure, the 5-point FD formulas should behave as 4th-order accurate (19), however, this is never the case, they behave only as 2th-order accurate.

To quantify the difference between calculated,  $E_{\text{num}}$ , and exact,  $E_{\text{exact}}$ , values for the field components and therefore to estimate the order of accuracy of novel field FD formulas, the relative *root mean square error* (RMS error) is calculated for both  $x$  and  $y$  electric field component at all FD sampled points. In the case of computation of the  $E_x$  component, the relative RMS error is calculated as

$$\text{RMS}_{\text{error}}^{\text{Rel}}|_x = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\left( \left| E_{x_{\text{num}ij}} \right| - \left| E_{x_{\text{exact}ij}} \right| \right)^2}{E_{x_{\text{exact}ij}}^2}}, \quad (20)$$

and similarly for error in the  $E_y$  component computation. The numerical results affected by the machine arithmetic accuracy (RMS error values less than  $10^{-14}$ ) are indicated with thin “zebra” strips at the very bottom in Figs. 3-4.

The 1st numerical example presents the calculated relative RMS error in FD computations of the electric field of a line charge with the constant charge density  $q'_a$ , located at the point  $M(-2.5, -1.5)$ . The electric field is calculated numerically inside the computational domain  $\Omega$  defined as  $(x, y) \in \Omega = [0, 5] \times [0, 5]$ . The exact solutions for the electric scalar potential  $V=V(x,y)$  and the field components  $E_x$  and  $E_y$  at the point  $O(x,y)$  are

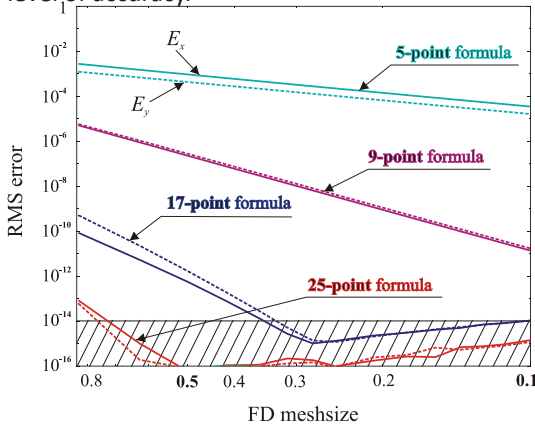
$$V = V_0 + a \ln r, \quad E_x = a \frac{x - x_M}{r^2}, \quad E_y = a \frac{y - y_M}{r^2}, \quad r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}, \quad (21)$$

where  $V_0$  is an additive constant, and  $a = q'_a / (4\pi\epsilon)$  is constant parameter (both  $V_0$  and  $a$  are in Volts). For  $a=5$ , results of the electric field computations are shown in Fig. 3, where the “strength” of novel field FD formulas and their superior accuracy are clearly indicated.

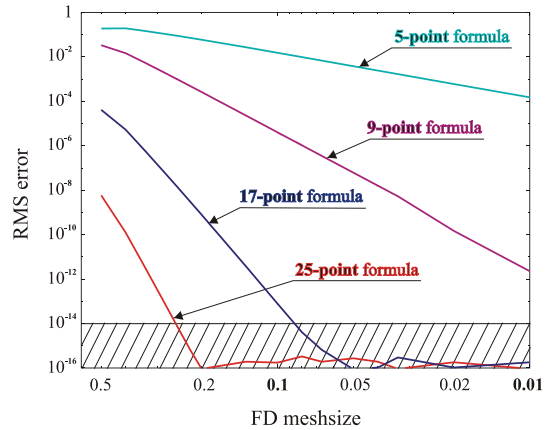
The 2nd numerical example presents the calculated relative RMS error in FD computations of the electric field of the  $n$ th harmonic solution of Laplace’s equation. At the point  $O(x,y)$  the exact solutions are

$$V = V_0 + a \frac{\cos nx}{n} \cdot e^{-ny}, \quad E_x = -a \sin nx \cdot e^{-ny}, \quad E_y = -a \cos nx \cdot e^{-ny}, \quad (22)$$

where  $n$  is an integer number,  $n=1,2,3,\dots$ , and  $a$  is constant parameter. Numerical results for the  $E_x$  component in the highly-oscillating and highly-decaying field case for  $n=6$ ,  $a=100$  within the computational domain  $\Omega$  defined as  $(x, y) \in \Omega = [0.5, 2.5] \times [0.5, 2.5]$ , are shown in Fig. 4. Although the electric field is an ill-behaved function, the field FD formulas show excellent convergence behaviour with predicted level of accuracy.



**Fig. 3.** The relative RMS error obtained by using the different field FD formulas in the FD computation of the  $E_x$  and  $E_y$  components of the electric field of a line source.



**Fig. 4.** The relative RMS error obtained by using the different field FD formulas in the FD computation of the electric field component  $E_x$  of the fundamental harmonic, high-oscillating field case.

## CONCLUDING REMARKS

The field FD approach was used to design highly accurate novel field FD formulas to solve 2D Laplace's equation in electromagnetics. The field FD formulas with the 16th-order of accuracy are derived and presented, what is the highest accuracy with a single FD formula ever reported in literature so far. Being much more accurate than the standard FD approach, the field FD approach and formulas offer the significant cut in overall computer costs. The field FD formulas can be derived for cases of the uniform, non-uniform and non-standard FD meshing, and can enable very accurate treatment of the boundaries of the computational domain. The similar field FD approach with certain modifications can be applied in other areas of the electromagnetic analysis, e.g. to solve the 3D electrostatic problems, or to solve the transmission line problems in the 2D TEM field analysis. Moreover, the field FD idea and the field FD formulas derivation procedure can be extended to solve other physical problems where the scalar fields fulfil 2D Laplace's equation. Presented numerical results have proved the solution accuracy, numerical stability and efficiency and excellent convergence characteristics of novel field FD formulas. It has been proved that the order of accuracy retains high even in the case of the FD computation of ill-behaved fields.

## ACKNOWLEDGEMENT

This paper was based on research conducted within the Project (Project code: TR32052) funded by the Ministry of Science and Technological Development of the Republic of Serbia.

## REFERENCES

- [1] Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate methods of Higher Analysis. Groningen, The Netherlands: Noordhoff. 1958.
- [2] Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. Dover. 1972.
- [3] Pozrikidis C. Numerical Computation in Science and Engineering. Oxford University Press, New York. 1998.
- [4] Mitchel A.R., Griffiths D.F. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. Wiley, New York. 1987.
- [5] Press W.H., Wetterling W.T., Teukolsky S.A., Flannery B.P. Numerical Recipes in C++, The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, United Kingdom. 2002.

- [6] Wesseling P. An Introduction to Multigrid Methods. Wiley, New York. 1992.
- [7] Peaceman D., Rachford H. The numerical solution of elliptic and parabolic differential equations, J. SIAM 3. 1955. P. 28-41.
- [8] Wang Y., Zhang J. Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2D Poisson equation. J. of Comput. Phys. Vol.228. 2009. p. 137-146.
- [9] Djurdjevic D.Z. New finite-difference formulas for dielectric interfaces. Facta Univ. Ser. Elec. Energ. Vol.23. No.1. 2010. p. 17-35.
- [10] Djurdjevic D.Z, Benson T.M., Sewell P., Vukovic A. Fast and accurate numerical analysis of 3D curved waveguide couplers. J. of Lightw. Techn. Vol.22. No.10. 2004. p. 2333-2340.
- [11] Djurdjevic D.Z, Benson T.M., Sewell P., Vukovic A. 3D analysis of waveguide couplers using a structure related beam propagation algorithm. Proc. OSA/IPR. Washington D.C. USA. 2003. p. ItuD2.
- [12] Djurdjevic D.Z, Sewell P., Benson T.M., Vukovic A. Highly efficient finite-difference schemes for structures of nonrectangular cross-section. Microw. and Opt. Techn. Lett. Vol.33. No.6. 2002. p. 401-407.
- [13] Djurdjevic D.Z, Sewell P., Benson T.M., Vukovic A. Design of photonics structures with non-orthogonal cross-sections using structure-related finite difference methods. Proc. SIOE. Cardiff, Wales. 2002.
- [14] Djurdjevic D.Z. Accurate modelling of modern photonic devices with complex geometries in transverse plane and longitudinal direction. Sci. Techn. Rev. Vol.LIX. No.3-4. 2009. p. 30-38.



## THE APPLICATION OF THE DU FORT FRANKEL BEAM PROPAGATION METHOD IN PHOTONICS

---

*The finite-difference beam propagation method (FD-BPM) is the most commonly employed numerical technique for simulating field propagation in optical components. The FD-BPM is usually implemented by using implicit schemes such as Crank-Nicolson scheme (CN) due to its stability. However, when the three-dimensional (3D) photonic structures are modelled, the implementation of the CN scheme implies the use of iterative matrix solvers and thus requires huge computational resources and long run-times. The way out might be the implementation of the explicit Du Fort Frankel (DFF) finite-difference schemes. The DFF is a three-level explicit algorithm, but provides better stability condition than a simple explicit scheme and computational efficiency very attractive for modelling realistic 3D waveguide based photonic devices.*

---

### INTRODUCTION

The beam propagation method (BPM) is well known as the most widely used propagation technique for modelling optoelectronic and photonic devices [1-2]. The BPM algorithm is based upon the paraxial approximation of the wave equation [3]. The finite-difference beam propagation method (FD-BPM) is certainly the most popular BPM algorithm [4-6], still offering computational advantages over time domain numerical techniques such as finite-difference time domain (FDTD) method.

So far, several different BPM algorithms have been suggested enabling significant improvements in the computational efficiency of the standard paraxial BPM technique. One of them is a wide-angle BPM algorithm which uses a Padé series expansion of the square root operator with an idea to improve the paraxial limitations of the original BPM [7-8].

The FD-BPM is usually implemented by using implicit schemes, such as a Crank-Nicolson (CN) scheme, due to their unconditional numerical stability. However, when the 3D photonic structures are analysed, the implementation of the CN scheme requires huge computational resources and results in lengthy run-times. The improvements in efficiency are found in the development of unconditionally stable split-step BPM techniques, like altering-direction implicit (ADI) schemes [8-9], or local one-dimensional (LOD) schemes [10].

When the FD-BPM is implemented in a rectangular co-ordinate system the accuracy of the method is affected by an inevitable so-called staircase approximation. This inherent drawback of the FD methods can be overcome by using so-called improved FD formulas, or by applying the FD discretization in co-ordinate systems which exactly describe the geometry of the photonic device studied [11-13].

An attractive possibility to improve the efficiency of the FD-BPM is the use of the fast and unconditionally stable explicit BPM algorithms, such as the Du Fort Frankel (DFF) scheme [14-15]. DFF is a three-level explicit FD-BPM algorithm, but providing better stability condition than simple, but unconditionally unstable, explicit schemes and highly improved and thus very attractive computational efficiency suitable for modelling waveguide based 3D photonic devices.

In the present paper the main idea of the DFF algorithm, the strengths and the weaknesses of the implementation of the DFF method in the FD-BPM photonics design are addressed in more details. The computational efficiency and stability of the DFF FD-BPM formulation and the inherent downsides of the method (such as the “spurious” or “ghost” solutions) are compared against the standard implicit CN FD-BPM scheme. Examples of the appearance of the spurious solutions in the FD-BPM field simulations using the DFF scheme are presented and discussed.

---

<sup>1</sup> University of Pristina, Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia

The recent huge improvements and discoveries in the field of photonics resulted in a broad range of novel devices, placing at the same time high demands on numerical modellers to solve the propagation and modal properties of these novel photonic devices designed as the result of the advances in the modern nano-fabrication and characterization techniques, such as photonic band gap structures, photonic crystal fibers and plasmonics (metallic waveguides supporting surface plasmons having the enormous bandwidth of a light pulse).

Furthermore, the well-known efficiency of the fast DFF method is exploited not only in the photonics design. The DFF method is often the method of choice in various numerical simulations in quantum physics. The linear and non-linear Schrödinger equation is often numerically solved by using the DFF method [16].

### THE EXPLICIT AND THE DU FORT FRANKEL EXPLICIT BEAM PROPAGATION ALGORITHM

The full-vectorial Helmholtz equation in linear and isotropic media, in the frequency domain, in terms of the transverse electric field  $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ , is given by

$$\nabla^2 \mathbf{E}_t + k^2 n^2 \mathbf{E}_t = \nabla_t \left[ \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t - \frac{1}{n^2} \nabla_t \cdot (n^2 \mathbf{E}_t) \right], \quad (1)$$

where a wave-number  $k$  is defined as  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ , refractive index as  $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ , under assumption  $n \neq n(z)$ . In (1) an operator  $\nabla$  is split in its transverse and longitudinal part,  $\nabla = \nabla_t + \nabla_z$ . The quite similar equation states for the transverse magnetic field  $\mathbf{H}_t$ . The BPM methods are developed under the paraxial approximation of (1) [1-3,6],

$$j2n_0 k \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = \nabla_t \left[ \frac{1}{n^2} \nabla_t \cdot (n^2 \mathbf{E}_t) \right] + k^2 (n^2 - n_0^2) \mathbf{E}_t, \quad (2)$$

where  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\mathbf{E}_t = E_t \cdot e^{-jk_0 z}$  is a slow-varying envelope field function, and  $n_0$  denotes a reference refractive (modal) index. Equation (2) is known as the one-way paraxial wave equation, or Fresnel's equation.

Because of the simplicity, the scalar assumption of the paraxial vector wave equation (2) will be considered only. In (2) transverse components of the electric field are coupled at the interfaces between dielectrics. Better accuracy with the scalar assumption can be obtained by using so-called semi-vectorial or polarized wave equation, which neglects a vectorial nature of the electromagnetic field, but takes into account the boundary conditions at the dielectric interfaces of the structure. Note that the numerical solution of the full-vectorial wave equation (1) via the DFF method is still unpublished in literature. In the Cartesian co-ordinate system the scalar form of the paraxial wave equation (2) is given by

$$j2n_0 k \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 (n^2 - n_0^2) \Phi. \quad (3)$$

Scalar function  $\Phi = \Phi(x, y, z)$  in (3) denotes any transverse component of the electric (or magnetic) field. The BPM algorithm is obtained by transverse and longitudinal discretization of the field in (3). This can be expressed as

$$\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \hat{F} \Phi(z), \quad (4)$$

where the transverse FD discretization operator  $\hat{F}$ , in terms of the standard 5-point difference approximation for the second derivative, is defined as

$$\hat{F}_{i,j} \Phi_{i,j} = \frac{1}{jn_0 k} \left[ \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} + k^2 (n^2 - n_0^2) \Phi_{i,j} \right]. \quad (5)$$

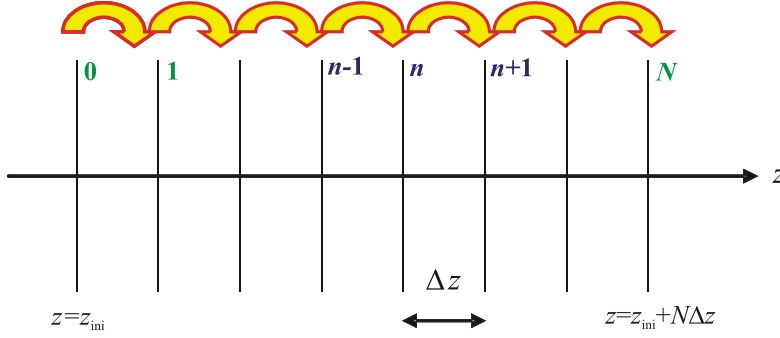


Fig. 1. Principal scheme of the beam propagation algorithm in the longitudinal  $z$  direction.

In the case of the standard explicit propagation algorithm,

$$\frac{\Phi^{n+1}(z + \Delta z) - \Phi^n(z)}{\Delta z} + O(\Delta z) = \frac{1}{2} \hat{F} \Phi^n(z) + O(\Delta x^2, \Delta y^2), \quad (6)$$

the distribution of the scalar field  $\Phi^{n+1}(z + \Delta z)$  in the  $(n+1)$ th  $z$ -plane is calculated directly from the known field distribution  $\Phi^n(z)$  in the previous  $n$ th  $z$ -plane, see the scheme shown in Fig. 1. The explicit algorithm is first order accurate in  $z$ , second order accurate in the transverse plane; however, it is unconditionally unstable and thus practically useless.

Du Fort and Frankel [17] proposed a modification of the explicit algorithm (6), first by improving accuracy in  $z$ ,

$$\frac{\Phi^{n+1}(z + \Delta z) - \Phi^{n-1}(z - \Delta z)}{\Delta z} + O(\Delta z^2) = \hat{F} \Phi^n(z) + O(\Delta x^2, \Delta y^2), \quad (7)$$

then by replacing the middle terms  $2\Phi^n$  in (5) with an average value  $\Phi_{i,j}^n = \frac{1}{2}(\Phi_{i,j}^{n-1} + \Phi_{i,j}^{n+1})$ ,

$$\hat{F}_{i,j} \Phi_{i,j}^n = \frac{1}{jn_0 k} \left[ \frac{\Phi_{i-1,j}^n - (\Phi_{i,j}^{n-1} + \Phi_{i,j}^{n+1}) + \Phi_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j-1}^n - (\Phi_{i,j}^{n-1} + \Phi_{i,j}^{n+1}) + \Phi_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} + k^2 (n^2 - n_0^2) \Phi_{i,j}^n \right]. \quad (8)$$

Hence, a three-level explicit algorithm is obtained,

$$\Phi_{i,j}^{n+1}(z + \Delta z) + O(\Delta z^2) = \hat{L} \Phi_{i-1,j}^n(z) + \hat{R} \Phi_{i+1,j}^n(z) + \hat{C} \Phi_{i,j}^{n-1}(z - \Delta z) + \hat{D} \Phi_{i,j-1}^n(z) + \hat{U} \Phi_{i,j}^n(z) + O(\Delta x^2, \Delta y^2), \quad (9)$$

which is second order accurate in  $z$  and second order accurate in  $x$  and  $y$ . Discretization operators  $\hat{L}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  and  $\hat{U}$  in (9) can be easily obtained by rearranging (7) and (8). Hence, the field distribution  $\Phi^{n+1}(z + \Delta z)$  in the  $(n+1)$ th  $z$ -plane is calculated directly from the known field distributions  $\Phi^n(z)$  and  $\Phi^{n-1}(z - \Delta z)$ , Fig. 1.

The stability analyses show that the Du Fort Frankel propagation algorithm is unconditionally stable. This means that the propagation step  $\Delta z$  can be chosen to be of large size (compared with the transverse FD meshsize  $\Delta x$  and  $\Delta y$ ). However, in practice, a small propagation step  $\Delta z$  is required in order to obtain a solution that is sufficiently accurate and consistent with the original paraxial wave equation (3).

## THE STRENGTHS AND THE WEAKNESSES OF THE DU FORT FRANKEL METHOD

Due to its desirable properties regarding explicit nature, unconditional stability of the algorithm and the suitability for parallel computing, the Du Fort Frankel beam propagation method is a very attractive

choice in the FD-BPM realisations and has enjoyed extensive applications in practice.

The explicit nature of the Du Fort Frankel beam propagation method (9) enables the computation of the field distribution in the subsequent  $z$ -plane directly from the known field distributions in two previous  $z$ -planes thus resulting in substantial memory savings and avoiding time-consuming matrix algebra and codes such as matrix inversions and multiplications or iterative matrix solver procedures. When the implicit methods are used, such as the standard Crank-Nicolson (CN) FD-BPM method, the FD discretization of (3) results in matrix equation of a type

$$[\mathbf{A}] \cdot [\Phi^{n+1}] = [\mathbf{B}] \cdot [\Phi^n], \quad (10)$$

where matrices  $[\mathbf{A}]$  and  $[\mathbf{B}]$  are often large sparse matrices when a fine FD discretization is performed (sometimes resulting in a couple of millions of matrix elements). To obtain the solution for the field vector  $[\Phi^{n+1}]$  a set of linear algebraic equations has to be solved by using the iterative matrix solver. Although being a sparse matrix problem, the task of obtaining the solution

$$[\Phi^{n+1}] = [\mathbf{A}]^{-1} \cdot [\mathbf{B}] \cdot [\Phi^n], \quad (11)$$

in every single propagation step by iterative matrix solver (an accurate solution often requires thousands of propagation steps) is run-time and memory very consuming and can be in overall inefficient at all. In those cases the explicit DFF method is faster and computationally much more efficient, enabling further computational savings by implementing the DFF FD-BPM code on parallel computing platforms [18-20].

However, there are certain downsides of the DFF algorithms which unfortunately limit its implementation in the FD-BPM codes and applications in practice.

A consistency analysis shows that the Du Fort Frankel three-level algorithm (9) is not the genuine difference approximation of a parabolic-type wave equation (3). By comparing the modified (with averaging) differential equation (8) with the original paraxial scalar wave equation (3) in terms of a Taylor's series expansion in  $z$  about a point  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z^n)$ , and retaining just a few first dominant terms, one can obtain

$$\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \cong k \hat{F} \Phi(z) - k \left[ \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z}{\Delta y} \right)^2 \right] \cdot \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2}, \quad (12)$$

where  $k = \text{const}$ . It can be seen that (12) is not an accurate differential approximation of (4). It would be, if the second term on the right-hand side in (12) is equal to zero. It means that by using the Du Fort Frankel method we are solving a fictitious mathematical problem described by (12), instead of the real physical problem described by the wave equation (3). The accurate numerical solution of (3) can be obtained by using (12) only when  $(\Delta z / \Delta x)^2$  and  $(\Delta z / \Delta y)^2$  are sufficiently small. This leads to the conclusion that the Du Fort Frankel method can give the useful solution of the propagation problem only when the propagation step  $\Delta z$  is small enough. Unfortunately, this "small enough" criterion cannot be achieved analytically, it has to be determined for every single propagation problem analysed by test and trials.

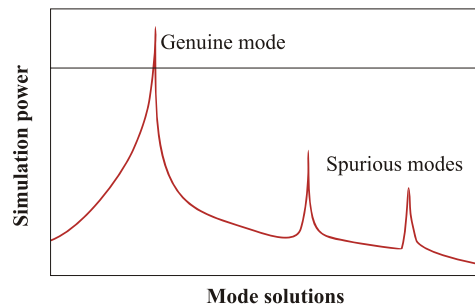
Although the Du Fort Frankel method is unconditionally stable for any choice of  $\Delta z$ , the inconsistency of its nature gives consequently the propagation solutions of the field at "wrong" frequencies for larger steps  $\Delta z$ . The appearance of these non-physical propagation modes are serious drawback of the Du Fort Frankel method.

In practice, no matter how small  $\Delta z$  is, concerns about the validity of the obtained numerical results are always present, particularly when a novel photonic structure is analysed or designed, having no clue in advance what is the real solution of the problem and having in mind that the fake solutions lurk behind. This is probably the worst situation from the aspect of the experienced numerical modeller: an algorithm is fast, a solution is numerically stable, a required accuracy is obtained and thus the high degree of efficiency is achieved, except a single fact that the obtained results are not physically

meaningful! That is why those solutions are often referred as the “spurious solutions” or the “spurious propagation modes”.

There are several possible sources of the appearances of the spurious modes in the numerical solution even when the propagation step  $\Delta z$  is carefully chosen to be small enough. First of all, this could be insufficiently accurate FD discretization of the edges of the open computational domain. If the field is not strongly confined inside the photonic device analysed (region of the structure where the refraction index is greater than in inner regions), the non-physical reflections from the edges of the computational domain are usually source of the spurious modes. The domain enlarging might be a remedy, unfortunately with increasing the algorithm run-time. Another reason for initiating spurious modes could be the insufficiently accurate FD discretization of the dielectric boundaries of the structure. Moreover, the presence of lossy materials or the use of the perfectly matched layers (PMLs), which implies modelling of several anisotropic conductive layers, can cause the spurious modes and instabilities in the Du Fort Frankel BPM, what is already reported in [19]. The appearances and the positions of the spurious modes are dependable on the initial field distribution as well; hence the input field for numerical simulation has to be carefully chosen.

Fig. 2 shows the positions of the genuine propagation mode and spurious modes as the function of total simulation power in the computational window versus propagation modal index obtained as the results of the waveguide mode solver simulation based on the DFF method. It is important to keep the positions of the spurious modes far from the true one, or try to suppress them, what can be achieved by several methods, e.g. by digital filtering.



**Fig. 2.** Positions of the genuine (true) propagation mode and the spurious (false) modes obtained as the results of the waveguide mode solver simulation based on the DFF method.

Another drawback of the Du Fort Frankel beam propagation method is a need to pre-compute fields in two initial  $z$  planes, planes  $z=0$  and  $z=1$  in the propagation scheme shown in Fig. 1. In practice, the field in the plane  $z=0$  is obtained as a Gaussian pulse or as a solution of available mode solver and the field in the second initial plane  $z=1$  is pre-computed by using any available BPM algorithm, like the Crank-Nicolson based FD-BPM.

The original DFF method is designed to solve the partial differential equations of a parabolic-type, i.e. it is suitable for solving the paraxial wave equation, what at the same time presents the another limitation of the algorithm. This implies difficulties in the implementation of the DFF method in the wide-angle BPM schemes and full-vectorial BPM applications.

Eventually, the utilization of the DFF method in practice is often the trade between a very attractive algorithm speed and low memory requirements on the one hand and (sometimes too costly) combat with the existence of the spurious solutions on the other hand.

## CONCLUDING REMARKS

The application of the Du Fort Frankel method, as an attractive possibility to improve substantially the efficiency of the FD-BPM numerical field simulations in photonics, is examined in details. As an unconditionally stable explicit BPM algorithm, the Du Fort Frankel method deserves particular attention offer-

ing computational efficiency and substantial computer resources savings. The basic idea of the Du Fort Frankel method and the strengths and the weaknesses of its implementation in the BPM simulation codes are addressed and discussed. The overall conclusion is that the utilization of the Du Fort Frankel method in FD-BPM codes can substantially accelerate analysis; however, the appearance of the spurious modes is the inherent downside of the method which can potentially limit its applicability.

## ACKNOWLEDGEMENT

This paper was based on research conducted within the Project (Project code: TR32052) funded by the Ministry of Science and Technological Development of the Republic of Serbia.

## REFERENCES

- [1] Djurdjević D.Ž. Metoda prostiranja snopa i njena primena u projektovanju fotoničkih i optoelektronskih struktura. Vojnotehnički Institut, Beograd. 2010.
- [2] Scarmozzino R., Gopinath A., Pregla R., Helfert S. Numerical techniques for modeling guided-wave photonic devices. *J. Select. Top. Quant. Elec.* Vol.6. No.1. 2000. p. 150-162.
- [3] Xu C.L., Huang W.P. Finite-difference beam propagation method for guide-wave optics. *PIER.* Vol.11. 1995. p. 1-49.
- [4] Benson T.M., Bekker E., Vukovic A., Sewell P. The continuing role of beam propagation methods in photonics design. *Proc. ICTON.* 2007. p. 240-243.
- [5] Benson T.M., Sewell P., Vukovic A., Djurdjevic D.Z. Advances in the finite difference beam propagation method. *Proc. ICTON.* Vol.2. 2001. p. 36-41.
- [6] Benson T.M., Djurdjevic D.Z., Vukovic A., Sewell P. Towards numerical vector Helmholtz solutions in integrated photonics. *Proc. ICTON.* Vol.2. 2003. p. 1-4.
- [7] Hadley G.R. Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators. *Opt. Lett.* Vol.17. 1992. 1426-1428.
- [8] Ma C., Keuren E.V. A simple three dimensional wide-angle beam propagation method. *Opt. Expr.* Vol.14. No.11. 2006. p. 4668-4674.
- [9] Peaceman D., Rachford H. The numerical solution of elliptic and parabolic differential equations, *J. SIAM* 3. 1955. P. 28-41.
- [10] Cheng H., Zhang W.P., Li Z.B., Zhou W.Y., Tian J.G. Nonparaxial split-step method with local one-dimensional scheme for three-dimensional wide-angle beam propagation. *J. of Lightw. Techn.* Vol. 27. No.14. 2009. p. 2717-2723.
- [11] Djurdjevic D.Z, Benson T.M., Sewell P., Vukovic A. Fast and accurate numerical analysis of 3D curved waveguide couplers. *J. of Lightw. Techn.* Vol.22. No.10. 2004. p. 2333-2340.
- [12] Djurdjevic D.Z, Sewell P., Benson T.M., Vukovic A. Highly efficient finite-difference schemes for structures of nonrectangular cross-section. *Microw. and Opt. Techn. Lett.* Vol.33. No.6. 2002. p. 401-407.
- [13] Djurdjevic D.Z. Accurate modelling of modern photonic devices with complex geometries in transverse plane and longitudinal direction. *Sci. Techn. Rev.* Vol.LIX. No.3-4. 2009. p. 30-38.
- [14] Pozrikidis C. *Numerical Computation in Science and Engineering.* Oxford University Press, New York. 1998.
- [15] Mitchel A.R., Griffiths D.F. *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations.* Wiley, New York. 1987.
- [16] Wu L. Dufort-Frankel-type methods for linear and nonlinear Schrödinger equations. *SIAM J Numer. Anal.* Vol.33. No.4 1996. p. 1526-1533.
- [17] Du Fort E.C., Frankel S.P. Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations. *Math Tables Other Aids to Comp.* Vol.7. 1953. p. 135-153.
- [18] Masoudi H.M., Arnold J.M. Spurious modes in the DuFort-Frankel finite-difference beam propagation method. *Photon. Technol. Lett.* Vol.9. 1997. p. 1382-1384.
- [19] Sewell P., Benson T.M., Vukovic A. A stable DuFort-Frankel beam-propagation method for lossy structures and those with perfectly matched layers. *J. of Lightw. Techn.* Vol.23. No.1. 2005. p. 374-381.
- [20] Chan K., Sewell P., Vukovic A., Benson T. Oblique Du-Fort Frankel beam propagation method. *Hundawi Publishing Corporation.* Doi:10.1155/2011/196707. 2011.

## ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ В ИСМА

---

*The issues of specification and efficient numerical analysis of high-dimensional hybrid systems (HS) in ISMA workbench. An algorithm of choice of the integration step, taking into account the dynamics of event-driven functions of HS. A comparative analysis of numerical schemes for solving stiff problems of hybrid high-dimensional.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Важной проблемой в компьютерном анализе моделей механических, электроэнергетических, химических и др. систем, представленных в терминологии гибридных систем (ГС), является обнаружение смены режимов. В работе описан алгоритм выбора шага интегрирования, в котором наряду с точностью и устойчивостью численной схемы учитывается динамика событийной функции ГС. Оригинальный метод локализации точек переключения основывается на доказанной теореме. Системы большой размерности, как правило, обладают свойством жесткости. Здесь рассматривается применение явных методов переменного порядка и полужавных схем с замораживанием матрицы Якоби к жестким задачам высокой размерности. Описанные методы и алгоритмы реализованы и протестированы в среде моделирования гибридных систем ИСМА [1], разработанной авторами.

### ОБНАРУЖЕНИЕ СОБЫТИЙ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим режим односторонней ГС в виде задачи Коши с ограничениями

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad g(y, t) < 0, \quad (1)$$

где  $f: R \times R^N \rightarrow R^N$  - известная непрерывная вектор-функция,  $y_0$  - решение в начальной точке  $t_0$ ;  $g: R \times R^N \rightarrow R^S$ ,  $S \leq N$  - известная непрерывная событийная вектор-функция или нелинейный предохранитель.

Любой нелинейный предохранитель можно привести к линейному виду добавлением фазовой переменной  $x = g(y, t)$ . В результате задачу (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} y' &= f(y), \\ x' &= \frac{\partial g}{\partial y} \cdot f(y) + \frac{\partial g}{\partial t}, \\ x &< 0. \end{aligned}$$

Особое внимание следует обратить на выбор метода интегрирования. Полностью неявный метод использовать нельзя, потому что он требует вычисления  $f(y)$  в потенциально опасной области, где модель может быть не определена. Ниже приводится доказательное обоснование предпочтительности явных схем. Поэтому здесь будем использовать явные методы с решением  $y_{n+1} = y_n + h_{n+1}\varphi_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда событийная динамика описывается соотношением  $g_{n+1} = g(y_n + h_{n+1}\varphi_n, t_n + h_{n+1})$ . Разлагая  $g_{n+1}$  в ряд Тейлора и, учитывая линейность  $g(y, t)$ , получаем зависимость  $g_{n+1}$  от прогнозируемого шага  $h_{n+1}$ :

---

1 Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

2 Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

$$g_{n+1} = g_n + h_{n+1} \left( \frac{\partial g_n}{\partial y} \cdot \varphi_n + \frac{\partial g_n}{\partial t} \right). \quad (2)$$

**Теорема.** Выбор шага по формуле

$$h_{n+1} = (\gamma - 1) \frac{g_n}{\frac{\partial g_n}{\partial y} \cdot \varphi_n + \frac{\partial g_n}{\partial t}}, \quad (3)$$

где  $\gamma \in [0, 1)$ , обеспечивает поведение событийной динамики как устойчивой линейной системы, решение которой приближается к поверхности  $g(y, t) = 0$  асимптотически.

**Доказательство.** Подставляя (3) в (2), имеем  $g_{n+1} = \gamma g_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Преобразовав рекуррентно данное соотношение, получим  $g_{n+1} = \gamma^{n+1} g_0$ . Поскольку  $\gamma < 1$ , имеет место  $g_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Кроме того, из условия  $\gamma \geq 0$  следует, что функция  $g_n$  не меняет знак. Следовательно, при  $g_0 < 0$  условие  $g_n < 0$  будет выполняться для всех  $n$ . Тогда событийная функция никогда не пересечет потенциально опасную область  $g(y_n, t_n) = 0$ , что завершает доказательство теоремы.

### КОНТРОЛЬ СОБЫТИЙНОЙ ФУНКЦИИ В АЛГОРИТМЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим алгоритм выбора шага интегрирования с учетом динамики событийной функции на примере двухстадийного метода второго порядка точности [2]

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2,$$

$$k_1 = h_{n+1} f(y_n),$$

$$k_2 = h_{n+1} f(y_n + \beta k_1),$$

с параметрами  $p_1 = p_2 = 0.5$ ,  $\beta = 1$ .

Пусть решение  $y_n$  в точке  $t_n$  вычислено с шагом  $h_n$ . Кроме того, известны значения стадий  $k_1$  и  $k_2$  и определена величина следующего шага по точности и устойчивости  $h_{n+1}^p = \max[h_n, \min(h^{ac}, h^{st})]$ , где  $h^{ac}$  - шаг по точности,  $h^{st}$  - шаг по устойчивости. Шаг  $h^{ac}$  по точности определяется по формуле  $h^{ac} = q_1 h_n$ , где  $q_1$  является решением уравнения  $q_1^2 \|k_2 - k_1\| = \varepsilon$ . Здесь  $\|\cdot\|$  - некоторая норма в  $R^N$ ,  $\varepsilon$  - требуемая точность интегрирования. Шаг  $h^{st}$  по устойчивости задается выражением  $h^{st} = q_2 h_n$ , в котором  $q_2$  определяется из соотношения  $q_2 v_{n,2} = 2$ . Оценка максимального собственного числа матрицы Якоби  $v_{n,2}$  вычисляется по формуле

$$v_{n,2} = 2 \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|(k_3 - k_2)_i|}{|(k_2 - k_1)_i|}.$$

Тогда управление шагом интегрирования с учетом точности, устойчивости и динамики событийной функции можно выполнить по следующему алгоритму.

**Шаг 1.** Вычисляется  $f_n = f(y_n, t_n)$ .

**Шаг 2.** Вычисляются  $g_n = g(y_n, t_n)$ ,  $\partial g_n / \partial y = \partial g(y_n, t_n) / \partial y$ ,  $\partial g_n / \partial t = \partial g(y_n, t_n) / \partial t$ .

**Шаг 3.** Вычисляется шаг  $h_{n+1}^s$  по формуле (3), причем  $\varphi_n = f_n$ .

**Шаг 4.** Вычисляется новый шаг  $h_{n+1} = \min(h_{n+1}^s, h_{n+1}^p)$ .

**Шаг 5.** Выполняется следующий шаг интегрирования.

### ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

В качестве тестового примера рассмотрим классическую задачу моделирования системы двух резервуаров [3]. Событием в системе считается открытие/закрытие клапана, управляющего по-



током жидкости. Будем фиксировать моменты первого и десятого событий ГС, соответствующих открытию выпускного клапана второго бака. Известно, что точное время первого открытия составляет  $t_1^* = 303.13$ , а десятого -  $t_{10}^* = 2669.9$  [3]. В табл. 1. приведены результаты решения в различных системах моделирования ГС.

Таблица 1. Моменты обнаружения событий.

Система моделирования	1-е событие ( $t_1$ )	10-е событие ( $t_{10}$ )
MATLAB/Taylor	303.127	2669.9
SIMULINK/StateFlow	303.76	2670.5
GPROMS	303.13	2669.87
DYMOLA	303.126	2669.88
SHIFT	302.3	2666.1
AnyLogic	303.129	2669.91
MVS	303.127	2669.87
ИСМА	303.128	2669.88

Из сравнения результатов видно, что худшие показатели получены в системах SIMULINK с использованием метода Дорманда-Принса и SHIFT с применением метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Анализ средствами ИСМА с включенным алгоритмом обнаружения показывает более качественные результаты, что обусловлено учетом событийной функции, а также точности и устойчивости вычислений при выборе шага интегрирования.

## СПЕЦИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Особенности моделирования систем высокой размерности в ИСМА рассмотрим на примере задачи проникновения помеченных радиоактивной меткой антител в пораженную опухолью ткань организма, сформулированной лабораторией Akzo Nobel Central Research [4]:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y \in R^{2N}, \quad 0 \leq t \leq 20, \quad (4)$$

где функция  $f$  определяется формулами:

$$f_{2j-1} = \alpha_j \frac{y_{2j+1} - y_{2j-3}}{2\Delta\zeta} + \beta_j \frac{y_{2j-3} - 2y_{2j-1} + y_{2j+1}}{(\Delta\zeta)^2} - ky_{2j-1}y_{2j}, \quad (5)$$

$$f_{2j} = -ky_{2j}y_{2j-1},$$

где

$$\alpha_j = 2(j\Delta\zeta - 1)^3 c^2, \quad \beta_j = (j\Delta\zeta - 1)^4 c^2, \quad \Delta\zeta = \frac{1}{N},$$

$$y_{-1}(t) = \varphi(t), \quad y_{2N+1} = y_{2N-1}, \quad g \in R^{2N}, \quad g = (0, v_0, 0, v_0, \dots, 0, v_0)^T. \quad (6)$$

Функция  $\varphi(t)$  имеет вид:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0, 5], \\ 0, & t \in (5, 20]. \end{cases}$$

Подходящими значениями для параметров  $k$ ,  $v_0$  и  $c$  являются  $k = 100$ ,  $v_0 = 1$  и  $c = 4$ .

## КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ В ИСМА

Задача (4) - (6) характеризуется тем, что существует непосредственная зависимость между индексом дифференциального уравнения и его правой частью. Компьютерная модель системы, записанная на языке LISMA+, являющимся расширением языка LISMA [5], представлена на рис. 1.

```

N = 200; k = 100; C2 = 16; //pow(c, 2)
phi = 2;
i = [1-200];
j = [2-199];
array y[400]; //объявление массива
//начальные условия
y[2*i - 1] = 0;
y[2*i] = 1;
macro alpha[i] = 2*row(i/N - 1, 3)/C2;
macro beta[i] = 2*row(i/N - 1, 4)/C2;
//явное задание правых частей
y[1]' = alpha[1]*(y[3] - phi)*N/2 +
        beta[1]*(phi - 2*y[1] + y[3])*N*N - k*y[1]*y[2];
y[2]' = -k*y[2]*y[1];
y[399]' = -k*y[400]*y[399];
y[400]' = -k*y[399]*y[400];
//алгоритмическая форма задания правых частей СДУ
y[2*j-1]' = alpha[j]*(y[2*j + 1] - y[2*j - 3])*N/2 +
        beta[j]*(y[2*j-3] - 2*y[2*j-1] + y[2*j+1])*N*N - k*y[2*j-1]*y[2*j];
y[2*j]' = -k*y[2*j]*y[2*j-1];
//гибридность
change_phi [TIME >= 5] is
    phi ^= 0;
from init;

```

Рис. 1. Компьютерная модель на языке LISMA+.

Второй особенностью задачи является ее гибридность, обусловленная существованием разрыва первого рода функции  $\varphi(t)$ . Соответственно, система может находиться в одном из двух непрерывных режимов. Переключение происходит при  $t \geq 5$  ( $pr_1 : g(t) = t \geq 5$ ).

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Для решения системы (4) - (6) применялись явные методы переменного порядка с контролем устойчивости (Рунге-Кутты-Фельберга (RKF78ST) [6] и Дорманда-Принса (DP78ST) [7]), неявный метод (RADAU5), а также полуявные (m,k)-методы (МК22 [4] и МК21). Задача решалась при  $N = (50, 100, 200, 400, 500)$ . Таким образом, получены пять систем ОДУ, размерность которых варьируется от 100 до 1000 фазовых переменных. Зададим точность расчетов  $\varepsilon = 10^{-4}$  и начальный шаг  $h_0 = 10^{-9}$ .

Эффективность алгоритмов оценивалась по трем критериям: количество вычисленных точек (sn), число расчетов правой части (rp) и затраченное время (t). Полученные зависимости вычислительных затрат от размерности системы приведены на рис. 2.

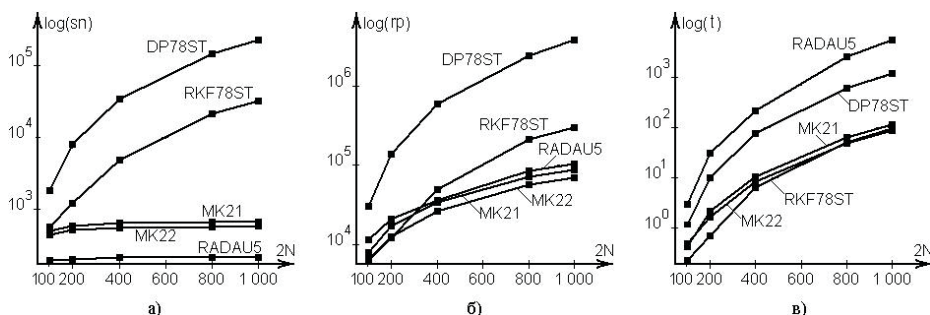


Рис. 2. Зависимость вычислительных затрат от размерности системы в логарифмическом масштабе.

Анализируя полученные данные, можно сделать вывод, что наиболее эффективными являются полуявные (m,k)-методы МК21 и МК22. Они характеризуются небольшим числом рассчитываемых

мых точек и правых частей системы ОДУ, а благодаря замораживанию матрицы Якоби на поиск решения требуется значительно меньшее время по сравнению с неявным методом. Зависимость времени расчета от размерности системы для  $(m,k)$ -методов и метода Фельберга переменного порядка с контролем устойчивости близка к линейной.

Стоит также отметить, что использование явных методов переменного порядка с контролем устойчивости весьма эффективно на задачах средней размерности (до 500 уравнений). Однако время решения системы ОДУ явным методом в немалой степени зависит от жесткости системы вследствие ограниченной устойчивости численной схемы, и при определенных условиях зависимость времени расчета от размерности может носить экспоненциальный характер, как для метода DP78ST.

Применение неявных методов оправдано в случае задач небольшой размерности (до 200 уравнений). Из графика на рис. 2, в) видно, что метод RADAU5 характеризуется показательным ростом затрачиваемого времени при увеличении размерности системы. Учитывая малое число необходимых шагов и расчетов правой части, можно предположить, что такая неэффективность вызвана необходимостью декомпозиции матрицы Якоби. Отметим, что данная зависимость будет справедливо для задач, степень жесткости которых отличается от жесткости системы (4) - (6). Это связано с тем, что неявные схемы L-устойчивы, и можно выбирать достаточно большой шаг интегрирования вне зависимости от текущей динамики изменения фазовых переменных.

### ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ В ОБНАРУЖЕНИИ СОБЫТИЙ

Рассмотрим решение, полученное неявным методом RADAU5. На рис. 3, а) представлено поведение гибридной компоненты  $\phi$ . Видно, что данная функция обращается в 0 не при  $t = 5$ , а в момент времени  $t = 5.0157$ . В результате этого система переходит к другому состоянию с запаздыванием, что приводит к значительной глобальной погрешности, показанной на рис. 3, б) и в) (пунктирная линия соответствует решению, полученному неявным методом).

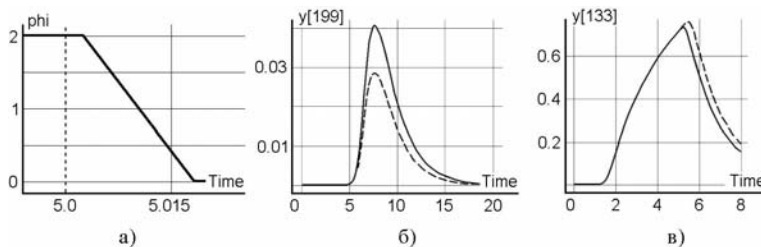


Рис. 3. Динамика гибридной компоненты  $\phi$  (а) и фазовых переменных  $y_{199}$  (б),  $y_{133}$  (в), полученная неявным методом.

Данный пример наглядно демонстрирует неэффективность неявных методов при анализе гибридных систем высокой размерности. Для решения гибридной задачи неявным методом необходимо задействовать алгоритм точной локализации моментов переключения. Однако это негативно сказывается на производительности метода, поскольку увеличивается количество шагов, и соответственно возрастает число декомпозиций матрицы Якоби. С другой стороны, применение подобного алгоритма к явному методу не вызывает дополнительных вычислительных затрат.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оригинальный метод локализации точек переключения позволяет с высокой точностью обнаруживать моменты смены состояний ГС. Им легко дополнить существующие алгоритмы интегрирования на основе явных и полуявных схем. Использование переменного порядка точности и контроля устойчивости в алгоритмах на основе явных методов делает возможным их применение для решения жестких задач большой размерности. Высокая эффективность полуявных  $(m,k)$ -методов обеспечивается благодаря замораживанию матрицы Якоби. Также показано, что приме-

нение неявных методов для интегрирования гибридных систем без учета динамики событийной функции ведет к неверному глобальному решению.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00106-а.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Шорников Ю.В., Дружинин В.С., Макаров Н.А., Омельченко К.В., Томилов И.Н. Инструментальные средства машинного анализа. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005610126. М.: Роспатент, 2005.
- [2] Новиков Е.А., Шорников Ю.В., Уатай Б.У. Методы решения жестких задач, гибридные системы и их приложения. Алматы: Изд-во КБТУ, Казахстан, 2010.
- [3] Kowalewski S. A Case Study in Toll-Aided Analysis of Discretely Controlled Continuous System: the Two Tank Problem. In Hybrid Systems V, Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag. 1998. P. 78-102.
- [4] Новиков А.Е., Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Аппроксимация матрицы Якоби в (2,2)-методе решения жестких систем. Доклады АН ВШ РФ. 2008. №1(10). С. 31-44.
- [5] Шорников Ю.В., Томилов И.Н. Программа языкового процессора с языка LISMA (Language of ISMA). Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2007611024. М.: Роспатент, 2007.
- [6] Шорников Ю.В., Новиков Е.А. Контроль устойчивости метода Фельберга седьмого порядка точности. Вычислительные Технологии. 2006. Т. 11, № 4. С. 65-72.
- [7] Шорников Ю.В., Новиков Е.А. Контроль устойчивости метода Дорманда-Принса. СибЖИМ. 2007. №4(32). С. 95-103.

## ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОРТИРОВКИ СЛОЕВ КАРТЫ ПРИ СОЗДАНИИ ЦИФРОВЫХ ТОПОПЛАНОВ

---

*The article considers the problems with creating maps of small towns, the description of the relationship between the layers using the topological relationships and the acceleration input of spatial information based on the topological sort.*

---

В настоящее время появились достаточно хорошие возможности использовать данные дистанционного зондирования с различных бесплатных Интернет ресурсов. Причем качество и точность пространственных данных с каждым годом постоянно возрастает. Это открывает новые возможности для учета, анализа и обработки объектов муниципальной собственности малых городов. Муниципальные власти небольших городов не имеют возможности выделять в бюджете крупные статьи расходов на создание топопланов своих районов. Однако различные задачи геоинформационных систем (ГИС), например, учета земельных участков, моделирование ситуаций в городе остаются актуальными. Для их решения требуются цифровые крупномасштабные карты уровня 1:500. Причем для полноценной работы необходимо детальное описание слоев таких как электросети, подземные коммуникации, газопроводы и многие другие. Проводя исследование для городов с населением от 100 000 до 250 000, выявлено около 400 слоев объектов разной структуры и предназначения. Они охватывают весь спектр работы муниципальных служб и городского хозяйства. Количество всех объектов для подобных городов достигает нескольких тысяч. Т.к. пространственная информация разнородна, а также сочетается с атрибутивной, то наибольшую сложность и затраты несет ввод исходных данных [1,2,3].

Можно выделить следующие исходные данные для создания цифровых топопланов:

1. Данные дистанционного зондирования с бесплатных Интернет ресурсов.
2. Планшеты уровня 1:500 для решения муниципальных задач таких как:
  - 2.1. Учет земельных участков.
  - 2.2. Проектирование новых застроек.
  - 2.3. Анализ повреждения кабеля электросети.
  - 2.4. Моделирование различных ситуаций в городе и другие.
3. Описание слоев карты, например:
  - 3.1. Земельные участки.
  - 3.2. Водопроводные сети.
  - 3.3. Автобусные остановки и другие

Ввод информации в муниципальных геоинформационных системах - это сложный итерационный процесс, который можно обеспечить с различных источников. Самым точным и наиболее распространенным на текущий момент является оцифровка карты. Карта может быть получена либо с помощью спутника, либо на основе планшета. Первый способ даст более актуальную информацию [4,5].

Можно выделить следующие проблемы при создании цифровых карт малых городов:

1. Низкая стоимость финансирования.
2. Большой объем ввода пространственной информации.

---

1 Муромский институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых", Муром, Россия

### 3. Учет огромного количества связей между слоями.

Все объекты карты связаны топологически друг с другом. Можно привести классификацию топологических отношений (рис.1.). Не все ГИС имеют топологические отношения у себя в составе инструментальных средств. Однако в ArcGIS или ИнГео эти возможности есть.



Рис. 1. Виды топологических отношений

Например, ArcGIS позволяет задать топологические правила между различными слоями. Это накладывает определенные ограничения на то, какой слой за каким оцифровывать. То есть, можно сказать, что фактически каждый слой карты имеет несколько связей с другими слоями. Предлагается способ, который позволяет из набора слоев, связанных между собой, определить последовательность их ввода (рис.2.).

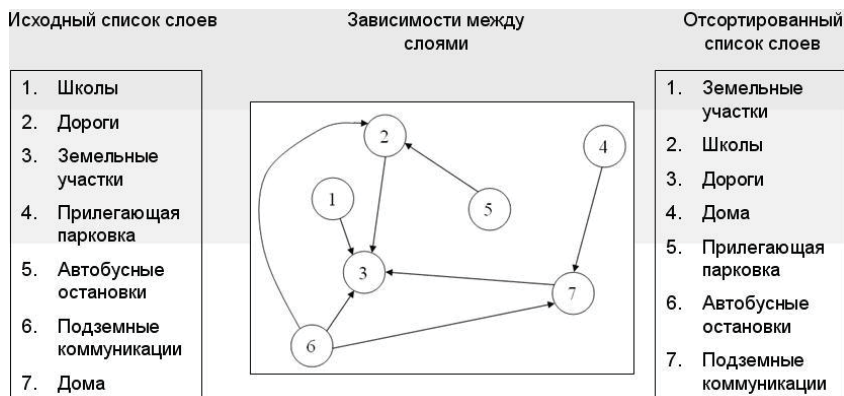


Рис. 2. Порядок слоев после преобразования

На рис.2. все семь слоев представлены в виде зависимости друг от друга. То есть слой “Школы” зависит от слоя “Земельные участки”. Это означает, что сначала в ГИС необходимо внести объекты из слоя “Земельные участки”, а затем поверх него объекты из слоя “Школы” тем самым используя при этом один из видов связей. В данном случае это будет связь “Вложенность”. Аналогично вложенными в “Земельные участки” являются объекты из слоев “Дороги”, “Подземные коммуникации” и “Дома”.

В свою очередь можно сказать, что “Подземные коммуникации” связаны отношением “Соседство” со слоем “Дома” и отношением “Изолированность” со слоем “Дороги”. То есть подземные коммуникации необходимо вводить после домов и дорог.

Автобусные остановки следует вносить после дорог с использованием отношения “Соседство”.

Прилегающие парковки необходимо располагать около домов после внесения домов (отношение “Близость”).

Вся информация о связях между слоями хранится в базе данных.

Способ, который определяет порядок ввода слоев в ГИС, основан на широко известном алгоритме из теории графов, который называется топологическая сортировка. В нашем случае используется следующее описание информации. Каждый слой представлен как вершина графа, а связь между вершинами отображает зависимость одного слоя от другого. Запустив рекурсивную процедуру обхода всех вершин графа в глубину, на выходе получим отсортированный граф, который выделит сначала независимые слои, затем слои, которые зависят от уже рассмотренных и т.д.

То есть требуется перечислить вершины графа в таком порядке, чтобы для любого ребра графа его начальная вершина была перечислена раньше конечной.

Схематично это выглядит так:

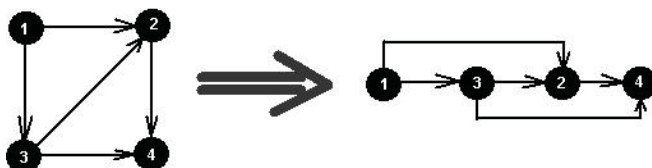


Рис. 3. Порядок слоев после преобразования

Алгоритм топологической сортировки состоит из следующих шагов:

1. Помечаем все вершины графа как неиспользованные.
2. Ищем неиспользованную вершину, в которую не входит ни одно ребро (в соответствующем столбце матрицы смежности стоят только нули). Если такой вершины нет, то либо мы перебрали все вершины (топологическая сортировка закончена), либо в графе есть цикл (топологическая сортировка невозможна).
3. Помечаем найденную вершину как использованную, запоминаем ее номер.
4. Удаляем из графа все ребра с началом в этой вершине (обнуляется соответствующая строка матрицы смежности).
5. Переходим к шагу 2.

Разработана программа, которая учитывает все топологические отношения между слоями, строит граф слоев и с помощью топологической сортировки определяет порядок ввода объектов из них. Ограничения по топологии можно накладывать не только на пространственную информацию, но и на атрибутивную. В этом случае один слой также будет зависеть от другого, но уже по определенным семантическим признакам. Данный алгоритм внедрен в муниципальную ГИС округа Муром Владимирской области (Россия).

Применение топологической сортировки уменьшает количество ошибок при вводе данных карты, что позволяет значительно сократить время и затраты на создание пространственных объектов городской инфраструктуры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Садыков С.С., Еремеев С.В., Автоматический контроль размещения пространственных объектов на цифровой карте с использованием топологических отношений, Информационные технологии. 2005. №8. С. 6-9.
- [2] Еремеев С.В. Имитационное моделирование систем с учетом пространственных характеристик объектов, Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2009. № 14. С. 37-40.
- [3] Еремеев С.В. Пространственные структуры в геоинформационных системах, Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2007. № 12. С. 71-74.
- [4] Еремеев С.В., Деев К.В. Многоуровневое представление пространственных данных в геоинформационных системах, Геоинформатика. 2006. № 2. С. 54-57.
- [5] Еремеев С.В. Алгоритм размещения слоев на цифровой карте в ГИС, Геоинформатика. 2005. № 2. С. 22-26.

## MATHEMATICAL EDUCATION MATERIALS DEVELOPMENT APPROACH FOR DISTANCE LEARNING SYSTEMS

---

*The modern system of education for students has the goal to form a flexible, self-employed people, which will easily accept the current social changes and adapt to them. Since the beginning of applying the system the man of today is subjected to continuous learning. One type of education is concerned with developing the logic and intuitiveness of mathematical objects that depend on the profile of a person. The problem arises in understanding equations and formulas, terms that are fairly abstract for students. It is necessary to use or create the software that will help students visualize the concepts, formulas, theorems. There are various programs (software) that enhance the development of the human logic. Some solutions are freely and easily adjustable. Some of them may be available on internet. This paper will show how to create and use dynamic mathematical material for learning and it will analyze some of the software in terms of implementation, quality, clarity and price.*

---

### INTRODUCTION

System for distance learning (DLS) is an integrated combination of technology learning methods that can be used by teachers and students. Teachers can give instructions and guidelines to students and students each of the courses at universities are different, and therefore such systems for learning need to be quite flexible. For the implementation of mathematical objects biggest problem is the presentation of statements. This paper describes how to create educational materials for math-oriented courses as well as basic terms definitions and needs this way of learning mathematics. The work is aimed to explain and analyze the software that can be used in such systems.

### DISTANCE LEARNING - ONLINE EDUCATION

The traditional way of learning was the situation where the teacher is treated as central, main in charge figure and the therefore the most important element of the educational cycle. By many current theorists the traditional way is the most criticized aspect of this way of learning. The success of distance education is determined by: quality presentations, course content, motivation and expectations of participants. Computer programs that can serve in the learning process are collectively called tools for e-learning courseware and tools. Currently the most popular systems for online learning are the LMS - Learning Management Systems and CMS - Content Management Sys-

tems. They enable easy creation and installation of materials, has the support of audio and video elements and enables various modes of communication. The most commonly used modules of that type are Moodle, WebCT, Black Board and Caroline. [1].

Systems for Distance learning, which are mostly used in developed countries, consist of multimedia materials or video recordings of lectures. There are few universities that are developing their own system of learning through the integration of these two modes.

These universities are investing significant financial resources and working on the development of the system. In Serbia, the system of distance learning is still in development. The level is remarkable to what extent is the use of technology in traditional way of learning, but there is a discrepancy in application of the technology in DLS systems.

### Distance Learning System

The main criteria for evaluating distance education programs are:

- Content (whether the application contains the right amount and quality of information?)
- Design education (whether the program is designed so that users can actually learn the material?)
- Interactivity (whether users are involved in

---

1 Singidunum University, Belgrade, Serbia

2 College of Electrical Engineering and Computing Applied Science, Belgrade, Serbia



learning in an active way?)

- Navigation (whether the user is granted to select their own way through the program, do the icons and / or labels clearly marked for navigation?)
- The components of motivation (if the program has incentives?)
- Use of media elements (if the program includes graphics, animation, music, sound and video?)
- Evaluation (if the program includes tests for each lesson and is it possible to test their knowledge at the beginning of lessons and is there a final exam?)
- Aesthetic page (if the program looks attractive and is it pleasant to watch and / listen hear)

Moodle is one of the best open systems for managing the learning process (*Open Source Learning Management System*). This is a package for creating courses that are held over the Internet web based. Moodle stands for *Modular Object-Oriented Dynamic Learning*. Moodle source code is written in PHP scripting language.

The reasons for this are primarily:

- Financial advantages - Moodle is a free open source system. As such, it can be adapted to the needs of individual Institution, with no additional fee.
- Modularity - Moodle's main features can meet the needs of teachers who want to use it to support traditional learning methods. With this additional adjustment it can be successfully used as a system for distance learning.
- Availability - A large number of schools are using this system to educate

Moodle is designed to assist educators in creating online courses with high interaction. Its open source license and modular design make it possible to add new functionality to the system or software.

### **THE CLASSIFICATION OF EDUCATIONAL SOFTWARE ADAPTED TO MATHEMATICS EDUCATION**

Mathematics software classification is specific and includes: application programs, practice and exercise programs, tutoring programs, simulations, computer modeling, and research programs.

From the mathematical point of view, the class of application programs includes the software that has algorithms for solving specific types of mathe-

matical problems. Electronic board and calculator are examples of application programs [2].

The essences of the drill and exercise programs are to teach students to find correct answers. The main objective is to find out whether the information students gave to a compute are correct or incorrect. Recently, drill and practice programs are substantially transformed, so that the program is no longer limited to a sequence of alphanumeric characters. Now, it is more often in the form of arcade games, with lots of graphic illustrations, which further motivates student's users.

The class of tutoring programs attempts to correct one of the main disadvantages of practice: a situation when a student procedural knowledge needs to give an answer.

The purpose of the simulation software is to demonstrate the real situation in which certain parameters can be changed. The simulation program creates a problematic situation in which the student's duty to disclose usually rules in a given problem situation, using some kind of scientific research.

Research programs facilitate research in the field of mathematics. For users, these programs are useful tools for setting-up research and mathematical problems.

### **CHARACTERISTICS OF EDUCATIONAL SOFTWARE IN RELATION TO THE SPECIFIC REQUIREMENTS OF TEACHING MATHEMATICS**

The teaching of mathematics should be related to the fact, skills, conceptual structures, methods and general strategies to solve problems. It must be admitted that this is not an easy task. The study of human learning can significantly contribute to making the learning of mathematics more efficient.

The main problem of teaching mathematics is that mathematics involves working at a high level of abstraction. The question is how to teach mathematics to develop abstract thinking. It is known that children intuitive models replace the concrete (such as their notions of space adapted to the physical world), but on the other hand, if you want to develop their knowledge (such as geometry) then you must locate their thoughts on more abstract level than real. There is couple of potential strategies. One possible strategy is to continue to go beyond symbolism and to proceed

to the “realistic mathematics” and the second is to enable teachers to interact with students, asking incorrect facts, create the conditions that the student is changing the way of thinking. In any case, the teaching of mathematics must be an information feedback in relation to each student’s activity. In modern teaching of mathematics all of the new information technology are used, which contributes to better performance in mathematics education. When asked how IT solutions can contribute to a better acquisition of knowledge of mathematics, the answer is primarily concerned on the usage of educational software that best meets the goals in mathematics education. In fact, quality software should interest, inspire, activate and direct the (correct) user, even those that are spatially far apart. Educational software, an integrated software solution specific course content, must contain components which are normally in a classical education: motivation phase, a phase of problem solving, applications conscious phase, the phase control phase of learning and the deepening and consolidation of knowledge. [3]

### **CREATE MATHEMATICAL NOTATION IN MOODLE**

In the traditional teaching of mathematics, professor uses the computer to support teaching. His priority is hand-written assignments. Digitalization of tasks and their permanent preservation is available through computers and certain targeted programs. For writing all tasks professor must using the special software (Editor). This software can be separate or part of another software. Some of them can be directly written into the systems and some must be written on the client side and set to the server. The section Create mathematical notation in Moodle, describes the ways in which to implement mathematical records over the Internet.

#### **Equation editor**

A great way to turn the complex into the Moodle course notes is to use Equation Editor. Two modes are available: Microsoft Equation Editor is included with all versions of Microsoft Office and Equation Editor in all versions of Open Office.

The ways of using and creating mathematics notation are very similar. The remainder of this paper will describe how to use Microsoft Equation Editor only because it is the most widely used.

#### **Microsoft Equation Editor**

Equation Editor is a program for writing mathematical records, created by Design Science. This program allows users to create mathematical and scientific equations in an appropriate environment. Equation Editor is included with all versions of Microsoft Office and several other commercial applications. This is a simplified version Math Type who is also created by Design Science. “It can be used as a standalone program or can be used within applications that support it. Its feature set has not significantly changed since its introduction to Word (Windows Office) version 2.0.

Creating this type of notation in Moodle is very easy. Creation is realized with the help of Microsoft’s Office suite. Tasks are created using Microsoft Word. Created a mathematical entry is on the local computer. Microsoft Word A finished task is saved as a \*.html page. At the end of the task saved imported into the Moodle like web page.

This way of writing mathematical notes is interactive and can be used as references for the participants. It is understood that the program used by the teachers to prepare educational materials. Participants can only see the records but not change them.

#### **Configure and test Algebra and TeX Filters**

Filters are the options in Moodle, which allows a direct activity in the application level. Upon activation, Algebra and TeX filter, there is a possibility of direct write mathematical notes in Moodle.

In order to create mathematical notation, the equation can be written in TeX notation with the ability to create directly in Moodle Algebra filter also allows you to create mathematical notation. The problem with this filter is the length of notation, if there is a need to write more complicated notation of mathematics curriculum for high school age up. These, potential problems can be solved by including TeX filter [4].

Including Tex filter means that we can write TeX mathematical notation in Moodle format and I will convert them to us to understand the record. Filter I edited symbols. Activate this filter to the Moodle platform is identical to the activation of Algebra filter. Creating educational materials supported TeX notation is realized through the creation of Web pages. To use the TeX filter there is a special syntax

that is used Moodle to recognize a mathematical entry. Potential problems that can occur with the use of TeX filter do not recognize the formula or the formula pictures. If the problem is in the application level, must change the settings module. It is necessary to modify the code. Otherwise settings are related to the correction on the server.

### **Mathematical Applets**

Mathematical Applets are Java applications that run within the Web site. Java applets that allow the user without any special mathematical programs can be managed with geometric objects and algebraic calculations. Java applets are interactive, intuitive and simple applications, which can be excellent for teaching and learning of mathematics. To view this site it is necessary that a user on your computer has Java installed, which is a widely used on the Internet. A large number of sites contain finished applets. The recommendation is a software package “manipulate Math with Java”, he can be used by high school students, college students and faculty, as well as all others interested in mathematics. The software includes interactive programs easy to use, as well as a multitude of animations which help to achieve the full meaning of mathematical ideas, 279 created a Java applet.

### **Basics js Math filter**

Algebra and TeX filter products mathematical notation on the server side. If Moodle is hosted by third parties (Shared Hosting), it may happen that the commands needed to create records to be disabled by the server. The alternative is to pass all the details needed to build a notation in your browser to search and identify the client side (client-side) than on the server (server-side). If there is a notation of the Drava browser, requires the support or particular add-ons. The filter, based on the work David Cervone, in fact, uses Java TeX compiler. Rather than repeat the instructions that are fully available on Moodle.org, syntax. Js Math equation can be written in three ways [15]. Problems that can arise are not tied to specific fonts that exist on the client side.

### **Basics Drag Math**

Drag Math the drag and drop equation editor written in Java and created by Alex Billingsley, from

the University of Birmingham in the UK. Its main advantage is that when creating an expression, a user can convert it into different tracks for linear mathematics, including Math ML, Latex, and Maple, Maxima or user-defined style.

Drag Math can be installed of the local computer where there must be support for the Java Runtime Environment (JRE). It is necessary and all other notation to install the filter and allow him to doing self. On the Moodle icon that appears with the imported record local computers in the system. Advantage of drag-and is that the students can create mathematical records, without the administrators role.

### **Methods of incorporation of GeoGebra into Moodle**

Because it connects GeoGebra dynamic geometry with computer algebra, its user interface contains additional components that cannot be found in pure dynamic geometry programs. In addition to owning two windows that contain algebraic and graphic representations of objects, includes user interface components that allow the user entry object in both views (windows) and the menu bar. Furthermore, in the case of GeoGebra, the developer is trying to make the software user interface design in a simple and clear way, which supports the cognitive model of learning with multimedia, and reduces the cognitive load for the benefit of more successful learning.

GeoGebra in Moodle can be incorporated as a web page or as an interactive page. The very creation of settings and are adapted to teachers and do not need someone too much IT knowledge for the realization of the basic materials. GeoGebra is written in the Java programming language which allows easy export files as dynamic Web pages. This feature allows everyone a creating simple mathematical content (mathematic applets). For complex content creation require knowledge of the basics of Java programming language.

### **The way to incorporate Java View in Moodle**

Java View the 3D geometry software for math visualization. Web integration allows you to view interactive 3D geometric examples in any HTML document on the Internet. Java View also works as an application on your local machine with Unix

or DOS command line. Open API for seamless integration allows Java View in 3D and advanced visualization are similar examples of commercial software: Mathematica and Maple. Java View-Lite: the tiny Java View version is optimized for fast download from the internet and contains only user interface, without dialogue, inspectors and geometry algorithms. Lite version is mainly used to display interactive model geometry within a web page, such as solid shown on the right. Users can install v3.90 v3.95 over your existing installation, and recommended for upgrade. In particular, users of Maple software will benefit from the enhanced functionality of a serious JVL v3.22. The created files are also installed as a web site; interactivity depends on the choice of software versions and selection software.

### Suggestions apply

Mathematical objects are still difficult to implement through Distance Learning Systems. It's hard to write formulas, draw graphics or analyze the necessary points. GeoGebra is a way of realization of mathematics through the Internet. GeoGebra software is free and customize for all student. The incorporation of Moodle is very easy. Just by professors familiar with the relatively new software to better understand and explain to the students. Their ideas may be proposed by other professor's ii which certainly improves the quality of materials Teachers in this way can easily get rid of their doubts about the software.

All programs for writing tasks of mathematics, who are described in the paper, they were chosen because are ease to use, easily available, is flexible and adaptable for all needs.

Implementation of most of this software should be directed to visual explain mathematical concepts to students who are less manage with mathematics. Although, they can be used to design the logical and serious interactive material intended for advanced students.

### CONCLUSION

In the process of education is always the hardest to adjust teaching content to the needs of students. One must take into account the user-interface, accessibility and quality of materials. Distance learning is the realization of a modern way of teaching

by which the participant loses the notion of distance and availability of materials.

Mathematical objects in the virtual environment have always been a challenge for implementation. Great relief offer educational software. Students are using the visual method and they can explain basic concepts of the lessons. Increase interaction between professors and students developed the quality of the teaching process

The use of modern information technologies in education it's in the rise and is much more than the combination of these technologies with traditional teaching. It can be concluded that the applying of advanced technologies and new software in education is resulted achieving: personalization, respect for differences among users and advancement opportunities in personal preferences and abilities (individualized instruction). It is important to know that computers may well to perform task only if supporting good software for solving mathematics tasks.

Ideas for expansion and improvement of Moodle can go in the direction of a larger multimedia modernization. So thinking in the direction adding options for audio or audio-video conference between students and teacher, in fact, the addition of face-to-face modules. This whole system can be rises to a new level, but also significantly improves the process of learning.

### REFERENCES

- [1] Orellana, T. L. Hudgins, M. Simonson, *The Perfect Online Course: Best Practices for Designing and Teaching*, 2009.
- [2] Ivana K. Kovačević, Jelena Gavrilović, *Inkorporiranje obrazovnih softvera za dinamičku matematiku u sistem za učenje na daljinu*, Međunarodni simpozijum INFOTEH Jahorina 2011.
- [3] Ana Savić, Jelena Gavrilović, *Savremene informacione tehnologije u matematičkom obrazovanju*, Međunarodni simpozijum INFOTEH Jahorina 2010.
- [4] Ana Savić, *Metode razvoja i primena XML web servisa kao podrška tradicionalnom obrazovnom procesu*, doktorska disertacija, Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", 2007.
- [5] Ana Savić, *Primena internet servisa kao podrška tradicionalnom obrazovnom procesu u nastavi matematike*, magistrski rad, Prirodno Matematički fakultet, 2003.
- [6] Mirjana Despotović, *Razvoj metoda posle diplomskog obrazovanja na daljinu zasnovanog na internet tehnologiji*, doktorska disertacija, FON, Beograd, 2006.
- [7] Mirjana Despotović, Ana Savić, *Development of Methodology for E-materials Making and Integration as Support to E-education*, Transactions on Advanced Research,

Volume 2, No. 2, ISSN 1820 - 4503, pp. 45-51, New York, Frankfurt, Tokio, Belgrade, 2006.

- [8] Mirjana Despotović, Ana Savić, Božidar Radenković, *Jedan pristup integraciji aplikacija i servisa u softverskom sistemu za e-obrazovanje*, Info M 15-16, Beograd, 2005.
- [9] Anderson T., Elloumi F., *Theory and Practice of Online Learning*, Athabasca University, 2004.
- [10] J. Cross, *An informal history of elearning*, On the Horizon, Volume 12, 2004.
- [11] M. Simonson, S. E. Smaldino, M. Albright, S. Zvacek, *Teaching and Learning at a Distance: Foundations of Distance Education*, 5th Edition, 2011
- [12] P. Rovai, M. K. Ponton, J. D. Baker, *Distance Learning in Higher Education: A Programmatic Approach to Planning, Design, Instruction, Evaluation, and Accreditation*, 2008.
- [13] R. M. Lehman, S. C. O. Conceição, *Creating a Sense of Presence in Online Teaching: How to "Be There" for Distance Learners*, Jossey-Bass Guides to Online Teaching and Learning, 2010.
- [14] Robin M. Smith, *Conquering the Content: A Step-by-Step Guide to Online Course Design*, Jossey-Bass Guides to Online Teaching and Learning, 2008.
- [15] <http://www.javaview.de>

## ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ЗАЩИТЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ОТ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ОСКОЛКОВ

---

*The problem of a protection of space vehicles from natural and man-caused fragments is rather actual now. Disposing before the basic body of object of the thin barriers crushing high-speed particles on fragments diminishes its probability of perforation. Displacement of a solid plate from a high-strength material by a grid diminishes weight of a protective construction that is important for space vehicles.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Задача защиты космических аппаратов от естественных и техногенных осколков является весьма актуальной в настоящее время. Размещение перед основным корпусом объекта тонких преград, дробящих высокоскоростные частицы на фрагменты, уменьшает вероятность его пробития. Замена сплошной пластины на сетку из высокопрочного материала уменьшает вес защитной конструкции, что немаловажно для космических аппаратов.

### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

В работе в лагранжевой 3-D постановке рассматривается процесс высокоскоростного взаимодействия сеточных преград с компактными элементами (алюминиевыми шариками). Для описания процессов деформирования и разрушения твердых тел используется модель прочного сжимаемого идеально упругопластического тела. Основные соотношения, описывающие движение этой среды, базируются на законах сохранения массы, импульса и энергии [1-3], и замыкаются соотношениями Прандтля - Рейсса при условии текучести Мизеса. Уравнение состояния берется в форме Тета и Ми - Грюнайзена [1]. Известно, что пластические деформации, давление и температура оказывают влияние на предел текучести и модуль сдвига, поэтому модель дополнялась соотношениями, апробированными в работе [4]. В качестве критерия разрушения при интенсивных сдвиговых деформациях используется достижение эквивалентной пластической деформацией своего предельного значения [1,5].

Для решения этой задачи необходим надежный и достаточно универсальный метод, позволяющий адекватно воспроизводить процессы, протекающие в твердых телах при высокоскоростном соударении. Естественная неоднородность структуры материала преград и ударников, влияющая на распределение физико-механических характеристик (ФМХ) материала, является одним из важных факторов, определяющих характер разрушения реальных материалов. Учет этого в уравнениях механики деформируемого твердого тела возможен при использовании случайного распределения начальных отклонений прочностных свойств от номинального значения (моделирование начальной гетерогенности материала). Используемые в большинстве современных работах по динамическому разрушению конструкций и материалов соотношения механики деформируемого твердого тела не учитывают данного фактора, что может исказить реальную картину ударного и взрывного разрушения рассматриваемых тел. Последнее особенно проявляется при решении осесимметричных задач, где все точки по окружной координате рассчитываемого элемента исходно равноправны, в силу используемых при численном моделировании стандартных уравнений механики сплошных сред. На практике, однако, имеется широкий ряд задач,

---

<sup>1</sup> НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия

<sup>2</sup> ФГУП «НПО им. С.А.Лавочкина», Москва, Россия

где фрагментация является преимущественно вероятностным процессом, например, взрывное разрушение осесимметричных оболочек, где характер дробления заранее неизвестен, пробитие и разрушение тонких преград ударником по нормали к поверхности и т.д. Внесение случайного распределения начальных отклонений прочностных свойств от номинального значения в ФМХ тела приводит к тому, что в этих случаях процесс разрушения приобретает вероятностный характер, что более соответствует экспериментальным данным. Наиболее полно идеология и методология вероятностного подхода к проблеме разрушения твердых тел приведена в [8].

Для расчета упругопластических течений используется методика, реализованная на тетраэдрических ячейках и базирующаяся на совместном использовании метода Уилкинса [2,3] для расчета внутренних точек тела и метода Джонсона [6,7] для расчета контактных взаимодействий.

Начальные неоднородности структуры моделировались распределением предельной эквивалентной пластической деформации по ячейкам расчетной области с помощью модифицированного генератора случайных чисел, выдающего случайную величину, подчиняющуюся выбранному закону распределения [8]. Плотности вероятности случайных величин брались в виде нормального гауссовского распределения со средним арифметическим, равным табличному значению и варьируемой дисперсией.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Высокоскоростное столкновение ударников с сеточными защитами исследовалось также экспериментально на легкогазовых двухступенчатых установках, модифицированных для метания частиц диаметром до 0,5 мм, при скоростях (2,5 - 5) км/с. Ударник - алюминиевая частица (диаметр 2 мм), преграда - две стальные сетки (диаметр проволоки 0,32 и 0,2 мм соответственно). На рисунке 1 показана исследуемая в работе сборка, состоящая из элемента бака космического аппарата и двух сеток, которые отнесены на некоторое расстояние между собой и баком. Номерами на рис.1 отмечены результаты отдельных экспериментов. В таблице 1 приведено краткое описание двух характерных опытов по взаимодействию алюминиевых ударников с сеточной защитой и элементом защищаемого бака. Здесь символом  $V$  обозначена начальная скорость ударника. Как видно из результатов экспериментов, пробития или повреждения стенки бака не произошло, сеточная защита успешно выполнила свою функцию.

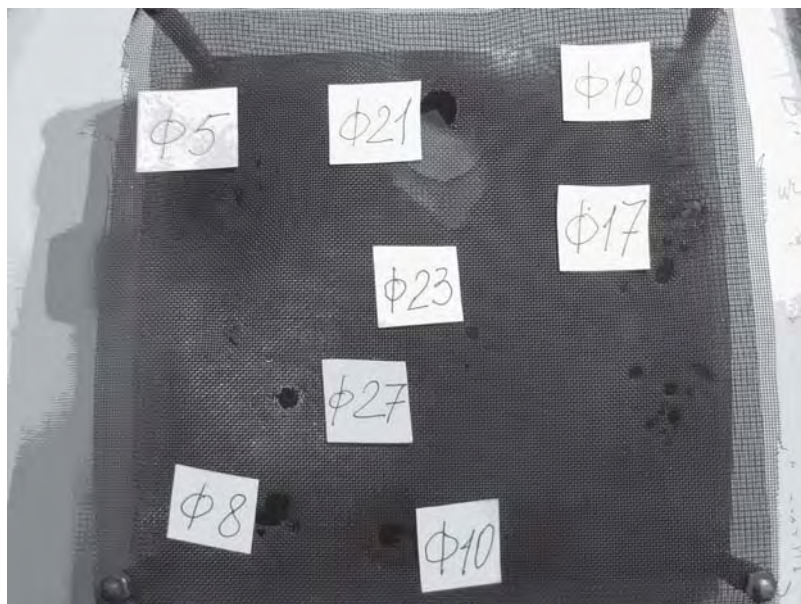
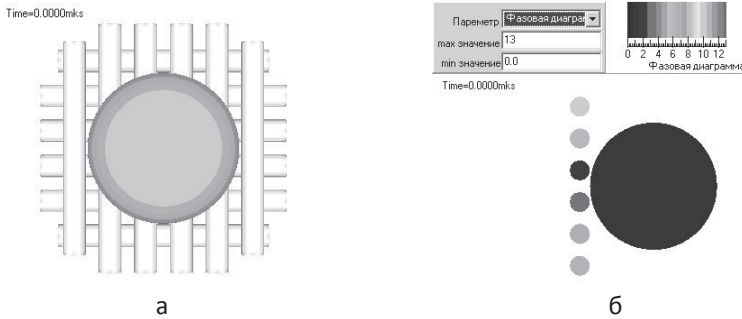


Рис. 1. Лицевая сторона сборки «сетки - элемент бака»

**Таблица 1.** Результаты экспериментов

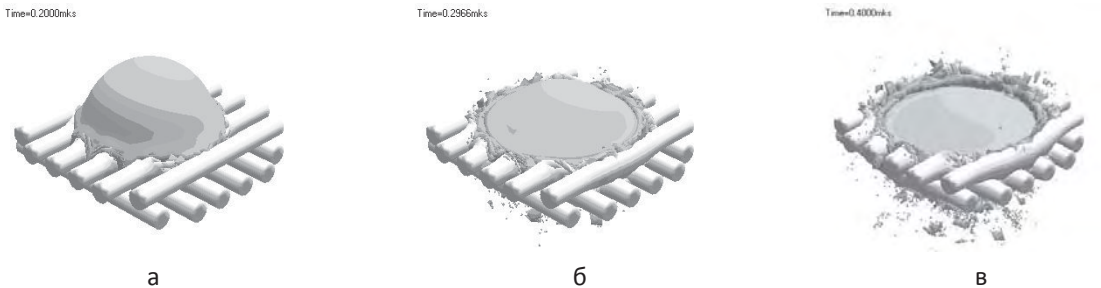
№ опыта	Тип ударника	Испытуемая преграда и защита	V, км/с	Результат эксперимента
Ф17	Шар диаметром 3,3 мм из дюраля	«бак» + сетка 0,5 мм + сетка 0,3 мм	4,0	Сквозное пробитие сеток. На «баке» нет видимых повреждений
Ф18	Шар диаметром 1 мм из дюраля	«бак» + сетка 0,5 мм + сетка 0,3 мм	4,0	Сквозное пробитие первой сетки. На второй сетке и на «баке» нет видимых повреждений

Далее приведены результаты численных расчетов взаимодействия ударника с первой сеткой. На рис. 2 представлен вид сверху на сферическую частицу и элемент первой сетки, а также двумерный разрез этой конфигурации.

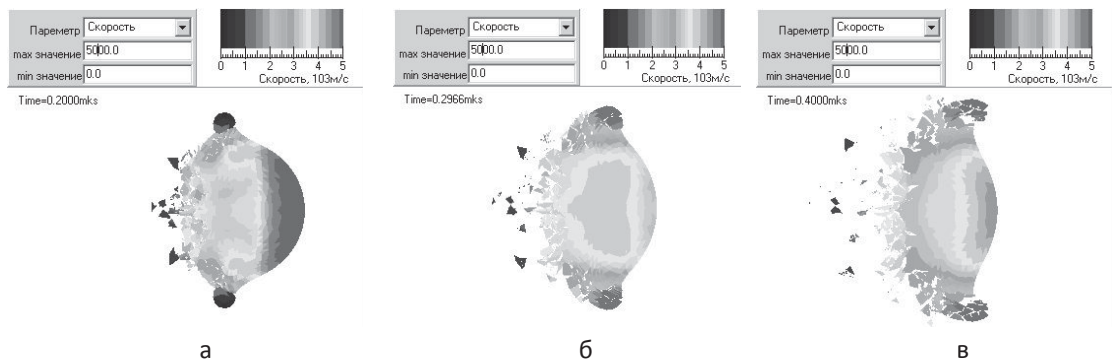


**Рис. 2.** Исходная конфигурация сетки и сферической частицы: а- 3D конфигурация; б- 2D разрез

Проведенные расчеты подтвердили полученные экспериментальные данные по защитным свойствам сеточных преград. Далее были проведены численные эксперименты для скоростей соударения частицы с первой сеткой-преградой  $V=5$  км/сек (рис. 3-5) и  $V=10$  км/сек (рис.6-7).

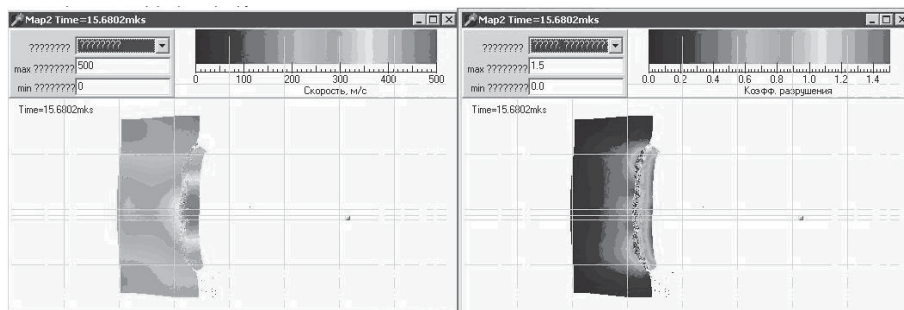


**Рис.3.** Конфигурация сетки и сферической частицы в 3D изображении: а- 0.2000 мкс; б- 0.2966 мкс; в - 0.4000 мкс



**Рис. 4.** 2D разрез сетки и сферической частицы. Распределение скорости: а- 0.2000 мкс; б- 0.2966 мкс; в - 0.4000 мкс



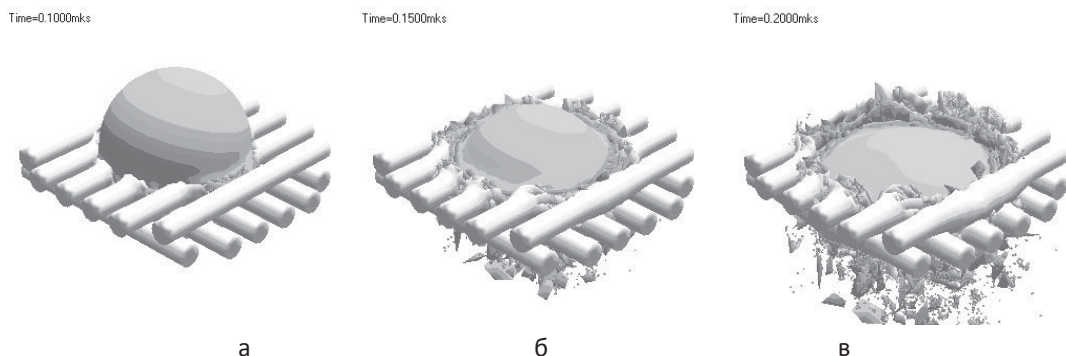


а

б

**Рис.5.** Удар остатком частицы по основному корпусу: а - распределение текущей скорости  $t=15.6802$  мкс; б - распределение коэффициента разрушения  $t=15.6802$  мкс

Из рис. 5 видно, что остаток частицы не пробивает основной корпус космического аппарата, оставляя на его поверхности только незначительную вмятину. Тот же вывод получен и для скорости соударения  $V=10$  км/с (рис.6-7).

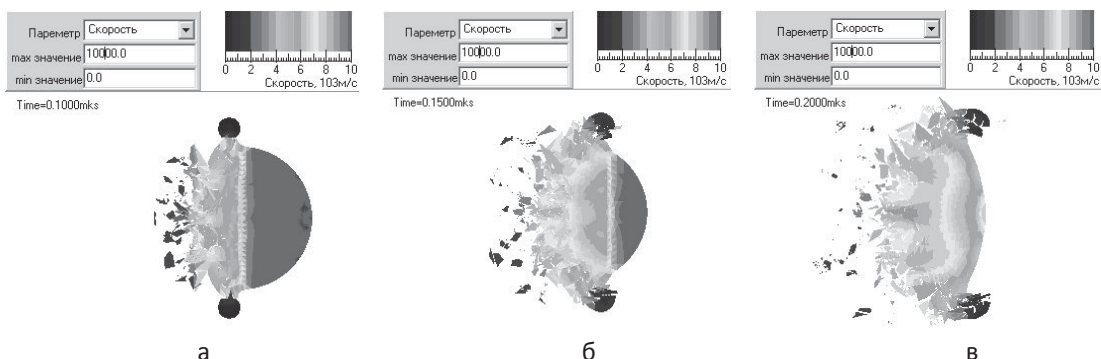


а

б

в

**Рис.6.** Конфигурация сетки и сферической частицы в 3D изображении: а- 0.1000 мкс; б- 0.1500 мкс; в - 0.2000 мкс



а

б

в

**Рис.7.** 2D разрез сетки и сферической частицы. Распределение скорости: а- 0.1000 мкс; б-0.1500 мкс; в - 0.2000 мкс

Как видно из рисунков 3-7 с ростом скорости соударения усиливается дробление налетающей на сеточные преграды частицы, что видно по интенсивному формированию струй материала проникающих сквозь ячейки сетки (рис. 6, в). Одновременно с этим процессом идет также процесс фрагментации элементов сетки.

В данной работе проведены численные исследования взаимодействия высокоскоростных частиц с преградами - сетками, используемыми для защиты КА, и показана эффективность сеточных конструкций защитных экранов.

Полученные результаты показывают возможности предложенного подхода и лагранжевой чи-

сленной методики, в наиболее полной, с физической точки зрения, трехмерной постановке воспроизводить процессы взаимодействия разнесенных сеточных преград и защищаемых ими элементов космических аппаратов с высокоскоростными элементами разрушенных конструкций и аппаратов, а также осколками космических тел и обосновать выбор наиболее эффективных систем защиты космических аппаратов.

В ходе численных экспериментов было показано, что защита из двух сеток является более эффективной, чем эквивалентная по массе сплошная преграда. Полученные результаты использовались для оценки защиты конструкции космического аппарата «Фобос-Грунт». Полученные экспериментальные результаты подтвердили адекватность численной методики.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при частичном финансировании по программе Минобрнауки РФ (проект РНП 2.1.2. 2509) и частичной поддержке грантов РФФИ №10-08-00633а и №09-08-00662а.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Ф. А. Баум, Л. П. Орленко, К. П. Станюкович, В.П. Чельшев, Б.И. Шехтер. М., Физика взрыва, Наука, 1975, 704 с.
- [2] Уилкинс М. Л., Расчет упругопластических течений, Вычислительные методы в гидродинамике, Мир, 1967. С. 212 - 263.
- [3] Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer, 1999. 246 p.
- [4] Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan M.W., A constitutive model for metals applicable at high - strain rate, J. Appl. Phys. 1980. Vol. 51, №3. P. 1496-1504.
- [5] Крейнхаген К.Н., Вагнер М.Х., Пьечоцки Дж. Дж., Бьорк Р. Л. Нахождение баллистического предела при соударении с многослойными мишенями, Ракетная техника и космонавтика, 1970. Т.8, №12. С. 42-47.
- [6] Johnson G.R., Colby D.D., Vavrick D.J., Tree-dimensional computer code for dynamic response of solids to intense impulsive loads, Int. J. Numer. Methods Engng. 1979. Vol. 14, № 12. P. 1865-1871.
- [7] Johnson G.R. Dynamic analysis of explosive-metal interaction in three dimensions, Trans. ASME. J. of Appl. Mech. 1981. Vol. 48, № 1. P. 30-34.
- [8] Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного взаимодействия тел, Под ред. А.В. Герасимова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 572 с.

## РАСЧЕТ НА ОСНОВЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ НАНОЧАСТИЦЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Light scattering in an axially symmetric composite system of a nanoparticle, an oscillating dipole and a metal film (covering a dielectric support) is considered. Nanoparticle and dipole are placed on the axis of symmetry. The axially oriented dipole is situated between film and nanoparticle. The field enhancement factor at the position of the dipole and enhancement of dipole radiation are calculated on the basis of Maxwell's equations, reduced by Green's functions to a system of boundary integral equations. The total increasing of the light scattering, which is a product of the enhancement of the field intensity (factor  $F^2$ ) and the enhancement of the dipole radiation (factor  $D$ ), depends on many parameters: the wavelength of light, metal permittivity, film thickness, geometry of the nanoparticle, angle of incidence of the laser beam, but most strongly on the distance between the nanoparticle and film surface. According to our calculations, the total enhancement factor for Raman radiation can reach huge values in the order of  $10^{10}, 10^{11}$ . The formula for angular spectrum of the radiating dipole is derived. The accuracy of calculations is checked by the optical theorem of reciprocity and by the new derived identity, connecting the Green function and the electric field in the illuminating beam.*

### ВВЕДЕНИЕ

Чтобы объяснить мотивацию нашей работы нам необходимо сделать небольшое историческое введение. Комбинационное рассеяние света (КРС) колеблющимися молекулами было открыто Манделъштамом, Ландсбергом (СССР) и Раманом (Индия). Раман получил за это открытие Нобелевскую премию 1928 года, а советские исследователи, хотя они открыли этот эффект на несколько недель раньше Рамана, не рассматривались нобелевским комитетом (они просто не были номинированы). Суть рамановского эффекта в том, что при рассеянии падающего на колеблющуюся молекулу излучения очень редко появляются рассеянные фотоны, имеющие энергию меньше приходящих фотонов на величину колебательного кванта энергии ( $\hbar\omega_{scat} = \hbar\omega_{inc} - \hbar\Omega$ , где  $\Omega$  - частота колебаний молекулы). Так как по сдвигу частоты рамановских квантов можно судить о структуре молекулы, этот эффект стал важнейшим методом исследования вещества на молекулярном уровне. Раман-эффект очень слабый, так как вероятность появления таких сдвинутых по частоте квантов на четырнадцать-шестнадцать порядков меньше, чем вероятность обычного (рэлеевского) рассеяния света без

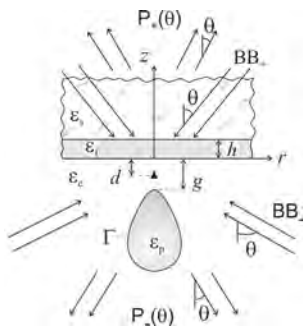
сдвига частоты. И было очень желательно найти пути увеличения рамановского сигнала.

Это удалось сделать в 1977 году [1]. Было показано что раман-эффект усиливается в миллионы раз для колеблющихся молекул, адсорбированных на металлических наноиглах. Иглы получались естественным образом при электрохимическом осаждении металлов с высокой проводимостью (серебро, золото, алюминий, медь). Это гигантское усиление назвали Surface Enhanced Raman Scattering (SERS) или Гигантское Комбинационное Рассеяние Света (ГКРС). Неожиданно в 1997 году было открыто, что в коллоидных растворах серебра и золота SERS эффект может достигать фантастических значений: было зафиксировано усиление КРС в  $10^{14}$  раз [2,3]. Этот эффект можно назвать Super-SERS. В Super-SERS усиление КРС объяснено сендвич-структурой: колеблющаяся молекула зажата между двумя наночастицами, где электрическое поле в нанометровом зазоре усилено в  $10^3$  раз. Что же вызывает это огромное усиления полей и раман-эффекта? Причина в поверхностных плазмонах, то есть в коллективных колебаниях квази-свободного электронного газа в наночастицах, возникающих при облучении светом. Их можно рассматривать как по-

<sup>1</sup> Институт теплофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

верхностные электромагнитные волны в среде, экспоненциально затухающие вглубь металла. Для наночастиц (НЧ) диаметром 10-300 нм из золота, серебра или алюминия плазмонные резонансы расположены в видимой и инфракрасной частях спектра. Эти рассеиватели света использовались еще древними стеклодувами: так коллоидными растворами золота и серебра окрашивались стекла в красный и желтый цвета в древнем Риме и в средние века в витражах храмов. Следует иметь в виду, что плазмоны могут быть рассчитаны в рамках электродинамики сплошных сред просто как решения уравнений Максвелла.

В 1981 году появился Сканирующий Туннельный Микроскоп (СТМ), электрод которого можно рассматривать как наночастицу, так как его кончик имеет радиус кривизны порядка 5-10 нанометров. Если поместить молекулу-диполь в зазор между металлической подложкой и кончиком электрода СТМ, то мы получим знаменитую сэндвич-структуру. Усиление КРС в этом случае достигает  $10^6$ - $10^8$  [4], то есть того же порядка как в SERS. Такая конфигурация названа Tip Enhanced Raman Scattering (TERS). Поэтому возникает важный вопрос: *можно ли получить усиление в TERS такого же порядка как в Super-SERS -  $10^{14}$ ?*



**Fig. 1.** Axial symmetrical scheme of a scattering system: a nanoparticle, a dipole (triangle), a thin film, a dielectric substrate, characteristic lengths ( $d, g, h$ ), permittivities of media ( $\epsilon_s, \epsilon_f, \epsilon_p$ ), illuminating Bessel light beams (BB), and enhanced dipole radiations  $P(\theta)$  are shown. The contour of NP is signified by letter  $\Gamma$ .

Для этого мы рассмотрим конфигурацию, изображенную на Рис.1: наночастица - диполь - металлическая пленка на стекле. Радиально поляризованный пучок света (Bessel Beam, BB) освещает систему сверху или снизу (BB<sub>+</sub> или BB<sub>-</sub>). Наша задача – расчет двух относительных

Коэффициентов Усиления (КУ), описывающих вклад плазмонов НЧ: 1) для интенсивности электрического поля в точке диполя ( $F^2$ ) и 2) для излучения диполя в дальнюю зону ( $D$ ) и дающих в произведении полный КУ для эффекта Рамана:  $K_{Ram} = F^2 D$ .

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решения осесимметричных уравнений Гельмгольца осуществлялись редукцией к системам одномерных граничных интегральных уравнений (ГИУ), [5-8]. Рассматривались осесимметричные задачи упругого и неупругого (рамановского) рассеяния света. Изучались различные нано-объекты: сферы, сфероиды и антенны (нано-стержни), расположенные вблизи тонкой проводящей пленки на диэлектрической поверхности. В осесимметричном случае имеется только одна компонента магнитного поля, которая описывается системой ГИУ, [7,8]:

$$\alpha H_\varphi + \int_\Gamma \left[ H_\varphi \frac{\partial G_{in}}{\partial \nu} - \frac{\epsilon_p}{\epsilon_e} G_{in} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \nu} \right] \rho d\Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\alpha H_\varphi - \int_\Gamma \left[ H_\varphi \frac{\partial G_{out}}{\partial \nu} - G_{out} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \nu} \right] \rho d\Gamma = H_\varphi^{(0)}. \quad (2)$$

Здесь параметр  $\alpha = 0.5$ ,  $H_\varphi$  - это искомое и  $H_\varphi^{(0)}$  внешнее (освещающее) магнитное поле, взятые на контуре НЧ,  $G_{out}$ ,  $G_{in}$  - функции Грина уравнения Гельмгольца для областей вне и внутри НЧ и производные взяты в направлении внешней нормали к контуру НЧ. Система ГИУ решалась дважды с разными внешними полями  $H_\varphi^{(0)}$ : 1) вначале для облучения беселевым пучком света и затем 2) для поля  $H_\varphi^{(0)}$ , задаваемого диполем, расположенным на одной оси с НЧ. В первом случае мы находили КУ для интенсивности электрического поля в точке диполя ( $F^2$ ) и во втором КУ для излучения диполя ( $D$ ). Эти величины рассчитаны методом граничных элементов в работах [7,8] для трех металлов - золото, серебро и алюминий - и для различных форм НЧ в зависимости от энергий падающих квантов света  $\hbar\omega_{inc}$ , выраженных в единицах eV (электрон-вольт), см. Рис.2-6.

Для слоистых сред, для которых функции Грина рассчитываются через сложные интегралы типа Вейля-Зоммерфельда [9,10], выведено тождество, позволяющее контролировать точность расчетов функции Грина:

$$-\alpha H_{\varphi}^{(0)} = \int_{\Gamma} \left[ H_{\varphi}^{(0)} \frac{\partial G_{out}}{\partial v} - G_{out} \frac{\partial H_{\varphi}^{(0)}}{\partial v} \right] \rho d\Gamma. \quad (3)$$

Здесь  $H_{\varphi}^{(0)}$  - это внешнее поле для задач 1) или 2). В наших расчетах левая и правая части уравнения (3) отличались не более чем на 0.1 %.

### Результаты расчетов для факторов усиления поля и дипольного излучения [7,8]

Рассмотрим сначала полевой ( $F^2$ ) и дипольный ( $D$ ) факторы усиления для сфер из трех металлов (золото, серебро, алюминий), с диаметрами  $2a = 50, 100$  и  $200$  нм. Сферы расположены на малом расстоянии  $g=1$  нм от металлических пленок, сделанных из тех же металлов (Au, Ag, Al) и имеющих оптимальные толщины 50 нм (Au, Ag) и 20 нм (Al), [8]. При прохождении пучка света сверху через стекло и металлическую пленку под углами больше критического, больше чем  $\theta_* = 41.8^\circ$ , наблюдается явление полного внутреннего отражения света. При этом в пленке появляются плазмонные колебания, а в области под пленкой распространяется экспоненциально затухающая световая волна (evanescent wave). Для результатов, представленных на Рис.2, угол освещающего пучка света  $\theta = 45^\circ$  больше критического. Поэтому для фактора усиления интенсивности поля  $F_+^2$  мы получаем уменьшение по сравнению с фактором  $F_-^2$ . Это происходит потому, что удаленные от пленки участки большой наночастицы (200 нм) находятся в зоне затухающей волны и плазмоны возбуждаются здесь слабо. Отметим, что факторы дипольного излучения находятся в таком же соотношении: после расщепления кривых мы видим, что  $D_+ \ll D_-$ . Расщепление кривых происходит при выполнении условия для радиуса частицы  $a > \tilde{\lambda} = \lambda / 2\pi$ , где  $\lambda$  длина волны света, а масштаб Рэля  $\tilde{\lambda}$  дает длину экспоненциального затухания поля в нижнем полупространстве.

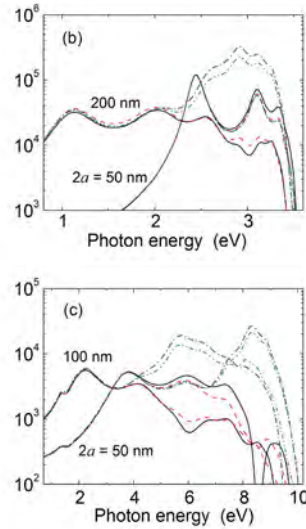
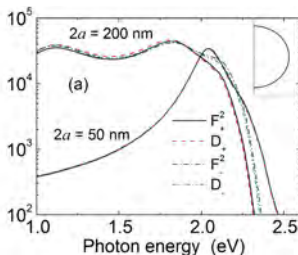


Fig. 2. Relative enhancement factors  $F^2$  and  $D$  for metallic spheres [(a) gold, (b) silver, (c) aluminum] in dependence of the photon energy. In figure (a) all lines collapse to a single line for  $2a=50$  nm. The same holds for figures (b) and (c) in the low energy region for the dipolar peaks. Lines splitting occurs when the sphere radius becomes larger than the reduced wavelength ( $a > \tilde{\lambda} = \lambda / 2\pi$ ).

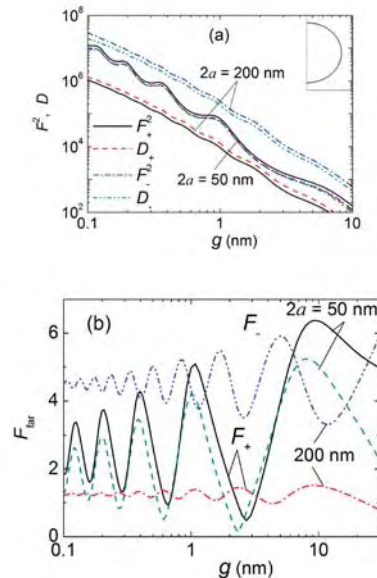
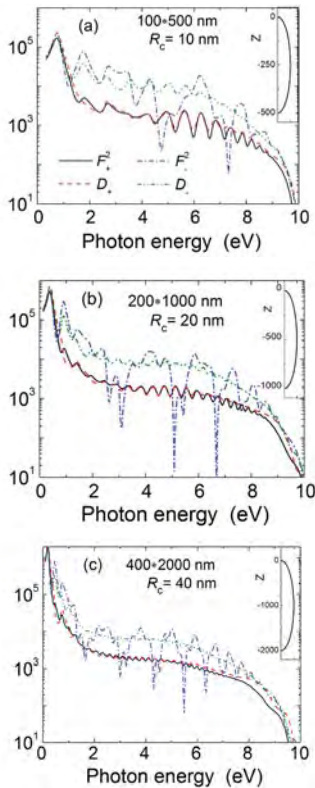


Fig. 3. Enhancement factors vs.  $g$  (gap) for Ag spheres of two diameters 50 and 200 nm at a photon energy of 3.1 eV ( $\lambda = 400$  nm): (a) relative factors at the sphere's close pole; (b) factor  $F_{far}$ , at the sphere's pole situated far from the Ag film. The beam angle is  $\theta = 45^\circ$ .

На Рис.3,а показана зависимость КУ от размера зазора между серебряной сферической НЧ и поверхностью пленки. Выбрана длина волны

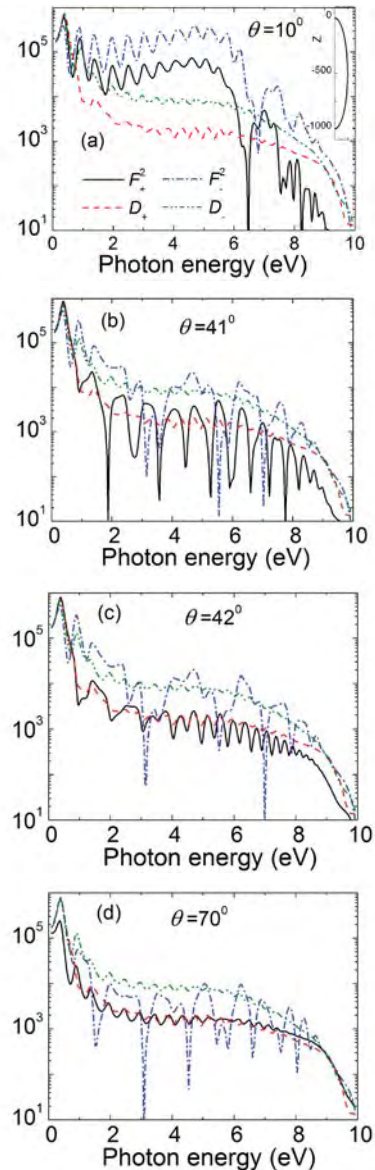
400 нм, для которой малая сфера дает совпадающие КУ, а большая (200 нм) показывает существенное расщепление КУ на две группы. На Рис.3,b показана зависимость полевого фактора  $F$ , вычисленного на противоположном (удаленном от пленки) полюсе сферы. Видно, что плазмонные колебания имеют глобальный характер, то есть они не локализованы в зазоре, а охватывают всю поверхность НЧ.



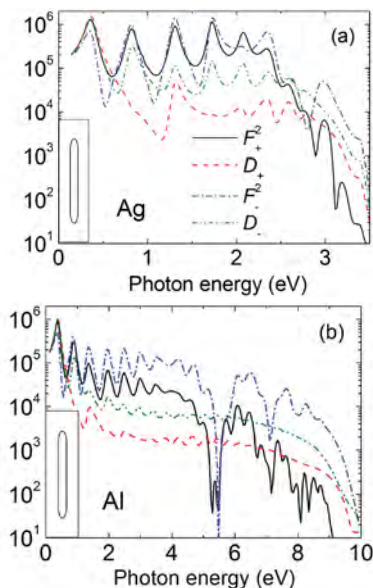
**Fig. 4.** Relative enhancement factors for aluminum prolate spheroids (semi-contours are shown in the inserts) with aspect ratio 1:5. Spheroids have diameters, lengths and curvature radii at the poles  $R_c$ , indicated in figures. The beam angle is  $\theta = 45^\circ$ .

На Рис.4 показаны рассчитанные КУ для трех вытянутых алюминиевых наносфероидов с разными размерами. Интересно отметить, что с увеличением размера сфероида первый (дипольный) пик смещается все дальше в инфракрасную область спектра и возрастает. На Рис.5 для сфероида из алюминия с размерами 200x1000 нм показаны расчеты для четырех углов освещения. Обратим внимание на изменение характера кривых при переходе через критический угол полного внутреннего отраже-

ния (Рис.5,b и Рис.5,c), а также на повышенные полевые КУ ( $F_+, F_-$ ) для малых углов освещения  $\theta = 10^\circ$  (Рис.5,a). Также интересны глубокие минимумы в полевых факторах  $F_+, F_-$ . Они характерны для удлиненных НЧ (наноантенн); см. также Рис.6,b для наностержня из алюминия. Эти минимумы объясняются деструктивной интерференцией волн, излучаемых двумя концами наноантенны [8].



**Fig.5.** Enhancement factors for aluminum prolate spheroid (200x1000 nm) illuminated under various angles of Bessel beam. Note, the  $D$ -factors are shown by the same curves in all figures due to their independency of BB angle [8].



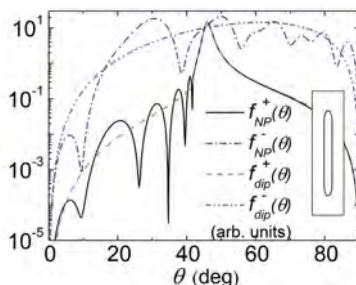
**Fig. 6.**  $F^2$  and  $D$  spectra for long Ag (a) and Al (b) nanorods illuminated at BB angle  $\theta = 10^\circ$ . The shape of nanorods is shown in the insert (100x1000 nm,  $R_c = 20$  nm);  $g = 1$  nm; film thickness (a)  $h = 50$  nm (Ag); (b)  $h = 20$  nm (Al).

На Рис.6 показаны рассчитанные КУ для серебряной (a) и алюминиевой (b) наночастиц в форме наностержней с длиной 1000 нм, диаметром 100 нм и радиусом кривизны на концах  $R_c = 20$  нм. Облучение падает под малым углом  $\theta = 10^\circ$ . Для серебра полевые факторы ( $F^2$ ) в резонансах достигают значений  $10^6$ , а максимумы дипольных факторов ( $D$ ) превышают  $10^5$ . Следовательно КУ для Раман-сигнала может достигать огромных значений  $K_{Ram} = F^2 D = 10^{11}$ .

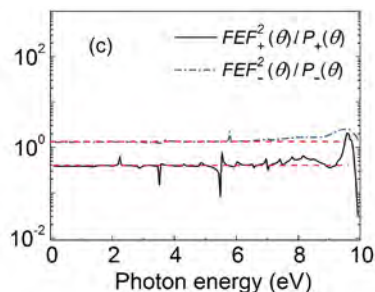
На Рис.7 показаны функции распределения дипольного излучения по углу как в случае присутствия НЧ ( $f_{NP}(\theta)$ ), так и без нее ( $f_{dip}(\theta)$ ). Интересно, что для излучения в сектор углов больше критического (forbidden sector  $\theta > \theta_*$ ), диполь и диполь с НЧ дают одинаковые распределения (это объясняется экспоненциальным затуханием вкладов удаленных от пленки частей длинной НЧ, [8]).

Другим способом контроля точности расчетов было сравнение вычисленной интенсивности поля в точке диполя и дипольного потока энергии, уходящего под тем же углом  $\theta$ , что и приходящее излучение. Согласно теореме взаимности эти величины точно пропорциональны друг другу, что демонстрируется на Рис.8. Постоянство отношения указанных величин на-

рушается в области малых длин волн (больших энергий фотонов) и для окрестностей локальных минимумов.



**Fig. 7.** Angular distribution functions for NP/dipole/film  $f_{NP}(\theta)$  (solid, dash-dot lines) and for dipole/film  $f_{dip}(\theta)$  (dashed, dash-dot-dot). “+”, “-” mean dipole radiation directed into upper or lower semi-spaces, respectively; gap is 1 nm; photon energy is 5.5 eV.



**Fig. 8.** Ratio of spectra of field enhancement factor  $FEF^2(\theta)$  and angular distribution function for dipole radiation  $P(\theta)$ , calculated at an angle  $\theta = 34.7^\circ$ , at the point of deep minimum of  $f_{NP}(\theta)$ , seen in Fig.7

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Металлические НЧ или оптические наноантенны, выполняют несколько функций: а) прием электромагнитного сигнала, его усиление в форме резонансных плазмонных колебаний и концентрирование ближнего поля в щели, где расположен диполь; б) прием, усиление и излучение в пространство сдвинутого по частоте сигнала диполя. Для серебряных НЧ, моделирующих электрод СТМ, расчеты дают КУ для Раман-эффекта  $K_{Ram} \sim 10^{11}$ , что пока меньше чем в Super-SERS на три порядка, но уже достаточно для измерения спектров излучения отдельных молекул.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен Правительству РФ за поддержку данной работы (грант № 11.G34.31.0035).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jeanmaire D. L., Van Duyne R. P., *J. Electroanal. Chem.* Vol.84, P.1 (1977).
- [2] Kneipp K., et al., *Phys. Rev. Lett.*, Vol.78, P.1667-1671 (1997).
- [3] Nie S., Emory S. R., *Science*, Vol.275, P.1102 (1997).
- [4] Steidtner J., Pettinger B., *Phys. Rev. Lett.* Vol.100, P.236101 1-4 (2008).
- [5] Geshev P.I., et al, *Phys. Rev. B*, Vol.70, P.075402 1-16 (2004).
- [6] Geshev P.I., Dickmann K., *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, Vol.8, S161-S173 (2006).
- [7] Geshev P.I., Fischer U.C., Fuchs H., *Optics Express*, Vol.15, N.21, P.13796-13804 (2007).
- [8] Geshev P.I., Fischer U.C., Fuchs H., *Phys. Rev. B*, Vol.81, P.125441 1-16 (2010).
- [9] Zakharov E. V., Eremin Yu. A., *J. Num. Math. Math. Phys.*, Vol.19, P.1344 (1979).
- [10] Дмитриев В.И., Захаров Е.В., Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. МГУ, Москва, 1987.



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИБРОСЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДАХ ХАРАКТЕРНЫХ ДЛЯ ГРЯЗЕВЫХ ВУЛКАНОВ

*This paper deals with the mathematical modeling of elastic waves propagation from a point source in three-dimensional elastic media characteristic of mud volcanoes. An algorithm and a set of parallel programs have been developed. Test calculations to choose an optimal parallel scheme were carried out on the cluster of Siberian Supercomputing Center of SB RAS. A mud volcano «Gora Karabetova» mathematical model is presented for the first time. The comparison of natural vibroseismic experiment results and numerical experiment results is presented.*

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Численное моделирование распространения сейсмических волн в сложно построенных упругих неоднородных средах проводится на основе полной системы уравнений теории упругости с соответствующими начальными и граничными условиями. Данная постановка задачи представлена в терминах вектора скоростей смещений  $\vec{u} = (U, V, W)^T$  и тензора напряжений  $\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^T$ :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = [A] \vec{\sigma} + \vec{F}(t, x, y, z),$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = [B] \vec{u},$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial y} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial y} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} & \mu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \mu \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \mu \frac{\partial}{\partial z} & \mu \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В данной постановке  $\lambda(x, y, z)$ ,  $\mu(x, y, z)$  - параметры Ламе, плотность  $\rho$  зависит от трех пространственных переменных.

### МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Метод решения поставленной задачи основан на использование конечно-разностного метода. Алгоритм построения конечно-разностной схемы предложен в статье [1]. Аналогичный подход

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

для статических задач теории упругости, также, был развит в работах отечественных математиков [2]. Расчет сеточных коэффициентов ( $\lambda, \mu, \rho$ , которые могут иметь разрывы) участвующих в разностной схеме проводится на основе интегральных законов сохранения.

Конечноразностная схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству [1]. Общая схема вычислений выглядит следующим образом.

На первом полушаге по времени определяются компоненты вектора скорости смещения, затем на втором полушаге по времени по формулам находятся нужные компоненты напряжений. Далее насчитываются новые компоненты образов вектора скорости смещения на новом полушаге по времени.

### **РЕАЛИЗАЦИЯ «ПОСТРОИТЕЛЯ» ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОЙ СРЕДЫ**

Для выполнения данной работы был создан специализированный построитель трехмерных моделей неоднородных упругих сред. С помощью разработанного построителя задаются значения  $\lambda, \mu, \rho$  в каждой точке конечно-разностной схемы.

В нашем случае предполагается, что задана крупноблочная модель среды, составленная из параллелепипедов, в вершинах которых задаются параметры среды ( $V_p, V_s$  - скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно и плотность  $\rho$ ). Эти параметры являются непрерывными внутри каждого блока. Разрывы проходят только по граням соседних параллелепипедов. Далее происходит интерполяция параметров среды на более «мелкую» расчетную сетку.

После того как построена основная сеточная модель трехмерно-неоднородной упругой среды возможно дальнейшее усложнение ее геометрической структуры. В построенную модель можно «вставлять» различные геометрические объекты, которые имеют аналитическое описание (цилиндрические, конические, эллипсоидальные и др. подобласти, или их пересечение) со своими значениями упругих параметров среды.

Разработанный построитель модели позволяет конструировать сложные 3D модели неоднородных упругих сред, близкие к реальным объектам исследования.

### **ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ ПРОГРАММЫ**

Одно из основных требований к параллельной программной реализации состояло в том, чтобы программа могла эффективно работать на кластерах с MPP-архитектурой и высокопроизводительных SMP-серверах.

Использован способ разбиения расчетной области на слои вдоль одной из пространственных переменных, в данном случае вдоль координатной оси Z. При реализации данной схемы каждый вычислительный узел рассчитывает свою сеточную область на каждом временном шаге независимо от других, за исключением точек, находящихся на границе между двумя соседними областями. Эти точки являются общими для каждой из областей и для продолжения счета необходимо производить обмен информацией об искомым величинах между «соседями».

На основе выбранной схемы были созданы две параллельные программы:

- для распараллеливания используется только MPI,
- используется комбинация возможностей MPI и OpenMP («гибридная параллельная схема», MPI&OMP).

Во втором случае («гибридная параллельная схема»), предлагается проводить обмен информацией между соседними слоями через MPI, а внутри каждого слоя, расположенного в общей памяти узла, проводить параллельные вычисления, используя OpenMP. Количество слоев для «гибридной» схемы определяется числом используемых вычислительных узлов, а количество OpenMP потоков - количеством ядер на узлах, в случае MPI программы - общим количеством

ядер на выделенных вычислительных узлах. На каждом временном шаге моделирования необходимо произвести две серии обменов информацией о волновом поле: одна - для компонент вектора скоростей смещений, вторая - для компонент тензора напряжений. Весь обмен информацией реализован через интерфейс MPI с помощью блокирующих операций получения и передачи данных.

Использовались различные опции Intel MPI для гибридных MPI/OpenMP приложений:

node - все логические процессоры на одном узле рассматриваются как единое пространство

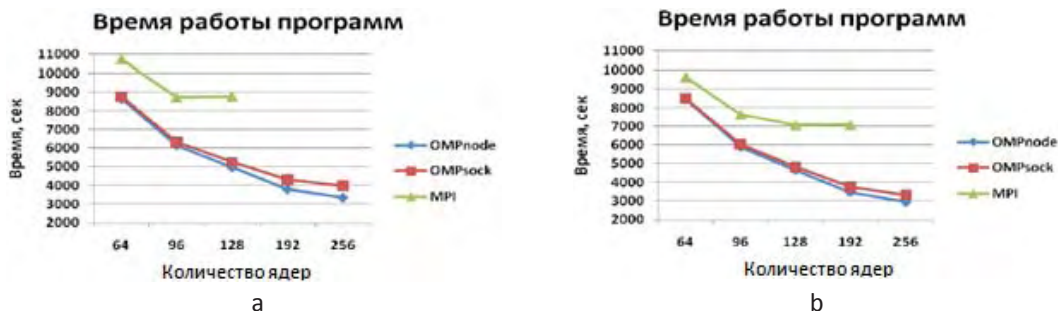
sock - каждый физический socket - отдельная область

Исследование работы параллельных реализаций проводилось для двух тестовых моделей, таблица 1.

**Таблица 1.** Параметры расчетов тестовых 3D моделей упругих сред

Модель #	Размер расчетной сетки			
	X	Y	Z	Time
Модель 1	1537	512	1025	1786
Модель 2	1025	512	1537	1786

На представленных графиках (рис.1) видно, что при увеличении ресурсов все параллельные программы дают определенный выигрыш. В целом при увеличении количества ядер в два раза время выполнения на моделях 1 и 2 изменяется в среднем в 1.6-1.7 раза для «гибридной параллельной схемы», и в 1.2-1.3 для MPI программы.



**Рис. 1.** Время работы параллельных программ а) для модели 1 и б) для модели 2.

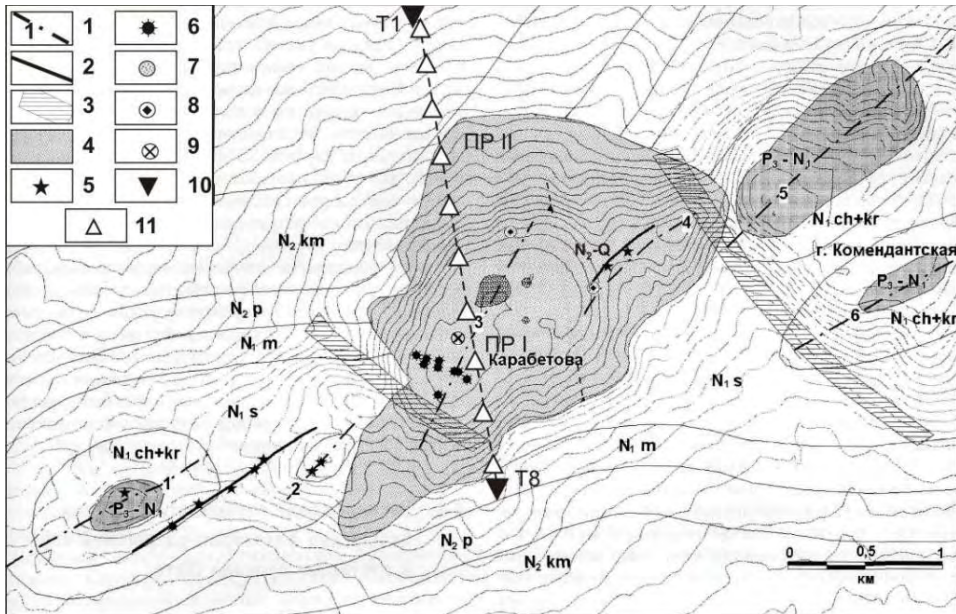
Использование опции «node» дает преимущество, по сравнению с опцией «sock», при использовании «гибридной параллельной схемы», выигрыш составляет в среднем 8% для модели 1 и 5% для модели 2 (на 256 ядрах до 18% для модели 2 и до 13% для модели 2). Видно, что наилучший результат получается при использовании «гибридной параллельной схемы» с опцией «node», по сравнению с MPI программой время вычислений изменяется до 1.7 раз на 128 ядрах для модели 1 и до 2 раз на 192 ядрах для модели 2. Отметим, что при значительном увеличении количества ядер (MPI потоков), MPI программа не дает прироста, в то время как, MPI&OpenMP программа дает прирост на том же количестве ядер.

Таким образом, при данной архитектуре кластера НКС-30Т наиболее лучшей в использовании является MPI&OpenMP программа («гибридная параллельная схема»).

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРЯЗЕВОГО ВУЛКАНА «ГОРА КАРАБЕТОВА» ВИБРОСЕЙСМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

ИВМиМГ СО РАН поставил ряд экспериментальных работ по просвечиванию грязевых вулканов вибросейсмическими методами [3,4]. В экспериментальных работах по активному вибросейсмическому просвечиванию грязевого вулкана «Гора Карабетова» использовался сейсмический вибрационный источник СВ-10/180 и регистрирующие комплексы RefTek-125A (40 регистраторов

с вертикальными сейсмоприемниками GeoSpace GS-20DX. Общая схема зондирования вулкана приведена на рис.2. Отметим, что геологическая структура вулкана имеет очень сложное строение [5].

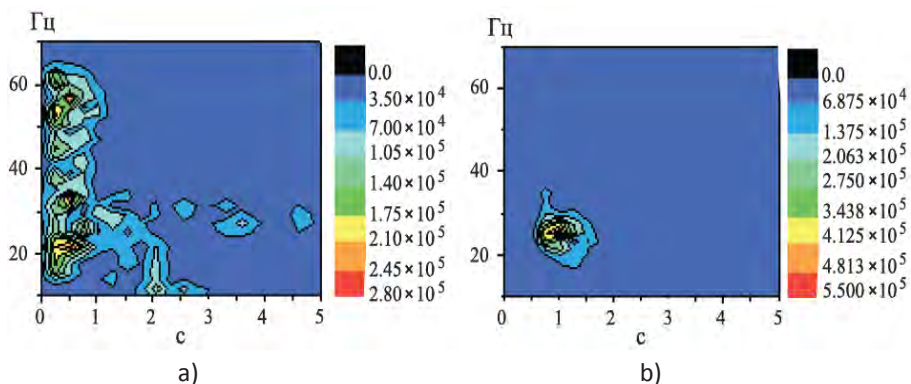


**Рис. 2.** Геологическая схема района Карabetова гора (Горбатиков А.В.). Условные обозначения: 1 - оси антиклинальных складок и их номера; 2 - достоверно установленные разломы; 3 - разломы выделенные по структурно-геоморфологическим признакам; 4 - покров сопочной брекчии грязевого вулкана горы Карabetова; 5 - действующие грифоны; 6 - недействующие грифоны; 7 - сальзы; 8 - крупные конусообразные грифоны высотой несколько метров; 9 - центр взрывного извержения 6 мая 2001 г.; 10 - пункты вибросейсмического излучения; 11 - пикеты профиля вибросейсмической съёмки, приведены каждый пятый датчик.

Излучение сигналов вибраторами осуществлялось в точках Т1, Т8. Длина профиля через вулкан, на котором производилась регистрация вибросейсмических сигналов, составила 3.2 км.

В качестве зондирующих сигналов вибратора использовались свип-сигналы в диапазоне частот 10-64 Гц (сигнал с линейной разверткой частоты в данном диапазоне с длительностью 60 с). Синхронизация по времени регистрирующих систем и вибратора осуществлялась при помощи GPS-приемников.

Полученный полевой материал обрабатывался с помощью специальных программ. Были получены корреляционные сейсмограммы и проекции спектрально-временных функций, пример рис.3.



**Рис.3.** Проекция СВФ на удалении: а) 740 м от источника (район скопления грифонов), б) 1480 м от источника (центр вулкана)

Временная структура волнового поля характеризуется усложнением по мере приближения к телу вулкана. Спектральный анализ вибрационных сейсмограмм (коррелограмм) на этом профиле показывает довольно сложную картину прохождения сейсмических волн через тело вулкана.

На расстояниях до 1800 метров от источника отчетливо просматривается поверхностная волна со скоростью около 340 м/с, имеющая спектральные пики на частотах 12-15 Гц.

По мере приближения к центру вулкана спектральная картина начинает меняться. Появляются более высокие частоты, спектр существенно расширяется (рис.3а), на некоторых расстояниях появляются узкополосные пики, возможно, связанные с резонансными свойствами скопления ранее действовавших сальз и грифонов (выходящие на поверхность каналы в виде конусов - грифоны или небольших углублений - сальзы, через которые извергаются грязевые и газообразные фракции вулкана). Однако, в центре вулкана, на расстоянии 1480 метров от источника Т8 появляется узкополосный спектральный пик на частоте 25-28 Гц (рис.3б), который может быть связан с геометрией центрального канала трубки вулкана и с резонансными свойствами этого выводящего канала. Для подтверждения этой гипотезы было проведено численное моделирование, по предложенной вычислительной схеме, ориентированное на изучение геометрических параметров вулкана «Гора Карabetова», результаты которого приведены в следующем разделе.

На этих рисунках по горизонтали обозначено время в секундах, по вертикали частота в Герцах, цветовая шкала отображает амплитуду спектра в относительных единицах.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА МОДЕЛИ «ГОРА КАРАБЕТОВА»

Результаты полевых экспериментов показали, что структура грязевых вулканов имеет сложную геометрию и неоднородное строение среды, в которой содержится жидкость, пузыри газа, неоднородные включения и т.д. Соответственно все это оказывает влияние на структуру волнового поля наблюдаемого в экспериментах.

Для изучения динамики сейсмического поля и влияния геометрии модели на структуру волнового поля была построена трехмерная модель верхней части грязевого вулкана «Гора Карabetова» (рис.4).

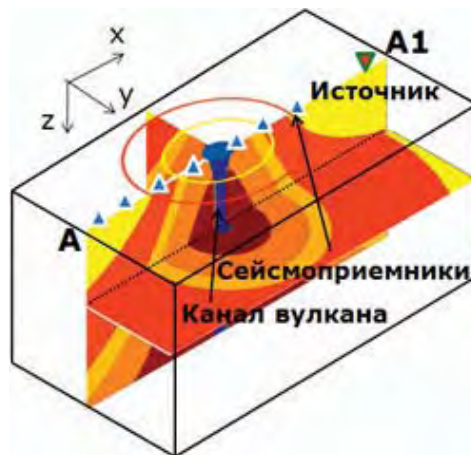


Рис. 4. 3D математическая модель строения верхней части грязевого вулкана.

В качестве источника сейсмических волн был взят источник типа «центр давления» с несущей частотой 25 Гц, расположенный вблизи свободной поверхности.

Численное моделирование проводилось на кластере НК-30Т ССКЦ ИВМиМГ СО РАН (вычислительные блэйд-сервера hpProLiant BL2x220c G5). Сеточная модель представлена следующим количеством узлов по пространственным переменным X - 2096, Y - 1103, Z - 828, Time - 12415.

Размеры области моделирования составили 3.8кмХ2.0кмХ1.5км. Результаты расчетов с помощью разработанных программ представлены в виде снимков волнового поля по профилю А-А1 (рис.4) для компоненты  $W$  в плоскости  $Oxz$  для различных временных промежутков  $t_1$ ,  $t_2$  на рис.5.

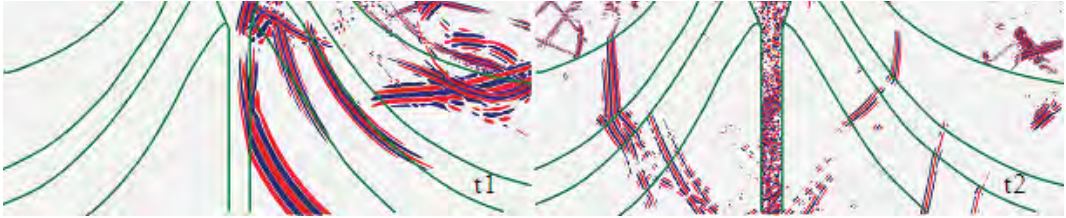


Рис. 5. Снимки волнового поля (результаты расчетов).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ СПФ по профилю, пересекающему зону вулкана «Гора Карабетова» и численное моделирование, основанное на геометрических особенностях этого вулкана, показало следующее: в спектрах вибрационных сейсмограмм на фоне их широкополосной части появляются узкополосные составляющие, характеризующие селективные свойства среды с выраженной неоднородностью, вероятно, это связано с мелкими подводными каналами, питающими действующие сальзы и грифоны и резонансными свойствами этих каналов на соответствующих частотах. Особенно выделяется узкополосный пик над центральной частью вулкана на частотах 25-28 Гц. Проведенные численные расчеты подтверждают, что этот пик связан с геометрией центрального канала вулкана. На основе проведенных исследований выбрана наиболее подходящая параллельная реализация программного комплекса для данной параллельной схемы и архитектуры кластера. Разработана удобная в использовании параллельная программа для построения сложных трехмерных геофизических моделей геологических сред со специфической геометрической структурой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Глинский Б.М., Караваев Д.А., Ковалевский В.В., Мартынов В.Н. Численное моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана «Гора Карабетова» вибросейсмическими методами. Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. Москва. с. 95-104.
- [2] Коновалов А.Н. Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики. Сиб.журн.вычисл.математики. РАН. Сиб.отд-ние. Новосибирск. 1998. Т.1. № 1. с. 25-57
- [3] Глинский Б.М., Собисевич А.Л., Фатьянов А.Г., Хайретдинов М.С. Математическое моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана Шуго. Вулканология и сейсмология. №4. 2008. с. 1-9.
- [4] Глинский Б.М., Собисевич А.Л., Хайретдинов М.С. Опыт вибросейсмического зондирования сложно-построенных геологических структур (на примере грязевого вулкана Шуго). Докл. РАН. Т.413. №3. 2007. с. 398-402.
- [5] Шнюков Е.Ф., Шереметьев В.М., Маслаков В.А. и др. Грязевые вулканы Керченско-Таманского региона. Краснодар: ГлавМедиа. 2006. с. 176.

## LIGHTNING MODELING IN TRANSMISSION LINES

*The most encouraging environment for the learning process is one that actively involves students. This process is, in this paper, presented by working out of a project task lightning conductors of transmission lines and active student's participation in the implementation. The mentioned software tool allows the calculation of overhead protection zones depending on the choice of calculation method of lightning protection and amplitude of lightning. Programming code in Visual Basic that is associated with the projected object in AutoCAD, which is protected, greatly facilitates the process of designing a safety zone and making it easier to master specific teaching units.*

### INTRODUCTION

Lightning protection of transmission lines is realized by means of shield wires, and can be analyzed through two models: a geometric and electrogeometrical model. In this paper will be determine striking distance boundary and limit values for atmospheric discharge of electricity that can not be empty in the phase conductor for transmission line nominal voltage of 220 kV. The geometric model is one of the methods of calculation zone of protection of transmission lines. Shield wire is placed above the phase conductors of transmission lines to protect against direct lightning flash in phase. Geometric method as a criterion for the protection phase conductors of lightning flash takes the protection angle. Protection angle is the angle between vertical line that passes through the center and line connecting the center phase conductor and the shield wires. To achieve effective protection it is necessary that this angle is less than 30°, regardless nominal voltage of transmission line. According to this method is defined by the probability of discharge of shield wire, as earth wire does not give absolute protection against penetration by lightning discharges in it and the phase conductor. The probability of penetration of lightning is given by the following expression:

$$\log P = \frac{\alpha \sqrt{h}}{A} - B \quad (1)$$

where:

$P$  - i probability of penetration of lightning protection without shield wire

$h$  - effective height above ground of shield wire

$\alpha$  - protective angle

$A$  - empirical constant that is adopt by 90

$B$  - empirical constant that is adopt by 4

In contrast to the geometric method is developed electrogeometrical method that takes the main parameter for the amplitude of the discharge current. The basic assumption in this model is that the length of the last jump is proportional to the amplitude saltatorily leader discharge current. The maximum distance traveled by leaps and bounds can not exceed a leader in his last jump is called the striking distance, and is marked with  $R_u$ . The striking distance depends on the distance of the electric field due to the presence of the head saltatorily leaders, and electric field intensity depends on the amount of electricity carried by the channel saltatorily leaders. The general expression for striking distance is:

$$R_u = k \cdot I_0^n \quad (2)$$

where  $k$  and  $n$  are empirical constants and have values  $k=6,72$ , and  $n=0,8$  according to [1].

In order to apply the model electrogeometrical we should know that:

$$R_z = k_z \cdot R_u \quad (3)$$

Where :

$R_z$  - is the striking distance to the ground in  $m$

$k_z=0,64-1$  - stroke of the striking distance correction to the ground

Figure 1 shows the disappearance of the phase conductors exposure zone for different value of lightning current.

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies, Belgrade Serbia

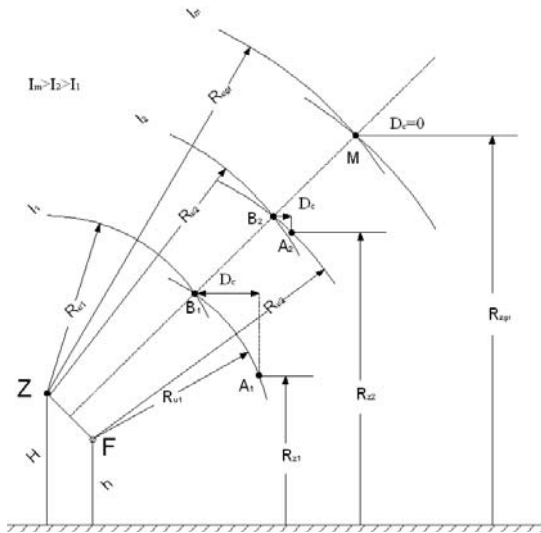


Fig. 1. Geometry of pole for explain the electrogeometric model

Labels in Figure 1 have the following meanings:

$H$  - effective height of the shield wires,

$h$  - effective height of phase conductors

$F$  - phase conductor

$Z$  - shield wire

$R_{u1}$  - impact distance of the phase conductor and the shield wire in case of amplitudes of discharge current,

$R_{z1}$  - impact distance to the ground in case of amplitudes of discharge current,

$D_c$  - horizontal projection of the surface exposed

Points  $A_1$ ,  $A_2$  and  $M$  are defined by the intersection of the circle centered at the center point  $F$  of the phase conductor and a radius  $R_{u1}$  equal to the prime spots in the corresponding current amplitude  $I_1$ ,  $I_2$  and  $I_m$ , and the horizontal line at a height equal to the distance of the prime land for the corresponding current amplitude.

Points  $B_1$ ,  $B_2$  and  $M$  are defined by the intersection of the circle centered at the center point of the phase conductor  $F$  and a radius equal to the prime spots in the corresponding current amplitude  $I_1$ ,  $I_2$  and  $I_m$  and with a circle in the center of the shield wire at point  $Z$ , of radius equal to the prime distance for the same current amplitude.

Arc  $A_1B_1$  is a cross-section of cylindrical surfaces with the expected atmospheric discharge phase conductor under the lightning electricity  $I_1$ . Any discharge of atmospheric electricity which is expected  $I_1$ , and whose head saltatorily leader finds

himself in a circular snippet  $FA_1B_1$  always leads to a phase conductor in the discharge by the shield wires.

Area defined by the arc  $A_1B_1$  is the exposed surface of the amplitude of the phase conductor of current discharge  $I_1$ . It can be concluded that the higher discharge current amplitude of the phase conductor exposed surface is less, and that relationship is valid:  $I_1 < I_2 < I_m \Rightarrow A_1B_1 > A_2B_2 > M$ . From the foregoing it can be concluded that there is a boundary amplitude of lightning current for which the exposed surface of the phase conductor is zero, which means that the impact of the phase conductor by a shield wire at that and higher current amplitudes is impossible. The term 4 is the expression proposed by the author Eriksson to calculate the impact distance.

$$R_u = 0,67 \cdot H^{0,6} \cdot I_0^{0,74} \quad (4)$$

Impact distance proposed by the author Petrov-Waters, according to [29], is represented by the expression (5).

$$R_u = 0,8 \cdot [(H+15) \cdot I_0]^{2/3} \quad (5)$$

$I_0$  - amplitude of the discharge current

The term by which it determines the distance between two points  $M$  and  $F$  (expression 4) gives the boundary value of the striking distance  $R_{gr}$  based on which we can count limit value of the amplitude of current  $I_{gr}$  (expression 6).

$$R_{gr} = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2} \quad (6)$$

According to [4] there is an analytical expression to calculate the boundary of striking distance  $R_{gr}$  through formula:

$$R_{gr} = \frac{(h+H)/2}{1 - \frac{R_u}{R_z} \cdot \sin \alpha} \quad (7)$$

where:

$h$  - is suspension height of phase conductors

$H$  - is suspension height of the shield wire

$R_u$  - is striking distance to the phase conductor

$R_z$  - is striking distance to the ground

$\alpha$  - angle between the normal through the shield wire and straight line that connects the point of phase conductor and point of shield wire.

The conclusion is that for calculation boundary of striking distance  $R_{gr}$  [4] is significant knowledge of size  $h$ ,  $H$ ,  $\alpha$ , while for computing boundary of



striking distance  $R_{gr}$  through geometric coordinates is significant knowledge of the point of the phase conductor and the coordinates of the point  $M$  which vanishes in exposed areas.

According to [4] calculated to further limit the amplitude of lightning current according to the following formula:

$$I_{gr} = \left[ \frac{R_{gr}}{0.84 \cdot h^{0.6}} \right]^{1/0.74} \quad (8)$$

The paper presents the calculation of  $R_{gr}$  and  $I_{gr}$  analytical and geometrical methods and their comparison in selecting methods and determination electrogeometric lightning protection efficiency in the choice of electrogeometric method .

### INSTRUCTIONS FOR WORKING WITH THE PROGRAM

Figure 2 shows the mask design of lightning protection for transmission lines of different structures and different values of nominal voltage.

Drawing objects is in AutoCAD, while the calculation is done using the security parameters of the Visual Basic for Application running in the background of AutoCAD. The algorithm parameters care budget consists of the following steps:

1. Starting the application appears mask with request to entry point setting phase conductor and the shield wire that the user inputs by double-click on the required points on the current drawing in AutoCAD.
2. After the entry of points window appears as shown in Figure 4 and the user can choose between two methods of calculation lightning protection of transmission lines: protection angle method or Electrogeometric method.
3. If the user selects the protective angle method, based on the calculated protection angle, is the protection effective and, if it is so, calculates the probability of discharge other than cords protective  $P$ , and if not, it writes that the protection is not effective.
4. If the selected method is electrogeometric, lightning currents should be entered (10kA, 20kA, 30kA, ...), rated voltage transmission line (printed above pole) and select according to the formula which is calculated striking distances to Peter or Eriksson (terms 2 and 3) . Then, the application calculates the amplitude

value boundary of lightning current when the lightning discharge is not possible  $I_{gr}$  (analytical expression 5), and boundary of striking distance  $r_{gr}$  (analytical expression of 6)

The screenshot shows a software window titled "Nadzemni vod" with a grid background. It contains several input fields and buttons. At the top, there are three columns: "Tacka vesanja zastitnog uzeta", "Tacka vesanja faznog provodnika", and "Rastojanje". Below these are input fields for X, Y, and Z coordinates for both points, and a field for "Rastojanje" with a value of 6.4615. There are also fields for "(rad) Ugao (deg)" with values 0.4353 and "24\* 56' 20\"", and a "Visina" field with a value of 34.4002. Below this are buttons "Crtaj" and "Saber". A section titled "Izbor metoda" has two radio buttons: "Metod zastitnog ugla" (unchecked) and "Elektrogeometrijski metod" (checked). Below this are fields for "P:" (value 38), "I0:" (value 20), and "Un:" (value 220 kV). There is a dropdown menu set to "Eriksson". Below this are fields for "Im:" (13.29), "lgr:" (20.93 kA), "Tacka nestajanja izložene površi" with X (893.1413), Y (66.2616), and Z (0) coordinates, and "lgrg:" (66.72 m), "lgrg:" (28 kA), and "rgrg:" (82.73 m).

Fig. 2. Mask design of lightning protection for transmission lines

5. By activating the icons "draw" program goes into AutoCAD draws the exposed surfaces and highlights the critical red zone, which can cause lightning in the phase conductor.
6. By increasing the amplitude of lightning current  $I_0$  in tracing out the exposed surfaces which are becoming less and less until the surface has not lost and is connected to a single point. Then the figure should be marked by right-clicking here and point the program returns to the window in Figure 4 where the coordinates are read and the points and calculate the value of discharge current amplitude limit when there can be no lightning in the phase conductor  $I_{grg}$  (geometrical expression 6) and value marginal impact  $r_{grg}$  distance (geometrical expression 4).

Based shield wire applications "Nadzemni vod" can be performed analysis of the lightning protection of transmission lines of nominal voltage.

In Figure 2 is analyzed the efficiency of lightning conductors realized by using a shield wire transmission line 220 kV for a total height of 34,5 m. The results are shown in Figure 2 when the calculation method chosen electrogeometrical lightning

protection of transmission lines and calculating the distance the shock according to the formula (2).

The obtained values shown in Figure 2, are:

$I_{gr} = 20,93$  kA - an analytical expression for the boundary amplitude of discharge current values over which the attack phase conductor is not possible (6)

$r_{gr} = 107,1$  m - an analytical expression for the distance boundary impact (5)

$I_{grg} = 35,14$  kA-geometric expression for the boundary amplitude of discharge current values over which the attack phase conductor is not possible (6)

$r_{grg} = 130,15$  m - a geometric expression for the distance boundary impact (4)

Figure 3 shows the procedure for rendering exposed surface of the expected atmospheric discharge in the phase conductor, using the AutoCAD (marked in red in the figure) for different values of striking distance to the ground ( $r_{z1}, r_{z2}, r_{z3}, r_{z4}$  and  $r_{z5}$ ), the following values  $I_0$  for the current amplitude of 10 kA, 20 kA, 30 kA, 35 kA and 38 kA, respectively.

The last point is the vanishing point of the surface exposed to atmospheric discharge (in this case  $I_0=38$  kA) and current for all values that are greater than 38 kA lightning discharge that endange to

phase conductor is not possible.

## CONCLUSION

This paper describes the procedure for visualizing lightning rod carried by the example of the shield wire concrete poles for overhead 220kV. Developed an application in AutoCAD and Visual Basic which is modeled using a complex physical phenomena such as atmospheric discharge in the transmission line. By applying the accounting program can be compared to different expressions for calculating the distance as the shock can be analyzed and the different geometry of transmission lines in that is contains shield wire.

## LITERATURE

- [1] M. Savic, Z. Stojkovic: High Voltage Technique - atmospheric overvoltages, monograph published by the Faculty of Electrical Engineering in Belgrade - II revised and revised edition, Belgrade, 2001 Second
- [2] Z. Stojkovic: Computer-aided Design in Power Engineering, Monograph, School of Electrical Engineering, Academic Thought, second edition, Belgrade 2003.
- [3] AutoCAD 2002 Bible Ellen Finkelstein, Micro Book
- [4] Andrew R. Hileman: Insulation Coordination for Power Systems, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999
- [5] A. Haddad, D.F. Warm: Advances in High Voltage Engineering, IEE Power and Energy Series 40, The Institution of Electrical Engineers, London, United Kingdom, 2004.

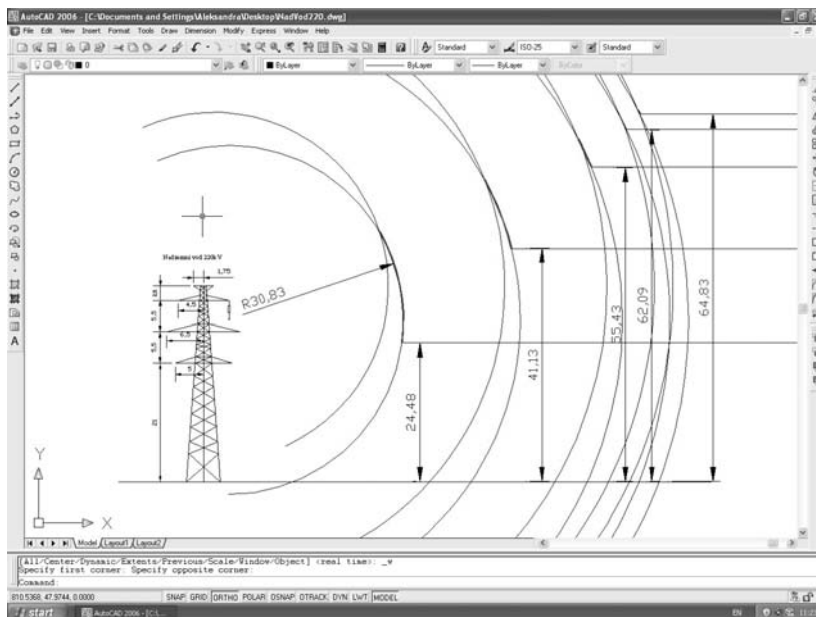


Fig. 3. Surface when exposed to lightning discharge end of the phase conductor for 220 kV transmission line, the height of 34.5 m according to the formula Eriksson (2)

## О ПРИНЦИПАХ СОЗДАНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ СБОРА ДАННЫХ НА ОСНОВЕ МДА-ПОДХОДА

---

*In this paper new approach for the creating distributed data gathering systems is considered. The basic feature of the approach is using the formal ontological descriptions for automated system components building.*

---

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом данной работы являются системы сбора данных (ССД), которые представляют собой программно-технический комплекс, состоящий из нескольких узлов соединенных между собой каналами связи. Обычно узлом системы является один или несколько компьютеров, содержащих программное обеспечение для выполнения следующих основных задачи сбора:

- ручной ввод данных пользователем, либо автоматизированный опрос приборов;
- прием и передача данных между узлами системы по каналам связи;
- хранение данных;
- верификация данных;
- визуализация данных.

В перечисленных задачах можно выделить два основных аспекта - функциональный и предметный, - различие между которыми можно проиллюстрировать на примере задачи хранения данных. Для неё функциональный аспект выражается в реализации процедур управления данными, их размещения во внешней памяти и обеспечении безопасного доступа. Предметный же аспект состоит в определении структур и связей между элементами данными, соответствующими заданной предметной области. Для задачи хранения данных смешивание этих двух аспектов, без особых на то оснований, считается плохой практикой. Вместо этого используют СУБД как функциональную основу, которая не зависит от конкретной структуры данных. При этом структура данных является некоторой проекцией (моделью) предметной области, т.е. выражает тот самый предметный аспект. В этой работе исследуются возможности расширения такого подхода на остальные задачи (ввод, приём и передача, верификация, визуализация) и их использования для автоматизации создания систем сбора информации.

Примечательно, что, как и в приведённом примере, функциональные аспекты могут реализовываться с помощью унифицированных решений, а предметные - путём автоматизированной генерации соответствующих программных артефактов. В конечном итоге это позволит не только создать формальную методику построения ССД, но и сократить время на их разработку и сопровождение, особенно при наличии факторов сложности и изменчивости предметной области. Безусловно, речь идёт не о полной автоматизации создания систем, готовых к эксплуатации, а об ускорении разработки их прототипов, которые в дальнейшем могли бы быть доработаны до полнофункциональных решений.

Целью работы является создание технологий автоматизации разработки распределенных ССД на основе онтологического описания предметной области. Для этого проводится исследование возможности генерации необходимых программных моделей из онтологии, выделяются ограничения на исходную онтологию, а предлагаемый подход реализуется в виде системы, позволяющей решать перечисленные выше задачи.

---

1 Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

2 Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Таким образом, автоматизированное построение распределенной системы сбора информации будет состоять из следующих этапов:

1. описание предметной области с помощью онтологии;
2. настройка системы на специфику предметной области, описанной с помощью онтологии;
3. обеспечение выполнения задач ввода, хранения, отправки, получения и отображения данных.

Предложенное решение является реализацией активно развивающегося направления *Ontology-Driven Information Systems Engineering* [1,2], при котором в основу информационной системы ложится онтология предметной области. Это направление получило развитие лишь в последние годы, хотя совершенно ясно, что онтологии обладают достаточным потенциалом для успешного использования их во всех стадиях разработки - начиная с моделирования предметной области и заканчивая конкретной реализацией.

### АНАЛИЗ ПРОГРАММНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассматривая архитектуру примитивной ССД, нетрудно прийти к выводу, что для её функционирования необходимы несколько программных моделей предметной области, которые были бы согласованы друг с другом:

- реляционная модель - для хранения данных в СУБД,
- объектно-ориентированная модель - для реализации логики обработки данных,
- иерархическая DOM-модель - для представления данных в XML-форматах при передаче данных от одного узла к другому.

Хотя перечисленные модели имеют различную структуру, они должны быть взаимно согласованы. Поэтому, кроме построения самих моделей, для функционирования системы необходимо также построить описания способов их связывания друг с другом. Примером решения такой задачи является технология ORM (*Object-Relational Mapping*), которая используется для связывания реляционной и объектно-ориентированной моделей.



Рис. 1. Соответствие моделей.

Принципиальным для данной работы является тезис о том, что три перечисленные модели могут быть получены как некоторая проекция общей онтологической модели, основанной на дескриптивной логике (рис. 1). Более того, при определённых условиях такое проектирование может

быть выполнено автоматически. Это позволяет говорить о том, что для реализации программных моделей предметной области достаточно получить её онтологическое описание и набор преобразователей, которые сформируют соответствующие проекции. С другой стороны, полученные проекции будут непосредственно использованы функциональными модулями ССД, которые не зависят от предметной области. Таким образом, для получения функционирующего прототипа ССД в рамках данного подхода требуется лишь разработка онтологической модели предметной области, которая встраивается в готовую систему.

Табл. 1. Соответствие основных элементов моделей

Семантическая	Объектная	Реляционная	Иерархическая
Классы	Классы	Таблицы	~ XML Schema
Свойства	Поля	Столбцы	~ Узлы
Объекты	Экземпляры	Строки	~ Деревья

В таблице 1 представлено соответствие основных элементов, которыми оперируют выделенные модели. Как видно, все модели, за исключением иерархической, работают со схожими сущностями. Однако специфика данных моделей не позволяет нам простым способом провести построение и связывание их друг с другом. Поэтому для каждого элемента модели необходимо разработать алгоритм его преобразования в соответствующие элементы других моделей.

## АРХИТЕКТУРА СИСТЕМЫ

Для исследования предложенного подхода была разработана система, схема которой изображена на рисунке 2. Каждый компонент системы отвечает за решение отдельной задачи, при этом можно выделить две основные подсистемы: подсистема построения моделей и подсистема работы с данными. В соответствии с вышесказанным, на вход первой подсистемы подаётся онтология некоторой предметной области. Она подвергается процедуре разбора и анализа, в течение которого проверяется выполнение всех необходимых требований и построение онтологической модели предметной области. Полученная модель передаётся на вход генераторам соответствующих программных моделей, которые затем используются в подсистеме работы с данными для непосредственного выполнения задач ССД.

На рис. 3. изображены схемы взаимодействия компонентов системы при вводе и передаче данных. Из них видно, что модуль работы с БД выполняет преобразование реляционной модели в объектную и наоборот. Это соответствует общепринятому использованию технологий ORM, которые могут быть применены и в данном случае.

Модуль передачи данных, кроме функций приёма и отправки XML-документов, обеспечивает преобразование между объектной и XML-моделью. А композиция этих двух модулей позволяет из реляционной модели получить иерархическую и наоборот.

## РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ

Реализация прототипа системы была выполнена на платформе Java с использованием ряда свободно распространяемых библиотек, в т.ч. CodeModel, Jena, Velocity.

Для программного доступа к онтологиям существуют два различных подхода:

1. Общий API, не зависящий от конкретной онтологии.
2. Специфический для каждой отдельной онтологии набор классов/методов.

К первому подходу относятся такие библиотеки как Jena и OWL API, позволяющие оперировать RDF-графом онтологического описания. Второй подход реализуется с помощью генерации вспомогательных классов, которые облегчают программный доступ к объектам онтологии. Данный подход используется, например, в RDFReactor и Owl2Java, которые позволяют, наряду с исходной онтологией, сохранять объекты в специализированных хранилищах (triplestore).

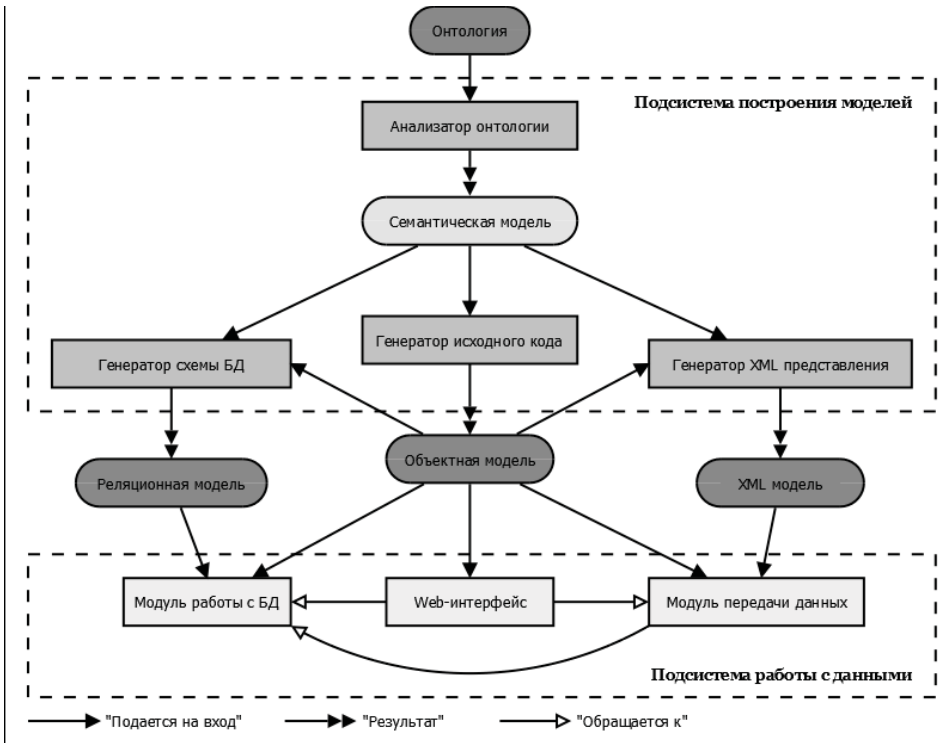


Рис. 2. Общая схема системы

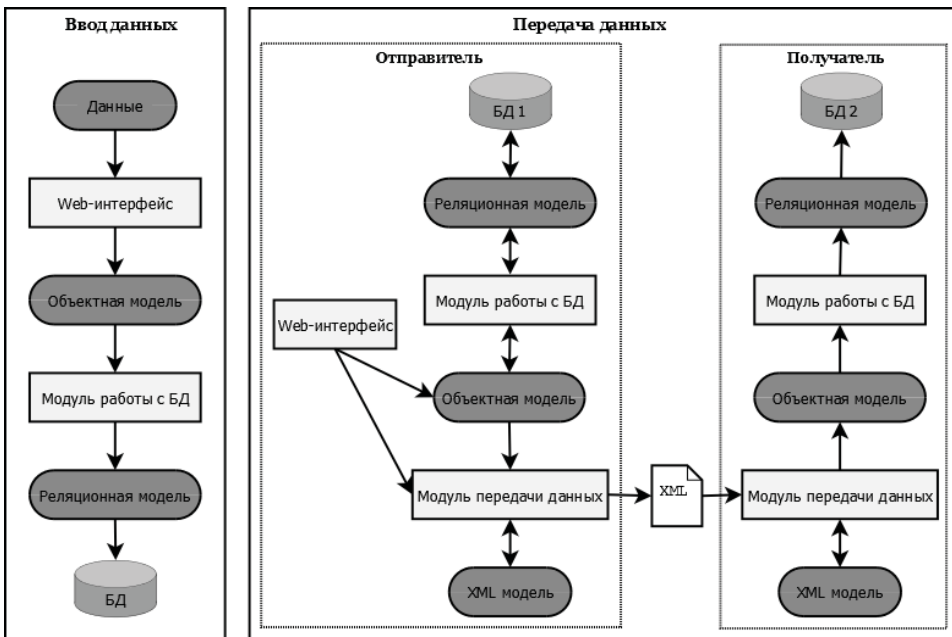


Рис. 3. Схема взаимодействия модулей системы при вводе и передаче данных

В работе [3] был представлен более сложный инструмент, позволяющий справляться с такими проблемами, как множественное наследование. Однако различия между онтологической и объектной моделями не позволяют в полной мере отразить таким способом структуру исходной

онтологии. Поэтому был выбран комбинированный подход - исходная онтология обрабатывается первым способом и формирует специфический набор классов, позволяющий в дальнейшем работать в соответствии со вторым подходом.

В качестве реализации технологии ORM была использована библиотека Hibernate. Следует отметить, что Hibernate предлагает несколько стратегий для отображения иерархии объектных классов в таблицы реляционной базы данных. В качестве основной была выбрана наиболее универсальная стратегия «one table per subclass», для использования которой требуется задать столбец-идентификатор, а для этого в корневой класс иерархии необходимо добавить соответствующее поле. Стоит отметить также отметить, что построенная на данном этапе реляционная схема находится в третьей нормальной форме.

В качестве основы для построения XML-модели был использован стандарт JAXB (Java Architecture for XML Binding), после чего построение иерархической модели свелось к выделению для каждого класса списка полей для преобразования. Опираясь на объектную модель, JAXB позволяет производить сериализацию (для передачи) и десериализацию (при приеме) объектов предметной области. Необходимым условием для этого является соответствие объектных моделей у посылающей и принимающей сторон, что достигается путем использования одной онтологии при построении обеих систем.

Для решения задач ввода и отображения данных на базе библиотеки Tapestry 5 был реализован минимальный пользовательский интерфейс, который позволяет продемонстрировать работоспособность разработанной системы. Интерфейс предоставляет следующие возможности: просмотр списка доступных классов, просмотр списка объектов заданного класса, отправка выбранного объекта в другой узел системы, создание, просмотр, редактирование и удаление объекта заданного класса.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В рамках данной работы были определены базовые технологии для автоматизированного создания распределенных ССД на основе онтологического описания предметной области. Было проведено исследование возможности генерации необходимых программных моделей на основе онтологии, выделены ограничения на исходную онтологию. В качестве подтверждения работоспособности предложенного метода создания ССД были реализованы модули генерации программных моделей и пользовательский веб-интерфейс, позволяющий на основе полученных моделей осуществлять ввод и отображение данных, их передачу в другой узел системы.

Предложенные методы и технологии могут быть эффективно использованы на начальных этапах построения распределённых ССД в различных предметных областях для ускоренного прототипирования.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Yildiz B., Miksch S. Ontology-Driven Information Systems: Challenges and Requirements, Proceedings of the International Conference on Semantic Web and Digital Libraries, 2007. - с.11.
- [2] Guarino N., Formal Ontology and Information Systems, Proceedings of the First International Conference on Formal Ontologies in Information Systems (FOIS), 1998. - с.3-15.
- [3] Kalyanpur A. et al., Automatic Mapping of OWL Ontologies into Java, Proceedings of 16<sup>th</sup> International Conference on Software Engineering and Knowledge Engineering, 2004.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СХЕМЫ ДЛЯ ЕЕ МОНОТОНИЗАЦИИ

*A method for monotonization of difference schemes of second order is presented. The method is based on the investigation of differential approximation of schemes. The idea of the method is shown on the example of the explicit predictor-corrector scheme for the transport equation with constant coefficient.*

В статье С.К. Годунова [1] показано, что для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} \quad (1)$$

не существует схем с постоянными коэффициентами, сохраняющих монотонность численного решения и имеющих второй порядок аппроксимации. Например, при использовании схемы Лакса-Вендроффа заданная при  $t = 0$  «ступенька» искажается на следующих слоях по времени нефизическими осцилляциями. Но схему Лакса-Вендроффа можно модифицировать так, чтобы она стала обладать TVD-свойством [2], а значит, стала бы схемой, сохраняющей монотонность численного решения. При этом коэффициенты монотонизированной схемы уже не будут постоянными, они могут зависеть от численного решения и его разностных производных, т.е. модифицированная схема будет нелинейной. Стандартный способ монотонизации схемы Лакса-Вендроффа заключается в переключении на противоточную схему в тех узлах сетки, где возникает угроза появления осцилляций численного решения. В TVD-схемах переключение производится с помощью ограничителей [3]. Современные TVD-схемы высокого порядка аппроксимации основаны на тех или иных способах реконструкции значений функций на границах ячеек по их значениям в центрах соседних ячеек [4]. Отметим, что идея локального переключения с одной схемы на другую с целью сохранения свойства монотонности численного решения уравнения (1) использовалась намного раньше работы Хартена [2] (см., например, [5]).

В настоящей работе предлагается другой подход к построению монотонных разностных схем, основанный на исследовании их дифференциальных приближений. Продемонстрируем идею этого подхода на явной схеме предиктор-корректор [6,7] для уравнения (1):

$$u_{j+1/2}^* = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - a\tau_{j+1/2}^* u_{x,j+1/2}^n, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (2)$$

где  $\tau$  - шаг по времени,  $h$  - шаг равномерной сетки с узлами  $x_j = jh$ , вспомогательные величины  $u_{j+1/2}^*$ , определенные в полуцелых узлах  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ , относятся к моменту времени  $t = t^n + \tau_{j+1/2}^*$ ,  $t^n = n\tau$ ,

$$u_{x,j+1/2}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{h}, \quad \tau_{j+1/2}^* = \frac{\tau}{2}(1 + \theta_{j+1/2}^n),$$

$\theta$  - параметр, меняющийся, вообще говоря, от узла к узлу и от одного временного слоя к другому. На этапе «корректор» вычисляются искомые величины  $u_j^{n+1}$ , определенные в целых узлах  $x_j$ . Схема (2) является в определенном смысле универсальной, поскольку любая двухслойная схема может быть записана в виде (2) при подходящих значениях  $\theta$ . Очевидно, что при  $\theta \equiv 0$  схема (2) совпадает со схемой Лакса-Вендроффа, при

<sup>1</sup> Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия



$$\theta = \theta_0 = \frac{1}{Cr} - 1 > 0,$$

где  $Cr = |a|\varpi$ ,  $\varpi = \tau/h$ , получается противопоточная схема первого порядка аппроксимации, при

$$\theta = \theta_L = \frac{1}{Cr^2} - 1 > 0$$

получается схема Лакса, при  $\theta \equiv -1$  - абсолютно неустойчивая схема с центральной разностью, при  $a > 0$  и

$$\theta = \theta_0 \left( 1 - \frac{u_{x,j-1/2}}{u_{x,j+1/2}} \right)$$

получается противопоточная схема второго порядка аппроксимации

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2h} = \frac{a^2 \tau}{2} \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{h^2}.$$

Выбирая то или иное значение параметра  $\theta$ , мы получаем явные схемы с различными свойствами: первого или второго порядка аппроксимации, абсолютно или условно аппроксимирующие, условно устойчивые или абсолютно неустойчивые, сохраняющие или не сохраняющие монотонность численного решения.

Для заданного числа Куранта  $Cr < 1$  при выполнении условий

$$\theta = const > 0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_L$$

схема (2) с постоянными коэффициентами устойчива, имеет лишь первый порядок аппроксимации на гладких решениях, но сохраняет монотонность численного решения, т.е. любую монотонную функцию  $u^n$  переводит в монотонную на  $(n+1)$ -ом временном слое функцию  $u^{n+1}$ , причем с тем же направлением роста. В [1] показано, что для того чтобы разностная схема с постоянными коэффициентами  $b_\alpha$

$$u_j^{n+1} = \sum_{\alpha} b_{\alpha} u_{j+\alpha}^n$$

сохраняла монотонность численного решения, необходимо и достаточно выполнение при всех  $\alpha$  условий  $b_{\alpha} \geq 0$ .

Например, в схеме Лакса ( $\theta = \theta_L$ )

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

коэффициенты

$$b_{-1} = \frac{1+a\varpi}{2}, \quad b_1 = \frac{1-a\varpi}{2}$$

при условии  $Cr < 1$  положительны, поэтому схема сохраняет монотонность численного решения. На рис. 1 слева показаны границы области монотонности схемы предиктор-корректор и кружочками обозначены точки, соответствующие числу Куранта  $Cr = 0.8$  и значениям  $\theta = 0$  (1),  $\theta = \theta_0$  (2),  $\theta = \theta_L$  (3). Справа показаны профили численного решения в момент времени  $t = 10$  для кусочно-постоянной начальной функции

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 10, \\ 0 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

Видно, что схема Лакса-Вендроффа, не попадающая в область монотонности  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_L$ , дает осциллирующий профиль (1). Противопоточная схема и схема Лакса, которым отвечают точки,

лежащие на нижней  $\theta = \theta_0$  и верхней  $\theta = \theta_L$  границах области монотонности, дают монотонные профили (2) и (3) соответственно. При этом численное решение, полученное по схеме Лакса, имеет осциллирующие профили разностных производных, поскольку схема Лакса не является «сильно» монотонной [8].

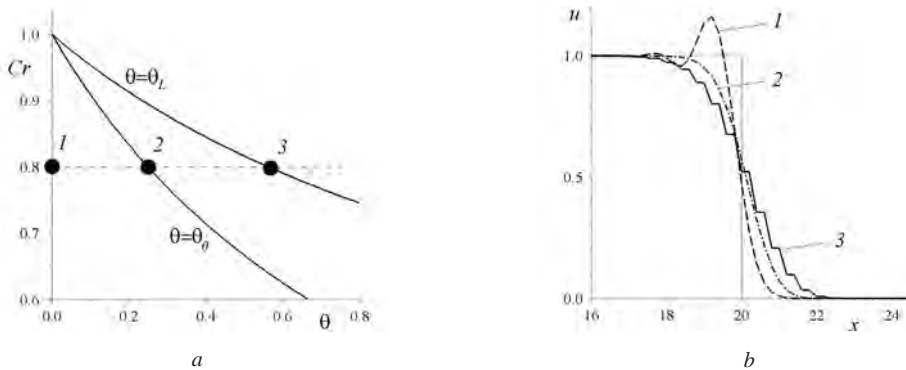


Рис. 1. Область монотонности схемы (2) (a); профили численного решения при разных значениях параметра  $\theta$  (b)

Если параметр  $\theta$  не зависит от  $x$  и  $t$ , но зависит от шагов  $h$  и  $\tau$  так, что  $\theta = O(h)$  (или  $\theta = O(\tau)$ ), то коэффициенты схемы (2) будут зависеть только от шагов сетки. В этом случае при выполнении условий

$$\theta = O(h) \geq 0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_L$$

порядок аппроксимации схемы (2) будет второй, и она будет сохранять монотонность численного решения. Тем не менее, и в этом случае схема имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что при измельчении сетки для сохранения второго порядка аппроксимации (т.е. чтобы  $\theta \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ) и сохранения монотонности расчет приходится вести с числами  $Cr$ , близкими к единице, причем чем мельче сетка, тем ближе к единице должно быть число Куранта:

$$\theta = O(h) \geq 0, \quad \frac{1}{1+\theta} \leq Cr \leq \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}.$$

Ясно, что при решении практических задач такое жесткое условие выполнить не удастся, поскольку на практике расчет обычно производится с такими числами Куранта, которые с некоторым запасом удовлетворяют условию устойчивости.

Далее рассмотрим схему предиктор-корректор второго порядка аппроксимации с переменным неотрицательным параметром  $\theta_{j+1/2}^n$ . При специальном выборе переменного параметра  $\theta$  схема предиктор-корректор может сохранять монотонность решения при любых числах Куранта, подчиняющихся условию

$$Cr < 1. \tag{3}$$

Для выбора параметра  $\theta$  используем первое дифференциальное приближение (п.д.п.) схемы (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a^2 \tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{ah^2}{6} (a^2 x^2 - 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \tag{4}$$

В рассматриваемом случае  $\theta = O(h)$  имеем схему второго порядка аппроксимации, причем в п.д.п. диссипативный и дисперсионный члены имеют одинаковый второй порядок. В тех подобластях области решения, в которых возникает угроза появления осцилляций численного решения, необходимо изменить в нужную сторону дисперсию разностной схемы. При  $\theta = O(h)$  основной вклад в дисперсию разностной схемы будет вносить второе слагаемое правой части (4). Подберем функцию  $\theta(x)$  так, чтобы диссипативный член п.д.п. частично или полностью компенсировал дисперсионный член, либо давал такой вклад в п.д.п., который приводит к смене знака коэффициента при третьей производной. Пусть для определенности  $a > 0$ . Тогда в силу условия

(3) коэффициент при третьей производной  $u_{xxx}$  в выражении (4) будет отрицательным и для изменения дисперсии необходимо добавить к ней некоторую положительную величину порядка  $O(h^2)$ , которую можно взять из диссипативного члена. Для этого можно взять, например, функцию  $\theta(x)$  вида  $\theta = \bar{\theta} h (u_x)^{r^1} (u_{xx})^{r^2}$  с некоторыми показателями степеней  $r^1, r^2$  и положительной постоянной  $\bar{\theta}$ . Далее будем рассматривать функцию  $\theta(x)$  при  $r^1 = -1, r^2 = 1$ :

$$\theta(x) = \bar{\theta} h \frac{u_{xx}}{u_x}.$$

Тогда из формулы (4) следует, что меняя значение постоянной  $\bar{\theta}$ , можно менять величину и даже знак коэффициента при третьей производной, т.е. можно управлять дисперсией разностной схемы. При дополнительных условиях неотрицательности и ограниченности функции  $\theta(x)$ , получаем:

$$\theta(x) = \bar{\theta} \min \left[ 1, \max \left( h \frac{u_{xx}}{u_x}, 0 \right) \right]. \quad (5)$$

Для использования этой функции в разностной схеме (2) необходимо определиться с аппроксимацией производной  $u_{xx}$ . При  $a > 0$  заменим ее, например, следующей противопоточной разностью:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1/2}) \sim u_{xx, j+1/2} \equiv \frac{u_{x, j+1/2} - u_{x, j-1/2}}{h}.$$

В результате приходим к следующему разностному аналогу формулы (5) для произвольного знака коэффициента  $a$ :

$$\theta_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } |u_{x, j+1/2}| \leq |u_{x, j+1/2-s}| \text{ и } u_{x, j+1/2} \cdot u_{x, j+1/2-s} \geq 0, \\ \bar{\theta} (1 - \xi_{j+1/2}) & \text{при } |u_{x, j+1/2}| > |u_{x, j+1/2-s}| \text{ и } u_{x, j+1/2} \cdot u_{x, j+1/2-s} \geq 0, \\ \bar{\theta} & \text{при } u_{x, j+1/2} \cdot u_{x, j+1/2-s} < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $s = \text{sgn } a$ ,  $\xi_{j+1/2} = u_{x, j+1/2-s}^n / u_{x, j+1/2}^n$ .

При использовании формулы (6) схема (2) становится схемой с переменными коэффициентами. На следующем примере покажем, что для схем с переменными коэффициентами условие неотрицательности коэффициентов не является достаточным для сохранения монотонности численного решения.

Пусть решается задача Коши для уравнения

$$u_t + a(x)u_x = 0, \quad 0 < a(x) < 1, \quad a' > 0.$$

Возьмем для решения этой задачи схему с переменными коэффициентами - аналог схемы Лакса:

$$\frac{u_j^{n+1} - 0.5(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a_j \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

Будем считать, что для любого  $j$  выполнено условие  $\alpha a_j < 1$ , гарантирующее устойчивость схемы в равномерной норме по начальным данным:  $\|u^n\|_C \leq \|u^0\|_C$ . Запишем схему в виде:

$$u_j^{n+1} = b_{-1, j} u_{j-1}^n + b_{1, j} u_{j+1}^n,$$

где

$$b_{-1, j} = \frac{1 + \alpha a_j}{2} > 0, \quad b_{1, j} = \frac{1 - \alpha a_j}{2} > 0.$$

Здесь коэффициенты снабжены дополнительным индексом  $j$ , поскольку они являются переменными коэффициентами и изменяются при переходе от одного узла к другому. Оба коэффициента положительны, однако схема не сохраняет монотонность численного решения. В самом деле, взяв монотонно возрастающую функцию

$$u_j^n = \begin{cases} 0, & j < 0 \\ 1, & j \geq 0 \end{cases}$$

убеждаемся, что на  $(n+1)$ -м слое по времени имеет место равенство

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} 0, & j < -1 \\ b_{1,-1}, & j = -1 \\ b_{1,0}, & j = 0 \\ 1, & j \geq 1 \end{cases}$$

Но  $b_{1,-1} > b_{1,0}$ , поэтому сеточная функция  $u_j^{n+1}$  не является монотонно возрастающей. Таким образом, для схем с переменными коэффициентами необходимое и достаточное условие монотонности разностной схемы с постоянными коэффициентами не справедливо. В случае переменных коэффициентов справедлива следующая

**Теорема.** Пусть коэффициенты разностной схемы

$$u_j^{n+1} = b_{-1,j} u_{j-1}^n + b_{0,j} u_j^n + b_{1,j} u_{j+1}^n \quad (7)$$

удовлетворяют в каждом узле  $x_j$  условию  $b_{-1,j} + b_{0,j} + b_{1,j} = 1$ . Тогда выполнение при всех  $j$  условий

$$b_{\pm 1,j} \geq 0, \quad b_{-1,j} + b_{1,j-1} \leq 1$$

необходимо и достаточно для того, чтобы схема (7) с переменными коэффициентами сохраняла монотонность численного решения.

На основе этой теоремы можно доказать следующее утверждение.

**Теорема.** Выполнение условий (3) и

$$\theta_0 \leq \bar{\theta} \leq \frac{2}{3} \theta_L$$

достаточно для того, чтобы схема предиктор-корректор (2) с переменным параметром (6) сохраняла монотонность численного решения.

Отметим, что при использовании схемного параметра (6) с постоянной  $\bar{\theta} = \theta_0$  схема предиктор-корректор (2) превращается в известную TVD-схему Хартена [2]. Все известные и широко используемые на практике TVD-схемы также могут быть получены на основе анализа п.д.п. схемы (2) как на равномерных, так и на подвижных неравномерных сетках.

На рис. 2 показаны профили численного решения рассмотренной выше задачи, полученные по схеме предиктор-корректор с использованием описанной процедуры монотонизации. Осцилляции в профилях решения отсутствуют, и решение (2) на адаптивной сетке аппроксимирует точное решение задачи лучше, чем решение (1) на равномерной неподвижной сетке.

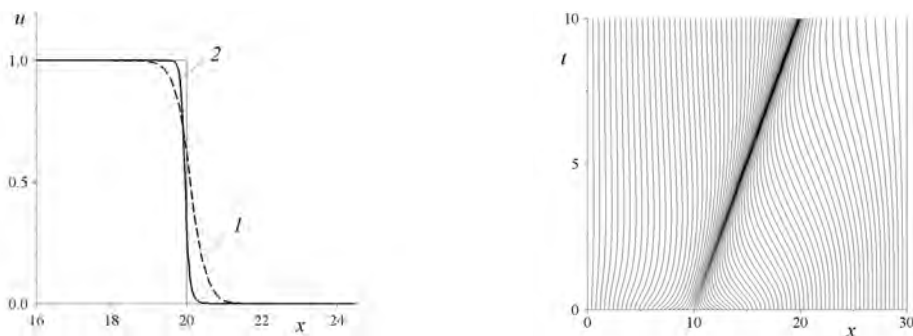


Рис. 2. Профили численного решения (a) и траектории узлов адаптивной сетки (b)

Предложенный подход применен для построения монотонных разностных схем для нелинейного уравнения переноса, одномерных уравнений мелкой воды [9], в том числе, для одномерных задач наката-отката как на равномерных, так и на подвижных неравномерных сетках. Рассмотренную новую технологию монотонизации численного решения удалось обобщить и для задач о распространении и трансформации поверхностных волн в рамках плановой модели мелкой воды [10] и нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Математический сборник. Т.47, вып.3. 1959. С.271-306.
- [2] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J. Comput. Physics. Vol.49, No.3. 1983. P.357-393.
- [3] Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. SIAM J. Numer. Anal. Vol.21, No.5. 1984. P.995-1011.
- [4] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит. 2001.
- [5] Гольдин В.Я., Калиткин Н.Н., Шишова Т.В. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. Т.5, No.5. 1965. С.938-944.
- [6] Яушев И.К. О численном расчете нестационарных течений газа в одномерном приближении в каналах со скачком площади сечения. Изв. СО АН СССР. Сер. Технические науки. No.8, вып. 2. 1967. С.39-48.
- [7] Хакимзянов Г.С. Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2001.
- [8] Остапенко В.В. О монотонности разностных схем. Сибирский матем. журн. Т. 39, No.5. 1998. С. 1111-1126.
- [9] Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному дну. Вычисл. технологии. Т.15, No.1. 2010. С.105-119.
- [10] Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Определение зоны затопления при накате длинных волн на берег. Труды Шестого Совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. Алматы: «Казак университеті». 2009. С.305-314.

## МАСШТАБИРУЕМАЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННАЯ МУЛЬТИКЛАСТЕРНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

---

*Architecture and software of scalable geographically-distributed multicluster computer system are described. This system has been created by the Computer centre for parallel technologies of Siberian State University for Telecommunication technologies and Information techniques in conjunction with A.V. Rzhanov Institute of semiconductor physics of Siberian Branch of Russian Academy of Science. The description of the system software (including open source components and extensions developed by collective of the author's scientific school on distributed computer systems) is presented.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития вычислительной техники и телекоммуникационных технологий характеризуется построением пространственно-распределенных мультикластерных вычислительных систем (ВС) [1]. В архитектурном плане такие ВС представляется как множество кластеров, взаимодействие между которыми осуществляется через телекоммуникационную сеть (в общем случае - сеть Интернет). Каждый кластер, в свою очередь, является пространственно-сосредоточенной распределённой ВС, состоящей из множества вычислительных узлов, взаимодействующих через свою коммуникационную подсистему. Конфигурация вычислительного узла допускает варьирование в широких пределах - от однопроцессорного до композиции из многоядерных процессоров и специализированных ускорителей (например, на базе программируемых логических интегральных схем - ПЛИС).

Первая пространственно-распределённая вычислительная система АСТРА была разработана Институтом математики СО АН СССР и Новосибирским электротехническим институтом МВ и ССО РСФСР в 1970-72 г.; среди конфигураций ВС были районные, городские и междугородные.

В середине 1980-х годов идея объединения пространственно-распределённых вычислительных средств получила воплощение в технологии метакомпьютинга (Metacomputing), предложенной исследователями из Национального центра суперкомпьютерных приложений США [2]. С появлением и бурным развитием всемирной сети Internet всё большую популярность получает технология использования компьютеров пользователей, позволяющая формировать среды для распределённых вычислений (Distributed or Peer-To-Peer Computing) [3]. В начале 1990-х годов для описания пространственно-распределённых ВС стал применяться термин GRID - Global Resource Information Distribution как метафора о такой же лёгкости доступа к вычислительным ресурсам, как и к электрической сети (Power Grid).

Центром параллельных вычислительных технологий (ЦПВТ) Федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования "Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики" (ФГОБУ ВПО "СибГУТИ") совместно с Лабораторией вычислительных систем Института физики полупроводников им. А.В. Ржанова Сибирского отделения РАН (ИФП СО РАН) создана и развивается масштабируемая пространственно-распределённая мультикластерная вычислительная система [4]. Архитектура и программный инструментарий организации функционирования данной ВС основывается на результатах ведущей научной школы РФ по распределённым вычислительным системам и параллельному мультипрограммированию (НШ-5176.2010.9).

---

<sup>1</sup> Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Новосибирск, Россия

## АРХИТЕКТУРА ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МУЛЬТИКЛАСТЕРНОЙ ВС

Действующая конфигурация мультикластерной ВС (рис. 1, январь 2012 г.), включает более 250 процессорных ядер и имеет пиковую производительность несколько TeraFLOPS. Система объединяет 10 пространственно-распределенных вычислительных кластеров, причём кластеры А-Н расположены в серверных помещениях ЦПВТ ФГОБУ ВПО “СибГУТИ” (центр г. Новосибирска), а кластеры I, J - в Лаборатории вычислительных систем ИФП СО РАН (Академгородок, СО РАН).

Системы А, В, С и J являются кластерами рабочих станций, которые располагаются в учебных лабораториях Кафедры вычислительных систем ФГОБУ ВПО “СибГУТИ” и в Лаборатории вычислительных систем ИФП СО РАН. Коммуникационные сети кластеров А, В, С и J построены на базе технологии Gigabit Ethernet.

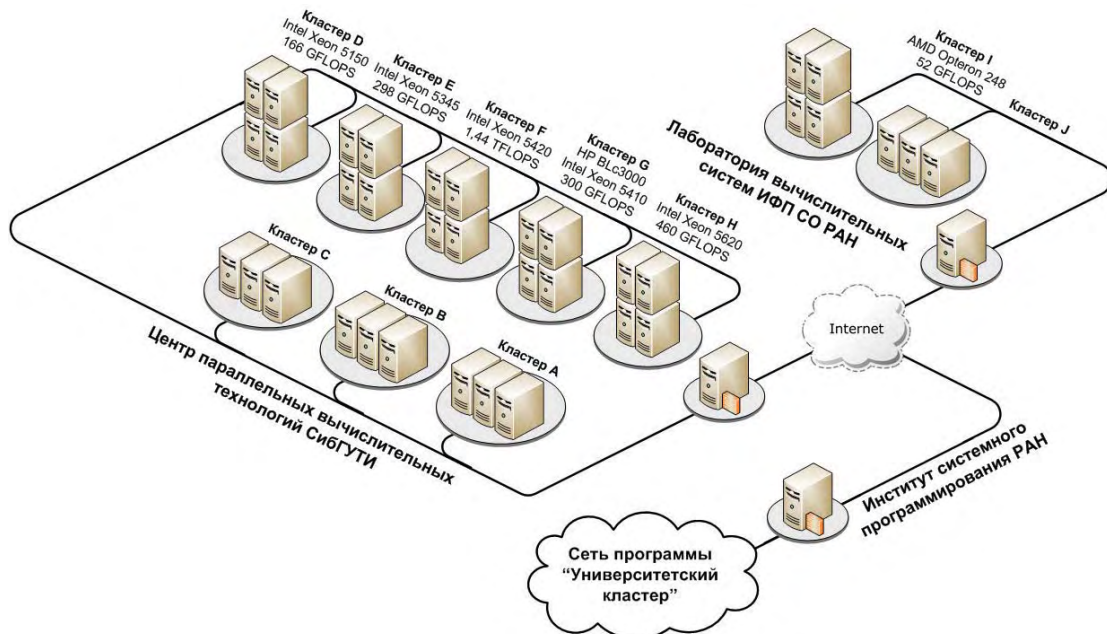


Рис. 1. Конфигурация пространственно-распределенной мультикластерной ВС (январь 2012 г.)

Кластеры D, E, F, G, H и J построены на базе двухпроцессорных узлов и функционируют в круглосуточном режиме. Каждый из этих кластеров укомплектован: вычислительными узлами и управляющим узлом, вычислительной и сервисной сетями связи, а также системами бесперебойного электропитания. Кластер D объединяет 4 вычислительных узла, на каждом из которых размещено по два двухъядерных процессора Intel Xeon 5150 (Woodcrest) с тактовой частотой 2,66 GHz. Пиковая производительность кластера D - 166 GFLOPS. Кластер E включает 4 вычислительных узла с двумя процессорами Intel Xeon E5345 (Quad-core) с тактовой частотой 2,33 GHz. Производительность кластера E - 298 GFLOPS. Кластер F укомплектован 18 вычислительными узлами с двумя процессорами Intel Xeon E5420 (Quad-core) с тактовой частотой 2,5 GHz. Производительность кластера E - 1,44 TFLOPS. Кластер H укомплектован 6 вычислительными узлами с двумя процессорами Intel Xeon E5620 (Quad-core) с тактовой частотой 2,4 GHz. Узлы системы объединены коммуникационной сетью стандарта InfiniBand QDR 4x. Производительность кластера H - 460 GFLOPS. Кластер J оснащён 5 вычислительными узлами с двумя процессорами AMD Opteron 248 - 252 (Sledgehammer) с тактовой частотой 2,2 - 2,6 GHz. Пиковая производительность кластера - 52 GFLOPS. Актуальная информация о конфигурации системы представлена на сайте ЦПВТ ФГОБУ ВПО “СибГУТИ” [2].

В 2009 году ЦПВТ ФГОБУ ВПО “СибГУТИ” стал участником программы “Университетский кла-

стер”, в рамках которой компания Hewlett-Packard передала Центру вычислительный кластер на базе блейд-серверов (кластер G), укомплектованный 4 HP ProLiant BL220c, на которых размещено по два четырёхядерных процессора Intel Xeon E5410 с тактовой частотой 2,33 GHz. Производительность кластера G в целом - 300 GFLOPS.

Любой из кластеров способен функционировать как автономно, так и в составе распределённой ВС. Для объединения кластеров используется сеть Internet (технологии VPN и IPv6). Мультикластерная ВС допускает масштабирование путём организации взаимодействия с множеством других систем.

## ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МУЛЬТИКЛАСТЕРНОЙ ВС

Пространственно-распределённая мультикластерная вычислительная система функционирует под управлением свободно распространяемого и созданного коллективом научной школы НШ-5176.2010.9 программного обеспечения (рис. 2) [5].

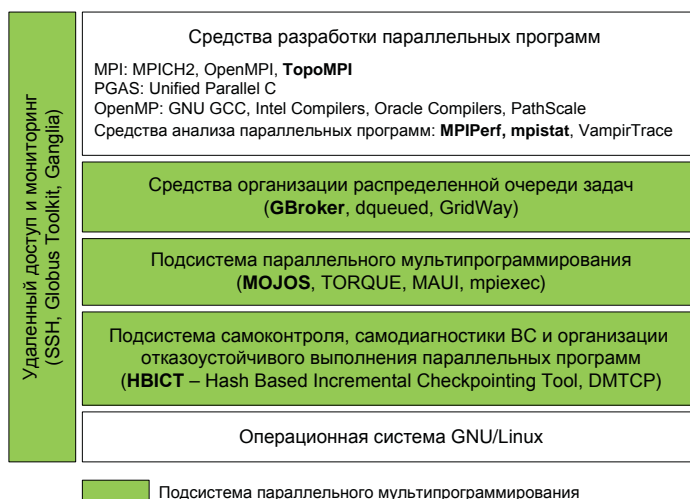


Рис. 2. Программное обеспечение пространственно-распределённой мультикластерной вычислительной системы

Стандартные компоненты системного программного обеспечения представлены:

- сетевой операционной системой GNU/Linux (дистрибутивы Fedora, CentOS);
- средствами разработки, отладки и анализа последовательных и параллельных программ:
  - компиляторы: GCC, Intel, PathScale;
  - математические библиотеки: GNU Scientific Library, AMD Core Math Library, Intel Math Kernel Library;
  - библиотеки передачи сообщений между ветвями параллельных программ:
    - распределенные приложения - MPI: MPICH2, MVAPICH2, Open MPI;
    - параллельные программы - OpenMP: GCC, Intel, PathScale;
  - средствами отладки и анализа программ: gdb, Vampire, prof и т.д.
- программным обеспечением организации взаимодействия пространственно-распределённых кластерных ВС и диспетчеризации пользовательских заданий: Globus Toolkit, GridWay.

Инструментарий параллельного мультипрограммирования включает:

- подсистему организации функционирования ВС в мультипрограммных режимах (пакет MOJOS), включающую средства вложения параллельных программ и реализации эффективных групповых обменов между ветвями параллельных программ (библиотека ToroMPI);
- средства организации распределённой очереди задач и диспетчер пользовательских запросов GBroker;
- подсистему анализа параллельных программ (пакеты MPIPerf, mpistat);



- средства самоконтроля и самодиагностики и организации отказоустойчивого выполнения параллельных программ (пакеты HВICT, DMTCP);
- средства мониторинга и организации удаленного доступа к ресурсам ВС.

Рассмотрим некоторые из созданных программных компонентов организации функционирования пространственно-распределённых мультикластерных ВС.

### **Библиотека ToroMPI коммуникационных функций**

Библиотека ToroMPI - это библиотека коммуникационных функций, ориентированная на эффективную реализацию параллельных программ на современных мультиархитектурных распределённых ВС с иерархической структурой. В состав библиотеки входят структурно-ориентированные алгоритмы коллективных обменов информацией между ветвями параллельных программ и средства вложения параллельных программ в структуры распределённых ВС [6].

В библиотеке используется интерфейс профилирования стандарта MPI для перехвата обращений к функциям коллективных операций информационных обменов, остальные вызовы передаются системной библиотеке MPI (MPICH2, OpenMPI и др.). Описание иерархической организации распределённой ВС загружается библиотекой из конфигурационного файла при инициализации MPI-программы. На основе информации о распределении ветвей по ядрам и машинам системы определяется количество выделенных программе вычислительных узлов. При создании коммунитаторов осуществляется оптимизация алгоритмов коллективных обменов и вложение графа программы в структуру распределённой ВС.

Проведены эксперименты по вложению параллельных MPI-программ из пакетов NAS Parallel Benchmarks и High-Performance Linpack в действующие вычислительные кластеры на базе многоядерных процессоров компаний Intel и AMD. В среднем, время выполнения тестовых MPI-программ с вложением предложенными алгоритмами на 30-40% меньше времени выполнения программ с вложением средствами библиотек MPI (MPICH2 и OpenMPI). Предложенные алгоритмы характеризуются полиномиальной трудоемкостью и поддерживают вложение параллельных программ с количеством ветвей до  $10^6$ .

### **Пакет MOJOS поддержки мультипрограммных режимов обработки наборов масштабируемых задач**

Исследования пользовательских задач показывают, что более 80 % из них обладают свойством масштабируемости. Такие задачи допускают решение на подсистемах с различным количеством процессорных ядер и называются масштабируемыми или "пластичными" (moldable). Для моделирования, отладки и анализа алгоритмов формирования расписаний решения масштабируемых задач на распределённых ВС создан пакет MOJOS - MOldable JObs Scheduling. Основу пакета составляют эвристические и стохастические (на основе эволюционных методов оптимизации) алгоритмы формирования расписаний решения задач пользователей. Реализован интерфейс интеграции MOJOS с планировщиком MAUI [7].

### **Пакет DMTCP создания контрольных точек восстановления программ**

Для обеспечения отказоустойчивости параллельных программ используется пакет DMTCP - Distributed MultiThreaded Checkpointing, этот пакет реализован на уровне системных библиотек и является универсальным координирующим распределённым средством создания контрольных точек. Пакет DMTCP разработан и развивается Северо-западным университетом (Northeastern University) США. Коллектив ЦПВТ принимает участие в работах по его усовершенствованию. В частности, реализованы алгоритмы координированного восстановления набора связанных процессов, восстановления взаимосвязей типа "родитель - потомок" и принадлежности к группам и сеансам для набора процессов в рамках одного узла вычислительной системы [8]. Также ведутся работы по интеграции пакета DMTCP с системой для вычислений высокой пропускной способно-

сти Condor. Предложен подход к реверсивной отладке на базе DMTCP.

### **Пакет GBroker децентрализованного управления ресурсами мультикластерных ВС**

Для организации функционирования пространственно-распределенных ВС и GRID систем в мультипрограммном режиме обслуживания потока задач разработаны децентрализованные алгоритмы и средства диспетчеризации заданий. На каждой подсистеме пространственно-распределенной ВС функционирует диспетчер, который поддерживает локальную (для кластера) очередь задач. При поступлении задачи диспетчер запрашивает у диспетчеров из локальной окрестности количество задач в их очередях и оценку времени, через которое поступившая задача может начать решаться при передаче её в соответствующую очередь. Далее, диспетчер, используя систему мониторинга, определяет пропускную способность каналов связи между кластерами. После этого он выбирает кластер, в котором (с учетом передачи самой задачи в очередь и её данных в кластер) быстрее всего начнет выполняться задача. Важно отметить, что при передаче задачи в очередь выбранной подсистемы, для неё, аналогичным образом, периодически будет осуществляться поиск ресурсов. Это обеспечивает адаптацию диспетчеров под динамически изменяющуюся загрузку ресурсов пространственно-распределенных ВС.

Предложенные алгоритмы реализованы в программном пакете GBroker [9]. Пакет имеет расширяемую архитектуру и допускает интеграцию с системами пакетной обработки заданий. В пакет входят диспетчер `gbroker`, клиентское приложение `gclient` и средство мониторинга производительности каналов связи `netmon` на уровне стека протоколов TCP/IP.

Модуль `gbroker` устанавливается в каждом кластере и обеспечивает на интерфейс с локальной системой пакетной обработки заданий (на данный момент - TORQUE). Модуль `netmon` устанавливается вместе с `gbroker`. Сервисы `netmon` собирают информацию о производительности каналов связи между кластерами. Модуль `gclient` обеспечивает интерфейс между пользователем и системой.

Администратор настраивает локальные окрестности диспетчеров `gbroker`, указывая, какие диспетчеры с какими могут обмениваться программами из своих очередей, и настраивает сервис `netmon`.

Пользователь формирует задание, состоящее из параллельной MPI-программы и паспорта на языке ресурсных запросов JSDL, и отправляет его средствами `gclient` любому из диспетчеров `gbroker`. Диспетчер в соответствии с описанным выше алгоритмом выбирает подсистему, на которой затем выполняется программа.

Моделирование показало, что среднее время обслуживания задач при децентрализованной диспетчеризации сопоставимо с централизованной диспетчеризацией. Вместе с тем обеспечивается отказоустойчивость пространственно-распределенной мультикластерной ВС в случае выхода из строя отдельных кластеров. Время диспетчеризации достаточно мало по сравнению со временем выполнения программ.

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Созданная пространственно-распределённая мультикластерная вычислительная система - инструментальное средство для отработки архитектурных решений и GRID-технологий, для отладки инструментальных средств параллельного мультипрограммирования и обеспечения живучести. Она активно используется в процессе подготовки специалистов в области параллельных вычислительных технологий.

### **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-07-12014, 011-07-00105) и в рамках государственного контракта № 07.514.11.4015 с Минобрнауки РФ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хорошевский В.Г. Распределенные вычислительные системы с программируемой структурой, Вестник СибГУТИ. - 2010. - № 2 (10). - С. 3-41.
- [2] Short History of Metacomputer: Past to Present, сайт NCSA, <http://archive.ncsa.illinois.edu/Cyberia/MetaComp/MetaHistory.html> (дата обращения 24.01.2012).
- [3] Computational Grids., I. Foster, C. Kesselman. Chapter 2 of «The Grid: Blueprint for a New Computing Infrastructure», Morgan-Kaufman, 1999. URL: <http://www.globus.org/alliance/publications/papers.php> (дата обращения: 25.01.2012)
- [4] Вычислительные ресурсы Центра параллельных вычислительных технологий ФГБОУ ВПО «СибГУТИ», <http://срст.sibsubtis.ru/index.php/Main/Resources> (дата обращения: 25.01.2012).
- [5] Хорошевский В.Г., Курносов М.Г., Мамойленко С.Н., Павский К.В., Ефимов А.В. Пазников А.А., Перышкова Е.Н. Масштабируемый инструментарий параллельного мультипрограммирования пространственно-распределенных вычислительных систем, Вестник СибГУТИ. - 2011. - № 4. - С. 3-19.
- [6] Khoroshevsky V., Kurnosov M. Mapping parallel programs into hierarchical distributed computer systems, Proc. of 4th international conference «Software and Data Technologies (ICSOFT 2009)». Sofia: INSTICC, 2009. Vol.2. P. 123-128.
- [7] Ефимов А.В., Мамойленко С.Н., Перышкова Е.Н. Организация функционирования распределенных вычислительных систем при обработке наборов масштабируемых задач, Вестник ТГУ: Управление, вычислительная техника и информатика. - Томск. - 2011. - № 2(15). - С. 51-60.
- [8] G. Cooperman, K. Arya, P. Keller, A.Y. Polyakov DMTCP and Condor: a New Checkpointing Mechanism, Condor Week 2010. - Режим доступа: <http://www.cs.wisc.edu/condor/CondorWeek2010/condor-presentations/cooperman-dmtcp.pdf>.
- [9] Курносов М.Г., Пазников А.А. Моделирование алгоритмов децентрализованной диспетчеризации параллельных задач в пространственно-распределенных мультикластерных вычислительных системах, Материалы XIII Российской конференции с участием иностранных ученых «Распределенные информационно-вычислительные ресурсы» (DICR-2010). - Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2010. - 7 с.

## MATRIX MODEL TO DETERMINE RELIABILITY FUNCTION OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS

*The function of reliability of complex systems can be determined in the already traditional manner, by cross section and union of events, or by the combination of all possible events of failure and operation of the system, then through their probabilities, especially in case of non-elementary series and parallel connection of system elements. However, this can sometimes become the source of considerable difficulty from the standpoint of determination of failure and operation, as well as a large number of members when determining reliability function of a system. Because of this, it is sometimes impossible to estimate reliability of individual system parts.*

*This paper presents the procedure of matrix determination of possible events of proper operation of individual parts of the system as well as of the whole system of complex connections. On the basis of this procedure it is possible to estimate probability of proper operation, in other words, the reliability function of the system and/or of its individual parts. The SYREL software has been developed to calculate the reliability function.*

### INTRODUCTION

Defining and calculating the reliability function of complex systems /8/ and/or their parts (which may contain subsystems, assemblies, subassemblies and components (inseparable units) without application of appropriate procedures /9/ and computer support can be a rather long and tiresome job, especially in case of non-elementary sequential and parallel connections. Also, it is often necessary to analyze reliability function of certain system parts /10/ that may represent various connections of components within the system.

In view of this problem, a matrix procedure /11/ to estimate reliability function of complex systems and/or their parts was developed /12/. The basic connection matrix is formed on the basis of reliability block diagram of the system. Connection matrix enables determination of reliability function not only of the whole system (between input and output knots in the reliability block diagram) but also of any part of the system (between any two knots) that may represent various combinations of the system components' connections.

In both cases it is necessary to define, i.e. to set, the input and output knots of the system or its part. This is important for deeper analyses when designing reliability of a system and/or its parts.

### MATRIX PROCEDURE

Matrix procedure to estimate reliability function is based on the functionally technological connection between system components. On the basis of this connection, reliability block diagram of the system is defined. Functionally technological connection of system components is not always identical to the connection of components in the reliability block diagram /1/.

In the reliability block diagram, mutual connections of system components are identified and presented as knot connections - knot points (marked as knots 1, 2, 3 and 4 in Figure 1).

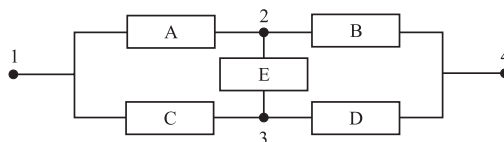


Fig. 1 Brig network

1 University of Belgrade, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, Serbia

2 University Union Nikola Tesla, Faculty for construction management, Belgrade, Serbia

Based on the number of components /13/ and identified connection knots (n), a square connection matrix of the *n*th level is formed. Matrix members are built on the basis of component connections between knots in the reliability block diagram which defines connection of system components between knots from the standpoint of reliability. For the purpose of clarity, this procedure is explained on the example of reliability block diagram of the system shown in Figure 1, with 5 components and 4 knots.

On the basis of Figure 1, the M-shaped connection matrix is formed

$$\begin{array}{cccc}
 \text{KNOT} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 1 & 1 & A & B & 0 \\
 M = & 2 & 0 & 1 & E & C \\
 & 3 & 0 & E & 1 & D \\
 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \tag{1}$$

The matrix members that equal 1 correspond to a knot connection with itself and they are located along the main matrix diagonal. Matrix members equal 0 when there is no connection between two knots. Matrix members A, B, C, D and E (identification of components) point out that the connection between two knots is realized through one of the stated components. For example, connection between knots 2 and 3, and that between 3 and 2, is realized through the component E, while the connection between knots 1 and 3 is realized through the component B. Matrix M (1) represents the basic matrix which further transforms into Matrix T, by multiplication, i.e. by raising to the power *m*, until it remains unchanged.

Connections of components A, B, C, D and F between two adjacent knots, in Matrix M, show that proper operation (event) between two adjacent knots is realized through one of the stated components. For example, proper operation between knots 1 and 3 is realized through the component B. However, proper operation between knots 1 and 3 can also be provided through components A and E, but in this initial matrix only the proper operation between two adjacent knots is considered, in other words, only through the knot situated in front of and behind the observed component.

The final connection matrix T for determination of reliability function is derived from the initial matrix M multiplied by itself, or raised to the power *m*, respecting rules of Bool algebra of events. Multiplication is carried out until the resulting matrix T remains unchanged. For some systems, *m* is determined through the total number of knots *n* as:

$$m=n-1 \tag{2}$$

The resulting matrix T appears in the shape,

$$T = M^m \tag{3}$$

For example, in Figure 1, for *m=n-1=3*, the matrix (3) reads:

$$\begin{array}{cccc}
 \text{KNOT} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 1 & 1 & A+BE & B+AE & AC+BD+BEC+AED \\
 T = & 2 & 0 & 1 & E & C+ED \\
 & 3 & 0 & E & 1 & D+EC \\
 & 4 & 0 & 0 & & 1
 \end{array} \tag{4}$$

Further multiplication of matrix T by matrix M, that is, raising the matrix M to a power higher than *m=3*, brings no change. This procedure results in possible branches *E<sub>i</sub>* (events of proper operation of the system and/or system part) between knot pairs, as in matrix T. Members of matrix T point out to possible events of proper system operation, as well as individual system parts (between knots) on the basis of which reliability function is then estimated.

Proper system operation, on the basis of reliability block diagram, Figure 1, between knots 1 and 4, in matrix T is given by member T in the form,

$$T_{1,4} = AC + BD + BEC + AED \quad (5)$$

Equation (4) results from possible states (events) of proper system operation between knots 1 (input) and 4 (output), i.e. by union (sum) of events  $E_1, E_2, E_3$  and  $E_4$ , Figure 1, by application of rules of Bool algebra of events, in the form,

$$\sum_{i=1}^{I=4} E_i = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = (AC) \cup (AED) \cup (BEC) \cup (BD) \quad (6)$$

with branches:  $E_1=AC$ ;  $E_2=AED$ ;  $E_3=BEC$  and  $E_4=BD$ .

For example, proper operation of the part of the system between knots 1 and 3 is given by member  $T_{1,3}=B+AE$ , being the result of union of event B (between knots 1 and 3) and cut of events AE (between knots 1, 2 and 3). Other parts of the system can be observed in the same way.

Reliability function of the system and/or its parts  $R(t)$  is calculated by the sum equation of probability of events (proper operation)  $P(\sum Ei)$  in the form /1, 2/.

$$P\left(\sum_{i=1}^{I=n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} P(E_i) - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{j=i+1}^n P(E_i E_j) + \sum_{i=1}^{i=n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(E_i E_j E_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\prod_{i=1}^{i=n} E_i \quad (7)$$

Reducing equation (7), since  $E_i^x = E_i$ , and introducing replacements in the form  $P(\sum Ei)=R(t)$  and  $P(E_i)=R_i(t)$ , corresponding reliability function for the system and/or part of the system is derived in the form,

$$R(t) = P\left(\sum_{i=1}^{i=n} E_i\right) = f[R_1(t), R_2(t), \dots, R_i(t), \dots, R_n(t)] \quad \text{for } i=1, \dots, k. \quad (8)$$

In equation (8)  $P(\sum Ei)$ ,  $R(t)$  is the probability of proper operation, and reliability of the system and/or part of the system, respectively;  $P(E_i)$ ,  $R_i(t)$  is the probability of proper operation, and reliability of the  $i$ th component, respectively;  $f[R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)]$  is the reliability function of the system and/or part of the system, dependent on the reliability block scheme and derived from equation (7).

For determination of reliability function by matrix procedure, software SYREL was developed.

### EXAMPLES

On the basis of described procedure and SYREL software /14/ several examples of determination of system reliability function are chosen and shown in Figures 2, 3, 4 and 5. Results are given in Tables T1, T2, T3 and T4.

The simplest example is the series connection of two components, Figure 2., Table T1. The system has three knot points.

The second example refer so series-parallel block of the system reliability diagram, Figure 3, Table T2. The system consists of 6 components and 6 knots. Possible branches of proper operation of the system are E1 and E2, and  $P(E1)$  and  $P(E2)$  are their probability, i.e. reliability. Value of reliability function of the whole system for given reliability values of components  $R_i(t)$ , is  $R(t)=R=0.989275509$ .

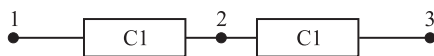


Fig. 2 Series connected

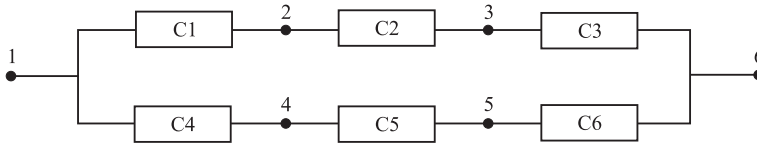


Fig. 3 Series-parallel reliability diagram

Table 1

Number of components are: 2			
Component	IN	OUT	$R_i$
C1	1	2	0.90
C2	2	3	0.95

Events between of knots 1 and 3:  
 $E1: \text{---} \rightarrow C1 \text{---} \rightarrow C2 \text{---} \rightarrow$

Reliability between of knots 1 and 3:  
 $P(E1) = R1 = 0.857375$

System reliability:  
 $R = 0.765$

Table 2

Number of components are: 6			
Component	IN	OUT	$R_i$
C1	1	2	0.95
C2	2	4	0.95
C3	4	6	0.95
C4	1	3	0.98
C5	3	5	0.98
C6	5	6	0.98

Events between of knots 1 and 6:  
 $E1: \text{---} \rightarrow C1 \text{---} \rightarrow C2 \text{---} \rightarrow C3 \text{---} \rightarrow$   
 $E2: \text{---} \rightarrow C4 \text{---} \rightarrow C5 \text{---} \rightarrow C6 \text{---} \rightarrow$

Reliability between of knots 1 and 6:  
 $P(E1) = R1 = 0.857375$   
 $P(E2) = R2 = 0.941192$

System reliability:  
 $R = 1.798567 + (-0.906954491)$   
 $R = 0.991612509$

The third example refers to complex (non-elementary series and parallel) connection of components within the system, Figure 4, Table T3. It is the system on which the procedure of matrix determination of reliability function is explained, with 5 components and 5 knots. Total number of possible branches is 4, i.e. branches  $E_1, E_2, E_3$  and  $E_4$ .

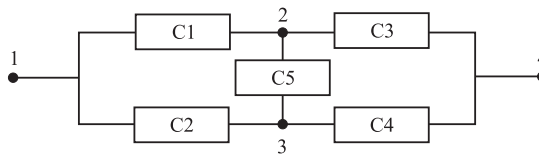


Fig. 4 Brig network

Figure 5 shows a complex connection with 6 components and 5 knots. The first part of Table T4 shows possible branches, probability of proper operation, i.e. their reliability functions are the system reliability function. The second part of the Table 4 shows results of the part of the system between knots 1 and 4, with 4 components and 4 knots.

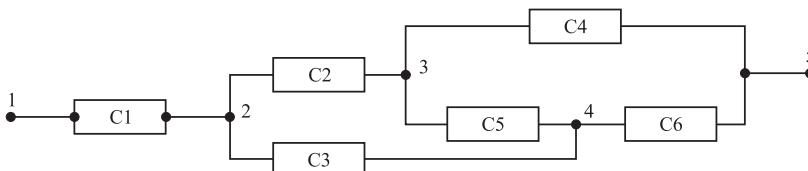


Fig. 5 Complex system

**Table 3**

Number of components are: 5			
Component	IN	OUT	$R_i$
C1	1	2	0.98
C2	1	3	0.88
C3	2	4	0.99
C4	3	4	0.99
C5	2	3	0.95
C5	3	2	0.95

Events between knots 1 and 4:  
 E1:----->C1----->C3----->  
 E2:----->C1----->C4----->  
 E3:----->C1----->C5----->C4  
 E4:----->C1----->C5----->C3

Reliability between knots 1 and 5:  
 $P(E1) = R1 = 0.9702$   
 $P(E2) = R2 = 0.9702$   
 $P(E3) = R3 = 0.92169$   
 $P(E4) = R4 = 0.92169$

System reliability:  
 $R = 3.78378 + (-5.466970278) + (3.576894552) + (-0.894223638)$   
 $R = 0.999480636$

**Table 4**

Number of components are: 6			
Component	IN	OUT	$R_i$
C1	1	2	0.90
C2	2	3	0.85
C3	2	4	0.92
C4	3	5	0.95
C5	3	4	0.99
C6	4	5	0.97

Events between knots 1 | 5:  
 E1:----->C1----->C2----->C4----->  
 E2:----->C1----->C3----->C6----->  
 E3:----->C1----->C2----->C5----->C6----->

Reliability between knots 1 and 5:  
 $P(E1) = R1 = 0.72675$   
 $P(E2) = R2 = 0.80316$   
 $P(E3) = R3 = 0.7346295$

System reliability:  
 $R = 2.2645395 + (-2.02230886) + (0.642066183)$   
 $R = 0.984296818$

Events between knots 1 | 4

E1:----->C1----->C3----->  
 E2:----->C1----->C2----->C5----->

Reliability between knots 1 and 4:  
 $P(E1) = R1 = 0.828$   
 $P(E2) = R2 = 0.75735$

Part of the system reliability:  
 $R = 1.58535 + (-0.696762)$   
 $R = 0.888588$

This example clearly shows advantages of the described procedure for determining reliability function of the system and/or part of the system, because each part of the system can be examined. It is necessary to set the input and output knots of the observed part of the system in the reliability block diagram.

**CONCLUSION**

This paper presents the procedure of matrix determining of reliability function of the system and/or its part for series, parallel, series-parallel, parallel-series and complex (connections of elementary and non-elementary series and parallel) connections of components within the system. Depending on given input and output knots, value of probability of proper operation, i.e. reliability function, can be determined by matrix procedure both for the whole system and for any of its parts, regardless of configuration of connections between components in the system. To do this, it is necessary to define the reliability block diagram and to form the M matrix of connections which covers all components and all knots. In this way it is possible to make detailed analyses of reliability of any part of very complex systems, which is an advantage in respect to procedures for determining reliability function that are already traditional. On the basis of reliability function it is possible to estimate the mean time between failures of the whole system as well as of its individual parts.



## ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the Ministry of Science and Environment Protection of Serbia under the grant No EE18031 and No TR35030. The authors would also like to thank Energoprojekt-Hidroinzenjering, New Belgrade, Serbia, for making the relevant technical documentation available.

## REFERENCES

- [1] Ivanović, G., Stanivuković, D, Beker, I: Reliability of Technical Systems, Faculty of Technical Science and Faculty of Technical Mechanical Engineering, Novi Sad-Beograd, 2010.
- [2] Vukadinović, S.: Probability Teiretical and statics, Privredni pregled, Belgrade, 1978.
- [3] Roy Billinton, Ronmald N. Allan: Reliability Evaluation of Engineering Systems, Plenum Press, New York, 1983.
- [4] Allan, R. N. et oll: An efficient algoritmh for Deducing the Minimal Cuts and Reliability Indices od a General Network Configuration, IEEE Trans on Reliability, R25, 1976.
- [5] Rasmmsn, D. M. Marshall, N. H.: FATYRAM: A Core Efficient Cut Set Algorithm, IEEE Trans on Reliability, R27, 1978.
- [6] Ivanović, G., Stanivuković, D.: RELIABILITY - ANALYSIS and DESIGN (in Serb), Military editor, Split, 1989.
- [7] Pham, H., Malon, D.: Optimal Design of System With Competing Failure Modes, , IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-43, No. 2, 1994.
- [8] Stevovic S., Environmental management within hydro energy, Andrejevic Endowment, Belgrade 2006.
- [9] Svetlana Stevović, *A New Mehtod for Determining Hydro Developments*, Journal Hydro Review Worldwide - USA, Volume 6, Issue 1, March 1998. ISSN 1072-9542,
- [10] Stevovic S., Marinkovic N., Mathematical modeling of environmental aspects in hydro energy, Conference: Serbian Republic energy, Teslic, Bosnia and Hercegovina, October 2001.
- [11] Stevovic S., Methodology in project analysis of environmental impact, II Congress JDVB-Kladovo, October 2003.
- [12] Stevović Svetlana, Milovanović Zorica, Milajić Aleksandar, New methodological approach in techno - economic and environmental optimisation of sustainable energy production, Thermal Science, ISSN 0354-9836, 2010, Vol. 14, No. 3, pp. 809-819.
- [13] Stevović S., Stamatović M, Ivanović G., Methodological approach and artificial intelligency application as solution for environmental conflict related to large dams, Dams and Reservoirs under Changing Challenges ICOLD 2011
- [14] Milosevic H., Stevovic S., Petkovic D., Numerical simulation of interaction during the top blow in a steel making converter, International Journal of Heat and Mass Transfer, ELSEVIER, ISSN 0017-9310, 54 (2011) pp 4275-4279

## FORMULAE OF REDUCTION FOR SOME SYSTEMS OF OPERATOR EQUATIONS

---

*In this paper we consider a reduction of a non-homogeneous system of operator equations to a totally reduced system. Variables in the new system are separated by higher order linear operator equations. We are only interested in systems of two or three linear operator equations.*

---

### INTRODUCTION

Reduction of a non-homogeneous linear system of first order operator equations with constant coefficients to an equivalent partial reduced system, consisting of higher order linear operator equation having only one variable and first order linear operator equations in two variables, using the rational canonical form, is considered in paper [1]. Reduction of a non-homogeneous linear system of first order operator equations to a totally reduced system, i.e. system with separated variables by higher order linear operator equations, obtained by using the characteristic polynomial of the system matrix, is discussed in paper [2]. We expand our research to non-homogeneous linear systems of operator equations with constant coefficients involving more than one operator.

### NOTATION

Let  $K$  be a field,  $V$  a vector space over  $K$ , let  $A_1: V \rightarrow V$  and  $A_2: V \rightarrow V$  be linear operators such that  $A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1$ . Linear system of operator equations with constant coefficients in unknowns  $x_1$  and  $x_2$  is

$$\begin{aligned} A_1(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \varphi_1 \\ A_2(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \varphi_2, \end{aligned} \tag{1}$$

for  $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in K$  and  $\varphi_1, \varphi_2 \in V$ . We say that  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$  is the system matrix and  $\bar{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$  is the free column. If  $\bar{\varphi} = 0$  system (1) is called homogeneous, otherwise it is called non-homogeneous. Let  $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^T$  be a column of unknowns and  $\bar{A}: V^{2 \times 1} \rightarrow V^{2 \times 1}$  vector operator defined componentwise  $\bar{A} = [A_1 \ A_2]^T$ . Then system (1) can be written in the following vector form

$$\bar{A}(\bar{x}) = B\bar{x} + \bar{\varphi}. \tag{2}$$

A solution of vector equation (2) is any column  $\bar{v} = [v_1 \ v_2]^T$ ,  $v_1, v_2 \in V$  which satisfies (2).

We also consider linear operator equations with constant coefficients in unknown  $x$  of the form

$$A_2 \circ A_1(x) + b_1 A_1(x) + b_2 A_2(x) + b_3 I(x) = \varphi, \tag{3}$$

for  $b_1, b_2, b_3 \in K$  and  $\varphi \in V$ . If  $\varphi = 0$  equation (3) is homogeneous. Otherwise we say it is non-homogeneous. A solution of equation (3) is any vector  $v \in V$  which satisfies (3).

### TOTALLY REDUCED SYSTEMS OF TWO OPERATOR EQUATIONS

Our aim is to transform initial system (1) into system of two linear operator equations of the form (3). New system has separated variables and symmetrical form and it is called totally reduced system.

---

<sup>1</sup> Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade, Belgrade, Serbia

**Theorem 1. (Theorem for totally reduction)** Linear system of operator equations (1) can be reduced to the system of two linear operator equations

$$\begin{aligned} A_2 \circ A_1(x_1) - (b_{11}A_2(x_1) + b_{22}A_1(x_1)) + \det B \cdot I(x_1) &= A_2(\varphi_1) - (b_{22}\varphi_1 - b_{12}\varphi_2) \\ A_2 \circ A_1(x_2) - (b_{11}A_2(x_2) + b_{22}A_1(x_2)) + \det B \cdot I(x_2) &= A_1(\varphi_2) - (b_{11}\varphi_2 - b_{21}\varphi_1). \end{aligned} \quad (4)$$

**Proof :** Let we have system

$$A_1(x_1) = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \varphi_1 \quad (5)$$

$$A_2(x_2) = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \varphi_2. \quad (6)$$

From (5) we obtain

$$b_{12}x_2 = A_1(x_1) - b_{11}x_1 - \varphi_1 \quad (7)$$

Applying operator  $A_2$  to equation (7) gives

$$b_{12}A_2(x_2) = A_2 \circ A_1(x_1) - b_{11}A_2(x_1) - A_2(\varphi_1). \quad (8)$$

Multiplying equation (6) by  $b_{12}$  we get

$$b_{12}A_2(x_2) = b_{12}b_{21}x_1 + b_{12}b_{22}x_2 + b_{12}\varphi_2. \quad (9)$$

Substituting (8) and (7) into (9) yields

$$\begin{aligned} A_2 \circ A_1(x_1) - b_{11}A_2(x_1) - A_2(\varphi_1) &= b_{12}b_{21}x_1 + b_{22}(A_1(x_1) - b_{11}x_1 - \varphi_1) + b_{12}\varphi_2 \\ &= b_{22}A_1(x_1) - (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})x_1 + b_{12}\varphi_2 - b_{22}\varphi_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Therefore we conclude

$$A_2 \circ A_1(x_1) - (b_{11}A_2(x_1) + b_{22}A_1(x_1)) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})x_1 = A_2(\varphi_1) - (b_{22}\varphi_1 - b_{12}\varphi_2).$$

Similarly we can express  $b_{21}x_1$  and  $b_{21}A_1(x_1)$  in terms of  $x_2$  from equation (6). Substituting obtained expressions into equation (5) multiplied by  $b_{21}$  we have

$$A_1 \circ A_2(x_2) - (b_{11}A_2(x_2) + b_{22}A_1(x_2)) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})x_2 = A_1(\varphi_2) - (b_{11}\varphi_2 - b_{21}\varphi_1).$$

Since operators  $A_1$  and  $A_2$  commute, from the initial system we get system

$$\begin{aligned} A_2 \circ A_1(x_1) - (b_{11}A_2(x_1) + b_{22}A_1(x_1)) + \det B \cdot I(x_1) &= A_2(\varphi_1) - (b_{22}\varphi_1 - b_{12}\varphi_2) \\ A_2 \circ A_1(x_2) - (b_{11}A_2(x_2) + b_{22}A_1(x_2)) + \det B \cdot I(x_2) &= A_1(\varphi_2) - (b_{11}\varphi_2 - b_{21}\varphi_1). \end{aligned} \quad \square$$

Operator  $\Delta_2 : V \rightarrow V$  is defined by  $\Delta_2(x) = A_2 \circ A_1(x) - (b_{11}A_2(x) + b_{22}A_1(x)) + \det B \cdot I(x)$ .

We emphasize that the coefficients of the operator  $\Delta_2$  are principal minors of system matrix  $B$ . With this notation we can rewrite system (4) as

$$\begin{aligned} \Delta_2(x_1) &= \begin{bmatrix} \boxed{A_2(\varphi_1)} & b_{12} \\ A_2(\varphi_2) & \boxed{b_{22}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\varphi_1} & \boxed{b_{12}} \\ \varphi_2 & \boxed{b_{21}} \end{bmatrix} \\ \Delta_2(x_2) &= \begin{bmatrix} b_{11} & \boxed{A_1(\varphi_1)} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{A_1(\varphi_2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & \boxed{\varphi_1} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{\varphi_2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

where we calculate only difference of the framed minors.

If we define vector operator  $\bar{\Delta}_2$  by  $\bar{\Delta}_2 = [\Delta_2 \ \Delta_2]^T$ , and if we denote by  $B_i$  matrix obtained by substituting the free column  $\bar{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$  in place of  $i$ -th column of  $B$  for  $i = \overline{1, 2}$ , then system (4) can be written in the following vector form

$$\bar{\Delta}_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} A_2(\varphi_1) \\ A_1(\varphi_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

### TOTALLY REDUCED SYSTEMS OF THREE OPERATOR EQUATIONS

Let us generalize our consideration to linear system of operator equations with constant coefficients in three unknowns  $x_1$ ,  $x_2$  and  $x_3$

$$\begin{aligned} A_1(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \varphi_1 \\ A_2(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \varphi_2 \\ A_3(x_3) &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \varphi_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Let linear operators  $A_1$ ,  $A_2$  and  $A_3$  satisfy  $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$ ,  $i, j = \overline{1,3}$ . Define operator  $\Delta_3: V \rightarrow V$  by

$$\begin{aligned} \Delta_3(x) &= A_3 \circ A_2 \circ A_1(x) - (b_{11}A_3 \circ A_2(x) + b_{22}A_3 \circ A_1(x) + b_{33}A_2 \circ A_1(x)) + \\ &((b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})A_1(x) + (b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31})A_2(x) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})A_3(x)) - \det B \cdot I(x). \end{aligned}$$

Here we would like to point out that the coefficients of the operator  $\Delta_3$  are principal minors of system

matrix  $B$ ;  $b_{11}$ ,  $b_{22}$  and  $b_{33}$  are principal minors of the first order;  $\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$  and  $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$

are principal minors of the second order;  $\det B$  is principal minor of the third order.

**Theorem 2. (Theorem for totally reduction)** Linear system of operator equations (13) can be reduced to the system of three operator equations

$$\begin{aligned} \Delta_3(x_1) &= A_3 \circ A_2(\varphi_1) - \left( \begin{vmatrix} A_2(\varphi_1) & b_{13} \\ A_2(\varphi_3) & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_3(\varphi_1) & b_{12} \\ A_3(\varphi_2) & b_{22} \end{vmatrix} \right) + \left( \varphi_1 \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - \varphi_2 \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \varphi_3 \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} \right) \\ \Delta_3(x_2) &= A_3 \circ A_1(\varphi_2) - \left( \begin{vmatrix} A_1(\varphi_2) & b_{23} \\ A_1(\varphi_3) & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & A_3(\varphi_1) \\ b_{21} & A_3(\varphi_2) \end{vmatrix} \right) - \left( \varphi_1 \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} - \varphi_2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \varphi_3 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \right) \\ \Delta_3(x_3) &= A_2 \circ A_1(\varphi_3) - \left( \begin{vmatrix} b_{11} & A_2(\varphi_1) \\ b_{31} & A_2(\varphi_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & A_1(\varphi_2) \\ b_{32} & A_1(\varphi_3) \end{vmatrix} \right) + \left( \varphi_1 \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} - \varphi_2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \varphi_3 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

**Proof:** Let us apply theorem 1 to system

$$\begin{aligned} A_2(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \varphi_2 \\ A_3(x_3) &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \varphi_3. \end{aligned} \quad (15)$$

We will consider system (15) as linear system of two operator equations in two unknowns  $x_2$  and  $x_3$ . If we define linear operator  $\Delta_{23}$  by

$$\Delta_{23}(x) = A_3 \circ A_2(x) - (b_{22}A_3(x) + b_{33}A_2(x)) + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})I(x), \quad (16)$$

we have

$$\begin{aligned} \Delta_{23}(x_2) &= A_3(b_{21}x_1 + \varphi_2) - (b_{33}(b_{21}x_1 + \varphi_2) - b_{23}(b_{31}x_1 + \varphi_3)) \\ \Delta_{23}(x_3) &= A_2(b_{31}x_1 + \varphi_3) - (b_{22}(b_{31}x_1 + \varphi_3) - b_{32}(b_{21}x_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (17)$$

From the first equation of system (13) we obtain

$$b_{13}x_3 = A_1(x_1) - b_{11}x_1 - b_{12}x_2 - \varphi_1. \quad (18)$$

Multiplying the second equation of system (17) by  $b_{13}$  we have

$$b_{13}\Delta_{23}(x_3) = b_{13}b_{31}A_2(x_1) - (b_{13}b_{22}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32})x_1 + b_{13}A_2(\varphi_3) - (b_{13}b_{22}\varphi_3 - b_{13}b_{32}\varphi_2). \quad (19)$$

Substituting (18) into equation (19) yields

$$\begin{aligned} & (\Delta_{23} \circ A_1)(x_1) - b_{11}\Delta_{23}(x_1) - b_{12}\Delta_{23}(x_2) - \Delta_{23}(\varphi_1) = \\ & b_{13}b_{31}A_2(x_1) - (b_{13}b_{22}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32})x_1 + b_{13}A_2(\varphi_3) - (b_{13}b_{22}\varphi_3 - b_{13}b_{32}\varphi_2). \end{aligned} \quad (20)$$

From the first equation of system (17) and from equation (20) we conclude

$$\begin{aligned} & (\Delta_{23} \circ A_1)(x_1) - b_{11}\Delta_{23}(x_1) - b_{12}(b_{21}A_3(x_1) - (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})x_1 + A_3(\varphi_2) + (b_{23}\varphi_3 - b_{33}\varphi_2)) - \Delta_{23}(\varphi_1) = \\ & b_{13}b_{31}A_2(x_1) - (b_{13}b_{22}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32})x_1 + b_{13}A_2(\varphi_3) - (b_{13}b_{22}\varphi_3 - b_{13}b_{32}\varphi_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Putting equations (16) and (21) together we deduce

$$\begin{aligned} & A_3 \circ A_2 \circ A_1(x_1) - (b_{22}A_3 \circ A_1(x_1) + b_{33}A_2 \circ A_1(x_1)) + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})A_1(x_1) \\ & - b_{11}A_3 \circ A_2(x_1) + b_{11}b_{22}A_3(x_1) + b_{11}b_{33}A_2(x_1) - b_{11}b_{22}b_{33}x_1 + b_{11}b_{23}b_{32}x_1 \\ & - b_{12}b_{21}A_3(x_1) + b_{12}b_{21}b_{33}x_1 - b_{12}b_{23}b_{31}x_1 - b_{13}b_{31}A_2(x_1) + b_{13}b_{22}b_{31}x_1 - b_{13}b_{21}b_{32}x_1 = \\ & b_{12}A_3(\varphi_2) + b_{12}b_{23}\varphi_3 - b_{12}b_{33}\varphi_2 + A_3 \circ A_2(\varphi_1) - b_{22}A_3(\varphi_1) - b_{33}A_2(\varphi_1) \end{aligned} \quad (22)$$

Gathering together corresponding terms in equation (22) we obtain

$$\begin{aligned} & A_3 \circ A_2 \circ A_1(x_1) - (b_{11}A_3 \circ A_2(x_1) + b_{22}A_3 \circ A_1(x_1) + b_{33}A_2 \circ A_1(x_1)) \\ & + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})A_1(x_1) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})A_3(x_1) + (b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31})A_2(x_1) \\ & - (b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31})x_1 = \\ & A_3 \circ A_2(\varphi_1) + b_{12}A_3(\varphi_2) - b_{22}A_3(\varphi_1) + b_{13}A_2(\varphi_3) - b_{33}A_2(\varphi_1) \\ & + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})\varphi_1 - (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32})\varphi_2 + (b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})\varphi_3. \end{aligned}$$

Hence we conclude

$$\Delta_3(x_1) = A_3 \circ A_2(\varphi_1) - \left( \begin{array}{c|c} A_2(\varphi_1) & b_{13} \\ \hline A_2(\varphi_3) & b_{33} \end{array} + \begin{array}{c|c} A_3(\varphi_1) & b_{12} \\ \hline A_3(\varphi_2) & b_{22} \end{array} \right) + \left( \varphi_1 \begin{array}{c|c} b_{22} & b_{23} \\ \hline b_{32} & b_{33} \end{array} - \varphi_2 \begin{array}{c|c} b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{32} & b_{33} \end{array} + \varphi_3 \begin{array}{c|c} b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{22} & b_{23} \end{array} \right).$$

The other two formulae can be derived in the same manner.  $\square$

Totally reduced system (14) can be written in the following form

$$\begin{aligned} \Delta_3(x_1) &= \begin{bmatrix} \boxed{A_3 \circ A_2(\varphi_1)} & b_{12} & b_{13} \\ A_3 \circ A_2(\varphi_2) & b_{22} & b_{23} \\ A_3 \circ A_2(\varphi_3) & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} \boxed{A_2(\varphi_1)} & b_{12} & b_{13} \\ A_2(\varphi_2) & b_{22} & b_{23} \\ \boxed{A_2(\varphi_3)} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{A_3(\varphi_1)} & b_{12} & b_{13} \\ \boxed{A_3(\varphi_2)} & b_{22} & b_{23} \\ A_3(\varphi_3) & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \varphi_1 & b_{12} & b_{13} \\ \varphi_2 & b_{22} & b_{23} \\ \varphi_3 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ \Delta_3(x_2) &= \begin{bmatrix} b_{11} & \boxed{A_3 \circ A_1(\varphi_1)} & b_{13} \\ b_{21} & \boxed{A_3 \circ A_1(\varphi_2)} & b_{23} \\ b_{31} & \boxed{A_3 \circ A_1(\varphi_3)} & b_{33} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & \boxed{A_3(\varphi_1)} & b_{13} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{A_3(\varphi_2)} & b_{23} \\ \boxed{b_{31}} & \boxed{A_3(\varphi_3)} & b_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \boxed{A_1(\varphi_1)} & b_{13} \\ b_{21} & \boxed{A_1(\varphi_2)} & b_{23} \\ b_{31} & \boxed{A_1(\varphi_3)} & b_{33} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} b_{11} & \varphi_1 & b_{13} \\ b_{21} & \varphi_2 & b_{23} \\ b_{31} & \varphi_3 & b_{33} \end{bmatrix} \\ \Delta_3(x_3) &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \boxed{A_2 \circ A_1(\varphi_1)} \\ b_{21} & b_{22} & \boxed{A_2 \circ A_1(\varphi_2)} \\ b_{31} & b_{32} & \boxed{A_2 \circ A_1(\varphi_3)} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & \boxed{A_2(\varphi_1)} \\ b_{21} & b_{22} & \boxed{A_2(\varphi_2)} \\ \boxed{b_{31}} & b_{32} & \boxed{A_2(\varphi_3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \boxed{A_1(\varphi_1)} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} & \boxed{A_1(\varphi_2)} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} & \boxed{A_1(\varphi_3)} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \varphi_1 \\ b_{21} & b_{22} & \varphi_2 \\ b_{31} & b_{32} & \varphi_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

where we take into consideration only framed minors.

## APPLICATION OF THE THEOREM FOR TOTALLY REDUCTION TO SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Example 1.** Solve the homogeneous system of differential equations

$$\begin{aligned}y'' + y' + z' - 2z &= 0 \\ y' - z' + y &= 0.\end{aligned}$$

If we make the substitution  $t = z - y$ , we obtain system

$$\begin{aligned}y'' + 2y' &= y + 2t \\ t' &= y.\end{aligned}\tag{23}$$

Applying Theorem 1 for operators  $A_1(u) = u'' + 2u'$  and  $A_2(u) = u'$  and system matrix  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , we get system of two third order differential equations with constant coefficients of the same form

$$\begin{aligned}y''' + 2y'' - y' - 2y &= 0 \\ t''' + 2t'' - t' - 2t &= 0.\end{aligned}$$

Solution of the totally reduced system is

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}\tag{24}$$

$$t = C_4 e^x + C_5 e^{-x} + C_6 e^{-2x}.\tag{25}$$

Solution of system (23) is obtained by replacing (24) and (25) in (23)

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} \\ t &= C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} C_3 e^{-2x}.\end{aligned}$$

By going back to  $z$  through the substitution  $z = t + y$  we get solution of the initial system

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} \\ z &= 2C_1 e^x + \frac{1}{2} C_3 e^{-2x}.\end{aligned}$$

**Example 2.** Solve the system of differential equations

$$\begin{aligned}y'' &= -2y' - 5z + 3x - 1 \\ z' &= y' + 2y + e^x.\end{aligned}$$

Taking  $t = z - y$ , we get system

$$\begin{aligned}y'' + 2y' &= -5y - 5t + 3x - 1 \\ t' &= 2y + e^x.\end{aligned}\tag{26}$$

Let us apply Theorem 1 for operators  $A_1(u) = u'' + 2u'$  and  $A_2(u) = u'$ , system matrix  $B = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

and source terms  $\varphi_1(x) = 3x - 1$  and  $\varphi_2(x) = e^x$ . We get system of two third order differential equations with constant coefficients

$$\begin{aligned}y''' + 2y'' + 5y' + 10y &= (3x - 1)' - 5e^x \\ t''' + 2t'' + 5t' + 10t &= (e^x)'' + 2(e^x)' - (-5e^x - 2(3x - 1)).\end{aligned}$$

Solution of the totally reduced system is

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 \sin \sqrt{5}x + C_3 \cos \sqrt{5}x + \frac{3}{10} - \frac{5}{18} e^x \quad (28)$$

$$t = C_4 e^{-2x} + C_5 \sin \sqrt{5}x + C_6 \cos \sqrt{5}x + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} e^x. \quad (29)$$

Plugging (27) and (28) in (26) and substituting  $z$  back in, we get solution of the initial system

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 \sin \sqrt{5}x + C_3 \cos \sqrt{5}x + \frac{3}{10} - \frac{5}{18} e^x$$

$$z = (C_2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} C_3) \sin \sqrt{5}x + (-\frac{2\sqrt{5}}{5} C_2 + C_3) \cos \sqrt{5}x + \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} e^x.$$

## LITERATURE

- [1] B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, S. Telebaković Formulae of Partial Reduction for Linear Systems of First Order Operator Equations, Applied mathematics letters, Vol. 23. No. 11. pp. 1367-1371.
- [2] B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, S. Telebaković Formulae of Total Reduction for Linear Systems of First Order Operator Equations, <http://arXiv.org>, arXiv:0811.0144.

## БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

---

*The Andronov-Hopf bifurcation for singular perturbed distribute dynamical systems is considered by averaging method. Results applies for dynamical system which is generated by partial differential equations.*

---

### БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА И МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

Рассматривается диснаимическая система, состояние которой описывается функциями  $u : \Omega \rightarrow R^n$ , определёнными на некотором множестве  $\Omega$  и образующими функциональное пространство  $W(\Omega)$ . Эволюция динамической системы происходит в соответствии с уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta L(u) + f(u, \alpha) \quad (1.1)$$

где  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,

параметры  $\beta \in (-\beta_0, \beta_0) \subset R^1$ ,  $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0) \subset R^1$ ,

функция  $f : R^n \times (-\alpha_0, \alpha_0) \rightarrow R^n$  гладко зависит от своих аргументов,

$L$  - линейный оператор в пространстве  $W(\Omega)$ .

Если параметр связи  $\beta = 0$ , то рассматриваемая динамическая система распадается на множество независимых систем, описываемых уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \alpha), \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

Если  $\beta \neq 0$ , то эти системы взаимодействуют за счёт слагаемого  $\beta L(u)$  в правой части (1.1). Взаимодействие можно считать слабым, если мало значение параметра  $\beta$ . Пусть  $f(0, \alpha) = 0$ , и при  $\alpha = 0$  в системе уравнений (1.2) имеет место бифуркация рождения цикла из нулевого состояния равновесия (бифуркация Андронова-Хопфа) [1-2]. В статье рассматривается вопрос рождения цикла из нулевого состояния равновесия системы (1.1), когда параметры  $\alpha, \beta$  имеют одинаковый порядок малости. Все рассуждения приведены для  $n = 2$ . В случае  $n > 2$  могут быть получены аналогичные результаты с помощью метода проекций [3].

Представим систему уравнений (1.2) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(\alpha)u + g(u, \alpha), \quad (1.3)$$

линеаризовав правую часть в точке  $u = 0$ . Относительно спектра линейной части  $A(\alpha)$  зафиксируем обычные предположения, обеспечивающие бифуркацию рождения цикла из состояния равновесия:

1) спектру  $A(\alpha)$  принадлежит пара комплексно-сопряженных собственных чисел  $\lambda(\alpha), \bar{\lambda}(\alpha)$  вида

$$\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha), \quad \text{где } \gamma(0) = 0, \mu = \frac{d\gamma}{d\alpha}(0) \neq 0, \omega = \omega(0) \neq 0,$$

2) остальная часть спектра  $A(\alpha)$  равномерно по  $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$  отделена от мнимой оси на положительное расстояние.

Зафиксируем для каждого  $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$  в  $R^2$  систему координат  $\{e_1(\alpha), e_2(\alpha)\}$ , связанную со

---

1 ФГБУ «НПО «Тайфун», Обнинск, Россия

2 ИАТЭ НИЯУ «МИФИ», Обнинск, Россия



спектром оператора  $A(\alpha)$  так, что в этих координатах

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \gamma(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Пусть  $B(\alpha)$  - матрица перехода от системы  $\{e_1(\alpha), e_2(\alpha)\}$  к исходной системе координат. В таком случае, если  $u = v_1 e_1(\alpha) + v_2 e_2(\alpha)$ , то система уравнений (1.3) может быть записана в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} \gamma(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \gamma(\alpha) \end{pmatrix} v + g_1(v, \alpha) \quad (1.4)$$

где  $v = (v_1, v_2)$ ,  $g_1(v, \alpha) = B^{-1}(\alpha)g(B(\alpha)v, \alpha)$ .

Перенормируем систему (1.4) при помощи замены

$$v \Rightarrow \varepsilon v, \alpha \Rightarrow \varepsilon \alpha, \beta \Rightarrow \varepsilon \beta, 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.5)$$

и воспользуемся формулой Тэйлора для функции  $g_1$ :

$$g_1(v, \alpha) = B_2(v, \alpha) + B_3(v, \alpha) + R(v, \alpha), \quad (1.6)$$

где  $B_i(v, \alpha)$  - однородный многочлен степени  $i = 2, 3$ , а остаточный член  $R(v, \alpha)$  имеет порядок  $O(\|v\|^4)$ .

С учетом (1.4) - (1.6) система уравнений (3.1) принимает вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \beta L_1(v) + A(\varepsilon \alpha)v + \varepsilon B_2(v, \varepsilon \alpha) + \varepsilon^2 B_3(v, \varepsilon \alpha) + \varepsilon^{-1} R(\varepsilon v, \varepsilon \alpha), \quad (1.7)$$

где  $L_1(v) = B^{-1}(\alpha)LB(\alpha)v$

Перейдём в  $v$  - пространстве к полярным координатам:

$$v_1 = \rho \cos(\varphi), v_2 = \rho \sin(\varphi) \quad (1.8)$$

Тогда система (1.7) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \Lambda(\rho, \varphi) \left[ \varepsilon \beta L_1(v) + A(\varepsilon \alpha)v + \varepsilon B_2(v, \varepsilon \alpha) + \varepsilon^2 B_3(v, \varepsilon \alpha) + \varepsilon^{-1} R(\varepsilon v, \varepsilon \alpha) \right]$$

где

$$\Lambda(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{\rho} & \frac{\cos(\varphi)}{\rho} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

В силу предположения 1) относительно спектра оператора  $A(\alpha)$  справедливо следующее соотношение:

$$\Lambda(\rho, \varphi) A(\varepsilon \alpha) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \alpha \mu \rho \\ -\omega - \varepsilon \alpha \frac{d\omega}{d\alpha}(0) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2 \alpha^2)$$

Следовательно, систему уравнений в переменных  $(\rho, \varphi)$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} + \varepsilon \left[ \beta \Lambda(\rho, \varphi) L_1 \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \alpha \left( -\frac{\mu \rho}{d\alpha} \right) + \begin{pmatrix} \rho^2 J_3^1(\varphi, \varepsilon \alpha) \\ \rho J_3^2(\varphi, \varepsilon \alpha) \end{pmatrix} \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left( \begin{pmatrix} \rho^3 J_4^1(\varphi, \varepsilon \alpha) \\ \rho^2 J_4^2(\varphi, \varepsilon \alpha) \end{pmatrix} \right) + \underline{O}(\varepsilon^2 \alpha^2) + \underline{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $L_1(v) = B^{-1}(\alpha)B(\alpha)v$ ;

$$\Lambda(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho^{-1} \sin(\varphi) & \rho^{-1} \cos(\varphi) \end{pmatrix};$$

$J_k^m(\varphi, \varepsilon \alpha)$  - однородные тригонометрические многочлены степени  $k = 3, 4$  для каждого  $m = 1, 2$ .

Предположим, что оператор  $L$  обладает свойством: выражение  $\Lambda(\rho, \varphi + t) L_1 \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi + t) \\ \rho \sin(\varphi + t) \end{pmatrix}$

$2\pi$ -периодично по независимой переменной  $t$ . В этом случае по аналогии с [1] можно формально применить к системе (1.10) процедуру усреднения и проанализировать поведение решений системы (1.1) в окрестности нулевого состояния равновесия при изменении параметров  $\alpha, \beta$ .

### МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ И АБСТРАКТНАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ

Сходимость метода усреднения в применении к задаче Коши (1.10) можно обосновать с помощью абстрактной формы теоремы Коши-Ковалевской [4] в случае, если правая часть (1.10) является квазидифференциальным оператором (КДО) в шкале банаховых пространств.

#### Шкала банаховых пространств [4]

Пусть каждому вещественному  $\rho > 0$  сопоставлено банаховое пространство  $B_\rho$ , норма элемента  $u \in B_\rho$  обозначена символом  $\|u\|_\rho$ . Семейство  $B = \{B_\rho\}$  называется шкалой банаховых пространств (ШБП), если  $B_\rho \subset B_\sigma$  для любых  $\sigma < \rho$  и  $\|u\|_\sigma \leq \|u\|_\rho$  для любых  $u \in B_\rho$ . Дополнительно предположим, что при фиксированном  $u$  как функция аргумента  $\rho > 0$ :

а) норма  $\|u\|_\rho$  выпукла вниз,

б) неравенство треугольника можно дифференцировать:  $\frac{\partial \|u+v\|_\rho}{\partial \rho} \leq \frac{\partial \|u\|_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \|v\|_\rho}{\partial \rho}$ .

При анализе дифференциальных уравнений используются различные ШБП, в частности, ШБП вещественных аналитических отображений  $x \mapsto u(x)$ , определенных в окрестности произвольного множества  $\lambda \subset R^p$ , со значениями в пространстве  $R^m$ . Используя стандартные обозначения:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_q^{\alpha_q},$$

вводятся нормы:  $|^n u| = \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ |\alpha|=n}} \sup_{x \in \lambda} |D^\alpha u^j(x)|, \quad (n = 1, 2, \dots)$ .

А также норма:

$$\|u\|_\rho = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} |^n u| \quad (2.1)$$

Пусть  $A_\rho^m(\lambda)$  - есть множество тех  $u$ , для которых  $\|u\|_\rho < \infty$ . Для любого  $\rho > 0$  множество  $A_\rho^m(\lambda)$  есть банахово пространство и  $A^m(\lambda) = \{A_\rho^m(\lambda)\}$  - ШБП, причем выполнены свойства а) и б). Дополнительные свойства семейства норм в  $A^m(\lambda)$  выражаются неравенствами

$$\|u \cdot v\|_\rho \leq \|u\|_\rho \cdot \|v\|_\rho, \quad \|D_i u\|_\rho \leq \frac{\partial}{\partial \rho} \|u\|_\rho, \quad (2.2)$$

допускающими почленное дифференцирование по  $\rho$ .

#### Квазидифференциальный оператор (КДО) [4]

Пусть дана ШБП  $B = \{B_\rho\}$ , символом  $O_\rho(r)$  обозначен открытый шар радиуса  $r$  с центром в нуле пространства  $B_\rho$ . «Окрестность» нуля в ШБП  $B$  задается формулой  $O(r, \rho) = \bigcup_{0 < \sigma \leq \rho} O_\sigma(r)$ .

Для некоторого  $\rho_0 > 0$  рассмотрим отображение  $f : O(r, \rho_0) \rightarrow B$ . Отображение  $f$  называется квазидифференциальным оператором, если существует  $C > 0$  такое, что для любого  $\rho \leq \rho_0$  и  $(u, v) \in O_\rho(r) \times O_\rho(r)$  имеет место соотношение:

$$\|f(u) - f(v)\|_\rho \leq C \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \left[ (1 + \|u\|_\rho + \|v\|_\rho) \|u - v\|_\rho \right] \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) выражает уменьшение «запаса аналитичности» при дифференцировании: наличие дифференцирования в правой части (2.3) приводит к тому, что  $f(O_\rho(r)) \not\subset B_\rho$ . Однако справедливо включение  $f(O_\rho(r)) \subset B_{\rho^1}$ ,  $\rho^1 < \rho$ . В самом деле, норма выпукла вниз, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \|u\|_\sigma \leq \frac{\|u\|_\rho - \|u\|_\sigma}{\rho - \sigma} \text{ для любого } \rho > \sigma.$$

В дальнейшем необходимо рассмотреть более общие отображения  $f : I \times O(r, \rho_0) \rightarrow B$ , где  $I = [0, t_0] \subset R$ . Пусть  $f_t : O(r, \rho_0) \rightarrow B$  есть частное отображение, порожденное отображением  $f$  для некоторого  $t \in I$ . Будем говорить, что  $f : I \times O(r, \rho_0) \rightarrow B$  есть КДО, непрерывный по переменной  $t$ , если  $f_t : O(r, \rho_0) \rightarrow B$  есть КДО для любого  $t \in I$  с независимой от  $t$  константой  $C$  и если для любого  $(t, u) \in I \times O_\rho(r)$ ,  $\sigma < \rho \leq \rho_0$ , выполняется равенство:  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|f(t + \tau, u) - f(t, u)\|_\sigma = 0$ .

#### Задача Коши [4]

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = 0 \quad (2.4)$$

Решения которой рассматриваются как отображения  $t \mapsto u(t)$  интервала  $I = [0, t_0] \subset R$  в ШБП  $B = \{B_\rho\}$ . Справедлива теорема [4]:

*Теорема 2.1. (Коши-Ковалевской)*

Пусть в уравнении (1.4) отображение  $f : I \times O(r, \rho_0) \rightarrow B$  есть КДО, непрерывный по  $t$ , и пусть  $f(t, 0) \in B_{\rho_0}$  для любого  $t \in I$ . Тогда найдется такое число  $k > 0$ , что задача (1.4) имеет единственное решение  $u(t) \in B_\rho$  для всех  $t \in I$  и  $\rho$ , связанных неравенством  $\rho + k \cdot t < \rho_0$ . При этом справедлива оценка:

$$\|u(t)\|_\rho \leq k^{-1} \int_\rho^{\rho+kt} e^{\sigma-\rho} \sup_t \|f(t, 0)\|_\sigma d\sigma \quad (2.5)$$

#### Метод усреднения

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \cdot f(t, u), \quad u(0) = u_0 \quad (2.6)$$

где  $0 < \varepsilon < 1$  - малый параметр, а КДО  $f(t, u)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1 и периодичен по  $t$  с периодом  $T > 0$ .

В соответствии с формальной схемой метода усреднения [5] рассмотрим усредненную задачу Коши:

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon \cdot f_0(v), \quad v(0) = u_0, \quad f_0(v) = T^{-1} \int_0^T f(s, v) ds \quad (2.7)$$

#### Лемма 1.1

Оператор  $f_0(v)$  есть КДО

Перейдем к медленному времени  $\tau = \varepsilon t$ . Исходная и усредненная задачи Коши примут, соответственно, вид:

$$\frac{du}{d\tau} = f(\varepsilon^{-1}\tau, u), \quad \frac{dv}{d\tau} = f_0(v), \quad u(0) = u_0, v(0) = u_0. \quad (2.8)$$

Обе эти задачи удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Пусть  $u_0 \in B_{\rho_0}$ , обозначим через  $k_0 > 0$  константу, определяемую теоремой 2.1., и такую, что задачи (2.8) разрешимы при любых  $\tau > 0$ , удовлетворяющих условию  $\rho + k_0 \cdot \tau < \rho_0$ , при этом  $u(\tau), v(\tau) \in B_{\rho}$ .

Справедлива следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Н.Н.Боголюбова.

**Теорема 2.2.**

Пусть КДО  $f : I \times O(r, \rho_0) \rightarrow B$  удовлетворяет условиям теоремы (2.2) и  $u_0 \in B_{\rho_0}$ , тогда при любом  $\delta > 0$  для решений задач (2.6), (2.7) имеет место соотношение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq \tau - \delta} \|u(s) - v(s)\|_{\rho} = 0,$$

где величины  $\rho, \tau$  связаны условием  $\rho + k \cdot \tau \leq \rho_0$ .

### ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Из работы [4] следует, что условиям теоремы (2.1) удовлетворяет задача Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных с аналитической правой частью. Рассмотрим, в частности, систему уравнений Лиенара:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + \alpha v - (v)^3, \quad x \in (0, 1), \quad (3.1)$$

в классе периодических по  $x$  функций с периодом 1.

Пусть:  $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_j = \frac{\alpha}{2} + i(-1)^{j+1} \frac{\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} = \frac{\alpha}{2} + i(-1)^{j+1} \frac{\omega(\alpha)}{2}$ ,  $|\alpha| < 2$  - собственные числа. Перейдем от фазовых переменных  $(u, v)$  к переменным  $(v_1, v_2)$ , в которых матрица  $A(\alpha)$

имеет вид:  $\tilde{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \alpha \end{pmatrix}$ . В новых переменных исходная система записывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \beta \left( \begin{array}{l} -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\alpha^2}{2} \omega(\alpha)^{-1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \\ -\frac{\omega(\alpha)}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2} \omega(\alpha)^{-1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{v_2}{\omega(\alpha)} \right)^3 \\ \frac{\omega(\alpha)}{2} \left( \frac{v_2}{\omega(\alpha)} \right)^3 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Применение к системе (3.2) схемы рассуждений раздела 1 и теоремы (2.1) позволяет доказать справедливость следующего утверждения.

**Теорема 3.1.**

Пусть параметры уравнения Лиенара удовлетворяют соотношениям:  $\alpha = \varepsilon^2 \alpha_0$ ,  $\beta = \varepsilon^2 \beta_0$ , тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение Лиенара имеет семейство периодических решений вида:

$$u(x, t) = 4\sqrt{\frac{\alpha_0}{3}} \cos(2\pi kx + 4\pi^2 k^2 \beta_0 t - t) + o(\varepsilon^2), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогичная теорема справедлива для случая однородных краевых условий второго рода.

Изложенный подход позволяет также показать существование при достаточно малых  $0 < \varepsilon < 1$  семейств периодических решений в окрестности резонансных уровней энергии распределенной системы Дюффинга [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(u) + \varepsilon^2 \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(vt) - \delta \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad x \in (0,1), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е. Теория колебаний. М. 1956.
- [2] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. М. 1980.
- [3] Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Пер с англ., Под ред. Х.Сунини, Дж.Голлаба. М.: Мир. 1984.
- [4] Овсянников Л.В. Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств., Докл.Акад.наук СССР. 1971. Т.200. №4. С.789-792.
- [5] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: «Наука». 1967.
- [6] Морозов А.Д. К вопросу о полном качественном исследовании уравнения Дюффинга., Журнал выч. матем. и матем. физики. 1973. Т.13. № 5. С.1134-1152.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С ЧАСТИЧНО ЗАГЛУБЛЕННЫМ ЭКРАНОМ

---

*The results are presented of laboratory and numerical experiments of the solitary waves interaction with a thin partially submerged impermeable screen on a flat slope.*

---

При проектировании морских гидротехнических объектов (плавучих причалов, платформ, понтонов и т.п.) одной из важнейших задач является определение воздействия на них поверхностных волн [1-5]. В настоящее время в Российской Федерации реализуется программа обеспечения энергией (электрической и тепловой) удаленных регионов с помощью плавучих атомных теплоэнергетических станций. Реакторы этих станций размещаются в несамоходных стоечных судах - так называемых плавучих энергоблоках (ПЭБ). Первые из таких станций планируется установить в бухтах Камчатского края, в связи с чем возникает задача предотвращения возможного ущерба, который могли бы нанести волны цунами этим потенциально опасным объектам.

Лабораторные исследования, выполненные в гидроволновом бассейне Филиала ОАО «26 ЦНИИ», показали высокие волнозащитные свойства сооружений в виде сплошных дамб. Вместе с тем возникает естественная задача минимизации стоимости защитных сооружений для ПЭБ с сохранением необходимой степени волнозащиты. Для уменьшения волновой нагрузки на ПЭБ могут применяться, например, различные защитные экраны. Это могут быть непроницаемые вертикальные экраны, не доходящие до дна и частично пропускающие набегающую волну снизу, или пористые экраны, пропускающие через себя ослабленную волну той или иной интенсивности в зависимости от пористости экрана. Воздействие уединенной волны на составные конструкции, состоящие из защищаемого объекта и защищающего его экрана, изучено недостаточно как численными методами, так и с помощью лабораторных экспериментов, особенно в случае пористых экранов [6-8]. Решение этой задачи требует проведения значительного объема экспериментальных и теоретических исследований.

Ввиду сложной картины взаимодействия волн с составной конструкцией, многопараметричности задачи и связанных с этим трудностей при интерпретации результатов, была запланирована серия экспериментов по исследованию воздействия волн на отдельные элементы конструкции, такие как незащищенный понтон, непроницаемый не касающийся дна экран, пористый экран, доходящий до дна. В предыдущей работе авторов [9] представлены результаты лабораторных и численных экспериментов по определению воздействия одиночной волны на незащищенное частично погруженное тело прямоугольной формы, расположенное над плоским откосом. Проведенные исследования позволили определить величины заплесков на тело и волнового давления на него в зависимости от амплитуды набегающей волны, протяженности тела и его осадки, угла наклона откоса. В настоящей работе исследовано взаимодействие волн с частично заглубленным непроницаемым экраном.

### МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Эксперименты проводились с целью определения возвышения свободной поверхности перед и

1 Филиал ОАО «26 ЦНИИ», Санкт-Петербург, Россия

2 Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

3 Балтийский государственный технический университет «Военмех», Санкт-Петербург, Россия

4 Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

5 Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

за преградой и давления в фиксированных точках преграды. Испытательная установка гидроволновой лаборатории Филиала ОАО «26 ЦНИИ» представляет собой лоток [10] с установленным в нем стационарным вакуумным волнопродуктором, при помощи которого создается уединенная волна. Схема лабораторной установки показана на рис. 1. В ходе экспериментов использовалась специальная измерительная информационная система (ИИС), управляемая оператором посредством диалоговой программы. С помощью программного модуля осуществлялись управление запуском измерений, получение и цифровая обработка результатов измерений, в частности, фильтрация результатов измерений, получаемых от датчиков. Подробное описание геометрических размеров лотка, характеристик волнопродуктора и измерительных приборов приведено в работе [9].

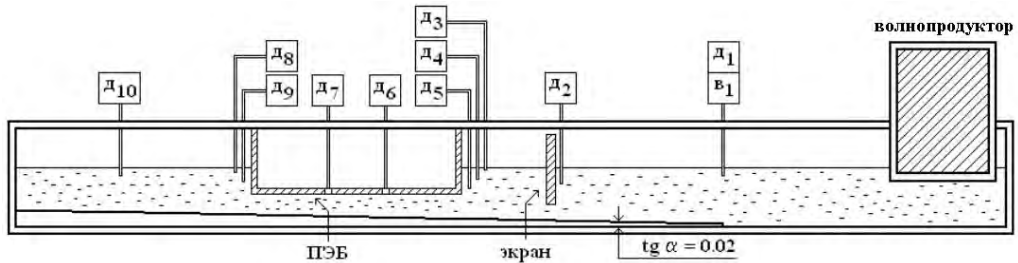


Рис. 1. Схема лотка и размещение измерительных устройств: В - волномер, Д - датчик давления; ПЭБ - модель плавучего энергоблока

В настоящей работе исследуется взаимодействие волн различной амплитуды только с экраном, т.е. в отсутствии модели ПЭБ. Для этого случая схема размещения измерительных устройств изображена на рис. 2. В экспериментах с непроницаемым экраном варьировались амплитуда набегающей волны и величина зазора между дном и нижним концом экрана, который располагался на расстоянии ≈9.2 м от места стыковки горизонтального дна с глубиной 45 см и плоского откоса с углом наклона, заданным отношением 1:50.

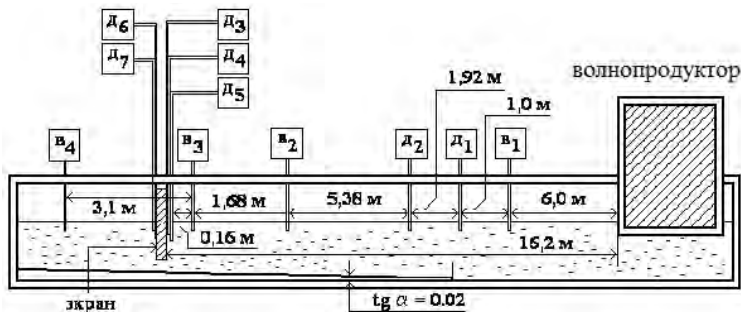


Рис. 2. Схема лотка с размещенным в нем частично заглубленным непроницаемым экраном

Одновременно с лабораторными экспериментами выполнялось также численное моделирование, которое позволяло дополнить лабораторные измерения новыми данными в тех точках, где датчики давления или волнометры не устанавливались, а также для тех значений определяющих параметров (высота волны, зазор между дном и нижним концом экрана, глубина в месте установки экрана, угол откоса), для которых лабораторные эксперименты не проводились. Для численного исследования процесса взаимодействия уединенной волны с вертикальным экраном использовалась нелинейная модель плоских потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Поскольку поверхность воды меняется со временем, то расчеты велись на адаптивных сетках, подстраивающихся под подвижную свободную границу и неровное дно. Конечно-разностная схема на подвижной сетке и алгоритм решения разностной задачи описаны в [11].

В работе [9] форма свободной границы и компоненты вектора скорости жидкости в начальный момент времени задавались по аналитическим формулам [11], описывающим уединенную волну, располагавшуюся над горизонтальным дном в достаточном удалении от исследуемых объектов. В экспериментах же сгенерированная вакуумным волнопродуктором волна отличается от одиночного солитона наличием дисперсионного «хвоста» - цуга волн меньшей амплитуды, движущихся вслед за основной волной. Отличие в механизмах генерации начальной волны в эксперименте и расчетах приводило [9] в некоторых случаях к весьма заметному отклонению экспериментальных и расчетных данных как по величинам заплесков на исследуемый объект, так и по значениям волнового давления в точках расположения датчиков. В настоящей работе начальная волна в расчетах генерируется с помощью модельного «волнопродуктора». Последний представляет собой расположенную справа (см. рис. 3) прямоугольную область, заполненную водой до заданного уровня и отгороженную от лотка тонкой вертикальной стенкой, которая в начальный момент времени мгновенно поднимается вверх на высоту, равную величине зазора между дном и передней стенкой реального волнопродуктора. Вытекающая из этого зазора вода и генерирует начальную волну в численном эксперименте. Использование похожих механизмов генерации начальной волны привело к хорошему согласованию записей на волномерах (см. рис. 4) и в конечном итоге к вполне удовлетворительному соответствию экспериментальных и расчетных результатов.

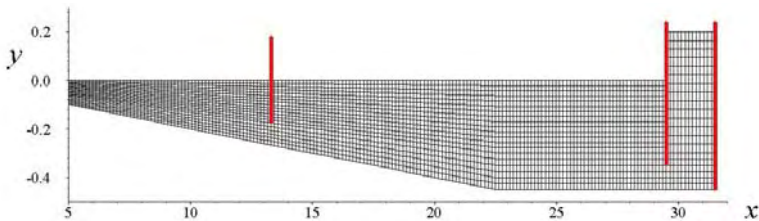


Рис. 3. Схема расчетной области с модельным «волнопродуктором» в правой части

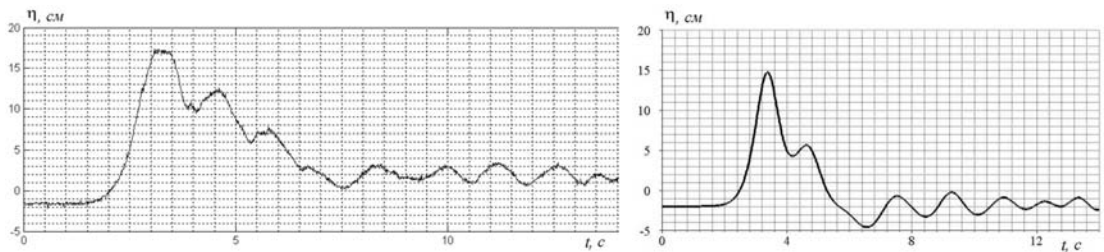


Рис. 4. Экспериментальные (слева) и расчетные (справа) значения возвышения свободной поверхности  $\eta = \eta(t)$  в месте расположения волномера  $B_1$

### НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ПРЕГРАДАМИ

Приведем вначале краткое описание результатов верификации нового способа генерации волн в численных расчетах на новых экспериментальных данных, полученных в 2011 г. в Филиале ОАО «26 ЦНИИ» при исследовании наката волн на вертикальную преграду, замыкающую пологий откос. Непроницаемая преграда представляет собой шпунтовую стенку, заделанную в ростверк с установленной на нем волноотбойной стенкой (см. рис. 5). Перед размещением преграды в экспериментальном лотке проводилась тарировка последнего с целью подбора такого начального уровня воды в волнопродукторе, который обеспечивает в предполагаемом месте установки стенки высоту проходящей волны в 17.0 см (штриховая линия (1) на рис. 6). Отметим, что в экспериментах создание более высокого чем в лотке уровня воды в волнопродукторе осуществлялось за счет забора воды из лотка, что приводило к понижению уровня спокойного горизонта в лотке на



начало опыта примерно на  $1.6 \div 2$  см. Это обстоятельство учитывалось и при проведении вычислительных экспериментов, что видно по графикам мареограмм на рис. 6, которые начинаются ниже нулевой отметки.

На рис. 5 показан также процесс набегания сгенерированных волн на стенку. Видно, что хотя откос и является очень пологим, тем не менее, при движении над ним головной волны ее амплитуда постепенно возрастает, последующий заплеск на стенку почти втрое превышает амплитуду волны при отсутствии преграды (сравни мареограммы 1 и 2 на рис. 6), после отражения от стенки возникает сложная картина взаимодействия движущихся в противоположных направлениях отраженной головной волны и волн дисперсионного «хвоста». На рис. 6 приведено также сопоставление по показаниям датчиков давления экспериментальных и численных результатов, свидетельствующее об их хорошем соответствии.

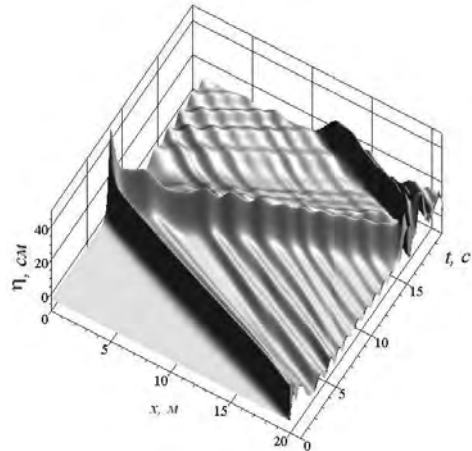
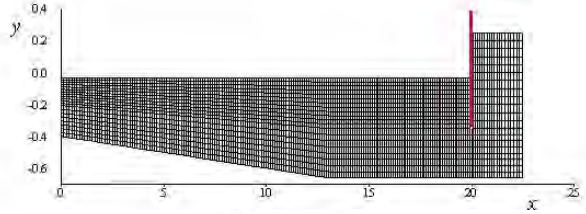
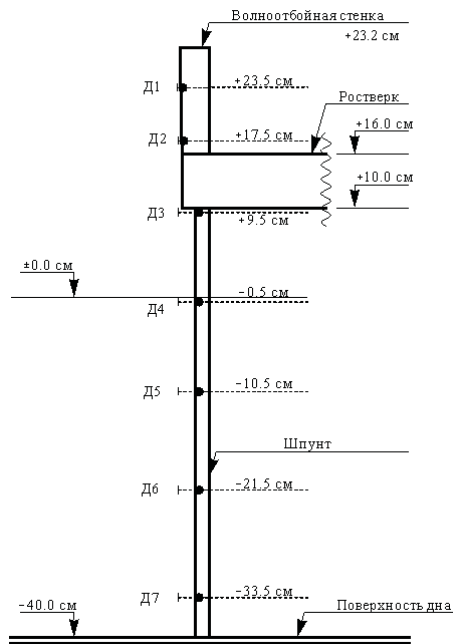


Рис. 5. Взаимодействие набегавшей волны с вертикальной преградой. Слева - вертикальная стенка с датчиками давления, справа - схема расчетной области (вверху) и динамика свободной поверхности (внизу)

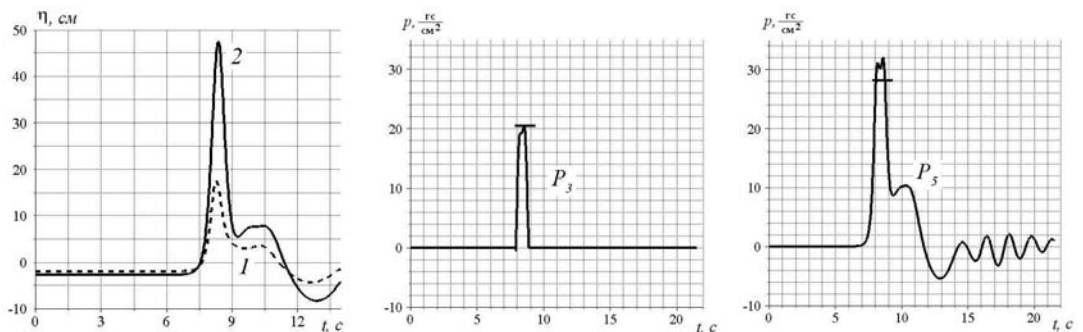


Рис. 6. Взаимодействие набегавшей волны с вертикальной преградой. Слева - мареограммы  $\eta = \eta(t)$  в месте установки стенки при ее отсутствии (1) и наличии (2); справа - полученные численно графики зависимости  $p = p(t)$  давления от времени на датчиках Д3 и Д5, горизонтальной чертой отмечено максимальное значение давления, полученное в эксперименте

Приведем некоторые результаты исследований взаимодействия волн с экраном. Эксперименты проводились при различных значениях зазора  $z_e$  между нижним концом экрана и дном и различных амплитудах  $a$  набегающей волны. На рис. 7 показаны графики возвышения свободной границы при значениях  $a = 5$  см и  $z_e = 7$  см в том временном промежутке, когда головная волна подходит к экрану и взаимодействует с ним. Видно, что наличие сильно заглубленного экрана приводит к появлению системы отраженных от него волн, однако наблюдается и прошедшая за экран волна значительной амплитуды, хотя зазор  $z_e$  составлял в этом эксперименте лишь 25 % от глубины в месте установки экрана.

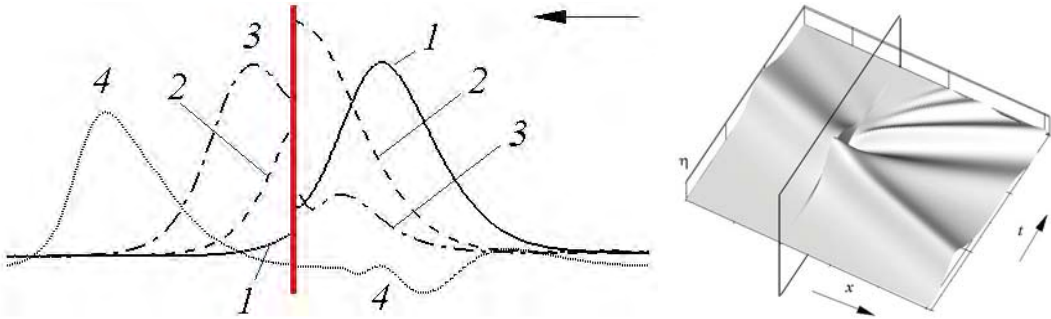


Рис. 7. Взаимодействие набегающей волны с экраном. Слева - форма волны, проходящей под частично заглубленным непроницаемым экраном, в четыре последовательно возрастающих момента времени, справа - динамика свободной поверхности

На рис. 8 показаны графики записей двух волномеров, один из которых располагался непосредственно перед экраном, другой - за экраном, на удалении 3.1 м от него (см. также рис. 2). Для первого волномера имеет место очень хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных по максимальным значениям возвышения, для второго наблюдается отличие примерно в 10 %, что связано с тем, что при малом зазоре вязкость и шероховатость дна, не учитываемые в используемой модели идеальной жидкости, начинают оказывать заметное влияние на скорость придонного потока, замедляя его в узком зазоре под экраном. Отметим, что в экспериментах с волнами большой амплитуды и при сильном заглублении экрана отличие опытных и расчетных данных по максимальным значениям возвышения на датчике  $B_4$ , расположенном с тыльной стороны экрана, достигало 20 %.

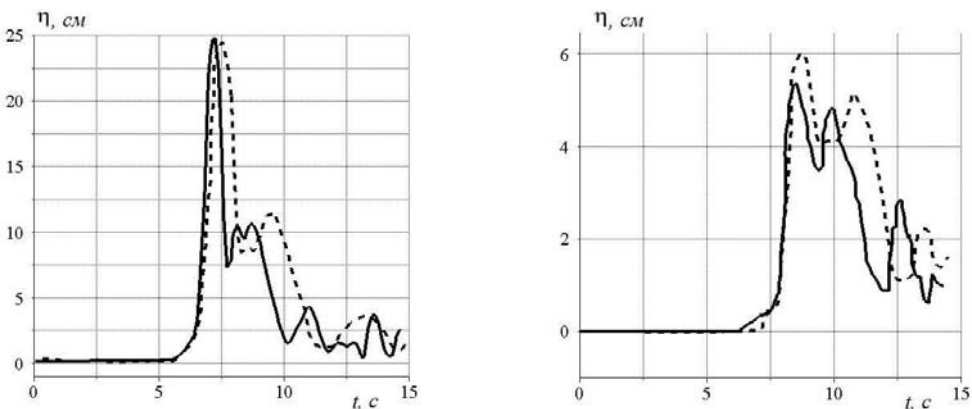


Рис. 8. Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) мареграммы  $\eta = \eta(t)$  на волномерах  $B_3$  (слева) и  $B_4$  (справа).  $z_e = 8$  см,  $a = 10.2$  см

Использованные в настоящей работе экспериментальные и численные методики взаимно дополняли друг друга, позволяя получать разностороннее описание явления в широком диапазоне определяющих параметров. На основе выполненных исследований установлены

следующие качественные закономерности. При прочих равных условиях увеличение амплитуды набегающей волны ведет к увеличению амплитуд отраженных от экрана волн и прошедших за него волн. Увеличение зазора  $z_e$  приводит к росту амплитуды прошедшей волны и уменьшению отраженной волны. При уменьшении  $z_e$  максимальные значения заплесков и давления на лицевой грани экрана растут, а на тыльной - падают. При большом заглублении экрана зазор  $z_e$  становится столь малым, что взаимодействие волны с экраном происходит почти также, как при ее накате на вертикальную стенку, размещенную на откосе.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-05-91052-НЦНИа) и Проекта IV.31.2.1 программы фундаментальных исследований СО РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yeung R.W., Wu Ghun-Fa., Nonlinear wave-body motion in a closed domain. *J. Comput. Fluids*. Vol.17, No.2. 1989. P.351-370.
- [2] Nomura T., Hughes T.J.R., An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol.95, No.1. 1992. P.115-138.
- [3] Нуднер И.С., Урусов А.И., Хакимзянов Г.С., Яньшин В.Н., К воздействию длинных волн на частично заглубленные объекты. *Моделирование в механике*. Т.6(23), №1. 1992. С.81-86.
- [4] Takikawa K., Yamada F., Sato K., Furuta H., Numerical analysis of finite amplitude motion of waves and a moored floating body under severe storm conditions. *Int. J. Numer. Methods Fluids*. Vol.21., No.4. 1995. P.295-310.
- [5] Khakimzyanov G.S., Numerical simulation of the interaction of a solitary wave with a partially immersed body. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.17, No.2. 2002. P.145-158.
- [6] Бабчик Д.В., Дымов М.Г., Завьялов В.К., Максимов В.В., Нуднер И.С., Ревякин А.Ю., Воздействие волн на частично-проницаемые волнозащитные сооружения. *Тр. международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании»*. Павлодар: ТОО НПФ «ЭКО». 2006. Т.1. С.172-185.
- [7] Камынин Е.Ю., Нуднер И.С., Максимов В.В., Ревякин А.Ю., Бабчик Д.В., Определение волнозащитных характеристик частично проницаемых конструкций мола. *Тр. IX Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА-2008)*. СПб.: Наука. 2008. С.469-473.
- [8] Liu P.L.-F., Lin P., Chang K.-A., Sakakiyama T., Numerical modeling of wave interaction with porous structures. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.* Vol.125, No.6. 1999. P.322-330.
- [9] Камынин Е.Ю., Максимов В.В., Нуднер И.С., Семёнов К.К., Хакимзянов Г.С., Исследование взаимодействия уединенной волны с частично погруженным неподвижным сооружением. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. №4(10). 2010. С.39-54.
- [10] Манойлин С.В., Максимов В.В., Нуднер И.С., Взаимодействие одиночной волны с преградами сложной конфигурации. *Тр. IX Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА-2008)*. СПб.: Наука. 2008. С.441-443.
- [11] Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю., Численное моделирование течений жидкости с поперхнутыми волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2001.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА АССИМИЛЯЦИЮ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

---

*We formulate the observation data assimilation problem in a domain of arbitrary form with the sufficiently smooth boundary on a sphere. To solve our ill-posed inverse problem an approach, based on optimal control methods and adjoint equations theory, is used. We consider two family of optimal control problem with regularization to determine of minimum of calculating error between numerical free surface level and observation one with respect to some special norm. The iterative numerical method to solve our problem is suggested.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Модели мелкой воды хорошо описывают большой круг природных явлений, таких как крупномасштабные поверхностные волны, возникающие в морях и океанах, цунами, приливные течения, поверхностный и русловой сток, гравитационные колебания поверхности океанов [1,2].

В работах [2,3] рассмотрено численное моделирование поверхностных волн в больших акваториях с учетом сферичности Земли и ускорения Кориолиса на основе уравнений мелкой воды. В работе [2] для дифференциальной постановки задачи выведены полезные априорные оценки, обеспечивающие устойчивость решения и однозначную разрешимость задачи. В [3] для этой же задачи построен метод конечных элементов, для которого получены необходимые априорные оценки. Там же приведены результаты численных экспериментов на модельных сетках для акваторий Охотского моря и Мирового океана.

В [4] проведено исследование эффективности нескольких параллельных реализаций алгоритма численного решения начально-краевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI для языка Си. Рассмотрено два подхода к декомпозиции вычислительной области и две схемы реализации двухточечных обменов в алгоритме. Приведены сравнительные результаты ускорения вычислений в зависимости от количества процессов, способа реализации коммуникаций, способа декомпозиции вычислительной области, архитектуры кластерной системы.

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Для стандартной сферической системы координат  $(r, \lambda, \theta)$  с началом в центре земного шара будем использовать вместо угла  $\theta$  географическую широту  $\varphi = \pi - \theta$ , так что  $0 \leq \varphi < \pi$ . Через  $\lambda$  обозначена географическая долгота  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ . Полагаем всюду  $r = R_E$ , где  $R_E$  - радиус Земли, который считается постоянным.

Сформулируем задачу о распространении длинных волн в акватории следующим образом. Пусть  $\Omega$  - заданная область на сфере с границей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  - часть границы, проходящая вдоль берега, а  $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$  - часть границы, проходящая по морю. Обозначим через  $m_1$  и  $m_2$  - характеристические функции соответствующих участков границы. Не теряя общности можно считать, что точки  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  (полюса) не входят в  $\Omega$ . Относительно неизвестных функций  $u = u(t, \lambda, \varphi)$ ,  $v = v(t, \lambda, \varphi)$  и  $\xi = \xi(t, \lambda, \varphi)$  запишем в  $\Omega \times (0, T)$  уравнения баланса импульсов и уравнение к неразрывности [1,2]:

---

<sup>1</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= lv + mg \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} - R_f u + f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -lu + ng \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - R_f v + f_2, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= m \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{n}{m} Hv \right) \right) + f_3,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $u, v$  - компоненты вектора скорости  $\mathbf{U}$  по осям  $\lambda$  и  $\varphi$  соответственно;  $\xi$  - отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня;  $H(\lambda, \varphi) > 0$  - глубина водоема в точке  $(\lambda, \varphi)$ ; функция  $R_f = r_* |\mathbf{U}|/H$  учитывает силу трения о дно,  $r_*$  - коэффициент трения;  $l = -2\omega \cos \varphi$  - параметр Кориолиса;  $m = 1/(R_E \sin \varphi)$ ;  $n = 1/R_E$ ;  $g$  - ускорение силы тяжести;  $f_1 = f_1(t, \lambda, \varphi)$ ,  $f_2 = f_2(t, \lambda, \varphi)$  и  $f_3 = f_3(t, \lambda, \varphi)$  - заданные функции внешних воздействий.

Граничные условия рассмотрим в следующем виде:

$$HU_n + \beta m_2 \sqrt{gH} \xi = m_2 \sqrt{gH} d \text{ на } \Gamma \times (0, T)\tag{2}$$

где  $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, \frac{n}{m} n_2)$  - вектор внешней нормали к границе;  $\beta \in [0, 1]$  - заданный параметр,  $d = d(t, \lambda, \varphi)$  - заданная граничная функция, определенная на границе  $\Gamma_2$ .  
Зададим также начальные условия

$$u(0, \lambda, \varphi) = u_0(\lambda, \varphi), v(0, \lambda, \varphi) = v_0(\lambda, \varphi), \xi(0, \lambda, \varphi) = \xi_0(\lambda, \varphi).\tag{3}$$

Для дискретизации по времени разобьем временной отрезок  $[0, T]$  на  $K$  интервалов:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$  с шагом  $\tau = T/K$ . Аппроксимируем производные по времени левыми разностями и рассмотрим систему (1)-(2) на временном интервале  $(t_k, t_{k+1})$ . Полагая, что донное трение задается с предыдущего временного слоя, получим систему линейных алгебраических уравнений эллиптического типа.

Поскольку в общем случае функция  $d$  неизвестна, то для замыкания задачи (1) - (2) рассмотрим уравнение замыкания, заданное на некоторой части границы  $\Gamma_0$  с характеристической функцией  $m_0$ :

$$m_0 \xi = \xi_{obs},\tag{4}$$

где  $\xi_{obs} \in L_2(\Gamma_0)$  - заданная (например, по данным наблюдений) функция. Таким образом, дифференциальная задача на каждом шаге по времени может быть сформулирована, как задача на усвоение данных наблюдений следующим образом [2].

Пусть  $\xi_{obs}$  задана на  $\Gamma_0$ , функция  $d$  неизвестна на  $\Gamma_2$  и равна нулю на  $\Gamma_1$ . Найти  $u, v, \xi, d$ , удовлетворяющие системе (1), граничному условию (2) и условию замыкания (4), на каждом шаге по времени  $(t_k, t_{k+1})$ .

Для решения задачи была применена технология, описанная в [5]. Рассмотрено два семейства задач оптимального управления, отличающихся видом штрафной функции в функционале стоимости, для отыскания минимума в некоторой норме погрешности между искомым возвышением свободной поверхности и наблюдаемым с регуляризацией.

**Задача.** Пусть  $\xi_{obs}$  задана на  $\Gamma_0$ . Для каждого  $\alpha \geq 0$  найти  $\Phi_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha, \xi_\alpha) d_\alpha$ , удовлетворяющие системе

$$L\Phi_\alpha = F \text{ в } \Omega,$$

начальным данным (3), граничному условию (2) и минимизирующий функционал стоимости одного из следующих видов:

$$J_{\alpha}^{(I)}(d_{\alpha}, \xi_{\alpha}(d_{\alpha})) = \frac{1}{2} g \left( \alpha \int_{\Gamma} m_2 \sqrt{gH} d_{\alpha}^2 ds + \int_{\Gamma} m_0 \sqrt{gH} (\xi_{\alpha} - \xi_{obs})^2 ds \right) \quad (5)$$

$$J_{\alpha}^{(II)}(d_{\alpha}, \xi_{\alpha}(d_{\alpha})) = \frac{1}{2} g \left( \alpha \int_{\Gamma} m_2 \sqrt{gH} \left( \frac{\partial d_{\alpha}}{\partial s} \right)^2 ds + \int_{\Gamma} m_0 \sqrt{gH} (\xi_{\alpha} - \xi_{obs})^2 ds \right) \quad (6)$$

Для решения задачи построен итерационный численный метод восстановления граничной функции и, следовательно, решения обратной задачи в области. Метод состоит в итерационном уточнении граничной функции путем численного решения последовательно прямой и сопряженной задач.

Численное решение прямой и обратной задачи основано на методе конечных элементов.

Рассмотрим некоторую согласованную триангуляцию  $T = \{\omega_i\}_{i=1}^{N_{el}}$  области  $\Omega$ , состоящую из невырожденных треугольников с прямолинейными сторонами в координатах  $\lambda$  и  $\varphi$  и содержащую область  $\Omega$ . Сетка в общем случае может быть неструктурированной, но обязательно является согласованной, т.е. каждое ребро либо является стороной двух треугольников, либо стороной одного треугольника, находящейся на границе области.

Для задачи был сформулирован метод Бубнова - Галеркина [3]. В результате получили систему линейных алгебраических уравнений. В работе [3] доказаны априорные оценки, характеризующие устойчивость, а также показан второй порядок сходимости решений в норме.

#### ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ДАННЫХ С ГРАНИЦЫ

Рассмотрим в качестве расчетной области акваторию Охотского моря и прилегающий к Курильским островам участок Тихого океана. Область ограничена «квадратом»:  $\Omega = [42^{\circ}, 62^{\circ}]$  с.ш.  $\times$   $[135^{\circ}, 162^{\circ}]$  в.д., ее жидкая граница проходит вдоль  $\lambda = 161,1^{\circ}$  в.д. и вдоль  $\varphi = 41,5^{\circ}$  с.ш. Здесь и далее, для удобства по осям  $\lambda$  и  $\varphi$  вместо радианных мер приводятся градусы восточной долготы и северной широты, соответственно.

Тестовые расчеты для акватории Охотского моря проводились на сетках, подготовленных на основе открытой батиметрической базы данных ETOPO2 [6]. В рассмотренной сетке число узлов  $N_{nd} = 47652$ , а число треугольных элементов  $N_{el} = 86452$  (рис.1).

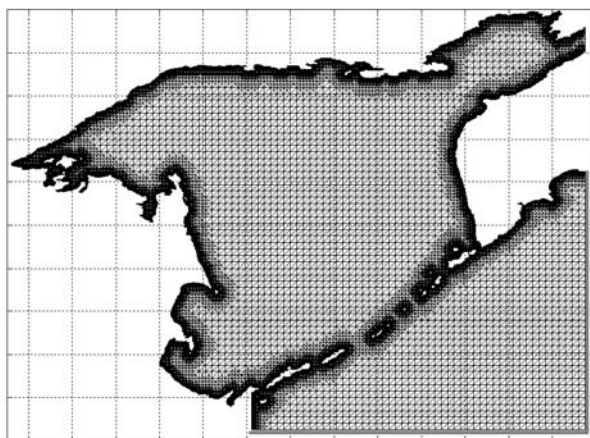


Рис. 1. Общий вид сетки для акватории Охотского моря

Поскольку в общем случае для нестационарной задачи начальные данные не известны, а рассматриваемая процедура не предполагает восстановления начальных данных, то в  $\Omega$  была поставлена следующая задача.

Сначала при заданной на всей границе по морю функции  $d$

$$d(\lambda, \varphi) = A \exp\left(-\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{2D}\right)^2 - \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2D}\right)^2\right) \quad (7)$$

решалась задача на установление. Установившееся решение принималось в качестве начальных данных, за данные «наблюдений» на границе  $\Gamma_0$  принимались значения свободной поверхности  $\xi$  из установившегося решения, а значения функции  $d$  «забывались».

Целью численного эксперимента являлось восстановление функции  $d$  по всей жидкой границе на основе данных «наблюдений».

Для этого, начиная с  $d = 0$ , всюду на границе по морю восстанавливалась  $d$  по предлагаемому итерационному алгоритму.

На рис. 2 показан пример решения прямой задачи на установление в случае задания функции  $d$  в виде (7) на обеих сторонах границы в Тихом океане. Рисунок демонстрирует результаты, полученные для  $\xi$  в начале счета (через 8 минут) и в его конце, когда процесс устанавливается за 50 минут.

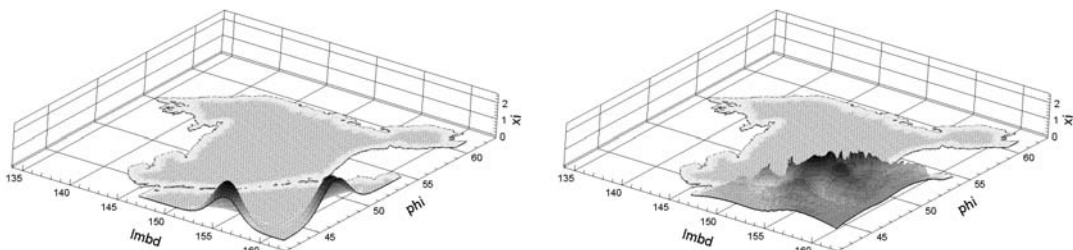


Рис.2. Решения прямой задачи на установление: значения  $\xi$  в момент времени  $t=8$  минут и  $t=50$  минут

Используемая процедура установления дает в качестве данных наблюдений функцию хорошей гладкости. Однако реальные данные наблюдений такой гладкостью, как правило, не обладают. В связи с этим в некоторых экспериментах на полученные после установления значения  $\xi$  на границе  $\Gamma_0$  был наложен «белый шум». Затем зашумленные значения  $\xi$  брались в качестве наблюдаемых данных (рис. 3, а). Более того, в части экспериментов рассматривались данные наблюдений с пропусками, т.е. заданные только на части границы по морю (рис. 3, б).

Таким образом, задача решалась с использованием двух различных функционалов стоимости (5) и (6) в двух различных постановках.

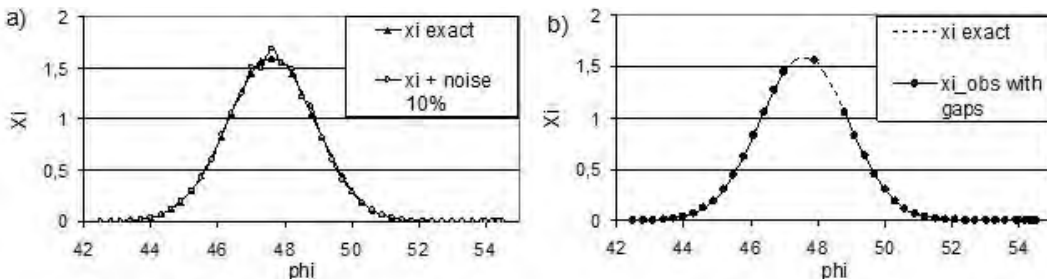
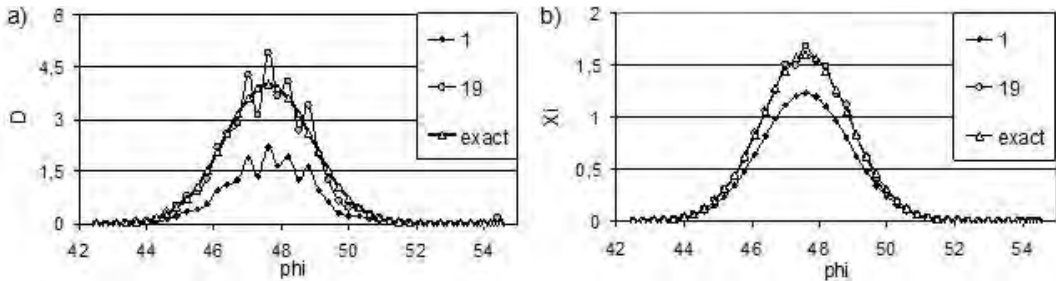


Рис. 3. Данные наблюдений на одной из жидких границ  $\Omega$ : а) - гладкие и зашумленные, б) - заданные на части границы

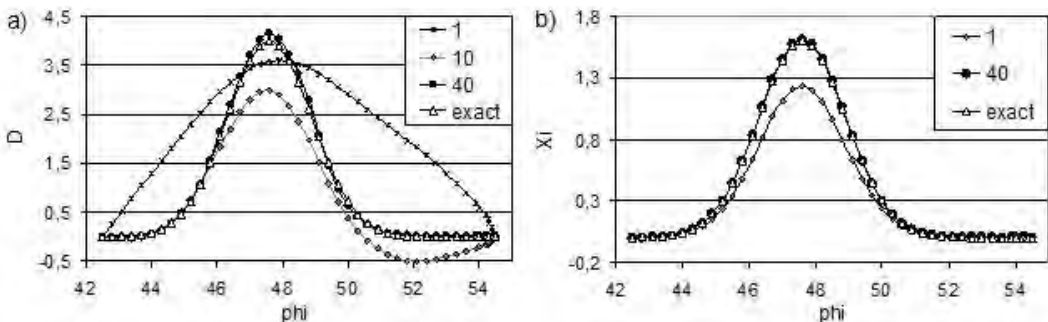
**1. Восстановление с «зашумленными» данными наблюдений.** «Белый шум» удовлетворяет следующему условию: величина шума, добавляемая к каждому значению  $d$ , не должна превышать заданного процента от величины самого  $\xi$ . На рис. 2 и 3 для функционалов (5) и (6) соответственно показан процесс восстановления функций  $d$  и  $\xi$  для 10%-но зашумленных данных наблюдений.

*Решение задачи с функционалом стоимости (5).* Восстановление произошло за 19 итераций. На рис. 4 видно, что в процессе восстановления  $\xi$  стремится к зашумленным значениям, т.е. к заданным наблюдаемым данным. В этом случае функция  $d$  оказалась очень чувствительной к внесенным погрешностям в данные наблюдений, вплоть до потери гладкости, при этом отклонение от точного решения граничной функции  $d$  в некоторых точках достигает 23%. Отметим, что при этом ошибка в равномерной норме восстановленного уровня свободной поверхности  $\xi$  имеет порядок  $10^{-5}$ .



**Рис. 4.** Итерационное восстановление функций  $d$  (a) и  $\xi$  (b) на одной из жидких границ  $\Omega$  для зашумленных данных наблюдений. Функционал стоимости в Задаче имеет вид (5)

*Решение задачи с функционалом стоимости (6).* Восстановление произошло за 40 итераций. Несмотря на то, что объем вычислений в данном случае больше, чем в предыдущем, использование функционала стоимости (6) имеет преимущества в гладкости восстанавливаемой функции. Из рис. 5 видно, что восстановленная функция  $d$  сохраняет гладкость точной (7), несмотря на внесенные погрешности в данные наблюдений и близка к точному решению. В отличие от результатов, полученных для функционала (5), восстановленный на границе уровень  $\xi$  практически совпадает незашумленными данными наблюдений, т.е. при восстановлении происходит сглаживание погрешностей, внесенных «шумом».



**Рис. 5.** Итерационное восстановление функций  $d$  (a) и  $\xi$  (b) на одной из жидких границ  $\Omega$  для зашумленных данных наблюдений. Функционал стоимости в Задаче имеет вид (6)

**2. Восстановление с гладкими данными наблюдений, заданными на части границы по морю.** В численном эксперименте решалась задача на восстановление функции  $d$  в случае, когда всюду на жидкой границе были заданы гладкие данные наблюдений за исключением множества точек, образующих два непересекающихся отрезка, вдоль границы по морю, соответствующей  $\lambda = 161,5^\circ$ .

При решении задачи с использованием функционала стоимости (5) функция  $d$  восстановилась лишь в точках, где наблюдения были заданы. В точках, в которых данные наблюдений отсутствовали, значения функции  $d$  на протяжении всего процесса восстановления оставались практически неизменными, равными первоначально заданному  $d=0$ .



Результаты численного эксперимента с использованием функционала стоимости (6) показаны на рис. 6. Там же изображен график данных наблюдений с пробелами. Из рисунка видно, что предлагаемый метод восстанавливает уровень свободной поверхности  $\xi$  и функцию  $d$  по всей жидкой границе, включая точки, в которых данные наблюдений не были заданы. Восстановление проходит за 142 итерации и демонстрирует хорошее согласование восстановленных значений с точным решением.

Численные эксперименты показали явное преимущество метода решения задачи на восстановление с использованием функционала стоимости (6). Метод не только восстановил данные по всей жидкой границе с части границы, но и оказался устойчивым к погрешностям, которые неизбежно вносят измерения.

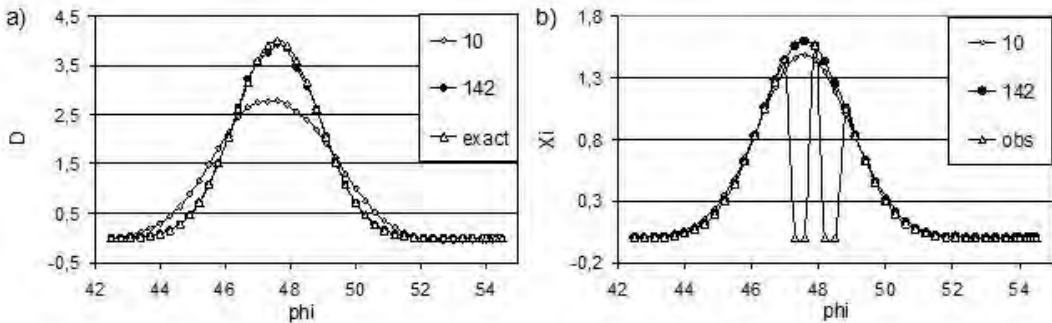


Рис. 6. Итерационное восстановление функций  $d$  (а) и  $\xi$  (б) на одной из жидких границ  $\Omega$  для данных наблюдений с пробелами. Функционал стоимости в задаче имеет вид (6)

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00224-а, гранта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (ГК\_02.740.11.0621 от 29.03.2010 г.)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марчук Г.И., Каган Б.А., Динамика океанских приливов. Л.: Гидрометиздат, 1983.
- [2] Agoshkov V.I., Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. Vol. 20, № 1. P. 1-18.
- [3] Kamenshchikov L.P., Simulation of surface waves in basins by the finite element method. Kamenshchikov L.P., Karepova E.D., Shaidurov V.V., Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2006. Vol. 21(4). Pp. 305-320.
- [4] Кареева Е.Д., Шайдуров В.В., Параллельная реализация МКЭ для начально-краевой задачи мелкой воды. Вычислительные технологии. 2009. Т.14, № 6. С. 45-57.
- [5] Агошков В.И., Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН. 2003. 256 с.
- [6] Киреев И.В., Пятаев С.Ф., Пиксельная технология дискретизации акватории Мирового океана. Вычислительные технологии. 2009. Т.14, № 5. С. 30-39.

## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА СПЕКТРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

*We find the numerical solutions of the spatial stationary diffraction problems of acoustic waves with using the boundary integral equations method on the spectrum of integral operators. The differential and integral statements of the problems are not equivalent in this case. We propose a modification of the numerical method, which provides the solutions of diffraction problems in integral statements. We give the results of the numerical experiments, which illustrate the possibilities of this approach.*

### ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство  $R^3$  с ортогональной системой координат  $ox_1x_2x_3$ , заполненное однородной изотропной средой с плотностью  $\rho_e$ , скоростью распространения акустических колебаний  $c_e$  и коэффициентом поглощения  $\gamma_e$ , в котором имеется ограниченное произвольной замкнутой липшицевой поверхностью  $\Gamma$  однородное изотропное включение с плотностью  $\rho_i$ , скоростью звука  $c_i$  и коэффициентом поглощения  $\gamma_i$ . Области  $R^3$ , занятые включением и вмещающей средой, обозначим через  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$  ( $\Omega_e = R^3 \setminus \Omega_i$ ).

Сформулируем исходную задачу.

**Задача 1.1 (обобщённая постановка задачи дифракции).** Найти функции  $u_{i(e)} \in H^1(\Omega_{i(e)})$ , удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_{i(e)}} \nabla u_{i(e)} \nabla v_{i(e)}^* dx - k_{i(e)}^2 \int_{\Omega_{i(e)}} u_{i(e)} v_{i(e)}^* dx = 0 \quad \forall v_{i(e)} \in H_0^1(\Omega_{i(e)}), \quad (1.1)$$

условиям сопряжения на границе раздела сред из  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$

$$\langle u_i - u_e, \mu \rangle_\Gamma = \langle u_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.2)$$

$$\langle \eta, p_i N u_i - p_e N u_e \rangle_\Gamma = \langle \eta, p_e u_1 \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma),$$

и условию излучения на бесконечности

$$\partial u_e / \partial |x| - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

если на границе включения  $\Gamma$  заданы функции  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$  и  $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  - отношение двойственности на  $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , обобщающее скалярное произведение в  $H^0(\Gamma)$ ,  $v^*$  - комплексно сопряжённая к  $v$  функция,  $Nu \in H^{-1/2}(\Gamma)$  - нормальная производная  $u$ , понимаемая в смысле распределений [1],  $\omega$  - круговая частота колебаний,

$$p_{i(e)} = \left[ \rho_{i(e)} \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}) \right]^{-1}, \quad k_{i(e)}^2 = \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}) / c_{i(e)}^2, \quad \text{Im}(k_{i(e)}) \geq 0.$$

**Замечание 1.1.** Если  $\text{Im}(k_e) = 0$ , то  $u_e \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_e)$ .

Определения используемых функциональных пространств имеются в работе [1].

**Теорема 1.1** [2]. Задача 1.1 имеет не более одного решения.

Введём следующие обозначения

$$(A_{i(e)} q)(x) \equiv \langle G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\bar{\Lambda}}, \quad (B_{i(e)} q)(x) \equiv \langle N_x G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \quad (1.4)$$

$$(B'_{i(e)} q)(x) \equiv \langle N_{(\cdot)} G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_\Gamma, \quad G_{i(e)}(x, y) = \exp(ik_{i(e)}|x - y|) / (4\pi|x - y|).$$

Решение задачи 1.1 будем искать в виде потенциалов

$$u_e(x) = (A_e q)(x), \quad x \in \Omega_e, \quad (1.5)$$

$$u_i(x) = p_{ei} \left( A_i (Nu_e + u_1)^+ \right)(x) - \left( B'_i (u_e + u_0)^+ \right)(x), \quad x \in \Omega_i,$$

где  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  - неизвестная плотность,  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $p_{ei} = p_e/p_i$ , а знаком "+" отмечаются предельные значения соответствующих выражений на  $\Gamma$ , когда  $x \rightarrow \Gamma$  из области  $\Omega_e$ .

Ядрами интегральных операторов здесь являются фундаментальные решения уравнений Гельмгольца и их нормальные производные, поэтому  $u_{i(e)}$  удовлетворяют тождествам (1.1) и условию излучения (1.3) для  $u_e$ . Кроме того, выполнение для них первого из условий сопряжения (1.2) автоматически влечёт за собой выполнение второго условия сопряжения. Подставляя потенциалы (1.5) в условия сопряжения (1.2), получаем слабо сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода для определения неизвестной плотности  $q$ :

$$\langle (Cq), \mu \rangle_\Gamma = \langle v_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.6)$$

$$(Cq)(x) \equiv \left( (0.5(A_e + p_{ei}A_i) + (B'_iA_e - p_{ei}A_iB_e))q \right)(x),$$

$$v_0(x) = -0.5u_0(x) + p_{ei}(A_iu_1)(x) - (B'_iu_0)(x). \quad (1.7)$$

**Теорема 1.2** [2]. Пусть  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $\gamma_e > 0$  или  $\omega$  не является собственной частотой задачи

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1.8)$$

Тогда уравнение (1.6) корректно разрешимо в классе плотностей  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  и формулы (1.5) дают решение задачи 1.1.

Потенциалы (1.5) предпочтительней использовать, когда необходимо рассчитать отражённое волновое поле в области  $\Omega_e$ , поскольку в этом случае расчёты проводятся по достаточно простой формуле. Если же необходимо вычислить проходящее волновое поле в области  $\Omega_i$ , предпочтительнее использовать потенциалы следующего вида:

$$u_i(x) = (A_i q)(x), \quad x \in \Omega_i, \quad (1.9)$$

$$u_e(x) = \left( A_e (u_1 - p_{ie}Nu_i)^- \right)(x) - \left( B'_e (u_0 - u_i)^- \right)(x), \quad x \in \Omega_e,$$

где  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  - неизвестная плотность,  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $p_{ie} = p_i/p_e$ , а знаком "-" отмечаются предельные значения соответствующих выражений на  $\Gamma$ , когда  $x \rightarrow \Gamma$  из области  $\Omega_i$ .

И в этом случае задача 1.1 сводится к слабо сингулярному интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\langle (Dq), \mu \rangle_\Gamma = \langle u_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.10)$$

$$(Dq)(x) \equiv \left( (0.5(A_i + p_{ie}A_e) + (p_{ie}A_eB_i - B'_eA_i))q \right)(x).$$

**Теорема 1.3** [2]. Пусть  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $u_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $\gamma_e > 0$  или  $\omega$  не является собственной частотой задачи (1.8). Тогда уравнение (1.10) корректно разрешимо в классе плотностей  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  и формулы (1.9) дают решение задачи 1.1.

Целью данной работы является рассмотрение наиболее трудных с вычислительной точки зрения случаев, когда решение задачи дифракции ищется на собственных частотах задачи (1.8).

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Применяемый метод численного решения представляет собой развитие методики, предложенной и впервые апробированной в работе [3]. Кратко опишем схему его реализации.

Построим покрытие поверхности  $\Gamma$  системой  $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$  окрестностей узловых точек  $x'_m \in \Gamma$ , лежащих внутри сфер радиусов  $h_m$  с центрами в  $x'_m$ , и обозначим через  $\{\varphi_m\}$  подчинённое ему разби-

ение единицы. Тогда

$$\sum_{m=1}^M \varphi_m(x) = 1 \quad \forall x \in \Gamma, \quad 0 \leq \varphi_m \leq 1, \quad \text{supp} \varphi_m \subset \Gamma_m.$$

В качестве  $\varphi_m$  будем использовать функции

$$\varphi_m(x) = \varphi'_m(x) \left( \sum_{n=1}^M \varphi'_n(x) \right)^{-1}, \quad \varphi'_n(x) = \varphi'(r_n/h_n), \quad \varphi'(t) = \begin{cases} (1-t^2)^3, & t < 1, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases}$$

где  $r_n = |x - x'_n|$ .

Приближённые решения интегральных уравнений будем искать на сетке  $\{x_m\}$ ,

$$x_m = (\bar{\varphi}_m)^{-1} \int_{\Gamma} x \varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int_{\Gamma} \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжести функций  $\varphi_m$ . В дальнейшем будем предполагать, что для всех  $m, n=1, 2, \dots, M$  выполняются неравенства

$$0 < h' \leq r_{mn}, \quad m \neq n, \quad h' \leq h_n \leq h, \quad h/h' \leq q_0 < \infty.$$

Здесь  $r_{mn} = |x'_m - x'_n|$ ,  $h', h$  - положительные числа, зависящие от  $M$ ,  $q_0$  не зависит от  $M$ .

Вместо заданной на  $\Gamma$  неизвестной функции  $q$  будем рассматривать обобщённую функцию  $q\delta_{\Gamma}$ , действующую по правилу

$$(q\delta_{\Gamma}, \Psi)_{R^3} = \langle q, \Psi \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \Psi \in H^1(R^3).$$

Эту функцию будем приближать выражением

$$q(x)\delta_{\Gamma}(x) \approx \sum_{n=1}^M q_n \bar{\varphi}_n \psi_n(x), \quad \psi_n(x) = (\pi\sigma_n^2)^{-3/2} \exp(-r_n^2/\sigma_n^2), \quad x \in R^3,$$

где  $q_n$  - неизвестные коэффициенты,  $\sigma_n^2 = 0.5\bar{\varphi}_n$ .

Интегральный оператор первого рода из (1.4) аппроксимируем по формулам [4]:

$$\int_{\Gamma} (A_{i(e)} q) \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M A_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.1)$$

$$A_{i(e)}^{mn} \equiv A_{mn}(k_{i(e)}), \quad A_{mn} = 0.5\beta_{mn} \exp(-\gamma_{mn}^2) (w(z_{mn}^+) - w(z_{mn}^-)) / r_{mn}, \quad n \neq m,$$

$$A_{mm} = \beta_{mm} \left( 2(\pi\sigma_{mm}^2)^{-1/2} + ikw(\mu_{mm}) + 2\pi^{1/2} (1 - \mu_{mm}^2/3) \sigma_{mm} / \bar{\varphi}_m \right),$$

$$\beta_{mn} = \bar{\varphi}_n \left( 4\pi(1 - \mu_{mn}^2 + 0.5\mu_{mn}^4) \right)^{-1}, \quad \sigma_{mn}^2 = \sigma_m^2 + \sigma_n^2, \quad \mu_{mn} = 0.5k\sigma_{mn},$$

$$z_{mn}^{\pm} = \pm\gamma_{mn} + i\mu_{mn}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn}/\sigma_{mn}, \quad i^2 = -1,$$

$$w(z) = \exp(z^2)(1 + \text{erf}(z)), \quad \text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Интегральный оператор второго рода из (1.4) аппроксимируем по формулам [4]:

$$\int_{\Gamma} (aq + B_{i(e)} q) \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2.2)$$

$$B_{i(e)}^{mn} = (4\pi r_{mn}^3)^{-1} n_{mn}^* \exp(ik_{i(e)} r_{mn}) (ik_{i(e)} r_{mn} - 1) \bar{\varphi}_n, \quad n_{mn}^* = \sum_{l=1}^3 n_{lm} (x_{lm} - x_{ln}),$$

$$B_{i(e)}^{mm} = -Gs(x_m) \text{ при } a = 0.5, \quad B_{i(e)}^{mm} = -1 - Gs(x_m) \text{ при } a = -0.5,$$

$$Gs(x_m) = \sum_{n \neq m}^M \frac{n_{mn}^* \bar{\varphi}_n}{4\pi r_{mn}^3} \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} N_y \frac{1}{|x_m - y|} d\Gamma_y = -\frac{1}{2}.$$

Интегральные операторы в левых частях уравнений (1.6) и (1.10) являются композицией интегральных операторов (2.1) и (2.2), поэтому аппроксимируем их по формулам [4]:

$$\int_{\Gamma} (Cq)\varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (A_e^{mn} B_i^{mn} - p_{ei} A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m=1,2,\dots,M, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Gamma} (Dq)\varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (p_{ie} A_e^{mn} B_i^{mn} - A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m=1,2,\dots,M, \quad (2.4)$$

а правые части уравнений (1.6) и (1.10) - по формулам

$$\int_{\Gamma} v_0 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \left( \text{Gs}(x_m) u_0(x_m) + \sum_{n=1}^M \bar{\varphi}_n [p_{ei} A_i^{mn} u_1(x_n) - u_0(x_n) B_i^{mn}] \right),$$

$$\int_{\Gamma} u_0 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m u_0(x_m), \quad m=1,2,\dots,M.$$

### МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Данная модификация впервые была предложена в работе [5] для численного решения задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений на спектре интегральных операторов. Основная её идея заключается в том, что приближённые решения интегральных уравнений находятся в виде линейной комбинации решений вспомогательных корректно разрешимых уравнений с «близкими» волновыми числами.

Обозначим через  $k_e > 0$  некоторое собственное волновое число задачи (1.8), а через  $q(k_e)$  - зависящее от него частное решение неоднородного уравнения (1.6) или (1.10). Выберем некоторое значение  $\delta > 0$ . Тогда для искомого частного решения имеет место равенство

$$q(k_e) = 4q(k_e + i\delta) - q(k_e - \delta + i\delta) - q(k_e + \delta + i\delta) - q(k_e + 2i\delta) + O(\delta^4), \quad (3.1)$$

все плотности в правой части которого являются решениями корректно разрешимых интегральных уравнений. Назовём такую модификацию методом интерполяции решения.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

**Пример 4.1.** Рассматривается задача 1.1,  $\Gamma$  - единичная сфера с центром в начале координат. Граничные условия:  $u_0(x) = \exp(ik_e x_3)$ ,  $u_1(x) = ik_e \exp(ik_e x_3) n_3$ . Параметры сред:  $k_i = 12.5$ ,  $\rho_i = 4$ ,  $k_e = 7.725251836937$ ,  $\rho_e = 3$  (I);  $k_i = 7$ ,  $\rho_i = 2$ ,  $k_e = 16.9236212852138$ ,  $\rho_e = 5$  (II);  $k_i = 21$ ,  $\rho_i = 7$ ,  $k_e = 13.6980231532492$ ,  $\rho_e = 4.5$  (III).

В качестве  $k_e$  во всех случаях выбирались собственные волновые числа задачи (1.8). Точные решения задач из примера 4.1 имеются в работе [6].

Исследование интегральных уравнений (1.6) и (1.10) из примера 4.1 показало, что эти уравнения обладают разными свойствами. Для уравнения (1.6) не существует решения, которое при подстановке в формулы (1.5), даёт решение задачи дифракции. Поэтому формула (3.1) в данном случае не даст результата. Напротив, для уравнения (1.10) существует бесчисленное множество решений, которые, в силу теории Фредгольма, являются суммой частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения (1.10). Частное решение уравнения (1.10), подставленное в формулы (1.9), даёт решение задачи дифракции. Оно может быть приближённо найдено при помощи формулы (3.1).

Основной целью численных экспериментов являлась демонстрация возможностей метода интерполяции решения. В связи с этим, задачи из примера 4.1 решались дважды: без интерполяции решения и с интерполяцией решения (формулы (3.1)). В последнем случае  $\delta = 0.01$ . Результаты расчётов представлены в виде графиков в двойных логарифмических переменных  $\lg \varepsilon$  от  $\lg M$ , где  $\varepsilon$  - относительная погрешность вычисления. При точном степенном законе убывания погреш-

ности эти графики будут асимптотически переходить в прямые линии с наклоном  $\text{tg}\alpha = -p/2$ , где  $p$  - порядок аппроксимации относительно «шага»  $h \sim M^{-1/2}$  заданной на граничной поверхности сетки. Графики погрешностей для первого набора параметров помечены квадратами, для второго - треугольниками, для третьего - кругами, погрешности решений во внутренней области изображены сплошной линией, во внешней области - пунктиром.

Численные эксперименты проводились на кластере ВЦ ДВО РАН. Количество точек дискретизации  $M$  варьировалось от 500 до 128000, решения СЛАУ находились численно при помощи GMRES [7] с точностью до  $10^{-9}$ .

На рис. 4.1 и 4.2 приведены погрешности решений задач дифракции, полученных в результате подстановки решений уравнений (1.6) и (1.10) в формулы (1.5) и (1.9) соответственно. Расчёты проведены без интерполяции и с интерполяцией решения, погрешности вычислены в норме пространств сеточных функций  $H_h^0(\Omega_{i(e)})$ . Видно, что уравнение (1.6) не может быть использовано для нахождения приближённых решений задач дифракции, т.к., погрешность, начиная с некоторого момента, не уменьшается. Интерполяция решения не даёт в данном случае результата, в силу изложенных выше свойств уравнения (1.6).

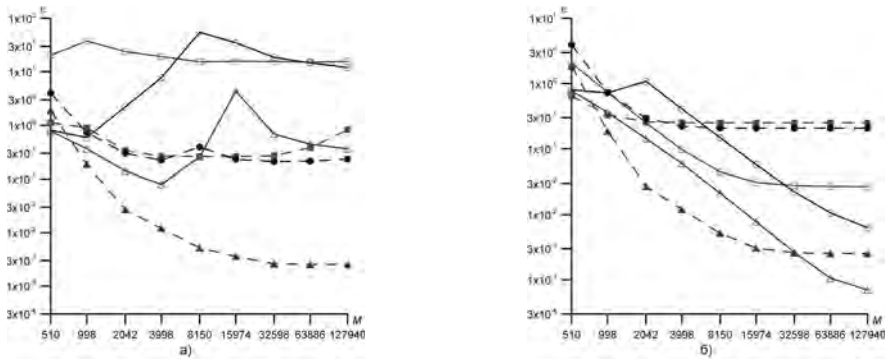


Рис. 4.1. Погрешности вычисления решений задач дифракции из примера 4.1, найденных по формулам (1.5), а) без интерполяции; б) с интерполяцией (сплошная линия - во внутренней области, пунктир - во внешней области)

Для решений задач дифракции, полученных по формулам (1.9) с интерполяцией решения, при достаточно больших  $M$  погрешность решений имеет порядок не хуже  $h^2 \sim M^{-1}$ . Расчёты без интерполяции в этом случае дают неудовлетворительные результаты. Сравнение погрешностей, представленных на рис. 4.2, показывает эффективность метода интерполяции решения.

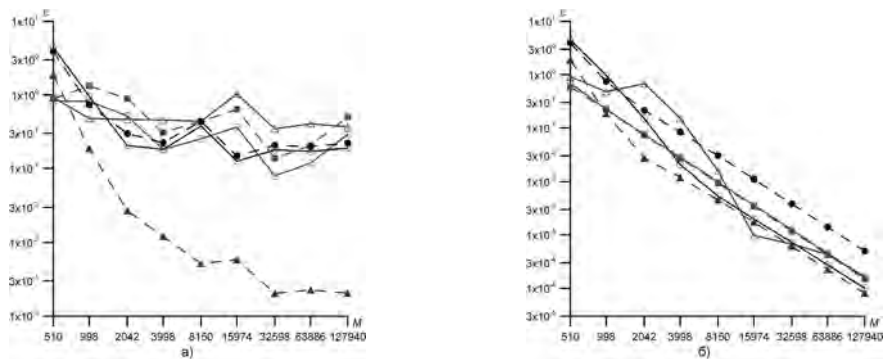


Рис. 4.2. Погрешности вычисления решений задач дифракции из примера 4.1, найденных по формулам (1.9), а) без интерполяции; б) с интерполяцией (сплошная линия - во внутренней области, пунктир - во внешней области)

**Пример 4.2.** Поиск частных решений уравнения (1.10) из примера 4.1.

Частные решения уравнения (1.10) найдём по формуле (3.1). Сравним их и решения уравнения (1.10), полученные без интерполяции, с точными частными решениями этих уравнений. На рис.

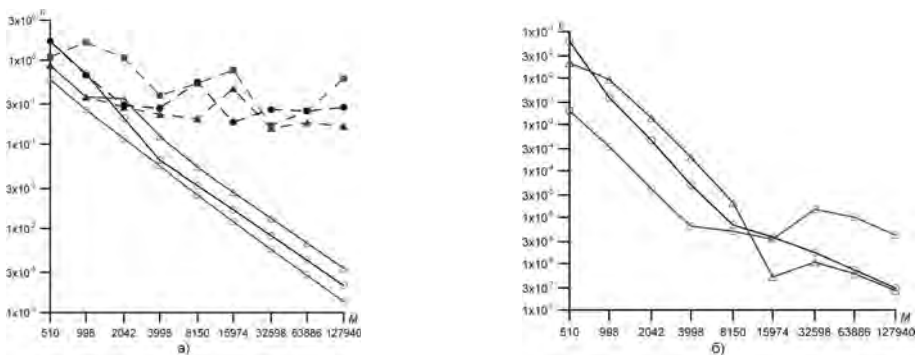
4.3 а) изображены погрешности искоемых решений из примера 4.2, найденные без интерполяции (пунктир) и с интерполяцией решения (сплошная линия). Погрешность вычислена в норме пространств сеточных функций  $H_h^{-1/2}(\Gamma)$ , с использованием формул

$$\|q^h\|_{H_h^{-1/2}(\Gamma)}^2 = \sum_{m,n=1}^M A_{mn} q_m q_n^*, \quad A_{mn} = \frac{\bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n \operatorname{erf}(\gamma_{mn})}{4\pi r_{mn}}, \quad m \neq n, \quad A_{mm} = \frac{\bar{\varphi}_m^2}{2\pi^{3/2} \sigma_{mm}} + \frac{\sigma_{mm} \bar{\varphi}_m}{2\pi^{1/2}},$$

где  $q_n^*$  - комплексно сопряженное к  $q_n$  число.

**Пример 4.3.** Поиск нетривиальных решений однородных уравнений (1.10) из примера 4.1.

Нетривиальные решения однородных уравнений (1.10) найдём приближённо, как разность между двумя плотностями - вычисленными без интерполяции решения и с интерполяцией решения. Нормируем полученные решения и подставим их в потенциал простого слоя (1.5) при  $x \in \Gamma$ . На рис. 4.3 б) приведены графики норм невязки искоемых решений в пространстве  $H_h^{-1/2}(\Gamma)$ . Видно, что метод интерполяции решения позволяет вычислять нетривиальные решения однородных уравнений (1.10).



**Рис. 4.3.** а) Погрешности вычисления частных решений уравнения (1.10) (с интерполяцией - сплошная линия, без интерполяции - пунктир); б) нормы невязки для нетривиальных решений однородных уравнений (1.10)

По результатам экспериментов можно сделать вывод, что метод интерполяции решения показал эффективность для приближённого решения задач дифракции в интегральных постановках на спектре интегральных операторов, если решения этих задач отыскиваются в виде потенциалов (1.9). Расчёты без интерполяции и в этом случае, и при поиске решений исходных задач в виде потенциалов (1.5) дают неудовлетворительные результаты. Предлагаемый метод прост, не требует знания спектра, не привязан к конкретной реализации приближённого решения вспомогательных задач и потому может быть легко использован для тех же целей в связке с другими схемами численного решения интегральных уравнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 372 p.
- [2] Каширин А.А., Смагин С.И. Обобщённые решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции, Дифференц. уравнения, 2006. Т. 42. № 1. С. 79-90.
- [3] Смагин С.И. Численное решение интегрального уравнения I рода со слабой особенностью для плотности потенциала простого слоя, ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28, № 11. С. 1663-1673.
- [4] Каширин А.А. Исследование и численное решение интегральных уравнений трёхмерных стационарных задач дифракции акустических волн: Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. Хабаровск, 2006. 118 с.
- [5] Каширин А.А. О численном решении задач Дирихле потенциалами простого слоя. Препринт 2010/157. Хабаровск: ВЦ ДВО РАН, 2010, 16 с.
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство Московского университета, 1999. 799 с.
- [7] Saad Y., Schultz M. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 7 (1986). P. 856-869.

## SPECIAL CUBE MODEL FOR MULTIPLE REGRESSION IN TRIANGULAR COORDINATES

*This paper presents a multiple regression calculation Methodology in Triangular Coordinates. For the special cubic model is defined: the equations of theoretical regression model, the determination of regression coefficients using the least square method, checking the adequacy of mathematical models, and graphical representation of a mathematical model with the triangular contour and surface diagram.*

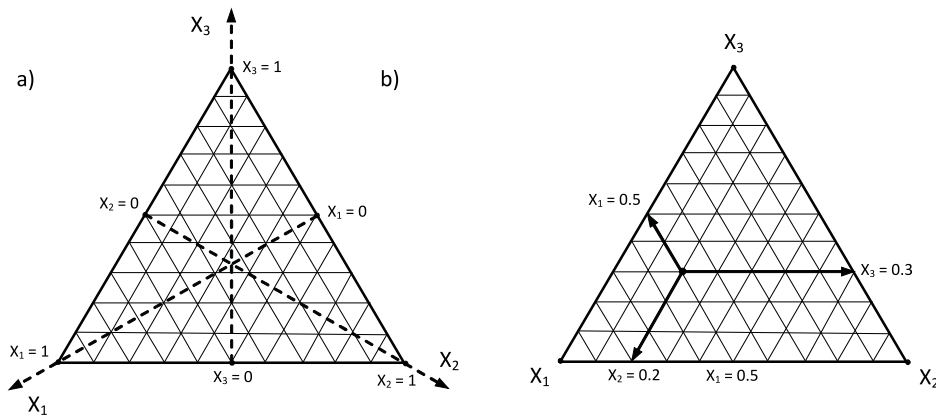
### INTRODUCTION

Three-component systems can be displayed graphically in two-dimensional space using triangular plots. The basic condition for applying triangular plots is:

$$0 \leq X_i \leq 1; \quad \sum_{i=1}^3 X_i = 1 \quad (1)$$

$X_i$  - relative weight of the component in the mixture.

From the above stated condition it is evident that the weight of each component in the mixture depends on the share of the remaining two components.



**Fig. 1.** Triangular diagram: a) display of vertical sections and the direction of the increase of the share of individual components, b) determining the composition of the alloy in the ternary system

Each point inside the triangle represents the corresponding composition of the three-component system. The vertices of the triangle represent pure substances while the points on the sides of the triangle represent two-component systems. For a point inside the triangle, the content of each of the components is determined by drawing lines through the point that are parallel to the sides of the triangle, to the remaining two sides of the triangle.

For a three-component system, regression models can generally be set in the form of lower-degree polynomials (usually the first, second and third) which are usually defined by the following canonical forms [1] [2]:

#### 1. Linear regression model

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Faculty Of Mechanical Engineering Kraljevo, Kraljevo, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia



## 2. Square regression model

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 \quad (3)$$

## 3. Incomplete cube regression model

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{123} X_1 X_2 X_3 \quad (4)$$

## 4. Complete cube regression model

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 + \delta_{12} X_1 X_2 (X_1 - X_2) + \dots \\ + \delta_{13} X_1 X_3 (X_1 - X_3) + \delta_{23} X_2 X_3 (X_2 - X_3) + \beta_{123} X_1 X_2 X_3 \quad (5)$$

## INCOMPLETE CUBE MODEL FOR MULTIPLE REGRESSION

General canonical form of the *theoretical regression model* of the three-component system assumed by equations of the incomplete cube multiple regression can be shown by the analytic expression:

$$\hat{Y} = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3 \quad (6)$$

Unknown values of multiple regression coefficients  $b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}$  and  $b_{123}$  are determined based on the lowest square method [3],[4],[7], i.e. from the condition that the sum of squared deviation

$$S = S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\ S = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i]^2 \quad (7)$$

be minimal.

Function  $S = S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123})$  will have a minimum only for those variable values  $b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}$  and  $b_{123}$  whose partial derivatives are equal to zero:

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_2} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_3} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_{12}} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_{13}} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_{23}} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_{123}} = 0 \quad (8)$$

which leads to a system of 7 equations with 7 unknown parameters that need to be calculated:

$$2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i] (-X_1)_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i] (-X_2)_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i] (-X_3)_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i] (-X_1 X_2)_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i] (-X_1 X_3)_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i] (-X_2 X_3)_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^N [Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3)_i] (-X_1 X_2 X_3)_i = 0 \quad (9)$$

This system of equations (9) can be reduced to a system of seven homogeneous linear equations with seven unknowns:

$$\begin{aligned}
& b_1 \sum_{i=1}^N X_1^2 + b_2 \sum_{i=1}^N X_1 X_2 + b_3 \sum_{i=1}^N X_1 X_3 + b_{12} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 + b_{13} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_3 + b_{23} \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 + b_{123} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3 = \sum_{i=1}^N X_1 Y \\
& b_1 \sum_{i=1}^N X_1 X_2 + b_2 \sum_{i=1}^N X_2^2 + b_3 \sum_{i=1}^N X_2 X_3 + b_{12} \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 + b_{13} \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 + b_{23} \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3 + b_{123} \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 = \sum_{i=1}^N X_2 Y \\
& b_1 \sum_{i=1}^N X_1 X_3 + b_2 \sum_{i=1}^N X_2 X_3 + b_3 \sum_{i=1}^N X_3^2 + b_{12} \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 + b_{13} \sum_{i=1}^N X_1 X_3^2 + b_{23} \sum_{i=1}^N X_2 X_3^2 + b_{123} \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 = \sum_{i=1}^N X_3 Y \\
& b_1 \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 + b_2 \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 + b_3 \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 + b_{12} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2^2 + b_{13} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3 + b_{23} \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 + b_{123} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2^2 X_3 = \sum_{i=1}^N X_1 X_2 Y \\
& b_1 \sum_{i=1}^N X_1^2 X_3 + b_2 \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 + b_3 \sum_{i=1}^N X_1 X_3^2 + b_{12} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3 + b_{13} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_3^2 + b_{23} \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 + b_{123} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3^2 = \sum_{i=1}^N X_1 X_3 Y \\
& b_1 \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 + b_2 \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3 + b_3 \sum_{i=1}^N X_2 X_3^2 + b_{12} \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 + b_{13} \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 + b_{23} \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3^2 + b_{123} \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3^2 = \sum_{i=1}^N X_2 X_3 Y \\
& b_1 \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 + b_2 \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3 + b_3 \sum_{i=1}^N X_2 X_3^2 + b_{12} \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 + b_{13} \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 + b_{23} \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3^2 + b_{123} \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2^2 X_3^2 = \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 Y
\end{aligned} \tag{10}$$

In regression analysis, these equations are called normal equations. The calculation of the system of equations (10) is best done using the matrix calculus. In the matrix form this system has the form:

$$\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^N X_1^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3 \\
\sum_{i=1}^N X_1 X_2 & \sum_{i=1}^N X_2^2 & \sum_{i=1}^N X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 \\
\sum_{i=1}^N X_1 X_3 & \sum_{i=1}^N X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 \\
\sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2^2 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2^2 X_3 \\
\sum_{i=1}^N X_1^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3^2 \\
\sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_2^2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3^2 \\
\sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2^2 X_3 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1 X_2^2 X_3^2 & \sum_{i=1}^N X_1^2 X_2^2 X_3^2
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{123} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N X_1 Y \\ \sum_{i=1}^N X_2 Y \\ \sum_{i=1}^N X_3 Y \\ \sum_{i=1}^N X_1 X_2 Y \\ \sum_{i=1}^N X_1 X_3 Y \\ \sum_{i=1}^N X_2 X_3 Y \\ \sum_{i=1}^N X_1 X_2 X_3 Y \end{bmatrix} \tag{11}$$

Or the short form:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{Y} \tag{12}$$

Values of regression coefficients are calculated from the relation:

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y} \tag{13}$$

### EXAMPLE OF USING THE INCOMPLETE CUBE MODEL

For this example, the values of hardness of the ternary alloy, i.e. three-component Sb-Bi-Zn system, are used. For each alloy, with its mole fractions shown in Table 1, three measurements were conducted, and then the mean hardness value was calculated.

**Table 1.** Mole fraction of components Sb, Bi and Zn and mean hardness value HB

<i>i</i>	<i>Sb</i>	<i>Bi</i>	<i>Zn</i>	<i>HB</i>
	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>Y</i>
1	0,00	0,50	0,50	132,0
2	0,10	0,45	0,45	46,0
3	0,20	0,40	0,40	52,0
4	0,30	0,35	0,35	87,0
5	0,40	0,30	0,30	45,9
6	0,50	0,25	0,25	45,0
7	0,60	0,20	0,20	51,5
8	0,70	0,15	0,15	56,1
9	0,80	0,10	0,10	49,7
10	0,90	0,05	0,05	52,0
11	1,00	0,00	0,00	412,0

<i>i</i>	<i>Sb</i>	<i>Bi</i>	<i>Zn</i>	<i>HB</i>
	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>Y</i>
12	0,50	0,00	0,50	32,0
13	0,45	0,10	0,45	25,3
14	0,40	0,20	0,40	42,0
15	0,35	0,30	0,35	46,0
16	0,30	0,40	0,30	79,6
17	0,25	0,50	0,25	83,0
18	0,20	0,60	0,20	77,3
19	0,15	0,70	0,15	87,0
20	0,10	0,80	0,10	85,7
21	0,05	0,90	0,05	48,6
22	0,00	1,00	0,00	294,0

<i>i</i>	<i>Sb</i>	<i>Bi</i>	<i>Zn</i>	<i>HB</i>
	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>Y</i>
23	0,50	0,50	0,00	82,0
24	0,45	0,45	0,10	56,4
25	0,40	0,40	0,20	32,1
26	0,35	0,35	0,30	30,6
27	0,30	0,30	0,40	49,7
28	0,25	0,25	0,50	53,2
29	0,20	0,20	0,60	67,2
30	0,15	0,15	0,70	74,8
31	0,10	0,10	0,80	89,7
32	0,05	0,05	0,90	88,2
33	0,00	0,00	1,00	94,2

The hardness measurement was conducted according to Brinell HB (SRBS C.A4.032). Values of the mole fractions of the components are marked with X1, X2 i X3 and mean hardness with Y. Experimental points are distributed along the three quasi-binary sections, Sb-BiZn, Bi-SbZn and Zn-SbBi (Fig. 2).

The diagram on the Fig. 3. shows the dependence of the hardness on the antimony (Sb) mole fraction and it can be seen that the hardness value for the antimony mole fraction from 0 to 0.4 varies between 40-130HB, then it stabilizes around 50HB, and with values larger than 0.9 there is a rapid growth from 50 to 412HB.

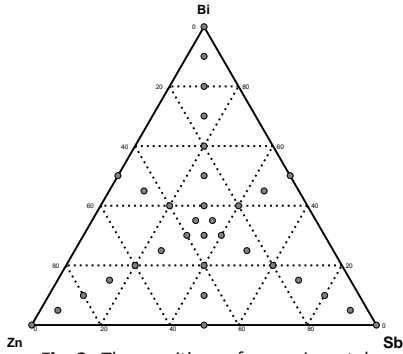


Fig. 2. The position of experimental points in the experimental plan

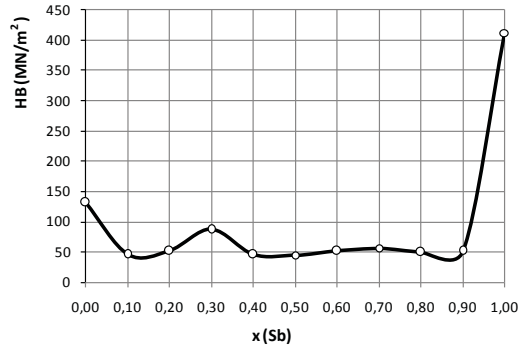


Fig. 3. Mean hardness value in the quasi-binary section Sb-BiZn

The influence of the mole fraction of bismuth (Bi) can be seen along the quasi-binary section from the Fig. 4. The hardness value slightly grows with bismuth mole fractions from 0 to 0.9 after which there is a rapid growth like with antimony. Unlike these two elements, the influence of the zinc (Zn) mole fraction is such that it causes a drop in hardness from 80 to 30HB in interval 0-0.3. However, mole fractions higher than 0.3 causes constant increase of hardness up to a value of 94.2 HB which can be seen on the quasi-binary section show in Fig. 5.

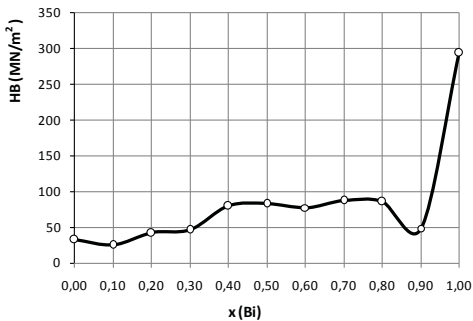


Fig. 4. Mean hardness value in the quasi-binary section Bi-SbZn

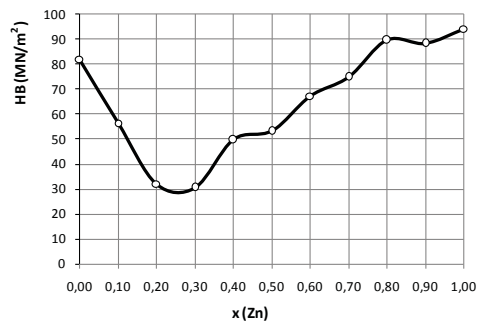


Fig. 5. Mean hardness value in the quasi-binary section Zn-BiSb

To establish a relation between the dependant variable, i.e. the object of the research (hardness in HB) and the selected influential parameters (mole fraction of Sb, Bi and Zn) the dependence is assumed in form of an equation (6).

Values of the matrices X and Y were obtained based on experimental data.

$$X = \begin{bmatrix} 5,77500 & 2,61250 & 2,61250 & 0,99688 & 0,99688 & 0,61875 & 0,20625 \\ 2,61250 & 5,77500 & 2,61250 & 0,99688 & 0,61875 & 0,99688 & 0,20625 \\ 2,61250 & 2,61250 & 5,77500 & 0,61875 & 0,99688 & 0,99688 & 0,20625 \\ 0,99688 & 0,99688 & 0,61875 & 0,32498 & 0,20625 & 0,20625 & 0,06198 \\ 0,99688 & 0,61875 & 0,99688 & 0,20625 & 0,32498 & 0,20625 & 0,06198 \\ 0,61875 & 0,99688 & 0,99688 & 0,20625 & 0,20625 & 0,32498 & 0,06198 \\ 0,20625 & 0,20625 & 0,20625 & 0,06198 & 0,06198 & 0,06198 & 0,01785 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 951,2950000 \\ 957,0850000 \\ 739,4200000 \\ 155,6860000 \\ 136,7382500 \\ 176,8907500 \\ 34,9646500 \end{bmatrix}$$

The calculated values of regression coefficients are shown in Table 2.

**Table 2.** Values of regression coefficients

$b_1$	268,55843
$b_2$	206,21587
$b_3$	125,87913
$b_{12}$	-872,99402
$b_{13}$	-776,72974
$b_{23}$	-240,00684
$b_{123}$	1579,85191

The mathematical model assumed by the equation (6) can now written in the form:

$$\hat{Y} = 268,55843X_1 + 206,21587X_2 + 125,87913X_3 - 872,99402X_1X_2 - 776,72974X_1X_3 - 240,00684X_2X_3 + 1579,85191X_1X_2X_3 \quad (14)$$

### Checking the adequacy of the mathematical model

For the incomplete cube model for multiple regression shown by the equation (14), the squared deviation of the empirical points from the regression equation were calculated, and the received value of the sum of squared deviation is SK=78515,932 (Table 3). Median standard deviation is:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = 48,7778$$

Since the absolute value of the biggest deviation  $\varepsilon_{\max}=143,44157$  is less than  $3\sigma=146,333$  it can be considered, based on the *three-sigma* rule, that the assumed functional dependence is good .

**Table 3.** Calculated sum of squared deviation for the regression line

$i$	$Y_i$	$\hat{Y}_i$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_i^2$
1	132,0	106,05	25,95	673,62
2	46,0	85,45	-39,45	1556,43
3	52,0	66,73	-14,73	216,85
4	87,0	52,24	34,76	1208,36
5	45,9	44,36	1,54	2,37
6	45,0	45,46	-0,46	0,21
7	51,5	57,90	-6,40	41,00
8	56,1	84,07	-27,97	782,13
9	49,7	126,32	-76,62	5870,18
10	52,0	187,02	-135,02	18231,59
11	412,0	268,56	<b>143,44</b>	20575,48
12	32,0	3,04	28,96	838,89
13	25,3	22,74	2,56	6,57
14	42,0	36,26	5,74	32,99
15	46,0	45,96	0,04	0,00
16	79,6	54,23	25,37	643,81
17	83,0	63,42	19,58	383,49
18	77,3	75,90	1,40	1,95
19	87,0	94,06	-7,06	49,81
20	85,7	120,25	-34,55	1193,56
21	48,6	156,84	-108,24	11716,76
22	294,0	206,22	87,78	7706,05
23	82,0	19,14	62,86	3951,55
24	56,4	35,69	20,71	428,74
25	32,1	44,62	-12,52	156,82
26	30,6	48,30	-17,70	313,12
27	49,7	49,08	0,62	0,38
28	53,2	49,35	3,85	14,83
29	67,2	51,47	15,73	247,41
30	74,8	57,81	16,99	288,51
31	89,7	70,75	18,95	359,08
32	88,2	92,65	-4,45	19,79
33	94,2	125,88	-31,68	1003,57
<b>Sum of squared deviation</b>				<b>78515,932</b>

## Graphic interpretation of the mathematical model

There is a number of software for drawing graphs in a triangular system. However, for our own research needs stemming from the cooperation of the Faculty of Mechanical Engineering Kraljevo and the Technical Faculty in Kosovska Mitrovica, the regression analysis for the three-component system and the procedure for obtaining a triangular 3D graph and a contour 2D diagram in a triangular system was done in the software package MATLAB 2008b.

The obtained mathematical model of the dependence of the surface hardness (in HB) on the mole fraction Sb-Bi-Zn, i.e. the selected parameters  $X_1$ ,  $X_2$  and  $X_3$  defined by the equation (14) is graphically represented with a surface triangular graph and its corresponding contour 2D plot in Figures 6 and 7. The possibility of obtaining such a mathematical model and graphic representations eliminates the need for drawing plots for quasi-binary sections and clearly shows the dependence of the observed characteristic on the dependant variables.

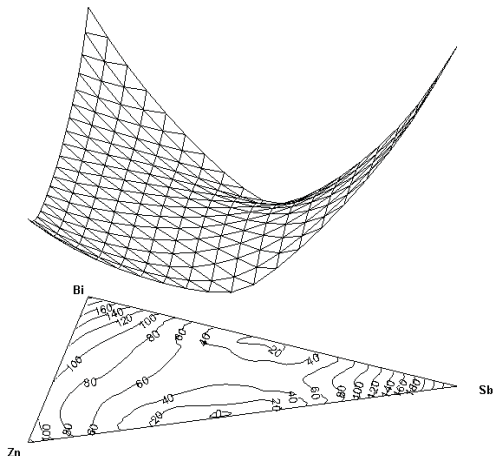


Fig. 6. Triangular 3D diagram of the surface hardness dependence on the mole fraction of Sb-Bi-Zn

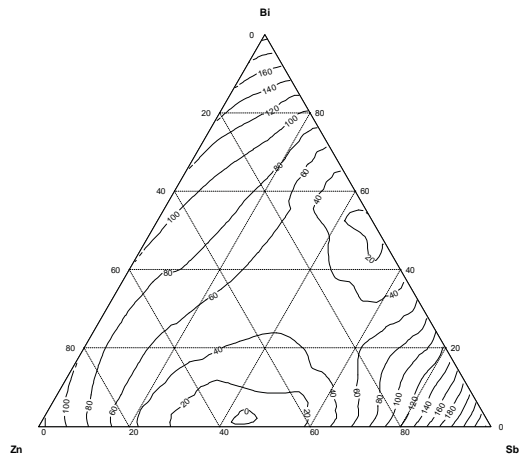


Fig. 7. Contour 2D diagram of the surface hardness dependence on the mole fraction Sb-Bi-Zn

## CONCLUSION

In the process of exploring electrical and mechanical properties of alloys, three-component systems have a significant role. The theoretical dependence of these values on the mole fraction of certain components in the mixture is obtained based on experimental results. It often occurs that the linear (1) and the square model (2) cannot describe this phenomenon in a satisfactory way so it is necessary to use canonical models in the form of higher-degree polynomials.

When it comes to multidimensional problems, in regression analysis it is extremely important to show this correlation, apart from obtained analytical dependencies, with visually adequate graphic representations (diagrams). The advantage of the Ternary graph is that with the space curved surface it is possible to represent and analyze four-dimensional and with categorized Ternary graph even five-dimensional problems.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to express appreciation to the Ministry of Education and Science of the Republic of Serbia for supporting this research through the projects TR37020 and OI 172037.

## LITERATURE

- [1.]Cornell, *Experiments with Mixtures*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley&Sons, Inc, New York, 1990.
- [2.]Lazić Ž. *Design of Experiments in Chemical Engineering*, Wilez-VCH Verlag GmbH&Co.KGaA, Weiheim, 2004.

- [3.]Nenadović M. *Matematička obrada podataka dobijenih merenjem*, Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd, 1988.
- [4.]Kolarević M, Rajović.M, Bjelić M. *Ternary graph i njegova primena u regresionoj analizi*, IMK-14 Istraživanje i razvoj, časopis instituta IMK "14 OKTOBAR" - Kruševac, Godina XI, broj (22-23) 3-4, Kruševac 2005, str. 113-122.
- [5.]Kolarević M. *Brzi razvoj proizvoda*, Zadužbina Andrejević, Beograd, 2004.
- [6.]Minic D, Aljilji A, Kolarević M, Manasijević D, Živković D. *Mechanical and Electrical Properties of Alloys and Isothermal Section of Ternary Cu-In-Sb System at 673 K* High Temperature Materials and Processes. Volume 11(2011), Issue 1-2, Pages 131-138;
- [7.]Krsmanović Lj, Vušković I. *Metod laboratorijskih merenja-opšti principi tehničkih merenja*, Mašinski fakultet, Beograd, 1984.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОЗЕРЕ ШИРА В ЛЕТНИЙ ПЕРИОД

---

*The calculations of hydrophysical characteristics of the lake Shira during the summer period are carried out using non-stationary three-dimensional model in approach of Bussinesk and the hydrostatics assumption. As the initial data results of natural observations in a season of field works 2009-2010 were used, allowed to define real distribution of temperature, salinity, force and direction of the wind.*

---

В настоящее время значительное внимание уделяется изучению биологических процессов в соленом озере Шира, расположенном в республике Хакасия (Россия).

Озеро Шира расположено в северной части Республики Хакасия, в 15 км от районного центра п. Шира. Это водоем овальной формы площадью 35.9 км<sup>2</sup>, максимальная длина 9.3 км, максимальная ширина 5.3 км, максимальная глубина в 2007-2009 гг составляла 24 м. Озеро бессточное, без островов, основной источник поступления воды – р. Сон (около 47 % от общего поступления), остальная часть воды поступает за счет осадков и подземных вод. В силу малости притока все влияние реки сосредоточено в приустьевой зоне, поэтому самым значимым внешним фактором, определяющим течение в озере, является ветровое воздействие. Средняя соленость в период исследований составляла в верхнем слое около 14 г/л, а в нижнем – около 19 г/л. Плотностная стратификация озера связана с неравномерным распределением температуры и солёности воды. Озеро замерзает в конце ноября, освобождается ото льда в начале мая. Озеро является популярным местом отдыха, обладает бальнеологическими свойствами, на его берегу более ста лет функционирует известный курорт «Озеро Шира».

В течение длительного времени в Институте биофизики СО РАН на базе научного стационара проводятся исследования функционирования экосистемы озера Шира.

Интерес к этому озеру обусловлен тем, что этот небольшой объект представляет модель других более крупных экосистем. При этом необходимы данные о характере гидрофизических процессов в озере, например, таких как скорости течений, распределение температуры и солёности.

Начиная с 2009 года, проводились измерения гидрофизических характеристик оз. Шира, в том числе измерение скоростей течения с помощью доплеровских профилографов ADCP. Эти приборы позволяют получать трехмерные векторы скорости течения по всей глубине озера.

Для численного моделирования течений в оз. Шира было решено использовать программу GETM. Идея для GETM (General Estuarine Transport Model) родилась в мае 1997 для моделирования вертикального перемешивания примесей в заливе Восточная Шельда и эта модель должна быть существенно трехмерной. Начали ее разрабатывать ученые из Германии и Дании Hans Burchard, Lars Umlauf (Baltic Sea Research Institute Warnemünde, Germany) и Karsten Bolding (Bolding & Burchard ApS, Asperup, Denmark)

Вначале была разработана модель GOTM (General Ocean Turbulence Model), которая являлась по сути одномерной моделью для турбулентного перемешивания по столбу жидкости. Сейчас это отдельная часть GETM. В дальнейшем была написана программа для моделирования трехмерных течений в водоемах, которая получила название GETM. Обе эти программы распространяются под GNU лицензией, т.е. являются свободным программным продуктом. Все детали проектов доступны на сайтах <http://www.gotm.net/> и <http://www.getm.eu/>.

---

<sup>1</sup> ИВМ СО РАН, Красноярск, Россия

Система уравнений, используемая в этой программе, является модификацией хорошо известной и часто используемой для расчетов российскими и зарубежными учеными, системой уравнений гидрофизики [1,2], основанной на приближении Буссинеска и предположении гидростатики:

$$\begin{aligned} & \partial_t u + \partial_z(uw) - \partial_z((v_t + \nu)\partial_z u) \\ & + \partial_x(u^2) + \partial_y(uv) - \partial_x(2A_h^M \partial_x u) - \partial_y(A_h^M (\partial_y u + \partial_x v)) \\ & - fv - \int_z^\zeta \partial_x b dz' = -g \partial_x \zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t v + \partial_z(vw) - \partial_z((v_t + \nu)\partial_z v) \\ & + \partial_x(vu) + \partial_y(v^2) - \partial_y(2A_h^M \partial_y v) - \partial_x(A_h^M (\partial_y u + \partial_x v)) \\ & + fu - \int_z^\zeta \partial_y b dz' = -g \partial_y \zeta. \end{aligned}$$

Здесь,  $u$ ,  $v$  и  $w$  являются компонентами скорости относительно направлений  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Вертикальная координата  $z$  находится в диапазоне от дна  $-H(x, y)$  до поверхности  $\zeta(t, x, y)$ , где  $t$  – время,  $v_t$  – вертикальная вихревая вязкость,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $f$  – параметр Кориолиса, и  $g$  – ускорение свободного падения. Горизонтальное перемешивание параметризуется членами, содержащими горизонтальную вихревую вязкость  $A_h^M$ .

Вертикальная скорость вычисляется из условия несжимаемости:

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0.$$

Выталкивающая сила  $b$  определяется как

$$b = -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

с плотностью  $\rho$  и относительной плотностью  $\rho_0$ .

Кинематические граничные условия задаются следующим образом:

$$w = \partial_t \zeta + u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta \quad \text{для } z = \zeta,$$

$$w = -u \partial_x H - v \partial_y H \quad \text{для } z = -H.$$

На нижних границах условия непротекания взяты для горизонтальных компонент скорости:

$$u = 0, v = 0.$$

На поверхности динамические граничные условия имеют вид:

$$(v_t + \nu) \partial_z u = \tau_s^x,$$

$$(v_t + \nu) \partial_z v = \tau_s^y.$$

Поверхностные напряжения (нормализованные относительной плотностью)  $\tau_s^x$  и  $\tau_s^y$  вычисляются как функции скорости ветра, направления ветра.

Так как приток мал, то можно считать озеро замкнутым водоемом и на закрытых границах ставится условие параллельности потока границе.

В GETM используются так называемые общие вертикальные координаты, для чего физическое пространство вертикально делится на  $N$  слоёв. Это сделано путем введения внутренних поверхностей  $z_k$ ,  $k = 1 \dots, N-1$ , которые не пересекаются, каждая зависит от горизонтального положения  $(x, y)$  и времени  $t$ . Пусть

$$-H(x, y) = z_0(x, y) < z_1(x, y, t) < \dots < z_{N-1}(x, y, t) < z_N(x, y, t) = \zeta(x, y, t)$$

определяет локальные глубины слоев  $h_k$  как  $h_k = z_k - z_{k-1}$  для  $1 \leq k \leq N$ . Далее производится преобразование координат с параметрами, позволяющими делать сетку по вертикали удобной для конкретного расчета.



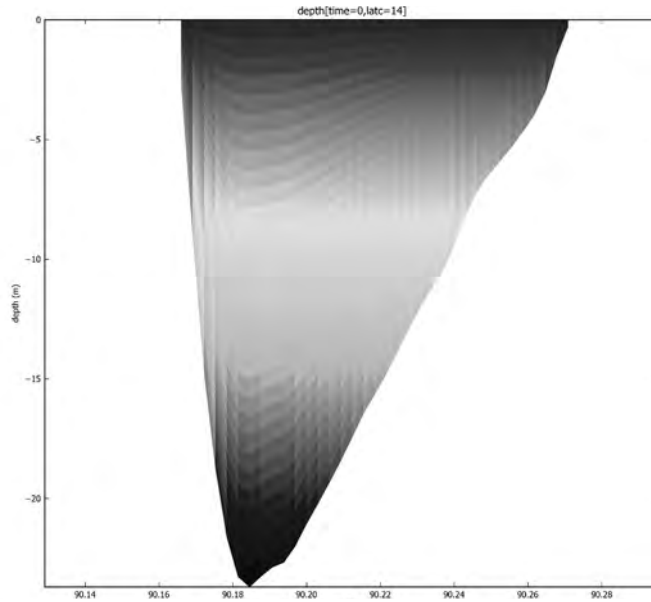


Рис. 1. Пример сетки для одного из сечений оз. Шира

Для пространственной дискретизации используется ступенчатая  $C$ -сетка. Сетка состоит из конечных объемов формы призмы с гранями, выровненными вдоль координат. Точки скорости расположены таким образом, чтобы соответствующие компоненты скорости были централизованы на поверхностях рекомендуемого блока для  $T$ -точки, точки скорости  $u$  (далее  $U$ -точки) на западных и восточных поверхностях, точки скорости  $v$  (далее  $V$ -точки) на южных и северных поверхностях и точки скорости  $w$  (далее  $W$ -точки) на нижних и верхних поверхностях. Индексация выполнена с индексами  $i$  в восточном направлении (ось  $X$ ), с индексами  $j$  в северном направлении (ось  $Y$ ) и с индексами  $k$  в верхнем направлении (ось  $Z$ ) так, что каждая точка сетки определяется тройным индексом  $(i, j, k)$ .  $T$ -точка и соответствующая восточная  $U$ -точка, северная  $V$ -точка и верхняя  $W$ -точка всегда имеют один и тот же индекс. В  $T$ -точках располагаются такие величины как температура  $T$ , соленость  $S$  и плотность. Все турбулентные величины, такие как вертикальная вихревая вязкость и вихревой коэффициент диффузии, расположены в  $W$ -точках.

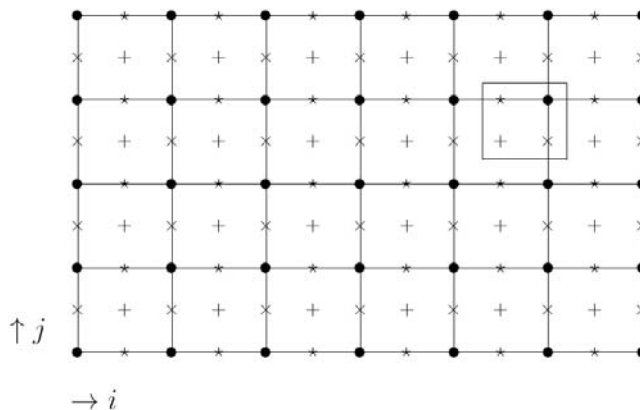


Рис. 2. Горизонтальная модельная сетка в Декартовых координатах. Показаны рекомендуемые блоки для  $T$ -точек. Здесь +:  $T$ -точки; x:  $U$ -точки; \*:  $V$ -точки; •:  $X$ -точки. Обведенный блок обозначает точки сетки одинаковым индексом  $(i, j)$ .

Были проведены расчеты гидрофизических характеристик оз. Шира в летний период с использованием программы GETM. В качестве начальных данных использовались результаты натурных

наблюдений в сезоне полевых работ 2009 - 2010 г., позволившие определить реальное распределение температуры и солености.

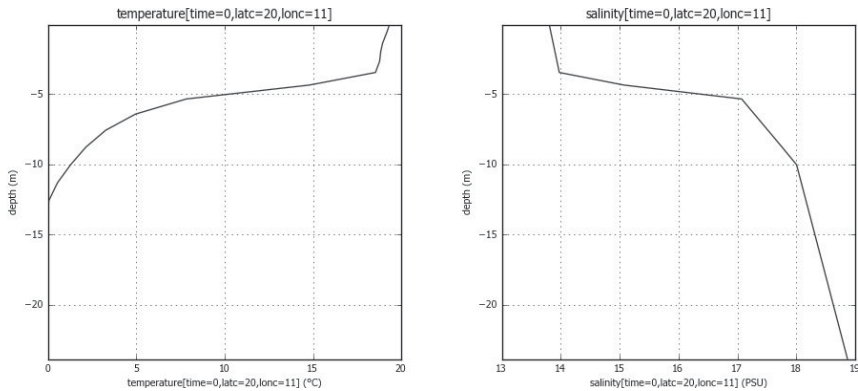


Рис. 3. Распределение температуры и солености в оз. Шира по результатам наблюдений в июле 2010 г.

В GOTM заложено несколько различных вариантов уравнения состояния. В наших расчетах использовалось линейное уравнение:  $\rho = \rho_0 + \varepsilon_1 (T - T_0) + \varepsilon_2 (S - S_0)$  [3]. Коэффициент вертикального турбулентного обмена рассчитывается в программе GOTM с использованием  $k-\varepsilon$  модели.

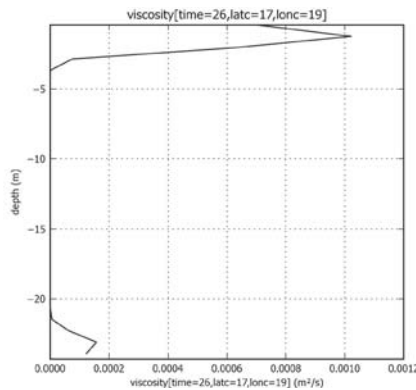


Рис. 4. Коэффициент вертикального турбулентного обмена, рассчитанный в программе GOTM.

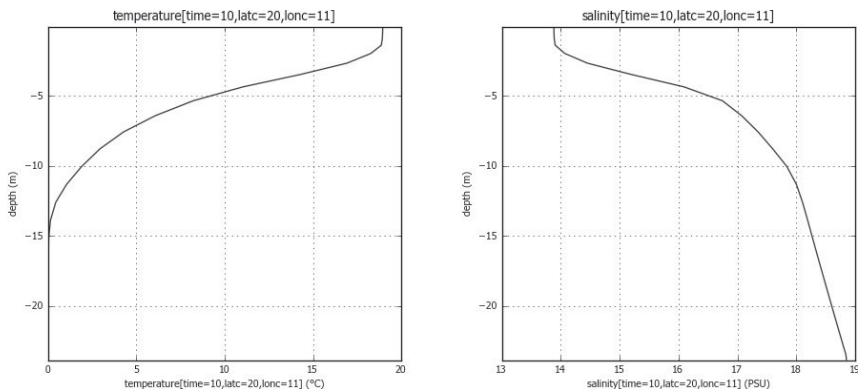


Рис. 5. Распределение температуры и солености через 6 часов, полученное в результате расчетов

Далее представлено поведение вектора горизонтальной скорости на поверхности бассейна, моделирующего батиметрию озера Шира, при южном ветре 5 м/сек через 6 часов и через 24 часа после начала расчета.

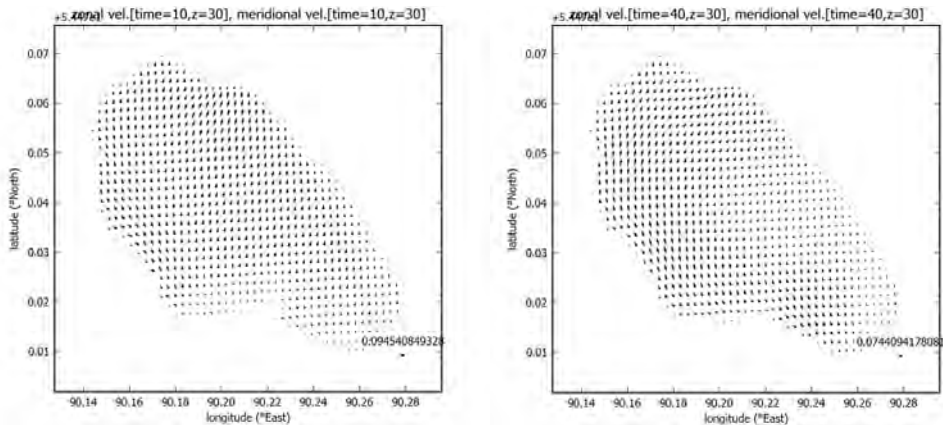


Рис. 6. Течение на поверхности через 6 часов слева и через 24 часа справа, ветер южный 5 м/сек

Профили скоростей в глубоководной части озера, полученные в результате численных расчетов, обращаются в ноль два раза, что качественно совпадает с профилями, полученными экспериментально.

На следующих рисунках показаны распределения горизонтальных скоростей по глубине для глубоководной части и мелководной части.

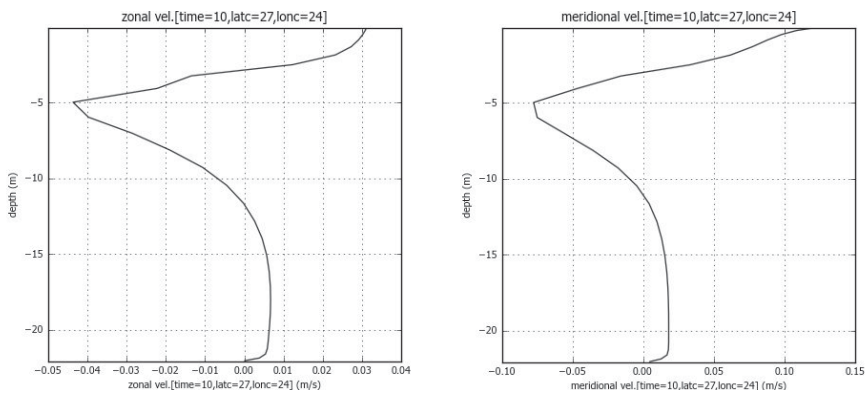


Рис. 7. Профили скоростей в точке глубиной 21 м, полученные в результате расчетов через 6 часов

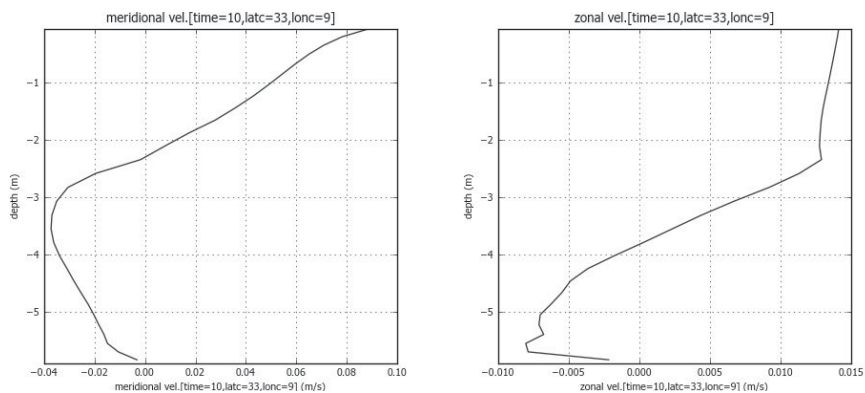


Рис. 8. Профили скоростей в точке глубиной 6 м, полученные в результате расчетов через 6 часов

На рис. 9 представлены профили скоростей в оз. Шира, полученные с помощью приборов ADCP мощностью 600 и 1200 МГц в точке глубиной 21 м

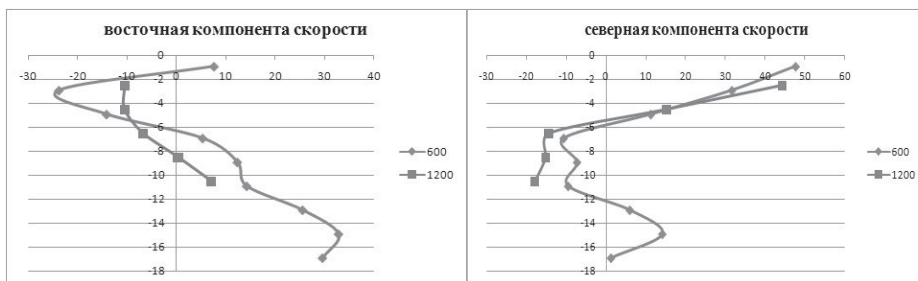


Рис. 9. Результаты натурных наблюдений

## ВЫВОДЫ

Численный алгоритм адаптирован для расчета ветровых течений в стратифицированном озере Шира. Результаты расчетов качественно совпадают с возможными конфигурациями течения в оз. Шира, полученными в результате натурных наблюдений и могут быть далее использованы для решения задач определения экологического состояния оз. Шира как часть комплексной системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марчук Г. И., Саркисян А. С. Математическое моделирование циркуляции океана. М.: Наука. 1988.
- [2] Wang, Y., Hutter K. Methods of substructuring in lake circulation dynamics. Advances in Water Resources. Vol.23. 2000. P. 399-425.
- [3] Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука. 1978.

## ADAPTIVE APPROACH TO SPARE PARTS INVENTORY MANAGEMENT SYSTEM IN AIRCRAFT MAINTENANCE

---

*Military-technical spare parts inventory management systems in the area of military aircraft maintenance are characterized by specific complexity and strict regimen of procedural systems. In earlier stages, these procedural systems have been modified with statistical data structures but their complexity, with required high number of reiterations, is suitable for projection onto related Bill of Materials (BOM) amended by dynamical data structures. The principle goal of this paper is improvement of military-technical spare part inventory system by proving the existence of projections of basic aircraft maintenance procedures onto related bill of materials which will enable straightforward managing of supplies and spare parts necessary for maintenance of military aircrafts. New bill of materials will also be applicable to other maintenance systems.*

---

### INTRODUCTION

Spare part management represents a crucial activity for both production and maintenance of aircrafts. Providing the right part (component) in the right place at the right time is the key problem. In cases when part of aircraft requires repairing, e.g. engine, and no spare part is available, it could result in a major loss. Aircraft maintenance represents a very expensive activity regardless if it concerns failure of key equipment or inventory management of spare parts and materials. Due to the aforesaid reasons, it is necessary to minimize failures and conduct effective planning and maintenance control by means of predicting the need for spare parts and repair requirements. Many ways to improve aircraft maintenance systems and spare parts requirements planning exist today. Critical Path Method (CPM) or similar software based on this method is often used in relation to maintenance activities, as well as Material Requirement Planning (MRP). Combination of these two systems is also used frequently.

The intention of this paper is to provide a new approach to inventory management of spare parts and materials, which is a complex and extensive task. It has been well-known that planning of maintenance activities by providing resources (machines, labor, tools, transportation etc.) and materials (raw materials and spare parts) affects the productivity and economic performance of any technical system significantly. Numerous methods such as Critical Path Method (CPM), Material Requirement Planning (MRP), Production Activity Control (PAC), and Rough Capacity Planning (RCCP) are now used for planning resources and materials allocation, with variable success rate.

Critical Path Method (CPM) is a project management technique wherein the closed network projects, consisting of activities and events, are planned and allocated on the basis of the start and the end of each activity and event. Material Requirement Planning (MRP) represents an analysis of requirements for purchase or production of components, spare or maintenance parts necessary for both production and maintenance. Its goal is optimization of supplies, accomplished by defining, i.e. adjustments of date and scope of supplies products' individual components. Plan of material requirements is based on a master plan, by decomposition of bill of materials (BOM). MRP uses return term-setting i.e. calculates when a specific quantity of parts is required starting from the final deadline of a project's completion. Based on that, a plan for ordering of parts is made so knowing of the exact time required for production or ordering of each part/material is vital. CPM also uses backward planning but planning starts from the project's commencement date and provides an insight to activities critical for project's completion. Many projects in production and maintenance use these management techniques but simultaneous

---

1 Faculty of Natural Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia

2 Faculty of Mechanical Sciences, Belgrade, Serbia

3 Faculty of Organizational Sciences, Belgrade, Serbia

utilization of both techniques burdens IT resources. Moreover, implementing both techniques in the decision making process demands significant efforts because of their interconnectivity (MRP decisions depend on CPM implementation results and vice versa). Due to these limitations MRP is rarely used in applications for aircraft maintenance.

Maintenance planning is generally based on two activities: planning of required supplies of materials and parts and calculating schedule of maintenance activities. The process of maintenance planning includes planning of supplies of materials, activities and resources. MRP technique is used to calculate required materials while CPM is used to set course for project cycle. Evidently, integration of these two techniques into a single system would improve efficiency of maintenance, i.e. by enabling availability of right materials when required in each phase of maintenance.

## **PROBLEM OF MAINTENANCE OF AIRCRAFTS**

Maintenance of aircrafts represents a complex task due to the existence of three levels of maintenance and each level requires planning, schedule of course of activity and control of large number of maintenance components, such as materials, activities, resources and supplies. As a consequence, the following problems occur:

- Generic bill of materials from which a large number of bills of materials originates.
- Large number of components and connectivity of components (dependability) in generic bill of materials.
- Structure of CPM project which encompasses a large scope of activities.
- Integration of process of material supplies planning, planning of maintenance project and supplies.
- Maintenance of large quantities of information/data in different individual systems.

Brosh [1] divided maintenance management into two categories:

- Mathematical approach to maintenance management
- Engineering approach to maintenance management.

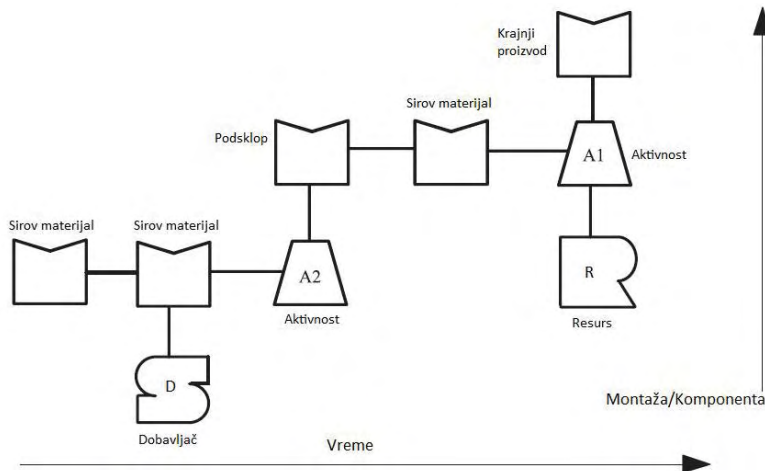
Mathematical approach primarily deals with development of optimal maintenance methods with utilization of statistical analyses of component failures. Engineering approach is more heuristic oriented and deals with formulation of a scope of maintenance activities acceptable (not necessarily optimal), necessary and likely to be realized in real conditions. Mathematical models result in good solutions in calculations of time for failure of individual components but it is difficult to define analytical model for components which are interdependent. Maintenance models are comparable and unperfected but with constant evaluation of results from those models and their comparison with requested output, it is possible to identify a model which would serve its purpose. In this paper, we will use the approach originally developed by Woxvold [2] for purpose of assembling - not maintenance.

## **UNIQUE STRUCTURAL APPROACH**

Unique structure enables appearance of all four components: materials, activities, resources and suppliers. However, unlike standard MRP methods, the time from the moment of placing an order to the moment of delivery is non-existent - all times are part of appropriate activities. Resources are connected to related activities and represent assets or labor necessary to perform appropriate activity. In this model, suppliers are used when materials come from external sources, required for realization of maintenance project. Picture 1 shows an example of the unique structural approach wherein the components are represented by letters „M“, „A“, „R“ and „D“, as starting letters of model components: materials, activity, resources and suppliers.

Unique structural approach was able to provide functionality required for assembling of final product, including planning of project, planning of necessary materials, control of production activities with supplies monitoring etc. However, unique structural approach, as shown in Picture 1, is not suitable for planning of required supplies and CPM activities in aircraft assembling (parts of aircraft). This is a con-

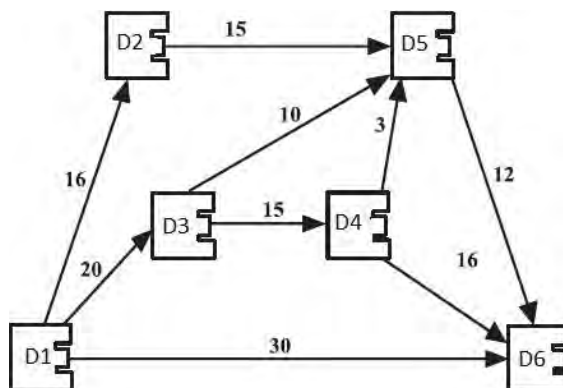
sequence of an added dependability between components and additional network links. Dependability between components can exist in form of relation component - component and component - activities. In order to meet all these requirements a modified unique structural approach in the process of aircraft assembling (parts of aircraft) was presented.



Pic. 1. Example of unique structure

### UNIQUE STRUCTURAL APPROACH IN PROCESS OF AIRCRAFT ASSEMBLING

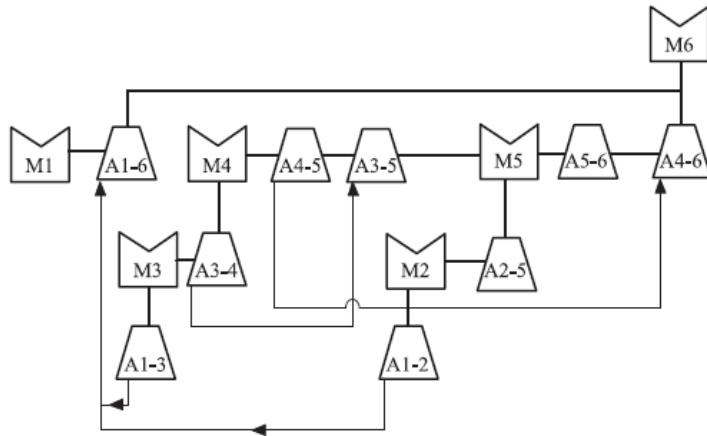
Previously described unique structure is further examined on the example of bills of materials (BOM) for planning of both activities and supplies in maintenance. In order to achieve a unique structure, combining of CPM networks with bills of materials (BOM), we will take into consideration CPM structure shown in Picture 2. This CPM structure shows occurrences on knots and each activity is represented by related arrow between the two knots. The arrows are oriented i.e. point which occurrence precedes and which follows related activity, while only duration of activity is marked on the arrow.



Pic. 2. Example of CPM network

In general, CPM networks use the theory of graphs in representing relations directly, as CPM uses only activities (or occurrences) and resources, each activity (or occurrence) has to be unique. It is already proven that widespread CPM networks can be represented [3] with hierarchical multilevel bills of material wherein relation between components (component - component, parent - component) is included in network links. Therefore, based on this approach, the unique structure which suits the above shown CPM structure with equivalent hierarchical structure of bills of material in which occurrences (D1 -D6) are replaced with components of bills of material (M1-M6), is shown in the next picture. Selection of

bill of materials (part, component) depends on the critical bill of materials which is required or available in that specific point. In this situation, it is assumed that each occurrence suits one single bill of material. Picture 2 shows activities as arrows that connect occurrences, while Picture 3 shows them as component *Activity*, marked with letter „A“ and numbers which relate to occurrences which precede or follow that activity. For example, activity between occurrences 1 and 3 is defined as A1-3. Although components of resources are not shown in Picture 3, each activity can be merged to a resource, as shown in Picture 1.



**Pic. 3.** Hierarchical bill of materials with CPM network

Unique structure shown in Picture 3 represents process of assembling together with assembling activities, bills of materials and network links. It is proven that CPM planning [3] and MRP [4] can be utilized to show planning and backward planning for all activities and materials shown in Picture 3, but implementation of these procedures in MRPII systems is not possible due to the following reasons:

- Existing systems show only one level of bills of materials;
- Shown structures are of different types: bills of materials are hierarchical while CPM structures are closed networks;
- Data are integrated into a database.

Nonetheless, structure shown in Picture 3 was not adequate for planning of maintenance due to complexity of process of maintenance. This complexity primarily includes different levels of maintenance, dependability on configuration structure of the system, operation of disassembling which is characteristic for maintenance of large systems such as those in the air forces. In order to meet these requirements, we will further examine the process of disassembling.

### IMPLEMENTATION OF A UNIQUE STRUCTURE IN MILITARY AIRCRAFT MAINTENANCE

Maintenance of complex systems can be considered as combination of disassembling process (mainly accessibility and control) and reassembling (repair and replacement) [6]. In other words, maintaining a part of the system first and foremost includes disassembling of that part, degree of maintenance which depends on the level of maintenance and then planning of the entire process of maintenance.

Planning of the process of reassembling of a part uses techniques of unique approach (CPM, PAC (Production Activity Control), MRP) in order to make all required materials, activities and resources available when needed. It is necessary to determine appropriate quantities of materials, duration of activities and number of required resources. In each production process, bill of materials that represents end product remains. Each component of bill of materials has its own unique identity. Each product has a different bill of materials - different components or assemblies. These bills of materials represent an ideal starting point in the planning process of the end product's maintenance. During the process



of planning of maintenance project, initial bills of materials can be utilized in reassembling operations. However, applications of MRP technique cannot be utilized since it is less likely that they will prove efficient because they are related to all components of targeted system and not only those which are necessary to us in the process of aircraft maintenance. The concept of disassembling is implemented for that reason.

Disassembling results in copied bills of materials which completely match original bills of materials. Maintenance activities and resources can then be added to one or another structure. Activities which include overview of conditions, dismantling and repairs are added to disassembling and activities such as servicing and reassembling go to the side of assembling. If all components are serviceable, than there is a balance between the two structures. However, if any of the components is unserviceable, the structure becomes unbalanced and demand for that component arises on the side of assembling. Demand can be met with different resources.

MRP uses backward planning, starting from the date of project's completion, with the aim to determine when which material (component) must be made available. PAC uses planning starting from the date of beginning of operation with the aim to determine the date of completion of project. Only CPM supports both backward planning and planning forward so this flexibility will be used in the process of maintenance planning.

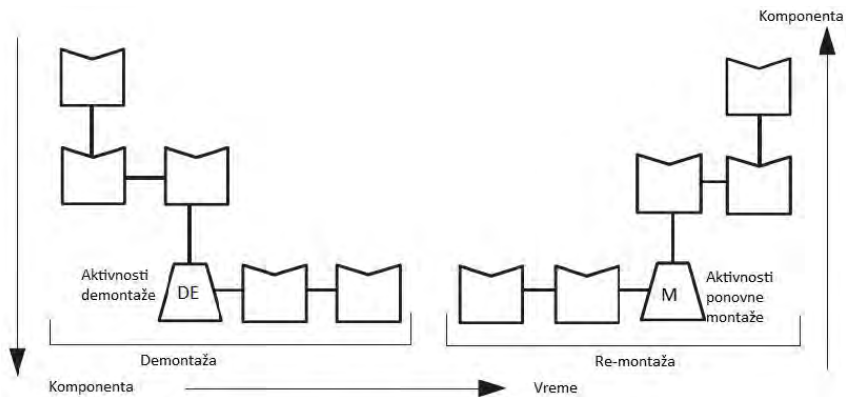


Fig. 4. Structure of maintenance project

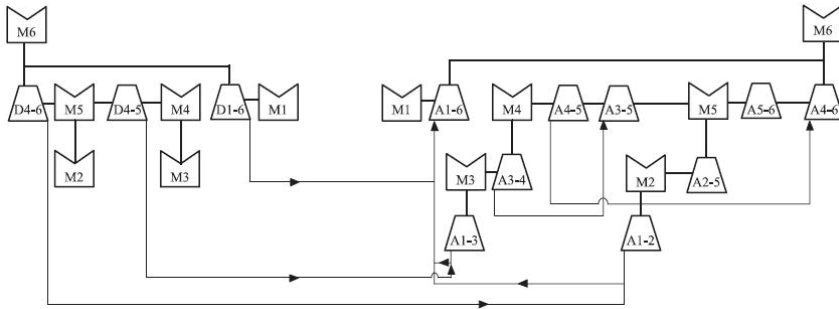
When it comes to aircraft maintenance, planning and backward planning of CPM activities is not completely adequate due to relationship between components (parent - component and component - component). In addition, there is a possibility of occurring of closed circuits (element is component by itself) due to existence of additional network links outside of original CPM network links. In the next part, due to the aforementioned reasons, an analysis of CPM planning and backward planning with analysis of closed circuits is provided.

### CPM PLANNING AND ANALYSIS OF CLOSED CIRCUITS

There is a need to create an algorithm for CPM planning in a unique structure (assembling and disassembling) for projects of maintenance without closed circuits. Example of such structure is shown in Picture 5 and contains activities and materials necessary for process of assembling and disassembling. Material components (materials) in Picture 5 appear on both sides, while activities of disassembling are only on the side which matches the process of disassembling. Analysis of closed circuits can be conducted if Picture 6 is further examined with additional network connections which are included in the structure (as shown in Picture 6).

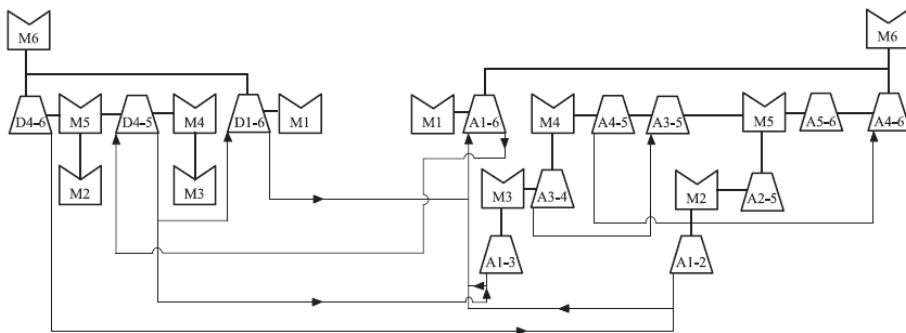
As can be seen, due to the presence of network connections (as per parent - component relation), on a projected structure shown in Picture 5, backward planning cannot be implemented on the basis of component's position, bill of material's level and component to component sequence. This situation starts

with component marked as „A1-2“. This component cannot be backward planned unless planning of component that precedes it (D4-6) is conducted. In general, there will always be network connections that lead to restrictions in backward planning.



**Pic. 5.** Structure of project of maintenance with network connections

In planning process, starting from the last item in supplies (e.g. in Picture 5 it is component M6 on the side of disassembling) to the last component ready for assembling, there is a large number of network links in which component parent must be planned before component child. This condition imposes certain restrictions.



**Pic. 6.** Structure of maintenance project with network connections and closed circuits

As a consequence of network links that limit planning and backward planning, an algorithm for planning and backward planning is developed.

Algorithm 1 for determining a critical path (CPM)

1. Step 1. Generate Parent/Component links and sort them based on Parent.
2. Step 2. Set CPM for final assembly and last Component.
3. Step 3. Update Parent/Component list.
4. Step 4. Set CPM path for either final item or next Parent on list.
5. Step 5. Read next link Parent/Component.
6. Step 6. If end, go to step 10. Else go to next step.
7. Step 7. If current Parent is Component of other Parent, go to step 5. Else go to next step.
8. Step 8. Set path for current Parent.
9. Step 9. Determine CPM path either for final item or next Parent on list.
10. Step 10. If no unsolved relations/links on list then END. Else, conduct analysis of closed circuits.

In situations when there are closed circuits, algorithm 2 is implemented.

1. Step 1. Sort list of Components in reverse order.
2. Step 2. Resolve links Parent - component using similar procedure as previously stated but with using Components as key.
3. Step 3. Sort remainder of the list based on Parent key.

4. Step 4. Read next relation on the list.
5. Step 5. If there is a closed circuit linked with current Parent, remove all relations in connection to current parent.
6. Step 6. If reached end of the list, END. Else, read next relation on the list. Go to step 5.

## CONCLUSION

The next step in this research would be practical alteration of suggested structure of aircraft maintenance. Bills of materials (BOM) would be shaped by dynamic structures of data and preserved in object oriented database while the algorithm would be tested on a specific example.

## LITERATURE

- [1] I. Borsh, E. Shlifer, Y. Zeira. „Optimal maintenance policy for a fleet of vehicles“, Management Science, Vol 22 No. 4. 1975.
- [2] E.R.A. Woxvold. „A unitary structure for manufacturing resource planning, project management and production control“. PhD thesis, Swinburn University of Technology, Hawthorne, 1993.
- [3] P. Samaranayake, G.L. Lewis, E.R.A. Woxvold. „Merged CPM networks with MRP bill-of-materials“, The 26th International Conference on Computers and Industrial Engineering, 1999.
- [4] B.S.Choo. „Best practice in aircraft engine MRO, a study of commercial and military system“, MIT, 2004.
- [5] T.E. Vollmann, B.L. Berry D.C. Whybark, „Manufacturing Planning and Control System“, Irwin/McGraw-Hill, New York, 1997
- [6] G. Lewis. „A Unitary approach to the sequencing and scheduling of maintenance projects in the aerospace environment“, 2000.

## ИНТЕГРАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭНЕРГЕТИКИ

---

*The article is described state-of-the-art trends of research distributed information and intellectual resources integration for federated energy system research, which are held MESI SB RAS. Creation of IT-infrastructure energy system research is the first phase of integration, which was developed at the laboratory of Information Technologies in energetic. Creation a knowledge ontological space and its integration into IT-infrastructure is the next step. This article is described the suggested methodological approach, the basic technologies and tools to implementation this proposed approach.*

---

### СИСТЕМНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ЭНЕРГЕТИКЕ

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (ИСЭМ) СО РАН является признанным лидером в области системных исследований в энергетике. Основными научными направлениями ИСЭМ СО РАН являются: 1) теория создания энергетических систем, комплексов и установок и управления ими; 2) научные основы и механизмы реализации энергетической политики России и ее регионов. В рамках этих направлений выполняется комплексное рассмотрение исследуемых проблем и интегрируются исследования: систем энергетики (электроэнергетических, тепло-, газо-, нефте-, нефтепродуктоснабжения); энергетической безопасности России; региональных проблем энергетики; взаимосвязей энергетики и экономики; перспективных энергетических источников и систем; прикладной математики и информатики [1].

Объектами исследований в энергетике являются отраслевые (функциональные) энергетические системы: электро-, газо-, нефте- и угле- и теплоснабжения, а также объединяющая их общеэнергетическая система - топливно-энергетический комплекс (ТЭК) страны. В последнее время в России специфическими объектами исследований стали рынки топлива и энергии разного территориального уровня. Особое место в комплексных исследованиях энергетики занимает решение сложных комплексных межотраслевых и междисциплинарных проблем, в том числе глобальных.

С точки зрения управления развитием и функционированием системы энергетики (СЭ) являются сложными физико-техническими и территориально-распределенными системами (протяженность электроэнергетических, нефте- и газоснабжающих систем достигает десятков и сотен тысяч километров). Помимо территориальной распределенности и сложности, СЭ, входящим в ТЭК, присущ ряд общих свойств, среди которых выделяют: непрерывность и инерционность развития; непрерывность функционирования и взаимосвязь режимов работы элементов системы; многоцелевой характер и практическую невозможность полного отказа системы; неравномерность процессов потребления продукции; подверженность крупномасштабным внешним воздействиям (преднамеренным и непреднамеренным; возможность каскадного развития аварий; зависимость пропускных способностей связей (линий передач, трубопроводов) от их местонахождения, режимов работы и состава работающего оборудования; активное участие человека в процессе управления; неполноту (недостаточную достоверность) информации о параметрах и режимах работы системы; иерархичность. Перечисленные факторы позволяют отнести задачи, возникающие в исследованиях энергетики, к классу больших задач.

Основными инструментами исследований энергетики являются математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Исследования, проводимые в институте, тесно связаны и имеют общую информационную базу; для исследований ТЭК требуются агрегированные данные, кото-

---

<sup>1</sup> Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия

рые, как правило, являются обобщением результатов исследований отраслевых систем; результаты исследований направлений развития ТЭК должны учитываться при исследованиях развития отраслевых систем энергетики.

Таким образом, для проведения системных исследований энергетики необходимы координация и согласование исходной и результирующей информации для получения обоснованных выводов и рекомендаций, которые готовятся для внешних организаций, а для этого необходимо создание интегрированной информационной и вычислительной среды исследований, которой явилась разработанная в ИСЭМ СО РАН ИТ-инфраструктура научных исследований.

## ИТ-ИНФРАСТРУКТУРА СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ЭНЕРГЕТИКЕ

Под ИТ-инфраструктурой понимается телекоммуникационная распределенная информационно-вычислительная инфраструктура, а именно, совокупность технических и программных средств, телекоммуникаций и информационной базы научных исследований; технологий их разработки и использования; стандартов, как внутренних, так и внешних, для разработки информационных и программных продуктов в области исследований энергетики, обмена ими и их представления на информационный рынок [2]. ИТ-инфраструктура, с одной стороны, является интеграционной информационной и вычислительной средой для проведения исследований в энергетике. С другой стороны, ее разработка создает предпосылки для поэтапного перехода: к созданию распределенных баз данных и программных комплексов; распределению и распараллеливанию вычислений; созданию Web-ориентированных программных комплексов (вычислительных серверов); оказанию информационных услуг на основе наукоемких информационных и программных продуктов (создание Web-служб и Web-сервисов) [2-5]. ИТ-инфраструктура включает интеграционную информационную инфраструктуру, распределенную вычислительную инфраструктуру и телекоммуникационную инфраструктуру (последняя в этой статье не рассматривается). В настоящее время ведется работы по развитию ИТ-инфраструктуры, а именно дополнение ее интеллектуальными ресурсами, которые, по аналогии с информационной и вычислительной инфраструктурами, условно объединены в интеллектуальную инфраструктуру, Общая схема ИТ-инфраструктуры исследований в энергетике приведена на рис. 1.

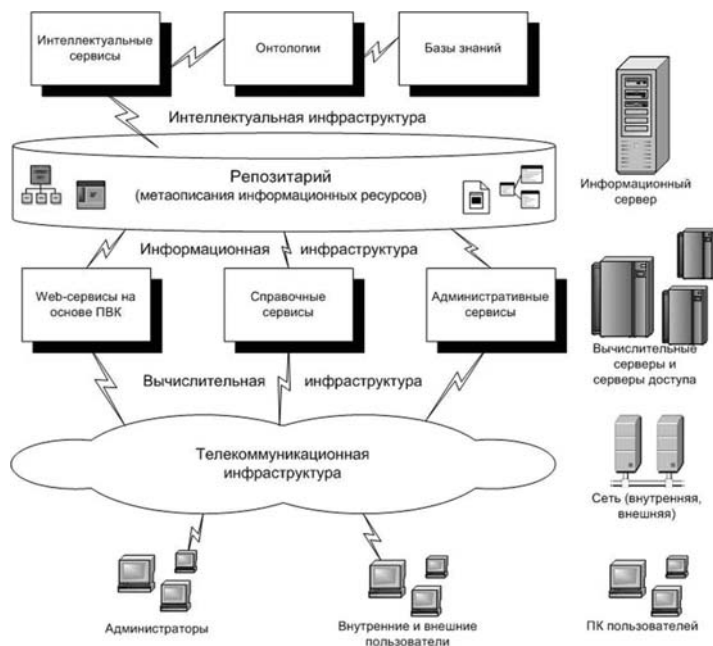


Рис. 1. ИТ-инфраструктура исследований в энергетике

## ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ

Информационные ресурсы объединяют:

- данные о сотрудниках, проводимых ими научных исследованиях и их результатах;
- информацию обо всех разрозненных базах данных и хранилищах данных, используемых для хранения базовой (основной), промежуточной и результирующей информации, необходимой для исследований;
- информацию о методах (алгоритмах), выполняющих какие-либо действия над информацией (программных комплексах, пакетах прикладных программ, различных сервисах).

Под *интеллектуальными ресурсами* понимаются *знания*, которыми обладает институт, представленные как в традиционном виде (электронные тексты статей, отчетов и монографий), так и в виде *моделей данных и моделей программ и онтологий* предметных областей энергетики [6]. Модели данных представляются либо в виде инфологических моделей (ER-моделей), в нотации Чена (подготовленные, например, в Microsoft Visio), либо в виде моделей данных, подготовленных с помощью CASE-средств, например, ErWin. Модели программ могут быть описаны либо на языке UML, либо с помощью онтологий, представленных на языках OWL или XML.

*Онтологии* - одно из современных направлений в области искусственного интеллекта. В общем виде онтологии определяют как базу знаний специального вида, или как «спецификацию концептуализации» предметной области. Это значит, что в предметной области на основе классификации базовых терминов выделяются основные понятия (концепты) и устанавливаются связи между ними. Этот процесс называют концептуализацией. Затем онтология может быть представлена в графическом виде или описана на одном из формальных языков (формальная онтология) - это процесс спецификации онтологий. На рис. 2 показан фрагмент графического представления онтологии, описывающей информационные и программно-вычислительные ресурсы института.

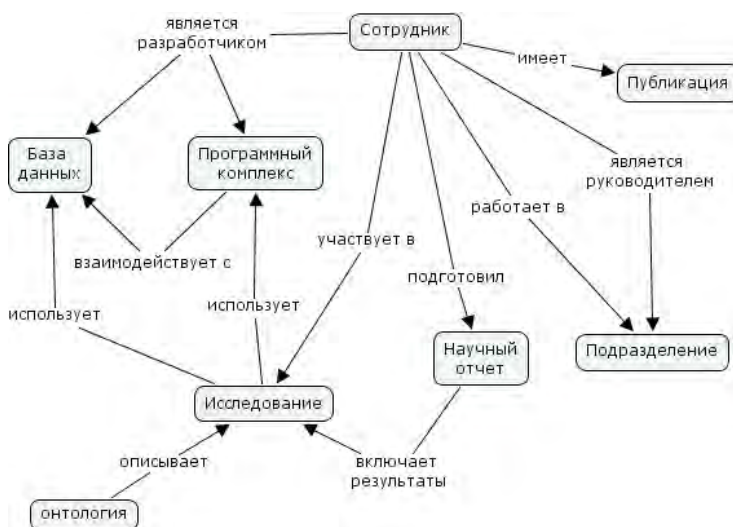


Рис.2. Фрагмент онтологии информационных и программно-вычислительных ресурсов института.

## ИНФОРМАЦИОННАЯ ИНФРАСТРУКТУРА

Информационная инфраструктура интегрирует как информационно-вычислительные, так и интеллектуальные ресурсы. В информационной инфраструктуре выделяются три уровня (слоя): уровень модели метаданных информационной инфраструктуры, уровень метаданных и данных ИТ-инфраструктуры. Для построения модели информационной инфраструктуры используются онтологии, объекты ИТ-инфраструктуры описываются метаданными на основе созданной онтологии [9-11].

Реализация всех программных компонентов выполняется в рамках SOA, центральным информационным компонентом является Репозиторий, реализация которого выполнена на базе СУБД Firebird и Microsoft SQL Server, функциональность СУБД расширяется программным ядром.

Компоненты информационной инфраструктуры разделяются на три логических уровня: *уровень файловой системы*, *СУБД* и *уровень клиента*. Выделяются *системные* и *прикладные* компоненты: к системным относятся - программное ядро, база метаданных, файловое хранилище, программа администрирования и драйвер Репозитория; к прикладным - программа извлечения данных, программа извлечения файлов, Web-приложение для просмотра Репозитория, SOAP-интерфейс и др.

Программа администрирования Репозитория разработана специально для выполнения административных задач. Она позволяет достаточно легко проводить первоначальное проектирование и изменение структуры метаданных, вносить и модифицировать описания информационных объектов Репозитория, а также дает возможность извлекать данные из Репозитория в различные форматы.

Для выполнения запросов к базам данных создано специальное приложение, которое базируется на драйвере Репозитория. Основной целью при его разработке было построение такого приложения, которое бы давало возможность пользователям извлекать данные для своей работы из различных баз данных в удобном формате. Извлечение данных может осуществляться из целого ряда СУБД: MySQL, PostgreSQL, Firebird, InterBase, Microsoft SQL Server, Sybase ASE, Oracle, через драйвера OLE-DB, ADO и ODBC. Результаты выполнения запросов представляются пользователю в виде таблиц и могут быть сохранены в виде текстовых файлов, файлов Microsoft Excel, dbf-файлов или в виде других баз данных. Архитектура инструментальных средств поддержки информационной инфраструктуры представлена на рис. 3.

Возможно построение на основе полученных данных OLAP-кубов, для этого пользователю необходимо указать изменения куба (dimension), меры (measure) и ограничения данных. В Репозитории запросы хранятся в виде отдельных объектов с указанием ссылок на базы данных, в качестве атрибутов этих объектов хранятся названия запросов, SQL-скрипты и списки параметров. Также поддерживается построение пользовательских (произвольных) SQL-запросов.

Предусмотрено представление метаданных в виде HTML, что с точки зрения организации архитектуры информационной инфраструктуры является типовой задачей, аналогичной преобразованию метаданных в различные форматы. Данные извлекаются из Репозитория в виде XML и передаются пользователю. Для более наглядного просмотра XML-документов применяется технология XSL Transformations (XSLT). Преобразование, выраженное через XSLT, описывает правила построения конечного дерева XML-документа на основе другого исходного XML-дерева. Главными звеньями процесса преобразования метаданных, находящихся в Репозитории, в Web-страницу являются процедура выгрузки и шаблон преобразования XSL. Оба этих элемента не встроены ни в один объектный код ни одного из компонентов, именно это позволяет легко изменять в случае необходимости форматы представления данных пользователю.

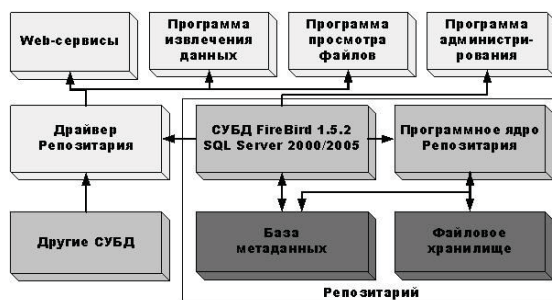


Рис. 3. Архитектура инструментальных средств поддержки информационной инфраструктуры

Технологию использования информационной инфраструктуры можно разбить на четыре этапа: *построение модели метаданных* - на этом этапе определяются «правила хранения» метаданных, *внесение метаданных* - производится описание информационных ресурсов в информационной инфраструктуре, *извлечение метаданных* и *извлечение данных* - использование инфраструктуры для поддержки проведения исследований как интегрированного источника получения информации [11].

Одним из последних направлений работ лаборатории информационных технологий в энергетике ИСЭМ СО РАН является интеграция разработки программного комплекса, поддерживающего вычислительный эксперимент в предметной области, и представления знаний об этой предметной области в виде онтологий [12, 13]. Новизна предложенного подхода определяется тем, что программный комплекс разрабатывается на основе моделей программ, управляемых специальной онтологией. Совместное использование ПК и онтологий предметной области обеспечивается посредством их интеграции в рамках ИТ-инфраструктуры исследований энергетике.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В статье описан методический подход к интеграции информационных и интеллектуальных ресурсов системных исследований энергетике. Необходимость интеграции обусловлена взаимосвязанностью и единой информационной базой исследований, а также необходимостью сохранения интеллектуальных ресурсов института. Интеграция осуществляется в рамках информационной инфраструктуры, являющейся важным компонентом созданной сотрудниками лаборатории информационных технологий в энергетике ИСЭМ СО РАН ИТ-инфраструктуры научных исследований. Предложенный и реализованный методический подход основан на использовании онтологий - современной формы представления знаний, причем онтологии предлагается использовать как для представления энергетических знаний и их описания в информационной инфраструктуре, так и для проектирования современных программных комплексов. Основные результаты описанного проекта защищены в трех кандидатских диссертациях, выполненных под руководством Л.В. Массель [8, 11, 13]. Исследования, описанные в статье, выполнены при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №10-07-00264, № 11-07-192 и гранта программы Президиума РАН №2.29.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №10-07-00264, №11-07-00192 и гранта программы Президиума РАН №2.29

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Системные исследования проблем энергетике, *Л.С. Беляев, Б.Г. Санеев, С.П. Филиппов* и др., под ред. Н.И. Воропая. Новосибирск: Наука, 2000. 558 с.
- [2] Л.В. Массель. ИТ-инфраструктура научных исследований и открытая образовательная среда, Вестник ИрГТУ, 2005. - №4 - С. 9-15.
- [3] Массель Л.В., Болдырев Е.А., Макагонова Н.Н., Копайгородский А.Н., Черноусов А.В. ИТ-инфраструктура научных исследований: методический подход и реализация, Вычислительные технологии, т.11, 2006.- С.59-67.
- [4] Воропай Н.И., Массель Л.В. ИТ-инфраструктура системных исследований в энергетике и предоставление ИТ-услуг. - Известия АН - Энергетика, №3, 2006.- С. 86-93.
- [5] Massel L.V., Kopyagorodsky A.N., Chernousov A.V. IT-infrastructure of research activities realized for the power engineering system researches, X International Conference "Computer Science and Information Technologies", 2008.- Turkey, Antalia.- P. 106-111.
- [6] Массель Л.В., Копайгородский А.Н. ИТ-инфраструктура научных исследований как основа информационного обеспечения научно-образовательного процесса, Труды VII Всероссийской научно-практической конференции «Корпоративные библиотечные системы: технологии и инновации», 2009.- Спб: СПбГПУ. - С. 88-93



- [7] Массель Л.В., Черноусов А.В. Web-ориентированная вычислительная инфраструктура исследований в энергетике, Материалы Всероссийской конференции «Современные информационные технологии для научных исследований». - Магадан: СВНЦ ДВО РАН, 2008.- С. 78-79.
- [8] Черноусов А.В. Модели, методы и базовые программные компоненты для создания вычислительной инфраструктуры в исследованиях энергетике, Автореферат дисс. на соискание степени канд. техн. наук.- Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008.- 24 с.
- [9] Копайгородский А.Н., Массель Л.В. Разработка и интеграция основных компонентов информационной инфраструктуры научных исследований, Вестник ИргТУ.- 2006.- № 2 (26), т.3.- С.23-29.
- [10] Массель Л.В., Копайгородский А.Н. Технологии и система хранения данных и знаний для исследований в энергетике, Материалы Всероссийской конференции «Современные информационные технологии для научных исследований». - Магадан: СВНЦ ДВО РАН, 2008.- С. 64-66.
- [11] Копайгородский А.Н. Методы, модели и программные средства построения информационной инфраструктуры исследований в энергетике, Автореферат дисс. на соискание степени канд. техн. наук.- Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008.- 25 с.
- [12] Ворожцова Т.Н., Скрипкин С.К. Использование онтологий при моделировании программного комплекса, Вычислительные технологии, т.13, ч. I, 2008. - С. 376-381.
- [13] Ворожцова Т.Н. Построение программных комплексов для исследований теплоэнергетических систем с использованием онтологий, Автореф. дисс. На соискание степени канд. тех. наук: 05.13.18, Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2009.- 25 с.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*On the basis of a potential model of an ideal incompressible fluid numerically studied the evolution of the axisymmetric gas bubble. Simulated changes in connectivity bubble, bubble interaction with free surface, filling the cavity.*

В работе численно исследована эволюция первоначально односвязного осесимметричного пузыря в тяжелой несжимаемой жидкости под свободной поверхностью, процесс превращения сферического пузыря в торообразный многосвязный, взаимодействие кумулятивной струйки с границами пузыря, воздействие кумулятивной струи на свободную поверхность, образование султана, а также заполнение осесимметричной полости.

Этот процесс описывается классом разрывных потенциальных решений уравнения Лапласа. Разрывы потенциала возникают при слиянии двух поверхностей раздела с отличными распределениями потенциала. Математически это описывает формула Стокса с ненулевой циркуляцией по неодносвязному контуру, охватывающему пузырь.

1. Безвихревое осесимметричное течение тяжелой несжимаемой и невязкой жидкости происходит в области, ограниченной свободными границами и границами раздела. В силу осевой симметрии задачи рассматриваем решение в области меридионального сечения течения жидкости  $Q(x, r, t)$ ,  $t > 0$  - время, на полуплоскости  $(x, r)$ ,  $r > 0$ ,  $x, r$  – цилиндрические координаты.  $\Sigma$  - поверхность раздела газ - жидкость,  $g$  - ускорение силы тяжести, параллельной оси симметрии  $x$ .

Пусть  $L$  - характерный линейный размер области течения (радиус пузыря). При этом все искомыми характеристиками течения являются функциями отношений  $At/L$ ,  $x/L$ ,  $r/L$ , где  $A = (p_1/\rho)^{0.5}$  - постоянная с размерностью скорости,  $p_1$  - характерное давление,  $\rho$  - плотность жидкости. Далее под  $x, r, t, p, \varphi$  подразумеваем безразмерные переменные. Потенциал скорости  $\varphi(x, r, t)$  в  $Q$  удовлетворяет уравнению Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + r^{-1} \partial(r \partial \varphi / \partial r) / \partial r = 0. \quad (1)$$

На оси симметрии  $r = 0$  нормальная производная  $\partial \varphi / \partial n$  обращается в нуль. При приближении к бесконечности скорость  $w = \nabla \varphi$  и потенциал скорости стремятся к нулю. На границе  $\Sigma$  выполняются два граничных условия, кинематическое

$$dx/dt = \partial \varphi / \partial x, \quad dr/dt = \partial \varphi / \partial r, \quad (x, r) \in \Sigma, \quad (2)$$

и динамическое условие непрерывности давления  $p$  в окрестности границы раздела  $\Sigma$

$$d\varphi/dt - 0.5|\nabla \varphi|^2 + p_\gamma - 1 + gxLA^{-2} = 0. \quad (3)$$

Давление газа  $p_\gamma(t)$  меняется по адиабатическому закону ( $\gamma$  - показатель адиабаты)

$$p_\gamma(t) = p_\gamma(0)[V(t)/V(0)]^{-\gamma} = 0, \quad (4)$$

где  $V(t)$  - объем газовой полости,  $p_\gamma(0), V(0)$  - давление и объем газа в начальный момент времени.

2. В процессе эволюции пузыря возможно наступление момента, когда часть границы пузыря с одним распределением потенциала войдет в соприкосновение (сольется) с другой частью границы с иным распределением потенциала. В этот момент односвязная область решения стано-

<sup>1</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

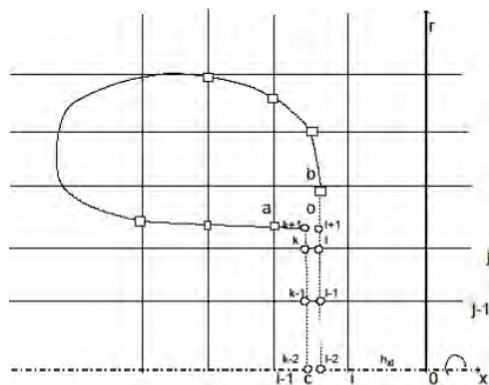
<sup>2</sup> Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

вится многосвязной, при этом циркуляция по контуру, который не может быть стянут в точку, не равна нулю. Для продолжения расчета модифицируем модель. Через крайние точки соприкоснувшихся границ проведем разрез с разными значениями потенциала на противоположных берегах разреза, и на разрезе поставим условие непрерывности скорости. Из условия непрерывности следует, что скачок потенциала на разрезе величина постоянная вдоль всего разреза.

3. Будем решать задачу разностным методом. В области  $Q$  введем связную прямоугольную неравномерную сетку узлов. Потенциал и давление зададим в узлах этой сетки. Физические компоненты вектора скорости  $W$  определим на разнесенных сетках: компонента  $W_x$  задана в точке, отстоящей от узла на полшага сетки в направлении убывания переменной  $x$ . Производные заменяются центральными разностными соотношениями. Разностная схема, аппроксимирующая уравнения (1)-(4), имеет первый порядок аппроксимации на сетке с переменными пространственными шагами.

Границу раздела газ - жидкость определим точками пересечения поверхности раздела с линиями сетки. Кинематическое условие (2) будет выполнено, если точки границы раздела на каждом временном шаге отождествим с частицами жидкости, скорости которых определяются через потенциал ближайших к ним точек сетки. Подробно разностная схема описана в [1,2].

4. Опишем алгоритм, позволяющий проводить расчеты потенциальных течений в областях меняющейся связности. Для этого обратимся к фиг.1, представляющей ту часть расчетной сетки в окрестности пузыря, в узлах которой потенциал терпит разрыв, возникший в результате слияния двух частей границы пузыря, с разными распределениями потенциала. Линия АОВ - часть контура (поверхности) пузыря, и в точке О потенциал на поверхности пузыря терпит разрыв. Линия ОС является частью «технологического» разреза в жидкости, на которой упрощенно моделируется эволюция слившихся частей пузыря, на этой жидкой линии потенциал скорости терпит разрыв. Это не лагранжева линия.



Фиг. 1. Схема технологического разреза реализующего разрыв потенциала.

На фиг.1 берега разреза ОС показаны пунктирной линией. Скорость на разрезе непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению несжимаемости. В разностном алгоритме прямой разрез проходит через одну из крайних точек слившейся границы параллельно линиям сетки  $x=const$ . В точках пересечения разреза и линий сетки вводятся дополнительные узлы двух берегов разреза, узлы с разных сторон разреза помечаем индексами  $l, k$ , и в этих узлах выполняется уравнение Лапласа

$$\Delta_h \varphi = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\tilde{h}_{rj}} + \left[ \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\tilde{h}_{rj} h_{rj}} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tilde{h}_{rj} h_{rj-1}} \right] + \left[ \frac{\varphi_{ij} - \varphi_l}{\tilde{h}_{xi-1} (x_{ij} - x_l)} - \frac{\varphi_k - \varphi_{i-1j}}{\tilde{h}_{xi-1} (x_k - x_{i-1})} \right],$$

$$\tilde{h}_{rj} = 0.5(h_{rj} + h_{rj-1}), \tilde{h}_{xi} = 0.5(x_{i+1j} - x_{ij}), \tilde{r} = 0.25(r_{j+1} + 2r_j + r_{j-1}),$$

как следствие условий несжимаемости жидкости и равенства касательных и нормальных компо-

нент скоростей по разным берегам разреза. Разностное уравнение Лапласа записано в узле  $kl$ . Узел  $k+1$  левого берега выше узла  $k$ , а узел левого берега  $k-1$  ниже узла  $k$ . Соответственно, узел  $l+1$  правого берега выше узла  $l$ . Из равенства касательных компонент скоростей по разным берегам разреза следует

$$\varphi_l - \varphi_k = \varphi_{l+1} - \varphi_{k+1}.$$

Следовательно, разность потенциалов - величина постоянная вдоль всех узлов разреза. При этом на произвольном сеточном замкнутом контуре, охватывающему двусвязный пузырь и пересекающему разрез по линии  $j$ , появляется циркуляция  $\Gamma_j = \oint \text{GRAD} \varphi d\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}$  - радиус вектор, численно равная скачку (разности) потенциала на разрезе  $\Gamma_j = \phi_{lj} - \phi_{kj}$ .

5. Идеальная несжимаемая тяжелая жидкость находится в полупространстве  $x \leq 0$ . Правая плоскость - начальная свободная поверхность  $x = 0$ . В жидкости имеется осесимметричная газовая полость с границей раздела в форме сферы, центр которой расположен на глубине  $x = -H$ . В начальный момент времени жидкость покоится.

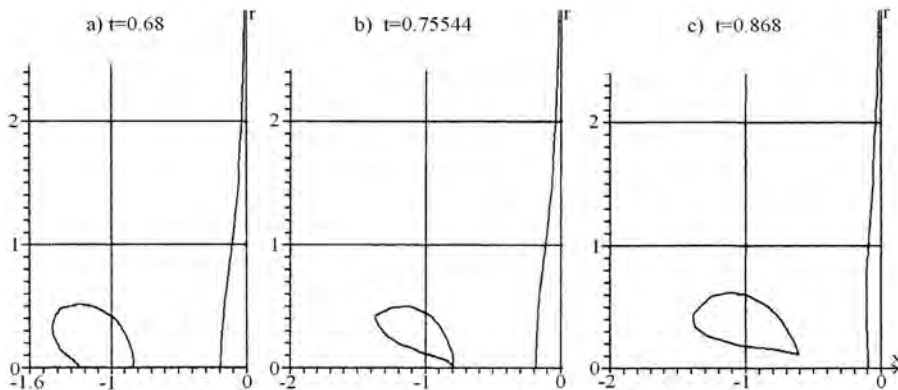
Радиус сферической полости примем за характерный линейный размер. Давление газов в этой полости отличается от характерного  $p_1$  - гидростатического давления на уровне  $x = -H$ . Задача состоит в определении возникающего осесимметричного течения жидкости, порождаемого перемещением и изменением формы пузыря.

Использовалась неравномерная расчетная сетка, сгущающаяся к свободной поверхности. Отношение начального давления газа  $p_g^0/p_1 = 0.5$ . Показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ .

Расчеты течений для разных моментов времени  $At/L = \tau > 0$ , и  $L=1, H=1.5$  представлены на фиг. 2 в плоскости переменных  $x, r$ , в виде конфигураций границы раздела сред.

Выделим моделируемые физические процессы. В начале под действием разряжения газа пузырь сжимается. Свободная поверхность над пузырем понижается, объем газа уменьшается, а давление газа в соответствии с соотношением (4), наоборот растет. Как более легкая структура, пузырь всплывает. Вследствие инерционности жидкости, сжатие газа продолжается и при достижении внутренним давлением в пузыре гидростатического давления  $p_1$ . После прекращения сжатия, накопленная газом энергия начинает процесс расширения пузыря (фиг. 2с).

Разность гидростатического давления в верхней и кормовой частях пузыря является следствием его неравномерного сжатия. Граница кормовой части пузыря с течением времени сильно деформируется с образованием осесимметричной кумулятивной струйки, стремящейся к верхней части пузыря (фиг. 2 а, б). Эта струя через некоторый промежуток времени достигает верхней границы газового пузыря, в результате газовый пузырь приобретает торообразную форму, а область течения становится двусвязной (фиг. 2б).

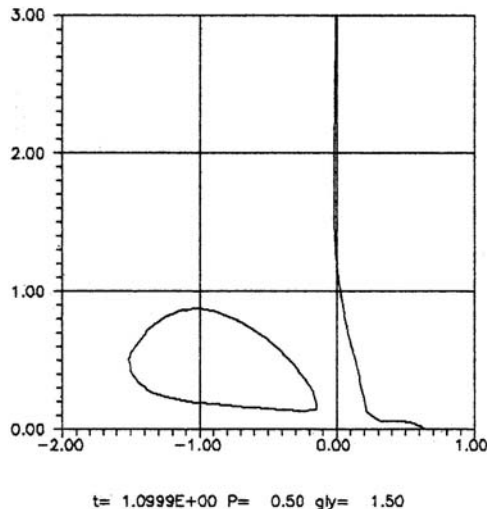


Фиг. 2. Изменение формы и связности пузыря.

Эта фаза развития пузыря менее изучена. В окрестности всплывающего и расширяющегося пу-

зыря развивается циркуляционное течение, влияющее на деформацию свободной поверхности. С момента возникновения циркуляционного течения, которое происходит на фазе расширения пузыря, понижение свободной поверхности над пузырем прекращается и начинается обратное движение свободной поверхности.

Далее, с переходом пузыря в двусвязную форму, циркуляционное течение по оси пузыря, из широкой торообразной кормы пузыря к узкой передней части гонит сужающийся и ускоряющийся поток к свободной поверхности (Фиг. 2с). Когда верхняя граница пузыря приблизится к начальному невозмущенному уровню свободной поверхности, на движение свободной поверхности начинает, в основном, влиять циркуляционное течение. На поднимающейся свободной поверхности по оси пузыря сначала появляется локальное возвышение, которое развивается в явно выраженную кумулятивную струйку - султан (см. Фиг. 3). При достижении вершины пузыря свободной поверхности численный расчет завершался.



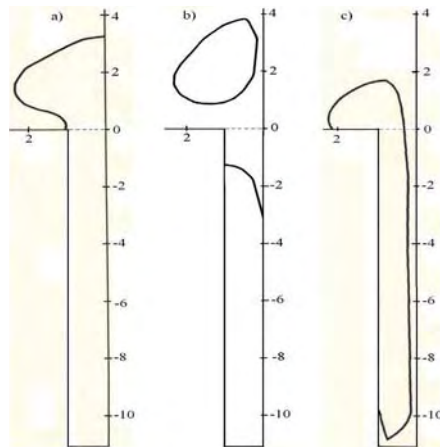
Фиг. 3.  $t=1.1$  Многосвязный пузырь всплывает к свободной поверхности.

6. Следующая задача описывает процесс заполнения глубокой осесимметричной шахты на большой глубине. Шахта единичного радиуса  $R=1$  расположена под горизонтальной плоскостью  $x=0$ . Глубина шахты на порядок больше ее радиуса. Конечный слой неподвижной несжимаемой тяжелой жидкости занимает часть верхнего полупространства, исключая область сосной с шахтой газовой полусферы заданного радиуса  $R_0 > R$ , примыкающей к срезу шахты на горизонтальной плоскости  $x=0$ . Газ в пространстве шахты и полусферы находится под начальным давлением  $p_\gamma$ , большим, чем гидростатическое давление на срезе шахты. Толщина слоя  $H$  жидкости над шахтой много больше радиуса полусферы, поэтому влияние свободной поверхности на эволюцию газового пузыря не учитывалось.

Так как гидростатическое давление на плоскости среза шахты больше гидростатического давления над газовой полусферой, то на плоскости среза шахты начинает формироваться осесимметричная кольцевая струя тяжелой жидкости, направленная к оси симметрии шахты вдоль среза шахты. (Фиг.4а). Когда струя достигнет оси симметрии, произойдет дробление пузыря на два: надшахтного пузыря и шахтной газовой полости, которые заживут каждый своей жизнью.

Горизонтальная осесимметричная кольцевая струя тяжелой жидкости преобразуется в две вертикальные струи. Подталкиваемый вертикальной струей направленной вверх, верхний надшахтный пузырь, сначала односвязный с нулевой циркуляцией, начнет свободное всплытие, эволюционируя в многосвязный с ненулевой циркуляцией. Возникновение многосвязности сопровождается столкновением кумулятивной струи с потолочным слоем жидкости пузыря, порождающим гидравлическое ударное возмущение влияющее на надшахтную поверхность и на струю за-

полнящую шахту. Вертикальная струя, направленная к дну шахты, начнет ее заполнять (Фиг.4b).



Фиг. 4. Заполнение осесимметричной полости.

Пузырь, всплывший на несколько радиусов, из расчета исключался. Осесимметричная струя достигнув дна шахты и заполнив дно, образует кольцевую струю вдоль стенок шахты, направленную к срезу шахты. Газ в шахте под влиянием череды сжатий и расширений, а также вытеснения, выбросит к срезу шахты порцию газа, которая будет не прочь ускользнуть. Расчет прекращался, когда кольцевая струя вдоль стенок шахты, достигала среза шахты (Фиг.4с). Моменты дробления пузыря, перехода односвязного пузыря в многосвязный, достижения струей дна шахты и ее стенок сопровождаются гидравлическими ударами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коробицын В.А. Численное моделирование осесимметричных потенциальных течений несжимаемой жидкости. Математическое моделирование. Т.3. № 10. 1991. С.42-49.
- [2] Коробицын В.А. Пегов В.И. Численное исследование эволюции границы раздела двух жидкостей. Изв. РАН. Механика жидкости и газа. №5. 1993. С.128-133.

## ПОСТРОЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА РАБОЧИХ СТАНЦИЯХ НА ПЛАТФОРМАХ CONDOR И WINDOWS HPC SERVER

---

*High-performance clusters for geophysical computations on Condor and Windows HPC is developed in Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS. They include more than 150 workstations running various versions of Windows. The deployment of clusters, software updates and node configuration was made using the MS System Center Configuration Manager 2007 R3. Boot from VHD is used with special computer systems, when no interference with host OS is desired. Computations of a number of geophysical problems requiring significant computing resources were made on clusters during last years.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

В скважинной геофизике существует большое количество ресурсоемких вычислительных задач. Многие из этих задач не требуют интенсивного обмена данными при вычислениях. Для решения таких задач хорошо подходят вычислительные кластеры на рабочих станциях. Интерпретационные возможности вычислительных кластеров на рабочих станциях особенно важны в условиях научно-исследовательских и производственных геофизических организаций, где практически на каждом рабочем месте установлены современные персональные компьютеры, загрузка которых крайне неравномерна. В нерабочее время ресурсы этих компьютеров, как правило, не используются. Использование кластеров позволяет перейти к созданию высокоэффективных технологий и автоматизированных систем интерпретации нового поколения. Принципиально, что это альтернативный подход по отношению к господствующей сейчас повсеместной ориентации на суперкомпьютерные кластеры. Их дороговизна и ограниченная доступность для научно-исследовательских и производственных геофизических организаций заставляет ориентироваться на более эффективные решения. Существует несколько хорошо известных как открытых так и проприетарных реализаций вычислительных кластеров на рабочих станциях. Поскольку основная масса рабочих станций института работает под управлением различных версий ОС Microsoft Windows, мы выде-

лили среди них системы Condor [1] и Windows HPC [2].

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ НА РАБОЧИХ СТАНЦИЯХ

Идея использования рабочих станций для распределённых вычислений приобрела особую популярность в многочисленных добровольных проектах, таких как SETI.home. Эффективность этих проектов дала основание говорить о продуктивности использования простаивающих вычислительных ресурсов персональных компьютеров в научных вычислениях. Задачи, решаемые в таких системах, характеризуются высоким объемом вычислений при сравнительно небольших объемах начальных и конечных данных. Большая часть задач относится к классу параметрических - когда один и тот же алгоритм обрабатывается на разных наборах начальных данных. В последние годы происходит унификация подходов - традиционные кластерные HPC системы позволяют использовать в качестве вычислительных узлов рабочие станции, проекты распределенных вычислений все больше используют обмен данными между процессами. Не в последнюю очередь это происходит в связи с постоянным ростом пропускной способности как локальных, так и глобальных сетей.

Система Condor позиционируется разработчиками (University Of Wisconsin Computer Science Department) как особый класс систем распределенных вычислений - High-throughput

---

<sup>1</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

computing (HTC). Отличие от high-performance computing (HPC), по мнению разработчиков заключается в том, что HPC системы ориентированы на предоставление большого количества вычислительных ресурсов на короткое время, в то время как HTC - на предоставление вычислительных ресурсов в течение длительного периода времени.

Windows HPC Server 2008 R2 Suite - традиционное кластерное решение с возможностью подключения рабочих станций в качестве вычислительных узлов. Обе системы поддерживают как параметрические задания (parametric-sweep jobs), так и задания с использованием MPI. Отличительной чертой Windows HPC Server 2008 R2 Suite является возможность подключения виртуальных вычислительных узлов в облаке Windows Azure. Кроме того в данном продукте реализована возможность предоставления ресурсов кластера как сервиса по модели SOA. Это направление представляется весьма интересным, так как позволит строить прикладные системы, выполняющиеся на клиентской рабочей станции, но обращающиеся с ресурсоемкими задачами к HPC кластеру как к сервису.

## **РАЗВЕРТЫВАНИЕ И ЭКСПЛУАТАЦИЯ СИСТЕМ**

Высокая степень зрелости ИТ-инфраструктуры института позволила в краткие сроки развернуть и постоянно расширять действующие вычислительные кластеры при помощи MS System Center Configuration Manager 2007 R3 (SCCM). В пакет для установки Condor наряду с дистрибутивом системы входит также командный файл, настраивающий конфигурацию вычислительного узла и разрешения межсетевое экрана. При необходимости переконфигурирования кластера распространяется только командный файл. Установка дистрибутива Microsoft HPC Pack 2008 R2 происходит без дополнительных настроек, так как всю необходимую информацию о конфигурации кластера вычислительный узел получает из Active Directory и от управляющего узла.

Расширение кластеров выполняется в автоматическом режиме добавлением рабочей станции в соответствующую группу Active Directory. Один и тот же вычислительный узел может

быть членом одного из, или обоих кластеров. Этим достигается высокая степень гибкости и эластичности при выделении ресурсов под вычисления.

Управление кластером Condor выполняется как из командной строки так и из веб-интерфейса с помощью установленного на управляющем узле ПО CycleServer. Управление кластером Windows HPC выполняется с использованием утилит командной строки, команд PowerShell 2.0, веб-интерфейса или клиентской части в двух версиях - для управления всем кластером или только для управления вычислительными заданиями.

Одной из сложностей, с которыми нам пришлось столкнуться в процессе развертывания и эксплуатации вычислительных кластеров стала необходимость использования в качестве полноценных вычислительных узлов временно простаивающих специализированных рабочих станций и компьютеров с 32х-разрядными операционными системами. Под специализированными рабочими станциями мы понимаем системы с установленным специализированным ПО, подключенные к различного рода аппаратуре. В таких случаях вмешательство в программную и операционную среду крайне нежелательно. В случае с 32х-разрядными ОС минусом является недостаточный для многих счетных задач объем адресуемой одним процессом оперативной памяти. В то же время часть прикладного и системного ПО не работает в 64х-разрядной среде. Для этих случаев нами было применено решение с использованием загрузки системы с виртуального диска VHD. Были подготовлены специальные образы операционных сред с установленными пакетами Condor и HPC Pack 2008R2 в виде VHD. Распространение выполняется также с помощью SCCM, после копирования VHD-файла на целевую рабочую станцию автоматически выполняется скрипт PowerShell, регистрирующий дополнительную конфигурацию загрузки ОС с скопированного VHD, генерирующий командный файл для перезагрузки системы в «расчетном» режиме и перезагружающий систему. После перезагрузки происходит автоматическое конфигурирование вычислительного узла и подключение его к кластеру. Впоследствии,



перезагрузка системы в вычислительный режим возможна или выполнением командного файла пользователем или по расписанию (с учетом активности пользователя) через Windows Task Scheduler.

Для повышения утилизации серверных компонент ИТ-инфраструктуры применяются гибко конфигурируемые виртуальные узлы вычислительных кластеров в среде Hyper-V. Развертывание дополнительных виртуальных вычислительных узлов происходит с использованием Microsoft System Center Virtual Machine Manager 2008 R2, конфигурирование с помощью скриптов PowerShell. Таким образом удается значительно увеличить загрузку хостов Hyper-V в периоды низкой активности пользователей.

В настоящее время кластер Windows HPC состоит из 110 вычислительных узлов, чуть менее половины из них управляются 64х-разрядной ОС. Суммарное количество ядер - более 350, ОЗУ - 440 Гб. Кластер Condor насчитывает более 60 рабочих станций.

## ПРИМЕРЫ РЕШАЕМЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Первый пример - задача моделирования процесса каротажного зондирования ВИКИЗ при учёте смещения зонда с оси скважины [3] (рис.1) имеет следующие особенности:

- потребность в большом объёме оперативной памяти, но не более 1900 МБ ОЗУ;
- объём входных данных - порядка 200 МБ;
- время счёта - от 1 до 10 часов.

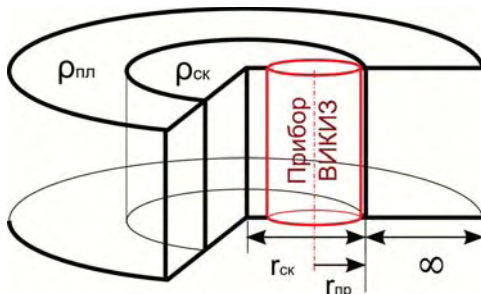


Рис.1. Цилиндрически-слоистая модель и зонд ВИКИЗ, лежащий на стенке скважины.

Задача разбита на 21 серию по 378 задач, итого 7938 задачи. Время исполнения всех задач на одной машине средней производительности около 20000 часов (это больше двух лет не-

прерывной работы). На развёрнутой системе Condor расчёты были выполнены за 1 месяц, при этом задача считалась только по ночам и в выходные дни.

Второй пример - вычисление палеток для одномерных трёх- и четырёхслойных прямых задач ВИКИЗ [4,5] и БКЗ. Модель цилиндрически-слоистой среды описывается скважиной, зоной проникновения, окаймляющей зоной и неизменной проникновением частью пласта.

Множество моделей таких сред задавалось диапазоном значений каждого из параметров с некоторым логарифмическим шагом. Каждый из цилиндрических слоёв задаётся тремя параметрами: удельное электрическое сопротивление (УЭС) -  $\rho$ , относительная диэлектрическая проницаемость (ОДП) -  $\epsilon$  и радиальная глубина -  $h$ , причём глубина пласта полагается равной бесконечности. Целью вычислений является создание вычислительного модуля решения прямой и обратной одномерных задач с помощью интерполирования результатов расчёта, а также встраивание его в программу EMF Pro для интерпретации данных аппаратурного комплекса геофизического каротажа СКЛ [6].

Для трёхслойной прямой задачи (рис. 2) было выбрано следующее пространство моделей:

- скважина: УЭС  $\rho_{ск}$  - 22 значения от 0.02 до 0.5 Ом•м; ОДП  $\epsilon_{ск}$  - 60 о.е.; радиус  $r_{ск}$  - 13 значений от 0.07 до 0.108 м и 13 значений от 0.108 до 0.2 м;
- зона проникновения: УЭС  $\rho_{зп}$  - 37 значений от 0.1 до 100 Ом•м; ОДП  $\epsilon_{зп}$  - 15 о.е.; радиальная толщина  $r_{зп}$  - 37 значений от 0.01 до 2м;
- пласт: УЭС  $\rho_{пл}$  - 43 значения от 0.1 до 100 Ом•м; ОДП  $\epsilon_{пл}$  - 10 о.е.

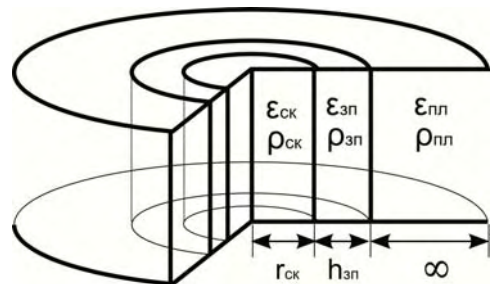


Рис.2. Трёхслойная цилиндрически-слоистая модель.

А для четырёхслойной прямой задачи (рис. 3):

- скважина: УЭС  $\rho_{ск}$  - 2.0 Ом•м; ОДП  $\epsilon_{ск}$  - 60 о.е.; радиус  $r_{ск}$  - 0.108 м;
- зона проникновения: УЭС  $\rho_{зп}$  - 40 значений от 0.1 до 200 Ом•м; ОДП  $\epsilon_{зп}$  - 15 о.е.; радиальная толщина  $h_{зп}$  - 30 значений от 0.01 до 1.5 м;
- окаймляющая зона: УЭС  $\rho_{оз}$  - 40 значений от 0.1 до 200 Ом•м; ОДП  $\epsilon_{оз}$  - 15 о.е.; радиальная толщина  $h_{оз}$  - 20 значений от 0.01 до 0.5 м;
- пласт: УЭС  $\rho_{пл}$  - 40 значения от 0.1 до 200 Ом•м; ОДП  $\epsilon_{пл}$  - 10 о.е.

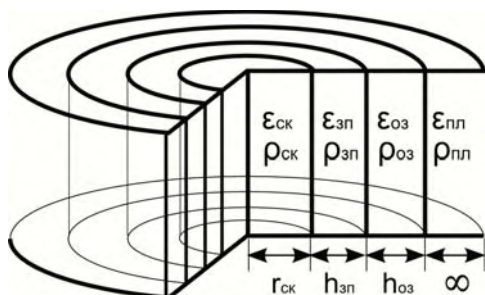


Рис. 3. Четырёхслойная цилиндрически-слоистая модель.

Все диапазоны значений параметров для трёх-четырёхслойных моделей разбивались на интервалы с логарифмическим шагом.

Таким образом, палетка состоит из более 16 миллионов моделей для трёхслойной, и из более 50 миллионов моделей для четырёхслойной задачи. Особенностью данной задачи является низкая потребность в вычислительных ресурсах при каждом одиночном расчёте, но очень велико общее время расчётов и для хранения результатов требуется большой объём памяти. Такие различия между задачами позволили считать обе задачи одновременно. Пока одна задача считалась на высокопроизводительных машинах, вторая занимала вычислительные ресурсы менее производительных компьютеров, включённых в кластер.

## ВЫВОДЫ

Опыт эксплуатации развернутых вычислительных кластеров показал эффективность использования подобных решений в среде научных и производственных организаций. Легкость развертывания и эксплуатации обеспечивается в случае высокого уровня зрелости ИТ-инфраструктуры. Применение специальных

решений позволяет включить в работу вычислительных кластеров больше ресурсов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Проект Condor. <http://www.cs.wisc.edu/condor/>
- [2] Windows HPC Server. <http://www.microsoft.com/hpc/>
- [3] Шурина Э. П., Нечаев О. В., Эпов М. И. Трёхмерное численное моделирование электромагнитных полей, Геофизический журнал №4, Т.31, 2009, с. 158-163
- [4] Эпов М. И., Никитенко М. Н. Система одномерной интерпретации данных высокочастотных индукционных коротажных зондирований, Геология и геофизика. - 1993. - №2. - С. 124-130.
- [5] Технология исследования нефтегазовых скважин на основе ВИКИЗ. Методическое руководство. Ред. Эпов М.И., Антонов Ю. Н. Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, Изд-во СО РАН, 2000. 121 с.
- [6] М.И. Эпов, К.Н. Каюров, И.Н. Ельцов, А.Н. Петров, К.В. Сухорукова, А.Ю. Соболев, А.А. Власов. Новый аппаратный комплекс геофизического каротажа СКЛ и программно-методические средства интерпретации EMF PRO, Бурение и нефть. - 2010. - № 2. - С. 16-19.

## АДАПТИВНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

---

*Reducing damage from forest fires, not only requires efficient methods for their liquidation, but also development of methods for predicting their behavior. There are different models, but it is extremely difficult to get information with the required accuracy, because processes are often located in inaccessible area for obtaining information, therefore prediction should be carried out with high a priori uncertainty. For solving this problem it is proposed to use neural networks. This paper considers two main aspects - integration neural network with mathematical model of fire and methods for enhancing learning rate of neural network.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Снижение ущерба, наносимого лесными пожарами, требует не только эффективных методов борьбы с ними, но и разработки методов предсказания их поведения. Существуют различные модели, однако неопределенность параметров среды не всегда позволяет получить результаты с необходимой точностью. Проблема решается путем уточнения параметров среды при наблюдении за пожаром. Перспективным решением этой задачи является использование нейронных сетей. Главной особенностью такого представления является возможность обучения нейронной сети, где в качестве обучающей выборки используются результаты наблюдения за процессом развития пожара (оптического, радиолокационного и др.). В географических информационных системах (ГИС) это называется процессом усвоения данных. В конечном счете, все это направлено на то, чтобы с максимальной эффективностью спрогнозировать результат вмешательства человека в развитие пожара с целью минимизации ущерба, наносимого его развитием.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЖАРА

Моделирование осуществляется на основе априорных знаний, полученных из ГИС (состав леса, характер склона, погодные условия и др.), и состоит из двух последовательных этапов: прогнозирования и адаптации, причем модель строится как комбинация алгоритмической и нейросетевой. Это значит, что сначала вводится затравочная теоретически обоснованная модель, а нейросетевые принципы обеспечивают ее адаптацию к внешним воздействиям.

Математическая модель интегрируется в нейронную сеть следующим образом. Область пожара разделяется на участки, расположенные вдоль лучей, исходящих из его очага, назовем их ячейками. Для каждой ячейки определяются параметры, необходимые для работы модели, такие как запас горючего, влагосодержание, глубина слоя, угол наклона склона, направление и скорость ветра и др. [1]. Ячейка среды может находиться в трех состояниях: горение - ячейка излучает тепло на все соседние ячейки; предзагорание - накопление тепла; латентное состояние - ячейка сгорела и не может излучать и поглощать тепло. Для каждой горячей ячейки с помощью математической модели рассчитываются каналы теплопередачи и время горения, а для ячеек в состоянии предзагорания определяется количество полученного тепла и значение порога ее воспламенения. Каждой ячейке среды сопоставляется соответствующий нейрон сети, а роль синаптических связей играют каналы теплопередачи.

Нейронную сеть предлагается формировать в полярной системе координат, где нейроны рас-

1 Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

2 Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

полагаются вдоль лучей, исходящих из очага пожара. Начальные синаптические связи между нейронами рассчитываются исходя из параметров математической модели, в качестве которой выбрана модель Ротермела [2] в связи с ее высокой скоростью расчета конечных параметров. Описанную выше процедуру формирования параметров удобно представить в виде послойной модели данных, где они разделены на тематические слои и каждый слой находится в зависимости от предыдущих слоев. На рис. 1 изображена схема послойного представления данных.



Рис. 1. Схема послойного представления данных

В связи с тем, что каждой ячейке среды сопоставлен нейрон, нейрон, как и ячейка, также имеет три состояния: невозбужденное - накопление сигнала, возбужденное - распространение сигнала, латентное - нейрон не передает и не накапливает сигнал. Процесс распространения пожара в терминах нейронной сети происходит следующим образом. Сигналы возбужденных нейронов передаются на окружающие нейроны, и суммируются ими. Если у нейрона в невозбужденном состоянии превышен порог активации, нейрон переходит в состояние возбуждения. В активном состоянии нейрон находится конечное время, которое определяется временем горения ячейки, после чего навсегда переходит в латентное состояние. На рис. 2 изображен процесс возбуждения нейронов в сети путем передачи сигнала по синаптическим связям, которые пропорциональны радиусам эллипсов, направленным от находящихся в одном из фокусов эллипсов активных нейронов (черных) к неактивным (белым), при этом серыми показаны нейроны в латентном состоянии. Рисунки а) и б) соответствуют двум последовательным шагам моделирования.

## ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Для прогнозирования наиболее важна область в окрестности фронта пожара, поэтому будем рассматривать только нейроны, находящиеся в ней. Что касается всех остальных участков, то они либо сгорели, либо еще не нагреваются и не представляют интереса. В процессе развития пожара рабочая область в окрестности фронта пожара состоит из двух слоев нейронов: слой возбужденных нейронов, соответствующих горящему участку и слой нейронов возбуждаемых, соответствующий участкам, накапливающим тепло (рис. 3).

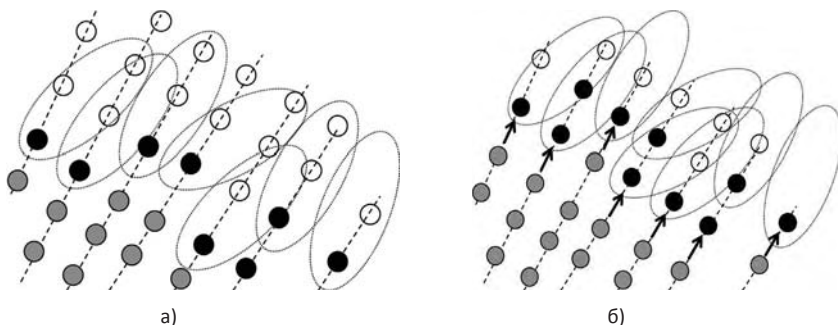


Рис. 2. Распространение сигнала в нейронной сети

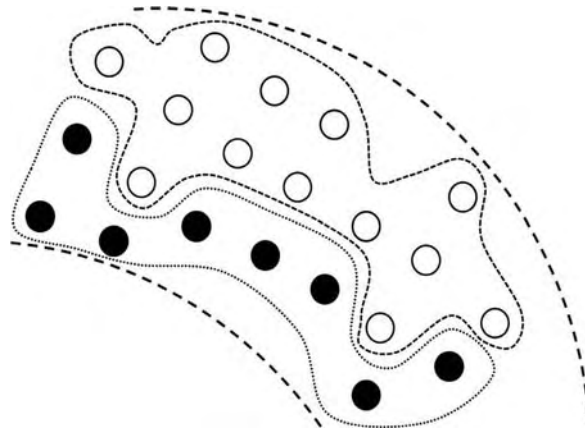


Рис. 3. Участок фронта пожара, разделенный на два слоя - возбужденных и не возбужденных нейронов

Нейронная сеть перемещается по радиусам от очага пожара, возбуждаемые нейроны при активации переходят в слой возбужденных нейронов, а возбужденные нейроны, переходя в латентное состояние, в свою очередь, уходят из слоя активных нейронов. Таким образом, происходит постепенное перемещение сети и замещение нейронов одного слоя нейронами другого слоя, что характерно для рекуррентных нейронных сетей [3].

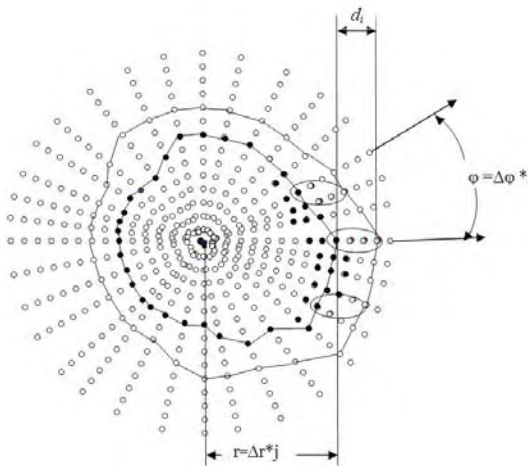


Рис. 4. Распространение пожара в терминах нейронной сети

На каждом шаге после расчета состояния системы производится коррекция синаптических коэффициентов для нейронов, находящихся в рабочей области. Точки контура пожара будут перемещаться по лучам, исходящим из очага пожара, на величину  $d_i$  (где  $i$  - номер луча), на эту же величину будут по лучам перемещаться и два слоя нейронов рис. 4. В то же время результаты наблюдения дают истинное перемещение точки пожара по  $i$ -му лучу  $d_i^*$ . Традиционное обучение нейронной сети состоит в корректировке синаптических связей (обучении сети) до тех пор, пока не выполнится неравенство  $(d_i - d_i^*)^2 < \varepsilon$ . Однако такое обучение не учитывает модель нейронной сети и поэтому происходит очень медленно. Существенно ускорить обучение можно путем применения Калмановской фильтрации [4]. Начнем ее объяснение с описания движения фронта пожара в рамках пространства состояний. Очень важным является вопрос о том, что взять в качестве компонентов вектора состояния системы. Можно в качестве таковых использовать параметры внешней среды, определяющие движение фронта по лучам на  $n$ -м этапе - это направление и скорость ветра, характеристики склона, почвы, растительности, влагосодержание, возможны и

другие параметры в зависимости от используемой модели. Другой подход - взять в качестве компонентов вектора состояния параметров индикатрисы теплопередачи. Если считать ее эллипсом, то такими компонентами могут быть большая и малая полуоси, угол наклона большой оси. Мы будем использовать второй вариант, поскольку он лучше характеризует нейронную сеть: зная параметры индикатрис можно сразу же построить синаптические связи. Будем считать, что для  $i$ -го луча и  $n$ -го шага для всех  $k$  нейронов луча вектор состояния будет одинаков. Тогда в глобальной модели сети размерность вектора состояния  $W(n)$  будет  $z = p \times s$ , где  $p$  - число лучей,  $s$  - число параметров. Размерность вектора измерения  $d(n)$  -  $p$ , по числу лучей.

Перемещение фронта описывается выражением:

$$d_i(n) = C(W(n), \beta(n)) + \beta(n), \quad (1)$$

где  $\beta(n)$  - вектор погрешности измерений,  $C$  - нелинейность при измерении. Предполагается, что погрешность измерений  $\beta(n)$  имеет нулевое среднее значение и определяется процессом типа многомерного белого шума с диагональной матрицей ковариации. Обучение такой нейронной сети будет состоять в корректировке  $z$  параметров, цель обучения - минимизация среднего квадрата отклонения  $\sum_{i=1}^p (d_i - d_i^*)^2$ . Эта корректировка, в свою очередь, приведет к изменению

синаптических коэффициентов, которые зависят от параметров. Поскольку связь вектора параметров и вектора наблюдения нелинейна, эта модель соответствует глобальному расширенному фильтру Калмана. Чтобы применить теорию фильтра Калмана, линеаризуем уравнение (1), представив его в виде:

$$d_i(n) = CW(n) + \beta(n), \quad (2)$$

где  $C$  - матрица измерения линеаризованной модели размерности  $z \times p$  находится как:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial w_1} & \frac{\partial c_1}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial c_1}{\partial w_z} \\ \frac{\partial c_2}{\partial w_1} & \frac{\partial c_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial c_2}{\partial w_z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial c_p}{\partial w_1} & \frac{\partial c_p}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial c_p}{\partial w_z} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Такой фильтр требует операций с матрицами большой размерности, поэтому перейдем к модели несвязного расширенного фильтра Калмана. В соответствии с этой моделью выделим  $p$  (по числу лучей) групп нейронов. В каждую группу входит:  $k$  входных нейронов и  $g$  нейронов скрытого слоя, связанных с входными нейронами синаптическими связями, которые определяются параметрами вектора состояния. Основным отличием предлагаемой модели от известных является то, что в ней одни и те же нейроны входят в несколько соседних групп, т.е. группа как бы перемещается по скрытому слою.

Итак, мы подготовили все для применения алгоритма фильтрации Калмана. В частности, для линеаризованной динамической модели

$$\Gamma(n) = \left[ \sum_{i=1}^p C_i(n) K_i(n \| n-1) C_i^T(n) + R(n) \right]^{-1}, \quad (4)$$

$$G_i(n) = K_i(n \| n-1) C_i^T, \quad (5)$$

$$a(n) = d(n) - d(n \| n-1), \quad (6)$$

$$\hat{w}_i(n+1 \| n) = \hat{w}_i(n \| n-1) + G_i(n)a(n), \quad (7)$$

$$K_i(n+1 \| n) = K_i(n \| n-1) - G_i(n)C_i(n)K_i(n \| n-1). \quad (8)$$

Здесь:  $C_i$  - составная часть матрицы  $C$  для  $i$ -го блока;

$\Gamma(n)$  - матрица размерности  $p \times p$ , представляющая собой глобальный коэффициент передачи для всей сети;

$G_i(n)$  - матрица размерности  $w_i \times p$ , обозначающая коэффициент усиления Калмана для  $i$ -й группы составляющих вектора состояния;

$a(n)$  - вектор размерности  $p \times l$ - невязка, определяемая как разность между желаемым откликом  $d(n)$  линеаризованной системы и его оценкой  $d(n \| n-1)$ , основанной на входных данных, доступных в момент времени  $n-1$ . Оценка рассчитывается по формуле:  $d(n \| n-1) = C(n)\hat{w}(n \| n-1)$ ;  $\hat{w}_i(n \| n-1)$  - вектор размерности  $z \times l$ , являющийся оценкой вектора состояния  $\hat{w}_i(n)$  для группы  $i$  в момент времени  $n$ , при наличии наблюдаемых данных вплоть до момента времени  $n-1$ ;  $K_i(n \| n-1)$  - матрица размерности  $z_i \times z_i$ , являющаяся матрицей ковариации ошибок составляющих вектора состояния. Суммирование, выполняемое при вычислении глобального коэффициента передачи  $\Gamma(n)$ , учитывает несвязную природу расширенного фильтра Калмана:

$$K_i(n \| n-1) = E \left[ \varepsilon(n \| n-1)\varepsilon^T(n \| n-1) \right],$$

где ошибка вектора состояния  $\varepsilon(n \| n-1)$  определяется как  $\varepsilon(n \| n-1) = w(n) - \hat{w}_i(n \| n-1)$ .

При этом  $\Gamma(n)$  связывает ошибку фильтрованной оценки наблюдения и вектор обновления прогноза наблюдения  $a(n)$ :

$$e(n) = R(n)\Gamma(n)a(n), \text{ где } e(n) = d(n) - \hat{d}(n \| n).$$

В уравнение (8) целесообразно добавить искусственный шум  $\omega_i(n)$  - многомерный белый шум с диагональной ковариационной матрицей  $Q_i(n)$ , что снижает вероятность попадания в локальный минимум при обучении. Тогда выражение (8) преобразуется так:

$$K_i(n+1 \| n) = K_i(n \| n-1) - G_i(n)C_i(n)K_i(n \| n-1) + Q_i(n). \quad (9)$$

С учетом этого полная процедура функционирования расщепленного расширенного фильтра Калмана выглядит следующим образом. Перед началом работы происходит инициализация. Параметры индикатрис теплопередачи задаются согласно имеющимся априорным данным о среде: направлению ветра, влажности, запасу горючего и др. В ковариационной матрице  $Q_i(n)$ , характеризующей искусственно введенный шум  $\omega_i(n)$ , диагональные элементы устанавливаются в диапазоне от 0 до  $10^{-2}$ . Начальное значение ковариационной матрицы ошибок  $K_i(n \| n-1)$  полагаем  $K_i(1 \| 0) = \delta^{-1}I$ , где  $\delta$  - малое положительное число,  $I$  - единичная матрица, после чего на каждом шаге прогнозирования последовательно вычисляются рекурсивные соотношения (4), (5), (6), (7), (9). Критерием окончания итераций на  $n$ -м цикле является достижение неравенства

$$a(n) < d(n) - \hat{d}(n \| n-1).$$

На основании изложенных принципов разработано программное обеспечение для моделирования развития лесных пожаров. Созданное программное обеспечение позволяет производить моделирование в реальном времени, а также оперативно изменять входные параметры среды. Для доказательства эффективности моделирования сначала прогонялся весь процесс распространения пожара с заданными параметрами, после чего в исходный набор параметров вводилась неопределенность и прогонка осуществлялась заново, при этом известным считалось лишь положение фронта пожара на всех этапах (в реальной системе положение фронта определялось бы по результатам наблюдения). Неопределенные параметры восстанавливались в процессе прогонки путем обучения на каждом этапе, при этом точность восстановления параметров была не хуже 10%.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-07-00202).

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Г.А. Дорпер. Математические модели динамики лесных пожаров. -М.: "Лесная промышленность",1979.
- [2] R. C. Rothermel. How to predict the Spread and Intensity of Forest and Rande Fires. - U.S. Government print office, 1993
- [3] С. Хайкин. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд., испр.: Пер. с англ./ Саймон Хайкин.- М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006.
- [4] Haykin S., Kalman Filtering and neural networks, John Wiley and Sons, 2001.



## MODEL FOR ASSESSMENT OF STUDENTS' KNOWLEDGE IN AN EDUCATIONAL ENVIRONMENT BASED ON THE GAME

---

*This work presents a model for estimation of student knowledge that can be used as a student model in game-based learning systems. The proposed student model describes the new formula for student knowledge evaluation. The use of neuro-fuzzy system rules for making decisions about the level of student knowledge gives us an easy access when it comes to determining the current level of student knowledge. Since the initial model did not give satisfactory results, we presented a new model with a system of educational games, which is based on variable coefficients for input variables: correct answers, number of used Help and spent time. Here we illustrate data calibration of coefficient improvements to the model, and we report results on its accuracy.*

---

### INTRODUCTION

The main problem for today's teachers is to find the best way to get closer to students belonging to the Net generation. With great power of multimedia content types, today more and more used in the educational process specific types of multimedia applications for learning that is fun - educational games. Through this type of educational materials, today's teachers are trying to show the student teaching content in a simple and interesting way. If we start from the fact that playing the competition's oldest human characteristics, makes it even more the importance of using games in education. Therefore, the assessment of the level of knowledge in such systems is very important. Assessment of good behavior depends on the education system and the flow of the learning process. In this paper the existing model that had to be modified and adapted for educational games. This paper describes the existing model, which had to be modified and adapted for educational games. However this model did not give a satisfactory result, and a new model was applied to the system of educational games, which is based on the variable coefficients.

### NET-GENERATION

Today's generation of students in elementary and secondary schools, and students at universities, belongs to the generation born in the Internet age. Modern psychologists, sociologists and educators as well as indicate the Net Generation (Net = Internet). Growing up with a broad approach to technology, the Net-generation students is able to intuitively use the device information and communication technologies, especially the Internet. Net generation is more visual than ever before to describe replaced generation, many of them are expressed through images. They are able to link images, text and sound in a natural way [1]. Their ability to move between the real and imaginary is instantaneous, enhancing their literacy well beyond text. Given the good availability of visual media, their text written literacy is less developed than in previous generations [2].

Net-generation students prefer to learn by doing, rather than to be told what to do. Net Generation Students learn well through discovery - either alone or with peers. This research with tulle enabling them to acquire better information and use it creatively, designed a way [3,4].

All used computers for their responsibilities in school, but also as a hobby. They have a wide range of interests outside of their chosen field of study. They become grumpy if the operation is challenging, if challenging, glistening in the creative and innovative solutions. They learn by doing, not reading the instruction manual or listening to the lecture [5]. These are students who are teachers and must close. Net generation is comfortable in an environment rich in images than text. The researchers report that

---

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies, Belgrade, Serbia

the Net-generation students refuse to read large amounts of text, whether it be long or long task instructions [6]. They prefer to do things, not just to think or talk about things.

## **EDUCATIONAL GAMES**

Because electronic games are very popular and widespread, the researcher began to explore how electronic games can be used to assist the learning process, especially for those children who have lost interest in certain subjects. Although there are few empirical claims that electronic educational games can improve learning, it should be noted that this happens only if the interaction does not lead in the game by a teacher or in how the game does not include other forms of instruction. One of the main limitations of these educational games is that the skill needed to play games does not mean that the same skills necessary for learning appropriate instruction [7]. Learning takes place only when the student made the connection between active games and existing knowledge. When the student will build this connection usually depends on the individual meta-level knowledge and cognitive skills relevant to learning (in person and personal explanation will follow).

In recent years research in the field of gaming is rapidly developing in many scientific areas. Of course the development of the gaming industry has aroused interest among researchers and technology in education, so that the layout seems to have a new electronic educational game magic tool that will solve many problems in the field of computer-assisted learning. It is thought to enhance learning educational games on the basis of better teaching methods to suit the needs and habits of today's Net Generation students. Providing this kind of support for learning at the same time is extremely important and represents an extreme challenge, creating a special system of learning that include educational games is a challenge because it requires a careful analysis of a stimulating learning and maintaining positive motivation [8].

## **LEARNING IN THE MODERN SYSTEMS OF LEARNING**

In the age of information-telecommunication technologies and the Internet, e-learning systems play a big role in the field of education. E-learning represents a set of applications and processes for interactive learning that can be applied anywhere, at any time and by anyone [9]. Intelligent e-learning systems are capable of behaving in a certain way in unpredictable situations that occur in the process of learning. Intelligent Tutorial Systems (ITS) represent a special class of intelligent e-learning systems, and they base the process of learning on the principle of "learning-by-doing".

One of the most important characteristics of the intelligent tutorial systems (ITS) is the possibility of adjusting instructions to students' needs. To accomplish this ITS must precisely determine the current level of a student's knowledge. Estimation of students' knowledge is most often carried out with the use of appropriate tests. The main advantage of testing is its use in various fields and its easy implementation. Generally speaking, the testing systems use heuristic solutions for estimating students' knowledge. Since one of the more important characteristics of ITS is its capability of adjusting to various student needs, the learning model represents its most significant component. The learning model estimation is called diagnosis because it reveals hidden cognitive states of the observed behavior [10,11].

Model learning is about, even in part the primary qualitative view of students' knowledge about a particular topic or a certain skill in this area, which can partially or fully affect specific aspects of student behavior. Modeling is the process of students creating and maintaining models of learning. Obtaining observing these models is a difficult task because it is based on random hits to the student.

Fuzzy logic techniques are used to improve the performance of ITS due to its ability to handle imprecise information such as the actions of students and to provide descriptions of human knowledge and students' cognitive capabilities. According to IMS-LIP specification, the student can be classified according to predefined rules. This type of classification can be easily represented as a fuzzy logic expressions. For example:

```

IF (TEST_RESULT IS LOW )
THEN STUDENT_CLASS IS BAD

```

This rule states that if a student has a bad score on the test, he is classified as a bad student. The expression *(TEST\_RESULT IS LOW)* is a premise, and the expression *STUDENT\_CLASS IS BAD* is a consequence of the phase rule. *TEST\_RESULT* *STUDENT\_CLASS* and linguistic variables are, and their corresponding values are *LOW* and *BAD*.

The fuzzy logic technique is used in order to provide approximate diagnoses of a student's knowledge and cognitive capabilities similar to human ones. A student's behavior is the only noticeable response used as the input value in the process of the student's modelling. The communication channel between the student and ITS is very limited (usually a mouse and keyboard). ITS's responses to the student are limited and quite different from a human teacher's responses.

### THE INITIAL MODEL FOR ASSESSING STUDENTS' KNOWLEDGE

In the field of lectures and education there are nowadays many algorithms and models used for estimation of students' knowledge. Those are mostly models used in ITS and adaptive testing. Estimation of students' knowledge in these systems is frequently carried out on the basis of results of the tests given to students at the end of the learning process. These results are compared with results of the tests that are also given to students but before the learning process. In this way it is possible to determine the rate of improvement the students have achieved through the use of the learning system.

As said in the Section 2 of this work, modern learning systems use multimedia interactive applications or education games, and estimation of students' knowledge in these systems is thus much more complex. The complexity is reflected in the fact that in such systems a student is observed through his or her actions in the time domain. It is very important to perform appropriate knowledge estimation at the precise moment so that the system could continue to lead the student and the entire learning process properly.

Dealing with students who belong to the Net-generation, and for the purpose of preventing stagnation in the learning process, in the first year of studies at the School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies in Belgrade a system with education games is used. An example of educational games in the educational process was conducted during the winter semester of the 2009/10 school architecture and organization of a computer [12]. Learning model that we used in this educational game based on the principle of neuro-fuzzy work reasoner (NFR) which, in his paper [13] Z. Sevarac presented. Our model was complemented by another input variable - help because the educational component of this game was very much used by students. The initial model based on neuro-fuzzy reasoner we used in the educational game is presented in Figure 1.

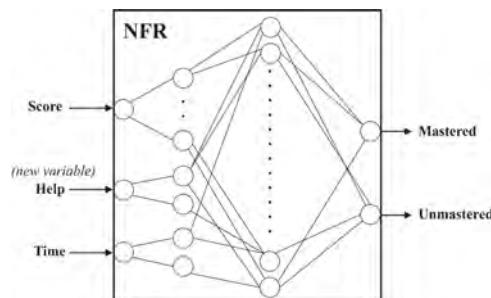


Fig. 1. The initial model based on the NFR

### VARIABLES IN THE MODEL

In this paper, the fuzzy model is used as a basic starting structure.

1. Input and output variables in the model:

- The input variables:
  - The overall result of the game [0. n] - %,
  - Number of use of assistance [0..n]
  - The time needed to complete the task [0..n] - s
- Output variables:
  - Situation of students' knowledge of the game: {*Mastered* or *Unmastered*}

## 2. Fuzzy rules

The set of values of input variables is divided into the following fuzzy rules:

- The overall result of the game: *Bad, Medium, Good*.
- Number of use of assistance has two states: *Rare* and *Often*. *Rare* means less use of the game to help students fit, while *Often* indicates more frequent use of aid.
- The time needed to complete the task, interpreted as speed: *Slow* and *Fast*.

Rules for the classification of the student's knowledge of the game are shown in Table 1.

**Table 1.** Rule classification of students' knowledge

SCORE	HELP	TIME	KNOWLEDGE
good	rare	fast	mastered
good	rare	slow	mastered
good	often	fast	mastered
good	often	slow	mastered
medium	rare	fast	mastered
medium	rare	slow	mastered
medium	often	fast	unmastered
medium	often	slow	unmastered
bad	rare	fast	unmastered
bad	rare	slow	unmastered
bad	often	fast	unmastered
bad	often	slow	unmastered

The presented NFR rules for classification of students, modified and adjusted to our learning system with education games, haven't given quite precise calculations. The rule by which a student's knowledge is classified as „mastered“ in the situation when the result of playing is medium, where the number of used Help windows is higher, and the time of playing is slow, proved to be false in our case.

After the use of the education game, students were given a practical task on a paper in order to compare accuracy of the presented model. The results of comparison of practical results and estimation of the knowledge level through the given model were not satisfactory. The error which occurred in the estimation equalled the value of 52.11%

## MODEL VARIABLES COEFFICIENTS

After the initial model did not give the expected results, we applied a new model for evaluating the level of knowledge that is used as a variable value coefficient. The rule for determining the percentage of knowledge applies basic arithmetical operations to input parameters of the model. The significance of the input values for final knowledge estimation is determined on the basis of empirical coefficient values, given by the teacher. The current knowledge level a student possesses after playing the education game is given with the following formula:

$$P(X = Mastered) = a * \sum_i^n Ai - h * \sum_i^n Hi + t * [(\sum_i^n Ai - \sum_i^n Hi) * t_a + \sum_i^n Hi * t_h] \quad (1)$$

where a, coefficient hit with three main parts of the formula. Coefficient values that may have varied in the range from 0 to 1. The first part of the formula is the most important part in calculating the final level of students' knowledge, because it uses the number of correct answers -  $A_i$ . The second most important part of the assessment of knowledge is the second part of the formula representing the num-

ber of windowing for help when playing games -  $H_i$ . This part of the formula has a negative sign because it reduces the likelihood of the final level of knowledge. Part of the formula over time, has the smallest budget of the importance of knowledge. When a student uses the help window, it increases the time needed to answer what causes the reduction of the total student. The values of  $t_a$  and  $t_h$  in the part of the formula with time show the average time a student needs to give an answer when he or she uses the Help window, i.e. the time needed for giving an answer without using the Help window:

- time  $t_a$  - average time to respond without the use of assistance - help window
- time  $t_h$  - average time to respond to the use of help - help window

On the basis of teachers' experience, the values for significance of coefficients in the given formula are presented in Table 2.

**Table 2.** Values of coefficients in our model

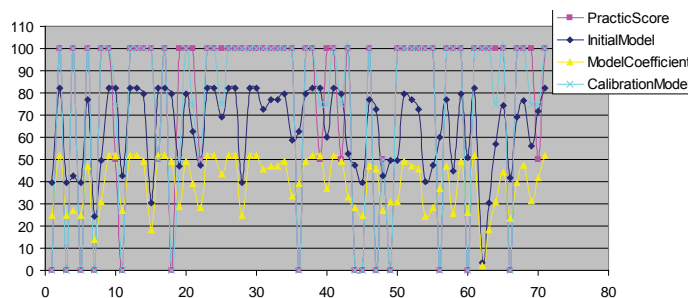
Coefficient	Values
a	0.50
h	0.30
t	0.15

As it can be seen from the Table 2, the most important coefficient in calculating the entire knowledge of a student is the coefficient a. Influence of the first part of the formula on calculation of the entire student's knowledge is huge in the case when the number of correct answers during playing of the game is also high. This coefficient has therefore been assigned the value 0.50. A lower value, but also important in calculating the knowledge, for the coefficient with Help - h, is presented with the value 0.30. The third part of the formula has the lowest significance in the calculation, and thus the coefficient next to it has the value of only 0.15.

Through repeated comparison of the practical results and estimation of the knowledge level with the new model we have come to very encouraging results. With the use of the new model we have managed to reduce the error in estimating students' knowledge level by 20%. The error that is now made by the system has been reduced to 29.97% with the use of the above given formula with empirical coefficient values.

### CALIBRATION OF THE MODEL VARIABLES COEFFICIENTS

To get a more accurate system based on education game, we examined the sensitivity of the proposed model. To rule out the possibility that the three values that are the experts determine the ideal, we tried higher values (0.70 for coefficient a, 0.50 for coefficient h, and 0.30 for coefficient t). Higher values for a and h coefficients give better precision, while a larger coefficient t does not change the precision. These results indicate that we are able to observe the appropriate ranges of values for coefficient a from 0.50 to 0.75 and ranges from 0.30 to 00:55 for coefficient h. They also indicate that the model is generally more sensitive to changes coefficient t (from 0.15 to 0.30). In Figure 2, can be seen comparing the three models to assess the knowledge of students with real results. The new setting coefficients error in the assessment is reduced to only 15.57%.



**Fig. 2.** Comparison of three models with practical results

## CONCLUSION

As shown in this paper, the application of existing models to assess students' knowledge of a system that uses educational games, is not adequate. Therefore, in this paper the authors refer to a new way of calculating the current level of knowledge of students, using a modification of input parameters, which are also used in the models. Modification of these parameters is reflected in adding a new parameter - time. Adding in the time domain system is inevitable because the games are educational variable in time, as opposed to static tests that are independent of time.

Model shown with varying coefficients can be applied as the basis of many pedagogical agents that can be added to the new kinds of educational multimedia systems based on the game.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This paper is part of the research Project No. TR35026, Project No. TR32039, Project No. TR32047 and subproject 3 in Project No. III 47016, supported by the Ministry of Science and Technological Development of the Republic of Serbia.

## REFERENCES

- [1] Barnes, Cassandra, Raymond C. Marateo, and S. Pixy Ferris Teaching and Learning with the Net Generation, *Innovate Journal of Online Education* 3(4), 2007.
- [2] Frand, J. Changes in Students and Implications for Higher Education, *The Information-Age Mindset*, 2000.
- [3] Tapscott, D. *Growing Up Digital: The Rise of the Net Generation*. McGraw-Hill: New York, 1998.
- [4] K. Kuk, D. Prokin, G. Dimić, B. Stanojević, "New Approach in Realization of Laboratory Exercises in the Subject Programmable Logic Devices in the System for Electronic Learning - Moodle, *Facta Univ. Ser.: Elec. Energ.*, vol. 24, No. 3, April 2011, pp. 131-140.
- [5] McNeely, B. *Using Technology as a Learning Tool, Not Just the Cool New Thing*, 2004.
- [6] Kljakić D. *E-learning: Učenje za Net-generaciju, Naša škola*, Sarajevo, 2007, pp. 3-17.
- [7] Xiaohong Z. *Adaptive Support for Student Learning in Educational Games*, Thesis for master's degree, The Univ. of British Columbia, 2002.
- [8] Randel J. M., Morris B.A., Wetzel C.D., Whitehill B. V. The effectiveness of games for educational purposes: A review of recent research, *Simulation & Gaming* 23, 1992, pp. 261-276.
- [9] Albert, D. *E-learning Future - The Contribution of Psychology*, Germany, Pabst Science Publishers, 2001, pp. 30-53.
- [10] Sleeman D., Brown J. S. *Intelligent Tutoring Systems*, Ed. Academic Press, 1982.
- [11] Stathacopoulou R., Magoulas G. D., Grigoriadou M., Samarakou M. Neuro-fuzzy knowledge processing in intelligent learning environments for improved student diagnosis, Elsevier Science Inc. New York, 2005.
- [12] Kuk K., Prokin D., Dimić G., Spalević P., "Learning Unary Logical Operations through the Modern Interactive Educational Application - Arhicomp", 10th Anniversary International Scientific Conference, UNITECH'10. Gabrovo. Bulgaria. Vol. 3, pp. 303-308. 2010.
- [13] Sevarac Z. *Neuro Fuzzy Reasoner for Student Modeling*, IEEE Computer Society, Washington, 2006.

## THE SOFTWARE TESTING OPTIMIZATION MODEL

---

*Software Testing represents a significant portion, more than 40%, of the software applications development budget. In this paper we describe Risk-Based Optimization Model of Software Testing Process designed to improve the efficiency and effectiveness of the testing effort assuring the low project risk of developing and maintaining high quality of complex software systems within schedule and budget constraints. Our Optimization Model combines Economic Value Management and Risk Management methodology through simulation-based software testing scenarios at various abstraction levels of the system/software under test activities to manage stable software testing process at lowest risk, at an affordable price and time. Models and simulations can vary significantly in size and complexity and can be useful tools in several respects. They can be used to conduct predictive analyses for developing plans for test activities, for assisting test planners in anticipating problem areas, and for comparison of predictions to collected data.*

---

### SOFTWARE ENGINEERING

Software engineering involves multiperson construction of multiversion programs. Sound software engineering requires the engineer to state precisely the requirements that the software product is to satisfy and then to produce designs that will meet these requirements. Software engineers should start with a precise description of the problem to be solved; then proceed to producing a design and validating the correctness of the design; finally, implementation and testing are performed [1]. The software requirements should clearly state what is required and it should be evident what is not required. Engineers are required to produce the product design and then analyze their design for correctness. An engineering analysis of the design includes mathematics and software inspections, and this is essential to ensure the correctness of the design. The term engineer is generally applied only to people who have attained the necessary education and competence to be called engineers and who base their practice on mathematical and scientific principles.

Software is a special type of behavioral information of computing and a means of interaction between the information world and the physical world. The nature of software makes software engineering a unique discipline, which is innately the most complicated engineering branch that humans ever experienced, and inherently the most overarching transdisciplinary field in both theories and applications. These are also the reasons that set forth software engineering as an ideal testbed for existing theories and methodologies of a wide range of science and engineering disciplines from mathematics to cognitive informatics, and from management science to sociology [2]. Software engineering is an increasingly important discipline that studies the nature of software, approaches and methodologies of large-scale software development, and the laws behind software behaviors and software engineering practices. The study of the fundamental constraints of software engineering is helpful for: a) Understanding fundamental problems in software engineering; b) Guiding the development of software engineering theories and methodologies; and c) Evaluating software engineering theories, principles, and techniques [2]. To deal with the difficulties inherent in large-scale software development, the multidisciplinary foundations of software engineering are yet to be explored. This paper adopts an interdisciplinary approach to explore the foundations of software engineering, specially in software testing [3]. Software testing represents a significant portion, more than 40%, of the software applications development budget. In this paper we describe Risk-Based Optimization Model of Software Testing Process designed to improve the efficiency and effectiveness of the testing effort assuring the low project risk of developing and maintaining high quality of complex software systems within schedule and budget

1 State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia

2 Union University, School of Computing, Belgrade, Serbia

constraints [4]. Our Optimization Model combines Economic Value Management and Risk Management methodology through simulation-based software testing scenarios at various abstraction levels of the system/software under test activities to manage stable software testing process at lowest risk, at an affordable price and time [5]. The optimization model is based on Return on Investment and appropriate Risk Management activities that assure the savings on the cost avoidance associated with detecting and correcting defects earlier rather than later in the product evolution cycle [3,5]. Models and simulations can vary significantly in size and complexity and can be useful tools in several respects. They can be used to conduct predictive analyses for developing plans for test activities, for assisting test planners in anticipating problem areas, and for comparison of predictions to collected data. Validated models and simulations can also be used to examine test article and instrumentation configurations, scenario differences, conduct *what-if* tradeoffs and sensitivity analyses, and to extend test results.

This work attempts to put together a number of multidisciplinary foundations for software engineering, such as philosophy, computing, mathematics, informatics, systems science, management science, cognitive science, linguistics, and measurement. Fundamental problems and constraints of software engineering have been identified. The approaches to software engineering have been explored in the context of how the basic constraints of software engineering may be dealt with. The framework of multidisciplinary foundations of software engineering has been presented as a new approach towards Software Testing Process.

## **SOFTWARE ENGINEERING MATHEMATICS**

Software is an intellectual artefact that provides a solution for a repeatable computer application, which enables existing tasks to be done easier, faster, and smarter, or which provides innovative applications for the industries and in everyday life [1,2]. Although the nature of software has been perceived quite differently in research and practice of computing and software engineering, the following perceptions on the nature of software can be found in the literature: a) Software is a mathematical entity; b) Software is a concrete product, and c) Software is a set of behavioral information. Software engineering is a discipline that adopts engineering approaches, such as established methodologies, processes, measurement, tools, standards, organisation methods, management methods, quality assurance systems and the like, in the development of large-scale software seeking to result in high productivity, low cost, controllable quality, and measurable development schedule [1-2, 4-7]. Although software engineering has emerged as a branch of computer science, it is recognized that software engineering requires much broader and multidisciplinary foundations as follows: 1) Principles of Software Engineering; 2) Engineering Foundations; 3) Philosophical Foundations; 4) Mathematical Foundations; 5) Computing Foundations; 6) Linguistics Foundations; 7) Information Science Foundations; 8) Cognitive Informatics Foundations; 9) Systems Science Foundations; 10) Management Science Foundations; 11) Economics Foundations and 12) Sociology Foundations [2].

Software engineering is a unique and the most complicated engineering discipline that is ever faced in the human history. The ability to use mathematics to solve practical problems is part of the engineer's education, and part of the daily work of an engineer. The engineer applies mathematics and models to the design of the product, and the analysis of the design is a mathematical activity. Mathematics allows a rigorous analysis to take place and avoids an overreliance on intuition. The focus needs to be on mathematics that can be applied to solve practical problems and in developing products that are fit for use, rather than in mathematics for its own sake that is the interest to the pure mathematician. The emphasis in engineering is always in the application of the theorem rather than in the proof, and the objective is therefore to teach students how to use and apply mathematics to program well and to solve practical problems. The characteristics of theoretical problems under study in a field are abstract, inductive, mathematics-based, and formal-inference-centered; while those of empirical problems are concrete, deductive, data-based, and experimental-validation-centered.

Mathematical Foundations of Software Engineering, investigates the logical and algebraic properties



and laws of software and software engineering. Mathematics enabling rigorous inferences to be carried out on the basis of simple deductive rules, and the formally documented results are validated without exceptions. Therefore, the entire theory of software engineering is about mathematical modeling of software and denotational mathematics for software engineering [3]. Essential elements of denotational mathematics for modeling software architectures and software system behaviors are analyzed. New mathematical structures such as cumulative relations and Real-Time Process Algebra (RTPA) are developed on the basis of conventional fundamental mathematics such as set theory, Boolean algebra, and mathematical logic. RTPA serves as both a denotational mathematical means and a system design and refinement methodology for software engineering.

The mathematical foundation for software engineering should include areas listed in Table 1.

**Table 1.** Mathematics for Software Engineering

Set Theory	This material is elementary but fundamental. It is familiar to all high-school students. It includes, for example, set union and intersection operations; the Cartesian product of two sets, etc.
Relations	A relation between $A$ and $B$ is a subset of $A \times B$ . For example, the relation $T(A, A)$ where $(a_1, a_2) \in T$ if $a_1$ is taller than $a_2$ .
Functions	A function $f: A \rightarrow B$ is a relation where for each $a \in A$ there is exactly one $b \in B$ such that $(a, b) \in f$ . This is denoted by $f(a) = b$ . Functions may be total or partial.
Logic	Logic is the foundation for formal reasoning. It includes the study of propositional calculus and predicate calculus. It enables further truths to be derived from existing truths.
Calculus	Calculus is used extensively in engineering and physics to solve practical problems. It includes differentiation and integration, numerical methods, solving differential equations, etc.
Probability Theory	Probability theory is concerned with determining the mathematical probability of various events occurring. One example of its use in software engineering is in predicting the reliability of a software product.
Finite State Machines	Finite state machines are mathematical entities that are employed to model the execution of a program. The mathematical machine is in a given state and depending on the input there is a change to a new state. Finite state machines may be deterministic or non-deterministic.
Tabular Expressions	This is an approach developed by Parnas and others and may be employed to specify the requirements of a system. It allows complex predicate calculus expressions to be presented in a more readable form (in a 2-dimensional table) using a divide and conquer technique.
Graph Theory	Graphs are useful in modeling networks, data flow diagrams, control flow and a graph consists of vertices and edges. An edge joins two vertices.
Matrix Theory	This includes the study of $2 \times 2$ and $m \times n$ dimensional matrices. It includes calculating the determinants of a matrix and the inverses of a matrix.

The advantage of mathematics is that it allows rigorous analysis and avoids an overreliance on intuition. Mathematics provides precise unambiguous statements, and the mathematical proof of a theorem provides a high degree of confidence in its correctness. The focus in engineering is on mathematics that can be applied to solve practical problems and in developing products that are fit for use, whereas the interest of the pure mathematician is in mathematics for its own sake. The emphasis in engineering is always in the application of the theorem rather than in the proof, and the objective of engineering mathematics is to teach students on using and applying mathematics to program well and to solve practical problems.

## SOFTWARE ENGINEERING VALIDATION METHODOLOGIES

The development of soft systems is a revolution that transforms the information processing and intelligent parts of the conventional physical products into software. Model-Based Testing through Simulation approach has an explicit model to start with and so this problem does not arise. A constructive approach is preferred by some groups in formal methods, and in this approach whenever existence is stipulated constructive existence is implied, where a direct example of the existence of an object can

be exhibited, or an algorithm to produce the object within a finite time period exists. This is different from an existence proof, where it is known that there is a solution to a particular problem but there is no algorithm to construct the solution.

Simulate-Test-Evaluate-Process (STEP) as shown in Fig. 1 enables a specific problem or a special application be solved or implemented by a general purpose solution plus a specific software system. In this approach, a given problem is divided into two categories: a) the standardized control drivers and interfaces to the general purpose computer, and b) the special purpose software for the application. Therefore, a new design and implementation of a specific system is reduced to a problem of changing the software subsystem rather than that of refabricating the entire machine.

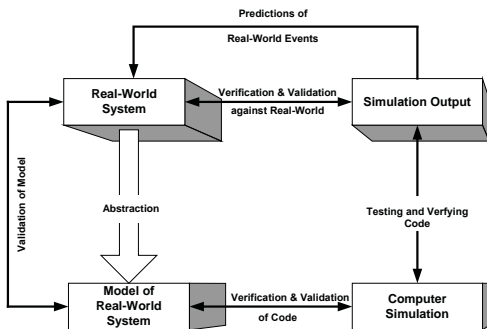


Fig. 1. Simulate-Test-Evaluate-Process (STEP)

Table 2 Methodologies for Validating Software Products

No.	Validation method	Work product in software engineering	
		Design (Synthesis)	Implementation
1	Logical verification	√	
2	Mathematical prove	√	
3	Review	√	
4	Simulation	√	√
5	Testing		√
6	Trial		√

On the basis of rationalism, it can be seen that the methodology for software engineering validation and software quality assurance are profoundly different from the physical engineering disciplines, because the objects under study in the former are abstract and behavioral information. According to Theorem 1, the following corollaries can be derived.

**Theorem 1** The validation of abstract propositions states that the abstract and information-based propositions and work products, such as a design or a specification of a system, are bounded by logical verifications, mathematical proofs, systematical reviews, behavioral simulations and tests, and/or in field trials.

**Corollary 1** The validation methodologies of software design and implementation can be sufficiently categorized as shown in Table 2.

Corollary 1 indicates that the validation methodologies in software design and implementation are totally different. As shown in Table 2, the validation of the work products of software designs can be: a) Formal verification on the basis of logic and formal models of the design; b) Review or inspection of the design; and/or c) Simulation or prototyping. However, software implementations can only be validated by simulation, testing, and/or empirical trial. Corollary 1 also indicates that software implementation itself is actually a validation method for the design of the given software system. This is an inherent property of complex systems where a long chain of processes is adopted in the design and implementation lifecycle to validate the system. Therefore, no simple or single process may be adequate in software system validation. As Brooks said, there is “no silver bullet.”, but our Risk-Based Optimization Model of Software Testing Process is close to be “silver bullet.” [2,4].

### RISK-BASED OPTIMIZATION MODEL OF SOFTWARE TESTING PROCESS

Traditional approaches, such as module and integration testing, only addressed part of the need. Module testing checks individual units and integration testing checks subsets of modules. But neither addresses the quality of the overall system, particularly in systems of systems. Neither test approach addresses the quality of the system from the end user’s point of view. What is End-to-End Testing & Assurance-Based Testing [4], shortly *E2E testing* and how does it address those concerns? E2E testing focuses on the end user’s point of view. As we know the entire system work together to produce the

correct, desired end result for the user. It documents paths that can be traced through the modules and subsystems to produce an output or function that serves the user correctly. Once these paths are identified, they can be ranked for risk and criticality. The ranking forms the basis for selecting test scenarios wisely. E2E represent the user's point of view using thin threads to define the user's perspective in E2E test specifications. A thin thread represents a minimum usage scenario of an integrated system. Essentially, a thin thread is a complete scenario from the end user's perspective; the system takes input data, performs some computation and produces output.

The thin thread describes the whole scenario and it describes just one function. Thin threads with certain commonalities can form a hierarchical thin thread group. That is, a collection of low-level, thin thread groups with certain commonalities can be further grouped into a high-level, thin-thread group. Thin threads and conditions are the core of E2E test specifications. They provide a very effective framework for risk analysis, test case generation, and regression testing.

We applied the E2E Test strategy in our Integrated and Optimized Software Testing framework (IOSTP) [3]. In determining the best source of data to support analyses, IOSTP with embedded RBOSTP considers credibility and cost of each test scenario i.e. concept [4]. Resources for simulations and software test events are weighed against desired confidence levels and the limitations of both the resources and the analysis methods. The program manager works with the test engineers to use IOSTP with embedded RBOSTP to develop a comprehensive evaluation strategy that uses data from the most cost-effective sources; this may be a combination of archived, simulation, and software test event data, each one contributing to addressing the issues for which it is best suited.

The central elements of IOSTP with embedded RBOSTP are: the acquisition of information that is credible; avoiding duplication throughout the life cycle; and the reuse of data, tools, and information in order to find out Optimal Test Scenario with minimal cost, time and acceptable risk level, but assuring required level of software quality. The system/software under test is described by objectives, parameters i.e. factors (indexed by  $j$ ) in requirement specification matrix, where the major capabilities of subsystems being tested are documented and represent an independent i.e. input variable to optimization model. Information is sought under a number of test conditions or scenarios. Information may be gathered through feasible series of experiments (E): software test method, field test, through simulation, or through a combination, which represent test scenario indexed by  $i$  i.e. sequence of test events. Objectives or parameters may vary in importance  $\alpha_j$  or severity of defect impacts. Each M&S or test option may have  $k$  models/tests called modes, at different level of credibility or probability to detect failure  $\beta_{ijk}$  and provide a different level of computed test event information benefit  $B_{ijkl}$  of experimental option for cell  $(i,j)$ , mode  $k$ , and indexed option  $l$  for each feasible experiment depending on the nature of the method and structure of the test. Test event benefit  $B_{ijkl}$  of feasible experiment can be simple ROI or design parameter solution or both etc. The cost  $C_{ijkl}$  of each experimental option corresponding to  $(i,j,k,l)$  combination must be estimated through standard cost analysis techniques and models. For every feasible experiment option, tester should estimate time duration  $T_{ijkl}$  of experiment preparation end execution. The testers of each event, through historical experience and statistical calculations define the  $E_{ijkl}$ 's (binary variable 0 or 1) that identify options. The following objective function is structured to maximize benefits and investment in the most important test parameters and in the most credible options. The model maintains a budget, schedule and meets certain selection requirements and restrictions to provide feasible answers through maximization of benefit index  $-B_{enefit} I_{ndex}$  :

$$B_{enefit} I_{ndex} = \max_{i,j,k,l} \sum_j \sum_i \sum_k \sum_l \alpha_j \beta_{ijk} B_{ijkl} E_{ijkl} \quad (1)$$

Subject to:

$$\sum_j \sum_i \sum_k \sum_l C_{ijkl} E_{ijkl} \leq BUDGET \quad (\text{Budget constraint});$$

$$\sum_j \sum_i \sum_k \sum_l T_{ijkl} E_{ijkl} \leq TIMESCHEDULE \quad (\text{Time-schedule constraint})$$

$$\sum_l E_{ijkl} \leq 1 \quad \text{for all } i, j, k \quad (\text{at most one option selected per cell } i, j, k \text{ mode})$$

$$\sum_k \sum_l E_{ijkl} \geq 1 \quad \text{for all } i, j \quad (\text{at least one experiment option per cell } i, j)$$

Models and simulations can vary significantly in size and complexity and can be useful tools in several respects. They can be used to conduct predictive analyses for developing plans for test activities, for assisting test planners in anticipating problem areas, and for comparison of predictions to collected data. Validated models and simulations can also be used to examine test article and instrumentation configurations, scenario differences, conduct *what-if* tradeoffs and sensitivity analyses, and to extend test results. In other words, the software parameters are estimated on-line and the corresponding optimal actions are determined based on the estimates of these parameters. This leads to an adaptive software testing strategy. A non-adaptive software testing strategy specifies what test suite or what next test case should be generated e.g. random testing methods, whereas an adaptive software testing strategy specified what next testing policy should be employed and thus in turn what test suite or next test case should be generated in accordance with the new testing policy to maximize benefit index function (1) which is in nature uncertain i.e. includes risk to detect failure. Benefit index function depends of failure severity if the chosen feasible experiments i.e. test event don't detect failure ( $\alpha_j$ ) because of test event capability i.e. probability to detect failure  $\beta_{ijk}$ . Because of risk impact and probability of success of test event, increasing cost and rework time to fix undetected SUT faults, we call our Optimization approach of Software Testing Process - Risk-Based. RBOSTP is based on defect removal (detection and fixing) metrics.

### **COST TO FIX ERROR, RISK MANAGEMENT AND ECONOMIC VALUE AS LEADING INDICATORS OF SOFTWARE TEST OPTIMIZATION**

For each development phase, the number of defects detected during that phase shall be tracked. In addition, for each defect, the phase in which that defect was created shall be tracked. Some representative **Defect Removal Efficiency and defect fixing Cost** matrix data that we call **DRECR** of system/software under test described by objectives, parameters i.e. factors (indexed by  $j$ ) in requirement specification matrix from few project versions history is presented in Table 3 for an typical software product development. If a large number of fixes are ineffective, then the process used for corrections should be analyzed and corrected. Items to report include: 1) Total inspections to be conducted or tests to run; 2) Inspections or tests completed, and 3) Cumulative inspections or tests failed. The final test metric relates to technical performance testing. The issues in this area vary by type of software being developed, but top-level metrics should be collected and displayed related to performance for any medium- or high- technical risk areas in the development. The maximum rework rate was in the requirements which were not inspected and which were the most subject to interpretation. Resolution of the defects and after the fact inspections reduced the rework dramatically because of **Defect Containment**. Defect containment metric tracks the persistence of software defects through the life cycle. It measures the effectiveness of development and verification activities. Defects that survive across multiple life-cycle phases suggest the need to improve the processes applied during those phases.

If defects from earlier phases are not detected during that phase, there may be a need to improve the processes used for exiting those phases. Such defects suggest that additional defects are latent as presented in Table 3. The last column represent relative *Additional Cost to Repair Multiplier* ratio range  $CM_{s=1jP \rightarrow P+1} - CM_{s=8jP \rightarrow P+1}$  for errors with lowest severity  $s=1$  and **highest severity 5** of error originated in previous  $P$  phase but escaped and detected in later  $P+1$  phase compared to cost expressed in cost units [cu] to fix immediately using cost to fix of Requirement defect as a base i.e. 1.

For simplicity purpose, an undetected major or higher severity ( $s \geq 4, s=1..5$ ) defect that escapes detection and leaks to the next phase may cost ten times to detect and correct. A minor or lower severity ( $s \leq 3$ ) defect may cost two to three times to detect and correct.

Table 3 Typical Defect Removal Efficiency and defect fixing Cost Ratio matrix DRECR

DEFECTS		FOUND IN:								
		Requirement	HL Design	LL Design	Code (unit) Test	Integration / System Test	Acceptance (User) Test	Operation Post-Release	Total orig. in phase	Fixing multiplier (Cost Ratio) $CM_1-CM_2$
ORIGINATED IN:	Requirement	22	3	8	2	4	4	2	45	1
	HL Design	0	17	9	1	2	2	3	34	3-6
	LL Design	0	0	12	11	8	5	4	40	8-10
	Code (unit) Test	0	0	0	7	9	8	1	25	10-15
	Integration / System Test	0	0	0	0	4	2	2	8	15-40
	Acceptance (User) Test				0	0	2	1	3	30-70
	Operation Post-Release	0	0	0	0	0	0	0	0	40-1000
	Total found in phase	22	20	29	21	27	23	13	155	

The Net Savings ( $NS$ ) then are nine times for major defects and one to two times for minor defects. Because of that we apply simple but proven reasoning about high ROI as key benefit of software test events  $B_{ijkl}$  in optimization objective equation (1) i.e.  $ROI_j = \text{Net Savings for } j \text{ objective} / \text{Detection Cost for } j \text{ objective}$ . Of course, some benefits of the system/software under test described by objectives, parameters i.e. factors (indexed by  $j$ ) in requirement specification matrix, which is the major capabilities of subsystems being tested, must be verified and validated in every SDLC phase  $P$  by many test events. Of course, few objectives are tested only in one or two phases  $P$  and test events. Also, *Net Savings for  $j$  objective in phase  $P$ : Cost Avoidance-Cost to detect/Repair Now in phase  $P$* . It means, *Net Saving* benefit is error prevention to escape from phase  $P$  to next  $P+1$  phase, or downstream phases to the customer use of defective software in the field. In mathematics language, it is calculated as:

$$NS_{ijkl} = \sum_{P=1}^7 \delta_{jP} * P_{ijklP} * CA_{ijklP} \quad (2)$$

where  $\delta_{jP} = 0$  if not applicable in phase  $P$ , 1 if is applicable in phase  $P$ ,  $P_{ijklP}$  is probability of feasible  $l$  of  $k$  experiments in phase  $P$  to detect error of  $j$  objective i.e. to prevent defect to escape in phase  $P+1$ .

Also,  $\sum_{P=1}^7 \delta_{jP} P_{ijklP} = 1$ , and cost avoidance  $CA_{ijklP}$  in phase  $P$  is calculated as:

$$CA_{ijklP} = \sum_{r=1}^P DD_{sjr \rightarrow P} * CM_{sjP \rightarrow P+1}, \text{ or rewritten as,}$$

$$CA_{ijklP} = \sum_{r=1}^P DD_{sjr \rightarrow P} * (CM_{sjP+1} - CM_{sjP}) \quad (3)$$

where  $DD_{sjr \rightarrow P} = DRECR(r, P)$  denotes Defect Detected in phase  $P$  of  $j$  objectivity,  $s$  severity for defects  $D_{sj}$  originated in phase  $r$  but escaped and detected in phase  $P$  denoted as  $D_{sj \text{ dOrIn } r \rightarrow P}$  that will make additional cost to detect and fix by cost multiplier  $CM_{sjP \rightarrow P+1}$ . Cost avoidance in phase  $P$ , then will be easily calculated from DRECR matrix like  $CA_{ijklP} = \sum_{r=1}^P DRECR(r, P) * (CM(P+1) - CM(P))$ . Finally, if  $j$  objective severity ( $s=1..5$ ) is assessed in requirement or specification matrix than importance  $\alpha_j=s$ ,  $\beta_{ijk} = P_{ijkP}$  of experiment i.e. we must offer as many as we could feasible  $k$  series of experiments (E): software test method, field test, through simulation, or through a combination, which represent test scenario indexed by  $i$  to find out maximal benefit index  $-B_{benefit \text{ index}}$  rewritten as:

$$B_{enefit} I_{ndex} = \max_{i,j,k,l} \sum_j \sum_i \sum_k \sum_l s_j ROI_{ijkl} E_{ijkl} \quad (4)$$

Where,  $ROI_{ijkl} = \frac{NS_{ijkl}}{C_{ijkl}}$  and (budget, cost) constraints as in (1).

This model goal is to find out test scenario indexed by  $i$  with maximal benefit index  $-B_{enefit} I_{ndex}$  based on Return on Investment bases and appropriate Risk Management activities assure the savings on the cost avoidance associated with detecting and correcting defects earlier rather than later in the product evolution cycle.

## ACKNOWLEDGEMENT

This work has been done within the project 'Optimal Software Quality Management Framework', supported in part by the Ministry of Science and Technological Development of the Republic of Serbia under Project No.TR-35026.

## CONCLUSIONS

In software development organizations, increased complexity of product, shortened development cycles, and higher customer expectations of quality proves that software testing has become extremely important software engineering activity. Software development activities, in every phase, are error prone so defects play a crucial role in software development. At the beginning of software testing task we encounter the question: How to inspect the results of executing test and reveal failures? What is risk to finish project within budget, time and reach required software performance i.e. quality? How does one measure test effectiveness, efficacy, benefits, risks (confidence) of project success, availability of resources, budget, time allocated to STP? How does one plan, estimate, predict, control, evaluate and choose "the best" test scenario among hundreds of possible (considered, available, feasible) number of test events (test cases)? Proposed Software Testing Metrics Framework as a part of IOSTP framework solved these issues combining few engineering and scientific areas such as: Software Measurement, Design of Experiments, Modeling & Simulation, integrated practical software measurement, Six Sigma strategy, Earned (Economic) Value Management (EVM) and Risk Management (RM) methodology through simulation-based software testing scenarios at various abstraction levels of the SUT to manage stable (predictable and controllable) software testing process at lowest risk, at an affordable price and time.

## REFERENCES

- [1] Kan, S. *Metrics and Models in Software Quality Engineering*, 2<sup>nd</sup> Edition, Addison-Wesley, 2003.
- [2] Pressman, R. *Software Engineering: a practitioner's approach*, Published by McGraw-Hill, Fifth edition, 2001.
- [3] Lazić Lj., Velašević D. Applying Simulation and Design of Experiments to the Embedded Software Testing Process", *SOFTWARE TESTING, VERIFICATION AND RELIABILITY*, Volume 14, Number 4, p 257-282, John Willey & Sons, Ltd., 2004.
- [4] Lazić Lj., Mastorakis N. RBOSTP: Risk-based optimization of software testing process Part 2", *WSEAS TRANSACTIONS on INFORMATION SCIENCE and APPLICATIONS*, Issue 7, Volume 2, p 902-916, July 2005.
- [5] Lazić Lj., Mastorakis N. Software Testing Process Improvement to achieve a high ROI of 100:1, 6th WSEAS Int. Conf. On MATHEMATICS AND COMPUTERS IN BUSINESS AND ECONOMICS (MCBE'05), March 1-3, Buenos Aires, Argentina 2005.
- [6] Khoshgoftaar T., et al. Data mining for predictions of software quality. *International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering*, 1999.
- [7] Votta L., Porter A. Experimental software engineering: A report on the state of the art. In Proceedings of the Seventeenth International Conference on Software Engineering, *IEEE Computer Society*, pages 277-279, Seattle, WA, Apr. 1995.

## NON-REPRODUCTIVE AND REPRODUCTIVE SOLUTIONS OF SOME MATRIX EQUATIONS

---

In this paper we analyzed solutions of some complex matrix equations related to pseudoinverses using the concept of reproductivity. Especially for matrix equation  $AXB=C$  it is shown that Penrose's general solution is actually the case of the reproductive solution.

---

### REPRODUCTIVE EQUATIONS

A concept of reproductive equations was introduced by S. B. Prešić [4] in 1968. The implementation of the concept of reproducibility was also considered by J. D. Kečkić ([6], [7]) and S. B. Prešić and J. D. Kečkić [12].

**Definition.** The reproductive equations are the equations of the following form:

$$x = f(x)$$

where  $x$  is a unknown,  $S$  is a given set and  $f : S \rightarrow S$  is a given function which satisfies

$$f \circ f = f. \tag{1}$$

The condition (1) is called the *condition of reproductivity* because the function  $f$  which satisfies the condition (1), after iteration, reproduces itself.

In literature, functions which satisfy the condition (1) are also called projectors or idempotent maps. The following two statements (S. B. Prešić [4]) give the fundamental properties of the reproductive equations.

**Theorem 1.** For any of the consistent equations  $J(x)$  there is an equation of the  $x = f(x)$  form, which is equivalent to  $J(x)$  being in the same time reproductive as well.  $\diamond$

**Theorem 2.** If a certain equation  $J(x)$  is equivalent to the reproductive one  $x = f(x)$ , then the general solution is given by the formula  $x = f(y)$ , for any of the values  $y \in S$ .  $\diamond$

The first implementation of reproducibility on some matrix equations was considered by S.B. Prešić ([2.], [4.]).

### SOLUTIONS OF THE MATRIX EQUATION $AXB=C$

Let  $m, n \in \mathbb{N}$  and  $C$  is the field of complex number. The set of all matrices of order  $m \times n$  over  $C$  we denote by  $C^{m \times n}$ . By  $C_a^{m \times n}$  we denote the set of all matrices of order  $m \times n$  over  $C$  which are of rank  $a$ . Instead of  $C^{m \times 1}$  we use the denotement  $C_{\downarrow}^m$  while instead of  $C^{1 \times n}$  we use the denotement  $C_{\rightarrow}^n$ .

Let  $A \in C^{m \times n}$ . The solution of matrix equation

$$AXA = A \tag{2}$$

is called *{1}-inverse* of  $A$  and it is denoted by  $A^{(1)}$ . The set of all {1}-inverses of  $A$  is denoted by  $A\{1\}$ . More information about {1}-inverses and other types of inverses can be found in A. Ben-Israel and T. N. E. Greville [13] and S. L. Campbell and C.D. Meyer [16].

Let  $A \in C^{m \times n}$ ,  $B \in C^{p \times q}$  and  $C \in C^{m \times q}$ . The following statement (R. Penrose [1]) gives the necessary and sufficient condition for a matrix equation

$$AXB = C \tag{3}$$

is consistent. The formula of general solution of the matrix equation (3) is also given in the following statement.

---

<sup>1</sup> Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade, Serbia

**Theorem 3.** The matrix equation (3) is consistent iff for some of {1}-inverses  $A^{(1)}$  and  $B^{(1)}$  of the matrices  $A$  and  $B$  the following condition is true

$$AA^{(1)}CB^{(1)}B = C \quad (4)$$

The general solution of the matrix equation (3) is given by the formula

$$X = f(Y) = A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)} \quad (5)$$

where  $Y$  is an arbitrary matrix corresponding dimensions.  $\diamond$

If the condition (4) is true for at least one choice of {1}-inverses  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$  of the matrices  $A$ ,  $B$  respectively, then the condition (4) is true for any choice of {1}-inverses  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$ . The following statement is an extension of Theorem 3.

**Theorem 3'.** If the matrix  $X_0 \in C^{n \times p}$  is any of the particular solutions of the matrix equation (3), then the general solution of the matrix equation (3) is given by the formula

$$X = g(Y) = X_0 + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)} \quad (6)$$

for any choice of {1}-inverses  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$  of the matrices  $A$ ,  $B$  respectively and where  $Y$  is an arbitrary matrix corresponding dimensions. The general solution (6) of the matrix equation (3) is reproductive one iff  $X_0 = A^{(1)}CB^{(1)}$ .

**Proof.** It is easily to show that the solution of the matrix equation is given by (6). On the contrary, let  $X$  is any of the solutions of the matrix equation (3). Based on Theorem 3, there is  $Y$  so that  $X = f(Y) = A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}$ . Then, for  $Z = Y - X_0 + A^{(1)}CB^{(1)}$  it is true  $X = f(Y) = f(Z + X_0 - A^{(1)}CB^{(1)})$  i.e.

$$X = g(Z) = f(Z + X_0 - A^{(1)}CB^{(1)}) = X_0 + Z - A^{(1)}AZBB^{(1)}.$$

From that we conclude that (6) is the general solution of the matrix equation (3).

Considering that the equality  $g^2(Y) = g(Y) + (X_0 - A^{(1)}CB^{(1)})$  is valid, the formula of general solution (6) of the matrix equation (3) is reproductive iff  $X_0 = A^{(1)}CB^{(1)}$ .  $\diamond$

From the previous theorem we can see that Penrose's general solution (5) is the reproductive solution. In this paper we examine whether there are particular solutions  $X_0$  which can not be represented in the form  $X_0 = A^{(1)}CB^{(1)}$  (see the example at the end of this paper). The first appearances of these solutions were in [2]. In that paper S.B. Prešić analyzed the matrix equation (2) in the case when  $A$  is a square matrix and proved the following statement.

**Theorem 4.** For the square matrix  $A \in C^{n \times n}$  and matrix  $B \in A\{1\}$  the following is true:

- 1)  $AX = 0 \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = Y - BAY$ ,    2)  $AX = A \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = I + Y - BAY$ ,
- 3)  $XA = 0 \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = Y - YAB$ ,    4)  $XA = A \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = I + Y - YAB$ ,
- 5)  $AXA = A \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = B + Y - BAYAB$ .  $\diamond$

The general solutions 2), 4) and 5) of the previous theorem are non-reproductive and as such they do not directly appear according to Penrose's theorem. Let us notice that the formula (6) gives both Prešić's solutions of the given equations and Penrose's solutions of the given equations. In the paper [8.] M. Haverić showed that we can get Penrose's solution from Prešić's solution. Namely, she proved the following statement

**Theorem 5.** For the square matrix  $A \in C^{n \times n}$  and matrix  $B \in A\{1\}$  the following is true:

- 1)  $AX = 0 \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = Y - BAY$ ,    2)  $AX = A \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = BA + Y - BAY$ ,
- 3)  $XA = 0 \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = Y - YAB$ ,    4)  $XA = A \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = AB + Y - YAB$ ,
- 5)  $AXA = A \Leftrightarrow (\exists Y \in C^{n \times n}) X = BAB + Y - BAYAB$ .  $\diamond$

The matrix equation (3) is the subject of the contemporary research (see [10.],[11.],[14.],[15.]).



## SOLUTIONS OF NON-HOMOGENEOUS LINEAR SYSTEMS

In this part of the text we are going to show that the general solution of the consistent non-homogeneous linear system can be obtained by general {1}-inverse. Namely, for each matrix  $A \in C^{m \times n}$  there are regular matrices  $P \in C^{n \times n}$  and  $Q \in C^{m \times m}$  such that

$$QAP = E_a = \begin{bmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

where  $a = \text{rank}(A)$ . Then, each {1}-inverse  $A^{(1)}$  of the matrix  $A$  can be represented in the following form

$$A^{(1)} = P \cdot \begin{bmatrix} I_a & U \\ V & W \end{bmatrix} \cdot Q \quad (8)$$

where  $U = [u_{i,j}]$ ,  $V = [v_{i,j}]$  and  $W = [w_{i,j}]$  are matrices with total  $k = m \cdot n - a^2$  mutually independent variables. In the paper [5] V. Perić mentioned that the representation (8) of the general {1}-inverse was given by C. Rohde in his doctoral thesis [3].

**Theorem 6.** Let  $A \in C_a^{m \times n}$ ,  $c \in C^m$  and

$$Ax = c \quad (9)$$

is a consistent non-homogeneous linear system. Then, there is {1}-inverse  $A^{(1)}$  of the matrix  $A$  in the form (8) with  $n - a$  arbitrary variables such that a vector

$$x = A^{(1)}c \quad (10)$$

determines the general solution of linear system (9).

**Proof.** Let for the matrix  $A$  the regular matrices  $Q$  and  $P$  be determined so that (7) is true. Let us also notice that the vector (10) always determines one solution of the linear system (9) for any choice of the variables  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$  and  $w_{i,j}$  in the general {1}-inverse  $A^{(1)}$ . We conclude that

$$a = \text{rank}(A) = \text{rank}(Q \cdot A) \text{ and } a = \text{rank}([A|c]) = \text{rank}([Q \cdot A|Q \cdot c]) \quad (11)$$

using the consistency of the linear system (9). From (11) we can conclude that the vector  $c' = Q \cdot c$  has zeroes on the last  $m - a^{\text{th}}$  coordinates and there is  $j^{\text{th}}$  coordinate  $c'_j$  ( $1 \leq j \leq a$ ) such that  $c'_j \neq 0$  because the linear system (9) is non-homogeneous. Therefore, in the case of the general inverse (8) the following is true

$$x = P \cdot \begin{bmatrix} I_a & U \\ V & W \end{bmatrix} \cdot Q \cdot c = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & u_{1,1} & \cdots & u_{1,m-a} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & u_{2,1} & \cdots & u_{2,m-a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{a,1} & \cdots & u_{a,m-a} \\ v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,a} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,m-a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-a,1} & v_{n-a,2} & \cdots & v_{n-a,a} & w_{n-a,1} & \cdots & w_{n-a,m-a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= P \cdot \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_a \\ \sum_{i=1}^a c'_i v_{1,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^a c'_i v_{n-a,i} \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \tau_1 + \cdots + P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \tau_{n-a}$$

for  $\tau_1 = \sum_{i=1}^a c'_i v_{1,i}$ , ...,  $\tau_{n-a} = \sum_{i=1}^a c'_i v_{n-a,i}$ . By choosing the submatrix  $V$  in the form

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & v_{1,j}/c'_j & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & v_{n-a,j}/c'_j & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

we get  $\tau_1 = v_{1,j}, \dots, \tau_{n-a} = v_{n-a,j}$ . From this we conclude that the directrix of the previously determined affine space  $x = A^{(1)}c$  is of  $n-a$  dimension. The vector  $x = A^{(1)}c$ , with  $n-a$  arbitrary variables, determines the general solution of linear system (9).  $\diamond$

**Theorem 7.** Let  $B \in C_b^{m \times n}$ ,  $c \in C_{\rightarrow}^n$  and

$$xB = c \quad (13)$$

is a consistent non-homogeneous linear system. Then, there is  $\{1\}$ -inverse  $B^{(1)}$  of the matrix  $B$  in the form (8) with  $m-b$  arbitrary variables such that a vector

$$x = cB^{(1)} \quad (14)$$

determines the general solution of linear system (13).

**Proof.** The proof is analogous to the previous proof.  $\diamond$

Using the Kronecker (tensor) product of matrices we can rewrite the matrix equation  $AXB = C$  (A. Ben-Israel and T. N. E. Greville [13], A. K. Jain [9]) as

$$(A \otimes B^T) \text{vec}(X) = \text{vec}(C), \quad (15)$$

where  $\text{vec}(X)$  denotes the vector of the matrix  $X$  which is formed by writing the rows of the matrix  $X$  into a single column vector. Namely,  $\text{vec}$  determines the operator  $\text{vec}_{m,n} : C^{m \times n} \rightarrow C_{\downarrow}^{m \cdot n}$  that is defined as follows  $\text{vec}_{m,n}(x_{i,j}) = x_{(i-1)n+j}$ . The inverse operator  $\text{mat}_{m,n} : C_{\downarrow}^{m \cdot n} \rightarrow C^{m \times n}$  is defined as follows  $\text{mat}_{m,n}(x_i) = x_{p,q}$ , for  $p = [i/n] + 1$  and  $q = i(\text{mod } n)$ .

**Example.** Let be given the matrix equation:

$$AXB = C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Using the Kronecker product the matrix equation (16) may be considered in the form of equivalent linear system:

$$(A \otimes B^T) \text{vec}(X) = \text{vec}(C) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Based on (8) the general  $\{1\}$ -inverses of  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  are given by the following

matrices:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1-a+2b-c+e & -2+a-2b-d-e & a-2b-e \\ -b & 1+b & b \\ c-e & d+e & e \end{bmatrix}, \quad (a,b,c,d,e \in \mathbb{C})$$

and

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1-g-2h-p+q+2r & g-q & h-r \\ p-q-2r & q & r \end{bmatrix}, \quad (g,h,p,q,r \in \mathbb{C}).$$

The matrix

$$X_0 = A^{(1)}CB^{(1)} = \begin{bmatrix} -1+3c+d+g+2h-3cg-6ch-dg-2dh & -g+3cg+dg & -h+3ch+dh \\ -1+g+2h & -g & -h \\ -3c+3cg+6ch-d+dg+2dh & -3cg-dg & -3ch-dh \end{bmatrix}$$

is one solution of the matrix equation (16) but we are going to show that it is not the general solution,  $(c,d,g,h \in \mathbb{C})$ .

Now, we will solve the linear system (17) using Theorem 6. Applying the elementary operations we get the regular matrices  $Q \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  and  $P \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$  such that

$$Q \cdot (A \otimes B^T) \cdot P = E_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

where  $r = \text{rank}(A \otimes B^T) = \text{rank}(A) \cdot \text{rank}(B)$ . Namely, we get that  $r = 2$  and

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Then,

$$C' = Q \cdot \text{vec}(C) = [-3 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

and

$$\text{vec}(X) = (A \otimes B^T)^{(1)} \text{vec}(C) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ 0 & 1 & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ \frac{v_{1,1}}{-3} & 0 & w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} & w_{1,4} \\ \frac{v_{2,1}}{-3} & 0 & w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} & w_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{v_{7,1}}{-3} & 0 & w_{7,1} & w_{7,2} & w_{7,3} & w_{7,4} \end{bmatrix} C' = \begin{bmatrix} -1-v_{1,1}-2v_{2,1}-v_{3,1}-v_{6,1}-2v_{7,1} \\ v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ -1-v_{3,1}-2v_{4,1} \\ v_{3,1} \\ v_{4,1} \\ v_{5,1} \\ v_{6,1} \\ v_{7,1} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

From (18) we get the matrix of the general solution

$$X = \text{mat}(\text{vec}(X)) = \begin{bmatrix} -1 - v_{1,1} - 2v_{2,1} - v_{3,1} - v_{6,1} - 2v_{7,1} & v_{1,1} & v_{2,1} \\ -1 - v_{3,1} - 2v_{4,1} & v_{3,1} & v_{4,1} \\ v_{5,1} & v_{6,1} & v_{7,1} \end{bmatrix}.$$

For  $v_{1,1} = v_{2,1} = v_{6,1} = v_{7,1} = 1$  and  $v_{3,1} = v_{4,1} = v_{5,1} = 0$ , the matrix

$$X_1 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

is the solution of (16), but  $X_1 \neq A^{(1)}CB^{(1)}$  for any choice of  $\{1\}$ -inverses  $A^{(1)}, B^{(1)}$  because from  $X_0 = X_1$  we obtain the contradiction ( $g = 0$  and  $(0 =) -3cg - dg = 1$ ). Finally, we proved that  $X_1 \neq A^{(1)}CB^{(1)}$  for any choice of  $\{1\}$ -inverses  $A^{(1)}, B^{(1)}$ .  $\diamond$

## ACKNOWLEDGEMENTS

The research is partially supported by the Ministry of Education and Science, Serbia, Grant No. 174032.

## REFERENCES

- [1] R. Penrose, A generalized inverses for matrices, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51 (1955).
- [2] S.B. Prešić, Certaines equations matricielles, *Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.-Fiz.* 121, Beograd, 1963.
- [3] C.A. Rohde, Contribution to the theory, computation and application of generalized inverses, doctoral dissertation, University of North Carolina at Raleigh, May, 1964.
- [4] S.B. Prešić, Une classe d'equations matricielles et l' equation fonctionnelle  $f^2 = f$ , *Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, tome 8 (29)*, Beograd, 1968.
- [5] V. Perić, Generalizirana reciproka matrice, *Stručno-metodički časopis Matematika*, Zagreb 1982.
- [6] J.D. Kečkić, Reproductivity of some equations of analysis I, *Publ. Inst. Math.* 31(45), 73-81, 1982.
- [7] J.D. Kečkić, Reproductivity of some equations of analysis II, *Publ. Inst. Math.* 33(47), 109-118, 1983.
- [8] M. Haverić, Formulae for general reproductive solutions of certain matrix equations, *Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, tome 34 (48)*, Beograd, 1983.
- [9] A.K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.
- [10] Lj. Kočinac, P. Stanimirović and S. Đorđević, Representation of  $\{1\}$ -inverses and the group inverse by means of rational canonical form, *Scientific Review* 21-22 (1996), 47-55.
- [11] Lj. Kočinac, P. Stanimirović and S. Đorđević,  $\{1\}$ -inverses of square matrices and rational canonical form, *Math. Moravica* 1 (1997), 41-49.
- [12] J.D. Kečkić, S.B. Prešić, Reproductivity – A general approach to equations, *Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform.* 12 (1997), 157-184.
- [13] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Springer, 2003.
- [14] D.S. Cvetković, The reflexive solutions of the matrix equation  $AXB = C$ , *Comp. Math. Appl.*, 51 (2006), 897-902.
- [15] D.S. Cvetković-Ilić, Re-nnd solutions of the matrix equation  $AXB = C$ , *Journal of the Australian Mathematical Society*, 84 (2008), 63-72.
- [16] S.L. Campbell and C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

# A CONSTRUCTION WEIGHTED PROJECTIVE PLANE OF ORDER 9 AND (2, 9 - 1) - QUASIGROUP

We introduce a notion of weighted projective planes which is a generalization of usual projective planes. We prove that a Frobenius group  $G$  of order 20 operates on a projective plane  $P$  of order 9 as a colineation group. Using this operation the plane  $P$  may be constructed. A weighted projective plane  $P'$  of order 9 is equivalent to a totally symmetric (2, 9 - 1) - quasigroup

## INTRODUCTION

An incidence structure is a triple  $D = (V, B, I)$ , where  $V$  and  $B$  are disjoint sets and  $I \subseteq V \times B$ . The elements of  $V$  are called *points*, and the elements of  $B$  are called *blocks*. If  $A$  is a point of  $V$ , the set of all blocks incident with  $A$  is denoted by  $(A)$ . Thus

$$(A) = \{b : b \in B, A I b\}.$$

Moreover, for  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , the set of all the blocks incident with all the points  $A$  is denoted by  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Thus

$$(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{b : b \in B, A_i I b \text{ for all } i \in N_n\},$$

where  $N$  is the set of all positive integers and  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Dually, for  $b, b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ ,

$$(b) = \{A : A \in V, A I b\},$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = \{A : A \in V, A I b \text{ for all } i \in N_n\}.$$

We consider only the incidence structures where distinct blocks have distinct sets of points. We identify each block  $b$  with the set  $(b)$  and identify the incidence relation with the membership relation  $\in$ .

## SOME DEFINITION AND RESULTS

**Definition 1.** A incidence structure  $P = (V, B, I)$  is called *projective plane* if and only if it satisfies the following axioms:

- (P. 1) Any two distinct points are joined by exactly one line.
- (P. 2) Any distinct lines intersect in a unique point.
- (P. 3) There exists a *quadrangle*, i.e. 4 points no three of which are on a common line.

The following theorem is proved in [1].

**Theorem 1.** Let  $P = (V, B, I)$  be a finite projective planes. Then there exists a natural number  $n$ , called the *order* of  $P$ , satisfying:

- a)  $|(A)| = |(g)| = n+1$ , for all  $A \in V$  and  $g \in B$ ;
- b)  $|(A)| = |(B)| = n^2 + n + 1$

The finite projective plane of order  $n$  will be denoted by  $S(2, n + 1, n^2 + n + 1)$ .

The following definition generalizes the notion of finite projective planes of order  $n$ .

**Definition 2.** A finite incidence structure  $P = (V, B, I)$  is called *weighted projective plane* with parameters  $n^2 + n + 1, n + 1, 1 \in N$ , if for any  $b \in B$  there is a mapping  $f_b : (b) \rightarrow N$ , if and only if it satisfies the following axioms:

- (WD. 1)  $|V| = n^2 + n + 1$

<sup>1</sup> University of Pristina-Kosovska Mitrovica, Faculty of Teacher Training Prizren-Leposavic, Serbia

(WD. 2)  $|(AB)|=1$ , for any two distinct points  $A, B \in V$ ;

(WD. 3)  $k_b = n + 1$ , for any block  $b \in B$ , where:

- the image  $f_b(A)$  is denoted by  $t_{Ab}$ , and is called the *weight* of the point  $A$  in the block  $b$ ,
- for  $A \in V$ , its *weight* is  $t_A = \sum_{A \in b_i} t_{Ab_i}$  and
- for  $b \in B$ , the number  $k_b = \sum_{A \in b} t_{Ab}$  is called the *size* of the block  $b$ .

**Definition 3.** A weighted projective plane  $S'=(V', B, \epsilon)$  is an *extension* of a weighted projective plane  $S = (V, B, \epsilon)$ , if  $V \subseteq V'$  and for each  $b \in B$  there is  $b' \in B'$  such that  $(b) \subseteq (b')$ , and for each  $A \in (b)$ ,  $t_{Ab'} = t_{Ab}$ .

**Definition 4.** An extension  $(V', B', \epsilon)$  of a weighted projective plane with parameters  $n^2+n+1, n+1, 1$  defined by

- $V'=V$ ;
- $B'=B \cup B''$  where  $B''=\{ \{A^{n+1}\}: A \in V \}$ , and
- For each  $A \in V$ ,  $t_A=r+n+1$ , where  $r$  is the number of block in  $B$  containing  $A$ ,

is called a *complete weighted projective plane* with parameters  $n^2+n+1, n+1, 1$ , and is denoted by  $S'(2, n+1, n^2+n+1)$ .

Next we compare complete weighted projective plane  $S'(2, n+1, n^2+n+1)$  with the notion of totally symmetric  $(2, n-1)$ -quasigroup given below.

**Definition 5.** Let  $Q$  be nonempty set,  $n$  and  $m$  positive integers, and

$$f:(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a mapping from  $Q^n$  into  $Q^m$ . Then we say that  $Q(f)$  is an  $(n, m)$ -groupoid.

A  $(n, m)$ -groupoid  $Q(f)$  is said to be a  $(n, m)$ -quasigroup if and only if the following statement is satisfied:

(A). For each "vector"  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q^n$  and each injection  $\phi$  from  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  into  $N_{n+m}$  there exists unique "vector"  $(b_1, b_2, \dots, b_{n+m}) \in Q^{n+m}$  such that  $b_{\phi(1)}=a_1, \dots, b_{\phi(n)}=a_n$  and

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{n+m}).$$

In the paper [3] an  $(n, m)$ -quasigroup is interpreted as a  $(n, m)$ -quasigroup relation.

**Definition 6.** A  $(n+m)$ -ary relation  $\rho \subseteq Q^{n+m}$  is called  $(n, m)$ -quasigroup relation if and only if the following statement is satisfied:

(A). For each "vector"  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q^n$  and each injection  $\phi$  from  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  into  $N_{n+m}$  there exists unique "vector"  $(b_1, b_2, \dots, b_{n+m}) \in Q^{n+m}$  such that  $b_{\phi(1)}=a_1, \dots, b_{\phi(n)}=a_n$  and

$$(b_1, b_2, \dots, b_{n+m}) \in \rho.$$

The following theorem is proved in [3].

**Theorem 2.** A  $(n, m)$ -groupoid  $(Q, f)$  is a  $(n, m)$ -quasigroup if and only if the  $(n+m)$ -ary relation  $\rho \subseteq Q^{n+m}$  defined by

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \rho \Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$$

is an  $(n, m)$ -quasigroup relation.

**Definition 7.** A  $(n, m)$ -quasigroup is called *totally symmetric*, if and only if

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) \Leftrightarrow f(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}).$$

for any  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) \in Q^{n+m}$  and any permutation  $(y_1, y_2, \dots, y_{n+m})$  of  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ . The  $(n+m)$ -ary relation  $\rho \subseteq Q^{n+m}$  in this case is called *totally symmetric*.

The following theorem is proved in [7].

**Theorem 3.** Every complete weighted projective plane  $S'(2, n+1, n^2+n+1)$  defines a totally symmetric  $(2, n-1)$ -quasigroup relation  $\rho \subseteq V^{n+1}$ , where

$$(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) \in \rho \Leftrightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\} \in B.$$

Conversely, any totally symmetric  $(2, n-1)$ -quasigroup relation  $\rho \subseteq V^{n+1}$  satisfying  $(A, A, \dots, A) = (A^{n+1}) \in \rho$  for any  $A \in V$ , defines a complete weighted projective plane  $S'(2, k, n^2+n+1)$ , where  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\} \in B \Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) \in \rho$ .

### A CONSTRUCTION WEIGHTED PROJECTIVE PLANE OF ORDER 9

**Theorem 4.** A Frobenius group  $G$  of order 20 acts on a projective plane  $P$  of order 9 as a colineation group. Using this act the plane  $P$  may be constructed.

**Proof.** Let

$$G = \langle \rho, \alpha / \rho^0 = \alpha^2 = 1, \rho^\alpha = \rho^{-1} \rangle$$

be a Frobenius group of order 20 which acts on a projective plane  $P$  of order 9 as a colineation group. The plane  $P$  has  $9^2 + 9 + 1 = 91$  points and same lines. From  $91 = 10 \times 9 + 1$  and colineation  $\langle \rho \rangle$  acts semiregular on a nonfixed points follows that  $\langle \rho \rangle$  has 9 orbits of length 10 and one orbit of length 1. We may set that

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_9)(2_0, 2_1, 2_2, \dots, 2_9)(3_0, 3_1, 3_2, \dots, 3_9) \dots (9_0, 9_1, 9_2, \dots, 9_9)$$

where  $1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_9, 2_0, 2_1, 2_2, \dots, 2_9, 3_0, 3_1, 3_2, \dots, 3_9, \dots, 9_0, 9_1, 9_2, \dots, 9_9$  are all points of plane  $P$ .

From theorem of orbite follows that  $\langle \rho \rangle$  has same orbit structure of lines. We may set that

$$\rho = (l_\infty)(l_1, l_1\rho, l_1\rho^2, \dots, l_1\rho^9)(l_2, l_2\rho, l_2\rho^2, \dots, l_2\rho^9) \\ (l_3, l_3\rho, l_3\rho^2, \dots, l_3\rho^9) \dots (l_9, l_9\rho, l_9\rho^2, \dots, l_9\rho^9)$$

Where

$$l_\infty, l_1, l_1\rho, l_1\rho^2, \dots, l_1\rho^9, l_2, l_2\rho, l_2\rho^2, \dots, l_2\rho^9, l_3, l_3\rho, l_3\rho^2, \dots, l_3\rho^9, \dots, \\ l_9, l_9\rho, l_9\rho^2, \dots, l_9\rho^9$$

are all lines of plane  $P$ .

Let  $l_\infty$  be unique line fixed by  $\langle \rho \rangle$ . We may set that

$$l_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_9\}.$$

Let  $l_1$  is a line through  $\infty$ . It is easy to see that  $l_1$  occurs at one point from each orbits of points.

Without a loss of generality, we may set that

$$l_1 = \{\infty, 1_0, 2_0, \dots, 9_0\}.$$

Other 9 lines of orbit of lines  $l_1$  obtained by acting of  $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^9$  on a line  $l_1$ . The lines  $l_1$  and  $l_\infty$  through  $1_0$ . Other 8 lines  $l_2, l_3, \dots, l_9$  through  $1_0$  lie in 8 remaining different  $\langle \rho \rangle$ - orbits of lines in  $P$ . If constructed these lines then the remaining lines of planes  $P$  are obtained by acting of

$\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^9$  on lines  $l_2, l_3, \dots, l_9$ . From statement

$$|l_i \cap l_1\rho^k| = 1, i = 2, 3, \dots, 9, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 9$$

follows

$$l_i = \{1_0, 1', 2', 3', \dots, 9'\}$$

where  $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', 9'$  are (unnecessary different) numbers from the set  $\{2, 3, \dots, 9\}$ .

We consider acting the involution  $\alpha$  on a set points and set lines of plane  $P$ . The order of involution  $\alpha$  is even follows involution  $\alpha$  is elation. From  $\rho^\alpha = \rho^{-1}$  follows that the point  $1_0$  is a center and the line  $l_1$  is axis of involution  $\alpha$ . Hence, involution  $\alpha$  fixes 10 lines  $l_\infty, l_1, l_2, l_3, \dots, l_9$  and 10 points  $\infty, 1_0, 2_0, 3_0, \dots, 9_0$ . From  $73 = 2 \times 40 + 11$  follows  $\alpha$  has 11 orbits of length 1 (11 fixed points) and 40 orbits of length 2. If we write  $\alpha$  in a short way (writing only indices 0, 1, 2, 3, ..., 9) we may set that

$$\alpha = (0)(1)(2, 9)(3, 8)(4, 7)(5, 6)$$

where (2, 9) denoted that  $2\alpha = 9$  from the same orbit of points, (3, 8) denoted  $3\alpha = 8$  from the same orbit of points, (4, 7) denoted that  $4\alpha = 7$  from the same orbit of points, (5, 6) denoted that  $5\alpha = 6$  from the same orbit of points. From statement

$$\ell_i \alpha = \ell_i, \quad i = 2, 3, \dots, 9$$

follows that  $\ell_i, i = 2, 3, \dots, 9$  are of type

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_9, b_3, b_8, c_4, c_7, d_5, d_6\}$$

where  $a, b, c, d$  are pairwise different numbers from the set  $\{2, 3, \dots, 9\}$ . We may set that

$$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 2_2, 2_9, 3_3, 3_8, 4_4, 4_7, 5_5, 5_6\}.$$

Now we constructed lines  $\ell_i, i = 3, 4, \dots, 9$  which are of type

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_9, b_3, b_8, c_4, c_7, d_5, d_6\}$$

From statement

$$|\ell_i \cap \ell_2 \rho^k| = 1, \quad i = 3, 4, \dots, 9, k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

follows that only two from numbers  $a, b, c, d$  are from the set  $\{2, 3, 4, 5\}$  and other two are from the set  $\{6, 7, 8, 9\}$ . From statement

$$|\ell_i \rho^s \cap \ell_j \rho^k| = 1, \quad i \neq j, i, j = 3, 4, \dots, 9, k, s = 0, 1, 2, \dots, 9$$

follows that the lines  $\ell_i$  and  $\ell_j, i \neq j$ , have exactly two common pairs of numbers  $a, b, c, d$ . Using these statements for the lines  $\ell_i, i = 3, 4, \dots, 9$  we obtain following unique solution for the lines:

$$\ell_3 = \{1_0, 3_1, 2_3, 2_8, 3_2, 3_9, 8_5, 8_6, 7_4, 7_7\}$$

$$\ell_4 = \{1_0, 4_1, 3_4, 3_7, 4_2, 4_9, 7_5, 7_6, 9_3, 9_8\}$$

$$\ell_5 = \{1_0, 5_1, 2_4, 2_7, 5_2, 5_9, 7_3, 7_8, 9_5, 9_6\}$$

⋮

$$\ell_9 = \{1_0, 6_1, 3_5, 3_6, 5_4, 5_7, 6_3, 6_8, 7_2, 7_9\}$$

The Theorem is proved.

Let  $P=(V, B, \in)$  be projective plane of order 9 constructed in the theorem. The weighted projective plane  $P'=(V', B', \in)$ , where  $V=V', B'=B \cup B''$  where  $B''=\{A^{10}: A \in V\}$  is a complete weighted projective plane of order 9. The relation  $\tau \subseteq V^{9+1}$  defined by

$$(A_1, A_2, A_3, \dots, A_9, A_{9+1}) \in \tau \Leftrightarrow \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_9, A_{9+1}\} \in B \text{ or}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_9 = A_{9+1},$$

is a totally symmetric (2, 9 - 1)-quasigroup relation satisfying the condition  $(A, A, A, \dots, A, A) = (A^{9+1}) \in \tau$  for all  $A \in V$ . The number of point is  $|V|=9^2+9+1=91$ , the number of blocks is  $|B'|=9^2+9+1+91=182$  and  $t_A=10+10=20$ .

## CONCLUSION

This paper presents the results obtained by acting a colineation group on a set points and set lines of plane P which exists. Similar acting of a colineation group on a set points and set lines of plane P whose question of existence is open, can be studied.

## REFERENCES

- [1] Beth, T., Jungnickel, D., Lenz, H.: *Design theory*, Mannheim,Wien, Zurich, 1985.
- [2] Čupona, Ć., Stojaković, Z., Ušan, J.: *On finite multiquasigroups*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 20 (43) 1981, 53-59.



- [3] Čupona, Ć., Stojaković, Z., Ušan, J.: *Multiquasigroups and some related structures*, Prilozi MANU I/1, Skopje, 1980.
- [4] Dimovski, D., Mandak, A.: *Incidence structures with  $n$ -metrics*, Zb. Rad. Fil. Fak. (Niš) 6 (1992), 151-155.
- [5] Dimovski, D., Mandak, A.: *Weighted block designs and Steiner systems*, Novi Sad J. Math. Vol. 29, No.2 (1999), 163-169.
- [6] Lenz, H.: *Vorlesungen uber projective geometrije*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965.
- [7] Mandak, A.: *On weighted block designs*, Proc. Math. Conf. (Priština, 1994) 21-25.
- [8] Mandak, A.: *Multiquasigroups and weighted projective planes*, Kragujevac J. Math. 30 (2007) 211-219.
- [9] Ušan, J.:  *$\langle Nn, E \rangle$ -seti s  $(n + 1)$ -rastojaniem*, Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad Ser. Math, 17 (2) (1989), 65-87.

## INITIATIVE GIGA URB RAS: МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ И АРХИТЕКТУРА НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ МАГИСТРАЛИ УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

---

*The methodology of designing high-speed optical backbone at the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences with usage of a «dark» optical fiber and DWDM technology is presented. The developed architectural decisions for a section of Perm- Yekaterinburg backbone, experience of its implementation and application for conducting scientific and technical calculations and experiments are discussed.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Ключевой вопрос построения скоростных научно-образовательных (R&E - Research and Education) сетей - создание собственных или аренда существующих каналов связи. Мировая тенденция - построение собственных R&E оптических инфраструктур со спектральным уплотнением каналов. Этому обстоятельству способствовала появившаяся в начале 21 столетия возможность приобретения (или долгосрочной аренды) свободной емкости оптических волокон (dark fiber, темное волокно) у компаний по протяженным линиям связи, покупка которых в разы дешевле строительства собственных линий связи. Этим воспользовались многие R&E организации в мире. Так, например, в США: 2002-2003 годы - CENIC развертывает в масштабе штата Калифорния волоконную опорную сеть (CalREN), в 2003г - создается NLR (National LambdaRail, <http://www.nlr.net>) организация для развертывания национальной волоконной опорной сети, объединяющей региональные оптические сети США. Другим ярким примером является GEANT2 (Gigabit European Academic Network Technology, <http://www.geant2.net>) - седьмое поколение Европейской научно-образовательной сети, которая использует магистральную сеть NREN (National Research and Education Network) некоммерческого оператора DANTE для объединения 28 национальных сетей. Следующий этап развития национальных и региональных оптических R&E сетей привел к созданию международной виртуальной организации GLIF (Global Lambda Integrated Facility, Рейкьявик, Исландия, август 2003, <http://www.glif.is>) - глобальной лямбда системы, продвигающей парадигму глобальных лямбда сетей. Деятельность участников GLIF направлена на интеграцию своих «лямбд» в глобальную систему для их использования учеными и проектами, требующими передачи большого количества данных, например, по схеме «точка-точка» по одной или нескольким лямбда каналам. Сообщество GLIF разделяет взгляды в построении LambdaGrid парадигм грид вычислений, в которых центральный архитектурный элемент - это оптические сети, параллелизм которых заключен в многочисленных длинах волн света (лямбд) в одном оптическом волокне.

Российские региональные R&E сети все еще арендуют дорогостоящие потоки по причине отсутствия цивилизованного рынка продаж «темного» оптоволокна или лямбды в существующих магистральных волоконно-оптических линиях связи (ВОЛС), поскольку операторам выгоднее предоставлять клиентам не темное волокно, а каналы. Тем не менее существует некоторый позитивный опыт построения лямбда R&E инфраструктур в России. В начале 2010 года ФГУ ГНИИ ИТТ «Информика», оператор федеральной R&E сети RUNNet (Russian **U**niversity **N**etwork, <http://www.runnet.ru>), при поддержке федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России

---

1 Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

2 Пермский филиал Института экономики УрО РАН, Пермь, Россия

на 2007-2012 годы” завершила развертывание собственной DWDM-системы на участке «Санкт-Петербург - Хельсинки» (550 км, 40 Гбит/с), с использованием оптических волокон ЗАО ЛЭИВО (российская часть) и TDC Oy (финская часть). И следуя мировому опыту построения оптических сетей, задача построения в регионах своих скоростных R&E лямбда сетей, как нам представляется, весьма актуальна и касательно сети Уральского отделения РАН, названной «Инициатива GIGA UrB RAS», впервые публично была представлена на международной конференции в г. Алматы в 2008 году [1]. Чрезвычайно важно было найти убедительные аргументы целесообразности Инициативы, успешная реализация которой требует объединения усилий всех заинтересованных Учреждений и региональных органов исполнительной власти. В статье выносятся на обсуждение и рассматривается комплекс проблем построения собственной R&E оптической магистрали УрО РАН, разработанные архитектурные решения, используемая методология, опыт реализации и использования.

## **МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ МАГИСТРАЛИ**

Позитивными предпосылками построения собственной скоростной научно-образовательной магистрали, объединяющей компьютерные сети Научных центров Отделения, являются следующие аргументы.

**В Научных центрах УрО РАН созданы свои оптические сети** [1, 2], объединяющие Институты (1 Гбит/с) и сопрягающиеся с сетями ВУЗов. До 2008 использовались арендованные каналы связи 2-4 Мбит/с на Екатеринбург для централизованного доступа в Интернет (10-60 Мбит/с). После 2008 года доступ в Интернет стало дешевле покупать на месте, прямая связность сети нарушилась. Возникла задача построения скоростной региональной сети (на свободных от Интернет каналах связи) для построения региональных распределенных систем обработки данных и для соучастия в национальных и международных ГРИД и облачных инициатив.

**Удачная организационно-территориальная структура** Уральского отделения РАН. Места расположения Научных центров в городах Архангельск, Сыктывкар, Ижевск, Пермь и Екатеринбург является уникальным вариантом использования оптоволоконных систем передачи данных со спектральным уплотнением каналов, поскольку, чем больше протяженность ( $L \sim 2340$  км) и чем выше скорость передачи, тем более заметны преимущества оптических сетей. А организационная структура Отделения позволила Президиуму УрО РАН выступить в роли заказчика проекта [3], устраивающего не только Научные центры Отделения, а и ВУЗы и предприятия промышленного сектора экономики, с которыми традиционно Уральское отделение выполняет совместные научно-исследовательские работы.

**Экономическая целесообразность** оценена на примере сопоставления в ценах 2009 года разовых затрат на построение собственной скоростной DWDM магистрали «Архангельск - Сыктывкар - Ижевск - Пермь - Екатеринбург» (рис. 1) ориентировочной длиной  $\sim 2340$  км и возможных ежегодных затрат в случае аренды каналов связи между Научными центрами:

- предлагаемое решение      40 Гбит/с  $\sim$  345 млн. руб. разово
- возможная аренда            0,2 Гбит/с  $\sim$  400 млн. руб. ежегодно

Столь низкая стоимость реализации обусловлена тесной кооперацией с национальными операторами связи и производителями DWDM оборудования, понимающими, что исследователи из академических институтов и университетов играют ключевую роль как в разработке фундаментальных Интернет технологий, так и их апробации в крупномасштабных испытательных моделях, и позволят им достичь конкурентных преимуществ. Именно эта мотивация позволила нам найти стратегических партнеров для реализации Инициативы GIGA UrB RAS, с которыми заключены рамочные соглашения, определяющие формат и финансовые условия сотрудничества.

ва. При этом использован мировой опыт, заключающийся в приобретении в собственность темных волокон в магистралях или доленое соучастие в строительстве новых волоконно-оптических линий связи (ВОЛС).



Рис. 1. Инициатива GIGA UrB RAS

### Инвестиционная привлекательность разрабатываемых решений

- Разовые затраты на приобретение двух академических оптических волокон (срок эксплуатации 25-30 лет) и заложенная возможность поэтапного наращивания производительности DWDM системы до терабитных скоростей обеспечивают защиту инвестиций и согласуется с мировой тенденцией развития научно-образовательных сетей;
- Судьба пропускной способности и динамика развертывания сети оказывается на “кончиках пальцев” у институтов УрО РАН, а не у операторов связи, что позволяет оперативно настраивать λ-коммуникационный сервис для разнообразных потребностей, вместо одного арендуемого потока, приспособляемого для всех приложений/проектов.
- Объединение по скоростной оптической магистрали активов создаваемой киберинфраструктуры территории (суперкомпьютерные центры, хранилища данных, экспериментальные установки, системы визуализации) обеспечит новый уровень интеграционных процессов науки, образования и инновационной промышленности в сфере разработки и использования всех усовершенствований информационных технологий.

**Ответом на основной вопрос к GIGA UrB RAS** - “зачем нужны большие скорости для научно-образовательного сообщества региона?” - явился сформулированный в работе [4] проект «Распределенный PIV», суть которого заключается в обработке в реальном времени интенсивного потока экспериментальных данных (1-10 Гбит/с) на удаленном суперкомпьютере. Сопутствующая цель проекта направлена на иллюстрацию возможности создания принципиально новых инструментов проведения научных исследований, показывает влияние скоростных сетей на распределенные вычисления и стимулирует решение проблем взаимосвязи (межплат-

форменное ПО) подключаемых к скоростной сети оконечных систем. Действительно, эти системы характеризуются большой и сложной памятью, процессорами и подключенными к сети каналами ввода/вывода с иерархиями и наследуемым параллелизмом в различных подсистемах, и требуют разработки новых методов и технологий эффективного использования архитектур и ресурсов конечных систем.

### Стратегия развития УрО РАН до 2025

Целесообразность идеи «Инициатива GIGA UrB RAS» и осязаемый результат проекта «Распределенный PIV» позволили внести в раздел стратегии Отделения «Суперкомпьютеры и скоростные сети» следующую формулировку: «Построение киберинфраструктуры Уральского региона, которая будет состоять из географически распределенных суперкомпьютеров, хранилищ данных и визуализационных кластеров, приборов и экспериментальных установок, связанных ультра высокоскоростными оптическими сетями, актуально и станет технологической основой для научных проектов, требующих высокопроизводительных вычислений и изучающих сложные микро- и макро-проблемы, распределенные в пространстве и времени»

### ИНФРАСТРУКТУРА МАГИСТРАЛИ «ПЕРМЬ - ЕКАТЕРИНБУРГ»

Скоростная оптическая магистраль со спектральным уплотнением каналов создается в два этапа (рис.2).

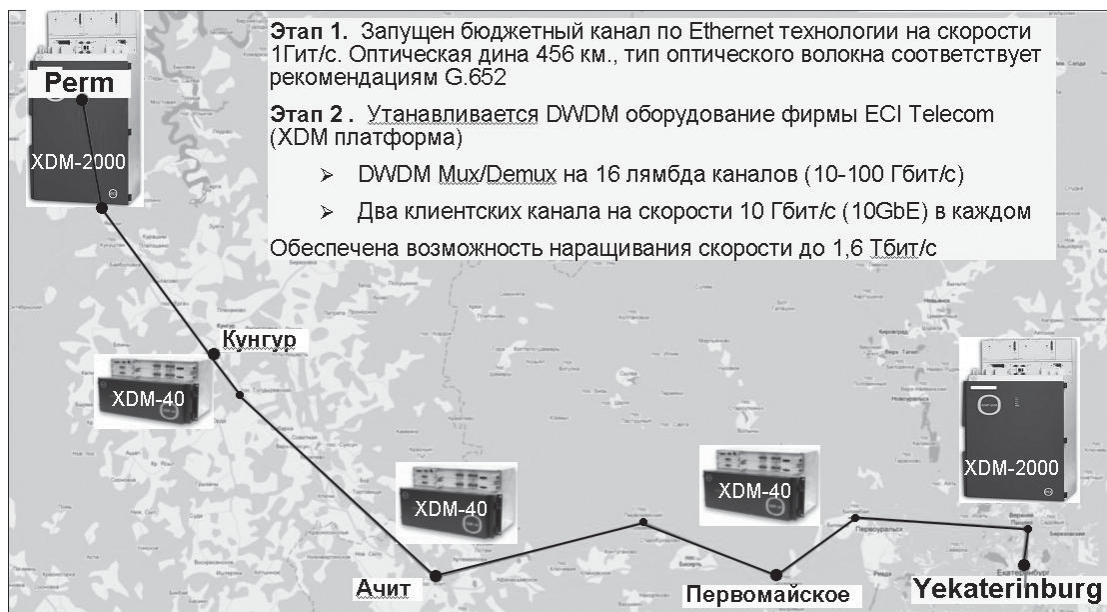


Рис. 2. Магистраль «Пермь - Екатеринбург»

На первом этапе приобретены два оптоволоконных кабеля и в начале 2011 года запущен канал связи с использованием Ethernet технологии (1GE) на скорости 1 Гбит/с, связывающий площадки сетевых центров Перми (ИМСС УрО РАН) и Екатеринбурга (ИММ УрО РАН). С учетом протяженности ВОЛС «Пермь - Екатеринбург», оптическая длина которой составила 456 км, выбраны места расположения промежуточных узлов, обеспечивающих длину регенерационных участков не более 120 км каждый в пунктах Кунгур, Ачит и Первомайское. Это решение выбрано как с целью уменьшения затрат на реализацию, так и возможности последующей коммуникационной поддержки распределенных в пространстве этой территории проектов.

**На втором этапе** приобретено DWDM оборудование компании ECI-Telecom (платформы XDM-2000 на оконечных узлах и XDM-40 на промежуточных узлах), обеспечивающее передачу двух  $\lambda$ -каналов по 10 Гбит/с в каждом с возможностью масштабирования до 16-ти  $\lambda$ -каналов 10/40/100 Гбит/с, без необходимости изменения конфигурации оборудования, со следующими характеристиками:

- структура первого  $\lambda$ -канала: обеспечение транзита  $\lambda$ -канала 10Гбит/с с оконечного оборудования на концах системы; оконечное оборудование представляет собой коммутатор CESR AS9215 с 24-мя портами GE и 4-мя портами 10GE с соответствующими «цветными» транспондерами для сопряжения с DWDM оборудованием;
- структура второго  $\lambda$ -канала: гарантированная и независимая передача 8xGE каналов с терминацией в клиентские порты с применением соответствующих SFP модулей;
- возможность наращивания до 16  $\lambda$ -каналов любой емкости каждый (10/40/100 Гбит/сек).

В настоящее время спецификация промежуточных узлов обеспечивает только оптическое усиление сигнала, однако закладываемое DWDM оборудование предполагает возможность установки ROADМ мультиплексоров в существующие шасси для выделения и маршрутизации  $\lambda$ -каналов не только на оконечных, но и на промежуточных узлах. Ввод в продуктивную эксплуатацию DWDM тракта планируется в первой половине 2012 года.

Предусмотрено (отдельно от существующего) оборудование Sun Fire V245 и программное обеспечение системы мониторинга и управления магистральной ВОЛС LightSoft с установкой Административного терминала в основном центре управления сетью. Система мониторинга и управления сетью передачи данных соответствует рекомендациям МСЭ G.773, G.774, G.784, M.3010 и M.3100 и комплектам Протоколов для управления системой передачи Q.811, 812, а также G.784 (характеристики управления синхронной передачей упорядоченных цифровых данных).

Система управления сетью LightSoft обеспечивает возможность наблюдения и управления в реальном режиме времени за состоянием кабельной магистральной и внутризональной сетей связи. Все сетевые элементы подключены к терминалам (TMN) системы управления сетью связи, включающую передачу, обработку и анализ аварийных сигналов и информации, поступающих из всех элементов сети. Главными задачами системы управления сетью являются: регистрация всех аварий; централизованный контроль всей сети, включая контроль всех цифровых участков; хранение в режиме on-line базы данных всех сервисных услуг и конфигурации интерфейсов.

## **АРХИТЕКТУРА И ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СКОРОСТНЫХ КОММУНИКАЦИЙ**

Гибкость многоцелевого использования созданной на первом этапе оптической магистрали «Пермь-Екатеринбург» (1 Гбит/с) для нужд конкретных проектов достигается построением различных VLAN по транковым соединениям L2 коммутирующего оборудования. Так, например, на рисунке 3 показано VLAN A соединение, связывающее маршрутизирующее оборудование Cisco 7604 для установления пиринговых отношений между научно-образовательными сетями научных центров. А виртуальное соединение VLAN B связывает экспериментальную установку PIV в ИМСС УрО РАН (Пермь) с суперкомпьютером «УРАН» в ИММ УрО РАН (Екатеринбург), для выполнения работ по тематике передачи и обработки интенсивных потоков экспериментальных данных и получивших название «Распределенный PIV» [4, 5]. Ранее для этих целей использовался формируемый по требованию L2 канал связи на скорости 1 Гбит/с до суперкомпьютера СКИФ (НИВЦ МГУ, Москва), в организации которого участвовали НИВЦ МГУ, МСЦ РАН, РОСНИИРОС и оператор связи «Импульс». Его использование в течение нескольких дней в 2009 году, обозначил проблемы существующих технологий ввода в суперкомпьютер скоростных потоков данных и стимулировал поиск путей их решения.

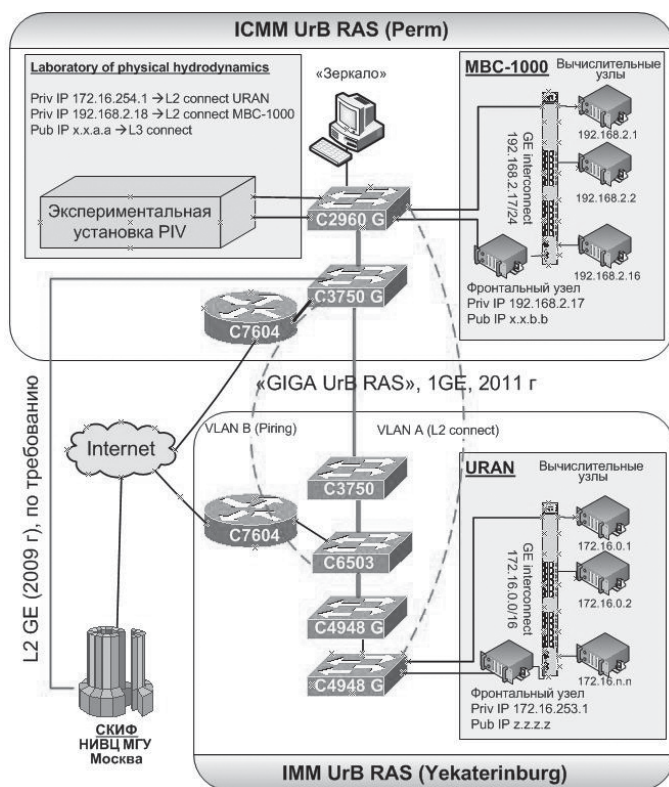


Рис.3. Схема использования магистрали «Пермь - Екатеринбург»

Для локальной отработки разрабатываемых решений используется многопроцессорная вычислительная система MBC-1000 и система хранения AX4-5i, а апробация, тестирование и пробный счет выполняется на суперкомпьютере «УРАН» по существующему 1GE каналу связи на Екатеринбург. Для анализа протоколов используется средства зеркалирования (port mirroring) трафика на отдельный сервер «Зеркало», позволяющего снять нагрузку с компьютеров конечных систем.

Проиллюстрируем пример использования созданных скоростных коммуникаций для класса задач, использующих параллельную обработку структурированных потоков данных. К такому классу относятся используемые в ИМСС УрО РАН бесконтактные методы измерений (PIV) полей скорости по изображениям, поступающих от измерительной установки. Структура порождаемого потока экспериментальных данных состоит в этом случае из пар изображений и допускает распределение потока данных по процессорам многопроцессорной вычислительной системы. Интенсивность порождаемого потока данных зависит от числа, разрешения и частоты работы цифровых камер и может достигать нескольких гигабит в секунду. А продолжительность эксперимента определяется характером изучаемых явлений и, например, при лабораторном изучении начальной стадии формирования тропических циклонов может достигать сотен минут. Отметим также, что некоторые эксперименты предусматривают управляющие воздействия (вращение, подогрев) и желательно по результатам счета в реальном времени оказывать воздействие на эксперимент.

В работе [4] представлена «идеальная модель» ввода интенсивных потоков данных в супервычислитель для решения такого класса задач. Суть модели - прямой доступ к вычислительным узлам минуя стадию предварительного переноса данных на системы хранения суперкомпьютера. Архитектурные решения этой модели [5] заключаются в подключении экспериментальной

установки по скоростному каналу связи к interconnect удаленной многопроцессорной системы и использовании «протокольного» подхода для запроса вычислительными узлами у экспериментальной установки измеряемых данных (пар изображений). Оценим тенденции, проблемы и способы уменьшения задержки обмена данными между прикладными процессами связываемых систем, которая имеет четыре компонента: (1) скорость передачи, (2) время распространения сигналов по протяженным линиям связи, (3) задержка в оконечных системах для доставки данных приложению и (4) задержка обработки данных прикладными процессами в оконечных системах.

1. Скорость передачи на портах коммуникационных и оконечных систем мигрирует от 1 Гбит/с к 10 Гбит/с . Для Ethernet кадров длиной 1518 байт на скорости 1 Гбит/с время передачи составит 12,144 мкс, а при переходе на скорость 10 Гбит/с почти на порядок уменьшится.
2. Время распространения сигнала по оптоволокну составляет 5 мкс/км и является постоянной величиной, определяемой физической природой распространения света. Для протяженных линий связи эта задержка существенна и составляет, например, для оптической трассы «Пермь-Екатеринбург» (456 км x 5 мкс/км) примерно 2.3 мс без учета задержек в очередях коммутационного облака. Эта величина задержки подтверждается в приводимой ниже трассировке маршрута, в которой показано время распространения TCP сегмента туда и обратно (RTT - Round Trip Time) ~5 мс.
  1. <1 мс <1 мс <1 мс 172.18.16.1
  2. <1 мс <1 мс <1 мс ge0.710.7206.ttk.icmm.ru [195.69.156.69] (Пермь)
  3. 5 мс 5 мс 5 мс 195.69.159.150 (Екатеринбург)
  4. 5 мс 5 мс 5 мс medalt.ural.ru [82.193.136.17]
3. Время задержки в оконечных системах для доставки принятых кадров приложению имеет две составляющие. Собственно время доставки приложению подтвержденного сегмента можно уменьшить путем использования интеллектуальных NIC карт, которые аппаратно поддерживают стеки протоколов передачи данных (TOE NIC - TCP Offload Engine) и технологии удаленного прямого доступа к оперативной памяти (R-NIC), разгружая CPU. Второй составляющей является время, затрачиваемое процедурами управления потоком и исправления ошибок протоколами транспортного уровня (L4). Стратегии управления в этих протоколах различны, зависят от особенностей каналов связи (протяженность, скорость, наличие конкурирующих потоков). На рисунках 4 и 5 приведены классические иллюстрации процедуры медленного старта и исправления ошибок (TCP Retransmission) соответственно, которые показывают негативные аспекты протокола TCP для протяженных линий связи. Снятие, анализ и визуализация трафика проводились средствами Wireshark.

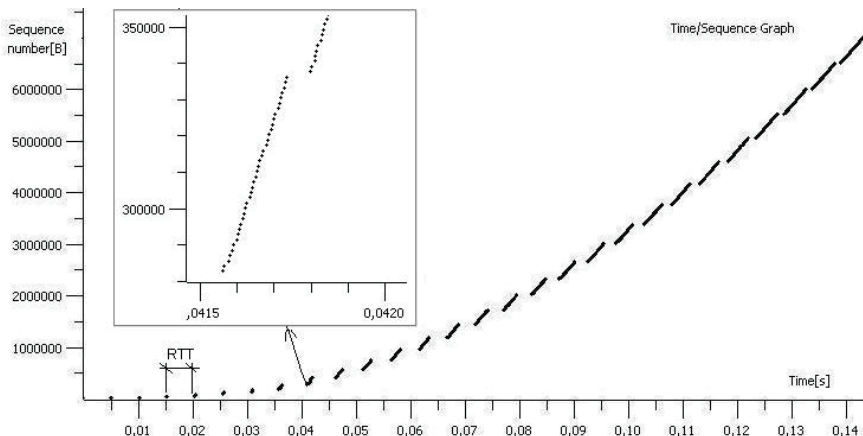


Рис. 4. Медленный старт TCP (Sequence number - порядковый номер байта в потоке)



Характерное время достижения рабочей скорости в процессе медленного старта протокола TCP в канале «Пермь-Екатеринбург» (рис. 4) чуть больше 0.14 с и требует при обработке реального потока экспериментальных данных стадии “предварительного разгона” протоколов. На вставке в рисунок 4 показан лучший вариант следования сегментов в этом соединении, стремление к которому требует тщательной настройки конфигурационных параметров протокола TCP.

На рисунке 5 иллюстрируется размер текущего окна TCP соединения ( $Win \sim 3,2$  Мбайт) и процедура селективного исправления ошибок (SACKs), которая повторно инициирует процедуру медленного старта, уменьшающая темп передачи. Побочный негативный эффект процедуры SACK - порождение множества запросов ( $\sim 150$  единиц) на повторную передачу потерянного TCP сегмента (TCP dup ACK), загружающих обратный канал. Поэтому для глобальных скоростных коммуникаций чаще используются специализированные транспортные протоколы, включая как быстроедействующие варианты TCP (HSTCP, STCP, FAST, XCP, SABUL, BI-TCP), так и основанные на UDP протоколы RBUDP и UDT. Их апробация и анализ на реальной скоростной магистрали является одной из задач проводимых исследований.

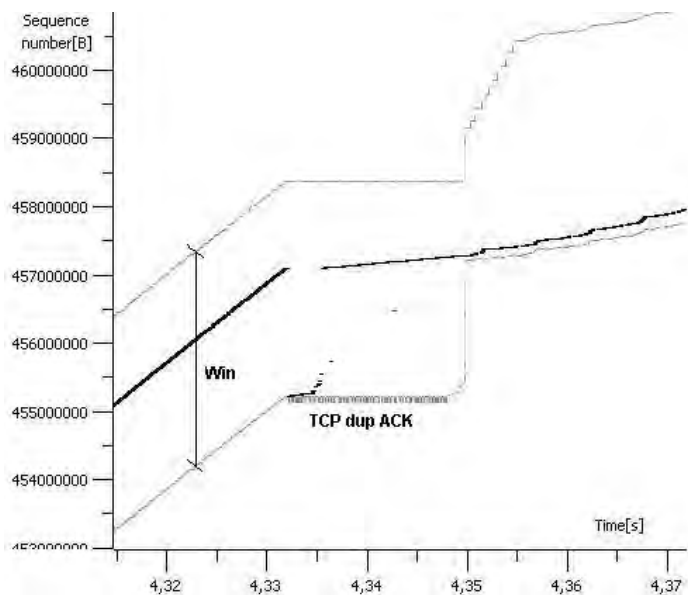


Рис. 5. TCP Retransmission

4. Задержка обработки прикладным процессом единицы структурированных данных (одного измерения от установки PIV) определяет число узлов (ядер), необходимых для параллельной обработки всего потока данных в реальном времени. Уменьшение этой задержки возможно разбиением расчетной области на подобласти для их параллельной обработки несколькими вычислительными узлами и порождает нерешенную пока проблему надежной multicast доставки данных этим узлам. Требуемое количество вычислительных узлов зависит также от скорости генерации экспериментальных данных, должно предварительно рассчитываться и выделяться прикладной задаче в момент ее запуска на вычислительной системе.

Уместно упомянуть о другом подходе (LambdaRAM) объединения территориально распределенных кластеров, связанных по LambdaGrid. LambdaRAM является подсистемой памяти для LambdaGrids и использует память узлов в одном или более кластерах для interconnect по скоростным сетям, обеспечивая приложениям быстрый доступ к локальным и отдаленным данным. Этот подход использует новую превентивную эвристику уменьшения задержки, включая предварительную отправку и упреждающую выборку, основанную на схемах доступа приложения и протоколов передачи данных для сетей высокой пропускной способности. Поддерживается

LambdaRAM набором инструментов (Rails Toolkit - RTK) [7], который абстрагирует топологию конечных систем (кластеров) и обеспечивает для приложений и межплатформенного программного обеспечения возможности совместного планирования ядер ЦП, GPUs, памяти и ресурсов сети в пределах мульти- и много-ядерных компьютерных систем.

Возможность использования на втором этапе создаваемой магистрали нескольких гарантированных и независимых (параллельных) передач GE каналов в структуре  $\lambda$ -канала 8xGE на участке «Пермь-Екатеринбург» предоставляется всем заинтересованным коллективам исследователей и разработчиков, разделяющим LambdaGrid парадигмы организации распределенных вычислений.

## ВЫВОДЫ

Инициатива GIGA UrB RAS направлена на достижение стратегической обеспеченности Уральского отделения РАН скоростными коммуникациями посредством собственного темного волокна и использования технологии спектрального уплотнения каналов.

Реализация участка оптической магистрали «Пермь - Екатеринбург» показывает выполнимость подобного рода региональных проектов научно-образовательным сообществом на территории Российской Федерации.

Предоставляемый магистралью лямбда сервис позволяет создавать принципиально новый инструментарий для решения задач, использующих параллелизм гарантированных и независимых каналов связи.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-07-96001-р\_урал\_a)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Масич А.Г., Масич Г.Ф. Инициатива GIGA UrB RAS, Совместный вып. журнала “Вычислительные технологии” и журнала “Вестник КазНУ им. Аль-Фараби”. Серия математика, механика, информатика №3 (58). По материалам Междунар. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. - Казахстан, Алматы.-2008.-Т.13.- Ч. II. -С. 413-418
- [2] Масич А.Г., Масич Г.Ф. От «Инициативы GIGA UrB RAS к Киберинфраструктуре УрО РАН, Вестник Пермского научного центра (октябрь-декабрь 4/2009). - Пермь: Изд-во ПНЦ УрО РАН, 2009. С. 41-56
- [3] Матвеевко В.П., Масич А.Г., Масич Г.Ф. Региональная научно-образовательная оптическая сеть УрО РАН - фундамент киберинфраструктуры, Материалы X Международной конференции «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах (HPC-2010)» (1-3 ноября 2010 г., г. Пермь). - Пермь: Изд-во ПГТУ, 2010. Т. 1. С. 11-21
- [4] Степанов Р.А., Масич А.Г., Масич Г.Ф.. Инициативный проект “Распределенный PIV”, Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность: труды Всероссийской суперкомпьютерной конференции - М.: Изд-во МГУ, 2009. - С. 360-363
- [5] Масич А.Г., Масич Г.Ф., Степанов Р.А., Щапов В.А.. Скоростной I/O канал супервычислителя и протокол для обмена интенсивным потоком экспериментальных данных, Материалы X Международной конференции «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах (HPC2010)» (1-3 ноября 2010 г., г. Пермь). - Пермь: Изд-во ПГТУ, 2010. Т.2. С. 119-128.
- [6] V. Vishwanath, L. Zuck, J. Leigh. Specification and Verification of LambdaRAM - A Wide-Area Distributed Cache for High Performance Computing, Sixth ACM-IEEE International Conference on Formal Methods and Models for Codesign (MEMOCODE 2008), Anaheim, CA, June 5-7, 2008
- [7] V. Vishwanath, J. Leigh, T. Shimizu, S. Nam, L. Renambot, H. Takahashi, M. Takizawa, O. Kamatani. The Rails Toolkit (RTK) - Enabling End-System Topology-Aware High End Computing, The 4th IEEE International Conference on e-Science, December 7-12, 2008.

## ПОТОКОВАЯ ОБРАБОТКА БОЛЬШИХ МАССИВОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА УДАЛЕННОМ СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ

---

*Are considered developed in the ICMM UrB RAS information model of direct input to the compute nodes remote supercomputers intense flux of the experimental data and created on its basis the protocol and the software. The results of testing of these solutions within the project «Distributed PIV» at the site of Perm-Yekaterinburg, using the communication channel, built on the Gigabit Ethernet technology.*

---

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Экспериментальная установка (ЭУ) использует метод PIV (Particle Image Velocimetry) [1] - оптический метод измерения полей скорости жидкости или газа в выбранном сечении потока. Принцип метода: импульсный лазер создает тонкий световой нож и освещает мелкие частицы, взвешенные в исследуемом потоке. Положения частиц в момент двух последовательных вспышек лазера регистрируются на два кадра цифровой камеры. Скорость вихревого потока определяется расчетом перемещения, которое совершают частицы (трассеры) за время между вспышками лазера. Измерительная часть установки генерирует поток данных 1-10-100 Гбит/с в зависимости от разрешения, частоты и режимов работ камер (моно/стерео/томография).

Ограниченность доступной вычислительной мощности в местах проведения экспериментов сдерживает развитие математического аппарата и возможности проведения экспериментов. Перенос вычислений на удаленные суперкомпьютеры позволит использовать ресурсоемкие, но высокоточные алгоритмы, избегать хранения гигантских объемов избыточной информации, обрабатывать измерения «на лету» и проводить эксперименты с обратной связью. Эта идея реализуется в рамках проекта «Распределенный PIV» [2, 3].

### РАЗРАБОТАННЫЕ АРХИТЕКТУРНЫЕ РЕШЕНИЯ

#### Сетевая инфраструктура проекта

Проект «Распределенный PIV» использует высокоскоростную сеть передачи данных, создающуюся в рамках проекта GIGA UrB RAS [4]. Используемая схема участка сети приведена на рисунке 1 и обеспечивает соединение на втором уровне модели OSI (L2) ЭУ PIV (Пермь) с суперкомпьютером «Уран» (Екатеринбург) по Ethernet технологии на скорости 1 Гбит/с. На последующих этапах, связанных с инсталляцией на этом участке сети технологии спектрального уплотнения каналов (DWDM), планируется увеличение скорости до 10 Гбит/с. Отметим также, что в оконечных системах используется TCP/IP стек протоколов, а L2 соединение между оконечными системами позволяет избежать временных затрат на маршрутизацию и очередей пакетов в IP сети передачи данных.

#### Модель прямого доступа к вычислительным узлам

Суть модели [4, 5] - прямой ввод потока данных в оперативную память вычислительных узлов суперЭВМ, минуя классическую схему предварительного сохранения данных на носителях ЭУ и последующего их переноса на систему хранения данных суперЭВМ (рисунок 2). Для уменьшения задержки приема/передачи данных (латентность) в оконечных системах, которая определяется скоростью порта и временем поступления данных от Ethernet порта сетевого адаптера (NIC) в

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

буфер оперативной памяти приложения и, наоборот, целесообразно использование интеллектуальных NIC карт (Intelligent Ethernet adapter).

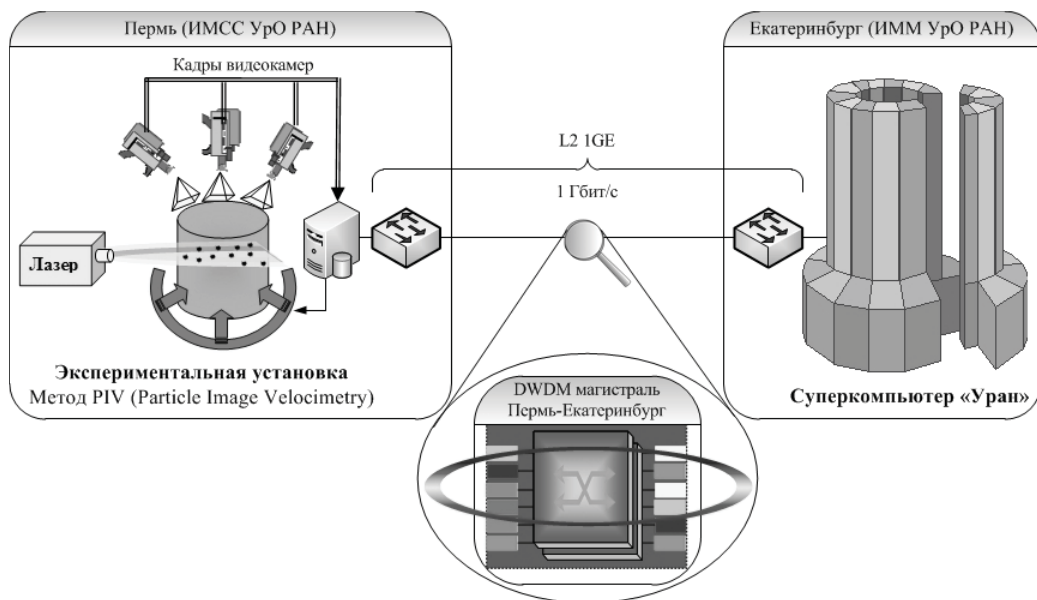


Рис. 1. Схема сети проекта «Распределенный PIV»

Эти карты аппаратно поддерживают стеки протоколов передачи данных (TOE NIC - TCP Offload Engine) и технологии удаленного прямого доступа к памяти (R-NIC) для разгрузки CPU узлов в связи с переходом на скорости 1-10GE. По литературным источникам при использовании этих плат задержка передачи составляет 2,5-32 мкс [6]. Степень влияния этих карт на латентность, как и настроек параметров транспортных протоколов для протяженного (456 км) L2 канала на скорости 10 Гбит/с - предмет дальнейших исследований в области передачи интенсивных потоков данных.

### Протокол PIV

Особенностями разработанного программного обеспечения являются: клиент-серверная архитектура, возможность управления числом задействованных вычислительных узлов, передача данных непосредственно между памятью территориально распределенных систем без промежуточного хранения на дисках, возможность управления экспериментом в квазиреальном времени на основе получаемых результатов.

Разработанный протокол PIV базируется на идее отказа от однозначного отображения измерений на вычислительные узлы [5]. В случае наличия единого источника данных, который соответствует экспериментальной установке, отказ от однозначного отображения позволит:

- отказаться от синхронизаций вычислительных узлов перед обработкой каждого измерения;
- изменять число задействованных узлов непосредственно во время эксперимента, добавляя в случае необходимости вычислительные мощности;
- минимизировать объем потерянной информации в случае выхода из строя одного или нескольких вычислительных узлов.

Протокол PIV является протоколом прикладного уровня, работает по схеме запрос-ответ и может использоваться в качестве протокола транспортного уровня любой протокол, работающий в потоковом режиме и гарантирующий доставку данных. Текущая реализация Протокола PIV поддерживает использование транспортных протоколов TCP и UDT [7].

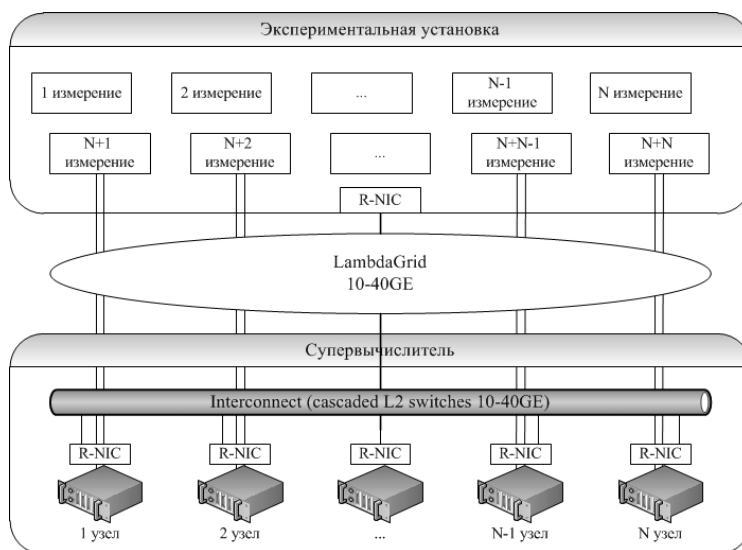


Рис. 2. Модель обработки интенсивных потоков данных

Протокол UDT - это основанный на UDP протокол передачи данных для высокоскоростных сетей. Он был разработан в Университете штата Иллинойс в Чикаго. Функциональные возможности протокола UDT аналогичны протоколу TCP. UDT является дуплексным протоколом передачи потока данных с предварительной установкой соединения. Особенностью протокола UDT является оригинальная архитектура и реализация, а также оригинальный алгоритм управления перегрузкой. При этом протокол UDT позволяет программисту реализовать и использовать свой алгоритм управления перегрузкой.

Протокол PIV рассчитан на передачу нескольких блоков бинарных данных. В одном пакете протокола можно передать от нуля до 65535 блоков, каждый из которых может иметь размер до 4 Гбайт. Поля заголовка пакета протокола кодируются в сетевом порядке байт. Формат пакета протокола PIV приведен на рисунке 3.

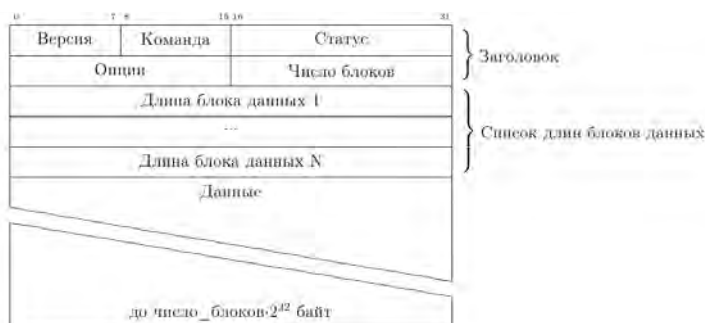


Рис. 3. Формат пакета протокола PIV

Протокол поддерживает три типа пакетов (поле «Команда» протокола PIV):

- GET - предназначен для запроса данных вычислительными узлами у ЭУ;
- POST - предназначен для передачи данных с вычислительных узлов на ЭУ;
- RESPONSE - пакет ответа на запрос вычислительного узла.

Информация о подтипе RESPONSE-пакета кодируется в поле статуса. Через поле статуса вычислительным узлом сообщается успешно ли был обработан запрос или нет. В случае неуспеха конкретное значение поля статуса определяет произошедшую ошибку.

## АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ РАЗРАБОТАННОГО РЕШЕНИЯ

Исследования производительности разработанного решения проводились на экспериментальном фрагменте сетевой инфраструктуры, состоящей из эмулятора экспериментальной установки PIV (ИМСС УрО РАН, Пермь) и суперкомпьютера «УРАН» 100 Tflops (ИММ УрО РАН, Екатеринбург).

Эмулятор экспериментальной установки оборудован процессором Intel Core i7 2600 с тактовой частотой 3,4 ГГц; 16 Гб оперативной памяти и сетевой картой Intel Corporation 82579V Gigabit Network Connection. Эмулятор работает под управлением операционной системы openSUSE 12.1 (kernel: 3.1.0).

Прямой доступ к вычислительным узлам суперкомпьютера «УРАН» осуществлялся через фронтальную машину посредством технологии PAT.

График зависимости суммарной скорости передачи данных между эмулятором ЭУ и узлами суперкомпьютера приведен на рисунке 4. Протокол PIV тестировался при использовании транспортных протоколов TCP и UDT. В качестве эталонной пропускной способности канала по TCP использовались величины, полученные с помощью программного обеспечения iperf.

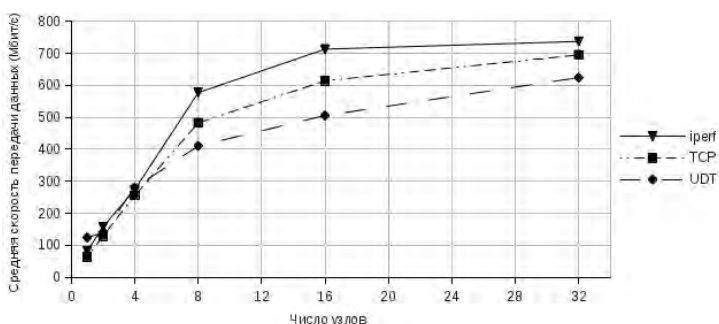


Рис. 4. Суммарная скорость передачи данных между ЭУ и узлами суперкомпьютера

Из графика следует, что логика работы протокола PIV при использовании TCP не вносит существенных накладных расходов по сравнению с выбранным эталоном (iperf). При использовании в PIV транспортного протокола UDT скорость передачи данных оказалась меньше, чем при использовании транспортного протокола TCP.

Необходимо отметить, что с ростом числа параллельных соединений потери скорости передачи данных, вносимые логикой работы протокола PIV, уменьшаются, поэтому в реальном эксперименте при задействовании десятков и сотен вычислительных узлов, скорость передачи данных по протоколу PIV еще сильнее приблизится к предельно возможной в данном канале связи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Спроектирован протокол и разработано программное обеспечение для передачи данных с экспериментальной установки на узлы вычислительного кластера, тестирование которых подтверждают работоспособность предложенной модели обработки интенсивного потока данных.

Исследование производительности показало, что логика работы протокола PIV не вносит существенных потерь скорости, по сравнению с максимальной скоростью передачи потока данных по протоколу TCP. Сравнение транспортных протоколов TCP и UDT показало, что для протокола PIV лучше использовать транспортный протокол TCP, так как он обеспечивает большую скорость передачи данных.

Разработанная технология предоставляет принципиально новый инструмент проведения экспериментальных исследований, позволяя обрабатывать быстротекущие процессы в течение длительного времени, например, при лабораторном изучении начальной стадии формирования тропических циклонов.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-07-96001-р\_урал\_а) и Региональной целевой программы УрО РАН (РЦП-11-П10).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Adrian R.J. Scattering particle characteristics and their effect on pulsed laser measurements of fluid flow: speckle velocimetry vs. particle image velocimetry, *Appl. Opt.* 1984. Vol. 23. Pp. 1690-1691.
- [2] Степанов Р.А., Масич А.Г., Масич Г.Ф. Инициативный проект «Распределенный PIV», Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность: труды Всероссийской суперкомпьютерной конференции - М.: Изд-во МГУ, 2009. - С. 360-363. (ISBN 978-5-211-05697-8)
- [3] Масич А.Г., (и др) Инфраструктура распределенного эксперимента, Сб. тез. докл. XVI конференции представителей региональных научно-образовательных сетей «RELARN-2009». - М.-СПб, 2009. - С. 58-60.
- [4] Масич А.Г., Масич Г.Ф. GIGA UrB RAS подход к LambdaGrid парадигмам вычислений, Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи: труды Международной суперкомпьютерной конференции - М.: Изд-во МГУ, 2010.
- [5] Масич А.Г., Масич Г.Ф., Степанов Р.А., Шапов В.А. Скоростной I/O-канал супервычислителя и протокол обмена интенсивным потоком экспериментальных данных, Сб. тез. докл. X международной конференции «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах HPC-2010» - Пермь: Изд-во ПГТУ, 2010. - Т. 2. С. 119-128. (ISBN 978-5-398-00506-6)
- [6] Stephen M. Rumble, Diego Ongaro, Ryan Stutsman, Mendel Rosenblum, and John K. Ousterhout. 2011. It's time for low latency. In Proceedings of the 13th USENIX conference on Hot topics in operating systems (HotOS'13). USENIX Association, Berkeley, CA, USA, 11-11.
- [7] Yunhong Gu and Robert L. Grossman, UDT: UDP-based Data Transfer for High-Speed Wide Area Networks, *Computer Networks* (Elsevier). Volume 51, Issue 7. May 2007.

## ИНТЕГРАЦИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ИТ-ИНФРАСТРУКТУРУ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭНЕРГЕТИКИ

*The article is described the integration, in the frames of intelligent IT-environment, of technologies supporting ontology modeling, cognitive modeling, and event modeling. These technologies are proposed for decision support in the research and providing of energy security. The expert system, based on the precedents of emergencies in energy systems, included in IT-environment too. It's considered suggested approach and tools for integration of IT-environment into IT-infrastructure of energy system research.*

### ВВЕДЕНИЕ

Переход России к новым экономическим отношениям требует быстрого и адекватного анализа ситуаций в условиях изменяющейся, недостаточной и недостоверной информации. С одной стороны, этим требованиям не отвечают традиционные комплексы для исследований проблем энергетической безопасности, использующие технико-экономические модели большой размерности. С другой стороны, несмотря на создание для поддержки принятия решений ситуационных центров и ситуационных комнат, отмечается недостаток интеллектуальных программных средств информационно-аналитического обеспечения этих центров и их практическое отсутствие для поддержки принятия решений в области энергетики.

Все вышесказанное обуславливает необходимость создания новых интеллектуальных программных средств для поддержки принятия решений в исследованиях и обеспечении энергетической безопасности, в первую очередь, для качественного анализа слабоструктурированных проблемных ситуаций в энергетике, интеграции новых программных средств с традиционными, разработки информационной технологии их совместного использования.

В Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН ведутся комплексные исследования систем энергетики, важную роль в которых играют исследования проблем энергетической безопасности.

### ОНТОЛОГИЧЕСКОЕ, КОГНИТИВНОЕ И СОБЫТИЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В качестве основных интеллектуальных методов ситуационного анализа в исследованиях и обеспечении энергетической безопасности рассматриваются методы онтологического, когнитивного и событийного моделирования (рис. 1)[1,2].



Рис. 1. Взаимосвязь интеллектуальных методов ситуационного анализа



Для совместного использования этих технологий предложено ввести понятие интеллектуальной ИТ-среды.

Для совместного использования этих технологий предложено ввести понятие интеллектуальной ИТ-среды. Обозначим ИТ - среду как некоторое множество  $V_{IT} = \{O, E, M_C, M_S\} \cup T_V$ , где  $\{O\}$  - множество онтологий,  $\{E\}$  - множество описаний прецедентов чрезвычайных ситуаций,  $\{M_C\}$  - множество когнитивных моделей,  $\{M_S\}$  - множество событийных моделей,  $T_V$  - инструментальные средства поддержки ИТ-среды, включающие описание знаний, представленных в виде онтологий, описаний прецедентов ЧС, когнитивных и событийных моделей и средства оперирования ими.

Таким образом, интеллектуальная ИТ-среда включает пространство знаний, интегрирующее: онтологические модели знаний в области исследований ЭБ, базу знаний о прецедентах ЧС в энергетике и базы знаний, содержащие когнитивные модели стратегических угроз ЭБ и событийные модели развития и последствий ЧС в энергетике (рис. 2), а также включает инструментальные средства описания знаний и оперирования ими [3].

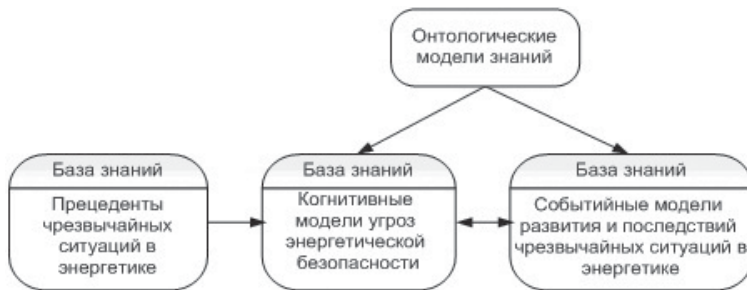


Рис. 2. Пространство знаний, поддерживаемое интеллектуальной ИТ-средой

## ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА “EMERGENCY”, ОСНОВАННАЯ НА ОПИСАНИЯХ ПРЕЦЕДЕНТОВ ЧС В ЭНЕРГЕТИКЕ

Автором предложены методические принципы построения экспертной системы “Emergency”, а именно: принципы организации базы знаний экспертной системы на основе фреймовой модели представления знаний; структура скелетных фреймов для описания прецедентов ЧС; принципы построения интерфейса экспертной системы; организация хранения базы знаний как фрагмента базы данных под управлением СУБД; интеграция экспертной системы “Emergency” в интеллектуальную ИТ-среду, базирующаяся на использовании Репозитория информационной инфраструктуры исследований в энергетике.

Принята фреймвая модель представления знаний. В базе знаний прецеденты чрезвычайных ситуаций отображаются с помощью трех типов скелетных фреймов:

ES\_DATE (дата ЧС), ES\_PLACE (место ЧС), ES\_DESCRIPTION (описание ЧС). Каждый из фреймов описывает определенный набор параметров, характеризующих произошедшую в энергетике чрезвычайную ситуацию. Все фреймы имеют один общий слот - номер.

В первой версии ЭС предусматриваются два режима работы: а) добавление новых знаний и б) поиск и извлечение знаний по запросам пользователей.

Для обеспечения концептуального единства и совместимости с другими инструментальными средствами интеллектуальной ИТ-среды реализация выполняется в Java-технологии, что обусловило выбор оболочки Jess (расширение оболочки Clips для Java) и использование СУБД HyperSQLDB для хранения базы знаний.

В первой версии ЭС анализ ЧС выполняется экспертом (пользователем ЭС). В дальнейшем предусматривается возможность встраивания, по необходимости, специальных средств аналитической обработки извлекаемых знаний.

## ИНТЕГРАЦИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ИТ-СРЕДЫ В ИТ-ИНФРАСТРУКТУРУ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭНЕРГЕТИКИ

Автором разработаны методические принципы построения и интеграции в интеллектуальную ИТ-среду инструментальных средств когнитивного моделирования для исследований проблем ЭБ, обеспечивающих создание, редактирование и анализ когнитивных карт, которые описаны ниже.

Предложено решение о создании инструментальной среды, а не монолитного программного комплекса, с тем, чтобы обеспечить гибкое использование инструментальных средств, как отдельных, так и в различных сочетаниях, с одновременным уменьшением функциональной сложности в каждом конкретном случае. Кроме того, обеспечивается возможность привлечения эксперта для анализа выходной и корректировки входной информации при переходе от одного инструментального средства к другому, учитывая, что полная автоматизация предложенной схемы (рис. 3) нецелесообразна.

Для интеграции уже существующих и новых инструментальных средств предложена структура интеллектуальной ИТ-среды, представленная на рис. 3, в которой используется Репозиторий ИТ-инфраструктуры исследований в энергетике [4].

Рассмотрим управление информационными потоками в этой схеме. Обмен информацией с Репозитарием выполняется с использованием программных средств Репозитария, разработанных А.Н. Копайгородским. Это позволяет обеспечить интеграцию интеллектуальной ИТ-среды в информационную инфраструктуру исследований в энергетике.

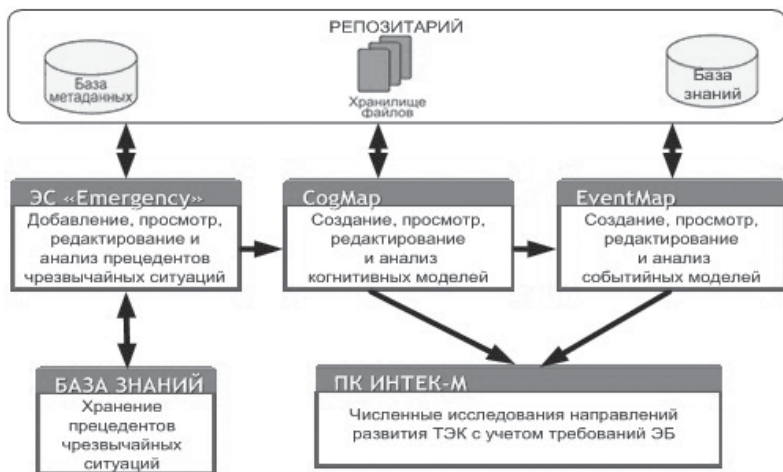


Рис. 3. Схема взаимосвязей инструментальных средств интеллектуальной ИТ-среды

Взаимодействие базы знаний и ЭС обеспечивается средствами ЭС. На этом этапе хранение базы знаний обеспечивается штатными средствами СУБД HyperSQLDB, совместимой с оболочкой Jess. Метаописание базы знаний хранится в базе метаданных Репозитария.

Анализ прецедентов ЧС в энергетике выполняется экспертом на основании фрагментов знаний, извлеченных из базы знаний по запросам (подробнее режимы работы ЭС рассмотрены в следующем разделе). В дальнейшем предусматривается расширение возможностей ЭС - дополнение ее средствами аналитической обработки знаний. Анализ прецедентов ЧС позволяет экспертам выявить типовые (наиболее часто встречающиеся) ЧС, которые являются первоочередными претендентами для когнитивного моделирования.

На рис. 3 не показаны в явном виде средства онтологического моделирования. На данном этапе используются свободно распространяемые средства CMapTools или Protege. Созданные с их помощью онтологии хранятся в Репозитарии и могут быть просмотрены исследователем перед

началом когнитивного или событийного моделирования. Для хранения онтологий используется Репозиторий ИТ-инфраструктуры ИСЭМ СО РАН, разработанный сотрудником лаборатории информационных технологий ИСЭМ СО РАН Копайгородским А.Н. Извлечение информации из Репозитория выполняется с помощью хранимых процедур, которые создаются внутри базы метаданных Репозитория на языке SQL, диалект которого поддерживает СУБД, исполняются на стороне сервера и заведомо корректно производят экспорт данных, обеспечивая при этом полную совместимость пользовательских приложений [5].

Библиотеки CogMap и EventMAP, показанные на рис. 3, совместимы, поскольку реализованы в одной и той же графической среде [6]. Библиотека CogMap для когнитивного моделирования разработана автором, библиотека EventMap, содержащая базовые графические элементы событийных карт и реализующая алгоритм перехода от событийной карты к формализованной событийной модели на основе Joiner-сетей, реализована В.Л. Аршинским [7].

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Предложено интегрировать в рамках интеллектуальной ИТ-среды технологии онтологического, когнитивного и событийного моделирования для поддержки принятия решений в исследованиях и обеспечении энергетической безопасности. Использование предложенной технологии позволяет интегрировать методы качественного анализа угроз ЭБ, включая ЧС на объектах энергетики (онтологическое, когнитивное и событийное моделирование) и методы количественной оценки вариантов развития ТЭК с учетом требований ЭБ (традиционный подход). Интеграция интеллектуальной ИТ-среды в ИТ-инфраструктуру исследований в энергетике, разработанную ранее сотрудниками лаборатории информационных технологий, обеспечивается использованием Репозитория ИТ-инфраструктуры и соблюдением единых системно-концептуальных соглашений, обеспечивающих совместимость ранее созданных и вновь разработанных средств.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Исследования, описанные в статье, выполнены при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №10-07-00264, № 11-07-192 и гранта программы Президиума РАН №2.29.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Массель А.Г. Методологический подход к организации интеллектуальной поддержки исследований проблемы энергетической безопасности, Информационные технологии. - №9. - 2010. - С. 32-36.
- [2] Массель Л.В., Аршинский В.Л., Массель А.Г. Интеллектуальные информационные технологии поддержки принятия решений в исследованиях и обеспечении энергетической безопасности, Труды Международной конференции «Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного эксперимента», Евпатория, 2010. - 192-196.
- [3] Массель А.Г. Интеллектуальная ИТ-среда для исследований проблемы энергетической безопасности, Труды Международной конференции «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе», Гурзуф, 2010. - С. 306-309.
- [4] Аршинский В.Л., Массель А.Г., Сендеров С.М. Информационная технология интеллектуальной поддержки исследований проблем энергетической безопасности, Вестник ИРГТУ. - № 6. - 2010.
- [5] Копайгородский А.Н. Виртуальная интеграция распределенных данных исследований в энергетике, Труды XIII Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». Том 2. - Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. - С. 260-266.
- [6] Копайгородский А.Н. Проектирование и реализация системы графического моделирования, Информационные и математические технологии в науке и управлении, Труды XV Байкальской Всероссийской конференции, т. III. - Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2010. - С. 22-28.
- [7] Аршинский В.Л. Событийное моделирование чрезвычайных ситуаций в энергетике, Аршинский В.Л., Труды Международной конференции «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе», Гурзуф, - 2010. - С.299-301.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF MAKING FIREPROOF PROTECTIVE COVERINGS BY TWO-PHASE JETS

The mathematical modelling of the process of making fireproof protective coatings reduces to the consideration of a problem of the interaction of a two-phase turbulent jet with a plane wall. The second phase represents a fine-fraction mixture of the coke and magnesite particles, and when impinging on the wall they can both stick to it and reflect from it. The reflected particles near the wall interact with the carrier gas and with the impinging particles thus forming a narrow layer of particles with the increased particles concentration, which is usually called as a screening layer.

The computation of such a flow in a jet was performed within the framework of a continual model. For the description of gas flow the averaged Navier-Stokes equation system and  $k - \varepsilon$  model of turbulence have been used.

### INTRODUCTION

Two-phase jets are used for making a protective additional coating on the refractory walls of different industrial devices (called as the process of guniting). The guniting of the walls of steel-melting converters is used in Russia [1]. It allows to increase the number of melting's in several times without the replacement of converter's base fire-proof walling and this method give a large commercial profit. A problem of numerical modelling of this process within the framework of technological scheme with coaxial jets is considered. This technological scheme of the jet guniting is shown in Fig. 1.

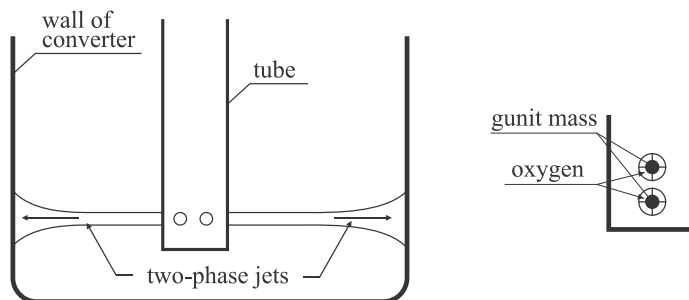


Fig. 1. Technological scheme of the jet guniting

Two-phase mixture of burning (coke) and non-burning (magnesite) particles and nitrogen (carrier gas) is fed into the central jet and the peripheral (annular) jet of the oxygen is used for combustion of the coke. The heat releasing from the burning of coke particles results in the increasing of the magnesite particles temperature.

Solid particles have sufficiently small dimensions (of the order  $80 - 100\mu\text{m}$ ), and when impinging on the wall they can both stick to it and reflect from it. The reflected particles near the wall interact with the carrier gas and with the impinging particles thus forming a narrow layer of particles with the increased particles concentration, which is usually called as a screening layer.

### MATHEMATICAL MODEL

The sketch computational region of flow is shown in Fig.2. The peripheral oxygen jet is a high-speed jet, and the central two-phase jet. The jet outflowing from this device has a sufficiently large extension (100

<sup>1</sup> Faculty of Science and Mathematics, Pristina University, Kosovska Mitrovica, Serbia

- 200 calibres), therefore the overall flow region was subdivided into three regions: flow region was subdivided into three regions: the non-isobaric flow region in and near the nozzle device (I), the region of isobaric jet (II), and the region of the interaction of the jet with the converter wall (III), the computation of the flow in which was carried out sequentially. Here the values of flow parameters obtained at the right boundary of each region were the initial data for the computation in the next region.

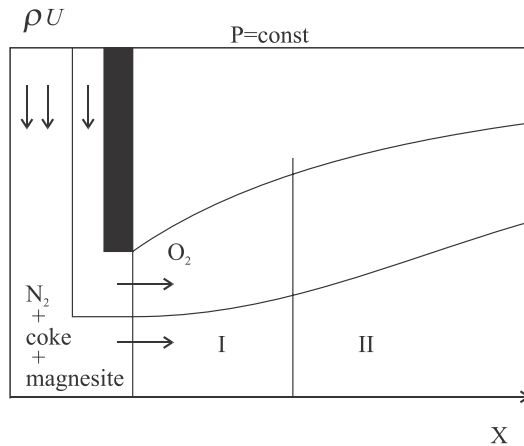


Fig. 2. Diagram of computational region

The simulation of the turbulent two-phase flow was performed within the framework of “ $k - \varepsilon$ ” model taking into account the influence of turbulent pulsations on the motion of particles. The averaged Navier - Stokes model was used for description of motion of carrier gas.

In addition, the following simplifying assumptions were used:

- the flow is stationary and axisymmetric;
- the carrying medium consists of the oxidizer ( $O_2$ ), reaction products ( $CO_2$ ) and the inert gas ( $N_2$ ). The gaseous phase density is determined as  $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$  (here and in what follows the indices of the flow parameters will be denoted by figures from 1 to 5 for  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $N_2$ , coke particles and magnesite particles, respectively; the parameters without the indices will refer to the gaseous phase on the whole). The ambient space is filled by a hot air;
- the second phase consists of spherical particles of two kinds - the combustible particles (coke) and non-combustible particles (magnesite). The dimensions of magnesite particles are constant, those of coke are variable at the expense of coke combustion. The reaction between the coke particles and oxygen is one-stage and is described by equation  $C + O_2 = CO_2$ ;
- the reaction takes place only on the surface of a coke particle, and the heat produced thereby is expended for the heating of the particle itself, and then this heat is transferred to the carrying gas and through the gas to the magnesite particles in the result of an interphase heat exchange. The temperature throughout the volume of any particle is the same; in the process of combustion the particle preserves its spherical shape;

The system of equations governing the two-phase stationary flow has the following form (into regions I and II).

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y \rho U_k = y J, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y \rho U_i U_k + \frac{\partial}{\partial x_k} y P = \frac{\partial}{\partial x_k} y [\mu \tau_{ik} - \rho \langle u_i u_k \rangle] + y (F_i - J U_{4i}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y \rho H U_k = U_k \frac{\partial}{\partial x_k} y P + \frac{\partial}{\partial x_k} y \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} - \rho \langle h' u'_k \rangle + (\mu \tau_{ik} - \rho \langle u'_i u'_k \rangle) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] + y \sum_{m=4}^5 \rho_m \{ C_{\alpha m} (T_m - T) + (U_{m1} F_1 + U_{m2} F_2) \} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y \rho_m U_k = \frac{\partial}{\partial x_k} y \left[ \left( \rho D_m + \frac{\mu_T}{Sct} \right) \frac{\partial \rho_m}{\partial x_k} \right] + y J_m, \quad (m=1,2) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y \rho U_k k = \frac{\partial}{\partial x_k} y \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] - y \left[ \rho \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \rho (\varepsilon + \varepsilon_s) \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y \rho U_k \varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_k} y \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] - y \left[ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - C_{\varepsilon 3} \rho \varepsilon_s \right] \quad (6)$$

$$P = TR_0 \sum_{m=4}^3 \rho_m / g_m \quad (7)$$

$$\tau_{ik} = \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right), \quad \rho \langle u'_i u'_k \rangle = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ik} - \mu_T \tau_{ik},$$

$$\mu_T = C_\mu \rho k^2 / \varepsilon, \quad \rho \langle h' u'_k \rangle = - \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y (\rho_m U_{mk} + \langle \rho'_m u'_m \rangle) = J_m, \quad m=3,4, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y (n_4 U_{4k} + \langle \rho'_4 u'_4 \rangle / \rho_4) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y [\rho_m U_{mi} U_{mk} + U_{mi} \langle \rho'_m u'_m \rangle - \rho_m \langle \rho'_m u'_m \rangle] = y \rho_m C_{Rm} (U_i - U_{mi}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y [\rho_m U_{mi} H_m + H_m \langle \rho'_m u'_m \rangle - \rho_m \langle h'_m u'_m \rangle] = y [\rho_m C_{\alpha m} (T - T_m) + J_m Q] \quad (11)$$

$$J = J_2 - J_1, \quad J_4 = -J, \quad J_5 = 0.$$

where  $\tau_{ik}$  is the tensor of viscous stresses,  $\rho \langle u'_i u'_k \rangle$  is the tensor of Reynolds stresses,  $\rho$  is the calculated density,  $\vec{U}$  is the velocity vector,  $h$  is the specific enthalpy,  $T$  is the temperature,  $\mu$  is the dynamic viscosity,  $\mu_T$  is the turbulent dynamic viscosity,  $C_R$  is the coefficient of the aerodynamic drag of a particle,  $C_\alpha$  is the coefficient of the heat transfer from the particle to the gas,  $Pr_T$  is the turbulent Prandtl number,  $k$  is the kinetic energy of turbulence,  $\varepsilon$  is the rate of its dissipation,  $J_1, J_2$  are the mass rate of expending  $O_2$  and forming  $CO_2$ ,  $g_m$  are the molecular weights of the components,  $Q$  is the heat of the coke combustion,  $n$  is calculated number of particles per the unit volume. The correlations of the pulsation parameters of particles are determined in terms of the averaged parameters of the carrying gas. The expressions form them, as well as the expressions for  $C_R$ ,  $C_\alpha$  and for the terms  $\varepsilon_s$ , taking into account the additional dissipation  $k$  on particles with regard for their combustion are

taken from [2, 3] and are not presented here because of their bulky form. The change of the coke particles radius  $r_k$  was determined by the computed values  $\rho_4$  and  $n_4$  with the aid of the formula  $r_4 = 3\rho_4 / (4\pi\rho_c n_4)$ , where  $\rho_c$  is the true coke density. For the description of a complex process of the coke combustion the expression for its mass rate  $J_4$  was used from [4], which works sufficiently well in the domains of both kinetic and diffusive regimes of combustion.

As the boundary conditions in the inlet section of the nozzle device, for the gas we have specified the values of the mass flux ( $\rho u$ ), the enthalpy and the direction of the velocity vector. For the particles we have specified here the values of all the parameters under the assumption on the absence of their lag in velocity and temperature. On the device wall the sticking conditions were specified for the gas, and the slip conditions were specified for the particles. The conditions typical for the ambient space were specified in the upper boundary and the nonreflecting condition was specified in the outlet boundary.

In the region (I) the system (1)-(11) was replaced by a no stationary system and was solved by the pseudo-unsteady method with the aid of Patankar's method SIMPLE [5], and for the solution of the equations for particles motion the implicit A-stable second-order scheme was used [6]. In the region (I) in the nozzle device the well-known method of near-wall functions was used to determine the values of  $k$  and  $\varepsilon$  near the walls [7].

In the region (II) the pressure was assumed to be constant, and the parabolized system (1)-(11) was considered here, which was solved by a marching method.

Then it was assumed that in the region (III) there are only the magnesite particles and there are not any chemical reactions (in system (1) - (7):  $J = J_1 = J_2 = 0$ ,  $\rho_1, \rho_2$  are constants). The particles reflected from the wall are considered as a new fraction, and they are described by the corresponding equation system. Therefore instead of system (8) - (11) we used following equation system:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} y (\rho_m U_{mk} + \langle \rho_m' u_m' \rangle) = 0, \quad m = 1, 2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_k} y [\rho_m U_{mi} U_{mk} + U_{mi} \langle \rho_m' u_{mi}' \rangle - \rho_m \langle \rho_{mi}' u_{mk}' \rangle] + G_m \frac{\partial}{\partial x_k} y \rho_i = \\ & = y \left\{ \rho_m C_{Rm} (U_i - U_{mi}) + \sum_{j=1}^2 K_{mj} \rho_m \rho_j (U_{ji} - U_{mi}) / (M_j + M_m) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_k} y [\rho_m U_{mi} H_m + H_m \langle \rho_m' u_m' \rangle - \rho_m \langle h_m' u_{mk}' \rangle] = \\ & = y \left\{ \rho_m C_{am} (T - T_m) + \sum_{j=1}^2 K_{mj} \rho_m \rho_j \Phi_{mj} / (M_j + M_m) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Phi_{mj} = |\bar{U}_m - \bar{U}_j|^2 / 2, \quad K_{mj} = \pi [r_m + r_j]^2 |\bar{U}_m - \bar{U}_j|$$

where:  $K_{mj}$  - the constant of particles coagulation  $r_m$ , - radius and mass of particles,  $G_m$  - solids stress modulus [8]. The subscript 1 refers to the parameters of incident particles, and the subscript 2 refers to the reflected particles.

The boundary conditions on the wall were specified for the reflected particles as follows. It was assumed that the mass, the tangent component of the velocity vector and the particles temperature do not change in the process of their reflection from a wall, and the value of the normal component of the velocity vector was determined from the relationship  $u_2 = -\beta u_1$ , where  $\beta$  is the accommodation coefficient, which takes into account the inelasticity of the particles collisions with a wall (we have assumed  $\beta = 0.2$  in the computations). The ratio of the number of the reflected particles to the number of the incident particles was assumed to be equal to unity, that is a complete reflection of particles was as-

sumed. This has been made with the purpose of determining the maximal protective properties of the screening layer (no less than 80% of the incident particles are usually reflected).

### SOME NUMERICAL RESULTS

The turbulent two-phase flows were calculated with following values of main parameters. All linear dimensions are referred to the radius of the exit section of the annular nozzle ( $r_* = 0.015$  m), the velocities of gas and particles are referred to the critical sound speed in the oxygen ( $a_* = 298$  m/s), their temperatures are referred to the stagnation temperature, the densities are referred to the stagnation density ( $\rho_0 = 1.28$  kg/m). The diameters of the coke and magnesite particles in the inlet section were assumed to be the same ( $d_3 = d_4 = 100 \mu\text{m}$ ), the relation of the mass flow rate of the second phase to the mass flow rate of the carrier gas  $W_s / W_g = 10$  ( $W_s = W_1 + W_2$ ), and the weight fraction of coke  $q = W_1 / W_2$  was varied. The stagnation temperature  $T_0$  for both gases in the inlet section was equal to 300 K, the air temperature in the ambient space was 1700 K.

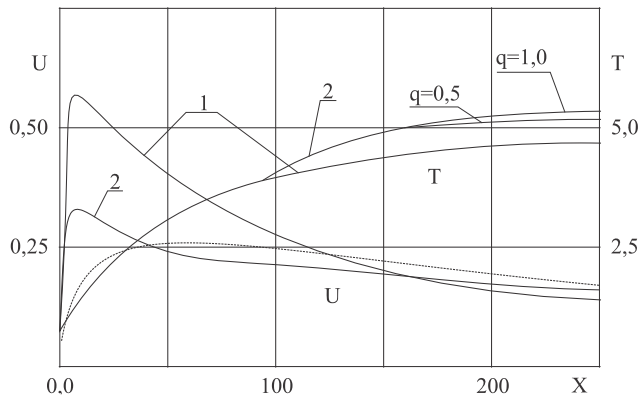


Fig. 3. Flow parameters along the jet axis

The computations have shown that under the same conditions the intensity of the two-phase jet expansion is significantly less than in the case of a monophasic jet, which is related to the back influence of particles on the gas flow field. In Fig. 3 the flow parameters distributions along the jet axis are shown (the curves 1 correspond to the parameters of the pure gas, and the curves 2 correspond to the two-phase flow, the dashed lines refer to the magnesite particles velocity).

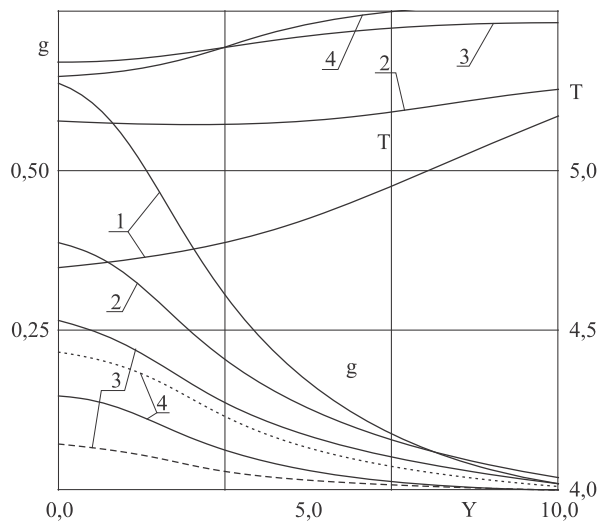


Fig. 4. Flow parameters at  $x=250$ . 1 -  $q=0$ ; 2 -  $q=0.5$ ; 3 -  $q=1.0$ ; 4 -  $q=1.5$



It may be seen that the central jet is accelerated by the viscous interaction with the high speed peripheral jet, and the presence of the second phase reduces the intensity of acceleration. However, in the main region of the jet flow the particles velocity exceeds the gas velocity, and the particles begin to carry the gas along, thus increasing the “range” of the two-phase jet. The increasing of the gas temperature due to the particles combustion occurs at a sufficiently large distance from the mouthpiece. This indicates to a considerable lag of the coke particles ignition process. Filming of the industrial guniting process confirms the obtained results.

In Fig. 4 we show in section  $x = 250$  at different values of the parameter  $q$  the distributions of the density of magnesite particles (solid lines) and of coke particles (dashed lines), and the gas temperature in the cross section of the jet. With the parameter  $q$  increasing, the fraction of non-burnt coke particles also increases, which makes worse the quality of the coating produced by guniting.

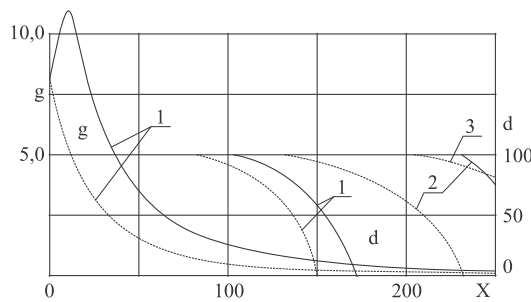


Fig. 5. Density of magnesite particles and the coke particles diameters along the jet. 1 -  $q=0.5$ ; 2 -  $q=1.0$ ; 3 -  $q=1.5$

In Fig. 5 we depict the distribution of the magnesite particles density along the jet axis for the different regimes of flow (solid lines and dashed lines) and  $q$ .

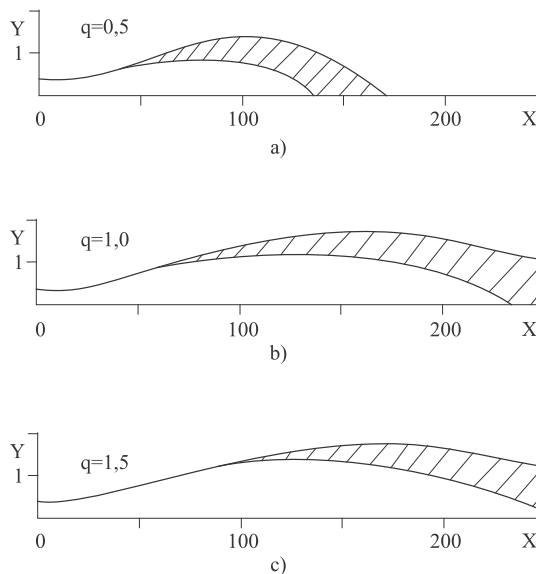


Fig. 6. Zones of the beginning and end of the coke combustion

The solid lines and dashed lines denote high-speed and low-speed jet of oxygen, respectively. A sharp increase of the particles density at the initial part of the high-speed jet is related to the effect of the “lacing” of the particles jet, which is expressed by the reduction of the cross dimension of their jet. This effect is conditioned by the influence of turbulent pulsations of the carrier gas on the particles motion. In the case of low-speed jet the mixing of the jets occurs considerably faster with less intensive genera-

tion of  $k$ . The consequence of this is the absence of the “lacing” effect. We show in the same Figure the change of the coke particles diameter along the jet axis for three values of the coefficient  $q$ , from which it follows that the “lacing” effect reduces the intensity of the coke combustion process.

The dispositions of the zones of the beginning and ending of the coke combustion in the jets are presented in Fig. 6. It may be seen that the increase of the relative fraction of coke in the gunit mass leads to a substantial lag of the combustion process, the intensity of which is limited by a turbulent diffusion of oxygen from the peripheral jet.

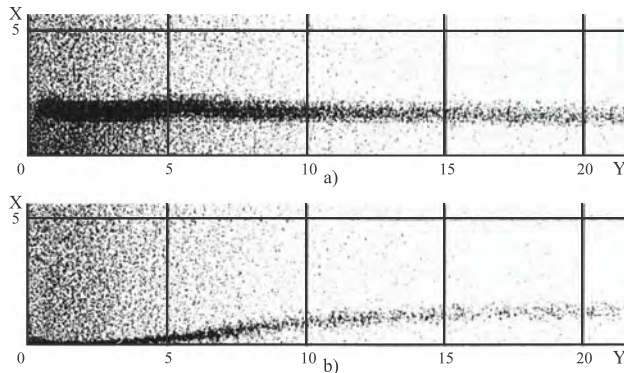


Fig. 7. Distribution of particles density near the wall surface

In Fig. 7a, 7b we show a qualitative picture of the distribution of particles density near the wall surface in the incident jet for the particles with the diameter  $d_p=100\mu\text{m}$  without regard (Fig. 7a) and with regard (Fig. 7b) of the force interaction between the incident and reflected particles. It may be seen that the consideration of such an interaction alters significantly the structure of the screening layer, which now “presses itself” to the wall on the jet axis, where the impinging particles have the largest energy. The isolines of the Mach numbers of the carrying gas are presented in Fig. 8.

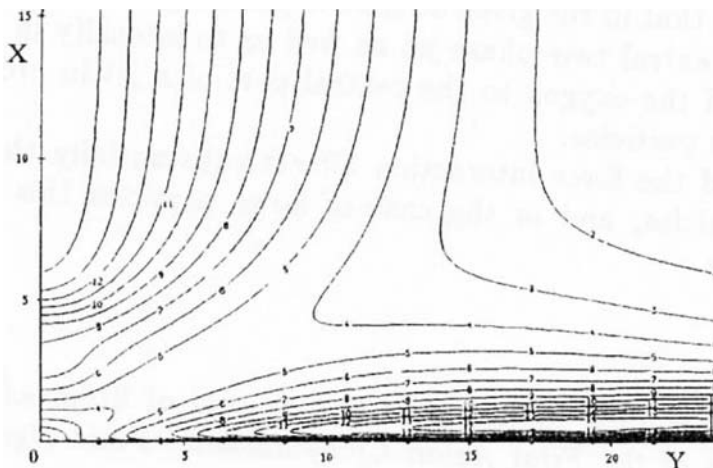


Fig. 8. Isolines of the Mach number

One may well see a region of the formation of the boundary layer along the wall. The effect of the particles with  $d_p=100\mu\text{m}$  on the flow structure of the carrying gas is insignificant, and it becomes appreciable in the case of particles of small sizes  $d_p\leq 10\mu\text{m}$ .

We show in Fig. 9 the pressure distributions along the wall for the particles with  $d_p=100\mu\text{m}$  and  $d_p=10\mu\text{m}$ . It may be seen that the pressure at the spreading point in the case of  $d_p=10\mu\text{m}$  is higher. That is related with more intensive interaction between carrier gas and particles of the small diameters.

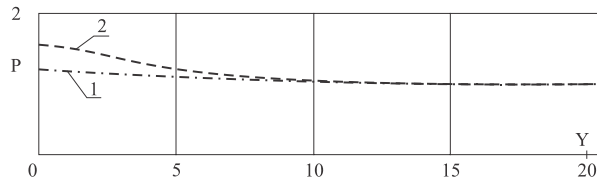


Fig. 9. Pressure distribution along the wall. 1 -  $d_p=100\mu\text{m}$ ; 2 -  $d_p=10\mu\text{m}$

The distributions of the velocities of incident particles on the wall are depicted in Fig. 10 for  $d_p=100\mu\text{m}$  and for  $d_p=10\mu\text{m}$ . The solid lines correspond here to the computations taking into account the force interaction between the incident and reflected particles. The dashed lines refer to the case when the above interaction is not taken into account.

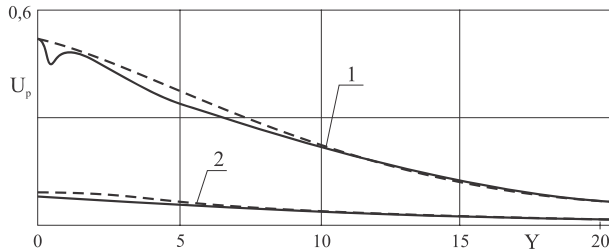


Fig. 10. Distribution of the velocities of incident particles on the wall. 1 -  $d_p=100\mu\text{m}$ ; 2 -  $d_p=10\mu\text{m}$

## CONCLUSION

The analysis of computational results shows that in the given scheme of guniting it is reasonable to provide sufficiently high velocity of the central two-phase jet as well as to intensify in some way the process of the turbulent transfer of the oxygen to the central part of a jet in order to ensure a more complete combustion of coke particles.

It was showed that the consideration of the force interaction affects substantially the distribution of the velocities of incident particles, and in the case of large particles this effect ( $d_p=100\mu\text{m}$ ) proves to be even qualitative.

## ACKNOWLEDGEMENT

The work presented here was supported by the Serbian Ministry of Education and Science (project III44006&TP35030).

## REFERENCES

- [1] Rychkov A. D. and Miloshevich H., Numerical modeling of the process of fireproof coating formation by jet coating. *Proceedings of the First Asian Computational Fluid Dynamics Conference*, Hong-Kong, 1995, v.3, p.1041-1047.
- [2] Schreiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P., *Turbulent Flows of Gas- Particles Mixtures, (in Russian), Naukova Dumka, Kiev, 1987, pp.240.*
- [3] Mostafa A. A., Mongia H. C., WcDonell V. G. and Samuelsen G. S., Evolution of particle- laden jet flows: a theoretical and experimental study, *AIAA Journal*, 1989, **27**, p. 167-183.
- [4] Khitrin L. N., *Physics of combustion and explosion, (in Russian), Published by Moscow State University, Moscow, 1957, pp.345.*
- [5] Patankar S., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.*
- [6] Rychkov A. D., (1980) *Mathematical Modeling of Gasdynamical Processes in Channels and Nozzles, (in Russian), Nauka, Novosibirsk, 1980, pp.220.*
- [7] Rodi W., Exam pels of turbulence models for incompressible flows, *AIAA Journal*, 1982, **20**, p.872-879.
- [8] Tsuo Y. P., Gidaspov D., Computation of flow patterns in circulating fluidized beds, *AIChE Journal*, 1990, **36**, 6, p.885-896.

## INFORMATION TECHNOLOGIES THROUGH MOODLE SOFTWARE PLATFORM

---

*Increased use of information and communication technology needs of teachers in higher education to their existing ways of frontal lectures adjust to new distance education policy. The first step is to choose the right software to support all the necessary applications. Moodle is offered as one of the good software tools. This paper discusses the application software package Moodle in the process of distance education on subjects that include content courses basis of informatics and computer science, and studied at the undergraduate level of higher education.*

---

### INTRODUCTION

Development of information technologies and constant innovating of educational technologies results in alterations in methods and forms of educational activities, including the organization which would appear optimal in the era of mass implementation of internet and electronic sources of knowledge. Education, as a rule, gradually embraces new technologies in view of production, traffic, service providing. However, multimedia systems, distance education, virtual schools and other technologies which result in increase of students' engagement, higher quality of knowledge assessment and students' advancement in accordance with individual abilities and prior knowledge, were introduced in education [1,2].

In addition to favoring knowledge as principal global resource for the future, significant efforts were invested in developing and expanding of all forms of electronic support to educational process, during the last decade. Alongside utilization of new technologies in enhancement of formal education, distance education was also developed, with basic goals to set more flexible infrastructure, and with it the availability of this form of learning to each student, to alleviate the overall level of digital literacy in academic population and to develop top quality educational content. Education supported by information technologies implies three primary components at least:

1. Computer Assisted Learning - CAL
2. Computer Assisted Research
3. Distance Learning - DL

Computer Assisted Learning is used most frequently and it is highly convenient for establishing interactions between students and computers in order to improve existing learning technologies and make lectures more obvious, dynamic and interesting. Computer Assisted Learning includes multimedia educational software, computer simulations, virtual reality, artificial intelligence. Utilization of information technologies envisages individual gaining of knowledge, constant return of information and monitoring of students' progress which helps teacher assess students' knowledge more realistically and points them to other didactic media so that they could gain new knowledge without difficulty. Computer Assisted Learning is, today, used extensively at high education institutions for theoretical researches of literature from different areas and for empirical researches with using of adequate statistical software. Theoretical research of literature is almost inconceivable without the use of computer technology, because, today, almost all major books, papers, studies and repertories from expert and scientific conventions are transferred to electronic form and placed on web portals of publishing houses, faculties

---

1 Faculty of Science and Mathematics, Pristina University, Kosovska Mitrovica, Serbia

2 School of Electrical and Computer Engineering of Applied Studies, Belgrade, Serbia

and libraries. Distance learning by using of computers, telecommunications, cable television is more frequently implemented in education. Distance education represents an instructional method of work with students which does not require presence of students and teacher in the same room. Development of distance education dates from mid 20<sup>th</sup> century when radio broadcasts and pen-pal schools were used in order to provide education to students with no means of travel to school or simply unable to attend lectures. On a basic level, distance education is established when both teacher and student are physically separated by long distance and when technology (i.e. speech, video, data and printing) is used to abridge this gap. These types of educational programs can offer second chance for attaining faculty level education to adults, can reach those who are troubled with time constrains, away from faculty centers or with physical disabilities, and can also refresh their knowledge and improve skills in accordance with development of science and technology in their related area of expertise.

This paper contains an overview of Moodle software package in distance education at School of Electrical and Computer Engineering of Applied Studies from Belgrade in course subject Basics of information technology and computer science and a proposal for implementation of such method of work in course Theoretical basics of information technology on Faculty of Natural Sciences University of Pristina with temporary place of residence in Kosovska Mitrovica.

## **MOODLE SOFTWARE PACKAGE**

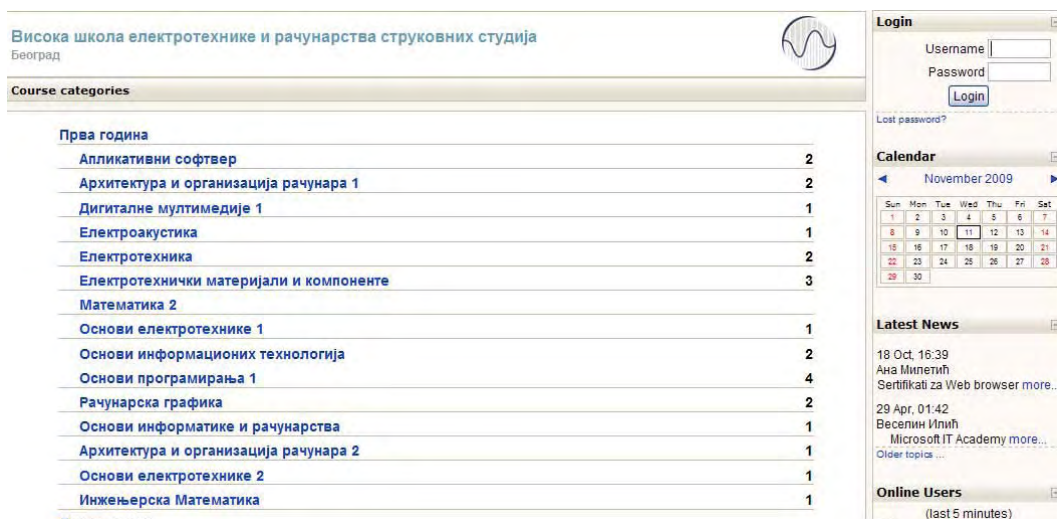
Moodle software package is used for creation of internet courses and websites and it was created as support to electronic learning. Term Moodle is an abbreviation of Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment. It is created as open source software, with open source code. It essentially means that author of this software package has protected its rights but whoever uses it has additional rights. Basic characteristics of this software package, as support to distance education, can be classified into several categories:

- High availability - ability to serve thousands of users simultaneously;
- Scalability - ability to absorb increase of users without a drop in performance;
- User friendly - ability to have the user (student or teacher) quickly learn how to use the system;
- Interoperability - ability to integrate in the existing software in related institution;
- Stability - stabile version of Moodle software provides uninterrupted services to student and teacher population; Security - characteristic of system to pose security risk not greater than any other component of information system in related institution.

## **COURSE BASICS OF INFORMATION TECHNOLOGY AND COMPUTER SCIENCE THROUGH MOODLE**

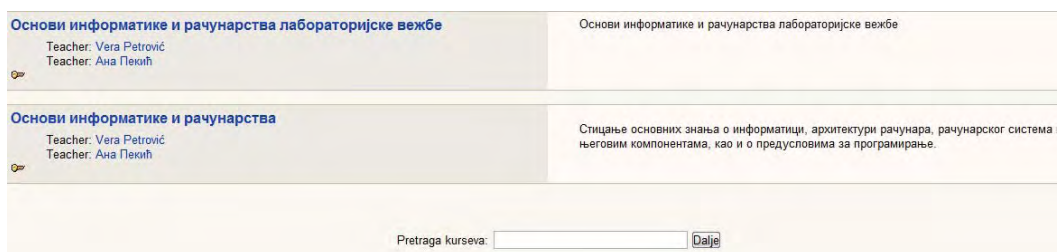
In course subject Basics of information technology and computer science, studied on the first year of School of Electrical and Computer Engineering of Applied Studies from Belgrade, an online course was organized as additional support to traditional methods of providing education. Plan and program of this course subject greatly overlaps with plan and program of Theoretical basics of information technology [3,4,5] and many other course subjects studied during the first year of studies in high education. Thanks to Moodle software package, during this course, students have access to learning materials, complete set of lectures, announcements sent on email via forum, contact and discussion with professor and assistants and can test their knowledge by taking related tests.

After entering the URL <http://e-learn.viser.edu.rs/moodle> in web browser, the home page of Moodle opens, as shown in Picture 1. This home page contains all distance education simplified courses in Moodle environment at Electrical Engineering and Computer Technology College of Applied Studies from Belgrade.



Pic. 1. Home page of Moodle system

Titles of courses at School of Electrical and Computer Engineering of Applied Studies (SECEAS) available to students through distance education represent links (hyperlinks), as shown in Picture 2.



Pic. 2. Course subject page

By clicking on a related link (course subject title) and entering appropriate access password, Picture 3, user logs in and becomes an attendee of the selected course, in this case Basics of information technology and computer science course.



Pic. 3. Enrolling (logging in) to course

After students pass the procedure of updating their profiles, and it is necessary for a student to receive a password by school's network administrator, which will then be used during their entire schooling in SECEAS, Moodle system sends an activation link to the email addresses they had entered. After the link for account activation is activated, Moodle page for accessing the system opens. By selecting the course Basics of information technology and computer technology on attendees' home page, Picture 4, students enter their identification password.

<b>Основи електротехнике 1</b>	Основи електротехнике 1 - 2010 Основи електротехнике 1	Logout
<b>Основи информационих технологија</b>	Основи информационих технологија 2010/11. Основи информационих технологија 2009/10.	Logout Logout
<b>Основи програмирања 1</b>	Основи програмирања 1 2009/10. Основи програмирања 1 2009/10. лабораторијске вежбе	Logout Logout
<b>Рачунарска графика</b>	Рачунарска графика 2009/10.	Logout
<b>Основи информатике и рачунарства</b>	Основи информатике и рачунарства лабораторијске вежбе Основи информатике и рачунарства	Logout Logout
<b>Архитектура и организација рачунара 2</b>	Архитектура и организација рачунара 2 2009/10.	Logout
<b>Основи електротехнике 2</b>	Основи електротехнике 2 2010 Основи електротехнике 2	Logout Logout
<b>Медији масовне комуникације</b>	Медији масовне комуникације	Logout
<b>Инжењерска Математика</b>	Инжењерска математика 2010/11.	Logout
<b>Дискретна математика и алгоритми</b>	Дискретна математика и алгоритми	Logout

Fig. 4. Enrolled course attendee's home page

Only several most important elements will be described in detail, during the familiarization with appearance and navigation within the course, while the description of rarely used elements will be omitted. On the top of the page, in upper left corner, title or name of course is stated. On the right side, on the top of the page, it can be seen if the students are logged in and which username they use, and there is an option to log out by clicking on (Logout) link.

Middle section of the page is reserved for resources set by professor or assistants within course subject's page and organized in sections or topics. There are several ways for moving alongside the course's page.

Clicking on particular parts of linear textual menu, will result in:

- System for distance learning: returning to Moodle website home page
- BOSCT\_lab: opening of Basics of information technology and computer science home page
- Resources: opening the listed lectures
- Exercise 1: currently active resources

Topics are recognizable in the middle section of the course's page. Within topics, lecturer leaves activities and resources, i.e. educational content of related course. Appearance of this column can vary depending on preferences and intents by the lecturer who creates materials. Topic number and title (chapter title) can be seen on the top, as explained in Picture 5. In this particular case, it is educational unit Numeral systems and conversion.

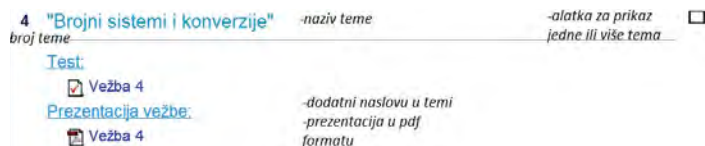


Fig. 5. Sections within topic and tools

Should someone like to see the content of one topic on a page in any moment, a click on little square on the right side is required . After clicking, the view of the same topic remains almost identical but all other topics are invisible. In order to make the topics visible again, a click on the double square in the upper right corner of the topic is required. In case someone would like to see all topics again, clicking on

the double square which will appear on that spot is required. This enables simpler approach to specific topic in cases when the course has many topics, Picture 6.



Fig. 6. Topic overview on the page

### Function blocks

Blocks are parts of text on the screen limited by square frame. They are located on the left or right side of thematic part of page and have different functions, but they will not be further explained in this paper.

Additional useful options that may provide service to both users, students and also creators of this course i.e. lecturers and assistants are available [6,7, 8].

### Working with tests

Moodle system also enables testing of course attendees' knowledge by means of online testing. At Basics of information technology and computer science course, students check their knowledge related to laboratory exercises prior to each exercise. Taking the test is conducted by clicking on the test's title within certain topic, after which a web page opens, as shown on Picture 7. Information concerning the test will appear on the first page during opening of the test.

- Number of attempts
- Time limitation
- Grading method (first attempt, last attempt, average grade and highest grade)
- Duration of the test
- General characteristics of the test and related information (purpose)



Fig. 7. First page of the test



Student starts the test by clicking on **Start test** button and before he receives questions Moodle systems informs him on the allowed number of attempts for solving the test, time limitations (if any) and any other information, Picture 20. Starting from the moment the testing is commenced, a clock counting down the time to test closure is activated. When time expires the test shuts down and submits itself. When student marks the answers he believes are correct, in order to complete the test and receive return information from the system, clicking on the button "Submit all answers and complete the test" as shown on Picture 8 is required. Besides this option there is also an option to save without submitting, which memorizes all answers from the test but does not stop the clock.

**Predaj sve odgovore i završi test**

**Pic. 8.** Button for submitting test answers

When a student completes the test, a web page with return information regarding the scores on the test will appear, as well as a possibility to see where mistakes were made, information on the remaining number of attempts and scores from previous attempts.

## CONCLUSION

Distance learning is projected to have the content follow the educational program of related subject courses, but using hyperlinks also provided opportunity for in-depth researches in particular areas, which suits individual interests of students and all others who would use these didactic materials for formal or informal education. It is necessary to establish permanent evaluation of distance education and its enhancement in accordance with changes that occur in the developed parts of the world, as well as on the basis of experiences and opinions of lecturers and students in practice. Public approach to web content stresses the need for protection of privacy of students' information, so a special database related to students with password protection and availability to authorized personnel only would be of necessity. Database containing results of students' progress must be protected and archived on CD-s, not only for protection of privacy but also for preventing eventual misuse by the side of students. Nevertheless, in this early phase, assessing the students' knowledge by means of distance education would only serve as additional information to lecturers, not as the only one, and surely, during its use, another organization adjusted to social environment we live in will be imposed. However positive experiences from this course may successfully be implemented onto other high education facilities.

## ACKNOWLEDGEMENT

The work presented here was supported by the Serbian Ministry of Education and Science (project III44006&TP35030).

## LITERATURE

- [1] Danimir Mandić, *Obrazovanje na daljinu*, Učiteljski fakultet, Beograd, 2009.
- [2] Йорданов, Й.С., Л.И.Цеков, М.М.Йорданова, "WWW - базирана обучаваща система за дистанционно обучение", Международна научна конференция "УНИТЕХ'03", ТУ-Габрово, 20-21.11.03г., сборник доклади, том I, стр. I351-I354, ISBN 954-683-167-0.
- [3] Hranislav Milošević, *Tehničke osnove informatike*, Kraljevo, 2010.
- [4] Vera V. Petrović, S. Obradović, M. Mijalković, *Osnovi informatike i računarstava*, VISER, Beograd, 2009.
- [5] Vera V. Petrović, *Priručnik Osnovi informatike i računarstva*, VISER, Beograd, 2009.
- [6] V. V. Petrović, A. Pekić, E. Ivić, *Daljinsko obrazovanje primenom softvera Moodle*, YUINFO 2010, Kopaonik
- [7] V. V. Petrović, *Primena daljinskog obrazovanja u Visokoj školi elektrotehnike i računarstva*, INFOTEH 2010, Jahorina, 2010.
- [8] H. Milošević, V. V. Petrović, *Basis of informatics through distance learning*, INFOTEH 2010, Jahorina, 2010.

## РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПРОТЕКАНИЯ В КАНАЛАХ ПРИ ЗАДАННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ

---

*A series of stationary and non stationary problems of a viscous incompressible fluid flow in a channel caused by a given pressure differential is studied in the paper. The technology of solving such problems which allow to get a stable solution is offered.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

На практике часто встречаются задачи протекания в каналах, где источником движения является не заданное поле скоростей на входе и выходе из канала, а известный перепад давлений (см. [1]). Это, например, задачи о движении воздуха в системах вентиляции в зданиях, подземных сооружениях и т.п. В силу малости скоростей движения среды и фактической её несжимаемости, подобные течения можно моделировать движением вязкой однородной несжимаемой жидкости. Детальный анализ таких течений важен, например, при оценке загазованности отдельных участков угольных шахт.

Одной из основных математических моделей, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости, являются уравнения Навье-Стокса [2]. Если область течения полностью ограничена непроницаемой границей, то обычно не возникает проблем с заданием граничных условий для несжимаемых уравнений Навье-Стокса. Однако когда присутствуют границы, через которые жидкость втекает (или вытекает) в область, нет общепринятого соглашения, какой вид граничных условий предпочтителен с математической и физической точки зрения на этих границах. Наиболее часто используются так называемые классические краевые условия, когда на границах протекания задаются значения скорости (см. [3]). Однако в последнее время при постановке краевых задач для уравнений гидродинамики стали, исходя из запросов практики, использоваться и другие краевые условия (проскальзывания, односторонние, условия на давление или полный напор и т.д.), получившие название неклассических или нестандартных краевых условий. Исследованию классической задачи Дирихле для систем Навье-Стокса посвящены десятки тысяч работ. Существенно меньше работ посвящено исследованию уравнений гидродинамики при нестандартных краевых условиях (см. обзор в [4]).

Постановка краевой задачи о течении в каналах, вызванном заданным перепадом давления, имеет ряд особенностей, которые затрудняют построение эффективных численных алгоритмов их решения. Таким образом, целью настоящей работы является построение метода решения стационарных и нестационарных задач о движении в канале однородной вязкой несжимаемой жидкости при задании давления на входе и выходе канала.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную задачу протекания вязкой однородной несжимаемой жидкости, которая описывается системой уравнений Навье-Стокса [5]

$$\begin{aligned}(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla p - \nu \Delta \bar{u} &= 0, \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

---

1 Университет в Приштине, Косовска Митровица, Сербия

2 ИВТ СО РАН, Новосибирск, Россия

3 Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия

$$p|_{\Gamma_1} = p_1(\bar{x}), \quad p|_{\Gamma_2} = p_2(\bar{x}), \quad (2)$$

$$\bar{u}|_{\Gamma_3} = 0, \quad (3)$$

$$(\bar{u}, \bar{\tau}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad (4)$$

где  $\bar{x} = (x, y)$  - точка области течения  $\Omega$ ,  $\bar{u} = (u, v)$  - вектор скорости,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ,  $p = p(x, y)$  - давление,  $\nu > 0$  - коэффициент кинематической вязкости,  $p_1(x, y)$ ,  $p_2(x, y)$  - заданные функции,  $\bar{\tau}$  - вектор единичной касательной к границе;  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  - граница области  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  - вход и выход соответственно,  $\Gamma_3$  - твердые стенки. Равенство (4) означает, что вектор скорости  $\bar{u}$  перпендикулярен границам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . На рис. 1 показана возможная область решения  $\Omega$ . Здесь  $\Gamma_1 = AB$ ,  $\Gamma_2 = CD$ ,  $\Gamma_3 = AD \cup BC$ .

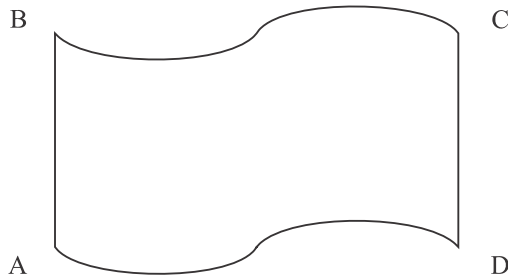


Рис. 1. Область течения

Для численного решения краевой задачи (1)-(4) можно использовать метод установления, когда решение стационарной задачи ищется как предельное решение соответствующей нестационарной задачи, или же каким-либо способом (метод конечных элементов, метод сеток и т.п.) аппроксимировать исходную задачу и получить систему нелинейных алгебраических уравнений, которую можно решать подходящим итерационным методом. Каждый из этих способов имеет свои достоинства и недостатки.

Как видно из постановки задачи (1)-(4), на границах протекания заданы функция давления и касательная составляющая вектора скорости, а на твердых стенках - только компоненты вектора скорости. Тем самым, для обоих методов численного решения задачи (1)-(4) возникает проблема задания условия на нормальную компоненту вектора скорости на участках втекания-вытекания. Однако, как показано в [5], для нестационарной задачи условия (2) - (4) и заданное начальное условие единственным образом определяет решения для  $t > 0$  и тем самым нормальную составляющую вектора скорости на входе-выходе задавать нельзя, если она не является следствием (4). А для стационарной задачи показана только её разрешимость (см. [1]).

Обычно численно решаются задачи протекания в каналах с параллельными осям координат прямыми границами и прямыми углами (см. [6,7]). В этом случае на входе и выходе задаются «естественные» краевые условия на скорости вида  $v = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  ( $u = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ), которые позволяют построить алгоритмически замкнутый численный метод решения. Отметим, что условие на производную для одной из компонент вектора решения является прямым следствием условия  $v = 0$  ( $u = 0$ ). Однако такое «простое» определение скоростей на границе не всегда возможно, например, в случае, когда границы области течения не параллельны осям координат. Дело в том, что краевые условия на вторую компоненту являются, вообще говоря, «лишними», и, для того чтобы краевая задача с ними имела решение, необходимо, чтобы они были естественным образом согласованы с решением задачи, сформулированной без таких дополнительных условий.

Рассмотрим далее решение стационарной и нестационарной задачи протекания более подробно.

### СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

Для численного решения стационарной системы уравнений (1) с краевыми условиями (2)-(4) построим в области  $\Omega$  разнесённую прямоугольную и в общем случае неравномерную сетку  $\Omega_h$ , согласованную с границей  $\Gamma$ . На  $\Omega_h$  методом контрольного объёма аппроксимируем (1) разностной схемой 2 - го порядка.

Вместе с аппроксимацией краевых условий (2)-(4) мы получим разностную задачу относительно вектора  $\bar{u} = (u_{ij}, v_{ij}, p_{ij})$ ,  $(i, j) \in J_1$ . Введем также множество индексов  $J_2$ , которые соответствуют тем граничным узлам, где нет краевых условий на компоненты  $u_{ij}$  и  $p_{ij}$  вектора решения.

Количество уравнений полученной системы меньше количества неизвестных в силу того, что, во-первых, отсутствуют условия на горизонтальную компоненту вектора скорости на границах протекания (на вертикальную компоненту скорости поставлено условие (4), означающее  $v = 0$  на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ), во-вторых, нет условий на давление на границе  $\Gamma_3$ .

Компоненты  $u_{ij}$  на множестве узлов  $J_2$  мы будем определять из первого уравнения системы (1), считая его выполненным, путем аппроксимации его внутрь области решения, заменяя производные односторонними разностями первого или второго порядка аппроксимации. Недостающие уравнения мы получаем аппроксимируя на границах внутрь области уравнения неразрывности. В итоге эти аппроксимации будут замыкать разностную задачу, и в этом случае количество уравнений системы будет равно числу неизвестных.

Т.о. такую разностную задачу можно записать в виде системы билинейных уравнений размерности  $m$

$$A(u)u = f \tag{5}$$

где

$$A(s)t = A_1(s)t + A_2t, \quad \forall s, t \in R^m,$$

$A_1(u)$  - матрица, полученная в результате аппроксимации нелинейной части исходной дифференциальной задачи,  $A_2$  - числовая матрица, аппроксимирующая линейную часть этой системы,  $f$  - известная правая часть, получаемая из краевых условий. Очевидно, элементы матрицы  $A_1$  линейно зависят от компонент вектора  $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ .

Полученная система (5) решалась методом (6) неполной аппроксимации минимальных невязок [8]

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \tau_{n+1}[A(u^n)u^n - f], \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} + \alpha_{n+1}z^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $z^n = (z_1, \dots, z_m)^T$  - некоторый ненулевой вектор,  $u^0$  - произвольное начальное приближение из области определения оператора  $A$ ,  $\tau_{n+1}$  - либо числовой итерационный параметр, либо квадратная диагональная матрица,  $\alpha_{n+1}$  - диагональная матрица итерационных параметров. В [9] показано, что если элементы матрицы  $\alpha_{n+1}$  выбирать из условия минимума последовательности невязок, то норма невязки  $\|r^n\| = \|A(u^n)u^n - f\|$  монотонно убывает и при некоторых ограничениях на оператор  $A(u)$  стремится к нулю. Это обстоятельство позволяет находить хотя бы одно из решений разностной задачи. Подробнее о методе и способах выбора  $\alpha_{n+1}$  см. [9].

Для тестирования предлагаемой технологии мы численно решили задачи о течениях в простых каналах с прямыми стенками, параллельными осям координат (рис. 2). В прямоугольном канале было получено течение Пуазейля (норма отличие приближенного решения от точного составляет  $10^{-6}$ ). Для каналов с траншеей, со ступенькой, Т-образного канала в двух- и трехмерных случа-

ях были получены решения, близкие к результатам других авторов: относительная норма разности полученного нами решения и решений других авторов составляла не более  $10^{-5}$  (см. рис. 2 и [9, 10, 11, 12]).

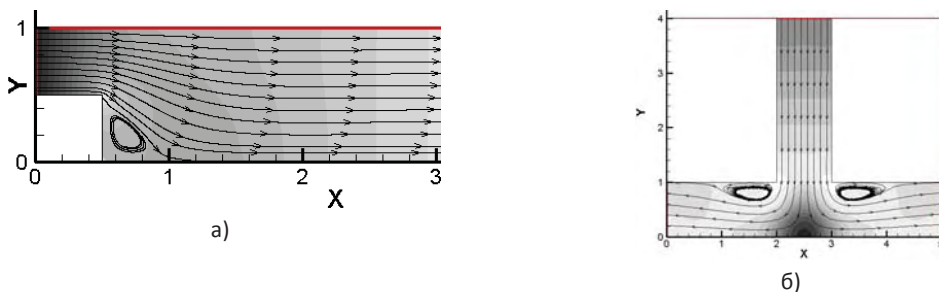


Рис. 2. Течения в простых каналах: а) Канал со ступенькой; б) Т-образный канал

Для проверки эффективности предлагаемого замыкания системы на входе-выходе канала были проведены расчеты в разветвляющемся канале (рис. 3). В этом случае постановка условий на вектор скорости затруднена, так как заранее неизвестно, через какие участки границы жидкость будет втекать внутрь канала, а через какие - вытекать из него. На границах протекания  $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6$  задано давление равное 0.1, на  $\Gamma_1$  - давление  $P = 0$ , на границе  $\Gamma_4$  - давление варьируется. При этом получены картины течения, когда жидкость втекает в канал или вытекает из канала через  $\Gamma_4$ . На рис. 3 показано решение, где вблизи границы  $\Gamma_4$  возникает вихрь, запирающий течение, при этом вектор скорости направлен как внутрь, так и вовне канала на разных частях  $\Gamma_4$ . Таким образом, предлагаемая процедура замыкания разностной задачи позволяет получить решения данной задачи, для которых выполнены закон сохранения массы и уравнение неразрывности.

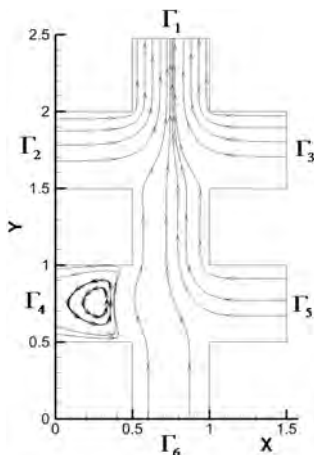


Рис. 3. Течение в разветвляющемся канале

### НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Т.к. для стационарной системы Навье-Стокса, описывающей течение вязкой жидкости в канале под действием перепада давления, нет теоремы о единственности решения, при численном решении может быть получено несколько решений. И тогда не ясно, какое из них реализуется физически. В этом пункте мы построим алгоритм решения поставленной задачи, позволяющий получить ответ на поставленный вопрос.

Для исключения решений системы билинейных алгебраических уравнений, не соответствующих решениям исходной дифференциальной задачи, находим решения разностной задачи на

наборе сеток с все более мелким шагом: 0.05, 0.01, 0.001 и т.д. Процесс останавливается, когда решения на ближайших сетках отличаются на величину порядка аппроксимации отвечающего минимальному шагу сетки  $h$ .

Далее проверяем, соответствует ли полученное решение более изученной краевой задаче «в скоростях» (задача Навье-Стокса, где на участках протекания границы задано известное поле скоростей), для которой известно достаточное число теорем о существовании и единственности решения (см., например, [13]). Для этого на входе и выходе из канала задаем поле скоростей, полученное в результате решения исходной разностной задачи, как краевое условие для задачи «в скоростях». Если решения исходной задачи и задачи «в скоростях» совпадают с точностью до погрешности аппроксимации, то полученное решение соответствует решению дифференциальной краевой задачи (1)-(4).

Для выбора «правильного» (устойчивого) решения мы решали задачу с незначительными возмущениями краевых условий, «отсеивая», таким образом, неустойчивые решения.

Приведём пример задачи, имеющей более одного решения. Рассмотрим дифференциальную задачу (1)-(4) в прямоугольной области размерами  $2 \times 1$ . Графики функций давления  $p_1(y)$  (давление на левой, входной границе) и  $p_2(y)$  (давление на правой, выходной границе) имеют вид, показанный на рис. 4. Отметим, что  $\min p_1(y) > \max p_2(y)$ .

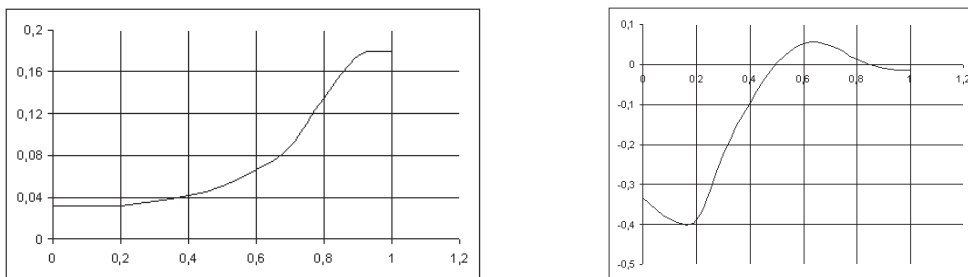
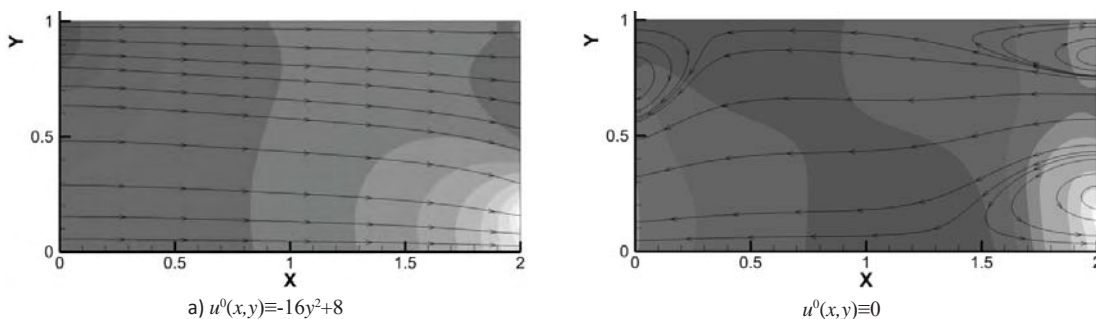


Рис. 4. Вид функций давления: а) значения  $p_1(y)$ ; б) значения  $p_2(y)$

На рис. 5а, б показаны два решения поставленной задачи, полученные нами при разных начальных приближениях к итерационному методу (б) ( $u^0(x, y) \equiv -16y^2 + 8$  для рис. 5а,  $u^0(x, y) \equiv 0$  для рис. 5б). Отметим, что полученные картины течения отличаются качественно: линии тока направлены в разные стороны так, что течение на рис. 5а направлено слева направо, а на рис. 5б - справа налево.

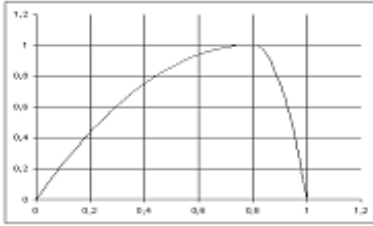


а)  $u^0(x, y) \equiv -16y^2 + 8$

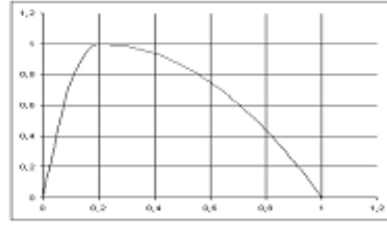
$u^0(x, y) \equiv 0$

Рис. 5. Два решения в прямоугольном канале. Краевые условия - рис. 4,  $\nu=0.01$

Далее была решена краевая задача «в скоростях», где в качестве краевого условия было задано рассчитанное поле скоростей. При этом касательная составляющая вектора скорости равна 0, а графики нормальной составляющей приведены на рис. 6 (для решения, приведённого на рис. 5а) и рис 7 (для решения, приведённого на рис. 5б). Параметры задачи и метода (вязкость, размеры канала, разностная сетка и проч.) не изменились.

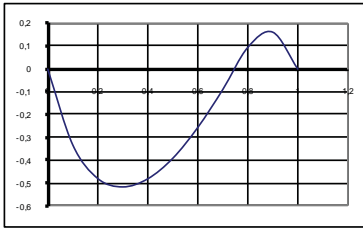


(а) На левой границе

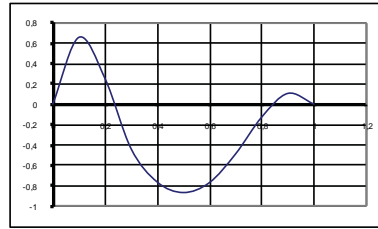


(б) На правой границе

Рис. 6. Нормальная составляющая вектора скорости для решения на рис. 5а



(а) На левой границе



(б) На правой границе

Рис. 7. Нормальная составляющая вектора скорости для решения на рис. 5б

Как показали расчеты, разность решений исходной краевой задачи и задачи «в скоростях» не превосходила  $10^{-6}$  в евклидовой норме и  $10^{-7}$  в норме, равной максимуму модуля компоненты вектора.

Для выявления устойчивого решения нами была поставлена задача, где было возмущено давление на входе-выходе канала. При увеличении значения функции давления на левой границе на 10% от первоначального значения, показанного на рис 4, при различных начальных приближениях получались решения, относительная норма погрешности которых относительно решения, приведённого на рис. 5а, составляла не более 0.1, при этом второго решения не обнаруживалось. Отсюда можно сделать вывод, что второе решение 5б является неустойчивым.

Вообще-то говоря, такая ситуация не является чем-либо особенным и для задач в «скоростях». Так, например, для задачи описывающей течение между коаксиальными цилиндрами известно решение - течение Куэтта, которое является единственным и устойчивым лишь при малых значениях числа Рейнольдса. При возрастании же числа Рейнольдса возникает новое устойчивое решение задачи, т.н. вихри Тейлора (см. [14]).

Таким образом, приведённый в этом пункте алгоритм позволяет находить устойчивые решения стационарной задачи протекания при заданном перепаде давления.

## РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим в области  $\Omega$  нестационарную двумерную задачу о протекании вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале с заданным перепадом давления на входе и выходе (см. рис.1)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla p - \nu \Delta \bar{u} = 0,$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0, \tag{7}$$

$$\bar{u}|_{t=0} = u_0(\bar{x})$$

$$p|_{\Gamma_1} = p_1(\bar{x}), \quad p|_{\Gamma_2} = p_2(\bar{x}), \quad \bar{u}|_{\Gamma_3} = 0, \tag{8}$$

$$(\bar{u}, \bar{\tau}) = 0 \text{ на границах } \Gamma_1, \Gamma_2, \tag{9}$$

В этом пункте будет рассмотрен метод решения нестационарной задачи, который может использоваться для получения стационарного решения задачи (7) - (9). Следует отметить, что нам не удалось обнаружить теорем говорящих о сходимости решения нестационарной системы уравнений с краевыми условиями, не зависящими от времени к стационарному решению.

Для численного решения нестационарной системы уравнений (7) с краевыми условиями (8), (9) построим в области  $\Omega$  разнесенную прямоугольную и в общем случае неравномерную сетку  $\Omega_h$ , согласованную с границей [15]. Введем также равномерное разбиение по времени с шагом  $\tau$ . Будем решать задачу (7)-(9) с помощью трехэтапной схемы расщепления [16]:

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\tau} = -(\tilde{u}\nabla)\tilde{u} - \nu\nabla \times \tilde{\omega}; \quad (10)$$

$$-\Delta p = -\frac{\tilde{D}}{\tau}; \quad (11)$$

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\tau} = -\nabla p, \quad (12)$$

где  $\omega = \nabla \times u$   $D = \nabla u$ ,  $\tilde{D} = \nabla \tilde{u}$ .

На первом этапе методом дробных шагов с использованием продольно-поперечной прогонки решается уравнение движения, из которого «убран» градиент давления. На втором - уравнение Пуассона для давления (11). И на третьем этапе, используя решения (10)-(12), осуществляется поправка скорости (12).

На  $\Omega_h$  методом контрольного объема аппроксимируем уравнение (10) разностной схемой 2-го порядка по пространству. Для решения схемой ППП необходимо задать скорость на входах и выходах. Поэтому для замыкания системы и реализации схемы продольно-поперечной прогонки аппроксимируем уравнение (10) на границах протекания  $\Gamma_1, \Gamma_2$  внутрь области решения, заменяя производные односторонними разностями первого порядка аппроксимации. В итоге матрица коэффициентов системы для прогонки в перпендикулярном границе  $\Gamma$  направлении будет иметь следующую структуру

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & a_{43} & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & a_{N-3,N-2} & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & a_{N-2,N-3} & a_{N-2,N-2} & a_{N-2,N-1} & 0 \\ & & & & & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & a_{NN-2} & a_{NN-1} & a_{NN} \end{pmatrix}$$

В первой и последней строке матрицы есть по одному «лишнему» ненулевому элементу. Исключая их с помощью элементарных преобразований, мы получим систему с трехдиагональной матрицей, которая решается обычной прогонкой.

Чтобы задать краевое условие на давление на твердых стенках, выразим из уравнений движения производную по нормали  $\frac{\partial p}{\partial n}$ . Т.о., для уравнения Пуассона (11) будет получена смешанная краевая задача. Поскольку краевую задачу уравнение Пуассона приходится решать на каждом шаге по времени, то выгодно было бы использовать какой-либо неградиентный метод, например, чебышевский (см. [17]). Но матрица системы в этой задаче является несамосопряженной и границы



ее спектра неизвестны. Поэтому для решения была использована многошаговая итерационная схема, которая в случае самосопряженной матрицы является чебышевской (см. [18]), но также может быть использована и когда матрица системы линейных алгебраических уравнений является несамосопряженной. Эта итерационная схема требует для своего построения только значение, даже приближённое, нормы матрицы перехода какой-либо сходящейся итерационной схемы. Таким образом, необходимо, определив некоторым образом требующиеся для построения многошаговой схемы константы, задающие набор итерационных параметров, делающих эту схему чебышевской в самосопряжённом случае, и использовать её для численного решения уравнения Пуассона на каждом временном слое.

Для проверки работоспособности предлагаемого метода решения нестационарного уравнения Навье-Стокса была рассмотрена задача о течении в разветвляющемся канале (рис. 3), соответствующая уже рассмотренной ранее стационарной задаче (см. рис.3).

Была проведена серия расчетов на сетке с количеством узлов до 150x250. На границах задавалось стационарное давление  $p_1 = 0.1$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_4 = 0.1$ ,  $p_5 = 0.1$ ,  $p_6 = 0.1$ . На рис. 8 показаны картины течений в различных моменты времени при  $p_3 = 0.0953$ .

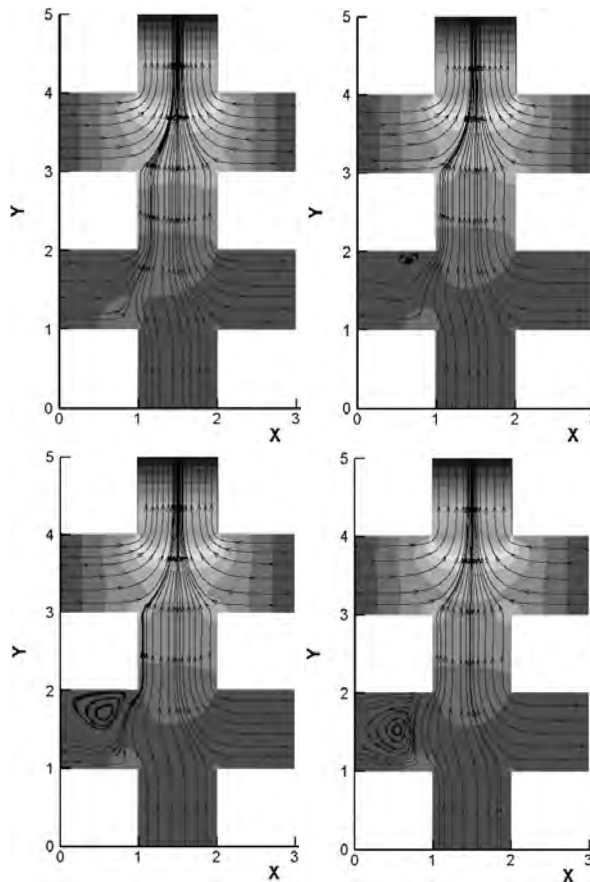


Рис. 8. Течение в канале,  $p_3=0.0953$ , моменты времени  $t = 7.98; 12; 15.96; 19.68$  соответственно

Как видно из рис. (8), с течением времени в нижнем ответвлении возникает вихрь, который увеличивается в размере. При выходе на стационарное течение он занимает всю ширину прохода, запирая его. И входной границе этого ответвления некоторые линии тока направлены внутрь канала, некоторые - наружу. Полученное решение полностью - количественно и качественно - совпадает с решением стационарной задачи, приведённой на рис. 3 (отличие от стационарного

решения не превышает 1%).

Следует отметить, что при решении нестационарной задачи в наших расчётах второго стационарного решения получить не удалось. Но при этом, решение стационарной задачи (1) - (4) удалось получать для больших чисел Рейнольдса, чем при решении нестационарной задачи.

Таким образом, построенные методы позволяют решать стационарные и нестационарные задачи описывающие течение вязкой однородной несжимаемой жидкости в каналах, когда на его входах-выходах заданы давления, а не скорости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Conca C., Murat F., Pironneau O. The Stokes and Navier-Stokes equations with boundary conditions involving the pressure, Japan. J. Math. 1994. V. 20. P 279-318
- [2] Бэчелор Дж. Введение в динамику жидкости М: Мир. - 1973.
- [3] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970. 288 С.
- [4] Алексеев Г.В. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости, Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко, Владивосток: Дальнаука, 2008. - 364 с.
- [5] Рагулин В.В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора, Динамика сплошной среды: Сб. научн. тр., Новосибирск. 1976. Вып 27. С. 78-92.
- [6] Кузнецов Б.Г., Мошкин Н.П., Смагулов Ш. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах при заданных перепадах давлений, Численные методы динамики вязкой жидкости: Сб. ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск. 1983. С. 203-207.
- [7] Дорфман, А. Л. Численное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в разветвляющемся канале при задании перепадов давления между ответвлениями, А. Л. Дорфман, В сб.: Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1979. - Т. 10. - № 7. - С. 47-53.
- [8] Метод минимальных невязок решения одного класса нелинейных уравнений, Ю. Н. Захаров, Е. Ф. Егорова, М. А. Толстых, Ю. И. Шокин, Препринт. - Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1991. - № 9. - С. 32.
- [9] Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики, Ю. Н. Захаров. - Новосибирск: Наука, 2004. - 239 с.
- [10] Moshkin N., Yambangwi D. Steady viscous incompressible flow driven by a pressure difference in a planar T-junction channel., Intern. J. of Comput. Fluid Dyn. - 2009. - Vol. 23. - N 3. - P 259-270.
- [11] Experimental and Theoretical Investigation of BackWard-Facing Step Flow, B. Armaly, F. Durst, J. Periera, B. Schonung,/ J. Fluid Mech. - 1983. - Vol. 127. - P 473.
- [12] Гейдаров Н. А. Об одной краевой задаче для системы уравнений Навье-Стокса, Н. А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров, Совместный выпуск по материалам Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» 10-14 сентября 2008 г. «Вычислительные технологии», «Вестник КазНУ им. Аль-Фараби». Серия: математика, механика, информатика - Т. 13. - №3(58). - Часть II. - 2008. - С.147-151.
- [13] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 С.
- [14] Юдович В.И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. - ПММ. - 1966. - 688-698.
- [15] Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости, С. Патанкар. - Москва: Энергоатомиздат, 1984. - 124с.
- [16] Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред, О.М. Белоцерковский. - Москва: Наука, 1984. - 520с.
- [17] Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений, А. А. Самарский, Е.С. Николаев. - М.: Наука, 1978. - 592 с.
- [18] Захаров Ю.Н. Об одном способе построения циклических итерационных схем., Численные методы механики сплошной среды. - т.10. - №4. - 1979. - с.85-100.

## EQUIVALENCE OF INTRINSIC SHAPE AND SHAPE

In the recent paper by Shekutkovski [2], a new definition of intrinsic shape is presented and based on this, for the first time is presented intrinsic strong shape. The main application is the study of properties of various limit sets in dynamical systems.

In this paper we present a proof that intrinsic shape is equivalent with the original Borsuk's shape.

### INTRODUCTION

Let  $X$  and  $Y$  be compact metric spaces. We repeat the intrinsic approaches to shape. According to [1], we have:

**Definition 1.** A function  $f : X \rightarrow Y$  is  $\mathcal{V}$ -**continuous**, where  $\mathcal{V}$  is finite covering of  $Y$ , if for every point  $x \in X$  there exists a neighborhood  $U_x$  of  $x$ , and  $V \in \mathcal{V}$ , such that  $f(U_x) \subseteq V$ .

**Definition 2.** The functions  $f, g : X \rightarrow Y$  are  $\mathcal{V}$ -**homotopic**, if there exists a continuous function  $F : X \times I \rightarrow Y$  such that for every  $x \in X$ ,  $F(x,0) = f(x)$  and  $F(x,1) = g(x)$ ,  $F$  is  $st(\mathcal{V})$ -continuous and  $F|_{N \times X}$  is  $\mathcal{V}$ -continuous for some neighbourhood  $N = [0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]$  of  $\partial I$ .

**Definition 3.** A **cofinal sequence of finite covering**  $\mathcal{V}_1 \succ \mathcal{V}_2 \succ \dots \mathcal{V}_n \succ \dots$  is a sequence of finite covering of spaces, such that for any covering  $\mathcal{V}$ , there exists  $n$ , such that  $\mathcal{V}_n \prec \mathcal{V}$ .

**Definition 4.** The sequence  $(f_n)$  of functions  $f_n : X \rightarrow Y$  is a **proximate sequence** from  $X$  to  $Y$ , if there exists a cofinal sequence of finite coverings of  $Y$ ,  $\mathcal{V}_1 \succ \mathcal{V}_2 \succ \dots \mathcal{V}_n \succ \dots$ , and for all indexes  $m \geq n$ ,  $f_n$  and  $f_m$  are  $\mathcal{V}_n$ -homotopic.

**Definition 5.** Two proximate sequences  $(f_n)$  and  $(f'_n)$  are **homotopic** if there exists a cofinal sequence of finite coverings of  $Y$ ,  $\mathcal{V}_1 \succ \mathcal{V}_2 \succ \dots \mathcal{V}_n \succ \dots$ , such that  $(f_n)$  and  $(f'_n)$  are  $\mathcal{V}_n$ -homotopic for all integers  $n$ .

Let  $(f_n) : X \rightarrow Y$  be a proximate sequence over  $(\mathcal{V}_n)$  and  $(g_k) : Y \rightarrow Z$  be a proximate sequence over  $(\mathcal{W}_k)$ . For a covering  $\mathcal{W}_k$  of  $Z$ , there exists a covering  $\mathcal{V}_{n_k}$  of  $Y$  such that  $g(\mathcal{V}_{n_k}) \prec \mathcal{W}_k$ . Then, the **composition** is the proximate sequence  $(h_k) = (g_k f_{n_k}) : X \rightarrow Z$ . In [1] is proven that compact metric spaces and homotopy classes of proximate sequences  $[(f_n)]$  form the **shape category**.

Similar notion to notion of  $\mathcal{V}$ -continuity, is notion of  $\varepsilon$ -continuity. According to [4] we have

**Definition 6.** ([4]) A function  $f : X \rightarrow Y$  is  $\varepsilon$ -**continuous**, if for every  $x \in X$  there is a neighborhood of  $x$  whose image lies in the  $\varepsilon$ -neighbourhood of the image of  $x$ .

**Definition 7.** The functions  $f, g : X \rightarrow Y$  are  $\varepsilon$ -**homotopic**, if there exists a  $\varepsilon$ -continuous function  $F : X \times I \rightarrow Y$  such that for every  $x \in X$ ,  $F(x,0) = f(x)$  and  $F(x,1) = g(x)$ .

The relation of  $\varepsilon$ -homotopy is an equivalence relation on the set of  $\varepsilon$ -continuous functions.

**Definition 8.** A **proximate net**, from  $X$  to  $Y$ , is a sequence of (not necessarily continuous) functions  $f_n : X \rightarrow Y$  such that for every  $\varepsilon > 0$  there is an index  $n_0$  such that  $f_n$  is  $\varepsilon$ -homotopic to  $f_{n+1}$  for every  $n \geq n_0$ . We denote proximate nets with  $(f_n) : X \rightarrow Y$ , or just with  $(f_n)$ .

**Definition 9.** Two proximate nets  $(f_n)$  and  $(f'_n)$  are homotopic if for every  $\varepsilon > 0$ ,  $f_n$  is  $\varepsilon$ -homotopic to  $f'_n$  for almost every  $n$ .

<sup>1</sup> Department of mathematics, Faculty of Civil Engineering, Sts. Cyril and Methodius University, Skopje, Macedonia

<sup>2</sup> Institute of mathematics, Faculty of Natural science, Sts. Cyril and Methodius University, Skopje, Macedonia

We use symbol  $[ ]$  to denote homotopy classes.

**Definition 10.** A null sequence  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$  of positive numbers is sequence of positive numbers such that  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  when  $n \rightarrow \infty$ .

Let  $[(f_n)] : X \rightarrow Y$  and  $[(g_n)] : Y \rightarrow Z$  be classes of proximate nets, and  $(f_n) : X \rightarrow Y$  and  $(g_n) : Y \rightarrow Z$  be their representatives. We choose a null sequence of positive numbers  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$  such that  $g_n$  is  $\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}$  homotopic to  $g_{n_0}$  for every  $n \geq n_0$ , null sequence  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \delta_n \geq \dots$  such that  $d(g_n(y), g_n(y')) < \varepsilon_n$  for every  $\delta_n$ -close points  $y$  and  $y'$  in  $Y$ , and sequence of indices  $k_1 < k_2 < \dots k_n < \dots$  such that  $f_k$  is  $\frac{\delta_n}{2}$ -homotopic to  $f_{k_n}$  for every  $k \geq k_n$ . We define  $[(f_n)][(g_n)] = [(f_n g_{k_n})]$ . In [4] is proven that on this way, we get a category.

In [3] is proven that on every proximate net we can accompany proximate sequence which is consisting of the same functions. If two proximate nets are homotopic than also accompanied proximate sequences are homotopic. Other direction also holds.

According to [2] we have. Let  $X, Y$  and  $Z$ , are compact metric space, that lie in the Hilbert space  $Q \in AR$ .

**Definition 11. Approximative sequence from  $X$  to  $Y$**  is a sequence of continuous functions  $f_k : X \rightarrow Q$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , such that for every neighborhood  $V$  of  $Y$  in  $Q$ , there exist a index  $k_0$ , such that for every  $k \geq k_0$ ,  $f_k$  is  $\varepsilon$ -homotopic to  $f_{k+1}$  in  $V$ . We denote approximative sequence with  $(f_k : X \rightarrow Y)_Q$  or just with  $(f_k : X \rightarrow Y)$ .

**Definition 12.** Approximative sequences  $(f_k : X \rightarrow Y)$  и  $(f'_k : X \rightarrow Y)$  are **homotopic**, if for every neighborhood  $V$  of  $Y$ ,  $f_k$  is homotopic to  $f'_k$  in  $V$ , for almost every natural number  $k$ .

The relation of homotopy of approximative sequences is an equivalence relation. We use symbol  $[ ]$  to denote homotopy classes.

**Definition 13.** Sequence continuous functions  $f_k : Q \rightarrow Q$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , is **fundamental sequence from  $X$  to  $Y$** , if for every neighborhood  $V$  of  $Y$ , there exist neighborhood  $U$  of  $X$ , such that  $f_k|_U \approx f_{k+1}|_U$  in  $V$  for almost every  $k$ . Fundamental sequence is denoted with  $(f_k : X \rightarrow Y)_{Q,Q}$ .

For every approximative sequence  $(f_k : X \rightarrow Y)$ , because  $Q$  is absolute retract, there exist fundamental sequence  $(\hat{f}_k : X \rightarrow Y)_{Q,Q}$ , such that  $\hat{f}_k|_X = f_k$ .

For every approximative sequence  $(f_k : X \rightarrow Y)$  and for every fundamental sequence  $(g_k : Y \rightarrow Z)_{Q,Q}$ , continuous functions  $g_k f_k : X \rightarrow Z$ , define approximative sequence  $(g_k f_k : X \rightarrow Z)$ , which is called composition of the approximative sequences  $(g_k : Y \rightarrow Z)$  and  $(f_k : X \rightarrow Y)$ . If approximative sequences  $(f_k : X \rightarrow Y)$  and  $(f'_k : X \rightarrow Y)$  are homotopic, and fundamental sequences  $(g_k : Y \rightarrow Z)_{Q,Q}$  and  $(g'_k : Y \rightarrow Z)_{Q,Q}$  are homotopic, than the compositions  $(g_k f_k : X \rightarrow Z)$  and  $(g'_k f'_k : X \rightarrow Z)$  are homotopic. For the last claims it follows that for every approximative sequence class  $[(f_k : X \rightarrow Y)]$  and every fundamental class  $[(g_k : Y \rightarrow Z)_{Q,Q}]$  every compositions  $(g_k f_k : X \rightarrow Z)$  belong to same class, which is denoted with  $[(g_k : Y \rightarrow Z)_{Q,Q}][[(f_k : X \rightarrow Y)]]$ . In this way, if we take for objects the compact metric spaces, and for morphism the classes of approximative sequences, we get category, which is called shape,  $Sh$ .

## ISOMORPHISM OF InSh AND Sh

**Lemma 1 (Ho).** Let  $X$  be paracompact topological space. Than for every  $\varepsilon$  continuous function  $f : X \rightarrow Q$ , where  $Q$  is Hilbertov cube, there exist  $2\varepsilon$ -close continuous function.

**Proof.** The proof is given in paper of Ho cited in [4]. ■

**Definition 15.** The approximative sequence  $(f_k : X \rightarrow Y)$  is obtained from proximate nets  $(\alpha_n) : X \rightarrow Y$  with infinitesimal translation, if for every  $\varepsilon > 0$  there exist  $n_0 \in N$ , such that for every  $n \geq n_0$ ,  $d(f_n, \alpha_n) < \varepsilon$ .

**Theorem 1:** For every proximate sequence  $(\alpha_n) : X \rightarrow Y$  there exist approximative sequence  $(f_k : X \rightarrow Y)$  obtained from  $(\alpha_n)$  with infinitesimal translation. Also every two approximative sequences obtained from  $(\alpha_n)$  with infinitesimal translation are homotopic.

**Proof.** Let  $(\alpha_n) : X \rightarrow Y$  be proximate net accorporate to proximate sequence  $(\alpha_n) : X \rightarrow Y$ . Consider null sequence  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$  of positive numbers.

There exist  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ , such that every  $\varepsilon$ -close functions in  $B(Y, \varepsilon_1)$  are homotopic. There exist  $n_1 = n_1(\varepsilon_1)$ ,

such that for every  $n \geq n_1$ ,  $\alpha_n$  is  $\frac{\varepsilon}{4}$ -homotopic to  $\alpha_{n+1}$  with  $\frac{\varepsilon}{4}$ -homotopy  $H_{n,n+1}$ .  $H_{n,n+1}$  is  $\frac{\varepsilon}{4}$ -continu-

ous, it follows that there exist a continuous function  $H'_{n,n+1}$  which is  $\frac{\varepsilon}{2}$ -close to  $H_{n,n+1}$ . In the same time,

functions  $f_n^1(t) = H'_{n,n+1}(t, 0)$  and  $f_{n+1}^1(t) = H'_{n,n+1}(t, 1)$  are homotopic in  $B(Y, \varepsilon_1)$ . Every two functions  $f_n$  obtained in this way are  $\varepsilon$ -close in  $B(Y, \varepsilon_1)$ , so, they are homotopic in  $B(Y, \varepsilon_1)$ . Choose arbitrary continuous functions  $f_1, f_2, \dots, f_{n_1-1}$ .

There exist  $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ , such that every  $\varepsilon$ -close functions are homotopic in  $B(Y, \varepsilon_2)$ . There exist

$n_2 = n_2(\varepsilon_2) > n_1$ , such that for every  $n \geq n_2 > n_1$ ,  $\alpha_n$  is  $\frac{\varepsilon}{4}$ -homotopic to  $\alpha_{n+1}$  with homotopy  $H_{n,n+1}$ .

Choose continuous functions  $f_{n_1}^1, f_{n_1+1}^1, \dots, f_{n_2-1}^1$ .  $H_{n,n+1}$  is  $\frac{\varepsilon}{4}$ -continuous, it follows that there exist a con-

tinuous function  $H'_{n,n+1}$  which is  $\frac{\varepsilon}{2}$ -close to  $H_{n,n+1}$ . In the same time functions  $f_n^2(t) = H'_{n,n+1}(t, 0)$  and

$f_{n+1}^2(t) = H'_{n,n+1}(t, 1)$  are homotopic. Every two functions  $f_n$  obtained in this way are  $\varepsilon$ -close in  $B(Y, \varepsilon_2)$ , so, they are homotopic in  $B(Y, \varepsilon_2)$ .

In  $k$ -th step we have that there exist  $\varepsilon \leq \varepsilon_k$ , such that every  $\varepsilon$ -close functions are homotopic in

$B(Y, \varepsilon_k)$ . There exist  $n_k = n_k(\varepsilon_k)$ , such that for every  $n \geq n_k > n_{k-1}$ ,  $\alpha_n$  is  $\frac{\varepsilon}{4}$ -homotopic to  $\alpha_{n+1}$  with

homotopy  $H_{n,n+1}$ . Choose continuous functions  $f_{n_{k-1}}^{k-1}, f_{n_{k-1}+1}^{k-1}, \dots, f_{n_k-1}^{k-1}$ .  $H_{n,n+1}$  is  $\frac{\varepsilon}{4}$ -continuous, it follows

that there exist a continuous function  $H'_{n,n+1}$  which is  $\frac{\varepsilon}{2}$ -close to  $H_{n,n+1}$ . In the same time functions

$f_n^k(t) = H'_{n,n+1}(t, 0)$  and  $f_{n+1}^k(t) = H'_{n,n+1}(t, 1)$  are homotopic. Every two functions  $f_n$  obtained in this way are  $\varepsilon$ -close in  $B(Y, \varepsilon_k)$ , so they are homotopic in  $B(Y, \varepsilon_k)$ .

In this way we get a sequence  $(f_k : X \rightarrow Y)$ . Let  $V$  be neighborhood on  $Y$  in  $Q$ . Because  $Y$  is compact metric space, there exist open ball  $B(Y, \varepsilon_n) \subseteq V$ . It follows that sequence functions  $(f_k : X \rightarrow Y)$  is ap-

proximative sequence. ■

**Definition 15.** Let  $(\alpha_n): X \rightarrow Y$  is proximate sequence. Define function  $\omega$  such that  $\omega((\alpha_n)) = (f_k: X \rightarrow Y)$  is one approximative sequence obtained from  $\alpha$  with infinitesimal translation.  $\omega((\alpha_n))$  is called **approximative sequence obtained from the proximate sequence  $(\alpha_n)$  with infinitesimal translation**.

According to theorem 1, the class of homotopy of  $\omega((\alpha_n))$  do not depend of the function  $\omega$ .

For proximate nets  $(\alpha_n)$  и  $(\alpha'_n)$ , according to theorem 1, there exists approximative sequences  $(f_k: X \rightarrow Y)$  и  $(f'_k: X \rightarrow Y)$  obtained from  $(\alpha_n)$  and  $(\alpha'_n)$  with infinitesimal translations.

**Property 1.** Let proximate nets  $(\alpha_n)$  и  $(\alpha'_n)$  are homotopic, and approximative sequences  $(f_k: X \rightarrow Y)$  и  $(f'_k: X \rightarrow Y)$  are obtained from  $(\alpha_n)$  and  $(\alpha'_n)$  with infinitesimal translations.

Let  $V$  be a neighborhood of  $Y$  in  $Q$ . There exist  $\varepsilon > 0$  and  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that every two  $\varepsilon$ -close continuous functions in  $V$  are homotopic,  $B(Y, \varepsilon) \subseteq V$ ,  $f_k \approx f_{k_0}$  и  $f'_k \approx f'_{k_0}$  in  $V$  for every  $k \geq k_0$ ,

$d(f_{k_0}, \alpha_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$  and  $d(f'_{k_0}, \alpha'_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ , and there exist  $\frac{\varepsilon}{4}$  homotopy  $H$  which connecting  $\alpha_{k_0}$  and  $\alpha'_{k_0}$ .

**Proof.** Let  $V$  is neighborhood of  $Y$  in  $Q$ . Because  $Y$  is compact metric space, there exist  $\varepsilon_1 > 0$  such that  $B(Y, \varepsilon_1) \subseteq V$ . Also there exist  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  such that every two  $\varepsilon$  close continuous functions in  $V$  are homotopic.

For proximate nets  $(\alpha_n)$  и  $(\alpha'_n)$ , according to theorem 1, there exists approximative sequences  $(f_k: X \rightarrow Y)$  и  $(f'_k: X \rightarrow Y)$  obtained from  $(\alpha_n)$  and  $(\alpha'_n)$  with infinitesimal translations. It follows that there exist an index  $n_0$  such that for every  $n \geq n_0$ ,  $d(f_n, \alpha_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  and there exist index  $n'_0$  such that for every  $n \geq n'_0$   $d(f'_n, \alpha'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $(f_k: X \rightarrow Y)$  and  $(f'_k: X \rightarrow Y)$  are approximative sequences, it follows that there exist  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that for every  $k \geq k_0$  and  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f_{k+m} \approx f_k$  и  $f'_{k+m} \approx f'_k$ , where with symbol  $f \approx g$ , we denote that functions  $f$  and  $g$  are homotopic.

$(\alpha_n)$  is  $\varepsilon$  homotopic to  $(\alpha'_n)$ , it follows that there exist  $n''_0 \in \mathbb{N}$  such that for every  $n \geq n''_0$

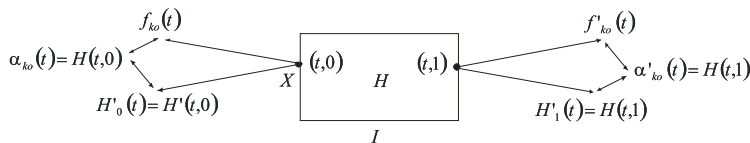
$\alpha_n$  is  $\frac{\varepsilon}{4}$  homotopic to  $\alpha'_n$  with  $\frac{\varepsilon}{4}$  homotopy  $H: X \times I \rightarrow Y$ .

Now for  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that  $k_0 \geq n_0, n'_0, n''_0$  conditions 1)-5) are fulfilled. ■

**Theorem 2.** The correspondence  $[(\alpha_n): X \rightarrow Y] \rightarrow [\omega((\alpha_n))]$  defines bijection  $\Omega_{X,Y}: InSh(X, Y) \rightarrow Sh(X, Y)$  from the classes of proximate sequences from  $X$  to  $Y$ , to the classes of approximative sequences from  $X$  to  $Y$ .

**Proof.** • First we will proof that  $\Omega_{X,Y}$  is well defined. Instead with proximate sequences we will work with proximate nets. Let  $[(\alpha_n)] = [(\alpha'_n)]$  where  $(\alpha_n)$  and  $(\alpha'_n)$  are proximate nets from  $X$  to  $Y$  and let  $\omega((\alpha_n)) = (f_k: X \rightarrow Y)$  and  $\omega((\alpha'_n)) = (f'_k: X \rightarrow Y)$

Let conditions from previous property holds. Let consider continios functions  $H': X \times I \rightarrow Q$  which is  $\frac{\varepsilon}{2}$ -close to  $H$ . That functions exist because  $H$  has  $2 \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$  continuous approximation.



Also hold  $H'(X \times I) \subseteq V$ , and

$$d(f_{k_0}, H'_0) < d(f_{k_0}, \alpha_{k_0}) + d(\alpha_{k_0}, H'_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad d(f'_{k_0}, H'_1) < d(f'_{k_0}, \alpha'_{k_0}) + d(\alpha'_{k_0}, H'_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

It follows that  $f_{k_0}$  is  $\varepsilon$ -close continuous function to  $H'_0$  and  $f'_{k_0}$  is  $\varepsilon$ -close continuous function to  $H'_1$ . Because every two  $\varepsilon$ -close continuous functions are homotopic, it holds  $f_{k_0} \approx H'_0$  and  $f'_{k_0} \approx H'_1$ . Because  $H'_0 \approx H'_1$ , we have  $f_{k_0} \approx f'_{k_0}$ . It follows  $[(f_k : X \rightarrow Y)] = [(f'_k : X \rightarrow Y)]$ .

• We will prove that  $\Omega_{X,Y}$  is injection. Let  $[(f_k : X \rightarrow Y)] = [(f'_k : X \rightarrow Y)]$  where  $\omega((\alpha_n)) = (f_k : X \rightarrow Y)$  and  $\omega((\alpha'_n)) = (f'_k : X \rightarrow Y)$ . Choose arbitrary  $\varepsilon > 0$  arbitrary neighborhood  $V \subseteq B\left(Y, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ .

$(f_k : X \rightarrow Y)$  и  $(f'_k : X \rightarrow Y)$  are homotopic approximative sequences, it follows that there exist  $k''_0$  such that for every  $k \geq k''_0$ ,  $f_k$  is homotopic to  $f'_k$  in  $V$  with homotopy

$$H_k : X \times I \rightarrow V$$

Approximative sequence  $(f_k : X \rightarrow Y)$  is obtained from proximate net  $(\alpha_n)$  with infinitesimal translations, it follows that there exist  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that for every  $k \geq k_0$ ,  $d(f_k, \alpha_k) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Analogously there exist  $k'_0 \in \mathbb{N}$  such that for every  $k \geq k'_0$ ,  $d(f'_k, \alpha'_k) < \frac{\varepsilon}{3}$ . For  $k \geq k_0, k'_0, k''_0$  it holds that  $f_k$  is homotopic to

$f'_k$  with homotopy  $H_k$ . Also  $d(f_k, \alpha_k) < \frac{\varepsilon}{3}$  and  $d(f'_k, \alpha'_k) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Define function  $G_k : X \times I \rightarrow Y$  such that

$$d(G_k, H_k) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad G_k(x,0) = \alpha_k(x) \text{ and } G_k(x,1) = \alpha'_k(x)$$

For example we can take for every  $x \in X$  and every  $t \in (0,1)$ ,  $G_k(x,0) = \alpha_k(x)$ ,  $G_k(x,1) = \alpha'_k(x)$  and  $G_k(x,t) = H_k(x,t)$  if  $H_k(x,t) \in Y$  or  $G_k(x,t)$  arbitrary point from  $Y$  which belongs to open ball  $B(H_k(x,t), \varepsilon)$ .  $G_k$  is  $\varepsilon$ -continuous and as a consequence we obtained that  $\alpha_k$  is  $\varepsilon$ -homotopic to  $\alpha'_k$  for every  $k \geq k_0$ .

• We will prove that  $\Omega_{X,Y}$  is surjection. Let  $[(f_k : X \rightarrow Y)] \in \mathfrak{B}(X, Y)$ . We consider null sequence  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \varepsilon_n \geq \dots$  from positive numbers. Define sequence functions  $\alpha_k : X \rightarrow Y$  such that

$$d(f_k, \alpha_k) < \varepsilon_n \text{ for every } k \geq k_n.$$

This functions there exist because  $B(Y, \varepsilon_n) = \bigcup_{y \in Y} B(y, \varepsilon_n)$ , so if  $f_k(x) \in B(Y, \varepsilon_n)$  it follows there exist  $y \in Y$  such that  $f_k(x) \in B(y, \varepsilon_n)$ . Than define  $\alpha_k(x) = y$

Now  $(\alpha_n) : X \rightarrow Y$  is proximate net and  $\omega((\alpha_n)) = [(f_k : X \rightarrow Y)]$  because  $\omega((\alpha_n))$  is approximative sequence obtained from proximate net  $(\alpha_n)$  and because every two approximate functions are homotopic (theorem 1). ■

We define functor  $\Omega : InSh \rightarrow SH$  from the category  $InSh$  to the category  $SH$  with

$$X \xrightarrow{\Omega} X$$

for every compact metric space  $X$  and

$$[(\alpha_n)] \xrightarrow{\Omega} \Omega_{X,Y}([( \alpha_n )])$$

for every class of proximate sequences  $(\alpha_n) : X \rightarrow Y$ , where  $\Omega_{X,Y} : InSh(X, Y) \rightarrow Sh(X, Y)$  is function from theorem 2.

Proximate sequence  $(i_n): X \rightarrow X$  where  $i_n \equiv id: X \rightarrow X$  for each  $n \in \mathbb{N}$  is represent of the class of identical element in the category  $InSh$ . Sequence inclusion  $i_n: X \rightarrow Q$  form approximative sequence  $(i_n: X \rightarrow Y)$  for every  $n \in \mathbb{N}$  which is approximative sequence obtained with infinitesimal translation from proximate sequence  $(i_n)$ . Also  $(i_n)$  is represent of the class of identical element in the category  $SH$ . So  $\Omega(1_X) = 1_{\Omega(X)}$ .

To prove that function  $\Omega$  is functor, we need only to prove that  $\Omega([( \beta_n )][(\alpha_n)]) = \Omega[(\beta_n)]\Omega[(\alpha_n)]$  for all classes of proximate sequences  $[(\alpha_n)]$  from  $X$  to  $Y$ , and  $[(\beta_n)]$  from  $Y$  to  $Z$ . According to theorem 1, function  $\Omega_{X,Y}$  e bijection, and therefore in that case we will get that  $\Omega$  is isomorphism of the categories.

The Hilbert cube  $Q$ , is absolyte retract for the class of compact metric spaces, because in  $Q$  can be placed any compact metric space. Let approximative sequence  $(g_k: Y \rightarrow Z)$  is approximative sequence obtained with infinitesimal translation from the proximate sequence  $(\beta_n): Y \rightarrow Z$ . Because  $g_k: Y \rightarrow Q$ ,  $k \in \mathbb{N}$  are continuous functions, there exist fundamental sequence  $(\hat{g}_k: Y \rightarrow Z)_{Q,Q}$  such that  $\hat{g}_k|_Y = g_k$  for every  $k \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 2.** Let  $(\alpha_n): X \rightarrow Y$  and  $(\beta_n): Y \rightarrow Z$  are proximate sequences. Than there exist a null sequence of positive numbers  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$  such that

$$1.1) d(g_n(y), \beta_n(y)) < \frac{\varepsilon_n}{2} \text{ for every } y \in Y.$$

$$1.2) \beta_n \text{ is } \frac{\varepsilon_{n_0}}{2} \text{ homotopic } \beta_{n_0} \text{ for every } n \geq n_0,$$

there exist a null sequence of positive numbers  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \delta_n \geq \dots$  such tha

$$2.1) d(\hat{g}_n(y), \hat{g}_n(y')) < \frac{\varepsilon_n}{2} \text{ for all } \delta_n\text{-close points } y \text{ and } y' \text{ in } Q.$$

$$2.2) d(\beta_n(y), \beta_n(y')) < \varepsilon_n \text{ for all } \delta_n\text{-close points } y \text{ and } y' \text{ in } Y.$$

and sequence in indexes  $k_1 < k_2 < \dots k_n < \dots$  such that

$$3) \alpha_k \text{ e } \frac{\delta_n}{2}\text{-homotopic to } \alpha_{k_n} \text{ for every } k \geq k_n.$$

**Proof.** For  $\varepsilon'_1 > 0$  there exist  $n'(\varepsilon'_1) \in \mathbb{N}$ , such that  $d(g_n(y), \beta_n(y)) < \frac{\varepsilon'_1}{2}$  for every  $n \geq n'(\varepsilon'_1)$  and  $y \in Y$

and there exist  $n''(\varepsilon'_1) \in \mathbb{N}$ , such that  $\beta_n$  is  $\frac{\varepsilon'_1}{2}$  homotopic to  $\beta_{n''(\varepsilon'_1)}$  for every  $n \geq n''(\varepsilon'_1)$ . We take

$n_0(\varepsilon'_1) = \max\{n'(\varepsilon'_1), n''(\varepsilon'_1)\}$ . For  $n \geq n_0(\varepsilon'_1)$  hold  $d(g_n(y), \beta_n(y)) < \frac{\varepsilon'_1}{2}$  and  $\beta_n$  is  $\frac{\varepsilon'_1}{2}$  homotopic to  $\beta_{n_0(\varepsilon'_1)}$ .

For  $\varepsilon'_2 > 0$  there exist  $n'(\varepsilon'_2) \in \mathbb{N}$ , such that  $d(g_n(y), \beta_n(y)) < \frac{\varepsilon'_2}{2}$  for every  $n \geq n'(\varepsilon'_2)$  and  $y \in Y$

and there exist  $n''(\varepsilon'_2) \in \mathbb{N}$ , such that  $\beta_n$  is  $\frac{\varepsilon'_2}{2}$  homotopic to  $\beta_{n''(\varepsilon'_2)}$  for every  $n \geq n''(\varepsilon'_2)$ . We take

$n_0(\varepsilon'_2) > n_0(\varepsilon'_1) \in \mathbb{N}$  such that  $n_0(\varepsilon'_2) \geq \max\{n'(\varepsilon'_2), n''(\varepsilon'_2)\}$ . For  $n_0(\varepsilon'_2) \geq n(\varepsilon'_2)$  hold  $d(g_n(y), \beta_n(y)) < \frac{\varepsilon'_2}{2}$

and  $\beta_n$  is  $\frac{\varepsilon'_2}{2}$  homotopic to  $\beta_{n_0(\varepsilon'_2)}$ .

The procedure is continuing for the others members of the null sequence. Define null sequence  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$  such that

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_{n_0(\varepsilon_1)-1} \geq \varepsilon_{n_0(\varepsilon_1)} = \varepsilon'_1, \varepsilon_{n_0(\varepsilon_1)+1} = \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_{n_0(\varepsilon_2)-1} = \varepsilon'_1, \varepsilon_{n_0(\varepsilon_2)} = \varepsilon'_2, \dots$$



$$\dots, \varepsilon_{n_0(\varepsilon_k)+1} = \varepsilon'_k, \dots, \varepsilon_{n_0(\varepsilon_{k+1})-1} = \varepsilon'_k, \varepsilon_{n_0(\varepsilon_{k+1})} = \varepsilon'_{k+1}, \dots$$

for which hold  $d(g_n(y), \beta_n(y)) < \frac{\varepsilon_n}{2}$  for every  $y \in Y$  and  $\beta_n$  is  $\frac{\varepsilon_{n_0}}{2}$  homotopic to  $\beta_{n_0}$  for every  $n \geq n_0$ .

For  $\varepsilon_n > 0$  there exist  $\delta'_n > 0$  such that  $d(\hat{g}_n(y), \hat{g}_n(y')) < \frac{\varepsilon_n}{2}$  for every  $\delta'_n$ -close points  $y$  and  $y'$  in  $Q$ , and there exist  $\delta''_n > 0$  such that  $d(\beta_n(y), \beta_n(y')) < \varepsilon_n$  for every  $\delta''_n$ -close points  $y$  and  $y'$  in  $Y$ . For  $\delta_n \leq \min\{\delta'_n, \delta''_n\}$  chosen such that  $\delta_{n-1} \geq \delta_n$  are satisfied equations by the second part of the property.

Third part of the property follows directly from definitions of  $\frac{\delta_n}{2}$  homotopy. ■

From Ho lemma, it follows that there exist sequence of continuous functions  $f_n : X \rightarrow Q$  such that  $d(f_n, \alpha_{k_n}) < \delta_n$  for every  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 3.**  $(f_n : X \rightarrow Y)$  is approximative sequence obtained from the proximate sequence  $(\alpha_{k_n}) : X \rightarrow Y$  with an infinitesimal translation.

**Proof.** Let  $V$  is neighborhood of  $Y$  in  $Q$ . Choose number  $\varepsilon_1 > 0$  such that  $B(Y, \varepsilon_1) \subseteq V$ . Choose number  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$  such that every two  $\varepsilon_2$ -close continuous functions in  $V$  are homotopic. Choose index  $n_0$  such that  $3\delta_{n_0} \leq \varepsilon_2$ . Let notice that for every  $n \geq n_0$  images of the continuous functions  $f_n$  are in  $V$ . Also for every  $n, m \geq n_0$  hold

$$d(f_n, f_m) \leq d(f_n, f_{k_n}) + d(f_{k_n}, f_{k_m}) + d(f_{k_m}, f_m) < \frac{\delta_n}{2} + \delta_{n_0} + \delta_{n_0} + \frac{\delta_m}{2} \leq 3\delta_{n_0}$$

It follows that  $f_n$  and  $f_m$  are  $\varepsilon_2$ -close continuous function in  $V$ , so they are homotopic. ■

Because  $(f_n : X \rightarrow Y)$  is approximative sequence obtained with infinitesimal translation of proximate net  $(\alpha_{k_n}) : X \rightarrow Y$ , it follows  $\Omega[(\alpha_n)] = [(f_k : X \rightarrow Y)]$ .

Further for approximative sequence  $(\hat{g}_k : Y \rightarrow Z)_{Q,Q} (f_n : X \rightarrow Y)$  for almost every natural number  $n$ , holds following property

$$d(\hat{g}_n f_n(x), \beta_n \alpha_{k_n}(x)) \leq d(\hat{g}_n f_n(x), g_n \alpha_{k_n}(x)) + (g_n \alpha_{k_n}(x), \beta_n \alpha_{k_n}(x)) \leq \frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{\varepsilon_n}{2} = \varepsilon_n, \forall x \in X$$

It follows  $(g_k : Y \rightarrow Z)_{Q,Q} (f_n : X \rightarrow Y)$  is infinitesimal translation of proximate net  $\beta_n \alpha_{k_n} : X \rightarrow Z$ . Therefore  $\Omega([( \beta_n )][(\alpha_n)]) = \Omega[(\beta_n)]\Omega[(\alpha_n)]$ . This completes the proof.

## REFERENCES

- [1] Shekutovski Nikita, (2012), *Intrinsic definition of strong shape for compact metric spaces*, Topology Proceedings, Volume 39, 27-39.
- [2] К. Борсук, *Теория шейпов*, Издательство Мир, Москва 1976.
- [3] Shekutovski Nikita, Zoran Misajleski, (2011), *Intrinsic shape based on  $\varepsilon$ -continuity and on continuity up to a covering are equivalent*, FMNS 2011, Volume 1, 77-82.
- [4] Jose M. R. Sanjurjo, (1989), *A non continuous description of the shape*, Quart. J. Math. Oxford Ser. 40, 351-359.
- [5] Shekutovski Nikita, Zoran Misajleski, *Connection between  $\varepsilon$ -continuity and continuity up to a covering. Proximate nets and Proximate sequences*, to appear

## СОГЛАСОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНЫХ МЕТОДОВ

*Coefficients of explicit m-stage Runge-Kutta methods for arbitrary m are produced. Stability region of intermediate numerical formulas is conformed to stability region of main scheme. Inequalities of accuracy and stability control are stated.*

## ВВЕДЕНИЕ

Для численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0, t_0 \leq t \leq t_k \quad (1)$$

обычно используются неявные или полужавные  $L$ -устойчивые методы [1]. В [2] для решения жестких задач предлагается применять явные методы типа Рунге-Кутты

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, k_i = hf(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad (2)$$

где  $y$  и  $f$  - вещественные  $N$ -мерные вектор-функции,  $t$  - независимая переменная,  $k_i, 1 \leq i \leq m$ , - стадии метода,  $\alpha_i, p_{mi}, \beta_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq i-1$  - коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2). В [2] для произвольного  $m$  получены коэффициенты методов с первого по третий порядок, а в [3] - коэффициенты методов четвертого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости. Там же численно показано значительное повышение эффективности алгоритмов интегрирования за счет комбинирования таких численных формул в процессе вычислений на основании критерия устойчивости. Заметим, что в [2-3] не рассмотрен вопрос о выборе коэффициентов  $\beta_{ij}$ , которые влияют на устойчивость промежуточных или внутренних схем

$$y_{n,i} = y_n + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} k_j, 1 \leq i \leq m-1,$$

и, в конечном счете, на эффективность алгоритма интегрирования. Авторы ограничились замечанием, что устойчивости промежуточных формул можно добиться за счет выбора данных коэффициентов достаточно малыми.

## ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

Для упрощения выкладок далее рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), y(t_0) = y_0, t_0 \leq t \leq t_k, \quad (3)$$

для решения которой применим методы типа Рунге-Кутты, записанные в виде

$$y_{n,i} = y_n + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} k_j, 1 \leq i \leq m-1, \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i,$$

где  $k_i = hf(y_{n,i-1}), 1 \leq i \leq m, y_{n,0} = y_n$ . Все полученные ниже результаты можно использовать для неавтономных систем, если в (2) положить

1 Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия  
2 Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

$$\alpha_1 = 0, \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, 2 \leq i \leq m. \quad (5)$$

В дальнейшем потребуется матрица  $B_m$  с элементами  $b_{ij}$  вида [2]

$$\begin{aligned} b_{li} &= 1, 1 \leq i \leq m, \quad b_{ki} = 0, 2 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq k-1, \\ b_{ki} &= \sum_{j=k-1}^{i-1} \beta_{ij} b_{k-1,j}, 2 \leq k \leq m, k \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\beta_{ij}$  - коэффициенты схемы (2) или (4). Устойчивость методов обычно исследуется на линейной скалярной задаче

$$y' = \lambda y, y(0) = y_0, t \geq 0, \quad (7)$$

с комплексным  $\lambda$ ,  $\text{Re}(\lambda) < 0$ . Применяя вторую формулу (4) для решения (7), получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= Q_m(z) y_n, z = h\lambda, \\ Q_m(z) &= 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, c_{mi} = \sum_{j=i}^m b_{ij} p_{mj}, 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначая  $C_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^T$  и  $P_m = (p_{m1}, \dots, p_{mm})^T$ , перепишем (8) в виде

$$B_m P_m = C_m, \quad (9)$$

где элементы матрицы  $B_m$  определены соотношениями (6). Для промежуточных схем (4) имеем

$$y_{n,k} = Q_k(z) y_n, Q_k(z) = 1 + \sum_{i=1}^k c_{ki} z^i, c_{ki} = \sum_{j=i}^k b_{ij} \beta_{k+1,j}, 1 \leq k \leq m-1. \quad (10)$$

Используя обозначения  $\beta_k = (\beta_{k+1,1}, \dots, \beta_{k+1,k})^T$  и  $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kk})^T$  получим, что коэффициенты  $\beta_{ij}$  промежуточных схем (4) и коэффициенты соответствующих многочленов устойчивости связаны соотношениями

$$B_k \beta_k = c_k, 1 \leq k \leq m-1. \quad (11)$$

Заметим, что из сравнения (6) и (10) следует, что  $b_{ki} = c_{i-1,k-1}$ , то есть элементы  $(k+1)$ -го столбца матрицы  $B_m$  совпадают с коэффициентами многочлена устойчивости  $Q_k(z)$ . Отсюда следует, что при заданных коэффициентах многочленов устойчивости основной и промежуточной численных схем, коэффициенты методов (4) однозначно определяются из линейных систем (9) и (11) с верхними треугольными матрицами  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Ниже этот факт будет использоваться при определении коэффициентов численных формул (4) при условии, что области устойчивости промежуточных численных схем согласованы с основной.

Разлагая точное  $y(t_{n+1})$  и приближенное  $y_{n+1}$  решения в ряды Тейлора, можно записать

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + h^2 ff' / 2 + h^3 [f''f^2 + f'^2 f] / 6 + O(h^4), \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \left( \sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} \right) hf + \left( \sum_{j=2}^m b_{2j} p_{mj} \right) h^2 f'_n f_n + \\ &+ \left( \sum_{j=3}^m b_{3j} p_{mj} \right) h^3 f_n'^2 f_n + 0.5 \left( \sum_{j=2}^m b_{2j}^2 p_{mj} \right) h^3 f_n'' f_n^2 + O(h^4), \end{aligned} \quad (12b)$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном  $y(t_n)$  и приближенном  $y_n$  решениях, соответственно. Из сравнения соотношений (12) видно, что численная формула (4) будет иметь

первый порядок точности, если  $\sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} = 1$ . Требование второго порядка точности (4) означает выполнение дополнительного условия  $\sum_{j=1}^m b_{2j} p_{mj} = 1/2$ . Наконец схема (4) будет иметь третий порядок, если дополнительно выполняются еще два соотношения

$$\sum_{j=3}^m b_{3j} p_{mj} = 1/6, \quad \sum_{j=2}^m b_{2j}^2 p_{mj} = 1/3. \quad (13)$$

Отсюда следует, что для построения  $m$ -стадийных методов первого и второго порядков точности в линейной системе (9) следует положить  $c_{m1} = 1$  и  $c_{m1} = 1$ ,  $c_{m2} = 0.5$ , соответственно. Задача о построении  $m$ -стадийных методов третьего порядка сводится к совместному решению линейной системы (9) и второго уравнения (13) при условии  $c_{m1} = 1$ ,  $c_{m2} = 0.5$  и  $c_{m3} = 1/6$ . Учитывая, что  $b_{2j} = \alpha_j$ ,  $2 \leq j \leq m$ , нетрудно видеть, что совместность (9) и (13) эквивалентна совместности соотношений

$$\sum_{j=2}^m \alpha_j p_{mj} = 1/2, \quad \sum_{j=2}^m \alpha_j^2 p_{mj} = 1/3, \quad (14)$$

где значения  $\alpha_j$ ,  $2 \leq j \leq m$ , определены формулами (5).

## КОЭФФИЦИЕНТЫ МЕТОДОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ

Будем предполагать, что заданы коэффициенты многочленов устойчивости

$$Q_k(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{ki} z^i, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (15)$$

При выборе коэффициентов многочленов (15) можно руководствоваться различными соображениями. Если, например, основная численная схема (4) применяется с максимальным интервалом устойчивости, то имеет смысл выбрать полиномы устойчивости промежуточных схем с аналогичными свойствами. Если же область устойчивости основной схемы "раздута" по мнимой оси, то и области устойчивости промежуточных схем должны быть устроены подобным образом. Это позволяет избежать неустойчивости промежуточных численных формул, когда шаг интегрирования по устойчивости основной схемы близок к максимальному шагу. Коэффициенты нужных многочленов можно вычислить предложенным в [2, 4] алгоритмом. В [5] приведены коэффициенты многочленов  $Q_k(z)$ ,  $2 \leq k \leq 13$ , с максимальным интервалом устойчивости.

Для каждого  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , обозначим через  $|\gamma_k|$  длину такого максимального интервала  $[\gamma_k, 0]$ , что для всех  $z \in [\gamma_k, 0]$  имеет место неравенство  $|Q_k(z)| \leq 1$ . Учитывая, что  $z = h\lambda$ , в (15) для каждого  $Q_k(z)$  проведем замену  $h$  на  $(h\gamma_k/\gamma_m)$ . В результате вместо (15) получим

$$Q'_k(z) = 1 + \sum_{i=1}^k c'_{ki} z^i, \quad c'_{ki} = (\gamma_k/\gamma_m)^i c_{ki}, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (16)$$

Далее данные полиномы будут использоваться в качестве многочленов устойчивости методов (4). Замена  $h$  на  $(h\gamma_k/\gamma_m)$  означает, что приближенное решение по промежуточным схемам (4) вместо точек  $(t_n + c_k h)$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ , будет вычисляться в точках  $(t_n + c'_k h)$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ . В этом случае максимальный шаг из условия устойчивости основной схемы будет максимальным и для промежуточных численных формул.

Определение коэффициентов методов (4) будем осуществлять по следующему алгоритму. С использованием [4] вычислим коэффициенты полиномов (15), удовлетворяющими некоторым заданным свойствам. Затем вычислим коэффициенты многочленов (16) с применением соответствующей замены переменных. Учитывая, что элементы  $(k+1)$ -го столбца матрицы  $B_m$  совпадают с коэффициентами многочлена устойчивости  $Q'_k(z)$ , сформируем матрицу  $B_m$ , которая имеет вид

$$B_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & c'_{11} & c'_{21} & \dots & c'_{m-1,1} \\ 0 & 0 & c'_{22} & \dots & c'_{m-1,2} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c'_{m-1,m-1} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

Используя в (11) вектор  $c'_k = (c'_{k1}, \dots, c'_{kk})^T$  вместо  $c_k$ , все коэффициенты методов (4) однозначно определяются из линейных систем (9) и (11).

## КОЭФФИЦИЕНТЫ МЕТОДОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

При построении методов третьего порядка точности с согласованными областями устойчивости отличие от предыдущего случая заключается в том, что необходимо выполнение совместности уравнений (14). Поэтому будем полагать, что элемент  $c'_{11}$  в матрице (17) есть пока неопределенный коэффициент полинома

$$Q'_1(z) = 1 + c'_{11}z.$$

Из линейной системы (9) последовательно определим  $p_{mm}, p_{m,m-1}, \dots, p_{m3}$ . Учитывая, что  $\alpha_i = c'_{i-1,1}$ ,  $2 \leq i \leq m$ , перепишем соотношения (14) в виде

$$c'_{11}p_{m2} = \frac{1}{2} - \sum_{j=3}^m c'_{j-1,1}p_{mj}, \quad c'^2_{11}p_{m2} = \frac{1}{3} - \sum_{j=3}^m c'^2_{j-1,1}p_{mj}.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$c'_{11} = \left( \frac{1}{3} - \sum_{j=3}^m c'^2_{j-1,1}p_{mj} \right) / \left( \frac{1}{2} - \sum_{j=3}^m c'_{j-1,1}p_{mj} \right).$$

Данная величина  $c'_{11}$  обеспечивает совместность (14). Значения  $p_{m2}$  и  $p_{m1}$  последовательно определим из второго и первого уравнений (9). Оставшиеся коэффициенты  $\beta_{ij}$ ,  $3 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , вычислим последовательным решением систем линейных уравнений

$$B_k \beta_k = c'_k, \quad 2 \leq k \leq m-1,$$

где  $\beta_k = (\beta_{k+1,1}, \dots, \beta_{k+1,k})^T$  и  $c'_k = (c'_{k1}, \dots, c'_{kk})^T$ .

## КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для контроля точности методов первого порядка будем использовать оценку локальной ошибки  $\delta_{n,1}$ . С применением (12) видим, что для  $m$ -стадийного метода она имеет вид

$$\delta_{n,1} = \left( \frac{1}{2} - \sum_{j=2}^m b_{2j}p_{mj} \right) h^2 f f' + O(h^3) = \frac{1-2c_{m2}}{2} h^2 f f' + O(h^3),$$

где  $c_{m2}$  - коэффициент при  $z^2$  многочлена устойчивости (8). Оценку  $\varepsilon_{n,1}$  данной ошибки можно вычислить многими способами. Разлагая  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , в ряды Тейлора нетрудно видеть, что

$$k_i - k_j = (\alpha_i - \alpha_j) h^2 f'_n f'_n + O(h^3), \quad i \neq j.$$

Отсюда следует, что  $\varepsilon_{n,1}$  можно вычислить по приближенной формуле

$$\varepsilon_{n,1} = 0.5(\alpha_i - \alpha_j)^{-1}(1 - 2c_{m2})(k_i - k_j), \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad i \neq j. \quad (18)$$

Для жестких задач характерным является быстрое изменение решения на небольших промежутках. Для того, чтобы избежать неудовлетворительной точности, естественно в оценке ошибки использовать стадии, вычисленные в крайних точках отрезка  $[t_n, t_{n+1}]$ . Стадия  $k_1$  вычисляется в точке  $t_n$ , и поэтому в (18) положим  $j=1$ ,  $i > j$ . Для методов с согласованными областями устойчивости имеет место неравенство

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < 1.$$

Отсюда следует, что ни одна стадия в точке  $t_{n+1}$  не вычисляется. С другой стороны, применение в (18) стадий с достаточно большими номерами будет приводить к увеличению вычислительных затрат в случае повторных вычислений решения вследствие невыполнения требуемой точности. С целью повышения эффективности расчетов будем поступать следующим образом.

В качестве предварительной оценки будем применять величину

$$\varepsilon'_{n,1} = 0.5(1 - 2c_{m2})(k_2 - k_1) / \alpha_2.$$

Так как  $k_1$  зависит от размера шага линейно, то нарушение неравенства  $\|\varepsilon'_{n,1}\| \leq \varepsilon$  будет приво-

дуть всего лишь к одному дополнительному вычислению правой части задачи (3). Здесь  $\varepsilon$  - требуемая точность расчетов,  $\|\cdot\|$  - некоторая норма в  $R^N$ . Учитывая, что

$$hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^3),$$

окончательное решение по точности будем принимать на основе неравенства  $\|\varepsilon''_{n,1}\| \leq \varepsilon$ , где

$$\varepsilon''_{n,1} = 0.5(1 - 2c_{m2})[hf(y_{n+1}) - k_1].$$

Оценку ошибки методов второго порядка будем вычислять с помощью схем первого порядка точности. Нетрудно видеть, что в этом случае нужно подправить соответствующим множителем оценку ошибки схемы первого порядка.

Контроль точности методов третьего порядка будем осуществлять с помощью численных формул второго порядка точности [6]. Для схем третьего порядка шаг интегрирования по устойчивости значительно меньше, чем для формул первого порядка. Поэтому при выборе шага ограничимся одной оценкой ошибки. С использованием разложения стадий  $k_1$  и  $k_2$  в ряды Тейлора нетрудно видеть, что численная формула

$$y_{n+1,2} = y_n + 0.5\alpha_2^{-1}[(2\alpha_2 - 1)k_1 + k_2]$$

имеет второй порядок точности. Тогда для контроля точности вычислений можно применять оценку ошибки  $\varepsilon_{n,3} = y_{n+1} - y_{n+1,2}$ , где приближение  $y_{n+1}$  вычислено с третьим порядком.

## КОНТРОЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ

Неравенство для контроля устойчивости построим по аналогии [2]. Для получения данного неравенства применим метод (4) для решения задачи

$$y' = f(y) = Ay + b, \quad y(t_0) = y_0,$$

где  $A$  и  $b$  соответственно матрица и вектор с постоянными коэффициентами размерности  $N$ . Очевидно, что в этом случае выполнены соотношения

$$k_1 = hf_n, \quad k_2 = hf_n + \alpha_2 h^2 f'_n f_n, \quad k_3 = hf_n + \alpha_3 h^2 f'_n f_n + \alpha_2 \beta_{32} h^3 f''_n f_n,$$

где  $f_n = Ay_n + b$ ,  $f'_n = A$ . Выберем  $b'_i$  и  $b''_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , из условия выполнения равенств

$$\sum_{i=1}^3 b'_i k_i = h^3 f''_n f_n, \quad \sum_{i=1}^3 b''_i k_i = h^2 f'_n f_n.$$

Нетрудно видеть, что данные соотношения будут выполнены, если

$$b'_1 = -\alpha_2^{-2} \beta_{32}^{-1} (\alpha_2 + \alpha_3), \quad b'_2 = \alpha_2^{-2} \beta_{32}^{-1} \alpha_3, \quad b'_3 = \alpha_2^{-1} \beta_{32}^{-1}, \quad b''_1 = -b''_2 = \alpha_2^{-1}, \quad b''_3 = 0.$$

Теперь оценку максимального собственного числа  $\lambda_n^{\max}$  матрицы Якоби  $\partial f(y_n)/\partial y$  задачи (3) можно вычислить по формуле

$$h\lambda_n^{\max} = |\alpha_2 \beta_{32}|^{-1} \max_{1 \leq j \leq N} \{ |[\alpha_2 k_3 + \alpha_3 k_2 - (\alpha_2 + \alpha_3)k_1]_j| / |[k_2 - k_1]_j| \}.$$

Тогда неравенство для контроля устойчивости  $m$ -стадийного метода (4) имеет вид  $h\lambda_n^{\max} \leq |\gamma_m|$ , где  $|\gamma_m|$  есть длина интервала устойчивости  $m$ -стадийной схемы. Неравенства для контроля точности и устойчивости можно применять как для выбора шага интегрирования, так и для выбора метода и числа стадий в заданном методе в зависимости от поведения решения [2].

## ПРИМЕР

Рассмотрим трехстадийную схему типа Рунге-Кутты

$$y_{n,1} = y_n + \beta_{2,1} k_1, \quad y_{n,2} = y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2,$$

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \tag{19}$$

$$k_1 = hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_{n,1}), \quad k_3 = hf(y_{n,2}).$$

Для определенности будем рассматривать методы с максимальным интервалом устойчивости. Рассмотрим многочлены Чебышева на отрезке  $[-1,1]$ , то есть

$$T_1(z) = z, \quad T_2(z) = 2z^2 - 1, \quad T_3(z) = 4z^3 - 3z.$$

Заменой переменных  $z = 1 - 2x/\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , отображаем  $[-1,1]$  на отрезок  $[\gamma_i, 0]$ , то есть

$$T_1(x) = 1 - \frac{2}{\gamma_1}x, \quad T_2(x) = 1 - \frac{8}{\gamma_2}x + \frac{8}{\gamma_2^2}x^2, \quad T_3(x) = 1 - \frac{18}{\gamma_3}x + \frac{48}{\gamma_3^2}x^2 - \frac{32}{\gamma_3^3}x^3, \quad \gamma_3 = -18.$$

Делаем замену  $h$  на  $h\gamma_i/\gamma_3$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , имеем

$$T_1'(x) = 1 - \frac{2}{\gamma_3}x, \quad T_2'(x) = 1 - \frac{8}{\gamma_3}x + \frac{8}{\gamma_3^2}x^2.$$

Составляем матрицы  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$

$$B_1 = \{1\}, \quad B_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\gamma_3} \end{Bmatrix}, \quad B_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2/\gamma_3 & -8/\gamma_3 \\ 0 & 0 & 8/\gamma_3^2 \end{Bmatrix}.$$

Определяем коэффициенты схемы (19) из систем уравнений

$$B_1\beta_{21} = -\frac{2}{\gamma_3}, \quad B_2 \begin{pmatrix} \beta_{31} \\ \beta_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\gamma_3} \\ +\frac{8}{\gamma_3^2} \end{pmatrix}, \quad B_3 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{\gamma_3} \\ +\frac{48}{\gamma_3^2} \\ -\frac{32}{\gamma_3^3} \end{pmatrix}.$$

В результате имеем коэффициенты метода (19) с согласованными областями устойчивости

$$\beta_{21} = \frac{1}{9}, \quad \beta_{31} = \beta_{32} = p_3 = \frac{2}{9}, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{4}{9}.$$

Из результатов численного сравнения методов с согласованными областями устойчивости и численных схем без согласования на задачах [1, 7] следует примерно 30-процентное повышение эффективности алгоритма интегрирования и более оправданное поведение величины шага на участке установления для ряда тестов. Следствием этого является повышение надежности расчетов.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00106

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир. 1999.
- [2] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. 1997.
- [3] Golushko M.I., Novikov E.A. Explicit fourth-order methods for stiff system. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. Vol. 4. № 1. 1999. P.71-85
- [4] Новиков Е.А. Конструирование областей устойчивости явных методов типа Рунге-Кутты. Вычислительные методы и программирование. Т.10. 2009. С. 248-257.
- [5] Новиков В.А., Новиков Е.А. О построении явных методов типа Рунге-Кутты с расширенными областями устойчивости. Красноярск. (Препринт / ВЦ СО РАН. №9). 1998.
- [6] Новиков А.Е. Оценка глобальной ошибки явных методов типа Рунге-Кутты. Вестник ТюмГУ. №6. 2008. С. 129-138.
- [7] Enright W.H., Hull T.E. Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's. BIT. №15. 1975. P. 10-48.

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ МГД ВОЛН В ЗОНЕ ЭКВАТОРА

---

*Research of the spatial model describing dynamics of an ideal electrically conducting non-uniform rotating liquid taking into account equatorial feature is conducted. The offered mathematical model of investigated physical process represents the closed system of the equations in the private derivatives, consisting of the equations of hydrodynamics taking into account rotation of the Earth, Lorentz's force and the corresponding equations of magnetic dynamics with necessary boundary conditions. The analytical decision of system of the equations in approach equatorial  $\beta$ -planes, describing distribution of waves of small amplitude is constructed.*

---

Целью исследования является редукция нелинейной системы уравнений в частных производных, моделирующей возмущения в идеальной электропроводной вращающейся жидкости, с учетом инерционных сил, сил тяжести, Кориолиса, Лоренца, а также неоднородностей плотности, для особого случая геометрии рассматриваемого объема, который учитывает особенности экваториальной зоны сферического слоя.

Представленные исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд. Представленные исследования являются логическим продолжением исследований, опубликованных в работах [1]-[6].

Колебания идеальной электропроводной несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости описываются следующей системой уравнений [7]-[9]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho} [\text{rot } \mathbf{b}, \mathbf{b}], \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div } \rho = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{v}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{b}$  - вектор магнитной индукции,  $\mathbf{v}$  - скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $g$  - величина ускорения силы тяжести.

Предполагается, кроме того, что магнитная проницаемость  $\mu$  постоянна.

Вблизи экватора нормальная компонента угловой скорости вращения Земли представляет собой малую величину и обращается в нуль на экваторе, и, как следствие, геострофическое приближение [6] перестает быть справедливым. Отсюда следует, что для описания природы экваториальной динамики необходим детальный анализ исходных магнитогидродинамических уравнений с учетом особенностей экваториальной области.

Итак, рассмотрим уравнения динамики волн в широтном поясе около экватора. Пусть масштаб движения в направлении север-юг достаточно мал, так что геометрия движения допускает использование локальной декартовой системы координат, причем сферичность Земли учитывается лишь в изменении параметра Кориолиса с широтой, который может быть записан как

$$f = \beta_0 y_*, \quad (3)$$

---

1 Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

2 Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия



где  $y_*$  - размерное расстояние к северу от экватора,  $\beta_0 = -\frac{2\omega}{r_0}$ ,  $r_0$  - радиус жидкого сферического слоя. Действительно, используя разложение в ряд в окрестности широты  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  и соотношение  $y_* = (\theta - \theta_0)r_0$ , получим

$$f = 2\omega \cos \theta = -\frac{2\omega \sin \theta_0}{r_0} y_* = -\frac{2\omega}{r_0} y_* = \beta_0 y_*.$$

С помощью характерных масштабов введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$x_* = Lx, \quad y_* = Ly, \quad z_* = Dz, \quad t_* = Tt,$$

где в качестве масштаба времени  $T$  выбрано время адвекции. Для компонент скорости и магнитного поля имеем

$$v_{x_*} = Uv_x, \quad v_{y_*} = Uv_y, \quad v_{z_*} = \frac{D}{L}Uv_z, \quad b_{x_*} = Bb_x, \quad b_{y_*} = Bb_y, \quad b_{z_*} = \frac{D}{L}Ub_z.$$

Здесь  $D$  - вертикальный масштаб движения,  $L$  - горизонтальный масштаб движения,  $U$  - масштаб горизонтальной скорости,  $B$  - масштаб горизонтальных компонент магнитного поля. При малых скоростях выбор масштабов поля плотности и давления проводится с учетом равенства порядков горизонтального градиента давления и величины силы Кориолиса и предположения равенства порядков величин сил плавучести и вертикального градиента давления. Это следует из удовлетворения с большой степенью точности крупномасштабных движений приближению гидростатики [4]. Итак, будем считать, что  $p_s(z)$  и  $\rho_s(z)$  определяют основное состояние, на которое накладываются возмущения, обусловленные движением. Поэтому давление  $p^*$  и плотность  $\rho^*$  представимы соотношениями

$$p^* = p_s(z) + \rho_s(z)\beta_0 L^2 U p(x, y, z, t), \quad \rho^* = \rho_s(z) \left( 1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho(x, y, z, t) \right). \quad (4)$$

Параметры  $\frac{U}{T}$ ,  $\beta_0 U$ ,  $\frac{B^2}{\mu L \rho_s}$  имеют один порядок, откуда масштаб времени  $T$  для  $t^*$  определяется равенством

$$T = \frac{1}{\beta_0 L}. \quad (5)$$

При  $U=1\text{см/сек}$ ,  $r_0=3.5 \cdot 10^8\text{см}$ ,  $2\omega \approx 1.4 \cdot 10^{-4}\text{сек}^{-1}$ ,  $D=4 \cdot 10^6\text{см}$  имеем оценку

$$\frac{\beta_0 L U}{gD} = O(10^{-7}). \quad (6)$$

Оставляя в исходных уравнениях, представленных в безразмерных переменных, только линейные члены и учитывая соотношения (5), оценки (6) и представления

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x, y, z, t), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'(x, y, z, t),$$

получим относительно возмущений уравнения в приближении экваториальной  $\beta$ -плоскости в виде

$$\rho_s \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} - y_y \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\mu} D b_x = 0, \quad \rho_s \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + y_x \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\mu} D b_y = 0, \quad \rho = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s v_z) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = D \mathbf{v} + \mathbf{b}_0 \frac{\rho'_s}{\rho_s} v_z, \quad (8)$$

где  $\eta = \rho_s p + \frac{1}{\mu} (b_{0x} b_x + b_{0y} b_y)$ ,  $D = \langle \mathbf{b}_0, \nabla \rangle$  - дифференциальный оператор, обозначения для возмущений скорости и индукции магнитного поля сохранены прежними.

Замыкаем систему (7)-(8) термодинамическим уравнением, линейный вариант которого в отсутствие диссипации принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - S(z)v_z = 0, \quad (9)$$

где  $S(z) = \frac{N^2 D^2}{\beta_0^2 L^4}$ ,  $N^2$  - квадрат частоты Вайсяля-Брента. Исключая функцию плотности, уравнения (7)-(9) можно представить в форме

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - yv_y + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} - \frac{1}{\mu \rho_s} D b_x = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + yv_x + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} - \frac{1}{\mu \rho_s} D b_y = 0, \quad v_z = -\frac{1}{S(z)} \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t \partial z}, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = D \mathbf{v}, \quad \tilde{\eta} = p + \frac{1}{\mu \rho_s} (b_{0x} b_x + b_{0y} b_y). \quad (11)$$

Определим функции  $\tilde{\eta}(x, y, z, t)$  и  $\tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t)$  равенствами

$$\tilde{\eta}(x, y, z, t) = -(D_t^2 + y^2)^2 \tilde{\eta}(x, y, z, t), \quad \mathbf{b}(x, y, z, t) = \mu \rho_s (D_t^2 + y^2)^2 \tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t), \quad (12)$$

где  $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)$ . Заметим, что равенства (12) определяют функции  $\tilde{\eta}(x, y, z, t)$  и

$\tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t)$  неоднозначно: если функция  $\eta_0(x, y, z, t)$  удовлетворяет соотношению (12), то этому соотношению удовлетворяет и функция

$$\tilde{\eta} = \eta_0(x, y, z, t) + [\eta_1(x, y, z) + \eta_2(x, y, z)y] \cos yt + [\eta_3(x, y, z) + \eta_4(x, y, z)y] \sin yt, \quad (13)$$

где  $\eta_j(x, y, z)$   $j = \overline{1,4}$  - произвольные функции; аналогично, второе равенство (12) определяет семейство функций  $\tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t)$  вида

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_0(x, y, z, t) + \mathbf{b}^{(1)}(x, y, z) \cos yt + \mathbf{b}^{(2)}(x, y, z) \sin yt, \quad (14)$$

где  $\mathbf{b}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$  - произвольные функции своих аргументов в рассматриваемой области.

Пусть  $b_{0x} = b_{0y} = 0$ . Подставляя функции  $\tilde{\eta}$  и  $\mathbf{b}$  из выражений (12) в первое и второе уравнения (10), получим в матричном виде соотношение

$$\begin{pmatrix} D_t & -y \\ y & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = (D^2 + y^2)^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y(D_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} + (D^2 + y^2) D \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Интегрирование соотношения (15) по  $t$  приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t & y \\ -y & D_t \end{pmatrix} \left[ (D^2 + y^2)^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} \right] + C_1(x, y, z) \begin{pmatrix} \cos yt \\ -\sin yt \end{pmatrix} + C_2(x, y, z) \begin{pmatrix} \sin yt \\ \cos yt \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $C_1(x, y, z)$  и  $C_2(x, y, z)$  - произвольные функции. Подставляя функции  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{b}_x$ ,  $\tilde{b}_y$  из представлений (13) и (14) в равенство (16), получим

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t & y \\ -y & D_t \end{pmatrix} \left[ (D^2 + y^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} b_x^{(0)} \\ b_y^{(0)} \end{pmatrix} \right] + \left[ C_1(x, y, z) + 2y^2(\eta_1 + \eta_2 y) + \right. \\ \left. + y b_{0z} \left( \frac{\partial b_x^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial b_y^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos yt \\ -\sin yt \end{pmatrix} + \left[ C_2(x, y, z) + 2y^2(\eta_3 + \eta_4 y) + y b_{0z} \left( \frac{\partial b_y^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial b_x^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \begin{pmatrix} \sin yt \\ \cos yt \end{pmatrix} \quad (17)$$

Рассмотрим вектор  $\mathbf{C}(x, y, z) = (C_2(x, y, z), -C_1(x, y, z), 0) \in H_2(\Omega)$ ,  $C_j(x, y, z) \in L_2(\Omega)$ ,  $j = \overline{1, 2}$ , где  $H_2(\Omega)$  - подпространство гильбертова пространства вещественных вектор-функций  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , определенных в ограниченной области  $\Omega \in R^3$  с кусочно-гладкой границей и компонентами  $v_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$  из гильбертова пространства вещественных функций  $L_2$ :

$$H_2(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in L_2 : \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0) \},$$

т. е.  $H_2(\Omega)$  - совокупность всех векторов  $\mathbf{v} \in L_2(\Omega)$  с нулевой третьей компонентой.

В дальнейшем используется следующая теорема [10] о представлении векторов подпространства  $H_2(\Omega)$ .

**Теорема.** Для любого вектора  $\mathbf{C}(x, y, z) \in H_2(\Omega)$  найдется пара функций  $\varphi(x, y, z)$   $\psi(x, y, z) \in L_2(\Omega)$  такая, что  $\mathbf{C}(x, y, z) = (\varphi_x + \psi_y, \varphi_y - \psi_x, 0)$  где  $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$  - частные производные функций  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\psi(x, y, z)$ .

Используя теорему и полагая в (17)

$$\Delta_2 \psi(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \Delta_2 \varphi(x, y, z) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

где

$$f_1(x, y, z) = -2y^2(\eta_1 + \eta_2 y) - y b_{0z} \frac{\partial}{\partial z} (b_x^{(2)} + b_y^{(1)}), \quad f_2(x, y, z) = -2y^2(\eta_3 + \eta_4 y) - y b_{0z} \frac{\partial}{\partial z} (b_y^{(2)} - b_x^{(1)}),$$

Получаем

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t & y \\ -y & D_t \end{pmatrix} \left[ (D^2 + y^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} \right]. \quad (18)$$

Из третьего уравнения (11) с учетом выражения (18) получаем

$$\begin{pmatrix} D_t \mu \rho_s (D_t^2 + y^2) - D_t D^2 & -y D^2 \\ y D^2 & D_t \mu \rho_s (D_t^2 + y^2) - D_t D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} D_t & y \\ -y & D_t \end{pmatrix} \left[ (D^2 + y^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \right] \quad (19)$$

Вводя вместо функции  $\tilde{\eta}(x, y, z, t)$  функцию  $\xi$  по формуле  $\tilde{\eta} = f^2 \xi$ , где

$$f = D_t^2 (\mu \rho_s (D_t^2 + y^2) - D^2) + y^2 D^4$$

есть дифференциальный оператор, и интегрируя соотношение (20), для горизонтальных компонент поля получим выражение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t [\mu\rho_s (D_t^2 + y^2) - D^2] & yD^2 \\ -yD^2 & D_t [\mu\rho_s (D_t^2 + y^2) - D^2] \end{pmatrix} \times \\ \times D \begin{pmatrix} D_t & y \\ -y & D_t \end{pmatrix} \left[ (D^2 + y^2) \begin{pmatrix} f \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 2f'_y \xi + f \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ f\xi \end{pmatrix} \right]. \quad (20)$$

Произвольные функции результата интегрирования можно исключить используемым выше методом.

Вектор  $\mathbf{b}$  является решением системы (10)-(11), поэтому подстановка соответствующих выражений в первое уравнение (11) приводит к следующему уравнению для функции  $\xi(x, y, z, t)$ :

$$A_1 \Delta_2 \xi + (B_1 - A'_{2y}) \xi_x + (A'_1 + B_2) \xi_y + \left[ B'_{2y} + \frac{1}{S} D_t (D_t^2 + y^2)^2 \left( 2ff'_z + f^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \xi = 0, \quad (21)$$

$$A_1 = (D_t^2 + y^2) D_t f^2 + D_t (D_t^2 + y^2) (Dh_1) - y (D_t^2 + y^2) (Dh_2),$$

$$A_2 = y (D_t^2 + y^2) f^2 + D_t (D_t^2 + y^2) (Dh_2) + y (D_t^2 + y^2) (Dh_1),$$

$$B_1 = 2y (D_t^2 + y^2) ff'_y + 4y^2 f^2 + D_t D \left[ 2(D_t^2 + y^2) h_4 + 4yh_2 \right] + yD \left[ 2(D_t^2 + y^2) h_3 + 4yh_1 \right],$$

$$B_2 = 2D_t (D_t^2 + y^2) ff'_y + 4yD_t f^2 + D_t D \left[ 2(D_t^2 + y^2) h_3 + 4yh_1 \right] - yD \left[ 2(D_t^2 + y^2) h_4 + 4yh_2 \right],$$

$$h_1 = F_1 f, \quad h_2 = F_2 f, \quad h_3 = F_1 f'_y, \quad h_4 = F_2 f'_y, \quad F_1 = (D_t^2 f_1 - y^2 D^2) D,$$

$$F_2 = yD_t (f_1 + D^2) D, \quad f_1 = \mu\rho_s (D_t^2 + y^2) - D^2, \quad f = D_t^2 + f^2 + y^4 D^4$$

суть дифференциальные операторы. Функции  $v_z$  и  $b_z$  определяются из соответствующих уравнений (10) и (11).

Итак, резюмируем полученные выше результаты в виде следующего утверждения.

**Утверждение.** Любое решение  $\mathbf{v}(x, y, z, t), \mathbf{b}(x, y, z, t), p(x, y, z, t)$  пространственной задачи о малых возмущениях крупномасштабных волновых движений стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости в экваториальной области, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде

$$p(x, y, z, t) = (D_t^2 + y^2)^2 f^2 \xi, \quad \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} (x, y, z, t) = \mu\rho_s (D_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} (x, y, z, t),$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t f_1 & yD^2 \\ -yD^2 & D_t f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_t & y \\ -y & D_t \end{pmatrix} D \left[ (D_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} f \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 2f'_y \xi + f \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ f\xi \end{pmatrix} \right],$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t & y \\ -y & D_t \end{pmatrix} \left[ (D_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} f \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 2ff'_y \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ f^2 \xi \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \right], \quad (21)$$

$$v_z = \frac{1}{S} D_t (D_t^2 + y^2)^2 \left( 2ff'_z \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad b_z = \frac{1}{S} D_t (D_t^2 + y^2)^2 D \left( 2ff'_z \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\rho = (D_t^2 + y^2)^2 \left( 2ff'_z \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad D = b_{0z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad f = D_t^2 (\mu\rho_s (D_t^2 + y^2) - D^2)^2 + y_2 D^4,$$

где функция  $\zeta$  является решением уравнения (21).

Справедливо и **Обратное утверждение**, а именно: *любое решение уравнения (21) порождает решение системы (7)-(8), моделирующей малые возмущения пространственных крупномасштабных движений в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости в широтном поле около экватора, если построенные по формулам (22) функции  $\mathbf{v}(x, y, z, t), \mathbf{b}(x, y, z, t), p(x, y, z, t), \rho(x, y, z, t)$  удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Холодова С.Е. Волновые движения в сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости, Журн. выч. мат. и мат. физики. 2007. Т. 47. № 12. С. 2107-2115.
- [2] Холодова С.Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости, Журн. выч. мат. и мат. физики. 2008. Т. 48. № 5. С. 882-898.
- [3] Холодова С.Е. Квазигеострофические движения во вращающемся слое электропроводной жидкости, Прикл. мех. и техн. физика. 2009. Т. 50, № 1. С. 30-41.
- [4] Холодова С.Е. Математическое моделирование крупномасштабных движений стратифицированной электропроводной жидкости в сферическом слое, Вестн. С-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 1. С. 118-133.
- [5] Холодова С.Е. Волновые движения в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости, Журн. выч. мат. и мат. физики. 2009. Т. 49. № 5. С. 916-922.
- [6] Холодова С.Е., Перегудин С.И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб. Изд-во СПбГУ. 2009. 455 с.
- [7] Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967. 260 с.
- [8] Алешков Ю.З. Математическое моделирование физических процессов. - СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 264 с.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. VIII. М.: Наука, 1992. 664 с.
- [10] Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344 с.
- [11] Брагинский С.И. Волны в устойчиво стратифицированном слое на поверхности земного ядра, Геомагн. аэроном., 3. 1987. С. 476-482.
- [12] Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570.
- [13] Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
- [14] Брагинский С.И. Магнито-гидродинамика земного ядра, Геомагн. и аэроном. 1964. Т. 4. № 5. С. 898-916.
- [15] Гунько Ю.Ф., Норин А.В., Филиппов Б.В. Электромагнитная газодинамика плазмы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 176 с.
- [16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

**GLOBAL SEARCH PSO-LIKE ALGORITHM RC1**


---

*A novel, low-population PSO-like algorithm for solving global optimization problems is proposed. Performance of subject algorithm is tested on the set of 12 benchmark functions under standard and non-standard (dimensionality increase up to 30000, domain extension up to 5 times and goal functions rotation) test conditions. For 10 of the considered problems, astonishing results are observed - convergence speed of the “universal” and several problem-dependent configurations of RC1 avail with quasi-invariant behavior in regard of problem dimensionality. Moreover, for 9 out of the 10 problems (standard test conditions) referent configurations reach the solution in just 11-25 function evaluations, which corresponds to on-going progress of high-population PSOs in the initialization stage or the first iteration. Favorable results are also obtained for the cases of domain extension and test functions rotation. RC1 faces certain difficulties on the remaining 2 problems.*

---

**SHORT DESCRIPTION OF PROPOSED ALGORITHM**

A low-population, structure-time hierarchized PSO-like algorithm (RC1) is proposed. It is established in a natural, clear, logical and rather simple manner. The proposed algorithm outcame as a result of interesting discussions at twirpx.com forum.

**GOVERNING MECHANISMS OF THE ALGORITHM. SWARM STRUCTURE**

The proposed PSO-like algorithm utilizes just the following governing mechanisms: all three components ( $w$ ,  $c_1$  and  $c_2$ ) of displacement  $v$  - for the purpose of domain search (non-adaptive laws); displacement limitation  $v_{\max}$  - for the purpose of swarm protection against “explosion” (non-adaptive law); and displacement limitation  $v_{\min}$  - for the purpose of swarm protection against getting stuck in local extremes (there is a possibility for engaging an adaptive law).

Considered in state-space, the proposed PSO-like algorithm structurally represents a non-adaptive two-particle swarm (which is the minimal possible number of particles necessary for a swarm “functioning”). Together with currently memorized global best position, this formally establishes a three-level hierarchized system. Anyhow, the second particle “operates” with an iteration delay in regard of the first one. Also, the second particle does not “react” onto global best position, but onto current (i.e. iteration delayed) best (personal best) position of the first particle (via social component  $c_2$  of its displacement). So, except conventional ones, there are no other sophisticated PSO mechanisms established within the RC1 algorithm. The purpose of developing the algorithm in such (elementary) scope is to demonstrate its ability to solve multivariable global optimization problems, which directly comes out from its concept. Activities onto the algorithm further development are postponed for some other work in the time to come.

**DESCRIPTION OF THE APPARATUS FOR PARTICLES DISPLACEMENT**

Like all other PSO algorithms, RC1 also uses the common formula for updating particles positions:

$$X_{iter+1} = X_{iter} + V_{iter+1} \quad (1)$$

with:  $X$  - vector (matrix) of all particles positions,  $V$  - vector (matrix) of all particles displacements.

On the other side, each single PSO utilizes its own unique model for vector (matrix) of all particles displacement  $V$ . Namely in respect of this quantity (and complete appurtenant mathematical apparatus necessary for its calculation) all the PSOs differ one from another.

---

<sup>1</sup> “Energoprojekt-Hidroinzenjering”, Belgrade, Serbia

Before the model for calculation of vector (matrix) of displacement of all particles  $V$ , used by the proposed algorithm, is presented, it is necessary to determine the model for swarm structure representation.

Within the proposed algorithm, the swarm structure is determined as a vector (matrix) by which echelon-like structure of the swarm is defined (by rows - swarm levels, by columns - sub-swarms), as well as corresponding number of particles within each group. Actually, for the proposed algorithm (entirely 2 particles, spread onto 2 levels, single-swarm), the vector of swarm structure is:

$$N_{\text{levels-subswarms}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Of course, any other swarm structure (dimensions of the vector (matrix) and/or numbers of particles in each group) may be arbitrarily set, as well.

Each particle of the swarm is uniquely identified and accessed by means of the following three parameters:  $i_{N_{\text{subswarm}}}$  - identification number of the belonging sub-swarm,  $i_{N_{\text{level}}}$  - identification number of the belonging level, and  $i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}} = i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}}(i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}})$  - identification number of the particle within the belonging group (level and sub-swarm).

Also, it is necessary to determine the vector (matrix) of iteration delay of the swarm's particles. Actually, for the proposed algorithm (2 particles, single-swarm), the vector of iteration delay of the swarm's particles is:

$$D_{\text{levels-subswarms}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

This vector (matrix) should dimensionally correspond to the vector (matrix) of swarm structure. For the particle(s) at the first level, iteration delay should be 0, whereas for the second level it could be arbitrarily set (author proposes value of 1 iteration).

All the particles of one sub-swarm, within one level, should have the same value of iteration delay. Therefore, the iteration delay is uniquely determined by

$$D_{\text{subswarm, level}} = D_{\text{subswarm, level}}(i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}}). \quad (4)$$

Taking into consideration the structure and the principle of the swarm functioning as per the proposed algorithm, the model for calculation of vector (matrix) of all particles displacement within current iteration (i.e. algorithm "engine") is:

$$\begin{aligned} v(i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}}, i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}}, j, \text{iter}) &= w \cdot v(i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}}, i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}}, j, \text{iter} - 1) + \\ &+ c_1 \cdot r_1 \cdot \left[ y_{\text{personal best}}(i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}}, i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}}, j) - x(i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}}, i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}}, j, \text{iter} - 1) \right] + \\ &+ c_2 \cdot r_2 \cdot \left[ y_{\text{referent}} - x(i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}}, i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}}, j, \text{iter} - 1) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_{\text{referent}} = \begin{cases} y_{\text{global best}}(j) \text{ for } i_{N_{\text{level}}} = N_{\text{levels}} \\ y_{\text{subswarm, level current best}}(j, i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}} + 1, \text{iter} - D(i_{N_{\text{level}}}, i_{N_{\text{subswarm}}})) \text{ for } i_{N_{\text{level}}} < N_{\text{levels}} \end{cases} \quad (6)$$

with:  $i_{N_{sl, \text{subswarm, level}}}, i_{N_{\text{subswarm}}}, i_{N_{\text{level}}}$  - parameters for unique identification of a particle within the swarm,  $j$  - current dimension ( $j = 1 \div D$ ),  $\text{iter}$  - current iteration;

Note: To model governing mechanisms of the proposed algorithm (for each of the parameters, i.e.  $w$ ,  $c_1$  and  $c_2$ , as well as  $v_{\text{max}}$  and  $v_{\text{min}}$ ), particular configurations of the proposed algorithm utilize several linear and nonlinear laws, with and without randomizer. Details can be found in [1].

## SIMULATIONS AND RESULTS

The scope of benchmark problems (12 test functions, with 6 unimodal and 6 multimodal), including: solution acceptance criteria, test dimensionality, domain boundaries and particles initialization conditions, as well as minimal number of simulation runs (min. 30) necessary for stable and reliable results, is taken from the reference [2]. In addition, proposed data on theoretical difficulty levels [3] and domain acceptance regions are also presented.

Data from the reference [2] were selected for detailed tests, since test conditions are clearly stated there, test spectrum of 12 different benchmark problems represents a great challenge for any tested global optimization algorithm, as well as since the reference presents comprehensive test results for a large number (entirely 8) of reputable PSO algorithms.

Except for the above mentioned test conditions (standard ones), the proposed algorithm was additionally exposed to nonstandard, far stricter, test conditions, being:

- of increased dimensionality of benchmark problems (standard domain boundaries kept),
- of extended domain boundaries (standard dimensionality kept), and
- of rotated test functions (standard dimensionality and domain boundaries kept).

Test results for standard test conditions are presented in Tables 1-2., whereas the results for nonstandard test conditions are presented in Tables 3-5.

Note 1: Regarding standard test conditions, each test of the proposed algorithm was performed with 50 (fifty) independent runs (whereas 30 being minimum), for the sake of results stability and reliability. Presented results for comparative swarms are obtained on 30-run tests.

Note 2: Population largeness for all comparative swarms is 20 particles, whereas maximum allowed number of function evaluations is 200000. Number of particles in the proposed RC1 algorithm is 2, whereas author's adopted limit for maximum allowed number of function evaluations is just 5000 (40 times less; this partly influences finally obtained solution accuracy).

Note 3: Presented results of the proposed algorithm behavior under standard test conditions are obtained with "universal" configuration of algorithm parameters' settings (Tables 1-2.). Behavior of problem-dependent configurations of RC1 for  $D=30$  can be seen from Table 3.

Note 4: Regarding non-standard test conditions, presented results are obtained on 30-run tests.

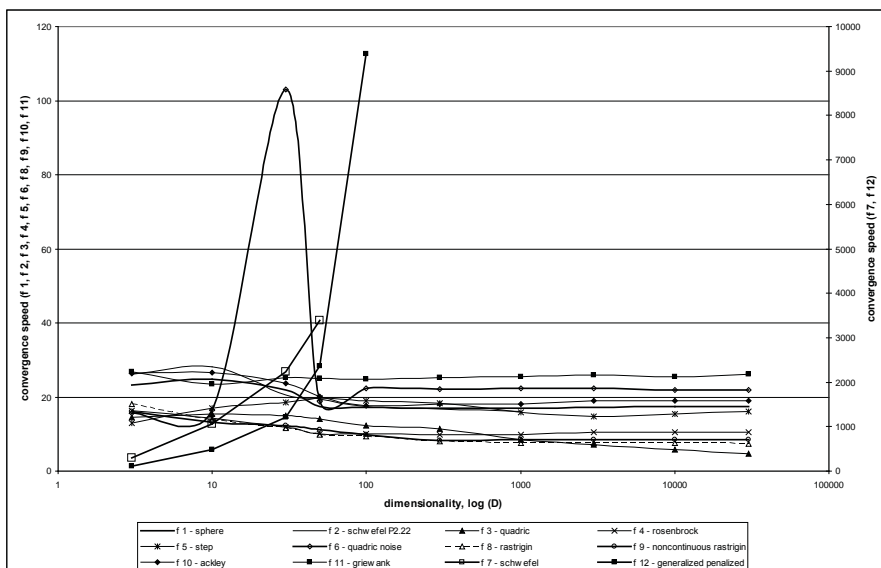


Fig. 1. RC1 problem-dependent configurations - Convergence speed vs. dimensionality



**Table 1.** Data on benchmark problems (standard test conditions) and RC1 (“universal” configuration) performance results

		unimodal test functions					
		f 1 (sphere)	f 2 (schwefel P2.22)	f 3 (quadric)	f 4 (rosenbrock)	f 5 (step)	f 6 (quadric noise)
test functions characteristics	D	30	30	30	30	30	30
	DB	[-100,100] <sup>D</sup>	[-10,10] <sup>D</sup>	[-100,100] <sup>D</sup>	[-10,10] <sup>D</sup>	[-100,100] <sup>D</sup>	[-1.28,1.28] <sup>D</sup>
	initialization range	[-100,100] <sup>D</sup>	[-10,10] <sup>D</sup>	[-100,100] <sup>D</sup>	[-10,10] <sup>D</sup>	[-100,100] <sup>D</sup>	[-1.28,1.28] <sup>D</sup>
	global $GF_{\min}$	0	0	0	0	0	0
	$GF_{\text{accept}}$	0.01	0.01	100	100	0	0.01
	global $x_{\min}$	0 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>	1.0 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>
	$x_{\text{accept}}$	0.018 257 <sup>D</sup>	0.000 333 <sup>D</sup>	0.102 842 <sup>D</sup>	0.212 860 <sup>D</sup>	0.499 999 <sup>D</sup>	0.068 098 <sup>D</sup> (randomizer excluded)
	approximate TDL	280	330	230	135	180	110
RC1 performance	$GF_{\min}$	$3.63 \cdot 10^{-28}$	$1.03 \cdot 10^{-17}$	$7.4 \cdot 10^{-30}$	28.95	0	$2.56 \cdot 10^{-4}$
	$\sigma_{GF_{\min}}$	$2.56 \cdot 10^{-27}$	$4.37 \cdot 10^{-17}$	$4.58 \cdot 10^{-29}$	0.266	0	$2.62 \cdot 10^{-4}$
	$N_{GF,\text{accept}}$	<b>31.7</b>	<b>39.3</b>	<b>25.9</b>	<b>12.5</b>	<b>20</b>	<b>166.9</b>
	$\sigma_{N_{GF,\text{accept}}}$	38.1	35.4	16.7	2.5	4.8	179.6
	$p$	100%	100%	100%	100%	100%	100%
	$N_{GF,\text{max}}$	5 000	5 000	5 000	5 000	5 000	5 000
	RC1 configuration	universal	universal	universal	universal	universal	universal
		multimodal test functions					
		f 7 (schwefel)	f 8 (rastrigin)	f 9 (noncontinuous rastrigin)	f 10 (ackley)	f 11 (griewank)	f 12 (generalized penalized)
test functions characteristics	D	30	30	30	30	30	30
	DB	[-500,500] <sup>D</sup>	[-5.12,5.12] <sup>D</sup>	[-5.12,5.12] <sup>D</sup>	[-32,32] <sup>D</sup>	[-600,600] <sup>D</sup>	[-50,50] <sup>D</sup>
	initialization range	[-500,500] <sup>D</sup>	[-5.12,5.12] <sup>D</sup>	[-5.12,5.12] <sup>D</sup>	[-32,32] <sup>D</sup>	[-600,600] <sup>D</sup>	[-50,50] <sup>D</sup>
	global $GF_{\min}$	-12 569.5	0	0	0	0	0
	$GF_{\text{accept}}$	-10 000	50	50	0.01	0.01	0.01
	global $x_{\min}$	420.9867 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>	0 <sup>D</sup>	-1.0 <sup>D</sup>
	$x_{\text{accept}}$	394.29464 <sup>D</sup>	0.092 966 <sup>D</sup>	0.092 966 <sup>D</sup>	0.002 422 <sup>D</sup>	0.070 787 <sup>D</sup>	-1.108 183 <sup>D</sup>
	approximate TDL	110	140	140	305	290	205
RC1 performance	$GF_{\min}$	-9 902.37	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	$8.88 \cdot 10^{-16}$	0 ( $\ll 10^{-16}$ )	$3.7 \cdot 10^{-4}$
	$\sigma_{GF_{\min}}$	3 488.7	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	0	0 ( $\ll 10^{-16}$ )	$6.23 \cdot 10^{-4}$
	$N_{GF,\text{accept}}$	<b>3 553</b>	<b>11.1</b>	<b>11.3</b>	<b>67.8</b>	<b>104.6</b>	<b>1 384</b>
	$\sigma_{N_{GF,\text{accept}}}$	467.3	5.5	5.7	73.5	117.1	532.3
	$p$	86%	100%	100%	100%	100%	100%
	$N_{GF,\text{max}}$	5 000	5 000	5 000	5 000	5 000	5 000
	RC1 configuration	universal	universal	universal	universal	universal	universal

with:  $D$  - dimensionality,  $DB$  - domain boundaries,  $GF_{\text{accept}}$  - goal function solution acceptance value,  $x_{\text{accept}}$  - domain acceptance area,  $TDL$  - theoretical difficulty level,  $\overline{GF}_{\min}$  - goal function solution mean value,  $\sigma_{\overline{GF}_{\min}}$  - solution standard deviation,  $\overline{N}_{GF,\text{accept}}$  - average number of function evaluations to reach the acceptance value (convergence speed),  $\sigma_{\overline{N}_{GF,\text{acc}}}$  - standard deviation of number of function evaluations to meet the acceptance value,  $p$  - reliability,  $N_{GF,\text{max}}$  - maximum allowed number of function evaluations.

**Table 2.** Comparative PSOs results for standard test conditions and RC1 (“universal” configuration) convergence speed increase

		unimodal test functions						multimodal test functions						
		f 1	f 2	f 3	f 4	f 5	f 6	f 7	f 8	f 9	f 10	f 11	f 12	
performance of comparative PSOs; comparison of RC1 against comparative PSOs in terms of convergence speed	GPSO	$G_{f_{min}}$	$1.98 \cdot 10^{-53}$	$2.51 \cdot 10^{-34}$	$6.45 \cdot 10^{-2}$	28.1	0	$7.77 \cdot 10^{-3}$	-10090.2	30.7	15.5	$1.15 \cdot 10^{-14}$	$2.37 \cdot 10^{-2}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$
		$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$7.08 \cdot 10^{-53}$	$5.84 \cdot 10^{-34}$	$9.46 \cdot 10^{-2}$	24.6	0	$2.42 \cdot 10^{-3}$	495	8.68	7.4	$2.27 \cdot 10^{-15}$	$2.57 \cdot 10^{-2}$	$3.16 \cdot 10^{-2}$
		$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>105 695</b>	<b>103 077</b>	<b>137 985</b>	<b>101 579</b>	<b>93 146</b>	<b>165 599</b>	<b>90 663</b>	<b>94 379</b>	<b>104 987</b>	<b>110 844</b>	<b>111 733</b>	<b>99 541</b>
		$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000
		p	100%	100%	100%	100%	100%	80%	56.7%	96.7%	100%	100%	40%	90%
		RC1 speed increase	<b>3 334 x</b>	<b>2 623 x</b>	<b>5 328 x</b>	<b>8 126 x</b>	<b>4 657 x</b>	<b>992 x</b>	<b>26 x</b>	<b>8 503 x</b>	<b>9 291 x</b>	<b>1 635 x</b>	<b>1 068 x</b>	<b>72 x</b>
	LPSO	$G_{f_{min}}$	$4.77 \cdot 10^{-29}$	$2.03 \cdot 10^{-20}$	18.6	21.8627	0	$1.49 \cdot 10^{-2}$	-9628.35	34.9	30.4	$1.85 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$2.18 \cdot 10^{-30}$
		$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$1.13 \cdot 10^{-28}$	$2.89 \cdot 10^{-20}$	30.71	11.1593	0	$5.66 \cdot 10^{-3}$	456.54	7.25	9.23	$4.8 \cdot 10^{-15}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$5.14 \cdot 10^{-30}$
		$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>118 197</b>	<b>115 441</b>	<b>162 196</b>	<b>102 259</b>	<b>107 315</b>	<b>161 784</b>	<b>89 067</b>	<b>99 074</b>	<b>110 115</b>	<b>125 543</b>	<b>125 777</b>	<b>107 452</b>
		$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000
		p	100%	100%	96.7%	100%	100%	26.7%	20%	96.7%	100%	100%	60%	100%
		RC1 speed increase	<b>3 729 x</b>	<b>2 937 x</b>	<b>6 262 x</b>	<b>8 181 x</b>	<b>5 366 x</b>	<b>969 x</b>	<b>25 x</b>	<b>8 926 x</b>	<b>9 745 x</b>	<b>1 852 x</b>	<b>1 202 x</b>	<b>78 x</b>
VPSO	$G_{f_{min}}$	$5.11 \cdot 10^{-38}$	$6.29 \cdot 10^{-27}$	1.44	37.6469	0	$1.08 \cdot 10^{-2}$	-9845.27	34.09	21.33	$1.4 \cdot 10^{-14}$	$1.31 \cdot 10^{-2}$	$3.46 \cdot 10^{-3}$	
	$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$1.91 \cdot 10^{-37}$	$8.68 \cdot 10^{-27}$	1.55	24.9378	0	$3.24 \cdot 10^{-3}$	588.87	8.07	9.46	$3.48 \cdot 10^{-15}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$1.89 \cdot 10^{-2}$	
	$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>112 408</b>	<b>109 849</b>	<b>147 133</b>	<b>103 643</b>	<b>100 389</b>	<b>170 675</b>	<b>91 811</b>	<b>98 742</b>	<b>99 480</b>	<b>118 926</b>	<b>117 946</b>	<b>102 779</b>	
	$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	
	p	100%	100%	100%	100%	100%	43.4%	40%	100%	100%	100%	46.7%	96.7%	
	RC1 speed increase	<b>3 546 x</b>	<b>2 795 x</b>	<b>5 681 x</b>	<b>8 291 x</b>	<b>5 019 x</b>	<b>1 023 x</b>	<b>26 x</b>	<b>8 896 x</b>	<b>8 804 x</b>	<b>1 754 x</b>	<b>1 128 x</b>	<b>74 x</b>	
FIPS	$G_{f_{min}}$	$3.21 \cdot 10^{-30}$	$1.32 \cdot 10^{-17}$	0.77	22.5387	0	$2.55 \cdot 10^{-3}$	-10113.8	29.98	35.91	$7.69 \cdot 10^{-15}$	$9.04 \cdot 10^{-4}$	$1.22 \cdot 10^{-31}$	
	$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$3.60 \cdot 10^{-30}$	$7.68 \cdot 10^{-18}$	0.86	0.310182	0	$6.25 \cdot 10^{-4}$	889.58	10.92	9.49	$9.33 \cdot 10^{-16}$	$2.78 \cdot 10^{-3}$	$4.85 \cdot 10^{-32}$	
	$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>32 561</b>	<b>36 322</b>	<b>73 790</b>	<b>13 301</b>	<b>15 056</b>	<b>47 637</b>	<b>122 210</b>	<b>87 760</b>	<b>80 260</b>	<b>28 256</b>	<b>42 604</b>	<b>19 404</b>	
	$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	
	p	100%	100%	100%	100%	100%	100%	66.7%	93.3%	90%	100%	100%	100%	
	RC1 speed increase	<b>1 027 x</b>	<b>924 x</b>	<b>2 849 x</b>	<b>1 064 x</b>	<b>753 x</b>	<b>285 x</b>	<b>34 x</b>	<b>7 906 x</b>	<b>7 103 x</b>	<b>566 x</b>	<b>407 x</b>	<b>14 x</b>	
HPSO-TVAC	$G_{f_{min}}$	$3.38 \cdot 10^{-41}$	$6.9 \cdot 10^{-23}$	$2.89 \cdot 10^{-7}$	13	0	$5.54 \cdot 10^{-2}$	-10868.6	2.39	1.83	$2.06 \cdot 10^{-10}$	$1.07 \cdot 10^{-2}$	$7.07 \cdot 10^{-30}$	
	$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$8.50 \cdot 10^{-41}$	$6.89 \cdot 10^{-23}$	$2.97 \cdot 10^{-7}$	16.5	0	$2.08 \cdot 10^{-2}$	289	3.71	2.65	$9.45 \cdot 10^{-10}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$4.05 \cdot 10^{-30}$	
	$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>30 011</b>	<b>31 371</b>	<b>102 499</b>	<b>33 689</b>	<b>64 555</b>	/	<b>44 697</b>	<b>7 829</b>	<b>8 293</b>	<b>52 516</b>	<b>34 154</b>	<b>44 491</b>	
	$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	
	p	100%	100%	100%	100%	100%	0%	100%	100%	100%	100%	56.7%	100%	
	RC1 speed increase	<b>947 x</b>	<b>798 x</b>	<b>3 957 x</b>	<b>2 695 x</b>	<b>3 238 x</b>	/	<b>13 x</b>	<b>705 x</b>	<b>734 x</b>	<b>775 x</b>	<b>327 x</b>	<b>32 x</b>	
DMS-PSO	$G_{f_{min}}$	$3.85 \cdot 10^{-54}$	$2.61 \cdot 10^{-29}$	47.5	32.3	0	$1.1 \cdot 10^{-2}$	-9593.33	28.1	32.8	$8.52 \cdot 10^{-15}$	$1.31 \cdot 10^{-2}$	$2.05 \cdot 10^{-32}$	
	$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$1.75 \cdot 10^{-53}$	$6.6 \cdot 10^{-29}$	56.4	24.1	0	$3.94 \cdot 10^{-3}$	441	6.42	6.49	$1.79 \cdot 10^{-15}$	$1.73 \cdot 10^{-2}$	$8.12 \cdot 10^{-33}$	
	$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>91 496</b>	<b>91 354</b>	<b>185 588</b>	<b>87 518</b>	<b>76 975</b>	<b>180 352</b>	<b>101 829</b>	<b>127 423</b>	<b>115 247</b>	<b>100 000</b>	<b>97 213</b>	<b>95 830</b>	
	$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	
	p	100%	100%	86.7%	100%	100%	40%	20%	100%	100%	100%	56.7%	100%	
	RC1 speed increase	<b>2 886 x</b>	<b>2 325 x</b>	<b>7 166 x</b>	<b>7 001 x</b>	<b>3 849 x</b>	<b>1 081 x</b>	<b>29 x</b>	<b>11 480 x</b>	<b>10199 x</b>	<b>1 475 x</b>	<b>929 x</b>	<b>69 x</b>	
CLPSO	$G_{f_{min}}$	$1.89 \cdot 10^{-19}$	$1.01 \cdot 10^{-13}$	395	11	0	$3.92 \cdot 10^{-3}$	-12557.65	$2.57 \cdot 10^{-11}$	0.167	$2.01 \cdot 10^{-12}$	$6.45 \cdot 10^{-13}$	$1.59 \cdot 10^{-21}$	
	$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$1.49 \cdot 10^{-19}$	$6.51 \cdot 10^{-14}$	142	14.5	0	$1.14 \cdot 10^{-3}$	36.2	$6.64 \cdot 10^{-11}$	0.379	$9.22 \cdot 10^{-13}$	$2.07 \cdot 10^{-12}$	$1.93 \cdot 10^{-21}$	
	$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>72 081</b>	<b>66 525</b>	/	<b>74 815</b>	<b>39 296</b>	<b>99 795</b>	<b>23 861</b>	<b>53 416</b>	<b>47 440</b>	<b>76 646</b>	<b>81 422</b>	<b>59 160</b>	
	$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	
	p	100%	100%	0%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	
	RC1 speed increase	<b>2 274 x</b>	<b>1 693 x</b>	/	<b>5 985 x</b>	<b>1 965 x</b>	<b>598 x</b>	<b>7 x</b>	<b>4 812 x</b>	<b>4 198 x</b>	<b>1 130 x</b>	<b>778 x</b>	<b>43 x</b>	
APSO	$G_{f_{min}}$	$1.45 \cdot 10^{-150}$	$5.15 \cdot 10^{-84}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	2.84	0	$4.66 \cdot 10^{-3}$	-12569.5	$5.8 \cdot 10^{-15}$	$4.14 \cdot 10^{-16}$	$1.11 \cdot 10^{-14}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$	$3.76 \cdot 10^{-31}$	
	$\sigma_{G_{f_{min}}}$	$5.73 \cdot 10^{-150}$	$1.44 \cdot 10^{-83}$	$2.13 \cdot 10^{-10}$	3.27	0	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$5.22 \cdot 10^{-11}$	$1.01 \cdot 10^{-14}$	$1.45 \cdot 10^{-15}$	$3.55 \cdot 10^{-15}$	$2.41 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-30}$	
	$N_{G_{f_{accept}}}$	<b>7 074</b>	<b>7 900</b>	<b>21 166</b>	<b>5 334</b>	<b>4 902</b>	<b>78 117</b>	<b>5 159</b>	<b>3 531</b>	<b>2 905</b>	<b>40 736</b>	<b>7 568</b>	<b>21 538</b>	
	$N_{G_{f_{max}}}$	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	200 000	
	p	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	66.7%	100%	
	RC1 speed increase	<b>223 x</b>	<b>201 x</b>	<b>817 x</b>	<b>427 x</b>	<b>245 x</b>	<b>468 x</b>	<b>1.45 x</b>	<b>318 x</b>	<b>257 x</b>	<b>601 x</b>	<b>72 x</b>	<b>16 x</b>	

**Table 3.** RC1 results for non-standard test conditions - increased dimensionalities (standard domain boundaries, problem-dependent configurations)

test function	RC1 configuration	performance parameters	D									
			3	10	30	50	100	300	1 000	3 000	10 000	30 000
f1	sphere_1	$GF_{min}$	$2.81 \cdot 10^{-43}$	$1.00 \cdot 10^{40}$	$3.64 \cdot 10^{39}$	$2.56 \cdot 10^{47}$	$7.80 \cdot 10^{44}$	$2.98 \cdot 10^{45}$	$2.02 \cdot 10^{34}$	*	*	*
		$\sigma_{GFmin}$	$1.54 \cdot 10^{-42}$	$5.48 \cdot 10^{40}$	$1.99 \cdot 10^{38}$	$9.60 \cdot 10^{47}$	$2.98 \cdot 10^{43}$	$1.63 \cdot 10^{44}$	$1.11 \cdot 10^{33}$	*	*	*
		$N_{GF,accept}$	<b>23.3</b>	<b>24.8</b>	<b>21.8</b>	<b>17.4</b>	<b>17.1</b>	<b>16.9</b>	<b>17.0</b>	<b>17.1</b>	<b>17.5</b>	<b>17.5</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	5.3	2.7	6.2	3.4	3.8	1.1	0.8	0.8	0.6	0.7
		P	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		$GF_{accept}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$	$3.33 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$3.33 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^0$	$3.33 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^1$
		TDL	27.9	93.0	279.1	465.1	930.2	2 790.5	9 301.5	27 904.5	93 015.0	279 045.0
f2	schwefel_P2_22_3	$GF_{min}$	$1.75 \cdot 10^{-35}$	$4.53 \cdot 10^{34}$	$5.82 \cdot 10^{31}$	$1.22 \cdot 10^{31}$	$1.71 \cdot 10^{28}$	$1.70 \cdot 10^{29}$	$4.16 \cdot 10^{28}$	N/A	N/A	N/A
		$\sigma_{GFmin}$	$6.75 \cdot 10^{-35}$	$9.12 \cdot 10^{34}$	$2.28 \cdot 10^{30}$	$4.29 \cdot 10^{31}$	$9.10 \cdot 10^{28}$	$4.52 \cdot 10^{29}$	$2.18 \cdot 10^{27}$	N/A	N/A	N/A
		$N_{GF,accept}$	<b>26.2</b>	<b>28.1</b>	<b>20.5</b>	<b>19.4</b>	<b>17.4</b>	<b>16.8</b>	<b>16.2</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	4.9	4.2	5.8	5.4	3.1	0.8	0.4	N/A	N/A	N/A
		P	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	N/A	N/A	N/A
		$GF_{accept}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$	$3.33 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$3.33 \cdot 10^{-1}$	N/A	N/A	N/A
		TDL	33.0	110.0	330.1	550.1	1 100.2	3 300.6	11 002.1	N/A	N/A	N/A
f3	quadric_3	$GF_{min}$	$2.27 \cdot 10^{83}$	$3.89 \cdot 10^{73}$	$8.61 \cdot 10^{82}$	$5.94 \cdot 10^{80}$	$3.74 \cdot 10^{74}$	$4.67 \cdot 10^{75}$	$1.10 \cdot 10^{69}$	*	*	*
		$\sigma_{GFmin}$	$9.11 \cdot 10^{83}$	$2.11 \cdot 10^{72}$	$4.33 \cdot 10^{81}$	$2.03 \cdot 10^{79}$	$1.95 \cdot 10^{73}$	$1.45 \cdot 10^{74}$	$3.47 \cdot 10^{69}$	*	*	*
		$N_{GF,accept}$	<b>14.5</b>	<b>15.4</b>	<b>14.9</b>	<b>14.1</b>	<b>12.3</b>	<b>11.3</b>	<b>8.5</b>	<b>7.2</b>	<b>5.7</b>	<b>4.7</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	3.4	2.4	2.5	2.1	1.8	1.6	1.7	2.3	1.4	1.3
		P	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		$GF_{accept}$	0.15	4.07	100	453.99	3 578.5	95 664.2	$3.530 \cdot 10^6$	$95.235 \cdot 10^6$	$3 526 \cdot 10^6$	$95 192 \cdot 10^6$
		TDL	22.7	75.7	227.2	378.6	757.3	2 271.9	7 572.9	22 718.7	$75.729 \cdot 10^3$	$227.190 \cdot 10^3$
f4	rosenbrock_1	$GF_{min}$	2.792	9.907	29.912	49.96	99.95	299.96	999.98	*	*	*
		$\sigma_{GFmin}$	0.179	0.097	0.094	0.018	0.053	0.039	0.041	*	*	*
		$N_{GF,accept}$	<b>16.3</b>	<b>14.3</b>	<b>11.9</b>	<b>10.0</b>	<b>10.0</b>	<b>9.9</b>	<b>9.9</b>	<b>10.4</b>	<b>10.4</b>	<b>10.4</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	9.2	9.7	3.4	2.1	1.2	0.7	0.7	0.7	0.6	0.5
		P	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		$GF_{accept}$	7.47	31.46	100	168.5	339.9	1 025.3	3 424.1	10 277.9	34 266.3	$102.804 \cdot 10^3$
		TDL	13.6	45.4	136.3	227.1	454.3	1 362.9	4 542.9	13 628.6	45 428.5	$136.286 \cdot 10^3$
f5	step_3	$GF_{min}$	0	0	0	0	0	0	0	*	*	*
		$\sigma_{GFmin}$	0	0	0	0	0	0	0	*	*	*
		$N_{GF,accept}$	<b>12.9</b>	<b>17.0</b>	<b>18.5</b>	<b>19.7</b>	<b>18.9</b>	<b>18.3</b>	<b>15.8</b>	<b>14.8</b>	<b>15.5</b>	<b>16.1</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	3.1	3.0	2.8	2.7	3.5	5.2	4.7	2.4	1.2	0.9
		P	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		$GF_{accept}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		TDL	17.9	59.9	179.7	299.6	599.1	1 797.4	5 991.5	17 974.4	59 914.7	179 743.9
f6	quadric_noise_5	$GF_{min}$	$2.74 \cdot 10^{-3}$	$2.76 \cdot 10^{-3}$	$2.89 \cdot 10^{-3}$	$2.89 \cdot 10^{-3}$	$3.09 \cdot 10^{-3}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-3}$	*	*	*
		$\sigma_{GFmin}$	$1.81 \cdot 10^{-3}$	$2.08 \cdot 10^{-3}$	$3.21 \cdot 10^{-3}$	$3.60 \cdot 10^{-3}$	$2.84 \cdot 10^{-3}$	$2.47 \cdot 10^{-3}$	$2.64 \cdot 10^{-3}$	*	*	*
		$N_{GF,accept}$	<b>15.7</b>	<b>16.5</b>	<b>103.1</b>	<b>18.7</b>	<b>22.3</b>	<b>22.2</b>	<b>22.3</b>	<b>22.3</b>	<b>22.0</b>	<b>22.0</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	40.0	9.8	58.1	2.7	4.6	1.6	0.9	0.7	0	0
		P	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		$GF_{accept}$	$5.12 \cdot 10^{-3}$	$7.29 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$8.50 \cdot 10^{-1}$	$7.40 \cdot 10^{-1}$	$9.91 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^1$	$9.74 \cdot 10^1$	$1.07 \cdot 10^3$	$9.68 \cdot 10^3$
		TDL	10.9	36.3	108.8	181.3	362.7	1 088.0	3 626.8	10 880.4	36 268.1	108 804.3
f7	schwefel_1A	$GF_{min}$	-1 245.05	-4 100.73	-12 368.5	-16 544.2	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	
		$\sigma_{GFmin}$	36.12	431.01	153.87	7 292.53	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	
		$N_{GF,accept}$	<b>290.4</b>	<b>1 065.1</b>	<b>2 232.4</b>	<b>3 385.1</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	455.1	407.1	478.5	607.3	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		P	100%	96.67%	100%	80%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		$GF_{accept}$	-1 000	-3 333.33	-10 000	-16 666.7	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		TDL	10.9	36.2	108.7	181	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
f8	rastrigin_1	$GF_{min}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	*	*	*
		$\sigma_{GFmin}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	$0 \ll 10^{-14}$	*	*	*
		$N_{GF,accept}$	<b>18.2</b>	<b>13.8</b>	<b>11.6</b>	<b>9.9</b>	<b>9.3</b>	<b>8.0</b>	<b>7.5</b>	<b>7.5</b>	<b>7.6</b>	<b>7.4</b>
		$\sigma_{NGF,accept}$	12.8	4.9	3.3	2.9	2.7	1.5	0.5	0.5	0.5	0.5
		P	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		$GF_{accept}$	5	16.67	50	83.33	166.7	500	1 666.7	5 000	16 666.7	50 000
		TDL	14.1	47.0	141.1	235.1	470.2	1 410.5	4 701.8	14 105.5	47 018.3	141 054.8

test function	RC1 configuration	performance parameters	D											
			3	10	30	50	100	300	1 000	3 000	10 000	30 000		
f 9	noncontinuous_ _rastrigin_1	GF <sub>min</sub>	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	*	*	*	
		σ <sub>GFmin</sub>	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	*	*	*	
		N <sub>GF,accept</sub>	<b>16.0</b>	<b>13.2</b>	<b>12.3</b>	<b>11.1</b>	<b>9.8</b>	<b>8.2</b>	<b>8.5</b>	<b>8.5</b>	<b>8.6</b>	<b>8.4</b>		
		σ <sub>NGF,accept</sub>	17.0	3.1	3.9	1.9	1.3	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
		p	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		GF <sub>accept</sub>	5	16.67	50	83.33	166.7	500	1 666.7	5 000	16 666.7	50 000		
		TDL	14.1	47.0	141.1	235.1	470.2	1 410.5	4 701.8	14 105.5	47 018.3	141 054.8		
f 10	ackley_1	GF <sub>min</sub>	1.24 · 10 <sup>-15</sup>	1.13 · 10 <sup>-15</sup>	1.36 · 10 <sup>-15</sup>	1.84 · 10 <sup>-15</sup>	1.95 · 10 <sup>-15</sup>	2.31 · 10 <sup>-15</sup>	2.19 · 10 <sup>-15</sup>	*	*	*	*	
		σ <sub>GFmin</sub>	1.08 · 10 <sup>-15</sup>	9.01 · 10 <sup>-16</sup>	1.23 · 10 <sup>-15</sup>	1.60 · 10 <sup>-15</sup>	1.66 · 10 <sup>-15</sup>	1.77 · 10 <sup>-15</sup>	1.74 · 10 <sup>-15</sup>	*	*	*	*	
		N <sub>GF,accept</sub>	<b>26.3</b>	<b>26.5</b>	<b>23.6</b>	<b>20.1</b>	<b>17.7</b>	<b>18.2</b>	<b>18.1</b>	<b>19.0</b>	<b>19.1</b>	<b>18.9</b>		
		σ <sub>NGF,accept</sub>	5.9	4.0	6.7	5.8	2.6	1.5	1.0	1.0	0.7	0.7		
		p	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		GF <sub>accept</sub>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>
		TDL	30.5	101.8	305.5	509.1	1 018.2	3 054.6	10 182.1	30 546.3	101 820.8	305 462.5		
f 11	griewank_4	GF <sub>min</sub>	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	*	*	*	*	
		σ <sub>GFmin</sub>	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	*	*	*	
		N <sub>GF,accept</sub>	<b>26.8</b>	<b>23.5</b>	<b>25.3</b>	<b>25.0</b>	<b>24.7</b>	<b>25.3</b>	<b>25.5</b>	<b>25.9</b>	<b>25.5</b>	<b>26.1</b>		
		σ <sub>NGF,accept</sub>	22.0	3.9	3.3	2.7	1.8	1.7	1.7	1.5	1.5	1.3		
		p	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
		GF <sub>accept</sub>	4.59 · 10 <sup>-3</sup>	7.33 · 10 <sup>-3</sup>	1 · 10 <sup>-2</sup>	1.13 · 10 <sup>-2</sup>	1.30 · 10 <sup>-2</sup>	1.60 · 10 <sup>-2</sup>	1.98 · 10 <sup>-2</sup>	2.50 · 10 <sup>-2</sup>	3.68 · 10 <sup>-2</sup>	6.45 · 10 <sup>-2</sup>		
		TDL	29.2	97.4	292.1	486.9	973.8	2 921.4	9 738.2	29 214.5	97 381.6	292 144.8		
f 12	generalized_ _penalized_1	GF <sub>min</sub>	1.23 · 10 <sup>-25</sup>	7.05 · 10 <sup>-13</sup>	1.20 · 10 <sup>-6</sup>	6.48 · 10 <sup>-5</sup>	2.96 · 10 <sup>-3</sup>	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	
		σ <sub>GFmin</sub>	4.81 · 10 <sup>-25</sup>	1.26 · 10 <sup>-12</sup>	1.71 · 10 <sup>-6</sup>	4.00 · 10 <sup>-5</sup>	9.97 · 10 <sup>-4</sup>	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	
		N <sub>GF,accept</sub>	<b>108.6</b>	<b>489.4</b>	<b>1 211.9</b>	<b>2 373.9</b>	<b>9 381.3</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>	<b>N/A</b>
		σ <sub>NGF,accept</sub>	105.5	211.7	269.6	720.5	1 266.7	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		p	100%	100%	100%	100%	96.67%	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		GF <sub>accept</sub>	77.83 · 10 <sup>-3</sup>	25.07 · 10 <sup>-3</sup>	10 · 10 <sup>-3</sup>	6.99 · 10 <sup>-3</sup>	4.72 · 10 <sup>-3</sup>	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		TDL	20.5	68.3	204.9	341.5	682.9	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A

\* Note: Simulations done only until reaching goal function acceptance value

**Table 4.** RC1 results for non-standard test conditions - extended domain (D=30, problem-dependent configurations)

test function	RC1 configuration	DB = 1 x DB <sub>standard</sub>						
		GF <sub>min</sub>	σ <sub>GFmin</sub>	N <sub>GF,accept</sub>	σ <sub>NGF,accept</sub>	p	GF <sub>accept</sub>	TDL
f 1 s	sphere_1	3.64 · 10 <sup>-39</sup>	1.99 · 10 <sup>-38</sup>	<b>21.8</b>	6.2	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	279.1
f 2 s	schwefel_P_2_22_3	5.82 · 10 <sup>-31</sup>	2.28 · 10 <sup>-30</sup>	<b>20.5</b>	5.8	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	330.1
f 3 s	quadric_3	8.61 · 10 <sup>-82</sup>	4.33 · 10 <sup>-81</sup>	<b>14.9</b>	2.5	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	227.2
f 4 s	rosenbrock_1	29.912	0.094	<b>11.9</b>	3.4	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	136.3
f 5 s	step_3	0	0	<b>18.5</b>	2.8	100%	0	179.7
f 6 s	quadric_noise_5	2.89 · 10 <sup>-3</sup>	3.21 · 10 <sup>-3</sup>	<b>103.1</b>	58.8	93.3%	1 · 10 <sup>-2</sup>	108.8
f 7 s	schwefel_1A	-12368.5	153.87	<b>2 232.4</b>	478.5	100%	-10000.0	108.7
f 8 s	rastrigin_1	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	<b>11.6</b>	3.3	100%	50	141.1
f 9 s	noncontinuous_rastrigin_1	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	<b>12.3</b>	3.9	100%	50	141.1
f 10 s	ackley_1A	5.52 · 10 <sup>-3</sup>	2.34 · 10 <sup>-3</sup>	<b>23.3</b>	5.8	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	305.5
f 11 s	griewank_4	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	<b>25.3</b>	3.3	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	292.1
f 12 s	generalized_penalized_1	1.20 · 10 <sup>-6</sup>	1.71 · 10 <sup>-6</sup>	<b>1211.9</b>	269.6	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	204.9
test function	RC1 configuration	DB = 3 x DB <sub>standard</sub>						
		GF <sub>min</sub>	σ <sub>GFmin</sub>	N <sub>GF,accept</sub>	σ <sub>NGF,accept</sub>	p	GF <sub>accept</sub>	TDL
f 1 s	sphere_1	4.34 · 10 <sup>-48</sup>	2.29 · 10 <sup>-47</sup>	<b>22.7</b>	6.3	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	312.0
f 2 s	schwefel_P_2_22_3	9.09 · 10 <sup>-32</sup>	2.45 · 10 <sup>-31</sup>	<b>25.3</b>	7.2	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	363.0
f 3 s	quadric_3	1.47 · 10 <sup>-77</sup>	7.23 · 10 <sup>-77</sup>	<b>17.7</b>	2.8	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	260.1
f 4 s	rosenbrock_1	29.927	0.0812	<b>13.5</b>	4.0	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	169.2
f 5 s	step_3	0	0	<b>21.2</b>	3.6	100%	0	212.7
f 6 s	quadric_noise_5	2.382 · 10 <sup>-3</sup>	2.565 · 10 <sup>-3</sup>	<b>127.6</b>	62.8	96.67%	1 · 10 <sup>-2</sup>	141.8
f 7 s	schwefel_1A	-3 6608.2	5 986.4	<b>267.3</b>	370.4	96.67%	-10000.0	N/A
f 8 s	rastrigin_1	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	<b>14.1</b>	2.9	100%	50	174.0
f 9 s	noncontinuous_rastrigin_1	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	0 (<< 10 <sup>-14</sup> )	<b>15.4</b>	4.6	100%	50	174.0
f 10 s	ackley_1A	1.13 · 10 <sup>-15</sup>	9.01 · 10 <sup>-16</sup>	<b>88.6</b>	157.6	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	338.4
f 11 s	griewank_4	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	0 (<< 10 <sup>-16</sup> )	<b>26.8</b>	4.8	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	325.1
f 12 s	generalized_penalized_1	7.54 · 10 <sup>-6</sup>	1.66 · 10 <sup>-5</sup>	<b>1578.6</b>	689.4	100%	1 · 10 <sup>-2</sup>	237.8

test function	RC1 configuration	DB = 5 x DB <sub>standard</sub>						
		GF <sub>min</sub>	$\sigma_{GFmin}$	N <sub>GF,accept</sub>	$\sigma_{NGF,accept}$	p	GF <sub>accept</sub>	TDL
<b>f 1 s</b>	sphere_1	$6.38 \cdot 10^{-35}$	$3.50 \cdot 10^{-34}$	<b>28.1</b>	6.1	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	327.3
<b>f 2 s</b>	schwefel_P_2_22_3	$2.19 \cdot 10^{-31}$	$1.06 \cdot 10^{-30}$	<b>27.3</b>	6.6	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	378.4
<b>f 3 s</b>	quadric_3	$1.26 \cdot 10^{-72}$	$5.85 \cdot 10^{-72}$	<b>19.3</b>	2.8	100%	$1 \cdot 10^2$	275.5
<b>f 4 s</b>	rosenbrock_1	29.959	0.0409	<b>15.0</b>	4.2	100%	$1 \cdot 10^2$	184.6
<b>f 5 s</b>	step_3	0	0	<b>21.4</b>	2.4	100%	0	228.0
<b>f 6 s</b>	quadric_noise_5	$3.414 \cdot 10^{-3}$	$2.68 \cdot 10^{-3}$	<b>125.4</b>	84.8	96.67%	$1 \cdot 10^{-2}$	157.1
<b>f 7 s</b>	schwefel_1A	-58 177.3	21 116.38	<b>125.6</b>	219.4	90%	-10000.0	N/A
<b>f 8 s</b>	rastrigin_1	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	<b>14.4</b>	3.5	100%	50	189.3
<b>f 9 s</b>	noncontinuous_rastrigin_1	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	<b>19.9</b>	2.3	100%	50	189.3
<b>f 10 s</b>	ackley_1A	2.824	7.324	<b>119.6</b>	168.7	86.7%	$1 \cdot 10^{-2}$	353.8
<b>f 11 s</b>	griewank_4	0 ( $\ll 10^{-16}$ )	0 ( $\ll 10^{-16}$ )	<b>28.3</b>	3.6	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	340.4
<b>f 12 s</b>	generalized_penalized_1	$1.05 \cdot 10^{-5}$	$1.23 \cdot 10^{-5}$	<b>1740.9</b>	504.0	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	253.2

**Table 5.** RC1 results for non-standard test conditions - rotated functions (standard domain boundaries, D=30, problem-dependent configurations)

test function	RC1 configuration	GF <sub>min</sub>	$\sigma_{GFmin}$	N <sub>GF,accept</sub>	$\sigma_{NGF,accept}$	p	GF <sub>accept</sub>	TDL
<b>f 1 r</b>	sphere_3	$4.76 \cdot 10^{-69}$	$1.96 \cdot 10^{-68}$	<b>22.8</b>	4.3	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	279.1
<b>f 2 r</b>	schwefel_P_2_22_2	$3.92 \cdot 10^{-19}$	$2.14 \cdot 10^{-18}$	<b>36.7</b>	23.3	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	330.1
<b>f 3 r</b>	quadric_3	$3.72 \cdot 10^{-76}$	$1.26 \cdot 10^{-75}$	<b>18.4</b>	2.5	100%	$1 \cdot 10^2$	227.2
<b>f 4 r</b>	rosenbrock_4	29.867	0.078	<b>14</b>	4.6	100%	$1 \cdot 10^2$	136.3
<b>f 5 r</b>	step_1	0	0	<b>17.3</b>	2.8	100%	0	179.7
<b>f 6 r</b>	quadric_noise_5	$2.747 \cdot 10^{-3}$	$2.139 \cdot 10^{-3}$	<b>115.7</b>	90.9	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	108.8
<b>f 7 r</b>	schwefel_2	-26 426.1	13 321.58	<b>607.7</b>	714.5	100%	-10000.0	108.7
<b>f 8 r</b>	rastrigin_1	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	<b>26.3</b>	19.3	100%	50	141.1
<b>f 9 r</b>	noncontinuous_rastrigin_1	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	0 ( $\ll 10^{-14}$ )	<b>30.9</b>	19.8	100%	50	141.1
<b>f 10 r</b>	ackley_2B	$1.01 \cdot 10^{-15}$	$6.49 \cdot 10^{-16}$	<b>90.0</b>	147.3	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	305.5
<b>f 11 r</b>	griewank_4	0 ( $\ll 10^{-16}$ )	0 ( $\ll 10^{-16}$ )	<b>26.3</b>	4.1	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	292.1
<b>f 12 r</b>	generalized_penalized_2	$3.649 \cdot 10^{-3}$	$1.893 \cdot 10^{-2}$	<b>1116.1</b>	895.3	100%	$1 \cdot 10^{-2}$	204.9

## REFERENCES

- [1] Петковић А. Глобални претраживач РЧ1, класе PSO ([www.twirpx.com/file/338391](http://www.twirpx.com/file/338391))
- [2] Zhan Z-H, Zhang J, Li Y, Chung H. Adaptive Particle Swarm Optimization, IEEE, 2009.
- [3] Clerc M. Particle Swarm Optimization, ISTE Ltd, 2006.

## LOCAL DOUBLE LOGARITHMIC RECONSTRUCTION TECHNIQUE

---

In one space dimension the conservation law takes the form as partial differential equation  $u_t + f(u)_x = 0$ , where  $u: R \times R^+ \rightarrow R^m$ ,  $f: R^m \rightarrow R^m$ . From the integral form of conservation law  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dV + \int_{\partial\Omega} F(u) \cdot n dS = 0$  the successful numerical approximation method known as the Finite Volume Method is derived. In order to achieve wanted order of accuracy of a certain finite volume method, several reconstruction methods are recommended MUSCLE, ENO (Essentially Non Oscillatory), WENO (Weighted ENO), LHR (Local Hyperbolic Reconstruction), LHHR (Local Harmonic Hyperbolic Reconstruction), LLR (Local Logarithmic Reconstruction), DLR (Double Local Reconstruction). Finally, there is LDLR (Local Double Logarithmic Reconstruction) which upgrades most of the mentioned reconstructions. LDLR holds third order of accuracy at local extremes, it is local variation bounded and it exists for all input data. In this paper LDLR is presented.

---

### INTRODUCTION

Finite volume methods are derived from the conservation law:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x,t) dx + \int_{\partial\Omega} f(u(x,t)) \cdot n dS = 0$$

The point values of the flux along the boundary determines the dynamics of the conserved variables. Finite volume scheme give us the approximations of the local averages in computational cells and these averages are determined by the flow balance across the cell boundary. That is why the accurate computation of fluxes along the boundary is of the grate importance for finite volume schemes. But, during the simulation the available data are actually average quantities of the state variables. Thus, accurate point values of the flux along the boundary need to be reconstructed from these averages.

This problem was considered since 70's. At first, a piecewise polynomial reconstructions with higher degree polynomials were suggested (MUSCULE, PPM, etc...). Knowing that the solutions of conservation laws are sensitive on artificial oscillations, the main disadvantage of this type of reconstruction is the fact that the polynomials of higher degree can produce oscillations. To improve this, ENO (Essentially Non Oscillatory) schemes were developed. In these methods, among the several higher degree polynomials, the one of the lowest variation is selected. The next step forward is WENO (Weighted ENO), which uses a convex combination of candidate stencils.

There are several reconstruction techniques based on hyperbolas, such as LHR (Local Hyperbolic Reconstruction) and LHHR (Local Harmonic Hyperbolic Reconstruction). Using this type of reconstruction methods eventual discontinuities inside the cell can be located at the cell boundary. Since the hyperbola is monotonic function, the order of a hyperbolic reconstruction will be reduced at the local extremes. This implies using some sort of limiters. The limiters are needed to make the reduction possible.

Finally, the logarithmic function was taken as a governing function. Known logarithmic reconstructions are for example LLR (Local Logarithmic Reconstruction) and DLR (Double local reconstruction). LDLR (Local Double Logarithmic Reconstruction) is based on two logarithmic functions. This logarithmic reconstruction technique improves its forerunners (LLR and DLR). Compared to LLR, the LDLR holds third order of accuracy at local extremes as well. LDLR also upgrades DLR because it exists for all input data.

### LDLR- DEFINING A RECONSTRUCTION FUNCTION

As mentioned before, the aim is to achieve the full third order reconstruction scheme. The theoretical

<sup>1</sup> Faculty of Sciences and Mathematics, University in Kosovsaka Mitrovica, Serbia

basement in obtaining this goal is next lemma:

**Lemma 1:** Let  $f, g \in C^3[a, b]$ ,  $h = b - a$ , and

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

$$(f - g)'(a) = O(h^2) = (f - g)'(b) \text{ then}$$

$$(f - g)(x) = O(h^3) \text{ for all } x \in [a, b].$$

The problem can be exposed as next: how to find a piecewise smooth function which would exist in each cell. This function should be LOCAL since it depends only on information from the central and the nearest neighboring cells. Therewith, it can be expected that wanted function is composed of two logarithmic functions. Shortly, it has a DOUBLE LOGARITHMIC form. So, a logical name for needed function is Local Double Logarithmic Reconstruction or in short LDLR. Wanted piecewise function is defined in

each cell  $C_i = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$  so it is enough to analyze the cell  $C_0$  only. The reconstructing function in cell  $C_0$  has the following form:

$$r(x) \approx k_1 + k_2 \log(x + k_3) + k_4 \log(x + k_5)$$

Denote with

$$\varphi_0(x) = -\frac{ch}{a} \log \left[ x - x_0 - \frac{h}{2} \left( \frac{2}{a} - 1 \right) \right] - \frac{dh}{b} \log \left[ x - x_0 - \frac{h}{2} \left( \frac{2}{b} - 1 \right) \right] \quad (1)$$

function defined for  $x \in C_0$ , where  $a, b, c, d$  are unknown parameters.

Define reconstruction function as:

$$r_0 = v_0 + \varphi_0(x) - \frac{1}{h} \int_{c_0} \varphi_0(\xi) d\xi \quad (2)$$

where  $v_0 = \frac{1}{h} \int_{c_0} r_0(x) dx$  is the cell average of unknown function in  $C_0$ .

Now, the reconstructing task is to determine the parameters  $a, b, c, d$  by certain conditions and properties that posed function  $r_0(x)$  satisfies.

One of assumptions is that  $r_0(x)$  is well-defined smooth function. This assumption is based on next lemma:

**Lemma2:** Suppose that  $\varphi(x) = \frac{h}{\lambda} \log \left[ x - x_0 - \frac{h}{2} \left( \frac{2}{\lambda} - 1 \right) \right]$  and  $\psi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{h} \int_{c_0} \varphi(\xi) d\xi$  for  $x \in C_0$ .

Then  $\psi$  is real and smooth for  $\lambda \in (-\infty, 1)$ .

According to lemma1 a third order of accuracy is achieved. From this, order conditions can be posed as next: denote by  $v_0$  the cell average of unknown function in  $C_0$  and let  $d_1$  and  $d_2$  be the left and the right second order approximation to the derivatives of the approximate function  $r_0$

$$v_0 = \frac{1}{h} \int_{c_0} r_0(x) dx \quad (3)$$

$$d_1 = r_0' \left( x - \frac{h}{2} \right) \quad (4)$$

$$d_2 = r_0' \left( x + \frac{h}{2} \right) \quad (5)$$

After some calculations in (4) and (5), we get:

$$d_1 = r_0' \left( x - \frac{h}{2} \right) = \varphi_0' \left( x - \frac{h}{2} \right) = c + d \quad (6)$$

$$d_2 = r_0' \left( x + \frac{h}{2} \right) = \varphi_0' \left( x + \frac{h}{2} \right) = -\frac{d(a-1) + c(b-1)}{(a-1)(b-1)} \quad (7)$$

This can be rewritten as:

$$c = \frac{(a-1)(d_2(1-b) - d_1)}{b-a} \quad (8)$$

$$d = d_1 - c \quad (9)$$

The next assumption is that the reconstruction is symmetric in the following way:

$$\text{If } r_0' \left( x_0 - \frac{h}{2} \right) = -r_0' \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) \text{ then } r_0(x_0) = 0$$

This symmetry condition will give the relation between remaining two parameters  $a$ , and  $b$

$$0 = r_0(x_0) \Big|_{d_1=-d_2} = \varphi_0(x_0) \Big|_{d_1=-d_2} = 2d_2 \frac{ab - a - b}{(a-2)(a-1)}$$

which implies:

$$b = \frac{a}{a-1} \quad (10)$$

According to lemma2, having this result, it can be concluded that the reconstructing task is well posed if  $a, b < 1$ . (The case  $a = b$  is possible only for  $a = b = 0$ ).

Local variation bounded is the next wanted property of the reconstruction function  $r_0$ . The definition states: The local variation of function  $f$  in a cell  $C_i$  is given by  $LV(f_i) = TV(f) \Big|_{C_i}$ , where  $TV(f)$  is the total variation for a grid function  $f$ . The function is local variation bounded in cell  $C_i$  if  $LV(f_i) = O(h)$ , where  $h$  is the cell size.

After applying the previous definition to the reconstruction function, we get:

$$LV(r_0) = \left| r_0 \left( x + \frac{h}{2} \right) - r_0 \left( x_0 - \frac{h}{2} \right) \right| = h \left| \frac{cb \log(1-a) + d a \log(1-b)}{ab} \right|$$

Considering relations (8)-(10), the local variation of function  $r_0$  can be expressed as a function of parameter  $a$  only:

$$LV(r_0) = h \frac{a-1}{a-2} \left| \frac{\log(1-a)(d_1 + d_2)}{a} \right| \quad (11)$$

In order to see when the required function is local variation bounded, we shall analyze the case of discontinuities within the cell, i.e.  $d_1 = r_0' \left( x - \frac{h}{2} \right) = O\left(\frac{1}{h}\right)$  and  $d_2 = r_0' \left( x + \frac{h}{2} \right) = 0$  (1) or vice versa. Otherwise, the case is trivial since when there is no discontinuity the local variation is  $o(h)$  proportional.

Lemma3: Assume that  $a = 1 - mh^q$  for  $d_1 = O\left(\frac{1}{h}\right)$ ,  $d_2 = O(1)$  and  $d_1 d_2 > 0$ , where  $0 < m < \tilde{m} < \infty$ , then

$$LV(r_0) = O(h^{|q|} |\log(h)|).$$

Now we can focus on the case of the isolated extreme. One of the main advantages of the LDLR is that it reconstructs the isolated extreme within cell. The question is what happens with the local variation in this special case. Does it stays sufficiently small in the case  $d_1 d_2 < 0$ ? With assumption  $a \in (0, 1)$  the answer on this question is positive (see [2]).



Now let state next lemma:

Lemma4: If  $r_0$  is the LDLR with monotone data  $|d_1|$  and  $|d_2|$  (or  $-|d_1|$  and  $-|d_2|$ ) and  $\tilde{r}_0$  the corresponding LDLR with non-monotone data,  $d_1 d_2 < 0$ , then  $LV(\tilde{r}_0) \leq LV(r_0)$ .

The generalization for non-monotone data is given by the next corollary:

Corollary5: Assume that for  $d_1 = O\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $d_2 = O(1)$ , we have  $a = 1 - mhq$ ,  $0 < m \leq \tilde{m} < \infty$ , then  $LV(r_0) = O(h^{|a|} |\log(h)|)$ .

The last thing to do before expressing the final LDLR formula is describing the parameter  $a$  as a function of the lateral derivatives,  $a(d_1, d_2)$ . After relaxing the condition  $a \in (0, 1)$  to  $a \in [0, 1]$  it can be determined the expression for  $q$ :

$$q = \frac{\log(Ch) - \log(-\log h)}{\log h}, \quad C > 0$$

Taking  $h \in (0, 1)$  and maximizing the previous equation it can be obtained:

$$q^* = 1 + \frac{1}{C \exp(1)} \quad (12)$$

Obviously, smaller  $C$  gives larger  $q$ . At the same time, choosing a smaller  $C$  will insure a smaller local variation in a final result. For  $C = 1$  we have  $q = 1.4$ , and this is the most common choice for the constant  $C$ .

## THE FINAL ALGORITHM

Finally, we are able to write down LDLR scheme written in a indirect form. Actually, the lateral derivatives are much more suitable for direct computation:

$$r_0 = \left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right) = v_0 + ch\mu^+(a) + dh\mu^-(b) \quad (13)$$

$$\mu^+(t) = -\log \frac{(1-t) + t}{t^2} \quad (14)$$

$$\mu^-(t) = \frac{(t-1)\log(1-t) - t}{t^2} \quad (15)$$

The functions  $\mu^+$  and  $\mu^-$  are related in the next way:

$$\mu^\pm\left(b = \frac{a}{a-1}\right) = (a-1)\mu^\mp(a)$$

We can now apply derived results and extend LDLR in two space dimension:

$$r_{ij}(x, y) = v_{ij} + \varphi_{ij}(x, y) - \frac{1}{\Delta x_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\xi, \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\Delta y_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\eta, \mu) d\eta d\mu \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(x, y) = & -\frac{c_{ij}\Delta x_{ij}}{a_{ij}} \log \left[ x - x_{ij} - \frac{\Delta x_{ij}}{2} \left(\frac{2}{a_{ij}} - 1\right) \right] - \frac{d_{ij}\Delta x_{ij}}{b_{ij}} \log \left[ x - x_{ij} - \frac{\Delta x_{ij}}{2} \left(\frac{2}{b_{ij}} - 1\right) \right] + \\ & + \frac{g_{ij}\Delta y_{ij}}{e_{ij}} \log \left[ y - y_{ij} - \frac{\Delta y_{ij}}{2} \left(\frac{2}{e_{ij}} - 1\right) \right] - \frac{k_{ij}\Delta y_{ij}}{l_{ij}} \log \left[ y - y_{ij} - \frac{\Delta y_{ij}}{2} \left(\frac{2}{l_{ij}} - 1\right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

From this expression it is obvious that each cell has its own unique reconstruction or said in another way, the formula is 'cell-dependent'. In a rectangular mesh the cell averages are given with:

$$v_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(C_{ij})} \iint_{C_{ij}} r_{ij}(x, y) dx dy \quad (18)$$

where  $\text{vol}(C_{ij})$  is the volume of the cell  $C_{ij}$ .

For non-uniform, irregular quadrilateral mesh it is derived the exact form of  $v_{ij}$ .

$$v_{ij} = Q_{ij}^n - \frac{1}{\text{vol}(C_{ij})} \iint_{C_{ij}} \left[ \varphi_{ij}(x, y) - \frac{1}{x_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\xi, \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\Delta y_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\eta, \mu) d\eta d\mu \right] dx dy \quad (19)$$

where  $Q_{ij}^n = \frac{1}{\text{vol}(C_{ij})} \iint_{C_{ij}} r_{ij}(x, y) dx dy$ . (In the case of rectangular mesh  $v_{ij}$  is actually  $Q_{ij}^n$ ).

The required third order accuracy is achieved by the reconstruction trough adding the parameter  $v_{ij}$ :  
Finally, LDLR in two space dimension on a quadrilateral mesh has the form:

$$r_{ij} = Q_{ij}^n - \frac{1}{\text{vol}(C_{ij})} \iint_{C_{ij}} \left[ \varphi_{ij}(x, y) - \frac{1}{x_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\xi, \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\Delta y_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\eta, \mu) d\eta d\mu \right] dx dy + \quad (20)$$

$$+ \varphi_{ij}(x, y) - \frac{1}{\Delta x_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\xi, \theta) d\xi d\theta - \frac{1}{\Delta y_{ij} c_{ij}} \int \varphi_{ij}(\eta, \mu) d\eta d\mu$$

## LITERATURE

- [1] LeVeque, Randall J.(1-WA), 2002: Finite volume methods for hyperbolic problems, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Robert Artebrant and Hans Joachim Schroll, 2006: Limiter-free third order logarithmic reconstruction, SIAM J.Sci.Comp. 28(1), pp 359-381.
- [3] Robert Artebrant and Hans Joachim Schroll, 2005: Conservative Logarithmic Reconstruction and Finite Volume Methods, SIAM J.Sci.Comp. 27(1), pp 294-314

## INFORMATION TECHNOLOGY IN THE MEASURING AND CONTROL SYSTEMS

---

*In School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies on department Automatics and vehicle control systems performs among others teaching course Real time control. In this paper is described practical application in systems for measuring and control in temperature process. As a result of the fast development in technology, many complex control tasks have been solved by applying Programmable Logical Controllers (PLC). This work includes a detailed review of Programmable Logical Controllers manufactured by Omron applied in control of temperature process. The assignment of controlling and regulating the temperature of the process to quickly and accurately provide the desired temperature. Temperature in the tube, which is a simulated space where temperature regulation is done, is measured using temperature sensor PT-100. With the help of temperature module for accepting and processing the analog signal to the size of the temperature leads to the door of the PLC, and based on the measured size with the help of a software solution that we have entered in the PLC is performed over the heater control. With the engine output control device, and is situated at the end of the tube, and controls the flow of air to enable the maintenance of set temperature.*

---

### INTRODUCTION

The increasing presence of automatic control systems in various sectors of the modern industrial society is a result of strict demands referring to economical and quality operation that are imperatively put forward to modern technical systems and technological facilities, both regarding their functioning as a whole and operation of their individual elements. The process automatics enables automatic control of technological processes, i.e. their output variables such as temperature, pressure, flow, level, humidity, density, and so on, pursuant to conditions stipulated by the production technology and output product quality. Electrical and other revolving machines where the number of revolutions (frequency), voltage, electricity and power are most frequently regulated also represent the traditional field of the automatic regulation system use.

Control is a process in which one or more input variables in a limited system affect one or more output variables according to a preset rule. On the other side, during regulation an output variable in a limited system affects the output variable, maintaining the preset or desired condition. During regulation, information is transferred in two directions, from the input to output and from the output to input, at the same time but by different ways.

The modern control system concept is reduced to the use of digital technology. What makes digital technology so superior are its numerous advantages in comparison to traditional static and electromechanical solutions, as well as the attribute of constant and increasing development, which undoubtedly shows that the concepts of digital technological solutions are the ones that will completely prevail. The rapid development of digital technology brings new, modern control concepts, with numerous advantages when compared to former solutions. Today we can say with no doubt that a digital technology era has started, and thus all technological concepts should be considered in the new light. Although instead of discreet relays, counters, timers and similar devices we today use integrated and internal logic circuits, PLC operations are performed as if the said discreet components were still in use.

However, control with the use of PLC provides reliable and efficient work and performance that were not characteristic for relay devices earlier. Programmable logic controller (PLC) is a modern solution of an industrial computer that, due to its modular structure, enables flexible configuring of an efficient protection and management system (SZU) in various industrial facilities. Especially important role be-

<sup>1</sup> School of Electrical and Computer Engineering of Applied Studies, Belgrade, Serbia

longs to the process of communication and connection of PLC's. Today we can witness general connect- edness of all processes on the Internet as well. Automatics and all management processes thus follow development and use of all information achievements, and the use of digital communication structures is of special significance.

## **PROGRAMMABLE LOGIC CONTROLLERS - PLC**

Historically observed, programmable controllers originate from control systems based on the use of relay diagrams. However, control with the use of PLC enables reliable and efficient functioning and performance that were not characteristic for relay devices earlier.

A Programmable controller is a solid state user programmable control system with functions to control logic, sequencing, timing, arithmetic data manipulation and counting capabilities. It can be viewed as an industrial computer that has a central processor unit, memory, input output interface and a programming device. The central processing unit provides the intelligence of the controller. It accepts data, status information from various sensing devices like limit switches, proximity switches, executes the user control program store in the memory and gives appropriate output commands to devices like solenoid valves, switches etc. Input output interface is the communication link between field devices and the controllers; field devices are wired to the I/O interfaces. Through these interfaces the processor can sense and measure physical quantities regarding a machine or process, such as, proximity, position, motion, level, temperature, pressure, etc. Based on status sensed, the CPU issues command to output devices such as valves, motors, alarms, etc. Programmer unit provides the man machine interface. It is used to enter the application program, which often uses a simple user-friendly logic [1].

Benefits of Programmable Controllers:

Programmable controllers are made of solid state components and hence provide high reliability. They are flexible and changes in sequence of operation can easily be incorporated due to programmability. They may be modular in nature and thus expandability and easy installation is possible. Use of PLC results in appreciable savings in Hardware and wiring cost. They are compact and occupy less space. Eliminate hardware items like Timers, counters and Auxiliary relays. The presence for timers and counters has easy accessibility. PLC can control a variety of devices and eliminates the need for customized controls. Easy diagnostic facilities are provided as a part of the system. Diagnosis of the external systems also becomes very simple. Thus easy service/maintenance. Programming devices provide operator friendly interface with the machine. Being an outcome of the latest art of electronics technology, Programmable controllers provide higher level of performance with computers is possible. Useful management data can be obtained and maintained. It has total protections against obsolescence and has wide scope for upgradation.

PLC is, in fact, an industrial micro-computer system, in which the hardware and software are specifically adjusted to the industrial environment. It monitors inputs, makes decisions on the basis of an installed program, and controls outputs, and through them it controls a process or a machine. Basically, PLC consists of a central processing unit (CPU), memory, input and output interface units, and communication interface, which can be clearly seen in Figure 1.

The Central Processing Unit (CPU) is the brain of the PLC controller. The CPU itself is usually a micro-controller - earlier 8-bit micro-controllers such as 8051, and now 16 and 32-bit micro-controllers. The CPU also takes care of communication, mutual connectedness of other PLC controller parts, the program performance, memory management, input supervision and setting of the output. PLC controllers have complex routines for performing memory checks to make sure that the PLC memory is not damaged. Generally speaking, the CPU unit performs a large number of checks of the very PLC controller in order to notice potential mistakes on time. It is enough to look at any PLC controller to see that there are several indicators in the form of LED-diodes for reporting failures.

The system memory is used by the PLC for the operational system. Besides the operational system it also

includes a user program translated from Ladder Diagram into the binary form. The contents of FLASH memory can be changed only if the user program is changed. Instead of FLASH memory former PLC controllers had EPROM memory that could be deleted with a UV lamp and programmed on programmers. With the use of FLASH technology this process has been significantly shortened. Reprogramming of the program memory is performed via a serial cable in the program for application development.

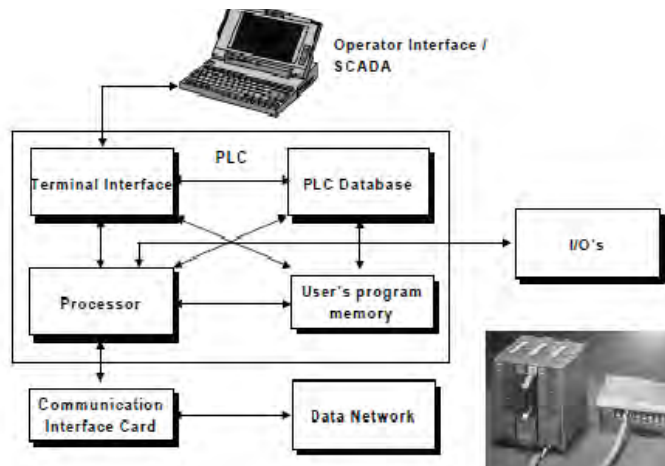


Fig. 1. PLC architecture

The user memory is divided into blocks that have specific functions. Some memory parts are used for storing the input and output status. The real input status is stored either as “1” or “0” in a specific memory bit. Every input and output has one corresponding bit in the memory. Other memory parts are used for storing the values of variables used in the user program. For instance, the timer or counter value would be stored in this part of memory.

The PLC controller can be reprogrammed on the computer or with the use of manual programmers. This practically means that every PLC controller can be programmed on the computer if there is software for its programming. Today’s portable computers are ideal for reprogramming PLC controllers in the very factory, which is of great significance for industry. Another very important thing is that after the system is reprogrammed the correct program is reloaded into the PLC. It is also useful to check from time to time that the program in the PLC is not changed. This helps to avoid dangerous situations in factory premises (some car manufacturers have established communication networks that regularly check programs in PLC controllers to assure performance of correct programs only).

Almost every program for programming PLC controllers has various useful options such as: forced turning on and turning off of system input/output lines (I/O lines), monitoring of the program operation in real time as diagram documenting. This documenting is necessary for understanding and finding failures; the programmer can add remarks, names of input or output devices and comments that can be useful for finding failures or maintaining the system. Adding comments and remarks enables any technician, not only the person who has developed the system, to immediately understand the ladder diagram. Comments and remarks can even precisely state numbers of parts to be replaced if needed. This would accelerate repair of any problems caused by bad parts. The old way was such that the person who had developed the system had huge professional insurance since no one else could understand what had been done. A properly documented ladder diagram allows any technician to understand the system functioning completely [2].

Electrical supply is used for feeding electricity to the central processing unit. Most PLC controllers operate on 24 VDC or 220 VAC. In some PLC controllers the electrical supply is a separate module. Those are usually bigger PLC controllers, while smaller or medium series have integrated supply modules. Different types of modules have different electricity consumption.

PLC controllers rate high in our market and come from a large number of various manufacturers such as Siemens, Allen-Bradley, Omron, Mitsubishi, Fatek, etc. An advantage of their use is that the approach of all companies is the same, and the way of use and programming is quite similar. In this work we used the PLC made by Omron.

### THE PRINCIPLE OF PLC OPERATION

The basis of PLC operation is continuous program scanning. This can be observed as a scan-cycle that comprises three important steps. There are usually more than three steps, but we can focus our attention to them as fundamental parts of the cycle. In principle, other parts perform the system control and check current values of internal counters and timers.

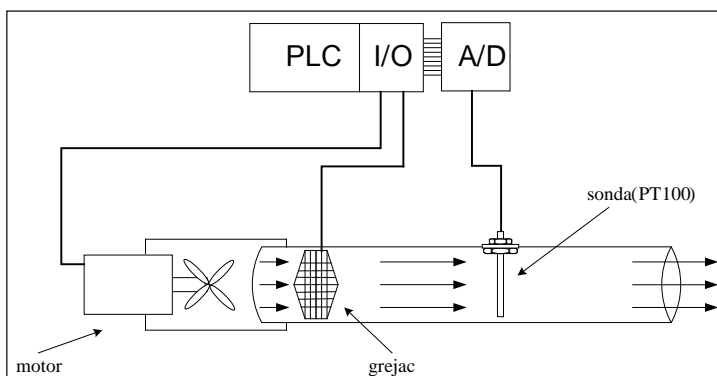
Step 1 - Checking the input status - PLC first checks each input in order to determine which of them has the ON status, i.e. the OFF status. In other words, it checks whether the sensor connected to the first input is activated, then it checks the second input, the third input, and so on. The data obtained by the processor in this step are stored in the memory to be used in the following step.

Step 2 - Performing the program - Here the PLC performs the program it was given, instruction by instruction. On the basis of the program in which we have defined the controller's reply to appearance of the signal on some of the inputs, and on the basis of knowing the input status acquired in the previous step, appropriate activity is carried out. It can be defined as activation of an output. The performance results are also stored in the memory to be used later, in the following step.

Step 3 - Checking and correction of the output status - Finally, the PLC checks the output status and changes it if needed. The change is carried out on the basis of the input status read in the first step, and on the basis of the program performance results from the second step. After performance of the third step, the PLC goes back, to the beginning of the cycle, and repeats the steps over and over again. The scanning time is defined by the time needed to perform the three described steps, and the program characteristic is sometimes very important [3].

### REALIZATION OF THE TEMPERATURE PROCESS CONTROL

The task of the system for control and regulation of a temperature process is to provide desired temperature rapidly and accurately. Temperature in the tube, which represents a simulated place where temperature regulation is carried out, is measured with the use of the temperature sensor PT-100. With the use of a temperature module for receiving and processing the analogue temperature value, this signal is led to the PLC input, and on the basis of the measured value, and with the use of the program solution written into the PLC, control over the heater is performed. The heater is located within the tube in which temperature is measured. With the use of an engine that represents an output control device and is located at the end of this tube, the air flow is controlled, which enables maintenance of the given temperature [4].



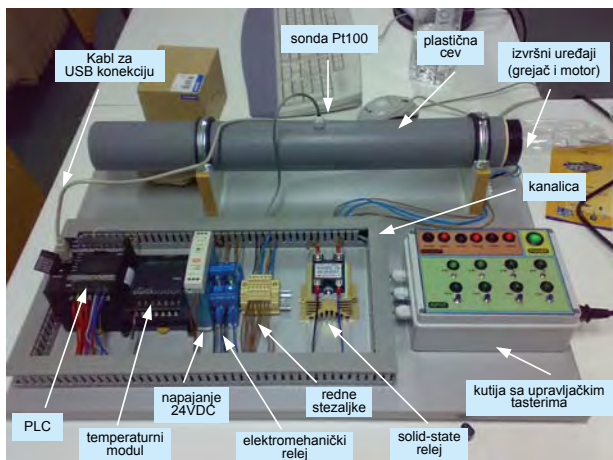


Fig. 2. Concrete realized task

## LITERARURE

- [1] V. V. Petrović, *Upravljanje u realnom vremenu - Priručnik za Programabilne Logičke Kontrolere*, Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, Beograd, 2009.
- [2] N. Matić, *Uvod u industrijske PLC kontrolere*, 2. izdanje, Mikroelektronika, Beograd, 2001.
- [3] L.A.Bryan, E.A.Bryan; *Programmable Controller*, Industrial Text, 1997.
- [4] V. V. Petrović, H. Milošević, A. Žorić, S. Obradović, *Control in Tehnical Process by Applying Programmable Logical Controllers*, X Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, Niš, 2010.

## THE DISTRIBUTION OF SPLIT-SV(1) MODEL

---

In this paper we continue our research on special type heteroscedastic time series that we defined in [5]. We discuss the stationarity of the model Split-SV(1). Logarithm of the volatility process is wide sense stationary and strict stationary also. The one dimensional marginal distribution of such defined process is given.

---

### INTRODUCTION

Stochastic analysis of financial series is usually based on time series models that describe their dynamics and behavior in real time. One of the main problems in this approach is how formally to describe the volatility as a measure of variability or dispersion of a particular financial series. In modern literature there are mainly two different approaches to mathematical modeling of volatility. The first of these two is described by the class of models which uses a deterministic approach to express the functional dependence of volatile series on its previous realization. On the other hand, there is a group of models in which the time dependence has a random character i.e. their main feature is the presence of two independent sources of randomness that determine the behavior of volatility, and thus the financial series as a whole. Such models, first introduced by Taylor [7], are called the *stochastic volatility models* (SV models) and represent a particularly important class of nonlinear stochastic models.

Some modifications and generalizations of standard Taylor's SV model was created a few years later (see, for example, Harvey et al. [2] or Priestly [4]). Here we discuss a modification of the standard SV model, introduced by Stojanović and Popović [5], which we deem suitable in some practical applications. The main interest in the analysis of financial series and the corresponding model is to describe the distribution of the appropriate sequence of random variables, thus, from the stochastic point of view, its behavior will be described completely. Therefore, the most of this paper is devoted to the description of the distribution of Split-SV(1) and, consequently, of its parameters. It will be seen that the distribution is somewhat more complex than the standard Taylor-distribution of SV model.

### DEFINITION OF THE MODEL

In the basic interpretation, time series  $(h_n)$  is the *noise-indicator model of stochastic volatility (of order 1)* or, shortly, the *Split-SV(1) model* if for an arbitrary  $n \in \mathbf{Z}$  it satisfies the relations

$$\begin{cases} h_n = \sigma_n \varepsilon_n \\ \sigma_n = e^{\frac{1}{2}\Delta_n} \\ \Delta_n = \ln \sigma_n^2 = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + \xi_n q_{n-1} \end{cases}, \quad (1)$$

where  $(\varepsilon_n)$  is the sequence of independent identically distributed (i.i.d.) random variables with Gaussian  $N(0,1)$  distribution,  $(\zeta_n)$  is i.i.d. sequence with Gaussian  $N(0, \delta^2)$  distribution and  $(\varepsilon_n)$  and  $(\zeta_n)$  are mutually independent sequences. The series  $(\sigma_n)$  is a sequence of random variables which we commonly call *volatile series*, or *volatility*. The series  $(\sigma_n)$  represents autoregressive model with coefficients  $a_0$  and  $a_1 \neq 0$  with "optional" noise  $(\xi_n)$ . Specially, we further define so called *noise-indicator*, i.e. the sequence  $(q_n)$  which satisfies the equality

$$q_n = I(\xi_n^2 \geq c) = \begin{cases} 1, & \xi_n^2 \geq c \\ 0, & \xi_n^2 < c \end{cases}. \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Faculty of Sciences and Mathematics, Niš, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of Sciences and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia



The members of this sequence indicate the realization of a series  $(\xi_n)$  which is significant enough to be included in the value of (1). *The critical value of the reaction*  $c > 0$  determines the significance level of noise realizations  $(\xi_n)$  for which we denote

$$m_c = E[I(\xi_n^2 \geq c)] = P\{\xi_n^2 \geq c\}. \quad (3)$$

It is clear that the constant  $c$  determines the value of  $m_c$  and vice versa, and both of these values we equally use in further examination of Split-SV model.

### THE PROPERTIES OF AUTOREGRESSIVE SEQUENCE $(\Delta_n)$

Firstly, we shall determine the stationarity conditions and the basic characteristics of the series  $(\Delta_n)$ . By the successive substitutions of the values of this series for  $\Delta_{n-j}$ ,  $j = 1, \dots, k$  we get

$$\Delta_n = \sum_{j=0}^{k-1} a_1^j (a_0 + \xi_{n-j} q_{n-j-1}) + a_1^k \Delta_{n-k}, \quad (4)$$

and as the limit, when  $k \rightarrow \infty$ , we get

$$\Delta_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j (a_0 + \xi_{n-j} q_{n-j-1}) = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \xi_{n-j} q_{n-j-1}. \quad (5)$$

Therefore, for  $|a_1| < 1$  the sequence  $(\Delta_n)$  has the mathematical expectation

$$\mu = E(\Delta_n) = \frac{a_0}{1-a_1} \quad (6)$$

and the dispersion

$$\sigma^2 = D(\Delta_n) = \frac{D(\xi_n q_{n-1})}{1-a_1^2} = \frac{\delta^2 m_c}{1-a_1^2}. \quad (7)$$

Finally, for an arbitrary  $k \in \mathbf{N}$  we have that, according to (4),

$$\text{Cov}(\Delta_n, \Delta_{n+k}) = E\left(\Delta_n \sum_{j=0}^{k-1} a_1^j (a_0 + \xi_{n+k-j} q_{n+k-j-1}) + a_1^k \Delta_n^2\right) - \left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)^2 = \frac{\delta^2 m_c a_1^k}{1-a_1^2}. \quad (8)$$

From here we get the correlation function of  $(\Delta_n)$ :

$$\text{Corr}(\Delta_n, \Delta_{n+k}) = \frac{\text{Cov}(\Delta_n, \Delta_{n+k})}{\sqrt{D(\Delta_n) \cdot D(\Delta_{n+k})}} = a_1^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Note that this function has the same form as in the case of standard linear autoregressive models. In this way, we have proved weak stationarity of the series  $(\Delta_n)$ . Moreover, from the equality (5) and strict stationarity of series  $(\xi_n q_{n-1})$ , the strict stationarity of  $(\Delta_n)$  follows.

Let us now consider the problem of finding distribution function of random variables  $(\Delta_n)$ , using the similar ideas as in Anděl et al. [1]. Consider firstly, for an arbitrary  $a_0 \in \mathbf{R}$  and  $a_1 \in (0, 1)$ , the autoregressive sequence  $(\Delta_n)$  defined by the third equation in (1). Note  $F_{\Delta}(x) = P\{\Delta_n < x\}$ , where it is clear that this term, due to stationarity of a series  $(\Delta_n)$ , does not depend on time parameter  $n \in \mathbf{Z}$ . Using the conditional probability, we find the distribution function of the sequence:

$$\begin{aligned} F_{\Delta}(x) &= P\{a_0 + a_1 \Delta_{n-1} < x\} \cdot P\{q_{n-1} = 0\} + P\{a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + \xi_n < x\} \cdot P\{q_{n-1} = 1\} \\ &= (1 - m_c) P\left\{\Delta_{n-1} < \frac{x - a_0}{a_1}\right\} + m_c P\{a_1 \Delta_{n-1} + \xi_n < x - a_0\}. \end{aligned} \quad (10)$$

In the similar way, for  $a_1 \in (-1, 0)$ , we have

$$F_{\Delta}(x) = (1 - m_c)P\left\{\Delta_{n-1} \geq \frac{x - a_0}{a_1}\right\} + m_c P\{a_1 \Delta_{n-1} + \xi_n < x - a_0\}, \quad (11)$$

and we can write the distribution function of  $(\Delta_n)$  in the form

$$F_{\Delta}(x) = (1 - m_c)G(x - a_0) + m_c(G * F_{\xi})(x - a_0), \quad (12)$$

where  $F_{\xi}(x)$  denotes the distribution function of  $\xi_n$ , and

$$G(x) = F_{a_1 \Delta_n}(x) = \begin{cases} F_{\Delta}\left(\frac{x}{a_1}\right), & a_1 \in (0, 1) \\ 1 - F_{\Delta}\left(\frac{x}{a_1}\right), & a_1 \in (-1, 0) \end{cases}. \quad (13)$$

Finally, we denoted with „\*“ the convolution of the distribution functions  $G$  and  $F_{\xi}$ , i.e.

$$(G * F_{\xi})(x - a_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - a_0 - u)F_{\xi}(du). \quad (14)$$

On the other hand, if we suppose that  $n \in \mathbf{Z}$  is a fixed value, then the “noise” variable  $\eta_j = \xi_{n-j}q_{n-j-1}$  from the definition of the random variable  $\Delta_n$  represents a “mixture” of random variables of Gaussian and discrete type. After another application of conditional probability, we find that the distribution function of  $\eta_j$  follows

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P\{\eta_j < x\} = P\{\eta_j < x | q_{j-1} = 1\} \cdot P\{q_{j-1} = 1\} + P\{\eta_j < x | q_{j-1} = 0\} \cdot P\{q_{j-1} = 0\} \\ &= m_c P\{\xi_j < x\} + (1 - m_c)P\{X_0 < x\} = m_c N(x; 0, \delta^2) + (1 - m_c)F_0(x), \end{aligned} \quad (15)$$

where  $N(x; 0, \delta^2) = F_{\xi}(x)$  is the distribution function of Gaussian random variables  $\xi_{n-j}$ , while  $X_0 = 0$  has the distribution function

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (16)$$

In this way, the function  $F_{\eta}(x)$  is continuous almost everywhere, i.e. the only point of discontinuity is  $x=0$ , and the discontinuity is of the order  $1 - m_c$  (Fig. 1). Therefore, the distribution of  $\eta_j$  is a mixture of Gaussian and discrete distributions that we usually call *Contaminated-Gaussian Distribution (CGD)*.

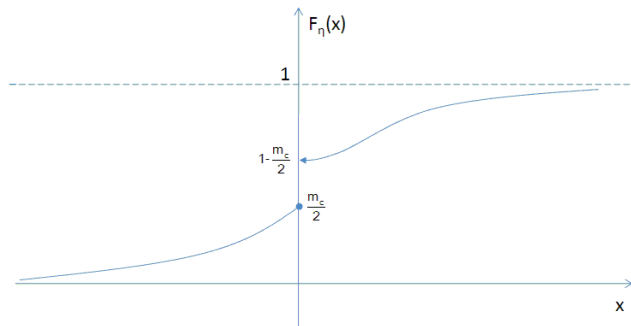


Fig. 1. The distribution function of CGD random variable

Using the previously introduced assumptions, according to (12)-(16) and induction method, it can be easily shown that the distribution function  $F_{\Delta}(x)$  satisfies the equation

$$F_{\Delta}(x) = \underset{j=0}{\overset{\infty}{*}} \left[ (1 - m_c)F_0(x - a_0) + m_c N(x - a_0; 0, \delta^2 a_1^{2j}) \right]. \quad (17)$$

Therefore, the distribution function of  $\Delta_n$  represents the infinite convolution of CGD variables, where the convergence of the right side of equality (17) immediately follows from the results in Huang and

Yang [3]. This fact now can be used to determine the characteristic functions of random variables  $\Delta_n$ . For this purpose, we shall find the characteristic functions of the variables  $\eta_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , as follows

$$\varphi_\eta(t) \stackrel{\text{def}}{=} E\left(e^{im_j}\right) = (1 - m_c)e^{it^0} + m_c \int_{x \neq 0} e^{itx} dF_\xi(x) = (1 - m_c) + m_c e^{-\frac{t^2 \delta^2}{2}}. \quad (18)$$

As the random variable  $\Delta_n$ , according to (5), is the sum of independent random variables  $a_1^j \eta_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Without loss of generality, we assume that  $a_0 = 0$ . Then, the characteristic function of  $\Delta_n$  is

$$\varphi_\Delta(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_\eta(a_1^j t) = \prod_{j=0}^{\infty} \left[ (1 - m_c) + m_c \exp\left(-\frac{a_1^{2j} t^2 \delta^2}{2}\right) \right] = \prod_{j=0}^{\infty} [1 + \alpha_j(t)], \quad (19)$$

where

$$\alpha_j(t) = m_c \left[ \exp\left(-\frac{a_1^{2j} t^2 \delta^2}{2}\right) - 1 \right]. \quad (20)$$

We find that

$$\ln \varphi_\Delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \ln [1 + \alpha_j(t)] \quad (21)$$

and using La Place's approximation of functions  $f_j(t) = 1 + \alpha_j(t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , which reaches a local maximum for  $t = 0$ , we obtain

$$\ln f_j(t) = \frac{(\ln f_j)'(0)}{2} t^2 + o_j(t^2) = -\frac{m_c a_1^{2j} \delta^2 t^2}{2} + o_j(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (22)$$

Here, as usual,  $o_j(t^2)$  are infinitely small values of higher order than  $t^2$ , when  $t \rightarrow 0$ . On the other hand, for an arbitrary but fixed  $t \in \mathbf{R}$ , it can be easily shown that the values  $o_j(t^2)$  are a infinitely small values of higher order with respect of  $a_1^{2j}$ , when  $j \rightarrow \infty$ , and we can write

$$o_j(t^2) = o_t(a_1^{2j}). \quad (23)$$

According to the previous notations and assumptions, we have that

$$\sum_{j=0}^{k-1} \ln f_j(t) = -\frac{m_c t^2 \delta^2}{2} \sum_{j=0}^{k-1} a_1^{2j} + \sum_{j=0}^{k-1} o(a_1^{2j}) = -\frac{m_c t^2 \delta^2}{2} \cdot \frac{1 - a_1^{2k}}{1 - a_1^2} + \sum_{j=0}^{k-1} o(a_1^{2j}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (24)$$

which implies

$$\ln \varphi_\Delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \ln f_j(t) = -\frac{m_c t^2 \delta^2}{2(1 - a_1^2)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} o_t(a_1^{2j}). \quad (25)$$

Note that the first term in (25) corresponds to the logarithm of the characteristic function of Gaussian distribution  $N\left(0, \frac{m_c \delta^2}{1 - a_1^2}\right)$ , which corresponds to standard Taylor's SV(1) model. So, the characteristic

function of Split-SV(1) model, described by the equations (19)-(25), differs from the characteristic function of Gaussian distribution for the value

$$\exp\left[\sum_{j=0}^{\infty} o_t(a_1^{2j})\right] \neq 0. \quad (26)$$

As an illustration, Figure 2 shows graphs of characteristic functions of CGD, i.e. the random variables  $a_1 \eta_j$ , together with their product in the form of (19), the standard Gaussian characteristic function, and the characteristic function of  $\Delta_n$ , where  $a_1 = 0,5$  and  $\delta = 1$ . It is easily observed that the characteristic functions of random variables  $\Delta_n$  are "between" two previous classes of functions, which, among other

things, emphasizes the specificity of Split-SV(1) model as a special modification of standard stochastic volatility models.

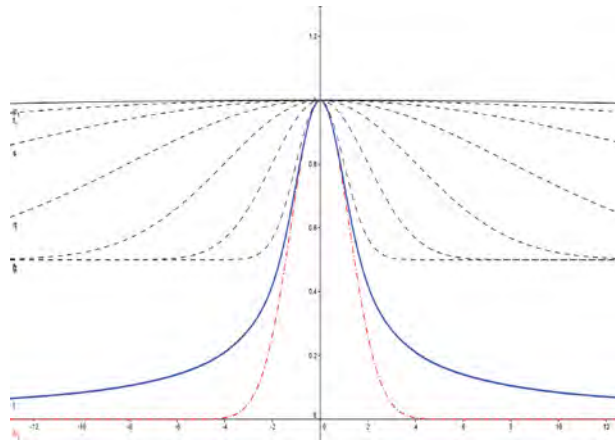


Fig. 2. Graphic representation of the characteristic functions of CGD (---), Gaussian distribution (.....) and distribution of the autoregressive sequence of Split-SV(1) model (—).

#### 4. THE PROPERTIES OF BASIC SEQUENCE ( $h_n$ )

Based on the obtained results we examine the stochastic structure of the series ( $h_n$ ). For this purpose, denote as  $\mathfrak{T}_n$  the filtration generated with random vectors  $(\varepsilon_k, \zeta_k)$  for  $k \leq n$ . Based on its definition, the distribution of  $h_n$  belongs to a group of so called *Conditionally-Gaussian Distribution* (see, for example, Ширяев [6]). Consequently, their conditional mathematical expectation is

$$E(h_n | \mathfrak{T}_{n-1}) = \sigma_n e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_n q_{n-1}} E\left(\varepsilon_n e^{\frac{1}{2}\varepsilon_n q_{n-1}} | \mathfrak{T}_{n-1}\right) = 0, \quad (27)$$

while the corresponding dispersion is

$$D(h_n | \mathfrak{T}_{n-1}) = E(h_n^2 | \mathfrak{T}_{n-1}) = \sigma_n^2 E(\varepsilon_n^2 | \mathfrak{T}_{n-1}) = \sigma_n^2. \quad (28)$$

Therefore,  $(h_n)$  is a martingale difference, and therefore a series of uncorrelated random variables. Then, it is valid

$$E(h_n) = E[E(h_n | \mathfrak{T}_{n-1})] = 0 \quad (29)$$

while, on the other hand, finding dispersion is somewhat more complicated. Namely, the apparent equality is valid

$$D(h_n) = E(h_n^2) = E(\sigma_n^2) \cdot E(\varepsilon_n^2) = E(e^{\Delta_n}), \quad (30)$$

but here, as a particular problem, is determining the exponential moments of series  $(\Delta_n)$ . Using a similar procedure as in determining its characteristic function, described by the equations (18)-(20), we obtain

$$D(h_n) = \prod_{j=0}^{\infty} \left[ (1 - m_c) + m_c \exp\left(\frac{a_1^{2j} \delta^2}{2}\right) \right]. \quad (31)$$

The correlation structure of series  $(h_n^2)$  can be examined in a similar way. Let, therefore,  $k \geq 1$  and

$$R(k) \stackrel{\text{def}}{=} E(h_n^2 h_{n-k}^2) = E\left(e^{\Delta_n + \Delta_{n-k}}\right). \quad (32)$$

According to the equality (6), it is valid

$$E(\Delta_n + \Delta_{n-k}) = 2a_0(1 - a_1)^{-1}, \quad (33)$$

and according to (4), under the stationarity condition  $|a_1| < 1$ , we have

$$D(\Delta_n + \Delta_{n-k}) = \sum_{j=0}^{k-1} a_1^{2j} D(a_0 + \xi_{n-j} q_{n-j-1}) + (1 + a_1^k)^2 D(\Delta_{n-k}) = \frac{2\delta^2 m_c (1 + a_1^k)}{1 - a_1^2}. \quad (34)$$

So, the equation (32) becomes

$$R(k) = \exp\left(\frac{a_0(1 - a_1^k)}{1 - a_1}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left[ (1 - m_c) + m_c \exp\left(\frac{\delta^2 a_1^{2j}}{2}\right) \right] \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \left[ (1 - m_c) + m_c \exp\left(\frac{(1 + a_1^k)^2 \delta^2 a_1^{2j}}{2}\right) \right] \quad (35)$$

and, consequently, the expression for the covariance function of  $(h_n^2)$  is obtained

$$\gamma(k) \stackrel{def}{=} R(k) - E h_n^2 E h_{n-k}^2. \quad (36)$$

Similarly, the correlation function of this series is defined by the equation

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \sim a_1^k, \quad k \rightarrow \infty \quad (37)$$

and, in the stationary case  $|a_1| < 1$ , has the property  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = 0$ . Finally, using the equality

$$E(h_n^4) = 3E(\sigma_n^4) = 3E(e^{2\Delta_n}) = 3 \prod_{j=0}^{\infty} \left[ (1 - m_c) + m_c \exp(2a_1^{2j} \delta^2) \right] \quad (38)$$

we can determine the kurtosis:

$$K = \frac{E h_n^4}{(E h_n^2)^2} = 3 \prod_{j=0}^{\infty} \left[ (1 - m_c) + m_c \exp(2a_1^{2j} \delta^2) \right] \cdot \left[ (1 - m_c) + m_c \exp\left(\frac{a_1^{2j} \delta^2}{2}\right) \right]^{-2}. \quad (39)$$

As for any  $x \in \mathbf{R}$  and  $m_c \in (0,1)$ , the inequality

$$(1 - m_c) + m_c \exp(2x^2) \geq \left[ (1 - m_c) + m_c \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \right]^2 \quad (40)$$

is valid, it is fulfilled the condition  $K \geq 3$ . This points out the typical feature of so called "fat tail" of the distribution of financial time series  $(h_n)$  around its mean  $E(h_n)=0$ .

## LITERATURE

- [1] Anděl, J., Gomez, M., Vega, C., „Stationary distribution of some nonlinear AR(1) processes“, *Kybernetika*, Vol. 25:6, (1989) P. 453-460.
- [2] Harvey, A., Ruiz, E., Shephard, N., „Multivariate stochastic variance model“, *Review of Economic Studies*, Vol. 61, (1994) 247-264.
- [3] Huang, C., Yang, L., „Convergence of a convolution-filtering based algorithm for empirical mode decomposition“, *Advances in Adaptive Data Analysis*, Vol. 1:4, (2009) P. 561-571
- [4] Priestley, M. B., *Non-linear and non-stationarity time series analysis*, Academic press, Manchester, 1988.
- [5] Stojanović, V., Popović, B., „Models of stochastic volatility in application“ (in Serbian), *Proceeding by conference SYM-OP-IS 2010*, P. 761-764.
- [6] Ширяев, А., *Основы стохастической-финансовой математики*, Фазис, Москва, 1998.
- [7] Taylor, S. J., *Modeling financial time series*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

## CREATION OF EFFICIENT INTERACTIVE SIMULATIONS IN HIGHER EDUCATION USING EASY JAVA SIMULATIONS SOFTWARE TOOL

---

*This paper describes a software tool, Easy Java Simulations (EJS), designed for creation of interactive simulations and virtual laboratories. These simulations can be used in higher education in teaching mathematics (functions, vector algebra, solving differential equations, Fourier analysis ...), physics (to simulate physical systems and phenomena), engineering, economics, etc. EJS is a convenient tool because it allows people who have basic knowledge of programming to create simulations with high degree of interactivity. EJS can be used in combination with other software packages (Matlab, LabView), and thus realize the virtual laboratories and remote laboratories. Some examples of created interactive simulations are presented, too.*

---

### INTRODUCTION

Life today cannot be imagined without computers and information and communication technologies (ICT). Thus, the educational process, as one of the essential components of human life, is inconceivable without them, too. Teaching in a classical way needed to be modernized through use of computers, electronic devices and ICT. It enabled the appearance of a new type of education - electronic education. Modern education requires the introduction of new methods in all stages of the teaching process, from preparation, over teaching, to student assessment. Raising the quality of teaching should be the main goal of electronic education.

E-learning is used at all levels of education, including higher education. In some educational fields, such as mathematics, physics and engineering, theoretical knowledge has to be extended or verified with computer simulations. For better observing the behavior of specific phenomena and systems under study, these simulations are preferred to be interactive. Interactivity is primarily related to the possibility to change the system variables and parameters value at any time from the moment the simulation is started until it is completed and without interrupting its execution. Adding interactivity in simulations was enabled with the development of Java programming language [4]. This all led to appearance of virtual laboratories and remote laboratories [4]-[6], [9] and enabled educational process to be independent of time and space.

Java programmers had to have advanced programming skills in order to develop sophisticated interactive simulations. This was disadvantage for scientists and students who had basic programming skills to develop simulations on their own. A group of scientists recognized this problem and started working on a new simulation software tool, based on Java programming in graphical environment. Because of its simplicity, they called it Easy Java Simulations (EJS).

### EASY JAVA SIMULATIONS FUNDAMENTALS

Easy Java Simulations is an open-source software package that allows creating scientific simulations of physical and engineering phenomena and systems in Java in a quick and easy way [1]-[3]. EJS was developed for the Open Source Physics Project [2], which was established to create and distribute curricular material for physics computation. It is designed for teachers, researchers and students who have basic programming knowledge, and cannot afford a large expenditure of time to create a sophisticated interactive graphical user interface. Since EJS is based on Java, simulations created with it are used as independent programs that run under different operating systems or they can be distributed via Internet and run as HTML pages from the most popular web browsers. Applications created with EJS can be stand-alone Java applications or applets. EJS source files are stored in the application *.xml* format.

EJS allows creating interactive simulations in two ways. The first way is that the simulation is com-

---

<sup>1</sup> Faculty of Electrical Engineering, East Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

pletely created in EJS, which means that the model and the view with graphical user interface for interaction are totally created in EJS environment. Another way is to develop model of the phenomenon or system in another software package compatible with EJS, for example in Matlab Simulink, and the view and visual representation of the interface necessary for user interaction to develop in EJS. In this case the simulation is executed in the external application (Matlab) and controlled and displayed in the EJS environment.

Graphical user interface of EJS consists of three parts: description, model and view, figure 1. Description is the part that describes the phenomenon or system to be simulated, and theory necessary for the understanding of the behavior of the phenomenon or system can be introduced there, too. Model is the part that refers to pages with Java code, differential equations or the connection to external applications (eg. Matlab, Sysquake). View refers to the graphical display of simulation, and the interface elements required for user interaction. Elements that provide visual display can be selected from a set of predefined components. Model and view are connected in a way that any change occurred in the model automatically reflects the view and vice versa.

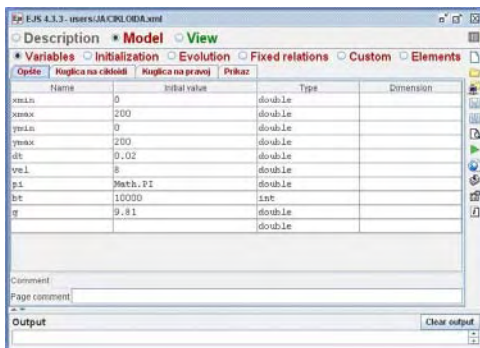


Fig. 1. EJS structure, model part

The most important part of EJS graphical user interface is the model, figure 1. It consists of the following pages: Variables (definition of simulation variables, their initial values and type), Initialization (setting initial state), Evolution (pages with ordinary differential equations), Fixed relations (relations that don't change during simulation execution), Custom (author's Java methods definition), and Elements (Apache interface).

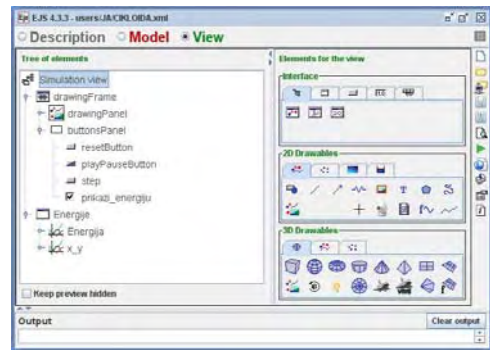


Fig.2. View panel

Development of a simulation begins with definition of simulation variables, setting their initial values and type. After that, ordinary differential equations that describe system motion have to be written. If the system is complex, designer has to write some additional Java code to control simulation execution. When the model is defined, it is possible to create the view. View panel, figure 2, includes all the elements necessary for simulation visualization and interaction (frames, drawing and plotting panels, buttons, sliders, traces, functions, arrows, web-cam...). They can be organized in a tree structure by simple drag and drop. After defining model and view, EJS generates the complete Java source code, compiles it, packages the resulting object files into a compressed file, and generates HTML pages with description and applet. The user can then directly run the applet and/or publish it over the Internet.

### SOME EXAMPLES OF EJS IN HIGHER EDUCATION

As it was mentioned earlier, EJS was developed for the Open Source Physics Project. It was primarily intended to be used for physics phenomena simulations, but it came obvious that it can be successfully used in mathematics, science, engineering, etc.

#### EJS in mathematics

In mathematics EJS is used in function plotting, vector algebra, solving differential equations, Fourier analysis, etc [1],[2].

Figure 3 shows EJS graphical user interface with description part used for stiff equations simulation. This simulation plots the real solution together with a solution found using a Runge-Kutta 5(4) adaptive algorithm and a solution found us-

ing the Radau5 method. Students interactively can change the values of parameters  $h$  and  $tol$  and observe how these changes affect the equation solution.

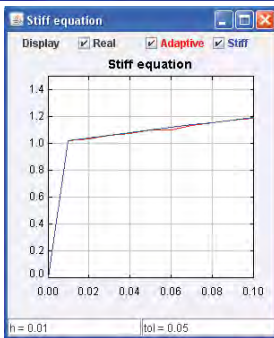
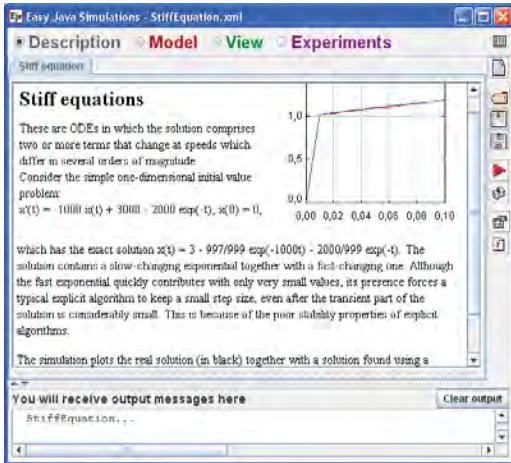


Fig.3. Stiff equations simulation

Figure 4 represents simulation of Fourier sine and cosine analysis. In the  $f(x)$  field students can write any function and observe sine and cosine Fourier coefficients.

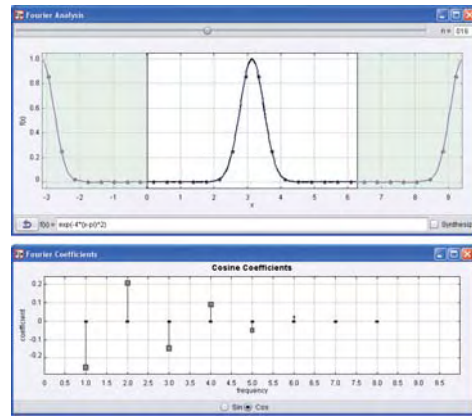


Fig.4. Fourier analysis simulation

### EJS in physics

In physics EJS is used to simulate physical systems and phenomena. There are many simulations regarding astronomy, electromagnetism, mechanics, oscillations, special relativity, etc. that can be found in [1] and [2]. Some of these examples are presented below.

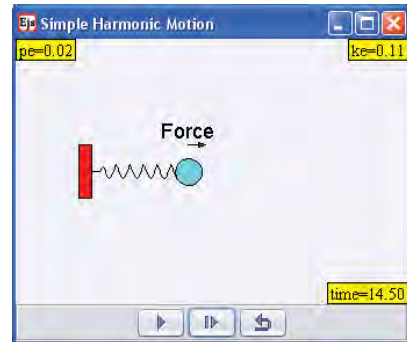


Fig.5. Simple harmonic oscillator simulation

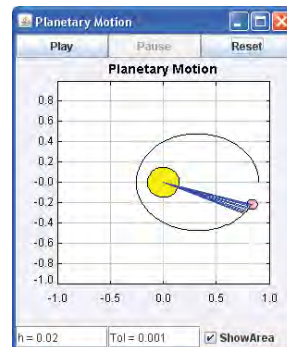
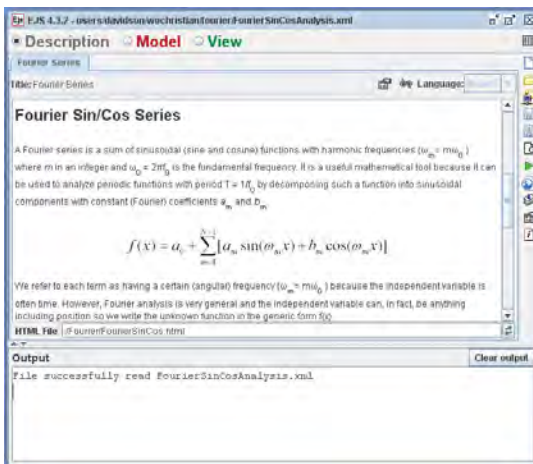


Fig.6. Planetary motion simulation

Figure 5 shows graphical user interface for simple harmonic oscillator simulation. When simulation is started, students can observe motion of a blue



ball attached to the spring connected to the wall. Potential and kinetics energy of the spring can be tracked, too. Figure 6 describes planet orbiting around Sun according Kepler's laws of planetary motion.

Simple pendulum simulation is shown in figure 7 [7]. Students can modify values of the mass of the pendulum bob, friction coefficient and gravitational constant and track how these modifications affect potential, kinetics and total pendulum energy.

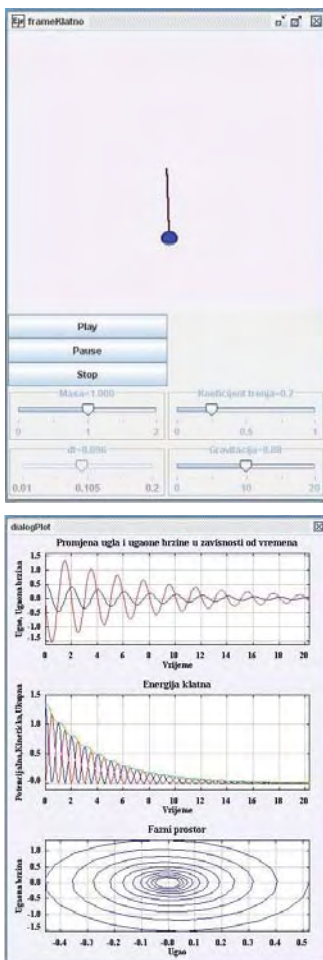


Fig.7. Simple pendulum simulation

### EJS in engineering education

In engineering education EJS can be used both in virtual and remote laboratories. In the following figures some EJS simulations developed on the Faculty of Electrical Engineering in East Sarajevo are shown.

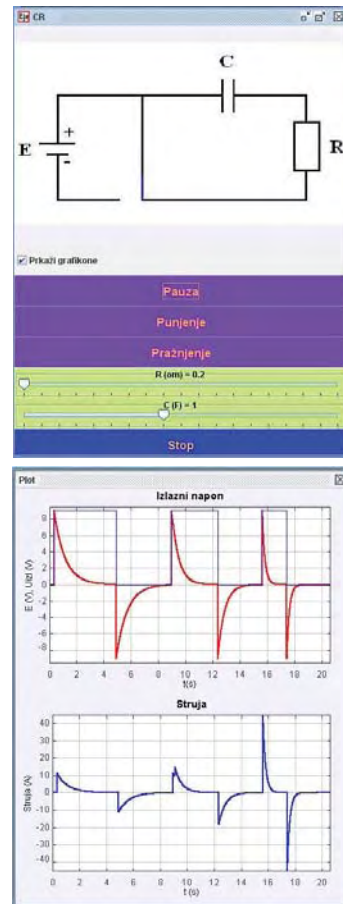


Fig. 8. RC circuit simulation

Figure 8 shows an interactive simulation of a simple RC circuit, which is used in teaching electronics [8]. Simulation is controlled with buttons Start/Pauza, Stop, Punjenje, Praznjenje. While the simulation is running, student can modify the values of resistor and capacitor by moving R and C sliders and observe how these changes affect the output voltage and current. These changes are visible immediately because the wave forms of current and output voltage are generated while the simulation is running. Buttons Punjenje and Praznjenje allow student to simulate capacitor charging and discharging mode, in which switch closes and opens the circuit.

Figure 9 shows graphical user interface of EJS simulation that is used in control systems education [9]. It represents an example of a remote laboratory because it can be accessed via Internet. This laboratory was created using EJS in combination with Matlab. Matlab is used for all mathematical

calculations and responses and diagrams generation, while EJS is used for visualisation and user interaction. Connection between EJS and Matlab is done through the so called JIM (Java Internet Matlab) server application. The laboratory is used for step and impulse response generation, Bode plots, Nyquist diagram and root locus generation for different order systems. Student can interactively move zeros and poles of the generated system displayed in GMK plot and observe how this moving affects the system behaviour, especially its stability, by tracking changes on other diagrams.

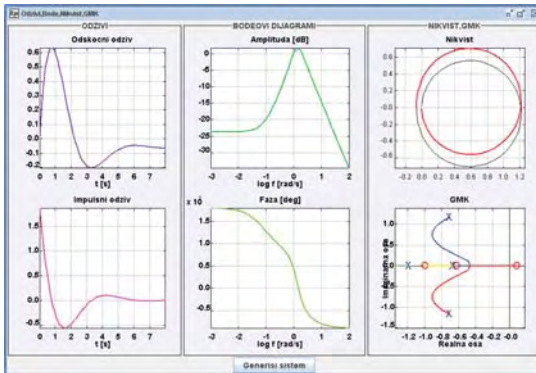


Fig. 9. Control systems simulation

Figure 10 shows how EJS can be used in optimal control theory on an example of well known brachistochrone problem [10]. This simulation is runs in two cycles. The first cycle shows moving of two particles from point A to point B of which the orange one is moving along the straight red line and the blue one along the unknown path. The blue particle reaches point B before the orange one which is moving along a curve. The second cycle shows the rolling of a circle along the x-axes together with the blue particle fixed on it. This cycle proves that the curve obtained by moving the blue particle in the first cycle is a cycloide, what is actually the solution of a brachistochrone problem.

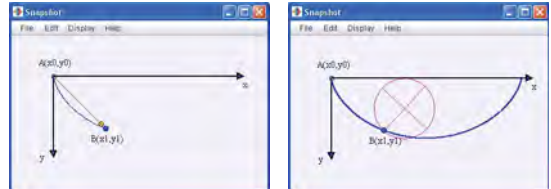
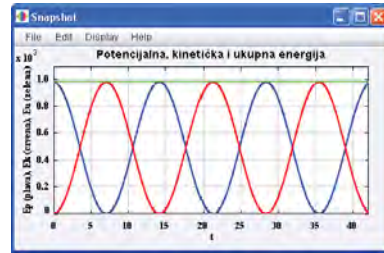
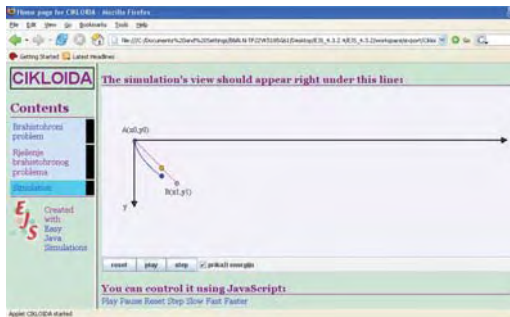


Fig.10. Cycloide simulation run as an applet with energy plots and snapshots of two simulation cycles

## CONCLUSION

Interactive simulations are very important in modern educational process. They give students a great number of possibilities in studying different phenomena and systems. Easy Java Simulations is a convenient software tool for creating sophisticated interactive simulations in many educational fields. Its main advantage is its simplicity and easy adjustment to the user requirements as well as the demand of simulation developer's basic programming skills. Modern education promotes student mobility and off-campus teaching. In that sense, EJS can easily be used in remote laboratory development, by which the quality of educational process is significantly being raised.

## LITERATURE

- [1] Easy Java Simulations: <http://fem.um.es>
- [2] The Open Source Physics Project, <http://www.opensourcephysics.org/>
- [3] F. Esquembre, Easy Java simulations: A software tool to create scientific simulations in Java, *Comput. Phys. Commun.*, vol. 156, no. 2, pp. 199–204, Jan. 2004
- [4] Sebastian Dormido, Francisco Esquembre, Gonzalo Farias, Jose Sanchez, Adding Interactivity to Existing Simulink Models Using Easy Java Simulations, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, pp. 4163-4168, Seville, Spain, December 2005
- [5] G. Farias, R. De Keyser, S. Dormido, F. Esquembre, Developing Networked Control Labs: A Matlab and Easy Java Simulations Approach, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 57, No. 10, pp. 3266-3275, October 2010
- [6] G. Farias, F. Esquembre, J. Sanchez, S. Dormido, H.Vargas, S. Dormido-Canto, R. Dormido, N. Duro, M. Canto, Des-

rollo de Laboratorios Virtuales, Interactivos y Remotos Utilizando Easy Java Simulations y Modelos Simulink, Proc. 12th Latin-America Congr. Autom. Control, pp. 336-341, Salvador de Bahra, Brazil, 2006

- [7] N. Popović, M. Naumović, Razvoj interaktivnih simulacija pomoću Easy Java Simulation i Simulink modela kao eksterne aplikacije, INFOTEH-JAHORINA, Vol. 9, Ref. A-4, pp. 22-25, ISBN-99938-624-2-8, March 2010
- [8] N. Popović, B. Popović, Kreiranje interaktivne simulacije RC kola pomoću softverskog paketa Easy Java Simulations, JISA kongres, Herceg Novi, 2010.
- [9] N. Popović, M. Naumović, Interaktivne virtuelne laboratorije u nastavi automatike kreirane kombinacijom EJS i Matlaba, INFOTEH-JAHORINA, Vol. 10, Ref. E-V-14, pp. 813-816, ISBN-99938-624-2-8, March 2011
- [10] M. Naumović, N. Popović, B. Popović, Improving Learning in Optimal Control Theory Using Easy Java Simulations Environment, ETRAN Conference 2011, Banja Vrućica – Teslić, jun 2011.

## DETERMINING THE CONDITIONS FOR OCCURRENCE OF JUMP PHENOMENON IN PHASE LOCKED LOOPS

---

*Nonlinear response of PLL (Phase Locked Loops) occurs as a consequence of sinusoidal characteristics of phase detector, whereas each nonlinearity causes a distortion in response. This mode is not desirable and in it, in one part of frequency characteristics a large discontinuity occurs, known as a jump phenomenon. The area of the jump phenomenon and critical values of PLL parameter can be determined by analyzing frequency characteristics.*

---

### INTRODUCTION

A circuit that makes one system follow another one by frequency and phase is called PLL loop (Phase Locked Loop). More precisely, it is a circuit that synchronizes the output signal of the oscillator with the reference or output signal. First phase locked loops were applied by Bellesize in 1932 and this French engineer is considered to be the inventor of coherent communications. Owing to its wide application in the detection of FM signals in satellite television, in TV and radio receivers, in frequency synthesis, in digital communications, a number of papers and books have been dedicated to PLL loop. Its wide application had an impact on the development of technology in this area; therefore, a wide spectrum of PLL integrated circuits for different purposes can be found on the market today [1].

The input signal of the loop is the reference one, whereas the loop has two outputs. One output is the voltage error which controls the voltage-controlled oscillator, while the other is high frequency signal of the voltage-controlled oscillator. Due to this fact, a different application of the loop is possible, as well. The first on which the concept of PLL loops was based [2], is the application for the detection of frequency or phase modulated signals. The other, not less important, application of PLL loops in the frequency synthesis stemmed from the fact that the signal which is generated by voltage-controlled oscillator is of the same frequency as the reference signal, and clearly defined phase shift as compared to the phase shift of the referent signal.

The detection of phase and frequency modulated signals is possible in several ways [3], whereas the detection using PLL is irreplaceable when the signal-to-noise ratio is small ie. is the only solution for the weak input signals, such as satellite signals. Depending on the loop parameters and the parameters of the input signal, the loop can have a smaller or bigger phase error, ie. can be linear or non-linear in its functioning. The basic characteristics which describe the functioning of PLL loops as an FM demodulator are the frequency characteristics which represent the dependence of the resulting phase error (detected voltage) on the modulating frequency of the FM signal. Certainly, the non-linear mode of PLL functioning is not desirable, since that kind of mode causes big distortions. The limitation point of PLL application as a demodulator in linear functioning mode is the appearance of jump phenomenon in the frequency characteristics.

### HARMONIC DISTORTIONS OF PLL FM DEMODULATOR

PLL loop is a system in which the frequency of voltage controlled oscillator (VCO) changes under the influence of the control voltage of the phase detector until it becomes equal to the frequency of the input signal. A synchronized loop will be observed, and the phase of the input signal is changed under the influence of the frequency modulation. In the general case, the characteristic of the phase detector is nonlinear (most often sinusoidal), which makes the analysis more complicated, taking into account

---

<sup>1</sup> The Faculty of Technical Sciences, University of Priština, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Academy of Criminalistic and Police Studies, Beograd, Srbija

that the system is then being described by means of nonlinear differential equation.

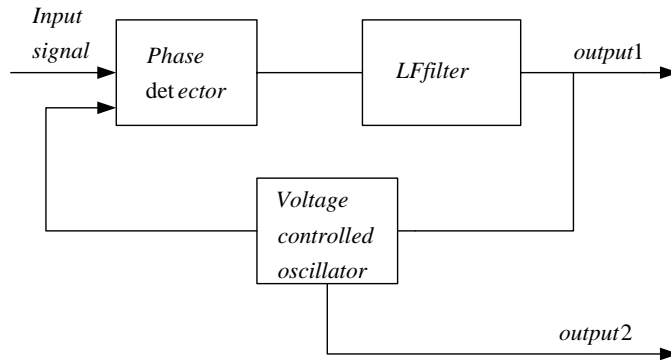


Fig. 1. Block diagram of PLL loop

According to the block diagram of the PLL loop in Fig.1, the input signal and the signal on the output of the voltage controlled oscillator are:

$$\begin{aligned} y_i &= A \sin[\omega t + \phi_i(t)] \\ y_o &= B \cos[\omega t + \phi_o(t)] \end{aligned} \quad (1)$$

Phase detector has sinusoidal characteristic and its output voltage is:

$$u_1 = k_1 \sin[\phi_i(t) - \phi_o(t)] \quad (2)$$

If  $F(j\omega)$  represents the transfer function of the filter in the system, and  $f(t)$  represents the impulse response and they make Fourier transformation pair, the output voltage of the filter is:

$$u_2(t) = u_1(t) * f(t) \quad (3)$$

Where the symbol \* is convolution product. The voltage controlled oscillator is defined as integrator:

$$\frac{d\phi_o}{dt} = k_3 u_2(t) \quad (4)$$

According to the above equations, we get the general equation in the time domain of PLL with the sinusoidal characteristic of phase detector:

$$\frac{d\phi_o}{dt} = k \{ \sin[\phi_i(t) - \phi_o(t)] * f(t) \} \quad (5)$$

Due to the tendency of finding the solution in the frequency domain and using the characteristic that two quantities related by a convolutional product represent simple product of their *Fourier* transformations and if there is frequency modulated signal on the output, then the PLL which is used as an FM demodulator is described with the differential equation:

$$\frac{d\phi}{dt} + KF(s) \sin \phi = \Delta\omega + \frac{d\psi}{dt}$$

where:  $\psi = \beta \sin \omega_m t$ ,  $\beta$ - modulation index,  $\omega_m$ - modulated signal frequency,  $\Delta\omega = \omega_c - \omega_0$  the difference of the carrier frequency  $\omega_c$  i frequency  $\omega_0$  of voltage controlled oscillator (VCO) in the free oscillating mode, where  $K$  is- attenuation or gain of the filter,  $F(s)$ - filter transfer characteristic. Equation (6) belongs to the group of nonlinear equations, and its solution is numerical, or approximate, and error that follows depends on the adopted approximation of sinusoidal characteristic of the phase detector. As  $\Phi$  is periodic when  $\psi$  is a simple periodic function, then the solution of the equation (6) is:

$$\Phi = \lambda + \sum_{i=1}^N r_i \sin(i\omega_n \tau + \theta_i) \quad (7)$$

where  $\lambda$ - DC component, whereas  $r_i$  and  $\theta_i$  are the amplitude and phase  $i$ -th harmonic of the response.

## DETERMINATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS FOR THE OCCURENCE OF JUMP PHENOMENON

Nonlinear response of the PLL loop appears as the consequence of nonlinear characteristic of the phase detector, which is manifested by the occurrence of hysteresis in PLL loop response. Taking into account that the work mode accompanied by this phenomenon is very unfavourable, it is necessary to determine the parameters of the critical work mode of the loop. Mathematically, this means that jump phenomenon is avoided if for the first harmonic  $r_1$  there is one real, whereas other two solutions are complex conjugates. When there is a triple real solution for  $r_1$ , it represents the boundary case for the occurrence of jump phenomenon and, then,  $r_1(\omega_n)$  has one vertical tangent. Solving the equation (7), but neglecting the 2nd and 3rd harmonic [1], the following equation is obtained:

$$(r_1^2)^3(a_3^2 + a_3^2 x \frac{\omega_n^2}{\delta^2}) + (r_1^2)^2(a_3 \omega_n^2 - a_1 a_3 - a_1 a_3 x^2 \frac{\omega_n^2}{\delta^2}) + r_1^2[a_1^2 - 2a_1 \omega_n^2 + (1+x^2)\omega_n^4 + \delta^2 \omega_n^2 + a_1^2 x^2] = \beta^2 \delta^2 \omega_n^2 + \beta^2 (1+x)^2 \omega_n^4 \quad (8)$$

where  $a_1$  and  $a_3$  are the coefficients of the polynomial used to approximate the sinusoidal function of the phase detector. The solutions for the fundamental-first harmonic, which is actually the useful signal, for different values of the input signal are given in a table. It can be observed that in Table 1. in the frequency range 0.59-0.7, there are three real solutions ie. occurrence of hysteresis, whereas outside this range, there is one real and two complex conjugate solutions.

Table 1

$\omega_n$	Real solution	Complex conjugate
0.3	0.10	5.1±j0.8
0.5	0.13	6.7±j0.8
0.59	<b>0.38; 5.46; 5.71 ;</b>	-----
0.6	<b>0.40; 5.20; 5.82;</b>	-----
0.62	<b>0.52; 4.53; 5.92;</b>	-----
0.65	<b>0.79; 3.57; 5.88;</b>	-----
0.68	<b>1.71; 1.99; 5.78;</b>	-----
0.7	5.70	1.6±j1.0
0.8	5.20	0.4±j2.6
1.0	4.08	0.7±j3.4

Table 2

$\omega_n$	Real solution	Complex conjugate
0.3	0.22	6.6±j1.38
0.5	0.03	6.6±j1.42
0.59	0.08	5.6±j1.46
0.6	0.09	5.57±j1.45
0.62	0.11	5.33±j1.44
0.65	0.15	4.94±j1.40
0.68	0.21	4.54±j1.34
0.7	0.27	4.24±j1.28
0.8	1.43	1.43±j0.88
1.0	2.29	1.25±j2.71

In order for the vertical tangent to exist at all, it is necessary that:

$$\left( \frac{dr_1^2}{d\omega_n^2} \right)^{-1} = 0 \quad (9)$$

By differentiating the equation (8) and applying the condition (9), the following equation is obtained:

$$Ar_1^4 - Br_1^2 + C = 0 \quad (10)$$

$$A = 3(a_3^2 + a_3^2 x^2 \frac{\omega_n^2}{\delta^2}); \quad B = 4(a_1 a_3 + a_1 a_3 x^2 \frac{\omega_n^2}{\delta^2})$$

$$C = a_1^2 - 2a_1 \omega_n^2 + (1+x)\omega_n^4 + \delta^2 \omega_n^2 + a_1^2 x^2 \frac{\omega_n^2}{\delta^2}$$

Biquadratic equation (10) has only one real solution if its discriminant equals zero ie.:

$$B^2 - 4AC = 0$$

$$\frac{3a_3^2 x^2}{\delta^2} (1+x)\omega_n^6 + \left[ 3a_3^2 (1+x)^2 - 4\left(\frac{a_1 a_3 x^2}{\delta^2} - a_3^2\right)^2 + 3a_3^2 x^2 - \frac{6a_1^2 a_3^2 x^2}{\delta^4} + \frac{3a_1^2 a_3^2 x^4}{\delta^4} \right] \omega_n^4 +$$

$$\left[ 3a_3^2 \delta^2 - 6a_1 a_3^2 + \frac{6a_1^2 a_3^2 x^2}{\delta^2} - 8a_1 a_3 \left( \frac{a_1 a_3 x^2}{\delta^2} - a_3 \right) \right] \omega_n^2 - a_1^2 a_3^2 = 0$$

The solution of the equation for  $\omega_n$  gives the value of the signal frequency in a normalized form,  $\omega_{nc}$ , for which the  $r_j$  characteristic has a vertical asymptote.

## CONCLUSION

This paper considers the frequency characteristics of nonlinear PLL loop, which is used for FM detection. Nonlinear functioning of PLL loop occurs in the case of big phase errors when the sinusoidal function of the phase detector is approximated by the 3rd order polynomial (Taylor order or when coefficients are determined from the minimal error conditions) and then there are higher harmonics in the response. Non-linear functioning mode is not desirable, because in that mode big distortions occur. Non-linear distortions are the biggest in the area of jump phenomenon, and this area should be avoided in the practical application of PLL loop.

## ACKNOWLEDGEMENT

The paper is partly realized from the project of The Ministry of Science of the Republic of Serbia, the field of Technological development - TR35026

## REFERENCES

- [1] Krupa V., Štursa J., Čizek V., Direct Digital Frequency Synthesizer PLL Systems, IEE2001, pp.799-801.
- [2] Best R., Phase-Locked-loops. Design and Applications, New York, 1993.
- [3] Krstić D., Radiokomunikaciona elektronika i sistemi, Elektronski fakultet, Niš, 2004.
- [4] Raičević A., Prica B., One Solution For Differential Equation For Non/linear Mode PLL loop, MIT2009, pp.342-346
- [5] Gupta S., Phase Locked-Loops, Proceedings of the IEEE, vol 63. pp.291-306, 2005.

## APPLICATION OF NUMERICAL ANALYSIS SOFTWARE IN TEACHING PROBABILITY AND STATISTICS

---

*In this article, educational software to solve problems in probability and statistics is presented. The software is used to support lab exercises in Probability and Statistics class at the School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies in Belgrade. The software used is GNU Octave. Completed tasks are related to the Gaussian, Poisson and binomial distributions, as well as basic problems in statistics.*

---

### INTRODUCTION

Probability and statistics is one of the most important areas of study for students of computer science. At the School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies in Belgrade, in addition to the theoretical study of Probability and Statistics, a practical work is done by using software. Content of Probability and Statistics course includes both basics of probability and statistics, as well as solving problems in these areas. Teaching with educational software involves solving selected problems in probability and statistics, as well as problems from selected engineering fields.

Software used to support the lab exercises in Probability and Statistics class at the School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies in Belgrade is GNU Octave (Octave). Lab exercises include introduction to Octave, determination of probability and conditional probability, basic probability distributions and their parameters, as well as solving basic statistical tasks.

Solving problems by using educational software Octave was performed using the built-in functions, as well as new ones, which are created by the users. Application of numerical educational software in teaching of probability and statistics is conducted directly on the laboratory exercises as well as by individual work at home using distance learning system Moodle.

This paper is divided into three sections. The first section is focused to numerical computation software Octave, presenting basic features of this program and its possible applications. The second part of the paper shows organization of a practi-

cal part of the course in Probability and Statistics using Octave. The third part provides an example of using this program in solving problems in probability and statistics. An example that illustrates the Central Limit Theorem is presented.

### NUMERICAL ANALYSIS SOFTWARE GNU OCTAVE

GNU Octave is free software. This means that it is freely allowed to use the program, distribute it, copy, study and modify. Octave is part of the GNU Project [1]. Octave is a program primarily intended for numerical computations.

The first version of the software package Octave was written by James Rawlings and John Ekerdt. Although the name Octave sounds like has something to do with music, actually a program is named after professor Octave Levenspiel, who was a professor of one of the authors of the program.

Numerical software GNU Octave does not have graphical user interface (GUI). For the lab exercises in Probability and Statistics class at the School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies in Belgrade Octave is used with additional GUI QtOctave. QtOctave provides a graphical user interface when working in the software Octave [2].

Installations for Octave and its GUI can be freely downloaded from the Internet. Program Octave works independently from the command line interface, while QtOctave works relying on Octave. To use QtOctave is necessary to install Octave first. Octave syntax is very similar to Matlab [3]. Matlab software users can easily switch to Octave. Common to both of the programs is a large number of operators and functions.

---

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies, Belgrade, Serbia



In mathematical courses at the School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies in Belgrade, GNU Octave is used as educational software. The software is used in teaching Mathematics 1, Mathematics 2, Discrete Mathematics and Algorithms, and Probability and Statistics [4, 5, 6].

One of the main reasons for such a wide use of software Octave in teaching is a large number of built-in functions. Octave, in addition to standard arithmetic and logical operators, contains a large number of built-in functions for numerical calculations. These functions enable work with matrices, polynomials, to perform integration, differentiation, solve differential equations and other mathematical tasks.

The second reason for wide application of Octave in teaching is simplicity of use. The functions are easy to write and combine together in complex structures, which may be stored in separate documents, to provide software re-use. Of special importance for education is a wealth of functions that support graphical representation of data.

Standalone documents of Octave have extension `m`. These documents can be copied, modified, and could refer each other. Existence of these kinds of documents is a third advantage of Octave in working with students, since in this way easy checking of their individual work is possible.

### **Organization of a practical part of the course in Probability and Statistics using Octave**

Practical training within the course in Probability and Statistics consists of two parts. The first part of practical training is conducted in computer lab, while the second part is realized in a distance learning system. For the practical part of the course in Probability and Statistics the software Octave is used.

In a computer lab, each student works at his computer, first running a set of solved examples, and then a few problems for independent work. Before the class, students receive adequate instructions in Octave commands that will be used, as well as of the process of solving problems. The problems are solved gradually, starting from simple mathematical functions, and in a few steps, using the built-in functions for solving a certain problem.

The second part of practical work is organized applying distance learning system Moodle [7, 8]. Students have access to the course in Probability and Statistics in this system, where course materials and auditory exercises are set. During the course, students receive tasks to solve in Octave. Students are required to upload the `m`-files they created as solutions to the problems they are given.

At the beginning of the practical work in Probability and Statistics, students are trained to work with the program Octave. In this way, students are prepared to solve complex problems in the field of probability and statistics. Introduction includes mastering basic arithmetic and logical operations, and working with matrices (as the basic variable type of software package). In order to ensure effective graphical presentation of results, one part of the training is dedicated to commands related to drawing and formatting graphics. The last part of the introduction to the work with Octave is dedicated to mastering the `m` documents and commands to control the flow of the program.

This organization of practical work provides mastering the basis of the software Octave, as well as learning to solve problems in the field of probability and statistics both by using classical methods, and using software methods. Also, solved problems can be used to solve problems in other areas while creating more complex algorithms.

### **Application of Octave in teaching Probability and Statistics**

Solving problems in probability and statistics using GNU Octave can be implemented in two ways: by using basic mathematical functions, and by the use of built-in functions in the field of probability and statistics. Of course, depending on the problem, there could be a combination of these two procedures.

The laboratory exercises in the probability and statistics include a large number of solved problems using the software. Exercises include random number generators, several important distributions, determining probabilities of random variables, testing statistical data, etc. In this way, the theoretical part of the course [9, 10, 11, 12, 13] is backed by a set of problems with computer-aided solutions. Due to the paper size limitations, only some representative examples will be presented.

The first example covers random number generators and determination of their parameters, as well as the corresponding graphical representation. Using the generators, Central Limit Theorem will be illustrated. The importance of random number generators with particular distribution is in their applications in system simulations.

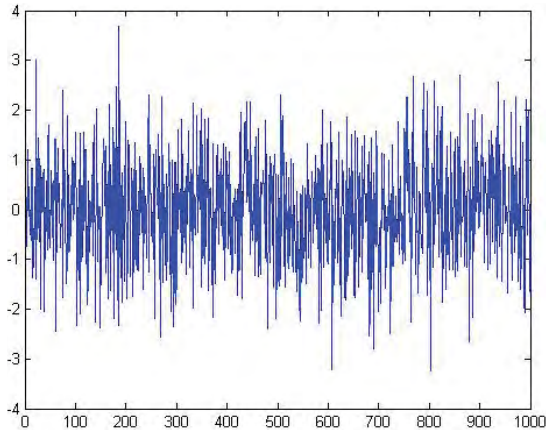


Fig. 1. Random variable with Gauss distribution obtained by a random number generator

To generate random numbers that obey a certain distribution, built-in functions are used. Random numbers with Gauss distribution will be presented here. Gauss distribution is chosen as the most common distribution used to model system noise. Therefore, such a random numbers can be used in telecommunications to simulate noise [14].

To generate random numbers with Gauss distribution, Octave uses function `randn(n, m)`. This function generates a matrix of dimension  $n \times m$ , whose elements have a Gauss distribution with mean 0 and standard deviation equal to 1. Calculating mean and standard deviation of obtained series of random numbers can be done by using functions `mean(X)` and `var(X)`, where  $X$  is a vector of random numbers. An example of 1000 values of a random variable with Gauss distribution is shown in Figure 1.

It is possible to modify the function in order to obtain Gauss distributions of an arbitrary mean and an arbitrary standard deviation. In this case the command `randn(n, m)` is applied such that the random number is provided as `sigma*randn(n, m)+mv`. In the above expression `sigma` denotes standard deviation, while `mv` denotes mean value. The graphical representa-

tion of random numbers is also possible by using histograms. Thus, Figure 2 provides a histogram of 1000 random numbers with Gauss distribution of a mean value 5 and a standard deviation 3. The random numbers are classified in 20 bins of equal width.

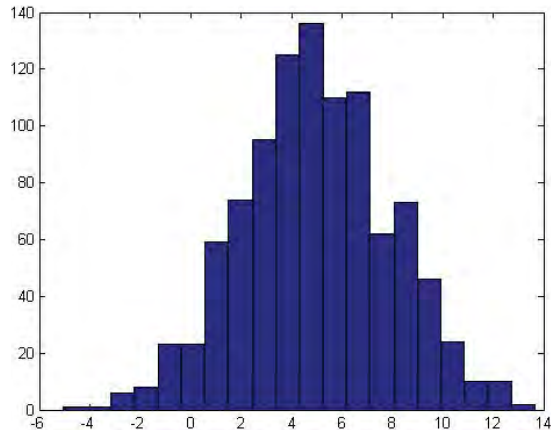


Fig. 2. Histogram of 1000 random numbers with Gauss distribution of a mean value 5 and a standard deviation 3

Described process of generating random numbers is possible not only for random numbers with Gauss distribution, but with other distributions as well. Octave has functions for generating random numbers with uniform, normal, binomial, beta, geometric, logarithmic, gamma, and other distributions.

One of the lab exercises in Probability and Statistics class is devoted to the Central Limit Theorem, the one of fundamental theorems of Probability and Statistics. For an application example example, consider a situation that appears in many communication problems, where sums of two or more statistically independent random variables appear, so it is necessary to determine the statistical properties of sums. The solution to this problem leads to the Central Limit Theorem, according to which the sum of a large number of independent random variables tends to normal probability distribution regardless of the distribution of terms.

For illustration in this paper, an example of generating distributions of sums of 2, 3 and 10 random variables in Octave is given. Each of the selected random number generators generates 5000 numbers. To generate random numbers with uniform distribution, built-in function `rand(n, m)` is used.

This function generates a matrix of the size  $n \times m$ , filled with random numbers uniformly distributed in the interval from 0 to 1.

In Fig. 3, histograms that illustrate Central Limit Theorem, based on previous example, are given. The diagram in the upper left shows 5000 uniformly distributed random numbers. The diagram in the upper row right is obtained by summing two vectors of random numbers with uniform distributions. In the bottom row, the histograms of random variables obtained by summing 3 and 10 vectors of random numbers with uniform distributions are presented.

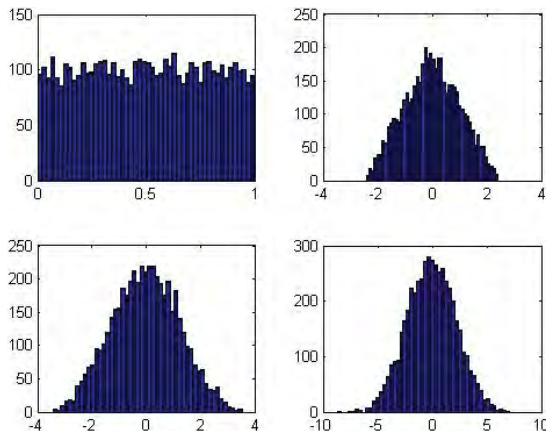


Fig. 3. Illustration of the Central Limit Theorem

## CONCLUSIONS

In this paper, application of GNU Octave software tool for numerical computation in teaching Probability and Statistics is presented. Basic properties of the software tool are described, and its application in teaching probability and statistics. Selected examples of teaching techniques being used in practice are shown. Random number generators with different distributions are described and applied in examples where properties of the obtained random numbers are analyzed. Special emphasis is made in graphical representation of obtained results and the visualisation of obtained data. Application examples in other areas, primarily telecommunications, are outlined.

## REFERENCES

- [1] [www.octave.org](http://www.octave.org)
- [2] [packages.ubuntu.com/hardy/qt octave](http://packages.ubuntu.com/hardy/qt octave)
- [3] Davis T., Sigmon K., *MATLAB*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2005.
- [4] Savić A., Zeković A., *Matematika 1 - priručnik za laboratorijske vežbe*, Visoka škola elektrotehnike i računarstva, Beograd, 2010.
- [5] Savić A., Zeković A., *Matematika 2 - priručnik za laboratorijske vežbe*, Visoka škola elektrotehnike i računarstva, Beograd, 2011.
- [6] Savić A., Zeković A., *Diskretna matematika i algoritmi - priručnik za laboratorijske vežbe*, Visoka škola elektrotehnike i računarstva, Beograd, 2010.
- [7] [e-learn.viser.edu.rs/moodle/](http://e-learn.viser.edu.rs/moodle/)
- [8] [moodle.org/](http://moodle.org/)
- [9] Merkle M., Vasić P., *Verovatnoća i statistika - sa primenom i primerima*, III izdanje, Beograd 2001.
- [10] Ivković Z., *Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom*, Građevinska knjiga, Beograd, 1976.
- [11] Cvetković S., *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, Akademska misao, Beograd, 2004.
- [12] Grinstead C., Snell J., *Introduction to Probability*, American Mathematical Society, 2003, [http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching\\_aids/books\\_articles/probability\\_book/book.html](http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/book.html)
- [13] Kreyszig E., *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1999
- [14] Dukić M., *Principi telekomunikacija*, Akademska misao, Beograd, 2008.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ БАЗ ГЕОДАНЫХ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ТЕРРИТОРИЙ

*Paper deals with requirements for composition and use spatial data in tasks estimation of territory safety. The analysis different geoinformation system is discussed and example use theme chart are presented.*

### ВВЕДЕНИЕ

Разработка новых методов оценки состояния безопасности территорий обусловлена необходимостью эффективного расходования средств на проведение мероприятий по предупреждению и ликвидации чрезвычайных ситуаций (ЧС). Требуется разработка показателей, позволяющих количественно оценить опасность, уязвимость и защищенность территорий.

Согласно этой триаде разработаны базы данных, таблицы которых сгруппированы по трем классам: источники риска ЧС; характеристика инфраструктуры территорий и объектов, включая данные по населению как реципиенту риска; данные по силам и средствам предупреждения и ликвидации ЧС (объекты управления). По разным оценкам, до 85 процентов такого рода данных содержат географическую информацию [1].

Четвертый класс таблиц - мониторинг обстановки и суточные донесения о состоянии спасательных формирований, не имеет географической привязки, но содержит временную составляющую. Это позволяет проводить комплексный анализ состояния безопасности территорий с использованием средств геоинформационного моделирования и оперативного анализа данных (OLAP).

### СОСТАВ БАЗ ГЕОДАНЫХ

Использование геоинформационных систем для управления превентивными мероприятиями по снижению рисков насчитывает более двух десятков лет. Описание функциональных задач различных подсистем, использующих

картографический материал приводится в статьях, монографиях, методических материалах [2-5]. Разработанные атласы рисков различного рода ЧС для территории Российской Федерации, федеральных округов и субъектов не содержат методических рекомендаций, нормирующих состав и порядок их практического использования. Необходим стандарт, закрепляющий правила создания, хранения и использования картографического материала для анализа и управления территориальными рисками различной природы.

Структура, масштабный ряд, функциональное назначение и полнота пространственных данных определяются решаемыми задачами территориального управления. Часть задач по управлению безопасностью находится в компетенции федеральных органов государственной власти (например, сейсмобезопасность, радиационная безопасность), ограниченное количество задач решают местные органы власти. Основная же часть расходов на превентивные и оперативные мероприятия приходится на региональные бюджеты. Поэтому именно администрации территорий заинтересованы в повышении информационной составляющей в процессах принятия управленческих решений. Примерный состав базы географических данных, используемых для оценки состояния безопасности территорий представлен в таблице 1.

Выделены три основных компонента базы гео-данных: топографическая основа, разработанная подразделениями Роскартографии; тематические слои, созданные на основе анализа

1 Институт вычислительных технологий СО РАН

2 Специальное конструкторско-технологическое бюро «Наука» КНЦ СО РАН

3 Институт вычислительного моделирования СО РАН

**Таблица 1.** Классификация компонентов базы геоданных

№ п/п	Наименование картографического ресурса	Использование картографического ресурса
<b>I. Топографические основы</b>		
1	Обзорные карты местности масштаба М1:1 000 000 (в 1 см 10 км)	Разработка карт риска на уровне субъектов Российской Федерации
2	Карты местности масштаба М1:100 000 (М1:200 000)	Создание оперативных карт обстановки с детализацией на уровне муниципальных образований
3	Карты местности масштаба М1:25 000 (в 1 см 250 м)	Построение зон опасностей природных ЧС, разработка паспортов территорий
4	Планы населенных пунктов масштаба М1:10 000 (М1:2 000)	Оперативная оценка динамики распространения поражающих факторов техногенных ЧС
<b>II. Тематические слои</b>		
1	Источники опасностей (потенциально опасные объекты и коммуникации, затороопасные участки рек, скотомогильники и т.д.)	Комплексная оценка <i>опасности</i> территории
2	Риски различных видов ЧС (паводковый атлас; карты сейсморайонирования, горимости лесов, очагов размножения вредителей леса и т.д.)	
3	Плотность населения	Комплексная оценка <i>уязвимости</i> территории
4	Интенсивность движения по магистралям	
5	Расположение важных объектов экономики, объектов с массовым пребыванием людей и др.	
6	Сети оперативного мониторинга и контроля обстановки	Комплексная оценка <i>защищенности</i> территории
7	Дислокация сил и средств (спасательные формирования, экстренные службы)	
8	Места эвакуации, безопасные зоны и прочее	
<b>III. Динамические слои</b>		
1	Результаты моделирования распространения опасных факторов ЧС	Оперативное построение карт для принятия решений по ликвидации ЧС. Разработка паспортов безопасности объектов и территорий
2	«Привязка» объектов семантических таблиц по координатам	Построение карт на основе систем распределенного сбора данных
3	Аналитические картограммы	Анализ данных мониторинга и контроля обстановки средствами OLAP
4	Маршруты выдвижения сил и средств, эвакуации и т.д.	Расчет оптимальных маршрутов на основе графов транспортных сетей

данных мониторинга различными ведомствами и организациями; динамические слои, получаемые в режиме on-line на основе семантической информации, результатов математического моделирования, картографического и OLAP-анализа. В четвертый блок входят растровые материалы, космические снимки, цифровые модели рельефа, сетевые модели. В отличие от остальных элементов, эти географические представления сильно зависят от используемой ГИС (форматы данных, логические связи), поэтому включение данных информационных ресурсов в платформонезависимую геобазу («читаемую» большинством ГИС) затруднительно.

## **ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ**

Для большей эффективности пополнения и использования геоинформационных баз данных разработан банк пространственных данных (БГД) Сибирского отделения РАН.

Банк пространственных данных создан для решения следующих задач:

- создание распределенной системы идентификации, адресации и позиционирования объектов управления на территориях Сибири с использованием средств цифровой картографии и геоинформатики;
- ведение и хранение цифровых картогра-

фических материалов, растровых снимков территории;

- визуализация и анализ пространственно-ориентированных данных на унифицированных цифровых картах;
- навигация по информационным картографическим ресурсам.

В основу банка пространственных данных положены принципы распределенных хранилищ данных и web-технологий. Фрагменты банка находятся в Новосибирске, Кемерово, Красноярске, Иркутске. В основном это картографические результаты исследований по оценке безопасности отдельных регионов Сибири и смежной тематике.

Доступ к топографическим основам цифровых карт, тематическим слоям, космическим снимкам организован через иерархический каталог данных и многокритериальную систему поиска. База геоданных постоянно пополняется разработками различных ведомств агрегированного и оперативного характера. Это позволяет обновлять и детализировать оценки различных аспектов состояния безопасности территорий, разрабатывать новые методы анализа данных.

## **ИНСТРУМЕНТАРИЙ ДЛЯ РАБОТЫ С ГЕОДАННЫМИ**

Банк пространственных данных предназначен для решения задач визуализации готовых карт и организации доступа к распределенным библиотекам данных. Наличие подробного мета-описания каждого объекта, развитая система каталогизации (поиска, выборки интересующих исследователя данных) делают БПД универсальным инструментом оперативного обмена картографическими данными.

Для создания геоданных, анализа и преобразования картографического материала требуется комплекс геоинформационных систем универсального и специализированного назначения. Приведем краткие характеристики наиболее распространенных ГИС, используемых в задачах управления безопасностью территорий.

Одной из самых мощных и универсальных ГИС является комплекс программ *ArcGIS* компании ESRI. Системы линейки *ArcGIS* имеют богатый инструментарий для работы с наборами гео-

данных: настольные системы, серверные технологии, системы хранения геоданных в базах данных под управлением SQL-серверов, системы web-публикации карт. Прямое локальное редактирование пространственных данных - самый распространенный способ работы. *ArcGIS Server* обеспечивает многопользовательский режим работы, отвечает за публикацию карт для пользователей настольных систем, web-публикацию. Недостатком продуктов ESRI является высокая интеграция продуктов между собой. При использовании одного компонента *ArcGIS* необходимо использовать только решения и форматы ESRI.

*MapInfo* - прямой конкурент компании ESRI, но с более упрощенными решениями. Настольные редакторы уступают продуктам *ArcGIS* по возможности редактирования геоданных, табличных данных, построению легенды и отображения картографической информации. *MapInfo* также имеет серверные решения, одно из которых - *MapXTreme*. В качестве системы хранения пространственных данных в основном используется Oracle, с дополнительным лицензируемым модулем Oracle Spatial Locator. К недостаткам относится некорректная работа с системами координат и проекциями, слабо развитый табличный редактор.

*Панорама* - продукт отечественной разработки, предназначавшийся первоначально для работы с наборами данных для территории бывшего СССР. По умолчанию *Панорама* работает со своим форматом файлов. Редактор геоданных, табличный редактор и редактор стилей, имеют специфический интерфейс, что требует определенных навыков использования.

В последнее время наметилась тенденция к использованию свободно распространяемых систем (например, *PostGIS*) или условно бесплатных (*Tatuk GIS*). По спектру решаемых функциональных задач они пока значительно уступают *ArcGIS* и *MapInfo*. Кроме того, использование их для информационной поддержки управления безопасностью территорий требует значительных доработок, с задействованием высококвалифицированных проектировщиков и программистов. Однако высокая цена профессиональных ГИС, доступность и растущий объем универсальных программных библи-

отек говорит о хороших перспективах систем с открытым кодом. Подробное исследование возможностей различных ГИС для решения задач территориального управления приведено в монографии [6].

К специализированным ГИС можно отнести программы расчета последствий чрезвычайных ситуаций, оценки рисков с модулями отображения результатов на цифровых картах местности. Например, ГИС «Экстремум», разработанная Центром исследования экстремальных ситуаций, позволяет провести оценку риска и возможных последствий природных и техногенных катастроф на локальном, региональном и федеральном уровнях [7,8].

С ростом объемов картографических ресурсов возникает проблема быстрой визуализации цифровых карт как на уровне персонального компьютера, так и для web. Поиск, выбор объектов требует просмотра миллионов записей, а изменение масштаба карт - генерализации объектов, подписей, изменения стилей отображения и так далее. Работа с детальными картами больших территорий (например, субъектов Сибирского федерального округа) приводит к необходимости разработки новых способов представления картографических данных. Одно из перспективных направлений - создание общих хранилищ пространственных данных, использование технологий кэширования изображений, перенос большей части вычислительных задач на уровень сервера.

## **ПРИМЕРЫ КОМПЛЕКСНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ**

Технологии и алгоритмы построения карт территориального риска приведены в [9]. Описаны алгоритмы построения карт риска для территорий различных масштабов (субъект, муниципальный район, индустриальный центр). Полученные результаты рекомендуется использовать для проведения превентивных (заблаговременных) мероприятий по снижению риска ЧС. Комплексно решить задачи поддержки оперативного управления можно только при использовании систем, интегрирующих различные технологии. Профессиональные ГИС обычно содержат в сво-

ем составе СУБД, однако имеющийся набор встроенных программных средств не позволяет реализовать сложные математические модели оценки обстановки при возникновении ЧС (например, ТОКСИ-3). Специализированные расчетные программы, как правило, имеют примитивную ГИС с минимумом функций. Институтом вычислительного моделирования СО РАН разработана экспертная геоинформационная система ЭСПЛА-ПРО информационной поддержки управления в рамках территориальных подсистем МЧС РФ в различных режимах функционирования [10]. При работе в режиме ЧС комплексная система поддержки принятия решений использует программные модули, разработанные на основе различных технологий (Рисунок 1.). Такой подход позволяет решать широкий спектр задач управления аварийно-спасательными и других неотложными работами в зоне техногенных катастроф и стихийных бедствий.

Для формирования оперативных карт и другой информации для принятия решений, необходимо развивать на одном уровне все компоненты интегрированной системы, а именно:

- использовать клиент-серверные технологии для хранения картографического материала, баз данных и баз знаний;
- интегрировать в систему математические модели расчета последствий ЧС с последующим отображением результатов с ГИС;
- формализовать методические рекомендации в виде баз знаний, на основе которых формируются рекомендации по действиям в ЧС в зависимости от масштаба и особенностей места возникновения ЧС;
- разрабатывать специальные функции для интегрированной геоинформационной подсистемы.

Интеграция современных информационных технологий в качестве программных приложений конечных пользователей (экспертов и руководителей, принимающих решения), позволяет более эффективно использовать имеющиеся ресурсы для повышения безопасности территорий, увеличения их социального и экологического потенциала.

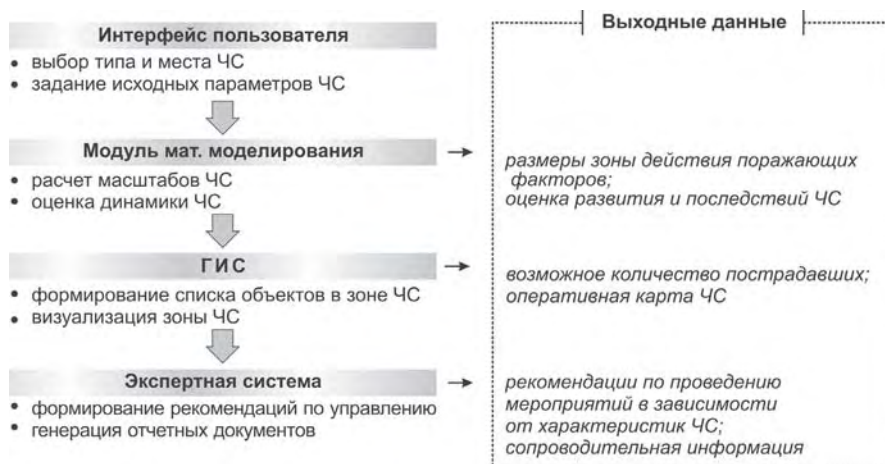


Рис. 1. Алгоритм оперативной оценки обстановки с использованием ГИС

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Картографические базы, также как семантические, являются основой для оценки территориальных рисков, информационной поддержки мероприятий по их снижению, а также при управлении процессами ликвидации ЧС [11]. Большие объемы картографического материала, разнообразие методов обработки и представления пространственных данных требуют формирования стандартов их описания, разработки алгоритмов создания и использования цифровых карт. Опыт реализации интеграционного проекта СО РАН № 116 «Антропогенные риски угледобывающих и нефтегазодобывающих территорий Сибири» показывает, что информационная поддержка управления позволяет планомерно снижать природные, техногенные риски территорий. Использование описанных методов при оценке воздействия на окружающую среду новых промышленных объектов и урбанизированных территорий позволило наметить пути приведения деятельности по добыче и переработке природных ресурсов в соответствии с международным стандартам безопасности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берлянт А.М. Картография: Учебник для студентов вузов, обучающихся по географическим и экологическим специальностям. - М.: Аспект Пресс, 2001. - 336 с.
- [2] Куренева Н.И., Коровин А.И., Гутарев С.В. Формирование картографического обеспечения МЧС России в условиях модернизации отрасли геодезии и картографии Российской Федерации, Технологии гражданской безопасности. Т. 7, 2010, №1-2. - С. 132-134.

- [3] Информационно-коммуникационные технологии обеспечения безопасности жизнедеятельности: монография, под общ. ред. П.А. Попова, МЧС России. - М.: ФГУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2009. - С. 149-184.
- [4] Рекомендации по картографическому обеспечению МЧС России, Нормативно-методические документы по вопросам организации выполнения НИОКР.- М.: ВНИИ ГОЧС, 2008. - 69 с.
- [5] Анисимова Т.Б., Плотникова Т.В. и др. Атлас природных и техногенных опасностей и рисков чрезвычайных ситуаций в Российской Федерации (под ред. Шойгу С.К.), М. 2004. - 272 с.
- [6] Бычков И.В. и др. Интеграция информационно-аналитических ресурсов и обработка пространственных данных в задачах управления территориальным развитием. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2011. - С. 53-95.
- [7] Разработки ЦИЭКС, [www.esrc.ru](http://www.esrc.ru).
- [8] Студия анализа риска, [www.pro-diar.ru](http://www.pro-diar.ru).
- [9] Шокин Ю.И., Москвичев В.В., Ничепорчук В.В. Методика оценки антропогенных рисков территорий и построения картограмм рисков с использованием геоинформационных систем, Вычислительные технологии. 2010. - Т. 15. №1. - С. 120-131.
- [10] Ноженкова Л.Ф., Исаев С.В., Ничепорчук В.В., Евсюков А.А., Морозов Р.В., Марков А.А. Средства построения систем поддержки принятия решений по предупреждению и ликвидации ЧС, Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. - №4. - 2008. - С. 46-54.
- [11] Рекомендации по картографическому обеспечению МЧС России, Нормативно-методические документы по вопросам организации выполнения НИОКР.- М.: ВНИИ ГОЧС, 2008. - 69 с.



## **FUZZY LOGIC, NEURAL NETWORKS, EXPERT SYSTEMS AND ITS APPLICATIVE CORRELATION MODELS**

---

*Fuzzy logic, neural networks and expert systems gives an ideal mathematical framework for complex phenomena of optimization in systems engineering. This paper is presenting the mathematical models, which are developed for correlation between technical and non technical system, theoretically and through the case study. Techno economical optimization models are often incomplete, or gives incorrect conclusion, due to lack of all relevant input variables, which have important effect on the result and decision making process, but are not easy to be quantified, such as environmental or social impact of technical solution. All non-technical criteria have to be incorporated in the decision-making process as well, from the very first planning step, simultaneously and equally with other technical criteria.*

*Neural networks are non-linear statistical data modeling tools, used to model complex relationships between inputs and outputs. The fuzzy model for technical system evaluation, proposed in this paper, operates with five input variables. The expert system is trained on 11 different technical subsystem. The input variables, together with corresponding membership functions, are chosen to describe both techno-economic and environmental parameters together with historical and political ones, because those are important for decision making process. Based on the numerical values of technical and quantified non technical input variables, the fuzzification process calculates the values of membership function. These membership functions values represent the inputs for the inference decision engine.*

*Based on the set of ten 'if-then-else' fuzzy rules, the inference decision machine generates the values of membership functions adjoining the output variable called the grade of the alternative solution. Calibration of the fuzzy model involves tuning the adopted parameters that define the membership functions of input variables and the position of singletons, adjoining to the output variable and definition of fuzzy rules set. The results obtained clearly demonstrate the importance of considering the additional, non-technical criteria in the decision making process by fuzzy expert system model.*

---

### **INTRODUCTION**

The process of complex systems' designing and optimization models in systems engineering comprises a set of designing stages, where each of them requires timely incorporation of technical and non technical criteria. The ideal mathematical framework for the phenomena of optimization in systems engineering is offered by correlation models which apply fuzzy logic, neural networks and expert systems (Russell et al. (1996)).

The main goal of this paper was to develop the artificial intelligence model for the evaluation and selection of an optimal complex engineering technical system. The task was to include not only the usual techno-economic performance indicators (Perace et al. (2002), Uyumaz et al.(2006)) such as investment quotient, Benefit/Cost (B/C) ratio, peak power plant production, etc., but also those which characterize the environmental impacts and address the historical-political issues. The problem is that those variables have a great impact on the result, but they are described in linguistic terms rather than by quantitative values (Silvert (2000)). It means that they require numerical quantifiers for each of the input variables, whereas the corresponding weight coefficients represent an expert appraisal (Shim et al.(2002)). The fuzzy systems theory represents a logical, i.e. suitable framework for modelling these variables (Zadeh (1996), Suharyanto et al. (1997), Wong et al. (2008), Tayfur et al.(2006), Gupta et al. (2003)).

There are no engineering solution adopted today without serious environmental and social analyses

---

<sup>1</sup> University Union Nikola Tesla, Faculty for construction management, Belgrade, Serbia

performed (Makropoulos et al. (2003)). The problem is also the timing of finalization of those studies and technical selection acceptance. The mathematical correlation models which incorporate numerical and linguistic input variables simultaneously are needed (Borri et al. (1998) , Passarella et al. ( 2002), Zalewski et al. (2001), Lee et al. (2009)). One of the proposal for correlation model between technical and non technical system is presented in this paper. The answer is in applying of contemporary techniques of artificial intelligence, through the fuzzy logic, neural networks and expert systems.

The fuzzy model proposed in this paper operates with five input variables. It is developed for technical system evaluation. The expert system is trained on 11 different technical subsystem. The input variables, together with corresponding membership functions, are chosen to describe both technoeconomic and environmental parameters together with historical and political ones, because those are important for decision making process. Based on the numerical values of technical and quantified non technical input variables, the fuzzyfication process calculates the values of membership function. These membership functions values represent the inputs for the inference decision engine (Liebowitz (1997)).

Based on the set of ten 'if-then-else' fuzzy rules, the inference decision machine generates the values of membership functions adjoining the output variable called the *grade* of the alternative solution. Calibration of the fuzzy model involves tuning the adopted parameters that define the membership functions of input variables and the position of singletons, adjoined to the output variable and definition of fuzzy rules set. Numerical evaluation of each of the possible technical solution is obtained subsequently as the output by an appropriate defuzzyfication procedure (Kandel (1992), Rubenstein-Morano (2000), Yin et al. (1996) ).

The paper is organized as follows. The theoretical postulates on fuzzy logic, neural networks and expert system are given in section 2 after the introduction. Section 3.1. provides a description and technical parameters of possible alternatives and technical parameters of the solutions used for the tuning of the expert system. The environmental and historical-political factors and their modelling for inclusion into a decision-making system are discussed in the section 3.2. The same section contains the fuzzy system for decision making, definition of membership functions and the corresponding fuzzy rules. The correlation model results are presented in the section 4. The conclusion is in section 5. It summarizes the results obtained and highlights the advantages of the approach utilized to system engineering.

## **ARTIFITIAL INTELIGENCY TOOLS**

### **Fuzzy logic**

A fuzzy logic system is unique, because is able to simultaneously handle numerical data and linguistic knowledge. It is a non linear mapping of an input data vector into a scalar output. Fuzzy logic means inexact reasoning, data granulation, computing with words (Borri,D. & al 1998).

Haziness is often present in engineering system or realistic process. This vagueness may come up from the analysis of the data inputs and in the directives used to describe the relationships between the informative attributes. Fuzzy logic grants an inference structure that allows the human reasoning capacities to be applied to artificial knowledge-based structures. Fuzzy logic gives a means for adapting linguistic strategy into control actions and thus offers a high-level computation.

The Fuzzy logic is a mathematical tool for dealing with uncertainty (Zadeh, L.A. 1996). It offers to a software computing system the important concept of computing with words'. It grants a technique to deal with vagueness and information granularity. The fuzzy theory provides a mechanism for representing linguistic constructs.

With the assistance from the fuzzy approach, imprecise quantifications and descriptive linguistic qualifications (such as: partially endangers the environment, disturbs a little, disturbs much, low impact, affect a lot, often affect the environment, exerts slight/great influence on...) can be represented by synthetic quantifiers, or by fuzzy input functions, and can be PC processed.

Basically, the fuzzy logic provides an inference organization that enables proper human reasoning capa-

bilities that machines do not have. In the other hand, the traditional binary set theory describes crisp events, events that have two options: one or zero. It uses probability theory to explain whether an event is about to happen, measuring the chance with which a given event is expected to come about. The premise of fuzzy logic is based leading the concept of relative graded connection and so are the functions of awareness and cognitive processes.

Zadeh initially was an engineer and systems scientist. Engineers define fuzzy logic as a useful tool with diverse applications; especially on solving problems that linear computing is not able to do.

### **Neural networks**

A definition of fuzzy logic systems set mathematical determination to the emulation of certain perceptual and lingual attributes related with human cognition, where the science of neural networks provides a new computing tool with learning and adaptation capabilities. The theory of fuzzy logic gives an inference method under cognitive uncertainty, computational neural networks, fuzzy logic offer exciting benefits such as learning, adaptation, fault tolerance, parallelism, and generalization. Throughout the years, the computational changes have brought growth to new technologies. Such is the case of artificial neural networks, that over the years, they have given various solutions to the engineers.

Designing and implementing intelligent systems has become a crucial factor for the innovation and development of better technical solutions for society. Such is the case of the implementation of artificial life as well as giving solution to interrogatives that linear systems are not able resolve (Lin, C. & al 1996).

An artificial neural network is a system based on the operation of biological neural networks, in other words, is an emulation of biological neural system. Why would be necessary the implementation of artificial neural networks? Although computing these days is truly advanced, there are certain tasks that a program made for a common microprocessor is unable to perform; even so a software implementation of a neural network can be made with their advantages and disadvantages. The advantages are: a neural network can perform tasks that a linear program can not, when an element of the neural network fails, it can continue without any problem by their parallel nature, a neural network learns and does not need to be reprogrammed, it can be implemented in any application and without any problem. Disadvantages are: the neural network needs training to operate, the architecture of a neural network is different from the architecture of microprocessors therefore needs to be emulated and it requires high processing time for large neural networks.

A artificial neural network is developed with a systematic step-by-step procedure which optimizes a criterion commonly known as the learning rule. The input/output training data is fundamental for these networks as it conveys the information which is necessary to discover the optimal operating point. In addition, a non linear nature make neural network processing elements a very flexible system. Basically, an artificial neural network is a system. A system is a structure that receives an input, process the data, and provides an output.

In neural network design, the engineer or designer chooses the network topology, the trigger function or performance function, learning rule and the criteria for stopping the training phase. So, it is pretty difficult determining the size and parameters of the network as there is no rule or formula to do it. The best we can do for having success with our design is playing with it. The problem with this method is when the system does not work properly it is hard to refine the solution. Despite this issue, neural networks based solution is very efficient in terms of development, time and resources.

### **Expert system**

Artificial Intelligence is a branch of computer science, which focuses on the development of computer systems to simulate the processes of problem solving and duplicate human brain functions. Expert systems are a category of programs based on the theory and methods of artificial intelligence. An expert system is software that uses a knowledge base of human expertise for problem solving, or clarify un-

certainties where normally one or more human experts would need to be consulted (Kandel, A. 1992). The first expert systems appeared in the late sixties (Liebowitz, J. 1997). Today, they exist in many forms, from medical diagnosis to investment engineering analysis and from counseling to production control. Many large corporations use expert systems in their business. The list of the companies using expert systems technology is long and varied: NASA, HP, Lockheed, Boeing, Daimler Chrysler AG, various power, gas and oil stations, etc.

Expert systems tend to be more effective than other computer based applications, because: they may combine the knowledge of many experts in a specific field, they can store an unlimited amount of information, and works much faster, than a human, they are available 24 hours a day, and can be used at a distance over a network, they are able to explain their information requests and suggestions, they can process client's uncertain responses and, by combining several pieces of uncertain information, may still be able to make strong recommendations, they can accumulate the knowledge of high level employees for any company, which is especially useful when the company needs to fire them due to worsened market conditions.

## **CORRELATION MODEL CASE STUDY**

### **System engineering technical alternatives**

System engineering technical alternatives are composed by the hydropower plants alternative solutions on the Drina River between the town Foca and Gorazde. There are 7 alternatives on the possible profiles Gorazde, Sadba, Ustikolina and Paunci, with different backwater level in the corresponding reservoir, e.g. backwater level 375m for the profile Gorazde 375 option and it is marked as G375 in the tables. Analysing the geographic, technical, geological, hydrological, environmental and socio-political constraints, it is not possible to construct all the seven hydropower plants simultaneously, but the following six alternative combinations are possible: A - HPP Gorazde 375: a single concrete dam at the Gorazde II profile, with a hydropower plant the dam (i.e. located immediately downstream of the dam) and the normal backwater level of 375.00 m. B - HPP Gorazde 383: a single concrete dam at the Gorazde II profile, with a HPP by the dam and reservoir at the normal backwater level of 383.00 m. C - HPP Gorazde 352, HPP Sadba 362, HPP Ustikolina 373, HPP Paunci 384: four concrete spillway dams in the riverbed at the corresponding river profiles, with normal backwater levels of 352.00 m asl, 362.00 m, 362.00 m, 373.00 m and 384.00 m, respectively. D - HPP Gorazde 375, HPP Paunci 384: two dams and hydropower plants at the Gorazde II and Paunci profiles, with normal backwater levels of 375.00 m asl and 384.00 m asl, respectively. E - HPP Gorazde362, HPP Ustikolina 373, HPP Paunci 384: a cascade of three concrete dams with run-of-the-river hydropower plants, namely: Gorazde II, Ustikolina and Paunci, with normal backwater levels of 362.00 m, 373.00 m and 384.00 m, respectively. F - HPP Sadba 362, HPP Ustikolina 373, HPP Paunci 384: a cascade of three uniform concrete dams and hydropower plants in the Drina riverbed, at the profiles of Sadba, Ustikolina and Paunci, with normal backwater levels of 362.00 m, 373.00 m and 384.00 m, respectively, and with approximately equal heads and uniform equipment.

The main techno-economic characteristics of the hydropower plants in the part of the Drina River (Stevovic (2001)) are presented in Table 1, together with four additional designed dams and hydropower plants (on the other part of the Drina River: Kozluk, Drina, I, Drina II and Drina III), (Stevovic (2004)) used for the fuzzy model tuning.

Through application of established techno-economic decision-making methods, it is possible to select the optimal hydropower alternative solely on the basis of techno-economic parameters presented in the above table. However, the effect of environmental impacts of construction would be totally neglected in that way, as well as the impacts of cultural, historical, and political factors (Banner (2000)). Consequently, the following sections deal with the modelling of these impacts, applying the theory of fuzzy logics together with techno-economic parameters.

**Table 1.** Techno-economic parameters of hydropower plants in the section Srbinje-Gorazde, wherein  $Q_i$  is installed discharge, H is head,  $N_i$  is installed capacity,  $E_{year}$  is total annual output,  $E_{peak}$  is the annual produced energy during increased consumer consumption, B/C is benefit/cost ratio with Investment quotient and Specific investments in the last two rows

Altern	$Q_i$ (m <sup>3</sup> /s)	H (m)	$N_i$ (MW)	$E_{year}$ (GWh/y.)	$E_{peak}$ (GWh/y.)	Investments (mil. \$)	B/C	Inv. quot. (\$/kWh)	Spec.inv. (\$/kW)
G383	500	35.8	166.5	501.7	308.3	302.76	1.57	0.603	1818
G375	500	27.8	130.8	407.2	251.1	246.31	1.53	0.605	1881
G362	450	15.0	61.5	223.8	126.3	105.20	1.73	0.470	1711
G352	450	5.0	20.7	73.2	41.3	78.98	0.74	1.084	3842
S362	450	9.5	43.2	140.4	79.2	79.54	1.44	0.566	1841
U373	450	10.0	43.2	147.4	83.2	77.83	1.50	0.528	1801
P384	450	10.6	43.2	156.3	88.2	85.53	1.45	0.547	1980
D-I	800	13.3	93.4	396.5	213.66	237.85	1.59	0.545	2546
D-II	800	13.3	93.4	396.5	213.66	274.83	1.40	0.600	2942
D-III	800	13.3	93.4	396.5	213.66	292.25	1.36	0.693	3129
K	800	13.3	93.4	396.5	213.66	216.20	1.73	0.737	2315

### FUZZY EXPERT CORRELATION MODEL

The fuzzy correlation model for hydropower plants evaluation, proposed in this paper, operates with five input variables  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ . These variables, together with corresponding membership functions, are chosen to describe both numerical techno-economic and linguistic environmental parameters together with historical and political ones.

The first input variable is the B/C (Benefit/Cost) ratio. In this model fuzzy input variables have arbitrarily been scaled on the interval [0, 1]. The first input variable is characterized through two attributes: *profitable* and *unprofitable*. These two properties are defined as fuzzy sets with corresponding membership functions. For the membership function of the fuzzy set *profitable B/C ratio*, the following monotonously non-descending function is selected:

$$\mu_1^1(x_1) = \begin{cases} 0 & ; x_1 < 0 \\ 1 - e^{-x_1/0.26} & ; x_1 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

The analytic form of the membership function for the *unprofitable B/C ratio*, is defined using the so called bell function:

$$\mu_1^2(x_1) = \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{x + 0.23}{0.43}\right|\right)^{8.2}} \quad (2)$$

The second input variable is the investment quotient, one of the important techno-economic parameters. Two linguistic variables are attributed to this variable: *acceptable* and *expensive*, and again, corresponding membership functions are used to define these attributes. The corresponding membership functions for linguistic variable *expensive* and *acceptable* investment quotient are as follows:

$$\mu_2^1(x_2) = e^{-\frac{(x_2-1)^2}{2 \cdot 0.24^2}} \quad (3)$$

and

$$\mu_2^2(x_2) = 0.34x_2^3 - 0.38x_2^2 - 0.28x_2 + 1 \quad (4)$$

The third variable is the peak energy productivity of the analyzed hydropower system. It is defined as the ratio of peak energy  $E_{peak}$  produced (during the time period of increased power consumption) and the total annual energy generated  $E_{year}$ . This variable is scaled to a [0,1] interval, and it is described by the following fuzzy attributes: *mean* and *high* capacity. The corresponding membership functions for these linguistic variables are as follows:

$$\mu_3^1(x_3) = e^{-\frac{x_3^2}{2 \cdot 0.4^2}} \quad (5)$$

and

$$\mu_3^2(x_3) = e^{-\frac{(x_3-1)^2}{2 \cdot 0.4^2}} \quad (6)$$

The fourth variable is the environmental impact. In order to find a way to quantify the environmental impact and to determine the numerical values of the fourth input variable  $x_4$ , five significant environmental impacts have been considered: the total area flooded, the number of households which must be relocated, the number of public facilities and cemeteries which will be flooded due to the plant construction, as well as the effect of groundwater level raising.

The numerical value of the fourth input variable for each of the hydropower plants is calculated as follows:

$$x_4 = 1 - \min(0.005 * (FA), 0.2) - \min(0.002 * (RH), 0.2) - \min(0.008 * (FPF), 0.2) - \min(0.05 * (FC), 0.2) - \min(0.002 * (GLR), 0.2) \quad (7)$$

where  $FA$  is the total flooded area in hectares,  $RH$  is the number of relocated households,  $FPF$  is the number of flooded public facilities,  $FC$  is the number of flooded cemeteries and  $GLR$  the increase in groundwater level in centimeters. This way, each of the considered five adverse impacts was attributed an equal maximal value of impact (0.2) wherein coefficients 0.05, 0.002, 0.005 and 0.008 are selected in compliance with measurement units and approximate size of considered impacts.

Regarding this variable, the hydropower solutions may be qualified to have *bad* or *acceptable environmental impact*. Membership functions of these linguistic variables are given in Figure 1.

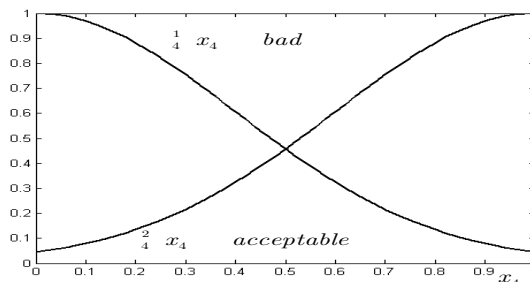


Fig. 1. Membership functions of linguistic variables *bad* and *acceptable* environmental impact

Membership functions of linguistic variables *bad* or *acceptable environmental impact* are defined here as follows:

$$\mu_4^1(x_4) = e^{-\frac{x_4^2}{2 \cdot 0.4^2}} \quad (8)$$

and

$$\mu_4^2(x_4) = e^{-\frac{(x_4-1)^2}{2 \cdot 0.4^2}} \quad (9)$$

Finally, the fifth criterion considered is the historical-political impact and, by this criterion, the hydropower solutions may be (in fuzzy terms) *acceptable* or *unacceptable*. This choice of linguistic attributes is a consequence of the present political relations between the neighboring national entities. At the moment, these relations exclude the possibility to build a hydropower system in the territory of both entities. Accordingly, the input variable  $x_5$  for considered hydropower plant can have a value of 1 or 0, depending on whether the HPP is to be constructed in the territory of one or two entities, respectively. Membership functions for particular linguistic variables attributed to this input variable are presented in Figure 2.

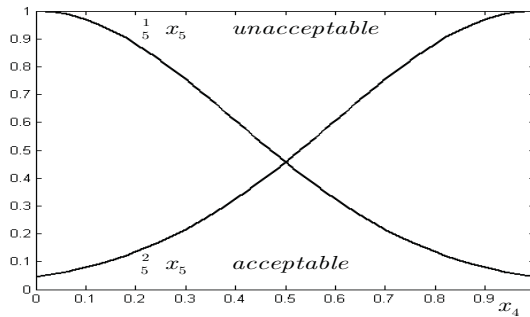


Fig. 2. Membership functions of linguistic variables *acceptable* and *unacceptable* historical-political impact

The corresponding membership functions for *acceptable* or *unacceptable* historical-political impact are defined analytically as follows:

$$\mu_5^1(x_5) = e^{-\frac{x_5^2}{2 \cdot 0.4^2}} \quad (10)$$

and

$$\mu_5^2(x_5) = e^{-\frac{(x_5-1)^2}{2 \cdot 0.4^2}} \quad (11)$$

Based on the numerical values of input variables  $x_i, i=1,2,\dots,5$ , the fuzzification process calculates the values of membership function  $\mu_i^j(x_i), i=1,2,\dots,5, j=1,2$  (where index  $i$  denotes the variable and index  $j$  the attribute addressed to that variable). These membership functions values represent the inputs for the inference decision engine. Based on the set of fuzzy rules, the inference decision machine generates the values of membership functions adjoining the output variable called the *grade* of the alternative solution.

In order to express the final grade, ten fuzzy attributes, joined to this variable, are introduced: *profitable, unprofitable, acceptable, expensive, mean, high, bad, acceptable, unacceptable, acceptable*. Each of these attributes has its own membership functions chosen from the set of singletons with the following corresponding positions:  $y_1 = 0.05, y_2 = 0.07, y_3 = 0.10, y_4 = 0.15, y_5 = 0.30, y_6 = 0.60, y_7 = 0.70, y_8 = 0.85, y_9 = 0.90$  and  $y_{10} = 0.95$  on the scale from 0 (worst) to 1 (best solution). Finally, as a consequence of defuzzification process, the output variable is quantified representing evaluation grade of the considered technical alternative.

The above system for the evaluation of alternative hydropower systems, presented here, is formed using ten 'if-then-else' type rules, covering all possible situations in the practice. These rules are formed based on expert's experience, but they also represent and materialize the logical and expected influence of input variables on the final grade of the analyzed hydropower systems. The rules are as follows: If peak energy productivity is mean, the grade is  $y_5$  (the weight of this rule is 0.8), If peak energy productivity is high, the grade is  $y_7$  (the weight of the rule is 0.8), If B/C is unprofitable the grade is  $y_1$  (the weight of the rule is 1.0), If B/C is profitable the grade is  $y_9$  (the weight 1.0), If a historical-political factor is unacceptable the grade is  $y_4$  (the weight 1.0), If a historical-political factor is acceptable the grade is  $y_8$  (the weight 1.0), If environmental influence is bad the grade is  $y_2$  (the weight 1.0), If environmental influence is acceptable the grade is  $y_6$  (the weight 1.0), If the investment quotient is acceptable the grade is  $y_{10}$  (the weight 1.0), If the investment quotient is expensive the grade is  $y_3$  (the weight 1.0).

These rules are applied with the corresponding weights that are taken into account when the defuzzification process is used. Weights attributed to particular rules are not identical. Rules 1 and 2, which define the importance of peak energy for selection of the optimal hydropower solution, have a lower weight (0.8) than other rules. This way, the authors of the fuzzy-evaluation model wish to emphasize that this is one of the techno-economic criteria which are not crucial in the decision making process. For this model a Sugeno fuzzy inference system has been applied. Defuzzification is performed using the centroid method (Lin et al.(1996)).

Calibration of the fuzzy model involves tuning the adopted parameters that define the membership functions of input variables and the position of singletons, adjoined to the output variable and definition of fuzzy rules set. In other words, training of the fuzzy evaluation model implies selection of a large number of parameters. Each of the specified membership functions for linguistic variables has at least two parameters, and there are ten such functions. Ten singletons take part in the definition of the output variable and their positions need to be selected.

Finally, the selection of weights of particular fuzzy rules is also subject to tuning. Although the degree of freedom appears to be rather high at first glimpse, the impacts of particular parameters turn out to be complementary, meaning that one of them may be fixed while the other is being tuned. An example for the connection between parameters is the weight of a rule and the position of the singleton attributed to that rule. For example, according to the rule 1, if the peak energy is *mean*, the output variable gets the singleton value of  $y_5$ , and this rule is applied with 0.8 weight. Increase in weight is equivalent to increase in the position of singleton  $y_5$  and vice versa. Also, not all the parameters defined during the system tuning are of equal significance for eventual operation of fuzzy model. Analysis of these impacts is subject to sensitivity analysis of the system, the elements of which are also presented in this section.

The tuning process must fulfil two different criteria. The main one is for the evaluation system to behave according to the experts' experience. The other one is more formal and it requires the quantified grade to be a continuous function of each of the input variables excluding the first-type breakpoints.

For the tuning process, the particular hydropower systems given in Table 1 were used. The values of input variables, scaled to the interval  $[0,1]$ , and obtained values for the final grades of these hydropower systems, are given in Table 2. The obtained final grades given in this table emphasize the fact that hydropower system Gorazde 352 is unacceptable, this being a unprofitable plant with small backwater level and high construction costs. On the other hand, the Kozluk and Drina III plants have very low grades due to their adverse environmental impacts. The plants of Drina I, Sadba 362, Ustikolika 373 and Paunci 384, are noticeable for high grades, because of their good techno-economic characteristics and acceptable environmental impacts.

**Table 2.** Input variables and final grades, scaled to the interval  $[0,1]$ , for the training set of hydropower systems

HPP	Input variables					Final grades
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y$
Gorazde 383	0.77	0.433	0.61	0.227	0	0.638
Gorazde 375	0.73	0.436	0.62	0.352	0	0.659
Gorazde 362	0.93	0.243	0.56	0.642	1	0.717
Gorazde 352	0	1	0.56	0.952	1	0.394
Sadba 362	0.64	0.38	0.56	0.885	1	0.726
Ustikolina 373	0.7	0.326	0.56	0.812	1	0.725
Paunci 384	0.65	0.353	0.56	0.815	1	0.724
Kozluk	0.93	0.624	0.539	0.15	0	0.584
Drina I	0.79	0.35	0.539	0.99	0	0.726
Drina II	0.6	0.428	0.539	0.97	0	0.714
Drina III	0.56	0.561	0.539	0.06	0	0.588

## SENSITIVITY ANALYSES

To illustrate the elements of the sensitivity analysis, which is an important stage in the process of system tuning, the following experiment was made. Four hydropower plants were considered: Sadba 362, Paunci 384, Kozluk and Drina III. Variation in the output variable, for these four plants (hydropower plant worthiness) is done to test should the values of their input variables  $x_1, x_2, x_3$  and  $x_5$ , taken from Table 1, and environmental impact (value of the fourth input variable  $x_4$ ) be significantly changed within interval 0 to 1. This result indicates to importance of environmental impacts for the final decision making. The obtained result, justify the quality of the obtained evaluation system, since three significant



properties are noticed:

- The grade dependence on environmental influence is a continuous function. This property is determined according to the expert's knowledge. It would not be logical for a small change in the input variable to produce a large step change in the final grade.
- The obtained functions are monotonously increasing, suggesting that increase in the value of the fourth input variable (environmental impact) is a desirable property.
- The relations (differences) between the obtained four curves are almost constant, independent of the value of the input variable  $x_4$  (environmental impact). This property is also logical because if one adopts  $x_4$  to be constant for all four plants, the values of grades are determined by the other four input variables. Since these four input variables are assumed to be constant in this experiment, the relations (differences) between the grades for the different plants must remain unchanged.

The following interesting element of the sensitivity analysis is an experiment which shows that selection of weights of rules 1 and 2, which define the peak energy impact, is not of crucial importance. Again, the hydropower plants of Sadba 362, Paunci 384, Kozluk and Drina III were taken, and input variables values were taken from Table 1, but the value of weights of rules 1 and 2 continuously varied. Changes in worthiness of these hydropower plants for various values of this weight are calculated. These result show that variation in worthiness of considered plants hardly depends on the changes in weight of the rules. It is also interesting that increase in weight increases the worthiness of Drina III and decreases the worthiness of the remaining three plants. The reason for that is the fact that the peak energy is almost the best feature of Drina III (input variable  $x_3$  is the highest among all five for this plant) and weight increase upgrades significance of peak energy, whereas the peak energy of the remaining three plants constitutes rather a drawback than an advantage in techno-economic parameters.

Within sensitivity analysis, it is interesting to note how the selection of position of singleton  $y_{10}$  influences the final evaluation result. Observing the input variables for the considered four plants presented in Table 1, a simulation was made with continuous changing of position of singleton  $y_{10}$  within interval 0 to 1. The changes in output variable, meaning the worthiness of these plants are calculated. These results indicate that significance of this tenth singleton, which constitutes the referent measure of impact of *investment quotient*, is significant, because it not only considerably changes the ultimate worthiness of the considered hydropower plants but also affects their mutual ranking. Mindful of the weight which must be attributed to this techno-economic parameter in evaluation of the plant, a high value of  $y_{10} = 0.95$  is adopted in the proposed fuzzy model.

### SYSTEM ENGINEERING RESULT AND DISCUSSION

Since the final goal of the fuzzy expert model is to choose the optimal hydropower alternative on the River Drina (Stevovic (2000)) between the towns of Foca and Gorazde, Table 3 presents the values of input variables and final grades for the alternatives A, B, C, D, E and F described in section 3.1. Input variables for these technical solutions are calculated by the procedure described in section 3.2. The last column in the table denotes the final grades of these alternatives. Note that all values are normalized on the  $[0,1]$  interval.

**Table 3.** Input variables and final grades, scaled to the interval  $[0,1]$ , for hydropower alternatives

Alternatives	Input variables					Final grades
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y$
A	0.73	0.436	0.617	0.352	0	0.532
B	0.77	0.433	0.614	0.227	0	0.514
C	0.484	0.461	0.564	0.812	1	0.707
D	0.709	0.413	0.602	0.352	0	0.533
E	0.774	0.298	0.564	0.642	1	0.714
F	0.645	0.353	0.564	0.812	1	0.724

Based on the final grades obtained, it can be concluded that the results are quite logical and consequent, yielding the alternative F as the optimal one with a grade of  $y = 0.724$ . This alternative consists of three almost uniform plants: Sadba 362, Ustikolina 373 and Paunci 384. This uniformity of plants leads to 30% lower costs of hydro, mechanical, and electrical equipment and lower maintenance costs (due to standardized equipment and corresponding spare parts). The structures are low concrete dams with spillways which are also used as bottom outlets. Each structure has five spillways with radial gates featuring protection flaps. Hydropower plants are located in the blind part of the dam and they are equipped with horizontal bulb turbines. This type of solution has the minimal environmental impact and its hydropower facilities satisfy the criterion of belonging to particular national entities (HPP Paunci belongs to one national entity, while HPP Sadba and HPP Ustikolina belong to the other).

The second- and third-ranked solutions are the alternatives E (with rate  $y = 0.714$ ) and C (with rate  $y = 0.707$ ) that include the structures of HPP Ustikolina 373 and HPP Paunci 384, just like the optimal alternative F. The difference is in the third included structure. The following observations can be made based on the obtained optimal solution:

- The characteristics of the considered area, regarding the defined criterion, require several small cascade structures in the riverbed, instead of one structure with a large reservoir, since small structures do not have such an intensive environmental impact and it is also possible to adjust their location according to the political constraints;
- The structures of HPP Ustikolina 373 and HPP Paunci 384 must be included in the optimal solution scheme;
- The community will decide later on whether the lowest reservoir with a normal high water level of 362.00 m will be formed with a dam and hydropower plant at the profile of Sadba or Gorazde (Stevovic (1999));
- The alternative solution involving construction of hydropower plant HPP Sadba 362 also includes the option of total usage of the available river Drina head between the towns of Srbinje and Gorazde by constructing the fourth small cascade, a concrete dam in the riverbed at the Gorazde profile with a normal high water level of 352.00 m asl. HPP Gorazde 352 is not a profitable structure at the moment. This will change after growth of consumers' demand and adequate appreciation of clean and renewable energy (Stevovic (2002)).

The obtained results are consistent with the expert knowledge and this consistency shows:

- That the choice of the five input variables was correct and sufficient to make a proper selection of the optimal solution;
- That the defined ten fuzzy rules really express the relations between the inputs and the output of the fuzzy system;
- That the weight coefficients of the adopted fuzzy rules express the importance of the input variables.

The overall conclusion is that the designed fuzzy evaluation expert model for correlation between technical and non technical system, implemented the complex experts' reasoning in an efficient way.

## CONCLUSION

This paper presents the applicative correlation model using fuzzy logic, neural networks and expert systems, as artificial intelligence tools. The model is developed, tested and proven on case study of an optimal hydropower solution for the river Drina, between the towns of Foca and Gorazde in Bosnia and Herzegovina. The best alternative solution is selected by using the fuzzy based model. The fuzzy framework of this model enables taking into consideration the environmental impact parameters, historical and political factors, as well as standard techno-economic parameters. It is also proven here that these two categories of parameters are in strong correlation and that they can be treated equally

thus allowing the environmental factors to have a significant role and impact on the chosen optimal technical solution. Elements of sensitivity analysis are used both in the process of fuzzy model tuning and to verify the validity of operation of the developed model. The fuzzy logic, neural networks and expert systems offers an ideal framework for system engineering development and further research are recommended.

## ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the Ministry of Science and Environment Protection of Serbia under the grant No EE18031 and No TR35030. The authors would also like to thank Energoprojekt-Hidroinzenjering, New Belgrade, Serbia, for making the relevant technical documentation available.

## REFERENCES

- [1] Banner, N. (2000). *Environmental Compliance Policies And Tools*, Environment, Orlando.
- [2] Borri, D., Concilio, G, and Conte, E. (1998). "A fuzzy approach for modeling knowledge in environmental risk system". *Computer, Environment and Urban Systems*, 22, 299-313.
- [3] Gupta, Rajiv; Kewalramani, Manish A.; Ralegaonkar, Rahul V. (2003). "Environmental Impact Analysis Using Fuzzy Relation for Landfill Siting" *Journal of Urban Planning & Development*, Vol. 129 Issue 3, p121-139, 19p; DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9488(2003)129:3(121); (AN 10582400)
- [4] Harley, N., Shogreen J.A., and White, B. (2002). *Environmental Economics in Theory and Practice*, Palgrave-Macmillan, Houndmills Hampshire UK and New York.
- [5] Kandel, A. (1992). *Fuzzy Expert Systems*, CRC-Press, Florida, USA.
- [6] Lee, Mijin; Mc Bean, Edward Arthur; Ghazali, Mirnader; Schuster, Corinne J.; Huang, Jinhua Jeanne (2009) "Fuzzy logic Modeling of Risk Assessment for a Small Drinking-Water Supply System", *Journal of Water Resources Planning & Management*, Vol. 135 Issue 6, p547-552, 6p; DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9496(2009)135:6(547); (AN 44642981) .
- [7] Liebowitz, J. (1997). *The Handbook Of Applied Expert Systems*, CRC - Press, Florida, USA.
- [8] Lin, C. T., and Lee, C. S. G. (1996). *Neural Fuzzy Systems: A Neuro-Fuzzy Synergism to Intelligent Systems*, Prentice-Hall.
- [9] Makropoulos, C. K.; Butler, D.; Maksimovic, C. (2003) "Fuzzy Logic Spatial Decision Support System for Urban Water Management", *Journal of Water Resources Planning & Management*, Vol. 129 Issue 1, p69, 9p; (AN 8687413).
- [10] Passarella, G.; Vurro, M.; D'Agostino, V.; Giuliano, G.; Barcelona, M.J. (2002). "A probabilistic methodology to assess the risk of groundwater quality degradation". *Environmental Monitoring and Assessment* 79, 57-74.
- [11] Perace, D. (ed.), Perace, C., and Palmer C. (2002). *Valuing the environmental in developing countries*, Edward Elgar, Cheltenham, UK.
- [12] Rubenstein-Morano, B., (2000). "A survey of knowledge-based information systems for urban planning: moving towards knowledge management." *Computer, Environment and Urban Systems*, 24, 155-172.
- [13] Russell, Samuel O.; Campbell, Paul F. (1996) "Reservoir Operating Rules with Fuzzy Programming" *Journal of Water Resources Planning & Management*, Vol. 122 Issue 3, p165, 6p; (AN 6785685).
- [14] Shim, J.P., Warkentin, M., Courtney, J.F., Power, D.J., Ramesh, S., Carlsson, C., (2002). "Past, present, and future of decision support technology." *Decision Support System* 33, 111-126.
- [15] Silvert, W. (2000). "Fuzzy indices of environmental conditions." *Ecological Modeling*, 130, 111-119.
- [16] Stevovic, S. (1999). "Priority to hydro power plants", *Proc., Updating and Refurbishing Hydro Power Plants Conf.*, Berlin, vol. pp.
- [17] Stevovic, S. (2000). "Optimization and evaluation of hydro development", *Proc., Millenium Congress on Energy and Environment*, Geneva, vol., pp
- [18] Stevovic, S. (2002). "Small scale hydropower plants as renewable energy sources in FR Yugoslavia", *Proc., Med. Power Conf.*, Athens, vol., pp
- [19] Stevovic at al. Preliminary Report on Hydropower utilization of the Drina River between the Srbijne and Gorazde towns, Energoprojekt, Belgrade, 2001.
- [20] Stevovic at al. Preliminary Report on Hydropower utilization of the Drina River between Zvornik and confluence, Energoprojekt, Belgrade, 2004.
- [21] Suharyanto; Xu, Chengchao. (1997) "Reservoir operating rules with fuzzy programming" *Journal of Water Resources Planning & Management*, Vol. 123 Issue 5, p312, 2p; (AN 9712033164)
- [22] Zadeh, L.A. (1996). "Fuzzy logic computing with words." *IEEE Transaction-Fuzzy Systems*, (4), 235-242.

- [23] Tayfur, Gokmen; Singh, Vijay P. (2006) "ANN and Fuzzy Logic Models for Simulating Event-Based Rainfall-Runoff, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 132 Issue 12, p1321-1330, 10p, 5 charts, 2 diagrams, 8 graphs; DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:12(1321); (AN 23114518)
- [24] Uyumaz, Ali; Altunkaynak, Abdüsselam; Özger, Mehmet. (2006) "Fuzzy Logic Model for Equilibrium Scour Downstream of a Dam's Vertical Gate" Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 132 Issue 10, p1069-1075, 7p, 5 charts, 3 diagrams, 8 graphs; DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:10(1069); (AN 22389254)
- [25] Wong, Tommy S. W.. (2008) "Discussion of "ANN and Fuzzy Logic Model for Simulating Event-Based Rainfall-Runoff by Gokmen Tayfur and Vijay P. Singh" Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 134 Issue 9, p1400-1400, 1p; DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2008)134:9(1400); (AN 33835738)
- [26] Yin, Mark T.; Stenstrom, Michael K. (1996). "Fuzzy Logic Process Control of HPO-AS Process, Journal of Environmental Engineering, Jun96, Vol. 122 Issue 6, p484, 9p; (AN 6783727)
- [27] Zalewski, M. (ed.), Janauer, G.A., and Jolankai, G. (2001). *A new paradigm for the sustainable use of aquatic resources*, UNESCO, UNDP.

## ALGORITHMS AND SOFTWARE'S IMPLEMENTATION OF ESTIMATIONS PROCEDURE IN SOME CHAOTICALLY MODELS

---

In this paper we described some iterative methods of estimations two important characteristics of chaotically systems, the fractal dimension and Lyapunov exponent, the parameters which suggest on the presence of irregular, chaotically dynamics in the observed system. The estimation procedure of these parameters is given along with appropriate software's implementation.

---

### INTRODUCTION

Non-linearity in the behavior of dynamic systems is usually characterized by their aperiodic, irregular and random trajectories. Therefore, the study of such systems, especially in the analysis of real data, is associated with a number of difficulties that often prevent a more precise description of certain phenomena and construct an appropriate theoretical model. For these reasons, chaos theory is an alternative model for such a complex nonlinear dynamics can be described as relatively simple and easy way. This idea becomes particularly pronounced in recent decades, when it comes to the formation of a large number of models of the type of chaos that provide a new perspective to contemporary research and a full contribution to the mathematical and stochastic modeling of empirical phenomena. This paper describes some of the most important models of the type of chaos, which in practical investigations play an increasingly important role. In this regard, we give special attention to statistical methods of chaos detection, which are modified from the standpoint of implementation on a computer.

### SOME TYPES OF CHAOTIC MODELS

In its basic form a deterministic model is defined by the operator

$$\mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}_n; \mathbf{a}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

where  $\mathbf{x}_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p+1}) \in R^p$ ,  $p$  is the dimension of operator  $T$ ,  $\mathbf{a}$  represents a parameter of mapping and, in the general case, it is unknown value. In this way, the structure of the operator  $T$  defines the basic properties of the corresponding dynamic of model that it describes. If the sequence  $(\mathbf{x}_n)$  is convergent, its limit

$$\mathbf{x}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \quad (2)$$

is uniquely determined by the equation  $\mathbf{x}^* = T(\mathbf{x}^*, \mathbf{a})$ . From a mathematical standpoint, the value  $\mathbf{x}^*$  is usually called a fixed point of operator  $T$  and its existence is a sufficient condition for convergence (2). This point is well-known *Banach's fixed point theorem*, which we are given in one of its most common forms.

**Theorem 1.** *Let  $\mathbf{x}^*$  be a fixed point of continuously-differentiable operator  $T$ , where  $\|T'(\mathbf{x}^*)\| < 1$ . Then there is an open set  $U \subseteq R^p$  which contains  $\mathbf{x}^*$  and such that for an arbitrary  $\mathbf{x} \in U$  the convergence (2) is valid.*

On the other hand, a series  $(\mathbf{x}_n)$  may have two or more points of accumulation. Limiting case is the existence of infinitely many of such points. Therefore, even the smallest changes of initial values  $\mathbf{x}_0$  of iterative procedure (1) may cause very large changes in the values of other members of the series  $(\mathbf{x}_n)$ . These sequences belong to a class of chaotic sequences and they can be formally defined as in the work of Berliner's [1]. As an illustration, we will analyze several specific models of the type of chaos that is often encountered in contemporary literature, but in practical research. Their importance lies primarily

---

<sup>1</sup> Faculty of Sciences and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of Economics, Kosovska Mitrovica, Serbia

in the fact that they are often used as reference examples in the development and verification of new concepts and statistical methods in the theory of chaos.

### Logistic model

We consider first one of the most popular non-linear systems that generates so called *the logistic mapping*, defined by one-dimensional operator

$$T(x; a) = ax(1 - x). \quad (3)$$

Obviously, this operator generates a one-dimensional nonlinear dynamic system, i.e. a series

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

In doing so, we will assume that the  $a \in [0, 4]$  and  $0 \leq x_0 \leq 1$ , because in this way provided the condition that all values of a series  $x_n$  also belong to the unit interval. However, the behavior of a series  $(x_n)$  largely depends on the value of parameter  $a$ , and we will now further consider some of the special cases that arise here:

1. For values of  $0 \leq a \leq 1$ , the series  $(x_n)$  converges to zero for any initial value  $x_0 \in [0, 1]$ , as can be seen in Figure 1, top left panel.

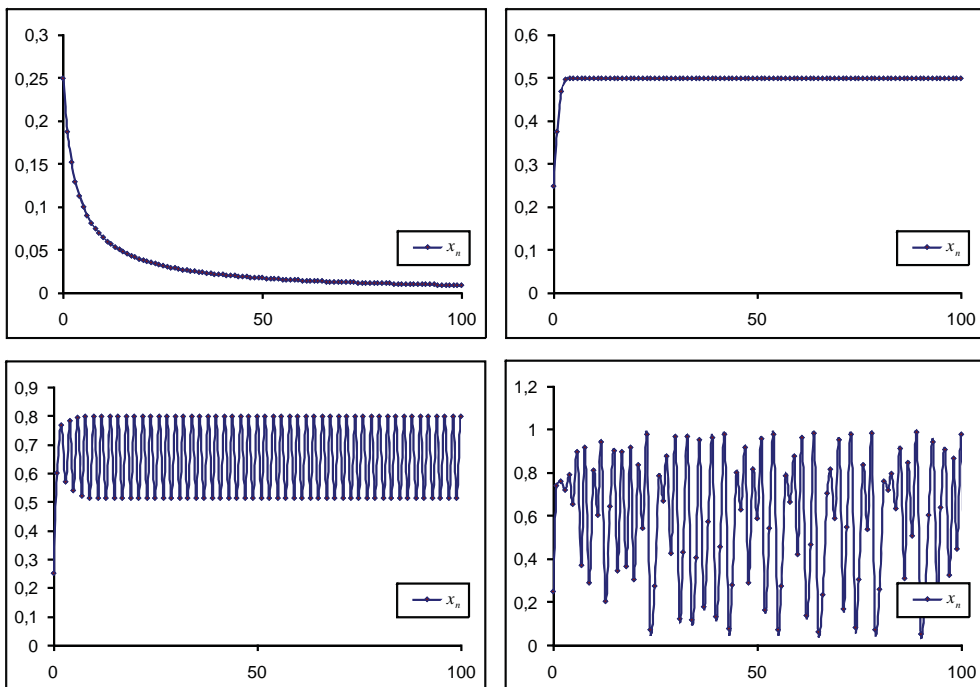


Fig. 1. Realizations of logistic model for the different values of parameter  $a$

2. If the parameter value is  $a \in (1, 3)$ , then in addition to previously mentioned values  $x=0$ , operator  $T(x)$  has a fixed point  $x^* = 1 - a^{-1}$  for which is valid  $|T'(x^*)| = |2 - a| < 1$ . Thus, the iterative process (4) now converges to the numerical values  $x^*$  for each  $x \in (0, 1)$ . As an illustration, in Figure 1, top right panel, we show the realization of this model in the case of  $a = 2$ .

3. Finally, for the values  $3 \leq a \leq 4$  logistic system generates the sequences which, by increasing the value of a parameter  $a$ , have a growing number of points of accumulation (Fig. 1, bottom left panel). Such a “scenario” lasts until the parameter  $a$  reaches a famous Feigenbaum’s value  $a_\infty \approx 3,56994\dots$ . Then, the set of points of accumulation becomes infinite, uncountable sets, and finally for the  $a \approx 4$  system goes into a state of “chaos”. Therefore, there are virtually no points of accumulation and it is impossible to predict where it will, at some point in time  $n$ , the value of  $x_n$  (Fig. 1, bottom right panel).

## Hénon's model

By analyzing two or more economic sectors (for example, price and trading volume products, securities, etc..) leads to the idea of forming multi-dimensional models that can be used to interpret the dynamics of such phenomena. In this way, the chaotic models can be viewed in multiple dimensions. The most famous example of a two-dimensional "chaotic" mapping is the so called Hénon's mapping system, which is usually define by the difference equations

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (5)$$

where  $a, b > 0$  are an arbitrary constants. Graphical representation of two-dimensional Hénon's model is shown in Figure 2, left panel, where we have taken  $a = 1.4$  and  $b = 0.3$ , the parameter values that are the most commonly used in experimental research. By putting now  $y_n = x_{n-1}$  system (5) can be represented in the form of second order difference equation

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1} . \quad (6)$$

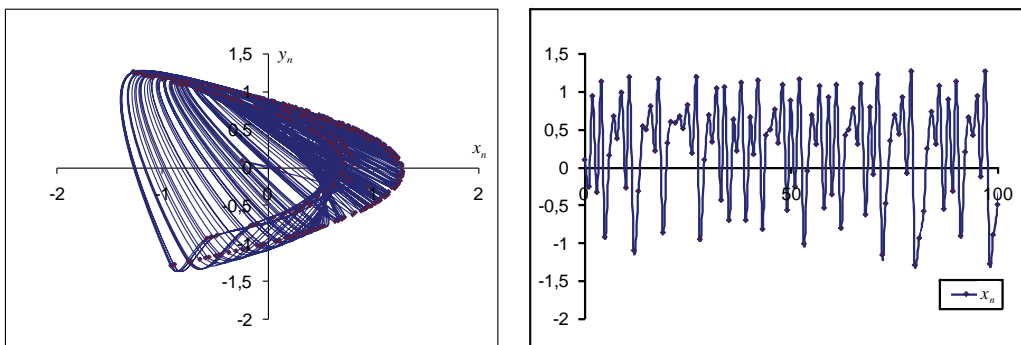


Fig. 2. Realizations of Hénon's chaotic model

In this way, two-dimensional mapping is reduced to the "usual" mapping, with increasing dimension of the operator. In fact, here the operator has the following form  $T(x_n, x_{n-1}; \mathbf{a})$ , where  $\mathbf{a} = (a, b)$  depend on two real variables. In Figure 2, right panel, we shows the realization of this model for the same parameter values  $a, b$ , listed above. In doing so, emphasize that the structure of the Hénon's model points to two important aspects of its chaotic behavior. First of all, it is clear its complex geometrical structure, called *the fractal*. It is an important indicator of the "chaos" nonlinear dynamical system, which is discussed in the next section. Also, Hénon's operator, viewed as a two-dimensional mapping  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , has iacobian  $-b$ , and for  $0 < b < 1$  it has pronounced chaotic behavior, which confirms the positive value of the maximum Lyapunov exponent, which we will also define in the next section.

## QUANTITATIVE METHODS FOR DETECTION OF CHAOS

As we already noted, one of the fundamental problem that arises in the study of nonlinear dynamical systems is the identification and quantification of their chaotic dynamics. To this end can be use different methods and techniques. Here we pay attention to two highly represented methods of detection of chaos. The first of these is so called the estimation of *fractal (correlation) dimension* of the system, first introduced by Smith [3]. In addition, we pay close attention to the so called estimates of *Lyapunov exponent* as one of the most important numerical parameters of chaotic dynamics of system. Both of these methods will be examined in more detail in terms of algorithmic methods of solution, in order of their software implementation, and applications in solving on the computer.

### Fractal dimension of the system

Usually, fractals are defined as sets with very specific structure. Their main feature is that their every, even the smallest part has identical properties as the whole set. A typical fractal structure occurs in a

set of values of chaotic mappings, i.e. sets of forms  $T(A)$ , where  $A \subseteq R^p$ ,  $p \geq 1$ . Using this fact it is possible to estimate (unknown) fractal dimension, and to determine the structure of chaotic mappings  $T(\mathbf{x})$ . Here we consider one of these methods of estimation, in the case of so-called *correlation fractals*. Firstly, let us define the term

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log P[K(\mathbf{x}, \varepsilon)]}{\log \varepsilon}, \quad (7)$$

where  $P(\cdot)$  is the probability, and  $K(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in R^p : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon\}$  is closed ball in the Euclidean space  $R^p$ . If the parameter  $d$  does not depend on the choice of the center  $\mathbf{x} \in R^p$ , then it is dotted fractal dimension of the measure  $P$ . However, in the general case, the probability  $P[K(\mathbf{x}, \varepsilon)]$  depends on  $\mathbf{x}$ , so often, instead of it, observe the mathematical expectation

$$E[K(\mathbf{x}, \varepsilon)] = \int_{R^p} P[K(\mathbf{x}, \varepsilon)] dP(\mathbf{x}). \quad (8)$$

Then the expression (7) becomes

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log E[K(\mathbf{x}, \varepsilon)]}{\log \varepsilon} \quad (9)$$

which is defined *correlation (fractal) dimension*. Procedure for estimating the correlation dimension is discussed in detail by the fundamental works of Smith [3] and [4], based on an approximate, statistical calculation of so-called *correlation integrals*

$$C(\varepsilon) = \iint_{R^{2p}} I(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (10)$$

To this end, let  $x_1, \dots, x_N$  a realization of time series  $(X_n)$ , for which we firstly define the function

$$C_N(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \cdot \psi_N(\varepsilon) \quad (11)$$

where

$$\psi_N(\varepsilon) = \sum_{i=p}^N \sum_{j=p}^N I(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \varepsilon) \quad (12)$$

is total number of all pairs  $(i, j)$  such that the distance of vectors  $\mathbf{x}_i = (x_i, \dots, x_{i-p+1})$ ,  $\mathbf{x}_j = (x_j, \dots, x_{j-p+1})$  from the Euclidian space  $R^m$  does not exceed  $\varepsilon$ . It is easy to show that, in the earlier notation introduced here, it is true the convergence

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_N(\varepsilon), \quad (13)$$

and correlation dimension (9) can be written as

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (14)$$

Based on the last two equality it is clear that for  $N \rightarrow \infty$  and  $\varepsilon \rightarrow 0$  is valid approximation

$$C_N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{d_c}, \quad (15)$$

and as the estimates of the correlation dimension of a series  $(X_n)$  we can take the values

$$\hat{d}_c^{(m)} = \frac{\log C_N(\varepsilon^{m+1}) - \log C_N(\varepsilon^m)}{\log \varepsilon^{m+1} - \log \varepsilon^m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Typically, when implementing such a procedure of estimation on a computer, which will be discussed later, assessed value of the correlation dimension  $d_c$  is most appropriate expressed as the arithmetic mean value  $\hat{d}_c^{(m)}$  where  $m = 1, 2, \dots, p$ . A particular problem that arises here is the choice of the parameter  $\varepsilon$ , of which more details can be found in the monograph of Ширяев [6]. Here we solve this problem by selecting a sequence of different values  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$  within a given numerical interval.



### Tests of chaos. Lyapunov exponent

As already pointed out, chaotic dynamical systems of form (1) is characterized by “sensitivity” in relation to changes of initial values, i.e. very rapid, exponential divergence of the “close” trajectories. Specifically, for relatively small changes in initial values  $d_0 = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0\|$  there is a pronounced change in trajectory of the system of values  $d_n = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n\|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . One of the main indicator of this, the chaotic structure of systems is *the maximum Lyapunov exponent*, defined as the limit

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{d_n}{d_0}. \quad (17)$$

It is shown that the expression (17), under certain conditions, uniquely determines the value  $\lambda$ , independent of the choice of initial values  $\mathbf{x}_0$ . Then, the positive value of this parameter indicates a pronounced chaotic structure of the operator  $T(\mathbf{x})$ .

On the other hand, if the mapping  $T(\mathbf{x})$  is continuously-differentiable, and  $\mathbf{x}_n = T^n(\mathbf{x}_0)$  is the value of trajectory of the process (1) in  $n$ -th iteration, it is valid

$$\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n = T^n(\mathbf{x}_0) - T^n(\mathbf{x}'_0) \approx DT^n(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0), \quad (18)$$

where  $DT^n(\mathbf{x}_0)$  is jacobian of mapping  $T^n(\mathbf{x})$  in the point  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ . Then the convergence (17) can be written as

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln DT^n(\mathbf{x}_0), \quad (19)$$

i.e. the maximum Lyapunov exponent  $\lambda$  is determined by jacobian of mapping with  $T^n(\mathbf{x})$ , i.e. by dominant, the highest value of matrix  $DT^n(\mathbf{x}_0)$ .

Equalities (17)-(19) provide an algorithmic procedure of estimation the value  $\lambda$ . The paper Golovko et al. [4] describes the procedure of such estimation, by using so-called method of neural networks. The basic idea of this method is based on a series of regression  $\ln(d_n)$  with regard to  $n = 1, \dots, N$  where the realizations of the sequence  $(d_n)$  are observed to the moment in which they give a “small” value, i.e. to the values which are satisfied the condition  $\ln(d_n) < 0$ . The value of maximum Lyapunov exponent (we will write a shortly, MLE) is then estimated by the slope coefficient of regression line, as is shown in Figure 3, which shows the procedure of its estimation in the case of the logistic and Hénon’s model, which we described earlier. Note that both assessed value  $\hat{\lambda} = 0,5008$  and  $\hat{\lambda} = 0,4186$  are very “close” to the true values  $\lambda = 0,5$  and  $\lambda = 0,419$ .

However, the authors themselves, as the main difficulty in applying this method, reveals its sensitivity with respect to the choice of initial values  $x_0$  and  $d_0$ . For these reasons, here we give a general, complete MLE estimation algorithm, described in Stojanović and Božinović [5], where the above problem is solved by more staged MLE method of assessment, i.e. by introducing a series of  $M$  random initial points  $(x_0, d_0)$ . Then, MLE-estimate is the arithmetic mean of the corresponding “extra” series of estimations  $L_1, \dots, L_M$  obtained by the regression procedure described above.

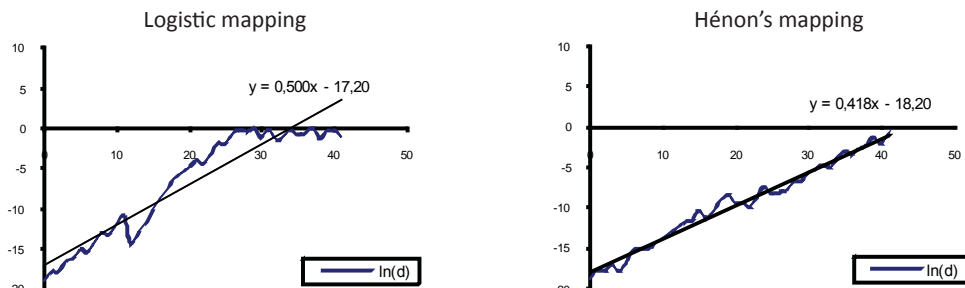


Fig. 3. Realizations of the series  $\ln(d_n)$  together with the appropriate regression line

## Software implementation

The above described procedures of the parameters estimating of chaotic models may be, within the appropriate software procedures, in a simple way to show and as such are implemented and solved on the computer. Figure 4 shows one such application, made in the form of MS Access database and is written in VBA (*Visual Basic for Applications*) programming language. The application, called *Chaos detector*, is a complete and comprehensive software tool that most standard time series can be analyzed from the point of detection and quantification of chaotic elements of their behavior. It contains the original author's intended procedure, primarily for the estimating the correlation dimension and maximum Lyapunov exponent of the system described by appropriate series. Thus, the obtained estimates indicate the possible presence of chaotic components in the observed series and give the possibility for their further analysis.

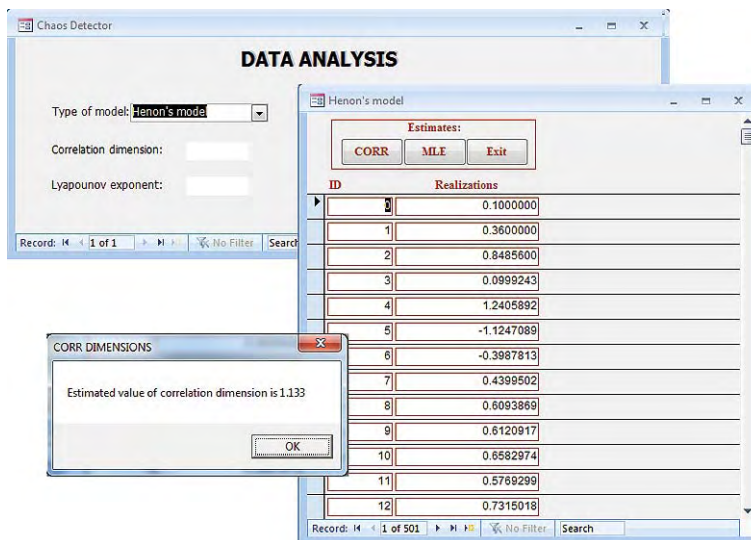


Fig. 4. Software realization for estimating the correlation dimension

We mention, now, the basic concepts and ideas that were used to construct application procedures. The first of these, intended for determining the correlation dimension of chaotic systems, and written in a modified, simplified variant of the VBA programming language, as follows:

```

INPUT (M, N, d0)
  For k = 1 To M
    For s = 1 To M
      Brojac=COUNT(Abs(Xk - Xs) < Eps ^ s )
      If Brojac = k Then freq(k) = freq(k) + 1
      C(k, s) = freq(k) / ((N - k + 1) ^ 2)
    If C(k, s) <> 0 And C(k, s + 1) <> 0 Then
      Obim = Obim + 1
      V(k, s) = (Log(C(k, s )) - Log(C(k, s-1))) / Log(Eps)
      Suma = Suma + V(k, s)
    End If
  Next s
  CORR(k) = Suma / Obim: OUTPUT CORR(k)
Next k

```

On the other hand, the basic code that displays multiple staged procedures for estimating the maximum Lyapunov exponent, in the same VBA-language version, could have the following contents:

```

INPUT (M, N, d0)
  FOR s=1 TO M
    x0 = RANDOM (S) AND x'0=x0+d0
    FOR k=1 TO N
      xk=T(xk-1) AND x'k=T(x'k-1) AND dk= NORM( xk - x'k )
    NEXT k
    j=0
    WHILE (ln(dj)<0; Yj= ln(dj); j=j+1)
      Ls=SLOPE(Y1, . . . , Yj)
    NEXT s
  MLE=AVERAGE(L1, . . . LM)
OUTPUT (MLE)

```

As an illustration, Table 1 shows the estimated values of parameters of the logistic and Hénon's model, typical of chaotic systems, we have already observed. Obtained estimation of the correlation dimension, marked with the CORR short, have a value greater than unity, which is an indication of chaotic dynamics of these systems. The positive estimated value of the maximum Lyapounov exponent (MLE) also confirmed the chaotic structure of the two models.

**Table 1.** Estimated values of of parameters and the detection of chaos in dynamical models

Types of models	Volumes	CORR	MLE	Is the model of chaos?
Logistic model	150	1,404	0,501	YES
Hénon's model	150	1,133	0,418	YES
White noise	250	0,922	-2,051	NO

On the other hand, in addition to these two models, we have examined the realization of so-called "White noise", stochastic series with the standard normal distribution, as well as representatives of "non-chaotic" dynamical systems. Based on (14) we conclude that in this case the estimated values of correlation dimension to be "close" the unit, while the estimated value of the Lyapounov exponent be negative.

## LITERATURE

- [1] Berliner L. M. Statistics, Probability and Chaos. Statistical Science, Vol. 7, No. 1. 1992. P.69-90.
- [2] Golovko V. et al. Some Aspects of Chaotic Time Series Analysis. Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS'2001), Foros, Ukraine.
- [3] Smith R. L. Optimal Estimation of Fractal Dimension. Nonlinear Modeling and Forecasting, Vol. XII, Addison-Wesley. 1991.
- [4] Smith R. L. Estimating Dimension in Noisy Chaotic Time Series. Journal of Royal Statistics Society, Series B, Vol. 54, No. 2. 1992. P.329-351.
- [5] Stojanović V., Božinović M. Detection of chaos: algorithms and software implementation. Proceeding by the Conference SYM-OP-IS 2008. P.645-648.
- [6] Ширяев А. Основы стохастической финансовой математики. Fazis, Moskva. 1998.

# ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

*The problem is considered of constructing the complete interpolating spline of degree  $2n-1$  by calculating the coefficients of the decomposition of a derivative of the spline in the B-splines of the corresponding degree. It is demonstrated that the construction reduces to solving a system of equations with a totally nonnegative band matrix. The possibility is studied of estimating the condition number of totally nonnegative matrices. The only well conditioning systems of equations are two systems for middle derivatives of orders  $n-1$  and  $n$ . It is shown the connection between the conditioning systems with C. de Boor's problem (1975) on the convergence of interpolation processes for the derivatives of splines.*

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу интерполяции функции  $f(x)$  по значениям  $\{f_i\}$ , известным в узлах сетки  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  отрезка  $[a, b]$ . Сейчас стандартным решением такой задачи являются интерполяционные полиномиальные сплайны, т.е. функции, на каждом подотрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  сетки являющиеся многочленами обычно одной и той же степени, называемой степенью сплайна. Наибольший интерес представляют простые сплайны максимальной гладкости или минимального дефекта (дефекта 1). Именно полиномиальный сплайн степени  $2n - 1$  дефекта 1, т.е. гладкости  $C^{2n-2}[a, b]$ , доставляет минимум функционалу

$$\int_a^b [\sigma^{(n)}(x)]^2 dx \quad (1)$$

среди всех возможных интерполянтов  $\sigma(x)$  класса  $W_2^n[a, b]$ . Такой сплайн принимает на концах отрезка  $[a, b]$  нулевые значения старших производных порядка  $l = n, n + 1, \dots, 2n - 2$ . Другими словами этот сплайн, помимо условий интерполяции, удовлетворяет некоторым краевым условиям, а именно – старшие производные на краях равны нулю. Данный сплайн получил название «натуральный», а краевые условия – «естественные».

Решениями исходной задачи интерполяции могут быть сплайны, удовлетворяющие и другим краевым условиям. Какие-либо краевые условия необходимы для однозначного определения интерполяционного сплайна. *Натуральный* сплайн, т.е. интерполяционный сплайн с *естественными* краевыми условиями, вообще говоря, не очень естественен для приложений и мало пригоден для практического применения несмотря на своё название. Это связано с тем, что *естественные* краевые условия, как правило, не согласуются с решаемой задачей. Если производные интерполируемой функции порядка  $l = n, n + 1, \dots, 2n - 2$  далеки от нуля на концах отрезка  $[a, b]$ , то качество приближения *натуральным* сплайном вблизи концов будет плохим. Но правильный выбор краевых условий, как правило, даёт замечательные результаты.

Наилучшие результаты достигаются при наличии на концах отрезка  $[a, b]$  известных значений младших производных (порядка  $l = 1, \dots, n - 1$ ) интерполируемой функции и их использовании. Такой сплайн, называемый «полным», также всегда существует и единствен [1] и минимизирует тот же функционал (1) среди всех функций  $\sigma(x)$  класса  $W_2^n[a, b]$ , интерполирующих известные значения функции  $f(x)$  на сетке  $\Delta$  и принимающих на концах отрезка  $[a, b]$  заданные значения младших производных порядка  $l = 1, \dots, n - 1$ . Естественные краевые условия привлекательны для неопытного пользователя тем, что их использование «освобождает» от необходимости привлекать какую-либо дополнительную информацию о производных, которая может и отсутствовать. Однако, даже в отсутствие какой-либо информации о производных на концах отрезка,

<sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

мы рекомендуем всё-таки использовать *полные* сплайны, например, с приближённым заданием нужных производных при помощи многочленов Лагранжа.

Мы будем рассматривать именно задачу построения *полного* интерполяционного сплайна  $S(x)$  степени  $2n-1$  гладкости  $C^{2n-2}[a, b]$ , т.е. сплайна, принимающего в узлах сетки  $\Delta$  заданные значения функции, и значения младших производных порядка  $l=1, \dots, n-1$  которого на концах отрезка  $[a, b]$  равны значениям соответствующих производных интерполируемой функции.

В работе [2] автором был предложен подход к построению интерполяционных сплайнов произвольной нечётной степени  $2n-1$ , состоящий в том, что в качестве определяемых параметров выбираются коэффициенты разложения какой-либо производной сплайна по нормализованным  $B$ -сплайнам соответствующей степени. Получение таких систем не составляет особого труда. Интересно отметить, что предложенный подход привёл к новому устойчивому способу построения даже кубических сплайнов [3], несмотря на их достаточно детальную изученность. Было высказано предположение, что если рассматривать разложение относительно одной из двух средних производных сплайна (порядка  $n-1$  или  $n$ ), то возникающие при таком подходе системы линейных уравнений будут хорошо обусловлены вне зависимости от неравномерности расположения исходных данных. В 2001 году А.Шадриным [4] было доказано, что матрица системы для случая производной порядка  $n$  всегда хорошо обусловлена.

Мы рассматриваем подход, предложенный в работе [2] и изучавшийся в [5]. Матрицы возникающих здесь систем уравнений вполне неотрицательны (см. [6]), предложены способы практического вычисления их элементов, в частности, один из возможных способов – из устойчивых рекуррентных соотношений. Вполне неотрицательность матрицы линейной системы весьма важна, так как метод исключения Гаусса при решении системы уравнений с такой матрицей не требует выбора главного элемента [7]. Кроме того, данное свойство оказывается существенным при оценке норм обратных матриц [8], [9].

## СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Поскольку для однозначного определения интерполяционного сплайна необходимо задать краевые условия, мы рассматриваем задание в точках  $a$  и  $b$  по  $n-1$  значений младших производных  $f_a^{(\nu)}, f_b^{(\nu)}, \nu=1, \dots, n-1$ , т.е. так называемую задачу интерполяции *полным* сплайном. Будем считать сетку расширенной влево и вправо необходимым количеством дополнительных кратных узлов  $\dots = x_{-2} = x_{-1} = x_0, \quad x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots$

Решение задачи интерполяции сводится к решению системы линейных уравнений относительно каких-либо параметров выбранного представления сплайна. Используемые нами представления связаны с  $B$ -сплайнами.

Сплайн с носителем из  $r$  последовательных интервалов разбиения  $\Delta$  называется  $B$ -сплайном порядка  $r$  (степени  $r-1$ ) на сетке  $\Delta$ . На каждом таком носителе  $B$ -сплайн определяется однозначно с точностью до нормирующего множителя. Мы будем рассматривать  $L_\infty$ -нормализованные (или просто нормализованные)  $B$ -сплайны  $N_{i,r}$  и  $L_1$ -нормализованные  $M_{i,r}$ , определяемые как

$$M_{i,r}(x) = \frac{r}{x_{i+r} - x_i} N_{i,r}(x) = r(\cdot - x)_+^{r-1}[x_i, \dots, x_{i+r}], \quad (2)$$

причём  $\sum_{j=i-r+1}^i N_{j,r}(x) \equiv 1$ , для  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  и  $\int_{x_i}^{x_{i+r}} M_{i,r}(\tau) d\tau = 1$ .

Эти и другие свойства  $B$ -сплайнов можно найти, например, в [10], [11].

Рассмотрим в качестве определяющих параметров сплайна  $S$  коэффициенты  $\{\alpha_i^{(k)}\}$  и  $\{\beta_i^{(k)}\}$  разложения  $k$ -й производной ( $0 \leq k \leq 2n-1$ ) по  $L_\infty$ -нормализованным или  $L_1$ -нормализованным  $B$ -сплайнам  $\{N_{i,2n-k}\}$ , соответственно  $\{M_{i,2n-k}\}$ , порядка  $2n-k$ . Поскольку базис пространства сплайнов степени  $2n-k-1$  на сетке  $\Delta$  состоит из  $N+2n-k-1$  функций  $N_{i,2n-k}$  или  $M_{i,2n-k}$

( $i = 1 - 2n + k, \dots, N - 1$ ), то и определять требуется  $N + 2n - k - 1$  коэффициентов  $\alpha_i^{(k)}$  или  $\beta_i^{(k)}$ ,  $i = 1 - 2n + k, \dots, N - 1$ .

На каждом подынтервале  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ , отрезка  $[a, b]$  для  $k$ -й производной искомого сплайна  $S(x)$  имеем представление

$$S^{(k)}(x) = \alpha_{i-2n+k+1}^{(k)} N_{i-2n+k+1, 2n-k}(x) + \dots + \alpha_i^{(k)} N_{i, 2n-k}(x) = \beta_{i-2n+k+1}^{(k)} M_{i-2n+k+1, 2n-k}(x) + \dots + \beta_i^{(k)} M_{i, 2n-k}(x)$$

или на всём отрезке  $[a, b]$ :

$$S^{(k)}(x) = \sum_{j=-2n+k+1}^{N-1} \alpha_j^{(k)} N_{j, 2n-k}(x) = \sum_{j=-2n+k+1}^{N-1} \beta_j^{(k)} M_{j, 2n-k}(x).$$

В [5] были получены системы линейных уравнений для нахождения параметров  $\{\alpha_i^{(k)}\}$ .

Если  $k < n$ , то по  $n - k$  первых и последних параметров могут быть найдены по явным формулам [12]:

$$\alpha_{j-2n+k+1}^{(k)} = \sum_{p=0}^j \frac{(2n-k-1-p)!}{(2n-k-1)!} \text{sym}_p^j(u_1, \dots, u_j) f_a^{(k+p)},$$

$$\alpha_{N-1-j}^{(k)} = \sum_{p=0}^j \frac{(2n-k-1-p)!}{(2n-k-1)!} \text{sym}_p^j(v_1, \dots, v_j) f_b^{(k+p)},$$

где  $j = 0, \dots, n - k - 1$ ,  $u_v = x_v - x_0$ ,  $v_v = x_{N-v} - x_N$ . Здесь  $\text{sym}_p^j(t_1, \dots, t_v)$  суть символы элементарных симметрических функций от  $v$  аргументов степени  $p$ . Для нахождения остальных неизвестных, которые можно записать в виде вектора  $\bar{\alpha}_k = (\alpha_{-n+1}^{(k)}, \dots, \alpha_{N-n+k+1}^{(k)})^T$ , в [5] получена система из  $N + k - 1$  уравнений

$$\bar{A}_k \bar{\alpha}_k = \bar{c}^k \tag{3}$$

с  $(N + k - 1) \times (N + k - 1)$  матрицей  $\bar{A}_k = (a_{i,j}^k)$  и вектором правой части  $\bar{c}^k = (c_1^k, \dots, c_{N+k-1}^k)^T$ .

Элементы матрицы  $\bar{A}_k$  определяются формулами

$$a_{i,j}^k = \int_{x_{i-k}}^{x_k} M_{i-k,k}(\tau) N_{j-n, 2n-k}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, \dots, N + k - 1,$$

а вектор правой части системы имеет компоненты

$$c_i^k = k! f[x_{i-k}, \dots, x_k] - \sum_{j=1-2n+k}^{-n} \alpha_j^{(k)} \int_{x_{i-k}}^{x_k} M_{i-k,k}(\tau) N_{j, 2n-k}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

$$c_i^k = k! f[x_{i-k}, \dots, x_k], \quad i = n, \dots, N + k - n,$$

$$c_i^k = k! f[x_{i-k}, \dots, x_k] - \sum_{j=N+k-n}^{N-1} \alpha_j^{(k)} \int_{x_{i-k}}^{x_k} M_{i-k,k}(\tau) N_{j, 2n-k}(\tau) d\tau, \quad i = N + k - n + 1, \dots, N + k - 1.$$

Отметим, что при  $k=0$  мы считаем  $M_{i,0} = \delta_{x_i}$ , поэтому  $a_{i,j}^0 = N_{j, 2n}(x_i)$ , и  $\bar{A}_0$  является хорошо известной  $B$ -сплайновой коллокационной матрицей. Напомним,  $\delta_t$  –  $\delta$ -функция Дирака, сосредоточенная в точке  $t$  (обобщённая функция).

Если же  $k \geq n - 1$ , то из системы уравнений

$$\bar{A}_k \bar{\alpha}_k = \bar{c}^k, \tag{4}$$

подобной по структуре системе (3), находятся уже все необходимые определяющие параметры

$\bar{\alpha}_k = (\alpha_{1-2n+k}^{(k)}, \dots, \alpha_{N-1}^{(k)})^T$ . В этом случае элементами  $(N + 2n - k - 1) \times (N + 2n - k - 1)$  матрицы

$\bar{A}_k = (a_{i,j}^k)$  являются  $a_{i,j}^k = \int_{x_{i-n}}^{x_{i-n+k}} M_{i-n,k}(\tau) N_{j-2n+k, 2n-k}(\tau) d\tau$ ,  $i, j = 1, \dots, N + 2n - k - 1$ , а вектор пра-

вой части  $\bar{c}^k = (c_1^k, \dots, c_{N+2n-k-1}^k)^T$  имеет компоненты

$$c_i^k = k! f[x_{i-n}, \dots, x_{i-n+k}], \quad i = 1, \dots, N + 2n - k - 1.$$

Обратим внимание, что при  $k = n - 1$  в системе уравнений (4) первое и последнее уравнения содержат только по одному неизвестному параметру  $\alpha_{-n}^{(k)}$  и  $\alpha_{N-1}^{(k)}$ , соответственно, исключая которые из системы, приходим к системе уравнений (3). Таким образом, при исследовании случая  $k = n - 1$  можно пользоваться как системой уравнений (4), так и системой (3).

Учитывая, что параметры  $\{\alpha_i^{(k)}\}$  и  $\{\beta_i^{(k)}\}$  являются коэффициентами разложения по базисам, отличающимся лишь множителем (2), для нахождения  $\beta_{1-2n+k}^{(k)}, \dots, \beta_{N-1}^{(k)}$  получаем аналогичным образом подобные системы уравнений с матрицами  $\bar{B}_k$ . Отметим, что матрица  $\bar{B}_k$  совпадает с транспонированной к матрице  $\bar{A}_{2n-k}$ , т.е.  $\bar{B}_k = \bar{A}_{2n-k}^T$ .

### СВОЙСТВА МАТРИЦ $\bar{A}_k$ И $\bar{B}_k$

Элементами матриц  $\bar{A}_k$  и  $\bar{B}_k$  являются довольно простые выражения, в работе [5] показано, что помимо вычисления интегралов как таковых, например, по квадратурным формулам Гаусса, можно элементы матриц вычислять по устойчивым рекуррентным формулам.

**Теорема 1** [5]. Для любого  $1 \leq k \leq 2n - 1$  матрица  $\bar{A}_k$  ленточная с шириной ленты  $2n - 1$  и вполне неотрицательная.

Вполне неотрицательность матриц систем уравнений (3) и (4) – весьма важное свойство для практического построения интерполяционного сплайна  $S(x)$ , т.е. решения систем уравнений. Решение системы уравнений с такой матрицей методом исключения Гаусса не требует выбора главного элемента [7], что позволяет достаточно экономично с вычислительной точки зрения организовать процесс решения.

При практическом решении рассмотренных систем уравнений о величине возможной погрешности, т.е. об ошибке нахождения определяющих параметров интерполяционного сплайна  $S$ , позволяет судить величина числа обусловленности в нашем случае равная  $\|\bar{A}_k^{-1}\|$  (или  $\|\bar{B}_k^{-1}\|$ ). Мы рассматриваем величину числа обусловленности в равномерной или тах-норме.

Нормы самих матриц  $\bar{A}_k$  или  $\bar{B}_k$  наших систем уравнений вычислить не вызывает никакого труда, они равны 1. Оценить же нормы обратных матриц к  $\bar{A}_k$  и  $\bar{B}_k$  гораздо более тяжёлая задача. Некоторые подходы оценивания для вполне неотрицательных матриц изучались в [9].

С другой стороны, погрешность метода, т.е. величина погрешности интерполяции  $S^{(k)} - f^{(k)}$ , также может быть оценена в терминах величины обусловленности, равной  $\|\bar{A}_k^{-1}\|$ . В работе [5] установлены оценки  $\|S^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\|_{L_\infty}$  через модуль непрерывности функции  $f^{(k)}$ , т.е. при минимальных требованиях к гладкости  $f$ . Величина константы в оценке зависит от  $\|\bar{A}_k^{-1}\|$ .

### ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

**Теорема 2** [5]. Если  $f \in C^k[a, b]$ ,  $0 \leq k \leq n - 2$ , то справедлива оценка

$$\|S^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\|_{L_\infty} \leq [K_1 + K_2 \|\bar{A}_k^{-1}\|] \omega(f^{(k)}, \bar{h}) + [K_3 + K_4 \|\bar{A}_k^{-1}\|] \bar{h}$$

с константами  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , зависящими от  $n$  и  $k$ , но не от  $N$  или  $\Delta$  ( $K_3$  и  $K_4$  дополнительно зависят от заданных значений  $f_a^{(v)}, f_b^{(v)}$ ,  $v = k + 1, \dots, n - 1$ ).

**Теорема 3** [5]. Если  $f \in C^k[a, b]$ ,  $n - 1 \leq k \leq 2n - 1$ , то справедлива оценка

$$\|S^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\|_{L_\infty} \leq [K_1 + K_2 \|\bar{A}_k^{-1}\|] \omega(f^{(k)}, \bar{h})$$

с константами  $K_1, K_2$ , зависящими от  $n$  и  $k$ , но не от  $N$  или  $\Delta$ .

Получение оценок погрешностей интерполяции в теоремах 2 и 3 основывалось на представ-

лении производных интерполируемого сплайна в виде разложения по  $L_\infty$ -нормализованным  $B$ -сплайнам. Оказывается для получения подобных оценок величин погрешностей  $S^{(k)} - f^{(k)}$  можно использовать и  $L_1$ -нормализованные  $B$ -сплайны, опираясь на системы уравнений относительно коэффициентов  $\beta_i^{(k)}$ .

**Теорема 4.** Если  $f \in C^k[a, b]$ ,  $0 \leq k \leq n-2$ , то справедлива оценка

$$\|S^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\|_{L_\infty} \leq [K_1 + K_2 \|\bar{B}_{k+1}^{-1}\|] \omega(f^{(k)}, \bar{h}) + [K_3 + K_4 \|\bar{B}_{k+1}^{-1}\|] \bar{h}$$

с константами  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , зависящими от  $n$  и  $k$ , но не от  $N$  или  $\Delta$  ( $K_3$  и  $K_4$  дополнительно зависят от заданных значений  $f_a^{(v)}, f_b^{(v)}$ ,  $v = k+1, \dots, n-1$ ).

**Теорема 5.** Если  $f \in C^k[a, b]$ ,  $n-1 \leq k \leq 2n-1$ , то справедлива оценка

$$\|S^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\|_{L_\infty} \leq [K_1 + K_2 \|\bar{B}_k^{-1}\|] \omega(f^{(k)}, \bar{h})$$

с константами  $K_1, K_2$ , зависящими от  $n$  и  $k$ , но не от  $N$  или  $\Delta$ .

Отметим, что ранее аналогичные оценки были доказаны для периодического случая [13].

### СПРАВЕДЛИВОСТЬ ГИПОТЕЗЫ К. ДЕ БОРА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОЛНОГО СПЛАЙНА

Оценки отклонения производных интерполяционных сплайнов от соответствующих производных интерполируемых функций (теоремы 2–4) показывают, что сходимость процесса интерполяции для какой-либо производной  $k$ ,  $0 \leq k \leq 2n-1$ , при требованиях гладкости  $f \in C^k[a, b]$  гарантируется ограниченностью тах-нормы обратной матрицы к  $\bar{A}_k$  или  $\bar{B}_{k+1} = \bar{A}_{2n-k-1}^T$ , поскольку  $\omega(g, \bar{h}) \rightarrow 0$  при  $\bar{h} \rightarrow 0$  для любой функции  $g \in C[a, b]$ . С другой стороны, если для некоторой последовательности сеток  $\{\Delta\}$  нормы  $\|\bar{A}_k^{-1}\|$  могут быть ограничены константой, не зависящей от сеток, то нормы  $\|(\bar{A}_k^T)^{-1}\| = \|\bar{B}_{2n-k}^{-1}\|$  тоже будут ограничены константой, также не зависящей от сеток. Это следует из замечательного свойства экспоненциального убывания элементов обратной для ленточной матрицы [14].

Таким образом, «хорошая» оценка последовательности норм  $\|\bar{A}_k^{-1}\|$  или  $\|\bar{B}_{2n-k}^{-1}\|$ , соответствующих некоторой последовательности сеток  $\{\Delta\}$ , гарантирует равномерную сходимость  $S^{(k)}$  к  $f^{(k)}$  при  $\bar{h} \rightarrow 0$  для функций  $f \in C^k[a, b]$  и одновременно сходимость  $S^{(2n-k-1)}$  к  $f^{(2n-k-1)}$  для функций  $f \in C^{2n-k-1}[a, b]$  на рассматриваемой последовательности сеток  $\{\Delta\}$ .

Наибольший интерес представляет вопрос: при каких значениях  $k$  сходимость будет иметь место без ограничений на последовательность разбиений  $\{\Delta\}$ . К. де Бор показал [15], что при  $k = 0, \dots, n-2$  сходимость без ограничений на сетки невозможна и он же утверждает (без доказательства), что невозможна и при  $k = n+1, \dots, 2n-1$ . Следовательно, кандидатами на безусловную сходимость могут быть только две оставшиеся средние производные порядков  $n-1$  и  $n$ . После усилий многих математиков проблема К. де Бора недавно была решена А.Ю.Шадринным [4]. Тем самым для интерполяционных сплайнов  $S$  степени  $2n-1$  доказано, что  $\|S^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\|_{L_\infty} \rightarrow 0$  при  $\bar{h} \rightarrow 0$  для любой функции  $f \in C^n[a, b]$  без каких-либо ограничений на сетки. Относительно другой средней производной сплайна  $k=n-1$  К. де Бор [15] в 1975 году высказал предположение, что также имеет место безусловная сходимость.

А.Ю.Шадрин [4] установил, что именно тах-норма матрицы  $\bar{A}_n^{-1}$  задачи интерполяции полным сплайном  $S$  степени  $2n-1$  ограничена константой, зависящей лишь от  $n$ , но не от неравномерности расположения и количества узлов сетки, поэтому имеет место безусловная равномерная сходимость  $S^{(n)}$  к  $f^{(n)}$  для любой функции  $f \in C^n[a, b]$  и любой последовательности сеток  $\{\Delta\}$  при  $\bar{h} \rightarrow 0$ . Вместе с тем, как отмечалось выше, не будет зависеть от сетки и оценка  $\|(\bar{A}_n^T)^{-1}\| = \|\bar{B}_n^{-1}\|$ . Таким образом, как следствие теоремы 5 и результата А.Ю.Шадрина [4], получаем доказательство предположения К. де Бора (1975), т. е. безусловную сходимость и другой средней производной порядка  $k=n-1$ .

**Теорема 6.** Для любой функции  $f \in C^{n-1}[a, b]$  и любой последовательности сеток  $\{\Delta\}$ , удов-



летворяющей условию  $\bar{h} \rightarrow 0$ , если полные сплайны  $S$  интерполируют  $f$  в узлах сеток  $\Delta$ , то последовательность  $S^{(n-1)}$  сходится равномерно к  $f^{(n-1)}$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-07-00447) и программы поддержки интеграционных проектов совместных фундаментальных исследований СО РАН и УрО РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения. М.: Мир. 1972.
- [2] Волков Ю.С. О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов. Вычисл. системы. Вып.159: Сплайн-функции и их приложения. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. С.3-18.
- [3] Volkov Yu.S. A new method for constructing cubic interpolating splines. Comp. Math & Math. Phys. Vol.44, n.2. 2004. P.215-224.
- [4] Shadrin A.Yu. The  $L_\infty$ -norm of the  $L_2$ -spline projector is bounded independently of the knot sequence: A proof of de Boor's conjecture. Acta Math. Vol.187. 2001. P. 59-137.
- [5] Volkov Yu.S. Totally positive matrices in the methods for constructing interpolation splines of odd degree. Siberian Adv. Math. Vol. 15, n. 4. 2005. P.96-125.
- [6] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [7] de Boor C., Pinkus A. Backward error analysis for totally positive linear systems. Numer. Math. Vol.27, n.4. 1977. P.485-490.
- [8] de Boor C. On the convergence of odd-degree spline interpolation. J. Approx. Theory. Vol.1, n.4. 1968. P.452-463.
- [9] Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L. Norm Estimates for the Inverses of Matrices of Monotone Type and Totally Positive Matrices. Siberian Math. J. Vol.50, n.6. 2009. P.982-987.
- [10] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1980.
- [11] Schumaker L.L., Spline Functions: Basic Theory. New York: Wiley. 1981.
- [12] Volkov Yu.S. Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via  $B$ -spline basis. Cent. Eur. J. Math. Vol.10, n.1. 2012. P.352-356.
- [13] Volkov Yu.S. Inverses of cyclic band matrices and the convergence of interpolation processes for derivatives of periodic interpolation splines. Numer. Anal. Appl. Vol.3, n.3. 2010. P.199-207.
- [14] Demko S. Inverses of band matrices and local convergence of spline projections. SIAM J. Numer. Anal., Vol.14, n.4. 1977. P.616-619.
- [15] de Boor C. On bounding spline interpolation. J. Approx. Theory. Vol.14, n.3. 1975. P.191-203.

## ITERATIVE ASPECTS IN CONJUGATED VEKUA EQUATION

The Vekua equation  $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = A(z, \bar{z})w + B(z, \bar{z})\bar{w} + F(z, \bar{z})$  is of grate importance in the theory of Partial Equations as well as in the theory of Complex Analysis. Here  $w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$  is unknown function, the coefficients  $A(z, \bar{z}), B(z, \bar{z}), F(z, \bar{z})$  are analytical functions in some finite domain of complex plane and  $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$  is conjugated differentiation operator. In his monograph, I. N. Vekua pointed out the importance of these equations in mathematical physics where many boundary problems have been solved. In this paper we give preliminary results for special case  $A(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}) = 0$ . The goal is to solve the Vekua equation by iteration method and to obtain the immediately solution.

### INTRODUCTION

The equation

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} + F \tag{1}$$

where  $w = w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$  is complex function of complex variables  $z$  and  $\bar{z}$ , with continuous partial derivatives  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  at  $G$ ,  $G$  is bounded closed domain, with a smooth curve

$L$  as its boundary, coefficients  $A, B, F \in L_p(G)$ ,  $p > 2$  and where  $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$  is conjugated derivative known as Vekua equation. This equation was solved by iteration method (see

[1,2]), but in  $L_p(G)$  the functional analysis tools were used. In that case the coefficients  $A, B, F$  don't have to be analytical. That is why Vekua iterations are not analytical iterations, and therefore is necessary to give simple analytical iterations which would be suitable for solving the system of partial equation of first order as well as for partial equations of second order. We shall try to give new, but shorter and more practical formulas for solving the equation (1), comparing the solutions with those given in monograph [1].

First we will show why the Vekua procedure is valid.

Namely, if  $A = A(z, \bar{z})$  is analytical function, then the modulus  $|A(z, \bar{z})| = \sqrt{a^2(x, y) + b^2(x, y)} = |A(x, y)|$  is finite everywhere in  $G$ . Since degree  $|A(z, \bar{z})|^p$  is finite and continuous, integral  $\iint_G |A(z, \bar{z})|^p dx dy < \infty$  exists and analytical function  $A = A(z, \bar{z})$  belongs to  $L_p(G)$ ,  $p > 2$  space.

Analytical apparatus is also provided by conjugate derivate operation, which is linear operation, so is applicable

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1 \pm w_2) &= \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} \pm \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(cw_1) &= c \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}}, c = const. \end{aligned}$$

Conjugate derivative is very similar to ordinary derivative, so the operational rules for product, quotient

<sup>1</sup> Faculty of Sciences and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

are easy to perform, as well as the rules for conjugate derivatives of elementary complex or conjugate complex functions.

If in equation (1) coefficient is  $B = F = 0$ , then equation (1) is called Theodoresku equation.

With these rules it can be easily transferred to reverse operation to conjugated derivative, that is, integral  $\hat{\int}$ . In order to more relate this integral to ordinary integral, we are introducing sign

$\hat{\int} F(z, \bar{z}) = \int F(z, \bar{z}) d\bar{z} + \phi(z)$ , where  $\phi(z)$  is arbitrary analytical function in the role of integral constant. This is not line integral, but symbolic record that is necessary to integrate only by one variable  $\bar{z}$ , considering second variable  $z$  as a constant (for details see [3], page 30).

Due to these characteristics, derivatives and integrals, solving of equation (1) was reduced to procedures very similar to solving of ordinary differential equations with real argument. Main difference is because the main role of the ordinary constant here is taken over by arbitrary function  $\phi(z)$ .

### PRELIMINARIES

For incomplete homogeneous Vekua equation

$$\frac{\partial w}{\partial z} = Aw + B\bar{w} \tag{2}$$

with analytical coefficients  $A = A(z, \bar{z}), B = B(z, \bar{z})$  in finite closed domain  $G$  and with unknown function  $w$  in [3-6] has been shown that its general solution  $w = w_{A,\phi} + w_{B,\phi} + w_{A,B,\phi}$ , contains part which only depends on  $A$  and  $\phi(z)$ , part which only depends on  $B$  and  $\phi(z)$ , as well as the part which depends on both coefficients  $A, B$  and  $\phi(z)$ . This means that it can be presented in the form of series-iterations

$$w(z, \bar{z}) = \phi(z) + \int A\phi(z) d\bar{z} + \int B\overline{\phi(z)} d\bar{z} + \int Ad\bar{z} \int A\phi(z) d\bar{z} + \int Ad\bar{z} \int B\overline{\phi(z)} d\bar{z} + \int Bd\bar{z} \int A\overline{\phi(z)} dz + \int Bd\bar{z} \int B\overline{\phi(z)} dz + \int Ad\bar{z} \int Ad\bar{z} \int A\phi(z) d\bar{z} + \dots$$

From the previous it is apparent that homogeneous Vekua equation (2) always has trivial solution. If  $\phi(z) = 1$ , then there is particular solution in the form of series with integral form coefficients with symmetric disposition of elements. On the other hand, if  $A = A(z, \bar{z})$  and  $B = B(z, \bar{z})$  are complex constants, then solution of equation (2) is nonlinear function of an arbitrary analytical function  $\phi(z)$ . If  $A$  and  $B$  are real constants, then results given in the form of series of the first, second, ...,  $n$ -th integral of  $\phi(z)$ , or its conjugation, and series coefficients are power series by  $z$  or by  $\bar{z}$ .

Homogenous Vekua equation (2) is only apparently linear. It is, actually, typically transcendental equation. Indeed, it is well known that operation  $|z|$  is not linear, since  $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$ . This implies that operations  $\bar{z}$  and  $\bar{w}$ , which characterize the equation (2) are not linear. Namely, from  $|w|^2 = w\bar{w}$  follows  $\bar{w} = \frac{|w|^2}{w}$ . Writing this expression in polar form we get  $\bar{w} = we^{-2i\theta}$ . We can see,  $\bar{w}$  is rotation of the angle  $2\theta$  in negative direction. It is known that rotation is not linear function.

Considering the fact that  $|\bar{w}| = |w|$ , the iterations in Vekua equation can be applied. Furthermore, the coefficient of contraction can also be easily derived, which is not always possible when dealing with nonlinear differential equations.

The Vekua equation (2) has linear characteristics only regarding the real constants. Its solutions are not linear functions of arbitrary integration elements. This is important characteristics of linear differential

equations. This can be seen from the following results (see [3],[7]):

**Theorem 1.** If  $w_1$  is solution of Vekua equation (2), then  $cw_1$ , where  $c \neq 0$  is real constant, also the solution of the same equation.

**Theorem 2.** If  $w_1$  and  $w_2$  are solutions of Vekua equation (2), then any linear combination  $w = c_1w_1 + c_2w_2$ , where  $c_1$  and  $c_2$  are real constant, is also the solution of equation (1).

**Theorem 3.** By linear substitution  $w = \alpha v$ , where  $\alpha = \alpha(z, \bar{z}) = \phi(z) \exp\left(\int A d\bar{z}\right) \neq 0$  and  $v = v(z, \bar{z})$  is new unknown function, Vekua equation (2) transforms to homogeneous Theodoresku equation.

**Theorem 4.** With linear substitution  $w = w_1u$ , where  $w_1$  is particular integral of equation (2), and  $u = u(z, \bar{z})$  new unknown function, Vekua equation (2) transforms to Vekua equation with one coefficient.

**Theorem 5.** With linear substitution  $w = \alpha\bar{v}$ ,  $\alpha = \alpha(z, \bar{z}) \neq 0$ ,  $v = v(z, \bar{z})$ , Vekua equation (2) transforms to its conjugated equation.

### CALCULATION AND METHODS

In this paper we focus our attention on the differential equation of type (2) when coefficient  $A = 0$ , that is on

$$\frac{\partial w}{\partial z} = B(z, \bar{z})\bar{w}. \quad (3)$$

It is well known (see [1-6]) that this incomplete Vekua equation cannot be solved by separating the variables. This is the main reason why in special cases this equation can be solved by the quadrature methods.

Thus, from (3) using the quadratures we find the first integral

$$w(z, \bar{z}) = \int B(z, \bar{z})\bar{w} = \int B(z, \bar{z})\bar{w}d\bar{z} + C(z), \quad (4)$$

$C(z)$  is arbitrary analytical function.

Based on (4) we define the sequence of functions

$$w^{[n]}(z, \bar{z}) = C(z) + \int B(z, \bar{z})\bar{w}^{[n-1]}(z, \bar{z})d\bar{z}, \quad w^{[0]}(z, \bar{z}) = C(z)$$

and obtain the iterations

$$\begin{aligned} w^{[1]}(z, \bar{z}) &= C(z) + \int B(z, \bar{z})\overline{C(z)}d\bar{z} \\ w^{[2]}(z, \bar{z}) &= C(z) + \int B(z, \bar{z})\overline{C(z)}d\bar{z} + \int B(z, \bar{z})d\bar{z} \int \overline{B(z, \bar{z})}C(z)d\bar{z} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Finally, using the induction we obtain

$$\begin{aligned} w^{[n]}(z, \bar{z}) &= C(z) + \int B(z, \bar{z})\overline{C(z)}d\bar{z} + \int B(z, \bar{z})d\bar{z} \int \overline{B(z, \bar{z})}C(z)dz + \dots + \\ &+ \int B(z, \bar{z})d\bar{z} \int \overline{B(z, \bar{z})}dz \dots \int B(z, \bar{z})\overline{C(z)}d\bar{z}, \quad n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} w^{[n]}(z, \bar{z}) &= C(z) + \int B(z, \bar{z})\overline{C(z)}d\bar{z} + \int B(z, \bar{z})d\bar{z} \int \overline{B(z, \bar{z})}C(z)dz + \dots + \\ &+ \int B(z, \bar{z})d\bar{z} \int \overline{B(z, \bar{z})}dz \dots \int \overline{B(z, \bar{z})}C(z)dz, \quad n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

It can be easily proven that there exists  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |w^{[n]}(z, \bar{z})|$ .

The operator  $Tw = \int \hat{B}\bar{w} = \int B(z, \bar{z})\bar{w}(z, \bar{z})d\bar{z} + C(z)$ , defined by (4) is contraction operator. Since

$$|Tw_1 - Tw_2| = \left| \int B(z, \bar{z})\bar{w}_1(z, \bar{z})d\bar{z} + C(z) - \int B(z, \bar{z})\bar{w}_2(z, \bar{z})d\bar{z} - C(z) \right| \leq \int |B(z, \bar{z})| |\bar{w}_1(z, \bar{z}) - \bar{w}_2(z, \bar{z})| |d\bar{z}| \leq Mmh,$$

for  $M = \max_G |B(z, \bar{z})|$ ,  $m = \max_G |\bar{w}_1(z, \bar{z}) - \bar{w}_2(z, \bar{z})|$ ,  $h = \max_G |z|$ , continuing this procedure we obtain

$$|T^2w_1 - T^2w_2| = |T(Tw_1 - Tw_2)| \leq \int |B(z, \bar{z})| |Tw_1(z, \bar{z}) - Tw_2(z, \bar{z})| |d\bar{z}| \leq M^2m \frac{h^2}{2!},$$

and so on. Finally,  $|T^n w_1 - T^n w_2| \leq M^n m \frac{h^n}{n!}$ . Now, if we chose  $n$  to be large enough, so  $\frac{(Mh)^n}{n!}$  is less enough, then  $\|T^n w_1 - T^n w_2\| \leq q \|w_1 - w_2\|$ ,  $q < 1$ , which proves that  $Tw$  is contraction operator. This implies that equation (3) has one and only one solution which can be obtained as a limit of the iterative sequence  $\{w^{[n]}(z, \bar{z})\}$ .

### THE MAIN RESULT

Now we shall use the identity  $\bar{w} = \frac{|w|^2}{w}$  to solve the equation (3) using the algebraic iterations.

**Theorem 6.** For nonlinear conjugated Vekua equation (3), where  $B(z, \bar{z})$  is analytical function in the complex plane, the general solution is given by convergent iteration series

$$w^{[n]}(z, \bar{z}) = \sqrt{C(z) + 2 \int B(z, \bar{z}) |w^{[n-1]}(z, \bar{z})|^2 d\bar{z}}, w^{[0]} = \sqrt{C(z)}. \quad (5)$$

**Proof.**  $\triangleleft$  Substituing  $\bar{w} = \frac{|w|^2}{w}$  in (3), after transformation we obtain  $2w \frac{\partial w}{\partial z} = 2B(z, \bar{z})|w|^2$ . Integrating by conjugated operators, it follows

$$w^2(z, \bar{z}) = 2 \int \hat{B} |w|^2 = 2 \int B(z, \bar{z}) |w|^2 d\bar{z} + C(z), \quad (6)$$

where  $C(z)$  is arbitrary analytical function of  $z$ , in the role of generalized integral constant. Introducing the squarer root we obtain multiple-valued solution

$$w(z, \bar{z}) = \sqrt{C(z) + 2 \int B(z, \bar{z}) |w|^2 d\bar{z}}.$$

In this way, nonlinearity of solution is put on double-value of squarer root and in  $|w|^2$ .

If we repeat the procedure described in previous section using (5) with initial condition,  $w^{[0]} = \sqrt{C(z)}$ , we define a sequence of functions which converges to some limiting function

$w^*(z, \bar{z}) = \sqrt{C(z) \exp\left(2 \int B(z, \bar{z}) d\bar{z}\right)}$ . Namely, from iteration

$$\begin{aligned}
w^{[1]}(z, \bar{z}) &= \sqrt{C(z) \left[ 1 + 2 \int B(z, \bar{z}) d\bar{z} \right]} \\
w^{[2]}(z, \bar{z}) &= \sqrt{C(z) \left[ 1 + 2 \int B(z, \bar{z}) d\bar{z} + 2^2 \int B(z, \bar{z}) d\bar{z} \right]} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

and so on we have

$$w^{[n]}(z, \bar{z}) = \sqrt{C(z) \sum_{k=0}^n 2^k \underbrace{\int B(z, \bar{z}) d\bar{z} \cdots \int B(z, \bar{z}) d\bar{z}}_{k\text{-integrals}}} \tag{7}$$

According to the theorem of successive integrals of function is obvious that

$$\underbrace{\int B(z, \bar{z}) d\bar{z} \cdots \int B(z, \bar{z}) d\bar{z}}_{n\text{-integrals}} = \frac{\left( \int B(z, \bar{z}) d\bar{z} \right)^n}{n!}.$$

When in (7) we put  $n \rightarrow +\infty$ , we get limiting value of sequence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w^{[n]}(z, \bar{z}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{C(z) \sum_{k=0}^n \frac{\left( 2 \int B(z, \bar{z}) d\bar{z} \right)^k}{k!}} = \sqrt{C(z) \exp\left( 2 \int B(z, \bar{z}) d\bar{z} \right)} = w^*(z, \bar{z}).$$

It can be easily proven that with (5) the contraction operator is defined. At the same time,  $w^*(z, \bar{z})$  is the general solution because it contains arbitrary analytical function  $C(z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ .  $\triangleright$

In recent time, we have noticed many papers dealing with evaluation and counting the number of zero solution of complex equation of oscillations, [8]. For the Vekua equation we did not notice that interest. It is obvious that equation (3), that is (6), has solution which can have zeros if the zeros of analytical function  $C(z)$  are at the same time the zeros of the integral  $\hat{\int} B|w|^2$ . In other words, these are the zeros of  $B(z, \bar{z})$  or  $|w|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y)$ . Since  $|w|^2 = 0$  only for  $u(x, y) = v(x, y) = 0$ , we conclude that there are zeros if  $C(0) = 0$ . For example, equation  $\frac{\partial w}{\partial z} = z^2 \bar{w}$  has solution  $w(z, \bar{z}) = \sqrt{C(z) + 2 \int z^2 |w|^2 d\bar{z}}$  which have zeros if  $C(0) = 0$ .

### SPECIAL CASES

Let us consider some special cases for equation (3).

1. For ordinary operating equation  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0, B(z, \bar{z}) = 0$  we have well known result  $w(z, \bar{z}) = f(z)$ . Here  $f(z)$  is arbitrary analytical function.
2. The equation  $\frac{\partial w}{\partial z} = \bar{w}, B(z, \bar{z}) = 1$ , has solution  $w(z, \bar{z}) = C(z) + \int \bar{w}(z, \bar{z}) d\bar{z}$ , which according to iterations is

$$w(z, \bar{z}) = C(z) + \int \bar{C}(z) d\bar{z} + \int d\bar{z} \int C(z) dz + \int d\bar{z} \int dz \int \bar{C}(z) d\bar{z} + \cdots.$$

In complex plane, this series, which depends on  $C(z)$ , converges. Specially, for  $C(z) = 1$  we get

$$w(z, \bar{z}) = 1 + \int d\bar{z} + \int d\bar{z} \int dz + \int d\bar{z} \int dz \int d\bar{z} + \dots = 1 + \bar{z} + |z|^2 + \frac{\bar{z}}{2} |z|^2 + \frac{|z|^4}{2^2} + \bar{z} \frac{|z|^4}{2!3!} + \frac{|z|^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$= \varphi(|z|) + \bar{z}\psi(|z|).$$

We can see that this solution contains two different series. The first is real series of absolute values, while the second is series of  $\bar{z}$ .

We act similarly for  $C(z) = i$ . Here we also obtain  $w(z, \bar{z}) = i\varphi(|z|) + i\bar{z}\psi(|z|)$ . We have noticed that D. Dimitrovski and others in [3] gave the analogous examples.

3. For  $B(z, \bar{z}) = \bar{z}e^z$  the solution of the equation (3), up to second approximation is given by

$$w(z, \bar{z}) = C(z) + e^z \int \bar{z}C(z) d\bar{z} + e^z \int \bar{z}e^z d\bar{z} \int zC(z) dz.$$

## LITERATURE

- [1] Vekua, I. N., "Generalized of analytic functions", (in Russian), Nauka, Moskva, 1988
- [2] Vekua, I. N., " System of differential equations of elliptic type and boundary value problems with application of shell theory", (in Russian), Math. Sbornik, 31 (73), 2 (1952), 217-314
- [3] Dimitrovski D., Ilievski B. Mitevka J. and Rajović M., "The Vekua equation with analytical coefficients", (in Macedonian), Special editions III (24), Skopje, 1995
- [4] Ilijevski B., "Linearni areolarni ravenki", Ph. D. thesis, Skopje, 1992
- [5] Rajović M., Dimitrovski D. and Stojiljković R., "The generalization of the I. N. Vecua equation with analytic coefficients in  $z, \bar{z}$ ", Filomat Niš, 11, (1997), 29-32
- [6] Rajović M., Dimitrovski D. and Stojiljković R., "Elementary solution of Vecua equation with analytic coefficients on  $z, \bar{z}$ ", Matematički vesnik Skopje, 49, (1997), 123-128
- [7] Vujaković J., Rajović M., "Some linearity characteristics for homogeneous Vekua equation with analytical coefficients", VII Triennial International Conference HEAVY MACHINERY-HM 2011, Vol. 7, No 3, (2011), 63-66
- [8] Vujaković J., Dimitrovski D. and Rajović M., "On location of zeros of second order complex differential equations", Journal of Computational Technologies, Novosibirsk, Vol. 15, No 4, (2010), 27-30

## ZEROS SOLUTIONS OF THE COMPLEX BERNOULLI EQUATION

In accordance to the classical theory of ordinary differential equations we define the Bernoulli complex differential equation  $w'(z) = A(z)w + B(z)w^2$ . Here  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  is unknown complex function, the coefficients  $A(z)$  and  $B(z)$  are analytical function, of complex variable  $z = x + iy$  in complex domain. While after the year 1980, the number of zero solutions of this equation has not been seriously studied, the complex differential equation of oscillations certainly was (see [1-8]). That is why, in this paper we formulate the theorems for existence of zeros of Bernoulli equation. We will show that this problem is neither trivial nor easy.

### INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Theory of complex differential equations belongs to an interesting and modern mathematical field which has been rapidly developing in the recent years. There are many published scientific papers and monographs ([3],[6]) from this area.

Ordinary complex differential equation of first order has the form

$$\Phi(z, w(z), w'(z)) = 0 \tag{1}$$

where  $w = F(z) = u + iv$  is complex function of complex variable  $z = x + iy = (x, y)$ . At quadrature solving of this equation we need a normal form  $w'(z) = F(z, w(z))$ . Here follows the complex integral

$$w(z) = \int_{z_0}^z F(z, w(z)) dz + c, \text{ which generally depends on path } L \text{ that connects points } z_0 = (x_0, y_0) \text{ and}$$

$z = (x, y)$  in complex domain  $D = \{z \in C \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \wedge \operatorname{Im} z \geq 0\}$  and where  $c = (\alpha, \beta)$  is arbitrary complex constant. Independence from the path applies only if at (1),  $\Phi$  is analytical function of its arguments. Then for solution  $w = u + iv$  Cauchy-Riemann conditions must be applied in advance.

The equation

$$w'(z) = A(z)w(z) + B(z)w^2(z) \tag{2}$$

where  $A(z), B(z)$  and  $w(z)$  are analytical function of complex variable  $z$  in  $D$  is known as complex Bernoulli differential equation. This equation is analogous to simple real Bernoulli equation. It is known (for detail see [3]), that equation (2) has solution which do not have zeros in the finite area.

Namely, the substitution  $w(z) = \frac{1}{\phi(z)}$ ,  $\phi(z) \neq 0$ , that is  $w'(z) = -\frac{\phi'(z)}{\phi^2(z)}$  transforms (2) into a non-

homogeneous differential equation of the first order  $\phi'(z) + A(z)\phi(z) + B(z) = 0$ . Its general solution has the form

$$\phi(z) = \exp\left(-\int_{z_0}^z A(z) dz\right) \left[ c - \int_{z_0}^z B(z) \exp\left(\int_{z_0}^z A(z) dz\right) dz \right]. \tag{3}$$

Here,  $c = (c_1, c_2)$  is complex integral constant. Replacing the value (3) in substitution, we get

1 Faculty of Sciences and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

2 Faculty of Mechanical Engineering, Kraljevo, Serbia



$$w(z) = \frac{\exp\left(\int_{z_0}^z A(z) dz\right)}{c - \int_{z_0}^z B(z) \exp\left(\int_{z_0}^z A(z) dz\right) dz}.$$

Equation  $w(z) = 0$  can have zeros if  $\exp\left(\int_{z_0}^z A(z) dz\right) = 0$ . However the function  $e^z$  does not have solution for finite  $z$ . Solution exists only for  $z = +\infty$  or  $z = -\infty$ .

A question arising is whether the same is true for general complex Bernoulli equation

$$w'(z) = A(z)w(z) + B(z)w^\lambda(z) \quad (4)$$

where  $\lambda = (\alpha, \beta) \neq 1$  is complex number.

Substituting

$$w(z) = \phi^{\frac{1}{1-\lambda}}(z) \quad (5)$$

the equation (4) becomes  $\phi'(z) + (\lambda - 1)A(z)\phi(z) + (\lambda - 1)B(z) = 0$ . Its general solution is

$$\phi(z) = \exp\left(-(\lambda - 1)\int_{z_0}^z A(z) dz\right) \left[ c - (\lambda - 1)\int_{z_0}^z B(z) \exp\left((\lambda - 1)\int_{z_0}^z A(z) dz\right) dz \right]. \quad (6)$$

Hence, according to the (5) we obtain the general solution of the equation (4)

$$w(z) = \exp\left(\int_{z_0}^z A(z) dz\right) \left[ c - (\lambda - 1)\int_{z_0}^z B(z) \exp\left((\lambda - 1)\int_{z_0}^z A(z) dz\right) dz \right]^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

The zero solutions are in the zeros of the second factor of upper product

$$\frac{c}{(\lambda - 1)} = \int_{z_0}^z B(z) \exp\left((\lambda - 1)\int_{z_0}^z A(z) dz\right) dz. \quad (7)$$

Since  $A(z)$  and  $B(z)$  are analytical function in complex domain, it follows that integral on right side of expression (7) is one-valued function. Hence, the equation (7) has solutions based on small Picard theorem. It is obvious that these solutions depend on  $A(z) = (a(x, y), b(x, y))$ ,  $B(z) = (c(x, y), d(x, y))$ ,  $\lambda = (\alpha, \beta)$ ,  $c = (c_1, c_2)$ .

After elementary calculation, from (7) we obtain

$$\frac{c}{\alpha - 1 + i\beta} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [(c dx - d dy) + i(c dy + d dx)] \exp\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\alpha - 1)(a dx - b dy) - \beta(a dy + b dx)\right) \cdot \left[ \cos\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\alpha - 1)(a dy - b dx) + \beta(a dx - b dy)\right) + i \sin\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\alpha - 1)(a dy - b dx) + \beta(a dx - b dy)\right) \right] \quad (8)$$

Then, from definition of equality of complex number, follows

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[ t \cos\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \beta r + (\alpha - 1)s\right) - u \sin\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \beta r + (\alpha - 1)s\right) \right] \exp\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\alpha - 1)r - \beta s\right) = \quad (9)$$

$$= \operatorname{Re} \frac{c}{\alpha - 1 + i\beta}$$

and

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[ u \cos \left( \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \beta r + (\alpha - 1) s \right) + t \sin \left( \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \beta r + (\alpha - 1) s \right) \right] \exp \left( \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\alpha - 1) r - \beta s \right) = \text{Im} \frac{c}{\alpha - 1 + i\beta} \quad (10)$$

Here, for the sake of easiness, we have introduced marks

$$\begin{aligned} a(x, y) dx - b(x, y) dy &= r, & a(x, y) dy + b(x, y) dx &= s, \\ c(x, y) dx - d(x, y) dy &= t, & c(x, y) dy + d(x, y) dx &= u. \end{aligned}$$

The system of equations (9) and (10) can have solution, but it is not always easy to find it.

### MAIN RESULTS

The equations (9) and (10) presents continuous and smooth curves in  $xOy$  plane. Denote these curves with  $\Gamma_1 = \Gamma_1(x, y)$  and  $\Gamma_2 = \Gamma_2(x, y)$ . The common zeros, if exists, are in their intersection. Those could be some points depending on eight parameters  $a, b, c, d, \alpha, \beta, c_1, c_2$ . Therefore, a function  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  may have zeros if  $u(x, y) = v(x, y) = 0$  is valid in the same points. There may be finitely many zeros, or infinite or they may not exist at all. All depends on how well one knows above mentioned eight quantities. So where necessary are formed various sufficient conditions which, regarding zeros, are satisfied separately for  $u(x, y) = 0$  and  $v(x, y) = 0$ , but may also contain many points which are not zeros. One of possible sufficient conditions for existence of common zeros is  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ .

The geometrical intrpretation is given in Figure 1.

With  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  we marked the common zeros. We can notice that there are much more points which are common zeros only on  $\Gamma_1$  or only  $\Gamma_2$ . Since this sufficient condition depends of many other conditions, in this paper we will consider only some special cases.

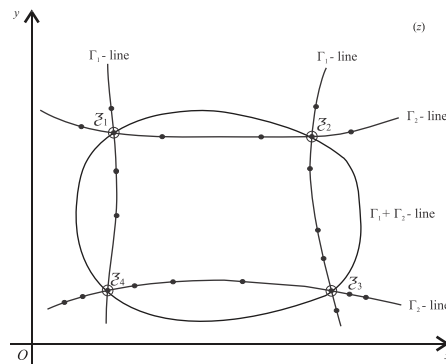


Fig. 1.

Suppose that we are dealing with real numbers, that is let  $z = x, y = 0$  and  $b(x, 0) = d(x, 0) = 0$ . Since in that case we have  $A(z) = A(x) = a(x)$  and  $B(z) = B(x) = b(x)$ , follows that (4) transforms into the real Bernoulli equation

$$y'(x) = a(x)y + b(x)y^\lambda, \lambda \in R \quad (11)$$

where  $a(x)$  and  $b(x)$  are continuous function on  $[0, +\infty)$ .

Now, the following theorem is true.

**Theorem 1.** The real Bernoulli differential equation (11), under condition  $\lambda < 1$  has solution.

**Proof.**  $\triangleleft$  The general solution of equation (11) is

$$y(x) = \exp\left(\int_0^x a(x) dx\right) \left[ c - (\lambda - 1) \int_0^x b(x) \exp\left((\lambda - 1) \int_0^x a(x) dx\right) dx \right]^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Since  $\exp\left(\int_0^x a(x) dx\right) \neq 0$  and  $\frac{1}{1-\lambda}$  positive, then the zeros are in the solution of equation

$$\frac{c}{(\lambda - 1)} = \int_0^x b(x) \exp\left((\lambda - 1) \int_0^x a(x) dx\right) dx. \quad (12)$$

Here  $\lambda < 1$  and  $c$  are real constants. Location of zeros depend on continuous function  $a(x)$ ,  $b(x)$  as well as on constants  $\lambda$  and  $c$ . Now, with  $F = F(a(x), b(x), \lambda)$  we marks quadrature on right side of equation (12). Abscissa of zeros are in intersection of the curve  $F = F(a(x), b(x), \lambda)$  with horizontals

$$y = \frac{c}{(\lambda - 1)}.$$

For  $\lambda > 1$  the solution of real Bernoulli equation (11) is

$$y(x) = \frac{\exp\left(\int_0^x a(x) dx\right)}{\sqrt[\lambda]{c - (\lambda - 1) \int_0^x b(x) \exp\left((\lambda - 1) \int_0^x a(x) dx\right) dx}}.$$

Since  $\exp\left(\int_0^x a(x) dx\right)$  is different from zero follows that  $y(x)$  does not have zeros.  $\triangleright$

### SPECIAL CASES

Let's review again the equations (9) and (10). In these expression the four differentials are crucial.

1. For example, let  $a(x, y)dx - b(x, y)dy = r = 0$ . Hence we obtain the differential equation with total differential  $\frac{dy}{dx} = \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$ . Suppose that  $y = \varphi(x, k), k = const$ . This implies that equations (9) and (10)

are transformed into

$$p = \int_{x_0}^x \exp\left(-\beta \int_{x_0}^x (a\varphi' + b) dx\right) \left[ \int_{x_0}^x (c - d\varphi') dx \cos\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1)(a\varphi' + b) dx\right) - \int_{x_0}^x (d + c\varphi') dx \sin\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1)(a\varphi' + b) dx\right) \right]$$

and

$$q = \int_{x_0}^x \exp\left(-\beta \int_{x_0}^x (a\varphi' + b) dx\right) \left[ \int_{x_0}^x (d + c\varphi') dx \cos\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1)(a\varphi' + b) dx\right) - \int_{x_0}^x (c - d\varphi') dx \sin\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1)(a\varphi' + b) dx\right) \right].$$

Due to great generality, these equations may or may not have solutions. Specially, if  $\varphi'(x, k) = y'(x) = \frac{a}{b}$  we obtain

$$p = \int_{x_0}^x \exp\left(-\beta \int_{x_0}^x \frac{a^2 + b^2}{b} dx\right) \left[ \int_{x_0}^x \frac{bc - ad}{b} dx \cos\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1) \frac{a^2 + b^2}{b} dx\right) - \int_{x_0}^x \frac{bd + ac}{b} dx \sin\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1) \frac{a^2 + b^2}{b} dx\right) \right]$$

and

$$q = \int_{x_0}^x \exp\left(-\beta \int_{x_0}^x \frac{a^2 + b^2}{b} dx\right) \left[ \int_{x_0}^x \frac{bd + ac}{b} dx \cos\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1) \frac{a^2 + b^2}{b} dx\right) + \int_{x_0}^x \frac{bc - ad}{b} dx \sin\left(\int_{x_0}^x (\alpha - 1) \frac{a^2 + b^2}{b} dx\right) \right].$$

The common zeros  $x = \xi$  may exist for both solutions. For example  $p + q$ ,  $p - q$ ,  $pq$ ,  $\sqrt{p^2 + q^2}$  are sufficient conditions for that.

2. The same is true if in (9) and (10) we substitute  $s = 0$  or  $t = 0$  or  $u = 0$ .

3. For determination of zeros location also is important the condition when function argument  $\cos \phi$  and  $\sin \phi$ , that is  $\phi = \int (\alpha - 1)s + \beta r$  is equal to zero. Then  $\cos \phi = 1$  and  $\sin \phi = 0$ . Equations (9) and (10) become

$$p = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} t \exp\left(- \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} (\alpha - 1)r - \beta s\right), q = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} u \exp\left(- \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} (\alpha - 1)r - \beta s\right).$$

The solutions of these equations, if exist, are to be found in the usual way.

## CONCLUSION

According to all above mentioned, we can conclude that for zeros of complex function of complex variables  $z$ , mainly are valid analogies with real function zeros of real variable. However, there are also important differences, because  $w = f(z) = u + iv = 0$  means that we have system of equations  $u(x, y) = 0$  and  $v(x, y) = 0$  which can, but not necessarily, have solution or can have multi-valued solution. Moreover, characteristic of zeros isolations, which is common at analytical functions, is sustainable only at standard analytical operations. Thus, if we introduce non-analytical operation  $z = x - iy$  zeros don't have to be only at isolated points, but also at continuous lines. Analogy with real function zeros of real variable ends here.

## LITERATURE

- [1] Bank S. and Laine I., "On the oscillation theory of  $f'' + A(z)f = 0$  where  $A(z)$  is entire", Trans. Amer. Math. Soc., 273, 1 (1982), 351-363
- [2] Bank S., Laine I., Langley J. K., "Oscillation results for solutions of linear differential equations in the complex domain", Result. Math. 16 (1989), 3-15
- [3] Laine I., "Nevanlinna theory and complex differential equations", Walter de Gruyter, Berlin, 1993
- [4] Shupej W., "On the sectorial oscillation theory of  $f'' + A(z)f = 0$ ", Annales Acad. Scient. Fennice, Helsinki 1994
- [5] Chaing Y. M., "On the complex oscillation of  $y'' + (e^z - K)y = 0$  and result of Bank, Laine and Langley", In Computational Methods and Function Theory, Ser. Aprox. Decompos. 5, world Scientific, River Edge, NY, (1995), 125-134
- [6] Hille E., "Ordinary differential Equations in the Complex Domain", Courier Dover Publications, London, 1997
- [7] Lei C., "Remarks on oscillation of second order linear difference equation", Appl. Math. Comput. (2009), doi:10.1016/j.amc.2009.09.028
- [8] Vujaković J., Dimitrovski D. and Rajović M., "On location of zeros of second order complex differential equations", Journal of Computational Technologies, Novosibirsk, Vol. 15, No 4, (2010), 27-30

## МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ВЕБ-СЕРВИСОВ ГЕОПОРТАЛА

---

*The experience of design and implementation of the applied geo-information systems (G.I.S.) software is discussed. These G.I.S. are implemented in the technology of geoportal. Their main function, the services of searching and visualization of geo-information, downloads and transformation of spatial data, and also connection to other services, integration with spatial data banks and metadata servers. Implemented systems looks like an ordinary web site with mapping capabilities, as well as regular applications for Windows. Use multi-tier architecture, modular organization of distributed applications. A significant part of the resource-intensive tasks performed on the server side.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Теория и практика построения геопорталов в последние годы позволила сформулировать их основные функции: сервисы поиска и визуализации геоинформации, загрузки и трансформирования данных, а также вызов других сервисов. Как правило геопорталы являются составной частью многоуровневой (модульной, распределенной) информационно-аналитической системы или инфраструктуры пространственных данных. В составе реализуемого программно-технологического обеспечения геопорталы обычно работают совместно с хранилищами (банками) пространственных данных, серверами метаданных [1].

В настоящей работе рассматривается опыт проектирования и разработки, архитектурные особенности ряда реализованных прикладных геоинформационных систем регионального уровня. Они созданы на первый взгляд в разных технологиях - как картографические веб-приложения для стандартного браузера Интернет и как обычные программы для операционной системы Windows. Однако эти технологические различия в отдельных компонентах создаваемых систем на практике оказываются преимуществом; они обеспечивают возможность выбора наиболее целесообразных решений в зависимости от постановки задачи. Использование многозвенной архитектуры и веб-сервисов геопортала позволяет значительную часть функциональной нагрузки распределенных приложений выполнять на сервере. В качестве бонуса получаем модульную систему, элементы которой могут тиражироваться в другие задачи. Например, созданный в рамках одной («первой») системы веб-сервис предоставления картографической основы может быть использован в других прикладных задачах [2].

### РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ КОМПОНЕНТ ДЛЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Основное внимание в настоящей работе уделялось проектированию и разработке программно-технологических решений для прикладных региональных геоинформационных систем, ориентированных преимущественно на Интернет-технологии, работу через веб-интерфейс. Здесь следует отметить, что данная область исследований находится еще в процессе бурного развития - идет процесс формирования «традиций» и стандартов в части доступа к данным, организации интерфейсов пользователя, использования программно-технологических платформ, архитектуры программного обеспечения сервера и т.п. За последние несколько лет разработчики как ведущих коммерческих так и открытых свободных ГИС значительно расширили потенциал своих систем

---

<sup>1</sup> ИВМ СО РАН, Красноярск, Россия

для работы в сети Интернет - картографические веб-сервисы, доступ и публикация пространственных данных, онлайн-каталоги, и т.п. Появилось много новых инструментальных программных средств, которые очень быстро и эффективно позволяют создавать современные веб-приложения, а также общедоступных информационных ресурсов типа каталогов спутниковых снимков высокого разрешения с развитыми программными интерфейсами для доступа к ним. Следует отметить также заметные результаты организационного и нормативно-правового характера, принятие отраслевых, международных и государственных стандартов [3].

Анализ возможностей существующих программных систем и тенденций в развитии технологий в рассматриваемой предметной области позволил выделить несколько актуальных задач и направлений в разработке программно-технологического обеспечения, решение которых может заметно повысить эффективность выполняемых работ по созданию прикладных региональных геоинформационных систем, обеспечить тиражируемость отдельных компонент между различными системами. Было выделено четыре основных блока [4]:

- Подсистема ведения архива базовых геопространственных данных.  
Должна обеспечивать организацию хранения и управления данными, средства для их загрузки и удаления, резервного копирования, и т.п. Должна быть предусмотрена возможность регистрации в архиве внешних баз данных, в т.ч. - пространственных, с организацией прозрачного доступа к ним, через единый программный интерфейс - т.е. пользователь, который получает данные из архива базовых геопространственных данных не обязан знать, откуда именно берутся геоданные - из размещенного на этом же сервере shp-файла или через подключение к стороннему серверу ArcGIS.
- Система прикладных программных (картографических) веб-сервисов.  
Предполагается создание набора средств для различного доступа к данным, организации запросов к ним, в том числе - на основе стандартных отраслевых протоколов/интерфейсов типа широко используемых открытых стандартов консорциума OGC - картографических веб-сервисов WMS, WFS, и т.п. Также должна быть предусмотрена возможность организации ресурсоемких вычислений на стороне сервера - сегодня существует несколько альтернативных решений в данном направлении - WPS (web processing service) консорциума OGC, и проч.
- Подсистема управления пространственными метаданными.  
Предназначена прежде всего для поиска и навигации по имеющимся пространственным данным, в том числе - с помощью пространственных запросов. Подсистема должна предусматривать возможность работы с различными классификаторами данных, быть совместимой с существующими стандартами на метаданные, допускать соответствующий импорт/экспорт. Основа подсистемы - каталог метаданных - должен обеспечивать весь комплекс задач управления/администрирования метаданными. Предполагается глубокая интеграция со всеми прочими рассматриваемыми здесь компонентами региональной геоинформационной системы.
- Региональный геопортал.  
Геопортал - централизованный веб-интерфейс с инструментами навигации и поиска по метаданным, соответствующей визуализации и загрузки географической информации, доступа к имеющимся прикладным веб-сервисам. Его можно рассматривать как разработанное в веб-интерфейсе приложение, которое объединяет указанные выше три подсистемы, предоставляет конечному пользователю информацию об имеющихся пространственных данных и способам доступа к ним. Также предполагается, что геопортал обладает собственными средствами визуализации пространственных (картографических) данных, с развитыми средствами интерактивного формирования картографического представления. Очень важно, что в качестве пользователей портала могут выступать также сторонние приложения, работая через веб-сервисы. Также следует отметить возможности персонального раздела портала - предполагается, что пользователь должен иметь возможность формирования собственных/

производных наборов данных, по аналогии с принципом организации “корзины” Интернет-магазина, с сохранением данных в персональном разделе портала “Мои документы”.

Обобщая приведенные здесь характеристики четырех программных компонент региональных геоинформационных систем, хотелось бы отметить, что в той или иной степени все перечисленные функции присутствуют в любой региональной геоинформационной системе. Как правило - это составные части одной разработки. Однако формальное разделение этих составных частей в самостоятельные подсистемы и/или приложения представляется весьма целесообразным [5].

Представленное логическое разделение региональной ГИС на перечисленные компоненты, формализация интерфейсов ввода/вывода данных между ними может заметно улучшить многие характеристики - повысить эффективность процесса создания и поддержания системы за счет декомпозиции одной «сложной» системы в несколько «простых», облегчить тиражируемость ее элементов в новые разработки, и проч., в соответствии с модульным принципом разработки программного обеспечения. Эти элементы становятся как бы «кирпичиками» для новых прикладных геоинформационных систем, в этом отличительная их особенность [6].

### **ПРИКЛАДНЫЕ ВЕБ-СЕРВИСЫ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

Картографические веб-сервисы геопортала - важнейший его элемент, который в общепринятом понимании является для него определяющим - является рассматриваемый веб-сайт геопорталом или нет. Оставляя за скобками некоторую имеющуюся на сегодняшний день терминологическую путаницу, остановимся на ставшем общепринятым на сегодняшний день определении геопортала, основанном на нормативных документах (Директивах) INSPIRE Европейского Союза. В нем сетевые сервисы (или веб-службы) для наборов пространственных данных и связанные с ними услуги объединены в пять групп [7]:

- поисковые сервисы, позволяющие искать наборы пространственных данных и геосервисы на основе соответствующих метаданных и отображать содержание метаданных;
- сервисы визуализации, предоставляющие, как минимум, возможности просмотра данных, навигации по изображениям, их скроллинга, масштабирования и графического оверлея данных, а также отображения легенд карт и соответствующей информации, содержащейся в метаданных;
- сервисы для скачивания информации, позволяющие копировать наборы пространственных данных или их фрагменты и, по возможности, обеспечивающие прямой доступ к данным;
- сервисы преобразования данных, дающие возможность трансформировать наборы пространственных данных с целью обеспечения их интероперабельности;
- сервисы для вызова других (удаленных) сервисов.

Перечисленные сервисы вполне соответствуют концепции геопортала рассматриваемого в настоящей статье. В широком смысле - объединение всех четырех перечисленных подсистем региональной ГИС как раз и соответствует представленному выше определению геопортала Евросоюза (по материалам INSPIRE).

Практика разработки ряда прикладных региональных ГИС позволила сформулировать некоторые особенности реализации веб-сервисов геопортала, которые представляются важными, если мы рассматриваем геопортал не только как самодостаточную систему (что само по себе конечно важно), а также как тиражируемый элемент/компонент для сторонних геоинформационных приложений. Тем самым мы расширяем перечень функций геопортала, приведенных в представленном выше определении Евросоюза.

Перейдем к содержательному описанию реализованной системы веб-сервисов, которые могут служить основой для построения прикладных геоинформационных систем. Во-первых, веб-сервисы геопортала были разделены на два типа:

- Служебные сервисы.

Модульная архитектура разработки региональной геоинформационной системы и позиционирование ее компонент как «кубиков» для других веб-приложений сформировала необходимость строгой формальной спецификации информационного обмена между компонентами. В результате был сформирован набор веб-сервисов для приема/передачи данных внутри системы. Например, модуль «Геопортал» с помощью реализованного в нем интерфейса пользователя для поиска данных формирует запрос в «Каталог метаданных» для получения информации. Далее - подсистема «Каталог метаданных» обращается к модулю «Архив геоданных» для получения списка ресурсов определенного типа. Дальше все происходит в обратном порядке. Следует отметить, что эти служебные сервисы доступны откуда угодно, в том числе - из специализированных программ для Windows. В частности, на основе специально разработанных служебных веб-сервисов работает «Редактор карт GeoExpress» - приложение для Windows, созданное для стилизованного оформления отдельных слоев и тематических карт. В то же время используемые им сервисы можно при желании применить в других программах. Ограничения в доступе к служебным сервисам связаны с тем, что с их помощью можно много чего сделать, и в том числе - нарушить работоспособность системы в целом (при неумелом использовании). Именно поэтому доступ к ним ограничен разработчиками.

- Публичные сервисы.

В отличие от упомянутых выше служебных сервисов - эти сервисы являются публично доступными. Их рекомендуется использовать в сторонних разработках. Технологически они практически не отличаются от служебных, но нарушить работоспособность системы они не могут. С содержательной точки зрения - преимущественно речь идет об информационных сервисах. К их числу относятся сервисы предоставления картографической основы, геокодирования, поиска кратчайшего маршрута, водотока по речной сети, и ряд других.

Приведем в качестве примера список некоторых реализованных веб-сервисов. Их разработка выполнялась преимущественно в рамках реализации конкретных заказных прикладных геоинформационных систем; список расширялся по мере необходимости. Наиболее актуальными, и соответственно - реализованными в приоритетном порядке, за последнее время были следующие прикладные публичные сервисы:

- предоставление базовой картографической основы (по протоколу WMS);
- запросы к атрибутам тематических слоев данных (поиск по заданным координатам);
- поиск кратчайшего маршрута по дорожному графу;
- геокодирование (преобразование адреса в географические координаты);
- обратное геокодирование (преобразование географических координат в «читаемый адрес»);
- вычисление водотока по речной сети.

В качестве примера рассмотрим подробно сервис поиска маршрутов. Он предназначен для вычисления оптимального пути на дорожном графе между двумя точками. Точки могут быть заданы как географическими координатами, так и адресом. В последнем случае используется подсистема геокодирования, обеспечивающая определение координат по текстовому адресу. Процедура поиска выполняет определение ближайшего сегмента дороги, точки съезда, а также поиск оптимального маршрута на графе. Учитывается тип покрытия дороги, а также дороги с односторонним движением. Разработанный сервис успешно используется в нескольких проектах, в том числе - в навигационно-диспетчерской системе спутникового мониторинга транспорта на территории Красноярского края «РЕГНАСС», в составе которой работает региональный центр в Красноярске и 60 операторов во всех муниципальных районах края.

Исследования по развитию системы картографических веб-сервисов были связаны с анализом потребностей прикладных геоинформационных систем, практическими особенностями их эксплуатации, и охватывали в частности также такие направления:



- Построение систем межсерверного взаимодействия. Реализованы следующие веб-сервисы:
  - Автоматизация актуализации базовой картографической основы - «основной» сервер с векторными данными тиражирует карту на кэширующие сервера, которые оперируют уже растровыми данными. Приложения конечных пользователей работают только с кэширующими серверами. Сервис запускается после корректировки векторных данных, обеспечивает обновления растровых данных на кэширующих серверах и в локальном кэше приложений (АРМов) пользователей.
  - Распределенный сбор и мониторинг данных (многопоточные приложения, автоматизированная обработка e-mail).
  - Веб-интерфейсы (адаптеры) к существующим системам - решение задач автоматизации обмена данными, в соответствии с регламентами.
- Исследования по развитию инструментальных программных средств и новых технологий:
  - Разработка тиражируемых версий библиотек функций и классов, шаблонов и элементов пользовательского интерфейса - с целью радикального сокращения времени разработки интерфейсов пользователя и систем в целом.
  - Обеспечение автономной работы приложений геопортала (при временном ограничении доступа к сети Интернет).
  - Разработка средств локального кэширования геопространственных данных, для приложений на платформе Windows (в перспективе - с обеспечением совместимости с локальными «настольными ГИС» типа QuantumGIS).

#### **ФОРМИРОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАСЛЕВЫХ ПРОГРАММНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ**

В качестве примера использования картографических сервисов геопортала рассмотрим комплекс задач региональной системы управления образованием. Он включает серию взаимодополняющих программных продуктов, реализованных на общей программно-технологической платформе, информационных технологиях геопортала. В составе комплекса следующие программно-технологические разработки (Рис. 1):

- Веб-система «Сеть образовательных учреждений Красноярского края» - информационная система министерства образования с ведомственной статистикой в разрезе образовательных учреждений и муниципальных образований.
- Навигационно-диспетчерская система на основе ГЛОНАСС/GPS для контроля за движением школьных автобусов («РЕГНАСС», «РЕГНАСС-WEB»). Система несколько лет эксплуатируется в крае, включает региональный центр коммуникаций в Красноярске и операторов во всех муниципальных районах края.
- Геоинформационное приложение для распределенного редактирования маршрутов школьных автобусов - Windows-приложение для специалистов управлений образования в муниципальных районах; один из компонентов информационной основы для краевой навигационно-диспетчерской системы.
- Программные средства анализа и оптимизации маршрутов на основе данных по зонам обслуживания операторов сотовой связи в Красноярском крае. Совместный анализ зон обслуживания операторов сотовой связи края и данных по маршрутам школьных автобусов (поиск участков движения школьных автобусов, не покрытых сотовой связью).

Перечисленные разработки выполнены при активном участии в постановках задач специалистов заказчиков и заинтересованных организаций - министерств края, отраслевых институтов, коммерческих компаний.

Общей характеристикой перечисленных разработок является использование технологий картог-

рафических веб-сервисов геопортала. Все они оперируют с картографическим интерфейсом и основаны на централизованной картографической основе, средствах геокодирования и проч. Упомянутые выше веб-сервисы актуализации карты автоматически обеспечивают обновление картографических данных у всех пользователей всех прикладных систем. В данном случае большинство пользователей даже не подозревает об используемых картографических сервисах геопортала, и не знает о его существовании...

Рассматриваемый подход представляется актуальным в контексте развития информационных систем межведомственного взаимодействия, на которые в последнее время стали обращать пристальное внимание. Формализация интерфейсов к данным упрощает разработку систем, уменьшает избыточное дублирование информации, повышает качество данных. Представим себе, например, что все системы знают, где взять актуальный справочник образовательных учреждений (в частности - список школ), который независимо от них актуализируется по установленному регламенту... Сколько проблем сразу автоматически будет решено! В этом контексте следует приветствовать развитие и внедрение государственных систем межведомственного электронного взаимодействия (СМЭВ), начатое в последнее время.

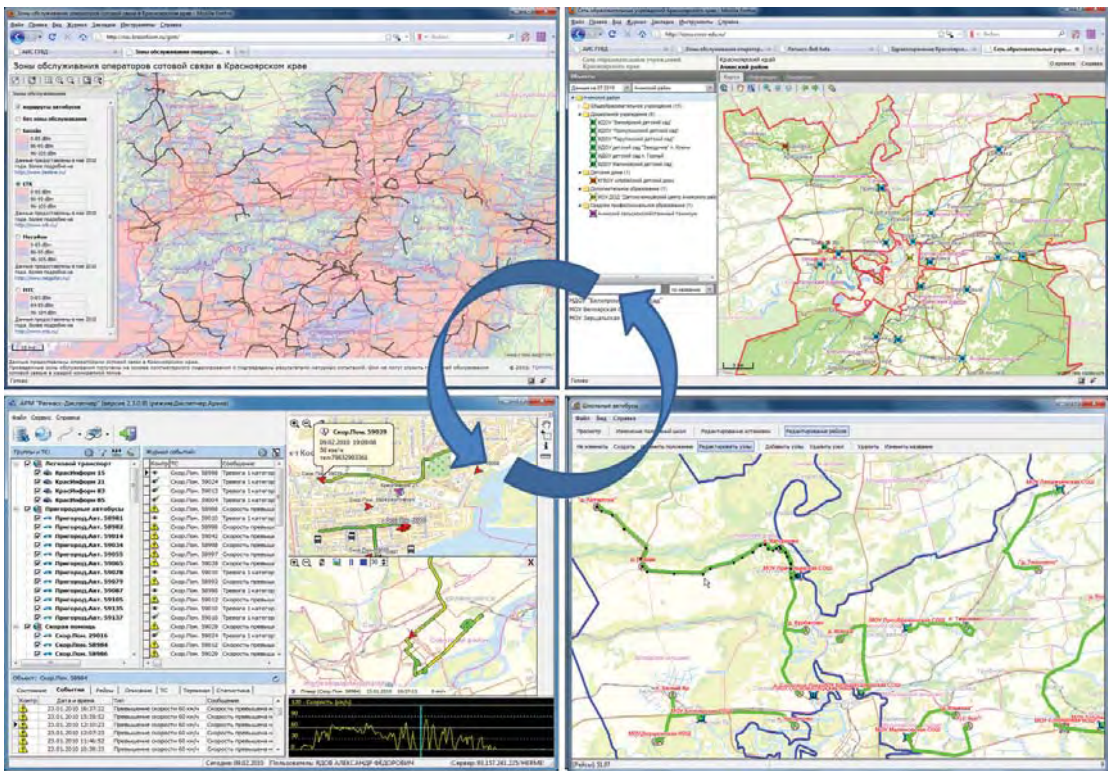


Рис. 1. Комплекс программно-технологических решений для задач управления образованием в Красноярском крае.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Якубайлик О.Э., Попов В.Г. Технологии для геоинформационных Интернет-систем, Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 6. С. 116-126.
- [2] Якубайлик О.Э. Геоинформационный Интернет-портал, Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. Том 12. № S3. С. 116-126.
- [3] Якубайлик О.Э. Геоинформационная Интернет-система мониторинга состояния окружающей природной среды в зоне действия предприятий нефтегазовой отрасли, Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2010. № 1. С. 40-45.

- [4] Кадочников А.А., Попов В.Г., Токарев А.В., Якубайлик О.Э. Формирование геоинформационного Интернет-портала для задач мониторинга состояния природной среды и ресурсов, Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. 2008. Т. 1. № 4. С. 377-386.
- [5] Токарев А.В., Якубайлик О.Э. Каталог ресурсов для ГИС мониторинга состояния окружающей природной среды в зоне действия предприятий нефтегазовой отрасли, Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2009. Т. 18. № 12. С. 215-219.
- [6] Якубайлик О.Э., Кадочников А.А., Попов В.Г., Токарев А.В. Модель геоинформационной аналитической Интернет-системы для анализа состояния и презентации региона, Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2009. № 4. С. 61-66.
- [7] Кошкарев А.В. Геопортал как инструмент управления пространственными данными и геосервисами, Геоинформационный портал ГИС-Ассоциации [электронный ресурс]. - Пространственные данные. 2008. № 2. - Режим доступа: <http://gisa.ru/45968.html>

## Index

Agatonovic M.	12	Ivanovic G.	155
Andreeva N. M.	17	Jovovic I.	161
Antonov I. A.	23	Kamaev D. A.	167
Arandjelovic I.	31	Kamynin E. Yu.	173
Aritonovic M.	33	Karavaev D. A.	128
Beisel S.A.	36	Karepova E. D.	179
Belolipetskii V. M.	43	Kashirin A. A.	185
Bjelic M.	191	Keckic D.	31
Bjelica M.	48	Khakimzyanov G. S.	143, 173
Bocharov A. A.	57	Kholodova S. E.	311
Borzov S. M.	52	Khoroshevsky V. G.	149
Bozinovic M.	372	Khristenko Yu. F.	117
Bychkov I. V.	23	Kisic E.	330
Chepurko S. V.	167	Kolarevic M.	191
Chubarov L. B.	36	Kompaniets L. A.	198
Cvetkovic M.	63	Kontrec N.	204, 275
Cvetkovic S.	63	Kopaigorodsky A. N.	211
Degermendzhly A. G.	43	Korobitsyn V. A.	217
Demytyeva E. V.	179	Kostic Kovacevic I.	111
Despotovic M.	204	Kosyakov D. V.	222
Dikovic Lj.	67	Kozik V. I.	226
Dimic G.	73, 232	Kuk K.	73, 232
Dimovski D.	78	Kurnosov M. G.	149
Djosic D.	84	Lazic Lj.	238
Djurdjevic D. Z.	89, 96	Lazovic G.	204
Dobritsa D. B.	117	Malesevic B.	246
Doncov N.	12	Mamoilenko S. N.	149
Dostovalov D. N.	102	Mandak A.	252
Eremeev S. V.	108	Martyanov A. S.	222
Fedorov R. K.	23	Masich A. G.	257, 266
Feoktistov A. S.	226	Masich G. F.	257, 266
Gachenko A. S.	23	Massel A. G.	271
Gavrilovic J.	111	Massel L. V.	211
Geidarov N. A.	289	Matveenکو V. P.	257
Genova S. N.	43	Maximov V. V.	173
Gerasimov A. V.	117	Micic A.	84
Geshev P. I.	122	Milinkovic S.	238
Glinsky B. M.	128	Milosevic H.	204, 275, 283, 289
Grujic A.	134	Milovanovic B.	12
Gummel E. E.	289	Minic D.	191
Guskov A. E.	138	Misajleski Z.	298
Herceg D.	33	Moskvichev V. V.	355
Hmelnov A. E.	23	Mumovic G.	330

Nazimova D. I.	17	Stojanovic V.	335, 372
Nedic D.	33	Teytelbaum D. V.	222
Nedjevenko E. S.	226	Tiron G. G.	257
Nicheporchuk V. V.	355	Tsvelodub O. Yu.	57
Novikov A. E.	305	Vasilkov A. V.	138
Novikov E. A.	305	Vladimirov I. N.	23
Novoselov E. V.	138	Volkov Yu. S.	379
Nozhenkova L. F.	355	Vujakovic J.	385, 391
Nudner I. S.	173	Yakubailik O. E.	396
Pashkov S. V.	117	Yakubaylik T. V.	198
Pavlovic N.	341	Zakharov Yu. N.	289
Peregudin S. I.	311	Zekovic A.	351
Petkovic A.	317		
Petkovic D.	275, 385		
Petrovic M.	325		
Petrovic V. V.	283, 330		
Petrovic Z.	191		
Popovic B.	341		
Popovic C. B.	335		
Popovic M. B.	347		
Popovic N.	341		
Potaturkin I. O.	52		
Prokin D.	73, 232		
Radicic B.	246		
Radosavljevic D.	67		
Raicevic M. A.	347		
Rajovic M.	191, 391		
Rogozin D. Yu.	43		
Rugnikov G. M.	23		
Savic A.	111, 351		
Semenov K. K.	173		
Shaidurov V.V.	179		
SHCHapov V. A.	266		
Shekutkovski N.	298		
Shigarov A. O.	23		
Shokin Yu. I.	289, 355		
Shokina N. Yu.	143		
Shornikov Yu. V.	102		
Smagin S. I.	185		
Sorokovoi A. A.	23		
Spalevic P.	73, 232		
Stankovic Z.	12		
Stepanov R. A.	266		
Stevovic S.	155, 360		

CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

004(082)

КОНФЕРЕНЦИЈА Математичке и информационе технологије (2011 ; Врњачка Бања, Будва)  
Zbornik radova Konferencije MIT [Matematičke i informacione tehnologije] 2011 :  
[[održane] u Vrnjačkoj Banji od 28. do 31. avgusta i u Budvi od 31. avgusta do 5. septembra 2011.  
godine] / [urednik Dragan Aćimović]. - Beograd : Alfa univerzitet ; Kosovska Mitrovica : Društvo  
matematičara Kosova i Metohije ; Novosibirsk : Institute of Computational Technologies, Siberian  
Branch of the Russian Academy of Sciences, 2012 (Kraljevo : Graficolor). - 404 str. : ilustr. ; 24 cm

Radovi na engl. i rus. jeziku. - Tekst ćir. i lat. - Tiraž 100. - Napomene uz tekst. - Bibliografija uz svaki  
rad. - Abstracts.

ISBN 978-86-83237-90-6 (AU)

а) Информациона технологија - Зборници  
COBISS.SR-ID 190685964

