О ДРУГОМ ПОСТУЛАТУ СПЕЦИЈАЛНЕ ТЕОРИЈЕ РЕЛАТИВИТЕТА

од

М. Миланковића

(Приказано на скупу Академије Природних Наука 30. VI. 1923.)

I.

У својој првој радњи којом је ударио темељ теорији релативитета, назвао је *Einstein* други њен постулат само претпоставком.[1]) Од тога доба протекло је до данас осамнаест година, па су неоспорни успеси теорије релативитета и на пољу њене практичне верификације довели велики број научника до убеђења да је спомепута претпоставка, колико нам год она изгледала смела, у ствари емпиријска чињеница која неминовно следује из свих наших оптичких искустава, а нарочито из негативног исхода *Michelson*-ова експеримента, из резултата посматрања двојних звезда и из феномена аберације светлости.

Исход *Michelson*-овог експеримента показује, како то схватају споменути научењаци, да се светлост шири према посматрачу на земљи истом брзином c у свима правцима; она би се дакле, по принципима класичне физике ширила према посматрачу ван земље у правцу јединичног вектора $\mathfrak{i}$ брзином $c + \mathfrak{v}\,\mathfrak{i}$ ако је $\mathfrak{v}$ вектор брзине земље према овом другом посматрачу. То би значило да или хипотески медиум, који преноша светлосне зраке, учествује у кретању земље или да кретање извора утиче

---

[1]) *Einstein*, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen der Physik 17 (1905), одштампано и у монографији *Lorentz, Einstein, Minkowski*, Das Relativitätsprinzip. Leipzig 1920. Ту се каже: Wir wollen... die... scheinbar unverträgliche Voraussetzung einführen, dass sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V forpflanze.

на брзину ширења светлости, увећавајући ју за $\mathfrak{v}$ i. Против првог тумачења говори аберација светлости, а против другог астрономска посматрања двојних звезда.

Но оваково резоновање, а нарочито оваково тумачење исхода *Michelson*-овог експеримента, није довољно критично, а садржава у себи, сем тога, још цео низ претпоставки о природи светлости, па на тај начин прикрива претпоставку о константности брзине светлости у ствари другим претпоставкама на које смо се боље свикли, но које могу бити замењене и другима без сукоба са искуством.

Задатак је ове расправе да то покаже. Истим питањима којима се овде бавим, бавили су се и многи други — цела антирелативистичка литература врти се око њих. Зато је неизбежно да у овој радњи поновим овде, онде познате ствари, но надам се да ће и ти случајеви послужити јачој систематици антирелативистичких теорија.

II.

Потребно је, пре свега осталога, да испитамо шта се све мора претпоставити о природи светлости или прихватити као неоспорну чињеницу да се оне појаве које долазе код нас у питање могу описивати језиком математике. Те су појаве у главном ове: ширење, рефлексија и интерференција светлости (за описивање *Michelson*-овог експеримента), њена аберација услед кретања посматрача и *Doppler*-ово померање спектралних линија (за испитивање кретања двојних звезда).

Данашња теоретска физика, а нарочито оптика, није ушла у стадиум пречишћене аксиоматике. Још је тешко одговорити на питање на каковим и коликим претпоставкама почивају сви њени закључци и како се могу те претпоставке сменити или груписати на друге начине. Велики критични испитивач принципа физике *Mach* бавио се је нарочитим, на жалост недовршеним делом[1]) тим питањем, а и *Exner* му је поклонио велику пажњу[2]). Упућујући читаоца на та два дела, прихваћам као неминовне претпоставке о природи светлости; њен просторни и временски периодицитет из којега прихватањем *Huygens*-овог принципа и

[1]) *Mach*, Die Prinzipien der physikalischen Optik. Historisch und erkenntnispsichologisch entwickelt. Leipzig 1921.

[2]) *Exner*, Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften. Wien 1919.

Fresnel-ових основних претстава трансверзалности осцилација следује праволинијност ширења, закони рефлексије и интерференције. О *Doppler*-овом принципу и аберацији светлости ћемо још говорити.

Тај периодицитет светлости описује се у најопштијем облику, без даљих претпоставки, математски овако.

Уочимо један произвољан монохроматски светлосни зрак, па означимо физикално стање које називамо светлосном појавом са S, не упуштајући се још у питање какове је природе та величина, било са геометријског, било са физикалног гледишта, т. j. дали је скаларна, векторска, електрична, магнетска или механичка величина, то се она, према горњем, може математски представити изразом

$$S = G(x)\,F(x - c\,t) \tag{1}$$

где је x одстојање мерено дуж светлосног зрака, t време, а c једна величина димензије брзине. При томе замишљамо да светлосни извор мирује на оси x. О природи функција G и F знамо ово.

G(x) зависи од облика таласних површина; за сферне таласе је $G(x) = \frac{1}{x}$, за равне $G(x) = 1$, за случај апсорпције имала би та функција у себи још фактор облика $k\,e^{-px}$.

Функција F је периодична функција свога аргумента, па означимо ли њену периоду, која се зове таласном дужином, са λ, то је

$$F(\xi) = F(\xi + \lambda) \tag{2}$$

Из (1) и (2) и уз претпоставку $G(x) = 1$, следује да се после времена τ, датог једначином

$$c\,\tau = \lambda, \tag{3}$$

враћа на једном одређеном месту x исто стање величине S. Величина τ означава, према томе, временску периоду, а величина c брзину којом се шире светлосни таласи.

Ако место дужине примамо време за аргуменат функције F, т. j. ако ставимо

$$F(x - c\,t) = F\left[-c\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = \Phi\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{4}$$

онда добивамо уз претпоставку $G(x) = 1$ коју чинимо, за сада једноставности ради,

(5) $$S = F(x - c\,t) = \Phi\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

(6) $$\Phi(t) = \Phi(t + \tau).$$

Горње једначине имају врло опште значење. У њима није учињен ни избор између ундулационе и емисионе теорије светлости, јер и ова друга мора претпоставити периодицитет изражен тима једначинама.[1])

III.

Из предњих једначина следује врло једноставно *Doppler*-ов принцип за случај непомичног светлосног извора. Под тим називом разумевамо светлосни извор који мирује према физикалном пољу на које се односе предње једначине или, као што се то каже, према етеру. Претпостављајући реалност таковога физикалног поља или простора, можемо за кретање у њему употребити назив „апсолутног“ кретања, који се не поклапа потпуно са смислом *Newton*-овога апсолутног кретања.

Не би било сасвим излишно иза речи „мирује“ додати реч „макроскопски“, јер сваки светлосни извор, макар га замислили бесконачно маленим, као што то и чинимо, мора бити материјалне природе, а ова се мора, макар у унутрашњости својих атома, налазити у кретању.

Једноставности ради, претпостављамо да имамо посла са монохроматским светлом, т. ј. да светлосни извор шаље светлосне таласе једне одређене периоде τ_0.

Искуства на путањама космичких димензија показала су веома тачно да је у безваздушном простору брзина ширења светлости независна од таласне дужине, па прихватајући та искуства као стварни израз чињеница, можемо брзину којом се шири светлост из уоченог, апсолутно мирујућег извора, а по безваздушном, негравитационом простору, сматрати за апсолутну константу. Означимо ју са c_0.

Имајући у виду, као што смо уговорили, равне таласне површине, то ће феномен ширења светлости бити претстављен једначином

(7) $$S = F(x - c_0\,t)$$

где између периоде τ_0 и таласне дужине λ_0 постоји једначина

(8) $$c_0\,\tau_0 = \lambda_0$$

[1]) Види *Wiener*, Lehre vom Licht, чланак у свесци „Physik“ публикације Kultur der Gegenwart. Leipzig 1915. p. 530.

За посматрача који је у времену $t = o$ почео у тачки x кретање у правцу ка извору брзином v, т. ј. за којега абсцису x ваља заменити изразом $(x - v\,t)$ добивамо ову појаву ширења светлости

(9) $$S = F[x - (c_0 + v)\,t]$$

Таласна дужина може се сматрати као моментани снимак просторног распореда функција F, па зато она не зависи од кретања посматрачевог; зато је и за њега

(10) $$F(\xi) = F(\xi + \lambda_0)$$

Из (9) и (10) следује да је временска периода τ светлосних осцилација S према посматрачу дата изразом

(11) $$(c_0 + v)\,\tau = \lambda_0$$

т. j. због (8)

(12) $$\tau = \frac{c_0}{c_0 + v}\,\tau_0$$

Ова једначина изражава *Doppler*-ов принцип за случај покретног посматрача, па је, према пређашњем, математски израз стварне чињенице.

IV.

У случају када се светлосни извор креће, може се *Doppler*-ов принцип извести само из припомоћ нових претпоставака. То ћу сада да покажем.

Замислимо, дакле, да се светлосни извор креће у правцу x брзином v. Бројимо ли време тако да је за $x = o$ $t = o$, онда је кретање извора дато изразом

(13) $$x = v\,t$$

Прво питање које се сада указује, је ово. Ако светлосни извор у мирујућем стању шаље светлост периоде τ_0, колика је периода τ''_0 светлосних зрака које он емитира када се креће униформном брзином v.

Несумњиво је да смемо ставити

(14) $$\tau_0'' = f_1(v),$$

где је f_1 једна, за сада још неодређена функција, но која задовољава услов

(15) $$f_1(o) = \tau_0$$

Тако су осцилације у самоме светлосноме извору претстављене са

(16) $$S = \Phi(t) = \Phi(t + \tau'_0)$$

Друго питање на које ваља одговорити је, колика је брзина с којом се шире светлосне осцилације из покретног извора. И на то се питање може одговорити само овим обрасцима

$$c = f_2(v) \tag{17}$$

где је f_2 једна, за сада неодређена функција која задовољава услов.

$$f_2(o) = c_0 \tag{18}$$

При извађању *Doppler*-овог принципа у класичној теорији чине се претпоставке $\tau_0' = \tau_0$ и $c = c_0$. Оне се према пређашњем, не морају прихватити. Но једна трећа претпоставка изгледа ми неминовна, а та је да се светлосне осцилације распростиру тако да светлосни извор наилази у свакој тачки простора кроз коју пролази баш ону осцилацију коју он у томе моменту ствара. Ову ћу претпоставку назвати условом синхронизације.

Ако нам је, према томе, ширење светлости у случају покретнога извора претпостављено изразом

$$S = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{19}$$

где је φ једна функција коју имамо да одредимо, то услов синхронизације захтева да на месту извора, т. j. за $x = vt$ буде $\varphi = \Phi(t)$, дакле

$$\varphi\left(t - \frac{vt}{c}\right) = \Phi(t). \tag{20}$$

Ова једнакост мора важити за свако t, па је зато

$$\varphi(t) = \Phi\left\{\frac{t}{1 - \frac{v}{c}}\right\}$$

или

$$\varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) = \Phi\left\{\frac{t - \frac{x}{c}}{1 - \frac{v}{c}}\right\} \tag{21}$$

Зато је ширење светлости према непокретном посматрачу претстављено изразом

$$S = \Phi\left\{\frac{t}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{x}{c - v}\right\} \tag{22}$$

Обзиром на (16) добивамо да су периода τ_1 и таласна дужина λ_1 сада дате изразима

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\tau_0' \tag{23}$$

$$\lambda_1 = (c - v)\,\tau_0' = c\,\tau_1 \tag{24}$$

Ове једначине изражавају *Doppler*-ов принцип за случај покретног извора, без споменуте уобичајене две претпоставке које нису неминовне.[1])

Захтевамо ли да у случају покретног посматрача и у случају покретног извора добијемо исти резултат, т. j. да принцип релативитета буде задовољен, не прибегавајући релативирању времена, то захтевамо да једначине (8), (12), (23), (24) даду

$$\lambda_0 = \lambda_1 \quad \tau = \tau_1$$

а одатле следује:

$$\tau_0' = \tau_0 \tag{25}$$

$$c = c_0 + v \tag{26}$$

Кретање извора не би мењало периоду осцилације него само брзину ширења светлости.

V.

Приступимо сада математском описивању *Michelson*-ова експеримента, гледајући да при томе не учинимо ниједну претпоставку која није неминовна.

Према ономе што смо напред изложили, могуће је да извор светлости који се креће брзином v, шаље зраке које се, макар у непосредној близини извора, шире брзином c која није идентична са брзином c_0 него је функција брзине v. Случај $c = c_0$ само је специјалан случај и важи за непокретни извор. Због тога ћемо ставити

$$c = c_0 + u(v, \varphi) \tag{27}$$

где $u(v, \varphi)$ претставља једну непознату функцију која има тек да се одреди и која задовољава услов

$$u(o, \varphi) = o \tag{28}$$

---

[1]) *Doppler* је свој принцип извео врло елементарним сретствима која не задовољавају. Види *Doppler*, Abhandlungen. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig 1907, где је H. A. *Lorentz* коментарисао *Doppler*-ове радње и осврнуо се на његову полемику са *Petzval*-ом. Од каснијих покушаја (пре Lorentz-ове теорије електрона) да се тај принцип и сродне појаве научно боље образложе, најважнији је *Ketteler*, Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration des Lichtes. Bonn 1873. — Поверење у *Doppler*-ов принцип створено је, више него свима теоретскима разматрањима, његовим многобројним применама у астрономији.

За оправданост овакове хипотезе изразио се је, поред осталих, и *Poincaré.*[1])

Но и фаза емитоване радијације могла би, док макар противно не докажемо, зависити од споменутих двеју величина. Због тога ћемо разлику фазе емитоване радијације према фази коју би она имала при непокретном извору означити са Θ, па ставити

$$\Theta = \Theta(v, \varphi) \tag{29}$$

где је $\Theta(v, \varphi)$ функција која има тек да се одреди и која задовољава услову

$$\Theta(o, \varphi) = o. \tag{30}$$

При *Michelson*-овом експерименту дешавају се рефлексије светлосних зрака на покретним огледалима и њихов пролаз кроз планпаралелне плоче. Ове последње претпоставићемо бесконачно танке и без даљег утицаја на ток појаве; исто тако нећемо узети у обзир ни последице *Doppler*-овог ефекта на њима и на огледалима, јер се оне, као што изгледа, међусобно компензирају.[2])

Што се тиче ефекта покретних огледала, то је о њему много писано, но без дефинитивног резултата.[3]) Изгледа ми да је најправилније претпоставити да су брзина и фаза рефлектованога зрака функције брзине којом се креће оптичка слика, и угла што га затвара рефлектовани зрак са вектором брзине оптичке слике.[4])

---

[1]) *Poincaré,* La valeur de la science. Paris 1908. p. 202.

[2]) Види о томе полемику: *Budde,* Zur Theorie des Michelsonschen Versuches. Phys. Zeitschr. 1911 — *Laue,* Zur Theorie des Michelsonversuches. Ibid. 1912 — *Budde,* Zur Theorie des Michelsonschen Versuches II. Ibid. 1912.

[3]) *Abraham,* Theorie der Elektrizität. II. Bd. § 42 Die Reflexion des Lichtes durch einen bewegten Spiegel. Leipzig 1920, где цитира и своје претходне радове — *Hasenöhrl,* Ueber die Veränderung der Dimensionen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Aether. Anhang. Ueber die Reflektion an einem bewegten Spiegel. Wiener Sitzungsberichte. Bd. 113 Abt. II a (1904) — *Harnack,* Zur Theorie des bewegten Spiegels. Annalen d. Physik 1912 и 1914. — *Harnack,* Der Doppler effekt und die Gesetze der Spiegelung und Brechung an einer bewegten Grenzfläche. Ibid 1915. — *Le Roux,* Interference et réflexion dans un système mobile. Comptes rendus. t. 173 (1921) p. 1343.

[4]) Како се у Michelson-овом екперименту извор светлости креће истом брзином као и огледала, то се горња претпоставка поклапа са претпоставкама *Tolman*-а, *Thomson-Stewart*-а и *Ritz*-а. Види о томе: *Michaux,* Les théories émissives et le principe de Doppler-Fizeau. Comptes rendus. t. 168. (1919) p. 507. — *Pauli,* Relativitätstheorie. Sonderabdruck aus der Encyklopädie d. math. Wissenschaften. Leipzig 1921. Замерке чињене набројаним теоријама не тичу се горњих излагања у којима је функција $u(v, \varphi)$ још неодређена.

Покретно огледало изазива и једну врсту аберације рефлектованога зрака, но она не утиче, према новијима испитивањима, на коначни исход експеримента.[1])

VI.

Michelson-ов експеримент има, према изложеном, ову математичку дескрипцију.

Тачкасти извор светлости L и огледало S крећу се, у инваријабилном међусобном одстојању l, према светлосном пољу транслаторном брзином v чији вектор затвара са правом L S угао α. Огледало је тако оријентисано да се светлост што на њега пада, успркос кретању целог апарата, враћа ка извору.

У *Michelson*-овом апарату налазе се два такова крака L S, нормална један на други, па се рефлектовани зраци при повратку у L довађају до интерференције. Исход експеримента је показао да се променом оријентације апарата не померају пруге интерференције, а то значи да је фаза рефлектованога зрака у тачки L независна од оријентације апарата. Зато можемо у даљим извођењима оперисати само са једним краком L S.

Када би извор светлости мировао, онда би у моменту од којега почињемо да пратимо светлосни зрак на његовоме путу фаза осцилације у извору била, рецимо Θ_0. Услед кретања извора нека се фаза светлоснога зрака у правцу $L S_1$ промени за $\Theta(v, \varphi_1)$. Светлосни зрак у споменутоме правцу оставио је тачку L са фазом $\Theta_0 + \Theta(v, \varphi_1)$. Док тај светлосни зрак стигне до огледала, дотле се је ово померило из положаја S у положај S_1. Означимо ли, дакле, са t_1 време што га светлост треба да од L стигне до S_1, то је

$$\overline{S S_1} = \overline{L L_1} = v\, t_1 \tag{31}$$

Брзина светлости на путу $\overline{L S_1} = s_1$ једнака је према угovореном

$$c_1 = c_0 + u\,(v, \varphi_1) \tag{32}$$

па је зато

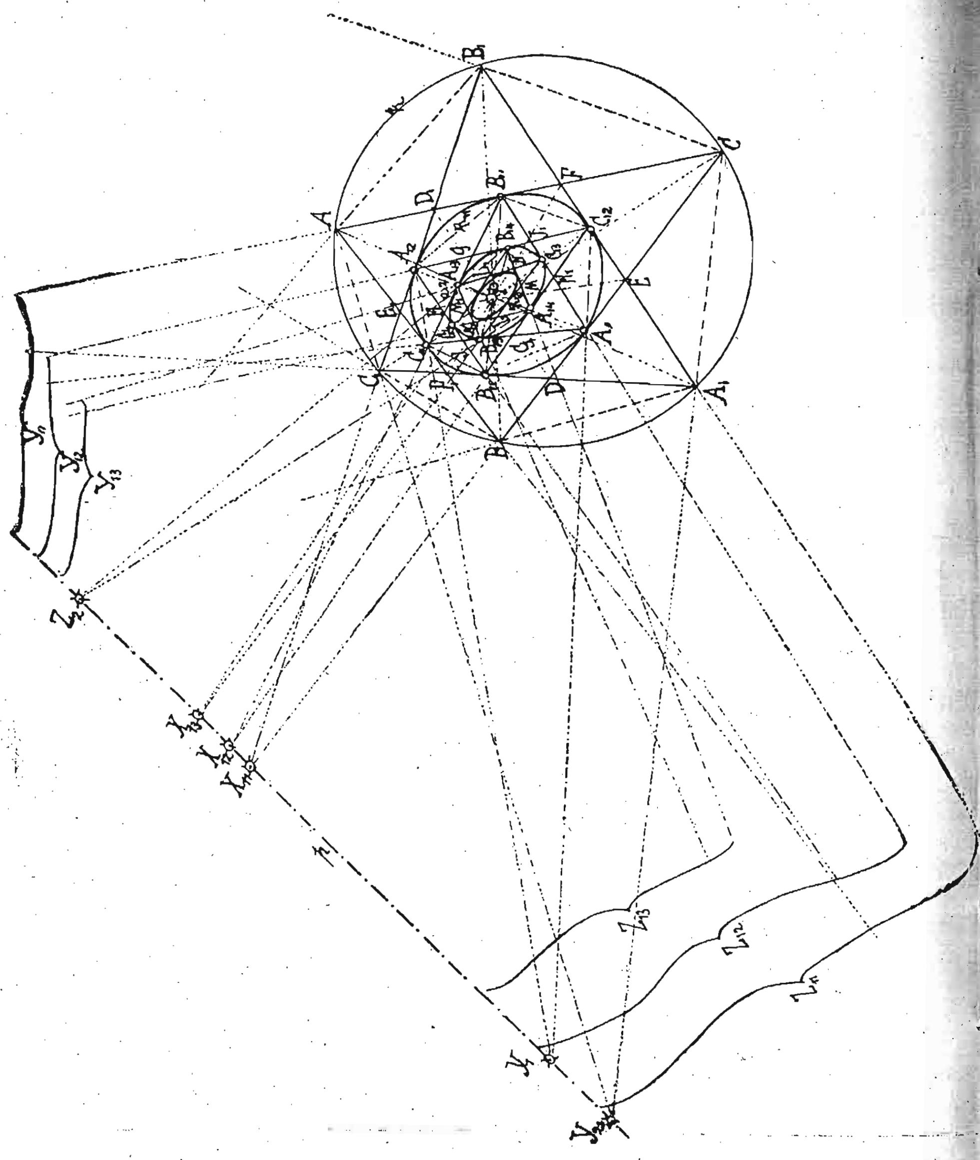
$$s_1 = c_1\, t_1 \tag{33}$$

Фаза којом светлост стиже до огледала у S_1 једнака је

$$\Theta_0 + \Theta(v, \varphi_1) + t_1 = \Theta_0 + \Theta(v, \varphi_1) + \frac{s_1}{c_1}$$

---

[1]) До тога резултата долази, у супротности са *Righi*-овим (C. R. 1919, 1920(*Brylinski,* Sur l'expérience de Michelson. Comptes rendus t. 177 (1923) p. 874



Сл. 1.

На огледалу се дешавају две промене фазе, једна од пола периоде τ као и на мирујућем огледалу, а друга услед кретања огледаловог, односно оптичке слике извора брзином v; са вектором те брзине затвара рефлектовани светлосни зрак угао $(\pi - \varphi_2)$.

За повратак натраг нека светлост треба време t_2, она ће стићи извор светлости у положају L_2, па ако ставимо $\overline{S_1 L_2} = s_2$, то је

$$\overline{L_1 L_2} = vt_2 \tag{34}$$

$$s_2 = c_2 t_2 \tag{35}$$

при чему је

$$c_2 = c_0 + u(v, \pi - \varphi_2) \tag{36}$$

На томе се је путу променила фаза за t_2 па је зато фаза светлоснога зрака при повратку у извор

$$\Theta_0 + \Theta(v, \varphi_1) + t_1 + \frac{\tau}{2} + \Theta(v, \pi - \varphi_2) + t_2$$

Негативни исход експеримента казује да је горњи израз независан од α, ако како величине Θ_0 и τ саме по себи не зависе од α, то и израз

$$\delta = \Theta(v, \varphi_1) + \Theta(v, \pi - \varphi_2) + t_1 + t_2 \tag{37}$$

треба да буде независан од α. При томе су величине φ_1, φ_2, α, $\measuredangle S L S_1 = \xi_1$, $\measuredangle S_2 L_2 S_1 = \xi_2$, као што следује из слике везани овим једначинама

$$\varphi_1 + \xi_1 = \varphi_2 - \xi_2 = \alpha \tag{38}$$

$$\begin{cases} s_1^2 = c_1^2 t_1^2 = v^2 t_1^2 + l^2 + 2 l v t_1 \cos\alpha \\ s_2^2 = c_2^2 t_2^2 = v^2 t_2^2 + l^2 - 2 l v t_2 \cos\alpha \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} l \cos\xi_1 + v t_1 \cos\varphi_1 = c_1 t_1 = s_1 \\ l \cos\xi_2 - v t_2 \cos\varphi_2 = c_2 t_2 = s_2 \end{cases} \tag{40}$$

Независност величине δ од α можемо изразити и овако:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = 0 \tag{41}$$

Ова једначина не мора важити апсолутном тачности него само у величинама које нису мање од друге потенције квоцијента $\frac{v}{c_0}$, јер дотле је загарантована тачност експеримента. Исто је тако она доказана само за непосредну близину светлосног извора, а не за величину дужине l која прекорачује искуства *Michelson*-овог експеримента. Та су искуства ограничена на дужину о једва неколико метара. При првом огледу било је $l = 1.20$ m, па је та дужина касније повећавана вишеструком рефлексијом светлоснога зрака до 32 m, но дали се тиме и ефекти транслације кроз етер увећавају, то је питање. Утиче ли кретање светлосног извора на појаву ширења светлости, то се свако огледало, односно оптичка слика коју он ствара има такође сматрати као покретни светлосни извор, па како светлосни зрак оставља два узастопна огледала затварајући са векторима брзина њихових оптичких слика неједнаке (скоро суплементарне) углове, то се не може а приори знати да ли ће се тим поновним рефлексијама ефекти транслације кроз етер сумирати, компензирати или пертурбирати.

У тима границама искуства показао се је резултат независан од l. Како у изразу (37) чланови t_1 и t_2 зависе од l, а чланови $\Theta(v, \varphi_1)$ и $\Theta(v, \pi - \varphi_2)$ не зависе, то мора збир $\Theta(v, \varphi_1) + \Theta(v, \pi - \varphi_2)$ бити независан од α, а исто тако и збир

(42) $$t_2 + t_2 = t_\alpha$$

Природа свих могућих функција Θ које би задовољиле горњи услов је њиме одређена и ми се тим питањем не морамо даље бавити, задовољавајући се најједноставнијим решењем

(43) $$\Theta(v, \varphi) = 0$$

Остаје да се из услова

(44) $$\frac{\partial t_\alpha}{\partial \alpha} = 0$$

одреде функције $u(v, \varphi)$ које задовољавају резултат *Michelson*-овог експеримента, а не долазе у контрадикцију са нашим осталим физикалним искуствима.

VII

И у томе је питању учињен први покушај са најједноставнијим решењем

(45) $$u(v, \varphi) = 0$$

које има сада још само историјски интерес и које наводим потпуности ради.

Из (32), (36) и (45) следује

(46) $$c_1 = c_2 = c_0$$

па је зато према (39) и (42)

(47) $$t_\alpha = \frac{2l}{c_0^2 - v^2}\sqrt{c_0^2 - v^2 \sin^2\alpha}$$

Овај ће израз бити независан од α ако буде

(48) $$l = \frac{L(v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}\sin\alpha}}$$

где је $L(v)$ произвољна функција од v. Захтевајући још да за $\alpha = 90^0$ буде $l(v) = l_0$, т. ј. независно од v, дакле

$$\frac{L(v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = l_0$$

добивамо

(49) $$l = l_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}\sin^2\alpha}}$$

т. ј. за $\alpha = 0$

(50) $$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$$

Ово је позната *Lorentz*-ова односно Fitzgerald-ова контракција.[1])

Хипотеза такове контракције напуштена је врло брзо. Када би се сва тела, и то у истој размери која зависи само од апсолутне брзине, скраћивала у правцу те брзине, онда би она постала тиме анизотропна; права кретања била би уједно и оса анизотропије, а то би се морало експериментално осетити. Тако има та хипотеза само историјског интереса.[2])

VIII

Пре но што приступимо изналажењу општега решења изложенога проблема неће бити излишно да потпуности ради изложимо и његово друго партикуларно решење и ако ће оно бити садржано у општем решењу.

---

1) *Lorentz* H. A. Abhandlungen über theoretische Physik. Leipzig 1907. — *Lorentz* H. A. Elektrische und optische Erscheinungen in bewegten Körpern Leipzig 1906.

2) Последњи радови о овом питању: *Brylinski*, L'expérience de Michelson et la contraction de Lorentz. Comptes rendus t. 177 (1923) p. 1023. — *Metz*, Sur l'interpretation de l'expérience de Michelson. Ibid. t. 178 (1924) p. 314.

Дадемо ли једначинама (40) облик

$$(51)\quad \begin{cases} t_1(c_1 - v\cos\varphi_1) = l\cos\xi_1 \\ t_2(c_2 + v\cos\varphi_2) = l\cos\xi_2 \end{cases}$$

то видимо да су оне задовољене изразима

$$(52)\quad \begin{cases} c_1 = c_0\cos\xi_1 + v\cos\varphi_1 \\ c_2 = c_0\cos\xi_2 - v\cos\varphi_2 \end{cases}$$

па дају

$$(53)\quad t_1 = t_2 = \frac{l}{c_0}$$

$$(54)\quad t_\alpha = \frac{2l}{c_0}$$

а овај последњи израз задовољава услов (44).

Једначине (52) представљају нам закон по којем се у посматраноме случају мора ширити светлост да би задовољила исход *Michelson*-овог експеримента. Тај је закон онај исти који важи за *Newton*-ову емисиону теорију светлости. Замислимо ли заиста, у смислу те теорије, светлосне делиће лансиране брзином c_0 из извора, то ће оне које су упућене у правцу LS стићи огледало у положају S_1, пошто се са брзином c_0 којом је лансиран делић, суперпонира брзина v којом се креће извор. Тако је стварна брзина c_1 делића резултанта брзине c_0 у правцу LS и брзине v у правцу LT, па је она претстављена тачно првим изразом једначина (52). При рефлексији на огледалу даје претпоставка да се оптичка слика понаша као покретни светлосни извор, другу од једначина (52), а до тога резултата доводе и закони еластичног судара као што га и замишља емисиона теорија рефлексије.[1])

Оваково тумачење резултата *Michelson*-овог експеримента заступали су *Tolman*, *Thomson*, *Stewart* а нарочито *Ritz*[2]) но то тумачење морало је бити испуштено пред резултатима посматрања двојних звезда, о чему ће још бити говора.

IX.

Вратимо се сада општем случају. Замислимо да нам је функционална зависност $u(v,\varphi)$ позната, па да смо, при датоме v, на сваки правац који пролази кроз један уочени моментани положај светлоснога извора пренели дужине које претстављају одговарајуће светлосне брзине, т. ј. $c_0 + u(v,\varphi)$. Онда леже крајње тачке тих дужина на једној затвореној површини која се зове ходограф светлосне брзине.

[1]) *Milanković*, O teoriji Michelsonova eksperimenta. Rad Jugosl. Akademije 190 (1912).

[2]) Види о томе *Pauli*-јев чланак цитиран у VI и *Ritz*, Oeuvres. Paris 1911.

Тај ће ходограф морати бити једна ротациона површина које оса пада у вектор брзине светлоснога извора. Тај вектор мора несумњиво бити оса евентуалне анизотропије при ширењу светлости, јер су два светлосна зрака која затварају са њиме исте углове, па се са ротацијом око њега могу довести до поклапања, сасвим равноправна у оптичком погледу. Због тога мора функција u задовољити овај услов

$$(55)\quad u(v,\varphi) = u(v,-\varphi) = u(v,\varphi \pm 2n\pi)$$

Сви такови ходографи, колико их је год могуће да задовоље резултат *Michelson*-овог експеримента, морају задовољити један општи услов који ћемо сада да изведемо.

За $\alpha = \frac{\pi}{2}$ одговара свакоме v једна одређена вредност од φ_1 коју ћемо означити са φ_0. Како је $u(v,\varphi_0)$ при брзинама v, које долазе у обзир занемаримо према c_0, то је

$$(56)\quad \cos\varphi_0 = \frac{v}{c_0}$$

Означимо ли

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \xi_0$$

где се ξ_0 може назвати углом аберације, то је довољно тачно

$$(57)\quad \xi_0 = \frac{v}{c_0}$$

Уведимо сада ове ознаке

$$(58)\quad \begin{cases} u(v,\varphi_0) = u_0 \\ u(v,0) = u_1 \\ u(v,\pi) = u_2 \end{cases}$$

то добивамо ово.

За $\alpha = 0$ упрошћавају се једначине (39) на

$$c_1 t_1 = l + v t_1$$
$$c_2 t_2 = l - v t_2$$

па је зато према (42)

$$(59)\quad t_0 = \frac{l}{c_1 - v} + \frac{l}{c_2 - v}$$

Како је према слици за $\alpha = 0$ $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ то је због (32) и (36).

(60) $$t_0 = \frac{1}{c_0 + u_1 - v} + \frac{1}{c_0 + u_2 + v}$$

За $\alpha = \frac{\pi}{2}$ добивамо место (39)

$$c_1^2 t_1^2 = v^2 t_1^2 + l^2$$
$$c_2^2 t_2^2 = v^2 t_2^2 + l^2$$

па како је сада према слици $\varphi_1 = \pi - \varphi_2 = \varphi_0$ то је због (32) и (36) $c_1 = c_2$, па према горњим једначинама $t_1 = t_2$. Зато је

(61) $$t_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\sqrt{c_1^2 - v^2}} + \frac{2l}{\sqrt{(c_0 + u_0)^2 - v^2}}$$

Захтев да је t_α независно од α даје $t_0 = t_{\frac{\pi}{2}}$ т. ј.

(62) $$\frac{1}{c_0 + u_1 - v} + \frac{1}{c_0 + u_2 + v} = \frac{2}{\sqrt{(c_0 + u_0) - v^2}}$$

Овај услов морају испунити величине u_0, u_1, u_2 да би задовољиле резултат *Michelson*-ова експеримента.

Меримо величине u и v нормалном брзином светлости, т. ј. ставимо

(63) $$\frac{u_0}{c_0} = u'_0 \quad \frac{u_1}{c_0} = u'_1 \quad \frac{u_2}{c_0} = u'_2 \quad \frac{v}{c_0} = v'$$

онда предња једначина добива облик

(64) $$(1 + u'_1 - v')^{-1} + (1 + u'_2 + v')^{-1} = 2[(1 + u'_0)^2 - v'^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Како су величине u' и v' веома малене, то можемо предње израз развити у редове и занемарити све више потенције од друге величина u' и v'. Тако добивамо

(65) $$u'_1 + u'_2 - 2u'_0 = u'^2_1 + u'^2_2 - 2u'^2_0 - 2v'(u'_1 - u'_2) + v'^2$$

Ово је фундаментални услов ходографа брзине светлости за покретан извор.

X

Једначина (65) т. ј.

(66) $$F(u'_1, u'_2, u'_0) = u'^2_1 + u'^2_2 - 2u'^2_0 - (1 + 2v')u'_1 - (1 - 2v')u'_2 + 2u'_0 + v'^2 = 0$$

претставља нам, ако u'_1, u'_2, u'_0 сматрамо за ортогоналне координате, једну централну површину другога реда. Координате ξ_0, η_0, φ_0 њенога центра следују из једначина

$$\frac{\partial F}{\partial u'_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial u'_2} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial u'_0} = 0$$

па је зато

(67) $$\xi_0 = \frac{1}{2} + v' \quad \eta_0 = \frac{1}{2} - v' \quad \varphi_0 = \frac{1}{2}$$

Померимо почетак координатног система у тај центар, т. ј. ставимо

(68) $$u'_1 = x + \xi_0 \quad u'_2 = y + \eta_0 \quad u'_0 = z + \varphi_0$$

то добивамо место (66)

(69) $$x^2 + y^2 - 2z^2 = v'^2.$$

Ова нам једначина представља једнограни ротациони хиперболоид којега је оса ротације, оса Z. Његов пресек са равни X — Y је круг

(70) $$x^2 + y^2 = v'^2$$

Само тачкама у унутрашњости тога круга не одговара реална вредност за z. Зато има бесконачно много ходографа брзине светлости који задовољавају исход *Michelson*-овог експеримента.

XI.

Једначина (65) регулише однос главних мера ходографа брзине светлости и то ових: брзине светлости у правцу кретања извора, брзине светлости у противноме правцу и брзине светлости у правцу који са нормалом осе ротације ходографа затвара угао аберације. Таквих је ходографа бесконачно много, но они се по природи тих својих главних мера могу поделити у неколико категорија.

Променимо ли знак брзине v или што изалази на исто, увећамо ли угао φ за π, то могу наступити три разна случаја који дозвољавају разне физикалне интерпретације.

Први је од њих онај случај када функција u остаје инваријабилна при горњој субституцији, т. ј. када је

(71) $$u(v, \varphi) = u(-v, \varphi) = u(v, \varphi + \pi)$$

Употребимо ли релацију (55) која важи за све случајеве то добивамо

(72) $$u(v, \varphi) = u(v, -\varphi)$$

У овом је, дакле, случају, према (58) и (63),

(73) $$u'_2 = u'_1$$

па је међусобна зависност главних мера u'_1, u'_2, u'_0 ходографа брзине светлости претстављена пресеком хиперболоида (66) са равни $u'_1 - u'_2 = 0$; она је дакле претстављена хиперболом

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\dfrac{u'_0-\frac{1}{2}}{\frac{v'}{\sqrt{2}}}\right\}^2 - \left\{\dfrac{u'_1-\frac{1}{2}}{\frac{v'}{\sqrt{2}}}\right\}^2 = 1 \\[2ex] \left\{\dfrac{u'_0-\frac{1}{2}}{\frac{v'}{\sqrt{2}}}\right\}^2 - \left\{\dfrac{u'_2-\frac{1}{2}}{\frac{v'}{\sqrt{2}}}\right\}^2 = 1 \end{array}\right. \tag{74}$$

Тај случај одговара концепцији непомичног етера и ундулационе теорије светлости.

Други је случај када функција u при споменутој субституцији мења свој знак. Онда је

$$u(v, \varphi) = -u(v, \pi - \varphi) \tag{75}$$

Због тога је

$$u'_2 = -u'_1 \tag{76}$$

па главне мере u'_1, u'_2, u'_0 годографа брзине светлости морају задовољити услову који је оличен пресеком хиперболоида (66) са равни $u'_1 + u'_2 = 0$. Тај је пресек такође хипербола претстављена једначинама:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\dfrac{u'_0-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{1-2v'^2}}{2}}\right\}^2 - \left\{\dfrac{u'_1-v'}{\frac{\sqrt{1-2v'^2}}{2}}\right\}^2 = 1 \\[2ex] \left\{\dfrac{u'_0-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{1-2v'^2}}{2}}\right\}^2 - \left\{\dfrac{u'_2+v'}{\frac{\sqrt{1-2v'^2}}{2}}\right\}^2 = 1 \end{array}\right. \tag{77}$$

Овај други случај одговара концепцији фактично или привидно покретнога етера или пак становишту емисионистичких теорија светлости.

У трећу категорију долазе случајеви који не задовољавају ни услов (72) ни услов (75) па немају, бар за сада, одређену физикалну интерпретацију.

XII

Пошто су u'_1, u'_2, u'_0, у сваком случају, веома малени бројеви, то можемо њихове квадрате занемарити. Онда дегенерише хиперболоид (66) на раван

$$(1+2v')\,u'_1 + (1-2v')\,u'_2 - 2u'_0 = v'^2 \tag{78}$$

хиперболни пресек (74) дегенерише на праву

$$\left\{\begin{array}{l} u'_1 - u'_0 = \dfrac{v'^2}{2} \\[2ex] u'_2 - u'_0 = \dfrac{v'^2}{2} \end{array}\right. \tag{79}$$

а хиперболни пресек (77) на праву

$$\left\{\begin{array}{l} u'_1 - \dfrac{1}{2v'}\,u'_0 = \dfrac{v'}{4} \\[2ex] u'_2 + \dfrac{1}{2v'}\,u'_0 = -\dfrac{v'}{4} \end{array}\right. \tag{80}$$

Та раван и те праве претстављене су шематски у слици 2. У тој је слици негативна грана осе u'_0 наперена према гледаоцу. У њој је:

$$\overline{OP} = \overline{QP} = \overline{OR_2} = \overline{R_2R} = \frac{v'^2}{2}$$

$$\overline{OQ} = \overline{PP'} = \overline{P'S} = v'$$

$$\overline{OU} = \frac{v'^2}{1+2v'} \qquad \overline{OT} = \frac{v'^2}{1-2v'}$$

Кроз тачке P T U пролази раван (78) која је у слици јасноће ради испревлачена. Свака тачка те равни даје главне мере ходографа брзине који задовољавају *Michelson*-ов експеримент.

Положимо ли кроз осу u'_0 раван E_1 која полови први квадрант оса $+u'_1$ и $+u'_2$, то она пресеца раван (78) по правој PR која нам претставља праву (79).

Положимо ли кроз осу u'_0 раван E_2 која полови четврти квадрант оса $+u'_1$ и u'_2, то она пресеца раван (78) по правој PS која нам претставља праву (80).

На партикуларно решење, претстављено тачком P, т.ј. на решење

$$u'_1 = 0 \quad u'_2 = 0 \quad u'_0 = -\frac{v'^2}{2} \tag{81}$$

нашао је *Rose-Innes*.[1]

[1] *Rose-Innes*, On the physical interpretation of the Michelson-Morley experiment. Phil. Magazine (6) vol. 27 (1914) p. 150.

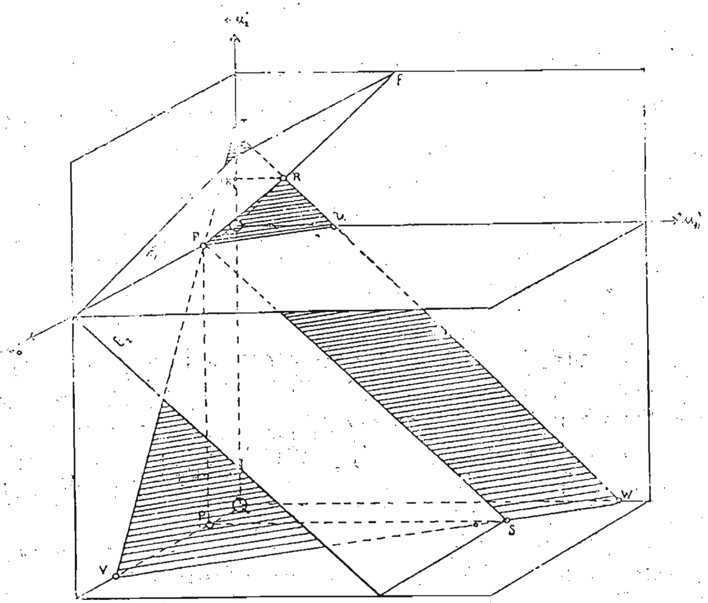
На партикуларно решење, претстављено тачком R, т. j. на решење

(82) $$u'_1 = u'_2 = \frac{v'^2}{2} \quad u'_0 = 0$$

наишао je *Zemplén*.[1])

Тачка 5 претставља нам партикуларно решење емисионистичких теорија, наведених у X. за то решење добивамо ако у (27) и (52) ставимо редом $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ због (58)

$$c_0 + u_1 = c_0 + v$$
$$c_0 + u_2 = c_0 - v$$
$$c_0 + u_0 = c_0 \cos \xi_0 + v \cos \varphi_0$$



Сл. 2.

Но како je због (56) и (57) и употребљив за косинус прва два члана његовога реда

$$\cos \varphi_0 = \frac{v}{c_0} \quad \cos \xi_0 = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}$$

[1]) *Zemplén*, Ueber die Abhängigkert der Lichtgeschwindingkeit von der Bewegung der Lichtquelle, Phys. Zeitshr. XV. 1914.

то добивамо

$$u_1 = v \quad u_2 = -v \quad u_0 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c_0}$$

или због (63)

(83) $$u'_1 = v' \quad u'_2 = -v' \quad u_0 = \frac{v'^2}{2}$$

а ово су, заиста, координате тачке S.

Ми ћемо у следећем водити рачуна о свима могућим, дакле, једном речи, о општем решењу проблема, но од користи je већ сада указати на још нека партикуларна решења.

Једно je таково решење претстављено тачком U или, како у напред саопштеном изразу за $\overline{OU}$ можемо због малога v' извршити нека занемарења, то je то решење претстављено изразима

(84) $$u'_1 = v'^2 \quad u'_2 = 0 \quad u'_0 = 0$$

Једно друго решење, које ће се дати физикално интерпретисати, представљено je једном одабраном тачком дужи PS, за коју je

$$u'_1 = \beta v' \quad u'_2 = -\beta v'$$

при чему β $(0 < \beta < 1)$ претставља коефициенат корепције, о којем ћемо још говорити. Применом једначина (80) добивамо за ово решење изразе

(85) $$u'_1 = \beta v' \quad u'_2 = -\beta v' \quad u'_0 = \frac{4\beta - 1}{2} v'^2$$

Спустимо ли из тачке O нормалу на раван (78), то нам подножница те нормале претставља једно ново партикуларно решење које задовољава услов минималног одступања од брзине светлости c_0. У томе je случају, заиста, збир квадрата $u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_0$ минимум задовољавајући при томе општи услов (78). Из тих захтева, и учинив у коефициентима од v'_0 оправдана упрошћења, добивамо за ова случај изразе

(86) $$u'_1 = \frac{v'^2}{6} \quad u'_2 = \frac{v'^2}{6} \quad u'_0 = -\frac{v'^2}{3}$$

XIII

Приступимо сада испитивању зависности величине u од угла φ, т. j. одредби функције $u(v, \varphi)$ од које смо предњим испитивањима за све случајеве који задовољавају *Michelson*-ов експеримент одредили само четири вредности који одговарају угловима $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi - \varphi_0$. Како се те четири вредности, особито за оне случајеве који ће нас у првом реду интересовати разликују за величине које су мање од иначе веома малога броја $\frac{v^2}{c_0}$, а како *Michelson*-ов експеримент неби дозволио да се опазе одступања која су мања од виших потенција тога малога броја, то можемо поступити овако.

Замислимо да смо функцију $u(v, \varphi)$ развили у *Fourier*-ов ред

$$\begin{aligned} u(v, \varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots\ldots + \\ + b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \ldots\ldots \end{aligned}$$

где су коефицијенти a и b функције од v. Но према (55) је $u(v, \varphi)$ парна функција од φ, зато коефицијенти b морају сви редом бити равни нули, па је зато

(87) $$u(v, \varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots$$

У већини случајева моћи ћемо се задовољити са горња три члана десне стране. Не постоји, у осталом, никаква тешкоћа узети и више чланова у обзир, н. пр. још два, уважањем величина u_3 и u_4 које одговарају угловима $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

Узевши у обзир да је

$$\cos \varphi_0 = \sin \xi_0 = \frac{v}{c_0}$$

$$\cos 2\varphi_0 = -\cos 2\xi_0 = -(1 - 2\xi_0^2) = -\left(1 - 2\frac{v_0^2}{c_0^2}\right)$$

добивамо из (58) и (87)

(88) $$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = u_1 \\ a_2 - a_1 + a_2 = u_2 \\ a_0 + \frac{v}{c_0} a_1 - \left(1 - 2\frac{v_0^2}{c_0^2}\right) a_2 = u_0 \end{cases}$$

Ове једначине одређују величине a_0, a_1, a_2.

Занемаримо ли у коефицијентима од a мале бројеве $\frac{v}{c_0}$ и $2\frac{v_0^2}{c_0^2}$, то добивамо

(89) $$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = u_1 \\ a_0 - a_1 + a_2 = u_2 \\ a_0 - a_2 = u_0 \end{cases}$$

а одавде

(90) $$\begin{cases} a_0 = \frac{u_1 + u_2 + 2u_0}{4} \\ a_1 = \frac{u_1 - u_2}{2} \\ a_2 = \frac{u_1 + u_2 - 2u_0}{4} \end{cases}$$

На тај начин добивамо за случај (81)

(91) $$u(v, \varphi) = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c_0} \sin^2 \varphi$$

а за случај (82)

(92) $$u(v, \varphi) = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c_0} \cos^2 \varphi$$

Случај (83) даје, после оправданих упрошћења,

(93) $$u(v, \varphi) = v \cos \varphi,$$

случај (84)

(94) $$u(v, \varphi) = \frac{v^2}{c_0} \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

случај (85)

(95) $$u(v, \varphi) = \beta v \cos \varphi + \frac{4\beta - 1}{2}\frac{v^2}{c_0} \sin^2 \varphi$$

и напослетку случај (86)

(96) $$u(v, \varphi) = -\frac{1}{12}\frac{v^2}{c_0}(1 - 3\cos 2\varphi)$$

XIV.

Рашевски је публиковао неколико интересантних расправа у којима је објавио и научно обрадио једну хипотезу о ширењу светлости у покретним системима, што ју је поставио његов пријатељ *Пашски* којега је смрт спречила да ју сам објави.[1] Тај Пашскијев закон ширења светлости задовољава *Michelson*-ов експеримент, па је вредно да га споменемо.

Пашски не посматра ширење светлости према етеру или према систему звезда некретница, као што ће нам то бити потребно за наша даља испитивања, него ширење светлости према самој земљи. У томе се систему креће светлосни зрак дуж крака LS *Michelson*-ова апарата (сл. 1) тамо и натраг, па ако означимо са σ_α релативну брзину на путу LS, са $\sigma_{\pi-\alpha}$ релативну брзину при повратку, то је време t_α утрошено на томе путу за тамо и натраг

(97) $$t_\alpha = \frac{l}{\sigma_\alpha} + \frac{l}{\sigma_{\pi-\alpha}}$$

[1] *Raschevsky*, Lightemission from a moving source in connection with the relativity theorie. Phys. Review 18 (1921) p. 369. — *Raschevsky*, Zur allgemeinen Elektrodynamik. Phys. Zeitschr. 23 (1922) p. 2 — *Raschevsky*, kritische Untersuchungen zu den physikalischen Grundlagen der Relativitätstheorie. Zeitschr. für Physik 14 (1923) p. 107.

Ставимо ли, дакле,

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_0}{1 + \kappa \cos\alpha} \tag{97a}$$

где σ_0 и κ не зависе од α и где је κ произвољна функција од v, коју Рашевски још ограничава условом $- < \kappa < +1$, то време t_α неће, заиста, зависити од оријентације апарата. Једначина (97) претставља Пашскијев ходограф брзине светлости.

Пређимо сада на апсолутне брзине c, као што их ми посматрамо. Таква брзина c је резултанта брзине σ_α и брзине система v па је дата страном LS_1 троугла LL_1S_1 (сл. 1) у којем ваља страну LL_1 заменити брзином v, а страну L_1S_1 брзином σ_α зато је.

$$c = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + v^2 + 2\sigma_\alpha v \cos\alpha} \tag{98}$$

а, према (27)

$$u(v, \varphi) = c - c_0 \tag{99}$$

Тако добивамо, ако у (97), (98), (99) ставимо редом $\alpha = o$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и узмемо у обзир ознаке (58), ове изразе

$$u_1 = \frac{\sigma_0}{1 + \kappa} + v - c_0$$

$$u_2 = \frac{\sigma_0}{1 - \kappa} - v - c_0$$

$$u_0 = \sqrt{\sigma_0^2 + v^2} - c_0$$

Означимо ли $\frac{\sigma_0}{c_0} = \sigma'_0$ и употребимо ли ознаке (63) то добивамо

$$\left\{\begin{aligned} 1 + u'_1 - v' &= \frac{\sigma'_0}{1 + \kappa} \\ 1 + u'_2 + v' &= \frac{\sigma'_0}{1 - \kappa} \\ (1 + u'_0)^2 - v'^2 &= \sigma'^2_0 \end{aligned}\right. \tag{100}$$

а ови изрази задовољавају једначину (62) односно (65) и (78).

Поред све његове формалне једноставности, Пашскијев закон који оперише релативним брзинама у покретном систему и изражава их као функције угла α, а не угла φ није згодан за примену у проблемима астрономије, а нарочито не при испитивању двојних звезда, јер онде ваља описати појаве ширења светлости како се оне указују према гледаоцу који не учествује у кретању система.

XV

До сада нисмо узимали у обзир утицај ваздуха на резултат *Michelson*-овог експеримента. То је било оправдано ако се претпостави, као што се обично чини, да је тај резултат апсолутно негативан, т. ј. да не зависи од медиума у којем се шире светлосни зраци. Онда он мора бити независан и од индекса преламања n тога медиума, па мора важити и за n = 1, т. ј. за безваздушни простор.

Но могло би се десити да је исход *Michelson*-овог експеримента случајно негативан, а да би био другачији када би се извршио у другоме медиуму или у ваздуху друге густине. Заиста, опажања извршена на *Mount Wilson*-у, у висини од 1790 m, могла би се тумачити и у томе смислу.[1]) Због тога ћемо узети сада још у обзир утицај ваздуха.

Из класичне теорије светлости, из многобројних експеримената, па и из саме теорије релативитета, следује да се у покретноме медиуму, индекса преламања n, светлост шири тако као када би тај медиум повлачио делимично са собом светлосни етар. Место дакле брзином $\frac{c_0}{n}$, шири се светлост у правцу брзине v којом се тај медиум креће према етеру овом апсолутном брзином

$$c' = \frac{c_0}{n} + \beta v \tag{101}$$

где се β зове коефициенат корепције. Тај је коефициенат одредио први, и то теоретским путем, *Fresnel*, поводом опажања *Arago*-вих да кретање земље не мења рефракцију светлосних зрака који долазе са звезда.[2]) Та *Fresnel*-ова теорија предвидела је не само резултат експеримента што га је први предложио наш славни Руђеро *Бошковић*, а извео *Airy*, него и резултате експеримената *Fizeau*-а и *Hoeck*-а. Зато се *Fresnel*-ов израз за коефициенат корепције може извести и обрнутим путем полазећи од резултата тих експеримената.[3]) Оба ова начина дају

---

[1]) *Miller*, Ether-Drift Experiments at Mount Wilson Solar Observatory. Phys. Review *19* (1922) p. 407.

[2]) Lettre de M. *Fresnel* à M. *Arago*, sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique. Ann. de chim et de phys. t. IX (1818); *Fresnel*, Oeuvres II p. 627. — Ово је писмо дословце саопштено и у делу *Ketteler*, Astronomische Undulationstheorie. Bonn 1873.

[3]) Извођење из *Airy*-овог експеримента види *Chwolson*, Traité de Physique t. II Paris 1906. p. 107. Извођење из *Hoeck*-овог експеримента види

$$\beta = 1 - \frac{1}{n^2} \tag{102}$$

При томе ваља индексу n дати ону вредност која одговара оној периоди коју извађа светлости зрак према покретном медиуму као што то следује из разматрања под III. Ако је тај медиум ваздух, то нам у томе погледу стоје врло тачна експериментална испитивања на расположењу.[1])

Размотримо, дакле, како ће се напред описани уплив ваздуха показати при *Michelson*-овом експерименту. При томе експерименту повлачи ваздух светлосне зраке у правцу свога кретања са земљом брзином βv. Због тога светлосни зрак, полазећи из L (сл. 1) мора, да би стигао у S_1, поћи у правцу $S U_1$, при чему је $\overline{U_1 S} = \overline{L V} = \beta v t_1$; при повратку мора он поћи правцем $S_1 U_2$, при чему је $\overline{U_2 L_2} = \beta v t_2$. Тако следује из троуглова $V L_1 S_1$ и $L_1 U_2 S_1$, место (39)

$$\begin{cases} c_1^2 t_1^2 = (v - \beta v)^2 t_1^2 + l^2 + 2l(v - \beta v) t_1 \cos\alpha \\ c_2^2 t_2^2 = (v - \beta v)^2 t_2^2 + l^2 - 2l(v - \beta v) t_2 \cos\alpha \end{cases} \tag{103}$$

Све се, дакле, дешава као када брзину v заменимо са $(1 - \beta) v$, т. ј. као када би се светлосни извор кретао према етеру брзином $(1 - \beta) v$. Из овога следује да би за случај $\beta = 1$ било све тако као када би светлосни извор мировао, и тај би случај задовољио негативни резултат *Michelson*-овог експеримента без икаквих даљих претпоставака о брзини ширења светлости.

Коефициенат корепције ваздуха не само да није раван јединици него је, на против, веома мален, па горње решење не долази у обзир. Но то решење није потпуно строго, јер ваља ово имати у виду. У горњим једначинама није β независно од оријентације апарата, т. ј. од угла α. Како кретање земље повлачи само парцијелно етер, то се променом оријентације апарата мења брзина светлосних зрака (који иду између светлосног извора и огледала) према ваздуху; тиме се мења њихова периода према томе медиуму, а услед тога величина n па, следователно, и β. Но сви ти ефекти неби били довољни да изведу посматрани исход *Michelson*-овог експеримента.

Born, Die Relativitätstheorie Einsteins. Berlin 1922. p. 105. — Из претпоставака о етеру изведен је *Fresnel*-ов образац од *Potier*-а (Journ. de phys. (1) t. V 1876) и од *Fousserau*-а (Journ. de phys (3) t. I 1893; t. III 1895; Comptes Rendus t. 120 (1895) p. (85). Помоћу термодинамике изведен је тај образац у радњи *Hasenöhrl*, Ueber die Reziprozität des Strahlenganges in bewegten Körpern. Thermodynamische Ableitung des Fresnel'schen Fortführungskoeffizienten. Wiener Sitzungsberichte. Bd. 113 Abt. IIa. (1904) — Види и *Sagnac*, La propagation de la lumière à travers les corps en repos ou en mouvement. Revue générale des sciences pures et appliquées. t. XI. (1900).

[1]) *Howell*. The index of refraction of gases, Phys. Review 6. (1915) p. 81. Резултати овога саопштени су и у Fortschritte der Physik im Jahre 1915.

Но *Fresnel*-ова теорија која полази од основне замисли да присуство тела, у нашем случају ваздуха, мења густину етера којега обухвата, услед чега кретање ваздуха изазива ефекат парцијелног повлачења светлосних зрака, садржи једну произвољну претпоставку. Она претпоставља да је етер у хомогеном изотропноме телу, такође изотропан. То је оправдано док ваздух мирује према етеру, јер онда нема још ниједног одабраног правца у томе медиуму; сва су равноправни. Но када се ваздух креће са земљом, онда постаје вектор брзине земљиног кретања одабраним правцем, па горња претпоставка није више оправдана. Такова анизотропија или поларизација етера имала би за последицу да би и индекс преламања ваздуха био у разним правцима различит. Чим би се то дозволило, онда би нумеричка разлика тих индекаса у правцу кретања земље и нормално на њ од само каквих 0·000 000 005, која дакле лежи испод границе опажања, била сасвим довољна да објасни резултат *Michelson*-овог експеримента. Но такова поларизација етера не би смела бити пропраћена појавама двоструког преламања и поларизације светлости као што их показују једноосни кристали.

XVI

Опажања извршена у току последњих трију деценија на спектроскопским двојним звездама и столетна посматрања промењљивих звезда, пружају нам одличан и обилан материјал помоћу којега се може најтачније да испита дали кретање извора светлости утиче на брзину којом се та светлост шири и ако је то случај која од бесконачно многих функција $u(v, \varphi)$, што нам их ставља *Michelson*-ов експеримент на избор, задовољава у исти мах резултате тих опажања.

Нема сумње да је то фундаментално питање расправљано до сада веома површно и да спменути драгоцени материјал није испитан толико колико заслужује.

Први рад о томе предмету који је обратио на себе пажњу, објавио је *de Sitter.*[1]) То је, у ствари, једна кратка нотица од две трећине стране која је одмах изазвала оправдане замерке,[2]) али је већ после друге, још краће нотице *de Sitter*-ове[3]) и једне површне и погрешне расправе *Zurhellen*-а,[4]) о којој ћемо још говорити, цело питање сматрано решено у корист константности брзине светлости и о њему није, у колико је мени познато, ништа темељитије писано. Речи *de Sitter*-а „да су сва даља разматрања о томе питању излишна“ послушане су дословце. Неке одушевљене релативисте, које вероватно нису ни виделе споменуте радње, ишле су тако далеко да су уверавале своје читаоце да је константност брзине светлости доказана на темељу „опсежних“ испитивања.[5])

Мени, поред свега тога, изгледа да није сувишно о томе питању још једном прозборити и дати му ширу основку. Пре свега, сва досадања испитивања о њему полазе, свесно или несвесно, од претпоставке да кретање извора светлости мења брзину њенога ширења за адитивну количину облика $k\,v\cos\varphi$, то јест да је, према нашим ознакама,

$$c = c_0 + k\,v\cos\varphi \tag{104}$$

Већ ова полазна једначина испушта из вида бесконачан број употребивих решења наведених у XII, а колико је судбоносно то ограничење, то ћемо ускоро видети.

---

[1]) *De Sitter*, Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Phys. Zeitschr. 14 (1913) p. 429.

[2]) Freundlich, Zur Erage der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Ibid. p 835. — *Guthnick*, Astronomische Kriterien für die Unabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Bewegung der Lichtquelle. Astr. Nachrichten Bd 195 (1913) p 266. — Расправа *Comstock*-а (Astrophysical Journal 31. 1900) на коју се оба ова писца позивају' није ми била приступачна.

[3]) *De Sitter*, Ueber die Genauigkeit, innerhalb welcher die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle behauptet werden kann. Phys. Zeitschr. 14 (1913) p. 1267.

[4]) *Zurhellen*, Zur Frage der astronomischen Kriterien für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Astr. Nachrichten Bd. 198 (1914) p. 1. — Види још *Capon*, Note on spectroscopic Binaries and the velocity of light. Month. Notices 74 (1914) p. 507. 858 — *Plumer*, Note on the velocity of light and Doppler's principle. Ibid. 74 (1914) p. 660.

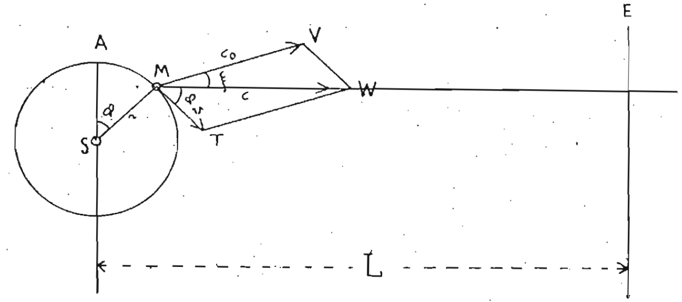
[5]) *Born*, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Berlin 1922. p. 167.

XVII

Питајмо, дакле, какови се ефекти морају указати ако је брзина светлости што ју емитују двојне звезде претстављена изразом

$$c = c_0 + u(v, \varphi) \tag{105}$$

где је $u(v, \varphi)$ једна, за сада још произвољно одабрана функција која задовољава *Michelson*-ов експеримент; при томе је v брзина уочене звезде према етеру, а φ угао што га затвара светлосни зрак са вектором те брзине.



Такових ће ефеката бити, као што ћемо видети, различитих врста. Први од њих који ћемо узети у разматрање, биће ефекат који се показује у померању спектралних линија или у диаграму радијалне брзине изведеног из тога померања. Тај ће ефекат бити најјачи ако раван путање спектроскопскога пара пролази кроз око гледаоца или кроз визиони радиус. Због тога претпостављамо да та раван има нагиб од 90° према привидној небесној сфери. Претпостављамо даље, једноставности ради, да су и гледаоц и тежиште уоченога пара једно према другом непомични, или, још боље, непомични према етеру. Напослетку узимамо у разматрање најједноставнији случај када се обе компоненте двојне звезде крећу у кружним путањама око заједничког тежишта S.

Уочимо једну од тих компонената; њена путања око тежишта S нека буде претстављена кругом радиуса r (сл. 3). Посматрач нека се налази у одстојању L од S. У свима је случајевима r веома малено према L.

Нека је M положај звезде у времену t. Због малога r према L је угао φ што га затвара светлосни зрак, који води према гледаоцу, са вектором брзине звезде једнак углу радиус-вектора SM и радиуса SA нормалног на визиони радиус.

Нека је M положај звезде у времену t, које почињемо бројати од момента пролаза кроз чвор силаза A, а U време обилажења или периода двојне звезде, онда је, пошто се уочена звезда креће по својој путањи константном брзином

$$v = v_0 = \frac{2\pi r}{U}, \tag{106}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{U} t \tag{107}$$

Радијална брзина звезде која изазива *Doppler*-ов ефекат, дата је изразом

$$v_r = v_0 \cos\varphi = v_0 \cos\frac{2\pi}{U} t \tag{108}$$

Уочимо сада светлосни зрак који у времену t оставља звезду. Њему одговара радијална брзина звезде v_r, дата изразом (108), и његова властита брзина, дата изразима

$$c = c_0 + u \tag{109}$$

$$u = u(v_0, \varphi) = u(v_0, \frac{2\pi}{U} t). \tag{110}$$

Пут који тај светлосни зрак има да превали да стигне до гледаоца је $(L - r\sin\varphi)$ па ће зато стићи до овога у моменту

$$t' = t + \frac{L - r\sin\varphi}{c_0 + u}. \tag{111}$$

Зауставимо се један моменат на горњем изразу. У њему је, као што смо већ споменули, члан $r\sin\varphi$ веома мален према L, а да би се његов утицај могао осетити, као што то, у осталом, следује и из испитивања *Savary*-а[1]), *Villarceau*-а[2]), *Birkenmajer*-а[3]) и *Seeliger*-а[4]). Зато ћемо тај члан занемарити. Како је и члан u веома мален према c_0, то можемо, служећи се биномским обрасцем

[1]) *Savary,* Sur la détermination des orbites que décrivent autour de leur centre de gravité deux étoiles très rapprochées l'une de l'autre. Conn. des Temps pour 1830.

[2]) *Villarceau,* Théorie analytique des inégalités de lumière des étoiles doubles. Conn. des Temps pour 1878.

[3]) *Birkenmajer,* Ueber die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten. Wiener Sitzungsberichte II Abt Bd. 93. (1886).

[4]) *Seeliger,* Ueber optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne. Sitzungsberichte der math — phys. Classe der k. bayer. Akad. der Wiss. Bd. 19. (1889).

и занемарујући више потенције од $\frac{u}{c_0}$ предњем изразу дати овај облик

$$t' = t + \frac{L}{c_0} - \frac{L}{c_0}\frac{u}{c_0} \tag{112}$$

Светлосни зрак који је тако стигао до посматрача има према (23) и (24) (ако претпоставимо да кретање светлосног извора не мења његову властиту периоду τ_0) ову периоду τ_1 и ову таласну дужину λ_1

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{v^r}{c_0 + u}\right)\tau_0 \tag{113}$$

$$\lambda_1 = (c_0 + u - v_r)\,\tau_0 \tag{114}$$

Из тих промена које за собом повлаче померање спектралних линија, има посматрач да одреди радијалну брзину звезде.

Но сада искрсава ово питање: шта изазива померање спектралних линија, да ли промена периоде или промена таласне дужине. О томе је питању вођена интересантна, но неодлучена полемика[5]) и оно је, заиста, од пресудног значаја по емисионистичке теорије. Према тима теоријама би светлост да стигне до гледаоца морала оставити звезду брзином c_0 у правцу MV (сл. 3) и суперпонирати се брзином v_0 у правцу MT. Тако следује из паралелограма $MTWV$

$$\sin\xi = \frac{v_0}{c_0}\sin\varphi$$

$$c = v_0\cos\varphi + c_0\cos\xi = v_0\cos\varphi + c_0\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c_0^2}\sin^2\varphi},$$

или ако занемаримо малу величину $\frac{v_0^2}{c_0^2}$ према јединици и узмемо у обзир (108) и (109),

$$u = v_r$$

Ставимо ли ову вредност у (113) и (114), то видимо да се при претпоставки емисионистичних теорија, кретањем светлосног извора мења додуше периода али не мења таласна дужина емитованих зрака, као што то захтева класични *Doppler*-ов принцип који се употребљава при одредби радијалне брзине звезде.

[5]) *Pauli,* Relativitätstheorie. Sonderabdruck aus der Encyklopädie d. math. Wissenschaften. Leipzig 1921. p 550 ff.

Ова контрадикција са класичном теоријом и компликација целога питања није, уосталом, за нас од икаквог значаја. Ми ћемо, у ствари, у даљем току наших испитивања видети да од свих функција u долазе у обзир само оне које су стално веома малене према радијалној брзини v_r, а поготово према c_0; зато можемо у (113) и (114) члан u занемарити, па добивамо

(115) $$\tau_1 = \frac{c_0 - v_r}{c_0}\,\tau_0$$

(116) $$\lambda_1 = (c_0 - v_r)\,\tau_0$$

у сагласности са класичном теоријом која се примењује у спектроскопији.

Када је, на тај начин, посматрач одредио за једну довољно густу серију момената времена радијалну брзину v_r, онда он приступа конструкцији диаграма радијалне брзине на тај начин да времена t' у којима је одредио радијалне брзине, пренесе као абсцисе, а одговарајуће вредности v_r као ординате. Крива добивена на тај начин зове се диаграм брзине, па нека буде претстављена аналитички изразом

(117) $$v_r = \psi(t')$$

Из једначина (108), (110), (112) следује

(118) $$t' = \frac{L}{c_0} + \frac{U}{2\pi}\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{v_r}{v_0} - \frac{L}{c_0^2}\,u\left(v_0, \mathrm{arc\,cos}\,\frac{v_r}{v_0}\right)$$

Решимо ли ову последњу једначину по v_r то морамо, ако су све учињене претпоставке тачне, добити исту криву као што је и емпиријски добивена крива (117), или, пошто је функција $u(v_0, \varphi)$ још неодређена, то нам ове две једначине могу послужити да помоћу њих одредимо ту функцију, т. ј. закон по којем брзина ширења светлости зависи од кретања њенога извора.

XVIII

Диаграми радијалних брзина двојних звезда, добивени спектроскопски, нису веома тачни, па се због тога између стварних брзина и спектроскопски одређених могу очекивати извесне разлике. Зато нам у главном само главна оредња линија таквога диаграма даје податке за израчунавање елемената кретања двојне звезде, па су због тога и разни посматрачи добивали и различите елементе.[1]) Поред свега тога може се очекивати да ће се

[1]) Види о томе и радњу *Freundlich*-а наведену у XVI.

свако одступање ширења светлости од константе c_0 ипак манифестовати у диаграму брзине на такав начин да се неће моћи превидети, ако је само уочена двојна звезда довољно далека. То се одступање u појављује, као што показује једначина (118), у диаграму брзине помножено са одстојањем L двојне звезде од гледаоца, па ако је то одстојање довољно велико, онда последњи члан десне стране те једначине постаје толики да мења целу природу диаграма брзине.

Када би брзина ширења светлости била увек равна c_0, онда би, као што следује из једначине (118) у коју ваља ставити u = o, диаграм радијалне брзине уочене компоненте двојне звезде био претстављен једначином

(119) $$v_r = v_0 \cos \frac{2\pi}{U}\left(t' - \frac{L}{c_0}\right)$$

Ова је крива због (112) идентична са кривом (108); само је фаза осцилације сада друга због померања временске скале.

Ако путања уочене компоненте око тежишта S није круг и ако њена раван не пролази кроз визиони радиус, онда ваља једначине (108) и (119) заменити другим, компликованијим изразима, но опет ће они дати једну те исту криву.[2]) И у овоме случају та је крива таласаста, има периоду U и ту особину да свакој вредности од t односно t' одговара једна једина вредност радијалне брзине v_r, другим речима: таласи ове криве се не пребацују.

Но ако брзина ширења светлости није константна, т. ј. ако u није равно нули, онда ће са довољно великим одстојањем L у диаграму радијалне брзине, претстављеним једначином (118) односно (117), наступити пребацивање таласа, т. ј. једној одређеној вредности времена t' одговараће две или више вредности радијалне брзине. Тај ће случај наступити онда чим ма у којој тачки диаграма буде

(120) $$\frac{d\,v_r}{d\,t'} = \infty \text{ или } \frac{d\,t'}{d\,v_r} = 0$$

[2]) За сада није потребно упустити се у разматрање овог општег случаја, јер се он принципијелно не разликује од уоченог специјалног. Види, уосталом, *Klinkerfues*, Theoretische Astronomie. Neubearbeitung von Buchholz. Braunschweig 1912. p. 790. ff. — *Aitken*, The binary stars. New York 1918. — p. 134. ff. — Encyklopädie der mathem. Wiss. Bd. Astronomie. Erste Hälfte Leipzig 1905—1923. p. 486 ff.

Како из (118) следује

$$\frac{dt'}{dv_r} = \frac{U}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{v_0^2 - v_r^2}} - \frac{L}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial v_r}\, u\left(v_0, \arccos\frac{v_r}{v_0}\right) \tag{121}$$

то ће тај случај наступити чим буде L достигло вредност L_1, дату једначином

$$L_1 = \frac{U}{2\pi}\frac{c_0^2}{\sqrt{v_0^2 - v_r^2}}\frac{\partial v_r}{\partial u} \tag{122}$$

Како таково пребацивање таласа у спектроскопски добивеним диаграмима радијалне брзине није, бар до сада, никада констатовано, то од свих могућих функција $u(v, \varphi)$ долазе само оне у обзир које дају, за сваку посматрану двојну звезду, помоћу једначине (122) за L_1 већу вредност него што је стварно одстојање такове звезде од посматрача. Израз (122) назваћемо због тога спектроскопским критериумом за избор функције $u(v, \varphi)$.

XIX.

Из једначина (111), (107) и (110) следује

$$t' = t + \frac{L}{c_0}\,\frac{1 - \frac{r}{L}\sin\frac{2\pi}{U}t}{1 + \frac{1}{c_0}u\left(\frac{2\pi}{U}t\right)} \tag{123}$$

а како је за све оне законе $u(v, \varphi)$ који за нас долазе у обзир квоцијенат $\frac{u}{c_0}$ веома мален, то је

$$t' = t + \frac{L}{c_0}\left(1 - \frac{r}{L}\sin\frac{2\pi}{U}t\right)\left[1 - \frac{1}{c_0}u\left(\frac{2\pi}{U}t\right)\right] \tag{124}$$

Диференцијацијом ове једначине по t добивамо

$$\frac{dt'}{dt} = 1 - \frac{L}{c_0}\left\{\frac{1}{L}\frac{2\pi r}{U}\cos\frac{2\pi}{U}t\left[1 - \frac{1}{c_0}u\left(\frac{2\pi}{U}t\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{c_0}\frac{2\pi}{U}u'\left(\frac{2\pi}{U}t\right)\left[1 - \frac{r}{L}\sin\frac{2\pi}{U}t\right]\right\}$$

Узмемо ли у обзир да је

$$\frac{2\pi r}{U} = v_0 \tag{125}$$

и занемаримо ли више потенције или продукте веома малених величина $\frac{v_0}{c_0}$, $\frac{u}{c_0}$, $\frac{u'}{c_0}$, $\frac{r}{L}$, то добивамо

$$\frac{dt'}{dt} = 1 - \frac{v_0}{c_0}\cos\frac{2\pi}{U}t - \frac{L}{c_0}\frac{2\pi}{U}\frac{1}{c_0}u'\left(\frac{2\pi}{U}t\right) \tag{126}$$

Ова једначина казује да светлосни зраци који су у интервалу dt оставили уочену звезду, пролазе у једном различитом интервалу dt' кроз површину кугле, описане радиусом L око звезде. Та неједнакост временских интервала dt и dt' мора имати утицаја и на интензитет светлости у одстојању L од звезде. Ако, према томе, означимо са J_0 интензитет звездане светлости у јединичном одстојању од непомично замишљене звезде, за коју је, према (126) $dt' = dt$, онда је интензитет звездане светлости у одстојању L, а у времену t' очито једнак

$$J = \frac{J_0}{L^2}\frac{dt}{dt'} \tag{127}$$

јер у колико се интервал dt' смањује према интервалу dt у толико расте интензитет светлости на месту L.[1])

Једначине (127) и (126) казују да је интензитет светлости коју шаље звезда на месту L варијабилан и претстављен тим једначинама као функција времена.

При астрофотометријским опажањима не мери се објективна светлост зрака, т. ј. величина J која нам претставља енергију видљивих или фотографски активних зрака пронешену у јединици времена кроз јединицу површине, него се мери психички ефекат те величине који је по *Fechner*-овом психофизичком закону пропорционалан њеном логаритму. Када се мере звездане светлосне величине, онда се употребљава ова скала. Објективним интензитетима J и J_n одговара разлика величина Δm, дата изразом

$$\Delta m = -\frac{1}{0.4}\log\frac{J}{J_n} \tag{128}$$

У нашем случају претставља нам величина

$$J_n = \frac{1}{L^2}J_0 \tag{129}$$

[1]) *Zurhellen* је у својој расправи, споменутој у XVI, из неједнакости $dt' \gtrless dt$ закључивао да се услед тога мења фреквенција зрака, и то са растућим L толико да се спектралне линије померају чак од црвенога па до ултривиолетнога краја скептра. Ово резоновање није правилно. Ниједан од светлосних зрака који у извесним интервалима периоде U, полазећи један за другим са звезде, пролазе, услед неједнакости своје брзине, истовримено поред посматрача, не м ња, због присуства других, своју фреквенцију. Не сумирају се њихове фреквенције него њихове елонгације, што не утиче, наравно, на спектар него на интензитет светлости, која стиже до посматрача.

објективни интензитет мирујуће звезде у одстојању L; са тим ћемо интензитетом да сравњујемо у психофизичкој скали интензитет J звезде када се она креће. Зато ће нам израз

$$(130)\qquad \Delta m = -\frac{1}{0.4}\log\frac{J}{J_0}L^2 = -2.5\log\frac{dt}{dt'} = 2.5\log\frac{dt'}{dt}$$

дати промену звздане величине услед кретања. Тако добивамо применом (126)

$$(131)\qquad \Delta m = 2.5\log\left[1 - \frac{v_0}{c_0}\cos\frac{2\pi}{U}t - \frac{L}{c_0}\frac{2\pi}{U}\frac{1}{c_0}u'(\frac{2\pi}{U}t)\right]$$

У горњем изразу не зависи члан $\frac{v_0}{c_0}\cos\frac{2\pi}{U}t$ од закона $u(v,\varphi)$, па се зато тај члан појављује и онда када брзина светлости не зависи од кретања њеног извора. Како радијална брзина код двојних звезда не достиже, макар по досадањим опажањима, вредност од 300 км у секунди, то екстремне вредности тога члана леже између -0.001 и $+0.001$. Према обрасцу

$$(132)\qquad \log(1+x) = 0.43429\log_n(1+x) = $$
$$= 0.43429\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots\right)$$

неће екстремне вредности величине Δm, изване тим чланом достићи ни величину $+0.001$, а такова промена лежи испод границе тачности наших опажања, пошто најтачнија, фотоелекрична метода гарантује средњу погрешку која није мања од $\pm 0,^m 009$. Зато можемо споменути члан сасвим занемарити.

Последњи члан заграде у изразу (133) расте са одстојањем звезде, па мора при довољноме томе одстојању постати приступачан нашим опажањима.

Добивамо дакле

$$(133)\qquad \Delta m = 2.5\log\left[1 - \frac{L}{c_0}\frac{2\pi}{U}\frac{1}{c_0}u'(\frac{2\pi}{U}t)\right]$$

Ако је други члан у загради још увек веома мален према јединици, онда можемо применити образац (132) и занемарити све више потенције тога члана. У том је случају, дакле,

$$(134)\qquad \Delta m = -1.0857\frac{L}{c_0}\frac{2\pi}{U}\frac{1}{c_0}u'(\frac{2\pi}{U}t)$$

Када би одстојање L за ма које t достигло величину L_2, дату једначином

$$(135)\qquad L_2 = c_0^2\frac{U}{2\pi}\frac{1}{u'(\frac{2\pi}{U}t)},$$

онда би варијација светлости постала бесконачном. Како ни тај случај није до сада констатован, то од функција u долазе само оне у обзир које за L_2 дају веће вредности него што су стварна одстојања звезда.

Једначине (133) до (135) назваћемо фотометријским критериумом за избор функције $u(v,\varphi)$.

XX

У једначинама (133) и (134) претстављена је варијација звездане светлосне величине као функција времена t т. ј. као функција онога момента у којем уочени светлосни зрак оставља звезду. Зато нам те једначине не представљају ток светлосних промена или варијација како се оне указују посматрачу, што, у осталом, нема значаја када се ради само о одређењу амплитуре тих варијација. Да би смо добили ток тих варијација како се оне указују посматрачу, ваља у тима једначинама, помоћу једначине (112) (у којој је величина u одређена функција времена t), варијабилну t изразити помоћу варијабилне t'. То се може ефективно тек онда учинити када је извршен избор функције $u(v,\varphi)$. Онда ћемо добити ове резултате које ћемо сравнити са резултатима спектроскопских опажања.

Максимум радијалне брзине звезде, у правцу према посматрачу, наступа, према једначини (108), у моментима $t = nU$, где је n произвољан цео број или нула. У моменту $t = 0$ оставља, дакле, звезду, када она има максималну брзину, један светлосни зрак који ће, према *Doppler*-овом принципу и према једначинама (115) и (116), изазвати код посматрача максимално померање спектралних линија према љубичастом крају спектра. То ће померање гледаоц костатовати, према (112), у моменту

$$(136)\qquad t'_1 = \frac{L}{c_0} - \frac{L}{c_0}\frac{u(v_0,0)}{c_0}$$

Истим разматрањем долазимо до закључка да ће посматрач констатовати максимално померање спектралних линија према ружичастом крају спектра у моменту

$$(137)\qquad t_2' = \frac{U}{2} + \frac{L}{c_0} - \frac{L}{c_0}\frac{u(v_0,\pi)}{c_0}$$

пошто минимална радијална брзина према гледаоцу наступа у моменту $t = \frac{U}{2}$ и пошто тада угао φ има вредност π.

Из горњих једначина следује

$$t_2' - t_1' = \frac{U}{2} + \frac{L}{c_0}\frac{u(v_0, 0) - u(v_0, \pi)}{c_0} \tag{138}$$

што значи да је временско одстојање између споменута два померања спектралних линија само онда једнако половини периоде U када је испуњен услов (73).

Слична разматрања важе и за екстремне вредности звездане светлосне величи е.

Према (133), (134) констатује посматрач максималну звездану величину (оне се броје у негативном смислу) на ономе светлосном зраку за који је израз $u'(\frac{2\pi}{U}t)$ максимум, т. ј. који задовољава једначину

$$u''(\frac{2\pi}{U}t) = 0 \tag{139}$$

Означимо са t_3 онај корен ове једначине који одговара максимуму израза u', а са t_4 онај корен који одговара минимуму, то ће посматрач констатовати максимум звездане величине у моменту

$$t_3' = t_3 + \frac{L}{c_0} - \frac{L}{c_0}\frac{u(\frac{2\pi}{U}t_3)}{c_0} \tag{140}$$

а њен минимум у моменту

$$t_4' = t_4 + \frac{L}{c_0} - \frac{L}{c_0}\frac{u(\frac{2\pi}{U}t_4)}{c_0} \tag{141}$$

Из ових једначина следује да је временски размак између максимума и минимума звездане величине, све када путања двојне звезде одговара потпуно учињеним претпоставкама, само у специјалним случајевима функције $u(v, \varphi)$ једнак половини периоде U.

Из једначина (136), (137), (140), (141) следује на послетку, да се моменти екстремних вредности звезданих светлосних величина не поклапају са моментима екстремних померања спектралних линија. Зато нам ове једначине дају трећи, најоштрији

критеријум за одређивање функције $u(v, \varphi)$ па ћемо их назвати спектроскопско-фотометричким критериумом.

XXI

Сада, када сам математски формулисао све могуће законе $u(v, \varphi)$ а исто тако нашао и критериуме помоћу којих се може испитати који од тих закона не стоји у противуречју са астрономским опажањима, требало би извршити то испитивање у потпуној целини. Но тај посао не може због своје величине бити предмет ове расправе. Зато ћу се ограничити на неколико карактеристичних проба.

Лако је доказати да закон (83) који одговара емисионистичким теоријама, не подноша критериум (122). То је доказао већ *de Sitter*, но то је једино што из његових испитивања следује,

Заиста је у томе случају, као што смо видели, $u = v_r$ па једначина (122) добива облик

$$L_1 = \frac{U}{2\pi}\frac{c_0^2}{v_0 \sin\varphi} \tag{142}$$

Минимална вредност овога израза

$$L_1 = \frac{U}{2\pi}\frac{c_0^2}{v_0} \tag{143}$$

лежи за цео низ спектроскопских двојних звезда испод њиховог одстојања од земље, чиме је емисионистичка претпоставка (83) искључена из стварне могућности.

Но закони (91), (92), (96), (94) у којима се појављује v у другој потенцији подносе потпуно спектропски критериум (122). Уочимо, примера ради закон (92). Сада је $u = \frac{1}{2}\frac{v_r^2}{c_0}$ па једначина (122) добива облик

$$L_1 = \frac{U}{\pi}\frac{c_0^3}{v_0^2 \sin 2\varphi} \tag{144}$$

Минимална је вредност овога израза

$$L_1 = \frac{U}{\pi}\frac{c_0^3}{v_0^2} \tag{145}$$

Меримо ли периоду U данима, а одстојање L_1, сада већ свугде уобичајеном јединицом *parsec*-ом. Како је

$$1 \text{ parsec} = c_0 \times 3{\cdot}26 \text{ светлосних година}$$

$$1 \text{ parsec} = c_0 \times 1190.7 \text{ дана,} \tag{146}$$

то ваља у горњем обрасцу бездимензионалан број $\frac{v_0}{c_0}$ оставити непромењен, а за c_0 ставити предњи израз. На тај начин добивамо

$$(147) \qquad L_1 = \frac{U}{1190.7\,\pi}\left(\frac{c_0}{v_0}\right)^2 \text{ parsec}$$

Од свих 132 спектроскопских двојних звезда, којих су елементи путање саопштени у делу *Aitken*-а, цитираном у XVII, најмању кредност за L_1 даје двојна звезда *σ Aquilae*. За њу је $U = 1{\cdot}950^d$, а радијална брзина њене друге компоненте је $v_r = 199$ км/sec. Са овим вредностима добивамо помоћу предње једначине $L_1 = 1185$ parsec. За све остале спектроскопске двојне звезде та је дистанција још куд и камо већа. Зато оне, у колико смо о њиховом растојању од Сунца информисани, задовољавају све спектроскопски критериум (112) ако у изразу $u(v, \varphi)$ долази v у другој потенцији.

Што се тиче остала два критериума, то ствар стоји овако.

Према изложеној теорији била би, пре свега, свака двојна звезда у исти мах и променљива, т. ј. њена светлост била би варијабилна. Размотримо прво које би димензије биле те варијације светлости. У то име прихватимо, примера ради, закон (92). Онда је $u' = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{c_0}\sin 2\varphi$, па једначине (133), (134), 135) добивају овај облик

$$(148) \qquad \Delta m = 2{\cdot}5 \log\left[1 - \frac{L}{c_0}\frac{\pi}{U}\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 \sin\frac{4\pi}{U}t\right]$$

$$(149) \qquad \Delta m = -1{\cdot}0857\,\frac{L}{c_0}\frac{\pi}{U}\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 \sin\frac{4\pi}{U}t$$

$$(150) \qquad L_2 = \frac{U}{\pi}\frac{c_0^3}{v_0^2 \sin 2\varphi}$$

тако да је минимална вредност овога последњег израза

$$(151) \qquad L_2 = \frac{U}{\pi}\frac{c_0^3}{v_0^2}$$

идентична са (145).

За пример *β — Aurigae* (који је употребио *de Sitter* у својој радњи) имамо

$U = 3{\cdot}96^d \qquad v_0 = 110$ км/sec $\qquad L = 70$ parces

па нам једначина (149), која за предње јединице добива, према (146), облик

$$(152) \qquad \Delta = -4061\,\frac{L}{U}\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 \sin\frac{4\pi}{U}t,$$

даје варијацију звездане светлосне величине од

$$\Delta m = \pm 0{\cdot}01$$

Сличне резултате добивамо за све оне спектроскопске двојне звезде кратке периоде од којих познајемо, колико толико, паралаксе; њихова би се светлост, према горњем обрасцу, због маленог њиховог одстојања, морала мењати у врло уским границама. Ово би се, заиста, слагало са опажањима, пошто су тачним фотоелектричним мерењима на многим двојним звездама константоване варијације горње величине.[1])

Веће промене светлости могу наступити тек при одстојањима која иду у хиљаде parsec-а. При свему томе не постоји опасност дисконтинуитета које наступа при одстојању (151) односно (145). Тако дају те једначине за далеке краткопериодичне променљиве цефеиде, за које се може у средњу руку ставити $U = 6^d$, $v_0 = 10$ км/sec за критичну дистанцију вредност од 1,444.000 parsec-а која далеко прекорачује стварно одстојање тих звезда[2])

Тако би двојне звезде са веома малом паралаксом (т. ј. великим L) и кратком периодом U морале, као што то захтевају једначине (133) и (134) бити звезде осетно променљиве светлости. При томе би закони (91) и (92) дали периоду варијације светлости која би, као што то показује једначина (152), била $\frac{U}{2}$ т. ј. половина периоде померања спектралних линија, док би закони (94) до (96) дали периоду варијације светлости која би била U, т. ј. једнака периоди померања спектралних линија. Од правилно периодичних променљивих звезда, у колико оне нису помрачнице, улазе у ту категорију, пре свега, цефеиде. Њихова је паралакса заиста мала, а исто тако и њихова периода, код њих се померају спектралне линије са истом периодом као што се мења њихова светлост, а моменти максималног померања спектралних

[1]) *Guthnick* und *Prager*, Photoelektrische Untersuchungen an spektroskopischen Doppelsternen und an Planeten. Veröff. d. kgl. Sternwarte in Berlin—Babelsberg. 1. Bd, 1. Heft (1914), 2. Bd, 3. Heft (1918) — Види и Vierteljahrschr. d. astr. Gesellsch. 54 (1919), а и чланак *Guthnick*, Physik der Fixsterne у свесци Astronomie публикације Kultur der Gegenwart. Leipzig 1921.

[2]) Ово одстојање не прекорачава по *Shapley*-у вредност од 6000 parsec. *Shapley*, Contibution from the Mount Wilson Solar Observatory № 156. — Bulletin de la Société astr. de France 34. (1920) p. 321.

линија не подударају се са моментима светлосних екстрема као што захтева напред изложена теорија. Она дакле тумачи на најједноставнији и најприроднији начин квалитативно све карактеристичне особине тих до сада необјашњених појава на таковима звездама.

Радило би се сада о томе испитати који од могућих закона $u(v, \varphi)$ пружа и квалитативно подударање опажања и теорије. Изналажење тога закона мора узети у обзир сав огромни материјал о тима звездама[1]) и он ће бити предмет моје идуће расправе.

XXII

Замислимо, да би смо узели у обзир све могућности, да астрономска опажања, поред свега онога што смо мало час изложили, ипак даду одговор да се светлосне појаве звезда дешавају тако као када би се светлост ширила према једном одабраном систему звезда некретница константном брзином c_0. Онда још увек постоје две могућности да се, без релативирања времена, уведу такови закони који задовољавају и астрономска опажања и резултат *Michelson*-овог експеримента. Тај експеримент доказује у ствари само то да се у непосредној близини светлосног извора, која је безконачно малена према космичким дистанцијама, светлост шири тако да задовољава један од изложених закона $u(v, \varphi)$. Зато можемо, у границама тачности наших опажања, једначину (27) заменити са ове две

$$(153)\qquad \begin{cases} \text{за } x = o \\ c = c_0 + u(v, \varphi) \end{cases}$$

Први од споменутих начина да задовољимо све резултате опажања, је тај да напустимо претпоставку да је величина $u(v, \varphi)$ константна на целоме путу што га светлост превађује и захтевамо само предњи гранични услов. Ставимо ли дакле, примера ради, да се светлост што ју емитује двојна звезда периоде U и периферне брзине v_0, шири брзином

[1]) Недавно су изашла из штампе три дела у којима је већи део тога материјала прегледно изложен: *Müller—Hartwig*, Geschichte und Literatur des Lichtwechsels der bis Ende 1915 als sicher veränderlich anerkannten Sterne nebst einem Katalog der Elemente ihres Lichtwechels. Leipzig, Bd. 1, 1918, Bd. 2, 1920, Bd. 3, 1922 — *Hagen—Stein,* Die Veränderlichen Sterne. Ester Bd. Geschichtlich — technischer Teil Freiburg i Br. 1921, Zweiter Bd. Mathematisch — physikalischer Teil. Freiburg i Br. 1924. — *Schiller*, Einführung in das Studium der veränderlichen Sterne. Leipzig 1923.

$$(154)\qquad c = c_0 + \psi(x)\, v_0 \cos\frac{2\pi}{U}\left(t - \frac{x}{C}\right)$$

где је C произвољна константа а $\psi(x)$ произвољна функција за коју је

$$(155)\qquad \psi(o) = 1$$

онда добивамо

$$(156)\qquad \begin{cases} \text{за } x = o \\ c = c_0 + v_0 \cos\frac{2\pi}{U}\, t \end{cases}$$

па је због (107) гранични услов (153) заиста задовољен у своме специјалном случају (93) а тиме и резултат *Michelson*-овог експеримента. Да видимо још како ће се горња претпоставка манифестовати при посматрању двојних звезда.

Посматрач који се налази у одстојању L од двојне звезде и мери померање спектралних линија услед промене периоде светлосних зрака, констатоваће, према (113) и (154) у времену t' ову њену радијалну брзину

$$(157)\qquad v_r = \psi(L)\, v_0 \cos\frac{2\pi}{U}\left(t' - \frac{L}{C}\right)$$

Када би се светлост ширила на целоме путу константном брзином c_0, као што је до сада претпостављено, онда би, према (119), он констатовао ову радијалну брзину

$$(158)\qquad v_r = v_0 \cos\frac{2\pi}{U}\left(t' - \frac{L}{c_0}\right)$$

Изрази (157) и (158) разликују се само по фази и амплитуди, иначе су идентични, па дају услед тога, до јединог фактора пропорционалитета, идентичне диаграме радијалне брзине. Зато предње претпоставке не би дошле у колизију са астрономским опажањима, ако би ова говорила за константност брзине светлости.

Физикална интерпретација горњих једначина вратила би нас у класичну теорију светлости.

Voigt,[1]) *Kirchhoff*[2]) и *Lord Kelvin*[3]) бавили су се питањем

[1]) *Voigt*, Theorie des leuchtenden Punktes Crelles Journal f. die reine und angew. Mathem. 89 (1880) p. 288.

[2]) *Kirchhoff*, Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Voigt „Theorie des leuchtenden Punktes." Jbid. 90. (1881) p. 34.

[3]) *Lord Kelvin*, On the application of force within a limited space required to produce spherical solitary waves or trains of periodic waves of both species, equivoluminal and irrotational, in an elastic solid. Phil. Magazine (5) vol 47, p. 480; vol. 48, p. 388. Види и сродне радове у *Lord Kelvin*, Mathematical and Physical Papers. 6 vol. Cambridge, Univ. Press

механичкога модела светлосног извора. Стојећи још на становишту еластичне теорије светлости, они су замишљали тај модел остварен осцилујућом куглом која је круто везана са медиумом у којем се налази. Прва два испитивача бавили су се, у главном, случајем кад је тај медиум инкомпресибилан, искључили су, дакле, могућност лонгитудиналних таласа, али су радови *Kelvin*-а, у колико их познајем према реферату, обухватили и општије случајеве. Свакако је сигурно да се у једначини (154) члан

$$\psi(x)\, v_0 \cos\frac{2\pi}{U}\left(t-\frac{x}{C}\right)$$

може интерпретирати као лонгитудиналан еластични талас који има периоду U, а брзину C. Такав би талас могао бити изазван уоченом компонентом двојне звезде која хармонички осцилује у правцу визионог радиуса истом периодом.

Желимо ли да задржимо електромагнетску теорију светлости, могли бисмо замислити да су микроскопски електромагнетски трансверзални таласи ношени механичким макроскопским лонгитудиналним таласима етера. Да такови лонгитудинални таласи нису до сада опажени, могло би се тумачити тиме да они могу бити изазвани само осцилаторима космичких димензија, а не обичним светлосним изворима, па како је периода осцилације небеских тела дуга, то је и таласна дужина лонгитудиналних таласа тако огромна да се не може опазити.

И кретање наше земље морало би изазвати такове таласе, па би се горњом претпоставком вратили на *Stokes*-ову теорију покретног етера[1]), која је била од *H. A. Lorentz*-а одбијена, а затим модификована[2]), која наилази несумњиво на велике тешкоће у питању тумачења аберације светлости, но о којој није још речена последња реч.[3])

XXIII

Сада ћу још да покажем да је могуће растумачити и резултат *Michelson*-ова експеримента и досадања опажања на спектроскопским двојним звездама задржавајући претпоставку непомичног етера и константности брзине.

[1]) Више расправа скупљених у *Stokes*, Mathematical and Physical Papers. 5 vol. Cambridge; Univ. Press.

[2]) Више расправа скупљених у *H. A. Lorentz*, Abhandlungen über theoretische Physik. I. Bd. Leipzig 1907.

[3]) Види о томе *Painlevé*, Note sur la propagation de la lumière. Одштампано уз *Painlevé*, Les axiomes de la Mécanique. Paris 1922. — О неопходности претпоставке етера и о могућности лонгитудиналних таласа види дело *Exner*-а, цитирано у II.

Основна идеја оваковога тумачења је ово.

Taylor-ов образац даје за довољно мале величине Θ и u, у границама жељење тачности, сасвим општу релацију

$$(159)\qquad \frac{1}{r}\Phi\left(t+\Theta-\frac{r}{c_0+U}\right)=\frac{1}{r}\Phi\left(t-\frac{r}{c_0}\right)+ \\ +\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Theta+\frac{\partial}{\partial c_0}U\right)\Phi\left(t-\frac{r}{c_0}\right)$$

т. ј.

$$(160)\qquad \frac{1}{r}\Phi\left(t-\frac{r}{c_0}\right)+\frac{\Theta}{r}\Phi'\left(t-\frac{r}{c_0}\right)+\frac{U}{c_0^2}\Phi'\left(t-\frac{r}{c_0}\right)= \\ =\frac{1}{r}\Phi\left(t+\Theta-\frac{r}{c_0+U}\right)$$

Претпоставимо ли сада да је Φ периодична функција периоде τ, т. ј. да је

$$(161)\qquad \Phi(t+\tau)=\Phi(\tau)$$

онда можемо према ономе што смо изложили у II, сматрати $\frac{1}{r}\Phi\left(t-\frac{r}{c}\right)$ као математску претставу сферних таласа који се из свога центра шире брзином c_0. И израз $\frac{\Theta}{r}\Phi'\left(t-\frac{r}{c_0}\right)$ претставља нам такође такове сферне таласе исте брзине c_0, исте периоде τ, пошто из (161) следује

$$(162)\qquad \Phi'(t+\tau)=\Phi(\tau)$$

но друге амплитуде и друге фазе, пошто функција Φ достизава онда своје екстремне вредности када је функција Φ' једнака нули. Израз $\frac{U}{c_0^2}\Phi'\left(t-\frac{r}{c_0}\right)$ преставља на равне таласе исте периоде, брзине и фазе као што су и претходни. Напослетку израз $\frac{1}{r}\Phi\left(t+\Theta-\frac{r}{c_0+U}\right)$ претставља нам сферне таласе исте периоде и амплитуде као што су били прво наведени, али се брзина ових последњих разликује према брзини првих (и осталих) за U, а њихова фаза за Θ.

Тако долазимо до важнога резултата да се суперпозицијом сферних и равних таласа који се шире сви истом брзином, добивају таласи који се у непосредној близини њиховога извора понашају тако као када би њихова брзина и фаза била друга од компоненталних.

За нас је ова привидна промена брзине од нарочитога интереса. Зато можемо горњи случај спецификовати, стављајући $\Theta = 0$, уважујући за $\Phi(t)$ тригонометријску функцију $\sin\frac{2\pi}{\tau}t$ и замењујући одстојање r са x. На тај начин добивамо, водећи рачуна о (3),

$$\frac{1}{r}\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c_0 + U}\right) = \frac{1}{x}\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \tag{163}$$
$$+ \frac{2\pi}{\lambda}\frac{U}{c_0}\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

Сада можемо за величину U увести једну од напред нађених брзина $U(v, \varphi)$ која задовољава резултат *Michelson*-овог експеримента. Претпоставимо ли дакле да светлосни извор, сем своје обичне сферне радијације $\frac{1}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$, шаље у уоченоме правцу једну секундарну радијацију $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{U}{c_0}\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$ као последицу свога кретања, онда ће те две радијације створити у непосредној близини светлосног извора једну резултујућу радијацију која ће се у тој близини ширити брзином

$$c = c_0 + U$$

Ова ће резултујућа радијација задовољавати резултат *Michelson*-овог експеримента.

Избор функције $U(v, \varphi)$, између оних које нам стоје на расположењу, није сасвим произвољан, јер се може употребити само онакова за коју неједнакост

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{U}{c_0}x < 1 \tag{164}$$

на коју је везано предње развијање у *Taylor*-ов ред, даје за x дужину, већу него што је крак *Michelson*-овог апарата, односно одстојање између двају суседних огледала (која такође дејствују као покретни извор) на путу светзоснога зрака.

У споменутом експерименту је тај крак био $l = 1{\cdot}40$ m, а таласна дужина употребљене светлости $\lambda = 589\,\mu\mu$, па зато добивамо из (164) као максималну дозвољену вредност од U

$$\max U = 0{\cdot}02\frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

Овоме услову не задовољава закон емисионистичких теорија (93), јер је ту, пошто се земља креће у најмању руку брзином од 30 km/sec, max U = 30 km/sec, али задовољавају потпуно закони (91), (92) (94) (96) у којима се појављује члан $\frac{v^2}{c_0}$. Тако је за (92) $\max U = 0{\cdot}0015$, дакле далеко мање од дозвољене горње границе.

Усвајајући, примера ради, закон (92) можемо *Michelson*-овом експерименту дати овакову интерпретацију. Светлосни извор, сем своје обичне радијације $\frac{1}{x}\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$ која се шири сферним таласима брзином c_0, емитује, услед свога кретања, још једну секундарну радијацију $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{v^2}{c_0^2}\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$ која се шири истом брзином c_0 равним таласима дуж праве кретања извора. Њена амплитуда пропорционална је квадрату брзине извора. Обе те радијације суперпонирају се као што смо видели, у близини извора тако да задовољавају негативни исход *Michelson*-овог експеримента.

Важна напомена. У ову расправу ушле су несретним неспоразумом, на место намењених слика 1 и 2, друге две из расправе другога аутора. Зато се праве слике 1 и 2 саопштавају у *Résumé*-у.

SUR LE DEUXIÈME POSTULAT DE LA THÉORIE DE RELATIVITÉ RESTREINTE

par M. MILANKOVITCH

(Résumé)

En développant une idée de H. Poincaré, l'auteur admet d'abord que la vitesse c de la propagation de la lumière, émise d'une source mobile, animée d'une vitesse v, est donnée par l'expression

(1) $$c = c_0 + u(v, \varphi)$$

où φ est l'angle que forme le rayon lumineux avec le vecteur de la vitesse v et où $u(v, \varphi)$ est une fonction satisfaisant la condition

(2) $$u(o, \varphi) = o$$

L'auteur pose ensuite la question: quelles sont les fonctions $u(v, \varphi)$ qui peuvent satisfaire le résultat de l'expérience de Michelson et les observations astronomiques. Pour resoudre ce problème, il donne à l'experience de Michelson et aux phénomènes spectroscopiques et photométriques des étoiles doubles une description mathématique très générale.

Citons comme exemple:

La source lumineuse mobile L et le miroire S, liés à une distance l, sont animés d'un mouvement translatoire dans la direction L T avec la vitesse v (fig. 1).

Le rayon lumineux, émis de la source dans sa position L, atteignera après le temps t_1, le miroire dans sa position S_1.

(3) $$\overline{S\,S_1} = \overline{L\,L_1} = v\,t_1$$

La vitesse de propagation de la lumière sur ce parcours est donnée par

(4) $$c_1 = c_0 + u(v, \varphi_1).$$

On a

(5) $$s_1 = c_1\,t_1.$$

Pour le retour, la lumière emploiera le temps t_2 et atteignera la source dans sa position L_2

(6) $$\overline{L_1\,L_2} = v\,t_2$$

En admettant que l'image optique de la source lumineuse, formé par le miroire mobile, se comporte comme une source

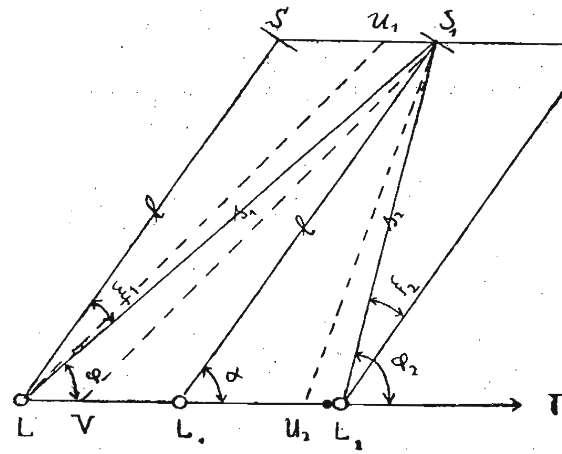


Fig. 1.

mobile, la vitesse de la propagation de la lumière sur ce parcours est donnée par

(7) $$c_2 = c_0 + u(v, \pi - \varphi_2)$$

On a

(8) $$s_2 = c_2\,t_2$$

Le résultat de l'expérience de Michelson demande que la somme

(9) $$t_\alpha = t_1 + t_2$$

soit indépendante de l'angle α, c'est-à-dire de l'orientation de l'appareil.

L'hodographe de la vitesse c qu'on obtient en portant sur chaque direction, passant par la source lumineuse, la valeur correspondante de c, sera évidemment une surface de révolution ayant pour l'axe le vecteur de la vitesse v. Cet hodographe doit satisfaire les conditions suivantes.

Désignons par φ_0 la valeur de φ_1 correspondant à $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et posons pour abréger

$$(10) \qquad \begin{cases} u(v, \varphi_0) = u_0 \\ u(v, o) = u_1 \\ u(v, \pi) = u_2 \end{cases}$$

En tenant compte qu'on a

$$(11) \qquad \begin{cases} s_1^2 = c_1^2\, t_1^2 = v^2 t_1^2 + l^2 + 2\, l\, v\, t_1 \cos\alpha \\ s_2^2 = c_2^2\, t_2^2 = v^2 t_2^2 + l^2 - 2\, l\, v\, t_2 \cos\alpha \end{cases}$$

on obtient pour $\alpha = o$

$$(12) \qquad t_0 = \frac{l}{c_0 + u_1 - v} + \frac{l}{c_0 + u_2 + v}$$

et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$(13) \qquad t_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\,l}{\sqrt{(c_0 + u_0)^2 - v^2}}$$

On a donc

$$(14) \qquad \frac{1}{c_0 + u_1 - v} + \frac{1}{c_0 + u_2 + v} = \frac{2}{\sqrt{(c_0 + u_0)^2 - v^2}}$$

En posant

$$(15) \qquad \frac{u_0}{c_0} = u'_0 \quad \frac{u_1}{c_0} = u'_1 \quad \frac{u_2}{c_0} = u'_2 \quad \frac{v}{c_0} = v'$$

et en développant l'éxpression (14) d'apres la formule du binôme, en négligeant les puissance supérieures de u' et de v', on obtient

$$(16) \qquad (1 + 2\,v')\,u'_1 + (1 - 2\,v')\,u'_2 - 2\,u'_0 = v'^2$$

En prenant les valeurs u'_1, u'_2, u'_0 pour coordonnées orthogonales, l'équation (16) représente le plan TPVSWUT de la fig. 2. On retrouve dans le point P $\left(u'_1 = o,\ u'_2 = o,\ u'_0 = -\frac{v'^2}{2}\right)$ de ce plan, la solution particulière du problème traité, donnée par *Rose—Jnnes,* dans le point R $\left(u'_1 = u'_2 = \frac{v'^2}{2},\ u'_0 = o\right)$ celle de *Zemplén* et dans le point S $\left(u'_1 = v',\ u'_2 = -v',\ u'_0 = \frac{v'^2}{2}\right)$ celle de *Ritz.*

Puisque chaque point du plan TVW représente une solutiou satisfaisant le résultat de l'expérience de Michelson, on voit qu'on a une infinité de telles solutions.

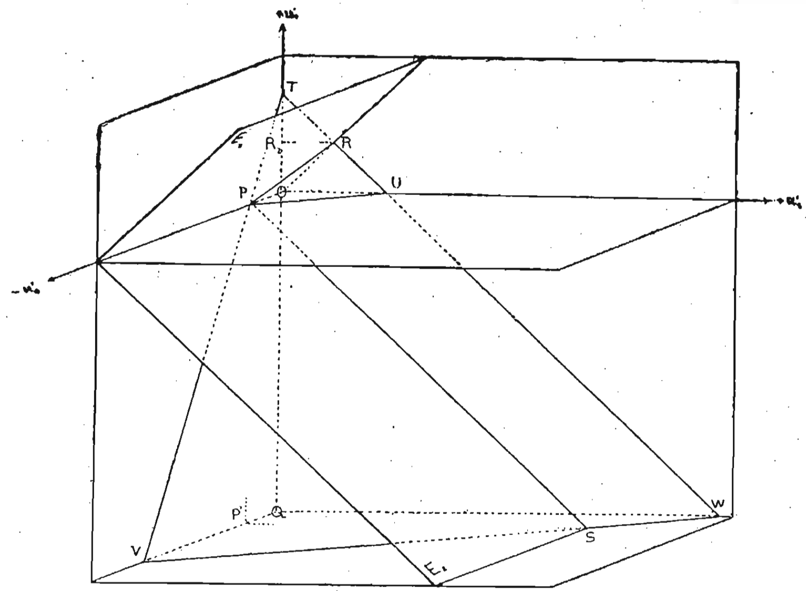


Fig. 2.

Pour préparer le choix parmis ce solutions, l'auteur examine avec plus de rigueur qu'il n'a été fait jusqu'à présent, toutes les conséquences qui doivent se manifester, par suite de l'inconstance de c dans les observations spectroscopiques et photométriques des étoiles doubles et des étoiles variables.