P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

Univerzitet u Beogradu

Ratomir Pažanin

I N V A R I J A N T N O S T S P E K T R A L N O G T I P A S L U Č A J N O G P R O C E S A U O D N O S U N A T R A N S F O R M A C I J U V R E M E N A

Doktorska disertacija

Beograd, 1980.

S A D R Ž A J

U v o d

U korelacijskoj teoriji slučajnih procesa drugog reda, koje je uveo Hinčin 1937, sva svojstva procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ definirana su i odredjena u izrazima njegove korelacijske funkcije

(1) $$r(s,t) = E(x(s)\cdot x(t)) \ , \ s,t \quad I = \quad t_0,$$

Veza izmedju dva slučajna procesa $\{x(t);\ t \in I\}$, $y(t);\ t \in I\}$ definirana je medjukorelacijskom funkcijom

$$K(s,t) = E(x(s)\cdot y(t)) \quad , \quad s,t \in I \ .$$

Izučavajući stacionarne nizove Kolmogorov je 1944. u korelacijsku teoriju slučajnih procesa uveo metode Hilbertovog prostora. Pored toga, primjenom Stonove reprezentacije grupe unitarnih operatora Kolmogorov dobiva eksplicitni oblik koeficijenata c_n, $n \in Z$ u Woldovoj reprezentaciji

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{n} c_{n-k}\, z_k \ , \qquad n \in Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

stacionarnog niza $\{x_n,\ n \in Z\}$, gdje je $\{z_n;\ n \in Z\}$ niz uzajamno ortogonalnih slučajnih varijabli takvih da je

$$\mathcal{H}_n(x) = \mathcal{H}_n(z) \qquad \text{za svako} \quad n \in Z \ .$$

Iz ove jednakosti proizlazi da se niz $\{x_n;\ n \in Z\}$ može zamijeniti nizom medjusobno ortogonalnih slučajnih varijabli $\{z_n;\ n \in Z\}$, stoga su informacije o stacionarnom nizu $\{x_n;\ n \in Z\}$ obuhvaćene nizom $\{z_n;\ n \in Z\}$.

Krein, Hanner i Kahrhunen 1950. primjenili su rezultate Kolmagorova na neprekidni stacionarni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ i dobili da je

$$x(t) = \int_{t_1}^{t} g(t-u)\,dz(u); \quad t \in I$$

Woldova reprezentacija tog procesa, gdje je $\{z(t);\ t\in I\}$ proces s ortogonalnim prirastima i takav da je

$$E|dz(t)|^2 = dt,\ t\in I,\quad i\ \mathcal{H}_t(x) = \mathcal{H}_t(z)\quad \text{za svako}\quad t\in I\ .$$

Uvodjenjem aparata kojim se proučavaju linerani operatori u Hilbertovom prostoru, odnosno primjenom tog aparata u korelacijskoj teoriji slučajnih procesa, dobiva se mogućnost za spektralnu analizu i ostalih slučajnih procesa drugog reda. Tako je npr. Hida 1960. dobio jednu specijalnu reprezentaciju Gaussovog procesa i nazvao je kananskom.

Za proizvoljni neprekidni slijeva slučajni proces $\{x(t);t\in I$ 1961. Cramér je dao Woldovu reprezentaciju

$$x(t) = \sum_{n=1}^{M}\int_{t_0}^{t} g_n(t,u)dz_n(u)\ ,\quad t\in I\ ,$$

gdje je $\{z_n(t);\ t\in I\}$, $n = \overline{1,M}$ niz uzajamno ortogonalnih slučajnih procesa s ortogonalnim prirastima i

$$\mathcal{H}_t(x) = \sum_{n=1}^{M}\oplus\mathcal{H}_t(z_n)\quad \text{za svako}\quad t\in I.$$

Gornja reprezentacija nije jednoznačna. Medjutim, primjenom teorema potpunog sistema unitarne invarijantnosti samokonjugiranih operatora u separabilnom Hilbertovom prostoru pokazao je da medju njima postoji jedna za koju je $M = N$ minimalno, $1\leqslant N\leqslant\infty$, i da mjere uvedene preko funkcija distribucija $t\mapsto F_n(t) = E|z_n(t)|^2$, $t\in I$, $n=\overline{1,N}$ mogu biti uredjene s obzirom na apsolutnu neprekidnost $m_{F_1} > m_{F_2} > \dots > m_{F_N}$. Klase ekvivalencija $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ mjera, koje su generirane funkcijama $F_1, F_2, \dots, F_N$, jednoznačno su odredjene korelacijskom funkcijom (1 niz

(2) $\qquad \rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_N$

naziva se spektralni tip a N multiplicitet procesa.

Svakako najznačajniji rezultat Cramera datira od 1964. i glasi: za svaki niz oblika (2) postoji neprekidni slijeva slučajni proces čiji je spektralni tip upravo taj niz.

Kallianpur i Mandrekar 1965. primjenili su Cramerovu teoriju na n-dimenzionalne slučajne procese i još općenitije na procese $\{x(t,\psi);\ t \in I, \psi \in \phi\}$, gdje je ϕ Hausdorffov prostor s prebrojivom bazom. Još neke generalizacije i neke specijalne klase procesa izučavali su Rozanov ([26]), Ivković i Rozanov ([17]), Hitsuda([13]), Siraja ([28],[29]) i Bulatović ([3]).

Probelm izometričnosti familija potprostora, odnosno problem invarijantnosti spektralnog tipa slučajnog procesa u odnosu na linearnu transformaciju prvi su razmatrali Rozanov i Ivković. Za slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ koji ima diskretan spektralni tip Rozanov je 1974. dokazao da su familije $\{\mathcal{H}_t(x);\ t \in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t(y) = A\mathcal{H}_t(x);\ t \in I\}$ izometrične ako je $A : \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}(y)$ regulirani operator. Na temelju ovog rezultata i nekih primjera postavio je hipotezu da je spektralni tip proizvoljnog slučajnog procesa invarijantan u odnosu na regularnu transformaciju.

U ovom radu izučava se invarijantnost spektralnog tipa u odnosu na transformaciju vremena, što se svodi na ovo pitanje: Kakva svojstva mora da ima neprekidna neopadajuća funkcija $\varphi : I \to I$ da bi slučajni procesi $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t) = x(\varphi(t));\ t \in I\}$ imali isti spektralni tip? U teoremima 3.1. i 3.2. sadržan je cjelovit odgovor na ovo pitanje.

Medjutim, prije nego što smo pristupili traženju tog odgovora, s ciljem da se lakše dodje do njega, u § II.2 razmatra se ekvivalentnost L-S mjera m_F i m_F . Tu je najprije uveden pojam N_{m_F} funkcija, a zatim su dani potrebni i dovoljni uvjeti za ekvivalentnost mjera m_F i m_F (T.2.2). U teoremima 2.3., 2.4.,2.5. i 2.6. dani su nešto odredjeniji uvjeti koje funkcija φ mora zadovoljavati da bi $m_F \sim m_{F \circ \varphi}$.

Jasno je da običnu definiciju usporedljivosti mjera (§ I.3) nije moguće koristiti ako se prostori definiranosti mjera ne poklapaju, a to će npr. biti kada funkcija preslikava interval $I_1 = [t_1, \infty\rangle$ na $I = [t_0, \infty\rangle$, $t_1 \neq t_0$. Zbog toga je i uveden pojam ℓ-podredjenosti, odnosno ℓ-ekvivalentnosti mjera m_F i m_F (def.2.2). Ako je $I_1 = I$, onda je ekvivalentnost i ℓ-ekvivalentnost jedno te isto. Takodjer je uveden pojam ℓ-jednakosti spektralnih tipova (def. 3.1) kako bi se mogli uporedjivati spektralni tipovi slučajnih procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t) = x(\varphi(t));\ t \in I_1\}$.

Rad je podjeljen na dvije glave. U prvoj su sadržani već poznati rezultati o Cramerovoj reprezentaciji i spektralnom tipu slučajnog procesa. U drugoj, pored gore navedenog razmatranja, formuliran je problem izmetričnosti familija potprostora, odnosno problem invarijantnosti spektralnog tipa slučajnog procesa u odnosu na linearnu transformaciju.

Dokazi poznatih rezultata uglavnom nisu navedeni, ali je navedeno gdje se mogu naći u literaturi. No, rezultati čiji su dokazi navedeni, originalni su u cijelosti ili u jednom dijelu.

GLAVA I

CRAMEROVA REPREZENTACIJA I SPEKTRALNI TIP SLUČAJNOG PROCESA

§I.1. Osnovni pojmovi i definicije

Ovdje ćemo promatrati kompleksno vrijednosne slučajne varijable x, y, ..., definirane nad istim vjerojatnosnim prostorom $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, koje zadovoljavaju uvjete

$$E(x) = 0, \quad E(|x|^2) < \infty,$$

s tim što nećemo razlikovati varijable x i y ako je

$$P\left\{\omega \in \Omega : x(\omega) = y(\omega)\right\} = 0.$$

Skup svih ovakvih slučajnih varijabli tvorit će Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ ako se skalarni produkt (x,y), norma $\|x\|$ i rastojanje $d(x,y)$ izmedju elemenata $x,y \in \mathcal{H}$ definiraju na ovaj način:

$$(1.1) \quad (x,y) = E(x\bar{y}), \ \|x\| = \sqrt{E(|x|^2)}, \ d(x,y) = \|x-y\| .$$

Pod konvergencijom niza slučajnih varijabli $x_1, x_2, \ldots,$ u $\mathcal{H}$ podrazumjevat ćemo uvijek konvergenciju po normi:

$$x_n \to x \text{ kad } n \to \infty \text{ znači da } \|x_n - x\| \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

U terminologiji teorije vjerojatnosti ovoj konvergenciji odgovara konvergencija u srednjem kvadratnom:

$$E(|x_n - x|^2) \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

U ovom radu, nadalje, promatrat ćemo samo slučajne procese $\left\{x(t) \ ; \ t \in I\right\}$, $I = \left[t_0, +\infty\right>$, drugog reda, tj. takve procese u kojih je

(1.2) $E(x(t)) = 0$ i $E(|x(t)|^2) < +\infty$ za svako $t \in I$.

Za slučajne procese $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t);\ t \in I\}$ kazat ćemo da su uzajamno ortogonalni ako je

$$E(x(t)\ \overline{y(s)}) = (x(t),\ y(s)) = 0 \quad \text{za sve } t,s \in I.$$

Sa $\mathcal{H}_t(x)$ označavat ćemo najmanji potprostor prostora $\mathcal{H}$, koji je generiran slučajnim varijablama $x(u)$ za $t_o \leqslant u \leqslant t$, gdje je t proizvoljno fiksiran realan broj iz $I = [t_o,\ +\infty\rangle$, tj. $\mathcal{H}_t(x)$ je zatvorenje, u odnosu na normu definiranu sa (1.1), skupa svih linearnih kombinacija $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk}\ x(t_{nk})$, gdje su koeficijenti c_{nk} kompleksni brojevi, a $t_{nk} < t$ i $n \in N$. Dakle,

$$\mathcal{H}_t(x) = \overline{\mathcal{L}}\{x(u);\ u \in [t_o,\ t]\}.$$

Stoga je $\mathcal{H}_t(x)$ Hilbertov prostor za svako $t \in I$.

Uvedimo sada ove oznake:

$$\mathcal{H}_{t_o}(x) = \bigcap_{t \in I} \mathcal{H}_t(x), \quad \mathcal{H}_\infty(x) = \mathcal{H}(x), \quad \mathcal{H}_{t+o}(x) = \bigcap_{h > o} \mathcal{H}_{t+h}(x)$$

$$\mathcal{H}_{t-o}(x) = \overline{\mathcal{L}}\{\ x(u);\ u \in [t_o,\ t\rangle\}.$$

Za svako fiksno $t \in I$, $x(t)$ je očigledno slučajna varijabla koja pripada prostoru $\mathcal{H}$. Stoga se slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ može interpretirati kao krivulja K u prostoru $\mathcal{H}$.

Najmanji potprostor prostora $\mathcal{H}$ u kojem je sadržana cijela krivulja K je prostor $\mathcal{H}(x)$, a $\mathcal{H}_t(x)$ je najmanji potprostor od $\mathcal{H}$ u kojem je onaj luk krivulje K koji je generiran slučajnim varijablama $x(u)$ kada je $t_o \leqslant u \leqslant t$.

Interpretacijom parametra t kao vremena možemo reći da $\mathcal{H}_t(x)$ predstavlja "prošlost i sadašnjost" odgovarajućeg procesa $\{x(t),\ t \in I\}$ s gledišta trenutka t, a za $\mathcal{H}_{t_o}(x)$ možemo reći da predstavlja "krajnju prošlost" odgovarajućeg procesa.

Jasno je da potprostor $\mathcal{H}_t(x)$ nikada ne opada kada parametar t raste i da je

$$\mathcal{H}_{t_0}(x) \subseteq \mathcal{H}_{t_1}(x) \subseteq \mathcal{H}_{t_2}(x) \subseteq \mathcal{H}(x) \subset \mathcal{H} , \quad t_0 < t_1 < t_2 < \infty.$$

Ako je za neko $t \in I$

(1.3) $\mathcal{H}_{t-h}(x) \neq \mathcal{H}_{t-h}(x)$ za svako $h > 0$,

onda, s obzirom na danu interpretaciju prostora $\mathcal{H}_t(x)$, možemo reći da slučajni proces $\{x(t); \quad t \in I\}$ dobija nove impulse ili inovacije u svakom vremenskom intervalu $\langle t-h, t-h \rangle$, $h > 0$. Skup svih točaka $t \in I$ za koje je zadovoljena relacija (1.3), tj. skup

$$\{t \in I: \mathcal{H}_{t-h}(x) \neq \mathcal{H}_{t+h}(x) \quad \text{za svako } h > 0\},$$

naziva se inovacijski spektar slučajnog procesa $\{x(t); \quad t \in I\}$.

Ako su sve informacije o razvoju slučajnog procesa $\{x(t); \quad t \in I\}$ sadržane u njegovoj "krajnjoj prošlosti", onda je

(1.4) $$\mathcal{H}_{t_0}(x) = \mathcal{H}_t(x) \text{ za svako } t \in I.$$

Takav proces nema inovacijskog spektra i naziva se deterministički proces. Ako jednakost (1.4) ne vrijedi bar za jedno $t \in I$, onda se proces naziva nedeterministički.

Posebno ako je $\mathcal{H}_{t_0}(x) = 0$, dakle ako "krajnja prošlost slučajnog procesa $\{x(t); \quad t \in I\}$ ne sadrži nikakvu informaciju o njegovom razvoju, takav proces se naziva potpuno nedeterministički proces.

Budući da nas ovdje zanima problem evolucije prostora $\mathcal{H}_t(x)$ s porastom parametra $t \in I$, odnosno iznalaženje inovacijskog spektra procesa $\{x(t); t \in I\}$, nisu nam uopće interesantni deterministički procesi. Osim toga, pošto se svaki slučajni proces $\{x(t); \quad t \in I\}$ drugog reda može prikazati kao zbroj dva uzajamno ortogonalna procesa

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \text{ za svako } t \in I,$$

pri čemu je $\{x_1(t);\ t \in I\}$ potpuno nedeterministički a $\{x_2(t);\ t \in I\}$ deterministički proces ([7]), pri izučavanju gore formuliranog problema mogu se promatrati samo nedeterministički procesi. Stoga je opravdan ovaj uvjet.

(A) Slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ je potpuno nedeterministički.

Pored ovog uvjeta, u daljnjem radu uzimat ćemo da je

(B) slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ neprekidan slijeva, tj. da je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t-\varepsilon) = x(t-0) = x(t) \quad \text{za svako } t \in I.$$

Iz uvjeta (B) slijedi da je odgovarajući prostor $\mathcal{H}(x)$ separabilan i da je familija potprostora $\{\mathcal{H}_t(x);\ t \in I\}$ neprekidna slijeva, tj. da je $\mathcal{H}_{t-0}(x) = \mathcal{H}_t(x)$ za svako $t \in I$.

Na kraju ovog paragrafa navodimo još neke pojmove. Neprekidni slijeva slučajni proces $\{z(t);\ t \in I\}$ je proces s ortogonalnim (nekoreliranim) prirastima ako je

$$E([z(t_4) - z(t_3)] \cdot \overline{[z(t_2) - z(t_1)]}) = 0$$

za sve $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$.

Polazeći od ovog procesa definirajmo neslučajnu funkciju $F: I \to R$ preko formule:

$$F(t) = E(|z(t) - z(t_0)|^2) = E(|z(t)|^2), \text{ jer je } z(t_0) = 0.$$

Može se pokazati da je funkcija F nenegativna, neopadajuća i neprekidna slijeva i da je

$$F(t+\Delta t) - F(t) = E(|z(t+\Delta t) - z(t)|^2)$$

([7]). Posljednju jednakost kratko ćemo zapisati ovako:

$$dF(t) = E(|dz(t)|^2)$$

Ovako definirana funkcija $F : I \to R$ je strukturna funkcija procesa $\{z(t);\ t \in I\}$ s ortogonalnim prirastima.
Wienerov proces $\{W(t);\ 0 \leq t \leq 1\}$ je specijalni oblik procesa s ortogonalnim prirastima jer je

$$dF(t) = E(|dW(t)|^2) = dt.$$

Stohastički integral

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t)dz(t),$$

gdje je $\{z(t);\ t \in I\}$ proces s ortogonalnim prirastima, a g neslučajna kompleksno-vrijednosna funkcija takva da je

$$\int_{t_0}^{\infty} |g(t)|^2 dF(t) < \infty,$$

bit će razmatran u smislu Dooba ([8], gl. IX).

§1.2. Inovacijski proces

Prije nego što pristupimo rješavanju evolucije potprostora $\mathcal{H}_t(x)$ s porastom parametara $t \in I$, tj. problemu iznalaženja inovacijskog procesa za ma koji slučajni proces drugog reda, korisno je razmotriti ovaj problem za slučajne procese s ortogonalnim prirastima.
Dakle, neka je $\{z(t);\ t \in I\}$ slučajni proces s ortogonalnim prirastima. Odgovarajući Hilbertov prostor $\mathcal{H}(z)$ sastoji se od svih slučajnih varijabli W koje se mogu predstaviti u obliku stohastičkog integrala:

$$W = \int_{t_0}^{\infty} g(t)dz(t),$$

pri čemu kompleksno vrijednosna neslučajna funkcija $g : I \to C$ zadovoljava uvjet

$$\int_{t_0}^{\infty} |g(t)|^2 dF(t) < \infty. \tag{2.1}$$

Neka je $\mathcal{L}_2(dF;\, I)$ Hilbertov prostor svih kompleksno vrijednosnih neslučajnih funkcija $g : I \to C$, koje zadovoljavaju uvjet (2.1), sa skalarnim produktom

$$(g_1,\, g_2) = \int_{t_0}^{\infty} g_1(t)\, \overline{g_2(t)}\, dF(t)\ , \qquad g_1,\, g_2 \in \mathcal{L}_2(dF;\, I).$$

Nadalje, neka je $\mathcal{L}_2(dF;\, t)$ potprostor prostora $\mathcal{L}_2(dF;\, I)$ koji se sastoji od svih funkcija $g \in \mathcal{L}_2(dF;\, I)$ koje su jednake nuli izvan intervala $[t_0,\, t\rangle$, tj. neka je

$$\mathcal{L}_2(dF;\, t) = \left\{ g(u) \in \mathcal{L}_2(dF;\, I) \ :\ g(u) \equiv 0 \text{ za } u \geq t \right\} \subset \mathcal{L}_2(dF;\, I)$$

Budući da se potprostor $\mathcal{H}_t(z)$ prostora $\mathcal{H}(z)$ sastoji od svih slučajnih varijabli W oblika:

$$(2.2) \qquad W = \int_{t_0}^{t} g(u)\, dz(u), \quad t_0 < t < \infty,$$

pri čemu je $\int_{t_0}^{t} |\, g(u)|^2\, dF(u) < \infty$ i $g(u) \equiv 0$ za $u \geq t$, neposredno slijedi da je $\mathcal{H}_t(z)$ unitarno izomorfan s potprostorom $\mathcal{L}_2(dF;\, t)$. Ovo praktično znači da je familija potprostora $\{\mathcal{H}_t(z);\ t \in I\}$ organizirana na isti način kao i familija potprostora $\{\mathcal{L}_2(dF;\, t)\ ;\ t \in I\}$.

Sada na temelju opće poznate činjenice da je evolucija potprostora $\mathcal{L}_2(dF;\, t)$ s porastom parametara $t \in I = [t_0, \infty\rangle$ u potpunosti okarakterizirana funkcijom $u \mapsto F(u)$, $u \in I$, slijedi odgovor na gore postavljeno pitanje:

Evolucija potprostora $\mathcal{H}_t(z)$ s porastom parametara $t \in I$ u potpunosti je okarakterizirana strukturnom funkcijom $t \mapsto F(t) = E(|z(t)|^2)$, $t \in I$, slučajnog procesa $\{z(t);\ t \in I\}$.

Zadaća o evoluciji potprostora $\mathcal{H}_t(x)$ s porastom parametara $t \in I$ za proizvoljni slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ očigledno bi bila riješena kada bi uspijeli konstruirati takve medjusobne ortogonalne procese $\{z_n(t);\ t\in I\}$, $n=\overline{1,M}$, $M\leq\infty$, s ortogonalnim prirastima da se potprostor $\mathcal{H}_t(Z)=\sum_{n=1}^{M}\oplus\,\mathcal{H}_t(z_n)$, M - dimenzionalnog slučajnog procesa $\{Z(t)=(z_n(t))_{n=\overline{1,M}};t\in I\}$ podudara s promatranim potprostorom $\mathcal{H}_t(x)$, tj. da je

$$\mathcal{H}_t(Z)=\mathcal{H}_t(x) \quad \text{za svako} \quad t\in I.$$

Doista, iz uzajamne ortogonalnosti procesa $\{z_n(t);\ t\in I\}$ i $\{z_k(t);\ t\in I\}, n\neq k,\ n,k=\overline{1,M}$ slijedila bi medjusobna ortogonalnost odgovarajućih potprostora $\mathcal{H}_t(z_n)\perp\mathcal{H}_t(z_k)$, pa bi se $\mathcal{H}_t(x)$ mogao predstaviti u obliku ortogonalnog zbroja potprostora $\mathcal{H}_t(z_n)$, $n=\overline{1,M}$:

$$\mathcal{H}_t(x)=\sum_{n=1}^{M}\oplus\mathcal{H}_t(z_n).$$

Nadalje, pošto je svaki od potprostora $\mathcal{H}_t(z_n)$, $n=\overline{1,M}$ u potpunosti opisan odgovarajućom strukturnom funkcijom $t\mapsto F_n(t)=E(|z(t)|^2)$, $n=\overline{1,M}$, procesa $\{z_n(t);\ t\in I\}$ s ortogonalnim prirastima, to bi potprostor $\mathcal{H}_t(x)$ bio u potpunosti okarakteriziran funkcijom $t\mapsto F(t)=E(Z(t)Z^*(t))=\left(F_{nk}(t)\right)_{n=\overline{1,M}}^{k=\overline{1,M}}$.

<u>Definicija 2.1</u> ([26]). Slučajni M-dimenzionalni proces $\{Z(t)=(z_n(t))_{n=\overline{1,M}};\ t\in I\}$, čije su komponente uzajamno ortogonalni procesi s ortogonalnim prirastima, naziva se inovacijski proces slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ ako je

$$\mathcal{H}_t(x)=\mathcal{H}_t(Z)=\sum_{n=1}^{M}\oplus\,\mathcal{H}_t(z_n) \quad \text{za svako} \quad t\in I.$$

Matrična funkcija definirana izrazom:

$$F(t)=E\big(Z(t)\,Z^*(t)\big)=\begin{pmatrix} F_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_M(t)\end{pmatrix},\ t\in I$$

zove se strukturna funkcija inovacijskog procesa $\{Z(t);\ t\in I\}$.

Na temelju ove definicije i prethodnog razmatranja slijedi da je za rješenje zadaće o evoluciji potprostora $\mathcal{H}_t(x)$, $t \in I$, potrebno odrediti inovacijski proces slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$.Da postoji inovacijski proces za svaki slučajni proces drugog reda, koji zadovoljava uvjete (A) i (B), bit će pokazano konstrukcijom tog procesa.

No, prije nego što pristupimo toj konstrukciji, korisno je razmotriti operator $P_{\mathfrak{M}}$ ortogonalnog projiciranja s prostora $\mathcal{H}(x)$ na proizvoljni potprostor $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}(x)$. Ako je $\mathfrak{M} = \mathcal{H}_t(x)$ taj operator ćemo označavati sa P_t. Dakle,

$$P_t = P_{\mathcal{H}_t(x)} : \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}_t(x), \quad t \in I.$$

Iz definicije i ranije navedenih svojstava familije $\{\mathcal{H}_t(x);\ t \in I\}$ neposredno proizlazi da je:

(a) $P_t\, P_s = P_{\min\{s,t\}}$ za sve $t, s \in I$;

(b) $P_{t-o} = P_t$ za svako $t \in \langle t_o, +\infty\rangle$;

(c) $P_{t_o} = 0$ (0 je nul operator);

(d) $P_\infty = P_{\mathcal{H}(x)} = I$ (I je operator identiteta).

Izravno iz ovih svojstava operatora P_t slijedi da je inovacijski spektar slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ skup onih vrijednosti $t \in I$ za koje je $P_{t+h} - P_{t-h} > 0$, za svako $h > 0$. Takodjer je očigledno da je $P = \{P_t : t \in I\}$ spektralna familija, odnosno, u terminologiji spektralne teorije linearnih operatora, P je dekompozicija jedinice prostora $\mathcal{H}(x)$, ([1]).

Za proizvoljni element $z \in \mathcal{H}(x)$ definirajmo slučajni proces $\{z(t);\ t \in I\}$ pomoću jednakosti

$$z(t) = P_t z\ , \quad t \in I.$$

Na osnovi svojstava operatora P_t neposredno se može zaključiti da je:

$z(t_o) = 0$, $z(\infty) = P_\infty z = P_{\mathcal{H}(x)} z = z$, $E(z(t)) = 0$, $E(|z(t)|^2) < \infty$ za svako $t \in I$.

Takodjer, slijedi da je $\{z(t);\ t \in I\}$ proces s ortogonalnim prirastima i da je

$$F(t) = E(|z(t)|^2) = \|z(t)\|^2, \quad t \in I,$$

strukturna funkcija tog procesa.

Sada možemo preći na konstrukciju inovacijskog procesa za proizvoljni slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$.

Prvo odaberimo proizvoljni nenula element z_1 u prostoru $\mathcal{H}(x)$, a zatim formirajmo proces s ortogonalnim prirastima $\{z_1(t) = P_t z_1;\ t \in I\}$ i potprostor $\mathcal{H}(z_1) = \overline{\mathcal{L}}\{z_1(t);\ t \in I\} \subseteq \mathcal{H}(x)$.

Ako je $\mathcal{H}(z_1) \neq \mathcal{H}(x)$, onda izaberimo drugi nenula element $z_2 \in \mathcal{H}(x)$ koji je ortogonalan na potprostor $\mathcal{H}(z_1)$. Dakle, $z_2 \in \mathcal{H}(x) \ominus \mathcal{H}(z_1)$. Pomoću njega konstruirajmo proces s ortogonalnim prirastima $\{z_2(t) = P_t z_2;\ t \in I\}$ i potprostor $\mathcal{H}(z_2) = \overline{\mathcal{L}}\{z_2(t);\ t \in I\}$. Budući da z_1 i $z_2 \in \mathcal{H}(x)$ i da je $z_2 \perp \mathcal{H}(z_1)$, to se na temelju invarijantnosti potprostora $\mathcal{H}(z_1)$ i $\mathcal{H}(x) \ominus \mathcal{H}(z_1)$, u odnosu na familiju operatora $P = \{P_t;\ t \in I\}$(*), dokazuje da su procesi $\{z_1(t);\ t \in I\}$ i $\{z_2(t);\ t \in I\}$ uzajamno ortogonalni (vidi npr. [30] VII, § 2).

Jasno da je $\mathcal{H}(z_1) \oplus \mathcal{H}(z_2) \subseteq \mathcal{H}(x)$.

Ako je $\mathcal{H}(z_1) \oplus \mathcal{H}(z_2) \neq \mathcal{H}(x)$, onda se nastavlja konstrukcija po shemi: ako je $\mathcal{H}(z_1) \oplus \mathcal{H}(z_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}(z_{n-1}) \neq \mathcal{H}(x)$, $n = 2,3, \dots$, treba odabrati takav nenula element $z_n \in \mathcal{H}(x)$ da je $z_n \perp \mathcal{H}(z_k)$ za svako $k = \overline{1,n-1}$ i konstruirati proces s orto-

---

(*) Potprostor $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$ je invarijantan u odnosu na linearni operator $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ako je $A\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$, što znači da za svako $x \in \mathfrak{M}$ proizlazi da i $Ax \in \mathfrak{M}$.

gonalnim prirastima $\{z_n(t) = P_t z_n;\ t \in I\}$, odnosno potprostor $\mathcal{H}(z_n) = \overline{\mathcal{L}}\{z_n(t);\ t \in I\}$. Zatim treba pokazati da je $z_n(t) \perp z_k(s)$ za sve $t,s \in I$ i $k = \overline{1,N-1}$, a iz toga izravno proizlazi da je $\mathcal{H}(z_n) \perp \mathcal{H}(z_k)$ za svako $k = \overline{1,n-1}$.

Jasno da se postupak odabiranja novih elemenata iz $\mathcal{H}(x)$ prekida onog momenta kada dobijamo da je $\sum_{n=1}^{M} \oplus \mathcal{H}(z_n) = \mathcal{H}(x)$. Pošto je prostor $\mathcal{H}(x)$ separabilan, to je $M \le +\infty$.

Opisanim postupkom, na taj način, konstruirali smo niz slučajnih procesa s ortogonalnim prirastima $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,M}};\ t \in I\}$ i niz potprostora $\mathcal{H}(z_n)$, $n = \overline{1,M}$ i pokazali da je:

$z_n(t) \perp z_k(s)$ za sve $t,s \in I$, $k=\overline{1,n-1}$, $n = \overline{2,M}$,

$\mathcal{H}(z_n) \perp \mathcal{H}(z_k)$ za svako $k = \overline{1,n-1}$, $n=\overline{2,M}$, i $\sum_{n=1}^{M} \oplus \mathcal{H}(z_n) = \mathcal{H}(x)$.

Pošto je za fiksno $t \in I$ $P_{t+h}z_n - P_t z_n \perp \mathcal{H}_t(x)$ za svako $h>0$ i $n=\overline{1,M}$ i pošto je potpun u prostoru $\mathcal{H}(x)$ sustav slučajnih varijabli $P_s z_n$, $s \in [t_o,t]$, $n=\overline{1,M}$, odnosno $P_{t+h}z_n - P_t z_n$, $h>0$ i $n=\overline{1,M}$, to je takodjer u potprostoru $\mathcal{H}_t(x)$ potpun sustav varijabli $P_s z_n$, $s \in [t_o,t]$, $n=\overline{1,M}$. Stoga je

(2.3) $\qquad \mathcal{H}_t(Z) = \sum_{n=1}^{M} \oplus \mathcal{H}_t(z_n) = \mathcal{H}_t(x)$ za svako $t \in I$.

Prema tome, $\{Z(t);\ t \in I\}$ je inovacijski proces slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$. Strukturna funkcija tog procesa odredjena je jadnakošću:

$$(2.4)\quad F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(t) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & F_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|z_1(t)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|z_2(t)\|^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \|z_M(t)\|^2 \end{pmatrix}$$

Budući da se svaki potprostor $\mathcal{H}(z_n) \subset \mathcal{H}(x)$ sastoji od slučajnih varijabli oblika $W_n = \int_{t_o}^{\infty} g_n(u)dz_n(u)$, pri čemu neslučajna funkcija g_n zadovoljava uvjet $\int_{t_o}^{\infty} /g_n(u)/^2 dF_n(u) < \infty$ i pošto je $\mathcal{H}(x) = \sum_{n=1}^{M} \mathcal{H}(z_n)$, proizlazi da se prostor $\mathcal{H}(x)$ sastoji od onih slučajnih varijabli W koje se mogu prikazati u obliku integrala,

$$(2.5) \quad W = \sum_{n=1}^{M} \int_{t_o}^{\infty} g_n(u)\, dz_n(u)$$

gdje neslučajne funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_M$ zadovoljavaju uvjet

$$(2.6) \quad \sum_{n=1}^{M} \int_{t_o}^{\infty} |g_n(u)|^2 dF_n(u) < \infty.$$

Nadalje kako je

$$P_t W = \sum_{n=1}^{M} \int_{t_o}^{t} g_n(u)\, dz_n(u) \quad \text{za svako} \quad t \in I,$$

što neposredno slijedi iz jednakosti (2.2) (2.3) i (2.5), proizlazi da se potprostor $\mathcal{H}_t(x) = P_t\mathcal{H}(x)$ sastoji od slučajnih varijabli oblika

$$W' = \sum_{n=1}^{M} \int_{t_o}^{t} g_n(u) dz_n(u)$$

s tim da je

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{t_o}^{t} |g_n(u)|^2 dF_n(u) < \infty \text{ i } \quad g_n(u) \equiv 0 \text{ za } u \geqslant t \in I \text{ i svako } n = \overline{1,M}\ .$$

Neka je $\mathcal{L}_2(dF;\ I)$ Hilbertov prostor svih kompleksno vrijednosnih jednoretčanih matričnih funkcija $g(t) = (g_n(t))^{n=\overline{1,M}}$, $t \in I$, koje zadovoljavaju uvjet (2.6), u kojem je skalarni produkt definiran jednakošću:

$$(g^{(1)}, g^{(2)}) = \sum_{n=1}^{M} \int_{t_o}^{\infty} g_n^{(1)}(u)\ \overline{g_n^{(2)}(u)}\ dF_n(u),$$

$$g^{(1)}(u) = (g_n^{(1)}(u))^{n=\overline{1,M}} \in \mathcal{L}_2(dF\ ;\ I),$$

$$g^{(2)}(u) = (g_n^{(2)}(u))^{n=1,M} \in \mathcal{L}_2(dF;\ \ I),$$

dF je mjera definirana strukturnom funkcijom (2.4).

Nadalje, neka je $\mathcal{L}_2(dF\ ;\ t)$, $t \in I$, potprostor tog prostora koji je definiran na ovaj način:

$$\mathcal{L}_2(dF;\ t) = \{g(u) = (g_n(u))^{n=\overline{1,M}} \in \mathcal{L}_2(dF;\ I): g(u) \equiv 0 \text{ za } u \geq t \in I\}.$$

Na temelju prethodnog razmatranja da se neposredno zaključiti da su prostori $\mathcal{H}_t(x)$ i $\mathcal{L}_2(dF;\ t)$ za svako $t \in I$ unitarno izomorfni, a to, grubo govoreći, znači da su familije $\{\mathcal{H}_t(x); t \in I\}$ i $\{\mathcal{L}_2(dF;\ t);\ t \in I\}$ istog tipa. Prema tome evolucija potprostora $\mathcal{H}_t(x)$ s porastom parametra $t \in I$ u potpunosti je odredjena strukturnom funkcijom (2.4).

Slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ može se prikazati u obliku:

(2.7) $$x(t) = \sum_{n=1}^{M} \int_{t_0}^{t} g_n(t,u)\ dz_n(u)\ ,\quad t \in I,$$

pri čemu je $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,M}}\ ;\ t \in I\}$ inovacijski proces tog procesa sa strukturnom funkcijom (2.4), a

$$(g_n(t,u))^{n=\overline{1,M}} \in \mathcal{L}_2(dF;\ t),$$

što neposredno slijedi iz (2.7).

Napomena: Ako bi reprezentacija (2.7) bila kanonska (vidi § 1.4, def.4.1) mogla bi se riješiti jedna od najvažnijih zadaća korelacijske teorije slučajnih procesa, a to je problem linearne prognoze odnosno linearne filtracije, koji se sastoji u pronalaženju takve slučajne varijable $\hat{x}(s,t), s \in [t_0, t\rangle$ da je

$$E(|x(t) - \hat{x}(s,t)|^2) \quad \text{minimalno.}$$

Posljednji uvjet bit će zadovoljen, kao što je poznato, ako je

$$\hat{x}(s,t) = P_s x(t),\quad s \in [t_0, t\rangle,$$

gdje je $P_s : \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}_s(x)$ operator ortogonalnog projekciranja. Njegovo opisivanje upravo omogućava kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ budući da je po definiciji te reprezentacije

$$P_s x(t) = \sum_{n=1}^{M} \int_{t_0}^{s} g_n(t,u)\ dz_n(u) \text{ za svako } s \in [t_0,\ t\rangle,\quad t \in I.$$

Pri toj prognozi učinjena greška dana je izrazom:

$$E(|x(t)-\hat{x}(s,t)|^2) = \sum_{n=1}^{M} \int_{s}^{t} |g_n(t,u)|^2 \, dF_n(u).$$

Stoga, s točke gledišta primjene, najvažnije bi bilo riješiti pitanje efektivnih metoda konstrukcija linearnih transformacija koje bi povezivale slučajne procese $\{x(t); \ t \in I\}$ i $\{Z(t); \ t \in I\}$, a naročito efektivne metode konstrukcije kanonske reprezentacije slučajnog procesa. Medjutim, na teoretskom planu veći interes predstavlja pitanje o tome kako odrediti tip inovacijskog procesa $\{Z(t)=(Z_n(t))_{n=\overline{1,M}} \ ; \ t \in I\}$ ili kako ga usporediti s nekim zadanim tipom, znajući korelacijsku funkciju slučajnog procesa $\{x(t); \ t \in I\}$. Ovu problematiku razmatrat ćemo u slijedeća dva paragrafa.

§ I.3. Spektralni tip slučajnog procesa

Da bismo odgovorili na pitanje: što je to spektralni tip slučajnog procesa $\{x(t); \ t \in I\}$ i kako se on može odrediti, korisno je prethodno navesti neke poznate činjenice iz teorije "spektralnih tipova" i prilagoditi ih našim potrebama.

Kao što je rečeno u § 1.2, familija P operatora P_t : $\mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}_t(x)$ predstavlja dekompoziciju jedinice u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}(x)$.

Neka je $\Delta P_t = P_{t+\Delta t} - P_t$, a $\mathcal{B}$ familija Borelovih skupova na I.

Za proizvoljni element $z \in \mathcal{H}(x)$ funkcijom oblika

$$\rho_z(B) = \left\| \int_B dP_t z \right\|^2 , \ B \in \mathcal{B} ,$$

definirana je mjera na I. Nadalje, neka je

$$\mathcal{M} = \left\{\rho_z(\cdot) \;:\; z \in \mathcal{H}(x)\right\}.$$

U skupu $\mathcal{M}$ uvedimo uredjenje pomoću relacije podredjenosti na ovaj način:

Za mjeru $\rho_{z_1}(\cdot)$ iz $\mathcal{M}$ kazat ćemo da je podredjena mjeri $\rho_{z_2}(\cdot)$ iz $\mathcal{M}$ ako je mjera $\rho_{z_1}(\cdot)$ apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru $\rho_{z_2}(\cdot)$, tj. ako jednakost $\rho_{z_1}(E) = 0$ vrijedi za svaki Borelov skup $E \in \mathcal{B}$ za koji je $\rho_{z_2}(E) = 0$.

Podredjenost mjere $\rho_{z_1}(\cdot)$ mjeri $\rho_{z_2}(\cdot)$ obilježavat ćemo na ovaj način $\rho_{z_1}(\cdot) \prec \rho_{z_2}(\cdot)$ ili ovako $\rho_{z_2}(\cdot) \succ \rho_{z_1}(\cdot)$.

Za mjere $\rho_{z_1}(\cdot)$ i $\rho_{z_2}(\cdot)$ reći ćemo da su ekvivalentne ($\rho_{z_1}(\cdot) \sim \rho_{z_2}(\cdot)$) ako je istodobno $\rho_{z_1}(\cdot) \prec \rho_{z_2}(\cdot)$ i $\rho_{z_2}(\cdot) \prec \rho_{z_1}(\cdot)$.

Očigledno da je "$\sim$" relacija ekvivalencije u skupu $\mathcal{M}$. Prema tome postoji skup $\mathcal{M}/\sim$ klasa ekvivalentnih mjera.

Spektralni tip je jedna klasa ekvivalentnih mjera, tj. element skupa $\mathcal{M}/\sim$. Sa ρ_z označavat ćemo spektralni tip koji je determiniran mjerom $\rho_z(\cdot)$, a za svaku mjeru koja generira spektralni tip ρ_z reći ćemo da pripada tom tipu. Relacija podredjenosti mjera $\rho_{z_1}(\cdot)$ i $\rho_{z_2}(\cdot)$ prenosi se i na odgovarajuće spektralne tipove i oznaka $\rho_{z_1} < \rho_{z_2}$ ima prirodno značenje.

Ako je E skup mjere nula u odnosu na mjeru $\rho_z(\cdot)$ koja pripada spektralnom tipu ρ_z, tada je E skup mjere nula i u odnosu na bilo koju drugu mjeru koja pripada spektralnom tipu ρ_z. Prema tome, familija $\mathcal{M}_{\rho_z}$ skupova mjere nula u odnosu na mjeru $\rho_z(\cdot)$ jednoznačno je odredjena odgovarajućim spektralnim tipom ρ_z. Vrijedi i obrat, naime, spektralni tip ρ_z jednoznačno je odredjen familijom $\mathcal{N}_{\rho_z}$, pošto različitim spektralnim tipovima odgovaraju različite familije skupova mjere nula. Na temelju ovih zaključaka lako je pokazati ([15]):

a) Zbrojem mjera $\rho_{z_1}(\cdot)$ i $\rho_{z_2}(\cdot)$, koje pripadaju različitim spektralnim tipovima ρ_{z_1} i ρ_{z_2} iz $\mathcal{M}/\sim$, jednoznačno je odredjen najmanji spektralni tip ρ_z iz $\mathcal{M}/\sim$, kojem su podredjeni i ρ_{z_1} i ρ_{z_2}. Dakle, ako je $\rho_z(\cdot) = \rho_{z_1}(\cdot) + \rho_{z_2}(\cdot)$, tada je $\rho_z = \sup\left\{\rho_{z_1}, \rho_{z_2}\right\}$, tj. $\rho_{z_1} < \rho_z$ i $\rho_{z_2} < \rho_z$ i ako je $\rho_{z'}$ neki spektralni tip za koji je $\rho_{z_1} < \rho_{z'}$ i $\rho_{z_2} < \rho_{z'}$, tada je $\rho_z < \rho_{z'}$.

b) Proizvoljni najviše prebrojiv skup $\left\{\rho_{z_1}, \rho_{z_2}, \dots\right\}$ spektralnih tipova iz $\mathcal{M}/\sim$ ima supremum, što znači da postoji u $\mathcal{M}/\sim$ elemenat ρ_z takav da je $\rho_z = \sup\left\{\rho_{z_1}, \rho_{z_2}, \dots\right\}$.
Pošto je po pretpostavci prostor $\mathcal{H}(x)$ separabilan, to na osnovu posljednjeg tvrdjenja zaključujemo da u skupu $\mathcal{M}/\sim$ postoji maksimalni element. U skupu $\mathcal{M}/\sim$ postoji takodjer najmanji element, a to je spektralni tip koji je identično jednak nuli na I.

c) Maksimalni spektralni tip ρ_z, koji je podredjen svakom elementu skupa $\left\{\rho_{z_1}, \rho_{z_2}, \dots\right\}$ spektralnih tipova iz $\mathcal{M}/\sim$ očigledno postoji. Takav tip označavati ćemo sa

$$\rho_z = \inf\left\{\rho_{z_1}, \rho_{z_2}, \dots\right\} .$$

d) Za dva spektralna tipa ρ_{z_1} i ρ_{z_2} iz $\mathcal{M}/\sim$ kazati ćemo da su ortogonalna (nezavisna) onda i samo onda ako je

$$\inf\left\{\rho_{z_1},\ \rho_{z_2}\right\} = 0.$$

Vraćajući se sada našem osnovnom zadatku, odaberimo proizvoljni element $z \in \mathcal{H}(x)$ i formirajmo slučajni proces s ortogonalnim prirastima pomoću jednakosti:

$$z(t) = P_t z, \quad t \in I.$$

Strukturna funkcija $F_z(t) = \|z(t)\|^2 = E(|P_t z|^2)$, $t \in I$, procesa $\{z(t);\ t \in I\}$ inducira mjeru $dF_z(\cdot)$ na I. Spektralni tip kojem pripada ta mjera označavat ćemo sa dF_z i reći da je generiran elementom $z \in \mathcal{H}(x)$.

Neka je $\mathcal{H}(z)$ zatvoreni linearni omotač svih slučajnih varijabli $P_t z$, $t \in I$:

$$\mathcal{H}(z) = \overline{\mathcal{L}}\left\{P_t z;\ t \in I\right\}.$$

Potprostor $\mathcal{H}(z) \subset \mathcal{H}(x)$ sastoji se od svih slučajnih varijabli W koje imaju oblik

$$W = \int_{t_0}^{\infty} g(u)dz(u),$$

pri čemu je

$$\int_{t_0}^{\infty} |g(u)|^2 dF_z(u) < \infty \ .$$

Stoga proizvoljni nenula element $y \in \mathcal{H}(z)$ možemo prikazati u obliku stohastičkog integrala

$$y = \int_{t_0}^{\infty} g_0(u)dz(u)\ , \quad g_0(u) \in \mathcal{L}_2(dF_z\ ; I).$$

Pored toga je

$$y(t) = P_t y = \int_{t_0}^{t} g_0(u)dz(u), \quad \text{za} \quad t \in I.$$

$\{y(t) = P_t y\ ;\ t \in I\}$ je proces s ortogonalnim prirastima. Strukturna funkcija tog procesa ima oblik:

$$F_y(t) = \|y(t)\|^2 = \int_{t_0}^{t} |g_0(u)|^2 dF_z(u)\ , \quad t \in I.$$

Nadalje, budući da je $y \in \mathcal{H}(x)$, potprostor

$$\mathcal{H}(y) = \overline{\mathcal{L}}\{y(t) = P_t y \; ; \quad t \in I\}$$

sastoji se od slučajnih varijabli W_1 oblika

$$W_1 = \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)dy(t) = \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)g_0(t)dz(t)$$

pri čemu je

$$\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dF_y(t) = \int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)g_0(t)|^2 dF_z(t) < \infty .$$

Ako sa B označimo nosač mjere $dF_y(.)$, tada je

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)dy(t) = \int_B \varphi(t)dy(t) = \int_B \varphi(t)g_0(t)dz(t).$$

Pošto je $dF_y(t) = |g_0(t)|^2 dF_z(t)$, to je na skupu B $g_0(t) \neq 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru $dF_z(.)$.

Neka je $g(t) = \varphi(t)g_0(t)$ za svako $t \in B$. Tada je

$$W_1 = \int_B g(t)dz(t) \quad i \quad \int_B |g(t)|^2 dF_z(t) < \infty.$$

Iz prethodnog razmatranja proizlazi da su mjere $dF_z(.)$ i $dF_y(.)$ ekvivalentne onda i samo onda ako je nosač mjere $dF_y(.)$ istodobno i nosač mjere $dF_z(.)$. U suprotnom slučaju je $dF_y(.) \propto dF_z(.)$, pa je spektralni tip dF_y koji je generiran elementom $y \in \mathcal{H}(z)$ podredjen spektralnom tipu dF_z koji je generiran elementom $z \in \mathcal{H}(x)$.

Budući da je y proizvoljni element prostora $\mathcal{H}(z)$ i da je $\mathcal{H}(z)$ separabilan prostor, iz gornjeg zaključka proizlazi da je dF_z maksimalni spektralni tip prostora $\mathcal{H}(z)$.

Neka je $\mathfrak{m}$ neki potprostor prostora $\mathcal{H}(x)$ koji je invarijantan u odnosu na familiju operatora $P_t: \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}_t(x)$, $t \in I$.

Element $z_0 \in \mathfrak{m}$ nazivat ćemo maksimalnim elementom potprostora $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{H}(x)$ ako je za svaki drugi element $y \in \mathfrak{m}$ mjera inducirana strukturnom funkcijom $t \mapsto F_y(t) = \|P_t y\|^2$, $t \in I$, apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru induciranu strukturnom funkcijom $t \mapsto F_{z_0}(t) = \|P_t z_0\|^2$, $t \in I$, tj. ako je $dF_y(\cdot) \propto dF_{z_0}(\cdot)$ ([26], § 1.2).

Sada ćemo iskazati dvije tvrdnje u kojima se tvrdi da egzistira maksimalni element i u prostoru $\mathcal{H}(z)$ i u $\mathcal{H}(x)$.

Lema 3.1. ([15] § II.1). Ako je $\{z(t) \; ; \; t \in I\}$ slučajni proces s ortogonalnim prirastima, tada u prostoru $\mathcal{H}(z)$ postoji maksimalni element z_0.

Lema 3.2. ([26]). U Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}(x)$ konstruiranim nad slučajnim procesom $\{x(t) \; ; \; t \in I\}$ postoji maksimalni element z_0 sa spektralnim tipom dF_{z_0}.

Ovdje nećemo dokazivati ove tvrdnje pošto su iste dokazane u citiranim radovima.

Primjedba: Neka je proizvoljna ograničena mjera $dF(.)$ podredjena mjeri koja pripada maksimalnom spektralnom tipu dF_{z_0} u prostoru $\mathcal{H}(x)$. Onda u tom prostoru postoji takav element y da je njegov spektralni tip odredjen mjerom $dF(.)$. Doista, ako je npr.

$$y = \int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{dF(u)}{dF_{z_0}(u)} \right]^{1/2} dz_0(u)$$

gdje je $z_0(u) = P_u z_0$, $u \in I$, tada je $E(|P_t y|^2) = \int_{t_0}^{t} dF(u)$ za svako $t \in I$. To znači da spektralnom tipu, koji je generiran elementom y, pripada mjera $dF(.)$.

U § 1.2. pokazano je da se za svaki slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ može konstruirati inovacijski proces $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,M}};\ t \in I\}$ sa strukturnom funkcijom $t \mapsto F(t)$, $t \in I$, oblika (2.4). Očigledno da tako dobiveni spektralni tipovi $dF_{z_1}, dF_{z_2}, \dots, dF_{z_M}$, koji su generirani elementima $z_1, z_2, \dots, z_M \in \mathcal{H}(x)$, u općem slučaju ne moraju biti medjusobno usporedivi i da kardinalni broj skupa $\{dF_{z_1}, dF_{z_2}, \dots, dF_{z_M}\}$ zavisi od metoda odabiranja elemenata $z_1, z_2, \dots, z_M$. Zbog toga je opravdano upitati se: je li moguće za proizvoljni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ konstruirati inovacijski proces takav da strukturne funkcije njegovih komponenata induciraju mjere koje pripadaju medjusobno usporedivim spektralnim tipovima? Odgovor je pozitivan, što slijedi iz ove tvrdnje:

Teorem 3.1 ([26]). Za svaki slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ koji zadovoljava uvjete (A) i (B) postoji takav inovacijski proces $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,N}};\ t \in I\}$ da su spektralni tipovi koji su generirani elementima $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathcal{H}(x)$ medjusobno usporedivi u ovom smislu:

(3.1) $dF_x : dF_{z_1} > dF_{z_2} > \dots > dF_{z_N}$,

a to praktično znači da je svaka mjera koja pripada spektralnom tipu dF_{z_n}, $n=\overline{2,N}$, apsolutno neprekidna u odnosu na mjere koje pripadaju spektralnim tipovima $dF_{z_1}, dF_{z_2}, \dots, dF_{z_{n-1}}$.

Dokaz. Egzistencija inovacijskog procesa s navedenim svojstvima slijedi iz konstrukcije takvog procesa, koju je moguće izvršiti na gotovo isti način kao što je to učinjeno u § 1.2. Razlika je u tome što se ne uzima bilo koji element z_n iz $\mathcal{H}(x) \ominus \sum_{k=1}^{n-1} \oplus \mathcal{H}(z_k)$, već maksimalni element tog potprostora.

Ukratko izložimo tu konstrukciju.

Neka je z_1 maksimalni element prostora $\mathcal{H}(x)$ i neka je $t \mapsto F_{z_1}(t)$, $t \in I$, strukturna funkcija procesa $\{z_1(t) = P_t z_1; t \in I\}$. Dalje, neka je z_2 maksimalni element potprostora $\mathcal{H}(x) \ominus \mathcal{H}(z_1)$ i $t \mapsto F_{z_2}(t)$, $t \in I$, strukturna funkcija procesa $\{z_2(t) = P_t z_2; \; t \in I\}$. I općenito neka je z_n, $n=\overline{2,N}$ maksimalni element potprostora $\mathcal{H}(x) \ominus \sum_{k=1}^{n-1} \oplus \mathcal{H}(z_k)$ i $t \mapsto F_{z_n}(t)$, $t \in I$, strukturna funkcija procesa $\{z_n(t) = P_t z_n; \; t \in I\}$. Budući da je z_1 maksimalni element prostoroa $\mathcal{H}(x)$ i da je $z_2 \in \mathcal{H}(x) \ominus \mathcal{H}(z_1)$, to je mjera $dF_{z_2}(\cdot)$, koja je inducirana funkcijom $t \mapsto F_{z_2}(t)$, $t \in I$, podredjena mjeri $dF_{z_1}(\cdot)$ induciranoj funkcijom $t \mapsto F_{z_1}(t)$, $t \in I$; stoga je $dF_{z_1} > dF_{z_2}$. Iz potpuno istih razloga proizlazi da je $dF_{z_n}(\cdot) \prec dF_{z_{n-1}}(\cdot)$ pa je $dF_{z_{n-1}} > dF_{z_n}$ za svako $n=\overline{2,N}$.

Dakle, strukturne funkcije $t \mapsto F_{z_1}(t), F_{z_2}(t), \ldots, F_{z_N}(t)$, $t \in I$, komponenata inovacijskog procesa $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,N}} \; ; \; t \in I\}$ induciraju mjere koje pripadaju spektralnim tipovima $dF_{z_1}, dF_{z_2}, \ldots, dF_{z_N}$ medjusobno usporedivim u smislu relacije (3.1).

Q.E.D.

Definicija 3.1. ([15]) . Reprezentacija

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{t} g_n(t,u) \, dz_n(u) \; , \; t \in I \tag{3.2}$$

pri čemu $(g_n(t,u))_{n=\overline{1,N}} \in \mathcal{L}_2(dF_x; t)$ naziva se Cramerova reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t); \; t \in I\}$ ako strukturne funkcije $t \mapsto F_{z_1}(t)$, $F_{z_2}(t)$, $\ldots$, $F_{z_N}(t)$, $t \in I$, komponenata procesa $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,N}} \; ; \; t \in I\}$ induciraju mjere koje pripadaju spektralnim tipovima $dF_{z_1}, \ldots, dF_{z_N}$, uredjenim u smislu (3.1), i ako je

$$\mathcal{H}_t(x) = \mathcal{H}_t(Z) = \sum_{n=1}^{N} \oplus \mathcal{H}_t(z_n) \text{ za svako } t \in I .$$

Niz (3.1) naziva se spektralni tip slučajnog procesa $\{x(t); t \in I\}$, a N multiplicitet procesa.

Iz leme 3.1 i ove definicije proizlazi da svaki slučajni proces $\{z(t);\ t \in I\}$ s ortogonalnim prirastima ima multiplicitet N=1, da je njegov spektralni tip dF_{z_0} generiran maksimalnim elementom prostora $\mathcal{H}(z)$. Posebno istaknimo da Wienerov proces $\{W(t);\ t \in [0,1]\}$, kao specijalni oblik procesa s ortogonalnim prirastima, ima spektralni tip dF_W kojem pripadaju mjere ekvivalentne običnoj L (Lebesqueovoj) mjeri na $[0,1]$, tj. $dF_W = dt$.

Već smo ranije istakli da niz spektralnih tipova dF_{y_1}, $dF_{y_2}, \ldots, dF_{y_M}$ i ako je generiran redom onim elementima $y_1, y_2, \ldots, y_M$ za koje je $\mathcal{H}_t(x) = \sum_{n=1}^{M} \oplus \mathcal{H}_t(y_n)$ za svako $t \in I$, u općem slučaju ne mora da bude i spektralni tip slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$, pošto njegovi članovi ne moraju biti medjusobno usporedivi u smislu relacije (3.1). Medjutim, iz tog niza može se dobiti spektralni tip $dF_x : dF_1 > dF_2 > \ldots > dF_N$ ako se stavi da je:

$$dF_1 = \sup\left\{(dF_{y_k})_{k=\overline{1,M}}\right\} = \sum_{k=1}^{M} dF_{y_k} ,$$

$$dF_2 = \sup\left\{\left(\inf\left\{dF_{y_k},\ dF_{y}\right\}\right)_{k=\overline{1,M-1},\ \ell=\overline{k+1,M}}\right\} = \sum_{k=1}^{M-1}\sum_{\ell=k+1}^{M} dF_{y_k} \cdot dF_{y_\ell} ,$$

$$dF_3 = \sup\left\{\left(\inf\left\{dF_{y_k},\ dF_{y_\ell}\, dF_{y_j}\right\}\right)_{k=\overline{1,M-2},\ \ell=\overline{k+1,M-1},\ J=\overline{\ell+1,M}}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M-2}\sum_{\ell=k+1}^{M-1}\sum_{j=\ell+1}^{M} dF_{y_k} \cdot dF_{y_j} \cdot dF_{y_\ell} ,$$

. . . .

Neposredno iz definicija supremuma i infimuma spektralnih tipova proizlazi da je $dF_1 > dF_2 > dF_3 > \dots$ i da je $N \leq M$. Ako je $\inf \{dF_{y_1}, dF_{y_2}, \dots, dF_{y_M}\} \neq 0$, onda je $N=M$ i pri tome je

$$dF_N = \inf \{(dF_{y_1}, dF_{y_2}, \dots, dF_{y_M}\} = \bigcap_{k=1}^{M} dF_{y_k}.$$

Kada je $\inf \{dF_{y_1}, dF_{y_2}, \dots, dF_{y_M}\} = 0$, onda je $N < M$.

Posebno, ako su spektralni tipovi $dF_{y_1}, dF_{y_2}, \dots, dF_{y_M}$ u parovima okomiti, tj. ako je $\inf \{dF_{y_k}, dF_{y_\ell}\} = 0$ za sve $k=\overline{1,M-1}$ i $\ell=\overline{k+1,M}$ onda je $N=1$.

Iz dosadašnjeg razmatranja proizlazi da niz elemenata $z_1, z_2, \dots, z_N$ iz $\mathcal{H}(x)$, kojim je generiran spektralni tip slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ nije jednoznačno odredjen. No, spektralni tip tog procesa u potpunosti je odredjen familijom potprostora $\{\mathcal{H}_t(x);\ t \in I\}$, pošto su svi spektralni tipovi oblika (3.1) koji odgovaraju toj familiji medjusobno jednaki, što slijedi iz ove tvrdnje:

Teorem 3.2. ([30], VII). Ako su:

$$dF_x : dF_{z_1} > dF_{z_2} > \dots > dF_{z_N}$$

$$dF_x : dF_{y_1} > dF_{y_2} > \dots > dF_{y_M}$$

dva različita spektralna tipa slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$, onda su oni medjusobno jednaki, tj. onda je

$$N = M \text{ i } dF_{y_k} = dF_{z_k} \quad \text{za svako } k=\overline{1,N}.$$

Da se za proizvoljni niz spektralnih tipova oblika

(3.3) $$dF_x : dF_1 > dF_2 > \dots > dF_N, \quad 1 \leq N \leq \infty,$$

uvijek može odrediti neprekidan slijeva u srednjem kvadratnom potpuno nedeterministički slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ drugog reda takav da je dF_x njegov spektralni tip proizlazi iz slijedećeg vrlo jakog teorema koji je dokazao Cramer.

Teorem 3.3. ([4]T.3). Za proizvoljni niz spektralnih tipova oblika (3.3) postoji harmonijski slučajni proces

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{itu}\, dZ(u), \quad t_0 \leq t \leq \infty,$$

čiji je spektralni tip (3.3).

Na kraju ovog paragrafa ukratko izložimo odnos izmedju spektralnog tipa slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ i njegove korelacijske funkcije koja je definirana jednakošću:

(3.4) $$r(s,t) = E(x(t)\overline{x(s)}) = (x(t), x(s)), \quad t,\ s \in I.$$

Teorem 3.4. ([15]). Spektralni tip (3.1) slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ jedinstveno je odredjen njegovom korelacijskom funkcijom.

Obrat ovom tvrdjenju u općem slučaju ne vrijedi, naime, dva slučajna procesa $\{x_1(t);\ t \in I\}$ i $\{x_2(t);\ t \in I\}$ koja imaju iste spektralne tipove ne moraju imati istu korelacijsku funkciju, tj. može da bude $r_{x_1}(t,s) \neq r_{x_2}(t,s)$. Takvi su, na primjer, procesi $\{x_1(t);\ t \in I\}$ i $\{x_2(t) = f(t)x_1(t);\ t \in I\}$, gdje je $t \mapsto f(t)$, $t \in I$, neslučajna funkcija takva da je

$$0 < m \leq |f(t)| \leq M < \infty \text{ za svako } t \in I.$$

Da bismo mogli navesti uvjete pod kojima će dva slučajna procesa s jednakim spektralnim tipovima imati jednake korelacijske funkcije, potrebno je definirati pojam kompletne familije funkcija.

Definicija 3.2. ([15]). Za familiju funkcija

$$\left\{g(t,u)=(g_n(t,u))^{n=\overline{1,N}};\ u\in[t_o,t],\ \text{parametra } t\in I\right\}$$

kazat ćemo da je kompletna u prostoru $\mathcal{L}_2(dF;\ I)$ ako za proizvoljno fiksno $t\in I$ iz jednakosti

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{t_o}^{s} g_n(s,u)\ \overline{f_n(u)}\ dF_n(u) = 0,$$

za svako $s\in[t_o,t]$, proizlazi da je na $[t_o,t]$

$$f_1(u) = f_2(u) = \ldots = f_N(u) = 0$$

gotovo svuda u odnosu na mjeru $dF(.)$, tj. da je

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{t_o}^{t} |f_n(u)|^2 dF_n(u) = 0 .$$

S obzirom na ranija razmatranja sada možemo zaključiti da je u reprezentaciji

$$x(t) = \sum_{n=1}^{M}\int_{t_o}^{t} g_n(t,u)dz_n(u)\ ,\ t\in I,$$

slučajnog procesa $\{x(t)\ ;\ t\in I\}$, familija funkcija

$$\left\{g(t,u) = (g_n(t,u))^{n=\overline{1,M}};\ u\in[t_o,t]\ ,\ \text{parametra } t\in I\right\}$$

kompletna (potpuna) u prostoru $\mathcal{L}_2(dF_x;\ I)$ samo onda kada strukturne funkcije $t\mapsto F_{z_1}(t),\ F_{z_2}(t),\ \ldots,\ F_{z_M}(t),\ t\in I$, komponenata njegovog inovacijskog procesa $\{Z(t)=z_n(t)_{n=\overline{1,M}};\ t\in I\}$ induciraju mjere koje pripadaju spektralnom tipu

$$dF_x : dF_{z_1} > dF_{z_2} > \dots > dF_{z_M}.$$

Prema tome, familija funkcija koja figurira u Cramerovoj reprezentaciji (3.2) slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ je kompletna u prostoru $\mathcal{L}_2(dF_x\ ;\ I)$.

Teorem 3.4. ([15] T.3. 11). Slučajni proces $\{x(t)\ ;\ t \in I\}$ s korelacijskom funkcijom (3.4) ima spektralni tip dF_x oblika (3.1) onda i samo onda ako je

$$r(s,t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{\min\{s,t\}} g_n(s,u)\, \overline{g_n(t,u)}\, dF_n(u),$$

pri čemu je familija funkcija $\{g(t,u) = (g_n(t,u))^{n=\overline{1,M}};\ u \in [t_0, t],$ parametra $t \in I\}$ kompletna u prostoru $\mathcal{L}_2(dF_x;\ I)$.

Na osnovi ove tvrdnje slijedi zaključak: reprezentacija korelacijske funkcije slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ sa spektralnim tipom dF_x jedinstvena je do na familiju funkcija potpunih u prostoru $\mathcal{L}_2(dF_x;\ I)$.

§ I.4. Kanonska i čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa

Neka su $\{z_1(t);\ t \in I\}$, $\{z_2(t);\ t \in I\}$, ..., $\{z_M(t);\ t \in I\}$ $M \leqslant \infty$, uzajamno ortogonalni slučajni procesi s ortogonalnim prirastima i strukturnim funkcijama redom $t \mapsto F_{z_1}(t), F_{z_2}(t), \dots, F_{z_M}(t)$, $t \in I$, i neka je reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ drugog reda koji zadovoljava uvjete (A) ; (B) zadana jednakošću

$$(4.1)\qquad x(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{t_o}^{t} h_n(t,u)\,dz_n(u)\quad ,\ t\in I\ ,$$

pri čemu je

$$\sum_{n=1}^{M}\int_{t_o}^{t}|h_n(,u)|^2\,dF_{z_n}(u)<\infty,\quad \text{za svako } t\in I.$$

<u>Definicija 4.1</u> ([3]).a. Reprezentacija (4.1) predstavljat će kanonsku reprezentaciju slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ ako je ortogonalna projekcija slučajne varijable $x(t)$ na potprostor $\mathcal{H}_s(x)$ za svako $s\in[t_o,t]$, $t\in I$, odredjena izrazom:

$$P_s x(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{t_o}^{s} g_n(t,u)\,dZ_n(u)$$

b) Reprezentacija (4.1) bit će čisto kanonska reprezentacija procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ ako je

$$\mathcal{H}_t(x)=\sum_{n=1}^{M}\mathcal{H}_t(z_n)\ ,\quad \text{za svako } t\in I.$$

Odmah primjetimo ovo: ako je $\{Z(t)=(z_n(t))_{\overline{n=1,M}};t\in I\}$ inovacijski proces slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$, onda je (4.1) čisto kanonska reprezentacija tog procesa, što slijedi izravno iz definicije inovacijskog procesa.

Sada razmotrimo odnos izmedju ovih dviju reprezentacija. Očigledno da je svaka čisto kanonska reprezentacija ujedno i kanonska reprezentacija slučajnog procesa. Da svaka kanonska reprezentacija slučajnog procesa ne mora da bude i čisto kanonska reprezentacija, pokazuje ovaj

<u>Primjer 4.1</u>. Neka su $\{W_1(t);\ t\in[0,1]\}$ i $\{W_2(t)\ ;\ t\in[0,1]\}$ dva uzajamna ortogonalna Wienerova procesa i neka je slučajni proces $\{x(t);\ t\in[0,1]$ definiran jednakošću:

$$(4.2)\quad x(t) = W_1(t)+f(t)W_2(t) = \int_0^t dW_1(u)+f(t)\int_0^t dW_2(u) \quad , t\in I,$$

gdje je f: $[o,1]\to R$ neslučajna funkcija.

a) Neka je $f(t) = C\neq 0$ za svako $t\in[o,1]$, i neka $P_s:\mathcal{H}(x)\to\mathcal{H}_s(x)$. Budući da je za svako $s\in[o,t]$

$$P_s x(t) = \int_0^s dW_1(u)+C\int_0^s dW_z(u) = x(s),$$

to (4.2) odredjuje kanonsku reprezentaciju procesa $\{x(t);t\in[o,1]\}$. Da ona nije i čisto kanonska reprezentacija, sasvim je očigledno.

b) Ako za svako $s\in[o,1\rangle$ postoji takvo $t>s$ da je $f(t)\neq f(s)$ i ako je $t\to f(t)$, $t\in[o,1]$, apsolutno neprekidna funkcija takva da derivacija f' pripada prostoru $\mathcal{L}_2(dt;t)$ za svako $t\in\langle o,1\rangle$, onda (4.2) ne odredjuje čak ni kanonsku reprezentaciju slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in[o,1]\}$.

Zaista, ako bi (4.2) bila kanonska repezentacija za $\{x(t);\ t\in[o,1]\}$, onda bismo za svako $s<t$ imali da je

$$P_s x(t)-x(s) = [f(t)-f(s)]\circ W_2(s)\in\mathcal{H}_s(x).$$

Medjutim, pošto je $f(t)\neq f(s)$ za svako $s<t$ to bi u navedenom slučaju $W_2(s)\in\mathcal{H}_s(x)$, pa bi i $W_1(s)\in\mathcal{H}_s(x)$. Stoga bi $\mathcal{H}_s(W_1)+\mathcal{H}_s(W_2)\subseteq\mathcal{H}_s(x)$. Pošto je uvijek $\mathcal{H}_s(x)\subseteq\mathcal{H}_s(W_1)\oplus\mathcal{H}_s(W_2)$, to bi pod navedenom pretpostavkom bilo $\mathcal{H}_s(x)=\mathcal{H}_s(W_1)\oplus\mathcal{H}_s(W_2)$, za svako $s\in[o,1]$. To znači da bi proces $\{x(t);\ t\in[o,1]\}$ imao multiplicitet $N=2$. Medjutim, ovo nije točno jer tako definiran proces pri navedenim uvjetima ima multiplicitet $N=1$, što je pokazano u [13].

c) Najzad, ako je $t \mapsto f(t)$ funkcija neograničene varijacije svuda na $\langle o,1\rangle$ ili ako je f apsolutno neprekidna funkcija i to takva da njena derivacija f' ne pripada prostoru $\mathcal{L}_2(dt;\langle\alpha,\beta\rangle)$ ni za jedan interval $\langle\alpha,\beta\rangle \subset [o,1]$, onda (4.2) pretstavlja čisto kanonsku reprezentaciju slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in[o,1]\}$, (vidi [13]).

Daljnjom analizom navedenog primjera dolazimo do spoznaje da reprezentacija

$$(4.3) \qquad x_n(t) = \int_{t_o}^{t} h_n(t,u)\, dz_n(u)$$

slučajnih procesa $\{x_n(t);\ t\in I\}$, za svako $n=\overline{1,M}$, može da bude čak i čisto kanonska, a da pri tom reprezentacija (4.1) slučajnog procesa $\{x(t) = \sum_{n=1}^{M} x_n(t);\ t\in I\}$ ne bude ni kanonska. Zbog toga ima potpunog smisla pitanje: pod kojim uvjetima reprezentacija (4.1) predstavlja kanonsku, a pod kojim čisto kanonsku reprezentaciju slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$? Odgovor na to pitanje sadržan je u ovim tvrdnjama:

Teorem 4.1 ([29], T.1). Reprezentacija (4.1) je kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t) = \sum_{n=1}^{M} x_n(t);\ t\in I\}$ onda i samo onda ako je reprezentacija (4.3) procesa $\{x_n(t);\ t\in I\}$ za svako $n=\overline{1,M}$ kanonska i ako je

$$\sum_{n=1}^{M} P_s x_n(t) \in \mathcal{H}_s(x) \quad \text{za svako} \quad s\in[t_o,t] .$$

Teorem 4.2. ([29], T.2). Reprezentacija (4.1) je čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t) = \sum_{n=1}^{M} x_n(t);\ t\in I\}$ onda i samo onda ako je reprezentacija (4.3) procesa $\{x_n(t);\ t\in I\}$ za svako $n=\overline{1,M}$ čisto kanonska i ako je

(4.4) $\qquad x_n(t) \in \mathcal{H}_t(x)$ za svako $n=\overline{1,M}$ i svako $t \in I$.

Sada razmotrimo problem transformiranja kanonske reprezentacije slučajnog procesa u njegovu čisto kanonsku reprezentaciju.

Teorem 4.3. ([12]. T.1.2). Ako je

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,u)\, dz(u) \ , \ t \in I,$$

kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ kratnosti jedan, tada postoji izmjerljiv skup $B \subset I$ takav da je čisto kanonska reprezentacija tog procesa odredjena jednakošću

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,u)\, d\tilde{z}_n(u) \ , \ t \in I,$$

gdje je $\tilde{z}_n(u) = \int_{t_0}^{t} I_B(u) dz_n(u)$, $t \in I$, I_B indikator skupa B.

Neka sada kanonska reprezentacija (4.1) slučajnog procesa $\{x(t) = \sum_{n=1}^{M} x_n(t)\ ;\ t \in I\}$ ima kratnost $M>1$. Odmah je jasno da se u općem slučaju čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ ne može dobiti iz kanonske reprezentacije (4.1) jednostavnim transformiranjem kanonske reprezentacije (4.3) svakog komponentnog procesa $\{x_n(t);\ t \in I\}$, $n=\overline{1,M}$, u čisto kanonsku reprezentaciju primjenom teorema 4.3, pošto ne mora doći do zadovoljenja uvjeta (4.4).
Na primjer, ako je $f(t)=C$, $t\in[0,1]$, u primjeru 4.1, onda je

$$x(t) = \int_0^t dW_1(u) + C \int_0^t dW_2(u) \quad , \quad t\in[0,1],$$

kanonska reprezentacija procesa $\{x(t);\ t\in[0,1]\}$. Ako bismo sada primjenili teorem 4.3. na pojedinačno svaku njegovu komponentu, dobili bismo predstavljanje oblika

$$x(t) = \int_0^t d\widetilde{W}_1(u) + C\int_0^t d\widetilde{W}_2(u) \quad , \quad t\in[0,1],$$

pri čemu je $\widetilde{W}_k(t) = \int_0^t I_{B_k}(u)\, dW_k(u)$, $k=1,2$, $t\in[0,1]$ a I_{B_k} indikator izmjerljivog skupa $B_k\subset[0,1]$, $k=1,2$. A ovo nije , očigledno, čisto kanonska reprezentacija procesa $\{x(t);t\in[0,1]\}$.

Zbog toga problemu transformiranja u slučaju $M>1$ moramo pristupiti na drugi način.

Neka slučajni proces $\{x(t);\ t\in I\}$ ima kanonsku reprezentaciju (4.1) i čisto kanonsku reprezentaciju oblika:

$$(4.5) \qquad x(t) = \sum_{n=1}^{N}\int_{t_0}^{t} g_n(t,u)\, dy_n(u) \ , \ t\in I ,$$

pri čemu je

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\left|g_n(t,u)\right|^2 dF_{y_n}(u)<\infty \text{ za svako } t\in I.$$

Pošto su obje reprezentacije (4.1) i (4.5) slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ kanonske, to je

$$(4.6) \quad \sum_{n=1}^{M}\int_{s}^{v} h_n(t,u)dz_n(u) = \sum_{k=1}^{N}\int_{s}^{v} g_k(t,u)dy_k(u)$$

za sve $s,v\in[t_0,t]$ i $s<v$.

Osim toga, slučajni procesi $\{z_n(t);\ t\in I\}$, $n=\overline{1,M}$,$\{y_k(t);t\in I\}$ $k=\overline{1,N}$ s ortogonalnim prirastima imaju uzajamno ortogonalne priraste, jer je za proizvoljno $n=\overline{1,M}$, $k=\overline{1,N}$, i

$t_1,t_2,t_3,t_4\in I$, $t_1<t_2\leq t_3<t_4$

$$\left(z_n(t_4)-z_n(t_3),\ y_k(t_2)-y_k(t_1)\right) = \left(P_{t_4}z_n-P_{t_3}z_n,\ P_{t_2}y_k-P_{t_1}y_k\right) =$$

$$= \left(P_{t_4}z_n,\ P_{t_2}y_k\right)-(P_{t_3}z_n,\ P_{t_2}y_k)-(P_{t_4}z_n,\ P_{t_1}y_k)+$$

$$\left(P_{t_3}z_n,P_{t_1}y_k\right) = (P_{t_2}z_n,y_k)-(P_{t_2}z_n,y_k)-(P_{t_1}z_n,y_k)+(P_{t_1}z_n,y_k)=0.$$

Stoga se može definirati uzajamna strukturna funkcija $t \mapsto F_{kn}(t)$ procesa $\{z_n(t);\ t \in I\}$ i $\{y_k(t);\ t \in I\}$ za svako $n=\overline{1,M}$ i svako $k=\overline{1,N}$, i to npr. preko jednakosti:

$$F_{kn}\big([t,t+\Delta t\rangle \cap [t_1,t_1+\Delta t_1\rangle\big) =$$

$$E[(y_k(t+\Delta t)-y_k(t)).\overline{(z_n(t_1+\Delta t_1)-z_n(t_1))}].$$

Ako sada skalarno pomnožimo jednakost (4.6) sa $dz_n(u), n=\overline{1,M}$, dobit ćemo jednakost:

$$\int_s^v h_n(t,u)dF_{z_n}(u) = \sum_{k=1}^{N} \int_s^v g_k(t,u)dF_{kn}(u) \quad \text{za svako } n=\overline{1,M}.$$

No, kako je mjera $dF_{kn}(\cdot)$, koja je inducirana strukturnom funkcijom $t \mapsto F_{kn}(t)$, $t \in I$, apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru $dF_{z_n}(u)$, koja je inducirana funkcijom $t \mapsto F_{z_n}(t) = \|z_n(t)\|^2$, $t \in I$, to je za svako $n=\overline{1,M}$

$$\text{(4.7)} \qquad h_n(t,u) = \sum_{k=1}^{N} g_k(t,u) \cdot \frac{dF_{kn}(u)}{dF_{z_n}(u)}$$

gotovo svuda u odnosu na mjeru $dF_{z_n}(\cdot)$. Stavljajući ovu jednakost u (4.6) dobit ćemo da je:

$$\text{(4.8)} \quad y_k(t)-y_k(s) = \sum_{n=1}^{M} \int_s^t \frac{dF_{kn}(u)}{dF_{z_n}(u)} \cdot dz_n(u) \quad \text{za svako } k=\overline{1,N}.$$

Dakle, ako je (4.1) kanonska a (4.5) čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$, onda iz (4.7) slijedi da su jezgra $h_1(t,u), h_2(t,u), \dots, h_M(t,u)$, u kanonskoj reprezentaciji (4.1) linearne kombinacije jezgra $g_1(t,u)$, $g_2(t,u)$ $\dots$, $g_N(t,u)$ iz čisto kanonske reprezentacije (4.5). Nadalje, komponente inovacijskog procesa $\{Y(t) = (y_k(t))_{k=\overline{1,N}} :\ t \in I\}$ procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ odredjene su jednakošću (4.8).

Posebno, ako je za slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ $N=1$, onda su jezgra $h_1(t,u), h_2(t,u), \dots, h_M(t,u)$ kanonske reprezentacije (4.1) tog procesa odredjena jednakošću

$$h_n(t,u) = \frac{dF_{1n}(u)}{dF_{z_n}(u)} \cdot g_1(t,u) \quad \text{za svako } n=\overline{1,M} \quad ,$$

koja vrijedi gotovo svuda u odnosu na mjeru $dF_{z_n}(\cdot)$, $n=\overline{1,M}$. Njegov inovacijski proces $\{Y(t) = y_1(t);\ t \in I\}$ dan je formulom:

$$y_1(t)-y_1(s) = \sum_{n=1}^{M} \int_s^t \frac{dF_{1n}(u)}{dF_{z_n}(u)}\, dz_n(u) \quad \text{za sve } t,\ s \in I, \quad t > s.$$

Na kraju recimo da se čisto kanonska reprezentacija (4.5) može dobiti direktno iz kanonske reprezentacije (4.1) primjenom teorema (4.3) jedino u onim slučajevima kada je $M=N>1$ i $F_{kn}(t) \equiv 0$ za svako $k \neq n$, $k,n=\overline{1,N}$, $t \in I$, pri čemu je

$$B_n = \left\{ u \in I:\ \frac{dF_{nn}(u)}{dF_{z_n}(u)} > 0 \right\} \quad \text{za svako } n=\overline{1,N},$$

izmjerljiv skup.

G L A V A II

INVARIJANTNOST SPEKTRALNOG TIPA SLUČAJNOG PROCESA U ODNOSU NA NEKE TRANSFORMACIJE

§.II.1. Izometrične familije

Neka su $\left\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\right\}$ i $\left\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t\in I\right\}$, $I=[t_0,+\infty\rangle$, dvije familije potprostora redom u Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}^{(1)}$ i $\mathcal{H}^{(2)}$ slučajnih varijabli, takve da je

$$\mathcal{H}_{t-o}^{(k)} = \mathcal{H}_t^{(k)} \text{ za svako } t\in I,\ k=1,2.$$

Kazat ćemo da su $\left\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t\in I\right\}$ i $\left\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t\in I\right\}$ izometrične familije ako postoji izometrični operator V iz prostora $\mathcal{H}^{(1)}$ u prostor $\mathcal{H}^{(2)}$, takav da je

$$(1.1)\qquad \mathcal{H}_t^{(2)} = V\mathcal{H}_t^{(1)} \text{ za svako } t\in I.$$

Da ne bismo uvodili nove oznake, ubuduće ćemo računati da je prostor $\mathcal{H}^{(k)}$, k=1,2 zatvorena unija svih potprostora $\mathcal{H}_t^{(k)}$, tj. da je

$$\mathcal{H}^{(k)} = \overline{\bigcup_{t\in I}\mathcal{H}_t^{(k)}}, \text{ za } k=1,2.$$

U tom slučaju V će biti unitarni operator koji preslikava prostor $\mathcal{H}^{(1)}$ na prostor $\mathcal{H}^{(2)}$.

Neka je $P_t^{(k)}$, k=1,2, operator ortogonalnog projiciranja prostora $\mathcal{H}^{(k)}$ na potprostor $\mathcal{H}_t^{(k)}$, $t \in I$, i neka je $V^{-1}:\mathcal{H}^{(2)}\to\mathcal{H}^{(1)}$ inverzni operator operatora V: $\mathcal{H}^{(1)}\to\mathcal{H}^{(2)}$. Uz uvjet (1.1), tada je

$$(1.2) \qquad P_t^{(2)} = VP_t^{(1)}V^{-1}, \quad \text{za svako } t \in I.$$

Zaista,

$$VP_t^{(1)}V^{-1}\mathcal{H}^{(2)} = VP_t^{(1)}\mathcal{H}^{(1)} = V\mathcal{H}_t^{(1)} = \mathcal{H}_t^{(2)} = P_t^{(2)}\mathcal{H}^{(2)}.$$

Nužni i dovoljni uvjeti za izometričnost dviju familija potprostora sadržani su u ovoj tvrdnji.

Teorem 1.1. ([26]). $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t \in I\}$ su izometrične familije potprostora iz Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(1)}$, odnosno $\mathcal{H}^{(2)}$, onda i samo onda ako njima odgovarajući inovacijski procesi imaju isti spektralni tip.

Dokaz: Neka su $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t \in I\}$ izometrične familije potprostora, onda je $P_t^{(2)} = VP_t^{(1)}V^{-1}$, za svako $t \in I$. Nadalje, prema § 1.2, u prostoru $\mathcal{H}^{(1)}$ postoji takav niz nenula elemenata $z_1, z_2, \ldots, z_N$ da je:

$$P_t^{(1)}z_k \perp P_s^{(1)}z_n, \quad \text{za sve } t,s \in I \text{ i } k \neq n,\ k,n = \overline{1,N};$$

$$\mathcal{H}(z_k) \perp \mathcal{H}(z_n), \quad \text{za sve } k \neq n,\ k,n = \overline{1,N}, \quad \text{i}$$

$$\mathcal{H}^{(1)} = \sum_{n=1}^{N} \oplus \mathcal{H}(z_n),$$

gdje je $\mathcal{H}(z_n) = \overline{\mathcal{L}}\{P_t^{(1)}z_n;\ t \in I\}$ za svako $n = \overline{1,N}$.

Prema tome, niz elemenata $z_1, z_2, \ldots, z_N \in \mathcal{H}^{(1)}$ generira inovacijski proces $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,N}};\ t \in I\}$ familije $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$, pri čemu je $z_n(t) = P_t z_n$, $t \in I$, za svako $n = \overline{1,N}$. Neka je $t \mapsto F_{z_n}(t) = \|z_n(t)\|^2$, $t \in I$, $n = \overline{1,N}$, strukturna funkcija njegovog komponentnog procesa $\{z_n(t);\ t \in I\}$, $n = \overline{1,N}$ s ortogonalnim prirastima.

Sada, ako je $y_n = Vz_n$, za svako $n=\overline{1,N}$, tada iz jednakosti (1.2) slijedi da je $P_t^{(2)} y_n = VP^{(1)} z_n$. Nadalje, lako je pokazati da je:

$$P_t^{(2)} y_k \perp P_s^{(2)} y_n \quad \text{za sve } t,s \in I \text{ i } k \neq n,\ k,n=\overline{1,N},$$

$$\mathcal{H}(y_k) \perp \mathcal{H}(y_n) \text{ za sve } k \neq n,\ k,n=\overline{1,N}, \text{ gdje je}$$

$$\mathcal{H}(y_n) = \overline{\mathcal{L}}\{P_t y_n\ ;\ t \in I\} \text{ za svako } n=\overline{1,N}.$$

Najzad, pošto je

$$\sum_{n=1}^{N} \oplus \mathcal{H}(y_n) = \sum_{n=1}^{N} \oplus V\mathcal{H}(z_n) = V\sum_{n=1}^{N} \oplus \mathcal{H}(z_n) = V\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(2)},$$

to je $\{Y(t) = (y_n(t))_{n=\overline{1,N}};\ t \in I\}$ inovacijski proces familije $\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t \in I\}$, ako je $y_n(t) = P_t^{(2)} y_n$, $t \in I$, za svako $n=\overline{1,N}$.

Strukturna funkcija $t \mapsto F_{y_n}(t) = \|y_n(t)\|^2$, $t \in I$, $n=\overline{1,N}$, njegovog komponentnog procesa $\{y_n(t);\ t \in I\}$, $n=\overline{1,N}$, s ortogonalnim prirastima, zadovoljava jednakosti:

$$F_{y_n}(t) = \|y_n(t)\|^2 = \|P_t^{(2)} y_n\|^2 = \|VP_t^{(1)} z_n\|^2 = \|P_t^{(1)} z_n\|^2 = \|z_n(t)\|^2 = F_{z_n}(t)$$

za svako $t \in I$ i $n=\overline{1,N}$. Stoga strukturne funkcije $t \mapsto F_{y_n}(t)$, $t \mapsto F_{z_n}(t)$, $t \in I$, induciraju jednake mjere. To znači da su i spektralni tipovi dF_{z_n}, dF_{y_n} jednaki i to vrijedi za svako $n=\overline{1,N}$. Prema tome, izometrične familije imaju jednake spektralne tipove, što je i trebalo pokazati.

Pokažimo sada da vrijedi i obratna tvrdnja.
Neka je $z_1, z_2, \ldots, z_N$ niz nenula elemenata iz prostora $\mathcal{H}^{(1)}$, koji generira spektralni tip $dF^{(1)}$: $dF_{z_1} > dF_{z_2} > \ldots > dF_{z_N}$ inovacijskog procesa familije $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$, a $y_1, y_2, \ldots, y_N$ niz nenula elemenata iz $\mathcal{H}^{(2)}$, koji generira spektralni tip $dF^{(2)}$: $dF_{y_1} > dF_{y_2} > \ldots > dF_{y_N}$ inovacijskog procesa familije

$\left\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t\in I\right\}$, i neka je pri tome

(1.3) $dF_{z_n} = dF_{y_n}$ za svako $n=\overline{1,N}$, tj. $dF^{(1)} = dF^{(2)}$

Ako je

$$\mathcal{H}(z_n) = \overline{\mathcal{L}}\left\{P_t^{(1)}z_n;\ t\in I\right\} \text{ i } \mathcal{H}(y_n) = \overline{\mathcal{L}}\left\{P_t^{(2)}y_n;\ t\in I\right\}$$

za svako $n=\overline{1,N}$, tada je

$$\mathcal{H}^{(1)} = \sum_{n=1}^{N}\oplus\,\mathcal{H}(z_n) \quad \text{i} \quad \mathcal{H}^{(2)} = \sum_{n=1}^{N}\oplus\,\mathcal{H}(y_n).$$

Na osnovi razmatranja u §I.2., definicije vektorskog prostora $\mathcal{L}_2(dF;I)$ odnosno njegovog potprostora $\mathcal{L}_2(dF;t)$ $t\in I$, i relacije (1.3) izravno zaključujemo da su prostori $\mathcal{H}^{(1)}$ i $\mathcal{H}^{(2)}$ unitarno izomorfni prostoru $\mathcal{L}_2(dF;I)$, odnosno da su potprostori $\mathcal{H}_t^{(1)}$ i $\mathcal{H}_t^{(2)}$ unitarno izomorfni potprostoru $\mathcal{L}_2(dF;t)$ za svako $t\in I$. Stoga su i familije potprostora $\left\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t\in I\right\}$ i $\left\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t\in I\right\}$ medjusobno izometrične.

Q.E.D.

Pretpostavimo sada da su zadane dvije familije $\left\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t\in I\right\}$ i $\left\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t\in I\right\}$, koje su medjusobno povezane jednakošću

(1.4) $\quad \mathcal{H}_t^{(2)} = A\,\mathcal{H}_t^{(1)}$ za svako $t\in I$,

gdje je A proizvoljni linearni operator iz Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(1)}$ u Hilbertov prostor $\mathcal{H}^{(2)}$. Čak možemo pretpostaviti da su jednakošću (1.4) povezani lineali, tj. da je

$$\mathring{\mathcal{H}}_t^{(2)} = A\,\mathring{\mathcal{H}}_t^{(1)} \quad \text{za svako } t\in I,$$

pri čemu je

$$\overline{\mathring{\mathcal{H}}_t^{(k)}} = \mathcal{H}_t^{(k)} \quad \text{za svako } t\in I \text{ i } k=1,2.$$

Sada se može postaviti ovakvo pitanje: Kakva svojstva mora da ima linearni operator $A:\mathcal{H}^{(1)}\to\mathcal{H}^{(2)}$ da bi $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\, t\in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t^{(2)};\, t\in I\}$ bile izometrične familije potprostora?

Da bismo ovo, za teoriju inovacijskih procesa, vrlo važno pitanje pobliže objasnili razmotrit ćemo jedan primjer.

Neka je $\{x(t);\, t\in I\}$ ma kakav slučajni proces čiji je spektralni tip dF_x poznat ili je pak definiran operator projiciranja na potprostor $\mathcal{H}_t^{(x)}$, $t\in I$.

Neka je $\{y(t);\, t\in I\}$ neki drugi slučajni proces čiji spektralni tip želimo uporedjivati sa spektralnim tipom procesa $\{x(t);\, t\in I\}$ s tim da postoji linearni operator A takav da je

$$y(t) = A\,x(t) \quad \text{za svako } t\in I.$$

Proširimo operator A po linearnosti na linearni omotač $\mathring{\mathcal{H}}(x) = \mathcal{L}\{x(t);\, t\in I\}$. Ako stavimo da je $\mathring{\mathcal{H}}_t(x) = \mathcal{L}\{x(u);\, u\leq t\}$, $t\in I$, onda je

$$A\,\mathring{\mathcal{H}}_t(x) = \mathcal{H}_t(y) \quad \text{za svako } t\in I\,,$$

$$\mathcal{H}_t(x) = \overline{\mathring{\mathcal{H}}_t(x)}\,,\ \mathcal{H}_t(y) = \overline{\mathring{\mathcal{H}}_t(y)}\,,\quad t\in I.$$

Gore postavljeno pitanje o odnosima operatora A i familija $\{\mathcal{H}_t(x);\, t\in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t(y);\, t\in I\}$ možemo sada ovako formulirati: koja svojstva treba da ima linearni operator A da bi spektralni tip slučajnog procesa $\{y(t);\, t\in I\}$ bio jednak spektralnom tipu dF_x procesa $\{x(t);\, t\in I\}$, i to u smislu ove definicije?

Definicija 1.1. Neka je

$$dF_x:\ dF_1^x > dF_2^x > \ldots > dF_N^x$$

spektralni tip slučajnog procesa $\{x(t);\, t\in I\}$, a

$$dF_y : dF_1^y > dF_2^y > \ldots > dF_M^y$$

spektralni tip procesa $\{y(t);\ t \in I\}$.

Kazat ćemo da slučajni procesi $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t);\ t \in I\}$ imaju jednake spektralne tipove (tj. $dF_x = dF_y$) ako je

$$N = M \text{ i } dF_n^x = dF_n^y \quad \text{za svako } n = \overline{1,N}.$$

Traženje odgovara na postavljeno pitanje je zadatak kojim ćemo se baviti u ovom dijelu rada.

Prvo navedimo dva primjera kojim pokazujemo da se spektralni tip nekog slučajnog procesa može sasvim promjeniti pri transformaciji njemu odgovarajuće familije potprostora $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ u neku drugu familiju $\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t \in I\}$ pomoću ograničenog linearnog operatora A: $\mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$.

Primjer 1.1. ([26]). Neka je $\{W(t);\ t \in [0,1]\}$ Wienerov proces, koji ima, kao što je poznato, multiplicitet $N=1$ i spektralni tip $dF_W = dt$. Osim toga, poznato je da se taj proces može prikazati na ovaj način:

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) z_k \quad \text{za svako } t \in [0,1],$$

pri čemu je, za svako $k = \overline{1,\infty}$, $t \mapsto \varphi_k(t) = \sin(k+\frac{1}{2})\bar{u}t, t \in [0,1]$, karakteristična funkcija integralnog operatora s jezgrom $r_W(s,t) = \min\{s,t\}$, $s,t \in [0,1]$, a $z_1, z_2, z_3, \ldots$ uzajamno ortogonalne slučajne varijable i $z_k = \int_0^1 \varphi_k(t) W(t)\,dt \in \mathcal{H}(W)$ za $k = \overline{1,\infty}$.

Slučajni proces $\{y(t);\ t \in [0,1]\}$ definirajmo jednakošću

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t) z_k$$

za konačno $n \in N$. Budući da je prostor $\mathcal{H}(y)$ generiran elementima $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ i da je $\mathcal{H}(y) \subset \mathcal{H}(W)$, postoji operator ortogonalnog projiciranja s prostora $\mathcal{H}(W)$ na $\mathcal{H}(y)$ takav da je

$$y(t) = P_{\mathcal{H}(y)} W(t) \quad \text{za svako} \quad t \in [o,1].$$

Za proizvoljno $t > 0$ u segmentu $[o,t]$ postoje vrijednosti $t_o, t_1, \ldots, t_{n-1}$ takve da matrica $\left(\varphi_k(t_j)\right)_{j=\overline{o,n-1}}^{k=\overline{o,n-1}}$ nije singularna. Stoga linearni sistem

$$\sum_{k=o}^{n-1} \varphi_k(t_j) z_k = y(t_j) \qquad j=\overline{o,n-1}$$

ima jedinstveno rješenje:

$$z_k = \sum_{j=o}^{n-1} C_{kj}\, y(t_j) \ , \quad k=\overline{o,n-1}$$

i $z_o, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathcal{H}_t(y)$, za proizvoljno $t \in \langle o,1 \rangle$.

Očigledno da je

$$\mathcal{H}_t(y) \equiv \mathcal{H}(y).$$

Proces $\left\{Z(t) = (z_k^{*}(t))_{k=1,n} \ ; \ t \in \langle o,1 \rangle\right\}$ komponentama $z_k^{*}(t) \equiv z_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$, bit će inovacijski proces za $\left\{y(t) \ i \ t \in [o,1]\right\}$.

Prema tome slučajni proces $\left\{y(t); \ t \in [o,1]\right\}$ ima multiplicitent $N=n$, a spektralni tip je generiran mjerom koja je u cijelosti usredsredjena u točku $t=0$.

<u>Primjer 1.2.</u> Neka je $I_1 = [o,1]$ i neka je slučajni proces $\left\{x(t); \ t \in I_1\right\}$ zadan jednakošću:

$$(1.5) \qquad x(t) = \int_o^t \xi(u)\, du + W(t) \ , \ t \in I_1,$$

gdje je $\left\{\xi(u); \ u \in I_1\right\}$ takav slučajni proces da je $\left\{x_1(t)\right\} = \int_o^t \xi(u) du; \ t \in I_1\}$ proces multipliciteta $N_1 > 1$ (kasnije će ovakav proces biti konstruiran) a $\left\{W(t); \ t \in I_1\right\}$ Wienerov proces za koji je $W(t+h) - W(t) \perp \mathcal{H}_t(x)$ za svako $t \in I_1$ i $h > 0$.

Ovaj uvjet, u stvari, kaže da je

$(W(t+h)-W(t),\ x(s)) = 0$ za svako $s \in [o,t],\ t \in I_1$ i $h > 0$.

Definirajmo sada slučajni proces $\{y(t);\ t \in I_1\}$ preko jednakosti:

(1.6) $$y(t) = x(t) - \int_0^t P_u \xi(u)du = \int_0^t [\xi(u) - P_u \xi(u)]du + W(t)$$

gdje je P_u , $u \in I_1$, operator ortogonalnog projiciranja prostora $\mathcal{H}(x)$ na potprostor $\mathcal{H}_u(x)$.

Pokažimo da je $\{y(t);\ t \in I_1\}$ proces s ortogonalnim prirastima.

Budući da je $\xi(u) - P_u \xi(u) \perp \mathcal{H}_s(x)$ za svako $s \leq u$, to je za svako $s \leqslant t$ i $h > 0$

$$(y(t+h)-y(t),\ x(s)) =$$

$$= \left(\int_0^{t+h} [\xi(u) - P_u \xi(u)]du + W(t+h) - \int_0^t [\xi(u) - P_u \xi(u)]du - W(t),\ x(s) \right) =$$

$$= \int_t^{t+h} \left(\xi(u) - P_u \xi(u),\ x(s) \right) du + (W(t+h)-W(t),\ x(s)) = 0$$

Dakle,

(1.7) $$y(t+h)-y(t) \perp \mathcal{H}_t(x) \quad \text{za svako } t \in I_1 \text{ i } h > 0.$$

Medjutim, pošto je

(1.8) $$\mathcal{H}_t(y) \subseteq \mathcal{H}_t(x) \quad \text{za svako } t \in I_1,$$

što proizlazi izravno iz definicije slučajnog procesa $\{y(t);\ t \in I_1\}$, tj. iz jednakosti (1.6), to je

$$\left(y(t+h)-y(t),\ y(s)\right) = 0 \text{ za svako } s \in [o,t],\ t \in I_1,\ h > 0.$$

Stoga je

$$\left(y(t_4)-y(t_3),\ y(t_2)-y(t_1)\right) = \left(y(t_4)-y(t_3),\ y(t_2)\right) -$$
$$-\left(y(t_4)-y(t_3),\ y(t_1)\right) = 0$$

za proizvoljne vrijednosti $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4 \leqslant 1$.

Prema tome $\{y(t);\ t\in I_1\}$ je slučajni proces s ortogonalnim prirastima i multiplicitetom M=1.

Očigledno je da postoji ograničeni linearni operator A takav da je

$$(1.9)\quad y(t) = A\,x(t) = x(t) - \int_0^t P_u\,\xi(u)du \quad \text{za svako} \quad t\in I_1.$$

Prema tome, i ako slučajni proces $\{x(t);\ t\in I_1\}$ ima multiplicitet $N>1$, transformacijom tog procesa pomoću ograničenog linearnog operatora A, koji je zadan jednakošću (1.9), dobio se slučajni proces $\{y(t);\ t\in I_1\}$ s ortogonalnim prirastima, tj. s multiplicitetom N=1. Dakle, spektralni tip slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ nije invarijantan u odnosu na zadanu linearnu transformaciju A.

Nije teško pokazati da je slučajni proces $\{y(t);\ t\in I_1\}$ potpuno potčinjen procesu $\{x(t);\ t\in I_1\}$ u smislu ove definicije.

Definicija 1.2. Za slučajni proces $\{y(t);\ t\in I\}$ kažemo da je potpuno potčinjen slučajnom procesu $\{x(t);\ t\in I\}$ ako je za svako $t\in I$

$$(1.10)\quad \mathcal{H}_t(y)\subseteq\mathcal{H}_t(x) \quad \text{i} \quad \mathcal{H}(y)\ominus\mathcal{H}_t(y)\subseteq\mathcal{H}(x)\ominus\mathcal{H}_t(x).$$

Zaista, već je pokazano da je $\mathcal{H}_t(y)\subseteq\mathcal{H}_t(x)$ za svako $t\in I_1$ (vidi (1.8)), a relacija

$$\mathcal{H}(y)\ominus\mathcal{H}_t(y)\subseteq\mathcal{H}(x)\ominus\mathcal{H}_t(x) \quad \text{za svako} \quad t\in I_1$$

neposredno slijedi iz (1.7) i iz činjenice da je potprostor $\mathcal{H}(y)\ominus\mathcal{H}_t(y)$ generiran svim slučajnim prirastima (varijablama) oblika $y(t+h)-y(t)$ za $h\in\langle o,1-t]$.

Sada konstruirajmo slučajni proces $\{x_1(t) = \int_0^t \xi(u)du;$ $t \in I_1\}$ multipliciteta $N_1 > 1$.

Neka je $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_{N_1}$ niz medjusobno disjunktnih i izmjerljivih skupova na segmentu $I_1 = [o,1]$ takvih da je $\bigcup_{n=1}^{N_1} \Delta_n = I_1$ i da je $m(\Delta_n \cap \langle s,t \rangle) > 0$ za svako $n = \overline{1,N_1}$ i bilo koji interval $\langle s,t \rangle \subseteq I_1$, gdje je m obična Lebesquoeva mjera na I. Osim toga, neka je $\xi(u) = \Psi(u) z_n(u)$ za $u \in \Delta_n$ $n = \overline{1,N_1}$, s tim da su $\{z_1(u);\ u \in I_1\}, \dots, \{z_{N_1}(u);\ u \in I_1\}$ uzajamno ortogonalni slučajni procesi s ortogonalnim prirastima, a $\Psi : I_1 \to R$ takva neslučajna pozitivna funkcija da je slučajni proces $\{\xi(u);\ u \in I_1\}$ integrabilan. Tada je jednakošću

$$(1.11) \qquad x_1(t) = \int_0^t \xi(u)du = \sum_{n=1}^{N_1} \int_{B_n} \Psi(u) z_n(u)du, \text{ za } t \in I_1,$$

gdje je $B_n = \Delta_n \cap [o,t]$ za svako $n = \overline{1,N_1}$, odredjen slučajni proces $\{x_1(t);\ t \in I_1\}$ multipliciteta N_1, čiji je inovacijski proces $\{Z(t) = (z_n(t))_{n=\overline{1,N_1}};\ t \in I_1\}$.

Zaista, iz jednakosti (1.11) proizlazi s jedne strane da je $\mathcal{H}_t(x_1) \subseteq \mathcal{H}_t(Z) = \sum_{n=1}^{N_1} \oplus \mathcal{H}_t(z_n)$ za svako $t \in I_1$, a s druge strane da je $x_1'(t) = \Psi(t) z_n(t)$ za svako $t \in \Delta_n, n = \overline{1,N_1}$. Budući da je $x_1'(t) \in \mathcal{H}_s(x)$ za svako $t \in [o,s]$ i pošto je skup Δ_n za $n = \overline{1,N_1}$ svuda gust u intervalu $\langle o,1 \rangle$, a proces $\{z_n(t);\ t \in I_1\}$, $n = \overline{1,N_1}$, neprekidan slijeva, to je $z_n(t) \in \mathcal{H}_s(x)$ za svako $t \in [o,s]$. Odavde proizlazi da je $\sum_{n=1}^{N_1} \oplus \mathcal{H}_t(z_1) \subseteq \mathcal{H}_t(x_1)$ za svako $t \in I_1$. Stoga je $\mathcal{H}_t(x_1) = \sum_{n=1}^{N_1} \oplus \mathcal{H}_t(z_1)$, što je i trebalo pokazati.

Ovdje istaknimo da je za slučajne procese $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t);\ t \in I\}$, koji imaju jednake spektralne tipove vrlo značajna zadaća iznalaženja odgovarajućeg izometričnog operatora $V: \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}(y)$ za koji je

$$\mathcal{H}_t(y) = V\mathcal{H}_t(x) \quad \text{za svako } t \in I.$$

To je značajno zbog toga što se operator projiciranja P_t^y s prostora $\mathcal{H}(y)$ na potprostor $\mathcal{H}_t(y)$, $t \in I$, u tom slučaju može odrediti pomoću jednakosti $P_t^y = VP_t^x V^{-1}$, za svako $t \in I$, naravno uz pretpostavku da je poznat operator

$$P_t^x : \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}_t(x), \ t \in I.$$

Vratimo se sada na problem izometričnosti familija potprostora $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t^{(2)} = A\,\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$.

Kad je A regulirani operator(*) pitanje izometričnosti familija $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t^{(2)} = A\,\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ je riješeno ako je familija $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ diskretan lanac potprostora, tj. ako je

$$\mathcal{H}_t^{(1)} = \sum_{t_k < t} \oplus \Delta\mathcal{H}_{t_k}^{(1)} \quad \text{za svako } t \in I, \tag{1.11}$$

gdje je $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ konačan ili prebrojiv niz točaka iz $I = [t_0, +\infty\rangle$ i

$$\Delta\mathcal{H}_{t_k}^{(1)} = \mathcal{H}_{t_k+0} \ominus \mathcal{H}_{t_k} \neq 0 \quad \text{za } k=1,2,\dots\ .$$

Naime, u radu ([26]) dokazan je

<u>Teorem 1.2.</u> Neka je familija $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ diskretan lanac potprostora u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^{(1)}$ slučajnih varijabli

---

(*) Neka su $\mathcal{H}^{(1)}$ i $\mathcal{H}^{(2)}$ Hilbertovi prostori. Za linearni operator $A : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ kažemo da je reguliran ako postoji inverzni operator $A^{-1} : \mathcal{H}^{(2)} \to \mathcal{H}^{(1)}$ operatora A i ako su A i A^{-1} ograničeni operatori.

i neka je $\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t \in I\}$ familija potprostora prostora $\mathcal{H}^{(2)}$. Familije $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ i $\{\mathcal{H}_t^{(2)};\ t \in I\}$ su izometrične ako postoji regularni operator $A: \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ takav da je $\mathcal{H}_t^{(2)} = A\mathcal{H}_t^{(1)}$ za svako $t \in I$.

Ovdje je korisno primijetiti:

a) familija $\{\mathcal{H}_t^{(2)} = A\,\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ je takodjer diskretan lanac potprostora sa skokovima u istim točkama $t_1, t_2, \ldots$ kao i familija $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ i pri tome je

$$\dim\left(\mathcal{H}_{t_k+0}^{(2)} \ominus \mathcal{H}_{t_k}^{(2)}\right) = \dim\left(\mathcal{H}_{t_k+0}^{(1)} \ominus \mathcal{H}_{t_k}^{(1)}\right) \text{ za svako } k=1,2,\ldots;$$

b) ako je familija $\{\mathcal{H}_t^{(1)}(x);\ t \in I\}$ oblika (1.11), onda strukturna funkcija $t \mapsto F_n(t)$, $t \in I$, svake komponente njoj odgovarajućeg inovacijskog procesa ima oblik funkcije skoka sa skokovima u točkama $t_1, t_2, \ldots$

Stoga promatrana familija ima diskretan spektralni tip. Osim toga, generirajući elementi $z_1, z_2, \ldots, z_N$, $N \leq \infty$, mogu se na ovaj način odabrati:

$$z_n = \sum_k c_k z_{kn}, \quad n = \overline{1,N},$$

gdje je $z_{k1}, z_{k2}, \ldots, z_{kN}$ ortonormirana baza potprostora

$$\Delta\mathcal{H}_t^{(1)} = \mathcal{H}_{t_k-0}^{(1)} \ominus \mathcal{H}_{t_k}^{(1)} \quad \text{dimenzije } N_k,\ k=1,2,\ldots,$$

$z_{kn} = 0$ za $n > N_k$ i $\sum_k |c_k|^2 < \infty$. Pri tome je

$$N = \sup\{N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots\}.$$

U općem slučaju, tj. kada familija $\{\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$ nije diskretan lanac potprostora prostora $\mathcal{H}^{(1)}$, postoji samo hipoteza o njenoj izometričnosti s familijom $\{\mathcal{H}_t^{(2)} = A\,\mathcal{H}_t^{(1)};\ t \in I\}$

potprostora prostora $\mathcal{H}^{(2)}$, ako je $A: \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ regulirani operator.

Nije teško pokazati da je hipoteza točna kada je proces $\{y(t) = A\,x(t);\ t \in I\}$ potpuno potčinjen slučajnom procesu $\{x(t);\ t \in I\}$.

Zaista, budući da je $A: \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}(y)$ regulirani operator i da je $\mathcal{H}_t(y) \subseteq \mathcal{H}_t(x)$ za svako $t \in I$, to je

$$\mathcal{H}(y) = A\,\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(x).$$

Stoga neposredno iz relacije (1.10) proizlazi da je

$$\mathcal{H}_t(x) = \mathcal{H}_t(y) \quad \text{za svako } t \in I,$$

a to znači da procesi $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t)\ ;\ t \in I\}$ imaju jednake spektralne tipove.

§ .II.2. E k v i v a l e n t n o s t L-S m j e r a

Radi jednostavnijeg i jasnijeg pristupa rješavanju zadaće o invarijantnosti spektralnog tipa slučajnog procesa u odnosu na transformaciju vremena, potrebno je detaljno razmotriti medjusoban odnos L-S mjera m_F i $m_{F\circ\varphi}$, a to je zapravo zadatak ovog paragrafa.

Neka je $F: I \to R$, $I = [t_0, +\infty\rangle$, monotono neopadajuća i neprekidna slijeva funkcija i neka je P_I σ-prsten elementarnih skupova intervala I. Postoji jedinstvena mjera $m_F : P_I \to R$ takva da je

$$m_F(\emptyset) = 0\ ,\quad m_F(\langle\alpha, \beta\rangle) = F(\beta) - F(\alpha+0),$$

$$m_F(\langle\alpha, \beta]) = F(\beta+0) - (\alpha+0),\ m_F([\alpha, \beta\rangle) = F(\beta) - F(\alpha) \text{ i}$$

$$m_F([\alpha, \beta]) = F(\beta+0) - F(\alpha),$$

za ma koje vrijednosti $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$.

Mjera m_F zove se Lebesque-Stieltjesova (ili kratko L-S) mjera s obzirom na funkciju F, a F generirajuća funkcija te mjere. Ako je $F(t)=t$, $t \in I$, onda je L-S mjera $m_F=m$ obična Lebesqueova (L) mjera.

Ako je generirajuća funkcija F L-S mjere m_F apsolutno neprekidna, onda je m_F apsolutno neprekidna mjera u odnosu na L mjeru i pri tome je

$$m_F(B)=(L)\int_B \frac{dF(t)}{dt}\,dt = (L)\int_B F'(t)dt,$$

za svaki u L smislu mjerljiv skup $B \subset I$.

Dalje, ako je generirajuća funkcija F L-S mjere m_F singularna, tj. ako je F strogo rastuća i neprekidna funkcija za koju je $\frac{dF(t)}{dt} = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru, tada je m_F singularna mjera u odnosu na L mjeru, a to znači da je m_F u cijelosti usredsredjena na onom skupu L mjere nula na kojem je $\frac{dF(t)}{dt}$ različito od nule ili ne postoji.

Najzad, ako je F funkcija skoka, onda je njoj odgovarajuća L-S mjera m_F diskretna.

Kao što je poznato, svaku funkciju moguće je prikazati ovako:

$$F(t) = F_d(t)+F_a(t)+F_s(t) \quad \text{za svaku} \quad t \in I,$$

gdje je F_d funkcija skoka, F_a apsolutno neprekidna, a F_s singularnafunkcija. Stoga i mjeru m_F možemo predstaviti u obliku zbroja triju mjera $m_F = m_{F_d} + m_{F_a} + m_{F_s}$, gdje je m_{F_d} diskretna L-S mjera, m_{F_a} apsolutno neprekidna L-S mjera i m_{F_s} singularna L-S mjera, obje u odnosu na L mjeru. Odavde proizlazi tvrdnja:

Ako je $F = F_x$ strukturna funkcija slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$, tada se spektralni tip dF_x može na jedinstven način predstaviti kao zbroj tri spektralna tipa

$$dF_x = dF_x^d + dF_x^a + dF_x^s$$

s tim da tipu dF_x^d pripada diskretna mjera, tipu dF_x^a apsolutno neprekidna mjera u odnosu na L mjeru, a tipu dF_x^s singularna mjera u odnosu na L mjeru, ([15]).

Takodjer se može pokazati da se proizvoljni slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ može na jedinstven način prikazati u obliku zbroja tri uzajamno ortogonalna slučajna procesa

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \quad \text{za svako} \quad t \in I,$$

pri čemu slučajni proces $\{x_1(t);\ t \in I\}$ ima diskretne inovacije, tj. njegov maksimalni spektralni tip inducira diskretnu mjeru, proces $\{x_2(t);\ t \in I\}$ ima apsolutno neprekidan maksimalni spektralni tip, a $\{x_3(t);\ t \in I\}$ ima neprekidan i singularan maksimalni spektralni tip u odnosu na L mjeru([15]).

Promatrajmo sada kompoziciju

$$H(t) = (F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t)) \text{ , za } t \in I,$$

gdje je $\varphi: I \to I$ strogo rastuća i neprekidna funkcija takva da je $\varphi(0) = 0$ i $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty$, tj. $\varphi(I) = I$.

Očigledno da je $H: I \to R$ monotono neopadajuća i neprekidna slijeva funkcija. Osim toga, akó je F funkcija skoka ili singularna funkcija onda je i H isto takva funkcija bez obzira kakva je funkcija φ, što neposredno slijedi iz definicije kompozicije funkcija.

Medjutim, ako je F apsolutno neprekidna funkcija, onda je H takodjer apsolutno neprekidna samo u onom slučaju kada je i φ apsolutno neprekidna funkcija([22],IX).

Ako je φ singularna funkcija, a F apsolutno neprekidna, tada je H singularna funkcija.

Zaista, kao što je poznato, kompozicija neprekidnih i derivabilnih funkcija je neprekidna i derivabilna funkcija i pri tome je $H'(t) = F'((\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ za svako $t \in I$. Budući da je φ singularna funkcija, to je $\varphi'(t) = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru. Stoga je na I i $H'(t) = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru. Prema tome H je singularna funkcija.

Neka je m_F L-S mjera s obzirom na funkciju F, a m_H L-S mjera s obzirom na funkciju $H = F \circ \varphi$. Tada iz prethodnog razmatranja izravno proizlazi ovaj zaključak:

mjera m_H ostaje u istom odnosu prema L mjeri kao i mjera m_F u svim slučajevima osim u onom kada je generirajuća funkcija mjere m_F apsolutno neprekidna a φ singularna funkcija - u ovom slučaju mjera m_H je singularna.

Budući da je

(2.1) $\quad m_H(B) = \int\limits_B dH(u) = \int\limits_B dF(\varphi(u)) = m_F(\varphi(B))$ za svako $B \in \mathcal{B}_I$,

gdje je $\mathcal{B}_I$ familija Borelovih skupova na I, to se vrlo jednostavno dokazuje

Teorem 2.1. Neka su na prostoru $(I, \mathcal{B}_I)$ zadane L-S mjere $m_{F_1}, m_{F_2}, \ldots, m_{F_N}$ $(2 \leq N < \infty)$ i L-S mjere $m_{H_1}, m_{H_2}, \ldots, m_{H_N}$, gdje je $H_k = F_k \circ \varphi$, $k = \overline{1,N}$. Ako je

$$m_{F_1} > m_{F_2} > \ldots > m_{F_N},$$

tada je i

$$m_{H_1} > m_{H_2} > \ldots > m_{H_N}$$

bez obzira na svojstva strogo rastuće i neprekidne funkcije $\varphi : I \to I$.

Dokaz. Teorem će biti u cijelosti dokazan ako se pokaže da za proizvoljno $n=\overline{1,N-1}$ vrijedi relacija

$$m_{F_{n+1}} \ll m_{F_n} \Rightarrow m_{H_{n+1}} \ll m_{H_n}.$$

Kao što je poznato, iz uvjeta $m_{F_{n+1}} \ll m_{F_n}$ proizlazi relacija

$$m_{F_n}(E) = 0 \Rightarrow m_{F_{n+1}}(E) = 0$$

za svaki m_{F_n} zanemarljiv skup $E \in \mathcal{B}_I$.

Budući da je $m_{H_n}(B) = m_{F_n}(\varphi(B))$ za svaki Borelov skup $B \subset I$, to je za proizvoljni m_{H_n} zanemarljiv skup $E_1 \in \mathcal{B}_I$

$$m_{H_n}(E_1) = 0 \Rightarrow m_{F_n}(\varphi(E_1)) = 0 \Rightarrow m_{F_{n+1}}(\varphi(E_1)) = 0 \Rightarrow m_{H_{n+1}}(E_1) = 0,$$

a to znači da je $m_{H_{n+1}} \ll m_{H_n}$.

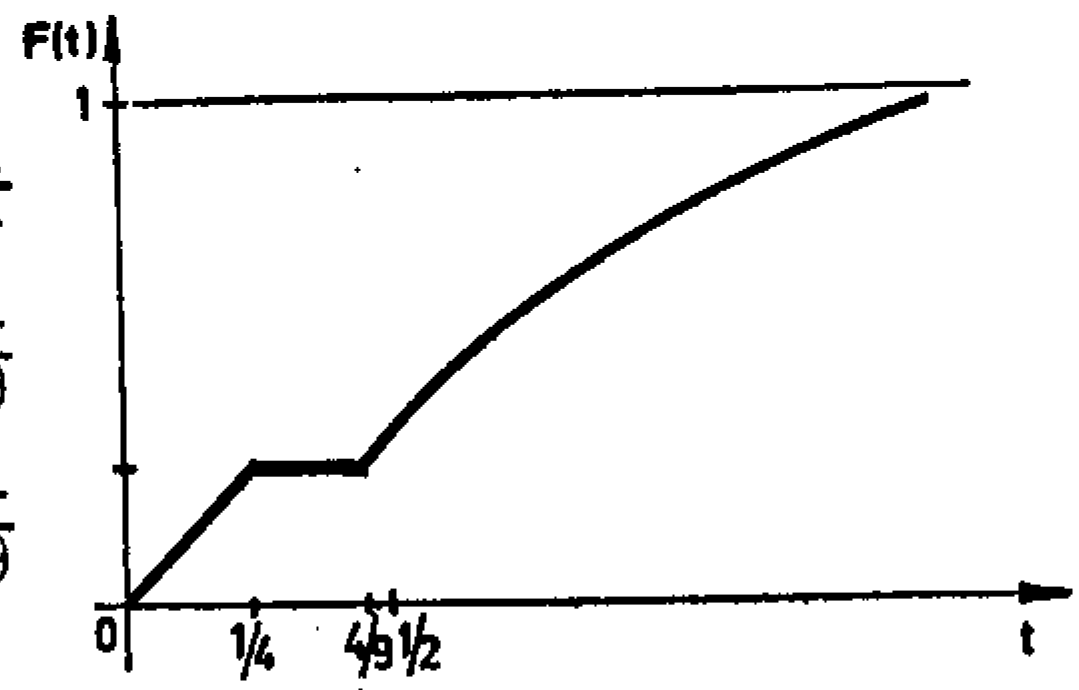
Q.E.D.

Sada se postavlja pitanje: kakva svojstva mora da ima funkcija $\varphi: I \to I$ da bi L-S mjere m_F i m_H, $H=F\circ\varphi$, bile medjusobno ekvivalentne? Na osnovi dosadašnjeg razmatranja dade se zaključiti da ovo pitanje ima smisla. Naime, pokazali smo npr. da ako je m_F apsolutno neprekidna mjera u odnosu na L mjeru, a φ strogo rastuća, neprekidna i singularna funkcija, onda je u m_H singularna mjera u odnosu na L mjeru; u tom slučaju dakle, mjere m_F i m_H nisu usporedljive.

Sada ćemo navesti primjer dviju neekvivalentnih mjera, koje imaju isti odnos s obzirom na L mjeru.

Primjer 2.1. Neka je generirajuća funkcija $F: [0,+\infty\rangle \to [0,1\rangle$ L-S mjere m_F zadana formulom

$$F(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{4}{9} \\ 1 - \frac{1}{3t} & t > \frac{4}{9} \end{cases} \qquad (2.2)$$

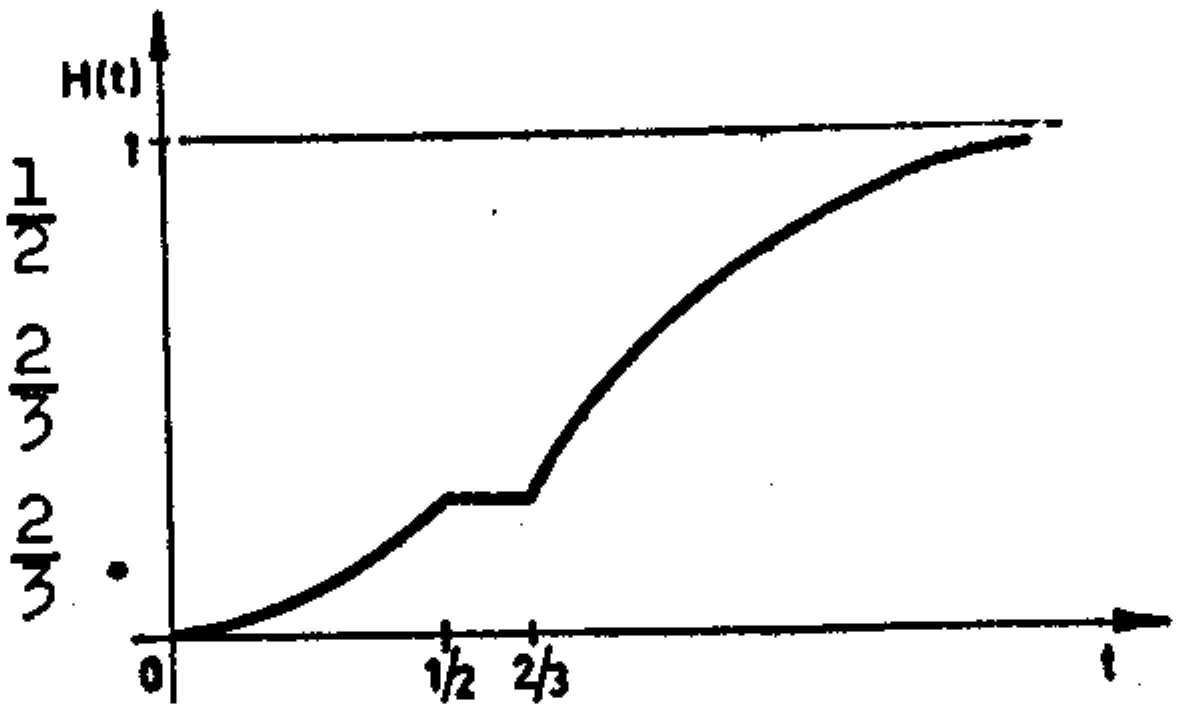


i neka je $\varphi: [0,\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ funkcija zadana jednakošću

$$\varphi(t) = t^2, \quad t \in [0,+\infty\rangle.$$

Tada je

$$H(t) = F(\varphi(t)) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} < t \leq \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{1}{3t^2} & t > \frac{2}{3}. \end{cases}$$



Očigledno da su obje mjere m_F i m_H apsolutno neprekidne u odnosu na L mjeru. Medjutim, pošto je za $E_1 = \langle \frac{1}{4}, \frac{4}{9}]$ $m_F(E_1) = 0$ a $m_H(E_1) \neq 0$, odnosno za $E_2 = \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, $m_F(E_2) \neq 0$ a $m_H(E_2) = 0$, zaključujemo da mjere m_F i m_H medjusobno nisu usporedljive.

Ako je F funkcija zadana formulom (2.2), nije teško pokazati da je $m_F \ll m_H$ za $\varphi(t) = \frac{9}{4} t^2$, $t \in [0,+\infty\rangle$, odnosno da je $m_H \ll m_F$ za $\varphi(t) = 4\, t^2$, $t \in [0,+\infty\rangle$.

Mjere m_F i m_H, gdje je $H = F \circ \varphi$ a F zadana izrazom (2.2) su ekvivalentne ako neprekidna funkcija $\varphi: [0,+\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ ima slijedeća svojstva:

(a) $\varphi'(t) > 0$ gotovo svuda na $[0,+\infty\rangle$ u odnosu na L mjeru i

(b) $\varphi(\langle \frac{1}{4}, \frac{4}{9}]) = \langle \frac{1}{4}, \frac{4}{9}]$.

Na primjer, ova funkcija zadovoljava uvjete (a) i (b)

$$\varphi(t) = \begin{cases} 4\, t^2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ t^2 + \frac{11}{36} t + \frac{1}{9} & \frac{1}{4} < t \leq \frac{4}{9} \\ \frac{9}{4} t^2 & t > \frac{4}{9}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Da bismo mogli odgovoriti na postavljeno pitanje moramo definirati N_ν funkcije, gdje je ν proizvoljna mjera na $I = [t_0, +\infty\rangle$.

Definicija 2.1. Kazat ćemo da je $\varphi : I \to I$ N_ν funkcija ili da ima svojstvo N_ν ako ona svaki ν zanemarljiv skup $E \subset I$ preslikava u ν zanemarljiv skup, tj. ako

$$\nu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(\varphi(E)) = 0$$

za svaki ν zanemarljiv skup $E \subset I$.

Napomena: Ako je ν Lebesqueova mjera na I, tj. ako je $\nu = m$, onda se N_m funkcija φ naziva N funkcija([32] § 18).
Svaka apsolutno neprekidna funkcija ima N svojstvo. No, svaka N funkcija nije apsolutno neprekidna budući da i funkcije neograničene varijacije mogu imati N svojstvo. Medjutim, svaka N funkcija ograničene varijacije je apsolutno neprekidna ([32]; § 18.); važi i obrat.

Teorem 2.2. Da bi L-S mjere m_F i m_H s obzirom na funkcije F i $H = F \circ \varphi$ bile medjusobno ekvivalentne, potrebno je i dovoljno da funkcija φ i njena inverzna funkcija φ^{-1} imaju N_{m_F} svojstvo.

Dokaz. Neka su φ i φ^{-1} N_{m_F} funkcije. Dokažimo da je tada $m_H \sim m_F$ tj. da je $m_H \prec m_F$ i $m_F \prec m_H$.

Ako je $E \subset I$ proizvoljni m_F zanemarljiv skup, onda iz pretpostavke da je φ N_{m_F} funkcija i jednakosti (2.1) proizlaze relacije:

$$m_F(E) = 0 \Rightarrow m_F(\varphi(E)) = 0 \Rightarrow m_H(E) = 0,$$

a to znači da je $m_H \prec m_F$.

No, ako je $E \subset I$ proizvoljni m_H zanemarljiv skup, onda iz jednakosti (2.1) i pretpostavke da je φ^{-1} N_{m_F} funkcija imamo da

$$m_H(E)=0 \Rightarrow m_F(\varphi(E))=0 \Rightarrow m_F\{\varphi^{-1}(\varphi(E))\}=0 \Rightarrow m_F(E)=0,$$

stoga je i $m_F \prec m_H$.

Obrnuto, neka je $m_F \sim m_F$. Pokažimo da su φ i φ^{-1} N_{m_F} funkcije.

Budući da je $m_F(E)=0 \Leftrightarrow m_H(E)=0$ za proizvoljni skup $E \subset I$, to iz jednakosti (2.1) imamo relacije:

$m_F(E)=0 \Rightarrow m_H(E)=0 \Rightarrow m_F(\varphi(E)=0) \Rightarrow$ da je φ N_{m_F} funkcija;

$m_F(E)=0 \Rightarrow m_F(\varphi(\varphi^{-1}(E)))=0 \Rightarrow m_H(\varphi^{-1}(E))=0 \Rightarrow m_F(\varphi^{-1}(E))=0 \Rightarrow$ da je φ^{-1} N_{m_F} funkcija.

Q.E.D.

Analizirajući uvjete prethodnog teorema dolazi se do pitanja: ako je φ N_{m_F} funkcija, zar i φ^{-1} nije N_{m_F} funkcija?

Odgovor je u općem slučaju negativan, budući da se npr. za $m_F=m$ (m je Lebesqueova mjera) može konstruirati strogo rastuća i apsolutno neprekidna funkcija $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ (φ je i N funkcija) takva da njena inverzna funkcija $\varphi^{-1}:[0,1]\to[0,1]$ nije apsolutnon neprekidna, što znači da nije ni N funkcija pošto je φ^{-1} funkcija ograničene varijacije. Pokažimo to.

No, prije toga navedimo nužne i dovoljne uvjete za apsolutnu neprekidnost funkcija φ i φ^{-1}.

Strogo rastuća i neprekidna funkcija $\varphi:[a,b]\to R$ je apsolutno neprekidna onda i samo onda ako je slika skupa $E_1=\{x\in[a,b] : \varphi'(x)=+\infty\}$ skup L mjere nula, tj. ako je $m[\varphi(E_1)]=0$.

Njena inverzna funkcija φ^{-1} je apsolutno neprekidna onda i samo onda ako je skup $E_0=\{x\in[a,b] : \varphi'(x)=0\}$ L mjere nula,

tj. ako je $m(E_o) = 0$, ([22]; IX).
Stoga neprekidna i strogo rastuća funkcija $\varphi:[a,b]\to R$ neće imati apsolutno neprekidnu inverznu funkciju φ^{-1} ako je

$$0<m(E_o)<b-a.$$

Primijetimo, funkcija φ nije apsolutno neprekidna ako je $m(E_o) = b-a$, već je singularna.

Prema tome, da bismo riješili postavljeni zadatak potrebno je da konstruiramo takvu strogo rastuću i apsolutno neprekidnu funkciju $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ da je $0<m(E_o)<1$.

Neka je $E_o\in[0,1]$ nigdje gust na $[0,1]$ i zatvoren skup L mjere $1-\varepsilon$, $m(E_o) = 1-\varepsilon$, za proizvoljno ali fiksirano $\varepsilon>0$. Da takav skup postoji za bilo koje $0<\varepsilon<1$, pokazano je u [33]. Pošto je E_o zatvoren skup, to je on mjerljiv u Lebesqueovom smislu. Neka je ξ_B karakteristična funkcija skupa $B=E_o^c = [0,1]\setminus E_o$. Budući da je ξ_B sumabilna funkcija u odnosu na L integral, ima smisla definirati funkciju φ na ovaj način:

$$\varphi(x) = (L)\int_0^x \psi(t)\,\xi_B(t)dt\ , \text{ za svako } x\in[0,1], \tag{2.4}$$

gdje je ψ takva L integrabilna pozitivna funkcija da je $\int_B \psi(t)dt=1$.

Očigledno da $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ i da je ona strogo rastuća funkcija, pošto je jednaka L integralu nenegativne funkcije. Stoga ona ima inverznu funkciju $\varphi^{-1}:[0,1]\to[0,1]$. Nadalje, φ je apsolutno neprekidna funkcija jer je definirana pomoću neodredjenog L integrala. Najzad, pošto je na $[0,1]$ $\varphi'(x) = \psi(x)\cdot\xi_B(x)$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru, to je $\varphi'(x) = 0$ isključivo za $x\in E_o$.

Dakle, funkcija $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ odredjena jednakošću (2.4) je strogo rastuća, apsolutno neprekidna i ima inverznu funkciju $\varphi^{-1}:[0,1]\to[0,1]$ koja nije apsolutno neprekidna, jer je

$$m(E_0) = m\Big(\{x\in[0,1] : \varphi'(x) = 0\}\Big) = 1-\varepsilon ,\varepsilon>0.$$

Medjutim, funkcija φ^{-1} nije ni singularna na cijelom segmentu $[0,1]$ jer je $\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru onda i samo onda ako je $\varphi'(x) = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru. Zbog toga je φ^{-1} suma apsolutno neprekidne i singularne funkcije.

Sada ćemo dati nešto odredjenije uvjete koje funkcija φ mora zadovoljavati da bi L-S mjere m_F i m_H, $H=F\circ\varphi$, bile medjusobno ekvivalentne.

Teorem 2.3. Neka je generirajuća funkcija $F:I\to R$, $I=[t_0,+\infty\rangle$ L-S mjere m_F apsolutno neprekidna. Tada je L-S mjera $m_H, H=F\circ\varphi$, ekvivalentna mjeri m_F ako je neprekidna funkcija $\varphi:I\to I$ takva da je

(a) $\varphi'(x)>0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru,

(b) $\varphi(E)\in\mathcal{N}$ ako i samo ako $E\in\mathcal{N}$, gdje je $\mathcal{N}$ familija onih skupova $E\in\mathcal{B}_I$ za koje je $m_F(E) = 0$ a $m(E)\neq 0$.

Prije nego pristupimo dokazu teorema primjetimo da iz svojstva apsolutne neprekidnosti funkcije F proizlazi da je L-S mjera ili ekvivalentna ili podredjena L mjeri.

Ako je $m_F\sim m$ onda je familija $\mathcal{N}$ prazna, pa neprekidna funkcija φ treba da zadovoljava samo uvjet (a) da bi L-S mjere m_F i m_H, $H=F\circ\varphi$ bile ekvivalentne.

No, ako je $m_F\prec m$ onda familija $\mathcal{N}$ nije prazna, jer postoji bar jedan skup $E \in \mathcal{B}_I$ takav da je

$$m_F(E) = 0 \quad a \quad m(E) \neq 0.$$

Dokaz teorema 2.3. Iz uvjeta (a) proizlazi da je funkcija $H = F \circ \varphi : I \to R$ apsolutno neprekidna. Zbog toga je i L-S mjera m_H apsolutno neprekidna u odnosu na L mjeru, tj. $m_H \ll m$. Nadalje, takodjer iz uvjeta (a) slijedi da su φ i φ^{-1} N funkcije, tj.

$$m(E_0) = 0 \Rightarrow m\left(\varphi(E_0)\right) = 0 \quad i \quad m(E_0) = 0 \Rightarrow m\left(\varphi^{-1}(E_0)\right) = 0$$

za proizvoljni L zanemarljiv skup $E_0 \subset I$.

No budući da je skup $E_0 \notin \mathcal{N}$ m_F zanemarljiv onda i samo onda ako je m zanemarljiv, to

$$(2.5) \quad \begin{cases} m_F(E_0) = 0 \Leftrightarrow m(E_0) = 0 \Rightarrow m\left(\varphi(E_0)\right) = 0 \Rightarrow m_F\left(\varphi(E_0)\right) = 0 \\ m_F(E_0) = 0 \Leftrightarrow m(E_0) = 0 \Rightarrow m\left(\varphi^{-1}(E_0)\right) = 0 \Rightarrow m_F\left(\varphi^{-1}(E_0)\right) = 0 \end{cases}$$

za proizvoljni m_F zanemarljiv skup $E_0 \notin \mathcal{N}$.

Nadalje, lako je pokazati da je za svaki skup $E \in \mathcal{N}$ i $\varphi^{-1}(E) \in \mathcal{N}$. Zaista, neka $\varphi^{-1}(E) \notin \mathcal{N}$ za $E \in \mathcal{N}$, tada iz uvjeta (b) slijedi da i $\varphi\left(\varphi^{-1}(E)\right) \notin \mathcal{N}$, a to znači da i $E \notin \mathcal{N}$, što je suprotno danoj pretpostavci. Prema tome, imamo da

$$(2.6) \quad m_F(E) = 0 \Rightarrow m_F\left(\varphi(E)\right) = 0 \quad i \quad m_F(E) = 0 \Rightarrow m_F\left(\varphi^{-1}(E)\right) = 0,$$

za proizvoljni skup $E \in \mathcal{N}$.

Sada iz (2.5) i (2.6) proizlazi da su φ i φ^{-1} N_{m_F} funkcije, na cijelom skupu I, a to je prema teoremu (2.2) nužan i dovoljan uvjet za medjusobnu ekvivalentnost L-S mjera m_F i m_H.

Q.E.D.

Sada se nije teško uvjeriti da smo na strani 53 točno odredili uvjete koje funkcija φ mora zadovoljavati za ekvivalentnost mjera m_F i m_H, $H = F \circ \varphi$, gdje je F oblika (2.2).

Teorem 2.4. Neka je generirajuća funkcija $F: I \to R^+$ L-S mjere m_F singularna funkcija na I i neka je $E = \{t \in I: F'(t) = 0\}$. Tada je L-S mjera m_H, $H = F \circ \varphi$, ekvivalentna mjeri m_F ako strogo rastuća i neprekidna funkcija φ zadovoljava ove uvjete:

a) $\varphi'(t)$ postoji za svako $t \in E$, a za $t \in I \setminus E$ $\varphi'(t) > 0$ ili $\varphi'(t)$ ne postoji,

b) $\varphi(t) \in E$ onda i samo onda ako $t \in E$.

Dokaz. Budući da iz singularnosti funkcije F slijedi singularnost mjera m_F u odnosu na L mjeru, to je

$$m_F(E) = 0 \text{ i } m(I \setminus E) = 0.$$

Iz uvjeta (a) i (b) proizlazi da je

$$(2.7)\begin{cases} H'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = 0 \text{ za svako } t \in E, \text{ jer je } \varphi(t) \in E, \\ H'(t) \neq 0 \text{ ili } H'(t) \text{ ne postoji na skupu } I \setminus E. \end{cases}$$

Stoga je $H'(t) = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeri. No, kako je H strogo rastuća i neprekidna, to je ona singularna funkcija. Prema tome, m_H je singularna mjera u odnosu na L mjeru i pri tome je

$$m_H(E) = 0 \quad \text{i} \quad m(I \setminus E) = 0.$$

Osim toga, iz (2.7) slijedi da je i mjera m_H kao i mjera m_F usredsredjena na skup $I \setminus E$. Stoga su mjere m_H i m_F medjusobno ekvivalentne.

Q.E.D.

Sada ćemo pokazati da postoji funkcija $\varphi(t) \not\equiv t$ koja zadovoljava uvjete teorema (2.4).

Primjer 2.2. Neka je $I_1 = [0,1]$, $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{k}{2^n},\ k = \overline{0, 2^n} \right\}$ i neka je opći član $F_n : I_1 \to I_1$ niza funkcija $F_0, F_1, F_2, \ldots$, odredjen jednakošću:

$$F_n(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{0\leq i\leq k-1} 3^{n-r_i} + \frac{1}{4^n}(2^n t-k)^{3^l},$$

$$\frac{k}{2^n} \leq t \leq \frac{k+1}{2^n}, \quad k=\overline{0,2^n-1}, \quad n=\overline{0,\infty},$$

gdje je r_k broj jedinica u binarnoj reprezentaciji broja $k=\overline{0,2^n-1}$ (tako npr. $r_0=0$, $r_1=r_2=r_4=r_{2^n}=1$, $r_3=2, \ldots r_{11}=3, \ldots$).

Tada postoji funkcija $F: I_1 \to I_1$, takva da je

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} F_n(t), \quad t \in I_1.$$

F je strogo rastuća i neprekidna funkcija i $F'(t) = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru, preciznije $F'(t) = 0$ za svako $t \in I_1 \setminus E_0$, (vidi, [24]).

Prema tome F je singularna funkcija, pa je L-S mjera m_F singularna u odnosu na L mjeru i usredsredjena je na skup E_0. Neka je

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \frac{1}{2}(3t-1) & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Funkcija $\varphi: I_1 \to I_1$ je strogo rastuća i neprekidna. Ona zadovoljava uvjete prethodnog teorema, što je očigledno. Stoga je m_H, $H=F\circ\varphi : I_1 \to I_1$, singularna L-S mjera u odnosu na L mjeru i $m_H \sim m_F$.

<u>Primjer 2.3.</u> Neka su

$$I_n^k = \langle t_n^k, t_n^k + \frac{1}{3^n} \rangle, \quad n=\overline{1,\infty}, \quad k=\overline{1,2^{n-1}},$$

intervali koji se odstranjuju pri konstrukciji Cantorovog (trijedskog) skupa K, gdje je

$$t_n^1 = \frac{1}{3^n}, \quad n=\overline{1,\infty}; \quad t_n^2 = \frac{7}{3^n}, \quad n=\overline{2,\infty};$$

$t_n^3 = \frac{19}{3^n}$, $t_n^4 = \frac{25}{3^n}$, $n = \overline{3,\infty}$;

$t_n^5 = \frac{55}{3^n}$, $t_n^6 = \frac{61}{3^n}$, $t_n^7 = \frac{73}{3^n}$, $t_n^8 = \frac{79}{3^n}$, $n = \overline{4,\infty}$;

. . . .

Cantorova funkcija $F: [0,1] \to [0,1]$ definirana je ovako:

$$F(t) = \frac{2k-1}{2^n} \text{ za } t \in I_n^k \text{ , } n = \overline{1,\infty} \text{ , } k = \overline{1,2^{n-1}} \text{ ,}$$

$$F(t) = \sup F\big([0,t] \setminus K\big) \text{ za } t \in K \text{ i } F(0) = 0.$$

Kao što je poznato, F je neprekidna i neopadajuća funkcija i $F'(t) = 0$ za svako $t \notin K$. Budući da je $m(K) = 0$, to je $F' = 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru. Stoga je L - S mjera m_F singularna u odnosu na L mjeru.

Ako je sada

$$\varphi(t) = 3^n \big(t - t_n^k\big)^2 + t_n^k \text{ za } t \in I_n^k \text{ , } n = \overline{1,\infty}, \ k = \overline{1,2^{n-1}},$$

$$\varphi(t) = \sup \varphi\big([0,t] \setminus K\big) \text{ za } t \in K, \text{ i } \varphi(0) = 0 \text{ ,}$$

tada je $m_{F \circ \varphi} \sim m_F$, jer funkcija $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ zadovoljava sve uvjete teorema 2.4, što nije teško pokazati.

Zaista, očigledno da je φ neprekidna i strogo rastuća funkcija i da $\varphi'(t)$ postoji za svako $t \in I_n^K$, a za $t \in K$ da ne postoji. Nadalje, pošto je $\varphi(t_n^k) = t_n^k$ i $\varphi\left(t_n^k + \frac{1}{3^n}\right) = t_n^k + \frac{1}{3^n}$, to je $\varphi(I_n^k) = I_n^k$ za svaki interval I_n^k , $n = \overline{1,\infty}$, $k = \overline{1,2^{n-1}}$, a to znači da je i $\varphi(t) \in K$ onda i samo onda ako je $t \in K$.

Teorem 2.5. Neka je generirajuća funkcija $F: I \to R$ L-S mjere m_F funkcija skoka na I i neka je

$$E_0 = \{t \in I : F(t+0) \neq F(t)\}$$

Ako je neprekidna funkcija $\varphi: I \to I$ takva da je

$$\varphi(E_0) = E_0 \text{ i } \varphi(I \setminus E_0) = I \setminus E_0 \text{ ,} \tag{2.8}$$

onda je L-S mjera m_H, $H = F\circ\varphi : I\to R$, ekvivalentna mjeri m_F.

Dokaz. Izravno iz jednakosti $H(t) = F(\varphi(t))$, $t\in I$, proizlazi da je i H funkcija skoka, a iz uvjeta (2.8) slijedi da je za svako $t\in E_0$ $H(t+0)\neq H(t)$ i obratno, tj. ako je za neko $t\in I$ $H(t+0)\neq H(t)$ onda je $t\in E_0$.

To znači da je

$$E_1 = \{t\in I : H(t+0)\neq H(t)\} = E_0.$$

Prema tome L-S mjera m_H je diskretna kao i L-S mjera m_F i $m_H \sim m_F$.

Q.E.D.

Primjer 2.4. Neka je generirajuća funkcija $F:[0,1]\to R$ diskretne L-S mjere m_F funkcija skoka sa skokovima u racionalnim točkama segmenta $[0,1]$, što znači da je

$$E_0 = \{t\in [0,1] : F(t+0)\neq F(t)\} = Q_{[0,1]}.$$

L-S mjera $m_{F\circ\varphi}$ bit će ekvivalentna mjeri m_F ako je npr. funkcija $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ oblika

$$\varphi(t) = \frac{2t}{t+1},\ t\in [0,1] .$$

Zaista, φ je neprekidna i strogo rastuća funkcija. Osim toga $\varphi(t)\in Q_{[0,1]}$ onda i samo onda ako je $t\in Q_{[0,1]}$, to znači da je $\varphi(Q_{[0,1]}) = Q_{[0,1]}$. No, pošto je φ strogo rastuća funkcija , to je i $\varphi([0,1]\setminus Q_{[0,1]}) = [0,1]\setminus Q_{[0,1]}$. Dakle, funkcija φ zadovoljava uvjete teorema 2.5 pa je $m_F\sim m_{F\circ\varphi}$.

Ako sada odbacimo pretpostavku da je na cijelom intervalu I zadana L-S mjera istog tipa , imamo ovu tvrdnju:

Teorem 2.6. Neka je na I zadana L-S mjera m_F s obzirom na funkciju $F:I\to R$.

L-S mjera m_H, $H = F\circ\varphi$: $I \to R$, bit će ekvivalentna mjeri m_F ako neprekidna funkcija $\varphi: I \to I$ zadovoljava ova dva uvjeta:

(a) $\varphi'(t) > 0$ za svako $t \in I$;

(b) $\varphi(E) \in \mathcal{N}$ onda i samo onda ako je $E \in \mathcal{N}$,

gdje je $\mathcal{N}$ familija m_F zanemarljivih skupova pozitivne L mjere (dakle, $m_F(E) = 0$ a $m(E) \neq 0$ za svako $E \in \mathcal{N}$).

Dokaz. Kao što smo rekli na početku ovog paragrafa, svaku L-S mjeru moguće je napisati u obliku

$$m_F = m_{F_d} + m_{F_a} + m_{F_s} .$$

Stoga, budući da su uvjeti teorema 2.3, 2.4 i 2.5 u cijelosti sadržani u uvjetima teorema 2.6, proizlazi da je $m_{F_a} \sim m_{H_a}$, $m_{F_s} \sim m_{H_s}$ i $m_{F_d} \sim m_{H_d}$, gdje je $H_a = F_a\circ\varphi$, $H_s = F_s\circ\varphi$ i $H_d = F_d\circ\varphi$, a to znači da je i $m_F \sim m_H$.

Q.E.D.

Sada smo u mogućnosti da damo uvjete koje funkcija $\varphi: I \to I$ mora zadovoljavati da bi $m_{F_n} \sim m_{H_n}$, $H_n = F_n\circ\varphi$, $n = \overline{1,N}$, $N \leq \infty$, ako je $m_{F_1} \succ m_{F_2} \succ \dots \succ m_{F_N}$.

Teorem 2.7. Neka su na prostoru (I, B_I) zadane takve L-S mjere m_{F_1}, m_{F_2}, ..., m_{F_N} s obzirom na funkcije $F_1, F_2, \dots, F_N: I \to R$ da je

$$m_{F_1} \succ m_{F_2} \succ \dots \succ m_{F_N}, \quad N \leq \infty .$$

Ako neprekidna funkcija $\varphi: I \to I$ i njena inverzna funkcija $\varphi^{-1}: I \to I$ imaju svojstva $N_{m_{F_1}}$, $N_{m_{F_2}}$, ..., $N_{m_{F_N}}$, L-S mjere m_{H_1}, m_{H_2}, ..., m_{H_N}, $(H_n = F_n\circ\varphi$, $n = \overline{1,N})$ ekvivalentne redom mjerama m_{F_1}, m_{F_2}, ..., m_{F_N}, tj. $m_{F_n} \sim m_{H_n}$ za svako

$n = \overline{1,N}$ i pri tome je $m_{H_1} \succ m_{H_2} \succ \dots \succ m_{H_N}$.

Ovaj teorem ne dokazujemo jer je on direktna posljedica teorema 2.1 i 2.2.

Korisno je ovdje primijetiti:

1) Funkcija φ i φ^{-1} mogu imati $N_{m_{F_k}}$ svojstvo, recimo, za $k \in \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subset \{1,2,\dots, N\}$, $n < N$, a da bar jedna od njih nema $N_{m_{F_{k'}}}$ svojstvo za $k' \in \{1,2, \dots, N\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$.

Ilustrirajmo ovo primjerima kad je $N = 2$.

Primjer 2.5. Neka je $m_1 = m$ L mjera na intervalu $[0,+\infty\rangle$, a m_{F_2} L-S mjera s obzirom na funkciju $F_2 : [0,+\infty\rangle \to [0,1]$ oblika

$$F_2(t) = \begin{cases} t & \text{za } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{za } t > 1 \end{cases}$$

i neka je $\varphi(t) = \frac{1}{2} t$, $t \in [0,\infty\rangle$.

Očigledno da je $m \succ m_{F_2}$ i da su φ i $\varphi^{-1} : [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ N funkcije. Stoga je $m \sim m_{F_1} \circ \varphi = m\varphi$.

S druge strane, pošto je

$m_{F_2}([1,\infty\rangle) = 0$, a $m_{F_2}(\varphi[1,\infty\rangle)$ $m_{F_2}([\frac{1}{2},\infty\rangle) = \frac{1}{2}$,

to φ nije $N_{m_{F_2}}$ funkcija. No, φ^{-1} je $N_{m_{F_2}}$ funkcija jer je $m_{F_2}(\varphi^{-1}[1,\infty\rangle) = m_{F_2}([2,\infty\rangle) = 0$. Zbog toga je

$$m_{F_2} \prec m_{F_2} \circ \varphi \qquad \text{i} \qquad m\varphi \succ m_{F_2} \circ \varphi \;.$$

Primjer 2.6. Neka su m_{F_1} i m_{F_2} diskretne L-S mjere s obzirom na funkcije F_1 i $F_2 : [0,\infty\rangle \to [0,1]$ oblika

$$F_1(t)=\begin{cases} 0 & \text{za } t=0 \\ \frac{1}{3} & \text{za } 0<t\leqslant 1 \\ \frac{2}{3} & \text{za } 1<t\leqslant 2 \\ 1 & \text{za } t>2, \end{cases} \qquad F_2(t)=\begin{cases} 0 & \text{za } t=0 \\ \frac{1}{3} & \text{za } 0<t\leqslant 2 \\ 1 & \text{za } t>2 \end{cases},$$

i neka je $\varphi(t)=\frac{1}{2}t^2$, $t\in[0,\infty\rangle$.

Budući da je $E_1=[0,\infty\rangle\setminus\{0,1,2\}$ m_{F_1} zanemarljiv skup a $E_2=[0,\infty\rangle\setminus\{0,2\}$ m_{F_2} zanemarljiv skup i $E_1\subset E_2$, to je $m_{F_1}>m_{F_2}$. Nadalje, pošto je $\varphi(0)=\varphi^{-1}(0)=0$ i $\varphi(2)=\varphi^{-1}(2)=2$, to je $\varphi(E)\subseteq E_2$ i $\varphi^{-1}(E)\subseteq E_2$ za svaki m_{F_2} mjerljiv skup $E\subseteq E_2$. Zbog toga

$$m_{F_2}(E)=0\Rightarrow m_{F_2}(\varphi(E))=0 \quad i \quad m_{F_2}(\varphi^{-1}(E))=0) \;.$$

To znači da su φ i φ^{-1} $N_{m_{F_2}}$ funkcije i da je $m_{F_2}\sim m_{F_2}\circ\varphi$.

Medjutim, φ i φ^{-1} nisu $N_{m_{F_1}}$ funkcije, jer je npr.

$$m_{F_1}\left(\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,,\,2\right\rangle\right)=0 \quad a \quad m_{F_1}\left(\varphi\left(\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,,\,2\right\rangle\right)\right)=m_{F_1}\left(\left[\tfrac{3}{4}\,,\,2\right\rangle\right)=\tfrac{1}{3}\;,$$

odnosno

$$m_{F_1}\left(\left[\tfrac{1}{8}\,,\,\tfrac{9}{8}\right]\right)=0 \quad a \quad m_{F_1}\left(\varphi^{-1}\left(\left[\tfrac{1}{8}\,,\,\tfrac{9}{8}\right]\right)\right)=m_{F_1}\left(\left[\tfrac{1}{2},\,\tfrac{3}{2}\right]\right)=\tfrac{1}{3}\;.$$

2) Za $N=\infty$ ne mora uvijek postojati funkcija $\varphi(t)\neq t$ koja bi imala i $N_{m_{F_1}}$ i $N_{m_{F_2}}$, ... i $N_{m_{F_N}}$ svojstvo, kao što to pokazuje ovaj primjer.

Primjer 2.7. Neka su m_{F_1}, m_{F_2}, ..., m_{F_N} , $N=\infty$, diskretne L-S mjere s obzirom na funkcije F_1, F_2, ..., F_N: $[0,1]\rightarrow R$, pri čemu je

$$\{t\in[0,1] \,:\, F_1(t+0)\neq F_1(t)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{k}{2^n}\,,\; k=\overline{0,2^n-1}\right\}=A_1$$

$$\{t\in[0,1] \,:\, F_2(t+0)\neq F_2(t)\} = A_1\setminus\left\{\frac{2k-1}{2^4}\,,\; k=\overline{0,2^3}\right\}$$

. . . .

$$\left\{t \in [0,1] : F_n(t+0) \neq F_n(t)\right\} = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \left\{\frac{2k-1}{n^{3+i}}, \ k = \overline{0,2^{2+i}}\right\}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\left\{t \in [0,1] : F_N(t+0) \neq F_N(t)\right\} = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\} .$$

Sasvim je jasno da je $m_{F_1} \succ m_{F_2} \succ \dots \succ m_{F_N}$

Da bi funkcija $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ imala $N_{m_{F_N}}$, $N_{m_{F_{N-1}}}$, ..., $N_{m_{F_{N-i}}}$, ... svojstvo, mora biti neprekidna i zadovoljavati redom ove uvjete:

$$\varphi\left(\frac{2k-1}{2^3}\right) = \frac{2k-1}{2^3}, \quad k = \overline{1,2^2} \ ; \ \varphi\left(\frac{2k-1}{2^4}\right) = \frac{2k-1}{2^4}, \quad k = \overline{1,2^3}, \ \dots,$$

$$\varphi\left(\frac{2k-1}{2^{3+i}}\right) = \frac{2k-1}{2^{3+i}}, \quad k = \overline{1,2^{2+i}}, \quad i < \infty ,$$

A to znači da funkcija φ mora biti takva da je

$$\varphi\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n} \quad \text{za svako} \quad n = \overline{3,\infty} \quad \text{i} \quad k = \overline{0,2^n-1} \quad .$$

Očigledno da jedina neprekidna funkcija $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ koja zadovoljava navedeni uvjet jeste identična funkcija, tj. funkcija oblika $\varphi(t) = t$, $t \in [0,1]$.

Da za $N = \infty$ uvijek ne mora biti $\varphi(t) = t$, $t \in I$, posve je jasno. Naime, ako postoji bar jedan skup $A = \langle \alpha, \beta \rangle \subset I$ takav da je $m_{F_N}(A) > 0$, onda je očigledno da se može naći funkcija $\varphi(t) \neq t$, $t \in I$, koja bi imala $N_{m_{F_1}}$, $N_{m_{F_2}}$, ..., $N_{m_{F_N}}$ svojstvo.

Ipak pri razmatranju invarijantnosti spektralnog tipa slučajnog procesa u odnosu na transformaciju vremena, da ne bismo došli u situaciju da ta transformacija mora biti identična, pretpostavljat ćemo da je $N < \infty$, čime nećemo umanjiti općenitost rezultata.

U dosadašnjem razmatranju prostor definiranosti i L-S mjere m_F i L-S mjere m_H, $H = F \circ \varphi$, bio je $(I, \mathcal{B}_I)$ jer je $\varphi: I \to I$, $I = [t_o, +\infty>$. Medjutim, ako $\varphi: I_1 \to I$, $I_1 = [t_1 + \infty>$ i ako je $t_1 \neq t_o$, onda se prostor $(I_1, \mathcal{B}_{I_1})$ definiranosti mjere m_H ne poklapa s prostorom $(I, \mathcal{B}_I)$ definiranosti mjere m_F. Zbog toga se L-S mjere m_F, $F: I - R$, i m_H, $H = F \circ \varphi: I_1 \to R$, ne mogu usporedjivati u smislu definicije usporedljivosti mjera iz § 1.2, tj. u "običnom" smislu. Stoga je potrebno proširiti ovu definiciju kako bismo mogli usporedjivati mjere m_F i m_H i onda kad se prostori definiranosti tih mjera ne poklapaju.

Budući da uvijek postoji linearna funkcija ℓ koja preslikava interval $I = [t_o, \infty>$ na $I_1 = [t_1, \infty>$ (npr. $\ell(t) = \frac{t_1}{t_o} t$, $t \in I$, kad je $t_1, t_o > 0$), da funkcija

$$h = H \circ \ell = (F \circ \varphi) \circ \ell \quad : I \to R$$

zadržava sva svojstva, značajna sa stajališta L-S mjere, generirajuće funkcije $H: I_1 \to R$ L-S mjere m_H i da se prostori definiranosti mjera m_h i m_F poklapaju, onda ima smisla ova definicija:

<u>Definicija 2.2.</u> Neka su m_F i m_H L-S mjere s obzirom na funkcije $F: I \to R$ i $H: I_1 \to R$ i neka je ℓ linearna funkcija koja preslikava interval I_1 na I, a m_h L-S mjera s obzirom na funkciju $h = H \circ \ell: I \to R$.

Kazat ćemo da je mjera m_F ℓ-podredjena mjeri m_H ako je mjera m_F podredjena u običnom smislu mjeri m_h, a za mjeru m_H reći ćemo da je ℓ-podredjena mjeri m_F ako je m_h podredjena u običnom smislu mjeri m_F.

Za mjere m_f i m_H kazati ćemo da su ℓ-ekvivalentne ako je mjera m_f ℓ-podredjena mjeri m_H i ako je m_H ℓ-podredjena mjeri m_F.

Ako je $I_1 = I$, tada je $\ell(t) = t$, $t \in I$, pa je $h(t)=H(t)$ za svako $t \in I$ i $m_h = m_H$. Stoga su mjere m_H i m_F definirane na istom prostoru $(I,\mathcal{B}_I)$, pa je ℓ-podredjenost (ℓ-ekvivalentnost) u stvari, obična podredjenost (ekvivalentnost) mjera m_H i m_F. To praktično znači da je difinicijom (2.2) izvršeno proširenje ranije navedene definicije usporedljivosti mjera $(I, \mathcal{B}_I)$.

Iz prethodnog razmatranja i definicije ℓ-usporedljivosti mjera proizlazi da svi rezultati dobiveni u ovom paragrafu pod pretpostavkom da funkcija φ preslikava interval I na I vrijede i u slučaju ako funkcija φ preslikava neki drugi interval I_1 na I. Jedino su terminološki iskazi tih rezultata nešto drukčiji.

§ II.3. Invarijantnost spektralnog tipa slučajnog procesa u odnosu na transformaciju vremena

Neka je $\{x(t);\ t \in I\}$ slučajni proces sa spektralnim tipom

$$dF_x : dF_1^x > dF_2^x \ \dots > dF_N^x \quad ,$$

i neka je $\{y(t);\ t \in I\}$ takav slučajni proces da je

$$y(t) = (x\circ\varphi)(t) = x(\varphi(t)) \quad \text{za svako} \quad t \in I,$$

gdje je φ neprekidna i rastuća neslučajna funkcija koja preslikava interval I na I, $I = [t_0, \infty\rangle$.

Postavljeno pitanje u § II.1. o jednakosti spektralnih tipova, sada se može ovako formulirati:

Koja svojstva mora da ima neprekidna i rastuća funkcija $\varphi : I \quad I$ da bi spektralni tip

$$dF_y : dF_1^y > dF_2^y > \dots > dF_M^y$$

slučajnog procesa $\{y(t); \quad t \in I\}$ bio jednak spektralnom tipu dF_x' procesa $\{x(t); \quad t \in I\}$ u smislu definicije 1.1?

Odgovor je: slučajni procesi $\{x(t); t \in I\}$ i $\{y(t); t \in I\}$ $\big(y(t) = x(\varphi(t))\big)$ imat će isti spektralni tip ako rastuća i neprekidna funkcija $\varphi: I \to I$ i njena inverzna funkcija $\varphi^{-1} : I \to I$ imaju svojstvo $N_{dF_1^x}$, $N_{dF_2^x}$, ..., $N_{dF_N^x}$, tj. ako su slike φ i φ^{-1} dF_n^x zanemarljivih skupova opet skupovi dF_n^x zanemarljivi, za svako $n = \overline{1,N}$. Istinitost odgovora dokazat ćemo u ovom paragrafu.

Prvo razmotrimo slučaj kada je $\{x(t); t \in I\}$ proces s ortogonalnim prirastima, tj. kada je $\{x(t); t \in I\} = \{z(t); t \in I\}$.

Neka je $t \mapsto F_z(t) = \|z(t)\|^2$, $t \in I$, strukturna funkcija slučajnog procesa $\{z(t); t \in I\}$, koja inducira mjeru koja pripada njegovom maksimalnom spektralnom tipu dF_z multipliciteta $N = 1$. Promatrajmo sada slučajni proces $\{y(t); t \in I\}$ za koji je

$$y(t) = (z \circ \varphi)(t) = z(\varphi(t)) \text{ za svako } t \in I \quad ,$$

gdje je φ neslučajna rastuća i neprekidna funkcija koja preslikava interval I na I.

Budući da je za proizvoljne vrijednosti $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ iz I

$$\big(y(t_4) - y(t_3),\ y(t_2) - y(t_1)\big) =$$
$$= \big(z(\varphi(t_4)) - z(\varphi(t_3)),\ z(\varphi(t_2)) - z(\varphi(t_1))\big) = 0$$

jer je $\varphi(t_1) < \varphi(t_2) \leq \varphi(t_3) < \varphi(t_4) \quad (\in I)$, to je i $\{y(t); t \in I\}$ proces s ortogonalnim prirastima.

Prema tome, strukturna funkcija slučajnog procesa $\{y(t);\ t \in I\}$ ima oblik

(3.1) $$F_y(t) = \|y(t)\|^2 = \|z(\varphi(t))\|^2 = F_x(\varphi(t)) \quad \text{za } t \in I.$$

Iz ove jednakosti proizlazi da je

(3.2) $$m_{F_y}(B) = \int_B dF_y(t) = \int_B dF_x(\varphi(t)) = m_{F_x}(\varphi(B)) \quad ,$$

za svaki Borelov skup $B \subseteq I$, a to je u stvari jednakost (2.1) iz §II.2. Sada na osnovi rezultata prethodnog paragrafa, točnije na osnovi teorema 2.2, dolazimo do ovoga zaključka: strukturne funkcije $t \mapsto F_z(t)$ i $t \mapsto F_y(t)$, $t \in I$, generirat će ekvivalentne mjere onda i samo onda ako rastuće i neprekidne funkcije φ i $\varphi^{-1} : I \to I$ imaju svojstvo $N_{m_{F_z}}$, tj. ako

$$m_{F_z}(E) = 0 \Rightarrow \left(m_{F_z}(\varphi(E)) = 0 \ \text{ i } \ m_{F_z}(\varphi^{-1}(E)) = 0\right) ,$$

za svaki m_{F_z} zanemarljiv skup E.

Prema tome, slučajni procesi $\{z(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t) = z(\varphi(t));\ t \in I\}$, s ortogonalnim prirastima, imat će isti spektralni tip onda i samo onda ako su φ i $\varphi^{-1} : I \to I$ rastuće i neprekidne $N_{m_{F_z}}$ funkcije.

Slijedeći primjer ilustrira promjenu spektralnog tipa slučajnog procesa pri transformaciji vremena, jer funkcija φ ne zadovoljava jedan od uvjeta gore navedenih.

Primjer 3.1. Neka je $\{W(t);\ t \in [0,1]\}$ Wienerov proces i neka je φ strogo rastuća i apsolutno neprekidna funkcija, koja preslikava segment $[0,1]$ na $[0,1]$, i takva da je $\varphi'(t) = 0$ na svuda gustom skupu $B \subset [0,1]$ mjere $0 < m(B) < 1$.
Ako je $\{z(t);\ t \in [0,1]\}$ slučajni proces takav da je

$$z(t) = (W \circ \varphi)(t) \quad \text{za svako } t \in [0,1],$$

onda spektralni tip dF_z nije jednak spektralnom tipu dF_W već je njemu podredjen, tj. $dF_z < dF_W$.

Pošto je φ apsolutno neprekidna, strukturna funkcija $t \mapsto F_z(t) = \|z(t)\|^2 = \|W(\varphi(t))\|^2 = \varphi(t)$, za $t \in [0,1]$, slučajnog procesa $\{z(t);\ t \in [0,1]\}$ s ortogonalnim prirastima, generira mjeru koja je podredjena ili ekvivalentna L mjeri na $[0,1]$. Pretpostavimo da je $m_\varphi \sim m$, tj. da je $m_\varphi(E) = 0 \Longleftrightarrow m(E) = 0$ za svaki m_φ, odnosno m zanemarljiv skup. Budući da je $m_\varphi(B) = m(\varphi(B))$ za svaki skup $B \in \mathcal{B}_{[0,1]}$, to za proizvoljni m zanemarljiv skup $E \subset [0,1]$ imamo da

$m(E) = 0 \Longrightarrow m(\varphi(\varphi^{-1}(E)) = 0 \Longrightarrow m_\varphi(\varphi^{-1}(E)) = 0 \Longrightarrow m\ (\varphi^{-1}(E)) = 0$,

tj. $m(E) = 0 \Longrightarrow m(\varphi^{-1}(E)) = 0$. To znači da je φ^{-1} N funkcija, odnosno da je apsolutno neprekidna, što nije tačno jer je $\varphi'(t) = 0$ na skupu pozitivne mjere. Dakle, $m_\varphi \prec m$. No, pošto su mjere koje pripadaju spektralnom tipu dF_W ekvivalentne L mjeri na $[0,1]$, to s obzirom na prethodno razmatranje proizlazi da je $dF_z < dF_W$.

Promatrajmo sada proizvoljni slučajni proces $\{x(t);\ t \in I\}$ multipliciteta $N=1$ i dokažimo slijedeću tvrdnju.

Teorem 3.1. Neka je

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,u)dz(u) \quad , \quad t \in I = [t_0, \infty\rangle , \tag{3.3}$$

čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t \in I\}$ sa spektralnim tipom dF_x kojem pripada mjera m_{F_z} inducirana strukturnom funkcijom $t \mapsto F_z(t) = \|z(t)\|^2$, $t \in I$.
Pored toga, neka je φ neslučajna neprekidna i rastuća funkcija koja preslikava interval I na I i neka su φ i φ^{-1} : $I \to I$ $N_{m_{F_z}}$

funkcije. Tada, ako je $\{y(t);\ t\in I\}$ takav slučajni proces da je

(3.4) $$y(t) = (x\circ\varphi)(t) \quad \text{za svako} \quad t\in I ,$$

onda je $dF_y = dF_x$ i njegova čisto kanonska reprezentacija je oblika

(3.5) $$y(t) = \int_{t_0}^{t} g^{(1)}(t),v)dz'(v) \quad , t\in I ,$$

gdje je $g^{(1)}(t, v) = g(\varphi(t),\varphi(v))$ a $z'(v) = z(\varphi(v)), t_0\leq v\leq t<\infty.$

Dokaz. Izravno iz jednakosti (3.3) i (3.4) imamo da je

$$y(t) = x(\varphi(t)) = \int_{t_0}^{\varphi(t)} g(\varphi(t),u)dz(u) \quad , \quad t\in I ,$$

odnosno da je

$$\|y(t)\|^2 = \int_{t_0}^{\varphi(t)} |g(\varphi(t),u)|^2 dF_z(u) \quad , \quad t\in I .$$

Pošto je φ $N_{m_{F_z}}$ funkcija, možemo izvršiti supstituciju $u = \varphi(v)$ u posljednjem integralu ([32]; § 20). Tada je

$$\|y(t)\|^2 = \int_{t_0}^{t} |g(\varphi(t),\varphi(v))|^2 dF_z(\varphi(v)) \quad , \quad t\in I .$$

Neka je $F_z(\varphi(v)) = F_1(v)$, za svako $v\in I$, onda je

(3.6) $$m_{F_1}(B) = m_{F_z}(\varphi(B)) \quad \text{za svaki Borelov skup} \quad B\subset I.$$

Ako je $z(\varphi(t)) = z'(t)$ za svako $t\in I$, onda je $t\mapsto F_1(t)$, $t\in I$, strukturna funkcija slučajnog procesa $\{z'(t);\ t\in I\}$ s ortogonalnim prirastima, budući da je

$$F_1(t) = F_z(\varphi(t)) = \| z(\varphi(t))\|^2 = \| z'(t)\|^2 = F_{z'}(t) \quad , \quad t\in I.$$

Sada, pošto su φ i $\varphi^{-1} : I\to I$ $N_{m_{F_z}}$ funkcije, iz (3.6) proizlazi da je

(3.7) $$m_{F_z} \sim m_{F_{z'}} .$$

Ako sada dokažemo da je za proizvoljno $s\in I$ jednakost

$$\int_{t_0}^{s_1} g^{(1)}(s_1,v)\ \overline{f(v)}\ dF_{z'}(v) = 0 \quad \text{za svako} \quad s_1\in [t_0,s] ,$$

moguća samo u slučaju kada je na $[t_o,s]$ $f(v) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru m_{F_z}, pokazat ćemo da je s jednakošću (3.5) dana čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{y(t);\ t\in I\}$.

Pošto je φ^{-1} $N_{m_{F_z}}$ funkcija to je ona i $N_{m_{F_z}}$, funkcija, što slijedi iz relacije (3.7). Zbog toga u posljednjem integralu možemo izvršiti supstituciju $v = \varphi^{-1}(u)$

$$\int_{t_o}^{\varphi(s_1)} g^{(1)}(s_1,\varphi^{-1}(u))\ \overline{f(\varphi^{-1}(u))}dF_z(\varphi^{-1}(u)) = 0 \quad \text{za svako}$$

$\varphi(s_1)\in[t_o,\varphi(s)]$.

Sada, s obzirom da postoje vrijednosti t_1 i $t\in I$ takve da je $t_1 = \varphi(s_1)$ i $t = \varphi(s)$, pri čemu je $t_1\in[t_o,t]$ i da je $g^{(1)}(s_1,\varphi^{-1}(u)) = g(\varphi(s_1),\varphi(\varphi^{-1}(u))) = g(t_1,u)$ i

$F_z(\varphi^{-1}(u)) = F_z(u)$, gornja jednakost poprima oblik:

$$\int_{t_o}^{t_1} g(t_1,u)\ \overline{f(\varphi^{-1}(u))}dF_z(u) = 0 \quad \text{za svako} \quad t_1\in[t_o,t].$$

Budući da je familija funkcija $\{g(t_1,u);\ u\in[t_o,t];$ parametra $t\in I\}$ kompletna u prostoru $\mathcal{L}_2(dF_z;t)$, to je na $[t_o,t]$ $f(\varphi^{-1}(u)) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru m_{F_z}. A iz relacije (3.7) i jednakosti $v = \varphi^{-1}(u)$ proizlazi da je na $[t_o,s]$ $f(v) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru m_{F_z}, što je i trebalo pokazati.

Pošto je (3.5) čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{y(t);\ t\in I\}$, to strukturna funkcija $t\longmapsto F_z(t)$, $t\in I$, inducira mjeru m_{F_z}, koja pripada maksimalnom spektralnom tipu tog procesa. A s obzirom na to da i mjera m_{F_z} pripada maksimalnom spektralnom tipu procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ i da vrijedi relacija (3.7), proizlazi da je $dF_y = dF_x$.

Q.E.D.

Primjer 3.2. Reprezentacija

$$x(t) = \int_0^t (2t-u)\, dw(u) \quad , \quad t\in[0,1]$$

je čisto kanonska reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in[0,1]\}$ sa spektralnim tipom $dF_x = dF_W = dt$ ([12]) .

Neka je $\varphi : [0,1]\to[0,1]$ neprekidna funkcija takva da je

(3.8) $\varphi'(t)>0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru.

Ako je $y(t) = (x\circ\varphi)(t)$ za svako $t\in[0,1]$, onda slučajni procesi $\{x(t);\ t\in[0,1]\}$ i $\{y(t);\ t\in[0,1]\}$ imaju jednako spektralne tipove (tj. $dF_x = dF_y$) i jednakost

(3.9) $$y(t) = \int_0^t (2\varphi(t) - \varphi(v))\, dW(\varphi(v)) \quad , \quad t\in[0,1] \quad ,$$

predstavlja čisto kanonsku reprezentaciju slučajnog procesa $\{y(t);\ t\in I\}$.

Budući da je

$$y(t) = x(\varphi(t)) = \int_0^{\varphi(t)} (2\varphi(t) - u)dW(u) \quad , t\in[0,1] \ ,$$

to je

$$\|y(t)\|^2 = \int_0^{\varphi(t)} (2\varphi(t)-u)^2\, du \quad , \quad t\in[0,1] \ .$$

Ako supstituiramo $u=\varphi(v)$ u posljednjem integralu, što je moguće jer je φ apsolutno neprekidna funkcija, dobivamo da je

$$\|y(t)\|^2= \int_0^t (2\varphi(t)-\varphi(v))^2 d\varphi(v) = \int_0^t (2\varphi(t)-\varphi(v))^2 \varphi'(v)dv \ ,t\in [0,1].$$

Neka je $W(\varphi(t)) = z(t)$, za svako $t\in[0,1]$. Tada je

$$F_z(t) = \|z(t)\|^2 =\|W(\varphi(t))\|^2 =\varphi(t) \ , \quad t\in[0,1] \ ,$$

strukturna funkcija slučajnog procesa $\{z(t);\ t\in[0,1]\}$ s ortogonalnim prirastima.

Kako iz uvjeta (3.8) i neprekidnosti funkcije φ slijedi da su φ i φ^{-1} N funkcije, to su mjere m_φ i m medjusobno ekvivalentne (T.2.2).

Dokažimo sada da jednakost (3.9) predstavlja čisto kanonsku reprezentaciju procesa $\{y(t);\ t\in L\}$.

Neka je $h = \int_0^s f(v)\, dW(\varphi(v))$, $s\in[0,1]$ proizvoljni element potprostora $\mathcal{H}_s(y)$, ali i takav da je

$$(y(s_1),h) = \int_0^{s_1} (2\varphi(s_1)-\varphi(v))f(v)\, d\varphi(v) = 0 \text{ za svako } s_1\in[0,s].$$

Pošto su φ i φ^{-1} strogo rastuće i apsolutno neprekidne funkcije, to je

$$\int_0^{s_1}(2\varphi(s_1)-\varphi(v))\, f(v)\,\varphi'(v)dv = \left\{\begin{matrix} u = \varphi(v) \\ du = \varphi'(v)dv \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_0^{\varphi(s_1)} (2\varphi(s_1)-u)\, f(\varphi^{-1}(u))du = 0 \quad \text{za svako } \varphi(s_1)\in[0,\varphi(s)],$$

odnosno za $t_1 = \varphi(s_1)$ i $t = \varphi(s)$ je

$$\int_0^{t_1}(2t_1-u)\, f\left(\varphi^{-1}(u)\right)du = 0 \quad \text{za svako } t_1\in[0,t].$$

Iz ove jednakosti i čisto kanonske reprezentacije procesa $\{x(t);\ t\in[0,1]\}$ slijedi da je na $[0,t]$ $f(\varphi^{-1}(u)) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru m. No, kako je $m_\varphi \sim m$, to je na $[0,s]$ $f(v) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru m_φ, pa je h nula element. Stoga je (3.9) čisto kanonska reprezentacija procesa $\{y(t);\ t\in[0,1]\}$. Prema tome, strukturna funkcija $t\to F_z(t)$, $t\in[0,1]$, inducira mjeru koja pripada njegovom maksimalnom spektralnom tipu $dF_z = d\varphi$. No, budući da je $m_\varphi \sim m$, to je $dF_y = dF_x$.

Sada formulirajmo potrebne uvjete za invarijantnost spektralnog tipa slučajnog procesa konačnog multipliciteta u odnosu na transformaciju vremena.

Neka je

$$(3.10) \qquad x(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{t} g_n(t,u)dz_n(u), \quad t\in I, \quad 1\leq N<\infty,$$

Cramerova reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ sa spektralnim tipom

$$dF_x : dF_{z_1} > dF_{z_2} > \dots > dF_{z_N} \quad , \quad 1 < N < \infty \ ,$$

pri čemu su $\{z_1(t);\ t \in I\}$, $\{Z_2(t);\ t \in I\}, \dots, \{z_N(t);\ t \in I\}$ uzajamno ortogonalni slučajni procesi s ortogonalnim prirastima i strukturnim funkcijama oblika

$$t \mapsto F_{z_n}(t) = \| z_n(t) \|^2 \quad , n = \overline{1,N} \ ,$$

a $\{(g_n(t,u))_{n=\overline{1,N}};\ u \in [t_o, t]\}$ kompletna familija funkcija parametra t u prostoru $\mathcal{L}_2\ (dF_x;t)$.

Osim toga, neka je $\{y(t);\ t \in I\}$ drugi slučajni proces i to takav da je

$$y(t) = (x \circ \varphi)(t) \qquad \text{za svako } t \in I \ ,$$

gdje je φ neslučajna neprekidna i rastuća funkcija koja preslikava interval I na I.

<u>Teorem 3.2.</u> Slučajni procesi $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t);\ t \in I\}$ imat će jednake spektralne tipove $(dF_x = dF_y)$ ako

$$m_{F_{z_n}}(E) = 0 \Longrightarrow m_{F_{z_n}}(\varphi(E)) = m_{F_{z_n}}(\varphi^{-1}(E)) = 0 \tag{3.11}$$

za svako $n = \overline{1,N}$ i za svaki $m_{F_{z_n}}$ zanemarljiv skup $E \in \mathcal{B}$.

Pored toga, Cramerova reprezentacija slučajnog procesa $\{y(t);\ t \in I\}$ ima oblik

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_o}^{t} g_n^{(1)}(t,u)\ dz_n'(u) \quad , \ t \in I \ , \quad 1 \leq N < \infty , \tag{3.12}$$

pri čemu je familija funkcija $\{(g_n^{(1)}(t,u))_{n=\overline{1,N}} = (g_n(\varphi(t), \varphi(u)))_{n=\overline{1,N}};\ u \in [t_o, t]$, parametra $t \in I\}$ kompletna u prostoru $\mathcal{L}_2\ (dF_y;t)$, a $\{z_1'(t) = z_1(\varphi(t));\ t \in I\}, \dots$ $\{z_N'(t) = z_N(\varphi(t));\ t \in I\}$ uzajamno ortogonalni slučajni procesi s ortogonalnim prirastima.

Strukturne funkcije

$$t \mapsto F_{z_1'}(t) = \| z_1'(t) \|^2, \dots, F_{z_N'}(t) = \| z_N'(t) \|^2 \ , \ t \in I,$$

induciraju mjere koje pripadaju spektralnim tipovima niza

(3.13) $\quad dF_y : dF_{z'_1} > dF_{z'_2} > \dots > dF_{z'_N} \quad , 1 \leq N < \infty$

<u>Dokaz</u>. Pošto je

$$y(t) = x(\varphi(t)) = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{\varphi(t)} g_n(\varphi(t),u)dz_n(u) \quad , \quad t \in I \quad ,$$

to je

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{\varphi(t)} |g_n(\varphi(t),u)|^2 \, dF_{z_n}(u) \quad , \quad t \in I \quad .$$

Ako sada supstituiramo $u = \varphi(v)$, što je moguće jer je φ $N_{m_{F_{z_n}}}$ funkcija $n=\overline{1,N}$, tj. zadovoljava relaciju (3.11) za svako $n=\overline{1,N}$, dobit ćemo da je

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{t} | g_n(\varphi(t), \varphi(v))|^2 \, dF_{z_n}(\varphi(v)) \quad , \quad t \in I \quad .$$

Neka je $F_{z_n}(\varphi(t)) = F_n(t)$, za svako $t \in I$ i $n=\overline{1,N}$, onda je

(3.14) $\quad m_{F_n}(B) = m_{F_{z_n}}(\varphi(B))$, za svaki Borelov skup $B \subset I$ i $n=\overline{1,N}$.

S druge strane, ako je $z_n(\varphi(t)) = z'_n(t)$ za svako $t \in I$ i $n=\overline{1,N}$, onda su $t \longmapsto F_1(t), F_2(t), \dots, F_N(t)$, $t \in I$, strukturne funkcije slučajnih procesa $\{z'_1(t);\ t \in I\}$, $\{z'_2(t);\ t \in I\}, \dots,$ $\{z'_N(t);\ t \in I\}$ s ortogonalnim prirastima, pošto je

$$F_n(t) = F_{z_n}(\varphi(t)) = \| z_n(\varphi(t))\|^2 = \| z'_n(t)\|^2 = F_{z'_n}(t), t \in I, n=\overline{1,N}.$$

Na osnovi uvjeta (3.11), teorema 2.1. i jednakosti (3.14) sada dobivamo da je

(3.15) $\quad m_{F_{z_1}} \sim m_{F_{z_1}} \ , \ m_{F_{z_2}} \sim m_{F_{z_2}} \ , \dots , \ m_{F_{z_N}} \sim m_{F_{z_N}} \quad$ i

(3.16) $\quad m_{F_{z_1}} \succ m_{F_{z_2}} \succ \dots \succ m_{F_{z_N}} \quad .$

Osim toga, evidentno je da su procesi $\{z'_1(t);\ t \in I\}$, $\{z'_2(t);\ t \in I\}$, ... , $\{z'_N(t);\ t \in I\}$ uzajamno ortogonalni.

Ako dokažemo sada da je za proizvoljno $s \in I$ jednakost

(3.17) $\sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{s_1} g_n^{(1)}(s_1,v)\, \overline{f_n(v)}\, dF_{z_n'}(v) = 0$ za svako $s_1 \in [t_0, s]$

moguća samo u onom slučaju kada je na $[t_0, s]$ $f_1(v) = f_2(v) = \ldots = f_N(v) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru $m_{F_{z_1'}}$,

pokazat ćemo da je (3.12) Cramerova reprezentacija slučajnog procesa $\{y(t);\ t \in I\}$.

Pošto je za svako $n=\overline{1,N}$ φ^{-1} $N_{m_{F_{z_n}}}$ funkcija to je ona i $N_{m_{F_{z_n'}}}$ funkcija, što proizlazi iz relacija (3.15). Zbog toga u (3.17) možemo supstituirati $v = \varphi^{-1}(u)$.

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{\varphi(s_1)} g_n^{(1)}(s_1, \varphi^{-1}(u))\, \overline{f_n(\varphi^{-1}(u))}\, dF_{z_n'}(\varphi^{-1}(u)) = 0 \text{ za svako}$$

$\varphi(s_1) \in [t_0, \varphi(s)]$.

S obzirom na to da postoje vrijednosti t_1 i $t \in I$ takve da je $t_1 = \varphi(s_1)$ i $t = \varphi(s)$, pri čemu je $t_1 \in [t_0, t]$ i da je $F_{z_n'}(\varphi^{-1}(u)) = F_{z_n}(u)$ i $g_n^{(1)}(s_1, \varphi^{-1}(u)) = g_n(\varphi(s_1), \varphi(\varphi^{-1}(u))) = g_n(t_1, u)$, za svako $n=\overline{1,N}$ to gornja jednakost poprima oblik

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} g_n(t_1, u)\, \overline{f_n(\varphi^{-1}(u))}\, dF_{z_n}(u) = 0 \text{ za svako } t_1 \in [t_0, t]$$

No, pošto je familija funkcija $\{(g_n(t_1, u))_{n=\overline{1,N}};\ u \in [t_0, t]$, parametra $t \in I\}$ kompletna u prostoru $\mathcal{L}_2\,(dF_x; t)$, to je gornja jednakost moguća samo u onom slučaju kada je na $[t_0, t]$

$f_1(\varphi^{-1}(u)) = f_2(\varphi^{-1}(u)) = \ldots = f_N(\varphi^{-1}(u)) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru $m_{F_{z_1}}$. Stoga iz relacija (3.15) i jednakosti $v = \varphi^{-1}(u)$ slijedi da je i $f_1(v) = f_2(v) = \ldots = f_N(v) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru $m_{F_{z_1'}}$, što je i trebalo pokazati.

Sada iz upravo dokazane tvrdnje da je (3.12) Cramerova reprezentacija i iz relacije (3.16) proizlazi da su spektralni tipovi $dF_{z'_1}$, $dF_{z'_2}$, ..., $dF_{z'_N}$, kojima pripadaju redom mjere $m_{F_{z'_1}}$, $m_{F_{z'_2}}$, ..., $m_{F_{z'_N}}$, članovi niza (3.13) i da taj niz predstavlja spektralni tip slučajnog procesa $\{y(t);\ t\in I\}$. No, budući da i mjere $m_{z_1}, m_{z_2}, \dots, m_{z_N}$ pripadaju redom članovima $dF_{z_1}, dF_{z_2}, \dots, dF_{z_N}$ spektralnog tipa dF_x slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ i da vrijede ekvivalencije u (3.15), zaključujemo da je $dF_x = dF_y$.

Q.E.D.

<u>Primjer 3.3.</u> Neka su $\Delta_1 \subset [0,1]$, $\Delta_2 = [0,1]\setminus\Delta_1$ takvi skupovi da je $m(\Delta_n \cap \langle\alpha,\beta\rangle)>0$, $n=1,2$, za ma koji interval $\langle\alpha,\beta\rangle\subset[0,1]$, i neka je ξ_{Δ_n} karakteristična funkcija skupa Δ_n, $n=1,2$. Nadalje, neka su $\{z_1(t);\ t\in[0,1]\}$ i $\{z_2(t);\ t\in[0,1]\}$ uzajamno ortogonalni slučajni procesi s ortogonalnim prirastima, i neka strukturne funkcije $t\mapsto F_{z_1}(t) = \|z_1(t)\|^2$, $F_{z_2}(t) = \|z_2(t)\|^2$, $t\in[0,1]$, generiraju apsolutno neprekidne mjere, u odnosu na L mjeru, koje zadovoljavaju uvjete:

$$m_{F_{z_1}} \succ m_{F_{z_2}} \quad \text{i} \quad \int_0^t t^4\, dF_{z_1}(t) < \infty .$$

Ako je $\quad x_n(t) = \int_0^t g_n(t,u)\, dz_n(u) \quad , \quad t\in[0,1], \quad n=1,2,$

gdje je $\quad g_n(t,u) = \int_u^t (t-v)\, \xi_{\Delta_n}(v)\, dv \quad , \quad 0\le u\le t\le 1,$

i ako je

(3.18) $$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \sum_{n=1}^{2} \int_0^t g_n(t,u)\, dz_n(u)$$

za svako $t\in[0,1]$, tada slučajni proces $\{x(t);\ t\in[0,1]\}$ ima spektralni tip $dF_x : dF_{z_1} > dF_{z_2}$ i (3.18) predstavlja Cramerovu reprezentaciju tog procesa, ([27]).

Ako neslučajna neprekidna funkcija φ, koja preslikava segment $[0,1]$ na $[0,1]$, zadovoljava ove uvjete:

(a) $\varphi' > 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru,

(b) φ i φ^{-1} slike svakog $m_{F_{z_n}}$ zanemarljivog skupa $E \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ pozitivne L mjere je $m_{F_{z_n}}$ zanemarljiv skup pozitivne L mjere,

i za $n=1$ i 2, i ako je

$$y(t) = (x \circ \varphi)(t) \quad \text{za svako } t \in [0,1]$$

onda je spektralni tip $dF_y : dF_{z'_1} > dF_{z'_2}$ slučajnog procesa $\{y(t);\ t \in [0,1]\}$ jednak spektralnom tipu dF_x.

Cramerova reprezentacija toga procesa je

$$y(t) = \sum_{n=1}^{2} \int_0^t g_n^{(1)}(t,u)\, dz'_n(u)\,, \quad t \in [0,1] \tag{3.19}$$

gdje je

$$g_n^{(1)}(t,u) = g_n(\varphi(t),\varphi(u)) = \int_{\varphi(u)}^{\varphi(t)} (\varphi(t)-v)\,\xi_{\Delta_n}(v)\,dv, \quad 0 \le u \le t \le 1, \tag{3.20}$$

za $n=1,2$, a $\{z'_1(t) = z_1(\varphi(t)), t \in [0,1]$ i $\{z'_2(t) = z_2(\varphi(t));\ t \in [0,1]\}$ su uzajamno ortogonalni slučajni procesi s ortogonalnim prirastima.

Kao dokaz ispravnosti ovog tvrdjenja potrebno je pokazati da funkcije φ i $\varphi^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema, tj. da su φ i φ^{-1} neprekidne, rastuće $N_{m_{F_{z_1}}}$ i $N_{m_{F_{z_2}}}$ funkcije.

Da su neprekidne funkcije φ i φ^{-1} strogo rastuće i apsolutno neprekidne slijedi iz uvjeta (a), a to znači da su i N funkcije. No, budući da iz uvjeta (b) izravno slijedi da za svaki $m_{F_{z_n}}$ zanemarljiv skup $E \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ pozitivne L mjere vrijedi relacija

$$m_{F_{z_n}}(E) = 0 \Rightarrow m_{F_{z_n}}(\varphi(E)) = m_{F_{z_n}}(\varphi^{-1}(E)) = 0 \text{ , za } n=1 \text{ i } 2,$$

proizlazi da funkcije φ i φ^{-1} zadovoljavaju uvjet (3.11) za n=1,2. Dakle, φ i φ^{-1} su $N_{m_{F_{z_1}}}$ i $N_{m_{F_{z_2}}}$ funkcije.

Sada jednostavnom primjenom prethodnog teorema dolazi se do svih gore formuliranih zaključaka.

Budući da se može nešto jednostavnije, nego u teoremu 3.2, dokazati da (3.19) predstavlja Cramerovu reprezentaciju procesa $\{y(t);\ t\in[0,1]\}$, ovdje ćemo dokazati taj zaključak.

Neka za proizvoljno $t\in[0,1]$ vrijedi jednakost

$$\sum_{n=1}^{2}\int_0^s g_n^{(1)}(s,v)\,\overline{f_n(v)}\,dF_{z_n'}(v) = 0 \quad \text{za svako } s\in[0,t] .$$

Ako u ovu jednakost stavimo (3.20) a zatim izmijenimo redoslijed integracije, dobit ćemo da je

$$\int_0^{\varphi(s)}(\varphi(s)-v)\left\{\sum_{n=1}^{2}\xi_{\Delta_n}(v)\int_0^{\varphi^{-1}(v)}\overline{f_n(u)}\,dF_{z_n'}(u)\right\}dv = 0 \quad \text{za svako } s\in[0,t] .$$

Odavde slijedi da je za svako $s\in[0,t]$

$$\sum_{n=1}^{2}\xi_{\Delta_n}(\varphi(s))\int_0^s\overline{f_n(u)}\,dF_{z_n'}(u) = 0$$

gotovo svuda u odnosu na L mjeru. Kako je φ strogo rastuća funkcija, iz konstrukcije skupova Δ_1 i $\Delta_2\subset[0,1]$ proizlazi da je za neko s ili $\xi_{\Delta_1}(\varphi(s)) = 0$ ili $\xi_{\Delta_2}(\varphi(s)) = 0$.
Zbog toga gornja jednakost poprima oblik

$$\int_0^s\overline{f_n(u)}\,dF_{z_n'}(u) = 0 \quad \text{, za } n=1,2 .$$

Odavde zaključujemo da je na $[0,t]$ $f_1(s) = f_2(s) = 0$ gotovo svuda u odnosu na mjeru generiranu strukturnom funkcijom $t\mapsto F_{z_1'}(t)$, $t\in[0,1]$. Prema tome familija funkcija $\left\{\left(g_n^{(1)}(t,v)\right)_{n=1,2},\ v\leq t \text{ , parametra } t\in[0,1]\right\}$ je kompletna u prostoru $\mathcal{L}_2(dF_y;t)$, što znači da (3.19) predstavlja Cramerovu reprezentaciju procesa $\{y(t);\ t\in[0,1]\}$.

Slijedeći primjer ilustrira promjenu spektralnog tipa slučajnog procesa u odnosu na transformaciju vremena.

Primjer 3.4. Neka je

$$x(t) = \sum_{n=1}^{2} \int_{t_0}^{t} g_n(t,u)\, dz_n(u)\ ,\ t\in I,$$

Cramerova reprezentacija slučajnog procesa $\{x(t);\ t\in I\}$ s apsolutno neprekidnim spektralnim tipom $dF_x : dF_{z_1} > d$. Ako je slučajni proces $\{y(t);\ t\in I\}$ takav da je

$$y(t) = (x\circ\varphi)(t) \quad \text{za svako } t\in I$$

gdje je φ neslučajna neprekidna funkcija koja preslikava interval I na I i koja zadovoljava uvjete:

(a) $\varphi'(t) > 0$ gotovo svuda u odnosu na L mjeru,

(b) $\varphi(E)\in \mathcal{N}_{m_{F_{z_1}}}$ onda i samo onda ako $E\in\mathcal{N}_{m_{F_{z_1}}}$,

(c) $\varphi(E)\in \mathcal{N}_{m_{F_{z_2}}}$ za svaki skup $E\in\mathcal{N}_{m_{F_{z_2}}}$,

(d) postoji skup $E_1\in\mathcal{N}_{m_{F_{z_2}}}$ takav da $\varphi^{-1}(E_1)\notin\mathcal{N}_{m_{F_{z_2}}}$,

($\mathcal{N}_{m_{F_{z_k}}}$, k=1,2, je familija $m_{F_{z_k}}$ zanemarljivih skupova pozitivne L mjere), onda slučajni procesi $\{x(t);\ t\in I\}$ i $\{y(t);\ t\in I\}$ nemaju isti spektralni tip.

Kao i u ranijem razmatranju i ovdje se jednostavno dolazi do ove reprezentacije slučajnog procesa $\{y(t);\ t\in I\}$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{2} \int_{t_0}^{t} g_n^{(1)}(t,v)\, dz'_n(v),\quad t\in I$$

gdje su $\{z'_n(t) = z_n(\varphi(t));\ t\in I\}$, n=1,2, uzajamno ortogonalni procesi s ortogonalnim prirastima. Strukturne funkcije tih procesa zadovoljavaju jednakost:

$$(3.21) \qquad F_{z'_n}(t) = \|z'_n(t)\|^2 = \|z_n(\varphi(t))\|^2 = F_{z_n}(\varphi(t)), n=1,2 \,.$$

Pošto je neprekidna funkcija φ strogo rastuća (uvjet (a)), iz jednakosti(3.21) i teorema 2.1 proizlazi da je $m_{F_{z'_1}} \succ m_{F_{z'_2}}$, odnosno da je $dF_{z'_1} > dF_{z'_2}$, jer je $dF_{z_1} > dF_{z_2}$.

Nadalje, iz uvjeta (a) slijedi da su φ i φ^{-1} apsolutno neprekidne funkcije, znači i N funkcije. No, pošto φ zadovoljava i uvjet (b), φ i φ^{-1} su $N_{m_{F_{z_1}}}$ funkcije. Dakle, na osnovi teorema 2.2 i jednakosti (3.21) proizlazi da je

$$m_{F_{z_1}} \sim m_{F_{z'_1}} \,, \quad \text{tj. da je } dF_{z_1} = dF_{z'_1} \,.$$

Pored toga, iz uvjeta (a) i (c) imamo da je φ i $N_{m_{F_{z_2}}}$ funkcija. Medjutim, φ^{-1} nije $N_{m_{F_{z_2}}}$ funkcija, jer uvjet (d) kaže da postoji $m_{F_{z_2}}$ zanemarljiv skup $E_1 \subset I$ takav da je

$$m_{F_{z_2}}(E_1) = 0 \quad \text{a} \quad m_{F_{z_2}}(\varphi^{-1}(E_1)) > 0 \,.$$

Na temelju ovih konstatacija zaključujemo da je

$$m_{F_{z'_2}} \prec m_{F_{z_2}} \,, \quad \text{tj. da je } dF_{z'_2} < dF_{z_2} \,.$$

Zbog toga slučajni procesi $\{x(t);\ t \in I\}$ i $\{y(t);\ t \in I\}$ nemaju isti spektralni tip.

Na kraju ovog paragrafa prokomentirat ćemo dvije pretpostavke koje smo učinili u toku prethodnog razmatranja.

1. Pretpostavili smo da funkcija φ preslikava interval I na I. Zbog ove pretpostavke imali smo da se prostor definiranosti mjera koje pripadaju spektralnom tipu dF_y poklapao s prostorom definiranosti mjera koje pripadaju spektralnom tipu dF_x. Stoga smo pri usporedjivanju spektralnih tipova mogli koristiti "običnu" definiciju podredjenosti, odnosno ekvivalentnosti spektralnih tipova slučajnih procesa. Ako sada pretpostavimo da funkcija φ preslikava interval $I_1 = [t_1, \infty\rangle$ na interval $I = [t_0, +\infty\rangle$, $t_1 \neq t_0$, onda je očigledno da se prostori definiranosti mjera koje pripadaju spektralnim tipovima dF_x i dF_y ne poklapaju.

Ako želimo usporedjivati spektralne tipove dF_x i dF_y, onda se u ovom slučaju ne može koristiti gore spomenuta definicija. Zbog toga moramo dati novu definiciju usporedljivosti spektralnih tipova.

<u>Definicija 3.1.</u> Neka su

$$dF_y : dF_1^y > dF_2^y > \dots > dF_M^y \quad , \quad 1 \leq M \leq \infty,$$

$$dF_x : dF_1^x > dF_2^x > \dots > dF_N^x \quad , \quad 1 \leq N \leq \infty,$$

spektralni tipovi slučajnih procesa $\{y(t);\ t \in I_1\}$, $\{x(t); t \in I\}$, i neka su $m_{F_1^y}$, $m_{F_2^y}$, ..., $m_{F_M^y}$ i $m_{F_1^x}$, $m_{F_2^x}$, ... $m_{F_N^x}$ mjere koje pripadaju redom spektralnim tipovima dF_1^y, dF_2^y, ..., dF_M^y i dF_1^x, dF_2^x, ..., dF_N^x. Dalje, neka je ℓ linearna funkcija koja interval I preslikava na I_1.

(a) Za spektralni tip dF_n^y kazat ćemo da je ℓ-podredjen, odnosno ℓ-jednak spektralnom tipu dF_2^x ako je mjera $m_{F_n^y}$ ℓ-podredjena odnosno ℓ-ekvivalentna mjeri $m_{F_n^x}$ u smislu definicije 2.2.

b) Za slučajne procese $\{x(t);\ t\in I\}$ i $\{y(t);\ t\in I\}$ kazat ćemo da imaju ℓ-jednake spektralne tipove ako je $M = N$ i ako je za svako $n=\overline{1,N}$ spektralni tip dF_n^x ℓ-jednak spektralnom tipu dF_n^y.

Ako je $I_1 = I$ ranija definicija podredjenosti odnosno ekvivalentnosti spektralnih tipova slučajnih procesa ekvivalentna je s gore navedenom definicijom, što izravno proizlazi iz definicije 2.2 i komentara na strani 68.

Dalje, pošto se ℓ podredjenost (ℓ-jednakost) spektralnih tipova definira preko ℓ podredjenosti (ℓ-ekvivalentnosti) odgovarajućih mjera, onda, s obzirom da se ℓ podredjenost (ℓ-ekvivalentnost) mjera definira preko "obične" definicije ovih pojmova uvodjenjem funkcije $\varphi_1 = \varphi\circ\ell : I \to I$, koja zadržava sva svojstva funkcije $\varphi : I_1 \to I$ važna za mjerljivost preko nje transformiranih skupova (jer je ℓ afino preslikavanje intervala I na I_1, koje ne mijenja strukturu skupova u odnosu na mjeru), možemo zaključiti da učinjena pretpostavka nije neko bitno ograničenje.

Stoga, rezultati do kojih smo došli u ovom paragrafu vrijede, uz odredjenu terminološku izmjenu, i u slučaju kada funkcija ℓ preslikava interval I_1 na I. Tako npr. tvrdnja teorema 4.2 sada bi se mogla iskazati:

Slučajni procesi $\{x(t);\ t\in I\}$ i $\{y(t) = x(\varphi(t));\ t\in I_1\}$ imat će ℓ-jednake spektralne tipove ako je neslučajna neprekidna i rastuća funkcija $\varphi : I_1 \to I$ takva da su $\varphi_1 = \varphi\circ\ell$ i $\varphi_1^{-1} : I \to I$ $N_{m_{F_{z_1}}}$, $N_{m_{F_{z_2}}}$, ..., $N_{m_{F_{z_N}}}$ funkcije.

2. Pretpostavka $M<\infty$ učinjena je iz razloga kojeg smo naveli u prethodnom paragrafu, preciznije na strani 66.

L i t e r a t u r a

[1] Ahiezer I., Glazman M. Teorija lineinih operatorov V Glivertobom prostranstve, Nauka, Moskva 1966.

[2] Aljančić S., Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd 1968.

[3] Bulatović J., Spektralna analiza slučajnih procesa drugog reda sa neseparabilnim prostorima, doktorska disertacija, P.M.F., Beograd 1975.

[4] Cramer H., Stochastic Processes as Curves in Hilbert Space; Teor. Verojatn. i ee primen., Tom (1964),195-204.

[5] Cramer H., A Contribution to the Multiplicity Theory of Stochastic Processes, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability, Vol II, pp.215-221, Berkely 1967.

[6] Cramer H., Structural and Statistical Problems for a Class of Stochastic Processes, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1961.

[7] Cramer H., Leadbetter M.R., Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley, New York 1967.

[8] Doob J.L., Stochastic Processes, Wiley, New York 1953.

[9] Glihman N.N. Skorohod A.B., Teorija slučainih Processov, Tom 1, Nauka, Moskva 1971.

[10] Halmos P.R., Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea Publ. Comp., New York 1951.

[11] Halmos P.R. Measure Theory, Van Nastrand Comp., New York 1954.

[12] Hida, T., Canonical Representation of Gaussian processes and their applications, Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A, 33 (1960), 109-155.

[13] Hitsuda M., Multiplicity of some classes of Gaussian processes, Nagoya Math. J., 52, 1 (1973), 39-46.

[14] Hitsuda M., Representations of Gaussian processes equivalent to Wiener Process,

[15] Ivković Z., Bulatović J., Vukmirović J., Živanović S., Aplication of Spectral Multiplicity in Separable Hilbert Space to Stochastic Processes, Matem. inst., pos. izdanja, knj. 12, Beograd 1974.

[16] Ivkovič Z., Rozanov Yu.A., O kanoničeskom razloženii Hida-Kramera dlja slučainih processov, Teorija verojatn. i ee Primen., Tom 16 (1971), 348-353.

[17] Ivković Z. and Rozanov Yu.A., A Characterization of Cramer Representation of Stochastic Processes, Pub. Math. Inst., Beograd, T 14 (28),(1973), 69-74.

[18] Kallianpur G., Mandrekar V., Multiplicity and representation Theory of purely non - deterministic stochastic processes; Teorija Verojatn. i ee primen., Tom 10,4 (1965), 614-644.

[19] Kolimogorov A.N., Fomin S.V., Elementi teorii funkcii u funkcionaljnogo analiza; Nauka, Moskva 1968.

[20] Loeve, M., Probability Theory, Van Nostrand Comp., New York 1955.

[21] Mirković B., Elementi funkcionalne analize, P.M.F., Beograd 1977.

[22] Natanson N.P., Teorija funkcii veščestvonnoi peremennoi, Gosudarstvennoe izdat. tehniko-teoretičeskoi literaturvi, Moskva 1965.

[23] Plesner A.I., Spektraljnaja teorija lineinih operatorov, Nauka, Moskva 1965.

[24] Riesz, F., Nagy, B.SZ., Lecons d'analyse functionnelle; Gauthier - Villars, Paris 1965.

[25] Rosenblatt M., Random Processes, Springer - Verlag, New York 1973.

[26] Rozanov Yu.A., Teorija obnovljajuščih processov, Nauka, Moskva 1974.

[27] Siraja T.N., O kanoničeskih predstavlenija slučainih processov, kratnostei odin i dva, Teorija verojat. i ee primen. XVIII, 1 (1973), 155-160.

[28] Siraja T.N., O kanoničeskih symm ortogonaljnih slučainih processov, Teorija verojat. i ee primen., XXI, 4 (1976), 880-884.

[29] Siraja T.N., Kanoničeskie predstavlenija slučainih processov vtorogo parjadka, Teorija verojat. i ee primen. XXII, 2 (1977) 429-434.

[30] Stone M.H., Linear Transformations in Hilbert Space, American Math. Soc. colloqnium publication, New York 1939.

[31] Titchmarsh E.C., The Theory of Functions, Oxford University Press, 1939.

[32] Hewitt E. and Stromberg K., Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, New York 1965.

[33] Zaanen A.C., Linear Analysis; North-Holland, Amsterdam 1956.