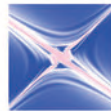


МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Наташа Тодоровић

СТРМОСТ У СВЕТЛУ ТЕОРЕМЕ НЕХОРОШЕВА И ЊЕНИ
НУМЕРИЧКИ АСПЕКТИ НА ПРИМЕРУ
ЧЕТВОРОДИМЕНЗИОНЕ СИМПЛЕКТИЧКЕ МАПЕ

ДОКТОРСКА ТЕЗА



Београд 2012.

Садржај

Увод	4
1 Хамилтонијански системи	9
1.1 Појам и основне дефиниције	9
1.1.1 Канонске трансформације	10
1.2 Интеграбилни системи	12
1.2.1 Арнолд-Лиувилова теорема. Дејство-угао променљиве	13
1.2.2 Примери интеграбилних система	16
2 Квази-интеграбилни хамилтонијански системи	21
2.1 КАМ теорема	24
2.1.1 Илустрација КАМ теореме на примеру стандардне мапе	28
2.2 Нехорошевљева теорема	31
2.2.1 Дефиниција стрмих функција	32
2.2.2 Нехорошевљева структура	35
2.3 Арнолдова дифузија	39
2.3.1 Нумеричка детекција Арнолдове дифузије	44
2.4 Брзи индикатори Љапунова	46
3 Модел мапе и нумерички резултати њене динамике	51
3.1 Дефиниција модела	51
3.1.1 Провера услова стрмости функције h	52

3.1.2	Оцена индекса стрмости функције h	54
3.1.3	Коефицијенти стрмости C_k и параметар m	55
3.2	Арнолдова мрежа модела	56
3.3	Динамика 1-1 резонанце	60
3.4	Алгоритам за рачунање коефицијената дифузије	61
3.5	Рачун коефицијената дифузије $D(\varepsilon)$ за фиксирану вредност параметра стрмости m	63
3.6	Оцена експоненцијалног и степеног закона $D(\varepsilon)$	84
3.7	Рачун коефицијената дифузије $D(m)$ за фиксиране вредности ε	87
3.7.1	Избор почетних услова	87
3.7.2	Трансформација координата	90
3.7.3	Коефицијенти $D(m)$	91
	Закључак	95
	Библиографија	97

Увод

У тренутку када је древни човек усмерио поглед ка небу и опазио правилност у кретању небеских тела, настала је једна од најстаријих наука - *астрономија*. Временом стасава (и опстаје) идеја о космосу, његовој бесконачности, а са њом и веровање да је свет *савршено уређен*. Овакву представу свемира потврђује и позната античка слика по којој звезде и планете леже на кристалним сферама, а свако њихово померање производи нечујну музику која употпуњује хармонију васионе.

Међутим, астрономска посматрања нарушавала су ову идиличну слику јасно указујући на систематска одступања од савршено кружних орбита. Почетком *XVII* века немачки астроном Јохан Кеплер ово 'необично понашање' формулише у три једноставна закона, по којима су путање планета *елиптичне*, а не цикличне или епицикличне како се раније веровало. Аналитичку и физичку интерпретацију оваквих путања дао је Исак Њутн неколико деценија касније у свом прослављеном делу *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Њутн је показао да планете, као и остала небеска тела не 'држе' никакве кристалне сфере, већ *универзални закони гравитације* из којих се лако изводе елиптичне путање планета. Ипак, путања Месеца, који је изложен гравитационом утицају и Сунца и Земље била је приметно другачија од Кеплерове, а Њутнове једначине су за ову врсту кретања имале прилично замршен облик који није водио до решења. Овај проблем, познатији као *проблем три тела* представља у ствари упрошћен модел Сунчевог система, те о његовом значају за астрономију није потребно много говорити. Решавањем проблема три тела бавили су се многи математичари, међу којима ће се наћи и Ојлер, Лагранж, Лаплас, Гаус, Поенкаре... Али њихова су решења била или приближна или су се односила само

на неке специјалне случајеве. Чак и данас, када су због нумеричких и софтверских алата рачунске могућности далеко веће, комплетно решење проблема три тела још увек не постоји. Али без обзира на ту чињеницу, с пуним правом можемо рећи да је ова потрага од три и по века учрпала развојни пут једне нове математичке дисциплине - *теорије поремећаја*.

Основни појам теорије поремећаја су такозвани *квази-интеграбилни хамилтонијански системи*, то јест системи који се незнатно разликују од интеграбилних. Иако су одступања од интеграбилних апроксимација мала, њихова динамика је изузетно сложена. У новије време значајан допринос решавању квази-интеграбилних система дале су две теореме: КАМ теорема и теорема Нехорошева. Свака на свој начин, уз одређене услове, даје оцену стабилности система којег посматрамо. Применом ових двају теорема на Сунчев систем, приближили бисмо се одговору на старо питање о његовој стабилности. Међутим, већ на првом кораку, који подразумева проверу услова теореме у једном сложеном динамичком систему као што је Сунчев, наилазимо на проблем. Стога, као неку врсту прелазног решења користимо разне *моделе простора* на којима се услови теореме лако проверавају, и који због своје релативно једноставне форме дозвољавају широк опсег нумеричких експеримената. Један од таквих модела, који фигурише у виду четвородимензионе симплектичке мапе, испитан је и у овом раду.

Концепт тезе је следећи: У првој глави дат је преглед основних појмова и дефиниција хамилтонијанског система, при чему су интеграбилни системи најдељтаљније описани и илустровани са два примера реалног кретања. Квази-интеграбилни системи, проблеми у њиховом решавању и две основне теореме хамилтонијанске динамике, КАМ теорема (поглавље 2.1) и теорема Нехорошева (поглавље 2.2), описани су у другој глави. За примену Нехорошевљеве теореме потребно је да интеграбилна апроксимација система буде недегенерисана функција. Нехорошев је показао да овај услов задовољавају такозване *стрме функције* чија је дефиниција дата у поглављу 2.2.1. Показао је такође да конвексне, квази-конвексне и 3-струја функције, знатно једноставније у формулацији, задовољавају услов стрмости. Поред описа динамике коју предвиђају ове две теореме дате у поглављу 2.2.2, посебна пажња посвећена је феномену такозване *Арнолдове дифузије* коју описујемо у поглављу

2.3. Структуру простора и Арнолдову мрежу нумерички детектујемо помоћу такозваног брзог индикатора Љапунова који је дефинисан у поглављу 2.4. Прве две главе, дакле дају опис терминологије, динамике коју очекујемо у складу са теоријом и нумеричких метода које се у дисертацији користе. У трећој глави дефинисан је модел четвородимензионе симплектичке мапе коју испитујемо и аналитичким и нумеричким методама са циљем да се потврде Нехорошевљева очекивања о утицају стрмости на стабилизацију система. Интензитет стрмости се на овом моделу лако подешава варијацијом одређеног параметра (m). За пет различитих вредности параметра стрмости m мерена је промена коефицијената дифузије (у поглављу 3.5) у односу на параметар поремећаја ε . Резултати овог експеримента дати су у поглављу 3.6. У другом експерименту, на систем променљивих је примењена одређена канонска трансформација (чији је смисао описан у поглављу 3.7.2) а затим је за фиксирану вредност поремећаја ε мерена дифузија као функција параметра стрмости m . Резултати овог експеримента изложени су у поглављу 3.7. Закључци изведени из добијених резултата описани су у последњем поглављу.

Из перспективе данашње науке, идеју о стабилном и савршено уређеном космосу заменила је слика једног хаотичног света, у којем се скоро ништа не креће по савреном кругу, савршеној елипси, нити је било која путања савршено периодична. Ипак, можда би нас успешна примена Нехорошевљеве теореме на Сунчев систем бар мало приближила оној старој слици о хармонији света, или тачније, његовој квази-хармонији.

Наташа Тодоровић

Београд, 2012.

Желела бих да се захвалим др Масимилијану Гуцу са Универзитета у Падови који ми је предложио модел четвородимензионе стрме симплектичке мапе и сугери-сао да се проблем стрмости нумерички испита. Др Елени Леги и др Клоду Фрешлеу са Опсерваторије у Ници захваљујем се на техничкој помоћи. Захваљујем се др Радету Павловићу (коментору), др Зорану Кнежевићу и др Микеу Кузманоском на пажљивом читању и корисним коментарима везаним за текст тезе, као и Француском културном центру у Београду који ми је омогућио студијски боравак на Опсерваторији у Ници. Истраживачки рад изложен у тези подржан је од стране Министарства просвете и науке републике Србије у оквиру пројекта 176011. Својој породици сам захвална на топлој подршци.

ХАМИЛТОНИЈАНСКИ СИСТЕМИ

1.1 Појам и основне дефиниције

Хамилтонијански систем се дефинише системом диференцијалних једначина првог реда

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.1)$$

где је $H(p, q)$ хамилтонијанска функција дефинисана на отвореном скупу $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $i = 1, \dots, n$, за неки природан број $n \in \mathbb{N}$. За једначине (1.1) кажемо да су *хамилтонијанске једначине*. Променљиве $q(q_1, \dots, q_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ су генерализоване *координате*, а $p(p_1, \dots, p_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ одговарајући *моменти*. За одговарајуће парове променљивих p_i и q_i кажемо да су *узајамно конјуговане*. Простор у којем су једначине дефинисане је димензије $2n$ и назива се *фазни простор*, а природан број n је *број степени слободе*. Сваки скуп $x = (p, q)$ који задовољава једначине (1.1) је *канонички*.

Ако са X_H означимо хамилтонијанско векторско поље хамилтонијана H : $X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)$, тада једначине (1.1) могу да се запишу и у скраћеном облику:

$$\dot{x} = X_H(x). \quad (1.2)$$

Лако се проверева да је веза између Хамилтонијана H и векторског поља $X_H(x)$ облика:

$$\Omega X_H = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.3)$$

где је Ω блок-матрица димензије $2n \times 2n$ дефинисана са:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

и за коју важи $\Omega^{-1} = \Omega^T = -\Omega$, док је I_n n -димензиона матрица идентичког пресликавања. Матрица Ω назива се матрица *симплектичког идентитета*. трансформација

У једном изолованом механичком систему Хамилтонијан обично представља укупну енергију система, то јест збир кинетичке и потенцијалне енергије. Уколико хамилтонијанска функција не зависи од времена $\partial H/\partial t = 0$, хамилтонијански систем је *аутономан*. У супротном, тј. ако је $H = H(p, q, t)$, систем је *неаутономан*.

Хамилтонијански ток Φ_H^t дефинишемо као временску еволуцију координата и момената. Хамилтонијански ток трансформише почетне координате и моменте (p_0, q_0) неког хамилтонијанског система H за време t у координате (p_t, q_t) тј. $\Phi_H^t(p_0, q_0) = (p_t, q_t)$, док Хамилтонијан сам по себи остаје непромењен: $H(\Phi_H^t(p_0, q_0)) = H_{const}$. Другим речима, Хамилтонијан у почетном тренутку једнак је Хамилтонијану у било ком другом тренутку $H(p_0, q_0) = H(p_t, q_t)$, и ова релација се односи на све почетне услове (p_0, q_0) из домена \mathbb{D} и сваки временски интервал t такав да $(p_t, q_t) \in \mathbb{D}$. С обзиром да Хамилтонијан одговара укупној енергији система, константност Хамилтонијана је заправо последица закона о очувању енергије.

Хамилтонијански ток чува запремину. Сваки иницијални потпростор димензије m где је $m \leq n$ не може да колабира у простор чија је димензија мања од m , нити да се прошири у било који други потпростор чија је димензија већа од m (Лиувилова теорема). Такође, важна карактеристика хамилтонијанског тока јесте да чува симплектичку структуру координата; за сваки тренутак t важи да су одговарајуће координате (p_t, q_t) узајамно канонски конјуговане тј. важи релација (1.1).

РЕЗИМЕ Хамилтонијански ток чува укупну енергију система, запремину и симплектичку структуру координата.

1.1.1 Канонске трансформације

Приметимо да је дефиниција (1.1) везана за одређен систем координата, иако хамилтонијанска форма у извесном смислу има општији карактер. Стога се уводи класа

трансформација, таква да координате задржавају своју канонску форму независно од система у којем су дефинисане. За такве трансформације кажемо да су *канонске*.

ДЕФИНИЦИЈА. Трансформација координата $\omega : (p, q) \rightarrow (p', q')$ је канонска ако су трансформисане координате (p', q') канонски конјуговане у односу на трансформисани Хамилтонијан H' . Математички, ако је $\omega(p, q) = (p', q')$ нека канонска трансформација, тада је

$$\dot{p}' = -\frac{\partial H'}{\partial q'}, \quad \dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'}$$

где је

$$H' = \omega(H).$$

Ако са $J_{i,j}$ означимо Јакобијан канонског пресликавања ω тј. $J_{i,j} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$, тада важи једнакост

$$J^T \Omega J = \Omega. \tag{1.4}$$

Матрице J су *симплектичке матрице* које заједно формирају групу, тзв. *симплектичку групу*. Сваки хамилтонијански систем природно има *симплектичку* структуру, те стога за каноничке координате (p, q) још кажемо и да су *симплектичке*. Детаљнији опис симплектичке природе хамилтонијанског система дат је у [26], [25] или [3].

Критеријуми за оцену каноничности трансформација

Да бисмо применили неку трансформацију на дати систем променљивих, потребно је да најпре утврдимо да ли је она канонска. Релација (1.4) на пример, уједно служи и као критеријум за утврђивање каноничности пресликавања. Најчешћи критеријум за утврђивање каноничности неке трансформације су *Поасонове заграде*.

ДЕФИНИЦИЈА: Ако су $f, g : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ две диференцијабилне функције, Поасонова заграда $\{f, g\}$ се дефинише као:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]. \tag{1.5}$$

Трансформација $\omega : (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \rightarrow (p'_1, \dots, p'_n, q'_1, \dots, q'_n)$ је *канонска* ако и само ако се Поасонове заграде чувају трансформацијом ω , тј. ако важи:

$$\{p'_i, p'_j\} = 0, \quad \{q'_i, q'_j\} = 0, \quad \{p'_i, q'_j\} = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

где је $\delta_{i,j} = 1$ када је $i = j$, а за $i \neq j$ $\delta_{i,j} = 0$. Као оцена каноничности неке трансформације такође се користе Лијеве и опште генеративне функције у чије детаље нећемо улазити у овом раду (погледати [50], [3] или поглавље 2.5 у [32]).

Потребно је нагласити да канонске трансформације не уводе нову динамику у систем, већ само реформулишу постојећу и њихов основни смисао је поједностављење аналитичких израза који воде до решења система.

1.2 Интеграбилни системи

Уколико једначине система (1.1) имају аналитичка решења, тј. ако је кретање познато у сваком тренутку у времену, за систем кажемо да је *интеграбилан*. Интуитивно се намеће закључак да до решења ових једначина долазимо интеграљењем једначина кретања неком од познатих метода, тзв. *кватурама*. Испоставило се међутим, да овај начин није увек успешан, јер постоји мали број система који су решиви овим путем, те је врло тешко оценити да ли је неки систем интеграбилан или није. Ако на пример за дати систем нема аналитичког решења, поставља се питање да ли оно заиста не постоји или само не располажемо техникама да до тог решења дођемо. Иако је ово питање још увек отворено, дилему донекле разрешава Арнолд-Лиувилова теорема, по којој интеграбилни системи имају одређена својства на основу којих се знатно разликују од неинтеграбилних. Увешћемо најпре следеће дефиниције:

ДЕФИНИЦИЈА *За две функције f и g кажемо да су у међусобној инволуцији ако важи да је Поасонова заграда $\{f, g\}$ идентички једнака нули: $\{f, g\} = 0$.*

ДЕФИНИЦИЈА *Функција f је први интеграл хамилтонијанског система H ако и само ако је Поасонова заграда $\{H, f\}$ идентички једнака нули: $\{H, f\} = 0$. За први интеграл још кажемо и да је константа кретања или интеграл кретања.*

1.2.1 Арнолд-Лиувилова теорема. Дејство-угао променљиве

Лиувил је доказао да интеграбилни системи са n степени слободе имају n независних константи кретања, односно n интеграла у међусобној инволуцији. Касније је Арнолд увео посебну класу симплектичких координата које су прилагођене оваквом приступу интеграбилним системима. Терминологија и ознаке везане за следећу дефиницију преузете су из [5].

Арнолд-Лиувилова теорема: Нека је \mathbb{D} отворен подскуп скупа \mathbb{R}^n , претпоставимо да постоји n функција $F_1, \dots, F_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ таквих да је $\{F_i, F_j\} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ при чему је $F_1 = H$ као и да су F_1, \dots, F_n линеарно независне, то јест да је

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right) \neq 0$$

на скупу

$$\mathcal{N}_c = \{(p, q) \in \mathbb{D} : F_i(p, q) = c_i\}, \quad c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.7)$$

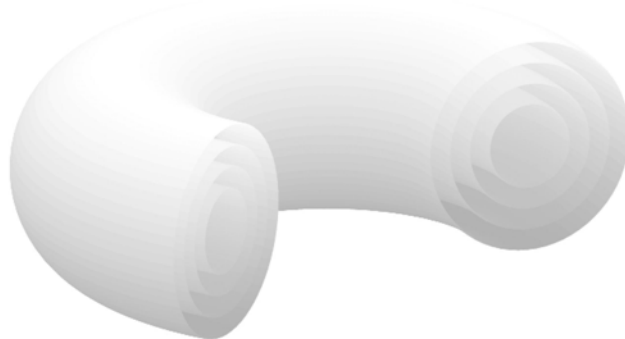
где су \mathcal{N}_c компактне и повезане n -димензионе многострукости скупа \mathbb{D} . Тада:

- i) је многострукост \mathcal{N}_c дифеоморфна n -димензионом торусу $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$;
- ii) постоји канонска трансформација $\omega(p, q) \rightarrow (I, \varphi)$ дефинисана у околини многострукости \mathcal{N}_c таква да су променљиве I константне на торусу \mathbb{T}^n и да је трансформисани Хамилтонијан независан од угловних променљивих φ

$$H'(I, \varphi) = h(I).$$

Симплектичке координате (I, φ) конструисане за класу интеграбилних система по Арнолд-Лиувиловој теореме називају се *дејство-угао* или *акција-угао* променљиве. По овој теорему, кретање у интеграбилном систему (после примене једне или више канонских трансформација) одвија се на површини n -димензионог торуса константном угловном брзином, при чему дејства остају константна, што се лако показује из једначина кретања. Ако узмемо у обзир чињеницу да трансформисани Хамилтонијан $h(I)$ зависи само од дејстава, имаћемо да је:

$$\dot{I} = -\frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial h}{\partial I} = \omega(I). \quad (1.8)$$

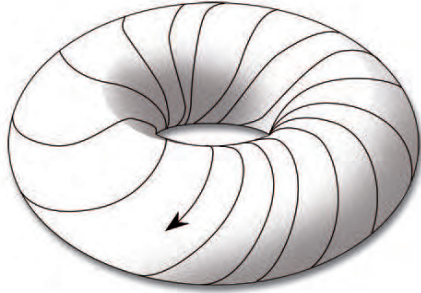


Слика 1.1: Илустрација *лиснате* структуре фазног простора у систему са два степена слобде. Сваки почетни услов (скуп дејстава) генерише један торус. Торуси су међусобно уписани један у други; не секу се, нити се преклапају.

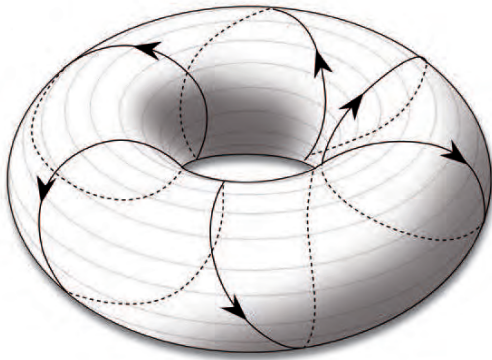
Из прве једначине јасно следи да су дејства константна, а из друге да су фреквенције ω константне величине (јер зависе само од дејстава). Сваки скуп почетних услова (I, φ) дефинише један торус. Фазни простор је испуњен торусима који су уписани један у други и који се међусобно не секу нити се преклапају. За овакав систем кажемо да је *раслојен на инваријантне торусе*. Илустрација оваквог простора са два степена слобде ($n = 2$) приказана је на слици 1.1. Пречници малог и великог круга који дефинишу сваки торус заправо су два константна дејства. Кретање које се одвија на површини торуса назива се *транслација*. Трајекторија је хеликоидна крива која се намотава на торус по отвореној или затвореној кривој у зависности од решења једначине

$$k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0, \quad k \equiv (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n. \quad (1.9)$$

Уколико једначина (1.9) има *јединствено* нула решење $k = (0, \dots, 0)$ тј. све фреквенције су међусобно *линерано независне*, кретање је *нерезонантно*. Трајекторија је отворена крива која *густо* прекрива целу површину торуса, што би значило да за сваку тачку торуса важи да ће трајекторија пре или касније проћи кроз неку њену околину. Овакво кретање се још назива и *квази-периодично* кретање. Такође, у случају нерезонантног кретања, трајекторија никад не пролази два пута кроз исту тачку, јер би у том случају кретање било периодично. Илустрација нерезонантног кретања приказана је на слици 1.2.



Слика 1.2: Илустрација нерезонантног кретања на торусу. Кретање је квази-периодично и трајекторија густо покрива торус. Резонантна једначина $k \cdot \omega = 0$ има јединствено нула решење.



Слика 1.3: Приказ резонантног кретања на торусу, где једначина $k \cdot \omega = 0$ има $n - 1$ ненула целобројно решење.

У случају када постоји $n - 1$ ненула целобројно решење једначине (1.9) облика k^1, \dots, k^{n-1} где је $k^i = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, крива је затворена и кретање на торусу је *потпуно резонантно* и *периодично*. Илустрација овог кретања приказана је на слици 1.3.

Постоје и међуслучајеви када на пример једначина (1.9) има m различитих ненула решења k^1, \dots, k^m при чему је $m < n - 1$. Тада пројекција кретања на одговарајући потпростор димензије $n - m$ има својства нерезонантног кретања, док пројекција на преостали потпростор димензије m има својства резонантног кретања. Број целобројних ненула решења једначине (1.9) назива се *вишеструкост резонанце*, а величина $\min_{1 \leq j \leq m} |k^j|$ при чему је $|k^j| \equiv |k_1^j| + \dots + |k_n^j|$, дефинише се као *ред резонанце*.

1.2.2 Примери интеграбилних система

Класа интеграбилних система је упркос својој једноставној дефиницији, веома рестриктивна. Најједноставнији примери интеграбилних система су *аутономни системи који имају један степен слободе*. Такав систем имаће једну константу кретања – укупну енергију, која одговара Хамилтонијану система, те је на основу Арнолд-Лиувилове теореме овакав систем интеграбилан. Поред овог примера, навешћемо пример клатна који представља основни модел интеграбилног кретања, као и својеврсну парадигму резонантног интеграбилног кретања. Затим ћемо навести пример Кеплеровог кретања чији значај у астрономији не треба посебно објашњавати. Оно што је занимљиво је да кеплеровско кретање представља једини пример кретања у астрономији чије су једначине у потпуности решене, док за сваки други пример кретања у динамичкој астрономији постоје само приближна решења или решења која важе само у специјалним случајевима, као што су на пример Лагранжеве тачке проблема три тела.

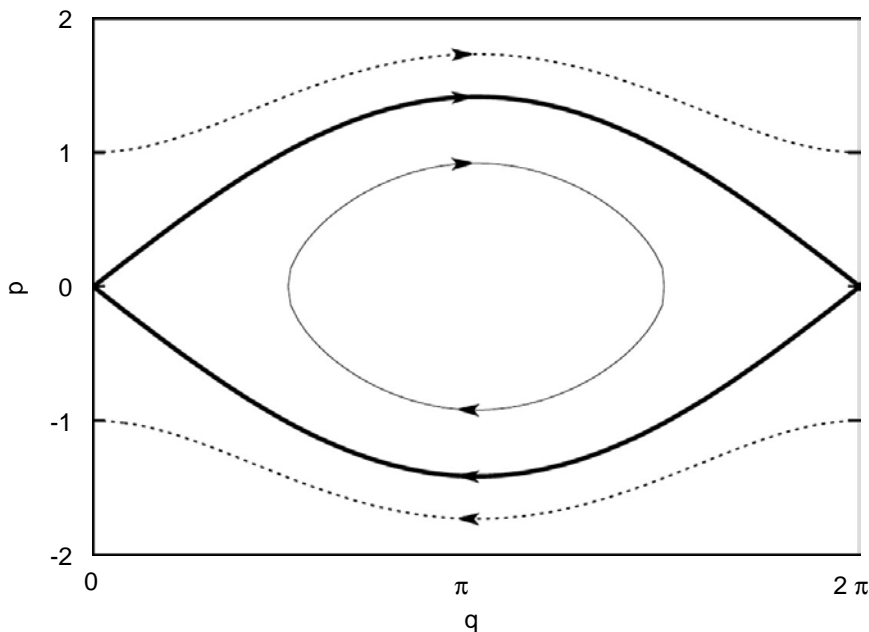
Клатно

Хамилтонијанска функција клатна је

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \omega^2 \cos q.$$

Фазни портрет клатна приказан је на слици 1.4. У центру слике у тачки $(\pi, 0)$ налази се *стабилна елиптична тачка*. На ивицама, у тачкама $(0, 0)$ и $(0, 2\pi)$ су две *нестабилне хиперболичке тачке*. Ако изузмемо ове три тачке систем је подељен *сепаратрисом* на три динамички различите области. Сепаратриса је на слици означена подебљаном линијом у облику ока. Изнад и испод сепаратрисе клатно има затворено кружно кретање такво да се угао q мења на интервалу $[0, 2\pi]$. Кружне области испод и изнад ивице сепаратрисе се разликују само у смеру кретања клатна тј. $\dot{q} > 0$ изнад, а $\dot{q} < 0$ испод сепаратрисе. Између две гране сепаратрисе налази се *осцилаторна или либрациона област* где клатно осцилује око стабилне елиптичне тачке.

Амплитуда осцилације најмања је у стабилној тачки тј. једнака је нули, а највећа је на самој сепаратрисе где је период осцилације бесконачан, те стога сепара-

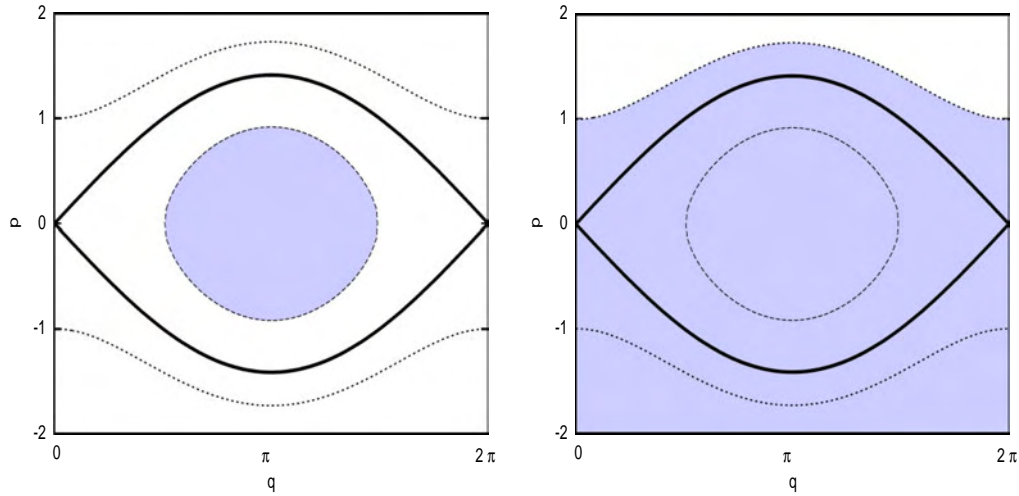


Слика 1.4: Фазни портрет модела клатна. Сепаратриса (означена подебљаном линијом) дели простор на три динамички различите области: изван сепаратрисе клатно има кружо кретање, док унутар сепаратрисе осцилује. Смер кретања клатна изнад праве $p = 0$ супротан је смеру испод ове праве.

триса представља својеврсни сингуларитет. С обзиром да се динамички разликују, за сваку област уводи се локална канонска трансформација $\omega : (p, q) \rightarrow (I, \varphi)$ таква да је

$$I(p, q) = \frac{1}{2\pi} A(p, q), \quad \varphi(p, q) = \frac{2\pi t}{T(p, q)}.$$

Вредност T представља период пуне осцилације, док величина t одговара времену. У осцилаторној области $A(p, q)$ је површина елипсе (или површи која је тополошки еквивалентна кругу) коју захвата одговарајућа фазна крива (слика 1.5 лево), док у циркуларној области A представља површину испод фазне криве која одговара датом кретању (слика 1.5 десно). Површина A добија се решавањем интеграла по фазној кривој (тачне вредности ових интеграла дате су нпр. у [32]). Трансформисани хамилтонијан $H'(I, \varphi) = h(I)$ зависи само од дејстава, при чему су



Слика 1.5: Геометријска интерпретација интеграла дејства у случају осциловања клатна (лево) и у случају кружног кретања (десно).

дејства и фреквенције константне:

$$I(t) = I(0), \quad \varphi = \varphi(0) + \omega(I)t, \quad \omega = \frac{\partial h}{\partial I}.$$

Проблем два тела. Кеплерово кретање

Још један пример интеграбилног система који има велики значај у астрономији је *проблем два тела*. Посматрамо кретање тела масе m у централном гравитационом пољу тела масе M где су оба тела сферно симетрична. Хамилтонијанска функција овог система у поларним координатама (r, θ) , то јест одговарајућем фазном простору $(p_r, p_\theta, r, \theta)$, је:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} \quad (1.10)$$

где је \mathcal{G} гравитациона константа. Систем има два степена слободе и две независне константе кретања, *Хамилтонијан* који одговара укупној енергији тј. збира кинетичке и потенцијалне енергије ($E = T + U$) и *угловни (обртни) момент* p_θ . Да би кретање било ограничено, потребно је да укупна енергија E буде негативна и да обртни момент $p_\theta \neq 0$. С обзиром да је обртни момент константан, из хамилтонијанских једначина ($\dot{\theta} = \omega = \partial H / \partial p_\theta = const$) следи да се угао θ равномерно

мења. Интервал промене угла θ је $[0, 2\pi]$. Радијус вектор r се мења на интервалу $r \in [r_{min}, r_{max}]$ где је r_{min} растојање до *перицентра*, а r_{max} растојање до *апоцентра*. Угао између два сукцесивна перипентра и апоцентра означимо са Θ . У случају када угао Θ није самерљив са 2π тј. не постоје $m, n \in \mathbb{Z}$ такви да је $\Theta = 2\pi(m/n)$, трајекторија је *отворена* крива и кретање је свуда густо (овај тип кретања приказан је на слици 1.2). У супротном, тј. ако постоје целобројне вредности m и n такве да је $\Theta = 2\pi(m/n)$, трајекторија описује затворену криву. Специјалан случај овог кретања када су угловне брзине међусобно *једнаке* $\omega_\theta = \omega_r$ је *Кеплерово кретање* које описује добро познату елиптичну путању.

Потребно је дакле конструисати одговарајући систем дејство-угао променљивих, таквих да трансформисани Хамилтонијан H' зависи само од дејстава тј. да је $H'(I_\theta, I_r, \theta, r) = h(I_\theta, I_r)$. Имајући у виду да је обртни момент p_θ непроменљив, прво константно дејство I_θ биће сам обртни момент: $I_\theta = p_\theta$. Дејство I_r има облик

$$I_r = \frac{1}{2\pi} A(p_r, p_\theta, r)$$

где је A површина унутар затворене фазне криве у равни (r, p_r) за неку константну вредност Хамилтонијана $H_{p_\theta} = const$. Одговарајући углови се лако дефинишу уз услов да је пресликавање каноничко (матрица пресликавања једнака је јединици). У овом случају, два конјугована угла φ_θ и φ_r називају се респективно, *средња аномалија* и *аргумент перихела*. Тачни изрази за A као и за углове φ_θ и φ_r могу се пронаћи на пример у [32] поглавље 1.3с.

Уобичајен систем дејство-угао променљивих, који се користи у астрономији су такозване *Делонејеве (Delapauy)* променљиве: (L, G, l, g) , где дејство $L = I_r + I_\theta$ представља орбиталну енергију система, а дејство $G = I_\theta$ одговара обртном моменту. Хамилтонијанска функција H^* у Делонејевом систему променљивих зависиће само од дејстава и биће:

$$H^* = -\frac{(GMm)^2 m}{2L^2} = h.$$

НАПОМЕНА. Проблем који посматрамо је димензиони равански. У тродимензионом просторном случају уводи се још једна координата Делонејевог система - дејство H , које одговара z компоненти обртног момента I_θ , као и њој конјугована угловна величина.

КВАЗИ-ИНТЕГРАБИЛНИ ХАМИЛТОНИЈАНСКИ СИСТЕМИ

У претходној глави дат је преглед основних карактеристика интеграбилног система, којег смо илустровали примером клатна и проблемом два тела. Међутим, реално кретање, ако изузмемо неколико идеализованих случајева, скоро никад није интеграбилно. Неинтеграбилност система често се доводи у везу са хаотичним кретањем. Иако хаос нема своју егзактну математичку формулацију, можемо рећи да неинтеграбилан систем генерише хаотично кретање. Испоставило се да се за мале вредности поремећаја, кретање незнатно разликује од интеграбилног; структура интеграбилних система описана у поглављу 1.2.1 у неком смислу опстаје, али у деформисаном облику. Овакви, такозвани *квази-интеграбилни* системи представљају централни проблем целе једне математичке дисциплине - *теорије поремећаја*, а према Поенкареу, централни проблем динамике уопште. Навешћемо овде основне дефиниције и особине квази-интеграбилних система, а затим дати краћи опис две најзначајније теореме хамилтонијанске динамике, чији се значај у небеској механици огледа првенствено у оцени стабилности Сунчевог система.

ДЕФИНИЦИЈА *Хамилтонијански систем је квази-интеграбилан ако у одговарајућем систему дејство-угао променљивих $(I, \varphi) \in \mathbb{G} \times \mathbb{T}^n$, где је $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп, хамилтонијанска функција има облик:*

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi). \quad (2.1)$$

$H_0(I)$ је *интеграбилна апроксимација* кретања, а $H_1(I, \varphi)$ *поремећајна функција*. Неинтеграбилна функција $H_1(I, \varphi)$ генерисана је неком малом вредношћу параметра ε , који се још назива и *параметар поремећаја*.

У поглављу 1.2.1 је показано да су дејства интеграбилног кретања H_0 константне величине. Увођењем малог поремећаја у систем, дејства ће остати у некој околини својих интеграбилних апроксимација, одступајући од својих почетних величина за неку малу вредност у неком времену t . Колика су та одступања, у ком времену су валидна и да ли се она разликују у зависности од тога који део фазног простора се разматра? Најгрубљи одговор дат је такозваном *a priori* оценом стабилности која се изводи непосредно из хамилтонијанских једначина система (2.1):

$$\dot{I} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}(I, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}(I, \varphi) \quad (2.2)$$

одакле следи да је:

$$\|I(t) - I(0)\| \ll \text{const.} \varepsilon t \quad (2.3)$$

то јест

$$\|I(t) - I(0)\| \ll 1, \quad \text{за време } |t| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.4)$$

одакле закључујемо да (познато) решење система (2.1) одступа од реалне трајекторије за вредност параметра ε у неком јединичном временском интервалу, тј. одступа од непоремећеног кретања за неку јединичну вредност у временском интервалу који је реда величине $1/\varepsilon$. Да ли је могуће дати бољу оцену стабилности дејстава него што је оцена (2.4) и шта се дешава са дејствима после времена $1/\varepsilon$? Испоставило се да одговор на ово питање није тривијалан и да укључује врло сложен математички апарат. Први значајан резултат на ову тему дао је Андреј Николајевич Колмогоров 1954. године [27] показавши да за довољно мале вредности ε , велика већина торуса која одговара интеграбилној апроксимацији кретања преживљава поремећај. Такви, тзв. *инваријантни торуси* биће стабилни у бесконачном времену. Касније Арнолд [1] и Мозер ([37], [38]) износе нешто другачији доказ и проширују теорему на проблематику Сунчевог система, те по њима ова прослављена теорема носи назив - КАМ теорема. Недостатак КАМ теореме је у томе што она не даје никакву информацију о резонантним областима и њиховим околинама, те је у том смислу КАМ теорема непотпуна. Детаљнији опис КАМ

теореме дат је у поглављу 2.1. Следећи значајан резултат о стабилности квази-интеграбилних система, формулисан је у теорему Нехорошева ([39], [40]), која је у извесном смислу комплементарна КАМ теореме, јер третира цео фазни простор. Рестрикције на домену нема, али је зато стабилност дејстава коначна; време стабилности експоненцијално расте у односу на вредност која је обрнуто пропорционална вредности поремећаја тј. $T \sim \exp(1/\varepsilon)$. Пре него што дамо преглед ових двеју теорема, навешћемо неке опште карактеристике квази-интеграбилних система, као и проблеме у њиховом решавању.

Да ли постоји канонска трансформација $(I, \varphi) \rightarrow (I', \varphi')$ којом би се квази-интеграбилни систем $H(I, \varphi)$ трансформисао у систем који би зависио само од дејстава $H(I')$ тј. систем који би елиминацијом углова из хамилтонијанске функције био у потпуности интеграбилан? Одговор на ово питање је *негативан*, и образложио га је Анри Поенкаре 1892. године у својој теорему о општој неинтеграбилности [42] показавши да је, због велике густине резонантних орбита, глобална елиминација углова у систему немогућа. Илустроваћемо ову ситуацију на контра-примеру, на систему неспрегнутих хармонијских осцилатора где оваква трансформација *постоји*.

Посматрајмо Хамилтонијан чији је интеграбилни део $H_0(I) = \sum_{l=1,n} \omega_l p_l$, а поремећајна функција зависи само од углова и има облик

$$H_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ik \cdot q}$$

где су c_k константе и $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Лако се показује да је трансформација

$$p_l = p'_l - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_k k_l}{k \cdot \omega}, \quad q_l = q'_l \quad (2.5)$$

канонска (да чува Поасонове заграде) и да примењена на наведени систем даје хамилтонијанску функцију

$$H'(p') = \sum_{l=1,n} \omega_l p'_l \quad (2.6)$$

која је интеграбилна. Да би трансформација (2.5) имала смисао, потребно је пре свега, да ред $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_k k_l}{k \cdot \omega}$ *апсолутно конвергира*. Први услов ове конвергенције је да за свако $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \cdot \omega \neq 0$. Односно, фреквенције ω не смеју да буду резонантне. Штавише, потребно је да буду 'довољно далеко' од резонантних вредности то јест

да испуњавају тзв. *диофантовски услов*:

$$|k \cdot \omega| > \gamma |k|^{-\tau} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad (2.7)$$

где су γ и τ неке позитивне реалне вредности. Други услов: фреквенције морају бити диофантовске на *целом домену* фазног простора. У наведеном примеру, где је интеграбилни део Хамилтонијана линеаран по дејствима, оба услова су испуњена јер су фреквенције константне на торусу: $\dot{q}_l = \partial H / \partial p_l = \omega_l$. Међутим, у општем случају вредности ω *зависе* од дејстава, те други услов неће бити испуњен. За системе који не испуњавају два наведена услова кажемо да су *недегенерисани* и за њих важи следећа неједнакост:

$$\det \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right) \neq 0$$

тј.

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0. \quad (2.8)$$

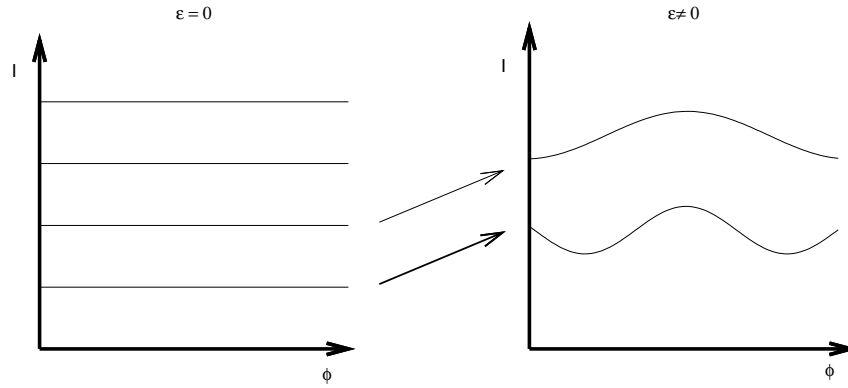
Због густине рационалних бројева у пољу реалних бројева \mathbb{R} , услов да фреквенције не буду резонантне, не може бити задовољен. Чак и ако претпоставимо да су фреквенције диофантовске, постојаће нека довољно мала околина која ће садржати неку тачку \dot{p} такву да је $|\omega(\dot{p}) \cdot k| = 0$ за неку целобројну комбинацију k . Ред (2.5) у том случају *дивергира* и систем (2.1) неће имати решење. У литератури, овај проблем познат је као *проблем малих именилаца* и лежи у основи Поенкареовог доказа о општој неинтеграбилности. Рад је објављен 1892. године под називом *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*.

2.1 КАМ теорема

ТЕОРЕМА *Посматрајмо квази-интеграбилни хамилтонијански систем облика:*

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi). \quad (2.9)$$

Претпоставимо да је интеграбилна апроксимација H_0 недегенеративна функција, то јест да важи $\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_j \partial I_k} \right) \neq 0$ и да је дејство $I^ \in \mathbb{R}^n$ такво да фреквенција ω испуњава*



Слика 2.1: На левој страни слике приказан је фазни портрет интеграбилног система. У поремећеном систему $H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$ торуси са диофантовским фреквенцијама преживљавају поремећај, али су при томе деформисани и транслирани за неку вредност у односу на свој непоколебљиви оригинал (десно). За фреквенције које нису диофантовске (такве фреквенције одговарају резонантном кретању) КАМ теорема не даје оцену стабилности.

диофантовски услов:

$$(k, \omega) \geq \gamma |k|^{-\tau} \quad \forall k \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

где су $\gamma \geq 0$ и $\tau \geq n - 1$ одговарајуће константе. Тада, за довољно малу вредност ε , Хамилтонијан (2.9) дозвољава постојање инваријантних торуса на којима је кретање квази-периодично и има фреквенције ω . Инваријантни торус биће у ε околини одговарајућег непоколебљивог торуса $\{(I, \varphi) : I = I^*, \varphi \in \mathbb{T}^n\}$

Дакле, и за неки благо поремећени систем који задовољава услове теореме, постоје области у фазном простору (инваријантни торуси) где су дејства стабилна у бесконачном времену. Иако неинтеграбилне у основи, хамилтонијанске једначине ограничене на ове торусе, имаће решење. Торуси, носиоци инваријантног кретања, по овој теорему називају се још и *КАМ торуси*.

Основна идеја доказа КАМ теореме јесте да се за неки непоколебљиви нерезонантни торус дефинисан дејствима I^* хамилтонијанска функција (2.9) развије у степени ред по променљивој I :

$$H(I, \varphi) = \langle \omega, I \rangle + \varepsilon A(\varphi) + \varepsilon \langle B(\varphi), I \rangle + \frac{1}{2} \langle CI, I \rangle + \mathcal{O}(I^2) \quad (2.10)$$

где су $A(\varphi)$ и $\langle B(\varphi), I \rangle$ чланови независни и линеарни по I респективно, C је симетрична матрица облика $C = [\partial^2 H_0 / \partial I_j \partial I_k]$, а остатак реда $\mathcal{O}(I^2)$ је линеаран по ε . Напомињемо да је пре развоја функције у ред, због једноставности, почетак координатног система простом транслацијом премештен у тачку I^* . Следећи корак, најзначајнији и најтежи, јесте налажење канонске трансформације којом би се Хамилтонијан (2.10) превео у такозвану *Колмогоровљеву нормалну форму*:

$$H'(I', \varphi') = \langle \omega, I' \rangle + \mathcal{O}(I'^2) \quad (2.11)$$

која је интеграбилна само на инваријантном торусу $I' = 0$. Цео овај поступак подразумева композицију бесконачног низа канонских трансформација, при чему је неопходно доказати да тај низ конвергира (деталји доказа могу се пронаћи нпр. у [13] или [14]).

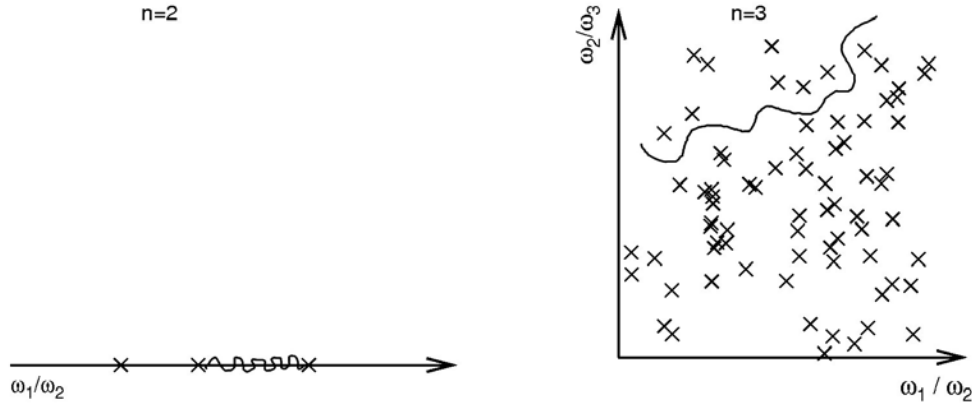
Слика 2.1 илуструје фазни простор у случају непоремећеног и квази-интеграбилног кретања. На левој страни слике приказан је интеграбилан систем чија је динамика описана у претходној глави: $\varepsilon = 0$, дејства I су константна, а углови φ су линеарне функције времена. Увођењем малог поремећаја у систем (слика 2.1 десно), торуси са диофантовским фреквенцијама преживљавају поремећај и опстају за све оне вредности ε које су мање од неке критичне. За сваки појединачни непоремећени торус постоји одговарајућа канонска трансформација којом се хамилтонијанска функција на торусу преводи у облик (2.11). С обзиром да је свака од ових трансформација периодична по угловима, нова дејства ће бити квази-периодичне функције углова¹. Приметимо да су дејства поремећеног кретања на десној страни слике транслиране дуж праве $\varphi = 0$ за неку вредност у односу на одговарајуће вредности на левој страни и да усредњена вредност трансформисаних дејстава на датом КАМ торусу није једнака одговарајућим непоремећеним дејствима пре трансформације.

Интуитивно се намеће закључак да ће се повећањем вредности поремећаја, број 'преживелих' торуса смањивати. Природу ове зависности дао је Најштад (Neishtadt)

¹Акције поремећеног система нису периодичне функције углова, јер би то значило да је кретање резонантно. Услов за примену КАМ теореме јесте управо супротно, нерезонантно кретање тј. диофантовске фреквенције.

1982. године показавши да је Лебегова мера скупа КАМ торуса једнака $1 - \sqrt{\varepsilon}$, тј. да тежи 1 када $\varepsilon \rightarrow 0$. Ова релација се најлакше интерпретира са аспекта вероватноће: вероватноћа да насумице изаберемо тачку фазног простора која припада неком КАМ торусу расте и тежи 1 кад $\varepsilon \rightarrow 0$. Ово је нарочито значајно код феномена дифузије, јер у системима са два степена слободе КАМ торуси представљају својеврсну препреку дифузионом кретању. Такав систем имаће четири димензије. Због закона о очувању енергије (Хамилтонијан је константан) кретање се одвија у тродимензионом простору, у којем су инваријантни торуси дводимензионе многострукости. У овом случају је број димензија који је на располагању дифузионом кретању једнак један. С обзиром да 'пролазак' трајекторије кроз КАМ торус није изводљив, трајекторија ће остати 'заробљена' у међупростору суседних КАМ торуса. Ово међутим није случај када је број степени слободе већи или једнак три. Димензија фазног простора у систему са n степени слободе је $2n$; због константности Хамилтонијана кретање се одвија у $(2n - 1)$ -димензионом простору, где су смештени торуси као n -димензионе многострукости. Дакле, димензија оног дела фазног простора који није захваћен торусима је $(2n - 1) - n = n - 1$. Трајекторија ван КАМ торуса сада има на располагању простор димензије $n - 1$, те КАМ торуси у овом случају не представљају препреку дифузионом кретању.

Пример којим илуструјемо ситуацију преузет је из [35]. Ако узмемо у обзир чињеницу да се инваријантни торус једнозначно параметризује фреквенцијама на торусу, тада систем са два степена слободе може да се представи правом $x = \omega_1/\omega_2$. Сваки КАМ торус биће дефинисан тачком на овој правој (лева страна слике 2.2). У систему са три степена слободе, КАМ торус дефинисан је са три фреквенције. Инваријантни торуси у овом случају (десна страна слике 2.2) дефинисани су тачкама у равни $(\omega_1/\omega_2, \omega_2/\omega_3)$. У првом случају орбита је 'блокирана' торусима, а у другом је очигледно да КАМ торуси не представљају природну препреку дифузионом кретању. Међутим, и ова слика приказује идеализовану ситуацију, јер је за мале поремећаје, скуп КАМ торуса до те мере густ, да је дискутабилно колико је овакава дифузија заправо реална. Видећемо нешто касније да су уверљивији кандидати за дифузионо кретање оне области фазног простора које нису покривене КАМ теоремом. Овај скуп, комплементаран скупу КАМ торуса, у литератури фигурише под



Слика 2.2: Лево: У систему са два степена слободe КАМ торуси представљају својеврсне барикаде дифузионом кретању и трајекторија је 'блокирана' торусима. Десно: У систему са три степена слободe, КАМ торуси нису препрека дифузионом кретању кроз простор. Сваки торус једнозначно је параметризован одговарајућом комбинацијом фреквенција, ω_1/ω_2 на левој слици, а $(\omega_1/\omega_2, \omega_2/\omega_3)$ на десној и обележен је знаком \times .

називом Арнолдова мрежа, а феномен споре хаотичне дифузије на овом скупу по истом аутору назива се *Арнолдова дифузија*. Арнолдова дифузија је у извесном смислу, једна од централних тема овог рада, коју детаљније описујемо у поглављу 2.3.

2.1.1 Илустрација КАМ теореме на примеру стандардне мапе

Као што клатно (описано у поглављу 1.2.2) представља својеврсну парадигму резонантног интеграбилног кретања, тако и стандардна мапа представља парадигму хаотичне динамике једног неинтеграбилног система.

Посматрајмо хамилтонијански систем са два степена слободe

$$H(p_1, q_1, p_2, q_2),$$

где су $(p_i, q_i), i = 1, 2$ парови узајамно конјугованих дејство-угао променљивих. Систем је конзервативан и хамилтонијанска функција има константну вредност $H(p_1, q_1, p_2, q_2) = \mathcal{C}$. Уместо целе трајекторије, посматрамо само њен пресек са неком унапред дефинисаном површи. Овакве површи, чији пресеци са посматраним трајекторијама

дају приказ динамичких карактеристика система, називају се *Поенкареове површи* и *Поенкареови пресеци*. У нашем случају површ је дефинисана са $q_2 = 0$. Тако ће за сваки пар променљивих (p_1, q_1) , дејство p_2 бити одређено имплицитно као једина непозната у систему

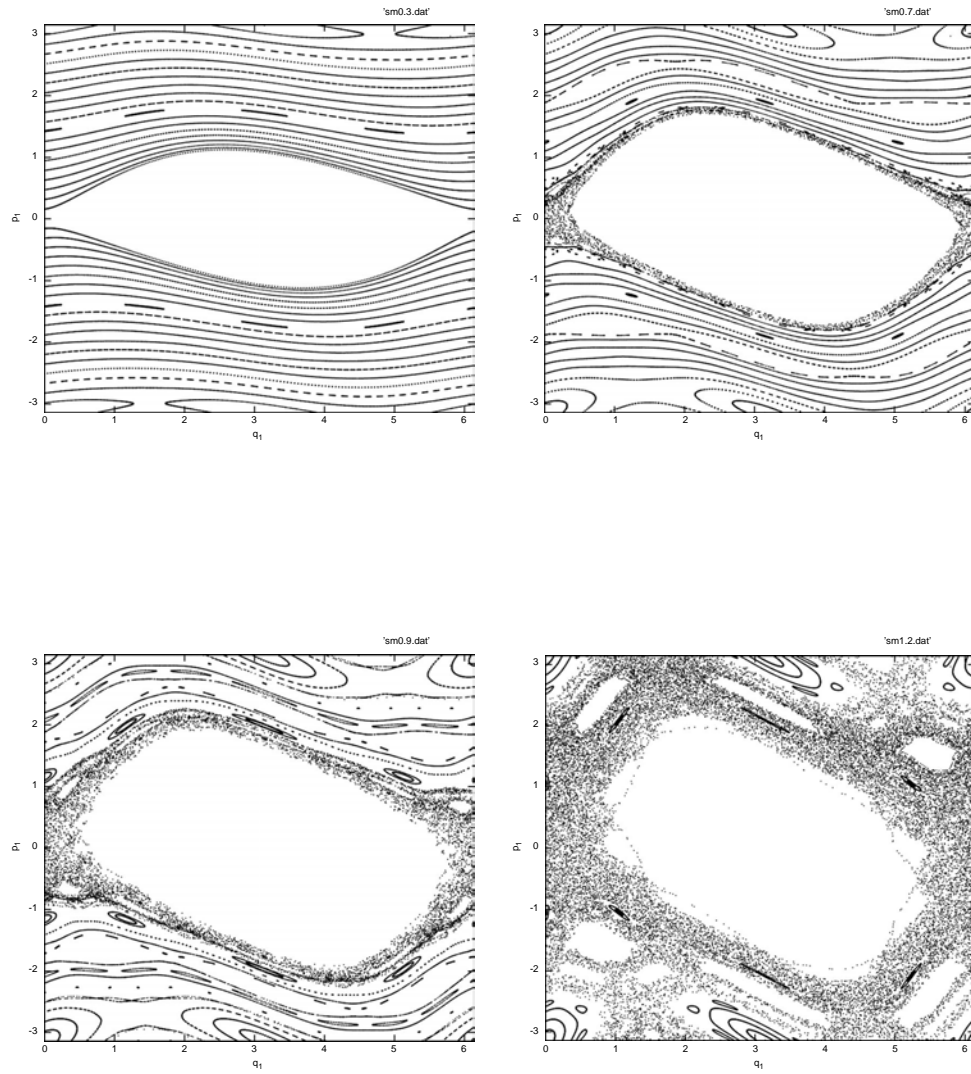
$$H(p_1, q_1, p_2, 0) = \mathcal{C}.$$

На тај начин, без умањења општости, динамика у равни (p_1, q_1) одсликава динамику целог простора.

Конкретан пример, незаобилазан када говоримо о овој теми, дат је *стандардном мапом* коју дефинишемо у равни (p_1, q_1) следећим паром једначина:

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_1 + p_1 \\ p'_1 &= p_1 + \varepsilon \sin(q'_1) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Са циљем да нумерички визуелизујемо простор, посматрамо 20 тачака, почетних услова, које су равномерно распоређене дуж праве $q_1 = 0$ у интервалу $p_1 \in [-\pi, \pi]$. Итерацијом мапе за 1000 корака, у стању смо да пратимо кретање свих 20 трајекторија. Један корак итерације, представља време једног периода угла q_2 , а истовремено и време између два сукцесивна проласка трајекторије кроз раван слике (тј. раван $q_2 = 0$). Уколико је трајекторија на КАМ торусу, сукцесивни проласци орбите кроз раван (p_1, q_1) , формираће непрекидну линију. У супротном, тј. ако је орбита хаотична, узастопни проласци трајекторије кроз ову раван имају неправилан облик и видимо их као слој расутих тачака. На горњој левој слици 2.3 приказана је ситуација када је вредност поремећаја мала $\varepsilon = 0.3$. Скоро сви почетни услови леже на КАМ торусу. Празнина у средини слике представља резонанцу $p_1 = 0$. Ова празнина је донекле у сагласности са теоријом, јер знамо да КАМ теорема не даје никакву информацију о резонантним орбитама. Такође, у неким деловима уместо на отвореној линији, видљив је низ мањих елиптичних кривих, које одговарају резонанцама вишег реда. Повећањем вредности ε , први КАМ торус се распада, а као последица појављује се танки хаотични слој у његовој околини. Сlike горе десно и доле лево одговарају ситуацији када је $\varepsilon = 0.7$ и $\varepsilon = 0.9$ респективно. Број КАМ торуса се на ове две слике значајно смањило. Истовремено, хаотична област заузима све већи део простора. Сваки торус има своју критичну вредност ε за коју се



Слика 2.3: Фазни портрет стандардне мапе за различите вредности ε . У горњем реду доминирају регуларне орбите на КАМ торусима, јер је вредност поремећаја мала $\varepsilon = 0.3$ и $\varepsilon = 0.7$. У доњем реду не левој слици где је $\varepsilon = 0.9$, број КАМ торуса је мањи, а хаотична област већа. На доњој десној слици, где је вредност поремећаја $\varepsilon = 1.2$ нема ниједног преживелог торуса. Свих 20 трајекторија има хаотично кетање.

распада. На доњој десној слици, с обзиром да је поремећај велики, $\varepsilon = 1.2$, ниједан од 20 торуза није преживео поремећај, видљив је само хаос.

2.2 Нехорошевљева теорема

Један од најзначајнијих резултата савремене хамилтонијанске динамике свакако је *Нехорошевљева теорема*. Њен значај у астрономији односи се пре свега на оцену стабилности Сунчевог система. Поред овог главног резултата, испоставило се да постоји и тзв. геометријски аспект теореме који на врло илустративан начин даје опис динамике на целом домену фазног простора, независно од тога да ли се ради о резонантној или нерезонантној области. У делу који следи, дата је прецизнија формулација теореме, као и краћи опис динамике система који задовољава услове теореме Нехорошева.

НЕХОРОШЕВЉЕВА ТЕОРЕМА *Претпоставимо да функција H_0 задовољава услов стрмотости. Тада постоје позитивне константе ε_0 , a и b са следећим својствима. Ако је $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, тада за свако решење $I(t), \varphi(t)$ система чији је Хамилтонијан $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$ важи*

$$|I(t) - I(0)| < \varepsilon^a \equiv \Delta \quad (2.13)$$

за сваки тренутак времена $t \in [0, T]$ где је

$$T = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^b. \quad (2.14)$$

Вредност параметара a и b зависиће од својстава функције H_0 . Експоненцијална оцена (2.14) валидна је само уколико је функција H_1 *аналитична* (C^∞ тј. дозвољава развој у конвергентан ред). Ако је H_1 *глатка* функција (C^1 има само изводе првог реда); уместо експоненцијалне, имали бисмо степену зависност у изразу (2.14), при чему би већи број извода функције H_1 значио виши степен ове зависности. Дејства $I(t)$ дакле, не напуштају Δ околину својих почетних вредности, при чему је отворена могућност да се оне унутар овог домена могу кретати хаотично. Евентуално напуштање околине Δ могуће је тек по истеку времена T . С обзиром да сваки реалан систем има неки свој век трајања, а време стабилности се експоненцијално

продужава смањењем параметра ε , то ће за довољно мале ε теорема обезбедити стабилност која прелази век система. Управо овај део Нехорошевљеве теореме је у највећој мери допринео њеној популарности, јер би њена примена на реално кретање могла дати врло ефикасну оцену стабилности у Сунчевом систему. Ово је такозвана *практична* или *ефективна* стабилност. Нажалост, хамилтонијанска функција система у астрономији је изразито *дегенерисана*, док теорема са својом оценом стабилности захтева *недегенерисане* системе. Овај проблем је делимично превазиђен само у околини Лагранжевих тачака L_4 , L_5 и у појединим областима астероидног прстена ([34], [18], [15], [17]). Недегенеративност система формулисана је у полазној претпоставци теореме, по којој интеграбилни део хамилтонијанске функције H_0 задовољава такозвани услов *стрмости*. Један од најпростијих примера стрмих функција чине конвексне функције. Иако једноставне у формулацији, конвексне функције ипак спадају у најрестриктивнију класу стрмих функција и овај услов би врло тешко био задовољен у неком реалном систему у астрономији ([44], [45]). Улога конвексности на кретање система описана је у поглављу 2.2.2. Нешто блажу класу стрмих функција чине квази-конвексне функције. И коначно, најопштији пример који задовољава услов стрмости су такозване 3-струја функције. Даћемо овде њихову дефиницију која је преузета из [39].

2.2.1 Дефиниција стрмих функција

Реална аналитична функција h :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{G} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ I &\rightarrow h(I) \end{aligned}$$

где је $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и повезан скуп, а $u \in \mathbb{R}^n$

\diamond је *конвексна* у тачки $I \in \mathbb{G}$ ако једначина:

$$\sum_{i=1, n} \frac{\partial^2 h}{\partial I_i \partial I_j}(I) u_i u_j = 0 \quad (2.15)$$

нема другог реалног решења осим тривијалног $u = 0$.

◇ је квази-конвексна у тачки $I \in \mathbb{G}$ ако систем једначина

$$\sum_{i=1,n} \frac{\partial h}{\partial I_i}(I) u_i = 0 \quad (2.16)$$

$$\sum_{i,j=1,n} \frac{\partial^2 h}{\partial I_i \partial I_j}(I) u_i u_j = 0$$

нема других реалних решења осим тривијалног $u = 0$.

◇ задовољава 3–струја услов у тачки $I \in \mathbb{G}$ ако систем једначина:

$$\sum_{i=1,n} \frac{\partial h}{\partial I_i}(I) u_i = 0$$

$$\sum_{i,j=1,n} \frac{\partial^2 h}{\partial I_i \partial I_j}(I) u_i u_j = 0 \quad (2.17)$$

$$\sum_{i,j,k=1,n} \frac{\partial^3 h}{\partial I_i \partial I_j \partial I_k}(I) u_i u_j u_k = 0$$

нема других реалних решења осим тривијалног $u = 0$.

Напомињемо да су конвексне, квази-конвексне и 3–струја функције само *примери* стрмих функција. Права дефиниција стрмости имплицитна је и у извесном смислу представља уопштење услова $|\frac{\partial H_0}{\partial I}| \geq g > 0$ који обезбеђује стабилност типа (2.14) у системима са једним степеном слободе.

Нека је H_0 произвољна функција дефинисана на некој области \mathbb{G} (где је \mathbb{G} отворена многострукост) еуклидског простора \mathbb{E}^s . Афини потпростори простора \mathbb{E}^s су равни произвољне димензије. Нека је I нека тачка у G , а λ раван која садржи тачку I , $\dim \lambda \neq 0$. Означимо градијент рестрикције H_0 на раван λ са $grad(H_0|_\lambda)$. Минималну вредност тог градијента на сфери са центром у тачки I радијуса η означимо са $m_{I,\lambda}(\eta)$:

$$m_{I,\lambda}(\eta) = \min_{\{I' \in \lambda: |I'-I|=\eta\}} |grad(H_0|_\lambda)|_{I'}|.$$

ДЕФИНИЦИЈА За функцију H_0 кажемо да је *стрма* у тачки I у равни λ , ако постоје константе $C > 0, \delta > 0$ и $\alpha \geq 0$ такве да је:

$$\max_{0 \leq \eta \leq \xi} m_{I,\lambda}(\eta) > C\xi^\alpha, \quad \forall \xi \in (0, \delta]. \quad (2.18)$$

За константе C и δ кажемо да су *коэффициенти*, а за величине α да су *индекси стрмости*.

Означимо са $\Lambda^r(I)$ скуп свих r -димензионих равни у \mathbb{E}^s које садрже тачку $I \in \mathbb{E}^s$.

ДЕФИНИЦИЈА *Функција H_0 која има s променљивих где је $s \geq 1$ је стрма у тачки I , уколико су задовољени следећи услови.*

1.) Ако је $|\text{grad}H_0|_I| \geq g$ где је $g > 0$.

2.) Када је $s \geq 2$ за свако $r = 1, \dots, s-1$ постоје величине $C_r > 0$, $\delta_r > 0$ и $\alpha_r \geq 1$ такве да је функција H_0 стрма у тачки I у свакој равни $\lambda \in \Lambda^r(I)$ која је нормална на $\text{grad}H_0|_I$, са коефицијентима C_r и δ_r и индексима α_r . Величине $g, C_1, \dots, C_{s-1}, \delta_1, \dots, \delta_{s-1}$ су коефицијенти, а $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ индекси стрмости функције H_0 у тачки I .

ДЕФИНИЦИЈА *Функција H_0 која има s променљивих је стрма у области G са коефицијентима $g, C_1, \dots, C_{s-1}, \delta_1, \dots, \delta_{s-1}$ и индексима $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ ако је та функција стрма у свакој тачки $I \in G$ са овим коефицијентима и индексима.*

Ова последња дефиниција обезбеђује експоненцијалну оцену времена стабилности свих решења $I(t), \varphi(t)$ на домену $\mathbb{G} \times T^s$.

НАПОМЕНА. Почетни услови $(I(0), \varphi(0))$ треба да буду довољно далеко од границе система; експоненцијална оцена времена T се стога *не односи* на неку произвољно малу граничну област домена \mathbb{G} .

Већ је напоменуто да параметри a и b у оцени (2.13) и (2.14) зависе од аналитичких својстава функције H_0 . Тачније, зависиће од индекса стрмости α_i и њених коефицијената C_i и δ_i које смо дефинисали у претходне три дефиниције. Мањи индекси стрмости имплицирају веће вредности времена T , а тиме и већу стабилност система. У квази-конвексној области, индекси стрмости су најмањи $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, те су квази-конвексне области и најстабилније. Вредност параметара a и b за квази-конвексну област у оцени (2.14) је $a = b = 1/2n$ (Löchak [33] и Röchel [43]).

Општију оцену параметра b за класу стрмих функција дао је Нидерман [41] где је параметар $b = 1/[(2n-1)\alpha_1 \dots \alpha_n + 1]$. Што је систем мање конвексан, то су већи индекси стрмости α_k . Ова зависност у Нехорошевљевом раду није доказана, него је изнета као претпоставка, при чему је сугерисано да се утицај индекса и коефицијената стрмости на стабилност дејстава нумерички испита.

У наредној глави упознаћемо се са моделом простора 4-димензионе мапе, у којем се интензитет стрмости лако подешава помоћу параметра (m) , при чему овај параметар директно зависи од коефицијената стрмости C_k . Следећи Нехорошевљеву суг-

естију, варијацијом овог параметра, испитујемо заправо утицај коефицијената стрмости C_k на стабилност система. Пре него што пређемо на резултате нумеричких експеримената, важно је да опишемо и такозвану Нехорошевљеву структуру простора.

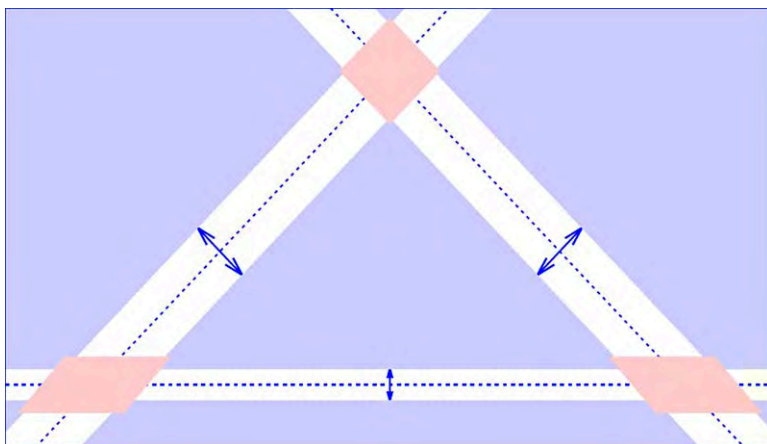
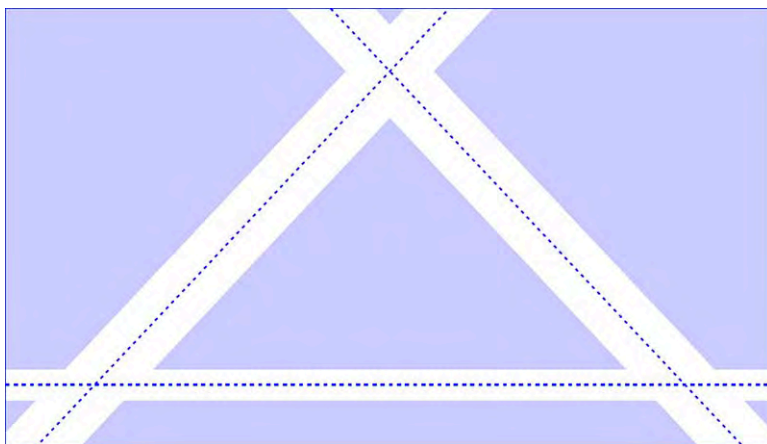
2.2.2 Нехорошевљева структура

Поред експоненцијалне оцене стабилности која фигурише као 'главни резултат' Нехорошевљеве теореме, постоји и њен други, такозвани *геометријски аспект*. Испоставило се да теорема на врло сликовит начин описује динамичку природу система. За разлику од КАМ теореме која третира само нерезонантне области, Нехорошевљева теорема даје преглед динамике *целог* простора.

Већ је напоменуто да је полазна претпоставка Нехорошевљеве теореме да интеграбилна апроксимација H_0 буде *стрма* функција. Разматрамо најједноставнији случај- да H_0 буде конвексна. У развоју квази-интеграбилног хамилтонијана $H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$ у ред, елиминација хармонијског члана $\varepsilon H_{1k}(I)e^{ik\cdot\varphi}$ неком канонском трансформацијом која је блиска идентичком пресликавању, могућа је само ван неке мале околине резонантне области дефинисане са $k \cdot \omega(I) = 0$. Такође, у недегенеративним системима (а конвексни Хамилтонијани то јесу) резонантни скуп којег генеришу целобројни вектори $k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ је густ у пољу \mathbb{R}^n , због чега ће елиминација *svих* резонантних хармоника бити немогућа ([42]). Нехорошевљева идеја подразумевала је следеће: у разматрање се узимају само оне резонанце чији је ред мањи од неке критичне вредности K . Тако ће број резонантних чланова бити *коначан*. На основу аналитичности функције H_1 занемарени део \mathcal{R}^K (тј. онај који садржи резонанце реда већег од K) не прелази вредност $\exp(-K\sigma)$ за неко $\sigma > 0$. Показано је да је горња граница за $K \sim \varepsilon^{-\frac{1}{b}}$. Дакле, остатак реда биће експоненцијално мали у односу на $1/\varepsilon^b$. Очекује се да су нестабилности система генерисане управо остатком реда \mathcal{R}^K што ће бити и кључни аргумент за извођење оцене (2.14).

Посматрамо дакле само оне хармонике чији је ред $|k| < K$ (има их коначно много). Структура таквог простора са три степена слободе приказана је на слици 2.4. Раван слике дефинисана са ω_1/ω_2 и ω_2/ω_3 истовремено одсликава и простор дејстава, где имамо три динамички различите области:

- *Нерезонантни домен* је скуп оних тачака које су довољно далеко од свих резонанци реда мањег од K . Тачније, то је скуп оних фреквенција ω таквих да је $k \cdot \omega > \sqrt{\varepsilon}$, $\forall |k| < K$. На слици 2.4 овај домен приказан је у плавичастој боји. У нерезонантној области могуће је елиминисати *све* хармонијске чланове функције εH_1 чији је ред мањи од K . Трансформисани Хамилтонијан зависиће само од дејстава и од експоненцијално малог остатка R_k који садржи све чланове реда $|k| > K$. Стога ће промена дејстава у нерезонантном домену бити вођена експоненцијално малим члановима R_k који су у принципу занемарљиви, те закључујемо да дејства у нерезонантном домену остају непромењена. У овом домену Нехорошевљева оцена стабилности има такозвани суперекспоненцијални карактер у односу на $1/\varepsilon$ (погледати [14] и [36]).
- *Домен једне резонанце* садржи само један резонантни члан реда мањег од K и на слици 2.4 приказан је у белој боји. Тачније, испрекидана плава линија представља резонанцу, а белом бојом означена је њена мала околина. Трансформисани Хамилтонијан ће се састојати од једног резонантног члана реда мањег од K и експоненцијално малог остатка R_k . Ако занемаримо остатак реда R_k , Хамилтонијан је интеграбилан, јер садржи само један резонантни члан, али дејства, а самим тим и фреквенције, неће више бити фиксиране. Њихова промена могућа је само у једном правцу, такозваном *правцу брзог померања* који је на слици 2.4 означен стрелицом. Конвексност функције H_0 обезбеђује да правац брзог померања буде нормалан на правац резонанце. Кретање у домену једне резонанце вођено правцем брзог померања у неком тренутку стиже у нерезонантни (плави) домен. Међутим, то је немогуће јер су у нерезонантном домену дејства непроменљива. Евентуално померање дуж саме резонанце генерисано је малом вредношћу остатка R_k , дакле експоненцијално је споро и представља већ поменути феномен Арнолдове дифузије, којег ћемо детаљније описати у следећем поглављу.
- *Домен две резонанце* је она област где Хамилтонијан има два резонантна члана k_1 и k_2 реда мањег од K . Ова област налази се делу где се резонанце укрш-



Слика 2.4: Приказ Нехорошевљеве структуре у систему са три степена слободe. Сlike представљају дводимензиони приказ тродимензионог простора фреквенција. Белом бојом означена је област једне резонанце, где су померања могућа само у правцу који је означен стрелицом (на доњој слици). Конвексност одговарајућег Хамилтонијана обезбеђује да овај правац буде нормалан на правац резонанце. Двоструке резонанце, налазе се у њиховом пресеку (розе), док плавичаста позадина представља нерезонантни домен. У пресеку резонанци дифузија је хаотична и могућа је и свим правцима, а одсуство резонанци подразумева и одсуство дифузије, те ће плава област бити и најстабилнија.

тају (представља резонанцу многострукости два) и на слици 2.4 приказана је у розе боји. С обзиром да сада има два резонантна члана, Хамилтонијан ће бити *неинтеграбилан* и кретање је *хаотично*. Ипак, орбита не напушта овај домен. Прелаз у нерезонантну област је, као што је већ објашњено - немогућ, а евентуални прелазак у домен једне резонанце имао би за последицу само кретање у правцу брзог померања. Конвексност функције H_0 у сваком од наведених случајева обезбеђује повезано кретање.

Сличан резон примењује се и на системе са више степени слободе. Дакле, ако занемаримо мали остатак реда R_k , сваки резонантни домен представља засебну област кретања. Најзначајнија померања очекују се у области двоструке резонанце (или резонанце многострукости $n - 1$ у системима са n степени слободе). Промене дејстава у овом домену биће пропорционалне величини ε^a где је $0 < a < 1$. Вредност параметра a опада са повећањем броја степени слободе. Такође, потребно је да вредност K не буде превелика, јер у том случају не би остало места за нерезонантну област. У случају конвексних функција оптимална вредност за K оцењена је на $\varepsilon^*/\varepsilon^b$, где је ε^* нека критична Нехорошевљева вредност и оцена (2.14) има незнатно другачији облик: $T \leq t_0 \exp(\varepsilon^*/\varepsilon)^b$ за неко позитивно t_0 . Ситуација је другачија ако узмемо у обзир и мали остатак реда R_k . Резултат теореме важиће само у експоненцијално дугим временским интервалима.

Наглашавамо опет да конвексност функције H_0 у овој конструкцији игра кључну улогу, јер у области једне резонанце обезбеђује да правац брзог померања буде нормалан на правац резонанце. У случају када на пример H_0 није конвексна, правац брзог померања би евентуално могао да се поклопи са правцем резонанце, што би отворило могућност за нови тип кретања: такозвану *брзу дифузију*. Резонанце дуж које се овакав механизам дифузије одвија, Нехорошев назива *каналима суперпроводљивости*.

РЕЗИМЕ: Дуж резонантне линије разликујемо два типа дифузије, изразито *спору Арнолдову дифузију* вођену малим остатком реда R_k и феномен брзе дифузије у случају када се резонанца и линија брзог померања поклопе по правцу (овај случај се односи само на неконвексне функције).

Не смемо да изоставимо ни *феномен брзе хаотичне дифузије Чириковљевог типа*,

својствен системима где је вредност поремећаја велика у односу на Нехорошевљево критичну вредност. Структура приказана на слици 2.4 и описана динамика подразумева мале вредности поремећаја ε . У случају када је $\varepsilon > \varepsilon^*$, хаотична област где се резонанце преклапају (розе на слици 2.4 доле) сада прекрива скоро цео домен. Ова ситуација производи брзо и хаотично кретање могуће у свим правцима. С друге стране, уз пажљив избор вредности K и поремећаја ε нерезонантни домен (плава област на слици 2.4) савршен је кандидат за примену КАМ теореме где се очекује стабилност у бесконачном времену и одсуство сваке врсте дифузије.

Уколико је читалац заинтересован за још математичких детаља доказа Нехорошевљеве теореме, може консултовати следећу литературу: [39], [33], [43], [6].

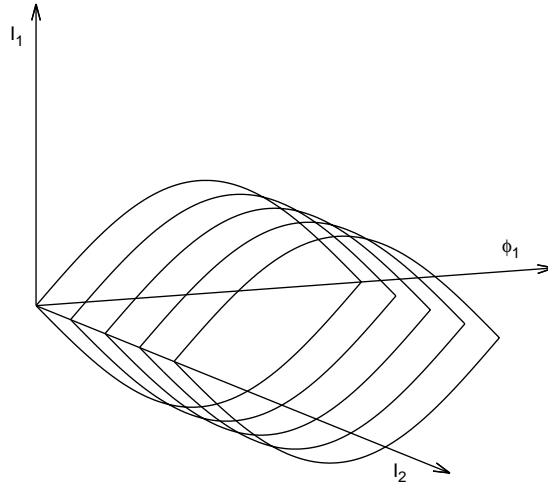
2.3 Арнолдова дифузија

Механизам спорог померања дејстава дуж резонантне линије илустровао је Владимир Игоревич Арнолд 1964. године [2] на моделу Хамилтонијана:

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, t) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1)[1 + \mu(\sin \varphi_2 + \cos t)]. \quad (2.19)$$

Овај систем има пет променљивих величина $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2, t) \in \mathbb{T}^3$ и два параметра $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$. Приметимо да функција (2.19) зависи од времена (време је циклична променљива) те Хамилтонијан неће бити конзервативан.

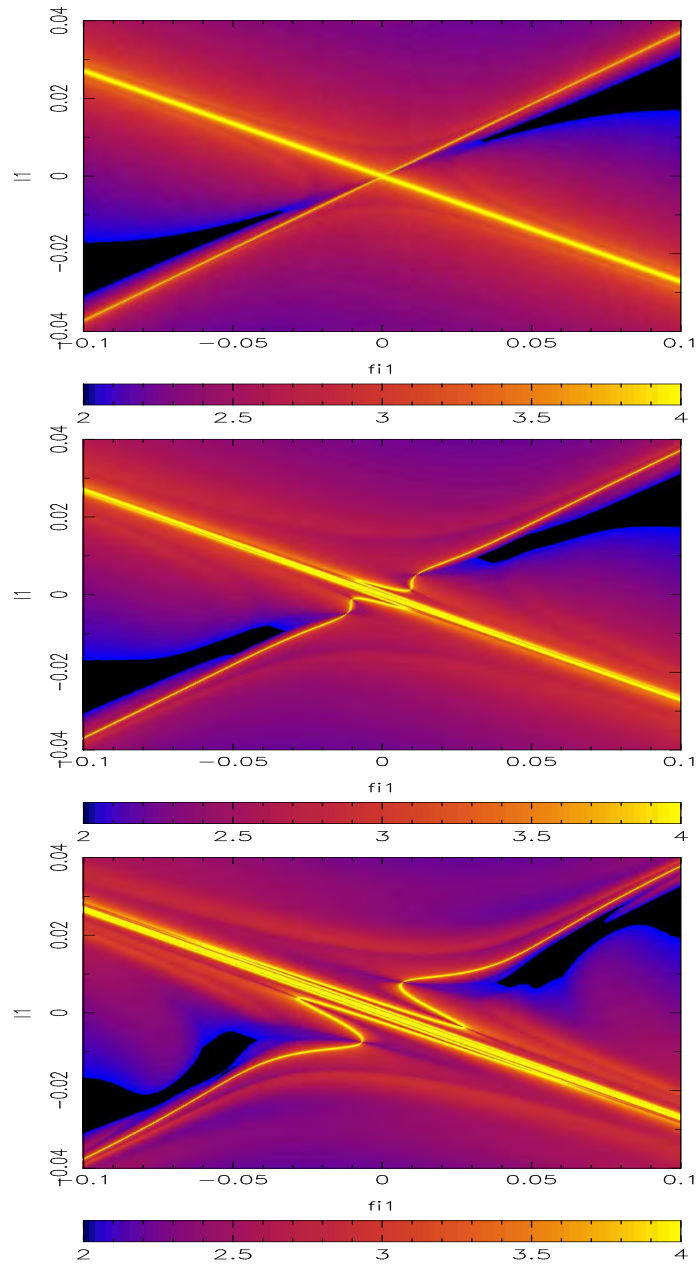
У случају када су оба параметра једнака нули $\varepsilon = \mu = 0$, систем је интеграбилан. Систем је интеграбилан и у случају када је $\varepsilon > 0$, а $\mu = 0$. Из хамилтонијанских једначина овог модела следи да је $\dot{I}_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = I_2 = \text{const}$. Угловне променљиве φ_2 и t не партиципирају у динамици таквог система (имају кружно кретање независно од осталих променљивих). Простор дефинисан преосталим координатама (I_1, I_2, φ) имаће структуру приказану на слици 2.5. За сваку вредност $I_2 = \text{const}$, препознајемо динамички портрет клатна, чија се нестабилна хиперболичка тачка налази на правој I_2 (друга нестабилна тачка дефинисана је са $I_2 = \text{const}$, $I_1 = 0$ и $\varphi_1 = 2\pi$). У петодимензионом простору многострукост дефинисана са $I_1 = \varphi_1 = 0$ и $I_2 = \text{const}$. $\dot{t} = 1$ представља 2-димензиони хиперболички торус који ће имати две једнодимензионе многострукости: стабилну и нестабилну. На слици 2.5 ове две многострукости



Слика 2.5: Фазни простор интеграбилне апроксимације Арнолдовога модела када је $\mu = 0$. У равнима које су паралелне равни (I_1, φ_1) препознајемо динамички профил клатна. Свака од ових паралелних структура у петодимензионом простору представља један хиперболички влакнасти торус. Влакна са различитих торуса се међусобно *не секу*, те нема ни могућности дифузије. Спора Арнолдова дифузија одвија се дуж правца I_2 и могућа је тек када је $\mu \neq 0$.

одговарају горњој и доњој грани сепаратресе. С обзиром да су једнодимензионе, ове многострукости у извесном смислу имају структуру нити, влакна. Сходно томе, торус који се протеже по променљивој t (променљива t није видљива на слици 2.5) и саткан је од оваквих влакана назваћемо *влакнасти торус*. Тачке на правој I_2 дефинишу фамилију влакнастих торуса. Важно је истаћи да се у интеграбилном случају, влакна (стабилне и нестабилне многострукости) са различитих торуса међусобно *не секу*, те нема ни могућности дифузије када је $\mu = 0$.

У случају када је $\mu \neq 0$ *систем губи интеграбилност*. За мале вредности μ влакнасти торуси *преживљавају поремећај*. Деформација ових торуса дешава се најпре у околини хиперболичке нестабилне тачке. На сликама 2.6 и 2.7 горе приказана је стабилна многострукост (обојена у жуто) у околини хиперболичке тачке $I_2 = 0$ и $\varphi_2 = 0$ у равни (I_1, φ_1) за $\varepsilon = 0.1$. Због боље прегледности слике, нестабилне многострукости нису приказане. Ове слике добијене су помоћу *FLI*, на начин који је објашњен у поглављу 2.4. На горњој слици 2.6, вредност параметра $\mu = 0$, систем



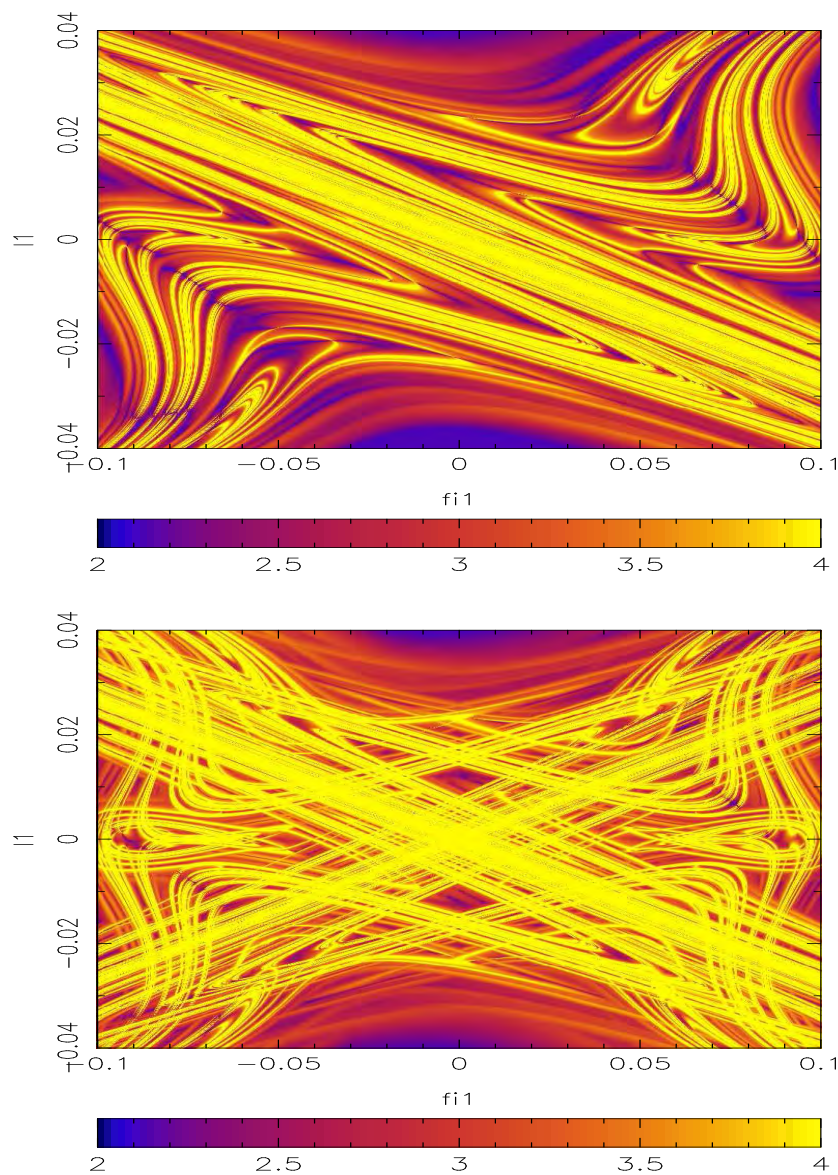
Слика 2.6: Стабилна многострукост у околини хиперболичке нестабилне тачке $(0, 0)$ за $\mu = 0$ на горњој слици када је систем интеграбилан, и за две мале вредности μ : $\mu = 5 \cdot 10^{-6}$ и $\mu = 3 \cdot 10^{-5}$ на средњој и доњој слици. У околини тачке $(0, 0)$ појављују се хиперболичке структуре необичног облика које су одговорне за процес дифузије.

је интеграбилан и стабилна многострукост поклапа се са структуром на слици 2.5 када је $I_2 = const$. Параметар μ је нешто већи на средњој слици $\mu = 5 \cdot 10^{-6}$, где је видљива деформација влакана у околини хиперболичке тачке $(0, 0)$. Амплитуда ове деформације још је већа на доњој слици где је $\mu = 3 \cdot 10^{-5}$. За $\mu = 3 \cdot 10^{-4}$ (слика 2.7) неправилни облик хиперболичких струкура још је наглашенији, а на горњој слици 2.7 приказана је само стабилна многострукост. На слици 2.7 доле поред стабилне, приказана је и њој симетрична нестабилна многострукост, која заједно са стабилном чини такозвану *хомоклиничку збрку*. Остали параметри и променљиве исти су као на слици 2.6. Тачка у којој стабилна многострукост једног торуса сече нестабилну многострукост суседног торуса назива се *хомоклиничка тачка*.² Делови стабилне (нестабилне) многострукости који се налазе између две узастопне хомоклиничке тачке називају се *хомоклиничким петљама* и имају форму шкољке.

У случају када је $\mu \neq 0$ влакнасте структуре више нису међусобно паралелне, него се протежу дуж праве I_2 . Тако се влакна са различитих торуса 'мрсе', што отвара могућност прелаза са једног торуса на други, а тиме и могућност споре дифузије дуж праве I_2 . С обзиром да влакнасти торуси сада омогућују прелаз са једног торуса на други, назваћемо их *транзиционим торусима*, а њихов низ који садржи хомоклиничке структуре одговорне за процес дифузије назива се *транзициони ланац*. Илустровани механизам спорог померања дејстава дуж резонанце, по Арнолду, назива се *Арнолдова дифузија*.

Хиперболичке структуре видљиве на сликама 2.6 и 2.7 леже у основи хаотичне дифузије. Време померања дуж праве I_2 екстремно је споро. У Арнолдовом моделу (2.19) оно је реда величине $\exp(1/\sqrt{\mu})$ што је у сагласности са теоријским резултатом Нехорошевљеве теореме. Поред оне из оригиналног Арнолдовога рада [2], занимљива илустрација механизма Арнолдове дифузије може се пронаћи у [12] или [30].

²Овде обе многострукости леже на *истој резонанци*. Уколико стабилне и нестабилне многострукости припадају различитим резонанцама, њихове пресеке називамо *хетероклиничким тачкама*.



Слика 2.7: На горњој слици приказана је стабилна многострукост Арнолдовог модела у равни (I_1, φ_1) у околини хиперболичка тачке $(0, 0)$ за вредност $\mu = 3 \cdot 10^{-4}$ и $\varepsilon = 0.1$. Вредност μ је нешто већа од оне на сликама 2.6, па су сходно томе и хомоклиничке петље које прате линију сепаратрисе дуже. Поред стабилне, на доњој слици за исти скуп параметара, дат је приказ и нестабилне многострукости, која заједно са стабилном, чини такозвану *хомоклиничку збрку*, одговорну за хаотично померање датог система.

2.3.1 Нумеричка детекција Арнолдове дифузије

Непуну деценију по објављивању Арнолдовог модела и дифузије, уследили су и први покушаји да се она нумерички детектује. Један од пионира у том смислу је и Клод Фрешле који је раних седамдесетих креирао модел четвородимензионе мапе [7] који је касније, уз модификације, кориштен и за детекцију и мерење процеса дифузије. Иако Арнолдова дифузија, на оригиналном моделу (2.19) није нумерички детектована, развијене су нумеричке методе помоћу којих је детектован и мерен врло сличан механизам померања дејстава дуж резонанце на другим моделима простора ([29], [21], [22], [24], [47], [46], [48]).

Генерализација Арнолдове дифузије ипак захтева неку врсту стандардизације појмова: *Арнолдову дифузију посматрамо као процес експоненцијално спорог померања дејстава у систему који задовољава хипотезе КАМ теореме и теореме Нехорошева*. Прецизније, Арнолдова дифузија подразумева да:

- i) Третирамо искључиво *квази-интеграбилне хамилтонијанске системе*; тј. системе чија хамилтонијанска функција има облик

$$H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi) \quad (2.20)$$

или симплектичке мапе:

$$\begin{aligned} I &= I' + \frac{\partial S}{\partial \varphi}(I', \varphi) \\ \varphi' &= \varphi + \frac{\partial S}{\partial I}(I', \varphi) \end{aligned}$$

где је функција S

$$S(I', \varphi) = h(I') + \varepsilon f(I', \varphi)$$

дата у систему дејство-угао променљивих (I, φ) на неком отвореном и повезаном скупу $\mathbb{G} \times \mathbb{T}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$.

- ii) Функције f и h су такве да хамилтонијански систем (2.20) и симплектичка мапа задовољавају услове КАМ теореме и теореме Нехорошева за довољно мало ε .

Довољан услов је да f буде *аналитична* функција (тј. да дозвољава развој у конвергентан ред) и да h задовољава такозвани услов *стрмости*.

iii) *Посматрамо систем само за мале вредности поремећаја ε ; довољно мале да би обе поменуте теореме могле бити примењене. Из ове претпоставке следи да је фазни простор скоро у потпуности испуњен скупом инваријантних торуса \mathcal{K} . Сваки почетни положај у скупу \mathcal{K} стабилан је у бесконачном времену, као што је илустровано у поглављу 2.1. Нестабилности се очекују само на скупу који је комплементаран скупу инваријантних торуса \mathcal{K} тј. на Арнолдовој мрежи. На основу Нехорошевљеве теореме знамо да ове нестабилности захтевају изузетно дуга времена и да се експоненцијално продужавају у односу на неки позитиван степен вредности $1/\varepsilon$.*

iv) *Сматрамо да је кретање $(I(t), \varphi(t))$ нестабилно, ако постоји време t такво да је*

$$\|I(t) - I(0)\| \geq \frac{\text{diam}G}{2}. \quad (2.21)$$

Овако дефинисана нестабилност има макроскопски карактер јер третира цео домен G ; Теорема дозвољава брзе локалне осцилације у малој околини почетних услова $I(0)$. Међутим, у процесу дифузије који нас занима излазимо из домена локалних осцилација. Овај процес није тривијалан и захтева екстремно дуга времена.

v) *Кажемо да N орбита $(I(t)^j, \varphi(t)^j)$, $j = 1, \dots, N$ дифундује у простору уколико промена средње квадратне разлике дејстава у односу на одговарајуће почетне вредности у времену t дефинисана са*

$$S(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1, N} [I(t)^j - I(0)^j]^2 \quad (2.22)$$

расте линеарно у времену t . Односно, постоји константа D таква да је

$$S(t) \sim Dt$$

за свако t . Константу D дефинишемо као *коэффициент дифузије*.

vi) Свако померање дејстава које задовољава услове i) , ii) и iii) називамо Арнолдовом дифузијом.

2.4 Брзи индикатори Љапунова

Брзи индикатори Љапунова (*FLI*) и Нехорошевљева теорема занимљив су дует. Нехорошевљева теорема даје аналитички преглед динамике целокупног простора. Истовремено, *FLI* је осетљив на сваку промену динамике, омогућујући тако визуелизацију Нехорошевљеве динамике. Арнолдова дифузија, као један од најочекиванијих феномена Нехорошевљеве теореме, одвија се искључиво на Арнолдовој мрежи. Где и како се Арнолдова мрежа распростире кроз фазни простор, дефинише резонантни модул $k \cdot \omega = 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$ у чијој се малој околини налази танки хаотични слој (само за малу вредност поремећаја хаотични слој је танак). Структуру резонантног модула, а истовремено и структуру Арнолдове мреже, нумерички је могуће детектовати помоћу такозваног *брзог индикатора Љапунова*.³ Иако је на почетку примењиван на кретање астероида и кориштен за детекцију слабог хаоса ([10], [11]), показало се да *FLI* врло прецизно одсликава и структуру Арнолдове мреже [8]. Дефиниција Брзог индикатора Љапунова (преузета из [28]) за случај мапе је:

ДЕФИНИЦИЈА: Нека је M мапа $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тада за неки почетни положај $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и одговарајући почетни вектор $v(0) \in \mathbb{R}^n$ брзи индикатор Љапунова *FLI* дефинишемо као функцију

$$FLI(x(0), v(0), t) = \log \|v(t)\| \quad (2.23)$$

где је $t \in \mathbb{Z}^+$.

За мапу M тангентни вектор $v(t)$ дефинисан је са:

$$\begin{cases} x(t+1) = Mx(t), \\ v(t+1) = \frac{\partial M}{\partial x}(x(t))v(t). \end{cases}$$

³У даљем тексту користићемо скраћени назив за брзи индикатор Љапунова који је изведен из енглеског језика *FLI-Fast Lyapunov Indicator* .

У случају непрекидног хамилтонијанског тока, динамика је одређена системом диференцијалних једначина:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (2.24)$$

где је $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ одговарајућа глатка функција. Еволуција тангентног вектора $v(t)$ који дефинише FLI , за неки почетни тангентни вектор $v(0)$ добија се интеграцијом варијационих једначина:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) v. \quad (2.25)$$

Подсетимо се да је Љапуновљев експонент тангентног вектора $v(t)$ одређен вредношћу $\ln \|v(t)\|/t$ када $t \rightarrow \infty$. Љапуновљеви експоненти имају *позитивну вредност у случају хаотичног кретања*, а теже нули у *случају регуларног кретања*. Међутим, нису у стању да разлуче различите типове регуларног кретања тј. да ли је трајекторија резонантна или лежи на КАМ торусу. Други 'недостатак' би био тај што због своје асимптотске природе, карактеристични експоненти Љапунова захтевају велико рачунарско време, те је тешко извести њихов рачун за велики број почетних услова, нпр. када мапирамо цео простор са циљем да детектујемо структуру Арнолдове мреже. Напротив, FLI је осетљивији индикатор јер за наведена два случаја регуларног кретања даје различите вредности.

За сваки почетни положај $(I(0), \varphi(0))$ и сваки почетни тангентни вектор $(v_I(0), v_\varphi(0))$ брзи индикатор Љапунова FLI система $H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$ дефинишемо као норму тангентног вектора v у тренутку t :

$$FLI_t = \|((v_I(t), v_\varphi(t)))\|. \quad (2.26)$$

Постоје и модификације где дефинишемо FLI као супремум

$$FLI_t = \sup \|((v_I(t), v_\varphi(t)))\|$$

или средњу вредност

$$FLI_t = \frac{1}{2n} \sum_{t=t-N}^{t+N-1} \|((v_I(t), v_\varphi(t)))\|$$

ове норме на одговарајућим временским подинтервалима. Ове модификације немају већи аналитички значај, њихов смисао је у елиминацији локалних осцилација, што је значајна олакшица у гломазним нумеричким алгоритмима.

За хамилтонијанску функцију $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi)$, варијационе једначине биће:

$$\frac{dv_I}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial I} v_I - \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial I} v_\varphi \quad (2.27)$$

$$\frac{dv_\varphi}{dt} = \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} v_I + \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial I^2} v_I + \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial I \partial \varphi} v_\varphi. \quad (2.28)$$

У случају када је Хамилтонијан $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi)$ интегралан ($\varepsilon = 0$) вектори v биће:

$$v_I(t) = v_I(0), \quad v_\varphi(t) = v_\varphi(0) + \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I(0))v_I(0)t. \quad (2.29)$$

У неинтегралном случају, за мале вредности ε еволуција тангентног вектора v оцењује се методама хамилтонијанске теорије поремећаја. По резултатима из [19] следи да је:

1. норма тангентног вектора v чији су почетни услови на КАМ торусу:

$$\|v^\varepsilon(t)\| = \left\| \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I(0))v_I(0) \right\| t + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha t) + \mathcal{O}(1) \quad (2.30)$$

за неко $\alpha > 0$. Одавде следи да ће сви почетни услови на КАМ торусу имати приближно исте вредности FLL , означимо их са $FLL_{КАМ}$.

2. норма тангентног вектора за регуларне резонантне орбите је:

$$\|v^\varepsilon(t)\| = \|C_\Lambda \Pi_\Lambda^{ort} v_I(0)\| t + \mathcal{O}(\varepsilon^\beta t) + t\mathcal{O}(\rho^2) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (2.31)$$

за неко $\beta > 0$. Λ^{ort} је линеарни простор ортогоналан на целобројни скуп $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ који дефинише резонантну мрежу (1.9) када $k \in \Lambda$, док је Π_Λ еуклидска пројекција на линеарни простор Λ . C_Λ је линеарни оператор који зависи од резонантне мреже Λ и почетних дејстава $I(0)$. Означимо са FLL_{res} вредности FLL за резонантне регуларне орбите поремећеног система.

Извођења, докази и прецизније дефиниције претходних израза могу се пронаћи у [19]. Приметимо да се FLL_{res} разликује од FLL за интегрално кретање и да је та разлика реда величине $\mathcal{O}(1)$. Тачније, линеарни оператор $C_\Lambda \Pi_\Lambda^{ort}$ у изразу (2.31) и Хесијан $\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}$ из (2.30) се разликују за $\mathcal{O}(1)$ тј. $C_\Lambda \Pi_\Lambda^{ort}$ не тежи $\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}$ када $\varepsilon \rightarrow 0$. Ова

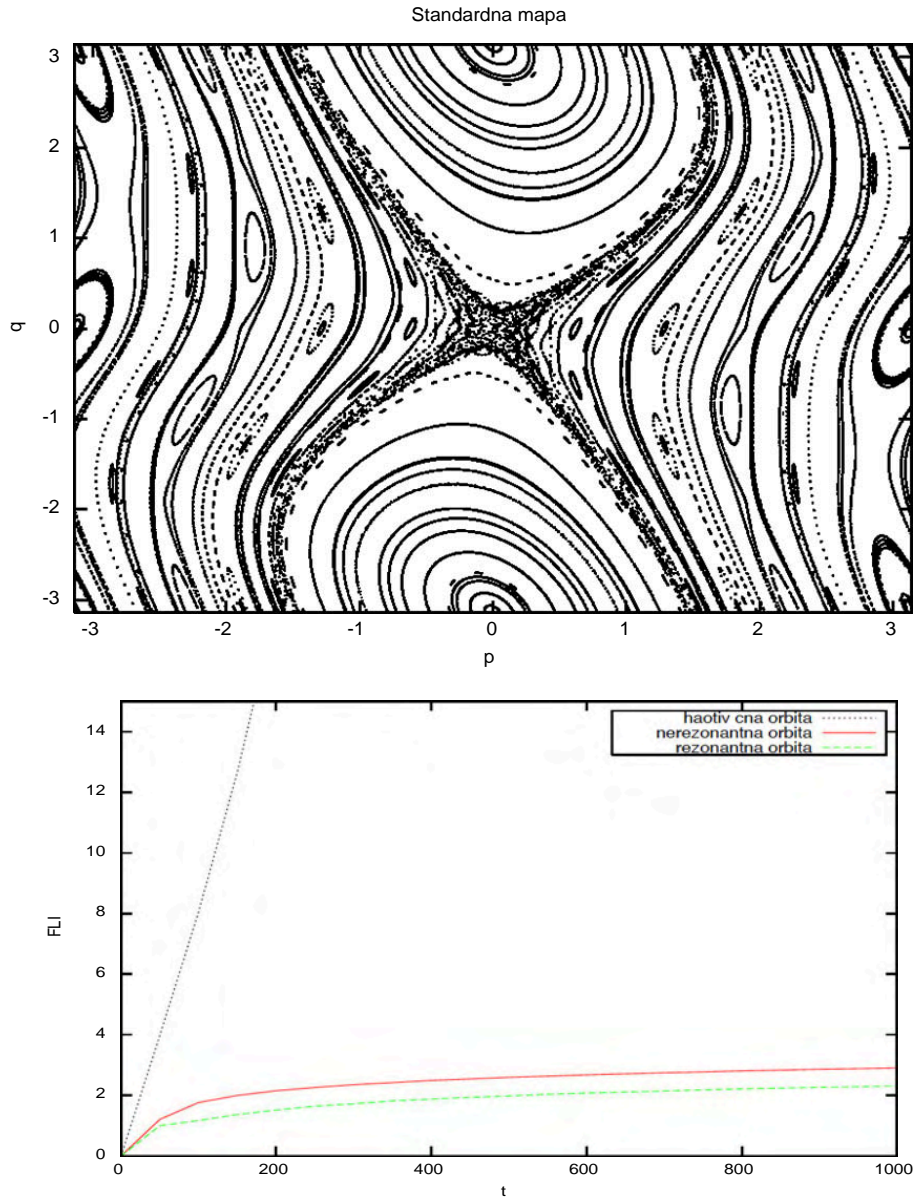
разлика заправо и омогућује да помоћу FLI детектујемо резонанцу, јер се FLI_{res} и FLI_{KAM} очигледно систематски разликују. И коначно, FLI за хаотичне орбите има највећу вредност, јер орбита у том случају експоненцијално дивергира у односу на почетни положај.

На горњој слици 2.8 приказан је сегмент стандардне мапе (дефиниција овог модела дата је у поглављу 2.1.1). Подсетимо се да резонантне криве на стандардној мапи имају облик елипсе, отворене линије које се протежу од доње до горње ивице слике представљају КАМ торусе, а неправилно расуте тачке у околини резонанци и околини хиперболичке нестабилне тачке $(0, 0)$ одговарају хаотичним орбитама. Из сваке области бирамо неку почетну вредност за коју рачунамо FLI : $(0.01, 0.0)$ за хаотичну област, $(2.256, -0.04)$ на КАМ торусу, и тачку $\sim (0.64, 0.0)$ за резантно кретање.

На доњој слици приказана је промена вредности FLI за ове три тачке за $T = 1000$. Почетни тангентни вектор $(v_p(0), v_q(0)) = (1, 0)$ за све три орбите. FLI за хаотичну орбиту очигледно најбрже расте и има највишу вредност. Трајекторија са КАМ торуса и резонантна трајекторија имају ниже вредности FLI . У складу са теоријом, FLI даје различите вредности за ова два случаја. Већ после 100-нак корака итерације, јасно је да је $FLI_{KAM} > FLI_{res}$.

Чињеница да информацију о природи орбите FLI даје већ после малог броја итерација, значајна је предност у нумеричком смислу, јер омогућује да израчунамо вредност FLI за велики број почетних услова. Ако изаберемо равномерно распоређене почетне услове на неком дводимензионом интервалу или на гриду, рачунањем FLI за сваку тачку грида откривамо динамичку структуру фазног простора, укључујући и Арнолдову мрежу.

Новији резултати указују на то да је FLI осетљив и на различите врсте хаотичних орбита и да је могуће разоткрити фину структуру простора унутар хаотичне области ([49], [31], [16], [23]) као што су на пример стабилне и нестабилне многострукости у резонанцама које су приказане на сликама 2.6 и 2.7.



Слика 2.8: На горњој слици приказан је сегмент стандардне мапе за $\varepsilon = 0.6$. На доњој слици приказана је промена FLI за три динамички различите орбите на стандардној мапи после 1000 итерација. Хаотична орбита, чији је почетни положај на мапи $(0.01, 0.0)$, има најбржу промену. Орбита на КАМ торусу $(2.256, -0.04)$ има већу вредност FLI од резонантне чија је почетна вредност $\sim (0.64, 0.0)$. Већ после непуних 100 корака итерације, јасно се уочава разлика у понашању FLI за ове три орбите.

МОДЕЛ МАПЕ И НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ ЊЕНЕ ДИНАМИКЕ

3.1 Дефиниција модела

Поенкареов метод пресека са површима (1892) један је од најплодоноснијих метода којим визуелизујемо систем са два степена слободе; не третирамо целу трајекторију, него само њене сукцесивне пресеке са датом површју, чиме се проблем редукује на дводимензиону мапу. На истом принципу, проблем са три степена слободе ($n = 3$) може се редуковати на проблем четвородимензионе мапе. Са циљем да нумерички реконструирамо и илуструјемо динамику Нехорошевљеве теореме посматрамо четвородимензиону симплектичку мапу ϕ :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2, \\ (I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) &\rightarrow (I'_1, I'_2, \varphi'_1, \varphi'_2)\end{aligned}$$

где су $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$ дејство-угао променљиве такве да је:

$$\begin{aligned}
\varphi'_1 &= \varphi_1 + I_1 \\
\varphi'_2 &= \varphi_2 - I_2 + mI_2^2 \\
I'_1 &= I_1 - \varepsilon \frac{\sin \varphi'_1}{(\cos \varphi'_1 + \cos \varphi'_2 + c)^2} \\
I'_2 &= I_2 - \varepsilon \frac{\sin \varphi'_2}{(\cos \varphi'_1 + \cos \varphi_2 + c)^2}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Интеграбилна апроксимација h одговарајуће хамилтонијанске функције $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi)$ дефинисана је са:

$$h(I_1, I_2, I_3) = \frac{I_1^2}{2} - \frac{I_2^2}{2} + m \frac{I_2^3}{3} + 2\pi I_3, \tag{3.2}$$

а поремећајна функција f је облика:

$$f = \frac{1}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + c}. \tag{3.3}$$

Развој функције f у Фуријеов ред имаће хармонијске чланове свих редова чиме је обезбеђена аналитичност функције f . Променљива φ_3 конјугована променљивој I_3 одговара времену. Један корак итерације је пун угао промене угла φ_3 . Параметар ε одређује интензитет поремећаја, а параметар m одговара интензитету стрмости функције h . Нехорошевљева теорема адаптирана је на динамику симплектичких мапа у [20].

3.1.1 Провера услова стрмости функције h

Валидност трију услова стрмости функције (3.2) проверавамо на основу одговарајућих дефиниција из поглавља 2.2.1.

i) Конвексност: уврштавањем функције h у израз (2.15) добијамо једначину:

$$u_1^2 - (1 - 2mI_2)u_2^2 = 0. \tag{3.4}$$

која ће имати тривијална решења само у области где је

$$1 - 2mI_2 < 0 \Leftrightarrow I_2 > \frac{1}{2m} \tag{3.5}$$

одакле следи да је у области $I_2 > 1/(2m)$ функција h конвексна. У области где је $I_2 < 1/(2m)$ услов конвексности неће бити задовољен.

ii) квази-конвексност функције h проверавамо уврштавањем ове функције у систем (2.16). Одговарајуће једначине биће облика:

$$u_1^2 - (1 - 2mI_2)u_2^2 = 0 \quad (3.6)$$

$$I_1u_1 + I_2(mI_2 - 1)u_2 + 2\pi u_3 = 0.$$

Лако се показује да систем има тривијална решења у области где је $I_2 > 1/2m$. Дакле, и услов квази-конвексности је задовољен у области где је $I_2 > 1/2m$.

iii) И коначно, једначине којима одређујемо 3-струја услов функције (3.2) биће:

$$u_1^2 - (1 - 2mI_2)u_2^2 = 0 \quad (3.7)$$

$$I_1u_1 + I_2(mI_2 - 1)u_2 + 2\pi u_3 = 0$$

$$2\pi u_2^3 = 0.$$

У случају када је $m \neq 0$, систем има само тривијална решења $u = 0$ и функција h задовољава 3-струја услов на целом домену \mathbb{G} . У супротном, тј. када је $m = 0$ систем не задовољава ниједан од наведених услова стрмости (конвексност, квази-конвексност, нити 3-струја услов) и динамика оваквог система ($m = 0$) излази из колосека споре Арнолдове дифузије (описана је у [22]).

Из последње тачке закључујемо да параметар m 'уводи' стрмост у систем; веће вредности m повлаче већу стрмост. Тачније, параметар m уводи 3-струја услов, али не и конвексност. На тај начин конструисан је модел у којем се подешава интензитет стрмости простом варијацијом параметра m .

Провера конвексности, квази-конвексности и 3-струја услова хамилтонијанских функција које би одговарале неком реалном систему, уме да буде крајње нетривијалан задатак. Такво испитивање обављено је у [44] и [45], где су испитана ова три услова у областима фазног простора за две фамилије астероида. Иако је коришћен упрошћен модел хамилтонијанске функције, изрази (2.15), (2.16) и (2.17) овог система имају крајње замршен облик и протежу се на неколико страна.

3.1.2 Оцена индекса стрмости функције h

По Нехоршеву [39], индекси стрмости (дефиниција индекса стрмости дата је у поглављу 2.2.1) квази-конвексних функција једнаки су један, а индекси стрмости конвексних и стрмих (3–струја) функција строго су већи од један. За функцију h из које је изведена мапа (3.1), индексе стрмости дао је Guzzo у [24]. Без улажења у аналитику доказа, позваћемо се на лему из овог рада на основу које се они одређују.

ЛЕМА Нека је h глатка функција која задовољава 3–струја услов у тачки I . Тада се индекси стрмости α_k одређују на следећи начин: ако је рестрикција квадратне форме $h''(I)$ на неки линеарни простор λ , где је $\dim \lambda = k$ ортогонална на $\nabla h(I)$ недегенерисана, тада је $\alpha_k = 1$. У супротном, $\alpha_k = 2$.

Видели смо да h задовољава 3–струја услов недегенеративности у свакој тачки I . Такође, h је квази-конвексна у домену где је $I_2 > 1/(2m)$. Стога ће за свако I_2 у области $I_2 > 1/(2m)$ индекси стрмости бити $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. За $I_2 \leq 1/(2m)$ индексе стрмости одређујемо на основу леме. У векторском облику $\nabla h(I)$ записаћемо као $(I_1, -I_2 + mI_2^2, 2\pi)$. Простор који је ортогоналан на $\nabla h(I)$ дефинисан је векторима (u_1, u_2, u_3) који задовољавају једначину

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (I_1, -I_2 + mI_2^2, 2\pi) = 0 \quad (3.8)$$

или

$$I_1 u_1 + (-I_2 + mI_2^2) u_2 + 2\pi u_3 = 0. \quad (3.9)$$

Рестрикција квадратне форме $h''(I)$ на линеарни простор (3.9) има две сопствене вредности: 1 и $-1 + 2mI_2$. Када су обе ове вредности различите од нуле тј. када је $-1 + 2mI_2 \neq 0$, систем је *ндегенерисан*. Ако је $-1 + 2mI_2 = 0$, односно $I_2 = 1/(2m)$ систем је *дегенерисан*. На основу леме следи да је $\alpha_2 = 2$ на правој $I_2 = 1/(2m)$, а $\alpha_2 = 1$ за $I_2 < 1/(2m)$. Такође, постојаће правци λ , такви да су рестрикције квадратне форме $h''(I)$ на λ дегенерисане функције за свако $I_2 \leq 1/(2m)$. Стога ће на основу леме у области $I_2 \leq 1/(2m)$ индекс стрмости α_1 бити $\alpha_1 = 2$. На основу претходног резоновања ознака за стрму квази-конвексну област у којој су оба индекса стрмости $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ је:

$$D_{11} = \{(I_1, I_2) : I_2 > \frac{1}{2m}\}, \quad m \neq 0. \quad (3.10)$$

Стрму неконвексну област где је $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1$ означићемо са:

$$D_{21} = \{(I_1, I_2) : I_2 < \frac{1}{2m}\}, \quad m \neq 0, \quad (3.11)$$

а праву $I_2 = \frac{1}{2m}$ на којој је систем дегенерисан, а оба индекса стрмости $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, означићемо са:

$$D_{22} = \{(I_1, I_2) : I_2 = \frac{1}{2m}\}, \quad m \neq 0. \quad (3.12)$$

Приметимо да су у свакој од наведених области D_{11} , D_{21} и D_{22} индекси стрмости константни, тј. не зависе од параметра m , при чему су динамичка својства различита. Већ је поменуто да је систем најстабилнији у квази-конвексној области D_{11} , што је нумерички потврђено у [24].

3.1.3 Коефицијенти стрмости C_k и параметар m

За разлику од индекса стрмости, којима је посвећено доста пажње у литератури, коефицијенти стрмости C_k (погледати дефиницију у поглављу 2.2.1) тј. њихов утицај на стабилност нису значајније истражени. Нехорошев се коефицијентима стрмости бави у раду из 1979. године [40], где је показао да се њихов утицај на стабилност провлачи преко параметра ε_0 . Тачније, гранична вредност поремећаја ε_0 за коју се примењује Нехорошевљева теорема, зависиће од коефицијената C_1, \dots, C_{n-1} на врло замршен начин преко чак $16 + 2(n-1)$ различитих параметара. Узмемо ли у обзир чињеницу да целокупна теорија поремећаја, укључујући пратеће механизме као што је на пример феномен споре Арнолдове дифузије, заправо важи за *мале* вредности поремећаја ε , испитивање утицаја коефицијената стрмости на ε_0 свакако није безначајан истраживачки задатак. Заинтересовани смо да са нумеричког аспекта испитамо утицај коефицијената стрмости на дугорочну стабилност система.

У нашем моделу (3.1), параметар m зависи од коефицијента стрмости, C_1 . Илустроваћемо ову везу у наредном делу. Посматрамо интеграбилну хамилтонијанску функцију (3.2) и променљиве (I_1, I_2, I_3) у стрмом неконвексном домену $I_2 < 1/(2m)$. У претходном поглављу показано је да је у овом домену индекс стрмости $\alpha_1 = 2$. Потребно је дати оцену одговарајућег коефицијента стрмости C_1 . Међу линеарним

просторима λ чија је димензија $\dim \lambda = 1$ и ортогонални су на $\nabla h(I)$ посматрамо онај који је генерисан јединичним вектором u таквим да је $u_1^2 - u_2^2(1 - 2mI_2) = 0$ те за свако η важи:

$$\begin{aligned} |\Pi_\lambda \nabla h(I + \eta u)| &\geq m\eta^2 |u_2|^3 = \\ &= m\eta^2 \left(\frac{2\pi}{\sqrt{8\pi^2(1 - mI_2) + (I_1\sqrt{1 - 2mI_2} - I_2(1 - mI_2))^2}} \right)^3 \end{aligned}$$

одакле следи да је:

$$0 < C_1 \leq m \left(\frac{2\pi}{\sqrt{8\pi^2(1 - mI_2) + (I_1\sqrt{1 - 2mI_2} - I_2(1 - mI_2))^2}} \right)^3.$$

Приметимо да смо у претходној оцени разматрали само промену малих именилаца на дегенерисаном правцу квадратне форме

$$h''(I)u \cdot u = u_1^2 - u_2^2(1 - 2mI_2) = 0.$$

Доња граница за C_1 добија се из правца $|h''(I)u \cdot u|$ који није дегенерисан и има малу вредност у односу на $m|u_2|^3$.

3.2 Арнолдова мрежа модела

Арнолдова мрежа се пројектује на простор фреквенција у резонантну мрежу дефинисану са:

$$\sum k_i \omega_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Примењена на Хамилтонијан $h = \frac{I^2}{2} - \frac{I_2^2}{2} + m\frac{I_3^3}{3} + 2\pi I_3$ једначина (3.13) даће општи облик резонанци у систему (3.1):

$$k_1 I_1 + k_2 (mI_2^2 - I_2) + 2k_3 \pi = 0 \quad (3.14)$$

који представља фамилију параболо када $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^n$. Приметимо да за $m = 0$ параболое у изразу (3.14) губе квадратни члан и да су тада резонанце дефинисане фамилијом правих

$$k_1 I_1 - k_2 I_2 + 2k_3 \pi = 0. \quad (3.15)$$

Слично Поенкареовим површима и стандардној мапи, динамику система посматрамо само у равни S

$$S = \{(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)\}$$

коришћењем својстава брзог индикатора Љапунова.

За регуларне трајекторије важи да су или резонантне или су на КАМ торусу.

1.) Уколико је нека тачка $x \in S$ на резонантној трајекторији, кретање је периодично, те се сваки поновни пролаз трајекторије кроз раван S дешава тачно у тачки x .

2.) Уколико је тачка $x \in S$ на КАМ торусу, кретање није периодично, и трајекторија практично више не пролази и кроз тачку x .

Следи закључак да свака тачка равни S на јединствен начин одређује трајекторију: једна тачка -једна трајекторија. Ово правило се међутим не односи на хаотичне орбите. Више пута је поменуто да се нестабилности неинтеграбилних система за мало ε , очекују на скупу који је комплементаран скупу регуларних орбита тј. на Арнолдовој мрежи, унутар које постоје хиперболичке структуре, стабилне и нестабилне (које смо описали у поглављу 2.3), којима се ове нестабилности генеришу. Дакле, трајекторија са почетним условима на Арнолдовој мрежи у сваком следећем проласку кроз раван S може да се помери за неку малу вредност.

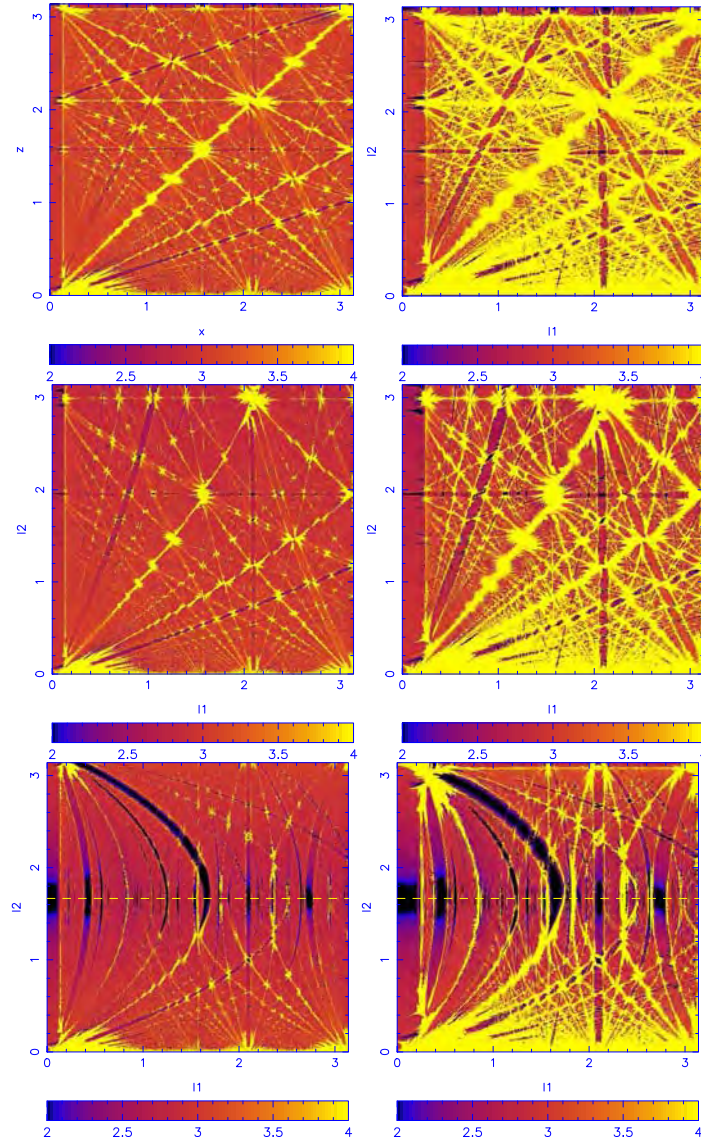
С обзиром да FLI даје различите вредности за КАМ/резонантно/хаотично кретање, моћи ћемо да детектујемо структуру простора рачунањем FLI за сваку тачку x на гриду почетних услова из датог сегмента равни S .

На тај начин добијене су слике 3.1 на којима је дат приказ резонантне структуре посматраног модела, а истовремено и структура Арнолдове мреже. Свака од слика добијена је рачунањем вредности FLI за 500×500 тачака равномерно распоређених на сегменту $(I_1, I_2) = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Време итерације је $T = 1000$, параметар c фиксиран је на $c = 3$, а почетни тангентни вектори су:

$$(v_{I_1}(0), v_{I_2}(0), v_{\varphi_1}(0), v_{\varphi_2}(0)) = (1, 1, 0.5(\sqrt{5} - 1), 1).$$

- Тачке на хиперболичким структурама резонанци (стабилним и нестабилним) имају највећу вредност FLI . На слици 3.1 ове тачке обојене су у жуто.
- Орбите на КАМ торусима имају нешто мању вредност FLI . На сликама 3.1 означене су црвеном бојом.
- Резонантне орбите имају најнижу вредност FLI и на сликама 3.1 бојимо их у тамно плаво.

Свака од шест слика приказује део равни S за различите вредности m или ε . Скала боје са вредностима FLI дата је испод сваке слике. На свим сликама у левој колони, параметар поремећаја има малу вредност $\varepsilon = 0.03$, систем је стабилан, доминирају регуларне КАМ орбите (црвена позадина), а резонанце и њихова хаотична околина (жути део) заузимају релативно мали део простора. За овакав систем кажемо да је у *Нехорошевљевој режиму*, где су резонанце јасно раздвојене (као на слици 2.4). На сликама у десној колони параметар поремећаја има већу вредност $\varepsilon = 0.1$. Примећујемо већу доминацију хаотичних (жутих) орбита, као и да се број КАМ торуса (црвени део) значајно смањило. Резонанце нису јасно раздвојене као на сликама у левој колони, него се преклапају и стварају већу хаотичну област. За овакав систем кажемо да је у *Чириковљевој динамичком режиму*. У горњем реду параметар стрмости је $m = 0$. Систем није конвексан, тачније не задовољава ниједан од три наведена услова стрмости. Овде се очекује брза дифузија на одређеном скупу резонанци које формирају такозвану *брзу мрежу*. Случај када је $m = 0$ и феномен брзе дифузије нумерички је истражен у [22]. Приметимо да су у овом случају резонанце праве линије дефинисане једначинама (3.15). Две слике у средњем реду имају нешто већи параметар стрмости $m = 0.1$, што се манифестује на облик резонанци- постају закривљене. Област приказана на ове две слике је стрма и неконвексна, тј. припада домену D_{21} . Најстрмији случај приказан је на доње две слике где је параметар $m = 0.3$ и где је евидентно да су резонанце параболичког облика. Такође, поред стрмог неконвексног домена D_{21} (испод испекидане линије), на слици је видљив и део стрмог квази-конвексног домена D_{11} (изнад испекидане линије). Граница између ове две области означена је жутом испрекиданом линијом $I_2 = 1/2m$ на којој је, као што је поменуто, систем дегенерисан. На обе слике у дон-



Слика 3.1: Модел (3.1) добијен помоћу *FLI* за 500×500 тачака равномерно распоређених на сегменту $(I_1, I_2) = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Време итерације је 1000. Црвена област представља стабилне орбите на КАМ торусима, док жуте области представљају резонантни скуп који истовремено рефлектује структуру Арнолдове мреже. На левим сликама вредност поремећаја је мала $\varepsilon = 0.03$ те доминирају регуларне КАМ орбите. Десне слике имају већу вредност поремећаја $\varepsilon = 0.1$ што доприноси већем броју хаотичних орбита. Параметар стрности на горњим сликама је $m = 0$, у средњем реду $m = 0.1$ и $m = 0.3$ за доње две слике што се рефлектује на облик резонанци, оне постају параболичне.

јем реду, јасно разликујемо да је квази-конвексни део D_{11} изнад испрекидане линије стабилнији тј. има више стабилних црвених КАМ торуса од неконвексног стрмог дела D_{21} , испод испрекидане линије. Ова разлика је нешто очигледнија на десној слици, где је систем хаотичнији. Доњи пар слика тиме потврђује Нехорошевљеву претпоставку о већој стабилности квази-конвексних функција. Поређење динамике у областима D_{11} и D_{21} , за исти модел објављено је у [24].

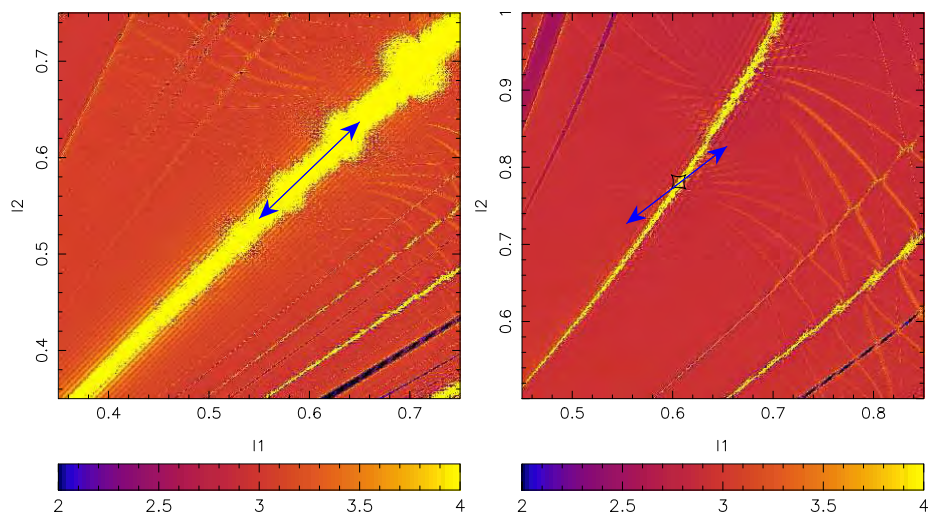
3.3 Динамика 1-1 резонанце

Резонанца чију динамику посматрамо у стрмом 3–струја неконвексном домену D_{21} одређена је комбинацијом $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 0$ у изразу (3.14) и има облик:

$$mI_2^2 - I_2 + I_1 = 0. \quad (3.16)$$

Скраћена ознака ове резонанце је 1 – 1. Промена дејстава на резонанци одвија се по такозваном правцу брзог померања дефинисаног са (k_1, k_2) тј. $(1, 1)$ у нашем случају. Положај праве (k_1, k_2) у односу на резонанцу зависиће од својстава хамилтонијанске функције h . *Конвексност* функције h обезбеђује да правац брзог померања и правац резонанце буду међусобно *ортогонални*. Код *неконвексних* функција, постоји скуп резонанци чији се правац *поклапа* са правцем брзог померања, што производи *брзе процесе дифузије*. У нашем случају систем је неконвексан за $m = 0$, и резонанца (3.16) лежи на правцу $(1, 1)$, што као резултат даје екстремно брзе процесе дифузије дуж ове резонанце. Напомињемо да у случају када је $m = 0$ само резонанца 1 – 1 и њене 2π реплике подржавају брзу дифузију формирајући тзв. *брзу мрежу*.¹ Остале резонанце имају споре механизме дифузије Арнолдовога типа [22]. Слика 3.2 лево, на којој је приказан део равни (I_1, I_2) , илуструје овај случај када је $m = 0$. Жута линија која се протеже средином слике представља резонанцу 1 – 1, а правац брзог померања означен је стрелицом. С обзиром да је колинеарна са правцем брзог померања, очекујемо рапидну дифузију дуж ове резонанце. Нехорошев овакве резонанце назива каналима суперпровљивости (о којима је било речи у поглављу 2.2.2). Када m расте

¹Значај брзих резонанци огледа се и у томе што би њихово евентуално проналажење у околини Земље и у Сунчевом систему довело до значајних уштеда енергије приликом лансирања и транспорта свемирских летелица.



Слика 3.2: За неконвексан систем $m = 0$ (лево) правац брзог померања означен стрелицом протеже се дуж резонанце што изазива брзу дифузију. За $m = 0.3$ резонанца и правац брзе дифузије губе међусобну колинеарност што се одражава на успорење процеса дифузије.

(слика 3.2 десно), резонанца се закривљује, а правац брзе дифузије $(1, 1)$ се не мења. Резонанца $1 - 1$ и правац $I_1 = I_2$ тако губе колинеарност и дифузија дуж резонанце $1 - 1$ се успорава. Не слици 3.2 десно параметар $m = 0.3$.

3.4 Алгоритам за рачунање коефицијената дифузије

Аналитички модел Арнолдове дифузије за општи случај не постоји. Стога ћемо феномен померања дејстава на резонанци посматрати статистички. Тачније, кретање на Арнолдовој мрежи имаће карактер брауновског кретања. Ослањајући се на методе преузете из [29], [21], [9], рачунамо коефицијенте дифузије на основу следећег алгоритма.

- На резонанци коју посматрамо (у нашем случају резонанци $1 - 1$), бирамо N хаотичних орбита.
- Орбита је хаотична, ако је брзи индикатор Љапунова за ту обиту већи од $FLI > 1.5t$ за неко време t .

- Почетни положаји трајекторија леже у равни

$$S = \{(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)\}$$

- Вршимо итерацију мапе (3.1) одређен број пута.
- Посматрамо вредност средњег квадратног одстојања дејстава $I_1^i(t), I_2^i(t)$ у односу на почетне вредности $I_1^i(0), I_2^i(0)$, где $i = 1, \dots, N$.

$$S_1(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1, N} (I_2^i(t) - I_2^i(0))^2 + (I_1^i(t) - I_1^i(0))^2 \quad (3.17)$$

- Линеарни тренд величине $S_1(t)$ у времену t дефинишемо као *коэффициент дифузије* D .

Постоји и други начин за рачунање D , прикладнији за дуже итерације. Без умањења општости, уместо целих трајекторија, посматрамо само рестрикцију кретања на раван S . Коэффициент дифузије D тада рачунамо као линеарни тренд величине S_2 где је

$$S_2(n\Delta t) = \frac{1}{M_n} \sum_{i: |\varphi_1^i + \varphi_2^i| < \sigma} (I_2(t) - I_2(0))^2 + (I_1(t) - I_1(0))^2. \quad (3.18)$$

Време итерације подељено је на одређен број подинтервала Δt . Број орбита који у току n -тог интервала прође кроз раван S означили смо са M_n . Проласци трајекторија кроз раван S одговарају услови да углови одговарајућих трајекторија задовољавају неједнакост $|\varphi_1^i + \varphi_2^i| < \sigma$. Пресек трајекторије и равни S заправо одговара услови $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$, али с обзиром да проласке детектујемо нумерички, биће довољно да трајекторија прође кроз неку σ околину равни S , за неко довољно мало σ .

Величине S_1 и S_2 су одраз истог феномена и очекује се да дају приближне вредности коэффицијената дифузије. Уколико ове две величине почну да се 'разилазе' (обично у случају јако споре дифузије када смо на граници тачности), имамо наговештај да резултат можемо одбацити као непоуздан. Стога, веће разлике ових двају начина у рачунању D уједно користимо и као критеријум оцене тачности коэффицијената дифузије.

Основни критеријум за оцену тачности коефицијената дифузије ипак је квалитет линеарног тренда променљивих S_1 и S_2 који се добија рачунањем одговарајућих коефицијената корелације. Што су вредности коефицијената корелације ближи 1, то ће и квалитет израчунатих коефицијената дифузије D бити бољи.

3.5 Рачун коефицијената дифузије $D(\varepsilon)$ за фиксирану вредност параметра стрмости m

Већ смо се упознали са моделом простора и чињеницом да параметар m директно регулише интензитет стрмости у систему, као и да већа стрмост подразумева бржу стабилизацију система. Такође, речено је и да се утицај параметра m на стабилизацију одвија преко вредности ε_0 која је свакако једна од кључних одредница у Нехорошевљевој оцени времена стабилности (2.14).

Варијацијом параметра m очекујемо да се вредност експоненцијалне функције у Нехорошевљевој оцени мења. Један од основних задатака тезе је да ту промену *нумерички потврдимо*. Експерименте изводимо у стрмој неконвексној области коју смо означили са D_{21} . Најпре меримо дифузију за различите вредности поремећаја ε када је вредност m фиксирана. Понављамо овај поступак за пет различитих вредности параметра m , очекујући да се повећањем параметра стрмости дифузија на резонанци *брже успорава*.

Резултати првог блока експеримената за појединачне вредности m приказани су на сликама 3.3-3.13, а обједињен резултат свих коефицијената D дат је на слици 3.14. За свако m , интервал у ε за које рачунамо D се разликује. Горња граница у ε је одређена брзином орбита. У таквим случајевима орбите врло брзо излазе из резонанце 1 – 1 и започињу глобалну дифузију, те је потребно зауставити рачун у тренутку кад дифузија изгуби локални карактер, што је често недовољно дуг интервал за поуздану оцену коефицијената D . Доња граница за ε одређена је спорашћу дифузије. За мале вредности ε дифузија се до те мере успорава, да је за њену детекцију потребно јако дуго рачунско време, које је реда величине $10^9 - 10^{10}$ корака итерације. У таквим случајевима је за сваки од коефицијената D потребно

од неколико дана до неколико недеља *CPU* времена. Такође, за мале вредности ε , евентуално нагомилавање грешака заокружљивања може произвести погрешан резултат, иако све променљиве фигуришу у дуплој тачности. Стога ће коефицијент корелације свакако бити пресудан параметар за оцену квалитета линеарног тренда средње квадратне промене акција тј. коефицијента D .

Релевантни нумерички параметри у рачуну D за свако m дати су у табелама 3.1-3.5. У првој колони дата је вредност параметра ε за коју рачунамо D . Број орбита N и укупно време итерације T , дати су у другој и трећој колони респективно. За краће време итерације у прилици смо да изаберемо велики узорак, јер велики број почетних услова свакако даје бољи квалитет линеарног тренда. Међутим, успоравање дифузије продужава и време потребно за њену детекцију, те би велики број почетних орбита још више допринео спором добијању резултата. Тако за мање ε бирамо мањи узорак који ће бити реда величине 100. За сваку орбиту која учествује у рачунању D рачунамо и FLI . Минимална и максимална вредност FLI за скуп почетних дејстава приказана је у наредне две колоне, а време t за које рачунамо FLI у следећој колони. Понављамо, да би орбита била довољно хаотична за поуздан рачун D , потребно је да одговарајућа вредност FLI буде већа од $1.5t$. Из сваке од пет табела, јасно видимо да дифузију рачунамо само из орбита које испуњавају овај услов. Коефицијенти корелације, основни критеријум тачности резултата D , дати су у седмој колони. Још један од ефеката стрмости је измештање хиперболичке структуре са резонантне параболе. За оне вредности m и ε за које је ова разлика присутна, дата је и њена вредност у колони 8. Више речи о овом феномену биће у поглављу 3.7.1.

На сликама 3.3-3.12 приказане су промене величина S_1 и S_2 које смо дефинисали у поглављу 3.4 у одговарајућим временима итерације. Линеарни тренд променљиве S_1 којег смо означили са D_{EI} уписан је поред одговарајућих вредности. Поред променљиве S_2 која третира рестрикцију кретања на раван дејстава, такође је уписана добијена вредност линеарног тренда, коју смо означили са D_{IP} . Вредност параметра ε дата је изнад сваке појединачне слике, а вредност параметра m која је у овом блоку експеримената фиксирана, изнад одговарајуће групе слика.

Резултат рачуна коефицијената дифузије за $m = 0.001$

Коефицијенте дифузије када је $m = 0.001$ рачунамо за 16 различитих ε у интервалу $\varepsilon = [9 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-4}]$. Одговарајући нумерички параметри дати су у табели 3.1, а променљиве $S_1(t)$ и $S_2(t)$ и добијени коефицијенти дифузије приказани су на сликама 3.3 и 3.4.

Последње две вредности D , када је $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-6}$ на слици 3.4 леже на граници тачности. Овде смо због боље прегледности величине S_1 и S_2 приказали на различитим сликама. На слици 3.4 запажамо да за $\varepsilon = 10^{-5}$ дифузија почиње тек после $4 \cdot 10^8$ корака, а за $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-6}$ после 10^9 корака итерације. Овај ефекат видљив је само на доњим сликама за $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-6}$ тј. из променљиве $S_2(t)$, док из променљиве $S_1(t)$ (средње две слике) локалне осцилације пригушују овај ефекат, те није баш најјасније у ком тренутку почиње дифузија. Све вредности D које одговарају ε мањем од ових, одбачене су.

Резултат рачуна коефицијената дифузије за $m = 0.01$

У другом блоку рачунања D вредност параметра стрмости је фиксирана на $m = 0.01$, а интервал $\varepsilon \in [6 \cdot 10^{-5}, 0.005]$ где је израчунато 19 коефицијената дифузије. Одговарајући параметри дати су у табели 3.2, а променљиве S_1 и S_2 на основу којих смо добили D , на сликама 3.5 и 3.6. За вредности ε које су мање од 0.0005, ефекат 'бежања' хиперболичке структуре са резонанце постаје евидентан, те за ове вредности ε разлике ΔI_2 уписујемо у осму колону табеле 3.2. На првој слици где је $\varepsilon = 0.005$, линеарни тренд променљивих S_1 и S_2 одсутан је за $t < 10^6$ тј. за $t < 10^6$ имамо само локалне осцилације које не можемо поистоветити са дифузијом. Дифузија почиње тек после 10^6 итерација, али за $t \sim 3 \cdot 10^6$ неке орбите прелазе на друге резонанце, дифузија постаје глобална, те је рачун заустављен после $t = 3 \cdot 10^6$ итерација.

На слици 3.6 приказана је промена величина S_1 , S_2 и одговарајући линеарни тренд за $\varepsilon = \{0.0001, 0.00009, 0.00008, 0.00007, 0.00006\}$. И овде смо због боље прегледности, S_1 и S_2 раздвојили на различите слике. Времена итерације су изразито дуга, крећу се у интервалима $10^9 - 10^{10}$ корака. Такође, за $\varepsilon = 0.00006$ дифузија

почиње тек после $2 \cdot 10^8$ корака, али у овом случају се не ради о почетној стабилизацији орбита, него о чињеници да је за $t < 2 \cdot 10^8$ дифузија спорија од оне коју смо у стању да меримо.

Резултат рачуна коефицијената дифузије за $m = 0.03$

За $m = 0.03$ израчуната је 21 вредност D у интервалу $\varepsilon \in [0.0002, 0.015]$. Нумерички параметри и резултати дати су у табели 3.3 и на сликама 3.7 и 3.8. Овде је измештање хиперболичке тачке и њене хаотичне околине са резонантне параболе већ израженије (последња колона табеле 3.3) и присутно је за све вредности ε . Сви коефицијенти дифузије за $m = 0.03$ дају врло висок коефицијент корелације око 0.9, те овај блок резултата можемо сматрати врло поузданим.

Резултат рачуна коефицијената дифузије за $m = 0.1$

У табели 3.4 и на сликама 3.9 и 3.10 приказани су резултати за $m = 0.1$ где је израчунато 18 коефицијената дифузије (које можемо сматрати поузданим) у интервалу $\varepsilon \in [0.0006, 0.05]$. Овде су приказане и две 'лоше' вредности коефицијената дифузије за $\varepsilon = 0.0007$ и $\varepsilon = 0.0008$ које смо у табели означили црвеном бојом. Коефицијенти корелације за ове две вредности ε су 0.23292 и 0.35726, што наводи на закључак да линеарни тренд средње квадратне разлике дејстава практично и није присутан. Стога ова два резултата одбацујемо као непоуздане. Одговарајуће слике наводе на исти закључак. За $\varepsilon = 0.0006$ времена итерације су реда величине 10^{10} . Овде је корелација нешто већа 0.54872 па је резултат, иако на ивици тачности, узет у обзир. Дифузија је мерена и за мање вредности ε , али упркос јако дугим временима итерације није добијен квалитетан коефицијент D . За $m = 0.1$ садржај последње колоне у табели 3.4 указује на то да је феномен разилажења хиперболичке структуре и резонанце присутан за свако ε за које рачунамо D . Такође, ΔI_2 се смањује за мање ε , али ово смањење је последица сужавања резонанце када ε опада, а не њеног одступања са равни S за које је одговоран параметар m .

Резултат рачуна коефицијената дифузије за $m = 0.3$

Табела 3.5 и слике 3.11 и 3.12 приказују нумеричке параметре и величине S_1 и S_2 за $m = 0.3$. Мерено је D за 19 вредности ε у интервалу $\varepsilon = [0.004, 0.1]$. Због боље прегледности, на сликама 3.11 и 3.12 променљиве S_1 и S_2 засебно су приказане. Такође, за $\varepsilon = 0.005$ и $\varepsilon = 0.004$, ове две величине дају (до једног реда величине) различите коефицијенте дифузије. У коначан резултат уврштен је онај који има већи степен корелације. Последња три реда у табели 3.5 када је $\varepsilon = \{0.003, 0.002, 0.001\}$ означена црвеном бојом дају приказ резултата, који су упркос дугом времену итерације (реда величине 10^{10}), одбачени. Коефицијенти корелације имају мале вредности: 0.19, 0.16, и 0.45 што указује на одсуство линеарног тренда, а тиме и мерљиве дифузије за овај скуп параметара. Промене S_1 и S_2 када је $\varepsilon = \{0.003, 0.002, 0.001\}$ дате су на сликама 3.13. На доње три слике јасно се разазнаје да линеарни тренд овде није присутан.

Табела 3.1: $m = 0.001$

ε	N	бр. итер.	$FLImin$	$FLImax$	T_{FLI}	$correl.$
0.0005	1000	3e6	20.26	27.90	1e5	0.96249
0.0004	1000	2e7	17.56	25.63	1e5	0.99357
0.0003	1000	2e7	15.51	22.17	1e5	0.99486
0.0002	1000	3.5e7	13.51	18.80	1e5	0.99642
0.00013	500	3e7	9.72	15.63	1e5	0.99076
0.00010	500	2.2e7	10.68	14.38	1e5	0.99112
0.00009	500	3e7	72.58	136.58	1e6	0.99218
0.00008	300	3e7	71.21	119.86	1e6	0.99404
0.00007	300	4.5e7	64.31	92.05	1e6	0.99648
0.00006	500	4e7	57.62	88.24	1e6	0.99705
0.00005	500	7e7	53.87	78.21	1e6	0.99201
0.00004	500	2e8	46.03	69.56	1e6	0.99782
0.00003	500	4e8	37.79	59.39	1e6	0.99624
0.00002	300	2e9	27.79	40.17	1e6	0.76370
0.00001	300	1.4e9	11.19	16.61	1e6	0.75454
0.000009	300	2.2e9	10.04	15.11	1e6	0.24023

Табела 3.2: $m = 0.01$

ε	N	бр. итер.	$FLImin$	$FLImax$	T_{FLI}	$correl.$	ΔI_2
0.005	1000	3e6	5.88	12.50	1e4	0.97355	
0.004	500	7e6	54.96	81.08	1e5	0.99441	
0.003	500	8e6	51.38	71.17	1e5	0.99441	
0.002	500	1e7	42.34	61.37	1e5	0.99606	
0.0015	500	2e7	40.29	54.40	1e5	0.98374	
0.001	500	2e7	32.07	44.93	1e5	0.99742	
0.0009	300	5e7	31.43	42.52	1e5	0.99546	
0.0008	300	6e7	27.74	40.85	1e5	0.99108	
0.0007	500	8e7	26.51	37.98	1e5	0.98246	
0.0006	700	9e7	23.71	35.24	1e5	0.99150	
0.0005	500	1e8	22.35	31.52	1e5	0.99313	
0.0004	500	1e8	20.07	32.80	1e5	0.98385	-0.00005
0.0003	700	2e8	17.97	32.31	1e5	0.99489	-0.00005
0.0002	500	5e8	14.45	27.47	1e5	0.92104	-0.00005
0.0001	500	1.5e9	18.82	44.32	1e6	0.96098	-0.00005
0.00009	300	4e9	72.27	95.09	1e6	0.98234	-0.0001
0.00008	300	5e9	44.40	75.60	1e6	0.88142	-0.0001
0.00007	300	4.5e9	46.71	86.47	1e6	0.94902	-0.00005
0.00006	300	7.5e9	44.82	72.83	1e6	0.76317	-0.00005

Табела 3.3: $m = 0.03$

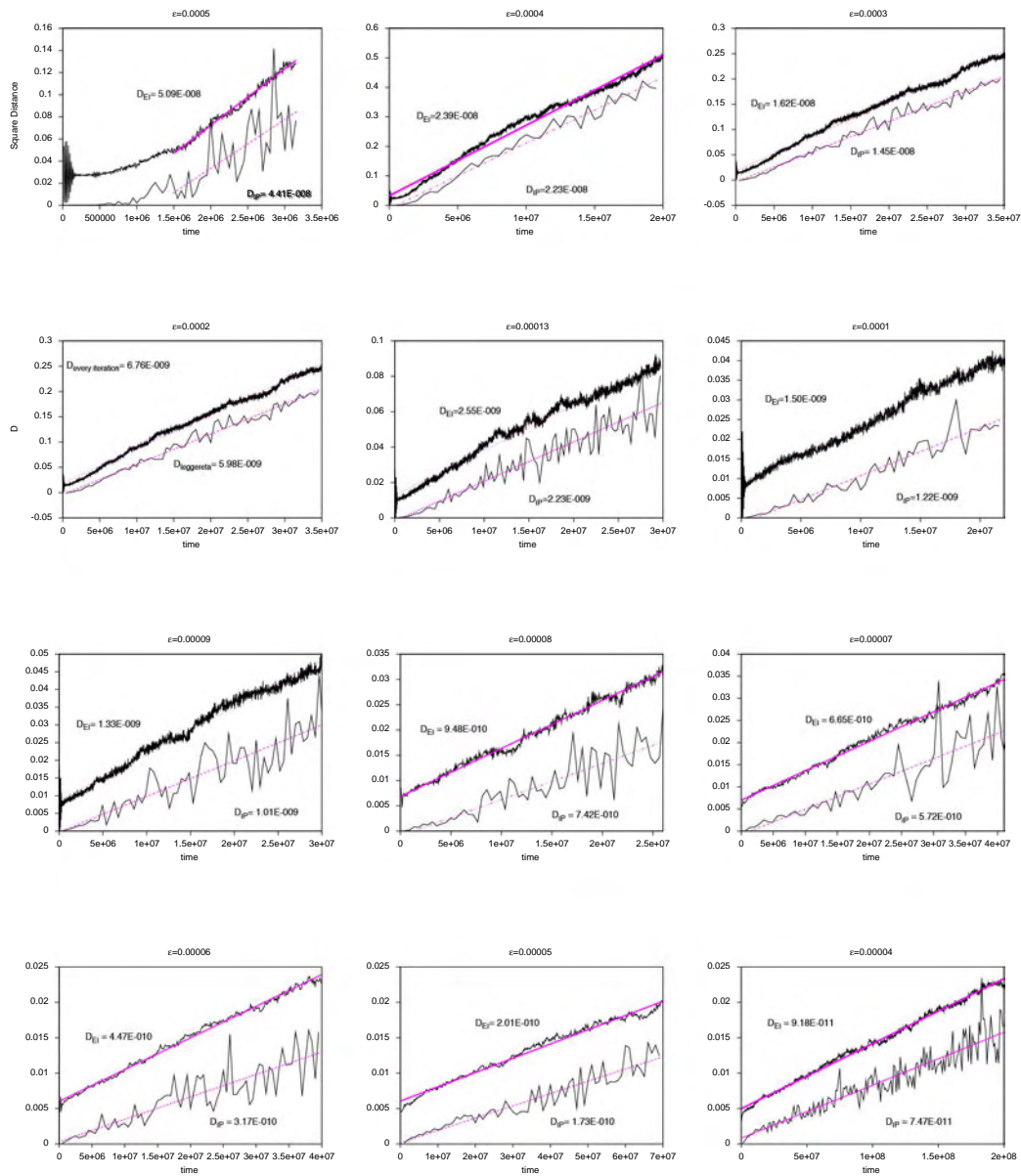
ε	N	бр. итер.	$FLImin$	$FLImax$	T_{FLI}	$correl.$	ΔI_2
0.015	1000	1.4e6	53.66	137.16	1e5	0.96583	-0.001
0.013	1000	4e6	66.92	110.35	1e5	0.99743	-0.001
0.01	1000	4e6	63.31	137.62	1e5	0.99750	-0.001
0.009	1000	5e6	48.61	154.31	1e5	0.99709	-0.001
0.008	1000	5e6	63.69	161.75	1e5	0.99673	-0.001
0.007	1000	5e6	63.28	151.25	1e5	0.99799	-0.001
0.006	400	5e6	66.98	150.65	1e5	0.99616	-0.001
0.005	400	7e6	61.61	140.26	1e5	0.99724	-0.001
0.004	700	8e6	66.45	128.81	1e5	0.99731	-0.001
0.003	700	1e7	59.58	108.10	1e5	0.99442	-0.001
0.002	500	2e7	53.63	92.53	1e5	0.98732	-0.001
0.0013	500	3.5e7	47.87	73.02	1e5	0.99162	-0.001
0.001	500	2.5e7	37.93	64.87	1e5	0.94147	-0.001
0.0009	500	4e7	22.43	51.35	1e5	0.90730	-0.001
0.0008	500	8e7	29.73	57.70	1e5	0.98734	-0.0005
0.0007	400	1.5e8	29.90	55.89	1e5	0.98960	-0.0003
0.0006	400	2e8	27.29	49.07	1e5	0.97332	-0.0003
0.0005	500	5e8	21.77	44.68	1e5	0.91265	-0.0003
0.0004	300	6e8	20.81	37.74	1e5	0.86412	-0.0003
0.0003	1000	8e8	16.04	31.12	1e5	0.99603	-0.0002
0.0002	200	1.2e9	12.07	25.51	1e5	0.95622	-0.0001

Табела 3.4: $m = 0.1$

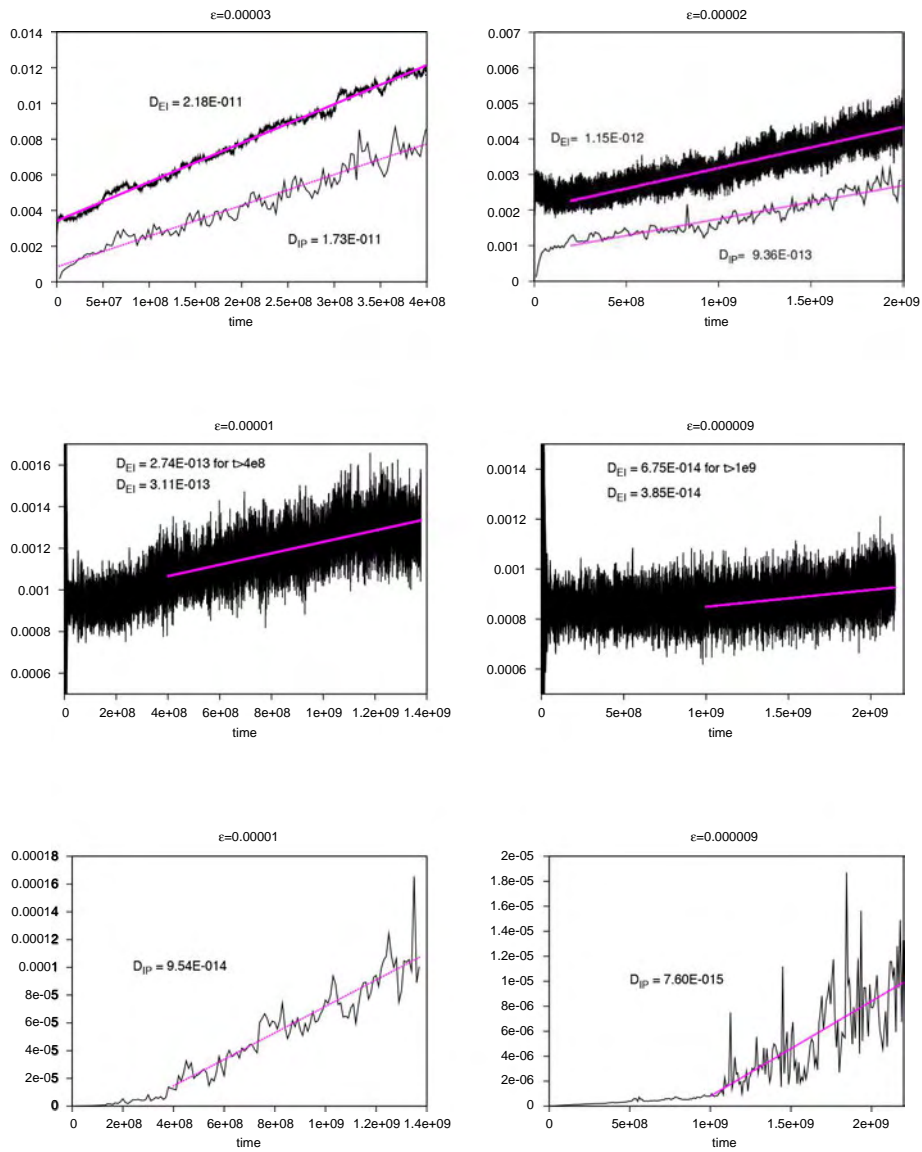
ε	N	бр. итер.	FLI_{min}	FLI_{max}	T_{FLI}	$correl.$	ΔI_2
0.06	1000	1.6e5	19.42	53.61	1e4	0.99242	-0.02
0.05	1000	1.6e5	19.42	53.61	1e4	0.99242	-0.02
0.04	1000	1.2e6	21.50	46.80	1e4	0.99570	-0.02
0.03	1000	3e6	10.68	37.08	1e4	0.99652	-0.01
0.02	1000	5e6	14.48	33.89	1e4	0.99712	-0.01
0.01	1000	5e6	10.03	25.99	1e4	0.99600	-0.005
0.009	400	8e6	11.16	26.68	1e4	0.99625	-0.004
0.008	300	1e7	10.65	23.21	1e4	0.99337	-0.004
0.007	400	1.2e7	7.32	22.07	1e4	0.99329	-0.004
0.006	300	1e7	8.53	20.33	1e4	0.98680	-0.004
0.005	500	3e7	32.26	123.10	1e5	0.99369	-0.004
0.004	500	7e7	30.49	120.77	1e5	0.99443	-0.003
0.003	300	3.5e8	37.42	102.32	1e5	0.98769	-0.001
0.002	300	5e8	35.52	90.48	1e5	0.85824	-0.001
0.0013	300	1e9	31.21	72.02	1e5	0.94880	-0.001
0.001	300	1e9	30.30	66.38	1e5	0.97622	-0.0005
0.0009	300	3e9	28.54	55.74	1e5	0.77282	-0.0005
0.0008	200	4.5e9	24.32	51.70	1e5	0.23292	-0.0005
0.0007	150	2e9	23.06	46.16	1e5	0.35726	-0.0004
0.0006	300	1.6e10	17.25	35.49	1e5	0.54872	-0.00035

Табела 3.5: $m = 0.3$

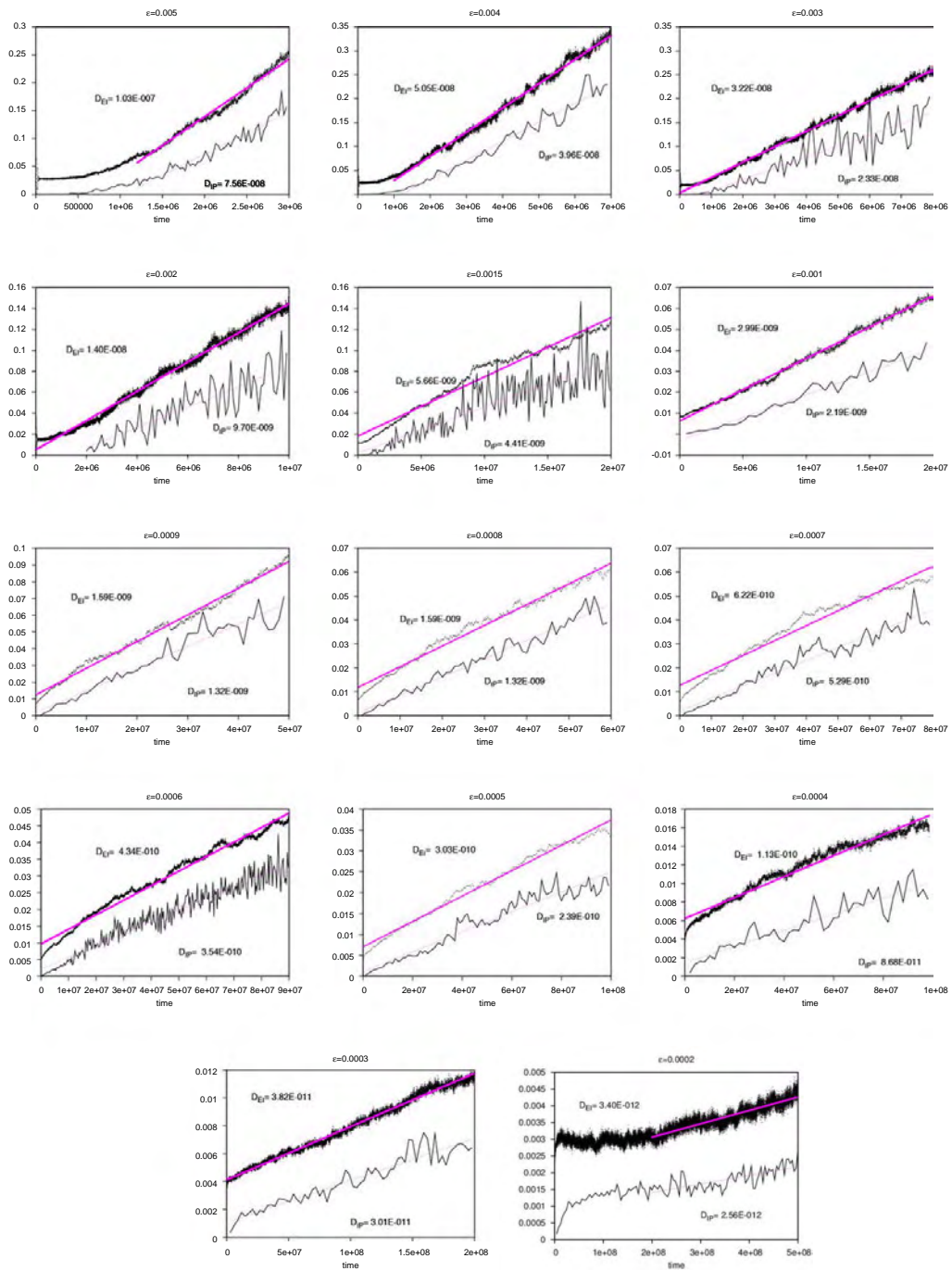
ε	N	бр. итер.	FLI_{min}	FLI_{max}	T_{FLI}	$correl.$	ΔI_2
0.1	700	6e6	14.86	63.60	1e4	0.99295	-0.07
0.09	500	1e7	12.94	58.23	1e4	0.99744	-0.05
0.08	500	2e7	12.03	56.48	1e4	0.99674	-0.05
0.07	500	2e7	9.80	55.66	1e4	0.99748	-0.04
0.06	500	2e7	9.67	44.65	1e4	0.99743	-0.04
0.05	500	4e7	5.93	25.96	1e4	0.98672	-0.017
0.04	500	5e7	4.93	27.85	1e4	0.99519	-0.017
0.03	500	7e7	5.22	13.12	1e4	0.98675	-0.012
0.025	400	8e7	10.87	37.58	1e4	0.98635	-0.014
0.02	500	8e7	8.71	32.18	1e4	0.97545	-0.012
0.015	500	9e7	6.62	33.93	1e4	0.93585	-0.014
0.012	400	1.5e8	6.76	22.36	1e4	0.71118	-0.014
0.01	500	3e8	8.17	28.36	1e4	0.83688	-0.007
0.009	500	5e8	20.53	167.76	1e5	0.87752	-0.005
0.008	500	5e8	36.28	165.70	1e5	0.80572	-0.005
0.007	500	9e8	38.51	141.98	1e5	0.63629	-0.005
0.006	700	2e9	25.56	150.00	1e5	0.53119	-0.005
0.005	400	2e9	23.35	133.05	1e5	0.88855	-0.004
0.004	300	4.5e9	26.18	109.67	1e5	0.43263	-0.003
0.003	100	1.5e10	32.00	97.78	1e5	0.19323	-0.002
0.002	200	1.2e10	26.07	85.07	1e5	0.16701	-0.0012
0.001	200	1.2e10	14.20	28.65	1e5	0.45029	-0.0006



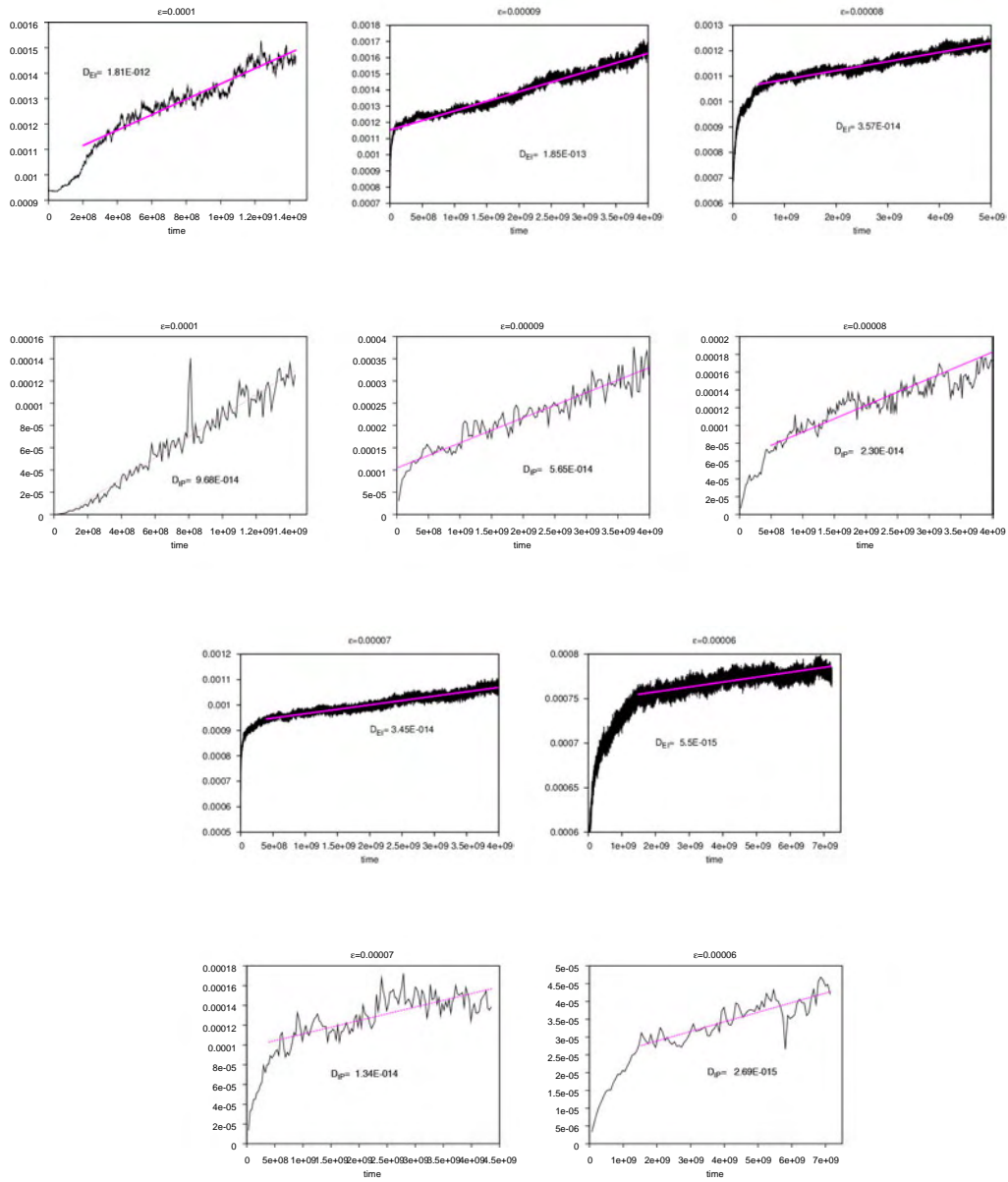
Слика 3.3: $m = 0.001$



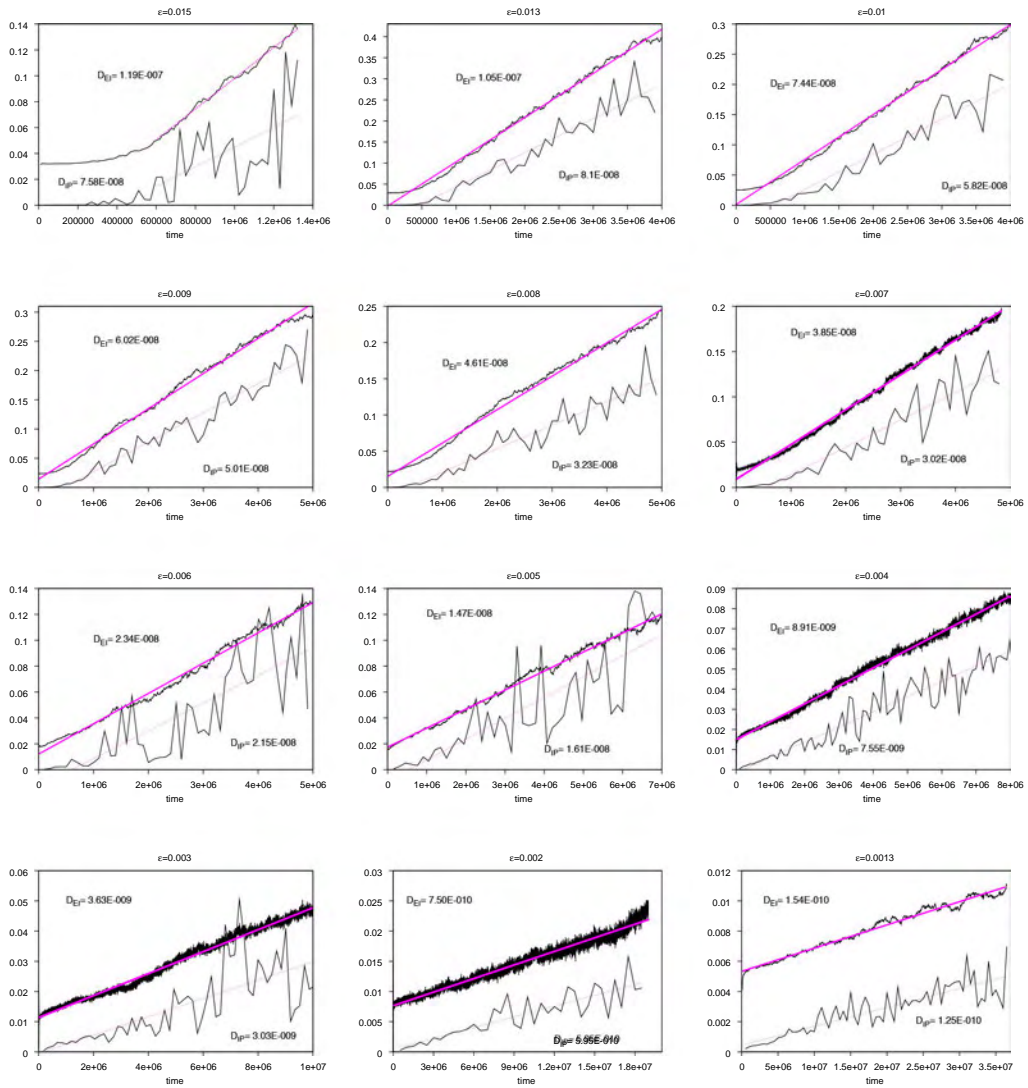
Слика 3.4: $m = 0.001$



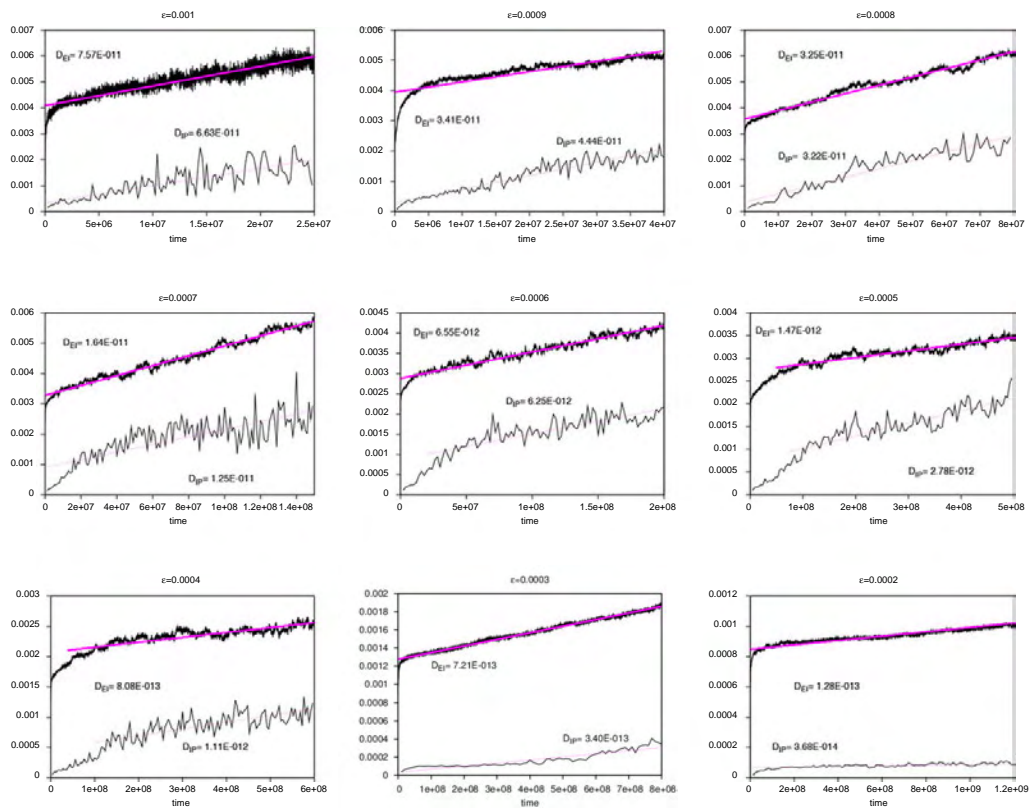
Слика 3.5: $m = 0.01$



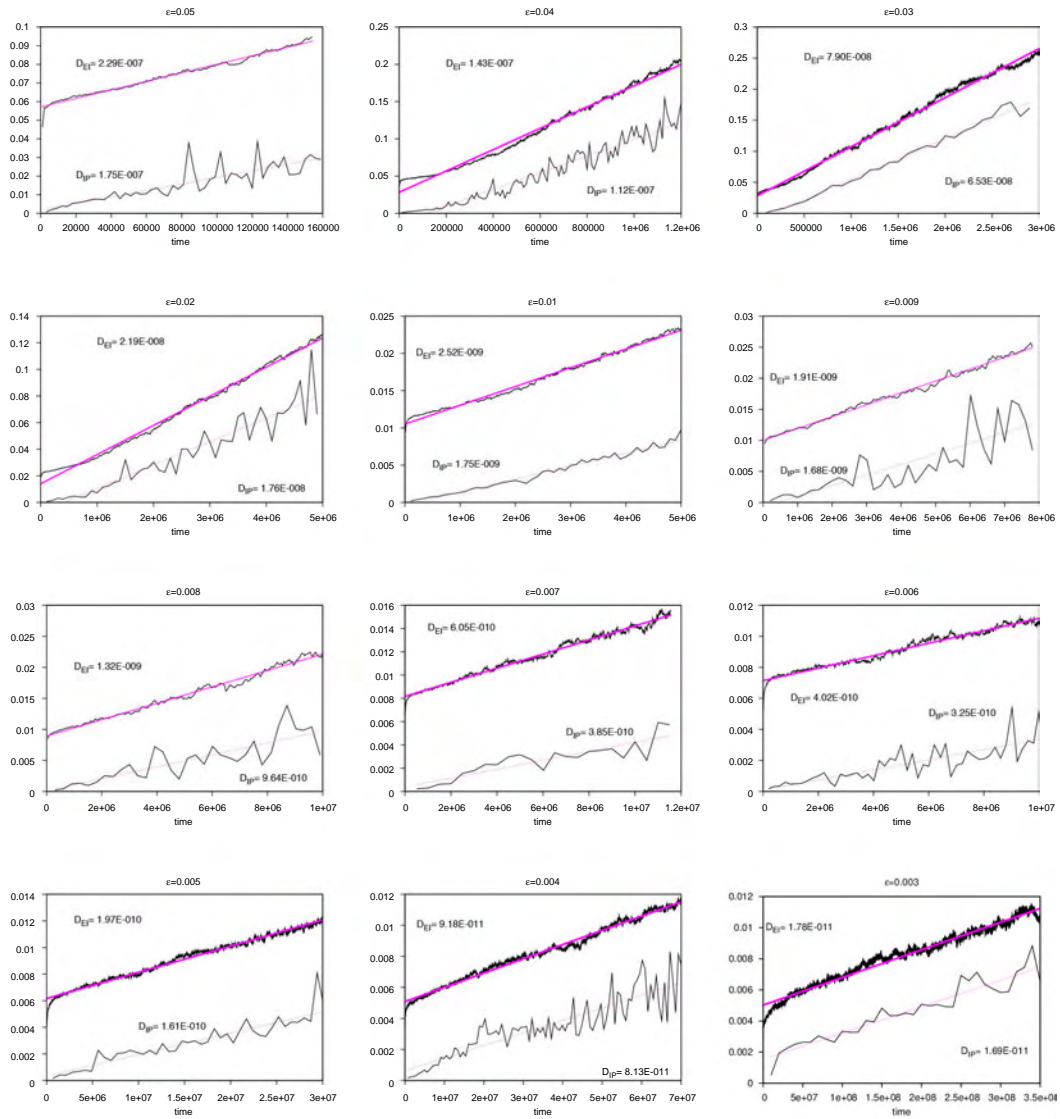
Слика 3.6: $m = 0.01$



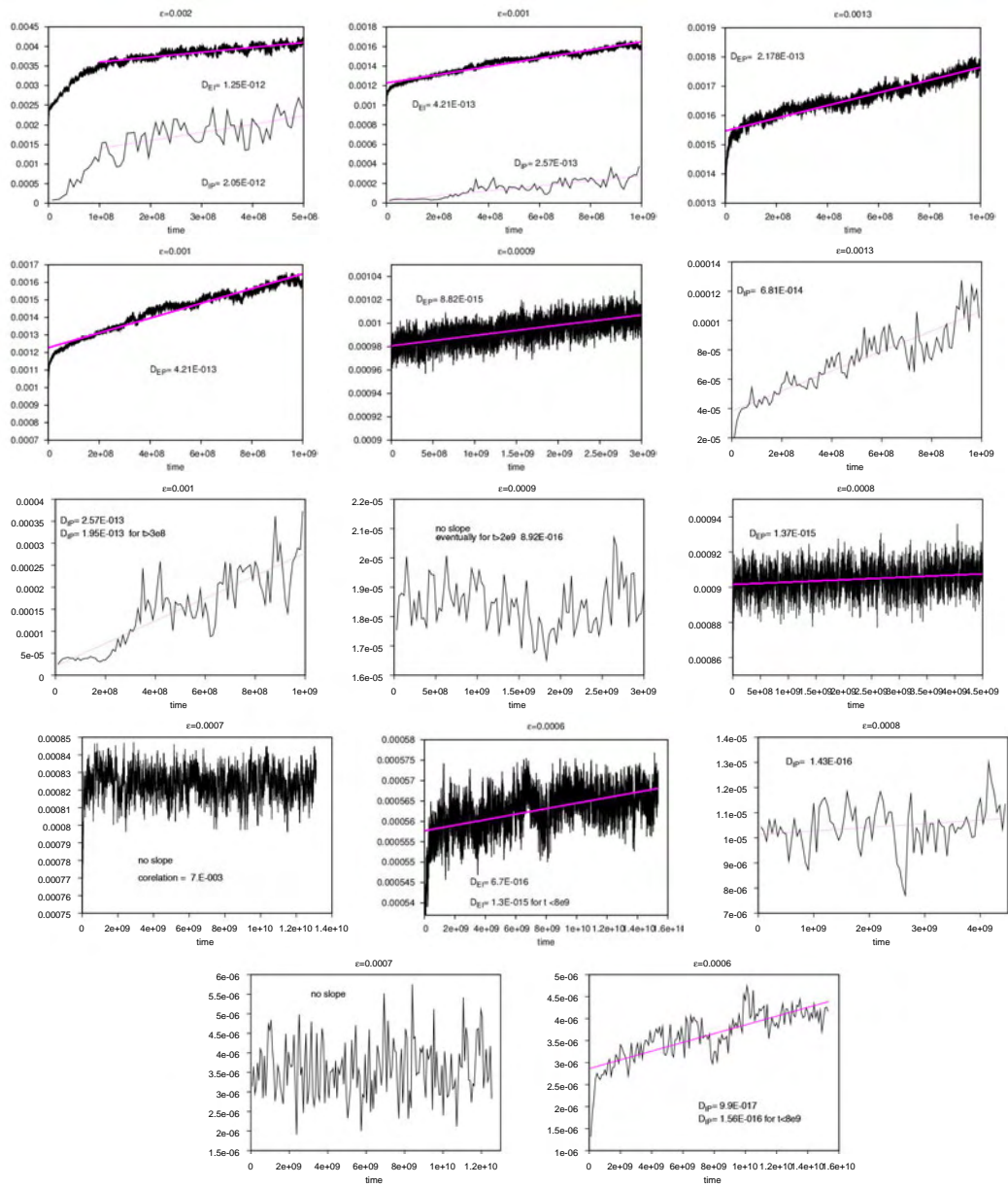
Слика 3.7: $m = 0.03$



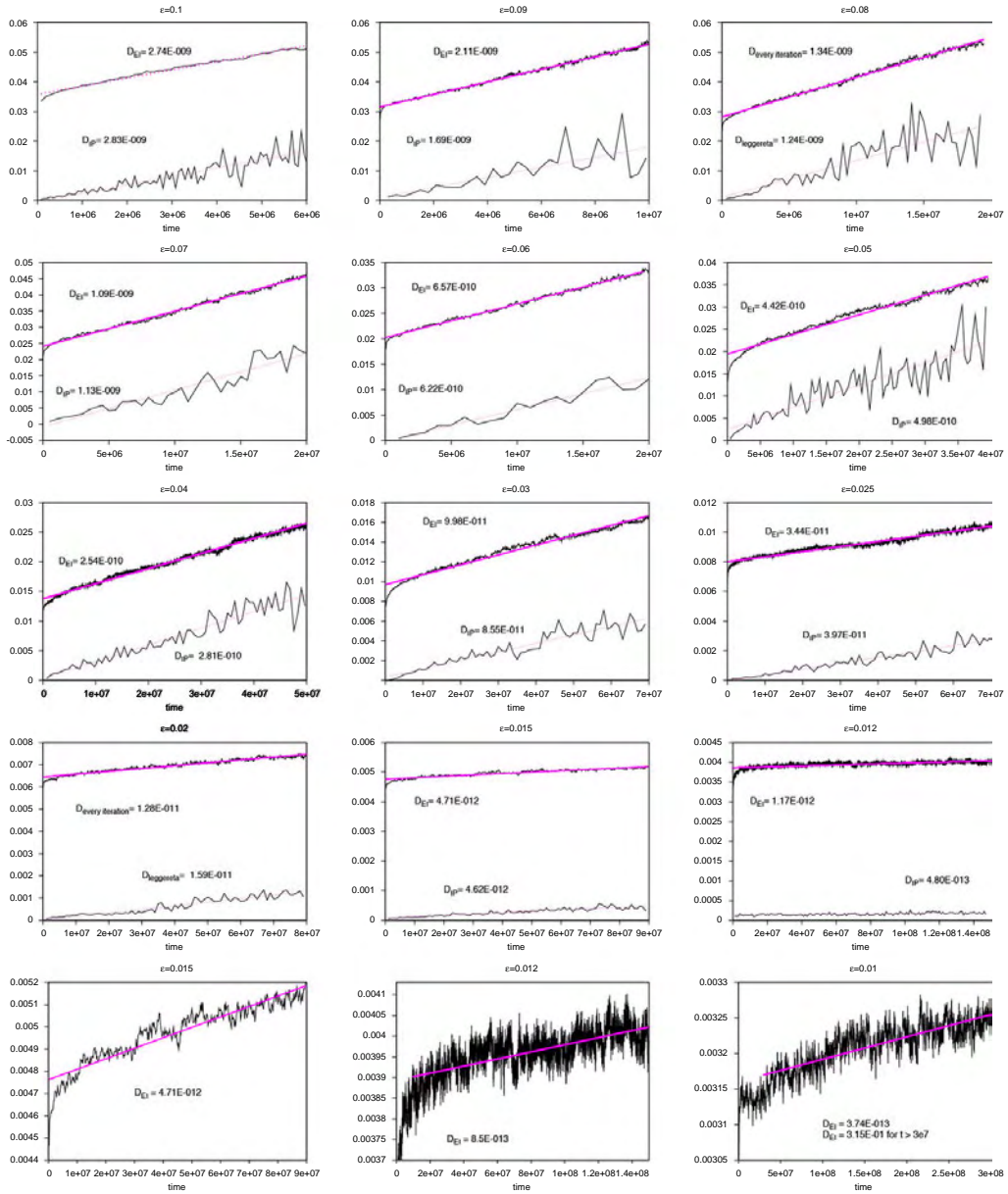
Слика 3.8: $m = 0.03$



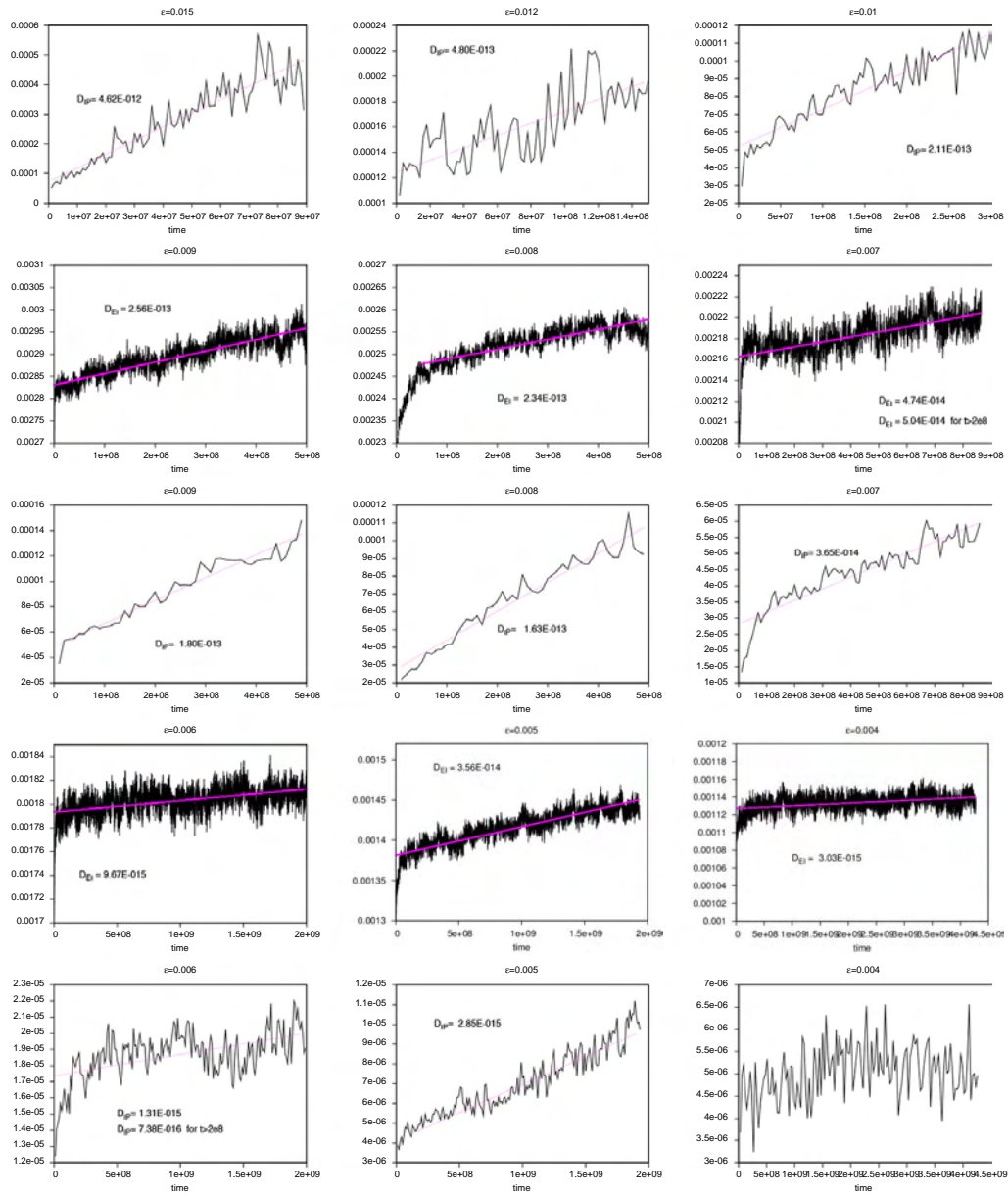
Слика 3.9: $m = 0.1$



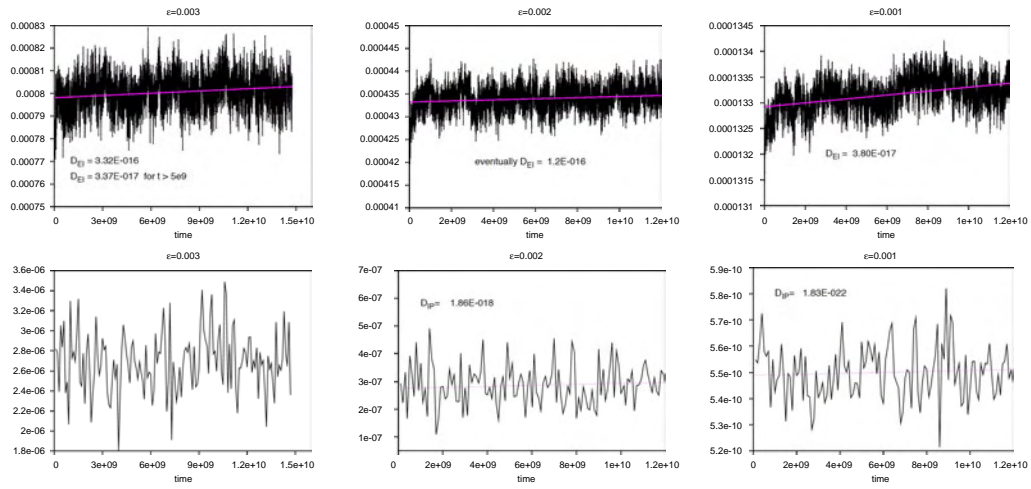
Слика 3.10: $m = 0.1$



Слика 3.11: $m = 0.3$



Слика 3.12: $m = 0.3$



Слика 3.13: $m = 0.3$

3.6 Оцена експоненцијалног и степеног закона $D(\varepsilon)$

Резултате добијене у претходном поглављу, објединићемо у један. Зависност D од ε је експоненцијална, што знамо из Нехорошевљеве теореме и што је већ потврђено у низу сличних модела ([29], [21], [22], [47]). Међутим, наш циљ није да потврдимо експоненцијалну зависност коефицијената дифузије од ε , већ да детектујемо *промену* те зависности када m расте.² У нумеричком смислу, потребно је да детектујемо повећање параметара експоненцијалних функција које фитујемо кроз вредности $D(\varepsilon)$ за веће m . Али у нашем случају, где вредности ε за сваки блок рачунања D покривају највише два реда величине, можемо са великом извесношћу претпоставити да оцене ових параметара не могу бити довољно поуздане за озбиљан резултат (слика 3.14 горе).

Зато, уместо експоненцијалне, кроз ε - D фитујемо две или више степених функција облика $D(\varepsilon) = A'(1/\varepsilon)^B$. На логаритамској скали $(\log \varepsilon, \log D)$, ова функција ће имати облик праве $\log D = A + B \log \varepsilon$. Две или више ових правих, одговарале би такозваном преломљеном степеном закону. Смањење ε , као што знамо успорава дифузију, што се на $\log \varepsilon - \log D$ скали манифестује повећањем степена B када идемо ка нижим вредностима ε . С обзиром да и стрмост доприноси успоравању дифузије, очекује се да B расте и са повећањем m . Циљ нам је да нумеричким експериментима ово очекивање и потврдимо.

Добијени коефицијенти дифузије, као и вредности одговарајућих степених функција фитованих кроз податке приказани су на доњој слици 3.14. Идући с лева на десно, први скуп података одговара ситуацији када је $m = 0.001$. Кроз 16 добијених вредности D на интервалу $\varepsilon = [9 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-4}]$ фитоване су две степене функције код којих је $B_1^{0.001} = 2.12$ и $B_2^{0.001} = 4.51$. За $m = 0.01$ и 19 коефицијената дифузије на $\varepsilon \in [6 \cdot 10^{-5}, 0.005]$ фитоване су три функције са степенима $B_1^{0.01} = 2.19$ и $B_2^{0.01} = 3.10$ и $B_3^{0.01} = 4.89$. Трећи скуп података одговара вредности $m = 0.03$ где имамо 21 коефицијент дифузије на интервалу $\varepsilon \in [0.0002, 0.015]$. Коефицијенти одговарајућих степених функција су $B_1^{0.03} = 2.01$ и $B_2^{0.03} = 4.01$. За $m = 0.1$ израчунато је 18 вредности D у интервалу $\varepsilon \in [6 \cdot 10^{-4}, 0.05]$. Вредности B овде су $B_1^{0.1} = 2.55$, $B_2^{0.1} =$

²Коефицијент дифузије D поистовећујемо са Нехорошевљевим временом стабилности.

3.72 и $B_3^{0.1} = 6.28$.

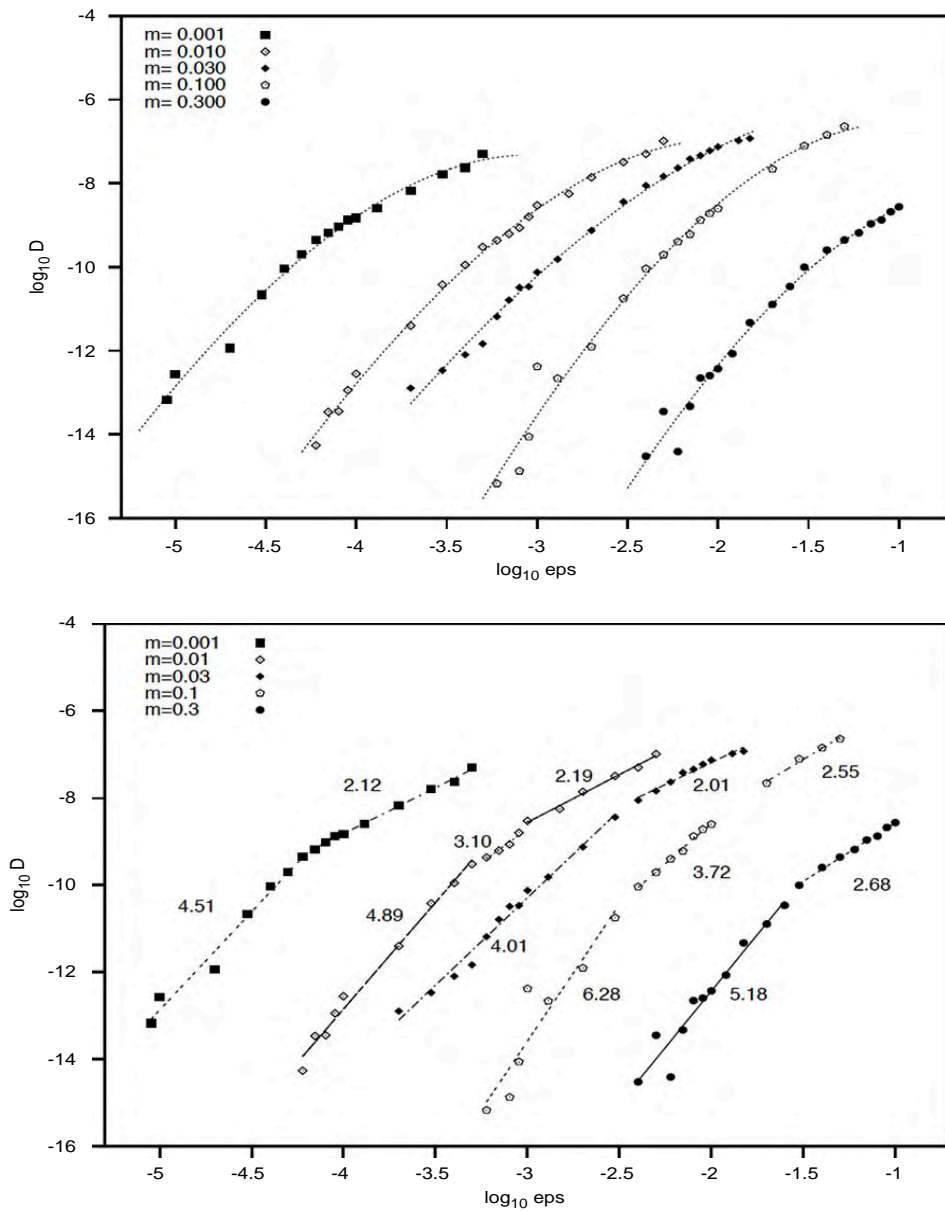
Приметимо да код функције чији је степен 6.28 подаци видно осцилују око фитоване линије. Ове осцилације нешто су очигледније на горњој слици (за $m = 0.1$) где се види очекивана експоненцијална функција. У [24] где је упоређивана стабилност у областима D_{21} и D_{11} овакве осцилације су потврђене, али само у стрмој неконвексној области, док у квази конвексном домену D_{11} , коефицијенти D практично леже на фитованој експоненцијалној функцији без већих одступања. Такође, за поједине вредности ε у области D_{21} одговарајући коефицијенти дифузије су мањи од коефицијената D за исту вредност ε у области D_{11} , док за неке ε важи обрнуто. Овакав резултат још нема теоријску интерпретацију, али нас наводи на закључак да је Нехорошевљева оцена времена стабилности убедљивија у квази-конвексном домену D_{11} .

И коначно за $m = 0.3$, мерена је дифузија за 19 вредности ε у интервалу $\varepsilon = [0.004, 0.1]$ где су фитоване две степене функције $B_1^{0.3} = 2.68$ и $B_2^{0.3} = 5.18$. Приметимо да је и у овом случају присутна осцилација коефицијената D око фитоване функције у оном делу где је степен 5.18, односно у доњем делу криве за $m = 0.3$ на горњој слици. У [24] показано је да је амплитуда ових осцилација већа што су вредности ε мање.

Из резултата приказаних на слици 3.14, закључујемо да су за свако m добијене врло блиске вредности степених функција, које се крећу у интервалу од 2 до 4 или од 2 до 6, што даје утисак да за свако m важе исти или врло слични степени закони, супротно очекивањима. Међутим, треба узети у обзир да коефицијенти дифузије за свако m покривају различите интервале у ε који се померају ка већим вредностима за веће m , те резултати за различите вредности m заправо нису директно упоредљиви³.

Делимично преклапање у вредностима ε имају $B_1^{0.1} = 2.55$ и $B_1^{0.3} = 2.68$ одакле је приметан блажи пораст величине B . Такође, делимично преклапање у ε имају и степени $B_1^{0.03} = 2.01$, $B_2^{0.1} = 3.72$ и $B_2^{0.3} = 5.18$ где је пораст вредности B када m расте још убедљивији. Ако бисмо на пример били у прилици да проширимо интервал ε

³Разлог што смо ограничени у ε интервалима је искључиво нумеричке природе, као што смо видели у претходном поглављу.



Слика 3.14: Приказ добијених коефицијената дифузије у облику $\log_{10} \epsilon - \log_{10} D$ за пет различитих вредности параметра $m = \{0.001, 0.01, 0.03, 0.1, 0.3\}$. Коефицијенти дифузије су за свако m означени другим симболом. На горњој слици, кроз сваки скуп података (за свако фиксирано m), фитоване су експоненцијалне функције. На доњој слици, кроз исте податке фитовали смо две или три степене функције облика $\log_{10} D = A + B \log_{10} \epsilon$, а поред сваке степене функције, уписана је и одговарајућа вредност степена B .

идући ка мањим вредностима када је $m = 0.1$ или $m = 0.3$ а тиме и наставимо тренд увећања степена B идући ка мањим вредностима ε , били бисмо у прилици и да их упоредимо на већим интервалима. С обзиром да би на интервалима који покривају мале вредности ε реда величине $10^{-6} - 10^{-5}$ степени B за $m = 0.1$ и $m = 0.3$ свакако били већи од $B_2^{0.1}$ или $B_2^{0.3}$ који важе за $\varepsilon \sim 10^{-2}$ али и од $B_1^{0.001}$, $B_2^{0.001}$, $B_2^{0.01}$ који се односе на мање вредности ε реда величине $10^{-6} - 10^{-5}$, закључујемо да је увећање B за веће m присутније него што је видљиво на слици 3.14, чиме је *очекивани резултат о ефекту стабилизације стрмости (увећање B за веће m) потврђен.*

3.7 Рачун коефицијената дифузије $D(m)$ за фиксиране вредности ε

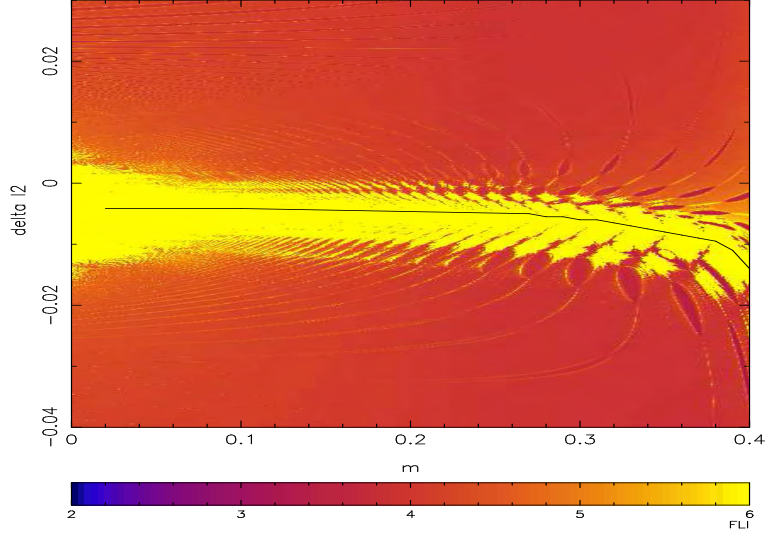
У другом делу овог истраживања меримо директно утицај параметра стрмости m на стабилност дејстава на резонанци, тако што за фиксирану вредност параметра ε посматрамо функцију $D(m)$, при чему је вредност поремећаја ε фиксирана. Понављамо овај експеримент за две вредности параметра ε : 0.001, и 0.01. Очекује се да и параметар стрмости m има неку критичну вредност m_c , такву да за $m > m_c$ утицај стрмости на динамику постаје осетан. Описаћемо најпре начин на који бирамо почетне вредности, затим приказати модификацију мапе и на крају, у поглављу 3.7.3 дајемо коначан резултат рачуна $D(m)$.

3.7.1 Избор почетних услова

Да бисмо имали поуздану процену дифузије на резонанци $1 - 1$, потребно је да најпре пажљиво изаберемо почетне услове. Почетна дејства I_1 бирамо тако да буду изразито *ирационална*.⁴ Тачније, бирамо их у околини тачке:

$$\omega_1 = I_1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \sim 0.604\dots$$

⁴Рационална вредност дејстава представља пресек са неком другом резонанцом. С обзиром да се дифузија коју посматрамо одвија искључиво на резонанци $1 - 1$, пресек са другом резонанцом отворио би могућност 'скретања' орбита, што би дало погрешну вредност D .



Слика 3.15: Одступање хиперболичке нестабилне тачке и њене хаотичне околине (жута структура) од резонантне параболе ΔI_2 за вредности m у интервалу $m \in [0, 0.4]$. Поремећајни параметар је $\varepsilon = 0.01$. У малој околини танке линије која се протеже кроз средину жуте структуре изабрани су почетни услови за рачун коефицијената дифузије.

Из једначине резонанце (3.16) следи да је I_2 :

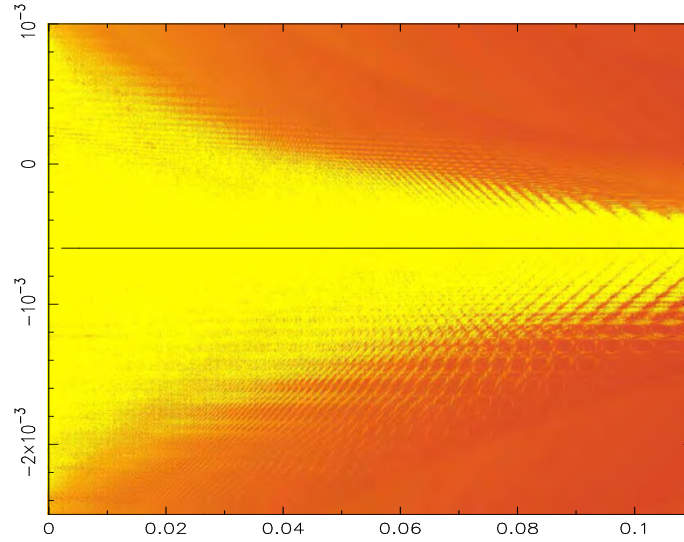
$$I_{2_{res}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m\omega_1}}{2m} \quad (3.19)$$

одакле следи да је вредност параметра m ограничена са:

$$m < \frac{1}{4\omega_1} \sim 0.413... \quad (3.20)$$

Како се m приближава граничној вредности (3.20), то се дејства приближавају двострукој резонанци, тј. темену параболе $I_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m\omega_1}}{2m}$, где немамо праву слику о дифузији.

На слици 3.15 приказан је још један од ефеката стрмости. На гриду од 1000×1000 тачака равномерно распоређених на x и y координати слике, рачунате су вредности FLI за 10 000 итерација, за $\varepsilon = 0.01$. Остале променљиве су $I_1 = \pi/(3\sqrt{3})$, $\varphi_{1,2} = 0$, а параметар $c = 3$. За свако m жута структура представља хаотичну околину хиперболичке нестабилне тачке (I_{1H}, I_{2H}) која одговара резонанци $1-1$. Координата



Слика 3.16: Координате имају исто значење као на слици 3.15. У случају када је $\varepsilon = 0.001$ интервал за m је нешто мањи $m \in [0.003, 0.1]$, те разилажење резонанце и параболе не долази до изражаја. Сви почетни услови за које рачунамо D леже на правој $I_2 = I_{2_{res}} - 0.0005$.

y на слици представља разлику $\Delta I_2 = I_{2_{res}} - I_{2_H}$. Када је $\Delta I_2 = 0$, хиперболичка тачка (I_{1_H}, I_{2_H}) заједно са својом околином лежи на параболу $mI_2^2 - I_2 + I_1 = 0$. На слици видимо да се за $m < 0.07$ жута хаотична структура налази у околини $\Delta I_2 = 0$, али и да се ово одступање повећава када m расте и достиже вредности $\Delta I_2 = 0.01$ када је $m = 0.4$. Стога почетне услове бирамо *испод* резонантне параболе на линији

$$I_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m\omega_1}}{2m} - \Delta.$$

Танка линија која се на слици 3.15 протеже дуж жуте области означава, за свако m за које рачунамо D одговарајућу вредност Δ .

У другом блоку рачунања $D(m)$, вредност ε је фиксирана на $\varepsilon = 0.001$. Слика 3.16 потпуно је аналогна слици 3.15, с том разликом што је $\varepsilon = 0.001$. Интервал у којем рачунамо D сада је знатно мањи $m \in [0, 0.1]$, те ефекат 'одмицања' резонанце од параболе нема већи утицај на избор почетних дејстава. Сва почетна дејства I_2 леже на правој

$$I_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m\omega_1}}{2m} - 0.0005$$

која је на слици 3.16 означена танком линијом на жутој структури.

3.7.2 Трансформација координата

Пре него што пређемо на нови блок рачунања коефицијената дифузије, применићемо канонску трансформацију облика $(I_1, I_2, \varphi_1, \varepsilon_2) \rightarrow (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$ чији је смисао *премештање нове координате J_1 на правац брзог померања $I_1 = I_2$* . С обзиром да нас занима спора дифузија Арнолдовога типа, брзе осцилације сада су паралелне координати J_1 , а тиме и прикривене у начину на који рачунамо D . Овај облик трансформације први пут је примењен у [4], а касније и у [24]. Трансформација координата ће бити облика:

$$\begin{aligned} J_1 &= I_2 \\ J_2 &= I_2 - I_1 \\ \psi_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \psi_2 &= -\varphi_1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

и мапа (3.1) прелази у облик

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \psi_1 - J_2 + mJ_1^2 \\ \psi'_2 &= \psi_2 + J_2 - J_1 \\ J'_1 &= J_1 - \varepsilon \frac{\sin(\psi'_1 + \psi'_2)}{(\cos(\psi'_1 + \psi'_2) + \cos(\psi'_2) + c)^2} \\ J'_2 &= J_2 - \varepsilon \frac{\sin(\psi'_1 + \psi'_2) + \sin \psi'_2}{(\cos(\psi'_1 + \psi'_2) + \cos(\psi'_2) + c)^2}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Дифузију посматрамо и меримо на резонанци

$$J_2 = mJ_1^2$$

с тим што је израз за рачун коефицијената D_J нешто другачији. Дифузију оцењујемо као средње квадратно одступање дејства J_2 у односу на почетне вредности, односно као линеарни тренд величине дефинисане са

$$\frac{\sum_{j=1}^N |J_2^j(t) - J_2^j(0)|^2}{N} \propto D_J t. \tag{3.23}$$

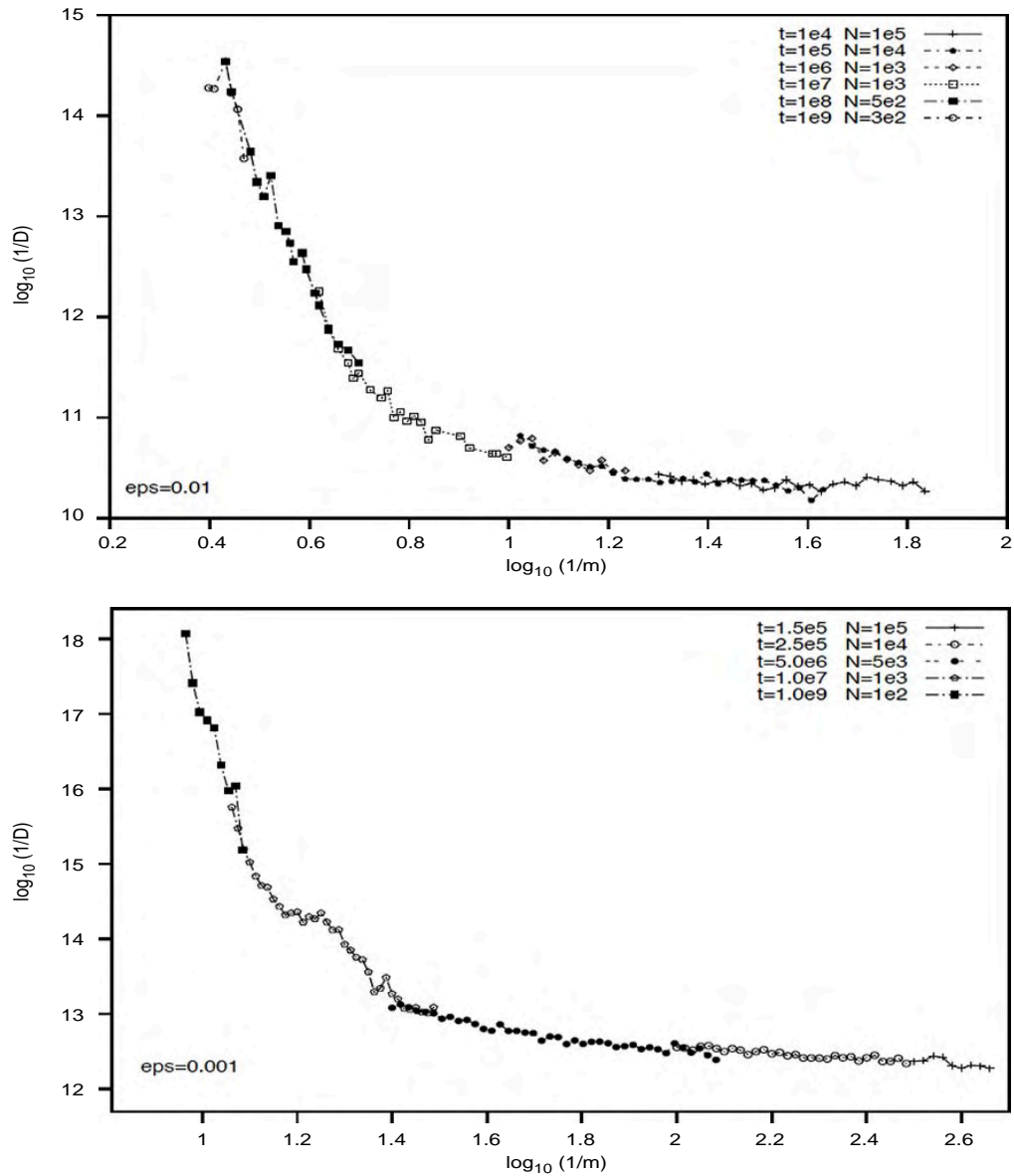
Брзе локалне осцилације на правцу брзе дифузије, које често умеју да пригуше процес споре дифузије Арнолдовога типа, сада нису присутне, јер су паралелне дејству J_1 , а дифузију меримо само из J_2 . Остатак алгоритма за рачунање D потпуно је аналоган оном који је описан у поглављу 3.4.

3.7.3 Коефицијенти $D(m)$

Овај експеримент је показао на који начин времена стабилности, односно коефицијенти D зависе од параметра стрмости m . Понављамо да је ова веза разматрана у Нехорошевљевој раду из 1979. где је показано да критична вредност ε за коју важе резултати Нехорошевљеве теореме заправо зависи од коефицијената стрмости C_k . Такође, показано је [46] да у моделу (3.1) ови коефицијенти зависе од параметра стрмости $C_k \sim m$. Дакле, као што ε има неку критичну вредност ε_0 такву да се Нехорошевљева оцена о времену стабилности односи само за оне вредности ε које су мање од ове критичне, очекује се да ће је имати и наш параметар m . Изведена су два нумеричка експеримента, где смо посматрали директну зависност $D(m)$ при чему је параметар ε фиксиран. Овај рачун поновљен је за две вредности $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.001$.

Резултат за $\varepsilon = 0.01$

За 89 различитих вредности параметра m у интервалу $m \in [0.015, 0.4]$ рачунамо коефицијенте дифузије у систему координата $(J_1, J_2, \varphi_1, \varphi_2)$, на начин који је описан у претходном поглављу. Вредност ε је фиксирана на 0.01. Горња граница овог интервала 0.4, одређена је присуством двоструке резонанце, као што је објашњено у поглављу 3.7.1, где је описан и начин на који су изабрани почетни услови. Коефицијенте D рачунамо за скупове од 300 до 10^5 орбита, а њихову дифузију посматрамо у временима која се крећу од 10^4 до 10^9 корака итерације. Добијени коефицијенти дифузије приказани су на горњој слици 3.17. Приметимо да се за $m < 0.1$ (вредности веће од 1 на x координати) коефицијенти D скоро не мењају. Њихове вредности крећу се око 10^{-10} , односно параметар m у овом интервалу практично и не утиче на брзину дифузије.



Слика 3.17: Коефицијенти D као функција параметра m за фиксирано $\epsilon = 0.01$ на горњој слици и за $\epsilon = 0.001$ на доњој слици. Примећујемо убедљив пад вредности D за $m > 0.1$ када је $\epsilon = 0.01$ и за $m > 0.03$ када је $\epsilon = 0.001$. Обе слике дате су у логаритамским скалама, а одговарајући нумерички параметри као што су времена итерације и број почетних дејстава за које рачунамо D приказани су у горњем десном углу слике.

Јасан прелаз у нови режим дешава се када је $m > 0.1$ (вредности мање од 1 на x координати). Приметимо да се вредности D мењају за скоро пет редова величине, док се променљива m променила мање од једног реда величине, те закључујемо да промена $D(m)$ за $m > 0.1$ постаје убедљиво експоненцијална. Вредност експонента ове функције није оцењена због чиненице да је интервал у m недовољно велики за његову поуздану оцену.

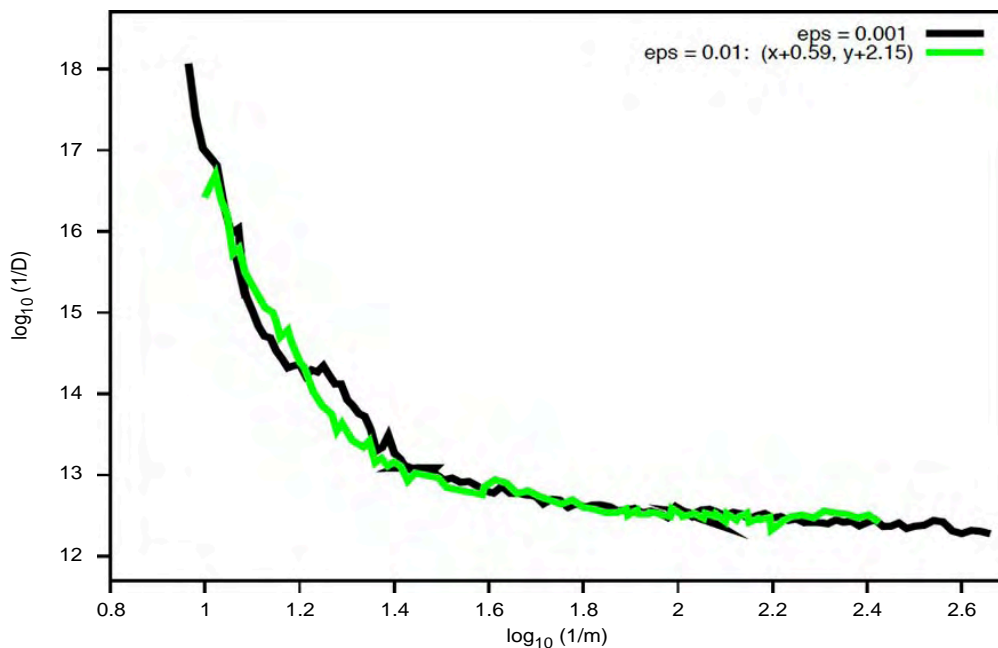
Резултат за $\varepsilon = 0.001$

За 170 различитих вредности параметра m у интервалу $m \in [0.003, 0.1]$ израчунати су коефицијенти D . Вредности параметра поремећаја фиксирани су на $\varepsilon = 0.001$. Овде смо ограничени у m , не због близине двоструке резонанце, него због спорости дифузије која је за $m > 0.1$ скоро на граници мерљивости. Број почетних услова креће се од 100 до 10^5 , а времена итерације од $10^5 - 10^9$ корака. Резултат овог рачуна приказан је на доњој слици 3.17. И овде примећујемо врло слично понашање D као на горњој слици када је $\varepsilon = 0.01$. Када је m мање од 0.03 коефицијенти D су квази-константни, крећу се између $10^{-12} - 10^{-13}$. Јасну промену у вредностима D видимо за $m > 0.03$, односно вредностима мањим од 1.5 на x координати доње слике 3.17.

Подударност степених закона $D(\varepsilon)$

Преклопимо ли одговарајућом транслацијом две добијене криве $D(m)$ за $\varepsilon = 0.01$ (тј. криву на слици 3.17 горе) и $D(m)$ за $\varepsilon = 0.001$ (крива на слици 3.17 доле), добијамо скоро потпуну подударност ових двеју функција (слика 3.18). Зелена линија провучена је кроз податке $D_{0.01}(m)$, а црна кроз $D_{0.001}(m)$, при чему је зелена линија трансляторно померена за 0.59 по x координати и за 2.15 дуж y координате. У [46] рачун коефицијената дифузије поновљен је и за трећу фиксирану вредност параметра поремећаја, за $\varepsilon = 0.0001$. Испоставило се, да се и трећа крива, провучена кроз $D_{0.0001}(m)$, скоро у потпуности преклапа са двема кривама на слици 3.18.

Дакле, зависност брзине дифузије од интензитета стрмости је у извесном смислу независна од вредности поремећајног параметра, што нас наводи на закључак да *стрмост не утиче значајно на стабилизацију у интервалима где је њен интензитет*



Слика 3.18: Одговарајућом translацијом преклопили смо две криве провучене кроз D за $\epsilon = 0.01$ и D за $\epsilon = 0.001$. Добијена слика указује на то да промена коефицијента дифузије у односу на параметар m , $D(m)$ има исти карактер за обе вредности ϵ , те закључујемо да је утицај параметра стрмости на стабилност акција независан од параметра ϵ , и да у извесном смислу има општи карактер. Аналитичко објашњење оваквог резултата није тривијалан задатак и захтева нови приступ доказу Нехоршевљеве теореме.

мањи. Међутим, после неке критичне вредности (m_c), утицај стрмости на стабилизацију дејстава има практично експоненцијалан карактер. Подударност кривих коју видимо на слици 3.18 није била очекивана. Њено теоријско објашњење не постоји, али свакако отвара могућност неком будућем истраживачком задатку, чији ће резултат бацити ново светло на значај Нехоршевљеве теореме и њене евентуалне примене на динамику реалних система.

Закључак

Испитан је модел простора дат у облику четвородимензионе стрме симплектичке мапе са циљем да се потврде стабилизациони ефекти стрмости у складу са Нехорошевљевој теоремом.

Аналитичким путем испитан је домен целог простора дејстава и одређене су оне области у којима је систем конвексан, квази-конвексан или задовољава 3-струја услов. Цео простор је мапиран помоћу брзог индикатора Љапунова, чиме је детектована структура Арнолдове мреже. Упоредјујући стрму неконвексну и стрму квази-конвексну област, закључили смо да је систем стабилнији у стрмој квази-конвексној области, чиме је потврђена Нехорошевљева претоставка о већој стабилности квази-конвексних функција. На резонанци 1-1 мерена је промена стабилности дејстава за различите услове поремећаја и различите интензитете стрмости. Отежавајућа околност у овом истраживању била је изразита спорост Арнолдове дифузије, која захтева јако дуга рачунска времена, због које је често резултат био на ивици тачности. Из тог разлога, тачна оцена вредности експоненцијалног закона $D(\varepsilon)$ у првих пет експеримената није дата. Резултат ипак наводи на закључак о природи промене система тј. о његовом успорењу проузрокованим повећањем стрмости. Овде је међутим откривено да функција $D(\varepsilon)$ на извешан начин осцилује око предвиђених вредности, што је нов и неочекиван резултат који још увек нема теоријско објашњење. У другом делу нумеричкох експеримента о дифузији, мерена је зависност $D(m)$ за фиксиране вредности поремећаја ε . Показано је да се Арнолдова мрежа другачије 'понаша' са повећањем интензитета стрмости. У избору почетних вредности, детектовано је благо одмицање резонанце са резонантне параболе за веће интензитете стрмости. Резултати рачуна $D(m)$ показали су двојачко понашање. За мање вредности m , брзина дифузије не зависи од m , док у једном тренутку, после неке критичне вредности m_c , та зависност постаје експоненцијална. Иста природа ове функције детектована је у два различита експеримента за две фиксиране вредности ε . Штавише, испоставило се да у оба случаја промена $D(m)$ има идентично понашање, што наводи на закључак да утицај параметра стрмости на стабилност дејстава у извесном смислу има општи карактер, независан од осталих параметара

у систему. Детаљније аналитичко објашњење овог последњег резултата свакако је један од будућих задатака у интерпретацији Нехорошевљеве теореме.

Библиографија

- [1] Arnold V.I., Proof of a theorem by A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. Russ. Math. Surv., 18, 9, 1963.
- [2] Arnold V.I., Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. Sov. Math. Doklady, 5, 342355, 1964.
- [3] Arnold V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag New York, 1978.
- [4] Benettin, G. and Gallavotti, G., Stability of motions near resonances in quasi-integrable Hamiltonian systems, Journal of Statistical Physics Volume 44, Numbers 3-4, 293-338, 1985.
- [5] Benettin, G. The elements of Hamiltonian perturbation theory, Hamiltonian Systems and Fourier Analysis: New Prospects For Gravitational Dynamics, Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2004.
- [6] Benetin, G., Galgani, L. and Giorgilli, A., A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems Celestial Mechanics, 37, 1-25, 1985.
- [7] Froeschlé, C., Numerical Study of a Four-Dimensional Mapping, Astronomy and Astrophysics, Vol. 16, p. 172, 1972.
- [8] Froeschlé, C., Guzzo, M. and Lega, E., Graphical Evolution of the Arnold Web: From Order to Chaos Science, Volume 289, Issue 5487, pp. 2108-2110, 2000.

- [9] Froeschlé C., Guzzo M. and Lega E., Local and global diffusion along resonant lines in discrete quasi-integrable dynamical systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 92, n. 1-3, 243-255, 2005.
- [10] Froeschlé, C., Gonczi, R. and Lega, E., ‘ The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt, *Planetary and Space Science*, v. 45, p. 881-886, 1997.
- [11] Froeschlé, C., Lega, E. and Gonczi, R., Fast Lyapunov Indicators. Application to Asteroidal Motion, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 67, Issue 1, pp.41-62, 1997.
- [12] Giorgilli, A., New insights on the stability problem from recent results in classical perturbation theory, *Les méthodes modernes de la mécanique céleste*, D. Benest, C. Froeschlé., Ed. Frontières 249-284, 1990.
- [13] Giorgilli, A. and Locatelli, U., On classical series expansion for quasi-periodic motions, *MPEJ*, 3 (5), 1-25, 1997.
- [14] A. Giorgilli and A. Morbidelli, Invariant KAM tori and global stability for Hamiltonian systems *Z. angew. Math. Phys.* 48, 102-134, 1997.
- [15] Giorgilli, A. and Skokos, C., On the stability of the Trojan asteroids, *Astronomy and Astrophysics*, 317: 254-261, 1997.
- [16] Guzzo, M., *Chaos and Diffusion in Dynamical Systems Through Stable-Unstable Manifolds*, Space Manifold Dynamics, by Perozzi, E.; Ferraz-Mello, S., Springer-Verlag New York, 2010, p. 97, 2010.
- [17] Guzzo M., Knežević Z. and Milani A., Probing the Nekhoroshev Stability of Asteroids, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, Volume 83, Issues 1-4, 2002.
- [18] Guzzo M. and Morbidelli A., Construction of a Nekhoroshev-like result for the asteroid belt dynamical system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 66, 255-292, 1997.

- [19] Guzzo M., Lega E. and Froeschlé C., On the numerical detection of the effective stability of chaotic motions in quasi-integrable systems, *Physica D*, Volume 163, Issues 1-2, 1-25, 2002.
- [20] Guzzo M., A direct proof of the Nekhoroshev theorem for nearly integrable symplectic maps, *Annales Henry Poincare*, 5, n. 6, 1013-1039, 2004.
- [21] Guzzo M., Lega E. and Froeschlé C., First Numerical Evidence of Arnold diffusion in quasi-integrable systems, *DCDS B*, vol. 5, n. 3, 2005.
- [22] Guzzo M., Lega E. and Froeschlé C., Diffusion and stability in perturbed non convex integrable systems, *Nonlinearity*, Vol. 19, 5, 1049-1067, 2006.
- [23] Guzzo M., Lega E. and Froeschlé C., A numerical study of the topology of normally hyperbolic invariant manifolds supporting Arnold diffusion in quasi-integrable systems, *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, vol. 238; p. 1797-1807, 2009.
- [24] Guzzo M., Lega E. and Froeschlé, C., First numerical investigation of a conjecture by N.N. Nekhoroshev about stability in quasi-integrable systems, *Chaos*, vol. 21, Issue 3, 2011.
- [25] Henon, M. and Heiles, C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *The Astronomical Journal*, 69,1, 7399, 1964.
- [26] Kozlov V. V., Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics, *Uspekhi Mat. Nauk*, 38:1(229), 367, 1983.
- [27] Kolmogorov, A. N., Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamiltonian function, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 98: 527530, 1954.
- [28] Lega, E. and Froeschlé, C., On the relationship between fast lyapunov indicator and periodic orbits for symplectic mappings, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 81, Issue 1/2, p. 129-147, 2001.
- [29] Lega E., Guzzo M. and Froeschlé, C., Detection of Arnold diffusion in Hamiltonian systems, *Physica D*, vol. 182, p. 179-187, 2003.

- [30] Lega, E., Froeschlé, C. and Guzzo, M., Division in Hamiltonian Quasi-Integrable Systems In Lecture Notes in Physics, vol. 729, Topics in gravitational dynamics, Benest, Froeschlé, Lega eds., Springer, 2007.
- [31] Lega, E., Guzzo, M. and Froeschlé, C., A numerical study of the size of the homoclinic tangle of hyperbolic tori and its correlation with Arnold diffusion in Hamiltonian systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 107, Issue 1-2, pp. 129-144, 2010.
- [32] Lichtenberg, A. J. and Lieberman, M. A., *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd ed., Applied Mathematical Sciences, Vol. 38, New York, NY: Springer-Verlag, 1992.
- [33] Lochak, P., Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, *Russ. Math. Surv.* 47, 57-133, 1992.
- [34] Morbidelli A. and Guzzo M., The Nekhoroshev theorem and the asteroid belt dynamical system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* Volume 65, 107-136, 1997.
- [35] Morbidelli A., *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*, London: Taylor & Francis, 2002.
- [36] Morbidelli, A., Giorgilli A., On the role of high order resonances in normal forms and in separatrix splitting, *Physica D*, 102, 195-207, 1997.
- [37] Moser, J., On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1-20, 1962.
- [38] Moser, J., *Stable and Random motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press., Princeton 1973.
- [39] Nekhoroshev, N. N., An Exponential Estimate of the Time of Stability of Nearly-Integrable Hamiltonian Systems, *Russ. Math. Surv.* 32, 1977.
- [40] Nekhoroshev, N.N., Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems, 2., *Trudy Sem. Petrovs.* 5: 5-50, 1979.
- [41] Niederman L., Exponential stability for small perturbations of steep integrable Hamiltonian systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24: pp 593-608, 2004.

- [42] Poincaré, J. H., *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris: 1892.
- [43] Pöschel, J., Nekhoroshev Estimates for. Quasi-convex Hamiltonian Systems *Math. Z.*, 213, 187216, 1993.
- [44] Pavlović R. and Guzzo, M., Fulfillment of the conditions for the application of the Nekhoroshev theorem to the Koronis and Veritas asteroid families, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 384, Issue 4, pp. 1575-1582, 2008.
- [45] Pavlović, R., Third Derivatives of the Integrable Part of an Asteroid Hamiltonian *Serbian Astronomical Journal*, vol. 174, p. 53-60, 2007.
- [46] Todorović, N., Guzzo, M., Lega, E. and Froeschlé, C., A numerical study of the stabilization effect of steepness, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 110, Issue 4, pp.389-398, 2011.
- [47] Todorović, N., Lega, E. and Froeschlé, C., Local and global diffusion in the Arnold web of a priori unstable systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 102, Issue 1-3, pp. 13-27, 2008.
- [48] Todorović, N., The Role of a Steepness Parameter in the Exponential Stability of a Model Problem. Numerical Aspects, *Serbian Astronomical Journal*, vol. 182, pp. 25-33, 2011.
- [49] Villac B. F., Using FLI maps for preliminary spacecraft trajectory design in multi-body environments, *Celest. Mech. Dynamical Astron.*, 102, 29, 2008.
- [50] Whitaker, E. T., *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, 1937.