U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

GRUPE TRANSFORMACIJA NA NORMALNIM SKORO KONTAKTNIM MNOGOSTRUKOSTIMA

\- Doktorska teza -

NEDA BOKAN

Beograd, 1979.

P R E D G O V O R

Riemann je definišući pojam n-dimenzione mnogostrukosti i rešavanjem problema metrizacije mnogostrukosti omogućio intenzivan razvoj ne-euklidske geometrije u pravcu diferencijalne geometrije. Koristeći rezultate Riemanna i Helmholtza F. Klein i S. Lie su utvrdili da su kretanja data grupom transformacija. Kasnije su se počele razmatrati i razne druge grupe transformacija na mnogostrukostima.

S druge strane kada su se na mnogostrukostima počele proučavati razne G-strukture, to je omogućilo da se na mnogostrukostima s nekom strukturom razmatraju razne klasne krivih i odgovarajuće grupe transformacija.

U ovom radu se proučavaju neke grupe transformacija na mnogostrukostima sa normalnom skoro kontaktnom strukturom. Rad se sastoji od četiri glave i to:

I Uvod
II C-holomorfno projektivne transformacije
III Grupe C-holomorfno projektivnih transformacija
IV Veza izmedju holomorfno ravnih i C-holomorfno ravnih krivih.

Glava I ima tri odeljka i sadrži poznate rezultate koji se koriste u ovom radu. U odeljku §1 daje se istorijat problema, gde se posebno ističu matematičari i njihovi rezultati koji su bitnije uticali na razvoj diferencijalne geometrije uopšte, a zatim i na onaj deo diferencijalne geometrije koji se odnosi na grupe transformacija i G-struktura koji se i u ovom radu razmatraju na nekim klasama mnogostrukosti. U odeljku §2 daju se definicije osnovnih pojmova iz diferencijalne geometrije kao što su: mnogostrukost, tangentni prostor, tenzorska polja, koneksija , torzija, krivina, kovarijantni i Liov izvod i dr. u onom obliku koji su u ovom radu. Navode se takodje i neke osnovne poznate teoreme. Definicije G-struktura koje se ovde proučavaju kao što su metrička, skoro kompleksna, skoro kontaktna struktura, neke specijalne vrste tih struktura, njihova medjusobna zavisnost i neke njihove osobine daju se u odeljku §3. U ovom odeljku definišu se i simetrične (φ, ξ, η)-koneksije u odnosu na koje je skoro kontaktna struktura kovarijantno konstantna. U mojim razmatranjima uglavnom se i bavim takvim koneksijama.

Glave II, III i IV sadrže originalne rezultate.

Osnovna definicija C-holomorfno ravne krive (kraće CH ravne krive) na skoro kontaktnom prostoru data je u (II. §1). U tom odeljku se dokazuje i osnovna teorema u kojoj se nalaze uslovi za simetrične (φ, ξ, η)-koneksije kada su CH ravne krive iste u odnosu na te koneksije. Tim uslovima se definiše i C-holomorfno projektivna transformacija (kraće CHP transformacija). U odeljku §2 odredjuje se C-holomorfno projektivni tenzor krivine (kraće CHP tenzor krivine) koji je invarijantan pri CHP transformacijama. Potrebni i dovoljni uslovi da normalna skoro kontaktna mnogostrukost dimenzije ≥ 7 bude CHP ravna daju se u odeljku § 3. CHP ravan prostor definiše se kao normalni skoro kontaktni prostor sa simetričnom (φ, ξ, η)-koneksijom koji se CHP transformacijom preslikava u ravan prostor. U odeljku § 4 razmatraju se normalni skoro kontaktni metrički prostori i dokazuje se da je za te prostore ξ -sekciona krivina jednaka nuli, a C-holomorfna sekciona krivina je konstantna. Odeljak § 5 je posvećen CH ravnim krivim u (2n+1)-dimenzionom euklidskom prostoru. Medju primerima CH ravnih krivih koje se dobijaju u ovom odeljku je i kružna zavojnica.

U glavi III razmatraju se grupe CHP transformacija. Odeljak § 1 ove glave posvećen je esencijalno afinim grupama CHP transformacija. Prvo se definiše esencijalno afina grupa CHP transformacija, a zatim se nalaze uslovi kada je grupa CHP transformacija esencijalno afina. U odeljku § 2 razmatraju se infinitezimalne CHP transformacije i specijalno nalazi algebra matrica kojoj je izomorfna izotropna Liova algebra vektora koji generališu infinitezimalne CHP transformacije.

Glava IV ima samo jedan odeljak u kome se ispituje veza izmedju CH ravnih krivih na normalnom skoro kontaktnom prostoru i H ravnih krivih na hiperpovrši sa skoro kompleksnom strukturom i veza izmedju H ravnih krivih na skoro kompleksnom prostoru i CH ravnih krivih na hiperpovrši sa skoro kontaktnom strukturom. Veza izmedju pomenutih krivih se izražava pomoću drugog fundamentalnog tenzora.

Literatura koja je navedena na kraju rada sadrži samo one knjige i radove na koje se u ovom radu pozivam. Medju tim radovima i knjigama ima i onih koji sadrže potpuniji pregled literature koja se odnosi na rezultate dobijene do sada u oblasti grupa transformacija na mnogostrukostima sa G-strukturama. Na odgovarajućim mestima u ovom radu to je posebno istaknuto.

P Pozivanje na formule, definicije i teoreme je uobičajeno: (II, 2.5) označava formulu (5) odeljka § 2 glave II, (2.5) označava formulu (5) odeljka § 2 iste glave i (5) označava formulu (5) istog odeljka. Pri pozivanju na literaturu odgovarajući broj stavlja se u uglaste zagrade.

Ovom prilikom želim da se zahvalim pre svega prof. dr. Milevi Prvanović, koja mi je predložila da razmatram ove probleme, a kasnije u toku rada dala niz korisnih sugestija. Zahvaljujem se i docentu dr. Dragomiru Lopandiću koji mi je pored ostalog ukazao na najnoviju literaturu iz ove oblasti, a i na neke činjenice koje se odnose na istorijski deo ovog problema, kao i asistentu dr. Ljubomiru Protiću koji mi je pomogao u pripremanju odeljka §5 glave II.

Zahvaljujem se i svim drugim kolegama koji su mi pružili podršku u radu, a naročito prof. dr. Zagorki Šnajder.

Beograd, 4. juna 1979. **Neda Bokan**

S A D R Ž A J

Strana

GLAVA I. UVOD 6

1. Istorijat problema 6
2. Diferencijabilne mnogostrukosti 10
3. Strukture na mnogostrukostima 25

GLAVA II. C-HOLOMORFNO PROJEKTIVNE TRANSFORMACIJE.. 33

1. C-holomorfno projektivne transformacije.. 33
2. C-holomorfno projektivni tenzori krivine. 41
3. C-holomorfno projektivno ravni prostori.. 50
4. Normalni skoro kontaktni metrički prostori 62
5. C-holomorfno ravne krive u euklidskom prostoru 69

GLAVA III. GRUPE C-HOLOMORFNO PROJEKTIVNIH TRANSFORMACIJA 81

1. Esencijalno afine grupe C-holomorfno projektivnih transformacija 81
2. Infinitezimalne C-holomorfno projektivne transformacije 86

GLAVA IV. VEZA IZMEDJU HOLOMORFNO RAVNIH I C-HOLOMORFNO RAVNIH KRIVIH 102

1. Veza izmedju holomorfno ravnih i C-holomorfno ravnih krivih 102

GLAVA I

UVOD

§1. ISTORIJAT PROBLEMA

Prema proceni mnogih istoričara matematike, kao npr. R. Bonola [10] , H. Reichardt [71] , Bernhard Riemann [1826--1866] je definišući pojam n-dimenzione mnogostrukosti 1854. godine u svom habilitacionom predavanju na Filozofskom fakultetu u Götingen-u (objavljeno tek 1876. godine u sabranim delima [72]) omogućio veoma intenzivan razvoj ne-euklidske geometrije u pravcu diferencijalne geometrije.

U istom predavanju Riemann je dao i rešenje problema metrizacije mnogostrukosti uopštavajući pojam metričke forme i definisao je pojam krivine. Helmholtz [1821-1894] se takodje bavio problemima osnova geometrije [37] , [38] , [39] . On je razradio ideju zasnivanja geometrije pomoću kretanja i s tim u vezi kretanje je dao sa šest aksioma. Dalje je razradio Kelijevu ideju iz 1864. da invarijante transformacija razmatra pomoću brojeva.

Problem Riemann-Helmholtz-a pažljivo je ispitivao S. Lie [1842-1899] . On je pošao od osnovne ideje, koju je uočio Klein [49] u Helmholcovom radu, da podudarnost dve figure znači da se one mogu transformisati jedna u drugu s obzirom na neku transformaciju tačaka u prostoru i da osobine, na osnovu kojih podudarnost ima logički smisao jednakosti, zavise od činjenice da su kretanja data grupom transformacija.

Na taj način S. Lie je problem Riemann-Helmholtz-a redukovao na sledeći oblik: Odrediti sve neprekidne grupe u prostoru koje u ograničenoj oblasti imaju osobinu kretanja.

Kada se ove osobine, koje zavise od slobodnog kretanja linija i elemenata površi kroz tačku, izraze u pogodnom obliku, dobijaju se tri tipa grupa koje karakterišu tri geometrije: Euklidovu, Lobačevski-Bolyaievu i Rimanovu [53] , [64] .

Kasnije su se počele razmatrati i razne druge grupe transformacija koje zadovoljavaju uslov da je neki geometrijski objekt, koji karakteriše diferencijalnu geometriju, invarijantan u odnosu na tu grupu transformacija. Medju tim grupama veoma mnogo su proučavane grupe izometrija Rimanovog prostora [12] , [22] , [33] , [42] , [45] , [48] , [77] , [93] , [94] , [95] , [96] , [97] , [98] , [112] , [114] itd., grupe afinih transformacija u afino povezanom prostoru [19] , [21] , [23] , [25] , [26] , [27] , [56] , [57] , [60] , [61] , [91] , [95] , [99] , [113] itd., grupe projektivnih transformacija u afino povezanom prostoru [20] , [23] , [24] , [44] , [46] , [101] itd., grupe konformnih transformacija [46] , [77] i dr.

Pojam subprojektivnih transformacija i subprojektivnih kolineacija definisao je K. Yano [111] na sledeći način. Neka je $\mathfrak{M}$ n-dimenziona povezana mnogostrukost sa simetričnom afinom koneksijom $\Gamma_{j\ i}^{h}$ $(h,j,i,\ \dots = 1,2,3,\ \dots ,n)$ i $x^h = x^h(t)$ kriva na $\mathfrak{M}$ koja nije geodezijska kriva. Tada vektori $\frac{dx^h}{dt}$ i $\frac{\delta^2 x^h}{dt^2}$ odredjuju dvodimenzioni vektorski prostor tkz. oskulatornu ravan. Diferencijalne jednačine krive $x^h = x^h(t)$, čija oskulatorna ravan sadrži dato vektorsko polje v u svakoj tački, mogu da se napišu u obliku

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma_{j\ i}^{h} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = \alpha(t)\frac{dx^h}{dt} + \beta(t)v^h .$$

Ove krive K.Yano je nazvao subgeodezijske krive prostora $\mathfrak{M}$ s obzirom na vektorsko polje v . Za takav geometrijski objekat on je dokazao da važi sledeća

TEOREMA A. Dve simetrične afine koneksije $\Gamma_{j\ i}^{\ h}$ i $\bar{\Gamma}_{j\ i}^{\ h}$ imaju iste sve subgeodezijske linije ako i samo ako relacija

$$\bar{\Gamma}_{j\ i}^{\ h} = \Gamma_{j\ i}^{\ h} + \varrho_j\, \delta_i^{\ h} + \varrho_i\, \delta_j^{\ h} + f_{ji} v^h$$

važi za neku 1-formu ϱ i simetričnu kovarijantno tenzorsko polje **f**.

Prethodnom relacijom je definisana subprojektivna transformacija. Dalje je Yano razmatrao infinitezimalnu transformaciju $\bar{x}^h = x^h + \varepsilon v^h$ koja transformiše neku subgeodezijsku liniju u subgeodezijsku liniju s obzirom na isto vektorsko polje v. Takva infinitezimalna transformacija se naziva subprojektivna kolineacija. Za takvu kolineaciju Yano je dokazao da važi

TEOREMA B. Infinitezimalna transformacija $\bar{x}^h = x^h + \varepsilon v^h$ je subprojektivna kolineacija ako i samo ako relacija

$$\mathcal{L}_v\, \Gamma_{j\ i}^{\ h} = \varrho_j\, \delta_i^{\ h} + \varrho_i\, \delta_j^{\ h} + f_{ji} v^h$$

važi za neku formu ϱ i simetrično kovarijantno tenzorsko polje f, gde $\mathcal{L}_v$ označava operator Liovog izvoda s obzirom na v.

S druge strane, 50-tih godina ovog veka počele su se intenzivno proučavati G-strukture na mnogostrukostima 4 , [5] , [6] , [7] , [13] , [14] , [28] , [32] , [52] , itd. Medju jugoslovenskim matematičarima G-strukture su razmatrali M. Prvanović [66] , [67] , [68] , [69] i V. Petrović [63] . To je omogućilo da se na mnogostrukostima[1] s nekom strukturom kao npr. skoro kompleksnom, skoro produkt, skoro kontaktnom strukturom i dr. razmatraju razne klasne krivih i odgovarajuće grupe transformacija. Tako su T. Otsuki i Y. Tashiro [62] definisali holomorfno ravne krive $x^h = x^h(t)$ na Kähler-ovom prostoru sa skoro kompleksnom strukturom F kao krive koje zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \left\{ {h \atop j\ i} \right\} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = \alpha(t)\frac{dx^h}{dt} + \beta(t)F_i^{\ h}\frac{dx^i}{dt}$$

i ispitivali holomorfne projektivne transformacije za koje su ove krive invarijantne. Y. Tashiro [88] je definisao holomorfno ravne krive na skoro kompleksnoj mnogostrukosti sa simetričnom F-koneksijom, tj. simetričnom afinom koneksijom u odnosu na koju je skoro kompleksna struktura F kovarijantno konstantna kao i holomorfno projektivnu korespodenciju. Dalje je dobio holomorfno projektivni tenzor krivine P koji je invarijantan pri holomorfno projektivnim korespondencijama i okarakterisao je Kählerov prostor konstantne holomorfne sekcione krivine odgovarajućim oblikom za tenzor P. S. Ishihara [47] je razmatrao holomorfno projektivne transformacije na prostorima sa polu-simetričnom F-koneksijom i infinitezimalne holomorfno projektivne transformacije kao i grupe tih transformacija. Transformacije takvog tipa razmatrali su i S. Tachibana i S. Ishihara [87] na Kähler-ovim prostorima i dobili više interensantnih rezultata.

Holomorfno projektivne transformacije u lokalnim produkt prostorima razmatrala je M. Prvanović 66 . Ona je proučavala te transformacije i u nekim specijalnim lokalnim produkt prostorima: lokalni dekompozabilni Rimanovi prostori i hiperbolički Kelerovi prostori. Neke rezultate u ovoj oblasti dobio je i B. B. Sinha [82].

G. G. Markov i A. P. Norden [55] ispitivali su istovremeno holomorfno projektivne transformacije za prostore eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa.

Pomenimo zatim da su u ovoj oblasti dalje istraživali M. P. Singh Rathore i R. S. Mishra [81], S. S. Singh [78], [79], [80].

Holomorfno subravne krive u raznim klasama skoro kompleksnih mnogostrukosti definisali su i ispitivali T. Adati [1] S. Yamaguchi i T. Adati [105], [106], [107], S. Yamaguchi i W. N. Yu [110] S. Yamaguchi [103], [104], S. Yamaguchi i S.Sato [108], [109], S. Sato [76].

Koristeći klasičnu definiciju tenzora i koneksije u radu [9] definisali smo C-holomorfno ravne krive i C-holomorfno projektivne transformacije na normalnim skoro kontaktnim mnogostrukostima sa simetričnom (φ, ξ, η)-koneksijom, gde je (φ, ξ, η) skoro kontaktna struktura toga prostora. Dalje smo našli C-holomorfno projektivni tensor koji je invarijantan pri C-holomorfno projektivnim transformacijama i utvrdili kada se normalni skoro kontaktni prostor pri CHP transformacijama preslikava u ravan prostor. Ispitivali smo i normalni skoro kontaktni metrički prostor.

U ovom radu se ti rezultati i niz drugih rezultata dobija koristeći koneksiju Koszul-a i pojam tenzora kao polilienarnog preslikavanja.

§ 2. DIFERENCIJABILNE MNOGOSTRUKOSTI

Osnovni pojmovi iz diferencijalne geometrije kao što su mnogostrukost, tangentni prostor, tenzor, koneksija i dr. mogu na razne načine da se definišu [11], [16], [17], [34], [40], [50], [51], [54], [58], [70], [77], [83], [84], [85], [100], [102]. Zbog toga u ovom odeljku dajemo definicije pojmova u onom obliku koji koristimo u našim razmatranjima. Navodimo takodje neke osnovne teoreme koje koristimo.

Topološku n-dimenzionu mnogostrukost $\mathfrak{M}$ definišemo kao Hausdorfov topološki prostor sa prebrojivom bazom otvorenih skupova tako da za svaku tačku $p \in \mathfrak{M}$ postoji okolina U koja je homeomorfna nekom otvorenom skupu u n-dimenzionom afinom prostoru A. Ako sa φ označimo pomenuti homeomorfizam, tada par (U, φ) nazivamo koordinatna okolina. Dve koordinatne okoline (U, φ) i (V, ψ) su C^∞ povezane ako za $U \cap V \neq \emptyset$ funkcije $\varphi \cdot \psi^{-1}$ i $\psi \cdot \varphi^{-1}$ su difeomorfizmi otvorenih skupova $\varphi(U \cap V)$ i $\psi(U \cap V)$ iz A. Diferencijabilna (ili C^∞ ili glatka) struktura na topološkoj mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ je familija $\mathfrak{U} = \{U_\alpha , \varphi_\alpha\}$ koordinatnih okolina takvih da

(1) skupovi U_α pokrivaju $\mathfrak{M}$,

(2) svake dve koordinatne okoline $(U_\alpha , \varphi_\alpha)$ i $(U_\beta , \varphi_\beta)$ su C^∞ - povezane,

(3) ma koja koordinatna okolina (V, ψ) koja je C^∞ - povezana sa svakom koordinatnom okolinom iz $\mathfrak{U}$, pripada $\mathfrak{U}$.

Diferencijabilna (ili C^∞ ili glatka) mnogostrukost je topološka mnogostrukost zajedno sa diferencijabilnom strukturom.

Označimo sa f funkciju definisanu na otvorenom skupu W_f glatke mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ (može i na celom $\mathfrak{M}$), čija je oblast vrednosti polja realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili kraće $f : W_f \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : W_f \to \mathbb{R}$ C^∞ funkcija ako svaka tačka $p \in W_f$ leži u nekoj koordinatnoj okolini (U, φ) tako da je funkcija $\hat{f} = f \cdot \varphi^{-1}$ C^∞ funkcija na skupu $\varphi(W_f \cap U)$.

Pretpostavimo, dalje, da su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dve glatke mnogostrukosti, $W \subset \mathfrak{M}$ neki otvoren podskup i $F : W \to \mathfrak{N}$ neko preslikavanje. Preslikavanje $F : W \to \mathfrak{N}$ je C^{∞} *preslikavanje* podskupa W u $\mathfrak{N}$ ako za svaku tačku $p \in W$ postoje koordinatne okoline (U, φ) od p i (V, ψ) od $F(p)$ tako da je $F(U) \subset V$ i $\psi . F . \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ je C^{∞} preslikavanje.

C^{∞} preslikavanje $F : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ glatkih mnogostrukosti je *difeomorfizam* ako je to homemorfizam i F^{-1} je C^{∞} preslikavanje. U ovom slučaju mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ su *difeomorfne*.

Koristeći ove, do sada, definisane pojmove možemo uvesti i pojam tangentnog vektora prostora u nekoj tački mnogostrukosti. Označimo sa $C^{\infty}(U)$ kolekciju svih C^{∞} funkcija na otvorenom podskupu U (uključujući specijalan slučaj $U = \mathfrak{M}$). Ako se definišu, na uobičajeni način, operacije "sabiranja" i "množenja" funkcija lako se dokazuje da je $C^{\infty}(U)$ komutativna algebra nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. Kao i u drugim slučajevima, $\mathbb{R}$ može da se identifikuje, na prirodan način, sa konstantnim funkcijama i konstanta 1 sa jedinicom, Za datu tačku $p \in \mathfrak{M}$ definišemo $C^{\infty}(p)$ kao algebru C^{∞} funkcija čiji domen definisanosti uključuje neku otvorenu okolinu tačke p, pri čemu funkcije identifikujemo ako su njihove vrednosti iste na nekoj okolini tačke p. Objekte tako dobijene zovemo "jezgrima" C^{∞} funkcija. Birajući proizvoljnu koordinatnu okolinu (U, φ) tačke p lako se dokazuje da je $\varphi^{*}: C^{\infty}(\varphi(p)) \to C^{\infty}(p)$ dato sa $\varphi^{*}(f) = f \cdot \varphi$ izomorfizam algebre "jezgara" C^{∞} funkcija u $\varphi(p) \in A^{n}$ na algebru $C^{\infty}(p)$.

Definišimo tangentni prostor $T_p(\mathfrak{M})$ mnogostrukosti u tački p kao skup svih preslikavanja $X_p : C^{\infty}(p) \to \mathbb{R}$, takvih da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $f, g \in C^{\infty}(p)$ važe sledeći uslovi

$$(1)\quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g) \\ \text{(ii)} & X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g) \end{array}$$

Operacije "sabiranja" i "množenja skalarom" u $T_p(\mathfrak{M})$ definišu sa relacijama

$$(2)\quad \begin{array}{c} (X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p F \\ (\alpha X_p)f = \alpha(X_p f). \end{array}$$

$T_p(\mathfrak{M})$ je sa ovako definisanim operacijama vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tangentni vektor na $\mathfrak{M}$ u tački p je $X_p \in T_p(\mathfrak{M})$. Prostor $T_p(\mathfrak{M})$ je i afini prostor. Tačke toga prostora su prema [18] vektori iz $T_p(\mathfrak{M})$, a svakom paru vektora X_p, Y_p koje smatramo tačkama odgovara vektor $Y_p - X_p \in T_p(\mathfrak{M})$.

Za tangentne prostore važi:

Teorema 1. Neka je $F : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ C^∞ preslikavanje mnogostrukosti. Tada je za $p \in \mathfrak{M}$ preslikavanje $F^*: C^\infty(F(p)) \to C^\infty(p)$, definisano relacijom $F^*(f) = f \cdot F$, homomorfizam algebri i indukuje homomorfizam tangentnih prostora $F_*: T_p(\mathfrak{M}) \to T_{F(p)}\mathfrak{N}$, definisan sa $F_*(X_p)f = X_p(F^*f)$, zbog čega se $F_*(X_p)$ predstavlja kao preslikavanje algebre $C^\infty(F(p))$ u $\mathbb{R}$. Kada je $F : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ identičko preslikavanje tada su F^* i F_* identični izomorfizmi. Ako je $H = G \cdot F$ kompozicija C^∞ preslikavanja tada je $H^* = F^* \cdot G^*$ i $H_* = G_* \cdot F_*$.

Da bismo mogli lakše objasniti strukturu prostora $T_p(\mathfrak{M})$ navodimo i sledeći korolar.

<u>Korolar 2.</u> Ako je $F : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ difeomorfizam mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ na otvoren skup $U \subset \mathfrak{N}$ i $p \in \mathfrak{M}$, tada je $F_*: T_p(\mathfrak{M}) \to T_{F(p)}(\mathfrak{N})$ izomorfizam i na "na".

Kako je svaki otvoreni podskup mnogostrukosti opet (pod)-mnogostrukost iste dimenzije tada za koordinatnu okolinu U, φ mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ koordinatno preslikavanje φ indukuje izomorfizam $\varphi_* : T_p(\mathfrak{M}) \to T_{\varphi(p)}(A^n)$ tangentnog prostora u svakoj tački $p \in U$ na $T_a(A^n)$, $a = \varphi(p)$. Preslikavanje φ^{-1}, u drugu ruku, indukuje izomorfizam tangentnog prostora $T_a(A^n)$ na $T_p(\mathfrak{M})$. Slike $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, $i = 1, \dots, n$ prirodne baze $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ u svakoj tački $a \in \varphi(U) \in A^n$ odredjuju u tački $p = \varphi^{-1}(a) \in \mathfrak{M}$ bazu $E_{1p}, \dots, E_{np}$ tangentnog prostora $T_p(\mathfrak{M})$. Ovu bazu zovemo koordinatni sistem.

Imajući u vidu prethodno istaknute činjenice može se dokazati da važi:

Korolar 3. U svakoj koordinatnoj okolini U, φ na mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ postoji odgovarajuća prirodna baza $E_{1p}, \dots, E_{np}$ tangentnog prostora $T_p(\mathfrak{M})$ za svaku tačku $p \in U$, pa je zbog toga $\dim T_p(\mathfrak{M}) = \dim \mathfrak{M}$. Neka je f C^∞ funkcija definisana u okolini tačke p i $\hat{f} = f \cdot \varphi^{-1}$ njen oblik u lokalnim koordinatama u odnosu na U, φ. Tada je $E_{ip}f = (\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i})_{\varphi(p)}$. Specijalno, ako je $x^i(q)$ i-ta koordinatna funkcija, tada je $X_p x^i$ i-ta komponenta vektora X_p u odnosu na ovu bazu, tj.

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} (X_p x^i) E_{ip} .$$

Koristeći definiciju u teoremi 1. imamo $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, tj.

$$E_{ip}f = (\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i}))f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \cdot \varphi^{-1}) \Big|_{x = \varphi(p)}$$

Ako je f i-ta koordinatna funkcija, $f(q) = x^i(q)$

i $X_p = \sum \alpha^j E_{jp}$, tada je

$$X_p x^i = \sum_j \alpha^j (E_{jp} x^i) = \sum_j \alpha^j \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)} = \alpha^i$$

Razmotrimo sada pojam C^∞ krive na mnogostrukosti $\mathfrak{M}$. Označimo sa $\mathfrak{M} = (a,b)$ otvoreni interval realne prave $A(=A^1)$. Tada je C^∞ <u>kriva</u> preslikavanje $F : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$. Za dato $t_o \in \mathfrak{M}$, $a < t_o < b$, d/dt u tački t_o je baza prostora $T_{t_o}(\mathfrak{M})$. Pretpostavimo da je $p = F(t_o)$ i $f \in C^\infty(p)$, tada je $F_*(d/dt)$ odredjen svojim vrednostima na svim funkcijama f:

(3) $$F_*\left(\frac{d}{dt}\right) f = \left(\frac{d}{dt}(f \cdot F)\right)_{t_o}.$$

Ovaj vektor zovemo <u>tangentni vektor</u> krive u tački p.

Kako u svakoj tački p glatke mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ postoji tangentni prostor $T_p(\mathfrak{M})$ možemo definisati novu funkciju - vektorsko polje X klase C^∞ na $\mathfrak{M}$ čija je oblast vrednosti $T(\mathfrak{M}) = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}} T_p(\mathfrak{M})$. Dakle, vektorsko polje X klase C^∞ na mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ je funkcija koja svaku tačku $p \in \mathfrak{M}$ preslikava u neki vektor $X_p \in T_p(\mathfrak{M})$ čije su komponente u sistemu lokalnih koordinata U, φ funkcije klase C^∞ na domenu U koordinata.

Može se dokazati da je $T(\mathfrak{M})$ glatka mnogostrukost, ako je $\mathfrak{M}$ glatka mnogostrukost. U tom slučaju X je C^∞ preslikavanje $X : \mathfrak{M} \to T(\mathfrak{M})$ jedne glatke mnogostrukosti u drugu.

Označimo sa $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ skup svih C^∞ vektorskih polja koja su definisana na glatkoj mnogostrukosti $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, jer ako $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ tada i $\alpha X + \beta Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. U stvari svaka linearna kombinacija vektorskih polja sa koeficijentima koji su C^∞ funkcije na $\mathfrak{M}$ je opet C^∞ vektorsko polje, tj. ako $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$

i $f,g \in C^\infty(\mathfrak{M})$ tada i $Z = fX + gY$, $Z \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ pri čemu se definiše $Z_p = f(p)X_p + g(p)Y_p$ za svako $p \in \mathfrak{M}$. Prema tome $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i modul nad $C^\infty(\mathfrak{M})$.

Za vektorska polja $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ definiše se <u>komutator</u> tih vektorskih polja X, Y relacijom

(4) $$[X,Y] = XY - YX$$

pri čemu je

(5) $$(XY - YX)_p f = X_p(Y_f) - Y_p(Xf), \quad f \in C^\infty(p).$$

Može se dokazati da $[X,Y] \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$.

Označimo sa $T_p^*(\mathfrak{M})$ dualan prostor tangentnog prostora $T_p(\mathfrak{M})$. Elementi prostora $T_p^*(\mathfrak{M})$ su C^∞ linearna preslikavanja $\sigma_p : T_p(\mathfrak{M}) \to \mathbb{R}$ i njihove vrednosti na vektoru $X_p \in T_p(\mathfrak{M})$ se označavaju na jedan od sledećih načina $\sigma_p(X_p)$, $X_p(\sigma_p)$, $<\sigma_p, X_p>$ ili $<X_p, \sigma_p>$. Za datu bazu $E_{1p}, \dots, E_{np}$ prostora $T_p(\mathfrak{M})$, postoji dualna baza $\omega_p^1, \dots, \omega_p^n$ koja zadovoljava, prema definiciji, uslov $\omega_p^i(E_{jp}) = \delta_j^i$. Elemente prostora $T_p^*(\mathfrak{M})$, koji ima strukturu vektorskog prostora, nazivamo <u>1-forme</u> ili <u>kovektori</u>. Kao i u slučaju vektorskih polja i ovde razmatramo <u>polja 1-formi</u> koje označavamo sa $\sigma, \lambda, \mu, \dots$ a njihove vrednosti u tački p sa $\sigma_p, \lambda_p, \mu_p, \dots$. Ako je σ polje 1-formi i X vektorsko polje na otvorenom podskupu $U \in \mathfrak{M}$, tada $\sigma(X)$ definiše funkciju na U pri kojoj se svaka tačka $p \in U$ preslikava u broj $\sigma(X)(p) = \sigma_p(X_p)$. Prostor $T_p^*(\mathfrak{M})$ naziva se i <u>kotangentni prostor</u>.

Kovarijantni tenzori reda r ili <u>r-forme</u> su C^∞ polilinearna preslikavanja $\sigma_p : \underbrace{T_p(\mathfrak{M}) \times T_p(\mathfrak{M}) \times \dots \times T_p(\mathfrak{M})}_{r \text{ puta}} \to \mathbb{R}$. Slično, kao u prethodnim slučajevima dobija se polje r-formi.

Dalje možemo da definišemo <u>tenzore kovarijantnog</u>

reda r i kontravarijantnog reda k- To su C^∞ polilinearna preslikavanja

$$(6) \qquad P : \underbrace{T_p(\mathfrak{M}) \times \ldots \times T_p(\mathfrak{M})}_{r \text{ puta}} \times \underbrace{T_p^*(\mathfrak{M}) \times \ldots \times T_p^*(\mathfrak{M})}_{k \text{ puta}} \to R$$

Na uobičajen način se definišu operacije sabiranja i množenja skalarom tako da tenzori obrazuju vektorski prostor $(T_p)_r^k$ dimenzije n^{r+k}. Tenzori su i C^∞ polilinearna preslikavanja čija je oblast vrednosti neki vektorski prostor izgradjen od tangentnog prostora $T_p(\mathfrak{M})$. Pomenimo da je jedan od takvih tenzora i tenzor krivine o kome će kasnije biti reči.

Možemo definisati slabu direktnu sumu $(T_p)_*^*$ vektorskih prostora $(T_p)_r^k$ relacijom

$$(7) \qquad (T_p)^* = \sum_{r,k=0}^{\infty} (T_p)_r^k$$

Ako $P_p \in (T_p)_r^k$, $Q_p \in (T_p)_s^1$ i $P_p \otimes Q_p$ definišimo na sledeći način

$$(8) \qquad (P_p \otimes Q_p)(\omega^1, \ldots , \omega^{r+s} , X_1, \ldots , X_{k+1}) =$$

$$= P_p(\omega^1,\ldots,\omega^r,X_1,\ldots, X_k)Q_p(\omega^{r+1},\ldots,\omega^{r+s},X_{k+1},\ldots,X_{k+1})$$

tada se može dokazati da je $(T_p)_*^*$ algebra. Ako uvedemo oznaku

$$(9) \qquad T_*^*(\mathfrak{M}) = \bigcup_{p\in\mathfrak{M}} (T_p)_*^*$$

slično, kao u prethodnim slučajevima definišu se tenzorska polja kao preslikavanja čiji je domen $\mathfrak{M}$, a oblast vrednosti $T_*^*(\mathfrak{M})$.

Kako vektorska polja, odnosno polja 1-formi i najopštije tenzorska polja obrazuju vektorske prostore mogu se definisati i razni endomorfizmi tih vektorskih prostora. Jedan od endomorfizama je i derivacija.

Dajemo prvo definiciju derivacije vektorskog prostora $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$. Endomorfizam

(10) $$\mathcal{D} : \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$$

je <u>derivacija</u> ako je zadovoljen i uslov

(11) $$\mathcal{D}(XY) = (\mathcal{D}X)Y + X(\mathcal{D}Y)$$

za svako $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$. Odavde, specijalno za $f \in C^{\infty}(\mathfrak{M})$ imamo

(12) $$\mathcal{D}(fX) = \mathcal{D}(f)X + f\mathcal{D}(X)$$

Zbog ove činjenice, definiciju možemo da proširimo i na prostor polja 1-formi, koji označavamo i sa $\mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$. Derivacija $\mathcal{D}$ prostora $(\mathfrak{X}(\mathfrak{M}), \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M}), C^{\infty}(\mathfrak{M}))$ je prethodno definisani endomorfizam koji sem relacija (11) i (12) zadovoljava sledeće relacije

(13) $$\mathcal{D}(f\omega) = \mathcal{D}(f)\omega + f\mathcal{D}(\omega)$$

(14) $$\mathcal{D}<\omega, X> = <\mathcal{D},\omega X> + <\omega, \mathcal{D}X>$$

i uslov da je $\mathcal{D}: \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$ endomorfizam pri čemu je $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$, $f \in C^{\infty}(\mathfrak{M})$.

Može se dokazati da se derivacija $\mathcal{D}$ vektorskog prostora $\mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$ može na jedinstven način proširiti tako da to bude derivacija prostora $(\mathfrak{X}(\mathfrak{M}), \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M}), C^{\infty}(\mathfrak{M}))$. Sem toga, dokazuje se da se derivacija $\mathcal{D}$ na jedinstven način može proširiti na ceo prostor tenzorskih polja $T^*_*(\mathfrak{M})$, tako da za $P \in T^*_*(\mathfrak{M})$ imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(P(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_k)) &= (\mathcal{D}P)(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_k) + \\ (15) \quad &+ \sum_{\mu=1}^{r} P(\omega^1,\dots,\mathcal{D}\omega^r,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_k) + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{k} P(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,\mathcal{D}Xr,\dots,X_k) \end{aligned}$$

Ako su $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ dve derivacije tada je i $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]$, komutator ta dva operatora, takodje derivacija.

Jedan od veoma važnih pojmova u diferencijalnoj geometriji je koneksija. Ona može na razne načine da se definiše. Ovde dajemo definiciju koneksije Koszula koju koristimo u našem radu.

<u>C^∞ koneksija</u> ∇ na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je preslikavanje $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, (u oznaci : $\nabla : (X,Y) \longrightarrow \nabla_X Y$) takvo da za svako $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ važe sledeće jednakosti

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\
&\text{b)} \quad \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\
&\text{c)} \quad \nabla_{fX} Y = f\,\nabla_X Y \\
&\text{d)} \quad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\,\nabla_X Y
\end{aligned}
$$

Ako definišemo preslikavanje

$$\nabla_X : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \text{ tako}$$

da je

$$Y \longrightarrow \nabla_X Y$$

za svako $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, koristeći (16) lako se dokazuje da je ∇_X linearno preslikavanje vektorskog prostora $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ na isti prostor i da važe relacije (11), (12). Prema tome preslikavanje ∇_X je derivacija. Zbog izuzetnog geometrijskog značaja operatora ∇_X nazivamo ga i <u>kovarijantni izvod u pravcu X</u> (s obzirom na datu koneksiju).

Ako je P ma koje tenzorsko polje kovarijantni izvod ∇P definišemo relacijom

(17) $(\nabla P)(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_{k+1})=(\nabla_{X_1}P)(\omega^1,\dots,\omega^r,X_2,\dots,X_{k+1})$.

Imajući u vidu prethodna razmatranja jasno je kako se kovarijantni izvod u pravcu X proširuje na $T^*_*(\mathfrak{M})$.

Označimo sa $\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}$ hiperpovrš glatke mnogostrukosti $\mathfrak{M}^n$ i sa i smeštanje hiperpovrši $\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}$ u $\mathfrak{M}^n$

$$i(\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}) \longrightarrow \mathfrak{M}^n$$

Možemo da identifikujemo $i(\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1})$ sa $\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}$

$$i(\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}) = \widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}$$

i sa B da označimo diferencijal preslikavanja i

$$di = B$$

Ako je $q = i(p)$, $p\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}$, $q\in\widetilde{\mathfrak{M}}^n$ tada tangentni prostor $T_q\mathfrak{M}^n$ možemo predstaviti na sledeći način

(18) $$T_q\mathfrak{M}^n = B(T_p\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}) \oplus \lambda N_q$$

gde je $\lambda\in\mathbb{R}$, $N_q\in T_q\mathfrak{M}^n$ i $N_q\notin B(T_p\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1})$. Vektor N_q zovemo pseudonormala. Može se dokazati da važi Gausova formula

(19) $$\nabla_{BX}BY = B(\widetilde{\nabla}_X Y) + h(X,Y)N$$

gde je $\widetilde{\nabla}$ koneksija na $\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}$ indukovana koneksijom ∇, $X,Y\in\mathfrak{X}(\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1})$ $h(X,Y)$ je druga fundamentalna forma.

Kako koneksija odredjuje mnoge geometrijske osobine mnogostrukosti i kako koneksija definisana na mnogostrukosti $\mathfrak{M}^n$ indukuje koneksiju na hiperpovrši $\widetilde{\mathfrak{M}}^{n-1}$ to znači da i neke geometrijske osobine hiperpovrši zavise od osobina mnogostrukosti. Ta medjusobna zavisnost je proučavana u mnogim radovima, pomenimo samo neke od njih [8], [41], [42] itd.

<u>Torzija</u> koneksije ∇ je preslikavanje $T : \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \times \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ definisano relacijom

(20) $$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

gde $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$.

Ako je $T(X,Y) = 0$ za svako $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ kažemo da je koneksija ∇ <u>bez torzije</u> ili da je koneksija ∇ <u>simetrična</u>.

Označimo sa $\mathcal{L}(\mathfrak{X}(\mathfrak{M}), \mathfrak{X}(\mathfrak{M}))$ realni vektorski prostor endomorfizama prostora $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ na $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$. Tada se <u>krivina</u> koneksije ∇ na mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ definiše kao preslikavanje

$$R : \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \times \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \to \mathcal{L}(\mathfrak{X}(\mathfrak{M}), \mathfrak{X}(\mathfrak{M})),$$

tako da je

(21) $$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

$R(X,Y)Z$ je polje tenzora kovarijantnog reda 3 i kontravarijantnog reda 1 i naziva se <u>polje tenzora krivine</u>.

Ričijeva transformacija u tački $p \in \mathfrak{M}$ s obzirom na par vektora $Y_p, Z_p \in T_p(\mathfrak{M})$ je linearna transformacija

$$R_{Y_p,Z_p} : T_p(\mathfrak{M}) \to T_p(\mathfrak{M})$$

definisana formulom

$$R_{Y_p,Z_p}(X_p) = R(X_p,Y_p)Z_p$$

<u>Ričijev tenzor</u> $\mathfrak{R}(Y_p,Z_p)$ mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ u tački p je bilinearno preslikavanje

$$T_p(\mathfrak{M}) \times T_p(\mathfrak{M}) \to \mathbb{R}$$

dato relacijom

$$\mathfrak{R}(Y_p, Z_p) = \operatorname{tr} R_{Y_p, Z_p} \tag{22}$$

gde smo sa tr označili trag linearnog preslikavanja.

Ako je P ma koje tenzorsko polje i ∇ koneksija, tada $(\nabla P)(X)$ i $(\nabla\nabla P)(X,Y)$ označava da su X odnosno X,Y prvi kontravarijantni argumenti redom u ∇P i $\nabla\nabla P$. Znači $(\nabla P)(X)$ i $(\nabla\nabla P)(X,Y)$ su tenzorska polja istog tipa kao i polje P. Za tenzorsko polje P važe sledeće identičnosti

$$\nabla_X \nabla_Y P - \nabla_Y \nabla_X P - \nabla_{[X,Y]} P = \mathcal{D}_{R(X,Y)} P \tag{23}$$

$$(\nabla\nabla P)(X,Y) - (\nabla\nabla P)(YX) = \mathcal{D}_{R(X,Y)} P - \nabla_{T(X,Y)} P \tag{24}$$

a ako je koneksija ∇ bez torzije relacija (24) ima jednostavniji oblik

$$(\nabla\nabla P)(X,Y) - (\nabla\nabla P)(Y,X) = \mathcal{D}_{R(X,Y)} P \ . \tag{25}$$

Napomenimo ovde da je

$$\mathcal{D}_{R(X,Y)} = \nabla_X, \nabla_Y - \nabla_{[X,Y]}$$

derivacija na mešovitoj tenzorskoj algebri $T^*_*(\mathfrak{M})$ indukovana derivacijom $\mathcal{D}_{R(X,Y)}$ na $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$. Relaciju (25) zovemo i <u>Ričijev identitet</u>.

Za krivinu R i torziju T važe sledeće identičnosti

$$\sigma R(X,Y)Z = \sigma T((X,Y),Z) + \sigma(\nabla_X T)(Y,Z)$$

$$\sigma(\nabla_Z R)(X,Y) + \sigma R(T(X,Y),Z) = 0 \ ,$$

gde σ označava cikličnu sumu. Ako je koneksija ∇ bez torzije, poslednje dve identičnosti glase

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0 \tag{26}$$

$$(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_X R)(Y,Z) = 0 \tag{27}$$

Relaciju (27) zovemo i Bjankijev identitet (Bianchi).

Da bi smo uveli pojam Liovog izvoda dajemo dve teoreme i neke definicije.

Teorema 4. Neka je $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ i $p \in \mathfrak{M}$. Tada postoji otvoren skup V koji sadrži tačku p i $\varepsilon > 0$ tako da postoji kolekcija difeomorfizama $\theta_t : V \to \theta_t(V) < \mathfrak{M}$ za $|t| < \varepsilon$ sa sledećim osobinama:

(1) $\theta : (-\varepsilon,\varepsilon) \times V \to \mathfrak{M}$, definisano relacijom $\theta(t,p) = \theta_t(p)$ je C^∞ preslikavanje

(2) ako je $|s|$, $|t|$, $|s+t| < \varepsilon$ i q, $\theta_t(q) \in V$ tada je $\theta_{s+t}(q) = \theta_s \cdot \theta_t\ (q)$

(3) ako $q \in V$, tada je X_q tangentni vektor krive $t \to \theta_t(q)$ u $t = 0$.

Semtoga, svaka kolekcija difeomorfizama φ_t koja zadovoljava uslov (3) mora da se poklapa sa kolekcijom θ_t (i zato važe i uslovi (1) i (2).

U opštem slučaju nije definisan difeomorfizam θ_t za svako $t \in \mathbb{R}$. Sledeća teorema daje uslove za to.

Teorema 5. Ako X ima kompaktan nosač (specijalno, ako je $\mathfrak{M}$ kompaktna mnogostrukost), tada postoje difeomorfizmi $\theta_t : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ za svako $t \in \mathbb{R}$ sa osobinama (1),(2) i (3).

Nosač vektorskog polja X je adherencija skupa $\{p \in \mathfrak{M} : X_p \neq 0\}$.

Jedinstvena kolekcija $\{\theta_t\}$ data teoremom 5. ili preciznije preslikavanje $t \to \theta_t$ iz R u grupu svih difeomorfizama mnogostrukosti $\mathfrak{M}$ naziva se 1-parametarska grupa difeomorfizama i kaže se da da je generisana poljem X. U lokalnom slučaju teorema 4. dobija se lokalna 1-parametarska grupa lokalnih difeomorfizama. Vektorsko polje X se zove i infinitezimalni generetor kolekcije $\{\theta_t\}$ ili infinitezimalna transformacija.

Uslov (3) u teoremi 4. imajući u vidu ranija razmatranja, analitički se izražava na sledeći način

$$(Xf)(q) = X_q(f) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\theta_h(q)) - f(q)}{h}, \quad f\in C^{\infty}(\mathfrak{M})$$

Znači Xf se može potpuno definisati u terminima difeomorfizama θ_h. Uvedimo novu oznaku $\mathcal{L}_X f$ za Xf. $\mathcal{L}_X f$ nazivamo Liov izvod funkcije f s obzirom na vektorsko polje X. Vrednost ove funkcije u tački p označava se na razne načine:

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \mathcal{L}_X f(p) = (Xf)(p) = X_p(f)$$

Ako $X,Y\in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$, tada se definiše Liov izvod vektorskog polja Y s obzirom na vektorsko polje X relacijom

$$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \lim_{h\ \ o} \frac{1}{h}\left[Y_p - (\varphi_{h*}Y)_p\right].$$

Može se dokazati da je

(28) $$\mathcal{L}_X Y = [X,Y], \quad X,Y\in \mathfrak{X}(\mathfrak{M}).$$

Kako je

(29) $$\mathcal{L}_X f = Xf, \quad f\in C^{\infty}(\mathfrak{M})$$

Koristeći (28) i (29) može se dokazati da je operator $\mathcal{L}_X$ endomorfizam vektorskog prostora $\mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ za koji važi relacija (11). Prema tome Liov izvod $\mathcal{L}_X$ je derivacija, pa se ona, imajući u vidu prethodna razmatranja, na jedinstven način može proširiti na polja 1-formi, odnosno tenzorska polja, tako da je prema (14) i (15)

$$X<\omega,Y> = <\mathcal{L}_X\omega,Y> + <\omega, [X,Y]>$$

tj.

(30) $$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = X\cdot\omega(Y) - \omega([X,Y]), \qquad \omega\in\mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$$

i

$$\mathcal{L}_X(P(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_k)) = (\mathcal{L}_XP)(\omega^1,\dots\omega^r,X_1\dots X_k) +$$

(31) $$+\sum_{\mu=1}^{r} P(\omega^1,\dots,\mathcal{L}_X\omega^\mu,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_k) +$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k} P(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,[X,X_\mu],\dots,X_k).$$

Za Liov izvod važe sledeće formule

(32) $$\mathcal{L}_X(A\otimes B) = (\mathcal{L}_XA)\otimes B + A\otimes(\mathcal{L}_XB)$$

(33) $$\mathcal{L}_{X+Y}A = \mathcal{L}_XA + \mathcal{L}_YA$$

(34) $$\mathcal{L}_X(A+B) = \mathcal{L}_XA + \mathcal{L}_XB$$

(35) $$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X\cdot\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\cdot\mathcal{L}_X = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$$

(36) $$\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_XY,Z] + [Y,\mathcal{L}_XZ]$$

(37) $$\mathcal{L}_XfY = Xf\cdot Y + f\cdot\mathcal{L}_XY.$$

§ 3. STRUCTURE NA MNOGOSTRUKOSTIMA

Pojam G-strukture javlja se u radovima E. Kartana u oblasti beskonačnih Liovih grupa, ali je taj pojam eksplicitno definisao Chern Shiing-shen [13] 1952. godine, a zatim proučavao u radovima [14] i [15]. Medjutim, problem ispitivanja tih struktura postavio je još ranije EHRESMANN [28], [32], a medju prvima, rezultate iz te oblasti dobili su Libermann P. [52], Bernard D. [4], [5], [6], [7]. Mnoge G-strukture mogu se definisati pomoću tenzora [7]. Medju takvim G-strukturama su Rimanova struktura, skoro kompleksna struktura, skoro kontaktna struktura, kojima ćemo se i dalje baviti, pa zbog toga u ovom odeljku dajemo njihove definicije i osnovne osobine.

Mnogostrukost $\mathfrak{M}$ na kojoj je dato polje simetričnih pozitivno definitnih 2-formi g je Rimanova mnogostrukost i g Rimanova metrika. Ako je X neko vektorsko polje, tj. $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$, tada 1-formu $g(X)$ definišemo sledećom relacijom

$$(1) \qquad [g(X)]\,(Y) = g(X,Y)$$

za svako vektorsko polje $Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$. Kažemo da je tenzor g nedegenerativan, ako je preslikavanje

$$g : \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$$

bijektivno. Inverzno preslikavanje preslikavanja $g: \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$ za nedegenerativni tenzor g označavamo sa g^{-1}, tako da je

$$g^{-1} : \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{X}(\mathfrak{M}).$$

Inverznim preslikavanjem g^{-1} definisan je kontravarijantni tenzor reda 2

$$(2) \qquad g^{-1}(\omega, \mu) = \mu\,[g^{-1}(\omega)]$$

za $\omega, \mu \in \mathfrak{X}^*(\mathfrak{M})$.

Tenzor g^{-1} nazivamo i kontravarijantni metrički tenzor.

Skoro kompleksna struktura na glatkoj mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n}$ je polje F endomorfizama tangentnih prostora tako da je

$$F^2 = -I \tag{3}$$

gde I označava identični endomorfizam. Mnogostrukost $\mathfrak{M}^{2n}$ sa skoro kompleksnom strukturom F naziva se <u>skoro kompleksna mnogostrukost</u>. Ovu strukturu je prvi definisao Ehresmann C. [29], [30], [31], [32]. Mnogi matematičari su se zatim bavili skoro kompleksnom strukturom. Potpuniji pregled rezultata dobijenih do 1967. godine mogu se naći u [2], [35], [50], [86], [117].

Newlander i Nirenberg [59] su dokazali da skoro kompleksna struktura F klase $C^{2n+\alpha}$, čija je Nijenhuis-ova torzija jednaka nuli, je integrabilna tj. ona je pridružena skoro kompleksna struktura kompleksne strukture. <u>Nijenhuisova torzija</u> $[K,K]$ tenzorkog polja K tipa (1,1) je tenzorsko polje tipa (1,2) dato relacijom

$$[K,K](X,Y) = K^2[X,Y] + [KX,KY] - K[KX,Y] - K[X,KY]. \tag{4}$$

Mnogostrukost $\mathfrak{M}^{2n}$ ima skoro kompleksnu strukturu F ako i samo ako se strukturna grupa tangentnog raslojenog prostora $T^*(\mathfrak{M})$ redukuje na unitarnu grupu $U(n)$.

Ako je na skoro kompleksnom prostoru $\mathfrak{M}^{2n}$ zadata metrika g takva da je

$$g(FX,FY) = g(X,Y), \quad X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M}), \tag{5}$$

tada je prostor $\mathfrak{M}^{2n}$ skoro <u>Hermite-ov prostor</u>. Ako je Riman--Kristofelova koneksija obrazovana u odnosu na metrički tenzor g tako da je

$$(\nabla_X F)(Y) = 0, \quad X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M}) \tag{6}$$

prostor $\mathfrak{M}^{2n}$ nazivamo <u>Kähler-ov prostor</u>.

Razmotrimo sada mnogostrukost $\mathfrak{M}^{2n+1}$ neparne dimenzije 2n+1. Diferencijabilna mnogostrukost $\mathfrak{M}^{2n+1}$ ima <u>skoro kontaktnu strukturu</u> ako se strukturna grupa njenog tangentnog raslojenog prostora redukuje na grupu $U(n)\times 1$ (Gray [36]). Kaže se da diferencijabilna mnogostrukost $\mathfrak{M}^{2n+1}$ ima (φ, ξ, η)-<u>strukturu</u> ako postoji polje φ endomorfizama tangentnih prostora, vektorsko polje ξ i polje 1-formi η tako da važe sledeći uslovi

$$(7)\qquad \begin{aligned} \varphi^2 &= -I\oplus\eta\otimes\xi \\ \eta(\xi) &= 1 \\ \varphi(\xi) &= 0 \\ \eta\cdot\varphi &= 0 \end{aligned}$$

gde je I identični endomorfizam (Sasaki [73]). Može se dokazati da su samo prva dva uslova nezavisna. Sasaki [73] je dokazao da su pojmovi skoro kontaktne strukture i (φ, ξ, η)-strukture ekvivalentni, pa mi i (φ, ξ, η)-strukturu nazivamo skoro kontaktna struktura i u našim daljim razmatranjima u ovom obliku je koristimo. Potpuniji pregled do sada dobijenih rezultata za mnogostrukosti sa skoro kontaktnom strukturom dali su Sasaki [74] , Blair [3] , Širokov [86] , Poljakov [65] i dr.

Ako mnogostrukost $\mathfrak{M}^{2n+1}$ sa (φ, ξ, η)-strukturom ima Rimanovu metriku g tako da je

$$(8)\qquad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

za ma koja vektorska polja $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$ tada kažemo da mnogostrukost $\mathfrak{M}^{2n+1}$ ima (φ, ξ, η, g)-<u>strukturu</u> ili <u>skoro kontaktnu metričku strukturu</u> i metrički tenzor g se naziva kompatibilni metrički tenzor. Ako u poslednjoj relaciji stavimo $Y = \xi$, tada je s obzirom na (7)

$$(9)\qquad \eta(X) = g(\xi, X)$$

tj. η je kovarijantna forma vektora ξ .

Može se dokazati da na mnogostrukosti sa (φ , ξ , η)-strukturom uvek postoji metrika g koja zadovoljava prethodno pomenuta svojstva.

Za skoro kontaktnu strukturu (φ , ξ , η) mogu se definisati tenzori $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ sledećim relacijama

$$
\begin{aligned}
&N^{(1)}(X,Y) = [\varphi, \varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \\
&N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)(X) \\
(10)\qquad &N^{(3)}(X) = (\mathcal{L}_{\xi}\varphi)(X) \\
&N^{(4)}(X) = (\mathcal{L}_{\xi}\eta)(X)
\end{aligned}
$$

gde je $[\varphi , \varphi]$ Nijenhuisova torzija, data relacijom (4). Ako su ova četiri tenzora jednaka nuli kažemo da je struktura (φ , ξ , η) normalna skoro kontaktna struktura. Može se dokazati ako je $N^{(1)}(X,Y) = 0$ tada su i ostala tri tenzora $N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$ jednaka nuli pa se uslov normalnosti skoro kontaktne strukture (φ , ξ , η) predstavlja na sledeći način

$$
(11)\qquad [\varphi,\varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0.
$$

Tenzor $N^{(1)}$ naziva se i Nijenhuisov tenzor.

K. Yano i S.Ishihara [116] su dokazali da kada je Nijenhuisova torzija $[\varphi , \varphi]$ tenzorskog polja φ jednaka nuli onda postoje lokalne koordinate tako da se skoro kontaktna struktura može predstaviti u odnosu na koordinatnu bazu redom matricama

$$(12)\qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = (0, \ldots ,1)$$

gde je I jedinična matrica tipa (n,n), a ξ, η matrice tipa redom $(1,2n+1)$ i $(2n+1,1)$.

S. Sasaki i Y. Hatekeyama [75] su dokazali da ako je 1-forma gradijent tada na normalnom skoro kontaktnom prostoru $\mathfrak{M}^{2n+1}$ postoji simetrična koneksija ∇ takva da su tenzorska polja φ, ξ, η kovarijantno konstantna u odnosu na tu koneksiju, tj.

$$(13)\qquad (\nabla_X \varphi)(Y) = 0 \ , \quad (\nabla_X \eta)(Y) = 0 \ , \quad \nabla_X \xi = 0$$

za ma koja vektorska polja $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$. Ova koneksija se naziva simetrična afina (φ, ξ, η)-koneksija.

Tashiro Y. [89] (vidi i [3]) je dokazao da na ma kojoj glatkoj orijentisanoj hiperpovrši skoro kompleksnog prostora postoji skoro kontaktna struktura.

Razmotrimo sada glatku orijentisanu hiperpovrš $\mathfrak{M}^{2n-1}$ skoro kompleksne mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n}$ i smeštanje i hiperpovrši $\mathfrak{M}^{2n-1}$ u $\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n}$

$$i : \mathfrak{M}^{2n-1} \to \widetilde{\mathfrak{M}}^{2n} \ .$$

Možemo $i(\mathfrak{M}^{2n-1})$ i $\mathfrak{M}^{2n-1}$ da identifikujemo

$$i(\mathfrak{M}^{2n-1}) = \mathfrak{M}^{2n-1} \ .$$

Koristeći lokalne koordinatne sisteme na $\mathfrak{M}^{2n-1}$ i $\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n}$, $\mathfrak{M}^{2n-1}$ može se predstaviti na sledeći način

$$y^\alpha = y^\alpha (x^i) \ , \quad \alpha=1, \ldots ,2n; \quad i = 1, \ldots ,2n-1 \ .$$

Označimo sa B diferencijal $i_* = di$ preslikavanja i

$$B = di = i_*$$

sa $T_y(\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n})$ tangentni prostor mnogostrukosti $\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ u nekoj tački y sa koordinatama $(y^1, \dots, y^{2n})$ i sa $T_x(\mathfrak{M}^{2n-1})$ tangentni prostor hiperpovrši $\mathfrak{M}^{2n-1}$ u tački x sa koordinatama $(x^1, \dots, x^{2n-1})$. U tom slučaju imamo

$$T_y(\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n}) = B(T_x\mathfrak{M}^{2n-1}) \oplus \lambda\tilde{N} \tag{14}$$

gde $\tilde{N}$ pripada prostoru $T_y(\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n})$ ali ne pripada prostoru $B(T_x\mathfrak{M}^{2n-1})$ i $\lambda \in R$. Kažemo da je $\tilde{N}$ pseudonormala. Vektorska polja iz $\mathfrak{X}(\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n})$ označavamo sa $\tilde{X}, \tilde{Y}, \dots$ a vektorska polja iz $\mathfrak{X}(\mathfrak{M}^{2n-1})$ označavamo sa $X, Y, \dots$.

Na hiperpovrši $\mathfrak{M}^{2n-1}$ mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n}$ skoro kontaktna struktura (φ, ξ, η) se indukuje skoro kompleksnom strukturom F okolnog prostora $\mathfrak{M}^{2n}$ na sledeći način

$$\tilde{F}B = B\varphi \oplus (\eta \otimes \tilde{N}) \quad , \quad \tilde{F}\tilde{N} = -B\xi \ . \tag{15}$$

Tashiro je razmatrao i obrnuti problem smeštanja skoro kontaktne mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n-1}$ u mnogostrukost $\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ tako da skoro kontaktna struktura (φ, ξ, η) prostora $\mathfrak{M}^{2n-1}$ indukuje skoro kompleksnu strukturu $\tilde{F}$ na prostoru $\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n}$.

Neka je

$$\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n} = \mathfrak{M}^{2n-1} \times P$$

direktni proizvod skoro kontaktne mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n-1}$ i prave linije P parametrizovane sa $t \in (-\infty, +\infty)$. $\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ je mnogostrukost sa lokalnim koordinatnim sistemom (x^i, t) ako je (x^i) lokalni koordinatni sistem na $\mathfrak{M}^{2n-1}$. Dalje, označimo $\frac{\partial}{\partial t}$ sa $\tilde{N}$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \tilde{N}$$

Tada na $T^*(\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n})$ definišemo polje endomorfizama $\tilde{F}$ na sledeći način

$$(16) \qquad \begin{aligned} \tilde{F}B &= B\varphi \oplus (\eta \otimes \tilde{N}) \\ \tilde{F}\tilde{N} &= -B\xi . \end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je (φ, ξ, η) skoro kontaktna struktura na $\mathfrak{M}^{2n-1}$, lako se dokazuje da je $\tilde{F}$ skoro kompleksna struktura na $B(T_x\mathfrak{M}^{2n-1})$ i TP, dakle i na $T^*(\widetilde{\mathfrak{M}}^{2n})$.

G L A V A II

C - HOLOMORFNO PROJEKTIVNE TRANSFORMACIJE

§1. C - HOLOMORFNO PROJEKTIVNE TRANSFORMACIJE

Označimo sa T tangentni vektor krive $\sigma = \sigma(t)$ na mnogostrukostima $\mathfrak{M}^{2n+1}$ koji zadovoljava uslov

$$\nabla_T T = \alpha(t)\, T + \beta(t)\, \varphi T \tag{1}$$

gde su $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ neke funkcije parametra t. Sa ozbirom na (I. 19) vektor T možemo jednoznačno predstaviti na sledeći način

$$T = \lambda\, \xi + V.$$

Tada φ - presek [3] odredjen vektorom V pri paralelenom pomeranju duž te krive ostaje φ - presek tj. zadovoljava osobinu holomorfnosti. Zato takvu krivu $\sigma = \sigma(t)$ nazivamo C - holomorfna ravna kriva. Primetimo, ako je vektor V jednak nuli ili funkcija $\beta(t)$ jednaka nuli tada je ova kriva geodezijska linija. Sem toga, kako su C - holomorfno ravne krive definisane jednačinom (1), možemo reći da su C - holomorfno ravne krive one krive čija oskulatorna ravan I reda sadrži i vektor φT. U ovom paragrafu nalazimo sve simetrične (φ, ξ, η) koneksije za koje su C - holomorfno ravne krive iste.

Preslikajmo (1) sa φ

$$\varphi(\nabla_T T) = \alpha(t)\, \varphi T + \beta(t) \varphi^2 T \tag{2}$$

a zatim (2) pomnožimo tenzorski sa T

$$T \otimes \varphi(\nabla_T T) = T \otimes \alpha(t)\, \varphi(T) + T \otimes \beta(t) \varphi^2 T$$

i (1) sa $\varphi(T)$

$$\nabla_T T \otimes \varphi(T) = \alpha(t)\, T \otimes \varphi(T) + \beta(t)\, \varphi(T) \otimes \varphi(T)$$

Iz poslednje dve jednačine oduzimanjem dobijamo

$$T \otimes \varphi(\nabla_T T) - \nabla_T T \otimes \varphi(T) = T \otimes \beta(t)\varphi^2 T - \beta(t)\, \varphi(T) \otimes \varphi(T)$$

a odavde preslikavanjem sa operatorom $\varphi \otimes \varphi - \varphi^2 \otimes \varphi^2$ imamo

$$\begin{aligned} &\varphi(T) \otimes \varphi^2(\nabla_T T) - \varphi(\nabla_T T) \otimes \varphi^2(T) - \varphi^2(T) \otimes \varphi^3(\nabla_T T) + \\ (3)\quad &+ \varphi^2(\nabla_T T) \otimes \varphi^3(T) = \varphi(T) \otimes \beta(t)\, \varphi^3(T) - \beta(t)\varphi^2(T) \otimes \varphi^2(T) - \\ &- \varphi^2(T) \otimes \beta(t)\, \varphi^4(T) + \beta(t)\, \varphi^3(T) \otimes \varphi^3(T) \end{aligned}$$

Sa obzirom na osobine (I 3.7) skoro kontaktne strukture iz relacije (3) imamo

$$\begin{aligned} &(T) \otimes \varphi^2(\nabla_T T) - \varphi(\nabla_T T) \otimes \varphi^2(T) + \varphi^2(T) \otimes \varphi(\nabla_T T) - \\ &- \varphi^2(\nabla_T T) \otimes \varphi(T) = - \varphi(T) \otimes \beta(t)\, \varphi(T) - \beta(t)\, \varphi^2(T) \otimes \varphi^2(T) + \\ &+ \varphi^2(T) \otimes \beta(t)\, \varphi^2(T) + \beta(t)\, \varphi(T) \otimes \varphi(T) \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} &\varphi(T) \otimes \varphi^2(\nabla_T T) - \varphi(\nabla_T T) \otimes \varphi^2(T) + \varphi^2(T) \otimes \varphi(\nabla_T T) - \\ (4)\quad &- \varphi^2(\nabla_T T) \otimes \varphi(T) = 0 \end{aligned}$$

Neka je D druga koneksija za koju važi prethodna jednakost

$$\begin{aligned} &\varphi(T) \otimes \varphi^2(D_T T) - \varphi(D_T T) \otimes \varphi^2(T) + \varphi^2(T) \otimes \varphi(D_T T) - \\ (5)\quad &- \varphi^2(D_T T) \otimes \varphi(T) = 0 \end{aligned}$$

Stavimo

(6) $$A(X,Y) = \nabla_X Y - D_X Y \quad , \quad X,Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$$

tada oduzimanjem prethodnih dveju jednačina dobijamo

(7) $$\begin{aligned} &\varphi(T)\otimes\varphi^2 A(T,T) - \varphi A(T,T)\otimes\varphi^2(T) + \\ &+\varphi^2(T)\otimes\varphi A(T,T) - \varphi^2 A(T,T)\otimes\varphi(T) = 0 \end{aligned}$$

Prema definiciji za kovarijantno diferenciranje (I.2.17) i (I.2.15) imamo

$$\nabla_Y \varphi(X) = (\nabla_Y \varphi)(X) + \varphi(\nabla_Y X)$$

$$D_Y \varphi(X) = (D_Y \varphi)(X) + \varphi(D_Y X)$$

a kako su ∇ i D (φ, ξ, η) koneksije, s obzirom na (6) oduzimanjem prethodnih dveju jednakosti dobijamo

(8) $$A(Y, \varphi(X)) = \varphi A(Y,X)$$

Iz simetrije koneksija ∇ i D sleduje i simetrija bilinearnog preslilakavanja A definisanog formulom (6) tj.

(9) $$A(X,Y) = A(Y,X)$$

Iz (7) prema [72] "simetrizacijom" se dobija

(10) $$\begin{aligned} &\varphi(X)\otimes\varphi^2A(Y,Z) + \varphi(Z)\otimes\varphi^2A(X,Y) + \varphi(Y)\otimes\varphi^2A(Z,X) - \\ &-\varphi A(X,Y)\otimes\varphi^2(Z) - \varphi A(Z.X)\otimes\varphi^2(Y) - \varphi A(Y,Z)\otimes\varphi^2(X) + \\ &+\varphi^2(X)\otimes\varphi A(Y,Z) + \varphi^2(Z)\otimes\varphi A(X,Y) + \varphi^2(Y)\otimes\varphi A(Z,X) - \\ &-\varphi^2A(X,Y)\otimes\varphi(Z) - \varphi^2A(Z,X)\otimes\varphi(Y) - \varphi^2(Y,Z)\otimes\varphi(X) = 0 \end{aligned}$$

gde su X, Y, Z ma koja vektorska polja.

Definišimo sada transformaciju tangentnog prostora T_pM u nekoj tački $p \in M$ s obzirom na vektore $Y_p, Z_p \in T_pM$ kao linearno preslikavanje

$$\mathcal{A}_{Y_p,Z_p} : X_p \to \mathcal{A}_{Y_p,Z_p}(X_p)$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{Y,Z}(X) = {} & \varphi(X)\otimes\varphi^2 A(Y,Z) + \varphi(Z)\otimes\varphi^2 A(X,Y) + \varphi(Y)\otimes\varphi^2 A(Z,X) - \\ & - \varphi A(X,Y)\otimes\varphi^2(Z) - \varphi A(Z,X)\otimes\varphi^2(Y) - \varphi A(Y,Z)\otimes\varphi^2(X) + \\ & + \varphi^2(X)\otimes\varphi A(Y,Z) + \varphi^2(Z)\otimes\varphi A(X,Y) + \varphi^2(Y)\otimes\varphi A(Z,X) - \\ & - \varphi^2 A(X,Y)\otimes\varphi(Z) - \varphi^2 A(Z,X)\otimes\varphi(Y) - \varphi^2 A(Y,Z)\otimes\varphi(X).\end{aligned}$$

Imajući u vidu (6) možemo definisati sledeću linearnu transformaciju tangentnog prostora T_pM u nekoj tački $p \in M$ s obzirom na vektor $Y_p \in T_pM$

$$A(Y_p) : X_p \longrightarrow A(Y_p)(X_p) \tag{11}$$

gde je

$$A(Y_p)(X_p) = A(Y_p, X_p) \tag{12}$$

Zbog (10), (9), (11) i (12) trag linearnog preslikavanja $\mathcal{A}$ je

$$\begin{aligned}& \varphi^3 A(Y,Z) + (\mathrm{tr}\,\varphi^2 A(Y))\varphi(Z) + (\mathrm{tr}\,\varphi^2 A(Z))\varphi(Y) - \\ & -\varphi A(Y, \varphi^2 Z) - \varphi A(Z, \varphi^2) - (\mathrm{tr}\,\varphi^2)\varphi A(Y,Z) + \\ & + \varphi^3 A(Y,Z) + (\mathrm{tr}\,\varphi A(Y))\varphi^2(Z) + (\mathrm{tr}\,\varphi A(Z))\varphi^2(Y) - \\ & - \varphi^2 A(\varphi Z, Y) - \varphi^2 A(Z, \varphi Y) - (\mathrm{tr}\,\varphi)\varphi^2 A(Y,Z) = 0\end{aligned} \tag{13}$$

gde smo sa tr označili trag odgovarajućeg linearnog preslikavanja. S obzirom na (I. 3.12) imamo

(14) $\qquad \mathrm{tr}\,\varphi = 0$

i

(15) $\qquad \mathrm{tr}\,\varphi^2 = -2n$

a zbog (I.3.7) imamo

$$\varphi^2 \nabla_Z Y = -\nabla_Z Y + \eta(\nabla_Z Y)\xi$$

$$\varphi^2 D_Z Y = -D_Z Y + \eta(D_Z Y)\xi$$

tj.

(16) $\qquad \varphi^2 A(Z,Y) = -A(Z,Y) + \eta A(Z,Y)\xi$

Iz definicije kovarijantnog diferenciranja (I.2.17) i (I.2.15) imamo da je

$$\nabla_Y \eta(X) = (\nabla_Y \eta)(X) - \eta(\nabla_Y X)$$

$$D_Y \eta(X) = (D_Y \eta)(X) - \eta(D_Y X)$$

Kako su ∇ , D (φ, ξ, η)-koneksije, odavde, s obzirom na osobine kovarijantnih izvoda (I.2.17)i (I.2.15) i (6) oduzimanjem dobijamo

(17) $\qquad A(Y,X) = 0$

a zbog toga iz (16) imamo

(18) $\qquad \varphi^2 A(Z,Y) = -A(Z,Y)$

Koristeći (16), (14), (15), (18) i (I.3.7) iz (13) dobijamo

$$-\varphi A(Y,Z) - (\mathrm{tr}\,A(Y))\,\varphi(Z) - (\mathrm{tr}\,A(Z))\,\varphi(Y) + \varphi A(Y,Z) +$$
$$+\varphi A(Z,Y) + 2n\,\varphi A(Y,Z) - \varphi A(Y,Z) + (\mathrm{tr}\,\varphi A(Y))\,\varphi^2(Z) +$$
$$+(\mathrm{tr}\,\varphi A(Z))\,\varphi^2(Y) + \varphi A(Z,Y) + \varphi A(Z,Y) = 0$$

tj.

$$2(n+1)\varphi A(Y,Z) - (\mathrm{tr}\, A(Y))\varphi(Z) - (\mathrm{tr}\, A(Z))\varphi(Y) +$$
$$+ (\mathrm{tr}\,\varphi A(Y))\varphi^2 Z + (\mathrm{tr}\,\varphi A(Z))\varphi^2(Y) = 0$$

a pri preslikavanju φ , zbog (18) i (I.3.7) odavde je

$$-2(n+1)\, A(Y,Z) - (\mathrm{tr}\, A(Y))\varphi^2(Z) - (\mathrm{tr}\, A(Z))\varphi^2(Y) -$$
$$- (\mathrm{tr}\,\varphi A(Y))\varphi(Z) - (\mathrm{tr}\,\varphi A(Z))\varphi(Y) = 0$$

Definišimo 1-forme P i Q na sledeći način

(20) $$P(Y) = \frac{1}{2(n+1)}\,\mathrm{tr}\, A(Y)$$

(21) $$Q(Y) = \frac{1}{2(n+1)}\,\mathrm{tr}\,\varphi A(Y)$$

Smenom (20) i (21) u (19) dobijamo

(22) $$A(Y,Z) = - P(Y)\varphi^2(Z) - P(Z)\varphi^2(Y) - Q(Z)\varphi(Y) - Q(Y)\varphi(Z)$$

ili zbog (6) i (I.3.7)

(23) $$\nabla_Y Z = D_Y Z + P(Y)Z - P(Y)\eta(Z)\xi + P(Z)Y - P(Z)\eta(Y)\xi - Q(Y)\varphi(Z) - Q(Z)\varphi(Y)$$

Da bismo našli vezu izmedju 1-formi P i Q smenimo (22) u (8). Tada se dobija

$$- P(Y)\varphi^3(Z) - P\varphi(Z)\varphi^2(Y) - Q\varphi(Z)\varphi(Y) - Q(Y)\varphi^2(Z) =$$
$$= - P(Y)\varphi^3(Z) - P(Z)\varphi^3(Y) - Q(Z)\varphi^2(Y) - Q(Y)\varphi^2(Z)$$

tj.

$$P\,(Z)\varphi^2(Y) + Q\,\varphi(Z)\varphi(Y) = -\,P(Z)\varphi(Y) + Q(Z)\varphi^2(Y)$$

odnosno

$$[P\varphi(Z) - Q(Z)]\;\varphi^2(Y) = -\;[Q\varphi(Z) + P(Z)]\;\varphi(Y)$$

a kako je Y ma koje vektorsko polje, to su i preslikavanja ista

(24) $$[P\varphi(Z) - Q(Z)]\;\varphi^2 = -\;[Q\varphi(Z) + P(Z)]\;\varphi$$

kao i njihovi tragovi

$$-\;2n\,[P\varphi(Z) - Q(Z)] = 0 \qquad (n\quad 0)$$

jt.

$$Q(Z) = P\varphi(Z)$$

ili

(25) $$Q = P\varphi.$$

Kako je

$$\nabla_X\xi = 0 \qquad i \qquad D_X\xi = 0$$

to je

$$A(X,\xi) = 0$$

a odavde, koristeći (22) imamo

$$-\,P(Y)\varphi^2(\xi) - P(\xi)\varphi^2(Y) - Q(\xi)\varphi(Y) - Q(Y)\varphi(\xi) = 0$$

tj.

(26) $$P(\xi) = 0$$

Iz (24) sleduje

$$[P\varphi(Z) - Q(Z)]\;\varphi^3 = -\,[Q[\varphi(Z) + P(Z)]\,\varphi^2$$

odnosno

$$[P\varphi(Z) - Q(Z)]\,\varphi = [Q\varphi(Z) + P(Z)]\,\varphi^2$$

a trag ovog preslikavanja je

$$0 = -\,2n\,[Q\varphi(Z) + P(Z)]$$

a odavde imamo

$$P(Z) = -\,Q\varphi(Z)$$

ili

$$P = -\,Q\varphi$$

S obzirom na (25) iz (23) sleduje

$$\begin{aligned}\nabla_Y Z = D_Y Z &+ P(Y)Z - P(Y)\eta(Z)\xi + P(Z)Y - \\ &- P(Z)\eta(Y)\xi - P\varphi(Y)\varphi(Z) - P\varphi(Z)\varphi(Y)\end{aligned} \tag{27}$$

Ova korespodencija se zove C - <u>holomorfno projektivna</u> (CHP) <u>korespondencija</u> ili <u>transformacija</u>.

Dakle, ako je kriva $\sigma = \sigma(t)$ C - holomorfno ravna u odnosu na koneksije ∇ i D, tada koneksije ∇ i D zadovoljavaju relaciju (27).

Važi, takodje, i obrnuto, ako koneksije ∇ i D na prostoru $\mathfrak{M}^{2n+1}$ zadovoljavaju uslov (27) i ako je kriva $\sigma = \sigma(t)$ C - holomorfna u odnosu na jednu od te dve koneksije, tada je ona C - holomorfno ravna i u odnosu na drugu koneksiju.

Dokaz neposredno sleduje iz (4) i (5) koristeći (27) i (I.3.7). Na taj način dokazali smo da važi

<u>Teorema 1.</u> Dve koneksije ∇ i D su u CHP korespondenciji ako i samo ako važi uslov (27) gde je P neka

1 - forma takva da važi (26).

§2. C - HOLOMORFNO PROJEKTIVNI TENZOR KRIVINE

Označimo sa $R(X,Y)Z$ polje tenzora krivine s obzirom na koneksiju ∇

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

gde je $[X,Y]$ komutator vektorskih polja X,Y, a $K(X,Y)Z$ polje tenzora krivine s obzirom na koneksiju D

$$K(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z.$$

Kako su koneksije ∇ i D simetrične odgovarajući tenzori torzije su jednaki nuli, tj.

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$
$$[X,Y] = D_X Y - D_Y X$$

a zbog toga i (I.2.16) prethodne dve relacije možemo da pišemo u obliku

(1) $$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z$$

(2) $$K(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{D_X Y} Z + D_{D_Y X} Z$$

Smenom (1.27) u (1) uz odgovarajuću promenu oznaka i koristeći (2), (1.26), (I.2.16) i (I.3.7) nalazimo

$$R(X,Y)Z = K(X,Y)Z + P(D_Y Z)X - P(X)\eta(D_Y Z)\xi - P(D_Y Z)\eta(X)\xi -$$
$$- P\varphi(D_Y Z)\varphi X + XP(Y)Z - X(P(Y)\eta(Z))\xi + XP(Z)Y +$$
$$+ P(Z)P(Y)X - P(Z)P(Y)\eta(X)\xi - X(P(Z)\eta(Y))\xi - XP\varphi(Y)\varphi Z -$$
$$- P\varphi(Y)P(Z)\varphi X - XP\varphi(Z)\varphi Y - P\varphi(Z)P\varphi(Y)X + P\varphi(Z)P\varphi(Y)\eta(X)\xi -$$

$$- P\varphi(Z)P(Y)\varphi X - P(D_X Z)Y + P(Y)\eta(D_X Z)\xi + P(D_X Z)\eta(Y)\xi +$$
$$+ P\varphi(D_X Z)\varphi Y - YP(X)Z + Y(P(X)\eta(Z))\xi - YP(Z)X -$$
$$- P(Z)P(X)Y + P(Z)P(X)\eta(Y)\xi + Y(P(Z)\eta(X))\xi + YP\varphi(X)\varphi Z +$$
$$+ P\varphi(X)P\varphi(Z)Y + P\varphi(X)P(Z)\varphi Y + YP\varphi(Z)\varphi X -$$
$$- P\varphi(Z)P\varphi(X)\eta(Y)\xi - P(D_X Y)Z + P(D_X Y)\eta(Z)\xi +$$
$$+P(Z)\eta(D_X Y)\xi + P\varphi(D_X Y)\varphi Z + P(X)P\varphi(Z)\varphi Y + P(D_Y X)Z -$$
$$-P(D_Y X)\eta(Z)\xi - P(Z)\eta(D_Y X)\xi - P\varphi(D_Y)\varphi Z$$

Koristeći uslov da je 1 - forma η kovarijantno konstantna

$$(D_X \eta)Y = 0$$

a po definiciji kovarijantnog izvoda (I.2.17) i (I.2.15) to je ekvivalentno uslovu

$$X\eta(Y) - \eta(D_X Y) = 0$$

tj.

$$\eta(D_X Y) = X\eta(Y)$$

i osobine vektora (I.2.1) prethodna relacija može da se transformiše tako da je

$$R(X,Y)Z = K(X,Y)Z + P(D_Y Z)X - P(D_Y Z)\eta(X)\xi -$$
$$- P\varphi(D_Y Z)\varphi X + XP(Y)Z - XP(Y)\eta(Z)\xi + XP(Z)Y + P(Z)P(Y)X -$$
$$- P(Z)P(Y)\eta(X)\xi - XP(Z)\eta(Y)\xi - XP\varphi(Y)\varphi Z - P\varphi(Y)P(Z)\varphi X -$$
$$- XP\varphi(Z)\varphi Y - P\varphi(Z)P\varphi(Y)X + P\varphi(Z)P\varphi(Y)\eta(X)\xi -$$
$$- P\varphi(Z)P\ (Y)\varphi X - P(D_X Z)Y + P(D_X Z)\eta(Y)\xi + P\varphi(D_X Z)\varphi Y -$$
$$- YP(X) + YP(X)\eta(Z)\xi - YP(Z)\xi - P(Z)P\ (X)Y +$$
$$+ P(Z)P(X)\eta(Y)\xi + YP(Z)\eta(X)\xi + YP\varphi(X)\varphi Z + P\varphi(X)P\varphi(Z)Y +$$

$$+ P\varphi(X)P(Z)\varphi Y + YP\varphi(Z)\varphi X - P\varphi(Z)P\varphi(X)\eta(Y)\xi - P(D_XY)Z +$$
$$+ P(D_XY)\eta(Z)\xi + P\varphi(D_XY)\varphi Z + P(X)P\varphi(Z)\varphi Y + P(D_YX)Z -$$
$$- P(D_YX)\eta(Z)\xi - P\varphi(D_YX)\varphi Z$$

odnosno

$$R(X,Y)Z = K(X,Y)Z - [YP(Z) - P(D_YZ) - P(Y)P(Z) +$$
$$+ P\varphi(Y)P\varphi(Z)]\ (X - \eta(X)\xi) + [XP(Z) - P(D_XZ) - P(X)P(Z) +$$
$$+ P\varphi(X)P\varphi(Z)]\ (Y - \eta(Y)\xi) - [YP(X) - P(D_YX) - XP(Y) +$$
$$+ P(D_XY)](Z - \eta(Z)\xi) - [XP\varphi(Y) - P(D_X\varphi Y) - YP\varphi(X) +$$
$$+ P(D_Y\varphi X)]\varphi Z - XP\varphi(Z) - P(D_X\varphi Z) - P(X)P\varphi(Z) -$$
$$- P\varphi(X)P(Z)]\varphi Y + [YP\varphi(Z) - P(D_Y\varphi Z) - P(Y)P\varphi(Z) -$$
$$- P\varphi(Y)P(Z)]\varphi X$$

Ako uvedemo oznaku

$$(3) \qquad \mathcal{P}(X,Y) = (D_XP)(Y) - P(X)P(Y) + P\varphi(X)P\varphi(Y)$$

gde je

$$(D_XP)(Y) = DP(X,Y)$$

ili s obzirom na pravilo za kovarijantno diferenciranje 1-forme

$$\mathcal{P}(X,Y) = XP(Y) - P(D_XY) - P(X)P(Y) + P\varphi(X)P\varphi(Y)$$

tada zbog (1.20) i (I.3.7) prethodna formula glasi

$$(4) \qquad \begin{aligned} R(X,Y)Z &= K(X,Y)Z + \mathcal{P}(Y,Z)\varphi^2X - \mathcal{P}(X,Z)\varphi^2Y + \\ &+ [\mathcal{P}(Y,X) - \mathcal{P}(X,Y)]\varphi^2Z + [\mathcal{P}(Y,\varphi X) - \mathcal{P}(X,\varphi Y)]\varphi Z + \\ &+ [\mathcal{P}(Y,\varphi Z)\varphi X - \mathcal{P}(X,\varphi Z)\varphi Y] \end{aligned}$$

Kako je polje tenzora krivine prostora $\mathfrak{M}^{2n+1}$ dato formulom (4), imajući u vidu (I.2.22) i (I.3.12) polje

Ričijevog tenzora je

$$\mathfrak{R}(Y,Z) = \mathcal{K}(Y,Z) - 2n\,\mathcal{P}(Y,Z) + \mathcal{P}(Y - \eta(Y)\xi, Z) - \\ -\mathcal{P}(Y, Z - \eta(Z)\xi) + \mathcal{P}(Z - \eta(Z)\xi, Y) - \mathcal{P}(\varphi Z, \varphi Y) + \\ + \mathcal{P}(Y, \varphi^2 Z) - \mathcal{P}(\varphi Y, \varphi Z)$$

odnosno

$$\mathfrak{R}(Y,Z) = \mathcal{K}(Y,Z) - 2n\,\mathcal{P}(Y,Z) - [\mathcal{P}(\varphi Z, \varphi Y) + \mathcal{P}(\varphi Y, \varphi Z)] - \\ - 2\mathcal{P}(Y, Z - \eta(Z)\xi) + [\mathcal{P}(Y - \eta(Y)\xi, Z) + \mathcal{P}(Z - \eta(Z)\xi, Y)] \tag{5}$$

Relacija (5) važi za svaka dva vektorska polja Y, Z iz $\mathcal{K}(\mathfrak{M}^{2n+1})$ prema tome i za vektorska polja φY i φZ. Dakle, imajući u vidu (I.3.7) za vektorska polja φY i φZ relacija (5) glasi

$$\mathfrak{R}(\varphi Y, \varphi Z) = \mathcal{K}(\varphi Y, \varphi Z) - (2n+1)\mathcal{P}(\varphi Y, \varphi Z) + \mathcal{P}(\varphi Z, \varphi Y) - \\ -\mathcal{P}(Z - \eta(Z)\xi, Y - \eta(Y)\xi) - \mathcal{P}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) \tag{6}$$

Ako vektorska polja Y i Z u (5) i (6) smenimo sa vektorskim poljima φY, φZ pa tako dobijene jednačine saberemo imamo

$$\mathfrak{R}(\varphi Y, \varphi Z) + \mathfrak{R}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) = \mathcal{K}(\varphi Y, \varphi Z) + \\ + \mathcal{K}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) - 2(n+1)\mathcal{P}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) - \\ - 2(n+1)\mathcal{P}(\varphi Y, \varphi Z) \tag{7}$$

Ako pomnožimo sa $(n+1)$ jednačinu dobijenu iz (6) "simetrizacijom", pa je zatim oduzmemo od jednačine dobijene iz (7) "simetrizacijom" imamo

$$\mathcal{P}(\varphi Y, \varphi Z) + \mathcal{P}(\varphi Z, \varphi Y) = \frac{-n}{2(n^2-1)}[\mathfrak{R}(\varphi Y, \varphi Z) + \mathfrak{R}(\varphi Z, \varphi Y) - \\ - \mathcal{K}(\varphi Y, \varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Z, \varphi Y)] + \frac{1}{2(n^2-1)}[\mathfrak{R}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) + \tag{8}$$

$$+ \mathcal{R}(Z - \eta(Z)\xi, Y - \eta(Y)\xi) - \mathcal{K}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) - $$
$$- \mathcal{K}(Z - \eta(Z)\xi, Y - \eta(Y)\xi)]$$

Ako u jednačini (8) vektorska polja Y i Z smenimo vektorskim poljima φY i φZ, pa u tako dobijenoj jednačini tenzorsko polje $\mathcal{R}(Y, Z)$ smenimo odgovarajućim izrazom iz (6) nalazimo

$$\mathcal{P}(\varphi Y,\varphi Z) = (2n+1)\mathcal{P}(\varphi Z,\varphi Y) + [\mathcal{R}(\varphi Z,\varphi Y) - \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)] +$$
$$\text{(9)} \quad \frac{1}{2(n^2-1)}[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{P}(\varphi Z,\varphi Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)] -$$
$$- \frac{n}{2(n^2-1)}[\mathcal{R}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) + \mathcal{R}(Z - \eta(Z)\xi, Y - \eta(Y)\xi) -$$
$$- \mathcal{K}(Y - \eta(Y)\xi, Z - \eta(Z)\xi) - \mathcal{K}(Z - \eta(Z)\xi, Y - \eta(Y)\xi)]$$

Kako jednačina (9) važi i ako vektorska polja Y i Z zamene mesta, tako dobijeni izraz za $\mathcal{P}(Z, Y)$ iz (9) možemo smeniti u (8), odakle dobijamo

$$\mathcal{P}(\varphi Y,\varphi Z) = \frac{-1}{2(n+1)}[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z)] +$$
$$\text{(10)} \quad + \frac{1}{4(n^2-1)}[\mathcal{R}(\varphi^2 Y,\varphi^2 Z) + \mathcal{R}(\varphi^2 Z,\varphi^2 Y) - \mathcal{K}(\varphi^2 Y,\varphi^2 Z) - \mathcal{K}(\varphi^2 Z,\varphi^2 Y)] +$$
$$- \frac{1}{4(n^2-1)}[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{R}(\varphi Z,\varphi Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)].$$

Stavimo u formuli (5) umesto vektorskog polja Y vektorsko polje $\varphi^2 Y$. Tada je s ozbirom na (I.3.7)

$$\mathcal{R}(\varphi^2 Y,Z) = \mathcal{K}(\varphi^2 Y,Z) - 2n\mathcal{P}(\varphi^2 Y,Z) + [\mathcal{P}(\varphi Z,\varphi Y) + \mathcal{P}(\varphi Y,\varphi Z)] +$$
$$+ 2\mathcal{P}(\varphi^2 Y,\varphi^2 Z) + \mathcal{P}(\varphi^2 Y,Z) - \mathcal{P}(\varphi^2 Z,\varphi^2 Y)$$

Koristeći (8), (9) i relacije koje se iz (9) dobijaju zamenom vektorskih polja Y i Z sa φY, φZ odnosno φY, φZ sa φZ i φY, iz prethodne jednačine sleduje

$$
\begin{aligned}
(2n-1)\mathcal{P}(\varphi^2Y,Z) = &- [\mathcal{R}(\varphi^2Y,Z) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,Z)] - \\
&- \frac{1}{n+1} \mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z)] + \\
(11) \qquad &+ \frac{1}{2(n+1)} [(\varphi^2Z,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)] - \\
&- \frac{2n-1}{4(n^2-1)}[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{R}(\varphi Z,\varphi Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)] + \\
&+ \frac{1}{4(n^2-1)}[\mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) + \mathcal{R}(\varphi^2Z,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z)-\mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)]
\end{aligned}
$$

Stavimo u formuli (5) umesto vektorskog polja Z vektorsko polje φ^2Z. Tada je s obzirom na (I.3.7)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(Y,\varphi^2Z) = &\mathcal{K}(Y,\varphi^2Z) - 2(n+1)\mathcal{P}(Y,\varphi^2Z) + [\mathcal{P}(\varphi Z,\varphi Y) + \\
&+\mathcal{P}(\varphi Y,\varphi Z)] - \mathcal{P}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) + \mathcal{P}(\varphi^2Z,Y) \quad .
\end{aligned}
$$

Odavde, koristeći (8) formulu koja se iz (8) dobija zamenom vektorskih polja Y i Z vektorskim poljima φY i φZ i (11) nalazimo

$$
\begin{aligned}
2(n+1)\mathcal{P}(Y,\varphi^2Z) = &[\mathcal{R}(Y,\varphi^2Z) - \mathcal{K}(Y,\varphi^2Z)] - \frac{1}{2n-1}[\mathcal{P}(\varphi^2Z,Y) - \\
(12) \qquad &-\mathcal{K}(\varphi^2Z,Y) - \frac{1}{(n+1)(2n-1)}[\mathcal{P}(\varphi^2Z,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)] + \\
&+ \frac{n}{(n+1)(2n-1)} [\mathcal{P}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z)] - \\
&- \frac{1}{2(n-1)}[\mathcal{P}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{R}(\varphi Z,\varphi Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)] + \\
&+ \frac{3n-1}{2(n^2-1)(2n-1)}[\mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) + \mathcal{R}(\varphi^2Z,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) - \\
&- \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)]
\end{aligned}
$$

Smenom (8), (11) i (12) (uz prethodne odgovarajuće promene oznaka) u (5) i sredjivanjem odgovarajuće jednačine nalazimo

$$\mathcal{P}(Y,Z) = -\frac{1}{2n}\left[\mathcal{R}(Y,Z) - \mathcal{K}(Y,Z)\right] + \frac{1}{2n(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Y,Z) - \right.$$
$$\left. - \mathcal{K}(\varphi^2Y,Z)\right] - \frac{1}{2n(n+1)}\left[\mathcal{R}(Y,\varphi^2Z) - \mathcal{K}(Y,\varphi^2Z)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2(n+1)(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Z,Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Z,Y)\right] +$$
$$+ \frac{n-1}{4n(n+1)^2(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Z,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)\right] +$$
$$+ \frac{3n+1}{4n(n+1)^2(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z)\right] +$$
$$+ \frac{1}{4(n^2-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{R}(\varphi Z,\varphi Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)\right] -$$
$$- \frac{2n^2-n+1}{4n(n^2-1)(2n-1)(n+1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) + \mathcal{R}(\varphi^2Z,\varphi^2Y) - \right.$$
$$\left. - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) - \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)\right]$$

Kako je

$$\frac{3n+1}{4n(n+1)^2(2n-1)} = \frac{1}{2n(n+1)(2n-1)} + \frac{n-1}{4n(n+1)^2(2n-1)}$$

prethodni izraz možemo da pišemo i u ovom obliku

$$\mathcal{P}(Y,Z) = -\frac{1}{2n}\left[\mathcal{R}(Y,Z) - \mathcal{K}(Y,Z)\right] + \frac{1}{2n(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Y,Z) - \right.$$
$$\left. - \mathcal{K}(\varphi^2Y,Z)\right] - \frac{1}{2n(n+1)}\ \mathcal{R}(Y,\varphi^2Z) - \quad (Y,\varphi^2Z)] +$$
$$+ \frac{1}{2(n+1)(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Z,Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Z,Y)\right] +$$
$$(13) \quad + \frac{1}{2n(n+1)(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z)\right] +$$
$$+ \frac{1}{4(n^2-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{R}(\varphi Z,\varphi Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) - \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)\right] -$$
$$- \frac{1}{4(n^2-1)(2n-1)}\left[\mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) + \mathcal{R}(\varphi^2Z,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) - \right.$$
$$\left. - \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)\right]$$

Smenjujući (13) u (4), uz odgovarajuće promene oznaka, dobijamo

$$R(X,Y)Z + \frac{1}{2n}\Big\{\big[\mathcal{R}(Y,Z)\,\varphi^2(X) - \mathcal{R}(X,Z)\,\varphi^2(Y)\big] +$$

$$+\big[\mathcal{R}(Y,X) - \mathcal{R}(X,Y)\big]\varphi^2\,(Z)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2(n+1)}\Big\{\big[\mathcal{R}(Y,\varphi Z)\varphi(X)-\mathcal{R}(X,\varphi Z)\varphi(Y)\big] - \big[\mathcal{R}(X,\varphi Y)-\mathcal{R}(Y,\varphi X)\big]\,\varphi(Z) +$$

$$+\frac{1}{2n(n+1)}\Big\{\big[\mathcal{R}(Y,\varphi^2 Z)\varphi^2(X) - \mathcal{R}(X,\varphi^2 Z)\varphi^2\,(Y)\big] -$$

$$-\big[\mathcal{R}(X,\varphi^2 Y) - \mathcal{R}(Y,\varphi^2 X)\big]\varphi^2(Z)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2n(2n-1)}\Big\{\mathcal{R}(\varphi^2 X,Z)\varphi^2(Y) - \mathcal{R}(\varphi^2 Y,Z)\varphi^2\,(X)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2(n+1)(2n-1)}\Big\{\big[\mathcal{R}(\varphi^2 Z,X)\varphi^2\,(Y) - \mathcal{R}(\varphi^2 Z,Y)\varphi^2(X)\big] +$$

$$+\big[\mathcal{R}(\varphi X,Y) - \mathcal{R}(\varphi Y,X)\big]\;\varphi(Z) + \big[\mathcal{R}(\varphi X,\varphi^2 Y)- \mathcal{R}(\varphi Y,\varphi^2 X)\big]\;\varphi(Z) +$$

$$+\big[\mathcal{R}(\varphi Z,Y)\,\varphi(X) - \mathcal{R}(\varphi Z,X)\varphi(Y)\big] - \big[\mathcal{R}(\varphi^2 Y,\varphi Z)\varphi(X) - \mathcal{R}(\varphi^2 X,\varphi^2 Z)\varphi(Y)\big]\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2n(n+1)(2n-1)}\Big\{\big[\mathcal{R}(\varphi^2 X,\varphi^2 Z)\varphi^2(Y) - \mathcal{R}(\varphi^2 Y,\varphi^2 Z)\varphi^2(X)\big] +$$

$$+\big[\mathcal{R}(\varphi^2 X,Y) - \mathcal{R}(\varphi^2 Y,X) + (\varphi^2 X,\varphi^2 Y)- \mathcal{R}(\varphi^2 Y,\varphi^2 X)\big]\varphi^2(Z)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{4(n^2-1)}\Big\{\big[\mathcal{R}(\varphi X,\varphi Z)+\mathcal{R}(\varphi Z,\varphi X)\big]\varphi^2(Y)- \big[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi Z)+\mathcal{R}(\varphi Z,\varphi Y)\big]\,\varphi^2(X) +$$

$$+\big[\mathcal{R}(\varphi X,\varphi^2 Z)+ \mathcal{R}(\varphi^2 Z,\varphi X)\big]\varphi(Y)-\big[\mathcal{R}(\varphi Y,\varphi^2 Z)+ \mathcal{R}(\varphi^2 Z,\varphi Y)\big]\varphi(X)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{4(n^2-1)(2n-1)}\Big\{\big[\mathcal{R}(\varphi^2 Y,\varphi^2 Z) + \mathcal{R}(\varphi^2 Z,\varphi^2 Y)\big]\varphi^2(X) -$$

$$-\big[\mathcal{R}(\varphi^2 X,\varphi^2 Z)+\mathcal{R}(\varphi^2 Z,\varphi^2 X)\big]\varphi^2(Y)- \big[\mathcal{R}(\varphi^2 Y,\varphi Z)+ \mathcal{R}(\varphi Z,\varphi^2 Y)\big]\varphi(X) +$$

$$+\big[\mathcal{R}(\varphi^2 X,\varphi Z) + \mathcal{R}(\varphi Z,\varphi^2 X)\big]\varphi(Y)\Big\} =$$

$$= K(X,Y)+ \frac{1}{2n}\Big\{\big[\mathcal{K}(Y,Z)\varphi^2(X)-\mathcal{K}(X,Z)\varphi^2(Y)\big] +\big[\mathcal{K}(Y,X)-\mathcal{K}(X,Y)\big]\,\varphi^2(Z)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2(n+1)}\Big\{\big[\mathcal{R}(Y,\varphi Z)\varphi(X)- \mathcal{R}(X,\varphi Z)\varphi(Y)\big] - \big[\mathcal{R}(X,\varphi Y)- \mathcal{R}(Y,\varphi X)\big]\,\varphi(Z)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2n(n+1)}\Big\{\big[\mathcal{K}(Y,\varphi^2 Z)\varphi^2(X)- \mathcal{K}(X,\varphi^2 Z)\varphi^2(Y)\big] - \big[\mathcal{K}(X,\varphi^2 Y) -$$

$$- \mathcal{K}(Y,\varphi^2X)\varphi^2(Z)]\Big\} + \frac{1}{2n(2n-1)}\Big\{[\mathcal{K}(\varphi^2X,Z)\varphi^2(Y)-\mathcal{K}(\varphi^2Y,Z)\varphi^2(X)]\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2(n+1)(2n-1)}\Big\{[\mathcal{K}(\varphi^2Z,X)\varphi^2(Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Z,Y)\varphi^2(X)] +$$
$$+ [\mathcal{K}(\varphi X,Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,X)]\varphi(Z) + [\mathcal{K}(\varphi X,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi^2X)]\varphi(Z) +$$
$$+ [\mathcal{K}(\varphi Z,Y)\varphi(X) - \mathcal{K}(\varphi Z,X)\varphi(Y)] - [\mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi Z)\varphi(X) - (\varphi^2X,\varphi Z)\varphi(Y)]\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2n(n+1)(2n-1)}\Big\{[\mathcal{K}(\varphi^2X,\varphi^2Z)\varphi^2(Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z)\varphi^2(X)] +$$
$$+ [\mathcal{K}(\varphi^2X,Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,X) + \mathcal{K}(\varphi^2X,\varphi^2Y) - \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2X)]\varphi^2(Z)\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{4(n^2-1)}\ [\mathcal{K}(\varphi X,\varphi Z) + \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi X)]\varphi^2(Y) - [\mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi Y)]\varphi^2(X) +$$
$$+ [\mathcal{K}(\varphi X,\varphi^2Z) + \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi X)]\varphi(Y) - [\mathcal{K}(\varphi Y,\varphi Z) + \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi Y)]\varphi(X)\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{4(n^2-1)(2n-1)}\Big\{[\mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2Z) + \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2Y)]\varphi^2(X) -$$
$$- [\mathcal{K}(\varphi^2X,\varphi^2Z) + \mathcal{K}(\varphi^2Z,\varphi^2X)]\varphi^2(Y) - [\mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi Z) + \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi^2Y)]\varphi(X) +$$
$$+ [\mathcal{K}(\varphi^2X,\varphi Z) + \mathcal{K}(\varphi Z,\varphi^2X)]\varphi(Y)\Big\}$$

Odavde sleduje da je tenzor

$$H(X,Y) = R(X,Y)Z + \frac{1}{2n}\Big\{[\mathcal{R}(Y,Z)\varphi^2(X) - \mathcal{R}(X,Z)\varphi^2(Y)] +$$
$$+ [\mathcal{R}(Y,X) - \mathcal{R}(X,Y)]\varphi^2(Z)\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2(n+1)}\ [\mathcal{R}(Y,\varphi Z)\varphi(X) - \mathcal{R}(X,\varphi Z)\varphi(Y)] - [\mathcal{R}(X,\varphi Y) - \mathcal{R}(Y,\varphi X)]\varphi(Z)\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2n(n+1)}\Big\{[\mathcal{R}(Y,\varphi^2Z)\varphi^2(X) - \mathcal{R}(X,\varphi^2Z)\varphi^2(Y)] - [\mathcal{R}(X,\varphi^2Y) -$$
$$- \mathcal{R}(Y,\varphi^2X)]\varphi^2(Z) + \frac{1}{2n(2n-1)}\ [\mathcal{R}(\varphi^2X,Z)\varphi^2(Y) - \mathcal{R}(\varphi^2Y,Z)]\varphi^2(X)\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2(n+1)(2n-1)}\Big\{[\mathcal{R}(\varphi X,Y) - \mathcal{R}(\varphi Y,X)]\varphi(Z) +$$
$$+ [\mathcal{R}(\varphi^2Z,X)\varphi^2(Y) - \mathcal{R}(\varphi^2Z,Y)\varphi^2(X)] + [\mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi Z)\varphi(X) - \mathcal{R}(\varphi^2X,\varphi Z)\varphi(Y)] - \tag{14}$$
$$+ [\mathcal{R}(\varphi X,\varphi^2Y) - \mathcal{R}(\varphi Y,\varphi^2X)]\varphi^2(Z) + [\mathcal{R}(\varphi Z,Y)\varphi(X) - \mathcal{R}(\varphi Z,X)\varphi(Y)]\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2n(n+1)(2n-1)}\Big\{[\mathcal{R}(\varphi^2X,\varphi^2Z)\varphi^2(Y) - \mathcal{R}(\varphi^2Y,\varphi^2Z)\varphi^2(X)] +$$

$$+\left[\mathfrak{R}(\varphi^2 X,Y) - \mathfrak{R}(\varphi^2 X,X) + \mathfrak{R}(\varphi^2 X,\varphi^2 Y) - \mathfrak{R}(\varphi^2 Y,\varphi^2 X)\right]\varphi(Z)\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{4(n^2-1)} \left[\mathfrak{R}(\varphi X,\varphi Z)+ \mathfrak{R}(\varphi Z,\varphi X)\right]\varphi^2(Y)- \left[\mathfrak{R}(\varphi Y,\varphi Z)+ (\varphi Z,\varphi Y)\right]\varphi^2(X)+$$

$$+\left[\mathfrak{R}(\varphi X,\varphi^2 Z)+ \mathfrak{R}(\varphi^2 Z,\varphi X)\right]\varphi(Y)-\left[\mathfrak{R}(\varphi Y,\varphi^2 Z)+ \mathfrak{R}(\varphi^2 Z,\varphi Y)\right]\varphi(X)\Big\}+$$

$$+ \frac{1}{4(n^2-1)(2n-1)} \Big\{\left[\mathfrak{R}(\varphi^2 Y,\varphi^2 Z) + \mathfrak{R}(\varphi^2 Z,\varphi^2 Y)\right]\varphi^2(X) -$$

$$-\left[\mathfrak{R}(\varphi^2 X,\varphi^2 Z)+ \mathfrak{R}(\varphi^2 Z,\varphi^2 X)\right]\varphi^2(Y)-\left[\mathfrak{R}(\varphi^2 Y,\varphi Z)+ \mathfrak{R}(\varphi Z,\varphi^2 Y)\right]\varphi(X) +$$

$$+ \left[\mathfrak{R}(\varphi^2 X,\varphi Z) + \mathfrak{R}(\varphi Z,\varphi^2 X)\right] \varphi(Y)\Big\}$$

invarijantan pri CHP transformacijama. Tenzor $H(X,Y)Z$ nazivamo <u>C - holomorfno projektivni tenzor krivine ili CHP tenzor krivine</u>. Dakle važi

<u>Teorema 1.</u> Ako su dve koneksije u CHP korespondenciji tada su CHP tenzori krivine u odnosu na te dve koneksije jednaki.

§ 3. C-HOLOMORFNO PROJEKTIVNO RAVNI PROSTORI

Za normalni skoro kontaktni prostor sa simetričnom (φ,ξ,η) koneksijom kažemo da je <u>CHP - ravan prostor</u>, ako se preslikava CHP - transformacijom (1.27) u ravan prostor.

Tenzorsko polje krivine ravnog prostora je jednako nuli:

$$R(X,Y)Z = 0$$

a odatle sleduje da je i Ričijevo tenzorsko polje jednako nuli.

$$\mathfrak{R}(X,Y) = 0$$

Zbog toga iz (2.14) sleduje da je CHP - tenzor krivine ravnog prostora jednak nuli

$$H(X,Y) = 0$$

Kako je CHP - tenzor krivine invarijantan s obzirom na CHP - - transformacije, neposredno sleduje

Teorema 1. CHP - tenzor krivine CHP - ravnog prostora jednak je nuli.

Dokažimo da važi i obrnuta teorema tj.

Teorema 2. Normalni skoro kontaktni prostor $\mathfrak{M}^{2n+1}(n>2)$ čiji je CHP - tenzor krivine $H(X,Y)Z$ jednak nuli je CHP- ravan prostor.

Stavimo

$$\mathcal{P}'(X,Y) = \frac{1}{2n}\mathcal{K}(X,Y) - \frac{1}{2n(2n-1)}\mathcal{K}(\varphi^2X,Y) + \frac{1}{2n(n+1)}\mathcal{K}(X,\varphi^2Y) -$$

$$- \frac{1}{2(n+1)(2n-1)}\mathcal{K}(\varphi^2Y,X) - \frac{1}{2n(n+1)(2n-1)}\mathcal{K}(\varphi^2X,\varphi^2Y) -$$

$$- \frac{1}{4(n^2-1)}\left[\mathcal{K}(\varphi X,\varphi Y) + \mathcal{K}(\varphi Y,\varphi X)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4(n^2-1)(2n-1)}\left[\mathcal{K}(\varphi^2X,\varphi^2Y) + \mathcal{K}(\varphi^2Y,\varphi^2X)\right]$$

Kada je $H(X,Y)Z = 0$ iz (2.14) dobijamo izraz za tenzor krivine $K(X,Y)Z$ koji je istog oblika kao u (2.4) kada je tenzor krivine $R(X,Y)Z$ jednak nuli. Kako je tenzor krivine $R(X,Y)Z$ jednak nuli; znači i Ričijev tenzor $\mathcal{R}(X,Y)$ je takodje jednak nuli pa iz (2.13) i prethodne relacije sleduje

$$\mathcal{P}'(X,Y) = \mathcal{P}(X,Y)$$

Zato, da bismo dokazali da je prostor sa CHP-tenzorom krivine jednakim nuli CHP-ravan prostor, dovoljno je dokazati da postoji polje 1-formi P koje zadovoljava uslov

$$(D_XP)(Y) = \mathcal{P}(X,Y) + P(X)P(Y) - P(\varphi X)P(\varphi Y)$$

ili

$$(1) \qquad (DP)(X,Y) = \mathcal{P}(X,Y) + P(X)P(Y) - P(\varphi X)P(\varphi Y)$$

u prostoru čiji je tenzor krivine $K(X,Y)Z$ oblika

$$(2) \qquad \begin{aligned} K(X,Y)Z = &- \mathcal{P}(Y,Z)\varphi^2 X + \mathcal{P}(X,Z)\varphi^2 Y - [\mathcal{P}(Y,X) - \mathcal{P}(X,Y)]\varphi^2 Z - \\ &- [\mathcal{P}(Y,\varphi X) - \mathcal{P}(X,\varphi Y)]\varphi Z - [\mathcal{P}(Y,\varphi Z)\varphi X - \mathcal{P}(X,\varphi Z)\varphi Y] \;. \end{aligned}$$

Uslovi integrabilnosti diferencijalnih jednačina (1) se izražavaju Ričijevim identitetom (I.2.25)

$$(3) \qquad (DDP)(Z,X,Y) - (DDP)(X,Z,Y) = D_Z D_X - D_X D_Z - D_{D_Z X} + D_{D_X Z}\, P(Y)$$

gde je

$$(4) \qquad d = D_Z D_X - D_X D_Z - D_{D_Z X} + D_{D_X Z}$$

derivacija na algebri tenzora indukovana derivacijom na vektorskom prostoru $T(\mathfrak{M})$. Prema (I.2.15) imamo da je

$$(5) \qquad (dP)(Y) = dP(Y) - P(dY)$$

$P(Y)$ je vrednost polja 1-formi P na vektorskom polju Y, dakle to je sklar, a zbog toga je

$$\begin{aligned} dP(Y) &= D_Z D_X P(Y) - D_X D_Z P(Y) - D_{D_Z X} P(Y) + D_{D_X Z} P(Y) \\ &= ZX(P(Y)) - XZ(P(Y)) - D_Z X\,(P(Y)) + D_X Z(P(Y)) \;, \end{aligned}$$

a odavde, imajući u vidu definiciju komutatora vektorskog polja i simetriju koneksije D, sleduje

$$dP(Y) = [Z,X]\,P(Y) - [Z,X]\,P(Y)$$

tj.

$$(6) \qquad dP(Y) = 0$$

Kako je

$$dY = D_Z D_X Y - D_X D_Z Y - D_{D_Z X} Y + D_{D_X Z} Y$$

s obzirom na (2.2) dobijamo

$$(7) \qquad dY = K(Z,X)Y \ .$$

Prema tome koristeći (4), (5), (6), (7), Ričijev identitet (3) za polje 1-formi P možemo da pišemo u obliku

$$(8) \qquad (DDP)(Z,X,Y) - (DDP)(X,Z,Y) = - P(K(Z,X)Y)$$

Koristeći pravila za kovarijantno diferenciranje i uslov da je koneksija D (φ,ξ,η) - koneksija možemo izraz na levoj strani relacije (8) da transformišemo na sledeći način

$$\begin{aligned}
&(DDP)(Z,X,Y) - (DDP)(X,Z,Y) = \\
&= (D_Z DP)(X,Y) - (D_X DP)(Z,Y) \\
&= D_Z((DP)(X,Y) - (DP)(D_Z X,Y) - (DP)(X,D_Z Y) - \\
&- D_Z((DP)(Z,Y) + (DP)(D_X Z,Y) + (DP)(Z,D_X Y) \\
&= D_Z(\mathcal{P}(X,Y) + P(X)P(Y) - P\varphi(X)P(\varphi Y)) - (D_Z X,Y) - \\
&- P(D_Z X)P(Y) + P(\varphi D_Z X)P(\varphi Y) - \mathcal{P}(X,D_Z Y) - \\
&- P(X)P(D_Z Y) + P(\varphi X)P(\varphi D_Z Y) - D(\mathcal{P}(Z,Y) + \\
&+ P(Z)P(Y) - P(\varphi Z)P(\varphi Y) + \mathcal{P}(D_X Z,Y) + P(D_X Z)P(Y) - \\
&- P(\varphi D_X Z)P(\varphi Y) + \mathcal{P}(Z,D_X Y) + P(Z)P(D_X Y) - \\
&- P(\varphi Z)P(\varphi D_X Y)
\end{aligned}$$

tj.

$$(DDP)(Z,X,Y) - (DDP)(X,Z,Y) = (D_Z\mathcal{P})(X,Y) + P(Y)\mathcal{P}(Z,X) +$$
$$+ P(X)\mathcal{P}(Z,Y) - P\varphi(Y)\mathcal{P}(Z,\varphi X) - P\varphi(X)\mathcal{P}(Z,\varphi Y) - (D_X\mathcal{P})(Z,Y) -$$
$$- P(Y)\mathcal{P}(X,Z) - P(Z)\mathcal{P}(X,Y) + P(\varphi Y)\mathcal{P}(X,\varphi Z) + P(\varphi Z)\mathcal{P}(X,\varphi Y)$$

Desnu stranu relacije (8) možemo da transformišemo koristeći (1.26) i (2) tako da je

$$- P(K(Z,X)Y) = - \mathcal{P}(X,Y)P(Z) + \mathcal{P}(Z,Y)P(X) - \mathcal{P}(X,Z)P(Y) +$$
$$+ \mathcal{P}(Z,X)P(Y) + \mathcal{P}(X,\varphi Z)P(\varphi Y) - \mathcal{P}(X,\varphi Z)P\varphi(Y) + \tag{10}$$
$$+ \mathcal{P}(X,\varphi Y)P(\varphi Z) - \mathcal{P}(Z,\varphi Y)P(\varphi X).$$

Dakle, s obzirom na (9) dobijamo da su uslovi integrabilnosti (8) diferencijalnih jednačina (3) ekvivalentni sa

$$(D_Z\mathcal{P})(X,Y) - (D_X\mathcal{P})(Z,Y) = 0$$

Uvedimo oznaku

$$Q(Z,X,Y) = (D_Z\mathcal{P})(X,Y) - (D_X\mathcal{P})(Z,Y)$$

Dokažimo da je zaista

$$Q(Z,X,Y) = 0$$

gde su Z,X,Y proizvoljna vektorska polja iz $\mathcal{X}(\mathfrak{M})$. Derivaciju d iz (4) možemo da označimo i sa $K(Z,X)$ tj.

$$K(Z,X) = D_Z D_X - D_X D_Z - D_{D_Z X} + D_{D_X Z}$$

zbog čega Bianchi-ev identitet (I.2.27) možemo da pišemo u obliku

$$(D_Z K)(X,Y) + (D_Y K)(Z,X) + (D_X K)(Y,Z) = 0 \tag{12}$$

gde je

$$(13)\qquad (D_Z K)(X,Y) = [D_Z, K(X,Y)] - K(D_Z X,Y) - K(X,D_Z Y) .$$

Primetimo da $[D_Z, K(X,Y)]$ nije Liov proizvod vektorskih polja nego komutator operatora na vektorskim poljima.

Za ma koji vektor U iz (12) i (13) nalazimo

$$(14)\qquad \begin{aligned} & D_Z K(X,Y)U - K(X,Y)(D_Z U) - K(D_Z X,Y)U - K(X,D_Z Y)U + \\ & + D_Y K(Z,X)U - K(Z,X)(D_Y U) - K(D_Y Z,X) - K(Z,D_Y X)U + \\ & + D_X K(Y,Z)U - K(Y,Z)(D_X U) - K(D_X Y,Z)U - K(Y,D_X Z)U = 0. \end{aligned}$$

Ako smenimo (2) u (14) uz odgovarajuće promene oznaka i koristeći pravila za kovarijantno diferenciranje dobijamo

$$(15)\qquad \begin{aligned} & (D_Z \varphi)(Y,U)\varphi^2 X - (D_Z \varphi)(X,U)\varphi^2 Y + (D_Z \varphi)(X,X)\varphi^2 U - (D_Z \varphi)(X,Y)\varphi^2 U + \\ & + (D_Z \varphi)(Y,\varphi X)\varphi U - (D_Z \varphi)(X,\varphi Y)\varphi U + (D_Z \varphi)(Y,\varphi U)\varphi X - (D_Z \varphi)(X,\varphi U)\varphi Y + \\ & + (D_Y \varphi)(X,U)\varphi^2 Z - (D_Y \varphi)(Z,U)\varphi^2 X + (D_Y \varphi)(X,Z)\varphi^2 U - (D_Y \varphi)(Z,X)\varphi^2 U + \\ & + (D_Y \varphi)(X,\varphi Z)\varphi U - (D_Y \varphi)(Z,\varphi X)\varphi U + (D_Y \varphi)(X,\varphi U)\, Z - (D_Y \varphi)(Z,\varphi U)\varphi X + \\ & + (D_X \varphi)(Z,U)\varphi^2 Y - (D_X \varphi)(Y,U)\varphi^2 Z + (D_X \varphi)(Z,Y)\varphi^2 U - (D_X \varphi)(Y,Z)\varphi^2 U + \\ & + (D_X \varphi)(Z,\varphi Y)\varphi U - (D_X \varphi)(Y,\varphi Z)\varphi U + (D_X \varphi)(Z,\varphi U)\varphi Y - (D_X \varphi)(Y,\varphi U)\varphi Z = 0 \end{aligned}$$

Definišimo sada transformaciju tangentnog prostora $T_p\mathfrak{M}$ u nekoj tački $p \in \mathfrak{M}$ s obzirom na vektore $X,Y,Z \in T_p M$ kao linearno preslikavanje

$$\mathcal{B} : U_p \longrightarrow \mathcal{B}_{X_p,Y_p,Z_p}(U)_p$$

gde je

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{X,Y,Z}(U)=(D_Z\mathcal{P})(Y,U)\varphi^2X-(D_Z\mathcal{P})(X,U)\varphi^2Y+(D_Z\mathcal{P})(Y,X)\varphi^2U-\\
&-(D_Z\mathcal{P})(X,Y)\varphi^2U+(D_Z\mathcal{P})(Y,\varphi X)\varphi U-(D_Z\mathcal{P})(X,\varphi Y)\varphi U+(D_Z\mathcal{P})(Y,\varphi U)\varphi X-\\
&-(D_Z\mathcal{P})(X,\varphi U)\varphi Y+(D_Y\mathcal{P})(X,U)\varphi^2Z-(D_Y\mathcal{P})(Z,U)\varphi^2X+(D_Y\mathcal{P})(X,Z)\varphi^2U-\\
&-(D_Y\mathcal{P})(Z,X)\varphi^2U+(D_Y\mathcal{P})(X,\varphi Z)\varphi U-(D_Y\mathcal{P})(Z,\varphi X)\varphi U+(D_Y\mathcal{P})(X,\varphi U)\varphi U-\\
&-(D_Y\mathcal{P})(Z,\varphi U)\varphi X+(D_X\mathcal{P})(Z,U)\varphi^2Y-(D_X\mathcal{P})(Y,U)\varphi^2Z+(D_X\mathcal{P})(Z,Y)\varphi^2U-\\
&-(D_X\mathcal{P})(Y,Z)\varphi^2U+(D_X\mathcal{P})(Z,\varphi Y)\varphi U-(D_X\mathcal{P})(Y,\varphi Z)\varphi U+(D_X\mathcal{P})(Z,\varphi U)\varphi Y-\\
&-(D_X\mathcal{P})(Y,\varphi U)\varphi Z
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Zbog (15) trag prethodno definisanog linearnog preslikavanja jednak je nuli, odnosno

$$
\begin{aligned}
&2\,[(D_Z\mathcal{P})(Y,\varphi^2X)-(D_Z\mathcal{P})(X,\varphi^2Y)-n(D_Z\mathcal{P})(Y,X)+n(D_Z\mathcal{P})(X,Y)\;+\\
&+(D_Y\mathcal{P})(X,\varphi^2Z)-(D_Y\mathcal{P})(Z,\varphi^2X)-n(D_Y\mathcal{P})(X,Z)+n(D_Y\mathcal{P})(Z,X)\;+\\
&+(D_X\mathcal{P})(Z,\varphi^2Y)-(D_X\mathcal{P})(Y,\varphi^2Z)-n(D_X\mathcal{P})(Z,Y)+n(D_X\mathcal{P})(Y,Z)=0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

uzimajući u obzir (1.14) i (1.15). Dokažimo da je

$$(D_Z\mathcal{P})(Y,\varphi^2X)=-(D_Z\mathcal{P})(Y,X)+\eta(X)(D_Z\mathcal{P})(Y,\xi). \tag{18}$$

Zaista, koristeći redom pravila za kovarijantno diferenciranje, (I.3.7), uslov da je $\mathcal{P}(Y,X)$ kovarijantno tenzorsko polje reda (2) i da je $D(\varphi,\xi,\eta)$-koneksija imamo

$$
\begin{aligned}
(D_Z\mathcal{P})(Y,\varphi^2X)&=D_Z\mathcal{P}(Y,\varphi^2X)-\mathcal{P}(D_ZY,\varphi^2X)-\mathcal{P}(Y,D_Z\varphi^2X)\\
&=D_Z\mathcal{P}(Y,-X\,\eta(X)\xi)-\mathcal{P}(D_ZY,-X+\eta(X)\xi)-\mathcal{P}(Y,D_Z(-X+\eta(X)\xi))\\
&=-D_Z\mathcal{P}(Y,X)+D_Z\mathcal{P}(Y,\eta(X)\xi)+\mathcal{P}(D_ZY,X)-\mathcal{P}(D_ZY,\eta(X)\xi)\;+\\
&\quad+\mathcal{P}(Y,D_ZX)-\mathcal{P}(Y,D_Z\,\eta(X)\xi)\\
&=-(D_Z\mathcal{P})(Y,X)+D_Z\,[\eta(X)\mathcal{P}(Y,\xi)]-\eta(X)\mathcal{P}(D_ZY,\xi)-\mathcal{P}(Y,\eta(D_ZX)\xi)\\
&=-(D_Z\mathcal{P})(Y,X)+(D_Z\eta(X))\,\mathcal{P}(Y,\xi)+\eta(X)D_Z\,\mathcal{P}(Y,\xi)\;-\\
&\quad-\eta(X)\,\mathcal{P}(D_ZY,\xi)-\eta(D_ZX)\,\mathcal{P}(Y,\xi)
\end{aligned}
$$

$$= -(D_Z \mathcal{P})(Y,X) + \eta(X)\left[D_Z\mathcal{P}(Y,\xi) - \mathcal{P}(D_Z Y,\xi) - \mathcal{P}(Y,D_Z\xi)\right)$$
$$= -(D_Z\mathcal{P})(Y,X) + \eta(X)(D_Z\mathcal{P})(Y,\xi).$$

Dakle, koristeći (17) i ranije uvedenu oznaku (11) možemo (16) pisati u jednostavnijem obliku

$$(n+1)Q(Y,Z,X) + Q(Z,X,Y) + Q(X,Y,Z) +$$
$$+\eta(X)Q(Z,Y,\xi) + \eta(Y)Q(X,Z\xi) + \eta(Z)Q(Y,X,\xi) = 0 \tag{19}$$

Definišimo, dalje, transformaciju tangentnog prostora $T_p\mathfrak{M}$ u nekoj tački $p \in \mathfrak{M}$ sa obzirom na vektore $X_p, Y_p, U_p \in T_p\mathfrak{M}$ kao linearno preslikavanje

$$C : Z_p \longrightarrow C_{X_p,\, Y_p,\, U_p}(Z_p)$$

gde je

$$C_{X,Y,U}(Z) = \mathcal{B}_{X,Y,Z}(U)$$

Tenzorsko polje $\mathcal{B}_{X,Y,Z}(U)$ je definisano relacijom (16).

Trag linearnog preslikavanja C je

$$(D_{\varphi^2X}\mathcal{P})(Y,U)-(D_{\varphi^2Y}\mathcal{P})(X,U)+(D_{\varphi^2U}\mathcal{P})(Y,X) -(D_{\varphi^2U}\mathcal{P})(X,Y) +$$
$$+ (D_{\varphi U}\mathcal{P})(Y,\varphi X)-(D_{\varphi U}\mathcal{P})(X,\varphi Y)+(D_{\varphi X}\mathcal{P})(Y,\varphi U)-(D_{\varphi Y}\mathcal{P})(X,\varphi U) -$$
$$-2n(D_Y\mathcal{P})(X,U)-(D_Y\mathcal{P})(\varphi^2X,U)+(D_Y\mathcal{P})(X,\varphi^2U)-(D_Y\mathcal{P})(\varphi^2U,X) +$$
$$+(D_Y\mathcal{P})(X,\varphi^2U) - (D_Y\mathcal{P})(\varphi U,\varphi X) - (D_Y\mathcal{P})(\varphi X,\varphi U) +$$
$$+(D_X\mathcal{P})(\varphi^2Y,U)+2n(D_X\mathcal{P})(Y,U)+(D_X\mathcal{P})(\varphi^2U,Y)-(D_X\mathcal{P})(Y,\varphi^2U) +$$
$$+(D_X\mathcal{P})(\varphi U,\varphi Y) - (D_X\mathcal{P})(Y,\varphi^2U) + (D_X\mathcal{P})(\varphi Y,\varphi U) = 0 .$$

Slično kao u slučaju formule (18) dokazujemo da važi

$$(D_X\mathcal{P})(\varphi^2Y,Z) = -(D_X\mathcal{P})(Y,Z) + \eta(Y)(D_X\mathcal{P})(\xi,Z) \tag{20}$$

$$(D_{\varphi^2X}\mathcal{P})(Y,Z) = -(D_X\mathcal{P})(Y,Z) + \eta(X)(D_\xi\mathcal{P})(Y,Z) \tag{21}$$

Koristeći (18), (20), (21) i oznaku (11), trag linearnog preslikavanja C možemo transformisati i predstaviti u obliku

$$
\begin{aligned}
&2nQ(X,Y,U)+Q(U,X,Y)+Q(Y,U,X)+\eta(X)Q(\xi,Y,U)+\eta(Y)Q(X,\xi,U)+\\
(22)\quad &+\eta(U)\left[2Q(Y,X,\xi)+Q(\xi,Y,X)+Q(X,\xi,Y)\right]+Q(\varphi U,Y,\varphi X)+\\
&+Q(\varphi X,Y,\varphi U)+Q(X,\varphi U,\varphi Y)+Q(X,\varphi Y,\varphi U)=0\ .
\end{aligned}
$$

Neposredno se proverava, s obzirom na (11) da je tenzorsko polje Q(X,Y,U) antisimetrično po prva dva argumenta

$$(23)\qquad Q(X,Y,U) = -\,Q(Y,X,U)$$

Stavimo u (22) $U=\xi$. Tada, zbog (23) i (I.3.7), odatle se dobija

$$(24)\qquad (2n-1)Q(X,Y,\xi) = \eta(X)Q(Y,\xi,\xi) - \eta(Y)Q(X,\xi,\xi)$$

Smenom (24) u (19), koristeći (23), nalazimo

$$(25)\qquad Q(Y,Z,X) + Q(Z,X,Y) + Q(X,Y,Z) = 0$$

Koristeći (25) možemo (19) i (22) pa pišemo u ovom obliku

$$(26)\qquad (X)Q(Z,Y,\ )+\ (Y)Q(X,Z,\ ) +\ (Z)Q(Y,X,\ ) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&(2n-1)Q(X,Y,Z)+\ (X)Q(\ ,Y,Z)+\ (Y)Q(X,\ ,Z)+\ (Z)Q(Y,X,\ )+\\
(27)\quad &+Q(\ Z,Y,\ X)+Q(\ X,\ Y,\ Z)+Q(X,\ \ Z,\ Y)+Q(X,\ Y,\ Z) = 0.
\end{aligned}
$$

Stavimo u (26) umesto vektorskih polja Y,Z vektorska polja φY i φZ. Tada, zbog (25), (23) i (I.3.7), odatle dobijamo

$$(28)\qquad Q(\xi,\varphi Z,\varphi Y) = Q(\xi,\varphi Y,\varphi Z).$$

Ako je $X=\xi$, imajući u vidu (23) (I.3.7) i (28) iz (27) nalazimo

$$(29)\qquad 2nQ(\xi,Y,Z)+\eta(Z)Q(Y,\xi,\xi) + 2Q(\xi,\varphi Y,\varphi Z) = 0.$$

Kada u ovoj formuli vektorska polja Y,Z zamenimo vektorskim poljima φY i φZ imamo

$$nQ(\xi,\varphi Y,\varphi Z) + Q(\xi,\varphi^2 Y,\varphi^2 Z) = 0,$$

odnosno

$$Q(\xi,\varphi Y,\varphi Z) = \frac{1}{n}(\eta(Z)Q(\xi,Y,\xi) - Q(\xi,Y,Z)) ,$$

pri čemu smo koristili (I.3.7), (11), (18), (20), (21) i (23). Smenom poslednjeg izraza u (29) i zamenom vektorskih polja Y i Z redom vektorskim poljima φY, φZ nalazimo

$$(30)\qquad Q(\xi,\varphi Y,\varphi Z) = 0$$

i zato iz (29) s obzirom na (23) sleduje

$$(31)\qquad 2nQ(\xi,Y,Z) = \eta(Z)Q(\xi,Y,\xi).$$

Ako tenzorsko polje $\eta(Z)Q(Y,X,\xi)$ izrazimo iz (26) i smenimo u (27) dobijamo

$$\begin{aligned}&(2n-1)Q(X,Y,Z)+\eta(X)Q(\xi,Y,Z)+\eta(Y)Q(X,\xi,Z)-\eta(X)Q(Z,Y,\xi) -\\&-\eta(Y)Q(X,Z,\xi)+Q(\varphi Z,Y,\varphi X)+Q(\varphi X,Y,\varphi Z)+Q(X,\varphi Z,\varphi Y)+Q(X,\varphi Y,\varphi Z)=0\end{aligned}$$

Smenimo tenzorska polja $Q(Z,Y,\xi)$, $Q(X,Z,\xi)$ odgovarajućim izrazima iz (25) u prethodno dobijenu formulu. Tada imamo

$$\begin{aligned}&(2n-1)Q(X,Y,Z)+\eta(X)Q(\xi,Z,Y)+\eta(Y)Q(Z,\xi,X)+Q(\varphi Z,Y,\varphi X) +\\&+Q(\varphi X,Y,\varphi Z) + Q(X,\varphi Z,\varphi Y) + Q(X,\varphi Y,\varphi Z) = 0\end{aligned}$$

a odavde zbog (31) i (23) dobijamo

$$(32)\qquad \begin{aligned}&(2n-1)Q(X,Y,Z) - [Q(Y,\varphi Z,\varphi X) + Q(Y,\varphi X,\varphi Z)] +\\&+[Q(X,\varphi Z,\varphi Y) + Q(X,\varphi Y,\varphi Z)] = 0.\end{aligned}$$

Ako je $Z=\xi$ iz (32), s obzirom na (I.3.7) sleduje

$$Q(X,Y,\xi)=0\ , \tag{33}$$

a ako je $X=\xi$ iz (32), s obzirom na (I.3.7) i (30) sleduje

$$Q(\xi,Y,Z)=0 \tag{34}$$

Nadjimo simetričan deo relacije (32) s obzirom na vektorska polja Y, Z

$$\begin{aligned}&(2n-1)\left[Q(X,Y,Z)+Q(X,Z,Y)\right]+2\left[Q(X,\varphi Z,\varphi Y))+Q(X,\varphi Y,\varphi Z)\right]-\\&-\left[Q(Y,\varphi Z,\varphi X)+Q(Y,\varphi X,\varphi Z)\right]-\left[Q(Z,\varphi Y,\varphi X)(+Q(Z,\varphi X,\varphi Y)\right]=0.\end{aligned} \tag{35}$$

Smenimo u relaciji (35) vektorska polja Y i Z redom vektorskim poljima φY, φZ. Koristeći (33), (34), (20), (21), (11) uz pogodnu promenu oznaka dobijamo

$$\begin{aligned}&(2n-1)\left[Q(X,\varphi Y,\varphi Z)+Q(X,\varphi Z,\varphi Y)\right]+2\left[Q(X,Z,Y)+Q(X,Y,Z)\right]+\\&+\left[Q(\varphi Y,Z,\varphi X)+Q(\varphi Y,\varphi X,Z)\right]+\left[Q(\varphi Z,Y,\varphi X)+Q(\varphi Z,\varphi X,Y)\right]=0.\end{aligned} \tag{36}$$

Sabiranjem jednačina (35) i (36) nalazimo

$$\begin{aligned}&(2n+1)\left[Q(X,\varphi Y,\varphi Z)+Q(X,\varphi Z,\varphi Y)\right]+(2n+1)\left[Q(X,Z,Y)+Q(X,Y,Z)\right]+\\&+\left[Q(\varphi Z,Y,\varphi X)+Q(\varphi Z,\varphi X,Y)-Q(Y,\varphi Z,\varphi X)-Q(Y,\varphi X,\varphi Z)\right]+\\&+\left[Q(\varphi Y,Z,\varphi X)+Q(\varphi Y,\varphi X,Z)-Q(Z,\varphi Y,\varphi X)-Q(Z,\varphi X,\varphi Y)\right]=0\end{aligned} \tag{37(}$$

a oduzimanjem jednačine (36) od (35) nalazimo

$$\begin{aligned}&(2n-3)\left[Q(X,Y,Z)+Q(X,Z,Y)\right]-(2n-3)\left[Q(X,\varphi Y,\varphi Z)+Q(X,\varphi Z,\varphi Y)\right]-\\&-\left[Q(Y,\varphi Z,\varphi X)+Q(Y,\varphi X,\varphi Z)+Q(\varphi Z,Y,\varphi X)+Q(\varphi Z,\varphi X,Y)\right]-\\&-\left[Q(Z,\varphi Y,\varphi X)+Q(Z,\varphi X,\varphi Y)+Q(\varphi Y,Z,\varphi X)+Q(\varphi Y,\varphi X,Z)\right]=0.\end{aligned} \tag{28)}$$

Ako (35) pomnožimo sa (2n-1), a (36) sa 2, pa tako dobijene jednačine oduzmemo dobijamo

$$(39)\quad \begin{aligned}&(2n-3)(2n+1)\left[Q(X,Y,Z)+Q(X,Z,Y)\right] - (2n-1)(Q(Y,\varphi Z,\varphi X) +\\ &+Q(Y,\varphi X,\varphi Z))+2(Q(\varphi Z, Y,\varphi X)+Q(\varphi Z,\varphi X,Y)] - [(2n-1)(Q(Z,\varphi Y,\varphi X)+\\ &+Q(Z,\varphi X,\varphi Y))+2(Q(\varphi Y, Z,\varphi X)+Q(\varphi Y,\varphi X,Z))] = 0.\end{aligned}$$

Smenimo vektorska polja X,Y,Z u relaciji (39) redom vektorskim poljima Y,Z,X, odnosno Z,X,Y, a zatim saberimo tako dobijene jednačine, koristeći (23) i (25) dobijamo

$$\begin{aligned}&-(2n-1)\left[Q(Y,\varphi Z,\varphi X)+Q(Y,\varphi X,\varphi Z)\right]-2(2n-1)\left[Q(X,\varphi Y,\varphi Z) +\right.\\ &\left.+Q(X,\varphi Z,\varphi Y)\right]-2(2n-1)\left[Q(Z,\varphi X,\varphi Y)+Q(Z,\varphi Y,\varphi X)\right]-4\left[Q(\varphi Z,Y,\varphi X) +\right.\\ &\left.+Q(\varphi X,Y,\varphi Z)\right]-4\left[Q(\varphi X,Z,\varphi Y)+Q(\varphi Y,Z,\varphi X)\right]-4\left[Q(\varphi Y,X,\varphi Z) +\right.\\ &\left.+Q(\varphi Z,X,\varphi Y)\right] = 0\end{aligned}$$

a odavde, koristeći još jednom (23) dobijamo

$$\begin{aligned}&\left[Q(Y,\varphi Z,\varphi X) + Q(Y,\varphi X,\varphi Z)\right]+\left[Q(X,\varphi Y,\varphi Z) + Q(X,\varphi Z,\varphi Y)\right] +\\ &+\left[Q(Z,\varphi X,\varphi Y) + Q(Z,\varphi Y,\varphi X)\right] = 0.\end{aligned}$$

Relaciju (35), s obzirom na dobijeni rezultat, možemo da pišemo u obliku

$$(40)\quad (2n-1)\left[Q(X,Y,Z)+Q(X,Z,Y)\right]+3\left[Q(X,\varphi Z,\varphi Y)+Q(X,\varphi Y,\varphi Z)\right] = 0.$$

Ako u ovoj jednačini vektorska polja Y i Z zamenimo redom vektorskim poljima φY i φZ i iskoristimo (11), (18), (20) i (21) nalazimo

$$(41)\quad 3\left[Q(X,Y,Z)+Q(X,Z,Y)\right]+(2n-1)\left[Q(X,\varphi Z,\varphi Y)+Q(X,\varphi Y,\varphi Z)\right] = 0$$

Iz poslednje dve jednačine za $n>2$ imamo .

$$Q(X,Y,Z) + Q(X,Z,Y) = 0$$
$$Q(X,\varphi Z,\varphi Y) + Q(X,\varphi Y,\varphi Z) = 0$$

zbog čega iz (32) sleduje

$$Q(X,Y,Z) = 0$$

što je i trebalo dokazati.

§ 4. NORMALNI SKORO KONTAKTNI METRIČKI PROSTORI

Razmotrimo, specijalno, na normalnom skoro kontakt-nom prostoru Riman - Kristofelovu koneksiju ∇. Tada je za tu koneksiju Ričijevo tenzorsko polje simetrično

$$\mathfrak{R}(X,Y) = \mathfrak{R}(Y,X)$$

Dokažimo prvo da za (φ,ξ,η) - Riman - Kristofelovu koneksiju važe sledeće osobine

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{R}(\varphi X,Y) = -\mathfrak{R}(X,\varphi Y) \qquad && \mathfrak{R}(\ ,\xi) = 0 \\ &\mathfrak{R}(\varphi X,\varphi Y) = \mathfrak{R}(X,Y) && \bar{R}(\omega\varphi,X) = \bar{R}(\omega,\varphi X) \end{aligned}$$

gde je $\bar{R}(\omega,X)$ bivarijantno Ričijevo tenzorsko polje koje se definiše sledećom relacijom

$$\text{(2)} \qquad \bar{R}(\omega,X) = \mathfrak{R}(g^{-1}(\omega),X) .$$

Kako se u dokazima ovih r elacija koriste vrlo često operacije "podizanja" i "spuštanja indeksa", to ćemo dokaze ovih relacija izvesti koristeći koordinate tih tenzora, kao što je i inače uobičajeno u takvom slučaju.

Dakle, s obzirom na pretpostavke o koneksiji iz

Ričijevog identiteta

$$\nabla_i \nabla_j \varphi_t{}^l - \nabla_j \nabla_i \varphi_t{}^l = R_{ijh}{}^l \varphi_t{}^h - R_{ijt}{}^h \varphi_h{}^l$$

sleduje

$$R_{ijh}{}^l \varphi_t{}^h = R_{ijt}{}^h \varphi_h{}^l$$

Kontrakcija sa g^{jt} daje

$$R_{ijh}{}^l \varphi^{jh} = R_i{}^h \varphi_h{}^l$$

tj.

(3) $$\frac{1}{2}(R_{ijh}{}^l - R_{ihj}{}^l)\varphi^{jh} = R_i{}^h \varphi_h{}^l$$

jer je tenzor $\varphi^{jh} = g^{ji}\varphi_i{}^h$ kao i tenzor $\varphi_{jh} = \varphi_j{}^i g_{ih}$ antisimetričan. Dalje iz relacija

$$R_{ijh}{}^l + R_{hij}{}^l + R_{jhi}{}^l = 0$$

i

$$R_{ijh}{}^l = - R_{jih}{}^l$$

imamo

$$R_{ijh}{}^l - R_{ihj}{}^l = - R_{jhi}{}^l$$

Ako dobijeni rezultat smenimo u (3) dobijamo

$$R_i{}^h \varphi_h{}^l = - \frac{1}{2} R_{jhi}{}^l \varphi^{jh}$$

tj.

(4) $$R_i{}^h \varphi_{hl} = - \frac{1}{2} R_{jhil} \varphi^{jh}$$

odnosno

$$R_i^{\ h}\varphi_{hl} = \frac{1}{2} R_{jhli}\varphi^{jh}$$

Analogno se dobija

(5) $$R_l^{\ h}\varphi_{hi} = \frac{1}{2}R_{jhil}\varphi^{jh}$$

Sabiranjem relacija (4) i (5) nalazimo

$$R_l^{\ h}\varphi_{hi} + R_i^{\ h}\varphi_{hl} = 0.$$

Ovu relaciju možemo i dalje da transformišemo koristeći (I.3.7), (I.3.8)

$$R_l^{\ h}\varphi_h^{\ a}g_{ai} + R_i^{\ h}\varphi_h^{\ a}g_{al} = 0$$

$$R_l^{\ h}\varphi_h^{\ a}g_{ai}g^{it} + R_i^{\ h}\varphi_h^{\ a}g_{al}g^{it} = 0$$

$$R_l^{\ h}\varphi_h^{\ t} - R^{th}\varphi_{lh} = 0$$

$$R_l^{\ h}\varphi_h^{\ t} - R_b^{\ t}g^{bh}\varphi_l^{\ a}g_{ah} = 0$$

$$R_l^{\ h}\varphi_h^{\ t} - R_b^{\ t}\varphi_l^{\ b} = 0.$$

Tako smo dokazali jednu od relacija (1).

Pomnožimo sada poslednju relaciju sa g^{ts}; uzimajući u obzir antisimetriju tenzora φ_{jt} nalazimo

$$R_l^{\ h}\varphi_h^{\ t}g_{ts} - R_b^{\ t}\varphi_l^{\ b}g_{ts} = 0$$

$$R_l^{\ h}\varphi_{hs} - R_{hs}\varphi_l^{\ h} = 0$$

$$-R_l^{\ h}\varphi_{sh} - R_{hs}\varphi_l^{\ h} = 0$$

$$-R_{lh}\varphi_s^{\ h} - R_{hs}\varphi_l^{\ h} = 0$$

tj.

$$R_{lh}\varphi_s{}^h = - R_{hs}\varphi_l{}^h$$

a to je drugi izraz u (1).

Iz Ričijevog identiteta

$$\nabla_j \nabla_i \xi^l - \nabla_i \nabla_j \xi^l = R_{jis}{}^l \xi^s$$

u našem slučaju dobijamo

$$R_{jis}{}^l \xi^s = 0$$

tj.

$$R_{jils}\xi^s = 0$$

a odavde kontrakcija sa g^{il} daje

$$R_{js}\xi^s = 0$$

To je treća relacija iz (1). Koristeći ovu dokazanu relaciju, množeći prvu relaciju iz (1) sa $\varphi_s{}^t$ dobijamo poslednju relaciju iz (1).

Koristeći dokazane relacije (1) i simetriju Ričijevog tenzorskog polja iz (2.14) posle sredjivanja dobijamo

$$H(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2(n+1)}\Big\{\mathfrak{R}(Y,Z)\varphi^2(X) - \mathfrak{R}(X,Z)\varphi^2(Y) +$$

(6) $$+ \mathfrak{R}(Y,\varphi Z)\varphi(X) - \mathfrak{R}(X,\varphi Z)\varphi(Y) - 2\mathfrak{R}(X,\varphi Y)\varphi(Z)\Big\}.$$

Stavimo

(7) $$H(X,Y)Z = 0$$

Tada iz (6) dobijamo koordinate $R_{jit}{}^l$ tenzora krivine u obliku

$$R_{jit}{}^{1} = -\frac{1}{2(n+1)}\left\{(\delta_i{}^1 - \eta_i\xi^1)R_{jt} - (\delta_j{}^1 - \eta_j\xi^1)R_{it} + \right.$$

$$\left. + \varphi_i{}^1\varphi_j{}^u R_{ut} - \varphi_j{}^1\varphi_i{}^u R_{ut} - 2\varphi_t{}^1\varphi_i{}^u R_{uj}\right\}.$$

a kontrakcijom sa g^{it} iz ove relacije dobijamo

$$R_j{}^1 = \frac{1}{2n}(\delta_j{}^1 - \eta_j\xi^1)R$$

tj.

$$R_{j1} = \frac{1}{2n}(G_{j1} - \eta_j\eta_1)R$$

gde smo sa R označili skalarnu krivinu

$$R = R_{ij}g^{ij}$$

Dakle, pošto smo dobili koordinate Ričijevog tenzora, nalazimo i Ričijevo tenzorsko polje $\mathcal{R}(Y,Z)$

$$\mathcal{R}(Y,Z) = \frac{1}{2n}R(g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)). \tag{8}$$

Koristeći (8) u slučaju (7) iz (6) dobijamo

$$R(X,Y)Z = \frac{R}{4n(n+1)}\left[(g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z))\varphi^2(Y) - (g(Y,Z) - \right.$$

$$\left. - \eta(Y)\eta(Z))\varphi^2X + \Phi(Y,Z)\varphi X - \Phi(X,Z)\varphi Y - 2\Phi(X,Y)\varphi Z\right]$$

tj.

$$\tilde{R}(U,Z,X,Y) = \frac{R}{4n(n+1)}\left[(g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z))(g(X,U) - \right.$$

$$-\eta(X)\eta(U)) - (g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z))(g(Y,U) - \eta(Y)\eta(U)) +$$

$$\left. + \Phi(Y,Z)\Phi(X,U) - \Phi(X,Z)\Phi(Y,U) - 2\Phi(X,Y)\Phi(Z,U)\right]$$

Poznato je [3] da se ξ-presek definiše kao ravan koja je odredjena karakterističnim vektorom ξ i vektorom X koji je ortogonalan na vektoru ξ. Dalje, sekciona krivina k

odredjena nekim vektorima X i Y se definiše formulom

$$k = - \frac{\tilde{R}(X,YXY)}{g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y)} \quad (10)$$

Sekciona krivina odredjena vektorskim poljima ξ i U naziva se ξ-sekciona krivina, a sekciona krivina odredjena vektorskim poljima φX, $\varphi^2 X$ naziva se C - holomorfna sekciona krivina. Dokažimo da važi:

<u>Teorema</u> 1. Ako je normalni skoro kontaktni metrički prostor $\mathfrak{M}^{2n+1}$ (n 1) CHP ravan tada je to prostor čija je ξ -sekciona krivina jednaka nuli, a C - holomorfna sekciona krivina je konstantna.

Zbog ortogonalnosti vektorskih polja ξ i X imamo

$$g(X,\xi) = 0$$

pa se lako dokazuje, imajući u vidu (9), da je

$$R(\xi,X,\xi,X) = 0$$

tj.

$$k = 0$$

Dokažimo dalje da C - holomorfna sekciona krivina ne zavisi od C - holomorfnog preseka $(\varphi X,\varphi^2 X)$. Imamo prvo, (I.3.7) i (I.3.8)

$$\begin{aligned} &g(\varphi X,\varphi X) = g(X,X) - \eta(X)\eta(X) \\ (11) \qquad &g(\varphi^2 X,\varphi^2 X) = g(\varphi X,\varphi X) = g(X,X) - \eta(X)\eta(X) . \end{aligned}$$

Formula (10) za presek $(\varphi X,\varphi^2 X)$ glasi

$$k = -\frac{\tilde{R}(\varphi X,\varphi^2 X,\varphi X,\varphi^2 X)}{g(\varphi X,\varphi X)g(\varphi^2 X,\varphi^2 X)} .$$

Smenom (9) u ovu formulu, koristeći (11), posle izvesnog računanja dobijamo

$$k = \frac{R}{n(n+1)}$$

tj. k ne zavisi od preseka $(\varphi X,\varphi^2 X)$ gde je X ma koje vektorsko polje. U tom slučaju krivina ima oblik

$$R(X,Y)Z = \frac{k}{4}\big[(g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z))\varphi^2 Y-(g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z))\varphi^2 X+ \tag{12}$$
$$+\Phi(Y,Z)\varphi X - \Phi(X,Z)\varphi Y - 2\Phi(X,Y)\varphi Z\big]$$

$$\tilde{R}(U,Z,X,Y) = \frac{k}{4}\big[g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U-g(X,U)\eta(Y)\eta(Z)- \tag{13}$$
$$-g(Y,Z)\eta(X)\eta(U)+g(Y,U)\eta(X)\eta(Z) + g(X,Z)\eta(Y)\eta(U) +$$
$$+\Phi(Y,Z)\Phi(X,U) -\Phi(X,Z)\Phi(Y,U) - 2\Phi(X,Y)\Phi(Z,U)\big]$$

Dokažimo da je k konstantno. Iz (12) dobijamo Ričijevo tenzorsko polje

$$\mathfrak{R}(Y,Z) = \frac{k(n+1)}{2}\big[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\big] \tag{14}$$

a odavde je skalarna krivina

$$R = n(n+1)k \tag{15}$$

Koristeći (I.3.1), (I.3.2), (2) i (12) nalazimo bivarijantno Ričijevo tenzorsko polje

$$\bar{R}(\omega,Z) = (g^{-1}(\omega),Z) = \frac{k(n+1)}{2}\big[g(g^{-1}(\omega),Z) - \eta(g^{-1}(\omega))\eta(Z)\big]$$
$$= \frac{k(n+1)}{2}\big[g(g^{-1}(\omega))(Z) - g^{-1}(\eta,\omega)\eta(Z)\big]$$
$$= \frac{k(n+1)}{2}\big[\omega(Y) - \omega(\xi)\eta(Y)\big]$$

tj.

(16) $$\bar{R} = \frac{k(n+1)}{2}(I - \eta \otimes \xi).$$

Prema 17 imamo da je

$$X(R) = 2\ \mathrm{tr}\left[(\nabla \bar{R})X\right],$$

a smenom (15) i (16) u ovu formulu nalazimo

$$n(n+1)X(k) = 2\ \mathrm{tr}\left[\nabla\ (\frac{k(n+1)}{2}\ (I - \eta \otimes \xi))X\right]$$

(17) $$n(n+1)X(k) = (n+1)\ \mathrm{tr}\left[\nabla(k(I - \eta \otimes \xi))X\right]$$

$$nX(k) = \nabla_X k - \eta(X)\nabla_\xi k$$

$$(n-1)X(k) = -\ \eta(X)\nabla_\xi k$$

Stavimo $X =$ u poslednju relaciju. Tada s obzirom na (I.3.7) imamo

$$n\,\xi(k) = 0$$

tj.

$$\xi(k) = 0,$$

a zbog toga iz (17) sleduje

$$(n-1)X(k) = 0$$

pa za $n \neq 1$ imamo

$$X(k) = 0$$

odnosno $k = \mathrm{const}$ što je i trebalo dokazati.

§ 5. C - HOLOMORFNO RAVNE KRIVE U EUKLIDSKOM PROSTORU

Razmotrimo sada (2n+1) - dimenzioni euklidski prostor E^{2n+1} i C - holomorfno ravne krive u tom prostoru uz odgovarajuće pretpostavke o funkcijama $\alpha(t)$ i $\beta(t)$. Kao što je poznato prema [3] prostor E^{2n+1} je normalni skoro kontaktni metrički prostor. Označimo sa (x^i) Dekartov pravougli koordinatni sistem u prostoru E^{2n+1}. Koordinate metričkog tenzora g u odnosu na taj koordinatni sistem su

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \quad , & i \neq j \\ 1 \quad , & i = j \end{cases} \qquad i,j = 1,\ldots,2n+1 .$$

pa su svi koeficijenti Riman - Kristofelove koneksije ∇ jednaki nuli. Skoro kontaktna struktura (φ,ξ,η) u odnosu na taj koordinatni sistem može biti data redom matricama njihovih koordinata

$$\begin{pmatrix} 0 & -I & I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (0 \; \ldots . 0 \;\; 1),$$

gde je I jedinična matrica tipa $n\times n$, a preostale dve matrice su tipa $1\times(2n+1)$ i $(2n+1)\times 1$. Lako se proverava da je 1-forma η gradijent i da je Riman - Kristofelova koneksija i (φ,ξ,η)-koneksija tj.

$$\nabla\varphi = 0 \quad , \nabla\eta = 0 \quad , \nabla\xi = 0$$

Prema tome, ima smisla razmatrati C - holomorfno ravne krive u prostoru E^{2n+1} sa prethodno datom skoro kontaktnom strukturom i Riman - Kristofelovom koneksijom. U tom slučaju su C - holomorfno ravne krive s ozbirom na (1.1) date sistemom od $(2n+1)$ diferencijalnih jednačina

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \alpha(t)\frac{dx^i}{dt} - \beta(t)\frac{dx^{n+i}}{dt}$$

(1)
$$\frac{d^2x^{n+i}}{dt^2} = \alpha(t)\frac{dx^{n+i}}{dt} + \beta(t)\frac{dx^i}{dt} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{d^2x^{2n+1}}{dt^2} = \alpha(t)\,\frac{dx^{2n+1}}{dt}$$

Za neko fiksirano i smena

(2) $$\frac{dx^i}{dt} = y(t) \quad , \quad \frac{dx^{n+i}}{dt} = z(t)$$

s obzirom na prethodni sistem (1) daje

(3) $$\frac{dy}{dt} = \alpha(t)y - \beta(t)z$$
$$\frac{dz}{dt} = \alpha(t)z + \beta(t)y$$

I slučaj Neka su

$$\alpha(t) = \alpha \quad , \quad \beta(t) = \beta \quad , \quad \alpha,\beta = \text{const} \qquad (\beta \neq 0)$$

Pri tome pretpostavljamo da je $\beta \neq 0$ jer u slučaju $\beta = 0$ C-holomorfno ravne krive svode se na geodezijske linije. Tada iz prve jednačine sistema (3) koristeći drugu jednačinu imamo

$$\begin{aligned} y''_{t^2} &= \alpha y'_t - \beta z' = \alpha y'_t - \beta(\alpha z + \beta y) = \alpha y'_t - \beta^2 y - \alpha\beta z = \\ &= \alpha y'_t - \beta^2 y + \alpha(y'_t - \alpha y) \end{aligned}$$

pa je definitivno

(4) $$y''_{t^2} - 2\alpha y'_t + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$$

Karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (4) je

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

a njeni koreni

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

pa je opšte rešenje diferencijalne jednačine (4) kao što je poznato

$$(5)\qquad y(t) = e^{\alpha t}\left[A^i\cos\beta t + B^i\sin\beta t\right].$$

Odavde je

$$y'(t) = \alpha e^{\alpha t}\left[A^i\cos\beta t + B^i\sin\beta t\right] + \beta e^{\alpha t}\left[-A^i\sin\beta t + B^i\cos\beta t\right].$$

Smenom tako dobijenih vrednosti za $y(t)$ i $y'(t)$ u prvu jednačinu sistema (3) dobijamo

$$(6)\qquad z(t) = e^{\alpha t}\left[A^i\sin\beta t - B^i\cos\beta t\right]$$

(5) i (6) predstavljaju opšte rešenje sistema (3), pa je dalje, imajući u vidu polazne smene (2)

$$\begin{aligned} x^i(t) &= \int y(t)dt + C^i \\ &= \int e^{\alpha t}(A^i\cos\beta t + B^i\sin\beta t)dt + C^i . \end{aligned}$$

Dvostrukom paracijalnom integracijom svakog od sabiraka odavde imamo

$$(7)\qquad x(t) = A^i\,\frac{\beta\sin\beta t + \alpha\cos\beta t}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha t} + B^i\,\frac{\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha t} + C^i$$

tj.

$$x^i(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left[(A^i\beta + B^i\alpha)\sin\beta t + (A^i\alpha - B^i\beta)\cos\beta t\right] + C^i$$

Slično dobijamo

$$x^{n+i}(t) = \int z(t)dt + D^i$$

$$(8)\qquad x^{n+i}(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left[(A^i\alpha - B^i\beta)\sin\beta t - (A^i\beta B^i\alpha)\cos\beta t\right] + D^i$$

Smenom

$$\frac{dx^{2n+1}}{dt} = u(t)$$

iz poslednje jednačine sistema (1) nalazimo

$$\frac{du}{dt} = u .$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$u = Ae^{\alpha t},$$

pa je s obzirom na prethodno uvedenu smenu

$$\frac{dx^{2n+1}}{dt} = Ae^{\alpha t},$$

a opšte rešenje ove diferencijalne jednačine

(9) $$x^{2n+1} = \frac{A}{\alpha} e^{\alpha t} + B \qquad \text{za } \alpha \neq 0$$

i

(10) $$x^{2n+1} = At + B \qquad \text{za } \alpha = 0.$$

Prema tome za $\alpha \neq 0$ formule (7), (8) i (9) predstavljaju parametarske jednačine familije C-holomorfno ravnih krivih u prostoru E^{2n+1}. Ako je $\alpha = 0$, tada su s obzirom na (5.7), (5.8) i (10) parametarske jednačine familije C-holomorfno ravnih krivih

$$x^i(t) = \frac{A^i \sin \beta t - B^i \cos \beta t}{\beta} + C^i$$

$$x^{n+i}(t) = -\frac{A^i \sin \beta t + B^i \cos \beta t}{\beta} + D^i$$

$$x^{2n+1}(t) = At + B$$

Odavde, u slučaju trodimenzionalnog euklidskog prostora tj. $i=1$, $n=1$ za $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $A^1 = 1$, $B^1 = 0$, $C^1 = 0$, $D^1 = 0$ dobijamo

$$x^1 = \sin t$$

$$x^2 = -\cos t$$

$$x^3 = At + B$$

a to su, kao što je dobro poznato, parametarske jednačine zavojnice. Dakle, zavojnica je jedna od C-holomorfno ravnih krivih u trodimenzionom euklidskom prostoru.

<u>II slučaj</u>. Neka su $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ za sada ma kakve funkcije. Tada je iz sistema (3)

$$y''_{t^2} = \alpha'(t)y + \alpha(t)y'_t - \beta'(t)z - \beta(t)z'_t$$

Zamenom funkcije z i z'_t iz (5.3) u ovu jednačinu dobijamo

$$y''_{t^2} = \alpha(t)y + \alpha(t)y'_t - \beta'(t)\,\frac{\alpha(t)y - y'_t}{\beta(t)} - \beta(t)\left[\alpha(t)\frac{\alpha(t)y - y'_t}{\beta(t)} + \beta(t)y\right]$$

odakle je

$$(11)\qquad y''_{t^2} = \left[2\alpha(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right]y'_t + \left[\alpha(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\alpha(t) - \alpha^2(t) - \beta^2(t)\right]y$$

Diferencijalna jednačina (11) je ekvivalentna sistemu diferencijalnih jednačina (3).

<u>IIa slučaj</u>. Neka je sada $\beta(t) = \beta = \text{const}$ i $\alpha = \alpha(t)$ za sada ma kakva diferencijabilna funkcija, a malo kasnije ćemo je odrediti tako da se diferencijalna jednačina (11) mogla rešiti. Tada diferencijalna jednačina (11) dobija nešto jednostavniji oblik

$$(12)\qquad y''_{t^2} = 2\alpha(t)y'_t + [\alpha'(t) - \alpha^2(t) - \beta^2]y$$

jer je s obzirom na uvedene pretpostavke o funkciji $\beta(t)$

$$\beta'(t) = 0 .$$

Dalje odredimo $\alpha(t)$ tako da bude

$$\alpha(t) - \alpha^2(t) - \beta^2 = 0$$

tj.

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \alpha^2(t) + \beta^2$$

odnosno

$$\frac{d\,\alpha(t)}{\alpha^2(t)+\beta^2} = dt$$

odakle posle integracije

$$\frac{1}{\beta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha(t)}{\beta} = t + K\,, \qquad K = \mathrm{const}$$

$$\alpha(t) = \beta\,\mathrm{tg}\,\beta(t+K).$$

Prema tome, ako se izaberu funkcije $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ takve da je

$$\alpha(t) = \beta\,\mathrm{tg}\,\beta(t+K), \quad \beta(t) = \beta = \mathrm{const}\,, \quad K = \mathrm{const}$$

tada jednačina (11), odnosno (12) postaje

(13) $$y''_{t^2} = 2\beta\,\mathrm{tg}\,\beta(t+K)y'_t$$

koja se lako rešava. Zaista, iz (13) imamo

$$\frac{y''_{t^2}}{y'_t} = 2\beta\,\frac{\sin\beta(t+K)}{\cos\beta(t+K)}$$

Odavde dalje dobijamo

$$\ln y'_t = -2\int\frac{d(\cos\beta(t+K))}{\cos\beta(t+K)}$$

tj.

$$\ln y'_t = -2\ln\cos\beta(t+K) + \ln L^i$$

$$\ln y'_t\,\cos\beta(t+K) = \ln L^i$$

pa je

(14) $$y'_t = \frac{L^i}{\cos^2\beta(t+K)}$$

još jednom integracijom dobijamo

$$y(t) = \int\frac{L^i dt}{\cos^2\beta(t+K)} + M^i$$

$$y(t) = \frac{L^i}{\beta}\int\frac{d(\beta(t+K))}{\cos^2\beta(t+K)} + M^i$$

a odavde konačno imamo

$$(15)\qquad y(t) = \frac{L^i}{\beta}\,\mathrm{tg}\,\beta(t+K) + M^i$$

Zamenimo (14) i (15) u prvu jednačinu sistema (3). Tako dobijamo i funkciju $z(t)$

$$(16)\qquad z(t) = \frac{1}{\beta}\left[L^i\mathrm{tg}^2\beta(t+K)+M^i\beta\,\mathrm{tg}\,\beta(t+K) - \frac{L^i}{\cos^2\beta(t+K)}\right]$$

(15) i (16) predstavljaju opšte rešenje diferencijalne jednačine (13), odnosno diferencijalne jednačine (11) za sledeći izbor funkcija $\alpha(t)$ i $\beta(t)$

$$\alpha(t) = \beta\,\mathrm{tg}\,\beta(t+K), \qquad \beta(t) = \beta = \mathrm{const}, \qquad K = \mathrm{const}.$$

Dalje je, imajući u vidu polaznu smenu (2)

$$x^i(t) = \int y(t)dt = \int\left[\frac{L^i}{\beta}\mathrm{tg}\ (t+K) + M^i\right]dt$$

a odavde je

$$(17)\qquad x^i(t) = M^i t - \frac{L^i}{\beta^2}\ln\cos\beta(t+K) + N^i$$

$$N^i,\ L^i,\ M^i = \mathrm{const} \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Slično imamo

$$x^{n+i}(t)=\int z(t)dt= \frac{1}{\beta}\int\left[L^i\mathrm{tg}^2\beta(t+K)+M^i\beta\,\mathrm{tg}\beta(t+K) - \frac{L^i}{\cos^2\beta(t+K)}\right]dt$$

$$= \frac{L^i}{\beta^2}\int \mathrm{tg}^2\beta(t+K)d(\beta(t+K))+ \frac{M^i}{\beta}\int\beta\,\mathrm{tg}\beta(t+K)dt- \frac{L^i}{\beta^2}\int\frac{d\,\beta(t+K)}{\cos^2\beta(t+K)} + P^i$$

$$=- \frac{L^i}{\beta^2}\int\frac{1-\sin^2u-1}{1-\sin^2u}du+ \frac{M^i}{\beta}\int \mathrm{tg}\,\beta(t+K)d(\beta(t+K)) - \frac{L^i}{\beta^2}\,\mathrm{tg}\,\beta(t+K) + P^i$$

$$=- \frac{L^i}{\beta^2}\,\beta(t+K)+ \frac{L^i}{\beta^2}\mathrm{tg}\,\beta(t+K)- \frac{M^i}{\beta}\ln\cos\beta(t+K)- \frac{L^i}{\beta^2}\mathrm{tg}\,\beta(t+K) + P^i$$

pa je prema tome

(18) $$x^{n+i}(t) = -\frac{L^i}{\beta}t - \frac{M^i}{\beta}\ln\cos\beta(t+K) + P^i \; ; \; P^i = \text{const} \quad (i=1,2,..n)$$

Nadjimo još funkciju $x^{2n+1}(t)$ za

$$\alpha(t) = \beta \operatorname{tg} \beta(t+K)$$

Za tako izabrano $\alpha(t)$ poslednja jednačina sistema (13)glasi

$$\frac{d^2x^{2n+1}}{dt^2} = \beta \operatorname{tg} \beta(t+K) \frac{dx^{2n+1}}{dt} .$$

Smenom

$$\frac{dx^{2n+1}}{dt} = u$$

prethodna jednačina može da se transformiše, tako da imamo

$$\frac{du}{dt} = \beta \operatorname{tg} \beta(t + K)u$$

a odavde se integracijom dobija

$$\ln u = \int \frac{\sin \beta(t + K)}{\cos \beta(t + K)} d(\beta(t + K)) + \ln N$$

$$\ln u = -\ln\cos\beta(t + K) + \ln N$$

$$u = \frac{N}{\cos\beta(t+K)} .$$

S obzirom na prethodno uvedenu smenu odavde dalje imamo

$$\frac{dx^{2n+1}}{dt} = \frac{N}{\cos\beta(t+K)} .$$

Integracijom poslednje jednačine nalazimo

$$x^{2n+1} = \int \frac{N\,dt}{\cos\beta(t+K)} + P$$

tj.

(19) $$x^{2n+1} = N\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\beta(t+K)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + P \quad , \quad P,N = \text{const}$$

Dakle, za

$$\alpha(t) = \beta \operatorname{tg} \beta(t+K), \quad \beta(t) = \beta = \text{const} , \qquad K = \text{const}$$

formule (17), (18) i (19) predstavljaju opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina (1), a to su istovremeno i parametarske jednačine jedne familije C-holomorfono ravnih krivih u prostoru E^{2n+1}.

<u>II b slučaj</u>.- Ako se posmatra diferencijalna jednačina (11), pa se izabere $\beta = \beta(t)$ tako da bude

$$\alpha'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \alpha(t) - \alpha^2(t) - \beta^2(t) = 0$$

biće dalje

$$\beta'(t) = \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t)\right] \beta(t) - \frac{1}{\alpha(t)} \beta^3(t)$$

Ova Bernulijeva jednačina po $\beta(t)$ može se rešiti smenom

$$n(t) = \frac{1}{\beta^2(t)}$$

Odavde je

$$\frac{\beta'(t)}{\beta)t)} = - \frac{n'(t)}{2n(t)}$$

pa se dobija

$$\frac{n'(t)}{2n(t)} = \left[\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t)\right] - \frac{1}{\alpha(t)} \frac{1}{n(t)}$$

tj.

$$n'(t) + 2 \left[\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t)\right] n(t) - \frac{2}{\alpha(t)} = 0.$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$n(t) = e^{-2\int\left[\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t)\right]dt} \left[C + \int \frac{2}{\alpha(t)} e^{2\int\left[\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t)\right] dt} dt\right]$$

Imajući u vidu smenu $n(t) = \frac{1}{\beta^2(t)}$ nalazimo

$$(20)\quad \beta^2(t) = \frac{1}{e^{-2\int\left[\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t)\right]dt}\left[C + \int\frac{2}{\alpha(t)}\, e^{2\int\left[\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t)\right]dt}\, dt\right]}\,.$$

Dakle, ako su $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ takve funkcije da važi jednakost (20) tada diferencijalna jednačina (11) postaje

$$\frac{y''_{t^2}}{y'_t} = 2\,\alpha(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$$

a rešenje ove jednačine dobija se dvema integracijama

$$y'_t = C^i\, e^{\int\left[2\,\alpha(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right]dt}\,, \qquad C^i = \mathrm{const}$$

i

$$y(t) = \int C^i e^{\int\left[2\,\alpha(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right]dt}\, dt + D^i\,, \qquad D^i = \mathrm{const.}$$

Dalje je

$$z(t) = \frac{\alpha(t)\left[\int C^i e^{\int\left[2\alpha(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right]dt}\, dt + D^i\right] - C^i e^{\int 2\left[\alpha(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right]}}{(t)}$$

a odavde se kao u prethodnim slučajevima dobija

$$(21)\qquad x^i(t) = \int y(t)\,dt \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$(22)\qquad x^{n+i}(t) = \int z(t)\,dt \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Integracijom poslednje jednačine iz sistema (1) dobijamo

$$(23)\qquad x^{2n+1}(t) = \int B\, e^{\alpha(t)t}\,dt + A\,, \qquad A,B = \mathrm{const.}$$

(21), (22) i (23) su parametarske jednačine C - holomorfno ravnih krivih u prostoru E^{2n+1} kada funkcije $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ zadovoljavaju uslov (20).

Primetimo ovde da je prostor E^{2n+1} realni euklidski prostor, tj. prostor nad poljem realnih brojeva. Zbog toga funkciju $\alpha(t)$ treba birati tako da jednakost (20) ima smisla, tj. $\alpha(t)$ biramo tako da je

$$\beta^2(t) \geq 0$$

Navedimo jedan primer kada jednakost (20) nema smisla nad poljem realnih brojeva. Neka je $\alpha(t)$ izabrano tako da je

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t) = 0$$

tj.

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = 1$$

odakle se dobija

$$-\frac{1}{\alpha(t)} = t + C_o$$

Ako se izabere $C_o = 0$ biće $\alpha(t) = -\frac{1}{t}$. Dakle, za $\alpha(t) = -\frac{1}{t}$ i $C = 0$ iz (20) sleduje

$$\beta^2(t) = \frac{1}{\int \frac{2}{\alpha(t)}\, dt} = -\frac{1}{\int 2t\,dt}$$

odnosno

$$\beta^2(t) = -\frac{1}{t^2}$$

a ova jednakost očigledno ne važi nad poljem realnih brojeva.

Potpuna analiza uslova kada jednakost (20) ima smisla prevazilazi okvire ovog rada i na tome se ovde nećemo dalje zadržavati.

G L A V A III

GRUPE C-HOLOMORFNO PROJEKTIVNIH TRANSFORMACIJA

1. ESENCIJALNO AFINE GRUPE C-HOLOMORFNO PROJEKTIVNIH TRANSFORMACIJA

U (II. § 1) razmatrali smo na prostoru $\mathfrak{M}^{2n+1}$ (φ,ξ,η)-koneksije ∇ transformacije u kojima se C-holomorfno ravne krive preslikavaju u krive iste vrste. Takve transformacije smo nazvali C-holomorfno projektivne ili CHP transformacije s obzirom na koneksiju ∇. S obzirom na ranije dobijene rezultate koneksija $t\nabla$ dobijena iz koneksije ∇ CHP transformacijom t predstavlja se formulom

$$(1)\qquad t\,\nabla_X Y = \nabla_X Y + P(X)Y + P(Y)X - P(X)\eta(Y)\xi - P(Y)\eta(X)\xi - P\varphi(X)\varphi(Y) - P\varphi(Y)\varphi(X)$$

gde je P polje 1-formi koje odgovaraju transformaciji t. Ove 1-forme se označavaju i sa $P(t)$ kad treba da se istakne da odgovaraju transformaciji t.

Razmotrimo sada Liovu grupu CHP transformacija na prostoru $\mathfrak{M}^{2n+1}$. Ako postoji na mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n+1}$ simetrična (φ,ξ,η)-koneksija ∇ koja je invarijantna u odnosu na grupu CHP transformacija tada kažemo da je grupa esencijalno afina s obzirom na koneksiju ∇.

Dokažimo da važi

Teorema 1. Ako je Liova grupa CHP transformacija (φ,ξ,η)-koneksije kompkatna, tada je ona esencijalno afina.

Dokaz ove teoreme je sličan dokazu Teoreme 1. u [46]. Označimo sa G Liovu grupu CHP transformacija (φ,ξ,η)-koneksije i sa Δ njenu totalnu meru. Kako je po pretpostavci grupa G kompaktna, mera Δ je konačna. Neka je Q polje 1-formi definisano na sledeći način

$$[Q]_p = \frac{1}{\Delta}\int [P(s)]_p \, ds$$

pri čemu je p proizvoljna tačka prostora $\mathfrak{M}^{2n+1}$, $P(s)$ polje 1-formi dato sa (1) koje odgovara transformaciji s iz G i integral je nad celom grupom G. Napišimo, radi jednostavnosti, prethodni izraz u ovom obliku

$$Q = \frac{1}{\Delta}\int P(s)ds \,. \tag{2}$$

Definišimo sada novu afinu koneksiju $\bar{\nabla}$ formulom

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + Q(X)Y + Q(Y)X - Q(X)\,\eta(Y)\xi - \\ - Q(Y)\,\eta(X)\xi - Q\,\varphi(X)\,\varphi(Y) - Q\,\varphi(Y)\,\varphi(X) \tag{3}$$

Koneksija $\bar{\nabla}$ je takodje (φ,ξ,η)-koneksija.

Za neki element $s \in G$ označimo sa $s\bar{\nabla}$ afinu koneksiju koja se dobija iz $\bar{\nabla}$ transformacijom s. Kako je sleduje

$$s\,\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + S(X)Y + S(Y)X - S(X)\,\eta(Y)\,\xi - \\ - S(Y)\,\eta(X)\,\xi - S\,\varphi(X)\,\varphi(Y) - S\,\varphi(Y)\,\varphi(X) \tag{4}$$

gde je S polje 1-formi. Ako sada koneksiju $\bar{\nabla}$ u (4) smenimo odgovarajućim izrazom iz (3), a zatim u tako dobijenoj formuli koneksiju ∇ smenimo odgovarajućim izrazom iz (1) dobijamo

$$s\bar{\nabla}_X Y = t\,\bar{\nabla}_X Y - P(X)Y - P(Y)X + P(X)\eta(Y)\xi + P(Y)\,\eta(X)\xi + \\ + P\,\varphi(X)\varphi(Y) + P\varphi(Y)\varphi(X) + Q(X)Y + Q(Y)X - (X)\eta(Y)\xi - \\ - Q(Y)\eta(X)\xi - Q\varphi(Y)\varphi(X) - Q\varphi(X)\varphi(Y) + S(X) + S(Y)X - \\ - S(X)\eta(Y)\xi - S(Y)\eta(X)\xi - S\varphi(X)\varphi(Y) - S\varphi(Y)\varphi(X) \,. \tag{5}$$

Primedba 1.

Ako je s transformacija prostora $\mathfrak{M}^{2n+1}$, tada diferencijal te transformacije označavamo sa ds i važi

$$ds : T_p \to T_{p'},$$

gde su T_p i $T_{p'}$ tangentni prostori mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n+1}$ redom u tačkama p i $p' = s(p)$. Kako je s homeomorfizam sleduje da je ds izomorfizam. Dualno preslikavanje (ds) preslikavanja ds je takodje izomorfizam, pa postoji i inverzno preslikavanje $\hat{s}$ preslikavanja $(ds)^*$. Prema tome, ako je P 1-forma u tački $p \in M$, $\hat{s} \cdot P$ je 1-forma u tački $s(p)$.

S obzirom na ovu primedbu imamo

$$\begin{aligned} s\nabla_X Y &= t\nabla_X Y + \hat{t}\,Q(X)Y + \hat{t}\,Q(Y)X - \hat{t}\,Q(X)\eta(Y)\xi - \\ (6) \qquad &- \hat{t}\,Q((Y)\eta(X)\xi - \hat{t}\,Q\varphi(X)\varphi(Y) - \hat{t}\,Q\varphi(Y)\varphi(X). \end{aligned}$$

Iz (5) i (6) neposredno sleduje

$$S = \hat{t}\,Q + P(t) - Q$$

gde je $P = P(t)$, kao što smo ranije istakli. Smenimo (2) u prethodno dobijeni izraz. Tada je

$$S = \hat{t}\,\frac{1}{\Delta}\int P(s)ds + P(t) - \frac{1}{\Delta}\int P(s)ds$$

Kako smo sa Δ označili totalnu meru grupe G, to je $\Delta = \int ds$, pri čemu se ovde integral računa nad celom grupom G. Uzimajući to u obzir kao i činjenicu da su s i t dve nezavisne transformacije, prethodnu formulu možemo da pišemo u obliku

$$S = \frac{1}{\Delta}\int \hat{t}\,P(s)ds + \frac{1}{\Delta}\int P(t)ds - \frac{1}{\Delta}\int P(s)ds$$

tj.

$$S = \frac{1}{\Delta}\int t\,P(s) + P(t)\quad dt - \frac{1}{\Delta}\int P(s)ds,$$

a odavde, s obzirom na primedbu 1. i (1), nalazimo

$$S = \frac{1}{\Delta}\int P(\mathfrak{s}t)dt - \frac{1}{\Delta}\int P(\mathfrak{s})d$$

pa je zbog invarijantnosti Harove mere nad kompaktnom grupom

$$S = 0$$

a to znači, da je koneksija $\bar{\nabla}$ definisana relacijom (3), uzimajući u obzir (4), zaista invarijantna u odnosu na grupu $\mathfrak{G}$,što je i trebalo dokazati.

Dokažimo dalje da važi

Teorema 2. Tranzitivna grupa CHP transformacija simetrične (φ,ξ,η)-koneksije je esencijalno afina, ako je njena izotropna grupa kompaktna.

Označimo sa H izotropnu grupu grupe $\mathfrak{G}$ u tački O. Kako smo pretpostavili da je grupa H kompaktna, to znači (s obzirom na prethodno dokazanu teoremu 1) da postoji (φ,ξ,η)-koneksija ∇ koja je invarijantna u odnosu na grupu H. Zbog toga je polje 1-formi P = P6t) definisano relacijom (1) za $t \in H$ jednako nuli. Dalje, ako je $t't^{-1} = \mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} \in H$, s obzirom na primedbu 1. i formulu (1),

$$P(t') = P(\mathfrak{s}t) = P(t) + \hat{t}\, P(\mathfrak{s}),$$

a kako je $P(\mathfrak{s}) = 0$, odavde dobijamo

$$P(t) = P(t')$$

Za neku tačku $p \in \mathfrak{M}$ stavimo

$$[Q]_p = [P(t)]_p \tag{7}$$

gde je transformacija $t \in \mathfrak{G}$ takva da je $t(0) = p$. Transformacija t sigurno postoji jer je grupa $\mathfrak{G}$ po pretpostavci tranzitivna. Desna strana izraza (7) ne zavisi od izbora transformacije

t takve da je $t(0) = p$, jer smo dokazali da je $P(t) = P(t')$ za t, t' takve da je $t't^{-1} \in H$. Ako stavimo

$$\bar{\bar{\nabla}}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + Q(X)Y + Q(Y)X - Q(X)\eta(Y)\xi - Q(Y)\eta(X)\xi -$$
$$- Q\varphi(X)\varphi(Y) - Q\varphi(Y)\varphi(X)$$

gde je polje 1-formi Q definisano relacijom (7), tada možemo pridružiti nekom elementu $t \in G$ polje 1-formi S, definisano relacijom (4), gde je

$$S = \hat{t}\,Q + P(t) - Q\,.$$

Dokažimo da je $S = 0$.

Neka je q proizvoljna tačka iz $\mathfrak{M}$ i transformacija G takva da je $s(0) = q$. Iz (7) imamo

$$[Q]_q = [P(s)]_q$$

i zato je

$$[\hat{t}\,Q]_{t(q)} = [\hat{t}\,P(s)]_{t(q)}$$

za ma koje $t \in G$. Odavde sleduje

$$[P(t) + \hat{t}\,Q]_{t(q)} = [P(t) + \hat{t}\,P(s)]_{t(q)}$$

a sa obzirom na (1) i primedbu 1. dalje nalazimo

$$[P(t) + \hat{t}\,Q]_{t(q)} = [P(ts)]_{t(q)} = [P(ts)]_{ts(0)} = [Q]_{t(q)}$$

pa je zbog toga

$$[S]_{t(q)} = [P(t) + \hat{t}\cdot Q]_{t(q)} - [Q]_{t(q)} = 0\,.$$

Kako je q proizvoljna tačka iz $\mathfrak{M}$, to znači da je polje S identički jednako nuli, pa je koneksija ∇ zaista invarijantna.

2. INFINITEZIMALNE C-HOLOMORFNO PROJEKTIVNE TRANSFORMACIJE

Na normalnom skoro kontaktnom prostoru $\mathfrak{M}^{2n+1}$ definišemo kontravarijantno skoro analitičko vektorsko polje V kao polje za koje su ispunjeni uslovi.

$$(1) \qquad \mathcal{L}_V \varphi = 0, \qquad \mathcal{L}_V \xi = 0 \;, \qquad \mathcal{L}_V \eta = 0$$

gde $\mathcal{L}_V$ označava Liov izvod u odnosu na V. Kako u ovom radu razmatramo prostor $\mathfrak{M}^{2n+1}$ sa simetričnom (φ,ξ,η)-koneksijom, ispitajmo kako mogu drugačije da se predstave jednakosti (1).

S obzirom na pravila (I.2.31) za odredjivanje Liovog izvoda tenzora imamo da je

$$\mathcal{L}_V \varphi(X) = (\mathcal{L}_V \varphi)(X) + \varphi(\mathcal{L}_V X)$$

a odavde, zbog (1) i formule (I.2.28) za Liov izvod vektora, imamo

$$[V, \varphi(X)] = \varphi[V,X] \;.$$

Koristeći uslov da je data (φ,ξ,η)-koneksija i simetrična, tj. tenzor torzije jednak nuli iz prethodne relacije sleduje

$$(2) \qquad \nabla_{\varphi X} V = \varphi \nabla_X V \;.$$

Slično, koristeći pravila za kovarijantno diferenciranje vektora i 1-forme, odnosno Liov izvod 1-forme i vektora iz (1) nalazimo

$$(3) \qquad \eta(\nabla_X V) = 0 \;, \qquad \nabla_\xi V = 0$$

Lako se dokazuje da važi

Lema 1. Vektorsko polje ξ je kontravarijantno skoro analitičko vektorsko polje u prostoru $\mathfrak{M}^{2n+1}$ simetrične (φ,ξ,η)-koneksije.

Drugačije rečeno, kontravarijantno skoro analitičko vektorsko polje je takvo vektorsko polje da infinitezimalna transformacija s obzirom na to polje ne menja skoro kontaktnu strukturu, tj. Liov izvod u odnosu na taj vektor skoro kontaktne strukture je jednak nuli. Takvu infinitezimalnu transformaciju nazivamo i infinitezimalna (φ,ξ,η)-transformacija.

Kažemo da je infinitezimalna (φ,ξ,η)-transformacija infinitezimalna C-holomorfno projektivna transformacija koneksije ∇ (ili infinitezimalna CHP transformacija koneksije ∇) ako je

$$(4)\qquad (\mathcal{L}_V\nabla)_X Y = P(X)Y + P(Y)X - P(X)\eta(Y)\xi - P(Y)\eta(X)\xi - P\varphi(X)\varphi Y - P\varphi(Y)\varphi X$$

gde je P polje 1-formi, takvo da je

$$(5)\qquad P(\xi) = 0$$

ili

$$(6)\qquad \mathcal{L}_V\nabla = P\otimes I + I\otimes P - P\otimes\eta\otimes\xi - \eta\otimes P\otimes\xi - P\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes P\varphi$$

gde je I identična transformacija, tj. jedinična matrica tipa $(2n+1,\ 2n+1)$.

Dokažimo da važi

Lema 2. Skup vektorskih polja, kojim su definisane infinitezimalne CHP transformacije (φ,ξ,η)-koneksije obrazuju Liovu algebru.

Neka su V,U dva vektorska polja kojim su definisane infinitezimalne CHP transformacije (φ,ξ,η)-koneksije ∇. Tada je prema (6)

$$\mathcal{L}_V \nabla = P\otimes I + I\otimes P - P\otimes\eta\otimes\xi - \eta\otimes P\otimes\xi - P\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes P\varphi$$

$$\mathcal{L}_U \nabla = Q\otimes I + I\otimes Q - Q\otimes\eta\otimes\xi - \eta\otimes Q\otimes\xi - Q\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes Q\varphi$$

pri čemu su P, Q polja 1-formi takva da je

$$P(\xi) = 0 \quad \text{i} \quad Q(\xi) = 0$$

Označimo sa W komutator vektorskih polja U,V, tj.

(7) $$W = [U,V] \text{ .}$$

Tada je s obzirom na [115] i (I.2.35

$$\mathcal{L}_W\nabla = \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_V\nabla) - \mathcal{L}_V(\mathcal{L}_U\nabla),$$

a zbog pretpostavki o vektorskim poljima U,V odavde imamo

$$\mathcal{L}_W\nabla = \mathcal{L}_U(P\otimes I + I\otimes P - P\otimes\eta\otimes\xi - \eta\otimes P\otimes\xi - P\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes P\varphi) -$$
$$\mathcal{L}_V(Q\otimes I + I\otimes Q - Q\otimes\eta\otimes\xi - \eta\otimes Q\otimes\xi - Q\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes Q\varphi)$$

ili koristeći pravila za Liov izvod (I.2.32) i(I.2.34) i (1)

(8) $$\mathcal{L}_W\nabla = M\otimes I + I\otimes M - M\otimes\eta\otimes\xi - \eta\otimes M\otimes\xi - M\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes M\varphi ,$$

gde je M polje 1-formi definisano na sledeći način

(9) $$M = \mathcal{L}_U P - \mathcal{L}_V Q \text{ .}$$

Da bi vektorsko polje W definisalo infinitezimalnu CHP transformaciju potrebno je da važe i relacije (1) i

$$M(\xi) = 0.$$

Dokažimo prvu jednakost u (1). S obzirom na pravila za Liov izvod (I.2.35) i (7) imamo

$$\mathcal{L}_W \varphi = \mathcal{L}_{[U,V]}\varphi = \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_V\varphi) - \mathcal{L}_V(\mathcal{L}_U\varphi) = 0$$

jer su po pretpostavci U,V kontravarijantna skoro analitička vektorska polja, pa za njih važi (1)

Slično se dokazuju i preostale dve jednakosti u (1).

Dalje, koristeći (9) i pravila za Liov izvod imamo

$$M(\xi) = (\mathcal{L}_U P)(\xi) - (\mathcal{L}_V Q)(\xi) =$$
$$= UP(\xi) - P(\mathcal{L}_U\xi) - VQ(\xi) + Q(\mathcal{L}_V\xi)$$

tj.

$$M(\xi) = 0$$

jer su polja 1-formi P i Q po pretpostavci takva da važi

$P(\xi) = 0$ i $Q(\xi) = 0$, a za U,V važi (1).

Na taj način je lema 2 u potpunosti dokazana.

Polje 1-formi P u (6) nazivamo <u>pridružno polje 1-formi vektorskom polju V</u>.

Definišimo sada linearnu transformaciju tangentnog prostora $T_p\mathfrak{M}^{2n+1}$

$$E_{V,Y} : T_p\mathfrak{M}^{2n+1} \longrightarrow T_p\mathfrak{M}^{2n+1} \; : \; X_p \longrightarrow (\mathcal{L}_V\nabla)_{X_p}Y \,.$$

tada je s obzirom na (6)

$$\begin{aligned} E_{V,Y} &= P\otimes Y + P(Y)I - \eta(Y)P\otimes\xi - P(Y)\eta\otimes\xi - \\ &- P\varphi\otimes\varphi Y - P\varphi(Y)\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

odnosno

$$\begin{aligned} E_{V,Y}(X) &= P(X)Y + P(Y)X - \eta(Y)P(X)\xi - P(Y)\eta(X)\xi - \\ &- P\varphi(X)\varphi(Y) - P\varphi(Y)\varphi(X) \end{aligned}$$

tj. zbog (4)

$$E_{V,Y}(X) = (\mathcal{L}_V\nabla)_X Y .$$

Koristeći (I.3.7), (I.3.12) i (5) nalazimo trag linearnog preslikavanja $E_{V,Y}$ definisanog relacijom (10)

(12) $$\operatorname{tr} E_{V,Y} = 2(n+1)P(Y) .$$

s druge strane je, prema [115]

$$(\mathcal{L}_V\nabla)_X Y = \nabla_Y\nabla_X V - R(V,Y)X$$

tj.

(13) $$E_{V,Y}(X) = \nabla_Y\nabla_X V - R(V,Y)X .$$

Kako je

$$\operatorname{tr} R(V,Y) = 0$$

što se neposredno proverava koristeći koordinate tenzora $R(V,Y)X$, iz (13) sleduje

$$\operatorname{tr} E_{V,Y} = \nabla_Y(\operatorname{div}V)$$

tj. imajući u vidu (12)

$$\nabla_Y(\operatorname{div}V) = 2(n+1)P(Y)$$

Napomenimo da smo sa divV označili trag linearnog preslikavanja

$$X \longrightarrow \nabla_X V$$

divV predstavlja divergenciju vektorskog polja V i to je skalarna funkcija koju možemo označiti i sa f. Dakle, prema prethodno dobijenim rezultatima imamo

(14) $$Y f = 2(n+1)P(Y)$$

Dokažimo, koristeći ovu jednakost da je

(15) $$(\nabla_Y P)(X) = (\nabla_X P)(Y) .$$

Zaista, s obzirom na pravila za kovarijantno diferenciranje (I.2.17) i(I.2.14) ova jednakost je ekvivalentna sa jednakosti

$$YP(X) - P(\nabla_Y X) = XP(Y) - P(\nabla_X Y)$$

a odavde, zbog (14) imamo

$$Y\,X\,f - (\nabla_Y X)\,f = X\,Y\,f - (\nabla_X Y)\,f$$

tj.

$$(YX - XY)\,f = (\nabla_Y X)\,f - (\nabla_X Y)\,f$$

Kako je koneksija ∇ simetrična, zbog (I.2.20) dalje dobijamo

$$(YX - XY)\,f = [Y,X]\,f$$

a ovo je upravo definicija (I.2.4) komutatora vektorskih polja Y, X, pa je jednakost (15) zaista tačna.

Prema tome važi

Lema 3. Pridružno polje 1-formi P je gradijent.

Razmotrimo sada uslove integrabilnosti jednačine (4). Imajući u vidu [115] uslovi integrabilnosti mogu se predstaviti u obliku

$$(\mathcal{L}_V R)(X,Y)Z = \nabla_X(\mathcal{L}_V\nabla)_Y Z - \nabla_Y(\mathcal{L}_V\nabla)_X Z - 2T(X,\nabla_Y Z)$$

tj.

$$(\mathcal{L}_V R)(X,Y)Z = \nabla_X(\mathcal{L}_V\nabla)_Y Z - \nabla_Y(\mathcal{L}_V\nabla)_X Z$$

jer je koneksija ∇ simetrična, pa je tenzor torzije T jednak nuli. Smenom (6) u prethodnu relaciju dobijamo

$$(\mathcal{L}_V R)(X,Y)Z = \nabla_X(POI + IOP - P\otimes\eta\otimes\xi - \eta\otimes P\otimes\xi -$$
$$- P\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes P\varphi)(Y,Z) - {}_Y(P\otimes I + I\otimes P - P\otimes\eta\otimes\xi -$$
$$- \eta\otimes P\otimes\xi - P\varphi\otimes\varphi - \varphi\otimes P\varphi)(X,Z)\,.$$

Koristeći pravila za kovarijantno diferenciranje (I.2.17), (I.2.15) i uslove (I.3.13) koje ispunjava (φ,ξ,η)-koneksija iz prethodne relacije sleduje

$$(\mathcal{L}_V R)(X,Y) = (\nabla_X P \otimes I + I \otimes \nabla_X P - \nabla_X P \otimes \eta \otimes \xi -$$
$$-\eta \otimes \nabla_X P \otimes \xi - (\nabla_X P)\varphi \otimes \varphi - \varphi \otimes (\nabla_X P)\varphi)(Y,X) -$$
$$- (\nabla_Y P \, I \otimes + I \otimes \nabla_Y P - \nabla_Y P \otimes \eta \otimes \xi -$$
$$- \eta \otimes \nabla_Y P \otimes \xi - (\nabla_Y P)\varphi \otimes \varphi - \varphi \otimes (\nabla_Y P)\varphi)(X,Z)$$

odnosno

$$(\mathcal{L}_V R)(X,Y)Z = (\nabla_X P)(Y)Z + (\nabla_X P)(Z)Y - \eta(Z)(\nabla_X P)(Y)\xi -$$
$$- \eta(Y)(\nabla_X P)(Z)\xi - (\nabla_X P)\varphi(Y)\varphi(Z) - (\nabla_X P)\varphi(Z)\varphi(Y) - \tag{16}$$
$$- (\nabla_Y P)(X)Z - (\nabla_Y P)(Z)X + \eta(X)(\nabla_Y P)(Z)\xi +$$
$$+ \eta(Z)(\nabla_Y P)(X)\xi + (\nabla_Y P)\varphi(X)\varphi(Z) + (\nabla_Y P)\varphi(Z)\varphi(X).$$

Definišimo sada linearnu transformaciju tangentnog prostora $T_p\mathfrak{M}^{2n+1}$

$$J_{V,Y,Z} : T_p\mathfrak{M}^{2n+1} \to T_p\mathfrak{M}^{2n+1} : X_p \to (\mathcal{L}_V R)(X_p,Y)Z$$

gde su V,Y,Z neka fiksirana vektorska polja tj.

$$J_{V,Y,Z}(X) = (\mathcal{L}_V R)(X,Y)Z$$

Kako prema [84] operatori kontrakcije tr i Liovog izvoda $\mathcal{L}_V$ komutiraju trag linearnog preslikavanja $J_{V,Y,Z}$, s obzirom na (I.2.22) je

$$\operatorname{tr} J_{V,Y,Z} = (\mathcal{L}_V \mathcal{R})(Y,Z)$$

odnosno, koristeći (16) i (I.3.12) nalazimo

$$(\mathcal{L}_V \mathcal{R})(Y,Z) = (\nabla_Z P)(Y) - \eta(Z)(\nabla_\xi P)(Y) - \eta(Y)(\nabla_\xi P)(Z) -$$
$$-(\nabla_{\varphi Z} P)(\varphi Y) - (\nabla_{\varphi Y} P)(\varphi Z) - 2n(\nabla_Y P)(Z) +$$
$$+ \eta(Z)(\nabla_Y P)(\xi) + (\nabla_Y P)\varphi^2 Z$$

a odavde, smenom (I.3.7) dobijamo

$$(17)\quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z) &= (\nabla_Z P)(Y) - (2n+1)(\nabla_Y P)(Z) - \eta(Z)(\nabla_\xi P)(Y) - \\ &- \eta(Y)(\nabla_\xi P)(Z) - (\nabla_{\varphi Z} P)(\varphi Y) - (\nabla_{\varphi Y} P)(\varphi Z)\end{aligned}$$

jer je

$$(18)\quad (\nabla_Y P)(\xi) = \nabla_Y P(\xi) - P(\nabla_Y \xi) = 0$$

s obzirom na pravila za kovarijantno diferenciranje (I.2.17), uslov (I.3.13) za (φ,ξ,η)-koneksiju i (5). Kako su Y,Z ma koja vektorska polja, relacija (17) je tačna i kada Y,Z zamene mesta, pa je zbog toga

$$(19)\quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,Y) &= (\nabla_Y P)(Z) - (2n+1)(\nabla_Z P)(Y) - \eta(Y)(\nabla_\xi P)(Z) - \\ &- \eta(Z)(\nabla_\xi P)(Y) - (\nabla_{\varphi Y} P)(\varphi Z) - (\nabla_{\varphi Z} P)(\varphi Y)\end{aligned}$$

Ako od jednačine (17) oduzmemo jednačinu (19), a zatim tako dobijenu jednačinu podelimo sa $2(n+1)$ dobijamo

$$(\nabla_Z P)(Y) - (\nabla_Y P)(Z) = \frac{1}{2(n+1)}\left[(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z) - (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,Y)\right]$$

tj.

$$(20)\quad (\nabla_Z P)(Y) = (\nabla_Y P)(Z) + \frac{1}{2(n+1)}\left[(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z) - (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,Y)\right].$$

Smenimo $(\nabla_Z P)(Y)$ iz (20) u (17). Tada je s obzirom na (18)

$$(21)\quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z) &= -2n(\nabla_Y P)(Z) + \frac{1}{2(n+1)}\big[(\mathcal{L}_V\ )(Y,Z) - \\ &- (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,Y)\big] - \frac{1}{2(n+1)}\big[\eta(Z)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,\xi) - (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Y)) + \\ &+ \eta(Y)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,\xi) - (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Z)\big] - (\nabla_{\varphi Z} P)(\varphi Y) - (\nabla_{\varphi Y} P)(\varphi Z).\end{aligned}$$

"Simetrizacijom" jednačine (21) imamo

$$(22)\quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z) + (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,Y) &= -2n\left[(\nabla_Y P)(Z) + (\nabla_Z P)(Z)\right] - \\ &- \frac{1}{n+1}\big[\eta(Z)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,\xi) - (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Y)) + \eta(Y)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,\xi) - \\ &- (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Z))\big] - 2\left[(\nabla_{\varphi Z} P)(\varphi Y) + (\nabla_{\varphi Y} P)(\varphi Z)\right].\end{aligned}$$

Ako u jednačini (22) vektorska polja Y,Z smenimo redom sa φY, φZ, a zatim iskoristimo (I.2.16), (I.3.7) i (18) dobijamo

$$(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Y,\varphi Z)+(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Z,\varphi Y) = -2n\left[(\nabla_{\varphi Y}P)(\varphi Z) + (\nabla_{\varphi Z}P)(\varphi Y)\right] -$$

$$-2\left[(\nabla_Z P)(Y)+(\nabla_Y P)(Z)\right]+2\left[\eta(Z)(\nabla_\xi P)(Y) + \eta(Y)(\nabla_\xi P)(Z)\right]. \tag{23}$$

Koristeći (20) i (18) i relaciju (23) možemo dalje da transformišemo tako da je

$$(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Y,\varphi Z)+(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Z,\varphi Y)= -2n\left[(\nabla_{\varphi Y}P)(\varphi Z)+(\nabla_{\varphi Z}P)(\varphi Y)\right] -$$

$$- 2\left[(\nabla_Z P)(Y)+(\nabla_Y P)(Z)\right] + \frac{1}{n+1}\left[\eta(Z)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,\xi)-(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Y)) +\right.$$

$$\left.+ \eta(Y)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,\xi) - (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Z))\right].$$

Kada iz ove jednačine izrazimo $(\nabla_{\varphi Y}P)(\varphi Z)+(\nabla_{\varphi Z}P)(\varphi Y)$ i smenimo u (21) nalazimo

$$(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z)=-2n(\nabla_Y P)(Z) + \frac{1}{2(n+1)}\left[(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z)-(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,Y)\right] -$$

$$- \frac{1}{2n}\left[\eta(Z)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,\xi)-(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Y))+ \eta(Y)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,\xi) -\right.$$

$$\left.- (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Z))\right] + \frac{1}{2n}\left[(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Y,\varphi Z) + (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Z,\varphi Y)\right] +$$

$$+ \frac{1}{n}\left[(\nabla_Z P)(Y) + (\nabla_Y P)(Z)\right],$$

a ako u ovu jednačinu smenimo $(\nabla_Z P)(Y)$ odgovarajućim izrazom (20) posle sredjivanja imamo

$$(\nabla_Y P)= \frac{1-2n}{4(n^2-1)}(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,Z) - \frac{1}{4(n^2-1)}\left[(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,Y) +\right.$$

$$+ \frac{1}{4(n^2-1)}\left[(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Y,\varphi Z)+(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\varphi Z,\varphi Y)\right]- \frac{1}{4(n^2-1)}\left[\eta(Z)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Y,\xi)-\right. \tag{24}$$

$$+-(\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Y)) + \eta(Y)((\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(Z,\xi) - (\mathcal{L}_V\mathfrak{R})(\xi,Z).$$

Iz (11) i (13) sleduje

$$
(25) \quad \begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X V = R(V,Y)X + P(X)Y + P(Y)X - \eta(X)P(Y)\xi - \eta(Y)P(X)\xi - \\ - P\varphi(X)\varphi(Y) - P\varphi(Y)\varphi(X) . \end{aligned}
$$

Prema tome, $V.P$ i $\nabla_X V$ obrazuju sistem rešenja diferencijalnih jednačina (24) i (25) i zbog toga važi

Lema 2.4. Neka je V vektorsko polje kojim je odredjena infinitezimalna CHP transformacija koneksije ∇ na normalnom skoro kontaktnom $(2n+1)$-dimenzionom prostoru $(n>1)$ i P pridruženo polje 1-formi. Ako su V,P i $\nabla_X V$ jednaki nuli u jednoj tački prostora tada je V jednako nuli na celom prostoru.

U normalnom skoro kontaktnom prostoru sa simetričnom (φ,ξ,η)- koneksijom ∇, neka je $\mathfrak{G}$ Liova algebra svih skoro analitičkih CH-projektivnih vektora i $\mathfrak{G}_o$ podalgebra algebre $\mathfrak{G}$ koja se sastoji od svih elemenata iz $\mathfrak{G}$ koji su jednaki nuli u tački p_o. Kažemo da je $\mathfrak{G}_o$ izotropna algebra algebre $\mathfrak{G}$ u p_o. Neka je T_o tangentni prostor u tački p_o. Tada u T_o postoji koordinatni sistem (y^i) $(i=1,2,\dots,2n+1)$ u kome struktura (φ,ξ,η) ima oblik (I.3.12). Neka je $V \in \mathfrak{G}$ i neka su v^i koordinate toga vektora u odnosu na (y^i) koordinatni sistem. To znači da je

$$
V = v^i \frac{\partial}{\partial y^i} = v^i Y_i , \qquad Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i} .
$$

S obzirom na (I.2.16) tada je

$$
\nabla_{Y_i} V = \nabla_{Y_i}(v^i Y_i) = \left(\frac{\partial v^t}{\partial y^i} + \Gamma^t_{ji} v^j\right) Y_t .
$$

gde smo koristili oznaku

$$
\nabla_{Y_j} Y_i = \Gamma^t_{ij} Y_t .
$$

Označimo

$$(26) \qquad \nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial y^i} + \Gamma^j_{ti} v^t$$

i sa $(\nabla_i v^j)_o$ vrednost izraza $\nabla_i v^j$ u tački p_o. Kako $v \in \sigma_o$, $(\nabla_i v^j)$ su elementi jedne matrice oblika

$$(\nabla_i v^h)_o = \begin{pmatrix} A & B & x \\ C & D & y \\ z & t & u \end{pmatrix}$$

gde su matrice A,B,C,D tipa $n \times n$, x, y tipa $1 \times n$, z,t tipa $n \times 1$ i $\underline{u}$ tipa 1×1. Nadjimo najopštiji oblik matrice $((\nabla_i v^h)_o)$. Koristeći (I.3.12) i (2) imamo

$$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & x \\ C & D & y \\ z & t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & x \\ C & D & y \\ z & t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Množenjem ovih matrica dobijamo

$$\begin{pmatrix} C & D & y \\ -A & -B & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & A & 0 \\ -D & C & 0 \\ -t & z & 0 \end{pmatrix}.$$

Odavde sleduje

$$(27) \qquad C = -B \;,\; D = A \;,\; y = 0 \;,\; x = 0, \;\; t = 0$$

$$z = 0 \text{ i } \quad u \text{ proizvoljno.}$$

Dakle, imamo

$$(\nabla_j v^h)_o = \begin{pmatrix} \nabla_i v^k & \nabla_{i+n} v^k & 0 \\ -\nabla_{i+n} v^k & \nabla_i v^k & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{2n+1} v^{2n+1} \end{pmatrix}$$

ili u drugačijim oznakama

$$\left((\nabla_j v^h)_o \right) = \begin{pmatrix} a_i^{\ k} & a_{i+n}^{\ k} & 0 \\ -a_{i+n}^{\ k} & a_i^k & 0 \\ 0 & 0 & a_{2n+1}^{2n+1} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} i,k = 1,2,\dots,n \\ j,h = 1,2,\dots,2n+1 \end{array}$$

Odredimo sada vrednost elemenata a_{2n+1}^{2n+1} u ovoj matrici. Koristeći (I.3.12) i (3) i poslednji izraz, nalazimo

$$\nabla_{2n+1} v^h = 0 \quad ; \qquad h = 1,2,\dots,2n+1$$

$$\nabla_j v^{2n+1} = 0 \quad ; \qquad j = 1,2,\dots,2n+1$$

pa je zbog toga

$$a_{2n+1}^{2n+1} = 0 \quad ,$$

tako da prethodno razmatrana matrica ima još jednostavniji oblik

$$\left((\nabla_j v^h)_o \right) = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad j,h = 1,2,\dots,\ 2n+1$$

gde su A,B matrice tipa $n \times n$.

Svakom vektoru $V \in \mathfrak{G}_o$ pridružimo zatim odgovarajuću matricu $\alpha(V)$:

$$(28)\qquad \alpha(V) = -\begin{pmatrix} 0 & E & F \\ 0 & A & B \\ 0 & -B & A \end{pmatrix} .$$

Matrica $\alpha(V)$ je tipa $(2n+1,\ 2n+1)$, E je 1-forma odredjena s prvih n koordinata 1-forme P, pridružene vektoru V, u odnosu na koordinatni sistem (y^j) u tački p_o, F je 1-forma odredjena s drugih n koordinata 1-forme P, a zbog

$$P(\xi) = 0$$

imamo da je

$$P_{2n+1} = 0$$

tj.

$$P = E + F$$

Matrice A i B su tipa $(n,)$ i kao ranije definisane su na sledeći način

$$A = \left((\nabla_i v^k)_o\right) \quad , \quad B = \left((\nabla_{i+n} v^k)\right), \qquad i,k = 1,\ldots,n$$

Dokažimo da matrice $\alpha(V)$ obrazuju Liovu algebru $\mathcal{L}$ nad poljem realnih brojeva.

Zaista, matricu $\alpha(V)$ možemo, s obzirom na prethodne primedbe, napisati i u ovom obliku

$$(29)\quad \alpha(V) = -\begin{pmatrix} 0 & P_i & P_{i+n} \\ 0 & (\nabla_i v^k)_o & (\nabla_{i+n} v^k)_o \\ 0 & -(\nabla_{i+n} v^k)_o & (\nabla_i v^k)_o \end{pmatrix}$$

Slično vektoru $U \in \sigma_o$ pridružujemo matricu

$$(30)\qquad \alpha(V) = -\begin{pmatrix} 0 & Q_i & Q_{i+n} \\ 0 & (\nabla_i u^k)_o & (\nabla_{i+n} u^k)_o \\ 0 & -(\nabla_{i+n} u^k)_o & (\nabla_i u^k)_o \end{pmatrix} .$$

Neposrednom proverom, koristeći (27) tj.

$$(31)\qquad \nabla_i u^k = \nabla_{i+n} u^{k+n} , \quad \nabla_i u^{k+n} = -\nabla_{i+n} u^k$$

$$\nabla_{2n+1} u^{2n+1} = 0$$

za $U \in \sigma_o$, dokazuje se da komutator matrica $\alpha(V)$ i $\alpha(U)$

$$[\alpha(V), \alpha(U)] = \alpha(V)\alpha(U) - \alpha(U)\alpha(V)$$

takodje pripada algebri $\mathcal{L}$. Lako se proverava da za $\mathcal{L}$ važe i ostale aksiome kojim je definisana Liova algebra.

Dokažimo, dalje, da je preslikavanje

$$\alpha : \sigma_o \to \mathcal{L}$$

definisano sa (28) odnosno (29), homomorfizam.

Relacija

$$\alpha(aV + bU) = a\,\alpha(V) + \alpha(U)$$

se neposredno dokazuje. Dokažimo da je i

$$\alpha([U,V]) = [\alpha(U), \alpha(V)] .$$

Komutatoru W vektorskih polja U,V odgovara pridruženo polje 1-formi M koje je definisano relacijom (9). Koristeći pravilo (I.2.30) za Liov izvod iz (9) sleduje

$$M(X) = UP(X) - P([U,X]) - VQ(X) + Q([V,X]) ,$$

a kako je ∇ simetrična koneksija zbog (I.2.20) odavde imamo

$$M(X) = UP(X) - P(\nabla_U X) + P(\nabla_X U) - VQ(X) + Q(\nabla_V X) - Q(\nabla_X V) .$$

Kako $U,V \in \sigma_o$ prethodna relacija dobija jednostavniji oblik u tački p_o

$$M(X) = P(\nabla_X U) - Q(\nabla_X V) ,$$

a koordinate M_j 1-forme M u odnosu na koordinatni sistem (y^j) su

$$M_j = P_h \nabla_j u^h - Q_h \nabla_j v^h , \quad j,h = 1,\dots,2n \tag{32}$$

gde smo koristili oznaku (26).

U prostoru simetrične koneksije, prema (I.2.20) komutator W vektorskih polja U,V možemo predstaviti na sledeći način

$$W = \nabla_U V - \nabla_V U .$$

Kovarijantnim diferenciranjem u pravcu vektorskog polja X odavde dobijamo

$$\nabla_X W = \nabla_{\nabla_X U} V + \nabla_U \nabla_X V - \nabla_{\nabla_X V} U - \nabla_V \nabla_X U$$

a u tački p_o, kako $U,V \in \sigma_o$, iz prethodne relacije sleduje

$$(\nabla_X W)_o = (\nabla_{\nabla_X U} V)_o - (\nabla_{\nabla_X V} U)_o$$

tj. koristeći oznaku (26) i (I.2.16)

$$\nabla_j w^h = \nabla_j u^a \nabla_a v^h - \nabla_j v^a \nabla_a u^h , \quad j,h = 1,\dots,2n+1. \tag{33}$$

Ako vektoru W pridružimo matricu

$$\alpha(W) = - \begin{pmatrix} 0 & M_i & M_{i+n} \\ 0 & (\nabla_i w^k)_o & (\nabla_{i+n} w^k)_o \\ 0 & -(\nabla_{i+n} w^k)_o & (\nabla_i w^k)_o \end{pmatrix}$$

zbog (33), (32), (31), (29), (30) imamo

$$\alpha(W) = [\alpha(U), \alpha(V)] ,$$

pa je α zaista homomorfizam. Na taj način smo dokazali da važi

Lema 5. Izotropna Liova algebra $\mathcal{G}_o$ je izomorfna podalgebri algebre matrica $\mathcal{L}$ oblika (29), tj. homomorfizam α je izomorfizam, ako je mnogostrukost dimenzije $2n+1$ $(n > 1)$.

G L A V A IV

VEZA IZMEDJU HOLOMORFNO RAVNIH I C-HOLOMORFNO RAVNIH KRIVIH

§ 1. VEZA IZMEDJU HOLOMORFNO RAVNIH I C-HOLOMORFNO RAVNIH KRIVIH

Već smo istakli u (I.§2.) da se na hiperpovrši n mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{n+1}$ može dobiti koneksija indukovana koneksijom na $\mathfrak{M}^{n+1}$. Poznato je (I.§ 3.) da skoro kompleksna struktura prostora $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ indukuje na orijentisanoj hiperpovrši $\mathfrak{M}^{2n-1}$ skoro kontaktnu strukturu. Isto tako hiperpovrš $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$, koja je "pseudoortogonalna" na vektoru ξ skoro kontaktnog prostora $\mathfrak{M}^{2n+1}$, ima skoro kompleksnu strukturu.

Imajući u vidu ove činjenice možemo postaviti pitanje kakva je veza izmedju H-ravnih krivih koje je razmatrao Y. Tashiro i CH-ravnih krivih koje smo razmatrali u prethodnim odeljcima. Odgovor na ovo pitanje dajemo u sledećim dvema teoremama.

Teorema 1.1. Ako je hiperpovrš $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ koja je "pseudoortogonalna" na vektoru ξ, geodezijska hiperpovrš mnogostrukosti $\mathfrak{M}^{2n+1}$ tada CH-ravne krive indukuje H-ravne krive.

Primedba 1. Neka je

$$i : \tilde{\mathfrak{M}}^{2n} \longrightarrow \mathfrak{M}^{2n+1}$$

smeštanje hiperpovrši $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ u prostor $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n+1}$ i $\sigma = \sigma(t)$ neka kriva na hiperpovrši $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$. Tada se kriva $\sigma = \sigma(t)$ pri smeštanju i preslikava u krivu $i(\sigma)$. Kažemo da je kriva σ indukovana krivom $i(\sigma)$ ili kriva $i(\sigma)$ indukuje krivu σ .

Neka je (y^i) $(i=1, \ldots ,2n+1)$ lokalni koordinatni sistem u nekoj tački p prostora $\mathfrak{M}^{2n+1}$ u odnosu na koji skoro kontaktna struktura ima oblik (I.3.12). Označimo sa (x^α) $(\alpha= 1, \ldots , 2n)$ lokalni koordinatni sistem na hiperpovrši $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$. Tada se hiperpovrš, "pseudoortogonalna" na vektoru ξ , koristeći lokalne koordinatne sisteme (y^i) i (x^α) može predstaviti u obliku

$$y^\alpha = x^\alpha \quad , \quad y^{2n+1} = 0 \qquad (\alpha= 1,\ldots ,2n)$$

a diferencijal di, ovog smeštanja i

$$i : \tilde{\mathfrak{M}}^{2n} \longrightarrow \mathfrak{M}^{2n+1}$$

predstavlja identičnu transformaciju, koju ćemo u skladu sa (I. § 2) i dalje označavati sa B. Na hiperpovrši $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ u ovom slučaju endomorfizam φ u ovom slučaju predstavlja skoro kompeksnu strukturu $\tilde{F}$.

Označimo sa ∇ koneksiju na $\mathfrak{M}^{2n+1}$ i sa $\tilde{\nabla}$ koneksiju na $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ indukovanu koneksijom ∇ . Ako su T i $\tilde{T}$ tangentni vektori krive $\sigma = \sigma(t)$ u odnosu na koordinatne sisteme (y^i) i (x^α) tada je

$$T = B\tilde{T}$$

a da bi kriva $\sigma = \sigma(t)$ bila CH-ravna prema (II.1.1) treba da važi relacija

$$\nabla_T T = \alpha(t)T + \beta(t)\varphi T$$

odnosno

$$\nabla_{B\tilde{T}} B\tilde{T} = \alpha(t)B\tilde{T} + \beta(t)\varphi B\tilde{T}$$

a odavde, koristeći (I.2.19) i prethodno istaknute činjenice

$$B\tilde{\nabla}_{\tilde{T}}\tilde{T} + h(T,T)\xi = \alpha(t)B\tilde{T} + \beta(t)B\tilde{F}(\tilde{T})$$

Kako je hiperpovrš $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ geodezijska, drugi fundamentalni tenzor h je jednak nuli, pa zbog toga iz prethodne relacije sleduje

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{T}}\tilde{T} = \alpha(t)\tilde{T} + \beta(t)\tilde{F}(\tilde{T})$$

a ovom jednačinom se i definiše H-ravna kriva, što je i trebalo dokazati.

Teorema 2. Na diferencijabilnoj i orijentisanoj hiperpovrši $\mathfrak{M}^{2n-1}$ skoro kompleksnog prostora $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ H-ravna kriva indukuje CH-ravnu krivu ako je

$$h(T,T) = \eta(T)$$

Neka je $\tilde{\nabla}$ koneksija na skoro kompleksnoj mnogostrukosti $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ i ∇ koneksija na hiperpovrši $\mathfrak{M}^{2n-1}$ indukovana koneksijom $\tilde{\nabla}$. Označimo sa $\tilde{T}$ i T tangentne vektore H-ravne krive $\sigma = \sigma(t)$ u odnosu na lokalne koordinatne sisteme (y^{α}) i (X^{i}) redom na prostorima $\tilde{\mathfrak{M}}^{2n}$ i $\mathfrak{M}^{2n-1}$ pri čemu je $\mathfrak{M}^{2n-1}$ predstavljen kao u (I. § 2) na sledeći način

$$y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^{i}) \quad , \quad \alpha = 1. \ldots ,2n; \quad i = 1, \ldots ,2n-1$$

Tada je s obzirom na [88]

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{T}}\tilde{T} = \alpha(t)\tilde{T} + \beta(t)\tilde{F}\tilde{T}$$

tj.

$$\tilde{\nabla}_{BT}BT = \alpha(t)BT + \beta(t)\tilde{F}BT$$

Koristeći (I.2.19) i (I.3.15) iz poslednje jednačine nalazimo

$$B(\nabla_T T) + h(T,T)N = \alpha(t)BT + \beta(t)B\varphi T + \eta(T)N$$

a odavde s obzirom na pretpostavke u teoremi imamo

$$\nabla_T T = \alpha(t)T + \beta(t)\varphi T$$

tj. kriva $\sigma = \sigma(t)$ je CH-ravna kriva s obzirom na (II.2.1). Na taj način smo dokazali i drugu teoremu.

L I T E R A T U R A

1. ADATI T. On subprojective spaces IV, Tensor, N.S., 1(1951) 105-115.

2. БЕКЛАМИШЕВ Д.В. Дифференциальная геометрия пространста с почти комплексной структурой. В сб."Геометрия. 1963 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР)" М., 1965. 165-212.

3. BLAIR D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Mathematics 509, Springer Verlag, 1976.

4. BERNARD D. Sur la structura des pseudogroupes de Lie, C.r. Acad.sci., 1954, 239, No. 20, 1263-1265.

5. BERNARD D. Sur les G-structures somplexes, C.r.Acad.sci., 1956, 243, No. 23, 1821-1824.

6. BERNARD D. Définition globale du tenseur de structure d'une G-structure, C.r.Acad.sci., 1958, 247, No. 19, 1546-1549.

7. BERNARD D. Sur la géométrie differentielle des G-structures, Ann.Inst.Fourier, 1960, 10, 151-270.

8. BOKAN N. On connexions induced by special $(\overset{1}{F},\overset{2}{F})$-connexions, Mathematica Balkanica 7, u štampi.

9. BOKAN N. C-holomorphically projective transformations in a normal almost contact manifold, Tensor, N.S.33, No. 2, u štampi.

10. BONOLA R. Non-Euclidean Geometry, Dover, 0-486-600027-0, New York.

11. BOOTHBY W.M. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, 1975.

12. CARTAN E. Lecons sur la géometrie des espaces de Riemann, Paris, 1950.

13. CHERN SHIING-SHEN Pseudo-groupes continus infinis. Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 119-136.

14. CHERN SHIING-SHEN on a generalization of Kähler geometry, Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N.J., Univ. Press, 1957, 103-121.

15. CHERN SHIING-SHEN sur les métriques remanniennes compatibles avec une réduction du groupe structural, Semin.topol. et géom. différent. Ch.Ehresmann, Fac.sci.Paris, 1958-1960 (L961), 2.

16. ČOMIĆ I. Diferencijalna geometrija, Institut za osnovne primenjene discipline, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1978.

17. DODSON C.T.J. and POSTON T. Tenspr Geometry, Pitman, London, 1977.

18. ЕФИМОВ Н.В. РОЗЕНДОРН Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия, Наука, Москва 197о.

19. EGOROV I.P. On the order of the group of motions of spaces with affine connection, Dokladi AN SSSR (N.S.) 57, 1947, 867-870.

20. EGOROV I.P. On collineations in spaces with projective connection, ibid., 61, 1948, 605-608.

21. EGOROV I.P. On groups of motion of spaces with asymmetric affine connection, ibid, 64, 1949, 621-624.

22. EGOROV I.P. On a strentgthening of Fubini's theorem on the order of the group of motions of a Riemannian space, ibid., 66, 1949, 793-796.

23. EGOROV I.P. On groups of motions of spaces with general asymmetrical affine connection, ibid,73, 1950, 265-267.

24. EGOROV I.P. Collineations of projectively connected spaces, ibid., 80, 1951, 709-712.

25. EGOROV I.P. A tensor characteristic of A_n of nonzero curvature with mayimum mobility, ibid, 84,1952, 209-212.

26. EGOROV I.P. Maximally mobile L with a semi-symmetric connection,ibid, 84, 1952, 433-435.

27. EGOROV I.P. Motions in affinely connected spaces, ibid, 87, 1952.

28. EHRESMANN CH. Espaces fibrés de structures comparatables, Académie des sciences, Paris, C.r.Acad.sci., 1942, 214, 141-147.

29. EHRESMANN C. Sur la théorie des espaces fibrés, Coll.Int. C.N.R.S. Topologie algébrique, Paris, 1947, 3-35.

30. EHRESMANN C. Sur les variétés presyue complexes, Proc.Int. Congr.Math., II, 1950, 412-419.

31. EHRESMANN C. Structures locales et structures infinitesimales, C.r.Acad.sci., 1952, 234, 587-589.

32. EHRESMANN C. Sur les structures infinitésimales rǵulieres, Proc. Internat.Congr.Mathematicians 1954, Amsterdam, Vol.1, Croningen-Amsterdam, 1957, 479-470.

33. EISENKART L.P. Continous Groups of Transformations, 1933.

34. EISENHART L.P. Riemannian Geometrie, Princeton, Princeton University Pres,1949.

35. GOLDBERG S.I. Curvature and Homology, Academic Press, New York, 1962.

36. GRAY J. Some global properties of contact structures, Ann. of Math., 69, 1959, 421-450.

37. HELMHOLTZ H. Über die thatsächlichen Grundlagen der Geomterie, Heidelberg, Verh.d.naturw.-med.Vereins, Bd.IV,197-202, 1868.

38. HELMHOLTZ H.Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie, Heidelberg, Verh.d.naturw.-med.Vereins, Bd.V, 31-32, 1862.

39. Wiss.Abhandlungen von H.HELMHOLTZ, Bd.II, 610-617.Leipzig,1883.

40. HU S.T. Differentiable Manifolds, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.

41. IMAI T. Hypersurfaces of a Riemannian Manifold with Semisymmetric Metric Connection, Tensor, N.S., Vol.23, 1972,300-306.

42. IMAI T. Applications of complex and contact conformal connections, Tensor, N.S.,Vol.32, No.3, 1978,297-301.

43. ISHIHARA S. Groups of isometries of pseudo-Hermatian spaces I,II,Proc.Japan Acad., 30,1954, 940-945; 1955, 418-420.

44. ISHIHARA S. Groups of Projective Transformations on a Projectively Connected Manifold, Japan. Jour. Math., 25, 1955, 37-80.

45. ISHIHARA S. Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions, Jour. Math.Soc.Japan, 7, 1955, 345-370.

46. ISHIHARA S. Groups of projective transformations and groups of conformal transformations, Journal of the Math. Soc. of Japan, V.9, No.2,1957, 195-227.

47. ISHIHARA S. Holomorphically projective shanges and their groups in an almost complex manifold, Tohoku Math. J., 9, 1957, 273-297.

48. ISHIHARA S. and OBATA M. On manifolds which admit some affine connection, Joru. of Math., 1, 1951, 71-76.

49. KLEIN F. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen Erlangen, 1872; reprinted in Math. Ann. BdXLIII, 63-100, 1893.

50. KOBAYASHI S. and NOMIZU K. Foundations of differential geometry, Vol. I, II Interscience Publishers, 1969.

51. KREYSZIG E. Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry, University of Toronto Press, 1968.

52. LIBERMANN P. sur le probleme d'équivalence de certaines structures infinitésimales., Ann.mat.pura ed appl., 1954, 36, 27-120.

53. LIE S. Theorie der Transformationsgruppen, Bd.III, 437-543, Leipzig, 1893.

54. LOVELOCK D. and RUND H. Tensors, Differential Forms, & Variational Principles, A Wiley-Interescience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1975.

55. МАРКОВ Г.Г. и НОРДЕН А.П. О голоморфно проективных преобразованиях, Известия высших учебных заведении, Математика № 6 (157). 1975. 82-87.

56. MUTO Y. On the affinely connected space admitting a group of affine motions, Proc.Japan Acad., 26, 1950,107-110.

57. MUTO Y. On a curved affinely connected space admitting a group of affine motions of maximum order, Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ., Sec.I, No.3, 1954, 1-12.

58. NELSON E. Tensor Analysis, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1967.

59. NEWLANDER A. and NIRENBERG L. Complex analytic coordintes in almost complex manifolds, Ann. of Math., 65, 1957, 391-404.

60. NOMIZU K. On the group of affine transformations of an affinely connected manifold, Proc. Amer. Math. Soc. 4, 1953, 816-823.

61. NOMIZU K. Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer.Jour.Math., 76, 1954,33-65.

62. OTSUKI T. and TASHIRO Y. On curves in Kählerian spaces, Math. J.Okayama Univ., vol.4, 1954, 57-78.

63. PETROVIĆ V. Product - concircular curvature tensor, Publications de l'Institut Mathématique 25 (39), Beograd, 1979.

64. POINCARE H. Sur les hypotheses fondamentauy de la géometrie, Bull. de La Soc.Math. de France, T.XV, 203-216, 1877.

65. ПОЛЯКОВ Н.Д. Дифференциально-геометрические структуры на почти контактном многообразии, Проблемы, геометрии, Том 8, 1977, ВИНИТИ АН СССР, 113-137.

66. PRVANOVIĆ M. Holomorphically projective transformations in a locally product space, Mathematica Balkanica 1, 1971, 195-213.

67. PRVANOVIĆ M. On two tensors in a locally decomposable Riemannian space, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, T 6, Novi Sad, 1976.

68. PRVANOVIĆ M. (F,F) and (F,F)-connexions of an almost complex and an almost product space, Publications de l'Institut Mathématique 22(36), 1977, 223-229.

69. PRVANOVIĆ M. Product Semi-Symmetric Connections of the Locally Decomposable Riemannian Spaces, Bulletin de l'Acad. serbe des Sci.et des Arts, Classe des Scien. Math. T.LXIV,No 10. Beograd 1979., 17-27.

70. РАШЕВСКИЙ П.К.Риманова геометрия и тензорный анализ, Тостехиздат, Москва 1953.

71. REICHARDT H. Gau und die nicht-euklidische Geometrie, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschatf, Leipzig, 1976.

72. Bernhard RIEMANNS gesammelte Mathematiische Werke und wissenschaftlicher Nachala . Herausgegeben unter Mitwirkung von R.Dedekind von H.Weber. Leipzig, Teubner, 1876.

73. SASAKI S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I, Tohoku Math.J., 12, 1960, 459-476.

74. SASAKI S. On Almost Contact Manifolds, Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, Japan, 1965., 128-136.

75. SASAKI S. and HATAKEYAMA Y. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures II, Tohoku Math.J., 13, 1961, 281-294.

76. SATO S. On analytic HSP-transformations in complex manifolds, Tensor, N.S. Vol.32, No.3, 1978, 366-372.

77. SCHOUTEN J.A. Ricci Calculus, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1954.

78. SINGH S.S. On Kḧlerian projective symmetric and Kählerian projective recurrent spaces, Lincei-Rend.Sc.fis.mat.e nat. - Vol.LIV - gennaio 1973, 75-81.

79. SINGH S.S. Some theormes on Kählerian spaces with paralel Bochner curvature tensor, Lincei - Rend.Sc.fis.mat.e nat. - Vol.LIV - febbraio 1973, 205-209.

80. SINGH S.S. On a Kählerian space with recurrent holomorphic projective curvature tensor, Lincei-Rend.Sc.fis.mat.e nat. - Vol.LV - Rerie 1973, 214-218.

81. SINGH RATHORE M.P., MISHARA R.S. Properties of Tachibana Concircular curvature spaces, Vol.4, Nos.5&6.

82. SINHA B.B. F-connexions and H-projective shanges in almost product manifold, Indian Journal, 1975, 33-42.

83. СОКОЛЬНИКОВ И. Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике силошных сред), Наука, Москва, 1971

84. SPIVAK M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol.I,II,III,IV,V, 1975, Publish or Perish, Inc Boston, USA.

85. СТЕРНБЕРГ С.Лекции по Дифференциальной геометрии, Мир, Москва, 197о

86. ШИРОКОВ А.П.Структуры на Дифференцируемых многообразиях, Алгебра. Топология. Геометрия 1967, Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР. М., 1969, 127-188.

87. TACHIBANA S., ISHIHARA S. On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds, Tohoku Math.J., 12, 1960, 77-101.

88. TASHIRO Y. On a holomorphically projective correspondence in an almost complex space, Math.J.Okayama Univ.6, 1957, 147-152.

89. TASHIRO Y. On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I, Tohoku Math.J. 15, 1963, 62-78.

90. THOMAS T.Y. The differential invariants of generalized spaces, Cambridge Univ. Press, 1935.

91. VRANCEANU G. Asupra spatiilor cu conexiune afina ne-euclideiene cu grup maxim de transformari in ele insele, Academia Republicii Populare Romane Buletin Stiintific, 1, 1949, 1-9.

92. VARANCEANU G. Groupes de mouvement des espaces a connexion, Academia Republicii Populare Romane Studii si Cercetari math., 2, 1951, 1-58.

93. VRANCEANU G. Les groupes transitifs de mouvement des espaces de Riemann V_5, ibid., 4, 1953, 504-526.

94. VRANCEANU G. Sur les espaces V_4 ayant comme groupes de stabilité un G_4, Publicationes Math. Univ. Debreceniensis, 3, 1953, 24-32.

95. VRANCEANU G. Propriétés différentiells globales des espaces A_n a groupe maximum $G_n 2$, Academia Republicii Populare Romane Bultetin Stiintific, 6, 1954, 49-59.

96. VRANCEANU G. Sur une classe d'espaces riemanniens homogenes, ibid., 6, 1954, 173-223.

97. WAKAKUWA H. On n-dimensional Riemannian spaces admitting some groups of motions of order less than n(n-1)/2, Tohoku Math. Jour., 6, 1954, 121-134.

98. WANG H.C. On Finsler spaces with completely integrable eyuations of Killing,Jour. London Math. Soc., 22, 1947, 5-9.

99. WANG H.C. and YANO K. A class of affinely connected spaces, Trans.Amer.Math.Sos., 80, 1955, 72-92.

100. WARNER F.W. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresmann and Company, Glenview, Illinois London,1971.

101. WEYL H. Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung, Göttiger Nachr., 1921, 99-122.

102. WREDE R.C. Introduction to Vector and Tensor Analysis, Dover, 1972, New York.

103. YAMAGUCHI S. Kaehlerian torse-forming vector fields, u štampi u Kōdai Math. Sem. Rep.

104. YAMAGUCHI S. Holomorphically subplanar curves in Kaehlerian manifolds, TRU Math. 13, 1977, 41-55.

105. YAMAGUCHI S. and ADATI T. On holomorphically subprojective Kählerian manifolds, I, Ann. di mate. pura ed appli., 112, 1977, 217-229.

106. YAMAGUCHI S. and ADATI T. On holomorphically subprojective Kählerian manifolds, II, Accad. Naz. dei Lincei,60, 1976, 405-413.

107. YAMAGUCHI S. and ADATI T. On holomorphically subprojective Kählerian manifolds, III, Ann. di mate. pura ed appli., 113, 1977, 111-125.

108. YAMAGUCHI S. and SATO S. Remarks on analytic HSP-transformations in Kaehler manifolds, TRU Math., 13, 1977, 56-63.

109. YAMAGUCHI S. and SATO S. On holomorphically subplanar curves in almost complex maniflods, Tensor, N.S. Vol. 32, No.2, 1978, 231-242.

110. YAMAGUCHI S. and YU W.N. Geometry of holomorphically subprojective Kählerian manifolds, u štampi.

111. YANO K. Subprojective transformations, subprojective spaces and subprojective collineations, Proc. Imp.Acad. Tokyo, 20, 1944, 701-705.

112. YANO K. Groups of transformations in generalized spaces, Tokyo, 1949.

113. YANO K. Groups of motions and groups of affine collineations, Convegno di Geometria Differenziale, Roma, 1953.

114. YANO K. On n-dimensional Riemannian spaces admitting a group of motions of order n(n-1)/2+1, Trans. Amer. Math. Soc., 74, 1953, 260-279.

115. YANO K. The theory of the Lie derivatives and its applications, Amsterdam, 1965.

116. YANO K. and ISHIHARA S. On integrability of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$, Quart. J.Math. Oxford (2), 15, 1964, 217-222.

117. YANO K. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, Pergamon Press, New York, 1965.