UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Nebojša Lažetić

O KONVERGENCIJI SPEKTRALNIH RAZLAGANJA KOJA ODGOVARAJU OBIČNIM DIFERENCIJALNIM OPERATORIMA DRUGOG REDA

Doktorska disertacija

BEOGRAD 1980

U V O D

Prilikom rešavanja linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina Furijeovom metodom razdvajanja promenljivih, uvek se dolazi do sledećeg zadatka: zadatu funkciju razložiti u red po sopstvenim funkcijama nekog linearnog, običnog ili parcijalnog, diferencijalnog operatora i ustanoviti konvergenciju (ravnomernu, skoro svuda, po normi, itd.) tog reda. To je bio i ostao jedan od najvažnijih zadataka teorije diferencijalnih operatora od njenog nastanka, pa sve do današnjih dana.

Veliki broj poznatih matematičara posvećivao je tom zadatku izuzetnu pažnju. U prošlom veku to su bili Puason, Koši i Liuvil, a u ovom veku Steklov [43] , Tamarkin [44] , Birkof [6] - [8] , Bohner [9] , Tičmarš [45] , Minakšisundaram [37] , Garding [10] , Hermander [46] , Karleson [47] , Krejn [28] - [29] , Levitan [34] i drugi. Oni su razvili nekoliko opštih metoda za rešavanje pomenutog zadatka. Sve te metode imaju nešto zajedničko: bitno se oslanjaju na konkretan tip graničnih uslova kojima se definiše posmatrani diferencijalni operator.

Istaknuto mesto pripada sovjetskom matematičaru V.A. Iljinu, kako po metodi, tako i po rezultatima čiji je on autor. Iljinova metoda se zasniva na takozvanim formulama srednje vrednosti za rešenja diferencijalnih jednačina kojima se definišu sopstvene i pridružene funkcije odgovarajućeg diferencijalnog operatora. Ova činjenica omogućava da dobijeni rezultati, u izvesnom smislu, ne zavise od graničnih uslova. Osim toga, ova metoda daje tačne, konačne rezultate. Još jedno dobro svojstvo ima Iljinova metoda: pomoću nje se mogu dokazivati i rezultati negativnog tipa.

Iljin se bavi linearnim diferencijalnim operatorima sa glatkim koeficijentima. U seriji radova [1] , [13] - [16] on i njegov učenik Š.A. Alimov dali su konačne rezultate koji se odnose na ravnomernu konvergenciju i lokalizaciju spektralnih razlaganja i njihovih Risovih sredina za funkcije iz klâsa Soboljeva, Nikoljskog, Liuvila, Besova i Zigmunda-Heldera, koja su generisana proizvoljnim nenegativnim samokonjugovanim produženjima eliptičkih operatora drugog reda, definisanim u proizvoljnoj N-dimenzionoj oblasti. U Iljinovim radovima [17] - [20] prikazani su konačni rezultati koji se odnose na konvergenciju po normi (problem bazisnosti) i na ravnomernu konvergenciju biortogonalnog reda funkcije iz klase $L_2(G$ koji je generisan proizvoljnim potpunim i minimalnim podsistemom sopstvenih i pridruženih funkcija Keldiševog pramena nesamokonjugovanih običnih diferencijalnih operatora n-tog reda, definisanih na proizvoljnom intervalu G realne ose. Pri tome oblik graničnih uslova igra ulogu samo u tom smislu da treba da obezbedi unapred odredjenu, ali i veoma prirodnu asimptotiku sopstvenih brojeva. Dobijeni rezultati su obuhvatili sve do tada poznate rezultate iz te oblasti.

U ovom radu se izučavaju spektralna razlaganja funkcije iz nekih od pomenutih klâsa funkcija, koja su generisana običnim diferencijalnim operatorima drugog reda Šturm-Liuvilovog tipa, sa prekidnim koeficijentima. Ovom problematikom se, pored ostalih, bave I. Jo iz Budimpešte i I. Lomov iz Moskve, pa su neki od rezultata prikazanih u ovom radu u tesnoj vezi sa nekim njihovim rezultatima.

Rad je podeljen na četiri glave. Svaka glava je podeljena na paragrafe. Na kraju svake glave, u posebnom paragrafu, komentarisani su dobijeni rezultati, ukazano je na njihovu vezu sa već poznatim rezultatima, kao i na novine koje oni sobom nose.

U prvoj glavi se izučavaju rešenja diferencijalnih jednačina kojima se definišu sopstvene i pridružene funkcije Šredingerovog operatora

$$L(u) = -u''(y) + q(y)u(y) \quad ,$$

čiji potencijal $q(y)$ jeste kompleksna funkcija iz klase $L_1^{loc}(G)$; G je proizvoljan interval. Dobijene su ocene odozgo sopstvenih (teorema 1) i pridruženih funkcija (teorema 3), kao i takozvane antiapriorne ocene, tj. ocene odozgo sopstvenih preko pridruženih funkcija (teorema 2). U izvesnom obliku i pod odredjenim uslovima za potencijal $q(y)$ i interval G , ove ocene su već poznate (I. Jo [25] , I. Lomov [36]). Pod istim, veoma slabim, uslovima za potencijal $q(y)$ dobijene su ovde i ocene odozgo prvih izvoda ovih funkcija (teoreme 4 i 5). Pokazano je kako se, povećavajući glatkost potencijala, mogu dobiti ocene odozgo izvodâ višeg reda sopstvenih i pridruženih funkcija (teorema 6). Najzad, dokazane su i ocene odozgo integralâ tih funkcija (teorema 7).

Svi ovi rezultati su sami za sebe od interesa. Osim toga, oni predstavljaju onu široku osnovu na kojoj se zasnivaju i pomoću koje su dobijeni svi rezultati u preostalim glavama.

U drugoj glavi se razmatra Šturm-Liuvilov operator

$$L(u) = -(p(y)u'(y))' + q(y)u(y)$$

sa kompleksnim potencijalom $q(y)$ iz klase $L_p^{loc}(G)$, $1 < p < \infty$, i sa koeficijentom $p(y)$ uz glavni deo operatora, koji je deo po deo dva puta neprekidno diferencijabilan na konačnom intervalu G . Ustvari, da bi se izlaganje pojednostavilo, pretpostavljeno je da taj koeficijent i njegovi izvodi imaju samo jednu tačku prekida na posmatranom intervalu. Dati su potrebni i dovoljni uslovi (uslovi bazisnosti Iljina) za konvergenciju po normi prostora $L_2(K)$ biortogonalnog reda funkcije iz klase $L_2(G)$ (svojstvo bazisnosti), koji je generisan proizvoljnim potpunim i minimalnim sistemom sopstvenih i pridruženih funkcija tog operatora (teorema 1). Uz pretpostavku da su ovi uslovi zadovoljeni, nadjeni su potrebni i dovolj ni uslovi za ravnomernu konvergenciju tog reda na kompaktima K intervala G .(teorema 4). U slučaju Šredingerovog operatora usta novljena je ekvivalentnost uslovâ bazisnosti, svojstva bazisnosti i ravnomerne ravnokonvergencije na kompaktima biortogonalnog reda i trigonometrijskog Furijeovog reda date funkcije (teorema 5). Time je u tom specijalnom, ali i veoma važnom za praksu slučaju dobijena potpuna analogija sa Iljinovim rezultatima.

Treća glava je posvećena problemu diferenciranja biortogonalnog reda apsolutno neprekidne funkcije, generisanog potpunim i minimalnim sistemom sopstvenih i pridruženih funkcija Šredingerovog operatora sa kompleksnim potencijalom $q(y) \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$. Ovde je G takodje konačan interval. Ovaj problem se javlja prilikom zasnivanja Furijeove metode za rešavanje odgovarajućih gr ničnih zadataka. Za spektralna razlaganja apsolutno neprekidne fun cije, koja odgovaraju proizvoljnim nenegativnim samokonjugovanim produženjima tog Šredingerovog operatora, zadatak diferenciranja razmatrali smo I. Jo i ja u radovima [24] i [26] . U ovoj glavi ja sam ta istraživanja proširio i na opštiji slučaj biortogonalnog re da. Dobijena je ocena prvog izvoda parcijalne sume tog reda pod veoma opštim pretpostavkama (teorema 2). Pod pretpostavkama koje uključuju sve samokonjugovane i široku klasu nesamokonjugovanih sl čajeva, dokazana je teorema o ravnomernoj ravnokonvergenciji prodi ferenciranog biortogonalnog reda i prodiferenciranog trigonometrijskog Furijeovog reda apsolutno neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem (teorema 3). Najzad, ovde su prikazani i neki rezultati koji se odnose na drugi izvod spektralnog razlaganja, generisanog samokonjugovanim produženjem Šredingerovog operatora, a koje smo dobili I. Jo i ja u radu [27] .

U poslednjoj glavi razmatraju se spektralna razlaganja funkcijâ sa kompaktnim nosačem iz klase Nikoljskog $H_p^{\alpha}(G)$, $0<\alpha\leq 2$, $1<p\leq 2$, koja odgovaraju nenegativnim samokonjugovanim produženjima Šredingerovog operatora sa potencijalom iz klase $L_p(G)$, gde je G konačan interval. Dati su dovoljni uslovi za ravnomernu konvergenciju tog spektralnog razlaganja na celom intervalu G (teorema 2). U preostalim slučajevima dokazana je teorema o ravnomernoj ravnokonvergenciji tog razlaganja i trigonometrijskog Furijeovog reda (teorema 3).

Zahvaljujem se Vladimiru Aleksandroviču Iljinu, profesoru Moskovskog državnog univerziteta "M.V. Lomonosov" na pomoći i podršci u radu za sve vreme mog boravka u Moskvi 1977-1979., kao i Ištvanu Jo, predavaču na Univerzitetu u Budimpešti, na veoma uspešnoj i korisnoj saradnji. Zahvaljujem se dr Branislavu Mirkoviću, docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, na stalnom interesovanju i brojnim razgovorima u toku kojih je ovaj rad dobio svoj konačni oblik.

U Beogradu, maja 1980.

G L A V A I

NEKA SVOJSTVA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA ŠREDINGEROVOG OPERATORA

U ovoj glavi biće reči o ocenama odozgo rešenjâ nekih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda Šturm-Liuvilovog tipa.

Posmatraćemo diferencijalnu operaciju

$$\ell(u) = - u''(y) + q(y)u(y) , \tag{1}$$

koju ćemo nazivati formalnim diferencijalnim Šredingerovim operatorom ili, kraće, Šredingerovim operatorom. U §1 se definišu sopstvene i pridružene funkcije operatora (1) i dokazuju se ocene odozgo maximum norme sopstvenih funkcija. U §2 se dokazuju anti apriorne ocene, tj. ocene odozgo normi sopstvenih funkcija preko normi pridruženih funkcija. Koristeći ove ocene, u istom paragrafu dobijamo ocene odozgo normi pridruženih funkcija. U §§ 3-4 se razmatraju prvi izvodi sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1) i dokazuju odgovarajuće ocene za njih. U §5 se ta razmatranja prenose na izvode višeg reda tih funkcija. U §6 su dobijene ocene odozgo integralâ sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1).

Rezultati izloženi u ovoj glavi se široko primenjuju u sledećim glavama. Čak šta više, postojanje pomenutih ocena je bitno omogućilo da se metoda V.A. Iljina primeni u izučavanju problema koji se razmatraju u ovom radu.

§ 1.- OCENE ODOZGO SOPSTVENIH FUNKCIJA

Neka je $G = (a,b)$ konačan ili beskonačan interval realne ose i $q(y)$ kompleksna funkcija koja pripada klasi $L_1^{loc}(G)$. Sopstvene i pridružene funkcije diferencijalnog operatora (1), definisanog na intervalu G , čiji potencijal $q(y)$ ima navedeno svojstvo, uvodimo sledećim definicijama.

D E F I N I C I J A 1. Kompleksna funkcija $\overset{0}{u}(y)$, $\overset{0}{u}(y) \neq 0$, definisana na segmentu G , naziva se sopstvenom funkcijom operator (1), koja odgovara sopstvenom broju λ (λ - kompleksan broj), ako:

1) $\overset{0}{u}(y)$ i $\overset{0}{u}'(y)$ jesu apsolutno neprekidne funkcije na svako konačnom segmentu intervala G ;

2) funkcija $\overset{0}{u}(y)$ jeste rešenje diferencijalne jednačine

$$- \overset{0}{u}''(y) + q(y)\overset{0}{u}(y) = \lambda u(y) \tag{2}$$

skoro svuda u intervalu G .

D E F I N I C I J A 2. Kompleksna funkcija $\overset{1}{u}(y)$, $\overset{1}{u}(y) \neq 0$, definisana na segmentu G , naziva se pridruženom funkcijom operatora (1), koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{u}(y)$ i sopstvenom broju λ , ako:

1) $\overset{1}{u}(y)$ i $\overset{1}{u}'(y)$ jesu apsolutno neprekidne funkcije na svako konačnom segmentu intervala G ;

2) funkcija $\overset{1}{u}(y)$ jeste rešenje diferencijalne jednačine

$$- \overset{1}{u}''(y) + q(y)\overset{1}{u}(y) = \lambda \overset{1}{u}(y) + \overset{0}{u}(y) \tag{3}$$

skoro svuda u intervalu G .

NAPOMENA 1. Egzistencija ovako definisanih funkcija $\overset{0}{u}(y)$ i $\overset{1}{u}(y)$ dokazana je, na primer, u knjizi [39] (teorema 2, §16, gl.V).

U sledećoj lemi, bez dokaza, formulisane su takozvane formule srednje vrednosti za sopstvene i pridružene funkcije operatora (1).

L E M A 1. Neka je $\overset{0}{u}(y)$ sopstvena funkcija operatora (1), koja odgovara sopstvenom broju λ. Tada važe sledeće formule:

$$1)\quad \frac{\overset{0}{u}(x+t)+\overset{0}{u}(x-t)}{2} = \overset{0}{u}(x)\cdot\cos\sqrt{\lambda}t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\cdot\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{0}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-t)\,d\xi\,,\quad \lambda\neq 0\,; \tag{4}$$

$$2)\quad \frac{\overset{0}{u}(x+t)+\overset{0}{u}(x-t)}{2} = \overset{0}{u}(x) - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{0}{u}(\xi)(|x-\xi|-t)\,d\xi\,,\quad \lambda = 0\,. \tag{5}$$

Neka je $\overset{1}{u}(y)$ pridružena funkcija operatora (1), koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{u}(y)$ i sopstvenom broju λ. Tada važe sledeće formule:

$$1)\quad \frac{\overset{1}{u}(x+t)+\overset{1}{u}(x-t)}{2} = \overset{1}{u}(x)\cos\sqrt{\lambda}t - \overset{0}{u}(x)\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}t\sin\sqrt{\lambda}t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{1}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-t)\,d\xi - \frac{1}{2\lambda}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{0}{u}(\xi)\left[\int_{|x-\xi|}^{t}\sin\sqrt{\lambda}(\eta-t)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-\eta)\,d\eta\right]d\xi\,,\ \lambda\neq 0 \tag{6}$$

$$2)\quad \frac{\overset{1}{u}(x+t)+\overset{1}{u}(x-t)}{2} = \overset{1}{u}(x) - \overset{0}{u}(x)\frac{t^2}{2} - \tag{7}$$

$$- \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{1}{u}(\xi)(|x-\xi|-t)d\xi - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{0}{u}(\xi)\left[\int_{|x-\xi|}^{t}(\eta-t)(|x-\xi|-\eta)d\eta\right]d\xi, \quad \lambda = 0 .$$

Ovde je x proizvoljni element intervala G i t - pozitivan broj takav da $x-t, x+t \in G$.

NAPOMENA 2. Formule (4)-(5) pripadaju E.Č.Tičmaršu [45]. Formule srednje vrednosti za sopstvene i pridružene funkcije običnog diferencijalnog operatora n-tog reda sa glatkim koeficijentima dao je E.I. Mojsejev [38]. Formule (6)-(7) su istog oblika kao odgovarajuće formule Mojsejeva.

U daljem tekstu sa $\rho(A,B)$ označavaćemo rastojanje između skupova A i B, a sa ∂G skup graničnih tačaka intervala G. Ako je $K \subset G$ i R - broj takav da je $0 < R < \rho(K, \partial G)$, onda uvodimo oznaku

$$K_R = \{x \in G: \ \rho(x,K) \le R\} .$$

Formulišimo sada i dokažimo glavni rezultat ovog paragrafa.

T E O R E M A 1. Ako je $q(y) \in L_1^{loc}(G)$, onda za svaki kompaktni podskup K intervala G postoje konstante $0 < R < \rho(K, \partial G)$ i $C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takve da važi ocena

$$\max_{x\in K} |\overset{0}{u}(x)| \le C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_R)} . \tag{8}$$

Ako je $q(y) \in L_1(G)$ i, u slučaju beskonačnog intervala G, $\overset{0}{u}(y) \in L_2(G)$, onda postoji konstanta $C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takva da važi ocena

$$\sup_{y\in G} |\overset{0}{u}(y)| \le C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)} . \tag{9}$$

D O K A Z. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $K = [c,d]$ - proizvoljni segment intervala G.

1. Neka je $q(y) \in L_1^{loc}(G)$.

Navedimo prvo ocene nekih funkcija kompleksne promenljive i njihovih integrala koje će nam biti neophodne u daljem radu. Ako je dat kompleksan broj $\lambda = r \cdot e^{i\varphi}$, $r \geqslant 0$, $-\pi/2 < \varphi \leq 3\pi/2$, onda ćemo pod $\sqrt{\lambda}$ podrazumevati broj $\sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2}$. Realni i imaginarni deo broja λ označavaćemo sa $\mathrm{Re}\lambda$ i $\mathrm{Im}\lambda$ respektivno.

Neka je $0 < \alpha < \frac{d-c}{4}$. Tada važe ocene

$$1) \quad \max_{0 \leq t \leq \alpha} |\sin\sqrt{\lambda}t| \leq \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{d-c}{4}\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} m(K, \mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \ ; \tag{10}$$

$$2) \quad \max_{0 \leq t \leq \alpha} |\cos\sqrt{\lambda}t| \leq m(K, \mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \ . \tag{11}$$

Uvedimo veličinu

$$M(K, \mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) = \max\left\{1,\ m(K, \mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\right\} \ . \tag{12}$$

Funkcija $f(z) = \left|\frac{\sin z}{z}\right|$ na skupu $\left\{t\sqrt{\lambda} : 0 \leq t \leq \frac{d-c}{4}\right\}$ dostiže svoj maksimum $S(K, \mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$. Zbog toga važi ocena

$$\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq t \cdot S(K, \mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \tag{13}$$

za svaki $t \in [0, \alpha]$. Iz nejednakosti $|\cos z| \geqslant |\cos(\mathrm{Re} z)|$ sledi nejednakost

$$\int_0^\alpha |\cos\sqrt{\lambda}t|\, dt \geqslant \int_0^\alpha |\cos(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}t)|\, dt \ .$$

Koristeći ocenu

$$\int_0^\alpha |\cos(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}t)|\, dt \geqslant \frac{\alpha}{\pi} \ ,$$

dokazanu u radu [22], iz prethodne nejednakosti dobijamo ocenu

$$\int_0^\alpha |\cos\sqrt{\lambda}t|\, dt \geqslant \frac{\alpha}{\pi} \ . \tag{14}$$

Primetimo da ova ocena važi i za svaki pozitivan broj α i svaki kompleksni broj λ .

Predjimo na dokaz ocene (8), pretpostavljajući da je $\lambda \neq C$
Odredimo broj ε tako da budu zadovoljeni sledeći uslovi:

$$
\begin{aligned}
&a)\quad 0 < \varepsilon < \frac{d-c}{4} ;\\
&b)\quad K_{\varepsilon} = [c-\varepsilon,\ d+\varepsilon] \subset G ; \qquad (15)\\
&c)\quad M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\cdot\varepsilon \leq \frac{1}{5} .
\end{aligned}
$$

Stavljajući $x = c$ u formulu srednje vrednosti (4), i smatrajući da $0 \leq t \leq \varepsilon$, iz te formule dobijamo nejednakost

$$
\begin{aligned}
|\overset{\circ}{u}(c-t)| \leq\ & |\overset{\circ}{u}(c+t)| + 2|\overset{\circ}{u}(c)||\cos\sqrt{\lambda}t| + \\
& + \int_{c-t}^{c} |q(\xi)||\overset{\circ}{u}(\xi)|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(c-\xi-t)}{\sqrt{\lambda}}\right| d\xi + \qquad (16)\\
& + \int_{c}^{c+t} |q(\xi)||\overset{\circ}{u}(\xi)|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\xi-c-t)}{\sqrt{\lambda}}\right| d\xi .
\end{aligned}
$$

Kako $c,\ c+t \in K$ za svaki $t \in [0,\varepsilon]$, to iz (12) sledi ocena

$$
|\overset{\circ}{u}(c+t)| + 2|\overset{\circ}{u}(c)||\cos\sqrt{\lambda}t| \leq 3M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot \max_{x\in K}|\overset{\circ}{u}(x)| . \qquad (17)
$$

Sa druge strane, s obzirom na (13), važe ocene

$$
\int_{c-t}^{c} |q(\xi)||\overset{\circ}{u}(\xi)|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(c-\xi-t)}{\sqrt{\lambda}}\right| d\xi \leq \|q\|_{L_1(K_\xi)} S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon\cdot \max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{\circ}{u}(x)| , \qquad (18)
$$

$$
\int_{c}^{c+t} |q(\xi)||\overset{\circ}{u}(\xi)|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\xi-c-t)}{\sqrt{\lambda}}\right| d\xi \leq \|q\|_{L_1(K_\varepsilon)} S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon\ \max_{x\in K} \overset{\circ}{u}(x) . \qquad (19)
$$

Koristeći nejednakosti

$$
S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\cdot\varepsilon \leq \frac{1}{5} \leq \frac{1}{5} M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) , \qquad (20)
$$

iz (16)-(19) dobijamo nejednakost

$$\max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{0}{u}(x)| \leq 3M(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| + \frac{1}{5}\max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{0}{u}(x)| +$$
$$+ \frac{1}{5}M(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \quad ,$$

odnosno

$$\max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{0}{u}(x)| \leq 4\,M(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \quad . \tag{21}$$

Potpuno analogno se dobija i ocena

$$\max_{x\in[d,d+\varepsilon]}|\overset{0}{u}(x)| \leq 4\,M(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\,\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \quad . \tag{22}$$

Iz (21) i (22) sledi ocena

$$\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)| \leq 5\,M(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \quad . \tag{23}$$

Vratimo se ponovo formuli srednje vrednosti (4). Smatrajući da je x proizvoljna tačka segmenta K , ε - broj definisan uslovima (15) i t - broj takav da je $0\leq t\leq\varepsilon$, iz te formule dobijamo nejednakosti

$$|\overset{0}{u}(x)||\cos\sqrt{\lambda}t| \leq \frac{1}{2}(|\overset{0}{u}(x+t)| + |\overset{0}{u}(x-t)|) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|q(\xi)\overset{0}{u}(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-t)}{\sqrt{\lambda}}| \tag{24}$$
$$\leq \frac{1}{2}(|\overset{0}{u}(x+t)| + |\overset{0}{u}(x-t)|) + \frac{t}{2}S(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\cdot\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)| \quad .$$

Prointegralimo nejednakosti (24) po t u granicama od 0 do ε . Koristeći ocenu (14), dobijamo

$$\frac{\varepsilon}{\pi}|\overset{0}{u}(x)| \leq |\overset{0}{u}(x)|\cdot\int_0^\varepsilon|\cos\sqrt{\lambda}t|\,dt \leq$$
$$\leq \sqrt{\varepsilon}\cdot\|u\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{4}S(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\cdot\max_{x\in K_\varepsilon}u(x) \quad .$$

Odatle i iz ocene (23) sledi ocena

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{5\pi}{4}\varepsilon S(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})M(K,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \quad ,$$

odnosno, imajući u vidu (15), ocena

$$\max_{x\in K}|\overset{\circ}{u}(x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{\pi}{4}\cdot\max_{x\in K}|\overset{\circ}{u}(x)| \quad .$$

Iz ove nejednakosti lako se dobija ocena

$$\max_{x\in K}|\overset{\circ}{u}(x)| \leq \frac{4\pi}{(4-\pi)\sqrt{\varepsilon}}\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} \quad . \tag{25}$$

Kako je $\varepsilon = \varepsilon(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, to (25) i predstavlja ocenu (8) koju je trebalo dokazati.

Potpuno analogno se dokazuje ocena (8) u slučaju kada je $\lambda = 0$; pri tome se umesto formule (4) koristi formula (5).

2. Neka je $q(y)\in L_1(G)$.

Razmotrimo prvo slučaj kada je $G = (a,b)$ konačan interval.

Neka su brojevi $M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $S(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ definisani pomoću jednakosti (12) i nejednakosti (13) u kojima umesto $\frac{d-c}{4}$ stoji $\frac{b-a}{4}$. Odredimo broj ε tako da bude $0<\varepsilon<\frac{b-a}{4}$ i

$$M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(G)}\cdot\varepsilon \leq \frac{1}{5} \quad .$$

Definišimo segment $K\subset G$ tako da je $K = [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.

Za tako odredjene ε i K ponovimo, uz očevidne modifikacije, prvi deo dokaza prvog dela teoreme. Na taj način dolazimo do sledećeg analogona ocene (23):

$$\sup_{y\in G}|\overset{\circ}{u}(y)| \leq 5\, M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\max_{x\in K}|\overset{\circ}{u}(x)| \quad . \tag{26}$$

Primetimo prvo da iz ove ocene sledi da $u(y)\in L_2(G)$, ako je G konačan interval.

Primenimo ocenu (8) na desnu stranu nejednakosti (26). Za neki broj $0<R<\varepsilon$ važiće nejednakost

$$\sup_{y\in G}|\overset{\circ}{u}(y)| \leq 5\, M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_R)} \quad ,$$

odnosno ocena

$$\sup_{y\in G}|\overset{\circ}{u}(y)| \leq C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_R)} \quad . \tag{27}$$

S obzirom na prethodnu primedbu, odavde neposredno sledi ocena (9).

Pretpostavimo sada da je $G = (-\infty,+\infty)$ i da je $\overset{\circ}{u}(y)\in L_2(G)$. Neka tvrdjenje drugog dela teoreme 1 nije tačno! To znači da za svaki broj $r>0$ postoji tačka $x_r\in G$ takva da je

$$|u(x_r)| > r\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(G)} \quad . \tag{28}$$

Neka je $s>0$ proizvoljan broj. Odredimo brojeve $M(s,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $S(s,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ pomoću uslovâ (10)-(13) u kojima umesto $\frac{d-c}{4}$ stoji $\frac{s}{4}$. Odredimo zatim broj $0<\xi<\frac{s}{4}$ takav da bude ispunjeno

$$M(s,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(s,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(G)}\cdot\xi \leq \frac{1}{5} \quad .$$

Prema našoj pretpostavci, za dati broj $r_\xi = \frac{4\pi}{\sqrt{\xi}(4-\pi)}$ postoji tačka x_ξ takva da je

$$|\overset{\circ}{u}(x_\xi)| > \frac{4\pi}{\sqrt{\xi}(4-\pi)}\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(G)} \quad . \tag{29}$$

Označimo sa K proizvoljan segment realne ose, dužine s, koji sadrži tačku x_ξ. Za kompakt K i broj ξ zadovoljeni su uslovi (15), pa na osnovu ocene (25) dobijamo nejednakosti

$$\max_{x\in K}|\overset{\circ}{u}(x)| \leq \frac{4\pi}{\sqrt{\xi}(4-\pi)}\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_\xi)} \leq \frac{4\pi}{\sqrt{\xi}(4-\pi)}\cdot\|u\|_{L_2(G)} \quad ,$$

što je u suprotnosti sa nejednakošću (29).

Ukoliko je interval G oblika $(-\infty,a)$ ili $(b,+\infty)$, onda se postupa na sledeći način. Odredjenosti radi, neka je $G = (b,+\infty)$. Na nekom fiksiranom segmentu $K_G = [c,d]\subset G$, koji se bira tako da je $c-b<\frac{d-c}{4}$, ocena (9) važi, na osnovu ocene (8). Zatim se, koristeći ocenu (21), dokaže da ocena (9) važi i na polusegmentu (b,c

Da ocena (9) važi i na poluintervalu $[d,+\infty)$ dokazuje se isto kao u prethodnom slučaju, birajući broj s tako da bude $\frac{s}{4} < d-b$.

Dokaz teoreme 1 je završen.

NAPOMENA 3. Neka je $\sigma(\ell)$ proizvoljan podskup skupa svih sopstvenih brojeva operatora (1). Pretpostavimo da skup $\sigma(\ell)$ ima sledeće svojstvo: postoji konstanta $A>0$, koja ne zavisi od brojeva $\lambda\in\sigma(\ell)$, takva da važi ocena

$$|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}| \leq A , \quad \lambda\in\sigma(\ell) .$$

Tada konstante $C(K,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})$ i $C(G,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})$ ne zavise od brojeva $\lambda\in\sigma(\ell)$.

§ 2.- OCENE ODOZGO PRIDRUŽENIH FUNKCIJA

Da bismo dobili ocene pridruženih funkcija operatora (1), biće nam potrebne antiapriorne ocene koje su formulisane sledećom teoremom.

T E O R E M A 2. Ako je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$, onda za svaki kompakt $K\subset G$ postoje konstante $B(K,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})$ i $B(K,q)$ i broj $0<\delta<\rho(K,\partial$ takvi da važe ocene

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \leq B(K,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot|\sqrt{\lambda}|\cdot \max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)| \quad , \ \lambda\neq 0 , \tag{30}$$

i

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \leq B(K,q) \max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)| \quad , \ \lambda = 0 . \tag{31}$$

Ako je $q(y)\in L_1(G)$ i, u slučaju beskonačnog intervala G, $\overset{0}{u}(y),\overset{1}{u}(y)\in L_2(G)$, onda postoje konstante $B(G,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})$ i $B(G,q)$ takve da važe ocene

$$\sup_{y\in G}|\overset{0}{u}(y)| \leq B(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot|\sqrt{\lambda}|\cdot \sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \quad , \quad \lambda \neq 0 \ , \tag{32}$$

i

$$\sup_{y\in G}|\overset{0}{u}(y)| \leq B(G,q)\cdot \sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \quad , \quad \lambda = 0 \ . \tag{33}$$

D O K A Z. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $K = [c,d]$ - proizvoljan segment intervala G.

1. Neka je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$.

Neka je $\lambda \neq 0$ i neka su brojevi $M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ definisani relacijama (10)-(13). Odredimo zatim broj $0<\delta< \min\{\frac{\pi}{2}, \rho(K,\partial G)\}$ tako da važe sledeći uslovi, analogni uslovima (15):

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \delta < \frac{d-c}{4} \ ; \\ &\text{b)}\quad K_\delta \subset G \ ; \\ &\text{c)}\quad M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\delta)}\cdot\delta \leq \frac{1}{5} \ . \end{aligned} \tag{34}$$

Smatrajući da $x\in K$, $0\leq t\leq\delta$, iz formule srednje vrednosti (6) dobijamo jednakost

$$\begin{aligned} \overset{0}{u}(x)t\sin\sqrt{\lambda}t = {} & 2\sqrt{\lambda}\Big[\overset{1}{u}(x)\cos\sqrt{\lambda}t - \frac{\overset{1}{u}(x+t) + \overset{1}{u}(x-t)}{2} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{1}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-t)\,d\xi\Big] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{0}{u}(\xi)\Big[\int_{|x-\xi|}^{t}\sin\sqrt{\lambda}(\eta-t)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-\eta)\,d\eta\Big]d\xi \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Za posmatrani broj $\lambda\in\sigma(\ell)$ uvek se može odrediti broj $t(\lambda)\in(0,\delta)$ takav da je $|\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)| \neq 0$. Uvrstivši tako odredjeni broj $t(\lambda)$ u jednakost (35), dobijamo nejednakost

$$|\overset{0}{u}(x)|\leq \frac{2|\sqrt{\lambda}|}{|t(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|}\cdot\Big[|\overset{1}{u}(x)\cos\sqrt{\lambda}t(\lambda)| + \frac{|\overset{1}{u}(x+t(\lambda))| + |\overset{1}{u}(x-t(\lambda))|}{2} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int_{x-t(\lambda)}^{x+t(\lambda)} |q(\xi)\cdot \overset{1}{u}(\xi)|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-t(\lambda))}{\sqrt{\lambda}}\right| d\xi\Bigg] + \tag{36}$$

$$+\ \frac{1}{t(\lambda)}\int_{x-t(\lambda)}^{x+t(\lambda)} |q(\xi)\cdot \overset{0}{u}(\xi)|\left|\int_{|x-\xi|}^{t(\lambda)} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(\eta-t(\lambda))}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-\eta)}{\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)}\, d\eta\right| d\xi \quad .$$

S obzirom na ocenu (13), važi ocena

$$\int_{|x-\xi|}^{t(\lambda)} \left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\eta-t(\lambda))}{\sqrt{\lambda}}\right|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-\eta)}{\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)}\right| d\eta \le S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\int_{|x-\xi|}^{t(\lambda)} |\eta-t(\lambda)|\, d\eta \ , \tag{37}$$

za svaki $\xi\in[x-t(\lambda),x+t(\lambda)]$. Osim toga, funkcija

$$f(\xi) = \int_{|x-\xi|}^{t(\lambda)} |\eta-t(\lambda)|\, d\eta$$

jeste pozitivna i neprekidna na segmentu $[x-t(\lambda),x+t(\lambda)]$ i važi

$$\max_{\xi\in[x-t(\lambda),x+t(\lambda)]} f(\xi) = \frac{|t(\lambda)|^2}{4} \ . \tag{38}$$

Sada iz (10)-(13) i (36)-(38) sledi nejednakost

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \le \frac{2|\sqrt{\lambda}|}{|t(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|}\Big[M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)| + \max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)| +$$

$$+\ \frac{t(\lambda)}{2} S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\delta)} \max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)|\Big] + \tag{39}$$

$$+\ \frac{t(\lambda)}{4} S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|q\|_{L_1(K_\delta)} \max_{x\in K_\delta}|\overset{0}{u}(x)| \quad .$$

Imajući u vidu uslove (34), na poslednji sabirak na desnoj strani nejednakosti (39) možemo primeniti ocenu (23):

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \le |\sqrt{\lambda}|\cdot\max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)|\cdot\Big[\frac{2}{|t(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|}(2M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})+\tfrac{1}{2}S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|q\|_{L_1(\cdot}$$

$$\cdot\delta)\Big] + \frac{1}{4}\max_{x\in K_\delta}|\overset{0}{u}(x)|\ M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|q\|_{L_1(K_\delta)}\cdot 5\delta \ .$$

Primenivši na izraz u srednjim zagradama ocenu (20), a na drugi sabirak na desnoj strani prethodne nejednakosti ocenu (34), ĉ), dobijamo ocenu

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)|\leq|\sqrt{\lambda}|\max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)|\cdot\frac{21\ M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{5|t(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|}+\frac{1}{4}\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \quad ,$$

odakle sledi ocena

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)|\leq\frac{28\ M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{5|t(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|}\cdot|\sqrt{\lambda}|\cdot\max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)| \quad . \tag{40}$$

Uvodeći oznaku

$$B(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) = \frac{28\ M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{5|t(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|} \quad , \tag{41}$$

iz (40) dobijamo ocenu (30).

Ako je $\lambda = 0$, onda se ocena (31) dobija analognim postupkom, uz korišćenje formule srednje vrednosti (7).

2. Neka je $q(y)\in L_1(G)$.

Razmotrimo prvo slučaj kada je $G = (a,b)$ konačan interval

Neka je $\lambda\neq 0$ i neka su brojevi $M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $S(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ definisani pomoću uslova (10)-(13) u kojima umesto $\frac{d-c}{4}$ stoji $\frac{b-a}{4}$. Odredimo broj $0<\xi<\frac{b-a}{4}$ tako da bude zadovoljena nejednakost

$$M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|q\|_{L_1(G)}\cdot\xi\leq\frac{1}{5} \quad .$$

Definišimo segment $K\subset G$ tako da je $K = [a+\xi,b-\xi]$.

Za tako odredjene K i ξ važi ocena (26):

$$\sup_{y\in G}|\overset{0}{u}(y)|\leq 5\ M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \quad .$$

Odredimo zatim broj $0<\delta<\min\left\{\frac{\pi}{2},\xi\right\}$ tako da za uočeni kompakt K važi uslov $\hat{a}$),(34). Tada su zadovoljeni i uslovi $\hat{b}$) i $\hat{c}$), pa prema prvom delu ove teoreme, važi ocena (30). Primenimo tu ocenu na desnu stranu prethodne nejednakosti:

$$\sup_{y\in G}|\overset{0}{u}(y)|\leq 5M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)|\leq$$

$$\leq 5\ M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})B(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot|\sqrt{\lambda}|\cdot\max_{x\in K_\delta}|\overset{1}{u}(x)| \quad .$$

Stavljajući

$$B(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) = 5\, M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})B(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \ , \tag{42}$$

odatle dobijamo ocenu (32), ukoliko postoji $\sup\limits_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)|$. Egzistenciju ovog supremuma dokazaćemo u sledećoj teoremi. Ovde ćemo izdvojiti prethodni rezultat

$$\sup_{y\in G}|\overset{0}{u}(y)| \leq B(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot|\sqrt{\lambda}|\cdot \max_{x\in K_{\delta}}|\overset{1}{u}(x)| \ . \tag{43}$$

U slučaju kada je G beskonačan interval proizvoljnog oblika, dokaz se izvodi analogno dokazu odgovarajućih slučajeva teoreme 1. Pri tome se koristi činjenica da postoji $\sup\limits_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)|$, koja će biti dokazana u sledećoj teoremi.

Ocena (33) se dokazuje analogno, uz korišćenje ocene (31).

Dokaz teoreme 2 je završen.

<u>NAPOMENA 1</u>. Vratimo se sada skupu $\sigma(\ell)$ uvedenom u napomeni 3 prethodnog paragrafa. Pretpostavimo da taj skup ima sledeća svojstva:

1) Postoji broj $A>0$ koji ne zavisi od brojeva $\lambda\in\sigma(\ell)$, takav da je

$$|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|\leq A \ , \quad \lambda\in\sigma(\ell) \ . \tag{44}$$

2) Postoji broj $\lambda_0>0$ takav da je

$$|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|\geq\lambda_0 \ , \quad 0\neq\lambda\in\sigma(\ell) \ . \tag{45}$$

Tada konstante $B(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $B(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ iz ocena (30) i (32) ne zavise od brojeva $\lambda\in\sigma(\ell)$.

Zaista, prema napomeni 3, §1, od λ neće zavisiti sve konstante iz teoreme 1 koje učestvuju u dokazu teoreme 2. Dalje, broj δ definisan uslovima (34) zavisiće samo od kompakta K i potencijala $q(y)$.

Razmotrimo konstantu $B(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ (videti jednakost (41)). Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $0<\lambda_0<1$. Koristeći nejednakost $|\sin z|\geqslant|\sin(\mathrm{Re}\,z)|$ i uslov (45), nije teško videti da važi sledeće tvrdjenje:

Za svaki $\lambda\in\sigma(\mathcal{L})$ postoji broj $t(\lambda)\in[\frac{1}{2}\delta,\delta]$ takav da je $|\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|\geqslant\sin(r\delta)$, gde je $r=\min\{\frac{1}{5},\lambda_0\}$, a time i

$$|t(\lambda)\cdot\sin\sqrt{\lambda}t(\lambda)|\geqslant\frac{1}{2}\delta\sin(r\delta)\equiv\beta(\delta)\,. \tag{46}$$

Smatrajući da je broj $t(\lambda)$ koji se pominje u dokazu prvog dela teoreme 2 izabran kao u prethodnom tvrdjenju, možemo u oceni (40) umesto konstante $B(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ staviti konstantu

$$B(K,q)=\frac{28\;M(K,q)}{5\;\beta(\delta)}\,.$$

Imajući u vidu ove činjenice i analizirajući dokaz drugog dela teoreme 2 (videti jednakost (42)), dolazimo do zaključka da i konstanta $B(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ zavisi samo od intervala G i potencijala $q(y)$.

Formulišimo sada i dokažimo ocene odozgo za pridruženu funkciju $\overset{1}{u}(y)$ operatora (1).

<u>T E O R E M A 3</u>. Ako je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$, onda za svaki kompakt $K\subset G$ postoje brojevi $0<R<\varrho(K,\partial G)$ i $C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takvi da važi ocena

$$\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)|\leqslant C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)}\,. \tag{47}$$

Ako je $q(y)\in L_1(G)$ i, u slučaju beskonačnog intervala G, $\overset{0}{u}(y),\overset{1}{u}(y)\in L_2(G)$, onda postoji konstanta $C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takva da važi ocena

$$\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \leq C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|u\|_{L_2(G)} \quad . \tag{48}$$

D O K A Z. Razmotrimo prvo slučaj kada je $\lambda \neq 0$.

1. Neka je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$.

Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je posmatrani kompakt oblika $K = [c,d]$.

Odredimo prvo broj $0<\delta<\min\left\{\frac{\pi}{2}, \rho(K,\partial G)\right\}$ takav da budu zadovoljeni uslovi

$$\begin{aligned} &1) \quad \delta < \frac{d-c}{6} \ ; \\ &2) \quad M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|q\|_{L_1(K)}\cdot\delta \leq \frac{1}{5} \ . \end{aligned} \tag{49}$$

Uvedimo segment $K_{-\delta} = [c+\delta, d-\delta]$. Tada su za kompakt $K_{-\delta}$ i broj δ zadovoljeni uslovi (15), pa važi ocena (23):

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \leq 5\,M(K_{-\delta},\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K_{-\delta}}|\overset{0}{u}(x)| \leq 5M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K_{-\delta}}|\overset{0}{u}(x)| \ ,$$

jer je $(K_{-\delta})_{\delta} = K$.

Sa druge strane, za kompakt $K_{-\delta}$ i broj δ ispunjeni su uslovi (34), pa važi ocena (30):

$$\max_{x\in K_{-\delta}}|\overset{0}{u}(x)| \leq B(K_{-\delta},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot|\sqrt{\lambda}|\cdot\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \quad .$$

Iz ove i prethodne nejednakosti dobijamo veoma važan oblik antiapriorne ocene

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)| \leq 5M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})B(K_{-\delta},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot|\sqrt{\lambda}|\cdot\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \quad . \tag{50}$$

Odredimo sada broj ξ takav da budu zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\begin{aligned} &1) \quad 0<\xi<\min\left\{\frac{d-c}{4}, \rho(K,\partial G)\right\} ; \\ &2) \quad M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|q\|_{L_1(K_{\xi})}\cdot\xi \leq \frac{1}{5} \ ; \end{aligned} \tag{51}$$

3) $\frac{125\pi}{2(4-\pi)} M^3(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})B(K_{-\delta},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon < \frac{1}{2}$.

U formuli srednje vrednosti (6), koju ćemo ovde upotrebiti u obliku

$$\frac{\overset{1}{u}(x+t)+\overset{1}{u}(x-t)}{2} = \overset{1}{u}(x)\cos\sqrt{\lambda}t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{x-t}^{x+t} q(\zeta)\overset{1}{u}(\zeta)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\zeta|-t)\,d\zeta \; + \tag{52}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{x-t}^{x+t}\overset{0}{u}(\zeta)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\zeta|-t)\,d\zeta \quad ,$$

smatraćemo da $x\in K$ i $0\leq t\leq\varepsilon$. Tada iz (52) dobijamo nejednakos

$$|\overset{1}{u}(x)\cos\sqrt{\lambda}t| \leq \frac{1}{2}\left(|\overset{1}{u}(x+t)|+|\overset{1}{u}(x-t)|\right) \; +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|q(\zeta)\overset{1}{u}(\zeta)|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(|x-\zeta|-t)}{\sqrt{\lambda}}\right|d\zeta + \frac{1}{2|\sqrt{\lambda}|}\int_{x-t}^{x+t}|\overset{0}{u}(\zeta)||\sin\sqrt{\lambda}(|x-\zeta|-t)$$

odakle integriranjem po t od 0 do ε , zbog (10)-(13) i (14), sledi nejednakost

$$\frac{\varepsilon}{\pi}|\overset{1}{u}(x)| \leq \sqrt{\varepsilon}\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{1}{4}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{1}{u}(x)|\;\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\;S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon^2 \; +$$
$$+ \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\;M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} \quad ,$$

ili

$$\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{\pi}{4}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{1}{u}(x)|\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\;S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon \; + \tag{53}$$
$$+ \frac{\pi}{2}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\;M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon \quad .$$

Sa druge strane, stavljajući $x = c$ u formulu (52) i smatrajući da $0\leq t\leq\varepsilon$, dobijamo nejednakost

$$|\overset{1}{u}(c-t)| \leq \max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + 2\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \; +$$
$$+ \max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)|\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\;S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon + \max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{1}{u}(x)|\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\cdot S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon \; +$$
$$+ \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\;M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot 2\varepsilon \quad .$$

Odatle, zbog uslova (51), 2), sledi nejednakost

$$\max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{1}{u}(x)| \le 3M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{1}{5}M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{1}{5}\max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot 2\varepsilon ,$$

ili

$$\max_{x\in[c-\varepsilon,c]}|\overset{1}{u}(x)| \le 4M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\frac{5}{2}\varepsilon . \quad (54)$$

Potpuno analogno se dobija i ocena

$$\max_{x\in[d,d+\varepsilon]}|\overset{1}{u}(x)| \le 4M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\frac{5}{2}\varepsilon . \quad (55)$$

Iz (54) i (55) sledi ocena

$$\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{1}{u}(x)| \le 5M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\frac{5}{2}\varepsilon . \quad (56)$$

Vratimo se sada nejednakosti (53). Zamenom (56) u (53) dobijamo, imajući u vidu uslov (51), 2), sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \le{}& \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon + \\ &+ \frac{5\pi}{4}\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\cdot\varepsilon + \\ &+ \frac{5\pi}{8}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,S(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(K_\varepsilon)}\cdot\varepsilon^2 \le \\ \le{}& \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{\pi}{4}\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{5\pi}{8}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon ,\end{aligned}$$

ili, posle sredjivanja,

$$\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \le \frac{4\pi}{(4-\pi)\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{5\pi}{2(4-\pi)}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K_\varepsilon}|\overset{0}{u}(x)|\,M(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon .$$

Primenimo na drugi sabirak na desnoj strani ove nejednakosti ocenu (23):

$$\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \le \frac{4\pi}{(4-\pi)\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{25\pi}{2(4-\pi)}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)|\,M^2(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon ,$$

a zatim u ovoj nejednakosti ocenu (50). Dobijamo nejednakost

$$\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \leq \frac{4\pi}{(4-\pi)\sqrt{\varepsilon}}\cdot\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} + \frac{125}{2(4-\pi)}\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)|\cdot M^3(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot$$
$$\cdot B(K_{-\delta},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon \quad ,$$

ili, imajuči u vidu uslov (51), 3), ocenu

$$\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| \leq \frac{8\pi}{(4-\pi)\sqrt{\varepsilon}}\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_\varepsilon)} \quad . \tag{57}$$

Kako je $\varepsilon = \varepsilon(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, to (57) predstavlja ustvari ocenu (47) koju je trebalo dokazati.

2. Neka je $q(y)\in L_1(G)$.

Razmotrimo prvo slučaj kada je $G = (a,b)$ konačan interval.

Postupićemo kao u dokazu odgovarajućeg dela teoreme 1. Odredimo prvo, kao i tamo, brojeve $M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $S(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$. Odredimo zatim broj $0<\varepsilon<\frac{b-a}{4}$ takav da važi uslov

$$M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot S(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|q\|_{L_1(G)}\cdot\varepsilon \leq \frac{1}{5} \quad .$$

Definišimo segment $K\subset G$ tako da je $K = [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Za tako odredjene K i ε ponovimo, uz očevidne modifikacije, deo dokaza prvog dela ove teoreme, što nas dovodi do sledećeg analogona ocene (56):

$$\begin{aligned}\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \leq{}& 5\,M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \\ &+ \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\sup_{y\in G}|\overset{0}{u}(y)|\,\frac{5}{2}\,M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon \quad .\end{aligned} \tag{58}$$

Primenimo na drugi sabirak na desnoj strani ove nejednakosti ocenu (26). Dobijamo ocenu

$$\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \leq 5M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\max_{x\in K}|\overset{0}{u}(x)|\,\frac{25}{2}M^2(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\varepsilon\,. \tag{59}$$

Sada za dati kompakt K odredimo broj $0<\delta<\min\left\{\frac{\pi}{2},\varepsilon\right\}$ takav da važe uslovi (49). Tada važi ocena (50) koju možemo primeniti na poslednji sabirak na desnoj strani (59). Dobijamo ocenu

$$\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \leq 5\, M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| + $$
$$+\frac{125}{2}M^2(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,M(K_\delta,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,B(K_{-\delta},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)|\cdot\varepsilon ,$$

tj.

$$\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \leq \tilde{C}(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\max_{x\in K}|\overset{1}{u}(x)| , \qquad (60)$$

gde je

$$\tilde{C}(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) = \frac{125}{2}M^2(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})M(K_\delta,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})B(K_{-\delta},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\varepsilon + 5M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) .$$

Ocena (60) je analogon ocene (26). Primetimo odmah da iz nje sledi da $\overset{1}{u}(y)\in L_2(G)$, ako je G konačan interval.

S obzirom na ocenu (47), iz (60) sledi ocena

$$\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \leq C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)} , \qquad (61)$$

gde je $0<R<\rho(K,\partial G)$, a odatle, imajući u vidu prethodnu primedbu, i ocena (48).

Pre nego što pristupimo završnom delu dokaza teoreme 3, primetimo sledeće. U dokazu drugog dela teoreme 2 mi smo pretpostavili da postoji $\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)|$. Kako smo ovde (videti nejednakosti (56) i (58)) dokazali egzistenciju tog supremuma ne koristeći pomenuti deo teoreme 2, to je upotrebljeni postupak korektan.

Dokaz teoreme 3 u slučajevima kada je G beskonačan interval jeste potpuno analogan dokazu odgovarajućih slučajeva u teoremi 1. Ovde takodje stoji odgovarajuća primedba koja se odnosi na egzistenciju $\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)|$ i upotrebu ove činjenice u dokazu odgovarajućih slučajeva teoreme 2.

Slučaj $\lambda = 0$ se dokazuje primenom formule srednje vrednosti oblika

$$\frac{\overset{1}{u}(x+t)+\overset{1}{u}(x-t)}{2} = \overset{1}{u}(x) - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\overset{1}{u}(\xi)q(\xi)\,(|x-\xi|-t)\,d\xi -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \overset{0}{u}(\zeta)\ (|x-\zeta| - t)\ d\zeta \quad .$$

Prethodno prikazana tehnika se, uz odgovarajuće modifikacije, upotrebljava i u ovom slučaju. Pri tome se koriste i odgovarajući rezultati iz teorema 1 i 2.

Dokaz teoreme 3 je završen.

NAPOMENA 2. Ako pretpostavimo da skup $\sigma(\ell)$ ima svojstva (44) i (45) iz napomene 1, onda analiza dokaza teoreme 3 pokazuje da konstante $C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ iz ocenâ (47) i (48) ne zavise od brojeva $\lambda \in \sigma(\ell)$.

§ 3.- OCENE PRVOG IZVODA SOPSTVENIH FUNKCIJA

Izvedimo prvo formulu srednje vrednosti za prvi izvod sopstvene funkcije $\overset{0}{u}(y)$ operatora (1), koja odgovara sopstvenom broju λ. Naime, ako je $x \in G$ i $t > 0$ broj takav da $x-t, x+t \in G$, onda važi jednakost

$$u'(x+t) - u'(x-t) = -2\sqrt{\lambda}\,\overset{0}{u}(x)\sin\sqrt{\lambda}t + \int_{x-t}^{x+t} q(\zeta)\overset{0}{u}(\zeta)\cos\sqrt{\lambda}(|x-\zeta|-t)\,d\zeta \,. \tag{62}$$

Zaista, podjimo od integrala

$$\int_{x}^{x+t} \overset{0}{u}''(\zeta)\cdot\cos\sqrt{\lambda}(\zeta - x - t)\ d\zeta \quad .$$

Primenivši dva puta uzastopno parcijalnu integraciju, dobijamo jednakost

$$\int_{x}^{x+t} \overset{0}{u}''(\zeta)\cos\sqrt{\lambda}(\zeta - x - t)d\zeta = \overset{0}{u}'(x+t) - \overset{0}{u}'(x)\cdot\cos\sqrt{\lambda}t \; +$$

$$+ \sqrt{\lambda}\,\overset{0}{u}(x)\cdot\sin\sqrt{\lambda}t - \lambda\cdot\int_{x}^{x+t}\overset{0}{u}(\zeta)\cos\sqrt{\lambda}(\zeta - x - t)\ d\zeta \quad .$$

Odatle i iz jednačine (2) sledi jednakost

$$\overset{0}{u}'(x+t) = -\sqrt{\lambda}\,\overset{0}{u}(x)\sin\sqrt{\lambda}t + \overset{0}{u}'(x)\cos\sqrt{\lambda}t \; + \tag{63}$$

$$+\int_{x}^{x+t} \overset{0}{u}(\xi)q(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(\xi-x-t)\,d\xi \quad .$$

Potpuno analogno, razmatrajući integral

$$\int_{x-t}^{x} \overset{0}{u}''(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(x-\xi-t)\,d\xi \quad ,$$

dolazimo do jednakosti

$$\begin{aligned}\overset{0}{u}'(x-t) &= \sqrt{\lambda}\,\overset{0}{u}(x)\sin\sqrt{\lambda}t + \overset{0}{u}'(x)\cos\sqrt{\lambda}t - \\ &- \int_{x-t}^{x} \overset{0}{u}(\xi)q(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(x-\xi-t)\,d\xi \quad .\end{aligned} \tag{64}$$

Jednakost (62) neposredno sledi iz jednakosti (63) i (64).

<u>T E O R E M A 4</u>. Neka je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$. Tada za svaki kompakt $K\subset G$ postoje brojevi $0<R<\rho(K,\partial G)$, $\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})>1$ i $C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takvi da važe ocene:

$$\begin{aligned}&\text{a)}\ \max_{x\in K}|\overset{0}{u}'(x)| \le C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_R)}\ ,\ \text{za}\ 0\le|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|\le\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\ ;\\ &\text{b)}\ \max_{x\in K}|\overset{0}{u}'(x)| \le C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot|\sqrt{\lambda}|\|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_R)},\ \text{za}\ |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}).\end{aligned} \tag{65}$$

Ako je $q(y)\in L_1(G)$ i, u slučaju beskonačnog intervala G, $\overset{0}{u}(y)\in L_2(G)$, onda postoje brojevi $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\ge 1$ i $C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takvi da važe ocene:

$$\begin{aligned}&\text{a)}\ \sup_{y\in G}|\overset{0}{u}'(y)| \le C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)}\ ,\ \text{za}\ 0\le|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|\le\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\ ;\\ &\text{b)}\ \sup_{y\in G}|\overset{0}{u}'(y)| \le C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,|\sqrt{\lambda}|\|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)}\ ,\ \text{za}\ |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\ .\end{aligned} \tag{66}$$

<u>D O K A Z</u>. 1. Neka je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$.

Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $K = [c,$ Neka je $\lambda\ne 0$ i neka je μ proizvoljan pozitivan broj. Podjimo od funkcije

$$\omega(x,y;\mu) = \begin{cases} \cos\mu|x-y| \quad , & \text{za} \quad |x-y|<R \;; \\ 0 \quad , & \text{za} \quad |x-y|\geqslant R \;; \end{cases} \tag{67}$$

gde je $0<R<\rho(K,\partial G)$.

Fiksirajmo tačku $x\in K$ i transformišimo integral

$$\overset{\circ}{\omega}(x) = \int_a^b \omega(x,y;\mu)\overset{\circ}{u}(y)dy = \int_x^{x+R}\overset{\circ}{u}(y)\cos\mu(y-x)dy \;+ \\ + \int_{x-R}^{x}\overset{\circ}{u}(y)\cos\mu(x-y)dy \;. \tag{68}$$

Primenivši smenu promenljivih $h = y-x$ u prvom, i $h = x-y$ u drugom integralu na desnoj strani jednakosti (68), a potom i formulu srednje vrednosti (4), dobijamo jednakost

$$\overset{\circ}{\omega}(x) = \overset{\circ}{u}(x)\cdot 2\cdot\int_0^R \cos\mu h\,\cos\sqrt{\lambda}h\,dh \;- \\ - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^R \cos\mu h\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{\circ}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh \;. \tag{69}$$

Iz (68) sledi da na segmentu K važi jednakost

$$\frac{d}{dx}\overset{\circ}{\omega}(x) = \mu\cdot\int_{x-R}^{x+R}\overset{\circ}{u}(y)\sin\mu(y-x)dy + (\overset{\circ}{u}(x+R)-\overset{\circ}{u}(x-R))\cos\mu R \;. \tag{70}$$

Osim toga, ako uvedemo oznaku

$$\overset{\circ}{F}(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^R \cos\mu h\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{\circ}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh \;,$$

onda na segmentu K važi i jednakost

$$\frac{d}{dx}\overset{\circ}{F}(x,\mu) = \int_0^R \cos\mu h\cdot\left[\int_{x-h}^{x} q(\xi)\overset{\circ}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(x-\xi-h)d\xi \;- \\ - \int_x^{x+h} q(\xi)\overset{\circ}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(\xi-x-h)d\xi\right]dh \;, \tag{71}$$

Iz jednakosti (69)-(71) neposredno se dobija jednakost

$$\frac{d}{dx}\overset{\circ}{u}(x)\cdot 2\cdot\int_0^R \cos\mu h\cos\sqrt{\lambda}h\,dh = \mu\cdot\int_{x-R}^{x+R}\overset{\circ}{u}(y)\sin\mu(y-x)dy + \tag{72}$$

$$+ (\overset{\circ}{u}(x+R)-\overset{\circ}{u}(x-R))\cos\mu R + \int_0^R \cos\mu h\left[\int_{x-h}^{x} q(\xi)\overset{\circ}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(x-\xi-h)d\xi\right.\cdot$$

$$\left.-\int_x^{x+h} q(\xi)\overset{\circ}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(\xi-x-h)d\xi\right]dh ,$$

pri čemu $x\in K$.

S obzirom da je

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1 ,$$

postoji broj $\delta_1 > 0$ takav da važi

$$|z|<\delta_1 \Longrightarrow \left|\frac{\sin z}{z}\right| < \frac{1}{2} .$$

Fiksirajmo broj R na sledeći način

$$0<R< \min\left\{\rho(K,\partial G), \frac{\delta_1}{1+|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|^2}\right\} . \tag{73}$$

Tada se može dokazati sledeće tvrdjenje.

Ako broj R zadovoljava uslov (73), onda postoje brojevi $\mu_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})>1$ i $\beta=\beta(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})>0$ takvi da za svaki broj $\mu\geq\mu_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ koji zadovoljava uslov $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}-\mu|\leq 1$, važi ocena

$$2\left|\int_0^R \cos\mu h\cos\sqrt{\lambda}h\,dh\right| > \beta . \tag{74}$$

Dokaz ovog tvrdjenja je elementaran, pa ga nećemo ovde navoditi. Dokažimo sada ocenu (65), b). Definišimo broj $\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ pomoću jednakosti

$$\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) = \sqrt{|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|^2+\mu_0^2(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})} , \tag{75}$$

i pretpostavimo da je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$. Stavimo $\mu = |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|$. Za tako odabrane brojeve μ i R važe jednakost (72) i ocena (74).

Zato iz (72) sledi nejednakost

$$|\overset{0}{u}'(x)| \leq |\sqrt{\lambda}| \max_{x\in K_R} |\overset{0}{u}(x)| \left(\frac{2R}{\beta} + \frac{2}{\beta} + \frac{2R}{\beta} \|q\|_{L_1(K_R)} \cdot \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(R\cdot \mathrm{Im}\sqrt{\lambda})} \right),$$

za svaki $x \in K$.

Primenjujući ovde ocenu (8), dobijamo ocenu

$$\max_{x\in K} |\overset{0}{u}'(x)| \leq C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) |\sqrt{\lambda}| \|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_{\tilde{R}})} ,$$

gde je

$$C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) = C(K_R,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \left(\frac{2R}{\beta} \|q\|_{L_1(K_R)} \cdot \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(R\cdot \mathrm{Im}\sqrt{\lambda})} + \frac{2R}{\beta} + \frac{2}{\beta}\right)$$

a broj $\tilde{R}$ je tako odabran da je $K_R \subset K_{\tilde{R}} \subset G$. A ta ocena je upravo ocena (65), b).

Dokažimo sada ocenu (65), a). Pretpostavimo da je $0 \leq |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| \leq \lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$. Ovoga puta podjimo od funkcije

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S} , & \text{za } |x-y| < S , \\ 0 , & \text{za } |x-y| \geq S , \end{cases} \tag{76}$$

gde je $0 < S < \rho(K, \partial G)$.

Fiksirajući tačku $x \in K$, transformišimo sledeći integral:

$$\overset{0}{\omega}(x) = \int_a^b \omega(x,y)\, \overset{0}{u}(y)\, dy = \frac{1}{S} \int_{x-S}^{x+S} \overset{0}{u}(y)\, dy . \tag{77}$$

Koristeći smene promenljivih kao u prethodnom slučaju i formulu srednje vrednosti (4), predstavimo funkciju $\overset{0}{\omega}(x)$ u obliku

$$\begin{aligned} \overset{0}{\omega}(x) &= \overset{0}{u}(x) \frac{2}{S} \int_0^S \cos\sqrt{\lambda}h\, dh - \\ &- \frac{1}{S\sqrt{\lambda}} \cdot \int_0^S \left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}(\xi) \sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-h)d\xi \right] dh . \end{aligned} \tag{78}$$

Pomoću jednakosti (77) i (78), po analogiji sa prethodnim slučajem, dokazuje se da na segmentu K važi jednakost

$$\frac{d}{dx}\overset{0}{u}(x) \frac{2}{S} \int_0^S \cos\sqrt{\lambda}h\, dh = \frac{1}{S}\cdot (\overset{0}{u}(x+S) - \overset{0}{u}(x-S)) +$$

$$+\ \frac{1}{S}\int_0^S\Big[\int_{x-h}^{x} q(\zeta)\overset{0}{u}(\zeta)\cos\sqrt{\lambda}(x-\zeta-h)d\zeta\ -\ \int_x^{x+h} q(\zeta)\overset{0}{u}(\zeta)\cos\sqrt{\lambda}(\zeta-x-h)d\zeta\Big]dh.$$

Neka je δ_1 broj odredjen u prethodnom slučaju. Fiksirajmo broj S tako da bude

$$0<S<\min\left\{\rho(K,\partial G)\ ,\ \frac{\delta_1}{\left(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|^2+\lambda_0^2(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\right)^{1/2}}\right\}. \tag{80}$$

Za tako odabrano S važi ocena

$$\left|\frac{2}{S}\int_0^S \cos\sqrt{\lambda}h\ dh\right|>1\ . \tag{81}$$

Predjimo na dokaz ocene (65), a). Koristeći ocenu (81), iz jednakosti (79) dobijamo ocenu

$$|\overset{0}{u}'(x)|\leq\left(\frac{2}{S}+2\cdot\|q\|_{L_1(K_S)}\cdot\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(S\cdot\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}\ \right)\max_{x\in K_S}|\overset{0}{u}(x)|$$

za svaki $x\in K$, odakle, zbog ocene (8), sledi ocena

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}'(x)|\leq C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\ \|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_R)}\ ,$$

gde je

$$C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})=C(K_S,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\left(\frac{2}{S}+2\cdot\|q\|_{L_1(K_S)}\cdot\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(S\cdot\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}\ \right),$$

a broj R je odabran tako da bude $K_S\subset K_R\subset G$.

Slučaj $\lambda=0$ dokazuje se, uz očevidne modifikacije, analogno prethodnom slučaju: u prelazu od jednakosti (77) ka jednakosti (78) koristi se formula srednje vrednosti (5).

2. Neka je $q(y)\in L_1(G)$.

Pretpostavimo prvo da je $G=(a,b)$ konačan interval. Označimo sa K segment $\left[\frac{3a+b}{4}\ ,\ \frac{3b+a}{4}\right]$. Stavimo $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\overset{\mathrm{def}}{=}\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, gde je $\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ broj iz ocene (65), odredjen za tako izabrani kompakt K .

Dokažimo ocenu (66), b). Stavimo u formulu srednje vrednosti (62) $x \equiv x_0 = \frac{3a+b}{4}$ i pretpostavimo da $t \in [0, \frac{b-a}{4})$. Tada brojevi $x_0 - t$ pripadaju poluintervalu $(a, \frac{3a+b}{4}]$, a brojevi x_0+t pripadaju kompaktu K. Iz formule (62) dobijamo, koristeći ocene (8), (27) i (65), b), sledeće nejednakosti:

$$|\overset{\circ}{u}'(x_0-t)| \leq |\overset{\circ}{u}'(x_0+t)| + 2|\sqrt{\lambda}||\overset{\circ}{u}(x_0)|\,|\sin\sqrt{\lambda}t| +$$

$$+ \int_{x_0-t}^{x_0+t} |q(\xi)||\overset{\circ}{u}(\xi)||\cos\sqrt{\lambda}(|x_0-\xi|-t)|\,d\xi \leq$$

$$\leq C_1(K,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_{R_1})} + 2|\sqrt{\lambda}|C(K,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot m(G,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_{R_2})} +$$

$$+ C(G,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot m(G,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(G)}\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_{R_3})}$$

ili, stavljajući $\widetilde{R} = \max\{R_1, R_2, R_3\}$, ocenu

$$\sup_{y\in(a,\frac{3a+b}{4}]} |\overset{\circ}{u}'(y)| \leq \widetilde{C}_1(G,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_{\widetilde{R}})} \quad . \tag{82}$$

Potpuno analogno, stavivši u formulu srednje vrednosti (62) $x \equiv x_0 = \frac{3b+a}{4}$ i smatrajući da $t \in [0, \frac{b-a}{4})$, dobijamo ocenu

$$\sup_{y\in[\frac{3b+a}{4},b)} |\overset{\circ}{u}'(y)| \leq \widetilde{\widetilde{C}}_1(G,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_{\widetilde{\widetilde{R}}})} \quad . \tag{83}$$

Sada iz ocene (65), b), primenjene na kompakt K sa nekom "okolinom" $K_{\widetilde{\widetilde{\widetilde{R}}}} \supset K$, i iz ocena (82)-(83) sledi da važi ocena

$$\sup_{y\in G} |\overset{\circ}{u}'(y)| \leq C_1(G,q,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_R)} \quad , \tag{84}$$

gde je $R = \max\{\widetilde{R}, \widetilde{\widetilde{R}}, \widetilde{\widetilde{\widetilde{R}}}\}$.

Iz ocene (84) neposredno sledi ocena (66), b).

Slučaj $0 \leq |\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}| \leq \lambda_0(G,\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})$ razmatra se potpuno analogno. Koristi se takodje formula (62); slučaj $\lambda = 0$ treba posmatrati odvojeno.

Neka je $G = (-\infty,+\infty)$ i neka je $\overset{0}{u}(y) \in L_2(G)$. Stavimo $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) = 1$ i pretpostavimo da je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| > 1$. Ako ocena (66), b), ne bi bila tačna, onda bi za svaki broj $r > 0$ postojala tačka $x_r \in G$ takva da je

$$|u'(x_r)| > r|\sqrt{\lambda}|\|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)} \quad .$$

Podjimo od činjenice da, kada $q(y) \in L_1(G)$, konstante $\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ iz ocenâ (65) ne zavise od prirode kompakta K , već samo od njegove mere! Zato za dati proizvoljni broj s odredimo brojeve $\lambda_0(s,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $C_1(s,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$. Prema našoj prepostavci, postoji tačka $x_s \in G$ takva da je

$$|u'(x_s)| > C_1(s,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)} \quad . \tag{85}$$

Neka je $K(s)$ proizvoljan segment dužine s , koji sadrži tačku x_s . Kako je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| > 1$, to je, prema oceni (65), a) ako je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| \leq \lambda_0(s,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, odnosno prema oceni (65), b) ako je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| > \lambda_0(s,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, zadovoljena nejednakost

$$\max_{x \in K(s)} |\overset{0}{u}'(x)| \leq C_1(s,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \cdot |\sqrt{\lambda}| \cdot \|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)} \quad ,$$

što je u suprotnosti sa ocenom (85)!

Potpuno analogno se dokazuje ocena (66), a), s tim što se slučaj $\lambda = 0$ razmatra odvojeno.

Razmotrimo najzad slučaj $G = (b,+\infty)$; slično se razmatra slučaj $G = (-\infty,a)$. Neka je $K = [c,d] \subset G$ segment takav da je $c-b < \frac{d-c}{4}$. Prvo se pomoću jednakosti (64) i teoreme 1, kao i pomoću prvog dela teoreme 4, dokaže da postoji $\sup\limits_{y \in (b,c]} |\overset{0}{u}'(y)|$ i da za njega važe ocene tipa (66). Zatim se, kao u prethodnom slučaju, pokaže da postoji $\sup\limits_{x \in (d,+\infty)} |\overset{0}{u}'(y)|$ i da za njega važe ocene (66). Na samom kompaktu K važe ocene (65). Odatle sledi da na celom intervalu G važe ocene (66).

Dokaz teoreme 4 je završen.

NAPOMENA. Pretpostavimo da skup $\sigma(\ell)$ ima svojstvo (44). Tada sve konstante koje se pojavljuju u formulaciji teoreme 4 zavise samo od kompakta K, odnosno od intervala G i potencijala $q(y)$. Dakle, te konstante biće "ravnomerne" u odnosu na brojeve $\lambda\in\sigma(\ell)$

§4.- OCENE PRVOG IZVODA PRIDRUŽENIH FUNKCIJA

Navedimo prvo formulu srednje vrednosti za prvi izvod pridružene funkcije $\overset{1}{u}(y)$ operatora (1), koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{u}(y)$ i sopstvenom broju λ. Naime, ako je $x\in G$ i $t>$ jeste broj takav da $x-t, x+t\in G$, onda važi jednakost

$$\overset{1}{u}{}'(x+t)+\overset{1}{u}{}'(x-t) = -2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\overset{1}{u}(x)\cdot\sin\sqrt{\lambda}t \; + \tag{86}$$

$$+\int\limits_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{1}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-t)\,d\xi \;-\; \int\limits_{x-t}^{x+t}\overset{0}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-t)\,d\xi\,.$$

Ova jednakost se dokazuje isto kao jednakost (62), samo što se umesto jednačine (2) koristi jednačina (3).

Glavni rezultati ovog paragrafa formulisani su sledećom teoremom.

TEOREMA 5. Ako je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$, onda za svaki kompakt $K\subset G$ postoje konstante $0<R<\rho(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, $C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})>1$ takve da važe ocene

a) $\max\limits_{x\in K}|\overset{1}{u}{}'(x)|\le C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)}$, za $0\le|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|\le\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$

(87)

b) $\max\limits_{x\in K}|\overset{1}{u}'(x)| \leq C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)}$, za $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$.

Neka je $q(y)\in L_1(G)$ i, u slučaju beskonačnog intervala G, $\overset{0}{u}(y),\overset{1}{u}(y)\in L_2(G)$. Tada postoje konstante $C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ $\geqslant 1$ takve da važe ocene

$$\text{a) } \sup_{y\in G}|\overset{1}{u}'(y)| \leq C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(G)}, \quad \text{za } 0\leq|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|\leq\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda});$$

$$\text{b) } \sup_{y\in G}|\overset{1}{u}'(y)| \leq C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(G)}, \quad \text{za } |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) . \tag{88}$$

<u>D O K A Z</u>. Neka je $q(y)\in L_1^{loc}(G)$.

Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je kompakt K oblika $K = [c,d]$. Neka je $\mu > 0$ proizvoljan broj i $R > 0$ – broj manji od rastojanja segmenta K od granice intervala G .

Kao u dokazu teoreme 4 poći ćemo od funkcije (67). Smatrajući da je tačka $x\in K$ fiksirana, transformišimo funkciju

$$\overset{1}{\omega}(x) = \int_a^b \omega(x,y;\mu)\overset{1}{u}(y)dy = \int_x^{x+R}\overset{1}{u}(y)\cos\mu(y-x)dy + \int_{x-R}^{x}\overset{1}{u}(y)\cos\mu(x-y)dy . \tag{89}$$

Uvodeći smene promenljivih $h = y-x$, odnosno $h = x-y$, i koristeći formulu srednje vrednosti (52), dobijamo jednakost

$$\overset{1}{\omega}(x) = \overset{1}{u}(x)\cdot 2\cdot\int_0^R \cos\mu h\,\cos\sqrt{\lambda}h\,dh - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^R\cos\mu h\left[\int_{x-h}^{x+h}\overset{1}{u}(\xi)q(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^R\cos\mu h\left[\int_{x-h}^{x+h}\overset{0}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh . \tag{90}$$

Sličnim razmatranjima kao u dokazu teoreme 4, koristeći jednakosti (89) i (90), dolazimo do zaključka da na segmentu K važi jednakost

$$\frac{d}{dx}\overset{1}{u}(x)\cdot 2\cdot\int_0^R \cos\mu h\cos\sqrt{\lambda}h\,dh = \mu\cdot\int_{x-R}^{x+R}\overset{1}{u}(y)\sin(y-x)dy +$$

$$+ \left(\overset{1}{u}(x+R) - \overset{1}{u}(x-R)\right)\cos\mu R + \tag{91}$$

$$+ \int_0^R \cos\mu h\left[\int_{x-l}^{x} q(\xi)\overset{1}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(x-\xi-h)d\xi - \int_x^{x+l} q(\xi)\overset{1}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(\xi-x-h)d\xi\right]dh +$$

$$+ \int_0^R \cos\mu h\left[\int_{x-l}^{x}\overset{0}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(x-\xi-h)d\xi - \int_x^{x+l}\overset{0}{u}(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(\xi-x-h)d\xi\right]dh .$$

Sada se u potpunosti ponavljaju razmatranja iz dokaza teoreme 4, koja se odnose na integral (74). Naime, broj R se definiše relacijama (73), egzistencija broja $\mu_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ je ustanovljena tvrdjenjem koje sledi iza nejednâkosti (73), a broj $\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ se definiše jednakošću (75). Pretpostavimo da je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$. Stavimo $\mu = |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|$. Za tako odabrane brojeve R i μ važe ocena (74) i jednakost (91). Zato iz te jednakosti dobijamo, koristeći ocenu (50), sledeću nejednakost:

$$\max_{x\in K}|\overset{1}{u}'(x)| \le |\sqrt{\lambda}|\max_{x\in K_R}|\overset{1}{u}(x)|\left(\frac{2R}{\beta}+\frac{2}{\beta}+\frac{2R}{\beta}\cdot\|q\|_{L_1(K_R)}\cdot m(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\right) +$$

$$+ |\sqrt{\lambda}|\cdot\max_{x\in K_R}|\overset{1}{u}(x)|\left(\frac{10R}{\beta}\|q\|_{L_1(K_R)}\, m(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})M(K_{R_\delta},\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})B(K_{R_{-\delta}},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right.$$

Primenivši ovde ocenu (47) sa nekim "okolinskim" kompaktom $K_R \subset K_{\bar{R}} \subset G$, dobijamo ocenu (87), b).

Ocena (87), a), dokazuje se po shemi dokaza ocene (65), a), uz korišćenje jednakosti (52), kao i ocena (47) i (50).

2. Neka je $q(y)\in L_1(G)$.

Pretpostavimo prvo da je $G = (a,b)$ konačan interval. Označimo sa K segment $[\frac{3a+b}{4}, \frac{3b+a}{4}]$. Stavimo $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \overset{def.}{=} \lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$

Neka je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| > \lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$. Dokažimo ocenu (88), b).

Stavimo $x \equiv x_0 = \frac{3a+b}{4}$ u jednakost (86) i pretpostavimo da $t \in [0, \frac{b-a}{4})$. Tada iz te jednakosti dobijamo, koristeći ocene (43), (60), (47) i (87), b), sledeću nejednakost:

$$|\overset{1}{u}'(x_0-t)| \leq C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_{R_1})} + 2C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_{R_2})}\cdot$$

$$\cdot m(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) + \tilde{C}(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_{R_2})}\cdot m(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(G)} +$$

$$+ \ B(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,|\sqrt{\lambda}|\,C(K_\delta,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_{R_3})} \ ,$$

ili, stavljajući $\tilde{R} = \max\{R_1,R_2,R_3\}$, ocenu

$$\sup_{y\in(a,\frac{3a+b}{4}]}|\overset{1}{u}'(y)| \leq \tilde{C}_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_{\tilde{R}})} \ . \tag{92}$$

Potpuno analogno, stavljajući $x \equiv x_0 = \frac{3b+a}{4}$ u jednakost (86) i smatrajući da $t \in [0, \frac{b-a}{4})$, dobijamo ocenu

$$\sup_{y\in[\frac{3b+a}{4},b)}|u'(y)| \leq \tilde{\tilde{C}}_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_{\tilde{\tilde{R}}})} \ . \tag{93}$$

Sada iz ocene (87), b), primenjene na kompakt K sa nekom okolinom $K_{\tilde{\tilde{\tilde{R}}}} \subset G$, i iz ocena (92)-(93), sledi da važi ocena

$$\sup_{y\in G} |\ \overset{1}{u}'(y)| \leq C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\sqrt{\lambda}|\,\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)} \ , \tag{94}$$

gde je $R = \max\{\tilde{R},\tilde{\tilde{R}},\tilde{\tilde{\tilde{R}}}\}$.

Iz ocene (94) neposredno sledi ocena (88), b).

Ocena (88), a), dokazuje se analogno, korišćenjem jednakosti (86). Slučaj $\lambda = 0$ treba posmatrati odvojeno.

Dokaz ocenâ (88) u slučaju kada je G beskonačan interval već je naznačen u dokazima teorema 1 i 4, pa ga ovde nećemo detaljno prikazivati.

Dokaz teoreme 5 je završen.

NAPOMENA. Pretpostavimo da podskup $\sigma(\ell)$ skupa sopstvenih vrednosti operatora (1) ima svojstva (44) i (45). Tada konstante $\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, $C_1(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ iz ocenâ (87) i (88) ne zavise od brojeva $\lambda \in \sigma(\ell)$.

§5.- OCENE IZVODÂ VIŠEG REDA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA

U ovom paragrafu ćemo pretpostavljati da je potencijal $q(y)$ formalnog diferencijalnog operatora (1) neprekidna funkcija na intervalu G.

U tom slučaju iz jednakosti (72), odnosno iz njoj analogne jednakosti za slučaj $\lambda = 0$, sledi da na intervalu G postoji neprekidan drugi izvod $\overset{0}{u}''(y)$ sopstvene funkcije $\overset{0}{u}(y)$ koja odgovara sopstvenom broju λ. Isto tako, iz jednakosti (91), odnosno iz njoj analogne jednakosti za slučaj $\lambda = 0$, sledi da na intervalu G postoji neprekidan drugi izvod $\overset{1}{u}''(y)$ pridružene funkcije $\overset{1}{u}(y)$ koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{u}(y)$ i sopstvenom broju λ.

Biće nam potrebna sledeća lema.

L E M A 2. Neka je $q(y) \in C(G)$. Tada sopstvena funkcija $\overset{0}{u}(y)$ koja odgovara sopstvenom broju λ jeste rešenje jednačine (2) svuda u intervalu G. Isto tako, funkcija $\overset{1}{u}(y)$, pridružena funkciji $\overset{0}{u}(y)$ i sopstvenom broju λ, jeste rešenje jednačine (3) svuda u intervalu G.

D O K A Z. Dokaz ćemo izvesti samo za pridruženu funkciju $\overset{1}{u}(y)$. Odatle na očevidan način proističe shema dokaza za sopstvenu funkciju $\overset{0}{u}(y)$.

Neka je $\lambda \neq 0$. Fiksirajmo u jednakosti (86) tačku $x \in G$ i pretpostavimo da $t \in [0, \rho(x, \partial G))$. Diferencirajući po t obe strane te jednakosti, dobijamo sledeću jednakost:

$$\overset{1}{u}''(x+t)+\overset{1}{u}''(x-t) = -2\lambda \cos\sqrt{\lambda}t\cdot \overset{1}{u}(x) + q(x+t)\overset{1}{u}(x+t) +$$

$$+ q(x-t)\overset{1}{u}(x-t) + \sqrt{\lambda}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\overset{1}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi| - t)d\xi -$$

$$- \overset{0}{u}(x+t) - \overset{0}{u}(x-t) - \sqrt{\lambda}\cdot\int_{x-t}^{x+t} \overset{0}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(|x-\xi| - t)d\xi \quad .$$

Stavljajući u ovu jednakost $t = 0$, dobijamo da za svaki $x \in G$ važi jednakost

$$-\overset{1}{u}''(x) + q(x)\overset{1}{u}(x) = \lambda \overset{1}{u}(x) + \overset{0}{u}(x) \quad ,$$

što je trebalo dokazati.

Slučaj $\lambda = 0$ dokazuje se na isti način, korišćenjem formule koja se u tom slučaju dobija iz jednakosti (86). Dokaz leme je završen.

T E O R E M A 6. Neka je $q(y) \in C^{(j-2)}(G)$, $j=2,3,\ldots$. Tada sopstvena funkcija $\overset{0}{u}(y)$ koja odgovara sopstvenom broju λ ima na intervalu G neprekidne izvode do reda j zaključno, i za svaki kompakt $K \subset G$ postoje konstante $\lambda_0(K, \mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $C_j(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takve da važe ocene

$$\text{a)} \max_{x\in K}|\overset{0}{u}{}^{(j)}(x)| \leq C_j(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \, \|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_R)}, \text{ za } 0 \leq |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| \leq \lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}); \tag{95}$$

b) $\max_{x\in K}|\overset{0}{u}^{(j)}(x)| \leq C_j(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\lambda^{j/2}|\,\|\overset{0}{u}\|_{L_2(K_R)}$, za $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(K,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$

Pri tome je $0<R<\rho(K,\partial G)$.

Ako $q(y)$ jeste neprekidna funkcija iz klase $L_1(G)$, ima ograničene izvode do reda $j-2$ zaključno, $j=2,3,\ldots$, i, u slučaju beskonačnog intervala G, $\overset{0}{u}(y)\in L_2(G)$, onda postoje konstante $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $C_j(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takve da važe ocene

$$\text{a) } \sup_{y\in G}|\overset{0}{u}^{(j)}(y)| \leq C_j(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)}\,, \quad \text{za } 0\leq|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|\leq\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$$

$$\text{b) } \sup_{y\in G}|\overset{0}{u}^{(j)}(y)| \leq C_j(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})|\lambda^{j/2}|\,\|\overset{0}{u}\|_{L_2(G)}\,, \quad \text{za } |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \tag{96}$$

D O K A Z. Teorema se dokazuje metodom matematičke indukcije. Ovde ćemo dati samo skicu tog dokaza.

Prema lemi 2, jednakost (2) je zadovoljena za svako $y\in G$, pa se ocene (95) i (96) za drugi izvod $\overset{0}{u}''(y)$ dobijaju direktno iz pomenute jednakosti. Pri tome se koriste ocene (8) i (9). Postojanje neprekidnih izvoda višeg reda funkcije $\overset{0}{u}(y)$ dokazuje se opet pomoću jednakosti (2). Odgovarajuće ocene (95) i (96) dobijaju se takodje iz (2) korišćenjem prvo ocena (65)-(66) za slučaj $j=3$, a zatim prethodno dobijenih ocena za slučaj izvoda višeg reda.

N A P O M E N A 1. Analogna teorema važi i za pridruženu funkciju $\overset{1}{u}(y)$. S obzirom da nam ovi rezultati neće biti potrebni u daljem izlaganju, ovde nećemo navoditi formulaciju te teoreme.

N A P O M E N A 2. Ako skup $\sigma(\ell)$ ima svojstvo (44), onda konstante iz teoreme 6 ne zavise od brojeva $\lambda\in\sigma(\ell)$. Ako tome dodamo i svojstvo (45), onda i konstante iz odgovarajuće teoreme za funkciju $\overset{1}{u}(y)$ neće zavisiti od brojeva $\lambda\in\sigma(\ell)$.

§6.- OCENE INTEGRALA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA

U ovom paragrafu ćemo pretpostavljati da je interval $G=(a,b)$ konačan.

T E O R E M A 7. Neka je $q(y)\in L_1(G)$. Tada postoje konstante $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, kao i kompakt $K\subset G$ takvi da važe ocene

$$\text{a)}\ \left|\int_{y_1}^{y_2}\overset{\circ}{u}(y)dy\right|\leq D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_R)},\quad \text{za}\quad 0\leq|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|\leq\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\ ;$$

$$\text{b)}\ \left|\int_{y_1}^{y_2}\overset{\circ}{u}(y)dy\right|\leq D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\cdot\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_R)},\quad \text{za}\quad |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\ . \tag{97}$$

Ove ocene su ravnomerne u odnosu na brojeve y_1,y_2 koji zadovoljavaju uslov $a\leq y_1<y_2\leq b$. Pri tome je $0<R<\rho(K,\partial G)$.

D O K A Z. Neka je $\lambda\neq 0$. Podjimo od integrala

$$\int_x^{x+t}\overset{\circ}{u}''(\xi)\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\xi-x-t)\,d\xi\ ,$$

gde $x\in G, x+t\in G$. Primenom parcijalne integracije, imajući u vidu jednačinu (2), dobijamo jednakost

$$\overset{\circ}{u}(x+t)=\overset{\circ}{u}(x)\cos\sqrt{\lambda}t+\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\overset{\circ}{u}'(x)-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_x^{x+t}q(\xi)\overset{\circ}{u}(\xi)\sin\sqrt{\lambda}(\xi-x-t)d\xi\ .$$

Neka su y_1 i y_2 brojevi takvi da je $a\leq y_1<y_2\leq b$. U prethodnu jednakost stavimo $x=y_1$ i smatrajmo da $t\in[0,y_2-y_1]$. Posle toga prointegralimo tu jednakost po t u ukazanim granicama:

$$\int_0^{y_2-y_1}\overset{\circ}{u}(y_1+t)dt=\overset{\circ}{u}(y_1)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\Big|_{t=0}^{t=y_2-y_1}-\overset{\circ}{u}'(y_1)\,\frac{\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda}\Big|_{t=0}^{t=y_2-y_1}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{y_2-y_1}\left[\int_{y_1}^{y_1+t}q(\xi)\,\overset{\circ}{u}(\xi)\,\sin\sqrt{\lambda}(\xi-y_1-t)d\xi\right]dt\ .$$

b) $\left|\int_{y_1}^{y_2} \overset{1}{u}(y)dy\right| \leq D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\cdot\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)}$, za $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| > \lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$.

Ove ocene su ravnomerne u odnosu na brojeve y_1 i y_2 koji zadovoljavaju uslov $a \leq y_1 < y_2 \leq b$. Pri tome je $0 < R < \rho(K, \partial G)$.

D O K A Z. I u ovom slučaju ćemo poći od integrala

$$\int_x^{x+t} \overset{1}{u}''(\zeta)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta - x - t)d\zeta \quad ,$$

$\lambda \neq 0$. Kao u prethodnoj teoremi, dobijamo jednakost

$$\overset{1}{u}(x+t) = \overset{1}{u}(x)\cos\sqrt{\lambda}t + \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\overset{1}{u}'(x) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_x^{x+t} q(\zeta)\overset{1}{u}(\zeta)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta - x - t)d\zeta \quad +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_x^{x+t} \overset{0}{u}(\zeta)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta - x - t)d\zeta \quad .$$

Dalje se postupa isto kao u slučaju sopstvene funkcije $\overset{0}{u}(y)$. Ocena analogna oceni (98) glasi:

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \overset{1}{u}(y)dy\right| \leq \frac{M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\sqrt{\lambda}|}\cdot\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| + \frac{2M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\lambda|}\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}'(y)| \quad +$$

$$+ \frac{M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\sqrt{\lambda}|}\sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)|\cdot\|q\|_{L_1(G)}(b-a) \quad +$$

$$+ \frac{2M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\lambda|}\cdot\sup_{y\in G}|\overset{0}{u}(y)|\cdot(b-a) \quad .$$

Primenimo sada ocene (43), (47), (60) i (94). Ako je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| > \lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, gde je $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ - konstanta iz ocene (88), onda iz prethodne nejednakosti dobijamo sledeće nejednakosti:

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \overset{1}{u}(y)dy\right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\|\overset{1}{u}\|_{L_2(\tilde{K}_{R_1})}\cdot\tilde{C}(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})C(\tilde{K},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \quad +$$

Uvedimo smenu promenjljivih $y = y_1+t$ na levoj strani pret hodne jednakosti, a zatim ocenimo tako dobijeni integral:

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}\overset{\circ}{u}(y)dy\right| \leq \sup_{y\in G}|\overset{\circ}{u}(y)|\,\frac{M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\sqrt{\lambda}|} + \sup_{y\in G}|\overset{\circ}{u}'(y)|\,\frac{2M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\lambda|} + \tag{98}$$

$$+ \sup_{y\in G}|\overset{\circ}{u}(y)|\,\frac{M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\sqrt{\lambda}|}\,\|q\|_{L_1(G)}\,(b-a) \;.$$

Primenjujući ocene (27) i (84) na desnoj strani prethodne nejednakosti, možemo zaključiti da važe nejednakosti

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}\overset{\circ}{u}(y)dy\right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\,\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(\tilde{K}_{R_1})}\,C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) +$$

$$+ \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\,\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(\tilde{\tilde{K}}_{R_2})}\,C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot 2M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) +$$

$$+ \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\,\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_{\tilde{R}_1})}\,C(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|q\|_{L_1(G)}\cdot M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})(b-a) \leq$$

$$\leq D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\,\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\,\|\overset{\circ}{u}\|_{L_2(K_R)} \;,$$

ako je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| > \lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, gde je $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ konstanta iz ocene (66). Pri tome je $K_R = \tilde{K}_{R_1} \cup \tilde{\tilde{K}}_{R_2}$.

Ako je $0 \leq |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| \leq \lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, ovde uključujemo i slučaj $\lambda = 0$, onda koristeći ocenu (27), neposredno dobijamo ocenu (97),a)

Dokaz teoreme 7 je završen.

<u>T E O R E M A 8</u>. Neka je $q(y) \in L_1(G)$. Tada postoje kompakt $K \subset G$ i konstante $\lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ i $D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$ takve da važe ocene

$$\text{a)}\left|\int_{y_1}^{y_2}\overset{1}{u}(y)dy\right| \leq D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})\cdot\|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)} \;,\quad \text{za} \quad 0 \leq |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| \leq \lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}); \tag{99}$$

$$+ \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \|\overset{1}{u}\|_{L_2(\tilde{\tilde{K}}_{R_2})} \cdot C_1(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \cdot 2M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \quad +$$

$$+ \frac{M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\sqrt{\lambda}|} \|\overset{1}{u}\|_{L_2(\tilde{K}_{R_1})} \tilde{C}(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) C(\tilde{K},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \cdot \|q\|_{L_1(G)} \cdot (b-a) \quad +$$

$$+ \frac{2M(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})}{|\sqrt{\lambda}|} \|\overset{1}{u}\|_{L_2(\tilde{\tilde{\tilde{K}}}_{R_3})} \cdot B(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) C(\tilde{\tilde{\tilde{K}}},q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \cdot (b-a) \leq$$

$$\leq D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \cdot \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \cdot \|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)} \quad ,$$

gde je $K_R = \tilde{K}_{R_1} \cup \tilde{\tilde{K}}_{R_2} \cup \tilde{\tilde{\tilde{K}}}_{R_3}$.

Ako je $0 \leq |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}| \leq \lambda_0(G,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})$, uključujući i slučaj $\lambda = 0$, onda, primenjujući ocene (47) i (60), dobijamo ocenu

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \overset{1}{u}(y)dy\right| \leq \sup_{y\in G}|\overset{1}{u}(y)| \cdot (b-a) \leq$$

$$\leq \tilde{C}(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) C(K,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda})(b-a) \|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)} = D(G,q,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}) \|\overset{1}{u}\|_{L_2(K_R)}$$

gde je K_R potpuno odredjeni kompakt intervala G .

Dokaz teoreme 8 je završen.

<u>N A P O M E N A 1</u>. Ako skup $\sigma(\ell)$ ima svojstvo (44), onda konstante iz teoreme 7 ne zavise od brojeva $\lambda \in \sigma(\ell)$. Ako tome dodamo i svojstvo (45), onda konstante iz teoreme 8 ne zavise od brojeva $\lambda \in \sigma(\ell)$.

<u>N A P O M E N A 2</u>. Sve ocene formulisane teoremama 1-8 ove glave su tačne po poretku u odnosu na parametar λ .

Zaista, posmatrajmo sledeći primer. Neka je operator

$$\ell(u) = -u''(y)$$

definisan na intervalu $G = (0,1)$. Od sopstvenih i pridruženih funkcija ovog operatora zahtevajmo da zadovoljavaju granične uslove oblika

$$u(0) = 0 \ , \quad u'(0) = u'(1) \ .$$

Tada važe sledeće činjenice (videti [19]):

1) Skup svih sopstvenih brojeva tog opearatora je skup

$$\sigma(\ell) = \left\{ \lambda_n = (2n\pi)^2 \ : \ n=0,1,2,\ldots \right\} \ .$$

2) Sopstvene funkcije su oblika $\overset{0}{u}_o(y) = y$, $\overset{0}{u}_n(y) = \sin 2n\pi y$, $n=1,2,\ldots,$.

3) Pridružena funkcija koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{u}_o(y)$ ne postoji, a ostale su oblika $\overset{1}{u}_n(y) = -y(4n\pi)^{-1}\cos 2n\pi y$, $n \in N$.

Jasno je da se u ovom slučaju ne može poboljšati poredak veličine λ_n u pomenutim ocenama.

§7.- KOMENTARI

Ravnomerne ocene sopstvenih funkcija koje odgovaraju proizvoljnim samokonjugovanim produženjima Šredingerovog operatora (1), čiji potencijal $q(y)$ pripada klasi $L_1^{loc}(G)$, dobijene su prvi put u radu [22] . Na nesamokonjugovani slučaj one su prenete u radovima [25] i [36] , kao i u ovom radu. I.Lomov [36] je dobio, koristeći asimptotske metode, ocene sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1), kao i antiapriornu ocenu u specifičnom obliku, ali samo na konačnom intervalu. Koristeći tehniku zasnovanu, kao i u ovom radu, na formulama srednje vrednosti, I.Jo [25] je pomenute ocene dobio u nešto drugačijem kontekstu. U sva tri rada su pretpostavke za potencijal $q(y)$ operatora (1) iste.

Antiapriorne ocene je prvi dobio V.A.Iljin i one su odigrale važnu ulogu u njegovim istraživanjima vezanim za nesamokonjugovane obične diferencijalne operatore proizvoljnog reda, sa glatkim koeficijentima. Kao što je pomenuto u Uvodu, rezultati ovih istraživanja objavljeni su, bez dokaza, u radovima [17] - [20] . Sasvim nedavno pojavio se rad [48] u kome su dokazani rezultati iz radova [17] i [19] .

Ravnomerne ocene prvog izvoda sopstvenih funkcija samokonjugovanog operatora (1), i to samo na kompaktu, dobijene su u radu [26] . Pomoću formule srednje vrednosti (86), ja sam u radovima [30] i [32] te ocene preneo na slučaj proizvoljnog intervala, a takodje dobio ocene izvoda višeg reda. U §§3-5 ovog rada sve te ocene su prenesene na daleko opštiji slučaj operatora sa kompleksnim potencijalom.

Ravnomerne ocene integralâ sopstvenih funkcija pomenutog samokonjugovanog Šturm-Liuvilovog operatora sa potencijalom $q(y)$ iz klase $L_p(G)$, $1 < p < \infty$, dobijene su u radu [23] . U § 6 ovog rada te ocene su prenesene i na pridružene funkcije operatora sa kompleksnim potencijalom, pri čemu su dati kraći dokazi.

G L A V A II

O SVOJSTVU BAZISNOSTI POTPUNOG I MINIMALNOG SISTEMA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA NESAMOKONJUGOVANOG ŠTURM-LIUVILOVOG OPERATORA SA PREKIDNIM KOEFICIJENTIMA

U ovoj glavi biće reči o konvergenciji po normi i o ravnomernoj konvergenciji biortogonalnog reda funkcije iz klase $L_2(G)$, generisanog proizvoljnim potpunim i minimalnim sistemom sopstvenih i pridruženih funkcija nesamokonjugovanog Šturm-Liuvilovog operatora sa prekidnim koeficijentima. U §§1-5 biće dokazan jedan kriterijum pomoću koga se može "prepoznati" onaj sistem sopstvenih i pridruženih funkcija koji ima svojstvo bazisnosti, tj. svojstvo da njime generisani biortogonalni red konvergira po normi prostora $L_2(K)$, gde je K proizvoljni kompakt intervala G. U §6 su navedeni potrebni i dovoljni uslovi za ravnomernu konvergenciju navedenog reda na kompaktima intervala G. U §7 se razmatra specijalan, ali i veoma važan slučaj Šredingerovog operatora.

§1.- OSNOVNE DEFINICIJE. FORMULACIJA OSNOVNE TEOREME

Neka je $G = (a,b)$ konačan interval realne ose i x_o proizvoljna tačka intervala G. Osnovni objekt našeg interesovanja biće sledeći formalni diferencijalni operator $\mathcal{L}(u)$, definisan na intervalu G:

$$\mathcal{L}_1(u) = -(p_1(y)u'(y))' + q_1(y)u(y) \quad , \quad \text{za} \quad a < y < x_o \, , \qquad (1)$$

$$\ell_2(u) = -(p_2(y)u'(y))' + q_2(y)u(y) \; , \quad \text{za} \quad x_0 \leq y < b \; . \qquad (2)$$

Neka koeficijenti operatora (1)-(2) zadovoljavaju sledeće uslove:

1) $p_1(y) \in C^{(2)}(a,x_0]$, $p_2(y) \in C^{(2)}[x_0,b)$; (3)

2) $p_1(y) \geq \alpha_1 > 0$, $y \in (a,x_0]$; $p_2(y) \geq \alpha_2 > 0$, $y \in [x_0,b)$; (4)

3) $q_1(y) \in L_p^{loc}(a,x_0]$, $q_2(y) \in L_p^{loc}[x_0,b)$, $1 < p < \infty$. (5)

Pretpostavlja se da su funkcije $q_1(y)$ i $q_2(y)$ kompleksne.

D E F I N I C I J A 1. Kompleksna funkcija $\overset{o}{u}(y) \in L_2(G)$, $u(y) \neq 0$, naziva se sopstvenom funkcijom operatora (1)-(2) koja odgovara sopstvenom broju λ (λ - kompleksan broj), ako:

1) $\overset{o}{u}(y)$ i $\overset{o}{u}'(y)$ jesu apsolutno neprekidne funkcije na svakom polusegmentu $[c,x_0) \subset (a,x_0)$, kao i na svakom segmentu $[x_0,d] \subset [x_0,b)$;

2) funkcija $\overset{o}{u}(y)$ jeste rešenje jednačine

$$-(p_1(y)\overset{o}{u}'(y))' + q_1(y)\overset{o}{u}(y) = \lambda \cdot \overset{o}{u}(y) \qquad (6)$$

skoro svuda u intervalu (a,x_0) , i jednačine

$$-(p_2(y)\overset{o}{u}'(y))' + q_2(y)\overset{o}{u}(y) = \lambda \cdot \overset{o}{u}(y) \qquad (7)$$

skoro svuda u intervalu (x_0,b) ;

3) funkcija $\overset{o}{u}(y)$ zadovoljava sledeće uslove spregnutosti u tački x_0 :

a) $$(p_1(x_0))^{1/4}\, \overset{o}{u}(x_0-0) = (p_2(x_0))^{1/4}\, \overset{o}{u}(x_0) \; ; \qquad (8)$$

b) $$(p_1(x_0))^{3/4}\, \overset{o}{u}'(x_0-0) + \frac{1}{4}p_1'(x_0-0)(p_1(x_0))^{-1/4}\, \overset{o}{u}(x_0-0) =$$

$$= (p_2(x_0))^{3/4}\, \overset{o}{u}'(x_0+0) + \frac{1}{4}p_2'(x_0+0)(p_2(x_0))^{-1/4}\, \overset{o}{u}(x_0) \; . \qquad (9)$$

D E F I N I C I J A 2. Kompleksna funkcija $\overset{1}{u}(y) \in L_2(G)$, $\overset{1}{u}(y) \neq 0$ naziva se pridruženom funkcijom operatora (1)-(2) koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{u}(y)$ i sopstvenom broju λ, ako:

1) $\overset{1}{u}(y)$ i $\overset{1}{u}'(y)$ jesu apsolutno neprekidne funkcije na svakom polusegmentu $[c,x_0) \subset (a,x_0)$, kao i na svakom segmentu $[x_0,d] \subset [x_0,$

2) funkcija $\overset{1}{u}(y)$ jeste rešenje jednačine

$$-(p_1(y)\overset{1}{u}'(y))' + q_1(y)\overset{1}{u}(y) = \lambda\cdot\overset{1}{u}(y) + \overset{0}{u}(y) \tag{10}$$

skoro svuda u intervalu (a,x_0), kao i jednačine

$$-(p_2(y)\overset{1}{u}'(y))' + q_2(y)\overset{1}{u}(y) = \lambda\cdot\overset{1}{u}(y) + \overset{0}{u}(y) \tag{11}$$

skoro svuda u intervalu (x_0,b) ;

3) funkcija $\overset{1}{u}(y)$ zadovoljava sledeće uslove spregnutosti u tački x_0 :

a) $$(p_1(x_0))^{1/4}\,\overset{1}{u}(x_0-0) = (p_2(x_0))^{1/4}\,\overset{1}{u}(x_0) \;; \tag{12}$$

b) $$\begin{aligned}(p_1(x_0))^{3/4}\,\overset{1}{u}'(x_0-0) + \tfrac{1}{4}p_1'(x_0-0)(p_1(x_0))^{-1/4}\,\overset{1}{u}(x_0-0) &= \\ = (p_2(x_0))^{3/4}\,\overset{1}{u}'(x_0+0) + \tfrac{1}{4}p_2'(x_0+0)(p_2(x_0))^{-1/4}\,\overset{1}{u}(x_0) &.\end{aligned} \tag{13}$$

Neka je $\left\{\overset{i}{u}_n(y)\right\}_{n=1,\ i=0,1}^{\infty}$ proizvoljan potpuni i minimalni sistem (definiciju ovakvog sistema videti, na primer, u knjizi [4]) sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1)-(2), i neka je $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

odgovarajući sistem sopstvenih brojeva. Zbog minimalnosti sistema funkcija $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ postoji u prostoru $L_2(G)$ jednoznačno odredjen sistem funkcija $\{\overset{i}{v}_n(y)\}_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}$ koji je biortogonalno spregnut sa prethodnim sistemom, tj. takav da je

$$\int_a^b \overset{i}{u}_n(y)\cdot\overline{\overset{i}{v}_m(y)}\,dy = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m, \\ 0, & n\neq m, \end{cases} \tag{14}$$

(videti [4]).

Neka je $f(y)$ proizvoljna funkcija iz klase $L_2(G)$. Smatrajući da brojevi $\sqrt{\lambda_n}$ nemaju konačnih tačaka nagomilavanja, možem definisati parcijalnu sumu poretka $\mu>0$ biortogonalnog reda:

$$\sigma_\mu(y,f) = \sum_{\substack{0\le\mu_n\le\mu\\ i=0,1}} (f,\overset{i}{v}_n)_{L_2(G)}\cdot\overset{i}{u}_n(y) \quad . \tag{15}$$

Pri tome su brojevi μ_n definisani jednakošću

$$\mu_n = |\mathrm{Re}\sqrt{\lambda_n}| \; , \; n\in N \; , \tag{16}$$

a brojevi λ_n su indeksirani po poretku neopadanja brojeva μ_n .

D E F I N I C I J A 3 ([19]). Sistem funkcija $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}$ ima svojstvo bazisnosti u prostoru $L_2(G)$ ako za svaku funkciju $f(y)\in$ $\in L_2(G)$ i za svaki kompakt $K\subset G$ važi jednakost

$$\lim_{\mu\to+\infty} \|\sigma_\mu(y,f) - f(y)\|_{L_2(K)} = 0 \; . \tag{1}$$

Osnovni problem koji ćemo rešavati u ovoj glavi glasi: pod kojim uslovima potpuni i minimalni sistem $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}$ sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1)-(2) ima svojstvo bazisnosti u prostoru $L_2(G)$?

Odgovor se daje sledećom teoremom.

T E O R E M A 1. Neka sopstveni brojevi λ_n, $n\in N$, operatora (1)-(2) čiji koeficijenti imaju svojstva (3)-(5), zadovoljavaju sle deće uslove:

1) $|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda_n}| \leq A$, $n\in N$; (18)

2) $\sum_{|\mu_n-\mu|\leq 1} 1 \leq B$, za svaki broj $\mu>0$; (19)

pri čemu konstanta A ne zavisi od λ_n , a konstanta B ne zavisi od μ_n i μ .

Tada potpuni i minimalni sistem $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{n=1,\ i=0,1}^{\infty}$ tog operatora ima svojstvo bazisnosti u prostoru $L_2(G)$ ako i samo ako za svaki kompakt $K\subset G$ postoji konstanta $C(K)>0$ takva da važe ocene

$$\|\overset{i}{u}_n\|_{L_2(K)}\cdot\|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)} \leq C(K) , \quad n\in N,\ i=0,1 . \tag{20}$$

Pri tome konstanta C(K) ne zavisi od $n\in N$.

Neophodnost uslova teoreme 1 je topološke prirode i ne zavisi od operatora koji je generisao posmatrani potpuni i minimalni sistem funkcija. Dokaz ove činjenice navešćemo u §5 . Dovoljnost uslova teoreme 1 dokazaćemo na sledeći način. Uvodeći pogodnu zamenu funkcije i nezavisno promenljive, u §2 ćemo pokazati da je taj problem ekvivalentan odgovarajućem problemu za operator Šredingerovog tipa. Njegove sopstvene i pridružene funkcije imaće sve osobine navedene u definicijama 1 i 2 glave I. Zatim ćemo u §§ 3-4 rešiti taj problem za Šredingerov operator.

Napomenimo još da smo za funkcije $\overset{0}{u}_n(y)$ i $\overset{1}{u}_n(y)$ uveli uslo ve spregnutosti tipa (8)-(9), odnosno (12)-(13) upravo zato da bismo mogli primeniti pomenuti postupak.

§2.- SVODJENJE NA SLUČAJ ŠREDINGEROVOG OPERATORA

Koristićemo, kao V.A.Iljin u radu [21] , funkcije $\rho_1(t)$ i $\rho_2(t)$ definisane pomoću jednâkosti

$$\int_{x_0-\rho_1(t)}^{x_0} (p_1(\tau))^{-1/2}\, d\tau = t\,, \qquad \int_{x_0}^{x_0+\rho_2(t)} (p_2(\tau))^{-1/2}\, d\tau = t\,. \tag{21}$$

Ove funmcije su definisane, neprekidne i strogo monotono rastuće na segmentu $0 \leq t \leq t_0$, gde je t_0 dovoljno mali pozitivan broj. Zbog toga postoje njihove inverzne funkcije $t = \bar{\rho}_1(h)$ i $t = \bar{\rho}_2(h)$ koje ćemo mi koristiti u obliku

$$\bar{\rho}_1(x_0-x) = \int_{x}^{x_0} (p_1(\tau))^{-1/2}\, d\tau\,, \quad \bar{\rho}_2(x-x_0) = \int_{x_0}^{x} (p_2(\tau))^{-1/2}\, d\tau\,.$$

Uvedimo sledeću transformaciju funkcije i nezavisno promenljive: ako je $f(y) \in L_2(G)$, onda definišimo funkciju $\tilde{f}(t) \in L_2(\tilde{G})$, gde je $\tilde{G} = (-\bar{\rho}_1(x_0-a),\ \bar{\rho}_2(b-x_0))$, pomoću jednakosti

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f[x_0-\rho_1(-t)]\,(p_1[x_0-\rho_1(-t)])^{1/4}\,, & \text{za} \quad -\bar{\rho}_1(x_0-a) < t < 0\,, \\ f[x_0+\rho_2(t)]\,(p_2[x_0+\rho_2(t)])^{1/4}\,, & \text{za} \quad 0 \leq t < \bar{\rho}_2(b-x_0)\,. \end{cases} \tag{22}$$

Tako polazeći od sistemâ funkcija $\{\overset{i}{u}_n(y)\}$, $\{\overset{i}{v}_n(y)\}$, definisanih u §1 , dolazimo do sistemâ funkcija $\{\overset{i}{\tilde{u}}_n(t)\}$ i $\{\overset{i}{\tilde{v}}_n(t)\}$ u prostoru $L_2(\tilde{G})$, koji imaju sledeća svojstva:

1) Funkcije $\overset{i}{\tilde{u}}_n(t)$ i $\overset{i}{\tilde{u}}{}_n'(t)$ jesu apsolutno neprekidne na svakom segmentu intervala $\tilde{G}$.

2) Funkcija $\overset{0}{\tilde{u}}_n(t)$ jeste rešenje jednačine

$$- (\overset{0}{\tilde{u}}_n(t))'' + \tilde{q}(t)\overset{0}{\tilde{u}}_n(t) = \lambda_n \cdot \overset{0}{\tilde{u}}_n(t) \tag{23}$$

skoro svuda u intervalu $\tilde{G}$. Pri tome je funkcija $\tilde{q}(t)$ definisana na sledeći način:

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} p_1''[x_o - \rho_1(-t)] - \dfrac{(p_1'[x_o - \rho_1(-t)])^2}{16 \cdot p_1[x_o - \rho_1(-t)]} + q_1[x_o - \rho_1(-t)] , & \text{za } -\bar{\rho}_1(x_o - a) < t < 0, \\ \frac{1}{4} p_2''[x_o + \rho_2(t)] - \dfrac{(p_2'[x_o + \rho_2(t)])^2}{16 \cdot p_2[x_o + \rho_2(t)]} + q_2[x_o + \rho_2(t)] , & \text{za } 0 \leq t < \bar{\rho}_2(b - x_o). \end{cases} \tag{24}$$

Primetimo odmah da funkcija $\tilde{q}(t)$ pripada klasi $L_p^{loc}(\tilde{G})$, gde je p broj iz uslova (5).

3) Funkcija $\overset{1}{\tilde{u}}_n(t)$ jeste rešenje jednačine

$$- (\overset{1}{\tilde{u}}_n(t))'' + \tilde{q}(t)\overset{1}{\tilde{u}}_n(t) = \lambda_n \cdot \overset{1}{\tilde{u}}_n(t) + \overset{0}{\tilde{u}}_n(t) \tag{25}$$

skoro svuda u intervalu $\tilde{G}$. Pri tome je funkcija $\tilde{q}(t)$ definisana jednakošću (24).

4) Sistem funkcija $\left\{ \overset{i}{\tilde{u}}_n(t) \right\}_{n=1, \, i=0,1}^{\infty}$ jeste potpuni i minimalni sistem u prostoru $L_2(\tilde{G})$.

5) Sistemi funkcija $\left\{ \overset{i}{\tilde{u}}_n(t) \right\}$ i $\left\{ \overset{i}{\tilde{v}}_n(t) \right\}$ su biortogonalno spregnuti sistemi funkcija u prostoru $L_2(\tilde{G})$.

6) Za svaku funkciju $f(y) \in L_2(G)$ i njoj odgovarajuću funkciju $\tilde{f}(t) \in L_2(\tilde{G})$ važi jednakost

$$\|f(y)\|_{L_2(G)} = \|\tilde{f}(t)\|_{L_2(\tilde{G})} .$$

Specijalno, za svaki kompakt $K = [c,d] \subset G$ važi jednakost

$$\|f(y)\|_{L_2(K)} = \|\tilde{f}(t)\|_{L_2(\tilde{K})} ,$$

gde je $\tilde{K} = [-\bar{\varsigma}_1(x_0-c), \bar{\varsigma}_2(d-x_0)] \subset \tilde{G}$. Odatle sledi da za svaku funkciju $f(y) \in L_2(G)$ i za svaki kompakt $K \subset G$ važi jednakost

$$\|\sigma_\mu(y,f) - f(y)\|_{L_2(K)} = \|\tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{f}(t)\|_{L_2(\tilde{K})} ,$$

gde je

$$\tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f}) = \sum_{\substack{0 \le \mu_n \le \mu \\ i=0,1}} (\tilde{f},\overset{i}{\tilde{v}}_n)_{L_2(\tilde{G})} \cdot \overset{i}{\tilde{u}}_n(t) .$$

Iz 1)-3) sledi da funkcija $\overset{0}{\tilde{u}}_n(t)$ jeste sopstvena funkcija (u smislu definicije 1 iz glave I) formalnog diferencijalnog operatora

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{u}) = -\tilde{u}''(t) + \tilde{q}(t)\tilde{u}(t) \tag{26}$$

koja odgovara sopstvenom broju λ_n, a funkcija $\overset{1}{\tilde{u}}_n(t)$ jeste pridružena funkcija (u pomenutom smislu) tog operatora, koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{\tilde{u}}_n(t)$ i sopstvenom broju λ_n. Sa druge strane može se proveriti da svaka sopstvena, odnosno pridružena funkcija operatora (26), čiji je potencijal $\tilde{q}(t)$ definisan jednakošću (24) jeste sopstvena, odnosno pridružena funkcija operatora (1)-(2).

Odatle, s obzirom na 4) i 5), sledi da je $\{\overset{i}{\tilde{u}}_n(t)\}$ jedan potpuni i minimalni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (26), $\{\lambda_n\}$ jeste odgovarajući sistem sopstvenih brojeva, a $\{\overset{i}{\tilde{v}}_n(t)\}$ jeste jednoznačno odredjeni, sa sistemom $\{\overset{i}{\tilde{u}}_n(t)\}$ biortogonalno spregnuti sistem funkcija u prostoru $L_2(\tilde{G})$.

Imajući u vidu 6) i prethodno izlaganje, dolazimo do zaključka da će dovoljnost uslova teoreme 1 biti dokazana, ako se dokaže sledeća teorema.

T E O R E M A 2. Neka je $\{\overset{i}{\tilde{u}}_n(t)\}_{n=1, i=0,1}^{\infty}$ proizvoljan potpuni i minimalni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (26) čiji potencijal $\tilde{q}(t)$ pripada klasi $L_p^{loc}(G)$, $1 < p < \infty$, neka je $\{\overset{i}{\tilde{v}}_n(t)\}_{n=1, i=0,1}^{\infty}$ sa tim sistemom biortogonalno spregnuti sistem funkcija u prostoru $L_2(\tilde{G})$ i neka je $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ odgovarajući sistem sopstvenih brojeva.

Pretpostavimo da brojevi λ_n zadovoljavaju uslove (18)-(19) i da svaki kompakt $\tilde{K} \subset \tilde{G}$ postoji konstanta $C(\tilde{K}) > 0$ takva da važe ocene

$$\|\overset{i}{\tilde{u}}_n\|_{L_2(\tilde{K})} \cdot \|\overset{i}{\tilde{v}}_n\|_{L_2(\tilde{G})} \leq C(\tilde{K}) \ , \ n \in N, \ i=0,1, \tag{27}$$

pri čemu $C(\tilde{K})$ ne zavisi od n.

Tada za svaku funkciju $\tilde{f}(t) \in L_2(\tilde{G})$ važi jednakost

$$\lim_{\mu \to +\infty} \|\tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{f}(t)\|_{L_2(\tilde{K})} = 0 \ . \tag{28}$$

Radi jednostavnijeg označavanja, prilikom dokazivanja teoreme 2 nećemo koristiti oznaku $\sim$. Naime, u §§3-4 koristićemo oznake iz §1 ; na primer, umesto $\overset{i}{\tilde{u}}_n(t)$ pisaćemo $\overset{i}{u}_n(y)$.

§3.- OCENA SPEKTRALNE FUNKCIJE ŠREDINGEROVOG OPERATORA

Formulišimo prvo u obliku posebne leme jednu veoma važnu posledicu teoremâ 1 i 2 iz prethodne glave, primenjenih na sistem sopstvenih i pridruženih funkcija $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{n=1, i=0,1}^{\infty}$ operatora (26).

L E M A 1. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 2. Tada za svaki kompakt $K \subset G$ postoje konstanta $A(K,q)$ i broj $0 < R < \rho(K, \partial G)$ takvi da važe ocene

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}_n(x)| \leq A(K,q)|\sqrt{\lambda_n}|\|\overset{1}{u}_n\|_{L_2(K_R)}\ , \quad \lambda_n \neq 0\ ; \tag{29}$$

$$\max_{x\in K}|\overset{0}{u}_n(x)| \leq A(K,q)\cdot\|\overset{1}{u}_n\|_{L_2(K_R)}\ , \quad \lambda_n = 0\ . \tag{30}$$

Pri tome konstanta $A(K,q)$ ne zavisi od λ_n.

Ocene (29) i (30) direktno slede iz ocenâ (30) i (47), odnosno iz ocenâ (31) i (47) prethodne glave. Primetimo da, zbog uslovâ (18) i (19), konstante iz pomenutih ocena ne zavise od λ_n (videti napomene 1 i 2, §2, gl.II), pa su i konstante iz ocena (29) i (30) ravnomerne u odnosu na brojeve λ_n .

Dalje, neka je μ proizvoljan pozitivan broj. Funkciju

$$\theta(x,y,\mu) = \sum_{\substack{0\leq\mu_n\leq\mu \\ i=0,1}} \overset{i}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{i}{v}_n(y)}\ , \quad x,y\in G, \tag{31}$$

nazivaćemo s p e k t r a l n o m f u n k c i j o m operatora (26).

Ako je $R_o > 0$ proizvoljan broj, $f(R)$ - funkcija definisana na segmentu $[R_o,2R_o]$, onda se slika preslikavanjem $S_{R_o}: f \to S_{R_o}(f)$ definisanim jednakošću

$$S_{R_o}(f) = \frac{1}{R_o}\cdot\int_{R_o}^{2R_o} f(R)dR\ , \tag{32}$$

naziva u s r e d n j e n j e m funkcije $f(R)$.

Neka je K proizvoljni kompakt intervala G i $R_o > 0$ broj takav da je $2R_o < \rho(K,\partial G)$. Uvedimo funkciju

$$\omega_R(x,y,\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{\sin\mu|x-y|}{|x-y|}\ , & \text{za}\quad |x-y|\leq R\ , \\ 0\ , & \text{za}\quad |x-y|>R\ , \end{cases} \tag{33}$$

gde je $x\in K,\ y\in G,\ R\in[R_o,2R_o]$.

Centralnu ulogu u dokazu teoreme 2 igra sledeći rezultat.

T E O R E M A 3. Ako je $q(y)\in L_p^{loc}(G)$, $1<p<\infty$, onda važi ocen

$$\int_a^b |\theta(x,y,\mu) - S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))|^2 \, dy = O(1) , \mu\to+\infty, \tag{34}$$

ravnomerna u odnosu na x na kompaktu K .

D O K A Z. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je K oblika $[c,d]$. Fiksirajući tačku $x\in K$, podjimo od funkcije

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\omega}_n(x,\mu) &= \int_a^b \overline{\omega_R(x,y,\mu)}\cdot \overset{\circ}{u}_n(y)\, dy = \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\overset{\circ}{u}_n(x+h) + \overset{\circ}{u}_n(x-h)\right] dh \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Ako je $\lambda_n\neq 0$ $(\lambda_n=0)$, onda koristeći formulu srednje vrednosti (4) ((5)), §1, gl.I, iz (35) dobijamo jednakost

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\omega}_n(x,\mu) &= \overset{\circ}{u}_n(x)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \cos\sqrt{\lambda_n}h \, dh - \\ &- \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)u_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\right] dh \ . \end{aligned} \tag{36}$$

Odgovarajuću jednakost za slučaj $\lambda_n = 0$ nećemo ovde pisati, ali ta slučaj se razmatra paralelno.

Slično, koristeći formulu srednje vrednosti (6) (odnosno (7)), §1, gl.I, dobijamo jednakost [x]

---

[x] Prethodno se izračuna unutrašnji integral koji figuriše u treće sabirku na desnoj strani jednakosti (6) ((7)).

$$\overset{1}{\omega}_n(x,\mu) = \int_a^b \overline{\omega_R(x,y,\mu)}\overset{1}{u}_n(y)dy = \frac{1}{\pi}\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\overset{1}{u}_n(x+h)+\overset{1}{u}_n(x-h)\right]dh =$$

$$= \overset{1}{u}_n(x)\frac{2}{\pi}\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\cos\sqrt{\lambda_n}h\,dh - \overset{0}{u}_n(x)\frac{1}{\pi}\int_0^R \sin\mu h\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\,dh -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\,dh\right. - \tag{37}$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h}(|x-\xi|-h)\cdot q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\,\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\lambda_n}\,d\xi\right]dh +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\cdot\lambda_n^{3/2}}\,d\xi\right]dh .$$

Pomnožimo jednakost (36) sa $\overline{\overset{0}{v}_n(y)}$, i jednakost (37) sa $\overline{\overset{1}{v}_n(y)}$. Dobiće se jednakosti

$$\overset{0}{\omega}_n(x,\mu)\,\overline{\overset{0}{v}_n(y)} = \overset{0}{u}_n(x)\,\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\,\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\cos\sqrt{\lambda_n}h\,dh -$$

$$- \frac{1}{\pi}\,\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\,d\xi\right]dh , \tag{38}$$

i

$$\overset{1}{\omega}_n(x,\mu)\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)} = \overset{1}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\,\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\cos\sqrt{\lambda_n}h\,dh -$$

$$- \overset{0}{u}_n(x)\,\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\,\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^R \sin\mu h\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\,dh -$$

$$- \frac{1}{\pi}\,\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\,d\xi\right]dh - \tag{39}$$

$$- \frac{1}{\pi}\,\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\cdot\lambda_n}\,d\xi\right]dh +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\,\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\cdot\lambda_n^{3/2}}\,d\xi\right]dh .$$

Uvedimo oznake

$$I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \cos\sqrt{\lambda_n}h\, dh \tag{40}$$

i

$$\sqrt{\lambda_n} = \bar{\mu}_n + i\cdot\bar{\bar{\mu}}_n \quad , \tag{41}$$

pri čemu je $\bar{\mu}_n = \mathrm{Re}\sqrt{\lambda_n}$, $\bar{\bar{\mu}}_n = \mathrm{Im}\sqrt{\lambda_n}$, $n\in N$.

Pre svega, iz (40)-(41) dobijamo jednakost

$$I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h\cos\bar{\mu}_n h}{h}\, \mathrm{ch}\,\bar{\bar{\mu}}_n h\, dh \; -$$
$$- \; i\,\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h\sin\bar{\mu}_n h}{h}\, \mathrm{sh}\,\bar{\bar{\mu}}_n h\, dh \; .$$

Odatle, s obzirom na reprezentacije funkcija $\mathrm{ch}\,\bar{\bar{\mu}}_n h$ i $\mathrm{sh}\,\bar{\bar{\mu}}_n h$ u obliku stepenih redova, sledi jednakost

$$I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h\cos\mu_n h}{h}\, dh \; +$$
$$+ \; \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{\,2k}}{(2k)!}\cdot\Big[\int_0^R h^{2k-1} \sin\mu h\cos\bar{\mu}_n h\, dh\Big] \; - \tag{42}$$
$$- \; i\,\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{\,2k-1}}{(2k-1)!}\cdot\Big[\int_0^R h^{2k-2} \sin\mu h\sin\bar{\mu}_n h\, dh\Big] \; .$$

Koristeći sledeće transformacije

$$\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h\cos\bar{\mu}_n h}{h}dh = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\mu h\cos\bar{\mu}_n h}{h}dh - \frac{2}{\pi}\int_R^{+\infty} \frac{\sin\mu h\cos\bar{\mu}_n h}{h}dh =$$
$$= \delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{2}{\pi}\cdot\int_R^{+\infty} \frac{\sin\mu h\cos\bar{\mu}_n h}{h}\, dh \quad ,$$

gde je

$$\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\mu h\cos\bar{\mu}_n h}{h}\, dh = \begin{cases} 1, & \bar{\mu}_n < \mu \; , \\ \frac{1}{2}, & \bar{\mu}_n = \mu \; , \\ 0, & \bar{\mu}_n > \mu \; , \end{cases} \tag{43}$$

kao i adicione formule za funkcije sint i cost , iz (42) dobijamo jednakost

$$
\begin{aligned}
I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R) &= \delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{\pi}\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)h}{h}\,dh - \frac{1}{\pi}\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu+\bar{\mu}_n)h}{h}\,dh + \\
&+ \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k}}{(2k)!}\left[\int_0^R h^{2k-1}\sin(\mu-\bar{\mu}_n)h\,dh + \int_0^R h^{2k-1}\sin(\mu+\bar{\mu}_n)h\,dh\right] - \\
&- \frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k-1}}{(2k-1)!}\left[\int_0^R h^{2k-2}\cos(\mu-\bar{\mu}_n)h\,dh - \int_0^R h^{2k-2}\cos(\mu+\bar{\mu}_n)h\,dh\right].
\end{aligned} \tag{44}
$$

Primenom parcijalne integracije dva puta uzastopno na poslednja četiri integrala na desnoj strani jednakosti (44), dobija se sledeći izraz za veličinu $I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)$:

$$
\begin{aligned}
I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R) &= \delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{\pi}\cdot\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)h}{h}\,dh - \frac{1}{\pi}\cdot\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu+\bar{\mu}_n)h}{h}\,dh - \\
&- \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k}}{(2k)!}R^{2k-1}\left[\frac{\cos(\mu-\bar{\mu}_n)R}{\mu-\bar{\mu}_n} + \frac{\cos(\mu+\bar{\mu}_n)R}{\mu+\bar{\mu}_n}\right] - \\
&- \frac{i}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k-1}}{(2k-1)!}R^{2k-2}\left[\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)R}{\mu-\bar{\mu}_n} - \frac{\sin(\mu+\bar{\mu}_n)R}{\mu+\bar{\mu}_n}\right] + \\
&+ \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k}}{(2k)!}(2k-1)R^{2k-2}\left[\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)R}{(\mu-\bar{\mu}_n)^2} + \frac{\sin(\mu+\bar{\mu}_n)R}{(\mu+\bar{\mu}_n)^2}\right] - \\
&- \frac{i}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k-1}}{(2k-1)!}(2k-2)R^{2k-3}\left[\frac{\cos(\mu-\bar{\mu}_n)R}{(\mu-\bar{\mu}_n)^2} - \frac{\cos(\mu+\bar{\mu}_n)R}{(\mu+\bar{\mu}_n)^2}\right] - \\
&- \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k}}{(2k-3)!(2k)}\left[\int_0^R h^{2k-3}\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)h}{(\mu-\bar{\mu}_n)^2}\,dh + \int_0^R h^{2k-3}\frac{\sin(\mu+\bar{\mu}_n)h}{(\mu+\bar{\mu}_n)^2}\,dh\right] + \\
&+ \frac{i}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\bar{\mu}}_n^{2k-1}}{(2k-4)!(2k-1)}\left[\int_0^R h^{2k-4}\frac{\cos(\mu-\bar{\mu}_n)h}{(\mu-\bar{\mu}_n)^2}\,dh - \int_0^R h^{2k-4}\frac{\cos(\mu+\bar{\mu}_n)h}{(\mu+\bar{\mu}_n)^2}\,dh\right].
\end{aligned} \tag{45}
$$

Imajući u vidu uslov (18), nije teško proveriti za fiksirane brojeve μ i $n\in N$ svaki od redova na desnoj strani jednakosti (45) jeste ravnomerno konvergentan u odnosu na promenjljivu $R\in \in[R_o,2R_o]$. Zbog toga, primenjujući operaciju usrednjenja S_{R_o} na obe strane te jednakosti, možemo prointegraliti po R član po član svaki od tih redova. Pri tome svaki od tako dobijenih redova ima poredak $O(\frac{1}{(\mu-\bar{\mu}_n)^2})$, $\mu\to+\infty$, za $|\mu-\bar{\mu}_n|>1$.

Što se tiče veličine

$$S_{R_o}\left(\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)h}{h}dh\right) = \frac{1}{R_o}\cdot\int_{R_o}^{2R_o}\left(\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)h}{h}dh\right)dR ,$$

primenjujući parcijalnu integraciju dva puta uzastopno na unutrašnj integral, nije teško proveriti da važi ocena

$$S_{R_o}\left(\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu-\bar{\mu}_n)h}{h}dh\right) = O\left(\frac{1}{(\mu-\bar{\mu}_n)^2}\right), \ \mu\to+\infty,$$

za $|\mu-\bar{\mu}_n|>1$. Ista ocena važi i za integral

$$S_{R_o}\left(\int_R^{+\infty}\frac{\sin(\mu+\bar{\mu}_n)h}{h}dh\right) .$$

Sa druge strane, svaki od sabiraka na desnoj strani jednakosti (45) ima poredak $O(1)$, $\mu\to+\infty$, za svaki $\bar{\mu}_n$ i μ. Odatle sledi da i njihova usrednjenja imaju taj isti poredak.

Označimo sa $J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)$ veličinu jednaku zbiru svih sabiraka na desnoj strani jednakosti (45), osim prvog. Tako iz (45) sledi jednakost

$$S_{R_o}(I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) = \delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} + S_{R_o}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) , \tag{46}$$

pri čemu, prema prethodno rečenom, važe ocene

$$S_{R_o}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) \leq \begin{cases} C_1(R_o,A)\ , & \text{za svaki } \mu \text{ i } \sqrt{\lambda_n}; \\ \dfrac{C_2(R_o,A)}{|\mu-\bar{\mu}_n|^2}\ , & \text{za } |\mu-\bar{\mu}_n|>1. \end{cases} \tag{47}$$

Primenimo sada operaciju usrednjenja S_{R_o} na jednakosti (38) i (39). Uvedimo oznaku

$$\overset{i}{\omega}{}_n^{R_o}(x,\mu) = \int_a^b \overline{S_{R_o}(\omega_R(x,y,\mu))}\ \overset{i}{u}_n(y)\, dy\ ,\ n\in N,\ i=0,1.$$

Kako je

$$S_{R_o}(\overset{i}{\omega}_n(x,\mu)) = \overset{i}{\omega}{}_n^{R_o}(x,\mu)\ ,\ n\in N,\ i=0,1,$$

to posle primene operacije usrednjenja iz (38), odnosno (39) dobijamo sledeće jednakosti, imajući u vidu (46):

$$\overset{0}{\omega}{}_n^{R_o}(x,\mu)\cdot\overline{\overset{0}{v}_n(y)} = \overset{0}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\cdot\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} + \overset{0}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\cdot S_{R_o}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\cdot S_{R_o}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\zeta\Big]dh\Big)\ , \tag{48}$$

odnosno

$$\overset{1}{\omega}{}_n^{R_o}(x,\mu)\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)} = \overset{1}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\,\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} + \overset{1}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot S_{R_o}\ (J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\ \overset{0}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot S_{R_o}\Big(\int_0^R \sin\mu h\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\, dh\Big) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\ \overline{\overset{1}{v}_n(y)}\ S_{R_o}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\zeta)\overset{1}{u}_n(\zeta)\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\zeta\Big]dh\Big) - \tag{49}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_o}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-h}^{x+h}(|x-\zeta|-h)q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\lambda_n}d\zeta\Big]dh\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \overline{\overset{1}{v}_n(y)}\, S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\, \overset{0}{u}_n(\xi)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n^{3/2}}\, d\xi \Big] dh \Big) .$$

"Saberimo" jednakosti (48) i(49) i prosumirajmo po svim $n \in N$ leve i desne strane te nove jednakosti. S obzirom na uslove (18) i (19), postoji broj $\mu_0 > 0$ takav da

$$\mu_n > \mu_0 \implies \bar{\mu}_n = \mu_n \tag{50}$$

(videti jednakosti (16) i (41)). Ne umanjujući opštost, u daljem izlaganju možemo smatrati da je $\mu_0 = 1$ i $\mu > \mu_0$.

I tako,imajući u vidu jednakosti (31), (43) i (50), pomenu tim sumiranjem dobijamo sledeću za sada f o r m a l n u jednakost po normi prostora $L_2(G)$ (u odnosu na promenljivu y):

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty} \overset{i}{\omega}{}_n^{R_0}(x,\mu)\, \overline{\overset{i}{v}_n(y)} = \theta(x,y,\mu) + \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \overset{0}{u}_n(x)\cdot \overline{\overset{0}{v}_n(y)} + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} + \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{0}{v}_n(y)} S_{R_0}(J_{\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}}(R)) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_0}(J_{\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}}(R)) - \frac{1}{\pi}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_0}\Big(\int_0^R \sin\mu h\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}} dh\Big) \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{0}{v}_n(y)}\, S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\xi \Big] dh \Big) - \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)}\, S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\xi \Big] dh \Big) - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} (|x-\xi|-h) q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi) \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\pi\cdot\lambda_n}\, d\xi \Big] dh\Big) + \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)}\, S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\pi\cdot\lambda_n^{3/2}}\, d\xi \Big] dh \Big) .
\end{aligned} \tag{51}$$

Treba imati u vidu da oblik članova redova na desnoj strani jednakosti (51), koji odgovaraju onim n za koje je $\lambda_n = 0$, proističe iz jednakostî, analognih jednakostima (48) i (49), a koje mi ovde nismo posebno pisali.

Da bismo dokazali da je (51) i faktički jednakost po normi prostora $L_2(G)$, dovoljno je dokazati da svaki od redova na desnoj strani (51) konvergira po normi u prostoru $L_2(G)$. Napomenimo odmah da ćemo istovremeno dokazati da su sume tih redova po normi ograničene odozgo konstantama koje ne zavise od $x \in K$ i od brojeva $\mu > 1$.

S obzirom da je μ fiksiran broj i da važi uslov (19), prve tri sume na desnoj strani jednakosti (51) su konačne, pa definišu potpuno odredjene elemente prostora $L_2(G)$. Osim toga, važe nejednakosti

$$\Big\| \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \mathring{u}_n(x)\overline{\mathring{v}_n(y)} \Big\|_{L_2(G)} \leq \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \max_{x\in K} |\mathring{u}_n(x)|\, \|\mathring{v}_n\|_{L_2(G)} \leq \tag{52}$$

$$\leq C(K,q)\cdot \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \|\mathring{u}_n\|_{L_2(K_{R_1})}\cdot \|\mathring{v}_n\|_{L_2(G)} \leq C(K_{R_1})\, B\, C(K,q)$$

Ovde smo upotrebili ocenu (8) iz glave I, kao i ocene (19) i (27).

Ista ocena važi i za normu treće sume na desnoj strani (51).

Da bismo dokazali konvergenciju po normi prostora $L_2(G)$ reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathring{u}_n(x)\cdot \overline{\mathring{v}_n(y)}\cdot S_{R_0}(J_{\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}}(R)) \quad ,$$

dovoljno je dokazati konvergenciju numeričkog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathring{u}_n(x)|\,|S_{R_0}(J_{\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}}(R))|\, \|\mathring{v}_n\|_{L_2(G)} \quad . \tag{53}$$

Predstavimo taj red u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathring{u}_n(x)|\,|S_{R_0}(J_{\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}}(R))|\, \|\mathring{v}_n\|_{L_2(G)} =$$

$$= \sum_{0\le\mu_n\le 1}(\cdot) + \sum_{1<\bar\mu_n<\mu-1}(\cdot) + \sum_{|\bar\mu_n-\mu|\le 1}(\cdot) + \sum_{\bar\mu_n>\mu+1}(\cdot) \quad .$$

Primenjujući ocenu (8) iz glave I, kao i ocene (19), (27) i (47), gornje sume možemo oceniti na sledeći način :

1) $$\sum_{0\le\mu_n\le 1}|\overset{\circ}{u}_n(x)||S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))|\,\|\overset{\circ}{v}_n\|_{L_2(G)} \le C_1(R_0,A)\cdot\sum_{0\le\mu_n\le 1}\max_{x\in K}|\overset{\circ}{u}_n(x)|\,\|\overset{\circ}{v}_n\|_{L_2(G)}$$

$$\le C_1(R_0,A)C(K,q)\sum_{0\le\mu_n\le 1}\|\overset{\circ}{u}_n\|_{L_2(K_{R_1})}\|\overset{\circ}{v}_n\|_{L_2(G)} \le C_1(R_0,A)C(K,q)C(K_{R_1})B$$

2) $$\sum_{1<\bar\mu_n<\mu-1}(\cdot) = \sum_{1<\bar\mu_n\le\frac{\mu}{2}}(\cdot) + \sum_{\frac{\mu}{2}<\bar\mu_n<\mu-1}(\cdot) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Big(\sum_{k<\bar\mu_n\le k+1}(\cdot)\Big) + \sum_{k=1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Big(\sum_{\mu-k-1\le\bar\mu_n<\mu-k}(\cdot)\Big) \le$$

$$\le C_2(R_0,A)C(K,q)C(K_{R_1})\Big[\sum_{k=1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Big(\sum_{k<\bar\mu_n\le k+1}\frac{1}{\bar\mu_n^2}\Big) + \sum_{k=1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Big(\sum_{\mu-k-1\le\bar\mu_n<\mu-k}\frac{1}{|\bar\mu_n-\mu|^2}\Big)\Big] \le$$

$$\le 2C_2(R_0,A)C(K,q)C(K_{R_1})B\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad .$$

Ovde je iskorišćena i sledeća činjenica: $1<\bar\mu_n\le\frac{\mu}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|\bar\mu_n-\mu|}\le\frac{1}{\bar\mu_n}$.

3) $$\sum_{|\bar\mu_n-\mu|\le 1}(\cdot) \le C_1(R_0,A)C(K,q)C(K_{R_1})B \quad .$$

4) $$\sum_{\bar\mu_n>\mu+1}(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\mu+k<\bar\mu_n\le\mu+k+1}(\cdot)\Big) \le$$

$$C_2(R_0,A)C(K,q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\mu+k<\bar\mu_n\le\mu+k+1}\frac{1}{|\bar\mu_n-\mu|^2}\Big) \le$$

$$\le C_2(R_0,A)C(K,q)C(K_{R_1})B\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad .$$

I tako, iz 1)-4) sledi konvergencija numeričkog reda (53) a time i konvergencija po normi četvrtog funkcionalnog reda na desnoj strani jednakosti (51). No tada je norma sume tog reda manja od sume reda (53). Iz 1)-4) sledi takodje da se suma reda (53) može ograničiti odozgo konstantom koja ne zavisi od $x \in K$ i brojeva $\mu > 1$.

Analogno se dokazuje da te činjenice važe i za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overset{1}{u}_n(x)| |S_{R_o}(J_{\sqrt{\lambda_n}}^{\mu}(R))| \, \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \quad .$$

Da bismo dokazali konvergenciju po normi petog reda na desnoj strani jednakosti (51), dovoljno je da dokažemo da konvergira sledeći numerički red :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overset{0}{u}_n(x)| \left|S_{R_o}\left(\int_0^R \sin\mu h \, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}} dh\right)\right| \, \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \quad . \tag{54}$$

Imajući u vidu ocenu (18) i jednakost (41), može se pokazati da važe sledeće ocene :

$$\begin{aligned}
&1)\ \left|S_{R_o}\left(\int_0^R \sin\mu h \, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}} dh \right)\right| \le C_3(R_o,A) \ , \text{ za svaki } \mu \text{ i } \sqrt{\lambda_n} \ ; \\
&2)\ \left|S_{R_o}\left(\int_0^R \sin\mu h \sin\sqrt{\lambda_n}h dh \right)\right| \le C_4(R_o,A) \ , \text{ za svaki } \sqrt{\lambda_n} \text{ i } \mu \ ; \qquad (55) \\
&3)\ \left|S_{R_o}\left(\int_0^R \sin\mu h \sin\sqrt{\lambda_n}h dh \right)\right| \le \frac{C_5(R_o,A)}{|\bar{\mu}_n - \mu|^2} \ , \quad \text{za } |\bar{\mu}_n - \mu| > 1 \ .
\end{aligned}$$

Pri tome konstante $C_i(R_o,A)$, $i=3,4,5$, zavise samo od veličina A i R_o .

Prilikom dokazivanja konvergencije reda (54) koriste se sledeće majoracije :

Pri tome je δ proizvoljan broj iz intervala (0,1), a konstante $D_1'(R_0,A)$ i $D_2'(R_0,A)$ zavise samo od ukazanih veličina. Dokaz ovih ocena je elementaran, ali i opširan, pa ga ovde nećemo navoditi. U slučaju kada su brojevi λ_n realni, ocene analogne ocenama (58) i (59) date su u radu [21] .

Vratimo se integralu (57). Ovde ćemo razmotriti samo prvi integral na desnoj strani (57) ; razmatranja za drugi integral su analogna. S obzirom na ocene (58)-(59), važiće ocene

$$\left|\int_x^{x+R} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\left[\int_{\xi-x}^{R}\frac{\sin\mu h}{h}\sin\sqrt{\lambda_n}(\xi-x-h)dh\right]d\xi\right| \le$$

$$\le\begin{cases} D_1'(R_0,A)\cdot\max\limits_{x\in K_{2R_0}}|\overset{0}{u}_n(x)|\cdot\displaystyle\int_x^{x+R}\frac{|q(\xi)|}{|\xi-x|^{\delta}}d\xi\,, & \text{za svaki } \sqrt{\lambda_n} \text{ i } \mu\,; \\ \dfrac{D_2'(R_0,A)}{|\bar{\mu}_n-\mu|^{\delta/2}}\cdot\max\limits_{x\in K_{2R_0}}|\overset{0}{u}_n(x)|\cdot\displaystyle\int_x^{x+R}\frac{|q(\xi)|}{|\xi-x|^{\delta}}d\xi\,, & \text{za } |\mu-\bar{\mu}_n|>1\,. \end{cases} \tag{60}$$

Odredimo broj $r>1$ takav da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$ (p je broj koji figuriše u iskazu teoreme 3). Broj δ iz ocenâ (60) odredimo sada tako da je $\delta\cdot r<1$. Tada važi ocena

$$\int_x^{x+R}\frac{|q(\xi)|}{|\xi-x|^{\delta}}d\xi \le \|q\|_{L_p(K_{2R_0})}\cdot\left[\frac{(2R_0)^{1-\delta\cdot r}}{1-\delta\cdot r}\right]^{1/r}.$$

Iz jednakosti (57), iz ocenâ (60) i iz prethodne ocene slede ocene

$$\left|\int_0^{R}\frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-\ell}^{x+\ell}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh\right| \le$$

$$\leq \begin{cases} D_1(R_0,A,q)\cdot \max\limits_{x\in K_{2R_0}} |\overset{\circ}{u}_n(x)| \ , & \text{za svaki } \mu \text{ i } \sqrt{\lambda_n}\ ; \\ \dfrac{D_2(R_0,A,q)}{|\mu-\bar{\mu}_n|^{\delta/2}}\cdot \max\limits_{x\in K_{2R_0}} |\overset{\circ}{u}_n(x)| \ , & \text{za } |\bar{\mu}_n-\mu|>1\ . \end{cases} \tag{61}$$

Napomenimo još da važi ocena

$$\left|S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{\circ}{u}_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi\right]dh\ \right)\right| \leq$$
$$\leq D_3(R_0,A,q)\cdot \max_{x\in K_{2R_0}} |\overset{\circ}{u}_n(x)| \quad , \tag{62}$$

za one indekse $n\in N$ za koje je $0\leq\mu_n\leq 1$. Osim toga, konstante $D_i(R_0,A,q)$, $i=1,2,3$, zavise samo od ukazanih veličina, tako da i za usrednjenje integrala (57) važe ocene (61).

Raspolažući ocenama (61)-(62), možemo pristupiti dokazivanju konvergencije reda (56). Predstavimo taj red u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cdot) = \sum_{0\leq\mu_n\leq 1}(\cdot) + \sum_{1<\bar{\mu}_n\leq\frac{\mu}{2}}(\cdot) + \sum_{\frac{\mu}{2}<\bar{\mu}_n<\mu-1}(\cdot) + \sum_{|\bar{\mu}_n-\mu|\leq 1}(\cdot) +$$
$$+ \sum_{\mu+1<\bar{\mu}_n\leq\frac{3\mu}{2}}(\cdot) + \sum_{\bar{\mu}_n>\frac{3\mu}{2}}(\cdot) \quad ,$$

i ocenimo posebno svaku od dobijenih šest sûma.

1) Iz ocene (8), gl.I, i iz ocenâ (19), (27) i (62) sledi

$$\sum_{0\leq\mu_n\leq 1}(\cdot) \leq D_3(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})B \quad .$$

2) Koristeći činjenicu da $1<\bar{\mu}_n\leq\frac{\mu}{2}\Longrightarrow|\bar{\mu}_n-\mu|>\bar{\mu}_n$, ocenu (8), gl.I, kao i ocene (19), (27) i (61), dobijamo majoracije

$$\sum_{1<\bar{\mu}_n\leq\frac{\mu}{2}}(\cdot)\leq D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{1<\bar{\mu}_n\leq\frac{\mu}{2}}\frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}|}\frac{1}{|\mu_n-\mu|^{\delta/2}}\leq$$

$$\leq D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{k<\bar{\mu}_n\leq k+1}\frac{1}{|\bar{\mu}_n|^{1+\delta/2}}\Big)\leq$$

$$\leq D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})B\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\delta/2}}\quad .$$

3) S obzirom da $1<|\bar{\mu}_n-\mu|<\frac{\mu}{2}\Rightarrow\bar{\mu}_n>|\bar{\mu}_n-\mu|$, na osnovu prethodno pomenutih ocena sledi

$$\sum_{\frac{\mu}{2}<\bar{\mu}_n<\mu-1}(\cdot)\leq D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{\frac{\mu}{2}<\bar{\mu}_n<\mu-1}\frac{1}{\bar{\mu}_n|\bar{\mu}_n-\mu|^{\delta/2}}\leq$$

$$\leq D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{k=1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Big(\sum_{\mu-k-1<\bar{\mu}_n\leq\mu-k}\frac{1}{|\bar{\mu}_n-\mu|^{1+\delta/2}}\Big)\leq$$

$$\leq D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})B\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\delta/2}}\quad .$$

Potpuno analogno se dokazuje i ocena

$$\sum_{\mu+1<\bar{\mu}_n\leq\frac{3\mu}{2}}(\cdot)\leq D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})B\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\delta/2}}\quad .$$

4) Koristeći ocenu (8), gl.I, kao i ocene (19), (27) i (61) dobijamo nejednakosti

$$\sum_{|\bar{\mu}_n-\mu|\leq 1}(\cdot)\leq D_1(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{|\bar{\mu}_n-\mu|\leq 1}\frac{1}{\bar{\mu}_n}\leq$$

$$\leq D_1(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})B\quad .$$

5) Da bismo ocenili poslednju sumu, upotrebićemo sledeću činjenicu: $\bar{\mu}_n>\frac{3\mu}{2}\Rightarrow\frac{1}{|\bar{\mu}_n-\mu|}<\frac{3}{\bar{\mu}_n}$. Tada, s obzirom na prethodno pomenute ocene, važe majoracije

$$\sum_{\bar{\mu}_n > \frac{3\mu}{2}} (\cdot) \leq D_2(R_o,A,q)C(K_{2R_o},q)C(K_{R_1}) \cdot \sum_{\bar{\mu}_n > \frac{3\mu}{2}} \frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}||\bar{\mu}_n-\mu|^{\delta/2}} \leq$$

$$\leq 3\; D_2(R_o,A,q)C(K_{2R_o},q)C(K_{R_1}) \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{k<\bar{\mu}_n\leq k+1} \frac{1}{|\bar{\mu}_n|^{1+\delta/2}} \Big) \leq$$

$$\leq 3\; D_2(R_o,A,q)C(K_{2R_o},q)C(K_{R_1})B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta/2}} \quad .$$

I tako, iz 1)-5) sledi da red (56) konvergira i da je njegova suma ograničena odozgo konstantom koja ne zavisi od $x \in K$ i od parametra $\mu > 1$.

Na isti način se dokazuje da to svojstvo ima i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| S_{R_o}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x+l} q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi\Big]dh\Big)\Big| \,\|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \quad .$$

Razmotrimo sada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| S_{R_o}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x+l}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n}d\xi\Big]dh\Big)\Big| \,\|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \,. \tag{63}$$

Podjimo od integrala

$$\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x+l}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\Big]dh =$$

$$= \int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x+l}|x-\xi|\,q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\Big]dh \; - \tag{64}$$

$$- \int_0^R \sin\mu h\Big[\int_{x-l}^{x+l} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\Big]dh \quad .$$

Može se pokazati da za oba integrala na desnoj strani jednakosti (64) važe ocene tipa (61) i (62). Odatle sledi da će i za usrednjenje integrala na levoj strani jednakosti (64) važiti ocene tipa (61).

Prilikom ocenjivanja veličina oblika

$$\max_{x\in K_{2R_0}}|\overset{0}{u}_n(x)|\,\|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)}\ ,$$

koriste se antiapriorne ocene (29), odnosno (30):

$$\begin{aligned}\max_{x\in K_{2R_0}}|\overset{0}{u}_n(x)|\,\|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} &\leq A(K_{2R_0},q)\|\overset{1}{u}_n\|_{L_2(K_{R_1})}\|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)}|\sqrt{\lambda_n}|\leq \\ &\leq |\sqrt{\lambda_n}|A(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})\ .\end{aligned} \tag{65}$$

S obzirom na ove napomene, konvergencija reda (63) se dokazuje po istoj shemi koja je upotrebljena u slučaju reda (56). Pri tome treba imati u vidu da članovi reda (63) koji odgovaraju onim indeksima $n\in N$ za koje je $\lambda_n=0$, imaju oblik

$$S_{R_0}\Big(\int_0^R\frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-h}^{x+h}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)d\xi\Big]dh\ \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)}\ .$$

Najzad, preostalo nam je još da razmotrimo poslednji funkcionalni red na desnoj strani jednakosti (51), odnosno njegov majorantni numerički red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|S_{R_0}\Big(\int_0^R\frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n^{3/2}}d\xi\Big]dh\Big)\Big|\|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)}\ .$$

Konvergencija ovog reda dokazuje se primenom ocenâ (19), (61)-(62) i (65), kao i već primenjivanog postupka. Tom prilikom se kao u svim prethodnim slučajevima, dokazuje da se suma tog reda može ograničiti odozgo konstantom koja ne zavisi od $x\in K$ kao i od parametra $\mu>1$.

Time bi dokaz jednakosti (51) bio završen.

Primetimo da za svako fiksirano $x\in K$ i svaki broj $\mu>1$ funkcija $S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))$ pripada klasi $L_2(G)$. To se vidi iz njenog eksplicitnog oblika

$$S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin\mu|x-y|}{|x-y|} , & \text{za } |x-y| \leq R_0 , \\ \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin\mu|x-y|}{|x-y|} \dfrac{2R_0-|x-y|}{R_0} , & \text{za } R_0 \leq |x-y| \leq 2R_0 , \\ 0 , & \text{za } |x-y| \geq 2R_0 \end{cases} \quad (66)$$

Pokažimo da važi sledeća jednakost po normi prostora $L_2(G)$:

$$S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) = \sum_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{\infty} \overset{i}{\omega}{}_n^{R_0}(x,\mu)\, \overline{\overset{i}{v}_n(y)} . \quad (67)$$

Zaista, neka je

$$\overline{g(x,y,\mu)} = \sum_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{\infty} \overset{i}{\omega}{}_n^{R_0}(x,\mu)\, \overline{\overset{i}{v}_n(y)} ,$$

gde je $g(x,y,\mu) \in L_2(G)$; sa $\overline{g(x,y,\mu)}$ smo označili kompleksno spegnutu funkciju funkcije $g(x,y,\mu)$. Zbog biortogonalne spregnutosti sistemâ funkcija $\{\overset{i}{u}_n(y)\}$ i $\{\overset{i}{v}_n(y)\}$ iz prethodne jednakosti dobijamo

$$(g(x,y,\mu) - S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)), \overset{i}{u}_m(y))_{L_2(G)} = 0 ,$$

za svaki $m \in N$, $i=0,1$. Odatle, zbog potpunosti sistema $\{\overset{i}{u}_n(y)\}$ u prostoru $L_2(G)$, sledi jednakost

$$g(x,y,\mu) \overset{L_2(G)}{\equiv} S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) .$$

Tako najzad, dolazimo do zaključka, imajući u vidu jednakosti (51) i (67), da za svaki $x \in K$ i svaki broj $\mu > 1$ važi sledeća jednakost po normi prostora $L_2(G)$:

$$S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) - \theta(x,y,\mu) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \overset{0}{u}_n(x)\, \overline{\overset{0}{v}_n(y)} + \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \overset{1}{u}_n(x)\, \overline{\overset{1}{v}_n(y)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{0}{v}_n(y)} S_{R_o}\left(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_o}\left(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)\right) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_o}\left(\int_0^R \sin\mu h \, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\, dh \right) - \tag{68}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{0}{v}_n(y)} S_{R_o}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-l}^{x+l} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\, d\xi\right] dh \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_o}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-l}^{x+l} q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\, d\xi\right] dh \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_o}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-l}^{x+l} (|x-\xi|-h) q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\, \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\pi\lambda_n}\, d\xi\right] dh \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_o}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-l}^{x+l} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{2\pi\lambda_n^{3/2}}\, d\xi\right] dh \right) .$$

Osim toga, postoji konstanta $C(K,q,A,B,R_o)$, koja ne zavisi od $x\in K$ i brojeva $\mu > 1$, takva da važi ocena

$$\| S_{R_o}(\omega_R(x,y,\mu)) - \vartheta(x,y,\mu)\|_{L_2(G)} \le C(K,q,A,B,R_o) , \tag{69}$$

za svaki $x\in K$ i $\mu > 1$.

Dokaz ocene (34) je završen.

<u>L E M A 2</u>. Važi ocena

$$\| S_{R_o}(\omega_R(x,y,\mu)) - \omega_R(x,y,\mu)\|_{L_2(G)} = o\,(1),\ \mu\to+\infty,$$

ravnomerna u odnosu na $x\in K$ i $R\in[R_o,2R_o]$.

Ova ocena se lako dobija, s obzirom na jednakosti (33) i

(66). A sledeći rezultat je neposredna posledica ocene (69) i oc
ne formulisane lemom 2.

L E M A 3. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 2. Tada postoji k
stanta $C(K,q,R_o)$ takva da važi ocena

$$\|\theta(x,y,\mu) - \omega_R(x,y,\mu)\|_{L_2(G)} \leq C(K,q,R_o) , \qquad (70)$$

ravnomerna u odnosu na $x \in K$ i odnosu na veličine $\mu > 1$ i $R \in [R_o, 2R_o]$.

§4.- ZAVRŠETAK DOKAZA TEOREME 2

Neka je $f(y)$ proizvoljna funkcija iz klase $L_2(G)$ i n
$S_\mu(x,f)$ označava parcijalnu sumu poretka $\mu > 0$ trigonometrijsk
Furijeovog reda funkcije $f(y)$ u tački $x \in G$. Sa tačnošću do sa
ka koji na posmatranom kompaktu K teži nuli kada $\mu \to +\infty$, ta pa
cijalna suma jednaka je

$$S_\mu(x,f) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|\leq R} \frac{\sin \mu |x-y|}{|x-y|} f(y)dy ,$$

gde $x \in K$, a R je pozitivan broj, manji od rastojanja kompakta
K do granice intervala G (videti prvi tom knjige [11]).

Funkciju $S_\mu(x,f)$ uporedićemo na kompaktu K sa funkci
$\sigma_\mu(x,f)$, definisanom jednakošću (15). Primenom nejednakosti Koši
Bunjakovskog i ocene (70), dobijamo nejednakosti

$$|\sigma_\mu(x,f) - S_\mu(x,f)| \leq \|\theta(x,y,\mu) - \omega_R(x,y,\mu)\|_{L_2(G)} \cdot \|f\|_{L_2(G)} \leq$$
$$\leq C(K,q,R_o) \cdot \|f\|_{L_2(G)} , \qquad (71)$$

za svaki $x \in K$ i $\mu > 1$.

Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. S obzirom da je sistem funcija $\{\overset{i}{u}_n(y)\}$ potpun u prostoru $L_2(G)$, mogu se odredit $n_o \in N$ i konstante $\overset{i}{c}_1, \overset{i}{c}_2, \ldots, \overset{i}{c}_{n_o}$ takve da za funkciju

$$P_{n_o}(y) = \sum_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{n_0} \overset{i}{c}_n \overset{i}{u}_n(y)$$

važi nejednakost

$$\|f(y) - P_{n_o}(y)\|_{L_2(G)} \leq \varepsilon \quad . \tag{72}$$

Lako se vidi da za $\mu \geqslant n_o$ važi jednakost $\sigma_\mu(y, P_{n_o}) = P_{n_o}(y$

. Primenimo ocenu (71) na funkciju $f(y) - P_{n_o}(y)$ pri $\mu \geqslant n_o$. Imajući u vidu ocenu (72), dobijamo ocenu

$$|\sigma_\mu(x,f) - S_\mu(x,f)| \leq C(K,q,R_o)\cdot\varepsilon + |S_\mu(x,P_{n_o}) - P_{n_o}(x)| , \tag{73}$$

ravnomernu u odnosu na $x \in K$ i u odnosu na $\mu \geqslant n_o$.

S obzirom da funkcija $P_{n_o}(x)$ ima neprekidan prvi izvod na kompaktu K, za dati broj ε postoji broj $\mu(\varepsilon) > 0$ takav da

$$\mu > \mu(\varepsilon) \Rightarrow |S_\mu(x, P_{n_o}) - P_{n_o}(x)| \leq \varepsilon , \tag{74}$$

ravnomerno u odnosu na $x \in K$.

Iz (74) i (73) dobijamo da je

$$\lim_{\mu \to +\infty} [\sigma_\mu(x,f) - S_\mu(x,f)] = 0 , \tag{75}$$

ravnomerno u odnosu na x na kompaktu K .

Odatle neposredno sledi da je

$$\lim_{\mu \to +\infty} \|\sigma_\mu(x,f) - S_\mu(x,f)\|_{L_2(K)} = 0 ,$$

Takodje važi jednakost

$$\lim_{\mu\to+\infty} \|S_\mu(x,f) - f(x)\|_{L_2(K)} = 0 .$$

Iz poslednje dve jednakosti sledi jednakost (28).
Dokaz teoreme 2 je završen.

Kao što je već rečeno u §2 , time bi bila dokazana i dovoljnost uslova teoreme 1.

§5.- DOKAZ NEOPHODNOSTI USLOVA TEOREME 1

Ovaj dokaz pripada V.A. Iljinu i sasvim nedavno je objavlje u radu [48] . Potpunosti radi, mi ćemo ga ovde prikazati.

Kao što će se iz daljeg izlaganja videti, neophodnost uslova teoreme 1 je činjenica koja ne zavisi od prirode operatora koji generiše posmatrani sistem funkcija. Zbog toga ćemo u ovom paragrafu izostavljati oznake 0,1 za sopstvenu, odnosno za pridruženu funkciju. Uvedimo oznaku

$$\overset{o}{L}_2(K) = \{f(y)\in L_2(G):\ f(y)=0,\ y\notin K\} .$$

Tada važe sledeće leme.

<u>L E M A 4</u>. Ako potpuni i minimalni sistem funkcija $\{u_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ ima svojstvo bazisnosti u prostoru $L_2(G)$, onda za svaki kompakt $K\subset G$ i za svake dve funkcije $f(y)\in \overset{o}{L}_2(K)$ i $g(y)\in L_2(G)$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} (f,u_k)_{L_2(G)}\, v_k - f , g \Big)_{L_2(G)} = 0 . \qquad (76)$$

D O K A Z. Očevidna je jednakost

$$(f, \sum_{k=1}^{n} (g,v_k)u_k - g)_{L_2(G)} = (\sum_{k=1}^{n} (f,u_k)v_k - f, g)_{L_2(G)} .$$

Iz svojstva bazisnosti (17) sledi da niz $\sum_{k=1}^{n}(g,v_k)u_k - g$ slabo konvergira ka nuli u prostoru $L_2(K)$, pa koristeći prethodnu jednakost, dobijamo jednakosti

$$0 = \lim_{n\to\infty} (f, \sum_{k=1}^{n}(g,v_k)u_k-g)_{L_2(K)} = \lim_{n\to\infty} (f, \sum_{k=1}^{n}(g,v_k)u_k-g)_{L_2(G)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} (f,u_k)v_k - f , g)_{L_2(G)} .$$

L E M A 5. Ako potpuni i minimalni sistem funkcija $\{u_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ ima svojstvo bazisnosti u prostoru $L_2(G)$, i ako je $\{v_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ sa njim biotrogonalno spregnuti sistem funkcija, onda za svaki kompakt $K\subset G$ postoji konstanta $C(K)>0$ takva da važe nejednakosti (27).

D O K A Z. Pretpostavimo da (27) ne važi. To znači da postoji kompakt $\tilde{K}\subset G$ takav da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_n\|_{L_2(\tilde{K})}\cdot\|v_n\|_{L_2(G)} = +\infty . \tag{77}$$

Ne ograničavajuću opštost, možemo smatrati da je $\|v_n\|_{L_2(G)}=$ $= 1$, $n\in N$, pa jednakost (77) postaje

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_n\|_{L_2(\tilde{K})} = +\infty . \tag{78}$$

Posmatrajmo restrikciju funkcije $u_n(y)$ na kompakt $\tilde{K}$ kao neprekidan linearni funkcional na Hilbertovom prostoru $L_2(\tilde{K})$. Tada iz (78) i poznatog principa rezonancije sledi da postoji kompleksna funkcija $\tilde{f}(y)\in \overset{\circ}{L}_2(\tilde{K})$ takva da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|(\tilde{f},u_n)_{L_2(G)}\right| = +\infty \quad . \tag{79}$$

Jednakost (76) znači da za svaki kompakt $K \subset G$ i za svaku funkciju $f(y) \subset \overset{\circ}{L}_2(K)$ niz $\sum_{k=1}^{n} (f,u_k)v_k$ slabo konvergira u prostoru $L_2(G)$. Odatle sledi da su elementi tog niza ograničeni po normi prostora $L_2(G)$, tj. da postoji konstanta $C(f)$ takva da je

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (f,u_k)v_k \right\|_{L_2(G)} \leq C(f) \ , \quad n \in N \ .$$

Odatle pomoću nejednakosti trougla dobijamo ocenu

$$\| (f,u_n)v_n \|_{L_2(G)} \leq 2\ C(f) \ , \quad n \in N \ . \tag{80}$$

Sa druge strane, imamo jednakosti

$$\|(f,u_n)v_n\|_{L_2(G)} = |(f,u_n)| \cdot \|v_n\|_{L_2(G)} = |(f,u_n)| \ ,$$

pa iz (80) sledi ocena

$$\left|(f,u_n)_{L_2(G)}\right| \leq 2\ C(f) \ , \quad n \in N \ . \tag{81}$$

Ova ocena važi za svaki kompakt $K \subset G$ i za svaku funkciju $f(y) \in \in L_2(K)$. Medjutim, relacija (79) i ocena (81) su u očevidnoj suprotnosti, pa dobijena protivrečnost dokazuje lemu.

Iz leme 5 neposredno sledi da je uslov (27) neophodan uslov teoreme 1. Dokaz teoreme 1 je završen.

§6.- O RAVNOMERNOJ KONVERGENCIJI BIORTOGONALNOG REDA KOJI ODGOVARA ŠTURM-LIUVILOVOM OPERATORU SA PREKIDNIM KOEFICIJENTIMA

U ovom paragrafu ćemo razmotriti problem ravnomerne konvergencije biortogonalnog reda (15) koji odgovara operatoru (1)-(2), čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove (3)-(5).

Napomenimo da se ponovo vraćamo na oznake iz §§1-2 .

T E O R E M A 4. Neka su za Šturm-Liuvilov operator (1)-(2), čiji koeficijenti imaju svojstva (3)-(5), zadovoljeni uslovi (18)--(20). Neka je $f(y)$ proizvoljna funkcija iz klase $L_2(G)$ i $K\subset G$ - proizvoljni kompakt. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

a) $\sigma_\mu(x,f)$ konvergira ravnomerno po x na kompaktu K , kada $\mu\to+\infty$.

b) $S_\mu(t,\tilde{f})$ konvergira ravnomerno po t na kompaktu $\tilde{K}$, kada $\mu\to+\infty$.

D O K A Z. Naravno, od najvećeg je interesa slučaj kada $x_0\in K$.

Neka je

$$\lim_{\mu\to+\infty}\sigma_\mu(x,f) = g_f(x) , \tag{82}$$

ravnomerno po x na kompaktu K , pri čemu je $g_f(y)\in L_2(G)$. Pokažimo da je

$$\lim_{\mu\to+\infty} S_\mu(t,\tilde{f}) = \tilde{g}_f(t) , \tag{83}$$

ravnomerno po t na kompaktu $\tilde{K}$.

Zaista, biće

$$|S_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{g}_f(t)| \le |S_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f})| + |\tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{g}_f(t)| =$$

$$= |S_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f})| + (p(x))^{1/4}|\sigma_\mu(x,f) - g_f(x)| , \tag{84}$$

gde je funkcija $\tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f})$ data jednakošću koja prethodi jednakosti

(26), funkcija $p(x)$ je definisana jednakošću

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) , & \text{za} \quad c \leq x < x_0 , \\ p_2(x) , & \text{za} \quad x_0 \leq x \leq d , \end{cases}$$

a promenljive x i t su vezane na sledeći način

$$x = \begin{cases} x_0 - \rho_1(-t) , & \text{za} \quad -\bar{\rho}_1(x_0-c) \leq t < 0 , \\ x_0 + \rho_2(t) , & \text{za} \quad 0 \leq t \leq \bar{\rho}_2(d-x_0) . \end{cases}$$

Pretpostavlja se da je kompakt K oblika $[c,d] \subset G$.

Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. S obzirom na jednakost (75), postoji broj $\mu_1(\varepsilon) > 0$ takav da

$$\mu > \mu_1(\varepsilon) \Rightarrow |S_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f})| \leq \frac{\varepsilon}{2} , \tag{85}$$

ravnomerno po t na kompaktu $\tilde{K}$.

Sa druge strane, kako je funkcija $(p(x))^{1/4}$ ograničena na kompaktu K , postoji broj $\mu_2(\varepsilon)$ takav da

$$\mu > \mu_2(\varepsilon) \Rightarrow (p(x))^{1/4} \cdot |\sigma_\mu(x,f) - g_f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} , \tag{86}$$

ravnomerno po x na kompaktu K . Ovo sledi iz jednakosti (82).

Iz (84)-(86) sledi relacija

$$\mu > \max\{\mu_1(\varepsilon), \mu_2(\varepsilon)\} \Rightarrow |S_\mu(t,\tilde{f}) - \tilde{g}_f(t)| \leq \varepsilon ,$$

ravnomerno po t na kompaktu $\tilde{K}$. Time je jednakost (83) dokazana.

Pretpostavimo sada da je

$$\lim_{\mu \to +\infty} S_\mu(t,\tilde{f}) = h_f(t) , \tag{87}$$

ravnomerno po t na kompaktu $\tilde{K}$, pri čemu je $h_f(t)$ funkcija iz klase $L_2(\tilde{G})$. Pokažimo da je

$$\lim_{\mu\to+\infty} \sigma_\mu(x,f) = (p(x))^{-1/4}\cdot h_f(\varrho(x,x_0)) , \qquad (88)$$

ravnomerno po x na kompaktu $K = [c,d]$. Pri tome je

$$\varrho(x,x_0) = \begin{cases} -\int\limits_x^{x_0} (p_1(\tau))^{-1/2}\, d\tau , & \text{za} \quad c \leq x < x_0 , \\ \int\limits_{x_0}^{x} (p_2(\tau))^{-1/2}\, d\tau , & \text{za} \quad x_0 \leq x \leq d . \end{cases}$$

Funkcija $(p(x))^{-1/4}\, h_f(\varrho(x,x_0))$ pripada klasi $L_2(G)$.

Podjimo od

$$\left|\sigma_\mu(x,f) - (p(x))^{-1/4}\, h_f(\varrho(x,x_0))\right| =$$

$$= (p(x))^{-1/4}\cdot \left|(p(x))^{1/4}\, \sigma_\mu(x,f) - h_f(\varrho(x,x_0))\right| = \qquad (89)$$

$$= (p(t))^{-1/4}\left|\tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f}) - h_f(t)\right| \leq (p(t))^{-1/4}\left|\tilde{\sigma}_\mu(t,\tilde{f}) - s_\mu(t,\tilde{f})\right| +$$

$$+ (p(t))^{-1/4}\left|s_\mu(t,\tilde{f}) - h_f(t)\right| ,$$

gde je

$$p(t) = \begin{cases} p_1[x_0 - \varrho_1(-t)] , & \text{za} \quad -\bar{\varrho}_1(x_0-c) \leq t < 0 , \\ p_2[x_0 + \varrho_2(t)] , & \text{za} \quad 0 \leq t \leq \bar{\varrho}_2(d-x_0) . \end{cases}$$

Imajući u vidu (4), (75), (87) i (89), nije teško zaključiti da važi jednakost (88), ravnomerno po x na kompaktu K.

Dokaz teoreme 4 je završen.

(ravnomerna ekvikonvergencija biortogonalnog reda i trigonometrijskog Furijeovog reda funkcije $f(y)$).

Dokaz ove teoreme je sadržan u dokazima prethodnih teorema. Naime, teoremom 1 je dokazana ekvivalentnost tvrdjenja a) i b). Implikacije a)$\Longrightarrow$c)$\Longrightarrow$b) su dokazane u toku dokazivanja teoreme 2 (videti §4).

<u>N A P O M E N A</u>. Označimo sa D skup funkcija $u(y)$ iz prostora $L_2(G)$, gde je $G = (a,b)$ - proizvoljan interval realne ose, koje imaju sledeća svojstva:

1) Funkcije $u(y)$ i $u'(y)$ jesu apsolutno neprekidne na svakom konačnom segmentu intervala (a,x_o), i na svakom konačnom segmentu poluintervala $[x_o,b)$.

2) Funkcija $\ell(u(y))$, gde je $\ell(u)$ formalni diferencijalni operator definisan jednakostima (1)-(2), pripada klasi $L_2(G)$.

Skup D je vektorski potprostor u $L_2(G)$. Definišimo operator L na prostoru $L_2(G)$ na sledeći način: oblast definisanosti operatora L je potprostor D i ako $u(y) \in D$, onda je

$$L(u) = \ell(u).$$

Skup D je maksimalni vektorski potprostor u $L_2(G)$, na kome se može na taj način definisati operator. Dodajući uslovima 1) i 2) odredjene granične uslove na krajevima intervala G, u skupu D dobijamo odredjeni vektorski potprostor i na tom potprostoru definisani odredjeni operator - restrikciju operatora L. U zavisnosti od graničnih uslova taj operator može da ima skup sopstvenih brojeva koji zadovoljavaju uslove (18)-(19), može da ima potpuni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija, može da ima i razna druga svojstva.

Kada smo u ovoj glavi govorili o operatoru (1)-(2) i o njegovim sopstvenim i pridruženim funkcijama, o odgovarajućim sopstvenim brojevima itd., mi smo imali u vidu upravo operator L_i njegove restrikcije, definisane na prethodni način, pomoću graničnih uslova, ili drugačije. Za razliku od toga, u prvoj glavi je bilo reči samo o formalnim diferencijalnim operatorima, tj. o diferencijalnim izrazima.

U problemima koje smo mi razmatrali u ovoj glavi, granični uslovi, pomoću kojih je definisan posmatrani konkretan operator, igraju ulogu samo u tom smislu što se zahteva da sopstveni brojevi tog operatora zadovoljavaju uslove (18) i (19). Čak šta više, nije potrebno, za razliku od klasičnih definicija, zahtevati da sopstvene (i pridružene funkcije) zadovoljavaju pomenute granične uslove Otuda i takve definicije tih funkcija, koje smo dali u prvoj glavi za Šredingerov operator (90) i u ovoj glavi za Šturm-Liuvilov operator (1)-(2).

Sve prethodne napomene važe, naravno i za specijalni slučaj - Šredingerov operator (90), samo što se u definiciji skupa $\dot{D}$ svojstvo 1) zamenjuje sledećim:

1′) Funkcije $u(y)$ i $u'(y)$ jesu apsolutno neprekidne na svakom konačnom segmentu intervala G .

Ovo treba imati u vidu, s obzirom da će sledeća glava biti posvećena isključivo Šredingerovom operatoru.

§8.- KOMENTARI

U radu [17] V.A.Iljin je ispitivao ravnomernu konvergenci spektralnog razlaganja, tj. biortogonalnog reda funkcije iz klase $L_1(G)$, koja ima kompaktni nosač u nekom proizvoljnom otvorenom pod skupu D intervala G. Taj biortogonalni red je generisan proizv ljnim potpunim i minimalnim podsistemom sopstvenih i pridruženih funkcija običnog nesamokonjugovanog diferencijalnog operatora n-to reda sa koeficijentima koji su glatki na skupu D, a van skupa I njihovo ponašanje ne igra nikakvu ulogu. Uz pretpostavku da sopstv ni brojevi tog operatora zadovoljavaju odgovarajuće uslove tipa (18)-(19), Iljin je dokazao da je svojstvo ravnomerne ravnokonvergencije biortogonalnog reda i trigonometrijskog Furijeovog reda na kompaktima skupa D ekvivalentno sa tzv. slabim svojstvom bazisnosti posmatranog podsistema sopstvenih i pridruženih funkcija. Slab svojstvo bazisnosti se definiše tako što se u definiciji 3 umesto konvergencije po normi prostora $L_2(K)$, $K \subset D$, stavi slaba konverge cija u prostoru $L_2(K)$. Pomenuta ekvivalentnost važi tim pre i za (jako) svojstvo bazisnosti (u smislu definicije 3).

U radu [18] ovi rezultati su preneseni na Keldišov pramen poretka m običnih nesamokonjugovanih diferencijalnih operatora n-tog reda

$$L(u,\lambda) = u^{(n)}(y)+p_1(y,\lambda)u^{(n-1)}(y)+\ldots+p_{n-1}(y,\lambda)u'(y) +$$

$$+ \; p_n(y,\lambda)+\lambda^m \cdot u(y) \quad ,$$

gde je $p_k(y,\lambda)$ polinom po λ stepena manjeg od km/n. Ovoga put su razmatrane funkcije iz klase $L_2(G)$.

Prethodni rezultati ukazuju na izuzetnu važnost onog potpunog i minimalnog sistema sopstvenih i pridruženih funkcija diferencijalnog operatora ili pramena diferencijalnih operatora, koji ima svojstvo bazisnosti. Tražeći lako proverljiv konstruktivni uslov pomoću koga bi se mogao "prepoznati" sistem sa svojstvom bazisnosti Iljin je u radu [19] došao do sledećeg rezultata: potpuni i minimalni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija pomenutog Keldiševog pramena ima svojstvo bazisnosti ako i samo ako su zadovoljeni uslovi (2o). U radu [20] ovaj rezultat je produbljen i dopunjen drugim, veoma zanimljivim i važnim rezultatima.

Kao sledeći korak, Iljin je postavio problem: šta od prethodnih rezultata može da se prenese na operatore čiji koeficijenti nisu glatki ? U ovoj glavi ja sam rešavao taj zadatak u slučaju običnih diferencijalnih operatora drugog reda.

Za slučaj Šredingerovog operatora (90) potpuni odgovor je dat teoremom 5. Za opštiji slučaj Šturm-Liuvilovog operatora čiji koeficijent uz glavni deo operatora ima konačno mnogo tačaka prekida, a potencijal je iz klase $L_p^{loc}(G)$, $1 < p < \infty$, odgovori su dati teoremama 1 i 4. U ovom slučaju nisam mogao da dobijem potpunu ekvivalentnost svojstava bazisnosti, ravnomerne ravnokovergencije i uslova bazisnosti (20).

Čini se da u rešavanju ovih problema veoma važnu ulogu igraju uslovi sprezanja u tačkama prekida koeficijenata operatora. Ukoliko bismo umesto uslova oblika (8)-(9) uzeli uslove oblika

$$u(x_0-0) = u(x_0+0), \quad p_1(x_0)u'(x_0-0) = p_2(x_0)u'(x_0+0)$$

(u klasičnoj matematičkoj fizici tako se ustvari i postupa), onda sva prethodna pitanja ostaju bez odgovora.

G L A V A III

O KONVERGENCIJI IZVODÂ SPEKTRALNOG RAZLAGANJA APSOLUTNO NEPREKIDNE FUNKCIJE, KOJE ODGOVARA NESAMOKONJUGOVANOM ŠREDINGEROVOM OPERATORU

U ovoj glavi razmatraćemo izvode spektralnog razlaganja, tj. biortogonalnog reda apsolutno neprekidne funkcije, generisanog potpunim i minimalnim sistemom sopstvenih i pridruženih funkcija Šredingerovog diferencijalnog operatora

$$\mathcal{L}(u) = -u''(y) + q(y)u(y) \quad , \tag{1}$$

definisanog na konačnom intervalu G , čiji potencijal $q(y)$ jeste kompleksna funkcija iz klase $L_p(G)$, $1<p<\infty$.

U §1 su date osnovne pretpostavke i neki rezultati iz glave I, koje ćemo ovde koristiti. U §2 je dobijena ocena prvog izvoda spektralne funkcije operatora (1), a u §3 ocena prvog izvoda samog spektralnog razlaganja proizvoljne apsolutno neprekidne funkcije. U §4 je dokazana teorema o ravnomernoj ekvikonvergenciji prvog izvoda spektralnog razlaganja apsolutno neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem i prodiferenciranog trigonometrijskog Furijeovog reda te funkcije. U poslednjem paragrafu ukratko su razmotreni izvodi višeg reda spektralnog razlaganja koje je generisano samokonjugovanim produženjima operatora (1).

§1.- OSNOVNE PRETPOSTAVKE

Neka je $G = (a,b)$ konačan interval realne ose i $q(y)$ kompleksna funkcija iz klase $L_1(G)$. Označimo sa $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}$ proizvoljni potpuni i minimalni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija (u smislu definicija 1 i 2 glave I) operatora (1), i sa $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ odgovarajući sistem sopstvenih brojeva. Pri tome pretpostavljamo da skup brojeva $\{\sqrt{\lambda_n}: n\in N\}$ nema konačnih tačaka nagomilavanja, pa ga možemo numerisati po poretku neopadanja brojeva μ_n (videti jednakost (16), gl.II).

Osim toga, pretpostavljaćemo da brojevi λ_n zadovoljavaju uslove (18) i (19) iz prethodne glave, tj. da je

$$1) \quad |\mathrm{Im}\sqrt{\lambda_n}|\leq A \quad , \quad n\in N; \tag{2}$$

$$2) \quad \sum_{|\mu_n-\mu|\leq 1} 1 \quad B \quad , \text{ za svaki broj } \mu > 0 \,. \tag{3}$$

Pri tome konstanta A ne zavisi od λ_n, $n\in N$, a konstanta B ne zavisi od brojeva μ_n i μ .

S obzirom da je sistem funkcija $\{\overset{i}{u}_n(y)\}$ minimalan, postoji jedinstven, sa njim biortogonalno spregnut u prostoru $L_2(G)$ sistem funkcija $\{\overset{i}{v}_n(y)\}_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}$. Pretpostavljaćemo da je $\overset{0}{v}_n(y)$ sopstvena funkcija formalnog diferencijalnog operatora

$$\mathcal{L}^{*}(v) = -v''(y) + \overline{q(y)}v(y) \quad , \tag{4}$$

formalno spregnutog sa operatorom (1), koja odgovara sopstvenom broju $\overline{\lambda_n}$, a da je $\overset{1}{v}_n(y)$ pridružena funkcija operatora (4), koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{v}_n(y)$ i sopstvenom broju $\overline{\lambda_n}$.

Neka sistemi $\{\overset{i}{u}_n(y)\}$ i $\{\overset{i}{v}_n(y)\}$ zadovoljavaju uslove bazisnosti V.A.Iljina : za svaki kompakt K intervala G postoji konstanta $C(K)$ takva da je

$$\|\overset{i}{u}_n\|_{L_2(K)} \cdot \|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)} \leq C(K) \;, \; n \in N, \; i=0,1, \tag{5}$$

pri čemu konstanta $C(K)$ ne zavisi od $n \in N$ i $i=0,1$.

Napomenimo sada da, zbog uslova (2) i (3), konstante u svim ocenama iz glave I, koje ćemo ovde koristiti, ne zavise od brojeva λ_n. Osim toga, ocene (97) i (99) iz te glave važe i kada se umesto funkcija $\overset{i}{u}_n(y)$ stave njima kompleksno spregnute funkcije $\overline{\overset{i}{u}_n}(y)$.

Zbog specifičnosti problemâ koje tamo razmatramo, u §4 ćemo pretpostavljati da su funkcije $\overset{i}{v}_n(y)$ normirane tako da je

$$\|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)} = 1 \;, \; n \in N, \; i=0,1. \tag{6}$$

U tom paragrafu ćemo koristiti ocene funkcija $\overset{i}{u}_n(y)$ i njihovih izvoda u obliku koji proističe iz prethodne pretpostavke. Formulišimo ih stoga u sledećim lemama.

<u>L E M A 1</u>. Neka je $q(y) \in L_1(G)$. Tada postoji konstanta $C(G,q)$ takva da važe ocene

$$\sup_{y \in G} |\overset{i}{u}_n(y)| \leq C(G,q) \;, \; n \in N, \; i=0,1 \;. \tag{7}$$

<u>L E M A 2</u>. Neka je $q(y) \in L_1^{loc}(G)$. Tada za svaki kompakt $K \subset G$ postoji konstanta $C_1(K,q)$ takva da važe ocene

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \;\; \max_{x \in K} |\overset{i}{u}{}_n'(x)| \leq C_1(K,q) \;, \quad \text{za} \quad 0 \leq \mu_n \leq 1 \;; \\ &\text{b)} \;\; \max_{x \in K} |\overset{i}{u}{}_n'(x)| \leq C_1(K,q) \cdot |\sqrt{\lambda_n}| \;, \quad \text{za} \quad \mu_n > 1 \;. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

S obzirom da su funkcije $\overset{i}{v}_n(y)$ sopstvene i pridružene funkcije operatora (4), za njih važe ocene (97) i (99) iz glave I. Ove ocene biće nam potrebne u §2, pa ćemo i njih ovde formulisati u obliku posebne leme.

<u>L E M A 3</u>. Neka je $q(y) \in L_1(G)$. Tada postoji konstanta $D(G,q)$ takva da važe ocene

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \left|\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{i}{v}_n(y)}\,dy\right| \leq D(G,q)\cdot\|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)}, \qquad \text{za} \quad 0 \leq \mu_n \leq 1; \\ &\text{b)}\ \left|\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{i}{v}_n(y)}\,dy\right| \leq D(G,q)\cdot\frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}|}\cdot\|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)}, \qquad \text{za} \quad \mu_n > 1, \end{aligned} \tag{9}$$

ravnomerne u odnosu na brojeve y_1, y_2 koji zadovoljavaju uslov $a \leq y_1 < y_2 \leq b$.

§2.- <u>OCENA PRVOG IZVODA SPEKTRALNE FUNKCIJE ŠREDINGEROVOG OPERATORA</u>

Napomenimo da smo u §3, gl.II, spektralnom funkcijom operatora (1) nazvali funkciju

$$\theta(x,y,\mu) = \sum_{0 \leq \mu_n \leq \mu} \overset{i}{u}_n(x)\,\overline{\overset{i}{v}_n(y)}, \qquad x,y \in G, \tag{10}$$

gde je $\mu > 0$ proizvoljan broj. U ovom paragrafu dokazaćemo sledeću ocenu prvog izvoda te funkcije.

<u>T E O R E M A 1</u>. Neka je $q(y) \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$. Tada za svaki kompakt K intervala G postoji konstanta $B(K,q)$ takva da važi ocena

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x,y,\mu) - S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))\right] dy\right| \leq B(K,q). \tag{11}$$

Pri tome konstanta $B(K,q)$ ne zavisi od $x\in K$, od parametra $\mu>1$, , i od brojeva y_1, y_2 koji zadovoljavaju uslov $a\le y_1<y_2\le b$.

Ovde je sa $\omega_R(x,y,\mu)$ označena funkcija definisana jednakošću (33), gl.II, sa $S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))$ usrednjenje te funkcije (videti jednakost (66), gl.II), a sa $\frac{\partial}{\partial x}S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))$ sledeća funkcija:

$$\frac{\partial}{\partial x}S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin\mu|x-y|}{|x-y|}\right), & \text{za } |x-y|\le R_0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\mu|x-y|}{|x-y|}\frac{2R_0-|x-y|}{R_0\pi}\right), & R_0<|x-y|\le 2R_0, \\ 0, & \text{za } |x-y|>2R_0. \end{cases} \quad (12)$$

Pri tome je R_0 broj takav da je $0<2R_0<\rho(K,\partial G)$.

<u>D O K A Z</u>. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je kompakt K - segment $[c,d]$. Fiksirajmo tačku $x\in K$ i broj $\mu>1$. U § 3, gl.II, dokazana je sledeća jednakost po normi prostora $L_2(G$ (videti jednakost (68)):

$$S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) - \theta(x,y,\mu) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\bar\mu_n=\mu}\overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{0}{v}_n(y)} + \frac{1}{2}\sum_{\bar\mu_n=\mu}\overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{0}{v}_n(y)}S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) + \sum_{n=1}^{\infty}\overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\cdot S_{R_0}\left(\int_0^R \sin\mu h\,\sin\sqrt{\lambda_n}h\,dh\right) - \quad (13)$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{0}{v}_n(y)} \cdot S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} q(\zeta) \overset{0}{u}_n(\zeta) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\sqrt{\lambda_n}} d\zeta \right] dh \right) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} \cdot S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} q(\zeta) \overset{1}{u}_n(\zeta) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\sqrt{\lambda_n}} d\zeta \right] dh \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} S_{R_0} \cdot \left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} (|x-\zeta|-h) q(\zeta) \overset{0}{u}_n(\zeta) \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{2\pi \lambda_n} d\zeta \right] dh \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} \cdot S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} q(\zeta) \overset{0}{u}_n(\zeta) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\lambda_n^{3/2}} d\zeta \right] dh \right).$$

Neka su y_1 i y_2 brojevi takvi da je $a \leq y_1 < y_2 \leq b$. Iz konvergencije po normi prostora $L_2(G)$ redova na desnoj strani jednakosti (13) sledi njihova konvergencija po normi prostora $L_2(y_1,y_2)$. Kako je interval (y_1,y_2) konačan, to iz prethodnog sledi da se ovi redovi mogu integraliti član po član. Tako za fiksirano $\mu > 1$ dobijamo sledeću jednakost dveju funkcija promenljive x , $x \in K$:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) - \theta(x,y,\mu) \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \overset{0}{u}_n(x) \cdot \int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{0}{v}_n(y)} dy + \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \overset{1}{u}_n(x) \cdot \int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{0}{v}_n(y)} dy \right) \overset{0}{u}_n(x) S_{R_0}\left(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} dy \right) \overset{1}{u}_n(x) S_{R_0}\left(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)\right)$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} dy \right) \overset{0}{u}_n(x) S_{R_0}\left(\int_0^R \sin \mu h \frac{\sin\sqrt{\lambda_n} h}{\sqrt{\lambda_n}} dh \right) - \qquad (14)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{0}{v}_n(y)} dy \right) S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} q(\zeta) \overset{0}{u}_n(\zeta) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\pi\sqrt{\lambda_n}} d\zeta \right] dh \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} dy \right) S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} q(\zeta) \overset{1}{u}_n(\zeta) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\pi\sqrt{\lambda_n}} d\zeta \right] dh \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)} dy \right) S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} (|x-\zeta|-h) q(\zeta) \overset{0}{u}_n(\zeta) \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{2\pi \lambda_n} d\zeta \right] dh \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)}dy \right) S_{R_0} \left(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \left[\int_{x-l}^{x+l} q(\zeta) \overset{0}{u}_n(\zeta) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{2\pi \lambda_n^{3/2}} d\zeta \right] dh \right) .$$

Dalje ćemo dokazivati sledeće činjenice: svaka od devet funkcija $g_i(x,y_1,y_2;\mu)$ na desnoj strani jednakosti (14) ima izvod po x na kompaktu K i taj izvod je odozgo ograničen ravnomerno po x K , kao i u odnosu na veličine $\mu \in (1,\infty)$ i y_1,y_2 .

Zbog uslova (3) sume $g_1(x,y_1,y_2;\mu)$ i $g_2(x,y_1,y_2;\mu)$ sadrže konačno mnogo sabiraka od kojih je svaki diferencijabilna funkcija na kompaktu K, pa su i te funkcije diferencijabilne na K . Osim toga, za izvod prve od njih, na primer, važi ocena

$$|g_1'(x,y_1,y_2;\mu)| \leq \frac{1}{2} \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \max_{x\in K} |\overset{0}{u}{}_n'(x)| \left| \int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{0}{v}_n(y)}dy \right| \leq$$

$$\frac{1}{2} C_1(K,q)\cdot D(G,q)\cdot \sum_{\bar{\mu}_n=\mu} \|\overset{0}{u}_n\|_{L_2(K_R)} \cdot \|\overset{0}{v}_n\|_{L_2(G)}$$

$$\frac{1}{2} C_1(K,q)\cdot D(G,q)\cdot C(K_R)\cdot B \quad .$$

Ovde je upotrebljena ocena (65), gl.I, kao i ocene (3),(5) i (9).

Ista ocena važi i za izvod funkcije $g_2(x,y_1,y_2;\mu)$.

Razmotrimo funkciju

$$g_3(x,y_1,y_2;\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{0}{v}_n(y)}dy \right) \cdot \overset{0}{u}_n(x) \cdot S_{R_0}\left(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)\right) \quad . \qquad (15)$$

Koristeći ocene (47), gl.II, kao i ocene (3),(5) i (9), a isto tako i ocenu (8), gl.I, može se pokazati da red (15) konvergira ravnomerno po x na kompaktu K, za fiksirane $\mu > 1$ i y_1,y_2 . Ova činjenica važi i za sve ostale funkcionalne redove $g_4(x,y_1,y_2;\mu$

$- g_9(x,y_1,y_2;\mu)$. Zbog toga su sve te funkcije, pre svega, definisane i neprekidne na kompaktu K. Da bismo dokazali i njihovu diferencijabilnost, dovoljno je dokazati da redovi dobijeni diferenciranjem član po član redova na desnoj strani jednakosti (14) konvergiraju ravnomerno po x na kompaktu K. Zbog obimnosti tih dokaza ovde ćemo dati samo kratka objašnjenja.

Imajući u vidu ocene (65), gl.I, (47), gl.II, kao i ocene (3),(5) i (9), ravnomernu konvergenciju po $x \in K$ prodiferenciranog reda (15) i ravnomernu ograničenost njegove sume u odnosu na veličine μ i y_1, y_2, dokazujemo na potpuno isti način kao što je to učinjeno u slučaju reda (53), gl.II. Isto važi i za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)dy} \Big) \cdot \overset{1}{u}_n'(x) \cdot S_{R_0}\big(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)\big) .$$

Tehnika upotrebljena za dokazivanje konvergencije reda (54) gl.II, može se primeniti u slučaju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{y_1}^{y_2} \overline{\overset{1}{v}_n(y)dy} \Big) \cdot \overset{0}{u}_n'(x) \cdot S_{R_0}\Big(\int_0^R \sin\mu h \, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}} \, dh \Big) .$$

Pri tome treba koristiti ocenu koja sledi iza jednakosti (75) u glavi I, zatim ocene (29)-(30) i (55) iz glave II, kao i ocene (3), (5) i (9).

Razmotrimo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{y_1}^{y_2} \overset{0}{v}_n(y)dy \Big) \frac{\partial}{\partial x} S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}} d\xi \Big] dh \Big) .$$

Kako je

$$\frac{d}{dx} S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi) \cdot \overset{0}{u}_n(\xi) \cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}} d\xi \Big] dh \Big) =$$

$$= S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi) \cdot \cos\sqrt{\lambda_n}(x-\xi-h)d\xi \Big] dh -$$

$$-\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_x^{x+\ell} q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\cos\sqrt{\lambda_n}(\zeta-x-h)d\zeta\right]dh\ ) \quad ,$$

to se prethodni red može pretstaviti u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{y_1}^{y_2}\overline{\overset{0}{v}_n(y)}dy\right)\cdot S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-\ell}^{x} q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\zeta-h)d\zeta\ - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\int_x^{x+\ell} q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\cos\sqrt{\lambda_n}(\zeta-x-h)d\zeta\right]dh\ \right) . \tag{16}$$

Primetimo prvo da za integrale

$$\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-\ell}^{x} q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\zeta-h)d\zeta\right]dh \quad ,$$
$$\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_x^{x+\ell} q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\cos\sqrt{\lambda_n}(\zeta-x-h)d\zeta\right]dh$$

i za njihova usrednjenja važe ocene tipa (61), gl.II . Imajući to u vidu, kao i ocene (8), gl.I, (3),(5) i (9), nije teško proveriti da se za dokaz ravnomerne konvergencije po $x\in K$ i ravnomerne ograničenosti po μ i y_1, y_2 redova (16) može upotrebiti ista shema kao u dokazu konvergencije reda (56), gl.II .

Ista napomena važi i za red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{y_1}^{y_2}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}dy\right)\cdot \frac{d}{dx}S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-\ell}^{x+\ell} q(\zeta)\overset{1}{u}_n(\zeta)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\zeta\right]dh\right) .$$

Što se tiče reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{y_1}^{y_2}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}dy\right)\cdot \frac{d}{dx}S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-\ell}^{x+\ell}(|x-\zeta|-h)q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\zeta|-h)}{\lambda_n}d\zeta\right]dh\right),$$

imajući u vidu da je

$$\frac{d}{dx}S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_x^{x+\ell}(\zeta-x-h)q(\zeta)\overset{0}{u}_n(\zeta)\cos\sqrt{\lambda_n}(\zeta-x-h)d\zeta\ + \right.\right.$$

$$+\int_{x-l}^{x}(x-\xi-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\xi-h)d\xi\Big]dh\ \Big) =$$

$$= S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\xi-h)d\xi -$$

$$- \int_x^{x+l} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(\xi-x-h)d\xi\Big]dh\ \Big) +$$

$$+ \sqrt{\lambda_n}S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_x^{x+l}(\xi-x-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(\xi-x-h)d\xi -$$

$$- \int_{x-l}^{x}(x-\xi-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(x-\xi-h)d\xi\Big]dh\ \Big),$$

taj red možemo predstaviti u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{y_1}^{y_2}\overline{\overset{1}{v}_n(y)dy}\Big)\cdot S_{R_0}\Big(\int_0^R\frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\ \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\xi-h)}{\lambda_n}d\xi -$$

$$- \int_x^{x+l} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\ \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(\xi-x-h)}{\lambda_n}d\xi\Big]dh\ \Big) + \tag{17}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{y_1}^{y_2}\overline{\overset{1}{v}_n(y)dy}\Big)S_{R_0}\Big(\int_0^R\frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_x^{x+l}(\xi-x-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(\xi-x-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi -$$

$$- \int_{x-l}^{x}(x-\xi-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(x-\xi-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi\Big]dh\ \Big).$$

Primetimo opet da za usrednjenjâ na desnoj strani (17) važe ocene tipa (61)-(62), gl.II.. Koristeći ocene (29)-(30), gl.II, kao i ocene (3),(5) i (9), konvergenciju redova (17) i ravnomernu ograničenost njihovih suma dokazujemo na isti način na koji smo dokazali konvergenciju reda (63), gl.II .

Ista napomena važi i za red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{y_1}^{y_2}\overset{1}{v}_n(y)dy\Big)\ \frac{d}{dx}\,S_{R_0}\Big(\int_0^R\frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x+l}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n^{3/2}}d\xi\Big]dh$$

Rezimirajući prethodno izlaganje, možemo reći sledeće. Ako sa $g(x,y_1,y_2;\mu)$ označimo funkciju na desnoj strani jednakosti (14), tj. $g(x,y_1,y_2;\mu) = \sum_{i=1}^{g} g_i(x,y_1,y_2;\mu)$, onda na segmentu K postoji izvod po x te funkcije i važi ocena

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,y_1,y_2;\mu)\right| \leq B(K,q) \quad , \tag{18}$$

pri čemu konstanta $B(K,q)$ zavisi samo od kompakta K i potencijala $q(y)$.

Odatle sledi da, ako sa $f(x,y_1,y_2;\mu)$ označimo funkciju na levoj strani jednakosti (14), postoji izvod po x te funkcije na segmentu K i da za taj izvod važi ocena (18).

Sa druge strane, može se proveriti da važi jednakost

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y_1,y_2;\mu) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x}\left[S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu) - \theta(x,y,\mu)\right] dy \quad .$$

Iz ove jednakosti i ocene (18) sledi ocena (11).

Dokaz teoreme 1 je završen.

<u>N A P O M E N A</u>. Neka je $\hat{\theta}(x,y,\mu)$ spektralna funkcija koja odgovara potpunom i minimalnom sistemu $\left\{\hat{\overset{i}{u}}_n(y)\right\}_{n=1,\, i=0,1}^{\infty}$ sopstvenih i pridruženih funkcija operatora

$$\hat{\ell}(u) = - u''(y) + \hat{q}(y)u(y) \quad , \tag{19}$$

gde je $\hat{q}(y) \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$. Označimo sa $\left\{\hat{\overset{i}{v}}_n(y)\right\}$ biortogonalno spregnuti sa sistemom $\left\{\hat{\overset{i}{u}}_n(y)\right\}$ sistem funkcija u prostoru $L_2(G)$, čiji su elementi sopstvene i pridružene funkcije formalnog diferencijalnog operatora $\hat{\ell}^*(v)$, formalno spregnutog sa operatorom (19). Ako pretpostavimo da sopstveni brojevi $\{\hat{\lambda}_n\}$ operatora (19) zadovoljavaju uslove (2) i (3), a pomenuti sistemi funkcija uslove

(5), onda iz ocene (11) sledi ocena

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\vartheta(x,y,\mu) - \hat{\vartheta}(x,y,\mu)\right] dy = O(1), \ \mu \to +\infty, \tag{20}$$

ravnomerna u odnosu na x na svakom kompaktu K intervala G, i u odnosu na brojeve $y_1, y_2 \in [a,b]$, $y_1 < y_2$.

§3.- OCENA PRVOG IZVODA SPEKTRALNOG RAZLAGANJA APSOLUTNO NEPREKIDNE FUNKCIJE

Neka je $f(y)$ proizvoljna kompleksna apsolutno neprekidna funkcija definisana na segmentu $[a,b]$ i neka je $\mu > 0$ proizvoljan broj. Podsetimo da spektralnim razlaganjem poretka μ funkcije $f(y)$, koje odgovara sistemu $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{\infty}$ sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1), nazivamo funkciju

$$\sigma_\mu(y,f) = \sum_{\substack{0 \le \mu_n \le \mu \\ i=0,1}} (f, \overset{i}{v}_n)_{L_2(G)} \cdot \overset{i}{u}_n(y), \quad y \in G. \tag{21}$$

Neka je K proizvoljan kompakt intervala G i $R_0 > 0$ bro takav da je $2R_0 < \rho(K, \partial G)$. Iz (12) sledi da za svako fiksirano $x \in K$ i $\mu > 1$ funkcija $\frac{\partial}{\partial x} S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))f(y)$ jeste integrabiln po y na segmentu $[a,b]$. Uvedimo oznaku

$$\frac{d}{dx} S_\mu^{R_0}(x,f) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))f(y)dy, \tag{22}$$

gde $x \in K$.

U ovom paragrafu dokazaćemo sledeću teoremu.

T E O R E M A 2. Neka je $q(y) \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$. Tada za svaki kompakt $K \subset G$ postoji konstanta $E(K,q)$ takva da važi ocena

$$\left|\frac{d}{dx}\,\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}\,S_\mu^{R_0}(x,f)\right| \le E(K,q)\cdot\|f\|_{W_1^1(G)} \quad , \tag{23}$$

Pri tome konstanta $E(K,q)$ ne zavisi od $x\in K$ i $\mu>1$, .

D O K A Z. Napomenimo prvo da je

$$\|f\|_{W_1^1(G)} = \|f\|_{L_1(G)} + \|f'\|_{L_1(G)} \quad .$$

Definišimo na segmentu $[a,b]$ apsolutno neprekidne funkci je $g(y)$ i $h(y)$ na sledeći način:

$$g(y) = \frac{f(b)}{b-a}\,(y-a) \quad , \quad h(y) = f(y) - g(y) \quad . \tag{24}$$

Razmotrimo funkciju

$$\frac{d}{dx}\,\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}\,S_\mu^{R_0}(x,f) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left[\vartheta(x,y,\mu) - S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))\right]\cdot g(y)dy \; + \tag{25}$$
$$+ \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left[\vartheta(x,y,\mu) - S_{R_0}(\omega_R(x,y\mu))\right]h(y)dy \quad .$$

S obzirom da oba parcijalna izvoda pod znakom integralâ na desnoj strani jednakosti (25) za svako fiksirano $x\in K$ predsta vljaju neprekidne funkcije po $y\in[a,b]$, osim u tačkama $x\pm R_0$ i $x\pm 2R_0$, jednakost (25) možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dx}\,\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}\,S_\mu^{R_0}(x,f) = \tag{26}$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y}\int_y^b \frac{\partial}{\partial x}\Big(S_{R_0}(\omega_R(x,\xi,\mu)) - \vartheta(x,\xi,\mu)\Big)\,d\xi\right]g(y)dy \; +$$
$$+ \int_a^b h(y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\Big(\vartheta(x,\xi,\mu) - S_{R_0}(\omega_R(x,\xi,\mu))\Big)\,d\xi\right]dy \quad .$$

Primenjujući parcijalnu integraciju i imajući u vidu da su zbog (24), obe dvostruke zamene jednake nuli, iz (26) dobijamo jed nakost

$$\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}S_\mu^{R_0}(x,f) =$$

$$= \int_a^b \Big[\int_y^b \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta(x,\zeta,\mu) - S_{R_0}(\omega_R(x,\zeta,\mu)))d\zeta\Big]\cdot g'(y)dy + \tag{27}$$

$$+ \int_a^b \Big[\int_a^y \frac{\partial}{\partial x}(S_{R_0}(\omega_R(x,\zeta,\mu)) - \vartheta(x,\zeta,\mu))d\zeta\Big]\cdot h'(y)dy \quad .$$

Primenimo sada ocenu (11). Iz (27) sledi nejednakost

$$\left|\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}S_\mu^{R_0}(x,f)\right| \leq B(K,q)(\|g'\|_{L_1(G)} + \|h'\|_{L_1(G)}) \quad ,$$

ravnomerno po $x \in K$ i $\mu > 1$.

Može se pokazati da se veličine $\|g'\|_{L_1(G)}$ i $\|h'\|_{L_1(G)}$ mogu oceniti odozgo pomoću veličine $\|f\|_{W_1^1(G)}$. Na taj način, iz prethodne nejednakosti sledi ocena (23).

Dokaz teoreme 2 je završen.

N A P O M E N A 1. Neka je $\hat{\sigma}_\mu(y,f)$ spektralno razlaganje posmatrane funkcije $f(y)$, koje odgovara operatoru (19), opisanom u napomeni u prethodnom paragrafu. Tada, imajući u vidu da funkcij $\frac{d}{dx}S_\mu^{R_0}(x,f)$ ne zavisi od operatora, iz ocene (23) dobijamo sledeć ocenu, glavni cilj naših razmatranja u ovom paragrafu:

$$\left|\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}\hat{\sigma}_\mu(x,f)\right| \leq E(K,q,\hat{q})\cdot\|f\|_{W_1^1(G)} \quad . \tag{28}$$

Pri tome konstanta $E(K,q,q)$ ne zavisi od $x \in K$ i $\mu > 1$.

N A P O M E N A 2. Ocena (28) je tačna po poretku u tom smislu što se konstanta $E(K,q,\hat{q})$ ne može zameniti veličinom $o(1), \mu \rightarrow +$

Odatle sledi tačnost u ukazanom smislu i ocene (23).

Tačnost ocene (28) ćemo dokazati pomoću sledećeg primera koji pripada V.A.Iljinu.

Razmotrimo na intervalu $G = (0,\pi)$ operator $L(u) = - u''(y)$, definisan graničnim uslovima $u(0) = u(\pi) = 0$, kao i operator $\hat{L}(u) = - u''(y)$, definisan graničnim uslovima $u'(0) = u'(\pi) = 0$. Posmatrajmo spektralna razlaganja poretka $\mu = 2n-1$, $n \in N$, funkcije $f(y) = 1$, koja odgovaraju pomenutim operatorima. Tako dobijamo jednakost

$$\frac{d}{dx}\,\sigma_{2n-1}(x,f) - \frac{d}{dx}\,\hat{\sigma}_{2n-1}(x,f) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,. \tag{29}$$

Neka je K proizvoljan kompakt, smešten strogo unutar intervala G i takav da $\frac{\pi}{2} \notin K$. Tada je za svaki $x \in K$ ispunjena nejednakost

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{d}{dx}\,\sigma_{2n-1}(x,f) - \frac{d}{dx}\,\hat{\sigma}_{2n-1}(x,f)\right] > 0\,.$$

§ 4.- <u>TEOREMA O EKVIKONVERGENCIJI PRVIH IZVODA SPEKTRALNIH RAZLAGANJA APSOLUTNO NEPREKIDNE FUNKCIJE SA KOMPAKTNIM NOSAČEM</u>

U ovom paragrafu razmatraćemo apsolutno neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem, definisane na konačnom segmentu $\overline{G} = [a,b]$.

<u>D E F I N I C I J A 1 ([17])</u>. Sistem funkcija $\{w_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ iz prostora $L_2(G)$ obrazuje na intervalu G trag Beselove baze ako za svaki kompakt $K \subset G$ postoji konstanta $C(K)$ takva da za svaku funkciju $f(y) \in \overset{\circ}{L}_2(K)$ važi nejednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(f,w_n)_{L_2(G)}\right|^2 \leq C(K)\cdot\|f\|^2_{L_2(G)}\,. \tag{30}$$

Pretpostavimo da sistem funkcija $\{w_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ obrazuje trag Beselove baze na intervalu G i da je ravnomerno ograničen, tj. da postoji konstanta M takva da je

$$\sup_{y\in G}|w_n(y)| \leq M \quad , \quad n \in N, \tag{31}$$

pri čemu konstanta M ne zavisi od n . Tada se identično kao u knjizi [11] , str.154, može dokazati sledeći analogon poznate Risove teoreme o Furijeovim koeficijentima funkcije iz klase $L_p(G)$ u odnosu na ravnomerno ograničeni ortogonalni sistem funkcija.

L E M A 4. Neka je $1 < p \leq 2$ i r broj takav da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$. Ako je $f(y) \in L_p(G)$ funkcija sa kompaktnim nosačem $K_f \subset G$, onda njeni Furijeovi koeficijenti

$$f_n = \int_a^b f(y)\cdot\overline{w_n(y)}\, dy \quad , \quad n \in N,$$

zadovoljavaju nejednakost

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^r\right\}^{1/r} \leq M^{2/p-1}\cdot(C(K_f))^{2/r}\cdot\|f\|_{L_p(G)} \quad , \tag{32}$$

gde je $C(K_f)$ konstanta iz ocene (30), a M konstanta iz ocene (31

T E O R E M A 3. Neka je f(y) apsolutno neprekidna funkcija sa kompaktnim nosačem, definisana na segmentu [a,b] . Ako

a) potencijali q(y) i $\hat{q}(y)$ pripadaju klasi $L_p(G)$, $1 < p < \infty$ i sistemi funkcija $\{\overset{i}{v}_n(y)\}$ i $\{\overset{\hat{i}}{v}_n(y)\}$ predstavljaju tragove Beselove baze na intervalu G ,

ili

b) potencijali $q(y)$ i $\hat{q}(y)$ jesu apsolutno neprekidne funkcije na segmentu $[a,b]$,

onda za izvode spektralnih razlaganja koja odgovaraju operatorima (1) i (19) važi ocena

$$\frac{d}{dx}\,\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}\,\hat{\sigma}_\mu(x,f) = o(1),\ \mu\to+\infty, \tag{33}$$

ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G.

<u>D O K A Z</u>. Dokažimo teoremu prvo u slučaju pretpostavke a).

Neka je K proizvoljni segment intervala G i $\varepsilon>0$ - proizvoljan broj. Za datu funkciju $f(y)$ postoji beskonačno diferencijabilna na $[a,b]$ funkcija $g(y)$ sa kompaktnim nosačem, takva da važi ocena

$$\|f - g\|_{W_1^1(G)} \leq \frac{\varepsilon}{2E(K,q,\hat{q})}, \tag{34}$$

gde je $E(K,q,\hat{q})$ konstanta iz ocene (28) (videti [42]).

Dokažimo da $\frac{d}{dx}\,\sigma_\mu(x,g)$ ravnomerno na kompaktu K konvergira ka $\frac{d}{dx}\,g(x)$, kada $\mu\to+\infty$. Imajući u vidu da funkcija $\overset{\circ}{v}_n(y)$ jeste sopstvena funkcija operatora (4), koja odgovara sopstvenom broju $\bar{\lambda}_n$, može se pokazati da se Furijeov koeficijent

$$\overset{\circ}{g}_n = \int_a^b g(y)\cdot\overline{\overset{\circ}{v}_n(y)}\,dy$$

funkcije $g(y)$, koji odgovara onim indeksima n za koje je $\lambda_n\neq 0$, može predstaviti u obliku

$$\overset{\circ}{g}_n = \frac{1}{\bar{\lambda}_n}\,\overset{\circ}{h}_n, \tag{35}$$

gde je sa $\overset{\circ}{h}_n$ označen odgovarajući Furijeov koeficijent funkcije

$$h(y) = -g''(y) + \overline{q(y)}g(y) \quad , \tag{36}$$

koja pripada klasi $L_p(G)$ i ima kompaktan nosač $K_h \subset G$.

Isto tako, funkcija $\overset{1}{v}_n(y)$ jeste pridružena funkcija operatora (4), koja odgovara sopstvenoj funkciji $\overset{0}{v}_n(y)$ i sopstvenom broju $\overline{\lambda_n}$. Imajući to u vidu, nije teško pokazati da se Furijeov koeficijent

$$\overset{1}{g}_n = \int_a^b g(y)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}dy$$

funkcije $g(y)$, koji odgovara onim indeksima n za koje je $\lambda_n \neq 0$ može predstaviti u obliku

$$\overset{1}{g}_n = \frac{1}{\overline{\lambda_n}}\overset{1}{h}_n - \frac{1}{\overline{\lambda_n}}\overset{0}{g}_n \quad ,$$

ili, s obzirom na jednakost (35), u obliku

$$\overset{1}{g}_n = \frac{1}{\overline{\lambda_n}}\overset{1}{h}_n - \frac{1}{(\overline{\lambda_n})^2}\overset{0}{h}_n \quad . \tag{37}$$

Koristeći (35) i (37), pokažimo prvo da $\sigma_\mu(x,g)$ ravnomerno na kompaktu K konvergira ka funkciji $g(x)$, kada $\mu \to +\infty$. Zaista, pre svega važi ocena

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}\left|\int_a^b g(y)\overline{\overset{i}{v}_n(y)}dy\right||\overset{i}{u}_n(x)| \leq \sum_{\substack{0\leq\mu_n\leq 1\\ i=0,1}}\left|\int_a^b g(y)\overline{\overset{i}{v}_n(y)}dy\right||\overset{i}{u}_n(x)| \; + \\ + \sum_{\substack{\mu_n>1\\ i=0,1}}\frac{1}{|\lambda_n|}|\overset{i}{h}_n||\overset{i}{u}_n(x)| + \sum_{\mu_n>1}\frac{1}{|\lambda_n^2|}|\overset{0}{h}_n||\overset{0}{u}_n(x)| \quad .\end{aligned} \tag{38}$$

Primetimo zatim, da za funkcije $\overset{i}{v}_n(y)$, $n \in N$, $i=0,1$, važe ocene (7) u kojima ćemo konstante označavati sa $C^*(G,q)$. Koristeći ocene (3) i (7), možemo oceniti sume na desnoj strani (38) na sledeći način:

$$1) \sum_{\substack{0\leq\mu_n\leq 1\\ i=0,1}}\left|\int_a^b g(y)\overset{i}{v}_n(y)dy\right||\overset{i}{u}_n(x)| \leq 2\cdot C(G,q)\cdot C^*(G,q)\cdot B\cdot\|g\|_{L_1(G)} \quad .$$

2) $\sum\limits_{\substack{\mu_n>1\\ i=0,1}} \frac{1}{|\lambda_n|}|\overset{i}{h}_n|\,|\overset{i}{u}_n(x)| \leq 2\,C(G,q)C^*(G,q)B\|h\|_{L_1(G)}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

3) $\sum\limits_{\mu_n>1} \frac{1}{|\lambda_n^2|}|\overset{0}{h}_n||\overset{0}{u}_n(x)| \leq C(G,q)C^*(G,q)B\|h\|_{L_1(G)}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$.

Iz (38) i 1)-3) sledi da $\sigma_\mu(x,g)$ ravnomerno na kompaktu K konvergira ka nekoj neprekidnoj funkciji, kada $\mu\to+\infty$. Da je ta funkcija upravo g(x) (sa g(x) označavamo restrikciju funkcije g(y) na kompakt K), sledi iz činjenice da sistem funkcija $\{\overset{i}{v}_n(x)\}_{n=1,\ i=0,1}^{\infty}$ jeste potpuni sistem funkcija u prostoru $L_2(K)$. Ova poslednja činjenica lako se dobija iz tvrdjenja b) teoreme 5, gl.II

Preostalo nam je još da pokažemo da $\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,g)$ konvergira ravnomerno na kompaktu K , kada $\mu\to+\infty$. Koristeći (35) i (37), dobijamo prvu majoraciju

$$\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}|\overset{i}{g}_n||\overset{i}{u}{}'_n(x)| \leq \sum_{\substack{0\leq\mu_n\leq 1\\ i=0,1}}|\overset{i}{g}_n||\overset{i}{u}{}'_n(x)| + \sum_{\substack{\mu_n>1\\ i=0,1}}\frac{1}{|\lambda_n|}|\overset{i}{h}_n||\overset{i}{u}{}'_n(x)| + \sum_{\mu_n>1}\frac{1}{|\lambda_n^2|}|\overset{i}{h}_n||\overset{i}{u}{}'_n(x)| \ . \tag{39}$$

Pokažimo da redovi na desnoj strani (39) konvergiraju ravnomerno po x na kompaktu K .

1) S obzirom na ocene (3),(7) i (8), važi ocena

$$\sum_{\substack{0\leq\mu_n\leq 1\\ i=0,1}}|\overset{i}{g}_n||\overset{i}{u}{}'_n(x)| \leq 2\cdot C^*(G,q)C_1(K,q)B\|g\|_{L_1(G)} \ .$$

2) Koristeći iste ocene, dobijamo nejednakost

$$\sum_{\mu_n>1}\frac{1}{|\lambda_n^2|}|\overset{0}{h}_n||\overset{0}{u}{}'_n(x)| \leq C^*(G,q)C_1(K,q)B\|h\|_{L_1(G)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \ .$$

3) Imajući u vidu ocene (3), (8) i (32), dobijamo ocenu

$$\sum_{\substack{\mu_n>1\\ i=0,1}} \frac{1}{|\lambda_n|}|\overset{i}{h}_n||\overset{i}{u}_n'(x)| \leq C_1(K,q)(2B)^{1/p}(C^*(G,q))^{2/p-1}(C(K_h))^{2/r}\cdot$$

$$\cdot\|h\|_{L_p(G)}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}\Big)^{1/p} \quad .$$

Prilikom dobijanja ocena 1)-3) koristili smo sledeći postupak: opšti član funkcionalnog reda majorirali smo opštim član nekog numeričkog reda koji konvergira i čija se suma može oceniti odozgo pomoću veličina koje stoje na desnim stranama ocenâ 1)-3) Na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma odatle sledi ravnomerna konvergencija pomenutih funkcionalnih redova na kompaktu K . Prime timo još da smo taj kriterijum često koristili u prethodnoj glavi a koristićemo ga i u sledećoj, ne pozivajući se direktno na njega

Iz prethodnog izlaganja sledi da za dati $\varepsilon>0$ postoji $\mu(\varepsilon)>0$ takav da važi

$$\mu>\mu(\varepsilon) \Longrightarrow \Big|\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,g) - \frac{d}{dx}g(x)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ , \qquad (40)$$

za $x\in K$.

Analogno se dokazuje ta činjenica za biortogonalni sistem funkcija $\{\hat{\overset{i}{u}}_n(y), \hat{\overset{i}{v}}_n(y)\}$, generisan operatorom (19): postoji $\hat{\mu}(\varepsilon)>0$ takav da važi

$$\mu>\hat{\mu}(\varepsilon) \Longrightarrow \Big|\frac{d}{dx}\hat{\sigma}_\mu(x,g) - \frac{d}{dx}g(x)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ , \qquad (41)$$

za $x\in K$.

Neka je $\tilde{\mu}(\varepsilon) = \max\{\mu(\varepsilon), \hat{\mu}(\varepsilon)\}$. Tada, imajući u vidu ocene (28), (34), (40) i (41), dobijamo

$$\mu>\tilde{\mu}(\varepsilon) \Longrightarrow \Big|\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,f) - \frac{d}{dx}\hat{\sigma}_\mu(x,f)\Big| \leq E(K,q,\hat{q})\|f-g\|_{W_1^1(G)}$$

$$+ \Big|\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,g) - \frac{d}{dx}g(x)\Big| + \Big|\frac{d}{dx}\hat{\sigma}_\mu(x,g) - \frac{d}{dx}g(x)\Big| \leq \varepsilon ,$$

za $x\in K$.

Time bi dokaz ocene (33) u slučaju pretpostavke a) bio završen.

U slučaju pretpostavke b) dokaz ravnomerne konvergencije reda $\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,g)$ daleko je jednostavniji. Naime, tada funkcija

$$h(y) = -g''(y) + \overline{q(y)}g(y)$$

jeste apsolutno neprekidna na G i ima kompaktan nosač. Njeni Furijeovi koeficijenti se mogu predstaviti u obliku

$$\overset{0}{g}_n = \frac{1}{\overline{\lambda_n^2}}\int_a^b h'(y)\overline{\overset{0}{v}{}_n'(y)}dy + \frac{1}{\overline{\lambda_n^2}}\int_a^b h(y)\overline{q(y)}\,\overline{\overset{0}{v}_n(y)}dy \quad ,$$

odnosno

$$\overset{1}{g}_n = \frac{1}{\overline{\lambda_n^2}}\int_a^b h'(y)\overline{\overset{1}{v}{}_n'(y)}dy + \frac{1}{\overline{\lambda_n^2}}\int_a^b h(y)\overline{q(y)}\,\overline{\overset{1}{v}_n(y)}dy \; -$$

$$- \frac{1}{\overline{\lambda_n^2}}\int_a^b h(y)\overline{\overset{0}{v}_n(y)}dy - \frac{1}{\overline{\lambda_n}}\overset{0}{g}_n \quad .$$

Iz ovih jednakosti, koristeći ocene (7) i (8) (ove poslednje u obliku u kome umesto K stoji G), dobijamo ocene

$$|\overset{i}{g}_n| \leq \overset{i}{\mathrm{Const}}(G,q,h)\,\frac{1}{|\lambda_n^{3/2}|} \quad .$$

Pomoću ovih ocena lako se dobija ocena

$$\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty} \left|\int_a^b g(y)\overline{\overset{i}{v}_n(y)}dy\right| |\overset{i}{u}{}_n'(x)| \leq \mathrm{Const}(G,q,h,B)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad ,$$

odakle sledi ravnomerna po x na kompaktu K konvergencija reda $\frac{d}{dx}\sigma_\mu(x,g)$, kada $\mu\to+\infty$.

U svim ostalim detaljima dokaz je isti kao u slučaju pretpostavke a) . Dokaz teoreme 3 je završen.

§5.- O IZVODIMA VIŠEG REDA

Ovde ćemo navesti bez dokaza neke činjenice koje se odnose na drugi izvod spektralnog razlaganja apsolutno neprekidne funkcije koje je generisano proizvoljnim nenegativnim samokonjugovanim produženjem operatora (1), definisanog na konačnom intervalu G.

Neka su $\sigma_\mu(y,f)$ i $\hat{\sigma}_\mu(y,f)$ spektralna razlaganja funkcije $f(y)$ koja na segmentu $[a,b]$ ima apsolutno neprekidan prvi izvod, koja su generisana proizvoljnim nenegativnim samokonjugovanim produženjima dva operatora

$$\ell(u) = -u''(y)+q(y)u(y)\ , \quad \hat{\ell}(u) = -u''(y)+\hat{q}(y)u(y)\ , \tag{42}$$

čiji potencijali zadovoljavaju uslove

$$q(y)\in C(G)\cap L_p(G)\ ,\ 1<p<\infty,\quad \hat{q}(y)\in C(G)\cap L_{\hat{p}}(G),\ 1<\hat{p}<\infty, \tag{43}$$

Tada važe sledeća tvrdjenja.

T E O R E M A 4. Ako potencijali $q(y)$ i $\hat{q}(y)$ zadovoljavaju uslove (43), onda važi ocena

$$\frac{1}{\mu}\left[\frac{d^2}{dx^2}\sigma_\mu(x,f) - \frac{d^2}{dx^2}\hat{\sigma}_\mu(x,f)\right] = O(1),\ \mu\to+\infty, \tag{44}$$

ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G. Pri tome ocena O - članova na desnoj strani (44) zavisi samo od kompakta K, funkcije $f(y)$ i od potencijalâ $q(y)$, $\hat{q}(y)$.

T E O R E M A 5. Ako se, pored uslova teoreme 4, još zahteva da funkcija $f(y)$ ima na intervalu G kompaktan nosač i da je $q''(y)\in L_1(G)$, $q''(y)\in L_1(G)$, onda važi ocena

$$\frac{1}{\mu}\cdot\left[\frac{d^2}{dx^2}\,\sigma_\mu(x,f) - \frac{d^2}{dx^2}\,\hat{\sigma}_\mu(x,f)\right] = o(1)\ ,\quad \mu\to+\infty\ , \tag{45}$$

ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G.

Kao što to pokazuje primer koji smo razmotrili u § 3 , ocena (44) se efektivno realizuje. To znači da je ta ocena tačna po poretku u tom smislu što se umesto veličine $O(1)$ ne može pisati $o(1)$, kada $\mu\to+\infty$. Medjutim, ocene (44) i (45) nisu tačne po poretku u odnosu na parametar μ .

Zaista, razmotrimo nenegativna samokonjugovana produženja operatorâ (42), koja su definisana graničnim uslovima oblika

$$u'(a) = u'(b) = 0\ ,$$

pri čemu potencijali $q(y)$ i $\hat{q}(y)$ zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} q(y)&\in C^{(\alpha)}(G)\cap L_p(G)\ ,\quad 0<\alpha<1,\ 1<p<\infty\ ,\\ \hat{q}(y)&\in C^{(\hat{\alpha})}(G)\cap L_{\hat{p}}(G)\ ,\quad 0<\hat{\alpha}<1,\ 1<\hat{p}<\infty\ . \end{aligned} \tag{46}$$

Primetimo da funkcija $h(y)$ pripada Helderovoj klasi $C^{(\alpha)}(G)$ ako njen moduo neprekidnosti $\omega(\delta,h)$ ima poredak $O(\delta^{\alpha})$.

Neka su, kao i u prethodnom opštem slučaju, $\sigma_\mu(y,f)$ i $\hat{\sigma}_\mu(y,f)$ odgovarajuća spektralna razlaganja funkcije $f(y)$ koja na segmentu $[a,b]$ ima apsolutno neprekidan prvi izvod. Tada se mogu dokazati sledeća tvrdjenja.

<u>T E O R E M A 6</u>. Ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G važi ocena

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\sigma_\mu(x,f) - \frac{d^2}{dx^2}\,\hat{\sigma}_\mu(x,f) = O(1),\ \mu\to+\infty\ . \tag{47}$$

T E O R E M A 7. Ako funkcija $f(y)$ ima na intervalu G i kom-paktan nosač, a potencijali, osim uslovâ (46), zadovoljavaju i uslo

$$q''(y),\hat{q}''(y)\in L_1(G) ,$$

onda važi ocena

$$\frac{d^2}{dx^2}\sigma_\mu(x,f) - \frac{d^2}{dx^2}\hat{\sigma}_\mu(x,f) = o(1),\ \mu\to+\infty, \tag{48}$$

ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G.

Napomenimo da se svi rezultati izloženi u ovom paragrafu mogu preneti i na slučaj operatora sa kompleksnim potencijalom. Za tô po-trebna tehnika je razvijena u prethodnim paragrafima ove glave, kao i u §§3-6 glave I. Sa druge strane, istraživanja se mogu proši-riti i na izvode trećeg i višeg reda. Iz izloženih rezultata se dâ zaključiti kakvog su oblika opšte zakonitosti. Pri tome su od većeg praktičnog značaja ocene tipa (33) i (48) (s obzirom na poredak pa-rametra μ).

§6.- K O M E N T A R I

U radu [23] V.A.Iljin i I.Jo su razmatrali spektralno razla-ganje apsolutno neprekidne funkcije, koje odgovara proizvoljnom ne-gativnom samokonjugovanom produženju operatora (1), definisanog na konačnom intervalu G i čiji potencijal pripada klasi $L_p(G)$, $1<p<\infty$. Oni su dobili sledeće rezultate:

Ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G važi ocena

$$\sigma_\mu(x,f) - \hat{\sigma}_\mu(x,f) = O\left(\frac{1}{\mu}\right),\ \mu\to+\infty,$$

a ako funkcija $f(y)$ ima kompaktan nosač, onda važi ocena

$$\sigma_\mu(x,f) - \hat{\sigma}_\mu(x,f) = o\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad \mu \to +\infty.$$

Postavilo se pitanje: šta se može reći o izvodima posmatranih spektralnih razlaganja ? Odgovor na ovo pitanje dali smo I.Jo i ja u radovima [26] - [27] . U radu [26] Iljinov metod je modifikovan i dobijena modifikacija je primenjena u ispitivanjima prvog izvoda tih razlaganja. Dobijeni rezultati su analogni teoremama 1-3 ove glave (napomenimo da je kod teoreme 3 u posmatranom slučaju pretpostavka a) automatski ispunjena, pa za pretpostavkom b) nema potrebe).

U radu [27] pomenuta istraživanja su proširena na drugi izvod spektralnih razlaganja. Dobijeni rezultati su prikazani u § 5 ove glave.

U §§2-4 ove glave je pokazano kako se prethodni rezultati prenose na opštiji slučaj nesamokonjugovanog Šredingerovog operatora (1). Uopšteno govoreći, tehnika iz rada [26] , na odgovarajući način modifikovana, uspešno se primenjuje i u ovom slučaju. Pri tome su glavni problemi proisticali iz činjenice da se ovde radi sa neortogonalnim sistemima funkcija, za razliku od prethodnog slučaja. Specijalno, nije mi poznato da li za potpuni i minimalni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1) važi Beselova nejednakost, pa se zbog toga u teoremi 3 pojavio pojam traga Beselove baze. Te teškoće su u dokazu teoreme 1 prebrodjene, dok su kod teoreme 3 dovele do pomenutih restriktivnih pretpostavki.

Različitim aspektima teorije diferenciranja spektralnih razlaganja, generisanih običnim diferencijalnim operatorima, bavio se niz matematičara. Pomenimo ovde samo knjigu [35] u kojoj su izloženi rezultati o izvodima spektralnih razlaganja, koja odgovaraju nekim posebnim samokonjugovanim produženjima Šturm-Liuvilovog operatora. Za razliku od metodâ primenjenih u ovoj glavi, metode prikazane u toj knjizi su zasnovane na graničnim uslovima koji definišu izučavana spektralna razlaganja.

GLAVA IV

O KONVERGENCIJI SPEKTRALNOG RAZLAGANJA FUNKCIJE IZ KLASE H_p^α, KOJE ODGOVARA NENEGATIVNOM SAMOKONJUGOVANOM PRODUŽENJU ŠREDINGEROVOG OPERATORA

U ovoj glavi razmatraćemo spektralna razlaganja funkcije iz klase Nikoljskog $H_p^\alpha(G)$, $0<\alpha\leq 2$, $1<p\leq 2$, koja odgovaraju proizvoljnim nenegativnim samokonjugovanim produženjima Šredingerovog operatora

$$\ell(u) = -u''(y) + q(y)u(y)\ , \tag{1}$$

definisanog na konačnom intervalu G. Pretpostavljajući da funkcija $f(y)$ ima na intervalu G kompaktan nosač i da je $q(y)\in L_p(G)$ u §2 dokazaćemo teoremu o poretku Furijeovih koeficijenata te funkcije. Ova teorema će nam omogućiti da u §3 ustanovimo uslove pod kojima razmatrana spektralna razlaganja konvergiraju apsolutno i ravnomerno na celom intervalu G.

U §4 ćemo dokazati teoremu o ravnomernoj na svakom kompaktu $K\subset G$ ekvikonvergenciji dva spektralna razlaganja funkcije $f(y)$: prvo odgovara proizvoljnom nenegativnom samokonjugovanom produženju operatora (1), a drugo proizvoljnom produženju istog tipa drugog operatora

$$\hat{\ell}(u) = -u''(y) + \hat{q}(y)u(y)\ , \tag{2}$$

gde je $\hat{q}(y)\in L_p(G)$.

§1.- OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

Ako je G proizvoljni interval realne ose i $h > 0$ proizvoljni broj, onda ćemo sa G_h označavati skup svih tačaka intervala G čije je rastojanje do granice tog intervala veće od h.

Neka je k prirodan broj i $f(y)$ funkcija, definisana na intervalu G. Uopšteni izvod reda k funkcije $f(y)$ (označavaćemo ga sa $\partial^{k} f(y)$) definiše se na sledeći način.

D E F I N I C I J A 1 ([42]). Neka su funkcije $f(y)$ i $\chi(y)$ lokalno integrabilne na intervalu G i neka je za svaku k puta neprekidno diferencijabilnu funkciju $\Psi(y)$ zadovoljena jednakost

$$\int_G \chi(y)\cdot\Psi(y)dy = (-1)^k\cdot\int_G f(y)\cdot\frac{d^k}{dy^k}\Psi(y)dy .$$

Tada se funkcija $\chi(y)$ naziva uopštenim izvodom reda k funkcije $f(y)$ na intervalu G.

Definišimo sada klasu S.M. Nikoljskog $H_p^{\alpha}(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > 0$. Predstavimo broj α u obliku

$$\alpha = k + \varkappa ,$$

gde je $k = 0,1,2,\ldots$, $0 < \varkappa \leqslant 1$.

D E F I N I C I J A 2 ([13]). Funkcija $f(y)$, $f(y) \in L_2(G)$, pripada klasi $H_p^{\alpha}(G)$ ako za svaki realni broj h važi nejednakost

$$\|\partial^{k} f(y+h) - 2\,\partial^{k} f(y) + \partial^{k} f(y-h)\|_{L_p(G_{|h|})} \leqslant C|h|^{\varkappa} ,$$

gde je C konstanta.

Ako se uvede oznaka

$$\Delta_h^2 f(y) = f(y+h) - 2f(y) + f(y-h) ,$$

onda se norma prostora $H_p^{\alpha}(G)$ definiše veličinom

$$\|f\|_{H_p^{\alpha}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sup_{h} |h|^{-\varkappa} \|\Delta_h^2 \partial^{\kappa} f(y)\|_{L_p(G_{|h|})} . \quad (3)$$

Primetimo da se umesto druge razlike može uzeti četvrta razlika i tako dobiti norma ekvivalentna normi (3) :

$$\|f\|_{H_p^{\alpha}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sup_{h} |h|^{-\varkappa} \|\Delta_h^4 \partial^{\kappa} f(y)\|_{L_p(G_{2|h|})} . \quad (4)$$

Podsetimo da smo u napomeni na kraju §7 , gl.II, definisali diferencijalni operator L na prostoru $L_2(G)$ pomoću diferencijalne operacije (1) na sledeći način. Oblast definisanosti D operatora L je skup svih funkcija $u(y)$ iz prostora $L_2(G)$ koje imaju sledeća svojstva:

1) Funkcije $u(y)$ i $u'(y)$ jesu apsolutno neprekidne na svakom konačnom segmentu intervala G .

2) Funkcija $\ell(u(y))$ pripada klasi $L_2(G)$.

Ako je $u(y) \in D$, onda je $L(u) = \ell(u)$.

Kao što je već rečeno, u ovoj glavi ćemo pretpostavljati da je interval G konačan i da potencijal $q(y)$ operatora (1) pripada klasi $L_p(G)$, $1 < p < \infty$. U tom slučaju može se definisati restrikcija L_0 operatora L na sledeći način. Oblast definisanosti D_0 operatora L_0 sastoji se od svih funkcija $u(y)$ iz skupa D koje zadovoljavaju sledeće granične uslove:

$$u(a) = u(b) = 0 , \quad u'(a) = u'(b) = 0 .$$

Tada je L_o zatvoren simetričan operator sa indeksom defekta (2,2) i operator L jeste njegov konjugovani operator. Osim toga, sva samokonjugovana produženja operatora L_o imaju čisto diskretan spektar, tj. njihov spektar se sastoji od prebrojivog skupa sopstvenih brojeva konačne višestrukosti, koji nema konačnih tačaka nagomilavanja. Sve ove činjenice su dokazane u kjizi [39] , gl.V .

Kada smo u §5 prethodne glave i u uvodu ove glave govorili o samokonjugovanim produženjima Šredingerovog operatora (1), imali smo u vidu upravo samokonjugovana produženja operatora L_o . Ovo važi i za izlaganja koja slede.

Označimo sa $\{u_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ potpuni ortonormirani sistem sopstvenih funkcija proizvoljnog nenegativnog samokonjugovanog produženja operatora (1), i sa $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ odgovarajući sistem sopstvenih brojeva, numerisanih po poretku neopadanja. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $\lambda_n > 1$, $n \in N$.

Sledeći rezultat V.A.Iljina i I.Jo biće nam potreban u daljem radu.

<u>L E M A 1 ([22])</u>. Ako je G konačan interval i $q(y) \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$, onda važi ocena

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1} 1 \leq B \text{ , za svaki broj } \mu \geq 1 \text{ ,} \tag{5}$$

pri čemu konstanta B ne zavisi od λ_n i μ .

Osim toga, biće nam potrebne i ocene sopstvenih funkcija (9), gl.I, koje se, s obzirom da je u ovom slučaju $\|u_n\|_{L_2(G)} = 1$, $n \in N$, mogu formulisati u obliku leme 1, gl.III (videti tamo ocene (7)) .

§2.- O PORETKU FURIJEOVIH KOEFICIJENATA FUNKCIJE IZ KLASE $H_p^\alpha(G)$

U ovom paragrafu dokazaćemo teoremu o poretku Furijeovih koeficijenata funkcije $f(y)$ iz klase $H_p^\alpha(G)$, koja ima kompaktan nosač na intervalu G. U slučaju Furijeovih koeficijenata funkcije iz klase $\overset{0}{H}{}_2^\alpha(G)$ i tzv. fundamentalnog sistema funkcija Laplasovog operatora

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$$

u proizvoljnoj n-dimenzionoj oblasti G, odgovarajuća teorema je dokazana u radu [13]. Bez obzira što u našem slučaju operator (1), osim glavnog dela, sadrži i deo sa potencijalom, tehnika razvijena u tom radu prenosi se uspešno i na njega.

Neka je $\operatorname{supp} f$ kompaktan nosač funkcije $f(y)$, definisane na konačnom intervalu $G = (a,b)$. Označimo sa R rastojanje tog kompakta do granice intervala G, i sa f_n Furijeov koeficijent funkcije $f(y)$, koji odgovara sopstvenom broju λ_n. Svuda u ovoj glavi biće sa r označen broj takav da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$.

T E O R E M A 1. Neka je $f(y)$ funkcija sa kompaktnim nosačem, koja pripada klasi $H_p^\alpha(G)$, $0<\alpha\leq 2$, $1<p\leq 2$. Ako je $\alpha \leq \frac{r}{2}$ i $q(y)\in L_p(G)$, onda za svaki broj $\lambda > 0$ važi nejednakost

$$\sum_{\lambda<\lambda_n\leq 4\lambda} |f_n|^r \cdot \lambda_n^\alpha \leq C_R \cdot \|f\|^r_{H_p^\alpha(G)} \quad . \tag{6}$$

Pri tome konstanta C_R ne zavisi od λ_n i λ.

D O K A Z. Neka je h proizvoljan broj iz intervala $(0,\frac{R}{3})$. Razmotrimo funkciju

$$E(y,h,f) = \frac{1}{2h} \cdot \int_{-h}^{h} f(y+u)\, du \quad . \tag{7}$$

Lako se vidi da je funkcija $E(y,h,f)$ jednaka nuli van intervala G_{2h}. Koristeći formulu srednje vrednosti (4), gl.I, odredimo Furijeove koeficijente $E_n(h)$ funkcije $E(y,h,f)$ u odnosu na sistem sopstvenih funkcija $\{u_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$. Biće

$$\begin{aligned} E_n(h) &= \int_{G_{2h}} E(y,h,f)u_n(y)dy = \frac{1}{2h}\int_{a+2h}^{b-2h} \Big[\int_{-h}^{h} f(y+u)u_n(y)du \Big]\, dy = \\ &= \frac{1}{2h} \cdot \int_{a+h}^{b-h} f(x)\cdot \Big[\int_0^h (u_n(x+\xi) + u_n(x-\xi))d\xi \Big]dx = \\ &= \frac{\sin h\sqrt{\lambda_n}}{h\sqrt{\lambda_n}} f_n - \frac{1}{2h}\cdot \int_{G_h} f(x)\Big[\int_0^h (\int_{x-\xi}^{x+\xi} q(\tau)u_n(\tau)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\tau|-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}} d\tau\,)d\xi\Big]dx \, . \end{aligned} \tag{8}$$

Sada za svaki broj h iz intervala $(0,R/6)$ definišimo na intervalu G funkciju

$$F(y,h,f) = E(y,h,f) - 4E(y,h,f) + 3f(y) \quad . \tag{9}$$

Ova funkcija je jednaka nuli van intervala G_{4h}; iz (8) sledi da Furijeov koeficijent $F_n(h)$ funkcije (9) jeste oblika

$$\begin{aligned} F_n(h) &= \Big[\frac{\sin 2h\sqrt{\lambda_n}}{2h\sqrt{\lambda_n}} - 4\, \frac{\sin h\sqrt{\lambda_n}}{h\sqrt{\lambda_n}} + 3 \Big]\cdot f_n \quad - \\ &- \frac{1}{4h}\cdot \int_{G_{2h}} f(x)\Big[\int_0^{2h} (\int_{x-\xi}^{x+\xi} q(\tau)u_n(\tau)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\tau|-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}} d\tau\,)d\xi\Big]dx \; + \\ &+ \frac{2}{h}\cdot \int_{G_h} f(x)\Big[\int_0^h (\int_{x-\xi}^{x+\xi} q(\tau)u_n(\tau)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\tau|-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}} d\tau\,)d\xi\Big]\, dx \quad . \end{aligned} \tag{10}$$

Iz (10) dobijamo sledeću nejednakost

$$\Big| \frac{\sin 2h\sqrt{\lambda_n}}{2h\sqrt{\lambda_n}} - 4\, \frac{\sin h\sqrt{\lambda_n}}{h\sqrt{\lambda_n}} + 3 \Big|^r |f_n|^r \le 3^{r-1}\cdot |F_n(h)|^r \quad +$$

$$+\ 3^{r-1}\cdot\Big|\frac{1}{4h}\cdot\int\limits_{G_{2h}} f(x)\Big[\int\limits_0^{2h}\Big(\int\limits_{x-\xi}^{x+\xi} q(\tau)u_n(\tau)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\tau|-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}}d\tau\Big)d\xi\Big]dx\Big|^r\ +$$
$$+\ 3^{r-1}\cdot\Big|\frac{2}{h}\cdot\int\limits_{G_h} f(x)\Big[\int\limits_0^{h}\Big(\int\limits_{x-\xi}^{x+\xi} q(\tau)u_n(\tau)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\tau|-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}}d\tau\Big)d\xi\Big]dx\Big|^r\ . \tag{11}$$

Uvedimo oznaku

$$\Delta_u^4 f(y)\ =\ f(y+2u)-4f(y+u)+6f(y)-4f(y-u)+f(y-2u)\quad ,$$

gde je u proizvoljan realan broj (i takav da izrazi na desnoj strani budu definisani). Tada se, s obzirom na (7), funkcija (9) može predstaviti u obliku

$$F(y,h,f)\ =\ \frac{1}{4h}\cdot\int\limits_{-h}^{h}\Delta_u^4 f(y)\,du\quad , \tag{12}$$

i, osim toga, važi nejednakost

$$\|\Delta_u^4 f(y)\|_{L_p(G_{4\cdot|u|})}\leq |u|^{\alpha}\cdot\|f\|_{H_p^{\alpha}(G)}\quad ,\quad 0<\alpha\leq 2\ , \tag{13}$$

(videti [13]); ovde se još podrazumeva da je $|u|\leq h$.

Primenjujući Hölderovu nejednakost, reprezentaciju (12) i ocenu (13), možemo oceniti L_p - normu funkcije $F(y,h,f)$:

$$\|F(y,h,f)\|^r_{L_p(G)}\leq C(R,p,\alpha)\cdot\|f\|^r_{H_p^{\alpha}(G)}\cdot h^{\alpha r}\quad , \tag{14}$$

pri čemu konstanta $C(R,p,\alpha)$ zavisi samo od ukazanih veličina.

Dalje, ocenimo drugi sabirak na desnoj strani nejednakosti (11). Primenjujući parcijalnu integraciju, dobijamo prvo jednakost

$$\int\limits_x^{x+\xi} q(\tau)u_n(\tau)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(\tau-x-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}}d\tau\ +\ \int\limits_{x-\xi}^{x} q(\tau)u_n(\tau)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(x-\tau-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}}d\tau\ =$$
$$=\ -\int\limits_x^{x+\xi}\Big(\int\limits_x^{\tau} q(t)u_n(t)dt\Big)\cos\sqrt{\lambda_n}(\tau-x-\xi)d\tau\ +\ \int\limits_{x-\xi}^{x}\Big(\int\limits_{\tau}^{x} q(t)u_n(t)dt\Big)\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\tau-\xi)d\tau \tag{15}$$

Koristeći više puta Hölderovu nejednakost i transformaciju (15), dobićemo nejednakosti

$$\left|\frac{1}{4h}\int\limits_{G_{2h}} f(x)\Big[\int\limits_0^{2h}\Big(\int\limits_{x-\xi}^{x+\xi} q(\tau)u_n(\tau)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\tau|-\xi)}{\sqrt{\lambda_n}}d\tau\Big)d\xi\Big]dx\right|^r \leq$$

$$\leq 2^{2r-1}(2h)^{r/p-1}\|f\|^r_{L_p(G)}\cdot\int\limits_{G_{2h}}\Big[\int\limits_0^{2h}\Big|\int\limits_x^{x+\xi}\Big(\int\limits_x^{\tau} q(t)u_n(t)dt\Big)\cos\sqrt{\lambda_n}(\tau-x-\xi)d\tau\Big|^r d\xi +$$

$$+\int\limits_0^{2h}\Big|\int\limits_{x-\xi}^{x}\Big(\int\limits_{\tau}^{x} q(t)u_n(t)dt\Big)\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\tau-\xi)d\tau\Big|^r d\xi\Big]dx \leq \tag{16}$$

$$\leq 4^{r-1}\|f\|^r_{L_p(G)}\cdot\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{G_{2h}}\Big[\int\limits_0^{2h}\xi^{\frac{r}{p}}\Big(\int\limits_x^{x+\xi}\Big|\int\limits_x^{\tau} q(t)u_n(t)dt\Big|^r d\tau+\int\limits_{x-\xi}^{x}\Big|\int\limits_{\tau}^{x} q(t)u_n(t)dt\Big|^r d\tau\Big)d\xi\Big]\cdot dx.$$

Potpuno analogno se dobija odgovarajuća ocena za treći sabirak na desnoj strani nejednakosti (11).

Može se pokazati da postoje konstante $\delta>0$ i $d>0$ takve da važi nejednakost

$$\left|\frac{\sin 2h\sqrt{\lambda_n}}{2h\sqrt{\lambda_n}}-4\,\frac{\sin h\sqrt{\lambda_n}}{h\sqrt{\lambda_n}}+3\right|^r\geq\delta\,,\ \text{ako je}\ \ d<h\sqrt{\lambda_n}\leq 2d\,. \tag{17}$$

Sada iz (11), (16) i (17) sledi da za svaki broj h iz intervala $(0,R/6)$ važe majoracije

$$\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\leq 2d}|f_n|^r\lambda_n^{\alpha}\leq\Big(\frac{2d}{h}\Big)^{2\alpha}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\leq 2d}\left|\frac{\sin 2h\sqrt{\lambda_n}}{2h\sqrt{\lambda_n}}-4\,\frac{\sin h\sqrt{\lambda_n}}{h\sqrt{\lambda_n}}+3\right|^r|f_n|^r\leq$$

$$\leq\frac{3^{r-1}}{\delta}\Big(\frac{2d}{h}\Big)^{2\alpha}\cdot\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\leq 2d}|F_n(h)|^r\quad+ \tag{18}$$

$$+\frac{(2d)^{2\alpha}}{\delta}12^{r-1}\cdot\|f\|^r_{H_p^{\alpha}(G)}\cdot\frac{1}{h^{2\alpha+1}}\int\limits_{G_{2h}}\Big\{\int\limits_0^{2h}\xi^{\frac{r}{p}}\Big[\int\limits_x^{x+\xi}\Big(\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\leq 2d}\Big|\int\limits_x^{\tau} q(t)u_n(t)dt\Big|^r\Big)d\tau\ +$$

$$+\int\limits_{x-\xi}^{x}\Big(\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\leq 2d}\Big|\int\limits_{\tau}^{x} q(t)u_n(t)dt\Big|^r\Big)d\tau\Big]d\xi\Big\}dx\ +$$

$$+\ \frac{(2d)^{2\alpha}}{\delta} 3^{r-1} 2^{r} \|f\|^{r}_{H^{\alpha}_{p}(G)} \cdot \frac{1}{h^{2\alpha+1}} \int_{G_h} \Big\{ \int_{0}^{h} \xi^{\frac{r}{p}} \Big[\int_{x}^{x+\xi} \Big(\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\le 2d} \Big|\int_{x}^{\tau} q(t)u_n(t)dt\Big|^{r} \Big) d\tau\ +$$

$$+ \int_{x-\xi}^{x} \Big(\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\le 2d} \Big|\int_{\tau}^{x} q(t)u_n(t)dt\Big|^{r} \Big) d\tau \Big] d\xi \Big\} dx \ ,$$

pri čemu α zadovoljava uslov $0<\alpha\le 2$.

S obzirom da funkcije $q(y)$ i $F(y,h,f)$ pripadaju klasi $L_p(G)$, $1<p\le 2$, i da važe ocene (7), gl.III, na njih se može primeniti Risova nejednakost (32), gl.III, sa $\tilde{C}(K) = 1$, $M = C(G,q)$ (tačnije, ovde koristimo originalnu Risovu teoremu u kojoj nije bitno da li posmatrane funkcije imaju kompaktan nosač ili ga nemaju) Tada iz (18) dobijamo ocenu

$$\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\le 2d} |f_n|^{r} \lambda_n^{\alpha} \le C_1(\alpha,\delta,r,d)(C(G,q))^{(\frac{2}{p}-1)r} \cdot \|f\|^{r}_{H^{\alpha}_{p}(G)} \cdot \frac{1}{h^{2\alpha}} \|F(y,h,f)\|^{r}_{L_p(G)}$$

$$C_2(\alpha,\delta,r,d)(C(G))^{(\frac{2}{p}-1)r} \cdot \|f\|^{r}_{H^{\alpha}_{p}(G)} \cdot \frac{1}{h^{2\alpha+1}} \int_{G_{2h}} \Big\{ \int_{0}^{2h} \xi^{\frac{r}{p}} \Big[\int_{x}^{x+\xi} \Big(\int_{x}^{\tau} |q(t)|^{p} dt\Big)^{r/p} d\tau\ +$$

$$+ \int_{x-\xi}^{x} \Big(\int_{\tau}^{x} |q(t)|^{p} dt\Big)^{r/p} d\tau \Big] d\xi \Big\} dx \ + \tag{19}$$

$$+\ C_3(\alpha,\delta,r,d)(C(G))^{(\frac{2}{p}-1)r} \cdot \|f\|^{r}_{H^{\alpha}_{p}(G)} \cdot \frac{1}{h^{2\alpha+1}} \int_{G_h} \Big\{ \int_{0}^{h} \xi^{\frac{r}{p}} \Big[\int_{x}^{x+\xi} \Big(\int_{x}^{\tau} |q(t)|^{p} dt\Big)^{r/p} d\tau\ +$$

$$+ \int_{x-\xi}^{x} \Big(\int_{\tau}^{x} |q(t)|^{p} dt\Big)^{r/p} d\tau \Big] d\xi \Big\} dx \ .$$

Upotrebimo sada ocenu (14). Ako je $\alpha \le \frac{r}{2}$, onda iz (19) slede nejednakosti

$$\sum_{d<h\sqrt{\lambda_n}\le 2d} |f_n|^{r} \lambda_n^{\alpha} \le \tilde{C}_1(\alpha,\delta,r,d,G,q)\cdot h^{\alpha(r-2)} \cdot \|f\|^{r}_{H^{\alpha}_{p}(G)}\ +$$

$$+\ \tilde{C}_2(\alpha,\delta,r,d,G,q)\cdot h^{r-2\alpha} \cdot \|f\|^{r}_{H^{\alpha}_{p}(G)}\ + \tag{20}$$

$$+ \quad \tilde{C}_3(\alpha,\delta,r,d,G,q)\cdot h^{r-2\alpha}\cdot\|f\|^r_{H^\alpha_p(G)} \leq C_R\cdot\|f\|^r_{H^\alpha_p(G)} \quad ,$$

pri čemu konstanta C_R ne zavisi od h i λ_n .

Neka je λ broj koji zadovoljava uslov $\lambda > (6d/R)^2$. Tada broj $h = \frac{d}{\sqrt{\lambda}}$ pripada intervalu $(0,R/6)$, pa zamenjujući ga u nejednakosti (20), dobijamo ocenu (6).

A ako je $0<\lambda \leq (6d/R)^2$, onda je

$$\sum_{1<\lambda_n\leq 4\lambda} |f_n|^r\cdot\lambda_n^\alpha \leq \sum_{1<\sqrt{\lambda_n}\leq 12d/R} |f_n|^r\cdot\lambda_n^\alpha \quad . \tag{21}$$

Uvedimo oznaku

$$\lambda_0 = \max\left\{ \lambda_n : 1<\sqrt{\lambda_n}\leq 12d/R \right\} \quad .$$

Kako važi ocena

$$|f_n| \leq (b-a)^{1/r}\cdot\|f\|_{L_p(G)} \quad ,$$

to je

$$\sum_{1<\sqrt{\lambda_n}\leq 12d/R} |f_n|^r\cdot\lambda_n^\alpha \leq (b-a)\cdot\lambda_0^\alpha\cdot B\cdot\left([12d/R]+ 1\right)\|f\|^r_{H^\alpha_p(G)} \quad . \tag{22}$$

Ovde je sa $[12d/R]$ označen celi deo broja $12d/R$.

Iz (21) i (22) sledi ocena (6) i u ovom slučaju.

Dokaz teoreme 1 je završen.

§3.- TEOREMA O RAVNOMERNOJ KONVERGENCIJI SPEKTRALNOG RAZLAGANJA FUNKCIJE IZ KLASE $H^\alpha_p(G)$

U daljem izlaganju biće nam potrebna sledeća lema koja je, za slučaj $p = 2$, data u obliku napomene u radu [13] .

L E M A 2. Ako niz brojeva $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ za svako $\lambda > 0$ zadovoljava uslov

$$\sum_{\lambda<\lambda_n\leq 4\lambda} |a_n|^r \leq A^r \quad , \quad \text{gde je} \quad A>0 \quad , \tag{23}$$

onda za svaki broj $\varepsilon > 0$ važi ocena

$$\sum_{\lambda_n>1} |a_n|^r \cdot \lambda_n^{-\varepsilon} \leq C(\varepsilon)\, A^r \quad , \tag{24}$$

pri čemu konsatanta $C(\varepsilon)$ zavisi samo od ε .

D O K A Z. Odredimo prvo broj $k(\varepsilon)\in N$ takav da

$$k>k(\varepsilon),\ k\in N \implies (1+\tfrac{1}{k})^{1+\frac{1}{\varepsilon}} < 4 \quad .$$

Zbog toga je

$$\sum_{\lambda_n>1} |a_n|^r \cdot \lambda_n^{-\varepsilon} \leq \sum_{k=1}^{s} \Big(\sum_{k<\lambda_n\leq 4k} |a_n|^r \cdot \lambda_n^{-\varepsilon} \Big) + \sum_{k=k(\varepsilon)+1}^{\infty} \Big(\sum_{k^{1+\frac{1}{\varepsilon}}<\lambda_n\leq 4k^{1+\frac{1}{\varepsilon}}} |a_n|^r \cdot \lambda_n^{-\varepsilon} \Big) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k^{\varepsilon}} \Big(\sum_{k<\lambda_n\leq 4k} |a_n|^r \Big) + \sum_{k=k(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \Big(\sum_{k^{1+\frac{1}{\varepsilon}}<\lambda_n\leq 4k^{1+\frac{1}{\varepsilon}}} |a_n|^r \Big) \leq$$

$$\leq A^r \cdot \sum_{k=1}^{s} 1 + A^r \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} = C(\varepsilon)\, A^r \quad .$$

Pri tome je stavljeno $s = \left[(k(\varepsilon)+1)^{1+\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1$ ($[x] = E(x)$). Koristili smo uslov (23), stavljajući $\lambda = k$ i $\lambda = k^{1+\frac{1}{\varepsilon}}$. Dokaz leme 2 je završen.

T E O R E M A 2. Neka funkcija $f(y)$ ima na intervalu G kompaktan nosač i neka pripada klasi $H_p^{\alpha}(G)$, $0<\alpha\leq 2$, $1<p\leq 2$. Ako je $\frac{r-1}{2}<\alpha\leq\frac{r}{2}$ i $q(y)\in L_p(G)$, onda Furijeov red funkcije $f(y)$ konvergira apsolutno i ravnomerno na celom intervalu G .

D O K A Z. Niz brojeva $a_n = f_n \cdot \lambda_n^{\frac{\alpha}{\varkappa}}$ zadovoljava uslov (23). Ovo sledi iz ocene (6), kada se stavi $A = (C_R)^{1/r}\cdot\|f\|_{H_p^\alpha(G)}$. Zbog toga prema prethodnoj lemi, za taj niz važi ocena (24) koja sada ima oblik

$$\sum_{\lambda_n>1} |f_n|^r \lambda_n^{\alpha-\varepsilon} \leq C(\varepsilon)\cdot C_R\cdot\|f\|^r_{H_p^\alpha(G)} \quad , \tag{25}$$

pri čemu je ε proizvoljan pozitivan broj.

Koristeći ocenu (7),gl.III, kao i ocene (5) i (25) dobijamo nejednakosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n||u_n(y)| = \sum_{\lambda_n>1} |f_n|\cdot|u_n(y)| \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{\lambda_n>1} |f_n|^r \lambda_n^{\alpha-\varepsilon}\Big)^{1/r}\cdot\Big(\sum_{\sqrt{\lambda_n}>1} \frac{|u_n(y)|^p}{\lambda_n^{\frac{\alpha-\varepsilon}{r}p}}\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq C(G,q)\cdot(C(\varepsilon)C_R)^{1/r}\cdot\|f\|_{H_p^\alpha(G)}\cdot\Big(\sum_{\sqrt{\lambda_n}>1} \lambda_n^{-\frac{\alpha-\varepsilon}{r}p}\Big)^{1/p} \quad .$$

Odatle se vidi da Furijeov red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot u_n(y)$$

funkcije $f(y)$ apsolutno i ravnomerno konvergira na celom intervalu G ako je $\frac{\alpha-\varepsilon}{r}\,p > \frac{1}{2}$. Zbog proizvoljnosti broja ε ovaj uslov je ekvivalentan uslovu $\alpha > \frac{r-1}{2}$.

Dokaz teoreme 2 je završen.

§4.- <u>TEOREMA O EKVIKONVERGENCIJI SPEKTRALNIH RAZLAGANJA FUNKCIJE IZ KLASE $H_p^\alpha(G)$</u>

Videli smo u prethodnom paragrafu da spektralno razlaganje funkcije $f(y)\in H_p^\alpha(G)$ sa kompaktnim nosačem ravnomerno konvergira čak na celom intervalu G ako je $\frac{r-1}{2} < \alpha \leq \frac{r}{2}$. A kako se ponaša spektralno razlaganje funkcije $f(y)$ ako je $0 < \alpha \leq \frac{r-1}{2}$? Delimičan odgovor na ovo pitanje daćemo u ovom paragrafu.

Neka su R i μ proizvoljni pozitivni brojevi. Uvedimo oznaku

$$K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_R^{+\infty} \frac{\sin \mu h \cos\sqrt{\lambda_n} h}{h}\, dh \quad . \tag{26}$$

Tada važi sledeće tvrdjenje.

L E M A 3. Neka je G konačan interval i neka su $R_o > 0$ i $\mu > 2$ proizvoljni brojevi. Ako je $q(y) \in L_p(G)$, $1 < p \leq 2$, onda za svaku funkciju $f(y) \in H^{\alpha}_p(G)$, $0 < \alpha \leq 1$, koja na intervalu G ima kompaktan nosač, važi ocena

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(y)\, S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) \Big| \leq C_f \cdot \|f\|_{H^{\alpha}_p(G)} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}} \quad , \tag{27}$$

ravnomerno po y na celom intervalu G . Pri tome konstanta C_f ne zavisi od μ .

D O K A Z. Da bismo dokazali ocenu (27), dovoljno je dokazati da za svako $\alpha \in (0,1]$, ravnomerno po y na G važi ocena

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| a_n u_n(y) \cdot S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) \cdot \lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}} \Big| \leq C_f \cdot A \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}} \quad , \tag{28}$$

gde su a_n i A brojevi koji zadovoljavaju uslov (23). Zaista, prema teoremi 1, brojevi $a_n = f_n \cdot \lambda_n^{\frac{\alpha}{r}}$ i $A = \|f\|_{H^{\alpha}_p(G)}$ zadovoljavaju uslov (23), pa njihovom zamenom u (28) dobijamo ocenu (27).

Za svaki broj $s > 0$ ravnomerno po $y \in G$ važi ocena

$$\sum_{s < \sqrt{\lambda_n} \leq s+1} |u_n(y)|^p \leq (C(G,q))^p\, B \quad . \tag{29}$$

Ova ocena direktno sledi iz ocene (7), gl.III i ocene (5).

Dokažimo sada da za svaki broj $\varepsilon > \frac{1}{2} - \frac{p}{4}$ važi ocena

$$\sum_{\lambda_n > 1} |u_n(y)|^p \lambda_n^{-\varepsilon - \frac{p}{4}} \leq \tilde{C} , \tag{30}$$

ravnomerno po y G ; ovde je $\tilde{C}$ konstanta. Zaista, koristeći ocenu (29), dobijamo majoracije

$$\sum_{\lambda_n > 1} |u_n(y)|^p \lambda_n^{-\varepsilon - \frac{p}{4}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{k < \sqrt{\lambda_n} \leq k+1} \frac{|u_n(y)|^p}{\lambda_n^{\varepsilon + \frac{p}{4}}} \Big) \leq$$

$$\leq (C(G,q))^p \cdot B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\varepsilon + \frac{p}{2}}} \leq \tilde{C} ,$$

jer je uslov $2\varepsilon + p/2 > 1$ ekvivalentan uslovu $\varepsilon > \frac{1}{2} - \frac{p}{4}$.

Koristeći ocene (24) i (30), možemo dobiti ocenu

$$\sum_{\lambda_n > 1} |a_n u_n(y)| \lambda_n^{-\varepsilon - \frac{1}{4}} \leq C\, A , \tag{31}$$

ravnomernu po $y \in G$. Pri tome je $C = C(\varepsilon)^{1/r}\, C^{1/p}$. Ova ocena važi za svako $\varepsilon > \frac{1}{2} - \frac{p}{4}$.

Navedimo još ocene za usrednjenje veličine $K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)$, koje će nam biti potrebne u daljem izlaganju :

1) za svaki μ i $\sqrt{\lambda_n}$ važi nejednakost

$$|S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))| \leq C_1(R_o) \quad ; \tag{32}$$

2) ako je $|\sqrt{\lambda_n} - \mu| > 1$, onda je

$$|S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))| \leq \frac{C_2(R_o)}{|\sqrt{\lambda_n} - \mu|^2} \quad . \tag{33}$$

Konstante $C_1(R_o)$ i $C_2(R_o)$ ne zavise od $\sqrt{\lambda_n}$ i μ . Način dobijanja ovih ocena naznačen je u §3, gl.II .

Predjimo sada na dokaz ocene (28).

Za one indekse n za koje je $1<\sqrt{\lambda_n}<\frac{\mu}{2}$ iz ocene (33) dobijamo ocenu

$$|S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))| \leq \frac{2C_2(R_o)}{\mu} .$$

Koristeći ovu ocenu, kao i ocenu (31) za $\varepsilon=\frac{1}{4}$, dobijamo sledeće nejednakosti :

$$\sum_{1<\sqrt{\lambda_n}<\frac{\mu}{2}} |a_n u_n(y)\cdot S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))\lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}}| \leq \frac{2C_2(R_o)}{\mu}\cdot \sum_{1<\sqrt{\lambda_n}<\frac{\mu}{2}} |a_n u_n(y)|\lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \tilde{C}(R_o)\cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}}\cdot \sum_{\lambda_n>1} |a_n u_n(y)|\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \leq C(R_o)\cdot C\cdot A\,\frac{1}{\mu^{\frac{2\alpha}{r}}} .$$

Što se tiče sume po indeksima n za koje je $\sqrt{\lambda_n}>\frac{3\mu}{2}$, pri njenom ocenjivanju koristićemo ocenu

$$|S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))| \leq \frac{3C_2(R_o)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

koja se dobija iz ocene (33), ako se ima u vidu da je za ukazane indekse n ispunjeno: $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}-\mu}<\frac{3}{\sqrt{\lambda_n}}$. Primenivši, osim toga, i ocenu (31) za $\varepsilon=\frac{1}{4}$, dobijamo nejednakosti

$$\sum_{\sqrt{\lambda_n}>\frac{3\mu}{2}} |a_n u_n(y)\, S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))\lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}}| \leq 3C_2(R_o)\cdot \sum_{\sqrt{\lambda_n}>\frac{3\mu}{2}} |a_n u_n(y)|\lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}-\frac{1}{2}} \leq$$

$$\frac{\tilde{C}(R_o)}{\mu^{\frac{2\alpha}{r}}}\cdot \sum_{\lambda_n>1} |a_n u_n(y)|\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \leq C(R_o)\cdot C\cdot A\cdot \frac{1}{\mu^{\frac{2\alpha}{r}}} .$$

Preostali deo sume (28) predstavimo u obliku

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq\frac{\mu}{2}} (\cdot) = \sum_{\frac{\mu}{2}\leq\sqrt{\lambda_n}<\mu-1} (\cdot) + \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1} (\cdot) + \sum_{\mu+1<\sqrt{\lambda_n}\leq\frac{3\mu}{2}} (\cdot) ,$$

i ocenimo svaku od dobijenih podsuma posebno .

Koristeći ocenu (32), dobijamo

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1} |a_n u_n(y)\cdot S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))\lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}}| \leq AC(G,q)C_1(R_o)\cdot \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1} \lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}} \leq$$

$$\leq A\cdot C(G,q)\cdot C_1(R_o)\cdot B\cdot(\frac{2}{\mu})^{\frac{2\alpha}{r}}.$$

S obzirom na ocenu (33), važiće nejednakosti

$$\sum_{\frac{\mu}{2}\leq\sqrt{\lambda_n}<\mu-1} |a_n u_n(y)\cdot S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))\lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}}| \leq AC(G,q)C_2(R_o)\cdot \sum_{\frac{\mu}{2}\leq\sqrt{\lambda_n}<\mu-1} \frac{\lambda_n^{-\frac{\alpha}{r}}}{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|^2}$$

$$\leq A\cdot C(G,q)\cdot C_2(R_o)\cdot B\cdot(\frac{2}{\mu})^{2\cdot\alpha/r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Potpuno analogno, koristeći opet ocenu (33), dokazuje se da i za treću sumu važi prethodna ocena.

Dokaz ocene (28), a time i ocene (27), je završen.

NAPOMENA 1. Ova lema takodje ima odgovarajući analogon u radu [13] (lema 3.2, §1, gl.3). Neke od ideja, primenjenih tamo, korišćene su u gornjem dokazu.

Formulišimo sada glavni rezultat ovog paragrafa.

Označimo sa $\{\hat{u}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ potpuni ortonormirani sistem sopstvenih funkcija proizvoljnog nenegativnog samokonjugovanog produženja operatora (2), i sa $\{\hat{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{\lambda}_n>1$, - odgovarajući sistem sopstvenih brojeva, numerisanih tako da je $\hat{\lambda}_n\leq\hat{\lambda}_{n+1}$. Kao i u prethodnim glavama, označimo sa $\hat{\sigma}_{\mu}(y,f)$ spektralno razlaganje poretka $\mu>0$ funkcije $f(y)\in L_1(G)$, generisano sistemom funkcija $\{\hat{u}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$.

T E O R E M A 3. Neka funkcija $f(y)$ ima na intervalu G kompaktan nosač i neka pripada klasi $H_p^{\alpha}(G)$, $0<\alpha\leq 1$, $1<p\leq 2$. Ako potencijali $q(y)$ i $\hat{q}(y)$ pripadaju klasi $L_p(G)$, onda važi ocena

$$|\sigma_\mu(x,f) - \hat{\sigma}_\mu(x,f)| \le C_f \cdot \|f\|_{H_p^\alpha(G)} \cdot \mu^{-2\alpha/r}, \quad \mu > 2, \tag{34}$$

ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G. Pri tome konstanta C_f ne zavisi od μ.

NAPOMENA 2. Pod uslovima teoreme 3 iz ocene (34) sledi ocena

$$\sigma_\mu(x,f) - \hat{\sigma}_\mu(x,f) = o\left(\frac{1}{\mu^{2\alpha/r}}\right), \quad \mu \to +\infty, \tag{35}$$

ravnomerno po x na svakom kompaktu K intervala G.

D O K A Z. Neka je R_0 pozitivan broj takav da je $2R_0 < \rho(K,\partial G)$ gde je K proizvoljni kompakt intervala G.

Kao u glavi II, podjimo od funkcije

$$\omega_R(x,y,\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\sin\mu|x-y|}{|x-y|}, & \text{za } |x-y| \le R, \\ 0, & \text{za } |x-y| > R, \end{cases} \tag{36}$$

gde je $x \in K$, $y \in G$, $R \in [R_0, 2R_0]$.

Fiksirajmo tačku $x \in K$ i broj $\mu > 2$. Koristeći formulu srednje vrednosti (4), gl.I, kao u §3, gl.II, dobijamo da Furijeov koeficijent $\omega_n^P(x,\mu)$ funkcije (36) ima oblik

$$\omega_n^R(x,\mu) = u_n(x)\delta^\mu_{\sqrt{\lambda_n}} - u_n(x)K^\mu_{\sqrt{\lambda_n}}(R) - \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)u_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi\right]dh, \tag{37}$$

gde je

$$\delta^\mu_{\sqrt{\lambda_n}} = \begin{cases} 1, & \text{za } \sqrt{\lambda_n} < \mu, \\ \frac{1}{2}, & \text{za } \sqrt{\lambda_n} = \mu, \\ 0, & \text{za } \sqrt{\lambda_n} > \mu, \end{cases} \tag{38}$$

a veličina $K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)$ je definisana jednakošću (26).

Primenimo operaciju usrednjenja S_{R_o} na obe strane jednakosti (37). Kako je

$$S_{R_o}(\omega_n^R(x,\mu)) = \omega_n^{R_o}(x,\mu) \quad , \quad n\in N,$$

gde je $\omega_n^{R_o}(x,\mu)$ Furijeov koeficijent funkcije $S_{R_o}(\omega_R(x,y,\mu))$ to iz (37) dobijamo jednakost

$$\omega_n^{R_o}(x,\mu) = u_n(x)\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} - u_n(x)\cdot S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) - \\ - \frac{1}{\pi} S_{R_o}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)u_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi\Big]dh\Big) . \tag{39}$$

Pomnožimo tu jednakost Furijeovim koeficijentom f_n funkcije $f(y)$. Dobićemo jednakost

$$f_n\cdot\omega_n^{R_o}(x,\mu) = f_n u_n(x)\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}} - f_n u_n(x)\cdot S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) - \\ - \frac{1}{\pi} f_n S_{R_o}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)u_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi\Big]dh\Big) . \tag{40}$$

Primetimo sada da funkcija $S_{R_o}(\omega_R(x,y,\mu))$ pripada klasi $L_2(G)$ (u odnosu na promenljivu y); videti jednakost (66), gl.II . Zato na funkcije $f(y)$ i $S_{R_o}(\omega_R(x,y,\mu))$ možemo primeniti Parsevalovu jednakost. Iz (38) i (40) sledi jednakost

$$\int_a^b f(y)S_{R_o}(\omega_R(x,y,\mu))dy = \sigma_{\mu}(x,f) + \frac{1}{2}\sum_{\sqrt{\lambda_n}=\mu} f_n u_n(x) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x) S_{R_o}(K^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) - \tag{41}$$

$$- \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} f_n S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x+l} q(\xi)u_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}d\xi\Big]dh\Big) .$$

Ova jednakost važi za svako $x\in K$ i za svaki broj $\mu > 2$.

U daljem izlaganju biće nam potrebne ocene za integral

$$I_n(x,R,\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int_{x-l}^{x+l} q(\xi)u_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\Big]dh , \quad n\in N.$$

Važe sledeća tvrdjenja:

1) za svaki $\sqrt{\lambda_n}$ i μ je ispunjena nejednakost

$$|I_n(x,R,\mu)| \leq D_1(R_0,q) , \quad n\in N, \tag{42}$$

(videti ocenu (61), gl.II);

2) ako je $1<\sqrt{\lambda_n}\leq\frac{\mu}{2}$, onda je

$$|I_n(x,R,\mu)| \leq D_2(R_0,q)\,\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\mu} , \quad n\in N, \tag{43}$$

(videti ocenu (37) u radu [23]).

Konstante $D_i(R_0,q)$, $i=1,2$, zavise samo od ukazanih veličina, pa navedene ocene važe i za usrednjenje pomenutog integrala.

Sada možemo da ocenimo na kompaktu K svaku od poslednje tri sume na desnoj strani jednakosti (41).

Iz ocene (6) dobijamo ocenu

$$|f_n| \leq (C_R)^{1/r}\cdot\|f\|_{H_p^{\alpha}(G)}\cdot\frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha}{r}}} ,$$

pa koristeći nju, kao i ocene (7),gl.III, i (5), ocenjujemo drugu sumu na desnoj strani (41) pomoću majoracijâ

$$\Big|\sum_{\sqrt{\lambda_n}=\mu} f_n u_n(x)\Big| \leq C(G,q)\cdot(C_R)^{1/r}\cdot\|f\|_{H_p^{\alpha}(G)}\cdot\sum_{\sqrt{\lambda_n}=\mu}\frac{1}{\lambda_n^{\alpha/r}} \leq \tag{44}$$
$$\leq C_1^f\|f\|_{H_p^{\alpha}(G)}\cdot\mu^{-\frac{2\alpha}{r}} .$$

Za treću sumu na desnoj strani (41) važi ocena (27).

Predstavimo broj p, $1<p\leq 2$, u obliku

$$p = 1+\varkappa \;, \quad 0<\varkappa\leq 1 \;,$$

i izaberimo broj $\varepsilon>0$ tako da bude

$$\varepsilon < \frac{\varkappa r}{2p} \;. \tag{45}$$

Četvrtu sumu na desnoj strani (41) ocenićemo pomoću ocene (25) u kojoj je ε izabrano tako da zadovoljava uslov (45) :

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} S_{R_o}(I_n(x,R,\mu))\Big| \leq$$

$$\leq (C(\varepsilon)C_f)^{1/r}\cdot\|f\|_{H_p^{\alpha}(G)}\cdot\Big(\sum_{\sqrt{\lambda_n}>1}|S_{R_o}(I_n(x,R,\mu))|^p\lambda_n^{-(\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\varepsilon}{r})p}\Big)^{1/p} \tag{46}$$

Označimo sa $S(x,\mu)$ sumu na desnoj strani prethodne nejednakosti, predstavimo je u obliku

$$S(x,\mu) = \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1}(\cdot) + \sum_{1<\sqrt{\lambda_n}\leq\frac{\mu}{2}}(\cdot) + \sum_{\frac{\mu}{2}<\sqrt{\lambda_n}<\mu-1}(\cdot) + \sum_{\sqrt{\lambda_n}>\mu+1}(\cdot) \;, \tag{47}$$

i ocenimo svaku od dobijenih suma posebno.

S obzirom na ocene (5) i (42), biće

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1}|S_{R_o}(I_n(x,R,\mu))|^p\lambda_n^{-(\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\varepsilon}{r})p} \leq (D_1(R_o,q))^p\cdot\Big(\frac{2}{\mu}\Big)^{2p(\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\varepsilon}{r})}\cdot\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1}1 \leq$$

$$\leq \tilde{C}\,\mu^{-\frac{2\alpha}{r}p} \;, \tag{48}$$

jer je $1-\frac{2\varepsilon}{r}>0$, zbog uslova (45).

Koristeći ocene (5) i (43), dobijamo nejednakosti

$$\sum_{1<\sqrt{\lambda_n}\leq\frac{\mu}{2}}|S_{R_o}(I_n(x,R,\mu))|^p\lambda_n^{-(\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\varepsilon}{r})p} \leq \tag{49}$$

$$\leq B(D_2(R_o,q))^p \cdot 2^{-p(1-\frac{2\alpha}{r})} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p(1-2\varepsilon/r)}} \leq$$

$$\leq \tilde{C} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}p} ,$$

jer je uslov $p(1-\frac{2\varepsilon}{r}) > 1$ ekvivalentan uslovu (45).

Koristeći ocene (5) i (42), dobijamo nejednakosti

$$\begin{aligned} &\sum_{\frac{\mu}{2} < \sqrt{\lambda_n} < \mu-1} |S_{R_o}(I_n(x,R,\mu))|^p \lambda_n^{-(\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\varepsilon}{r})p} \leq \\ &\leq B(D_1(R_o,q))^p \cdot (\frac{2}{\mu})^{\frac{2\alpha}{r}p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p(1-2\varepsilon/r)}} \leq \tilde{C} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}p} . \end{aligned} \tag{50}$$

Najzad, imajući u vidu da $\sqrt{\lambda_n} > \mu+1 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} > |\sqrt{\lambda_n}-\mu|$, i koristeći ocene (5) i (42), dobijamo majoracije

$$\begin{aligned} &\sum_{\sqrt{\lambda_n} > \mu+1} |S_{R_o}(I_n(x,R,\mu))|^p \cdot \lambda_n^{-(\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\varepsilon}{r})p} \leq \\ &\leq B(D_1(R_o,q))^p \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p(1-2\varepsilon/r)}} \leq \tilde{C} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}p} , \end{aligned} \tag{51}$$

jer je $p(1-\frac{2\varepsilon}{r}) > 1$, zbog uslova (45).

Sada iz (47)-(51) sledi ocena

$$|S(x,\mu)| \leq \tilde{\tilde{C}} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}p} , \tag{52}$$

ravnomerno po x na kompaktu K, pri čemu konstanta $\tilde{\tilde{C}}$ ne zavisi od μ.

Zato iz (46) i (52) dobijamo ocenu

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot S_{R_o}(I_n(x,R,\mu)) \right| \leq C_2^f \cdot \|f\|_{H_p^\alpha(G)} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}} . \tag{53}$$

Najzad, iz (41), (44), (27) i (53) proističe ocena

$$\left|\sigma_\mu(x,f) - \int_a^b f(y) s_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))dy\right| \leq \tilde{C}_f \|f\|_{H_p^\alpha(G)} \cdot \mu^{-\frac{2\alpha}{r}},$$

ravnomerno po x na kompaktu K i u odnosu na brojeve $\mu > 2$. Odatle se neposredno dobija ocena (34).

Dokaz teoreme 3 je završen.

Preostalo nam je još da dokažemo ocenu (35). Neka je $C_0^\infty(G)$ skup beskonačno diferencijabilnih funkcija koje na intervalu G imaju kompaktan nosač. Ako je $f(y)$ funkcija iz klase $H_p^\alpha(G)$, koja ima kompaktan nosač, i $\varepsilon > 0$ - proizvoljan broj, onda postoji funkcija $g(y) \in C_0^\infty(G)$ takva da važi nejednakost

$$\|f - g\|_{H_p^\alpha(G)} \leq \varepsilon . \tag{54}$$

Dalje, u radu [23] je dokazana ocena

$$\sigma_\mu(x,g) - g(x) = O\left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \beta_\mu(g) \quad , \mu \to +\infty , \tag{55}$$

ravnomerna po x na svakom kompaktu K intervala G. Pri tome $\beta_\mu(g) \to 0$, kada $\mu \to +\infty$.

Analogno, za spektralno razlaganje $\hat{\sigma}_\mu(x,g)$ postoji beskonačno mala funkcija $\hat{\beta}_\mu(g)$ takva da važi analogon ocene (55).

Sada za dati broj ε možemo odrediti broj $\mu_0 > 0$ takav da

$$\mu > \mu_0 \Longrightarrow |\beta_\mu(g)| \leq \varepsilon \quad , \quad |\hat{\beta}_\mu(g)| \leq \varepsilon \quad . \tag{56}$$

Osim toga, biće

$$\begin{aligned} |\sigma_\mu(x,f) - \hat{\sigma}_\mu(x,f)| \leq {} & |\sigma_\mu(x,f-g) - \hat{\sigma}_\mu(x,f-g)| + \\ & |\sigma_\mu(x,g) - g(x)| + |\hat{\sigma}_\mu(x,g) - g(x)| \quad . \end{aligned} \tag{57}$$

Imajući u vidu ocene (34), (54) — (56), iz (57) dobijamo

$$\mu>\mu_0 \Longrightarrow |\sigma_\mu(x,f) - \hat{\sigma}_\mu(x,f)| \leq C_{f-g}\cdot\mu^{-\frac{2\alpha}{r}}\cdot\varepsilon + 2C\,\frac{1}{\mu}\cdot\varepsilon \leq$$

$$\leq \tilde{C}\cdot\mu^{-\frac{2\alpha}{r}}\cdot\varepsilon \quad ,$$

odakle sledi ocena (35), jer konstanta C ne zavisi od $g(y)$ i ε a konstanta C_{f-g} se može majorirati konstantom koja takodje ne zavisi od $g(y)$ i ε .

NAPOMENA 3. Rezultati ove glave mogu se preneti i na proizvoljni potpuni i minimalni sistem $\{\overset{i}{u}_n(y)\}_{n=1,\, i=0,1}^{\infty}$ sopstvenih i pridruženih funkcija operatora (1), čiji je potencijal $q(y)$ kompleksna funkcija iz klase $L_p(G)$, $1<p\leq 2$. Naime, ako se pretpostavi da taj sistem funkcija i odgovarajući sistem sopstvenih brojeva $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadovoljavaju uslove (18)-(20) iz glave II, i da biortogonalno spregnuti sistem $\{\overset{i}{v}_n(y)\}_{n=1,\, i=0,1}^{\infty}$, čiji su elementi sopstvene i pridružene funkcije spregnutog operatora, obrazuje trag Beselove baze u prostoru $L_2(G)$ onda se teoreme 1-3 ove glave mogu preneti i na ovu opštiju situaciju.

§5.- K O M E N T A R I

Kao inspiracija za bavljenje problematikom prikazanom u ovoj glavi, poslužio mi je prvi iz serije radova [1] , [13] - [16] V.A. Iljina i Š.A. Alimova, u kojima su rešeni problemi ravnomerne konvergencije i lokalizacije spektralnih razlaganja funkcije iz klase $\overset{0}{H}{}_2^{\alpha}(G)$, koja odgovaraju samokonjugovanim produženjima eliptičkog operatora drugog reda, definisanog u proizvoljnoj oblasti $G\subset R^n$.

Koeficijenti tog operatora su dovoljno glatke funkcije.

U pomenutom radu [13] razmatrana su samo [illegible]jugovana pro[illegible]ženja Laplasovog operatora sa diskretnim spektrom. Glavna pošte[illegible]a u primeni tehnike razvijene u tom rad[illegible], sastoji se u tome [illegible] [illegible]rator (1) osim glavnog dela [illegible] $u''(y)$, [illegible]drži i deo sa neglatki[illegible] [illegible]ncijalom $q(y)u(y)$. Rezultati formulis[illegible]i lemama 1 iz treće i [illegible]glave, kao i neki standardni tehnički [illegible]stupci, omogućili su d[illegible] [illegible]od tih teškoća budu preovladane.

Kao što je već pomenuto na početku §2, teorema 1 ima svoj [illegible]gon u lemi 3.1, §1, gl.3. [13] . Teorema 2 nema analogona u [illegible] radu, jer su svi tamošnji rezultati "[illegible]alne" prirode, tj. dob[illegible] [illegible] za unutrašnje podoblasti posmatrane oblasti G . Lemi 3 od[illegible] [illegible]ema 3.2 . Najzad, teorema 3 ima za svoj analogon "drugu [illegible] teoremu" u tom radu. Ustvari, analogija nije potpuna, jer [illegible] dobijen jači rezultat: teorema o ravnomernoj konvergenciji sa[illegible] [illegible] spektralnog razlaganja. Pretpostavljam da i u slučaju jednodi[illegible]nzionog Šredingerovog operatora (1) spektralno razlaganje takodj[illegible] [illegible]merno konvergira pod uslovima teoreme 3 (već teorema 2 ukazuj[illegible] [illegible]nost takve pretpostavke). Za sada [illegible] na [illegible] činjen[illegible] [illegible]omernoj ekvikonvergenciji spektralnog razlaganja i trigonom[illegible] [illegible] Furijeovog reda, kao i sve posledice koje iz te či[illegible] [illegible].

Primetiću na kraju da se uslov $f(y) \in L_{[illegible]}$ [illegible] definici[illegible] klas[illegible] $\tilde{L}_p^{\alpha}(G)$ može oslabiti uslovom $f(y) \in L_p(G)$, $1 < p \leq 2$, u sv[illegible] rez[illegible]ima ove glave, osim u teoremi 3.

Rezultati prikazani u ovoj glavi objavljeni [illegible] će bi[illegible] radovima [31] i [33] .

L I T E R A T U R A

[I] Алимов Ш.А., Ильин В.А., Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. II. Самосопряженное расширение оператора Лапласа с произвольным спектром,

Дифф. уравнения, т. 7, № 5 /I97I/, 85I-882.

[2] Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М., Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений I,

УМН, т. 3I, № 6 /I976/, 28-83.

[3] Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М., Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений II,

УМН, т. 32, № I /I977/, I07-I30.

[4] Ахиезер Н.И., Глазман И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве,

т. I, "Вища школа", Харьков, I977.

[5] Березанский Ю.М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов,

Киев, I965.

[6] Birkhoff G.D., On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter,

Trans.Amer.Math.Soc., 9 (1908), 219-231.

[7] Birkhoff G.D., Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations,
Trans.Amer.Math.Soc., 9 (1908), 373-395.

[8] Birkhoff G.D., Note of the expansion problems of the ordinary linear differential equations,
Rendiconti Palermo, 36 (1913), 115-126.

[9] Bochner S., Summation of multiple Fourier series by spherical means,
Trans.Amer.Math.Soc., 40 (1936), 175-201.

[10] Garding L., On the asymptotic distributions of the eigenvalues of elliptic differential operators,
Math.Scand., 1 (1953), 237-255.

[11] Зигмунд А., Тригонометрические ряды,
т. II, "Мир", Москва, 1965.

[12] Ильин В.А., Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа,
УМН, т. 23, № 2 /1968/, 61-120.

[13] Ильин В.А., Алимов Ш.А., Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. I. Самосопряженное расширение оператора Лапласа с точечным спектром,
Дифф. уравнения, т. 7, № 4 /1971/, 670-710.

[14] Ильин В.А., Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов 3

Дифф. уравнения, т. 7, № 6 /1971/, 1036-1041.

[15] Ильин В.А., Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов

Дифф. уравнения, т. 9, № 1 /1973/, 49-73.

[16] Ильин В.А., Алимов Ш.А., Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптически операторов 5,

Дифф. уравнения, т. 10, № 3 /1974/, 482-506.

[17] Ильин В.А., О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье,

ДАН СССР, т. 223, № 3 /1975/, 548-551.

[18] Ильин В.А., О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М.В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов,

ДАН СССР, т. 225, № 3 /1975/, 497-499.

[19] Ильин В.А., Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов,

ДАН СССР, т. 227, № 4 /1976/, 796-799.

[20] Ильин В.А., О свойствах приведенной подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов,

ДАН СССР, т. 230, № 1 /1976/, 30-33.

[21] Ильин В.А., О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора, Матем. заметки, т. 22, № 5 /1977/, 679-698.

[22] Ильин В.А., Йо И., Равномерная оценка собственных функций и оценка сверху числа собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом из класса L_p,
Дифф. уравнения, т. 15, № 7 /1979/, 1164-1174.

[23] Ильин В.А., Йо И., Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма-Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции,
Дифф. уравнения, т. 15, № 7 /1979/, 1175-1193.

[24] Йо И., Лажетич Н., О производных частичных сумм спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям операторов типа Штурма-Лиувилля,
ДАН СССР, т. 246, № 3 /1979/, 534-536.

[25] Йо И., Некоторые вопросы спектральной теории для одномерного несамосопряженного оператора Шредингера с потенциалом из L_1,
ДАН СССР, т. 250, № 1 /1980/, 29-31.

[26] Йо И., Лажетич Н., Оценка разности производных частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма-Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции,
Дифф. уравнения, т. 16, № 4 /1980/, 598-619.

[27] Йо И., Лажетич Н., Оценка разности вторых производных частичных сумм разложений, отвечающих двум самосопряженным расши-

рениям операторов типа Штурма-Лиувилля,
Acta Hungarica, (u štampi).

[28] Крейн М.Г., Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на елементарные произведения,
ДАН СССР, т. 53, /1946/, 3-6.

[29] Крейн М.Г., Про ермітові оператори з напрямними функціоналами
Збірник праць інституту математики АН УРСР, № 10 /1948/, 83-105.

[30] Лажетич Н., Равномерные оценки первых производных собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом из класса L_1,
ДАН СССР, т. 249, № 6 /1979/, 1304-1305.

[31] Лажетич Н., О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма-Лиувилля,
ДАН СССР, т. 251, № 3 /1980/, 548-550.

[32] Лажетич Н., Равномерные оценки для производных собственных функций самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля,
Дифф. уравнения, /у штампи/.

[33] Лажетич Н., О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма-Лиувилля, для функций из класса H_p^α ,
Дифф. уравнения, /у штампи/.

[34] Левитан Б.М., О разложении по собственным функциям самосопряженного уравнения в частных производных

Труды ММО, 5 /1956/, 269-298.

[35] Левитан Б.М., Саргсян И.С., Введение в спектральную теорию, "Наука", Москва, 1970.

[36] Ломов И.С., Оценки собственных и присоединенных функций оператора типа Штурма-Лиувилля, ДАН СССР, т. 248, № 6 /1979/, 1303-1306.

[37] Minakshisundaram S., On the expansion of an arbitrary function in a series of eigenfunctions of boundary value problems V, J. Indian Math.Soc., 7 (1943), 89-95.

[38] Мойсеев Е.И., Формула среднего значения для регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения, ДАН СССР, т. 223, № 3 /1975/, 562-565.

[39] Наймарк М.А., Линейные дифференциальные операторы, "Наука", Москва, 1969.

[40] Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, "Наука", Москва, 1977.

[41] Садовничий В.А., Теория операторов, Издательство Московского университета, 1979.

[42] Смирнов В.И., Курс высшей математики, т. 5, ГИФМЛ, Москва, 1959.

[43] Стеклов В.А., Сообщ. матем. общ. Харьков, /2/, т. 10 /2-6/, 97 /1907-1909/.

[44] Тамаркин Я.Д., О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды,
Петроград, 1917.

[45] Титчмарш Э.И., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка,
т. I, ИЛ, Москва, 1960.

[46] Hörmander L., On the Riesz means of spectral function and eigenfunction expansion for elliptic differential operators,
Lecture at the Belfer Graduate School, Yeshiva University,1966

[47] Carleson L., On convergence and growth of partial sums of Fourier series,
Acta Math., 116, 1-2 (1966), 135-157.

[48] Ильин В.А., Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I
Дифф. уравнения, т. 16, № 5 /1980/, 771-794.

S A D R Ž A J

I S P R A V K E

Stranica	Red (uključujući i naslove)	
7	16	Ne treba da stoji uslov $\overset{1}{u}(y)\neq 0$.
15	22	Stoji: $\overset{0}{u}(y),\overset{1}{u}(y)\in L_2(G)$. Treba da stoji: $\overset{1}{u}(y)\in L_2(G)$.
20	24	Videti prethodnu ispravku.
29	7	Stoji: $\left\|\frac{\sin z}{z}\right\|<\frac{1}{2}$. Treba da stoji: $\left\|\frac{\sin z}{z}\right\|>\frac{1}{2}$
34	13	Stoji: $\overset{1}{u}'(x+t)+\overset{1}{u}'(x-t)=\dots$. Treba da stoji: $\overset{1}{u}'(x+t)-\overset{1}{u}'(x-t)=\dots$.
35	3	Videti ispravku koja se odnosi na stranicu 15.
48	6	Oznaka $q_1(y)\in L_p^{loc}(a,x_o]$ znači da funkcija $q_1(y)$ pripada klasi L_p na svakom segmentu $[c,x_o]\subset(a,x_o]$. Analogno važi za funkciju $q_2(y)$.
49	1	Ne treba da stoji uslov $\overset{1}{u}(y)\neq 0$.
50	1	Stoji: Zbog minimalnosti sistema .... . Treba da stoji: Zbog potpunosti i minimalnosti sistema
50	5	Umesto jednakosti (14) treba da stoji jednakost $\int_a^b \overset{i}{u}_n(y)\overline{\overset{j}{v}_m(y)}\,dy = \begin{cases} 1, & \text{za } n=m, i=j;\\ 0, & \text{u ostalim slučajevima} \end{cases}$.
50	1	Stoji: ... sistem sopstvenih brojeva. Treba da stoji: ... sistem sopstvenih brojeva, pri čemu sopstvenom broju λ_m odgovara jedna sopstvena i jedna pridružena funkcija.
54	17	Stoji: ... jeste sopstvena, odnosno pridružena funkcija operatora (1)-(2).

Stranica	Red	
54	17	Treba da stoji: ... dobija se na prethodno opisani n čin.
56	13	Stoji: ... f(R)-funkcija ... . Treba da stoji: ... f(R)- integrabilna funkcija ...
83	14	Stoji: (konačnog ili beskonačnog) ... . Treba da stoji: (konačnog) ... .
86	17	Stoji: ... važi tim pre i za ... . Treba da stoji: ... važi i za ... .
86	23	Stoji: $+ p_n(y,\lambda)+\lambda^m u(y)$. Treba da stoji: $+ (p_n(y,\lambda)+\lambda^m)u(y)$.
89	16	Stoji: ... minimalan ... . Treba da stoji: ... potpun i minimalan ... .
106	7	Stoji: ... u prostoru $L_2(K)$ ... . Treba da stoji: ... u potprostoru neprekidnih funkci prostora $L_2(K)$ ... .
110	6-7	Stoji: ... nisu tačne po poretku u odnosu na paramet Treba da stoji: ... mogu se poboljšati u odnosu na p rametar μ kod pojedinih posebnih operatora.
115	9	Stoji: ... za svaku k puta ... . Treba da stoji: ... za svaku finitnu k puta ... .
115	18	Stoji: $f(y)\in L_2(G)$. Treba da stoji: $f(y)\in L_2(G)\cap L_p(G)$.
122	11	Na kraju prethodnog i na početku ovog reda treba da stoji znak + .