U N I V E R Z I T E T U P R I Š T I N I

Prirodno matematički fakultet

PROCENA FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA NEKIH KLASA FUNKCIJA

- doktorska disertacija -

Muharrem Berisha

April 1979 god.

Priština

S A D R Ž A J

UVOD

Kažemo da je $f(x) \in L_p$ ako je $f(x)$ periodična funkcija periode 2π, koja je

1) merljiva i za $1 \leq p < \infty$

$$\| f \|_p = \left(\int_0^{2\pi} | f(x) |^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

2) neprekidna i za $p = \infty$

$$\| f \|_\infty = \| f \|_C = \max_x | f(x) |$$

Obeležimo sa $\omega_k(f, t)_p$ modul glatkosti poretka k, funkcije $f(x)$ u metrici L_p, t.j.

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \| \Delta_h^k f(x) \|_p$$

gde je

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^\nu f(x + \nu h)$$

Obično, Fourer-ov red funkcije $f(x)$ ćemo pisati u kompleksnom obliku t.j.

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

gde je

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt .$$

Parcijalnu sumu Fourier-ovog reda funkcije $f(x)$ obeležavamo sa $S_n(x, f)$, t.j.

$$S_n(x, f) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}$$

Označimo sa $E_n(f)_p$ najbolju aproksimaciju funkcije $f(x)$ trigonometriskim polinomima reda ne većeg od n, t.j.

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n} \| f(x) - T_n(x) \|_p$$

gde je

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

a α_k i β_k su realni brojevi.

U ovom radu tretiran je problem procene Fourier-ovih koeficijenata periodične funkcije

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

koja pripada klasi $H(p, k, \varphi)$ ili klasi $B(p, \theta, \alpha)$ (*)

Setimo se da za Fourier-ove koeficijente funkcije $f(x)$ iz klase L_p važe sledeća tvrdjenja (vidi [1], str. 211 i 217; takodje vidi [18]):

Da bi funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi L_p, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

$$\text{za} \quad 2 \le p < \infty: \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} < \infty$$

$$\text{za} \quad 1 \le p \le 2: \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu|^2 < \infty$$

a potrebno je da su ispunjeni uslovi:

$$\text{za} \quad 2 \le p < \infty: \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu|^2 < \infty$$

(*) Definicije klasa $H(p, k, \varphi)$ i $B(p, \theta, \alpha)$ date su u II i III glavi.

za $1 < p \leq 2: \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} < \infty$

Godine 1961, M.K. Potapov [2] je dao potrebne i dovoljne uslove, preko Fourier-ovih koeficijenata, da bi funkcija $f(x)$ pripadala klasi $H_p^{(r)}$. Naime, kažemo da periodična funkcija $f(x)$ periode 2π, pripada klasi $H_p^{(r)}$, gde je $1 \leq p \leq \infty$, $r = \bar{r} + \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $\bar{r}$ - ceo broj, ako $f(x)$ ima takav $\bar{r}$ - ti izvod da $f^{(\bar{r})}(x) \in L_p$ i

$$\| f^{(\bar{r})}(x+h) - 2f^{(\bar{r})}(x) + f^{(\bar{r})}(x-h) \|_{L_p} \leq |h|^\alpha$$

Pošto ćemo u našem radu doći do sličnih iskaza sa druge klase funkcija i porediti ih sa dosadašnjim, navedemo neke od teorema tog tipa.

U [3] dokazana sledeća

<u>Teorema A</u>. Da bi $f(x) \in H_p^{(r)}$ potrebno je i dovoljno da

$$E_n(f)_p \leq \frac{C}{n^r}$$

Prirodno bi bilo, ukoliko je reč o periodičnim funkcijama, postaviti pitanje o uslovima istovremeno potrebnim i dovoljnim da bi $f(x) \in H_p^{(r)}$ ali ne preko $E_n(f)_p$ već preko Fourier-ovih koeficijenata funkcije $f(x)$. Za parne i neparne funkcije takvi uslovi izvedeni su u ([4] i [5]). Naime, ako je

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \text{ili} \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \quad \text{i} \quad a_k \downarrow 0,$$

tada da bi $f(x) \in H_p^{(r)}$, potrebno je i dovoljno da je

$$a_k \leq \frac{C}{k^{r+1-\frac{1}{p}}}, \quad 1 < p < \infty$$

Medjutim, iz niže navedenih teorema, vidi se da takvih uslova u opštem slučaju nema (vidi [2]).

Teorema 1. Da bi periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

pripadala klasi $H_p^{(r)}$, $1 \leq p \leq \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\quad 2 \leq p \leq \infty : \quad \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \frac{C}{n^r}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

za $\quad 1 \leq p \leq 2 : \quad \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^{2} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{n^r}$

Teorema 2. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

pripada klasi $H_p^{(r)}$, $1 < p \leq \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\quad 2 \leq p \leq \infty : \quad \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^{2} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{n^r},$

za $\quad 1 < p \leq 2 : \quad \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \frac{C}{n^r}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Kao posledica teoreme 1 sledi

Teorema 3. Da bi periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

pripadala klasi $H_p^{(r)}$, $1 \leq p \leq \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

za $\quad 1 \leq p \leq 2 : \quad |c_k| \leq \frac{C}{(|k|+1)^{r+\frac{1}{2}}}$

za $\quad 2 \leq p \leq \infty : \quad |c_k| \leq \dfrac{C}{(|k|+1)^{r+1-\frac{1}{p}}}$

Teorema 4. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

pripada klasi $H_p^{(r)}$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti moraju da zadovoljavaju uslove

$$|c_k| \leq \frac{C}{(|k|+1)^r}, \quad |k| = 0, 1, 2, \ldots$$

Ova teorema bila već ranije dokazana (vidi, naprimer, [6], str. 22).

Ako se pretpostavi da $|c_k| \downarrow$, tada važi

Teorema 5. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

pripada klasi $H_p^{(r)}$, $1 \leq p < \infty$ i $|c_k| \downarrow$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti moraju da zadovoljavaju sledeće uslove

za $\quad 2 \leq p < \infty : \quad |c_k| \leq \dfrac{C}{(|k|+1)^{r+\frac{1}{2}}}$

za $\quad 1 \leq p \leq 2 : \quad |c_k| \leq \dfrac{C}{(|k|+1)^{r+1-\frac{1}{p}}}$

Navedemo ovde još i to, da su 1950 godine A.F. Timan i M.F. Timan u [22] pokazali iste dovoljne uslove da bi $f(x) \in H_p^{(r)}$ za $2 \leq p < \infty$, a za $1 < p \leq 2$ dali iste potrebne uslove takodje da bi $f(x) \in H_p^{(r)}$.

Na kraju, nekoliko reči o sadržaju pojedinih glava.

U prvom poglavlju dati su pomoćni stavovi, koje ćemo često koristiti pri dokazu pojedinih stavova u ostalim poglavljima.

U drugom poglavlju dati su posebno potrebni i dovoljni uslovi koje zadovoljavaju Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f(x)$ da bi ova pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$. Primećujemo da smo pri dokazu tih iskaza koristili karakterizaciju klase $H(p, k, \varphi)$, preko najbolje aproksimacije funkcije $f(x) \in H(p, k, \varphi)$.

U trećem poglavlju takodje su dati posebno potrebni i dovoljni uslovi za Fourier-ove koeficijente funkcije $f(x)$ da bi ova pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$. Za razliku od prethodne glave ovde su dokazi izvedeni preko poznatih procena modula gladkosti.

U četvrtom poglavlju izvedeni su posebno potrebni i dovoljni uslovi koje treba da zadovolje Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f(x)$ da bi ova pripadala klasi $B(p, \theta, \alpha)$.

Zadnje peto poglavlje, posvećeno je problemu potrebnih i dovoljnih uslova za Fourier-ove koeficijente funkcije $f(x)$, da bi ova pripadala klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$. Za razliku od četvrtog poglavlja, gde su dokazi izvedeni pomoću najbolje aproksimacije funkcije $f(x)$, ovde su, kao u trećem poglavlju, dokazi izvedeni pomoću modula gladkosti.

I

NEKI POMOĆNI STAVOVI

Da bismo u ovom radu dokazali osnovne rezultate potrebni su nam sledeći pomoćni stavovi - leme.

LEMA 1.1. Ako je $f(x) \in L_p$ za neko p iz intervala $1 < p \leq 2$, tada za proizvoljan prirodan broj k važi nejednakost

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{A_1}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} E_\nu^p(f)_p\right\}^{1/p},$$

medjutim, ako je p iz intervala $2 \leq p < \infty$, tada važi nejednakost

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \geq \frac{A_2}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} E_\nu^p(f)_p\right\}^{1/p}.$$

Ovde su A_1 i A_2 konstante nezavisne od f(x) i n. Prva nejednakost dokazana je u [7] a druga u ([8]; takodje vidi [9]).

LEMA 1.2. Neka je $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ i neka je

$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$ gde je $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_\nu \geq a_{\nu+1} \geq \cdots \geq 0.$

Tada važe nejednakosti

$$E_n(f)_p \leq A_1\left\{a_n n^{1-\frac{1}{p}} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}\right]^{1/p}\right\},$$

$$E_n(f) \geq A_2\left\{\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}\right\}^{1/p},$$

gde su A_1 i A_2 pozitivne konstante nezavisne od f(x) i n. Dokaz prve nejednakosti nalazi se u [10], a dokaz druge nejednakosti u [11].

LEMA 1.3. Neka je f(x) neprekidna funkcija takva da je

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \quad \text{sa} \quad a_\nu \geqslant 0.$$

Tada važi nejednakost (vidi [12]):

$$E_n(f)_\infty \geqslant \frac{1}{4} \sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu$$

LEMA 1.4. Neka su α, β i a_ν takvi brojevi da je $0 < \alpha < \beta < \infty$, $a_\nu \geqslant 0$. Tada važi nejednakost (vidi [13], str. 43):

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\beta\right)^{1/\beta} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

LEMA 1.5. Neka su brojevi a_ν, b_ν i γ_ν takvi da je $a_\nu \geqslant 0$, $b_\nu \geqslant 0$ i

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_n \gamma_n$$

Tada (vidi [14]):

1. za $1 \leqslant p < \infty$ važi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu\right)^p \leqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p,$$

2. za $0 < p \leqslant 1$ važi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu\right)^p \geqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p$$

LEMA 1.6. Neka su brojevi a_ν, b_ν i β_ν takvi da je

$$a_\nu \geqslant 0,\ b_\nu \geqslant 0 \text{ i } \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = a_n \beta_n$$

Tada (vidi [15])

1. za $1 \leq p < \infty$ važi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} b_\mu\right)^p \leq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p,$$

2. za $0 < p \leq 1$ važi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} b_\mu\right)^p \geq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p.$$

Pošto su procene Fourier-ovih koeficijenata funkcije $f(x)$ iz klasa $H(p,k,\varphi)$ i $\overset{*}{B}(p,\theta,\alpha)$ u trećoj i petoj glavi izvedene pomoću modula gladkosti, navešćemo ovde nekoliko iskaza o modulima gladkosti i Fourier-ovim koeficijentima periodične funkcije jedne promenljive, koje su dokazane u [16] , a specijalno procenu modula gladkosti sa donje strane za $p=1$ (vidi [17], str.851).

Primećujemo da su pri dokazima u [16] , izmedju ostalog korišćene i lema 1.1 i lema 1.3. Takodje ćemo i iskaze, koji daju vezu izmedju modula gladkosti i Fourier-ovih koeficijenata funkcije $f(x)$, prikazati u obliku lema.

<u>LEMA 1.7</u> Neka je $f(x) \in L_p$, tada za $1 \leq p \leq \infty$ važe sledeće nejednakosti

1. za $2 \leq p < \infty$:

$$C_1 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k}\right)^{1/2} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2} \right\} \leq \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq$$

$$\leq C_2 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \right\},$$

2. za $1 < p \leq 2$:

$$C_1\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu|^p|\nu|^{(k+1)p-2}\right)^{1/p}+\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^p|\nu|^{p-2}\right)^{1/p}\right\}\leq$$

$$\leq \omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq C_2\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu|^2|\nu|^{2k}\right)^{1/2}+\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

3. za $p=\infty$:

$$C_1\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu|^2|\nu|^{2k}\right)^{1/2}+\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^2\right)^{1/2}\right\}\leq$$

$$\leq \omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_\infty \leq C_2\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu||\nu|^{k}\right)+\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|\right\}$$

4. za $p=1$:

$$C_1|c_n| \leq \omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_1 \leq C_2\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu|^2|\nu|^{2k}\right)^{1/2}+\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

gde su konstante C_1 i C_2 nezavisne od $f(x)$ i n.

Ako se posmatra parna funkcija

$$f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x \qquad \text{gde} \qquad a_\nu\downarrow 0$$

tada je u [17] izvedena sledeća teorema S. Aljančića:

Ako je

$$f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x\,,\quad a_\nu\downarrow 0\,,\quad 1<p<\infty$$

tada važi nejednakost

$$\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq C\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}a_\nu^p\,\nu^{(k+1)p-2}\right)^{1/p}+\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu^p\,\nu^{p-2}\right)^{1/p}\right\}.$$

gde je konstanta C nezavisna od f(x) i n.

U [15] dokazano je da ista ta procena važi i sa donje strane, pa ćemo ovde navesti i potpuni rezultat:

LEMA 1.8. Ako je

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x\,, \quad a_\nu \downarrow 0\,, \quad 1<p<\infty$$

tada postoje konstante C_1 i C_2 nezavisne od f(x) i n takve da važi nejednakost

$$C_1 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \nu^{(k+1)p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right)^{1/p} \right\} \leqslant \omega_k \left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \nu^{(k+1)p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right)^{1/p} \right\}.$$

Na kraju navedemo procenu modula gladkosti funkcije f(x) koja ima lakunarni Fourier-ov red

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos 2^\nu x$$

U [16] za ove redove data sledeća procena modula gladkosti:

LEMA 1.9. Ako je

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos 2^\nu x.\,, \quad 1<p<\infty$$

tada postoje konstante C_1 i C_2 nezavisne od f(x) i n takve da važi nejednakost

$$C_1\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\,\nu^{2k}\right)^{1/2}+\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^2\right)^{1/2}\right\}\leq \omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p\leq$$

$$\leq C_2\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\,\nu^{2k}\right)^{1/2}+\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^2\right)^{1/2}\right\}.$$

LEMA 1.10. (vidi [21], str. 847 - 848). Neka je $f(x)\in L_p$, $1\leq p\leq\infty$, $0<\theta<\infty$, $\alpha(t)$ - funkcija tipa σ ; tada za proizvoljan prirodan broj k, koji zadovoljava uslov $k\geqslant\frac{\sigma}{\theta}$, važi nejednakost

$$C_1\left\{E_0^{\theta}(f)_p+E_1^{\theta}(f)_p+\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)\,E_{2^\nu}^{\theta}(f)_p\right\}\leq$$

$$\leq\int_0^1\alpha(t)\,\omega_k^{\theta}(f,t)_p\,dt\leq C_2\left\{E_0^{\theta}(f)_p+E_1^{\theta}(f)_p+\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)\,E_{2^\nu}^{\theta}(f)_p\right\}.$$

gde su konstante C_1 i C_2 nezávisne od f(x) i n, a

$$\mu(\nu)=\int_{1/2^\nu}^{2/2^\nu}\alpha(t)\,dt\ ,\quad \nu\geqslant 1\ ,\quad \mu(0)=1.$$

Kažemo da funkcija α (t) zadovoljava σ - uslov ili da je funkcija tipa σ ako je ona merljiva na [0, 1], integrabilna na $[\delta, 1]$ za svako $\delta\in(0, 1)$, postoji takav realan broj σ, da za proizvoljno $\delta\in(0, 2\pi)$ i za proizvoljno pozitivno ε važe relacije

$$\int_0^{\delta}\alpha(t)\,t^{\sigma}\,dt=C(\delta)<\infty$$

$$\int_0^{\delta}\alpha(t)\,t^{\sigma-\varepsilon}\,dt=\infty\ ;$$

i ako sem toga postoje pozitivne konstante C_1 i C_2 takve da za sve pozitivne $\delta < \delta_0$ važe nejednakosti: $\alpha(t) \geqslant C_1$ za sve $t \in [0, 1]$ i

$$(*) \qquad \int_0^{\delta} \alpha(t)\, t^{\sigma} dt \leqslant C\delta^{\sigma} \int_0^{2\delta} \alpha(t) dt$$

TEOREMA 1.1. (Paley). Neka je $\{\varphi_n(x)\}$ ortogonalni i normirani sistem na $[a, b]$ i $|\varphi_n(x)| \leqslant M$ $(n = 1, 2, \dots)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Tada, vidi ([1], str. 217):

1) Ako je $f(x) \in L_p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ i $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ Fourier-ovi koeficijenti po sistemu $\varphi_n(x)$, tada

$$\Big(\sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^p |n|^{p-2} \Big)^{1/p} \leqslant A_p \|f\|_p$$

gde konstanta A_p zavisi samo od p i M.

2) Ako je $q \geqslant 2$ i $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ niz brojeva za koji

$$\sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^q |n|^{q-2} < \infty$$

tada postoji funkcija $f(x) \in L^q(a, b)$ za koju brojevi c_n javljaju se njenim Fourier-ovim koeficijentima i

$$\|f\|_p \leqslant B_q \Big(\sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^q |n|^{q-2} \Big)^{1/q},$$

gde B_q zavisi samo od q i M.

TEOREMA 1.2. (Hausdorff - Young), (vidi, [1], str. 211)

1) Neka je

$$f(t) \in L_p(0, 1)$$

i neka je

$$c_n = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i n t}\, dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

t.j. c_n - su Fourier-ovi koeficijenti po normiranom i ortogonalnom sistemu $\{e^{2\pi i n t}\}$ na (0, 1). Tada

$$\left(\sum_n |c_n|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|_p$$

gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2) Ako je c_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ - niz brojeva za koji je

$$\left(\sum_n |c_n|^p\right)^{1/p} < \infty ,$$

tada postoji takva funkcija $f(t) \in L^q$ (0, 1) za koju brojevi c_n su njeni Fourier-ovi koeficijenti i

$$\|f\|_q \leqslant \left(\sum_n |c_n|^p\right)^{1/p}$$

<u>TEOREMA 1.3</u> (Zygmund), (vidi [19], str. 345). Pretpostavimo da je $n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1$ za sve k i da red

$$\sum_k (a_k^2 + b_k^2)$$

konvergira, tako da je red

$$\sum_k (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$$

Fourier-ov red funkcije f(x), tada

$$A_{p,q}\left\{\sum_k (a_k^2+b_k^2)\right\}^{1/2} \leqslant \|f\|_p \leqslant B_{p,q}\left\{\sum_k (a_k^2+b_k^2)\right\}^{1/2}$$

za sve $p > 0$, gde se konstante $A_{p,q}$ i $B_{p,q}$ zavise samo od p i q.

II

PROCENA, POMOĆU NAJBOLJE APROKSIMACIJE, FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA FUNKCIJA KLASE $H(p, k, \varphi)$

DEFINICIJA 2.1. Kažemo da periodična funkcija f(x) periode 2π, pripada klasi $H(p, k, \varphi)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ ako je

1°. $f(x) \in L_p$

2°. $\omega_k(f, \delta)_p \leq C\varphi(\delta)$

gde funkcija $\varphi(\delta)$ ima sledeće osobine

1) $\varphi(\delta)$ nenegativna i neprekidna na $[0, 1]$ i $\varphi(\delta) \not\equiv 0$

2) $\varphi(\delta_1) \leq C_1 \varphi(\delta_2)$ ako je $0 \leq \delta_1 < \delta_2 \leq 1$

3) $\varphi(2\delta) \leq C_2 \varphi(\delta)$ ako je $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$

gde su konstante C_1 i C_2 nezavisne od δ_1, δ_2 i δ.

U ovom poglavlju se preko Fourier-ovih koeficijenata funkcije

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

izražava njena pripadnost klasi $H(p, k, \varphi)$.

Prvo se dokazuje teorema B, koju ćemo pri dokazu drugih iskaza često koristiti.

Primetimo da teorema 2.1 daje dovoljne a teorema 2.2 potrebne uslove koje treba da ispunjavaju Fourier-ovi koeficijenti funkcije f(x) da bi ova pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$.

Kao posledica teoreme 2.1, uz dopunski uslov (2.13), sledi teorema 2.5. Teoremu 2.4 navedemo je ovde samo radi kompletnosti rezultata; inače, ona je već od ranije poznata (vidi, [19], str. 76).

Ako se pretpostavi da za

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$2|c_0| \geqslant |c_1| + |c_{-1}| \geqslant |c_2| + |c_{-2}| \geqslant \cdots,$$

t.j. da $|c_k| \downarrow$, tada sledi teorema 2.5.

Posebno mesto zauzimaju procene Fourier-ovih koeficijenata parne funkcije

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \quad , \quad a_\nu \downarrow 0$$

odnosno funkcije

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos \nu x \, ,$$

sa koeficijentima $b_\nu = a_m \geqslant 0$, ako je $\nu = 2^m$ i $b_\nu = 0$, ako je $\nu \neq 2^m$ (m - prirodan broj).

Naime, da bi funkcija $g(x)$ odnosno $\psi(x)$ pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ dati su istovremeno potrebni i dovoljni uslovi koje zadovoljavaju Fourier-ovi koeficijenti funkcije $g(x)$ odnosno $\psi(x)$.

<u>TEOREMA B</u>. Neka je $\varphi(\delta)$ funkcija koja zadovoljava uslov

$$\delta^k \int_\delta^1 \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\, dt \leq C_1 \varphi(\delta). \tag{2.1}$$

Tada, da bi periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$, $1 \leq p \leq \infty$, potrebno je i dovoljno da

$$E_n(f)_p \leq C_2\, \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \tag{2.2}$$

DOKAZ. Da je uslov potreban, neposredno sledi iz dobro poznate teoreme Džeksona [20], koja glasi:

$$E_n(f)_p \leq C_3\, \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p$$

Ako je $f(x) \in H(p, k, \varphi)$ po definiciji imamo

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p \leq C_4\, \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

te je

$$E_n(f)_p \leq C_4\, \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Pristupimo dokazu dovoljnosti uslova (2.2). U [20] je izvedeno da, ako $f(x) \in L_p$ $(1 < p \leq \infty)$, tada za svaki prirodan broj n važi nejednakost

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \leq \frac{C_5}{2^{nk}} \left\{ E_0(f)_p + \sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu k} E_{2^\nu}(f)_p \right\}. \tag{2.3}$$

Neka je ispunjeno (2.2). Tada je

$$E_{2^\nu}(f)_p \leq C_6\, \varphi\left(\frac{1}{2^\nu+1}\right) \quad i \quad E_0(f)_p \leq C_6\, \varphi(1)$$

gde je ν prirodan broj ili nula.

Ako ove procene stavimo u (2.3), uzimajući u obzir da je

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) \leq C\,\varphi\left(\frac{1}{2^{\nu}}\right),$$

tada sledi

$$(2.4) \qquad \omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \leq \frac{C_7}{2^{nk}} \sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu k} \varphi\left(\frac{1}{2^{\nu}}\right)$$

Dalje, primetimo da je

$$(2.5) \qquad 2^{\nu k} \leq C_8 \int_{\nu}^{\nu+1} 2^{uk} du$$

Za $\nu < u < \nu + 1$ imamo $\frac{1}{2^{\nu+1}} < \frac{1}{u} < \frac{1}{2^{\nu}}$,

a na osnovu druge osobine funkcije $\varphi(\delta)$ imamo

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) \leq C_9\, \varphi\left(\frac{1}{2^{u}}\right) \leq C_{10}\, \varphi\left(\frac{1}{2^{\nu}}\right)$$

Tako da, ako unesemo $\varphi(\frac{1}{2^{\nu}})$ pod znak integrala u (2.5) i sumiramo integrale od 0 do $n+1$ dobijamo

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \leq \frac{C_{11}}{2^{nk}} \int_0^{n+1} 2^{uk} \varphi\left(\frac{1}{2^u}\right) du.$$

Stavimo li

$$2^u = \frac{1}{t},$$

iz (2.6) sledi

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \leq \frac{C_{12}}{2^{nk}} \int_{1/2^{n+1}}^{1} \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}} dt = \frac{C_{13}}{2^{(n+1)k}} \int_{1/2^{n+1}}^{1} \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}} dt$$

a na osnovu uslova (2.1) imamo

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \leq \varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

što znači

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \leq C\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Znamo da za svako δ postoji takvo n da je

$$\frac{1}{2^n} \leq \delta < \frac{2}{2^n},$$

t.j.

$$\omega_k(f,\delta)_p \leq C_{14}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{2^{n-1}}\right)_p \leq C_{15}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \leq C_{16}\,\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq C\varphi(\delta),$$

a to znači da $f(x) \in H(p, k, \varphi)$.

<u>TEOREMA 2.1</u>. Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslov (2.1). Da bi tada periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju sledeće uslove

za $1 \leq p \leq 2$: $$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2} \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $2 \leq p < \infty$: $$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $p = \infty$: $$\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu| \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

<u>DOKAZ</u>. Jasno je da je

$$E_n(f)_p \leq \|f(x) - S_n(x,f)\|_p. \tag{2.7}$$

Prema teoreme Pelia (vidi, I glava) za $2 \leq p < \infty$ imamo

$$(2.8) \qquad \|f(x) - S_n(x,f)\|_p \leq A_p \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Na osnovu (2.7) i (2.8) sledi da je

$$E_n(f)_p \leq A_p \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Ako pretpostavimo da je ispunjen uslov teoreme za $2 \leq p < \infty$:

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right)^{1/p} \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

tada sledi da je

$$E_n(f)_p \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

a na osnovu teoreme B, sledi da je $f(x) \in H\,(p,k,\varphi)$.

Znamo da za $1 \leq p \leq 2$ važi

$$(2.9) \qquad E_n(f)_p \leq C\, E_n(f)_2 ,$$

a sa druge strane imamo da je

$$E_n(f)_2 \leq \|f(x) - S_n(x,f)\|_2$$

Primenimo li dobro poznatu jednakost Parsevala,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$$

na izraz
$$\|f(x) - S_n(x,f)\|_2 = \Big\| \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x} \Big\|_2$$

dobijamo da je

$$E_n(f)_2 \leq \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{1/2} \tag{2.10}$$

Iz (2.9) i (2.10) sledi da za $1 \leq p \leq 2$ važi:

$$E_n(f)_p \leq \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{1/2}$$

Ako pretpostavimo da je ispunjen uslov teoreme za $1 \leq p \leq 2$:

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{1/2} \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

tada sledi da je

$$E_n(f)_p \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

a na osnovu teoreme B, sledi da je $f(x) \in H(p, k, \varphi)$.

Znajući da je

$$E_n(f)_p \leq \| f(x) - S_n(x,f) \|_p,$$

na osnovu teoreme Hausdorfa - Junga (vidi, I glava), sledi da je

$$\| f(x) - S_n(x,f) \|_p \leq \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

otkuda za $p = \infty$, dobijamo

$$\| f(x) - S_n(x,f) \|_\infty \leq \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|$$

Ako pretpostavimo da je ispunjen uslov teoreme za $p = \infty$:

$$\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu| \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

tada sledi da je

$$E_n(f)_\infty \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

a na osnovu teoreme B, sledi da je $f(x) \in H(p,k,\varphi)$.

Time je teorema 2.1 u potpunosti dokazana.

TEOREMA 2.2 Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslov (2.1).

Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripada klasi $H(p,k,\varphi)$, $1 \leq p \leq \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

za $1 < p \leq 2$: $$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $2 \leq p \leq \infty$: $$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2} \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $p = 1$: $$|c_\nu| \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

DOKAZ. Lako je pokazati ([23], str.77), da za $1 < p < \infty$ važi nejednakost

$$\| f(x) - S_n(x,f)\|_p \leq C\, E_n(f)_p . \tag{2.11}$$

Prema teoreme Pelia, za $1 < p \leq 2$ imamo

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leq A_p \| f(x) - S_n(x,f)\|_p . \tag{2.12}$$

Iz (2.11) i (2.12) sledi da je

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leq C_1\, E_n(f)_p$$

Na osnovu teoreme B, zaključujemo da se kao potreban uslov da bi $f(x) \in H(p,k,\varphi)$ za $1 < p \leq 2$, javlja uslov

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leq C\,\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Neka je $2 \leq p \leq \infty$. Tada je

$$E_n(f)_2 \leq C\,E_n(f)_p .$$

Bilo je (vidi str.23)

$$\| f(x) - S_n(x,f)\|_p \leq C\,E_n(f)_p$$

Na osnovu jednakosti Parsevala sledi da je

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2} \leq C\,E_n(f)_p ,$$

otkuda, na osnovu teoreme B sledi da je uslov

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2} \leq C\,\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

potreban da bi $f(x) \in H\,(p,k,\varphi)$.

Za $p = 1$, teorema je već poznata (vidi,naprimer [19], str. 79).

TEOREMA 2.3 Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslov (2.1) i uslov

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \leq' C\,\varphi(\delta) \tag{2.13}$$

Tada da bi periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi $H\,(p,k,\varphi)$, ($1 \leq p \leq \infty$), dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju sledeće uslove

$$(2.14) \qquad \text{za } 1 \le p \le 2: \quad |c_\nu| \le \frac{C\,\varphi\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right)}{|\nu|^{1/2}}$$

$$(2.15) \qquad \text{za } 2 \le p \le \infty: \quad |c_\nu| \le \frac{C\,\varphi\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right)}{|\nu|^{1-\frac{1}{p}}}$$

DOKAZ. Ako posmatramo izraze

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2}, \quad \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \quad i \quad \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|$$

i stavimo li u prvi od njih procenu (2.14), a u drugom i trećem procenu (2.15), dobijamo

$$C\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^2\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right)}{|\nu|}\right)^{1/2}, \quad \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^p\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right)}{|\nu|}\right)^{1/p} \quad i \quad C\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right)}{|\nu|}$$

Transformišimo poslednje izraze

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^2\left(\frac{1}{|\nu|}\right)}{|\nu|}\right)^{1/2} \le C_1 \left\{ \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu} \right\}^{1/2},$$

$$(2.16) \qquad \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^p\left(\frac{1}{|\nu|}\right)}{|\nu|}\right)^{1/p} \le C_1 \left\{ \varphi^{p-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu} \right\}^{1/p},$$

$$\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{|\nu|}\right)}{|\nu|} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu}.$$

Red $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu}$ konvergira ili divergira istovremeno

s'integralom
$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\, dx .$$

Izvršimo li zamenu $\frac{1}{x} = t$, dobijamo
$$\int_{0}^{1/n+1} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt .$$

Na osnovu (2.13), poslednji integral ne prolazi $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Stavimo li poslednju procenu u (2.16) i znajući da po drugoj osobini funkcije $\varphi(\delta)$ važi
$$\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) \le C\, \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

prema teoremi 2.1 uvidjamo da su uslovi (2.14) i (2.15) zaista dovoljni da bi $f(x) \in H(p, k, \varphi)$.

<u>TEOREMA 2.4.</u> Ako periodična funkcija
$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripada klasi $H(p, k, \varphi)$, $1 \le p \le \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov
$$|c_\nu| \le C\, \varphi\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right).$$

Teorema je od ranije poznata (vidi, naprimer, [19], str. 79).

<u>TEOREMA 2.5.</u> Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslov (2.1). Ako periodična funkcija
$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}, \quad \text{gde} \quad |c_\nu| \downarrow ,$$

pripada klasi $H(p, k, \varphi)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

za $2 \leq p \leq \infty$: $$|c_\nu| \leq \frac{C\varphi\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right)}{|\nu|^{1/2}}$$

za $1 \leq p \leq 2$: $$|c_\nu| \leq \frac{C\varphi\left(\frac{1}{|\nu|+1}\right)}{|\nu|^{1-\frac{1}{p}}}$$

DOKAZ. Neka $|c_\nu| \downarrow 0$, t.j.

$$2|c_0| \geq |c_1| + |c_{-1}| \geq |c_2| + |c_{-2}| \geq \ldots .$$

Tada je

$$\sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{n} \frac{|c_\nu|}{|\nu|} \geq \left(|c_n| + |c_{-n}|\right)\cdot\left(\frac{1}{[\frac{n}{2}]+1} + \frac{1}{[\frac{n}{2}]+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{|c_n| + |c_{-n}|}{2},$$

otkuda sledi

$$\frac{|c_n| + |c_{-n}|}{2} \leq \sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \frac{|c_\nu|}{|\nu|} .$$

Primenimo li nejednakost Heldera, dobijamo

$$|c_n| \leq \sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \frac{|c_\nu|}{|\nu|} = \sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \frac{1}{|\nu|^{2(1-\frac{1}{q})}} \cdot |c_\nu| \cdot |\nu|^{1-\frac{2}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \frac{1}{|\nu|^{2(1-\frac{1}{q})q'}}\right)^{1/q'} \cdot \left(\sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \left(|c_\nu||\nu|^{1-\frac{2}{q}}\right)^{q}\right)^{1/q},$$

gde je $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, t.j.

$$|c_n| \leq \left(\sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \frac{1}{|\nu|^2}\right)^{1/q'} \cdot \left(\sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} |c_\nu|^q |\nu|^{q-2}\right)^{1/q} \leq$$

$$(2.17) \qquad \leq \frac{C}{n^{1-\frac{1}{q}}} \left(\sum_{|\nu|=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} |c_\nu|^q |\nu|^{q-2}\right)^{1/q}$$

Neka je $f(x) \in H(p, k, \varphi)$. Tada, za $1 < p \leq 2$, teorema 2.5 sledi iz nejednakosti (2.17) ako se u nju stavlja $q = p$ i teoreme 2.2, a za $2 \leq p \leq \infty$ sledi iz nejednakosti (2.17), ako u nju stavimo $q = q' = 2$ i takodje iz teoreme 2.2.

Za $p = 1$ teorema 2.5 jeste specijalan slučaj teoreme 2.4.

TEOREMA 2.6. Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslov (2.1) da bi tada periodična funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \; , \quad a_\nu \downarrow 0$$

pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ $(1 < p < \infty)$, potrebno je i dovoljno da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \, \nu^{p-2}\right)^{1/p} \leq C\, \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

DOKAZ. Da je uslov dovoljan, za $2 \leq p < \infty$, sledi iz teoreme 2.1.

Neka je $1 < p \leq 2$. Tada, prema lemi 1.2 (vidi, I glava) imamo

$$E_n(g)_p \leq C_1 \left\{ a_n n^{1-\frac{1}{p}} + \sum_{\nu=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right\}^{1/p}.$$

Ako koristimo procenu (2.17) za a_n dobijamo

$$a_n \leq C_2 \left(\sum_{\nu=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Zamenimo li ovu procenu u poslednju nejednakost dobijamo

$$E_n(g)_p \leq C \left(\sum_{\nu=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Na osnovu teoreme B i poslednje nejednakosti, sledi da je navedeni uslov dovoljan.

Dokažimo da je on i potreban. Iz teoreme 2.2 sledi da je uslov potreban za $1 < p \leq 2$. Neka je sada $2 \leq p < \infty$; tada, prema lemi 1.2, imamo

$$\left(\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right)^{1/p} \leq c\, E_n(g)_p$$

pa je, na osnovu teoreme B i zbog monotonije funkcije φ,

$$\left(\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right)^{1/p} \leq C_1 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \leq C_2 \varphi\left(\frac{1}{2n}\right),$$

odakle sledi da je navedeni uslov potreban i za $2 \leq p < \infty$,

<u>TEOREMA 2.7</u>. Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslove (2.1) i (2.13). Da bi tada periodična funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \text{ gde } a_\nu \downarrow 0$$

pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ $(1 < p < \infty)$, potrebno je i dovoljno da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$a_\nu \leq \frac{c\,\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu^{1-\frac{1}{p}}}$$

DOKAZ. Dokaz da je uslov dovoljan za $1 < p < \infty$ poklapa se sa dokazom slučaja $2 \leq p < \infty$ teoreme 2.3, samo što ovde koristimo teoremu 2.6, umesto teoreme 2.1.

Da je uslov potreban, za $1 < p < \infty$, dokazaćemo na sledeći način:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \geq E_n(g)_p\,,$$

a prema lemi 1.2 imamo

$$E_n(g)_p \geq C\left(\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p\, \nu^{p-2}\right)^{1/p}.$$

Znamo da je

$$\left(\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p\, \nu^{p-2}\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{\nu=2n}^{3n} a_\nu^p\, \nu^{p-2}\right)^{1/p} > a_{3n}\, n^{1-\frac{1}{p}},$$

pa je za $3n = N$

$$a_N\, N^{1-\frac{1}{p}} \leq c\,\varphi\left(\frac{3}{N}\right) \leq C_1\,\varphi\left(\frac{1}{N}\right)$$

što je trebalo dokazati.

TEOREMA 2.8. Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslov (2.1). Da bi periodična funkcija

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos \nu x$$

sa koeficijentima

$$b_\nu = \begin{cases} a_m \geq 0 \ , & \nu = 2^m \ , \\ 0 \ , & \nu \neq 2^m \ , \end{cases}$$

gde je m - prirodan broj, pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ $(1 < p < \infty$ potrebno je i dovoljno da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$(2.18) \qquad \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu^2 \right)^{1/2} \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

DOKAZ. Da bi smo dokazali teoremu, koristimo teoremu Zygmunda (vidi, I glava) za lakunarne redove:

$$(2.19) \qquad C_1 \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^2 \right)^{1/2} \leq \| \psi(x) \|_p \leq C_2 \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^2 \right)^{1/2}$$

Ako je $2^m \leq n < 2^{m+1}$, (m - prirodan broj), tada je $(1 \leq p \leq \infty)$:

$$(2.20) \qquad E_n(\psi)_p \leq \| \psi(x) - S_{2^m}(x, \psi) \|_p .$$

Neka je ispunjen uslov (2.18); tada, na osnovu desne strane nejednakosti (2.19), nejednakosti (2.20) i teoreme B sledi da $\psi(x) \in H(p, k, \varphi)$.

Neka je $\psi(x) \in H(p, k, \varphi)$, $1 < p < \infty$, t.j.

$$E_n(\psi)_p \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Prema relaciji (2.11), za $2^{m-1} < n \leq 2^m$ (m - prirodan broj) sledi

$$\| \psi(x) - S_{2^{m-1}}(x, \psi) \|_p \leq C E_n(\psi)_p$$

Na osnovu leve strane nejednakosti (2.19) i teoreme 8, imamo

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu^2\right)^{1/2} \leq C\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

TEOREMA 2.9. Neka funkcija $\varphi(\delta)$ zadovoljava uslove (2.1) i (2.13); tada, da bi periodična funkcija

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos\nu x$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove teoreme 2.8, pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ $(1 < p < \infty)$, potrebno je i dovoljno da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$b_\nu \leq \frac{C\varphi\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\nu^{1/2}}$$

DOKAZ. Analogan dokazu teoreme 2.7, samo što se ovde koristi teorema 2.8 umesto teoreme 2.6.

Na kraju ovog poglavlja navedimo da procene Fourier-ovih koeficijenata funkcije $f(x) \in H_p^{(r)}$, date u [2], dobijamo ako se za funkciju $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$ izabere jedan specijalan slučaj, ako se uzme da je

$$\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n^r}.$$

III

PROCENA, POMOĆU MODULA GLADKOSTI, FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA FUNKCIJA KLASE $H(p, k, \varphi)$

Procene Fourier-ovih koeficijenata funkcije iz klase $H(p, k, \varphi)$ dobivene u drugom poglavlju, dokazane su posredstvom najbolje aproksimacije $E_n(f)_p$ funkcije $f(x)$. Taj postupak je zahtevao da o funkciji $\varphi(\delta)$ uvedemo suplementarne pretpostavke (2.1) i (2.13).

Medjutim, za neka od tih tvrdjenja, mogu se dokazati analogne procene koristeći neke već poznate rezultate o modulima glatkosti i tada nije potrebno za funkciju $\varphi(\delta)$ uvoditi navedene suplementarne pretpostavke. Napominjemo da u ovom slučaju jedan od datih uslova poklapa se sa ranije navedenim uslovom.

<u>TEOREMA 3.1.</u> Da bi periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ $(1 \le p \le \infty)$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

za $1 \le p \le 2$:

$$\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k}\right)^{1/2} \le C n^k \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2} \le C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $2 \leq p < \infty$:
$$\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2}\right)^{1/p} \leq C n^k \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $p = \infty$:
$$\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu||\nu|^k \leq C n^k \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu| \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

DOKAZ. Za $1 \leq p \leq 2$ (vidi lemu 1.7) bila data sledeća procena:
$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq C\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k}\right)^{1/2} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Iz datih uslova teoreme za $1 \leq p \leq 2$ i prethodne procene za modul glatkosti sledi da je
$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right),$$
a to znaći da $f(x) \in H(p, k, \varphi)$.

Medjutim, za $2 \leq p < \infty$ (vidi lemu 1.7) bila data sledeća procena:
$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq C\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p}\right\}.$$

Takodje iz datih uslova teoreme za $2 \leq p < \infty$ i poslednje procene za modul glatkosti sledi da je
$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Na kraju dokaz teoreme za $p = \infty$ takodje sledi iz procene modula glatkosti (vidi lemu 1.7) i datih uslova teoreme.

TEOREMA 3.2. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripada klasi $H(p, k, \varphi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, tada, njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $1 < p \leq 2$:

$$\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2}\right)^{1/p} \leq C n^k \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $2 \leq p \leq \infty$:

$$\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k}\right)^{1/2} \leq C n^k \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2} \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

za $p = 1$:

$$|c_n| \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

DOKAZ. Neposredno iz leme 1.7 sledi procena za $1 < p \leq 2$:

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \geq C\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p}\right\}$$

i za $2 \leq p \leq \infty$:

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \geq C\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k}\right)^{1/2} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Iz datih uslova teoreme i ovih dveju procena modula glatkosti sledi dokaz teoreme.

Napomenimo da teorema 2.3, teorema 2.7 i teorema 2.9 nemaju svoje analogne ako ne uvedemo suplementarne uslove o funkciji $\varphi(\delta)$. U tom smislu ni za teoreme 2.4 i 2.5 ne postoje analogni iskazi. Navešćemo ovde još i analogom teorema 2.6 i 2.8.

TEOREMA 3.3. Da bi periodična funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x\,, \quad a_\nu \downarrow 0$$

pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ $(1 < p < \infty)$, potrebno je i dovoljno da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\, \nu^{(k+1)p-2}\Big)^{1/p} \leqslant C\, n^k \varphi\Big(\frac{1}{n+1}\Big)$$

i

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p\, \nu^{p-2}\Big)^{1/p} \leqslant C\, \varphi\Big(\frac{1}{n+1}\Big)$$

DOKAZ. Prema lemi 1.8 (vidi I glava) važi nejednakost

$$C_1\Big\{\frac{1}{n^k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\, \nu^{(k+1)p-2}\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p\, \nu^{p-2}\Big)^{1/p}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega_k\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_p \leqslant C_2\Big\{\frac{1}{n^k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\, \nu^{(k+1)p-2}\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p\, \nu^{p-2}\Big)^{1/p}\Big\}.$$

Dovoljan uslov sledi neposredno iz desne strane poslednje nejednakosti i datih uslova teoreme, a potreban uslov takodje sledi iz ljeve strane poslednje nejednakosti i datih uslova teoreme

TEOREMA 3.4 Da bi periodična funkcija

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos \nu x\,,$$

sa koeficijentima

$$b_\nu = \begin{cases} a_m \geq 0 \ , & za \quad \nu = 2^m, \\ 0 \ , & za \quad \nu \neq 2^m, \end{cases}$$

gde je m - prirodan broj, pripadala klasi $H(p, k, \varphi)$ ($1 < p < \infty$), potrebno je i dovoljno da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 \nu^{2k} \right)^{1/2} \leq C n^k \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu^2 \right)^{1/2} \leq C \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

<u>DOKAZ</u>. Za lakunarne redove važi sledeća procena modula glatkosti (vidi lemu 1.9, I glava):

$$C_1 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 \nu^{2k} \right)^{1/2} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu^2 \right)^{1/2} \leq \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \right.$$

$$\leq C_2 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 \nu^{2k} \right)^{1/2} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

Dovoljan uslov sledi neposredno iz desne strane poslednje nejednakosti i datih uslova teoreme, a potreban uslov sledi takodje iz ljeve strane poslednje nejednakosti i datih uslova teoreme.

IV

PROCENA, POMOĆU NAJBOLJE APROKSIMACIJE, FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA FUNKCIJA KLASE $B(p, \theta, \alpha)$

DEFINICIJA 4.1. Kažemo da je $f(x) \in B(p, \theta, \alpha)$, ako je

1) $f(x) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$
2) θ - proizvoljan broj iz intervala $0 < \theta < \infty$
3) $\alpha(t)$ - funkcija tipa σ
4) $\int_0^1 \alpha(t)\, \omega_k^{\theta}(f, t)_p\, dt < \infty$, gde je k

prirodan broj koji zadovoljava uslov $k \geq \frac{\sigma}{\theta}$

Ako je funkcija $\alpha(t) = t^{-r\theta-1}$, gde je $r > 0$ i $1 < \theta < \infty$, tada dobijamo klasu Besova $B^r_{p\theta}$. O klasama funkcija $B(p, \theta, \alpha)$ opširnije može da se vidi u [21] i [14], dok o klasama $B^r_{p\theta}$ osim što možemo videti u mnogim radovima Besova, kao što su [24] i [25], opširnije može da se vidi i u knjizi [26].

TEOREMA 4.1. Da bi periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi $B(p, \theta, \alpha)$ za $2 \leq p < \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

$$\text{za} \quad \theta \leq p: \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b(|\nu|) < \infty$$

$$\text{za} \quad \theta \geq p: \ \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-\frac{2\theta}{p}} b(|\nu|)\left\{\frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\theta/p-1} < \infty$$

$$\text{gde su} \quad A(\nu) = \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t)\,dt \quad i \quad b(\nu) = \int_{1/(\nu+1)}^{1} \alpha(t)\,dt$$

DOKAZ. Iz leme 1.10 (vidi I glava), sledi da je

$$(4.1) \quad I = \int_0^1 \alpha(t)\,\omega_k^\theta(f,t)_p\,dt \leq C\left\{E_0^\theta(f)_p + E_1^\theta(f)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p\right\}.$$

Da bi smo dokazali teoremu dokažemo najprije dvostruku nejednakost

$$(4.2) \quad C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_\nu^\theta(f)_p \leq C_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p,$$

tj. da je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p \asymp \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_\nu^\theta(f)_p .$$

Znamo da je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_\nu^\theta(f)_p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} A(\nu) E_\nu^\theta(f)_p \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} E_{2^n}^\theta(f)_p \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} A(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2^n}^\theta(f)_p \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_{2^n}^\theta(f)_p \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} \alpha(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2^n}^\theta(f)_p \int_{1/2^{n+1}}^{2/2^{n+1}} \alpha(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_{2^n}^\theta(f)_p\, \mu(n+1) \leq C_3 \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)\, E_{2^n}^\theta(f)_p ,$$

jer je $\varphi(n+1) \leq C\,\varphi(n)$.

Dokažimo drugi deo nejednakosti. Na sličan način dobijamo

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, E_{\nu}^{\theta}(f)_p \geq C_4 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n+1)\, E_{2^{n+1}}^{\theta}(f)_p =$$

$$= C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu)\, E_{2^{\nu}}^{\theta}(f)_p .$$

Iz (4.1), (4.2) i teoreme Pelia za $2 \leq p < \infty$, imamo

$$I \leq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \Big(\sum_{|n|=\nu}^{\infty} |c_n|^p |n|^{p-2} \Big)^{\theta/p}. \tag{4.3}$$

Razlikovaćemo dva slučaja:

1) Neka je $\theta \leq p$. Tada ako u (4.3) primenimo lemu 1.4 (vidi I glava), dobijamo da je

$$I \leq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \sum_{|n|=\nu}^{\infty} |c_n|^{\theta} |n|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} =$$

$$= C_5 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^{\theta} |n|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} \sum_{\nu=1}^{n} A(\nu) =$$

$$= C_5 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^{\theta} |n|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} \int_{1/(n+1)}^{1} \alpha(t)\,dt =$$

$$= C_5 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^{\theta} |n|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b(|n|).$$

2) Neka je $\theta \geq p$. Tada ako u (4.3) primenimo lemu 1.5 (vidi I glava), sledi da je

$$I \leq C_6 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|\nu|) \left[\gamma(|\nu|)\, |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right]^{\theta/p},$$

gde je

$$b(n) = \sum_{\nu=1}^{n} A(\nu) = A(n)\gamma(n),$$

što znači da je

$$I \leqslant C_6 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} A^{1-\frac{\theta}{p}}(|\nu|)\, b^{\frac{\theta}{p}}(|\nu|) =$$

$$= C_6 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/p - 1}.$$

TEOREMA 4.2. **Da bi periodična funkcija**

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi $B(p, \theta, \alpha)$ **za** $1 \leq p \leq 2$**, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove**

za $\quad \theta \leq 2: \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} b(|\nu|) < \infty$

za $\quad \theta \geqslant 2: \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/2 - 1} < \infty$

DOKAZ. **Neka je** $1 \leqslant p \leqslant 2$**. Tada je jasno da je**

$$E_n(f)_p \leqslant C_1 E_n(f)_2,$$

a na osnovu jednakosti Parsevala, sledi da je

$$(4.4) \qquad I \leqslant C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{|\nu|=n}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{\theta/2}$$

Kao u prethodnoj teoremi razlikujemo dva slučaja:

1) Neka je $\theta \leq 2$. Tada, ako u (4.4) primenimo lemu 1.4, dobijamo da je

$$I \leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \sum_{|\nu|=n}^{\infty} |c_\nu|^\theta = C_3 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^\theta \sum_{\nu=1}^{n} A(\nu) =$$

$$= C_3 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^\theta b(|n|).$$

2) Neka je $\theta \geqslant 2$. Tada, ako u (4.4) primenimo lemu 1.5, dobijamo da je

$$I \leqslant C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|\nu|) \left[\gamma(|\nu|) |c_\nu|^2\right]^{\theta/2} =$$

$$= C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|\nu|) \left[\gamma^{\frac{\theta}{2}}(|\nu|) |c_\nu|^\theta\right] =$$

$$= C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A^{1-\frac{\theta}{2}}(|\nu|) |c_\nu|^\theta b^{\frac{\theta}{2}}(|\nu|) =$$

$$= C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) \left\{\frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\frac{\theta}{2}-1}.$$

TEOREMA 4.3. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x},$$

pripada klasi $B(p, \theta, \alpha)$ za $2 \leq p \leq \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\theta \geqslant 2$: $\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) < \infty$

za $\theta \leq 2$: $\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) \left\{\frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty$

DOKAZ. Znamo (vidi lemu 1.10, I glava) da je

$$I=\int_0^1 \alpha(t)\,\omega_k^{\theta}(f,t)_p\,dt \geqslant C\left\{E_0^{\theta}(f)_p+E_1^{\theta}(f)_p+\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)\,E_{2^\nu}^{\theta}(f)_p\right\}.$$

Neka je $f(x)\in B(p,\theta,\alpha)$. Tada, po definiciji ovih klasa funkcija, sledi da je

$$I=\int_0^1 \alpha(t)\,\omega_k^{\theta}(f,t)_p\,dt<\infty .$$

Neka je $2\leqslant p\leqslant\infty$. Tada je

$$E_n(f)_2\leqslant C_1 E_n(f)_p ,$$

otkuda na osnovu jednakosti Parsevala sledi da je

$$(4.5)\qquad I\geqslant C_2\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)\Big(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^2\Big)^{\theta/2}$$

1) Neka je $\theta\geqslant 2$. Tada, ako u (4.5) primenimo lemu 1.4, dobijamo da je

$$I\geqslant C_2\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}=C_2\sum_{|n|=1}^{\infty}|c_n|^{\theta}\sum_{\nu=1}^{n}A(\nu)=$$

$$=\sum_{|n|=1}^{\infty}|c_n|^{\theta}\,b(|n|).$$

2) Neka je $\theta\leqslant 2$. Tada, ako u (4.5) primenimo lemu 1.5, dobijamo da je

$$I\geqslant C_3\sum_{|\nu|=1}^{\infty}A(|\nu|)\left[|c_\nu|^2\,\gamma(|\nu|)\right]^{\theta/2}=$$

$$=C_3\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}A^{1-\frac{\theta}{2}}(|\nu|)\,b^{\frac{\theta}{2}}(|\nu|)=$$

$$=C_3\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}\,b(|\nu|)\left\{\frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\frac{\theta}{2}-1}.$$

TEOREMA 4.4. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripada klasi $B(p, \theta, \alpha)$ za $1 < p \leq 2$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\quad \theta \geq p: \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b(|\nu|) < \infty$

za $\quad \theta \leq p: \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty$

DOKAZ. Slično kao u prethodnoj teoremi, znajući da je

$$\| f(x) - S_n(x,f) \|_p \leq C E_n(f)_p$$

i primenjujući teoremu Pelia, za $1 < p \leq 2$, imamo

$$I \geq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \Big(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \Big)^{\theta/p} \tag{4.6}$$

1) Neka je $\theta \geq p$. Tada, ako u (4.6) primenimo lemu 1.4, dobijamo

$$I \geq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} =$$

$$= C_1 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^\theta |n|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} \sum_{\nu=1}^{n} A(\nu) =$$

$$= C_1 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^\theta |n|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b(|\nu|).$$

2) Neka je $\theta \leq p$. Tada, ako u (4.6) primenimo lemu 1.5, dobijamo

$$I \geq C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|\nu|) \left[|c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \gamma(|\nu|) \right]^{\theta/p} =$$

$$= C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} A^{1-\frac{\theta}{p}}(|\nu|)\, b^{\frac{\theta}{p}}(|\nu|) =$$

$$= C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/p - 1}.$$

TEOREMA 4.5. Da bi periodična funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \quad a_\nu \downarrow 0$$

pripadala klasi $B(p, \theta, \alpha)$, za $1 < p < \infty$ i $0 < \theta < \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\theta \leq p: \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b(\nu) < \infty$

za $\theta > p: \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b(\nu) \left\{ \frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{p} - 1} < \infty$

DOKAZ. Prema lemi 1.10, znamo da je

$$I \leq C_1 \left\{ E_0^\theta(f)_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p \right\} =$$

$$= C_1 \left\{ E_0^\theta(f)_p + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu+2) E_{2^{\nu+2}}^\theta(f)_p \right\} \leq$$

$$\leq C_2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m+2) E_{2^{m+2}}^\theta(f)_p + \|f\|_p^\theta \right\} \leq$$

$$\leq C_2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} A(\nu) E_{2\nu}^\theta(f)_p + \|f\|_p^\theta \right\} =$$

$$= C_2 \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_{2\nu}^\theta(f)_p + \|f\|_p^\theta \right\}.$$

Kako je
$$\|f\|_p \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{1/p},$$
sledi da je
$$I \leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\left(\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}$$
Na osnovu leme 1.5, za $\theta \geq p$, dobijamo iz poslednje nejednakosti
$$I \leq C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\left[a_\nu^p \nu^{p-2}\gamma(\nu)\right]^{\frac{\theta}{p}} =$$
$$= C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu)\left\{\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\right\}^{\frac{\theta}{p}-1}.$$

Drugi slučaj, tj. za $\theta \leq p$, dokazujemo na sledeći način:

S'jedne strane imamo da je
$$I \leq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu) E_{2^\nu}^{\theta}(f)_p \leq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu)\left(\sum_{n=2^\nu}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}$$
a s'druge strane važi
$$\sum_{n=2^\nu}^{\infty} a_n^p n^{p-2} = \sum_{m=\nu}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} a_n^p n^{p-2} \leq \sum_{m=\nu}^{\infty} a_{2^m}^p 2^{m(p-1)},$$
tako da je
$$I \leq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu)\left(\sum_{m=\nu}^{\infty} a_{2^m}^p 2^{m(p-1)}\right)^{\frac{\theta}{p}}.$$
Primenimo li u poslednjoj nejednakosti lemu 1.4, za $\theta \leq p$ dobijamo
$$I \leq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu) \sum_{m=\nu}^{\infty} a_{2^m}^{\theta} 2^{m(p-1)\frac{\theta}{p}} =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_{2^m}^{\theta} 2^{m(\theta-\frac{\theta}{p})} \sum_{\nu=1}^{m} \varphi(\nu) \leq \sum_{m=1}^{\infty} a_{2^m}^{\theta} 2^{m(\theta-\frac{\theta}{p})} \int_{1/2^m}^{1} \alpha(t)\,dt \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{m-1}}^{2^m} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} \int_{1/\nu}^{1} \alpha(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu).$$

TEOREMA 4.5. Ako periodična funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \ , \ a_\nu \downarrow 0$$

pripada klasi $B(p, \theta, \alpha)$, za $1 < p < \infty$ i $0 < \theta < \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\quad \theta \leq p: \ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu) \left\{ \frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty,$

za $\quad \theta \geq p: \ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu) < \infty.$

DOKAZ. Znamo da je

$$I = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t)\,\omega_k^\theta(f,t)_p\,dt \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k^\theta\left(f, \tfrac{1}{\nu+1}\right)_p \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t)\,dt =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k^\theta\left(f, \tfrac{1}{\nu+1}\right)_p A(\nu) \geq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\,\omega_k^\theta\left(f, \tfrac{1}{[\frac{\nu}{2}]+1}\right)_p \geq$$

$$\geq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, E_{[\frac{\nu}{2}]+1}^\theta(f)_p ,$$

a na osnovu leme 1.2 sledi da je

$$I \geq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^p n^{p-2} \right)^{\theta/p}.$$

U prvom slučaju, za $\theta \leq p$, ako primenimo u poslednjoj nejednakosti lemu 1.5, imamo

$$I \geq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left[a_\nu^p \nu^{p-2} \gamma(\nu) \right]^{\theta/p} =$$

$$= C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b(\nu) \left\{ \frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{p} - 1},$$

a u drugom slučaju, za $\theta \geq p$, prvo koristimo procenu

$$I \geq C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu) E_{2^\nu}^\theta (f)_p \geq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu) \left(\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_{2^n}^p 2^{n(p-1)} \right)^{\theta/p},$$

a zatim, lemu 1.4 i dobijamo

$$I \geq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu) \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_{2^n}^\theta 2^{n(p-1)\frac{\theta}{p}} =$$

$$= C_5 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n}^\theta 2^{n(p-1)\frac{\theta}{p}} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha(\nu) =$$

$$= C_5 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n}^\theta 2^{n(\theta - \frac{\theta}{p})} \int_{1/2^n}^{1} \alpha(t)\,dt \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{n-1}}^{2^n} a_\nu^\theta \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} \int_{1/\nu}^{1} \alpha(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\theta n^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b(n).$$

NAPOMENA 4.1. Ako funkcija $\alpha(t)$ zadovoljava uslov

$$C_1 \leq \frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)} \leq C_2$$

tada, da bi funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \quad a_\nu \downarrow 0$$

pripadala klasi $B(p, \theta, \alpha)$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta < \infty$ potrebno je i dovoljno da Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b(\nu)$$

tj. dobijamo jedan jedini zajednički potreban i dovoljan uslov da bi $g(x) \in B(p, \theta, \alpha)$.

Napomenimo još i to, da su u [16] dati potrebni i dovoljni uslovi za Fourier-ove koeficijente da bi funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \, , \quad a_\nu \downarrow 0$$

pripadala klasi $B^r_{p\theta}$, tj. klasi funkcija koja se dobija kao specijalan slučaj klase $B(p, \theta, \alpha)$, ako je funkcija

$$\alpha(t) = t^{-r\theta-1}.$$

TEOREMA 4.7. Da bi periodična funkcija

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \, ,$$

gde

$$a_\nu = \begin{cases} 0, & \nu \neq 2^\ell \\ c_\ell \geq 0, & \nu = 2^\ell \end{cases}$$

pripadala klasi $B(p, \theta, \alpha)$, $1 < p < \infty$ i $0 < \theta < \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

za $\quad \theta \geq 2: \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \, b(\nu) \left\{ \frac{b(\nu)}{A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty,$

za $\quad \theta \leq 2: \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \, b(\nu) < \infty.$

DOKAZ. Iz (4.1) i (4.2) sledi da je

$$I \leq C_1 \left\{ E_0^\theta(f)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \, E_\nu^\theta(f)_p \right\}.$$

Kako je

$$E_\nu(f)_p \leq C \, \| f(x) - S_\nu(x, f) \|_p ,$$

prema teoremi Zygmunda za lakunarne redove imamo da je

$$(4.9) \qquad I \leq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{m=\nu}^{\infty} a_m^2 \right)^{\theta/2}.$$

Primenimo li lemu 1.5, za $\theta \geq 2$, iz poslednje nejednakosti sledi

$$I \leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left\{ a_\nu^2 \gamma(\nu) \right\}^{\frac{\theta}{2}} =$$

$$= C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta b(\nu) \left\{ \frac{b(\nu)}{A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1}.$$

S druge strane, ako primenimo u (4.9) lemu 1.4, za $\theta \leq 2$, dobijamo

$$I \leq C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \sum_{m=\nu}^{\infty} a_m^\theta = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^\theta \sum_{\nu=0}^{m} A(\nu) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m^\theta b(m).$$

TEOREMA 4.8. Ako periodična funkcija

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x ,$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove teoreme 4.7, pripada klasi $B(p, \theta, \alpha)$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta < \infty$; tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

$$\theta \geq 2 : \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta b(\nu) < \infty ,$$

$$\theta \leq 2 : \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta b(\nu) \left\{ \frac{b(\nu)}{A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty .$$

DOKAZ. Znamo da je

$$I = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) \omega_k^\theta(f, t)_p \, dt \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k^\theta \left(f, \frac{1}{\nu+1}\right)_p A(\nu) \geq$$

$$\geqslant C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, E_\nu^\theta(f)_p\,,$$

odakle, prema teoremi Zygmunda za lakunarne redove, sledi

$$I \geqslant C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \Big(\sum_{m=\nu}^{\infty} a_m^2 \Big)^{\theta/2}$$

Dalje rasudjivanje sledi kao kod teoreme 4.7; tj. za $\theta \geq 2$ primenjujemo lemu 1.4, a za $\theta \leqslant 2$ lemu 1.5.

NAPOMENA 4.2. Ako funkcija $\alpha(t)$ zadovoljava uslov

$$C_1 \leqslant \frac{b(\nu)}{A(\nu)} \leqslant C_2$$

tada da bi funkcija

$$\Psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$$

pripadala klasi $B(p, \theta, \alpha)$ $1 < p < \infty$, $0 < \theta < \infty$, potrebno je i dovoljno da Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta\, b(\nu) < \infty$$

Napomenimo još i to, da su u [16] dati potrebni i dovoljni uslovi za Fourier-ove koeficijente da bi funkcija $\Psi(x)$, pripadala klasi $B^r_{p\theta}$.

V

PROCENA, POMOĆU MODULA GLATKOSTI, FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA FUNKCIJA KLASE $B^*(p, \theta, \alpha)$

U ovom poglavlju, kako funkcija $\alpha(t)$ ne zadovoljava uslov $(*)$ (vidi, I glava, str. 13), klasu funkcija tipa $B(p, \theta, \alpha)$ obeležavaćemo sa $B^*(p, \theta, \alpha)$.

<u>TEOREMA 5.1.</u> Da bi funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x},$$

pripadala klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $2 \le p < \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

za $\theta \le p$: $$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b_2(|\nu|) < \infty$$

za $\theta \ge p$: $$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b_2(|\nu|) \left\{ \frac{b_2(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty$$

gde je

$$b_2(n) = b_1(n) + b(n) = n^{\kappa\theta} \int_0^{1/n} \alpha(t) t^{\kappa\theta} dt + \int_{1/(n+1)}^{1} \alpha(t) dt.$$

<u>DOKAZ.</u> Znamo da je

$$I = \int_0^1 \alpha(t) \omega_\kappa^\theta (f, t)_p dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) \omega_\kappa^\theta (f, t)_p dt \le$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\kappa^\theta \left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \omega_\kappa^\theta \left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p.$$

Iz leme 1.7, za $2 \leq p < \infty$ sledi da je

$$I \leq C_2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}} \left[\sum_{|\nu|=1}^{\mu} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2} \right]^{\theta/p} +$$

(5.1)

$$+ C_2 \sum_{\mu=1}^{\infty} A(\mu) \left[\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right]^{\theta/p}.$$

Ako u poslednjoj nejednakosti primenimo lemu 1.4, za $\theta \leq p$, zatim izmenimo poredak suma, dobijamo

$$I \leq C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} \left\{ |\nu|^{\theta k} \sum_{\mu=|\nu|}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}} + \sum_{\mu=1}^{|\nu|} A(\mu) \right\} \leq$$

$$\leq C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} \left\{ |\nu|^{\theta k} \int_0^{1/(|\nu|+1)} \alpha(t)\, t^{k\theta} dt + \int_{1/|\nu|}^{1} \alpha(t)\, dt \right\} =$$

$$= C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} \left\{ b_1(|\nu|) + b(|\nu|) \right\} =$$

$$= C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b_2(|\nu|).$$

S druge strane ako je $\theta \geq p$ i primenimo li lemu 1.5 u nejednakosti (5.1), dobijamo

$$I \leq C_2 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} \frac{A(|\mu|)}{|\mu|^{k\theta}} \left\{ |c_\mu|^p |\mu|^{(k+1)p-2} \gamma_1(|\mu|) \right\}^{\theta/p} +$$

$$+ C_2 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A(|\mu|) \left\{ |c_\mu|^p |\mu|^{p-2} \gamma_2(|\mu|) \right\}^{\theta/p},$$

gde su

$$\gamma_1(\mu) = \frac{\mu^{k\theta} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{A(\nu)}{\nu^{k\theta}}}{A(\mu)} \quad i \quad \gamma_2(\mu) = \frac{\sum_{\nu=1}^{\mu} A(\nu)}{A(\mu)}$$

tj.

$$\gamma_1(\mu) = \frac{b_1(\mu)}{A(\mu)} \quad i \quad \gamma_2(\mu) = \frac{b(\mu)}{A(\mu)},$$

a to znaći da možemo pisati

$$I \leq C_2 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A(|\mu|)\, |c_\mu|^{\theta} |\mu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} \left\{ \left[\frac{b_1(|\mu|)}{A(|\mu|)}\right]^{\theta/p} + \left[\frac{b(|\mu|)}{A(|\mu|)}\right]^{\theta/p} \right\} \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} |c_\mu|^{\theta} |\mu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} A(|\mu|) \left\{ \frac{b_2(|\mu|)}{A(|\mu|)} \right\}^{\theta/p} =$$

$$= C_3 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} |c_\mu|^{\theta} |\mu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b_2(|\mu|) \left\{ \frac{b_2(|\mu|)}{A(|\mu|)} \right\}^{\frac{\theta}{p}-1}.$$

NAPOMENA 5.1. Ako funkcija $\alpha(t)$ zadovoljava uslov (*) (vidi, I glava, str. 13), tada sledi da je

$$b_2(\nu) \leq c\, b(\nu)$$

pa dobijamo tvrdjenje stava 4.1.

TEOREMA 5.2. Da bi periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripadala klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $1 \leq p \leq 2$, $0 < \theta < \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

za $\theta \leq 2$: $\displaystyle\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} b_2(|\nu|) < \infty$

za $\theta \geq 2$: $\displaystyle\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} b_2(|\nu|) \left\{ \frac{b_2(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty$

DOKAZ. Kao u prethodnoj teoremi, primenjujući procenu iz leme 1.7, za $1 \leq p \leq 2$, dobijamo

$$(5.2) \quad I \leq C\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{K\theta}}\left(\sum_{|\nu|=1}^{\mu}|c_\nu|^2|\nu|^{2k}\right)^{\theta/2} + C\sum_{\mu=1}^{\infty}A(\mu)\left(\sum_{|\nu|=\mu+1}^{\infty}|c_\nu|^2\right)^{\frac{\theta}{2}}$$

U prvom slučaju, za $\theta \leq 2$, ako primenimo lemu 1.4 i izmenimo poredak suma, dobijamo

$$I \leq C\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}\left\{|\nu|^{K\theta}\sum_{\mu=|\nu|}^{\infty}\frac{A(\mu)}{\mu^{K\theta}} + \sum_{\mu=1}^{|\nu|}A(\mu)\right\} =$$

$$= C\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}\{b_1(|\nu|)+b(|\nu|)\} = C\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}b_2(|\nu|),$$

a u drugom slučaju, za $\theta \geq 2$, primenimo li u (5.2) lemu 1.5. posle kraćeg računa kao u prethodnoj teoremi, dobijamo da je

$$I \leq C_1\sum_{|\mu|=1}^{\infty}A(|\mu|)\,|c_\mu|^{\theta}\left\{\frac{b_2(|\mu|)}{A(|\mu|)}\right\}^{\frac{\theta}{2}} =$$

$$= C_1\sum_{|\mu|=1}^{\infty}|c_\mu|^{\theta}b_2(|\mu|)\left\{\frac{b_2(|\mu|)}{A(|\mu|)}\right\}^{\frac{\theta}{2}-1}.$$

TEOREMA 5.3. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu e^{i\nu x},$$

pripada klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $2 \leq p < \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\theta \geq 2$: $\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}b_2(|\nu|) < \infty$

za $\theta \leq 2$: $\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^{\theta}b_2(|\nu|)\left\{\frac{b_2(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty$

DOKAZ. Znajući da važi

$$I = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t)\, \omega_k^{\theta}(f,t)_p\, dt \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k^{\theta}\left(f,\frac{1}{\nu+1}\right)_p \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t)\, dt =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, \omega_k^{\theta}\left(f,\frac{1}{\nu+1}\right)_p \geqslant C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, \omega_k^{\theta}\left(f,\frac{1}{\nu}\right)_p$$

ako primenimo lemu 1.7, za $2 \leq p < \infty$, dobijamo

$$I \geqslant C_2 \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k} \right)^{1/2} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{1/2} \right\}^{\theta} \geqslant$$

$$\geqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n^{k\theta}} \left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k} \right)^{\theta/2} + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{\theta/2}.$$

U prvom slučaju, za $\theta \geqslant 2$, primenimo li lemu 1.4, dobijamo

$$I \geqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n^{k\theta}} \sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^{\theta} |\nu|^{k\theta} + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta}.$$

Posle izmene poredka suma i kraćeg računa sledi

$$I \geqslant C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^{\theta} b_2(|\nu|),$$

U drugom slučaju, za $\theta \leq 2$, primenimo li lemu 1.5, dobijamo

$$I \geqslant C_3 \sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{A(|n|)}{|n|^{k\theta}} \left[|c_n|^2 |n|^{2k} \gamma_1(|n|) \right]^{\theta/2} + C_3 \sum_{|n|=1}^{\infty} A(|n|) \left[|c_n|^2 \gamma_2(|n|) \right]^{\theta/2},$$

što znači da je

$$I \geqslant C_4 \sum_{|n|=1}^{\infty} |c_n|^{\theta} b_2(|n|) \left\{ \frac{b_2(|n|)}{A(|n|)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1}.$$

TEOREMA 5.4. Ako periodična funkcija

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

pripada klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $1 < p \leq 2$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

$$\text{za} \quad \theta \geq p : \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b_2(|\nu|) < \infty$$

$$\text{za} \quad \theta \leq p : \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta - \frac{2\theta}{p}} b_2(|\nu|) \left\{ \frac{b_2(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty$$

Dokaz je analogan dokazu teoreme 5.3, osim što u ovom slučaju koristimo procenu modula glatkosti leme 1.7 za $1 < p \leq 2$.

TEOREMA 5.5. Da bi periodična funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \, , \quad a_\nu \downarrow 0$$

pripadala klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta < \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

$$\text{za} \quad \theta \leq p : \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \, \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b_2(\nu) < \infty$$

$$\text{za} \quad \theta \geq p : \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \, \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b_2(\nu) \left\{ \frac{b_2(\nu)}{\nu A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty$$

DOKAZ. Znamo da je

$$I \leq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \, \omega_k^\theta \left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p$$

Iz procene modula glatkosti u lemi 1.8, sledi

$$(5.3)\quad I \leq C\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\frac{1}{\nu^{k\theta}}\left(\sum_{n=1}^{\nu} a_n^p n^{(k+1)p-2}\right)^{\theta/p} + C\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\left(\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{\theta/p}.$$

1) za $\theta \leq p$, postupamo na sledeći način:

$$I \leq C\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A(\nu)}{\nu^{k\theta}}\left\{\sum_{\mu=0}^{[\log_2\nu]+1}\sum_{n=2^\mu}^{2^{\mu+1}} a_n^p n^{(k+1)p-2}\right\}^{\theta/p} + C\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\left\{\sum_{\mu=[\log_2\nu]}^{\infty}\sum_{n=2^\mu}^{2^{\mu+1}} a_n^p n^{p-2}\right\}^{\theta/p} \leq$$

$$\leq C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A(\nu)}{\nu^{k\theta}}\left\{\sum_{\mu=0}^{[\log_2\nu]+1} a_{2^\mu}^p 2^{[(k+1)p-1]\mu}\right\}^{\theta/p} + C_1\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\left\{\sum_{\mu=[\log_2\nu]}^{\infty} a_{2^\mu}^p 2^{\mu(p-1)}\right\}^{\theta/p}$$

Ako u sledećem koraku primenimo lemu 1.4, dobijamo

$$I \leq C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A(\nu)}{\nu^{k\theta}}\sum_{\mu=0}^{[\log_2\nu]+1} a_{2^\mu}^\theta 2^{[(k+1)\theta-\frac{\theta}{p}]\mu} + C_1\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\sum_{\mu=[\log_2\nu]}^{\infty} a_{2^\mu}^\theta 2^{(\theta-\frac{\theta}{p})\mu} \leq$$

$$\leq C_2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A(\nu)}{\nu^{k\theta}}\sum_{n=1}^{\nu} a_n^\theta n^{(k+1)\theta-\frac{\theta}{p}-1} + C_2\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\sum_{n=\nu}^{\infty} a_\nu^\theta n^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}.$$

Izmenimo li poredak suma, dobićemo

$$I \leq C_3\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\theta n^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b_2(n).$$

2) Za $\theta \geq p$, primenimo li u (5.3) lemu 1.5,

dobijamo

$$I \leq C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A(\nu)}{\nu^{k\theta}}\left[a_\nu^p \nu^{(k+1)p-2}\gamma_1(\nu)\right]^{\theta/p} + C_2\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\left[a_\nu^p \nu^{p-2}\gamma_2(\nu)\right]^{\theta/p},$$

odakle, uvodeći vrednosti za $\gamma_1(\nu)$ i $\gamma_2(\nu)$, vršeći potrebne operacije, dobijamo

$$I \leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b_2(\nu) \left\{ \frac{b_2(\nu)}{\nu A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{p} - 1}.$$

TEOREMA 5.6. Ako periodična funkcija

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \quad a_\nu \downarrow 0$$

pripada klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta < \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

za $\quad \theta \geq p: \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b_2(\nu) < \infty$

za $\quad \theta \leq p: \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta - \frac{\theta}{p} - 1} b_2(\nu) \left\{ \frac{b_2(\nu)}{\nu A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{p} - 1} < \infty$

Dokaz je analogan dokazu teoreme 5.5, tj. znajući da je

$$I \geq C \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, \omega_k^\theta(f, \tfrac{1}{\nu})_p,$$

primenjujemo lemu 1.8 za procenu modula glatkosti s donje strane, a zatim, prvo za $\theta \geq p$, koristimo lemu 1.4, a za $\theta \leq p$ lemu 1.5.

TEOREMA 5.7. Da bi periodična funkcija

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$$

gde je

$$a_\nu = \begin{cases} 0, & \text{za } \nu \neq 2^\ell \\ c_{2^\ell} \geq 0, & \text{za } \nu = 2^\ell \end{cases}$$

pripada klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $1 < p < \infty$ i $0 < \theta < \infty$, dovoljno je da njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove

$$\text{za} \quad \theta \leq 2 : \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta b_2(\nu) < \infty ,$$

$$\text{za} \quad \theta \geq 2 : \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta b_2(\nu) \left\{ \frac{b_2(\nu)}{A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty$$

DOKAZ. Znamo da je

$$I \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, \omega_k^\theta \left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p$$

Iz procene modula glatkosti u lemi 1.9 dobijamo

$$I \leq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A(\nu)}{\nu^{k\theta}} \left(\sum_{n=1}^{\nu} a_n^2\, n^{2k} \right)^{\frac{\theta}{2}} + C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\theta/2}.$$

U prvom slučaju tj. za $\theta \leq 2$, teorema se dokazuje ako u poslednjem izrazu primenimo lemu 1.4, a u drugom slučaju, tj. za $\theta \geq 2$, primenimo lemu 1.5.

TEOREMA 5.8. Ako periodična funkcija

$$\psi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x ,$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove teoreme 5.7, pripada klasi $B^*(p, \theta, \alpha)$, $1 < p < \infty$ i $0 < \theta < \infty$, tada njeni Fourier-ovi koeficijenti zadovoljavaju uslove:

$$\text{za} \quad \theta \leq 2 : \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta b_2(\nu) \left\{ \frac{b_2(\nu)}{A(\nu)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty$$

$$\text{za} \quad \theta \geq 2 : \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta b_2(\nu) < \infty$$

Dokaz je analogan dokazu teoreme 5.7, samo što u ovom slučaju koristimo procenu modula glatkosti iz leme 1.9 sa donje strane, zatim; u prvom slučaju za $\theta \leq 2$, primenjujemo lemu 1.5, a u drugom slučaju, za $\theta \geq 2$, lemu 1.4.

L I T E R A T U R A

[1] Bari K. N. - Trigonometričeskie rjadi, Moskva 1961.

[2] Potapov M. K. - O koefficientah Furie periodičeskih funkcij, prinadležaščih H - klassam S. M. Nikolskovo, Dok. AN SSSR, 1961, Tom 141, № 3, 564 - 567.

[3] Nikolski S. M. - Neravenstva dlja celih funkcij konečnoj stepeni i ih primenjenje v teorii differenciruemih funkcij mnogih peremennih, Tr. matem. inst. im. V. A. Steklova, Tom 38, 44 (1951), 244 - 278.

[4] Konjuškov A. A. - O klassah Lipšica, Izv. AN SSSR, ser. matem. 21, № 3 (1957), 423 - 448.

[5] Lorentz G. G. - Fourier - koeffizienten und Fuktionen klassen, Math. Zs. 51, № 2 (1948), 135 - 149.

[6] Zygmund A. - Trigonometričeskie rjadi, M - L, 1933.

[7] Timan M. F. - Obratni teoremi konstruktivnoi teorii funkcij v prostranstvah Lp, Mat. sbornik, 46 (88), I (1958), 125 - 132.

[8] Potapov M. K. - Teoremi Hardi - Littlvuda, Markincevića - Littlvuda - Peli, približenie "uglom" i vloženie nekatorih klasov funkcij. Mathematica, Vol. 14 (37), 2, 1972, 339 - 362.

[9] Timan M. F. - Osobenosti osnovnih teorem konstruktivnoi teorii funkcij v prostranstvah Lp. AN. Az. SSR, Isledovanija po savremenim problemam konstruktivnoi teorii funkcij, Baku, 1965.

[10] Konjuškov A. A. - Najlućšie približenija trigonometričeskimi polinomami i koeficienti Fourie, Matem. sbornik T. 44 (86), № 1 (1958), 53 - 84.

[11] Konjuškov A. A. - Najluččšie približenija pri preobrazovanii koeficientov Fourie metodom srednih arifmetičeskih i o rjadah Fourie s neotricatelnimi koeficientami. Sibirski matem. žurnal III, 1, 56 - 78 (1962).

[12] Bari N. K. - O najlućšem približenii trigonometričeskimi polinomami dvuh soprjaženih funkcij, Izv. AN SSSR, ser. matem. 19, 285 - 302 (1955).

[13] Hardi G. B. Littlvud D. E. i Polia G. - Neravenstva, G. I, I L, Moskva, 1948.

[14] Potapov M. K. - Ob odnoj teoreme vloženija. Mathematica, Vol. 14 (37), I, 1972, 123 - 146.

[15] Leindler L. - Über verschiedene konvergenzarten trigonometricher Reihen. III (Bediugungen i u der Metrik von L_p), Acta Scient. Math. v. 27. № 3 - 4 (1966), 205 - 215.

[16] Potapov M. K. i Beriša M. - Moduli glatkosti i koeficienti Fourie periodičeskih funkcij odnovo peremennovo. Publications de L'institut mathématique Beograd, (u štampi).

[17] Aljančić S. - On the integral moduli of continuity in L_p $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients Proc. Amer. Math. soc. 1966, 17, № 2, 287 - 294.

[18] Potapov M. K. - O koeficientami Fourie. AN Az. SSR, Isledovanija po savremenim problemam konstruktivnoi teorii funkcij, Baku, 1965.

[19] Zygmund A. - Trigonometričeskie rjadi Moskva 1965.

[20] Timan A. F. - Teorija približenija funkcij dejstviteljnovo peremenovo Fizmatgiz, 1960.

[21] Potapov M. K. - O vloženii i sovpadenii nekatorih klasov funkcij, Izvestija, AN SSSR, serija matem. 33, (1969), 840 - 860.

[22] Timan A. F. i Timan M. F. - Obobšćenij modul neprerivnosti i najlućšee približenie v srednjem. DAN. SSSR, 1950, Tom 71, № 1, 17 - 20.

[23] Potapov M. K. - O najlućšem približenii analitićeskih funkcij mnogih peremenih.Ućjonie zapiski, Ivanovo. Gos. ped. instituta. T. 18 (1958).

[24] Besov O. V. - O nekatorih uslovijah prinadležnosti k L_p proizvodnih periodićeskih funkcij, Naučn. dokl. vissej školi, fiz - matem. nauki, № 1 (1959), 13 - 17.

[25] Besov O. V. - Issledovanie odnovo semeistva funksionalnih prostranstv v svjazi s teoremami vloženia i prodolženia, Tr. matem. in - ta im. V. A. Steklova AN SSSR, 60 (1961), 42 - 81.

[26] S. M. Nikolskij. - Približenije funkcij mnogih peremennih i teoremi vloženija. Moskva 1977.