UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MOMIR S. STANOJEVIĆ

O NEKIM KLASAMA VIŠEZNAČNIH NEPREKIDNIH PRESLIKAVANJA

(DOKTORSKA DISERTACIJA)

BEOGRAD, 1975.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR

U celokupnoj matematičkoj literaturi i svim disciplinama koje koriste matematiku, preslikavanja (funkcije) zauzimaju vidno mesto, pri čemu se, najčešće podrazumevaju jednoznačna preslikavanja. Često se javlja potreba da se za dato preslikavanje posmatra i njegovo inverzno preslikavanje, ali za mnoga preslikavanja inverzno preslikavanje ne postoji u smislu jednoznačnog preslikavanja. Tako se višeznačna preslikavanja prirodno pojavljuju, pa prema tome i potreba za njihovim proučavanjima. U samoj definiciji preslikavanja neki pisci (na primer Dj.Kurepa [19]) ne pretpostavljaju jednoznačnost, ali kod većine je to slučaj.

Mnogi matematičari su se direktno bavili ili se još bave višeznačnim preslikavanjima, a mnogi su višeznačna preslikavanja koristili u svojim istraživanjima. Ipak, sistematsko proučavanje višeznačnih preslikavanja retko se sreće u standardnim kursevima topologije. Jedna od knjiga u kojoj je dosta pažnje posvećeno višeznačnim preslikavanjima je Topologija K.Kuratovskog ([17] , [18]).

Svi autori koji definišu višeznačna preslikavanja uvode, uglavnom, slične definicije. Pristup neprekidnosti višeznačnih preslikavanja, medjutim, bio je različit. Tako se došlo do različitih vrsta neprekidnosti višeznačnih preslikavanja. Pri definiciji neprekidnosti višeznačnih preslikavanja najčešće su korišćene ekvivalentne definicije neprekidnosti jednoznačnih preslikavanja, koje za višeznačna nisu više ekvivalentne. Izdvajaju se tri vrste neprekidnosti: poluneprekidnost odozgo, poluneprekidnost odozdo i neprekidnost.

Ovaj rad ne predstavlja opštu teoriju višeznačnih preslikavanja, već je posvećen proučavanju nekih klasa tih preslikavanja. Skoro uvek se pretpostavlja da je uočeno preslikavanje poluneprekidno odozgo, poluneprekidno odozdo ili neprekidno. Uočene klase višeznačnih preslikavanja su uopštenja odgovarajućih klasa jednoznačnih preslikavanja. Pri izboru klasa imalo se u vidu dobra svojstva pri prenošenju važnijih topoloških osobina, a time i uopštavanje nekih rezultata, ukoliko je to moguće, koji se odnose na odgovarajuće klase jednoznačnih preslikavanja. Neke od tih klasa su dosta proučene (na primer, perfektna), a neke znatno manje.

Najopštije govoreći, u ovom radu razmatraju se sledeći problemi vezani za teoriju višeznačnih preslikavanja:

(i) za uočenu klasu višeznačnih preslikavanja proučiti opšta svojstva tih preslikavanja;

(ii) ispitati medjusobni odnos tih preslikavanja;

(iii)(jedan od vrlo važnih zadataka) uzajamna klasifikacija prostora i preslikavanja.

Jasno da su ova tri opšta zadatka medjusobno tesno povezana i predstavljaju vrlo široku i vrlo značajnu problematiku vezanu za preslikavanja (funkcije) uopšte. U vezi uzajamne klasifikacije prostora i preslikavanja javljaju se tri opšta zadatka, koji su predmet istraživanja i u ovom radu. To su dobro poznati zadaci kojim su se bavili, a i danas se bave mnogi matematičari, a čiji značaj ističe P.S.Aleksandrov [1] (videti takodje A.V. Arhangel'skij [6]). Ti zadaci su:

(I) U kom slučaju se svaki prostor fiksirane klase $\mathcal{A}$ može preslikati na neki prostor iz klase $\mathcal{B}$ pomoću preslikavanja koje pripada klasi $\mathcal{F}$?

(II) Koja svojstva imaju prostori koji se dobijaju kao slika prostora iz klase $\mathcal{C}$ pri preslikavanjima iz klase $\mathcal{F}$?

(III) Koja se svojstva čuvaju pri pojedinim klasama preslikavanja?

Ceo rad je podeljen u pet glava, koje su numerisane arapskim ciframa. Glave sadrže paragrafe, a ovi su obeleženi dvema ciframa, od kojih prva označava broj glave, a druga broj paragrafa u toj glavi. Svi iskazi, bilo da su to definicije, propozicije, leme, teoreme, primeri ili problemi, označeni su sa tri cifre od kojih je prva broj glave, druga broj paragrafa, a treća broj po redu iskaza u tom paragrafu. Tako, na primer, 2.3.7. Teorema, označava sedmi po redu iskaz u trećem paragrafu druge glave.

Na početku svake glave (ponekad i paragrafa) dat je, kratko, radi bolje preglednosti, njen sadržaj.

Kraj dokaza svakog tvrdjenja označen je sa //. Poznati rezultati se po pravilu ne dokazuju, a ako je to slučaj razlog će biti naveden.

Pri pozivanju na neke stavove iz samog rada, navodi se samo njihov broj. Brojevi u uglastim zagradama označavaju redne brojeve iz popisa literature.

Usvojena je standardna terminologija kao što je, na primer, u [17] , [18] , [16] , [19] , [22] .

Samostalan doprinos je uglavnom sadržan u glavama 3., 4. i 5. ovog rada. U ovoj tezi pored novih, nepublikovanih rezultata, uključeni su i rezultati radova [43], [44], a delimično i [42] .

Mada je na početku svake glave dat pregled njenog sadržaja, ipak opišimo, u najkraćim crtama, svaku od tih glava.

Prva glava sadrži uvodna izlaganja i činjenice koje su potrebne u daljem radu.

Druga glava je posvećena neprekidnosti višeznačnih preslikavanja i nekim njihovim svojstvima. To su, sa malim izuzetkom, poznati rezultati. Neka poznata tvrdjenja su dokazana na drugačiji način i zato se navode dokazi (zbog kratkoće ili kao model za neka druga dokazivanja). U ovoj glavi korišćen je materijal sa Seminara za topologiju koji je održan 1973. godine na Matematičkom institutu u Beogradu pod rukovodstvom prof. M.Marjanovića. Nekoliko stavova mogu se smatrati novim (videti paragrafe 2.2. , 2.3. i 2.4.).

U trećoj glavi proučavaju se opšta svojstva kvocijentnih višeznačnih preslikavanja. Svojstva ovih preslikavanja, koliko je poznato, malo su proučena. Njih je definisao Borges (videti [9]). Pored ostalih svojstava kvocijentnih višeznačnih preslikavanja, istaknimo da su ona skoro jednoznačna za dosta široku klasu prostora (paragraf 3.2.). Ova glava sadrži dosta novih rezultata, uključujući i rezultate iz rada [43] .

U četvrtoj glavi proučavaju se perfektna višeznačna preslikavanja i tri klase koje sadrže otvorena višeznačna preslikavanja, a koje su uvedene propozicijama 4.3.1., 4.3.2. i 4.3.3. Perfektna višeznačna preslikavanja su dosta proučavana. Ovde je posvećena pažnja nekim njihovim novim karakterizacijama (4.2.2. i 4.2.4.). U ovoj glavi daje se veza izmedju uvedenih preslikavanja u toj glavi, a takodje i veza sa nekim drugim. Takodje se uopštavaju neki iskazi koji važe za odgovarajuće klase jednoznačnih preslikavanja (videti 4.2.4., 4.3.6. i druge). Paragraf 4.5. je posvećen proizvodu višeznačnih preslikavanja.

Prenošenje nekih svojstava prostora pri različitim klasama višeznačnih preslikavanja je sadržaj pete glave (ova problematika se sreće i u ostalim glavama). Prvenstveno smo se orijentisali na različite tipove kvocijentnih višeznačnih preslikavanja. Od svojstava prostora izabran je povezanost (koneksnost), lokalna povezanost, k- prostori, kvazi-k-prostori, separabilnost, kompaktost, lokalna kompaktnost, metrizabilnost.

Sledeći materijal ovog rada smatram samostalnim doprinosom:

Teorema 2.2.1. (2) i (3); Teorema 2.3.2.

Sa malim izuzetkom, cela Glava 3.

Paragrafi 4.2., 4.3. i delimično 4.4. iz Glave 4.

Veći deo Glave 5.

Ovaj materijal iznosi oko 55 stranica.

Pretpostavke o separacionim svojstvima prostora se uvek ističu, a ako to nije slučaj, tada se ne smatra da prostor ima unapred neko separaciono svojstvo, mada su prostori skoro uvek bar T_1- prostori.

Neki simboli i skraćenice dati su na početku rada.

Spisak korišćene literature dat je na kraju rada.

Posebno mi je zadovoljstvo da se zahvalim prof. M. Marjanoviću, pod čijim je rukovodstvom radjena ova teza, koji mi je pružio veliku pomoć svojim savetima i sugestijama i pravilno usmeravao u toku rada. Takodje se zahvaljujem prof. Dj.Kurepi na podršci i korisnim savetima.

Niš,novembra 1975.g. Momir S.Stanojević

SIMBOLI I SKRAĆENICE

$x \in X$	x je element skupa X
$A \subset B$	A je podskup skupa B (B je nadskup od A)
$\bigcup$	unija
$\bigcap$	presek
$\times$	Kartezijev proizvod
$\prod$	Kartezijev proizvod
$X \setminus A = CA$	komplement skupa A,12
$\Longrightarrow$	implikacija, dovoljnost
$\Longleftarrow$	implicirano je, potrebnost
$(X, \mathcal{T}_X)$	topološki prostor X sa topologijom $\mathcal{T}_X$
$\overline{A}$	zatvorenje (adherencija) skupa A
$\mathrm{int}(A)$	interior (unutrašnjost) skupa A
$\mathrm{bd}(A)$	granica (rub) skupa A
//	kraj dokaza
$\emptyset$	prazan skup
$P(X)$	partitivni skup skupa X,11
$\exp(X)$	skup svih zatvorenih podskupova od X, 17
$F:X \twoheadrightarrow Y$	višeznačno preslikavanje sa X u Y, 10
F'	kopreslikavanje preslikavanja F, 11
$\overset{\circ}{F}$	malo preslikavanje preslikavanja F, 11
$\overset{\circ}{F}'$	malo kopreslikavanje preslikavanja F, 11
$\tilde{F}:X \to P(X)$	jednoznačno presl. koje odgovara presl. F, 12
$\hat{F}:P(X) \to P(Y)$	jednoznačno presl.koje odgovara presl. F, 12
$f:X \to Y$	jednoznačno preslikavanje 10
f^{-1}	inverzno preslikavanje preslikavanja f, 10

F/A	restrikcija preslikavanja F na podskup A, 42
$G \circ F$	kompozicija preslikavanja F i G, 12
$F_1 \times X_2$	proizvod preslikavanja F_1 i F_2, 7o
$\prod_t F_t$	proizvod preslikavanja $F_t : X_t \to Y_t$, $t \in T$ 7o
gr(F)	grafik (graf) preslikavanja $F : X \to Y$, 13
p_X	projekcija sa grafika na X, 13
p_Y	projekcija sa grafika na Y, 13
$\langle A \rangle$	familija podskupova skupa A, 18
$\rangle A \langle$	familija podskupova koji seku skup A 18
$P_{\varkappa}(X)$ $(P_{\varkappa}(X,\mathcal{A}))$	$\varkappa$- topologija na partitivnom skupu P(X) 19
$P_{\lambda}(X)$ $(P_{\lambda}(X,\mathcal{A}))$	λ- topologija na partitivnom skupu P(X) 20
$P_{\psi}(X)$	ψ- topologija na partitivnom skupu P(X) 20
$\exp_{\varkappa}(X)$	$\varkappa$ - topologija na exp (X) 20
$\exp_{\lambda}(X)$	λ - topologija na exp(X) 2o
$\exp_{\psi}(X)$	ψ - topologija na exp (X) (hiperprostor) 21

GLAVA 1.

OSNOVNA SVOJSTVA VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA I TOPOLOGIZIRANJE PARTITIVNIH SKUPOVA

U ovoj, uvodnoj, glavi daje se pregled osnovnih pojmova i činjenica koje se odnose na višeznačna preslikavanja, sa prvenstvenim ciljem da se uvedu oznake i terminologija koja će se upotrebljavati u docnijim glavama. Nećemo se detaljno baviti formlanim svojstvima višeznačnih preslikavanja, nego ćemo se zadržati na najnižnijim. Ipak, ne možemo mimoići neke osnovne rezultate, a da ih bar ne napomenemo, imajući u vidu njihov značaj u daljem korišćenju. Pored pojma višeznačnog preslikavanja u paragrafu 1.1. definišu se i preslikavanja njemu pridružena (kopreslikavanje, malo preslikavanje, malo kopreslikavanje). U 1.2. daje se pregled nekih formula koje su u pojedinim dokazima vrlo korisne. Višeznačna preslikavanja su usko vezana za topologiziranje partitivnih skupova, jer se svako višeznačno preslikavanje može posmatrati kao jednoznačno ako se mesto kodomena posmatra njegov partitivni skup. Paragraf 2.3. je posvećen topologijama na partitivnom skupu.

1.1. OSNOVNE DEFINICIJE U VEZI SA PRESLIKAVANJEM

Pojam preslikavanja je dobro poznat, mada prilaz tom pojmu može biti različit. Ipak se uvek radi samo o pogodnosti ove ili one definicije. Mi se opredeljujemo za funkcionalnu notaciju i definiciju kao što je u [19] .

1.1.1. DEFINICIJA. Pod <u>višeznačnim preslikavanjem</u> skupa X u skup Y podrazumeva se svaki postupak F koji svakom elementu $x \in X$ prideljuje (pridružuje) odredjen podskup skupa Y; ovaj podskup u zavisnosti od elementa x označavamo sa

$$F(x).$$

Preslikavanje skupa X u skup Y označićemo uobičajenom funkcionalnom notacijom

$$F:\ X \longrightarrow Y.$$

Za preslikavanje $f:X \rightarrow Y$ kaže se da je <u>jednoznačno</u> ako je za svaki element $x \in X$ skup $f(x)$ jednočlan. Za $B \subset Y$ sa $f^{-1}(B)$ označena je inverzna slika skupa B.

Jednoznačna preslikavanja označavaćemo malim latinskim slovima $f, g, \ldots,$ a višeznačna velikim F, G itd.

Različita svojstva jednoznačnih preslikavanja dobro su poznata i mi ćemo se njima koristiti ne naglašavajući ih posebno.

1.1.2. DEFINICIJA. Ako je $F:X \rightarrow Y$ višeznačno preslikavanje i $A \subset X$, tada je

$$F(A) = F\ (\bigcup\{x:\ x \in A\}\ ) = \bigcup\{F(x):\ x \in A\}.$$

Skup $F(A)$ naziva se <u>velika</u> <u>slika</u> ili, kraće, <u>slika</u> skupa A s obzirom na preslikavanje F.

Ako je $F(X) = Y$, onda se kaže da je višeznačno preslikavanje $F:X \rightarrow Y$ preslikavanje skupa X na skup Y; reći ćemo tada da je preslikavanje F <u>na.</u>

Definicijom 1.1.2. želimo da istaknemo komutativnost operatora F sa operatorom $\bigcup$, koji označava uniju elemenata odnosno podskupova datog skupa, što nije slučaj kod svakog operatora.

1.1.3. DEFINICIJA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje.

(1) Kopreslikavanje F' višeznačnog preslikavanja F je višeznačno preslikavanje $F': Y \to X$ definisano relacijom

$$F'(B) = \{x \in X: \ F(x) \cap B \neq \emptyset\},$$

za svaki $B \subset Y$ (B može biti i jednočlan skup).

(2) Mala slika skupa $A \subset X$ preslikavanja F je

$$\overset{\circ}{F}(A) = \{y \in Y: \ F'(y) \subset A\}.$$

(3) Mala koslika skupa $B \subset Y$ preslikavanja F je

$$\overset{\circ}{F}{}'(B) = \{x \in X: \ F(x) \subset B\}.$$

Napomena. Ako je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje, tada "preslikavanja" $\overset{\circ}{F}$ i $\overset{\circ}{F}{}'$ ne moraju zadovoljavati uslove definicije 1.1.2. (ne moraju komutirati sa unijom). Mada se $\overset{\circ}{F}$ i $\overset{\circ}{F}{}'$ ne mogu tretirati kao višeznačna preslikavanja u smislu definicije 1.1.2., ipak se usvaja da se $\overset{\circ}{F}$ zove malo preslikavanje preslikavanja F, a da se $\overset{\circ}{F}{}'$ zove malo kopreslikavanje preslikavanja F (videti [36] i [37]).

Ako je S dati skup, sa $P(S)$ označen je skup svih podskupova skupa S i naziva se partitivni skup skupa S. Sa $P^2(S)$ označen je drugi partitivni skup; $P^2(S) = P(P(S))$.

Komplement skupa $A \subseteq S$ u odnosu na S označavaćemo sa CA ili $S - A$;

$$CA = S - A = \{s \in S: \ s \notin A\}.$$

1.1.4. DEFINICIJA. Neka su $F_1: X \to Y$ i $F_2: Y \to Z$ višeznačna preslikavanja. Kompozicija preslikavanja F_1 i F_2 je preslikavanje $F_2 \circ F_1: X \to Z$ takvo da je

$$F_2 \circ F_1 \ (x) = F_2(F_1(x)), \text{ za svako } \ x \in X.$$

Koristeći odgovarajuće definicije može se dokazati sledeće tvrdjenje (videti [36] ili [33]).

1.1.5. PROPOZICIJA. Neka je $F: X \to Y$ višeznačno preslikavanje. **Tada je**

(1) $(F')' = F$.

(2) $\overset{\circ}{F}(A) = CF(CA) = Y - F(X - A)$.

(3) $\overset{\circ}{F}'(B) = CF'(CB) = X - F\ (Y - B)$.

Sledeća definicija pokazuje da se na jedan prirodan način svakom višeznačnom preslikavanju mogu pridružiti dva jednoznačna preslikavanja.

1.1.6. DEFINICIJA. Neka je $F: X \to Y$ višeznačno preslikavanje.

(1) Sa $\tilde{F}: X \to P(Y)$ označeno je jednoznačno preslikavanje takvo da je

$$\tilde{F}(x) = F(x), \text{ za svako } \ x \in X.$$

(2) Sa $\hat{F}: P(X) \to P(Y)$ označeno je jednoznačno preslikavanje takvo da je

$$\hat{F}(A) = F(A), \quad \text{za svako } \ A \in P(X).$$

Napomena. Svakom višeznačnom preslikavanju $F:X \to Y$ odgovara samo jedno jednoznačno preslikavanje $\tilde{F}:X \to P(Y)$ i samo jedno jednoznačno preslikavanje $\hat{F}:P(X) \to P(Y)$. Medjutim, ako je $f:P(X) \to P(Y)$ jednoznačno preslikavanje, tada ne mora postojati višeznačno preslikavanje $F:X \to Y$ takvo da je $\hat{F} = f$. To je jasno iz činjenice da $f(A)$ ne mora biti jednako $\hat{F}(A) = F(A) = \bigcup\{F(x): x \in A\}$, za svako $A \in P(X)$, što se može pokazati na jednostavnim primerima.

1.1.7. DEFINICIJA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje. Tada

(1) Grafik (graf) preslikavanja F je

$$gr(F) = \{(x,y) \in X \times Y: \ y \in F(x) \text{ i } x \in X\}.$$

(2) Funkcije $p_X:gr(F) \to X$ i $p_Y:gr(F) \to Y$ definisane su formulama

$$p_X(x,y) = x \quad \text{i} \quad p_Y(x,y) = y, \quad (x,y) \in gr(F).$$

1.1.8. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje. Tada za $x \in X$ i $y \in Y$ važi

$$F(x) = p_Y p_X^{-1}(x) \quad \text{i} \quad F^{-1}(y) = p_X p_Y^{-1}(y).$$

Dokaz. Videti [37].

Primetimo da je ova propozicija vrlo korisna i često će biti korišćena. Zahvaljujući gornjem "kanoničnom" predstavljanju višeznačnog preslikavanja F mnogi dokazi se uprošćavaju i dolazi se do interesantnih rezultata u teoriji višeznačnih preslikavanja.

Ako su X i Y topološki prostori i $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje, često se zahteva da za svako $x \in X$

$F(x)$ bude zatvoren podskup u Y ([33] , [36], [37] , [40]). Ovde se samo zahteva da slika tačke bude neprazan skup, a svaka druga pretpostavka biće posebno naglašena. Iz tih razloga uvodimo sledeću definiciju.

1.1.9. DEFINICIJA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje i $\mathcal{P}$ neko svojstvo skupova. Kaže se da je preslikavanje F Y-$\mathcal{P}$(X-$\mathcal{P}$) ako za svako $x \in X$ $F(x)$ ima svojstvo $\mathcal{P}$ (ako za svako $y \in Y$ $F^{\prime}(y)$ ima svojstvo $\mathcal{P}$).

Najčešće svojstvo $\mathcal{P}$ biće: zatvorenost, povezanost (koneksnost), kompaktnost, separabilnost i druga karakteristična svojstva prostora odnosno podprostora. Tako je, na primer, višeznačno preslikavanje $F:X \to Y$ Y-<u>povezano</u>, Y-<u>zatvoreno</u>, Y-<u>kompaktno</u> (X-<u>povezano</u>, X-<u>zatvoreno</u>, X-<u>kompaktno</u>) ako je $F(x)$ respektivno povezan, zatvoren, kompaktan podskup od Y za svako $x \in X$ ($F^{\prime}(y)$ povezan, zatvoren, kompaktan podskup od X za svako $y \in Y$).

1.1.10. DEFINICIJA. Višeznačno preslikavanje $F:X \to Y$ je <u>otvoreno</u> (<u>zatvoreno</u>) ako je $F(U)$ otvoren skup u Y za svaki otvoren skup, $U \subset X$ ($F(A)$ zatvoren skup u Y za svaki zatvoren skup $A \subset X$).

1.2. OPERACIJE SA PRESLIKAVANJIMA I KOPRESLIKAVANJIMA

Neka su $F_1 : X \longrightarrow Y$ i $F_2 : Y \longrightarrow Z$ višeznačna preslikavanja na. Tada je

(1) $(F_2 \circ F_1)' = F_1' \circ F_2'$

(2) $\mathring{(F_2 \circ F_1)} = \mathring{F}_2 \circ \mathring{F}_1$

(3) $\mathring{(F_2 \circ F_1)}' = \mathring{F}_1' \circ \mathring{F}_2'$

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje skupa X na skup Y.

Za bilo koja dva podskupa A i A_1 iz X, i B i B_1 iz Y, važe donje relacije.

(4) $F(A) \cap B \neq \emptyset \Longleftrightarrow F'(B) \cap A \neq \emptyset$.

(5) $A \cap A_1 \neq \emptyset \Longrightarrow F(A) \cap F(A_1) \neq \emptyset$ i

(5') $B \cap B_1 \neq \emptyset \Longrightarrow F'(B) \cap F'(B_1) \neq \emptyset$

(obrnuto ne mora da bude tačno).

(6) $A \cap F'(B \cap F(A)) = A \cap F'(B)$ i

(6') $B \cap F(A \cap F'(B)) = B \cap F(A)$.

(7) $\mathring{F}'(\mathring{F}(A)) \subset F'(\mathring{F}(A)) \subset A \subset \mathring{F}'(F(A)) \subset F'(F(A))$ i

(7') $\mathring{F}(\mathring{F}'(B)) \subset F(\mathring{F}'(B)) \subset B \subset F(\mathring{F}'(B)) \subset F(F'(B))$.

(8) $\mathring{F}(A) = C \circ F \circ C\,(A)$ i $\mathring{F}'(B) = C \circ F' \circ C\,(B)$.

Ako su $\mathcal{A} = \{A : A \in \mathcal{A}\}$ i $\mathcal{B} = \{B : B \in \mathcal{B}\}$ familije skupova iz X i Y, respektivno, tada je

(9) $F(\bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}) = \bigcup \{F(A) : A \in \mathcal{A}\}$

(9') $F'(\bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}) = \bigcup \{F'(B) : B \in \mathcal{B}\}$

(10) $F(\bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\}) \subset \bigcap \{F(A) : A \in \mathcal{A}\}$

(10') $F'(\bigcap \{B : B \in \mathcal{B}\}) \subset \bigcap \{F'(B) : B \in \mathcal{B}\}$

(11) $\mathring{F}(\bigcap\{A : A\in\mathcal{A}\}) = \bigcap\{\mathring{F}(A) : A\in\mathcal{A}\}$

(11') $\mathring{F}'(\bigcap\{B : B\in\mathcal{B}\}) = \bigcap\{\mathring{F}'(B) : B\in\mathcal{B}\}$

(12) $\mathring{F}(\bigcup\{A : A\in\mathcal{A}\}) \supset \bigcup\{\mathring{F}(A) : A\in\mathcal{A}\}$

(12') $\mathring{F}'(\bigcup\{B : B\in\mathcal{B}\}) \supset \bigcup\{\mathring{F}'(B) : B\in\mathcal{B}\}$

DOKAZ. Sve relacije mogu se rutinski proveriti (videti [37] , str.516., takodje [33] str.[17].).

Formule (6) i (6'), koliko mi je poznato, ne nalaze se u literaturi, a dosta su korisne, jer pojednostavljuju dokaze pojedinih stavova, te ćemo ih dokazati.

Pošto je $F'(B\cap F(A)) \subset F'(B)$, to je

$$A\cap F'(B\cap F(A)) \subset A\cap F'(B).$$

Neka je $x\in A\cap F'(B)$. Odatle sledi da je $F(x)\subset F(A)$ i $F(x)\cap B \neq \emptyset$, odnosno $F(x)\cap(F(A)\cap B) \neq \emptyset$. S obzirom na relaciju (4) sledi da je $x\in F'(F(A)\cap B)$ i po pretpostavci je $x\in A$, pa je

$$A\cap F'(B) \subset A\cap F'(B\cap F(A)),$$

a time je prva formula iz (2) dokazana.

Druga formula se slično dokazuje.//

1.3. TOPOLOGIZIRANJE PARTITIVNOG SKUPA DATOG PROSTORA (HIPERPROSTORI)

Svakom višeznačnom preslikavanju $F:X \to Y$ pridružena su jednoznačna preslikavanja $\tilde{F}:X \to P(Y)$ i $\hat{F}:P(X) \to P(Y)$ (Def.1.1.6.), pa se proučavanje višeznačnog preslikavanja F često svodi na proučavanje jednoznačnih preslikavanja $\tilde{F}$ i $\hat{F}$. Ako su X i Y topološki prostori i $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje, tada slike tačaka odnosno slike podskupova iz X, sa nekim topološkim svojstvima, mogu imati odredjena topološka svojstva. Ta svojstva više nisu dovoljno uočljiva ukoliko se preslikavanje F zameni preslikavanjem $\tilde{F}$ odnosno $\hat{F}$, jer se ništa ne zna o topologiji na $P(X)$ odnosno na $P(Y)$. Iz ovog razloga, a i iz mnogih drugih, za dati topološki prostor $(X, \mathcal{T}_X)$ uvode se topologije na $P(X)$ sa odredjenim zahtevima. Jedan od zahteva je da X, kao podprostor od $P(X)$, bude topološki ekvivalentan sa prostorom $(X, \mathcal{T}_X)$.

Ako je $(X, \mathcal{T}_X)$ dati topološki T_1- prostor, sa $\exp(X)$ označen je skup svih zatvorenih nepraznih podskupova prostora X. U literaturi je veća pažnja poklonjena topologiziranju skupa $\exp(X)$, zbog boljih separacionih svojstava.

Postoji dosta članaka, monografija i knjiga gde se razmatra ova problematika ([17], [18], [27], [24]).

1.3.1. OPERATORI $\langle\cdot\rangle$ i $>\cdot<$ (videti [25]). Neka je X dati skup, $P(X)$ partitivni skup, a $P^2(X) = P(P(X))$ drugi partitivni skup skupa X. Za $A \subset X$, označićemo sa $\langle A\rangle$ skup svih nepraznih podskupova skupa A (partitivni skup skupa A). Znači,

$$\langle A\rangle = \{ S \in P(X) \colon S \subset A \}.$$

Sa $>A<$ označavamo sve skupove iz X, koji seku A;

$$>A< = \{ S \in P(X) \colon S \cap A \neq \emptyset \}.$$

Ako je C komplementarna operacija, pokazuje se da dijagram

$$\begin{tikzcd} P(X) \arrow[r, "C"] \arrow[d, "\langle\cdot\rangle"'] & P(X) \arrow[d, ">\cdot<"] \\ P^2(X) \arrow[r, "C"'] & P^2(X) \end{tikzcd}$$

komutira.

Mogu se proveriti sledeća svojstva operatora i (videti [25]).

(1) $A \subset B \Rightarrow \langle A\rangle \subset \langle B\rangle$, $A \neq B \Rightarrow \langle A\rangle \neq \langle B\rangle$.

(2) $\langle A \cap B\rangle = \langle A\rangle \quad \langle B\rangle$, $\langle A \cup B\rangle \supset \langle A\rangle \cup \langle B\rangle$.

(3) $\langle\cdot\rangle = C\circ >\cdot< \circ C$, $>\cdot< = C\circ \langle\cdot\rangle \circ C$.

(4) $>A< \supset \langle A\rangle$.

(5) $A \subset B \Rightarrow >A< \subset >B<$, $A \neq B \Rightarrow >A< \neq >B<$.

(6) $>A \cup B< = >A< \cup >B<$, $>A \cap B< \subset >A< \cap >B<$.

1.3.2. PROPOZICIJA. *Neka je* $F\colon X \to Y$ *višeznačno preslikavanje na a* $\tilde{F}\colon X \to P(Y)$ *i* $\hat{F}\colon P(X) \to P(Y)$ *odgovarajuća jednoznačna preslikavanja. Tada,*

(1) $\tilde{F}^{-1}(\langle B\rangle) = \overset{\circ}{F}'(B)$ i $\hat{F}^{-1}(\langle B\rangle) = \langle \overset{\circ}{F}'(B)\rangle$.

(2) $\tilde{F}^{-1}(\rangle B\langle) = F'(B)$ i $\hat{F}^{-1}(\rangle B\langle) = \rangle F'(B)\langle$.

za svako $B \subset Y$.

DOKAZ. Gore navedene formule srećü se u literaturi. Mi navodimo dokaze koristeći materijal sa Seminara za topologiju Matematičkog instituta u Beogradu u 1972. godini.

$$(1)\ \tilde{F}^{-1}(\langle B\rangle) = \{x\in X:\ F(x)\subset B\} = \overset{\circ}{F}'(B).$$

$$\hat{F}^{-1}(\langle B\rangle) = \{A\subset X:\ F(A) \subset B\} = \langle \overset{\circ}{F}'(B)\rangle .$$

$$(2)\ \tilde{F}^{-1}(\rangle B\langle) = \{x\in X:\ F(x) \cap B \neq \emptyset\} = F'(B).$$

$$\hat{F}^{-1}(\rangle B\langle) = \{A\subset X:\ F(A) \cap B \neq \emptyset\} =$$

$$= \{A\subset X:\ A \cap F'(B) \neq \emptyset\} = \rangle F'(B)\langle. \ //$$

1.3.3. DEFINICIJA. Prostori $P_{\mathcal{K}}(X,\mathcal{A})$ i $P_{\mathcal{K}}(X)$. Neka je $(X,\mathcal{T}_X)$ topološki T_1- prostor i $\mathcal{A}$ familija skupova koja sadrži sve otvorene skupove prostora X ($\mathcal{A}\supset\mathcal{T}_X$) (topologizirajući sistem [25]).

Prostor $P_{\mathcal{K}}(X,\mathcal{A})$ je prostor čiji su elementi svi neprazni podskupovi iz X a subbaza za topologiju je kolekcija oblika

$$\{\langle A\rangle :\ A\in\mathcal{A}\}.$$

Ako je $\mathcal{A} = \mathcal{T}_X$, tada ćemo $P_{\mathcal{K}}(X,\mathcal{T}_X)$ označavati sa $P_{\mathcal{K}}(X)$ i kolekcija

$$\{\langle U\rangle :\ U\in\mathcal{T}_X\}$$

je baza za tu topologiju.

$\exp_{\varkappa}(X,\mathcal{A})$ i $\exp_{\varkappa}(X)$ su prostori čiji su elementi neprazni zatvoreni podskupovi iz X, a koji su topologizirani kao podprostori od $P_{\varkappa}(X,\mathcal{A})$ i $P_{\varkappa}(X)$, respektivno (Ponomarev [36], Marjanović [25]).

1.3.4. DEFINICIJA. Prostori $P_{\lambda}(X,\mathcal{A})$ i $P_{\lambda}(X)$. Neka je $(X,\mathcal{T}_X)$ topološki T_1- prostori, $\mathcal{A}$ familija skupova koji sadrži sve otvorene skupove prostora X.

Prostor $P_{\lambda}(X,\mathcal{A})$ je prostor čiji su elementi svi podskupovi iz X a subbaza za topologiju je oblika

$$\{ \, >A< \; : \; A \in \mathcal{A} \, \} \, .$$

Ako je $\mathcal{A} = \mathcal{T}_X$, tada ćemo $P_{\lambda}(X,\mathcal{T}_X)$ označavati sa $P_{\lambda}(X)$ i kolekcija

$$\{ \, >U< \; : \; U \in \mathcal{T}_X \, \}$$

je subbaza za tu topologiju.

Sa $\exp_{\lambda}(X,\mathcal{A})$ i $\exp_{\lambda}(X)$ označeni su prostori čiji su elementi zatvoreni skupovi iz X, topologizirani kao podprostori od $P_{\lambda}(X,\mathcal{A})$ i $P_{\lambda}(X)$, respektivno.

1.3.5. DEFINICIJA. Prostori $P_{\psi}(X)$ i $\exp_{\psi}(X)$. Neka je $(X,\mathcal{T}_X)$ topološki T_1- prostor. Prostor $P_{\psi}(X)$ je prostor čiji su elementi podskupovi od X sa subbazom oblika

$$\{ \langle U \rangle : U \in \mathcal{T}_X \} \text{ i } \{ \, >U< \; : \; U \in \mathcal{T}_X \}$$

Standardni bazni element prostora $P_{\psi}(X)$ je oblika

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{ A \subset X : A \subset \bigcup U_i, \; A \cap U_i \neq \emptyset \} .$$

Sa $\exp_\psi(X)$ označen podprostor od $P_\psi(X)$ čiji su elementi zatvoreni podskupovi od X (eksponencijalna ili konačna topologija). Prostor $\exp_\psi(X)$ se još zove hiperprostor.

U [27], [17], [18], detaljno se proučavaju prostori sa konačnom topologijom.

GLAVA 2.

NEKA SVOJSTVA POLUNEPREKIDNIH I NEPREKIDNIH VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

U ovoj glavi navode se osnovna svojstva poluneprekidnih i neprekidnih višeznačnih preslikavanja, sa ciljem da se uoči sličnost i razlika sa klasom neprekidnih jednoznačnih preslikavanja. Pored poluneprekidnih odozgo, poluneprekidnih odozdo i neprekidnih preslikavanja, pominju se još i koneksna (povezana), monotona i k-preslikavanja koja se ne moraju biti poluneprekidna. Ovde se takodje daju i neki uslovi neprekidnosti višeznačnih preslikavanja. Razmatra se pitanje prenošenja kompaktnosti, prebrojive kompaktnosti, svojstva biti Lindelöf-ov prostor (paragraf 2.2.) i povezanosti (koneksnosti) prostora (paragraf 2.3.).

2.1. VRSTE NEPREKIDNOSTI I NEKI EKVIVALENTNI USLOVI

Postoje različite definicije neprekidnosti višeznačnih preslikavanja, koje nisu medjusobno ekvivalentne. Većina autora zasniva definicije neprekidnosti višeznačnih preslikavanja tako što neku od ekvivalentnih definicija, deo te definicije ili kombinacije, neprekidnosti jednoznačnih preslikavanja generališe na višeznačna preslikavanja. Na taj način došlo se do različitih definicija neprekidnosti višeznačnih preslikavanja, koje nisu medjusobno ekvivalentne.

Mi se opredeljujemo za donju definiciju.

2.1.1. DEFINICIJA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje, X i Y topološki prostori. Tada

(1) F je poluneprekidno odozgo ako je za svaki zatvoren podskup $B \subset Y$, $F'(B)$ zatvoren podskup u X.

(2) F je poluneprekidno odozdo ako je za svaki otvoren podskup $B \subset Y$, $F'(B)$ otvoren podskup u X.

(3) F je neprekidno ako je poluneprekidno odozgo i poluneprekidno odozdo.

Primetimo da su uslovi (1) i (2) ekvivalentni za jednoznačna preslikavanja, dok za višeznačna to nije slučaj.

Navedimo neke nazive koji se u literaturi upotrebljavaju za nazive koji su usvojeni u Definiciji 2.1.1.

1. Poluneprekidnost odozgo.

- U literaturi na engleskom jeziku: upper semicontinuous (usc) (videti [9] , [40], [41]); redje, weakly continuous (videti Stroter [46]).

- U literaturi na ruskom jeziku : neprerывно (videti: Ponomarev [36], [37]; Arhangel'skij [3], [6]); polunepreryvno sverhu (videti Kuratovski [17], [18]).

2. Poluneprekidnost odozdo.

- U literaturi na engleskom jeziku : lower semicontinuous (lsc) (videti [9], [40], [41]); redje rezidually continuous (videti [46]).

- U literaturi na ruskom jeziku: koso nepreryvno ([36], [37]); polunepreryvno snizu ([17], [18]).

Sledeće dve teoreme (2.1.2. i 2.1.3.) iskazuju neke ekvivalentne uslove poluneprekidnosti. Neki od tih uslova se uzima u nekim radovima i za definiciju. Dokaze tih teorema izostavljamo, jer su poznati i mogu se sresti kod mnogih autora. Ove dve teoreme su sakupljeni na jednom mestu poznati, a za nas vrlo korisni, rezultati (videti [36], [37], [33], [17], [18], [40], i drugi).

2.1.2. TEOREMA. Neka je $F:X \to Y$ <u>višeznačno preslikavanje</u>. <u>Sledeći iskazi su ekvivalentni</u>.

(1) F <u>je poluneprekidno odozgo</u>.

(2) F' <u>je zatvoreno.</u>

(3) <u>Za svaki otvoren podskup</u> $V \subset Y$, $\overset{\circ}{F}'(V)$ je <u>otvoren podskup od</u> X.

(4) <u>Preslikavanje</u> $\hat{F}:P_{\mathcal{K}}(X) \to P_{\mathcal{K}}(X)$ <u>je neprekidno</u>.

(5) <u>Preslikavanje</u> $\tilde{F}:X \to P_{\mathcal{K}}(Y)$ <u>je neprekidno</u>.

(6) <u>Za svaku tačku</u> $x \in X$ <u>i svaku okolinu</u> V <u>skupa</u> $F(x)$ <u>u</u> Y , <u>postoji okolina U tačke</u> x <u>takva da je</u> $F(U) \subset V$.

(7) <u>Za svaki podskup</u> $B \subset Y$ je $\overline{F'(B)} \subset F'(\bar{B})$.

2.1.3. TEOREMA. <u>Neka je</u> $F:X \to Y$ <u>višeznačno preslikavanje</u>. <u>Sledeći iskazi su ekvivalentni</u>.

(1) F <u>je poluneprekidno odozdo</u>.

(2) F' <u>je otvoreno</u>.

(3) <u>Za svaki zatvoren skup</u> $B \subset Y$, $\overset{\circ}{F}'(B)$ <u>je zatvoren</u>.

(4) <u>Za svaku tačku</u> $x \in X$ <u>i svaki otvoren skup</u> V <u>u</u> Y <u>takav da je</u> $F(x) \cap V \neq \emptyset$ <u>postoji okolina</u> U <u>tačke</u> x <u>takva da je</u> $F(x') \cap V \neq \emptyset$ <u>za svako</u> $x' \in U$.

(5) <u>Preslikavanje</u> $\tilde{F}:X \to P_{\lambda}(Y)$ <u>je neprekidno</u>.

(6) <u>Preslikavanje</u> $\hat{F}:P_{\lambda}(X) \to P_{\lambda}(Y)$ <u>je neprekidno.</u>

(7) <u>Za svaki podskup</u> $A \subset X$ je $F(\bar{A}) \subset \overline{F(A)}$.

(8) <u>Za svaki podskup</u> $A \subset X$ je $\underline{\overrightarrow{F(\bar{A})}} = \overleftarrow{F(A)}$.

(9) <u>Za svaki podskup</u> $B \subset Y$ je $\overset{c}{F}'(B) \subset \overset{o}{F}'(\bar{B})$.

Iz Teoreme 2.1.2. i Teoreme 2.1.3. mogu se formulisati potrebni i dovoljni uslovi za naprekidnost višeznačnog preslikavanja. Mi izostavljamo takvu formulaciju, a uvek ćemo se koristiti tim uslovima ako se javi potreba za tim.

2.2. VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA KOMPAKTNIH (I NEKIH OPŠTIJIH) PROSTORA

Prostor X je <u>kompaktan</u> ako se iz svakog njegovog otvorenog pokrivača može izdvojiti konačan podpokrivač. Prostor X je <u>prebrojivo kompaktan</u> ako se iz svakog njegovog prebrojivog otvorenog pokrivača može izdvojiti konačan podpokrivač. Prostor X je <u>Lindelöf-ov</u> ako se iz svakog njegovog otvorenog pokrivača može izdvojiti prebrojiv podpokrivač.

Poznato je da se kompaktnost, prebrojiva kompaktnost i svojstvo biti Lindelöf-ov prenosi pri neprekidnim jednoznačnim preslikavanjima (videti na primer [17] i [18]). To nije slučaj za višeznačna neprekidna preslikavanja. Tako na primer, višeznačno preslikavanje $F:X \to Y$ takvo da je $F(x) = Y$ za svako $x \in X$ je uvek neprekidno za ma kakav prostor Y.

U narednoj Teoremi 2.2.1. iskaz (1) je poznat (videti na primer [41] P.2.3.). Naš način dokazivanja je drugačiji od ostalih i u suštini je isti za sva tri tvrdjenja (1), (2) i (3). Tvrdjenja (2) i (3) smatramo novim.

2.2.1. TEOREMA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje na, X i Y topološki prostori.

(1) Ako je F poluneprekidno odozgo i Y-kompaktno, tada je slika kompaktnog skupa kompaktan skup.

(2) Ako je F poluneprekidno odozgo i Y-prebrojivo kompaktno, tada je slika prebrojivo kompaktnog skupa prebrojivo kompaktan skup.

(3) Ako je F poluneprekidno odozgo i Y-Lindelöf-ovo, tada je slika skupa koji je Lindelöfov podprostor, Lindelöfov podprostor.

DOKAZ. (1). Neka je $K \subset X$ kompaktan podskup i $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač za $F(K)$ u Y;

$$\mathcal{V} = \{V \subset Y: \ V \text{ - otvoren}, \ F(K) \subset \bigcup V\}.$$

Označimo sa $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ kolekciju svih konačnih podfamilija familije $\mathcal{V}$;

$\mathcal{V}' \in \mathcal{N}(\mathcal{V}) \Leftrightarrow \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ i $\mathcal{V}'$ se sastoji od konačnog broja članova iz $\mathcal{V}$.

Neka je

$$|\mathcal{V}'| = \bigcup\{V : \ V \in \mathcal{V}', \ \mathcal{V}' \in \mathcal{N}(\mathcal{V})\}$$

i

$$|\mathcal{N}(\mathcal{V})| = \{|\mathcal{V}'| : \ \mathcal{V}' \in \mathcal{N}(\mathcal{V})\}.$$

Jasno je da je $|\mathcal{N}(\mathcal{V})|$ otvoren pokrivač za F(K) i ako postoji konačan podpokrivač iz $|\mathcal{N}(\mathcal{V})|$, tada postoji i konačan podpokrivač iz $\mathcal{V}$ za F(K).

Neka je

$$\mathcal{U} = \{ \overset{c}{F}{}'(|\mathcal{V}'|) : \mathcal{V}' \in \mathcal{N}(\mathcal{V}) \} .$$

Kako je F Y-kompaktno to je za svako $x \in K$, $F(x)$ kompaktan skup, pa postoji konačno članova iz $\mathcal{V}$,

$$V_1(x),\ V_2(x),\ \dots ,\ V_n(x),$$

tako da je

$$F(x) \subset \bigcup_{1}^{n} V_i(x) = |\mathcal{V}_x| \in |\mathcal{N}(\mathcal{V})| .$$

Dakle, za svako $x \in K$, postoji $|\mathcal{V}_x| \in |\mathcal{N}(\mathcal{V})|$ tako da je $F(x) \subset |\mathcal{V}_x|$, odnosno $x \in \overset{c}{F}{}'(|\mathcal{V}_x|)$ pa je $\mathcal{U}$ pokrivač za K. Preslikavanje F je poluneprekidno odozgo, pa je $\overset{c}{F}{}'(|\mathcal{V}_x|)$ otvoren skup i $\mathcal{U}$ je otvoren pokrivač.

Budući da je K kompaktan skup, neka je

$$\{ \overset{c}{F}{}'(|\mathcal{V}_1|), \overset{c}{F}{}'(|\mathcal{V}_2|), \dots , \overset{c}{F}{}'(|\mathcal{V}_n|) \}$$

konačan podpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$. Ali je, tada,

$$\{ |\mathcal{V}_1|, |\mathcal{V}_2|, \dots , |\mathcal{V}_n| \}$$

konačan pokrivač za F(K), izdvojen iz pokrivača $|\mathcal{N}(\mathcal{V})|$ i time samo (1) dokazali.

(2) Neka je $K \subset X$ prebrojivo kompaktan i neka je

$$\mathcal{V} = \{ V_1, V_2, \dots , V_n, \dots \}$$

prebrojiv otvoren pokrivač za F(K).

Kolekcija $\mathcal{N}(\mathcal{V})$, za ovaj slučaj, je prebrojiv skup (skup svih konačnih podskupova prebrojivog skupa je prebrojiv skup - videti [19]).

Familija $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ je takodje prebrojava

$$|\mathcal{N}(\mathcal{U})| = \{ |\mathcal{V}_1|, |\mathcal{V}_2|, \ldots, |\mathcal{V}_n|, \ldots \}$$

i dokaz dalje ide kao i za (1).

(3) U ovom slučaju treba, umesto $\mathcal{N}(\mathcal{V})$, uočiti kolekciju $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ čiji su članovi sve prebrojive (i konačne) podfamilije iz $\mathcal{V}$, i dokaz sprovesti istim rezonom kao i dokaz za (1).//

Kao posledica Teoreme 2.2.1. imamo dobro poznate rezultate za jednoznačna neprekidna preslikavanja.

2.2.2. POSLEDICA. Svojstva prostora biti kompaktan, prebrojivo kompaktan i Lindelöfov su invarijantna u odnosu na neprekidna jednoznačna preslikavanja (videti [18] str. [18] T.1. i [17] str. 2o5. T.5.).

Napomenimo da Teorema 2.2.2. neće važiti ako se poluneprekidnost odozgo zameni poluneprekidnošću odozdo (mogu se konstruisati jednostavni kontraprimeri).

Višeznačno preslikavanje $F:X \to Y$ koje ima svojstvo da je slika kompaktnog skupa kompaktan skup i koslika tačke prostora Y zatvoren skup, ne mora biti poluneprekidno odozgo (X i Y su T_2- prostori). Za neke klase prostora uslovi da je slika kompaktnog (prebrojivo-kompaktnog) skupa kompaktan (prebrojivo-kompaktan) skup i koslika tačke zatvoren skup, dovoljni su da preslikavanje F bude poluneprekidno odozgo. Ova problematika razmatrana je od Arhangel'skog ([2] Glava II). Mi ovde navodimo neke od ovih rezultata sa nešto izmenjenim dokazima i sa neznatnim proširenjima, a koji mogu korisno poslužiti u našem daljem radu. Potrebne su dve definicije.

2.2.3. DEFINICIJA. Podskup A prostora X je k-zatvoren (kvazi-k-zatvoren) ako je $A \cap K$ relativno zatvoren u K za svaki kompaktan (prebrojivo-kompaktan) skup K prostora X. Prostor X je k-prostor (kvazi-k-prostor) ako je svaki k-zatvoren (kvazi-k-zatvoren) podskup od X zatvoren u X.

Klasa k-prostora je dosta široka, ona sadrži klasu lokalno kompaktnih i klasu prostora sa prvom aksiomom prebrojivosti (i metričkih). Različita svojstva k-prostora proučavana su od više autora. Navedimo neke: Arhangel'skij ([2], [3], [6]), Michael ([30], Olson [34], Siwiec [38] i drugi. Kod nekih se zahteva da k-prostor T_2 uz navedenu definiciju. Mi se opredeljujemo za gornju definiciju ne pretpostavljajući T_2-aksiomu separaciju, kao što je kod Michael-a ([30] str. 12o).

2.2.4. DEFINICIJA. Preslikavanje $F:X \to Y$ naziva se k-preslikavanje ako za bilo koje kompaktne skupove $K \subset X$ i $H \subset Y$ skupovi $F(K)$ i $F'(H)$ su kompaktni (videti [2] str. 11.).

2.2.5. LEMA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje na.

(1) Ako je X k-prostor, tada je F poluneprekidno odozgo tada i samo tada kada je $F/K:K \to F(K)$ poluneprekidno odozgo za svaki kompaktan skup K u X.

(2) Ako je X kvazi-k-prostor, tada je F poluneprekidno odozgo tada i samo tada kada je $F/K:K \to F(K)$ poluneprekidno odozgo za svaki prebrojivo kompaktan podskup K u X.

DOKAZ. (1). $\Longrightarrow$: Ako je F poluneprekidno odozgo jasno da je takvo i F/K.

$\Longleftarrow$: Pretpostavimo da preslikavanje F nije poluneprekidno odozgo, pa postoji zatvoren skup B iz Y i takav da $F'(B)$ nije zatvoren u X. Kako je X k-prostor to postoji kompaktan podskup $K_o \subset X$ tako da $F'(B) \cap K_o = A_1$ nije zatvoren u K_o.

Neka je $F/K_o = F_1 : K_o \longrightarrow F(K_o)$. Skup $B \cap F(K_o) = B_1$ je zatvoren u $F(K_o)$ a pri tome je (videti formule (6) i (6') u paragrafu 1.2.).

$$F_1'(B_1) = F_1'(B \cap F(K_o)) = F'(B \cap F(K_o)) \cap K_o = F'(B) \cap K_o .$$

Dakle, $F_1'(B_1)$ nije zatvoren skup u K_o a B_1 je zatvoren u $F(K_o)$ pa F_1 nije poluneprekidno odozgo.

(2). Dokazuje se slično kao (1). //

Sledeće dve teoreme Ponomareva i Arhangel skog, dokazaćemo na nešto drugačiji način, pa zato navodimo dokaze.

2.2.6. TEOREMA (Ponomarev [36] str. 2o2. T.4.). <u>Ako su X i Y kompaktni T_2-prostori i $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje takvo da je slika kompaktnog skupa kompaktan skup, a koslika svake tačke zatvoren skup, tada je F zatvoreno poluneprekidno odozgo preslikavanje. I obrnuto.</u>

DOKAZ. Ako je $A \subset X$ zatvoren to je A kompaktan pa je $F(A)$ kompaktan u Y i zatvoren, jer je Y T_2- prostor, i F je zatvoreno preslikavanje.

Pošto je F zatvoreno to je F poluneprekidno odozgo (T.2.1.2.). Za svako $y \in Y$ $F(y)$ je zatvoren pa i kompaktan skup u X , i na osnovu Teoreme 2.2.1. za svaki kompaktan (prema tome i svaki zatvoren)skup $B \subset Y$, $F'(B)$ je kompaktan, odnosno zatvoren skup u X, te je F polunеprekidno odozgo.//

2.2.7. TEOREMA (Arhangel'skij, [3] P.2.1.). Ako su X i Y T_2-prostori i X još k-prostor, a višeznačno preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ takvo da je slika svakog kompaktnog skupa kompaktan, a koslika svake tačke zatvoren skup, tada je F poluneprekidno odozgo.

DOKAZ. Ako F nije poluneprekidno odozgo, to na osnovu Leme 2.2.5., postoji kompaktan podskup K_o u X takav da $F_1 = F/K_o:K_o \longrightarrow F(K_o)$ nije poluneprekidno odozgo. Zbog Teoreme 2.2.6. to je nemoguće, jer F_1 zadovoljava sve uslove te teoreme.//

2.3. POVEZANOST I VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA

Dobro je poznato da je slika povezanog (koneksnog) skupa pri jednoznačnom neprekidnom preslikavanju povezan skup.

Klasa jednoznačnih preslikavanja koja ima svojstvo da povezan skup prevode u povezan skup poznata su pod nazivom povezana (koneksna) preslikavanja, a često se još i nazivaju Darboux-ove funkcije (videti na pr. [20] i [35]). Neprekidno jednoznačno preslikavanje je monotono ako je inverzna slika povezanog skupa povezan skup.

Kod višeznačnih preslikavanja, neprekidnost ne obezbedjuje prenošenje povezanosti skupova.

Cilj ovog paragrafa je da se navedu neki rezultati koji se odnose na čuvanje povezanosti pri neprekidnom višeznačnim preslikavanjima. Takodje se navode neki uslovi da povezano preslikavanje bude poluneprekidno odozgo.

2.3.1. DEFINICIJA. Prostor X je n-povezan ($n \geqslant 2$) ako se ne može prikazati kao unija n otvoreno-zatvorenih nepraznih disjunktnih skupova. Neprazni skupovi $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ prostora X su medjusobno separirajući ako je $\overline{A}_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Podskup A prostora X je n-povezan ako se ne može razbiti na n nepraznih medjusobno separirajućih skupova. Prostor je povezan ako je 2-povezan.

2.3.2. TEOREMA. *Neka je* $F:X \to Y$ *neprekidno višeznačno preslikavanje na i* X *povezan prostor. Ako je bar za jednu tačku* $x_0 \in X$, *skup* $F(x_0)$ *n-povezan* ($n \geqslant 2$), *tada je* Y *n-povezan prostor.*

DOKAZ. Dokazaćemo da za svako $x \in X$, $F(x)$ seče svaki neprazan otvoreno-zatvoren skup prostora Y. Stvarno, ako je B otvoreno-zatvoren u Y, tada je $F'(B)$ otvoreno-zatvoren skup u X (F je neprekidno), a pošto je X povezan, to je $F'(B) = X$, pa je $F(x) \cap B \neq \emptyset$ za svako $x \in X$.

Po pretpostavci postoji $x_0 \in X$ tako da je $F(x_0)$ n-povezan, kao što je dokazano, $F(x_0)$ seče svaki otvoreno - zatvoren skup prostora Y, to prostor Y može da se razbije na najviše $n-1$ otvoreno-zatvorenih skupova, pa je Y n-povezan prostor.//

Za $n=2$, imamo rezultat o prenošenju povezanosti pri neprekidnim višeznačnim preslikavanjima. Zbog značaja formulišimo posebno tu teoremu.

2.3.3. TEOREMA (Ponomarev [36] str. 209. T.1.). <u>Neka je</u> $F:X \to Y$ <u>neprekidno višeznačno preslikavanje na i</u> X <u>povezan prostor</u>. <u>Ako je bar za jednu tačku</u> $x_0 \in X$ <u>skup</u> $F(x_0)$ <u>povezan, tada je</u> Y <u>povezan prostor</u>.

<u>Napomena</u>. U [36] Ponomarev dokazuje gornju teoremu na sasvim drugačiji način koji je dosta duži. Napomenimo još da se neprekidnost u 2.3.2. i 2.3.3. ne može zameniti poluneprekidnošću odozgo ili odozdo, što se može pokazati jednostavnim primerima. Medjutim, važi tvrdjenje.

2.3.4. TEOREMA (videti [16]). <u>Neka je</u> $F:X \to Y$ <u>poluneprekidno odozgo ili poluneprekidno odozdo</u>. <u>Ako je</u> F <u>Y-povezano, tada je</u> F <u>povezano, odnosno za svaki povezan skup</u> $C \subset X$ <u>skup</u> $F(C)$ <u>je povezan u</u> Y.

GLAVA 3.

VIŠEZNAČNA KVOCIJENTNA PRESLIKAVANJA

Jednoznačno preslikavanje $f:X \to Y$ naziva se kvocijentno preslikavanje ako je skup $V \subset Y$ otvoren tada i samo tada kada je $f^{-1}(V)$ otvoren podskup u prostoru X (ekvivalentno ako se reč "otvoren" zameni rečju "zatvoren"). Od različitih autora upotrebljavaju se različiti nazivi za kvocijentna preslikavanja: identifikacija, faktorno preslikavanje, obostrano neprekidno preslikavanje, kvazi-kompaktno preslikavanje.

Kvocijentna jednoznačna preslikavanja su dosta proučavana, tako da su u sadržaju gotovo svih udžbenika i monografija topologije. Ona su u tesnoj vezi sa kvocijentnim prostorima (faktor-prostorima). Noviji radovi pokazuju da je izučavanje ovih preslikavanja još uvek aktuelno i pruža široke mogućnosti za istraživanja.

Kvocijentna višeznačna preslikavanja, analogno jednoznačnim, uvodi i razmatra C. Borges [9] i malo su proučena.

U ovoj glavi proučavaju se osnovna svojstva kvocijentnih višeznačnih preslikavanja. U paragrafu 3.1. daju se neki potrebni i dovoljni uslovi da višeznačno preslikavanje bude kvocijentno (3.1.3.). U paragrafu 3.2. dokazujemo da je kvocijentno preslikavanje skoro jednoznačno ukoliko kodomen nema izolovanih tačaka, a zatim neke interesantne posledice tog rezultata.

3.1 DEFINICIJA I NEKI EKVIVALENTNI USLOVI

Koristeći definiciju kvocijentnih jednoznačnih preslikavanja, a imajući u vidu dve vrste neprekidnosti višeznačnih preslikavanja, C.R.Borges ([9] str. 457.) definiše kvocijentna višeznačna preslikavanja.

3.1.1. DEFINICIJA. Višeznačno preslikavanje na $F:X \longrightarrow Y$ je <u>polukvocijentno odozgo</u> (<u>polukvocijentno odozdo</u>) ako je $F'(B)$ zatvoren podskup u X tada i samo tada kada je B zatvoren podskup od Y ($F'(B)$ - otvoren u X tada i samo tada kada je B otvoren u Y). Preslikavanje F je <u>kvocijentno</u> ako je polukvocijentno odozgo i odozdo.

3.1.2. PRIMER. Neprekidno polukvocijentno odozgo preslikavanje koje nije polukvocijentno odozdo.

Neka je $X_0 = (0,1]$ (poluotvoreni interval sa uobičajenom topologijom), a X^0 disjuktna suma svih različitih opadajućih nizova koji konvergiraju ka nuli, a čiji su članovi manji ili jednaki $\frac{1}{2}$ zajedno sa nulom. Neka je, dalje, X disjuntkna suma od X_0 i X^0 ; $X = X_0 \bigcup X^0$.

Neka je Y zatvoren jedinični interval; $Y = [0,1]$.

Definišimo, sada, preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ na sledeći način:

$$F(x)=\begin{cases} x, & \text{za } x \in X_0 \\ 0, & \text{za } x = (0,t) \in X_t \subset X^0 \\ [0,x_n^t] \,, & \text{za } x = x_n^t \in X_t \subset X^0 \end{cases}$$

Može se dokazati da je ovako definisano višeznačno preslikavanje neprekidno.

Preslikavanje F nije polukvocijentno odozdo, jer je $F'(0) = X^o$, te je $F'(0)$ otvoren skup u X, a $\{0\}$ nije otvoren skup u Y.

Dokažimo da je F polukvocijentno odozgo. Neka je $F'(B)$ zatvoren podskup od X. Treba dokazati da je B zatvoren u Y. Pretpostavimo suprotno da je $\overline{B} - B \neq \emptyset$.

(a) Neka je $x \in \overline{B} - B$ i $x \neq 0$. Kako je $F'(B) \cap X_o = B$, to je $x \in \overline{B} - B$ u X_o, pa i u X i $F'(B)$ nije zatvoren skup.

(b) Neka je $\overline{B} - B = \{0\}$. Tada postoji niz $\{x_n\}$, $x_n \in B$ i $x_n \to 0$. Postoji $X_t \subset X^o$, tako da je $X_t - \{(0,t)\} = \{(x_n,t)\}$, a odatle je $F'(B) \cap X_t = \{(x_n,t)\}$ i $(0,t) \in \overline{F'(B)} - F'(B)$ pa $F'(B)$ nije zatvoren skup, što je suprotno pretpostavci.

Sledeća teorema daje neke potrebne i dovoljne uslove da višeznačno preslikavanje $F:X \to Y$ bude polukvocijentno odozgo, polukvocijentno odozdo ili kvocijentno. Uslov (5) često se uzima i za definiciju kvocijentnih jednoznačnih preslikavanja (videti na prime [10]), pa na izvestan način opravdava Def. 3.1.1.

3.1.3. TEOREMA. <u>Neka je</u> $F:X \to Y$ <u>višeznačno preslikavanje na.</u> <u>Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.</u>

(1) F je <u>polukvocijentno odozgo</u> (<u>polukvoc.odozdo</u>);

(2) <u>Podskup</u> $B \subset Y$ <u>je otvoren (zatvoren) tada i samo tada kada je</u> $\overset{o}{F}'(B)$ <u>otvoren (zatvoren) podskup od</u> X;

(3) $\tilde{F}^{-1}(\langle V \rangle)$ <u>je otvoren podskup od</u> X <u>tada i samo tada kada je</u> V <u>otvoren u</u> Y ($\tilde{F}^{-1}(\rangle V \langle)$ <u>je otvoren u</u> X <u>tada i samo tada kada je</u> V <u>otvoren u</u> Y);

(4) $\hat{F}^{-1}(\langle V \rangle)$ <u>je otvoren u</u> $P_{\varkappa}(X)$ ($\hat{F}^{-1}(\rangle V \langle)$ <u>je otvoren u</u> $P_{\lambda}(X)$ <u>tada i samo tada kada je</u> V <u>otvoren u</u> Y);

(5) Za proizvoljan prostor Z i preslikavanje $G:Y \to Z$, G je poluneprekidno odozgo (poluneprekidno odozdo) tada i samo tada kada je $G \circ F : X \to Z$ poluneprekidno odozgo (poluneprekidno odozdo).

DOKAZ. Ekvivalentnost uslova (1), (2), (3) i (4) sledi iz 1.3.1., 2.1.2. i 2.1.3. ako se iskoristi odgovarajuće formule i definicije $\overset{\circ}{F}'$, $\tilde{F}$ i $\hat{F}$.

Pri dokazivanju ekvivalentnosti uslova (5) sa ostalim uslovima zadržaćemo se na slučaju koji se odnosi na polukvocijentna odozgo preslikavanja - slučaj van zagrada.

$(1) \Longrightarrow (5)$. Neka je $F:X \to Y$ polukvocijentno odozgo, Z proizvoljan prostor i $G:Y \to Z$ proizvoljno preslikavanje. Ako je G poluneprekidno odozgo, tada je i $G \circ F$ poluneprekidno odozgo preslikavanje, kao kompozicija dva poluneprekidna preslikavanja.

Neka je $G \circ F : X \to Z$ poluneprekidno odozgo i neka je $B \subset Z$ zatvoren podskup. Tada je $(G \circ F)'(B)$ zatvoren u X. Kako je $(G \circ F)'(B) = F'(G'(B))$ i preslikavanje F je polukvocijentno odozgo, to je $G'(B)$ zatvoren podskup u Y, pa je preslikavanje G poluneprekidno odozgo. Time je implikacija $(1) \Longrightarrow (5)$ dokazana.

$(5) \Longrightarrow (3)$. Pretpostavimo da uslov (3) nije zadovoljen. Razlikujemo dva slučaja.

Slučaj (i). Postoji otvoren skup $V \subset Y$ takav da $\check{F}^{-1}(\langle V \rangle) = \overset{\circ}{F}'(V)$ nije otvoren u X. U tom slučaju preslikavanje F nije poluneprekidno odozgo (videti 2.1.2.). Neka je $Z = Y$ a $G:Y \to Z$ identično preslikavanje, tj.

$G(y) = y$ za svako $y \in Y$, koje je neprekidno, a preslikavanje $G \circ F = F$ nije poluneprekidno odozgo, pa uslov (5) nije zadovoljen.

Slučaj (ii). Pretpostavimo sada da je $\tilde{F}^{-1}(\langle V \rangle)$ otvoren podskup od X za svaki otvoren skup $V \subset Y$, a postoji skup $B_0 \subset Y$ koji nije otvoren, a pri tome je $\tilde{F}^{-1}(\langle B_0 \rangle)$ otvoren u X.

Neka je

$$\mathcal{B} = \{ B \subset Y: \ \tilde{F}^{-1}(\langle B \rangle) \text{ - otvoren u } X \},$$

i neka je $Z = P_{\mathcal{K}}(Y, \mathcal{B})$. Familija $\mathcal{B}$ efektivno sadrži sve otvorene podskupove prostora Y pa je preslikavanje $\tilde{F}: X \longrightarrow P_{\mathcal{K}}(Y, \mathcal{B})$ neprekidno. Neka je $G: P_{\mathcal{K}}(Y) \longrightarrow Z$ takvo da je $G(B) = B$ za svako $B \in P_{\mathcal{K}}(Y)$ (identiteta). Preslikavanje G nije neprekidno, a preslikavanje $G \circ \tilde{F}: X \longrightarrow Z$ je neprekidno pa i u ovom slučaju uslov (5) nije zadovoljen. Time je dokaz kompletiran.

Dokaz ekvivalentnosti uslova (5) sa ostalim uslovima, a koji se odnosi na polukvocijentna odozdo preslikavanja, je sličan (treba uzeti za $\mathcal{B} = \{ B \subset Y: \ F^{-1}(\rangle B \langle) \text{ - otvoren u } X$, a za prostor Z uzeti $P_{\lambda}(Y, \mathcal{B})$).//

Kombinujući uslove van zagrada i u zagradama, mogu se iskazati potrebni i dovoljni uslovi da višeznačno preslikavanje $F: X \longrightarrow Y$ bude kvocijentno.

Sada možemo iskazati dve posledice, koje se mogu dokazati ako se iskoriste i kombinuju ekvivalentni uslovi (3) i (4) iz prethodne Teoreme 3.1.3. Mi dokaz izostavljamo.

3.1.4. POSLEDICA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.

(1) F je polukvocijentno odozgo (polukvocijentno odozdo).

(2) Preslikavanje $\hat{F}:P_{\varkappa}(X) \longrightarrow P_{\varkappa}(Y,\mathcal{B})$ (preslikavanje $\hat{F}:P_{\lambda}(X) \longrightarrow P_{\lambda}(Y,\mathcal{B})$) je neprekidno tada i samo tada kada je $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$.

(3) Preslikavanje $\tilde{F}:X \longrightarrow P_{\varkappa}(Y,\mathcal{B})$ (preslikavanje $\tilde{F}:X \longrightarrow P_{\lambda}(Y,\mathcal{B})$) je neprekidno tada i samo tada kada je $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$.

($\mathcal{B}$ je topologizirajući sistem u smislu [25] , videti paragraf 1.3.).

3.1.5. POSLEDICA. Da bi višeznačno preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ bilo kvocijentno potrebno je i dovoljno da je ispunjen jedan od sledećih dva ekvivalentna uslova.

(1) Preslikavanje $\tilde{F}:X \longrightarrow P_{\psi}(Y,\mathcal{B})$ je neprekidno tada i samo tada kada je $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$.

(2) Preslikavanje $\hat{F}:P_{\psi}(X) \longrightarrow P_{\psi}(Y,\mathcal{B})$ je neprekidno tada i samo tada kada je $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$.

Prirodno je utvrditi kako se svojstva višeznačnog preslikavanja $F:X \longrightarrow Y$ odražavaju na odgovarajuća preslikavanja p_X: $gr(F) \longrightarrow X$ i $p_Y: gr(F) \longrightarrow Y$ i obrnuto. Sledeća propozicija, donekle, rešava taj zadatak za slučaj kvocijentnog višeznačnog preslikavanja.

3.1.6. PROPOZICIJA. ([10] str. 457). Neka su X i Y topološki prostori i $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje. Tada

(1) Ako je p_X zatvoreno i F polukvocijentno odozgo, tada je p_Y kvocijentno preslikavanje.

(2) Ako je F polukvocijentno odozdo, tada je p_Y kvocijentno a p_X otvoreno preslikavanje.

(3) Ako je F Y-kompaktno polukvocijentno odozgo, tada je p_Y kvocijentno i p_X perfektno preslikavanje.

DOKAZ. Videti [10] , str. 457. //

3.2 SKORO JEDNOZNAČNA I KVOCIJENTNA VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA

Višeznačno preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ takvo da je $F(x) = Y$ za svako $x \in X$ je uvek neprekidno višeznačno preslikavanje. Kako je u tom slučaju $F'(B) = X$ za svako $B \subset Y$, to će ovakvo preslikavanje biti kvocijentno tada i samo tada kada je Y diskretan prostor.

Iz ovog primera može se naslutiti da kvocijentna višeznačna preslikavanja ne mogu biti "krupna" ukoliko slika (kodomen) nije diskretan prostor. Od interesa je ispitati: koja je to klasa prostora za koje će kvocijentna višeznačna preslikavanja biti "bliska" jednoznačnim preslikavanjima. Cilj ovog paragrafa je da reši ovo pitanje.

Ponomarev ([37] str.534.) definiše skoro jednoznačna preslikavanja za klasu preslikavanja kod kojih je slika tačke zatvoren skup (Y - zatvorena) (videti takodje [33]). Mi koristimo sledeću definiciju.

3.2.1. DEFINICIJA. Višeznačno preslikavanje $F:X \rightarrow Y$ je skoro jednoznačno ako je $\overset{\circ}{F}'(V) \neq \emptyset$ za svaki naprezan otvoren skup V iz Y.

Sledeća teorema vezuje klasu kvocijentnih višeznačnih i klasu skoro jednoznačnih preslikavanja i značajna je za proučavanje kvocijentnih višeznačnih preslikavanja.

3.2.2. TEOREMA. Neka je $F:X \rightarrow Y$ polukvocijentno odozgo ili polukvocijentno odozdo višeznačno preslikavanje, X T_1- prostor a Y T_1- prostor bez izolovanih tačaka. Tada je F skoro jednoznačno preslikavanje.

DOKAZ. Pretpostavimo da je F polukvocijentno odozgo, a nije skoro jednoznačno. Tada postoji otvoren neprazan skup $V \subset Y$ takav da je $\overset{\circ}{F}'(V) = \emptyset$ ili, što je ekvivalentno, $F'(CV) = X$. U tom slučaju za svako $y_0 \in V$ je $C\{y_0\} \supset CV$ i odatle je $F'(C\{y_0\}) = X$, a kako je F polukvocijentno odozgo i X zatvoren, to je $C\{y_0\}$ zatvoren skup u Y. Prema tome $\{y_0\}$ je otvoren skup (i zatvoren jer je Y T_1-prostor), pa je y_0 izolovana tačka prostora Y, što je suprotno pretpostavci da prostor Y nema izolovanih tačaka.

Neka je, sada, preslikavanje F polukvocijentno odozdo, a nije skoro jednoznačno. Neka je $V \subset Y$ otvoren neprazan skup iz Y takav da je $\overset{\circ}{F}'(V) = \emptyset$. Pošto je F polukvocijentno odozdo i $\emptyset$ zatvoren skup to je na osnovu 2.1.3 (2), skup V zatvoren. Ako je $y_0 \in V$ to je $F'(\{y_0\} \cup CV) = X$, pa je $\{y_0\} \cup CV$ otvoren skup, što je suprotno pretpostavci da prostor Y nema izolovanih tačaka. Time je Teorema kompletno dokazana.//

3.2.3. POSLEDICA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno kvocijentno preslikavanje, X i Y T_1- prostori. Ako y nije izolovana tačka prostora Y, tada postoji tačka $x \in X$ takva da je $F(x) = y$.

DOKAZ. Potrebno je, ustvari, dokazati da $\overset{c}{F}'(y) \neq \emptyset$ za svaku neizolovanu tačku y prostora Y. Pretpostavimo da je $\overset{\circ}{F}'(y) = \emptyset$ pa, budući da je F kvocijentno preslikavanje, to je $\{y\}$ otvoren (i zatvoren) skup u Y, odnosno y je izolovana tačka.//

3.2.4.POSLEDICA. Ako je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno kvocijentno preslikavanje, X T_1- prostor a Y T_1- prostor bez izolovanih tačaka, tada postoji podskup $X_o \subset X$, takav da je preslikavanje $F/X_o = F_o:X_o \longrightarrow Y$ (restrikcija preslikavanja F) jednoznačno neprekidno preslikavanje prostora X_o na prostor Y.

DOKAZ. Podprostor X_o je $X_o = \{\overset{c}{F}'(y) : \quad y \in Y\}$. Zbog posledice 3.2.3. $\overset{c}{F}'(y) \neq \emptyset$ za svako $y \in Y$ .//

Zbog Posledice 3.2.4. opravdano je uvesti sledeću definiciju kojom ćemo se koristiti u daljem radu.

3.2.5. DEFINICIJA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje. Skup $X_o = \{x \in X:$ $F(x)$ - jednočlan$\}$ naziva se domen jednoznačnosti preslikavanja F.

3.2.6. LEMA. Ako je $F:Y \longrightarrow Y$ poluneprekidno odozdo višeznačno preslikavanje, X i Y T_2-prostori, tada je domen jednoznačnosti preslikavanja F zatvoren podskup prostora Y.

DOKAZ. Neka je X_o domen jednoznačnosti preslikavanja F i $x_1 \notin X_o$. Kako $F(x_1)$ nije jednočlan, to postoje tačke $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, takve da je $\{y_1, y_2\} \subset F(x_1)$. Kako je Y T_2-prostor, postoje disjunktne otvorene okoline $V(y_1)$ i $V(y_2)$ tačaka y_1 i y_2, respektivno. Pošto je $V(y_i) \cap F(x_1) \neq \emptyset$ $(i = 1,2)$, a F je poluneprekidno odozdo, to postoje otvorene okoline U' i U'' tačke x_1 takve da $F(x') \cap V(y_1) \neq \emptyset$ za svako $x' \in U'$ i $F(x'') \cap V(y_2) \neq \emptyset$ za svako $x'' \in U''$. Neka je $U = U' \cap U''$ okolina tačke x_1. Tada je $F(x) \cap V(y_1) \neq \emptyset$ i $F(x) \cap V(y_2) \neq \emptyset$, za svako $x \in U$, pa je $U \cap X_o = \emptyset$. Prema tome X_o je zatvoren skup prostora X.//

3.2.7. PROPOZICIJA. Neka je $F: X \longrightarrow Y$ višeznačno neprekidno preslikavanje, takvo da je $\overset{\circ}{F'}(y) \neq \emptyset$ za svako $y \in Y$, a X i Y T_2- prostori. Ako je preslikavanje $F/X_o = F_o : X_o \longrightarrow Y$ kvocijentno jednoznačno (X_o - domen jednoznačnosti), tada je F kvocijentno višeznačno preslikavanje. Obrnuto ne mora da važi.

DOKAZ. Neka je $F'(B)$ zatvoren podskup u X. Tada je $F_o^{-1}(B) = F'(B) \cap X_o$ zatvoren u X_o, pa pošto je F_o kvocijentno preslikavanje, to je B zatvoren u Y i F je polukvocijentno odozgo preslikavanje.//

Da obrnuto ne mora da bude tačno pokazuje sledeći primer.

3.2.8. PRIMER. Modifikovan 3.1.2. Primer. Neka je $X_1 = (0,1]$, poluotvoreni interval sa uobičajenom topologijom, a X_o disjuktna suma različitih monotono opadajućih nizova čiji su članovi iz $(0, \frac{1}{2}]$ i koji konvergiraju ka nuli zajedno sa nulom;

$$X^0 = \left(\sum (X_t,\ t \in T),\quad X_t = \left\{(x_n, t):\ 0 < x_n \leq \tfrac{1}{2},\ x_{n+1} < x_n\right\} \cup \{0\}\right)$$

(topologija nizova uobičajena).

Neka je X disjunkta suma od X_1 i X^0;

$$X = X_1 \sqcup \sum (X_t : t \in T).$$

Neka je $Y = [0,1]$ sa uobičajenom topologijom.

Definišimo preslikavanje $F: X \longrightarrow Y$ na sledeći način:

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{za } x \in X_1 \\ 0, & \text{za } x = (0,t) \in X_t \\ \{x_n : n \leq n_0\} & \text{za } x = (x_{n_0}, t) \in X_t \end{cases}$$

Može se dokazati da je preslikavanje F neprekidno.

Preslikavanje F je polukvocijentno odozgo. Pretpostavimo suprotno. Neka je $F'(B)$ zatvoren podskup od X, a B nije zatvoren u Y, tj. $\overline{B} - B \neq \emptyset$.

Slučaj(i). $x_0 \in \overline{B} - B$ i $x_0 \neq 0$. Kako je $\overline{F'(B)} = F(B)$ i $F'(B) \cap X_1 = B$, to je $\overline{F'(B)} \cap X_1 = B$. Ali kako je $x_0 \neq 0$ i $x_0 \in \overline{B} - B$, to imamo $x_0 \notin \overline{F'(B) \cap X_1} = B$, a $x_0 \in \overline{F'(B)} \cap X_1 = \overline{B}$, nemoguće, jer je $\overline{F'(B)} \cap X_1 = \overline{F'(B) \cap X_1}$ (adherencije su u odgovarajućim prostorima). Odavde sledi da $\overline{B} - B$ ne može sadržati ni jednu tačku različitu od nule.

Slučaj (ii). Neka je $\overline{B} - B = \{0\}$. Tada postoji $X_t = \{(x_n,t) : n\in N\}\cup\{0\}$, tako da je $x_n \in B$, $n\in N$ i $x_n \longrightarrow 0$. Pošto je $\overline{F'(B)} \cap X_t = \{(x_n,t), n\in N\}$, to $(0,t) \notin \overline{F(B)} \cap X_t = \overline{F(B)\cap X_t} = \overline{\{(x_n,t), n \in N\}}$, što je nemoguće, jer $(x_n,t) \longrightarrow (0,t)$. Time smo dokazali da je preslikavanje F polukvocijentno odozgo.

Preslikavanje F je polukvocijentno odozdo.

Koristeći se uslovom (2) iz 3.1.3., pretpostavimo da je $\overset{c}{F}'(B)$ zatvoren skup u X, $\overline{\overset{c}{F}'(B)} = \overset{c}{F}'(B)$, a B nije zatvoren u Y; $\overline{B} - B \neq \emptyset$. Pod ovim pretpostavkama, uočavajući slučajeve (i) i (ii) kao u prethodnom dokazu, a imajući u vidu da je $\overset{c}{F}'(B)\cap X_1 = B$, a takodje i $\overset{c}{F}'(B)\cap X_t = \{(x_n,t) : n\in N\}$, ukoliko je $\{x_n, n\in N\}\subset B$, na sličan način može se dokazati da je to nemoguće.

Prema tome, preslikavanje F je kvocijentno višeznačno preslikavanje.

Domen jednoznačnosti preslikavanja F sastoji se od X_1 i svih tačaka $(0,t)$, $t \in T$;

$$X_o = X_1 \cup \{(0,t) : t \in T\} .$$

Preslikavanje $F/X_o = F_o : X_o \longrightarrow Y$ nije kvocijentno, jer je $F_o^{-1}(0) = \{(0,t) : t \in T\}$, otvoren skup u podprostoru X_o a $\{0\}$ nije otvoren skup u Y.//

3.2.9. PITANJE. Ako je $F:X \longrightarrow Y$, kvocijentno višeznačno preslikavanje sa domenom jednoznačnosti X_o, u kom slučaju (s obzirom na prostore X i Y) će tada $F_o = F/X_o : X_o \longrightarrow Y$ biti kvocijentno preslikavanje?

KOMENTAR. Ako je X kompaktan prostor a Y T_2-prostor, X_0 je zatvoren i kompaktan i F_0 je zatvoreno pa i kvocijentno preslikavanje. Pa odgovor na pitanje nemamo za slučaj kada X nije kompaktan prostor. Kao što se vidi iz primera 3.2.8. prostor Y ima dobra svojstva, a ipak F_0 nije kvocijentno preslikavanje, pa pozitivan odgovor na pitanje u mnogome zavisi od svojstava prostora X.

Dobro je poznato (videti na pr. [17] str. 125.), da je svako otvoreno, ili zatvoreno, jednoznačno preslikavanje kvocijentno preslikavanje. Ovo tvrdjenje ne važi za višeznačna preslikavanja, pa čak ni za skoro jednoznačna, što se može videti iz sledećeg jednostavnog primera.

Neka je X, na primer, interval $[0,1]$, a Y proizvoljan prostor sa najslabijom topologijom. Neka je preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ takvo da je $F(x) = Y$ za svako $x \in X$. Preslikavanje F je skoro jednoznačno, neprekidno, zatvoreno, otvoreno i na a nije kvocijentno preslikavanje.

Prirodno je formulisati tvrdjenje koje bi obezbedilo da zatvoreno ili otvoreno neprekidno skoro jednoznačno preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ bude kvocijentno.

3.2.10. TEOREMA. <u>Neka je</u> $F:X \longrightarrow Y$ <u>zatvoreno</u>, X-<u>kompaktno neprekidno skoro jednoznačno preslikavanje na</u> X, <u>i</u> Y T_2-<u>prostori</u>. <u>Tada je</u> F <u>kvocijentno preslikavanje</u>.

DOKAZ. Na osnovu Leme 2. Ponomareva ([37] str. 534.), preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ je takvo da za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $F(x) = y$. Domen jednoznačnosti preslikavanja F, $X_0 = \{x \in X\colon F(x) \text{ - jednočlan}\}$ je na osnovu

3.2.6. zatvoren skup. Jednoznačno preslikavanje $F/X_0:X_0 \longrightarrow Y$ je neprekidno, zatvoreno i na, pa je kvocijentno jednoznačno preslikavanje. Prema 3.2.7. preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ je kvocijentno višeznačno preslikavanje.//

<u>Primedba.</u> U radu [43] (Teorema 3.3.) gornja Teorema je dokazana neposredno ne koristeći 3.2.6. i 3.2.7. ali smo zahtevali da preslikavanje F bude još i otvoreno.

Ako je $f:X \longrightarrow Y$ neprekidno jednoznačno preslikavanje na, X kompaktan T_2- prostor a Y T_2- prostor, tada je f zatvoreno pa prema tome i kvocijentno preslikavanje (videti na pr. [17]). Sledeće tvrdjenje ima slično značenje za višeznačna preslikavanja.

3.2.11 PROPOZICIJA. <u>Neka je</u> $F:X \longrightarrow Y$ <u>neprekidno</u> Y-<u>kompaktno skoro jednoznačno preslikavanje na</u>, X <u>kompaktan</u> T_2- <u>prostor a</u> Y T_2- <u>prostor</u>. <u>Tada</u>

(1) Y <u>je kompaktan prostor</u>.

(2) <u>Preslikavanje</u> F <u>je kvocijentno preslikavanje</u>.

DOKAZ. (1) Zbog Teoreme 2.2.1. (1), prostor Y je kompaktan prostor.

(2) Prostor X je kompaktan i T_2- prostor, a preslikavanje F je Y-kompaktno pa je F i zatvoreno preslikavanje, odnosno F' je poluneprekidno odozgo preslikavanje i, budući da je Y kompaktan prostor, F je X-kompaktno. Prema tome, F je zatvoreno, neprekidno, X-kompaktno, skoro jednoznačno i na, pa su zadovoljeni svi uslovi Teoreme 3.2.1o. i F je kvocijentno višeznačno preslikavanje.//

3.3 ZAVISNOST TOPOLOGIJA SLIKE I KOSLIKE PRI VIŠEZNAČNIM KVOCIJENTNIM PRESLIKAVANJIMA

Ako je $f:X \longrightarrow Y$ jednoznačno preslikavanje prostora X na skup Y, tada se najjača od svih topologija na Y, takva da preslikavanje f bude neprekidno, naziva kvocijentna topologija ili topologija identifikacije na Y. Preslikavanje f u tom slučaju je kvocijentno preslikavanje (identifikacija). Topologija identifikacije na Y je

$$\mathcal{T}_Y = \{ V \subset Y: \ f^{-1}(V) \text{ otvoren u } X \}$$

($\mathcal{T}_Y$ zadovoljava sve aksiome za otvorene skupove).

Situacija nije ista kada se radi o višeznačnim preslikavanjima, što pokazuje sledeće tvrdjenje

3.3.1. PROPOZICIJA ([10] str. 456.). <u>Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje na</u> i X <u>topološki prostor</u>. <u>Tada</u>

(1) <u>Familija</u> $\{ V \subset Y: \ \overset{\circ}{F}'(V) \text{ otvoren u } X \}$ je <u>baza za neku topologiju na</u> Y.

(2) Familija $\{ V \subset Y: \ F'(V) \text{ otvoren u } X \}$ <u>ne mora da bude baza za neku topologiju na Y</u>.

DOKAZ. Mada je dokaz dat u [10] , mi dajemo ovde vrlo kratak dokaz. Naime, ako su $\overset{\circ}{F}'(V_1)$ i $\overset{\circ}{F}'(V_2)$ otvoreni skupovi u X, tada je $\overset{\circ}{F}'(V_1) \cap \overset{\circ}{F}'(V_2) = \overset{\circ}{F}'(V_1 \cap V_2)$ otvoren skup u X, pa je $V_1 \cap V_2$ otvoren u Y i time je dokazano tvrdjenje (1).

Za dokaz tvrdjenja (2) mogu se naći jednostavni kontra primeri (primer je dat u [10] str.457.//

I pored toga što višeznačno preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ nije podesno za topologiziranje skupa Y ako je X topološki prostor, ili skupa X ako je Y topološki prostor, ipak se nešto može reći o problemima te vrste.

Poznate $\mathcal{X}$- topologija, λ- topologija i ψ- topologija na partitivnom skupu $P(X)$ prostora X (i na skupu $\exp(X)$ nepraznih zatvorenih podskupova prostora X) mogu se formirati posredstvom višeznačnog preslikavanja (unija preslikavanja) $U:P(X) \longrightarrow X$, definisanog relacijom

$$U(A) = A \qquad \text{za svako } A \in P(X).$$

Neka je X T_1- prostor (nije neophodno da je T_1) i $U:P(X) \longrightarrow Y$ unija preslikavanje gore definisano. Tada je za svaki skup $A_0 \subset X$

$$U'(A_0) = \{ A \in P(X): \quad U(A) \cap A_0 \neq \emptyset \} = \rangle A_0 \langle$$

i

$$\overset{\circ}{U}'(A_0) = \{ A \in P(X): \quad U(A) \subset A_0 \} = \langle A_0 \rangle .$$

Na osnovu ove dve relacije i definicija $\mathcal{X}$ i λ- topologije, baza za $\mathcal{X}$- topologiju na $P(X)$ je oblika

$$\{ \overset{\circ}{U}'(G): \ G \text{ - otvoren u } X \},$$

a za λ- topologiju subbaza je oblika

$$\{ U'(G): \ G \text{ - otvoren u } X \}.$$

Preslikavanje $U/\exp(X): \exp(X) \longrightarrow X$ na isti način odredjuje prostore $\exp_{\mathcal{X}}(X)$ i $\exp_{\lambda}(X)$.

Može se proveriti da je $U:P_{\mathcal{K}}(X) \to X$ polukvocijentno odozgo, $U:P_{\lambda}(X) \to X$ polukvocijentno odozdo i $U:P_{\psi}(X) \to X$ kvocijentno višeznačno preslikavanje.

Primetimo da preslikavanje $U:P(X) \to X$ ima za domen jednoznačnosti skup $X^{(1)} = \{\{x\} : x \in X\}$ i da je $U/X^{(1)}$ identično preslikavanje.

Za proučavanje višeznačnog preslikavanja $F:X \to Y$ često se koriste odgovarajuća jednoznačna preslikavanja $\tilde{F}:X \to P(Y)$ i $\hat{F}:P(X) \to P(Y)$, gde su $P(X)$ i $P(Y)$ topologizirani $\mathcal{K}$- topologijom, λ- topologijom ili ψ- topologijom. Tako se poluneprekidnost odozgo, poluneprekidnost odozdo i neprekidnost višeznačnog preslikavanja F može definisati neprekidnošću preslikavanja $\tilde{F}$ ili $\hat{F}$ u zavinosti od topologiziranja $P(X)$ i $P(Y)$ (videti 2.1.2. i 2.1.3.).

Od interesa je proučiti kako se svojstvo biti kvocijentno sa jednog od preslikavanja F, $\tilde{F}$, $\hat{F}$ prenosi na ostala dva. Jasno, da ako je $F:X \to Y$ kvocijentno, to $\hat{F}:P(X) \to P(Y)$ ne mora biti preslikavanje na.

Mi sada formulišemo sledeći problem.

3.3.2. PROBLEM. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno preslikavanje takvo da je preslikavanje $\hat{F}:P(X) \to P(Y)$ preslikavanje na. Da li su tada sledeći uslovi (1) i (2) ekvivalentni?

(1) Preslikavanje $F:X \to Y$ je polukvocijentno odozgo (polukvocijentno odozdo) (kvocijentno).

(2) Preslikavanje $\hat{F}:P_{\mathcal{K}}(X) \to P_{\mathcal{K}}(Y)$ (preslikavanje $\hat{F}:P_{\lambda}(X) \to P_{\lambda}(Y)$) (preslikavanje $\hat{F}:P_{\psi}(X) \to P_{\psi}(Y)$) je kvocijentno.

Potpun odgovor na gornji problem nije nam poznat i mi dajemo neka delimična rešenja ovog problema.

3.3.3. LEMA. Ako je $F:X\longrightarrow Y$ višeznačno polukvocijentno odozgo ili polukvocijentno odozdo preslikavanje, X T_1- prostor a Y T_1- prostor bez izolovanih tačaka, tada je preslikavanje $\hat{F}:P(X)\longrightarrow P(Y)$ preslikavanje na.

DOKAZ. Neka je $B\subset Y$. Na osnovu 3.2.3. za svako $y\in B$ postoji $x\in X$ tako da je $F(x) = y$, tj. $\overset{\circ}{F}{}'(y) \neq \emptyset$. Ako je $A = \{x\in X:\ F(x) = y \text{ za neko } y\in B\}$, tada je $\hat{F}(A) = F(A) = B$, pa je $\hat{F}:P(X)\longrightarrow P(Y)$ preslikavanje na.//

3.3.4. PROPOZICIJA. Ako je $F:X\longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje takvo da je preslikavanje $\hat{F}:P(X)\longrightarrow P(Y)$ preslikavanje na, tada važe sledeća tvrdjenja:

(1) Ako je $\hat{F}:P_{\mathcal{H}}(X)\longrightarrow P_{\mathcal{H}}(Y)$ kvocijentno, tada je F polukvocijentno odozgo.

(2) Ako je $\hat{F}:P_{\lambda}(X)\longrightarrow P_{\lambda}(Y)$ kvocijentno, tada je F polukvocijentno odozdo.

(3) Ako je $\hat{F}:P_{\psi}(X)\longrightarrow P_{\psi}(Y)$ kvocijentno, tada je F kvocijentno.

DOKAZ. (1). Neka je $B\subset Y$ takav skup da je $\overset{\circ}{F}{}'(B)$ otvoren u X. Kako je $\hat{F}^{-1}(\langle B\rangle) = \langle\overset{\circ}{F}{}'(B)\rangle$ to je $\langle\overset{\circ}{F}{}'(B)\rangle$ otvoren u $P_{\mathcal{H}}(X)$ i, budući da je $\hat{F}:P_{\mathcal{H}}(X)\rightarrow P_{\mathcal{H}}(Y)$ kvocijentno, $\langle B\rangle$ je otvoren skup u $P_{\mathcal{H}}(Y)$, odnosno B je otvoren u Y, pa je zbog 3.1.3. (1), F polukvocijentno odozgo.

(2) Neka je $B\subset Y$ takav da je $F'(B)$ otvoren u X. Tada je $\hat{F}^{-1}(\ \rangle B\langle\ ) = \rangle F'(B)\langle$ otvoren u $P_{\lambda}(X)$ i kako

je $\hat{F}:P_{\lambda}(X) \longrightarrow P_{\lambda}(Y)$ kvocijentno, to je $\rangle B \langle$ otvoren u $P_{\lambda}(Y)$, odnosno B je otvoren u Y, pa je preslikavanje F polukvocijentno odozdo.

(3). Dokazuje se kombinacijom (1) i (2).//

NAPOMENA. Koristeći se posledicama 3.1.4. i 3.1.5., a u vezi sa Problemom 3.3.2., može se zaključiti sledeće:

Neka je $(X, \mathcal{T}_X)$ dati topološki prostor, Y dati skup i $F:X \longrightarrow Y$ takvo višeznačno preslikavanje da je $\hat{F}:P(X) \longrightarrow P(Y)$ preslikavanje na. Označimo sa $\{\mathcal{T}^t_Y\}$, $t \in T$ familiju topologija na Y uredjenu po inkluziji i sa $P_{\varkappa}(Y, \mathcal{T}^t_Y)$, $P_{\lambda}(Y, \mathcal{T}^t_Y)$, $P_{\psi}(Y, \mathcal{T}^t_Y)$ odgovarajuće prostore na $P(Y)$ (videti paragraf 1.3.). Imamo sledeće tvrdjenje u vezi sa našim problemom.

Ako je $F:X \to (Y, \mathcal{T}^t_Y)$ polukvocijentno odozgo, tada je $\hat{F}:P_{\varkappa}(X) \to P_{\varkappa}(Y, \mathcal{T}^t_Y)$ neprekidno tada i samo tada kada je $\mathcal{T}^{t'}_Y \supset \mathcal{T}^t_Y$. Medjutim, to još ne znači da je preslikavanje $\hat{F}:P_{\varkappa}(Y) \longrightarrow P_{\varkappa}(Y, \mathcal{T}^{t'}_Y)$ kvocijentno, jer to ne mora biti najjača od svih topologija na $P(Y)$ za koju je preslikavanje $\hat{F}:P_{\varkappa}(X) \longrightarrow P(Y)$ neprekidno (bar tako izgleda, mada je i to pitanje otvoreno).

Do istih se zaključaka može doći, primenjujući sličan rezon, u slučaju kada je F polukvocijentno odozdo ili kvocijentno preslikavanje. Dakle naš Problem 3.3.2. nismo u mogućnosti da rešimo.

Mogu se formulisati još neka tvrdjenja koja su u vezi sa navedenim problemom.

3.3.5. LEMA. *Neka je* $F:X \longrightarrow Y$ *višeznačno preslikavanje takvo da je* $\hat{F}:P_{\mathcal{K}}(X) \longrightarrow P_{\mathcal{K}}(Y)$ *preslikavanje na. Ako je* $\mathcal{B} \subset P_{\mathcal{K}}(Y)$ *takav da je* $\hat{F}^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$ *otvoren skup u* $P_{\mathcal{K}}(X)$, *tada za svaki* $B \in \mathcal{B}$ *je* $\langle B \rangle \subset \mathcal{B}$.

DOKAZ. Neka je $B \in \mathcal{B}$ i $A = \bigcup \{\overset{c}{F}'(b) : b \in B\}$. Kako je $\hat{F}$ preslikavanje na to $\overset{c}{F}'(b) \neq \emptyset$ i jasno da je $\hat{F}(A) = F(A) = B$, pa je $A \in \hat{F}^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{A}$ otvoren skup u $P_{\mathcal{K}}(X)$, to postoji otvoren skup $U \subset X$ takav da je $A \in \langle U \rangle \subset \mathcal{A}$. Neka je $B_1 \in \langle B \rangle$, odnosno $B_1 \subset B$ i $A_1 = \bigcup \{\overset{c}{F}'(b) : b \in B_1\} \subset A$. Odatle je $A_1 \in \langle U \rangle$ i $F(A_1) = B_1 \in \mathcal{B}$, odnosno $\langle B \rangle \subset \mathcal{B}$ što je trebalo i dokazati.//

3.3.6. PROPOZICIJA. *Ako je* $F:X \longrightarrow Y$ *otvoreno poluneprekidno odozgo višeznačno preslikavanje takvo da je* $\hat{F}:P(X) \longrightarrow P(Y)$ *preslikavanje na, tada je preslikavanje* $\hat{F}:P_{\mathcal{K}}(X) \longrightarrow P_{\mathcal{K}}(Y)$ *kvocijentno.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{B} \subset P_{\mathcal{K}}(Y)$ takav da je $\hat{F}^{-1}(\mathcal{B})$ otvoren u $P_{\mathcal{K}}(X)$ i neka je $B \in \mathcal{B}$. Ako je $A = \bigcup \{\overset{c}{F}'(b) : b \in B\}$, to je $\hat{F}(A) = B$, pa je $A \in \hat{F}^{-1}(\mathcal{B})$. Postoji otvoren skup $U \subset X$ tako da je $A \in \langle U \rangle \subset \hat{F}^{-1}(\mathcal{B})$, ali tada je $\hat{F}(U) = F(U) \in \mathcal{B}$ i na osnovu 3.3.5. $\langle F(U) \rangle \subset \mathcal{B}$. Kako je F otvoreno preslikavanje to je skup $\langle F(U) \rangle$ otvoren u $P_{\mathcal{K}}(Y)$ i $B \in \langle F(U) \rangle$ pa je $\mathcal{B}$ otvoren podskup prostora $P_{\mathcal{K}}(Y)$ i, budući da je $\hat{F}:P_{\mathcal{K}}(X) \longrightarrow P_{\mathcal{K}}(Y)$ još neprekidno, to je $\hat{F}$ kvocijentno preslikavanje.//

GLAVA 4.

PERFEKTNA (SAVRŠENA) I TRI KLASE SLABO OTVORENIH VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

U paragrafu 4.1. dat je pregled nekih klasa jednoznačnih preslikavanja, koje sadrže kvocijentna, a sadržana su u otvorenim preslikavanjima.

Perfektna preslikavanja (višeznačna i jednoznačna) poseduju vrlo dobra svojstva. Ona su dosta proučavana, te će u ovom radu biti tek pomenuta neka od njihovih svojstava. U paragrafu 4.2. daju se neke karakterizacije perfektnih višeznačnih preslikavanja (4.2.2., 4.2.3., 4.2.4.).

Po analogiji na jednoznačna preslikavanja, koja su pobrojana u 4.1., uvode se tri klase višeznačnih preslikavanja. Ove tri klase slabo otvorenih preslikavanja uvedene su propozicijama 4.3.1., 4.3.2. i 4.3.3. Pored propozicija 4.3.1., 4.3.2. i 4.3.3. u paragrafu 4.3. dokazuje se jedno tvrdjenje za višeznačna preslikavanja, a koje je slično sa jednom lemom A.H.Stone-a [38] (Pr. 4.3.4.) i uopštava se, donekle, jedan rezultat V.J.Mancuso-a [23] (Prop. 4.3.7.).

U poslednjem paragrafu ove glave, govori se o proizvodu višeznačnih preslikavanja. Neki poznati rezultati su nešto prošireni i dokazuju se korišćenjem rezultata glave 3. (videti 4.4.3., 4.4.4., 4.4.5., 4.4.6.). Teorema 4.4.9. odgovara teoremi koja važi za jednoznača preslikavanja.

4.1 BI-KVOCIJENTNA, PREBROJIVO BI-KVOCIJENTNA I NASLEDNO KVOCIJENTNA JEDNOZNAČNA PRESLIKAVANJA

U ovom paragrafu daje se pregled nekih klasa jednoznačnih neprekidnih preslikavanja, koje su sadržane u klasi kvocijentnih, a sadrže klasu otvorenih preslikavanja. Pobrojana dole preslikavanja su dosta proučavana u novije vreme i još se proučavaju. Ona poseduju vrlo interesantna svojstva i od različitih autora dobijeni su značajni rezultati u vezi sa ovim preslikavanjima. Navedimo neke od tih: E.Michael [28], [30], [32]; A.Arhangel'skij [2], [3], [6]; F.Siwiec [38]; R.Olson [34]. Interesantni primeri u vezi sa ovim preslikavanjima dati su u skoro izdatoj knjizi Arhangel'skog i Ponomareva [7].

4.1.1. DEFINICIJA. Neka je $f:X \longrightarrow Y$ jednoznačno neprekidno preslikavanje.

(1) f je <u>otvoreno</u> (<u>zatvoreno</u>) ako je slika otvorenog (zatvorenog) skupa otvoren (zatvoren) skup.

(2) f je perfektno (kvazi-perfektno) ako je zatvoreno i $f^{-1}(y)$ je kompaktan (prebrojivo-kompaktan) skup u X za svako $y \in Y$.

(3) f je <u>bi-kvocijentno</u> (Michael [28]) (<u>prebrojivo-bi-kvocijentno</u>) ako za svako $y \in Y$ i svaku familiju (prebrojivu familiju) otvorenih skupova u X koja pokriva $f^{-1}(y)$, postoji konačna podfamilija čija slika pokriva neku okolinu tačke y.

(4) f je <u>nasledno kvocijentno</u> ako je za svaki podskup S od Y, preslikavanje $f/f^{-1}(S):f^{-1}(S) \longrightarrow S$ kvocijentno.

(5) f je <u>pseudo-otvoreno</u> (Arhangel'skij [2])ako za svako $y \in Y$ i svaku okolinu U za $f^{-1}(y)$, $f(U)$ je okolina za y.

(6) f je kvocijentno ako za $B \subset Y$, B je otvoren tada i samo tada kada je $f^{-1}(B)$ otvoren u X (ekvivalentno ako se reč "otvoren" zameni rečju "zatvoren").

Sledeća šema daje relacije izmedju ovih preslikavanja

$$
\begin{tikzcd}
\text{otvoreno} \arrow[d, mapsto] & \\
\text{bi-kvocijentno} \arrow[d, mapsto] & \text{perfektno} \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
\text{prebrojivo bi-kvocijentno} \arrow[d, mapsto] & \text{kvazi-perfektno} \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
\text{nasledno-kvocijentno} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{zatvoreno} \arrow[l, mapsto] \\
\text{pseudo-otvoreno} \arrow[d, mapsto] & \\
\text{kvocijentno} &
\end{tikzcd}
$$

Pojmovi nasledno-kvocijentno i pseudo-otvoreno su ekvivalentni (videti [2] Teroma 1.). Da su inkluzije prave u gornjoj šemi, dati su primeri (videti [28] i [29]).

Nekada je vrlo korisno da se perfektna, bi-kvocijentna prebrojivo bi-kvocijentna i nasledno-kvocijentna jednoznačna preslikavanja okarakterišu posredstvom filterskih baza.

4.1.2. DEFINICIJA. Filterska baza $\mathcal{F}$ je neprazna familija nepraznih skupova, tako da ako su F_1 i F_2 iz $\mathcal{F}$, tada postoji $F_3 \in \mathcal{F}$ da je $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ (videti [11] str.81.).

U topološkom prostoru X tačka x je tačka nagomilavanja za filtersku bazu $\mathcal{F}$ ako je $x \in \overline{F}$ za svako $F \in \mathcal{F}$, a $\mathcal{F}$ konvergira ka tački x ako svaka okolina tačke x sadrži neki $F \in \mathcal{F}$.

4.1.3. TEOREMA. Neka je $f:X \to Y$ neprekidno jednoznačno preslikavanje.

(1) ([11] str. 157.) f je perfektno tada i samo tada ako za ma koju filtersku bazu $\mathcal{A}$ u X i tačku $y \in Y$ takvu da je y tačka nagomilavanja za filtersku bazu $f(\mathcal{A}) = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$, postoji $x \in f^{-1}(y)$ tako da je x tačka nagomilavanja za $\mathcal{A}$.

(2) ([28], Prop.2.2.) f je bi-kvocijentno tada i samo tada ako za ma koju filtersku bazu $\mathcal{B}$ u Y i tačku $y \in Y$ koja je tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$ postoji $x \in f^{-1}(y)$ tako da je x tačka nagomilavanja za filtersku bazu $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$.

(3) ([38], Prop.3.2.) f je prebrojivo bi-kvocijentno ako i samo ako, kad god je $\{A_n : n \in N\}$ opadajući niz skupova u Y i $y \in \overline{A_n}$ za svako $n \in N$, postoji $x \in f^{-1}(y)$ tako da je $x \in \overline{f^{-1}(A_n)}$ za $n \in N$.

(4) ([30], Lema 5.2.) f je nasledno-kvocijentno (ekvivalentno pseudo-otvoreno) tada i samo tada, kad god je $y \in \overline{B}$ u Y tada je $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ za neko $x \in f^{-1}(y)$.

4.2. PERFEKTNA VIŠEZNAČNA PRESLIKAVANJA

4.2.1. DEFINICIJA. Višeznačno preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ je Y-perfektno (X-perfektno) ako je zatvoreno, Y- kompaktno i poluneprekidno odozgo (zatvoreno, X-kompaktno i poluneprekidno odozgo). Preslikavanje F je perfektno ako je X-perfektno i Y-perfektno.

Perfektna višeznačna preslikavanja su proučavana kod Ponomareva [37], Borgesa [9], Arhangel'skog [3] i drugih autora koji su se bavili problematikom višeznačnih preslikavanja.

Perfektna jednoznačna preslikavanja mogu se okarakterisati pomoću filterskih baza ([11] , str. 156.).

Sledeća tri tvrdjenja karakterišu perfektna višeznačna preslikavanja.

4.2.2. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje na. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.

(1) F je zatvoreno i X-kompaktno.

(2) Ako je $\mathcal{A}$ filterska baza u X i $y \in Y$ tačka nagomilavanja za $F(\mathcal{A})$, tada postoji $x \in F'(y)$, tako da je x tačka nagomilavanja za $\mathcal{A}$.

(3) $p_Y:Gr(F) \longrightarrow Y$ je perfektno.

DOKAZ. Ekvivalentnost uslova (1) i (3) dokazao je Smirnov (videti [37] , str. 519., takodje [9] str. 453.).

$(1) \Longrightarrow (2)$. Neka je $\mathcal{A}$ filterska baza u X i $y \in Y$ tačna nagomilavanja za $F(\mathcal{A})$, tj. $y \in \overline{F(A)}$ za svako $A \in \mathcal{A}$. Kako je F zatvoreno preslikavanje to je $\overline{F(A)} \subset F(\bar{A})$, pa je $y \in F(\bar{A})$ za svako $A \in \mathcal{A}$ i $F'(y) \cap \bar{A} \neq \emptyset$, za svako $A \in \mathcal{A}$. Preslikavanje F je X - kompaktno pa je $F'(y)$ kompaktan skup, a $\mathcal{A}$ je filterska baza u X pa familija $\{F'(y) \cap \bar{A}: A \in \mathcal{A}\}$ ima osobinu konačnog presecanja, te je presek svih članova neprazan. Neka je $x \in \bigcap \{F'(y) \cap \bar{A}: A \in \}$. Sledi da je $x \in F'(y)$ i x je tačka nagomilavanja za $\mathcal{A}$ i uslov (2) je ispunjen.

$(2) \Longrightarrow (1)$. Pretpostavimo suprotno, da uslov (1) nije ispunjen.

Slučaj (a). F nije zatvoreno. U tom slučaju postoji $A = \bar{A} \subset X$ i tako da je $\overline{F(A)} \neq F(A)$ i neka je $\mathcal{A} = \{A\}$. Ako je $y \in \overline{F(A)} - F(A)$ to je $F'(y) \cap A = \emptyset$ i kako je $\bar{A} = A$, uslov (2) nije zadovoljen.

Slučaj (b). F nije X-kompaktno. Tada postoji $y \in Y$ tako da $F'(y)$ nije kompaktan skup pa postoji otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ za $F'(y)$ koji se ne može reducirati na konačan podpokrivač (može se pretpostaviti da je $U \cap F'(y) \neq \emptyset$, za svako $U \in \mathcal{U}$).

Neka je $\mathcal{A}$ familija skupova čiji su elementi komplementi unije konačno elemenata iz $\mathcal{U}$. Može se proveriti da je $\mathcal{A}$ filterska baza u X. Za svako $x \in F'(y)$ postoji $U_x \in \mathcal{U}$ tako da $x \in CU_x$ pa ni jedno $x \in F'(y)$ nije tačka nagomilavanja za $\mathcal{A}$. Medjutim, za svako $A \in \mathcal{A}$ je

$F'(y) \cap A \neq \emptyset$ pa je $y \in \overline{F(A)}$ i y je tačka nagomilavanja za filtersku bazu $F(\mathcal{A})$ pa uslov (2) nije zadovoljen. Time je Propozicija dokazana.//

4.2.3. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje na. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.

(1) F je poluneprekidno odozgo i Y-kompaktno.

(2) Ako je $\mathcal{B}$ filterska baza u Y i $x \in X$ tačka nagomilavanja za $F'(\mathcal{B})$, tada postoji tačka $y \in F(x)$ tako da je y tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$.

(3) $p_X : Gr(F) \longrightarrow X$ je perfektno.

DOKAZ. Dokazuje se na isti način kao i 4.2.2. imajući u vidu činjenicu da je iskaz " F poluneprekidno odozgo i Y-kompaktno " ekvivalentan iskazu " $F':Y \longrightarrow X$ je zatvoreno i Y-kompaktno".//

Koristeći 4.2.2. i 4.2.3. imamo sledeću karakterizaciju perfektnih višeznačnih preslikavanja.

4.2.4. TEOREMA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje na. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.

(1) F je perfektno preslikavanje.

(2) Ako je $\mathcal{A}$ filterska baza u X i $y \in Y$ tačka nagomilavanja za $F(\mathcal{A})$, tada postoji $x \in F'(y)$ tako da je x tačka nagmmilavanja za $\mathcal{A}$, i ako je $\mathcal{B}$ filterska baza u Y i $x \in X$ tačka nagomilavanja za $F'(\mathcal{B})$ tada postoji $y \in F(x)$ tako da je y tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$.

(3) p_X i p_Y su perfektna preslikavanja.

4.3. TRI OSLABLJENJA OTVORENOSTI VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

Motivišući se definicijama bi-kvocijentnih, prebrojivo bi-kvocijentnih i pseudo-otvorenih jednoznačnih preslikavanja (videti D. 4.1.1.), ovde ćemo, na sličan način, uvekavanja (videti D. 4.1.1.), ovde ćemo, na sličan način,uvesti odgovarajuća višeznačna preslikavanja. Prirodno je očekivati da takva višeznačna preslikavanja imaju svojstva slična sa odgovarajućim jednoznačnim preslikavanjima, ali se sa njima, jasno, ne mogu poistovetiti. Takva je situacija skoro uvek kada se sa jedne klase jednoznačnih predje na odgovarajuću klasu višeznačnih preslikavanja (neprekidnost, perfektna, kvocijentna preslikavanja i druga).

4.3.1. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.

(1) Ako je $y \in Y$ i $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač za $F'(y)$, tada konačno mnogo $F(U)$: $U \in \mathcal{U}$ pokriva neku okolinu tačke y u Y.

(2) Ako je $y \in Y$ tačka nagomilavanja za filtersku bazu $\mathcal{B}$ u Y, tada postoji $x \in F'(y)$ tako da je x tačka nagomilavanja za filtersku bazu $F'(\mathcal{B}) = \{F'(B) : B \in \mathcal{B}\}$

(3) $p_Y : Gr(F) \longrightarrow Y$ je bi-kvocijentno.

DOKAZ.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Pretpostavimo da uslov (2) ne važi, tj. da postoji filterska baza $\mathcal{B}$ u Y i y tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$, a za svako $x \in F'(y)$ postoji okolina U_x tačke x tako da je $U_x \cap F'(B_x) = \emptyset$, za neko $B_x \in \mathcal{B}$. Familija $\mathcal{U} = \{U_x : x \in F'(y)\}$ je pokrivač za $F'(y)$.

Neka je $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$ ma koja konačna podfamilija iz $\mathcal{U}$. Tada je $U_{x_i} \cap F'(B_{x_i}) = \emptyset$ odnosno $F(U_{x_i}) \cap B_{x_i} = \emptyset$, za $i = 1, 2, \ldots, n$, a odatle $\left(\bigcup_1^n F(U_{x_i})\right) \cap \left(\bigcap_1^n B_{x_i}\right) = \emptyset$. Kako postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da je $B \subset \bigcap_1^n B_{x_i}$ to je $\left(\bigcup_1^n F(U_{x_i})\right) \cap B = \emptyset$ a kako je $y \in B$ i $y \in \bigcup_1^n F(U_{x_i})$ to $y \notin \operatorname{int}\left(\bigcup_1^n F(Ux_i)\right)$ pa uslov (1) nije ispunjen.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Pretpostavimo, sada, da (1) ne važi, pa postoji $y \in Y$ i otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ za $F'(y)$, tako da ne postoji okolina tačke y koja bi bila pokrivena sa konačno mnogo $F(U) : U \in \mathcal{U}$. Neka je $\mathcal{B}$ familija skupova koji su komplementi svih konačnih unija $F(U) : U \in \mathcal{U}$. Može se proveriti da je $\mathcal{B}$ filterska baza u Y.

Neka je $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ ma koja konačna podfamilija familije $\mathcal{U}$. Po pretpostavci $y \in \bigcup_1^n F(U_i)$ i $y \notin \operatorname{int}\left(F(U_i)\right)$, pa je $y \in \overline{C\left(\bigcup F(U_i)\right)} = \overline{B}$ i to važi za svako $B \in \mathcal{B}$ i y je tačka nagomilavanja za filtersku bazu $\mathcal{B}$. Ako je $x \in F'(y)$ to postoji $U_x \in \mathcal{U}$ tako da $x \notin CU_x = \overline{CU_x}$. Skup $B = CF(U_x)$ je element filterske baze $\mathcal{B}$ i $y \in \overline{B}$. Medjutim, $\overline{F'(CF(U_x))} = \overline{CF'F(U_x)} \subset \overline{CU_x} = CU_x \not\ni x$, pa za svako $x \in F'(y)$ postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da $x \notin \overline{F'(B)}$ odnosno x nije tačka nagomilavanja za filtersku bazu $F'(\mathcal{B})$, pa uslov (2) nije ispunjen.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Pretpostavimo da uslov (2) nije ispunjen, odnosno da postoji filterska baza $\mathcal{B}$ u Y i $y \in Y$, tako da je $y \in \overline{B}$, za svako $B \in \mathcal{B}$, a za svako $x \in F'(y)$ po-

stoji $B_x \in \mathcal{B}$ tako da $x \notin \overline{F'(B_x)}$. U tom slučaju postoji otvorena okolina U_x tačke x tako da je $U_x \cap F'(B_x) =$ $= p_X\, p_Y^{-1}(B_x) \cap U_x = \emptyset$, a odatle je $p_Y^{-1}(B_x) \cap (U_x \times Y) = \emptyset$. Kako je $x \in F'(y)$, to je $(x,y) \in p_Y^{-1}(y)$ a pri tome $(x,y) \in \overline{p_Y^{-1}(B_x)}$ i to za svako $x \in F'(y)$, odnosno za svako $(x,y) \in p_Y^{-1}(y)$. Znači postoji filterska baza u Y i tačka y Y koja je tačka nagomilavanja za a pri tome ni jedna tačka $(x,y) \in p_Y^{-1}(y)$ nije tačka nagomilavanja za filtersku bazu $p_Y^{-1}(\mathcal{B})$ i $p_Y : Gr(F) \longrightarrow Y$ nije bi-kvocijentno preslikavanje.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Dokaz ćemo takodje izvesti negacijom. Pretpostavimo da $p_Y : Gr(F) \longrightarrow Y$ nije bi-kvocijentno, pa postoji filterska baza $\mathcal{B}$ u Y i $y \in Y$ tako da je y tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$ a pri tome za svako $(x,y) \in p_Y^{-1}(y)$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ da $(x,y) \notin \overline{p_Y^{-1}(B_x)}$ odnosno postoje okoline U_x^o i V_y^o tačaka x i y respektivno tako da je

$$(U_x^o \times V_y^o) \cap p_Y^{-1}(B_x) = \emptyset .$$

Neka je

$$\mathcal{B}' = \{ B \cap V_y : \quad V_y \in \mathcal{V}_y, \quad B \in \} ,$$

gde je $\mathcal{V}_y$ baza okolina tačke $y \in Y$. Može se proveriti da je $\mathcal{B}'$ takodje filterska baza u Y i da je y tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}'$.

Imamo sledeće relacije

$(U_x^o \times V_y^o) \cap p_Y^{-1}(B_x \times V_y^o) = \emptyset$,

$U_x^o \cap p_X p_Y^{-1}(B_x \cap V_y^o) = \emptyset$, tj. $U_x^o \cap F'(B_x \cap V_y^o) = \emptyset$,

a iz poslednje relacije sledi da $x \notin \overline{F'(B_x \cap V_y^o)}$.

Prema tome, postoji filterska baza $\mathcal{B}'$ u Y i $y \in Y$ tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$ a pri tome za svako $x \in F'(y)$ postoji $B'_x = B_x \cap V^o_y \in \mathcal{B}'$ tako da $x \notin \overline{F'(B'_x)}$ odnosno nije tačka nagomilavanja za filtersku bazu $F'(\mathcal{B})$ pa F ne zadovoljava (2). Time je Propozicija kompletnno dokazana. //

Sledeće dve propozicije se slično dokazuju kao prethodna propozicija 4.3.1. i dokaz će biti izostavljen.

4.3.2. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.

(1) Ako je $y \in Y$ i $\{U_n : n \in N\}$ niz inkluzivno rastućih otvorenih skupova u X takvih da je $F'(y) \subset \bigcup(U_n, n \in N)$, tada postoji $n \in N$ tako da je $y \in \operatorname{int} F(U_n)$.

(2) Ako je $\{B_n : n \in N\}$ niz nepraznih inkluzivno opadajućih skupova u Y i tačka $y \in Y$ takva da je $y \in \overline{B_n}$ za svako $n \in N$, tada postoji $x \in F'(y)$ tako da je $x \in \overline{F'(B_n)}$ za svako $n \in N$.

(3) $p_Y : Gr(F) \longrightarrow Y$ je prebrojivo bi-kvocijentno.

4.3.3. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \rightarrow Y$ višeznačno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.

(1) Ako je $y \in Y$ i $U \subset X$ otvoren skup takav da je $F'(y) \subset U$, tada je $y \in \operatorname{int} F(U)$.

(2) Ako je $y \in Y$ i $B \subset Y$ takav da je $y \in \overline{B}$, tada postoji $x \in F'(y)$ tako da je $x \in \overline{F'(B)}$.

(2) p_Y je pseudo-otvoreno (naslednо-kvocijent).

Za razliku od bi-kvocijentnih, prebrojivo bi-kvocijentnih i pseudo-otvorenih (nasledno-kvocijent) jednoznačnih preslikavanja (paragraf 4.1.), koja su sadržana u klasi kvocijentnih preslikavanja, višeznačna preslikavanja uvedena preko 4.3.1., 4.3.2. i 4.3.3. ne moraju biti kvocijentna višeznačna preslikavanja ni uz dodatni uslov neprekidnosti, što se može videti iz jednostavnih primera. Iz tih razloga nije pogodno ova preslikavanja, po analogiji sa jednoznačnim, nazivati bi-kvocijent, prebrojivo bi-kvocijent. Naziv pseudo-otvoreno višeznačno preslikavanje mogao bi se usvojiti za preslikavanje iz 4.3.3., ali se mi opredeljujemo da, za sada, ne usvajamo nazive za ova preslikavanja, nego ćemo reći da su to preslikavanja sa uslovima 4.3.1., 4.3.2. ili 4.3.3. respektivno.

Sledeća šema daje vezu izmedju pojedinih klasa preslikavanja.

$$\begin{tikzcd} \text{otvorena preslikavanja} \arrow[d] & \text{perfektna preslikavanja} \arrow[d] \\ \text{preslikavanja 4.3.1.} \arrow[d] & \text{zatvorena X-kompaktna} \arrow[l] \\ \text{preslikavanja 4.3.2.} \arrow[d] & \\ \text{preslikavanja 4.3.3.} & \end{tikzcd}$$

Formulacija sledećeg tvrdjenja je ista kao i formulacija Leme 1. A.H. Stone-a ([38] , str.694.) za jednoznačna preslikavanja. Naime, ukoliko se reč "višeznačno" u našoj Prop. 4.3.4. zameni rečju "jednoznačno" i $F(y_o)$ sa $f^{-1}(y_o)$,dobija se Lema 1. Stone-a.

4.3.4. PROPOZICIJA. Neka je $F:X\longrightarrow Y$ kvocijentno višeznačno preslikavanje, X T_1- prostor, Y T_2- prostor sa prebrojivom bazom u tački $y_o \in Y$, i neka je $\{U_n,\ n\in N\}$ rastući niz otvorenih skupova prostora X takvih da je $F'(y_o)\subset\bigcup\{U_n,\ n\in N\}$. Tada je $y_o\in \operatorname{int}(F(U_n))$, za neko $n\in N$.

DOKAZ. Ako je $y_o\in Y$ izolovana tačka, tvrdjenje je jasno, pa se može pretpostaviti da je y_o neizolovana tačka prostora Y. Na osnovu 2.3.3. $F'(y_o)\neq\emptyset$.

Kako je $\mathring{F}'(y_o)\subset F'(y_o)\subset\bigcup\{U_n,\ n\in N\}$ i, ne umanjujući opštost, može se pretpostaviti da $F'(y_o)\cap U_n\neq\emptyset$ za svako $n\in N$.

Neka je $\{W_n,\ n\in N\}$ baza otvorenih okolina tačke y_o takva da je $W_1\supset W_2\supset\dots\supset W_n\supset\dots$. Treba dokazati da je $W_n\subset F(U_n)$ za neko $n\in N$. Pretpostavimo suprotno, da postoji za svako $n\in N$ tačka $y_n\in Y$ tako da je $y_n\in W_n - F(U_n)$ i označimo sa B skup takvih tačaka; $B=\{y_n,\ y_n\in W_n - F(U_n),\ n\in N\}$. Pošto je Y T_2-prostor, to je $y_o\notin B$, a inače $y_o\in\overline{B}$, pa B nije zatvoren skup, a takodje $F'(B)$ nije zatvoren skup u X, budući da je F kvocijentno.

Neka je $x \in \overline{\overset{\circ}{F}'(B)} - \overset{\circ}{F}'(B)$. Kako je $\overline{\overset{\circ}{F}'(B)} \subset \overset{\circ}{F}'(\bar{B})$ to je $x \in \overset{\circ}{F}'(\bar{B})$ odnosno $F(x) \subset \bar{B}$, a kako $F(x) \not\subset B$, to je $y_o \in F(x)$ odnosno $x \in F'(y_o)$ pa je $x \in U_{n_o}$, za neko n_o.

Skup $U = U_{n_o} - F'(\{y_1, \dots, y_n\})$ je otvoren. Dokažimo da je $x \in U$. Ukoliko $x \notin U$, a budući da je $x \in U_{n_o}$, to je $x \in \overset{\circ}{F}'(\{y_1, \dots, y_{n_o}\})$ odnosno $F(x) \subset \{y_1, \dots, y_{n_o}\}$, a to je nemoguće, jer je $y_o \in F(x)$. Dakle, $x \in U$.

Dokažimo da je $U \cap \overset{\circ}{F}'(B) = \emptyset$, a to će biti suprotno pretpostavci da je $x \in \overline{\overset{\circ}{F}'(B)}$, i time bi dokaz bio završen.

Ako je $x_o \in U$ to je $F(x_o) \subset F(U_{n_o})$ pa $y_{n_o} \notin F(x_o)$ i $F(x_o) \subset F(U_k)$ za $k \geq n_o$, što znači da je $F(x_o) \cap \{y_k : k \geq n_o\} = \emptyset$. Ukoliko je $x_o \in \overset{\circ}{F}'(B)$ to je $F(x_o) \subset \{y_1, \dots, y_{n_o}\}$ pa je $x_o \in \overset{\circ}{F}'(\{y_1, \dots, y_{n_o}\})$, što je nemoguće. Dakle, ako je $x_o \in U$, to $x_o \notin \overset{\circ}{F}'(B)$, pa je $U \cap F'(B) = \emptyset$, a to je suprotno pretpostavci da je $x \in \overline{\overset{\circ}{F}'(B)}$. //

4.3.5. POSLEDICA. <u>Neka je</u> $F: X \longrightarrow Y$ <u>kvocijentno višeznačno preslikavanje,</u> X T_1- <u>prostor</u> a Y T_2- <u>prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti. Tada preslikavanje</u> F <u>zadovoljava uslove 4.3.2.</u>

Dokazaćemo tvrdjenje da se uslivi 4.3.1., 4.3.2. i 4.3.3. prenose pri kompoziciji preslikavanja, a kao posledicu nešto uopšteniji rezultat Mancuso-a ([23] Prop. 2.6. str.32.).

4.3.6. PROPOZICIJA. Neka su $F:X \longrightarrow Y$ i $G:Y \longrightarrow Z$ višeznačna preslikavanja na.

(1) Ako F i G zadovoljavaju 4.3.1. to i $G \circ F$ zadovoljava 4.3.1.

(2) Ako F i G zadovoljavaju 4.3.2. to i $G \circ F$ zadovoljava 4.3.2.

(3) Ako F i G zadovoljavaju 4.3.3. to i $G \circ F$ zadovoljava 4.3.3.

DOKAZ. (1). Neka je $\mathcal{C}$ filterska baza u Z i $z \in Z$ tačka nagomilavanja za $\mathcal{C}$. Kako $G:Y \longrightarrow Z$ zadovoljava 4.3.1., to postoji $y \in G'(z)$ tako da je y tačka nagomilavanja za filtersku bazu $\mathcal{B} = G'(\mathcal{C})$, a pošto $F:X \longrightarrow Y$ zadovoljava isti uslov, to postoji tačka $x \in F'(y)$ tako da je x tačka nagomilavanja za filtersku bazu $F'(\mathcal{B}) = F'(G'(\mathcal{C}))$. Pošto je $y \in G'(z)$ i $x \in F'(y)$ to je $x \in F'(G'(z)) = (G \circ F)'(z)$ i x je tačka nagomilavanja za $F'(G'(\mathcal{C})) = (G \circ F)'(\mathcal{C})$, pa preslikavanje $G \circ F:X \longrightarrow Z$ zadovoljava 4.3.1. (2), a time je dokazano (1).

Iskazi (2) i (3) dokazuju se na sličan način koristeći (2) u 4.3.2. odnosno 4.3.3.//

4.3.7. PROPOZICIJA ([23], P. 2.6.). Neka su $f:X \longrightarrow Y$ i $g:Z \longrightarrow Y$ neprekidna jednoznačna preslikavanja i $F:Z \longrightarrow X$ višeznačno preslikavanje definisano relacijom $F(z) = f^{-1}(g(z))$.

(1) Ako je g bi-kvocijent, tada je $p_X:Gr(F) \longrightarrow X$ bi-kvocijent.

(2) <u>Ako je</u> g <u>pseudo-otvoreno, tada je</u> p_X <u>pseudo-otvoreno.</u>

DOKAZ. Višeznačno preslikavanje $F:Z \longrightarrow Y$ je ustvari kompozicija preslikavanja $g:Z \longrightarrow Y$ i $f^{-1}:Y \longrightarrow X$, tj. $F = f^{-1} \circ g$. Preslikavanje f je neprekidno pa je f^{-1} otvoreno (i zatvoreno) pa ako je g bi-kvocijentno ili pseudo otvoreno to F zadovoljava 4.3.1. ili 4.3.3, a na osnovu prethodne propozicije 4.3.6. i dokazano je tvrdjenje.//

U [23] P. 2.6. zahteva se da u iskazu (2) preslikavanje g bude kompaktno pored pseudo otvorenosti ($g^{-1}(y)$ bude kompaktan skup u Z), što se, kao što se vidi, može izostaviti.//

4.4. O PROIZVODU VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

Ako su X_t i Y_t, $t \in T$, familije topoloških prostora, tada je sa

$$X = \prod_t X_t, \quad \text{odnosno} \quad Y = \prod_t Y_t$$

označen proizvod prostora X_t, odnosno Y_t sa uobičajenom topologijom (topologija Tihonova, videti [17] str. 154.).

Tačke prostora $\prod_t X_t$ i $\prod_t Y_t$, označavamo sa (x_t) i (y_t), respektivno, $x_t \in X_t$, $y_t \in Y_t$, $t \in T$.

Sa π_t^X i π_t^Y označene su projekcije sa proizvoda na odgovarajuće koordinatne prostore

$$\pi^X_{t_o} : \prod_t X_t \longrightarrow X_{t_o}, \quad \pi^X_{t_o}((x_t)) = x_{t_o}$$

$$\pi^Y_{t_o} : \prod_t Y_t \longrightarrow Y_{t_o}, \quad \pi^Y_{t_o}((y_t)) = y_{t_o}.$$

Ako su $f_t : X_t \longrightarrow Y_t$, $t \in T$, jednoznačna preslikavanja, tada se pod <u>proizvodom</u> preslikavanja f_t, $t \in T$, podrazumeva preslikavanje

$$f = \prod_t f_t : \prod_t X_t \rightarrow \prod_t Y_t,$$

definisano sa

$$f((x_t)) = (\prod_t f_t)((x_t)) = (f_t(x_t)), \quad (x_t) \in \prod_t X_t.$$

Neka svojstva preslikavanja $f_t : X_t \longrightarrow Y_t$, $t \in T$, čuvaju se pri proizvodu, a neka ne. Tako, na primer, proizvod kvocijent-preslikavanja ne mora biti kvocijent-preslikavanje ([10] str. 55. ,[28] , [30]). Proizvod bi-kvocijent-preslikavanja je bi-kvocijent-preslikavanje ([28], T.1.2.).

Proizvod višeznačnih preslikavanja se takodje razmatra (Kuratovski [18], str. 67., Stroter [40],P.1. i P.15.).

4.4.1. DEFINICIJA. Ako je $F_t : X_t \longrightarrow Y_t$ višeznačno preslikavanje za svako $t \in T$, tada se višeznačno preslikavanje $F = \prod_t F_t : \prod_t X_t \longrightarrow \prod_t Y_t$, takvo da je za svako $(x_t) \in \prod_t X_t$, $F((x_t)) = (\prod_t F_t)((x_t)) = \prod_t F_t(x_t)$, naziva <u>proizvod preslikavanja</u> preslikavanja F_t, $t \in T$.

Ako je $A \subset \prod_t X_t$ smatramo, kao i obično, da je $F(A) = (\prod_t F_t)(A) = \bigcup \left\{ \prod_t F_t(x_t) : (x_t) \in A \right\}$.

4.4.2. PROPOZICIJA. <u>Neka je za svako</u> $t \in T$, $F_t : X_t \longrightarrow Y_t$ <u>višeznačno preslikavanje</u>. i $F = \prod_t F_t$ <u>proizvod preslikavanje. Tada važe formule</u>:

(1) $F' = (\prod_t F_t)' = \prod_t F'_t$, odnosno

$F'((x_t)) = \prod_t F'_t(x_t)$, za svako $(y_t) \in \prod_t Y_t$.

(2) Za $A_t \subset X_t$ i $B_t \subset Y_t$ je

$F(\prod_t A_t) = \prod_t F_t(A_t)$ i $F'(\prod_t B_t) = \prod_t F'_t(B_t)$..

(3) $F_t \circ \pi_t^X = \pi_t^Y \circ F$ i $(\pi_t^X)^{-1} \circ F_t = F' \circ (\pi_t^Y)^{-1}$.

(4) $F((x_t)) = \prod_t F_t(x_t) = \bigcap_\alpha \{F_\alpha(x_\alpha) \times \prod_{t \neq \alpha} Y_t\}$

$F'((y_t)) = \prod_t F'_t(y_t) = \bigcap_\alpha \{F'(y_\alpha) \times \prod_{t \neq \alpha} X_t\}$

DOKAZ. (1) $(x_t) \in F'((y_t)) \Longrightarrow (y_t) \in F((x_t)) = \prod_t F_t(x_t)$ $\Longrightarrow y_t \in F_t(x_t)$, za svako $t \in T \Longrightarrow x_t \in F'_t(y_t)$, za $t \in T$, $\Longrightarrow (x_t) \in \prod_t F_t(y_t) \Longrightarrow F'((y_t)) \subset \prod_t F_t(y_t)$.

$(x_t) \in \prod_t F_t(y_t) \Longrightarrow x_t \in F'_t(y_t)$, za svako $t \in T \Longrightarrow$ $\Longrightarrow y_t \in F_t(x_t) \Longrightarrow (y_t) \in \prod_t F_t(x_t) = F((x_t))$ $\Longrightarrow (x_t) \in F'((y_t)) \Longrightarrow F'((y_t)) \supset \prod_t F'_t(y_t)$.

(2) Dokazuje se sličnim postupkom kao i (1), pa dokaz izostavljamo.

(3) Treba uočiti da sledeća dva dijagrama komutiraju

$$\begin{tikzcd}
\prod_t X_t \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_t^X"'] & \prod_t Y_t \arrow[d, "\pi_t^Y"] \\
X_t \arrow[r, "F_t"'] & Y_t
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\prod_t Y_t \arrow[r, "F'"] & \prod_t X_t \\
Y_t \arrow[u, "(\pi_t^Y)^{-1}"] \arrow[r, "F'_t"'] & X_t \arrow[u, "(\pi_t^X)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

(4) Lako se može proveriti. //

4.4.3. PROPOZICIJA. Neka su $F_t : X_t \to Y_t$ višeznačna preslikavanja za svako $t \in T$ i $F = \prod_t F_t : \prod_t X_t \to \prod_t Y_t$ proizvod preslikavanje. Preslikavanje F je poluneprekidno odozdo tada i samo tada kada je F_t poluneprekidno odozdo za svako $t \in T$.

DOKAZ. Kako je (videti 4.5.2. (3))

$$F_t \circ \pi_t^X = \pi_t^Y \circ F,$$

to, ako je F poluneprekidno odozdo, tada je i $F_t \circ \pi_t^X$ poluneprekidno odozdo, jer je π_t^Y neprekidno preslikavanje.

Preslikavanje π_t^X je neprekidno i otvoreno, znači i kvocijent-preslikavanje pa prema tome i polukvocijent-odozdo, $F_t \circ \pi_t^X$ poluneprekidno odozdo za svako $t \in T$, pa je, zbog Teoreme 2.1.3. (5), F_t poluneprekidno odozdo preslikavanje. Time je jedan smer propozicije dokazan.

Obrnuto, neka je za svako $t \in T$, višeznačno preslikavanje $F_t : X_t \to Y_t$ poluneprekidno odozdo. Da bi dokazali poluneprekidnost odozdo preslikavanje F, dovoljno je pokazati da je koslika baznog skupa iz $Y = \prod_t Y_t$ otvoren skup u $X = \prod_t X_t$, jer je svaki otvoren skup unija baznih, a kopreslikavanje prolazi kroz uniju.

Neka je

$$W = \prod_{i=1}^{n} V_{t_i} \times \prod_{t \neq t_i} Y_t$$

tipični bazni element prostora Y.

$$F'(W) = \prod_{i=1}^{n} F'_{t_i}(V_{t_i}) \times \prod_{t \neq t_i} X_t = \prod_{1}^{n} U_{t_i} \times \prod_{t \neq t_i} X_t$$

i pošto su F_{t_i} poluneprekidna odozdo preslikavanja, to U_{t_i} otvoreni skupovi i $F'(W)$ je otvoren u X, te je F poluneprekidno odozdo višeznačno preslikavanje.//

4.4.4. POSLEDICA.([40] Prop. 1. str.97.). Neka su X i Y_t topološki prostori $t \in T$, $F: X \to \prod_t Y_t$ višeznačno preslikavanje i $F_t: X \to Y_t$ takvo višeznačno preslikavanje da je $F_t(x)$ = projekcija $F(x)$ na Y_t. Tada je F poluneprekidno odozdo ako i samo ako je F_t poluneprekidno odozdo za svako $t \in T$.

DOKAZ. U ovom slučaju je

$$F_t = \pi_t^X \circ F,$$

pa ako je F poluneprekidno odozgo to je i F_t poluneprekidno odozdo za svako $t \in T$.

Obrnuto se slično dokazuje kao i za P.4.4.3.//

4.4.5. PROPOZICIJA. Neka je za svako $t \in T$ $F_t: X_t \to Y_t$ višeznačno preslikavanje i F proizvod preslikavanje preslikavanja F_t, $t \in T$. Ako je F poluneprekidno odozgo tada je svako F_t poluneprekidno odozgo. Obrnuto ne mora da važi (videti sličan iskaz u [40] , P.15.).

DOKAZ. Slično se dokazuje kao i prvi deo dokaza Prop. 4.4.3. (koristi se Teorema 2.1.3. (5)).

Sledeći primer pokazuje da obrnuto ne mora da važi.

Neka je $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = R$ (realna prava).

$F_1: X_1 \to Y_1$, definisano sa $F_1(x_1) = x_1$, $x_1 \in X_1$

$F_2: X_2 \to Y_2$ definisano sa $F_2(x_2) = Y_2 = R$, $x_2 \in X_2$.

Proizvod preslikavanje $F = F_1 \times F_2 \colon X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ je takvo da je $F(x_1, x_2)) = x_1 \times Y_2$.

Preslikavanja F_1 i F_2 su poluneprekidna odozgo (ona su ustvari, neprekidna), a preslikavanje F nije takvo.

$$A = \left\{ (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \colon \; y_2 = \frac{1}{y_1}, \; y_1 > 0 \right\} \text{ zatvoren je u } Y_1 \times Y_2$$

$$F'(A) = \bigcup \left\{ F'(y_1, y_2) \; , \; (y_1, y_2) \in A \right\} = \left\{ (x_1, x_2) \quad x_1 \times y_2, \; x_1 > 0, \quad x_2 \in R \right\} \text{ nije zatvoren.//}$$

Obrnuto tvrdjenje za propoziciju 4.5.5. biće tačno ukoliko su prostori Y_t, $t \in T$, kompaktni T_2 - prostori. Naime, važi sledeći stav.

4.4.6. PROPOZICIJA. ([18] str. 67. T.6.). Neka su Y_t, $t \in T$, kompaktni T_2- prostori i $F_t \colon X_t \longrightarrow Y_t$, Y_t-zatvorena višeznačna preslikavanja. Ako su F_t poluneprekidna odozgo za svako $t \in T$, tada je i proizvod preslikavanja F poluneprekidno odozgo.

Neka su X_t i Y_t, $t \in T$, topološki prostori, $X = \prod_t X_t$ i $Y = \prod_t Y_t$ proizvod prostora, $F_t \colon X_t \longrightarrow Y_t$ višeznačna preslikavanja i $F = {}_t F_t \colon X \quad Y$ proizvod preslikavanja. Kao i obično (D.1.1.5.) gr (F_t) je grafik preslikavanja F_t, a $gr(F)$ grafik preslikavanja F.

Dakle,

$$gr(F_t) = \left\{ (x_t, y_t) \in X_t \times Y_t \colon \quad y_t \in F_t(x_t) \right\},$$

$$gr(F) = \left\{ ((x_t), (y_t)) \in X \times Y \colon \; (y_t) \in F((x_t)) \right\},$$

$$p_{X_t} \colon gr(F_t) \longrightarrow X_t, \qquad p_{Y_t} \colon gr(F_t) \longrightarrow Y_t$$

$$p_X \colon gr(F) \longrightarrow X, \qquad p_Y \colon gr(F) \longrightarrow Y.$$

(o svim ovim oznakama videti D.1.1.5.).

4.4.7. LEMA. Prostori $gr(F)$ i $\prod_t gr(F_t)$ su homeomorfni:

$$gr(F) \overset{top}{\cong} \prod_t gr(F_t).$$

DOKAZ. Prvo se može videti da je

$$(\prod_t X_t) \times (\prod_t Y_t) \overset{top}{\cong} \prod_t (X_t \times Y_t).$$

Traženi homeomorfizam je definisan relacijom

$$f((x_t),(y_t)) = ((x_t, y_t)).$$

Homeomorfizam h za $gr(F)$ i $\prod_t gr(F_t)$ je restrikcija homeomorfizma f;

$$h = f/gr(F): gr(F) \longrightarrow \prod_t gr(F_t).//$$

4.4.8. LEMA. Sledeći dijagrami komutiraju

$$\begin{tikzcd}
gr(F) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p_Y"'] & & \prod_t gr(F_t) \arrow[dl, "\prod_t p_{Y_t}"] \\
& \prod_t Y_t &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\prod_t gr(F_t) \arrow[rr, "h^{-1}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & gr(F) \arrow[dl, "\prod_t p_{X_t}"] \\
& \prod_t X_t &
\end{tikzcd}$$

Odnosno $(\prod_t p_{Y_t}) \circ h = p_Y$ i $p_X \circ h^{-1} = \prod_t p_{X_t}$

(h homeomorfizam iz leme 4.5.7.).

4.4.9. TEOREMA. Neka su $F_t : X_t \longrightarrow Y_t$, $t \in T$, višeznačna preslikavanja i F njihov proizvod. Ako za svako $t \in T$ F_t zadovoljava uslove 4.3.1., tada i F zadovoljava te iste uslove.

DOKAZ. Ako $F_t:X_t \longrightarrow Y_t$ zadovoljava 4.3.1. tada su $p_{Y_t}:gr(F_t) \longrightarrow Y_t$ bi-kvocijentna preslikavanja, a odatle je preslikavanje $\prod_t p_{Y_t}$ bi-kvocijentno (E.Michael 28 .

Kako je (Lema 4.5.8.)

$$p_Y = (\prod_t p_{Y_t}) \circ h ,$$

to je preslikavanje p_Y bi-kvocijentno (kao kompozicija bi-kvocijentnog preslikavanja i homeomorfizma), pa F zadovoljava 4.3.1. (3).//

Dokaz se može izvesti i direktno ne koristeći rezultat Michael-a u [28] , ali bi bio znatno duži.

GLAVA 5.

PRENOŠENJE NEKIH SVOJSTAVA PROSTORA

Prenošenje pojedinih svojstava prostora pri različitim klasama preslikavanja je jedan od važnijih zadataka opšte topologije. Proučavanjem takvih problema došlo se do vrlo interesantnih i značajnih rezultata za pojedine klase jednoznačnih preslikavanja (perfektna, zatvorena, otvorena, bi - kvocijentna, kvocijentna). Prenošenje metrizabilnosti pri kvocijentnim jednoznačnim preslikavanjima posebno je privlačilo pažnju pojedinih matematičara. Tako imamo značajne rezultate A.H.Stone-a [38] . Od drugih koji su se ovim bavili pomenimo u ovom radu navedene članke E.Michael-a, A.V. Arhangel'skog, M.Čobana i drugih.

Problematika vezana za prenošenje pojedinih osobina prostora posredstvom višeznačnih preslikavanja sreće se kod Ponomareva, Borgesa, Arhangel'skog. U literaturi na našem jeziku o nekim problemima te prirode može se naći u tezi M.Mišića [33] .

Ova glava je posvećena gore navedenoj problematici. Prvenstveno se razmatraju različiti tipovi kvocijentnih višeznačnih preslikavanja. Glavna svojstva prostora su povezanost, lokalna povezanost, separabilnost, lokalna kompaktnost, k-prostori, metrizabilnost.

Tabela na sledećoj strani sumira rezultate ove glave.

F	X	Y	Y	
kvocijentno	povezan T_1	T_1	povezan ili diskretan	5.1.1.
kvocijentno Y-zatvoreno	lokalno pov. kompaktan T_2	T_2	lokalno pove-zan	5.1.4.
kvocijentno Y-povezano	lokalno povezan T_1	T_1	lokalno pove-zan	5.1.5.
polukv.odozg Y-kompaktno	k-prostor		k-prostor	5.2.1.(1)
polukv.odozg Y-prebr.komp.	kvazi-k-prost		kvazi-k-pros-tor	5.2.1.(2)
kvocijentno	nasledno sepa-rabilan T_1	T_1	nasledno se-parabilan	5.2.4.
zatvoreno X-kompaktni neprekidno skoro jednoz.	metrički prostor	T_2 sa pravom aks.prebr.	metrizabilan	5.2.9.
kvocijento k-preslikava-nje	metrički prostor	T_2 bez izolo-van.tač.	metrizabilan	5.2.1o.
polunepr.odozg Y-kompaktno 4.3.1.	lokalno kompa-ktan T_1	T_2	lokalno kompa-ktan	5.3.1.
kvocijentno Y-kompaktno Y-Lindelöf.	lokalno kompa-ktan T_2	T_2 sa prvom aksiom.prebr	lokalno kompa-ktan	5.3.3.

5.1. PRENOŠENJE POVEZANOSTI I LOKALNE POVEZANOSTI

U paragrafu 2.3. bilo je reči o povezanosti neprekidnih višeznačnih preslikavanja. Imajući u vidu rezultate iz glave 3., dokaz sledeće teoreme je vrlo kratak.

5.1.1. TEOREMA. Ako je $F:X \to Y$ višeznačno kvocijentno preslikavanje, X povezan T_1 - prostor i Y T_1-prostor, tada je X povezan ili diskretan prostor.

DOKAZ. Ako prostor Y ima bar jednu neizolovanu tačku y_o tada postoji $x_o \in X$ tako da je $F(x_o) = y_o$(videti 3.2.3.). Na osnovu Teoreme 2.3.3., pnostor Y je povezan prostor.

Prostor Y može biti diskretan, ali samo u tom slučaju ako je $F(x) = Y$ za svako $x \in X$.//

5.1.2. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \to Y$ kvocijentno višeznačno preslikavanje, X T_1- prostor sa konačnim brojem komponenata i Y T_1- prostor. Tada je skup izolovanih tačaka prostora Y otvoreno-zatvoren skup.

DOKAZ. Tvrdjenje je jasno ako je prostor Y diskretan ili pak nema izolovanih tačaka. Takodje je jasno da je skup izolovanih tačaka otvoren.

Neka je Y_o skup svih izolovanih, a Y_1 skup svih neizolovanih tačaka prostora Y($Y_o \neq \emptyset$ i $Y_1 \neq \emptyset$) i neka su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sve komponente prostora X.

Za svako $y_1 \in Y_1$ postoji $x_1 \in X$, tako da je $y_1 = F(x_1)$ (zbog 2.2.3.). Ako je $F(C_k) \cap Y_1 \neq \emptyset$, tada za $y_k \in F(C_k) \cap Y_1$

je $F'(y_k) \cap C_k \neq \emptyset$ i za $x_k \in F'(y_k) \cap C_k$ je $y_k = F(x_k)$ povezan, pa je zbog 2.3.4. $F(C_k)$ povezan. Zbog toga, ako je $F(C_k) \cap Y_1 \neq \emptyset$, to je $F(C_k) \subset Y_1$ odnosno ako je $F(C_i) \cap Y_0 \neq \emptyset$ to je $F(C_i) \subset Y_0$.

Neka su $C_1^0, C_2^0, \dots, C_m^0$ one komponente prostora X za koje je $F(C_i^0) \cap Y_0 \neq \emptyset$, $i = 1,2,\dots, m$, odnosno $F(C_i^0) \subset Y_0$. Tada je $F(Y_0) = C_1^0 \cup C_2^0 \cup \dots \cup C_m^0$ pa je $F(Y_0)$ otvoreno zatvoren skup a, budući da je F kvocijent, Y_0 je otvoreno-zatvoren skup u Y, što dokazuje tvrdjenje.//

Prenošenje lokalne povezanosti pri višeznačnim preslikavanjima srećemo kod Ponomareva [37]. Navodimo sledeću teoremu.

5.1.3. TEOREMA. (Ponomarev [37], str. 534. T.2.). Neka je $F: X \to Y$ neprekidno Y-zatvoreno, skoro jednoznačno preslikavanje na, X lokalno povezan kompaktan a Y T_2-prostor. Tada je Y lokalno povezan.

Koristeći navedenu teoremu, mi želimo da formulišemo sličnu, koja bi se odnosila na kvocijentna višeznačna preslikavanja. Tako imamo sledeće tvrdjenje.

5.1.4. TEOREMA. Neka je $F: X \to Y$ kvocijentno Y-zatvoreno višeznačno preslikavanje, X lokalno povezan kompaktan prostor a Y T_2- prostor. Tada je Y lokalno povezan.

DOKAZ. Ako prostor Y nema izolovanih tačaka, tada je na osnovu 3.2.2., preslikavanje F skoro jednoznačno pa je naše tvrdjenje neposredna posledica teoreme 5.1.3. Ponomareva.

Pošto je X kompaktan i lokalno povezan to X ima konačan broj komponenata (videti napr. [18] T.7. str. 236.), pa je skup izolovanih tačaka prostora Y otvoreno zatvoren skup (Prop. 5.1.2.). Prostor Y je lokalno povezan u svakoj izolovanoj tački.

Podskup neizolovanih tačaka $Y_1 \subset Y$ je takodje otvoreno-zatvoren skup, a preslikavanje $F_1 : X \to Y_1$ definisano relacijom $F_1(x) = F(x) \cap Y_1$ je skoro jednoznačno neprekidno, te su zadovojeni uslovi teoreme 3.1.4. i Y_1 je lokalno povezan, a odatle i Y je lokalno povezan prostor.//

5.1.5. TEOREMA. Neka je $F : X \to Y$ višeznačno Y-povezano kvocijentno preslikavanje, X lokalno povezan T_1- prostor a Y T_1-prostor. Tada je Y lokalno povezan.

DOKAZ. Dovoljno je dokazati da je Y lokalno povezan u svakoj neizolovanoj tački.

Neka je $y_o \in Y$ neizolovana tačka i V_o otvorena okolina tačke y_o. Da bi dokazali da je Y lokalno povezan u y_o dovoljno je dokazati da je svaka komponenta C podskupa V_o otvoren skup (videti [18] T.4 str.236.). Kako je y_o neizolovana tačka to (videti 3.2.3.) postoji $x_o \in X$ tako da je $F(x_o) = y_o$. Neka je $U_o = \overset{\circ}{F}{}'(V_o)$ otvorena okolina tačke x_o i C komponenta skupa V_o. Jasno da je $\overset{\circ}{F}{}'(C) \subset U_o$. Dokažimo da je $\overset{\circ}{F}{}'(C)$ otvoren skup. Neka je $x \in \overset{\circ}{F}{}'(C)$ i C_x komponenta U_o koja sadrži tačku x. Kako je X lokalno povezan to je C_x otvoren skup i naravno povezan. Pošto je F Y-povezano preslikavanje to je $F(C_x)$ povezan (videti 2.3.4.), a pri tome $F(C_x) \cap C \neq \emptyset$ (jer je $F(x) \subset C$) pa je $F(C_x) \subset C$ odnosno $C_x \subset \overset{\circ}{F}'(C)$ i $\overset{\circ}{F}'(C)$ je otvoren skup. Kako je F kvocijentno i $\overset{\circ}{F}'(C)$ otvoren to je C otvoren((3.1.3.)(2)). Znači Y je lokalno povezan u svakoj neizolovanoj tački pa i lokalno povezan.//

5.1.6. POSLEDICA. Ako je $f:X \longrightarrow Y$ kvocijentno jednoznačno preslikavanje i X lokalno povezan prostor, tada je Y lokalno povezan.

5.2 VIŠEZNAČNA SLIKA K-PROSTORA, KVAZI-K-PROSTORA I METRIČKIH PROSTORA

O k-prostorima i kvazi-k-prostorima bilo je reči u paragrafu 2.2. ovog rada (videti D.2.2.4). Ovde će biti dokazano da se svojstvo biti k-prostor i kvazi-k-prostor čuva pri nekim vrstama kvocijentnih višeznačnih preslikavanja.

Napomenimo da se u definicijama k-prostora i kvazi-k-prostora ne pretpostavlja da su prostori T_2. U tome se rezultati ovog paragrafa razlikuju od rezultata mog rada [44].

5.2.1. TEOREMA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno preslikavanje na. Tada važe sledeća tvrdjenja.

(1) Ako je F Y-kompaktno polukvocijentno odozgo i X k-prostor, tada je Y k-prostor.

(2) Ako je F Y-prebrojivo kompaktno polukvocijentno odozgo i X kvazi-k-prostor, tada je i Y kvazi k-prostor.

DOKAZ. (1). Neka je B k-zatvoren podskup u Y. Treba dokazati da je B zatvoren u Y.

Uočimo proizvoljan kompaktan skup $K \subset X$. Kako je F Y-kompaktno i poluneprekidno odozgo, to je $F(K)$ kompaktan u Y (videti 2.2.1.), pa je $B \cap F(K)$ zatvoren u $F(K)$. Definišimo preslikavanje $F_1 : K \to F(K)$ relacijama $F_1(x) = F(x)$ za $x \in K$ i $F_1'(y) = F'(y) \cap K$, za $y \in F(K)$. Preslikavanje F_1 je poluneprekidno odozgo. Stvarno, ako je Q zatvoren skup u $F(K)$ tada postoji zatvoren skup Q_1 u Y takav da je $Q = Q_1 \cap F(K)$. Ali tada je $F_1'(Q) = F_1'(Q_1 \cap F(K)) = F'(Q_1 \cap F(K)) \cap K = F'(Q_1) \cap K$ (poslednja jednakost sledi iz formule (6), 1.2.) i $F_1'(Q)$ je zatvoren u K, što dokazuje poluneprekidnost odozgo preslikavanje F_1. Napomenimo da ovde nije od uticaja kompaktnost skupa K niti Y-kompaktnost preslikavanja F. Dakle, ako je B k-zatvoren u Y i K kompaktan u X to je $B \cap F(K)$ zatvoren u $F(K)$ i $F_1'(B \cap F(K)) = F'(B) \cap K$ zatvore u K, a pošto je X k-prostor i to važi za svaki kompaktan skup K iz X to je $F'(B)$ zatvoren u X pa je B zatvoren u Y, jer je F polukvocijent odozgo. Time je dokazano (1).

(2) Dokazuje se slično, ako se iskoristi definicija kvazi-k-prostora (D.2.2.4.) i odgovarajuće formule.//

5.2.2. POSLEDICA. Neka je $F : X \to Y$ višeznačno Y-kompaktno polukvocijentno odozgo preslikavanje. Ako je X sa prvom aksiomom prebrojivosti (posebno metrički) ili lokalno kompaktan prostor tada je Y k-prostor.

DOKAZ. Svaki prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti (posebno svaki metrički prostor) ili lokalno kompaktan prostor je k-prostor, pa je zbog 2.2.1. Y k-prostor.//

5.2.3. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ polukvocijentno odozgo k-preslikavanje, X k-prostor, a Y T_2-prostor. Tada je F perfektno preslikavanje.

DOKAZ. Preslikavanje F je poluneprekidno odozgo, X-kompaktno i Y-kompaktno (jer je k-preslikavanje D.2.2.4). Na osnovu 5.2.1. Y je k-prostor. Znači $F':Y \longrightarrow X$ je zatvoreno k-preslikavanje k-prostora Y na X, pa je F poluneprekidno odozgo (T.2.2.7). Prema tome, $(F')' = F$ je zatvoreno, pa je F perfektno preslikavanje.//

Prostor X je separabilan ako sadrži svuda gust prebrojiv deo, a nasledno separabilan ako je svaki njegov podprostor separabilan. Separabilnost i nasledna separabilnost se prenosi pri neprekidnim jednoznačnim preslikavanjima na. Za višeznačna preslikavanja to ne mora da važi.

Sledeće tvrdjenje, posle rezultata glave 3., dokazuje se jednostavno i kratko.

5.2.4. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \longrightarrow Y$ višeznačno kvocijentno preslikavanje, X T_1- prostor, a Y T_1- prostor bez izolovanih tačaka. Ako je X nasledno separabilan, tada je i Y nasledno separabilan.

DOKAZ. Iz pretpostavke u iskazu za preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ postoji domen jednoznačnosti $X_o \subset X$;

$$X_o = \{ x \in X: \ F(x) \text{ - jednočlan} \} .$$

Preslikavanje $F/X_o:X_o \longrightarrow Y$ je jednoznačno neprekidno i na (videti 3.2.4.). Kako je X_o nasledno separabilan, to je i Y nasledno separabilan.//

5.2.5. POSLEDICA. Ako je X T_1- prostor sa prebrojivom bazom (zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti), a Y T_1- prostor bez izolovanih tačaka i višeznačno preslikavanje $F:X \longrightarrow Y$ kvocijentno, tada je Y nasledno separabilan.

Jedno od najinteresantnijih svojstava prostora je svojstvo metrizabilnosti. Razrešavanje uslova prenošenja metrizabilnosti prostora pri preslikavanjima privlačilo je pažnju mnogih matematičara (A.H.Stone, Arhangel'skij, Čoban, Michael, Borges i drugi). Od mnogih rezultata koji se odnose na ovu problematiku ovde se navode samo neki od njih.

Navedimo dva značajna rezultata A.H.Stone-a za jednoznačna preslikavanja, a zatim neke neposredne posledice za višeznačna preslikavanja.

5.2.6. TEOREMA (Stone [45] , T.1.). Neka je $f:X \longrightarrow Y$ zatvoreno neprekidno jednoznačno preslikavanje, X metrički, a Y T_2- prostor. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.

(1) Y zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti,

(2) Za svako y Y, $f^{-1}(y)$ ima kompaktan rub,

(3) Y je metrizabilan.

Neposredna posledica navedene Teoreme je ta da se metrizabilnost prenosi pri perfektnim jednoznačnim preslikavanjima.

Drugi značajan rezultat A.H.Stone-a je sledeća teorema.

5.2.7. TEOREMA (Stone [45], T.3.). Neka je $f:X \longrightarrow Y$ kvocijentno jednoznačno preslikavanje, X lokalno komapaktan separabilan metrički prostor, a Y T_2-prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti. Tada je Y lokalno kompaktan separabilan metrički prostor.

5.2.8. POSLEDICA (Stone [45]). Ako je $f:X \longrightarrow Y$ kvocijentno preslikavanje, X separabilan metrički prostor, a Y regularan sa prvom aksiomom prebrojivosti, tada je Y separabilan metrički prostor.

Koristeći navedene teoreme 5.2.6., 5.2.7. i 5.2.8. kao i rezultate paragrafa 3.2. ovog rada, mogu se formulisati iskazi koji su neposredne posledice navedenih teorema Stone-a, a odnose se na višeznačna preslikavanja. Navedimo neke od tih posledica.

5.2.9. POSLEDICA. Ako je $F:X \longrightarrow Y$ zatvoreno X-kompaktno neprekidno skoro jednoznačno preslikavanje na, X metrički prostor, a Y T_2- prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti, tada je Y metrizabilan.

DOKAZ. Na osnovu 3.2.1o. sledi da postoji domen jednoznačnosti preslikavanja X_0 preslikavanja F. Podprostor X_0 je metrički prostor, a preslikavanje $F/X_0:X_0 \longrightarrow Y$ zadovoljava sve uslove T.5.2.6. pa je Y metrizabilan.//

5.2.10. POSLEDICA. Ako je $F:X \longrightarrow Y$ kvocijentno k-preslikavanje, X metrički prostor, a Y T_2- prostor bez izolovanih tačaka, tada je Y metrizabilan prostor.

DOKAZ. Na osnovu 5.2.3. preslikavanje F je perfektno, a zbog 3.2.4. postoji domen jednoznačnosti X_0 preslikavanja F. Preslikavanje $F/X_0 : X_0 \longrightarrow Y$ je perfektno jednoznačno a X_0 je metrički prostor, pa je Y metrizabilan zbog 5.2.6.//

Navedimo dva rezultata Borgesa koji se odnose na prenošenje metrizabilnosti.

5.2.11. TEOREMA (Borges [9] T.3.2.). Neka je $F:X \to Y$ perfektno višeznačno preslikavanje, gde su X i Y T_1- prostori sa G_δ dijagonalom. Tada je X metrizabilan tada i samo tada ako je Y metrizabilan.

5.2.12. TEOREMA (Borges [9] T.4.4.). Neka je $F:X \to Y$ višeznačno Y-kompaktno kvocijentno preslikavanje, X lokalno kompaktan separabilan metrički prostor, a Y T_2- prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti i sa G_δ dijagonalom. Tada je Y lokalno kompaktan separabilan metrizabilan prostor.

Prostor X je sa G_δ dijagonalom ako je dijagonala $D = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\} \subset X \times X$, G_δ skup (presek prebrojivo otvorenih skupova).

5.3. SLIKE LOKALNO KOMPAKTNIH PROSTORA NEKIH KLASA VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA

Lokalna kompaktnost se prenosi pri bi-kvocijentnim jednoznačnim preslikavanjima ([28] Prop.3.4.). Mi uopštavamo ovaj rezultat za višeznačna preslikavanja.

5.3.1. TEOREMA. Ako je X lokalno kompaktan T_1- prostor, Y T_2- prostor i $F:X \longrightarrow Y$ poluneprekidno odozgo Y-kompaktno višeznačno preslikavanje, koje zadovoljava uslove 4.3.1., tada je Y lokalno kompaktan.

DOKAZ. Neka je y proizvoljna tačka prostora Y. Kako je X lokalno kompaktan, to za svako $x \in F'(y)$ postoji kompaktna okolina K_x tačke x. Familija

$$\mathcal{U} = \{\text{int } (K_x) : x \in F'(y)\}$$

je pokrivač za $F'(y)$.

Kako je F poluneprekidno odozgo i Y-kompaktno, to je $F(K_x)$ kompaktan skup (videti T.2.2.2), a pošto F zadovoljava 4.2.1. to konačno mnogo $F(\text{int } K_x)$, pa i $F(K_x)$, pokriva neku okolinu V tačke y. Znači $y \in \text{int}(\bigcup \{F(Kx_i), i = 1,\dots,n\}) = V$, a pri tome je $\bigcup \{F(Kx_i), i=1,\dots,n\}$ kompaktan skup i sadrži okolinu V tačke y i $\overline{V}$ je kompaktan skup, to je Y lokalno komapktan.//

5.3.2. POSLEDICA. Lokalna kompaktnost prenosi se pri otvorenim poluneprekidnim odozgo Y- kompaktnim preslikavanjima i pri perfektnim višeznačnim preslikavanjima.

DOKAZ. Sledi na osnovu dijagrama u paragrafu 4.2.//

5.3.3. PROPOZICIJA. Neka je $F:X \to Y$ višeznačno, Y-kompaktno X-Lindelöfovo kvocijentno preslikavanje, X lokalno kompaktan T_2-prostor i Y T_2- prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti. Tada je Y lokalno kompaktan.

DOKAZ. Pošto je F kvocijentno X je lokalno kompaktan, a Y je prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti, to preslikavanje F zadovoljava uslove 4.3.2. (videti Posledicu 4.3.5.).

Dokažimo da F zadovoljava uslove 4.3.1., a time bi bilo dokazano naše tvrdjenje s obzirom na Teoremu 5.3.1.

Neka je $y \in Y$ proizvoljna tačka i $\mathcal{U}$ proizvoljan pokrivač za $F'(y)$. Pošto je F X-Lindelöfovo to je $F'(y)$ Lindelöfov prostor pa postoji prebrojiv pod pokrivač $\{U_n : n \in N\}$ pokrivača $\mathcal{U}$. Neka je $V_n = \bigcup_1^n U_i$. Jasno da je V_n niz inkluzivno rastućih otvorenih skupova i $F'(y) \in \bigcup \{Vn, n \in N\}$. Kako F zadovoljava 4.2.2. to je $y \in$ int $(F(V_n)$ za neko $n \in N$, pa konačno mnogo $F(U), U \in$. pokriva neku okolinu tačke y, odnosno F zadovoljava 4.2.1. Time je dokazano tvrdjenje,//

LITERATURA

ALEKSANDROV, P.S.

[1] O nekotoryh osnovnyh napravlenijah v obščej topologii, UMN 19, No 6 (1964.), 3 - 46.

ARHANGEL'SKIJ, A.V.

[2] Nekotorye tipy faktornyh otobraženij i svjazi meždu klasaami topologičeskih prostranstv, DAN SSSR, 153 (1963), 743 - 746.

[3] Bikompaktnye množestva i topologija prostranstv, Trudy Mosk. Mat.obšč., 13 (1965), 3-55.

[4] Uslovie sohranenija metrizuemosti pri faktornyh otobraženijah, DAN SSSR, 164 (1965), 9 - 12.

[5] Povedenie metrizumosti pri faktornyh otobraženijah, DAN SSSR, 164(1965), 247 - 25o.

[6] Otobraženija i prostranstva, UMN, 21, No 4(13o), (1966), 133 - 184.

ARHANGEL SKIJ, A.V., PONOMAREV, V.I.

[7] Osnovy obščej topologii v zadačah i upražnenijah, Nauka, Moskva, 1974.

BILERA, L.J.

[8] Topologies for 2^X; set-valued functions and their graphs, Trans. Amer. Math. Soc., 155(1971),137-147.

BORGES, C.J.R.

[9] A study of multivalued functions, Pacifis J.Math., 23(1967), 451 - 461.

BROWN, R.

[10] Elements of modern topology, McGRAW-HILL, London, 1968.

BURBAKI, N.

[11] Obščaja topologija, Moskva, 1958.

ČOBAN, M.M.

[12] O povedenii metrizuemosti pri faktornyh s-otobraženijah, DAN SSSR, 166(1966), 262 - 265.

FORT, M.K.

[13] Points of continuity of semi-continuous functions, Public. Math., Debrecen, 2(1951), 100 - 102.

HRYCAY, R.

[14] Noncontinuous multifunctions, Pacific J.Math.,

HU, S. T.

[15] Osnovi opšte topologije, Savremena administracija, Beograd, 1973.

KELLEY, J.L.

[16] General topology, Van Nostrad, New York, 1955.

KURATOWSKI, K.K.

[17] Topologija I, Mir, Moskva, 1966.

[18] Topologija II, Mir, Moskva, 1969.

KUREPA, DJ.

[19] Teorija skupova, Zagreb, 1951.

LONG, F.E.

[20] Connected mappings, Duke Math. J., 35(1968), 677-682.

LYNN, A.S., SEEBACH, J.A., Jr.

[21] Counterexamples in topology, Holt,Rinehart and Winston, Inc., Neww York,1970.

MAMUZIĆ, Z.

[22] Uvod u opštu topologiju, Beograd, 1960.

MANCUSO, V.J.

[23] Inverse images and first countability, Gen.Topology Appl., 2(1972), 29 - 44.

MARJANOVIĆ, M.M.

[24] Topologies on collections of closed subsets, Publ.Inst. Marh., 6(1966), 125 - 130.

[25] Topologizing the hypersets, Publ. Inst.Math., 11(25), (1971), 123 - 134.

McMILLAN, E. R.

[26] On continuity conditions for functions, Pacific J.Math., 32 (1970), 479 - 493.

MICHAEL, E.A.

[27] Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer.Math. Soc., 71(1951), 152 - 182.

[28] Bi-quotient maps and Cartesian product of quotient maps, Ann, Inst. Fourier (Grenoble),18(1968).

[29] On representing spaces as images of metrizable and related spaces, Gen. Top. Appl., 1(1971), 329-343.

[30] A quintuple quotient quest, Gen. Topology Appl., 2(1972), 91 - 138.

[31] Compact-covering images of metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 37, No 1,, (1973), 26o - 266.

[32] Countably bi-quotient maps and A-spaces, Topology Conference, Virginia Polytechnic Inst.and State Univ., Springer-Verlag, 1973., 183 - 189.

MIŠIĆ, M.

[33] Višeznačna preslikavanja topoloških prostora, Doktorska disertacija, Beograd, 1971.

OLSON, R.C.

[34] Bi-quotient maps, countably bi-sequential spaces and related topics, Gen. Top. Appl., 4(1974), 1-28.

PERVIN, W.J., LEVIN, N.

[35] Connected mappings of Hausdorff spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 9(1958), 488 - 495.

PONOMAREV, V.I.

[36] Novoe prostranstvo zamknutyh množestv i mnogoznačnye nepreryvnye otobraženija bikompaktov, Mat.Sbornik, 48(9o),(1951), 211 - 282.

[37] O svojstvah topologičeskih prostranstv, sohranjajuščihsja pri mnogoznačnyh nepreryvnyh otobraženijah, Mat. Sbornik, 51(93), (196o), 515 - 537.

SIWIEC, F.

[38] Sequence-covering and countably bi-quotient mapings, Gen.Topology Appl., 1(1971), 143 - 154.

SIWIEC, F., MANCUSO, V.J.

[39] Relations among certain mappings and conditions for their equivalence, Gen.Topology Appl., 1(1971), 33-41.

SMITHSON, R. E.

[40] Some general properties of multivalued functions, Pacific J.Math., 15(1965), 681 - 7o3.

[41] Multifunctions, Nieuw Archief voor Wiskunde, 3.XX, (1972), 31 - 53.

STANOJEVIĆ, M.S.

[42] On two mappings associated with multivalued and pointvalued mappings, Topology and its Appl., Budva 1972. Beograd 1973. 229 - 232.

[43] On multivalued quotient mappings, Publ.Inst.Math., 17(31) (1974), 155 - 161.

[44] Nekotorye svojstva faktornyh mnogoznačnyh otobraženij, Balkanica Math., 4.1o6. (1974), 561-563.

STONE, A. H.

[45] Metrizability of decompositions spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 7(1956), 69o - 7oo.

STROTER, W. L.

[46] Continuous multi-valued functions, Bol.Soc.Math. S.Paulo, 1o(1955), 87 - 12o.