DO 125

U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

Mirko JANC

O TAČNIM I PRIBLIŽNIM REŠENJIMA PROBLEMA OPŠTE TEORIJE APROKSIMACIJA - KARAKTERIZACIJA I NUMERIČKO ODREDJIVANJE

- doktorska disertacija -

Beograd, novembar 1981

Dugujem iskrenu zahvalnost profesoru dr Slobodanu Aljančiću za podršku koju mi je pružao prilikom izrade ovog rada, kao i za savete i sugestije kojima mi je pomogao da ovom radu dam potpuniji i precizniji konačan oblik.

Mirko Janc

UVOD

Kao osnivač teorije aproksimacija obično se smatra ruski matematičar XIX veka P. L. Čebišev. On je izučavajući hod pojedinih mehanizama došao do matematičke formulacije problema u sledećem obliku: za datu neprekidnu funkciju $x(t)$ definisanu na segmentu $[a,b]$ odrediti polinom $p_0(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}$, stepena $\leqslant n-1$ koji najmanje "odstupa" od date funkcije $x(t)$. Kao meru ovog odstupanja Čebišev je posmatrao veličinu

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-p_0(t)|. \tag{o.1}$$

Polazeći od ovakvog problema Čebišev je dao mnoge značajne rezultate. On je prvi dao tzv. alternansni kriterijum za najbolju aproksimaciju u smislu (o.1), koja se u njegovu čast zove čebiševska aproksimacija. Dokazao je, izmedju ostalog, da za datu neprekidnu funkciju $x(t)$ definisanu na $[0,1]$ u skupu $\mathcal{P}_n[0,1]$, odnosno $\mathcal{R}_{n,m}[0,1]$ uvek postoji bar jedan element najbolje aproksimacije. Pritom $\mathcal{P}_n[0,1]$ označava skup svih polinoma stepena $\leqslant n$, a $\mathcal{R}_{n,m}[0,1]$ sledeći skup racionalnih funkcija:

$$\mathcal{R}_{n,m}[0,1]=\left\{\frac{a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n}{b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m}\,\middle|\, a_i,b_i\in\mathbb{R};\ t\in[0,1]\Rightarrow b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m>0\right\}.$$

Veliki broj matematičara uopštavao je rezultate Čebiševa u više pravaca. Segment $[a,b]$ zamenjen je proizvoljnim kompaktnim Hausdorff-ovim prostorom T ili čak nekompaktnim prostorom, specijalno sa $[0,+\infty[$ ili $\mathbb{R}$. Umesto realnih funkcija posmatrane su kompleksne funkcije ili čak funkcije sa vrednostima u proizvoljnom normiranom prostoru, specijalno sa vrednostima u pred-Hilbertovom prostoru.

Uopštenja u drugom pravcu išla su na merenje odstupanja drugim izrazima, npr.

(o.2) $$\left[\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right]^{1/2} \quad \text{ili} \quad \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt.$$

Metodi rešavanja problema teorije aproksimacija kada je odstupanje definisano kao u (o.2) bili su dosta drugačiji od metoda koji su primenjivani kod čebiševske aproksimacije.

Bitan korak ka jednoj opštoj teoriji u kojoj se apstrahuju konkretne osobenosti ovog ili onog načina merenja rastojanja, učinjen je kada su funkcije pomoću kojih se aproksimira, kao i funkcija koja se aproksimira počele da se posmatraju kao elementi apstraktnih normiranih ili čak samo metričkih prostora. Rastojanje izmedju funkcija x i y sada se svelo na rastojanje (u smislu metričkog prostora) $d(x,y)$ odnosno na normu razlike: $\|x-y\|$ (u normiranim prostorima).

Kao opšti problem nelinearne teorije aproksimacija u normiranim vektorskim prostorima obično se smatra sledeće:

Neka je dat normiran vektorski prostor X, njegov proizvoljan neprazan podskup V i tačka $x \in X \setminus \overline{V}$. Traže se tačke $v_0 \in V$ koje zadovoljavaju uslov

(o.3) $$\|x-v_0\| = \inf_{v\in V} \|x-v\| =: d(x,V).$$

Tačka v_0 koja zadovoljava (o.3) je najbolja aproksimacija tačke x elementima skupa V. To je ujedno tačno rešenje ovog aproksimacionog problema. Ono ne mora uvek postojati; ako postoji ne mora biti jedinstveno, a u praksi ga je najčešće nemoguće tačno odrediti. Zbog ovih okolnosti od velikog interesa je i posmatranje približnih rešenja gornjeg aproksimacionog problema i to u sledećem smislu.

Neka su normiran vektorski prostor X, skup $V \subset X$ i tačka $x \in X \setminus \overline{V}$ dati kao i gore i neka je $\varepsilon > 0$ ("dovoljno mali" broj). Za svaku tačku $v_0 \in V$ takvu da je zadovoljen uslov

(o.4) $$\|x-v_0\| \leq d(x,V) + \varepsilon$$

kazaćemo da je ε-aproksimacija tačke x elementima skupa V - prema terminologiji koju upotrebljava Singer ([96]).

(o.34.1) $T_{+1}=\{t\in T \mid f(t)-p(t)=\|f-p\|\}$,

(o.34.2) $T_{-1}=\{t\in T \mid f(t)-p(t)=-\|f-p\|\}$,

(o.34.3) $T_{+2}=\{t\in T \mid p(t)=\ell(t)\}$,

(o.34.4) $T_{-2}=\{t\in T \mid p(t)=u(t)\}$,

(o.34.5) $T_p := T_{+1}\cup T_{+2}\cup T_{-1}\cup T_{-2}$.

Sa ovim oznakama on dokazuje sledeća dva stava:

1) Ako je $(T_{+1}\cup T_{+2})\cap(T_{-1}\cup T_{-2})\neq\emptyset$, onda je p najbolja aproksimacija za f .

2) Neka je $f\in C(T)$ i $p\in K$ i neka je $(T_{+1}\cup T_{+2})\cap(T_{-1}\cup T_{-2})=\emptyset$. Tada su sledeća tvrdjenja medjusobno ekvivalentna:

a) p je najbolja aproksimacija za f ;

b) Koordinatni početak prostora $\mathbb{R}^n$ leži u konveksnom omotaču skupa $\{\sigma(t)\hat{t} \mid t\in T_p\}$ gde je $\sigma(t)=-1$ za $t\in T_{-1}\cup T_{-2}$ i $\sigma(t)=+1$ za $t\in T_{+1}\cup T_{+2}$ kao i $\hat{t}:=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$.

c) Postoji $n+1$ uzastopna tačka $t_1<t_2<\cdots<t_{n+1}$ u T_p , tako da je $\sigma(t_i)=(-1)^{i+1}\sigma(t_1)$, $(1\leq i\leq n)$.

Dalje, ako je $(T_{+1}\cap T_{-2})\cup(T_{-1}\cap T_{+2})=\emptyset$, važi stav o jakoj jedinosti najbolje aproksimacije sa ograničenjima. Naime, tada postoji konstanta $\gamma=\gamma(f)$, takva da za svako $q\in K$ važi nejednakost

$$\|f-q\|\geq\|f-p\|+\gamma\|p-q\|. \tag{o.35}$$

Taylor dobijene rezultate primenjuje na odredjivanje tzv. <u>ε-interpolatora</u>. Naime, ako je $f\in C(T)$ i $t_1<t_2<\cdots<t_k$ ($k\leq n+1$) i $\varepsilon>0$ dato, funkcija p iz n-dimenzionog Haar-ovog potprostora V (u odnosu na $[a,b]$) je ε-interpolator za f u tačkama $t_1,t_2,\ldots,t_k$, ako je

$$(\forall i\in I_k)(|f(t_i)-p(t_i)|\leq\varepsilon).$$

Stavimo

$$K(f):=\{p\in V \mid (\forall i\in I_k)(|f(t_i)-p(t_i)|\leq\varepsilon)\}. \tag{o.36}$$

Ako ograničenja definišemo sa

$$u(t):=\begin{cases}+\infty, & t\neq t_i\\ f(t_i)+\varepsilon, & t=t_i\end{cases},\quad \ell(t):=\begin{cases}f(t_i)-\varepsilon, & t=t_i\\ -\infty, & t\neq t_i\end{cases},$$

imamo

skup V veoma često se zadaje kao familija funkcija

$$\{F(a,t) \mid a \in A\}$$

koje zavise od parametra a. Oblast definisanosti parametra a, skup A, obično je otvoren podskup nekog Banahovog prostora, specijalno prostora $\mathbb{R}^n$. Skup A obično se naziva <u>parametarski skup</u>, a ako je on sadržan u $\mathbb{R}^n$, familija funkcija $\{F(a,t) \mid a \in A\}$ naziva se <u>n-parametarska familija</u>. Problem ε-aproksimacije u ovom slučaju svodi se na odredjivanje vrednosti parametra $a_0 \in A$ tako da bude zadovoljena nejednakost

$$(0.5) \quad \max_{t \in T} |f(t) - F(a_0,t)| \leq \inf_{a \in A} \max_{t \in T} |f(t) - F(a,t)| + \varepsilon .$$

Za $\varepsilon = 0$ opet imamo najbolju aproksimaciju funkcije f pomoću parametarske familije $\{F(a,t) \mid a \in A\}$.

Vratimo se opet opštoj nelinearnoj teoriji aproksimacija. Prve rezultate opšte teorije u slučaju aproksimacije konveksnim skupovima u konačno-dimenzionalnom slučaju dali su 1934. godine Bunt ([37]) i 1935. Motzkin ([83], [84]). Pedesetih godina ovog veka u teoriju aproksimacija prodire i funkcionalna analiza. Prve rezultate u beskonačno-dimenzionalnim prostorima dali su Klee ([66], [67], [68]) i Efimov i Stečkin ([45], [46], [47], [48]). 1961. godine nadjeni su ekvivalenti konveksnosti čebiševskih skupova u Hilbertovim prostorima i u prostorima L_p ($p > 1$). Po Klee-u je taj ekvivalent <u>slaba zatvorenost</u>, a po Efimovu i Stečkinu - <u>aproksimativna kompaktnost</u>. Pritom, skup V u metričkom prostoru X je aproksimativno kompaktan ako iz $v_n \in V$ i $d(x,v_n) \to d(x,V)$ sledi postojanje podniza (v_{k_n}) niza (v_n) koji konvergira ka nekom elementu iz V. Prvi primer primene opšte geometrijske teorije dali su Efimov i Stečkin dokazujući da ranije posmatrani skup $\mathcal{R}_{n,m}$ racionalnih funkcija nije čebiševski skup u L_p ($p > 1$).

Aproksimativna kompaktnost blisko je povezana sa neprekidnošću metričke projekcije. Prvi je to uočio Singer, a kasnije su na tome radili mnogi autori kao npr. Brosowski, Wegmann, Deutsch, Wulbert, Ošman, Berdyšev i dr. O ovome će još biti reči kasnije.

za svako $\vartheta \in V_{\vartheta_0}$ gde je skup V_{ϑ_0} definisan sa

$$(o.42)\ V_{\vartheta_0} := \{\vartheta \in V \mid (\ell(t)=\vartheta_0(t) \Rightarrow \vartheta(t)>\vartheta_0(t)) \wedge (u(t)=\vartheta_0(t) \Rightarrow \vartheta(t)<\vartheta_0(t))\}.$$

Uslov (o.42) je oštriji od uslova (o.39)-(o.4o), ali se zato dodatno pretpostavlja slabije svojstvo (WB) za skup V . Pitanje mogućnosti zamene skupa V_{ϑ_0} sa $V_{\vartheta_0} \cup V^*$ u (o.41) ostaje otvoreno. Primerom je pokazano da su stroge nejednakosti u definiciji skupa V_{ϑ_0} neophodne.

Četvrta glava daje jedan algoritam za odredjivanje najboljih aproksimacija u prostoru $C(T,H)$. Ovaj algoritam je još šire primenjiv za odredjivanje ε-aproksimacija ako se pritom koriste dovoljni uslovi za ε-aproksimaciju izvedeni u prvoj i drugoj glavi. U osnovi metoda leži algoritam koji je predložio Krabs za rešavanje problema diskretne linearne aproksimacije (v. [39], [72]). Taj algoritam je prenet na slučaj aproksimacije u prostoru $C(T,H)$ neprekidnih funkcija na kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru T , sa vrednostima u pred-Hilbertovom prostoru H . Od skupa V elemenata iz $C(T,H)$ kojima se aproksimira data funkcija $f \in C(T,H)$ traži se da bude kolmogorovski skup prve vrste, tj. da za njega globalni uslov Kolmogorova bude i neophodan za najbolju aproksimaciju. Klasa ovakvih skupova je dovoljno široka (poklapa se sa klasom tzv. sunaca i obuhvata izmedju ostalog zvezdaste skupove, specijalno i konveksne skupove i potprostore). Po Brosowskom ([17]) i Brosowskom i Wegmann-u ([32]) navode se još neki ekvivalenti uslova da je skup kolmogorovski skup prve vrste - u obliku izvesnih uslova "regularnosti".

Osnova metoda koji je ovde izložen sastoji se u sledećem. Ako je globalni uslov Kolmogorova neophodan i dovoljan za najbolju aproksimaciju, a neki element $\hat{\vartheta}$ ne zadovoljava ovaj uslov, onda se može napraviti poboljšanje, tj. odrediti (na konstruktivan način) element $\hat{\vartheta}_1$ koji je bolja aproksimacija za f nego što je to $\hat{\vartheta}$. U ovom pogledu osnovni su stavovi 6. i 7. koji u slučaju konveksnog skupa V daju metod poboljšavanja polazne aproksimacije $\hat{\vartheta}$ uz odgovarajuću kvantitativnu ocenu stepena poboljšanja. Metod se u principu može primeniti i u slučaju nekonveksnog skupa V , ali to iziskuje

Ako je $F(a_0,\cdot)$ najbolja aproksimacija funkcije $f\in C(T)$ u skupu V, onda za svako $b\in X$ važi

$$\min_{t\in M[f-F(a_0,\cdot)]} [f(t)-F(a_0,t)]\cdot(F'_{a_0}(t)\cdot b)\leq 0. \tag{o.7}$$

U slučaju opšte nelinearne aproksimacije u normiranim prostorima prve korake ka uopštavanju stava Kolmogorova dao je V. N. Nikoljskij 1961. godine ([86]) i 1963. godine ([87]) uvodjenjem fundamentalnog sistema funkcionala. Po njemu skup $\Gamma\subset X^*$ je fundamentalan sistem funkcionala na X ako je Γ $\sigma(X^*,X)$-zatvoren podskup jedinične kugle $K^*\subset X^*$, takav da za svako $x\in X\setminus\{0\}$ postoji funkcional $f\in\Gamma$ sa $f(x)=\|x\|$.

Na osnovu ovoga nastao je tzv. globalni uslov Kolmogorova kojim se naziva svaki od sledeća dva medjusobno ekvivalentna uslova (v. Brosowski [17]):

$$(\forall v\in V)\Big(\min_{f\in\Sigma(x-v_0)\cap\Gamma} \mathrm{Re}\, f(v-v_0)\leq 0\Big), \tag{o.8}$$

$$(\forall v\in V)\Big(\min_{f\in\Sigma(x-v_0)\cap \mathrm{Ep}\,\Gamma} \mathrm{Re}\, f(v-v_0)\leq 0\Big). \tag{o.9}$$

Pritom je stavljeno

$$\Sigma(x):=\{f\in K^*\mid f(x)=\|x\|\}\qquad (x\in X)$$

a $\mathrm{Ep}\,\Gamma$ je skup ekstremalnih tačaka skupa Γ.

Nikoljskij je pokazao da je uslov (o.8) uvek dovoljan za $v_0\in P_V(x)$, a neophodan je u slučaju kada je skup V konveksan. Dalje su na ovome radili Singer, Choquet, Garkavi, Havinson i dr. Uslove pod kojima je (o.8) (odnosno (o.9)) neophodno i dovoljno za $v_0\in P_V(x)$ dao je Brosowski. Ispostavilo se da u ovom pitanju ključnu ulogu igra pojam "sunca" (u svojim raznim varijantama) (v. glavu drugu).

Uporedo sa globalnim uslovom Kolmogorova, koji se tako zove jer u (o.8) v prolazi celo V, uveden je i lokalni uslov Kolmogorova za koji se ispostavilo da je uvek neophodan za $v_0\in P_V(x)$. Pod lokalnim uslovom Kolmogorova podrazumeva se svaki od sledeća dva medjusobno ekvivalentna uslova:

$$(\forall h\in C[v_0,V])\Big(\min_{f\in\Sigma(x-v_0)\cap\Gamma} \mathrm{Re}\, f(h)\leq 0\Big), \tag{o.10}$$

$$(\forall h\in C[v_0,V])\Big(\min_{f\in\Sigma(x-v_0)\cap \mathrm{Ep}\,\Gamma} \mathrm{Re}\, f(h)\leq 0\Big), \tag{o.11}$$

funkcija definisana na otvorenom konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^m$, $A: T \times U \to \mathbb{R}$ - data neprekidna funkcija, a $b \in C(T)$ funkcija koju ćemo smatrati parametrom. U nekim drugim varijantama problema parametarske optimizacije za parametar se uzima ciljna funkcija p, zatim fiksirano $t \in T$ ili pak funkcija A na levoj strani nejednakosti-ograničenja. Ova poslednja varijanta pokazala se najkomplikovanijom i tu je do sada veoma malo uradjeno. Kao što je već rečeno, ovde parametrom smatramo neprekidnu funkciju b na desnoj strani nejednakosti-ograničenja.

Od posebnog interesa je <u>linearna parametarska optimizacija</u> tj. slučaj kada je ciljna funkcija oblika

$$p(x) = \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu x_\nu \ ; \ (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m,$$

a

$$A(t,x) = \langle \tilde{A}(t), x \rangle$$

gde je $\tilde{A}: T \to \mathbb{R}^m$ neprekidna, a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ označava skalarni proizvod u $\mathbb{R}^m$. Većinu rezultata koje ovde koristimo dao je Brosowski (v. [19], [20], [21], [22], [27], [31]).

Prvo se definišu skup Z_b dopustivih tačaka i skup P_b minimalnih rešenja

$$Z_b := \{x \in U \mid (\forall t \in T)(A(t,x) \leq b(t))\},$$

$$P_b := \{v_0 \in Z_b \mid p(v_0) = \inf p(Z_b)\},$$

kao i minimalna vrednost

$$E_b := \inf p(Z_b).$$

Doadavanjem tačke $\infty \notin T$ prostoru T (tako da skup $\{\infty\}$ bude otvoren), dobijamo kompaktan Hausdorff-ov prostor $T' := T \cup \{\infty\}$. Uvodjenjem pomoćnih funkcija

$$(o.44) \qquad \psi_b(t,x) := \begin{cases} p(x), & t = \infty \\ A(t,x) - b(t) + E_b, & t \in T \end{cases}$$

i

$$(o.45) \qquad \varphi_b(x) := \max_{t \in T'} \psi_b(t,x),$$

problem (o.43) sa ograničenjima svodi se na slobodan ekstre-

ε-aproksimacija za x (tj. $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$) ako i samo ako postoji funkcional $f \in K^*$ (K^* je jedinična zatvorena kugla konjugovanog prostora X^*) takav da je

$$(f|V)=0 \quad \wedge \quad f(x-v_0) \geq \|x-v_0\|-\varepsilon .$$

Nešto više o ovome dao je Buck ([36]) razmatrajući primene teorije dualnosti u teoriji aproksimacija. Za slučaj najbolje aproksimacije tačke x elementima potprostora V, on je dao sledeću karakterizaciju:

$$(o.12) \qquad P_V = V \cap \{x + \mathcal{W}\}$$

gde je

$$(o.13) \qquad \mathcal{W} = \bigcup\{W_f \mid f \in K^* \wedge (f|V)=0\},$$

a $W_f = \{y \in X \mid f(y) = \|y\|\}$. Kako je u (o.13) dovoljno ograničiti se na one W_f za koje je f ekstremalna tačka kugle K^*, od interesa je karakterizacija takvih funkcionala. Tu Buck daje ekvivalenciju po kojoj je $f \in \mathrm{Ep}\,K^*$ ako i samo ako je skup $W_f - W_f$ jednak prostoru X. Da bi dobio analo e uslove za ε-aproksimaciju (koju on zove - dobra aproksimacija) uvodi skupove

$$(o.14) \qquad H_f^k := \{y \in X \mid f(y) \geq \|y\| - \tfrac{1}{k}\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

i pokazuje, modifikujući jedan rezultat Phelps-a ([90]) da je funkcional $f \in K^* \cap V^\perp$ ($V^\perp$ je anulator potprostora V, tj. $V^\perp = \{g \in X^* \mid (g|V)=0\}$) ekstremalna tačka kugle K^* ako i samo ako za svako $k \in \mathbb{N}$ važi

$$(o.15) \qquad E = V + (H_f^k - H_f^k).$$

Dimenzija najmanje strane jedinične sfere S^* koja sadrži funkcional f jednaka je kodimenziji zatvorenog potprostora

$$M = \bigcap_{k=1}^{\infty} (V + H_f^k - H_f^k),$$

što se u slučaju $f \in \mathrm{Ep}\,K^*$ svodi na $\mathrm{codim}\, M = 0$ tj. $M = X$. Po analogiji sa skupom $\mathcal{W}$, Buck je definisao skup

$$(o.16) \qquad \mathcal{H}^k := \bigcup\{H_f^k \mid f \in \mathrm{Ep}(K^* \cap V^\perp)\}.$$

Tada važi sledeći stav:

posebno trebalo posmatrati klasu slabo punktualno konveksnih preslikavanja zbog njihove osobine da je uslov (o.46) kod njih neophodan i dovoljan za minimalno rešenje.

Šesta glava daje primer primene nekih rezultata Brosowskog (v. [19]) u problemu aproksimacije funkcije gustine raspodele verovatnoće linearnom kombinacijom datih gustina. Problem je u ovom smislu prvi posmatrao Marsaglia ([78]) u vezi sa kompjuterskim generisanjem slučajnih promenljivih. On daje i metod rešavanja postavljenog problema svodjenjem na diskretan problem linearnog programiranja. Autor ovog rada se u ovoj glavi bavi pitanjem stabilnosti takvih rešenja pri različitim variranjima mreže tačaka preko kojih se vrši diskretizacija, kao i pri poznavanju funkcije gustine samo sa odredjenom relativnom greškom kako u pogledu tačnosti njenog argumenta, tako i u pogledu tačnosti poznavanja njene vrednosti. Dobijeni iskazi o stabilnosti uglavnom se odnose na poluneprekidnost odozdo skupa minimalnih rešenja, što dopušta neprekidnu selekciju, tj. biranje pojedinih minimalnih rešenja koja neprekidno zavise od polaznih promenljivih.

$$P_V^{\nu}(x) = \{v \in V \mid \|v - x\| \leq (1+\nu) d(x,V)\},$$

tj. u odnosu na ovde usvojene oznake je $\varepsilon = \nu \cdot d(x,V)$. On ravnomernu neprekidnost ν-projekcije formuliše u terminima modula neprekidnosti

$$\omega_{\varrho}^{\nu}(t,V) := \sup\{\varrho(P_V^{\nu}(x), P_V^{\nu}(y)) \mid \|x-y\| \leq 1 \wedge d(x,V) \leq 1\},$$

$$\overline{\omega}_{\varrho}^{\nu}(t,V) := \sup\{\varrho(P_V^{\nu}(x), P_V^{\nu}(y)) \mid \|x-y\| \leq 1\}.$$

Pitanje karakterizacije elemenata ε-aproksimacije u opštem nelinearnom slučaju nije još obradjivano. U ovoj glavi, autor rada dao je pre svega niz dovoljnih uslova za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. Oni se baziraju na globalnom uslovu Kolmogorova za najbolju aproksimaciju (v. Brosowski ([17])) i već pomenutom rezultatu Singera u linearnom slučaju. U ovim razmatranjima bitnu ulogu igra skup

$$\Sigma(x - v_0, \varepsilon) := \{f \in K^* \mid \operatorname{Re} f(x - v_0) \geq \|x - v_0\| - \varepsilon\},$$

kao i skup njegovih ekstremalnih tačaka.

Prvo se daje preformulacija Singer-ovog stava za linearan slučaj i to u obliku koji dopušta željeno uopštenje na nelinearan slučaj - stav 3. Stav 4. daje jednu varijantu ovog uslova, ovog puta samo kao dovoljan uslov, ali tako da se umesto

$$\min_{f \in \Sigma(x - v_0, \varepsilon)} \operatorname{Re} f(v) \leq 0 \qquad (v \in V), \tag{o.19}$$

posmatra minimum preko skupa čija je struktura jednostavnija što može biti važno pri numeričkim izračunavanjima. U ovom slučaju za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$ dovoljno je da bude

$$\min_{f \in \operatorname{Ep} K^* \cap \Sigma(x - v_0, \varepsilon)} \operatorname{Re} f(v) \leq 0 \qquad (v \in V). \tag{o.2o}$$

U daljem se daje dovoljan uslov za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(f)$ opšteg tipa (za proizvoljno V) u obliku

$$\min_{f \in \Sigma(x - v_0, \varepsilon)} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq 0 \qquad (v \in V). \tag{o.21}$$

Stav 7. daje ocenu rastojanja $d(x,V)$ odozdo, a ona ima i jasno geometrijsko tumačenje vezano za separaciju tačke od skupa V posredstvom hiperravni. Pošto je primerom pokazano (prema terminologiji koju koristi Liskovec u [76]). Ako je jasno o kojem se ε radi, reći ćemo samo - kvazirešenje.

S obzirom na činjenicu da se u praksi teško odredjuju tačna rešenja aproksimacionih problema, a ne retko to je i nemoguće, približna rešenja imaju veliki značaj. Posebno to dolazi do izražaja u slučaju kada skup V nije proksiminalan, tj. kada za neke $x \in X \setminus \overline{V}$ ni ne postoji najbolja aproksimacija u V ; približna rešenja u smislu (1.2) uvek postoje. Isto tako, i problem jedinosti rešenja kod kvazirešenja otpada jer ovih, osim u "patološkim" slučajevima, ima čak beskonačno mnogo.

Sa skupom svih rešenja problema (1.1) povezano je jedno višeznačno preslikavanje, tzv. metrička projekcija. Sličan pojam uvešćemo i za skup svih rešenja problema (1.2).

DEFINICIJA 1. Metrička projekcija elementa $x \in X \setminus \overline{V}$ na skup V je skup

(1.3) $$P_V(x) := \{v_0 \in V \mid \|x - v_0\| = d(x, V)\}.$$

Samo P_V je višeznačno preslikavanje prostora X u $POT(V)$ (zbog trivijalnosti se u praksi ne posmatraju x iz $\overline{V}$).

DEFINICIJA 2. Metrička ε-projekcija elementa $x \in X \setminus \overline{V}$ na skup V je skup

(1.4) $$P_{V,\varepsilon}(x) := \{v_0 \in V \mid \|x - v_0\| \leq d(x, V) + \varepsilon\}.$$

Samo $P_{V,\varepsilon}$ je višeznačno preslikavanje prostora X u $POT(V)$ (gde opet zbog trivijalnosti ne posmatramo $x \in \overline{V}$).

Ako je

$$K[x, \rho] = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq \rho\} \quad (\rho \geq 0)$$

zatvorena kugla radijusa ρ sa centrom u tački x , lako možemo videti da važe sledeće formule:

(1.5) $$P_V(x) = V \cap K[x, d(x, V)],$$

(1.6) $$P_{V,\varepsilon}(x) = V \cap K[x, d(x, V) + \varepsilon].$$

Specijalno, za $\varepsilon = 0$ metrička ε-projekcija svodi se na običnu metričku projekciju. Više autora ispitivalo je ljen uslov

(o.23) $$t \in A \Rightarrow \|e(t)\|_H = 1.$$

Samu signaturu on obeležava sa $\Sigma(e)$. Dakle,

(o.24) $$\Sigma(e) = \{(t, e(t)) \mid t \in A\}.$$

Skup $A =: M_e$ naziva se baza signature $\Sigma(e)$. Da bi pojam signature iskoristio za karakterizaciju elemenata najbolje aproksimacije, Brosowski je uveo i pojam ekstremalne signature (kao generalizaciju nekih ranijih specijalnih rezultata). Naime, ako je $\vartheta_0 \in V \subset C(T,H)$ i ako je $\Sigma(e)$ signatura na $C(T,H)$, kažemo da je ona ekstremalna za tačku ϑ_0 u odnosu na skup V ako za svako $\vartheta \in V$ važi

(o.25) $$\min_{t \in M_e} \mathrm{Re}\langle e(t), \vartheta(t) - \vartheta_0(t)\rangle \leq 0.$$

Za $f \in C(T,H)$ i signaturu $\Sigma(e)$ koja je ekstremalna za ϑ_0 u odnosu na V i za koju važi jednakost

$$f(t) - \vartheta_0(t) = e(t) \cdot \|f(t) - \vartheta_0(t)\|_H, \quad (t \in M_e),$$

važi sledeća dvostrana ocena

(o.26) $$\min_{t \in M_e} \|f(t) - \vartheta_0(t)\|_H \leq d(f, V) \leq \|f - \vartheta_0\|.$$

Ako se na skupu

$$M[g] = \{t \in T \mid \|g(t)\|_H = \|g\|\}$$

definiše neprekidno preslikavanje

$$e_g(t) = \frac{g(t)}{\|g\|},$$

zbog $\|e_g(t)\|_H = 1$ $(t \in M[g])$, ovo je jedna signatura, koju Brosowski označava sa $\Sigma[g]$. Odatle se izvodi sledeći stav (korišćenjem ocene (o.26)):

Ako je signatura $\Sigma[f - \vartheta_0]$ ekstremalna za ϑ_0 u odnosu na V , onda je ϑ_0 najbolja aproksimacija za f u skupu V.

Polazeći od ovih osnovnih činjenica o signaturama u $C(T,H)$, Brosowski razmatra pitanje neophodnosti uslova tipa (o.25) uvodeći pritom razne varijante "regularnih" skupova V .

Slično uopštenje Brosowski je dao i za slučaj proizvolj-

$$\Sigma(x,\varepsilon) = \overline{co}\,(Ep(\Sigma(x,\varepsilon))), \tag{1.10}$$

gde $\overline{co}(A)$ označava zatvoreni konveksni omotač skupa A, a $Ep(A)$ - skup ekstremalnih tačaka skupa A.

Sada možemo iskazati globalni uslov Kolmogorova na sledeći način:

Element $v_0 \in V$ zadovoljava <u>globalni uslov Kolmogorova</u> na skupu V ako je za svako $v \in V$ ispunjen uslov

$$\min_{f \in \Sigma(x - v_0)} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq 0. \tag{1.11}$$

Minimum u (1.11) dostiže se zbog $\sigma(X^*,X)$-neprekidnosti funkcije $\operatorname{Re} f$ na $\sigma(X^*,X)$-kompaktnom skupu $\Sigma(x - v_0)$.

Ovaj uslov često se raščlanjuje na sledeći način: Element $v_0 \in V$ zadovoljava globalan uslov Kolmogorova na skupu V ako za svako $v \in V$ postoji funkcional $f^v \in X^*$ takav da su ispunjeni sledeći uslovi

1° $f^v \in K^*$, (1.12)
2° $f^v(x - v_0) = \|x - v_0\|$, (1.13)
3° $\operatorname{Re} f^v(v - v_0) \leq 0$. (1.14)

Uslov (1.11) ekvivalentan je sa sledećim uslovom: za svako $v \in V$ važi

$$\min_{f \in Ep\,\Sigma(x - v_0)} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq 0. \tag{1.15}$$

U raščlanjenom obliku, ovaj uslov glasi: za svako $v \in V$ postoji funkcional $f^v \in X^*$ sa

1° $f^v \in Ep\,K^*$, (1.16)
2° $f^v(x - v_0) = \|x - v_0\|$, (1.13)
3° $\operatorname{Re} f^v(v - v_0) \leq 0$. (1.14)

Ekvivalentnost uslova (1.11) i (1.15) posledica je sledeće leme.

<u>LEMA 1</u> (Brosowski ([17])). Neka su v i v_0 proizvoljni elementi normiranog vektorskog prostora X i Σ proizvoljan $\sigma(X^*,X)$-kompaktan podskup od X. Tada su sledeća dva tvrdjenja ekvivalentna:

$$\min_{f \in \Sigma} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq 0, \tag{1.17}$$

W može da bude i nula i na netrivijalnim mestima, oni dobijaju stavove o karakterizaciji minimalnih rešenja problema (o.29) koje primenjuju kod obične čebiševske aproksimacije, kod čebiševske aproksimacije sa ograničenjima i kod optimizacije sa strogo kvazikonveksnim ograničenjima.

Pojam koji je analogan pojmu signature po svojoj nameni za karakterizaciju rešenja aproksimacionih problema je pojam tzv. H-skupa koji je uveo Collatz (v. Collatz i Krabs ([39])). On posmatra aproksimaciju u $C(T,\mathbb{R})$ i skup $D \subset T$ naziva H-skupom za skup $W \subset C(T,\mathbb{R})$ ako se D može predstaviti kao unija dva neprazna skupa D_1 i D_2 tako da ne postoji par funkcija $w, \hat{w} \in W$ sa:

$$t \in D_1 \Rightarrow w(t) - \hat{w}(t) > 0,$$

$$t \in D_2 \Rightarrow w(t) - \hat{w}(t) < 0.$$

Posebna varijanta ovog pojma su tzv. H_1-skupovi koje Collatz posmatra kod jednostrane čebiševske aproksimacije funkcije $f(t)$ iz $C(T,\mathbb{R})$. Ako je $\widetilde{W}$ skup dopustivih funkcija za ovaj problem, tj.

$$\widetilde{W} = \{w \in W \mid (\forall t \in T)(w(t) \geq f(t))\}$$

i $\tilde{\varepsilon} = \tilde{w} - f \geq 0$ – funkcija greške, onda $\tilde{\varepsilon}$ dostiže svoj maksimum na T. Neka je struktura posmatranih funkcija takva da u tačkama $(P_\varkappa)$ ($\varkappa = 1,2,\ldots,k$) važi $\tilde{\varepsilon}(P_\varkappa) = 0$, a u tačkama (Q_μ) ($\mu = 1,2,\ldots,m$)

$$\tilde{\varepsilon}(Q_\mu) = \max_{t \in T} \tilde{\varepsilon}(t).$$

Unija tačaka $(P_\varkappa)$ i (Q_μ) obrazuje po definiciji jedan H_1-skup ako u W nema elementa w takvog da je

$$\varkappa \in I_k \Rightarrow w(P_\varkappa) - \tilde{w}(P_\varkappa) \geq 0,$$

$$\mu \in I_m \Rightarrow w(Q_\mu) - \tilde{w}(Q_\mu) < 0.$$

Dokazuje se da ako tačke $(P_\varkappa)$ i (Q_μ) čine H_1-skup za funkciju $\tilde{w} \in W$ koja je dopustiva za $f \in C(T,\mathbb{R})$, onda je $\tilde{w}$ najbolja jednostrana čebiševska aproksimacija za f.

Autor ovog rada u drugoj glavi uvodi η-kvazisignaturu

Dokaz stava 2. Dokazaćemo samo implikaciju $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$, jer obratna implikacija predstavlja samo očiglednu posledicu opštijeg stava koji će biti dat za proizvoljan skup V.

Neka je zato $v_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(x)$. Zbog pretpostavke da $x \in X \setminus \overline{V}$ je $\delta := d(x,V) > 0$. Na osnovu posledice Hahn-Banach-ovog stava postoji funkcional $f \in X^*$ takav da je $\|f\| = 1$, $f(x) = \delta$ i $f(v) = 0$ za $v \in V$. Zbog $v_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(x)$ imamo

$$\|x - v_0\| \leq \delta + \varepsilon = f(x - v_0) + \varepsilon$$

odakle sledi da važi i c).□

Kao putokaz ka prenošenju globalnog uslova Kolmogorova na nelinearan slučaj ε-aproksimacije može nam poslužiti sledeća preformulacija stava 2.

STAV 3. Neka je V vektorski potprostor normiranog vektorskog prostora X, $v_0 \in V$, $x \in X \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon \geq 0$. Tada su sledeća dva uslova ekvivalentna:

1° $v_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(x)$;

2° $(\forall v \in V)\left(\min\limits_{f \in Ep\,\Sigma(x - v_0,\varepsilon)} \operatorname{Re} f(v) \leq 0\right).$ (1.21)

Dokaz. Prenošenje na slučaj kompleksnog normiranog prostora ne predstavlja nikakav problem, tako da je 1° ekvivalentno sa

$$(1.22) \qquad (\forall v \in V)\left(\min_{f \in \Sigma(x - v_0,\varepsilon)} \operatorname{Re} f(v) \leq 0\right).$$

Kako je skup $\Sigma(x - v_0,\varepsilon)$ $\sigma(X^*,X)$-kompaktan, to je na osnovu leme 1. uslov (1.22) ekvivalentan sa (1.21).□

U iskazu stava 3. figuriše skup $Ep\,\Sigma(x - v_0,\varepsilon)$ ekstremalnih tačaka skupa $\Sigma(x - v_0,\varepsilon)$. Kako taj skup u mnogim za praksu važnim slučajevima ima relativno prostu strukturu, značajno je imati kriterijume za raspoznavanje elemenata iz $Ep\,\Sigma(x - v_0,\varepsilon)$.

U slučaju najbolje aproksimacije, tj. za $\varepsilon = 0$, možemo se pozvati na sledeću lemu.

LEMA 2 (Singer ([96])). Neka je M ekstremalan podskup zatvorenog konveksnog skupa A u linearnom topološkom prostoru X. Tada je

$$(1.23) \qquad Ep(M) = Ep(A) \cap M.$$

u kojima figuriše čebiševska alternansa, samo što ovde umesto skupa kritičnih tačaka u kojima greška dostiže maksimum, figuriše skup tačaka u kojima greška po apsolutnoj vrednosti odstupa od svog maksimuma za ne više od ε . Stavovi 8. i 9., iako u ovom slučaju direktno dokazani, predstavljaju analogone stavova 9. i 10. i prve glave.

Treća glava se bavi nelinearnom čebiševskom aproksimacijom sa ograničenjima tipa nejednakosti. Ambijentni prostor je $C(T,\mathbb{R})$, a na elemente proizvoljnog podskupa V kojim se aproksimira data funkcija f postavljena su dodatna ograničenja tako da se formira skup

$$V^* := \{v\in V \mid (\forall t\in T)(\ell(t)\leq v(t)\leq u(t))\} \tag{0.33}$$

kao skup aproksimirajućih elemenata. Pritom se za funkciju ℓ pretpostavlja da je poluneprekidna odozgo, a za funkciju u da je poluneprekidna odozdo.

Ovakvim tipom aproksimacija bavili su se, izmedju ostalih, Taylor (v. [103], [105]) i Dunham ([42]). Ako je na čitavom skupu T ispunjen uslov $\ell(t)<u(t)$, onda se alternansni kriterijumi mogu preneti i na ovaj slučaj kako je to pokazao Taylor. Sadržajnu i bogatu rezultatima teoriju on razvija za slučaj kada je V n-dimenzionalan Haar-ov potprostor od $C[a,b]$, tj. potprostor u kome svaka ne-nula funkcija ima najviše $n-1$ nula. Pretpostavimo da funkcije $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ čine bazu za V . Neka je dalje T kompaktan podskup intervala $[a,b]$ koji sadrži bar $n+1$ tačku. Taylor definiše skup $K:=\{p\in V \mid (\forall t\in T)(\ell(t)\leq p(t)\leq u(t))\}$ gde se pretpostavlja sledeće:

1° $\ell: T\to[-\infty,+\infty[$;

2° $u: T\to]-\infty,+\infty]$;

3° $T_{-\infty}=\{t\in T \mid \ell(t)=-\infty\}$ i $T_{+\infty}=\{t\in T \mid u(t)=+\infty\}$ su otvoreni podskupovi od T ;

4° ℓ je neprekidna na $T\setminus T_{-\infty}$, u je neprekidna na $T\setminus T_{+\infty}$;

5° $(\forall t\in T)(\ell(t)<u(t))$.

Pod ovim uslovima najbolja aproksimacija funkcije f elementima skupa K uvek postoji. Taylor uvodi i sledeće dalje oznake tačka A ne leži u $\Sigma((1,0))$.

Zbog toga ne možemo da se pozovemo na lemu 2., tako da skup $Ep\,\Sigma(x-v_0,\varepsilon)$ ne možemo da zamenimo skupom $Ep\,K^* \cap \Sigma(x-v_0,\varepsilon)$ a da uslov (1.21) ostane neophodan i dovoljan. Medjutim, možemo pokazati da važi inkluzija

$$Ep\,K^* \cap \Sigma(x-v_0,\varepsilon) \subset Ep\,\Sigma(x-v_0,\varepsilon). \tag{1.25}$$

Formulišimo to u obliku sledeće leme.

<u>LEMA 3</u>. Neka je M zatvoren konveksan podskup zatvorenog konveksnog skupa A u linearnom topološkom prostoru X. Tada važi inkluzija

$$Ep(A) \cap M \subset Ep(M). \tag{1.26}$$

<u>Dokaz</u>. Neka je $x \notin Ep(M)$. Tada postoje tačke $a, b \in M$ i $\lambda \in]0,1[$ tako da je $x=(1-\lambda)a+\lambda b$. No, kako a i b istovremeno leže i u A, x nije ekstremalna tačka skupa A, te $x \notin Ep(A) \cap M$. $\square$

Specijalno, za $A=K^*$ i $M=\Sigma(x-v_0,\varepsilon)$, dobijamo inkluziju (1.25). Na osnovu toga, ako uslov (1.21) zamenimo sa

$$(\forall v \in V)\Big(\min_{f \in Ep\,K^* \cap \Sigma(x-v_0,\varepsilon)} \operatorname{Re} f(v) \leq 0\Big) \tag{1.27}$$

u stavu 3. narušava se ekvivalentnost 1° sa 2°. Tako dobijamo sledeći stav čiji je rezultat nešto slabiji od rezultata stava 3., ali je struktura skupa preko koga se računa minimum jednostavnija.

<u>STAV 4</u>. Neka je V vektorski potprostor normiranog vektorskog prostora X, $v_0 \in V$, $x \in X \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon > 0$. Tada, ako važi uslov (1.27), onda je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. $\square$

<u>Dokaz</u> neposredno sledi iz stava 3 i inkluzije (1.25).

Struktura skupa $Ep\,K^* \cap \Sigma(x-v_0,\varepsilon)$ relativno je jednostavna. Ako uzmemo u obzir i (1.20), vidimo da je od interesa odrediti elemente skupa $Ep(K^* \cap V^\perp)$. Rezultat iz koga možemo neposredno izvesti stav o karakterizaciji ekstremalnih tačaka skupa $K^* \cap V^\perp$ dali su Buck i Phelps (v. Buck [36], Phelps ([90])). Ovaj rezultat izložićemo prema monografiji Holmes-a ([59]) - prilagodjeno situaciji koja nas ovde interesuje.

(o.37) $K=K(f)=\{p\in V \mid (\forall t\in T)(\ell(t)\leq p(t)\leq u(t))\}$.

Taylor dokazuje da za f postoji jedinstven najbolji ε-interpolator jednoznačno odredjen proizvoljnim skupom od $n+1$ tačaka iz T u kojima funkcija $f-p$ alternira.

Dunham u [42] posmatra proizvoljan podskup V u $C(T,\mathbb{R})$ (gde je T kompaktan topološki prostor). Za date neprekidne funkcije ℓ i u takve da je $\ell<u$ definiše skup $V^*=\{v\in V \mid \ell\leq v\leq u\}$ i za datu funkciju traži najbolju aproksimaciju u V^*. Kao važno dodatno svojstvo skupa V javlja se tzv. <u>svojstvo (B)</u> ("betweenness property"). Po definiciji, familija funkcija V ima svojstvo (B) ako za svaki par elemenata v_0, $v_1\in V$ postoji preslikavanje $[0,1]\ni\theta\mapsto v_\theta\in V$, tako da je za svako $t\in T$, $\theta\mapsto v_\theta(t)$ ili strogo monotona neprekidna funkcija, ili konstanta. On dokazuje sledeći stav:

Dovoljan uslov da $v_0\in V^*$ bude najbolja aproksimacija sa ograničenjima za funkciju f jeste da ne postoji funkcija $v\in V$ takva da je

(o.38) $t\in M[f-v_0] \Rightarrow [f(t)-v_0(t)]\cdot[v(t)-v_0(t)]>0$,

(o.39) $v_0(t)=\ell(t) \Rightarrow v(t)\geq v_0(t)$,

(o.40) $v_0(t)=u(t) \Rightarrow v(t)\leq v_0(t)$.

Ako skup V ima svojstvo (B), onda je navedeni uslov i neophodan.

U ovom radu se u trećoj glavi posmatra slabije svojstvo od svojstva (B), tzv. <u>svojstvo (WB)</u> ("weak betweenness property"). Pre svega su stavovima 1.-4. dati dovoljni uslovi za najbolju aproksimaciju i ε-aproksimaciju sa ograničenjima koji su posledica odgovarajućih stavova za opšti slučaj. Zatim se posmatra jedan neophodan uslov za najbolju aproksimaciju funkcije f elementima iz V^*. Naime, pod dopunskim uslovom da skup V ima svojstvo (WB), kao i ako je donje ograničenje ℓ poluneprekidno odozgo, a gornje ograničenje u poluneprekidno odozdo, pokazuje se da za svaku najbolju aproksimaciju $v_0\in V^*$ funkcije f važi uslov tipa Kolmogorova

(o.41) $\min\limits_{t\in M[f-v_0]} [v(t)-v_0(t)]\,\mathrm{sgn}[f(t)-v_0(t)]\leq 0$

Da bismo dobili $f \notin Ep\,K^*$, ostaje da dokažemo $f+h$ i $f-h$ leže u kugli K^*. Neka je zato $\|x\| \leqslant 1$ i $\alpha := \|x\| - f(x)$. Razlikujemo dva slučaja:

Slučaj 1: $\alpha = 0$. Ovde je za svako $\lambda > 0$: $\lambda x \in A_f$ pa je $|h(x)| \leqslant 1/\lambda$, odakle je $h(x) = 0$. Zato je

$$|(f \pm h)(x)| = |f(x)| = \|x\| \leqslant 1.$$

Slučaj 2: $\alpha > 0$. Imamo $\|\alpha^{-1}x\| - f(\alpha^{-1}x) = \alpha^{-1}\alpha = 1$, tako da $\alpha^{-1}x \in A_f$, pa je i $|h(\alpha^{-1}x)| \leqslant 1$. Dakle, $|h(x)| \leqslant \alpha := \|x\| - f(x)$ pa je opet

$$(f \pm h)(x) \leqslant f(x) + |h(x)| \leqslant f(x) + [\|x\| - f(x)] = \|x\|.$$

Prema tome, uvek je $\|f \pm h\| \leqslant 1$, tako da f nije ekstremalna tačka od K^*. $\square$

STAV 5 (Buck-Phelps). Neka je X realan normiran prostor i V njegov vektorski potprostor. Funkcional $f \in V^\perp \cap K^*$ je ekstremalna tačka skupa $V^\perp \cap K^*$ ako i samo ako je

$$X = V + A_f - A_f.$$

Dokaz. Neka je σ seminorma definisana sa

$$\sigma(x) := d(x, V) = \inf\{\|x-y\| : y \in V\}$$

i neka je $K_\sigma := \{x \in X \mid \sigma(x) \leqslant 1\}$. Ako je $K := \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ - - zatvorena jedinična kugla prostora X, imamo $K_\sigma = V + K$. Za

$$f \in K_\sigma^\circ := \{g \in X^* \mid \sup_{x \in K_\sigma} |g(x)| \leqslant 1\}$$

(polara skupa K_σ) stavimo

$$B_f := \{x \in X \mid \sigma(x) - f(x) \leqslant 1\}.$$

Po lemi 4. je $f \in Ep(K_\sigma^\circ)$ ako i samo ako je $B_f - B_f$ gust u X. Lako se dokazuje da je $K_\sigma^\circ = V^\perp \cap K^*$. Pokažimo sada da je $V + A_f - A_f$ gust u $B_f - B_f$. Kako je $\sigma(x+y) \leqslant \|x\|$ za $y \in V$, vidimo da je $V + A_f \subset B_f$, pa dakle i

$$V + A_f - A_f \subset B_f - B_f.$$

Za $x \in B_f$ stavimo $u_n := (1-\frac{1}{n})x$ ($n \in N$). Imamo

$$\sigma(u_n) - \|u_n\| = (1-\tfrac{1}{n})(\sigma(x) - \|x\|) \leqslant 1 - \tfrac{1}{n} < 1.$$

Zato postoje $y_n \in V$ sa $\|x_n + y_n\| < 1 + f(u_n) = 1 + f(u_n + y_n)$

poseban način odredjivanja parametra λ koji se javlja u ovim ocenama.

Sam opis algoritma analogan je onome kod Krabsa za diskretnu linearnu aproksimaciju. Na svakom koraku potrebno je rešavati jedan optimizacioni problem za odredjivanje elemenata pomoću kojih se ostvaruje sledeći korak u algoritmu. Pokazano je da nije neophodno naći tačno rešenje tog problema konveksnog programiranja, već je dovoljno odgovarajući maksimum odrediti sa unapred datim ograničenjem za relativnu grešku.

Ukoliko tražimo samo ε-rešenje aproksimacionog problema, na svakom koraku treba proveravati ispunjenost odgovarajućih dovoljnih uslova datih u prvoj i drugoj glavi. Ovi uslovi su posebno efikasni ako je V takvo da $\mathrm{aff}(V)$ bude ravan oslonca na kuglu $K[f,d(f,V)]$, jer je tada odgovarajući uslov tipa Kolmogorova za ε-aproksimaciju neophodan i dovoljan.

Ako se traži tačno rešenje (bar teorijski), moramo se ograničiti slučajem kada je V konveksan zatvoren skup u konačno-dimenzionalnom potprostoru od $C(T,H)$. Tada stavovi 8.-1o. pokazuju da je bar jedna tačka nagomilavanja konstruisanog niza aproksimanata $(\hat{v}_j)\subset V$ najbolja aproksimacija za f u skupu V. Pitanje brzine konvergencije ovog postupka ostaje otvoreno.

Na kraju ove glave dati su neki primeri u kojima se za numeričko izračunavanje može primeniti ovaj metod (tj. koji se uklapaju u šemu ovog algoritma). Tu spada i problem aproksimacije integralnog operatora sa proizvoljnim neprekidnim jezgrom integralnim operatorom sa degenerisanim jezgrom - problem na koji ukazuju Collatz i Krabs ([39]).

<u>Peta glava</u> bavi se pitanjem karakterizacije rešenja problema <u>parametarske optimizacije</u>. Osnovni problem parametarske optimizacije može se iskazati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}&\text{minimizirati: } p(x)\\ &\text{uz ograničenja: } (\forall t\in T)(A(t,x)\leq b(t))\end{aligned}\qquad(o.43)$$

gde je T kompaktan Hausdorff-ov prostor, $p:U\to\mathbb{R}$ ciljna

$$\mathrm{Re}\, f_0(v - v_0) \leqslant 0 .$$

Tada dobijamo sledeći niz nejednakosti:

$$\|x - v\| \geqslant |f_0(x - v)| \geqslant \mathrm{Re}\, f_0(x - v) \geqslant \mathrm{Re}\, f_0(x - v) +$$

$$+ \mathrm{Re}\, f_0(v - v_0) = \mathrm{Re}\, f_0(x - v_0) \geqslant \|x - v_0\| - \varepsilon .$$

Prelaskom na infimum po $v \in V$ dobijamo

$$d(x, V) = \inf_{v \in V} \|x - v\| \geqslant \|x - v_0\| - \varepsilon ,$$

odakle je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. □

U uslovu (1.28) javlja se $v - v_0$ umesto v koje je figurisalo u analognim uslovima u stavovima 2, 3 i 4. U slučaju kada je V potprostor i $v_0 \in V$ važi $v - v_0 \in V \Leftrightarrow v \in V$, tako da je globalni uslov Kolmogorova mogao da ima nešto jednostavniji oblik.

Pre nego što predjemo na razmatranje drugih varijanti globalnog uslova Kolmogorova, dajemo jednu ocenu rastojanja $d(x, V)$ odozdo. Specijalan slučaj ovog stava za prostor $C(T)$ neprekidnih funkcija (realnih ili kompleksnih) na kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru T , dat je u knjizi Collatz-a i Krabs-a ([39]).

<u>STAV 7</u>. Neka je V proizvoljan neprazan skup u normiranom vektorskom prostoru X , $v_0 \in V$ i D proizvoljan podskup jedinične kugle K^* konjugovanog prostora X^*. Ako je ispunjen uslov

$$(1.29) \qquad (\forall v \in V) \left(\inf_{f \in D} \mathrm{Re}\, f(v - v_0) \leqslant 0 \right),$$

onda važi nejednakost

$$(1.30) \qquad \inf_{f \in D} \mathrm{Re}\, f(x - v_0) \leqslant d(x, V) .$$

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da (1.30) ne važi, nego da je

$$d(x, V) < \inf_{f \in D} \mathrm{Re}\, f(x - v_0) =: \tau$$

i neka je τ_0 tako odabrano da bude $d(x, V) < \tau_0 < \tau$. Po definiciji rastojanja $d(x, V)$ postoji $v_1 \in V$ tako da je $d(x, V) \leqslant$ $\leqslant \|x - v_1\| < \tau_0$. Tada imamo

$$\mathrm{Re}\, f(x - v_1) \leqslant \|x - v_1\| < \tau_0 < \tau \leqslant \mathrm{Re}\, f(x - v_0) , \quad (f \in D),$$

malni problem minimizacije φ_{θ} na U . Pritom je stav 3. i njegova preformulacija - stav 4. (prema Brosowskom) varijanta globalnog uslova Kolmogorova prenesenog na slučaj parametarske optimizacije. Kao i u nelinearnoj teoriji aproksimacija, i ovde se postavlja pitanje kada je ovaj uslov i neophodan za minimalno rešenje. Brosowski je pokazao (v. definiciju 5. i stav 6.) da je u slučaju kada je preslikavanje Ψ_{θ} slabo punktualno konveksno svako minimalno rešenje $\vartheta_0 \in P_{\theta}$ okarakterisano sledećim uslovom: za svako $\vartheta \in U$ važi nejednakost

$$(o.46) \quad \min\{p(\vartheta_0)-p(\vartheta), \min_{t\in M_{\theta,\vartheta_0}} [A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta)]\} \leq 0$$

gde je stavljeno

$$M_{\theta,\vartheta_0} := \{t\in T \mid \varphi_{\theta}(\vartheta_0) = \psi_{\theta}(t,\vartheta_0)\}.$$

Autor ovog rada dao je primere 1.-5. koji bliže objašnjavaju klasu punktualno konveksnih preslikavanja, koja su ujedno i slabo punktualno konveksna. Osnovni rezultat je stav 8. (i njemu sličan stav 9.) koji daje šire uslove pod kojima je bar neko od minimalnih rešenja okarakterisano uslovom (o.46). Zahteva se da je višeznačno preslikavanje $\theta \longmapsto P_{\theta}$ poluneprekidno odozgo; da skup P_{θ} bude kompaktan za svako θ , kao i da familija funkcija $A(\cdot, P_{\theta})$ bude konveksna. Dokaz stava je veoma dug i koristi teoremu Ky Fan-a o nepokretnim tačkama višeznačnih preslikavanja u lokalno konveksnom prostoru. Ideje za konstrukciju odredjenih funkcija u dokazu potiču od Brosowskog koji je sličan metod primenio u nelinearnoj teoriji aproksimacija u normiranom prostoru u vezi sa karakterizacijom raznih tipova "sunaca".

Na kraju ove glave daje se pregled još nekih daljih rezultata iz parametarske optimizacije koji pripadaju Brosowskom. Postavlja se pitanje mogućnosti prenošenja sličnih stavova o stabilnosti, koji su za slučaj skupa minimalnih rešenja poznati, na skup dopustivih tačaka.

Od posebnog interesa je pitanje mogućnosti prenošenja algoritma sličnog onom u četvrtoj glavi na odredjivanje minimalnih rešenja parametarske optimizacije. U tom pogledu bi

$\xi^2 + \eta^2 \leq 1\}$ – jedinični krug. Neka je dalje $x = (\frac{3}{2}, 0)$, $\varepsilon = 1/2$, $v_0 = (\frac{1}{2}, 0)$, $v = (1,0)$. S obzirom na reprezentaciju funkcionala iz $(\mathbb{R}_2^2)^*$ kao vektora iz $\mathbb{R}_2^2$ i vrednosti $f(x)$ kao skalarnog proizvoda $\langle f, x\rangle$, lako se vidi da je u ovom slučaju

$$\Sigma(x - v_0, \varepsilon) = \{(\xi,\eta) \mid \xi^2 + \eta^2 \leq 1 \ \wedge \ \xi \geq \tfrac{1}{2}\}$$

Tada je $\langle f, v - v_0\rangle \geq \frac{1}{4}$ za svako $f \in \Sigma(x - v_0, \varepsilon)$, pa uslov (1.28) nije ispunjen iako je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$.

Ovaj primer je u izvesnom smislu karakterističan za situaciju u kojoj uslov (1.28) nije neophodan za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. Smetnja toj neophodnosti je u "debljini" skupa V u pravcu vektora $f - v_0$. U mnogim praktično važnim situacijama, kao npr. kod linearne aproksimacije sa ograničenjima (što je prema usvojenoj terminologiji pretvara ustvari u nelinearnu aproksimaciju), ova situacija se može izbeći. U vezi sa tim dajemo sledeći stav. Pre iskaza samog stava uvedimo sledeće oznake:

$\mathrm{aff}(V)$ = afini omotač skupa V,
$\mathrm{lin}(V)$ = linearni omotač (lineal) skupa V.

<u>STAV 8</u>. Neka je X realan normiran vektorski prostor, V njegov proizvoljan podskup, $v_0 \in V$, $x \in X \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon > 0$. Neka je još ispunjen sledeći uslov:

(1.31) Ravan $\mathrm{aff}(V)$ je ravan oslonca na kuglu $K[x, d(x,V)]$.

Tada je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$ ako i samo ako za svako $v \in V$ važi

$$\min_{f \in \Sigma(x - v_0, \varepsilon)} f(v - v_0) \leq 0 .$$

<u>Dokaz</u>. Dovoljnost važi i u opštem slučaju, bez uslova (1.31), tako da nema šta da se dokazuje.

Neophodnost. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathrm{aff}(V) = \mathrm{lin}(V)$ (inače bismo izvršili translaciju za proizvoljan vektor $-v$ gde je $v \in V$). Na osnovu jedne od posledica Hahn-Banach-ovog stava, postoji zatvoren hiperpotprostor $W \supset \mathrm{lin}(V)$, koji je hiperravan oslonca na kuglu $K[x, d(x,V)]$. Pretpostavimo sada da je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. Pokažimo da je tada i $v_0 \in P_{W,\varepsilon}(x)$. Za to je dovoljno po-

./.

G L A V A   P R V A

DOVOLJNI USLOVI ZA ε-APROKSIMACIJU U NORMIRANIM VEKTORSKIM PROSTORIMA

Pretpostavimo da je X normiran vektorski prostor (nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva) i neka je V proizvoljan neprazan podskup od X. Neka je dalje $x \in X \setminus \overline{V}$ fiksiran element prostora X.

Osnovni problem opšte teorije aproksimacija (nelinearan slučaj) je odredjivanje svih elemenata $v_0 \in V$ takvih da je

$$(1.1) \qquad \|x - v_0\| = \inf_{v \in V} \|x - v\| = d(x, V).$$

Svaki element $v_0 \in V$ koji zadovoljava (1.1) zove se <u>najbolja aproksimacija</u> elementa x elementima skupa V. U ovom slučaju radi se o <u>tačnom rešenju</u> ovog aproksimacionog problema. U specijalnom slučaju, kada je V vektorski potprostor (ili samo linearna mnogostrukost) od X, imamo problem <u>linearne teorije aproksimacija</u> (u opštem slučaju rešavanjem ovog problema bavi se <u>nelinearna teorija aproksimacija</u>). U praksi, naročito kod izračunavanja metodima numeričke analize, skup V je najčešće familija elemenata od X koja zavisi od nekog parametra (najčešće iz $\mathbb{R}^n$). Nelinearnost u problemu često nastaje usled ograničenja elemenata potprostora dodatnim uslovima - obično u vidu nejednakosti.

Za razliku od tačnog rešenja problema (1.1), od velikog interesa je i njegovo <u>približno rešenje</u> i to u sledećem smislu. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan (dovoljno mali) realan broj. Treba odrediti sve elemente $v_0 \in V$ takve da je

$$(1.2) \qquad \|x - v_0\| \leqslant d(x, V) + \varepsilon.$$

Ovakvu aproksimaciju Singer ([96]) naziva <u>ε-aproksimacija</u>, a Buck ([36]) <u>dobra aproksimacija</u> ("good approximation" nasuprot "best approximation" za najbolju aproksimaciju). Element $v_0 \in V$ koji zadovoljava uslov (1.2) je <u>ε-kvazirešenje</u>

$$(1.33) \qquad \min_{f \in \Sigma(x-v_0)} \operatorname{Re} f(v-v_0) \leq \varepsilon .$$

Dokaz stava 9. Neka je $v \in V$ i f_0 funkcional iz $\operatorname{Ep}\Sigma(x-v_0)$ takav da je $\operatorname{Re} f_0(v-v_0) \leq \varepsilon$. Tada imamo sledeći niz nejednakosti:

$$\|x-v\| \geq |f_0(x-v)| \geq \operatorname{Re} f_0(x-v) + [\operatorname{Re} f_0(v-v_0) - \varepsilon] =$$

$$= \operatorname{Re} f_0(x-v_0) - \varepsilon = \|x-v_0\| - \varepsilon ,$$

gde poslednja jednakost važi zbog $f \in \Sigma(x-v_0)$. Prelaskom na infimum po $v \in V$ dobijamo

$$d(x,V) = \inf_{v \in V} \|x-v\| \geq \|x-v_0\| - \varepsilon ,$$

odakle je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. □

U opštem slučaju uslov (1.32) nije neophodan kao što to pokazuje sledeći primer.

PRIMER 3. Neka je $X = \mathbb{R}^2_2$ euklidska ravan, $V = \{(\xi,\eta) | \xi = 0\}$, $x = (1,0)$, $\varepsilon = 1/2$, $v_0 = (0, \frac{\sqrt{5}}{2})$ i $v = (0, -\frac{\sqrt{5}}{2})$. Tada je

$$\operatorname{Ep}\Sigma(x-v_0) = \Sigma(x-v_0) = \{(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{\sqrt{5}}{2})\} =: \{f\}.$$

Odatle se dobija

$$f(v-v_0) = \langle f, v-v_0 \rangle = \tfrac{5}{3} > \tfrac{1}{2} = \varepsilon ,$$

tako da uslov (1.32) nije ispunjen. Kako je $d(x,V) = 1$, $\|x-v_0\| = \frac{3}{2}$, ipak važi $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. □

Stavovi 8 i 9 mogu se kombinovati tako da se dobije sledeći stav.

STAV 10. Neka je V proizvoljan podskup normiranog vektorskog prostora X , $v_0 \in V$, $x \in X \setminus \overline{V}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ i $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Ako je za svako $v \in V$ ispunjen uslov

$$(1.34) \qquad \min_{f \in \operatorname{Ep}\Sigma(x-v_0,\varepsilon_1)} \operatorname{Re} f(v-v_0) \leq \varepsilon_2 ,$$

onda je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. □

Dokaz. Neka je $v \in V$ i $f_0 \in \operatorname{Ep}\Sigma(x-v_0,\varepsilon_1)$ tako da je $\operatorname{Re} f_0(v-v_0) \leq \varepsilon_2$. Tada imamo sledeći niz nejednakosti:

$$\|x-v\| \geq |f_0(x-v)| \geq \operatorname{Re} f_0(x-v) \geq \operatorname{Re} f_0(x-v) +$$

svojstva neprekidnosti, poluneprekidnosti kao i druga topološka svojstva višeznačnog preslikavanja $P_{V,\varepsilon}: X \to POT(V)$, kao npr. Wulbert ([118], [119]), Liskovec ([76]) i Berdyšev ([7]). Pitanjem karakterizacije ε-kvazirešenja u linearnom slučaju bavili su se Buck ([36]) i Singer ([96]).

U daljem ćemo se uglavnom baviti pitanjem prenošenja tzv. globalnog uslova Kolmogorova na ε-aproksimaciju. Ovaj uslov za slučaj tačnih rešenja problema opšte nelinearne teorije aproksimacija uveli su V. N. Nikoljskij ([86]) i Brosowski ([17]). Dalje izlaganje u ovom odeljku je znatno proširenje i upotpunjenje autorovog rada [63].

DEFINICIJA 2. Neka je X normiran vektorski prostor, a X^* njemu konjugovan prostor (tj. prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na X). Za element $x \in X$ stavimo:

$$(1.7) \qquad \Sigma(x) := \{ f \in X^* \mid \|f\| \leqslant 1 \ \wedge \ f(x) = \|x\| \},$$

$$(1.8) \qquad \Sigma(x,\varepsilon) := \{ f \in X^* \mid \|f\| \leqslant 1 \ \wedge \ \mathrm{Re}\, f(x) \geqslant \|x\| - \varepsilon \}.$$

Sa K^* označimo jediničnu kuglu prostora X^* tj.

$$K^* := \{ f \in X^* \mid \|f\| \leqslant 1 \},$$

a sa S^* jediničnu sferu u X^* tj.

$$S^* := \{ f \in X^* \mid \|f\| = 1 \}.$$

Pošto je K^* $\sigma(X^*,X)$-kompaktan skup, a skupovi $\Sigma(x)$ i $\Sigma(x,\varepsilon)$ $\sigma(X^*,X)$-zatvoreni podskupovi od K^*, to su i skupovi $\Sigma(x)$ i $\Sigma(x,\varepsilon)$ $\sigma(X^*,X)$-kompaktni. Lako se vidi da su ova dva skupa i konveksna. Npr. ako $f, g \in \Sigma(x,\varepsilon)$ i $0 < \lambda < 1$, imamo

$$\|(1-\lambda)f + \lambda g\| \leqslant (1-\lambda)\|f\| + \lambda\|g\| \leqslant (1-\lambda) + \lambda = 1;$$
$$\mathrm{Re}[(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)] = (1-\lambda)\mathrm{Re}\, f(x) + \lambda \mathrm{Re}\, g(x) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\lambda)(\|x\| - \varepsilon) + \lambda(\|x\| - \varepsilon) = \|x\| - \varepsilon;$$

odakle sledi konveksnost od $\Sigma(x,\varepsilon)$. Slično se dokazuje u slučaju skupa $\Sigma(x)$. Na osnovu teoreme Krejn-Miljmana važe sledeće formule

$$(1.9) \qquad \Sigma(x) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Ep}(\Sigma(x))),$$

cije gde se izbor parametara ε_1 i ε_2 neposredno odražava na jednostavnost rešavanja (u numeričkom smislu) aproksimacionog zadatka.

Neka je V proizvoljan vektorski potprostor normiranog vektorskog prostora X, $x \in X \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon > 0$. Prema stavu 3. uslov

$$(\forall v \in V)\left(\min_{f \in Ep\,\Sigma(x - v_0, \varepsilon)} \operatorname{Re} f(v) \leq 0 \right)$$

je neophodan i dovoljan za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. U ovom slučaju najpogodnije je uzeti $\varepsilon_1 = \varepsilon$ i $\varepsilon_2 = 0$, jer se pri ovoj kombinaciji parametara ε_1 i ε_2 uslovom (1.34) karakteriše čitav skup $P_{V,\varepsilon}(x)$. Na osnovu primera 3. (u kome je skup V potprostor), vidimo da za $\varepsilon_1 = 0$ i $\varepsilon_2 = \varepsilon$ uslov (1.34) nije neophodan za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. Kako je, s druge strane, uslov (1.34) uvek dovoljan, vidimo da je deo skupa $P_{V,\varepsilon}(x)$ okarakterisan sa (1.34) u ovom slučaju strogo manji od onog pri $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = 0$.

Posmatrajmo sada slučaj kada je V konačno-dimenzionalan potprostor normiranog vektorskog prostora X. Tada je struktura skupa ekstremalnih tačaka $Ep\,\Sigma(x - v_0)$ veoma jednostavna, tako da je najpraktičnije uslov (1.34) primeniti sa $\varepsilon_1 = 0$ i $\varepsilon_2 = \varepsilon$. Da bismo tačno iskazali odgovarajući stav, potrebna nam je sledeća lema.

LEMA 5 (Singer [96]). Neka je X normiran vektorski prostor i X_k k-dimenzionalan vektorski potprostor od X. Neka je dalje $f \in X^*$ i $\|(f|X_k)\| = 1$. Tada postoje ekstremalne tačke $f_1, f_2, \ldots, f_h$ jedinične kugle K^* (gde je $h \leq k$ za realan prostor X i $h \leq 2k-1$ za kompleksan prostor X) i pozitivni skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ takvi da je

(1.39) $$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1;$$

(1.40) $$(\forall v \in X_k)\left(f(v) = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(v) \right).$$

Tada po analogiji sa Singerovim stavom za tačnu aproksimaciju (v. [96], str. 170), možemo dobiti sledeća dva stava.

STAV 11. Neka je X normiran vektorski prostor, V n-di-

44

$$\min_{f \in Ep\Sigma} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leqslant 0. \tag{1.18}$$

Primetimo da skup ekstremalnih tačaka $Ep\Sigma$ ne mora da bude $\sigma(X^*,X)$-zatvoren, dakle ni $\sigma(X^*,X)$-kompaktan. Ipak, minimum u (1.18) se dostiže.

Značaj globalnog uslova Kolmogorova u opštoj nelinearnoj teoriji aproksimacija ogleda se u sledećem stavu.

STAV 1 (Brosowski ([17])). Ako element $v_0 \in V$ zadovoljava globalni uslov Kolmogorova na skupu V, onda je v_0 najbolja aproksimacija za x u skupu V.

U slučaju kada je skup V konveksan (specijalno, ako je V potprostor od X), globalni uslov Kolmogorova je neophodan i dovoljan.

Razmotrimo sada sličan uslov kod karakterizacije elemenata ε-aproksimacije. U slučaju kada je V vektorski potprostor od X, odgovarajući rezultat dao je Singer.

STAV 2 (Singer ([96])). Neka je X realan normiran vektorski prostor, V vektorski potprostor od X, $v_0 \in V$, $x \in X \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon \geqslant 0$. Tada su sledeća dva uslova medjusobno ekvivalentna:

1° $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$;

2° Postoji funkcional $f \in X^*$ takav da je

a) $f \in K^*$;

b) $(\forall v \in V)(f(v) = 0)$;

c) $f(x - v_0) \geqslant \|x - v_0\| - \varepsilon$.

Uvedimo sada još sledeću oznaku:

$$V^{\perp} := \{f \in X^* \mid (\forall y \in V)(f(y) = 0)\}, \tag{1.19}$$

gde je V proizvoljan podskup od X.

Iskaz stava 2. može se sada dati i u sledećem sažetom obliku

$$v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x) \Leftrightarrow \Sigma(x - v_0, \varepsilon) \cap S^* \cap V^{\perp} \neq \emptyset. \tag{1.2o}$$

Primetimo da stav važi i u slučaju da se u preseku na desnoj strani formule (1.2o) izostavi skup S^*.

prostor, ali je skup $\Sigma(x-v_0)$ sadržan u jednoj konačno-dimenzionalnoj strani jedinične sfere S^* konjugovanog prostora (tj. ako je S^* kvazi-poliedralna (v. Amir, Deutsch [2])) imamo situaciju sličnu onoj u stavu 12., ali ne i onoj u stavu 11. Preciznije, važi sledeći stav.

STAV 13. Neka je X realan normiran vektorski prostor, V proizvoljan neprazan podskup od X, $x \in X \setminus \overline{V}$, $v_0 \in V$ i $\varepsilon > 0$. Neka je dalje skup $\Sigma(x-v_0) \subset S^*$ n-dimenzionalan (tj. $dim(lin(\Sigma(x-v_0)))=n$). Tada je za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$ dovoljno da postoji k ekstremalnih funkcionala $f_1, f_2, \ldots, f_k \in Ep\,\Sigma(x-v_0)$ ($1 \leq k \leq n+1$) i k realnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > 0$ tako da važe uslovi (1.39), (1.43) i (1.44). □

U ovom slučaju, zbog specijalno jednostavne strukture skupa $\Sigma(x-v_0)$, očigledno je da je za praktičnu upotrebu najpogodniji izbor parametara: $\varepsilon_1 = 0$ i $\varepsilon_2 = \varepsilon$.

Na kraju ove glave dajemo primer primene stava 9. na slučaj kada je $X = C(T)$. Na osnovu stava o reprezentaciji ekstremalnih tačaka jedinične sfere konjugovanog prostora $(C(T))^*$ (v. npr. Loran [77]) i odgovarajućeg oblika globalnog uslova Kolmogorova u prostoru $C(T)$ (v. npr. Collatz, Krabs [39]) dobija se sledeći stav.

STAV 14. Neka je $X = C(T)$, $V \subset C(T)$, $v_0 = v_0(t) \in V$, $x = x(t) \in X \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon \geq 0$. Ako je za neko $t_0 \in T$ ispunjen uslov

$$(1.45) \quad \min_{t \in M[x-v_0]} Re\{\overline{[x(t)-v_0(t)]} \cdot [v(t)-v_0(t)]\} \leq \varepsilon \cdot |x(t_0)-v_0(t_0)|,$$

onda je $v_0(t) \in P_{V,\varepsilon}(x(t))$. □

Pritom je

$$M[x-v_0] := \{t \in T \mid |x(t)-v_0(t)| = \|x-v_0\|\}$$

skup tzv. kritičnih tačaka funkcije $x-v_0$.

Detaljnije o slučaju prostora $C(T)$ biće govora u drugoj glavi.

Pritom za podskup M zatvorenog konveksnog skupa A u linearnom topološkom prostoru kažemo da je ekstremalan podskup od A ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) M je zatvoren i konveksan;

b) Iz $x,y \in A$, $(1-\lambda)x+\lambda y \in M$, $0<\lambda<1$, sledi da $x,y \in M$.

Ekstremalne tačke skupa A su prema tome njegovi jednočlani ekstremalni podskupovi.

Na osnovu leme 2. je

$$\text{(1.24)} \qquad \mathrm{Ep}\,\Sigma(x-v_0) = \mathrm{Ep}\,K^* \cap \Sigma(x-v_0),$$

jer je $\Sigma(x-v_0)$ ekstremalan podksup od K^*. Da bismo ovo poslednje dokazali, pretpostavimo da je $0<\lambda<1$, $f,g \in K^*$ i $(1-\lambda)f+\lambda g \in \Sigma(x-v_0)$. Zbog $f,g \in K^*$ je

$$f(x-v_0) \leqslant \|x-v_0\|, \quad g(x-v_0) \leqslant \|x-v_0\|,$$

pa ako bismo pretpostavili da bar jedan od f,g ne leži u $\Sigma(x-v_0)$, npr. g , bilo bi

$$g(x-v_0) < \|x-v_0\|.$$

Kako je K^* konveksan skup, važi: $(1-\lambda)f+\lambda g \in K^*$ tako da se u tom slučaju dobija

$$((1-\lambda)f+\lambda g)(x-v_0) = (1-\lambda)f(x-v_0)+\lambda g(x-v_0) \leqslant (1-\lambda)\|x-v_0\|+$$
$$+\lambda g(x-v_0) < (1-\lambda)\|x-v_0\|+\lambda\|x-v_0\| = \|x-v_0\|,$$

odakle sledi da

$$(1-\lambda)f+\lambda g \notin \Sigma(x-v_0),$$

što je suprotno pretpostavci.

U slučaju $\varepsilon>0$, skup $\Sigma(x-v_0,\varepsilon)$ ne mora biti ekstremalan podskup od K^* kao što to pokazuje sledeći jednostavan primer.

PRIMER 1. Neka je $X=\mathbb{R}^2_2$ tj. euklidska ravan snabdevena euklidskom metrikom, $V=\{(0,\eta) \mid \eta \in \mathbb{R}\}$, $x=(1,0)$, $v_0=(0,0)$. U ovom slučaju je $X^* \cong X$ pa je $K^*=\{(\xi,\eta) \mid \xi^2+\eta^2 \leqslant 1\}$. Neka je npr. $\varepsilon \leqslant 1/2$. Tada tačke $A(1-2\varepsilon,0)$ i $B(1,0)$ leže u K^*, sredina duži AB , tačka $C(1-\varepsilon,0)$ leži u $\Sigma((1,0))$, a prostor H . Za grafik

(2.2) $$\Gamma(e) := \{(t, e(t)) \mid t \in A\}$$

kažemo da je kvazisignatura tačnosti η ili, kraće, η-kvazisignatura ako je ispunjen sledeći uslov:

(2.3) $$t \in A \Rightarrow 1-\eta \leq \|e(t)\|_H \leq 1.$$

Skup A zovemo baza η-kvazisignature $\Gamma(e)$ i obeležavamo ga sa M_e .

Kolekcija svih η-kvazisignatura (pri konstantnom η) u $C(T,H)$ na prirodan način snabdeva se strukturom poretka. Stavimo, naime,

(2.4) $$\Gamma(e_1) \prec \Gamma(e_2) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} M_{e_1} \subset M_{e_2} \wedge (e_2 | M_{e_1}) = e_1.$$

Neposredno se dokazuje da $\Gamma(e_1) \prec \Gamma(e_2)$ važi ako i samo ako je $\Gamma(e_1) \subset \Gamma(e_2)$.

DEFINICIJA 2. Neka je V proizvoljan podskup prostora $C(T,H)$ i $v_0 \in V$. η-kvazisignatura $\Gamma(e)$ na prostoru T je ekstremalna za v_0 u odnosu na skup V ako za svako $v \in V$ važi:

(2.5) $$\min_{t \in M_e} \operatorname{Re}\langle e(t), v(t) - v_0(t)\rangle \leq 0.$$

Ako je $\Gamma(e)$ ekstremalna za svako $v_0 \in V$, kažemo da je ona ekstremalna η-kvazisignatura za skup V . Ako je $\Gamma(e)$ ekstremalna η-kvazisignatura za v_0 u odnosu na V , a ni jedna u njoj strogo sadržana signatura nije ekstremalna za v_0 u odnosu na V , kažemo da je $\Gamma(e)$ primitivna ekstremalna η-kvazisignatura za v_0 u odnosu na V .

STAV 1. η-kvazisignatura $\Gamma(e)$ na T je ekstremalna za v_0 u odnosu na V ako i samo ako sadrži (u smislu inkluzije) bar jednu ekstremalnu η-kvazisignaturu za v_0 u odnosu na V .

Dokaz. Ako je $\Gamma(e)$ ekstremalna za v_0 u odnosu na V , nema šta da se dokazuje zbog trivijalne inkluzije $\Gamma(e) \subset \Gamma(e)$. Obratno, ako je $\Gamma(e_0)$ ekstremalna za v_0 u odnosu na V i $\Gamma(e_0) \subset \Gamma(e)$, onda je, prema (2.4), i $M_{e_0} \subset M_e$ pa važi sledeća relacija:

Pre svega, za $f\in K^*$ definišemo skup

$$A_f := \{x\in X \mid f(x)\geq \|x\|-1\}. \tag{1.28}$$

Primetimo da se A_f definiše istom relacijom kao i skup $\Sigma(x,1)$. Razlika je naravno u tome što je kod A_f fiksiran funkcional f , dok je kod $\Sigma(x,1)$ fiksirano $x\in X$.

LEMA 4. Funkcional $f\in K^*$ je ekstremalna tačka kugle K^* ako i samo ako je skup

$$A_f - A_f := \{x-y \mid x,y\in A_f\}$$

gust u X (X je realan normiran prostor).

Dokaz. Skup A_f je konveksan. Zbog

$$A_f \supset \{x\in X \mid f(x) > \|x\|-1\} \ni 0,$$

on je i okolina nule u X . Neposredno se dokazuje da je tada i $A_f - A_f$ konveksan. Na osnovu teoreme o strogoj separaciji, konveksan skup $M\subset X$ nije gust u X ako i samo ako postoji funkcional $g\in X^*\setminus\{0\}$ koji je (odozgo) ograničen na M .

Pretpostavimo prvo da $f\notin \operatorname{Ep} K^*$. Tada postoji funkcional $g\in X^*\setminus\{0\}$ takav da $f+g, f-g\in K^*$. Odatle je

$$|(f+g)(x)|\leq \|x\|,\ |(f-g)(x)|\leq \|x\|,\ (x\in X).$$

Specijalno, dobijamo i relacije

$$g(x)\leq \|x\|-f(x),\ g(x)\leq \|x\|+f(x),\ (x\in X).$$

Kako je $-A_f=\{x\in X \mid \|x\|+f(x)\leq 1\}$, imamo za $x\in A_f$: $g(x)\leq 1$, a zatim za $z=x-y\in A_f-A_f$ $(x,y\in A_f)$:

$$g(z) = g(x)+g(-y)\leq 1+1 = 2$$

pa je netrivijalan funkcional g na $A_f - A_f$ odozgo ograničen. Prema tome, $A_f - A_f$ nije gust u X .

Obratno, pretpostavimo da $A_f - A_f$ nije gust u X . Tada postoji funkcional $h\in X^*\setminus\{0\}$ koji je na $A_f - A_f$ odozgo ograničen, npr. sa 1 . Kako je $A_f\subset A_f - A_f$ i skup $A_f - A_f$ uravnotežen, to je

$$\sup_{x\in A_f} |h(x)|\leq 1.$$

Stavimo

$$M_e := \{t_1, t_2, \ldots, t_p\} \; ; \quad e(t_\nu) := w_\nu \quad (\nu \in I_p).$$

Ukoliko η-kvazisignatura $\Gamma(e)$ ne bi bila ekstremalna za V, onda bi postojali kompleksni brojevi z_0 i z_1 (tj. konstantne funkcije na T sa vrednostima, redom, z_0 i z_1) tako da je

$$\min_{t \in M_e} \mathrm{Re}\,[e(t) \cdot (\overline{z_1 - z_0})] > 0.$$

No, tada za svako $\nu \in I_p$ važi

$$\mathrm{Re}\,[e(t_\nu) \cdot (\overline{z_1 - z_0})] = \mathrm{Re}\,[w_\nu \cdot (\overline{z_1 - z_0})] > 0$$

Sabiranjem ovih relacija za razne $\nu \in I_p$ dobijamo

$$0 < \sum_{\nu=1}^{p} \mathrm{Re}\,[w_\nu \cdot (\overline{z_1 - z_0})] = \mathrm{Re}\Big[\Big(\sum_{\nu=1}^{p} w_\nu\Big) \cdot (\overline{z_1 - z_0})\Big] = \mathrm{Re}\, 0 = 0,$$

što je kontradikcija.

Specijalno, može se uzeti dvočlana ekstremalna η-kvazisignatura

$$\{(t_1, \alpha e^{i\varphi}), (t_2, -\alpha e^{i\varphi})\},$$

gde je $1 - \eta \leqslant |\alpha| \leqslant 1$, a t_1, t_2 dve proizvoljne tačke iz T.

PRIMER 2. Neka je $T = [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) i $H = \mathbb{R}$. Prostor $C(T,H)$ u ovom slučaju svodi se na $C(T,\mathbb{R})$. Za podskup V uzmimo skup svih razlomaka oblika

$$\frac{A(t)}{B(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m}, \tag{2.7}$$

gde su m i n fiksirani prirodni brojevi i

$$\mathrm{dg}\, A \leqslant n \quad \wedge \quad \mathrm{dg}\, B \leqslant m \quad \wedge \quad (\forall t \in [a,b])(B(t) > 0).$$

Pretpostavimo, osim toga, da je razlomak $A(t)/B(t)$ redukovan (tj. da su polinomi $A(t)$ i $B(t)$ uzajamno prosti).

Neka je $v_0(t) := A_0(t)/B_0(t)$ element iz V takav da je $\mathrm{dg}\, A_0 = n - \nu$ i $\mathrm{dg}\, B_0 = m - \mu$ i neka je $k := m + n + 2 - \min\{\mu, \nu\}$. Uočimo niz tačaka $t_1, t_2, \ldots, t_k$ takav da je

$$a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leqslant b$$

i stavimo $e(t_\nu) := \alpha_\nu \cdot (-1)^\nu$ ($\nu \in I_k$). Pritom neka je za svako (poslednja jednakost izlazi iz $f\in V^{\perp}$), pa je $u_n+y_n\in A_f$. Slično, za $z\in B_f$ stavimo $v_n:=(1-\frac{1}{n})z$ ($n\in N$) i odredimo $y_n'\in V$. Tada je

$$(u_n+y_n)-(v_n+y_n')\in A_f-A_f$$

odnosno, $u_n-v_n\in V+A_f-A_f$. Osim toga je $\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=x-z$, pa je skup $V+A_f-A_f$ gust u B_f-B_f.

Za sada je dokazano da $f\in Ep(K^*\cap V^{\perp})$ ako i samo ako je $V+A_f-A_f$ gust u X. Dokažimo da je ovo poslednje ekvivalentno sa $V+A_f-A_f=X$. Kako je A_f konveksna okolina nule, $\operatorname{int} A_f$ je neprazan i konveksan. Odatle je i unutrašnjost skupa $V+A_f-A_f$ neprazan i konveksan skup. Ako bi postojao element $x\in X\setminus(V+A_f-A_f)$, on bi se mogao separirati od $V+A_f-A_f$ zatvorenom hiperravni, što bi protivrečilo činjenici da je $V+A_f-A_f$ gust u X. $\square$

Za $0<\varepsilon\leqslant 1$ je

$$\varepsilon A_f=\{x\in X \mid \|x\|-f(x)\leqslant\varepsilon\},$$

što se neposredno dokazuje. Na osnovu toga možemo iskazati sledeću posledicu stava 5.

<u>POSLEDICA</u>. Funkcional $f\in V^{\perp}\cap K^*$ je ekstremalna tačka skupa $V^{\perp}\cap K^*$ ako i samo ako je za svako $n\in N$:

$$X=V+\tfrac{1}{n}A_f-\tfrac{1}{n}A_f.$$

Posmatrajmo sada nelinearnu aproksimaciju, tj. opšti slučaj kada je V proizvoljan neprazan podskup normiranog vektorskog prostora X. Za ovaj slučaj možemo da iskažemo sledeći stav.

<u>STAV 6</u>. Neka je V neprazan podskup normiranog vektorskog prostora X, $v_0\in V$, $x\in X\setminus\overline{V}$ i $\varepsilon\geqslant 0$. Ako za svako $v\in V$ važi nejednakost

$$\min_{f\in\Sigma(x-v_0,\varepsilon)} \operatorname{Re} f(v-v_0)\leqslant 0, \tag{1.28}$$

onda je $v_0\in P_{V,\varepsilon}(x)$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $v\in V$. Iz (1.28) sledi da postoji funkcional $f_0\in\Sigma(x-v_0,\varepsilon)$ takav da je

Relacija (2.4) u $\mathcal{A}$ definiše jedno parcijalno uredjenje. Posmatrajmo proizvoljan lanac $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ čije ćemo elemente označiti sa $\Gamma(e_\beta)$ gde indeks β prolazi linearno uredjen skup B . Dakle,

$$\mathcal{B} = \{\Gamma(e_\beta) \mid \beta \in B\}. \tag{2.9}$$

Kratkoće radi, stavimo $M_\beta := M_{e_\beta}$. Po definiciji indeksnog skupa B iz $\beta_1 \succ \beta_2$ sledi $\Gamma(e_{\beta_1}) \supset \Gamma(e_{\beta_2})$. Stavimo

$$M := \bigcap_{\beta \in B} M_\beta . \tag{2.1o}$$

Pokažimo da M nije prazan skup. Ako bi, naime, bilo $M = \emptyset$ zbog kompaktnosti prostora T , našao bi se konačan podskup indeksa $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset B$ takav da je

$$M_{\beta_1} \cap M_{\beta_2} \cap \dots \cap M_{\beta_n} = \emptyset .$$

Zbog linearne uredjenosti familije $\mathcal{B}$ i na osnovu (2.4) bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je

$$M_{\beta_1} \supset M_{\beta_2} \supset \dots \supset M_{\beta_n} .$$

No, odatle sledi da je $M_{\beta_n} = \emptyset$, što nije moguće. Prema tome, mora biti $M \neq \emptyset$.

Neka je sada e_o restrikcija preslikavanja e na M . Preslikavanje e_o je neprekidno preslikavanje zatvorenog skupa M u jediničnu kuglu prostora H , takvo da je

$$t \in M \Rightarrow 1 - \eta \leqslant \| e_o(t) \|_H \leqslant 1 .$$

Prema tome, $\Gamma(e_o)$ je jedna η-kvazisignatura i njena baza je skup $M_{e_o} = M$.

Dokažimo da je $\Gamma(e_o)$ ekstremalna η-kvazisignatura za ϑ_o u odnosu na V . Ako to ne bi bilo tačno, postojao bi element $\vartheta \in V$ takav da važi relacija

$$t \in M \Rightarrow \mathrm{Re}\langle e_o(t), \vartheta(t) - \vartheta_o(t) \rangle > 0 .$$

Pošto je skup M zatvoren, dakle i kompaktan, postoji realan broj $\alpha > 0$ takav da je

$$t \in M \Rightarrow \mathrm{Re}\langle e_o(t), \vartheta(t) - \vartheta_o(t) \rangle \geqslant \alpha > 0 .$$

odakle je

$$\mathrm{Re}\, f(v_1 - v_0) = \mathrm{Re}\, f(x - v_0) - \mathrm{Re}\, f(x - v_1) > \tau - \tau_0 > 0$$

odnosno,

$$\inf_{f \in D} \mathrm{Re}\, f(v_1 - v_0) \geq \tau - \tau_0 > 0$$

što je u suprotnosti sa (1.29). □

Stav 7. ima jednostavno geometrijsko tumačenje. Naime, za $f \in D$ posmatramo (realnu) hiperravan

$$H_{f,v_0} := \{ y \in X \mid \mathrm{Re}\, f(y - v_0) = 0 \}.$$

Ako se pretpostavi da je infimum sa leve strane u (1.3o) pozitivan (u protivnom tvrdjenje nema nikakvu vrednost jer je uvek $d(x,V) \geq 0$), uslov (1.29) obezbedjuje da za svaku tačku $v \in V$ postoji $f \in D$ tako da hiperravan H_{f,v_0} strogo razdvaja tačke v i x . Po Ascoli-jevoj formuli za računanje rastojanja od tačke do hiperravni tada imamo (imajući u vidu da je $f \in D \subset K^*$)

$$\inf_{f \in D} \mathrm{Re}\, f(x - v_0) \leq \inf_{f \in D} \frac{|\mathrm{Re}\, f(x - v_0)|}{\|f\|} = \inf_{f \in D} d(x, H_{f,v_0}) \leq d(x, V).$$

U specijalnom slučaju, kada je $D = \Sigma(x - v_0)$, imamo za svako $f \in D$:

$$\mathrm{Re}\, f(x - v_0) = \|x - v_0\|,$$

pa je, korišćenjem (1.3o)

$$d(x,V) \leq \|x - v_0\| = \inf_{f \in \Sigma(x - v_0)} \mathrm{Re}\, f(x - v_0) \leq d(x, V),$$

odakle je $\|x - v_0\| = d(x,V)$ tj. $v_0 \in P_V(x)$. Time je na drugi način dokazano da je globalni uslov Kolmogorova dovoljan za to da tačka $v_0 \in V$ bude najbolja aproksimacija za x u skupu V .

Dok je globalni uslov Kolmogorova i neophodan za najbolju aproksimaciju u širokoj klasi skupova - sunaca (čime su obuhvaćeni zvezdasti skupovi i, specijalno, konveksni skupovi i linearne mnogostrukosti), u slučaju dobre aproksimacije "ne-neophodnost" može biti i gruba.

<u>PRIMER 2</u>. Neka je X euklidska ravan $\mathbb{R}^2_2$, a $V = \{(\xi, \eta):$

Neka je $V \subset C(T,H)$, $f \in C(T,H) \setminus \overline{V}$ i $v_0 \in V$. Tada je $\|f - v_0\| > 0$. Stavimo

$$(2.11)\quad M_\varepsilon[f - v_0] := \{t \in T \mid \|f(t) - v_0(t)\|_H \geq \|f - v_0\| - \varepsilon\}.$$

Osim toga, neka je $\varepsilon < \|f - v_0\|$ i $\eta := \varepsilon / \|f - v_0\|$. Skup $M_\varepsilon[f - v_0] \subset T$ je zatvoren, pa je grafik preslikavanja $\tilde{e}$: $M_\varepsilon[f - v_0] \to H$ definisanog sa

$$(2.12)\qquad \tilde{e}(t) := \frac{f(t) - v_0(t)}{\|f - v_0\|},$$

uzimajući u obzir (2.11), jedna η-kvazisignatura. Pritom je baza ove η-kvazisignature $M_{\tilde{e}} = M_\varepsilon[f - v_0]$.

STAV 4. Neka je $V \subset C(T,H)$, $f \in C(T,H) \setminus \overline{V}$, $v_0 \in V$ $\varepsilon < \|f - v_0\|$ i $\Gamma(\tilde{e})$ gore definisana η-kvazisignatura. Ako je $\Gamma(\tilde{e})$ ekstremalna za v_0 u odnosu na V, onda je $v_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(f)$.

Dokaz. Drugim rečima, treba dokazati da iz

$$(2.13)\quad (\forall v \in V)\left(\min_{t \in M_{\tilde{e}}} \mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t), v(t) - v_0(t)\rangle \leq 0\right)$$

sledi $v_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(f)$. Neka je zato v proizvoljan element skupa V. Po pretpostavci, postoji $t_v \in M_{\tilde{e}}$ tako da je

$$(2.14)\qquad \mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t_v), v(t_v) - v_0(t_v)\rangle \leq 0.$$

Koristeći redom definiciju skupa $M_\varepsilon[f - v_0]$, relaciju (2.14) i definiciju preslikavanja $\tilde{e}$, dobijamo sledeći niz nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\|f - v_0\| &\leq \varepsilon + \|f(t_v) - v_0(t_v)\|_H \leq \varepsilon + \|f(t_v) - v_0(t_v)\|_H - \\
&- \frac{\|f - v_0\|}{\|f(t_v) - v_0(t_v)\|_H} \mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t_v), v(t_v) - v_0(t_v)\rangle = \varepsilon + \\
&+ \frac{\|f - v_0\|}{\|f(t_v) - v_0(t_v)\|_H}\left[\mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t_v), f(t_v) - v_0(t_v)\rangle - \mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t_v), v(t_v) - v_0(t_v)\rangle\right] \\
&= \varepsilon + \frac{\|f - v_0\|}{\|f(t_v) - v_0(t_v)\|_H} \mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t_v), f(t_v) - v(t_v)\rangle \leq \varepsilon + \\
&+ \frac{\|f - v_0\|}{\|f(t_v) - v_0(t_v)\|_H} \|\tilde{e}(t_v)\|_H \cdot \|f(t_v) - v(t_v)\|_H \leq \varepsilon + \|f - v\|.
\end{aligned}$$

Prelaskom na infimum po $v \in V$ dobijamo

$$\|f - v_0\| \leq \varepsilon + d(f, V),$$

kazati da je $d(x,W)=d(x,V)$. Zbog $V\subset W$ je svakako $d(x,W)\leqslant d(x,V)$. Ukoliko bi bilo $d(x,W)<d(x,V)$ postojala bi tačka $w\in W$ takva da je

$$d(x,W)\leqslant \|x-w\|<d(x,V),$$

pa W ne bi bila hiperravan oslonca na kuglu $K[x,d(x,V)]$. Zato je $d(x,W)=d(x,V)$ pa je i $v_0\in P_{W,\varepsilon}(x)$. Primenimo sada stav 2. Na osnovu njega postoji funkcional $f_0\in K^*\cap W^{\perp}$, takav da je $f_0(x-v_0)\geqslant \|x-v_0\|-\varepsilon$. Zbog $V\subset W$ je $W^{\perp}\subset V^{\perp}$, pa je za $v,v_0\in V$ ispunjen uslov

$$f_0(v-v_0)=f_0(v)-f_0(v_0)=0-0=0;$$

$$f_0(x-v_0)\geqslant \|x-v_0\|-\varepsilon.$$

Dakle, funkcional f_0 leži u skupu $\Sigma(x-v_0,\varepsilon)$ pa je

$$\min_{f\in\Sigma(x-v_0,\varepsilon)} f(v-v_0)\leqslant f_0(v-v_0)=0$$

što je i trebalo dokazati. □

Posmatrajmo sada dovoljne uslove za dobru aproksimaciju kod koje teret greške u odnosu na tačno rešenje problema pada na samo nejednakost u globalnom uslovu Kolmogorova, dok se skup funkcionala uzima kao kod najbolje aproksimacije, tj. $\Sigma(x-v_0)$ ili $\mathrm{Ep}\,\Sigma(x-v_0)$. Pritom je od velikog značaja za primenu činjenica da skupovi $\Sigma(x-v_0)$ i $\mathrm{Ep}\,\Sigma(x-v_0)$ imaju jednostavniju strukturu nego, respektivno, $\Sigma(x-v_0,\varepsilon)$ i $\mathrm{Ep}\,\Sigma(x-v_0,\varepsilon)$. Ako je jedinična sfera prostora X poliedralna, skup $\mathrm{Ep}\,\Sigma(x-v_0)$ ima samo konačno mnogo elemenata, kao npr. za $X=\mathbb{R}_1^n$ i $X=\mathbb{R}_\infty^n$.

STAV 9. Neka je V proizvoljan neprazan podskup normiranog vektorskog prostora X, $v_0\in V$, $x\in X\setminus\overline{V}$ i $\varepsilon>0$. Ako za svako $v\in V$ važi uslov

$$\min_{f\in \mathrm{Ep}\,\Sigma(x-v_0)} \mathrm{Re}\, f(v-v_0)\leqslant\varepsilon, \tag{1.32}$$

onda je $v_0\in P_{V,\varepsilon}(x)$.

Napomena. Primenom leme 1, uz translaciju čitave slike za vektor y_0 takav da je $\mathrm{Re}\, f(y_0)=\varepsilon$, pokazuje se da se uslov (1.32) može zameniti sa

Kao u primeru 2. glave prve, suština neispunjenosti uslova (2.13) leži u "debljini" skupa V u pravcu vektora $f - v_o$. Stav 8. glave prve neposredno se prenosi na ovaj slučaj i dobija sledeću formu:

STAV 6. Neka je H pred-Hilbertov prostor, V proizvoljan podskup od $C(T,H)$, $v_o \in V$, $f \in C(T,H) \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon > 0$. Neka je dalje $\tilde{e}: M_\varepsilon[f - v_o] \to H$ preslikavanje definisano sa (2.12) i neka je $\mathrm{aff}(V)$ ravan oslonca na kuglu $K[f, d(f,V)]$. Da bude $v_o \in P_{V,\varepsilon}(f)$, neophodno je i dovoljno da za svako $v \in V$ bude ispunjen uslov

$$(2.19) \qquad \min_{t \in M_\varepsilon[f - v_o]} \mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t), v(t) - v_o(t) \rangle \leq 0.$$

Napomena. U slučaju da je V vektorski potprostor od $C(T,H)$ (koji zbog $f \in C(T,H) \setminus \overline{V}$ nije svuda gust u $C(T,H)$), imamo $v - v_o \in V$ ako i samo ako je $v \in V$, tako da se uslov (2.19) svodi na

$$(2.2o) \qquad \min_{t \in M_\varepsilon[f - v_o]} \mathrm{Re}\langle \tilde{e}(t), v(t) \rangle \leq 0.$$

Imajući u vidu (2.12) i (2.16), uslov (2.19) se u slučaju prostora $C(T,\mathbb{C})$ može napisati u sledećem obliku

$$(2.21) \qquad \min_{t \in M_\varepsilon[f - v_o]} \mathrm{Re}\{[v(t) - v_o(t)] \cdot \mathrm{sgn}[f(t) - v_o(t)]\} \leq 0.$$

U slučaju prostora $C(T,\mathbb{R})$ uslov (2.19) izgleda isto kao i (2.21), samo odsustvuje oznaka realnog dela "Re".

Navedimo još jedan dokaz dovoljnosti uslova (2.21) u prostoru $C(T,\mathbb{R})$.

STAV 7. Neka je V proizvoljan podskup prostora $C(T,\mathbb{R})$, $v_o \in V$, $f \in C(T,\mathbb{R}) \setminus \overline{V}$ i $\varepsilon \geq 0$. Ako je ispunjen uslov

$$(2.22) \qquad \min_{t \in M_\varepsilon[f - v_o]} [v(t) - v_o(t)] \cdot \mathrm{sgn}[f(t) - v_o(t)] \leq 0$$

za svako $v \in V$, onda je $v_o \in P_{V,\varepsilon}(f)$.

Dokaz. Imajmo u vidu da je ovde

$$(2.23) \qquad M_\varepsilon[f - v_o] = \{t \in T \mid |f(t) - v_o(t)| \geq \|f - v_o\| - \varepsilon\}.$$

Skup $M_\varepsilon[f - v_o]$ raspada se na disjunktnu uniju dva zatvorena skupa:

$$+ [\operatorname{Re} f_0(v - v_0) - \varepsilon_2] = \operatorname{Re} f_0(x - v_0) - \varepsilon_2 \geq$$
$$\geq (\|x - v_0\| - \varepsilon_1) - \varepsilon_2 = \|x - v_0\| - \varepsilon,$$

odakle prelaskom na infimum po $v \in V$ dobijamo $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. $\square$

Formalno, stav lo. obuhvata stavove 8. i 9. S druge strane, on je samo njihovo formalno uopštenje i objedinjenje tako da je naveden posle njih.

Slično kao u odnosu izmedju (1.32) i (1.33), uslov (1.34) može se zameniti njemu ekvivalentnim uslovom

$$(1.35) \qquad \min_{f \in \Sigma(x - v_0, \varepsilon_1)} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq \varepsilon_2 .$$

Zbog ranije ustanovljene inkluzije

$$\operatorname{Ep} K^* \cap \Sigma(x - v_0, \varepsilon_1) \subset \operatorname{Ep} \Sigma(x - v_0, \varepsilon_1)$$

uslov (1.34) je posledica uslova

$$(1.36) \qquad \min_{f \in \operatorname{Ep} K^* \cap \Sigma(x - v_0, \varepsilon_1)} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq \varepsilon_2$$

koji je, prema tome, takodje dovoljan za $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$.

Definišimo sada sledeće skupove

$$(1.37) \qquad A(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \{ v_0 \in V \mid (\forall v \in V)(\min_{f \in \operatorname{Ep} \Sigma(x - v_0, \varepsilon_1)} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq \varepsilon_2)\} ;$$

$$(1.38) \qquad B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \{ v_0 \in V \mid (\forall v \in V)(\min_{f \in \operatorname{Ep} K^* \cap \Sigma(x - v_0, \varepsilon_1)} \operatorname{Re} f(v - v_0) \leq \varepsilon_2)\} ;$$

gde je $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ i $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, pri čemu je $\varepsilon > 0$ unapred zadat realan broj. Zbog (1.25) je

$$B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset A(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Postavlja se sledeći problem.

<u>Problem</u>. Odrediti parametre $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ koji zadovoljavaju uslov $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ (gde je $\varepsilon > 0$ unapred zadato) tako da skup $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, odnosno $B(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ bude što je moguće veći (u smislu inkluzije). Problem ima verovatno potpuniji smisao u konkretnim slučajevima zadavanja podskupa V .

U vezi sa ovim problemom razmotrimo dve konkretne situa-

(2.27) $$\min_{t\in M[f-v_0]} [v(t)-v_0(t)]\,\mathrm{sgn}[f(t)-v_0(t)] \leq \varepsilon,$$

onda je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(f)$.

Dokaz. Analogno kao kod dokaza stava 7., skup $M[f-v_0]$ raspada se na disjunktnu uniju zatvorenih skupova

$$M^+[f-v_0] = \{t\in T \mid f(t)-v_0(t) = \|f-v_0\|\}$$

i

$$M^-[f-v_0] = \{t\in T \mid f(t)-v_0(t) = -\|f-v_0\|\},$$

tako da je funkcija

$$t \longmapsto [v(t)-v_0(t)]\,\mathrm{sgn}[f(t)-v_0(t)]$$

neprekidna na $M[f-v_0]$. Dalji tok dokaza se ne razlikuje od onog u stavu 7. $\square$

Kombinacijom stavova 7. i 8. neposredno se dobija sledeći stav.

STAV 9. Neka je $V \subset C(T,\mathbb{R})$, $v_0 \in V$, $f \in C(T,\mathbb{R})\setminus\overline{V}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ i $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$. Ako je za svako $v\in V$ ispunjen uslov

(2.28) $$\min_{t\in M_{\varepsilon_1}[f-v_0]} [v(t)-v_0(t)]\,\mathrm{sgn}[f(t)-v_0(t)] \leq \varepsilon_2,$$

onda je $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(f)$. $\square$

menzionalan vektorski potprostor od X, $x \in X \setminus V$, $v_0 \in V$ i $\varepsilon > 0$. Tada su sledeća dva tvrdjenja ekvivalentna

1° $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$.

2° Postoji k ekstremalnih tačaka jedinične kugle K^* konjugovanog prostora X^* (gde je $1 \leqslant k \leqslant n+1$ ako su skalari realni, a $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$ ako su skalari kompleksni) i k brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > 0$ tako da važi (1.39) i

$$(\forall v \in V)\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(v) = 0\right); \tag{1.41}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x - v_0) \geqslant \|x - v_0\| - \varepsilon. \ \square \tag{1.42}$$

STAV 12. Neka je X normiran vektorski prostor, V n-dimenzionalan vektorski potprostor od X, $x \in X \setminus V$, $v_0 \in V$ i $\varepsilon > 0$. Tada iz uslova 1° sledi uslov 2°:

1° Postoji k ekstremalnih tačaka jedinične kugle K^* konjugovanog prostora X^* (gde je $1 \leqslant k \leqslant n+1$ ako su skalari realni, a $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$ ako su skalari kompleksni) i k brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > 0$ tako da važi (1.39) i

$$(\forall v \in V)\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(v) \leqslant \varepsilon\right); \tag{1.43}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x - v_0) = \|x - v_0\|. \tag{1.44}$$

2° $v_0 \in P_{V,\varepsilon}(x)$. $\square$

Ovi stavovi su ustvari preformulacije stavova 2. i 9. na slučaj kada je skup V n-dimenzionalam potprostor. Broj ekstremalnih funkcionala koji učestvuju u iskazima stavova 11. i 12. je u realnom slučaju ograničen brojem za 1 većim, a u kompleksnom slučaju brojem za dva većim od onoga o kome se govori u lemi 5. Ovo potiče otud što je u uslovima stavova 11. i 12. ambijentni prostor

$$V_0 := V \oplus \mathrm{lin}(x),$$

koji je $(n+1)$-dimenzionalan. Tačke iz $X \setminus V_0$ su za ovaj problem irelevantne.

U uslovima stavova 11. i 12. smo u mogućnosti da biramo onu varijantu koja najbolje odgovara konkretnom numeričkom izračunavanju. Ako skup V nije konačno-dimenzionalan pot-

U ovoj glavi daćemo neke dovoljne uslove za najbolju aproksimaciju i ε-aproksimaciju funkcije f elementima skupa V^*. Zatim ćemo dokazati da je taj dovoljan uslov za najbolju aproksimaciju i neophodan ako skup V (ne V^*) ima tzv. svojstvo (WB) (od engleske kovanice "weak betweenness"). Pre svega dajemo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 1. Podskup V prostora $C(T)$ ima svojstvo (WB) ako za svaka dva različita elementa v i w iz V i svaki neprazan zatvoren skup $D \subset T$ takav da je

$$\min\{|v(t)-w(t)|: t\in D\} > 0,$$

postoji niz (v_n) elemenata skupa V takav da su ispunjeni sledeći uslovi:

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0.$ (3.5)

2° Za svaki prirodan broj n važi nejednakost

$$\min\{[w(t)-v_n(t)]\cdot[v_n(t)-v(t)]: t\in D\} > 0. \qquad (3.6)$$

Klasa podskupova (WB) obuhvata izmedju ostalog klasu podskupova sa svojstvom (B) ("betweenness property") i klasu asimptotski konveksnih skupova. Podskupovi sa ovim svojstvima su u teoriji aproksimacija mnogo istraživani, a njihove definicije navedimo radi potpunosti (v. Braess ([12])).

DEFINICIJA 2. Podskup $V \subset C(T)$ ima svojstvo (B) ako za svaki par elemenata $v_0, v_1 \in V$ postoji preslikavanje

$$[0,1] \ni \theta \longmapsto v_\theta \in V,$$

takvo da je za svako $t\in T$ funkcija $\theta \longmapsto v_\theta(t)$ ili strogo monotona, ili konstanta.

DEFINICIJA 3. Podskup $V\subset C(T)$ je asimptotski konveksan ako za svaki par elemenata $v_0, v_1 \in V$ postoji strogo pozitivna funkcija $g \in C(T)$ i preslikavanje

$$[0,1] \ni \theta \longmapsto v_\theta \in V,$$

tako da važi sledeća asimptotska formula

$$\|(1-\theta g)v_0 + \theta g v_1 - v_\theta\| = o(\theta),\ \theta \to 0. \qquad (3.7)$$

U daljem dajemo prvo jedan dovoljan uslov tipa Kolmogorova za najbolju aproksimaciju u V^*.

G L A V A D R U G A

NAJBOLJA I DOBRA APROKSIMACIJA U PROSTORIMA NEPREKIDNIH FUNKCIJA

Jedan od prostora u kojima se najčešće posmatraju problemi linearne i nelinearne teorije aproksimacija je svakako prostor $C(T)$ neprekidnih realnih (ili kompleksnih) funkcija definisanih na kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru T, snabdeven uobičajenom maksimum-normom

$$\|f\| = \max_{t\in T} |f(t)|, \qquad (f\in C(T)).$$

U vezi sa karakterizacijom najbolje linearne aproksimacije u $C(T,\mathbb{R})$ Rivlin i Shapiro ([92]) uveli su pojam signature i ekstremalne signature. Brosowski je u nizu svojih radova ovaj pojam prvo uopštio na prostor $C(T,H)$ neprekidnih funkcija na T sa vrednostima u pred-Hilbertovom prostoru, a zatim i na proizvoljne normirane prostore. Odgovarajuća razmatranja vezana za signature i ekstremalne signature u prostoru $C(T,H)$ data su u [18].

Deo rezultata ove glave objavljen je u autorovom radu [62]. Posmatraćemo jedno uopštenje pojmova signature i ekstremalne signature u $C(T,H)$, specijalno u $C(T)$. Podvucimo da je norma funkcije $f\in C(T,H)$ definisana sa

$$\|f\| = \|f\|_{C(T,H)} := \max_{t\in T} \|f(t)\|_H . \tag{2.1}$$

Sa $C(T)$ označavaćemo bilo prostor $C(T,\mathbb{R})$, bilo prostor $C(T,\mathbb{C})$. Dužu od ovih oznaka upotrebićemo samo ako je potrebno naglasiti razliku izmedju realnog i kompleksnog slučaja.

Pre svega definišimo pojam kvazisignature.

DEFINICIJA 1. Neka je $0\leq \eta<1$, A zatvoren podskup kompaktnog Hausdorff-ovog prostora T i $e: A\to H$ proizvoljno neprekidno preslikavanje skupa A u pred-Hilbertov

$f \in C(T)$ i element $\hat{v} \in V^*$. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi:

a) Skup V ima svojstvo (WB).

b) Funkcija ℓ je poluneprekidna odozgo, a funkcija u poluneprekidna odozdo.

c) $\hat{v}$ je najbolja aproksimacija funkcije f u skupu V^*.

Tada za svako $v \in V_{\hat{v}}$ važi nejednakost

$$\min_{t \in M[f-\hat{v}]} [v(t) - \hat{v}(t)] \operatorname{sgn}[f(t) - \hat{v}(t)] \leq 0. \tag{3.13}$$

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdjenje stava ne važi, nego da za neko $v \in V_{\hat{v}}$ imamo

$$\min_{t \in M[f-\hat{v}]} [v(t) - \hat{v}(t)] \operatorname{sgn}[f(t) - \hat{v}(t)] > 0. \tag{3.14}$$

Pošto je $\ell \leq \hat{v} \leq u$, skupove $N[\ell - \hat{v}]$ i $N[u - \hat{v}]$ možemo napisati u sledećem obliku

$$N[\ell - \hat{v}] = \{t \in T \mid \ell(t) - \hat{v}(t) \geq 0\},$$

$$N[u - \hat{v}] = \{t \in T \mid u(t) - \hat{v}(t) \leq 0\}.$$

Na osnovu pretpostavke b) i neprekidnosti funkcije $\hat{v}$, funkcija $\ell - \hat{v}$ je poluneprekidna odozgo, a funkcija $u - \hat{v}$ poluneprekidna odozdo, odakle sledi da su skupovi $N[\ell - \hat{v}]$ i $N[u - \hat{v}]$ zatvoreni. Na osnovu definicije skupa $V_{\hat{v}}$ i zbog $v \in V_{\hat{v}}$, imajući u vidu da su skupovi $N[\ell - \hat{v}]$ i $N[u - \hat{v}]$ kompaktni, dobijamo nejednakosti

$$\min_{t \in N[\ell - \hat{v}]} \{v(t) - \hat{v}(t)\} > 0 \tag{3.15}$$

i

$$\min_{t \in N[u - \hat{v}]} \{\hat{v}(t) - v(t)\} > 0. \tag{3.16}$$

Kako je

$$|\hat{v}(t) - v(t)| \geq [v(t) - \hat{v}(t)] \operatorname{sgn}[f(t) - \hat{v}(t)]$$

prelaskom na minimum po kompaktnom skupu $M[f - \hat{v}]$ dobijamo

$$\min_{t \in M[f-\hat{v}]} |\hat{v}(t) - v(t)| \geq \min_{t \in M[f-\hat{v}]} [v(t) - \hat{v}(t)] \operatorname{sgn}[f(t) - \hat{v}(t)] > 0. \tag{3.17}$$

Definišimo sledeći zatvoren skup

$$D := M[f - \hat{v}] \cup N[\ell - \hat{v}] \cup N[u - \hat{v}]. \tag{3.18}$$

Na osnovu nejednakosti (3.15), (3.16) i (3.17) imamo

$$\min_{t\in M_e} \mathrm{Re}\langle e(t), v(t)-v_0(t)\rangle \leqslant \min_{t\in M_{e_0}} \mathrm{Re}\langle e(t), v(t)-v_0(t)\rangle \leqslant 0. \square$$

STAV 2. Ako je η-kvazisignatura $\Gamma(e)$ ekstremalna za $v_0 \in V$ u odnosu na V, onda je $\Gamma(e)$ ekstremalna za v_0 i u odnosu na adherenciju $\overline{V}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\Gamma(e)$ nije ekstremalna za $v_0 \in V$ u odnosu na adherenciju $\overline{V}$. Tada za neko $v_1 \in \overline{V}$ važi

$$(\forall t\in M_e)(\mathrm{Re}\langle e(t), v_1(t)-v_0(t)\rangle > 0). \tag{2.6}$$

Kako je skup M_e po definiciji zatvoren, a T kompaktan, to je i M_e kompaktan, tako da postoji realan broj $\alpha > 0$ takav da važi relacija

$$(\forall t\in M_e)(\mathrm{Re}\langle e(t), v_1(t)-v_0(t)\rangle \geqslant \alpha > 0).$$

Zbog $v_1 \in \overline{V}$, postoji $v \in V$ tako da je $\|v_1 - v\| < \frac{\alpha}{2}$. Tada na osnovu Švarcove nejednakosti sledi

$$|\mathrm{Re}\langle e(t), v(t)-v_1(t)\rangle| \leqslant \|e(t)\|_H \cdot \|v(t)-v_1(t)\|_H \leqslant \|v - v_1\| < \frac{\alpha}{2},$$

odakle dobijamo

$$\mathrm{Re}\langle e(t), v(t)-v_0(t)\rangle = \mathrm{Re}\langle e(t), v_1(t)-v_0(t)\rangle +$$
$$+ \mathrm{Re}\langle e(t), v(t)-v_1(t)\rangle \geqslant \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Prema tome, $\Gamma(e)$ nije ekstremalna za v_0 u odnosu na V, što je suprotno pretpostavci stava. $\square$

PRIMER 1. Neka je $H = \mathbb{C}$ i skalarno množenje definisano sa

$$\langle z_1, z_2\rangle := z_1 \cdot \overline{z}_2 .$$

Neka je dalje V potprostor od $C(T,\mathbb{C})$ generisan konstantnom funkcijom $\mathbb{1}$ (tj. potprostor koji se sastoji iz svih funkcija koje su konstante na T).

Jedna ekstremalna η-kvazisignatura za V može da se opiše na sledeći način. Neka je $\{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ proizvoljan konačan podskup od T, a $\{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ kompleksni brojevi koji zadovoljavaju sledeći uslov

$$(\forall \nu \in I_p)(1-\eta \leqslant |w_\nu| \leqslant 1),$$
$$w_1 + w_2 + \cdots + w_p = 0.$$

što daje drugi deo jednakosti (3.23). Za ove iste n i t dobijamo i relaciju

$$(3.24)\quad |f(t)-v_n(t)| = |f(t)-\hat{v}(t)| - |v_n(t)-\hat{v}(t)| < \|f-\hat{v}\|,$$

gde znak $<$ stoji zato što je minimum drugog člana u srednjem izrazu pozitivan.

Ako je $M[f-\hat{v}]=T$, iz (3.24) se neposredno dobija nejednakost $\|f-v_n\| < \|f-\hat{v}\|$. Pretpostavimo zato da $M[f-\hat{v}]\neq T$. Zbog neprekidnosti leve strane u (3.24) postoji otvorena okolina U skupa $M[f-\hat{v}]$ tako da (3.24) važi i za sve $t\in U$. Kako je skup $W:=T\setminus U$ kompaktan i $M[f-\hat{v}]\cap W=\emptyset$, važi nejednakost

$$K_1 := \max_{t\in W} |f(t)-\hat{v}(t)| < \|f-\hat{v}\|.$$

Odaberimo indeks $n_2 \geq n_1$ tako da za $n>n_2$ bude (što je moguće na osnovu (3.20))

$$(3.25)\quad \|\hat{v}-v_n\| < \|f-\hat{v}\| - K_1.$$

Tako za $n>n_2$ i $t\in W$ dobijamo

$$|f(t)-v_n(t)| \leq |f(t)-\hat{v}(t)| + |\hat{v}(t)-v_n(t)| <$$

$$< K_1 + (\|f-\hat{v}\| - K_1) = \|f-\hat{v}\|.$$

Kako ova nejednakost važi i za $t\in U$, ona važi za sve $t\in T$, te se konačno dobija, za $n>n_2$:

$$(3.26)\quad \|f-v_n\| < \|f-\hat{v}\|.$$

Da bismo (3.14) doveli do kontradikcije sa pretpostavkama teoreme, dovoljno je još da pokažemo da za neki indeks $n>n_2$ važi: $v_n\in V^*$. Da bismo to dokazali, stavimo prvo

$$(3.27)\quad K_2 := \min_{t\in T}[u(t)-\ell(t)].$$

Ovaj minimum se dostiže pošto je funkcija $u-\ell$, na osnovu pretpostavke b), poluneprekidna odozdo na T. Zbog $u-\ell>0$ dobijamo i da je $K_2>0$. Sada ćemo izabrati indeks $n_3\geq n_2$ takav da za $n>n_3$ važi

$$(3.28)\quad \|\hat{v}-v_n\| < K_2.$$

Zbog $N[\ell-\hat{v}], N[u-\hat{v}]\subset D$, (3.19) i (3.21) na skupovima

$\nu \in I_k$: $1-\eta \leq |\alpha_\nu| \leq 1$ i neka su svi α_ν istog znaka. Tada je $\Gamma(e)$ jedna ekstremalna η-kvazisignatura za A_0/B_0 u odnosu na V. Naime, ako bismo pretpostavili da to ne važi, postojao bi element $\vartheta := A/B$ iz V takav da je za svako $\nu \in I_k$:

$$e(t_\nu) \cdot \left[\frac{A(t_\nu)}{B(t_\nu)} - \frac{A_0(t_\nu)}{B_0(t_\nu)} \right] > 0.$$

Zbog $B, B_0 > 0$, ovo je ekvivalentno sa

$$\text{(2.8)} \qquad e(t_\nu) \cdot [A(t_\nu) B_0(t_\nu) - A_0(t_\nu) B(t_\nu)] > 0.$$

Lako je videti da važi ocena

$$dg(AB_0 - A_0 B) \leq n + m - \min\{\nu, \mu\} = k-2,$$

tako da polinom $AB_0 - A_0 B$ može najviše $k-2$ puta da menja znak. S druge strane, zbog (2.8), on mora da menja znak bar $k-1$ puta, što dovodi do kontradikcije.

PRIMER 3. Na ovom primeru pokazujemo da ne mora za svaki podskup V od $C(T,H)$ i svako $\vartheta_0 \in V$ da postoji ekstremalna η-kvazisignatura za ϑ_0 u odnosu na V. Naime, neka je $V = C(T,H)$ i pretpostavimo da je $\Gamma(e)$ jedna η-kvazisignatura na T. Na osnovu teoreme o produžavanju neprekidnih funkcija J. Dugundji-a (v. npr. S.-T. Hu [60]), postoji neprekidno preslikavanje $e_1 : T \to H$ takvo da je $e_1|M = e$. Za $t \in M_e$ tada imamo

$$\mathrm{Re}\langle e(t), e_1(t)\rangle = \mathrm{Re}\langle e(t), e(t)\rangle = \|e(t)\|_H^2 \geq (1-\eta)^2 > 0,$$

tako da $\Gamma(e)$ ne može biti ekstremalna η-kvazisignatura za V.

Od interesa je redukovanje ekstremalne η-kvazisignature na što manju bazu (u smislu inkluzije). U vezi sa tim važi sledeći stav.

STAV 3. Neka je $\vartheta_0 \in V \subset C(T,H)$. Ako je $\Gamma(e)$ ekstremalna η-kvazisignatura za ϑ_0 u odnosu na V, onda postoji primitivna η-kvazisignatura $\Gamma(e_0)$ ekstremalna za ϑ_0 u odnosu na V, koja je sadržana u $\Gamma(e)$.

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{A}$ familiju svih η-kvazisignatura ekstremalnih za ϑ_0 u odnosu na V, koje su sadržane u $\Gamma(e)$.

Odatle za $t\in W$ i $n>n_4$ imamo

$$u(t)-v_n(t)=[u(t)-\hat{v}(t)]-[v_n(t)-\hat{v}(t)]>K_3-\|v_n-\hat{v}\|>0$$

i analogno

$$v_n(t)-\ell(t)=[\hat{v}(t)-\ell(t)]-[\hat{v}(t)-v_n(t)]>K_4-\|v_n-\hat{v}\|>0.$$

Dakle za $t\in W$ je $\ell(t)<v_n(t)<u(t)$, što zajedno sa nejednakošću (3.33) daje $v_n\in V^*$ za $n>n_4$. $\square$

Kako skup V^* ne mora biti sadržan u skupu $V_{\hat{v}}$, to dovoljan uslov da $\hat{v}\in V^*$ bude najbolja aproksimacija za f u V^* ne mora biti neophodan uslov.

Stav 5. bio bi jači kada bi se u njemu skup $V_{\hat{v}}$ mogao zameniti sledećim skupom

$$(3.34)\quad \tilde{V}_{\hat{v}}:=\{v\in V\mid (\forall t\in N[\ell-\hat{v}])(v(t)\geq \hat{v}(t))\ \wedge$$
$$\wedge\ (\forall t\in N[u-\hat{v}])(v(t)\leq \hat{v}(t))\}.$$

Medjutim, sledeći primer pokazuje da se to ne može učiniti.

<u>PRIMER</u>. Neka je $T=[-1,1]$, $V=\{v_\alpha \mid v_\alpha(t)=\alpha t,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$, $\ell(t)=-\infty$, $u(t)=t^2$ i $f(t)=1-t$. Tada je $V^*=\{0\}$ pa je $\hat{v}=0$ ujedno najbolja aproksimacija za f u skupu V^*. Dalje je $V_{\hat{v}}=\emptyset$, a $\tilde{V}_{\hat{v}}=V$. Kako je osim toga $M[f-\hat{v}]=\{-1\}$, nejednakost (3.13) ne važi za $v_{-1}(t)=-t$, iako je $v_{-1}\in\tilde{V}_{\hat{v}}$. Zaista, imamo

$$[v_{-1}(-1)-\hat{v}(-1)]\operatorname{sgn}[f(-1)-\hat{v}(-1)]=1\cdot\operatorname{sgn}2=1>0.$$

Ovaj primer, s druge strane, ne odgovara na pitanje da li se skup $V_{\hat{v}}$ može zameniti skupom $V_{\hat{v}}\cup V^*$. Nije nam poznato da li je to tačno ili ne, tako da ovo pitanje ostaje otvoreno.

Zbog neprekidnosti preslikavanja e i $\vartheta - \vartheta_0$, skup

$$U := \{t \in T \mid \mathrm{Re}\langle e(t), \vartheta(t) - \vartheta_0(t)\rangle > \tfrac{\alpha}{2}\} \cap M_e$$

je jedna otvorena okolina skupa M u M_e. Stavimo

$$C := M_e \setminus U$$

i za

$$C_\beta := C \cap M_\beta .$$

Skupovi C i C_β su zatvoreni i za $\beta_1 \succ \beta_2$ iz $M_{\beta_1} \supset M_{\beta_2}$ sledi i $C_{\beta_1} \supset C_{\beta_2}$ $(\beta_1, \beta_2 \in B)$. Sada je

$$\bigcap_{\beta \in B} C_\beta = \bigcap_{\beta \in B} (C \cap M_\beta) = C \cap \left(\bigcap_{\beta \in B} M_\beta\right) = C \cap M = \emptyset .$$

Zbog kompaktnosti skupa M_e postoji konačan skup indeksa $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \subset B$ takav da je

$$C_{\beta_1} \supset C_{\beta_2} \supset \cdots \supset C_{\beta_n}$$

i

$$C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2} \cap \cdots \cap C_{\beta_n} = \emptyset .$$

Odatle je $C_{\beta_n} = \emptyset$, pa i $C \cap M_{\beta_n} = \emptyset$, što znači da je skup M_{β_n} sadržan u U . Kako za sve $t \in U$ važi nejednakost

$$\mathrm{Re}\langle e(t), \vartheta(t) - \vartheta_0(t)\rangle > \tfrac{\alpha}{2},$$

zbog $e(t) = e_{\beta_n}(t)$ za $t \in M_{\beta_n}$ i $M_{\beta_n} \subset U$ sledi nejednakost

$$\mathrm{Re}\langle e_{\beta_n}(t), \vartheta(t) - \vartheta_0(t)\rangle > 0,$$

za sve $t \in M_{\beta_n}$. Zbog toga η-kvazisignatura $\Gamma(e_{\beta_n})$ nije ekstremalna za ϑ_0 u odnosu na V , što je u suprotnosti sa definicijom familije $\mathcal{A}$. Prema tome, η-kvazisignatura $\Gamma(e_0)$ mora biti ekstremalna za ϑ_0 u odnosu na V .

Dokazali smo da svaki lanac $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ima minorantu, tako da na osnovu Zorn-ove leme postoji bar jedan minimalan element familije $\mathcal{A}$ koji je očigledno primitivna ekstremalna η-kvazisignatura za ϑ_0 u odnosu na V .

Da bismo dobili jedan dovoljan uslov za dobru aproksimaciju funkcije $f \in C(T,H)$ elementima datog podskupa $V \subset C(T,H)$, definišimo jednu specijalnu η-kvazisignaturu.

i neophodan za $v_0 \in P_V(x)$. Problem neophodnosti uslova (4.2) posmatralo je više autora, a osnovne rezultate dali su Brosowski i Wegmann ([32]). Zbog važnosti pitanja karakterizacije takvih skupova V, izložićemo ukratko osnovne rezultate koji se na to odnose.

DEFINICIJA 1. Neka je V proizvoljan skup u normiranom vektorskom prostoru X i $v_0 \in V$. Ako za svako $x \in X$ važi implikacija

$$(4.3)\quad v_0 \in P_V(x) \Rightarrow (\forall v \in V)\Big(\min_{L \in Ep\Sigma(x-v_0)} \operatorname{Re} L(v-v_0) \leq 0\Big),$$

tj. ako je globalni uslov Kolmogorova uvek neophodan, kažemo da je V kolmogorovski skup prve vrste.

DEFINICIJA 2. Neka je V proizvoljan podskup normiranog vektorskog prostora X. Ako je $v_0 \in V$ i za svako $x \in X$ važi implikacija

$$(4.4)\quad v_0 \in P_V(x) \Rightarrow (\forall \lambda \geq 0)(v_0 \in P_V[v_0 + \lambda(x - v_0)])$$

kažemo da je v_0 sunčana tačka skupa V. Ako za skup V važi sledeća formula

$$(4.5)\quad (\forall x \notin V)(\exists v_0 \in P_V(x))(\forall \lambda \geq 0)(v_0 \in P_V[v_0 + \lambda(x - v_0)]),$$

kažemo da je skup V sunce. Ako je skup V proksiminalan i ako važi formula

$$(4.6)\quad (\forall x \notin V)(\forall v_0 \in P_V(x))(\forall \lambda \geq 0)(v_0 \in P_V[v_0 + \lambda(x - v_0)]),$$

onda kažemo da je V strogo sunce.

Brosowski ([17]) je u slučaju normiranog vektorskog prostora kolmogorovske skupove prve vrste okarakterisao u terminima sunaca. Preciznije, važe sledeća dva stava.

STAV 1 (Brosowski ([17])). Neka je V proizvoljan podskup normiranog vektorskog prostora X. Skup V je sunce ako i samo ako za svako $x \in X$, takvo da je $P_V(x) \neq \emptyset$, postoji bar jedna tačka $v_0 \in P_V(x)$ takva da je

$$(4.7)\quad (\forall v \in V)\Big(\min_{L \in Ep\Sigma(x-v_0)} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leq 0\Big).$$

STAV 2 (Brosowski ([17])). Neka je V proizvoljan podskup normiranog vektorskog prostora X. Skup V je strogo sunce odnosno $\vartheta_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(f)$. $\square$

Posmatrajmo sada važan specijalan slučaj kada je $H = \mathbb{C}$ - polje kompleksnih brojeva. Skalarni proizvod u $\mathbb{C}$ definišimo formulom

(2.15) $$\langle z_1, z_2 \rangle := \overline{z_1} \cdot z_2 .$$

Osim toga, imajmo u vidu da je za kompleksne brojeve z, različite od nule:

(2.16) $$\operatorname{sgn} z := \frac{\overline{z}}{|z|} .$$

Tada izraz

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{e}(t), \vartheta(t) - \vartheta_0(t) \rangle$$

koji figuriše u formuli (2.13) postaje

$$\operatorname{Re}\langle \tilde{e}(t), \vartheta(t) - \vartheta_0(t) \rangle = \operatorname{Re} \left\langle \frac{f(t) - \vartheta_0(t)}{\| f - \vartheta_0 \|}, \vartheta(t) - \vartheta_0(t) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\| f - \vartheta_0 \|} \operatorname{Re}\left[\overline{(f(t) - \vartheta_0(t))} \cdot (\vartheta(t) - \vartheta_0(t)) \right].$$

Koristeći ovako transformisan uslov (2.13), možemo dati sledeći stav kao posledicu stava 4.

<u>STAV 5</u>. Neka je $V \subset C(T, \mathbb{C})$, $f \in C(T, \mathbb{C}) \setminus \overline{V}$ i $\vartheta_0 \in V$. Da bude $\vartheta_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(f)$, dovoljno je da za svako $\vartheta \in V$ postoji tačka $t_\vartheta \in T$ tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

1° $|f(t_\vartheta) - \vartheta_0(t_\vartheta)| \geq \| f - \vartheta_0 \| - \varepsilon$, (2.17)

2° $\operatorname{Re}\left[(\overline{f(t_\vartheta) - \vartheta_0(t_\vartheta)}) \cdot (\vartheta(t_\vartheta) - \vartheta_0(t_\vartheta)) \right] \leq 0$. (2.18)

Sa numeričkog stanovišta, ovaj kriterijum je naročito podesan jer ne zahteva odredjivanje skupa tačaka iz T u kojima se norma funkcije $f - \vartheta_0$ tačno dostiže, nego se pritom dopušta greška ε.

Da uslov (2.13) u opštem slučaju nije neophodan, pokazuje sledeći primer.

<u>PRIMER 4</u>. Neka je T jednočlan skup, $H = \mathbb{R}$ i skalarno množenje isto što i obično množenje u $\mathbb{R}$. Tada je $C(T, H) \cong \mathbb{R}$. Neka je dalje $V =]-\infty, 0]$, $f = 1$, $\vartheta_0 = -\varepsilon$, $\vartheta = 0$. Očigledno je da je $\vartheta_0 \in \mathcal{P}_{V,\varepsilon}(f)$, ali ipak važi nejednakost: $(f - \vartheta_0) \cdot (\vartheta - \vartheta_0) = (1 + \varepsilon) \cdot \varepsilon > 0$.

$C(T,H)$ je C-regularan u tački $v_0 \in V$, ako za svako $v \in V$ za koje važi implikacija

$$t \in M[f - v_0] \Rightarrow \mathrm{Re}\langle f(t) - v_0(t), v(t) - v_0(t)\rangle > 0$$

i za svaki realan broj $\lambda > 0$, postoji $v_\lambda \in V$ tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$(4.10)\quad t \in M[f - v_0] \Rightarrow 2\mathrm{Re}\langle f(t) - v_0(t), v_\lambda(t) - v_0(t)\rangle > \|v_\lambda(t) - v_0(t)\|_H^2,$$

$$(4.11)\quad \|v_\lambda - v_0\| < \lambda.$$

2° Skup $V \subset C(T,H)$ je C-regularan ako je C-regularan u svakoj svojoj tački.

STAV 5 ([32]). Skup $V \subset C(T,H)$ je C-regularan ako i samo ako je regularan (u smislu definicije 3.).

POSLEDICA. Proizvoljan neprazan podskup V prostora $C(T,H)$ je kolmogorovski skup prve vrste ako i samo ako je C-regularan.

Pretpostavimo sada da je skup $V \subset C(T,H)$ kolmogorovski skup prve vrste. Radi kraćeg pisanja uvodimo sledeću oznaku

$$(4.12)\quad K(t,v,\hat{v}) := \mathrm{Re}\langle f(t) - \hat{v}(t), v(t) - \hat{v}(t)\rangle$$

gde je $t \in T$, $f \in C(T,H)\setminus\overline{V}$, $v, \hat{v} \in V$. Sa ovim novim oznakama možemo napisati sledeću ekvivalenciju

$$(4.13)\quad (\exists v \in V)(\forall t \in M[f - \hat{v}])(K(t,v,\hat{v}) > 0) \Leftrightarrow \hat{v} \notin P_V(f).$$

Drugim rečima, element $\hat{v} \in V$ nije najbolja aproksimacija za f u skupu V ako za neko $v \in V$ važi

$$(4.14)\quad t \in M[f - \hat{v}] \Rightarrow K(t,v,\hat{v}) > 0.$$

Iz praktičnih razloga umesto $M[f - \hat{v}]$ posmatramo neki skup M, nešto širi od $M[f - \hat{v}]$. Specijalno, može se uzeti $M = M_\varepsilon[f - \hat{v}]$ gde je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo.

Ako postoji realan broj $K_0 > 0$, element $v \in V$ i skup $M \supset M[f - \hat{v}]$ tako da je ispunjen uslov

$$(4.15)\quad t \in M \Rightarrow K(t,v,\hat{v}) \geq K_0 > 0,$$

onda $\hat{v}$ nije najbolja aproksimacija za f u skupu V jer je

$$(4.16)\quad 0 < K_0 \leq \inf_{t \in M} K(t,v,\hat{v}) \leq \min_{t \in M[f - \hat{v}]} K(t,v,\hat{v}).$$

(2.24) $$M_\varepsilon^+[f-v_0]=\{t\in T \mid f(t)-v_0(t)\geq \|f-v_0\|-\varepsilon\}$$

i

(2.25) $$M_\varepsilon^-[f-v_0]=\{t\in T \mid f(t)-v_0(t)\leq -\|f-v_0\|+\varepsilon\}.$$

Kako je T kao kompaktan Hausdorff-ov ujedno i normalan topološki prostor, skupovi $M_\varepsilon^+[f-v_0]$ i $M_\varepsilon^-[f-v_0]$ mogu se razdvojiti disjunktnim otvorenim okolinama. Zato je funkcija

$$M_\varepsilon[f-v_0]\ni t\longmapsto \operatorname{sgn}[f(t)-v_0(t)]$$

neprekidna, a sa njom je i funkcija

$$t\longmapsto [v(t)-v_0(t)]\cdot\operatorname{sgn}[f(t)-v_0(t)]$$

neprekidna na skupu $M_\varepsilon[f-v_0]$. Zato se minimum u (2.22) zaista dostiže. Neka je $t_0\in M_\varepsilon[f-v_0]$ jedna od tačaka u kojoj se taj minimum dostiže, tj. neka je

$$[v(t_0)-v_0(t_0)]\cdot\operatorname{sgn}[f(t_0)-v_0(t_0)]\leq 0.$$

Tada dobijamo sledeći niz nejednakosti

$$\|f-v_0\|\leq\|f-v_0\|-[v(t_0)-v_0(t_0)]\cdot\operatorname{sgn}[f(t_0)-v_0(t_0)]\leq$$

$$\leq[f(t_0)-v_0(t_0)]\operatorname{sgn}[f(t_0)-v_0(t_0)]+\varepsilon-[v(t_0)-v_0(t_0)]\operatorname{sgn}[f(t_0)-v_0(t_0)]=$$

$$=[f(t_0)-v(t_0)]\operatorname{sgn}[f(t_0)-v_0(t_0)]+\varepsilon\leq|f(t_0)-v_0(t)|+\varepsilon\leq\|f-v\|+\varepsilon.$$

Kako krajnja nejednakost $\|f-v_0\|\leq\|f-v\|+\varepsilon$ važi za svako $v\in V$, prelaskom na infimum dobijamo $\|f-v_0\|\leq d(f,V)+\varepsilon$, tj. $v_0\in P_{V,\varepsilon}(f)$. $\square$

Analogno sa stavom 9. prve glave i ovde možemo teret greške zamene najbolje aproksimacije približnim rešenjem prebaciti na tačnost s kojom je ispunjen globalni uslov Kolmogorova, pri čemu se minimum uzima preko skupa $M[f-v_0]$ kritičnih tačaka funkcije $f-v_0$:

(2.26) $$M[f-v_0]=\{t\in T \mid |f(t)-v_0(t)|=\|f-v_0\|\}.$$

STAV 8. Neka je V proizvoljan podskup prostora $C(T,\mathbb{R})$, $v_0\in V$, $f\in C(T,\mathbb{R})\setminus V$ i $\varepsilon\geq 0$. Ako je za svako $v\in V$ ispunjen uslov

Ovo je kvadratni polinom po λ oblika

(4.20) $P(\lambda) := A(t)\lambda^2 - 2B(t)\lambda - C(t)$

gde je, radi kratkoće, stavljeno

(4.21) $A(t) := \|\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)\|_H^2$,

(4.22) $B(t) := K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}) - \frac{1}{2}K_o$,

(4.23) $C(t) := \|f - \hat{\vartheta}\|^2 - \|f(t) - \hat{\vartheta}(t)\|_H^2$.

Koreni polinoma (4.20) dati su sa

(4.24) $$\frac{B(t) \pm \sqrt{(B(t))^2 + A(t)C(t)}}{A(t)}$$

za one t za koje je $A(t) \neq 0$ i

(4.25) $$\frac{C(t)}{K_o}$$

za one t za koje je $A(t) = 0$ (iz $A(t) = 0$ sledi, naime, da je i $K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}) = 0$). Zbog $A(t) \geq 0$, $C(t) \geq 0$ za svako $t \in T$, u slučaju $A(t) > 0$ (v.(4.24)) polinom $P(\lambda)$ ima dva realna korena od kojih ćemo veći označiti sa $\overline{\lambda}(t)$. Pri $A(t)=0$ postoji samo jedno rešenje, tako da možemo staviti

(4.26) $$\overline{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{A(t)}\left[B(t) + \sqrt{(B(t))^2 + A(t)C(t)}\,\right], & A(t) \neq 0 \\ \frac{C(t)}{K_o}, & A(t) = 0 \end{cases}$$

Ako je $A(t) \neq 0$, iz (4.24) se dobija da $P(\lambda)$ ima jedan nepozitivan koren (ako se uzme znak minus u (4.24)). Za $A(t) = 0$ je $-2B(t) = K_o > 0$ pa važi formula

$$\lambda \geq 0 \Rightarrow \left(P(\lambda) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{C(t)}{K_o} = \overline{\lambda}(t)\right).$$

Kako je pri $A(t) \neq 0$, ustvari $A(t) > 0$, zbog nepozitivnosti manjeg korena polinoma $P(\lambda)$ važi

(4.27) $$\lambda \geq 0 \Rightarrow (P(\lambda) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \overline{\lambda}(t)).$$

Preostali deo dokaza sastoji se od toga da se ustanovi da je $\overline{\lambda}(t) > 0$ za svako $t \in T$ i da je funkcija $t \mapsto \overline{\lambda}(t)$

G L A V A   T R E Ć A

NELINEARNA ČEBIŠEVSKA APROKSIMACIJA FUNKCIJAMA KOJE ZADOVO-LJAVAJU IZVESNA OGRANIČENJA TIPA NEJEDNAKOSTI

U ovoj glavi posmatramo prostor $C(T)$ realnih neprekidnih funkcija definisanih na kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru T , snabdeven uobičajenom uniformnom normom:

$$(3.1) \qquad \|f\| := \max_{t\in T} |f(t)|.$$

Za proizvoljnu funkciju $g : T \to \mathbb{R}$ (koja ne mora biti neprekidna) definišemo sledeće skupove

$$(3.2) \qquad N[g] := \{t\in T \mid g(t) = 0\}$$

i

$$(3.3) \qquad M[g] := \{t\in T \mid |g(t)| = \|g\|\},$$

pri čemu je u poslednjem slučaju $\|g\| = \sup\{|g(t)| : t\in T\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Neka su dalje date dve funkcije

$$u, \ell : T \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

takve da je

$$(\forall t\in T)(\ell(t) < u(t)).$$

Za njih ćemo kasnije pretpostaviti poluneprekidnost odozdo, odnosno odozgo. Konačno, neka je V pravi podskup od $C(T)$.

Fiksiranu funkciju $f \in C(T)$ aproksimiraćemo elementima skupa V^* definisanog na sledeći način:

$$(3.4) \qquad V^* := \{v\in V \mid (\forall t\in T)(\ell(t) \leq v(t) \leq u(t))\}.$$

Prema tome, za skup aproksimirajućih elemenata ne uzimamo unapred zadati skup $V \subset C(T)$, nego njegov podskup čiji elementi zadovoljavaju dodatna ograničenja. Ovakav tip čebiševskih aproksimacija istraživali su mnogi autori, medju njima Dunham ([42]) i Taylor ([103], [105]) na čije se rezultate neposredno nadovezujemo. U radu [105] dat je pregled drugih rezultata o ovakvom tipu aproksimacije.

na osnovu asimptotskog razvoja. Kako je $B(t_0)=-\frac{1}{2}K_0<0$, postoji okolina U tačke t_0 takva da važi implikacija

$$(t\in U \wedge A(t)>0) \Rightarrow B(t)<0.$$

Odatle i iz (4.26), za $t\in U$ i $A(t)>0$ imamo

$$\bar{\lambda}(t)=\frac{1}{A(t)}\left[B(t)-B(t)\sqrt{1+\frac{A(t)C(t)}{B^2(t)}}\,\right]=$$

$$=\frac{B(t)}{A(t)}\left[1-1-\frac{A(t)C(t)}{2B^2(t)}+o(A(t)C(t))\right]=$$

$$=-\frac{C(t)}{2B(t)}+o(C(t))\to\frac{C(t_0)}{K_0},\ (t\to t_0)$$

odakle je $\bar{\lambda}$ neprekidna i za ovakvo t_0.

Dakle, funkcija $t\mapsto\bar{\lambda}(t)$ je neprekidna i strogo pozitivna na T, tako da je

(4.29) $$\bar{\lambda}_1:=\min_{t\in T}\bar{\lambda}(t)>0.$$

Za $0\leqslant\lambda\leqslant\bar{\lambda}_1$ imamo $P(\lambda)\leqslant 0$, tj. važi nejednakost u (4.18). Kako konveksnost skupa V garantuje da $\hat{\vartheta}+\lambda(\vartheta-\hat{\vartheta})\in V$ samo za $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, stavimo

(4.30) $$\lambda_1:=\min\{1,\bar{\lambda}_1\}.$$

Ako je $\lambda_1<1$, iz (4.29) je jasno da je λ_1 najveći broj za koji važe nejednakosti (4.18).

Bez kvadrata u (4.17) tvrdjenje prethodnog stava ne bi važilo. Ipak i u tom slučaju može da se dobije slična ocena. U vezi sa tim važi sledeći stav.

<u>STAV 7</u>. Neka je V konveksan skup u prostoru $C(T,H)$. Ako za dati element $\hat{\vartheta}\in V$ i dati skup $M\supset M[f-\hat{\vartheta}]$ postoji element $\vartheta\in V$ i $K_0>0$ tako da važi

(4.31) $$t\in M \Rightarrow K(t,\vartheta,\hat{\vartheta})\geqslant K_0>0,$$

onda za svako realno μ takvo da je

(4.32) $$0<\mu<\frac{K_0}{\|f-\hat{\vartheta}\|},$$

postoji najveći realan broj $\lambda_2\in\,]0,1]$ takav da je

(4.33) $$\|f-(\hat{\vartheta}+\lambda(\vartheta-\hat{\vartheta}))\|\leqslant\|f-\hat{\vartheta}\|-\lambda\mu,$$

za sve $\lambda\in[0,\lambda_2]$.

STAV 1. Neka je $f\in C(T)$ i $\hat{v}\in V^*$. Jedan dovoljan uslov da $\hat{v}$ bude najbolja aproksimacija za f u skupu V^* jeste da za svako $v\in V^*$ važi nejednakost

$$(3.8)\quad \min_{t\in M[f-\hat{v}]}[v(t)-\hat{v}(t)]\operatorname{sgn}[f(t)-\hat{v}(t)]\leq 0.\ \square$$

Ovaj stav, kao i naredna tri koja daju dovoljne uslove za ε-aproksimaciju elementima skupa V^* neposredno izlaze iz opštih stavova datih u glavi drugoj (stavovi 7. - 9.).

STAV 2. Neka je $f\in C(T)$ i $\hat{v}\in V^*$. Jedan dovoljan uslov da $\hat{v}$ bude ε-aproksimacija za f u skupu V^* (pri $\varepsilon<\|f-\hat{v}\|$) jeste da za svako $v\in V^*$ važi nejednakost

$$(3.9)\quad \min_{t\in M_\varepsilon[f-\hat{v}]}[v(t)-\hat{v}(t)]\operatorname{sgn}[f(t)-\hat{v}(t)]\leq 0.\ \square$$

STAV 3. Neka je $f\in C(T)$ i $\hat{v}\in V$. Da bi $\hat{v}$ bilo ε-aproksimacija za f u skupu V^* (pri $\varepsilon<\|f-\hat{v}\|$), dovoljno je da važi nejednakost:

$$(3.10)\quad \min_{t\in M[f-\hat{v}]}[v(t)-\hat{v}(t)]\operatorname{sgn}[f(t)-\hat{v}(t)]\leq \varepsilon.\ \square$$

STAV 4. Neka je $f\in C(T)$ i $\hat{v}\in V^*$. Neka je dalje $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ sa $\varepsilon_1,\varepsilon_2\geq 0$ i $\varepsilon<\|f-\hat{v}\|$. Da bi $\hat{v}$ bilo ε-aproksimacija za f u skupu V^*, dovoljno je da važi nejednakost

$$(3.11)\quad \min_{t\in M_{\varepsilon_1}[f-\hat{v}]}[v(t)-\hat{v}(t)]\operatorname{sgn}[f(t)-\hat{v}(t)]\leq \varepsilon_2.\ \square$$

Kao što je već rečeno, važi u izvesnom smislu i obratno tvrdjenje onom iz stava 1. Da bismo iskazali odgovarajući stav uvedimo prvo jedan skup koji će u daljem igrati ključnu ulogu. Za dati skup V i proizvoljan element $g\in V$ stavimo

$$(3.12)\quad V_g:=\{v\in V\mid (\forall t\in N[\ell-g])(v(t)>g(t))\wedge \\ \wedge(\forall t\in N[u-g])(v(t)<g(t))\}.$$

Običnim rečima, funkcija v leži u V_g ako je u tačkama gde g dostiže donje ograničenje - funkciju ℓ, v strogo veće od g, a u tačkama gde g dostiže gornje ograničenje - funkciju u, v je strogo manje od g.

Koristeći oznaku iz (3.12) možemo da iskažemo sledeći stav.

STAV 5. Neka je dat proizvoljan podskup $V\subset C(T)$, funkcija

(4.4o) $B_1(t) := K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}) - \mu\|f-\hat{\vartheta}\|,$

(4.41) $C_1(t) := \|f-\hat{\vartheta}\|^2 - \|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2$

(4.42) $D_1(t) := B_1^2(t) + A_1(t)C_1(t)$

nejednakost (4.38) svodi se na

$$P_1(\lambda) := A_1(t)\lambda^2 - 2B_1(t)\lambda - C_1(t) \leq 0 .$$

Slično kao u dokazu prethodnog stava definišimo

$$(4.43) \qquad \overline{\lambda}_2(t) := \begin{cases} -\dfrac{C_1(t)}{2B_1(t)} , & A_1(t) = 0 \\ \dfrac{B_1(t)+\sqrt{D_1(t)}}{A_1(t)} , & A_1(t) \neq 0, D_1(t) \geqslant 0 . \end{cases}$$

Ne ulazeći u sve podrobnosti koje su analogne onima u dokazu stava 6., dolazimo do

$$(4.44) \qquad \overline{\lambda}_2 := \min_{D_1(t)\geqslant 0} \overline{\lambda}_2(t).$$

Da bi se obezbedila nenegativnost desne strane u (4.33), kao i da bude $\lambda_2 \leq 1$, stavimo

$$(4.45) \qquad \lambda_2 := \min\left\{1, \overline{\lambda}_2, \frac{\|f-\hat{\vartheta}\|}{\mu}\right\}.$$

Korišćenjem bilo kojeg od prethodna dva stava možemo da definišemo niz (ϑ_n) elemenata skupa V takav da niz realnih brojeva $(\|f-\vartheta_n\|)_{n=1}^{\infty}$ opada. Predjimo na sam opis algoritma za izračunavanje najboljih aproksimacija.

Za $\delta \geqslant 0$ stavimo

$$(4.46) \qquad M_\delta[f-\hat{\vartheta}] := \{t\in T \mid \|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H \geq \|f-\hat{\vartheta}\| - \delta\}.$$

Skup $M_\delta[f-\hat{\vartheta}]$ je kompaktan podskup od T i igraće ulogu skupa $M \supset M[f-\hat{\vartheta}]$ iz (4.15).

Pretpostavimo da su $\hat{\vartheta}_j \in V$ i $\delta_j > 0$ već dati. Definišimo $\hat{\vartheta}_{j+1} \in V$ i $\delta_{j+1} > 0$. Kratkoće radi, stavimo

$$(4.47) \qquad M_j := M_{\delta_j}[f-\hat{\vartheta}_j] .$$

SLUČAJ I. Postoji $\vartheta_j \in V$ i $K_j > 0$ tako da važi implikacija

$$(4.48) \qquad t \in M_j \Rightarrow K(t,\vartheta_j,\hat{\vartheta}_j) \geq K_j > 0 .$$

(3.19) $$\min_{t\in D} |\hat{v}(t) - v(t)| > 0.$$

Kako skup V ima svojstvo (WB), postoji niz (v_n) u V sa sledećim osobinama:

(3.20) $$\lim_{n\to\infty} \|v_n - \hat{v}\| = 0,$$

(3.21) $$\min_{t\in D} [v(t) - v_n(t)]\cdot[v_n(t) - \hat{v}(t)] > 0 \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Uočimo indeks n_1 takav da za $n > n_1$ važi

$$\|v_n - \hat{v}\| < \|f - \hat{v}\|.$$

Iz (3.21) dobijamo

(3.22) $$\min_{t\in M[f-\hat{v}]} |v_n(t) - \hat{v}(t)| > 0.$$

Naime, ako to ne bi važilo, za neko $t_0 \in M[f-\hat{v}] \subset D$ bilo bi $v_n(t_0) = \hat{v}(t_0)$, pa bi minimum u (3.21) bio ≤ 0. Za $n > n_1$ i $t \in M[f-\hat{v}]$ imamo i

(3.23) $$\operatorname{sgn}[f(t) - \hat{v}(t)] = \operatorname{sgn}[f(t) - v_n(t)] = \operatorname{sgn}[v_n(t) - \hat{v}(t)].$$

Zaista, za ove t i n je

$$|v_n(t) - \hat{v}(t)| \leq \|v_n - \hat{v}\| < \|f - \hat{v}\| = |f(t) - \hat{v}(t)|,$$

pa iz

$$f(t) - v_n(t) = [f(t) - \hat{v}(t)] - [v_n(t) - \hat{v}(t)]$$

sledi

$$\operatorname{sgn}[f(t) - v_n(t)] = \operatorname{sgn}[f(t) - \hat{v}(t)],$$

tj. prvi deo jednakosti (3.23). Za fiksirano t i n iz (3.21) sledi egzistencija broja $\beta > 0$ sa

$$v(t) - v_n(t) = \beta[v_n(t) - \hat{v}(t)]$$

Odatle je

$$v_n(t) - \hat{v}(t) = \frac{1}{\beta+1}[v(t) - \hat{v}(t)],$$

te je

$$\operatorname{sgn}[v_n(t) - \hat{v}(t)] = \operatorname{sgn}[v(t) - \hat{v}(t)].$$

Zbog (3.14) je

$$\operatorname{sgn}[v(t) - \hat{v}(t)] = \operatorname{sgn}[f(t) - \hat{v}(t)]$$

mogu nastupiti. Ostaje problem odredjivanja $v_j \in V$ i $K_j > 0$ tako da pri datom $\hat{v}_j \in V$ i poznatom skupu M_j važi

$$(4.54) \qquad t \in M_j \Rightarrow K(t, v_j, \hat{v}_j) \geq K_j > 0.$$

Uočimo, pre svega, da je globalni uslov Kolmogorova

$$(\forall v \in V)\left(\min_{t \in M[f-\hat{v}]} K(t, v, \hat{v}) \leq 0 \right)$$

ekvivalentan sa

$$(4.55)\ (\forall v \in V)\left(\min_{t \in M[f-\hat{v}]} \mathrm{Re}\langle f(t) - \hat{v}(t), d_v[v(t) - \hat{v}(t)] \rangle \leq 0 \right),$$

gde je d_v proizvoljan pozitivan realan broj koji može zavisiti od $v \in V$. Ako je $0 < d_v \leq 1$, množenje drugog faktora u skalarnom proizvodu u (4.55) sa d_v može se geometrijski protumačiti kao zamena elementa $v \in V$ konveksnom kombinacijom

$$(1 - d_v)\hat{v} + d_v \cdot v \quad (\in V)$$

elemenata $v, \hat{v} \in V$. Zaista,

$$d_v \cdot [v(t) - \hat{v}(t)] = [d_v \cdot v(t) + (1 - d_v) \cdot \hat{v}(t)] - \hat{v}(t),$$

tako da je

$$(4.56) \qquad K(t, v, \hat{v}) = K(t, (1 - d_v)\hat{v} + d_v \cdot v, \hat{v}).$$

Iz (4.17) i (4.33) sledi da je optimalno uzimati najveće moguće K_j, pod uslovom da vektor $v - \hat{v}$ ne može da ima proizvoljno veliku normu, npr. pod uslovom

$$(4.57) \qquad (\|v - \hat{v}\| \leq 1) \wedge (v \in V).$$

Na taj način, problem odredjivanja K_0 i v može da se formuliše kao optimizacioni problem

$$(4.58) \qquad K_0 = \max!$$

$$(4.59) \qquad (\forall t \in M)(K_0 - K(t, v, \hat{v}) \leq 0)$$

$$(4.57) \qquad (\|v - \hat{v}\| \leq 1) \wedge (v \in V).$$

Kako za $(K_0, v) = (0, \hat{v})$ imamo dopustivu tačku u problemu (4.57)-(4.59), maksimalna vrednost K_0 ne može biti negativan broj. Kada je skup

$$\{v \in V \mid \|v - \hat{v}\| \leq 1\}$$

$N[\ell-\hat{\vartheta}]$ i $N[u-\hat{\vartheta}]$ je $\vartheta_n \neq \hat{\vartheta}$. Kao što je gore iz (3.21) izvedeno sledi za $t \in D$:

$$\operatorname{sgn}[\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)] = \operatorname{sgn}[\vartheta_n(t)-\hat{\vartheta}(t)].$$

Imajući u vidu da je ϑ iz $V_{\hat{\vartheta}}$ i definiciju skupa $V_{\hat{\vartheta}}$, dobijamo sledeće relacije. Za $t \in N[\ell-\hat{\vartheta}]$ je $\ell(t)=\hat{\vartheta}(t)<\vartheta(t)$, tako da je

(3.29) $$\vartheta_n(t)-\ell(t) = \vartheta_n(t)-\hat{\vartheta}(t) > 0.$$

Za $t \in N[u-\hat{\vartheta}]$ je $u(t)=\hat{\vartheta}(t)>\vartheta(t)$ pa je

(3.30) $$u(t)-\vartheta_n(t) = \hat{\vartheta}(t)-\vartheta_n(t) > 0.$$

Dalje, za $t \in N[\ell-\hat{\vartheta}]$ i $n > n_3$ važi:

(3.31) $$u(t)-\vartheta_n(t) = [u(t)-\hat{\vartheta}(t)]-[\vartheta_n(t)-\hat{\vartheta}(t)] =$$

$$=[u(t)-\ell(t)]-[\vartheta_n(t)-\hat{\vartheta}(t)] \geq K_2 - \|\vartheta_n-\hat{\vartheta}\| > 0.$$

Analogno, za $t \in N[u-\hat{\vartheta}]$ i $n > n_3$ dobijamo

(3.32) $$\vartheta_n(t)-\ell(t) = [\hat{\vartheta}(t)-\ell(t)]-[\hat{\vartheta}(t)-\vartheta_n(t)] =$$

$$=[u(t)-\ell(t)]-[\hat{\vartheta}(t)-\vartheta_n(t)] \geq K_2 - \|\vartheta_n-\hat{\vartheta}\| > 0.$$

Dakle, za $t \in N[\ell-\hat{\vartheta}] \cup N[u-\hat{\vartheta}]$ i $n > n_3$ imamo

(3.33) $$\ell(t) < \vartheta_n(t) < u(t).$$

Ako je $T=N[\ell-\hat{\vartheta}] \cup N[u-\hat{\vartheta}]$, neposredno dobijamo $\vartheta_n \in V^*$ pa je dokaz završen. U protivnom, zbog poluneprekidnosti odozgo funkcije $\ell-\vartheta_n$ i poluneprekidnosti odozdo funkcije $u-\vartheta_n$ postoji otvoren skup

$$U \supset N[\ell-\hat{\vartheta}] \cup N[u-\hat{\vartheta}],$$

takav da za sve $t \in U$ važi nejednakost (3.33). Neka je $W := T \setminus U$. Pošto je skup W kompaktan, $W \cap (N[\ell-\hat{\vartheta}] \cup N[u-\hat{\vartheta}]) = \emptyset$ i funkcije $u-\hat{\vartheta}$ i $\hat{\vartheta}-\ell$ poluneprekidne odozdo, one na W dostižu (pozitivne) minimume:

(3.34) $$K_3 := \min_{t \in W}[u(t)-\hat{\vartheta}(t)] > 0$$

i

(3.35) $$K_4 := \min_{t \in W}[\hat{\vartheta}(t)-\ell(t)] > 0.$$

Neka je $n_4 \geq n_3$ izabrano tako da za $n > n_4$ bude

(3.36) $$\|\hat{\vartheta}-\vartheta_n\| < \min\{K_3, K_4\}.$$

je neprekidna, pod uslovom da je skup $\{v\in V \mid \|v-\hat{v}\|\leq 1\}$ kompaktan (dokaz neprekidnosti preslikavanja (4.67) potpuno je analogan dokazu stava 1. pete glave). Zbog toga se u (4.66) supremum dostiže i konačan je

$$(4.68) \quad K_j = \max\{\overline{K}_j(v) \mid v\in V \wedge \|v-\hat{v}_j\|\leq 1\} < +\infty$$

Dakle,

$$(4.69) \quad K_j = \max_{v\in V,\, \|v-\hat{v}_j\|\leq 1} \ \min_{t\in M_j} K(t,v,\hat{v}_j).$$

Za v_j uzimamo proizvoljan element iz skupa

$$(4.70) \quad \{v\in V \mid \|v-\hat{v}_j\|\leq 1 \wedge \overline{K}_j(v)=K_j\}.$$

Praktično, nije neophodno odredjivati tačno rešenje K_j. Ako je realan broj $\eta>0$ dovoljno mali (svakako <1), umesto K_j možemo uzeti neko K_j' sa

$$(4.71) \quad (1-\eta)K_j \leq K_j' \leq (1+\eta)K_j,$$

pri čemu biramo v_j' tako da bude

$$(4.72) \quad (1-\eta)K_j \leq \overline{K}_j(v_j') \leq K_j'.$$

S obzirom na definiciju broja $\overline{K}_j(v)$, od posebnog značaja za stabilnost odredjivanja $\overline{K}_j(v)$ je činjenica da funkcija $v\longmapsto K(t,v,\hat{v}_j)$ zadovoljava Lipšicov uslov:

$$|K(t,v',\hat{v}_j)-K(t,v'',\hat{v}_j)| = |\mathrm{Re}\langle f(t)-\hat{v}_j(t), v'(t)-\hat{v}_j(t)\rangle -$$

$$-\mathrm{Re}\langle f(t)-\hat{v}_j(t), v''(t)-\hat{v}_j(t)\rangle| = |\mathrm{Re}\langle f(t)-\hat{v}_j(t), v'(t)-v''(t)\rangle| \leq$$

$$\leq \|f(t)-\hat{v}_j(t)\|_H\cdot\|v'(t)-v''(t)\|_H \leq \|f-\hat{v}_j\|\cdot\|v'-v''\|.$$

Prema tome, od konkretnih okolnosti zavisi da li će se birati tačno rešenje (K_j, v_j) optimizacionog problema (4.61)-(4.63) (koje, na osnovu stavova 6. i 7. optimalno popravlja $\hat{v}_j$) ili samo približno rešenje prema (4.71) i (4.72).

Pretpostavimo sada da je V konveksan zatvoren podskup konačno-dimenzionalnog potprostora F prostora $C(T,H)$. Kako je ovakav skup V ograničeno kompaktan, on je i proksiminalan. Kako ne mora biti $\mathrm{card}\, P_V(f)=1$, niz $(\hat{v}_j)$ ne mora konvergirati, ali očekujemo da njegove tačke nagomilavanja leže u skupu $P_V(f)$.

GLAVA ČETVRTA

JEDAN METOD ZA NUMERIČKO ODREDJIVANJE DOBRIH I NAJBOLJIH APROKSIMACIJA

U ovoj glavi daje se jedan algoritam za odredjivanje tačnih i približnih rešenja problema teorije aproksimacija u prostoru $C(T,H)$ neprekidnih funkcija definisanih na kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru T sa vrednostima u pred-Hilbertovom prostoru H. Ideja za ovakav algoritam potiče od Krabs-a ([39], [72]) koji ga je primenio na diskretnu čebiševsku linearnu aproksimaciju. Slična ideja korišćena je i kod aproksimacije kompleksnim funkcijama i primenjena na približno odredjivanje izvesnih konformnih preslikavanja (Krabs i Opfer ([74])). Slučaj linearne čebiševske aproksimacije u kompleksnoj ravni, kao i racionalnu čebiševsku aproksimaciju u $\mathbb{C}$ ispitivali su sa stanovišta ovakvog tipa algoritama Ellacott i Williams ([49], [50]).

Posmatraćemo opšti problem teorije aproksimacija u $C(T,H)$ u sledećoj postavci. Neka je dat proizvoljan neprazan skup V prostora $C(T,H)$ i funkcija $f \in C(T,H) \setminus \overline{V}$ koju treba aproksimirati elementima skupa V. Tačnije, traže se $v_0 \in V$ tako da je

(4.1) $$\|f - v_0\| = \inf_{v \in V} \|f - v\| = d(f,V) \ (>0).$$

Značajnu ulogu u karakterizaciji ovakvih najboljih aproksimacija ($v_0 \in P_V(f)$) igra skup kritičnih tačaka funkcije $f - v_0$:

$$M[f-v_0] := \{t \in T \mid \|f(t) - v_0(t)\|_H = \|f - v_0\|_{C(T,H)}\}.$$

Videli smo da je za $v_0 \in P_V(f)$ uvek dovoljno da za svako $v \in V$ važi nejednakost

(4.2) $$\min_{t \in M[f-v_0]} \mathrm{Re}\,\langle f(t) - v_0(t), v(t) - v_0(t)\rangle \leq 0.$$

Algoritam koji ćemo opisati odnosi se na onu klasu skupova $V \subset C(T,H)$, za koju je globalni uslov Kolmogorova (4.2) zajedno sa (4.78) protivreči već dokazanoj činjenici

(4.79) $$\lim_{j\to\infty} \lambda_j K_j = 0.$$

Prilikom računanja λ_j uz korišćenje ocena iz stava 6. imamo

(4.80) $$\lambda_j = \min\{1, \min_{t\in T} \overline{\lambda}_j(t)\},$$

gde je $\overline{\lambda}_j(t)$ definisano analogno sa $\overline{\lambda}(t)$ u (4.26). Ako pak koristimo ocenu iz stava 7., imamo

(4.81) $$\lambda_j = \min\{1, \min_{D_j(t)\geq 0} \overline{\lambda}_j(t), \frac{\|f-\hat{\vartheta}_j\|}{\mu_j}\},$$

gde je $\overline{\lambda}_j(t)$ definisano analogno sa $\overline{\lambda}_2(t)$ u (4.45) i $0<\mu_j<\|f-\hat{\vartheta}_j\|/K_j$.

Razmotrimo ovde samo prvu varijantu kada se primenjuje stav 6. Drugi slučaj razmatra se analogno. Neka je zato $j\geq j_0$. Ako je $t\in M_j$, mora biti $A_j(t)>0$. Kako je $C_j(t)\geq 0$ uvek, to imamo

$$\overline{\lambda}_j(t) = \frac{B_j(t)+\sqrt{B_j^2(t)+A_j(t)C_j(t)}}{A_j(t)} \geq \frac{2B_j(t)}{\|\vartheta_j(t)-\hat{\vartheta}_j(t)\|_H^2} \geq$$

$$\geq \frac{2K(t,\vartheta_j,\hat{\vartheta}_j)-K_j}{\|\vartheta_j-\hat{\vartheta}_j\|^2} \geq \frac{K_j}{\|\vartheta_j-\hat{\vartheta}_j\|^2} \geq \frac{\delta_j}{\|\vartheta_j-\hat{\vartheta}_j\|^2} \geq \delta_j \geq \delta,$$

gde pretposlednja nejednakost važi zbog $\|\vartheta_j-\hat{\vartheta}_j\|\leq 1$. Ako je $t\notin M_j$, imamo

$$\|f(t)-\hat{\vartheta}_j(t)\|_H < \|f-\hat{\vartheta}_j\|-\delta_j,$$

tako da je

$$C_j(t) = \|f-\hat{\vartheta}_j\|^2 - \|f(t)-\hat{\vartheta}_j(t)\|_H^2 = (\|f-\hat{\vartheta}_j\| -$$

$$-\|f(t)-\hat{\vartheta}_j(t)\|_H)\cdot(\|f-\hat{\vartheta}_j\| + \|f(t)-\hat{\vartheta}_j(t)\|_H) \geq$$

$$\geq \delta_j\cdot(\|f-\hat{\vartheta}_j\| + \|f(t)-\vartheta_j(t)\|_H) \geq \delta_j\cdot\|f-\hat{\vartheta}_j\|.$$

Odatle je

$$\overline{\lambda}_j(t) = \frac{C_j(t)}{K_j} \geq \frac{\delta_j\cdot\|f-\hat{\vartheta}_j\|}{K_j} \geq \|f-\hat{\vartheta}_j\| \geq \rho > 0.$$

Na taj način dobijamo sledeću ocenu:

$$\min_{t\in T} \overline{\lambda}_j(t) = \min\{\min_{t\in M_j} \overline{\lambda}_j(t), \min_{t\notin M_j} \overline{\lambda}_j(t)\} \geq \min\{\delta,\rho\} > 0.$$

pa je i

ako i samo ako za svako $x \in X$ i svako $v_0 \in P_V(x)$ važi

(4.7) $(\forall v \in V)(\min\limits_{L \in Ep\,\Sigma(x-v_0)} \operatorname{Re} L(v-v_0) \leq 0)$.

Drugim rečima, kolmogorovski skup prve vrste je isto što i strogo sunce.

Još jedna karakterizacija kolmogorovskog skupa prve vrste data je u terminima "regularnosti" skupa V (Brosowski i Wegmann ([32])).

DEFINICIJA 3. 1° Proizvoljan neprazan podskup V normiranog vektorskog prostora X je regularan u tački $v_0 \in V$, ako za svako $x \in X \setminus \overline{V}$, svako $v \in V$, svaki realan broj $\lambda > 0$ i svaki skup $A \subset Ep\,K^*$ koji je zatvoren u relativizaciji topologije $\sigma(X^*, X)$ na $Ep\,K^*$ i koji sadrži skup $Ep\,\Sigma(x-v_0)$, iz

$$L \in A \Rightarrow \operatorname{Re} L(v-v_0) > 0$$

sledi egzistencija elementa $v_\lambda \in V$ takvog da su ispunjeni sledeći uslovi:

(4.8) $L \in A \Rightarrow \operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) > \operatorname{Re} L(x-v_0) - \|x-v_0\|$,

(4.9) $\|v_\lambda - v_0\| < \lambda$.

2° Skup $V \subset X$ je regularan ako je regularan u svakoj svojoj tački.

STAV 3 (Brosowski i Wegmann ([32])). Proizvoljan neprazan podskup V normiranog vektorskog prostora X je regularan u tački $v_0 \in V$ ako i samo ako je v_0 sunčana tačka skupa V.

STAV 4 (Brosowski i Wegmann ([32])). Proizvoljan neprazan podskup V normiranog vektorskog prostora X je kolmogorovski skup prve vrste ako i samo ako je regularan.

Lako se dokazuje da su zvezdasti skupovi stroga sunca, tako da na osnovu stava 2. sledi da su, specijalno, afini potprostori, vektorski potprostori i konveksni skupovi - kolmogorovski skupovi prve vrste.

U slučaju prostora $C(T,H)$ u [32] uveden je jedan specijalan vid regularnosti skupova, tzv. C-regularnost.

DEFINICIJA 4. 1° Proizvoljan neprazan podskup V prostora je $K_j \leqslant \delta_j$. Otud postoji podniz $(K_{j_{k_\ell}})$ niza (K_{j_k}) takav da je

(4.87) $$\lim_{\ell\to\infty} K_{j_{k_\ell}} = 0.$$

Da bismo izbegli komplikovanje oznaka suvišnim indeksima, uvedimo sledeće nove oznake

(4.88) $$\widetilde{M}_\ell := M_{j_{k_\ell}};\ \widetilde{K}_\ell := K_{j_{k_\ell}};\ \widetilde{\delta}_\ell := \delta_{j_{k_\ell}};\ \widetilde{\vartheta}_\ell := \hat{\vartheta}_{j_{k_\ell}}.$$

Primenom globalnog uslova Kolmogorova dolazimo do zaključka da je za $\hat{\vartheta} \in P_V(f)$ dovoljno dokazati da za svako $v \in V$ važi

(4.89) $$\min_{t\in M[f-\hat{\vartheta}]} K(t,v,\hat{\vartheta}) \leqslant 0.$$

Uočimo prvo da za proizvoljno $v \in V$ imamo nejednakost

(4.90) $$K(t,v,\hat{\vartheta}) = K(t,v,\hat{\vartheta}_j) + \eta_j,$$

gde je

(4.91) $$\lim_{j\to\infty} \eta_j = 0.$$

Naime, imamo sledeće ocene

$$|K(t,v,\hat{\vartheta}) - K(t,v,\widetilde{\vartheta}_j)| = |\mathrm{Re}\langle f(t)-\hat{\vartheta}(t), v(t)-\hat{\vartheta}(t)\rangle -$$

$$-\mathrm{Re}\langle f(t)-\widetilde{\vartheta}_j(t), v(t)-\widetilde{\vartheta}_j(t)\rangle| = |\mathrm{Re}\langle \widetilde{\vartheta}_j(t)-\hat{\vartheta}(t), v(t)\rangle +$$

$$+\mathrm{Re}\langle f(t), \widetilde{\vartheta}_j(t)-\hat{\vartheta}(t)\rangle + \|\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 - \|\widetilde{\vartheta}_j(t)\|_H^2| \leqslant$$

$$\leqslant \|\widetilde{\vartheta}_j - \hat{\vartheta}\|\cdot(\|f\| + \|v\|) + \|\widetilde{\vartheta}_j - \hat{\vartheta}\|\cdot(\|\widetilde{\vartheta}_j\| + \|\hat{\vartheta}\|).$$

Kako $\widetilde{\vartheta}_j$ i $\hat{\vartheta}$ pripadaju skupu (4.83), to imamo

$$\|\widetilde{\vartheta}_j\| \leqslant \|\widetilde{\vartheta}_j - f\| + \|f\| \leqslant \|f - \hat{\vartheta}_1\| + \|f\|,$$

$$\|\hat{\vartheta}\| \leqslant \|\hat{\vartheta} - f\| + \|f\| \leqslant \|f - \hat{\vartheta}_1\| + \|f\|.$$

Odatle konačno dobijamo ocenu

(4.92) $$|\eta_j| \leqslant \|\widetilde{\vartheta}_j - \hat{\vartheta}\|\cdot(3\|f\| + \|v\| + 2\|f - \hat{\vartheta}_1\|)$$

odakle sledi (4.91). Prelaskom na minimum u (4.90) po $t \in M[f-\hat{\vartheta}]$ imamo

(4.93) $$\min_{t\in M[f-\hat{\vartheta}]} K(t,v,\hat{\vartheta}) \leqslant \min_{t\in M[f-\hat{\vartheta}]} K(t,v,v_j) + \eta_j =$$

Pritom se egzistencija pozitivnog K_0 pretpostavlja zato što skup M ne mora da bude kompaktan u T kao što je to slučaj sa $M[f-\hat{\vartheta}]$.

Ako važi uslov (4.15) za element $\hat{\vartheta}$ koji nije najbolja aproksimacija za f, možemo dati poboljšanje, tj. element $\tilde{\vartheta} \in V$ takav da je

$$\|f-\tilde{\vartheta}\| < \|f-\hat{\vartheta}\|$$

i to pod dodatnom pretpostavkom da je V konveksan skup. Preciznije, važi sledeći stav.

<u>STAV 6</u>. Neka je V konveksan skup u prostoru $C(T,H)$. Ako za dati element $\hat{\vartheta} \in V$ i dati skup $M \supset M[f-\hat{\vartheta}]$ postoji element $\vartheta \in V$ i konstanta $K_0 > 0$ tako da

$$t \in M \Rightarrow K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}) \geqslant K_0 > 0,$$

onda postoji najveći realan broj $\lambda_1 \in]0,1]$, takav da je

$$\|f-[\hat{\vartheta}+\lambda(\vartheta-\hat{\vartheta})]\|^2 \leqslant \|f-\hat{\vartheta}\|^2 - \lambda K_0 \tag{4.17}$$

za sve $\lambda \in [0,1]$.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu definicije norme elementa prostora $C(T,H)$ nejednakost u (4.17) je ekvivalentna sa skupom nejednakosti

$$\|f(t)-[\hat{\vartheta}(t)+\lambda(\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t))]\|_H^2 - \|f-\hat{\vartheta}\|^2 + \lambda K_0 \leqslant 0$$

za svako $t \in T$. Transformišimo prvi član na levoj strani:

$$\|f(t)-\hat{\vartheta}(t)-\lambda(\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t))\|_H^2 = \|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 +$$

$$+\lambda^2\|\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 - \lambda\langle f(t)-\hat{\vartheta}(t),\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\rangle -$$

$$-\lambda\langle \vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t), f(t)-\hat{\vartheta}(t)\rangle = \|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 +$$

$$+\lambda^2\|\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 - 2\lambda \mathrm{Re}\langle f(t)-\hat{\vartheta}(t),\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\rangle =$$

$$= \|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 + \lambda^2\|\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 - 2\lambda K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}).$$

Odatle, nejednakost u (4.18) dobija sledeći oblik:

$$\lambda^2\|\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 - 2\lambda[K(t,\vartheta,\hat{\vartheta})-\tfrac{1}{2}K_0] + \|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2 - \|f-\hat{\vartheta}\|^2 \leqslant 0. \tag{4.19}$$

G L A V A   P E T A

O KARAKTERIZACIJI REŠENJA PROBLEMA PARAMETARSKE OPTIMIZACIJE

U ovoj glavi posmatraćemo problem tzv. parametarske optimizacije i to u sledećem obliku

minimizirati funkciju

(5.1a) $$p(x)$$

uz ograničenja

(5.1b) $$(\forall t\in T)(A(t,x)\leq b(t))$$

pri čemu je T kompaktan Hausdorff-ov prostor; $p: U \to \mathbb{R}$ funkcija definisana na otvorenom konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^m$, $A: T\times U \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, $b \in C(T)$ - funkcija koju ćemo smatrati parametrom (odakle potiče i naziv ovog tipa optimizacionih problema). Specijalno ćemo posmatrati i slučaj tzv. linearne parametarske optimizacije kada je

(5.2a) $$p(x)=\sum_{j=1}^{m} p_j x_j\ ;\ (p_1,\dots,p_m)\in\mathbb{R}^m,\ x=(x_1,\dots,x_m)\in U;$$

(5.2b) $$A(t,x)=\langle \tilde{A}(t),x\rangle;$$

gde je $\tilde{A}: T\to\mathbb{R}^m$ neprekidno preslikavanje, a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uobičajeni skalarni proizvod u $\mathbb{R}^m$.

Za datu funkciju $b\in C(T)$ definišimo

a) skup dopustivih tačaka:

(5.3) $$Z_b:=\{x\in U \mid (\forall t\in T)(A(x,t)\leq b(t))\};$$

b) minimalna vrednost funkcije p na skupu Z_b:

(5.4) $$E_b:=\min_{x\in Z_b} p(x);$$

c) skup minimalnih rešenja:

(5.5) $$P_b:=\{x\in Z_b \mid p(x)=E_b\}.$$

Da bismo mogli da iskažemo neke stavove o minimalnim rešenjima, uvodimo još neke oznake. Neka je ∞ proizvoljan objekt koji ne pripada skupu T. Definišimo skup $T':=T\cup\{\infty\}$.

neprekidna na T , zbog čega ona dostiže pozitivan minimum.

Dokažimo prvo da je $\overline{\lambda}(t)>0$ za svako $t\in T$. Ako je $A(t)=0$, onda je i $K(t,\vartheta,\hat{\vartheta})=0$, tako da iz pretpostavke stava sledi da $t\notin M$. Zato je i $t\notin M[\varphi-\hat{\vartheta}]$, pa je

$$\|\varphi(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2<\|\varphi-\hat{\vartheta}\|^2,$$

odakle je $C(t)>0$. Kako je u ovom slučaju $\overline{\lambda}(t)=C(t)/K_0$ i $K_0>0$, imamo $\overline{\lambda}(t)>0$.

Pretpostavimo sada da je $A(t)>0$. Ako je još i $B(t)>0$, iz gornjeg reda formule (4.26) neposredno se vidi da je $\overline{\lambda}(t)>$ >0 . Neka je zato $B(t)\leqslant 0$. Tada opet $t\notin M$ jer bi u protivnom bilo

$$B(t)=K(t,\vartheta,\hat{\vartheta})-\tfrac{1}{2}K_0=[K(t,\vartheta,\hat{\vartheta})-K_0]+\tfrac{1}{2}K_0\geqslant\tfrac{1}{2}K_0>0,$$

protivno pretpostavci. Zato je i u ovom slučaju $C(t)>0$. Zbog $A(t)>0$, $C(t)>0$ je i $A(t)\cdot C(t)>0$ pa je

$$\sqrt{(B(t))^2+A(t)C(t)}>|B(t)|,$$

tako da je $\overline{\lambda}(t)>0$.

Dokažimo sada neprekidnost funkcije $t\mapsto\overline{\lambda}(t)$. Ako je $t_0\in T$ takvo da je $A(t_0)>0$, zbog neprekidnosti funkcije $t\mapsto A(t)$ postoji okolina U tačke t_0 takva da je

$$t\in U\Rightarrow A(t)>0,$$

tako da je za sve t iz U

$$\overline{\lambda}(t)=\frac{1}{A(t)}\left[B(t)+\sqrt{(B(t))^2+A(t)C(t)}\right],$$

pa je prema tome $\overline{\lambda}$ neprekidna u t_0 . Za tačke iz unutrašnjosti skupa $\{t\in T\,|\,A(t)=0\}$ stvar je takodje jasna jer

$$t\in \mathrm{Int}\{t\in T\,|\,A(t)=0\}\Rightarrow\overline{\lambda}(t)=\frac{C(t)}{K_0}.$$

Ostaje pitanje tačaka granice skupa $\{t\in T\,|\,A(t)=0\}$. Kako je taj skup zatvoren, za $t_0\in \mathrm{Fr}\{t\in T\,|\,A(t)=0\}$ je $A(t_0)=0$. Zato je

$$\overline{\lambda}(t_0)=\frac{C(t_0)}{K_0}. \tag{4.28}$$

Za tačke t za koje je $A(t)>0$ neprekidnost ćemo ustanoviti nam je jedna lema. U vezi sa tim definišimo višeznačno preslikavanje $M'_{\mathcal{B}}: U \to POT(T')$(gde je U gore pomenuti otvoren neprazan podskup od $\mathbb{R}^m$) sa

$$M'_{\mathcal{B},x} := \{t \in T' \mid \varphi_{\mathcal{B}}(x) = \psi_{\mathcal{B}}(t,x)\}.$$

Analogno definišimo i $M_{\mathcal{B}}: U \to POT(T)$ sa

$$M_{\mathcal{B},x} := \{t \in T \mid \varphi_{\mathcal{B}}(x) = \psi_{\mathcal{B}}(t,x)\}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije $T' \ni t \mapsto \psi_{\mathcal{B}}(t,x)$ i kompaktnosti prostora T', skup $M'_{\mathcal{B},x}$ je neprazan za svako $x \in U$.

<u>LEMA 1.</u> Grafik Γ preslikavanja $U \ni x \mapsto M'_{\mathcal{B},x} \subset T'$ je zatvoren skup u $U \times T'$.

<u>Dokaz.</u> Neka je $(x_0,t_0) \in U \times T'$. Dokažimo da ako za svaki otvoren skup V koji sadrži tačku (x_0,t_0) važi $V \cap \Gamma \neq \emptyset$, onda je $(x_0,t_0) \in \Gamma$. Po definiciji skupa $M'_{\mathcal{B},x_0}$ postoji $t' \in M'_{\mathcal{B},x_0}$ sa

$$\psi_{\mathcal{B}}(t_0,x_0) \leq \psi_{\mathcal{B}}(t',x_0) = \varphi_{\mathcal{B}}(x_0).$$

Ako bi bilo $\psi_{\mathcal{B}}(t_0,x_0) = \varphi_{\mathcal{B}}(x_0)$, sledilo bi $t_0 \in M'_{\mathcal{B},x_0}$, tj. $(x_0,t_0) \in \Gamma$ pa nema šta da se dokazuje. Pretpostavimo zato da je $\psi_{\mathcal{B}}(t_0,x_0) < \varphi_{\mathcal{B}}(x_0)$. Tada je za neko $\varepsilon > 0$ i $\psi_{\mathcal{B}}(t_0,x_0) + \varepsilon < \varphi_{\mathcal{B}}(x_0) - \varepsilon$. Uočimo dalje disjunktne otvorene skupove

$$W_1 := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \psi_{\mathcal{B}}(t_0,x_0) + \varepsilon > \lambda\}\,;\; W_2 := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > \varphi_{\mathcal{B}}(x_0) - \varepsilon\}.$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja $(x,t) \mapsto \psi_{\mathcal{B}}(t,x)$ u tački (x_0,t') postoji okolina G_2 tačke x_0 i okolina V_2 tačke t' , tako da iz $(x,t) \in G_2 \times V_2$ sledi $\psi_{\mathcal{B}}(t,x) \in W_2$. S druge strane, postoji okolina G_1 tačke x_0 i okolina V_1 tačke t_0 tako da za $(x,t) \in G_1 \times V_1$ važi $\psi_{\mathcal{B}}(t,x) \in W_1$. Pretpostavimo da je $\Gamma \cap (G_0 \times V_1) \neq \emptyset$, gde je stavljeno $G_0 := G_1 \cap G_2$. Neka je npr. tačka $(\bar{x},\bar{t})$ u tom preseku. Dakle, važi $\varphi_{\mathcal{B}}(\bar{x}) = \psi_{\mathcal{B}}(\bar{t},\bar{x})$ i $\psi_{\mathcal{B}}(\bar{t},\bar{x}) \in W_1$. S druge strane, $(\bar{x},t') \in G_0 \times V_2 \subset G_2 \times V_2$ pa je $\psi_{\mathcal{B}}(t',\bar{x}) \in W_2$. Tako dobijamo

$$\psi_{\mathcal{B}}(\bar{t},\bar{x}) < \psi_{\mathcal{B}}(t_0,x_0) + \varepsilon < \psi_{\mathcal{B}}(t',\bar{x}) \leq \varphi_{\mathcal{B}}(\bar{x}),$$

pa je $\psi_{\mathcal{B}}(\bar{t},\bar{x}) < \varphi_{\mathcal{B}}(\bar{x})$ što znači da $\bar{t}$ ne leži u $M'_{\mathcal{B},\bar{x}}$, odnosno $(\bar{x},\bar{t})$ ne pripada grafiku Γ , suprotno definiciji tačke $(\bar{x},\bar{t})$. Prema tome, mora biti $\psi_{\mathcal{B}}(t_0,x_0) = \varphi_{\mathcal{B}}(x_0)$ tj. $(x_0,t_0) \in \Gamma$. $\square$

<u>STAV 1.</u> Ako su preslikavanja $p, A, \mathcal{B}$ (v. (5.1)) neprekidna, onda je i preslikavanje $\varphi_{\mathcal{B}}: U \to \mathbb{R}$ definisano sa (5.7) takodje neprekidno.

Dokaz. Egzistencija ovakvog λ_2 dokazuje se korišćenjem nejednakosti (4.17) prethodnog stava. Koristićemo i nejednakost:

$$0<x<1 \Rightarrow \sqrt{1-x}<1-\tfrac{1}{2}x. \tag{4.34}$$

Na osnovu (4.17) i pretpostavke da je $d(f,V)>0$ izlazi $\|f-\hat{\vartheta}\|^2-\lambda K_0>0$, odnosno

$$0<\frac{\lambda K_0}{\|f-\hat{\vartheta}\|^2}<1$$

za $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$. Iz (4.17) i (4.34) tako dobijamo

$$\|f-(\hat{\vartheta}+\lambda(\vartheta-\hat{\vartheta}))\|\leqslant\|f-\hat{\vartheta}\|\cdot\sqrt{1-\frac{\lambda K_0}{\|f-\hat{\vartheta}\|^2}}\leqslant \tag{4.35}$$

$$\leqslant\|f-\hat{\vartheta}\|\cdot\left(1-\frac{\lambda K_0}{2\|f-\vartheta_0\|^2}\right)=\|f-\hat{\vartheta}\|-\frac{\lambda K_0}{2\|f-\hat{\vartheta}\|}\leqslant\|f-\hat{\vartheta}\|-\lambda\mu$$

za sve $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$.

Da bi se λ_2 eksplicitno odredilo postupimo slično kao u dokazu prethodnog stava. Nejednakost (4.33) koju treba dokazati ekvivalentna je sa skupom nejednakosti

$$\|f(t)-[\hat{\vartheta}(t)+\lambda(\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t))]\|_H^2\leqslant\|f-\hat{\vartheta}\|-\lambda\mu \tag{4.36}$$

za svako $t\in T$. Kvadriranjem ove nejednakosti dolazimo do

$$\|[f(t)-\hat{\vartheta}(t)]+\lambda[\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)]\|_H\leqslant \tag{4.37}$$

$$\leqslant\|f-\hat{\vartheta}\|^2-2\lambda\mu\|f-\hat{\vartheta}\|+\lambda^2\mu^2.$$

Transformacijom leve strane nejednakosti, kao u dokazu prethodnog stava, dobijamo

$$\|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2+\lambda^2\|\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2-2\lambda K(t,\vartheta,\hat{\vartheta})$$

tako da (4.37) dobija sledeći oblik

$$(\|\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2-\mu^2)\lambda^2+2[\mu\|f-\hat{\vartheta}\|- \tag{4.38}$$

$$-K(t,\vartheta,\hat{\vartheta})]\lambda+(\|f(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2-\|f-\hat{\vartheta}\|^2)\leqslant 0.$$

Uvodjenjem oznaka

$$A_1(t):=\|\vartheta(t)-\hat{\vartheta}(t)\|_H^2-\mu^2, \tag{4.39}$$

$$\varphi_b(x) \geqslant \psi_b(t_0,x) = A(t_0,x) - b(t_0) + E_b > E_b = \varphi_b(v_0),$$

odakle je v_0 tačka minimuma funkcije φ_b na skupu U (ne samo na skupu $Z_b \subset U$).

"$\Longleftarrow$": Ako je $x \in Z_b$, imamo

$$\varphi_b(x) \geqslant \psi_b(\infty,x) = p(x) \geqslant E_b .$$

Za $x \notin Z_b$, kao i gore, dobijamo $\varphi_b(x) > E_b$ što ukupno daje nejednakost $\varphi_b(x) \geqslant E_b$ za svako $x \in U$. Specijalno je i $\varphi_b(v_0) \geqslant E_b$. Dokažimo da je $\varphi_b(v_0) = E_b$. Ako bi bilo $\varphi_b(v_0) > E_b$, postojao bi niz $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Z_b$, takav da je

$$p(v_k) \to E_b = \inf_{x\in Z_b} p(x), \quad k \to \infty.$$

Kako je po pretpostavci $\varphi_b(v_0) = \min_{x\in U} \varphi_b(x)$, dobijamo

$$E_b < \varphi_b(v_0) \leqslant \varphi_b(v_k) = p(v_k). \tag{5.10}$$

Poslednja nejednakost proizilazi iz sledećeg razmatranja. Kako $v_k \in Z_b$, to je za svako $t \in T$: $A(t,v_k) \leqslant b(t)$, odnosno $\psi_b(t,v_k) \leqslant E_b$. Zato mora biti

$$\varphi_b(v_k) = \psi_b(\infty,v_k) = p(v_k).$$

Kako po pretpostavci $p(v_k) \to E_b$ kad $k \to \infty$, iz (5.10) dobijamo $\varphi_b(v_0) = E_b$. Dokažimo da je i $p(v_0) = E_b$. Iz

$$\varphi_b(v_0) \geqslant \psi_b(\infty,v_0) = p(v_0)$$

sledi $p(v_0) \leqslant E_b$, a iz $v_0 \in Z_b$ sledi $p(v_0) \geqslant E_b$, odakle se dobija tražena jednakost, što i znači da je v_0 minimalno rešenje problema (5.1).

Po analogiji sa globalnim uslovom Kolmogorova u opštoj teoriji aproksimacija (koji je uvek dovoljan uslov za najbolju aproksimaciju) i ovde možemo iskazati sličan stav.

<u>STAV 3.</u> Neka za svako $v \in U$ važi

$$\min_{t\in M'_{b,v_0}} [\psi_b(t,v_0) - \psi_b(t,v)] \leqslant 0. \tag{5.11}$$

Tada je v_0 tačka minimuma funkcije φ_b na skupu U.

<u>Dokaz.</u> Neka je $v \in U$ i $t_0 \in M'_{b,v_0}$ tako da je

$$\psi_b(t_0,v_0) - \psi_b(t_0,v) \leqslant 0.$$

Tada je

Tada stavimo

$$(4.49) \qquad \hat{\vartheta}_{j+1} := \hat{\vartheta}_j + \lambda_j (\vartheta_j - \hat{\vartheta}_j),$$

gde je λ_j izračunato ili na osnovu (4.30), ili na osnovu (4.45). U svakom slučaju unapred izaberimo jednu od ocena - bilo onu iz stava 6., bilo onu iz stava 7. - i to jednu istu za čitav algoritam. Dalje stavimo

$$(4.50) \qquad \delta_{j+1} := \begin{cases} \frac{1}{2}\delta_j, & K_j \leq \delta_j \\ \delta_j, & K_j > \delta_j . \end{cases}$$

SLUČAJ II. Ne postoji $\vartheta \in V$ niti $K > 0$ tako da

$$t \in M_j \Rightarrow K(t, \vartheta, \hat{\vartheta}_j) \geq K > 0$$

Drugim rečima, za svako $\vartheta \in V$ postoji $t \in M_j$ sa

$$K(t, \vartheta, \hat{\vartheta}_j) \leq 0 .$$

Tada je $\hat{\vartheta}_j$ jedno δ_j-rešenje polaznog problema, tj.

$$(4.51) \qquad \| f - \hat{\vartheta}_j \| \leq d(f, V) + \delta_j .$$

Ako je δ_j dovoljno malo u skladu sa zahtevima za tačnošću rešenja, cilj je postignut. Ako δ_j nije dovoljno malo ili se pak traži tačno rešenje (u slučaju da je ono praktično izračunljivo), sa algoritmom moramo nastaviti dalje. Ovde se javljaju dva podslučaja:

Podslučaj IIa. $M_j = M[f - \hat{\vartheta}_j]$. Tada je prema gornjem

$$\min_{t \in M[f - \hat{\vartheta}_j]} K(t, \vartheta, \hat{\vartheta}_j) \leq 0$$

za svako $\vartheta \in V$, što znači da je $\hat{\vartheta}_j$ najbolja aproksimacija za f u skupu V i algoritam se prekida. Ako je T konačan skup, za dovoljno malo δ_j svakako se dostiže jednakost $M_j = M[f - \hat{\vartheta}_j]$, tako da se na ovaj način dolazi do tačnog rešenja.

Podslučaj IIb. $M_j \setminus M[f - \hat{\vartheta}_j] \neq \emptyset$. U ovom slučaju stavimo

$$(4.52) \qquad \vartheta_{j+1} := \vartheta_j ,$$

$$(4.53) \qquad \delta_{j+1} := \frac{1}{2}\delta_j .$$

Algoritam je na ovaj način opisan u svim slučajevima koji

Pre svega dajemo primere punktualno konveksnih preslikavanja.

PRIMER 1. Neka je $\mathrm{card}\,T'=1$. Tada u (5.1) nemamo ograničenja, nego samo ciljnu funkciju. Ako je p punktualno konveksno, onda za date $v_0, v\in U$ sa $p(v_0)-p(v)>0$ i dato $\lambda>0$, postoji $v_\lambda\in U$ sa $\|v_0-v_\lambda\|<\lambda$ i $p(v_0)-p(v_\lambda)>0$. Zato postoji $K(\lambda)>0$ tako da je

$$p(v_0)-p(v_\lambda)=K(\lambda)[p(v_0)-p(v)].$$

Pošto je p neprekidno, uzmimo λ tako malo da bude $K(\lambda)<1$. Tada je

$$p(v_\lambda)=[1-K(\lambda)]p(v_0)+K(\lambda)p(v),$$

pa je $p(v_\lambda)$ konveksna kombinacija vrednosti $p(v_0)$ i $p(v)$ (za dovoljno malo λ).

PRIMER 2. Neka je $T=\{t_1,\dots,t_m\}$. Tada je zatvoreni skup F oblika

$$F=\{t_{i_1},\dots,t_{i_p}\} \qquad (p\leq m).$$

Pretpostavimo da je

$$(5.13) \qquad A(t_j,v_0)-A(t_j,v)>0 \quad (j=i_1,\dots,i_p;\, v_0,v\in U),$$

kao i da je A punktualno konveksno. Tada za $\lambda>0$ postoji $v_\lambda\in U$ sa $\|v_0-v_\lambda\|<\lambda$ i

$$(5.14) \qquad A(t_j,v_0)-A(t_j,v_\lambda)>0 \qquad (j=i_1,\dots,i_p).$$

Kako je $v_\lambda\to v_0$ kada $\lambda\to 0$ i pošto je A neprekidno, možemo izabrati λ tako malo da bude

$$(5.15) \quad A(t_j,v_0)-A(t_j,v_\lambda)<A(t_j,v_0)-A(t_j,v) \quad (j=i_1,\dots,i_p).$$

Iz (5.13), (5.14) i (5.15) sledi egzistencija brojeva $K(t_j,v_\lambda)$ sa $0<K(t_j,v_\lambda)<1$ ($j=i_1,\dots,i_p$) tako da je

$$A(t_j,v_0)-A(t_j,v_\lambda)=K(t_j,v_\lambda)[A(t_j,v_0)-A(t_j,v)],$$

odnosno

$$A(t_j,v_\lambda)=[1-K(t_j,v_\lambda)]A(t_j,v_0)+K(t_j,v_\lambda)\cdot A(t_j,v) \quad (j=i_1,\dots,i_p).$$

I ovde imamo konveksne kombinacije, samo se koeficijent $K(t_j,v_\lambda)$ razlikuje od tačke do tačke što i opravdava termin - punktualna konveksnost.

kompaktan (tj. kada je V ograničeno kompaktan skup), gornji optimizacioni problem svakako ima rešenje. Uslov $\|\vartheta-\hat{\vartheta}\|\leq 1$ praktično nije ograničavajući, što se može videti iz (4.55) i (4.56) ako se stavi

$$d_\vartheta := \begin{cases} 1, & \|\vartheta-\hat{\vartheta}\|\leq 1, \\ \dfrac{1}{\|\vartheta-\hat{\vartheta}\|}, & \|\vartheta-\hat{\vartheta}\|>1. \end{cases} \tag{4.60}$$

<u>STAV 8</u>. Ako je V konveksan podskup konačno-dimenzionog potprostora F prostora $C(T,H)$ i ako je M proizvoljan neprazan podskup od T, optimizacioni problem (4.57)-(4.59) ima rešenje. $\square$

Da bismo kompletirali opis algoritma, pri datom $\hat{\vartheta}_j\in V$ i $\delta_j>0$ rešimo optimizacioni problem

$$K_j = max! \tag{4.61}$$

$$(\forall t\in M_j)(K_j - K(t,\vartheta_j,\hat{\vartheta}_j)\leq 0) \tag{4.62}$$

$$(\|\vartheta_j-\hat{\vartheta}_j\|\leq 1)\wedge(\vartheta_j\in V) \tag{4.63}$$

po nepoznatoj (K_j,ϑ_j).

Teorijski, do rešenja problema (4.61)-(4.63) mogli bismo da dodjemo na sledeći način. Prvo, za svako

$$\vartheta\in\{\vartheta\in V\mid \|\vartheta-\hat{\vartheta}_j\|\leq 1\}$$

odredimo skup

$$\{K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}_j)\mid t\in M_j\}. \tag{4.64}$$

Stavimo

$$\overline{K}_j(\vartheta) := \min_{t\in M_j} K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}_j), \tag{4.65}$$

gde se na desnoj strani minimum dostiže zbog kompaktnosti skupa $M_j\subset T$. Dalje, stavimo

$$K_j = \sup\{\overline{K}_j(\vartheta)\mid \vartheta\in V \wedge \|\vartheta-\hat{\vartheta}_j\|\leq 1\}. \tag{4.66}$$

Iz (4.61)-(4.63) jasno je da je K_j traženo rešenje. Kako je $t\mapsto K(t,\vartheta,\hat{\vartheta}_j)$ neprekidna funkcija, a skup M_j kompaktan, i funkcija

$$\{\vartheta\in V\mid \|\vartheta-\hat{\vartheta}_j\|\leq 1\}\ni\vartheta\mapsto \overline{K}_j(\vartheta), \tag{4.67}$$

PRIMER 5. (generalisane racionalne funkcije). Neka su $\tilde{A}:T\to\mathbb{R}^m$ i $\tilde{B}:T\to\mathbb{R}^m$ neprekidna preslikavanja, $A_0,B_0\in\mathbb{R}$ i

$$U:=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \langle\tilde{B}(t),x\rangle+B_0>0\}.$$

Pretpostavimo da je skup U neprazan. Neposredno se vidi da je on tada otvoren i konveksan. Stavimo

$$A(t,x):=\frac{\langle\tilde{A}(t),x\rangle+A_0}{\langle\tilde{B}(t),x\rangle+B_0},\quad (t,x)\in T\times U.$$

Pokažimo da je ovako definisano preslikavanje A punktualno konveksno. Kratkoće radi, uvedimo sledeće oznake

$$\alpha(t,x):=\langle\tilde{A}(t),x\rangle+A_0,\quad \beta(t,x):=\langle\tilde{B}(t),x\rangle+B_0.$$

Pretpostavimo da je na zatvorenom skupu $F\subset T$ ispunjen uslov $A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta)>0$. Stavimo opet $\vartheta_\lambda:=(1-\lambda_1)\vartheta_0+\lambda_1\vartheta$ i razmotrimo razliku $A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta_\lambda)$:

$$A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta_\lambda)=\frac{\alpha(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_0)}-\frac{\alpha(t,\vartheta_\lambda)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}=$$

$$=\frac{\alpha(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_0)}-\frac{(1-\lambda_1)\alpha(t,\vartheta_0)+\lambda_1\alpha(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}=$$

$$=\frac{\alpha(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_0)}-\frac{(1-\lambda_1)\beta(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}\cdot\frac{\alpha(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_0)}-\frac{\lambda_1\beta(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}\cdot\frac{\alpha(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta)}.$$

Pošto je U konveksan, a preslikavanje β afino po x, imamo da je $\beta(t,\vartheta_\lambda)>0$. Osim toga, ako stavimo

$$\mu_1:=\frac{\lambda_1\beta(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}\quad(>0)$$

imamo

$$\frac{(1-\lambda_1)\beta(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}+\frac{\lambda_1\beta(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}=\frac{\beta(t,\vartheta_\lambda)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}=1,$$

tako da je

$$\frac{(1-\lambda_1)\beta(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta_\lambda)}=1-\mu_1.$$

Zato je dalje

$$A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta_\lambda)=\frac{\alpha(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_0)}-(1-\mu_1)\frac{\alpha(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_0)}-\mu_1\frac{\alpha(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta)}=$$

$$=\mu_1\cdot\left[\frac{\alpha(t,\vartheta_0)}{\beta(t,\vartheta_0)}-\frac{\alpha(t,\vartheta)}{\beta(t,\vartheta)}\right]=\mu_1\left[A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta)\right],$$

tako da je

Iz stavova 6. i 7. sledi da je bez obzira na to da li je pri svakom koraku algoritma birana ocena (4.17) ili (4.33), svakako

$$\|f - \hat{v}_{j+1}\| \leq \|f - \hat{v}_j\| \quad (j \in N) \tag{4.73}$$

tako da postoji granična vrednost

$$\rho := \lim_{j\to\infty} \|f - \hat{v}_j\|. \tag{4.74}$$

Takodje je i

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j K_j = 0. \tag{4.75}$$

Naime, iz (4.17), (4.73) i (4.74) sledi

$$\rho^2 \leq \|f - \hat{v}_{j+1}\|^2 \leq \|f - \hat{v}_j\|^2 - \lambda_j K_j$$

odakle je

$$0 \leq \lambda_j K_j \leq \|f - \hat{v}_j\|^2 - \|f - \hat{v}_{j+1}\|^2 \to \rho^2 - \rho^2 = 0 \quad (j \to \infty).$$

U daljem ćemo pretpostaviti da ni u jednom koraku ne nastupa podslučaj IIa (v. opis algoritma). To ne umanjuje opštost rezultata, jer ako podslučaj IIa nastupi, dobijamo, kako smo već videli, tačno rešenje aproksimacionog problema, pa dalja diskusija nije potrebna. Uz ovu pretpostavku možemo iskazati sledeći stav.

<u>STAV 9</u>. $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0.$ (4.76)

<u>Dokaz</u>. Iz (4.5o) i (4.53) vidi se da niz pozitivnih brojeva (δ_j) ne raste, tako da postoji

$$\lim_{j\to\infty} \delta_j =: \delta > 0. \tag{4.77}$$

Pretpostavimo da je $\delta > 0$. Po konstrukciji niza (δ_j) to je moguće samo ako postoji indeks j_0 , takav da se za svako $j \geq j_0$ pri definiciji δ_{j+1} uvek primenjuje (4.5o$_2$), tj. $\delta_{j+1} = \delta_j$ što odgovara slučaju $K_j > \delta_j$. To znači da je za $j \geq j_0$:

$$K_j > \delta_j \geq \delta > 0, \tag{4.78}$$

tako da je δ jedna pozitivna minoranta niza (K_j).

Dokažimo da i niz (λ_j) ima pozitivnu minorantu, što

$$\max_{t\in T}|A(t,\vartheta')-A(t,\vartheta_0)|=\|A(\cdot,\vartheta')-A(\cdot,\vartheta_0)\|_{C(T)}<\lambda.$$

Odatle je za svako $t\in T$ i $\vartheta'\in K]\vartheta_0,\delta[$:

$$A(t,\vartheta')-A(t,\vartheta_0)\leq\max_{\tau\in T}|A(\tau,\vartheta')-A(\tau,\vartheta_0)|<\lambda.$$

Ostaje da se primeni pretpostavljena punktualna konveksnost preslikavanja A, na osnovu koje se u kugli $K]\vartheta_0,\delta[$ može naći tačka ϑ_λ takva da važi implikacija

$$t\in F\Rightarrow A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta_\lambda)>0.\quad\Box$$

Uloga slabo punktualno konveksnih preslikavanja u vezi sa neophodnošću uslova (5.11), odnosno (5.12), data je sledećim stavom.

STAV 6 (Brosowski ([23])). Neka su $A:T\times U\to\mathbb{R}$ i $p:U\to\mathbb{R}$ neprekidna preslikavanja, takva da je pomoću njih definisano preslikavanje $\Psi_{\mathfrak{G}}$ (v. (5.6)) slabo punktualno konveksno. Da bi tačka $\vartheta_0\in U$ bila tačka minimuma funkcije p na $Z_{\mathfrak{G}}$, neophodno je i dovoljno da za svako $\vartheta\in U$ važi

$$\min\{p(\vartheta_0)-p(\vartheta),\min_{t\in M_{\mathfrak{G},\vartheta_0}}[A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta)]\}\leq 0. \tag{5.16}$$

Dokaz. Dovoljnost uslova dokazana je u stavovima 3. i 4. i to bez ikakve dodatne pretpostavke o preslikavanju $\Psi_{\mathfrak{G}}$.

Neophodnost. Neka je ϑ_0 tačka minimuma ciljne funkcije p na skupu dopustivih tačaka $Z_{\mathfrak{G}}$. Pretpostavimo da uslov (5.16) nije ispunjen, tj. da za neko $\vartheta\in U$ važi formula

$$p(\vartheta_0)-p(\vartheta)>0\ \wedge\ (\forall t\in M_{\mathfrak{G},\vartheta_0})(A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta)>0).$$

Zbog kompaktnosti skupa $M_{\mathfrak{G},\vartheta_0}$ i neprekidnosti funkcije A postoji $\alpha>0$ tako da je

$$t\in M_{\mathfrak{G},\vartheta_0}\Rightarrow A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta)\geq\alpha>0.$$

Pritom, broj $\alpha>0$ možemo uzeti tako malim da bude i

$$p(\vartheta_0)-p(\vartheta)\geq\alpha.$$

Stavimo

$$W_\alpha:=\{t\in T\mid A(t,\vartheta_0)-A(t,\vartheta)>\frac{\alpha}{2}\}.$$

Skup W_α je otvorena okolina skupa $M_{\mathfrak{G},\vartheta_0}$, a za $t\in\overline{W_\alpha}$

$$\lambda_j = \min\{1, \min_{t\in T} \overline{\lambda}_j(t)\} \geq \min\{1,\delta,\rho\} > 0. \quad \square$$

STAV 10. Neka je V zatvoren konveksan podskup konačno-dimenzionalnog potprostora F prostora $C(T,H)$ i $f \in C(T,H) \setminus \overline{V}$. Tada važe sledeća tvrdjenja:

1° Niz $(\hat{v}_j) \subset V$ konstruisan pomoću opisanog algoritma ima bar jednu tačku nagomilavanja u V.

2° Svaka tačka nagomilavanja niza $(\hat{v}_j)$ je najbolja aproksimacija za f u skupu V.

3° Važi jednakost (v. (4.74)):

$$\rho = d(f,V). \tag{4.82}$$

Dokaz. Kako niz $(\|f-\hat{v}_j\|)_j$ ne raste, to se svi njegovi članovi nalaze u kugli

$$\{g \in C(T,H) \mid \|g-f\| \leq \|f-\hat{v}_1\|\}.$$

S obzirom da je V zatvoren skup u konačno-dimenzionalnom potprostoru F, skup

$$\{v \in V \mid \|v-f\| \leq \|f-\hat{v}_1\|\} \tag{4.83}$$

je zatvoren i ograničen, dakle - kompaktan, tako da niz $(\hat{v}_j)$ ima bar jednu tačku nagomilavanja. Ako dokažemo jednakost (4.82) i ako je $(\hat{v}_{j_k})$ konvergentan podniz niza $(\hat{v}_j)$ sa

$$\lim_{k\to\infty} \hat{v}_{j_k} =: \hat{v}, \tag{4.84}$$

onda je

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \|f-\hat{v}_{j_k}\| = \|f-\hat{v}\| = d(f,V), \tag{4.85}$$

tako da je $\hat{v}$ najbolja aproksimacija za f u skupu V. Prema tome, ostaje da se dokaže da je $\rho = d(f,V)$, pri čemu je, podsetimo, ρ definisano sa (4.74). Zbog $\hat{v}_j \in V$ je $\|f-\hat{v}_j\| \geq d(f,V)$ za svako $j \in N$, tako da se prelaskom na limes neposredno dobija

$$\rho \geq d(f,V). \tag{4.86}$$

Kako je $\delta_j \to 0$, to i $\delta_{j_k} \to 0$ $(k\to\infty)$. To znači da se u definiciji δ_{j+1} preko δ_j beskonačno mnogo puta primenjuje (4.50$_1$), tj. $\delta_{j+1} = \frac{1}{2}\delta_j$, što odgovara slučaju kada odakle, zbog kompaktnosti skupa T' , dobijamo

$$\varphi_b(\vartheta_\lambda) = \max_{t \in T'} \psi_b(t,\vartheta_\lambda) < \varphi_b(\vartheta_0). \tag{5.21}$$

Na osnovu stava 2., iz (5.21) sledi da ϑ_0 ne može biti tačka minimuma funkcije p na skupu Z_b , što se protivi pretpostavci sa početka dokaza. □

Klasa slabo punktualno konveksnih preslikavanja u izvesnom smislu iscrpljuje sve slučajeve u kojima je uslov (5.16) neophodan i dovoljan za to da ϑ_0 bude tačka minimuma funkcije p na skupu Z_b. Odgovarajući stav samo navodimo; dokaz zbog njegove dužine izostavljamo.

STAV 7 (Brosowski ([23])). Neka $\mathcal{L}_{A,p}$ označava skup svih "dopustivih" funkcija $b \in C(T)$ za koje je skup dopustivih tačaka Z_b (pri fiksiranim funkcijama A i p) neprazan. Ako za svako $b \in \mathcal{L}_{A,p}$ i svako ϑ_0 koje je tačka minimuma funkcije p na Z_b , za svako $\vartheta \in U$ važi uslov (5.16), onda je preslikavanje ψ_b (definisano pomoću A i p relacijom (5.6)) slabo punktualno konveksno.

Sada dajemo stav koji pod dosta širokim pretpostavkama garantuje egzistenciju bar nekog minimalnog rešenja za p koje je okarakterisano uslovom (5.12). Dokaz je dug, a način na koji je primenjena teorema o nepokretnoj tački Ky Fan-a inspirisan je radovima Brosowskog iz nelinearne teorije aproksimacija (v. [16], [24]).

STAV 8. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Preslikavanje $A: T \times U \to \mathbb{R}$ je neprekidno;

2° Višeznačno preslikavanje

$$\mathcal{L}_{A,p} \ni b \mapsto P_b \in \mathrm{POT}(U)$$

je poluneprekidno odozgo;

3° Za svako $b \in \mathcal{L}_{A,p}$ skup P_b je kompaktan;

4° Za svako $b \in \mathcal{L}_{A,p}$ familija funkcija

$$A(\cdot\,, P_b) := \{A(\cdot\,,\vartheta) \mid \vartheta \in P_b\}$$

je konveksna.

Tada za svako $b \in \mathcal{L}_{A,p}$ postoji $\vartheta_0 \in P_b$ koje zadovoljava sledeći uslov: za svako $\vartheta \in U$ važi:

$$\min_{t\in\tilde{M}_j} K(t,v,\hat{v}_j)+\left[\min_{t\in M[f-\hat{v}]} K(t,v,\tilde{v}_j)-\min_{t\in\tilde{M}_j} K(t,v,\tilde{v}_j)\right]+\eta_j .$$

Zbog $\tilde{v}_j \to \hat{v}$ i $\tilde{\delta}_j \to 0$, drugi član na desnoj strani teži nuli. Dokažimo da i prvi član teži nuli. Zbog $\|f-\tilde{v}_j\| \downarrow \rho$ postoji indeks j_0 takav da

(4.94) $$j\geq j_0 \Rightarrow \|f-\hat{v}_j\|\leq \rho+1 .$$

Lako se može videti da je za $\hat{v}\in P_V(f)$ dovoljno da (4.89) važi za sve v iz kugle (u V)

(4.95) $$\{v\in V \mid \|v-\tilde{v}_j\|\leq 2\|f-\tilde{v}_j\|\}$$

Naime, zbog $d(f,V)\leq\rho\leq\|f-\hat{v}_j\|$ važi inkluzija

$$\{g\in C(T,H) \mid \|g-f\|\leq\|f-\tilde{v}_j\|\}\subset\{g\in C(T,H) \mid \|g-\tilde{v}_j\|\leq 2\|f-\tilde{v}_j\|\},$$

tako da elementi $v\in V$, ako ih izvan skupa (4.95) eventualno ima, ne mogu biti u $P_V(f)$. Zato na osnovu (4.69), imajući u vidu da je tamo dato ograničenje $\|v-\hat{v}_j\|\leq 1$, dobijamo

$$\min_{t\in M_j} K(t,v,\tilde{v}_j)\leq 2\cdot\|f-\tilde{v}_j\|\cdot\tilde{K}_j\leq 2(\rho+1)\tilde{K}_j ,$$

gde poslednja nejednakost, na osnovu (4.94), važi za $j\geq j_0$. Kako je $\lim_{j\to\infty}\tilde{K}_j=0$ (v. (4.87)), to je i

(4.96) $$\overline{\lim_{j\to\infty}}\,\min_{t\in\tilde{M}_j} K(t,v,\tilde{v}_j)\leq 0,$$

tako da u (4.93) čitava desna strana teži nuli pri $j\to\infty$. □

Pitanje brzine konvergencije ovog postupka ostaje otvoreno.

Navedimo na kraju nekoliko primera u kojima se može primeniti opisani algoritam. Razni autori su inače posebnim metodama rešavali ovakve i slične probleme.

PRIMER 1. (primena na integralne jednačine) Problem ovog tipa postavljen je u [39]. Neka je u opštem slučaju $(X,\|\cdot\|)$ normiran vektorski prostor i $K,K_0 : X\to X$ ograničeni linearni operatori sa $\|K\|,\|K_0\|<1$. Neka je potrebno rešiti jednačinu

(4.97) $$x-Kx=g\in X,$$

koja se zbog komplikovane strukture operatora K zamenjuje jednostavnijom jednačinom

$$t \in M_{b_1,\vartheta_0} \Rightarrow A(t,\vartheta_0) - A(t,\vartheta) \geq \alpha > 0.$$

Zbog neprekidnosti funkcije A skup

$$W_\alpha := \{t \in T \mid A(t,\vartheta_0) - A(t,\vartheta) > \tfrac{\alpha}{2}\}$$

je otvorena okolina skupa M_{b_1,ϑ_0}. Kako je za $t \in M_{b_1,\vartheta_0}$ ispunjen uslov $A(t,\vartheta_0) - b_1(t) = 0$, to postoji $K > 0$ tako da je

$$(5.25) \qquad \max_{t \in T \setminus W_\alpha} [A(t,\vartheta_0) - b_1(t)] \leq -K < 0.$$

Odredimo $\lambda > 0$ tako da je

$$(5.26) \qquad \lambda > \frac{1}{K} \max_{t \in T} |A(t,\vartheta_0) - A(t,\vartheta)|.$$

Neka je $t \in W_\alpha$. Tada imamo

$$A(t,\vartheta) - b_\lambda(t) = [A(t,\vartheta) - A(t,\vartheta_0)] - \lambda[b_1(t) - A(t,\vartheta_0)] < 0.$$

Naime, izraz u prvoj zagradi je < 0 zbog $t \in W_\alpha$, a izraz u drugoj zagradi je ≥ 0 zbog $\vartheta_0 \in P_{b_1}$. Ako sada posmatramo $t \in T \setminus W_\alpha$, imamo, korišćenjem (5.25) i (5.26)

$$A(t,\vartheta) - b_\lambda(t) = A(t,\vartheta) - A(t,\vartheta_0) - \lambda[b_1(t) - A(t,\vartheta_0)] \leq$$

$$|A(t,\vartheta) - A(t,\vartheta_0)| + \lambda[b_1(t) - A(t,\vartheta_0)] < \lambda K + \lambda(-K) = 0.$$

Prema tome, za svako $t \in T$ važi

$$A(t,\vartheta) - b_\lambda(t) < 0,$$

te je $\vartheta \in Z_{b_\lambda}$. Dokažimo da je i $\vartheta_0 \in Z_{b_\lambda}$. Zbog $\vartheta_0 \in P_{b_1} \subset Z_{b_1}$ je $b_1(t) - A(t,\vartheta_0) \geq 0$, tako da je

$$A(t,\vartheta_0) \leq A(t,\vartheta_0) + \lambda[b_1(t) - A(t,\vartheta_0)] = b_\lambda(t).$$

Prema tome, tačke ϑ i ϑ_0 leže u skupu Z_{b_λ}, te zbog pretpostavke da je $p(\vartheta_0) > p(\vartheta)$ sledi da $\vartheta_0 \notin P_{b_\lambda}$. Preciznije, to važi za sve λ koji zadovoljavaju relaciju (5.26). No, ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom leme. $\square$

Navedimo na ovom mestu i poznatu teoremu o nepokretnoj tački Ky Fan-a ([52]) koju ćemo u dokazu koristiti.

<u>TEOREMA</u> (Ky Fan). Neka je X lokalno konveksan prostor, V jedan njegov neprazan kompaktan konveksan podskup i

$$\Lambda : V \to \mathrm{POT}(V)$$

linoma Čebiševa, što dovodi do minimizacije izraza

(4.1o2) $$\max_t |t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)|.$$

U kompleksnoj oblasti, nasuprot realnom slučaju, polinomi Čebiševa eksplicitno su poznati samo u nekim specijalnim slučajevima kada je maksimum u (4.1o2) uzet preko elipse ili lemniskate (v. Faber ([51])).

U vezi sa algoritmom izvedenim u ovoj glavi istaknimo na kraju dva momenta od značaja za numeričku praksu. Prvo, u rešavanju optimizacionog problema (4.61)-(4.63) ne moramo tražiti tačno rešenje; dovoljno je uzeti približno rešenje ako je samo poznata ocena tipa (4.71). Drugo, i bez rezultata stava 1o. možemo nalaziti približna rešenja aproksimacionih problema, oslanjajući se na dovoljne uslove date u drugoj glavi.

Na osnovu (5.28) neposredno sledi da je

$$\beta_{\lambda_i,\vartheta} \to \beta_{\tilde{\lambda}(\vartheta),\vartheta}$$

(naravno u metrici prostora $C(T)$). Pretpostavimo sada da $\vartheta \notin P_{\beta_{\tilde{\lambda}(\vartheta),\vartheta}}$. S obzirom da je ovde ambijentni prostor $\mathbb{R}^m$ postoji otvoren skup U takav da je

$$P_{\beta_{\tilde{\lambda}(\vartheta),\vartheta}} \subset U \quad \wedge \quad \vartheta \notin U.$$

Pošto je preslikavanje $b \mapsto P_b$ poluneprekidno odozgo, postoji $\eta > 0$ tako da

$$|\lambda_i - \tilde{\lambda}(\vartheta)| < \eta \Rightarrow P_{\beta_{\lambda_i,\vartheta}} \subset U,$$

pri čemu indeks i_0 definišimo tako da iz $i \geqslant i_0$ sledi $|\lambda_i - \tilde{\lambda}(\vartheta)| < \eta$. Dakle, za $i \geqslant i_0$ dobijamo da $\vartheta \notin P_{\beta_{\lambda_i,\vartheta}}$, što je u suprotnosti sa dokazanom činjenicom da iz $0 \leqslant \mu < \tilde{\lambda}(\vartheta)$ sledi $\vartheta \in P_{\beta_{\mu,\vartheta}}$.

Prema tome, ustanovili smo da za $\vartheta \in P_{b_1}$ postoji broj $\tilde{\lambda}(\vartheta) > 0$ sa sledećim osobinama

$$(\forall \mu \in [0, \tilde{\lambda}(\vartheta)])(\vartheta \in P_{\beta_{\mu,\vartheta}}) \wedge (\forall \mu \in]\tilde{\lambda}(\vartheta), +\infty[)(\vartheta \notin P_{\beta_{\mu,\vartheta}}).$$

Posmatrajmo sada skup

$$M := \{\tilde{\lambda}(\vartheta) \in \mathbb{R} \mid \vartheta \in P_{b_1}\}. \tag{5.31}$$

<u>Slučaj 1.</u> Neka je skup M neograničen. Znamo već da je $\tilde{\lambda}(\vartheta) < +\infty$ za svako $\vartheta \in P_{b_1}$, ali pretpostavljamo da je

$$\sup_{\vartheta \in P_{b_1}} \tilde{\lambda}(\vartheta) = +\infty.$$

U tom slučaju postoji niz $(\vartheta_n) \subset P_{b_1}$, takav da za $n \in N$ bude $\tilde{\lambda}(\vartheta_n) > n$. Pošto je $P_{b_1} \subset \mathbb{R}^m$ kompaktan (pretpostavka 3^o), to niz (ϑ_n) ima bar jednu tačku nagomilavanja, npr. $\vartheta_0 \in P_{b_1}$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da $\vartheta_n \to \vartheta_0$ (inače bi bilo dovoljno izvršiti odgovarajuću prenumeraciju članova niza). Zbog $\tilde{\lambda}(\vartheta_n) > n$ imamo $\vartheta_n \in P_{\beta_{n,\vartheta_n}}$ gde je, po definiciji

$$\beta_{n,\vartheta_n}(t) = A(t,\vartheta_n) + n[b_1(t) - A(t,\vartheta_n)]. \tag{5.32}$$

Neka je $\lambda > 0$ proizvoljno i $n_0 := [\lambda] + 1$. Za $n \geqslant n_0(\lambda)$ je tada $\vartheta_n \in P_{\beta_{\lambda,\vartheta_n}}$. Iz oblika funkcija $\beta_{\lambda,\vartheta_n}$ i $\beta_{\lambda,\vartheta_0}$

Ako se za otvorene skupove u T' uzmu svi otvoreni skupovi u T i skup $\{\infty\}$ (kao i odgovarajuće unije otvorenih skupova iz T i skupa $\{\infty\}$), T' postaje kompaktan Hausdorff-ov prostor sa izolovanom tačkom ∞. Stavimo

$$(5.6) \qquad \psi_{\mathcal{B}}(t,x) := \begin{cases} p(x), & t=\infty, \\ A(t,x)-b(t)+E_{\mathcal{B}}, & t\in T. \end{cases}$$

Jasno, ako je p neprekidna funkcija, onda je neprekidna i funkcija $\psi_{\mathcal{B}}$. U daljem ćemo bez posebnog napominjanja pretpostavljati da je p neprekidna. Stavimo dalje

$$(5.7) \qquad \varphi_{\mathcal{B}}(x) := \max_{t\in T'} \psi_{\mathcal{B}}(t,x).$$

Pre nego što predjemo na ispitivanje svojstava funkcija $\psi_{\mathcal{B}}$ i $\varphi_{\mathcal{B}}$, uvedimo nekoliko pojmova.

Neka su X i Y topološki prostori, a $F:X\to POT(Y)$ višeznačno preslikavanje, pri čemu $POT(Y)$ označava partitivni skup skupa Y.

<u>DEFINICIJA 1.</u> Višeznačno preslikavanje $F:X\to POT(Y)$ je <u>poluneprekidno odozgo u tački</u> $x_0\in X$ ako za svaki otvoren skup V u Y, takav da je $F(x_0)\subset V$, postoji okolina tačke x_0 takva da za svako $x\in U$ važi $F(x)\subset V$. F je <u>poluneprekidno odozdo u tački</u> $x_0\in X$ ako za svaki otvoreni skup V u Y, takav da je $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$, postoji okolina U tačke x_0 takva da za svako $x\in U$ važi $F(x)\cap V\neq\emptyset$. F je <u>neprekidno u tački</u> $x_0\in X$ ako je ono u toj tački poluneprekidno i odozgo i odozdo.

<u>DEFINICIJA 2.</u> Višeznačno preslikavanje $F:X\to POT(Y)$ je <u>poluneprekidno odozgo</u> (<u>poluneprekidno odozdo</u>, <u>neprekidno</u>) <u>na</u> X, ako je ono poluneprekidno odozgo (poluneprekidno odozdo, neprekidno) u svakoj tački prostora X.

<u>Napomena.</u> Pojmove poluneprekidnosti odozdo i odozgo za višeznačna preslikavanja treba svakako razlikovati od (nažalost) istoimenih pojmova za funkcije sa vrednostima u $\overline{\mathbb{R}}$.

<u>DEFINICIJA 3.</u> <u>Grafik</u> višeznačnog preslikavanja $F:X\to POT(Y)$ je skup

$$\Gamma(F) := \bigcup_{x\in X} (\{x\}\times F(x)) \subset X\times Y.$$

Da bismo dokazali neprekidnost preslikavanja $\varphi_{\mathcal{B}}$ potrebna

U_1 i U_2 tako da je

$$P_{\beta_{\lambda_0,\vartheta_0}} \subset U_1 \;\wedge\; \vartheta_0 \in U_2 .$$

Za dovoljno velike indekse n je, s jedne strane, zbog poluneprekidnosti odozgo preslikavanja $b \mapsto P_b$: $P_{\beta_{\lambda_n,\vartheta_n}} \subset U_1$, dok je, s druge strane, $\vartheta_n \in U_2$. Kako je ujedno $\vartheta_n \in P_{\beta_{\lambda_n,\vartheta_n}}$, dolazimo do kontradikcije. Dakle, imamo

(5.34) $$\vartheta_0 \in P_{\beta_{\lambda_0,\vartheta_0}} .$$

Kratkoće radi, stavimo $g := \beta_{\lambda_0,\vartheta_0}$. Kako je skup $P_g \subset \mathbb{R}^m$ kompaktan, za svaku okolinu U od P_g postoji kompaktna podokolina W : $P_g \subset W \subset U$. Zbog poluneprekidnosti odozgo preslikavanja $b \mapsto P_b$ (ovde, specijalno, za $b = g$), postoji okolina V tačke g (u relativizaciji topologije generisane normom prostora $C(T)$ na podskup $\mathcal{L}_{A,p}$) takva da je

(5.35) $$h \in V \;\Rightarrow\; P_h \subset W.$$

Na osnovu leme 2., preslikavanje $x \mapsto A(\cdot\,,x)$ je neprekidno, tako da se njime kompaktan skup W preslikava u kompaktan skup

$$A(\cdot\,,W) := \{A(\cdot\,,x) \mid x \in W\} \subset C(T).$$

Kako je $C(T)$ Banahov prostor, on je i kvazikompletan (shvaćen kao lokalno konveksan prostor) tako da je u njemu zatvoren konveksni omotač kompaktnog skupa i sam kompaktan. Otud je skup $\overline{\mathrm{co}}\, A(\cdot\,,W)$ kompaktan i konveksan u $C(T)$.

Za $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ stavimo

(5.36) $$K_r := g + \frac{r}{r+1}\left[g - \overline{\mathrm{co}}\, A(\cdot\,,W)\right].$$

Kao afina slika kompaktnog skupa $\overline{\mathrm{co}}\, A(\cdot\,,W)$ i skup K_r je kompaktan i konveksan u $C(T)$. Ako stavimo $L := g - \overline{\mathrm{co}}\, A(\cdot\,,W)$, skup L je kompaktan i kao takav ograničen. To znači da postoji $\delta > 0$ tako da $\delta L \subset V - g$ (skup $V - g$ je okolina nule). Pritom se bez umanjenja opštosti može pretpostaviti da $\delta < 1$. Tada, ako stavimo $r := \delta\cdot(1-\delta)^{-1}$, imamo $\frac{r}{r+1} L \subset V - g$ tj. $K_r \subset V$. Fiksirajmo tako odabrano r.

Definišimo sada višeznačno preslikavanje

$$\Lambda : V \longrightarrow \mathrm{POT}(K_r)$$

Dokaz. Pretpostavimo da u nekoj tački $\bar{x}\in U$ preslikavanje φ_b nije neprekidno. Tada za neku okolinu W tačke $\varphi_b(\bar{x})$ postoji niz $x_n\to\bar{x}$ takav da je $\varphi_b(x_n)\notin W$ za svako $n\in\mathbb{N}$. Iz svakog od skupova M'_{b,x_n} izaberimo po tačku t_n (aksioma izbora!). Kako je T kompaktan, on je i prebrojivo kompaktan, te niz tačaka $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja, npr. $\bar{t}$. Dokazaćemo sada da je $\varphi_b(\bar{x})=\psi_b(\bar{t},\bar{x})$, tj. $\bar{t}\in M'_{b,\bar{x}}$. Na osnovu leme 1., grafik preslikavanja $x\mapsto M'_{b,x}$ je zatvoren, pa ako pretpostavimo da $\bar{t}\notin M'_{b,\bar{x}}$, onda postoji okolina G tačke $\bar{x}$ i okolina V tačke $\bar{t}$ tako da

$$(G\times V)\cap\Gamma(M'_{b,\cdot})=\emptyset.$$

Neka je n_1 takav indeks da $x_n\in G$ za $n\geq n_1$. Kako je $\bar{t}$ tačka nagomilavanja niza (t_n), postoji indeks $n_2\geq n_1$ takav da je $t_{n_2}\in V$. Tada $(x_{n_2},t_{n_2})\in G\times V$ pa $(x_{n_2},t_{n_2})\notin\Gamma(M'_{b,\cdot})$ što je suprotno izboru tačke t_{n_2}. Dakle, mora biti $\bar{t}\in M'_{b,\bar{x}}$. Kako je ψ_b neprekidno u tački $(\bar{x},\bar{t})$, to postoji otvorena okolina A tačke $(\bar{x},\bar{t})$, takva da je $\psi_b(A)\subset W$. Dalje postoji bazna okolina $G_0\times V_0\subset A$ tačke $(\bar{x},\bar{t})$ i indeks n sa $(x_n,t_n)\in G_0\times V_0\subset A$. Kako po definiciji tačke t_n važi jednakost $\varphi_b(x_n)=\psi_b(t_n,x_n)$, dobijamo $\varphi_b(x_n)\in W$ što je kontradikcija. $\square$

Sledećim stavom daje se veza minimalnih rešenja problema (5.1) i tačaka minimuma funkcije φ.

STAV 2. Tačka $v_0\in Z_b$ je minimalno rešenje problema (5.1) ako i samo ako je v_0 tačka minimuma funkcije φ_b na skupu U.

Dokaz. "$\Longrightarrow$": Neka je $v_0\in Z_b$ minimalno rešenje problema (5.1). Tada je $p(v_0)=E_b$ što daje

$$\psi_b(\infty,v_0)=p(v_0)=E_b. \tag{5.8}$$

Kako $v_0\in Z_b$, to je za svako $t\in T$: $A(t,x)\leq b(t)$, odnosno

$$\psi_b(t,v_0)=A(t,x)-b(t)+E_b\leq E_b. \tag{5.9}$$

Iz (5.8) i (5.9) dobijamo

$$\varphi_b(v_0)=\max_{t\in T'}\psi_b(t,v_0)=\psi_b(\infty,v_0)=E_b.$$

Dokažimo da je za svako $x\in U$: $\varphi_b(x)\geq\varphi_b(v_0)=E_b$. Neka je prvo $x\in Z_b$. Tada je rezonovanjem analognim onome u dokazu leme 3. dobijamo $\vartheta_1 \in P_g$. Prema ranijem (v. (5.34)) imamo i relacije

(5.41) $\vartheta_0 \in P_g, \; g = A(\cdot, \vartheta_0) + \lambda_0 [b_1 - A(\cdot, \vartheta_0)] \quad (\lambda_0 > 1).$

Kako je po pretpostavci stava skup $A(\cdot, P_g)$ konveksan, a ϑ_0 i ϑ_1 iz P_g , to čitava duž izmedju tačaka $A(\cdot, \vartheta_0)$ i $A(\cdot, \vartheta_1)$ leži u P_g . Ne pozivajući se na geometrijsku očiglednost (v. sliku - Pašova aksioma), tražimo realne brojeve t i ϱ tako da je

(5.42) $\quad t > 1 \quad \wedge \quad A(\cdot, \bar{\vartheta}) = h + t(b_1 - h);$

(5.43) $\quad 0 < \varrho < 1 \quad \wedge \quad A(\cdot, \bar{\vartheta}) = \varrho A(\cdot, \vartheta_1) + (1-\varrho) A(\cdot, \vartheta_0);$

gde $\bar{\vartheta}$ leži u P_g automatski, čim je zadovoljen uslov (5.43). Imajući u vidu (5.4o) i (5.41), dobijamo

(5.44) $$\varrho = \frac{r}{r\lambda_0 + \lambda_0 - 1} < \frac{r}{r\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} < 1,$$

i

(5.45) $$t = \frac{\lambda_0(1-\varrho)}{\lambda_0 - 1} = \frac{\lambda_0(r+1)}{\lambda_0(r+1) - 1} > 1.$$

Prema tome, imamo

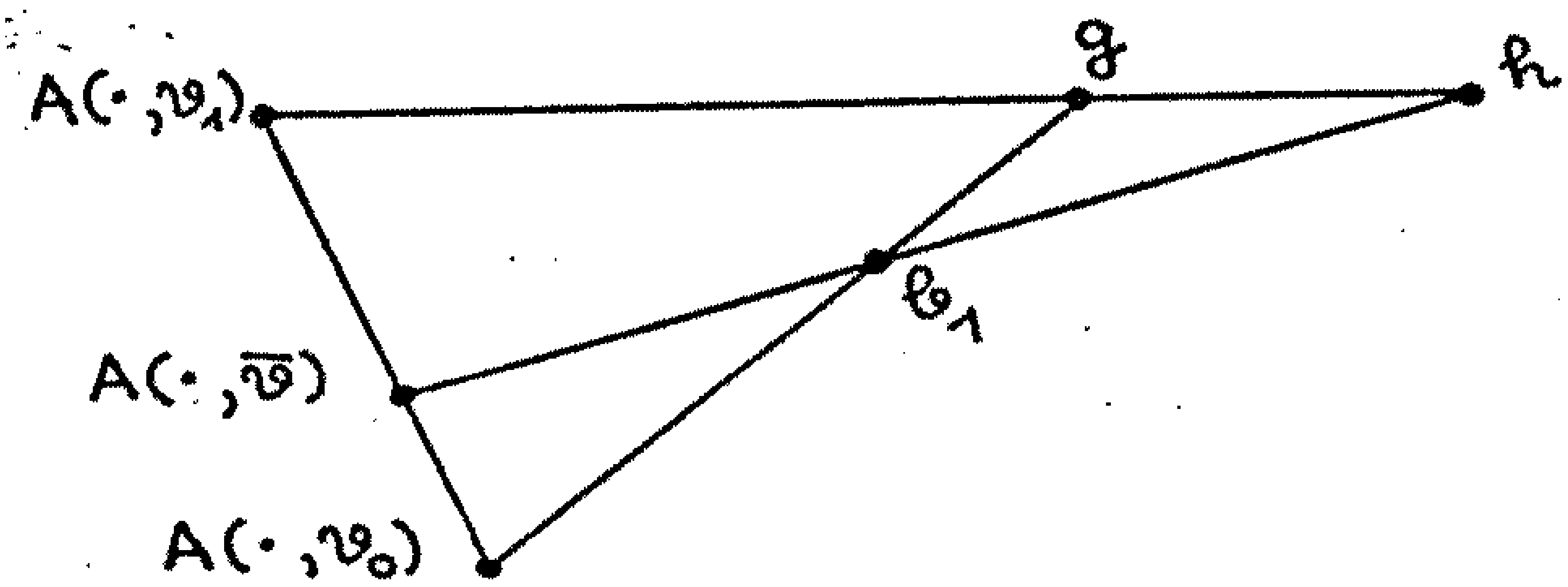
(5.46) $$h = A(\cdot, \bar{\vartheta}) + \frac{t}{t-1}[b_1 - A(\cdot, \bar{\vartheta})]; \quad \frac{t}{t-1} > 1.$$

Da bismo došli do kontradikcije sa definicijom broja λ_0 (v. (5.33)), uočimo prvo da važi nejednakost

(5.47) $$\frac{t}{t-1} = \frac{\lambda_0(r+1)}{\lambda_0(r+1)-1} \cdot \frac{\lambda_0(r+1)-1}{1} = \lambda_0(r+1) > \lambda_0 .$$

Stavimo $\bar{\lambda} = t \cdot (t-1)^{-1}$, tako da je

$$h = A(\cdot, \bar{\vartheta}) + \bar{\lambda}[b_1 - A(\cdot, \bar{\vartheta})] = \beta_{\bar{\lambda}, \bar{\vartheta}} .$$



$$\varphi_{\theta}(\vartheta) \geq \psi_{\theta}(t_o,\vartheta) \geq \psi_{\theta}(t_o,\vartheta_o) = \varphi_{\theta}(\vartheta_o).$$

Kako je $\vartheta \in U$ proizvoljno uzeto, sledi da je ϑ_o tačka minimuma funkcije φ_{θ} na skupu U.

Po definiciji preslikavanja ψ_{θ} imamo

$$\psi_{\theta}(t,\vartheta_o) - \psi_{\theta}(t,\vartheta) = \begin{cases} p(\vartheta_o) - p(\vartheta), & t = \infty \\ A(t,\vartheta_o) - A(t,\vartheta), & t \in T. \end{cases}$$

Koristeći ovo razlaganje dobijamo sledeći stav kao posledicu stava 3.

STAV 4. Ako za $\vartheta_o \in U$ važi uslov

$$(5.12)\quad (\forall \vartheta \in U)\big(\min\{p(\vartheta_o) - p(\vartheta), \min_{t \in M_{\theta,\vartheta_o}} [A(t,\vartheta_o) - A(t,\vartheta)]\} \leq 0 \big)$$

onda je $\vartheta_o \in P_{\theta}$ (tj. $\vartheta_o \in Z_{\theta}$ i $p(\vartheta_o) = E_{\theta}$).□

Postavlja se pitanje neophodnosti uslova (5.11), odnosno (5.12). Pokazuje se da ako je ψ_{θ} punktualno konveksno (v. definiciju dole), odnosno slabo punktualno konveksno, imamo neophodnost uslova (5.11) i (5.12). Šta više, pokazuje se da ako je uslov (5.11) ili (5.12) uvek neophodan, preslikavanje ψ_{θ} mora biti slabo punktualno konveksno. Pokazaćemo da su mnogi važni primeri obuhvaćeni u slučaju punktualne konveksnosti. Ipak, i za znatno širu klasu preslikavanja ψ_{θ} pokazuje se da je uvek bar jedno od minimalnih rešenja problema (5.1) okarakterisano sa (12).

DEFINICIJA 4. Preslikavanje $A: T \times U \to \mathbb{R}$, neprekidno na $T \times U$, je punktualno konveksno ako za svaki par elemenata $\vartheta, \vartheta_o \in U$, svaki zatvoren skup $F \subset T$ takav da

$$t \in F \Rightarrow A(t,\vartheta_o) - A(t,\vartheta) > 0$$

i svako $\lambda > 0$, postoji $\vartheta_{\lambda} \in U$ tako da je

$$\|\vartheta_{\lambda} - \vartheta_o\| < \lambda$$

i

$$t \in F \Rightarrow A(t,\vartheta_o) - A(t,\vartheta_{\lambda}) > 0.$$

Norma $\|\vartheta_{\lambda} - \vartheta_o\|$ može se uzeti npr. kao euklidska norma u $\mathbb{R}^m$. Zbog ekvivalentnosti svih normi na $\mathbb{R}^m$ sam izbor ove norme nije od suštinske važnosti.

preslikavanje $\Lambda: V \to POT(V)$ koje zadovoljava sledeće uslove:

1° Za svako $v \in V$ skup $\Lambda(v)$ je kompaktan i konveksan.

2° Preslikavanje $v \mapsto \Lambda(v)$ je poluneprekidno odozdo.

Tada preslikavanje Λ ima bar jednu nepokretnu tačku, tj. postoji bar jedno $v_0 \in V$ sa $v_0 \in \Lambda(v_0)$.

Dokaz je neposredan iz sledećeg razmatranja. Na osnovu rezultata E. Michaela ([81], [82]) pod ovim pretpostavkama preslikavanje Λ ima bar jednu neprekidnu selekciju, tj. postoji preslikavanje $\sigma: V \to V$, tako da je σ neprekidno i da za svako $v \in V$ važi $\sigma(v) \in \Lambda(v)$. No, sada se na preslikavanje σ može primeniti Schauder-ova teorema o nepokretnoj tački, tako da postoji $v_0 \in V$ sa

$$v_0 = \sigma(v_0) \in \Lambda(v_0). \square$$

U našem slučaju je $X = C(T)$ - Banahov prostor, tako da možemo iskazati i sledeći stav.

STAV 9. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Preslikavanje $A: T \times U \to \mathbb{R}$ je neprekidno;

2° Višeznačno preslikavanje

$$\mathcal{L}_{A,p} \ni b \mapsto P_b \in POT(V)$$

je poluneprekidno odozdo;

3° Za svako $b \in \mathcal{L}_{A,p}$ skup P_b je kompaktan;

4° Za svako $b \in \mathcal{L}_{A,p}$ familija funkcija

$$A(\cdot, P_b) := \{A(\cdot, v) \mid v \in P_b\}$$

je konveksna.

Tada za svako $b \in \mathcal{L}_{A,p}$ postoji $v_0 \in P_b$ koje zadovoljava sledeći uslov: za svako $v \in U$ važi:

$$p(v_0) \leq p(v) \vee \min_{t \in M_{b,v_0}} [A(t, v_0) - A(t, v)] \leq 0. \square$$

Potpunosti radi, iznećemo ovde još nekoliko rezultata o stabilnosti minimalnih rešenja linearne parametarske optimizacije. Posmatrajmo zato problem (5.2). U ovom slučaju je

$$M_{b,v_0} = \{t \in T \mid \langle A(t), v_0 \rangle = b(t)\} \quad (v_0 \in Z_b).$$

Stavimo:

$$\mathcal{E}_b := \bigcap \{M_{b,v_0} \mid v_0 \in P_b\}.$$

PRIMER 3. Neka je $\tilde{A}:T \to \mathbb{R}^m$ neprekidno preslikavanje. Za $x \in U$ stavimo

$$A(t,x) := \langle \tilde{A}(t), x \rangle,$$

gde $\langle \cdot , \cdot \rangle$ označava skalarni proizvod u $\mathbb{R}^m$. Pokažimo da je A punktualno konveksno. Neka su zato dati $v_0, v \in U$ i $\lambda > 0$. Za neko $\lambda_1 \in]0,1[$ stavimo

$$v_\lambda := (1-\lambda_1)v_0 + \lambda_1 v.$$

Tada je

$$A(t,v_0) - A(t,v_\lambda) = \langle \tilde{A}(t), v_0 - v_\lambda \rangle =$$
$$= \lambda_1 \langle \tilde{A}(t), v_0 - v \rangle = \lambda_1 [A(t,v_0) - A(t,v_\lambda)],$$

odakle je

$$\operatorname{sgn}[A(t,v_0) - A(t,v_\lambda)] = \operatorname{sgn}[A(t,v_0) - A(t,v)].$$

Odaberimo još λ_1 tako da bude $\|v_0 - v_\lambda\| < \lambda$. Pošto je $v_0 - v_\lambda = \lambda_1(v_0 - v)$ imamo

$$\|v_0 - v_\lambda\| = \lambda_1 \|v_0 - v\| < \lambda$$

ako je samo

$$0 < \lambda_1 < \min\left\{1, \frac{\lambda}{\|v_0 - v\|}\right\}.$$

PRIMER 4. Neka je skup $U \subset \mathbb{R}^m$ konveksan i preslikavanje $U \ni x \mapsto A(t,x)$ konveksno za svako fiksirano $t \in T$. Pokažimo da je A punktualno konveksno. Neka su zato v_0 i v tačke iz U i F zatvoren podskup od T takav da je

$$t \in F \Rightarrow A(t,v_0) - A(t,v) > 0.$$

Opet za neko $\lambda_1 \in]0,1[$ stavimo $v_\lambda := (1-\lambda_1)v_0 + \lambda_1 v$. Zbog konveksnosti preslikavanja $x \mapsto A(t,x)$ imamo

$$A(t,v_\lambda) \leq (1-\lambda_1)A(t,v_0) + \lambda_1 A(t,v).$$

Za $t \in F$ treba da dokažemo pozitivnost izraza $A(t,v_0) - A(t,v_\lambda)$:

$$A(t,v_0) - A(t,v_\lambda) \geq A(t,v_0) - (1-\lambda_1)A(t,v_0) - \lambda_1 A(t,v) =$$
$$= \lambda_1 [A(t,v_0) - A(t,v)] > 0.$$

Ostaje da se izabere dovoljno malo λ_1 da bude $\|v_0 - v_\lambda\| < \lambda$. To se može uraditi isto kao u prethodnom primeru, te treba uzeti

$$0 < \lambda_1 < \min\left\{1, \frac{\lambda}{\|v_0 - v\|}\right\}.$$

pitanje:

PITANJE 1. Neka je preslikavanje

$$\mathcal{L}_{A,p} \ni \mathscr{b} \longmapsto Z_{\mathscr{b}} \in POT(\mathbb{R}^m)$$

poluneprekidno odozgo i neka je skup $Z_{\mathscr{b}}$ kompaktan za svako $\mathscr{b} \in \mathcal{L}_{A,p}$. Da li odatle sledi da je preslikavanje $\mathscr{b} \mapsto Z_{\mathscr{b}}$ poluneprekidno odozdo?

PITANJE 2. Na osnovu stava 3., ako za svako $\vartheta \in U$ važi nejednakost

$$\min_{t \in M'_{\mathscr{b},\vartheta_0}} [\psi_{\mathscr{b}}(t,\vartheta_0) - \psi_{\mathscr{b}}(t,\vartheta)] \leq 0,$$

onda je ϑ_0 tačka minimuma funkcije $\varphi_{\mathscr{b}}$ na skupu U. Na osnovu stava 6., ako je preslikavanje $(t,x) \mapsto \psi_{\mathscr{b}}(t,x)$ slabo punktualno konveksno, taj uslov je i neophodan za to da ϑ_0 bude tačka minimuma od $\varphi_{\mathscr{b}}$ na U. Prema tome, ako za neko $\bar{\vartheta} \in U$ gornji uslov nije ispunjen, tj. ako važi

$$(\forall t \in M'_{\mathscr{b},\vartheta_0})(\psi_{\mathscr{b}}(t,\vartheta_0) - \psi_{\mathscr{b}}(t,\bar{\vartheta}) > 0),$$

tačka ϑ_0 nije tačka minimuma od $\varphi_{\mathscr{b}}$ pa se ona može poboljšati. Postavlja se pitanje da li je to moguće uraditi na način sličan onome u glavi četvrtoj i da li se na taj način za klasu slabo punktualno konveksnih preslikavanja (ili bar neku njenu specijalnu potklasu) može odrediti algoritam za nalaženje minimalnih rešenja koji bi bio sličan algoritmu izvedenom za rešavanje problema teorije aproksimacija u prostoru $C(T,H)$.

$$\operatorname{sgn}[A(t,v_0)-A(t,v)] = \operatorname{sgn}[A(t,v_0)-A(t,v_\lambda)].$$

Za λ_1 možemo kao u prethodna dva primera uzeti vrednost koja zadovoljava nejednakosti

$$0<\lambda_1<\min\left\{1, \frac{\lambda}{\|v_0-v\|}\right\}.$$

Širi pojam od punktualne konveksnosti je tzv. slaba punktualna konveksnost. Prvo dajemo definiciju ovog pojma.

DEFINICIJA 5. Neprekidno preslikavanje $A: T\times U \longrightarrow \mathbb{R}$ je slabo punktualno konveksno ako za svaki par tačaka $v_0, v\in U$, svaki zatvoreni skup $F\subset T$ takav da je

$$t\in F \Rightarrow A(t,v_0)-A(t,v)>0$$

i svako $\lambda>0$ postoji $v_\lambda\in U$ tako da važe implikacije

$$t\in F \Rightarrow A(t,v_0)-A(t,v_\lambda)>0,$$

$$t\in T \Rightarrow A(t,v_\lambda)-A(t,v_0)<\lambda.$$

Pre nego što pokažemo da je svako punktualno konveksno preslikavanje ujedno i slabo punktualno konveksno, dajemo bez dokaza jednu lemu.

LEMA 2 (Loran ([77]), str. 38). Neka je T kompaktan topološki prostor, a $U\subset\mathbb{R}^m$ otvoren skup. Neka je $A:T\times U\to\mathbb{R}$ dato preslikavanje. Preslikavanje A je neprekidno ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

1° Familija funkcionala $(A(t,\cdot))_{t\in T}$, definisanih sa $U\ni x\mapsto A(t,x)$, je podjednako neprekidna na U;

2° preslikavanje $T\ni t\mapsto A(t,x)$ neprekidno je za svako fiksirano $x\in U$.

STAV 5. Ako je preslikavanje $A:T\times U\to\mathbb{R}$ punktualno konveksno, ono je i slabo punktualno konveksno.

Dokaz. Imajmo pre svega u vidu da je punktualno konveksno preslikavanje po definiciji neprekidno. Neka su dalje $v_0, v\in U$, $F\subset T$ zatvoren skup takav da je

$$t\in F \Rightarrow A(t,v_0)-A(t,v)>0$$

i $\lambda>0$. Na osnovu leme 2., za dato λ postoji broj $\delta=\delta(\lambda)>0$ takav da iz $\|v'-v_0\|_{\mathbb{R}^m}<\delta$ sledi

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n.$$

S obzirom na ograničenja (6.3), važi $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n) \geqslant 0$ pa skup dopustivih parametara $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ leži u simpleksu

$$(6.5)\quad \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 \geqslant 0) \wedge \dots \wedge (x_n \geqslant 0) \wedge (x_1 + \dots + x_n \leqslant 1)\}.$$

Sam skup dopustivih parametara

$$(6.6)\quad K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 \geqslant 0) \wedge \dots \wedge (x_n \geqslant 0) \wedge (\forall t \in \mathbb{R})(x_1 f_1(t) + \dots \leqslant g(t))\}$$

je očigledno konveksan i zatvoren skup jer ga je moguće predstaviti u obliku

$$K = (\mathbb{R}_+)^n \cap \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 f_1(t) + \dots + x_n f_n(t) \leqslant g(t)\}.$$

Geometrijski gledano, postavlja se sledeće pitanje: gde hiperravan $x_1 + \dots + x_n = c$ poslednji put dodiruje ovaj konveksni skup kada parametar c raste? Ovakav problem postavljen je i u [39].

Pre nego što predjemo na razmatranje gore postavljenog problema, izložimo neke elemente teorije linearne parametarske optimizacije koje ćemo u daljem koristiti.

U radu [19] Brosowski posmatra sledeći problem parametarske optimizacije:

minimizirati

$$(6.7)\qquad p(x) := \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu$$

uz ograničenja

$$(6.8)\qquad (\forall t \in T)(\forall \mu \in I_m)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t) x_\nu \leqslant b_\mu(t)\Big)$$

gde je $I_m := \{1,2,\dots,n\}$; $p_1, p_2, \dots, p_n$ su dati realni brojevi, a $t \mapsto a_{\mu\nu}(t)$ i $t \mapsto b_\mu(t)$ date neprekidne realne funkcije definisane na metričkom prostoru T. Posmatrajući ovde t kao parametar, za fiksirano $t \in T$ definišimo:

a) <u>skup dopustivih tačaka</u>:

$$(6.9)\qquad Z_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mu \in I_m)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(t) x_\nu \leqslant b_\mu(t)\Big)\};$$

b) <u>skup optimalnih rešenja</u>:

$$(6.10)\qquad P_t := \{x_0 \in Z_t \mid p(x_0) = \inf_{x \in Z_t} p(x)\};$$

važi

$$A(t,\vartheta_o) - A(t,\vartheta) \geqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{5.17}$$

Ako bi, naime, za neko $t \in \overline{W}_\alpha$ bilo $A(t,\vartheta_o)-A(t,\vartheta) < \frac{\alpha}{2}$, zbog neprekidnosti preslikavanja A bi postojala okolina G_t tačke t u kojoj važi ista nejednakost. Kako je $G_t \cap W_\alpha \neq \emptyset$ zbog $t \in \overline{W}_\alpha$, za $t' \in G_t \cap W_\alpha$ imali bismo kontradikciju

$$A(t',\vartheta_o)-A(t',\vartheta) > \frac{\alpha}{2} \;\wedge\; A(t',\vartheta_o)-A(t',\vartheta) < \frac{\alpha}{2}.$$

Dalje, za $t \in M_{b,\vartheta_o}$ imamo

$$\psi_b(t,\vartheta_o) = A(t,\vartheta_o) - b(t) + E_b = \varphi_b(\vartheta_o).$$

Za t iz kompaktnog skupa $T \setminus W_\alpha$ je $\psi_b(t,\vartheta_o) < \varphi_b(\vartheta_o)$ te postoji μ takvo da je

$$t \in T \setminus W_\alpha \Rightarrow A(t,\vartheta_o) - b(t) + E_b \leqslant \mu < \varphi_b(\vartheta_o).$$

Uočimo sada zatvoreni skup $\overline{W}_\alpha$ i relaciju (5.17) koja važi za $t \in \overline{W}_\alpha$. Zbog slabe punktualne konveksnosti preslikavanja ψ_b za $\lambda > 0$ postoji $\vartheta_\lambda \in U$ tako da važe relacije

$$t \in \overline{W}_\alpha \Rightarrow [A(t,\vartheta_o) - A(t,\vartheta_\lambda) > 0 \;\wedge\; p(\vartheta_o) - p(\vartheta) > 0],$$

$$t \in T \;\Rightarrow A(t,\vartheta_\lambda) - A(t,\vartheta_o) < \lambda,$$

$$p(\vartheta_\lambda) - p(\vartheta_o) < \lambda.$$

Uzmimo λ tako malo da bude $0 < \lambda < \varphi_b(\vartheta_o) - \mu$. Na osnovu definicije skupa W_α, za $t \in W_\alpha$ imamo

$$\begin{aligned} \psi_b(t,\vartheta_\lambda) &= \psi_b(t,\vartheta_o) + [A(t,\vartheta_\lambda) - A(t,\vartheta_o)] < \\ &< \psi_b(t,\vartheta_o) - \frac{\alpha}{2} < \psi_b(t,\vartheta_o) \leqslant \varphi_b(\vartheta_o). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Za $t \in T \setminus W_\alpha$ je

$$\begin{aligned} \psi_b(t,\vartheta_\lambda) &= \psi_b(t,\vartheta_o) + [\psi_b(t,\vartheta_\lambda) - \psi_b(t,\vartheta_o)] \leqslant \\ &\leqslant \mu + \lambda < \mu + \varphi_b(\vartheta_o) - \mu = \varphi_b(\vartheta_o). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Za $t = \infty$ imamo

$$\psi_b(\infty,\vartheta_\lambda) = p(\vartheta_\lambda) < p(\vartheta_o) = \psi_b(\infty,\vartheta_o) \leqslant \varphi_b(\vartheta_o). \tag{5.2o}$$

Iz (5.18), (5.19) i (5.2o) dobijamo da je za svako $t \in T'$

$$\psi_b(t,\vartheta_\lambda) < \varphi_b(\vartheta_o),$$

tj. neprekidnog preslikavanja $s_p: T \to \mathbb{R}^n$, takvog da za svako $t \in T$ važi $s_p(t) \in P_t$ (v. Michael ([81], [82])). Neformalno govoreći, to znači da iako čitav skup rešenja postavljenog parametarskog optimizacionog problema nije neprekidna funkcija parametra (već samo poluneprekidna odozdo), za svako $t \in T$ iz skupa P_t može se odabrati po jedno rešenje $s_p(t)$ koje će već neprekidno zavisiti od t. Ovo je od posebnog značaja za pitanja stabilnosti rešenja u zavisnosti od promene početnih uslova.

Jedan dovoljan uslov da $t \mapsto P_t$ bude poluneprekidno odozdo, jeste da preslikavanje $t \mapsto Z_t$ bude jedno <u>(P)-preslikavanje</u>.

<u>DEFINICIJA 3</u> (Brosowski ([19])). Preslikavanje $t \mapsto Z_t$ je <u>u tački</u> $t_0 \in T$ jedno <u>(P)-preslikavanje</u> ako za svaki par tačaka $z, x \in Z_{t_0}$ postoje U_x tačke x i okolina U_{t_0} tačke t_0 kao i realan broj $\alpha > 0$ tako da je

$$(6.12) \qquad (\forall t \in U_{t_0})(\forall y \in U_x \cap Z_t)(y + \alpha(x - z) \in Z_t).$$

Kažemo da je $t \mapsto Z_t$ <u>(P)-preslikavanje na skupu</u> T ako je ono (P)-preslikavanje u svakoj tački skupa T.

<u>STAV 2</u> (Brosowski ([19])). Neka je za svako $t \in T$ skup Z_t kompaktan. Ako je $t \mapsto Z_t$ jedno (P)-preslikavanje u tački $t_0 \in T$, onda je preslikavanje $t \mapsto P_t$ poluneprekidno odozdo u tački t_0.

<u>POSLEDICA.</u> Ako su funkcije $t \mapsto a_{\mu\nu}(t)$ konstantne, a skup Z_t kompaktan za svako $t \in T$, onda je preslikavanje $t \mapsto P_t$ poluneprekidno odozdo.

Prema ovoj posledici, konstantnost koeficijenata $a_{\mu\nu}$ je jedan dovoljan uslov za to da $t \mapsto Z_t$ bude (P)-preslikavanje. Bol ([11]) je pokazao da je u slučaju konačnosti skupa T ovaj uslov i neophodan.

Vratimo se sada problemu (6.1) sa ograničenjima (6.2) i (6.3). Jedan od najčešćih metoda numeričkog rešavanja tog problema je njegova zamena diskretnim problemom parametarske linearne optimizacije.

U tom cilju uočavamo "dobro odabran" i "što brojniji"

(5.22) $p(\vartheta_0) \leqslant p(\vartheta) \vee \min_{t\in M_{b,\vartheta_0}} [A(t,\vartheta_0) - A(t,\vartheta)] \leqslant 0.$

Pre dokaza razjasnimo uslov 4°. Konveksnost familije $A(\cdot,P_b)$ eksplicitno znači sledeće: ako su ϑ_1 i ϑ_2 iz P_b i $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, onda postoji $\vartheta\in P_b$ tako da je

$$t\in T \Rightarrow A(t,\vartheta) = (1-\lambda)A(t,\vartheta_1) + \lambda\cdot A(t,\vartheta_2).$$

Dokaz stava 8. izvešćemo u nekoliko etapa.

LEMA 3. Neka je $b_1\in\mathcal{L}_{A,p}$ i $\vartheta_0\in P_{b_1}$. Za $\lambda\geqslant 0$ stavimo

(5.23) $$b_\lambda := A(\cdot,\vartheta_0) + \lambda[b_1 - A(\cdot,\vartheta_0)].$$

Tada za svako $\lambda\in[0,1]$ važi $\vartheta_0\in P_{b_\lambda}$.

Dokaz. Dokažimo prvo inkluziju $Z_{b_\lambda}\subset Z_{b_1}$ pri $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Ako je $\vartheta\in Z_{b_\lambda}$, onda za svako $t\in T$ važi $A(t,\vartheta)\leqslant b_\lambda(t)$. Zbog (5.23) i $\vartheta_0\in P_{b_1}\subset Z_{b_1}$ (odakle je $A(t,\vartheta_0)\leqslant b_1(t)$ za svako $t\in T$) imamo

$$t\in T \Rightarrow A(t,\vartheta)\leqslant b_\lambda(t) = A(t,\vartheta_0) + \lambda[b_1(t) - A(t,\vartheta_0)] =$$
$$= (1-\lambda)A(t,\vartheta_0) + \lambda b_1(t) \leqslant (1-\lambda)b_1(t) + \lambda b_1(t) = b_1(t),$$

tako da $\vartheta\in Z_{b_1}$.

Dokažimo sada da $\vartheta_0\in Z_{b_\lambda}$. Kako po pretpostavci $\vartheta_0\in P_{b_1}\subset Z_{b_1}$ to za $t\in T$ važi $A(t,\vartheta_0)\leqslant b_1(t)$ odakle za $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ imamo

$$A(t,\vartheta_0)\leqslant A(t,\vartheta_0) + \lambda[b_1(t) - A(t,\vartheta_0)] = b_\lambda(t)$$

pa je zaista $\vartheta_0\in Z_{b_\lambda}$.

Konačno, iz $\vartheta_0\in Z_{b_\lambda}\subset Z_{b_1}$ i $\vartheta_0\in P_{b_1}$ imamo

$$p(\vartheta_0) = \inf_{x\in Z_{b_1}} p(x) \leqslant \inf_{x\in Z_{b_\lambda}} p(x) \leqslant p(\vartheta_0),$$

odakle je $\vartheta_0\in P_{b_\lambda}$. □

LEMA 4. Neka je $b_1\in\mathcal{L}_{A,p}$ i $\vartheta_0\in P_{b_1}$. Ako je za svako $\lambda\geqslant 1$ ispunjen uslov $\vartheta_0\in P_{b_\lambda}$, onda važi relacija (5.22).

Dokaz. Pretpostavimo da (5.22) ne važi, nego da postoji tako da je

(5.24) $$p(\vartheta_0) > p(\vartheta) \wedge (\forall t\in M_{b_1,\vartheta_0})(A(t,\vartheta_0) - A(t,\vartheta) > 0)$$

Kako je skup M_{b_1,ϑ_0} kompaktan, postoji $\alpha > 0$ tako da je

$\varphi_\mu(t)=e^{\alpha_\mu t}$ sa podesno odabranim $\alpha_\mu>0$ ($\mu\in I_k$). Uočimo pritom da funkcije $a_{\mu\nu}(t,\eta)$ ne zavise efektivno od η.

Posmatraćemo sledeća 3 slučaja:

1° OPŠTI SLUČAJ: $(t,\eta)\in[-1,1]\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]=:T$. Pretpostavimo da su gustine $\theta\mapsto f_\nu(\theta)$ i $\theta\mapsto g(\theta)$ neprekidne funkcije. Tada je

$$
(6.17)\qquad Z_{(t,\eta)}=\{x\in\mathbb{R}^n_+\,|\,(\forall\mu\in I_k)\big(\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(\varphi_\mu(t)\tau_\mu)x_\nu\leqslant \leqslant(1+\eta)g(\varphi_\mu(t)\tau_\mu)\big)\}
$$

i

$$
(6.18)\qquad P_{(t,\eta)}=\{x_0\in Z_{(t,\eta)}\,|\,p(x_0)=\inf_{x\in Z_{(t,\eta)}}p(x)=:E_{(t,\eta)}\}.
$$

Za ovaj slučaj možemo iskazati sledeći stav.

STAV 3. Ako je $(t,\eta)\mapsto Z_{(t,\eta)}$ (P)-preslikavanje u tački $(0,0)$, onda je preslikavanje $(t,\eta)\mapsto P_{(t,\eta)}$ poluneprekidno odozdo u tački $(0,0)$.

Dokaz. Za svako $(t,\eta)\in[-1,1]\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ skup $Z_{(t,\eta)}$ je kompaktan jer predstavlja konveksan poliedar sadržan u simpleksu (6.5). Tvrdjenje sada sledi na osnovu stava 2. □

Kada će konkretno preslikavanje $(t,\eta)\mapsto Z_{(t,\eta)}$ biti (P)-preslikavanje zavisi od gustina kojima se aproksimira kao i od odabranog načina "neprekidnog menjanja" mreže tačaka (τ_μ).

2° SLUČAJ $\eta=0$: Ovaj slučaj odgovara situaciji kada je gustina g tačno zadata, ali njen analitički izraz ne omogućava jednostavno izračunavanje njenih vrednosti za tačne vrednosti argumenata (τ_μ), te se pribegava njihovoj aproksimaciji. Stav 3. prenosi se na ovaj slučaj neposredno.

3° SLUČAJ $t=0$: Ovde je $a_{\mu\nu}=a_{\mu\nu}(0,\eta)=f_\nu(\varphi_\mu(0),\tau_\mu)=f_\nu(\tau_\mu)$, što je konstanta u odnosu na η. Pritom je $b_\mu(0,\eta)=(1+\eta)g(\tau_\mu)$. Ovaj slučaj odgovara praktično najvažnijoj situaciji kada su tačke (τ_μ) odredjene unapred (obično su na neki način karakteristične za tip raspodele čija je gustina g), dok su same vrednosti funkcije $g(\tau_\mu)$ odredjene sa izvesnom relativnom greškom koja nije veća od η. Preciznije, u ovom slučaju je

$$
(6.19)\qquad Z_{(0,\eta)}=\{x\in\mathbb{R}^n_+\,|\,(\forall\mu\in I_k)\big(\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(\tau_\mu)x_\nu\leqslant(1+\eta)g(\tau_\mu)\big)\},
$$

dato višeznačno preslikavanje. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Za svako $\vartheta \in V$, skup $\Lambda(V)$ je kompaktan i konveksan;

2° Preslikavanje $\vartheta \mapsto \Lambda(\vartheta)$ je poluneprekidno odozgo.

Tada preslikavanje Λ ima bar jednu nepokretnu tačku, tj. postoji $\vartheta_0 \in V$ sa $\vartheta_0 \in \Lambda(\vartheta_0)$.

Dokaz stava 8. Pretpostavimo da tvrdjenje stava ne važi, tj da postoji $\ell_1 \in \mathcal{L}_{A,p}$ tako da za svako $\vartheta_0 \in P_{\ell_1}$ postoji $\vartheta \in U$ sa

$$(5.27)\quad p(\vartheta_0) > p(\vartheta) \;\wedge\; (\forall t \in M_{\ell_1,\vartheta_0})(A(t,\vartheta_0) - A(t,\vartheta) > 0).$$

Za $\vartheta \in U$ stavimo

$$(5.28)\quad \beta_{\lambda,\vartheta}(t) := A(t,\vartheta) + \lambda[\ell_1(t) - A(t,\vartheta)].$$

Ako je $\vartheta = \vartheta_0$ dobijamo raniju oznaku: $\ell_\lambda = \beta_{\lambda,\vartheta_0}$. Na osnovu leme 4. za svako $\vartheta \in P_{\ell_1}$ postoji $\lambda \geqslant 1$, tako da $\vartheta \notin P_{\beta_{\lambda,\vartheta}}$. Dokazom potpuno analognim onome u lemi 3 (s tačnošću do zamene ϑ_0 sa ϑ) dobijamo sledeću relaciju:

$$(5.29)\quad (\vartheta \in P_{\beta_{\mu,\vartheta}} \wedge 0 \leqslant \lambda \leqslant \mu) \Rightarrow \vartheta \in P_{\beta_{\lambda,\vartheta}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

To znači da je skup

$$\{\mu \in \mathbb{R} \mid \vartheta \in P_{\beta_{\mu,\vartheta}}\}$$

(konačan ili ne) interval čiji je levi kraj 0. Definišimo sledeću veličinu:

$$(5.30)\quad \tilde{\lambda}(\vartheta) := \sup\{\mu \in \mathbb{R} \mid \vartheta \in P_{\beta_{\mu,\vartheta}}\}.$$

Dokažimo prvo da važi relacija

$$\vartheta \in P_{\ell_1} \Rightarrow \tilde{\lambda}(\vartheta) < +\infty.$$

U protivnom, ako bi bilo $\tilde{\lambda}(\vartheta) = +\infty$, iz (5.29) bi sledilo da $\vartheta \in P_{\beta_{\mu,\vartheta}}$ za svako $\mu \geqslant 0$, suprotno pretpostavci.

Dokažimo sada da se supremum u (5.30) dostiže, tj. da je

$$\vartheta \in P_{\beta_{\tilde{\lambda}(\vartheta),\vartheta}}.$$

Uočimo zato niz (λ_i) koji zadovoljava uslove

$$\lambda_i < \tilde{\lambda}(\vartheta), \quad \lambda_i \to \tilde{\lambda}(\vartheta) \quad (i \to \infty).$$

STAV 5. Ako je realna funkcija $\theta \mapsto g(\theta)$ poluneprekidna odozdo, onda je višeznačno preslikavanje

$$T := [-1,1] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \ni (t,\eta) \mapsto \tilde{P}_{(t,\eta)} \qquad (\varepsilon_0 < 1)$$

poluneprekidno odozdo u tački $(t,\eta) = (0,0)$.

Pod datim uslovima višeznačno preslikavanje $(t,\eta) \mapsto \tilde{P}_{(t,\eta)}$ neprekidno je u svakoj tački skupa T samo to, s obzirom na prirodu problema, ovde nije od značaja. Da bi se izbegao nesporazum oko istoimenog termina - "poluneprekidan odozdo" - za dva različita pojma, eksplicitno je napomenuto kada se radi o realnoj funkciji, a kada o višeznačnom preslikavanju.

Dokaz stava 5. I u ovom slučaju je skup $\tilde{Z}_{(t,\eta)}$ konveksan poliedar sadržan u simpleksu (6.5), odakle sledi njegova kompaktnost. Analizom dokaza posledice stava 2 (Brosowski ([19])) neposredno se vidi da je dovoljno pretpostaviti poluneprekidnost odozdo funkcije $t \mapsto b_\mu(t)$ na desnoj strani nejednakosti--ograničenja. Kako je $\eta \mapsto 1+\eta$ neprekidna i strogo pozitivna (za $\eta \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$), a funkcija $t \mapsto \tau_\mu + \alpha_\mu t$ neprekidna, iz poluneprekidnosti odozdo funkcije $\theta \mapsto g(\theta)$ sledi poluneprekidnost odozdo funkcije $(t,\eta) \mapsto (1+\eta) g(\tau_\mu + \alpha_\mu t)$.

U praksi funkcija gustine raspodele često, ako nije neprekidna, ima samo prekide prve vrste (njih konačno ili prebrojivo mnogo). U takvim tačkama, eventualnom izmenom vrednosti funkcije tako da bude

$$g(t) := \min\{g(t-0), g(t+0)\}$$

postižemo poluneprekidnost odozdo funkcije gustine, ne menjajući pritom vrednost funkcije raspodele.

lako se vidi, korišćenjem leme 2., da $\beta_{\lambda,\vartheta_n} \to \beta_{\lambda,\vartheta_0}$ kad $n \to \infty$ i to u metrici prostora $C(T)$. Dokažimo da i $\vartheta_0 \in$ $\in P_{\beta_{\lambda,\vartheta_0}}$. Ako bi bilo $\vartheta_0 \notin P_{\beta_{\lambda,\vartheta_0}}$, za kompaktan skup $P_{\beta_{\lambda,\vartheta_0}}$ i tačku ϑ_0 van njega postojali bi otvoreni skupovi U i V tako da je

$$U \cap V = \emptyset \wedge P_{\beta_{\lambda,\vartheta_0}} \subset U \wedge \vartheta_0 \in V.$$

Zbog poluneprekidnosti odozgo preslikavanja $\mathscr{b} \mapsto P_{\mathscr{b}}$, postoji $n_1 \geqslant n_0$ tako da je

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow P_{\beta_{\lambda,\vartheta_n}} \subset U.$$

Zbog $\vartheta_n \to \vartheta_0$, postoji $n_2 \geqslant n_1$ sa $\vartheta_n \in V$ za $n \geqslant n_2$. Prema ranijem je $\vartheta_n \in P_{\beta_{\lambda,\vartheta_n}}$ i za te indekse n, što je u suprotnosti sa disjunktnošću skupova U i V. Prema tome, $\vartheta_0 \in P_{\beta_{\lambda,\vartheta_0}}$. Odatle sledi da $\tilde{\lambda}(\vartheta_0) \geqslant \lambda$, a kako je $\lambda > 0$ bilo proizvoljno izabrano, dobijamo $\tilde{\lambda}(\vartheta_0) = +\infty$, što je suprotno pretpostavci da je broj $\tilde{\lambda}(\vartheta_0)$ konačan. Dakle, slučaj 1. ustvari ne može da nastupi.

<u>Slučaj 2.</u> Skup M je ograničen. Stavimo

$$(5.33) \qquad \lambda_0 := \sup M = \sup\{\tilde{\lambda}(\vartheta) \mid \vartheta \in P_{\mathscr{b}_1}\} \quad (< +\infty).$$

Tada postoji niz $(\vartheta_n) \subset P_{\mathscr{b}_1}$ takav da je

$$\lambda_n := \tilde{\lambda}(\vartheta_n) \to \lambda_0, \quad n \to \infty.$$

Niz (ϑ_n) sadržan je u kompaktnom skupu $P_{\mathscr{b}_1}$, te ima bar jednu tačku nagomilavanja koju ćemo označiti sa ϑ_0. Kao što smo već ranije u sličnoj situaciji konstatovali, možemo bez umanjenja opštosti pisati: $\vartheta_n \to \vartheta_0$ ($n \to \infty$). Osim toga, po definiciji broja λ_n, važi $\vartheta_n \in P_{\beta_{\lambda_n,\vartheta_n}}$. Lako se vidi da za svako $t \in T$ imamo

$$\beta_{\lambda_n,\vartheta_n}(t) = A(t,\vartheta_n) + \lambda_n[\mathscr{b}_1(t) - A(t,\vartheta_n)] \to$$

$$\to A(t,\vartheta_0) + \lambda_0[\mathscr{b}_1(t) - A(t,\vartheta_0)] = \beta_{\lambda_0,\vartheta_0}(t), \quad n \to \infty$$

odakle na osnovu leme 2. zaključujemo da $\beta_{\lambda_n,\vartheta_n} \to \beta_{\lambda_0,\vartheta_0}$ u metrici prostora $C(T)$. Da bismo dokazali da je $\vartheta_0 \in P_{\beta_{\lambda_0,\vartheta_0}}$ primenimo postupak analogan gornjem. Naime, iz $\vartheta_0 \notin P_{\beta_{\lambda_0,\vartheta_0}}$ sledila bi egzistencija disjunktnih otvorenih skupova

[12] D. Braess: Geometrical characterization for nonlinear uniform approximation; J. Approx. Theory 11 (1974), 26o-274

[13] W. Breckner: Zur Characterisierung von Minimallösungen; Mathematica (Cluj) 12 (35) (197o), 25-38

[14] W. Breckner, J. Kolumban: Théorèmes de caractérisation des éléments de la meilleure approximation; C. R. Acad. Sci. Paris 266 (1968), 2o6-2o8

[15] W. Breckner, J. Kolumban: Über die Characterisierung von Minimallösungen in linearen normierten Räumen; Mathematica (Cluj) lo (1968), 33-46

[16] B. Brosowski: Fixpunktsätze in der Approximationstheorie; Mathematica (Cluj) 11 (34) (1969), No. 2, 195-22o

[17] B. Brosowski: Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen; u knjizi: "Abstract Spaces and Approximation", Proc. Conf. Oberwolfach 1968, ISNM lo, Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart 1969, 14o-159

[18] B. Brosowski: Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation; Hochschulskripten 8o8/8o8a, Bibliographisches Institut, Mannheim 1968

[19] B. Brosowski: On parametric linear optimization; Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems; Vol. 157 (1978), 37-44

[2o] B. Brosowski: On paramatric linear optimizatin III: A necessary condition for lower semicontinuity; Meth. of Oper. Research 36 (198o), 21-3o

[21] B. Brosowski: On parametric linear optimization IV: Differentiable parameter functions; Preprint - 1979

[22] B. Brosowski: On the continuity of the optimum set in parametric linear programmimg; Preprint - 198o

[23] B. Brosowski: Parametrische Optimierung; Seminar održan u letnjem semestru školske 1979/8o godine na univerzitetu Johann Wolfgang Goethe u Frankfurtu na Majni

[24] B. Brosowski: Über eine Fixpunkteigenschaft der metrischen Projection; Computing 5 (197o), No. 3, 295-3o2

na sledeći način

(5.37) $$\Lambda(h):= g+\frac{r}{r+1}[g-A(\cdot,P_h)],\quad (h\in V).$$

Pritom je ovo preslikavanje dobro definisano jer iz (5.35) sledi $P_h\subset W$, pa je zbog (5.36): $\Lambda(h)\subset K_r$.

Dokažimo sada da je preslikavanje $h\mapsto\Lambda(h)$ poluneprekidno odozgo. Zbog afine strukture $\Lambda(h)$. očigledno je dovoljno pokazati poluneprekidnost odozgo preslikavanja $h\mapsto$ $\mapsto A(\cdot,P_h)$. Na osnovu leme 2., preslikavanje $x\mapsto A(\cdot,x)$ je neprekidno. Ako je U_1 otvorena okolina skupa $A(\cdot,P_h)$, onda postoji otvorena okolina U_2 skupa P_h , takva da je

$$y\in U_2 \Rightarrow A(\cdot,y)\in U_1.$$

Zbog pretpostavljene poluneprekidnosti odozgo preslikavanja $h\mapsto P_h$, postoji okolina U_3 tačke h , tako da je

$$z\in U_3 \Rightarrow P_z\subset U_2.$$

Prema tome, važi implikacija

$$z\in U_3 \Rightarrow A(\cdot,P_z)\subset U_1.$$

Posmatrajmo sada restrikciju preslikavanja Λ na skup $K_r\subset V$:

(5.38) $$\Lambda_0:=(\Lambda|K_r): K_r\to POT(K_r).$$

Ovo preslikavanje je takodje (kao restrikcija) poluneprekidno odozgo. Za svako $h\in K_r$, skup $\Lambda_0(h)$ je kompaktan i konveksan. Kako se to sve odigrava u Banahovom prostoru $C(T)$ (koji je shodno tome i lokalno konveksan i kvazikompletan), možemo primeniti teoremu Ky Fan-a na osnovu koje postoji $h\in K_r$ tako da je $h\in\Lambda_0(h)$. Preciznije, to znači da postoji $\vartheta_1\in P_h$ tako da je

(5.39) $$h=g+\frac{r}{r+1}[g-A(\cdot,\vartheta_1)],$$

odakle je

(5.4o) $$g=\frac{r+1}{2r+1}h+\frac{r}{2r+1}A(\cdot,\vartheta_1),$$

tj. g je konveksna kombinacija od h i $A(\cdot,\vartheta_1)$. Zbog

$$\frac{r+1}{2r+1}<1,\quad \vartheta_1\in P_h,$$

[37] L. N. H. Bunt: Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen; Thesis, Univ. Groningen, publ. Amsterdam 1934

[38] E. W. Cheney: Introduction to Approximation Theory; McGraw-Hill, New York 1966

[39] L. Collatz, W. Krabs: Approximationstheorie - Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen; B. G. Teubner, Stuttgart 1973

[40] N. Dunford, J. Schwartz: Linear Operators - I, Interscience, New York 1958

[41] C. Dunham: Chebyshev approximation by families with the betweenness property; Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 152-157

[42] C. B. Dunham: Chebyshev approximation with restricted ranges by families with the betweenness property; J. Approx. Theory 11 (1974), 254-259

[43] C. B. Dunham: Computation of transformed linear chebyshev approximations; J. Approx. Theory 24 (1978), 161-168

[44] C. B. Dunham: Transformed rational Chebyshev approximation; J. Approx. Theory 19 (1977), 200-204

[45] N. V. Efimov, S. B. Stečkin: Nekotorye svojstva čebyševskih množestv; Dokl. AN SSSR 118 (1958), No. 1, 17-19

[46] N. V. Efimov, S. B. Stečkin: Čebyševskie množestva v banahovyh prostranstvah; Dokl. AN SSSR 121 (1958), No. 4, 582-585

[47] N. V. Efimov, S. B. Stečkin: Opornye svojstva množestv v banahovyh prostranstvah i čebyševskie množestva; Dokl. AN SSSR 127 (1959), No. 2, 254-257

[48] N. V. Efimov, S. B. Stečkin: Čebyševskie množestva v banahovyh prostranstvah; Abstracts of Short Communications, Internat. Congr. Math. Stockholm 1962, str. 71

[49] S. Ellacott, J. Williams: Linear Chebyshev approximation in the complex plane using Lawson's algorithm; Math. Comp. 30 (1976), 35-44

Dokažimo sada da $\bar{\vartheta} \in P_h$. Ako to dokažemo, imaćemo

$$\tilde{\lambda}(\bar{\vartheta}) \geqslant \bar{\lambda} > \lambda_0$$

što je u suprotnosti sa definicijom broja λ_0.

Pre svega, važi $Z_g \subset Z_h$. Naime, ako je $x \in Z_g$, onda za svako $t \in T$ važi $A(t,x) \leqslant g(t)$. Kako je $\vartheta_1 \in P_h$ imamo i $A(t,\vartheta_1) \leqslant h(t)$ za svako $t \in T$. Prema (5.40) je sada

$$A(t,x) \leqslant g(t) = \frac{r+1}{2r+1} h(t) + \frac{r}{2r+1} A(t,\vartheta_1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r+1}{2r+1} h(t) + \frac{r}{2r+1} h(t) = h(t),$$

pa je $x \in P_h$. Kako je $\bar{\vartheta} \in P_g \subset Z_g \subset Z_h$; $\vartheta_0, \vartheta_1, \bar{\vartheta} \in P_g$ i $\vartheta_1 \in P_h$, to je

$$p(\vartheta_0) = p(\vartheta_1) = p(\bar{\vartheta}) = \min_{x \in Z_g} p(x) = \min_{x \in Z_h} p(x).$$

Prema tome, važi: $\bar{\vartheta} \in P_h$.

Ostaje još da razmotrimo trivijalan slučaj kada je $\vartheta_0 = \vartheta_1$. Iz (5.39) i (5.41) dobijamo

$$h = A(\cdot\,,\vartheta_0) + \frac{2r+1}{r+1} \cdot \lambda_0 [b_1 - A(\cdot\,,\vartheta_0)], \tag{5.48}$$

pri čemu je, što je najvažnije,

$$\frac{2r+1}{r+1} \cdot \lambda_0 > \lambda_0 .$$

Kako je $\vartheta_0 = \vartheta_1 \in P_h$, imamo

$$\tilde{\lambda}(\vartheta_0) \geqslant \frac{2r+1}{r+1} \cdot \lambda_0 > \lambda_0 ,$$

opet u suprotnosti sa (5.33). Dakle, ni slučaj 2. ne može da nastupi, tako da se pretpostavka da tvrdjenje stava ne važi mora odbaciti.

Analizom mesta u dokazu stava 8. može se lako videti da se zahtev za poluneprekidnošću odozgo preslikavanja $b \mapsto P_b$ može zameniti zahtevom da to višeznačno preslikavanje bude poluneprekidno odozdo. Umesto teoreme Ky Fan-a o nepokretnoj tački, ovde se koristi sledeća teorema o nepokretnoj tački (u obliku u kome je formulisao Brosowski u [16]):

<u>TEOREMA.</u> Neka je X Banahov prostor i V njegov neprazan kompaktan konveksan podskup. Neka je dalje dato višeznačno

Mat. vesnik 3 (16) (31) (1979), No. 3, 279-286

[64] L. W. Johnson: Uniform-approximation of vector-valued functions; Num. Math. 13 (1969), 238-244

[65] A. S. Kac: O nailučšem približenii elementa banahova prostranstva po sisteme polunorm; Mat. zametki 26 (1979), No. 3, 377-388

[66] V. L. Klee: A characterization of convex sets; Amer. Math. Monthly 56 (1949), 247-249

[67] V. L. Klee: Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert spaces; Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 1o-43

[68] V. L. Klee: Convexity of Chebyshev sets; Math. Annalen 142 (1961), No. 3, 292-3o4

[69] V. L. Klee: Remarks on nearest points in normed linear spaces; Proc. Colloq. on Convexity, Copenhagen 1965, 168-176

[7o] A. N. Kolmogorov: Zamečanija po povodu mnogočlenov P. L. Čebyševa, naimenee uklonjajuščihsja ot zadannoj funkcii; Usp. mat. nauk 3 (1948), No. 1, 216-221

[71] G. Köthe: Topological vector spaces - I; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1969

[72] W. Krabs: Ein Pseudo-Gradientenverfahren zur Lösung des diskreten linearen Tschebyscheff-Problems; Computing 4 (1969), 216-224

[73] W. Krabs: Optimization and Approximation; John Wiley & Sons, New York 1979

[74] W. Krabs, G. Opfer: Eine Methode zur Lösung des komplexen Approximationsproblems mit einer Anwendung auf konforme Abbildungen; ZAMM 55 (1975), T2o8-T211

[75] A. J. Lazar, D. E. Wulbert, P. D. Morris: Continuous selections for metric projections; J. Functional Analysis 3 (1969), 193-216

[76] O. A. Liskovec: Metod ε-kvazirešenij dlja uravnenij 1-go roda; Diff. uravn. IX (1973), No. 1o, 1851-1861

[77] P. -Ž. Loran: Approksimacija i optimizacija; Mir,

Ako je $b \in \mathcal{L}_{A,p}$, može se dokazati da je $\mathcal{E}_b \neq \emptyset$. Neka je, dalje,

$$\mathcal{N}_b := \bigcap_{v \in P_b} \{t \in T \mid \langle A(t), v - v_0 \rangle = 0\},$$

gde je $v_0 \in P_b$ proizvoljno izabrano. Pokazuje se da $\mathcal{N}_b$ ne zavisi od izabranog $v_0 \in P_b$. Relativno jednostavno dobijaju se relacije

$$\mathcal{E}_b \subset \mathcal{N}_b,$$

$$v_0 \in ri(P_b) \Rightarrow \mathcal{E}_b = M_{b, v_0},$$

gde $ri(P_b)$ označava relativnu unutrašnjost konveksnog skupa P_b (v. Rockafellar [93])

Kao rezime radova Brosowskog [2o], [21], [22], [27] navodimo sledeće rezultate.

STAV 1o. Neka je višeznačno preslikavanje

$$\mathcal{L}_{A,p} \ni b \mapsto P_b \in POT(\mathbb{R}^n)$$

poluneprekidno odozgo. Ako postoji otvoren skup $W \subset T$ tako da je

$$\mathcal{N}_{b_0} \supset W \supset \mathcal{E}_{b_0}$$

i ako je skup P_{b_0} kompaktan, onda je preslikavanje

$$b \mapsto P_b$$

poluneprekidno odozdo u tački b_0.

STAV 11. Neka je $B \subset \mathcal{L}_{A,p}$ skup koji ima sledeće svojstvo:

$$b_0 \in B \wedge P_{b_0} \supset P_b \Rightarrow b \in B.$$

Ako je uz to preslikavanje

$$P : B \to POT(\mathbb{R}^m)$$

poluneprekidno odozdo, onda je za svako $b \in B$ skup $\mathcal{N}_b$ otvoreno-zatvoren.

Da li iskaz sličan stavu 1o. važi za čitav skup dopustivih tačaka, nije poznato. Postavlja se, naime, sledeće

[90] R. R. Phelps: Extreme points of polar convex sets; Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 291-296

[91] F. Poleunis, H. van de Vel: Characterizability of best approximations by means of a Kolmogorov criterion; J. Approx. Theory 22 (1978), 177-188

[92] T. J. Rivlin, H. S. Shapiro: A unified approach to certain problems of approximation and optimization; J. Soc. Industr. Appl. Math. 9 (1961), 670-699

[93] R. T. Rockafellar: Convex analysis; Princeton Univ. Press 1970

[94] P. Schwartz: Characterization and Uniqueness of Best Uniform Vector-Valued Linear Approximation; J. Approx. Theory 14 (1975), 218-224

[95] F. Sibirani: Su la rappresentazione approssimata di una funzione continua di variabile reale o complessa per combinazioni lineari di assegnate funzioni; Rend. Circ. mat. Palermo 34 (1912), 132-157

[96] I. Singer: Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970

[97] I. Singer: Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque; Acta Sci. Math. Szeged 17 (1956), 181-189

[98] I. Singer: Choquet spaces and best approximation; Math. Ann. 148 (1962), 330-340

[99] I. Singer: On set-valued metric projection; u knjizi: "Linear Operators and Approximation", ISNM 20 (1972), 217-233

[100] I. Singer: On the set of the best approximations of an element in a normed linear space; Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 5 (1960), 383-402

[101] I. Singer: Some remarks on approximative compactness; Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 9 (1964), 167-177

[102] I. Singer: The theory of best approximation and functional analysis; Regional Conference in Applied Mathematics,

G L A V A Š E S T A

PRIMER PRIMENE LINEARNE PARAMETARSKE OPTIMIZACIJE - APROKSIMACIJA FUNKCIJE GUSTINE RASPODELE VEROVATNOĆE

U ovoj glavi, sa izvesnim adaptacijama, iznosi se autorov rad [61].

U vezi sa problemom generisanja slučajnih promenljivih sabiranjem transliranih funkcija gustina raspodele verovatnoće sa uniformnom raspodelom na intervalu $[0,1]$, Marsaglia ([78]) posmatrao je sledeći problem:

Zadata je jednodimenziona funkcija $g(t)$ gustine raspodele verovatnoće čije su vrednosti dobijene bilo eksperimentalnim putem, bilo ih je iz drugih razloga teško izračunati. Osim toga, dato je n funkcija $f_\nu(t)$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ gustine raspodele čijim linearnim kombinacijama (sa nenegativnim koeficijentima) želimo da aproksimiramo funkciju $g(t)$. Formalno, problem se može postaviti na sledeći način:

maksimizirati:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \tag{6.1}$$

pri ograničenjima

$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\ldots,x_n\geq 0; \tag{6.2}$$

$$(\forall t\in\mathbb{R})(x_1f_1(t)+x_2f_2(t)+\ldots+x_nf_n(t)\leq g(t)). \tag{6.3}$$

Odredjivanje odgovarajuće funkcije raspodele zahteva da površina izmedju grafika funkcija $t\mapsto g(t)$ i $t\mapsto x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)$ bude minimalna. To se svodi na problem L_1-aproksimacije jer treba da se minimizira funkcional

$$(x_1,\ldots,x_n)\overset{\varphi}{\longmapsto}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[g(t)-\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu f_\nu(t)\Big]dt \tag{6.4}$$

uz ograničenja (6.2) i (6.3). No, zbog

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)dt=1\ ;\quad 1\leq\nu\leq n\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}f_\nu(t)dt=1,$$

funkcional φ svodi se na

linear spaces; J. Approx. Theory 21 (1977), 3o3-313

[118] D. Wulbert: Continuity of metric projection; Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), 335-341

[119] D. Wulbert: Continuity of metric projections - approximation theory in a normed linear lattice; Ph. D. dissertation, Univ. of Texas, Austin 1966

[12o] L. Wuytack: Kolmogoroff's criterion for constrained rational approximation; J. Approx. Theory 4 (1971), 12o-136

c) <u>optimalnu vrednost</u>:

(6.11) $$E_t := \inf_{x \in Z_t} p(x).$$

Ovde se javljaju dva višeznačna preslikavanja

$$Z: T \to \mathrm{POT}(\mathbb{R}^n) \ ; \ P: T \to \mathrm{POT}(\mathbb{R}^n).$$

Pošto ćemo posmatrati razne tipove neprekidnosti ovih višeznačnih preslikavanja, dajemo prvo sledeće definicije.

<u>DEFINICIJA 1.</u> Neka je (X, d) metrički prostor, $\mathcal{F}_b(X)$ klasa svih nepraznih zatvorenih ograničenih podskupova metričkog prostora X. Za $A, B \in \mathcal{F}_b(X)$ preslikavanje $h: [\mathcal{F}_b(X)]^2 \to [0, +\infty[$ definisano sa

$$h(A,B) := \max\{\sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{y \in B} d(y,A)\}$$

zove se <u>Hausdorff-ova metrika</u> ili, kraće, <u>H-metrika</u>.

<u>DEFINICIJA 2.</u> Neka je $t_0 \in T$ i $F: T \to \mathcal{F}_b(X)$ proizvoljno višeznačno preslikavanje. Kažemo da je F <u>Hausdorff-neprekidno</u> (<u>H-neprekidno</u>) <u>u tački</u> t_0 ako je F u tački t_0 neprekidno kao preslikavanje metričkog prostora T u metrički prostor $(\mathcal{F}_b(X), h)$. F je <u>H-neprekidno na</u> T ako je H-neprekidno u svakoj tački prostora T.

Višeznačna preslikavanja $t \mapsto Z_t$ i $t \mapsto P_t$, kao i realna funkcija $t \mapsto E_t$ imaju, izmedju ostalog, i sledeća svojstva koja ćemo u daljem koristiti:

<u>STAV 1.</u> (Brosowski ([19]))

1° Ako je preslikavanje $t \mapsto Z_t$ H-neprekidno, onda je preslikavanje $t \mapsto E_t$ neprekidno.

2° Ako je preslikavanje $t \mapsto Z_t$ H-neprekidno, onda je preslikavanje $t \mapsto P_t$ poluneprekidno odozgo.

3° Neka je skup Z_t kompaktan za svako $t \in T$ i neka je $\operatorname{int} Z_{t_0} \neq \emptyset$. Tada je preslikavanje $t \to P_t$ poluneprekidno odozgo u tački t_0, a realna funkcija $t \mapsto E_t$ neprekidna u t_0.

Od posebnog je interesa da se ispita kada je preslikavanje $t \mapsto P_t$ poluneprekidno odozdo, jer ta osobina, zajedno sa zatvorenošću skupa P_t (jasno je da je $P_t \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i konveksan skup) garantuje egzistenciju <u>neprekidne selekcije</u>,

skup tačaka $\tau_\mu \in \mathbb{R}$ ($\mu \in I_k$), tako da je $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k$ pa umesto (6.1)-(6.3) posmatramo problem:

maksimizirati

(6.1) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

uz ograničenja

(6.2) $$x_1 \geqslant 0\ ,\ x_2 \geqslant 0, \ldots , x_n \geqslant 0;$$

(6.3') $$(\forall \mu \in I_k)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\tau_\mu) x_\nu \leqslant g(\tau_\mu)\Big).$$

U skladu sa oznakama iz (6.7) i (6.8) treba staviti $m = k + n$ i

(6.13) $$p(x) := -x_1 - x_2 - \cdots - x_n;$$

(6.14) $$a_{\mu\nu} := \begin{cases} f_\nu(\tau_\mu); & \mu \in I_k, \nu \in I_n \\ -\delta_{k+\nu,\nu}; & \mu = k+\nu \in I_m \setminus I_k, \nu \in I_n; \end{cases}$$

(6.15) $$b_\mu := \begin{cases} g(\tau_\mu); & \mu \in I_k \\ 0 & ; \mu \in I_m \setminus I_k; \end{cases}$$

gde je $\delta_{k+\nu,\nu}$ - Kronekerova delta. Ovakav problem može se rešavati metodama linearnog programiranja, čime se ovde nećemo baviti.

Pogledajmo šta biva sa stabilnošću rešenja ovakvog problema u slučaju da dopustimo odredjenu relativnu grešku poznavanja veličine $g(\tau_\mu)$ kao i ako pravilno "variramo" mrežu tačaka preko kojih je izvršena diskretizacija polaznog problema. Zato posmatrajmo izmenjene uslove (6.14) i (6.15) u sledećem obliku

(6.16) $$a_{\mu\nu}(t,\eta) := \begin{cases} f_\nu(\varphi_\mu(t)\tau_\mu); & \mu \in I_k, \nu \in I_n \\ -\delta_{k+\nu,\nu} & ; \mu = k+\nu \in I_m \setminus I_k, \nu \in I_n; \end{cases}$$
$$b_\mu(t,\eta) := \begin{cases} (1+\eta)\, g(\varphi_\mu(t)\tau_\mu) & ; \mu \in I_k \\ 0 & ; \mu \in I_m \setminus I_k \end{cases}$$

pri čemu su za $\mu \in I_k$ funkcije $\varphi_\mu : [-1,1] \to \mathbb{R}$ neprekidne i zadovoljavaju uslov $\varphi_\mu(0) = 1$, dok je relativna greška η sadržana u nekom intervalu $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ sa $\varepsilon_0 < 1$. Smisao uvodjenja funkcija $\varphi_\mu(t)$ je u tome da se odstupanjem parametra t od 0 može podesiti da se mreža tačaka npr. homotetično "širi" ili "skuplja" ili se menja po nekom drugom pravilnom zakonu, npr. sa

$$(6.20)\quad P_{(0,\eta)}=\{x_0\in Z_{(0,\eta)} \mid p(x_0)=\inf_{x\in Z_{(0,\eta)}} p(x)=:E_{(0,\eta)}\}.$$

Zavisnost skupa rešenja od relativne greške η data je sledećim stavom.

STAV 4. Višeznačno preslikavanje $\eta\mapsto P_{(0,\eta)}$ je polunеprekidno odozdo u tački $\eta=0$.

Dokaz. Ovde možemo primeniti posledicu stava 2. za slučaj konstantnih koeficijenata na levoj strani nejednakosti--ograničenja. Skup $Z_{(0,\eta)}$ je očigledno kompaktan za svako η . Kako je funkcija $\eta\mapsto b_\mu(0,\eta)$ neprekidna, ispunjeni su svi uslovi za važenje ove posledice.

Napomena. Ovde se nije tražila neprekidnost gustina $g(t)$ i $f_\nu(t)$ što je i prirodno, jer je problem u potpunosti sveden na diskretan slučaj.

Posmatrajmo sada još jednu varijantu istog problema. Naime, dopustimo mogućnost da i argument funkcije $t\mapsto g(t)$ ima neku grešku u odnosu na unapred zadate čvorove (τ_μ) . Tačnije, posmatrajmo sledeći problem parametarske linearne optimizacije:

minimizirati

$$(6.21)\quad p(x):=-x_1-x_2-\dots-x_n$$

uz ograničenja

$$(6.22)\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0$$

$$(6.23)\quad (\forall\mu\in I_k)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\tau_\mu)x_\nu\leqslant(1+\eta)g(\tau_\mu+\alpha_\mu t)\Big)$$

gde su α_μ unapred zadate konstante koje treba da utiču na meru odstupanja argumenta $\tau_\mu+\alpha_\mu t$ od τ_μ pri uslovu $t\in[-1,1]$. Ovde, za razliku od (6.17) i (6.18) u odgovarajućim oznakama upotrebimo tildu.

$$(6.24)\quad \tilde Z_{(t,\eta)}=\{x\in\mathbb{R}^n_+ \mid (\forall\mu\in I_k)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\tau_\mu)x_\nu\leqslant(1+\eta)g(\tau_\mu+\alpha_\mu t)\Big)\},$$

$$(6.25)\quad \tilde P_{(t,\eta)}=\{x_0\in\tilde Z_{(t,\eta)} \mid p(x_0)=\inf_{x\in\tilde Z_{(t,\eta)}} p(x)=:\tilde E_{(t,\eta)}\}.$$

Primetimo da ovde koeficijenti na levoj strani u (6.23) ne zavise od parametra (t,η) . Za ovaj slučaj imamo stav 5:

L I T E R A T U R A

[1] G. Albinus: Approximation in metric linear spaces; Banach Center Publications, Volume 4, PWN, Warszawa 1979, 7-18

[2] D. Amir, F. Deutsch: Suns, moons, and quasi-polyhedra; J. Approx. Theory 6 (1972), No. 2, 176-2o1

[3] V. I. Berdyšev: Nepreryvnaja zavisimost elementa, realizujuščego minimum vypuklogo funkcionala, ot množestva dopustimyh elementov; Mat. zametki 19 (1976), No. 4, 5o1-512

[4] V. I. Berdyšev: Nepreryvnost mnogoznačnogo otobraženija, svjazannogo s zadačej minimizacii funkcionala; Izv. AN SSSR, Ser. matem. 44 (198o), No. 3, 483-5o9

[5] V. I. Berdyšev: On the uniform continuity of metric projection; Banach Center Publications, Volume 4, PWN, Warszawa 1979, 35-41

[6] V. I. Berdyšev: On the uniform continuity of the operator of best approximation; Proc. Conf. Poznań 1972, Warszawa 1975, 21-32

[7] V. I. Berdyšev: Ravnomernaja nepreryvnost metričeskoj proekcii i ϑ-proekcii; u knjizi: "Teorija približenija funkcij", Trudy Meždunarodn. konf. po teorii približenija funkcij - Kaluga 1975, "Nauka", Moskva 1977, 37-41

[8] V. I. Berdyšev: Ustojčivost zadači minimizacii pri vozmuščenii množestva dopustimyh elementov; Mat. sbornik 1o3 (145) (1977), No. 4 (8), 467-479

[9] H. -P. Blatt: Nicht-lineare gleichmässige Simultanapproximation; J. Approx. Theory 8 (1973), 21o-248

[1o] J. Blatter, P. D. Morris, D. E. Wulbert: Continuity of the set-valued metric projection; Math. Ann. 178 (1968), No. 1, 12-24

[11] G. Bol: Eine Bemerkung zur B. Brosowski "Zur parametrischen Optimierung", Preprint des Instituts für Statistik und math. Wirtschaftstheorie an der Universität Karlsruhe, Januar 1978

[25] B. Brosowski: Zur Characterisierung von Minimallösungen in Raume C(Q,H); Bul. instit. politehnic din Iaşi, sec. I, Tomul XV (XIX), No. 1-2, (1969), 31-34

[26] B. Brosowski: Zur nicht-linearen Tschebyscheff-Approximation an Funktionen mit Werten in einem unitären Raum; Mathematica (Cluj) 11 (34) (1969), No. 1, 53-6o

[27] B. Brosowski: Zur parametrischen linearen Optimierung II: Eine hinreichende Bedingung für die Unterhalbstetigkeit; Preprint - 1979

[28] B. Brosowski: Zur rationalen L_p-Approximatio; ZAMM 48 (1968), T57-T58

[29] B. Brosowski, F. Deutsch: Radial continuity of set--valued metric projections; J. Approx. Theory 11 (1974), No. 3, 236-253

[3o] B. Brosowski, K. -H. Hoffmann: Eine Variationsungleichung und Anwendungen; Numer. Math. 22 (1974), 137-147

[31] B. Brosowski, K. Schnatz: Parametrische Optimierung - Differenzierbare Parameterfunktionen; Preprint - 1979

[32] B. Brosowski, R. Wegmann: Characterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen; J. Approx. Theory 3 (197o), No. 4, 369-397

[33] B. Brosowski, R. Wegmann: Der Durchschnittssatz für Extremalsignaturen und einige Folgerungen; Proc. Intern. Conf. on Constructive Function Theory, Varna 197o, 133-135

[34] B. Brosowski, R. Wegmann: On the lower semicontinuity of the set-valued metric projection; J. Approx. Theory 8 (1973), No. 1, 84-1oo

[35] B. Brosowski, L. Wuytack: Characterization of minimal elements in minimization problems with constraints; J. Optim. Theory and Appl. 24 (1978), No. 4, 549-567

[36] R. C. Buck: Applications of duality in approximation theory; u knjizi: "Approximation of Functions" (Henry L. Garabedian - editor), Elsevier Publ. Co., Amsterdam 1965, 27-42

[50] S. Ellacott, J. Williams: Rational Chebyshev approximation in the complex plane; SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 310-323

[51] G. Faber: Über Tschebyscheffsche Polynome; J. Reine und Angew. Math. 150 (1920), 79-106

[52] K. Fan: Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces; Proc. Nat. Acad. Sci. 38 (1952), 121-126

[53] A. L. Garkavi: Teorija najlučšego približenija v linejnyh normirovannyh prostranstvah; u knjizi: "Matematičeskij analiz - 1967", Itogi nauki, VINITI AN SSSR, Moskva 1969, 75-132

[54] A. L. Garkavi: O kriterii elementa najlučšego približenija; Sib. mat. žurn. 5 (1964), No. 2, 472-476

[55] K. R. Gehner: Characterization theorems for constrained approximation problems via optimization theory; J. Approx. Theory 14 (1975), 51-76

[56] H. Hahn: Reelle Funktionen - I; Chelsea Publ. Comp., New York 1948

[57] S. Ja. Havinson: Ob approksimacii elementami vypuklih množestv; Dokl. AN SSSR 172 (1967), No. 2, 294-297

[58] W. W. Hogan: Point-to-set maps in mathematical programming; SIAM Review 15 (1973), No. 3, 591-603

[59] R. B. Holmes: Geometrical Functional Analysis; Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1975

[60] S. -T. Hu: Theory of retracts; Wayne State University Press, Detroit 1966

[61] M. Janc: Aproksimacija funkcije gustine raspodele verovatnoće metodom diskretizacije kao problem parametarske optimizacije; Mat. vesnik 4 (17) (32) (1980), No. 3, 267-276

[62] M. Janc: O jednom dovoljnom uslovu za dobru aproksimaciju u nekim prostorima neprekidnih funkcija; Mat. vesnik 4 (17) (32) (1980), No. 4

[63] M. Janc: O karakterizaciji elemenata ε-aproksimacije;

Moskva 1975 (prevod sa francuskog)

[78] G. Marsaglia: One-sided approximations by linear combinations of functions; u knjizi: "Approximation Theory" (editor: A. Talbot), New York-London 197o, 233-242

[79] G. Meinardus: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1964

[8o] G. Meinardus, D. Schwedt: Nichtlineare Approximation; Arch. Rational Mech. Anal 17 (1964), 297-326

[81] E. Michael: Selected selections theorems; Amer. Math. Monthly 63 (1956), 233-238

[82] E. Michael: Topologies on spaces of subsets; Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182

[83] T. S. Motzkin: Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes; Rend. Accad. Nac. Lincei 21 (1935), 562-567

[84] T. S. Motzkin: Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes; Rend. Accad. Nac. Lincei 21 (1935), 773-779

[85] C. Mustăţă: On the best approximation in metric spaces; Mathematica - Revue d'analyse numer. et de theor. de lápprox. 4 (1975), No. 1, 45-5o

[86] V. N. Nikoljskij: Rasprostranenie teoremy A. N. Kolmogorova na banahovy prostranstva; u zborniku: Issled. po sovr. probl. konstr. teor. funkcij, Fizmatgiz, Moskva 1961, 335-337

[87] V. N. Nikoljskij: Nailučšee približenie elementami vypuklih množestv v linejnyh normirovannyh prostranstvah; Uč. zap. Kalininsk. ped. in-ta 29 (1963), 85-119

[88] E. V. Ošman: Nepreryvnost metričeskoj proekcii i nekotorye geometričeskie svojstva ediničnoj sfery v prostranstve Banaha; Dokl. AN SSSR 185 (1969), No. 1, 34-36

[89] E. V. Ošman: Čebyševskie množestva, nepreryvnost metričeskoj proekcii i nekotorye geometričeskie svojstva ediničnoj sfery v prostranstve Banaha; Izv. vuzov Matematika 4 (1969) 38-46

Vol. 13, SIAM, Philadelphia 1974

[1o3] G. D. Taylor: Approximation by functions having restricted ranges, III; SIAM J. Math. Anal. 27 (1969), 241-248

[1o4] G. D. Taylor: On minimal H-sets; J. Approx. Theory 5 (1972), 113-117

[1o5] G. D. Taylor: Uniform approximation with side conditions; J. Approx. Theory 7 (1973), 495-5o3

[1o6] F. A. Valentine: Convex sets; McGraw-Hill, New York--San Francisco-Toronto-London 1964

[1o7] L. P. Vlasov: Approksimativno vypuklye množestva v banahovyh prostranstvah; Dokl. AN SSSR 163 (1965), No. 1, 18--21

[1o8] L. P. Vlasov: Approksimativnye svojstva množestv v banahovyh prostranstvah; Mat. zametki 7 (197o), No. 5, 593--6o4

[1o9] L. P. Vlasov: Approksimativnye svojstva množestv v linejnyh normirovannyh prostranstvah; Usp. mat. nauk XXVIII (1973), vypusk 6 (174), 3-66

[11o] L. P. Vlasov: Čebyševskie množestva i nekotorye ih obobščenija; Mat. zametki 3 (1968), No. 1, 59-69

[111] L. P. Vlasov: Neskoljko teorem o čebyševskih množestvah; Mat. zametki 11 (1972), No. 2, 135-144

[112] L. P. Vlasov: O čebyševskih i approksimativno vypuklih množestvah; Mat. zametki 2 (1967), No. 2, 191-2oo

[113] L. P. Vlasov: O čebyšovskih množestvah; Dokl. AN SSSR 173 (1967), No. 3, 491-494

[114] L. P. Vlasov: O čebyševskih množestvah v banahovyh prostranstvah; Dokl. AN SSSR 141 (1961), No. 1, 19-2o

[115] L. P. Vlasov: Počti vypuklye i čebyševskie množestva; Mat. zametki 8 (197o), No. 5, 545-55o

[116] L. P. Vlasov: "Solnečnye" svojstva množestv v banahovyh prostranstvah; Mat. zametki 13 (1973), No. 6, 795-8o5

[117] W. Warth: Approximation with constraints in normed

S A D R Ž A J