U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U
P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I   F A K U L T E T

Miodrag Ž. IVOVIĆ

O L-NORMAMA TRIGONOMETRIJSKIH POLINOMA I NJIHOVOJ PRIMENI NA FINITNE POSTUPKE ZBIRLJIVOSTI FURIJEOVIH REDOVA

(doktorska disertacija)

B E O G R A D, 1976.

Glava prva

1.1. TRIGONOMETRIJSKI I FURIJEOVI REDOVI

Teorija trigonometrijskih redova, može se reći, potiče još od Ojlera (1707-1783), jer je on 1753. godine prvi postavio pitanje mogućnosti predstavljanja date funkcije $f(x)$ pomoću trigonometrijskog reda. Kao ideja, za ovo mu je poslužio rad D. Bernolija (1700-1782): „O žici koja treperi".

Trigonometrijskim redom nazivamo izraz

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1.1}$$

gde su realni brojevi a_0, a_k i b_k $(k=1,2,\ldots)$ koeficijenti reda (1.1).

Za datu funkciju $f(x)$ postupak izračunavanja koeficijenata a_0, a_k i b_k reda (1.1) prvi je kompletno dao Ž. Furije (1772-1837) i u njegovu čast cela ova teorija se naziva teorijom Furijeovih redova.

Preciznije rečeno: Neka je $f(x)$ integrabilna periodička funkcija, periode 2π. Tada trigonometrijski red oblika (1.1) nazivamo Furijeovim redom funkcije $f(x)$ i označavamo ga pomoću

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1.2}$$

ako su koeficijenti a_0, a_k i b_k $(k=1,2,\ldots)$ određeni Furijeovim formulama

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

(1.3) $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k=1,2,\ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k=1,2,\ldots .$$

Jedno od osnovnih pitanja u teoriji Furijeovih redova je konvergencija reda (1.2) ka funkciji $f(x)$, tj. konvergencija ka funkciji iz koje je on formulama (1.3) dobijen.

Označimo pomoću

(1.4) $$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

niz delimičnih suma Furijeovog reda (1.2).

Ispitivanje konvergencije reda (1.2) praktično se svodi na ispitivanje konvergencije niza delimičnih suma $S_n(f;x)$ ka funkciji $f(x)$.

Poznato je da za proizvoljnu tačku $x_0 \in [-\pi,\pi]$ postoji takva neprekidna funkcija $f(x)$ da njen Furijeov red (1.2) ne konvergira u tački x_0. Ako, pak, u nekoj tački $x_0 \in [-\pi,\pi]$ Furijeov red (1.2) neprekidne funkcije $f(x)$ konvergira, onda on konvergira ka $f(x_0)$.

Činjenica da Furijeov red neke neprekidne funkcije $f(x)$ ne mora konvergirati dovela je do ideje da se stvore takvi postupci zbirljivosti koji Furijeov red funkcije $f(x)$ transformišu u red koji će konvergirati u svakoj tački neprekidnosti, kao i u tačkama prekida prve vrste.

Prvi rezultat ovoga tipa potiče od Fejera. On je pokazao da je Furijeov red (1.2) neprekidne periodičke funkcije, perioda 2π, (C,1)- zbirljiv ka funkciji $f(x)$ za svako $x \in [-\pi,\pi]$, tj. da niz aritmetičkih sredina od $S_n(f;x)$

(1.5) $$\sigma_n(x) = \sigma_n(f;x) = \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

konvergira ka funkciji $f(x)$ u svakoj tački neprekidnosti, kao i u tačkama prekida prve vrste*. Formalno posmatrajući, (C,1)-postupak zbirljivosti $\delta_n(f;x)$ dobija se iz Furijeovog reda funkcije $f(x)$ kada se članovi ovog reda množe dvostrukim nizom

$$\lambda_k^n = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n+1}, & k=o,1,\dots,n \\ o, & k=n+1,n+2,\dots \end{cases} \qquad (n=1,2,\dots)$$

Sama po sebi nametnula se ideja da se, sem ovog posebnog, posmatraju i opšti dvostruki nizovi λ_k^n (matrice) koji bi dovodili do postupaka zbirljivosti sličnih osobina.

1.2. PERMANENTNI I F-PERMANENTNI POSTUPCI ZBIRLJIVOSTI

Neka je dat red

$$\sum_{k=o}^{\infty} u_k \tag{1.7}$$

i matrica realnih brojeva $\{\lambda_k^n\}$, $(k,n=1,2,\dots)$.

Ako pomoću matrice $\{\lambda_k^n\}$ red (1.7) transformišemo u niz redova

$$S_n = \sum_{k=o}^{\infty} \lambda_k^n u_k \quad (n=1,2,\dots), \tag{1.8}$$

tada on, ukoliko postoji $\lim_{n\to\infty} s_n$, predstavlja prošireni λ-zbir reda (1.7). Ovaj metod zbirljivosti definisan pomoću (1.8) ubuduće ćemo nazivati λ-postupak zbirljivosti reda (1.7).

Za λ-postupak zbirljivosti kaže se da je finitan ako svaki red formiran pomoću matrice $\{\lambda_k^n\}$ ima samo konačno mnogo članova, tj. ako je

$$\lambda_k^n = o \quad \text{za svako} \quad k \geqslant N(n).$$

U protivnom, λ-postupak je infinitan.

---

* Ako je x_o tačka prekida prve vrste, tada on konvergira ka $\frac{1}{2}\left[f(x_o+o) + f(x_o-o)\right]$.

Za λ-postupak zbirljivosti kaže se da je permanentan ako je svaki konvergentan red (1.7) istovremeno i λ-zbirljiv istoj sumi, tj. ako redovi

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^n u_k$$

imaju iste sume.

Potrebne i dovoljne uslove za permanentnost jednog λ-postupka dali su Teplic-Šur [7]. Oni su dokazali da su uslovi

$$(1.9) \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_k^n = 1 \quad \text{za svako } k=0,1,2,\dots$$

i

$$(1.10) \qquad \sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k^n-\lambda_{k+1}^n| = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } n=1,2,\dots$$

potrebni i dovoljni da bi λ-postupak bio permanentan.

Iz uslova (1.10) sledi da postoji $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k^n$, pri čemu on može biti nula ili broj različit od nule. Ako je

$$(1.11) \qquad \lim_{k\to\infty}\lambda_k^n = \lambda^n \neq 0,$$

tada izraz (1.8) nema smisla kadgod red (1.7) divergira. Znači, kada su ispunjeni uslovi (1.9), (1.10) i (1.11), tada taj λ-postupak može sabirati samo konvergentne redove i ne može se proširiti na divergentne redove. Dakle, da bi pomenuti λ-postupak eventualno sabirao i divergentne redove, potrebno je da

$$(1.12) \qquad \lim_{k\to\infty}\lambda_k^n = 0.$$

Primenićemo sada λ-postupak zbirljivosti na Furijeove redove ne pretpostavljajući a priori ništa o matrici $\{\lambda_k^n\}$.

Neka je $f(x)$ L-integrabilna periodička funkcija, periode 2π , i neka je

$$(1.13) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

njen Furijeov red.

Matricom $\{\lambda_k^n\}$ (k,n=1,2,...) realnih brojeva može se Furijeovom redu (1.13) formalno pridružiti niz

$$(1.14)\qquad U_n(f;x) = \frac{a_0\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n(a_k\cos kx + b_k\sin kx),\ (n=1,2,\dots).$$

Ako u nekoj tački x postoji $U_n(f;x)$ za svako n i ako postiji $\lim_{n\to\infty} U_n(f;x)$, tada kažemo da λ-postupak sabira Furijeov red funkcije $f(x)$ u toj tački.

Za λ-postupak kažemo da je F-permanentan* ako sabira Furijeov red funkcije $f(x)$ u svim tačkama u kojima je ona neprekidna ili ima prekide prve vrste i pri tome je

$$(1.15)\qquad \lim_{n\to\infty} U_n(f;x) = f(x)$$

u tačkama neprekidnosti, a

$$(1.16)\qquad \lim_{n\to\infty} U_n(f;x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

u tačkama prekida prve vrste.

Za λ-postupak kazaćemo da je L-permanentan ako sabira Furijeov red funkcije $f(x)$ skoro svugde, tj. za svako $x \in [-\pi, \pi]$, osim možda na nekom skupu nulte mere.

Što se tiče upoređivanja permanentnih i F-permanentnih postupaka, poznato je da oni jedan u drugi zadiru, što možemo videti iz sledećeg primera:

Postupak Lebega definisan koeficijentima

$$\lambda_k^n = \frac{\sin kh}{kh} \quad \left(h=\frac{1}{n} \to 0 \right)$$

je F-permanentan (o ovome će biri više reči kasnije, u glavi trećoj), a nije permanentan jer ne zadovoljava uslov (1.1o) (videti [1]).

Postoji i postupak koji je permanentan, a nije F-permanentan jer ne sabira Furijeov red svake L-integrabilne funkcije u tačkama neprekidnosti, odnosno u tačkama prekida prve

* Naziv F-permanentan je dat u čast Fejera.

vrste. Naime, S. M. More [8] je pokazao da postoji neprekidna funkcija čiji Furijeov red nije B-zbirljiv, gde je B-postupak Borelov postupak definisan koeficijentima

$$\lambda_k^n = \frac{1}{k!}\int_0^n e^{-t}\, t^k dt \qquad (n\to\infty).$$

Znači, B-postupak je permanentan, a nije F-permanentan.

Kako za fiksirano $x\in[-\pi,\pi]$ $U_n(f;x)$ predstavlja niz linearnih funkcionela definisanih na prostoru C, to je na osnovu kriterijuma slabe konvergencije jedna od bitnih pretpostavki za postojanje limesa (1,15), odnosno (1.16) da niz normi bude ograničen, tj. da je

(1.17) $$\|U_n(f;x)\|_C = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\dots).$$

Znači, ograničenost normi biće jedna od bitnih pretpostavki u formulisanju potrebnih i dovoljnih uslova za F-permanentnost jednog λ-postupka zbirljivosti.

Precizno formulisan stav koji daje potrebne i dovoljne uslove za F-permanentnost λ-postupka je:

Neka su za svako n=1,2,... koeficijenti λ-postupka zbirljivosti λ_k^n (k=o,1,...) Furijeovi koeficijenti u (o,π) L-integrabilne i u (ε,π) $\varepsilon>o$ ograničene funkcije $K_n(t)$, tj. neka je

$$K_n(t) \sim \frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^n \cos kt,$$

i

(1.18) $$|K_n(t)| < M_n \quad \text{za} \quad o<\varepsilon\leq t\leq\pi .$$

Da bi λ-postupak bio F-permanentan, potrebno je i dovoljno da

(A) $$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^n = 1 \quad \text{za svako } k=o,1,\dots$$

i da

(B) $$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\dots)$$

(videti J. Karamata i M. Tomić [1]).

Za finitne λ-postupke zbirljivosti neke pretpostavke prethodnog stava automatski su ispunjene. Tako je S. M. Nikoljski [16] za finitne λ-postupke zbirljivosti definisane trougaonom matricom

(1.19) $$\{\lambda_k^n\} \quad (k=o,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$$

pokazao da su uslovi (A) i (B) potrebni i dovoljni za F-permanentnost λ-postupka.

Kako je kod finitnih i kod infinitnih λ-postupaka uslov (B) najsloženiji i najteže se proverava, tj. ograničenost normi $\|U_n\|$ vrlo se teško direktno utvrđuje, to se uglavnom traže dovoljni uslovi za koeficijente λ_k^n da bi uslob (B) bio ispunjen.

Praktično, ovde je najvažnije utvrditi ograničenost norme, tj. uslov (B), jer je uslov (A) dosta jednostavan, pa su se problematikom uslova (B), odnosno normama trigonometrijskih polinoma bavili i mnogi poznati matematičari, kao što su: Fejer, S. M. Nikoljski, B. Nađ, J. Karamata, M. Tomić, S. B. Stečkin, A. V. Jefimov, A. F. Timan i drugi.

U ovom radu proučavaju se F-permanentni finitni λ-postupci zbirljivosti Furijeovih redova definisani trougaonim matricama. Zato, s obzirom na uslove (A) i (B) S. M. Nikoljskog, odnosno na važnost ograničenosti normi, glavu drugu ovoga rada posvetićemo upravo proučavanju ograničenosti normi trigonometrijskih polinoma, gde ćemo dati neke nove kriterijume za utvrđivanje ograničenosti L-norme parnog trigonometrijskog polinoma. Korišćenjem rezultata glave druge, formulisaćemo i dokazaćemo nove rezultate, koji se odnose na finitne F-permanentne λ-postupke zbirljivosti Furijeovih redova.

Glava druga

L-NORME TRIGONOMETRIJSKIH POLINOMA

2.1. UVODNI DEO

2.1.1. Definicija normi trigonometrijskih polinoma

Neka je $f(x)$ L-integrabilna funkcija i

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{2.1}$$

njen Furijeov red.

Za $r \geqslant 0$ i realno α posmatrajmo red

$$\frac{a_0\delta}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left[a_k\cos(kx+\frac{\alpha\pi}{2}) + b_k\sin(kx+\frac{\alpha\pi}{2})\right], \tag{2.2}$$

gde je $\delta = \cos\frac{\alpha\pi}{2}$ za $r=0$ i parno α, a $\delta = 0$ u ostalim slučajevima.

Ako je (2.2) Furijeov red neke L-integrabilne funkcije, nju ćemo označiti pomoću $f_\alpha^r(x)$. U slučaju $\alpha=r$, funkcija $f_\alpha^r(x)$ je Vejlov izvod reda r funkcije $f(x)$. Pomoću ω_α^r označimo klasu funkcija $f(x)$ za koje je skoro svugde $|f_\alpha^r(x)| \leqslant 1$.

Pomoću matrice

$$\{\lambda_k^n\} \quad (k,n=1,2,\dots\ ;\ \lambda_k^n = 0 \quad \text{za } k \geqslant n+1) \tag{2.3}$$

svakoj funkciji $f(x) \in \omega_\alpha^r$ korespondirajmo trigonometrijski polinom reda n

$$(2.4)\qquad U_n(f;x) = \frac{a_0\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Supremum normi (2.4) pri r=o, tj.

$$(2.5)\qquad U_n(\omega_\alpha^o) = \sup_{f\in\omega_\alpha^o} \|U_n(f;x)\|_C = \sup_{f\in\omega_\alpha^o} \max_x |U_n(f;x)|,$$

za α-parno je (videti S. A. Teljakovski [21])

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} U_n(\omega_\alpha^o) &= \sup_{f\in\omega_\alpha^o} \frac{1}{\pi}\left| \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha^o(x+t)\left(\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right)dt \right| = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right| dt = \|U_n^\lambda\|, \end{aligned}$$

a za α-neparno je

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} U_n(\omega_\alpha^o) &= \sup_{f\in\omega_\alpha^o} \frac{1}{\pi}\left| \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha^o(x+t) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \sin kt\, dt \right| = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \sin kt\right| dt = \|\overline{U_n^\lambda}\|. \end{aligned}$$

Prema tome, izračunavanje veličine $U_n(\omega_\alpha^o)$ svodi se, u zavisnosti od toga da li je α parno ili neparno, na izračunavanje normi kosinusnog, odnosno sinusnog trigonometrijskog polinoma u prostoru L.

Normama trigonometrijskih polinoma, s obzirom na njihovu važnu ulogu u teoriji zbirljivosti Furijeovih redova, bavili su se mnogi matematičari.

Tu su od interesa mogućnosti izračunavanja ili procene normi trigonometrijskih polinoma, tj. procene izraza (2.6), odnosno (2.7), zatim nalaženje asimptotskog ponašanja normi (2.6), odnosno (2.7) ili, pak, utvrđivanje uslova dovoljnih da bi ta norma bila ograničena, ne ulazeći u njenu procenu. Znači, treba utvrditi dovoljne uslove (kriterijume) da za norme trigonometrijskih polinoma važi

$$(2.8)\qquad \|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right| dt = \mathcal{O}(1),\ n=1,2,\ldots,$$

odnosno

$$(2.9) \qquad \|\overline{U_n^\lambda}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \sin kt\Big| dt = \mathcal{O}(1), \ n=1,2,\dots .$$

Specijalno, ako je $\lambda_k^n \equiv 1$, tada norma (2.6) postaje

$$(2.1o) \qquad L_n = \|U_n\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right| dt$$

i nazivamo je Lebegovom kostantom, odnosno

$$(2.11) \qquad L_{n/2} = \|U_{n/2}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right| dt,$$

što nazivamo uopštenom Lebegovom konstantom.

2.1.2. Pregled poznatih rezultata koji se odnose na norme trigonometrijskih polinoma

Ispitivanjem svojstava i procenama Lebegovih konstanti L_n i $L_{n/2}$ bavili su se : A. Lebeg, G. Sege, G. Vatson, G. Hardi, S. B. Stečkin, P. V. Galkin i drugi.

Opštepoznat rezultat je

$$L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + \mathcal{O}(1).$$

Interesantne su procene konstanti L_n i $L_{n/2}$ navedene u radu P. V. Galkin [17] (koje ćemo kasnije i koristiti):

$$(2.12) \qquad c_o < L_{n/2} - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) \leqslant 1 \quad (n=o,1,2,\dots),$$

$$(2.13) \qquad c_o - \frac{4}{\pi^2}\ln 2 \leqslant L_{n/2} - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+2) < c_o \quad (n=o,1,\dots)$$

i

$$(2.14) \qquad c_o < L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1) \leqslant 1 \quad (n=o,1,\dots),$$

$$(2.15) \qquad 1 \leqslant L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) < 1,8724 \quad (n=0,1,\ldots)$$

gde je $c_0 = 0,9897\ldots$.

U daljem radu biće nam od interesa pre svega rezultati za norme kada λ_k^n nije identički jednako jedinici.

S. M. Nikoljski [16] je pokazao da je za ograničenost norme, tj. ispunjenje uslova (2.8), trigonometrijskog polinoma potrebno da bude:

$$(\alpha) \qquad \lambda_k^n = \mathcal{O}(1) \quad (k=0,1,2,\ldots,n \ ; \ n=1,2,\ldots)$$

i

$$(\beta) \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k^n}{n-k+1} = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots).$$

U tom radu on je još pokazao da ako je niz $\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n, 0$ konveksan ili konkavan po k, tj. ako su druge diferencije

$$\Delta^2 \lambda_k^n = \lambda_k^n - 2\lambda_{k+1}^n + \lambda_{k+2}^n$$

stalnog znaka pozitivne, odnosno negativne, tada su uslovi (α) i (β) potrebni i dovoljni za ograničenost normi parnog trigonometrijskog polinoma.

Ovaj rezultat S. M. Nikoljskog B. Nađ [5] je proširio ne ograničavajući se na konveksitet niza λ_k^n po k, pokazavši da je za ograničenost normi (2.8) dovoljno da bude

$$(2.16) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\ln\frac{n}{n-k}|\Delta^2\lambda_k^n| = \mathcal{O}(1)$$

Da je rezultat S. M. Nikoljskog stvarno sadržan u rezultatu B. Nađa, vidimo iz sledećeg:

Ako je $\Delta^2\lambda_k^n$ stalnog znaka (λ_k^n konveksan ili konkavan niz), tada je

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\ln\frac{n}{n-k}|\Delta^2\lambda_k^n| = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\ln\frac{n}{n-k}\,\Delta^2\lambda_k^n .$$

Zatim, kako je (videti [1])

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\Delta^2\lambda_k^n = \lambda_0^n - \lambda_n^n - \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^n}{n-k+1},$$

očigledno je da je uslov B. Nađa (2.16) ispunjen ako su ispunjeni uslovi S. M. Nikoljskog (α) i (β).

Proširenje rezultata S. M. Nikoljskog, koje ne iziskuje konveksitet niza λ_k^n i koje sadrži i rezultat B. Nađa, dali su J. Karamata i M. Tomić [1]. Oni su pokazali da je za ispunjenje uslova (2.8) dovoljno da pored uslova S. M. Nikoljskog (β) budu ispunjeni i

(2.17) $$\lambda_n^n = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots),$$

(2.18) $$\sum_{k=0}^{n-2} Q_k^n|\Delta^2\lambda_k^n| = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots),$$

gde je

(2.19) $$Q_k^n = \begin{cases} (n-k)\ln\frac{n}{n-k} & \text{za } 0 \leq k \leq n-\sqrt{n}, \\ (n-k)\ln(n-k) & \text{za } n-\sqrt{n} \leq k \leq n-2. \end{cases}$$

Uslov (2.18) je slabiji od uslova B. Nađa (2.16) jer ne sadrži pretposljednju nepotpunu diferenciju $\Delta^2\lambda_{n-1}^n$.

M. Tomić [3] je pokazao da ako je niz λ_k^n kvazi-konveksan* po k za svako n, tada potreban i doviljan uslov da norma $\|U_n^\lambda\|$ trigonometrijskog polinoma bude ograničena je

(2.2o) $$\lambda_n^n \ln n = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots).$$

Sada ćemo navesti neke poznate rezultate koji se odnose na procenu veličine norme trigonometrijskih polinoma, kao i na određivanje njihovog asimptotskog ponašanja.

Ako je $\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n\cos kt \geq 0$ za svako $t \in [0,\pi]$ i $n=1,2,\ldots$, tada je norma $\|U_n^\lambda\| = \lambda_0^n$, pa je ograničena kadgod je ograničeno λ_0^n.

---

* niz λ_k^n je kvazi-konveksan ako je $\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k^n| < \infty$.

Zanimljivi su slučajevi procena normi kada polinom nije pozitivan za svako $t \in [o, \pi]$.

A. V. Jefimov ([18],[19]) je pokazao da za proizvoljnu matricu $\{\lambda_k^n\}$ $(k=o,1,2,\ldots,n+1;\ \lambda_o^n=1; \lambda_{n+1}^n=o)$ za parne trigonometrijske polinome važi

$$(2.21)\qquad \|U_n^\lambda\| \leqslant C_1 + C_2\sum_{k=o}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2\lambda_k^n| + C_3\sum_{k=o}^{n}\frac{\lambda_k^n}{n-k+1},$$

gde su C_1, C_2 i C_3 konstante. Ako je λ_k^n konveksan ili konkavan niz po k, tada se može pokazati da je za ograničenost normi $\|U_n^\lambda\|$ u (2.21) dovoljno da budu ispunjeni uslovi S. M. Nikoljskog (α) i (β).

Za norme neparnih trigonometrijskih polinoma A. V. Jefimov [2o] je pokazao da važi

$$(2.22)\qquad \|\overline{U}_n^\lambda\| \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2\lambda_k^n|\right).$$

S. A. Teljakovski [21] je dao asimtotske obrasce koji su precizirali poznate rezultate A. V. Jefimova (2.21) i (2.22). Naime, Teljakovski je dokazao da za norme $\|U_n^\lambda\|$ i $\|\overline{U}_n^\lambda\|$ važe sledeće procene:

$$(2.23)\qquad \left|\|U_n^\lambda\| - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{n-k+1}\right| \leqslant C\left(|\lambda_o^n| + \sum_{k=o}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2\lambda_k^n|\right),$$

$$(2.24)\qquad \left|\|\overline{U}_n^\lambda\| - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{k}\right| \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{n-k+1} + \sum_{k=o}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{}|\Delta^2\lambda_k^n|\right),$$

$$(225)\qquad \left|\|U_n^\lambda\| - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{n-k+1}\right| \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{k} + \sum_{k=o}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2\lambda_k^n|\right).$$

Ako se još pretpostavi da je $|\lambda_k^n| \geqslant |\lambda_{n-k}^n|$, tada se u izrazu (2.24) gubi

$$\sum_{k=o}^{n}\frac{|\lambda_k^n|}{n-k+1}.$$

S. A. Teljakovski [22] je dao i procenu za norme trigonometrijskih polinoma oblika

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Za njih je pokazao da vazi:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| dx - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \zeta\left(b_k ; \sqrt{a_{n-k}^2 + b_{n-k}^2} \right) \right| \leqslant$$

$$\text{(2.26)} \qquad \leqslant C \left(|a_k| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\Delta^2 a_{k-1}| + |\Delta^2 b_{k-1}| \right),$$

gde je $a_n = b_0 = b_n = 0$ i

$$\zeta(A;B) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} A & \text{za } |B| \leqslant |A|, \\ |A| \arcsin \left|\frac{A}{B}\right| + \sqrt{B^2 - A^2} & \text{za } |A| < |B|. \end{cases}$$

Specijalno, za $b_k = 0$ je

$$\zeta\left(b_k ; \sqrt{a_{n-k}^2 + b_{n-k}^2} \right) = |a_{n-k}|,$$

pa za parne trigonometrijske polinome procena (2.26) se svodi na (2.23), a za $a_k = 0$ zadnji rezultat poboljšava procene (2.24) i (2.25).

Za integral

$$\text{(2.27)} \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt \right| dt,$$

tj. za norme parnih trigonometrijskih polinoma, S. B. Stečkin [35] i A. F. Timan [36] dali su asimptotski obrazac koji je davao procenu norme do veličine ostatka, tj. došli su do toga da se norma asimptotski ponaša kao

$$\text{(2.28)} \qquad \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{n-k}.$$

S. A. Teljakovski [23] je takođe dao asimptotsko ponašanje norme parnog trigonometrijskog polinoma oblika (2.27) i pokazao da važi

$$\left| \int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx \right| dx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{k} \right| \leq$$

(2,29)

$$\leq C \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta a_k| + \sum_{i=2}^{n-2} \left| \sum_{k=1}^{q_{i,n}} \frac{a_{i-k} - a_{i+k}}{k} \right| \right),$$

gde je

$$q_{i,n} = \min\left(\left[\frac{i}{2}\right], \left[\frac{n-i}{2}\right] \right).$$

Procena (2.29) važi pod uslovom da koeficijenti a_k teže nuli i da redovi

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \frac{a_{i-k} - a_{i+k}}{k} \right|$$

konvergiraju.

A. F. Timan [24] je pokazao da ako je $\lambda_k^n \leq C$ uniformno za svako n i k, tada za norme trigonometrijskih polinoma važi

$$\| U_n^{\lambda} \| \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^n}{n-k} + O(\max_k |\lambda_k^n|).$$

Ako je niz $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n, \ldots, \lambda_{n-1}^n, 0$ monotono opadajući i konveksan, B. Nađ [6] je pokazao da za neparne trigonometrijske polinome važi

$$\| \overline{U}_n^{\lambda} \| = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{\lambda_{2k+1}^n}{2k+1} .$$

2.2. DOPRINOSI TEORIJI O NORMAMA TRIGONOMETRIJSKIH POLINOMA

U paragrafu 2.1.1. navedeni su poznati rezultati koji se odnose na norme parnih, odnosno neparnih trigonometrijskih polinoma. Sada ćemo formulisati i dokazati neke nove rezultate za pomenute norme.

U odeljku 2.2.1. daju se majorantni izrazi za norme parnih, odnosno neparnih trigonometrijskih polinoma. U odeljku 2.2.2. daju sa uslovi dovoljni da norma polinoma definisanog matricom $\{\lambda_k^n\} = \{\alpha_k^n \beta_k^n\}$, (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...) bude ograničena. U odeljku 2.2.3. daju se uslovi dovoljni da norma polinoma definisanog matricom $\{\lambda_k^n\} = \{\alpha_k^n \pm \beta_k^n\}$ (k=o,1,2,...,n; n=1, 2,...) bude ograničena. U odeljku 2.2.4. daje se norma za polinom kod koga je matrica $\{\lambda_k^n\}$ definisana sumatornom funkcijom $\varphi(\frac{k\pi}{2n})$. I na kraju, u odeljku 2.2.5. daju se uslovi za ograničenost norme trigonometrijskog polinoma koji su pozitivni za svako $t \in (o, \delta)$, gde je $o < \delta < \pi$.

2.2.1. Procene normi u slučaju monotonih koeficijenata

U ovom odeljku se daju majorantne procene za norme trigonometrijskih polinoma, gde se za koeficijente λ_k^n uvode izvesne pretpostavke.

STAV 1. Ako je niz λ_k^n (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...) pozitivan nerastući po k, tada za norme trigonometrijskih polinoma važi:

(a) $$\|U_n^\lambda\| \leq \lambda_o^n + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{2k-1}$$

i

(b) $$\|\overline{U}_n^\lambda\| \leq 2\lambda_1^n + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k} .$$

Za dokaz ovoga stava biće nam potrebna:

Lema 1. Za norme trigonometrijskih polinoma važi:

(a) $$\|U_n^\lambda\| \leq \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| \ln(2k+1) + |\lambda_n^n| \ln(2n+1)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| + |\lambda_n^n| ,$$

(b) $$\|\overline{U}_n^\lambda\| \leq \frac{8}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| \ln(k+1) + |\lambda_n^n| \ln(n+1)\right) +$$

$$+ 2\sum_{k=0}^{m-1}|\Delta\lambda_m^n| + 2|\lambda_m^n|.$$

Dokaz leme 1. (a): Označimo pomoću

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n \cos kt. \tag{2.30}$$

Tada je prema (2.6)

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt.$$

Abelovom transformacijom jezgro $K_n(t)$ dobija oblik

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n)D_k(t) + \lambda_n^n D_n(t), \tag{2.31}$$

gde je

$$D_k(t) = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

t.z.v. Dirihleovo jezgro [28].

Integracijom i majoracijom $|K_n(t)|$ dobijamo

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{m-1}|\Delta\lambda_k^n| L_k + |\lambda_n^n| L_n, \tag{2.32}$$

gde su

$$L_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |D_k(t)|\,dt$$

Lebegove konstante za koje je (videti (2.14)) P. V. Galkin [17] pokazao da važi

$$L_k \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(2k+1) + 1. \tag{2.33}$$

Korišćenjem (2.33), nejednakost (2.32) postaje

$$\|U_n^\lambda\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\lambda_k^n|\ln(2k+1) + |\lambda_m^n|\ln(2n+1)\right) + \tag{2.34}$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1}|\Delta\lambda_k^n| + |\lambda_n^m|$$

i time je lema 1. (a) dokazana.

Dokaz leme 1. (b): Za neparne polinome norma je

(2.35) $$\|\overline{U}_n^{\lambda}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |N_n(t)|\,dt,$$

gde je

$$N_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \sin kt.$$

Abelovom transformacijom jezgro $N_n(t)$ postaje

(2.36) $$N_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta\lambda_k^n \overline{D_k(t)} + \lambda_n^n \overline{D_n(t)} - \lambda_1^n \overline{D_o(t)},$$

gde je

$$\overline{D_k(t)} = \frac{\sin\frac{k+1}{2}t \,\sin\frac{kt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Kako je $\overline{D_o(t)} = o$, imamo

$$\|\overline{U}_n^{\lambda}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |N_n(t)|\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| \,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\overline{D_k(t)}|\,dt +$$

(2.37) $$+ |\lambda_n^n| \,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\overline{D_n(t)}|\,dt.$$

Integracijom $|\overline{D_k(t)}|$, uz korišćenje majoracije, dobijamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\overline{D_k(t)}|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} \right| dt = L_{k/2}.$$

Za uopštene Lebegove konstante $L_{k/2}$ Galkin je pokazao (videti (2.12)) da je

(2.38) $$L_{k/2} = \frac{4}{\pi^2}\ln(k+1) + 1.$$

Majoracijom (2.38) izraz (2.37) postaje

(2.39) $$\|\overline{U}_n^{\lambda}\| \leqslant \frac{8}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| \ln(k+1) + |\lambda_n^n| \ln(n+1) \right) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| + 2|\lambda_n^n|,$$

što predstavlja dokaz leme 1. (b).

Napomenimo da iz leme 1 sledi da su uslovi

$$(2.4o)\qquad \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| \ln(2k+1) = O(1) \quad (n=1,2,\dots),$$

$$(2.41)\qquad \lambda_n^n \ln(2n+1) = O(1) \quad (n=1,2,\dots)$$

dovoljni za ograničenost normi $\|U_n^\lambda\|$.

Dokaz stava 1 sledi direktno iz leme 1. (a): Kako je niz λ_k^n nerastući i pozitivan, znači da je $|\lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n| = \lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n$ i $|\lambda_n^n| = \lambda_n^n$, te zamenom ovih vrednosti u (2.34) dobijamo

$$\|U_n^\lambda\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\lambda_k^n \ln(2k+1) + \lambda_n^n \ln(2n+1)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\lambda_k^n + \lambda_n^n =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \ln\frac{2k+1}{2k-1} + \lambda_o^n \leqslant \lambda_o^n + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{2k-1},$$

odnosno tvrđenje stava 1. (a).

Dokaz stava 1. (b): Kako je opet niz λ_k^n pozitivan i nerastući, analogno prethodnom dobijamo

$$\|\overline{U}_n^\lambda\| \leqslant \frac{8}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \Delta\lambda_k^n \ln(k+1) + \lambda_n^n \ln(n+1)\right) + 2\sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k^n + 2\lambda_n^n =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^n \ln\frac{k+1}{k} + 2\lambda_1^n \leqslant 2\lambda_1^n + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k},$$

što predstavlja dokaz stava 1. (b).

STAV 2. Ako je niz λ_k^n $(k=o,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$ neopadajući po k i $\lambda_n^n \geqslant o$, tada za norme trigonometrijskih polinoma važi:

$$(a)\qquad \|U_n^\lambda\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\lambda_n^n \ln(4n^2-1) - \lambda_o^n + 2\lambda_n^n - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^n}{2k+1},$$

$$(b)\qquad \|\overline{U}_n^\lambda\| \leqslant \frac{8}{\pi^2}\lambda_n^n \ln(n^2+n) - 2\lambda_1^n + 4\lambda_n^n - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^n}{k+1}.$$

Dokaz stava 2 (a): Kako je $|\Delta\lambda_k^n| = -\Delta\lambda_k^n$ i $|\lambda_n^n| = \lambda_n^n$, to zamenom ovih vrednosti u lemi 1 (a) dobijamo

$$\|U_n^\lambda\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\lambda_k^n \ln(2k+1) + \lambda_n^n \ln(2n+1)\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\Delta\lambda_k^n + \lambda_n^n =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^n \ln\frac{2k+1}{2k-1} + \lambda_n^n \ln(2n-1) + \lambda_n^n \ln(2n+1)\right) - \lambda_0^n + 2\lambda_n^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi^2}\lambda_n^n \ln(4n^2-1) - \lambda_0^n + 2\lambda_n^n - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k^n}{2k+1},$$

onosno tvrđenje stava 2 (a).

Dokaz stava 2 (b): Sada je $|\Delta\lambda_k^n| = -\Delta\lambda_k^n$ i $|\lambda_k^n| = \lambda_k^n$, pa zamenom u tvrđenju leme 1 (b) dobijamo

$$\|\overline{U_n^\lambda}\| \leqslant \frac{8}{\pi^2}\left(-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^n \ln(k+1) + \lambda_n^n \ln(n+1)\right) - 2\sum_{k=1}^{n-1}\Delta\lambda_k^n + 2\lambda_n^n =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^n \ln\frac{k+1}{k} + \lambda_n^n \ln n + \lambda_n^n \ln(n+1)\right) - 2\lambda_0^n + 4\lambda_n^n =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\lambda_n^n \ln(n^2+n) + 4\lambda_n^n - 2\lambda_0^n - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k^n}{k+1},$$

što predstavlja dokaz stava 2 (b).

Napomenimo da odgovarajući rezultati stava 1 i stava 2 imaju asimptotski istu vrednost ako je $\lambda_k^n = 1$ za svako k. Ovi rezultati inače se jedino tada i mogu uporediti. Za $\lambda_k^n = 1$ kao specijalan slučaj dobija se poznati rezultat za Lebegove konstante

$$\|U_n^\lambda\| = L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + \mathcal{O}(1).$$

<u>Napomene uz stavove 1 i 2.</u>

S obzirom da majorantni izrazi za norme $\|U_n^\lambda\|$ u stavovima 1 i 2 ne moraju biti ograničeni, od interesa je ispitati uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti λ_k^n (pored onih već navedanih) da bi ti izrazi bili ograničeni za svako n.

Da bi norme $\|U_n^\lambda\|$, odnosno $\|\overline{U_n^\lambda}\|$ u stavu 1 bile ograničene, dovoljno je da sume

$$(2.42) \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^n}{2k-1}, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^n}{k}$$

budu ograničene za svako $n=1,2,\ldots$. Da bi norme u stavu 2 bile ograničene, pored (2.42), neophodno je da bude $\lambda_n^n \ln n$ ograničeno $(n=1,2,\ldots)$. Drugim rečima, najbitnije je ispitati sumu

(2.43) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k},$$

jer je ostalo očigledno.

<u>Posledica 1</u>. Da bi suma (2.43) za $\lambda_k^n \geqslant 0$ bila ograničena, dovoljno je da bude

(2.44) $$\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu^n = O\left(\frac{k}{\ln^p k}\right),\ p>1 \quad (k=0,1,2,\ldots,n;n=1,\ldots)$$

Dokaz: Abelovom transformacijom (2.43) postaje

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu^n + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^n .$$

S obzirom na (2.44), dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k} \leqslant M_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln^p k} + M_2 \frac{1}{\ln^p k} = O(1),$$

jer red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln^p k}$, $p>1$, konvergira, a $\frac{M_2}{\ln^p k} \to 0,\ n\to\infty$.

<u>Posledica 2</u>. Da bi suma (2.43) za $\lambda_k^n \geqslant 0$ bila ograničena, dovoljno je da bude

$$\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu^n = O(k^\alpha),\ \alpha<1,\ (k=0,1,\ldots,n;n=1,2,\ldots).$$

Dokaz: Abelovom transformacijom (2.43) postaje

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu^n + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^n ,$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M_1 k^\alpha}{k(k+1)} + \frac{M_2 n^\alpha}{n} = O(1),$$

jer red $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{k(k+1)}$ konvergira i $\frac{M_2 n^\alpha}{n} \to 0,\ n\to\infty$.

2.2.2. Ograničenost normi kada su koeficijenti razloženi na faktore

U ovom paragrafu ispitaćemo norme parnih trigonometrijskih polinoma zadatih pomoću matrice $\{\lambda_k^n\}$ čiji su koeficijenti izraženi u obliku proizvoda, tj.

$$\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n \quad (k=o,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots).$$

U ovim stavovima daćemo dovoljne uslove za koeficijente α_k^n i β_k^n da bi norma $\|U_n^\lambda\|$ bila ograničena.

STAV 3. Neka je $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=o,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, tada su uslovi

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=o}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| = O(1) \quad \text{i} \quad \alpha_n^n = O(1) \quad (n=1,2,\dots);$$

$$\text{(II)} \qquad \int_0^\pi \left|\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{m} \beta_k^n \cos kt\right| dt = O(1) \quad \text{za svako } m \leqslant n=1,2,\dots$$

dovoljni za ograničenost norme $\|U_n^\lambda\|$ za svako $n=1,2,\dots$ trigonometrijskog polinoma.

Dokaz: Neka je

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt, \tag{2.45}$$

gde je

$$K_n(t) = \frac{\alpha_0^n \beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \beta_k^n \cos kt.$$

Abelovom transformacijom izraz $K_n(t)$ postaje

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\alpha_k^n\left(\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu^n \cos\nu t\right) + \alpha_n^n\left(\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^n \cos\nu t\right),$$

što zamenom u (2.45) daje

$$\|U_n^\lambda\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n|\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu^n \cos\nu t\right| dt + \tag{2.46}$$

$$+ |\alpha_n^n|\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^n \cos\nu t\right| dt.$$

Kako je po pretpostavci (II) integral

$$I_k^n = \int_0^{\pi} \left|\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu^n \cos \nu t\right| dt = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako} \quad k \leq n,$$

to je tada

$$\|U_n^\lambda\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \alpha_k^n| I_k^n + |\alpha_n^n| I_n^n \leq$$

$$\leq (\max_k I_k^n) \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \alpha_k^n| + |\alpha_n^n| I_n^n ,$$

odakle na osnovu (I) i (II) dobijamo tvrđenje stava 3, odnosno ograničenost norme, tj.

$$\|U_n^\lambda\| = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots).$$

STAV 4. Neka je $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$, tada su uslovi

$$\text{(I)} \quad \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)|\Delta^2 \alpha_k^n| = \mathcal{O}(1) \quad \text{i} \quad n|\Delta \alpha_{n-1}^n| = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } n,$$

$$\text{(II)} \quad \int_0^{\pi} \left|\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{m} \beta_k^n \cos kt\right| dt = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } m \leq n=1,2,\ldots$$

dovoljni za ograničenost norme parnog trigonometrijskog polinoma.

Dokaz sledi neposredno iz činjenice da iz uslova (I) sledi ispunjenje uslova (I) stava 3, što vidimo iz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \alpha_k^n| = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(|\Delta \alpha_k^n| - |\Delta \alpha_{k+1}^n|) + n|\Delta \alpha_{n-1}^n| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)|\Delta^2 \alpha_k^n| + n|\Delta \alpha_{n-1}^n| ,$$

što je ograničeno s obzirom na uslov (II). Dalje dokaz sledi na osnovu stava 3.

Napomena uz stav 4.

Ako je $\Delta^2 \alpha_k^n \equiv 0$ (to je, na primer, slučaj sa Fejerovim postupkom, kod koga je $\alpha_k^n = 1 - \frac{k}{n+1}$), tada je uslov (I) automatski ispunjen, a umesto uslova (II) dovoljno je da bude

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\beta_0^n}{2}+\sum_{k=1}^{n}\beta_k^n\cos kt\right|dt = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots),$$

odnosno, da bude ograničena norma $\|U_n^{\beta}\|$. Znači, ne mora biti ograničena za svako $m \leq n$, već samo za $m=n$.

STAV 5. Neka je $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$. Označimo pomoću

$$\varphi^{\beta}(m,n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\beta_0^n}{2}+\sum_{k=1}^{m}\beta_k^n\cos kt\right|dt \tag{2.47}$$

gde je $m \leq n=1,2,\ldots$, tada su uslovi

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\alpha_k^n|\varphi^{\beta}(k,n) = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots),$$

(II) $$\alpha_n^n\varphi^{\beta}(n,n) = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots)$$

dovoljni za ograničenost norme $\|U_n^{\lambda}\|$, $n=1,2,\ldots$ trigonometrijskog polinoma.

Dokaz: Ako u dokazu stava 3 u izraz (2.46) uvedemo (2.47), dobijamo

$$\|U_n^{\lambda}\| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\alpha_k^n|\varphi^{\beta}(k,n) + |\alpha_n^n|\varphi^{\beta}(n,n),$$

što je, s obzirom na uslove (I) i (II), ograničeno, tj.

$$\|U_n^{\lambda}\| = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots).$$

Kako su stavovi 3, 4 i 5 više teorijskog karaktera, to se oni, uz izvesne vrlo slabe dodatne pretpostavke, mogu svesti na jedan za primenu vrlo praktičan stav.

STAV 6. Neka je $\lambda_k^n = \alpha_k^n\beta_k^n$ $(k=0,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$, tada su uslovi

(I) $$\sum_{k=1}^{n-1}|\Delta\alpha_k^n|\ln k = \mathcal{O}(1),\ \alpha_n^n=\mathcal{O}(1) \text{ i } \Delta\alpha_0^n=\mathcal{O}(1),\ n=1,2,\ldots,$$

(II) $$\varphi^{\beta}(n,n) = \|U_n^{\beta}\| = \mathcal{O}(1) \quad (n=1,2,\ldots)$$

dovoljni za ograničenost norme $\|U_n^{\lambda}\|$ $(n=1,2,\ldots)$ trigonometrijskog polinoma.

Dokaz: Kako je za k=n $\varphi^{\beta}(n,n) = \|U_n^{\beta}\|$, to se može desiti da $\varphi^{\beta}(n,n)$ bude ograničeno za svako n a da $\varphi^{\beta}(m,n)$ ne bude ograničeno za $m < n$. Zatim, kako je po pretpostavci norma $\|U_n^{\beta}\| = \mathcal{O}(1)$, n=1,2,... to je prema uslovu (α) S. M. Nikoljskog (videti st. 11)

(2.48) $$\beta_k^m = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako k i n.}$$

Korišćenjem (2.48) u (2.28) dobijamo da je

(2.49) $$\varphi^{\beta}(m,n) \approx \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\beta_k^m}{m-k} = \mathcal{O}(\ln m).$$

Sada dokaz stava 6 sledi iz stava 5 jer zadovoljava uslove (I) i (II) stava 5. Naime, korišćenjem (2.49) uslov (I) stava 5, uz pretpostavku da je $\Delta\alpha_0^m = \mathcal{O}(1)$, svodi se na

$$\sum_{k=1}^{n-1}|\Delta\alpha_k^m|\ln k = \mathcal{O}(1),$$

odnosno na uslov (I) stava 6. Zatim, uslov (II) stava 5 je takođe ispunjen jer je $\alpha_m^m = \mathcal{O}(1)$ i $\varphi^{\beta}(n,n) = \|U_n^{\beta}\| = \mathcal{O}(1)$, to je na osnovu stava 5 i norma $\|U_n^{\lambda}\|$ ograničena. Samim tim je dokazan i stav 6.

<u>Napomene uz stavove 5 i 6.</u>

1. Ako su uslovi (I) i (II) stava 5 zadovoljeni i ako je $\varphi^{\beta}(k,n) \sim \ln k$ za svako $k \leq n=1,2,\dots$, tada je $\|U_n^{\alpha}\| = \mathcal{O}(1)$ (n=1,2,...), što sledi na osnovu leme 1, tj. iz uslova (2.4o) i (2.41).
2. Ako je u stavu 5 $\alpha_k^m \equiv 1$, tada je za ograničenost norme $\|N_n^{\lambda}\|$ dovoljna ograničenost norme $\|U_n^{\beta}\|$, jer je $\|U_n^{\lambda}\| = \|U_n^{\beta}\|$.
3. Ako je u stavu 5 $\beta_k^m \equiv 1$, tada se on svodi na tvrđenje leme 1 (a), odnosno na uslove (2.4o) i (2.41).

Napomenimo da se stav 5, odnosno 6 mogu formulisati i na sledeći način:

Ako je dat parni trigonometrijski polinom T_n sa ograničenom normom, definisan koeficijentima λ_k^m (k=o,1,2,3,...,n; n=1,2,...), tada ograničenu normu ima i svaki trigonometrijski polinom koji je dobijen iz polinoma T_n na taj način što mu članove niza λ_k^n po k pomnožimo sa odgovarajućim članovima niza γ_k^n (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...), gde niz γ_k^n zadovoljava uslov (I) stava 5, tj. gde je

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta \gamma_k^n| \varphi^{\lambda}(k,n) = \mathcal{O}(1)$$

ili gde niz γ_k^n, s obzirom da za $\lambda_k^n = \mathcal{O}(1)$ je $\varphi_{,}^{\lambda}(k,n) = \mathcal{O}(\ln k)$, zadovoljava uslov (I) stava 6, tj. uslov

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta \gamma_k^n| \ln k = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots .$$

Ako je ograničena norma $\|U_n^{\lambda}\|$ trigonometrijskog polinoma definisanog koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ (k=o,1,...,n;n=1,...), tada je ograničena i norma polinoma definisanog koeficijentima β_k^n, ako $\frac{1}{\alpha_k^n}$ zadovoljava uslov (I) stava 5 ili uslov (I) stava 6.

Dokazaćemo još nekoliko stavova o ograničenosti norme $\|U_n^{\lambda}\|$; no, za, razliku od prethodnih, dovoljni uslovi za to biće ovog puta izloženi direktno preko faktora α_k^n i β_k^n koeficijenata λ_k^n. U tom cilju potrebna nam je sledeća lema.

Lema 2. Neka je $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...), tada za parne trigonometrijske polinome važi

$$\|U_n^{\lambda}\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| \ln(2k+1) + |\alpha_n^n \beta_n^n| \ln(2n+1)\right\} +$$
$$+ \frac{\pi}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(|\alpha_{k+1}^n \Delta^2 \beta_k^n| + |\Delta \alpha_{k+1}^n \Delta \beta_{k+1}^n|) + n|\alpha_n^n \Delta \beta_{n-1}^n|\right\} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| + |\alpha_n^n \beta_n^n| .$$

Dokaz: Norma $\|U_n^{\lambda}\|$ je

$$\|U_n^{\lambda}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |M_n(t)|dt, \tag{2.5o}$$

gde je

$$M_n(t) = \frac{\alpha_0^n \beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \beta_k^n \cos kt.$$

Primenom Abelove transformacije na $M_n(t)$, dobijamo

$$(2.51)\qquad M_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^n \Delta\alpha_k^n D_k(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1}^n \Delta\beta_k^n\, D_k(t) + \alpha_n^n \beta_n^n D_n(t),$$

gde je

$$D_k(t) = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,.$$

Ponovo primenom Abelove transformacije, samo na drugu sigmu u (2.51), dobijamo

$$(2.52)\qquad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1}^n \Delta\beta_k^n D_k(t) = \sum_{k=0}^{n-2} (\alpha_{k+1}^n \Delta^2\beta_k^n + \Delta\alpha_{k+1}^n \Delta\beta_{k+1}^n) F_k(t) +$$

$$+ \alpha_n^n \Delta\beta_{n-1}^n\, F_{n-1}(t),$$

gde je

$$F_k(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

Fejerovo jezgro.

Integracijom $M_n(t)$, tj. izračunavanjem izraza (2.5o), uključujući transformacije (2.51) i (2.52), dobijamo

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |M_n(t)|dt \le \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta\alpha_k^n| \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |D_k(t)|dt +$$

$$(2.53)\qquad + \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_{k+1}^n \Delta^2\beta_k^n + \Delta\alpha_{k+1}^n \Delta\beta_{k+1}^n| \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |F_k(t)|dt +$$

$$+ |\alpha_n^n \Delta\beta_{n-1}^n| \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |F_{n-1}(t)|dt + |\alpha_n^n \beta_n^n| \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|dt.$$

Kako je na osnovu (2.12)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |D_k(t)|dt \le \frac{4}{\pi^2}\ln(2k+1) + 1,$$

a za Fejerovo jezgro znamo da je

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |F_k(t)|dt = k+1,$$

to zamenom ovih rezultata u (2.53) dobijamo

$$\|U_n^\lambda\| \le \frac{4}{\pi^2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta\alpha_k^n| \ln(2k+1) + |\alpha_n^n \beta_n^n| \ln(2n+1)\right\} +$$

$$(2.54)\qquad + \frac{\pi}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(|\alpha_{k+1}^n \Delta^2\beta_k^n + \Delta\alpha_{k+1}^n \Delta\beta_{k+1}^n|) + n|\alpha_n^n \Delta\beta_{n-1}^n|\right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| + |\alpha_n^n \beta_n^n| ,$$

odnosno tvrđenje leme 2.

STAV 7. Neka je $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, tada su uslovi

(I) $\quad \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \alpha_k^n| = \mathcal{O}(1)$ i $\alpha_k^n = \mathcal{O}(1)$ za svako k i n,

(II) $\quad \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)|\Delta^2 \beta_k^n| = \mathcal{O}(1)$ i $n|\Delta \beta_{n-1}^n| = \mathcal{O}(1)$ $(n=1,2,\dots)$,

(III) $\quad \lambda_n^n \ln n = \mathcal{O}(1)$ $(n=1,2,\dots)$,

(IV) $\quad \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| \ln(2k+1) = \mathcal{O}(1)$ $(n=1,2,\dots)$

dovoljni za ograničenost norme $\|U_n^\lambda\|$ parnog trigonometrijskog polinoma.

Dokaz: Prema lemi 2, norma je

$$\|U_n^\lambda\| \leq \frac{4}{\pi^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| \ln(2k+1) + |\alpha_n^n \beta_n^n| \ln(2n+1) \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\left(|\alpha_{k+1}^n \Delta^2 \beta_k^n| + |\Delta \alpha_{k+1}^n \Delta \beta_{k+1}^n| \right) + n|\alpha_n^n \Delta \beta_{n-1}^n| \right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| + |\alpha_n^n \beta_n^n| .$$

Iz uslova (III) i (IV) sledi da je izraz u prvoj velikoj zagradi ograničen za svako $n=1,2,\dots$. Zatim, iz (II) sledi da je $k|\Delta \beta_k^n| = \mathcal{O}(1)$ za svako k i n, kao i da $k|\Delta \beta_k^n| \to 0$ po k što zajedno sa (I) i (II) daje ograničenost izraza u drugoj velikoj zagradi. Iz uslova (IV) sledi da je i

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots ,$$

a iz (III) sledi ograničenost izraza $|\alpha_n^n \beta_n^n|$ za svako $n \to \infty$, što sve zajedno predstavlja dokaz stava 7.

<u>Napomene uz stav 7.</u>

1. Ako je $|\beta_k^n| = \mathcal{O}(k^{-p})$ $0<p<1,\ \beta_n^n \ln n = \mathcal{O}(1)$ $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, tada stav 7 sadrži stav 6 jer iz uslova (IV) stava 7 sledi

ispunjenje uslova (I) stava 7 kao i uslov (I) stava 6. Zatim, uslovi (II) i (III) stava 7 sadrže uslove M. Tomića (2.2o), pa iz njih sledi uslov (II) stava 6.

2. Ako je $|\beta_k^n| = \mathcal{O}\left(\ln(2k+1)^{-p}\right)$, $p>1$, tada u stavu 7 iz uslova (I) sledi ispunjenje uslova (IV), dok u ostalim slučajevima iz uslova (IV) sledi uslov (I). Znači, oba uslova (I) i (IV) stava 7 moraju figurisati u formulaciji stava 7.

3. Ako je $\alpha_k^n \equiv 1$, stav 7 proširuje rezultat M. Tomića (2.2o).

4. Ako je $\beta_k^n \equiv 1$, stav 7 se svodi na lemu 1 (a), pa je norma ograničena ako su ispunjeni uslovi (2.4o) i (2.41)

STAV 8. Ako je $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, tada su uslovi

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \alpha_k^n| = \mathcal{O}(1) \quad \text{i} \quad \alpha_n^n = \mathcal{O}(1),\ n=1,2,\dots),$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{k=0}^{m} (k+1)|\Delta^2 \beta_k^n| = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots,$$

$$\text{(III)} \qquad \beta_m^n \ln m = \mathcal{O}(1) \quad m \leq n=1,2,\dots$$

dovoljni za ograničenost norme $\|U_n^\lambda\|$ trigonometrijskog polinoma.

Dokaz: Iz uslova (II) i (III), na osnovu rezultata M. Tomića [3], sledi da je

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{m} \beta_k^n \cos kt\right| dt = \mathcal{O}(1) \quad \text{za } m \leq n=1,2,\dots,$$

pa se dokaz dalje svodi na stav 3. Znači, iz stava 8 sledi stav 3. Obrnuto ne mora da važi.

2.2.3. Ograničenost normi u slučaju razlaganja koeficijenata na sabirke

U ovom odeljku posmatraćemo norme trigonometrijskih polinoma kod kojih su koeficijenti dati u obliku $\lambda_k^n = \alpha_k^n \pm \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$.

Na osnovu dobro poznate nejednakosti

$$\Big| \|U_n^{\alpha}\| - \|U_n^{\beta}\| \Big| \leqslant \|U_n^{\alpha\pm\beta}\| \leqslant \Big| \|U_n^{\alpha}\| + \|U_n^{\beta}\| \Big| \tag{2.61}$$

sledi: ako je norma $\|U_n^{\beta}\|$ ograničena, tada se i norme $\|U_n^{\alpha\pm\beta}\|$ i $\|U_n^{\alpha}\|$ isto ponašaju. Naime, ili su obe ograničena ili obe neograničene.

Praktično, to znači da ako imamo trigonometrijski polinom definisan koeficijentima α_k^n $(k=0,1,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, tada se ograničenost njegove norme ne menja ako koeficijentima α_k^n dodamo ili oduzmemo koeficijente β_k^n $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, tj. dobijamo trigonometrijski polinom sa koeficijentima $\gamma_k^n = \alpha_k^n \pm \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, pod uslovom da je norma $\|U_n^{\beta}\|$ ograničena.

U praktičnim slučajevima mi često i ne znamo da li je norma datog trigonomatrijskog polinoma ograničena. Naime, mi tu ograničenost i ispitujemo. Stoga se može ići na sledeće : Ako je dat polinom sa koeficijentima α_k^n i ako su koeficijenti α_k^n nepogodni za ispitivanje ograničenosti norme $\|U_n^{\alpha}\|$, tada možemo, u nekim slučajevima, izvršiti „korekcije" koeficijenata α_k^n koeficijentima β_k^n, tj. dobiti nove koeficijente $\gamma_k^n = \alpha_k^n \pm \beta_k^n$, gde je norma $\|U_n^{\beta}\|$ ograničena. Na ovaj način dobijeni koeficijenti γ_k^n mogu biti pogodniji za ispitivanje ograničenosti norme $\|U_n^{\gamma}\|$ trigonometrijskih polinoma definisanih koeficijentima γ_k^n $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$. Samim tim, utvrđujemo i ograničenost norme $\|U_n^{\alpha}\|$. Ova činjenica biće od značaja kasnije, u Glavi trećoj, kada budemo utvrđivali F-permanentnost λ-postupka zbirljivosti, što ćemo ilustrovati i primerima.

Inače, od interesa su dovoljni uslovi da bi gornje činjenice došle do izražaja i s tim ciljem formulisaćemo i dokazaćemo sledeće:

STAV 9. Ako je norma $\|U_n^\beta\|$ trigonometrijskog polinoma definisanog koeficijentima β_k^n $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$ ograničena, tada je ograničena i norma $\|U_n^\alpha\|$ polinoma definisanog koeficijentima α_k^n $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$ ako je:

(I) $\lambda_k^n=\alpha_k^n-\beta_k^n$ nerastući konveksan niz po k za svako n,

(II) $\lambda_n^n=\alpha_n^n-\beta_n^n=0,\quad \alpha_0^n-\beta_0^n=\mathcal{O}(1)\quad (n=1,2,\dots).$

Dokaz: Norma $\|U_n^\lambda\| = \|U_n^{\alpha-\beta}\|$ polinoma je

$$\|U_n^{\alpha-\beta}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt,$$

gde je

$$K_n(t) = \frac{\alpha_0^n-\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^n-\beta_k^n)\cos kt$$

njegovo jezgro.

Kako je $\alpha_k^n-\beta_k^n$ konveksan nerastući niz po k i kako je $\alpha_n^n-\beta_n^n=0$, to je, na osnovu poznatog rezultata Fejera, jezgro $K_n(t)\geqslant 0$ i iz njegovog pozitiviteta sledi

$$\|U_n^{\alpha-\beta}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_n(t)\,dt = \alpha_0^n-\beta_0^n .$$

Kako je prema (2.61)

$$\|U_n^{\alpha-\beta}\| \geqslant \Big|\,\|U_n^\alpha\| - \|U_n^\beta\|\,\Big| ,$$

to uz pretpostavku $\alpha_0^n-\beta_0^n=\mathcal{O}(1)$ dobijamo

$$\Big|\,\|U_n^\alpha\| - \|U_n^\beta\|\,\Big| \leqslant \|U_n^{\alpha-\beta}\| = \alpha_0^n-\beta_0^n = \mathcal{O}(1)\ ,\ n=1,2,\dots .$$

Kako je po pretpostavci norma $\|U_n^\beta\|$ ograničena, sledi da je i norma polinoma definisanog koeficijentima α_k^n $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$ ograničena, tj.

$$\|U_n^\alpha\| = \mathcal{O}(1)\quad (n=1,2,\dots).$$

Napomena: Nekada je iz praktičnih razloga korisno koeficijente λ_k^n razbiti na sabirke $\lambda_k^n=\alpha_k^n+\beta_k^n$ tako da norme $\|U_n^\alpha\|$ i

$\|U_n^{\beta}\|$ budu ograničene za svako $n=1,2,\dots$.

PRIMER: Neka je dat trigonometrijski polinom sa koeficijentima

$$\lambda_k^n = 1 - \frac{k+(-1)^{k-1}}{n+1},\ k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots,\ \lambda_0^n = 1,$$

odnosno

$$1;\ 1-\frac{2}{n+1};\ 1-\frac{1}{n+1};\ 1-\frac{4}{n+1};\ 1-\frac{3}{n+1};\dots;\ \frac{1-(-1)^{n-1}}{n+1}\ .$$

Ovde se λ_k^n može napisati u obliku $\lambda_k^n = \alpha_k^n + \beta_k^n$, gde su

$$\alpha_k^n = 1 - \frac{k}{n+1},\quad \alpha_0^n = 1 \qquad \text{i} \qquad \beta_k^n = \frac{(-1)^{k-1}}{n+1},\quad \beta_0^n = 0.$$

Norma $\|U_n^{\alpha}\|$ je ograničena jer je to poznati postupak Fejera, a $\|U_n^{\beta}\|$ je takođe ograničena, što vidimo iz

$$\|U_n^{\beta}\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\beta_0^n}{2}+\sum_{k=1}^{n}\beta_k^n\cos kt\right|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\cos kt\right|dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}|\cos kt|\,dt \leq \frac{2n}{n+1} < 2.$$

Znači, norma

$$\|U_n^{\lambda}\| = \|U_n^{\alpha+\beta}\| \leq \|U_n^{\alpha}\| + \|U_n^{\beta}\| = \mathcal{O}(1)$$

jer su norme $\|U_n^{\alpha}\|$ i $\|U_n^{\beta}\|$ ograničene.

Napomenimo da u ovom konkretnom primeru ograničenost norme $\|U_n^{\lambda}\|$ pomoću stava S. M. Nikoljskog, ne možemo utvrditi. Glavna poenta ove metode i nije razbijanje koeficijenata λ_k^n na sabirke, već njihova „korekcija" nekim novim koeficijentima γ_k^n tako da ograničenost norme $\|U_n^{\lambda}\|$ ostaje nepromenjena.

2.2.4. Izračunavanje norme kada su koeficijenti određeni sumatornom funkcijom

Posmatrajmo sada norme trigonometrijskih polinoma zadatih pomoću koeficijenata λ_k^n definisanih sumatornom funkcijom $\varphi(u)$, odnosno, pomoću

$$\lambda_k^n = \varphi\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \quad (k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots),$$

gde je sumatorna funkcija $\varphi(u)$ neprekidna, definisana na $[0,\frac{\pi}{2}]$, takva da je $\varphi(0)=1$ i $\varphi(\frac{\pi}{2})=0$. Normu ćemo za pomenuti slučaj izračunati pod pretpostavkom da je $\varphi(u)$ nerastuća konveksna funkcija.

STAV 10. Neka su koeficijenti $\lambda_k^n = \varphi(\frac{k\pi}{2n})$, $(k=0,1,\dots,n;$ $n=1,2,\dots)$ dati pomoću sumatorne funkcije $\varphi(u)$. Ako je $\varphi(u)$ nerastuća konveksna funkcija na $[0,\frac{\pi}{2}]$, tada je za odgovarajuće trigonometrijske polinome

$$\|U_n^\lambda\| \leq \frac{2}{\pi}\cdot 1{,}8519\dots$$

Dokaz: Kako je $\varphi(u)$ neprekidna funkcija na $[0,\frac{\pi}{2}]$ i $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=0$, za procene pomenute norme $\|U_n^\lambda\|$ dovoljno je izračunati

$$L_n(\varphi) = \|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\cos kt\right|dt. \tag{2.55}$$

Stavimo redom

$$K_n(t) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\cos kt, \tag{2.56}$$

$$L_n(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt, \tag{2.57}$$

$$L(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\int_0^{\pi/2}\varphi(u)\cos tu\,du\right|dt. \tag{2.58}$$

Za veličine (2.56), (2.57) i (2.58) S. B. Stečkin [24] je dokazao da uz uslov $L(\varphi)=\mathcal{O}(1)$ imamo

$$L_n(\varphi) \leq L(\varphi),\ n=1,2,\dots \quad \text{i} \quad L_n(\varphi)-L(\varphi)\to 0,\ n\to\infty, \tag{2.59}$$

što znači da je za procenu gore pomenute norme dovoljna procena integrala $L(\varphi)$.

Kratkoće pisanja, stavimo

$$L(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |h(t)|dt,$$

gde je

$$h(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u)\cos tu\,du.$$

Kako je po uslovu $\varphi(u) \geqslant o$, nerastuća i konveksna funkcija na $[o, \frac{\pi}{2}]$ i $\varphi(\frac{\pi}{2}) = o$, to na osnovu moga rada [26] sledi da je

$$h(t) \geqslant o \quad \text{za svako } t > o,$$

pa je

$$L(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u)\cos tu\,du \right| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u)\cos tu\,du\right)dt = \lim_{p\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u) \int_0^p \cos tu\,dt)du =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u)\,\frac{\sin pu}{u}\,du,$$

što je ekvivalentno sa

$$L(\varphi) = \lim_{p\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}p} \varphi(\frac{t}{p})\,\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Kako je $\varphi(u)$ nerastuća i pozitivna funkcija, to je po teoremi o srednjoj vrednosti

$$L(\varphi) = \frac{2}{\pi}\varphi(o)\int_0^{\xi(p)} \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad o \leqslant \xi(p) < \infty .$$

Kako je za svako $\xi(p)$ nezavisno od p

$$\int_0^{\xi(p)} \frac{\sin t}{t}\,dt \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = 1{,}8519\ldots,$$

to je

$$L(\varphi) \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot 1{,}8519\ldots .$$

Sada, s obzirom na (2.59), dobijamo

$$\|U_n^{\lambda}\| = L_n(\varphi) \leqslant L(\varphi) \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot 1{,}8519\ldots,$$

odnosno dokaz stava lo.

2.2.5. Ograničenost norme pozitivnih polinoma

Videli smo da se iz pozitiviteta kosinusnog polinoma na $[0,\pi]$ može utvrditi ograničenost norme. Za pozitivitet kosinusnog reda na $[0,\pi]$ Fejer je pokazao da je doviljna dvostruka monotonija (konveksitet) niza λ_k^n po k.

Sada ćemo pokazati da se do ograničenosti norme može doći i pomoću pretpostavki koje su slabije od dvostruke monotonije (konveksiteta), tj. daćemo dovoljne uslove za pozitivitet polinoma na nekom razmaku $[0,\delta]$, $0<\delta<\pi$, po tako i dovoljne uslove za ograničenost norme $\|U_n^\lambda\|$.

STAV 11. Da bi norma $\|U_n^\lambda\|$ trigonomatrijskog polinoma definisanog koeficijentima λ_k^n $(k=0,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$ bila ograničena, dovoljno je da za neki prirodan broj p budu ispunjeni sledeći uslovi:

(I) $\lambda^n_{|k-p|}-\lambda^n_{k+p}\downarrow 0$ po k,

(II) $\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\lambda_k^n| = O(1)$ $(n=1,2,\ldots)$,

(III) $\lambda_n^n = O(1)$ $(n=1,2,\ldots)$.

Dokaz: Neka je δ pozitivan broj $(<\pi)$, takav da je $p\delta\leq\pi$. Tada normu $\|U_n^\lambda\|$ možemo predstaviti u obliku

$$(2.60)\quad \|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\delta |K_n(t)|dt + \int_\delta^\pi |K_n(t)|dt\right) = \frac{2}{\pi}(I_1+I_2),$$

gde je

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt.$$

Odavde neposredno sledi da ograničenost integrala I_1 i I_2 povlači ograničenost i norme $\|U_n^\lambda\|$.

Ograničenost integrala I_2 proističe iz sledećeg:

Primenom Abelove transformacije na $K_n(t)$ i njegovom integracijom dobijamo

$$I_2 = \int_\delta^\pi \left|\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt\right| dt =$$

$$= \int_{\delta}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\lambda_k^n \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} + \lambda_n^n \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| \int_{\delta}^{\pi} \frac{|\sin(k+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}} dt + |\lambda_n^n| \int_{\delta}^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| \pi \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{t} + |\lambda_n^n| \pi \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{t} = \pi\left(\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\lambda_k^n| + |\lambda_n^n|\right) \ln\frac{\pi}{\delta} ,$$

pa je ograničenost integrala I_2, s obzirom na uslove (II) i (III), očigledna.

Ispitivanje ograničenosti integrala I_1 je znatno složenije od ispitivanja ograničenosti integrala I_2.

Ograničenost integrala I_1 dokazaćemo korišćenjem pozitiviteta polinoma $K_n(t)$ na $[o,\delta]$, tj. utvrđivanjem uslova za koeficijente λ_k^n dovoljnih da bi

$$K_n(t) = \frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt \geq o$$

na razmaku $[o,\delta]$.

Kako je $p\delta \leq \pi$, to je $\sin pt \geq o$ na $[o,\delta]$, pa polinom $K_n(t)$ množenjem sa $\sin pt$ ne menja znak, tj. izraz

$$\text{(2.61)} \qquad \left(\frac{1}{2}\lambda_o^n + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt \right) \sin pt$$

ima isti znak kao i polinom $K_n(t)$.

Kako je $\lambda_k^n \equiv o$ za svako $k > n$, to, radi jednostavnijeg dokaza, umesto polinoma (2.61) možemo formalno preći na red, pa je

$$\left(\frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right) \sin pt = \left(\frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \cos kt\right) \sin pt =$$

$$= \frac{\lambda_o^n}{2} \sin pt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \left(\sin(k+p)t - \sin(k-p)t\right) =$$

$$= \frac{\lambda_o^n}{2} \sin pt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \sin(k+p)t - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \sin(k-p)t =$$

$$= \frac{\lambda_0^n}{2}\sin pt + \frac{1}{2}\sum_{m=p+1}^{\infty} \lambda^n_{m-p}\sin mt - \frac{1}{2}\sum_{m=-p+1}^{\infty}\lambda^n_{m+p}\sin mt =$$

$$= \frac{\lambda_0^n}{2}\sin pt + \frac{1}{2}\sum_{m=p+1}^{\infty}(\lambda^n_{m-p}-\lambda^n_{m+p})\sin mt - \frac{1}{2}\sum_{m=-p+1}^{p}\lambda^n_{m+p}\sin mt =$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda_0^n - \lambda^n_{2p})\sin pt + \frac{1}{2}\sum_{m=p+1}^{\infty}(\lambda^n_{m-p}-\lambda^n_{m+p})\sin mt -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{m=-p+1}^{-1}\lambda^n_{m+p}\sin mt - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p-1}\lambda^n_{m+p}\sin mt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=p}^{\infty}(\lambda^n_{m-p}-\lambda^n_{m+p})\sin mt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\lambda_{p-k}\sin kt - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\lambda^n_{k+p}\sin kt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=p}^{\infty}(\lambda^n_{k-p}-\lambda^n_{k+p})\sin kt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda^n_{p-k}-\lambda^n_{k+p})\sin kt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b^n_{k,p}\sin kt\,, \tag{2.62}$$

gde je

$$b^n_{k,p} = \lambda^n_{|k-p|} - \lambda_{k+p} = \begin{cases} \lambda^n_{p-k} - \lambda^n_{k+p}\,, & 1 \leqslant k \leqslant p-1,\\ \lambda^n_{k-p} - \lambda^n_{k+p}\,, & p \leqslant k < \infty\,. \end{cases}$$

Na osnovu rezultata M. Tomića [4], gde je za pozitivitet ~~reda~~ sume

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt \quad \text{na } [o,\delta]$$

dovoljno da $b_k \downarrow o$, proizlazi s obzirom na uslov (I) stava 11, da je i red (2.62) pozitivan, a odavde je i suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} b^n_{k,p}\sin kt = \sum_{k=1}^{n+p} b^n_{k,p}\sin kt \geqslant o, \tag{2.63}$$

jer je $b^n_{k,p} = o$ za svako $k > n+p$. Kako je $\sin pt \geqslant o$ na $[o,\delta]$, to je i polinom

$$\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n\cos kt \geqslant o \quad \text{na } [o,\delta].$$

Ograničenost integrala I_1 sledi iz:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \left|\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right| dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right) dt =$$

$$= \frac{\lambda_0^n}{2}\delta + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k} \sin k\delta ,$$

pa na osnovu (2.6o), sledi da je i norma $\|U_n^\lambda\|$ ograničena za svako n=1,2,... .

Navešćemo neke specijane slučajeve niza $b_{k,p}^n$:

1. Za $p = 1$ niz $b_{k,1}^n$ je

$$\lambda_0^n - \lambda_2^n ;\ \lambda_1^n - \lambda_3^n ;\ \lambda_2^n - \lambda_4^n ; \dots ; \lambda_{n-2}^n - \lambda_n^n ;\ \lambda_{n-1}^n ;\ \lambda_n^n .$$

2. Za $p = 2$ niz $b_{k,2}^n$ je

$$\lambda_1^n - \lambda_3^n ;\ \lambda_0^n - \lambda_4^n ;\ \lambda_1^n - \lambda_5^n ;\ \lambda_2^n - \lambda_6^n ; \dots ; \lambda_{n-4}^n - \lambda_n^n ;$$
$$;\ \lambda_{n-3}^n ;\ \lambda_{n-2}^n ;\ \lambda_{n-1}^n ;\ \lambda_n^n .$$

3. Za $p = 3$ niz $b_{k,3}^n$ je

$$\lambda_2^n - \lambda_4^n ;\ \lambda_1^n - \lambda_5^n ;\ \lambda_0^n - \lambda_6^n ;\ \lambda_1^n - \lambda_7^n ;\ \lambda_2^n - \lambda_8^n ; \dots ; \lambda_{n-6}^n - \lambda_n^n ;$$
$$;\ \lambda_{n-5}^n ;\ \lambda_{n-4}^n ;\ \lambda_{n-3}^n ;\ \lambda_{n-2}^n ;\ \lambda_{n-1}^n ;\ \lambda_n^n .$$

i.t.d.

Ovde vidimo da su svi ovi uslovi koje **zadovoljava niz** $b_{k,p}^n$ slabiji od konveksiteta.

G l a v a   t r e ć a

FINITNI POSTUPCI ZBIRLJIVOSTI FURIJEOVIH REDOVA

U Glavi prvoj su definisani λ-postupci zbirljivosti Furijeovih redova, dati matricom $\{\lambda_k^n\}$ (k=o,1,...,n; n=1,...). U istoj glavi su definisani permanentni i F-permanentni postupci zbirljivosti Furijeovih redova.

Videli smo da su uslovi S. M. Nikoljskog [16] za F-permanentnost finitnog λ-postupka

$$(A) \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1, \quad k=o,1,\ldots,$$

$$(B) \qquad \|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right| dt = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\ldots$$

potrebni i dovoljni.

Kod permanentnih λ-postupaka smo umesto uslova (B) imali uslov (1.1o), tj. uslov

$$(3.1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n| = \mathcal{O}(1) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Očigledno je da je za proveru uslov (B) znatno složeniji od uslova (3.1) (odnosno (1.1o)), pa su zato i F-permanentni postupci za proučavanje složeniji od permanentnih.

Kako je za F-permanentne postupke najkomplikovaniji uslov (B), odnosno ograničenost norme parnog trigonometrijskog polinoma, to ćemo korišćenjem rezultata iz Glave druge koji se odnose na norme parnih trigonometrijskih polinoma formulisati i dokazati stavove koji daju dovoljne uslove za F-permanentnost λ-postupka definisanog trougaonom matricom $\{\lambda_k^n\}$ (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...).

Pre nego što pređemo na formulisanje i dokaz stavova koji se odnose na pomenute F-permanentne postupke zbirljivosti, prvo ćemo dati pregled poznatih rezultata iz ove oblasti.

3.1. PREGLED POZNATIH REZULTATA KOJI SE ODNOSE NA F-PERMANENTNE POSTUPKE ZBIRLJIVOSTI

Jedan od najpraktičnijih i najjednostavnijih stavova koji daju dovoljne uslove da bi jedan λ-postupak bio F-permanentan je da postupak ima pozitivno jezgro $K_n(t)$, jer je tada norma

$$(3.2) \qquad \|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_n(t)dt = \lambda_o^n ,$$

te je za ograničeno λ_o^n uslov (B) ispunjen, odnosno norma pomenutog postupka je ograničena. Ako je uz to ispunjen i uslov (A), tada je taj postupak i F-permanentan. Nedpstatak ovoga stava je u tome što je mali broj postupaka sa pozitivnim jezgrom, pa je i broj λ -postupaka koji podpadaju pod taj stav mali.

Tipičan primer ovoga stava je Fejerov λ-postupak definisan koeficijentima $\lambda_k^n = 1 - \frac{k}{n+1}$ (k=o,1,...,n; n=1,2,...), koji obično nazivamo (C,1)-postupak. Jezgro ovoga postupka je pozitivno, što se vidi iz činjenice da se ono može napisati u obliku

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \geqslant o.$$

Znači, kako je ispunjen i uslov (A), to je na osnovu gorepomenutog stava ovaj postupak i F-permanentan.

Navešćemo još neke F-permanentne postupke sa pozitivnim jezgrom:

1. Lebegov postupak definisan koeficijentima

$$\lambda_k^n = \lambda_k(h) = \frac{\sin kh}{kh} , \quad h = \frac{1}{n} \to o$$

pored toga što ispunjava uslov (A) ima i pozitivno jezgro. Ovo vidimo iz

$$K_n(t,h) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh \cos kt}{kh} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh \cos kt}{k}\right) = \frac{1}{h}\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{za} \quad |t| < h, \\ \frac{\pi}{4} & \text{za} \quad t = \pm h, \\ o & \text{za} \quad h < |t| \leq \pi . \end{cases}$$

Znači, L-postupak je F-permanentan (videti [1]).

2. Rimanov postupak je dat koeficijentima

$$\lambda_k^n = \lambda_k(h) = \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2, \quad h = \frac{1}{n} \rightarrow o ,$$

te mu je jezgro

$$R_n(t,h) = \frac{1}{h^2}\begin{cases} \frac{\pi}{4}(2k-t) & \text{za} \quad o \leq t \leq 2h, \\ o & \text{za} \quad 2h \leq t \leq \pi . \end{cases}$$

Ono je, znači, pozitivno. Kako važi i (A) ovaj postupak je F-permanentan (videti [1]).

Kod prethodna tri postupka utvrdili smo njihov pozitivitet na taj način što smo njihovo jezgro-kosinusni polinom umeli da prikažemo u zatvorenom obliku. Međutim to nije uvek moguće, pogotovu ako ne posmatramo neki konkretan postupak već čitavu klasu postupaka. Zato su od interesa stavovi koji utvrđuju pozitivitet kosinusnog polinoma (ili reda) na osnovu osobina njegovih koeficijenata.

Fejer je pokazao da je za pozitivitet kosinusnog reda

$$\frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \cos kt, \quad \lambda_n^n \rightarrow o \qquad n \rightarrow \infty$$

dovoljno da je niz λ_k^n dvostruko monoton, tj. da je

$$(3.3) \qquad \Delta\lambda_k^n = \lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n \geqslant o \qquad (k=o,1,2,\dots),$$

$$(3.4) \qquad \Delta^2\lambda_k^n = \lambda_k^n - 2\lambda_{k+1}^n + \lambda_{k+2}^n \qquad (k=o,1,2,\dots).$$

Kod finitnih λ-postupaka, gde je $\lambda_k^n = o$ za svako $k > n$, jezgro je oblika

$$\frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt$$

i kod njega se javljaju dve nepotpune diferencije

$$\Delta^2 \lambda_{n-1}^n = \lambda_{n-1}^n - 2\lambda_n^n$$

i

$$\Delta^2 \lambda_n^n = \lambda_n^n .$$

Da bi se na finitne λ-postupke mogao primeniti ovaj rezultat Fejera, tj. uslovi (3.3) i (3.4), potrebno je da i zadnje dve nepotpune diferencije budu pozitivne, tj. treba da budu konveksni i nizovi

$$\lambda_o^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n, o$$

i

$$\lambda_o^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n, o, o.$$

Posmatrajmo sada (C,θ)-postupak za $\theta \neq 1$ (pri $\theta = 1$ ranije je ispitan). Kod njega su koeficijenti λ_k^n dati pomoću

$$\lambda_k^n = \frac{P_{n-k}(\theta)}{P_n(\theta)}, \quad k=o,1,2,\ldots,n,$$

gde je

$$P_n(\theta) = \frac{(\theta+1)(\theta+2)\cdots(\theta+n)}{n!}, \quad P_o = 1.$$

Jezgro definisano na ovaj način nema uvek isti znak, čak za $o < \theta < 1$ menja n-puta znak u razmaku (o, π).

Kod ovoga postupka pretposlednja i poslednja diferencija su

$$\Delta^2 \lambda_{n-1}^n = \lambda_{n-1}^n - 2\lambda_n^n = \frac{P_1(\theta) - 2P_o(\theta)}{P_n(\theta)} = \frac{\theta - 1}{P_n(\theta)}$$

i

$$\Delta^2 \lambda_n^n = \frac{1}{P_n(\theta)} > o,$$

odakle se vidi da je $\Delta^2\lambda^n_{n-1} \geqslant o$ za $\theta \geqslant 1$, a $\Delta^2\lambda^n_{n-1} < o$ za $o < \theta < 1$. Znači, za $\theta > 1$ (C,θ)-postupak je F-permanentan na osnovu stava Fejera jer zadovoljava uslove (3.3) i (3.4).

Kada je $o < \theta < 1$, tada je $\Delta^2\lambda^n_{n-1} < o$, pa se na taj slučaj ne može primeniti Fejerov stav. Kod njega su diferencije

$$\Delta\lambda^n_k = \frac{P_{n-k}(\theta-1)}{P_n(\theta)} > o\,; \qquad \Delta\lambda^n_n = \frac{1}{P_n(\theta)} > o;$$

i

$$\Delta^2\lambda^n_k = \frac{\theta(\theta-1)\;P_{n-k-2}(\theta)}{(n-k)(n-k-1)P_n(\theta)} < o, \quad k=o,1,2,\dots,n-2,$$

$$\Delta^2\lambda^n_k = \lambda^n_{n-1} - 2\lambda^n_n = \frac{\theta-1}{P_n(\theta)} < o\,,$$

$$\Delta^2\lambda^n_n = \frac{1}{P_n(\theta)} > o,$$

odakle se vidi da je

$\lambda^n_o,\ \lambda^n_1,\ \lambda^n_2,\ \dots,\ \lambda^n_n,\ o\ ,\ o$

monotono opadajući niz, a niz

$\lambda^n_o,\ \lambda^n_1,\ \lambda^n_2,\ \dots\ ,\ \lambda^n_n,\ o$ je konkavan, pa se na njega ne može primeniti Fejerov stav. Ovaj postupak je ipak F-permanentan, što je dokazao M. Ris [9].

C. M. Nikoljski je posmatrao finitne λ-postupke zbirljivosti nezavisno od toga da li jezgro menja znak. Naime, on je u radu [16] za pomenuti finitni λ-postupak pokazao da ako je niz

(3.5) $\qquad \lambda^n_o,\ \lambda^n_1,\ \lambda^n_2,\dots,\ \lambda^n_n,\ o$

konveksan ili konkavan, tj. ako su druge diferencije

$$\Delta^2\lambda^n_k = \lambda^n_k - 2\lambda^n_{k+1} + \lambda^n_{k+2} \quad (k=o,1,2,\dots,n-1)$$

stalnog znaka, tada su uslovi

(A) $\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1 \qquad (k=o,1,2,\dots),$

(α) $\lambda_k^n = \mathcal{O}(1)$ za svako k i n,

(β) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{n-k+1} = \mathcal{O}(1)$ za svako n

potrebni i dovoljni za F-permanentnost λ-postupka.

Ovaj stav proširuje stav Fejera, jer ako je niz (3.5) konveksan ne mora biti i monoton, niti, pak, mora biti niz $\lambda_o^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n, o, o$ konveksan.

B. Nađ [5] je proširio rezultat Nikoljskog ne pretpostavljajući konveksitet niza λ_k^n. On je pokazao da je dovoljan uslov da bi finitni λ-postupak bio F-permanentan da pored uslova (A) bude ispunjen uslov

(γ) $\sum_{k=o}^{n-1} (n-k) \ln\frac{n}{n-k} |\Delta^2 \lambda_k^n| = \mathcal{O}(1), \; n\to\infty.$

J. Karamata i M. Tomić [1] su dali dovoljne uslove za matricu $\{\lambda_k^n\}$ da bi finitni λ-postupak bio F-permanentan. Pokazali su da je pored uslova S. M. Nikoljskog (A), (α) i (β) dovoljno da bude ispunjen uslov

(3.6) $$\sum_{k=o}^{n-2} Q_k^n \, |\Delta^2 \lambda_k^n| = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } n,$$

gde je

$$Q_k^n = \begin{cases} (n-k) \ln\frac{n}{n-k} & \text{za } o \leq k \leq n-\sqrt{n}, \\ (n-k)\ln(n-k) & \text{za } n-\sqrt{n} \leq k \leq n-2. \end{cases}$$

Ovaj rezultat sadrži rezultat Nikoljskog i proširuje rezultat Nađa jer ne sadrži pretposlednju diferenciju. U istom radu, J. Karamata i M. Tomić dali su još jedno proširenje stava Nikoljskog, oslabivši uslov konveksiteta, dokazavši stav:

Finitni λ-postupak je F-permanentan ako je niz

$$\lambda_o^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n \quad \text{za svako } n$$

konveksan ili konkavan, zatim ako su ispunjeni uslovi

(A) $\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1, \quad k=0,1,2,\ldots,$

(3.7) $\lambda_n^n = \mathcal{O}(1)$ za svako n,

(3.8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{n-k+1} = \mathcal{O}(1), \quad n\to\infty$

i ako je:

1^0 $\lambda_{n-1}^n - 2\lambda_n^n > \mathcal{O}(\frac{1}{\ln n})$, (odnosno $< \mathcal{O}(\frac{1}{\ln n})$

zavisno od toga da li je gornji niz konveksan ili konkavan ili 2^0

(3.9) $\lambda_n^n = \mathcal{O}(1)$,

(3.10) $\sqrt{N}\Delta\lambda_N^n = \mathcal{O}(1)$,

(3.11) $\sum_{k=N+1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{n-k+1} = \mathcal{O}(1)$

gde je $N = [n+1-\sqrt{n}]$.

M. Tomić [3] je dokazao da ako je niz λ_k^n $(k=0,1,\ldots,n; n=1,2,\ldots; \lambda_0^n=1 ; \lambda_{n+1}^n = 0)$ kvazi-konveksan, tj. ako je

(3.12) $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|\Delta^2\lambda_k^n| = \mathcal{O}(1)$ za $n\to\infty$

da je tada za ograničenost normi

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt|\,dt = \mathcal{O}(1), \quad n\to\infty$$

potrebno i dovoljno da bude

(3.13) $\lambda_n^n \ln n = \mathcal{O}(1), \quad n\to\infty$.

Ako je uz to ispunjen uslov (A), taj λ-postupak je i F-permanentan.

Problem infinitnih λ-postupaka prvi su kompletno postavili i rešavali J. Karamata i M. Tomić. Iz te oblasti oni su dali dosta rezultata. Navešćemo neke od njih.

U radu [2] oni su dokazali da je za F-permanentnost infinitnog postupka definisanog matricom $\{\lambda_k^n\}$ $(k,n=1,2,\dots)$ dovoljno da važi:

$$(3.14)\qquad \lambda_k^n \to 1 \quad \text{kada} \quad n\to\infty \quad \text{za svako } k,$$

$$(3.15)\qquad \lambda_k^n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln k}\right), \quad k\to\infty \quad \text{za svako } n$$

i da postoji ceo broj m, konačam ili koji teži beskonačnosti zajedno sa n, takav da je

$$(3.16)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m+k}{m+1}|m-k|\ln\frac{m+k}{|m-k|}|\Delta^2\lambda_k^n| = \mathcal{O}(1),\ n\to\infty\ .$$

U istom radu [2] J. Karamata i M. Tomić su dokazali i sledeći stav.

Da bi jedan λ-postupak definisan pravougaonom matricom $\{\lambda_k^n\}$ bio F-permanentan, potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni sledeći uslovi:

$$(A)\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_k^n = 1 \quad \text{za svako} \quad k=0,1,\dots;$$

da za svako n postoji broj M_m (koji zavisi samo od m) takav da je za svako m

$$(3.17)\qquad \left|\frac{\lambda_0^n}{2}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^n\cos kx\right|dx \leq M_m;$$

da je niz

$$(3.18)\qquad \overline{K_n(t)} \overset{\text{def}}{=} \lim \left|\frac{\lambda_0^n}{2}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^n\cos kt\right|dt =$$

$$= \frac{\lambda_0^n}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^n}{k}\sin kx$$

uniformno ograničene varijacije, tj. da je

$$\int_0^{\pi}|d\overline{K_n(t)}| = \mathcal{O}(1)\ ,\quad n\to\infty\ .$$

Navešćemo još i rezultat S. A. Teljakovskog [23] koji se odnosi na infinitne λ-postupke zbirljivosti. Neka matrica $\lambda = (\lambda_k^n)$ zadovoljava sledeće uslove:

(3.19) $$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta\lambda_k^n| = \mathcal{O}(1);$$

(3.2o) za svako n postoji takvo m da je

$$\sum_{i=2}^{m-2} \left|\sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\Delta\lambda_{i-k}^n - \Delta\lambda_{i+k}^n}{k}\right| + \sum_{i=2}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \frac{\Delta\lambda_{m+i-k}^n - \Delta\lambda_{m+i+k}^n}{k}\right| = \mathcal{O}(1),$$

gde je

$$q_{i,m} = \min([\tfrac{i}{2}];\ [\tfrac{m-i}{2}]) ;$$

(3.21) za svako n postoji broj M_n (koji zavisi samo od n) da je

$$\lambda_k^n \ln(k+2) \leqslant M_n,$$

tada su

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1,\ n\to\infty \qquad \text{za svako } k$$

i

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{m-k}^n - \lambda_{m+k}^n}{k} = \mathcal{O}(1) \qquad \text{za svako } n$$

potrebni i dovoljni uslovi da bi λ -postupak bio F-permanentan za sve neprekidne funkcije.

3.2. DOPRINOSI TEORIJI FINITNIH POSTUPAKA ZBIRLJIVOSTI FURIJEOVIH REDOVA

U ovom paragrafu formulisaćemo i na osnovu naših rezultata iz Glave druge odeljka 2.2. dokazaćemo neke stavove koji daju dovoljne uslove za matricu $\{\lambda_k^n\}$ (k=o,1,2,...,n:n=1,..) da bi jedan finitni λ -postupak bio F-permanentan.

3.2.1. Uslovi F-permanencije dobijene razlaganjem koeficijenata na faktore

STAV 12. Ako je λ -postupak definisan koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...), tada je za F-permanentnost λ -postupka dovoljno da budu ispunjena sledeća tri uslova:

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda^n_k = 1, \quad k=0,1,2,\dots,$$

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha^n_k| = \mathcal{O}(1), \quad \alpha^n_n = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots ,$$

(II) $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \beta^n_k \cos kt\right| dt = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } m \le n=1,2,\dots .$$

Dokaz: Kako je uslov (A) stava Nikoljskog ispunjen, a uslov (B) sledi iz stava 3, tj. iz pretpostavke (I) i (II), proizlazi da je λ-postupak F-permanentan.

<u>STAV 13</u>. Ako je λ-postupak definisan matricom $\{\lambda^n_k\} = \{\alpha^n_k \beta^n_k\}$ ($k=0,1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$), tada su uslovi

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda^n_k = 1, \quad k=0,1,2,\dots,$$

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)|\Delta^2\alpha^n_k| = \mathcal{O}(1) \quad \text{i} \quad n|\Delta\alpha^n_{n-1}| = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } n,$$

(II) $$\int_0^{\pi} \left|\frac{\beta^n_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \beta^n_k \cos kt\right| dt = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } m \le n=1,2,\dots .$$

dovoljni da λ-postupak bude F-permanentan.

Dokaz je očigledan jer je uslov (A) pretpostavljen, a uslov (B) sledi iz stava 4, odnosno iz uslova (I) i (II).

<u>Napomene uz stav 13</u>. Shodno napomenama uz stav 4, možemo reći da ako je β -postupak F-permanentan sa svojstvom da je $\Delta^2_\alpha\beta^n_k = 0$, tada uslov (II) ne mora biti ispunjen za svako $m \le n$ već samo za $m=n$. Znači, jedan $\alpha\beta$ -postupak je F-permanentan ako je β - postupak F-permanentan i $\Delta^2_\alpha\beta^n_k = 0$ i ako je uslov (I) ispunjen za svako $n=1,2,\dots$ kao i da $\alpha^n_k \to 1$ kada $n\to\infty$ za svako k.

<u>STAV 14</u>. Ako je λ-postupak definisan koeficijentima $\lambda^n_k = \alpha^n_k \beta^n_k$ ($k=0,1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$), tada je za F-permanentnost λ-postupka dovoljno da bidu ispunjena sledeća tri uslova:

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda^n_k = 1, \quad \text{za svako } k,$$

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha^n_k| \varphi^\beta(k,n) = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots,$$

(II) $\alpha_n^m \varphi^\beta(n,n) = \alpha_m^m \|U_n^\beta\| = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,\ldots$,

gde je

$$\varphi^\beta(m,n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\beta_0^m}{2} + \sum_{k=1}^{m} \beta_k^m \cos kt\right| dt.$$

Dokaz sledi iz činjenice da je uslov (A) pretpostavljen, a uslov (B) sledi iz stava 5, tj. iz uslova (I) i (II).

STAV 15. Ako je λ-postupak definisan koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$, tada su uslovi

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1$ za svako k,

(I) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| \ln k = \mathcal{O}(1)$, $\alpha_n^n = \mathcal{O}(1)$ i $\Delta\alpha_0^n = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,\ldots$,

(II) $\varphi^\beta(n,n) \equiv \|U_n^\beta\| = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,\ldots$

dovoljni za F-permanentnost datog λ-postupka.

Dokaz sledi iz činjenice da je uslov (A) dat, a uslov (B) sledi iz stava 6, tj. iz uslova (I) i (II).

Napomene uz stav 15.

1. Uslov (I) nije potreban za F-permanentnost, što pokazuje primer postupka definisanog koeficijentima $\alpha_k^n = 1 - \frac{k}{n+1}$ koji je F-permanentan a ne zadovoljava uslov (I) stava 15.
2. Uslov (I) nije ni dovoljan za F- permanentnost, što vidimo iz primera $\alpha_k^n = 1 - \frac{k}{n\ln n}$ koji zadovoljava uslov (I) stava 15 a nije F-permanentan jer ne zadovoljava uslov (β) Nikoljskog (videti str. 44).

Na osnovu stava 15 možemo, znači, pri utvrđivanju F-permanencije pretpostaviti da je norma ograničena samo za jedan faktor koeficijenata $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$, odnosno da samo za njega važi neki dosada poznati kriterijum za utvrđivanje ograničenosti norme, dok za drugi faktor treba samo pretpostaviti da zadovoljava uslov (I) stava 15. Odavde sledi da jedan F-permanentni λ-postupak ostaje F-permanentan kada mu koeficijente pomnožimo nekim drugim koeficijentima koji zadovoljavaju uslov (A) i uslov (I) stava 15, pa se oni mogu shvatiti kao množitelji koji ne narušavaju F-permanentnost λ-postupka.

Sada ćemo na nekoljiko primere pokazati mogućnosti stava 15.

PRIMER 1.

Neka je dat λ-postupak definisan koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...),gde je

$$\alpha_k^n = 1 - \frac{k}{n\ln n} \quad (k=o,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots),$$

$$\beta_k^n = \cos\frac{k\pi}{2n} \quad (k=o,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots\ .$$

Ako F-permanentnost ovoga postupka utvrđujemo pomoću stava 15, dovoljno je pokazati da on zadovoljava uslove (A), (I) i (II).

Uslov (A) je ispunjen jer $\alpha_k^n\beta_k^n \to 1$ kada $n\to\infty$ za svako k.

Uslov (I) sledi iz

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| \ln k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n\ln n}\cdot \ln k = \mathcal{O}(1),\ n=1,2,\ldots,$$

kao i iz činjenice da su α_n^n i $\Delta\alpha_o^n$ takođe ograničeni.

Na kraju i uslov (II) je ispunjen jer je to poznati postupak Rogozinskog koji ima ograničenu normu $\|U_n^\beta\|$. Odavde sledi da je $\alpha\beta$-postupak F-permanentan.

Utvrđivanje F-permanentnosti ovoga λ-postupka pomoću drugih poznatih kriterijuma nije ovako jednostavno, naravno, ukoliko je uopšte i moguće.

Napomenimo da smo u primeru 1 umesto koeficijenata $\beta_k^n = \cos\frac{k\pi}{2n}$ mogli uzeti koeficijente bilo kog F-permatentnog postupka.

PRIMER 2.

Neka je dat λ-postupak definisan koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...), gde su

$$\alpha_k^n = \begin{cases} 1 & \text{za k-neparno,} \\ \cos\frac{\pi}{n} & \text{za k-parno,} \end{cases}$$

i

$$\beta_k^n = \cos\frac{k\pi}{2n} .$$

Koeficijenti λ_k^n mogu se predstaviti i na sledeći način:

$$\cos\frac{\pi}{n} \; ; \; \cos\frac{\pi}{2n} \; ; \; \frac{1}{2}(1+\cos\frac{4\pi}{2n}) \; ; \; \cos\frac{3\pi}{2n} \; ; \; \frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{2n} + \cos\frac{6\pi}{2n}) \; ; \; \ldots$$

$$\ldots ; \; \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \; ; \; \frac{1}{2} \cos(2k-2)\frac{\pi}{2n} + \cos(2k+2)\frac{\pi}{2n} \; ; \ldots .$$

Dakle, ovaj postupak je dobijen iz postupka Rogozinskog na taj način što mu članove λ_k^n za parno $k \geqslant 2$ zamenjujemo aritmetičkom sredinom najbližih parnih članova, tj. sa

$$\frac{1}{2}\left(\cos(k-2)\frac{\pi}{2n} + \cos(k+2)\frac{\pi}{2n}\right).$$

Koeficijenti na ovaj način definisanog λ-postupka nisu ni konveksni ni konkavni, tako da ne zadovoljavaju uslove stava S. M. Nikoljskog (videti str. 11), pa se pomoću toga stava ne može utvrditi F-permanentnost ovoga postupka.

Na osnovu našeg stava 15, odnosno uslova (A), (I) i (II), F-permanentnost je očigledna:

Uslov (A) je očigledan, a $\|U_n^\beta\| = \mathcal{O}(1)$, n=1,2,... jer je to poznati postupak Rogozinskog. Treba još dokazati važnost uslova (I), koji sledi iz

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| \ln k = \sum_{k=1}^{n-1} \left|(-1)^k(1-\cos\frac{\pi}{n})\right| \ln k = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \to 0,$$

kada $n \to \infty$, kao i iz ograničenosti α_n^n i $\Delta\alpha_0^n$. Znači, navedeni $\alpha\beta$-postupak je F-permanentan.

PRIMER 3.

Neka je dat λ-postupak definisan koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ (k=o,1,2,...,n; n=1,2,...), gde su

$$\alpha_k^n = 1 + \frac{(-1)^k}{\psi(n)}, \quad \psi(n) \to \infty \;, \; n \to \infty \;;$$

$$\beta_k^n = 1 - \frac{k}{n+1} .$$

Prvo ćemo F-permanentnost ovoga postupka utvrditi pomoću stava 15, odnosno uslova (A), (I) i (II).

Uslov (A) je očigledan; uslov (II) je ispunjen jer je β -postupak poznati Fejerov postupak pa mu je norma $\|U_n^{\beta}\|$ ograničena. Ostaje jedino još da dokažemo važnost uslova (I), koji sledi iz:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| \ln k = 2\sum_{k=1}^{n-1} \left|(-1)^k \cdot \frac{1}{\psi(n)}\right| \ln k = \frac{2}{\psi(n)} \mathcal{O}\Big((n-1)\ln(n-1)\Big),$$

što je ograničeno za

$$\psi(n) \geqslant C_1 n^{\theta} \ln n, \quad n \to \infty \quad \text{i} \quad \theta \geqslant 1, \tag{3.22}$$

gde je C_1 neka pozitivna konstanta. A kako su i α_m^n i $\Delta\alpha_o^n$ ograničeni, sledi da je uslov (I) stava 15 ispunjen. Na kraju možemo zaključiti da je $\alpha\beta$ -postupak F-permanentan kada funkcija $\psi(n)$ zadovoljava uslov (3.22). Za slučaj $\theta < 1$, pomoću stava 15 ništa ne možemo zaključiti.

Ako na ovaj λ-postupak primenimo neki drugi poznati kriterijum za utvrđivanje F-permanencije, ne samo da će ispitivanje biti znatno složenije nego ćemo dobiti i slabiji rezultat od onoga koji smo dobili pomoću našeg stava 15.

Kod ovoga λ-postupka druge diferencije su

$$\Delta^2\lambda_k^n = (-1)^k \frac{4}{\psi(n)} \left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right). \tag{3.23}$$

F-permanentnost ovoga postupka ispitaćemo prvo pomoću kriterijuma M. Tomića [3] (videti (3.12) i (3.13)).

Uslov (A) je ispunjen. Zatim, kako je

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)|\Delta^2\lambda_k^n| = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left|(-1)^k \frac{4}{\psi(n)}\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right)\right| =$$

$$= \frac{4}{\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(1 - \frac{k+1}{n+1}\right) = \frac{n^2-4n}{6\psi(n)} = \mathcal{O}(1)$$

kada funkcija $\psi(n)$ zadovoljava uslov

$$\psi(n) \geqslant C_2 n^{\theta}, \quad \theta \geqslant 2,$$

a kako tada $\lambda_o^n \to 1$ kada $n \to \infty$ i

$$\lambda_n^n \ln n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{\psi(n)}\right)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\ln n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{\psi(n)}\right)\frac{\ln n}{n} = \mathcal{O}(1),$$

to na osnovu kriterijuma M. Tomića možemo zaključiti da je ovaj λ-postupak F-permanentan kada funkcija $\psi(n)$ zadovoljava uslov

(3.24) $\qquad \psi(n) \geqslant c_2 n^{\theta}$, gde je $\theta \geqslant 2$.

Za slučaj $\theta < 2$, pomoću ovoga stava ništa ne možemo zaključiti. Očigledno, (3.24) je slabije od prethodnog (3.22).

Ni kriterijum B. Nađa [4] u ovom slučaju ne daje precizniji rezultat. Naime, sada ćemo videti da je on još i slabiji.

Kako je uslov (A) proveren ranije, treba još utvrditi da li je ispunjen uslov

$$(\gamma) \qquad \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}|\Delta^2\lambda_k^n| = \mathcal{O}(1), \; n=1,2,\ldots .$$

Na osnovu (3.23), uslov (γ) (videti str. 44) je

$$(3.25) \qquad \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\left|(-1)^k\frac{4}{\psi(n)}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\right| = \frac{4}{\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right).$$

Kako je

$$x\ln x \geqslant x-1 \quad \text{za } x > 0, \text{ (videti [14])},$$

to je

$$(3.26) \qquad (n-k)\ln\frac{n}{n-k} = \frac{(n-k)^2 n}{n(n-k)}\cdot\ln\frac{n}{n-k} \geqslant \frac{(n-k)^2}{n}\left(\frac{n}{n-k}-1\right) = \frac{n(n-k)}{n}$$

i

$$(3.27) \qquad (n-k)\ln\frac{n}{n-k} = (n-k)\ln n - (n-k)\ln(n-k) \leqslant (n-k)\ln n - (n-k-1).$$

Znači, iz (3.26) i (3.27) sledi

$$\frac{k(n-k)}{n} \leqslant (n-k)\cdot\ln\frac{n}{n-k} \leqslant (n-k)\ln n - (n-k-1).$$

Ako se u (γ), odnosno (3.25) uvede nejednakost (3.26), dobija se

$$(3.28)\qquad \frac{4}{\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right) = \frac{4}{n(n+1)\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}k(n-k)^2.$$

Primenom Abelove transformacije na zadnju sigmu dobija se

$$\sum_{k=0}^{n-1}k(n-k)^2 = \sum_{k=0}^{n-2}(2n-2k-1)\sum_{v=0}^{k}v + \sum_{v=0}^{n-1}v =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(n-k-\tfrac{1}{2})k(k+1) + \mathcal{O}(n^2).$$

Ponovo primenom Abelove transformacije dobija se

$$\sum_{k=0}^{n-1}k(n-k)^2 = \sum_{k=0}^{n-2}(n-k-\tfrac{1}{2})k(k+1) + \mathcal{O}(n^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-3}\sum_{v=0}^{k}v(v+1) + \frac{3}{2}\sum_{v=0}^{n-2}v(v+1) + \mathcal{O}(n^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-3}\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^4).$$

Odatle sada sledi da je (3.28)

$$\frac{4}{\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right) \geqslant \frac{4}{n(n+1)\psi(n)}\,\mathcal{O}(n^4) = \frac{\mathcal{O}(n^2)}{\psi(n)}.$$

Kako

$$\frac{\mathcal{O}(n^2)}{\psi(n)} \longrightarrow \infty$$

za

$$(3.29)\qquad \psi(n) = \mathcal{O}(n^{\vartheta}), \qquad \vartheta < 2,$$

to pomoću kriterijuma B. Nađa za $\vartheta<2$ ništa ne možemo zaključiti o F-permanentnosti pomenutog postupka.

Ako se u (γ), odnosno (3.25) primeni nejednakost (3.27), dobija se

$$\frac{4}{\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right) \leqslant \frac{4}{\psi(n)}\sum_{k=0}^{n-1}\Big[(n-k)\ln n-(n-k-1)\Big]\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)=$$

$$= \frac{4}{(n+1)\psi(n)}\ln n\,\mathcal{O}(n^3) - \frac{4}{(n+1)\psi(n)}\,\mathcal{O}(n^3).$$

Zadnji izraz je ograničen za

$$\Psi(n) \geqslant C_3(n^{\theta} \ln n), \ \theta \geqslant 2,$$

što znači da je i λ-postupak F-permanentan za

$$(3.30) \qquad \Psi(n) \geqslant C_3(n^{\theta} \ln n) \text{ pri } \theta \geqslant 2.$$

Upoređenjem (3.29) i (3.30) može se zaključiti:

1° Ako je $\Psi(n) = \mathcal{O}(n^{\theta})$, $\theta < 2$, pomoću stava B. Nađa ništa se ne može utvrditi o F-permanentnosti postupka.

2° Ako je $\Psi(n) \geqslant C_3(n^{\theta} \ln n)$, $\theta \geqslant 2$, pomoću stava B. Nađa može se zaključiti da je λ-postupak F-permanentan.

Na kraju, nije teško zaključiti da je u ovom slučaju najefikasniji bio stav 15, pomoću koga smo zaključili da je ovaj λ-postupak F-permanentan za

$$\Psi(n) \geqslant C_1(n^{\theta} \ln n), \text{ pri } \theta \geqslant 1.$$

STAV 16. Neka je λ-postupak definisan pomoću matrice $\{\lambda_k^n\} = \{\alpha_k^n \beta_k^n\}$ $(k=0,1,2,\ldots,n:\ n=1,2,\ldots)$. Tada su uslovi:

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1$, $k=0,1,2,\ldots$,

(I) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\Delta \alpha_k^n| = \mathcal{O}(1)$, $\alpha_n^n = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,\ldots$,

(II) $\sum\limits_{k=0}^{n-2} (k+1)|\Delta^2 \beta_k^n| = \mathcal{O}(1)$ i $n|\Delta \beta_{n-1}^n| = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,\ldots$,

(III) $\lambda_n^n \ln n = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,\ldots$,

(IV) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_k^n| \ln(2k+1) = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,\ldots$

dovoljni da λ-postupak bude F-permanentan.

Dokaz: Kako je uslov (A) ispunjen, a uslov (B), odnosno ograničenost norme sledi na osnovu stava 7, to na osnovu stava Nikoljskog (videti str. 39) sledi da je postupak F-permanentan.

Specijalno za $\alpha_k^n \equiv 1$, stav 16. proširuje rezultat M. Tomića [3].

Sada ćemo na prethodnom primeru 3 pokazati da stav 16. predstavlja stvarno proširenje pomenutog stava.

Kod tog primera λ-postupak je definisan, kao što smo videli, koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$, gde je

$$\alpha_k^n = 1 + \frac{(-1)^k}{\psi(n)}, \quad \psi(n) \to \infty, \quad n \to \infty,$$

$$\beta_k^n = 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Ispitajmo pomoću stava 16, F-permanentnost ovoga λ-postupka:

Uslov (A) je ispunjen, što je ranije utvrđeno. Uslov (II) je ispunjen jer je $\Delta^2 \beta_k^n \equiv 0$, Očigledno je da je ispunjen i uslov (III) jer

$$\left[1 + \frac{(-1)^n}{(n)}\right] \frac{\ln n}{n+1} \to 0 \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Kako su β_k^n ograničeni, to iz ispunjenja uslova (IV) sledi i ispunjenje uslova (I), pa je dalje dovoljno ispitati uslov (IV).

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_{k+1}^n| \ln(2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} \left|(1 - \frac{k}{n+1}) \frac{2(-1)^k}{\psi(n)}\right| \ln(2k+1) \leqslant$$

(3.31)

$$\leqslant \frac{2}{\psi(n)} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) = \frac{2}{\psi(n)} \ln(2n-1)!!.$$

Kako je $(2n-1)!! < n^n$ za $n > 1$, to zamenom u (3.31) dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta \alpha_{k+1}^n| \ln(2k+1) \leqslant \frac{2}{\psi(n)} n \ln n = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots$$

za

$$\psi(n) \geqslant c_4 (n^{\theta} \ln n), \quad \theta \geqslant 1. \tag{3.32}$$

Odavde sledi da je pomenuti λ-postupak sigurno F-permanentan za $\psi(n)$ koja zadovoljava uslov (3.32), dok smo u prethodnom ispitivanju za ovaj λ-postupak, pomoću stava M. Tomića [3], utvrdili da je F-permanentan za

$$\psi(n) \geqslant c_2 (n^{\theta}), \quad \theta \geqslant 2. \tag{3.33}$$

Iz (3.32) i (3.33) može se videti da stav 16 nije samo teorijsko proširenje stava M. Tomića i da skup postupaka za koje to proširenje važi njie prazan.

STAV 17. Ako je λ-postupak definisan koeficijentima $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ ($k=0,1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$), za F-permanentnost λ-postupka dovoljno je da budu ispunjena sledeća četiri uslova:

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1, \quad k=0,1,2,\dots,$$

(I) $$\sum_{k=0}^{m-1} |\Delta \alpha_k^m| = \mathcal{O}(1) \quad \text{i} \quad \alpha_m^m = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots,$$

(II) $$\sum_{k=0}^{m} (k+1)\,|\Delta^2 \beta_k^m| = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots,$$

(III) $$\beta_m^m \ln m = \mathcal{O}(1) \quad \text{za svako } m \leq n=1,2,\dots .$$

Dokaz sledi neposredno iz stava 8.

3.2.2. Uslovi F-permanencije dobijeni razlaganjem koeficijenata na sabirke

U ovom odeljku posmatraćemo λ-postupke kod kojih su koeficijenti λ_k^n dati u obliku $\lambda_k^n = \alpha_k^n \pm \beta_k^n$ ($k=0,1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$).

STAV 18. Neka je λ-postupak definisan koeficijentima λ_k^n ($k=0,1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$). Tada je za F-permanentnost dovoljno da budu ispunjena sledeća tri uslova:

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1, \quad k=0,1,2,\dots,$$

(I) da postoji niz α_k^n ($k=0,1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$) sa ograničenom normom $\|U_n^\alpha\|$, takav da je $\lambda_k^n - \alpha_k^n$ nerastući konveksan niz po k,

(II) $$\lambda_n^n - \alpha_n^n = \mathcal{O}(1), \quad \lambda_0^n - \alpha_0^n = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\dots .$$

Dokaz: Uslov (A) je ispunjen, a s obzirom na uslove (I) i (II), na osnovu stava 9, ispunjen je i uslov (B).

U svom radu [1] (str. 124) J. Karamata i M. Tomić su dali primer jednog λ-postupka zbirljivosti koji nije potpadao ni pod jedan od vrlo opštih stavova pomenutog rada, a koji je F-permanentan.

Napomenimo da se na taj λ-postupak ne može primeniti stav S. M. Nikoljskog, kao ni stav B. Nađa.

Ovaj λ-postupak definisan je koeficijentima λ_k^n na sledeći način:

$$\lambda_{2k-1}^n = \lambda_{2k}^n = 1 - \frac{k}{n+1} \quad (k=0,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots;\ \lambda_{-1}^n=0).$$

F-permanentnost ovoga postupka pomoću stava 18 dosta se jednostavno utvrđuje.

Koeficijente λ_k^n napišimo u obliku niza

$$1\ ;\ 1-\frac{1}{n+1};\ 1-\frac{1}{n+1};\ 1-\frac{2}{n+1};\ 1-\frac{2}{n+1};\dots;\ 1-\frac{n-1}{n+1};\ 1-\frac{n-1}{n+1}\ ;$$
$$;\ 1-\frac{n}{n+1};\ 1-\frac{n}{n+1}$$

ili

$$1\ ;\ 1-\frac{2}{2(n+1)};\ 1-\frac{2}{2(n+1)};\ 1-\frac{4}{2(n+1)}\ ;\ 1-\frac{4}{2(n+1)};\dots;$$
$$1-\frac{2(n-1)}{2(n+1)}\ ;\ 1-\frac{2(n-1)}{2(n+1)}\ ;\ 1-\frac{2n}{2(n+1)}\ ;\ 1-\frac{2n}{2(n+1)}\ .$$

Označimo pomoću

$$\alpha_k^n = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)} & \text{za k-parno} \\ 0 & \text{za k-neparno} \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\dots), \tag{3.34}$$

tada oduzimanjem koeficijenata α_k^n od λ_k^n dobijamo koeficijente $\overline{\lambda}_k^{2n}$, tj.

$$\overline{\lambda}_k^{2n} = \lambda_k^n - \alpha_k^n\ ,$$

koje možemo napisati u obliku

$$\overline{\lambda}_k^{2n} = 1 - \frac{k}{2(n+1)} \quad (k=0,1,2,\dots,2n;\ n=1,2,\dots).$$

Trigonometrijski polinom definisan koeficijentima α_k^n ima ograničenu normu jer je

$$\|U_n^\alpha\| = \frac{2}{\pi}\ \left|\frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{2n}\alpha_k^n \cos kt\right| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos 2kt\right)\frac{1}{2(n+1)}\right| dt = O(1),\ n=1,2,\dots\ .$$

Kako je niz $\overline{\lambda_k^{2n}}$ konveksan i nerastući po k, a kako je $\overline{\lambda_{2n}^{2n}} = o$ i $\overline{\lambda_o^{2n}} = 1$, to na osnovu stava 18 sledi F-permanentnostst postupka.

STAV 19. Da bi λ-postupak definisan koeficijentima λ_k^n $(k=o,1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$ bio F-permanentan, dovoljno je da budu ispunjena sledeća tri uslova:

(A) $$\lim_{n\to} \lambda_k^n = 1, \quad k=o,1,2,\dots,$$

(I) $\lambda_o^n = \mathcal{O}(1)$, λ_k^n nerastući, konveksan niz po k $(k=o,1,\dots,n)$, tj. konveksan je niz $\lambda_o^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n,\dots,\lambda_n^n$,

(II) $\lambda_n^n \ln n = \mathcal{O}(1)$, $n=1,2,3,\dots$.

Dokaz: Neka je niz

$$\gamma_k^n = \lambda_k^n - \delta_k^n,$$

gde je

$$\delta_k^n = \frac{\lambda_n^n}{n}\,k.$$

Kako je niz λ_k^n konveksan za $(k=o,1,2,\dots,n)$, tada je konveksan i niz γ_k^n a $\gamma_n^n = o$, tj. γ_k^n je konveksan za $(k=o,1,2,\dots,n)$.

Norma polinoma definisanog koeficijentima γ_k^n je

$$\|U_n^\gamma\| = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \Big| \frac{\gamma_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^n \cos kt \Big| dt.$$

S obzirom na monotonost i konveksitet niza γ_k^n, na osnovu Fejerovog stava o pozitivitetu jezgra, polinom pod modulom je pozitivan, tj.

$$\|U_n^\gamma\| = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \Big|\frac{\gamma_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^n \cos kt\Big| dt = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \Big(\frac{\gamma_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k^n \cos kt\Big) dt = \gamma_o^n.$$

Sa druge strane,

$$\gamma_o^n = \|U_n^\gamma\| = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \Big|\frac{\lambda_o^n - \delta_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^n - \delta_k^n)\cos kt\Big| dt \geqslant$$

$$\geqslant \Big| \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \Big|\frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\Big| dt - \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \Big| \frac{\delta_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k^n \cos kt\Big| dt\Big| =$$

$$= \left| \, \|U_n^\lambda\| - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\delta_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k^n \cos kt\right| dt \right| = \left| \, \|U_n^\lambda\| - \|U_n^\delta\| \, \right| .$$

Kako je $\delta_k^n = \frac{\lambda_n^n}{n} k$ neopadajući pozitivan niz, na osnovu našeg stava 2 (a) je

$$\|U_n^\delta\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\delta_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k^n \cos kt\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi^2}\delta_n^n \ln(4n^2-1) - \delta_o^n + 2\delta_n^n - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k^n}{2k-1} ,$$

odakle, s obzirom na to da je $\delta_k^n = \frac{\lambda_n^n}{n} k$, dobijamo

$$\|U_n^\delta\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\lambda_n^n \ln(4n^2-1) + 2\lambda_n^n - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_n^n}{n}\,\frac{k}{2k-1} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\lambda_n^n \ln(4n^2-1) + 2\lambda_n^n - \frac{8\lambda_n^n}{\pi n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2k-1} .$$

Kako je po pretpostavci $\lambda_n^n \ln n = \mathcal{O}(1)$ i kako je

$$\frac{\lambda_n^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2k-1} < \lambda_n^n ,$$

to je

$$\|U_n^\delta\| = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\ldots .$$

Sada iz

$$\delta_o^n \geqslant \left| \, \|U_n^\lambda\| - \|U_n^\delta\| \, \right| ,$$

proizlazi

$$\|U_n^\lambda\| = \mathcal{O}(1), \quad n=1,2,\ldots .$$

Na osnovu prethodnog, sledi da je i λ-postupak F-permanentan, što je trebalo i pokazati.

Napomenimo da je u ovom stavu za konveksitet potrebno da druge diferencije budu pozitivne samo do $\Delta^2\lambda_{n-2}^n$, što znači da $\Delta^2\lambda_{n-1}^n = \lambda_{n-1}^n - \lambda_n^n$ i $\Delta^2\lambda_n^n = \lambda_n^n$ mogu biti proizvoljnog znaka, a to u stavu S. M. Nikoljskog nije bio slučaj (videti str.43). U stavu Nikoljskog konveksitet niza λ_k^n bio je sa nulom, tj. konveksan je bio i niz

$$\lambda_o^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_{n-1}^n, o.$$

3.2.3. Uslovi F-permanencije postupka definisanog sumatornom funkcijom

Ovde ćemo dati dovoljne uslove za F-permanentnost datog λ-postupka ako je matrica $\{\lambda^n_k\}$ definisana pomoću sumatorne funkcije.

STAV 20. Dovoljan uslov da bi λ-postupak definisan sumatornom funkcijom $\varphi(\frac{k\pi}{2n})$, tj. koeficijentima $\lambda^n_k = \varphi(\frac{k\pi}{2n})$, $k=o,1,2,\ldots,n$; $n=1,2,\ldots$), bio F-permanentan jeste da funkcija $\varphi(u)$ bude konveksna na $[o,\frac{\pi}{2}]$.

Dokaz sledi neposredno iz stava 10 jer uslov (A) sledi iz $\varphi(o) = 1$, a uslov (B) iz stava 10.

3.2.4. Uslovi F-permanencije postupaka koji imaju pozitivno jezgro

Videli smo da je finitni λ-postupak F-permanentan ako je jezgro pozitivno na $[o,\pi]$. Sada ćemo dati dovoljne uslove za F-permanentnost λ-postupka koji ima pozitivno jezgro na $[o,\delta]$, gde je δ konačan broj $o < \delta < \pi$.

STAV 21. Da bi finitni λ-postupak definisan koeficijentima λ^n_k $(k=o,1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$ bio F-permanentan, dovoljno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda^n_k = 1, \quad k=o,1,2,\ldots,$$

(I) $$\lambda^n_{|k-p|} - \lambda^n_{k+p} \downarrow o \quad \text{po } k,$$

(II) $$\sum_{k=o}^{n-1} |\Delta\lambda^n_k| = O(1), \quad n=1,2,\ldots,$$

(III) $$\lambda^n_n = O(1), \quad n=1,2,\ldots .$$

Dokaz sledi iz stava 11 jer je uslov (A) pretpostavljen a uslov (B) sledi iz uslova (I), (II) i (III).

Napomenimo da su uslovi (I), (II) i (III) slabiji od konveksiteta.

L I T E R A T U R A

[1] J. Karamata i M. Tomić - O zbirljivosti Furijeovih redova Glas srpske Akademije nauka, 2o6, N5, 89-126, 1953.

[2] J. Karamata i M. Tomić - Sur la sommation des séries de Fourier des fonctions continues. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe sci. 8, 123-138, 1955.

[3] M. Tomić - Sur les fakteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe sci. 8, 23-32, 1955.

[4] M. Tomić - Einige sätze über die positiv tät der trigonometrischen polunome. Publ. Inst. Math. Acad. serbe sci. 4, 145-156, 1952.

[5] B. Nagy - Sur une class générale de procédés de sommation pour les séries de Fouirier. Hung.A.Math. I. N3, 14-52, 1948.

[6] B. Nagy - Méthodes de sommation des séries de Fourier. I. Acta Scient. Mathem. Szeged, 12, pars. B, 2o4-21o, 195o.

[7] O. Szasz - Introduction to the theory of divergent series, Cincinnati, 1946.

[8] C. N. Moore - On the application of Borel-s method to the summation of Fourier series. Proc.Nat.Ac.11. S.248-287,1925.

[9] M. Riesz - Sur la sommation des séries de Fourier. Acta Szeged. T. I. fasc. II, s. 1-1o, 1923.

[1o] S. Aljančić - O nekim novijim rezultatima iz trigonometrijske aproksimacije. Zbornok radova Srpske Ákad. nauka. knj. LXIX, 196o.

[11] S. Aljančić - Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. Beograd, 1968.

[12] A. Zygmund - The approrimation of functions by tupical means of their Fourier series. Duke Math.J.12,695-7o4, 1945.

[13] J. Favard - Sur les meilleurs procédés d'apprixim ation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques. Bill. sciece s math. 61, 2o9-224, 243-256, 1937.

[14] D. S. Mitrinović - Nejednakosti, Beograd 1965.

[15] A. Zygmund - Trigonometric series,Volume I, II, Cabrige, 1959.

[16] С. М. НИКОЛЬСКИЙ- О линейних методах суммирования рядов Фурье. Изв. АН СССР, серия матем., 12, 259-278, 1948.

[17] П. В. ГАЛКИН-Оценки для констант Левега, Труди МИАН им. Стеклова. том 1о9 ст. 3-5. 1971.

[18] А. В. ЕФИМОВ- О линейних методах суммирования рядов Фурье.. Изв. АН СССРссерия матем. 24. 743-756. 196о.

[19] А. В. ЕФИМОВ- О линейних методах суммирования рядов Фурье периодической функсий. Докл. АН. СССР, 131, №2. 234-237.196о.

[2о] А. В. ЕФИМОВ-Оценка интеграла от модуля многочлена на единичн чной окружености. Успехи матем. наук, 15, вып. 4, 215-218, 196о.

[21] С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ-О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I. Труды МИАН им Стеклова , 62, 61-97, 1961.

[22] С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ- О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье.II. Изв. АН СССР, 27, 253-272. 1963.

[23] С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ-Оцека нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории апроксимации. Труды МИ АН СССР том 1о9 стр. 65-97. 1971.

[24] А. Ф. ТИМАН-Теория приближеня функций действительного переменого . М. 196о.

[25] С. Б. СТЕЧКИН-О привлижении непрерывных периодических функций суммами Фавара.Труды МИ АН СССР им Стеклова, том 1о9 стр. 26-34. 1971.

[26] М. Ж. ИВОВИЧ-Оценки тригонометрических интегралов Математички весник 1о(25) стр. 271-274, 1973.

[27] П. П. КОРОВКИН- Линейние оператори и теория привлижения, Москва,,1959.

[28] Н. БАРИ- Тригонометрические ряди. Москва 1961

[29] Н. И. АХИЕЗЕР-Лекции по теории апроксимасии. Москва 1947.

[3о] Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ-Курс диференциального и интегрального исчисления. III. Москва 1966.

[31] А. Х. ТУРЕЦКИЙ- Теория интерполирования в задачах. Минск 1968.

[32] ХАРДИ-РОГОЗИНСКИЙ-Ряди Фурье, 195о.

[33] Н. П. НАТАНСОН-Теория функций вещественой переменой. Москва 1974.

[34] И. С. ГРАДШТЕИН и И. М. РИЖАК- Тавлици интегралов и сумм рядов и произведений. Москва 1971.

[35] С. В. СТЕЧКИН-К проблеме множителей для тригонометрических полиномов. Докл. АН СССР, 75, № 2, 195о, стр. 165-168.

[36] А. Ф. ТИМАН- Несколько замечаний о тригонометрических полиномах и рядах Фурье-Стильтьеса. Успехи матем. наук, 12, № 2, стр. 175-183, 1957.

S A D R Ž A J