MILOŠ ČANAK

METODE DIFERENCIJALNIH I FUNKCIONALNIH JEDNAČINA ZA REŠAVANJE NEKIH TIPOVA KONTURNIH PROBLEMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD

1976

U V O D

Konturni problemi teorije analitičkih i drugih funkcija predstavljaju problem odredjivanja funkcije ili neke njene osobine na osnovu funkcionalnih veza koje postoje na konturi. Iz toga bi se moglo zaključiti da se radi prvenstveno o problemima teorije funkcija kompleksne promenljive, kao i da se uglavnom koriste metode kompleksne analize, što nikako nije slučaj. Širinom pitanja koja obradjuju i mnoštvom rezultata do kojih se došlo, oni su se nametnuli širokom krugu istraživača. Mnogi novi rezultati teorije integralnih, diferencijalnih i parcijalnih jednačina, funkcionalne analize, topologije i numeričke analize omogućili su da se metode ovih disciplina obilato koriste u teoriji konturnih problema i obrnuto, razvoj ove teorije doveo je do nekih novih rezultata u navedenim disciplinama, što ukazuje na organsku povezanost koja je ovim putem ostvarena. Konturni problemi se mogu formulisati i u najrazličitijim oblastima teorijske fizike, mehanike i tehnike kao što su: hidrodinamika, dinamika fluida, teorija elastičnosti, teorija elektrostatičkog i magnetskog polja itd. i svaka formulacija odgovaraće specifičnostima odgovarajuće discipline. Ma kako se ove formulacije razlikovale od formulacije konturnog problema u teoriji analitičkih funkcija, izvesne fundamentalne metode koje se na isti način svuda pojavljuju u rešavanju ukazuju na jedinstvo problematike konturnih problema, ma kako ona na prvi pogled izgledala heterogena. Bogatstvom problema koje tretiraju, širinom primena u drugim granama i mogućnošću korišćenja najširih aparata raznih disciplina teorijske matematike, klasifikacija konturnih problema je jako otežana. Ipak opredelićemo se za podelu konturnih problema u dve velike grupe i to: konturni problemi tipa Riemann-a i konturni problemi tipa Hilbert-a, bez obzira koliko ova podela imala uslovni karakter. U prvu grupu spadaju problemi u kojima treba odrediti deo po deo analitičku funkciju

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & z \in D^+ \\ \Phi^-(z) & z \in D^- \end{cases}$$

na osnovu date veze izmedju konturnih vrednosti funkcija $\Phi^+(z)$ i $\Phi^-(z)$. Druga grupa sadrži probleme u kojima treba odrediti funkciju $\Phi(z) = u + i\,v$ analitičku u datoj oblasti D, ako je data funkcionalna veza izmedju konturnih vrednosti realnog i imaginarnog dela.

Počnimo sa izlaganjem prve glave u kojoj je navedena poznata materija iz teorije konturnih problema za analitičke funkcije a koja će se koristiti pri obrazovanju novih metoda rešavanja konturnih problema i dobijanju novih rezultata u toj oblasti.

I glava

Konturni problemi Riemann-a, Dirichlet-a i Hilbert-a

1.1. Uvodni pojmovi

Formula Cauchy-ja je formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z) & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases} \qquad (1.1.1.)$$

gde je $f(z)$ analitička funkcija u D^+ a neprekidna u $D^+ \cup L$ i gde je L glatka zatvorena kontura koja deli ravan na unutrašnju oblast D^+ i spoljašnu D^-. Ova formula omogućava izračunavanje vrednosti funkcije u svakoj tački oblasti ako su poznate njene vrednosti na granici, dakle ona rešava konturni problem za analitičke funkcije.

Integral tipa Cauchy-ja je integral

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \qquad (1.1.2.)$$

gde je L glatka zatvorena ili nezatvorena kontura a $\varphi(\tau)$ neprekidna funkcija tačaka konture. Ovaj integral predstavlja analitičku funkciju u celoj ravni osim tačaka same konture. Zato kažemo da je linija integracije L singularna linija za funkciju $\phi(z)$.

Uslov Hölder-a: Neka je L glatka kriva i $\varphi(t)$ funkcija tačaka te krive. Funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava na krivoj uslov Hölder-a, ako za ma koje dve tačke te krive važi nejednakost

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A\,|t_2 - t_1|^{\lambda} \qquad (1.1.3)$$

gde su A i λ realni brojevi i $0 < \lambda \leq 1$. Za $\lambda = 1$ imamo Lipschitz-ov uslov.

Glavna vrednost integrala tipa Cauchy-ja: Neka je L glatka kontura, τ i t kompleksne koordinate tačaka konture, a l deo konture L koji iseca krug sa centrom u tački t, poluprečnika ρ.. Glavna vrednost integrala tipa Cauchy-ja definiše se izrazom:

$$I = \lim_{\rho \to 0} \int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \, . \qquad (1.1.4.)$$

Može se pokazati da je u slučaju zatvorene konture

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \, d\tau + i\pi \varphi(t) \qquad (1.1.5.)$$

gde integral na desnoj strani postoji ako funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava uslov Hölder-a.

Formule Plemelj-a: Jedno od osnovnih pitanja u teoriji integrala tipa Cauchy-a je ispitivanje ponašanja ovog integrala na konturi integracije. Ispitivanja koja je naš matematičar Josip Plemelj izvršio u toj oblasti dovela su ga do fundamentalnih rezultata koji su izraženi u t.zv. formulama Plemelj-a i čiji je smisao u ovome: Integral tipa Cauchy-ja sa gustinom $\varphi(\tau)$ koja zadovoljava uslov Hölder-a ima neprekidnu graničnu vrednost pri približavanju ka konturi integracije sa bilo koje strane, ali te granične vrednosti su različite, tako da pri prelazu preko konture ovaj integral pravi skok. Označimo sa $\phi^+(t)$ i $\phi^-(t)$ granične vrednosti analitičke funkcije $\phi(z)$ kad z teži tački t na konturi iznutra i spolja a sa $\phi(t)$ vrednost funkcije u tački t. Tada se može pokazati [44] da važe sledeće formule Plemelj-a:

$$\phi^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \phi(t) \qquad (1.1.6)$$

$$\phi^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \phi(t)$$

gde je

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \, . \qquad (1.1.7)$$

Oduzimanjem formula (1.1.6.) dobijamo formulu

$$\phi^+(t) - \phi^-(t) = \varphi(t) \qquad (1.1.8)$$

koja pokazuje da funkcija $\phi(z)$ pri prelazu preko konture pravi skok veličine $\varphi(t)$.

Indeks: Na glatkoj zatvorenoj konturi L zadana je neprekidna funkcija G(t) koja na konturi ne uzima vrednost 0. Indeks $\varkappa$ funkcije G(t) na konturi L je priraštaj njenog argumenta pri obilasku konture u pozitivnom smeru podeljen sa 2π. On se označava na sledeći način:

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg G(t) \right]_L \, . \qquad (1.1.9)$$

Koristeći sledeću očiglednu relaciju

$$\ln G(t) = \mathrm{lu} \quad G(t) \quad + i \arg G(t)$$

možemo doći do izraza za indeks:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\Big[\ln G(t)\Big]_L . \qquad (1.1.10.)$$

Navodimo ovde sledeće osobine indeksa koje se lako proveravaju:

a) Indeks funkcije koja je neprekidna na zatvorenoj konturi i nigde se ne anulira je ceo broj ili 0.

b) $\mathrm{Ind}\,\left[F(t)\cdot G(t)\right] = \mathrm{Ind}\,F(t) + \mathrm{Ind}\,G(t)$

c) $\mathrm{Ind}\,\frac{F(t)}{G(t)} = \mathrm{Ind}\,F(t) - \mathrm{Ind}\,G(t)$

d) $\mathrm{Ind}\,t^{\varkappa} = \varkappa\,\mathrm{Ind}\,t = \varkappa.$

<u>Teorema o analitičkom produženju</u>: Neka su u oblastima D_1 i D_2 koje se graniče duž neke glatke krive L zadane analitičke funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ i neka su pri $z \to t$, $(t \in L)$ granične vrednosti tih funkcija na konturi L jednake. Tada funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ predstavljaju analitičko produženje jedna druge.

<u>Uopštena teorema Liouville-a</u>: Neka je funkcija f(z) analitička u celoj ravni kompleksne promenljive i neka je jedinstveni singularitet funkcije pol reda m u beskonačno dalekoj tački. Tada je funkcija f(z) polinom stepena m t.j.

$$f(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m . \qquad (1.1.11.)$$

<u>Konturni problem skoka</u>: Neka je na zatvorenoj konturi koja deli ravan na oblasti D^+ i D^- data funkcija $\varphi(t)$ koja zadovoljava uslov Hölder-a. Treba naći funkciju $\phi(z)$ deo po deo analitičku, oblika

$$\phi(z) = \begin{cases} \phi^+(z) & z \in D^+ \\ \phi^-(z) & z \in D^- \end{cases} \qquad (1.1.12)$$

koja pri prelazu preko konture pravi skok $\varphi(t)$ t.j. takvu da je

$$\phi^+(t) - \phi^-(t) = \varphi(t). \qquad (1.1.13)$$

Na osnovu formula Plemelj-a (1.1.6) i (1.1.7) tražena funkcija će biti data izrazom:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau . \qquad (1.1.14)$$

Konturni problem Dirichlet-a: Konturni problem Dirichlet-a se formuliše za t.zv harmonijske funkcije u(x,y) t.j. takve za koje je

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.1.15}$$

Napomenimo da kod proizvoljne analitičke funkcije F(z) = u(x,y) + + i v(x,y) zbog ispunjenja uslova Cauchy - Riemann-a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.1.16}$$

dobijamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{1.1.17}$$

t.j. realni i imaginarni deo analitičke funkcije su harmonijske funkcije. Formulacija konturnog problema Dirichlet-a glasi: Neka je na na granici C oblasti D zadana neprekidna funkcija $F(\zeta)$. Treba naći funkciju u(z) neprekidnu u $\bar{D}$,($\bar{D}$ = D∪C) i harmonijsku u D,koja na granici C uzima vrednost $f(\zeta)$.

Rešenje problema može se na jedinstven način predstaviti u obliku

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} d\zeta \tag{1.1.18}$$

gde je G funkcija Green-a koja na konturi C uzima vrednost 0 a n unutrašnja normala. U specijalnom slučaju, kada je kontura C krug, formula (1.1.18.) prelazi u poznatu formulu Poisson-a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} d\theta \tag{1.1.19}$$

gde je $\zeta = Re^{i\theta}$, $z = re^{i\varphi}$,

Primetimo da je problem Dirichlet-a rešiv i za višedimenzionalne oblasti pri odredjenim uslovima koje mora da zadovoljava granica oblasti, a koje je ustanovio M. V. Keldiš u radu [83] . Za n dimenzionu kuglu $B = \{x \in R^n; \ |x| < R\}$ konturni problem se rešava pomoću integrala Poisson-a

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B} u(y) \frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)\, d\sigma}{|y - x|^n} \tag{1.1.20}$$

gde je $d\sigma$ element površine n-dimenzione sfere ∂B a cela formula se dobija iz formule Green-a.

Operator Schwarz-a S za funkciju u(s), definisanu i neprekidnu na konturi C, koja ograničava prostu, jednostruko povezanu oblast D, je operator koji definiše analitičku funkciju F(z), čija je konturna vrednost realnog dela jednaka u(s) t.j.

$$Su = F(z) = u(x,y) + iv(x,y). \qquad (1.1.21.)$$

Iz teorije harmonijskih funkcija poznato je da je rešenje konturnog problema Dirichlet-a funkcija u(x,y) čija je data granična vrednost na konturi u(s); da se ta funkcija odredjuje jednoznačno i da se pri tome koristi formula (1.1.18). Koristeći funkciju u(x,y) i jednačine Cauchy - Riemann-a, možemo izračunati harmonijsku funkciju v(x,y) spregnutu sa u(x,y) sa tačnošću do imaginarne konstante. Zbog toga je

$$F(z) = Su + i\beta_0 \;. \qquad (1.1.22.)$$

U slučaju da je kontura C jedinični krug, operator Schwarz-a prelazi u t.zv. integral Schwarz-a.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}\,d\sigma + iv_0 \;. \qquad (1.1.23.)$$

Konturni problem A_0: Data je prosta, glatka, zatvorena kontura L koja ograničava jednostruko povezanu oblast D. Treba odrediti funkciju F(z) analitičku u D, osim tačke z gde ima pol i čiji realni deo uzima na konturi L vrednost 0. Ako je oblast D jedinični krug u $C_k = \alpha_k + i\beta_k$, rešenje ovog konturnog problema dato je formulom:

$$\mathcal{Q}(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k z^k - C_k z^{-k} \;. \qquad (1.1.24.)$$

Za proizvoljnu oblast rešenje dobijamo konformnim preslikavanjem w = w(z) oblasti D na krug i tada važi formula

$$\mathcal{Q}(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{C_k\left[w(z)\right]^k - C_k\left[w(z)\right]^{-k}\right\}. \qquad (1.1.25.)$$

Konturni problem A: Data je prosta, glatka, zatvorena kriva L koja ograničava jednostruko povezanu oblast D. Treba odrediti funkciju F(z) analitičku y D, osim tačke z, u kojoj ima pol, i čiji je realni deo funkcija koja na konturi L uzima datu vrednost u(s).

Da bismo rešili ovaj konturni problem posmatrajmo funkciju $F(z) - Su(\zeta)$. Ona očigledno zadovoljava uslove zadatka A_0 pa je

$$F(z) - Su = Q(z), \qquad (u = u(s))$$

tj.

$$F(z) = Su + Q(z). \tag{1.1.26}$$

Regularizacioni množitelj: Proizvoljna funkcija $G(t) = G[t(s)] = a(s) + ib(s)$, definisana na prostoj, glatkoj, zatvorenoj konturi L ne mora u opštem slučaju da bude granična vrednost neke funkcije, analitičke u oblasti D ograničenoj konturom L. Regularizacioni množitelj $R(t)$ je funkcija konture L takva da je proizvod $\phi^+(t) = G(t)\cdot R(t)$ granična vrednost neke funkcije analitičke u D. Konturni problem odredjivanja regularizacionog množitelja za datu funkciju očigledno nije odredjen jer rešenje (ukoliko postoji) uvek možemo umnožiti proizvoljnom analitičkom funkcijom u D.

Realni regularizacioni množitelj je takva realna funkcija $p(s)$ da izraz $p(s)[a(s) + ib(s)]$ predstavlja graničnu vrednost analitičke funkcije $X^+(z)$. Funkcija $X^+(t)$ mora još biti nultog poretka svuda osim koordinatnog početka gde ima indeks $\varkappa$. Pri odredjivanju regularizacionog množitelja moramo razlikovati sledeća dva slučaja:

a) $\varkappa = 0$.

Tada se regularizacioni množitelj javlja u obliku:

$$p(s) = \frac{e^{-w_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}, \tag{1.1.27.}$$

koji se dobija iz očigledne relacije:

$$p(s)\left[a(s) + ib(s)\right] = t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)}, \quad (\gamma(z) = w + iw_1), \tag{1.1.28.}$$

izjednačavanjem modula leve i desne strane.

b) $\varkappa \gtrless 0$.

U tom slučaju regularizacioni množitelj se javlja u obliku:

$$p(s) = \frac{|t|^{\varkappa} e^{-w_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}} \tag{1.1.29.}$$

gde je $X^+(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)}$.

Konturni problem Riemann-a

Data je prosta, glatka, zatvorena kontura L koja deli ravan kompleksne promenljive na unutrašnju oblast D^+ i spoljašnju D^-, i dve funkcije G(t) i g(t) koje zadovoljavaju uslove Hölder-a, pri čemu funkcija G(t) ni u jednoj tački konture ne uzima vrednost 0. Treba naći funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ analitičke u D^+ i D^- koje na konturi L zadovoljavaju linearnu vezu

$$\phi^+(t) = G(t)\,\phi^-(t) \qquad \text{(homogen konturni problem)}$$

ili

$$\phi^+(t) = G(t)\,\phi^-(t) + g(t). \qquad \text{(nehomogen konturni problem)}$$

1.2. Homogen konturni problem Riemann-a

Pretpostavimo da je homogen konturni problem Riemann-a

$$\phi^+(t) = G(t)\,\phi^-(t) \tag{1.2.1.}$$

rešiv, da su rešenja $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$, i da broj nula funkcija $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ u D^+ i D^- iznosi N^+ i N^-. Iz poznate relacije

$$N^+ + N^- = \text{Ind } G(t) = \varkappa \tag{1.2.2.}$$

zaključujemo da indeks homogenog problema Riemann-a mora da bude nenegativan. Razlikovaćemo 2 slučaja;

a) $\varkappa = 0$.

Tada je funkcija ln G(t) jednoznačna a funkcije $\ln \phi^+(z)$ i $\ln \phi^-(z)$ analitičke. Logaritmovanjem relacije (1.2.1.) dobijamo:

$$\ln \phi^+(t) - \ln \phi^-(t) = \ln G(t) , \tag{1.2.3.}$$

čime prelazimo na zadatak odredjivanja deo po deo analitičke funkcije po zadanom skoku.

Na osnovu formule (1.1.13.) imaćemo rešenje

$$\ln \phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \ . \tag{1.2.4.}$$

Ako uvedemo oznaku $\ln \phi(z) = \Gamma(z)$ imaćemo:

$$\phi^+(z) = A\, e^{\Gamma^+(z)} , \quad \phi^-(z) = A\, e^{\Gamma^-(z)}, \tag{1.2.5.}$$

gde je A proizvoljna konstanta.

b) $\varkappa > 0$.

Pretpostavimo da koordinatni početak leži u D^+ i napišimo konturni uslov (1.2.1.) u obliku:

$$\phi^+(t) = t^{\varkappa}\left[t^{-\varkappa}G(t)\right]\phi^-(t)\ , \tag{1.2.6.}$$

gde funkcija $G_1(t) = t^{-\varkappa}G(t)$ ima očigledno indeks 0. Ako je na osnovu (1.2.4.) i (1.2.5.) predstavimo u obliku:

$$G_1(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}} \quad \text{gde je}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}G(\tau)\right]}{\tau - z}\,d\tau\ , \tag{1.2.7.}$$

dobićemo konturni uslov u sledećem obliku:

$$\frac{\phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^{\varkappa}\frac{\phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}\ . \tag{1.2.8.}$$

Jednačina (1.2.8.) pokazuje da su funkcije $\frac{\phi^+(z)}{e^{\Gamma^+(z)}}$ i $z^{\varkappa}\frac{\phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}}$ analitičke u D^+ i D^- i jednake na konturi, te prema tome predstavljaju analitičko produženje jedna druge t.j. predstavljaju grane jedne jedinstvene analitičke funkcije, koja u celoj ravni nema drugih singulariteta osim pola reda $\varkappa$ u beskonačnosti. Prema teoremi Liouville-a ova funkcija će predstavljati polinom reda $\varkappa$ sa proizvoljnim koeficijentima, pa će rešenje konturnog problema biti sledeće:

$$\phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}P_{\varkappa}(z)\ ,\quad \phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}z^{-\varkappa}P_{\varkappa}(z). \tag{1.2.9.}$$

Vidimo, dakle, da rešenje konturnog problema definisano formulom (1.2.3.) sadrži $\varkappa+1$ proizvoljnih konstanti i da je potpuno odredjeno ako je data funkcija ϕ^+ (ili ϕ^-) i njenih $\varkappa$ uzastopnih izvoda u nekoj tački.

Spomenimo još da se u teoriji konturnog problema Riemann-a često srećemo sa pojmom kanonske funkcije. Kanonska funkcija homogenog problema je deo po deo analitička funkcija nultog poretka u celoj ravni osim beskonačno daleke tačke, gde joj je poredak $\varkappa$ i koja zadovoljava konturni uslov (1.2.1.). Ako taj uslov napišemo u obliku

$$\phi^+(t) = t^{\varkappa}\left[t^{-\varkappa}G(t)\right]\phi^-(t), \tag{1.2.10.}$$

lako vidimo da se kanonska funkcija $X(z)$ odredjuje izrazom:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},\quad X^-(z) = z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}. \tag{1.2.11.}$$

Opšte rešenje homogenog problema može se tada za $\varkappa \geqslant 0$ pomoću kanonske funkcije izraziti u sledećem obliku:

$$\Phi(z) = \chi(z)\, P_{\varkappa}(z) \qquad (1.2.12.)$$

1.3. Nehomogen problem Riemann-a

Ako podjemo od uslova nehomogenog problema

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t) \qquad (1.3.1.)$$

i zamenimo funkciju G(t) sa količnikom graničnih vrednosti kanonskih funkcija t.j.

$$G(t) = \frac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)} \qquad (1.3.2.)$$

dolazimo do konturnog uslova

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} = \frac{\Phi^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} + \frac{g(t)}{\chi^{+}(t)} . \qquad (1.3.3.)$$

Kako funkcija $\frac{g(t)}{\chi^{+}(t)}$ zadovoljava uslov Hölder-a, možemo je na osnovu (1.1.8.) napisati u obliku razlike graničnih vrednosti analitičkih funkcija t.j.

$$\frac{g(t)}{\chi^{+}(t)} = \Psi^{+}(t) - \Psi^{-}(t) \qquad (1.3.4.)$$

gde je

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\chi^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} . \qquad (1.3.5.)$$

Tada konturni uslov dobija oblik

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} - \Psi^{+}(t) = \frac{\Phi^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} - \Psi^{-}(t) , \qquad (1.3.6.)$$

pri čemu funkcija $\frac{\Phi^{-}(z)}{\chi^{-}(z)}$ ima u beskonačnosti pol a za $\varkappa < 0$ nulu reda $\varkappa$.

Rasudjujući kao i u predhodnom poglavlju pri rešavanju homogenog problema dolazimo do sledećih rezultata:

a) $\varkappa \geqslant 0$

Tada je

$$\frac{\Phi^{+}(z)}{\chi^{+}(z)} - \Psi^{+}(z) = \frac{\Phi^{-}(z)}{\chi^{-}(z)} - \Psi^{-}(z) = P_{\varkappa}(z), \qquad (1.3.7.)$$

odakle dobijamo rešenje

$$\phi(z) = X(z)\left[\Psi'(z) + P_{\varkappa}(z)\right] . \tag{1.3.8.}$$

b) $\varkappa < 0$

Tada je nehomogen problem takodje rešiv osim za $\varkappa < -1$ kada je za rešivost konturnog problema potrebno i dovoljno da slobodni član $g(t)$ zadovoljava $-\varkappa-1$ uslova oblika:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 . \qquad (k = 1,2\ldots-\varkappa-1) \tag{1.3.9.}$$

Konturni problem Hilbert-a

Neka je data prosta, glatka, zatvorena kontura L i realne funkcije luka s konture $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ koje zadovoljavaju uslov Hölder-a. Treba naći funkciju $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, analitičku u oblasti D^+ i neprekidnu na L, čiji realni i imaginarni deo zadovoljavaju na konturi L uslov:

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) .$$

Ako je $c(s) = 0$ imamo odgovarajući homogen konturni problem a ako je $a(s) = 1$, $b(s) = 0$ konturni problem Hilbert-a prelazi u konturni problem Dirichlet-a.

1.4. Homogen konturni problem Hilbert-a

Konturni uslov

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = 0 \tag{1.4.1.}$$

možemo delenjem sa $\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}$ dovesti na oblik kod koga je zadovoljen uslov

$$a_1^2(s) + b_1^2(s) = 1 \tag{1.4.2.}$$

gde je

$$a_1 = \frac{a(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}} \quad \text{i} \quad b_1 = \frac{b(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}} .$$

Tada je

$$\frac{u(s) + i\, v(s)}{a_1(s) + i\, b_1(s)} = \left[u(s) + i\, v(s)\right]\cdot\left[a_1(s) - i\, b_1(s)\right] =$$

$$= (a_1 u + b_1 v) + i(a_1 v - b_1 u)$$

t.j. konturni uslov (1.4.1.) možemo pisati i u obliku

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F(t)}{a_1(s)+i\,b_1(s)}\right\}=0\ ,\quad (F(t)=u(t)+i\,v(t)\quad (1.4.3.)$$

Ako podelimo jednakost (1.4.3.) sa regularizacionim množiteljem (1.1.28.) dobićemo

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F(t)}{t^{\varkappa}\,e^{i\gamma(t)}}\right\}=0\ . \qquad (1.4.4.)$$

Sada možemo razlikovati sledeće slučajeve:

a) $\varkappa = 0$

Uslov (1.4.4.) predstavlja uslov konturnog problema Dirichlet-a a zbog jedinstvenosti toga problema imaćemo

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F(z)}{e^{i\gamma(z)}}\right\}=0. \qquad (1.4.5.)$$

Na osnovu relacije (1.1.22.) imamo da je

$$\frac{F(z)}{e^{i\gamma(z)}}=Su+i\beta_0$$

t.j.

$$F(z)=i\beta_0\,e^{i\gamma(z)} \qquad (1.4.6.)$$

gde je β_0 proizvoljna konstanta.

b) $\varkappa > 0$

Uslov (1.4.4.) predstavlja uslov konturnog problema A_0. Rešenje se javlja u obliku

$$F(z)=z^{\varkappa}\,e^{i\gamma(z)}\,Q(z)\ . \qquad (1.4.7.)$$

Zadatak tada ima $2\varkappa + 1$ linearno nezavisnih rešenja.

c) $\varkappa < 0$

U ovom slučaju može se pokazati da važi sledeća

Teorema: Rešenje homogenog konturnog problema Hilbert-a ne postoji u klasi analitičkih funkcija.

1.5. Nehomogen problem Hilbert-a

Konturni uslov

$$a_1(s)u(s)+b_1(s)v(s)=c_1(s) \qquad (1.5.1.)$$

možemo napisati u obliku

$$\mathrm{Re}\left[\frac{F(t)}{a_1(s)+i\,b_1(s)}\right]=c_1(s) \qquad (1.5.2.)$$

gde je

$$a_1(s)=\frac{a(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\ ,\quad b_1(s)=\frac{b(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\ ,$$

$$c_1(s)=\frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\ .$$

Ako obe strane (1.5.2.) podelimo regularizacionim množiteljem dobićemo relaciju

$$\mathrm{Re}\left[\frac{F(t)}{t^{\varkappa}\,e^{i\gamma(t)}}\right]=|t|^{-\varkappa}\,e^{w_1(s)}c_1(s)\ . \qquad (1.5.3.)$$

Opet možemo razlikovati sledeća tri slučaja:

a) $\varkappa=0$.

Konturni uslov (1.5.3.) je uslov problema Dirichlet-a. Rešenje problema možemo predstaviti pomoću operatora Schwarz-a u obliku:

$$F(z)=e^{i\gamma(z)}\left[S\left\{e^{w_1(s)}c_1(s)\right\}+i\beta_0\right]\ . \qquad (1.5.4.)$$

b) $\varkappa>0$.

Konturni uslov (1.5.3.) je uslov konturnog problema A i njegovo se rešenje na osnovu formule (1.1.26.) može predstaviti u obliku:

$$F(z)=z^{\varkappa}\,e^{i\gamma(z)}\left[S\left\{|t|^{-\varkappa}e^{w_1(s)}c_1(s)\right\}+Q(z)\right]\ . \qquad (1.5.5.)$$

c) $\varkappa<0$.

Analogno predhodnom razmatranju dolazimo do sledeće formule:

$$F(z)=z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}\left[S\left\{|t|^{-\varkappa}e^{w_1(s)}c_1(s)\right\}+i\beta_0\right]. \qquad (1.5.6.)$$

Vidimo dakle da je za $\varkappa\geqslant 0$ homogen i nehomogen problem Hilbert-a bezuslovno rešiv i homogen ima $2\varkappa+1$ linearno nezavisnih rešenja. Za $\varkappa<0$ homogen problem nije rešiv dok nehomogen ima rešenja.

1.6. Veza izmedju konturnih problema Riemann-a i Hilbert-a

Uprkos različitih formulacija može se uspostaviti veza izmedju konturnog problema Riemann-a i Hilbert-a. Veza se može uspostaviti ili metodom sravnjivanja rešenja ili uspostavljanjem veze medju konturnim uslovima. U slučaju proste konture (prava, krug) postoji jednostavna veza izmedju operatora Schwarz-a i integrala tipa Cauchy-ja. Za druge konture veza se može uspostaviti pomoću konformnog preslikavanja oblasti na krug ili pravu.

Pri traženju veze medju konturnim uslovima mora se zapaziti sledeće:

Kod konturnog problema Riemann-a traži se analitička funkcija definisana u celoj ravni a kod problema Hilbert-a, tražena funkcija definisana je samo u D^+ dok nas njeno ponašanje u D^- nije interesovalo. Da bi se mogla uspostaviti veza medju konturnim uslovima moramo proširiti oblast definisanosti funkcije $\phi^+(z)$ koja predstavlja rešenje konturnog problema Hilbert-a u D^-. Ako je kontura L bilo prava bilo jedinični krug, produženje ćemo vršiti u odnosu na pravu simetrično a u odnosu na krug kao inverziju. Može se doduše desiti da u slučaju neispunjenja uslova za princip simetrije produženje ne bude analitičko. Ali to nije ni potrebno već samo da produženje $\phi^-(z)$ bude sa $\phi^+(z)$ povezano preko konturnog uslova Riemann-a.

Podjimo od konturnog uslova

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) \tag{1.6.1.}$$

i napišimo ga u obliku

$$\mathrm{Re}\left\{[a(s) - ib(s)]\cdot[u(s) + iv(s)]\right\} = c(s)\,. \tag{1.6.2.}$$

Kako je

$$2\mathrm{Re}\left\{f(s)\right\} = f(s) + \overline{f(s)} = 2c(s) \tag{1.6.3.}$$

$$(f(s) = [a(s) - ib(s)]\cdot[u(s) + iv(s)] \quad \text{to je}$$

$$[a(s) - ib(s)]\phi^+(t) + [a(s) + ib(s)]\overline{\phi^+(t)} = 2c(s) \tag{1.6.4.}$$

gde je $\phi^+(t) = u + iv$.

Kako za jedinični krug i realnu pravu važi relacija $\overline{\phi^+(t)} = \phi^-(t)$ to je

$$\phi^+(t) = -\frac{a(s) + ib(s)}{a(s) - ib(s)}\,\phi^-(t) + \frac{2c(s)}{a(s) - ib(s)} \tag{1.6.5.}$$

čime je rešavanje konturnog problema Hilbert-a svedeno na odredjivanje funkcije $\phi^+(z)$ konturnog problema Riemann-a.

1.7. Uopštenja konturnih problema Riemann-a i Hilbert-a

Mogućnosti uopštenja konturnog problema Riemann-a su velike i na ovom mestu ne mogu biti obuhvaćene. Spomenimo zato samo neke od njih.

a) U konturnom uslovu problema Riemann-a, umesto vrednosti funkcije mogu se pojaviti vrednosti izvoda a takodje i članovi integralnog karaktera.

b) Umesto linearnog može se razmatrati nelinearni konturni problem Riemann-a (o ovome će više reči biti u II glavi)

c) Oblast ograničena konturom L može biti višestruka a kontura L može se sastojati iz proizvoljnog broja otvorenih lukova i kontura.

d) U postavci konturnog problema umesto analitičkih funkcija mogu se pojaviti funkcije opštijeg vida.

Navedimo ovde samo radi ilustracije jedan primer iz a)

Konturni problem sa konturnim uslovom koji sadrši izvod

Neka je data prosta, glatka, zatvorena kontura L koja deli ravan kompleksne promenljive na oblasti D^+ i D^-. Treba odrediti funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ analitičke u D^+ i D^- koje na konturi zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[a_k(t)\,\frac{d^k\phi^+(t)}{dt^k}+\int_L A_k(t,\tau)\,\frac{d^k\phi^+(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau\right]-$$

$$-\sum_{k=0}^{p} b_k(t)\,\frac{d^k\phi^-(t)}{dt^k}+\int_L B_k(t,\tau)\,\frac{d^k\phi^-(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau=f(t)\qquad(1.7.1.)$$

gde su $a_k(t)$ i $b_k(t)$ zadane neprekidne funkcije a $A_k(t,\tau)$ i $B_k(t,\tau)$ Fredholm-ova jezgra.

Ovaj konturni problem rešio je Ю. M. Krikunov u svome radu [36]. On je najpre pokazao da funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ mogu biti predstavljenje sledećim formulama:

$$\phi^+(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\tau)(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_k}{k!}z^k\qquad(1.7.2.)$$

(na isti način i $\phi^-(z)$).

Funkcija μ predstavlja rešenje singularne integralne jednačine:

$$a(t)\mu(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L K(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=\tau(t).\qquad(1.7.3.)$$

Na ovaj način problem se svodi na rešavanje singularnih integralnih jednačina.

- / -

Mogućnosti uopštenja konturnog problema Hilbert-a mogu se kretati u istom smislu kao i kod konturnog problema Riemann-a i to:

a) Mogu se razmatrati konturni uslovi sa izvodima i članovima integralnog karaktera.

b) Oblast D može biti višestruko povezana i šema rešavanja je donekle slična rešavanju problema za jednostruko povezanu oblast.

c) Može se umesto linearnog razmatrati nelinearni konturni problem Hilbert-a (o ovome će još biti reči u IV glavi).

d) U postavci konturnog problema umesto analitičkih funkcija mogu se pojaviti funkcije opštijeg vida (o ovome će više reči biti u III glavi).

Razmotrimo neke mogućnosti iz a).

I) F. D. Gahov [24a] je formulisao konturni problem na sledeći način: Odrediti funkciju $\Phi(z) = u + iv$ analitičku u oblasti D^+ koja je ograničena prostom zatvorenom konturom L i koja zadovoljava na konturi uslov:

$$\sum_{k=o}^{m} \left[a_k(s) \frac{d^k u}{ds^k} + b_k(s) \frac{d^k u}{ds^k}\right] = f(s) \,, \qquad (1.7.4.)$$

pri čemu su koeficijenti $a_k(s)$; $b_k(s)$; $f(s)$ realne neprekidne funkcije.

II) I. Vekua [20] je razmatrao konturni uslov u obliku

$$\mathrm{Re} \sum_{k=o}^{m} \left[a_k(t) \Phi^{(k)}(t) + \int_L h_k(t,\tau) \Phi^{(k)}(\tau)\, d\tau\right] = f(t) \qquad (1.7.5.)$$

gde su $a_k(t)$ i $h_k(t,\tau)$ kompleksne a $f(t)$ realna funkcija, $h_k(t,\tau)$ Fredholm-ova jezgra a $\Phi^{(k)}(t)$ granične vrednosti izvoda k-tog reda funkcije $\Phi(z)$.

III) D. I. Šerman [82] formulisao je konturni problem za harmonijske funkcije na sledeći način:
Odrediti harmonijsku funkciju $u(x,y)$ u oblasti D^+ koja na konturi zadovoljava uslov:

$$\sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{k} a_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = f(s) , \qquad (1.7.6.)$$

pri čemu su koeficijenti $a_{kj}(s)$, $f(s)$ realne neprekidne funkcije.

Može se pokazati da je konturni problem (1.7.5.) najopštiji i da se ostala dva problema mogu svesti na njega.

Pri rešavanju problema II, konturni uslov (1.7.5.) može se svesti na integralnu jednačinu Fredholm-a oblika:

$$\mu(s) + \int_L K(s, \sigma)\mu(\sigma)\, d\sigma = 2f(s) - \mathrm{Re} \sum_{k=o}^{m-\varkappa} C_k w_k(s). \qquad (1.7.7.)$$

gde je $K(s, \sigma)$ jezgro Fredholm-a a $w_k(s)$ poznata kompleksna funkcija. Ovo se medjutim dalje svodi na sistem oblika

$$\sum_{k=1}^{2(m-\varkappa)+1} g_{jk}\, \alpha_k = f_j \qquad (j = 1,2 \ldots\ldots q) \qquad (1.7.8.)$$

gde je potrebno posmatrati rang matrice $\| g_{jk} \|$. Važi sledeća

Teorema: Da bi nehomogeni konturni problem II bio rešiv neophodno je i dovoljno da se rang r matrice $\| g_{jk} \|$ sistema (1.7.8.) ne povećava ako matrici dodamo kolonu slobodnih članova.

1.8. Neki momenti u istorijskom razvoju teorije konturnih problema Riemann-a i Hilbert-a

Konturni problem Riemann-a formulisan je još u XIX-om veku, ali se sistematski počeo izučavati tek u XX-om veku uporedo sa izučavanjem osobina integrala tipa Cauchy-ja. Prvi značajniji pokušaj rešavanja učinio je Hilbert (za slučaj g=o) a prvo potpuno i efektivno rešenje dao je F.D. Gahov (1937) za slučaj kada je Γ zatvorena, glatka linija a funkcije G(t) i g(t) zadovoljavaju na konturi uslov Hölder-a. Posle fundamentalnih radova J. Plemelja o izučavanju ponašanja integrala tipa Cauchy-ja na granici, postao je ovaj integral osnovni aparat rešavanja konturnih problema. Dalji razvoj konturnog problema Riemann-a nastavljen je u svim mogućim pravcima. Navedimo samo neke od najinteresantnijih radova u ovoj oblasti:

B. V. Hvedelidze (1941) u svome radu [72a] uopštio je rešavanje na višestrukopovezanu oblast.

F. D. Gahov (1941) u svojoj doktorskoj disertaciji [24] razmotrio je slučaj kada funkcija G(t) ima u konačnom mnoštvu tačaka razreze prvog reda.

L.G. Magnaradze je u svojim radovima [39] i [40] razmotrio slučaj kada funkcije G(t) i g(t) umesto uslova Hölder-a zadovoljavaju uslov oblika:

$$\int_0^a \frac{w(\tau)}{\tau} |\ln\tau|^p d\tau < \infty$$

(gde je w t.zv. modul neprekidnosti).

D. A. Kveselava je u radu [27] razmotrio slučaj kada se linije koje obrazuju Γ medjusobno seku ili kad na konturi postoje druge singularne tačke.

A.V. Mesis rešila je konturni problem Riemann-a za slučaj kada su G(t) i g(t) višeznačne funkcije koje pripadaju nekom polju algebarskih funkcija.

Konturnom problemu Hilbert-a posvećeno je srazmerno manje radova nego problemu Riemann-a. Najveći razlog tome je što u slučaju jednostruko povezane oblasti problem može biti lako sveden na problem Riemann-a.

Rešenje ovog problema prvi je kompletno dao Hilbert [12] ,(1905) koristeći rešenja problema Dirichleta pod pretpostavkom da je Γ linija Ljapunova a a(s), b(s) i c(s) funkcije koje zadovoljavaju uslov Hölder-a.

Najinteresantniji radovi u ovoj oblasti vezani su za imena F.D. Gahov-a, I.N. Vekue, N.I. Mushelišvili-ja, D.A. Kveselave i drugih.

N.I. Mushelišvili je izučio konturni problem Hilbert-a u slučaju kada funkcije a(s) i b(s) mogu imati razreze prvog reda.

F.D. Gahov je, koristeći Hilbert-ove formule koje povezuju granične vrednosti realnog i imaginarnog dela funkcije, sveo problem na sistem singularnih integralnih jednačina.

Za razliku od konturnog problema Riemann-a gde se slučajevi razmatranja jednostruko i višestruko povezane oblasti malo razlikuju, konturni problem Hilbert-a za višestruko povezane oblasti ispituje se složenije. Do prvog suštinskog rezultata došao je D.A. Kveselava (1945) u radu [28] utvrdivši da u slučaju negativnog indeksa ($\varkappa < 0$) homogen konturni problem nema netrivijalnih rešenja a u slučaju $\varkappa \geqslant 0$ ima $\varkappa - r$ linearno nezavisnih rešenja.

I.N. Vekua u svojoj monografiji [3] je ispitao konturni problem za rešenja sistema parcijalnih jednačina eliptičkog tipa. Isti autor je prvi kompletno ispitao u radu [20] t.zv. uopšteni konturni problem Hilbert-Poincaré-a koji se sastoji u nalaženju holomorfne funkcije $\Phi(z)$ u nekoj oblasti E na osnovu konturnog uslova:

$$\mathrm{Re} \sum_{j=0}^{k} \left\{ a_j(t)\Phi^{(j)}(t) + \int_{\Gamma} h_j(t,\tau)\,\Phi^{(j)}(\tau)\,d\sigma \right\} = f(t), \quad (t \in \Gamma).$$

Postoji još mnogo drugih važnih radova pretežno sovjetskih autora koji doprinose da razvoj teorije konturnih problema dobija sve veći zamah i sve novije impulse tako da se više ne može sa sigurnošću predvideti kako će se odvijati dalji razvoj.

Zaključak

Prethodna izlaganja u ovoj glavi ukazuju nam da metodologija istraživanja navedene problematike iako raznovrsna, ipak je standardna u osnovi i oslanja se na integrale tipa Cauchy-ja, formule Plemelj-a, operator Schwartz-a i singularne integralne jednačine. Analizom postupka rešavanja i formula (1.3.8.) za konturni problem Riemann-a kao i (1.5.4.), (1.5.5.) i (1.5.6.) za konturni problem Hilbert-a možemo zaključiti sledeće:

Teorija konturnih problema Riemann-a i Hilbert-a vrlo je široko razradjena a rešenja se izražavaju u zatvorenom obliku preko integrala tipa Cauchy-ja i operatora Schwarz-a. Medjutim, u opštem slučaju ne postoji prost algoritam za izračunavanje navedenih integrala pa je u praksi potrebno koristiti neke približne metode integracije. I samo izračunavanje operatora Schwarz-a može u praksi da stvara velike teškoće. Osim toga, koeficijenti konturnih problema Riemann-a i Hilbert-a moraju da zadovoljavaju uslov Hölder-a (ili neki drugi), jer se u protivnom čitavo razmatranje ne može primeniti. Zbog svega toga javlja se jasno izražena potreba da se pronadju i istraže neke nove metode rešavanja konturnih problema Riemann-a i Hilbert-a koje u pojedinim slučajevima olakšavaju i skraćuju postupak nalaženja rešenja a sa druge strane omogućavaju rešavanje i u nekim slučajevima kada nisu ispunjene pretpostavke za rešavanje standardnim putem.

U narednim glavama biće izložena dva metodski nova pristupa problematici konturnih problema i to, metoda primene diferencijalnih i funkcionalnih jednačina.

U drugoj glavi razmatra se nelinearni konturni problem Riemann-a koji je u odnosu na odgovarajući linearni, srazmerno malo istraživan.

Razmatra se zatim jedna klasa diferencijalnih jednačina i ukazuje kako rešenje takve jednačine može biti uzeto i za rešenje odgovarajućeg konturnog problema. Metodika istraživanja sastoji se dakle u tome da se uporedo posmatra konturni uslov i odgovarajuća komparativna diferencijalna jednačina i da se na osnovu rešenja diferencijalnih jednačina ili nekih njihovih osobina izvode odgovarajući zaključci za rešenja konturnih problema.

U trećoj glavi dat je drugi aspekt metode primene diferencijalnih jednačina: Ovde se pre svega posmatraju t.zv. areolarne diferencijalne jednačine, t.j. jednačine kod kojih se umesto običnog pojavljuje areolarni izvod nepoznate kompleksne funkcije. U ovoj glavi dato je nekoliko priloga teoriji areolarnih diferencijalnihjednačina. Rešenja ovih jednačina su klase funkcija koje mogu biti opštije od analitičkih, pa se i za njih mogu formulisati i rešavati konturni problemi. A time se otkriva i smisao drugog aspekta metode diferencijalnih jednačina. To je ispitivanje svojstva areolarnih diferencijalnih jednačina i rešavanje konturnih problema za ove jednačine (ili bolje rečeno za rešenja ovih jednačina).

Jedan od aparata za rešavanje areolarnih diferencijalnih jednačina su areolarni redovi. Oni su uvedeni kao prirodno uopštenje pojma areolarnih polinoma sa jedne strane i c-potencijalnih redova sa druge strane. Raspravljeno je pitanje konvergencije ovih redova i ukazano na mogućnosti primene.

Jedno poglavlje posvećeno je pitanju egzistencije i jedinosti rešenja areolarne diferencijalne jednačine I reda. Pokazano je da u slučaju ispunjenja odredjenih uslova važi teorema analogna klasičnoj Picard-ovoj teoremi i da n-tu sukcesivnu aproksimaciju predstavlja areolarni polinom n-tog reda.

U specijalnom slučaju areolarne jednačine se svode na eliptički sistem parcijalnih jednačina I reda. Opšti slučaj ovog sistema je detaljno ispitao I Vekua u monografiji [3] . Ukazano je i na neke radove S. Fempla, J. Kečkića i D. Dimitrovskog. U daljem razmatranju dati su neki prilozi rešavanju ovih sistema a posebno je ukazano na vezu izmedju rešavanja opšteg eliptičkog sistema I reda i problema Mitrinovića.

U ovoj glavi dat je i poseban osvrt na konturne probleme za areolarne diferencijalne jednačine a posebno za eliptičke sisteme. I. Vekua je konturni problem tipa Hilbert-a za eliptički sistem rešio svodjenjem na integralnu jednačinu sa singularnim jezgrom Cauchy-ja.

Medjutim, kada je kontura L predstavljena u obliku $\bar{z} = g(z)$,($g(z)$ =analitička funkcija), rešen je konturni problem tipa Dirichlet-a za neke klase eliptičkih sistema.

U ovoj glavi dat je i originalan način rešavanja konturnog problema Hilbert-a za neke klase neanalitičkih funkcija i to a) za p-analitičke funkcije b) za (p,q)-analitičke funkcije c) za rešenje areolarne diferencijalne jednačine n-tog reda. Konturni problemi za ove klase funkcija rešeni su svodjenjem na problem Hilbert-a za analitičke funkcije.

U četvrtoj glavi se pokazuje kako se do rešenja konturnih problema može doći metodom primene funkcionalnih jednačina. Ideja nije nova jer postojeća metoda Winer-Hopf-a daje rešenje konturnog problema Riemman-a za slučaj kada je kontura L prava paralelna sa x osom. U ovoj glavi je medjutim razmotrena i funkcionalna jednačina tipa Hilbert-a i pokazano kako se, koristeći njeno rešenje može rešiti i odgovarajući konturni problem Hilbert-a.

\- / -

U daljem izlaganju definicije, leme, teoreme, njihovi dokazi, primeri kao i pojedini odeljci, koji predstavljaju originalne rezultate autora, biće označeni dvaput podvučenom linijom. Ukoliko se u nekim odeljcima, odn. u dokazima nekih teorema autor koristio poznatim činjenicama, biće naročito naglašeno.

II glava

Veza izmedju diferencijalnih jednačina i konturnog problema Riemann-a

2.1. Linearni konturni problem Riemann-a za poluravan i linearna diferencijalna jednačina I reda

Posmatrajmo uslov konturnog problema Riemann-a u obliku

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) - g(t) = 0, \quad t\in L, \tag{2.1.1.}$$

i linearnu diferencijalnu jednačinu I reda

$$y' + p(x)y + q(x) = 0, \tag{2.1.2.}$$

gde je L prosta, glatka kontura a funkcije $G(t)$, $g(t)$ kao i $p(x)$, $q(x)$ zadovoljavaju na konturi L odnosno na x osi uslov Hölder-a. Opšte rešenje jednačine (2.1.2.) kao što je poznato dato je formulom

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[c - \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx\right] = \alpha(x) \tag{2.1.3.}$$

Neka je $\alpha(x)$ diferencijabilna funkcija za svako x, osim možda konačnog broja tačaka prekida i neka je njen izvod

$$y' = \alpha'(x) = \beta(x)\,. \tag{2.1.4.}$$

Vrednosti (2.1.3.) i (2.1.4.) dobijene iz diferencijalne jednačine (2.1.2.) možemo koristiti za rešavanje konturnog problema (2.1.1.). Zaista, neka je kontura L x-osa a D^+ i D^- gornja i donja poluravan. Koeficijente $p(x)$ i $q(x)$ diferencijalne jednačine možemo uzeti za koeficijente konturnog problema (2.1.1.) t.j.

$$p(x) = -G(t) = -G(x), \quad q(x) = -g(t) = -g(x). \tag{2.1.5.}$$

Tada, uporedjujući jednačinu (2.1.2.) i konturni uslov (2.1.1.) vidimo da funkciju $y = \alpha(x)$ možemo uzeti za graničnu funkciju tražene funkcije $\Phi^-(z)$ a funkciju $y' = \beta(x)$ za graničnu funkciju tražene funkcije $\Phi^+(z)$. Najzad, analitičkim produženjem funkcije $\alpha(x)$ u donju poluravan i funkcije $\beta(x)$ u gornju poluravan, dobijamo funkcije $\alpha = \alpha(z) = \Phi^-(z)$ i $\beta = \beta(z) = \Phi^+(z)$ koje predstavljaju rešenja konturnog problema (2.1.1.). Na taj način, koristeći diferencijalnu jednačinu (2.1.2.) i njeno opšte rešenje (2.1.3.), možemo doći do rešenja odgovarajućeg konturnog problema.

Jednačinu (2.1.2.) nazvaćemo komparativnom jednačinom za kon-

turni problem (2.1.1.).
Primer: Odrediti funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ koje na x osi zadovoljavaju sledeći konturni uslov Riemann-a

$$\phi^+(x) = \frac{1}{x} \cdot \phi^-(x) + x. \tag{2.1.6.}$$

Formirajmo odgovarajuću komparativnu diferencijalnu jednačinu

$$y' - \frac{1}{x} y - x = 0. \tag{2.1.7.}$$

Njeno opšte rešenje na osnovu formule (2.1.3.) biće

$$y = \alpha(x) = cx + x^2, \tag{2.1.8.}$$

a prvi izvod rešenja

$$y' = \beta(x) = c + 2x . \tag{2.1.9.}$$

Analitičkim produženjem funkcija (2.1.8.) i (2.1.9.) u oblast D^- odnosno D^+ (donja i gornja poluravan) dobijamo funkcije

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= cz + z^2 = \phi^-(z) \\ \beta(z) &= c + 2z = \phi^+(z) \end{aligned} \tag{2.1.10.}$$

koje predstavljaju rešenja postavljenog konturnog problema Riemann-a.
Napomena: Linearni konturni problem Riemann-a za poluravan može se rešavati standardnim postupkom, koristeći integral tipa Cauchy-ja i formiranje kanonske funkcije $\chi(z)$. Rešenje problema javlja se u obliku

$$\phi(z) = \begin{cases} \chi(z) \left[\Psi(z) + \dfrac{P_{\varkappa}(z)}{(z+i)^{\varkappa}}\right], & \varkappa \geq 0 , \\ \chi(z) \left[\Psi(z) + C\right] , & \varkappa < 0, \end{cases} \tag{2.1.11.}$$

gde je $P_{\varkappa}(z)$ polinom sa proizvoljnim koeficijentima a

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} . \tag{2.1.12.}$$

Iz gornjeg izlaganja vidimo da korišćenje diferencijalne jednačine (2.1.2.) bitno skraćuje postupak rešavanja konturnog problema, najviše zbog toga što je u praksi izbegnuto izračunavanje integrala tipa Cauchy-ja. Medjutim, primenljivost navedene metode je ograničena iz sledećih razloga:

I) Razmatra se samo slučaj kada je kontura L realna osa.

II) Navedena metoda daje rešenje onih problema kod kojih izmedju funkcija $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ postoji veza $\alpha'(x) = \beta(x)$.

III) Rešenja konturnog problema koja se oslanjaju na formule (2.1.3.)

i (2.1.4.) sadrže samo jednu proizvoljnu konstantu dok opšte rešenje definisano formulom (2.1.11.) za $\varkappa > 0$ sadrži $\varkappa + 1$ proizvoljnih konstanti. Navedena metoda dakle ne obezbedjuje uvek nalaženje opšteg rešenja već samo jedne klase rešenja konturnog problema.

2.2. Nelinearni konturni problem Riemann-a

U svome radu [60] A. Susea je postavio nelinearni homogeni konturni problem tipa Riemann-a u sledećoj formulaciji: Neka je data kontura L, koja predstavlja skup glatkih, zatvorenih krivih L_0, L_1.. .. L_p i koja deli ravan na (p+1)-tostruko povezanu oblast D^+ i oblast D^-. Treba odrediti funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$, analitičke u D^+ i D^-, koje na konturi L zadovoljavaju uslov

$$\left[\phi^+(t)\right]^{\alpha(t)} = G(t)\left[\phi^-(t)\right]^{\beta(t)} , \qquad (2.2.1.)$$

gde je G(t) data funkcija, koja zadovoljava uslov Hölder-a, a eksponenti $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ predstavljaju konturne vrednosti nekih analitičkih funkcija u D^+ i D^-.

Autor je u ovom radu učinio nekoliko pokušaja u rešavanju pomenutog konturnog problema, ali izlišna opštost u formulaciji zadatka nije mu dozvolila da dodje do suštinskih rezultata.

Zaista, označimo sa N_+ i N_- broj nula traženih funkcija $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$. Ako potražimo indeks leve i desne strane uslova (2.2.1.) i pri tom koristimo osobine indeksa b) i d) iz 1.1. dobićemo

$$N_+\alpha(t) + N_-\beta(t) = \varkappa . \qquad (2.2.2.)$$

Jednakost (2.2.2.) predstavlja konturni uslov problema Riemann-a za odredjivanje analitičkih funkcija $\alpha(z)$ i $\beta(z)$ u oblastima D^+ i D^-. Kako su koeficijenti ovog (linearnog) problema konstantni, njegovo opšte rešenje se lako nalazi i dato je formulama

$$\alpha(z) = \frac{C}{N_+} \quad , \quad \beta(z) = \frac{\varkappa - C}{N_-} . \qquad (2.2.3.)$$

Na taj način došli smo do sledećeg zaključka: U konturnom problemu (2.2.1.) eksponenti $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ mogu biti samo konstante koje se odredjuju formulama (2.2.3.), pri čemu je C proizvoljna konstanta.

U radu [80] G.P. Čerepanov je razmotrio slučaj kada eksponenti α i β uzimaju vrednosti $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Opštiji slučaj, kada je jedan od pokazatelja jednak celom pozitivnom broju a drugi jedinici razmotrio je G.V. Aržanov u radu [15].

Najiscrpnija istraživanja sproveo je F.D. Gahov u radu [25] , gde je razmatrajući slučaj kada su α i β celi pozitivni brojevi došao do sledećih rezultata:

a) Za rešivost problema (2.2.1.) potreban i dovoljan uslov je da neodredjena jednačina

$$\alpha N_+ + \beta N_- = \varkappa \tag{2.2.4.}$$

bude rešiva u skupu celih nenegativnih brojeva.

b) Ako je L prosta, glatka, zatvorena kriva koja deli ravan na oblasti D^+ i D^- od kojih prva sadrži koordinatni početak a druga beskonačno daleku tačku, rešenje problema ima oblik

$$\Phi^+(z) = e^{\frac{1}{\alpha}\Gamma^+(z)} \left[P(z)\right]^{\frac{1}{\alpha}} , \tag{2.2.5.}$$

$$\Phi^-(z) = e^{\frac{1}{\beta}\Gamma^-(z)} \left[z^{-\varkappa} P(z)\right]^{\frac{1}{\beta}} .$$

Pri tome je $\Gamma(z)$ funkcija data izrazom

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa} G(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau \tag{2.2.6.}$$

a $P(z)$ polinom oblika

$$P(z) = \left[P_{N_+}(z)\right]^{\alpha} \cdot \left[P_{N_-}(z)\right]^{\beta} \tag{2.2.7.}$$

gde su P_{N+} i P_{N-} proizvoljni polinomi stepena N_+ i N_- čije se nule nalaze u oblastima D^+ odnosno D^- .

c) Rešenje problema (2.2.1.) ukoliko postoji, zavisi od $N_+ + N_- + 1$ proizvoljnih parametara.

d) Slučaj kada su eksponenti α i β racionalni brojevi može se svesti na razmatrani i ne predstavlja teškoću za ispitivanje.

U radu [35] I.I. Komjak je razmatrao slučaj kada je bar jedan od pokazatelja α i β iracionalan i pokazao sledeće:

a) Neodredjena jednačina (2.2.4.) može imati samo jedinstveno rešenje.

b) Ako je $\varkappa > 0$ a α i β iracionalni brojevi, problem je rešiv ako i samo ako je ispunjen uslov

$$\beta = \frac{1}{q} (\varkappa - p\alpha) \tag{2,2.8.}$$

gde su $0 < p < \frac{\varkappa}{\alpha}$ i $q > 0$ celi brojevi.

Ispitivanja ovog problema su novijeg datuma i sa izvesnošću se mogu očekivati novi rezultati. Oni se pored ostalog mogu odnositi na razna uopštenja u odnosu na konturu L , pokazatelje α i β , uslove koje treba da ispunjava koeficijent $G(t)$ i sam konturni uslov.

2.3. Jedna klasa diferencijalnih jednačina i njihova veza sa nelinearnim konturnim problemom Riemann-a

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu oblika

$$y = f\left(\frac{y'}{y}\right) \tag{2.3.1.}$$

i pretpostavimo da je funkcija f neprekidna i strogo monotona u intervalu $[a,b]$. Ako stavimo $\frac{y'}{y} = z$ tada u intervalu $[f(a), f(b)]$ postoji funkcija $z = g(y)$ inverzna funkciji $y = f(z)$, koja je i sama neprekidna i strogo monotona. Iz relacije

$$\frac{y'}{y} = g(y) \tag{2.3.2.}$$

razdvajanjem promenljivih dobijamo:

$$\frac{dy}{y\, g(y)} = dx ,$$

a integracijom leve i desne strane

$$\int \frac{dy}{y\, g(y)} = G(y) = x + c. \tag{2.3.3.}$$

Relacija (2.3.3) predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine (2.3.1.).

U praksi je medjutim često nemoguće odrediti inverznu funkciju $g(y)$ jer se jednačina (2,3,1) ne može uvek efektivno rešiti po z. Zato je potrebno koristiti neke posebne metode u pojedinim slučajevima.

a) Ako je jednačinu (2.3.1.) moguće rešiti po y', ona će se odmah svesti na jednačinu koja razdvaja promenljive.

b) Ako se jednačina (2.3.1.) može svesti na oblik $y = h(y')$ t.j. rešiti po y, onda za njeno rešavanje možemo koristiti sledeću teoremu (E. Kamke, Differentialgleichungen, s. 51) [7] .

Teorema: Neka je u nekom intervalu (t_1 , t_2), koji ne sadrži nulu, funkcija $h(t)$ strogo monotona i neprekidno diferencijabilna. Neka je zatim $t_1 < t_0 < t_2$, c proizvoljan realan broj, $d = h(t_0)$, i neka je a infimum a b supremum izraza

$$I = c + \int_{t_o}^{t} \frac{h'(t)}{t}\, dt\ , \qquad t \in (t_1, t_2)\,. \qquad (2.3.4.)$$

Tada postoji jedna i samo jedna integralna kriva $y = \varphi(x)$ jednačine (2.3.1.) koja prolazi kroz tačku (c,d), definisana u intervalu $a < x < b$. Ona se može parametarski predstaviti na sledeći način:

$$x = c + \int_{t_o}^{t} \frac{h'(t)}{t}\, dt\ , \quad y = h(t). \qquad (2.3.5.)$$

Ako nije moguć nijedan od načina rešavanja navedenih pod a) i b), potrebno je koristiti neke specijalne postupke. Posmatrajmo na pr. sledeće diferencijalne jednačine

$$\left(\frac{y'}{y} - q\right)^{\frac{q}{p-q}} = y\left(\frac{y'}{y} - p\right)^{\frac{p}{p-q}}\ , \qquad (I)$$

$$\left(\frac{y'}{y} - \alpha\right) y = e^{\frac{\alpha}{\frac{y'}{y}-\alpha}}\ , \qquad (II)$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{\frac{y'}{y}-\alpha}{\beta}\right)^2\right] + \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\frac{y'}{y}-\alpha}{\beta}\right) = \ln\frac{1}{y}\,. \qquad (III)$$

Može se pokazati da su one nastale iz homogene linearne diferencijalne jednačine II reda sa konstantnim koeficijentima

$$y'' + ay' + by = 0\,. \qquad (2.3.6.)$$

Zaista, smenom $y' = p$, $y'' = p\,\frac{dp}{dy}$ jednačina (2.3.7.) svodi se na homogenu diferencijalnu jednačinu I reda

$$\frac{p}{y}\frac{dp}{dy} + a\,\frac{p}{y} + b = 0\,. \qquad (2.3.7.)$$

Smenom $\frac{p}{y} = u$, $\frac{dp}{dy} = u + y\,\frac{du}{dy}$ jednačina (2.3.7.) svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$\frac{udu}{u^2 + au + b} = -\,\frac{dy}{y}$$

odakle je

$$\int \frac{udu}{u^2 + au + b} = \ln\frac{1}{cy}\,. \qquad (2.3.8.)$$

Integral na levoj strani relacije (2.3.8.) izračunava se po formuli

$$\int \frac{udu}{u^2+au+b} = \begin{cases} \ln \dfrac{(u-p)^{\frac{p}{p-q}}}{(u-q)^{\frac{q}{p-q}}}, \quad (a^2 > 4b) & (2.3.9.)_1 \\ \left(p = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \quad q = \dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\right) & \\ \ln(u-\alpha) - \dfrac{\alpha}{u-\alpha} \quad (a^2 = 4b) & (2.3.9.)_2 \\ \quad (\alpha = -\dfrac{a}{2}) & \\ \dfrac{1}{2}\ln\left[1+\left(\dfrac{u-\alpha}{\beta}\right)^2\right] + \dfrac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{u-\alpha}{\beta}, \quad (a^2 < 4b) & (2.3.9.)_3 \\ \left(\alpha = -\dfrac{a}{2}, \quad \beta = \dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right). & \end{cases}$$

Ako vrednosti integrala $(2.3.9.)_1$, $(2.3.9.)_2$ i $(2.3.9.)_3$ redom zamenjujemo u relaciju (2.3.8.) stavljajući pri tom $u = \frac{y'}{y}$, $c = 1$, zaista ćemo dobiti diferencijalne jednačine (I), (II) i (III).

Poznato je da su rešenja diferencijalne jednačine (2.3.6.) data formulom:

$$y = \begin{cases} c_1e^{px} + c_2e^{qx}, \quad a^2 > 4b & (2.3.10.)_1 \\ c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x}, \quad a^2 = 4b & (2.3.10.)_2 \\ e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x], \quad a^2 < 4b. & (2.3.10.)_3 \end{cases}$$

Potražimo rešenje diferencijalne jednačine (I) u obliku $(2.3.10.)_1$. Zamenom vrednosti $(2.3.10.)_1$ u jednačinu (I) i izjednačenjem leve i desne strane dobijamo vezu:

$$c_1 = (-c_2)^{\frac{p}{q}} \cdot (p-q)^{\frac{p}{q}-1} \quad . \qquad (2.3.11.)_1$$

Na isti način dobijamo i veze

$$c_1 = \frac{-2c_2\ln c_2}{a} \qquad (2.3.11.)_2$$

$$\frac{c_2}{c_1} = -\operatorname{tg}\frac{\beta}{2\alpha}(c_1^2 + c_2^2) \qquad (2.3.11.)_3$$

koje moraju biti ispunjene da bi funkcije $(2.3.10)_2$ i $(2.3.10.)_3$ bile rešenja diferencijalnih jednačina (II) i (III).

Zadržimo se sada na diferencijalnoj jednačini (I) i uporedimo je sa konturnim uslovom (2.2.1.). Kontura L je realna osa pa se koordinatni početak i beskonačno daleka tačka nalaze na njoj. Zbog toga nije ispunjen uslov da kontura bude zatvorena, koji Gahov postavlja u svom radu [25] . Koeficijent G(t) konturnog problema uzima vrednost

$$G(t) = G(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{qx} , \tag{2.3.12.}$$

gde konstante c_1 i c_2 zadovoljavaju relaciju $(2.3.11.)_1$. Eksponenti α i β su odredjeni vrednostima

$$\alpha = \frac{q}{p-q} , \quad \beta = \frac{p}{p-q} . \tag{2.3.13.}$$

U radu [35] I.I. Komjaka pretpostavlja se da su α i β pozitivni, dok ovde to ne mora da bude slučaj. Prena tome, možemo da formulišemo sledeći konturni problem:

<u>Problem:</u> Odrediti funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$ koje su analitičke u celoj poluravni D^+ odnosno D^- (osim u možda prebrojivom mnoštvu tačaka ravnomerno rasporedjenih duž neke prave paralelne imaginarnoj osi) i koje na konturi L (x osi) zadovoljavaju uslov:

$$\left[\phi^+ (x)\right]^{\alpha} = G(x) \left[\phi^-(x)\right]^{\beta} \tag{2.3.14.}$$

gde je $G(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{qx}$ i $\alpha = \frac{q}{p-q}$, $\beta = \frac{p}{p-q}$.

Koristeći diferencijalnu jednačinu (I) odmah vidimo da je

$$\begin{aligned} \phi^+(x) &= \frac{c_1 p e^{px} + c_2 q e^{qx}}{c_1 e^{px} + c_2 e^{qx}} - q \\ \phi^-(x) &= \frac{c_1 p e^{px} + c_2 q e^{qx}}{c_1 e^{px} + c_2 e^{qx}} - p. \end{aligned} \tag{2.3.15.}$$

Tada tražene analitičke funkcije imaju oblik:

$$\phi^+(z) = \frac{c_1 p e^{pz} + c_2 q e^{qz}}{c_1 e^{pz} + c_2 e^{qz}} - q , \quad (z \in D^+) \tag{2.3.16.}$$

$$\phi^{-}(z) = \frac{c_1 p e^{pz} + c_2 q e^{qz}}{c_1 e^{pz} + c_2 e^{qz}} - p\ , \quad (z \in D^{-}). \qquad (2.3.16.)$$

Napomena. Lako se mogu konstruisati dovoljno opšte klase kompleksnih funkcija, definisanih jedinstvenim analitičkim izrazima, koje pretstavljaju rešenje konturnog problema (2.3.14.) ali ne moraju biti analitičke. Takve su na primer funkcije oblika:

$$\phi(z) = \frac{c_1 p e^{pz} + c_2 q e^{qz}}{c_1 e^{pz} + c_2 e^{qz}} \left[\gamma(x,y) - \gamma(x,0) + 1\right] +$$

$$+ \left\{\frac{p-q}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left[\Psi(y)\right] - \frac{p+q}{2}\right\} \left[\delta(x,y) - \delta(x,o) + 1\right] \qquad (2.3.17).$$

gde je $\Psi(y)$ proizvoljna realna funkcija koja ispunjava uslove

$$\lim_{y \to +o} \Psi(y) = +\infty$$
$$\lim_{y \to -o} \Psi(y) = -\infty \qquad (2.3.18.)$$

a $\gamma(z) = \gamma(x,y)$ i $\delta(z) = \delta(x,y)$ proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije.

\- / -

Zaključak

Navedeni primeri iz poglavlja 2.1. i 2.3. ilustrovali su metodu primene nekih diferencijalnih jednačina na rešavanje linearnog i nelinearnog konturnog problema Riemann-a, kada je kontura L realna x - osa. Linearni konturni problem Riemann-a rešen je korišćenjem komparativne jednačine (2.1.2.) dok je za nelinearni problem komparativna jednačina data formulom (I). Videli smo da osnovni nedostatak metode predstavlja ograničenost njene primenljivosti jer nam ne garantuje dobijanje opšteg rešenja. Sa druge strane može se dogoditi da nas ona i ne može dovesti do rešenja iako ono postoji i može se realizovati standardnom metodom.

Medjutim, treba ukazati i na očigledne prednosti koje nam ona pruža. One se sastoje pre svega u velikoj jednostavnosti postupka efektivnog nalaženja rešenja. Osim toga, do rešenja problema je moguće doći i u nekim slučajevima, kada nisu ispunjene pretpostavke za rešavanje standardnim putem.

U vezi sa tim, osnovno pitanje koje se javlja jeste problem izbora komparativne diferencijalne jednačine. Ovaj problem zahteva dalja detaljna istraživanja ali je jasno da komparativnu jednačinu treba birati tako da nam ona omogući nalaženje što šire klase rešenja odgovarajućeg konturnog problema.

III glava

Areolarne diferencijalne jednačine i konturni problemi

3.1. Uvodni pojmovi

a) Operator Kolosov-a D: Na skupu kompleksnih funkcija

$$w(z) = u(x,y) + iv(x,y) \ , \quad z = x + iy \tag{3.1.1.}$$

gde su $u(x,y)$ i $v(x,y)$ diferencijabilne funkcije, G.V. Kolosov [32] , [33] , [34] uveo je operator D definisan jednakošću

$$Dw = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{3.1.2.}$$

U članku [33] autor je ovaj operator označio sa D_{xy} i koristio ga za integraciju raznih sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina koji se pojavljuju u matematičkoj fizici, naročito u teoriji elastičnosti. Kolosov je najpre dokazao u [32] izvesne formule (Kolosovljeve formule) koje su mu omogućile da radi sa D kao da je izvod a zatim ih je primenjivao u [34] inspirišući se odgovarajućim diferencijalnim jednačinama.

D. Pompeiu [54] i [55] tražeći formulu koja bi bila analogna Cauchy-jevoj integralnoj formuli za analitičke funkcije, došao je do izraza

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m\,(G_n)} \cdot \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_n} w(z)dz \tag{3.1.3.}$$

gde su G_n i Γ'_n redom nizovi oblasti, odnosno kontura koje su upisane u oblast G odnosno konturu Γ. On je taj izraz nazvao areolarnim (površinskim) izvodom neanalitičke funkcije $w(z)$. Za analitičke funkcije taj izraz očigledno postaje nula. Znatno kasnije A. Bilimović [17] i [19] uveo je pojam odstupanja analitičke funkcije $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ od analitičnosti kao vektor

$$\vec{B} = \operatorname{grad} u + [\vec{k}, \operatorname{grad} v] \tag{3.1.4.}$$

gde je $\vec{k} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ vektorski proizvod jediničnih vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ortogonalnih pravaca. Bilimovićev operator B se poklapa sa Kolosovljevim operatorom D. Bilimović je medjutim radio u drugom pravcu - ispitivao je geometrijska svojstva operatora. Sa druge strane, iako se može pokazati da i areolarni izvod Pompeiu-a predstavlja izraz proporcionalan operatoru D. Zbog toga nema sumnje da je Kolosov taj koji je prvi uveo operator D i primenio ga na integraciju sistema parcijalnih jednačina. Zato je čudno da njegovi rezultati nisu dovoljno poznati i da ga čak i ruski matemàtičari ne pominju (na pr. I. Vekua u svojoj monografiji [3], koja se bavi tim pitanjima, nigde ne navodi Kolosovljeve rezultate).

Paralelno sa operatorom D Kolosov je uveo i operator $\bar{D}$ definisan izrazom

$$\bar{D}w = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad (3.1.6.)$$

i koristio ga za rešavanje odgovarajućih sistema parcijalnih jednačina.

Napomenimo da se na oznake (3.1.5.) i (3.1.6.) često nailazi u literaturi. Medjutim uvek se tvrdi da se sa izrazima $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$ može operisati "kao" da su izvodi, pa se negde čak i daju neki dokazi njihovih osobina. U stvari $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$ jesu parcijalni izvodi po promenljivim $z, \bar{z}$ koje se mogu smatrati kao dve nezavisno promenljive. U prilog takvom shvatanju navodimo sledeće činjenice:

1) Za dve realne funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ kaže se da su nezavisne ukoliko ne postoji diferencijabilna funkcija φ takvá da je

$$u = \varphi(v) . \qquad (3.1.7.)$$

Kao što je poznato, potreban i dovoljan uslov za nezavisnost predstavlja relacija

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3.1.8.)$$

Uvodeći odgovarajuću definiciju nezavisnosti dve kompleksne funkcije od po dve realne promenljive, vidimo da potreban i dovoljan uslov ostaju nepromenjeni.

Razmotrimo sada funkcije

$$u(x,y) = x + iy = z$$
$$v(x,y) = x - iy = \bar{z} . \qquad (3.1.9.)$$

Za njih je

$$I = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -2i \neq 0$$

te su one, saglasno gornjoj definiciji, nezavisne.

2) Iz poznate Riemann-ove formule za izvod kompleksne funkcije

$$\frac{dw}{dz_\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] e^{-2i\varphi} \qquad (3.1.10.)$$

gde je $dz_\varphi = \varepsilon \cdot e^{i\varphi}$, $(\varepsilon = |dz|)$, množeći je sa dz_φ neposredno se dobija izraz koji je analogan totalnom diferencijalu funkcije sa dve nezavisno promenljive, naime

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial \bar z}d\bar z \,. \qquad (3.1.11.)$$

Na osnovu definicije (3.1.2.) vidimo da je za egzistenciju operatora D potrebno da funkcije u i v imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda po x i y. Sada ćemo medjutim ovu definiciju proširiti i pokazati da gornji uslov nije neophodan.

Neka je $U(z) = u + iv$ neprekidna funkcija promenljive $z = x + iy$ u nekoj oblasti T_0 i neka ima neprekidne parcijalne izvode I reda po x i y. Tada za svaku oblast T' $(T' \subset T_0)$ ograničenu prostom, zatvorenom, rektificibilnom krivom $\mathcal{L}$ važi formula Ostrogradskog

$$\iint_{T'} \mathbf{D}U\,dT = \frac{1}{i}\int_{\mathcal{L}} U(t)\,dt. \qquad (3.1.12.)$$

(Ovde se pod DU još uvek podrazumeva izraz $D = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar z}$ a dT je površinski element oblasti T).

Ako pustimo da kriva $\mathcal{L}$ smanjuje svoju dužinu i sažima se u jednu tačku $z = x + iy$, formula (3.1.12.) prelazi u formulu:

$$DU = \lim_{\mathcal{L}\to z} \frac{1}{i|T|}\int_{\mathcal{L}} U(t)\,dt \qquad (3.1.13.)$$

pri čemu $|T|$ označava merni broj površine oblasti T, a oznaka $\mathcal{L}\to z$ kazuje da se kriva $\mathcal{L}$ smanjivanjem svoje dužine sažima u tačku z.

Relacija (3.1.13.) izvedena je pod predpostavkom neprekidnosti parcijalnih izvoda funkcije U po x i y. Medjutim moguće je da desna strana relacije (3.1.13.) postoji i za takvu neprekidnu funkciju koja nema neprekidne parcijalne izvode po x i y. Stoga ćemo sada definisati DU u tački $z \in T_0$ preko relacije (3.1.13.), ukoliko izraz na desnoj strani egzistira i nezavisan je od načina sažimanja rektifikabilne zatvorene krive $\mathcal{L}$ u čijoj unutrašnjosti leži tačka z.

Ako DU neprekidno egzistira u svakoj tački oblasti T_0, kažemo da je U funkcija klase $C_{\bar{z}}(T_0)$. Očigledno, svaka funkcija U, koja u oblasti T ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po x i y, pripada klasi $C_{\bar{z}}(T)$.

Očigledno je da je

$$C^1(T) \subset C_{\bar{z}}(T) \subset C(T), \tag{3.1.14.}$$

gde je $C^k(T)$ skup neprekidnih funkcija koje imaju neprekidne parcijalne izvode do k-tog reda u oblasti T a $C^0(T) = C(T)$ skup svih neprekidnih funkcija u T.

Jasno je da svaka neprekidna, analitička funkcija $f(z)$ u oblasti T jeste funkcija klase $C_{\bar{z}}(T)$ i da je za nju ispunjena jednačina

$$Df = 0 \quad (\text{svuda u } T). \tag{3.1.15.}$$

Lako se može pokazati i obrnuto: (Vidi na primer [3] str. 11): Ukoliko funkcija $f(z)$ pripada klasi $C_{\bar{z}}(T)$ i zadovoljava jednačinu (3.1.15.) tada je ona neprekidna, analitička funkcija u T.

Jedan, za praksu vrlo važan potskup skupa $C_{\bar{z}}(T)$ pretstavljaju funkcije oblika

$$U(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{t-z}, \quad (t = \xi + i\eta) \tag{3.1.16.}$$

gde je $f(x,y)$ neprekidna, integrabilna funkcija u T. U monografiji [3] str. 11 pokazano je da je $U(z)$ neprekidna funkcija u celoj ravni i analitička izvan $T \cup \mathcal{L}$, da u beskonačnosti teži ka nuli, da $U(z) \in C_{\bar{z}}(T)$ i da je

$$DU = 2f\ . \tag{3.1.16a.}$$

Funkcije oblika (3.1.16.) nemaju uvek parcijalne izvode po x i y. Posmatrajmo na primer funkciju

$$f(x,y) = \frac{e^{2i\varphi}}{\log\frac{1}{r}} \quad (re^{i\varphi} = z) \tag{3.1.17.}$$

a za oblast T izaberimo krug $|z| < R < 1$. Izračunavanjem integrala (3.1.16.) dobijamo:

$$U(x,y) = -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{e^{2i\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho e^{i\varphi}-z)\log\frac{1}{\rho}} = -2z\log\log\frac{1}{r} + 2z\log\log\frac{1}{R}. \tag{3.1.18.}$$

Parcijalni izvodi funkcije (3.1.18.) po x i y su:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2\log\log\frac{1}{r} - 2\,\frac{e^{i\varphi}\cos\varphi}{\log r} + 2\log\log\frac{1}{R}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2i\log\log\frac{1}{r} - 2\,\frac{e^{i\varphi}\sin\varphi}{\log r} + 2i\log\log\frac{1}{R}\,, \qquad (3.1.19.)$$

pri čemu se odmah vidi da oni ne postoje u koordinatnom početku. Medjutim, areolarni izvod funkcije (3.1.18.) je

$$DU = -2\,\frac{e^{2i\varphi}}{\log r} \qquad (3.1.20.)$$

t.j. egzistira svuda y T i neprekidan je.

b) Inverzni operator Fempla f

Rumunska škola pod vodjstvom D. Pompeiu-a, naročito G. Calugareano [73] - [75] , M. Nikolesko [43] i N. Theodorescu [61] - [64] utvrdila je veliki broj važnih osobina areolarnog izvoda kao i integrala

$$T_G\, f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta - z} \qquad (3.1.21.)$$

koji je inverzan tome izvodu.

Nezavisno od njih S. Fempl je u radu [68] uveo integralni operator f po kome

$$w = \mathit{f}\, f(x,y) \qquad (3.1.22.)$$

označava funkciju za koju je $Dw = f(x,y)$. U istom radu on je pokazao da važe sledeće osobine ovog operatora:

I. $\mathit{f}\, f(z)\,\varphi(x,y) = f(z)\,\mathit{f}\,\varphi(x,y)$

II. $\mathit{f}\, f(z) = \frac{\bar z}{2}\, f(z) + P_0(z)$

III. $\mathit{f}\,\varphi(x) f(z) = f(z)\int\varphi(x)dx + P_0(z)$

IV. $\mathit{f}\,\varphi(y) f(z) = -if(z)\int\varphi(y)dy + P_0(z)$

V. $\mathit{f}\,\varphi(\bar z) f(z) = \frac{1}{2}\, f(z)\int\varphi(\bar z)d\bar z + P_0(z)$

VI. $\mathit{f}\, f(w)Dw = \int f(w)dw + P_0(z)$,

pri čemu su $f(z)$ i $P_0(z)$ proizvoljne analitičke funkcije. Navedene osobine pokazuju da operator Fempla f ima sva svojstva integrala pri čemu ulogu integracione konstante igra proizvoljna analitička funkcija $P_0(z)$.

c) Areolarne diferencijalne jednačine: Pod areolarnim diferencijalnim jednačinama podrazumevamo jednačine oblika

$$F\{z,\ \bar{z},\ \bar{w},\ w,\ Dw,\ D\bar{w},\ \bar{D}w,\ D^2w,\dots,\bar{D}^n w,\ D^n w,\ D^n\bar{w}\} = 0, \qquad (3.1.23.)$$

t.j. takve u kojima se javljaju areolarni izvodi nepoznate funkcije w. U širem smislu shvaćeno, u areolarnim diferencijalnim jednačinama može se osim operatora D pojaviti i operator $\bar{D}$ kao i neki drugi diferencijalni operatori opštijeg tipa.

Sigurno je da se areolarnim diferencijalnim jednačinama prvi bavio G. Kolosov. On je uočio da se areolarne diferencijalne jednačine oblika

$$F\{z,\ w,\ Dw,\ D^2w,\dots,\ D^n w\} = 0 \qquad (3.1.24.)$$

mogu rešavati po analogiji sa odgovarajućim diferencijalnim jednačinama oblika

$$F\{x,\ y,\ y',\ y'',\dots\ y^{(n)}\} = 0\ . \qquad (3.1.25.)$$

Pri prelazu sa obične diferencijalne jednačine na areolarnu, ulogu promenljive x preuzima promenljiva $\frac{\bar{z}}{2}$, umesto običnog izvoda pojavljuje se operator D a proizvoljna konstanta biva zamenjena proizvoljnom analitičkom funkcijom. Zaista, posmatrajmo na primer običnu diferencijalnu jednačinu

$$a_0\, y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (3.1.26.)$$

i pretpostavimo da su α i β dva različita rešenja odgovarajuće karakteristične kvadratne jednačine

$$a_0 t^2 + a_1 t + a_2 = 0. \qquad (3.1.27.)$$

Tada opšte rešenje diferencijalne jednačine (3.1.26.) kao što je poznato ima oblik:

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}\ . \qquad (3.1.28.)$$

Ako zatim posmatramo odgovarajuću kompleksnu jednačinu

$$a_0 D^2 w + a_1 Dw + a_2 w = 0 \qquad (3.1.29.)$$

ona će po analogiji sa (3.1.28.) imati opšte rešenje

$$w = F_1(z) e^{\alpha \frac{\bar{z}}{2}} + F_2(z) e^{\beta \frac{\bar{z}}{2}} \qquad (3.1.30.)$$

gde su $F_1(z)$ i $F_2(z)$ proizvoljne analitičke funkcije (vidi na pr. [29]). Očigledno je da se formula (3.1.30.) može dobiti iz formule (3.1.28.) formalnom zamenom konstanti c_1 i c_2 proizvoljnim analitičkim funkcijama a promenljive x promenljivom $\frac{\bar{z}}{2}$.

U svojim radovima [67] - [71] S. Fempl je rešio neke jednačine tipa (3.1.24.). On je zapravo posmatrao odgovarajuće sisteme parcijalnih jednačina po realnim promenljivim koji se mogu svesti na neku areolarnu diferencijalnu jednačinu pogodnu za rešavanje a zatim je rešivši ovu jednačinu, razdvajanjem realnog i imaginarnog dela rešenja došao do regularnog rešenja sistema parcijalnih jednačina.

U svojoj tezi [26] D. Dimitrovski je razmatrao areolarne jednačine oblika

$$D^n w = f(z,\bar{z}) \tag{3.1.31.}$$

i našao rešenje jednačine (3.1.31.) za razne oblike slobodnog člana $f(z,\bar{z})$.

Zanimljivi prilozi teoriji areolarnih diferencijalnih jednačina, dati su u tezi [29] J. Kečkića. Pored ostalog on je razmotrio diferencijalni operator K koji predstavlja uopštenje operatora D i $\bar{D}$ i definiše se izrazom:

$$Kw = A\frac{\partial u}{\partial x} - B\frac{\partial v}{\partial y} + i\left(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{3.1.32.}$$

gde $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ a A i B funkcije od x i y. Uporedo sa tim on je razmotrio neke uopštene diferencijalne jednačine u kojima se umesto areolarnog izvoda pojavljuje operator K.

Teorija areolarnih diferencijalnih jednačina još je šira od teorije običnih diferencijalnih jednačina i sigurno je da na ovom mestu ni izbliza ne može biti obuhvaćena. Zato su u ovoj glavi dati samo neki prilozi izučavanju ove teorije i to:

a) Areolarni redovi i njihova primena na rešavanje areolarnih diferencijalnih jednačina.

b) Egzistencija i jedinost rešenja areolarne diferencijalne jednačine I reda.

c) Prilozi teoriji eliptičkih sistema parcijalnih jednačina tipa Vekue.

d) Konturni problemi za rešenja areolarnih diferencijalnih jednačina.

<u>d) O c - analitičkim funkcijama</u>

U svome radu [30] o analitičkim i c - analitičkim funkcijama, Kečkić razmatra najjednostavnije areolarne diferencijalne jednačine:

$$Dw = 0 \tag{3.1.33.}$$

i

$$\bar{D}w = 0. \tag{3.1.34.}$$

Kao što klasa analitičkih funkcija predstavlja rešenje jednačine (3.1.33.) tako pod c - analitičkim funkcijama autor podrazumeva one koje zadovoljavaju jednačinu (3.1.34.). U istom radu on dokazuje i sledeću teoremu.

Teorema $\mathcal{T}$: Ako $f(z) \in A$ tada $f(\bar{z}) \in \bar{A}$ gde je A klasa analitičkih a $\bar{A}$ klasa c - analitičkih funkcija.

Poznato je da se funkcije, analitičke u nekoj oblasti D, koja sadrži koordinatni početak, mogu razviti u potencijalni red $\sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ u okolini tačke $z = 0$. Zbir tog reda je analitička funkcija unutar kruga konvergencije reda i može se diferencirati član po član.

Kao prirodna analogija pojmu potencijalnog reda može se uvesti pojam c - potencijalnog reda. To je kompleksan red oblika

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v \bar{z}^v \tag{3.1.35.}$$

gde su c_v konstante. Kako je $|z| = |\bar{z}|$ to je poluprečnik konvergencije reda (3.1.35.) isti kao i poluprečnik konvergencije odgovarajućeg potencijalnog reda i može se izračunati po formuli

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \,. \tag{3.1.36.}$$

Lako se pokazuje da za c - potencijalne redove važe teoreme, analogne teoremama za potencijalne redove. Važi i sledeća

Teorema T : Svaki c - potencijalni red $\sum_{v=0}^{\infty} c_v \bar{z}^v$ definiše jednu c - analitičku funkciju unutar kruga konvergencije.

Dokaz: Odgovarajući potencijalni red $\sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ definiše neku analitičku funkciju $f(z)$ unutar kruga konvergencije t.j.

$$c_0 + c_1 z + \dots\dots + c_v z^v + \dots = f(z) \,. \tag{3.1.37.}$$

Na osnovu teoreme $\mathcal{T}$, $f(z) \in A \Longleftrightarrow f(\bar{z}) \in \bar{A}$. Ako to primenimo na (3.1.37.) imaćemo

$$f(\bar{z}) = c_0 + c_1 \bar{z} + c_2 \bar{z}^2 + \dots + c_v \bar{z}^v + \dots \,. \tag{3.1.38.}$$

Zaista, zamenom z sa $\bar{z}$ u (3.1.37.) dobili smo da c-potencijalan red na desnoj strani relacije (3.1.38.) predstavlja c-analitičku funkciju $f(\bar{z})$.
Može se pokazati analogno kao za analitičke funkcije i obrnuto: Svaka funkcija, c-analitička u oblasti D, koja sadrži koordinatni početak, može se u okolini tačke $z = 0$ razviti u c-potencijalan red $\sum_{v=0}^{\infty} C_v \bar{z}^v$. Koeficijenti C_v reda se računaju po formuli

$$C_v = \frac{D^v f(\bar{z}=o)}{2^v . v!} \tag{3.1.39.}$$

gde je $D = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ već spomenuti diferencijalni operator Kolosov-a.
Primer: Funkcija $e^{\bar{z}}$ je c-analitička, pa se može razviti u red oblika (3.1.38.). Kako je

$$D^v w = 2^v e^{\bar{z}} \quad \text{i} \quad D^v w_{(\bar{z}=o)} = 2^v$$

to je:

$$e^{\bar{z}} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^v}{v!} . \tag{3.1.40.}$$

e) Areolarni polinom

Jedno od prirodnih proširenja klase analitičkih funkcija predstavlja klasa t.zv. areolarnih polinoma t.j. funkcija oblika

$$w(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n} \bar{z}^v \varphi_v(z) \tag{3.1.41.}$$

gde su $\varphi_v(z)$ proizvoljne analitičke funkcije. U svom radu [62] N. Theodoresco je definisao areolarne polinome n-tog stepena kao rešenje areolarne diferencijalne jednačine,

$$D^{n+1} w = 0 \tag{3.1.42.}$$

a zatim pokazao da se ovo rešenje javlja u obliku (3.1.41.).

Areolarni polinomi osim teorijskog imaju i praktičan značaj jer se javljaju u raznim granama primenjene matematike. Na primer areolarni polinom I reda $w = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi(z)$ predstavlja klasu Goursat-ovih ili bianalitičkih funkcija i javlja se u teoriji elastičnosti a t.zv. funkcija napona predstavlja realni deo Goursat-ove funkcije.

3.2. Areolarni redovi i njihova konvergencija

Kompleksan red oblika

$$\sum_{v=0}^{\infty} \bar{z}^v \varphi_v(z) \tag{3.2.1.}$$

gde su $\varphi_v(z)$ analitičke funkcije, nazvaćemo <u>areolarni red</u>. Ako su funkcije $\varphi_v(z)$ ograničene u celoj kompleksnoj ravni, onda su one konstante, pa je red (3.2.1.) jedan c - potencijalni red. Ako je za neko k ispunjeno

$$\varphi_v(z) = 0 \qquad (\forall v > k) \tag{3.2.2.}$$

onda izraz (3.2.1.) predstavlja areolarni polinom. Vidimo dakle da areolarni redovi sa jedne strane predstavljaju uopštenje c - potencijalnih redova (umesto konstanti, koeficijenti su analitičke funkcije) a sa druge strane uopštenje areolarnih polinoma (umesto konačnog zbira imamo beskonačan).

Za areolarni red (3.2.1.) kažemo da konvergira u nekoj oblasti D, ako konvergira u svakoj tački oblasti D. U praksi medjutim, za ispitivanje konvergencije areolarnih redova možemo da koristimo sledeću očiglednu teoremu:

<u>Teorema t</u>: Areolarni red $\sum_{v=0}^{\infty} \bar{z}^v \varphi_v(z)$ konvergira u oblasti D ako konvergira majorantan c - potencijalan red $\sum_{v=0}^{\infty} c_v \bar{z}^v$, gde je nejednakost

$$c_v \geqslant \max_{z \in D} |\varphi_v(z)| \tag{3.2.3.}$$

ispunjena za svako $0 \leqslant v < \infty$.

Ukoliko dakle areolarni red (3.2.1.) konvergira u nekoj oblasti D, onda on u opštem slučaju definiše u toj oblasti neku kompleksnu funkciju $w = w(z,\bar{z})$. Pokušajmo sad da damo odgovor na obrnuto pitanje t.j. da li se i pod kojim uslovima neka kompleksna funkcija $w = w(z,\bar{z})$ može razviti u areolarni red (3.2.1.).

Neka je $\{W \mid w = w(z,\bar{z})\}$ skup svih kompleksnih funkcija koje su diferencijabilne proizvoljan broj puta po promenljivoj $\bar{z}$ u nekoj konačnoj, zatvorenoj oblasti D koja sadrži koordinatni početak i neka je $\{\Omega \mid \Omega = \Omega(z)\}$ skup svih analitičkih funkcija u oblasti D. Uvedimo preslikavanje α_0 skupa W na skup Ω na sledeći način. Pod $\Omega = \alpha_0 w$ podrazumevaćemo funkciju koju smo dobili iz funkcije $w = w(z,\bar{z})$, ako smo vrednost $\bar{z}$ zamenili sa 0 a promenljivu z ostavili nepromenjenu. Za funkciju $\Omega = \alpha_0 w$ ispunjen je uslov (3.1.33.) jer se u njoj ne javlja promenljiva $\bar{z}$ pa je ona u opštem slučaju analitička. Na primer ako je $w(z,\bar{z}) = e^{z+2\bar{z}} + z^2 + 3z\bar{z}^3 + 2$, tada je $\Omega = \alpha_0 w = e^z + z^2 + 2$.

Lako se vidi da α_0 preslikava skup W na skup Ω i da svakom originalu w odgovara jedna i samo jedna slika Ω, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi. Jasno je takodje da se svaka analitička funkcija skupa W preslikava u samu sebe.

Pokušajmo sada da formalno razvijemo funkciju $w=w(z,\bar{z})$ u areoralni red.

$$w(z,\bar{z}) = \varphi_0(z) + \bar{z}\,\varphi_1(z) + \bar{z}^2\,\varphi_2(z) + \ldots\ldots + \bar{z}^v\,\varphi_v(z) + \ldots\ldots \tag{3.2.4.}$$

Ako primenimo operator D na obe strane formule (3.2.4.) dobijamo

$$Dw(z,\bar{z}) = 2\left[\varphi_1(z) + 2\bar{z}\,\varphi_2(z) + \ldots\ldots + v\bar{z}^{v-1}\,\varphi_v(z) + \ldots\right]. \tag{3.2.5.}$$

Odavde je $\alpha_0 Dw = 2\,\varphi_1(z)$ pa je $\varphi_1(z) = \dfrac{\alpha_0 Dw}{2}$.

Ako ponovo primenimo operator D na formulu (3.2.5.), dobijamo

$$D^2w(z,\bar{z}) = 2^2\left[2\,\varphi_2(z) + 3\cdot 2\,\varphi_3(z)\,\bar{z} + \ldots\ldots + v(v-1)\bar{z}^{v-2}\varphi_v(z) + \ldots\right] \tag{3.2.6.}$$

odakle je

$$\alpha_0 D^2 w = 2^2.2!\ \varphi_2(z) \quad \text{i} \quad \varphi_2(z) = \frac{\alpha_0 D^2 w}{2^2.2!}.$$

Na isti način produžavajući postupak dobijamo da je

$$\varphi_k(z) = \frac{\alpha_0 D^k w}{2^k\cdot k!}. \tag{3.2.7.}$$

Formula (3.2.7.) predstavlja uopštenje formule (3.1.39.). Sada možemo formulisati sledeću teoremu:

<u>Teorema $\mathcal{T}$:</u> Neka je $w = w(z,\bar{z})$ neprekidna funkcija u oblasti D koja sadrži koordinatni početak i neka ima neprekidne areolarne izvode poretka n, $(n=1,2,3\ldots.)$ u D. Tad se ona može razviti u areolarni red oblika (3.2.1.) u okolini D_1 koordinatnog početka (D_1 je oblast konvergencije reda $\sum_{v=0}^{\infty}\bar{z}^v\varphi_v(z)$ i $D_1 \subset D$). Koeficijenti

reda se dobijaju po formuli (3.2.7.).

Primer: Razviti funkciju $w = e^{\bar{z}z^2}$ u u areolarni red u okolini $\bar{D}$ koordinatnog početka!

Kako je $D^k w = 2^k e^{\bar{z}.z^2}.z^{2k}$ to je $\alpha_o D^k w = 2^k.z^{2k}$. Traženi razvoj će tada biti

$$w = \sum_{v=o}^{\infty} \frac{\bar{z}^v . z^{2v}}{v!} . \qquad (3.2.8.)$$

3.3. Primena areolarnih redova na rešavanje areolarne diferencijalne jednačine n-tog reda

Mogućnosti primene areolarnih redova su velike, naročito kad se radi o rešavanju nekih tipova areolarnih diferencijalnih jednačina. Neke od njih biće razradjene i u kasnijim izlaganjima. U ovoj glavi ćemo metodu arelarnih redova ilustrovati na primeru areolarne diferencijalne jednačine n-tog reda sa analitičkim koeficijentima.

U svome radu [71] S. Fempl je razmatrao areolarnu diferencijalnu jednačinu n-tog stepena sa konstantnim koeficijentima

$$D^n w + a_1 D^{n-1} w + \dots + a_{n-1} D_1 w + a_n w = 0 \qquad (3.3.1.)$$

i našao njeno tzv. opšte rešenje.

U radu [31] J. Kečkić je razmatrao opštiju jednačinu čiji su koeficijenti analitičke funkcije i pokazao da je njeno rešenje dato izrazom

$$w = \sum_{v=1}^{n} \varphi_v(z) e^{\frac{r_v}{2} \bar{z}} , \qquad (3.3.2.)$$

gde su φ_v $(v = 1,2,\dots,n)$ proizvoljne analitičke funkcije a $r_v(z)$ koreni karakteristične jednačine

$$\zeta^n + a_1 \zeta^{n-1} + a_2 \zeta^{n-2} + \dots + a_{n-1} \zeta + a_n = 0. \qquad (3.3.3.)$$

Rešenje jednačine (3.3.1.) sa koeficijentima analitičkim funkcijama mi ćemo sada potražiti u obliku areolarnog reda t.j.

$$w = \sum_{v=o}^{\infty} \bar{z}^v \psi_v(z) , \qquad (3.3.4.)$$

gde su $\psi_v(z)$ zasad nepoznate funkcije.

Ako na red (3.3.4.) primenimo n puta operator D imaćemo:

$$Dw = 2 \sum_{v=1}^{\infty} v\bar{z}^{v-1} \Psi_v(z)$$

$$D^2 w = 2^2 \sum_{v=2}^{\infty} v(v-1)\bar{z}^{v-2} \Psi_v(z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^n w = 2^n \sum_{v=n}^{\infty} v(v-1) \ldots (v-n+1)\bar{z}^{v-n} \Psi_v(z). \qquad (3.3.5.)$$

Zamenom gornjih vrednosti u jednačinu (3.3.1.) dobijamo:

$$2^n \sum_{v=n}^{\infty} v(v-1)\ldots(v-n+1)\bar{z}^{v-n}\Psi_v(z) + a_1(z)2^{n-1} \sum_{v=n-1}^{\infty} v(v-1)\ldots(v-n+2)\bar{z}^{v-n+1}.\ \Psi_v(z)+\ldots+ a_{n-1}(z)\cdot 2 \sum_{v=1}^{\infty} v\bar{z}^{v-1} \Psi_v(z) +$$

$$+ a_n(z) \sum_{v=0}^{\infty} \bar{z}^v \Psi_v(z) = 0. \qquad (3.3.6.)$$

Medjutim koeficijenti $a_1(z),\ldots, a_n(z)$ mogu se izraziti preko korena $r_1(z), r_2(z)\ldots r_n(z)$ na sledeći način:

$$a_1(z) = -\left[r_1(z) + r_2(z) + r_3(z) +\ldots+ r_n(z)\right],$$

$$a_2(z) = (-1)^2 \left[r_1(z)\cdot r_2(z) + r_1(z)r_3(z) +\ldots+ r_{n-1}(z)r_n(z)\right],$$

$$a_3(z) = (-1)^3 \left[r_1(z)r_2(z)r_3(z) +\ldots+ r_{n-2}(z)r_{n-1}(z)r_n(z)\right], \qquad (3.3.7.)$$

$$a_n(z) = (-1)^n\ r_1(z)r_2(z)\ldots r_{n-1}(z).r_n(z).$$

Ako vrednosti koeficijenata $a_1,\ldots,a_n$ iz (3.3.7.) zamenimo u (3.3.6.) i sredimo tu jednakost po stepenima, anulirajući pri tom odgovarajuće članove, dobijamo:

$$2^n\cdot n!\ \Psi_n(z)-(r_1+r_2+\ldots+r_n)2^{n-1}(n-1)!\ \Psi_{n-1}(z) + \ldots + \qquad (3.3.8.)_1$$

$$+(-1)^{n-1}\cdot 2\left[r_1r_2\ldots r_{n-1}+\ldots+r_2r_3\ldots r_n\right]\Psi_1(z)+(-1)^n r_1r_2\ldots r_n\ \Psi_0(z)=0$$

$$2^n(n+1)n\ldots 4\cdot 3\cdot 2\ \Psi_{n+1}(z)-(r_1+r_2+\ldots+r_n)2^{n-1}\cdot n(n-1)\ldots 4\cdot 3\cdot 2\ \Psi_n(z) +$$

$$\ldots+(-1)^n r_1r_2\cdots r_n\ \Psi_1(z) = 0 \qquad (3.3.8.)_2$$

Ako jednakost $(3.3.8.)_1$ rešimo po $\psi'_n(z)$ dobijamo

$$\psi_n(z) = \frac{r_1+r_2+\ldots+r_n}{2n}\,\psi_{n-1}(z) - \frac{(r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_{n-1}r_n)}{2^2n(n-1)}\,\psi'_{n-2}(z)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(r_1r_2\cdots r_{n-1}+\ldots+r_2r_3\cdots r_n)}{2^{n-1}\cdot n(n-1)\ldots 4\cdot 3}+(-1)^n\frac{r_1r_2\cdots r_{n-1}r_n}{2^n\cdot n}\,\psi_0(z). \qquad (3.3.9.)$$

Uvedimo sledeću smenu funkcija

$$\begin{aligned}
\psi_0(z) &= \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z) + \ldots\ldots + \varphi_n(z)\\
\psi_1(z) &= \frac{1}{1!}\left[\frac{r_1(z)}{2}\varphi_1(z) + \frac{r_2(z)}{2}\varphi_2(z) + \ldots + \frac{r_n(z)}{2}\varphi_n(z)\right] \qquad (3.3.10.)\\
&\text{-------------------------------}\\
\psi_{n-1}(z) &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\left(\frac{r_1(z)}{2}\right)^{n-1}\varphi_1(z) + \left(\frac{r_2(z)}{2}\right)^{n-1}\varphi_2(z)+\ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots+\left(\frac{r_n(z)}{2}\right)^{n-1}\varphi_n(z)\right].
\end{aligned}$$

Sistem (3.3.10,) definiše n novih analitičkih funkcija $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z),\ldots,\varphi_n(z)$ koje se izražavaju linearno preko $\psi_0(z),\ldots,\psi_{n-1}(z)$, jer je njegova determinanta $D \neq 0$. Ako sad zamenimo vrednosti funkcija $\psi_0,\ldots,\psi_{n-1}$ iz (3.3.10.) u (3.3.9.) i izvršimo potrebna skraćivanja i grupisanja članova dobićemo sledeći izraz

$$\psi_k(z) = \frac{\left(\frac{r_1}{2}\right)^k}{k!}\varphi_1 + \frac{\left(\frac{r_2}{2}\right)^k}{k!}\varphi_2 + \ldots\ldots + \frac{\left(\frac{r_n}{2}\right)^k}{k!}\varphi_n . \qquad (3.3.11.)$$

Ako najzad koeficijente (3.3.11.) zamenimo u red (3.3.4.) dobićemo:

$$w = \sum_{v=0}^{\infty}\bar{z}^v\psi_v(z) = \sum_{v=0}^{\infty}\bar{z}^v\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{r_i}{2}\right)^v}{v!}\varphi_i(z)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r_i}{2}\bar{z}\right)^v}{v!}\right)\varphi_i(z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(z)e^{\frac{r_i(z)}{2}\bar{z}} .$$

Dobijeni rezultat je identičan rezultatu (3.3.?.) iz rada [31].

3.4. Egzistencija i jedinost rešenja areolarne diferencijalne jednačine I reda

U ovom poglavlju dokazaćemo stav o egzistenciji i jedinosti rešenja areolarne diferencijalne jednačine I reda.

Uvedimo najpre pojam areolarnog odredjenog integrala. Ako je

$$\int w(x,y) = F(x,y) = W(z,\bar{z}), \tag{3.4.1.}$$

tada se odredjeni areolarni integral ili areolarni integral sa granicama definiše formulom:

$$\int_a^b w(z,\bar{z}) \stackrel{def}{=} W(z,\bar{z})_{\bar{z}=b} - W(z,\bar{z})_{\bar{z}=a} = \alpha_b W - \alpha_a W. \tag{3.4.2.}$$

Ovde je α_b operator koji se definiše slično operatoru α_o u poglavlju (3.2.) t.j. izraz $\alpha_b W$ pokazuje da smo kod funkcije W promenljivu z ostavili nepromenjenu a promenljivu $\bar{z}$ zamenili sa b (isto važi i za α_a). Jasno je da desna strana definicione jednakosti (3.4.2.) u opštem slučaju predstavlja jednu analitičku funkciju.

Za areolarni odredjeni integral važe mnoge osobine analogne onima za običan odredjeni integral. Važe i sledeće leme:

__Lema 1:__ Neka je $w(z,\bar{z})$ neprekidna funkcija u prostoj, konačnoj oblasti D. Tada je i $\int_a^{\bar{z}} w(z,\bar{z})$ neprekidna funkcija u oblasti D i postoji konstanta K takva da je

$$\left| \int_a^{\bar{z}} w(z,\bar{z}) \right| \leq K|\bar{z}-a|. \tag{3.4.3.}$$

Dokaz: Kako je na osnovu definicije

$$\int_a^{\bar{z}} w(z,\bar{z}) = W(z,\bar{z}) - W(z,\bar{z})_{\bar{z}=a} \tag{3.4.4.}$$

to je dovoljno dokazati neprekidnost funkcije $W(z,\bar{z})$ po promenljivoj $\bar{z}$ u D. Ova funkcija medjutim izražava se na osnovu formula (3.1.16.) i (3.1.16.a) preko dvostrukog integrala sa jezgrom Cauchy-ja, a za isti važi:

$$\left| W(z_1,\bar{z}_1)-W(z_2,\bar{z}_2)\right| = \left| \iint_D \frac{w(\xi,\eta)}{t-z_1}\, d\xi\, d\eta - \iint_D \frac{w(\xi,\eta)}{t-z_2}\, d\xi\, d\eta \right| =$$

$$\left| \iint_D \left(\frac{w(\xi,\eta)}{t-z_1} - \frac{w(\xi,\eta)}{t-z_2} \right) d\xi\, d\eta \right| \leq \left| \iint_D \frac{|w|\,|z_1-z_2|}{|(t-z_1)(t-z_2)|} \,d\xi\, d\eta \right|. \tag{3.4.5.}$$

(Očigledno je da iz $z_1 \to z_2$ sledi i $\bar{z}_1 \to \bar{z}_2$).

Iz toga sledi da je funkcija W a samim tim i $\int^{\bar{z}} w$ neprekidna u D.

Pošto je funkcija w neprekidna u oblasti D, to postoji ograničenje njenog modula u D t.j.

$$|w| \leq K. \tag{3.4.6.}$$

Kako za dvostruki integral iz (3.4.5.) važi ocena

$$\left| \iint_D \frac{w(\xi,\eta)}{t-z} \, d\xi \, d\eta \right| \leq \left| \iint_D \frac{K}{t-z} \, d\xi \, d\eta \right|, \tag{3.4.7.}$$

to iz (3.4.6.) sleduje

$$\left| \oint_a^{\bar z} w \right| \leq \left| \oint_a^{\bar z} K \right| = K|\bar z - a| \tag{3.4.8.}$$

što je trebalo da se dokaže.

<u>Lema 2:</u> Areolarna diferencijalna jednačina

$$Dw = F(z,w) \tag{3.4.9.}$$

sa početnim uslovom

$$\mathscr{L}_o w(z,\bar z) = w_o(z) \tag{3.4.10.}$$

gde je $w_o(z)$ data analitička funkcija, ekvivalentna je sledećoj areolarnoj integralnoj jednačini:

$$w = w_o + \oint_o^{\bar z} F(z,w). \tag{3.4.11.}$$

Zaista, ako na levu i desnu stranu jednačine (3.4.9.) primenimo operator $\oint$ dobićemo

$$w = \oint F(z,w) = \Phi(z,\bar z) + g(z), \tag{3.4.12.}$$

gde je $D\Phi = D\oint F(z,w) = F(z,w)$, a $g(z)$ proizvoljna analitička funkcija. Ako zatim na (3.4.12.) primenimo operator $\mathscr{L}_o$ imaćemo:

$$\mathscr{L}_o w = w_o = \Phi(z,\bar z)_{\bar z = o} + g(z). \tag{3.4.13.}$$

Oduzimanjem relacija (3.4.12.) i (3.4.13.) dobijamo

$$w - w_o = \Phi(z,\bar z) - \Phi(z,\bar z)_{\bar z = o} = \oint_o^{\bar z} F(z,w) \tag{3.4.14.}$$

t.j. integralnu jednačinu (3.4.11.).

Obrnuto, ako na jednačinu (3.4.11.) primenimo operator D dobićemo jednačinu (3.4.9.).

Teorema (o egzistenciji i jednakosti rešenja)

Neka je data areolarna diferencijalna jednačina

$$Dw = F(z,w) \tag{3.4.15.}$$

sa početnim uslovom

$$\mathcal{L}_o w(z,\bar{z}) = w_o, \tag{3.4.16.}$$

gde je $w_o = w_o(z)$ data analitička funkcija a $F(z,w)$ je neprekidna u oblasti

$$\Pi : \begin{array}{l} |z| \leq a \\ |w - w_o| \leq b \end{array} \tag{3.4.17.}$$

i ispunjava uslov

$$|F(z,w_1) - F(z,w_2)| \leq K|w_1 - w_2| . \tag{3.4.18.}$$

Tada postoji broj $h > o$, takav da u krugu $|z| \leq h$ postoji jedno i samo jedno rešenje jednačine (3.4.15.) koje zadovoljava početni uslov (3.4.16.).

Dokaz: Kako je funkcija $F(z,w)$ neprekidna u oblasti Π, to je ona u toj oblasti i ograničena po modulu, pa postoji konstanta M takva da je

$$|F(z,w)| \leq M. \tag{3.4.19.}$$

Na osnovu leme 2, jednačina (3.4.15.) sa početnim uslovom (3.4.16.) ekvivalentna je areolarnoj integralnoj jednačini

$$w = w_o + \int_o^{\bar{z}} F(z,w) \tag{3.4.20.}$$

pa je dovoljno dokazati egzistenciju u jedinost rešenja ove druge.

Izaberimo broj h tako da je

$$h < \frac{1}{K} \quad \text{i} \quad h \leq \min(a, \frac{b}{M}). \tag{3.4.21.}$$

Neka je C_o prostor kompleksnih funkcija, neprekidnih u krugu $|z| \leq h$ a d rastojanje definisano izrazom

$$d(w_1,w_2) = \max_{|z| \leq h} |w_1 - w_2| . \tag{3.4.22.}$$

Lako se vidi da izraz (3.4.22.) ispunjava sve aksiome rastojanja i da je (C_o, d) metrički prostor.

Neka je E podskup skupa C_0 za koji je

$$\max_{|z|\leqslant h} |w - w_0| \leqslant b. \tag{3.4.23.}$$

U odnosu na metriku (3.4.22.) skup E je zatvoren jer relacija (3.4.23.) odredjuje zatvorenu kuglu sa centrom u w_0.

Uvedimo preslikavanje

$$Y(w) = w_0 + \int_0^{\bar{z}} F(z,w) \quad , \quad w \in E \subset C_0. \tag{3.4.24.}$$

Kako je w neprekidna funkcija u krugu $|z| \leq h$, to je na osnovu leme 1 i Y neprekidna u istom krugu. Na osnovu iste leme je

$$|Y - w_0| = \left|\int_0^{\bar{z}} F(z,w)\right| \leq M|\bar{z}| = M|z| \leqslant M.h \leq M\,\frac{b}{M} = b. \tag{3.4.25.}$$

To znači da operator Y preslikava skup E u skup E .

Neka je dalje $w_1, w_2 \in E$. Tada je

$$|Y_1 - Y_2| = \left|\int_0^{\bar{z}} \left[F(z,w_1) - F(z,w_2)\right]\right| \leqslant \left|\int_0^{\bar{z}} K|w_1 - w_2|\right| \leqslant Kh|w_1 - w_2|. \tag{3.4.26.}$$

Kako je na osnovu (3.4.21.) $Kh = q < K\,\frac{1}{K} = 1$ to operator Y predstavlja kontrakciju kompletnog metričkog prostora E u prostor E.

Time su ispunjeni svi uslovi za primenu Banach-ovog stava o ne pokretnoj tački pa u krugu $|z| \leqslant h$ zaista postoji jedno i samo jedno rešenje jednačine (3.4.15.) koje ispunjava početni uslov (3.4.16.).

\- / -

3.5. Eliptički sistemi parcijalnih jednačina

Posebna, veoma važna grana teorije areolarnih diferencijalnih jednačina, koja se samostalno razvijala jeste teorija eliptičkih sistema parcijalnih jednačina t.j. sistema oblika:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= a(x,y)u + b(x,y)v + f(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= c(x,y)u + d(x,y)v + g(x,y). \end{aligned} \tag{3.5.1.}$$

Ispitivanje sistema oblika (3.5.1.) ima veliki teorijski značaj jer se pokazuje da postoji tesna strukturalna i kvalitativna veza izmedju rešenja sistema (3.5.1.) i analitičkih funkcija kompleksne promenljive. Spomenimo na primer radove [37] i [38] . M. Lavrentijeva o kvazikonformnim preslikavanjima u kojima je pokazano da preslikavanja ravnih oblasti pomoću rešenja jedne klase sistema oblika (3.5.1.) imaju mnogo zajedničkog sa uobičajenim konformnim preslikavanjima.

Proučavanje klase funkcija koja zadovoljava sistem (3.5.1.) ima i veliki praktični značaj jer se mnogi problemi mehanike neprekidnih sredina svode na takve sisteme jednačina.(Vidi na primer rad [78] u kome je autor našao jednu klasu rešenja diferencijalne jednačine stanja napona elastične ljuske).

Izučavanjem sistema (3.5.1.) bavili su se mnogi strani a i neki naši matematičari. Navedimo samo neke od njih:

L. Bers [16] ispitivao je svojstva funkcija koje zadovoljavaju sledeći sistem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma(x,y)\,\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\,\sigma(x,y)\,\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \qquad (3.5.2.)$$

Ovaj sistem koji se pojavljuje u gasnoj dinamici i teoriji elastičnosti pretstavlja specijalan slučaj sistema (3.5.1.). Zaista, ako se uvede smena $v = \sigma w$ dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= -\,\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial y}\,v \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial x}\,v \end{aligned} \qquad (3.5.3.)$$

t.j. sistem oblika (3.5.1.).

G.N. Položii u svojoj poznatoj monografiji [10] i radovima [45], [46] i [47] razmatrao je sistem parcijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{p}\,\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\,\frac{1}{p}\,\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \qquad (3.5.4.)$$

koji definiše t.zv. p - analitičke funkcije, kao i opštiji sistem oblika

$$p\,\frac{\partial u}{\partial x} + q\,\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$- q \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{3.5.5.}$$

koji definiše klasu (p,q) - analitičkih funkcija. Ovde su p i q diferencijabilne funkcije promenljivih x i y i $p > 0$. Položii je široko razvio opštu teoriju ovih funkcija ukazujući na mnoge analogije sa teorijom analitičkih funkcija. Pored ostalog značajna su njegova istraživanja na konstrukciji integralnih predstavljanja p - analitičkih funkcija sa karakteristikom $p = x^k (k = const. > 0)$. Sa druge strane Položii je dao veliki doprinos primeni p i (p,q) - analitičkih funkcija u mehanici. Na primer u radovima [48] , [49] i [50] on je razradio nove metode rešavanja problema osnosimetrične teorije elastičnosti. Značajni su mu i radovi [51] i [52] iz teorije filtracije i rad [53] iz bezmomentne teorije elastičnih ljuski.

Medjutim i sistemi (3.5.4.) i (3.5.5.) predstavljaju sisteme oblika (3.5.1.). Zaista, ako u sistem (3.5.5.) uvedemo smenu

$$U = pu \quad , \quad V = v - qu \tag{3.5.6.}$$

isti se svodi na

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}}{p} U \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{p} U \end{aligned} \tag{3.5.7.}$$

t.j. na sistem oblika (3.5.1.)

Najiscrpnija istraživanja ove problematike data su u poznatoj i mnogo citiranoj monografiji [3] I. Vekue. Autor je kroz mnoga značajna poglavlja konsekventno izgradio jednu teoriju funkcija koje imaju mnoga zajednička svojstva sa analitičkim funkcijama jedne kompleksne promenljive. Znatno pojednostavljenje postupka on postiže kompleksnim predstavljanjem sistema (3.5.1.). Naime, ako se druga jednačina ovog sistema pomnoži sa i i sabere sa prvom dobija se

$$Dw = Aw + B\bar{w} + F \tag{3.5.8.}$$

t.j. jedna areolarna diferencijalna jednačina I reda. Ovde je

$$A = \frac{1}{2} (a + d + ic - ib) \qquad B = \frac{1}{2} (a - d + ic + ib)$$
$$F = \frac{1}{2} (f + ig).$$

Medjutim jednačina (3.5.8.) se smenom

$$w = V \cdot w_o \tag{3.5.9.}$$

gde je w_o jedno partikularno rešenje jednačine

$$Dw = Aw \ , \tag{3.5.10.}$$

može svesti na prostiju areolarnu jednačinu

$$DV = C(z)\overline{V} + H(z) \tag{3.5.11.}$$

gde je

$$C = \frac{B\overline{w_o}}{w_o} \ , \qquad H = \frac{F}{w_o} \ . \tag{3.5.12.}$$

Vekua je razlikovao dve vrste rešenja sistema (3.5.1.) odnosno jednačine (3.5.8.). Regularno rešenje sistema (3.5.1.) jeste par funkcija u,v, za koje kompleksna funkcija $w = u+iv$ pripada klasi $C_{\overline{z}}(T)$ i zadovoljava jednačinu (3.5.8.) pri čemu se za koeficijente a,b,c,d,f,g, pretpostavlja da su neprekidni. Regularno rešenje sistema (3.5.1.) naziva se potpuno regularno, ako ima neprekidne parcijalne izvode I reda po x i y u oblasti T.

Svako regularno rešenje sistema (3.5.1.) ne mora da bude i potpuno regularno. Zaista, posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= au + bv \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -bu + av \end{aligned} \tag{3.5.13.}$$

sa neprekidnim koeficijentima koji se može predstaviti u kompleksnom obliku

$$Dw = Aw \tag{3.5.14.}$$

gde je $A = a - ib$ i $w = u + iv$. Regularno rešenje jednačine (3.5.14.) (vidi [3] str.17 - 19) može se predstaviti u obliku

$$w = \varphi(z)\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\iint\limits_T \frac{A(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{t - z}} \tag{3.5.15.}$$

Neka je na primer

$$A(x,y) = \frac{e^{2i\varphi}}{\log \frac{1}{r}} \qquad (re^{i\varphi} = z = x + iy). \tag{3.5.16.}$$

Tada funkcija (3.5.15.) pripada klasi $C_{\overline{z}}(t)$ i ima areolarni izvod u celoj oblasti T (vidi 3.1.20.). Ali parcijalni izvodi funkcije w po x i y (vidi formule 3.1.19) ne postoje u koordinatnom početku, pa rešenje (3.5.15.) jednačine (3.5.14.) nije potpuno regularno.

Jedan od najvažnijih rezultata teorije eliptičkih sistema parcijalnih jednačina predstavlja formula za opšte rešenje jednačine (3.5.11.) koja se javlja u obliku: ([3] , str.33).

$$V(z) = \phi(z) + \iint_T \Gamma_1(z,t)\phi(t)dT + \iint_T \Gamma_2(z,t)\overline{\phi(t)}dT -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_T \Omega_1(z,t)H(t)dT - \frac{1}{2\pi}\iint_T \Omega_2(z,t)\,\overline{H(t)}dT \qquad (3.5.17.)$$

gde je

$$\Omega_1(z,t) = \frac{1}{t-z} + \iint_T \frac{\Gamma_1(z,\sigma)}{t-\sigma}\,dT_\sigma$$

$$\Omega_2(z,t) = \iint_T \frac{\Gamma_2(z,\sigma)}{t-\sigma}\,d\,T_\sigma. \qquad (3.5.18.)$$

Ovde je još

$$\Gamma_1(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j}(z,t), \qquad \Gamma_2(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j+1}(z,t) \qquad (3.5.19.)$$

i

$$K_1(z,t) = -\frac{C(t)}{2\pi(t-z)}, \quad K_n(z,t) = \iint_T K_1(z,\sigma)\overline{K_{n-1}(\sigma,t)}dT_\sigma.$$

$$(n=2,3\ldots) \qquad (3.5.20.)$$

Formula (3.5.17.) svakoj neprekidnoj u $T + \mathcal{L}$ i analitičkoj u T funkciji $\phi(z)$ dodeljuje jedno y T regularno rešenje jednačine (3.5.11.). Svako takvo rešenje je i potpuno regularno ako koeficijenti $C(z)$ i $H(z)$ ispunjavaju uslov Hölder-a.

*

Spomenimo najzad i doprinose dvojice naših matematičara ovoj problematici.

U radu [69] S. Fempl je razmatrao onaj eliptički sistem koji se može predstaviti u obliku areolarne diferencijalne jednačine

$$Dw + f(x,y)w + g(x,y) = 0 \qquad (3.5.21.)$$

gde su koeficijenti f i g neprekidne funkcije u oblasti T. On je pokazao da se opšte rešenje jednačine (3.5.21.) javlja u obliku

$$w = \left\{Q(z) - \int g(x,y)e^{\int f(x,y)}\right\}e^{-\int f(x,y)} , \qquad (3.5.22.)$$

gde je $Q(z)$ proizvoljna analitička funkcija.

U tezi [29] J. Kečkić je pokazao kako se može doći do opšteg rešenja jednačine (3.5.8.) ako je ispunjen uslov

$$B_{\bar{z}}B_z - BB_{\bar{z}z} - B^2\bar{A}_z + B^2A_z + B^3\bar{B} = 0 . \qquad (3.5.23.)$$

*

Formula (3.5.17.) pored velikog teorijskog značaja praktično je neprimenljiva. Jedan od razloga je i taj što se dvostruki integrali sa jezgrom Cauchy-ja u opštem slučaju ne mogu rešiti elementarnom integracijom. Sa druge strane formula Fempla (3.5.22.) ograničena je na jednačine oblika (3.5.21.) gde se pojavljuje samo funkcija w i njen areolarni izvod. Medjutim principjelne teškoće nastaju onda, kada se u jednačini pored funkcije w pojavi i funkcija $\bar{w}$.

Zbog svega ovoga javlja se jasno izražena potreba da se za rešavanje eliptičkih sistema iznadju nove metode koje će skratiti postupak rešavanja i u pojedinim slučajevima dovesti do rešenja u konačnom obliku.

Bez ograničenja opštosti može se umesto areolarne diferencijalne jednačine (3.5.8.) razmatrati jednačina (3.5.11.). U poglavlju 3.6. pokazaćemo kako se metodom areolarnih redova može naći jedna klasa rešenja odgovarajuće homogene jednačine

$$DV = C(z):\bar{V} . \qquad (3.5.24.)$$

Dobijeni rezultat ćemo zatim koristiti u poglavlju 3.8. gde ćemo ustanoviti vezu izmedju rešavanja jednačine (3.5.8.) i problema Mitrinovića za analitičke funkcije.

3.6. Rešavanje jedne klase eliptičkih sistema metodom areolarnih redova

Neka je dat eliptički sistem parcijalnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= c_1(x,y)u + c_2(x,y)v \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= c_2(x,y)u - c_1(x,y)v, \end{aligned} \qquad (3.6.1.)$$

gde su koeficijenti $c_1(x,y)$ i $c_2(x,y)$ neprekidne realne funkcije u prostoj, zatvorenoj oblasti T. Ako drúgu jednačinu (3.6.1.) pomnožimo sa i i saberemo sa prvom dobićemo areolarnu jednačinu

$$Dw = C(z,\bar{z})\bar{w}, \tag{3.6.2.}$$

gde je $w = u+iv$ i $C(z,\bar{z}) = c_1(x,y) + i\, c_2(x,y)$.

Ispitajmo kakav treba da bude koeficijent $C(z,\bar{z})$ pa da rešenje jednačine (3.6.2.) bude predstavljeno u obliku areolarnog reda

$$w = \sum_{v=0}^{\infty} \bar{z}^v \, \Psi_v(z), \tag{3.6.3.}$$

gde su $\Psi_v(z)$ zasad nepoznate analitičke funkcije. Zamenom vrednosti (3.6.3.) i vrednosti

$$Dw = 2\sum_{v=1}^{\infty} v\bar{z}^{v-1}\,\Psi_v(z) = 2\sum_{v=0}^{\infty}(v+1)\bar{z}^v\,\Psi_{v+1}(z) \tag{3.6.4.}$$

u jednačinu (3.6.2.) dobijamo:

$$2\sum_{v=0}^{\infty}(v+1)\bar{z}^v\,\Psi_{v+1}(z) = C(z,\bar{z})\sum_{v=0}^{\infty} z^v\,\overline{\Psi_v(z)} \tag{3.6.4$_a$.}$$

a izjednačavanjem odgovarajućih članova na levoj i desnoj strani

$$2(v+1)\bar{z}^v\,\Psi_{v+1}(z) = C(z,\bar{z})z^v\,\overline{\Psi_v(z)}$$

odakle je

$$\Psi_{v+1}(z) = \frac{C(z,\bar{z})z^v\,\overline{\Psi_v(z)}}{2(v+1)\bar{z}^v}. \tag{3.6.5.}$$

Iz formule (3.6.5.) imamo:

$$\Psi_1(z) = \frac{C(z,\bar{z})\,\overline{\Psi_o(z)}}{2}$$

$$\Psi_2(z) = \frac{C(z,\bar{z})\cdot z\,\overline{\Psi_1(z)}}{2^2\cdot\bar{z}} = \frac{C\cdot\bar{C}}{2!}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)\frac{\Psi_o(z)}{2^2}$$

$$\Psi_3(z) = \frac{C\cdot z^2\cdot\overline{\Psi_2(z)}}{3!\cdot\bar{z}^2} = \frac{C^2\bar{C}}{3!}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)\frac{\overline{\Psi_o(z)}}{2^3}$$

$$\Psi_{2n}(z) = \frac{C^n\bar{C}^n}{(2n)!}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n\frac{\Psi_o(z)}{2^{2n}} \tag{3.6.6a}$$

$$\Psi_{2n+1}(z) = \frac{C^{n+1}\bar{C}^n}{(2n+1)!}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n\frac{\overline{\Psi_o(z)}}{2^{2n+1}} \tag{3.6.6b}$$

Nadjimo sada uslove koje treba da ispunjavaju funkcije Ψ_o i C da bi se moglo naći rešenje jednačine (3.6.2.) u obliku reda (3.6.3.) Da bi koeficijenti (3.6.6a) i (3.6.6b) areolarnog reda (3.6.3.) bili analitičke funkcije, moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$\frac{C\cdot\overline{C}}{z} = Q(z) \quad , \quad (Q(z) \neq 0) \tag{3.6.7.}$$

$$C\cdot\overline{\Psi_o(z)} = R(z) \quad , \quad (R(z) \neq 0) \tag{3.6.8.}$$

gde su $Q(z)$ i $R(z)$ proizvoljne analitičke funkcije. Uslove (3.6.7.) i (3.6.8.) razmatraćemo kao sistem dve jednačine sa dve nepoznate C i Ψ_o.

Kako je iz jednačine (3.6.8.)

$$C = \frac{R(z)}{\overline{\Psi_o(z)}} \quad , \quad (\overline{\Psi_o(z)} \neq 0) \tag{3.6.9.}$$

to zamenom ove vrednosti u (3.6.7.) dobijamo:

$$\Psi_o(z)\,\overline{\Psi_o(z)} = \frac{R(z)\overline{R(z)}}{Q(z)\cdot\overline{z}} . \tag{3.6.10.}$$

Kako su leva strana i brojioc desne strane jednačine (3.6.10.) realne funkcije to i imenioc desne strane mora biti realna funkcija t. j.

$$\mathrm{Im}\left[Q(z)\cdot\overline{z}\right] = xQ_2 - yQ_1 = 0 \;, \quad (Q = Q_1 + iQ_2). \tag{3.6.11.}$$

Diferenciranjem jednačine (3.6.11.) najpre po x a zatim po y dobijamo sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} Q_2 + x\frac{\partial Q_2}{\partial x} - y\frac{\partial Q_1}{\partial x} &= 0 \\ x\frac{\partial Q_2}{\partial y} - Q_1 - y\frac{\partial Q_1}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.6.12.}$$

Zamenom vrednosti Q_2 iz jednačine (3.6.11.) i vrednosti iz Cauchy - Riemann - ovih jednačina

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_2}{\partial y} \;, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x} = -\frac{\partial Q_1}{\partial y} \tag{3.6.13.}$$

u sistem (3.6.12.) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} y\frac{\partial Q_1}{\partial x} + x\frac{\partial Q_1}{\partial y} &= \frac{y}{x}Q_1 \\ x\frac{\partial Q_1}{\partial x} - y\frac{\partial Q_1}{\partial y} &= Q_1 . \end{aligned} \tag{3.6.14.}$$

Iz (3.6.14.) dobijamo $Q_1 = kx$ gde je k proizvoljna realna konstanta, pa je $Q(z) = kz$. Analitička funkcija $\Psi_o(z)$ uzima tada vrednost

$$\Psi_o(z) = \frac{R(z)}{\sqrt{k}\cdot z} \tag{3.6.15.}$$

a zamenom iste u formulu (3.6.8.) nalazimo vrednost funkcije C t.j.

$$C(z,\bar{z}) = \frac{\sqrt{k}R(z)\cdot\bar{z}}{\overline{R(z)}} \,. \tag{3.6.16.}$$

Daljom zamenom vrednosti (3.6.15.) i (3.6.16.) u formule (3.6.6a) i (3.6.6b) i sredjivanjem dobijamo

$$\Psi_{2n}(z) = \frac{z^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{R(z)}{z\cdot 2^{2n}}\cdot\sqrt{k}^{2n-1}$$

$$\Psi_{2n+1}(z) = \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{R(z)}{z\cdot 2^{2n+1}}\cdot\sqrt{k}^{2n} \qquad \text{to jest}$$

$$\Psi_n(z) = \frac{z^n}{n!}\,\frac{R(z)}{z\cdot 2^n}\,\sqrt{k}^{n-1} \,. \tag{3.6.17.}$$

Najzad, zamenom vrednosti koeficijenata (3.6.17.) u areolarni red (3.6.3.) dobijamo

$$w = \sum_{v=o}^{\infty} \bar{z}^v \Psi_v(z) = \sum_{v=o}^{\infty} \frac{\bar{z}^v z^v\cdot \sqrt{k}^n\cdot R(z)}{v!\cdot z\cdot 2^v \sqrt{k}} = \frac{R(z)}{\sqrt{k}z}\sum_{v=o}^{\infty}\frac{\left(\frac{z\cdot\bar{z}\sqrt{k}}{2}\right)^v}{v!} =$$

$$= \frac{R(z)}{\sqrt{k}\,z}\, e^{\frac{\sqrt{k}z\bar{z}}{2}} \,.$$

Prednja izvodjenja omogućavaju nam da formulišemo sledeću teoremu.

<u>Teorema T:</u> Neka je koeficijent $C(z,\bar{z})$ jednačine (3.6.2.) diferencijabilna kompleksna funkcija u nekoj oblasti T koja se može predstaviti u obliku

$$C(z,\bar{z}) = \frac{\sqrt{k}R(z)\cdot\bar{z}}{\overline{R(z)}} \,, \tag{3.6.18.}$$

gde je $R(z)$ proizvoljna analitička funkcija u T. Tada se jedna klasa rešenja jednačine (3.6.2.) nalazi po formuli

$$w = \frac{R(z)}{\sqrt{k}z}\, e^{\frac{\sqrt{k}z\bar{z}}{2}} \,, \tag{3.6.19.}$$

gde je k proizvoljna realna konstanta.

3.7. Problem Mitrinovića za analitičke funkcije

U svome radu [41] D. Mitrinović je postavio sledeći problem:

Data je jednakost

$$F(u,v,x,y) = 0, \tag{3.7.1.}$$

gde je F realna funkcija realnih promenljivih u,v,x,y. Treba naći konjugovano harmonijske funkcije u i v promenljivih x i y za koje identički važi jednakost (3.7.1.), ukoliko takve funkcije postoje.

Iz jednakosti (3.7.1.) dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 . \end{aligned} \tag{3.7.2.}$$

Kako se traže funkcije u i v koje ispunjavaju Cauchy - Riemann-ove uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} , \tag{3.7.3.}$$

jednakosti (3.7.2.) postaju

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.7.4.}$$

Odavde sleduje

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2} \tag{3.7.5.}$$

t.j.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g_1(x,y,u,v) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = g_2(x,y,u,v) \tag{3.7.6.}$$

gde su g_1 i g_2 poznate funkcije, ako je funkcija F data.

Da bi izraz $u + iv$, gde su u i v vezani jednakošću (3.7.1.) , bio analitička funkcija promenljive z, potrebno je i dovoljno da jednačine (3.7.6.) i (3.7.1.) imaju jedno zajedničko rešenje u i v, pod uslovom da su u i v realne funkcije.

Ako izrazimo funkciju v iz jednačina (3.7.1.) i (3.7.6.) eliminišući iz tih jednačina funkciju u dobićemo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f_1(v,x,y) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = f_2(v,x,y). \tag{3.7.7.}$$

Svako rešenje koje zadovoljava obe jednačine (3.7.7.) zadovoljava tako isto i nove jednakosti

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2\,\frac{\partial f_1}{\partial v}\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1\,\frac{\partial f_2}{\partial v} \tag{3.7.8.}$$

i prema tome i jednakost

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2\,\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1\,\frac{\partial f_2}{\partial v}\,. \tag{3.7.9.}$$

Mogu nastupiti sledeća tri slučaja.

Slučaj 1. Jednakost (3.7.9.) je identički zadovoljena. Skup jednačina (3.7.7.) tada ima beskonačno mnogo rešenja izraženih funkcijom koja sadrži jednu proizvoljnu realnu konstantu. U ovom slučaju za skup (3.7.7.) kaže se da je potpuno integrabilan.

Slučaj 2. Jednakost (3.7.9.) nije identički zadovoljena. Za v se može uzeti samo ona funkcija koja je definisana jednakošću (3.7.9.). Probom se ustanovljava da skup relacija (3.7.7.) ima zajedničko rešenje. Ovo rešenje je partikularno, t.j. u njemu se ne pojavljuje integraciona konstanta.

Slučaj 2a. Jednakost (3.7.9.) nije identički zadovoljena a probom se ustanovljava da skup relacija (3.7.7.) nema zajedničkog rešenja. U tom slučaju kaže se da jednakost (3.7.1.) ne definiše ni jednu analitičku funkciju.

Kada se navedenim postupkom odredi jedna realna funkcija v i kada je odgovarajuća funkcija u, odredjena jednakošću (3.7.1.) tako isto realna, dobija se jedno rešenje $(u_1\,;\,v_1)$ postavljenog problema.

Skup svih parova (u,v) je opšte rešenje navedenog problema.

3.8. Veza izmedju rešavanja opšteg eliptičkog sistema parcijalnih jednačina i problema Mitrinovića

Neka je dat opšti eliptički sistem parcijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= a(x,y)u + b(x,y)v + f(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= c(x,y)u + d(x,y)v + g(x,y), \end{aligned} \tag{3.8.1.}$$

čiji su koeficijenti neprekidne funkcije u T i koji se može predstaviti u kompleksnom obliku

$$Dw = Aw + B\bar{w} + F \tag{3.8.2.}$$

(vidi 3.5.)

Ako je poznato jedno partikularno rešenje w_o ($w_o \neq 0$) odgovarajuće homogene jednačine

$$Dw = B\bar{w} , \tag{3.8.3.}$$

potražimo rešenje jednačine (3.8.2.) u obliku

$$w = w_o \cdot H \tag{3.8.4.}$$

gde je $H = H(x,y)$ zasad nepoznata realna funkcija realnih promenljivih x i y. (Partikularno rešenje w_o jednačine (3.8.4.) nalazi se korišćenjem teoreme T iz 3.6. ako je ispunjen uslov (3.6.18.)). Zamenom vrednosti (3.8.4.) u jednačinu (3.8.2.) dobijamo

$$\begin{aligned} w_o \cdot DH &= Aw_oH + F \qquad \text{ili} \\ DH - AH - \frac{F}{w_o} &= 0 . \end{aligned} \tag{3.8.5.}$$

Regularno rešenje jednačine (3.8.5.) na osnovu formule (3.5.22.) je

$$H = e^{\int A}\left[Q(z) + \int \frac{F}{w_o}\, e^{-\int A}\right] \tag{3.8.6.}$$

t.j.

$$H = M(Q + N)$$

gde je

$$M = M_1(x,y) + iM_2(x,y) = e^{\int A}$$

$$N = N_1(x,y) + iN_2(x,y) = \int \frac{F}{w_o}\, e^{-\int A}$$

$$Q = Q(z) = Q_1(x,y) + iQ_2(x,y)$$ ($Q(z)$ je proizvoljna analitička funkcija).

Kako H mora da bude realna funkcija realnih promenljivih x,y to izjednačavanjem imaginarnog dela relacije (3.8.7.) sa nulom dobijamo

$$M_2Q_1 + M_1Q_2 + M_2N_1 + M_1N_2 = 0 . \tag{3.8.8.}$$

Jednačina (3.8.8.) pretstavlja neku vrstu karakteristične jednačine za jednačinu (3.8.2.).

Time je nalaženje rešenja sistema (3.8.1.) odnosno jednačine (3.8.2.) svedeno na problem Mitrinovića. Iz relacije (3.8.8.) možemo koristeći postupak Mitrinovića da odredimo harmonijsko konjugovani par $Q_1(x,y)$ i $Q_2(x,y)$ ukoliko takav postoji i zameniti dobijene vrednosti u (3.8.7.). Vrednost (3.8.7.) zamenjuje se zatim u (3.8.4.) čime se dobija jedna klasa regularnih rešenja jednačine (3.8.2.).

Primer: Naći rešenje sledećeg sistema parcijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= (2 + x)u + yv + 2e^{\frac{x^2+y^2}{2}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= yu + (2 - x)v . \end{aligned} \tag{3.8.9.}$$

Ako drugu jednačinu iz (3.8.9.) pomnožimo sa i i saberemo sa prvom dobićemo:

$$Dw = 2w + z\overline{w} + 2e^{\frac{z\overline{z}}{2}} . \tag{3.8.10.}$$

Rešićemo ovu jednačinu sprovodeći u potpunosti postupak koji smo predhodno teorijski izveli.

Potražimo najpre jedno partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine

$$Dw = z\overline{w} . \tag{3.8.11.}$$

Kako se koeficijent z na desnoj strani može predstaviti u obliku (3.6.18.) t.j.

$$z = \frac{z \cdot \overline{z}}{\overline{z}} = \frac{R(z)\cdot\overline{z}}{\overline{R(z)}} \qquad (R(z) = z), \tag{3.8.12.}$$

to je na osnovu teoreme T iz 3.6. jedno partikularno rešenje jednačine (3.8.11.)

$$w_o = \frac{R(z)}{z} e^{\frac{z\overline{z}}{2}} = e^{\frac{z\overline{z}}{2}} \qquad (k = 1). \tag{3.8.13.}$$

Uvedimo sada u jednačinu (3.8.10.) smenu

$$w = e^{\frac{z\overline{z}}{2}} \cdot H , \tag{3.8.14.}$$

gde je H zasad nepoznata realna funkcija. Kako je

$$Dw = ze^{\frac{z\overline{z}}{2}} H + e^{\frac{z\overline{z}}{2}} \cdot DH , \tag{3.8.15.}$$

to se zamenom vrednosti (3.8.14.) i (3.8.15.) u jednačinu (3.8.10.) ista svodi na

$$e^{\frac{z\bar{z}}{2}}.DH = 2e^{\frac{z\bar{z}}{2}} H + 2e^{\frac{z\bar{z}}{2}} \qquad \text{ili}$$

$$DH - 2H - 2 = 0. \tag{3.8.16.}$$

Rešenje jednačine (3.8.16.) na osnovu formule (3.5.22.) je

$$H = e^{\bar{z}}\cdot Q(z) - 1 . \tag{3.8.17.}$$

Kako je H realna funkcija realnih promenljivih x,y to imaginarni deo desne strane relacije (3.8.17.) mora biti jednak nuli t.j.

$$\mathrm{Im}\left[e^{\bar{z}}:Q(z) - 1\right] = \mathrm{Im}\left[e^{x-iy}(Q_1 + iQ_2) - 1\right] =$$

$$= e^{x}\left[\cos y\ Q_2 - \sin y\ Q_1\right] = 0$$

odakle je

$$Q_1 \sin y - Q_2 \cos y = 0. \tag{3.8.18.}$$

Jednačina (3.8.18.) predstavlja problem Mitrinovića za odredjivanje harmonijski spregnutih funkcija $Q_1(x,y)$ i $Q_2(x,y)$.
Diferencirajući relaciju (3.8.18.) najpre po x a zatim po y dobijamo jednačine

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_1}{\partial x}\sin y - \frac{\partial Q_2}{\partial x}\cos y = 0 \\ &\frac{\partial Q_1}{\partial y}\sin y + Q_1\cos y - \frac{\partial Q_2}{\partial y}\cos y + Q_2 \sin y = 0. \end{aligned} \tag{3.8.19.}$$

Zamenjujući vrednosti iz jednačina Cauchy- Riemann-a

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_2}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial Q_1}{\partial y} = -\frac{\partial Q_2}{\partial x} \tag{3.8.20.}$$

u jednačine (3.8.19.) dobijamo:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_2}{\partial x}\cos y - \frac{\partial Q_2}{\partial y}\sin y = 0 \\ &\frac{\partial Q_2}{\partial x}\sin y + \frac{\partial Q_2}{\partial y}\cos y = Q_1\cos y + Q_2\sin y \end{aligned} \tag{3.8.21.}$$

a zamenom vrednosti Q_2 iz (3.8.18.) i sredjivanjem

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} = Q_2 \qquad \frac{\partial Q_2}{\partial y} = Q_2 \mathrm{ctg}\, y . \tag{3.8.22.}$$

Diferenciranjem prve jednačine (3.8.22.) po y a druge po x nalazimo da je

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q_2}{\partial y} = Q_2 \mathrm{ctg}\, y = \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y \partial x}$$

t.j. da se radi o prvom slučaju problema Mitrinovića. Rešenje sistema (3.8.22.) je

$$Q_2 = Ce^x \sin y \,. \tag{3.8.23.}$$

Harmonijska funkcija Q_1 spregnuta sa Q_2 je

$$Q_1 = Ce^x \cos y \tag{3.8.24.}$$

a tražena analitička funkcija $Q(z)$ ima tada vrednost

$$Q(z) = Ce^z \,. \tag{3.8.25.}$$

Zamenom vrednosti (3.8.25.) u (3.8.17.) nalazimo realnu funkciju H t.j.

$$H = c \cdot e^{z+\bar{z}} - 1 = ce^{2x} - 1 \tag{3.8.26.}$$

a daljom zamenom vrednosti (3.8.26.) u (3.8.4.) dobijamo

$$w = e^{\frac{z \cdot \bar{z}}{2}} \left[ce^{z+\bar{z}} - 1 \right] \tag{3.8.27.}$$

što predstavlja jednu klasu rešenja jednačine (3.8.10.).

\- / -

Konturni problemi za areolarne diferencijalne jednačine

Rešenja areolarnih diferencijalnih jednačina su klase funkcija koje u opštem slučaju mogu biti šire od klase analitičkih funkcija. Stoga je sa teorijskog stanovišta opravdano razmatrati konturne probleme za ove klase funkcija. S druge strane, mnogi praktični problemi primenjene mehanike (problemi dinamike fluida, teorije elastičnosti, teorije elektrostatičkog i magnetnog polja i dr.) svode se na rešavanje konturnih problema za navedene klase funkcija.

Na ovoj problematici su radili pretežno sovjetski autori i metodologija rešavanja se uglavnom sastoji u svodjenju navedenih problema na odgovarajuće konturne probleme za analitičke funkcije. Navedimo samo radi ilustracije radove [57] , [58] , [59] I. Sokolova.

U radu [57] razmatra se konturni problem tipa Riemann-a za polianalitičke funkcije u slučaju kada je kontura L krug i problem svodi na n problema Riemann-a za analitičke funkcije.

U radu [58] razmatra se konturni problem tipa Riemann-a za bianalitičke funkcije i proizvoljnu konturu. Problem se svodi na dva problema Riemann-a za analitičke funkcije i pokazuje da broj linearno nezavisnih rešenja zavisi od oblika same konture.

U radu [59] razmatra se konturni problem tipa Riemann-a sa pomeranjem za polianalitičke funkcije, ako je kontura l krug. Problem se svodi na n konturnih problema Riemann-a sa pomeranjem za analitičke funkcije.

Konturnim problemima za eliptičke sisteme parcijalnih jednačina posvećen je veliki broj radova. M. Lavrentijev je ovo pitanje razmatrao sa geometrijske tačke gledišta u vezi sa teorijom kvazikonformnih preslikavanja. Na isti krug ideja odnose se i radovi B.V. Šabata.

Konturni problem Dirichlet-a za eliptičke sisteme prvi je razmotrio Hilbert [72] . On je pomoću funkcije Green-a sveo problem na integralnu jednačinu Fredholm-a ali nije ispitao njegovu rešivost.

Konturni problem Hilbert-a za areolarnu jednačinu oblika

$$Dw = A\overline{w}$$

prvi je razmotrio M.K. Usmanov [65] i [66] G.N. Položii je ostvario dosta široke rezultate u ispitivanju konturnih problema za p-analitičke i (p,q)-analitičke funkcije. Medjutim ova problematika najšire je razradjena u citiranoj monografiji [3] I.Vekue. Tu se nalazi i najkompletnije ispitivanje pitanja rešivosti problema Hilbert-a.

Spomenimo najzad i rad [42] L.G. Mihailova u kome je rešen konturni problem Riemann-a za eliptičke sisteme.

U ovoj glavi dati su neki prilozi rešavanju konturnog problema Hilbert-a za areolarne jednačine. U tački 3.9. razmatra se konturni problem tipa Hilbert-a za jednu areolarnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda i svodi na n problema Hilbert-a za analitičke funkcije. U 3.10. rešava se konturni problem tipa Dirichlet-a za neke eliptičke sisteme. U 3.11. pokazuje se kako se konturni problem Hilbert-a za p-analitičke i (p,q)-analitičke funkcije može svesti na problem za analitičke funkcije. Najzad u 3.12. razmatra se konturni problem Hilbert-a za opšti eliptički sistem parcijalnih jednačina.

3.9. Konturni problem tipa Hilbert-a za jednu areolarnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda

Problem: Neka je L zatvorena kontura $t = x(s) + iy(s)$ čija jednačina dopušta nalaženje izvoda do $(2n - 2)$-og reda koji zadovoljavaju uslov Hölder-a. Treba odrediti regularno rešenje $w = u + iv$ areolarne diferencijalne jednačine

$$D^n w = 0 \tag{3.9.1.}$$

čiji realni i imaginarni deo zadovoljavaju na konturi L sledeće uslove

$$a_k(s)\,\Delta^k u + b_k(s)\,\Delta^k v = c_k(s); \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ ; \ (k = 0,1\ldots n-1) \tag{3.9.2.}$$

i gde su $a_k(s)$, $b_k(s)$ i $c_k(s)$ realne funkcije luka s konture koje zadovoljavaju uslov Hölder-a i uslov

$$a_k^2(s) + b_k^2(s) = 1. \tag{3.9.3.}$$

Potražimo rešenje jednačine (3.9.1.) u obliku areolarnog reda

$$w = \sum_{v=0}^{\infty} \Psi_v(z)\cdot z^v \bar{z}^v\ , \tag{3.9.4.}$$

pri čemu treba odrediti nepoznate analitičke funkcije kao koeficijente $\Psi_v(z)$ $(v = 0,1,2,\ldots)$. Areolarni izvodi funkcije (3.9.4.) su

$$Dw = 2\sum_{v=1}^{\infty}\Psi_v(z)z^v\cdot v\bar{z}^{v-1}$$

$$D^2 w = 2^2\sum_{v=2}^{\infty}\Psi_v(z)z^v\cdot v\cdot(v-1)\bar{z}^{v-2}$$

$$D^n w = 2^n \sum_{v=n}^{\infty} \Psi_v(z)z^v\cdot v(v-1)\cdots(v-n+1)\bar{z}^{v-n}\ . \tag{3.9.5.}$$

Ako vrednost (3.9.5.) zamenimo u jednačinu (3.9.1.) dobićemo da je

$$\sum_{v=n}^{\infty}\Psi_v(z)z^v\cdot v(v-1)\cdots(v-n+1)\bar{z}^{v-n} = 0$$

što je ispunjeno, ako je

$$\Psi_v(z) = 0\ ,\ (v = n,\ n+1,\ n+2\ldots\ldots) \tag{3.9.6.}$$

Zamenom vrednosti (3.9.6.) u (3.9.4.) dobijamo

$$w = \sum_{v=0}^{n-1} \Psi_v(z).z^v\bar{z}^v \tag{3.9.7.}$$

odakle se vidi da je regularno rešenje areolarne jednačine (3.9.1.) areolarni polinom (n-1)-og reda čiji su koeficijenti proizvoljne analitičke funkcije $\Psi_0(z), \Psi_1(z)\ldots.\Psi_{n-1}(z)$.

(Napomena: Formulu (3.9.7.) izveo je Théodorescсu u radu [62] ali na sasvim drugi način.)

Pošto se račun za ma kakvu konturu jako komplikuje, izabraćemo u našem konturnom problemu za konturu L realnu osu. (Tada je oblast D^+ gornja poluravan).

Konturne uslove (3.9.2.) na osnovu (3.9.3.) možemo napisati u obliku

$$\mathrm{Re}\left\{\left[a_k(s) - ib_k(s)\right]\Delta^k w(t,\bar{t})\right\} = c_k(s) \tag{3.9.8.}$$

gde je $w(z,\bar{z}) = u + iv = \sum\limits_{v=0}^{n-1} z^v\bar{z}^v\Psi_v(z)$. Iz relacije (3.9.7.) možemo doći do izraza za $\Delta^k w(z,\bar{z})$. Ako u operatoru $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ predjemo sa realnih na kompleksne koordinate $z = x+iy$; $\bar{z} = x-iy$ dobićemo da je

$$\Delta w = 4\,\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial\bar{z}}\ .$$

Indukcijom se može pokazati da je $\Delta^k w = 4^k \frac{\partial^{2k} w}{\partial z^k\,\partial\bar{z}^k}$. (3.9.9.)

Ako operator Δ^k primenimo na formulu (3.9.7.) dobićemo.

$$\Delta^k w(z,\bar{z}) = 4^k \frac{\partial^{2k} w}{\partial z^k\,\partial\bar{z}^k} = 4^k \frac{\partial^{2k-2}}{\partial z^{k-1}\,\partial\bar{z}^{k-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1} v\bar{z}^{v-1}\left[z^v\Psi_v(z)\right]\right\} =$$

$$=\ldots\ldots = 4^k \sum_{v=k}^{n-1} v(v-1)\ldots.(v-k+1)\bar{z}^{v-k}\left[z^v\Psi_v(z)\right]^{k}\ . \tag{3.9.10.}$$

Naš je cilj da svedemo konturni problem za areolarne polinome na konturni problem za analitičke funkcije. Zato je potrebno konturnu vrednost neanalitičke funkcije $\bar{z}$ zameniti konturnom vrednošću neke analitičke funkcije. To je medjutim jednostavno, jer je na realnoj pravoj $\bar{t} = t$.

Uvedimo sada novu analitičku funkciju

$$\Theta_k(z) = \sum_{v=k}^{n-1} v(v-1)\ldots\ldots(v-k+1)z^{v-k}\left[z^v\Psi_v(z)\right]^{(k)}. \tag{3.9.11.}$$

Tada ćemo na realnoj pravoj imati

$$\Delta^k w(t,\bar{t}) = 4^k \Theta_k(t). \qquad (3.9.12.)$$

Na osnovu ovoga konturne uslove (3.9.8.) možemo napisati u obliku

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\Theta_k(t)}{a_k(s) + ib_k(s)}\right] = \frac{1}{4^k} c_k(s). \qquad (3.9.13.)$$

Time smo dobili **n konturnih** problema Hilbert-a za odredjivanje analitičkih funkcija $\Theta_k(z)$.

Napomena: Konturni problem se vrlo jednostavno rešava i u slučaju kada je kontura L jedinični krug (vidi [6] str. 291-293). Tada je za tačke kruga ispunjen uslov

$$\bar{t} = \frac{1}{t} . \qquad (3.9.14.)$$

Nova analitička funkcija koju uvodimo imaće oblik

$$\Theta_k(z) = \sum_{v=k}^{n-1} v(v-1)\ldots\ldots(v-k+1) \frac{\left[z^v \Psi_v(z)\right]^{(k)}}{z^{v-k}} \qquad (3.9.15.)$$

a na sličan način se i ovaj problem svodi na n konturnih problema Hilbert-a.

Najzad problem se može uopštiti i na slučaj bilo koje proste, glatke, zatvorene konture L čija se jednačina može predstaviti u obliku

$$\bar{z} = g(z) \qquad (3.9.16.)$$

gde je $g(z)$ analitička funkcija. Pomoćna analitička funkcija $\Theta_k(z)$ imaće tada oblik

$$\Theta_k(z) = \sum_{v=k}^{n-1} v(v-1)\ldots\ldots(v-k+1)\left[g(z)\right]^{v-k}\left[z^v \Psi_v(z)\right]^{(k)} \qquad (3.9.17.)$$

- / -

3.10. Konturni problem tipa Dirichlet-a za neke eliptičke sisteme parcijalnih jednačina

Neka je dat sledeći sistem parcijalnih jednačina eliptičkog tipa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + a(x,y)u + b(x,y)v + c(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + a(x,y)v - b(x,y)u + d(x,y) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.10.1.)$$

gde su a,b,c,d neprekidne funkcije u nekoj oblasti D. Za sistem jednačina (3.10.1.) formulisaćemo sledeći konturni problem:

Problem: Neka je L prosta, glatka, zatvorena kontura koja ograničava oblast D i čija je jednačina

$$\bar{z} = g(z) \tag{3.10.2.}$$

gde je $g(z)$ analitička funkcija. Neka je data funkcija tačaka konture

$$w_o = w_o(t) \ , \quad t \in L \tag{3.10.3.}$$

koja zadovoljava uslov Hölder-a

$$|w_o(t_2) - w_o(t_1)| \leqslant A|t_2 - t_1|^\lambda , \quad 0 < \lambda \leqslant 1 \tag{3.10.4.}$$

i uslov

$$-\frac{1}{2} w_o(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w_o(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0. \tag{3.10.5.}$$

Treba odrediti regularno rešenje $w = u + iv$ sistema (3.10.1.) koje na konturi L zadovoljava sledeći uslov

$$w(t) = w_o(t) \ . \tag{3.10.6.}$$

Poznato je da je integral tipa Cauchy-a

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w_o(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

analitička funkcija u oblasti D^+, ograničenoj konturom L, i da važe formule Plemelj-a

$$\begin{aligned} \phi^+(t) &= \frac{1}{2} w_o(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w_o(\tau)}{\tau - t} d\tau \\ \phi^-(t) &= -\frac{1}{2} w_o(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w_o(\tau)}{\tau - t} d\tau \end{aligned} \tag{3.10.7.}$$

kao i formula

$$\phi^+(t) - \phi^-(t) = w_o(t) \ . \tag{3.10.8.}$$

Uslov (3.10.5.) na osnovu druge formule (3.10.7.) označava da je $\phi^-(t) = 0$, pa je tada na osnovu formule (3.10.8.)

$$w_o(t) = \phi^+(t), \tag{3.10.9.}$$

t.j. $w_o(t)$ je granična vrednost neke analitičke funkcije $w_o(z)$.

(Analitička funkcija $w_o(z)$ može se naći na sledeći način: Ako je

$$w_o(t) = u_o(t) + iv_o(t), \tag{3.10.10.}$$

tada se rešavanjem običnog konturnog problema Dirichlet-a može na jedinstven način naći funkcija $u_0(x,y)$. Zatim se odredjuje harmonijski spregnuta funkcija $v_0(x,y)$ čija se granična vrednost na konturi L zbog uslova (3.10.5.) mora poklopiti sa vrednošću $v_0(t)$ iz formule (3.10.10.)).

Ako drugu jednačinu iz (3.10.1) pomnožimo sa i i saberemo sa prvom, dobićemo sledeću areolarnu jednačinu

$$Dw + f(x,y)w + g(x,y) = 0, \qquad (3.10.11.)$$

gde je

$$w = u + iv; \quad f = \frac{a - ib}{2}; \quad g = \frac{c + id}{2}. \qquad (3.10.12.)$$

Rešenje jednačine (3.10.11), koje je dato formulom (3.5.22.), očigledno je funkcija oblika

$$w = w(z,\bar{z}, Q(z)). \qquad (3.10.13.)$$

Na konturi L , funkcija (3.10.13.) na osnovu relacije (3.10.2.) i konturnog uslova (3.10.6.) uzima vrednost

$$w = w(t,g(t),Q(t)) = w_0(t), \quad t \in L . \qquad (3.10.14.)$$

Rešavanjem jednačine (3.10.14.) nalazimo funkciju $Q(t)$ t.j.

$$Q(t)=Q(w_0,g,t) \quad , \quad t \in L \qquad (3.10.15.)$$

a odavde i traženu analitičku funkciju $Q(z)$. Najzad, zamenom vrednosti $Q(z)$ u relaciju (3.10.13.) dobijamo rešenje postavljenog konturnog problema.

Problem se u praksi mnogo lakše rešava ako je unapred poznata analitička funkcija $w_0(z)$, čija se konturna vrednost na L poklapa sa konturnom vrednošću tražene funkcije w. U tom slučaju mogu otpasti pretpostavke (3.10.4.) i (3.10.5.) koje su služile za to da obezbede analitičnost funkcije $w_0(z)$.

Napomena: Navedeni postupak rešavanja konturnog problema može se primeniti i onda ako funkcije $g(z)$ i $Q(z)$ imaju u oblasti D konačan broj polova.

Primer: Naći regularno rešenje eliptičkog sistema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2xu - 2yv + e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2xv + 2yu = 0 \end{aligned} \qquad (3.10.16.)$$

koje na konturi L (jedinični krug $\bar{z} = \frac{1}{z}$) zadovoljava uslov

$$w = e^{is-1} \tag{3.10.17.}$$

(t.j. na konturi L ima istu vrednost kao i analitička funkcija $w_0 = \frac{z}{e}$).

Ako drugu jednačinu sistema (3.10.16.) pomnožimo sa i i saberemo sa prvom dobićemo

$$Dw + 2zw + e^{-z\bar{z}} = 0. \tag{3.10.18.}$$

Na osnovu formule (3.5.22.) rešenje jednačine (3.10.18.) je

$$w = \left[Q(z) - \frac{\bar{z}}{2}\right]e^{-z\bar{z}}. \tag{3.10.19.}$$

Na jediničnom krugu $\bar{z} = \frac{1}{z}$ funkcija (3.10.19.) uzima vrednost

$$w = \left[Q(t) - \frac{1}{2t}\right] e^{-1} = \frac{t}{e}\,, \quad t \in L \tag{3.10.20.}$$

odakle je

$$Q(t) = \frac{2t^2 + 1}{2t}\,. \tag{3.10.21.}$$

Tražena analitička funkcija $Q(z)$ ima tada vrednost

$$Q(z) = \frac{2z^2 + 1}{2z}\,. \tag{3.10.22.}$$

Zamenom vrednosti (3.10.22.) u (3.10.19.) dobijamo rešenje konturnog problema

$$w(z) = \left(\frac{2z^2 + 1}{2z} - \frac{\bar{z}}{2}\right) e^{-z\bar{z}}\,. \tag{3.10.23.}$$

- / -

3.11. Konturni problem Hilbert-a za p-analitičke i (p,q)-analitičke funkcije

U već citiranoj monografiji [10] G. Položi-ja nalaze se sledeće definicije uopštenih analitičkih funkcija prve i druge klase.

Definicija 1: Funkcija $f(z,\bar{z}) = u + iv$ naziva se uopštena analitička funkcija prve klase ili p-analitička sa karakteristikom $p=p(x,y)$ u oblasti D, ako je ona u toj oblasti definisana, jednoznačna i njen realni i imaginarni deo imaju neprekidne parcijalne izvode po x i y i zadovoljavaju sistem jednačina

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial y}\;; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{3.11.1.}$$

Definicija 2: Funkcija $f(z,\bar{z})=u+iv$ naziva se uopštena analitička funkcija II klase ili (p,q)-analitička sa karakteristikama $p=p(x,y)$ i $q=q(x,y)$ u oblasti D, ako je ona u toj oblasti definisana, jednoznačna i njen realni i imaginarni deo imaju neprekidne parcijalne izvode po x i y i zadovoljavaju sistem jednačina

$$p\frac{\partial u}{\partial x} - q\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\;; \quad q\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{3.11.2.}$$

U istoj monografiji dat je poseban osvrt na p-analitičke funkcije sa karakteristikom $p = x^k$ $(k > 0)$ i $p = e^{\alpha(x,y)}$ (α = harmonijska funkcija) i rešeni su neki konturni problemi za ove klase funkcija.

U ovom poglavlju posmatraju se one uopštene analitičke funkcije prve i druge klase čije su karakteristike $p = p(x,y) = p(z)$ i $q = q(x,y) = q(z)$ analitičke funkcije u oblasti D. Za te klase funkcija rešava se konturni problem Hilbert-a svodjenjem na problem za analitičke funkcije.

Problem: Data je prosta, glatka, zatvorena kontura L i realne funkcije luka s konture L: $a(s)$, $b(s)$ i $c(s)$ koje zadovoljavaju uslov Hölder-a. Treba naći funkciju $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, p-analitičku u oblasti D ograničenoj konturom L, čija je karakteristika $p = p(z)$ data analitička funkcija u oblasti D i koja na konturi L ispunjava uslov

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s)\ . \tag{3.11.3.}$$

Jednačine (3.11.1.) možemo napisati i u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-p}{p}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1-p}{p}\frac{\partial v}{\partial x}\ . \tag{3.11.4.}$$

Ako drugu jednačinu (3.11.4.) pomnožimo sa i pa saberemo sa prvom dobićemo jednačinu

$$Df = -\, i\,\frac{1-p}{p}\, Dv$$

ili

$$pDf + i(1-p)Dv = 0\ , \quad (p \neq 0). \tag{3.11.5.}$$

U monografiji [10], p je svuda realna funkcija realnih promenljivih. Ovde medjutim uvodimo predpostavku da je $p = p(z)$ kompleksna analitička funkcija. Kako se analitičke funkcije prema operatoru D odnose isto kao konstante prema običnom diferenciranju, to jednačinu (3.11.5.) možemo napisati i u obliku

$$D[pf + i(1-p)v] = 0,$$

odakle sledi da je

$$pf + i(1-p)v = \varphi(z), \tag{3.11.7.}$$

gde je $\varphi(z)$ proizvoljna analitička funkcija. Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela jednačine (3.11.7.) dobijamo da je

$$\begin{aligned} p_1 u &= \varphi_1 \\ p_2 u + v &= \varphi_2 \end{aligned} \quad (\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,\ p = p_1 + ip_2), \qquad (3.11.8.)$$

odakle je

$$u = \frac{\varphi_1}{p_1}\ ; \quad v = \frac{\varphi_2 p_1 - p_2 \varphi_1}{p_1}\ . \qquad (3.11.9.)$$

Zamenom vrednosti (3.11.9.) u konturni uslov (3.11.3.) dobijamo

$$a(s)\varphi_1(s) + b(s)\varphi_2(s)p_1(s) - b(s)p_2(s)\varphi_1(s) = c(s)p_1(s)$$

t.j.

$$\varphi_1(s)\left[a(s) - b(s)p_2(s)\right] + \varphi_2(s)\left[b(s)p_1(s)\right] = c(s)p_1(s) \qquad (3.11.10.)$$

čime je problem sveden na konturni problem Hilbert-a za analitičke funkcije.

Na sličan način se rešava i konturni problem Hilbert-a za (p,q) analitičke funkcije ako su karakteristike p i q analitičke funkcije u D. Sistem (3.11.2.) može se tada dovesti na oblik

$$D\left[pf - i(p-1)v + iqu\right] = 0 \qquad (3.11.11.)$$

odakle je

$$pf - i(p-1)v + iqu = \varphi(z). \qquad (3.11.12.)$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela dobijamo da je

$$u = \frac{\varphi_1}{p_1 - q_2}\ , \quad v = \varphi_2 - \frac{q_1 + p_2}{p_1 - q_2}\,\varphi_1 \qquad (3.11.13.)$$

a zamenom vrednosti (3.11.13.) u konturni uslov (3.11.3.)

$$\left[a - b(q_1 + p_2)\right]\varphi_1 + b(p_1 - q_2)\varphi_2 = c(p_1 - q_2). \qquad (3.11.14.)$$

Na taj način problem je opet sveden na konturni problem za analitičke funkcije.

3.12. Konturni problem Hilbert-a za eliptički sistem parcijalnih jednačina

U svojoj monografiji [3] I Vekua je izvršio detaljno istraživanje problema odredjivanja neprekidnog rešenja jednačine

$$Dw = Aw + B\bar{w} + C \qquad (3.12.1.)$$

koje na konturi L ispunjava uslov (3.11.3.) Hilbert-a. On je sveo problem na integralnu jednačinu sa singularnim jezgrom u obliku

$$a(t_o)\mu(t_o) + \int_L K(t_o,t)\mu(t)ds = \beta h(t_o) + c(t_o)$$

gde je

$$K(t_o,t) = \mathrm{Re}\left\{[a(t_o) - ib(t_o)]\, M(t_o,t)\right\}$$

$$h(t_o) = -\mathrm{Re}\left\{[a(t_o) - ib(t_o)]\, U_1(t_o)\right\} \qquad t_o \in L$$

(vidi na pr. [3] str. 53 - 56) , pa zatim utvrdjivao osobine i svojstva rešenja analogne osobinama koje važe za odgovarajući konturni problem za analitičke funkcije. Najvažniji rezultat sadržan je u sledećoj teoremi.

<u>Teorema 1:</u> Nehomogeni konturni problem Hilbert-a je rešiv tada i samo tada kada su ispunjena n uslova oblika

$$\int_L c(t)K_j(t)ds = 0, \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{3.12.2.}$$

gde su $K_1,\ldots,K_n$ rešenja odgovarajuće homogene integralne jednačine $(\beta h(t_o) + c(t_o) = 0)$. Homogeni konturni problem može imati samo konačno mnogo (m) linearno nezavisnih rešenja.

Kao posledica ove teoreme mogući su sledeći slučajevi: 1. $m = 0$, $n > 0$. Homogen problem nema rešenja a nehomogen je rešiv ako je ispunjeno n uslova oblika (3.12.2.)
2. $m \geq 0$, $n = 0$: Homogeni problem ima m rešenja (linearno nezavisnih) a nehomogeni je uvek rešiv.

U ovom odeljku ukazaćemo na neke slučajeve kada je rešavanje konturnog problema Hilbert-a moguće sprovesti jednostavnijim postupkom, bez korišćenja komplikovane aparature teorije singularnih integralnih jednačina.

<u>I slučaj</u>: Razmotrimo eliptički sistem oblika (3.10.1) koji se može predstaviti i u obliku areolarne jednačine

$$Dw + f(x,y)w + g(x,y) = 0, \tag{3.12.3.}$$

gde su $f(x,y)$ i $g(x,y)$ neprekidne funkcije.
Rešenje jednačine (3.12.3.) , kao što je poznato, dato je formulom

$$w = \left\{Q(z) - \int g(x,y)e^{\int f(x,y)}\right\}e^{-\int f(x,y)}, \tag{3.12.4.}$$

pa se može napisati i u skraćenom obliku

$$w = \left\{Q(z) - T(z,\bar{z})\right\}K(z,\bar{z}) \tag{3.12.5.}$$

gde je

$$T = T_1 + iT_2 = \int g(x,y)e^{\int f(x,y)} \quad \text{i}$$

$$K = K_1 + iK_2 = e^{-\int f(x,y)} .$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela funkcije (3.12.5.) dobijamo

$$w = u + iv = \left[Q_1 + iQ_2 - T_1 - iT_2\right]\left[K_1 + iK_2\right] =$$

$$= \left[(Q_1 - T_1)K_1 - (Q_2 - T_2)K_2\right] + i\left[(Q_1 - T_1)K_2 + (Q_2 - T_2)K_1\right],$$

t.j.

$$\begin{aligned} u &= (Q_1 - T_1)K_1 - (Q_2 - T_2)K_2 \\ v &= (Q_1 - T_1)K_2 + (Q_2 - T_2)K_1. \end{aligned} \qquad (3.12.6.)$$

Ako vrednosti (3.12.6.) zamenimo u konturni uslov Hilbert-a

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s), \qquad (3.12.7.)$$

imaćemo na konturi L

$$a\left[(Q_1 - T_1)K_1 - (Q_2 - T_2)K_2\right] + b\left[(Q_1 - T_1)K_2 + (Q_2 - T_2)K_1\right] = c,$$

odnosno posle sredjivanja i grupisanja članova

$$Q_1(aK_1 + bK_2) + Q_2(bK_1 - aK_2) = c + aT_1K_1 - aT_2K_2 + bT_1K_2 + bT_2K_1. \qquad (3.12.8.)$$

Time je formulisani problem sveden na konturni problem Hilbert-a za analitičke funkcije.

II slučaj: Posmatrajmo eliptički sistem oblika (3.6.1.) gde su koeficijenti $c_1(x,y)$ i $c_2(x,y)$ neprekidne funkcije. Ovaj sistem može se predstaviti u obliku sledeće areolarne jednačine

$$Dw = C(z,\bar{z})\bar{w} \qquad (3.12.9.)$$

gde je $C(z,\bar{z}) = c_1(x,y) + i\,c_2(x,y)$. Koristeći rezultat teoreme T iz 3.6. možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 2: Neka je data kontura L jednačinama

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \qquad (3.12.10.)$$

i neka su date funkcije konture $a(t)$, $b(t)$ i $c(t)$, pri čemu je funkcija $c(t)$ proporcionalna funkciji

$$a(t)s_1(t) + b(t)s_2(t), \qquad (3.12.11.)$$

gde je

$$s_1(t) = \frac{e^{\frac{x^2(t)+y^2(t)}{2}}}{x^2(t)+y^2(t)}\left[R_1(t)x(t) + R_2(t)y(t)\right]$$
$$s_2(t) = \frac{e^{\frac{x^2(t)+y^2(t)}{2}}}{x^2(t)+y^2(t)}\left[R_2(t)x(t) - R_1(t)y(t)\right] . \qquad (3.12.12.)$$

Tada funkcija

$$w = \frac{Ke^{\frac{z\bar{z}}{2}}R(z)}{z} \qquad (3.12.13.)$$

predstavlja rešenje konturnog problema Hilbert-a za jednačinu (3.12.9.) gde je K koeficijent proporcionalnosti za funkcije $c(t)$ i (3.12.11.).

Zaista neka je

$$\frac{R(z)}{z} = \frac{R_1 + i\,R_2}{x+iy} = \frac{1}{x^2+y^2}\left[(R_1x + R_2y) + i\,(R_2x - R_1y)\right] .$$

Tada je na osnovu teoreme T iz 3.6.

$$w = \frac{Ke^{\frac{z\bar{z}}{2}}R(z)}{z} = \frac{Ke^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{x^2+y^2}\left[(R_1x+R_2y) + i(R_2x - R_1y)\right] =$$
$$= K(s_1 + is_2), \qquad (3.12.14.)$$

funkcija koja zadovoljava jednačinu (3.12.9.). Ova funkcija na konturi L ima vrednost

$$w(t) = K\left[s_1(t) + is_2(t)\right] \qquad (3.12.15.)$$

gde su $s_1(t)$ i $s_2(t)$ date formulama (3.12.12.).

Po pretpostavci teoreme je

$$c(t) = K\left[a(t)s_1(t) + b(t)s_2(t)\right], \qquad (3.12.16.)$$

te odavde vidimo da funkcija (3.12.13.) zadovoljava konturni uslov Hilbert-a (3.11.3.) čime je teorema dokazana.

<u>Napomena:</u> Teorema 2 omogućava nam nalaženje rešenja konturnog problema Hilbert-a u specijalnom slučaju, kada koeficijent $c(t)$ zavisi od leve strane konturnog uslova (3.12.7.). Jasno je da u opštem slučaju kada su koeficijenti $a(t)$, $b(t)$ i $c(t)$ nezavisni, gornja razmatranja ne dolaze u obzir.

III slučaj: Razmotrimo eliptički sistem oblika:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\Omega \quad .$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\Omega \quad , \qquad (3.12.17.)$$

gde je $\alpha = \alpha(x,y)$ data neprekidna funkcija. Smenom

$$v = \alpha\,\Omega, \quad \text{t.j.} \quad \Omega = \frac{v}{\alpha} \qquad (3.12.18.)$$

sistem (3.12.17.) svodi se na sistem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3.12.19.)$$

koji definiše p-analitičke funkcije sa karakteristikom $p = \alpha(x,y)$. U slučaju da je $\alpha(x,y) = \alpha(z)$ analitička funkcija, onda se mogu primeniti sva razmatranja iz 3.11. na rešavanje konturnog problema Hilbert-a za sistem jednačina (3.12.17.)

IV slučaj: Slično slučaju III mogu se razmatrati i oni eliptički sistemi koji se pogodnom smenom svode na sistem koji definiše (p,q)-analitičke funkcije. U slučaju da su karakteristike analitičke funkcije, mogu se opet primeniti razmatranja iz 3.11.

– / –

Zaključak

Izloženi materijal u ovoj glavi obuhvata širok krug ideja koje su bile predmet istraživanja velikog broja stranih a i nekih naših matematičara. Iako vrlo raznovrsan, on je jedinstven u svojoj osnovnoj svrsi; da ilustruje i razradi metodu diferencijalnih jednačina za rešavanje konturnih problema.

Videli smo da je još Kolosov ustanovio analogiju izmedju rešavanja običnih diferencijalnih jednačina oblika

$$f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

i areolarnih diferencijalnih jednačina

$$F(z,w,Dw,D^2w,\dots,D^nw) = 0 \ . \qquad (2)$$

Po ovoj analogiji promenljivoj x odgovara promenljiva $\frac{\bar{z}}{2}$ a proizvoljnoj konstanti proizvoljna analitička funkcija. Ako medjutim dalje razvijemo ovu ideju, vidimo da početnom uslovu oblika

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

za jednačinu (1) može odgovarati početni uslov

$$w(z,\bar{z})_{\bar{z}} = g(z) = w_0(z) , \tag{4}$$

gde su $g(z)$ i $w_0(z)$ analitičke funkcije. Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela relacije

$$\bar{z} = g(z) \tag{5}$$

dobija se sistem

$$\begin{aligned} x &= g_1(x,y) \\ y &= - g_2(x,y) \end{aligned} \qquad (g = g_1 + ig_2). \tag{6}$$

Sistem (6) može odredjivati jednu ili više tačaka, ali sa druge strane može predstavljati i jednačinu konture. Samim tim uslov (4) predstavlja jedan konturni uslov, tako da odredjivanje rešenja areolarne jednačine (2) sa početnim uslovom (4) predstavlja rešavanje konturnog problema. Time se medjutim otvara jedan nov aspekt problematike konturnih problema. Ova ideja je ilustrovana u (3.10.) ali ona zahteva dalju razradu, što će nesumljivo dovesti do novih rezultata.

Navedimo pored već spomenute, još neke mogućnosti daljeg istraživanja:

1. Ispitivanje i dalje razradjivanje teorije areolarnih redova (pored ostalog ispitivanje mogućnosti uspostavljanja veze sa redovima **Hartogs**-a više kompleksnih promenljivih).
2. Istraživanje daljih primena areolarnih redova u teoriji areolarnih diferencijalnih jednačina i sistema parcijalnih jednačina.
3. Rešavanje konturnih problema za razne klase neanalitičkih funkcija (posebno onih koje se javljaju u primenenjoj mehanici).
4 Dalja istraživanja pitanja egzistencije, jedinosti i stabilnosti rešenja areolarnih diferencijalnih jednačina prvog i višeg reda.

– / –

IV glava

Funkcionalne jednačine i konturni problemi

Sadržaj ove glave posvećen je rešavanju konturnih problema primenom funkcionalnih jednačina. Osnovna ideja ove metode je da se umesto konturnog uslova posmatra odgovarajuća funkcionalna jednačina u nekoj oblasti koja sadrži datu konturu, pa da se zatim rešavanjem te funkcionalne jednačine dodje i do rešenja postavljenog konturnog problema. Na ovoj problematici je srazmerno malo radjeno i od poznatih činjenica navedena je samo metoda Winer-Hopfa sa primenom na rešavanje konturnog problema Riemann-a u poglavljima 4.1. i 4.2.

U poglavljima 4.3. i 4.4. razmatra se funkcionalna jednačina Hilbert-a a u 4.5. se navedena razmatranja koriste za rešavanje linearnog i nelinearnog problema Hilbert-a u slučajevima kada je to moguće.

\- / -

4.1. Metoda Winer - Hopfa

Navešćemo najpre dve pomoćne teoreme, neophodne u daljem izlaganju. Njihovi dokazi nalaze se u monografiji [9] B. Nobla.

Teorema A: Neka je $f(z)$ analitička funkcija $(z = x + iy)$, regularna u pojasu $y_- < y < y_+$. Neka je

$$|f(x+iy)| < C|x|^{-p} \qquad (p > 0) \qquad (4.1.1.)$$

kad $x \to \infty$ i neka je nejednakost (4.1.1.) ispunjena ravnomerno počev od nekog $x_0 > 0$. Tada se funkcija $f(z)$ za $y_- < c < y < d < y_+$ može predstaviti u obliku

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z), \qquad (4.1.2.)$$

gde je

$$f_+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta ,$$

$$f_-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+id}^{\infty+id} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (4.1.3.)$$

i gde je funkcija $f_+(z)$ regularna u poluravni $y > y_-$ a funkcija $f_-(z)$ regularna u poluravni $y < y_+$.

Teorema B: Neka je funkcija $K(z)$ regularna i bez nula u pojasu $(y_- < y < y_+ ; -\infty < x < \infty)$ i **neka** $K(z) \to 1$, kad $x \to \pm \infty$ u istom pojasu. Tada se funkcija $K(z)$ može predstaviti u obliku

$$K(z) = K_+(z) . K_-(z) , \qquad (4.1.4.)$$

gde su funkcije $K_+(z)$ i $K_-(z)$ regularne, ograničene i bez nula za $y > y_-$ odnosno $y < y_+$.

Predjimo sada na razmatranje metode Winer - Hopfa.

Neka su date funkcije $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, regularne u pojasu $(y_- < y < y_+ ; -\infty < x < +\infty)$ pri čemu $A(z)$ i $B(z)$ nemaju nula u tom pojasu. Treba naći funkciju $\phi_+(z)$ regularnu u poluravni $y > y_-$ i funkciju $\Psi_-(z)$ regularnu u poluravni $y < y_+$, tako da u pojasu $(y_- < y < y_+, -\infty < x < \infty)$ bude ispunjen uslov

$$A(z)\, \phi_+(z) + B(z)\, \Psi_-(z) + C(z) = 0. \qquad (4.1.5.)$$

Osnovni problem pri rešavanju jednačine (4.1.5.) je u tome da se nadju funkcije $K_+(z)$ i $K_-(z)$ regularne i bez nula u poluravni $y \quad y_-$ odnosno $y < y_+$ tako da je

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{K_+(z)}{K_-(z)} \qquad (4.1.6.)$$

Teorema B omogućava nam medjutim da količnik $\frac{A(z)}{B(z)}$ predstavimo u izraženom obliku.

Koristeći relaciju (4.1.6.) , jednačinu (4.1.5.) možemo napisati u obliku

$$K_+(z)\, \phi_+(z) + K_-(z)\, \Psi_-(z) + \frac{K_-(z)C(z)}{B(z)} = 0. \qquad (4.1.7.)$$

Medjutim, slobodan član u jednačini (4.1.7.) možemo na osnovu teoreme A predstaviti u obliku

$$\frac{K_-(z)C(z)}{B(z)} = C_+(z) + C_-(z) , \qquad (4.1.8.)$$

gde su funkcije $C_+(z)$ i $C_-(z)$ regularne u poluravni $y > y_-$ odnosno $y < y_+$. Uvedimo sada novu funkciju $I(z)$ **definisanu u pojasu** $y_- < y < y_+$ na sledeći način:

$$I(z) = K_+(z)\, \Phi_+(z) + C_+(z) = - K_-(z) \Psi_-(z) - C_-(z). \quad (4.1.9.)$$

Kako su medjutim funkcije $K_+(z)\Phi_+(z) + C_+(z)$ i $K_-(z)\, \psi_-(z) + C_-(z)$ regularne respektivno u poluravnima $y > y_-$ i $y < y_+$, to se funkcija $I(z)$ može definisati u celoj ravni, pri čemu će u celoj ravni biti i regularna.

Pretpostavimo da važe sledeće ocene:

$$|K_+(z)\phi_+(z) + C_+(z)| < |z|^p, \quad z\to\infty, \quad y > y_- \tag{4.1.10.}$$
$$|K_-(z)\Psi_-(z) + C_-(z)| < |z|^q, \quad z\to\infty, \quad y < y_+ .$$

Tada je na osnovu uopštene teoreme Liouville-a funkcija $I(z)$ polinom stepena ne većeg od celobrojnog $\min(p,q)$ t.j.

$$K_+(z)\,\phi_+(z) + C_+(z) = P(z)$$
$$K_-(z)\Psi_-(z) + C_-(z) = -P(z). \tag{4.1.11.}$$

Iz jednačina (4.1.11.) mogu se odrediti tražene funkcije sa tačnošću do proizvoljnog polinoma t.j. do konačnog broja proizvoljnih konstanata, koje se mogu odrediti ako su dati i neki drugi uslovi.

Najzad ćemo reći da je rešenje nekog problema zasnovano na metodi Viner - Hopfa, ako se pri rešavanju koristi faktorizacija t.j. razlaganje oblika (4.1.6.).

4.2. Veza izmedju konturnog problema Riemann-a i metode Viner - Hopfa

Posmatrajmo konturni uslov problema Riemann-a

$$\phi^+(t) = G(t)\,\phi^-(t) + g(t) \tag{4.2.1.}$$

i funkcionalnu vezu Viner - Hopfa

$$A(z)\,\phi_+(z) + B(z)\,\psi_-(z) + C(z) = 0, \tag{4.2.2.}$$

koja je zadovoljena u pojasu $(y_- < y < y_+;\ -\infty < x < \infty)$. Predpostavimo da je funkcija $G(z)$ iz konturnog uslova (4.2.1.) regularna u celoj kompleksnoj ravni, da je $G(z) \sim z^m$ (m je ceo broj) kad $z\to\infty$ i da $G(z)$ teži konačnoj granici kad z teži ma kojoj tački C.

Izaberimo neko y_1, $(y_- < y_1 < y_+)$ tako da na pravoj $y = y_1$ $(-\infty < x < \infty)$ funkcije $A(z)$ i $B(z)$ nemaju nula. Smatraćemo tu pravu konturom L i tačke na njoj označavaćemo sa t. Tada jednačina (4.2.2.) na konturi L ima sledeći oblik:

$$A(t)\,\phi_+(t) + B(t)\Psi_-(t) + C(t) = 0$$

odnosno

$$\phi_+(t) = -\frac{B(t)}{A(t)}\phi_-(t) - \frac{C(t)}{A(t)} . \tag{4.2.3.}$$

Na taj način prešli smo na konturni problem Riemann-a pri čemu je kontura L prava paralelna x-osi, funkcije $\phi_+(z)$ i $\phi_-(z)$ u potpunosti omogućavaju formiranje funkcije $\Phi(z)$ konturnog problema Riemann-a.

Glavna razlika izmedju konturnog problema Riemann-a i metode Winer - Höpfa je u sledećem:

a) U konturnom problemu Riemann-a uslov (4.2.1.) mora da bude ispunjen samo na konturi a ne i u pojasu konačne širine.

b) Za funkciju $G(t)$ iz (4.2.1.) postavlja se manje zahteva nego za funkcije $A(t)$ i $B(t)$. Funkcija $G(t)$ treba da bude definisana samo na konturi L i da zadovoljava uslov Hölder-a, dok ona ne mora predstavljati graničnu vrednost neke analitičke funkcije. Za razliku od nje, funkcije $A(t)$ i $B(t)$ moraju biti granične vrednosti neke funkcije, analitičke u pojasu $(y_- < y < y_+;\ -\infty < x < \infty)$. U slučaju da funkcija $G(t)$ ipak predstavlja na konturi L graničnu vrednost neke analitičke funkcije, konturni problem Riemann-a može se rešiti metodom Winer - Hopfa dok su u protivnom potrebne druge metode rešavanja.

4.3. Funkcionalna jednačina Hilbert-a

Neka je data prosta, jednostruko povezana oblast D i realne funkcije $a(x,y)$, $b(x,y)$ i $c(x,y)$, neprekidne u oblasti D zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog i drugog reda. Treba odrediti funkciju.

$$F(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{4.3.1.}$$

analitičku u D, čiji realni i imaginarni deo zadovoljavaju u D sledeću funkcionalnu jednačinu tipa Hilbert-a:

$$a(x,y)u(x,y) + b(x,y)v(x,y) = c(x,y). \tag{4.3.2.}$$

Ako jednačinu (4.3.2.) diferenciramo najpre po x a zatim po y dobićemo:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial b}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} b - \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial a}{\partial y} u + \frac{\partial u}{\partial y} a + \frac{\partial b}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} b - \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{4.3.3.}$$

Zamenom Cauchy - Riemann - ovih uslova

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.3.4.}$$

u jednačine (4.3.3.) dobijamo

$$\frac{\partial a}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} a + \frac{\partial b}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} b - \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial a}{\partial y} u - \frac{\partial v}{\partial x} a + \frac{\partial b}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} b - \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \; . \qquad (4.3.5.)$$

Iz jednačina (4.3.5.) možemo izračunati vrednost parcijalnih izvoda $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}$ i to:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\left(b\frac{\partial a}{\partial x} - a\frac{\partial a}{\partial y}\right) u - \left(b\frac{\partial b}{\partial x} - a\frac{\partial b}{\partial y}\right) v + b\frac{\partial c}{\partial x} - a\frac{\partial c}{\partial y}}{a^2 + b^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\left(a\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial y}\right) u - \left(a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y}\right) v + a\frac{\partial c}{\partial x} + b\frac{\partial c}{\partial y}}{a^2 + b^2} \; . \qquad (4.3.6.)$$

Kako je iz jednačine (4.3.2.)

$$u = \frac{c - bv}{a} \qquad (4.3.7.)$$

to zamenom vrednosti **u** iz (4.3.7.) u (4.3.6.) dobijamo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A(x,y)v + B(x,y) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = C(x,y)v + D(x,y) \qquad (4.3.8.)$$

gde je

$$A(x,y) = \frac{\frac{b^2}{a}\frac{\partial a}{\partial x} - b\frac{\partial a}{\partial y} - b\frac{\partial b}{\partial x} + a\frac{\partial b}{\partial y}}{a^2 + b^2} \; ;$$
$$B(x,y) = \frac{-\frac{bc}{a}\frac{\partial a}{\partial x} + c\frac{\partial a}{\partial y} + b\frac{\partial c}{\partial x} - a\frac{\partial c}{\partial y}}{a^2 + b^2} \; ;$$
$$(4.3.9.)$$
$$C(x,y) = \frac{b\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{b^2}{a}\frac{\partial a}{\partial y} - a\frac{\partial b}{\partial x} - b\frac{\partial b}{\partial y}}{a^2 + b^2} \; ;$$
$$D(x,y) = \frac{a\frac{\partial c}{\partial x} + b\frac{\partial c}{\partial y} - c\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{c\,b}{a}\frac{\partial a}{\partial y}}{a^2 + b^2} \; .$$

Diferenciranjem prve relacije (4.3.8.) po y i druge po x nalazimo vrednost mešovitih parcijalnih izvoda, s obzirom da su u(x,y) i v(x,y) harmonijske funkcije;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} A + \frac{\partial B}{\partial y} \; ; \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial C}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} C + \frac{\partial D}{\partial x} \; , \qquad (4.3.10.)$$

a njihovim izjednačavanjem dobija se

$$\frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} A + \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} C + \frac{\partial D}{\partial x} \ . \qquad (4.3.11.)$$

Zaključujući na isti način kao u 3.7. možemo razlikovati sledeće slučajeve:

I) Jednačina (4.3.11.) je identički zadovoljena. Jednačine (4.3.8.) imaju beskonačno mnogo rešenja izraženih preko funkcije koja sadrži proizvoljnu konstantu.

II) Jednačina (4.3.11.) nije identički zadovoljena i za rešenje jednačine (4.3.2.) se može uzeti samo ona funkcija koja je definisana ovom jednakošću. Probom se utvrdjuje da jednačine (4.3.8.) imaju zajedničko rešenje.

III) Jednačina (4.3.11.) nije identički zadovoljena i probom se utvrdjuje da jednačine (4.3.8.) nemaju zajedničko rešenje.

Kada se navedenim postupkom odredi realna funkcija v, a zatim na osnovu (4.3.7.) harmonijski spregnuta funkcija u, dobija se rešenje funkcionalne jednačine Hilbert-a.

4.4. Funkcionalna jednačina Hilbert-a sa harmonijskim koeficijentima

Razmotrimo sada mogućnost rešavanja funkcionalne jednačine Hilbert-a (4.3.2.) pod pretpostavkom da su koeficijenti $a(x,y)$, $b(x,y)$ i $c(x,y)$ harmonijske funkcije u oblasti D.

Jednačinu (4.3.2.) možemo predstaviti i u sledećem obliku:

$$\mathrm{Re}\left[(a(x,y) - ib(x,y))F(z)\right] = c(x,y) \qquad (4.4.1.)$$

gde je $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitička funkcija.

Jasno je da funkcija $\mathrm{Re}\left[(a - ib)F(z)\right]$ u opštem slučaju nije harmonijska. Zbog toga možemo razlikovati dva slučaja:

<u>I slučaj:</u> Funkcija

$$w(z) = a(x,y) - ib(x,y) \qquad (4.4.2.)$$

je analitička. Tada je i leva strana jednačine (4.4.1.) harmonijska funkcija. Funkciji $c(x,y)$ možemo dodeliti harmonijski konjugovanu funkciju $c_1(x,y)$ sa tačnošću do proizvoljne konstante pa će rešenje jednačine (4.4.1.) imati oblik

$$F(z) = \frac{C(z)}{w(z)} \qquad (4.4.3.)$$

gde je

$$C(z) = c(x,y) + ic_1(x,y) \ . \qquad (4.4.4.)$$

II. slučaj : Funkcija (4.4.2.) nije analitička a leva strana jednačine (4.4.1.) mora da bude harmonijska funkcija. U ovom slučaju pokazaćemo da važi sledeća

Teorema 1: Ako funkcija (4.4.2.) nije analitička, leva strana u (4.4.1.) biće harmonijska samo kada je

$$F(z) = ki\left[\varphi(z) - \Psi(z)\right] + \alpha + i\beta , \qquad (4.4.5.)$$

gde su $\varphi(z)$ i $\Psi(z)$ analitičke funkcije koje se odredjuju iz uslova

$$\operatorname{Re}\varphi(z) = a(x,y), \quad \operatorname{Im}\Psi(z) = -b(x,y), \qquad (4.4.6.)$$

a k, α, β proizvoljne realne konstante.

Dokaz: Neka je

$$\varphi(z) = a(x,y) + ia_1(x,y)$$

analitička funkcija čiji je realni deo data funkcija $a(x,y)$ i

$$\Psi(z) = b_0(x,y) - ib(x,y)$$

analitička funkcija čiji je imaginarni deo data funkcija $-b(x,y)$ i neka je

$$\varphi(z) - \Psi(z) = m(x,y) + in(x,y). \qquad (4.4.7.)$$

Levu stranu jednačine (4.4.1.) možemo predstaviti u obliku

$$\operatorname{Re}\left[(a(x,y) - ib(x,y))F(z)\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[(\varphi(z) + \Psi(z))F(z)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[(\overline{\varphi(z)} - \overline{\Psi(z)})F(z)\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[(\varphi(z) + \Psi(z))F(z)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[(\overline{\varphi(z)} - \overline{\Psi(z)})\overline{F(z)}\right] + \operatorname{Re}\left[(\overline{\varphi(z)} - \overline{\Psi(z)})iv\right] = \operatorname{Re}\varphi(z)F(z) + vn. \qquad (4.4.8.)$$

Kako je $\varphi(z)F(z)$ analitička funkcija, to funkcija $v(x,y)\,n(x,y)$ mora biti harmonijska t.j.

$$\Delta(v\cdot n) = \frac{\partial^2(v\cdot n)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(v\cdot n)}{\partial y^2} = v.\Delta n + n\Delta v + 2\left(\frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

odakle je

$$\frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ . \qquad (4.4.9.)$$

Na osnovu uslova Cauchy - Riemann-a, jednačina (4.4.9.) prelazi u sledeću parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (4.4.10.)$$

Karakteristična jednačina za parcijalnu jednačinu (4.4.10.) je

$$\frac{dx}{\frac{\partial m}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial m}{\partial x}}$$

ili

$$\frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy = 0. \tag{4.4.11.}$$

Lako se vidi da funkcija $m = m(x,y)$ predstavlja prvi integral jednačine (4.4.11.) pa će opšte rešenje parcijalne jednačine (4.4.10) imati oblik

$$v(x,y) = \Phi[m(x,y)] \ , \tag{4.4.12.}$$

gde je Φ proizvoljna, dvaput diferencijabilna funkcija.

Kako je

$$\Delta\Phi[m(x,y)] = 0$$

to Φ mora biti linearna funkcija pa je

$$v(x,y) = k\cdot m(x,y) + \beta . \tag{4.4.13.}$$

Iz (4.4.13.) lako nalazimo da je

$$u(x,y) = -k\, n(x,y) + \alpha \tag{4.4.14.}$$

pa je

$$F(z) = ik\, [\varphi(z) - \psi(z)] + \alpha + i\beta \tag{4.4.15.}$$

što je trebalo i dokazati.

(Skicu ovog dokaza dao mi je sovjetski matematičar R. Bancuri.)

Na osnovu gornjeg izlaganja može se formulisati sledeća

Teorema 2: Neka je koeficijent $c(x,y)$ funkcionalne jednačine Hilbert-a harmonijska funkcija koju je moguće predstaviti u obliku

$$c(x,y) = \alpha a(x,y) + \beta b(x,y) - k\,[a(x,y)\cdot a_1(x,y) + b(x,y) b_0(x,y)] \tag{4.4.16.}$$

gde su $a(x,y)$ i $b(x,y)$ harmonijske funkcije u oblasti D. Tada je rešenje funkcionalne jednačine (4.4.1.) dato formulom

$$F(z) = ki\,[\varphi(z) - \psi(z)] + \alpha + i\beta \tag{4.4.17.}$$

gde su $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ analitičke funkcije odredjene uslovima (4.4.6.).

Dokaz: Funkciju (4.4.17.) na osnovu uslova (4.4.6.) možemo predstaviti i u sledećem obliku

$$F(z) = \alpha - k(a_1 + b) + i[\beta + k(a - b_0)] \ , \tag{4.4.18.}$$

gde je

$$u(x,y) = \alpha - k(a_1 + b) \quad ; \quad v(x,y) = \beta + k(a - b_0). \qquad (4.4.19.)$$

Neposrednom zamenom vrednosti (4.4.19.) kao i vrednosti $c(x,y)$ iz (4.4.16) u jednačinu (4.3.2.) proverava se da je leva strana identički jednaka desnoj.

4.5. Veza izmedju funkcionalne jednačine Hilbert-a i konturnog problema Hilbert-a

Konturnom problemu Hilbert-a izloženom u 1.4. i 1.5. može se prići i sa aspekta funkcionalne jednačine Hilbert-a. Zaista ako je kontura $\mathcal{L}$ sadržana u oblasti D, rešenje funkcionalne jednačine predstavljaće istovremeno i rešenje konturnog problema Hilbert-a za konturu $\mathcal{L}$. Razmotrimo pri tom slučajeve I, II i III iz 4.3.

U I slučaju rešenje funkcionalne jednačine (4.3.2.) sadrži proizvoljnu konstantu i predstavlja jednu klasu rešenja konturnog problema Hilbert-a.

U II slučaju rešenje funkcionalne jednačine (4.3.2.) predstavlja jedno partikularno rešenje konturnog problema.

U III slučaju nije moguće rešiti konturni problem navedenom metodom funkcionalnih jednačina već su potrebne druge metode rešavanja.

U konkretnim slučajevima konturnog problema Hilbert-a date funkcije $a(t)$, $b(t)$ i $c(t)$ mogu se na jednostavan način harmonijski produžiti u oblast D (rešavanjem običnog konturnog problema Dirichlet-a). Zatim, ukoliko se radi o jednom od dva navedena slučaja u 4.4. može se rešavanjem funkcionalne jednačine Hilbert-a doći i do rešenja konturnog problema Hilbert-a.

<u>Primer 1:</u> Naći analitičku funkciju

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

koja na krugu

$$x = \cos t \ , \quad y = \sin t$$

zadovoljava sledeći konturni uslov:

$$u(t) \sin t - v(t) \cos t = 3\sin t \ , \qquad t \in L. \qquad (4.5.1.)$$

Ovde je $a(t) = \sin t$, $b(t) = -\cos t$, $c(t) = 3 \sin t$. Harmonijskim produženjem koeficijenata dobijamo

$$a(x,y) = y \ , \quad b(x,y) = -x, \quad c(x,y) = 3y$$

i problem se svodi na rešavanje sledeće funkcionalne jednačine Hilbert-a:

$$uy - vx = 3y. \tag{4.5.2.}$$

Primenimo najpre na jednačinu (4.5.2.) razmatranja iz (4.3.). Diferenciranjem jednačine (4.5.2.) najpre po x a zatim po y lobijamo

$$\begin{aligned} y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial v}{\partial x} - v &= 0 \\ y\frac{\partial u}{\partial y} + u - x\frac{\partial v}{\partial y} &= 3 . \end{aligned} \tag{4.5.3.}$$

Ako u sistem (4.5.3.) zamenimo vrednosti iz jednačina Cauchy-Riemann-a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.5.4.}$$

i vrednost

$$u = \frac{3y + vx}{y} \tag{4.5.5.}$$

iz jednačine (4.5.2.), nakon kraćeg sredjivanja dobićemo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{y} \quad . \tag{4.5.6.}$$

Diferenciranjem prve relacije (4.5.6.) po y i druge po x nalazimo vrednosti mešovitih parcijalnih izvoda t.j.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{4.5.7.}$$

Iz (4.5.7.) vidimo da je sistem (4.5.6.) potpuno integrabilan t.j. da se radi o prvom slučaju iz 4.3. Integracijom sistema (4.5.6.) nalazimo, s obzirom na Cauchy-Riemann-ove jednačine, da je

$$u = cx + d \quad , \quad v = cy \tag{4.5.8.}$$

a zamenom vrednosti (4.5.8.) u (4.5.2.) izračunavamo vrednost $d = 3$. Tražena analitička funkcija je

$$f(z) = cz + 3 \tag{4.5.8$_a$.}$$

što predstavlja jednu klasu rešenja postavljenog konturnog problema.

- / -

Primenimo sada na jednačinu (4.5.2.) razmatranja iz (4.4.).

Kako je $c(x,y) = 3y = 3a(x,y)$ to je ispunjen uslov (4.4.16.) pri čemu je $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $k = 0$. Tada je na osnovu teoreme 2 iz 4.4.

$$F(z) = 3 \tag{4.5.9.}$$

partikularno rešenje funkcionalne jednačine Hilbert-a kao i postavljenog konturnog problema (4.5.1.). Rešenje (4.5.9.) očigledno je sadržano u rešenju (4.5.8.)

Napomena 1: Iz navedenih razmatranja vidimo da harmonijsko produženje koeficijenata $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ nije neophodno za rešavanje konturnih problema metodom funkcionalnih jednačina. Dovoljno je da se na pogodan način izaberu funkcije $a(x,y)$, $b(x,y)$ i $c(x,y)$ koje imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda a na konturi uzimaju vrednosti $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.

Napomena 2: Izložena metoda funkcionalnih jednačina omogućava u nekim slučajevima i rešavanje nelinearnog konturnog problema Hilbert-a pri čijem se razmatranju javljaju principijelne teškoće posmatrano u odnosu na linearan konturni problem.

Problem: Data je prosta, glatka, zatvorena kontura L i realne funkcije $a(t)$, $b(t)$ i $c(t)$ konture L. Treba odrediti analitičku funkciju

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

koja na konturi L zadovoljava sledeći nelinearni konturni uslov

$$a(t)\left[u(t)\right]^{\alpha} + b(t)\left[v(t)\right]^{\beta} = c(t) \tag{4.5.10.}$$

gde su α i β realni brojevi.

Primer 2: Odrediti analitičku funkciju $f(z)$ koja na konturi

$$x = x(t) \ , \quad y = y(t) \tag{4.5.11.}$$

zadovoljava sledeći nelinearni konturni uslov

$$u^2(t) - v(t) = x^2(t) + 4x(t) - y(t) + 4. \tag{4.5.12.}$$

I ovaj problem može se rešiti metodom funkcionalnih jednačina. Koeficijente funkcionalne jednačine Hilbert-a izabraćemo na sleći način:

$$a(x,y) = 1 \ , \quad b(x,y) = -1 \ , \quad c(x,y) = x^2 + 4x - y + 4.$$

Diferenciranjem jednačine Hilbert-a

$$u^2 - v = x^2 + 4x - y + 4 \tag{4.5.13.}$$

najpre po x a zatim po y dobijamo:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 4 \ , \qquad 2u\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \ . \tag{4.5.14.}$$

Ako sada u (4.5.14.) zamenimo vrednosti iz jednačina Cauchy - Riemann-a možemo izračunati parcijalne izvode funkcije u, t.j.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4xu + 8u + 1}{1 + 4u^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x - 2u + 4}{1 + 4u^2} \quad . \tag{4.5.15.}$$

Diferenciranjem prve relacije (4.5.15.) po y i druge po x, izjednačavanjem drugih parcijalnih mešovitih izvoda i sredjivanjem dobijamo:

$$(4u^2 + 1)\left[u^2 - (x^2 + 4x + 4)\right] = 0. \tag{4.5.16.}$$

Relacija (4.5.16.) nije identički zadovoljena i jednačine (4.5.15.) nisu potpuno integrabilne u smislu definicije Mitrinovića. Rešenja jednačine (4.5.16.) su:

$$u_1 = \frac{i}{2} \;, \quad u_2 = -\frac{i}{2} \;, \quad u_3 = x + 2 \;, \quad u_4 = -x - 2. \tag{4.5.17.}$$

Probom se utvrdjuje da samo vrednost u_3 zadovoljava jednačine (4.5.15.) t.j. da se radi o drugom slučaju iz 4.3.. Tada je harmonijski spregnuta funkcija

$$v = y \tag{4.5.18.}$$

i tražena analitička funkcija ima oblik

$$f(z) = z + 2. \tag{4.5.19.}$$

Vrednost (4.5.19.) predstavlja partikularno rešenje postavljenog nelinearnog konturnog problema Hilbert-a.

Zaključak

U ovoj glavi videli smo kako je izložena metoda funkcionalnih jednačina bitno skraćivala postupak rešavanja konturnih problema i dovodila do rešenja u konačnom obliku. Sa druge strane medjutim uverili smo se da su mogućnosti njene primene ograničene. Metoda Winer - Hopfa mogla se primeniti samo ako je kontura L prava paralelna realnoj osi a koeficijenti A(t) i B(t) predstavljaju granične vrednosti analitičkih funkcija u pojasu $(-\infty < x < \infty \,;\, y_- < y < y_+)$. Funkcionalna jednačina Hilbert-a takodje nije uvek rešiva, a ako su koeficijenti harmonijske funkcije rešiva je samo u dva slučaja navedena u 4.4.. Osim toga korišćenje funkcionalne jednačine Hilbert-a ne garantuje nalaženje svih rešenja konturnog problema.

I pored navedenih ograničenja, metoda funkcionalnih jednačina svakako zaslužuje dalje istraživanje i može da omogući dobijanje novih rezultata. Navedimo samo dve mogućnosti na kojima se dalje može raditi:

1. Metoda Winer - Hopfa izložena je za slučaj kada je razmatrana oblast pojas $(-\infty < x < \infty;\ y_- < y < y_+)$ a kontura L paralelna sa realnom osom. Može se medjutim razmatrati slučaj kada je oblast D kružni prsten a kontura L bilo koja prosta, glatka, zatvorena kriva sadržana u tom prstenu.
2. Dalji razvoj teorije funkcionalnih jednačina a posebno onih tipova koje svojom strukturom asociraju na uslove konturnih problema mogao bi dovesti do rezultata koji bi doprineli daljem razvoju teorije konturnih problema.

- / -

Literatura

a) Monografija i udžbenici

[1] Atkinson F.V., Diskrete and continuous boundary problems, Academic Press, New York, London 1964.

[2] Bilimović A., Diferencijalni elementi geometrijske teorije neanalitičkih funkcija. Glas CCXLII, knjiga 19 Srpske Akademije nauka, Beograd 1960.

[3] Vekua I. N., Sistemi differencialjnih uravnenii elliptičeskogo tipa. Matem. sb. 31/73, 2, 1952 Moskva.

[4] Vekua I. N., Obobščennie analitičeskie funkcii, Fizmatgiz 1959, Moskva.

[5] Vekua N. P., Sistemi singuljarnih integralnih uravnenii i nekotorie graničnie zadači, izdanie vtoroe, Moskva 1970.

[6] Gahov F. D., Kraevie zadači, Moskva 1963.

[7] Kamke E., Differentialgleichungen, 6 verbesserte Auflage, Leipzig 1959.

[8] Musheliśvili N. I. Singuljarnie integralnie uravnenija, Gostehizdat, 1946. Moskva.

[9] Nobl B., Metoda Viner-Hopfa, 1962. Moskva.

[10] Položii G. N., Teorija i primenenie p-analitičeskih i (p,q)-analitičeskih funkcii, izdanie vtoroe, Kiev, 1973.

[11] Smirnov V. I., Kurs vissei matematiki, t. III, Gostehizdat, 1957 Moskva.

[12] Hilbert D., Grundzüge der Integralgleichungen, Leipzig- Berlin, 2-te Aufl. 1924 , drittes Abschnitt.

[13] Collatz L., Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer -Verlag, Berlin 1964.

[14] Šabat B. V. Vvedenie v kompleksnii analiz, Moskva 1969.

b) Originalni radovi

[15] Aržanov G. V., Sibirsk. matem. žurn. 11, Nr. 4 (1961).

[16] Bers L. Partial diferential equations and generalised analytic

functions, Proc. Nat. Acad. Sci. 36 (1950), 130 -136 and 37 (1951), 42 - 47.

[17] Bilimovitch A., Sur la mesure de déflexion d'une fonction non-analytique par rapport áune fonction analitique, C.R. Acad. Sci. Paris, 237, (1953), 694.

[18] Bilimović A., O meri odstupanja neanalitičke funkcije od analitičnosti, Glas Srpske Akad. Nauke, odeljenje Prir. mat. nauka CCXXI (1956), 1-11.

[19] Bilimović A., Afina transformacija neanalitičke funkcije u analitičku, ibid. CCXXI (1956) str. 13 - 17.

[20] Vekua I. N. Ob odnoi lineinoi graničnoi zadače Rimana, tr. Tbilissk. matem. in - ta AN Gruz. SSR, t. XI, 1942, 109-139.

[21] Ganin M. P., Kraevie zadači teorii poligarmoničeskih funkcii, uč. zap. Kazansk. un-ta, t. 111, Nr. 10, 1951, 9-13.

[22] Ganin M. P. Kraevie zadači dlja polianalitičeskih funkcii, Dokl. ANSSSR, t.80, Nr. 3, 1951, 313-316.

[23] Gahov F. D., O kraevoi zadače Rimana, Matem. sb., 2(44), Nr. 4, 1937, 673-683.

[24] Gahov F. D., Kraevie zadači teorii analitičeskih funkcii i singuljarnie integraljnie uravnenia, Doktorskàja dissertacija, Tbilisi, 1941.

[24a] Gahov F. D., Lineinie kraevie zadači teorii funkcii kompleksnoi peremennoi. Izv. Kazan. fiz.-matem. o-va, X, ser. 3, 1938, str. 39-79.

[25] Gahov F. D., O nelineinoj kraevoi zadače obobščajuščei kraevuju zadaču Rimana, Dokl. ANSSSR, (1968), 181, Nr. 2, 271-274.

[26] Dimitrovski D.S., Prilog kon teorijata na obopštenite analitički funkcii, Teza.

[27] Kveselava D.A., Graničnaja zadača i singuljarnie integraljnie uravnenija v slučae peresekajuščihsja konturov, Tr. Tbilissk. matem. instituta AN Gruz. SSR, XVII, 1949, str. 1-27.

[28] Kveselava D. A., Zadača Rimana - Gilberta dlja mnogosvjaznoi oblasti, Soobšč. AN Gruz. SSR, t. VI, Nr. 8, 1945, 581-590.

[29] Kečkić J., Jedan diferencijalni operator i njegova primena na parcijalne diferencijalne jednačine i neanalitičke funkcije, Teza, Beograd, 1970.

[30] Kečkić J., Analytic and c-analytic functions, Publ. Inst. Math. (Beograd) 9(23) , 1969, 189 - 198.

[31] Kečkić J., O jednoj klasi parcijalnih jednačina, Mat. Vesnik 6(21), 1969, 71-73.

[32] Kolosov G.V. Ob odnom priloženii teorii funkcii kompleksnogo peremennago k ploskoi zadače matematičeskoi teorii uprugosti, Jurev, 1909.

[33] Kolossoff G., Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie, Z. Math. Phys. 62 (1914) 384-409.

[34] Kolosov G. V., O soprjažennih diferencialjnih uravnenijah s častnimi proizvodnimi s priloženiem ih k rešeniu voprosov matematičeskoi fiziki,Izvestija E.I. (Ann. Inst. Electrot. Petrograd), 11 (1914) 179-189.

[35] Komjak I. I., Nelinejnaja kraevaja zadača tipa zadači Rimana s položiteljnimi pokazateljami, Vesci ANBSSR, Fiz.-mat. l., 1970 Nr. 6 83-87.

[36] J. M. Krikunov, O rešenii obobščennoi krevoi zadači Rimana i linejnogo singuljarnogo integr-differencialjnogo uravnenia, uč. zap. Kazansk. un-ta t. 112 Nr. 10, 1952, str. 191-199.

[37] M. Lavrentjev, Osnovnaja teorema teorii kvazikonformnih otobraženii ploskih oblastei, Izvestija Ak. N. ser. Mat. 12, Nr. 6, 1948, 513-554.

[38] Lavrentjev M., Obščaja zadača teorii kvazikonformnih otobraženii ploskih oblastei, Mat. Sbornik 21(63), 1947, 285-320.

[39] Magnaradze L. G., Teorija odnogo klassa linejnih singuljarnih integrodifferencialjnih uravnenii, Soobšč. AN Gruz. SSR, t. IV, Nr.2, 1943, 103-110.

[40] Magnaradze L. G., Ob odnom obobščenii teoremi Plemeli-Privalova, Soobšč. AN Gruz. SSR, t. VIII, Nr.8, 1947.

[41] Mitrinović D., Un probléme sur les fonctions analytiques, Revue mathématique de l'Union interbalkanique, 1(1936), 53-57.

[42] Mihailov L. G., Kraevaja zadača tipa zadači Rimana dlja sistem differencialjnih uravnenii pervogo porjadka elliptičeskogo tipa, uč. zap. Tadž. un-ta, t. X, 1957, 32-79.

[43] Nicolesco M.,Fonctions complexes dans le plan et dans l'aspace

Thesis, Paris.

[44] Plemelj J., Ein Ergänzungssatz....... Monatsh. Math. und Phys. XIX, 1908, 205-210.

[45] Položii G. N., Integraljnie predstavlenia neprerivno differenciruemih funkcii kompleksnogo peremennogo. Kandidatskaja dissertacija. Saratovskii gosudarstvennii universiteteim. N. G. Černiševskogo,1946.

[46] Položii G. N., O nekotorih metodah teorii funkcii kompleksnogo peremennogo v mehanike spološnih sred., Doktorskaja disertacija. Matematičeskii institut im. V. A. Steklova AN SSSR, 1953.

[47] Položii G. N. O p-analitičeskih funkcijah kompleksnogo peremennogo DANSSR 58. Nr.7, 1947, 1275-1278.

[48] Položii G. N., Naukovii ščoričnik Kiev. un-ta za 1957 r., 1958.

[49] Položii G. N., Vesnik Kiev. un-ta, ser. astr-mat. meh. 1959, 2, 1, 19-29.

[50] Položii G. N., Naukovii ščoričnik Kiev. un-ta za 1956 p., 1957.

[51] Položii G. N., Matem. sb., 1953, 32(74), 3, 485-492.

[52] Položii G. N., UMŽ, 1954, 6,3, 333-348.

[53] Položii G.N., Izv. AN SSSR. Ser. mat. 1955, 19, 345-270.

[54] Pompeiu D., Sur la continuitédes fonction d'une variable complexe, Tesis, Paris 1905.

[55] Pompeiu D., Sur une classe de fonctions d'une variable complexe, Rend. Circ. Mat. Palermo, 33(1912), 108-113 i 35 (1913) 277-281.

[56] Rogožin V. S., Nekotoriekraevie zadači dlja poligarmoničeskogo uravnenia, Uč. zap. Kazansk. un-ta, t. 110, Nr. 3, 1950, str. 71-94.

[57] Sokolov I.A., O kraevoi zadače tipa Rimana dlja polianalitičeskih funkcii na okružnosti, Vesci AN BSSR, 1969, Nr.5, 64-71.

[58] Sokolov I.A.,O kraevoi zadače tipa Rimana dlja bianalitičeskih funkcii v slučae proizvoljnogo kontura, Vesci AN BSSR, 1969, Nr. 6, 29-38.

[59] Sokolov I. A., O kraevoi zadače tipa zadači Rimana so sdvigom dlja polianalitičeskih funkcii na okružnosti, Vesci AN BSSR, 1970, Nr.1, 118-129.

[60] Susea A., Studii si Sekretari matem., Bucuresti, 19, Nr.1, 1967.

[61] Théodorescu N., La dérivée arélaire et ses applications physiques Thesis, Paris 1931.

[62] Theodorescu N., La dérivé areolaire, Ann. Roumaines Mathématiques, Cahier 3, Bucurest 1936.

[63] Théodorescu N., Derivée et primitives aréolaires, Annali di matematica 44 (1960).

[64] Theodorescu N., Derivée areolaire globale et dérivée généralisée, Bull. Math. de la Soc. de Sci. Math. de la R.P.R., 6 (1962) , 3-4.

[65] Usmanov N.K., Graničnie zadači differencialjnih uravnenii v častnih proizvodnih pervogo porjadka elliptičeskogo tipa, Tr. Instituta fiz. i matem. Latv. SSR. vip. I, 1950, 41-100.

[66] Usmanov N.K., K graničnim zadačam funkcii, udvoletvorjajuščih sisteme differencialjnih uravnenii, Tr. Instituta fiz. i matem. Latv. SSR, vip II, 1950, 59-100.

[67] Fempl S., O neanalitičkim funkcijama čije je odstupanje od analitičnosti funkcija, Glas Srpske Akad. nauka, odeljenje prirod. mat. nauka CCLIV, 1963, 75-80.

[68] Fempl S., Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije, Mat. Vesnik 1(16), 1964, 29-38.

[69] Fempl S., Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen, Publ. Institut Math. (Beograd) 4(18), (1964), 115-120.

[70] Fempl S., Über einige Systeme partieller Differentialgleichungen These Publications NR. 143 - Nr. 155 (1965), 9-12.

[71] Fempl S., Areoläre Exponentialfunktion als Lösung einer Klasse Differentialgleichungen, Publ. Inst. Math. (Beograd) 8(22) (1968),

[72] Hilbert D., Über eine Auwendung der Integralgleichungen, Verhandl. des III Internat. Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 1904.

[73] Calugaréano G., Sur les fonction poligénes d'une variable complexe, Thesis, Paris 1928.

[74] Calugaréano G., Sur une classe d'équations du second ordre intégrables á l'aide des fonctions poligénes , C.R. Acad. Sci. Paris 186 (1928), 1406-1407.

[75] Calugaréano G., Les fonctions polygénes comme intégrales d'equations différentielles, Frans. Amer. Math. Soc 31 (1929), 372-378.

[76] Čanak M., Metode kompleksne analize za rešavanje glavnih tipova konturnih problema sa posebnim osvrtom na jednu klasu neanalitičkih funkcija, Magistarski rad, Beograd 1972.

[77] Čanak M., Lösung eines Konturproblems von Riemanntypus durch Anwendung von Differentialgleichungen, Mathematica Balkanica, 3, 1973, 28-32, Beograd.

[78] Čanak M., Jedna klasa rešenja diferencijalne jednačine stanja napona elastične ljuske, Zbornik radova XII Jugoslovenskog kongresa za racionalnu i primenjenu mehaniku, A, C3-4, Ohrid 1974.

[79] Čanak M., Konturproblem von Dirichlettypus für einige elliptische Systeme partieller Gleichungen, Mathematica Balkanica Beograd 1975.

[80] Čerepanov G. P. DAN 147, Nr.3, 1962.

[81] Šabat B., Ob obobščenih rešenijah odnoi sistemi uravnenii v častnih proizvodnih, Mat. Sbornik 17(59), 1945, 193-209.

[82] Šerman D.I., K obščei zadače teorii potenciala, Izv. AN SSSR, ser. matem., t. 10, 1946, 121-134.

[83] Keldiš M.V., O razrešivosti i ustoičivosti kraevoi zadači Dirihle, Uspehi matem. nauk, 1941, str. 171-292.

REGISTAR IMENA I POJMOVA

Na kraju osećam prijatnu dužnost da se sa zahvalnošću setim svih onih koji su pomogli da ovaj rad dobije konačan oblik.

Profesor Dr. Časlav Djaja, rukovodilac teze, posvetio je veliki deo svog vremena detaljnom i strpljivom pregledu celokupnog matematičkog teksta kao i ispravci gramatičkih, tehničkih i drugih nepreciznosti. Najveći deo njegovih korisnih primedbi je usvojen i neosporno doprineo da rad dobije u kvalitetu.

Tezu su detaljno pregledali i prof. Dr. Vojin Dajović kao i prof. Dr. Borivoje Rašajski. Njihove primedbe doprinele su da se u radu više istaknu originalna mesta i samostalni doprinosi.

Sovjetski akademik Dr. N. Vekua i B. Hvedelidze detaljno su pregledali poglavlje 2.3. Akademik prof. Dr. Bogoljub Stanković pregledao je poglavlje 3.9. i doprineo njegovom poboljšanju. Profesor Dr. Stanislav Fempl pružio je mnogo korisnih saveta u onim poglavljima koja su u vezi sa teorijom neanalitičkih funkcija. Dr. Jovan Kečkić je pregledao poglavlja 3.2. i 3.3. Sovjetski matematičar R. Bancuri je vrlo studiozno pregledao poglavlja 4.3., 4.4. i 4.5. Na osnovu njegovog mišljenja detaljno su preradjena ova poglavlja tako da su dobila definitivan oblik. Pored toga on je dao i skicu dokaza teoreme T.1. (vidi str. 84).

Najzad, korisne sugestije dali su mi sovjetski akademik Dr. B. Bicadze i prof. Dr. Djordje Karapandžić.

Za tehnički deo posla zaslužni su Veljković Ivana, Martinović Veliša i Eraković Milovan. Autor koristi priliku da se svim navedenim licima najtoplije zahvali.

S A D R Ž A J