PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET – BEOGRAD



MILOJICA JAĆIMOVIĆ

# ITERATIVNA REGULARIZACIJA METODA MINIMIZACIJE

— DOKTORSKA DISERTACIJA —



BEOGRAD, 1980.

# S A D R Ž A J


Strana

UVOD .................................................... I-IV

GLAVA I REGULARIZACIJA NEKOREKTNIH EKSTREMALNIH ZADATAKA ................................ 1

1.1. O nekorektnim ekstremalnim zadacima .... 1

1.2. Tihonovljev metod regularizacije ....... 8

GLAVA II ITERATIVNA REGULARIZACIJA METODA MINIMIZACIJE 19

2.1. Iterativna regularizacija metoda projekcije gradijenta ...................... 20

2.2. Iterativna regularizacija metoda uslovnog gradijenta ........................ 22

2.3. Iterativna regularizacija Njutnovog metoda minimizacije ...................... 51

2.4. Iterativna regularizacija jednog metoda minimizacije trećeg reda .............. 63

2.5. Iterativna regularizacija metoda linearizacije ................................ 68

LITERATURA ..................................... 81

# U V O D

Mnogi zadaci funkcionalne analize pripadaju klasi nekorektnih zadataka. Osnovna karakteristika takvih zadataka je ta što i male greške u zadavanju početnih podataka mogu dovesti do bitnih grešaka u rezultatima. Dugo vremena se smatralo da izučavanje takvih zadataka ne može dovesti do sadržajne matematičke teorije, a uslovi korektnosti su smatrani potpuno prirodnim. Takvo gledanje na nekorektne zadatke je ostalo rasprostranjeno sve do početka 60-tih godina ovog vijeka, kada su se pojavili mnogobrojni prilozi, koji su označili početak brzog razvoja teorije nekorektnih zadataka.

Numeričko rešavanje nekorektnih zadataka je posebno otežano, s obzirom na to da se mnoge računske operacije realizuju samo približno, a umjesto tačnih početnih podataka poznate su samo njihove aproksimacije. No, takvi zadaci se često javljaju i u fizici i u tehnici i u ekonomiji i značaj razrade algoritama za njihovo numeričko rešavanje je očigledan.

Smatra se da su osnovne ideje na kojima su kasnije razvijani metodi rešavanja nekorektnih zadataka izloženi još 1943. god. u radu A.N.Tihonova "Ob ustojčivosti obratnih zadač", objavljenom u DAN SSSR. Početkom 60-tih godina pojavili su se fundamentalni radovi A.N.Tihonova, M.M.Lavrentjeva, V.K. Ivanova, Ž.L.Lionsa i mnogih drugih, koji su omogućili formiranje opšte teorije nekorektnih zadataka i konstrukciju algoritama za njihovo približno rešavanje. U okviru opšte teorije pojavili su se mnogi rezultati i ideje koje su se mogle koristiti za ispitivanje i rešavanje nekorektnih ekstremalnih zadataka. Posebno razmatranje tih zadataka se prvi put javlja u radovima A.N.Tihonova [B23] –[B25]. U tim radovima je predložen jedan opšti metod (Tihonovljev metod regularizacije), koji se pokazao veoma pogodnim kako za teoretska ispitivanja tako i za praktično rešavanje nekorektnih ekstremalnih zadataka. Metod se inače sastoji u tome da se početni zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$ snabdjevenom topologijom $\mathcal{T}$, zamijeni familijom korektnih zadataka minimizacije funkcionala $T_\alpha(u)$, koji zavise od pozitivnog realnog parametra $\alpha$, na familiji mnoštava $U_\alpha \subseteq U$, pri čemu je $T_0(u)=J(u)$, $U_0=U$. Za fiksirano $\alpha>0$ zadatak minimizacije funkcionala $T_\alpha(u)$ na mnoštvu $U_\alpha$ se rešava sa odredjenom tačnošću $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\alpha)\geqslant 0$, pri čemu se dobija tačka $u_\alpha \in U_\alpha$, tako da je

$$T_{\alpha *} = \inf_{u\in U_\alpha} T_\alpha(u) \leqslant T_\alpha(u_\alpha) \leqslant T_{\alpha *} + \mathcal{E}(\alpha).$$

Pokazuje se da za široku klasu nekorektnih ekstremalnih zadataka funkcionale $T_\alpha(u)$ možemo izabrati u obliku $T_\alpha(u)=J(u)+ + \alpha\Omega(u)$, $\Omega(u)\geqslant 0$, $u\in U$, tako da kada parametri $\alpha$ i $\mathcal{E}(\alpha)$ saglasno konvergiraju ka nuli, familija tačaka $u_\alpha$ konvergira u smislu topologije $\mathcal{T}$ ka mnoštvu tačaka minimuma funkcionala $J(u)$ na mnoštvu U.

Ideja Tihonovljevog metoda regularizacije nekorektnih ekstremalnih zadataka je kasnije razvijena u radovima B.M.Budaka, F.P.Vasiljeva, V.A.Morozova, V.G.Karmanova, A.B.Bakušinskog, B.T.Poljaka i mnogih drugih.

Termine "iterativna regularizacija" i "princip iterativne regularizacije" je uveo A.B.Bakušinski u radovima [B2] i [B3]. Naime, u tim radovima su razmatrani metodi rešavanja nekorektnih varijacionih nejednačina na mnoštvu U iz Hilbertovog prostora H i predložen je sljedeći postupak: za fiksiranu vrijednost parametra regularizacije $\alpha=\alpha_\nu$ na funkcional Tihonova $T_{\alpha_\nu}(u)=T_\nu(u)$ se primjenjuje jedan algoritamski korak nekog od metoda za rešavanje varijacionih nejednačina, a zatim se razmatra sljedeći funkcional Tihonova $T_{\nu+1}(u)$, $\nu=1,2,\ldots$ . Pri tome parametre regularizacije $\{\alpha_\nu\}$ treba usaglasiti sa parametrima metoda, tako da se dobije niz tačaka iz mnoštva U koji konvergira po normi prostora H ka mnoštvu rešenja razmatranog zadatka. Izloženi postupak se zove iterativnom regularizacijom odgovarajućeg metoda. U pomenutim radovima A.B.Bakušinski je razmatrao iterativnu regularizaciju Njutnovog metoda i metoda projekcije gradijenta za rešavanje varijacionih nejednačina.

U ovoj disertaciji se izučavaju nekorektni zadaci minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu

$$U=\{u\in U_0 : g_i(u)\leqslant 0, i=\overline{1,r};\ g_i(u)=0,\ i=\overline{r+1,\ s}\}$$

i mogućnosti njihovog rešavanja iterativnom regularizacijom metoda minimizacije. Važan rezultat za dalje izučavanje ovakvih zadataka je teorema 1.2.2. F.P.Vasiljeva [B8] .

Sam rad je podijeljen u dvije glave. U prvoj glavi se navode primjeri nekorektnih ekstremalnih zadataka i formulišu poznate teoreme, koje se kasnije koriste za izvodjenje dokaza teorema iz druge glave. Navodjeni su i poznati primjeri (ponekad uz neznatne modifikacije) sa ciljem da se pokaže koliko je klasa nekorektnih ekstremalnih zadataka široka. Primjeri 1.1.4. i 1.2.4. su orginalni.

U drugoj glavi se razmatraju iterativne regularizacije nekih metoda minimizacije. Izlažu se, koliko nam je poznato, svi rezultati postignuti u ovoj oblasti. Sa izuzetkom teoreme 2.1.1. i lema 2.2.1. i 2.2.3.(koje su dokazane u već publikovanim radovima), svi rezultati iz druge glave su izloženi sa dokazima. Teorema 2.2.4. i njena posledica - teorema 2.2.5 pripadaju F.P. Vasiljevu. Ostali dokazivani rezultati iz ove glave pripadaju autoru.

Od rezultata do kojih je došao autor, posebno treba istaći sledeće:

a) U teoremama: 2.2.2. i 2.2.3. se razmatra iterativna regularizacija jedne nove varijante metoda uslovnog gradijenta. Samu varijantu je inače predložio autor u radu [B16]. U njoj se dužina koraka, u poredjenju sa drugim varijantama metoda uslovnog gradijenta, odredjuje na veoma jednostavan i za numeričku realizaciju pogodan način. Pored toga, njena iterativna regularizacija pruža veće mogućnosti za izbor koeficijenata regularizacije.

b) Iterativna regularizacija Njutnovog metoda minimizacije omogućava da se pogodnim izborom koeficijenata regularizacije $\{\alpha_\nu\}$ riješi i problem izbora početne aproksimacije, što inače predstavlja slabost Njutnovog metoda. Uslovi za izbor koeficijenata regularizacije pri proizvoljnom izboru početne aproksimacije su dati u teoremama 2.3.1. i 2.3.2. S obzirom da je uslov za izbor početne aproksimacije formulisan tako da se lako provjerava, isti postupak se može koristiti i prilikom rešavanja korektnih zadataka minimizacije Njutnovim metodom. Naime, u tom slučaju metod iterativne regularizacije se koristi sve dok ne bude ispunjen uslov za direktnu primjenu Njutnovog metoda. Ista ideja može biti iskorišćena i kod nekih modifikacija Njutnovog metoda. Iterativna regularizacija jedne takve modifikacije je razmatrana u teoremama 2.4.1. i 2.4.2. Pokazano je da se istovremeno sa regularizacijom metoda može izvršiti i regularizacija izbora početne aproksimacije. Sličan metod je razmatran u radu [B11] ali se tamo pretpostavlja da je prostor H konačne dimenzije, a umjesto operatora $T''_\nu(u)$ koriste se operatori podijeljenih razlika gradijenata $T'_\nu(u)$.

c) U teoremi 2.5.1. se razmatra iterativna regularizacija metoda linearizacije. Za razliku od metoda čija je iterativna regularizacija ranije razmatrana, ovdje se za učitavanje ograničenja tipa $g_i(u) \leq 0$ ne koriste penalni funkcionali. Dobijeni rezultat pokazuje da su uslovi za izbor parametara metoda (dužine algoritamskog koraka) dovoljno široki i da dozvoljavaju različite mogućnosti. S obzirom na to, posebno je razmotren slučaj kada metod linearizacije prelazi u metod projekcije gradijenta.

Jedan dio rezultata ovog rada je dobijen za vrijeme mog naučnog usavršavanja u Moskvi tokom školske 1978/79.godine. Za postavku zadataka i korisne savjete iskreno se zahvaljujem rukovodiocu F.P.Vasiljevu, docentu Moskovskog univerziteta.

# G L A V A I.

## REGULARIZACIJA NEKOREKTNIH EKSTREMALNIH ZADATAKA

### 1.1. O nekorektnim ekstremalnim zadacima

Neka je U zadano mnoštvo iz metričkog prostora M i neka funkcional J(u), definisan na mnoštvu U, dostiže svoj infimum $J_*=\inf J(u)$ na tom mnoštvu. Razmotrimo sljedeći zadatak minimizacije funkcionala J(u) na mnoštvu U: naći tačku (ili tačke) $u_* \in U$ tako da bude

$$J(u_*) = \inf_{u\in U} J(u) = J_*. \qquad (1.1)$$

Mnoštvo svih tačaka mnoštva U koje zadovoljavaju relaciju (1.1) označićemo sa $U_*$, tako da je $U_*=\left\{u \in U: J(u)=J_*\right\}$.

Za rešavanje zadatka (1.1) najčešće se koriste metode iterativnog tipa pomoću kojih se konstruiše niz $\left\{u_\nu\right\}$ (tzv. minimizirajući niz) takav da $u_\nu \in U$, $\nu=1,2,\ldots$ i $J(u_\nu) \to J_*$ kada $\nu \to +\infty$. Ako se mnoštvo $U_*$ sastoji iz jedne tačke $u_*$, postavlja se pitanje: da li $u_\nu \to u_*$ kada $\nu \to +\infty$ (u smislu metrike prostora M ili nekom drugom smislu)? Ukoliko je odgovor na takvo pitanje pozitivan, tada kao približno rješenje zadatka (1.1) možemo uzeti tačku $u_\nu$ sa dovoljno velikim indeksom $\nu$. Analogno pitanje se može postaviti i u slučaju kada mnoštvo $U_*$ sadrži više od jedne tačke.

D e f i n i c i j a 1.1.1. Zadatak minimizacije funkcionala J(u) na mnoštvu U iz metričkog prostora M je korektan u smislu metrike prostora M ako:

1) mnoštvo $U_* = \left\{u \in U:\ J(u) = \inf_{u\in U} J(u) = J_*\right\} \neq \emptyset$ ;

2) svaki minimizirajući niz $\{u_\nu\} \subseteq U$ konvergira u smislu metrike prostora M ka mnoštvu $U_*$, tj.

$$\rho(u_\nu, U_*) = \inf \rho(u_\nu,\ u) \to 0 \text{ kada } \nu \to +\infty.$$

Ako je narušen bar jedan od uslova 1) i 2) zadatak minimizacije funkcionala J(u) na mnoštvu U je nekorektan.

No, već na prostim primjerima se pokazuje da je odgovor na postavljeno pitanje negativan, tj. da mnogi zadaci minimizacije pripadaju klasi nekorektnih ekstremalnih zadataka.

Primjer 1.1.1. Neka je $U = \left\{u \in R^1 : u \geqslant 0\right\}$ , $J(u) = u\cdot\exp(-u)$. Očigledno je $u_*=0$, $J(u_*)=0$. Niz $\{u_\nu\}$ : $u_\nu = \nu$ , $\nu=1,2,\dots,$ je minimizirajući a $\rho(u_\nu, u_*) = \nu \to +\infty$.

Primjer 1.1.2. Neka je $U = \left\{u=u(t) \in L_2[0,1] : |u(t)| \leq 1\right.$ skoro svuda na $\left.[0,1]\right\}$ i $J(u) = \int_0^1 \left(\int_0^t u(t)dt\right)^2 dt$. Očigledno je $J_* = \inf_{u\in U} J(u) = 0$ a mnoštvo $U_* = \left\{u \in U : J(u) = J_*\right\}$ sadrži samo jednu tačku - $u_* = u_*(t) = 0$ skoro svuda na $[0,1]$. Za niz $\{u_\nu\}$: $u_\nu = u_\nu(t) = \nu^\alpha \sin\nu t$, $\nu = 1,2,\dots, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 1$ imamo da je

$$0 \leq J(u_\nu) \leq \nu^{2(\alpha-1)} \cdot \int_0^1 (1-\cos\nu t)^2 dt \leq 4\nu^{2(\alpha-1)} \to 0 \text{ kada } \nu \to +\infty.$$

Dakle, niz $\{u_\nu\}$ je minimizirajući. Istovremeno je

$$\|u - u_*\|^2 = \int_0^1 \nu^{2\alpha} \cdot \sin^2\nu t dt = \frac{\nu^{2\alpha}}{2} \int_0^1 (1-\cos 2\nu t)dt = \frac{\nu^{2\alpha}}{2}\left(1 - \frac{1}{2\nu}\sin 2\nu\right)$$

i

$$\lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu - u_*\|^2 = \frac{1}{2} \text{ za } \alpha = 0; \quad \lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu - u_*\| = +\infty \text{ za } \alpha > 0.$$

Mi ćemo dalje razmatrati neke klase nekorektnih zadataka minimizacije, pri čemu će biti narušen samo uslov 2) definicije

1.1.1. S druge strane, očigledno je korisno izdvojiti i neke klase korektnih ekstremalnih zadataka.

T e o r e m a 1.1.1. ([A6], str.6) Neka je U kompaktno mnoštvo iz metričkog prostora M i neka je funkcional J(u) konačan i poluneprekidan s donje strane u metrici prostora M. Tada je zadatak minimizacije funkcionala J(u) na mnoštvu U korektan u smislu metrike prostora M.

T e o r e m a 1.1.2. ([A6], str.7) Neka je U konveksno, zatvoreno mnoštvo iz Hilbertovog prostora H,i neka je funkcional J(u) poluneprekidan s donje strane i jako konveksan*) na mnoštvu U. Tada je zadatak minimizacije funkcionala J(u) na mnoštvu U korektan u smislu norme prostora H.

Kao ilustraciju primjene teoreme 1.1.1. možemo navesti zadatak minimizacije funkcije J(u), gdje $u \in U \subseteq R^n$, pri čemu je mnoštvo U zatvoreno i ograničeno.

Primjer 1.1.3. Razmotrimo zadatak minimizacije funkcionala

$$J(u)=\alpha\int_{t_0}^{T}\|x(t,u)-y(t)\|^2_{R^n}dt+\beta\|x(T,u)-y\|^2_{R^n}+\gamma\|u\|^2_{L^r_2[t_0,T]},$$

pri uslovima

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+f(t), t_0\leq t\leq T,\ x(t_0)=x_0$$

na zatvorenom konveksnom mnoštvu $U\subseteq L^r_2[t_0,T]$. Pri tome su momenti vremena $t_0,T$, početno stanje sistema $x_0\in R^n$, vektor-funkcija

*) Funkcional J(u) definisan na konveksnom mnoštvu Hilbertovog prostora je jako konveksan na tom mnoštvu ako postoji konstanta $\mu>0$, tako da je $J(\alpha u+(1-\alpha)v)\leq\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-\mu\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2$, za sve $u,v\in U$ i svako $\alpha\in[0,1]$.

$y(t) \in L_2^n[t_0,T]$ i tačka $y \in R^n$ zadani; $A(t),B(t),f(t)$ su zadane matrice reda nxn, nxr,nx1, čiji su elementi dio po dio neprekidne funkcije na odsječku $[t_0,T]$.

Za $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\gamma > 0$ funkcional $J(u)$ je jako konveksan, pa je, prema teoremi 1.1.2., zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$ korektan.

Za mnoge važne zadatke optimalnog upravljanja uslovi teoreme 1.1.2. nijesu ispunjeni.

Primjer 1.1.4. Neka je $J(u)=\int_{t_0}^{T}|x(t,u)-y(t)|^2_{R^n}$, gdje je $y(t)$ zadana vektor-funkcija iz prostora $L_2^n[t_0,T]$, ako je $x(t,u)$ rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = A(t)x+B(t)u+f(t), x(t_0)=x_0.$$

Pri tome su $A(t),B(t)$ i $f(t)$ matrice reda nxn, nxr, nx1, čiji su elementi zadane, dio po dio neprekidne funkcije na zadanom odsječku $[t_0,T]$, $t_0 < T < \infty$.

Pokažimo da funkcional $J(u)$ nije jako konveksan na prostoru $L_2^r[t_0,T]$. Jednostavno se pokazuje da je dati funkcional jako konveksan na prostoru $L_2^r[t_0,T]$ ako i samo ako postoji realan, pozitivan broj $\mu$ takav da je $\|z(t,u)\|^2_{L_2^n[t_0,T]} \geqslant \mu \|u\|^2_{L_2^r[t_0,T]}$, gdje je $z(t,u)$ rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$\dot{z} = A(t)z+B(t)u(t), z(t_0)=0.$$

Neka je $u_\nu(t)=((t-t_0)^{-\alpha_\nu},0,\dots,0)'$, gdje je $\{\alpha_\nu\}$ strogo rastući niz realnih brojeva i $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = \frac{1}{2}$. Tada

$$u_\nu(t) \in L_2^r[t_0,T], \quad \|u_\nu(t)\|^2_{L_2^r[t_0,T]} = \frac{(T-t_0)^{1-2\alpha_\nu}}{1-2\alpha_\nu} \to \infty \text{ kada } \nu \to \infty.$$

S druge strane imamo da je

$$z(t,u_\nu(t))=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t)B(t)u_\nu(t)dt,$$

gdje je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica sistema diferencijalnih jednačina $\dot{z} = Az$, tj. gdje je $\Phi(t)$ rešenje matrične diferencijalne jednačine

$$\dot{\Phi}= A\Phi,\ \Phi(t_0) = I.$$

Elementi matrice $\Phi$ su neprekidne, dakle i ograničene funkcije na odsječku $[t_0,T]$ , pa je

$$\|z(t,u_\nu(t))\|^2_{L_2^n[t_0,T]} = \int_{t_0}^{T}(\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t)B(t)u_\nu(t)dt)^2dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\int_{t_0}^{T}(\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t)B(t)u_\nu(t)dt)^2dt,\ C_1= \mathrm{const}\geqslant 0 \qquad (1.2.)$$

Označimo vektore-vrste matrice $\Phi^{-1}(t)$ sa $\Psi_1(t),\dots,\Psi_n(t)$, a vektore kolone matrice $B(t)$ sa $b_1(t)$, $b_2(t),\dots,b_n(t)$. Tada je

$$(\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t)B(t)u_\nu(t)dt)^2=\sum_{i=1}^{n}(\int_{t_0}^{t_0}\langle\Psi_i(t),b_1(t)\rangle_{R^n}(t-t_0)^{-\alpha_\nu}dt)^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big[\int_{t_0}^{t}\langle\Psi_i(t),b_1(t)\rangle dt\cdot\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^{-\alpha_\nu}dt\Big]^2\leqslant C_2(\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^{-\alpha_\nu}dt)^2=$$

$$= C_2(1-\alpha_\nu)^{-2}(t-t_0)^{2-\alpha_\nu},C_2=\mathrm{const}\geqslant 0. \qquad (1.3.)$$

Iz relacija (1.2.) i (1.3.) slijedi da je $\sup\limits_{\nu\geqslant 1}\|z(t,u_\nu)\|^2_{L_2^n[t_0,T]}<+\infty$

Dakle, $\|u_\nu(t)\|\to+\infty$, kada $\nu\to+\infty$, a $\sup\limits_{\nu\geqslant 1}\|z(t,u_\nu(t))\|<+\infty$, pa relacija $\|z(t,u)\|^2\geqslant\mu\|u\|^2$ nije tačna, odnosno funkcional $J(u)$ nije jako konveksan na prostoru $L_2^r[t_0,T]$ i uslovi teoreme 1.1.2. nijesu ispunjeni.

Primjer 1.1.2. pokazuje da je u opštem slučaju zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ nekorektan.

U praktičnim zadacima minimizacije problemi korektnosti se često usložnjavaju i time što su umjesto tačnih vrijednosti funkcionala $J(u)$ i mnoštva $U$ poznate samo njihove aproksimacije $J_\nu(u)$ i $U_\nu$. Tada umjesto početnog zadatka minimizacije imamo zadatak minimizacije funkcionala $J_\nu(u)$ na mnoštvu $U_\nu$.

Mi ćemo razmatrati takve zadatke u kojima se mnoštvo $U$ zadaje u obliku

$$U = \left\{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i=\overline{1,r}; g_i(u)=0, i=\overline{r+1,s}\right\},$$

a mnoštvo $U_\nu$ u obliku

$$U_\nu = \left\{u \in U_0 : g_{i\nu}(u) \leq 0,\ i=\overline{1,r}; g_{i\nu}(u)=0, i=\overline{r+1,s}\right\}.$$

Pretpostavlja se da se mnoštvo $U_0$ zadaje dovoljno prosto (npr. $U_0=M$) i da je tačno poznato. Može se dogoditi da mnoštvo $U_\nu$ bude prazno iako je početno mnoštvo $U$ bilo neprazno. Dopustimo, ipak, da je $U_\nu \neq \emptyset$ i neka je $J_{\nu *}=\inf\limits_{u \in U_\nu} J_\nu(u)$ za sve $\nu = 1,2,\ldots$. Možemo li očekivati da je $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_{\nu *} = J_*$, ako je $\lim\limits_{\nu\to\infty} |J(u)-J_\nu(u)| = \lim\limits_{\nu\to\infty} \max\limits_{1\leq i\leq s} |g_{i\nu}(u)-g_i(u)| = 0$ za svako $u \in U_0$? Da li $u_{\nu *} \to u_*$ kada $\nu \to \infty$ u smislu metrike prostora u kome se zadatak minimizacije razmatra? Pokazuje se da je odgovor već na prvo pitanje negativan čak i u slučaju kada je zadatak minimizacije sa tačnim $J(u)$ i $U$ korektan. Znači, zadatak koji je korektan u smislu definicije 1.1.1. (korektan po argumentu) pri tačnim $U$ i $J(u)$, može biti nekorektan po funkcionalu ako su umjesto $U$ i $J(u)$ poznate samo njihove aproksimacije $U_\nu$ i $J_\nu(u)$.

Primjer 1.1.5. Traži se minimum funkcije $J(u)=u$ na mnoštvu $U=\left\{u \in R^1 : g(u)=|u|+|u-1|-1=0\right\}$. Očigledno je da je $U=[0,1]$ i da je $J_*=\inf\limits_{u\in U} J(u)=-1$, pri čemu se mnoštvo $U_*=\left\{u \in U : J(u)=J_*\right\}$ sastoji iz jedne tačke - $u_*=1$. Pretpostavimo da je umjesto funkcije $g(u)$ poznata njena aproksimacija $g_\nu(u)=(1+a_\nu)|u|+|u-1|-1$, gdje je $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu=0$ i $a_\nu\neq 0$. Tada je mnoštvo $U_\nu=\{u\in R^1 : g_\nu(u)=0\}=\{0\}$, pa je $J_{\nu *}=\inf\limits_{u\in U_\nu} J(u)=0$, pri čemu se infimum dostiže u tački $u_{\nu *}=0$ i $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_{\nu *}=0\neq J_* = -1$.

Na sličan način se može analizirati prethodni zadatak kada je $U=\{u\in R^1 : g(u)\leq 0\}$.

Primjer 1.1.6. ([B27]) Neka je $J(u)=J(x,y)=-x-y$, $U = \{(x,y)\in R^2 : 0\leq x\leq 1, x-y\leq 0, y-x\geqslant 0\}$. Očigledno, $J_*=\inf\limits_{u\in U} J(u)=-2$, pri čemu se infimum dostiže u jedinstvenoj tački $u_*=(1,1)$. Ako je $U_\nu=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, (1+\frac{1}{\nu})x-y\leq 0, y-(1-\frac{1}{\nu})x\leq 0\}$, tada se mnoštvo $U_\nu$ sastoji iz jedne tačke $u=(0,0)$, tako da je $J_{\nu *}=0$, $u_{\nu *}=0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} J_{\nu *}=0\neq J_*=-2$.

Navedeni primjeri pokazuju da približno zadavanje polaznih veličina može ozbiljno otežati nalaženje rešenja zadatka minimizacije.

Prilikom rešavanja zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$, često je cilj naći onu tačku iz mnoštva $U_*$ u kojoj neki funkcional $\Omega(u)$, definisan na $U_*$, dostiže najmanju vrijednost na tom mnoštvu. Na primjer, u zadacima optimalnog planiranja, funkcional $\Omega(u)$ može izražavati troškove organizacionih i tehnoloških prestrojavanja pri prelazu iz postojećeg stanja u novo, optimalno stanje, i tada je prirodno izmedju svih optimalnih stanja $U_*$ tražiti ono koje zadovoljava uslov

$$\Omega(u_*)=\inf_{u\in U_*}\Omega(u) \qquad (1.4.)$$

D e f i n i c i j a 1.1.2. Tačka $u_*$ se naziva $\Omega$-normalnim rješenjem zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$ ako $u_* \in U_*$ i ako je tačna relacija (1.4.).

Mnoštvo svih $\Omega$-normalnih rešenja označićemo sa $U_{**}$. Specijalno, ako je $\Omega(u)=\|u\|^2$, $\Omega$-normalno rešenje ćemo zvati normalnim rešenjem.

Jasno je da zadatak nalaženja $\Omega$-normalnog rešenja može biti nekorektan zbog približnog računanja funkcionala $J(u)$ i u slučaju kada je početni zadatak minimizacije korektan.

Primjer 1.1.6. ([B27]) Neka je $J(u)=|Au-b|^2$, $\Omega(u)=|u|^2$, gdje $u \in R^n$, $A$-matrica reda $n\times m$, $b$-matrica reda $m\times 1$. Ako sistem jednačina $Au=b$ ima beskonačno mnogo rešenja i ako su matrice $A$ i $b$ poznate samo približno, tada malim greškama u zadavanju matrica $A$ i $b$ mogu odgovarati takva rešenja sistema $Au=b$ (tj. takva rešenja zadatka minimizacije funkcije $J(u)$) koja su proizvoljno daleko od normalnog rešenja $u_*=0$.

Razmatrani primjeri pokazuju da su mnogi važni zadaci minimizacije funkcionala nekorektni. Numeričko rešavanje takvih zadataka u smislu odredjivanja tačke $\bar{u} \in U$ za koju je $\rho(\bar{u},U_*)\leq \varepsilon$ (ili $\rho(u,u_*)\leq \varepsilon$, gdje je $u_*$ tačka iz mnoštva $U_*$ sa odredjenim svojstvom) je posebno teško i zahtijeva razradu specijalnih metoda. Jedan od takvih metoda je Tihonovljev metod regularizacije nekorektnih ekstremalnih zadataka.

## 1.2. Tihonovljev metod regularizacije

Razmotrimo zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$ iz metričkog prostora $M$. Neka je zadatak nekorektan i neka je

$$U_* = \left\{ u \in U:\ J(u) = \inf_{u \in U} J(u) = J_* \right\} \neq \emptyset .$$

Tihonovljev metod regularizacije nekorektnih zadataka minimizacije se sastoji u tome što se umjesto postavljenog zadatka razmatra familija zadataka minimizacije funkcionala $T_\alpha(u)$ koji zavise od realnog parametra $\alpha > 0$ na mnoštvima $U(\alpha) \subseteq U$, pri čemu je za $\alpha = 0$, $T_0(u) = J(u)$, $U(0) = U$. Dalje se pomoću odredjenog metoda minimizacije (za fiksirano $\alpha$) rešava zadatak minimizacije funkcionala $T_\alpha(u)$ na mnoštvu $U(\alpha)$ sa tačnošću $\varepsilon(\alpha)$ u sljedećem smislu: odredjuje se tačka $u_\alpha \in U(\alpha)$ tako da bude

$$T_{\alpha *} = \inf_{u \in U_\alpha} T_\alpha(u) \leq T_\alpha(u_\alpha) \leq T_{\alpha *} + \varepsilon(\alpha).$$

Kažemo da je zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$ regularizovan po Tihonovu ako su familije $T_\alpha(u)$, $U(\alpha)$, $\varepsilon(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ takve da $\rho(u_\alpha, U_*) = \inf_{u \in U_*} \rho(u_\alpha, u) \to 0$ kada $\alpha \to 0$.

Za regularizaciju nekorektnih ekstremalnih zadataka najčešće se koriste funkcionali Tihonova oblika

$$T_\alpha(u) = J(u) + \alpha\Omega(u),$$

gdje je $\Omega(u)$ nenegativan funkcional sa nepraznom oblašću definisanosti $U_\Omega \subseteq U$.

Specijalno, ako je $\alpha = \alpha_\nu$, $\nu = 0,1,2,\ldots$, umjesto $T_{\alpha_\nu}(u)$, $U(\alpha_\nu)$, $\varepsilon(\alpha_\nu)$ pisaćemo $T_\nu(u)$, $U_\nu$, $\varepsilon_\nu$.

Ako je mnoštvo $U$ oblika

$$U = \left\{ u \in U_0 : g_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,r},\ g_i(u) = 0,\ i = \overline{r+1,s} \right\}, \qquad (2.1.)$$

tada ćemo ograničenja tipa $g_i(u) \leq 0, g_j(u) = 0$ učitavati pomoću penalnih funkcionala tipa

$$P(u)=\sum_{i=1}^{s}\left(g_i^+(u)\right)^p,\quad u\in U_0,$$

gdje je $g_i^+(u)=\max\left\{0;\ g_i(u)\right\}$ za $i=\overline{1,r}$; $g_i^+(u)=\left|g_i(u)\right|$ za $i=\overline{r+1,s}$, $p>0$.

Približne vrijednosti (tj. aproksimacije) funkcionala $J(u)$, $\Omega(u)$ i $g_i(u)$ označavaćemo sa $J_\nu(u)$, $\Omega_\nu(u)$ i $g_{i\nu}(u)$. Tada funkcionali Tihonova sa tačnim funkcionalima $J(u)$, $\Omega(u)$, $g_i(u)$, $i=\overline{1,s}$ imaju oblik

$$\tilde{T}_\nu(u)=J(u)+A_\nu P(u)+\alpha_\nu\Omega(u),\quad u\in U_0, \tag{2.2.}$$

a funkcionali Tihonova sa aproksimacijama $J_\nu(u)$, $\Omega_\nu(u)$, $g_{i\nu}(u)$

$$T_\nu(u)=J_\nu(u)+A_\nu P_\nu(u)+\alpha_\nu\Omega_\nu(u),\quad u\in U_0, \tag{2.3.}$$

gdje je

$$P_\nu(u)=\sum_{i=1}^{s}\left(g_i^+(u)\right)^p,\quad u\in U_0,\ p>0,$$

a $\alpha_\nu>0$, $A_\nu>0$, $\nu=0,1,2,\dots$.

Pokazuje se da za široku klasu nekorektnih ekstremalnih zadataka funkcional $\Omega(u)$ možemo odabrati tako da ako niz $\{\varepsilon_\nu\}$ konvergira ka nuli saglasno sa koeficijentima regularizacije $\alpha_\nu$ i sa recipročnim vrijednostima penalnih koeficijenata $A_\nu$, tada niz $\{v_\nu\}$ odredjen uslovima

$$\inf_{u\in U_0} T_\nu(u)=T_{\nu*}\leq T_\nu(v_\nu)\leq T_{\nu*}+\varepsilon_\nu,\ v_\nu\in U_0,\ \varepsilon_\nu\geq 0, \tag{2.4.}$$

ima sljedeća svojstva: 1) $J(v_\nu)\to J_*=\inf_{u\in U} J(u)$ kada $\nu\to+\infty$; 2) $\rho(v_\nu,U_*)\to 0$ kada $\nu\to+\infty$, a uz neke dopunske uslove niz $\{v_\nu\}$ konvergira ka $\Omega$-normalnom rješenju zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$. Naime, važi sljedeća teorema:

T e o r e m a 1.2.1 ([B8]) Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) funkcionali $J(u)$, $g_1(u)$, $g_2(u),\dots,g_r(u)$, $|g_{r+1}(u)|,\dots,$ $|g_s(u)|$, $\Omega(u)$ su poluneprekidni s donje strane na mnoštvu $U_0$ u metrici prostora $M$;

2) $J_* = \inf_{u\in U} J(u) > -\infty$, $U_* = \{u\in U:\ J(u)=J_*\} \neq \emptyset$;

3) $\Omega(u)\geqslant 0$ za svako $u\in U_0$;

4) mnoštvo $\Omega_c = \{u\in U_0 : \Omega(u)\leq c\}$ je kompaktno za svako $c\geqslant 0$;

5) funkcional Lagranža $\mathcal{L}(u,\lambda)=J(u)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i g_i(u)$ ima sedlastu tačku $(v_*,\lambda^*)$ na mnoštvu $U_0\times\Lambda_0$, $\Lambda_0=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s) :$ $:\lambda_1\geqslant 0, \lambda_2\geqslant 0,\dots,\lambda_s\geqslant 0\}$ u sledećem smislu:

$$\mathcal{L}(v_*,\lambda)\leq\mathcal{L}(v_*,\lambda^*)\leq\mathcal{L}(u,\lambda^*) \text{ za svako } u\in U_0,\ \lambda\in\Lambda_0;$$

6) aproksimacije funkcionala $J(u)$, $P(u)$, $\Omega(u)$, zadovoljavaju uslove:

$$|J_\nu(u)-J(u)|\leq\delta_\nu(1+\Omega(u));\ |P_\nu(u)-P(u)|\leq\delta_\nu(1+\Omega(u));$$
$$|\Omega_\nu(u)-\Omega(u)|\leq\gamma_\nu(1+\Omega(u));\ u\in U_0,\ \nu=0,1,2,\dots,\ \delta_\nu\geqslant 0,\ 0\leq\gamma_\nu\leq 1;$$

7) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$, $\{\gamma_\nu\}$ zadovoljavaju uslove:

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=\lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu=\lim_{\nu\to\infty}\gamma_\nu=\lim_{\nu\to\infty}A_\nu^{-1}=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\delta_\nu A_\nu}{\alpha_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu^{-1}A_\nu^{1-q}=0,$$

gdje je $p+q = pq$.

Tada niz $\{v_\nu\}$ odredjen uslovima (2.4.) ima sljedeća svojstva:

$$\lim_{\nu\to\infty}J(v_\nu)=J_*,\ \lim_{\nu\to\infty}\Omega(v_\nu)=\Omega_*=\inf_{u\in U_*}\Omega(u),\ \lim_{\nu\to\infty}\rho(v_\nu,U_{**})=0,$$

gdje je $U_{**}=\{u\in U_*:\Omega(u)=\Omega_*\}$.

Primjer 1.2.1. ([B27]) Razmotrimo zadatak linearnog programiranja, tj. zadatak minimizacije funkcije $J(u)=\langle c,u\rangle$, $c\in R^m$ na mnoštvu

$$U=\left\{u\in R^m: u_i\geq 0, i=\overline{1,m}; \langle a_i,u\rangle-b_i\leq 0, i=\overline{1,r}; \langle a_i,u\rangle-b_i=0, i=\overline{r+1,s}\right\},$$

gdje je $\langle u,v\rangle$ skalarni proizvod vektora u i v. Ovdje je $U_0=\left\{u\in R^m: u_i\geq 0, i=\overline{1,m}\right\}$.

Neka je $J_*>-\infty$ i $U_*=\emptyset$. Pretpostavimo da su umjesto tačnih vrijednosti kojeficijenata u funkcijama $J(u)$ i $g_i(u)$, $i=\overline{1,s}$, poznate njihove približne vrijednosti i da je:

$$\max\left\{|c-c_\nu|, |a_i-a_{i\nu}|, |b_i-b_{i\nu}|\right\}\leq \delta_\nu, \quad i=1,2,\dots,s,$$

gdje $\delta_\nu\to 0$ kada $\nu\to\infty$. Neka je dalje $\Omega(u)=|u|^2_{R^m}$.

Lako je pokazati da su uslovi 1)-5) teoreme 1.2.1 zadovoljeni i da postoji jedinstveno normalno rješenje $u_*$ postavljenog zadatka minimizacije. Dalje je

$$|J_\nu(u)-J(u)|\leq |c-c_\nu|\cdot|u|\leq \frac{1}{2}\delta_\nu(1+|u|^2).$$

Na sličan način se utvrdjuje da je za p=2

$$|P(u)-P_\nu(u)|\leq \mu\delta_\nu(1+|u|^2), \quad \mu=\text{const}\geq 0,$$

pa je ispunjen uslov 6) teoreme.

Treba, dakle, minimizirati funkciju Tihonova

$$T_\nu(u)=\langle c_\nu,u\rangle+A_\nu\Big(\sum_{i=1}^{r}\max\left\{\langle a_{i\nu},u\rangle-b_{i\nu}; 0\right\}^2+$$
$$+\sum_{i=r+1}^{s}|\langle a_{i\nu},u\rangle-b_\nu|^2+\alpha_\nu|u|^2,$$

na mnoštvu $U_0=\left\{u\in R^m: u_i\geq 0, i=\overline{1,m}\right\}$. Kako je funkcija $T_\nu(u)$ diferencijabilna, to se za rešavanje zadatka minimizacije te funkcije mogu koristiti metode gradijentnog tipa. Na taj način se dobija niz tačaka $\{v_\nu\}$ koji zadovoljava uslove (2.4.). Ako $\varepsilon_\nu \to 0$, $\alpha_\nu \to 0$, $A_\nu \to +\infty$, $\alpha_\nu A_\nu \to +\infty$, $\frac{\varepsilon_\nu + A_\nu \delta_\nu}{\alpha_\nu} \to 0$ kada $\nu \to +\infty$, tada $|v_\nu - u_*| \to 0$.

Primjer 1.2.2. ([B 8]). Neka je $J(u)=\langle Cu,u\rangle_{R^m}+\langle c,u\rangle_{R^m}$ gdje je C pozitivno definitna matrica dimenzija mxm, c-m-dimenzionalni vektor, $g_i(u)=\langle a_i,u\rangle - b_i$, $U_0$-zatvoreno, konveksno množtvo iz prostora $R^m$ , koje je tačno poznato (na primjer, $U_0=R^m$, ili $U_0=\{u:\ u_i \geqslant 0,\ i=\overline{1,m}\}$ ), $U=\{u\in U_0:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,r};\ g_i(u)=0,\ i=\overline{r+1,s}\}$. Neka je dalje $\|C-C_\nu\|\leqslant \delta_\nu$; $|c-c_\nu|\leqslant \delta_\nu$ ; $|a_i-a_{i\nu}|\leqslant \delta_\nu$; $|b_i-b_{i\nu}|\leqslant \delta_\nu$; $\Omega(u)=|u-\bar{u}|^2$. Slično kao u prethodnom primjeru možemo utvrditi da su, pri pogodnom izboru nizova $\{\delta_\nu\}$, $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$ ispunjeni svi uslovi teoreme 1.2.1., tj. da se može primijeniti Tihonovljev metod regularizacije za rešavanje ovog,u opštem slučaju, nekorektnog zadatka .

Na sličan način se može izvršiti regularizacija nekorektnog zadatka minimizacije funkcije $J(u)=|Au-b|^2$ iz primjera 1.1.6.

Primjer 1.2.3 ([B 26]) Razmotrimo integralnu jednačinu

$$\int_a^b K(s,t)u(s)ds = f(t), \quad a\leqslant t\leqslant b,$$

koju u operatorskom obliku možemo pisati kao Au=f, gdje je

$$Au=\int_a^b K(s,t)u(s)ds.$$

Umjesto postavljenog zadatka možemo razmatrati zadatak minimizacije funkcionala

$$J(u)=\int_a^b \left|\int_a^b K(s,t)u(s)ds-f(t)\right|^2 dt=\|Au-f\|^2_{L_2[a,b]}$$

Pretpostavimo da je

$$U_* = \left\{ u \in L_2[a,b] \ : \ J(u) = \inf_{u \in L_2[a,b]} J(u) \right\}$$

Lako je pokazati da je u opštem slučaju zadatak minimizacije funkcionala J(u) nekorektan (npr., za $K(s,t) = \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \\ 0, & t < s \leq b \end{cases}$ zadatak minimizacije funkcionala J(u) je u stvari zadatak diferenciranja funkcije f(t), koji je očigledno nekorektan). Predpostavimo dalje da su jezgro K(s,t) u funkcija f(t) zadani približno, tj. da je

$$\|K(s,t) - K_\nu(s,t)\|_{L_2[a,b]\times[a,b]} \leq \delta_\nu ; \quad \|f(t) - f_\nu(t)\|_{L_2} \leq \delta_\nu ;$$

gdje $\lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0$. Neka se traži rešenje u prostoru $C[a,b]$, tj. neka se želi konstruisati niz $\{u_\nu(t)\}$ koji konvergira ka $u_*(t)$ u smislu metrike prostora $C[a,b]$. Tada se za regularizaciju može iskoristiti funkcional

$$\Omega(u) = \int_a^b (|u(t)|^2 + |\dot{u}(t)|^2)\,dt = \|u\|^2_{W_2^1[a,b]} ,$$

gdje je $W_2^1[a,b]$ prostor Soboljeva.

Lako je provjeriti da su svi uslovi teoreme 1.2.1 zadovoljeni (prilikom provjere uslova 4) koristi se činjenica da je kugla u prostoru $W_2^1[a,b]$ kompaktna u prostoru $C[a,b]$ - v. [A 28],str.91.)

Pretpostavljajući da je $U_* \cap W_2^1[a,b] \neq \emptyset$ i minimizirajući funkcional Tihonova $T_\nu(u) = J_\nu(u) + \alpha_\nu \Omega(u)$ na prostoru $W_2^1[a,b]$, pri pogodnom izboru nizova $\{\alpha_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$ i $\{\varepsilon_\nu\}$ možemo konstruisati niz $\{u_\nu(t)\}$ koji konvergira ka $\Omega$-normalnom rešenju $u_*(t)$ u metrici prostora neprekidnih funkcija.

T e o r e m a 1.2.2.([B 8]) Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1) $U_0$ - konveksno, zatvoreno mnoštvo iz refleksivnog Banahovog prostora B i $U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,r};\ g_i(u)=0,\ i=\overline{r+1,s}\}$ ;

2) funkcionali $J(u)$ $g_1(u),\dots,g_r(u)$, $|g_{r+1}(u)|,\dots,|g_s(u)|$ su ograničeni i slabo poluneprekidni s donje strane na mnoštvu $U_0$;

3) $U_* = \{u \in U : J(u) = \inf_{u \in U} J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ ;

4) funkcional $\Omega(u)$ je nenegativan, jako konveksan i poluneprekidan s donje strane na mnoštvu $U_0$ u metrici prostora B ;

5) funkcional Lagranža $\mathcal{L}(u,\lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u)$ ima sedlastu tačku na mnoštvu $U_0 \times \Lambda_0$, $\Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) : \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_r \geq 0$ , u istom smislu kao u teoremi 1.2.1.;

6) aproksimacije funkcionala $J(u)$, $P(u)$ i $\Omega(u)$ zadovoljavaju uslove:

$$|J_\nu(u) - J(u)| \leq \sigma_\nu (1 + \Omega(u));\quad |P_\nu(u) - P(u)| \leq \sigma_\nu (1 + \Omega(u));$$
$$|\Omega_\nu(u) - \Omega(u)| \leq \gamma_\nu (1 + \Omega(u)),\ u \in U_0,\ \delta_\nu \geq 0,\ \gamma_\nu \geq 0,\ \nu = 1,2,\dots ;$$

7) nizovi brojeva $\{\alpha_\nu\}, \{A_\nu\}, \{\varepsilon_\nu\}, \{\delta_\nu\}, \{\gamma_\nu\}$ zadovoljavaju uslove:

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu\to\infty} A_\nu^{-1} = \lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu = 0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu^{-1} A_\nu^{1-q} = 0,$$

gdje je $p+q = pq$.

Tada niz $\{v_\nu\}$ odredjen uslovima (2.4.) ima sljedeća svojstva:

$$\lim_{\nu\to\infty}|J(v_\nu)-J_*| = \lim_{\nu\to\infty}|\Omega(v_\nu)-\Omega_*| = 0; \ \lim_{\nu\to\infty}\|v_\nu - u_*\|_B = 0,$$

gdje je $\Omega_* = \inf\limits_{u\in U_*}\Omega(u)$, a $u_*$ jedinstvena tačka minimuma funkcionala $\Omega(u)$ na mnoštvu $U_*$.

U odnosu na uslove teoreme 1.2.1. u teoremi 1.2.2.izvršena je izvesna specifikacija - razmatraju se samo mnoštva iz refleksivnog Banahovog prostora. Uslovi za funkcionale $J(u), g_i(u)$, $g_i(u)$ su pojačani - zahtijeva se slaba poluneprekidnost s donje strane, ali su uslovi za izbor stabilizatora $\Omega(u)$ slabiji.Naime, mnoštva $\Omega_c=\{u\in U_0:\Omega(u)\leq c\}$ ne moraju biti kompaktna. Tako se, na primjer, na osnovu teoreme 1.2.2. za regularizaciju može koristiti funkcional $\Omega(u)=\|u\|^2_H$, iako mnoštva $\{u\in U_0:\|u\|\leq c\}$ nijesu kompaktna.

Primjenom teoreme 1.2.2. se jednostavnije može izvršiti analiza primjera 1.2.3. i utvrditi da se pomoću funkcionala $\Omega(u) = \|u\|^2_{W_2^1}$ postavljeni zadatak može regularizovati.

Primjer 1.2.4. Razmotrimo zadatak minimizacije funkcionala J(u) iz primjera (1.1.4). Neka je rang B(t)=r skoro svuda na $[t_0,T]$ . Tada je funkcional J(u) strogo konveksan na prostoru $L_2^r[t_0,T]$ - [B 15], str.28.

Pretpostavimo da postoji tačka $u_*=u_*(t)\in L_2^r[t_0,T]$ , tako da je

$$J(u_*)= \inf_{u\in L_2^r[t_0,T]} J(u),$$

koja je zbog stroge konveksnosti funkcionala J(u) jedinstvena.

Neka je $u_\nu(t)=u_*(t)-v_\nu(t)$, gdje je $v_\nu(t)=((1-2a_\nu)^{\alpha}\cdot(t-t_0)^{-a_\nu},0,\dots,0)'$; gdje je $\{a_\nu\}$ strogo rastući niz realnih brojeva i $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \frac{1}{2}$. Jednostavno se pokazuje da je $\lim_{\nu\to\infty}\|u_\nu-u_*\|=1$ za $\alpha=\frac{1}{2}$, $\lim_{\nu\to\infty}\|u_\nu-u_*\|=\infty$, za $\alpha<\frac{1}{2}$.

Pokažimo da je niz $\{u_\nu(t)\}$ minimizirajući, tj. da $J(u_\nu)\to J_*=J(u_*)$ kada $\nu\to\infty$. Imamo da je $x(t,u)=z(t,u)+x(t,0)$, gdje su $x(t,0)$ i $z(t,u)$ rešenja sistema diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = A(t)x+f(t);\ x(t_0)=x_0,$$

odnosno

$$\dot{z}=A(t)z+B(t)u(t),\ z(t_0)=0,$$

pa je dovoljno pokazati da $\|z(t,u_\nu)-z(t,u_*)\|_{L_2^n[t_0,T]}\to 0$ kada $\nu\to\infty$.

Slično kao u primjeru 1.1.4. (relacija (1.2.) i (1.3.) imamo da je

$$\|z(t,u_\nu)-z(t,u_*)\|^2\leq C\cdot\int_{t_0}^{T}\left(\int_{t_0}^{t}(1-2a_\nu)^{\alpha}(\tau-t_0)^{-a_\nu}d\tau\right)^2dt =$$

$$= C\cdot\int_{t_0}^{T}(1-2a_\nu)^{2\alpha}(t-t_0)^{2-2a_\nu}\frac{1}{(1-a_\nu)^2}\,dt = \frac{(1-2a_\nu)^{2\alpha}}{(1-a_\nu)^2}\,\frac{(T-t_0)^{3-2a_\nu}}{3-2a_\nu},$$

i $\lim_{\nu\to\infty}\|z(t,u_\nu)-z(t,u_*)\| = 0.$

Znači, zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na prostoru $L_2^r[t_0,T]$, kada je rang $B(t)=r$ skoro svuda na $[t_0,T]$, je nekorektan. Primjenom teoreme 1.2.2. neposredno se dokazuje da se pomoću funkcionala

$$\Omega(u)=\|u\|^2_{L_2^r[t_0,T]}=\int_{t_0}^{T}|u(t)|^2_{R^r}\,dt$$

može izvršiti regularizacija razmatranog zadatka minimizacije i da se primjenom Tihonovljevog metoda može konstruisati niz

$\{v_\nu(t)\}$ koji konvergira ka $\Omega$- normalnom rešenju u smislu metrike prostora $L_2^r[t_o,T]$.

Primjer 1.2.5. (Zadatak optimalnog zagrijavanja štampa - -[A 6], str. 10). Treba minimizirati funkcional

$$J(u) = \int_0^\ell |x(T,s)-y(s)|^2 ds$$

uz uslove

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, (s,t)\in Q = (0,1)x(0,T)$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=0} = \nu\left[x(0,t)-u(t)\right] \; ; \; \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=1} = 0, 0<t<T$$

$$x(s,0) = \varphi(s) \in L_2[0,1] \;, 0 \leq s \leq 1$$

$$u(t) \in U = \{u(t)\in L_2[0,T] : u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}$$

skoro svuda na $[0,T]$. U opštem slučaju zadatak je nekorektan u metrici prostora $L_2[0,T]$ a za regularizaciju se može koristiti funkcional $\Omega(u)$ iz prethodnog primjera.

# G L A V A II

## ITERATIVNA REGULARIZACIJA METODA MINIMIZACIJE

U ovoj glavi razmatraćemo nekorektne zadatke minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$ oblika

$$U=\left\{u\in U_0 : g_i(u)\leq 0, i=\overline{1,r};\ g_i(u)=0, i=\overline{r+1,s}\right\}, \qquad (0.1.)$$

gdje je $U_0$ mnoštvo iz Hilbertovog prostora $H$. Za regularizaciju ćemo koristiti funkcional $\Omega(u)=\|u\|^2$ . Na taj način, funkcionali Tihonova sa tačnim i približnim podacima imaće oblik

$$\tilde{T}_\nu(u)=J(u)+A_\nu P(u)+\alpha_\nu\|u\|^2 , \qquad (0.2.)$$

$$T_\nu(u)=J_\nu(u)+A_\nu P_\nu(u)+\alpha_\nu\|u\|^2,\ u\in U_0, \qquad (0.3.)$$

gdje je $\alpha_\nu>0$, $A_\nu>0$, $J_\nu(u)\approx J(u)$, $g_{i\nu}(u)\approx g_i(u)$, $i=\overline{1,s}$ i

$$P(u)=\sum_{i=1}^{s}\left(g_i^+(u)\right)^p;\quad P_\nu(u)=\sum_{i=1}^{s}(g_{i\nu}^+(u))^p, u\in U_0, p>1.$$

Teorema 1.2.2. daje (uopšteno) i algoritam za numeričko rješavanje nekorektnih zadataka minimizacije. No, za formiranje niza $\{v_\nu\}$ koji konvergira ka mnoštvu normalnih rešenja teorema daje samo principijelno pravilo konstrukcije iz uslova:

$$T_{\nu*}\leq T_\nu(v_\nu)\leq T_{\nu*}+\varepsilon_\nu$$

Ali, time se ne rješava pitanje mogućnosti i metoda efektivnog konstruisanja niza $\{v_\nu\}$. Pored toga, poslije odredjivanja $\nu$-tog člana tog niza sa odredjenom tačnošću $\varepsilon_\nu$, prelazi se na konstrukciju sljedećeg člana sa novom tačnošću $\varepsilon_{\nu+1}$ ali i sa novim funkcionalom Tihonova $T_{\nu+1}(u)$, u kojem su se promijenili i penalni koeficijent i koeficijent regularizacije. Svaki takav zadatak se rešava odredjenim metodom minimizacije, najčešće iterativnog tipa. Postoji mogućnost da u cilju konstrukcije niza koji će konvergirati ka mnoštvu normalnih rešenja sa povećanjem tačnosti (smanjenjem $\varepsilon_\nu$)i promjenom parametara $A_\nu$ i $\alpha_\nu$ mora biti primijenjen sve veći broj iteracija i čak da broj iteracija neograničeno raste kada $\nu\to\infty$. Postavlja se pitanje mogućnosti i metoda prevazilaženja teškoća takvog tipa. U tom cilju se uspješno mogu koristiti metodi iterativne regularizacije, kojima se ispituju mogućnosti i daju uslovi saglasnosti metoda minimizacije (tačnije, parametara tih metoda), Tihonovljevog metoda regularizacije (koeficijenata $\alpha_\nu$ ,$\nu$=1,2...) i metoda penalnih funkcionala (koeficijenata $A_\nu$,$\nu$=1,2...).

## 2.1 Iterativna regularizacija metoda projekcije gradijenta

Razmotrimo zadatak minimizacije funkcionala J(u) na mnoštvu (0.1.), gdje je $U_0$ zatvoreno i konveksno mnoštvo iz Hilbertovog prostora H i gdje su funkcionali J(u), $g_i(u),i=\overline{1,s}$ diferencijabilni po Frešeu na mnoštvu $U_0$. Pretpostavimo da su funkcionali J(u), $g_1(u)$, $g_2(u)$,..., $g_r(u)$, $|g_{r+1}(u)|$, $|g_{r+2}(u)|$, ...,$|g_s(u)|$ konveksni na mnoštvu $U_0$. Tada je razmatrani zadatak, u opštem slučaju, nekorektan i za njegovo rješavanje je neophodno koristiti metod regularizacije.

Iterativna regularizacija metoda projekcije gradijenta za rešavanje postavljenog zadataka se sastoji u tome što se na svaki funkcional Tihonova $T_\nu(u)$ primjenjuje jedan korak tog metoda a zatim se prelazi na sljedeći funkcional Tihonova $T_{\nu+1}(u)$. Naime, niz $\{v_\nu\}$ se formira prema sljedećim formulama:

$$v_{\nu+1} = P_{U_0}(v_\nu - \beta_\nu T'_\nu(v_\nu)),\ \nu=1,2,3,\dots \tag{1.1.}$$

pri čemu se tačka $v_1 \in U_0$ bira proizvoljno, $\beta_\nu > 0$ i gdje $P_{U_0}(v)$ označava projekciju tačke v na mnoštvo $U_0$. Pri pogodnom izboru nizova $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$ i $\{\beta_\nu\}$, niz $\{v_\nu\}$ će konvergirati ka normalnom rješenju zadatka minimizacije funkcionala J(u) na mnoštvu U. Naime, važi sljedeća teorema.

T e o r e m a 2.1.1. ([B8]) Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) mnoštvo $U_0$ je konveksno i zatvoreno, a funkcionali $J(u)$, $g_i(u)$, $i=\overline{1,r}$; $|g_i(u)|$, $i=\overline{r+1,s}$ su konveksni na mnoštvu $U_0$; funkcionali $J(u)$, $g_i(u)$, $i=\overline{1,s}$ su diferencijabilni po Frešeu na $U_0$;

2) $J_* = \inf\limits_{u\in U} J(u) > -\infty$; $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$;

3) gradijenti funkcionala J(u) i P(u) zadovoljavaju sljedeća ograničenja rasta:

$$\|J'(u)\|_H \leq L(1+\|u\|_H);\ \|P'(u)\|_H \leq L(1+\|u\|_H),\ L=\text{const} \geq 0,\ u \in U_0;$$

4) funkcional Lagranža $\mathcal{L}(u,\lambda) = J(u) + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u)$ ima sedlastu tačku $(v_*, \lambda^*)$ na mnoštvu $U_0 \times \Lambda_0$, gdje je $\Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) : \lambda_i \geq 0,\ i=\overline{1,r}\}$ u sledećem smislu:

$$\mathcal{L}(v_*, \lambda) \leq \mathcal{L}(v_*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(u, \lambda^*),\ \text{za svako } u \in U_0,\ \lambda \in \Lambda_0;$$

5) funkcionali $J_\nu(u)$ i $g_{i\nu}(u)$, $i=\overline{1,s}$, $\nu=1,2,\dots$ su diferencijabilni po Frešeu na mnoštvu $U_0$ i

$$\max\{\|J'(u)-J'_\nu(u)\|;\ \|P'(u)-P'_\nu(u)\|\}\leq \delta_\nu(1+\|u\|),$$
$$\delta_\nu\geqslant 0,\ \nu=1,2,\dots,u\in U_0;$$

6) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$, $\{\beta_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$ zadovoljavaju uslove:

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\lim_{\nu\to\infty}A_\nu^{-1}=\lim_{\nu\to\infty}\beta_\nu=\lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu^{-1}A^{1-q}=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\beta_\nu A_\nu^2}{\alpha_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{|A_{\nu+1}-A_\nu|}{\alpha_\nu^2\beta_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{|\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu^2\beta_\nu}=0\ ;$$

Tada niz $\{v_\nu\}$ konstruisan po pravilima (1.2.)konvergira po normi prostora H ka jedinstvenom normalnom rešenju $u_*$ zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu U.

Nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$, $\{\beta_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$ koji zadovoljavaju uslove 6) teoreme postoje: njih, na primjer, možemo tražiti u obliku

$$\alpha_\nu=\nu^{-\alpha},\ \beta_\nu=\nu^{-\beta},\ \delta_\nu=\nu^{-\delta},\ A_\nu=\nu^{A},$$

gdje je

$$\alpha>0,\beta>0,\delta>0,A>0,\ A+\beta+2\alpha<1,\ 2A+\alpha<\beta,A(q-1)>\alpha,A+\alpha<\delta$$

Mogu se navesti mnogobrojni primjeri (na primjer, primjeri iz glave I) nekorektnih zadataka minimizacije za čije je rešavanje pogodno koristiti iterativnu regularizaciju metoda projekcije gradijenta.

## 2.2. Iterativna regularizacija metoda uslovnog gradijenta

Ako se u zadatku razmatranom u prethodnom paragrafu pretpostavi da je mnoštvo $U_0$ograničeno, tada se za njegovo numeričko rešavanje mogu koristiti različite varijante metoda uslovnog gradijenta. Prije nego što počnemo ispitivanje tih varijanti formulisaćemo nekoliko lema koje će biti korišćene za izvodjenje dokaza teorema ovog paragrafa.

L e m a 2.2.1. ([B5]) Neka je $\{\omega_\nu\}$ niz nenegativnih realnih brojeva koji zadovoljavaju sljedeće uslove:

$$\omega_{\nu+1} \leqslant (1-\beta_\nu)\omega_\nu + d_\nu \ , \quad \nu \geqslant \nu_0 \geqslant 1 \tag{2.1.}$$

$$0 < \beta_\nu \leqslant 1, \ 0 \leqslant d_\nu, \ \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \beta_\nu = +\infty, \ \lim_{\nu\to\infty} \frac{d_\nu}{\beta_\nu} = 0.$$

Tada je $\lim_{\nu\to\infty} \omega_\nu = 0$.

L e m a 2.2.2. Neka niz $\{\omega_\nu\}$ nenegativnih realnih brojeva zadovoljava uslov (2.1.) i neka je $0 < \beta_\nu \leqslant 1, 0 \leqslant d_\nu$,

$\frac{d_\nu}{\beta_\nu} \leqslant c < +\infty$ za sve $\nu \geqslant \nu_0$ .

Tada je $\omega_\nu \leqslant \omega_{\nu_0} + c$ za svako $\nu \geqslant \nu_0$ .

L e m a 2.2.3. ([A2],str.28) Neka je niz realnih brojeva $\{\omega_\nu\}$ ograničen sa donje strane i neka je $\omega_{\nu+1} \leqslant \omega_\nu + d_\nu$, $d_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1,2,\ldots$, pri čemu red $\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu$ konvergira. Tada postoji $\lim_{\nu\to\infty} \omega_\nu$ .

L e m a 2.2.4. Neka su za niz nenegativnih realnih brojeva $\{\omega_\nu\}$ ispunjeni uslovi:

1) $\omega_{\nu+1} \leqslant \omega_\nu - \frac{1}{A}\omega_\nu^2 + \frac{A}{\nu^{2\rho}}, \quad \nu \in I_0;$

2) $\omega_\nu \leqslant \frac{B}{\nu^{2\rho}}, \ \nu \in I_1;$

3) $\omega_{\nu+1} \leqslant \omega_\nu + \frac{C}{\nu^{2\rho}}, \quad \nu \in I_1, \nu+1 \in I_0,$

gdje je $I_0 \cup I_1 = N = \{1,2,\ldots,\}$ ; $A,B,C,\rho$ su pozitivne konstante i $\rho \leqslant 1$.

Tada postoji konstanta $d \geqslant 0$ tako da je $\omega_\nu \leqslant \frac{d}{\nu^\varrho}$, $\nu = 1,2\ldots.$

Pretpostavićemo da je $2A > B+C$(u protivnom broj A možemo povećati).

D o k a z: Pokažimo da postoji pozitivan cijeli broj $\nu_0$ tako da je $\nu_0^\varrho \geqslant 4$; $(\nu_0+1)^\varrho \leqslant 6$. U tom cilju dovoljno je pokazati da za $\frac{1}{\varrho} = \varepsilon$, $\varepsilon \in [1,+\infty)$, segment $[4^\varepsilon, 6^\varepsilon - 1]$ sadrži bar jedan cijeli broj tj. da je $6^\varepsilon - 1 - 4^\varepsilon \geqslant 1$. Lako je pokazati da funkcija $g(\varepsilon) = 6^\varepsilon - 4^\varepsilon$ raste za $\varepsilon \geqslant 0$($g'(\varepsilon) = 6^\varepsilon \cdot \ln 6 - 4^\varepsilon \cdot \ln 4 \geqslant \ln 6 \cdot (6^\varepsilon - 4^\varepsilon) \geqslant 0$). Za $\varepsilon = 1$, $g(1) = 2$, pa je za $\varepsilon > 1$, $g(\varepsilon) > 2$, odakle slijedi da je $6^\varepsilon - 1 - 4^\varepsilon \geqslant 1$.

Metodom indukcije pokažimo da je za $\nu \geqslant \nu_0 + 1$

$$\omega_\nu \leqslant \frac{2A}{\nu^\varrho}. \tag{2.2.}$$

Ako $\nu_0 \in I_0$, tada iz uslova 1) leme slijedi da je (za $\nu = \nu_0$)

$$\omega_{\nu_0+1} \leqslant \max_{x \geqslant 0}\left(x - \frac{1}{A}x^2 + \frac{A}{\nu_0^{2\varrho}}\right) = \frac{A}{4} + \frac{A}{\nu_0^{2\varrho}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5A}{16} \leqslant \frac{5A}{16} \cdot \frac{6}{(\nu_0+1)^\varrho} \leqslant \frac{2A}{(\nu_0+1)^\varrho}.$$

Ako $\nu_0 \in I_1$ i $\nu_0 + 1 \in I_1$, tada je

$$\omega_{\nu_0+1} < \frac{B}{(\nu_0+1)^{2\varrho}} \leqslant \frac{2A}{(\nu_0+1)^\varrho},$$

a ako $\nu_0 \in I_1$ i $\nu_0 + 1 \in I_0$, tada je

$$\omega_{\nu_0+1} \leqslant \omega_{\nu_0} + \frac{C}{\nu_0^{2\varrho}} \leqslant \frac{B+C}{\nu_0^{2\varrho}} \leqslant \frac{2A}{(\nu_0+1)^\varrho}.$$

Znači relacija (2.2.) je tačna za $\nu = \nu_0 + 1$. Neka je ista relacija tačna za neko $\nu \geq \nu_0+1$. Razmotrićemo tri mogućnosti:

a) ako $\nu \in I_0$, tada je

$$\omega_\nu \leq \frac{2A}{\nu^\rho} \leq \frac{2A}{\nu_0^\rho} \leq \frac{A}{2} .$$

To znači da $\omega_\nu$ pripada intervalu rasta funkcije

$$f_\nu(x) = x - \frac{1}{A}x^2 + \frac{A}{\nu^{2\rho}} .$$

Zbog toga je

$$\omega_{\nu+1} \leq f_\nu(\omega_\nu) \leq f_\nu\left(\frac{2A}{\nu^\rho}\right) \leq \frac{2A}{\nu^\rho} - \frac{2A}{\nu^{2\rho}} = 2A \cdot \frac{\nu^\rho - 1}{\nu^{2\rho}} .$$

Dalje, iz uslova $0 < \rho \leq 1$ slijedi da je

$$\omega_{\nu+1} \leq 2A\, \frac{\nu^{2\rho}-1}{\nu^{2\rho}} \cdot \frac{1}{\nu^\rho+1} \leq \frac{2A}{\nu^\rho+1} \leq \frac{2A}{(\nu+1)^\rho} ;$$

b) ako $\nu \in I_1$ i $\nu+1 \in I_1$, tada je

$$\omega_{\nu+1} \leq \frac{B}{(\nu+1)^{2\rho}} < \frac{2A}{(\nu+1)^{2\rho}} ;$$

c) ako $\nu \in I_1$ i $\nu+1 \in I_0$, tada je

$$\omega_{\nu+1} \leq \omega_\nu + \frac{C}{\nu^{2\rho}} \leq \frac{B+C}{\nu^{2\rho}} \leq \frac{2A}{(\nu+1)^\rho} .$$

Znači, relacija (2.2) je tačna za svako $\nu \geq \nu_0+1$.

Primijetimo, dalje, da postoji konstanta $d' \geq 0$ tako da je za $\nu = 1,2\ldots,\nu_0$ i fiksiramo $\rho > 0$, $\omega_\nu \leq \frac{d'}{\nu^\rho}$ (npr. $d' = \nu_0^\rho \cdot \max\limits_{1\leq i\leq \nu_0} \omega_i$). Tada je za $d=\max\{2A;d'\}$; $\omega_\nu \leq \frac{d}{\nu^\rho}$ za svako $\nu \geq 1$. Lema 2.2.4. je dokazana.

$1^{0}$ Metod čiju ćemo iterativnu regularizaciju razmatrati u ovom dijelu se razlikuje od drugih, ranije poznatih i široko korišćenih varijanti metoda uslovnog gradijenta time što se dužina koraka $\beta_\nu$ odredjuje apriori. Metod je inače predložen od strane autora u radu u štampi [B16], pa ćemo dati njegov opis i izvesti ocjene o brzini konvergencije kada je funkcional jako konveksan na ograničenom, zatvorenom, konveksnom mnoštvu $U_0$.

Metod se sastoji u sljedećem: neka je $v_1$ proizvoljna tačka mnoštva $U_0$; neka je $\nu$-ta aproksimacija $v_\nu \in U_0$ poznata. Tada je

$$v_{\nu+1} = v_\nu + \beta_\nu(\bar{v}_\nu - v_\nu), \ \nu = 1,2,\dots, \tag{2.3.}$$

gdje se tačka $\bar{v}_\nu$ i $\beta_\nu$ odredjuju iz uslova

$$\bar{v}_\nu \in U_0; \ \langle J'(v_\nu), \bar{v}_\nu - v_\nu \rangle = \inf_{u \in U_0} \langle J'(v_\nu), u - v_\nu \rangle, \tag{2.4.}$$

$$0 < \beta_\nu \leq 1, \nu = 1,2,\dots; \ \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = 0, \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty. \tag{2.5.}$$

T e o r e m a 2.2.1. Neka je $U_0$ konveksno, zatvoreno, ograničeno mnoštvo iz Hilbertovog prostora $H$ i neka je funkcional $J(u)$ konveksan i diferencijabilan po Frešeu na mnoštvu $U_0$, pri čemu njegov gradijent zadovoljava Lipšicov uslov

$$\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|, \ u,v \in U_0, \ L = \text{const} \geq 0. \tag{2.6}$$

Tada je niz $\{v_\nu\}$, odredjen uslovima (2.3.)-(2.5.) minimizirajući i za veličinu $a_\nu = J(v_\nu) - J_*$, $J_* = \inf_{u \in U_0} J(u)$ važi ocjena

$$a_{\nu+1} \leqslant \left[a_1 + C\left(\sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^2 e^{\sum_{j=1}^{i} \beta_j}\right)\right] \cdot e^{-\sum_{i=1}^{\nu} \beta_i}, \quad \nu = 1,2\ldots, \tag{2.7.}$$

gdje je $C = \frac{Ld^2}{2}$, $d = \operatorname{diam} U_0 = \sup_{u,v \in U_0} \|u-v\|$.

D o k a z. Prije svega primijetimo da pri datim pretpostavkama niz $\{v_\nu\}$ definisan relacijama (2.3.)-(2.5.) postoji i da je $J_* > -\infty$ i $U_* = \{u \in U_0 : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$(v. [A 7] teorema 4, str. 239).

Iz uslova (2.6.), relacije (2.4.) i s obzirom da je funkcional $J(u)$ konveksan, imamo (v. [A 7] nejednakosti (18), str. 62 i (9), str. 56):

$$a_\nu - a_{\nu+1} = J(v_\nu) - J(v_\nu + \beta_\nu(\bar{v}_\nu - v_\nu)) \geqslant$$

$$\geqslant \beta_\nu \langle J'(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle - \frac{L}{2}\beta_\nu^2 \|\bar{v}_\nu - v_\nu\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \beta_\nu \langle J'(v_\nu), v_\nu - u_* \rangle - C \cdot \beta_\nu^2 \geqslant \beta_\nu a_\nu - C \cdot \beta_\nu^2,$$

pa je

$$a_{\nu+1} \leqslant (1-\beta_\nu) a_\nu + C \cdot \beta_\nu^2, \quad \nu = 1,2,\ldots \quad .$$

Odatle, na osnovu leme 2.2.1., slijedi da je $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, a indukcijom se lako pokazuje da je

$$a_{\nu+1} \leqslant a_1 \prod_{i=1}^{\nu} (1-\beta_\nu) + C \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \left(\beta_i^2 \cdot \prod_{j=i+1}^{\nu} (1-\beta_j)\right) + C\beta_\nu^2 .$$

Odavde, koristeći nejednakost $1-\beta_\nu \leqslant \exp(-\beta_\nu)$, dobijamo relaciju (2.7.).

Iz relacija (2.5.) i (2.7.) slijedi da je $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, tj. niz $\{v_\nu\}$ je minimizirajući. Primijetimo da je na osnovu relacije (2.7.) teško procijeniti brzinu konvergencije niza $\{a_\nu\}$ ka nuli. Za neke posebne klase nizova $\{\beta_\nu\}$, kada je $\beta_\nu = \nu^{-\beta}$,

$0 < \beta \leq 1$, možemo dobiti jednostavnije ocjene:

$$a_\nu = \sigma\left(\frac{\ln(\nu+1)}{\nu}\right) \text{ za } \beta = 1; \quad a_\nu = \sigma\left(\frac{1}{\nu^\beta}\right) \text{ za } 0 < \beta < 1.$$

U tom cilju uvedimo niz $\{\omega_\nu\}$: $\omega_\nu = a_\nu \dfrac{\nu}{\ln(\nu+1)}$ za $\beta = 1$; $\omega_\nu = a_\nu \cdot \nu^\beta$ za $0<\beta<1$.

Tada za $\beta = 1$ iz (2.7.) dobijamo

$$\omega_{\nu+1} \leq \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) \frac{\ln(\nu+1)}{\ln(\nu+2)} \omega_\nu + C \frac{\nu+1}{\nu^2 \ln(\nu+2)} .$$

No, za $x < 1$, $\ln(1-x) \leq - x$, pa je

$$\frac{\ln(\nu+1)}{\ln(\nu+2)} = 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{\nu+2}\right)}{\ln(\nu+2)} \leq 1 - \frac{1}{(\nu+2)\ln(\nu+2)} .$$

Na taj način dobijamo da je

$$\omega_{\nu+1} \leq \left(1 - \frac{1}{(\nu+2)\ln(\nu+2)} \cdot \frac{\nu^2-1}{\nu^2}\right) \cdot \omega_\nu + C \frac{\nu+1}{\nu^2 \ln(\nu+2)} .$$

Dalje se lako provjerava da su za $\nu \geq 2$ ispunjeni svi uslovi leme 2.2.2, pa je $\omega_\nu \leq$ const, odnosno

$$0 \leq a_\nu = \sigma\left(\frac{\ln(\nu+1)}{\nu}\right), \quad \nu = 1,2,\ldots, \text{ za } \beta_\nu = \frac{1}{\nu} .$$

Za $0<\beta<1$ imamo da je

$$\omega_{\nu+1} \leq (1 - \nu^{-\beta})\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\beta \omega_\nu + C \cdot \nu^{-2\beta}(\nu+1)^\beta, \quad \nu = 1,2,\ldots .$$

No, za $0<\beta< 1$ je $\left(\frac{1+\nu}{\nu}\right)^\beta \leq 1 + \frac{\beta}{\nu^\beta}$, pa je

$$\omega_{\nu+1} \leq (1 - (1-\beta)\, \nu^{-\beta})\, \omega_\nu + C \cdot \nu^{-2\beta}(\nu+1)^\beta, \quad \nu = 1,2,\ldots .$$

Odavde, na osnovu leme 2.2.2. slijedi da je $\omega_\nu \leq$const, odnosno

$$a_\nu = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \nu=1,2,\dots, \quad \text{za} \quad \beta_\nu = \frac{1}{\nu^\beta}, \quad 0<\beta<1.$$

Ako je funkcional J(u) jako konveksan, iz dobijenih ocjena lako slijede ocjene za $\|v_\nu - u_*\|$ . U protivnom, proces konvergira samo u smislu $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$. Inače, kada je H bezkonačnodimenzionalni prostor, razmatrani zadatak je nekorektan i za njegovo rješavanje je neophodno koristiti iterativnu regularizaciju.

Razmotrimo iterativnu regularizaciju metoda opisanog formulama (2.3.)-(2.5.). Pretpostavimo da je množtvo $U_0$ zatvoreno, konveksno i ograničeno i razmotrimo zadatak minimizacije funkcionala J(u) na množtvu (0.1.). Pretpostavimo dalje da su funkcionali J(u), $g_1(u), g_2(u), \dots, g_s(u)$ i njihove aproksimacije $J_\nu(u), g_{1\nu}(u), g_{2\nu}(u), \dots, g_{s\nu}(u)$ diferencijabilni po Frešeu na množtvu $U_0$. Posmatrajmo niz $\{v_\nu\}$ definisan relacijama:

$$v_{\nu+1} = v_\nu + \beta_\nu(\bar{v}_\nu - v_\nu), \quad \nu = 1,2,\dots \qquad (2.8.)$$

gdje tačka $\bar{v}_\nu$ i $\beta_\nu$ zadovoljavaju uslove

$$\bar{v}_\nu \in U_0, \langle T'_\nu(v_\nu), \bar{v}_\nu - v_\nu\rangle \leq \inf_{u\in U_0} \langle T'_\nu(v_\nu), u - v_\nu\rangle + \varepsilon_\nu, \qquad (2.9.)$$

$$0<\beta_\nu \leq 1, \quad \varepsilon_\nu \geq 0, \quad \nu=1,2,\dots; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty, \quad \lim_{\nu\to\infty}(\beta_\nu + \varepsilon_\nu) = 0. \qquad (2.10.)$$

sa proizvoljnom početnom aproksimacijom $v_1 \in U_0$. Pri tome su $T_\nu(u)$, $\nu=1,2,\dots$, $u \in U_0$ funkcionali Tihonova oblika (0.3.) i metod (2.8.)-(2.10.) predstavlja iterativnu regularizaciju metoda (2.3.)-(2.5.). S obzirom na učinjene pretpostavke niz $\{v_\nu\}$ definisan relacijama (2.8.)-(2.9.) postoji.

U sljedećoj teoremi se formulišu dovoljni uslovi konvergencije niza $\{v_\nu\}$ ka normalnom rešenju zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na množtvu $U$.

T e o r e m a 2.2.2. Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) $U_0$ je konveksno, ograničeno i zatvoreno množtvo iz Hilbertovog prostora $H$, a funkcionali $J(u)$, $g_1(u),\ldots,g_r(u)$, $|g_{r+1}(u)|,\ldots$ $|g_s(u)|$ su konveksni na množtvu $U_0$;

2) funkcionali $J(u)$, $g_i(u)$, $i=\overline{1,s}$ su diferencijabilni po Frešeu na $U_0$ i njihovi gradijenti su takvi da

$$\max\left\{\|J'(u)-J'(v)\| \; ; \|P'(u)-P'(v)\|\right\}\leq L\,\|u-v\|\,, L=\text{const}\geq 0, u,v\in U_0;$$

3) funkcionali $J_\nu(u)$ i $g_{i\nu}(u)$, $i=\overline{1,s}$, $\nu=1,2,\ldots$, su diferencijabilni po Frešeu i

$$\max\left\{\|J'(u)-J'_\nu(u)\| \; ; \; \|P'(u)-P'_\nu(u)\|\right\}\leq \xi_\nu \quad ,\nu=1,2,\ldots,u\in U_0;$$

4) funkcional Lagranža $\mathcal{L}(u,\lambda)=J(u)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i g_i(u)$ ima sedlastu tačku na množtvu $U_0\times\Lambda_0$, gdje je $\Lambda_0=\{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s):$ $:\lambda_i\geq 0,\; i=\overline{1,r}\}$ u istom smislu kao u teoremi 2.1.1.;

5) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$, $\{\beta_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\xi_\nu\}$, zadovoljavaju uslove:

$$\alpha_\nu\geq\alpha_{\nu+1}>0,\quad A_{\nu+1}\geq A_\nu>0,\quad 1\geq\beta>0,\; \varepsilon_\nu\geq 0,\; \xi_\nu\geq 0,\; \nu=1,2,3,\ldots,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}(\alpha_\nu+A_\nu^{-1}+\beta_\nu+\varepsilon_\nu+\xi_\nu)=0;\quad \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu A^{q-1}=+\infty,\; q+p=pq,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu\beta_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{A_{\nu+1}-A_\nu}{\alpha_\nu\beta_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\beta_\nu A_\nu+A_\nu\xi_\nu+\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}=0;$$

6) niz $\{v_\nu\}$ se odredjuje iz uslova (2.8)-(2.10.).

Tada je $\lim_{\nu\to\infty}\|u_\nu - u_*\| = 0$, gdje $u_* \in U_0$, $\|u_*\| = \inf_{u\in U_*}\|u\|$, $U_* = \{u \in U : J(u) = \inf_{u\in U} J(u) = J_*\}$.

D o k a z. Iz uslova teoreme slijedi da je $J_* > -\infty$ i $U_* \neq \emptyset$. Pri tome je mnoštvo $U_*$ konveksno, pa postoji jedinstvena tačka $u_* \in U_*$ (normalno rešenje zadatka minimizacije) sa najmanjom normom.

Istovremeno s nizom $\{v_\nu\}$ uvedimo u razmatranje niz $u$ koji se zbog jake konveksnosti funkcionala $\widetilde{T}_\nu(u)$, $\nu = 1,2,\ldots$, na zatvorenom konveksnom mnoštvu $U_0$, jednoznačno odredjuje iz uslova

$$u_\nu \in U_0,\ \widetilde{T}_\nu(u_\nu) = \inf_{u\in U_0} \widetilde{T}_\nu(u),\ \nu = 1,2,\ldots \tag{2.11}$$

Iz teoreme 1.2.2. slijedi da je $\lim_{\nu\to\infty}\|u_\nu - u_*\| = 0$ i da bi dokazali teoremu dovoljno je dokazati da je $\lim_{\nu\to\infty}\|u_\nu - u_*\| = 0$. Označimo $\widetilde{T}_\nu(v_\nu) - \widetilde{T}_\nu(v_\nu) \geqslant 0$ sa $a_\nu$. Tada je

$$a_{\nu+1} = \widetilde{T}_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - \widetilde{T}_{\nu+1}(u_{\nu+1}) = \left[\widetilde{T}_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - \widetilde{T}_\nu(v_{\nu+1})\right] + \left[\widetilde{T}(v_{\nu+1}) - \widetilde{T}_\nu(v_\nu)\right] + \left[\widetilde{T}_\nu(v_\nu) - \widetilde{T}_\nu(u_\nu)\right] + \left[\widetilde{T}_\nu(u_\nu) - \widetilde{T}_\nu(u_{\nu+1})\right] + \left[\widetilde{T}_\nu(u_{\nu+1}) - \widetilde{T}_{\nu+1}(u_{\nu+1})\right] \tag{2.12.}$$

Treći sabirak na desnoj strani relacije (2.12) je $a_\nu$, a četvrti zbog relacije (2.11) nije veći od nule. Dalje je

$$-\widetilde{T}_{\nu+1}(u_{\nu+1}) + \widetilde{T}_\nu(u_{\nu+1}) = (A_\nu - A_{\nu+1})P(u_{\nu+1}) + (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})\|u_{\nu+1}\|^2 \leqslant R^2(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}), \tag{2.13}$$

gdje je $R = \sup_{u\in U_0}\|u\| < +\infty$, i

$$\widetilde{T}_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - \widetilde{T}_\nu(v_{\nu+1}) = (A_{\nu+1} - A_\nu)P(v_{\nu+1}) + (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu)\|v_{\nu+1}\|^2 \leqslant (A_{\nu+1} - A_\nu)P(v_{\nu+1})$$

Dalje, iz Lipšicovog uslova za gradijent funkcionala $P(u)$ imamo da je za fiksirano $u_0 \in U$

$$|P(u)-P(u_0)| = \int_0^1 \langle P'(u_0+t(u-u_0)),u-u_0\rangle dt \leqslant \int_0^1 L\,\|u-u_0\|^2 t\,dt +$$

$$+\,|\langle P'(u_0),u-u_0\rangle| = \frac{1}{2}L\,\|u-u_0\|^2 + \|P'(u_0)\|\cdot\|u-u_0\|,$$

odakle, s obzirom da je po pretpostavci mnoštvo $U_0$ ograničeno, slijedi da je funkcional $P(u)$ ograničen na mnoštvu $U_0$, pa je

$$\widetilde{T}_{\nu+1}(v_{\nu+1})-\widetilde{T}_\nu(v_{\nu+1})\leqslant C_1(A_{\nu+1}-A_\nu),\ \nu=1,2,\ldots \tag{2.14}$$

Iz relacija (2.12)-(2.14) dobijamo da je

$$a_{\nu+1}\leqslant a_\nu+R^2(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})+C_1(A_{\nu+1}-A_\nu)+\left[\widetilde{T}_\nu(v_{\nu+1})-\widetilde{T}_\nu(v_\nu)\right] \tag{2.15}$$

Ocijenimo s gornje strane poslednji sabirak sa desne strane relacije (2.15). U tom cilju primijetimo da je

$$\|\widetilde{T}_\nu'(u)-\widetilde{T}_\nu'(v)\|\leqslant(L+LA_\nu+2\alpha_\nu)\,\|u-v\|\leqslant C_2A_\nu\,\|u-v\|,\ v,u\in U_0,\ \nu=1,2,\ldots .$$

No, tada je (v. [B 7], lema 1, str. 62)

$$\widetilde{T}_\nu(v_\nu)-\widetilde{T}_\nu(v_{\nu+1})\geqslant\beta_\nu\langle\widetilde{T}_\nu'(v_\nu),v_\nu-\overline{v}_\nu\rangle-\frac{C_2d^2}{2}\cdot\beta_\nu^2A_\nu, \tag{2.16}$$

gdje je $d$ = diam $U_0$.

Iz relacije (2.9), uslova 3) teoreme i s obzirom da je funkcional $\widetilde{T}_\nu(u)$ konveksan imamo (v. [B 7], teorema 1, str. 56)

$$0\leqslant a_\nu\leqslant\langle\widetilde{T}_\nu'(v_\nu),v_\nu-u_\nu\rangle=\langle\widetilde{T}_\nu'(v_\nu)-T_\nu'(v_\nu),\overline{v}_\nu-u_\nu\rangle+$$

$$+\langle T_\nu'(v_\nu),\overline{v}_\nu-u_\nu\rangle+\langle\widetilde{T}_\nu'(v_\nu),v_\nu-\overline{v}_\nu\rangle\leqslant\varepsilon_\nu+d\xi_\nu+dA_\nu\xi_\nu+$$

$$+\langle\widetilde{T}_\nu'(v_\nu),v_\nu-\overline{v}_\nu\rangle$$

odnosno

$$\langle\widetilde{T}_\nu'(v_\nu),v_\nu-\overline{v}_\nu\rangle\geqslant a_\nu-d\xi_\nu-dA_\nu\xi_\nu-\varepsilon_\nu \tag{2.17}$$

Kombinujući relacije (2.15), (2.16) i (2.17) i s obzirom na uslove 5) teoreme imamo da je

$$a_{\nu+1} \leq (1-\beta_\nu)a_\nu + R^2(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) + C_1(A_{\nu+1} - A_\nu) + \beta_\nu \alpha_\nu \Big(\frac{\beta_\nu A_\nu}{\alpha_\nu} \cdot \frac{C_2 d^2}{2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_\nu + d\xi_\nu + dA_\nu \xi_\nu}{\alpha_\nu}\Big) \leq (1-\beta_\nu)\ a_\nu + \alpha_\nu \beta_\nu \eta_\nu)$$

gdje je $\eta_\nu \geq 0$, $\nu = 1,2,\ldots$ , i $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \eta_\nu = 0$.

Uvedimo smjenu $b_\nu = a_\nu \alpha_\nu^{-1}$ i označimo $\dfrac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu \beta_\nu}$ sa $\gamma_\nu$ .

Tada je

$$b_{\nu+1} \leq \Big(1 - \frac{(1-\gamma_\nu)\beta_\nu}{1-\gamma_\nu \beta_\nu}\Big) b_\nu + \frac{\alpha_\nu \beta_\nu \eta_\nu}{\alpha_{\nu+1}},$$

odnosno

$$b_{\nu+1} \leq (1-s_\nu) b_\nu + d_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots,$$

gdje je

$$S_\nu = \frac{(1-\gamma_\nu)\beta_\nu}{1-\gamma_\nu \beta_\nu}\ ; \qquad d_\nu = \frac{\beta_\nu \eta_\nu}{1-\gamma_\nu \beta_\nu}.$$

Iz uslova (2.10) slijedi da je

$$\lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu = \lim_{\nu\to\infty} s_\nu = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{d_\nu}{s_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\eta_\nu}{1-\gamma_\nu} = 0$$

Odatle slijedi da je $0 \leq \gamma_\nu \leq \frac{1}{2}$, $0 < \beta_\nu \leq \frac{1}{2}$ za $\nu \geq \nu_0$.

Dalje je

$$0 < \frac{\beta_\nu}{2} \leq s_\nu \leq \beta_\nu \leq \frac{1}{2},\ \frac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \frac{\beta_\nu}{2} \leq s_\nu\ ,\ \nu \geq \nu_0,$$

pa je

$$\alpha_\nu \alpha_{\nu+1}^{-1} \leq (1-s_\nu)^{-1},\quad \nu \geq \nu_0$$

i

$$\ln(\alpha_\nu \alpha_{\nu+1}^{-1}) \leq \ln(1-s_\nu)^{-1} \leq \frac{3}{2}\, s_\nu,\quad \nu \geq \nu_0 .$$

Sumirajući dobijenu nejednakost od $\nu=\nu_0$ do $\nu=n\geqslant\nu_0$ imamo da je

$$\ln\alpha_{\nu_0}-\ln\alpha_{n+1}\leqslant\frac{3}{2}\sum_{\nu=\nu_0}^{n}s_\nu$$

Kako je $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=0$, odatle slijedi da je $\sum\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty}s_\nu=\sum\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty}\beta_\nu=+\infty$. Na taj način, za niz $\{b_\nu\}$ su ispunjeni uslovi leme 2.2.1., pa $b_\nu\to 0$ kada $\nu\to+\infty$. Iz jake konveksnosti funkcionala $\tilde{T}_\nu(u)$ slijedi da je (v.[B 7], teorema 6, str.60)

$$\alpha_\nu\|v_\nu-u_\nu\|^2\leqslant\tilde{T}_\nu(v_\nu)-\tilde{T}_\nu(u_\nu),$$

pa je $\|v_\nu-u_\nu\|^2\leqslant b_\nu$ i $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|v_\nu-u_\nu\|=0$, što je i trebalo dokazati.

Primijetimo da nizovi koji zadovoljavaju uslove 5) teoreme postoje; njih na primjer možemo tražiti u obliku $\alpha_\nu=\nu^{-\alpha}$, $\beta_\nu=\nu^{-\beta}$, $\varepsilon_\nu=\nu^{-\varepsilon}$, $\xi_\nu=\nu^{-\xi}$, $A_\nu=\nu^{A}$, gdje je $0<\alpha<(q-1)A$, $\min\{\varepsilon;\xi\}\geqslant 1$, $A+\alpha\leqslant\min\{\beta;1-\beta\}$, $\alpha>0,\beta>0,\varepsilon>0$, $\xi>0,A>0$.

Razmotrimo ukratko slučaj kada u definiciji mnoštva $U$ ne postoje ograničenja tipa $g_i(u)\leqslant 0$; $g_i(u)=0$, tj. kada je $U=U_0$. Tada važi sljedeća teorema:

T e o r e m a 2.2.3. Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) $U_0$ je zatvoreno, konveksno i ograničeno mnoštvo iz Hilbertovo prostora $H$;

2) funkcional $J(u)$ je diferencijabilan po Frešeu i konveksan na mnoštvu $U_0$ i njegov gradijent zadovoljava Lipšicov uslov

$$\|J'(u)-J'(v)\|\leqslant L\|u-v\|,\quad u,v\in U_0, L=\mathrm{const}\geqslant 0;$$

3) funkcionali $J_\nu(u)$ su diferencijabilni po Frešeu na mnoštvu $U_0$ i

$$\| J'(u) - J'_\nu(u)\| \le \xi_\nu \quad , \nu = 1,2,\dots, \quad u \in U_0;$$

4) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{\beta_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\xi_\nu\}$, zadovoljavaju uslove

$$\alpha_\nu \geqslant \alpha_{\nu+1} > 0,\ 1 \geqslant \beta_\nu > 0,\ \varepsilon_\nu \geqslant 0,\ \xi_\nu \geqslant 0,\ \nu = 1,2,\dots,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} (\alpha_\nu+\beta_\nu+\varepsilon_\nu+\xi_\nu) = \lim \frac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu \beta_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\xi_\nu}{\alpha_\nu} = 0;$$

5) niz $\{v_\nu\}$ se odredjuje iz uslova (2.8.) i (2.9.) gdje je $T_\nu(u) = J_\nu(u) + \alpha_\nu \|u\|^2$, $\nu = 1,2,\dots$, $u \in U_0$.

Tada $\lim_{\nu\to\infty} \|v_\nu - u_*\| = 0$, gdje $u_* \in U_* = \{u \in U_0 : J(u) = \inf_{u\in U_0} J(u)\}$ i $\|u_*\| = \inf_{u\in U_*} \|u\|$.

Dokaz teoreme 2.2.3. se dobija iz dokaza teoreme 2.2.2. ako u poslednji stavimo $P(u) = P_\nu(u) = 0$, $A_\nu = 1$, $\nu = 1,2,\dots$, $u \in U_0$.

Primijetimo da se čak ni u slučaju $\xi_\nu = 0$, $\varepsilon_\nu = 0$ ne mogu dati ocjene o brzini konvergencije niza $\{v_\nu\}$ ka tački $u_*$. Radi se, zapravo o tome da niz $\{u_\nu\}$, koji se odredjuje iz uslova (2.11.) i koji nije vezan za odredjeni metod minimizacije već samo za Tihonovljev metod regularizacije, konvergira po normi prostora H ka tački $u_*$, ali se pri tom ne dobija ocjena brzine te konvergencije.

$2^0$ Za rešavanje postavljeno zadatka minimizacije mogu se koristiti i druge varijante metoda uslovnog gradijenta. Razmotrimo njihove iterativne regularizacije.

Uvedimo funkcionale:

$N_\nu(u)=\gamma_\nu J_\nu(u)+P_\nu(u)+\alpha_\nu\gamma_\nu\|u\|^2$, $u\in U_0$,

$\widetilde{N}_\nu(u)=\gamma_\nu J(u)+P(u)+\alpha_\nu\gamma_\nu\|u\|^2$, $u\in U_0$,

gdje je $\gamma_\nu>0$, $\alpha_\nu>0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\lim\limits_{\nu\to\infty}\gamma_\nu=0$. Primijetimo da ako funkcionale $N_\nu(u)$ i $\widetilde{N}_\nu(u)$ podijelimo sa $\gamma_\nu$ i označimo $A_\nu=\gamma_\nu^{-1}$, tada dobijamo funkcionale Tihonova $T_\nu(u)$ i $\widetilde{T}_\nu(u)$.

Posmatrajmo niz $\{v_\nu\}$, $v_\nu\in U_0$, $\nu=1,2,\dots$, konstruisan po sledećim pravilima:

$v_1$ je proizvoljna tačka iz $U_0$; ako je $\nu$-ta aproksimacija $v_\nu\in U_0$ poznata, tada je sledeća aproksimacija

$$v_{\nu+1}=v_\nu+\beta_\nu(v-\overline{v}_\nu), \tag{2.18}$$

gdje se $\overline{v}_\nu$ i $\beta_\nu$ odredjuju iz uslova

$$\overline{v}_\nu\in U_0,\ \langle N'_\nu(v_\nu),\overline{v}_\nu-v_\nu\rangle\leq\inf_{u\in U_0}\langle N'_\nu(v_\nu),u-v_\nu\rangle+\varepsilon_\nu, \tag{2.19}$$

$$0\leq\beta_\nu\leq 1,\ N_\nu(v_{\nu+1})\leq\inf_{0\leq\beta\leq 1}N_\nu(v_\nu+\beta(\overline{v}_\nu-v_\nu))+\delta_\nu, \tag{2.20}$$

$$\varepsilon_\nu\geq 0,\ \delta_\nu\geq 0,\ \nu=1,2,\dots,\ \lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=\lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu=0.$$

Opisani metod predstavlja iterativnu regularizaciju najčešće korišćene varijante metoda uslovnog gradijenta (v.[ ],str.97).

Primijetimo da se, uz učinjene pretpostavke u odnosu na funkcionale $J_\nu(u)$ i $g_{i\nu}(u)$, i mnoštvo $U_0$, infimumi u relacijama (2.19) i (2.20) dostižu, tj. da niz $\{v_\nu\}$ postoji.

Dokažimo da pri odgovarajućem izboru parametara metoda (2.18)-(2.20) niz $\{v_\nu\}$ konvergira po normi prostora H ka normalnom rešenju.

T e o r e m a 2.2.4. Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) $U_o$ - konveksno, zatvoreno, ograničeno mnoštvo iz Hilbertovog prostora H; funkcionali $J(u)$, $g_i(u)$, $i=\overline{1,s}$ pripadaju klasi $C^1(U_o)$(klasi funkcionala čiji je Frešeov izvod neprekidan na mnoštvu $U_o$), a njihovi gradijenti su takvi da je

$$\| J'(u)-J'(v)\| \leqslant L\| u-v\| ; \| P'(u)-P'(v)\| \leqslant L\| u-v\| , u,v\in U_o, L=\mathrm{const}\geqslant 0;$$

funkcionali $J(u)$, $g_i(u)$, $i=\overline{1,r}$; $g_i(u)$, $i=\overline{r+1,s}$ su konveksni na mnoštvu $U_o$;

2) funkcional Lagranža $\mathcal{L}(u,\lambda)=J(u)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i g_i(u)$ ima sedlastu tačku na mnoštvu $U_o \times \Lambda_o$, $\Lambda_o=\left\{\lambda=(\lambda_1,\ldots\lambda_s): \lambda_i \geqslant 0, i=\overline{1,r}\right\}$;

3) funkcionali $J_\nu(u)$, $g_{1\nu}(u),\ldots,g_{s\nu}(u)$, $\nu=1,2,\ldots$ pripadaju klasi $C^1(U_o)$ i

$$\max\left\{ |J(u)-J_\nu(u)| ; |P(u)-P_\nu(u)|\right\}\leqslant \eta_\nu \quad , u\in U_o \tag{2.21.}$$

$$\max\left\{ \|J'(u)-J_\nu'(u)\| ; \|P'(u)-P_\nu'(u)\|\right\}\leqslant \xi_\nu \quad , u\in U_o, \tag{2.22.}$$

gdje je $\eta_\nu \geqslant 0$, $\xi_\nu \geqslant 0$, $\nu=1,2,\ldots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\eta_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty}\xi_\nu = 0$;

4) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{\gamma_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$, $\{\eta_\nu\}$, $\{\xi_\nu\}$, zadovoljavaju uslove

$$\alpha_\nu \geqslant \alpha_{\nu+1} \geqslant 0,\ \gamma_\nu > \gamma_{\nu+1} \geqslant 0,\ \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu \gamma_\nu^{1-q} = +\infty, q+p=pq, \tag{2.23.}$$

$$\alpha_\nu\gamma_\nu - \alpha_{\nu+1}\gamma_{\nu+1} \leq C_o\left(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}\right), \tag{2.24.}$$

$$\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + \eta_\nu + \xi_\nu + \varepsilon_\nu + \delta_\nu \leq C_1 \nu^{-2\rho}, 0<\rho<1, \tag{2.25.}$$

$$\alpha_\nu \gamma_\nu \geqslant C_2 \nu^{-\rho_1},\ 0<\rho_1<\rho,\ \sum_{\nu=1}^{\infty}(\delta_\nu+\eta_\nu)<+\infty , \tag{2.26.}$$

gdje su $C_o$, $C_1$, $C_2$ proizvoljne pozitivne konstante.

Tada je $\lim_{\nu\to\infty} \| v_\nu - u_* \| = 0$, gdje je $u_*$ normalno rešenje zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na množtvu $U$.

D o k a z. Iz uslova teoreme slijedi da je $J_* = \inf_{u\in U} J(u) > -\infty$ i $U_* = \{u \in U:\ J(u) = J_*\} \neq \emptyset$, da normalno rešenje $u_* \in U$ postoji i da je jedinstveno. Istovremeno s nizom $\{v_\nu\}$ posmatrajmo niz $\{u_\nu\}$ koji je zbog jake konveksnosti funkcionala $\widetilde{N}_\nu(u)$ na množtvu $U_0$ jednoznačno odredjen uslovima

$$u_\nu \in U_0;\quad \widetilde{N}_\nu(u_\nu) = \inf_{u\in U_0} \widetilde{N}_\nu(u),\quad \nu = 1,2,\ldots \tag{2.27.}$$

Iz teoreme 1.2.2. slijedi da je $\lim_{\nu\to\infty} \| u_\nu - u_* \| = 0$, pa da bi dokazali teoremu dovoljno je dokazati da je

$$\lim_{\nu\to\infty} \| v_\nu - u_\nu \| = 0. \tag{2.28.}$$

Uvedimo brojni niz $\{a_\nu\}$ : $a_\nu = \widetilde{N}_\nu(v_\nu) - \widetilde{N}_\nu(u_\nu) \geqslant 0,\ \nu = 1,2,\ldots,$ i izvedimo rekurentnu nejednakost za $a_\nu$. Imamo da je

$$\begin{aligned} a_{\nu+1} &= \widetilde{N}_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - \widetilde{N}_{\nu+1}(u_{\nu+1}) = \left[\widetilde{N}_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - \widetilde{N}_\nu(v_{\nu+1})\right] + \\ &+ \left[\widetilde{N}_\nu(v_{\nu+1}) - N_\nu(v_{\nu+1})\right] + \left[N_\nu(v_{\nu+1}) - N_\nu(v_\nu)\right] + \left[N_\nu(v_\nu) - \widetilde{N}_\nu(v_\nu)\right] + \\ &+ \left[\widetilde{N}_\nu(v_\nu) - \widetilde{N}_\nu(u_\nu)\right] + \left[\widetilde{N}_\nu(u_\nu) - \widetilde{N}_\nu(u_{\nu+1})\right] + \left[\widetilde{N}_\nu(u_{\nu+1}) - \widetilde{N}_{\nu+1}(u_{\nu+1})\right] \end{aligned} \tag{2.29.}$$

Peti sabirak sa desne strane relacije (2.29) je jednak $a_\nu$, a šesti nije pozitivan zbog relacije (2.25.). Dalje, iz uslova (2.21.) slijedi da je

$$\left| N_\nu(u) - \widetilde{N}_\nu(u) \right| \leq \gamma_\nu \eta_\nu + \eta_\nu \leq C_3 \eta_\nu,\ u \in U_0\ \nu = 1,2,\ldots, C_3 = \text{const} \geqslant 0 \tag{2.30.}$$

Dalje, iz Lipšicovog uslova za gradijent funkcionala $J(u)$ i ograničenosti množtva $U_0$ slijedi ograničenost funkcionala $J(u)$ na množtvu $U_0$. Tada iz uslova (2.21.) i (2.26.) slijedi da su i funkcionali $J_\nu(u)$ ograničeni na mnoštvu $U_0$ za svako $\nu=1,2,\ldots$.

Isto tvrdjenje se analogno izvodi i za funkcionale $P(u)$, $P_\nu(u)$, $\widetilde{N}(u)$, $N_\nu(u)$, $\nu=1,2,\ldots$, Na taj način dobijamo da je

$$\max\left\{\sup_{u\in U_0}|J(u)|;\ \sup_{\nu\geq 1}\sup_{u\in U_0}|J_\nu(u)|;\ \sup_{u\in U_0}P(u);\ \sup_{\nu\geq 1}\sup_{u\in U_0}P_\nu(u)\right\}\leq C_4\ , \tag{2.31.}$$

$$\max\left\{\sup_{\nu\geq 1}\sup_{u\in U_0}N_\nu(u);\ \sup_{\nu\geq 1}\sup_{u\in U_0}\widetilde{N}_\nu(u)\right\}\leq C_5 \tag{2.32}$$

Dalje, iz uslova (2.24.), relacija (2.30.), (2.31.) i ograničenosti mnoštva $U_0$ slijedi da je za svako $u\in U_0$ i $\nu=1,2,\ldots$,

$$|\widetilde{N}_\nu(u)-\widetilde{N}_{\nu+1}(u)|\leq(\gamma_\nu-\gamma_{\nu+1})\ |J(u)|+(\alpha_\nu\gamma_\nu-\alpha_{\nu+1}\gamma_{\nu+1})\|u\|^2\leq C_6(\gamma_\nu-\gamma_{\nu+1}), \tag{2.33.}$$

$$|N_\nu(u)-N_{\nu+1}(u)|\leq|N_\nu(u)-\widetilde{N}_\nu(u)|+|\widetilde{N}_\nu(u)-\widetilde{N}_{\nu+1}(u)|+|\widetilde{N}_{\nu+1}(u)-N_{\nu+1}(u)|\leq$$
$$\leq C_3(\eta_\nu+\eta_{\nu+1})+C_6(\gamma_\nu-\gamma_{\nu+1})\leq C_7(\eta_\nu+\eta_{\nu+1}+\gamma_\nu-\gamma_{\nu+1}) \tag{2.34.}$$

Koristeći relaciju (2.30.) za ocjenu drugog i četvrtog, a relaciju (2.33.) za ocjenu prvog i sedmog sabirka sa desne strane relacije (2.29.), imamo

$$0\leq a_{\nu+1}\leq a_\nu+2C_3\eta_\nu+2C_6(\gamma_\nu-\gamma_{\nu+1})+$$
$$+\left[N_\nu(v_{\nu+1})-N_\nu(v_\nu)\right],\qquad \nu=1,2,\ldots \tag{2.35.}$$

Ocijenimo poslednji sabirak sa desne strane relacije (2.35). Iz relacije (2.20.) direktno slijedi da važi sledeća ocjena:

$$N_\nu(v_{\nu+1})-N_\nu(v_\nu)\leq\delta_\nu\ ,\ \nu=1,2,\ldots \tag{2.36}$$

Ali, za izvodjenje dokaza teoreme neophodna je preciznija ocjena.

Iz relacija (2.34) i (2.36) imamo:

$$N_{\nu+1}(v_{\nu+1}) \leqslant N_\nu(v_{\nu+1}) + C_7(\eta_\nu + \eta_{\nu+1} + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}) \leqslant$$
$$\leqslant N_\nu(v_\nu) + \delta_\nu + C_7(\eta_\nu + \eta_{\nu+1} + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}), \quad \nu = 1,2,\ldots$$

Iz relacije (2.32.) slijedi da je niz $\{N_\nu(v_\nu)\}$ ograničen. Dalje iz uslova (2.26.) slijedi da je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\delta_\nu + C_7(\eta_\nu + \eta_{\nu+1} + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+1})\right] < +\infty,$$

pa, na osnovu leme 2.2.3., postoji $\lim_{\nu\to\infty} N_\nu(v_\nu)$ i $\lim_{\nu\to\infty}\left[N_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - N_\nu(v_\nu)\right] = 0.$

Odavde i iz relacije (2.34.) slijedi da je

$$\left|N_\nu(v_{\nu+1}) - N_\nu(v_\nu)\right| \leqslant \left|N_\nu(v_{\nu+1}) - N_{\nu+1}(v_{\nu+1})\right| + \left|N_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - N_\nu(v_\nu)\right|,$$

pa je

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|N_\nu(v_{\nu+1}) - N_\nu(v_\nu)\right| = 0. \tag{2.37.}$$

Dokažimo dalje da je

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\langle N_\nu'(v_\nu),\ \bar{v}_\nu - v_\nu\right\rangle = 0 \tag{2.38.}$$

Prije svega, iz Lipšicovog uslova za gradijente funkcionala $J(u)$ i $P(u)$ i uslova (2.22.) imamo da je

$$\left\|\tilde{N}_\nu'(u) - \tilde{N}_\nu'(v)\right\| \leqslant (\gamma_\nu L + L + 2\alpha_\nu\gamma_\nu)\left\|u-v\right\| \leqslant C_8\left\|u-v\right\|, u,v\in U_0,$$
$$\nu = 1,2,\ldots \tag{2.39}$$

i

$$\left\|N_\nu'(u) - N_\nu'(v)\right\| \leqslant \left\|N_\nu'(u) - \tilde{N}_\nu'(u)\right\| + \left\|\tilde{N}_\nu'(u) - \tilde{N}_\nu'(v)\right\| + \left\|N_\nu'(v) -\right.$$
$$\left.- \tilde{N}_\nu'(v)\right\| \leqslant 2C_3\xi_\nu + C_8\left\|u-v\right\|, \ u,v\in U_0, \nu=1,2,\ldots \tag{2.40.}$$

Dalje, iz uslova (2.20) i relacije (2.40) imamo

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_{\nu+1}) \geqslant N_\nu(v_\nu) - \inf_{0\leqslant\beta\leqslant1} N_\nu(v_\nu + \beta(\bar{v}_\nu - v_\nu)) - \delta_\nu,$$

i za svako $\beta\in[0,1]$

$$\delta_\nu+N_\nu(v_\nu)-N_\nu(v_{\nu+1})\geq\int_0^1\langle N'_\nu(v_\nu+\beta(\bar{v}_\nu-v_\nu)+t\beta(v_\nu-\bar{v}_\nu)),\beta(v_\nu-\bar{v}_\nu)\rangle dt=$$
$$=\beta\langle N'_\nu(v_\nu),v_\nu-\bar{v}_\nu\rangle+\beta\int_0^1\langle N'_\nu(v_\nu+\beta(1-t)(\bar{v}_\nu-v_\nu))-N'_\nu(v_\nu),v_\nu-\bar{v}_\nu\rangle dt\geq$$
$$\geq\beta\langle N'_\nu(v_\nu),\ v_\nu-\bar{v}_\nu\rangle-2\beta C_3\xi_\nu\|v_\nu-\bar{v}_\nu\|-C_8\cdot\beta^2\cdot\|v_\nu-\bar{v}_\nu\|^2,$$

ili

$$N_\nu(v_\nu)-N_\nu(v_{\nu+1})\geq\beta\langle N'_\nu(v_\nu),v_\nu-\bar{v}_\nu\rangle-C_9\cdot\frac{\beta^2}{2}-C_{10}\xi_\nu-\delta_\nu,$$
$$\nu=1,2,\dots \tag{2.41.}$$

Množtvo $N=\{1,2,\dots\}$ razbijmo na dva podmnoštva: $I^+=\{\nu\in N:\langle N'_\nu(v_\nu),\bar{v}_\nu-v_\nu\rangle\geq 0\}$ i $I^-=N\setminus I^+$. Kako je

$$\inf_{u\in U_0}\langle N'_\nu(v_\nu),\ u-v_\nu\rangle\leq\langle N'_\nu(v_\nu),v_\nu-v_\nu\rangle=0,$$

iz uslova (2.19) slijedi da je za svako $\nu\in I^+$

$$0\leq\langle N'_\nu(v_\nu),\ \bar{v}_\nu-v_\nu\rangle\leq\varepsilon_\nu,$$

i ako je mnoštvo $I^+$ beskonačno, tada je

$$\lim_{\substack{\nu\to+\infty,\\ \nu\in I^+}}\langle N'_\nu(v_\nu),\ \bar{v}_\nu-v_\nu\rangle=0 \tag{2.42.}$$

Ako $\nu\in I^-$, tada iz relacije (2.41.) slijedi da je za svako $\beta\in(0,1]$

$$0\leq\langle N'_\nu(v_\nu),v_\nu-\bar{v}_\nu\rangle\leq\frac{1}{\beta}(N_\nu(v_\nu)-N_\nu(v_{\nu+1}))+\frac{C_9}{2}\beta+$$
$$+\frac{1}{\beta}(C_{10}\xi_\nu+\delta_\nu).$$

Ako je mnoštvo $I^-$ beskonačno, tada graničnim prelazom, prvo kada $\nu\to+\infty$, $\nu\in I^-$, a zatim kada $\beta\to+0$ s obzirom na jednakost (2.37.) imamo da je

$$\lim_{\substack{\nu\to\infty,\\ \nu\in I^-}}\langle N'_\nu(v_\nu),\bar{v}_\nu-v_\nu\rangle=0 \tag{2.42'.}$$

Iz relacije (2.42.) i (2.42'.) slijedi jednakost (2.38.).

Dalje, zbog konveksnosti funkcionala $\widetilde{N}_\nu(u)$, uslova (2.19.), ograničenosti mnoštva $U_0$ i relacije (2.38.) imamo

$$0 \leq a_\nu = \widetilde{N}_\nu(v_\nu) - \widetilde{N}_\nu(u_\nu) \leq \langle \widetilde{N}'_\nu(v_\nu), v_\nu - u_\nu \rangle = \langle \widetilde{N}'_\nu(v_\nu) - N'_\nu(v_\nu), v_\nu - u_\nu \rangle +$$

$$+ \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - u_\nu \rangle \leq C_3 d \xi_\nu + \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle + \varepsilon_\nu, \ \nu = 1,2,\ldots,$$

gdje je $d = \operatorname{diam} U_0 = \sup_{u,v \in U_0} \|u - v\|$, odnosno

$$\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle \geq a_\nu - C_{11} \xi_\nu - \varepsilon_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots \tag{2.43}$$

Označimo mnoštvo svih $\nu \in N$ za koje je $a_\nu \geq C_{11} \xi_\nu + \varepsilon_\nu$ sa $I_0$, a mnoštvo svih $\nu \in N$ za koje je $a_\nu < C_{11} \xi_\nu + \varepsilon_\nu$ sa $I_1$. Slijedi da je $I_0 \subseteq I^-$, pa relaciju (2.41) možemo pisati u obliku

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_{\nu+1}) \geq \beta \left| \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle \right| - C_9 \frac{\beta^2}{2} - C_{10} \xi_\nu - \delta_\nu, \ \nu \in I_0, \ \beta \in [0,1]. \tag{2.44}$$

Funkcija

$$g(\beta) = \beta \left| \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle \right| - C_9 \frac{\beta^2}{2} - C_{10} \xi_\nu - \delta_\nu$$

dostiže najveću vrijednost na brojnoj pravoj u tački

$$\beta = \overline{\beta}_\nu = \frac{\left| \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle \right|}{C_9} \geq 0$$

Iz relacije (2.37) slijedi da je $\lim_{\nu \to \infty} \overline{\beta}_\nu = 0$, pa (uvećavajući konstantu $C_9$, ako je to potrebno) možemo smatrati da je $0 \leq \overline{\beta}_\nu \leq 1$ za svako $\nu = 1,2,\ldots$ . Iz relacije (2.32) slijedi da je niz $\{a_\nu\}$ ograničen, pa iz (2.43) dobijamo da je za svako $\nu \in I_0$

$$\left| \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle \right|^2 \geq a_\nu^2 - C_{12}(\xi_\nu + \varepsilon_\nu) \tag{2.45}$$

Zamjenjujući $\beta = \bar{\beta}_\nu$ u relaciju (2.44) i koristeći ocjenu (2.45) dobijamo

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_{\nu+1}) \geq \frac{a_\nu^2}{2C_9} - C_{13}(\xi_\nu + \delta_\nu + \varepsilon_\nu), \nu \in I_0 . \quad (2.46)$$

Kombinujući relacije (2.34),(2.46) i uslov (2.25) dobijamo da za svako $\nu \in I_0$ važi relacija

$$a_{\nu+1} \leq a_\nu - \frac{a_\nu^2}{2C_9} + 2C_3\eta_\nu + 2C_6(\gamma_\nu^{\tau} - \gamma_{\nu+1}^{\tau}) + C_{13}(\xi_\nu + \delta_\nu + \varepsilon_\nu) \leq$$

$$\leq a_\nu - \frac{a_\nu^2}{C_{14}} + C_{14} \cdot \nu^{-2\varrho}, \quad 0 < \varrho < 1.$$

Ako $\nu \in I_1$, tada iz relacija (2.34) i (2.35) imamo

$$a_\nu \leq \frac{C_1}{\nu^{2\varrho}}; \quad a_{\nu+1} \leq a_\nu + C_{15}\nu^{-2\varrho}$$

Na taj način, niz $\{a_\nu\}$ zadovoljava uslove leme 2.24 i primjenjujući lemu dobijamo da je

$$0 \leq a_\nu \leq C_{16}\nu^{-\varrho}$$

Iz relacije (2.27) i jake konveksnosti funkcionala $\tilde{N}_\nu(u)$ tada slijedi da je

$$\alpha_\nu \gamma_\nu \|v_\nu - u_\nu\| \leq \tilde{N}_\nu(v_\nu) - \tilde{N}_\nu(u_\nu) = a_\nu \leq C_{16}\nu^{-\varrho}$$

Odatle i s obzirom na uslov (2.26) dobijamo:

$$\|v_\nu - u_\nu\|^2 \leq C_{16}\nu^{-\varrho}\alpha_\nu^{-1}\gamma_\nu^{-1} \leq C_{17}\nu^{-\varrho+\varrho_1} \to 0 \text{ kada } \nu \to \infty .$$

Jednakost (2.28), a istovremeno i teorema 2.2.3 su dokazani.

Primijetimo da za svako fiksirano $\rho$, $0<\rho<1$, postoje nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{\gamma_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\xi_\nu\}$ koji zadovoljavaju uslove teoreme. Na primjer, $\alpha_\nu=\nu^{-\alpha}$, $\gamma_\nu=\nu^{-\gamma}$, $\delta_\nu=\nu^{-\delta}$, $\varepsilon_\nu=\nu^{-\varepsilon}$, $\eta_\nu=\nu^{-\eta}$, $\xi_\nu=\nu^{-\xi}$, gdje je $\gamma$ proizvoljan broj koji zadovoljava uslove: $0<\gamma<\rho$ za $0<\rho\leq\frac{1}{2}$ ; $2\rho-1\leq\gamma<\rho$ za $\frac{1}{2}<\rho<1$; $\alpha$ se bira iz uslova $0<\alpha<\min\{\rho-\gamma,\gamma(q-1)\}$, $\varepsilon=\xi=2\rho$ ; $\eta$ i $\delta$ zadovoljavaju uslove $\min\{\eta;\delta\}\geq\max\{1;2\rho\}$, a

$$\rho_1=\frac{\alpha+\gamma+\rho}{2}.$$

Razmotrimo i slučaj kada je mnoštvo $U=U_0$ zadano tačno, tj. kada ne postoje ograničenja tipa $g_i(u)\leq 0, g_i(u)=0$. Tada važi sljedeća teorema:

T e o r e m a 2.2.5. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1) $U$ je konveksno, zatvoreno, ograničeno mnoštvo iz Hilbertovog prostora $H$;

2) funkcionali $J(u), J_\nu(u)$ pripadaju klasi $C^1(U)$ i $|J(u)-J_\nu(u)|\leq\eta_\nu$, $\|J'(u)-J'_\nu(u)\|\leq\xi_\nu$, $u\in U$, $\nu=1,2,\ldots$;

3) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\eta_\nu\}$, $\{\xi_\nu\}$ zadovoljavaju uslove:

$\alpha_\nu>0$, $\delta_\nu\geq 0$, $\varepsilon_\nu\geq 0$, $\eta_\nu\geq 0$, $\xi_\nu\geq 0$, $\alpha_\nu\geq\alpha_{\nu+1}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\alpha_\nu+\delta_\nu+\varepsilon_\nu+\eta_\nu+\xi_\nu)=0$,

$\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}+\delta_\nu+\varepsilon_\nu+\eta_\nu+\xi_\nu\leq C_1\nu^{-2\rho}$, $0<\rho<1$, $\alpha_\nu\geq C_2\nu^{-\rho_1}$, $0<\rho_1<\rho$ ,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\delta_\nu+\eta_\nu)=+\infty,$$

gdje su $C_1$ i $C_2$ proizvoljne pozitivne konstante;

4) niz $\{v_\nu\}$ se formira na sledeći način:

$$v_{\nu+1}=v_\nu+\beta_\nu(\bar{v}_\nu-v_\nu),\ \nu=1,2,\ldots,$$

gdje je $v_1$ proizvoljna tačka iz mnoštva U i

$$\bar{v}_\nu \in U, \langle T'_\nu(v_\nu), \bar{v}_\nu - v_\nu \rangle \leq \inf_{u \in U} \langle T'_\nu(v_\nu), u - v_\nu \rangle + \varepsilon_\nu,$$

$$0 < \beta_\nu \leq 1, \quad T_\nu(v_{\nu+1}) \leq \inf_{0 \leq \beta \leq 1} T_\nu(v_\nu + \beta(\bar{v}_\nu - v_\nu)) + \delta_\nu,$$

$$T_\nu(u) = J_\nu(u) + \alpha_\nu \cdot \|u\|^2, \ \nu = 1,2,\ldots.$$

Tada je $\lim_{\nu \to \infty} \|v_\nu - u_*\| = 0$, gdje $u_* \in U_* = \left\{u \in U : J(u) = \inf_{u \in U} J(u)\right\}$, $\|u_*\| = \inf_{u \in U_*} \|u\|$

Dokaz teoreme 2.2.5. se, sa malim modifikacijama, dobija iz dokaza teoreme 2.2.4. za $P(u) = P_\nu(u) \equiv 0$, $\gamma_\nu = 1$. Za nizove $\{\alpha_\nu\}, \{\delta_\nu\}, \{\varepsilon_\nu\}, \{\eta_\nu\}, \{\xi_\nu\}$ koji zadovoljavaju uslov 3) teoreme možemo uzeti da je $\alpha_\nu = \nu^{-\alpha}$, $\delta_\nu = \nu^{-\delta}$, $\varepsilon_\nu = \nu^{-\varepsilon}$, $\eta_\nu = \nu^{-\eta}$, $\xi_\nu = \nu^{-\xi}$, gdje je $0 < \alpha < \rho$ za $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$ i $2\rho - 1 \leq \alpha \leq \rho$ za $\frac{1}{2} < \rho < 1$; $\varepsilon = \xi \geq$

$$\geq 2\rho, \ \min\{\delta; \eta\} \geq \max\{1, 2\rho\}, \ \rho_1 = \frac{\alpha + \rho}{2}$$

$3^0$ Razmotrimo iterativnu regularizaciju još dvije varijante metoda uslovnog gradijenta. Neka je niz $\{v_\nu\}$, $\nu = 1,2,\ldots$ odredjen formulama (2.18) i (2.19), pri čemu je

$$\beta_\nu = \begin{cases} 0, \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle \leq 0 \\ \min\left\{1; \rho_\nu \dfrac{\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle}{\|v_\nu - \bar{v}_\nu\|^2}\right., \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle > 0 \end{cases} \tag{2.47}$$

gdje je $0 < \rho \leq \rho_\nu \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{C_0}$, $0 < \rho < \varepsilon < 1$, $C_0$-Lipšicova konstanta za gradijent funkcionala $\tilde{N}_1(u)$, (v. [B 18]), odnosno,

$$\beta_\nu = \begin{cases} 0, & \varepsilon\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu\rangle \leq \chi_\nu \| v_\nu - \bar{v}_\nu \| \\ 2^{-i_0}, & \varepsilon\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu\rangle > \chi_\nu \| v_\nu - \bar{v}_\nu \| \end{cases} \qquad (2.48)$$

gdje je $\chi_\nu \geqslant 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $i_0$-prvi indeks $i=0,1,2,\ldots$ .

za koji je

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_\nu + 2^{-i_0}(\bar{v}_\nu - v_\nu)) \geqslant \varepsilon 2^{-i_0}\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu\rangle - 2^{-i_0}\chi_\nu \| v_\nu - \bar{v}_\nu \| \quad (2.49)$$

Razmotrimo izbor niza $\{\beta_\nu\}$ saglasno formulama (2.47). Tada važi sledeća teorema:

T e o r e m a 2.2.6. Neka su ispunjeni uslovi 1),2) i 3) teoreme 1.2.3 i pored toga

4) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{\gamma_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\eta_\nu\}$, $\{\xi_\nu\}$ zadovoljavaju uslove

$$\alpha_\nu \geqslant \alpha_{\nu+1} > 0, \gamma_\nu \geqslant \gamma_{\nu+1} > 0, \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\gamma_\nu = 0, \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu \gamma_\nu^{1-q} = +\infty, q = p(p-1)^{-1} \quad (2.50)$$

$$\alpha_\nu\gamma_\nu - \alpha_{\nu+1}\gamma_{\nu+1} \leq C_1(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}), \; C_1 = \text{const} \geqslant 0 \quad (2.51)$$

$$\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + \eta_\nu + \varepsilon_\nu + \xi_\nu \leq C_2 \nu^{-2\theta_1}, \; 0 < \theta_1 < 1, \; C_2 = \text{const} \geqslant 0 \quad (2.52)$$

$$\alpha_\nu \gamma_\nu \geqslant C_3 \nu^{-\theta_2}, \quad 0 < \theta_2 < \theta_1, \; C_3 = \text{const} \geqslant 0 \quad (2.53)$$

5) niz $\{v\}$ se konstruiše prema formulama (2.18), (2.19) i (2.47). Tada je $\lim_{\nu\to\infty} \| v_\nu - u_* \| = 0$, gdje

$$u_* \in U_* = \left\{ u \in U : J(u) = \inf_{u \in U} J(u) \right\}, \; \| u_* \| = \inf_{u \in U_*} \| u \|$$

D o k a z. Primijetimo da relacije (2.29) - (2.37) izvedene pri dokazu teoreme 2.2.4. ne zavise od načina izbora niza $\{\beta_\nu\}$, pa važe u razmatranom slučaju. Dalje, iz konveksnosti funkcionala $\widetilde{N}_\nu(u)$ slijedi da je

$$\langle N'_\nu(v_\nu), \bar{v}_\nu - v_\nu \rangle \leq a_\nu - C_{11}\xi_\nu - \varepsilon_\nu, \tag{2.54}$$

a iz Lipšicovog uslova za gradijente funkcionala J(u) i P(u) slijedi da je

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_{\nu+1}) \geqslant \beta_\nu \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle - C_0 \frac{\beta_\nu^2}{2} \| v_\nu - \bar{v}_\nu \|^2 -$$

$$- 2(1+\gamma_\nu)\xi_\nu \| v - \bar{v}_\nu \| \beta_\nu \geqslant \beta_\nu \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle - C_0 \frac{\beta_\nu^2}{2} \| v_\nu - \bar{v} \|^2 - C_{10}\xi_\nu \tag{2.55}$$

Razmotrimo tri mogućnosti izbora parametra $\beta_\nu$ saglasno formulama (2.47)

a) za $\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle \leq 0$, $\beta_\nu = 0$, $v_{\nu+1} = v_\nu$ iz (2.35) i (2.54) dobijamo

$$a_\nu \leq C_{11}\xi_\nu + \varepsilon_\nu; \quad a_{\nu+1} \leq a_\nu + 2C_3\eta_\nu + 2C_6(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1});$$

b) za $\beta_\nu = 1$, $v_{\nu+1} = \bar{v}_\nu$ iz (2.47) slijedi da je

$$\| v_\nu - \bar{v}_\nu \|^2 \leq \rho_\nu \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle$$

Odavde, iz (2.35.),(2.54.) i (2.55.) slijedi

$$a_{\nu+1} \leq (1-\varepsilon)a_\nu + C_{18}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + \xi_\nu + \eta_\nu + \varepsilon_\nu),\ \nu = 1,2,\ldots;$$

c) za $0 < \beta_\nu = \rho_\nu \dfrac{\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle}{\| v_\nu - \bar{v}_\nu \|^2} < 1$, iz (2.55) dobijamo

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_{\nu+1}) \geqslant \frac{\varepsilon \cdot \rho}{d^2} \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle^2 - C_{10}\xi_\nu \tag{2.56}$$

Ovdje su moguća dva podslučaja:

$c_1$) ako je $a_\nu \leq C_{11}\xi_\nu + \varepsilon_\nu$, tada iz (2.35) i (2.56) slijedi da je

$$a_{\nu+1} \leq a_\nu + C_{16}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + \eta_\nu + \xi_\nu);$$

$c_2$) ako je pak $a_\nu \geqslant C_{11}\xi_\nu + \varepsilon_\nu$, tada iz (2.35.), (2.54.) i (2.56.) i ograničenosti niza $\{a_\nu\}$ imamo

$$a_{\nu+1} \leqslant a_\nu - \frac{\varepsilon\delta}{d^2} a_\nu^2 + C_{19}\,(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + \eta_\nu + \xi_\nu + \varepsilon_\nu)$$

Uzimajući u obzir uslove (2.50) - (2.53) i razmotrene mogućnosti, slijedi da za svaki prirodan broj $\nu = 1,2,\dots$, važi bar jedna od relacija

$$a_{\nu+1} \leqslant a_\nu - \frac{1}{A} a_\nu^2 + \frac{A}{\nu^{2\theta_1}}, \tag{2.57}$$

$$a_\nu \leqslant \frac{B}{\nu^{2\theta_1}}, \quad a_{\nu+1} \leqslant a_\nu + \frac{B}{\nu^{2\theta_1}}, \quad 0 < \theta_1 < 1 \tag{2.58}$$

Iz dobijenih relacija i na osnovu leme 2.2.4 slijedi da je

$$a_\nu \leqslant \frac{D}{\nu^{\theta_1}}, \quad \nu = 1,2,\dots, \quad D = \text{const} \geqslant 0.$$

Dalje, funkcional $\widetilde{N}_\nu(u)$ je jako konveksan, pa je

$$\| v_\nu - u_\nu \|^2 \leqslant \frac{a_\nu}{\alpha_\nu \gamma_\nu} \leqslant \frac{D}{C_3} \nu^{\theta_2 - \theta_1} \to 0 \quad \text{kada } \nu \to +\infty$$

Odavde neposredno slijedi tvrdjenje teoreme.

Primijetimo da je za realizaciju metoda neophodno znati ocjenu za Lipšicivu konstantu $C_0$ gradijenta funkcionala $\widetilde{N}_1(u)$. Za to je dovoljno znati ocjene Lipšicovih konstanti za $J'(u)$ i $P'(u)$ i izabrati nizove $\{\alpha_\nu\}$ i $\{\gamma_\nu\}$. Ovi nizovi, kao i nizovi $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\eta_\nu\}$ i $\{\xi_\nu\}$ se mogu izabrati na sličan način kao u teoremi 2.2.4.

Razmotrimo izbor niza $\{\beta_\nu\}$ saglasno formulama (2.52) U sledećoj teoremi se formulišu dovoljni uslovi za konvergenciju niza $\{v_\nu\}$ odredjenog relacijama (2.18), (2.19) i (2.48) ka normalnom rešenju $u_*$.

T e o r e m a 2.2.7. Neka su ispunjeni uslovi 1), 2), 3) teoreme 2.2.4, uslovi (2.50), (2.51), (2.53) i

$$\chi_\nu - 2\xi_\nu(1+\gamma_\nu) \geqslant 0 \tag{2.59}$$

$$\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + \eta_\nu + \chi_\nu + \varepsilon_\nu \leqslant c_2' \nu^{-2\varsigma}, \quad 0 < \varsigma < 1, c_2' = \text{const} \geqslant 0 \tag{2.60}$$

Tada je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \| v_\nu - u_* \| = 0$, gdje je niz $\{v\}$ odredjen formulama (2.18), (2.19), (2.48), (2.49) i

$$u_* \in U_* = \left\{ u \in U : J(u) = \inf_{u\in U} J(u) \right\}, \|u_*\| = \inf_{u\in U_*} \|u\| .$$

D o k a z. Primijetimo da relacije (2.29) - (2.37), (2.54) i (2.55) važe i u razmatranom slučaju. Dokažimo da niz $\{\beta_\nu\}$ definisan relacijom (2.48) postoji. Zaista, iz (2.55) slijedi da relacija

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_\nu + \beta(\bar{v}_\nu - v_\nu)) \geqslant \beta \cdot \varepsilon \langle N_\nu'(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle - \beta \chi_\nu \| v_\nu - \bar{v}_\nu \|$$

kada je

$$\varepsilon \langle N_\nu'(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle > \chi_\nu \| v_\nu - \bar{v}_\nu \| ,$$

važi za svako $\beta$ za koje je

$$0 < \beta < \frac{2(1-\varepsilon)\langle N_\nu'(v_\nu), v_\nu - \bar{v}_\nu \rangle + 2(\chi_\nu - 2(1+\gamma_\nu)\xi_\nu \| v_\nu - \bar{v}_\nu \|}{c_0 \| v_\nu - \bar{v}_\nu \|^2} =$$

Odavde je jasno da je nejednakost (2.49) zadovoljena bar za one

$i_o$ za koje je $0 < 2^{-i_o} \leq \overline{\beta}_\nu$. S obzirom na uslov (2.59), to znači da postoji najmanji indeks $i_o$ za koji važi nejednakost (2.49).

Razmotrimo razne mogućnosti koje se javljaju prilikom odredjivanja $\beta_\nu$ po formulama (2.48)

a) za

$$\varepsilon \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle \leq \chi_\nu \| v_\nu - \overline{v}_\nu \| \leq \chi_\nu \cdot d, \beta_\nu = 0, \quad v_{\nu+1} = v_\nu ,$$

iz (2.35), (2.54) i (2.59) slijedi da je

$$a_\nu \leq \varepsilon_\nu + c_{19}\chi_\nu , \quad a_{\nu+1} \leq a_\nu + 2c_3\eta_\nu + 2c_6(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1});$$

b) za $i_o = 0, \beta_\nu = 1$, iz (2.49), (2.35), (2.54) i (2.59) slijedi

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_{\nu+1}) \geq \varepsilon a_\nu - c_{11}\xi_\nu - \varepsilon_\nu - d\chi_\nu ,$$

$$a_{\nu+1} \leq (1-\varepsilon)a_\nu + 2c_3\eta_\nu + 2c_6(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}) + \varepsilon_\nu + c_{11}\xi_\nu + d\chi_\nu \leq$$

$$\leq (1-\varepsilon)a_\nu + c_{20}(\eta_\nu + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + \varepsilon_\nu + \chi), \ \nu = 1,2,\ldots;$$

c) ako je $i_o > 0, \beta_\nu = 2^{-i_o}$, a $i_o$-prvi indeks $i_o = 0,1,2,\ldots$, za koji je u procesu dijeljenja sa dva ispunjen uslov (2.49), tada je

$$\beta_\nu \geq \frac{(1-\varepsilon)\langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle + (\chi_\nu - 2(1+\gamma_\nu)\xi_\nu \ \| v_\nu - \overline{v}_\nu \|}{c_o \| v_\nu - \overline{v}_\nu \|^2} \geq$$

$$\geq \frac{(1-\varepsilon)}{d^2 c_o} \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle , \quad \nu = 1,2,\ldots .$$

Odavde i iz relacije (2.48) imamo da je

$$N_\nu(v_\nu) - N_\nu(v_{\nu+1}) \geq \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{d^2 c_o} \langle N'_\nu(v_\nu), v_\nu - \overline{v}_\nu \rangle - d\cdot\chi_\nu .$$

Iz a), b) i c), rasudjujući analogno kao u dokazu teoreme 2.2.6. dobijamo da za svaki prirodan broj $\nu$ važi bar jedna od relacija (2.57) i (2.58), a odatle slijedi i tvrdjenje teoreme.

Primijetimo da za realizaciju ove varijante metode uslovnog gradijenta ne treba znati ocjene Lipšicovih konstanti za gradijente funkcionala $J(u)$ i $P(u)$, ali zato na svakom koraku pri odredjivanju $\beta_\nu$ treba vršiti dijeljenje sa dva i provjeravati da li je ispunjen uslov (2.49).

## 2.3. Iterativna regularizacija Njutnovog metoda minimizacije

Neka su na Hilbertovom prostoru H definisani funkcionali $J(u)$, $g_1(u)g_2(u)\ldots g_s(u)$. Razmotrimo zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu

$$U = \left\{ u\in H; g_i(u) \leqslant 0,\ i=\overline{1,r};\ g_i(u)=0,\ i=\overline{r+1,s} \right\} \tag{3.1}$$

Pretpostavimo da je

$$J_* = \inf_{u\in U} J(u) > -\infty;\ U_* = \left\{ u\in U;\ J(u) = J_* \right\} \neq \emptyset \tag{3.2}$$

Razmatrani zadatak je u opštem slučaju nekorektan u metrici prostora H i za njegovo rešavanje je neophodno koristiti metod regularizacije. Ograničenja tipa $g_i(u)=0$ i $g_i(u) \leqslant 0$ učitavaćemo pomoću penalnih funkcionala oblika

$$P(u) = \sum_{i=1}^{r} \left(\max\left\{0;\ g_i(u)\right\}\right)^p + \sum_{i=r+1}^{s} |g_i(u)|^p, u\in H, p>2. \tag{3.3}$$

Sastavimo funkcional Tihonova:

$$T_\nu(u) = J(u) + A_\nu P(u) + \alpha_\nu \|u\|^2, \alpha_\nu > 0,\ A_\nu > 0,\ \nu = 0,1,2,\ldots, u\in H.$$

Neka funkcionali $J(u)$, $g_1(u)$, $g_2(u)$,...$g_s(u)$ pripadaju klasi $C^2(H)$. Tada i funkcionali $T_\nu(u)$, $\nu=0,1,2,\ldots$, pripadaju klasi $C^2(H)$. Pretpostavimo da postoje inverzni operatori $\left[T_\nu''(u)\right]^{-1}$ operatora $T_\nu''(u)$ za svako $u\in H$ i $\nu=0,1,2,\ldots$. Razmotrimo iterativni proces

$$v_{\nu+1} = v_\nu - \left[T_\nu''(v_\nu)\right]^{-1} T_\nu'(v_\nu), \quad \nu = 0,1,2,\ldots \tag{3.4}$$

sa nekom početnom aproksimacijom $v_0 \in H$, koji predstavlja iterativnu regularizaciju Njutnovog metoda minimizacije.

U sledećoj teoremi se formulišu dovoljni uslovi za konvergenciju niza $\{v_\nu\}$ ka normalnom rešenju zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$.

T e o r e m a 2.3.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1) funkcionali $J(u)$, $g_1(u)$, $g_2(u)$,..., $g_s(u)$ pripadaju klasi $C^2(H)$ i

$$\max\left\{\|J''(u)-J''(v)\| ;\ \|P''(u)-P''(v)\|\right\} \leqslant L\|u-v\|,\ u,v\in H, L=\text{const}\geqslant 0, \tag{3.5}$$

$$\|P'(u)\| \leqslant L_0(1+\|u\|),\ L_0=\text{const}\geqslant 0,\ u\in H; \tag{3.6}$$

funkcionali $J(u)$, $g_1(u), g_2(u),\ldots,g_r(u)$, $|g_{r+1}(u)|,\ldots,|g_s(u)|$ su konveksni na prostoru $H$;

2) funkcional Lagranža $\mathcal{L}(u,\lambda)=J(u)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i g_i(u)$ ima sedlastu tačku $(v_*,\lambda^*)$ na mnoštvu $H\times\Lambda_0$, $\Lambda_0=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_s):\lambda_1\geqslant 0,\ \lambda_2\geqslant 0,\ldots,\lambda_r\geqslant 0\}$ u smislu sledeće relacije

$$\mathcal{L}(v_*,\lambda)\leqslant\mathcal{L}(v_*,\lambda^*)\leqslant\mathcal{L}(u,\lambda^*) \quad \text{za svako } u\in H,\ \lambda\in\Lambda_0;$$

3) poznata je ocjena $\|u_*\|\leqslant d$ za normalno rešenje zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$;

4) nizovi realnih brojeva $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$ zadovoljavaju uslove

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = 0,\ \lim_{\nu\to\infty} A_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu\cdot A^{q-1} = +\infty\ ,$$

$$1 \leq \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} \leq m,\ 1 \leq \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} \leq b,\ 1 \leq A_\nu\ ,\ \frac{L_0(A_{\nu+1}-A_\nu)}{2\alpha_{\nu+1}} \leq 1,$$

$$\frac{(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})A_{\nu+1}}{\alpha^2_{\nu+1}} \leq \frac{1}{6RLt}\ ;\ \frac{(A_{\nu+1}-A_\nu)A_{\nu+1}}{\alpha^2_{\nu+1}} \leq \frac{1}{3L_0Lt(1+R)}$$

gdje je

$$R=(d^2+|\lambda^*|^q q^{-1}p^{1-q}\sup_{\nu\geqslant 0}\alpha_\nu^{-1}A_\nu^{1-q})^{1/2},\ |\lambda^*|^q=\sum_{i=1}^{s}|\lambda_i^*|^q,\ p+q = pq,$$

$$m\geqslant 1,\ b\geqslant 1,\ 1>0,\ t>0,\ 3mb(2m-1+1)\leq 2t;$$

5) početna aproksimacija $v_0$ za niz $\{v_\nu\}$ definisan formulama (3.4) zadovoljava uslov

$$A_0Lt\,\|T_0'(v_0)\| \leq \alpha_0^2 \tag{3.7}$$

D o k a z. Iz uslova 2) teoreme slijedi da važe relacije (3.2). Dalje, iz konveksnosti funkcionala $J(u), g_1(u), g_2(u), \ldots, |g_{r+1}(u)|, \ldots, |g_s(u)|$ slijedi da je

$$\langle T_\nu''(u)\xi,\xi\rangle \geqslant 2\alpha_\nu\,\|\xi\|^2 \text{ za sve } u\in H,\ \xi\in H,\ \nu= 0,1,2,\ldots$$

Odatle slijedi da postoji inverzni operator $[T_\nu''(u)]^{-1}$ operatora $T_\nu''(u)$, $\nu= 0,1,2,\ldots$, pri čemu je

$$\|T_\nu''(u)\| \leq \frac{1}{2\alpha_\nu},\ u\in H,\quad \nu= 0,1,2,\ldots \tag{3.8}$$

Istovremeno s nizom $\{v_\nu\}$ posmatrajmo niz $\{u_\nu\}$ koji se jednoznačno odredjuje iz uslova:

$$T_\nu(u_\nu)= \inf_{u\in H} T_\nu(u)$$

Iz teoreme 1.2.2. slijedi da je $\lim_{\nu\to\infty}\|u_\nu-u_*\| = 0$ pa je dovoljno dokazati da je $\lim_{\nu\to\infty}\|u_\nu- v_\nu\| = 0$.

Uvedimo brojni niz $a_\nu = \|T'_\nu(v_\nu)\|$. Tada je

$$a_{\nu+1} = \|T'_{\nu+1}(v_{\nu+1})\| \leqslant \|T'_\nu(v_{\nu+1})\| + \|T'_{\nu+1}(v_{\nu+1}) - T'_\nu(v_{\nu+1})\| \leqslant$$

$$\leqslant \|T'_\nu(v_{\nu+1})\| + 2(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})\|v_{\nu+1}\| + (A_{\nu+1}-A_\nu)\|P'(v_{\nu+1})\|. \tag{3.9}$$

Dokažimo da je

$$\|u_\nu\| \leqslant R, \quad \nu = 0,1,2,\dots \tag{3.10}$$

Koristeći nejednakost

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad p+q=pq,$$

i uslov 2) teoreme dobijamo da je za svako $u \in H$

$$J_* \leqslant \mathcal{L}(u,\lambda^*) = J(u) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i^*}{\sqrt[p]{pA_\nu}}\, g_i^+(u)\sqrt[p]{pA_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant J(u) + A_\nu \cdot P(u) + \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i^*|^q q^{-1} p^{1-q} \cdot A_\nu^{1-q} =$$

$$= T_\nu(u) + \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i^*|^q q^{-1} p^{1-q} \cdot A_\nu^{1-q} - \alpha_\nu \|u\|^2, \quad \nu=0,1,2,\dots \tag{3.11}$$

Za $u = u_\nu$, iz relacije (3.11) dobijamo

$$J_* \leqslant T_\nu(u_\nu) + \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i^*|^q \cdot q^{-1} p^{1-q} A_\nu^{1-q} - \alpha_\nu \|u_\nu\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant T_\nu(u_*) + \sum |\lambda_i^*|^q \cdot q^{-1} p^{1-q} A_\nu^{1-q} - \alpha_\nu \|u_\nu\|^2.$$

Odatle, s obzirom da je $P(u_*)=0$, dobijamo ocjenu (3.10).

Iz jake konveksnosti funkcionala $T_\nu(u)$ i s obzirom na ocjenu (3.10) imamo:

$$\|v_{\nu+1}\| \leqslant \|u_\nu\| + \|v_{\nu+1} - u_\nu\| \leqslant R + \frac{1}{2\alpha_\nu} \cdot \|T'_\nu(v_{\nu+1})\| \tag{3.12}$$

Kombinujući relacije (3.9) i (3.12) i uslov (3.6) dobijamo:

$$a_{\nu+1} \leqslant \left(\frac{2\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} + L_0 \frac{A_{\nu+1}-A_\nu}{2\alpha_\nu}\right)\|T'_\nu(v_{\nu+1})\| + 2R(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) + L_0(1+R)(A_{\nu+1}-A_\nu) \tag{3.13}$$

Jednostavno se pokazuje da važi relacija

$$T_\nu'(v_{\nu+1})=\left[T_\nu''(v_\nu)-T_\nu''(v_\nu+Q\,(v_{\nu+1}-v_\nu))\right]\cdot\left[T_\nu''(v_\nu)\right]^{-1}T_\nu'\,(v_\nu),0\leq\Theta_\nu\leq 1.$$

Odatle, iz relacije (3.4), uslova (3.5) i ocjene (3.8) dobijamo da je

$$\left\| T_\nu'(v_{\nu+1})\right\| \leq \frac{LA_\nu}{2\alpha_\nu^2}\,a_\nu^2\ , \quad \nu=0,1,2,\ldots \tag{3.14}$$

Dalje, iz uslova 4) teoreme imamo da je

$$2\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}+\frac{L_0(A_{\nu+1}-A_\nu)}{2}\leq(2m-1+1)\alpha_{\nu+1} \tag{3.15}$$

Kombinujući relacije (3.13) - (3.15) dobijamo

$$a_{\nu+1}\leq\frac{(2m-1+1)LA_\nu\,\alpha_{\nu+1}a^2}{2\alpha_\nu^3}+2R(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})+L_0(1+R)(A_{\nu+1}-A_\nu),\ \nu=0,1,2,\ldots$$

Uvodeći smjenu $a_\nu=c\cdot\alpha_\nu$, za niz $c_\nu$ dobijamo sledeću rekurentnu nejednakost:

$$c_{\nu+1}\leq(\frac{2m-1+1)LA_\nu}{2\alpha_\nu}c_\nu^2+2R\,\frac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}}+L_0(1+R)(A_{\nu+1}-A_\nu),\ \nu=0,1,2,\ldots$$

Dokažimo metodom indukcije da je:

$$c_\nu\leq\frac{\alpha_\nu}{A_\nu\,Lt}\ ,\quad \nu=0,1,\ldots \tag{3.16}$$

Za $\nu=0$ tačnost relacije (3.16) slijedi iz uslova (3.7). Neka je relacija (3.16) tačna za neko $\nu\geqslant 0$. Tada iz uslova 4) teoreme slijedi da je

$$c_{\nu+1}\leq\frac{(2m-1+1)}{2Lt^2}\cdot\frac{\alpha_\nu}{A_\nu}+2R\,\frac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}}+L_0(1+R)(A_{\nu+1}-A_\nu)$$

$$\leq\frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1}Lt}\left(\frac{(2m-1+1)mb}{2t}+\frac{2}{3}\right)\leq\frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1}Lt}\ .$$

Nejednakost (3.16) je dokazana. Iz jake konveksnosti funkcionala $T_\nu(u)$ slijedi da je $\| v_\nu - u_\nu \| \leqslant \frac{1}{2} c_\nu \to 0$ kada $\nu \to +\infty$, što je i trebalo dokazati.

Razmotrimo uslov (3.7). Na prvi pogled, taj uslov predstavlja ograničenje za izbor početne aproksimacije $v_0$. Naime, poslije izbora nizova $\{\alpha_\nu\}$ i $\{A_\nu\}$ saglasno uslovima 4) teoreme, tačku $v_0$ treba birati tako da bude ispunjen uslov (3.7) tj. da tačka $v_0$ bude "blizu" tačke minimuma funkcionala $T_0(u)$. Time se značajno sužavaju mogućnosti metoda. Ipak, pri proizvoljnom izboru početne aproksimacije $v_0$, uslov (3.7) će biti zadovoljen ako pogodno odaberemo nizove $\{\alpha_\nu\}$ i $\{A_\nu\}$. Na taj način, uslov (3.7) možemo smatrati ograničenjem za izbor nizova $\{\alpha_\nu\}$ i $\{A_\nu\}$, što je znatno pogodnije za praktičnu realizaciju metoda. Na primjer, saglasno uslovima 4) i(3.7) možemo uzeti da je

$$\alpha_\nu = B(\nu+1)^{-1/6},\ A_\nu = (\nu+1)^{1/3},\ \nu = 0,1,2,\dots,$$

$$B \geqslant \max\left\{ \frac{L_0}{21};\ 3\sqrt{2}\,Ltd;\ \sqrt[3]{18L^2t^2|\lambda^*|^q\ q^{-1}p^{1-q}};\ \sqrt{6L_0Lt(1+d)};\right.$$

$$\left.\sqrt[5]{36L_0^2L^2t^2\,|\lambda^*|^q\ q^{-1}p^{1-q}};\ \ 4tL\|v_0\|;\ \sqrt{2tL\,\|J'(v_0)+P'(v_0)\|}\right\},$$ gdje je $v_0$ proizvoljna početna aproksimacija, $q > \frac{3}{2}$, $m > 2^{1/6}$, $b > 2^{1/3}$.

Na taj način, predloženi metod proširuje mogućnosti Njutnovog metoda minimizacije, pa može biti iskorišćen i za rešavanje korektnih zadataka minimizacije, (na primjer, za rešavanje zadataka minimizacije jako konveksnih funkcionala na konveksnom mnoštvu).

Specijalno, za rešavanje zadataka minimizacije funkcionala J(u) na prostoru H se može koristiti proces (3.4) gdje je

$$T_\nu(u) = J(u)+\alpha_\nu\|u\|^2, \alpha_\nu>0, \nu=0,1,2,\ldots . \quad (3.17)$$

Tada važi teorema:

T e o r e m a 2.3.2. Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) funkcional J(u) je konveksan na prostoru H, pripada klasi $C^2(H)$ i

$$\|J''(u)-J''(v)\| \leq L\,\|u-v\| \quad ,u,v\in H, L=\text{const} \geqslant 0;$$

2) $J_* = \inf_{u\in H} J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in H : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$;

3) unaprijed je poznata ocjena $\|u_*\| \leq d$ za normalno rešenje zadatka minimizacije funkcionala J(u) na prostoru H.

4) niz $\{\alpha_\nu\}$ zadovoljava uslove

$$\alpha_\nu>0, \quad \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=0, \quad 1\leq\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}\leq\min\left\{m;1+\frac{1-\gamma}{2dtL}\alpha_{\nu+1}\right\},$$

gdje pozitivne konstante t, $m \geqslant 1, 0<\gamma<1$ zadovoljavaju nejednakost $(2m-1)m \leq 4\gamma t$;

5) početna aproksimacija $v_0$ za niz $\{v_\nu\}$ definisan formulama (3.4) sa funkcionalom (3.17) zadovoljava uslov

$$Lt\,\|T_0'(v_0)\|^2 \leq \alpha_0^2.$$

Tada je $\lim_{\nu\to\infty}\|v_\nu - u_*\| = 0$.

Dokaz teoreme 2.3.2. se dobija iz dokaza teoreme 2.3.1, ako u poslednjem postavimo $P(u)\equiv 0, A_\nu=1, u\in H, \nu=0,1,2,\ldots$ i izvršimo neznatne i očigledne izmjene. Za niz $\{\alpha_\nu\}$ možemo na primjer, uzeti $\alpha_\nu = B(\nu+1)^{-1}$, $\nu = 0,1,\ldots, B \geq \max\left\{\frac{2Ltd}{1-\gamma};\ 4Lt\|v_0\|;\ \sqrt{2Lt\|J'(v_0)\|}\right\}$, gdje je $v_0$ proizvoljna početna aproksimacija, a $m \geq \sqrt{2}$.

Primijetimo da ostaje otvoreno pitanje da li se iterativnom regularizacijom uprošćenog (modifikovanog) Njutnovog metoda minimizacije (v. [A 16], str.670) može postići da se početna aproksimacija $v_0$ bira proizvoljno.

Razmotrimo iterativnu regularizaciju Njutnovog metoda minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu (0.1), kada funkcionali $J(u), g_i(u), i=\overline{1,s}$ pripadaju klasi $C^2(U_0)$. Neka je

$$J_\nu(u) \approx J(u),\ g_{i\nu}(u) \approx g_i(u),\ i = \overline{1,s}.$$

Sastavimo funkcionale Tihonova sa tačnim i približnim podacima

$$T_\nu(u) = J_\nu(u) + A_\nu P_\nu(u) + \alpha_\nu \| u \|^2$$

$$\tilde{T}_\nu(u) = J(u) + A_\nu P(u) + \alpha_\nu \|u\|^2,\ u \in U_0, \alpha_\nu > 0, A_\nu > 0, \nu = 0,1,\ldots .$$

Konstruišimo niz $\{v_\nu\}$ po pravilima: $v_0$ je proizvoljna tačka iz mnoštva $U_0$; ako je poznata $\nu$-ta aproksimacija $v_\nu \in U_0$, tada se $v_{\nu+1}$ odredjuje iz uslova

$$v_{\nu+1} \in U_0,\ \Phi_\nu(v_{\nu+1}) = \inf_{u \in U_0} \Phi_\nu(u) + \varepsilon,\ \varepsilon_\nu \geq 0 \qquad (3.18)$$

gdje je

$$\Phi_\nu(u) = \langle T'_\nu(v_\nu), u - v_\nu \rangle + \frac{1}{2} \langle T''_\nu(v_\nu)(u - v_\nu), u - v_\nu \rangle, u \in U_0, \nu = 0,1,\ldots .$$

Pretpostavimo da je $\Phi_{\nu *} = \inf_{u \in U_0} \Phi_\nu(u) > -\infty$, tako da $v_{\nu+1}$ iz relacije (3.18) postoji.

Istovremeno sa nizom $\{v_\nu\}$ posmatraćemo nizove $\{u_\nu\}$ i $\{w_\nu\}$ koji se jednoznačno odredjuju iz sljedećih uslova:

$$u_\nu \in U_0; \quad T_\nu(u_\nu) = \inf_{u\in U_0} T_\nu(u);$$

$$w_{\nu+1} \in U_0; \quad F_\nu(w_{\nu+1}) = \inf_{u\in U_0} F_\nu(u) = F_{\nu*}, \ \nu = 0,1,2,\dots ,$$

gdje je

$$w_0 = v_0, \ F_\nu(u) = \langle \tilde{T}'_\nu(v_\nu), u - v_\nu \rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{T}''_\nu(v_\nu)(u-v_\nu), u - v_\nu \rangle .$$

Funkcional $F_\nu(u)$ je jako konveksan, pa je niz tačaka $\{w_\nu\}$ jednoznačno odredjen.

T e o r e m a 2.3.3. Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) mnoštvo $U_0 \subseteq H$ je konveksno, zatvoreno i $\mathrm{int}U \neq \emptyset$; funkcionali $J(u), g_1(u),\dots,g_s(u)$ pripadaju klasi $C^2(U_0)$,; funkcionali $J(u), g_1(u),\dots g_r(u)$, $|g_{r+1}(u)|,\dots,|g_s(u)|$ su konveksni na mnoštvu $U_0$;

2) poznata je ocjena $\|u_*\| \leq d$ za normalno rešenje zadatka minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U_0$;

3) funkcional Lagranža $\mathcal{L}(u,\lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \, g_i(u)$ ima sedlastu tačku na mnoštvu $U_0 \times \Lambda_0$, $\Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) : \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_r \geqslant 0\}$;

4) $\max\{\|J''(u) - J''(v)\| \ ; \ \|P''(u) - P''(v)\|\} \leq L\|u-v\|, u,v \in U_0,$

$$\|P'(u)\| \leq \mathcal{F}(\|u\|), \ L = \mathrm{const} \geqslant 0,$$

gdje je $\mathcal{F}(\cdot)$ proizvoljna nenegativna neopadajuća funkcija;

5) funkcionali $J_\nu(u), g_{i\nu}(u), i = \overline{1,s}, \nu = 0,1,2,\dots$ pripadaju klasi $C^2(U_0)$ i

$$|F_\nu(u) - \Phi_\nu(u)| \leq \delta_\nu, u \in U_0, \ \nu = 0,1,\dots;$$

6) nizovi $\{\alpha_\nu\}$, $\{A_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$, zadovoljavaju uslove

$$\alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1} > 0,\ 1 \leq A_\nu \leq A_{\nu+1},\ \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = \lim_{\nu\to\infty} A_\nu^{-1} = \lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu = 0,\ \lim \alpha_\nu A_\nu^{q-1} = +\infty$$

$$\frac{\alpha_\nu}{A_\nu} \leq m\,\frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1}},\quad \frac{(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})R}{\alpha_\nu} + \frac{A_{\nu+1} - A_\nu}{2\,\alpha_\nu}\,\widetilde{\mathcal{F}}(2R) \leq \frac{1}{8mL}\cdot\frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1}},$$

$$\frac{2(\alpha_\nu + \varepsilon_\nu)}{\alpha_\nu} \leq \frac{1}{64m^2L^2}\ \frac{\alpha_{\nu+1}}{A^2_{\nu+1}},$$

gdje je

$$m \geq 1,\ R = (d^2 + |\lambda^*|^q q^{-1} p^{1-q} \sup_{\nu\geq 0} \alpha_\nu^{-1} A_\nu^{1-q})^{1/2},\ |\lambda^*|^q = \sum_{i=1}^{\nu} |\lambda_i^*|^q,\ p+q=pq.$$

Tada je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \|v_\nu - u_*\| = 0.$

D o k a z. Primijetimo da iz uslova teoreme slijedi da je uslov (3.2) ispunjen. Dalje, iz teoreme 1.2.2. slijedi da $\|u_\nu - u_*\| \to 0$ kada $\nu \to \infty$ i dovoljno je dokazati da $b_\nu = \|v_\nu - u_\nu\| \to 0$, kada $\nu \to \infty$. Imamo da je

$$b_{\nu+1} = \|v_{\nu+1} - u_{\nu+1}\| \leq \|v_{\nu+1} - w_{\nu+1}\| + \|w_{\nu+1} - u_\nu\| + \|u_{\nu+1} - u_\nu\|. \quad (3.19)$$

Ocijenimo sa gornje strane $\|u_{\nu+1} - u_\nu\|$. Kako je $u_\nu$ tačka minimuma funkcionala $\widetilde{T}_\nu(u)$, a $u_{\nu+1}$ tačka minimuma funkcionala $\widetilde{T}_{\nu+1}(u)$, to je

$$\langle \widetilde{T}'_{\nu+1}(u_\nu), u - u_\nu \rangle \geq 0 \text{ za svako } u \in U_0, \quad (3.20)$$

$$\langle \widetilde{T}'_{\nu+1}(u_{\nu+1}), u - u_{\nu+1} \rangle \geq 0 \text{ za svako } u \in U_0. \quad (3.21)$$

Iz jake konveksnosti funkcionala $T_\nu(u)$, s obzirom na relacije (3.20) za $u = u_{\nu+1}$ i (3.21) za $u = u_\nu$ i $\|u_\nu\| \leq R, \nu = 0, 1, \ldots,$ važe sljedeće nejednakosti:

$$2\alpha_\nu \|u_{\nu+1}-u\|^2 \leqslant \langle \widetilde{T}'_\nu (u_{\nu+1})-\widetilde{T}'_\nu (u_\nu), u_{\nu+1}-u \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle \widetilde{T}'_\nu (u_{\nu+1}), u_{\nu+1}-u_\nu \rangle \leqslant \langle \widetilde{T}'_\nu (u_{\nu+1})-\widetilde{T}'_{\nu+1}(u_{\nu+1}), u_{\nu+1}-u_\nu \rangle =$$

$$= \langle J'(u_{\nu+1})+A_\nu P'(u_{\nu+1})+2\alpha_\nu u_{\nu+1}-J'(u_{\nu+1})-A_{\nu+1}P'(u_{\nu+1})-$$

$$-2\alpha_{\nu+1}u_{\nu+1}, u_{\nu+1}-u_\nu\rangle = 2(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})\langle u_{\nu+1}, u_{\nu+1}-u_\nu \rangle +$$

$$+ (A_\nu-A_{\nu+1})\langle P'(u_{\nu+1}, u_{\nu+1}-u_\nu\rangle \leqslant 2(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})\cdot\|u_{\nu+1}-u_\nu\|\cdot R +$$

$$+ (A_{\nu+1}-A_\nu)\|u_{\nu+1}-u_\nu\|\cdot\mathcal{F}(R),$$

odnosno

$$\|u_{\nu+1}-u_\nu\| \leqslant \frac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} R + \frac{A_{\nu+1}-A_\nu}{2\alpha_\nu}\mathcal{F}(R). \tag{3.22}$$

Ocijenimo prvi sabirak na desnoj strani relacije (3.19). Iz jake konveksnosti funkcionala $F_\nu(u)$ i uslova (3.18.) slijedi da je

$$\|v_{\nu+1}-w_{\nu+1}\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_\nu}\cdot(F_\nu(v_{\nu+1})-F_\nu(w_{\nu+1})) \leqslant \frac{1}{\alpha_\nu}(\Phi_\nu(v_{\nu+1}) +$$

$$+\delta_\nu-F_\nu(w_{\nu+1})) \leqslant \frac{1}{\alpha_\nu}(\Phi_\nu(w_{\nu+1})+\mathcal{E}_\nu+\delta_\nu-F_\nu(w_{\nu+1})) \leqslant \frac{1}{\alpha_\nu}(2\delta_\nu+\mathcal{E}_\nu),$$

odnosno

$$\|v_{\nu+1} - w_{\nu+1}\| \leqslant \sqrt{\frac{2\delta_\nu+\mathcal{E}_\nu}{\alpha_\nu}} . \tag{3.23.}$$

Ocijenimo još i $\|w_{\nu+1}-u_\nu\|$ - drugi sabirak sa desne strane relacije (3.19). Zbog jake konveksnosti funkcionala $F_\nu(u)$ i s obzirom na uslove 4) i 5) teoreme, imamo:

$$2\alpha_\nu\|w_{\nu+1}-u_\nu\|^2 \leqslant \langle F'_\nu(w_{\nu+1})-F'_\nu(u_\nu), w_{\nu+1}-u_\nu\rangle \leqslant \langle F'_\nu(u_\nu), u_\nu-w_{\nu+1}\rangle \leqslant$$

$$\leqslant\langle F'_\nu(u_\nu), u_\nu-w_{\nu+1}\rangle + \langle \widetilde{T}'_\nu(u_\nu), w_{\nu+1}-u_\nu\rangle =$$

$$= \langle J'(v_\nu)-J'(u_\nu)+J''(v_\nu)(u_\nu-v_\nu), u_\nu-w_{\nu+1}\rangle +$$

$$+ A_\nu \langle P'(v_\nu) - P'(u_\nu) + P''(v_\nu)(u_\nu - v_\nu),\ u_\nu - w_{\nu+1} \rangle =$$

$$= \langle [J''(v_\nu + \theta_\nu(u_\nu - v_\nu)) - J''(v_\nu)]\,(u_\nu - v_\nu),\ w_{\nu+1} - u_\nu \rangle +$$

$$+ A_\nu \langle [P''(v_\nu + \theta_\nu^1 (u_\nu - v_\nu)) - P''(v_\nu)]\,(u_\nu - v_\nu), w_{\nu+1} - u_\nu \rangle$$

$$L\,\theta_\nu \|u_\nu - v_\nu\|^2 \cdot \|w_{\nu+1} - u_\nu\| + A_\nu L\, \theta_\nu^1 \|u_\nu - v_\nu\|^2 \cdot \|w_{\nu+1} - u_\nu\|,$$

gdje je $0 \leqslant \theta_\nu \leqslant 1, 0 \leqslant \theta_\nu^1 \leqslant 1$. Na taj način dobijamo ocjenu

$$\|w_{\nu+1} - u_\nu\| \leqslant \frac{L(1+A_\nu)}{2\alpha_\nu}\, b_\nu^2 .$$

Kombinujući relacije (3.19) i (3.22) -(3.24) dobijamo

$$b_{\nu+1} \leqslant \frac{LA_\nu}{\alpha_\nu}\, b_\nu^2 + \sqrt{\frac{2\delta_\nu + \varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}} + \frac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} R + \frac{A_{\nu+1} - A_\nu}{2\alpha_\nu} \mathcal{F}(R). \quad (3.25)$$

Dokažimo indukcijom da je

$$b_\nu \leqslant \frac{1}{2mL} \frac{\alpha_\nu}{A_\nu} . \quad (3.26)$$

Za $\nu = 0$ relacija (3.26) slijedi iz uslova 7) teoreme. Neka je nejednakost (3.26) tačna za neko $\nu \geqslant 0$. Tada iz relacije (3.25) i s obzirom na uslove 6) teoreme imamo

$$b_{\nu+1} \leqslant \frac{\alpha_\nu}{A_\nu} \cdot \frac{1}{4m^2L} + \frac{1}{8mL} \frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} + \frac{1}{8mL} \frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} \leqslant \frac{1}{2mL} \frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} .$$

Time je relacija (3.26) dokazana. Odatle slijedi da $b_\nu \to 0$ kada $\nu \to +\infty$ što je i trebalo dokazati.

Primijetimo da se u teoremi 2.3.3. razmatra iterativna regularizacija Njutnovog metoda minimizacije kada mnoštvo $U_0$ nije obavezno jednako prostoru $H$ i kada se ne pretpostavlja da su svi funkcionali $J(u)$, $g_1(u), \ldots, g_s(u)$ tačno zadati. Ne vidi se da li se u tom slučaju pogodnim izborom nizova $\{\alpha_\nu\}$ i $\{A_\nu\}$ (čak i kada je $\delta_\nu = 0$, $\varepsilon_\nu = 0$, $\nu = 0,1\dots$) početna aproksimacija $v_o$ može birati proizvoljno.

Analogno kao u prethodnim metodima može se formulisati i dokazati teorema o iterativnoj regularizaciji Njutnovog metoda minimizacije kada je $U = U_o \subseteq H$.

## 2.4. Iterativna regularizacija jednog metoda minimizacije trećeg reda

Neka je funkcional $J(u)$ definisan na Hilbertovom prostoru $H$ i neka $J(u) \in C^2(H)$. Predpostavimo da za svako $u \in H$ postoji inverzni operator $[J''(u)]^{-1}$ operatora $J''(u)$. Posmatrajmo iteracioni proces

$$\bar{v}_\nu = v_\nu - [J''(v_\nu)]^{-1} J'(v_\nu),\ v_{\nu+1} = \bar{v}_\nu - [J''(v_\nu)]^{-1} J'(\bar{v}_\nu),\ \nu = 0,1,2,\dots, \quad (4.1)$$

sa početnom aproksimacijom $v_o \in H$. Kada je funkcional $J(u)$ jako konveksan i kada je početna aproksimacija $v_o$ "dovoljno blizu" jedinstvene tačke minimuma $u^*$ funkcionala $J(u)$ na prostoru $H$, tada niz $\{v_\nu\}$ konvergira ka tački $u_*$. Inače, metod (4.1), predstavlja jednu od modifikacija Njutnovog metoda minimizacije, ali je trećeg reda konvergencije.

Ako funkcional $J(u)$ nije jako konveksan, tada je razmatrani zadatak, u opštem slučaju nekorektan i neophodno je koristiti metode regularizacije. Mi ćemo razmatrati opštiji zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na mnoštvu (3.1). Tada se niz $\{v_\nu\}$ formira na sledeći način:

$$\bar{v}_\nu = v_\nu - \left[T''_\nu(v_\nu)\right]^{-1} T'_\nu(v_\nu), v_{\nu+1} = \bar{v}_\nu - \left[T''_\nu(v_\nu)\right]^{-1} T'_\nu(\bar{v}_\nu), \nu = 0,1,2,\ldots, \qquad (4.2)$$

sa početnim članom $v_0 \in H$. Funkcionali $T_\nu(u)$ su funkcionali Tihonova

$$T_\nu(u) = J(u) + A_\nu P(u) + \alpha_\nu \|u\|^2, \quad u \in H, \ \nu = 0,1,2\ldots \qquad (4.3)$$

sa penalnim funkcionalima (3.3). Pri tome se pretpostavlja da operatori $\left[T''_\nu(u)\right]^{-1}$ postoje za svako $u \in H$ i $\nu = 0,1,2,\ldots$ .

Dokazaćemo sljedeću teoremu:

T e o r e m a 2.4.1. Neka su ispunjeni uslovi 1),2) i 3) teoreme 2.3.1 i pored toga:

4) nizovi realnih brojeva $\{\alpha_\nu\}$ i $\{A_\nu\}$ zadovoljavaju uslove

$$\alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1} \geq 0, 1 \leq A_\nu \leq A_{\nu+1}, \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0, \ \lim_{\nu\to\infty} A_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu A^{q-1} = +\infty \qquad (4.3)$$

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} \leq \frac{5}{4}, \quad \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} \leq \frac{4}{3}, \quad \frac{L_0(A_{\nu+1} - A_\nu)}{\alpha_{\nu+1}} \leq 1, \qquad (4.4)$$

$$\frac{(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})A_{\nu+1}}{\alpha^2_{\nu+1}} \leq \frac{1}{6RLt}, \quad \frac{(A_{\nu+1} - A_\nu)A_{\nu+1}}{\alpha^2_{\nu+1}} \leq \frac{1}{3L_0 L(1+R)t}, \qquad (4.5)$$

gdje je $\nu = 0,1,2,\ldots$, $t > 0$, $5 + 10t \leq 4t^3$ (na primjer, $t=2$) i

$$R = \left(d^2 + \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i^*|^q q^{-1} p^{1-q} \sup_{\nu\geq 0} \alpha_\nu^{-1} A^{1-q}\right)^{1/2}, \quad p+q = pq; \qquad (4.6)$$

5) početna aproksimacija $v_0$ za niz $\{v_\nu\}$ definisan relacijama (4.2) zadovoljava uslov

$$A_0 Lt \cdot \| T'_0(v_0) \| \leq \alpha_0^2 \qquad (4.7)$$

Tada je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \| v_\nu - u_* \| = 0$.

D o k a z. Iz uslova teoreme slijedi da je $J_* = \inf\limits_{u\in U} J(u) > -\infty$ i $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ . Dalje je, kao i u prethodnim teoremama, dovoljno pokazati da je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \| v_\nu - u_\nu \| = 0$. gdje je niz $\{u_\nu\}$

jednoznačno odredjen uslovima

$$u_\nu \in H,\ T_\nu(u_\nu) = \inf_{u\in H} T_\nu(u),\quad \nu = 0,1,2... \tag{4.8}$$

Uvedimo u razmatranje niz realnih brojeva $\{a_\nu\}$: $a_\nu = \|T'_\nu(v_\nu)\|$. Tada relacije (3.8)-(3.13) važe i u razmatranom slučaju. Dalje, iz relacija (4.2) i s obzirom na ocjene (3.8) imamo da je

$$\|v_\nu - \bar{v}_\nu\| \leq \frac{a_\nu}{2\alpha_\nu};\ \|v_{\nu+1} - v_\nu\| \leq \frac{1}{2\alpha_\nu}\|T'_\nu(\bar{v}_\nu)\|,\ \nu = 0,1,2,.... \tag{4.9}$$

Jednostavno se pokazuje da je

$$T'_\nu(\bar{v}_\nu) = \left[T''_\nu(v_\nu) - T''_\nu(v_\nu + \theta_\nu(\bar{v}_\nu - v_\nu))\right]\left[T''_\nu(v_\nu)\right]^{-1} T'_\nu(v_\nu),\ 0\leq\theta_\nu\leq 1,\ \nu=0,1,. \tag{4.10}$$

i

$$T'_\nu(v_{\nu+1}) = \left[T''_\nu(\bar{v}_\nu) - T''_\nu(\bar{v}_\nu + \theta^1_\nu(v_{\nu+1} - \bar{v}_\nu))\right]\left[T''_\nu(v_\nu)\right]^{-1} T'_\nu(\bar{v}_\nu),\ 0\leq\theta^1_\nu\leq 1,\ \nu=0,1,... \tag{4.11}$$

Iz Lipšicovog uslova za operatore J"(u) u P"(u) i kako je $A_\nu \geq 1$, $\nu = 0,1,2,...,$

slijedi da je

$$\|T''_\nu(u) - T''_\nu(v)\| \leq 2LA_\nu \|u - v\|,\quad u,v \in H,\ \nu = 0,1,2,... \tag{4.12}$$

Koristeći nejednakosti (4.12) i ocjene (3.8) i (4.9), iz (4.10) i (4.11) dobijamo

$$\|T'_\nu(\bar{v}_\nu)\| \leq \frac{LA_\nu}{2\alpha_\nu^2} a_\nu^2$$

i

$$\|T'_\nu(v_{\nu+1})\| \leq \frac{LA_\nu}{\alpha_\nu}(\|v_\nu - \bar{v}_\nu\| + \|v_{\nu+1} - v_\nu\|)\ \|T'_\nu(\bar{v}_\nu)\| \leq$$

$$\leq \frac{L^2A_\nu^2}{2\alpha_\nu^3}\left(\frac{a_\nu}{2\alpha_\nu} + \frac{LA_\nu}{4\alpha_\nu^3} a_\nu^2\right) a_\nu^2,\quad \nu = 0,1,2,... \tag{4.13}$$

Kombinujući relacije (3.13) i (4.13) i s obzirom na uslove (4.4) dobijamo sledeću rekurentnu nejednakost

$$a_{\nu+1} \leq \frac{L^3 A_\nu^3 \alpha_{\nu+1}}{4\alpha_\nu^7} a_\nu^4 + \frac{L^2 A_\nu^2 \alpha_{\nu+1}}{2\alpha_\nu^5} a_\nu^3 + 2R(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) +$$

$$+ L_0(1+R)(A_{\nu+1} - A_\nu), \quad \nu = 0,1,2,\dots \quad (4.14)$$

Uvodeći smjenu $a_\nu = c_\nu \alpha_\nu$ i koristeći uslove (4.5), za niz $\{c_\nu\}$ imamo

$$c_{\nu+1} \leqslant \frac{L^3 A_\nu^3}{4\alpha_\nu^3} c_\nu^4 + \frac{L^2 A_\nu^2}{2\alpha_\nu^2} c_\nu^3 + \frac{2\alpha_{\nu+1}}{3LtA_{\nu+1}} \quad (4.15)$$

Dokažimo indukcijom da je

$$c_\nu \leqslant \frac{\alpha_\nu}{A_\nu Lt}, \quad \nu = 0,1,2,\dots \quad (4.16)$$

Za $\nu = 0$ tačnost relacije (4.16) slijedi iz uslova (4.7). Neka je relacija (4.16) tačna za neko $\nu \geqslant 0$. Tada iz relacije (4.15) i uslova (4.4) dobijamo

$$c_{\nu+1} \leqq \frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1} Lt} \left( \frac{1}{4t^3} \cdot \frac{\alpha_\nu A_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} A_\nu} + \frac{1}{2t^2} \frac{\alpha_\nu A_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} A_\nu} + \frac{2}{3} \right) \leqslant \frac{\alpha_{\nu+1}}{A_{\nu+1} Lt}.$$

Ocjena (4.16) je dokazana.

Tada iz jake konveksnosti funkcionala $T_\nu(u)$ slijedi da je $\|v_\nu - u_\nu\| \leqslant \frac{c_\nu}{2} \leqslant \frac{\alpha_\nu}{2A_\nu Lt} \longrightarrow 0$ kada $\nu \to \infty$, što je i trebalo dokazati.

Analizirajmo uslove 4) i 5) teoreme. Neka je $\alpha_\nu = B(\nu+1)^{-1/6}$, $A_\nu = (\nu+1)^{1/3}$, $p<3$, $q > \frac{3}{2}$, $B = \text{const} \geqslant 0$. Odredimo konstantu B tako da budu ispunjeni uslovi (4.3) - (4.7). Ako je

$$B \geqslant L_o\left[(\nu+2)^{1/3}-(\nu+1)^{1/3}\right](\nu+2)^{1/6}, \ \nu = 0,1,2,\ldots, \tag{4.17}$$

tada su zadovoljeni svi uslovi (4.3) i (4.4). No, jednostavno se pokazuje da je $\left[(\nu+2)^{1/3}-(\nu+1)^{1/3}\right]\cdot(\nu+2)^{1/6} \leqslant \frac{1}{2}$, i uslov (4.17) će biti ispunjen ako je

$$B \geqslant \frac{L_o}{2} \tag{4.18}$$

Primijetimo, dalje, da je uslov

$$\frac{(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})A_{\nu+1}}{\alpha^2_{\nu+1}} \leqslant \frac{1}{6RLt}$$

ispunjen ako je

$$B \geqslant 6Lt\left(d^2 + \frac{|\lambda^*|^q q^{-1} p^{1-q}}{B}\right)^{1/2}\cdot\left((\nu+1)^{-1/6}-(\nu+2)^{-1/6}\right)(\nu+2)^{2/3} \tag{4.19}$$

gdje je $|\lambda^*|^q = \sum_{i=1}^{s}|\lambda_i^*|^q$. Kako je $((\nu+1)^{-1/6}-(\nu+2)^{-1/6})(\nu+2)^{2/3} \leqslant \frac{1}{2}$,

dovoljno je da konstanta B zadovoljava uslov,

$$B^3 \geqslant 9L^2t^2d^2B + 3Lt|\lambda^*|^q q^{-1} p^{1-q} \ ,$$

odnosno uslov

$$B \geqslant \max\left\{3\sqrt{2}\ Ltd;\ \sqrt[3]{6Lt|\lambda^*|^q q^{-1} p^{1-q}}\right\}. \tag{4.20}$$

Slično, uslov

$$\frac{(A_{\nu+1}-A_\nu)A_{\nu+1}}{\alpha^2_{\nu+1}} \leqslant \frac{1}{3L_oL(1+R)t}$$

će biti ispunjen ako je

$$B \geqslant \max\left\{\sqrt{6L_oLt(1+d)};\ \sqrt[5]{36L_o^2L^2t^2\ |\lambda^*|^q q^{-1} p^{1-q}}\right\} \tag{4.21}$$

Na kraju, za uslov (4.7) dovoljno je da važi relacija

$$Lt(\|J'(v_o) + P'(v_o)\| + 2B\|v_o\|) \leqslant B^2,$$

koja je zadovoljena za

$$B \geqslant \max \left\{4Lt\|v_0\|, \sqrt{2Lt\|J'(v_0)+P'(v_0)\|}\right\} \tag{4.22}$$

Na taj način, ako konstanta B zadovoljava uslove (4.18), (4.20),(4.21) i (4.22) tada će niz $\{v_\nu\}$ konvergirati ka normalnom rešenju $u_*$ pri proizvoljnom izboru početne aproksimacije $v_0$.

Specijalno, ako je $U = H$, tada se iz teoreme 2.4.1. za $A_\nu=1$, $R=d$, $P_\nu(u)=0$, $L_0=0$, može dobiti teorema o konvergenciji metoda opisanog relacijama (4.2) sa funkcionalima Tihonova $T_\nu(u)=J(u)+\alpha_\nu\|u\|^2$.

## 2.5. Iterativna regularizacija metoda linearizacije

U ovom paragrafu ćemo razmatrati iterativnu regularizaciju metoda linearizacije za rešavanje zadatka minimizacije diferencijabilnog funkcionala $J(u)$ na mnoštvu

$$U = \left\{u \in U_0 : g_i(u) \leqslant 0,\ i = \overline{1,r}\right\}, \tag{5.1}$$

gdje je $U_0$ zatvoreno, konveksno mnoštvo iz Hilbertovog prostora $H$, kada su funkcionali $g_i(u)$, $i = \overline{1,r}$, diferencijabilni na mnoštvu $U_0$.

Neka se niz $\{v_\nu\}$ konstruiše na sljedeći način: $v_1$ je proizvoljna tačka mnoštva $U_0$; ako je $\nu$-ti član niza $\{v_\nu\}$ odredjen, tada se sledeći član $v_{\nu+1}$ odredjuje iz uslova

$$v_{\nu+1} \in U_\nu\ ; \quad \inf_{u\in U_\nu} \Phi_\nu(u) = \Phi_\nu(v_{\nu+1}) \tag{5.2}$$

gdje je

$$\phi_\nu(u)=\frac{1}{2}\|u-v_\nu\|^2+\beta_\nu\langle J'(v_\nu),u-v_\nu\rangle,\ \beta_\nu\geqslant 0, \tag{5.3}$$

$$U_\nu=\{u\in U_0:\langle g_i'(v_\nu),u-v_\nu\rangle+g_i(v_\nu)\leqslant 0,\ \nu=1,2\ldots, \tag{5.4}$$

Metod opisan relacijama (5.2)-(5.4) se naziva metodom linearizacije (v.[A 2], str. 38)

U[A 2] se ispituje konvergencija niza $\{v_\nu\}$ ka mnoštvu tačaka minimuma funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$, kada je $U_0$ mnoštvo iz prostora $R^n$. Dokazuje se da ako su funkcionali $J(u)$, $g_1(u),\ldots g_r(u)$ konveksni na mnoštvu $U_0$, i ako postoji tačka $\bar{u}\in U_0$, tako da je $g_1(\bar{u})<0$, $g_2(\bar{u})<0,\ldots g_r(\bar{u})<0$, tada niz $\{v_\nu\}$ odredjen uslovima (5.2)-(5.4) konvergira ka nekoj tački iz mnoštva tačaka minimuma funkcionala $J(u)$ na mnoštvu $U$ (za koje se pretpostavlja da je neprazno). Pri tome se ne utvrdjuje nijedno svojstvo tačke $u_*$ kojoj konvergira niz $\{v_\nu\}$(v.[A 2], teorema 3.2, str.47).

Ovdje će biti pokazano da se iterativnom regularizacijom metoda (5.2)-(5.4) može konstruisati niz $\{v_\nu\}$ koji konvergira ka normalnom rješenju zadatka minimizacije, pri čemu se ne pretpostavlja da je prostor $H$ konačne dimenzije.

Naime, posmatrajmo niz $\{v_\nu\}$ koji se jednoznačno odredjuje iz uslova:

$$v_{\nu+1}\in U_\nu\ ,\ F_\nu(v_{\nu+1})=\inf_{u\in U_\nu}F_\nu(u), \tag{5.5}$$

gdje su $U_\nu$ mnoštva (5.4),

$$F_\nu(u)=\frac{1}{2}\|u-v_\nu\|^2+\beta_\nu\langle T_\nu'(v_\nu),u-v_\nu\rangle\ ,\beta_\nu>0, \tag{5.6}$$

$$T_\nu(u)=J(u)+\alpha_\nu\|u\|^2,\alpha_\nu>0,\ \nu=1,2\ldots,\ u\in U_0 \tag{5.7}$$

i gdje je $v_1$ proizvoljna tačka iz mnoštva $U_0$.

Primijetimo da se za razliku od metoda razmatranih u prethodnim paragrafima ovdje ne koriste penalni funkcionali za učitavanje ograničenja tipa $g_i(u) \leq 0$.

Razmotrimo mogućnost izbora nizova $\{\alpha_\nu\}$ i $\{\beta_\nu\}$ tako da niz tačaka $\{v_\nu\}$ konvergira ka normalnom rešenju zadataka minimizacije.

T e o r e m a 2.5.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1) funkcionali $J(u)$, $g_1(u), g_2(u), \ldots g_r(u)$ su konveksni na konveksnom, zatvorenom mnoštvu $U_0$ iz Hilbertovog prostora $H$, pripadaju klasi $C^1(U_0)$ i njihovi gradijenti zadovoljavaju uslove:

$$\|J'(u)-J'(v)\| \leqslant L_0 \|u-v\|; \|g_i'(u)-g_i'(v)\| \leqslant L_i\|u-v\|, i=\overline{1,r};\ u,v \in U_0, L_i=\text{const} \geqslant 0, i=\overline{0,r}; \tag{5.8}$$

2) $J_*=\inf\limits_{u\in U} J(u) > -\infty$, $U_*=\{u \in U: J(u)=J_*\} \neq \emptyset$;

3) postoji tačka $\bar{u} \in U_0$, tako da je $g_i(\bar{u}) < 0$, $i=\overline{1,r}$;

4) $\alpha_\nu>0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu=0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{|\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu^2} = 0$;

5) niz $\{v_\nu\}$ je odredjen relacijama (5.4) - (5.7).

Tada se niz $\{\beta_\nu\}$ može odabrati tako da je $\beta_\nu = \bar{\beta} = \text{const} > 0$ i $\lim\limits_{\nu\to\infty} \|v_\nu - u_*\| = 0$, gdje $u_* \in U_*$, $\|u_*\| = \inf\limits_{u\in U_*} \|u\|$.

Prilikom izvodjenja dokaza teoreme biće razmatrane i druge mogućnosti za izbor niza $\{\beta_\nu\}$.

D o k a z Neka je $\{u_\nu\}$ niz tačaka koji se jednoznačno odredjuje iz uslova:

$$u_\nu \in U,\ T_\nu(u_\nu)= \inf_{u\in U} T_\nu(u). \tag{5.9}$$

Tada iz uslova 1) i 2) teoreme i relacije (5.9), prema teoremi Kuna-Takera, slijedi da postoji niz sedlastih tačaka $\{(u_\nu, \mu^\nu)\}$

funkcionala Lagranža

$$\mathcal{L}_\nu(u,\lambda)=T_\nu(u)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\, g_i(u),\ \nu=1,2,\ldots,$$

na množtvu $U_0 \times \Lambda_0$, gdje je $\Lambda_0=\left\{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r):\lambda_i\geq 0,\ i=\overline{1,r}\right\}$,

odnosno da je

$$\mathcal{L}_\nu(u_\nu,\lambda)\leq \mathcal{L}_\nu(u_\nu,\mu^\nu)\leq \mathcal{L}_\nu(u,\mu^\nu) \text{ za svako } u\in U_0, \lambda\in\Lambda_0, \nu=1,2,\ldots \quad (5.10)$$

S obzirom da su funkcionali $T_\nu(u)$ diferencijabilni na množtvu $U_0$, relacije (5.10) su ekvivalentne sa relacijama

$$\left\langle J'(u_\nu)+2\alpha_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu g_i'(u_\nu), u-u_\nu\right\rangle \geq 0 \text{ za svako } u\in U_0, \quad (5.11)$$

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu g_i(u_\nu)=0,\ g_i(u_\nu)\leq 0,\ \mu_i^\nu\geq 0, i=\overline{1,r}, \nu=1,2,\ldots \quad (5.12)$$

Dokažimo da je niz $\{\mu^\nu\}$ ograničen u prostoru $R^r$. Neka je $d=\text{const}\geq 0$, tako da je $\|u_*\|\leq d$. Tada je

$$\|u_\nu\|\leq d,\ \nu=1,2,\ldots \quad (5.13)$$

Zaista, iz relacija (5.7) i (5.9) slijedi da je

$$\langle J'(u_*),\ u_\nu-u_*\rangle\geq 0,\ \langle J'(u_\nu)+2\alpha_\nu u_\nu, u_*-u_\nu\rangle\geq 0,\ \nu=1,2,\ldots\ .$$

Odatle, sabiranjem,zbog konveksnosti finkcionala $J(u)$ dobijamo da je

$$\langle u_\nu,\ u_*-u_\nu\rangle \geq 0$$

Iz dobijene relacije neposredno slijedi ocjena (5.13).

Dalje, iz definicije niza $\{u_\nu\}$ i jake konveksnosti funkcionala $T_\nu(u)$, $\nu=1,2,\ldots$ i s obzirom na relaciju (5.13) imamo da je:

$$2\alpha_\nu\|u_\nu-u_{\nu+1}\|^2\leq \langle T_\nu'(u_{\nu+1})-T_\nu'(u_\nu), u_{\nu+1}-u_\nu\rangle\leq\langle T_\nu'(u_{\nu+1})-T_{\nu+1}'(u_{\nu+1}), u_{\nu+1}-u_\nu\rangle+\langle T_{\nu+1}'(u_{\nu+1}), u_{\nu+1}-u_\nu\rangle\leq 2(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})\langle u_{\nu+1}, u_{\nu+1}-u_\nu\rangle\leq$$
$$\leq 2\left|\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}\right| d\cdot\|u_{\nu+1}-u_\nu\|,$$

odnosno

$$\|u_\nu - u_{\nu+1}\| \leq \frac{|\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu} d. \qquad (5.14)$$

Zbog konveksnosti funkcionala $g_i(u)$, $i=\overline{1,r}$, i iz relacije (5.12) imamo

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i^\nu \langle g_i'(u_\nu), u_\nu - \bar{u} \rangle \leq \sum_{i=1}^{r} \mu_i^\nu g_i(u_\nu) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i^\nu g_i(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^\nu |g_i(\bar{u})| \geq$$

$$\geq \mu_i^\nu |g_i(\bar{u})|, \; i=\overline{1,r}, \; \nu = 1,2,\ldots, \qquad (5.15)$$

gdje $\bar{u} \in U_0$ i $g_i(\bar{u}) < 0$, $i = \overline{1,r}$.

Iz relacije (5.13) i konveksnosti funkcionala $J(u)$ dobijamo sljedeću ocjenu:

$$\langle J'(u_\nu) + 2\alpha_\nu u_\nu, \bar{u} - u_\nu \rangle \leq (\|J'(\bar{u})\| + 2\|\bar{u}\| \sup_{\nu \geq 1} \alpha_\nu)(d + \|\bar{u}\|), \nu=1,2,\ldots \;. \qquad (5.16)$$

Koristeći ocjene (5.11) i (5.16), iz (5.15) slijedi da je

$$\mu_i^\nu \leq \frac{(\|J'(\bar{u})\| + 2\|\bar{u}\| \sup_{\nu \geq 1} \alpha_\nu)(d + \|\bar{u}\|)}{|g_i(\bar{u})|} = C_1, i=\overline{1,r}, \nu=1,2,\ldots,$$

$$C_1 = \text{const} \geq 0, \qquad (5.17)$$

pa je niz $\{\mu^\nu\}$ ograničen.

Primijetimo, dalje, da iz konveksnosti funkcionala $g_i(u)$, $i = \overline{1,r}$ i uslova 3) teoreme slijedi da je

$$\langle g_i'(v_\nu), \bar{u} - v_\nu \rangle + g_i(v_\nu) \leq g_i(\bar{u}) < 0, \; i = \overline{1,r}, \; \nu=1,2,\ldots \;. \qquad (5.18)$$

Prema teoremi Kuna-Takera, na osnovu relacija (5.18), (5.4) - (5.7) i uslova 1) teoreme slijedi da postoji niz $\{(v_{\nu+1}, \lambda^{\nu+1})\}$ sedlastih tačaka funkcionala

$$\mathcal{L}_\nu^1(u,\lambda) = F_\nu(u) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle g_i(v_\nu), u - v_\nu \rangle + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i(v_\nu), \; \nu=1,2,\ldots \qquad (5.19)$$

na mnoštvu $U_0 \times \Lambda_0$, odnosno da je

$$\mathcal{L}_\nu^1(v_{\nu+1},\lambda)\leqslant\mathcal{L}_\nu^1(v_{\nu+1},\lambda^{\nu+1})\leqslant\mathcal{L}_\nu^1(u,\lambda^{\nu+1}),\ \text{za svako } u\in U_0, \lambda\in\Lambda_0,\ \nu=1,2,\dots \quad (5.20)$$

Relacije (5.19) i (5.20) su ekvivalentne sa relacijama

$$\Big\langle v_{\nu+1}-v_\nu+\beta_\nu J'(v_\nu)+2\alpha_\nu\beta_\nu v_\nu+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}g_i'(v_\nu),u-v_{\nu+1}\Big\rangle\geqslant 0,$$

za svako $u\in U_0$, $\nu=1,2,3,\dots$, (5.21)

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}\langle g_i'(v_\nu),v_{\nu+1}-v_\nu\rangle+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}g_i(v_\nu)=0,\ \nu=1,2,\dots, \quad (5.22)$$

$$\langle g_i'(v_\nu),v_{\nu+1}-v_\nu\rangle+g_i(v_\nu)\leqslant 0,\ \lambda_i^{\nu+1}\geqslant 0,\ i=\overline{1,r},\ \nu=1,2,\dots \quad (5.23)$$

Postavljajući $u=v_{\nu+1}$ u relaciju (5.11) prethodno pomnoženu sa $\beta_\nu$, i $u=u_\nu$ u relaciju (5.21), i sabirajući dobijene relacije dobijamo:

$$\langle v_{\nu+1}-v_\nu,\ u_\nu-v_{\nu+1}\rangle+\beta_\nu\langle J'(v_\nu)-J'(u_\nu),u_\nu-v_{\nu+1}\rangle+$$
$$+2\alpha_\nu\beta_\nu\langle v_\nu-u_\nu,\ u_\nu-v_{\nu+1}\rangle+\beta_\nu\sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu\langle g_i'(u_\nu),v_{\nu+1}-u_\nu\rangle+$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}\langle g_i'(v_\nu),u_\nu-v_{\nu+1}\rangle\geqslant 0,\ \nu=1,2,\dots \quad (5.24)$$

Pokažimo da poslednji sabirak sa lijeve strane relacije (5.24) nije pozitivan.

Zaista, iz (5.12), (5.22), (5.23) i zbog konveksnosti funkcionala $g_i(u)$, $i=\overline{1,r}$, imamo da je

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}\langle g_i'(v_\nu),u_\nu-v_{\nu+1}\rangle=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}\langle g_i'(v_\nu),u_\nu-v_\nu\rangle+$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}\langle g_i'(v_\nu),v_\nu-v_{\nu+1}\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}\cdot g_i(u_\nu)-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}g_i(v_\nu)+$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{\nu+1}\langle g_i'(v_\nu),v_\nu-v_{\nu+1}\rangle\leqslant 0,\ \nu=1,2,\dots\ . \quad (5.25)$$

Slično se dobija da je (v. i relaciju (5.15))

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu\langle g_i'(u_\nu),v_{\nu+1}-u_\nu\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu g_i(v_{\nu+1}) \quad (5.26)$$

Koristeći ocjene (5.25), (5.26) i jednakosti

$$\langle v_{\nu+1}-v_\nu,\ u_\nu-v_{\nu+1}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v_\nu-u_\nu\|^2-\|v_{\nu+1}-v_\nu\|^2-\|v_{\nu+1}-u_\nu\|^2\right),$$

$$\langle v_\nu-u_\nu,\ u_\nu-v_{\nu+1}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v_{\nu+1}-v_\nu\|^2-\|v_\nu-u_\nu\|^2-\|v_{\nu+1}-u_\nu\|^2\right),$$

iz relacije (5.24.) slijedi

$$\|v_\nu-u_\nu\|^2(1-2\alpha_\nu\beta_\nu)+\|v_{\nu+1}-v_\nu\|^2(2\alpha_\nu\beta_\nu-1)-\|v_{\nu+1}-u_\nu\|^2(1+2\alpha_\nu\beta_\nu)+$$

$$+2\beta_\nu\langle J'(v_\nu)-J'(u_\nu),u_\nu-v_{\nu+1}\rangle+2\sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu g_i(v_{\nu+1})\geqslant 0,\ \nu=1,2,\ldots \qquad (5.27)$$

Koristeći konveksnost funkcionala $J(u)$, $g_i(u)$, $i=\overline{1,r}$ i uslove (5.8) jednostavno se dobijaju ocjene (v [A 7], str. 62.)

$$g_i(v_{\nu+1})\leqslant g_i(v_\nu)+\langle g_i'(v_\nu),v_{\nu+1}-v_\nu\rangle+\frac{L_i}{2}\|v_{\nu+1}-v_\nu\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L_i}{2}\|v_{\nu+1}-v_\nu\|^2,\ i=\overline{1,r},\ \nu=1,2,\ldots \qquad (5.28)$$

i (v [A 2] , str. 25, relacija (1.11.))

$$\langle J'(v_\nu)-J'(u_\nu),u_\nu-v_{\nu+1}\rangle\leqslant\frac{L_0}{4}\|v_{\nu+1}-v_\nu\|^2 \qquad (5.29)$$

Postavljajući ocjene (5.28) i (5.29) u relaciji (5.27) dobijamo

$$\|v_{\nu+1}-u_\nu\|^2(1+2\alpha_\nu\beta_\nu)+\|v_{\nu+1}-v_\nu\|^2\left(1-2\alpha_\nu\beta_\nu-\frac{\beta_\nu L_0}{2}-\beta_\nu\sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu L_i\right)\leqslant$$

$$\leqslant(1-2\alpha_\nu\beta_\nu)\cdot\|u_\nu-v_\nu\|^2,\ \nu=1,2,\ldots \qquad (5.30)$$

Neka je

$$0<\beta_\nu\leqslant\frac{2}{L_0+4\alpha_\nu+2\sum_{i=1}^{r}\mu_i^\nu L_i},\ \nu=1,2,3,\ldots \qquad (5.31)$$

Tada iz relacije (5.30.) slijedi

$$\|v_{\nu+1}-u_\nu\|\leqslant\sqrt{\frac{1-2\alpha_\nu\beta_\nu}{1+2\alpha_\nu\beta_\nu}}\,\|v_\nu-u_\nu\| \qquad (5.32)$$

Dalje, iz nejednakosti $\|v_{\nu+1}-u_{\nu+1}\| \leq \|v_{\nu+1}-u_\nu\| + \|u_{\nu+1}-u_\nu\|$, ako za ocjenu sabiraka sa desne strane iskoristimo relacije (5.14) i (5.32), dobijamo

$$b_{\nu+1} \leq (1-\gamma_\nu)b_\nu + \frac{|\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu} d, \quad \nu = 1,2,3,\ldots, \tag{5.33}$$

gdje je $b_\nu = \|u_\nu - v_\nu\|$, $\gamma_\nu = 1 - \left[(1-2\alpha_\nu\beta_\nu)(1+2\alpha_\nu\beta_\nu)^{-1}\right]^{1/2}$.

Primijetimo da iz uslova (5.31) slijedi da je za svako $\nu \geq 1, 0 < \alpha_\nu\beta_\nu < 1/2$, pa je $0 < \gamma_\nu \leq 1$. Jednostavno se pokazuje da je

$$2\alpha_\nu\beta_\nu \geq \gamma_\nu \geq \alpha_\nu\beta_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots .$$

Razmotrimo mogućnosti za izbor niza $\{\beta_\nu\}$ saglasno uslovima (5.31). S obzirom da je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$ i zbog relacije (5.17), niz $\{\beta_\nu\}$ možemo odabrati tako da je $\beta_\nu = \bar\beta = \text{const} > 0$. Na primjer, $\bar\beta$ možemo odabrati iz uslova

$$\bar\beta \leq \frac{2}{L_0 + 4\sup\limits_{\nu\geq 1}\alpha_\nu + 2C_1 \sum\limits_{i=1}^{r} L_i}, \tag{5.34}$$

gdje je $C_1$ konstanta iz relacije (5.17).

Dalje iz uslova 4) teoreme slijedi da je $\frac{|\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu} = o(\alpha_\nu)$. Jednostavno se pokazuje da je $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu} = +\infty$, pa je $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \geq \bar\beta \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$. Na taj način, svi uslovi leme 2.2.1. su ispunjeni, pa je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \|v_\nu - u_\nu\| = 0$. Odavde i iz teoreme 1.2.2 neposredno slijedi tvrdjenje teoreme.

U vezi sa uslovima (5.31) za izbor niza $\{\beta_\nu\}$ i relacijom (5.34) koja daje jednu konkretnu mogućnost tog izbora napomenimo sljedeće:

1) postoje i druge mogućnosti za izbor niza $\{\beta_\nu\}$ , saglasno uslovima (5.31.). Na primjer, niz $\{\beta_\nu\}$ možemo odabrati tako da je $\beta_\nu > 0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\beta_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{|\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu^2\beta_\nu} = 0$. Tada postoji prirodan broj $\nu_0 \geqslant 1$, tako da je relacija (5.31) tačna za $\nu \geqslant \nu_0$. Na taj način dobijamo da je i relacija (5.33) tačna za $\nu \geqslant \nu_0$. Odatle se, prethodno uočivši da je $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_\nu/\beta_\nu = +\infty$ , dobija da niz $\{\beta_\nu\}$ konvergira ka nuli kada $\nu\to\infty$ ;

2) ukoliko su poznate ocjene za Lipšicove konstante $L_0, L_1, \ldots, L_r$ i konstanta d iz relacije (5.13), tada se konstanta $\bar{\beta} > 0$ jednostavno odredjuje iz uslova (5.34). Ako takve ocjene nijesu poznate, tada se prilikom odredjivanja niza $\{\beta_\nu\}$ mogu iskoristiti sljedeće činjenice:

2a) izvodjenje tvrdjenja $\lim\limits_{\nu\to\infty}\| v_\nu - u_\nu \| = 0$ ostaje na snazi i ako uslov (5.31) nije zadovoljen za konačan broj vrijednosti $\beta_\nu$ ;

2b) za svako $\nu \geqslant 1$ i fiksirano $\lambda\in\Lambda_0$ važi relacija

$$\mathcal{L}_\nu (v_{\nu+1}, \lambda) \leqslant \mathcal{L}_\nu (v_\nu, \lambda) \tag{5.35}$$

U skladu sa napomenom 2) prilikom odredjivanja niza $\{\beta_\nu\}$ može se postupiti na sljedeći način: izabere se $\beta_1 = \beta_* > 0$, i provjeri se (za neke vrijednosti $\lambda \in \Lambda_0$) da li je tačna relacija (5.35). Ako je taj uslov ispunjen proces se produžava sa $\beta_2 = \beta_*, \ldots, \beta_\nu = \beta_*$. Ako uslov (5.35) nije ispunjen za neko $\lambda\in\Lambda_0$ i neko $\nu \geqslant 1$, tada se vrijednost $\beta_*$ smanjuje (na primjer dijeljenjem sa dva), sve dok uslov (5.35) ne bude ispunjen. Proces se produžava sa novom vrijednošću $\beta_\nu = \frac{\beta_*}{2^i}$ . Poslije konačno mnogo koraka uslov (5.31) će biti ispunjen i proces se produžava sa $\beta_\nu = \bar{\beta}$ = const, $\nu \geq \nu_0$. Dobijeni niz $\{v_\nu\}$ će konvergirati po normi prostora H ka tački $u_*$.

Razmotrimo posebno slučaj kada je $U = U_0$. Jednostavno se pokazuje da su tada uslovi (5.2)-(5.4) iz kojih se odredjuje tačka $v_{\nu+1}$ ekvivalentni sa

$$v_{\nu+1} = P_{U_0}(v_\nu - \beta_\nu J'(v_\nu)), \beta_\nu > 0, \ \nu=0,1,2,\ldots$$

i metod (5.2)-(5.4) prelazi u metod projekcije gradijenta. Ali, izbor niza $\{\beta_\nu\}$ se realizuje na drugi način u odnosu na metod razmatran u teoremi 2.1.1., pa ćemo razmotriti iterativnu regularizaciju ovog metoda, uz pretpostavku da su umjesto gradijenta funkcionala J(u) poznate njegove aproksimacije $J'_\nu(u)$ i da se pomoćni zadaci minimizacije kvadratnih funkcionala $F_\nu(u)$ rešavaju približno.

Posmatrajmo, dakle, niz $\{v_\nu\}$ odredjen uslovima

$$v_{\nu+1} \in U_0, F_\nu(v_{\nu+1}) \leq \inf_{u \in U_0} F_\nu(u) + \varepsilon_\nu, \ \varepsilon_\nu \geq 0, \ \nu = 1,2,\ldots, \tag{5.36}$$

gdje je

$$T_\nu(u) = J_\nu(u) + \alpha_\nu \|u\|^2, \tag{5.37}$$

$$F_\nu(u) = \frac{1}{2}\|u - v_\nu\|^2 + \beta_\nu \langle T'_\nu(v_\nu), u - v_\nu \rangle, \ u \in U_0, \tag{5.38}$$

sa proizvoljnom početnom aproksimacijom $v_1 \in U_0$. Tada važi sledeća teorema.

T e o r e m a 2.5.2. Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) funkcional J(u) je konveksan na konveksnom, zatvorenom mnoštvu $U_0$ iz Hilbertovog prostora H; funkcionali $J(u), J_\nu(u), \nu = 1,2,$

su diferencijabilni po Frešeu na mnoštvu $U_0$ i

$$\|J'(u)-J'(v)\| \leq L\|u-v\|, u,v \in U_0, \; L = \text{const} \geqslant 0$$

$$\|J'(u)-J'_\nu(u)\| \leq \delta_\nu(1+\|u\|), \; u \in U_0, \; \delta_\nu \geqslant 0, \; \nu = 1,2,\ldots; \tag{5.39}$$

# S A D R Ž A J

Strana


UVOD .......................................... I-IV

GLAVA I REGULARIZACIJA NEKOREKTNIH EKSTREMALNIH ZADATAKA .......................... 1

1.1. O nekorektnim ekstremalnim zadacima .... 1

1.2. Tihonovljev metod regularizacije ....... 8

GLAVA II ITERATIVNA REGULARIZACIJA METODA MINIMIZACIJE 19

2.1. Iterativna regularizacija metoda projekcije gradijenta ...................... 20

2.2. Iterativna regularizacija metoda uslovnog gradijenta ....................... 22

2.3. Iterativna regularizacija Njutnovog metoda minimizacije ..................... 51

2.4. Iterativna regularizacija jednog metoda minimizacije trećeg reda .............. 63

2.5. Iterativna regularizacija metoda linearizacije ............................... 68

LITERATURA .................................. 81

Pored toga, iz relacija (5.42) i (5.43), dobijamo da za svako $u \in U_0$ važe nejednakosti

$$\langle J'(u_\nu)+2\alpha_\nu u_\nu \ , u-u_\nu \rangle \geqslant 0$$

$$\langle \tilde{v}_{\nu+1}-v_\nu \ + \beta_\nu J'_\nu(v_\nu)+2\alpha_\nu\beta_\nu v_\nu \ , u-\tilde{v}_{\nu+1} \rangle \geqslant 0.$$

Odavde, postupajući analogno kao pri izvodjenju dokaza teoreme 2.5.1. i koristeći uslove (5.39), (5.40) dobijamo

$$\| \tilde{v}_{\nu+1}-u_\nu \|^2 (1+2\alpha_\nu\beta_\nu) \leq (1-2\alpha_\nu\beta_\nu) b_\nu^2 + 2\beta_\nu\delta_\nu (1+\|v_\nu\| \ ) \|\tilde{v}_{\nu+1}-u_\nu\| \leq$$
$$\leqslant (1-2\alpha_\nu\beta_\nu) b_\nu^2 + 2\beta_\nu\delta_\nu (1+d+b_\nu) \|\tilde{v}_{\nu+1}-u_\nu\| \leqslant (1-2\alpha_\nu\beta_\nu) b_\nu^2 +$$
$$+(1+d)\beta_\nu\delta_\nu + \beta_\nu\delta_\nu b_\nu^2 + \beta_\nu\delta_\nu (2+d) \ \|\tilde{v}_{\nu+1}-u_\nu\|^2, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

Iz dobijene relacije i s obzirom na uslove (5.41) slijedi da postoji prirodan broj $\nu_0 \geqslant 1$, tako da je za svako $\nu \geqslant \nu_0$

$$\| \tilde{v}_{\nu+1}-u_\nu \|^2 \leqslant \frac{1-\alpha_\nu\beta_\nu}{1+\alpha_\nu\beta_\nu} b_\nu^2 + C_2\beta_\nu\delta_\nu, C_2 = \text{const} \geqslant 0. \qquad (5.45)$$

Koristeći nejednakost $b_{\nu+1} \leqslant \|\tilde{v}_{\nu+1}-v_{\nu+1}\| + \|\tilde{v}_{\nu+1}-u_\nu\| + \|u_{\nu+1}-u_\nu\|$ i ocjene (5.14),(5.44) i (5.45) dobijamo da važi sledeća rekurentna nejednakost za niz $\{b_\nu\}$:

$$b_{\nu+1} \leqslant 2\varepsilon_\nu + \frac{|\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu} d + \sqrt{\frac{1-\alpha_\nu\beta_\nu}{1+\alpha_\nu\beta_\nu} b_\nu^2 + C_2\delta_\nu\beta_\nu} \ , \quad \nu \geqslant \nu_0 .$$

Odavde, kvadriranjem, na osnovu nejednakosti

$$(a+b)^2 \leqslant (1+\alpha_\nu\beta_\nu) a^2 + (1+\frac{1}{\alpha_\nu\beta_\nu}) b^2$$

i uslova (5.41) slijedi da je za svako $\nu \geqslant \nu_0$

$$b_{\nu+1}^2 \leqslant (1-\alpha_\nu\beta_\nu) b_\nu^2 + C_3\mu_\nu\alpha_\nu\beta_\nu, \ C_3 = \text{const} \geqslant 0, \ \mu_\nu \geqslant 0, \ \lim_{\nu\to\infty} \mu_\nu = 0.$$

Dalje, iz uslova $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{|\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}|}{\alpha_\nu^2/\beta_\nu} = 0$ jednostavno slijedi da je $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\beta_\nu = +\infty$, pa na osnovu leme 2.2.1. slijedi da je $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$, što je i trebalo dokazati.

Primijetimo da uslov (5.39) dozvoljava razne mogućnosti za izbor niza $\{\beta_\nu\}$. Tako, na primjer, ako je poznata ocjena za Lipšicovu konstantu L, tada se može uzeti da je $0 < \beta_\nu =$

$$= \bar{\beta} \leqslant \frac{2}{L + 4 \sup\limits_{\nu \geqslant 1} \alpha_\nu}.$$

# L I T E R A T U R A

## A. MONOGRAFIJE, UDŽBENICI I DR. KNJIGE


1. Aljančić S. Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. "Gradevinska knjiga", Beograd, 1968.

2. Antipin A.S. Metodi nelinejnogo programmirovanija, osnovannie na prjamoj i dvojstvenoj modifikacii funkcii Lagranža, Izd-vo VNII sistemnih issledovanij, Moskva 1979.

3. Balakrišnan A. Vvedenie v teoriju optimizacii v gil' bertovom prostranstve, "Mir", Moskva 1974.

4. Bahvalov N.S. Čislennie metodi, "Nauka", Moskva 1973.

5. Berezin I.S. - Židkov N.P. Metodi vičislenij I-II. "Fizmatgiz", Moskva 1962.

6. Budak B.M. - Vasil'ev F.P. Nekotorie vičislitel'nie aspekti zadač optimal'nogo upravlenija, Izd-vo MGU, Moskva 1975.

7. Vasil'ev F.P. Lekcii po metodam rešenija ekstremal'nih zadač, Izd-vo MGU, Moskva 1974.

8. Gabasov R. - Kirillova F.M. Princip maksimuma v teorii optimal'nogo upravljenija. "Nauka i tehnika", Minsk 1974.

9. Girsanov I.V. Lekcii po matematičeskoj teoreii ekstremal' nih zadač, Izd-vo MGU, Moskva 1970.

10. Demjanov V.F. - Rubinov A.M. Približennie metodi rešenija ekstremal'nih zadač, Izd-vo LGU, Leningrad 1968.

11. Eremin I.I. - Astafeev N.N. Vvedenie v teoriju linejnogo i vipuklogo programmirovanija. "Nauka" Moskva 1976.

12. Errou K.Dž.,Gurvic L., Udzava H. Issledovanija po linejnomu i nelinejnomu programmirovaniju. IL, Moskva 1962.

13. Zločevskij S.I. Lekcii po teorii optimal'nogo upravlenija. Izd-vo MGU. Moskva 1977.

14. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.. Teorija linejnih nekorrektnih zadač i ee priloženija. "Nauka", Moskva 1978.

15. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. Teorija ekstremal'nih zadač. "Nauka", Moskva 1974.

16. Kantorovič L.V., Akilov G.P. Funkcional'nij analiz. "Nauka" Moskva 1977.

17. Karmanov V.G. Matematičeskoe programmirovanie."Nauka". Moskva 1975.

18. Katkovnik V. Ja. Linejnie ocenki i stohastičeskie zadači optimizacii. "Nauka" Moskva 1976.

19. Kollatc L. Funkcional'nih analiz i vičislitel'naja matematika "Mir", Moskva 1969.

20. Krasnosel'skij M.A., Vajniko G.M. Zabrejko P.P. Rutickij Ja.B. Stecenko V.Ja. Približennoe rešenie operatornih uravnenij. "Nauka", Moskva 1969.

21. Lions Ž.L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisivaemimi uravnenijami s častnimi proizvodnimi. "Mir", Moskva 1972.

22. Loran P.Ž. Approksimacija i optimizacija. "Mir" Moskva, 1975.

23. Morozov V.A. Reguljarnie metodi rešenija nekorrektno postavlennih zadač. Izd-vo MGU, Moskva 1974.

24. Polak E.Čislennie metodi optimizacii. "Mir", Moskva 1974.

25. Pontrjagin L.S., Boltjanski V.G., Gamkrelidze R.V., Mišćenko E.F. Matematičeskaja teorija optimal'nih procesov. "Nauka", Moskva 1976.

26. Pšeničnij B.N., Danilin Ju.M.. Čislennie metodi v ekstremal'nih zadačah. "Nauka", Moskva 1975.

27. Sea Ž. Optimizacija. Teorija i algoritmi. "Mir", Moskva 1973.

28. Sobolev S.L. Nekotorie primenenija funkcional'nogo analiza v matematičeskoj fizike. Izd-vo SO AN SSSR, Novosibirsk 1962.

29. Tihonov A.N.,Arsenin V.Ja. Metodi rešenija nekorrektnih zadač. "Nauka", Moskva 1974.

30. Fedorenko R.P. Približennoe rešenie zadač optimal' nogo upravlenija. "Nauk:", Moskva 1978.

B. RADOVI

1. Antipin A.S. Ob edinom podhode k metodam rešenija nekorerektnih ekstremal'nih zadač. Vestnik MGU, serija mat., meh., No 2,62-67, 1972.

2. Bakušinskij A.B. Reguljarizujuščij algoritm na osnove metoda N'jutona-Kantoroviča dlja rešenija variacionnih neravenstv, ŽVM i MF, 16, No6, 1397-1404, 1976.

3. Bakušinskij A.B. Metodi rešenija monotonih variacionih neravenstv, osnovannie na principe iterativnoj reguljarizacii. ŽVM i MF, 17, No t, 1350-1362, 1977.

4. B akušinskij A.B., Poljak B.T. O rešenii variacionnih neravenstv. DAN SSSR, 219, No 5, 1038-1041, 1974.

5. Bakušinskij A.B., Aparcin A.S. Metodi tipa stohastičeskoj approksimacii dlja rešenija linejnih nekorrektnih zadač. Sib.matem.žurn.,16, No1, 12 - 16, 1975.

6. Budak B.M., Berkovič E.M., Gaponenko Ju. L. O postroenii sil'no shodjaščejsja minimizirujuščej posledovatil'nosti dlja neprerivnogo vipuklogo funkcionala. ŽVM i MF, 9, No2, 186 - 299, 1969.

7. Browder F. Existense and approximation of solutions of nonlienar variational inequalites. Proc. Nath. Acad. Sci. USA, 56, No4, 1080 - 1086, 1966.

8. Vasil'ev F.P. O reguljarizacii nekorrektnih ekstremal'nih zadač. DAN SSSR, 241, No5, 1001-1004, 1978.

9. Vasil'ev F.P. Jaćimović M. Ob iterativnoj reguljarizacii metoda uslovnogo gradienta i metoda N'jutona pri netočno zadannih ishodnih dannih. DAN SSSR(u štampi).

10. Vasil'ev F.P. Jaćimović M. Ob iterativnoj reguljarizacii metoda N'jutona. ŽVM i MF (predato za štampu).

11. Vasil'ev F.P., Hromova L.N., Jaćimović M. Ob iterativnoj reguljarizacii odnogo metoda minimizacii tretego porjatka.Vestnik MGU, serija VM i K (predato za štampu).

12. Vladimirov A.A., Nestorov Ju.E., Čekanov Ju.N. O ravnomerno vipuklih funkcionalah. Vestnik MGU, serija VM i K, No3, 12 - 23, 1978.

13. Danilin Ju. M. Metodi minimizacii, osnovannie na approksimacii ishodnogo funkcionala vipuklim. ŽVM i MF, 10, No5, 1067-1080, 1970.

14. Dubovickij A. Ja. Miljutin A.A. Zadači na ekstremum pri naličii ograničenij. ŽVM i MF, 5, No3, 395 - 453, 1965.

15. Jaćimović M. Minimizacija kvadratnog funkcionala u linearnim problemima optimalnog upravljanja (magistarski rad), Beograd 1978.

16. Jaćimović M. Iterativnaja reguljarizacija odnogo varianta metoda uslovnogo gradienta. Vestnik MGU, serija VM i K (predato za štampu).

17. Lions J.L., Stampacchia G. Variational inequalites. Comm. Pure and Appl. Math., 20, No3, 493 - 519, 1967.

18. Levitin A.S., Poljak B.T. Metodi minimizacii pri naličii ograničenij. ŽVM i MF, 6, No5, 787-823, 1966.

19. Majstrovskij G.D. O skorosti shodimosti gradientnogo metoda dlja modificirovannoj funkcii Lagranža, E i MM, 15, No2, 380 - 386, 1979.

20. Morozov V.A. O nekotorih obščih uslovijah reguljarizuemosti nekorrektnih variacionnih zadač, u zb. Trudi I-j konf. molodih učenih fak. VM i K, 140 - 164. Izd-vo MGU, Moskva 1973.

21. Poljak B.T. Metodi rešenija zadač na uslovnij ekstremum pri naliči slučajnih pomeh. ŽVM i MF, 19, No1, 1979.

22. Tihonov A.N. O rešenii nekorrektno postavlennih zadač i metode reguljarizacii. DAN SSSR, 151, No3,501-504, 1963.

23. Tihonov A.N. O metodah reguljarizacii zadač optimal'nogo upravlenija. DAN SSSR, 162, No4, 763-766, 1965.

24. Tihonov A.N. Ob ustojčivosti zadači optimizacii funkcionalov. ŽVM i MF, 6, No4, 631-634, 1966.

25. Tihonov A. N. O nekorrektnih zadačah optimal'nogo planirovanija, ŽVM i MF, 6, No1, 81-89, 1966.

26. Tihonov A.N., Vasil'ev F.P., Metodi rešenija nekorrektnih ekstremal'nih zadač. Banach center publications, V. 3, 297 -342, 1978.

27. Tihonov A.N., Vasil'ev F.P., Potapov M.M., Jurij A.D. O reguljarizacii zadač minimizacii na množestvah, zadannih približenno. Vestnik MGU, serija VM i K, No1, 1-14, 1977.

28. Tihonov A.N.,Galkin V. Ja., Zaikin P.N. O prjamih metodah rešenija zadač optimal'nogo upravljenija. ŽVM i MF, z, No2, 416-423, 1967.

29. Tihonov A.N.,Karmanov V.G., Rudneva T.L. Ob ustojčivosti zadač linejnogo programmirovanija. U zb. "Vičislitel'nie metodi i programirovanie, vip. 12, 3-9. Izd-vo MGU, 1969.

30. Fedorov V.V. K voprosu ob ustojčivosti zadači linejnogo programmirovanija. ŽVM i MF, 15, No6, 1412 - 1423, 1975.