MR MILA MRŠEVIĆ

LOKALNA KOMPAKTNOST I KONEKSNOST U BITOPOLOŠKIM PROSTORIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 1979.

PREDGOVOR

Predmet izučavanja ovog rada su bitopološki prostori, skupovi snabdeveni dvema topologijama koje su u opštem slučaju sasvim nezavisne. Medjutim, ako se razmatraju posebne klase ovih prostora, zbog uslova koje zadovoljavaju ove topologije, javlja se i njihova medjusobna zavisnost koja u nekim slučajevima znači i podudaranje topologija. Izučavanje ovih prostora podrazumeva ispitivanje novih klasa prostora i odnose medju tim klasama. Prostori jedne klase imaju odredjene osobine koje se, u slučaju kada su topologije na uočenom skupu jednake, po pravilu svode na neko odredjeno topološko svojstvo.

Rad se sastoji iz pet poglavlja. U prvom poglavlju daju se uvodni pojmovi, definicije i osnovne osobine bitopoloških prostora, a posebno se ističu pojmovi kompaktnosti i koneksnosti bitopoloških prostora i osobine tih prostora.

U drugom poglavlju se razmatra lokalna kompaktnost bitopoloških prostora. Citiraju se već postojeće definicije lokalne kompaktnosti i uvode novi pojmovi koji se nazivaju lokalnom kvazikompaktnošću. Razmatraju se medjusobni odnosi različitih klasa lokalno kompaktnih bitopoloških prostora, a posebno se ispituju osobine lokalno kvazikompaktnih prostora. Dokazuje se, pored ostalog, da za uzajamno lokalno kvazikompaktne uzajamno R_1 prostore važi uopštenje teoreme Aleksandrova o kompaktifikaciji jednom tačkom.

Zatim se ispituju osobine topoloških i bitopoloških hiperprostora.

Tako se u trećem poglavlju, pored ostalog, dokazuje da topološki prostor i njegov količnik - prostor pri relaciji ekvivalencije definisanoj sa: $x \sim y \iff \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, imaju homeomorfne hiperprostore i da mnogi poznati rezultati dokazani za T_1-prostore važe i za širu klasu topoloških prostora, za R_0-prostore. Zatim se daju osnovne osobine bitopoloških hiperprostora, posebno se ispituje kvazikompaktnost bitopoloških hiperprostora i dokazuje se analogno tvrdjenje o homeomorfizmu bitopoloških hiperprostora.

Četvrto poglavlje je posvećeno izučavanju lokalne kvazikompaktnosti bitopoloških hiperprostora sa konačnim i polukonačnim topologijama.

U petom poglavlju se razmatraju razni tipovi koneksnosti bitopoloških hiperprostora i dobijaju se uopštenja rezultata koji važe za topološke hiperprostore.

*

Posebno zahvaljujem prof. D. Adnadjeviću na korisnim savetima i podršci koju mi je ukazao prilikom izrade teze.

Zahvaljujem prof. M. Marjanoviću na sugestijama i savetima u toku rada.

Takodje zahvaljujem dr Ivanu L. Reillyju sa univerziteta u Aucklandu.

SADRŽAJ

1. UVOD

1.1. BITOPOLOŠKI PROSTORI

Pojam bitopološkog prostora, trojke (X,τ^1,τ^2), gde je X skup a τ^1 i τ^2 proizvoljne topologije na skupu X, pojavio se 1963. godine u radu J.C. Kellyja "Bitopološki prostori" ([26]).

Zadavanje dveju topologija na jednom skupu i veze izmedju tih topologija ispitivani su i ranije. Tako J.D. Weston uvodi pojmove "spregnutih" i "postojanih" topologija, od kojih drugi pojam odgovara definiciji uzajamno Hausdorffovog bitopološkog prostora.(Vid. [69].)

Kelly je pošao od kvazi-pseudo-metrike $p:X\times X \to R$ (nesimetrične funkcije rastojanja) definisane na skupu X i njoj pridružene kvazi-pseudo-metrike $q:X\times X \to R$ definisane sa $q(x,y)=p(x,y)$. Ove dve kvazi-pseudo-metrike definišu dve topologije na skupu X, koje u opštem slučaju nisu ni u kakvoj uzajamnoj vezi.

Kelly uopštava aksiome separacije za topološke prostore na sledeći način:

Definicija 1.1. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno Hausdorffov (pT_2) ako za svaki uredjen par (x,y) različitih tačaka iz X postoje τ^1 otvoren skup U i τ^2 otvoren skup V takvi da je $x\in U$, $y\in V$ i $U\cap V=\emptyset$.

Definicija 1.2. U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) topologija τ^1 je regularna u odnosu na topologiju τ^2 (ili (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-regularan) ako za svaku tačku x iz X i svaki τ^1 zatvoren skup $F\subset X$ koji ne sadrži x, postoje τ^1 otvoren skup U i τ^2 otvoren skup V takvi da je $x\in U$, $F\subset V$ i $U\cap V=\emptyset$, tj. ako svaka tačka iz X ima τ^1 okolinsku bazu koju čine τ^2 zatvoreni skupovi. Prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno regularan (p-regularan) ako je (1,2)-regularan i (2,1)-regularan.

D e f i n i c i j a 1.3. Prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno normalan (p-normalan) ako za svaki τ^1 zatvoren skup A i svaki τ^2 zatvoren skup B za koje je $A\cap B$ jednako $\emptyset$, postoje τ^2 otvoren skup U i τ^1 otvoren skup V takvi da je $A\subset U$, $B\subset V$ i $U\cap V=\emptyset$.

Ukoliko su topologije τ^1 i τ^2 jednake, ove definicije se podudaraju sa odgovarajućim definicijama za topološke prostore. Tako se (1,2)-regularnost i p-regularnost svode na regularnost, a p-normalnost postaje normalnost topoloških prostora.

U ovom radu Kelly je, pored drugih osobina, dokazao da za bitopološke prostore važe uopštenja nekih poznatih teorema kao što su Urisonova lema, Urisonova metrizaciona teorema, Tietzeova teorema o proširenju funkcije. Navešćemo generalizaciju Urisonove leme.

S t a v 1.1. Ako je bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) p-normalan tada za τ^1 zatvoren skup F i τ^2 zatvoren skup H, takve da je $F\cap H=\emptyset$, postoji τ^1 poluneprekidna odozdo (l.s.c.) i τ^2 poluneprekidna odozgo (u.s.c.) funkcija $f:X\longrightarrow[0,1]\subset R$ takva da je $f(F)=\{0\}$ i $f(H)=\{1\}$. ∇

P. Fletcher, E. P. Lane i C. W. Patty nastavljaju ispitivanje bitopoloških prostora. (Vid. [20],[31] i [47].)

D e f i n i c i j a 1.4. U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) topologija τ^i je potpuno regularna u odnosu na τ^j (ili, prostor (X,τ^1,τ^2) je (i,j)-potpuno regularan za $i,j\in\{1,2\}$ i $i\neq j$, ako za svaki τ^i zatvoren skup F i svaku tačku $x\in X-F$ postoji τ^i poluneprekidno odozdo i τ^j poluneprekidno odozgo preslikavanje $f:X\rightarrow[0,1]\subset R$ takvo da je $f(F)=\{0\}$ i $f(x)=1$. Prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno potpuno regularan (p-potpuno regularan) ako je (1,2)-potpuno regularan i (2,1)-potpuno regularan.

Iz definicija poluneprekidnih funkcija neposredno sledi da je u prostoru (X,τ^1,τ^2) topologija τ^i potpuno regularna u odnosu na τ^j ako i samo ako za svaki τ^i zatvoren skup F i svaku tačku $x\in X-F$ postoji τ^i u.s.c. i τ^j l.s.c. preslikavanje $g:X\rightarrow[0,1]\subset R$ takvo da je $g(F)=\{1\}$ i $g(x)=0$.

Dovoljno je posmatrati homeomorfizam $h:[0,1] \to [0,1]$ definisan sa $h(t)=1-t$ za sve $t\in[0,1]$. Tada, ako je $f:X \to [0,1]$ τ^i l.s.c. i τ^j u.s.c. preslikavanje takvo da je $f(F)=\{0\}$ i $f(x)=1$, preslikavanje $g=h\circ f:X \to [0,1]$ je τ^i u.s.c. i τ^j l.s.c. i važi $g(F)=\{1\}$ i $g(x)=0$.

Fletcher i Lane nezavisno dokazuju da je bitopološki prostor p-potpuno regularan ako i samo ako je uzajamno kvazi-uniformizabilan.

Ispitujući kvazi-pseudo-metričke prostore, Lane i Patty uvode pojmove uzajamno savršeno normalnog i uzajamno potpuno normalnog bitopološkog prostora.

Lane, uopštavajući teoremu Nagata-Smirnova ([18], Th. 4.4.7.), daje dovoljne uslove za kvazi-pseudo-metrizabilnost bitopološkog prostora.

Pre prelaska na definicije kompaktnosti i koneksnosti bitopoloških prostora i njihove osobine, navešćemo druge definicije i osobine bitopoloških prostora koje ćemo dalje koristiti.

D e f i n i c i j a 1.5. ([5]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>bitopološki proizvod</u> familije $\{(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ bitopoloških prostora ukoliko je $X=\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, direktan proizvod familije skupova $\{X_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, a topologije τ^1 i τ^2 su topologije proizvoda (topologije Tihonova) odredjene redom topologijama τ^1_λ i τ^2_λ, $\lambda\in\Lambda$.

D e f i n i c i j a 1.6. Neka je (X,τ^1,τ^2) bitopološki prostor i neka je S relacija ekvivalencije na skupu X. <u>Bitopološki količnik</u> prostora (X,τ^1,τ^2) u odnosu na S je bitopološki prostor (Y,σ^1,σ^2), gde je $Y= X/S$, skup klasa ekvivalencije, a σ^1 i σ^2 su količnik-topologije na skupu Y odredjene topologijama τ^1 i τ^2 redom. (Vid. [5].)

D e f i n i c i j a 1.7. Preslikavanje $f:(X,\tau^1,\tau^2)\to$ $\to (Y,\sigma^1,\sigma^2)$ bitopoloških prostora je:

(a) <u>uzajamno neprekidno</u> ako su indukovana preslikavanja $f_i:(X,\tau^i) \to (Y,\sigma^i)$ neprekidna za $i=1,2$;

(b) uzajamno otvoreno ako su f_i , $i=1,2$, otvorena preslikavanja;

(c) uzajamno zatvoreno ako su f_i , $i=1,2$, zatvorena preslikavanja;

(d) uzajamni homeomorfizam ako je f uzajamno neprekidna i uzajamno otvorena bijekcija, tj. ako su f_i , $i=1,2$, homeomorfizmi;

(e) uzajamno utapanje ako su preslikavanja f_i , $i=1,2$, utapanja topoloških prostora, tj. ako je (X,τ^1,τ^2) uzajamno homeomorfan potprostoru prostora (Y,σ^1,σ^2). (Vid. [48] i [63].)

Osobinu bitopoloških prostora koja se čuva pri uzajamnom homeomorfizmu nazivamo bitopološkom invarijantom.

Sledeće pojmove kvaziotvorenog, kvazizatvorenog skupa i druge, uveo je M. C. Datta u [9].

D e f i n i c i j a 1.8. U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) skup je kvaziotvoren ako je unija skupova iz kolekcije $\tau^1\cup\tau^2$; skup je kvazizatvoren ako je komplement kvaziotvorenog skupa; kvaziadherencija $\bar{A}$ skupa A jednaka je preseku τ^i adherencija skupa A za $i=1,2$, tj. $\bar{A}=\bar{A}^1\cap\bar{A}^2$, pri čemu je sa $\bar{A}^i\equiv\tau^i clA$ označena adherencija skupa A u prostoru (X,τ^i), $i=1,2$.

Neposredno se vidi da je svaki kvazizatvoren skup jednak preseku jednog τ^1 zatvorenog i jednog τ^2 zatvorenog skupa, kao i da je kvaziadherencija $\bar{A}$ skupa A kvazizatvoren skup.

Važi sledeći

S t a v 1.2. Operator kvaziadherencije u bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) ima sledeće osobine:

1^0 $A\subset X$ je kvazizatvoren ako i samo ako je $A=\bar{A}$;

2^0 $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$ za svaki $A\subset X$;

3^0 $A\subset B \Rightarrow \bar{A}\subset\bar{B}$ za sve $A,B\subset X$;

4^0 $\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$ za sve $A,B\subset X$;

5^0 $\tau^i cl\bar{A}=\tau^i clA$ za svaki $A\subset X$ i $i=1,2$.

D o k a z . 1^0 Ako je A kvazizatvoren skup, to je $A=A_1\cap A_2$, gde je $A_i=\bar{A}^i$, tj. A_i je zatvoren skup u (X,τ^i), $i=1,2$. Sledi da je $\bar{A}^i\subset A_i$, $i=1,2$, pa je $\bar{A}=\bar{A}^1\cap\bar{A}^2\subset A_1\cap A_2=A$.Kako je uvek $A\subset\bar{A}$, sledi $A=\bar{A}$. Obrnuta implikacija sledi iz definicije.

2^0 Jednakost sledi iz 1^0 jer je $\bar{A}$ kvazizatvoren skup i $\bar{\bar{A}}\equiv\overline{(\bar{A})}=\bar{A}$.

3^0 Iz $A\subset B \Rightarrow \bar{A}^i\subset\bar{B}^i$ za $i=1,2$, sledi $\bar{A}\subset\bar{B}$.

4^0 Inkluzija se dobija iz 3^0 jer iz $A\subset A\cup B$ i $B\subset A\cup B$ sledi $\bar{A}\subset\overline{A\cup B}$ i $\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$.

5^0 $\bar{A}\subset\bar{A}^i \Rightarrow \tau^i\text{cl}\bar{A}\subset\tau^i\text{cl}\bar{A}^i=\bar{A}^i$ za $i=1,2$, i zbog $A\subset\bar{A}$, sledi jednakost. ∇

Napomenimo da kolekcija kvaziotvorenih skupova u bitopološkom prostoru X ne mora biti topologija na skupu X. Ona zadovoljava uslov da je unija kvaziotvorenih skupova kvaziotvoren skup,ali presek dva kvaziotvorena skupa ne mora biti kvaziotvoren, što pokazuje

PRIMER 1.1. Neka je $X=R$, τ^1 topologija levih intervala, koju ćemo ubuduće označavati sa $\mathcal{L}$ i τ^2 topologija desnih intervala, koju ćemo označavati sa $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{L} = \{(-\infty,a)\mid a\in R\}\cup\{\emptyset,\ R\} \text{ i } \mathcal{D} = \{(a,+\infty)\mid a\in R\}\cup\{\emptyset,\ R\}.$$

Nijedan skup $(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,+\infty)$, gde je $a<b$, nije kvaziotvoren u $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ jer nije unija elemenata iz $\mathcal{L}\cup\mathcal{D}$.

Gornji primer pokazuje da u relaciji 4^0 Stava 1.3 ne važi jednakost u opštem slučaju. Za svaku tačku x iz $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ je $\overline{\{x\}}^1=[x,+\infty)$, $\overline{\{x\}}^2=(-\infty,x]$ i $\overline{\{x\}}=[x,+\infty)\cap(-\infty,x]=\{x\}$, dok je za dve tačke x i y, za koje je $x<y$,

$$\overline{\{x,y\}} = [x,+\infty)\cap(-\infty,y] = [x,y] \neq \{x,y\} = \overline{\{x\}}\cup\overline{\{y\}}.$$

Ako se sa I označi skup $[0,1]\subset R$, a sa $\mathcal{L}_I$ i $\mathcal{D}_I$ topologije na I indukovane topologijama levih i desnih intervala, tada je preslikavanje $f:(X,\tau^1,\tau^2)\to[0,1]$ τ^i l.s.c. i τ^j u.s.c. ($i,j\in\{1,2\}$ i $i\neq j$) ako i samo ako je preslikavanje $f:(X,\tau^j,\tau^i)\to(I,\mathcal{L}_I,\mathcal{D}_I)$ uzajamno neprekidno.

Tada se Definicija 1.4 i Stav 1.1 mogu iskazati i na sledeći način:

D e f i n i c i j a 1.4'. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>(i,j)-potpuno regularan</u> ako za svaki τ^i zatvoren skup F i svaku tačku $x\in X-F$ postoji uzajamno neprekidno preslikavanje

$f:(X,\tau^j,\tau^i)\to(I,\mathcal{L}_I,\mathcal{D}_I)$ takvo da je $f(F)=\{0\}$ i $f(x)=1$.

S t a v 1.1′. Ako je (X,τ^1,τ^2) p-normalan prostor, tada za svaki τ^1 zatvoren skup F i svaki τ^2 zatvoren skup H za koje je $F\cap H=\emptyset$, postoji uzajamno neprekidna funkcija $f:(X,\tau^2,\tau^1)\to(I,\mathcal{L}_I,\mathcal{D}_I)$ takva da je $f(F)=\{0\}$ i $f(H)=\{1\}$.

D e f i n i c i j a 1.9. ([9]) Preslikavanje $f:(X,\tau^1,\tau^2)\to(Y,\sigma^1,\sigma^2)$ je <u>kvazineprekidno</u> ako je inverzna slika svakog kvaziotvorenog skupa iz Y kvaziotvoren skup u X .

P o s l e d i c a 1.1. Svaka uzajamno neprekidna funkcija je kvazineprekidna.

Obrnuto tvrdjenje u opštem slučaju ne važi. Dovoljno je uzeti $X=Y$, $\tau^1=\sigma^1=\sigma^2$ je diskretna topologija a τ^2 antidiskretna. Ako skup X ima bar dva elementa, identično preslikavanje nije uzajamno neprekidno, mada je kvazineprekidno.

D e f i n i c i j a 1.10. ([9]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>kvazi-Hausdorffov</u> (<u>q</u>T_2) ako za svake dve različite tačke postoje disjunktni kvaziotvoreni skupovi koji ih sadrže .

Iz Definicija 1.1 i 1.10 neposredno sledi

P o s l e d i c a 1.2. Svaki pT_2 bitopološki prostor je qT_2 prostor.

Da obrnuto ne važi, pokazuje Primer 1.1. Prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ je kvazi-Hausdorffov ali nije uzajamno Hausdorffov jer za tačke x i y, za koje je $x>y$, svaki $\mathcal{L}$ otvoren skup koji sadrži tačku x sadrži i tačku y, i svaki $\mathcal{D}$ otvoren skup koji sadrži tačku y sadrži i tačku x .

Sledeće pojmove semiotvorenog skupa, semizatvorenog, i druge, uveo je takodje Datta ([9]).

U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) označavaćemo sa $\tau=\tau^1\vee\tau^2$ supremum topologiju na skupu X za topologije τ^1 i τ^2, tj. topologiju čija je predbaza kolekcija $\tau^1\cup\tau^2$.

D e f i n i c i j a 1.11. U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) skup je semiotvoren ako je element topologije τ ; skup je semizatvoren ukoliko je τ zatvoren. Prostor je semi-Hausdorffov (sT_2) ako je topološki prostor (X,τ) Hausdorffov. Preslikavanje $f:(X,\tau^1,\tau^2)\to(Y,\sigma^1,\sigma^2)$ je seminéprekidno ako je neprekidno kao preslikavanje topoloških prostora sa supremum topologijama $\tau=\tau^1\vee\tau^2$ i $\sigma=\sigma^1\vee\sigma^2$.

Iz definicija neposredno sledi da je svaki τ^i otvoren skup , i=1,2, kvaziotvoren i da je svaki kvaziotvoren skup semiotvoren. Dualno, svaki τ^i zatvoren skup je kvazizatvoren i svaki kvazizatvoren skup je semizatvoren. Iz definicija je jasno da ovi pojmovi nisu ekvivalentni, a iz primera 1.1 se to neposredno vidi.

Takodje,svaki qT_2 prostor je sT_2 prostor, dok obrnuto ne važi u opštem slučaju, što pokazuje

PRIMER 1.2. Neka je $X=\{a,b,c\}$, $\tau^1=\{\emptyset,\{a,b\},X\}$, $\tau^2=\{\emptyset,\{c\},\{a,c\},\{b,c\}, X\}$. Topologija τ je diskretna i prostor (X,τ) je Hausdorffov, dok (X,τ^1,τ^2) nije qT_2 jer se tačke a i b ne mogu razdvojiti kvaziotvorenim skupovima.

Takodje, i svako kvazineprekidno preslikavanje f bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) u prostor (Y,σ^1,σ^2) je semineprekidno,jer je inverzna slika svakog predbaznog elementa topologije $\sigma=\sigma^1\vee\sigma^2$ kvaziotvoren, a stoga i semiotvoren, skup u X . Da obrnuto u opštem slučaju ne važi, pokazuje primer iz [9] .

S t a v 1.3. Neka je (X,τ^1,τ^2) bitopološki proizvod familije $\{(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ bitopoloških prostora. Projekcije $p_\lambda:X\to X_\lambda$ su uzajamno neprekidne, a stoga i kvazineprekidne, odnosno semineprekidne, funkcije. (Vid.[5] i [9].)

Navodimo sada tvrdjenje koje ćemo kasnije koristiti.

L e m a 1.1. Ako su Φ_i, i=1,2, predbaze topologija Ψ_i na nekom skupu X, tada je $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$ predbaza topologije $\Psi=\Psi_1\vee\Psi_2$ na X .

D o k a z . Označimo sa Θ topologiju na skupu X koja za predbazu ima kolekciju Φ . Iz $\Phi_i \subset \Psi_i$ za $i=1,2$ sledi da je $\Theta \subset \Psi$. Da je $\Psi \subset \Theta$,dovoljno je dokazati da svaki predbazni element topologije Ψ pripada Θ , tj. da je $\Psi_i \subset \Theta$ za $i=1,2$. A to sledi iz inkluzija $\Phi_i \subset \Phi \subset \Theta$ i činjenice da je Θ topologija na X . ∇

Pored već uvedenih aksioma separacije, u bitopološkim prostorima su razmatrane i sledeće, za koje prihvatamo nazive kao u [61].

D e f i n i c i j a 1.12. ([44]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>slabo uzajamno T_0</u> (<u>wpT_0</u>) prostor ako za dve različite tačke iz X postoji τ^1 otvoren ili τ^2 otvoren skup koji sadrži jednu od tačaka ali ne i drugu.

D e f i n i c i j a 1.13. ([21]) Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>uzajamno T_0</u> (<u>pT_0</u>) ako za svaki uredjen par različitih tačaka x i y iz X postoji τ^1 otvoren skup U takav da $x \in U$ i $y \notin U$, ili postoji τ^2 otvoren skup V takav da $y \in V$ i $x \notin V$.

D e f i n i c i j a 1.14. ([63]) Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>slabo uzajamno T_1</u> (<u>wpT_1</u>) ako za svake dve različite tačke iz X bar jedna ima τ^1 okolinu koja ne sadrži drugu tačku, dok druga tačka ima τ^2 okolinu koja ne sadrži prvu tačku.

D e f i n i c i j a 1.15. ([54]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>uzajamno T_1</u> (<u>pT_1</u>) ako za svaki uredjen par različitih tačaka x i y iz X postoje τ^1 otvoren skup U i τ^2 otvoren skup V takvi da je $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ i $x \notin V$.

D e f i n i c i j a 1.16. ([63]) Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>slabo uzajamno T_2</u> (<u>wpT_2</u>) prostor ako za svake dve različite tačke iz X postoje disjunktni τ^1 otvoren skup U i τ^2 otvoren skup V takvi da jedna od tačaka pripada skupu U a druga skupu V.

Iz navedenih definicija neposredno sledi da su osobine pT_k i wpT_k za $k=0,1,2$; (1,2)-regularnost i (1,2)-potpuna regularnost, kao i p-regularnost, nasledna svojstva.

Kombinovanjem aksioma wpT_1 i pT_1 sa aksiomama regularnosti i normalnosti dolazi se do pojmova <u>slabo uzajamno T_3</u> (<u>wpT_3</u>) i <u>uzajamno T_3</u> (<u>pT_3</u>) prostora, odnosno <u>slabo uzajamno T_4</u> (<u>wpT_4</u>) i <u>uzajamno T_4</u> (<u>pT_4</u>) bitopološkog prostora.

Veze medju gore navedenim aksiomama separacije mogu se predstaviti sledećim dijagramom ([61]):

$$\begin{array}{ccccccccc} pT_4 & \Rightarrow & pT_3 & \Rightarrow & pT_2 & \Rightarrow & pT_1 & \Rightarrow & pT_0 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ wpT_4 & \Rightarrow & wpT_3 & \Rightarrow & wpT_2 & \Rightarrow & wpT_1 & \Rightarrow & wpT_0 \end{array}$$

Da slabe (wpT_k) i jake (pT_k) aksiome uzajamne separacije nisu ekvivalentne, pokazuje primer 1.1. Prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ zadovoljava sve gore navedene wpT_k aksiome, ali ne zadovoljava nijednu od pT_k aksioma za $k=0,1,\dots,4$.

S t a v 1.4. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je pT_1 prostor ako i samo ako su (X,τ^1) i (X,τ^2) T_1-prostori. (Vid. [54].)

Primetimo da je od navedenih aksioma uzajamne separacije samo svojstvo pT_1 prostora (X,τ^1,τ^2) ekvivalentno T_1 osobini prostora (X,τ^1) i (X,τ^2).

S druge strane, ako su topologije τ^1 i τ^2 jednake, tada se sve ove definicije svode na odgovarajuće definicije za topološke prostore.

Navedimo samo da su pored ovih ispitivani i uzajamno Tihonovljevi prostori ($pT_{3\frac{1}{2}}$) kao i slabo uzajamno $T_{3\frac{1}{2}}$ prostori. (Vid. [54] i [61].)

D. Adnadjević ([3]), I. L. Reilly ([54]) i B. P. Dvališvili ([16]) dali su i karakterizacije aksioma separacije bitopoloških prostora pomoću konvergencije. Važi

S t a v 1.5. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je pT_2 prostor ako i samo ako ne postoji uopšteni niz koji u odnosu na obe topologije konvergira dvema različitim tačkama. (Vid. [16].)

N.A. Šanin ([64]) i A.S. Davis ([11]) uveli su u topološke prostore aksiome regularnosti R_0 i R_1, pri čemu, ako se sa R_2 označi aksioma regularnog prostora, važi

$$R_2 \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_0 .$$

Takodje važi i sledeća "faktorizacija" T_k aksioma:

$$T_k = R_{k-1} + T_{k-1} = R_{k-1} + T_0$$

za $k=1,2$. (Vid. [11].)

D e f i n i c i j a 1.17. ([11]) Topološki prostor (X,τ) je R_0-prostor ako svaki otvoren skup zajedno sa svakom svojom tačkom x sadrži i skup $\overline{\{x\}}$.

D e f i n i c i j a 1.18. ([11]) Topološki prostor (X,τ) je R_1-prostor ako za svake dve tačke x i y iz X takve da je $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $\overline{\{x\}}\subset U$ i $\overline{\{y\}}\subset V$.

Neposredno se proverava da je uslov da je prostor (X,τ) R_1-prostor — ekvivalentan sledećim:

(i) Za svake dve tačke x i y iz X takve da je $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x\in U$ i $y\in V$.

(ii) Za svake dve tačke x i y takve da $x\notin\overline{\{y\}}$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x\in U$ i $y\in V$.

Zaista, ako je (X,τ) R_1-prostor, tada važi (i) i (ii). Dokažimo da je (X,τ) R_1-prostor ako je ispunjen uslov iz (ii). Prvo, ako važi uslov iz (ii), tada je (X,τ) R_0-prostor, jer za $x\in G$ i $G\neq X$, za svaki $y\in G^c$ sledi $\overline{\{y\}}\subset G^c$, te postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V da je $x\in U$ i $y\in V$. Stoga $\overline{\{x\}}\subset V^c\subset\{y\}^c$.

Sledi da $\overline{\{x\}}\subset \bigcap_{y\in G^c} (\{y\}^c) = (\bigcup_{y\in G^c} \{y\})^c = G$. Stoga, ako u prostoru (X,τ) važi uslov iz (ii), neka su x i y dve tačke iz X takve da je $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$. Tada $x\notin\overline{\{y\}} \vee y\notin\overline{\{x\}}$. Bez ograničenja opštosti pretpostavimo da $x\notin\overline{\{y\}}$. Postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V da je $x\in U$ i $y\in V$. Kako je (X,τ) R_0-prostor, sledi da je $\overline{\{x\}}\subset U$ i $\overline{\{y\}}\subset V$, što je i trebalo dokazati.

Topološke R_0-prostore ispitivao je S.A. Naimpally ([46])

a M.G. Murdeshwar i S.A. Naimpally ([45]) uopštavaju ove pojmove za slučaj bitopoloških prostora.

D e f i n i c i j a 1.19. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno R_0 (pR_0) prostor ako za svaki $G\in\tau^i$, iz $x\in G$ sledi $\tau^j cl\{x\}\subset G$, za $i,j=1,2$ i $i\neq j$.

D e f i n i c i j a 1.20. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je MN-uzajamno R_1 (MN-pR_1) prostor ako za svake dve tačke x i y iz X, takve da je $\overline{\{x\}}^j \neq \overline{\{y\}}^i$, postoje $U\in\tau^i$ i $V\in\tau^j$ takvi da $x\in U$, $y\in V$ i $U\cap V=\emptyset$, za $i,j=1,2$ i $i\neq j$.

Iako se, kada su topologije τ^1 i τ^2 jednake, ove definicije podudaraju sa odgovarajućim za topološke prostore, definicija MN-pR_1 prostora je suviše jaka da bi se u bitopološkim prostorima očuvao odnos

$$\text{p-regularnost} \Rightarrow \text{MN-}pR_1 \Rightarrow pR_0$$

što pokazuje primer 1.1. (Vid.[58])

Stoga I.L. Reilly ([58]), polazeći ne od ekvivalenta (i) za osobinu R_1-prostora, već od (ii), definiše za bitopološke prostore osobinu uzajamno R_1 prostora u slabijoj formi.

D e f i n i c i j a 1.21. Prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno R_1 (pR_1) prostor ako za svake dve tačke x i y iz X takve da $x\notin\overline{\{y\}}^i$ postoje $U\in\tau^i$ i $V\in\tau^j$ takvi da $x\in U$, $y\in V$ i $U\cap V=\emptyset$ za $i,j\in\{1,2\}$ i $i\neq j$.

Iz definicija neposredno sledi da

$$\text{MN-}pR_1 \Rightarrow pR_1 \quad \text{i} \quad \text{p-regularnost} \Rightarrow pR_1 \Rightarrow pR_0 ,$$

kao i da se u slučaju $\tau^1=\tau^2$ osobina pR_1 svodi na osobinu R_1 topoloških prostora. (Vid.[58].)

Primetimo da su i osobine pR_0, pR_1 i MN-pR_1 nasledna svojstva.

Analogno "faktorizaciji" za topološke prostore, I.L. Reilly ([57]) je dokazao da važi

S t a v 1.6. Bitopološki prostor je pT_1 prostor ako i samo ako je pT_0 i pR_0 prostor.

i da se uslov pT_0 ne može zameniti uslovom wpT_0 .

Ispitujući uzajamno R_0 prostore D.N. Misra i K.K. Dube ([37]) su dokazali da svaki slabo uzajamno T_0 uzajamno R_0 bitopološki prostor jeste slabo uzajamno T_1 , ali da obrnuto ne važi.

Važi takodje

S t a v 1.7. ([58]) Bitopološki prostor je pT_2 prostor ako i samo ako je pT_1 i pR_1 prostor.

1.2. KOMPAKTNOST BITOPOLOŠKIH PROSTORA

D e f i n i c i j a 1.22. Pokrivač $\mathcal{P}$ bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) je <u>kvaziotvoren</u> ako je $\mathcal{P}\subset\tau^1\cup\tau^2$. Ako, još, $\mathcal{P}$ sadrži i bar jedan neprazan τ^1 otvoren skup kao i bar jedan neprazan τ^2 otvoren skup, pokrivač $\mathcal{P}$ je <u>uzajamno otvoren</u>.(Vid. [63] i [21].)

Y.W. Kim ([27]) i P. Fletcher, H.B. Hoyle III i C.W. Patty ([21]) daju ekvivalentne definicije uzajamne kompaktnosti bitopoloških prostora (Vid.[8]).

D e f i n i c i j a 1.23. Bitopološki prostor je <u>uzajamno kompaktan</u> (<u>p-kompaktan</u>) ako svaki njegov uzajamno otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

Važe sledeća tvrdjenja:

S t a v 1.8. ([58]) Uzajamno kompaktan pR_1 bitopološki prostor je p-regularan i p-normalan.

S t a v 1.9. ([56]) Uzajamno kompaktan p-regularan bitopološki prostor je p-normalan.

S t a v 1.10. ([53]) Ako je (X,τ^1,τ^2) uzajamno kompaktan prostor i ako je C τ^1 zatvoren pravi podskup od X , tada je C uzajamno kompaktan i τ^2 kompaktan skup.

S t a v 1.11. ([21]) Ako je (X,τ^1,τ^2) pT_2 prostor a (X,τ^i) su kompaktni topološki prostori za $i=1,2$, tada je $\tau^1=\tau^2$.

S t a v 1.12. ([27]) Uzajamna kompaktnost je invarijanta uzajamno neprekidnih preslikavanja.

Takodje, svaki uzajamno kompaktan pT_2 prostor je maksimalan uzajamno kompaktan i minimalan pT_2 prostor, što odgovara poznatom stavu za topološke prostore (Vid. [51].)

Primetimo da p-kompaktnost bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) ne implicira kompaktnost topoloških prostora (X,τ^1) i (X,τ^2), što pokazuje i primer 1.1.

Takodje, postoje bitopološki prostori koji su pT_2 i p-kompaktni, a da im topologije nisu jednake. (Vid. primer 4 iz [21].)

Medjutim, proizvod dva p-kompaktna prostora ne mora biti p-kompaktan prostor. Dovoljno je uzeti dve kopije prostora $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ iz primera 1.1. (Vid. [63].)

Kompaktnost bitopoloških prostora ispituju takodje T. Bîrsan([6]), J. Swart ([63]), M.C. Datta ([9] i [10]), M. J. Saegrove ([61]).

D e f i n i c i j a 1.24. ([6]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je τ^1 <u>kompaktan u odnosu na</u> τ^2 ako se u svaki τ^1 otvoren pokrivač skupa X može upisati konačan τ^2 otvoren potpokrivač. Prostor je <u>B-uzajamno kompaktan</u> ako je τ^1 kompaktan u odnosu na τ^2 i τ^2 kompaktan u odnosu na τ^1 .

Iako se za slučaj kada je $\tau^1=\tau^2$ i B-uzajamna kompaktnost podudara sa kompaktnošću topoloških prostora, ona se razlikuje od uzajamne kompaktnosti bitopoloških prostora. Kao što pokazuje primer iz [6], bitopološki prostor sa konačnim brojem elemenata ne mora biti B-uzajamno kompaktan, ali ukoliko je (X,τ^1,τ^2) τ^1 kompaktan u odnosu na τ^2 , tada je prostor (X,τ^1) kompaktan; kao i , ako je (X,τ^1,τ^2) B-uzajamno kompaktan prostor, tada su prostori (X,τ^i), $i=1,2$, kompaktni. Ukoliko je još (X,τ^1,τ^2) i pT_2 prostor, tada je $\tau^1=\tau^2$.

B-uzajamna kompaktnost nije invarijanta uzajamno neprekidnih preslikavanja, što pokazuje primer 10 iz [6]. Ona je invarijanta uzajamno neprekidnih uzajamno otvorenih preslikavanja i za nju važi uopštenje teoreme Tihonova o proizvodu. (Vid. [6].)

J. Swart ([63]) uvodi 1970. godine novi pojam kompaktnosti bitopoloških prostora koji ćemo nazvati kvazikompaktnošću.

D e f i n i c i j a 1.25. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>kvazikompaktan</u> ako svaki kvaziotvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

Ako je $\tau=\tau^1\vee\tau^2$, supremum topologija za τ^1 i τ^2, tada, na osnovu Alexanderove teoreme o predbazi (vid. npr. [26]), bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako je topološki prostor (X,τ) kompaktan. Istu ovu definiciju koristio je i M.C. Datta([9])u ispitivanju bitopoloških prostora nazivajući takav prostor semikompaktnim.

S t a v 1.13. ([8]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako je p-kompaktan, τ^1 kompaktan i τ^2 kompaktan.

Iz stavova 1.11 i 1.12 dobija se

P o s l e d i c a 1.3. Ako je bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan i pT_2 prostor, tada je $\tau^1=\tau^2$.

Medjutim, kompaktnost prostora (X,τ^1) i (X,τ^2) ne implicira u opštem slučaju kvazikompaktnost prostora (X,τ^1,τ^2), što pokazuju i primeri 2.3. i 2.4.

S t a v 1.14. Bitopološki proizvod neprazne familije kvazikompaktnih prostora je kvazikompaktan. (Vid. [63].)

S t a v 1.15. (1) Svaki semizatvoren podskup kvazikompaktnog bitopološkog prostora je kvazikompaktan skup.
(2) Kvazineprekidna slika kvazikompaktnog skupa je kvazikompaktan skup. (Vid.[9].)

Iz tvrdjenja (1) stava 1.15. sledi da je svaki kvazizatvoren, τ^1 zatvoren, kao i τ^2 zatvoren podskup kvazikompaktnog bitopološkog prostora kvazikompaktan skup.

S t a v 1.16. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako:

(1) svaka familija kvazizatvorenih skupova koja ima osobinu konačnog preseka ima neprazan presek;

(2) svako centrirano mnoštvo semizatvorenih skupova sa osobinom konačnog preseka ima neprazan presek.

D o k a z . (1) Ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan skup i Ψ familija kvazizatvorenih skupova takva da je $\bigcap\{F\in\Psi\} = \emptyset$, tada je kolekcija $\mathcal{P} =\{F^c|F\in\Psi\}$ kvaziotvoren pokrivač prostora X .Kako je X kvazikompaktan skup, postoji konačan potpokrivač $\mathcal{P}_1=\{F_k^c|k=1,\dots,n\}$ prostora X.

Iz $X = \bigcup_{k=1}^{n} F_k^c$ sledi da je $\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \emptyset$,pa Ψ nema osobinu konačnog preseka.

Slično se dokazuje i obrnuto tvrdjenje.

(2) Tvrdjenje je ekvivalent definiciji kompaktnosti topološkog prostora (X,τ), gde je $\tau=\tau^1\vee\tau^2$. ∇

Swart takodje razmatra problem kompaktifikacije bitopološkog prostora jednom tačkom.

D e f i n i c i j a 1.26. Za bitopološki prostor $(X_\infty,\tau_\infty^1, \tau_\infty^2)$ kažemo da je dobijen od prostora (X,τ^1,τ^2) <u>kvazikompaktifikacijom jednom tačkom</u> ukoliko je

$X_\infty=X\cup\{\infty\}$, $\infty\notin X$ i

$\tau_\infty^i=\tau^i\cup\{V\cup\{\infty\}|X-V$ je τ^i zatvoren i kvazikompaktan skup u $(X,\tau^1,\tau^2)\}$

za $i=1,2$.

S t a v 1.17. Svaki bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) može se utopiti u kvazikompaktan prostor $(X_\infty,\tau_\infty^1,\tau_\infty^2)$, gde je $(X_\infty,\tau_\infty^1,\tau_\infty^2)$ prostor dobijen od (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktifikacijom jednom tačkom (Vid. [63].)

Pored ovih, razmatrane su i druge definicije kompaktnosti bitopoloških prostora. (Vid. [61] i [8].)

Primetimo na kraju ovog odeljka da se, ukoliko su topologije τ^1 i τ^2 jednake, tj. ako je $\tau^1=\tau^2=\tau$, svaka od razmatranih definicija kompaktnosti bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) svodi na kompaktnost topološkog prostora (X,τ). (Pri tom podrazumevamo da je topološki prostor kompaktan ako svaki otvoren pokrivač prostora ima konačan potpokrivač.)

1.3. KONEKSNOST BITOPOLOŠKIH PROSTORA

Pojam koneksnosti bitopoloških prostora uvodi W.J. Pervin ([48]) 1967. godine.

D e f i n i c i j a 1.27. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>uzajamno koneksan</u> (<u>p-koneksan</u>) ako se ne može predstaviti kao unija dva neprazna disjunktna skupa A i B takva da je A τ^1 otvoren a B τ^2 otvoren skup. Ako se, pak, X može tako predstaviti, par (A,B) se naziva razdvajanjem (diskoneksijom) prostora X i označava se sa $A|B$.

Iz definicije neposredno sledi da je $A|B$ razdvajanje prostora X ako i samo ako za neprazne disjunktne skupove A i B, takve da je $A\cup B=X$, važi:

(1) A je τ^2 zatvoren i B je τ^1 zatvoren;

(2) $(A\cap\tau^1\mathrm{cl}B)\cup(B\cap\tau^2\mathrm{cl}A)=\emptyset$.

D e f i n i c i j a 1.28. Podskup Y bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) je <u>uzajamno koneksan</u> (<u>p-koneksan</u>) ako je potprostor (Y,τ^1_Y,τ^2_Y) uzajamno koneksan.

Navešćemo samo neke osobine koneksnosti bitopoloških prostora koje su neposredna uopštenja stavova za topološke prostore. (Vid. [48].)

S t a v 1.18. Uzajamna koneksnost je invarijanta uzajamno neprekidnih preslikavanja.

S t a v 1.19. Ako je C uzajamno koneksan podskup bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) i ako je $A|B$ razdvajanje od X, tada ili $C\subset A$ ili $C\subset B$.

S t a v 1.20. Ako su svake dve tačke skupa C sadržane u nekom p-koneksnom podskupu od C, tada je C p-koneksan skup.

S t a v 1.21. Unija proizvoljne familije uzajamno koneksnih skupova koja ima neprazan presek je uzajamno koneksan skup.

S t a v 1.22. Ako je C p-koneksan skup u bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) i $C\subset E\subset \bar{C}^1\cap \bar{C}^2$, tada je E p-koneksan skup.

Interesantno je da se primeti da za razliku od topoloških prostora, τ^i adherencije p-koneksnih skupova ne moraju biti p-koneksni skupovi, kao što pokazuje primer iz [52].

S t a v 1.23. Bitopološki proizvod je p-koneksan ako i samo ako su svi koordinatni prostori p-koneksni. (Vid.[5].)

D e f i n i c i j a 1.29. <u>Komponenta uzajamne koneksnosti</u> bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) koja sadrži tačku x je najširi p-koneksan skup koji sadrži tačku x.

Za komponente uzajamne koneksnosti važi

S t a v 1.24. Za svaku komponentu C bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) je $C = \tau^1 clC\cap\tau^2 clC$, tj. $C = \check{C}$ je kvazizatvoren skup. (Vid.[48].)

S t a v 1.25. Komponenta uzajamne koneksnosti koja sadrži tačku x bitopološkog proizvoda (X,τ^1,τ^2) jednaka je direktnom proizvodu komponenti uzajamne koneksnosti tačaka x_λ (projekcija tačke x) u koordinatnim prostorima $(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)$. Vid.[5])

Pojam lokalne koneksnosti bitopoloških prostora uvodi T. Birsan ([5]) a osobine ovih prostora ispituju takodje i I.L. Reilly i S.N. Young ([59]).

D e f i n i c i j a 1.30. U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) topologija τ^1 je <u>lokalno koneksna u odnosu na</u> τ^2 (tj. prostor je (1,2)-lokalno koneksan) ako za svaku tačku ...

iz X i svaki τ^1 otvoren skup V koji sadrži x, postoji uzajamno koneksan τ^1 otvoren skup G takav da je $x \in G \subset V$. Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>uzajamno lokalno koneksan</u> (<u>p-lokalno koneksan</u>) ako je (1,2)-lokalno koneksan i (2,1)-lokalno koneksan.

S t a v 1.26. U (1,2)-lokalno koneksnom bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) komponente uzajamne koneksnosti su τ^1 otvoreni i τ^1 zatvoreni skupovi, tj. τ^1 otvoreno-zatvoreni skupovi. (Vid. [5].)

S t a v 1.27. Bitopolški proizvod je (1,2)-lokalno koneksan (odnosno p-lokalno koneksan) ako su svi koordinatni prostori (1,2)-lokalno koneksni (odnosno p-lokalno koneksni) i svi sem najviše konačno mnogo njih su uzajamno koneksni. (Vid. [5].)

Kvazikomponente bitopološkog prostora ispitivali su I.L. Reilly i S.N. Young ([59]) polazeći od sledeće relacije ekvivalencije u bitopološkom prostoru: dve tačke x i y su u relaciji S ako i samo ako se ne mogu razdvojiti nijednom diskoneksijom od X. Odatle sledi

D e f i n i c i j a 1.31. Neka je x tačka iz (X,τ^1,τ^2). Klasa ekvivalencije tačke x u odnosu na relaciju S je <u>kvazikomponenta</u> od x .

Analogno poznatim tvrdjenjima za topološke prostore važe sledeći stavovi. (Vid. [59].)

S t a v 1.28. (1) Svaka komponenta uzajamne koneksnosti je sadržana u kvazikomponenti.

(2) Svaka kvazikomponenta je unija komponenti.

(3) Kvazikomponenta je komponenta ako i samo ako je uzajamno koneksan skup.

(4) Za proizvoljnu kvazikomponentu Q prostora (X,τ^1,τ^2) je $Q = (\tau^1 \mathrm{cl} Q) \cap (\tau^2 \mathrm{cl} Q)$, tj. Q je kvazizatvoren skup.

S t a v 1.29. U uzajamno lokalno koneksnom bitopološkom prostoru svaka kvazikomponenta je komponenta.

neksnosti bitopoloških prostora.

D e f i n i c i j a 1.32. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je slabo uzajamno totalno diskoneksan (wp-totalno diskoneksan) ako za svake dve različite tačke x i y iz X postoji dikoneksija $U|V$ prostora X takva da jedna od tačaka pripada skupu U a druga skupu V.

D e f i n i c i j a 1.33. Prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno totalno diskoneksan (p-totalno diskoneksan) ako za svaki uredjen par (x,y) različitih tačaka iz X postoji diskoneksija $U|V$ prostora X takva da je $x\in U$ i $y\in V$.

Neposredno sledi da svaki wp-totalno diskoneksan (p-totalno diskoneksan) bitopološki prostor zadovoljava definiciju wpT_2 (pT_2) prostora, kao i da je svaki p-totalno diskoneksan prostor takodje wp-totalno diskoneksan.

Napomenimo da uvodjenje pojmova wp-totalno diskoneksnih,odnosno p-totalno diskoneksnih prostora, ima smisla jer, kao što pokazuje primer 2.2. iz [63], postoje wp-totalno diskoneksni prostori koji nisu p-totalno diskoneksni.

Swart ([63]) i Reilly ([52]) nezavisno dokazuju

S t a v 1.30. Komponente uzajamne koneksnosti wp-totalno diskonesnog bitopološkog prostora su jednočlani skupovi.

D e f i n i c i j a 1.34. ([5]) Bitopološki prostor je totalno diskoneksan (B-totalno diskoneksan) ako je komponenta uzajamne koneksnosti svake tačke jednočlan skup.

Ako je $\tau^1=\tau^2$, Swartove definicije bitopološke totalne diskoneksnosti podudaraju se sa definicijom totalne diskoneksnosti topoloških prostora (vid.[30]), tj. da je svaka kvazikomponenta jednočlan skup; dok se Birsanova definicija totalne diskoneksnosti podudara sa definicijom nasledno diskoneksnog prostora. (Vid.[18] ili [30].) Stoga, uprkos tvrdjenju Reilly-ja ([52]) da se ove definicije podudaraju, možemo reći da je svaki wp-totalno diskoneksan prostor i B-totalno diskoneksan, dok obrnuto ne mora da važi.

Analogno topološkom slučaju dokazujemo neposredno

S t a v 1.31. Bitopološki prostor je wp-totalno diskoneksan ako i samo ako su mu kvazikomponente uzajamne koneksnosti jednočlani skupovi.(Uporediti sa [59].)

Nula-dimenzionalnost bitopološkog prostora ispituje I. Reilly ([55]) polazeći od

D e f i n i c i j a 1.35. U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) topologija τ^1 je nula dimenziona u odnosu na τ^2 (tj. prostor je (1,2)-nula dimenzioni ako za svaku tačku x iz X i svaki otvoren skup U koji sadrži x, postoji τ^1 otvoren τ^2 zatvoren skup V takav da $x\in V\subset U$, tj. ako topologija τ^1 ima bazu koja se sastoji od τ^2 zatvorenih skupova.

Prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno nula dimenzioni (p-nula dimenzioni) ako je (1,2)-nula dimenzioni i (2,1)-nula dimenzioni.

Primer 2.2. iz [63] pokazuje da bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) može biti p-nula dimenzioni a da pritom topološki prostori (X,τ^1) i (X,τ^2) nisu nula dimenzioni. (Vid.[55].)

Važi sledeći

S t a v 1.32. Uzajamno nula dimenzioni i wpT_0 (odnosno pT_0) bitopološki prostor je wp-totalno diskoneksan (odnosno p-totalno diskoneksan). (Vid.[55])

2. LOKALNA KOMPAKTNOST U BITOPOLOŠKIM PROSTORIMA

2.1. LOKALNA KOMPAKTNOST

Različite definicije bitopološke lokalne kompaktnosti pojavile su se od 1969. godine do danas. Neke od njih baziraju na topološkoj τ^i kompaktnosti podskupova bitopološkog prostora (X,τ^1,τ^2) i korišćene su za ispitivanje metrizabilnosti kvazi-metričkih prostora. Takve su definicije R.A. Stoltenberga ([62]) i T.G. Raghavana i I.L. Reillyja ([50]). Drugi autori polaze od različitih definicija bitopološke kompaktnosti, definišu pojmove lokalne kompaktnosti bitopoloških prostora i ispituju uopštenja nekih osnovnih topoloških stavova koji se odnose na lokalno kompaktne prostore. Dobijeni rezultati mogu se naći u radovima T. Birsana ([6]), I.L. Reillyja ([53] i [58]), kao i mojim ([38] i [40]).

Navešćemo prvo do sada uvedene definicije bitopološke lokalne kompaktnosti.

D e f i n i c i j a 2.1. ([53]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>(1,2)-lokalno kompaktan</u> (označavaćemo <u>(1,2)-Rlc</u>) ako svaka tačka iz X ima τ^1 okolinu čija je τ^2 adherencija uzajamno kompaktan skup. Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>uzajamno lokalno kompaktan</u> (<u>R-plc</u>) ako je (1,2)-Rlc i (2,1)-Rlc prostor.

D e f i n i c i j a 2.2. ([40]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>(1,2)-lokalno kvazikompaktan</u> (<u>(1,2)-lqc</u>) ako svaka tačka prostora X ima τ^1 okolinu čija je τ^2 adherencija kvazikompaktan skup. Prostor je <u>uzajamno lokalno kvazikompaktan</u> (označavaćemo <u>plqc</u>) ako je (1,2)-lqc i (2,1)-lqc prostor.

D e f i n i c i j a 2.3. ([38]) Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>lokalno kvazikompaktan</u> (<u>lqc</u>) ako svaka tačka iz X ima τ^i

okolinu čija je τ^j adherencija kvazikompaktan skup, $i,j\in\{1,2\}$. Takodje, (X,τ^1,τ^2) je <u>lokalno semikompaktan</u> (označavaćemo <u>lsc</u>) ako svaka tačka ima τ okolinu sa τ kompaktnom τ adherencijom, tj. ako je topološki prostor (X,τ) lokalno kompaktan, gde je $\tau=\tau^1\vee\tau^2$.

D e f i n i c i j a 2.4. ([62]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>(1,2)-S-lokalno kompaktan</u> (označavaćemo <u>(1,2)-Slc</u>) ako svaka tačka iz X ima τ^1 okolinu čija je τ^2 adherencija τ^2 kompaktan skup. Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>S-uzajamno lokalno kompaktan</u> (<u>S-plc</u>) prostor ako je (1,2)-Slc i (2,1)-Slc prostor.

D e f i n i c i j a 2.5. ([50]) Prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>(1,2)-RR-lokalno kompaktan</u> (<u>(1,2)-RRlc</u>) ako svaka tačka iz X ima τ^2 okolinu koja je τ^1 kompaktan skup.

D e f i n i c i j a 2.6. ([6]) Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je <u>B-τ^i -lokalno</u> <u>τ^j-kompaktan u odnosu na</u> τ^k, gde su $i,j,k\in\{1,2\}$, ako svaka tačka iz X ima τ^i okolinu koja je τ^j kompaktna u odnosu na τ^k . Slično se definišu τ^i-lokalno B-uzajamno kompaktni prostori, B-uzajamno lokalno τ^i-kompaktni u odnosu na τ^j prostori, $i,j\in\{1,2\}$, itd.

Iz datih definicija neposredno imamo:

(1) Svaki uzajamno kompaktan bitopološki prostor je R-plc prostor.

(2) Kvazikompaktan bitopološki prostor je plqc prostor.

(3) Ako je jedan od prostora (X,τ^i), $i\in\{1,2\}$, kompaktan, tada prostor (X,τ^1,τ^2) ima osobinu (j,i)-Slc , gde je $j\in\{1,2\}$ i $j\neq i$.

(4) Ako je (X,τ^1,τ^2) τ^1-kompaktan u odnosu na τ^2, tada je on B-uzajamno lokalno τ^1 kompaktan u odnosu na τ^2. Takodje, ako je (X,τ^1,τ^2) B-τ^1-lokalno τ^2-kompaktan u odnosu na τ^1 ,on je B-τ^1-lokalno τ^2-kompaktan, tj. on je (2,1)-RRlc prostor. (Vid.[53],[40] i[6].)

Iz definicija 2.1 - 2.5 neposredno sledi da medju datim pojmovima lokalne kompaktnosti važi sledeći odnos:

$$\begin{array}{ccccccc}
S\text{-plc} & \Rightarrow & (1,2)\text{-Slc} & \Rightarrow & (2,1)\text{-RRlc} & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & & & \\
\text{plqc} & \Rightarrow & (1,2)\text{-lqc} & \Rightarrow & \text{lqc} & \Rightarrow & \text{lsc} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & & & \\
R\text{-plc} & \Rightarrow & (1,2)\text{-Rlc} & & & &
\end{array}$$

Primerima ćemo pokazati da nikoje dve od ovih definicija nisu ekvivalentne.

Prvo, ako su topologije τ^1 i τ^2 jednake, svaki od pojmova bitopološke lokalne kompaktnosti iz definicija 2.1 - 2.4 se podudara sa pojmom jake lokalne kompaktnosti, dok se u definiciji 2.5 on podudara sa pojmom slabe lokalne kompaktnosti. Pritom pod pojmom jake lokalne kompaktnosti topološkog prostora podrazumevamo da svaka tačka prostora ima okolinu čija je adherencija kompaktan skup; dok pod pojmom slabe lokalne kompaktnosti podrazumevamo postojanje kompaktne okoline za svaku tačku topološkog prostora. (Vid. [65], Remark 18.2.) Stoga, osobina (2,1)-RRlc prostora ne implicira nijednu lokalnu kompaktnost iz definicija 2.1 - 2.4.

Da pojmovi lokalne kvazikompaktnosti nisu medju sobom ekvivalentni, pokazuju sledeći primeri.

PRIMER 2.1. Neka je $X=R$, τ^1 diskretna topologija i τ^2 uobičajena topologija realne prave. Tada za svaku tačku $x\in X$ postoji τ^1 okolina $U_x=\{x\}$ čija je τ^2 adherencija $\bar{U}_x^2=\{x\}$ kvazikompaktan skup. Stoga je prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc prostor. On nije (2,1)-lqc prostor jer za svaki τ^2 bazni element $V_x=(a_x,b_x)$ proizvoljne tačke $x\in X$, je $\tau^1 clV_x=[a_x,b_x]$. Skup $[a_x,b_x]$ za $a_x<b_x$ nije kvazikompaktan jer nije τ^1 kompaktan. Dakle, (X,τ^1,τ^2) nije plqc prostor.

PRIMER 2.2. Neka je $X=R$, τ^1 topologija realne prave i τ^2 kofinitna topologija. Prostor (X,τ^1,τ^2) je lqc prostor jer za svaku tačku $x\in X$ postoji τ^1 okolina $U_x=(a,b)$ takva da je $\tau^1 clU_x=[a,b]$ kvazikompaktan skup. Prostor (X,τ^1,τ^2) nije (1,2)-lqc, niti je (2,1)-lqc prostor, jer za svaki τ^1 bazni element (a,b) skup $\tau^2 cl(a,b)=X$ nije kvazikompaktan skup. Takodje je za svaki τ^2 bazni element V_x njegova τ^1 adherencija jednaka X.

Primer 2.2 pokazuje da prostori (X,τ^1) i (X,τ^2) mogu biti lokalno kompaktni, ali da prostor (X,τ^1,τ^2)ne mora biti (1,2)-lqc prostor. Čak i više, prostori (X,τ^1) i (X,τ^2) mogu biti i kompaktni, a da (X,τ^1,τ^2) nije lqc prostor, pa stoga ni kvazikompaktan, kao što pokazuje

PRIMER 2.3. Neka je $X=(-1,0)\cup(0,1)\subset R$. Neka je $\mathcal{U}$ uobičajena topologija realne prave a $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ topologije indukovane topologijom $\mathcal{U}$ redom na podskupovima (-1,0) i (0,1). Neka su $\tau^i=\{\emptyset,X\}\cup\mathcal{U}_i$ za $i=1,2$. Ako je $x\in(-1,0)$ i $U_x=(a,b)$ njena τ^1 okolina takva da je $-1<a<x<b<0$, tada je $\tau^1 clU_x=[a,b]\cup(0,1)$ i $\tau^2 clU_x=(-1,0)$. Nijedan od ovih skupova nije kvazikompaktan. To takodje nije ni skup $X=\tau^1 clX=\tau^2 clX$ za jedinu τ^2 okolinu X tačke x. Stoga (X,τ^1,τ^2) nije lqc prostor. On je lsc prostor jer je topologija $\tau=\tau^1\vee\tau^2$ na X jednaka topologiji indukovanoj topologijom realne prave, pa je topološki prostor (X,τ) lokalno kompaktan.

Da S-plc prostor ne mora biti lsc , pa stoga nijedan od lokalno kvazikompaktnih prostora, pokazuje

PRIMER 2.4. Neka je $X=[0,1]\subset R$, $\tau^1=\{\emptyset,X\}\cup\{[0,a)|a\in X\}$ i $\tau^2=\{\emptyset, X,\{1\}\}$. Prostori (X,τ^1) i (X,τ^2) su kompaktni, pa je (X,τ^1,τ^2) S-plc prostor. Kako je baza topologije $\tau=\tau^1\vee\tau^2$ kolekcija $\{[0,a)|a\in[0,1]\}\cup\{\{1\}\}$, topološki prostor (X,τ) nije lokalno kompaktan, jer za tačku $0\in X$ i njenu proizvoljnu baznu okolinu $U=[0,a)$ skup $\tau clU=[0,1)$ nije τ kompaktan.

Uočeni primer ponovo pokazuje da ako su prostori (X,τ^i), $i=1,2$, kompaktni, prostor (X,τ^1,τ^2) ne mora biti kvazikompaktan.

Stoga, na osnovu stava 1.13, on nije uzajamno kompaktan. Čak i više, uočeni prostor nije ni (1,2)-Rlc prostor, niti je (2,1)--Rlc prostor; jedina τ^1 okolina tačke 1 i jedina τ^2 okolina tačke 0 je sam skup X, a on nije uzajamno kompaktan.

Stoga, iz osobine S-plc, pa sledstveno tome iz osobine (1,2)-Slc, odnosno (2,1)-Slc, ne sledi ni (1,2)-Rlc niti (2,1)--Rlc svojstvo.

Da R-plc prostor (X,τ^1,τ^2) ne mora biti (2,1)-RRlc prostor, pa stoga ni (1,2)-Slc prostor, pokazuje primer 1.1. Prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$, skup realnih brojeva sa topologijama levih i desnih intervala, je uzajamno kompaktan. Za svaki uzajamno otvoren pokrivač $\mathcal{P}$ prostora X postoje $\mathcal{L}$ otvoren skup $U=(-\infty,a)$ i $\mathcal{D}$ otvoren skup $V=(b,+\infty)$ takvi da $U\in\mathcal{P}$ i $V\in\mathcal{P}$. Ako je $U\cup V\neq X$, tada se iz pokrivača $\mathcal{P}$ skupa $[a,b]$ može izdvojiti konačan potpokrivač $\mathcal{P}_1$ skupa $[a,b]$, jer je $\mathcal{L}\cup\mathcal{D}\subset\mathcal{U}$, gde je $\mathcal{U}$ topologija realne prave. Tada konačna kolekcija $\mathcal{P}_1\cup\{U,V\}$ pokriva X i sadržana je u $\mathcal{P}$. Sledi da je $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ R-plc prostor. Medjutim, svaka τ^1 okolina U proizvoljne tačke x je nadskup skupa $(-\infty,a)$, za neki $a\in R$, i nije τ^2 kompaktan skup.

Primetimo da je prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ lsc prostor jer je topologija $\mathcal{U}=\mathcal{L}\vee\mathcal{D}$ topologija realne prave. Prostor nije lqc prostor jer za skupove $U=(-\infty,a)$ i $V=(a,+\infty)$, gde je $a\in R$, važi:

$$\overline{U}^1=X,\quad \overline{U}^2=(-\infty,a],\quad \overline{V}^1=[a,+\infty)\quad \text{i}\quad \overline{V}^2=X\ ,$$

i nijedan od njih nije kvazikompaktan.

Medutim, R-plc prostor ne mora u opštem slučaju zadovoljavati ni lsc aksiomu. To sledi iz sledećeg primera.

PRIMER 2.6. Neka je $X=R$, τ^1 topologija Sorgenfreyove prave i τ^2 kofinitna topologija. Kako je (X,τ^1,τ^2) uzajamno kompaktan prostor, on je i R-plc prostor. Topologija $\tau=\tau^1\vee\tau^2=\tau^1$, jer je $\tau^2\subset\tau^1$, a prostor (X,τ^1) nije lokalno kompaktan. Dakle, (X,τ^1,τ^2) nije lsc prostor.

Uočimo još

PRIMER 2.7. Neka je $X=(-1,1)\subset R$, τ^1 topologija čija je baza kolekcija $\{\{x\} \mid x\in(-1,0]\}\cup\{(a,b) \mid a,b\in[0,1)\}$, i simetrično, τ^2 topologija čija je baza kolekcija $\{(a,b) \mid a,b\in(-1,0]\}\cup\cup\{\{x\} \mid x\in[0,1)\}$. Za svaku tačku $x\in(-1,0]$ njena τ^1 okolina $\{x\}$ ima kvazikompaktnu τ^2 adherenciju $\{x\}$; kao i za svaku tačku $x\in(0,1)$, njena τ^2 okolina $\{x\}$ ima kvazikompaktnu τ^1 adherenciju $\{x\}$. Stoga je (X,τ^1,τ^2) lqc prostor. Medjutim, prostor nije ni (1,2)-Rlc, niti je (2,1)-RRlc prostor, pa stoga nije ni (1,2)-Slc prostor.

Medjutim, ako je bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) pT_2 prostor, tada su još neke od navedenih definicija bitopološke lokalne kompaktnosti uporedive. Važi

S t a v 2.1. Svaki R-plc i pT_2 bitopološki prostor je lsc prostor.

D o k a z . Neka je (X,τ^1,τ^2) pT_2 i R-plc prostor i neka je $x\in X$. Postoje τ^1 otvoren skup U i τ^2 otvoren skup V takvi da je $x\in U$ i $x\in V$, i da su skupovi $\bar{U}^2$ i $\bar{V}^1$ uzajamno kompaktni. Ako je $U=\{x\}$, kako su prostori (X,τ^1) i (X,τ^2) T_1-prostori, za topologiju $\tau=\tau^1\vee\tau^2$ skup U je τ okolina tačke x za koju je $\tau clU=\bar{U}=\bar{U}^1=\{x\}$ kvazikompaktan skup. Isto se dobija ako je $V=\{x\}$.

Ako je $U\neq\{x\}$, neka je $y\in U-\{x\}$. Kako je prostor pT_2, postoje τ^1 otvoren skup G i τ^2 otvoren skup H takvi da je $x\in G$, $y\in H$ i $G\cap H=\emptyset$. Skup $U^*=U\cap G\in\tau^1$ i $U^*\subset G\subset H^c$ pa je $\tau^2clU^*\subset\tau^2clH^c=H^c$. Stoga je τ^2clU^* pravi podskup od τ^2clU. Na osnovu stava 1.10, skup τ^2clU^* je uzajamno kompaktan i τ^1 kompaktan.

Na isti način, ako je $V\neq\{x\}$, postoji τ^2 otvorena okolina V^* tačke x takva da je skup τ^1clV^* uzajamno kompaktan i τ^2 kompaktan.

Neka je $W=U^*\cap V^*$. Tada $W\in\tau$, $\tau clW\subset\bar{W}=\tau^1clW\cap\tau^2clW\subset\subset\tau^1clV^*\cap\tau^2clU^*\equiv F$. Skup F je uzajamno kompaktan na osnovu stava 1.10, on je τ^2 zatvoren podskup τ^2 kompaktnog skupa τ^1clV^* pa je τ^2 kompaktan i, slično, F je τ^1 zatvoren podskup τ^1 kompaktnog skupa τ^2clU^* pa je τ^1 kompaktan. Stoga je, na osnovu stava 1.13, skup F kvazikompaktan, tj. F je τ kompaktan. Sledi da je skup τclW τ- kompaktan. Time je dokazano da je (X,τ^1,τ^2) lsc prostor. ∇

Kako postoje uzajamno kompaktni pT_2 prostori kod kojih se topologije ne podudaraju (vid. primer 4 iz [21]), to bitopološki prostor koji je R-plc i pT_2 ne mora biti plqc prostor niti S-plc prostor, na osnovu teoreme 2.3 kao i teoreme 2.2 iz [62].

Da ni u prisustvu pT_2 aksiome navedene definicije bitopološke lokalne kompaktnosti nisu ekvivalentne, pokazuje i

PRIMER 2.8. Neka je $X=R$, τ^1 topologija Sorgenfreyove prave i τ^2 topologija realne prave. Prostor (X,τ^1,τ^2) je pT_2 i (1,2)-Slc prostor jer je: $\tau^2 \subset \tau^1$, (X,τ^2) je Hausdorffov prostor i za svaku tačku $x \in X$ i njenu τ^1 baznu okolinu $[x, x+1)$ skup $\tau^2 cl[x, x+1) = [x, x+1]$ je τ^2 kompaktan skup. Medjutim, prostor (X,τ^1,τ^2) nije nijedan od lokalno kvazikompaktnih prostora, nije (1,2)-Rlc, niti je (2,1)-Rlc prostor.

Na kraju ovog odeljka razmotrićemo odnose izmedju pojmova bitopološke lokalne kompaktnosti datih u definicijama 2.1 - 2.5 i onih koje je definisao Birsan.

Mada pojmovi bitopološke lokalne kompaktnosti dati u definiciji 2.6 nisu potpuno nezavisni u odnosu na pojmove iz definicija 2.1 - 2.4, nijedan od B-lokalno kompaktnih prostora ne mora biti lokalno kompaktan na osnovu neke od definicija 2.1 - 2.4. Jer, ako su u prostoru (X,τ^1,τ^2) topologije jednake, tada se svaka B-lokalna kompaktnost podudara sa slabom lokalnom kompaktnošću topološkog prostora.

Da pojam B-τ^1-lokalno τ^2-kompaktnog prostora tj. (2,1)-RRlc prostora nije ekvivalentan pojmu B-τ^1-lokalno τ^2-kompaktnog u odnosu na τ^1, pokazuje

PRIMER 2.9. Neka je $X=\{a,b,c\}$, $\tau^1=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$ i $\tau^2=\{\emptyset,\{a,b\},\{c\},X\}$. Prostor X je konačan pa su i prostori (X,τ^1) i (X,τ^2) kompaktni, a (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan. Sledi da (X,τ^1,τ^2) zadovoljava uslove svake lokalne kompaktnosti iz definicija 2.1 - 2.5. Medjutim, prostor nije B-τ^1-lokalno τ^2-kompaktan u odnosu na τ^1 jer za tačku b i njene τ^1 okoline $U=\{b,c\}$ i X, prostori (U,τ^1_U,τ^2_U) i (X,τ^1,τ^2) nisu τ^2 kompaktni u odnosu na τ^1. U prvom slučaju, u τ^2_U otvoren pokrivač $\{\{b\},\{c\}\}$ skupa U ne može se upisati konačan τ^1_U otvoren potpokrivač; a u drugom, u τ^2 otvoren pokrivač $\{\{a,b\},\{c\}\}$ skupa X ne može se upisati konačan τ^1 otvoren potpokrivač.

Uočeni prostor je B-τ^1-lokalno τ^1-kompaktan u odnosu na τ^2.

PRIMER 2.10. Neka je $X=[0,1]\subset R$, τ^1 topologija na X indukovana topologijom realne prave, a τ^2 kofinitna topologija. Prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan i stoga, ponovo, zadovoljava uslove svake lokalne kompaktnosti iz definicija 2.1 - 2.5. Ali on nije B-τ^1-lokalno τ^1-kompaktan u odnosu na τ^2 niti je B-τ^2-lokalno τ^1-kompaktan u odnosu na τ^2, jer za svaku tačku $x\in X$ i svaku njenu τ^1 okolinu U postoji τ^1_U otvoren pokrivač skupa U u koji se ne može upisati τ^2_U otvoren potpokrivač.

PRIMER 2.11. Neka je $X=R$, τ^1 diskretna i τ^2 kofinitna topologija na X. Prostor (X,τ^1,τ^2) je pT_2 i (1,2)-lqc prostor, ali nije B-uzajamno lokalno uzajamno kompaktan, niti je B-τ^2-lokalno τ^1-kompaktan, pa stoga nije ni B-τ^2-lokalno τ^1-kompaktan u odnosu na τ^2, jer se topologije τ^1 i τ^2 ne podudaraju. (Vid. [6].) On je B-τ^1-lokalno uzajamno kompaktan, tj. B-τ^1-lokalno τ^2-kompaktan u odnosu na τ^1 i B-τ^1-lokalno τ^1-kompaktan u odnosu na τ^2, pa stoga B-τ^1-lokalno τ^2-kompaktan i B-τ^1-lokalno τ^1-kompaktan.

2.2. OSOBINE LOKALNO KOMPAKTNIH BITOPOLOSKIH PROSTORA

Ispitujući osobine uzajamno lokalno kompaktnih bitopoloških prostora, I.L. Reilly je pokazao da za R-plc prostore važe uopštenja nekih dobro poznatih stavova za topološke lokalno kompaktne prostore. Navešćemo samo neke od njih. (Vid. [53] i [58].)

S t a v 2.2. Ako je prostor (X,τ^1,τ^2) pR_1 i (1,2)-Rlc prostor, a A τ^1 otvoren skup u X, tada je potprostor (A,τ^1_A,τ^2_A) (1,2)-Rlc prostor.

S t a v 2.3. U pR_1 prostoru (X,τ^1,τ^2) sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-Rlc prostor.

(b) Za svaku tačku $x\in X$ i svaki τ^1 otvoren skup U koji sadrži x postoji τ^1 otvoren skup V takav da je $x\in V\subset\tau^2 clV\subset U$ i $\overline{V}^2$ je uzajamno kompaktan skup.

S t a v 2.4. Svaki pR_1 i R-plc bitopološki prostor je uzajamno regularan.

Birsan je u [6] takodje ispitivao osobine B-lokalno kompaktnih bitopoloških prostora, posebno pT_2 prostora, i dobio analogne rezultate u vezi sa uzajamnom regularnošću; takodje je dokazao da analogon teoreme o proizvodu lokalno kompaktnih prostora važi u slabijoj formi.

Nadalje ćemo ispitati još neke osobine lokalno kompaktnih bitopoloških prostora, posebno lokalno kvazikompaktnih i lokalno semikompaktnih prostora.

2.2.1. Proizvod lokalno kompaktnih bitopoloških prostora

T e o r e m a 2.1. Bitopološki proizvod (X,τ^1,τ^2) familije $\{(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ je (1,2)-lqc prostor ako i samo ako je svaki $(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)$ (1,2)-lqc prostor i svi koordinatni prostori, izuzev najviše konačno mnogo njih, su kvazikompaktni.

D o k a z. Neka je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc prostor. Za $\lambda\in\Lambda$ i tačku $x_{\lambda'}\in X_{\lambda'}$, uočimo tačku $x\in p_\lambda^{-1}(\{x_{\lambda'}\})$. Postoji τ^1 okolina U tačke x takva da je $\tau^2 clU$ kvazikompaktan skup. Neka je B bazni element topologije τ^1 takav da $x\in B\subset U$. Ako je

$B=\bigcap_{s=1}^{n} p^{-1}_{\lambda_s}(G_s)$, gde su $G_s\in\tau^1_{\lambda_s}$, tada je $\tau^2 clB=\tau^2 cl(\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda)=$

$=\prod_{\lambda\in\Lambda}(\tau^2_\lambda clY_\lambda)$, gde je $Y_\lambda=\begin{cases}G_s & \text{za } \lambda=\lambda_s\\ X_\lambda & \text{za } \lambda\neq\lambda_s\end{cases}$, $s=1,\dots,n$. Skup

$\tau^2 clB$ je kvazikompaktan na osnovu stava 1.15, projekcije $p_\lambda:(X,\tau^1,\tau^2)\to(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)$ su kvazineprekidne funkcije za svaki $\lambda\in\Lambda$ na osnovu stava 1.3, pa su, na osnovu stava 1.15, skupovi

$\tau^2_\lambda clY_\lambda$ kvazikompaktni za svaki $\lambda\varepsilon\Lambda$. Sledi da su svi X_λ, izuzev možda $X_{\lambda_1},\dots,X_{\lambda_n}$, kvazikompaktni, pa stoga i (1,2)-lqc prostori. Ako je $\lambda'\varepsilon\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, tada $x_{\lambda'}\varepsilon G_{\lambda'}\varepsilon\tau^1_{\lambda'}$ i $\tau^2_{\lambda'}clG_{\lambda'}$ je kvazikompaktan skup.

Obrnuto tvrdjenje teoreme 2.1 sledi iz stava 1.14. ∇

P o s l e d i c a 2.1. Bitopološki proizvod (X,τ^1,τ^2) familije $\{(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)|\lambda\varepsilon\Lambda\}$je plqc prostor ako i samo ako je svaki koordinatni prostor plqc prostor i svi, izuzev najviše konačno mnogo njih, su kvazikompaktni.

S t a v 2.5. Ako je bitopološki proizvod familije bitopoloških prostora lqc prostor, tada su svi koordinatni prostori lqc prostori i svi, sem najviše konačno mnogo njih, su kvazikompaktni.

D o k a z. Tvrdjenje se dokazuje analogno odgovarajućem iskazu teoreme 2.1. ∇

Da u stavu 2.5 ne važi obrnuto tvrdjenje, pokazuje

PRIMER 2.12. Neka je $X_1=X_2=[0,1]\subset R$, i neka su τ^1_1 i τ^2_2 diskretne topologije, a τ^2_1 i τ^1_2 topologije indukovane topologijom realne prave. Prostori (X_i,τ^1_i,τ^2_i) za $i=1,2$ su lqc prostori. (Vid. primer 2.1.) Ali proizvod (X,τ^1,τ^2) nije lqc prostor, jer za bazne okoline $U=(\{0\}\times[0,a))\varepsilon\tau^1$ i $V=([0,a)\times\{0\})\varepsilon\tau^2$ tačke (0,0) nijedan od skupova $\tau^1clU=\{0\}\times[0,a]$, $\tau^2clU=$ $=\{0\}\times[0,a)$, $\tau^1clV=[0,a)\times\{0\}$ i $\tau^2clV=[0,a]\times\{0\}$ nije kvazikompaktan.

T e o r e m a 2.2. Bitopološki proizvod (X,τ^1,τ^2) familije $\{(X_\lambda,\tau^1_\lambda,\tau^2_\lambda)|\lambda\varepsilon\Lambda\}$ je lsc prostor ako i samo ako su svi koordinatni prostori lsc prostori i svi, izuzev najviše konačnog broja njih, su kvazikompaktni.

D.o k a z. Neka je $\tau^*=\tau^1\vee\tau^2$ i neka su $\tau_\lambda=\tau^1_\lambda\vee\tau^2_\lambda$ supremum topologije za svako $\lambda\varepsilon\Lambda$. Ako je (X,τ) topološki proizvod familije $\{(X_\lambda,\tau_\lambda)|\lambda\varepsilon\Lambda\}$, tada važi

(Δ) $$\tau = \tau^* .$$

Zaista, na osnovu leme 1.1, predbazu topologije τ^* čini kolekcija $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$, gde je $\Phi_i=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{p_\lambda^{-1}(U)\,|\,U\in\tau_\lambda^i\}$ za $i=1,2$. Kako je $\tau_\lambda^i\subset\tau_\lambda$ za svaki $\lambda\in\Lambda$ i $i=1,2$, to je svaki element iz $\Phi_1\cup\Phi_2$ otvoren skup u prostoru (X,τ). Iz $\Phi\subset\tau$ sledi i $\tau^*\subset\tau$.

Obrnuto, ako je V predbazni element topologije τ, tada je $V\in\tau^*$. Ako je $V=p_\lambda^{-1}(U)$, gde je $U\in\tau_\lambda$, dovoljno je proveriti da $V\in\tau^*$ za slučaj kad je U predbazni element topologije τ_λ , tj. kad je $U\in\tau_\lambda^i$ za $i\in\{1,2\}$. Tada je $p_\lambda^{-1}(U)\in\tau^i\subset\tau^*$. Sledi da je $\tau\subset\tau^*$, što sa prethodnim daje jednakost (Δ).

Tvrdjenje teoreme 2.2 sada sledi iz odgovarajuće teoreme za topološke prostore. ∇

S t a v 2.6. Bitopološki proizvod (X,τ^1,τ^2) familije $\{(X_\lambda,\tau_\lambda^1,\tau_\lambda^2)\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ je (1,2)-Slc (odnosno (2,1)-RRlc) prostor ako i samo ako su svi koordinatni prostori (1,2)-Slc (odnosno (2,1)-RRlc) prostori i svi prostori $(X_\lambda,\tau_\lambda^2)$, izuzev najviše konačno mnogo njih, su kompaktni.

D o k a z. Tvrdjenje sledi neposredno iz definicija (1,2)-Slc i (2,1)-RRlc prostora. ∇

Da se R-uzajamno lokalna kompaktnost ne čuva u topološkim proizvodima, pokazuje

PRIMER 2.13. Neka su (X_i,τ_i^1,τ_i^2) za $i=1,2$, jednaki bitopološkom prostoru $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$. Prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ je uzajamno kompaktan, pa stoga i R-plc prostor, dok proizvod (X,τ^1,τ^2) nije (1,2)-Rlc, niti je, simetrično, (2,1)-Rlc prostor. Za tačku $x=(0,0)$ i njenu proizvoljnu τ^1 baznu okolinu $U=(-\infty,a)\times(-\infty,b)$ skup $\tau^2\mathrm{cl}U=(-\infty,a]\times(-\infty,b]$ nije uzajamno kompaktan skup jer uzajamno otvoren pokrivač $\{(-\infty,0)\times(-\infty,0)\}\cup\{(-n,a]\times(-n,b]\,|\,n\in N\}$ nema konačan potpokrivač.

2.2.2. Lokalno kompaktni pR_1, odnosno pT_2 bitopološki prostori

S t a v 2.7. U bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-lqc prostor;

(b) za svaku tačku $x \in X$ i svaki τ^1 otvoren skup U koji sadrži x postoji τ^1 otvoren skup V takav da je $x \in V \subset U$ i $\overline{V}^2$ je kvazikompaktan skup.

D o k a z. Implikacija (b)$\Rightarrow$(a) sledi neposredno. Dovoljno je uzeti $U=X$.

(a)$\Rightarrow$(b): Neka je $x \in X$ i neka je $U \in \tau^1$ okolina tačke x. Na osnovu definicije 2.2, postoji $W \in \tau^1$ da je $\overline{W}^2$ kvazikompaktan skup. Tada je skup $V=W \cap U \in \tau^1$, $x \in V \subset U$ i $\overline{V}^2 \subset \overline{W}^2$, pa je $\overline{V}^2$ kvazikompaktan skup na osnovu stava 1.15. ∇

S t a v 2.8. U pR_1 bitopološkom prostoru sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-lqc prostor;

(b) za svaku tačku $x \in X$ i svaki τ^1 otvoren skup U koji sadrži x postoji τ^1 otvoren skup V takav da je $x \in V \subset \overline{V}^2 \subset U$ i $\overline{V}^2$ je kvazikompaktan skup.

D o k a z. Da (b)$\Rightarrow$(a) sledi neposredno. Dokažimo implikaciju (a)$\Rightarrow$(b). Neka je U τ^1 otvorena okolina tačke x. Na osnovu stava 2.7 postoji τ^1 otvoren skup V^* takav da je $x \in V^* \subset U$ i $\tau^2 clV^*$ je kvazikompaktan skup. Označimo $K=\tau^2 clV^*$. Potprostor (K,τ^1_K,τ^2_K) je kvazikompaktan i pR_1 pa je, na osnovu stava 1.8, p-regularan. Sledi da postoji τ^1_K otvoren skup W takav da je $x \in W \subset \tau^2_K clW \subset V^*$. Postoji τ^1 otvoren skup W^* takav da je $W=W^* \cap K$. Označimo $V=W^* \cap V^*$. Tada je $V \in \tau^1$ i $x \in V \subset U$, a iz $V=W^* \cap (V^* \cap K)=W \cap V^*$ sledi $\tau^2 clV \subset (\tau^2 clW) \cap K = \tau^2_K clW \subset V^*$. Stoga je $\tau^2 clV$ kvazikompaktan skup sadržan u U, i V je traženi skup. ∇

P o s l e d i c a 2.2. Svaki pR_1 i (1,2)-lqc bitopološki prostor je (1,2)-regularan.

D o k a z. Neka je (X,τ^1,τ^2) pR_1 i (1,2)-lqc prostor. Neka je F τ^1 zatvoren skup u X i neka je $x \in X-F$. Na osnovu stava 2.8, postoji τ^1 otvoren skup V takav da je $x \in V \subset \tau^2 clV \subset X-F$. Označi li se $W=X-\overline{V}^2$, tada je $W \in \tau^2$ i $F \subset W$. Kako je $U \cap W=\emptyset$, tvrdjenje je dokazano. (Uporediti [53],[58] i [42].) ∇

T e o r e m a 2.3. Ako je bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc i pT_2, tada je on (1,2)-regularan i $\tau^2 \subset \tau^1$.

D o k a z. Prvi deo teoreme sledi iz posledice 2.2, jer je svaki pT_2 prostor takodje i pR_1 prostor. Dokažimo da je topologija τ^1 finija od τ^2. Neka je V neprazan element iz τ^2 i neka je $x \in V$. Postoji τ^1 otvoren skup W takav da je $x \in W$ i skup $\overline{W}^2 \equiv K$ je kvazikompaktan. Kako je X pT_2 prostor, to su topologije τ^1_K i τ^2_K, indukovane na K redom topologijama τ^1 i τ^2, jednake na osnovu posledice 1.3. Skup $V \cap K \in \tau^2_K$ i postoji $U \in \tau^1$ takav da je $U \cap K = V \cap K$. Neka je $W^* = W \cap U$. Tada $x \in W^* \in \tau^1$ i $W^* = (W \cap K) \cap U = W \cap (K \cap U) = W \cap (V \cap K) \subset V$. Sledi da je V τ^1 okolina tačke x. Kako je tačka x izabrana proizvoljno, skup $V \in \tau^1$, pa je $\tau^2 \subset \tau^1$. ∇

P o s l e d i c a 2.3. Ako je bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc i pT_2 prostor, tada je topološki prostor (X,τ^1) lokalno kompaktan i Hausdorffov, pa je, sledstveno tome regularan.

Da u (1,2)-lqc i pT_2 prostoru (X,τ^1,τ^2) prostor (X,τ^2) ne mora biti ni regularan ni Hausdorffov, pokazuje primer 2.11. Skup realnih brojeva sa kofinitnom topologijom nije ni regularan niti je T_2-prostor.

2.2.3. Naslednost svojstva bitopološke lokalne kompaktnosti

S t a v 2.9. Ako je Y semizatvoren podskup plqc ((1,2)-lqc, lqc, odnosno lsc) prostora (X,τ^1,τ^2), tada je potprostor (Y,τ^1_Y,τ^2_Y) plqc ((1,2)-lqc, lqc, odnosno lsc) prostor.

D o k a z. Tvrdjenje sledi iz definicija relativne topologije na potprostoru i stava 1.15. ∇

Iz stava 2.9. neposredno sledi da je svaki kvazizatvoren, τ^1 zatvoren, kao i τ^2 zatvoren potprostor plqc ((1,2)-lqc, lqc, odnosno lsc) prostora plqc ((1,2)-lqc, lqc, odnosno lsc) prostor.

Medjutim, ni za jednu od definicija lokalne kvazikompaktnosti ne važi tvrdjenje

"Kvaziotvoren potprostor lokalno kvazikompaktnog kvazi-Hausdorffovog bitopološkog prostora je lokalno kvazikompaktan",

kao što pokazuje

PRIMER 2.14. Neka je $X=[0,1]\cup[2,3]\subset R$, U topologija realne prave, i neka su U_1 i U_2 topologije indukovane sa U redom na skupovima $[0,1]$ i $[2,3]$. Ako je $\tau^i=\{\emptyset,X\}\cup U_i$ za $i=1,2$, prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan i kvazi-Hausdorffov. Skup $Y=(0,1)\cup(2,3)$ je kvaziotvoren u X, a potprostor (Y,τ^1_Y,τ^2_Y) nije lqc, pa stoga nije ni (1,2)-lqc niti je plqc prostor.

Ovaj primer pokazuje da se u iskazu teoreme 2.3 uslov pT_2 ne može zameniti u opštem slučaju uslovom qT_2. Prostor (X,τ^1,τ^2) nije ni (1,2)-regularan niti je $\tau^2\subset\tau^1$.

S t a v 2.10. Semiotvoren potprostor semi-Hausdorffovog lsc prostora je lsc prostor.

D o k a z. Tvrdjenje sledi iz odgovarajućeg stava za topološke prostore. ∇

Iz stava 2.10 neposredno sledi da je svaki kvaziotvoren, τ^1 otvoren, kao i τ^2 otvoren potprostor semi-Hausdorffovog lsc prostora, lsc prostor.

S t a v 2.11. Ako je (X,τ^1,τ^2) pR_1 i (1,2)-lqc prostor, i ako je skup Y τ^1 otvoren u X, tada i potprostor (Y,τ^1_Y,τ^2_Y) ima osobinu (1,2)-lqc prostora.

D o k a z. Neka je $x\in Y$. Na osnovu stava 2.8, postoji τ^1 otvoren skup V takav da je $x\in V\subset\overline{V}^2\subset Y$ i $\overline{V}^2$ je kvazikompaktan skup. Sledi da je $V\in\tau^1_Y$ i $\tau^2_Y\mathrm{cl}V=\tau^2\mathrm{cl}V\cap Y=\overline{V}^2$, čime je tvrdjenje dokazano. ∇

P o s l e d i c a 2.4. Ako je Y τ^1 otvoren skup u pT_2 i (1,2)-lqc prostoru (X,τ^1,τ^2), tada je potprostor (Y,τ^1_Y,τ^2_Y) (1,2)-lqc prostor.

PROBLEM. Šta se može reći o lokalnoj kvazikompaktnosti

τ^1 otvorenog skupa u wpT_2 i (1,2)-lqc prostoru (X,τ^1,τ^2)?

2.2.4. Kvazikompaktifikacija bitopološkog prostora jednom tačkom

Kvazikompaktifikacija prostora (X,τ^1,τ^2) jednom tačkom ispitivana je u radovima [58],[38] i [40]. I.L. Reilly je pokazao da za R-plc i pR_1 prostor (X,τ^1,τ^2), prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$, dobijen od (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktifikacijom jednom tačkom, ne mora biti pR_1. (Vid.[58], Example 4.) Isti primer pokazuje da za (1,2)-lqc i pT_2 prostor odgovarajući prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ ne mora biti pR_1, pa stoga ni pT_2 prostor.

Sledeća teorema dokazuje da za uzajamno R_1 uzajamno lokalno kvazikompaktne prostore važi analogon teoreme Aleksandrova o kompaktifikaciji jednom tačkom, kada je uslov T_2 zamenjen uslovom R_1.(Uporediti sa[44].)

T e o r e m a 2.4. Neka je (X,τ^1,τ^2) nekvazikompaktan bitopološki prostor i neka je prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ dobijen od (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktifikacijom jednom tačkom. Prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ je pR_1 ako i samo ako je (X,τ^1,τ^2) pR_1 i plqc prostor.

D o k a z. ($\Rightarrow$:) Ako je $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ pR_1 prostor, tada je (X,τ^1,τ^2) pR_1 prostor, jer je osobina pR_1 nasledna. Kako je skup X τ^i_∞ otvoren podskup, za $i=1,2$, kvazikompaktnog (pa stoga i plqc) pR_1 prostora $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$, on je plqc prostor na osnovu stava 2.11.

($\Leftarrow$:) Ako su x i y dve tačke iz X i $x\notin\tau^i_\infty\mathrm{cl}\{y\}$, tada $x\notin\tau^i\mathrm{cl}\{y\}$. Kako je (X,τ^1,τ^2) pR_1 prostor, postoje τ^i otvoren skup U i τ^j otvoren skup V takvi da je $x\in U$, $y\in V$ i $U\cap V=\emptyset$, pri čemu je $j\in\{1,2\}-\{i\}$. Kako za topologije važi $\tau^1\subset\tau^1_\infty$ i $\tau^2\subset\tau^2_\infty$, tvrdjenje sledi za slučaj kada su obe tačke iz skupa X.

Za tačku $x\in X$ i tačku $\infty\in X_\infty-X$, iz $\tau^1_\infty\mathrm{cl}\{\infty\}=\tau^2_\infty\mathrm{cl}\{\infty\}=\{\infty\}$ sledi $x\notin\tau^i_\infty\mathrm{cl}\{\infty\}$ za $i=1,2$. Prostor (X,τ^1,τ^2) je plqc, pa postoji τ^i otvoren skup U takav da je $x\in U$ i $\tau^j\mathrm{cl}U$ je kvazikompaktan skup za $j\in\{1,2\}-\{i\}$. Tada je za skup $V=X-U^j$ skup $V^*=V\cup\{\infty\}\in\tau^j_\infty$, $x\in U\in\tau^i\subset\tau^i_\infty$ i $U\cap V^*=\emptyset$. ∇

Da postoje prostori koji zadovoljavaju teoremu 2.4, a kod kojih se topologije ne podudaraju, pokazuje

PRIMER 2.15. Neka je $I=[0,1]\subset R$, tačke $a,b\notin I$ i neka je $X=\{a,b\}\cup I$. Neka su $\mathcal{B}^1=\{\{a\},\{a,b\}\}\cup\{\{x\}\mid x\in I\}$ i $\mathcal{B}^2=\{\{b\},\{a,b\}\}\cup\{\{x\}\mid x\in I\}$ baze topologija na X, τ^1 i τ^2 redom. Prostor (X,τ^1,τ^2) je pR_1 i plqc prostor jer, za $i,j\in\{1,2\}$ i $i\neq j$, važi:

$a,b\in\{a,b\}\in\tau^i$ i $\overline{\{a,b\}}^j=\{a,b\}$ je kvazikompaktan skup; za svaki $x\in I$ je $x\in\{x\}\in\tau^i$ i $\overline{\{x\}}^j=\{x\}$ je kvazikompaktan skup. Takodje, za parove tačaka iz X važi: $a\notin\overline{\{b\}}^1$ i $b\notin\overline{\{a\}}^2$; postoje $U=\{a\}\in\tau^1$, $V=\{b\}\in\tau^2$ takvi da je $a\in U$, $b\in V$ i $U\cap V=\emptyset$; takodje za svaki $x\in I$ imamo $a,b\notin\overline{\{x\}}^i$, $i=1,2$, i postoje $U=\{a,b\}\in\tau^i$ i $V=\{x\}\in\tau^j$, $j\in\{1,2\}-\{i\}$, da je $U\cap V=\emptyset$; za $x,y\in I$ i $x\neq y$ je $x\in\{x\}\in\tau^i$, $y\in\{y\}\in\tau^j$ i $\{x\}\cap\{y\}=\emptyset$, za $i,j\in\{1,2\}$ i $i\neq j$.

Prostor (X,τ^1,τ^2) nije kvazikompaktan jer ni prostori (X,τ^1) i (X,τ^2) nisu kompaktni.

Ako je $X_\infty=X\cup\{\infty\}$, gde $\infty\notin X$, tada su topologije

$$\tau^i_\infty=\tau^i\cup\{V\cup\{\infty\}\mid\ X-V \text{ je } \tau^i \text{ zatvoren i konačan}\},$$

$i=1,2$, i $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ je pR_1 prostor.

Primetimo da ako se u teoremi 2.4. uslov pR_1 zameni uslovom pT_2, tada se sve svodi na topološki slučaj, jer se topologije τ^1 i τ^2 podudaraju na osnovu teoreme 2.3.

Takodje, neposredno sledi da se u iskazima stavova 2.8 i 2.11, kao i posledice 2.2, uslov pR_1 može zameniti jačim—uslovom $MN\text{-}pR_1$. Važi takodje

T e o r e m a 2.5. Prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$, dobijen kvazikompaktifikacijom prostora (X,τ^1,τ^2) jednom tačkom, je $MN\text{-}pR_1$ prostor ako i samo ako je prostor (X,τ^1,τ^2) $MN\text{-}pR_1$ prostor.

D o k a z. I osobina $MN\text{-}pR_1$ je nasledna pa stoga, ako je prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ $MN\text{-}pR_1$, tada je i njegov potprostor (X,τ^1,τ^2) $MN\text{-}pR_1$ prostor. Da je tada (X,τ^1,τ^2) plqc prostor, sledi iz teoreme 2.4 i implikacije $MN\text{-}pR_1 \Rightarrow pR_1$.

Obrnuto tvrdjenje dokazuje se kao u teoremi 2.4. Pri tom, ako su tačke x i y iz X i $\tau^j_\infty cl\{x\}\neq\tau^i_\infty cl\{y\}$, tada je

$\tau^j cl\{x\} \neq \tau^i cl\{y\}$ jer $\infty \notin \tau^j_\infty cl\{x\}$ i $\infty \notin \tau^i_\infty cl\{y\}$ pošto je (X,τ^1,τ^2) plqc prostor. ∇

T e o r e m a 2.6. (1) Bitopološki prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$, dobijen od prostora (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktifikacijom jednom tačkom, je qT_2 prostor ako i samo ako je prostor (X,τ^1,τ^2) qT_2 i lqc prostor.

(2) Ako prostor (X,τ^1,τ^2) nije kvazikompaktan, on je uzajamno homeomorfan kvaziotvorenom prostoru od $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ čija je kvaziadherencija skup X_∞ .

D o k a z. (1) (=>:) Neka je $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ kvazi-Hausdorff-ov prostor. Relativne topologije na X, indukovane topologijama τ^1_∞ i τ^2_∞ su redom τ^1 i τ^2 . Stoga, kako je osobina qT_2 nasledna, prostor (X,τ^1,τ^2) je qT_2.

Neka je $x \in X$. Za tačke x i ∞ postoje u $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ kvaziotvoreni skupovi U i $V^*=V\cup\{\infty\}$ takvi da je $x \in U$, $\infty \in V^*$ i $U \cap V^* = \emptyset$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $U \in \tau^i$, $V \in \tau^j$, $i,j \in \{1,2\}$, i da je X-V kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2). Kako je $U \subset X-V$, to je $\tau^j clU \subset X-V$, pa je $\bar{U}^j$ kvazikompaktan skup. Sledi da je (X,τ^1,τ^2) lqc prostor.

(<=:) Neka je (X,τ^1,τ^2) qT_2 i lqc prostor. Ako su x i y dve različite tačke iz X i ako su U i V njihove disjunktne kvaziotvorene okoline u prostoru (X,τ^1,τ^2), one su disjunktne i kvaziotvorene i u prostoru $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$.

Neka je $x \in X$. Kako je (X,τ^1,τ^2) lqc prostor, postoji $U \in \tau^i \subset \tau^i_\infty$ takav da je $\bar{U}^j$ kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2), $i,j \in \{1,2\}$. Skup $V=X-\bar{U}^j \in \tau^j$, X-V je τ^j zatvoren i kvazikompaktan, sledi da je $V^*=V\cup\{\infty\} \in \tau^j_\infty$. Skupovi U i V^* su disjunktne kvaziotvorene okoline tačaka x i ∞ redom.

(2) Ako prostor (X,τ^1,τ^2) nije kvazikompaktan, tada skup $\{\infty\}$ nije kvaziotvoren u $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$, pa je $\tau^1_\infty clX = X_\infty = \tau^2_\infty clX = qclX$. Skup X je kvaziotvoren u $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ i inkluzija $i: (X,\tau^1,\tau^2) \to (X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ je uzajamno utapanje. ∇

P o s l e d i c a 2.5. Ako je $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ qT_2 prostor, tada je (X,τ^1,τ^2) qT_2 i lsc prostor.

P o s l e d i c a 2.6. Ako je (X,τ^1,τ^2) qT_2 i (1,2)-lqc prostor, tada je $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ qT_2 prostor.

Da obrnuta tvrdjenja ne važe u posledicama 2.5 i 2.6 pokazuju primeri 2.3 i 2.2.

U primeru 2.3 prostor (X,τ^1,τ^2) je qT_2 i lsc prostor, dok odgovarajući prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ nije kvazi-Hausdorffov jer su topologije $\tau^i_\infty=\tau^i\cup\{\infty\}$ za $i=1,2$.

U primeru 2.2 (X,τ^1,τ^2) nije (1,2)-lqc prostor. Za prostor $X_\infty=X\cup\{\infty\}$ topologija τ^1_∞ je ona, dobijena kompaktifikacijom realne prave jednom tačkom, dok je $\tau^2_\infty=\tau^2\cup\{V\cup\{\infty\}\mid V\in\tau^2 \text{ i } V\neq\emptyset\}$. Kako je prostor (X_∞,τ^1_∞) Hausdorffov, to je $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ qT_2 prostor.

T e o r e m a 2.7. (1) Ako je bitopološki prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$, dobijen od prostora (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktifikacijom jednom tačkom, semi-Hausdorffov, tada je (X,τ^1,τ^2) semi-Hausdorffov lsc prostor.

(2) Ako prostor (X,τ^1,τ^2) nije kvazikompaktan, on je uzajamno homeomorfan semiotvorenom potprostoru od $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ čija je semiadherencija skup X_∞.

D o k a z. (1) Tvrdjenje sledi iz odgovarajućeg stava za topološke prostore, jer je relativna topologija na X indukovana topologijom $\tau_\infty=\tau^1_\infty\vee\tau^2_\infty$ jednaka topologiji $\tau^1\vee\tau^2$.

(2) Ako prostor (X,τ^1,τ^2) nije kvazikompaktan, skup $\{\infty\}$ nije semiotvoren u X_∞ i $\tau_\infty \mathrm{cl} X=X_\infty$. Skup X je semiotvoren u $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ i prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno homeomorfan otvorenom potprostoru od $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$. ∇

Da u teoremi 2.7 obrnut iskaz ne važi u (1) pokazuje primer 1.1. Prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ je lsc i sT_2 prostor, dok $(R_\infty,\mathcal{L}_\infty,\mathcal{D}_\infty)$ nije sT_2 prostor jer su topologije na $R_\infty=R\cup\{\infty\}$ redom: $\mathcal{L}_\infty=\mathcal{L}\cup\{R_\infty\}$, $\mathcal{D}_\infty=\mathcal{D}\cup\{R_\infty\}$ i $\tau_\infty=\mathcal{L}_\infty\vee\mathcal{D}_\infty=(\mathcal{L}\vee\mathcal{D})\cup\{R_\infty\}$.

Isti primer pokazuje da topologija $\tau_\infty=\tau^1_\infty\vee\tau^2_\infty$ nije u opštem slučaju jednaka topologiji τ_* dobijenoj kompaktifikacijom prostora (X,τ) jednom tačkom, gde je $\tau=\tau^1\vee\tau^2$. Medjutim, kako je $\tau^1_\infty\cup\tau^2_\infty\subset\tau_*$, uvek važi $\tau_\infty\subset\tau_*$.

2.2.5. Uzajamna potpuna regularnost pR_0, odnosno pR_1-bitopoloških prostora

T e o r e m a 2.8. Uzajamno R_0 uzajamno normalan bitopološki prostor je uzajamno potpuno regularan.

D o k a z. Neka je (X,τ^1,τ^2) pR_0 p-normalan bitopološki prostor i neka je F τ^i zatvoren podskup od X. Ako je $x\in X-F$, tada je $\tau^j cl\{x\}\subset X-F$ jer je X pR_0 prostor. Na osnovu stava 1.1, postoji τ^i l.s.c. i τ^j u.s.c. funkcija $f:X\rightarrow[0,1]$ takva da je $f(F)=\{0\}$ i $f(\overline{\{x\}}^j)=\{1\}$. Sledi da je prostor (X,τ^1,τ^2) uzajamno potpuno regularan jer je (i,j)-potpuno regularan za $(i,j)\in\{(1,2),(2,1)\}$. ∇

P o s l e d i c a 2.7. Uzajamno normalan pR_1 bitopološki prostor je uzajamno potpuno regularan.

P o s l e d i c a 2.8. Svaki p-normalan bitopološki prostor je p-potpuno regularan ako i samo ako je pR_0 prostor.

D o k a z. Ako je prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-potpuno regularan, on je i (1,2)-regularan. Tvrdjenje sledi iz teoreme 2.8 i definicije 1.21. ∇

Odavde neposredno sledi i teorema 5.4 iz [37]:

P o s l e d i c a 2.9. Svaki uzajamno normalan prostor je p-regularan ako i samo ako je pR_0 prostor.

T e o r e m a 2.9. Svaki pR_1 i (1,2)-Rlc bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-potpuno regularan.

D o k a z. Neka je F τ^1 zatvoren podskup od X i neka je $x\in X-F$. Na osnovu stava 2.3, postoji τ^1 otvoren skup V takav da je $x\in V\subset\tau^2 clV\subset X-F$ i $\tau^2 clV$ je uzajamno kompaktan skup. Označimo $K=\tau^2 clV$; prostor (K,τ^1_K,τ^2_K) je pR_1 i uzajamno kompaktan, pa je, na osnovu stava 1.8, uzajamno normalan. Na osnovu teoreme 2.8, za tačku x i τ^1_K zatvoren skup K-V postoji τ^1_K l.s.c. i τ^2_K u.s.c. funkcija $f: K\rightarrow[0,1]$ takva da je $f(K-V)=\{0\}$ i $f(x)=1$. Neka je $f^*:X\rightarrow[0,1]$ preslikavanje defi-

nisano sa
$$f^*(y) = \begin{cases} f(y) & , y\in K \\ 0 & , y\in X-K \end{cases}.$$

Tada je $f^*(F)=\{0\}$, $f^*(x)=1$; f^* je τ^1 l.s.c. preslikavanje jer za proizvoljno $a\in[0,1]$ je

$$(f^*)^{-1}((a,1])= f^{-1}(\ (a,1]\ )\equiv W\in\tau^1_K \quad \text{i} \quad W\subset V.$$

Neka je $W^*\in\tau^1$ tako da je $W=W^*\cap K$. Tada je $W=(W^*\cap K)\cap V=W^*\cap V\in\tau^1$. Takodje je $(f^*)^{-1}([0,1])= X$.

Funkcija f^* je τ^2u.s.c. jer je za proizvoljno $a\in[0,1]$

$$(f^*)^{-1}([a,1]) = \begin{cases} X & \text{za } a=0 \\ f^{-1}([a,1])\equiv H & \text{za } a>0. \end{cases}$$

Skup H je τ^2_K zatvoren, i zbog $H=H^*\cap K$, gde je H^* τ^2 zatvoren skup, H je τ^2 zatvoren. Preslikavanje f^* je željena funkcija. ∇

Sledeća posledica teoreme 2.9 je uopštenje teoreme 3 iz [58].

P o s l e d i c a 2.10. Uzajamno R_1 R-uzajamno lokalno kompaktan bitopološki prostor je uzajamno potpuno regularan.

P o s l e d i c a 2.11. Svaki pR_1 (1,2)-lqc prostor je (1,2)-potpuno regularan.

P o s l e d i c a 2.12. Svaki pR_1 i plqc bitopološki prostor je p-potpuno regularan.

NAPOMENA. Posledica 2.12 sledi i iz teoreme 2.4 i 2.8. Ako je prostor (X,τ^1,τ^2) pR_1 i kvazikompaktan, tada je, na osnovu stava 1.8, uzajamno normalan. Iz posledice 2.7 sledi uzajamna potpuna regularnost prostora (X,τ^1,τ^2). Ako prostor (X,τ^1,τ^2) nije kvazikompaktan, neka je $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ prostor dobijen od (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktifikacijom jednom tačkom. Na osnovu teoreme 2.4 i posledice 2.7, prostor $(X_\infty,\tau^1_\infty,\tau^2_\infty)$ je p-potpuno regularan. Sledi da je (X,τ^1,τ^2) uzajamno potpuno regularan jer je uzajamna potpuna regularnost nasledno svojstvo.

3. HIPERPROSTORI TOPOLOŠKIH I BITOPOLOŠKIH PROSTORA

3.1. DEFINICIJE I OSNOVNE OSOBINE

Topološki hiperprostori bili su predmet mnogih izučavanja. Jedan od fundamentalnih radova o hiperprostorima sa konačnim topologijama je rad E. Michaela ([36]). Hiperprostore sa polukonačnim topologijama ispitivali su, pored drugih, V.I. Ponomarev ([49]), M. Marjanović ([34] i [35]) i O. Feichtinger ([19]).

U ovom radu ćemo pri ispitivanju hiperprostora uglavnom koristiti oznake E. Michaela.

Ako je (X,τ) topološki prostor, tada

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(X) = \{A\subset X \mid A\neq\emptyset\} \\ 2^X = \{A\in\mathcal{A}(X) \mid A=\bar{A}\} \\ \mathcal{C}(X) = \{A\in 2^X \mid A \text{ je kompaktan}\} \\ \mathcal{J}_n(X) = \{A\in\mathcal{A}(X) \mid A \text{ ima najviše } n \text{ elemenata}\} \\ \mathcal{J}(X) = \bigcup_{n\in N}\mathcal{J}_n(X) = \{A\in\mathcal{A}(X) \mid A \text{ je konačan skup}\}. \end{cases}$$

Ako je $\mathcal{F}$ jedna od uočenih kolekcija i $B\subset X$, označićemo

$$< B > = \{A\in\mathcal{F} \mid A\subset B\} \quad \text{i} \quad > B < = \{A\in\mathcal{F} \mid A\cap B\neq\emptyset\},$$

a ako su $B_i\subset X$ za $i=0,1,\ldots,n$, tada

$$(2)\qquad < B_0; B_1,\ldots,B_n> = \{A\in\mathcal{F} \mid A\subset B_0 \text{ i } A\cap B_i\neq\emptyset \text{ za svaki } i=1,\ldots,n\}$$

S obzirom na jednakost

$$< B_0; B_1,\ldots,B_n> = < B_0; B_1\cap B_0,\ldots, B_n\cap B_0> ,$$

pretpostavljaćemo uvek da su u formuli (2) svi skupovi $B_i\subset B_0$ za $i=1,\ldots,n$.

Neka su B_λ i C_ν podskupovi od X. Za uvedene kolekcije važe sledeće relacije:

H 1. $< \emptyset > = \emptyset$

H 2. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} < B_\lambda > = < \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda >$

H 3. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow (< B_1 > \subset < B_2 >$ i $> B_1 < \subset > B_2 <)$

H 4. $< B_0 > \cap > B_1 < \cap \ldots \cap > B_n < = < B_0; B_1\cap B_0, \ldots, B_n\cap B_0 >$

H 5. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} > B_\lambda < = > \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda <$

H 6. $< B_0; B_1, \ldots, B_n > \cap < C_0; C_1, \ldots, C_m > =$

$= < B_0\cap C_0; B_1\cap C_0, \ldots, B_n\cap C_0, C_1\cap B_0, \ldots, C_m\cap B_0 >$

Familije

$$\bar{\Psi} = \{ < U > \mid U\in\tau\} , \quad \underline{\Psi} = \{ > U < \mid U\in\tau\} \quad \text{i} \quad \Psi = \bar{\Psi}\cup\underline{\Psi}$$

su predbaze topologija na $\mathcal{F}$ i to redom: gornje polukonačne, donje polukonačne i konačne topologije. Te topologije označavaćemo redom sa $\bar{\mathcal{T}}$, $\underline{\mathcal{T}}$ i $\mathcal{T}$.

S obzirom na osobine H 2, H 4 i H 6, familija $\bar{\Psi}$ je istovremeno i baza topologije $\bar{\mathcal{T}}$,a bazu topologije $\mathcal{T}$ čini familija

$$\{ < U_0; U_1, \ldots, U_n > \mid U_i\in\tau \text{ za } i=0,1,\ldots,n, \ \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset U_0 \ , \ n\in N\}.$$

NAPOMENA. Kako za proizvoljne $B_i \subset X$, $i=0,1,\ldots,n$, pri $B_0 \supset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ važi jednakost

$$< B_0; B_1, \ldots, B_n > = < B_0; B_0, B_1, \ldots, B_n > ,$$

to se može pretpostaviti da u (2) važi $B_0 = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

L e m a 3.1. Topologije $\bar{\mathcal{T}}$, $\underline{\mathcal{T}}$ i $\mathcal{T}$ imaju sledeće osobine:

P 1. Ako je $B=\bar{B}$, tada je $< B >$ zatvorena kolekcija u $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$ i $(\mathcal{F},\mathcal{T})$.

P 2. Ako je $B=\bar{B}$, tada je $> B <$ zatvorena kolekcija u $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}})$ i $(\mathcal{F},\mathcal{T})$.

P 3. $\mathcal{T}\mathrm{cl} < B > \subset < \bar{B} >$ i $\underline{\mathcal{T}}\mathrm{cl} < B > \subset < \bar{B} >$.

P 4. $\mathcal{T}\mathrm{cl} < B_0; B_1, \ldots, B_n > \subset < \bar{B}_0; \bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_n >$.

D o k a z. P 1. $\mathcal{F} - < B > = \{A\in\mathcal{F} \mid A\cap B^c \neq \emptyset\} = > B^c < \in \underline{\Psi} \subset \underline{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$.

P 2. $\mathcal{F} - {>}B{<} = \{A\in\mathcal{F} \mid A\cap B = \emptyset\} = \langle B^c\rangle \in \overline{\Psi} \subset \overline{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$.

P 3. Kako je $B\subset\bar{B}$, to je, na osnovu H 3 i P 1,
$\langle B\rangle \subset \langle\bar{B}\rangle = \underline{\mathcal{T}}\,\mathrm{cl}\langle\bar{B}\rangle = \mathcal{T}\,\mathrm{cl}\langle\bar{B}\rangle$, pa je

$$\mathcal{T}\,\mathrm{cl}\langle B\rangle \subset \langle\bar{B}\rangle \quad \text{i} \quad \underline{\mathcal{T}}\,\mathrm{cl}\langle B\rangle \subset \langle\bar{B}\rangle .$$

P 4. Slično kao u dokazu P 3, korišćenjem H 4, P 1 i P 2, iz

$$\langle B_0;\, B_1,\ldots,B_n\rangle = \langle B_0\rangle \cap (\,{>}B_1{<} \cap\ldots\cap {>}B_n{<}\,) \subset$$
$$\subset \langle\bar{B}_0\rangle \cap (\,{>}\bar{B}_1{<} \cap\ldots\cap {>}\bar{B}_n{<}\,) = \langle\bar{B}_0;\, \bar{B}_1,\ldots,\bar{B}_n\rangle$$

i zatvorenosti kolekcije $\langle\bar{B}_0;\, \bar{B}_1,\ldots,\bar{B}_n\rangle$, sledi

$$\mathcal{T}\,\mathrm{cl}\langle B_0;\, B_1,\ldots, B_n\rangle \subset \langle\bar{B}_0;\, \bar{B}_1,\ldots,\bar{B}_n\rangle . \quad \nabla$$

S t a v 3.1. Predbaze familije svih zatvorenih skupova u $(\mathcal{F},\overline{\mathcal{T}})$, $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$ i $(\mathcal{F},\mathcal{T})$ su redom

$\overline{H} = \{\langle F\rangle \mid F=\bar{F}$ u $(X,\tau)\}$, $\underline{H} = \{{>}F{<} \mid F=\bar{F}$ u $(X,\tau)\}$ i
$H = \overline{H} \cup \underline{H}$.

D o k a z. Kako je u proizvoljnom topološkom prostoru (S,σ) svaki otvoren skup $W = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$, gde su W_λ bazni elementi, a svaki $W_\lambda = \bigcap_{i=1}^{k(\lambda)} W_{\lambda_i}$ gde su W_{λ_i} elementi predbaze Ω, to za svaki zatvoren skup H u (S,σ) važi

$$H = W^c = \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda\Big)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Big[\bigcap_{i=1}^{k(\lambda)} W_{\lambda_i}\Big]^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Big(\bigcup_{i=1}^{k(\lambda)} W^c_{\lambda_i}\Big)$$

pa kolekcija $\{W^c \mid W\in\Omega\}$ čini predbazu familije zatvorenih skupova u (S,σ).

Tvrdjenje stava 3.1 sada sledi iz definicija topologija $\overline{\mathcal{T}}$, $\underline{\mathcal{T}}$ i $\mathcal{T}$ na $\mathcal{F}$ i osobina P 1 i P 2. ∇

L e m a 3.2. Topološki prostori (X,τ) i $(\mathcal{J}_1(X),\Theta)$, gde je Θ jedna od topologija $\overline{\mathcal{T}}$, $\underline{\mathcal{T}}$ ili $\mathcal{T}$, su homeomorfni.

D o k a z. Neposredno sledi da je preslikavanje $h\colon X\to\mathcal{J}_1(X)$ definisano sa: $h(x)=\{x\}$ za sve $x\in X$, bijekcija.

Kako su predbazni elementi topologije Θ kolekcije oblika

$$\langle V\rangle = \{\{x\} \mid x\in V\} \text{ gde je } V\in\tau, \text{ako } \Theta\supset\overline{\mathcal{T}}$$

i

$${>}V{<} = \{\{x\} \mid x\in V\}, \text{ za } V\in\tau, \text{ ako } \Theta\supset\underline{\mathcal{T}} ,$$

to je za svaki $V\epsilon\tau$ i odgovarajući predbazni element $\mathcal{V}\epsilon$ $\epsilon\{ <V> , >V< \}$ topologije Θ ,skup $h^{-1}(\mathcal{V})=V\epsilon\tau$, pa je h neprekidna funkcija. Da je h otvoreno preslikavanje,sledi iz $h(V)=\mathcal{V}\epsilon\Theta$ za svaki $V\epsilon\tau$, gde je $\mathcal{V}= <V>$ ili $\mathcal{V}= >V<$, zavisno od topologije Θ .

3.2. HIPREPROSTORI TOPOLOŠKIH R_0-PROSTORA

Lokalnu koneksnost i koneksnost im Kleinen hiperprostora topoloških R_0-prostora ispitivao je Ch. Dorsett ([17]). Modifikujući postojeće dokaze, Dorsett je dokazao da poznati stavovi o istovremenoj koneksnosti T_1-prostora i njihovih hiperprostora važe i u opštijem slučaju, kada se uslov T_1 zameni slabijim svojstvom, R_0 osobinom.

U ovom odeljku ispitivanju hiperprostora pristupamo na drugi način. Svakom R_0-topološkom prostoru pridružuje se T_1-prostor koji sa uočenim ima homeomorfne hiperprostore. Dalja ispitivanja zajedničkih osobina svode se na ispitivanje tih osobina dvaju topoloških prostora i njihovih hiperprostora.

Pre nego što predjemo na dokazivanje nekih osnovnih osobina hiperprostora R_0-prostora, posebno formule P 6 koja je važna pri ispitivanju hiperprostora, navodimo sledeći Dorsettov rezultat (vid.[17]).

S t a v 3.2. U R_0-topološkom prostoru (X,τ) skup $\overline{\{x\}}$ je kompaktan za svaki $x\epsilon X$.

T e o r e m a 3.1. Neka je (X,τ) R_0-prostor i $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija 2^X ili $\mathcal{C}(X)$. Ako je $U\epsilon\tau$, $U_i\epsilon\tau$ za $i=0,1,...,n$ i $U_0=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$, tada u prostoru $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, odnosno $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$ važi:

P 5. $\mathcal{T}\mathrm{cl}<U> = <\bar{U}>$ i $\underline{\mathcal{T}}\mathrm{cl}< U > = < \bar{U} >$

P 6. $\mathcal{T}\mathrm{cl}<U_0; U_1,...,U_n> = <\bar{U}_0; \bar{U}_1,...,\bar{U}_n>$.

D o k a z. S obzirom na osobine P 3 i P 4, treba dokazati da:

(i) ako je $A\epsilon<\bar{U}>$ u prostoru $(\mathcal{F},\mathcal{T})$,tada je $A\epsilon\mathcal{T}\mathrm{cl}<U>$;

(ii) ako je $A\in\langle\bar{U}\rangle$ u prostoru $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$, tada je $A\in\underline{\mathcal{T}}\mathrm{cl}\langle U\rangle$

(iii) ako je $A\in\langle\bar{U}_0;\ \bar{U}_1,\dots,\bar{U}_n\rangle$ u $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, tada je $A\in\mathcal{T}\mathrm{cl}\langle U_0;\ U_1,\dots,U_n\rangle$.

Kako je (i) specijalan slučaj tvrdjenja (iii), kad je $U_1=\dots=U_n=U$, i kako (ii) sledi iz (i) jer je $\underline{\mathcal{T}}\subset\mathcal{T}$, pa stoga i $\mathcal{T}\mathrm{cl}\langle U\rangle$ $\underline{\mathcal{T}}\mathrm{cl}\langle U\rangle$, potrebno je dokazati samo (iii).

Uvedimo oznaku $\mathcal{U}=\langle U_0;\ U_1,\dots,U_n\rangle$. Ako je $A\in\langle\bar{U}_0;\ \bar{U}_1,\dots,\bar{U}_n\rangle$, neka je $\mathcal{V}=\langle V_0;\ V_1,\dots,V_m\rangle$ proizvoljna $\mathcal{T}$ bazna okolina elementa A.Kako je $A\subset V_0$, iz $A\cap\bar{U}_i\neq\emptyset$ za $i=1,\dots,n$, sledi da je za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$ skup $V_0\cap\bar{U}_i$ neprazan. Stoga postoji $b_i\in V_0\cap U_i$ za $i=1,\dots,n$. Slično, iz $A\subset\bar{U}_0$ i $A\cap V_k\neq\emptyset$ za svaki $k\in\{1,\dots,m\}$, skup $\bar{U}_0\cap V_k\neq\emptyset$, pa postoji $c_k\in U_0\cap V_k$ za svaki $k\in\{1,\dots,m\}$. Skup $F=\{b_i\mid i=1,\dots,n\}\cup$ $\cup\{c_k\mid k=1,\dots,m\}$ je konačan, skup $\bar{F}=(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{\{b_i\}})\cup(\bigcup_{k=1}^{m}\overline{\{c_k\}})$ je kompaktan na osnovu stava 3.2, i $\overline{\{b_i\}}\subset V_0\cap U_i$ za svaki $i=1,\dots,n$, a $\overline{\{c_k\}}\subset U_0\cap V_k$ za svaki $k=1,\dots,m$. Sledi da $\bar{F}\in\mathcal{F}$, $\bar{F}\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ i stoga $A\in\mathcal{T}\mathrm{cl}\mathcal{U}$, što je i trebalo dokazati.(Uporediti sa [29].) ∇

S t a v 3.3. Neka je (X,τ) proizvoljan topološki prostor i $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{J}(X)$ ili $\mathcal{A}(X)$. Ako su B i B_i, $i=1,\dots,n$, proizvoljni podskupovi skupa X, a $B_0=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$, tada u prostoru $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, odnosno $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$, važi:

P 5'. $\mathcal{T}\mathrm{cl}\langle B\rangle=\langle\bar{B}\rangle$ i $\underline{\mathcal{T}}\mathrm{cl}\langle B\rangle=\langle\bar{B}\rangle$,

P 6'. $\mathcal{T}\mathrm{cl}\langle B_0;\ B_1,\dots,B_n\rangle=\langle\bar{B}_0;\ \bar{B}_1,\dots,\bar{B}_n\rangle$.

D o k a z. Tvrdjenja se dokazuju isto kao u teoremi 3.1. Umesto skupa $\bar{F}$, odgovarajući skup F je u $\mathcal{F}$, a pritom se ne zahteva otvorenost skupa B, odnosno skupova B_i, $i=0,1,\dots,n$. ∇

S t a v 3.4. Ako je (X,τ) T_1-prostor i $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija 2^X ili $\mathcal{C}(X)$, tada za proizvoljne skupove $B\subset X$, $B_i\subset X$ za $i=0,1,\dots,n$ i $B_0=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$, u prostoru $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, odnosno $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$, važi:

P 5''. $\mathcal{T}\mathrm{cl}\langle B\rangle=\langle\bar{B}\rangle$ i $\underline{\mathcal{T}}\mathrm{cl}\langle B\rangle=\langle\bar{B}\rangle$,

P 6''. $\mathcal{T}\mathrm{cl}\langle B_0;\ B_1,\dots,B_n\rangle=\langle\bar{B}_0;\ \bar{B}_1,\dots,\bar{B}_n\rangle$.

D o k a z. Isto kao u dokazu stava 3.3, odgovarajući konačan zatvoren skup F iz dokaza teoreme 3.1 pripada sam prostoru $\mathcal{F}$ i tvrdjenje sledi neposredno. ∇

Neposredno imamo da je osobina P 6" u prostoru $(2^X,\mathcal{T})$ karakteristika T_1-prostora (X,τ).

Zaista, ako (X,τ) nije T_1-prostor, postoji $x\in X$ takav da je $\overline{\{x\}}\neq\{x\}$. Tada je $\emptyset = \langle\{x\}\rangle \neq \langle\overline{\{x\}}\rangle$ jer $\overline{\{x\}}\in \langle\overline{\{x\}}\rangle$.

Medjutim, osobina P 6' nije karakteristika R_0-prostora (X,τ); naime, postoje prostori koji nisu R_0-prostori, a koji imaju ovu osobinu. To pokazuje i

PRIMER 3.1. Neka je $X=[0,1]\subset R$ i neka je $\sigma=\{X-\{\frac{1}{n}\}\mid n\in N\}$ predbaza topologije τ na X. Neka je Φ kolekcija svih nepraznih konačnih podskupova skupa $S=\{\frac{1}{n}\mid n\in N\}$. Tada je $\tau=\{\emptyset, X\}\cup \cup\{F^c\mid F\in\Phi\}$, a $\Phi\cup\{X\}$ je kolekcija svih nepraznih zatvorenih skupova u (X,τ).

Za svaki $x\in X-S$ je $\overline{\{x\}}=X$, pa stoga (X,τ) nije R_0-prostor. Takodje, za svaki neprazan otvoren skup G u X je $\overline{G}=X$. Neka su $G_i\in\tau$, $G_i\neq\emptyset$ za $i=1,\dots,k$ i $G_0=\bigcup_{i=1}^{k} G_i$. Označimo $\mathcal{G}=\langle G_0; G_1,\dots,G_k\rangle$. Tada je

$$\langle\overline{G}_0; \overline{G}_1,\dots,\overline{G}_k\rangle = \langle X\rangle = 2^X.$$

Dokažimo da je $\overline{\mathcal{G}} = 2^X$ u $(2^X,\mathcal{T})$.

Za svaki $F\in\Phi\cup\{X\}$ i njegovu baznu okolinu $\mathcal{W}=\langle W_0;W_1,\dots,W_m\rangle$ kolekcija $\mathcal{G}\cap\mathcal{W}$ je neprazna jer je, na osnovu H 6,

$\mathcal{G}\cap\mathcal{W} = \langle G_0\cap W_0; G_1\cap W_0,\dots,G_k\cap W_0, G_0\cap W_1,\dots,G_0\cap W_m\rangle$,

a za svaki $i\in\{1,\dots,k\}$ postoji $a_i\in S\cap(G_i\cap W_0)$ i za svaki $j\in\{1,\dots,m\}$ postoji $b_j\in S\cap(G_0\cap W_j)$. Skup $A=\{a_i\mid i=1,\dots,k\}\cup \cup\{b_j\mid j=1,\dots,m\}\in 2^X$, $A\in\mathcal{G}\cap\mathcal{W}$, dakle $F\in\overline{\mathcal{G}}$.

Sledi da za svaku kolekciju nepraznih otvorenih skupova G_i, $i=1,\dots,k$, i $G_0=\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ važi

$$\mathcal{T}\mathrm{cl}\langle G_0; G_1,\dots,G_k\rangle = \langle\overline{G}_0; \overline{G}_1,\dots,\overline{G}_k\rangle .$$

U daljem ispitivanju razmatraćemo prvo hiperprostore sa konačnim topologijama.

T e o r e m a 3.2. Ako je (X,τ) R_0- prostor, tada su $(2^X,\mathcal{T})$ i $(\mathcal{C}(X),\mathcal{T})$ R_0-prostori.

D o k a z. Kako je osobina R_0 nasledno svojstvo, dovoljno je dokazati da je $(2^X,\mathcal{T})$ R_0-prostor.

Na osnovu teoreme 4.9 iz [36], prostor $(2^X,\mathcal{T})$ je uvek T_0-prostor, stoga je on R_0-prostor ako i samo ako je T_1-prostor.

Neka su A i F dva različita elementa iz 2^X. Ako je $F\cap A^c\neq\emptyset$, tada $F\in V=>A^c<\in\mathcal{T}$ pa $F\notin\mathcal{T}cl\{A\}$ jer $A\notin V$. Ako je $F\subset A$, zbog $F\neq A$, postoji $x\in A-F$. Prostor X je R_0-prostor, sledi da $\overline{\{x\}}\subset F^c$. Stoga $F\in W=<(\overline{\{x\}})^c>\in\mathcal{T}$ i $F\notin\mathcal{T}cl\{A\}$ jer $A\notin W$.

Sledi da je za svaki $A\in 2^X$ adherencija $\mathcal{T}cl\{A\}=\{A\}$, tj. 2^X je T_1-prostor. ∇

Obrnut iskaz teoreme 3.2 ne važi, što se može videti iz primera 3.1. Dokazaćemo da je svaki jednočlan skup u 2^X zatvoren.

Za svaki $F\in\Phi$ i svaki $H\in 2^X$ takav da je $H\neq F$, ako $H\not\subset F$, tada $H\in V=>F^c<\in\mathcal{T}$, odakle sledi da $H\notin\overline{\{F\}}$ jer $F\notin V$. Ako $H\subset F$, postoji $n\in N$ takav da $\frac{1}{n}\notin H$. Sledi da $H\in<\{\frac{1}{n}\}^c>=W\in\mathcal{T}$, pa $H\notin\overline{\{F\}}$ jer $F\notin W$.

Zato je $\overline{\{F\}}=\{F\}$ za svaki $F\in\Phi$.

Slično, za svaki $H\in\Phi$ postoji $n\in N$ takav da $\frac{1}{n}\notin H$. Ponovo je $H\in<\{\frac{1}{n}\}^c>\in\mathcal{T}$ i $H\notin\overline{\{X\}}$ jer $X\notin<\{\frac{1}{n}\}^c>$.

Dakle prostor 2^X je T_1-prostor, pa stoga zadovoljava i R_0 aksiomu, iako X nije R_0-prostor.

Ako je (X,τ) R_0-prostor, prostori $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T})$ i $(\mathcal{J}(X),\mathcal{T})$ ne moraju biti R_0-prostori niti T_0-prostori. To pokazuje

PRIMER 3.2. Neka je $X=\{a,b,c\}$ i $\tau=\{\emptyset,\{a,b\},\{c\},X\}$. Označimo $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$, $D=\{a,b\}$, $E=\{a,c\}$ i $F=\{b,c\}$. Tada je $\mathcal{J}(X)=\mathcal{A}(X)=\{A,B,C,D,E,F,X\}$, a topologija

$$\mathcal{T}=\{\emptyset,\{C\},\{X\},\{C,X\},\{A,B,D\},\{A,B,C,D\},\{A,B,D,X\},\{A,B,C,D,X\},\{C,E,F,X\},\mathcal{J}(X)\}.$$

Prostor (X,τ) je R_0-prostor, dok $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T})=(\mathcal{J}(X),\mathcal{T})$ ne zadovoljava R_0 aksiomu jer $C\in\{C\}\in\mathcal{T}$ a $\overline{\{C\}}=\{C,E,F\}$. Takodje je $\overline{\{E\}}=\overline{\{F\}}=\{E,F\}$ pa $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T})=(\mathcal{J}(X),\mathcal{T})$ nije T_0-prostor.

Ako je (X,τ) T_1-prostor, tada $\mathcal{J}(X)\subset\mathcal{C}(X)\subset 2^X$, pa je $(\mathcal{J}(X),\mathcal{T})$ T_1-prostor. Hiperprostor $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T})$ je u tom slučaju T_0-prostor jer za dva različita elementa $A,B\in\mathcal{A}(X)$ postoji x takav da $x \in (A-B) \cup (B-A)$. Ako je $x \in A-B$, tada $B \in V = \langle \{x\}^c \rangle \in \mathcal{T}$, dok $A \notin V$. Simetrično se dobija ako $x \in B-A$. Medjutim, $(\mathcal{A}(X), \mathcal{T})$ ni tada ne mora biti T_1-prostor. To pokazuje

PRIMER 3.3. Neka je (X,τ) beskonačan skup sa kofinitnom topologijom. Za svaki beskonačan skup $A \subset X$ takav da je $A \neq X$, skup $X \in \overline{\{A\}}$, jer za svaku baznu okolinu $W = \rangle W_1 \langle \ldots \rangle W_k \langle$ elementa X, iz $A \cap W_i \neq \emptyset$ za $i=1,\ldots,k$, sledi $A \in W$.

Razmatraćemo dalje jednu relaciju ekvivalencije na skupu X i odgovarajuće hiperprostore prostora X i njegovog količnik-prostora u odnosu na ovu relaciju ekvivalencije.

Neka je (X,τ) topološki prostor i neka je $\sim$ binarna relacija na skupu X definisana sa

$$x \sim y \iff \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} . \tag{3}$$

Neposredno se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Označićemo sa $[x]$ klasu ekvivalencije elementa x, sa $\tilde{X} = X/_{\sim}$ količnik-prostor u odnosu na $\sim$, sa $\tilde{\tau}$ količnik-topologiju i sa $p: X \to \tilde{X}$ količnik-preslikavanje.

S t a v 3.5. Za svaki $x \in X$ i svaki zatvoren skup $F \subset X$ važi:

$$[x] \subset \overline{\{x\}} \tag{4}$$

i

$$p^{-1}(p(F)) = F . \tag{5}$$

D o k a z. Inkluzija (4) sledi iz

$$y \in [x] \Rightarrow \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \Rightarrow y \in \overline{\{x\}}$$

a jednakost (5) iz

$$F \subset p^{-1}(p(F)) = \cup\{[x] \mid x \in F\} \subset \cup\{\overline{\{x\}} \mid x \in F\} \subset F. \quad \nabla$$

P o s l e d i c a 3.1. Količnik-preslikavanje $p: X \to \tilde{X}$ je zatvoreno preslikavanje.

T e o r e m a 3.3. Hiperprostori $(2^X, \mathcal{T})$ i $(2^{\tilde{X}}, \tilde{\mathcal{T}})$, odnosno $(\mathcal{C}(X), \mathcal{T})$ i $(\mathcal{C}(\tilde{X}), \tilde{\mathcal{T}})$, su homeomorfni.

D o k a z. Funkcija $q: 2^X \to 2^{\tilde{X}}$ definisana sa

$$q(A) = p(A)$$

za svaki $A \in 2^X$, je:

1^0 dobro definisana, jer je p zatvoreno preslikavanje;

2^0 injektivna, jer za svaka dva elementa $A_1, A_2 \in 2^X$
$q(A_1)=q(A_2) \Rightarrow p(A_1)=p(A_2) \Rightarrow p^{-1}(p(A_1))=p^{-1}(p(A_2)) \Rightarrow A_1=A_2$;

3^0 surjektivna, jer za svaki $\tilde{A} \in 2^{\tilde{X}}$ skup $p^{-1}(\tilde{A}) \in 2^X$ i

$$q(p^{-1}(\tilde{A}))=p(p^{-1}(\tilde{A}))=\tilde{A}.$$

Neka je $\mathcal{H}$ predbaza za sistem zatvorenih skupova u $(2^X,\mathcal{T})$ i neka je $\tilde{\mathcal{H}}$ odgovarajuća kolekcija za prostor $(2^{\tilde{X}},\tilde{\mathcal{T}})$. (Vid. Stav 3.1.) Preslikavanje q je:

4^0 neprekidno, jer za svaki zatvoren skup $\tilde{F}$ iz $\tilde{X}$ je

$$q^{-1}(<\tilde{F}>)=\{A=p^{-1}(\tilde{A})\,|\,\tilde{A} \in 2^{\tilde{X}} \text{ i } \tilde{A}\subset\tilde{F}\}=\{A \in 2^X\,|\,A\subset p^{-1}(\tilde{F})\}=$$
$$=<p^{-1}(\tilde{F})> \in \mathcal{H}$$

i

$$q^{-1}(>\tilde{F}<)=\{A=p^{-1}(\tilde{A})\,|\,\tilde{A} \in 2^{\tilde{X}} \text{ i } \tilde{A}\cap\tilde{F}\neq\emptyset\}=\{A \in 2^X\,|\,A\cap p^{-1}(\tilde{F})=\emptyset\}=$$
$$=>p^{-1}(\tilde{F})< \in \mathcal{H};$$

5^0 zatvoreno, jer za svaki zatvoren skup F u X važi

$$q(<F>)=q(<p^{-1}(p(F))>)=q(q^{-1}(<p(F)>))=<p(F)> \in \tilde{\mathcal{H}}$$

i

$$q(>F<)=q(>p^{-1}(p(F))<)=q(q^{-1}(>p(F)<))=>p(F)< \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

Sledi da su hiperprostori $(2^X,\mathcal{T})$ i $(2^{\tilde{X}},\tilde{\mathcal{T}})$ homeomorfni.

Potprostori $(\mathcal{C}(X),\mathcal{T})$ i $(\mathcal{C}(\tilde{X}),\tilde{\mathcal{T}})$ su homeomorfni jer je

$$\mathcal{C}(\tilde{X}) = q(\mathcal{C}(X)). \tag{6}$$

Zaista, kako je p neprekidno preslikavanje, za svaki $A\in\mathcal{C}(X)$ skup $p(A)\in\mathcal{C}(\tilde{X})$ pa je $q(\mathcal{C}(X))\subset\mathcal{C}(\tilde{X})$.

Obrnuto, neka je $\tilde{A}\in\mathcal{C}(\tilde{X})$ i neka je $A=p^{-1}(\tilde{A})$. Neka je Φ proizvoljna familija zatvorenih skupova u A sa osobinom konačnog preseka. Tada je $\tilde{\Phi}=\{p(F)\,|\,F\in\Phi\}$ centrirano mnoštvo zatvorenih skupova u $\tilde{X}$. Kako je $\tilde{A}$ kompaktan skup a $\tilde{\Phi}$ kolekcija zatvorenih skupova u $\tilde{A}$, skup $\tilde{F}_0=\bigcap\{p(F)\,|\,F\in\Phi\}\neq\emptyset$. Sledi da je $F_0=p^{-1}(\tilde{F}_0)\neq\emptyset$ i $F_0=\bigcap\{p^{-1}(p(F))\,|\,F\in\Phi\}=\bigcap\{F\,|\,F\in\Phi\}$, dakle A je kompaktan skup, tj. $A\in\mathcal{C}(X)$.

Stoga q definiše homeomorfizam prostora $(\mathcal{C}(X),\mathcal{T})$ i $(\mathcal{C}(\ddot{X}),\tilde{\mathcal{T}})$, čime je tvrdjenje teoreme 3.3 dokazano. ∇

S t a v 3.6. Neka je (X,τ) R_0-prostor. Za svaki $x\in X$ i svaki $V\in\tau$ važi:

(7) $$[x] = \overline{\{x\}}$$

i

(8) $$p^{-1}(p(V)) = V .$$

D o k a z. S obzirom na (4), za dokaz jednakosti (7) treba dokazati da je $\overline{\{x\}}\subset[x]$ za svaki $x\in X$.

Ako je $y\in\overline{\{x\}}$ i $\overline{\{y\}}\neq\overline{\{x\}}$, tada $\overline{\{y\}}\subset\overline{\{x\}}$ i $x\notin\overline{\{y\}}$. Stoga $x\in(\overline{\{y\}})^c$ i, kao je X R_0-prostor, $\overline{\{x\}}$ $(\overline{\{y\}})^c$, pa $y\notin\overline{\{x\}}$, što je kontradikcija. Time je jednakost (7) dokazana.

Jednakost (8) sledi iz

$$V\subset p^{-1}(p(V)) = \cup\{[x]\,|\,x\in V\} = \cup\{\overline{\{x\}}\,|\,x\in V\}\subset V$$

jer je X R_0-prostor.

Time je tvrdjenje stava 3.6 dokazano. ∇

P o s l e d i c a 3.2. Ako je (X,τ) R_0-prostor, količnik-preslikavanje p je otvoreno preslikavanje.

P o s l e d i c a 3.3. Ako je (X,τ) R_0-prostor, njegov količnik-prostor je T_1-prostor.

D o k a z. Kako je za svaki $[x]\in\tilde{X}$ i količnik-preslikavanje $p\colon X\to\tilde{X}$ skup

$$p^{-1}(\{[x]\}) = [x] = \overline{\{x\}}$$

zatvoren u X, to je skup $\{[x]\}$ zatvoren u $\tilde{X}$, pa je $\tilde{X}$ T_1-prostor. ∇

Jasno je da za R_0-prostor koji nije T_0-prostor odgovarajući hiperprostori $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T})$ i $(\mathcal{A}(\tilde{X}),\tilde{\mathcal{T}})$, odnosno $(\mathcal{J}(X),\mathcal{T})$ i $(\mathcal{J}(\tilde{X}),\tilde{\mathcal{T}})$ ne moraju biti homeomorfni. Dovoljno je uočiti prostor (X,τ) sa antidiskretnom topologijom pri čemu X ima bar dva elementa. Tada je $\tilde{X}$ jednočlan skup pa je i $\mathrm{Card}\mathcal{A}(\tilde{X})=1\neq \mathrm{Card}\mathcal{A}(X)$, kao i $\mathrm{Card}\mathcal{J}(\tilde{X})=1\neq\mathrm{Card}\mathcal{J}(X)$.

Teorema 3.3 je još jedan primer postojanja nehomeomorfnih topoloških prostora, a čiji su odgovarajući hiperprostori medju sobom homeomorfni.

Ukoliko je (X,τ) R_0-prostor, tada je, na osnovu posledice 3.3, količnik-prostor $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ T_1-prostor, pa se mnoge osobine prenose sa prostora $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ na hiperprostor $(2^{\tilde{X}},\tilde{\mathcal{T}})$, odnosno $(\mathcal{C}(\tilde{X}),\tilde{\mathcal{T}})$, i obrnuto. (Vid. npr. [36].) Ako su to osobine koje istovremeno poseduju X i $\tilde{X}$, to iz homeomorfnosti hiperprostora $(\mathcal{F},\mathcal{T})$ i $(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{T}})$ sledi prenošenje osobina sa (X,τ) na $(2^X,\mathcal{T})$, odnosno $(\mathcal{C}(X),\mathcal{T})$, i obrnuto.

Sa X na 2^X, odnosno $\mathcal{C}(X)$, može se prenositi samo ona osobina koja se sa T_1-prostora prenosi na odgovarajući hiperprostor, i obrnuto, sa hiperprostora na R_0-prostor X se može prenositi samo ona osobina koja se sa odgovarajućeg hiperprostora prenosi na T_1-prostor, jer je svaki T_1-prostor istovremeno i R_0-prostor.

Sledećom teoremom dokazujemo da neke od osobina koje istovremeno poseduju T_1-prostor X i njegov hiperprostor 2^X, odnosno $\mathcal{C}(X)$, istovremeno poseduju R_0-prostor X i njegov količnik-prostor $(\tilde{X},\tilde{\tau})$, odakle izvodimo zaključak o prenošenju tih osobina sa X na 2^X, odnosno $\mathcal{C}(X)$, i obrnuto.

T e o r e m a 3.4. Neka je (X,τ) R_0-prostor i neka je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ njegov količnik-prostor u odnosu na napred uvedenu relaciju ekvivalencije $\sim$. Tada važi:

1) prostor (X,τ) je kompaktan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ kompaktan prostor;

2) prostor (X,τ) je lokalno kompaktan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ lokalno kompaktan prostor;

3) prostor (X,τ) je separabilan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ separabilan prostor;

4) prostor (X,τ) ima prebrojivu bazu ako i samo ako $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ ima prebrojivu bazu;

5) (X,τ) zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti ako i samo ako $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti;

6) (X,τ) je R_1-prostor ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ T_2-prostor;

7) prostor (X,τ) je regularan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ T_3-prostor;

8) ako je (X,τ) Stoneov prostor, tada je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ Stoneov prostor;

9) prostor (X,τ) je potpuno regularan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor;

10) prostor (X,τ) je normalan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ T_4-prostor;

11) prostor (X,τ) je koneksan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ koneksan prostor;

12) prostor (X,τ) je lokalno koneksan ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ lokalno koneksan ;

13) (X,τ) je nula-dimenzioni prostor ako i samo ako je $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ nula-dimenzioni prostor;

14) ako prostor $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ nema izolovanih tačaka, tada ni prostor (X,τ) nema izolovanih tačaka;

15) ako je prostor (X,τ) totalno diskoneksan, tada je i prostor $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ totalno diskoneksan;

16) ako je (X,τ) diskretan prostor, tada je i $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ diskretan prostor.

D o k a z. 1) Za količnik-preslikavanje $p:X\to\tilde{X}$ i homeomorfizam $q:2^X\to 2^{\tilde{X}}$ važi $p(X)=q(X)=\tilde{X}$ i $q(\mathcal{C}(X))=\mathcal{C}(\tilde{X})$. (Vid. dokaz teoreme 3.3.) Sledi da je $X\in\mathcal{C}(X)$ ako i samo ako je $\tilde{X}\in\mathcal{C}(\tilde{X})$.

2) Kako je $p:X\to\tilde{X}$ neprekidno, zatvoreno i surjektivno preslikavanje, i za svaki $[x]\in\tilde{X}$ je $p^{-1}(\{[x]\})=\overline{\{x\}}$ kompaktan skup u X na osnovu stava 3.2, to je X lokalno kompaktan ako i samo ako je $\tilde{X}$ lokalno kompaktan prostor. (Vid. npr. [43] zadatak 103.)

3) Ako je X separabilan prostor, to je, zbog neprekidnosti preslikavanja p, i prostor $\tilde{X}=p(X)$ separabilan. (Vid. npr. [43] zadatak 26.)

Obrnuto, neka je $\tilde{S}$ prebrojiv svuda gust skup u $\tilde{X}$. Neka je $S\subset X$ takav da je za svaki $\tilde{s}\in\tilde{S}$ skup $S\cap p^{-1}(\{\tilde{s}\})$ jednočlan. Tada je S prebrojiv svuda gust skup u X jer za svaki $V\in\tau$ postoji $\tilde{s}\in\tilde{S}$ takav da $\tilde{s}\in p(V)$. Ako je $s\in S\cap p^{-1}(\{\tilde{s}\})$, sledi da $s\in p^{-1}(p(V))=V$.

4) Ako X ima prebrojivu bazu, tada i $\tilde{X}$ ima prebro-

jivu bazu, jer je druga aksioma prebrojivosti invarijanta otvorenih neprekidnih preslikavanja. (Vid. npr. [65] Th. 15.1.)

Obrnuto, ako je $\tilde{\mathcal{B}}$ prebrojiva baza topologije $\tilde{\tau}$, tada je $\mathcal{B} = \{p^{-1}(\tilde{B}) \mid \tilde{B}\in\tilde{\mathcal{B}}\}$ prebrojiva baza topologije τ. Za svaki $V\in\tau$ skup $p(V) = \cup\{\tilde{B} \mid \tilde{B}\in\tilde{\mathcal{B}}_1\subset\tilde{\mathcal{B}}\}$, sledi da je $V = p^{-1}(p(V)) = \cup\{p^{-1}(\tilde{B}) \mid \tilde{B}\in\tilde{\mathcal{B}}_1\subset\tilde{\mathcal{B}}\}$ na osnovu jednakosti (8).

5) Ako X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, tada i $\tilde{X}$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, jer je ovo svojstvo invarijanta otvorenih neprekidnih preslikavanja.

Obrnuto tvrdjenje se dokazuje slično kao u 4). Za proizvoljan $x\in X$ i prebrojivu lokalnu bazu $\tilde{\mathcal{N}}_{[x]}$ u tački $[x]=p(x)$ u prostoru $\tilde{X}$, kolekcija $\mathcal{N}_x = \{p^{-1}(\tilde{U}) \mid \tilde{U}\in\tilde{\mathcal{N}}_{[x]}\}$ je prebrojiva lokalna baza topologije τ u tački x.

6) Neka je X R_1-prostor i neka su $[x]$ i $[y]$ dva različita elementa iz $\tilde{X}$. Za skupove $\overline{\{x\}}=[x]$ i $\overline{\{y\}}=[y]$ u prostoru X postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $\overline{\{x\}}\subset U$ i $\overline{\{y\}}\subset V$. Skupovi $\tilde{U}=p(U)$ i $\tilde{V}=p(V)$ su otvorene disjunktne okoline tačaka $[x]$ i $[y]$ u prostoru $\tilde{X}$.

Obrnuto, ako je $\tilde{X}$ T_2-prostor i za dve tačke x i y iz X važi $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$, tada su $[x]=\overline{\{x\}}$ i $[y]=\overline{\{y\}}$ različiti elementi u $\tilde{X}$. Postoje otvoreni disjunktni skupovi $\tilde{U}$ i $\tilde{V}$ u $\tilde{X}$ takvi da $[x]\in\tilde{U}$ i $[y]\in\tilde{V}$. Skupovi $U=p^{-1}(\tilde{U})$ i $V=p^{-1}(\tilde{V})$ su otvoreni i disjunktni u X i sadrže tačke x i y redom.

7) Neka je X regularan prostor, skup $\tilde{A}$ zatvoren u $\tilde{X}$ i tačka $[x]\notin\tilde{A}$. Za zatvoren skup $A=p^{-1}(\tilde{A})$ u prostoru X i tačku $x\in[x]$, kako $x\notin A$, postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da $x\in U$ i $A\subset V$. Kako je X R_0-prostor, to je $\overline{\{x\}}=p^{-1}(\{[x]\})\subset U$. Preslikavanje p je zatvoreno i postoje $\tilde{\tau}$ otvoreni skupovi $\tilde{G}$ i $\tilde{H}$ takvi da $[x]\in\tilde{G}$, $\tilde{A}\subset\tilde{H}$, $p^{-1}(\tilde{G})\subset U$ i $p^{-1}(\tilde{H})\subset V$. Sledi da je $\tilde{G}\cap\tilde{H}=\emptyset$, a odatle i regularnost T_1-prostora $\tilde{X}$.

Obrnuto, neka je A zatvoren skup u X i neka je $x\in X-A$. Kako je $A=p^{-1}(p(A))$, to $[x]=p(x)\notin p(A)$. Za zatvoren skup $p(A)$ i tačku $[x]$ u regularnom prostoru $\tilde{X}$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $\tilde{U}$ i $\tilde{V}$ takvi da $[x]\in\tilde{U}$ i $p(A)\subset\tilde{V}$. Tada su $U=p^{-1}(\tilde{U})$ i $V=p^{-1}(\tilde{V})$ otvoreni i disjunktni skupovi u X, $x\in U$ i

$y \in V$. Sledi da je X regularan prostor.

8) Prostor X je Stoneov ako za svake dve različite tačke x_1 i x_2 postoji neprekidna funkcija $f:X \to [0,1]$ takva da je $f(x_1)=0$ i $f(x_2)=1$.

Neka je X Stoneov prostor i neka su $[x_1]$ i $[x_2]$ dva različita elementa iz $\tilde{X}$. Za različite tačke $x_1 \in [x_1]$ i $x_2 \in [x_2]$, postoji neprekidna funkcija $f:X \to [0,1]$ takva da je $f(x_1)=0$ i $f(x_2)=1$. Restrikcija funkcije f na svakoj klasi $[x]$ je konstantna funkcija, jer je za svaki $x \in X$ skup $f^{-1}(\{f(x)\})$ zatvoren, pa stoga $[x]=\overline{\{x\}} \subset f^{-1}(\{f(x)\})$. Dakle, $x \sim y \Rightarrow f(x)=f(y)$, pa f definiše neprekidnu funkciju $\tilde{f}:\tilde{X} \to [0,1]$ takvu da je $\tilde{f} \circ p = f$. (Vid. npr. [43] zadatak 27.) Kako je $\tilde{f}([x_1])=0$ i $\tilde{f}([x_2])=1$, $\tilde{f}$ je funkcija koja razdvaja elemente $[x_1]$ i $[x_2]$. Sledi da je $\tilde{X}$ Stoneov prostor, što je i trebalo dokazati.

Obrnuto tvrdjenje ne važi ukoliko X nije T_1-prostor (tj. ako X i $\tilde{X}$ nisu homeomorfni). Ako su x i y dve ekvivalentne tačke u prostoru X, one se ne mogu razdvojiti neprekidnom realnom funkcijom.

9) Ako je X potpuno regularan prostor, tada se, slično kao u 8), dokazuje da je i $\tilde{X}$ potpuno regularan prostor.

Obrnuto, neka je $\tilde{X}$ potpuno regularan prostor i neka je F zatvoren skup u X koji ne sadrži tačku x. Kako $x \notin F = p^{-1}(p(F))$, to $[x] \notin p(F)$ i postoji neprekidna funkcija $\tilde{f}:\tilde{X} \to [0,1]$ takva da je $\tilde{f}([x])=0$ i $\tilde{f}(p(F))=\{1\}$. Tada funkcija $f=\tilde{f} \circ p:X \to [0,1]$ razdvaja tačku x i skup F. Sledi da je X potpuno regularan prostor.

10) Dokaz je analogan dokazu tvrdjenja 9).

11) Količnik-preslikavanje p je neprekidno pa iz koneksnosti prostora X sledi koneksnost prostora $\tilde{X}$.

Obrnuto, ako su U i V disjunktni neprazni otvoreni skupovi u X takvi da je $U \cup V = X$, tada su $\tilde{U}=p(U)$ i $\tilde{V}=p(V)$ disjunktni neprazni otvoreni skupovi u $\tilde{X}$ takvi da je $\tilde{U} \cup \tilde{V} = \tilde{X}$, jer je $U=p^{-1}(\tilde{U})$ i $V=p^{-1}(\tilde{V})$ na osnovu jednakosti (8), pa $\tilde{X}$ nije koneksan skup.

12) Ako je X lokalno koneksan prostor, tada je i $\tilde{X}$ lokalno koneksan jer je p količnik-preslikavanje.

Obrnuto, neka je $\tilde{X}$ lokalno koneksan prostor i neka je x tačka iz X i U njena otvorena okolina. Tada je $\tilde{U}=p(U)$ otvorena okolina elementa $[x]$ i postoji koneksan otvoren skup $\tilde{V}$ takav da $[x]\in\tilde{V}\subset\tilde{U}$. Skup $V=p^{-1}(\tilde{V})$ je koneksan i otvoren u X i $x\in V\subset U$. Sledi da je X lokalno koneksan prostor.

13) Neka je X nula-dimenzioni prostor i neka je $\mathcal{B}$ baza topologije τ koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova. Tada je $\tilde{\mathcal{B}}=\{p(B)\,|\,B\in\mathcal{B}\}$ baza topologije $\tilde{\tau}$. Kako je preslikavanje p otvoreno-zatvoreno, to su svi elementi iz $\tilde{\mathcal{B}}$ otvoreno-zatvoreni skupovi.

Obrnuto, ako je $\tilde{X}$ nula-dimenizoni prostor i $\tilde{\mathcal{B}}$ njegova baza topologije koja se sastoji iz otvoreno-zatvorenih skupova, tada, kako je $\mathcal{B}=\{p^{-1}(\tilde{B})\,|\,\tilde{B}\in\tilde{\mathcal{B}}\}$ baza topologije τ, a preslikavanje p neprekidno, svi elementi baze $\mathcal{B}$ su otvoreno-zatvoreni skupovi.

14) Ako je x izolovana tačka u R_0-prostoru X, tada je $\overline{\{x\}}\subset\{x\}$, tj. skup $\{x\}$ je otvoreno-zatvoren u X pa je $[x]=\{x\}$. Sledi da je skup $\{[x]\}=p(\{x\})$ otvoren u $\tilde{X}$, odnosno $[x]$ je izolovana tačka u prostoru $\tilde{X}$.

15) Dokaz tvrdjenja sledi neposredno iz definicije totalne diskoneksnosti prostora i osobina preslikavanja p. Za dve razne tačke $[x]$ i $[y]$ u prostoru $\tilde{X}$, u totalno diskoneksnom prostoru X postoji diskoneksija $U|V$ prostora X takva da $x\in U$, $y\in V$. Kako je $U=p^{-1}(p(U))$ i $V=p^{-1}(p(V))$, to $[x]\in p(U)$, $[y]\in p(V)$, a $p(U)$ i $p(V)$ čine diskoneksiju prostora $\tilde{X}$.

16) Tvrdjenje važi neposredno jer su X i $\tilde{X}$ homeomorfni prostori. Jasno je da obrnuta tvrdjenja ne važe u opštem slučaju u 14), 15) i 16). Dovoljno je uočiti prostor X sa trivijalnom topologijom. ∇

P o s l e d i c a 3.4. Teoreme 4.2, 4.6, 4.10, 4.12 i deo teoreme 4.9, stavovi 4.4, 4.5 i 4.13 (ovaj u slabijoj formi) iz [36], važe takodje i za R_0-prostore i njihove odgovarajuće hiperprostore.

Iz posledice 3.4, odnosno teorema 3.3 i 3.4 i teorema 4.9.3 i 4.9.8 iz [36], sledi da prostori X i $C(X)$ istovremeno poseduju R_1 osobinu, dok to ne važi za prostore X i 2^X.

Naime, X mora posedovati "jači stepen" regularnosti, tj. X mora biti regularan prostor da bi 2^X bio R_1-prostor, jer

X je regularan <—> $\tilde{X}$ je T_3 <—> $\widetilde{2^X}$ je T_2 <—> 2^X je $T_2=R_1+T_0$.

Razmotrimo sada neke osobine hiperprostora sa polukonačnim topologijama.

S t a v 3.7. Osobina R_0 se ne prenosi u opštem slučaju sa prostora (X,τ) na hiperprostor $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}})$, gde je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{A}(X)$, 2^X, $\mathcal{C}(X)$ ili $\mathcal{J}(X)$.

D o k a z. Ako je (X,τ) T_1-prostor, prostor $(2^X,\bar{\mathcal{T}})$ zadovoljava T_0 aksiomu ali nije T_1-prostor ukoliko X ima bar dve tačke. (Vid. [49].) Kako je R_0 nasledno svojstvo, ni $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}})$ ne može biti R_0-prostor. Da ni $(\mathcal{C}(X),\bar{\mathcal{T}})$, kao i $(\mathcal{J}(X),\bar{\mathcal{T}})$ ne moraju biti R_0-prostori, pokazuje

PRIMER 3.4. Ako je $X=\{a,b\}$ a τ diskretna topologija, tada je $\mathcal{A}(X)=2^X=\mathcal{C}(X)=\mathcal{J}(X)=\{A,B,X\}$, gde je $A=\{a\}$ i $B=\{b\}$. $\bar{\mathcal{T}}=\{\emptyset,\{A\},\{B\},\{A,B,X\}\}$. Tada je $\bar{\mathcal{T}}\mathrm{cl}\{A\}=\{A,X\}$ i hiperprostor nije R_0-prostor.

L e m a 3.3. Hiperprostor $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$, gde je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija 2^X ili $\mathcal{J}(X)$ je uvek T_0-prostor.

D o k a z. S obzirom da je osobina T_0 nasledno svojstvo, dovoljno je dokazati da je $(2^X,\underline{\mathcal{T}})$ T_0-prostor.

Za dva razna elementa $A,B\in 2^X$ postoji $x\in(A-B)\cup(B-A)$. Ako je $x\in A-B$, tada je $A\in\mathcal{V}=\,>B^c<\,\in\underline{\mathcal{T}}$ i $B\notin\mathcal{V}$. Obrnuto, ako $x\in B-A$, tada $B\in\mathcal{W}=\,>A^c<\,\in\underline{\mathcal{T}}$ i $A\notin\mathcal{W}$. ∇

Kako je topologija $\underline{\mathcal{T}}\subset\mathcal{T}$, to iz primera 3.2 sledi da hiperprostori $(\mathcal{A}(X),\underline{\mathcal{T}})$ i $(\mathcal{J}(X),\underline{\mathcal{T}})$ ne moraju biti T_0-prostori. Čak i više, primer 3.3 pokazuje da $(\mathcal{A}(X),\underline{\mathcal{T}})$ ne mora biti T_0--prostor ni kada je (X,τ) T_1-prostor.

S t a v 3.8. R_0 svojstvo se ne prenosi u opštem slučaju sa prostora (X,τ) ni na jedan od hiperprostora $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}})$, gde je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{A}(X)$, 2^X, $\mathcal{C}(X)$ ili $\mathcal{J}(X)$.

D o k a z. Neka je (X,τ) prostor iz primera 3.4. Za uočene skupove A,B i X je $\underline{T}=\{\emptyset,\{X\},\{A,X\},\{B,X\},F\}$, gde je $F=A(X)=2^X=C(X)=J(X)$. Kako je, na osnovu leme 3.3, $(F,\underline{T})$ T_0-prostor (što se može i neposredno proveriti) a nije diskretan, to $(F,\underline{T})$ nije R_0-prostor. ∇

Kako iskaz teoreme 3.3 nije zavisio od aksioma separacije prostora i njihovih hiperprostora, to za topološki prostor (X,τ), njegov količnik-prostor $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ u odnosu na već razmatranu relaciju ekvivalencije ~, i njihove odgovarajuće hiperprostore važi

T e o r e m a 3.5. Hiperprostori $(2^X,\bar{T})$ i $(2^{\tilde{X}},\bar{\tilde{T}})$ odnosno $(C(X),\bar{T})$ i $(C(\tilde{X}),\bar{\tilde{T}})$, su homeomorfni, kao i hiperprostori $(2^X,\underline{T})$ i $(2^{\tilde{X}},\underline{\tilde{T}})$, odnosno $(C(X),\underline{T})$ i $(C(\tilde{X}),\underline{\tilde{T}})$.

D o k a z. Bijektivnost preslikavanja $q:2^X\to 2^{\tilde{X}}$ iz teoreme 3.3 ne zavisi od topologija na hiperprostorima, kao ni postojanje bijektivnog preslikavanja potprostora $C(X)$ i $C(\tilde{X})$ indukovanog funkcijom q. Neprekidnost i zatvorenost preslikavanja q, s obzirom na topologije na hiperprostorima, dokazuje se kao u teoremi 3.3 korišćenjem stava 3.1. ∇

Ni hiperprostori $A(X)$ i $A(\tilde{X})$, odnosno $J(X)$ i $J(\tilde{X})$, sa polukonačnim topologijama ne moraju biti homeomorfni ako je (X,τ) R_0-prostor koji nije T_0-prostor. Uzimajući ponovo prostor (X,τ) sa trivijalnom topologijom, pri čemu je $\mathrm{Card}X\geq 2$, odgovarajući hiperprostori $A(X)$ i $A(\tilde{X})$, kao i $J(X)$ i $J(\tilde{X})$, ne mogu biti homeomorfni jer nisu iste kardinalnosti.

Slično kao i za hiperprostore sa konačnim topologijama, i u slučaju kada su topologije polukonačne, neke osobine koje važe za T_1-prostore i njihove hiperprostore važe i za R_0-prostore i odgovarajuće hiperprostore.

Navešćemo prvo neke rezultate V.I. Ponomareva i O. Feichtingera. (Vid. [49] i [19].)

S t a v 3.9. Neka je (X,τ) T_1-prostor i $(2^X,\bar{T})$ njegov hiperprostor. Tada:

1^o Ako su A i B elementi iz 2^X, tada $A\in\bar{\mathcal{T}}cl\{B\}$ ako i samo ako je $B\subset A$.

2^o Svaki neprazan zatvoren skup prostora 2^X sadrži element X.

3^o Prostor 2^X je uvek koneksan i kompaktan.

4^o Prostori 2^X i 2^Y su homeomorfni ako i samo ako su X i Y homeomorfni. ∇

S t a v 3.10. Neka je (X,τ) proizvoljan topološki prostor i neka je kolekcija $\sigma\subset\mathcal{A}(X)$ takva da je $\mathcal{J}_1(X)\subset\sigma$. U prostoru $(\sigma,\underline{\mathcal{T}})$ važi:

1^o Prostor X je kompaktan ako i samo ako je prostor σ kompaktan.

2^o Prostor X ima prebrojivu bazu ako i samo ako prostor σ ima prebrojivu bazu.

3^o Ako prostor σ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, tada i prostor X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

4^o Ako $X\in\sigma$, tada je σ separabilan prostor.

Takodje:

5^o Ako je (X,τ) T_1-prostor, tada su skupovi $\{\{x\}\}$, $x\in X$, jedini jednočlani zatvoreni skupovi u $(2^X,\underline{\mathcal{T}})$.

6^o Ako su X i Y T_1-prostori, tada je prostor X homeomorfan prostoru Y ako i samo ako su 2^X i 2^Y (sa donjim polukonačnim topologijama) homeomorfni prostori. ∇

Tvrdjenja 2^o i 3^o stava 3.9 važe za bilo koji topološki prostor (X,τ) i njegov hiperprostor $(2^X,\bar{\mathcal{T}})$. Zaista, ako je Φ neprazan zatvoren skup u 2^X, to za $X\in 2^X$ i njegovu jedinu okolinu $\mathcal{U}=\langle X\rangle=2^X$ važi $\Phi\cap\mathcal{U}\neq\emptyset$. Kompaktnost prostora 2^X sledi iz činjenice da svaki otvoren pokrivač $\mathcal{P}$ ima element P_0 koji sadrži X, tj. $P_0=\langle X\rangle$, pa je $\{P_0\}$ konačan potpokrivač pokrivača $\mathcal{P}$. Na isti način se zaključuje da je $(2^X,\bar{\mathcal{T}})$ koneksan prostor, jer je 2^X jedini otvoren skup u prostoru 2^X koji sadrži element X. Medjutim, ako je (X,τ) proizvoljan topološki prostor, važe samo implikacije:

1' $B\subset A \Rightarrow A\in\bar{\mathcal{T}}cl\{B\}$, i

2' X je homeomorfan Y $\Rightarrow$ prostor 2^X je hoemomorfan 2^Y.

Zaista, ako je $B \subset A$, svaka bazna okolina $\mathcal{U} = \langle U \rangle$ skupa A sadrži skup B, dakle $A \in \bar{\mathcal{T}}\mathrm{cl}\{B\}$. Da obrnuto u opštem slučaju ne važi, pokazuje i

PRIMER 3.5. Neka je $X = \{a,b\}$ i $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Tada je $2^X = \{\{b\}, X\}$ i $\bar{\mathcal{T}} = \{\emptyset, 2^X\}$ je trivijalna topologija. Skup $\{b\} \in \{X\}$ iako $X \not\subset \{b\}$.

Iz teoreme 3.5 i stava 3.9 dokazujemo da važi

S t a v 3.11. Ako je (X,τ) R_0-prostor i $(2^X, \bar{\mathcal{T}})$ njegov hiperprostor, tada

1° $A \in \bar{\mathcal{T}}\mathrm{cl}\{B\}$ ako i samo ako $B \subset A$.

2° Ako su X i Y homeomorfni prostori, tada su i 2^X i 2^Y homeomorfni prostori.

Obrnuto tvrdjenje u 2° ne važi u opštem slučaju. Dovoljno je uzeti da je $Y = \tilde{X}$ količnik-prostor prostora X. ∇

Kako su tvrdjenja stava 3.10 tačna i u specijalnom slučaju kad je (X,τ) T_1-prostor, a $\sigma = 2^X$, to korišćenjem teorema 3.4 i 3.5, kao i stava 3.10, dokazujemo

S t a v 3.12. Ako je (X,τ) R_0-prostor i $(2^X, \underline{\mathcal{T}})$ njegov hiperprostor sa donjom polukonačnom topologijom, tada:

$1'$ Prostor X je kompaktan ako i samo ako je prostor 2^X kompaktan.

$2'$ Prostor X ima prebrojivu bazu ako i samo ako 2^X ima prebrojivu bazu.

$3'$ Ako 2^X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, tada i X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

$5'$ Jedini jednočlani zatvoreni skupovi u 2^X su skupovi oblika $\{[x]\} = \{\overline{\{x\}}\}$ za $x \in X$.

$6'$ Ako su X i Y homeomorfni prostori, tada su i 2^X i 2^Y homeomorfni prostori. ∇

Tvrdjenje $6'$ iz stava 3.12 važi za proizvoljne topološke prostore X i Y. Da u $6'$ ne važi i obrnuto tvrdjenje, dovoljno je uočiti $Y = \tilde{X}$.

Takodje, tvrdjenje 4° iz stava 3.10 važi za proizvoljan topološki prostor (X,τ). Ako $X\in\sigma$, tada za svaki neprazan predbazni element topologije $\underline{T}$, a stoga i za svaki bazni element U, skup $X\in U$, pa je $\underline{T}\mathrm{cl}\{X\}=\sigma$.

3.3. BITOPOLOŠKI HIPERPROSTORI

Polazeći od hiperprostora topološkog prostora, R. Vasudevan i C.K. Goel (|66|,|68|) uvode pojam bitopološkog hiperprostora sa konačnim i polukonačnim topologijama.

D e f i n i c i j a 3.1. Neka je (X,τ^1,τ^2) bitopološki prostor i neka je F kolekcija nepraznih podskupova od X. Bitopološki prostor (F,Θ^1,Θ^2), gde je Θ^i jedna od topologija T^i, $\bar{T}^i$ ili $\underline{T}^i$ na F generisana topologijom τ^i, za $i=1,2$, naziva se <u>bitopološkim hiperprostorom</u> prostora (X,τ^1,τ^2).

Pre nego što navedemo neke rezultate Vasudevana i Goela, uvešćemo oznake koje ćemo dalje koristiti.

Ako je (X,τ^1,τ^2) bitopološki prostor, tada:

$$(9)\quad\begin{cases} A(X)=\{A\subset X \mid A\neq\emptyset\} \\ S(X)=\{A\in A(X)\mid A \text{ je semizatvoren u } (X,\tau^1,\tau^2)\} \\ Q(X)=\{A\in A(X)\mid A \text{ je kvazizatvoren u } (X,\tau^1,\tau^2)\} \\ K(X)=\{A\in A(X)\mid A \text{ je } \tau^1 \text{ zatvoren ili } \tau^2 \text{ zatvoren u } (X,\tau^1,\tau^2)\} \\ B(X)=\{A\in A(X)\mid A \text{ je } \tau^1 \text{ zatvoren i } \tau^2 \text{ zatvoren u } (X,\tau^1,\tau^2)\}. \end{cases}$$

S obzirom na način kako su gornje kolekcije definisane, za proizvoljan bitopološki prostor važi

$$A(X)\supset S(X)\supset Q(X)\supset K(X)\supset B(X)\ .$$

Ako je F jedna od uočenih kolekcija, označavaćemo

$$CF=\{A\in F \mid A \text{ je kvazikompaktan skup u } (X,\tau^1,\tau^2)\}.$$

Takodje ćemo koristiti i sledeće oznake već uvedene za topološke hiperprostore:

$$J_n(X)=\{A\in A(X)\mid A \text{ ima najviše } n \text{ elemenata}\}$$

i

$$J(X)=\bigcup_{n\in N} J_n(X)=\{A\in A(X)\mid A \text{ je konačan skup}\}.$$

S obzirom da ćemo lokalnu kvazikompaktnost i uzajamnu koneksnost hiperprostora ispitivati u narednim poglavljima, ovde ćemo se zadržati na kvazikompaktnosti i aksiomama separacije.

U [68] R. Vasudevan i C.K. Goel ispituju samo kvazikompaktnost hiperprostora $(\mathcal{K}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ pretpostavljajući pri tom da je bar jedan od prostora (X,τ^1) ili (X,τ^2) T_1-prostor.

Ovde dokazujemo sledeća tvrdjenja:

T e o r e m a 3.6. Neka je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$, $\mathcal{S}(X)$ ili $\mathcal{A}(X)$ i neka je $\mathcal{J}_1(X)\subset\mathcal{F}$. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako je prostor $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ kvazikompaktan.

D o k a z. Neka je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan prostor. Na osnovu leme 1.1, familija $\Psi^1\cup\Psi^2$, gde su Ψ^i predbaze konačnih topologija $\mathcal{T}^i$ na $\mathcal{F}$, je predbaza topologije $\mathcal{T}=\mathcal{T}^1\vee\mathcal{T}^2$. Korišćenjem Alexanderove leme o predbazi, dovoljno je dokazati da svaki pokrivač prostora $\mathcal{F}$, koji se sastoji od predbaznih elemenata, ima konačan potpokrivač. Stoga, neka kolekcija $\mathcal{P}$ pokriva $\mathcal{F}$, pri čemu je $\mathcal{P}\subset\Psi^1\cup\Psi^2$. Označimo $\mathcal{V}=\{>V_\lambda< \mid >V_\lambda<\ \in\mathcal{P}\}$ i $V=\cup\{V_\lambda \mid >V_\lambda<\ \in\mathcal{V}\}$.

1^0 Ako je $V=X$, tada je $\mathcal{Q}=\{V_\lambda \mid >V_\lambda<\ \in\mathcal{V}\}$ kvaziotvoren pokrivač prostora X i postoji konačan potpokrivač $\{V_{\lambda_k} \mid k=1,\dots,m\}$. Tada konačna kolekcija $\{>V_{\lambda_k}< \mid k=1,\dots,m\}\subset\mathcal{P}$ pokriva $\mathcal{F}$ jer za svaki $A\in\mathcal{F}$ postoji $x\in A$ i postoji $k\in\{1,\dots,m\}$ takav da je $x\in V_{\lambda_k}$; sledi da $A\in\ >V_{\lambda_k}<$.

2^0 Ako je $V\neq X$, kako je V kvaziotvoren skup u X, skup $F=X-V$ je kvazizatvoren. Stoga $F\in\mathcal{F}$ i postoji $P\in\mathcal{P}$ takav da $F\in P$. S obzirom na definiciju skupa V, mora biti $P=\langle U_0\rangle$ za neki $U_0\in\tau^1\cup\tau^2$.

Ako je $U_0=X$, tada je $\{\langle U_0\rangle\}=\{\langle X\rangle\}$ konačan pokrivač prostora $\mathcal{F}$, potpokrivač pokrivača $\mathcal{P}$.

Ako je $U_0\neq X$, skup $H=U_0^c$ je neprazan i kvazizatvoren u X, pa stoga i kvazikompaktan, i $H\subset V$. Kolekcija $\{V_\lambda \mid >V_\lambda<\ \in\mathcal{P}\}$ pokriva H i postoji konačan potpokrivač $\{V_{\lambda_k} \mid k=1,\dots,m\}$. Tada je $\mathcal{P}_1=\{\langle U_0\rangle\}\cup\{>V_{\lambda_k}< \mid k=1,\dots,m\}\subset\mathcal{P}$ konačan pokrivač od $\mathcal{F}$.

Obrnuto tvrdjenje sledi iz činjenice da postoji kvazikompaktna kolekcija σ takva da je $\mathcal{J}_1(X)\subset\sigma\subset\mathcal{F}$ i da unija topologija na $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}^1\cup\mathcal{T}^2$, sadrži familiju $\underline{\Psi}^1\cup\underline{\Psi}^2$.

Zaista, ako je $\mathcal{Q}\subset\tau^1\cup\tau^2$ kvaziotvoren pokrivač prostora (X,τ^1,τ^2), tada je familija $\mathcal{P}=\{>V<\ |V\in\mathcal{Q}\}\subset\underline{\Psi}^1\cup\underline{\Psi}^2$ kvaziotvoren pokrivač od $\mathcal{F}$. Kako ona pokriva kvazikompaktnu kolekciju σ, postoji konačan potpokrivač $\mathcal{P}_1=\{>V_k<\ |k=1,\dots,m\}$ koji pokriva σ. Kako je $\mathcal{J}_1(X)\subset\sigma$, to je kolekcija $\{V_k|k=1,\dots,m\}\subset\subset\mathcal{Q}$ konačan pokrivač od X. ∇

S t a v 3.13. Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija iz (9). Bitopološki prostor $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\bar{\mathcal{T}}^2)$ je kvazikompaktan.

D o k a z. Na osnovu leme 1.1, familija $\bar{\Psi}^1\cup\bar{\Psi}^2$ je predbaza topologije $\bar{\mathcal{T}}^1\vee\bar{\mathcal{T}}^2$. Neka je $\mathcal{P}$ pokrivač prostora $\mathcal{F}$ takav da je $\mathcal{P}\subset\bar{\Psi}^1\cup\bar{\Psi}^2$. Tada, kako je $X\in\mathcal{F}$, mora biti $<X>\ \in\mathcal{P}$, pa $\{<X>\}\subset\mathcal{P}$ pokriva $\mathcal{F}$. ∇

S t a v 3.14. Neka je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija iz (9) i neka je $\mathcal{J}_1(X)\subset\mathcal{F}$. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako je prostor $(\mathcal{F},\underline{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ kvazikompaktan.

D o k a z. Slično kao u dokazu teoreme 3.6, neka je $\mathcal{P}\subset\underline{\Psi}^1\cup\underline{\Psi}^2$ pokrivač prostora $\mathcal{F}$ koji se sastoji iz predbaznih elemenata. Tada $\mathcal{Q}=\{V|\ >V<\ \in\mathcal{P}\}$ pokriva X, jer za svaki $x\in X$ skup $\{x\}\in\mathcal{F}$ i postoji $>V<\ \in\mathcal{P}$ da je $\{x\}\in\ >V<$. Sledi da je $x\in V$. Ako je $\{V_k|k=1,\dots,m\}\subset\mathcal{Q}$ konačan pokrivač prostora X, tada konačna kolekcija $\{>V_k<\ |k=1,\dots,m\}\subset\mathcal{P}$ pokriva $\mathcal{F}$.

Obrnuta implikacija sledi iz dokaza teoreme 3.6. ∇

S t a v 3.15. Neka je (X,τ^1,τ^2) bitopološki prostor, $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$, $\mathcal{S}(X)$ ili $\mathcal{A}(X)$ i neka je $\mathcal{J}_1(X)\subset\mathcal{F}$. Tada važi:

(i) Ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan prostor, tada su $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ i $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ kvazikompaktni prostori.

(ii) Prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako je prostor $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ kvazikompaktan.

D o k a z. Ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan prostor, tada je, na osnovu teoreme 3.6, hiperprostor $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ kvazikompaktan. Kako topologije na F zadovoljavaju relacije $\bar{T}^1 \subset T^1$ i $\underline{T}^2 \subset T^2$, to je svaki od prostora $(F, \bar{T}^1, \underline{T}^2)$, $(F, \bar{T}^1, T^2)$ i $(F, T^1, \underline{T}^2)$ kvazikompaktan.

Ako je $(F, T^1, \underline{T}^2)$ kvazikompaktan prostor, tada je, s obzirom na $T^1 \supset \underline{T}^1$, prostor $(F, \underline{T}^1, \underline{T}^2)$ kvazikompaktan, pa iz stava 3.14 sledi kvazikompaktnost prostora (X, τ^1, τ^2). ∇

Obrnut iskaz u (i) stava 3.15 ne važi, što pokazuje

PRIMER 3.6. Neka je X beskonačan skup i neka je τ^1 diskretna, a τ^2 trivijalna topologija na X. Tada je $A(X) = S(X) = Q(X) = K(X)$ i $J_1(X) \subset A(X) = F$. Kako je $\underline{T}^2 = T^2 = \{\emptyset, F\}$ trivijalna topologija, to za proizvoljan kvaziotvoren pokrivač P prostora F mora biti $\langle X \rangle = F \in P$, jer je sam prostor jedini kvaziotvoren skup koji sadrži X. Stoga su prostori $(F, \bar{T}^1, \underline{T}^2) = (F, \bar{T}^1, T^2)$ kvazikompaktni, dok prostor (X, τ^1, τ^2) nije kvazikompaktan.

Primetimo da redosled topologija u bitopološkom prostoru nije bitan za kvazikompaktnost prostora, pa stoga tvrdjenje stava 3.15 važi i za hiperprostore $(F, \underline{T}^1, \bar{T}^2)$ i $(F, T^1, \bar{T}^2)$ u iskazu (i), odnosno $(F, \underline{T}^1, T^2)$ u iskazu (ii).

Takodje, u iskazu (i) stava 3.15 za kolekciju F može se uzeti i kolekcija $K(X)$, tj. iz kvazikompaktnosti prostora (X, τ^1, τ^2) sledi kvazikompaktnost prostora $(K(X), \bar{T}^1, \underline{T}^2)$.

Zaista, kao u dokazu teoreme 3.6, neka je $P \subset \bar{\Psi}^1 \cup \underline{\Psi}^2$ kvaziotvoren pokrivač prostora $K(X)$. Neka je $V = \cup\{V_\lambda \mid >V_\lambda< \in P\}$.

1^0 Ako je $V = X$, tada se iz τ^2 otvorenog pokrivača $Q = \{V_\lambda \mid >V_\lambda< \in P\}$ prostora X izdvaja konačan potpokrivač $\{V_{\lambda_k} \mid k=1,\dots,m\}$. Kolekcija $\{>V_{\lambda_k}< \mid k=1,\dots,m\}$ pokriva $K(X)$.

2^0 Ako je $V \neq X$, kako je skup $F = X - V$ τ^2 zatvoren, to $F \in K(X)$ i postoji $P \in P$ da je $F \in P$. Tada mora biti $P = \langle U_0 \rangle$ za neki $U_0 \in \tau^1$. Ako je $U_0 = X$, tada, kao u dokazu teoreme 3.6, $\{\langle U_0 \rangle\} = \{P\} \subset P$ pokriva $K(X)$. Ako je $U_0 \neq X$, skup $H = U_0^c$ je neprazan kvazizatvoren u X, stoga kvazikompaktan, i $H \subset V$. Iz otvorenog pokrivača $\{V_\lambda \mid >V_\lambda< \in P\}$ skupa H izdvaja se konačan potpokrivač $\{V_{\lambda_k} \mid k=1,\dots,m\}$. Tada $P_1 = \{\langle U_0 \rangle\} \cup \{>V_{\lambda_k}< \mid k=1,\dots,m\} \subset P$ pokriva $K(X)$.

Slično kao za topološke prostore, u bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) uvodimo jednu relaciju ekvivalencije i razmatramo odgovarajuće hiperprostore prostora (X,τ^1,τ^2) i njegovog količnik-prostora $(\tilde{X},\tilde{\tau}^1,\tilde{\tau}^2)$.

Neka je (X,τ^1,τ^2) bitopološki prostor i neka je $\sim$ binarna relacija na skupu X definisana sa

$$(10) \qquad x \sim y \iff \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$$

tj. x i y su u relaciji ako i samo ako su kvaziadherencije skupova $\{x\}$ i $\{y\}$ jednake.

Ponovo ćemo sa $[x]$ označiti klasu ekvivalencije elementa x, sa $\tilde{X} = X/_\sim$ skup klasa ekvivalencije, a sa $\tilde{\tau}^i$ količnik-topologiju na $\tilde{X}$ za $i=1,2$. Neka je $p:X\to\tilde{X}$ količnik-preslikavanje.

Analogno stavu 3.5 i teoremi 3.3 važi

S t a v 3.16. Ako je (X,τ^1,τ^2) bitopološki prostor i $(\tilde{X},\tilde{\tau}^1,\tilde{\tau}^2)$ njegov količnik-prostor, a $p:X\to\tilde{X}$ količnik-preslikavanje, tada:

(i) $[x]\subset\overline{\{x\}}$ za svaki $x\in X$;

(ii) $p^{-1}(p(F_i))= F_i$ za svaki F_i zatvoren skup u (X,τ^i), $i\in\{1,2\}$;

(iii) $p^{-1}(p(F))= F$ za svaki $F\in\mathcal{Q}(X)$;

(iv) $p^{-1}(p(A))= A$ za svaki $A\in\mathcal{S}(X)$.

D o k a z. (i) Inkluzija sledi iz

$$y\in[x] \Rightarrow \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \Rightarrow y\in\overline{\{x\}} .$$

(ii) Ako je F_i zatvoren skup u (X,τ^i) za $i\in\{1,2\}$, tada, kao i za topološke prostore,

$$F_i\subset p^{-1}(p(F_i))=\cup\{[x]\,|\,x\in F_i\}\subset \cup\{\overline{\{x\}}\,|\,x\in F_i\}\subset F_i$$

jer $\overline{\{x\}}\subset\tau^i cl\{x\}\subset F_i$ za svaki $x\in F_i$; stoga je $p^{-1}(p(F_i))= F_i$.

(iii) Svaki kvazizatvoren skup $F = F_1\cap F_2$, gde su F_i zatvoreni skupovi u (X,τ^i), $i=1,2$. Stoga, na osnovu (ii), za svaki $F\in\mathcal{Q}(X)$

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(F)) &= p^{-1}(p(F_1\cap F_2))= p^{-1}(p[p^{-1}(p(F_1))\cap p^{-1}(p(F_2))])= \\ &= p^{-1}(p[p^{-1}(p(F_1)\cap p(F_2))])= p^{-1}(p(F_1)\cap p(F_2))= \\ &= p^{-1}(p(F_1))\cap p^{-1}(p(F_2))= F_1\cap F_2= F . \end{aligned}$$

(iv) Predbazu sistema zatvorenih skupova u topološkom prostoru (X,τ), gde je $\tau=\tau^1\vee\tau^2$, supremum topologija za τ^1 i τ^2, čini kolekcija $\mathcal{K} = \{F_1 | F_1=\tau^1 \mathrm{cl} F_1\} \cup \{F_2 | F_2=\tau^2 \mathrm{cl} F_2\}$. Svaki semizatvoren skup A u bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) je presek baznih elemenata sistema zatvorenih skupova, tj. $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, gde je za svaki $\lambda\in\Lambda$ skup $B_\lambda = F_{1\lambda}\cup F_{2\lambda}$, a $F_{i\lambda}$ je zatvoren skup u (X,τ^i), $i=1,2$. Sledi, na osnovu (ii), da je za svaki $A\in\mathcal{S}(X)$

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(A)) &= p^{-1}(p(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)) = p^{-1}(p(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(F_{1\lambda}\cup F_{2\lambda}))) = \\ &= p^{-1}(p(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}[p^{-1}(p(F_{1\lambda}))\cup p^{-1}(p(F_{2\lambda}))])) = \\ &= p^{-1}(p[p^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}[p(F_{1\lambda})\cup p(F_{2\lambda})])]) = \\ &= p^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}[p(F_{1\lambda})\cup p(F_{2\lambda})]) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} p^{-1}[p(F_{1\lambda})\cup p(F_{2\lambda})] = \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}[p^{-1}(p(F_{1\lambda}))\cup p^{-1}(p(F_{2\lambda}))] = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(F_{1\lambda}\cup F_{2\lambda}) = A. \end{aligned}$$

Time je tvrdjenje stava 3.16 dokazano. ∇

P o s l e d i c a 3.5. Količnik-preslikavanje $p:X\to\tilde{X}$ je uzajamno zatvoreno.

D o k a z. Za svaki F_i, zatvoren skup u (X,τ^i) za $i=1,2$, skup $p(F_i)$ je zatvoren u $(\tilde{X},\tilde{\tau}^i)$ jer je $p^{-1}(p(F_i)) = F_i$. Sledi da je preslikavanje p uzajamno zatvoreno. ∇

T e o r e m a 3.7. Neka je (X,τ^1,τ^2) bitopološki prostor, $(\tilde{X},\tilde{\tau}^1,\tilde{\tau}^2)$ njegov količnik-prostor i $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{Q}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ ili $\mathcal{B}(X)$. Ako je Θ^i jedna od topologija $\mathcal{T}^i$, $\bar{\mathcal{T}}^i$ ili $\underline{\mathcal{T}}^i$ za $i=1,2$, tada su odgovarajući hiperprostori $(\mathcal{F},\Theta^1,\Theta^2)$ i $(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\Theta}^1,\tilde{\Theta}^2)$ uzajamno homeomorfni.

D o k a z. (i) Dokažimo prvo uzajamnu homeomorfnost hiperprostora $(\mathcal{S}(X),\Theta^1,\Theta^2)$ i $(\mathcal{S}(\tilde{X}),\tilde{\Theta}^1,\tilde{\Theta}^2)$.

Neka je $q:\mathcal{S}(X)\to\mathcal{S}(\tilde{X})$ preslikavanje definisano sa

$$q(A) = p(A)$$

za svaki $A\in\mathcal{S}(X)$. Funkcija q je:

1° dobro definisana, jer, na osnovu jednakosti (iv) i (ii) stava 3.16 i posledice 3.5,

$$q(A) = p\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(F_{1\lambda}\cup F_{2\lambda})\Big) = p\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(p^{-1}[p(F_{1\lambda})\cup p(F_{2\lambda})])\Big) =$$
$$= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}[p(F_{1\lambda})\cup p(F_{2\lambda})] \in S(\tilde{X})$$

za svaki $A\in S(X)$;

2^0 injektivna, jer za svaka dva elementa $A_1, A_2 \in S(X)$
$q(A_1)=q(A_2) \Rightarrow p(A_1)=p(A_2) \Rightarrow p^{-1}(p(A_1))=p^{-1}(p(A_2)) \Rightarrow A_1=A_2$;

3^0 surjektivna, jer za svaki $\tilde{A}\in S(\tilde{X})$, $\tilde{A}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(\tilde{F}_{1\lambda}\cup\tilde{F}_{2\lambda})$
gde su $\tilde{F}_{i\lambda}$ zatvoreni skupovi u $(\tilde{X},\tilde{\tau}^i)$, $i=1,2$, pa je, na osnovu definicije količnik-topologije,

$$p^{-1}(\tilde{A}) = p^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(\tilde{F}_{1\lambda}\cup\tilde{F}_{2\lambda})\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}[p^{-1}(\tilde{F}_{1\lambda})\cup p^{-1}(\tilde{F}_{2\lambda})] \in S(X),$$

kao i

$$q(p^{-1}(\tilde{A})) = p(p^{-1}(\tilde{A})) = \tilde{A}\ .$$

Uzajamna neprekidnost i uzajamna zatvorenost preslikavanja q slede iz neprekidnosti i zatvorenosti indukovanih preslikavanja $q_i:(S(X),\theta^i)\to(S(\tilde{X}),\tilde{\theta}^i)$, $i=1,2$, topoloških hiperprostora. Dokaz je isti kao u teoremi 3.3.

(ii) Homeomorfizam q bitopoloških prostora $S(X)$ i $S(\tilde{X})$ indukuje homeomorfizam potprostora $Q(X)$ i $Q(\tilde{X})$. Za svaki $F\in Q(X)$ je $F=F_1\cap F_2$, F_i su τ^i zatvoreni u X za $i=1,2$, pa je na osnovu (ii) stava 3.16 i posledice 3.5,

$$q(F) = p(F) = p(F_1\cap F_2) = p(p^{-1}[p(F_1)\cap p(F_2)]) = p(F_1)\cap p(F_2) \in Q(\tilde{X})\ .$$

Sledi da je $q(Q(X))\subset Q(\tilde{X})$.

Obrnuto, za svaki kvazizatvoren skup $\tilde{F}$ u $\tilde{X}$, iz $\tilde{F}=\tilde{F}_1\cap\tilde{F}_2$ sledi $q^{-1}(\tilde{F}) = p^{-1}(\tilde{F}) = p^{-1}(\tilde{F}_1)\cap p^{-1}(\tilde{F}_2) \in Q(X)$, pa je

$$q(Q(X)) = Q(\tilde{X}).$$

(iii) Iz uzajamne neprekidnosti i uzajamne zatvorenosti preslikavanja p dobija se da preslikavanje q indukuje homeomorfizam prostora $K(X)$ i $K(\tilde{X})$, odnosno $B(X)$ i $B(\tilde{X})$.

Time je tvrdjenje teoreme 3.7 dokazano. ∇

NAPOMENA. Ako su u bitopološkom prostoru topologije τ^1 i τ^2 jednake, tada su kolekcije $B(X)=K(X)=Q(X)=S(X)=2^X$ i tvrdjenje teoreme 3.7 se svodi na iskaze teorema 3.3 i 3.5.

Zadržimo sve oznake iz teoreme 3.7.

T e o r e m a 3.8. Potprostori $(\mathcal{CF},\Theta^1,\Theta^2)$ i $(\mathcal{C}\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\Theta}^1,\tilde{\Theta}^2)$ su homeomorfni.

D o k a z. S obzirom na tvrdjenje teoreme 3.7, dovoljno je dokazati da je $q(\mathcal{CS}(X))=\mathcal{CS}(\tilde{X})$.

Kako je p uzajamno neprekidno preslikavanje, to je, na osnovu posledice 1.1 i stava 1.15, za svaki $A\in\mathcal{CS}(X)$ skup $q(A)=p(A)$ kvazikompaktan, pa je $q(\mathcal{CS}(X))\subset\mathcal{CS}(\tilde{X})$.

Obrnuto, neka je $\tilde{A}\in\mathcal{CS}(\tilde{X})$ i neka je $A=p^{-1}(\tilde{A})$. Neka je Φ kolekcija semizatvorenih skupova u A, sa osobinom konačnog preseka. Tada je, s obzirom na osobine preslikavanja p, kolekcija $\tilde{\Phi}=\{p(F)\,|\,F\in\Phi\}$ centrirano mnoštvo semizatvorenih skupova u kvazikompaktnom skupu $\tilde{A}$, pa je $\tilde{F}_0=\cap\{p(F)\,|\,F\in\Phi\}\neq\emptyset$. Sledi da je skup $p^{-1}(\tilde{F}_0)\neq\emptyset$. Kako je $p^{-1}(\tilde{F}_0)=\cap\{p^{-1}(p(F))\,|\,F\in\Phi\}=$ $=\cap\{F\,|\,F\in\Phi\}$ na osnovu (iv) stava 3.16, to je $\cap\{F\,|\,F\in\Phi\}\neq\emptyset$. S obzirom na stav 1.16, A je kvazikompaktan skup.

Stoga preslikavanje $q:\mathcal{S}(X)\to\mathcal{S}(\tilde{X})$ indukuje homeomorfizam potprostora $\mathcal{CS}(X)$ i $\mathcal{CS}(\tilde{X})$. ∇

S t a v 3.17. Neka je (X,τ^1,τ^2) pR_0 bitopološki prostor i neka je $(\tilde{X},\tilde{\tau}^1,\tilde{\tau}^2)$ njegov količnik-prostor. Tada je:

(i) $[x]=\overline{\{x\}}$ za svaki $x\in X$;

(ii) $p^{-1}(p(V_i))=V_i$ za svaki $V_i\in\tau^i$;

(iii) $p^{-1}(p(V))=V$ za svaki kvaziotvoren skup V u (X,τ^1,τ^2).

D o k a z. (i) S obzirom na inkluziju (i) stava 3.16, treba dokazati da je $\overline{\{x\}}\subset[x]$ za svaki $x\in X$. Neka je $y\in\overline{\{x\}}$. Tada, na osnovu stava 1.2, za pR_0 prostor X važi

$$\overline{\{y\}}\neq\overline{\{x\}}\Rightarrow x\notin\overline{\{y\}}\Rightarrow(x\in(\tau^1\mathrm{cl}\{y\})^c\vee x\in(\tau^2\mathrm{cl}\{y\})^c)$$
$$\Rightarrow(\tau^2\mathrm{cl}\{x\}\subset(\tau^1\mathrm{cl}\{y\})^c\vee\tau^1\mathrm{cl}\{x\}\subset(\tau^2\mathrm{cl}\{y\})^c)$$
$$\Rightarrow(\overline{\{x\}}\cap\tau^1\mathrm{cl}\{y\}=\emptyset\vee\overline{\{x\}}\cap\tau^2\mathrm{cl}\{y\}=\emptyset)$$
$$\Rightarrow\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}=\emptyset\Rightarrow y\notin\overline{\{x\}}$$

što je kontradikcija. Dakle, $\overline{\{x\}}\subset[x]$, odnosno $[x]=\overline{\{x\}}$ za svaki $x\in X$.

(ii) Za svaki $V_i\in\tau^i$, $i\in\{1,2\}$,

$$V_i\subset p^{-1}(p(V_i))=\cup\{[x]\,|\,x\in V_i\}=\cup\{\overline{\{x\}}\,|\,x\in V_i\}\subset\cup\{\tau^j\mathrm{cl}\{x\}\,|\,x\in V_i\}\subset V_i,$$

gde je $j\in\{1,2\}-\{i\}$, jer je X pR_0 prostor.

(iii) Svaki kvaziotvoren skup $V=V_1\cup V_2$ gde su $V_i\in\tau^i$, $i=1,2$. Stoga je, na osnovu (ii),

$$p^{-1}(p(V))=p^{-1}(p(V_1\cup V_2))=p^{-1}(p(V_1))\cup p^{-1}(p(V_2))=V_1\cup V_2=V,$$

što je i trebalo dokazati. (Uporediti sa dokazom stava 3.6.) ∇

P o s l e d i c a 3.6. Ako je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor, količnik-preslikavanje $p:X\to\tilde{X}$ je uzajamno otvoreno.

P o s l e d i c a 3.7. Ako je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor, tada je $\{[x]\}\in\mathcal{Q}(\tilde{X})$ za svaki $x\in X$, tj. $\mathcal{J}_1(\tilde{X})\subset\mathcal{Q}(\tilde{X})$.

D o k a z. Kako je, na osnovu stava 3.17, $[x]=\overline{\{x\}}$ kvazizatvoren skup za svaki $x\in X$, skup $\{[x]\}$je kvazizatvoren jer je $\{[x]\}=p(\{[x]\})=q(\{\overline{x}\})$. ∇

Ako je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor, bitopološki količnik $(\tilde{X},\tilde{\tau}^1,\tilde{\tau}^2)$ne mora biti pT_1 prostor, kao što pokazuje

PRIMER 3.7. Neka je $X=R$ i neka su $\tau^1=\mathcal{L}$ i $\tau^2=\mathcal{D}$, topologije levih i desnih intervala na R. Prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ je pR_0 (i više, on je wpT_1) prostor i za svaki x je

$$[x]=\overline{\{x\}}=(\mathcal{L}\mathrm{cl}\{x\})\cap(\mathcal{D}\mathrm{cl}\{x\})=[x,+\infty)\cap(-\infty,x]=\{x\}.$$

Dakle, $\tilde{X}$ je homeomorfan prostoru X i nije pT_1 prostor.

S t a v 3.18. Ako je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor, tada je i količnik-prostor $(\tilde{X},\tilde{\tau}^1,\tilde{\tau}^2)$ pR_0 prostor.

D o k a z. Neka je $[x]$ proizvoljan element skupa $\tilde{X}$ i neka je $\tilde{V}$ njegova $\tilde{\tau}^i$ otvorena okolina. Neka je $V=p^{-1}(\tilde{V})$. Skup V je τ^i otvoren i $\overline{\{x\}}=[x]\subset V$. Kako je V τ^i okolina tačke x, to $\tau^j\mathrm{cl}\{x\}\subset V$ za $j\in\{1,2\}$ i $j\neq i$. Preslikavanje p je uzajamno zatvoreno na osnovu posledice 3.5, pa je skup $p(\tau^j\mathrm{cl}\{x\})$ zatvoren u $(\tilde{X},\tilde{\tau}^j)$. Iz $x\in\overline{\{x\}}\subset\tau^j\mathrm{cl}\{x\}\subset V$ sledi da je $[x]\in p(\tau^j\mathrm{cl}\{x\})\subset\tilde{V}$, pa je $\tilde{\tau}^j\mathrm{cl}\{[x]\}\subset\tilde{V}$, što je i trebalo dokazati. ∇

Napomenimo da $\mathcal{A}(X)$ i $\mathcal{A}(\tilde{X})$, odgovarajući bitopološki hiperprostori prostora X i $\tilde{X}=X/\sim$, ne moraju biti homeomorfni.

To sledi iz nehomeomorfnosti odgovarajućih hiperprostora topoloških prostora kada su, u specijalnom slučaju, topologije τ^1 i τ^2 jednake.

P o s l e d i c a 3.8. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako je njegov količnik-prostor $(\tilde{X},\tilde{\tau}^1,\tilde{\tau}^2)$ kvazikompaktan.

D o k a z. Tvrdjenje sledi iz dokaza teoreme 3.8 jer $X\in S(X)$ i $p(X)=q(X)=\tilde{X}$, pa stoga $X\in CS(X)$ ako i samo ako $\tilde{X}\in CS(\tilde{X})$. ∇

Iz teorema 3.6 i 3.7, stavova 3.14. i 3.15 i posledica 3.7 i 3.8 sledi

T e o r e m a 3.9. Neka je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor i neka je F jedna od kolekcija $Q(X)$ ili $S(X)$. Važe sledeća tvrdjenja:

(i) (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan ako i samo ako su (F,T^1,T^2), $(F,\underline{T}^1,\underline{T}^2)$, $(F,T^1,\underline{T}^2)$ i $(F,\underline{T}^1,T^2)$ kvazikompaktni prostori;

(ii) ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan prostor, tada su $(F,\bar{T}^1,\underline{T}^2)$, $(F,\underline{T}^1,\bar{T}^2)$, $(F,\bar{T}^1,T^2)$ i $(F,T^1,\bar{T}^2)$ kvazikompaktni prostori.

Analogno teoremi 3.6 i stavovima 3.14 i 3.15 dokazujemo

S t a v 3.19. Neka je F jedna od kolekcija $Q(X)$, $S(X)$ ili $A(X)$ i neka je $J_1(X)\subset F$. Važe sledeća tvrdjenja:

(i) (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan prostor ako i samo ako su prostori (CF,T^1,T^2), $(CF,\underline{T}^1,\underline{T}^2)$, $(CF,T^1,\underline{T}^2)$ i $(CF,\underline{T}^1,T^2)$ kvazikompaktni;

(ii) ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan prostor, tada su $(CF,\bar{T}^1,\underline{T}^2)$, $(CF,\underline{T}^1,\bar{T}^2)$, $(CF,\bar{T}^1,T^2)$ i $(CF,T^1,\bar{T}^2)$ kvazikompaktni prostori.

Iz teoreme 3.8, stava 3.18 i posledica 3.7 i 3.8 sledi

S t a v 3.20. Neka je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor i neka je F jedna od kolekcija $Q(X)$ ili $S(X)$. Tada:

(i) (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan prostor ako i samo ako su prostori $(\mathcal{CF},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$, $(\mathcal{CF},\underline{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, $(\mathcal{CF},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ i $(\mathcal{CF},\underline{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ kvazikompaktni.

(ii) Ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan, tada su $(\mathcal{CF},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, $(\mathcal{CF},\underline{\mathcal{T}}^1,\bar{\mathcal{T}}^2)$, $(\mathcal{CF},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ i $(\mathcal{CF},\mathcal{T}^1,\bar{\mathcal{T}}^2)$ kvazikompaktni prostori.

Na pitanje kako se osobina pR_0 i aksiome separacije prenose sa bitopološkog prostora na njegov hiperprostor, odgovor daju sledeći stavovi.

S t a v 3.21. Ako je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor, tada je hiperprostor $(\mathcal{B}(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ pT_1 prostor.

D o k a z. S obzirom na stav 1.4 dovoljno je dokazati da za svaki $A\in\mathcal{B}(X)$ važi $\mathcal{T}^1\mathrm{cl}\{A\}=\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\{A\}=\{A\}$.

Neka je $F\in\mathcal{B}(X)$, $F\neq A$ i neka je $j\in\{1,2\}$. Postoji $x\in(F-A)\cup(A-F)$. Ako je $x\in F-A$, tada $F\in W = {>}A^c{<}\ \in\mathcal{T}^j$, jer je $A=\bar{A}^j$. Kako $A\notin W$, to $F\notin\mathcal{T}^j\mathrm{cl}\{A\}$. Slično, ako $x\in A-F$, sledi da je $x\in F^c=G$, a $G\in\tau^i$ za $i\in\{1,2\}$ i $i\neq j$. Kako je (X,τ^1,τ^2) pR_0 prostor, to $\tau^j\mathrm{cl}\{x\}\subset G$, dakle, $F\subset(\tau^j\mathrm{cl}\{x\})^c=V$ i $F\in V = {<}V{>}\ \in\mathcal{T}^j$. Kako $A\notin V$, to $F\notin\mathcal{T}^j\mathrm{cl}\{A\}$. Sledi da je $\mathcal{T}^j\mathrm{cl}\{A\}=\{A\}$ za svaki $A\in\mathcal{B}(X)$ i $j=1,2$.

Time je tvrdjenje stava 3.21 dokazano. ∇

PROBLEM. Da li važi isto tvrdjenje za širu klasu podskupova od X?

S t a v 3.22. Bitopološki prostor $(\mathcal{B}(X),\Theta^1,\Theta^2)$, gde je Θ^i jedna od topologija $\mathcal{T}^i$ ili $\underline{\mathcal{T}}^i$ za $i=1,2$, je pT_0 prostor.

D o k a z. Neka su A i B dva različita elementa iz $\mathcal{B}(X)$. Postoji $x\in X$ takav da je $x\in(A-B)\cup(B-A)$. Ako je $x\in A-B$, tada $A\in W={>}B^c{<}$ i $W\in\underline{\mathcal{T}}^1\cap\underline{\mathcal{T}}^2$ jer $B^c\in\tau^1\cap\tau^2$. Dakle, za elemente A i B iz $\mathcal{B}(X)$, postoji Θ^1 otvoren skup $U=W$ takav da je $A\in U$ i $B\notin U$, i postoji Θ^2 otvoren skup $V=W$ takav da je $B\notin V$ i $A\in V$, Na isti način se dokazuje postojanje odgovarajućih okolina elementa B ako $x\in B-A$.

S t a v 3.23. Bitopološki prostor $(\mathcal{F},\Theta^1,\Theta^2)$, gde je $\mathcal{F}$ kolekcija $\mathcal{K}(X)$ ili $\mathcal{Q}(X)$, a Θ^i jedna od topologija $\mathcal{T}^i$ ili $\underline{\mathcal{T}}^i$

za $i=1,2$, je wpT_0 prostor.

D o k a z. Kako je svojstvo wpT_0 nasledno, dovoljno je dokazati da je $(\mathcal{Q}(X),\Theta^1,\Theta^2)$ wpT_0 prostor.

Neka su A i B dva različita elementa iz $\mathcal{F}$ i neka je $x\in(A-B)\cup(B-A)$. Ako je $x\in A-B$, kako je $B=B_1\cap B_2$, gde je $B_i = \tau^i \operatorname{cl} B_i$ za $i=1,2$, to $x\notin B_1$ ili $x\notin B_2$. Sledi da je $A\in\mathcal{U} = {>}B_1^c{<}\ \in\underline{\mathcal{T}}^1$ ili $A\in\mathcal{V} = {>}B_2^c{<}\ \in\underline{\mathcal{T}}^2$, pri čemu $B\notin\mathcal{U}$ i $B\notin\mathcal{V}$. Ako je $x\in B-A$, slično se dokazuje da postoji Θ^1 otvoren skup $\mathcal{U}_1$ ili Θ^2 otvoren skup $\mathcal{V}_1$ koji sadrži B i ne sadrži A. Dakle, $(\mathcal{F},\Theta^1,\Theta^2)$ je wpT_0 prostor.

Tvrdjenje stava 3.23 ne važi za kolekciju $\mathcal{S}(X)$, pa stoga ni za kolekciju $\mathcal{A}(X)$. Takodje se u iskazu svojstvo wpT_0 ne može zameniti jačim, osobinom pT_0, što pokazuje primer 1.1. Kako je $\mathcal{S}(\dot{R})$ kolekcija svih nepraznih zatvorenih podskupova realne prave, to su $A=\{-1,1\}$ i $B=\{-1,0,1\}$ dva elementa iz $\mathcal{S}(R)$. Tada je za skup $V\in\mathcal{L}\cup\mathcal{D}$, $A\in{>}V{<}$ ako i samo ako je $B\in{>}V{<}$, kao i $A\in\langle V\rangle$ ako i samo ako je $B\in\langle V\rangle$. Stoga $(\mathcal{S}(R),\Theta^1,\Theta^2)$ nije wpT_0 prostor.

Da prostor $(\mathcal{K}(R),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ nije pT_0 prostor, sledi iz činjenice da ne postoje ni $\mathcal{T}^1$ otvoren skup $\mathcal{U}$ niti $\mathcal{T}^2$ otvoren skup $\mathcal{V}$ takvi da je skup $A=[0,+\infty)\in\mathcal{U}$ a skup $B=X\notin\mathcal{U}$, odnosno $B\in\mathcal{V}$ a $A\notin\mathcal{V}$. Stoga nijedan hiperprostor $(\mathcal{F},\Theta^1,\Theta^2)$ uočenog prostora $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$, gde je $\mathcal{F}$ kolekcija nepraznih podskupova od R koja sadrži $\mathcal{K}(R)$ a Θ^i jedna od topologija $\mathcal{T}^i$ ili $\underline{\mathcal{T}}^i$ za $i=1,2$, nije PT_0 prostor.

Da se u iskazu stava 3.23 donja polukonačna i konačna topologija ne mogu zameniti gornjom polukonačnom, pokazuje

PRIMER 3.8. Neka je $X=R$, $\tau^1=\mathcal{L}$ topologija levih intervala i τ^2 trivijalna topologija. Tada je $\mathcal{K}(X)=\{[a,+\infty)\mid a\in R\}\cup\cup\{X\}$. U prostoru $(\mathcal{K}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ obe topologije $\bar{\mathcal{T}}^1$ i $\mathcal{T}^2$ su trivijalne pa prostor nije wpT_0.

Uočimo ponovo primer 1.1. Prostor $(R,\mathcal{L},\mathcal{D})$ je wpT_2, dok je hiperprostor $(\mathcal{K}(X),\Theta^1,\Theta^2)$, gde je Θ^i jedna od topologija $\mathcal{T}^i$, $\bar{\mathcal{T}}^i$ ili $\underline{\mathcal{T}}^i$ za $i=1,2$, wpT_2 prostor samo za $\Theta^1=\mathcal{T}^1$ i $\Theta^2=\mathcal{T}^2$.

Zaista, za elemente $A_1=(-\infty,0]$ i $B_1=(-\infty,1]$ kolekcije

$\mathcal{K}(X)$, skupovi $\mathcal{U}_1 = <(-\infty,\frac{1}{2})> \in \bar{\mathcal{T}}^1 \subset \mathcal{T}^1$ i $\mathcal{V}_1 = >(\frac{1}{2},+\infty)< \in \underline{\mathcal{T}}^2 \subset \mathcal{T}^2$ su disjunktne okoline od A_1 i B_1 redom. Za svaki skup $\mathcal{W} \in \mathcal{T}^2$ takav da je $A_1 \in \mathcal{W}$, sledi da je $B_1 \in \mathcal{W}$, a za $\mathcal{W} \in \mathcal{T}^1$ takav da je $B_1 \in \mathcal{W}$, sledi $A_1 \in \mathcal{W}$. Slično, za skup $\mathcal{W} \in \underline{\mathcal{T}}^1$ takav da je $A_1 \in \mathcal{W}$, sledi $B_1 \in \mathcal{W}$; takodje i za $\mathcal{W} \in \bar{\mathcal{T}}^2$, iz $B_1 \in \mathcal{W}$ sledi $A_1 \in \mathcal{W}$. Stoga, ako je $(\mathcal{K}(X),\Theta^1,\Theta^2)$ wpT_2 prostor, a Θ^i jedna od topologija $\mathcal{T}^i$, $\bar{\mathcal{T}}^i$ ili $\underline{\mathcal{T}}^i$ za $i=1,2$, to mora biti $\Theta^1 \supset \bar{\mathcal{T}}^1$ i $\Theta^2 \supset \underline{\mathcal{T}}^2$.

Simetričnim izborom skupova $A_2=[0,+\infty)$ i $B_2=[1,+\infty)$, dobijamo da topologije Θ^1 i Θ^2 zadovoljavaju takodje i uslove $\Theta^1 \supset \underline{\mathcal{T}}^1$ i $\Theta^2 \supset \bar{\mathcal{T}}^2$, pa stoga mora biti $\Theta^1 = \mathcal{T}^1$ i $\Theta^2 = \mathcal{T}^2$.

Kako je u ovom slučaju $\mathcal{K}(X) = \{[a,+\infty) \mid a \in R\} \{(-\infty,b] \mid b \in R\} \cup \{X\}$, neposredno proveravamo da je $(\mathcal{K}(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ wpT_2 prostor. Za dva elementa $A=(-\infty,a]$ i $B=[b,+\infty)$ njihove disjunktne okoline su redom $\mathcal{U} = <(-\infty,a+1)> \in \mathcal{T}^1$ i $\mathcal{V} = <(b-1,+\infty)> \in \mathcal{T}^2$. Za ostale parove elemenata se postupa kao u jednom od već razmatranih slučajeva.

Razmotrimo na kraju ovog poglavlja neke slučajeve kada bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) poseduje jača separaciona svojstva i pitanje prenošenja tih osobina na odgovarajuće hiperprostore. Dokazaćemo sledeća tvrdjenja:

S t a v 3.24. Ako je u bitopološkom prostoru (X,τ^1,τ^2) prostor (X,τ^1) T_1-prostor, topologija $\Theta^1 \supset \bar{\mathcal{T}}^1$, a topologija Θ^2 jedna od topologija $\mathcal{T}^2$, $\bar{\mathcal{T}}^2$ ili $\underline{\mathcal{T}}^2$, tada je prostor $(\mathcal{A}(X),\Theta^1,\Theta^2)$ wpT_0 prostor.

D o k a z. Za dva različita elementa A i B iz $\mathcal{A}(X)$, neka je $x \in A-B$. Označimo li $U=\{x\}^c$, tada $U \in \tau^1$ i $B \in \mathcal{U} = <U> \in \Theta^1$, a $A \notin \mathcal{U}$. Dakle, prostor $(\mathcal{A}(X),\Theta^1,\Theta^2)$ je wpT_0 prostor. ∇

S t a v 3.25. Neka je (X,τ^1,τ^2) pT_1 prostor i topologija $\Theta^i \supset \bar{\mathcal{T}}^i$ za $i=1,2$. Prostor $(\mathcal{F},\Theta^1,\Theta^2)$ je pT_0 prostor, gde je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija iz (9).

D o k a z. Neka su A i B dva različita elementa iz kolekcije $\mathcal{F}$. Postoji $x \in X$ takav da je $x \in (A-B) \cup (B-A)$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je $x \in A-B$. Kao i u dokazu stava 3.24, za $U=\{x\}^c \in \tau^1 \cap \tau^2$, skup $\mathcal{U} = <U> \in \Theta^1 \cap \Theta^2$ pa za A i B važi: $B\varepsilon\mathcal{U}\varepsilon\Theta^2$, $A\notin\mathcal{U}$ i $B\varepsilon\mathcal{U}\varepsilon\Theta^1$ a $A\notin\mathcal{U}$. Dakle, $(\mathcal{F},\Theta^1,\Theta^2)$ je pT_0 prostor. ∇

S t a v 3.26. Ako je (X,τ^1,τ^2) pT_1 prostor, tada je $(K(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ wpT_1 prostor.

D o k a z. Za dva različita elementa A i B iz $K(X)$, neka je, odredjenosti radi, $x\varepsilon X$ takav da je $x\varepsilon A-B$. Kako je $B^c\varepsilon\tau^1\cup\tau^2$, to $\mathcal{V}= >B^c< \varepsilon\mathcal{T}^i$ za $i\varepsilon\{1,2\}$. Skup $U=\{x\}^c\varepsilon\tau^1\cap\tau^2$, stoga je $\mathcal{U}= <U> \varepsilon\mathcal{T}^j$ za $j\varepsilon\{1,2\}$ i $i\neq j$. Iz $A\varepsilon\mathcal{V}$ i $B\notin\mathcal{V}$, kao i $B\varepsilon\mathcal{U}$ a $A\notin\mathcal{U}$, sledi da je $(K(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ wpT_1 prostor. ∇

S t a v 3.27. Ako je (X,τ^1,τ^2) pT_2 prostor i $\mathcal{F}$ kolekcija iz (9), tada je $(C\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ wpT_2 prostor.

D o k a z. Neka su A i B dva različita elementa iz $C\mathcal{F}$ i neka je, odredjenosti radi, $A-B\neq\emptyset$. Za tačku $x\varepsilon A-B$ i svaki $y\varepsilon B$, kako je prostor X pT_2, postoje τ^1 otvoren skup U_y i τ^2 otvoren skup V_y takvi da je $y\varepsilon U_y$, $x\varepsilon V_y$ i $U_y\cap V_y=\emptyset$. Iz τ^1 otvorenog pokrivača $\{U_y|y\varepsilon B\}$ kvazikompaktnog skupa B izdvaja se konačan potpokrivač $\{U_{y_s}|s=1,\dots,k\}$. Neka je $U=\bigcup_{s=1}^{k}U_{y_s}$ i $V=\bigcap_{s=1}^{k}V_{y_s}$. Tada $B\subset U\varepsilon\tau^1$, $x\varepsilon V\varepsilon\tau^2$ i za $\mathcal{U}= <U> \varepsilon\bar{\mathcal{T}}^1$ i $\mathcal{V}= >V< \varepsilon\underline{\mathcal{T}}^2$ je $B\varepsilon\mathcal{U}$, $A\varepsilon\mathcal{V}$ i $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$ jer je $U\cap V=\emptyset$.

Time je tvrdjenje stava 3.27 dokazano. ∇

P o s l e d i c a 3.9. Ako je (X,τ^1,τ^2) pT_2 prostor, $\mathcal{F}$ kolekcija iz (9) a topologije $\Theta^1\supset\bar{\mathcal{T}}^1$ i $\Theta^2\supset\underline{\mathcal{T}}^2$, odnosno $\Theta^1\supset\underline{\mathcal{T}}^1$ i $\Theta^2\supset\bar{\mathcal{T}}^2$, tada je hiperprostor $(C\mathcal{F},\Theta^1,\Theta^2)$ wpT_2 prostor.

S t a v 3.28. Ako je (X,τ^1,τ^2) pT_2 prostor i $\mathcal{F}$ kolekcija iz (9), tada je $(C\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ pT_2 prostor.

D o k a z. Kao u dokazu stava 3.27, za dva različita elementa A i B iz $C\mathcal{F}$, neka je, ponovo, $x\varepsilon A-B$. S obzirom da je X pT_2 prostor, postoje skupovi $U\varepsilon\tau^1$ i $V\varepsilon\tau^2$ takvi da je $B\subset U$, $x\varepsilon V$ i $U\cap V=\emptyset$. Na isti način uočavamo skupove $U_1\varepsilon\tau^1$ i $V_1\varepsilon\tau^2$ takve da je $x\varepsilon U_1$, $B\subset V_1$ i $U_1\cap V_1=\emptyset$. Za otvorene skupove $\mathcal{U}= <U> \varepsilon\mathcal{T}^1$, $\mathcal{V}= >V< \varepsilon\mathcal{T}^2$, $\mathcal{U}_1= >U_1< \varepsilon\mathcal{T}^1$ i $\mathcal{V}_1= <V_1> \varepsilon\mathcal{T}^2$ važi: $B\varepsilon\mathcal{U}$, $A\varepsilon\mathcal{V}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$, kao i $A\varepsilon\mathcal{U}_1$, $B\varepsilon\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{V}_1=\emptyset$, pa je prostor

$(C\mathcal{F}, \mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2)$ pT_2 prostor, što je i trebalo dokazati. ∇

S t a v 3.29. Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija iz (9) takva da je $\mathcal{J}_1(X) \subset \mathcal{F}$, i neka je Θ^i jedna od topologija $\mathcal{T}^i$, $\bar{\mathcal{T}}^i$, $\underline{\mathcal{T}}^i$ za $i=1,2$. Ako hiperprostor $(C\mathcal{F}, \Theta^1, \Theta^2)$ zadovoljava jednu od aksioma separacije: pT_0, pT_1, pT_2, odnosno wpT_0, wpT_1 ili wpT_2, tada i prostor (X, τ^1, τ^2) zadovoljava istu aksiomu.

D o k a z. Na osnovu leme 3.2 i definicije 1.7, bitopološki prostori (X, τ^1, τ^2) i $(\mathcal{J}_1(X), \Theta^1, \Theta^2)$ su uzajamno homeomorfni. Kako je svako od navedenih svojstava nasledno, sledi tvrdjenje stava 3.29. ∇

4. LOKALNA KVAZIKOMPAKTNOST BITOPOLOŠKIH HIPERPROSTORA

4.1. HIPERPROSTORI SA KONAČNIM TOPOLOGIJAMA

Lokalnu kompaktnost topoloških prostora i njihovih hiperprostora ispitivao je E. Michael u [36]. Postavlja se pitanje da li analogna tvrdjenja važe i za bitopološke prostore i njihove hiperprostore.

Prethodno dokazujemo sledeća pomoćna tvrdjenja:

L e m a 4.1. Neka je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$, $\mathcal{S}(X)$ ili $\mathcal{A}(X)$ i neka je $B\in\mathcal{F}$. Skup B je kvazikompaktan u pT_1 prostoru (X,τ^1,τ^2) ako i samo ako je kolekcija $\langle B\rangle$ kvazikompaktna u $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$.

D o k a z. Neka je $\mathcal{F}(B)$ odgovarajuća kolekcija podskupova od B, a $\mathcal{T}^i(B)$ za $i=1,2$, konačne topologije na $\mathcal{F}(B)$ definisane topologijama τ^i_B potprostora (B,τ^1_B,τ^2_B). Na osnovu teoreme 3.6, prostor (B,τ^1_B,τ^2_B) je kvazikompaktan ako i samo ako je hiperprostor $(\mathcal{F}(B),\mathcal{T}^1(B),\mathcal{T}^2(B))$ kvazikompaktan.

Za dokaz leme 4.1 dovoljno je dokazati da je

(1) kolekcija $\mathcal{F}(B) = \langle B\rangle$ u prostoru $\mathcal{F}$ i

(2) relativne topologije $\mathcal{T}^i_{\langle B\rangle}$ jednake su topologijama $\mathcal{T}^i(B)$ za $i=1,2$.

Jednakost (1) sledi iz definicije kolekcije $\mathcal{F}$, jer je:

(i) $\mathcal{A}(B)=\{A\subset B \mid A\neq\emptyset\} = \{A\in\mathcal{A}(X) \mid A\subset B\} = \langle B\rangle\subset\mathcal{A}(X)$;

(ii) $\mathcal{S}(B)=\{A\subset B \mid A\neq\emptyset$ i A je zatvoren u prostoru $(B,\tau^1_B,\tau^2_B)\}$.

Kako je za $\tau=\tau^1\vee\tau^2$, indukovana topologija τ_B na B jednaka $\tau^1_B\vee\tau^2_B$, to je skup A semizatvoren u prostoru (B,τ^1_B,τ^2_B) ako i samo ako je $A=A^*\cap B$, gde je A^* semizatvoren skup u (X,τ^1,τ^2). Zbog $B\in\mathcal{S}(X)$, imamo

$\mathcal{S}(B)=\{A\subset B\,|\,A\in\mathcal{S}(X)\}=\{A\in\mathcal{S}(X)\,|\,A\subset B\}=\langle B\rangle\subset\mathcal{S}(X)$.

(iii) Slično, ako je $B\in\mathcal{Q}(X)$, kako je presek dva kvazizatvorena skupa kvazizatvoren skup, a topologije na B indukovane su topologijama sa X, to važi:

$$\mathcal{Q}(B)=\{A\subset B\,|\,A\neq\emptyset \text{ i } A=A^*\cap B \text{ za neki } A^*\in\mathcal{Q}(X)\}=$$
$$=\{A\subset B\,|\,A\in\mathcal{Q}(X)\}=\{A\in\mathcal{Q}(X)\,|\,A\subset B\}=\langle B\rangle\subset\mathcal{Q}(X).$$

Jednakost topologija sledi iz jednakosti njihovih predbaza. S obzirom na jednakosti H2 i H4 poglavlja 3, za $i=1,2$, važi:

$$\bar{\Psi}^i_{\langle B\rangle}=\{\langle B\rangle\cap\langle U\rangle\,|\,U\in\tau^i\}=\{\langle B\cap U\rangle\,|\,U\in\tau^i\}=$$
$$=\{\langle V\rangle\,|\,V\in\tau^i_B\}=\bar{\Psi}^i(B)$$

i

$$\underline{\Psi}^i_{\langle B\rangle}=\{\langle B\rangle\cap{>}U{<}\,|\,U\in\tau^i\}=\{\{A\in\mathcal{F}(B):A\cap U\neq\emptyset\}\,|\,U\in\tau^i\}=$$
$$=\{{>}V{<}\,|\,V\in\tau^i_B\}=\underline{\Psi}^i(B)\ .\quad\nabla$$

P o s l e d i c a 4.1. Neka je $Y\subset X$, $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$, $\mathcal{S}(X)$ ili $\mathcal{A}(X)$ i neka je σ kvazikompaktna potkolekcija u $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ takva da je $\mathcal{J}_1(Y)\subset\sigma\subset\langle Y\rangle$. Tada je Y kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2).

D o k a z. Kako je $\sigma\subset\langle Y\rangle$, to je σ kvazikompaktna kolekcija u potprostoru $(\langle Y\rangle,\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$. Na osnovu dokaza leme 4.1, kako je σ kvazikompaktna kolekcija u prostoru $(\mathcal{F}(Y),\mathcal{T}^1(Y),\mathcal{T}^2(Y))$, a kako je $\mathcal{J}_1(Y)\subset\sigma\subset\mathcal{F}(Y)$ i $\mathcal{T}^1(Y)\cup\mathcal{T}^2(Y)\supset\underline{\mathcal{T}}^1(Y)\cup\underline{\mathcal{T}}^2(Y)$, to je, na osnovu dokaza teoreme 3.6, potprostor (Y,τ^1_Y,τ^2_Y) kvazikompaktan; tj. Y je kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2), što je i trebalo dokazati. ∇

L e m a 4.2 Ako je A kvazikompaktan skup u (1,2)-lokalno kvazikompaktnom prostoru (X,τ^1,τ^2), tada postoji τ^1 otvoren skup U takav da je $A\subset U$ i $\tau^2\mathrm{cl}U\equiv\bar{U}^2$ je kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2).

D o k a z. Neposredno iz definicije (1,2)-lqc prostora, za svaki $a\in A$ postoji τ^1 otvoren skup U_a takav da je $\bar{U}^2_a$ kvazikompaktan skup. Iz τ^1 otvorenog pokrivača $\{U_a\,|\,a\in A\}$ kvazikompaktnog skupa A izdvaja se konačan potpokrivač $\{U_{a_i}\,|\,i=1,\dots,m\}$. Tada je skup $U=\bigcup_{i=1}^{m}U_{a_i}\in\tau^1$, $A\subset U$ i $\bar{U}^2=\bigcup_{i=1}^{m}\bar{U}^2_{a_i}$ je kvazikompaktan skup. ∇

T e o r e m a 4.1. Neka je (X,τ^1,τ^2) pT_1 i (1,2)-lqc prostor i neka je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$ ili $\mathcal{S}(X)$. Skup $A\in\mathcal{F}$ je kvazikompaktan u (X,τ^1,τ^2) ako i samo ako postoji $\mathcal{T}^1$ otvoren skup $\mathcal{U}$ takav da je $A\in\mathcal{U}$ i $\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ je kvazikompaktan skup u $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$.

D o k a z. ($\Rightarrow$:) Neka je A kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2). Na osnovu leme 4.2, postoji $U\in\tau^1$ takav da je $\bar{U}^2$ kvazikompaktan skup. Tada je $\mathcal{U}=\langle U\rangle\in\bar{\mathcal{T}}^1\subset\mathcal{T}^1$. Kako je (X,τ^2) T_1-prostor, to je $\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}=\langle\bar{U}^2\rangle$ na osnovu P5 teoreme 3.1. Kako je $\bar{U}^2$ kvazikompaktan skup, to je $\langle\bar{U}^2\rangle$ kvazikompaktan na osnovu leme 4.1.

($\Leftarrow$:) Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti da je $\mathcal{U}$ bazni element topologije $\mathcal{T}^1$, tj. $\mathcal{U}=\langle U_0;\ U_1,\dots,U_n\rangle$, gde su $U_k\in\tau^1$ za $k=1,\dots,n$ i $U_0=\bigcup_{k=1}^{n}U_k$.

Teoremu dokazujemo dokazujući sledeća tvrdjenja:

1° Ako je $\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ kvazikompaktan skup u $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$, tada je $\bar{U}^2$ kvazikompaktan u (X,τ^1,τ^2).

2° Ako je $\bar{U}^2$ kvazikompaktan skup, tada je skup A kvazikompaktan.

Dokaz tvrdjenja 1°:

S obzirom na stav 1.16, neka je $\{F_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ centrirano mnoštvo kvazizatvorenih skupova u skupu $\bar{U}^2_0=\bigcup_{k=1}^{n}\bar{U}^2_k$. Za svaki $k\in\{1,\dots,n\}$ uvedimo oznaku $\Phi_k=\{F_{k\lambda}\equiv F_\lambda\cap\bar{U}^2_k\,|\,\lambda\in\Lambda\}$. Tada bar jedna od kolekcija Φ_k ima osobinu konačnog preseka; jer, ako za svaki $k\in\{1,\dots,n\}$ postoji konačna potkolekcija $\{F_{k\lambda_1},\dots,F_{k\lambda_{m(k)}}\}$ takva da je $\bigcap_{s=1}^{m(k)}F_{k\lambda_s}=\emptyset$, tada za konačnu kolekciju odgovarajućih skupova F_λ iz Φ i njihov presek K, važi:

$$K=\bigcap_{k=1}^{n}\Big(\bigcap_{s=1}^{m(k)}F_{\lambda_s}\Big)=K\cap\bar{U}^2_0=K\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\bar{U}^2_k\Big)=\bigcup_{k=1}^{n}(K\cap\bar{U}^2_k)\subset$$

$$\subset\bigcup_{k=1}^{n}\Big(\bigcap_{s=1}^{m(k)}F_{\lambda_s}\cap\bar{U}^2_k\Big)=\bigcup_{k=1}^{n}\Big(\bigcap_{s=1}^{m(k)}F_{k\lambda_s}\Big)=\emptyset,$$

pa Φ nema osobinu konačnog preseka.

Neka je $k\in\{1,\dots,n\}$ takav da je Φ_k centrirana kolekcija kvazizatvorenih skupova. Uvedimo sledeće oznake:

$J=\{1,\ldots,n\}-\{k\}$ i $T=\bar{U}_k^2$. Razlikujemo sledeće slučajeve:

(i) Za svaki $j\in J$ skup $U_j-T\neq\emptyset$.

Neka je $a_j\in U_j-T$ za svaki $j\in J$ i neka je $A_0=\{a_j\mid j\in J\}$. Za svaki $\lambda\in\Lambda$ označimo $H_\lambda=F_{k\lambda}\cup A_0$. Tada je za svaki $\lambda\in\Lambda$ skup H_λ kvazizatvoren. Zaista, za svaki $\lambda\in\Lambda$ postoje τ^1 zatvoren skup $F_{k\lambda}^1$ i τ^2 zatvoren skup $F_{k\lambda}^2$ takvi da je $F_{k\lambda}=F_{k\lambda}^1\cap F_{k\lambda}^2$. Skup A_0 je konačan, pa je istovremeno i τ^1 zatvoren i τ^2 zatvoren, jer je X pT_1 prostor. Stoga je $H_\lambda=(F_{k\lambda}^1\cup A_0)\cap(F_{k\lambda}^2\cup A_0)$ kvazizatvoren skup.

Kolekcija $\{H_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ je centrirano mnoštvo kvazizatvorenih skupova u $\bar{U}_0^2$. Za svaki $\lambda\in\Lambda$ skup $H_\lambda\in T^2clU$ jer je $H_\lambda\subset\bar{U}_0^2$ i $H_\lambda\cap\bar{U}_j^2\neq\emptyset$ za svaki $j\in\{1,\ldots,n\}$. Kako je svaki $H_\lambda=H_\lambda^1\cap H_\lambda^2$, gde su H_λ^i zatvoreni skupovi u prostoru (X,τ^i), za $i=1,2$, to je, na osnovu P5 teoreme 3.1 i osobine H2, kolekcija $\langle H_\lambda\rangle=\langle H_\lambda^1\rangle\cap\langle H_\lambda^2\rangle$ kvazizatvorena u F. Neka je $\mathcal{H}_\lambda=\langle H_\lambda\rangle\cap T^2clU$ za svaki $\lambda\in\Lambda$. Familija $\{\mathcal{H}_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ kvazizatvorenih skupova u T^2clU ima osobinu konačnog preseka, jer je za svaku konačnu potfamiliju presek

$$\bigcap_{i=1}^{m}\mathcal{H}_{\lambda_i}=\langle\bigcap_{i=1}^{m}H_{\lambda_i}\rangle\cap T^2clU=\langle(\bigcap_{i=1}^{m}F_{k\lambda_i})\cup A_0\rangle\cap T^2clU\neq\emptyset .$$

Iz kvazikompaktnosti T^2clU sledi da je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}_\lambda\neq\emptyset$.

Neka je $H\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}_\lambda=\langle\bigcap_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\rangle\cap T^2clU$. (Može se uzeti da je $H=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$.) Tada je $H\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$ i $H\in T^2clU$, pa je $H\cap T\neq\emptyset$. Kako je $H\cap T\subset(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)\cap T=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_{k\lambda}\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$, to je u slučaju (i) tvrdjenje 1^0 dokazano.

(ii) Postoje $U_{s_1},\ldots,U_{s_m}$ sadržani u T. Neka je $G=U_k-(\bigcup_{t=1}^{m}U_{s_t})$.

(a) Ako je $G\neq\emptyset$ i ni za jedan $t\in\{1,\ldots,m\}$ kolekcija $\{F_\lambda\cap\bar{U}_{s_t}^2\mid\lambda\in\Lambda\}$ nema osobinu konačnog preseka, tada je zbog $\bar{U}_k^2=\bar{G}^2\cup(\bigcup_{t=1}^{m}\bar{U}_{s_t}^2)$ i konačnog broja skupova U_{s_t} kolekcija $\Omega=\{F_\lambda\cap\bar{G}^2\mid\lambda\in\Lambda\}$ centrirano mnoštvo kvazizatvorenih skupova u

$\bar{G}^2$. Označi li se $G = \langle U_0;\ U_1,\dots,U_{k-1},\ G,\ U_{k+1},\dots,\ U_n\rangle$, tada je $G\subset U$ jer $G\subset U_k$, pa je $T^2\mathrm{cl}G\subset T^2\mathrm{cl}U$. Sledi da je $T^2\mathrm{cl}G$ kvazikompaktna kolekcija u (F,T^1,T^2).

Nastavljajući kao u prethodnom slučaju, zamenjujući T sa $\bar{G}^2$, dokazujemo da kolekcija $\{F_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ ima neprazan presek.

(b) Ako je $G\neq\emptyset$ i za neko $t\in\{1,\dots,m\}$ kolekcija $\{F_\lambda\cap\bar{U}^2_{s_t}|\lambda\in\Lambda\}$ kvazizatvorenih skupova ima osobinu konačnog preseka, dokaz se produžava kao u prethodnim slučajevima razmatranjem skupa $\bar{U}^2_{s_t}$ umesto skupa T . Na isti način postupamo i ako je $G=\emptyset$, jer tada je $T=\bigcup_{t=1}^{m}\bar{U}^2_{s_t}$ i postoji $t\in\{1,\dots,m\}$ tako da je kolekcija $\{F_\lambda\cap\bar{U}^2_{s_t}|\lambda\in\Lambda\}$ centrirano mnoštvo kvazizatvorenih skupova.

Dokaz tvrdjenja 2^0:

Ako je $\bar{U}^2$ kvazikompaktan skup, skup A je kvazikompaktan jer je kvazizatvoren ili semizatvoren podskup kvazikompaktnog skupa.

Time je tvrdjenje teoreme dokazano. ∇

T e o r e m a 4.2. Neka je (X,τ^1,τ^2) pT_1 prostor i neka je F jedna od kolekcija $Q(X)$ ili $S(X)$. Tada važi:

(1) (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-lqc prostor ako i samo ako je (CF,T^1,T^2) (1,2)-lqc prostor.

(2) Ako je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc prostor, tada je CF T^1 otvoren u F.

D o k a z. (1) $(\Rightarrow:)$ Neka je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc prostor i neka je $A\in CF$. Na osnovu dokaza teoreme 4.1, postoji τ^1 otvoren skup U takav da je za $U=\langle U\rangle\in T^1$ skup $A\in U$ i $T^2\mathrm{cl}U = \langle\bar{U}^2\rangle$ je kvazikompaktna kolekcija u (F,T^1,T^2). Tada je kolekcija $T^2\mathrm{cl}U\subset CF$ jer iz $B\in T^2\mathrm{cl}U$ sledi $B\subset\bar{U}^2$; B je semizatvoren podskup kvazikompaktnog skupa, stoga je kvazikompaktan. Sledi da je $U\subset CF$ i $T^2_{CF}\mathrm{cl}U = T^2\mathrm{cl}U\cap CF = T^2\mathrm{cl}U$ je kvazikompaktan skup u potprostoru (CF,T^1_{CF},T^2_{CF}). Dakle, potprostor (CF,T^1,T^2) je (1,2)-lqc prostor.

$(\Leftarrow:)$ Neka je (CF,T^1,T^2) (1,2)-lqc prostor i neka je $x\in X$. Kako je $\{x\}\in CF$, postoji T^1 bazna okolina

$\mathcal{U} = \langle U_0; U_1,\dots,U_n\rangle$ elementa $\{x\}$ takva da je $\mathcal{W} = \mathcal{T}^2_{\mathcal{CF}}\mathrm{cl}(\mathcal{U}\cap\mathcal{CF})$ kvazikompaktan skup u $\mathcal{CF}$. Tada je $\mathcal{W} = \mathcal{T}^2\mathrm{cl}(\mathcal{U}\ \mathcal{CF})\ \mathcal{CF}$ kvazikompaktan skup i u $\mathcal{F}$.

Neka je $V = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Zbog $\{x\}\epsilon\mathcal{U}$ sledi da je $x\epsilon V$. Kako je $V\epsilon\tau^1$, to je $\{x\}\epsilon \langle V\rangle \epsilon\mathcal{T}^1$. Označimo $\mathcal{V} = \langle V\rangle$ u prostoru $\mathcal{F}$. Kako je $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, kolekcija $\mathcal{H} = \mathcal{T}^2_{\mathcal{CF}}\mathrm{cl}(\mathcal{V}\cap\mathcal{CF})\subset\mathcal{W}$ i $\mathcal{H}$ je kvazikompaktna u $\mathcal{CF}$ i u $\mathcal{F}$.

Dokažimo da važi $\mathcal{J}_1(\overline{V}^2)\subset\mathcal{H}\subset\langle\overline{V}^2\rangle$. Neka je $y\epsilon\overline{V}^2$ i neka je $\mathcal{G} = \langle G_0; G_1,\dots, G_m\rangle$ $\mathcal{T}^2$ bazna okolina skupa $\{y\}$. Tada je presek $\mathcal{G}\cap(\mathcal{V}\cap\mathcal{CF})\neq\emptyset$ u $\mathcal{F}$ jer $y\epsilon G_i\epsilon\tau^2$ za $i=1,\dots,m$, i iz $y\epsilon\overline{V}^2$, sledi da postoje $z_i\epsilon V\cap G_i$ za $i=1,\dots,m$. Skup $F = \{z_1,\dots, z_m\}$ je konačan, a kako je X pT_1 prostor, to je $F\epsilon\mathcal{CF}$. Takodje je $F\subset V$ i $F\epsilon\mathcal{G}$, tj. $F\epsilon\mathcal{G}\cap(\mathcal{V}\cap\mathcal{CF})$. Dakle, $\{y\}\epsilon\mathcal{T}^2\mathrm{cl}(\mathcal{V}\cap\mathcal{CF})\cap\mathcal{CF} = \mathcal{H}$. S druge strane je $\mathcal{V}\cap\mathcal{CF}\subset\mathcal{V}\subset\langle\overline{V}^2\rangle$, pa je $\mathcal{H}\subset\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\mathcal{V}\subset\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\langle\overline{V}^2\rangle = \langle\overline{V}^2\rangle$.

Kvazikompaktna kolekcija $\mathcal{H}$ zadovoljava uslove posledice 4.1, pa je stoga skup $\overline{V}^2$ kvazikompaktan u X.

Sledi da je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc prostor.

(2) $\mathcal{T}^1$ otvorenost kolekcije $\mathcal{CF}$ u prostoru $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ sledi iz dokaza tvrdjenja (1). Za svaki $A\epsilon\mathcal{CF}$ postoji $\mathcal{U}\epsilon\mathcal{T}^1$ takav da je $A\epsilon\mathcal{U}\subset\mathcal{CF}$ i $\mathcal{T}^2_{\mathcal{CF}}\mathrm{cl}\mathcal{U} = \mathcal{T}^2\mathrm{cl}\mathcal{U}$ je kvazikompaktan skup. ∇

T e o r e m a 4.3. (1) Neka je (X,τ^1,τ^2) pT_1 prostor i neka je $\mathcal{F}$ kolekcija iz (9) poglavlja 3, različita od $\mathcal{A}(X)$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(i) (X,τ^1,τ^2) je kvazikompaktan i pT_2 prostor;

(ii) $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ je kvazikompaktan i pT_2 prostor;

(iii) $(\mathcal{CF},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ je kvazikompaktan i pT_2 prostor.

(2) Neka je (X,τ^1,τ^2) pT_1 prostor i neka je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$ ili $\mathcal{S}(X)$. Prostor (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-lqc i pT_2 prostor ako i samo ako je prostor $(\mathcal{CF},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ (1,2)-lqc i pT_2 prostor.

D o k a z. (1) Implikacije (i)->(ii) i (i)->(iii) slede iz poznatih stavova za topološke prostore (vid. npr.[36] Th. 4.9.6); jer, ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan i pT_2 prostor, tada je $\tau^1=\tau^2$. Sledi da je $\mathcal{F}= \mathcal{CF}= 2^X$, kao i $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}^2$.

Implikacije (ii) $\to$(i) i (iii) $\to$(i) slede neposredno iz dokaza teoreme 3.6 i stava 3.29.

(2) Tvrdjenje sledi iz teoreme 4.2 i stava 3.29. ∇

NAPOMENA. Iz dokaza tvrdjenja (1) teoreme 4.3 vidi se da se pri navedenim pretpostavkama topologije τ^1 i τ^2, odnosno $\mathcal{T}^1$ i $\mathcal{T}^2$, podudaraju. Ako je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc i pT_2 prostor, tada je, na osnovu teoreme 2.3, $\tau^2\subset\tau^1$. Stoga je $\mathcal{T}^2\subset\mathcal{T}^1$. Kako je $\tau^1\vee\tau^2=\tau^1$, to je $\mathcal{S}(X)=\mathcal{Q}(X)=\mathcal{K}(X)=\{A\subset X|A\neq\emptyset$ i A je τ^1 zatvoren u $X\}$, dok je $\mathcal{B}(X)=\{A\subset X|A\neq\emptyset$ i A je τ^2 zatvoren u $X\}$. Medjutim, u opštem slučaju se topologije τ^1 i τ^2, odnosno $\mathcal{T}^1$ i $\mathcal{T}^2$, ne podudaraju, što pokazuje

PRIMER 4.1. Neka je $X=R$, τ^1 diskretna i τ^2 kofinitna topologija na R. Tada je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc i pT_2 prostor. Takodje je $\mathcal{S}(X)=\mathcal{A}(X)$, kolekcija svih nepraznih podskupova od R, a kolekcija $\mathcal{B}(X)$ sadrži R i sve neprazne konačne podskupove od F. Za svaki jednočlan skup $\{x\}=U_x$, potkolekcija $\langle U_x\rangle = \{\{x\}\}$ je $\mathcal{T}^1$ otvorena i u $\mathcal{S}(X)$ i u $\mathcal{B}(X)$. Ali ona nije $\mathcal{T}^2$ otvorena jer je kardinalnost svakog $\mathcal{T}^2$ baznog elementa veća ili jednaka od $c=\mathrm{Card}R$. Zaista, neka je $\mathcal{U}=\langle U_0;U_1,\dots,U_n\rangle\in\mathcal{T}^2$ i $V=\bigcap_{k=1}^{n}U_k$. Za svaki $y\in V$ je $\{y\}\in\mathcal{U}$. Kako je $\mathrm{Card}V=c$, to je $\mathrm{Card}\,\mathcal{U}\geq\mathrm{Card}V=c$.

4.2. HIPERPROSTORI SA POLUKONAČNIM I KONAČNIM TOPOLOGIJAMA

Slično kao pri ispitivanju osobina bitopoloških hiperprostora sa konačnim topologijama, za hiperprostore sa polukonačnim i konačnim topologijama dokazujemno da važe sledeća tvrdjenja .

S t a v 4.1. Ako je $\mathcal{F}$ kolekcija iz (9) poglavlja 3, prostor $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\bar{\mathcal{T}}^2)$ je (1,2)-lqc prostor.

D o k a z. Tvrdjenje sledi iz stava 3.13. ∇

L e m a 4.3. Neka je $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$, $\mathcal{S}(X)$

ili $\mathcal{A}(X)$, takva da je $\mathcal{J}_1(X)\subset\mathcal{F}$ i neka je $B\in\mathcal{F}$. Tada važi:

(1) Ako je B kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2), tada je kolekcija $\langle B\rangle$ kvazikompaktna u $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ i u $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$.

(2) Skup B je kvazikompaktan u (X,τ^1,τ^2) ako i samo ako je kolekcija $\langle B\rangle$ kvazikompaktna u $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$.

D o k a z. Tvrdjenje sledi iz stava 3.15 i dokaza leme 4.1. ∇

S t a v 4.2. Neka je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc prostor, $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$, $\mathcal{S}(X)$ ili $\mathcal{A}(X)$, i neka je $\mathcal{J}_1(X)\subset\mathcal{F}$. Ako je $A\in\mathcal{F}$ kvazikompaktan skup u (X,τ^1,τ^2), tada

(1) postoji kolekcija $\mathcal{U}\in\bar{\mathcal{T}}^1$ takva da je $A\in\mathcal{U}$ i $\underline{\mathcal{T}}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ je kvazikompaktna kolekcija u $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$;

(2) postoji $\mathcal{U}\in\bar{\mathcal{T}}^1$ tako da je $A\in\mathcal{U}$ i $\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ je kvazikompaktna kolekcija u $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$;

(3) postoji $\mathcal{T}^1$ otvoren skup $\mathcal{U}$ takav da je $A\in\mathcal{U}$ i $\underline{\mathcal{T}}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ je kvazikompaktan u $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$.

D o k a z. Na osnovu leme 4.2, za kvazikompaktan skup A postoji $U\in\tau^1$ takav da je $\bar{U}^2$ kvazikompaktan skup. Tada je kolekcija $\mathcal{U}=\langle U\rangle\in\mathcal{T}^1$, $A\in\mathcal{U}$ i $\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}\subset\langle\bar{U}^2\rangle$, kao i $\underline{\mathcal{T}}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}\subset\langle\bar{U}^2\rangle$, na osnovu P3 leme 3.1. Kvazikompaktnost kolekcije $\langle\bar{U}^2\rangle$, a stoga i kolekcija $\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ i $\underline{\mathcal{T}}^2\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ u prostorima $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$, odnosno $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ i $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, sledi iz leme 4.3. ∇

S t a v 4.3. Neka je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lqc prostor, $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija $\mathcal{Q}(X)$ ili $\mathcal{S}(X)$ i neka je $\mathcal{J}_1(X)\subset\mathcal{F}$. Tada:

(1) potprostor $(C\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ je (1,2)-lqc prostor i $C\mathcal{F}$ je $\bar{\mathcal{T}}^1$ otvoren u $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$;

(2) potprostor $(C\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ je (1,2)-lqc prostor i $C\mathcal{F}$ je $\bar{\mathcal{T}}^1$ otvoren u $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$;

(3) potprostor $(C\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ je (1,2)-lqc prostor i $C\mathcal{F}$ je $\mathcal{T}^1$ otvoren u $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$.

D o k a z. Tvrdjenje se dokazuje slično teoremi 4.2. ∇

S t a v 4.4. (1) Ako je (X,τ^1,τ^2) kvazikompaktan pT_2 prostor i $\mathcal{F}$ jedna od kolekcija iz (9) poglavlja 3, tada su prostori $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$, $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ i njihovi potprostori

$(CF,\bar{T}^1,\underline{T}^2)$, $(CF,\bar{T}^1,T^2)$ i $(CF,T^1,\underline{T}^2)$ kvazikompaktni i wpT_2 prostori.

(2) Ako je (X,τ^1,τ^2) pT_2 i (1,2)-lqc prostor i $F = Q(X) = S(X) = K(X)$, tada su prostori $(CF,\bar{T}^1,\underline{T}^2)$, $(CF,\bar{T}^1,T^2)$ i $(CF,T^1,\underline{T}^2)$ (1,2)-lqc i wpT_2 prostori.

D o k a z. (1) Kako u opštem slučaju imamo samo dve različite kolekcije $A(X)$ i 2^X, jer se topologije τ^1 i τ^2 podudaraju (vid. Napomenu), tvrdjenje sledi neposredno iz stavova 3.15 i 3.27, kao i posledice 3.9.

(2) Tvrdjenje sledi iz stavova 4.3 i 3.27, kao i posledice 3.9. ∇

5. KONEKSNOST U BITOPOLOŠKIM HIPERPROSTORIMA

5.1. KONEKSNOST I LOKALNA KONEKSNOST

Koneksnost bitopoloških hiperprostora sa konačnim topologijama ispituju R. Vasudevan i C.K. Goel ([67]). Za bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) razmatraju kolekcije koje su u ovom radu označene sa $\mathcal{A}(X)$ i $\mathcal{K}(X)$, kao i kolekciju koju ćemo označavati sa $C^*\mathcal{K}(X)$,

$C^*\mathcal{K}(X)=\{A\in\mathcal{K}(X)|A$ je τ^1 kompaktan i τ^2 kompaktan skup$\}$.

Vasudevan i Goel pretpostavljaju da je bar jedan od prostora (X,τ^i) za $i=1,2$ T_1-prostor, da bi kolekcija $\mathcal{J}_1(X)$, jednočlanih podskupova X, bila sadržana u $C^*\mathcal{K}(X)$, a time i u ostalim razmatranim kolekcijama. U ovom svom radu oni dokazuju i sledeća uopštenja rezultata iz [36].

S t a v 5.1. Ako je (X,τ^1,τ^2) uzajamno koneksan prostor, tada je i $(\mathcal{J}_n(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ uzajamno koneksan prostor za svaki $n\in N$.

S t a v 5.2. Kolekcija $\mathcal{J}(X)$ je gusta u $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$, a stoga i u svakoj potkolekciji σ za koju je $\mathcal{J}(X)\subset\sigma\subset\mathcal{A}(X)$, tj. $\mathcal{T}^1\mathrm{cl}\mathcal{J}(X)\cap\mathcal{T}^2\mathrm{cl}\mathcal{J}(X)\equiv \mathrm{qcl}\mathcal{J}(X)=\mathcal{A}(X)$.

S t a v 5.3. Neka je σ kolekcija koja zadovoljava uslov $\mathcal{J}(X)\subset\sigma\subset\mathcal{A}(X)$. Ako je jedan od prostora X, $\mathcal{J}_n(X)$ (za sve $n\in N$) ili σ uzajamno koneksan,tada su svi uzajamno koneksni.

Ako se za kolekciju σ iz stava 5.3 uzme bilo koja kolekcija $\mathcal{F}$ iz (9) poglavlja 3, dobija se zbog $\mathcal{J}(X)\subset\mathcal{F}\subset\mathcal{A}(X)$

P o s l e d i c a 5.1. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno koneksan ako i samo ako je hiperprostor $(\mathcal{F},\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ uzajamno koneksan.

R. Vasudervan i C.K. Goel razmatraju i uzajamnu koneksnost bitopoloških hiperprostora sa polukonačnim topologijama i dokazuju sledeći stav (vid. [68]):

S t a v 5.4. Hiperprostori $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\bar{\mathcal{T}}^2)$ i $(\mathcal{A}(X),\underline{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ su uvek uzajamno koneksni.

Primetimo da za razliku od hiperprostora sa konačnim topologijama, ako je σ uzajamno koneksna potkolekcija od $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ takva da je jedan od članova iz σ uzajamno koneksan skup u (X,τ^1,τ^2), unija elemenata iz σ ne mora biti uzajamno koneksan skup u (X,τ^1,τ^2). To pokazuje i

PRIMER 5.1. Neka je $X=\{a,b\}$, $\tau^1=\{\emptyset,\{b\},X\}$ i $\tau^2=\{\emptyset,\{a\},\{b\},X\}$. Tada je kolekcija $\sigma=\{\{a\},\{a,b\}\}$ uzajamno koneksan skup u $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ jer je $\bar{\mathcal{T}}^1_\sigma=\{\emptyset,\sigma\}$, $\underline{\mathcal{T}}^2_\sigma=\{\emptyset,\{X\},\sigma\}$ a prostor $X=\{a\}\cup\{a,b\}$ nije uzajamno koneksan jer je $X=A\cup B$ za $A=\{a\}\in\tau^2$ i $B=\{b\}\in\tau^1$.

Takodje, uzajamna koneksnost samo jednog elementa iz uzajamno koneksne kolekcije σ nije dovoljna ni u hiperprostorima $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\bar{\mathcal{T}}^2)$ i $(\mathcal{A}(X),\underline{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ da bi skup $G=\cup\{S\in\sigma\}$ bio uzajamno koneksan. Zaista, skup $\{a\}$ ovog primera je jednočlan, pa stoga i uzajamno koneksan u (X,τ^1,τ^2), a kolekcija $\sigma=\{\{a\},X\}$ je uzajamno koneksna u $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\bar{\mathcal{T}}^2)$, jer je $\bar{\mathcal{T}}^1_\sigma=\{\emptyset,\sigma\}$, kao i u $(\mathcal{A}(X),\underline{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, jer je $\underline{\mathcal{T}}^1_\sigma=\{\emptyset,\{X\},\sigma\}=\underline{\mathcal{T}}^2_\sigma$.

U daljem razmatranju koneksnosti bitopoloških hiperprostora za prostor (X,τ^1,τ^2) nećemo pretpostavljati nikakva ograničenja, tj. (X,τ^1,τ^2) je proizvoljan bitopološki prostor.

Stavovi 5.1, 5.2, 5.3 i 5.4 važe u opštem slučaju.

S t a v 5.5. Ako je σ uzajamno koneksna kolekcija u $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ i svi elementi iz σ su uzajamno koneksni skupovi u (X,τ^1,τ^2), tada je unija elemenata iz σ uzajamno koneksan skup u (X,τ^1,τ^2).

D o k a z. Neka je $Y=\cup\{S\in\sigma\}$. Ako Y nije uzajamno koneksan, tada je $Y=G\cup H$ gde su G i H disjunktni neprazni skupovi i $G\in\tau^1_Y$, $H\in\tau^2_Y$. Neka su $G^*\in\tau^1$ i $H^*\in\tau^2$ takvi da je

$G=G^*\cap Y$ i $H=H^*\cap Y$. Kolekcija $\mathcal{G}= \langle G\rangle_\sigma=\{S\varepsilon\sigma \mid S\subset G\}=\{S\varepsilon\sigma \mid S\subset G^*\}=$ $= \langle G^*\rangle \cap\sigma\varepsilon\bar{\mathcal{T}}^1_\sigma$, a kolekcija $\mathcal{H}= \rangle H\langle_\sigma=\{S\varepsilon\sigma \mid S\cap H\neq\emptyset\}=\{S\varepsilon\sigma \mid S\cap H^*\neq \emptyset\}=$ $= \rangle H^*\langle \cap\sigma\varepsilon\underline{\mathcal{T}}^2_\sigma$. Kolekcije $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ su neprazne jer postoje $x\varepsilon Y$ i $y\varepsilon Y$ da je $x\varepsilon G$ i $y\varepsilon H$. Postoje S_1 i S_2 elementi iz σ da je $x\varepsilon S_1$, $y\varepsilon S_2$. Kako su S_1 i S_2 uzajamno koneksni skupovi u (X,τ^1,τ^2), pa zato i u (Y,τ^1_Y,τ^2_Y), na osnovu stava 1.19 je $S_1\subset G$ i $S_2\subset H$. Tada je $S_1\varepsilon\mathcal{G}$ i $S_2\varepsilon\mathcal{H}$. Takodje je $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}=\sigma$ i $\mathcal{G}\cap\mathcal{H}= \emptyset$ jer $S\notin\mathcal{G}$ <=> $S\not\subset G$ <=> $S\cap H\neq\emptyset$ <=> $S\varepsilon\mathcal{H}$, pa $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ čine diskoneksiju od σ , suprotno pretpostavci. ∇

S t a v 5.6. Ako je σ uzajamno koneksna kolekcija u $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, $Y= \cup\{S\varepsilon\sigma\}$ i $\sigma\supset\mathcal{J}_1(Y)$, tada je Y uzajamno koneksan skup u (X,τ^1,τ^2).

D o k a z. Tvrdjenje se dokazuje analogno prethodnom. U ovom slučaju umesto skupova S_1 i S_2, skupovi $\{x\}$ i $\{y\}$ redom pripadaju kolekcijama $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$, pa $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ ponovo daju diskoneksiju od σ . ∇

Slično, ako je jedna od topologija konačna a druga polukonačna, važi

S t a v 5.7. Neka je σ p-koneksna kolekcija u $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$, odnosno $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, i neka je $Y= \cup\{S\varepsilon\sigma\}$.

(1) Ako su svi elementi iz σ p-koneksni skupovi u (X,τ^1,τ^2), tada je Y p-koneksan skup.

(2) Ako je $\sigma\supset\mathcal{J}_1(Y)$, tada je Y uzajamno koneksan skup u (X,τ^1,τ^2).

D o k a z. Kako je $\mathcal{T}^2\supset\underline{\mathcal{T}}^2$ i $\mathcal{T}^1\supset\bar{\mathcal{T}}^1$, to se može ponoviti konstrukcija iz dokaza stavova 5.5 i 5.6. ∇

Primer 5.1 ponovo pokazuje da se u tvrdjenju (1) stava 5.7 uslov "svi elementi iz σ su uzajamno koneksni skupovi" ne može u opštem slučaju oslabiti. Kolekcija σ je uzajamno koneksna i u $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ i u $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ jer je $\bar{\mathcal{T}}^1_\sigma=\{\emptyset,\sigma\}$, kao i $\mathcal{T}^1_\sigma = \underline{\mathcal{T}}^1_\sigma=\{\emptyset,\{X\},\sigma\}=\underline{\mathcal{T}}^2_\sigma$.

Dokažimo prethodno sledeća tvrdjenja koja ćemo ubuduće koristiti.

L e m a 5.1. Kvaziadherencija kolekcije $J(X)$ u prostoru $(A(X),\Theta^1,\Theta^2)$ je $A(X)$, gde je Θ^i jedna od topologija T^i, $\bar{T}^i$ ili $\underline{T}^i$ za $i=1,2$.

D o k a z. Tvrdjenje sledi iz stava 5.2 jer je $\Theta^1 clJ(X)\cap\Theta^2 clJ(X)\supset T^1 clJ(X)\cap T^2 clJ(X) = A(X)$.

P o s l e d i c a 5.2. Ako kolekcija σ zadovoljava uslov $J(X)\subset\sigma\subset A(X)$, to je u potprostoru $(\sigma,\Theta^1_\sigma,\Theta^2_\sigma)$, gde je $\Theta^i\in\{T^i,\bar{T}^i,\underline{T}^i\}$ za $i=1,2$, kvaziadherencija $qcl^J(X)=\sigma$.

P o s l e d i c a 5.3. Neka je σ kolekcija koja zadovoljava uslov $J(X)\subset\sigma\subset A(X)$ i neka je topologija $\Theta^i\in\{T^i,\bar{T}^i,\underline{T}^i\}$ za $i=1,2$. Ako se u prostoru $(\sigma,\Theta^1,\Theta^2)$ kolekcija <V> označi sa V, gde je V proizvoljan podskup od X, tada je $qcl(V\cap J(X)) = qclV$.

D o k a z. Uvedimo oznaku $V^*=$ <V> u prostoru $(A(X),\Theta^1,\Theta^2)$. Tada je

$$J(V) = V\cap J(X)= V^*\cap J(X)\subset V= V^*\cap\sigma\subset V^*= A(V) .$$

U potprostoru $(A(V),\Theta^1,\Theta^2)$, na osnovu leme 5.1, važi

$qcl_V(V^*\cap J(X))= qcl_{V^*}A(V) =V^*$, tj. $J(V)$ je gust u V^*, i stoga $qcl_{A(X)}(V\cap J(X))\supset V^*$.

Za kvaziadherenciju u prostoru $(\sigma,\Theta^1,\Theta^2)$ imamo, na osnovu stava 1.2,

$$qcl_\sigma(V\cap J(X)) = (qcl_{A(X)}(V\cap J(X)))\cap\sigma \supset(qcl_{A(X)}V^*)\cap\sigma \supset$$

$$\supset (qcl_{A(X)}V)\cap\sigma = qcl_\sigma V .$$

Kako iz $V\cap J(X)\subset V$ sledi $qcl_\sigma(V\cap J(X))\subset qcl_\sigma(V)$, to je tvrdjenje dokazano. ∇

L e m a 5.2. Neka je (X^n,τ^1_*,τ^2_*) bitopološki proizvod n kopija prostora (X,τ^1,τ^2). Prirodna projekcija

$pr : (X^n,\tau^1_*,\tau^2_*) \to (J_n(X),\Theta^1,\Theta^2)$ definisana sa

$pr(x_1,\dots,x_n) = \{x_1,\dots,x_n\}$

je uzajamno neprekidno preslikavanje, gde je $\Theta^i\in\{T^i,\bar{T}^i,\underline{T}^i\}$, $i=1,2$.

D o k a z. Tvrdjenje sledi iz neprekidnosti preslikavanja $pr:(X^n,\tau^i_*)\to(J_n(X),T^i)$ za $i=1,2$ (vid. [36]), jer je za svaki predbazni element $<U>$ topologije $\mathcal{T}^i$, gde je $U\epsilon\tau^i$, $pr^{-1}(<U>) = \underbrace{U\times\ldots\times U}_{n}\epsilon\tau_*^i$, a za svaki predbazni element $>U<$ iz $\mathcal{T}^i$ važi

$X^n - pr^{-1}(>U<) = \underbrace{U^c\times\ldots\times U^c}_{n}$ je zatvoren skup u (X^n,τ_*^i) ∇

L e m a 5.3. Preslikavanje $\phi:([\mathcal{A}(X)]^n,\Theta_*^1,\Theta_*^2)\to(\mathcal{A}(X),\Theta^1,\Theta^2)$ definisano sa $\phi(A_1,\ldots,A_n) = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ je uzajamno neprekidno.

D o k a z. Indukovana preslikavanja $\phi_i:([\mathcal{A}(X)]^n,\Theta_*^i)\to(\mathcal{A}(X),\Theta^i)$, i=1,2, zadovoljavaju sledeće uslove:

1° za predbazni element $<U>$ u $\mathcal{A}(X)$, ako $\Theta^i\supset\bar{\mathcal{T}}^i$, za $U\epsilon\tau^i$, važi

$$\phi_i^{-1}(<U>)=\{(A_1,\ldots,A_n)\epsilon[\mathcal{A}(X)]^n|\bigcup_{j=1}^{n}A_j\subset U\}=\underbrace{<U>\times\ldots\times<U>}_{n}\epsilon\Theta_*^i;$$

2° za predbazni element $>U<$ u $\mathcal{A}(X)$, ako $\Theta^i\supset\underline{\mathcal{T}}^i$, važi

$$[\mathcal{A}(X)]^n - \phi_i^{-1}(>U<) = \{(A_1,\ldots,A_n)\epsilon[\mathcal{A}(X)]^n|\bigcup_{j=1}^{n}A_j\subset U^c\} = \phi^{-1}(<U^c>) = \underbrace{<U^c>\times\ldots\times<U^c>}_{n}$$

je zatvoren u $([\mathcal{A}(X)]^n,\underline{\mathcal{T}}_*^i)$ na osnovu P1 leme 3.1, pa je zatvoren i u $([\mathcal{A}(X)]^n,\Theta_*^i)$.

L e m a 5.4. Ako je (X,τ^1,τ^2) uzajamno koneksan bitopološki prostor, tada je i $(\mathcal{J}(X),\Theta^1,\Theta^2)$ uzajamno koneksan prostor, gde je $\Theta^i\epsilon\{\mathcal{T}^i,\bar{\mathcal{T}}^i,\underline{\mathcal{T}}^i\}$, i=1,2.

D o k a z. Ako je (X,τ^1,τ^2) uzajamno koneksan prostor, tada je za svaki $n\epsilon N$ bitopološki proizvod (X^n,τ_*^1,τ_*^2) od n kopija prostora (X,τ^1,τ^2) uzajamno koneksan na osnovu stava 1.23. Na osnovu leme 5.2 i stava 1.18, prostor $(\mathcal{J}_n(X),\Theta^1,\Theta^2)$ je uzajamno koneksan, i slično kao za topološke hiperprostore, kako za svaka dva elementa A i B iz $\mathcal{J}(X)$ postoji $n\epsilon N$ da su $A,B\ \epsilon\mathcal{J}_n(X)$, to je na osnovu stava 1.20 tvrdjenje dokazano. ∇

S t a v 5.8. Prostor (X,τ^1,τ^2) je uzajamno koneksan ako i samo ako je prostor $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ uzajamno koneksan.

D o k a z. Ako je (X,τ^1,τ^2) uzajmano koneksan, tada je na osnovu leme 5.4, prostor $(\mathcal{J}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ uzajamno koneksan pa je, na osnovu leme 5.1. i stava 1.22, prostor $(A(X),\overline{T}^1,\underline{T}^2)$ uzajamno koneksan.

Obrnuto, ako je $(A(X),\overline{T}^1,\underline{T}^2)$ uzajamno koneksan, uzajamna koneksnost prostora (X,τ^1,τ^2) sledi iz stava 5.6. ∇

P o s l e d i c a 5.4. Ako je σ potkolekcija od $A(X)$ takva da je $J(X)\subset\sigma\subset A(X)$, tada je prostor (X,τ^1,τ^2) uzajamno koneksan ako i samo ako je prostor $(\sigma,\overline{T}^1,\underline{T}^2)$ uzajamno koneksan.

Koristeći prethodne stavove dokazujemo sledeća tvrdjenja o uzajamnoj koneksnosti prostora $(A(X),\overline{T}^1,T^2)$ i $(A(X),T^1,\underline{T}^2)$. (Primetimo da za uzajmnu koneksnost prostora $A(X)$ redosled konačnih i polukonačnih topologija nije bitan.)

S t a v 5.9. Ako je σ potkolekcija od $A(X)$ takva da je $J(X)\subset\sigma\subset A(X)$, tada je (X,τ^1,τ^2) uzajamno koneksan prostor ako i samo ako je prostor $(\sigma,\overline{T}^1,T^2)$, odnosno $(\sigma,T^1,\underline{T}^2)$, uzajamno koneksan.

D o k a z. Ako je (X,τ^1,τ^2) p-koneksan, tada su $(\sigma,\overline{T}^1,T^2)$ i $(\sigma,T^1,\underline{T}^2)$ p-koneksni prostori na osnovu posledice 5.1 i relacija $\overline{T}^1\subset T^1$ i $\underline{T}^2\subset T^2$. Obrnuto tvrdjenje sledi iz posledice 5.4 i istih inkluzija. ∇

Lokalnu koneksnost bitopoloških hiperprostora ispitivali su takodje Vasudevan i Goel i dokazali

S t a v 5.10. Neka je $J(X)\subset\sigma\subset C^*K(X)$. Tada je (X,τ^1,τ^2) uzajamno lokalno koneksan prostor ako i samo ako je (σ,T^1,T^2) p-lokalno koneksan.

Nastavljajući ispitivanje hiperprostora sa konačnim i polukonačnim topologijama dokazujemo

S t a v 5.11. Prostor $(A(X),\overline{T}^1,\overline{T}^2)$ je uvek p-lokalno koneksan.

D o k a z. Dokažimo da je $(A(X),\overline{T}^1,\overline{T}^2)$ (1,2)-lokalno koneksan prostor. Neka je A proizvoljan element iz $A(X)$. Njegova $\overline{T}^1$ bazna okolina $U=\langle U\rangle$ je p-koneksan skup u $A(X)$ jer je potprostor $(U,\overline{T}^1,\overline{T}^2)$ uzajamno koneksan. Indukovane topologije $\bar{T}^i$, $i=1,2$, na U jednake su polukonačnim topologijama $\bar{T}^i(U)$ generisanim topologijama τ^i_U na podskupu $U \subset X$. Kako je $(A(U), \bar{T}^1(U), \bar{T}^2(U)) = (U, \bar{T}^1, \bar{T}^2)$, to je, na osnovu stava 5.4, potprostor $(U, \bar{T}^1, \bar{T}^2)$ p-koneksan.

Na isti način se dokazuje da je $(A(X), \bar{T}^1, \bar{T}^2)$ (2,1)-lokalno koneksan prostor. ∇

T e o r e m a 5.1. Neka je σ kolekcija koja zadovoljava uslov $J(X) \subset \sigma \subset A(X)$. Potprostor $(\sigma, \underline{T}^1, \underline{T}^2)$ je uvek p-lokalno koneksan.

D o k a z. Zbog simetričnosti uslova dovoljno je dokazati da je $(\sigma, \underline{T}^1, \underline{T}^2)$ (1,2)-lokalno koneksan prostor.

Neka je $A \in \sigma$ i neka je $V = V^* \cap \sigma$ njegova $\underline{T}^1$ bazna okolina, gde je $V^* = \, >V_1< \cap \dots \cap >V_n<$ za $V_s \in \tau^1$, $s=1,\dots,n$. Kolekcija V je p-koneksan skup jer, ako su $U^* \in \underline{T}^1$ i $W^* \in \underline{T}^2$ kolekcije za koje je $V \cap U^* \neq \emptyset$ i $V \cap W^* \neq \emptyset$, neka je $B \in V \cap U^*$, $C \in V \cap W^*$ i neka su $U_0 \in \underline{T}^1$ i $W_0 \in \underline{T}^2$ bazni elementi takvi da je $B \in U_0 \subset U^*$ i $C \in W_0 \subset W^*$. Kako je $U_0 = \, >U_1< \dots >U_m<$ za $U_i \in \tau^1$, $i=1,\dots,m$, i $W_0 = \, >W_1< \dots >W_k<$ za $W_j \in \tau^2$, $j=1,\dots,k$, postoje $b_i' \in B \cap U_i$, $i=1,\dots,m$, $b_s'' \in B \cap V_s$, $s=1,\dots,n$, $c_j' \in B \cap W_j$, $j=1,\dots,k$ i $c_s'' \in C \cap V_s$, $s=1,\dots,n$. Neka je

$$F = \{b_i' \mid i=1,\dots,m\} \cup \{b_s'' \mid s=1,\dots,n\} \cup \{c_j' \mid j=1,\dots,k\} \cup \{c_s'' \mid s=1,\dots,n\}.$$

Tada je skup $F \in J(X)$, $F \in U_0 \subset U^*$, $F \in W_0 \subset W^*$ i $F \in V^*$, dakle, $F \in (V \cap U^*) \cap (V \cap W^*)$. Sledi da je V p-koneksan skup jer se ne može predstaviti kao unija dva neprazna skupa i to $\underline{T}^1$ otvorenog skupa U^* i $\underline{T}^2$ otvorenog skupa V^*. ∇

Uvedimo sledeću oznaku

$$G(X) = \{A \in A(X) \mid A \text{ je p-koneksan skup u } (X, \tau^1, \tau^2)\}.$$

L e m a 5.5. Neka je $H \subset G(X)$ i neka je $A \in G(X)$ takav da je za svaki $H \in H$ presek $A \cap H \neq \emptyset$. Tada je skup

$$H_0 = A \cup (\cup\{H \in H\})$$

p-koneksan.

D o k a z. Kako je $H_0 = \cup\{A \cup H \mid H \in H\}$ i skup $A \cup H$ p-koneksan za svaki $H\in\mathcal{H}$, na osnovu stava 1.21, to je, na osnovu istog stava, i skup H_0 p-koneksan. ∇

T e o r e m a 5.2. Neka je σ potkolekcija od $\mathcal{A}(X)$ takva da je $\mathcal{J}(X)\subset\sigma\subset\mathcal{A}(X)$. Prostor (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-lokalno koneksan ako i samo ako je prostor $(\sigma,\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ (1,2)-lokalno koneksan u svim svojim p-koneksnim elementima, tj. u svim elementima iz kolekcije $\sigma\cap\mathcal{G}(X)$.

D o k a z. ($\Rightarrow$:) Neka je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lokalno koneksan prostor. Za proizvoljan $F\in\sigma\cap\mathcal{G}(X)$, neka je $\mathcal{U}=\langle U\rangle$ njegova proizvoljna $\bar{\mathcal{T}}^1$ bazna okolina u prostoru σ. Iz $F\in\mathcal{U}$ sledi $F\subset U$. Kako je prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lokalno koneksan, za svaki $x\in F$ i τ^1 otvoren skup U postoji τ^1 otvoren uzajamno koneksan skup V_x takav da je $x\in V_x\subset U$. Neka je $V=\cup\{V_x|x\in F\}$. Tada je $V\in\tau^1$, $F\subseteq V\subset U$ i V je uzajamno koneksan skup na osnovu leme 5.5.

Na osnovu leme 5.4, iz uzajamne koneksnosti prostora (V,τ^1_V,τ^2_V) sledi uzajamna koneksnost prostora $(\mathcal{J}(V),\bar{\mathcal{T}}^1(V),\underline{\mathcal{T}}^2(V))$. Kako je $\mathcal{J}(V)=\mathcal{J}(X)\cap\langle V\rangle$, a topologije $\bar{\mathcal{T}}^1(V)$ i $\underline{\mathcal{T}}^2(V)$ su jednake topologijama potprostora $(\langle V\rangle,\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ u prostoru $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, to, ako se označi $\mathcal{V}=\langle V\rangle$, u prostoru $(\sigma,\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ važi $F\in\mathcal{V}\in\bar{\mathcal{T}}^1$ i $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$.

Uzajamna koneksnost kolekcije $\mathcal{V}$ u prostoru σ sledi iz p-koneksnosti kolekcije $\mathcal{J}(V)=\mathcal{V}\cap\mathcal{J}(X)$, inkluzija $\mathcal{V}\cap\mathcal{J}(X)\subset\subset\mathcal{V}\subset\mathrm{qcl}\mathcal{V}$, jednakosti $\mathrm{qcl}\mathcal{V}=\mathrm{qcl}(\mathcal{V}\cap\mathcal{J}(X))$ u prostoru σ (vid. posledicu 5.3) i stava 1.21.

($\Leftarrow$:) Neka je $(\sigma,\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ (1,2)-lokalno koneksan prostor. Za proizvoljan $x\in X$ i τ^1 otvorenu okolinu U od x, skup $\{x\}\in\sigma\cap\mathcal{G}(X)$ i $\mathcal{U}=\langle U\rangle$ je njegova $\bar{\mathcal{T}}^1$ otvorena okolina u prostoru σ. Postoji $\bar{\mathcal{T}}^1$ otvorena uzajamno koneksna okolina $\mathcal{W}$ elementa $\{x\}$ takva da je $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}$. Kolekcija $\mathcal{W}$ je unija baznih elemenata, $\mathcal{W}=\cup\{\mathcal{W}_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ gde je $\mathcal{W}_\lambda=\langle W_\lambda\rangle$ i $W_\lambda\in\tau^1$ za svaki $\lambda\in\Lambda$. Označimo $V=\cup\{W_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$. Tada je $V\in\tau^1$, $x\in V\subset U$ i V je p-koneksan skup u (X,τ^1,τ^2) na osnovu stava 5.6, jer je $\mathcal{W}$ p-koneksna kolekcija u $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, $V=\cup\{A\in\mathcal{W}\}$ i $\mathcal{W}\supset\mathcal{J}_1(V)$. ∇

PROBLEM. Šta se može reći o (2,1)-lokalnoj koneksnosti prostora $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$?

Slično teoremi 5.2 dokazujemo

S t a v 5.12. Ako je $(\mathcal{G}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ (1,2)-lokalno koneksan prostor, tada je i prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lokalno koneksan.

D o k a z. Neka je x proizvoljna tačka iz X i $U\epsilon\tau^1$ okolina tačke x. Skup $\{x\}\epsilon\mathcal{G}(X)$ i označimo sa $\mathcal{U}=\langle U\rangle$ njegovu $\bar{\mathcal{T}}^1$okolinu u prostoru $\mathcal{G}(X)$. Ako je $\mathcal{W}$ p-koneksna $\bar{\mathcal{T}}^1$ otvorena okolina skupa $\{x\}$ u $\mathcal{G}(X)$, takva da je $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}$, tada je $\mathcal{W}=\cup\{\mathcal{W}_\lambda|\lambda\epsilon\Lambda\}$, $\mathcal{W}_\lambda$ su bazni elementi, $\mathcal{W}_\lambda=\langle W_\lambda\rangle$ za svaki $\lambda\epsilon\Lambda$, gde je $W_\lambda\epsilon\tau^1$. Ako je $V=\cup\{W_\lambda|\lambda\epsilon\Lambda\}$, tada je $x\epsilon V\subset U$, $V\epsilon\tau^1$ i V je p-koneksan skup u (X,τ^1,τ^2) na osnovu stava 5.5, jer je $\mathcal{J}_1(X)\subset\mathcal{G}(X)$, $W_\lambda=\cup\{\{y\}|\{y\}\epsilon\mathcal{W}_\lambda\}$ za svaki $\lambda\epsilon\Lambda$, i stoga $V=\cup\{G\epsilon\mathcal{W}\}$, a $\mathcal{W}$ je p-koneksan skup u $\mathcal{G}(X)$ i u $\mathcal{A}(X)$. ∇

Ispitivanjem lokalne koneksnosti hiperprostora sa konačnim i polukonačnim topologijama, dokazujemo

S t a v 5.13. Neka je σ kolekcija koja zadovoljava uslov $\mathcal{J}(X)\subset\sigma\subset\mathcal{A}(X)$. Prostor (X,τ^1,τ^2) je (1,2)-lokalno koneksan ako i samo ako je prostor $(\sigma,\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ (1,2)-lokalno koneksan u svim tačkama iz kolekcije $\sigma\cap\mathcal{G}(X)$.

D o k a z. ($\Rightarrow$:) Dokaz ove implikacije je isti kao i odgovarajući za teoremu 5.2.

($\Leftarrow$:) Primetimo da, s obzirom na to da je $\underline{\mathcal{T}}^2\subset\mathcal{T}^2$, iz (1,2)-lokalne koneksnosti prostora $(\sigma,\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ u tačkama iz $\mathcal{G}(X)$, sledi (1,2)-lokalna koneksnost prostora $(\sigma,\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ u istim tačkama. Sada iz teoreme 5.2 sledi (1,2)-lokalna koneksnost prostora (X,τ^1,τ^2). ∇

Označimo

$$\mathcal{C}^i(X)=\{A\epsilon\mathcal{A}(X)|A \text{ je kompaktan skup u prostoru } (X,\tau^i)\}$$

za $i\epsilon\{1,2\}$ i

$$\mathcal{C}^*(X)=\mathcal{C}^1(X)\cap\mathcal{C}^2(X).$$

S t a v 5.14. Ako je σ kolekcija koja zadovoljava relaciju $\mathcal{J}(X)\subset\sigma\subset\mathcal{C}^2(X)$, tada iz (2,1)-lokalne koneksnosti prostora (X,τ^1,τ^2) sledi (2,1)-lokalna koneksnost prostora $(\sigma,\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$.

D o k a z. Za proizvoljan $F\in\sigma$ i njegovu $\mathcal{T}^2$ baznu okolinu $\mathcal{U}=\langle U_0;U_1,\ldots,U_n\rangle$ u σ, kako je $F\subset U$, za svaki $x\in F$ postoji τ^2 otvoren p-koneksan skup V_x da je $x\in V_x\subset U$. Iz otvorenog pokrivača $\{V_x|x\in F\}$ τ^2 kompaktnog skupa F se izdvaja konačan $\{V_j\equiv V_{x_j}|j=1,\ldots,m\}$. Kako je $U_i\cap F\neq\emptyset$ za svaki $i=1,\ldots,n$, neka je $x_i\in U_i\cap F$, $i=1,\ldots,n$. Za svaki $i\in\{1,\ldots,n\}$ postoji τ^2 otvoren p-koneksan skup W_i takav da je $x_i\in W_i\subset U_i$. Označimo $V=(\bigcup_{j=1}^{m}V_j)\cup(\bigcup_{i=1}^{n}W_i)$ i $\mathcal{V}^*=\langle V;W_1,\ldots,W_n\rangle$ u $\mathcal{A}(X)$. Tada su, na osnovu leme 5.4, skupovi $\mathcal{J}(V)$ i $\mathcal{J}(W_i)$ za $i=1,\ldots,n$, p-koneksni u $\mathcal{A}(X)$. Primenom uzajamno neprekidnog preslikavanja $\phi:[\mathcal{A}(X)]^{m+1}\to\mathcal{A}(X)$, iz leme 5.3, na kolekciju $\mathcal{J}(V)\times\mathcal{J}(W_1)\times\ldots\times\mathcal{J}(W_n)$ dobija se da je $\phi(\mathcal{J}(V)\times\mathcal{J}(W_1)\times\ldots\times\mathcal{J}(W_n))=$ $=\mathcal{V}^*\cap\mathcal{J}(X)$ p-koneksna kolekcija u $\mathcal{A}(X)$. Na osnovu posledice 5.3 i stava 1.21 sledi da je $\mathcal{V}=\mathcal{V}^*{}_\sigma$ p-konksan skup u $(\sigma,\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$. (Uporediti sa stavom 5.9 iz [67].) ∇

S t a v 5.15. Neka je σ kolekcija koja zadovoljava relaciju $\mathcal{J}(X)\subset\sigma\subset\mathcal{C}^1(X)$. Ako je prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-lokalno koneksan, tada je prostor $(\sigma,\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ (1,2)-lokalno koneksan.

D o k a z. Za proizvoljan skup $F\in\sigma$, analognom konstrukcijom kao u dokazu prethodnog stava, za proizvoljnu $\mathcal{T}^1$ baznu okolinu $\mathcal{U}$ od F konstruiše se okolina $\mathcal{V}=\mathcal{V}^*\cap\sigma$ koja je p-koneksan skup. ∇

PROBLEM. Da li važi obrnuto tvrdjenje u stavovima 5.14 i 5.15 i šta se može reći o (2,1)-lokalnoj koneksnosti prostora $(\sigma,\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$?

5.2. TOTALNA DISKONEKSNOST I NULA-DIMENZIONALNOST

Slabu uzajamnu totalnu diskoneksnost i uzajamnu nula-dimenzionalnost bitopoloških hiperprostora sa konačnim topologijama ispitivali su Vasudevan i Goel ([67]). Ovde pristupamo potpunijem ispitivanju ovih osobina kod hiperprostora sa konačnim i polukonačnim topologijama, a takodje razmatramo i uzajamnu totalnu diskoneksnost bitopoloških hiperprostora.

S t a v 5.16. Neka je σ kolekcija koja zadovoljava uslov $\mathcal{J}_1(X)\subset\sigma\subset\mathcal{A}(X)$ i neka je $\Theta^i\epsilon\{\mathcal{T}^i,\bar{\mathcal{T}}^i,\underline{\mathcal{T}}^i\}$ za $i=1,2$. Ako je prostor $(\sigma,\Theta^1,\Theta^2)$ wp-totalno diskoneksan (p-totalno diskoneksan), tada je i (X,τ^1,τ^2) wp-totalno diskoneksan (p-totalno diskoneksan).

D o k a z. Slaba uzajamna totalna diskoneksnost i uzajamna totalna diskoneksnost su nasledna svojstva. Tvrdjenje sledi iz leme 3.2.

Nasuprot tvrdjenju teoreme 3.8 iz [67], wp-totalna diskoneksnost se ne prenosi sa prostora (X,τ^1,τ^2) na hiperprostor $(\mathcal{C}^*(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^1)$, pa stoga ni na hiperprostor $(\mathcal{C}^*(X),\Theta^1,\Theta^2)$ sa slabijim topologijama, gde su $\Theta^i\epsilon\{\mathcal{T}^i,\bar{\mathcal{T}}^i,\underline{\mathcal{T}}^i\}$ za $i=1,2$. To pokazuje

PRIMER. 5.2. Neka je $X=\{a,b,c\}$, τ^1 diskretna topologija i $\tau^2=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},X\}$. Prostor (X,τ^1) je T_1-prostor, a zbog konačnosti skupa X svi neprazni podskupovi su kompaktni u obema topologijama, dakle, $\mathcal{C}^1(X)=\mathcal{A}(X)$. Uvedimo oznake $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$, $D=\{a,b\}$, $E=\{a,c\}$, $F=\{b,c\}$. Tada je $\mathcal{A}(X)=$ $=\{A,B,C,D,E,F,X\}$, topologija $\mathcal{T}^1$ je diskretna a topologija $\mathcal{T}^2=$ $=\{\emptyset,\{A\},\{A,D\},\{A,B,D\},\{A,D,E,X\},\{A,B,D,E,X\},\{A,B,D,E,F,X\},\mathcal{A}(X)\}$.

Prostor (X,τ^1,τ^2) je wp-totalno diskoneksan jer za parove (a,b) i (a,c) važi: $b,c\epsilon\{b,c\}\epsilon\tau^1$, $a\epsilon\{a\}\epsilon\tau^2$, a za par (b,c) imamo: $c\epsilon\{c\}\epsilon\tau^1$, $b\epsilon\{a,b\}\epsilon\tau^2$. Takodje, prostor nije p-totalno diskoneksan jer ne postoji diskoneksija $U|V$ prostora X takva da je $a\epsilon U\epsilon\tau^1$ i $b\epsilon V\epsilon\tau^2$.

Medjutim prostor $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ nije wp-totalno diskoneksan jer za elemente E i X ne postoji diskoneksija $\mathcal{U}|\mathcal{V}$ prostora $\mathcal{A}(X)$ takva da jedan skup pripada $\mathcal{U}$ a drugi $\mathcal{V}$. Za svaki $\mathcal{V}\epsilon\mathcal{T}^2$ važi $E\epsilon\mathcal{V} \Longleftrightarrow X\epsilon\mathcal{V}$.

T e o r e m a 5.3. Ako je (X,τ^1,τ^2) p-totalno diskoneksan prostor, tada je prostor $(\mathcal{C}^*(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ p-totalno diskoneksan.

D o k a z. Neka su A i B dva različita elementa iz $C^*(X)$. Postoji $x\in X$ takav da je $x\in(A-B)\cup(B-A)$. Pretpostavimo da je $x\in A-B$. Za svaki $y\in B$ je $x\neq y$, pa kako je prostor X p-totalno diskoneksan, postoji diskoneksija $U_y|V_{xy}$ prostora X takva da je $y\in U_y$, $x\in V_{xy}$, $U_x\in\tau^1$ i $V_{xy}\in\tau^2$. Iz τ^1 otvorenog pokrivača $\{U_y|y\in B\}$ τ^1 kompaktnog skupa B izdvaja se konačan potpokrivač $\{U_{y_i}|i=1,\ldots,k\}$. Označimo $U=\bigcup_{i=1}^{k}U_{y_i}$, $V=\bigcap_{i=1}^{k}V_{xy_i}$.

Tada je $U\in\tau^1$, $V\in\tau^2$, $B\subset U$, $A\cap V\neq\emptyset$, $U\cap V=\emptyset$ i $U\cup V=X$.

Za $\mathcal{U}=\langle U\rangle\in\bar{\mathcal{T}}^1\subset\mathcal{T}^1$ i $\mathcal{V}=\rangle V\langle\in\underline{\mathcal{T}}^2\subset\mathcal{T}^2$ važi $B\in\mathcal{U}$, $A\in\mathcal{V}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$ i $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=C^*(X)$. Sledi da je $\mathcal{U}|\mathcal{V}$ diskoneksija od $C^*(X)$ takva da je $B\in\mathcal{U}$ i $A\in\mathcal{V}$.

Slično, za tačku $x\in A-B$ i svaki $y\in B$ postoji diskoneksija $U_{xy}|V_y$ prostora X takva da je $x\in U_{xy}\in\tau^1$ i $y\in V_y\in\tau^2$. Tada postoje $\mathcal{V}_1=\langle V_1\rangle\in\bar{\mathcal{T}}^2\subset\mathcal{T}^2$ i $\mathcal{U}_1=\rangle U_1\langle\in\underline{\mathcal{T}}^1\subset\mathcal{T}^1$ takvi da je $\mathcal{U}_1|\mathcal{V}_1$ diskoneksija prostora $C^*(X)$ i da je $A\in\mathcal{U}_1$, $B\in\mathcal{V}_1$.

Ako je $x\in B-A$, analognim konstrukcijama dobijaju se diskoneksije $\tilde{\mathcal{U}}|\tilde{\mathcal{V}}$ i $\tilde{\mathcal{U}}_1|\tilde{\mathcal{V}}_1$ prostora $C^*(X)$ takve da je $A\in\tilde{\mathcal{U}}$ i $B\in\tilde{\mathcal{V}}$, odnosno $A\in\tilde{\mathcal{V}}_1$ i $B\in\tilde{\mathcal{U}}_1$.

Sledi da je prostor $(C^*(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ p-totalno diskoneksan. ∇

Ukoliko je u bitopološkom hiperprostoru $(C^*(X),\Theta^1,\Theta^2)$, gde je $\Theta^i\in\{\mathcal{T}^i,\bar{\mathcal{T}}^i,\underline{\mathcal{T}}^i\}$ za $i=1,2$, bar jedna od topologija polukonačna, gornje tvrdjenje ne važi s obzirom na prirode topologija, što pokazuje

PRIMER. 5.3. Neka je $X=\{a,b\}$ i $\tau^1=\tau^2$ diskretna topologija. Tada je $C^*(X)=\mathcal{A}(X)=\{A,B,X\}$, gde je uvedena oznaka $A=\{a\}$ i $B=\{b\}$. Prostor (X,τ^1,τ^2) je p-totalno diskoneksan jer je totalno diskoneksan topološki prostor. Iz

$\bar{\mathcal{T}}^i=\{\emptyset,\{A\},\{B\},\{A,B\},\mathcal{A}(X)\}$, $\underline{\mathcal{T}}^i=\{\emptyset,\{X\},\{A,X\},\{B,X\},\mathcal{A}(X)\}$ i

$\mathcal{T}^i$ je diskretna topologija, za $i=1,2$,

sledi da prostori $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ i $(\mathcal{A}(X),\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ nisu p-totalno diskoneksni jer, na primer, i u jednom i u drugom prostoru ne postoji diskoneksija $\mathcal{U}|\mathcal{V}$ takva da je $X\in\mathcal{U}$ i $A\in\mathcal{V}$. Kako je $\bar{\mathcal{T}}^1\subset\mathcal{T}^1$ i $\underline{\mathcal{T}}^2\subset\mathcal{T}^2$, to ni prostor $(\mathcal{A}(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ nije uzajamno totalno diskoneksan.

T e o r e m a 5.4. Ako je prostor (X,τ^1,τ^2) p-totalno diskoneksan, tada su prostori $(\mathcal{C}^1(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$, $(\mathcal{C}^1(X),\mathcal{T}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ i $(\mathcal{C}^1(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ wp-totalno diskoneksni.

D o k a z. Dovoljno je dokazati da je prostor $(\mathcal{C}^1(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ wp-totalno diskoneksan. Slično kao u dokazu teoreme 5.3, za dva različita elementa A i B iz $\mathcal{C}^1(X)$, postoji $x\in(A-B)\cup(B-A)$. Neka je $x\in A-B$. S obzirom na topologije na $\mathcal{C}^1(X)$, za svaki $y\in B$, kako je $x\neq y$, uočavamo postojeću diskoneksiju $U_x|V_{xy}$ prostora X takvu da je $y\in U_y$, $x\in V_{xy}$, $U_x\in\tau^1$ i $V_{xy}\in\tau^2$. Iz τ^1 otvorenog pokrivača $\{U_y|y\in B\}$ τ^1 kompaktnog skupa B izdvaja se konačan potpokrivač $\{U_{y_i}|i=1,\ldots,k\}$. Označimo, ponovo, $U=\bigcup_{i=1}^{k}U_{y_i}$, $V=\bigcap_{i=1}^{k}V_{xy_i}$. Za $\mathcal{U}=\langle U\rangle\in\bar{\mathcal{T}}^1$ i $\mathcal{V}={>}V{<}\in\underline{\mathcal{T}}^2$ važi: $B\in\mathcal{U}$, $A\in\mathcal{V}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$ i $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=\mathcal{C}^1(X)$.

Dakle, $\mathcal{U}|\mathcal{V}$ je diskoneksija od $\mathcal{C}^1(X)$ takva da je $B\in\mathcal{U}$, $A\in\mathcal{V}$.

Ako je $x\in B-A$, tada se analognom konstrukcijom dobija diskoneksija $\mathcal{U}'|\mathcal{V}'$ takva da je $A\in\mathcal{U}'$ i $B\in\mathcal{V}'$.

Ispitujući nula-dimenzionalnost bitopoloških hiperprostora dokazujemo sledeća tvrdjenja.

S t a v 5.17. Neka je σ kolekcija koja zadovoljava uslov $\mathcal{J}_1(X)\subset\sigma\subset\mathcal{A}(X)$ i neka je $\Theta^i\in\{\mathcal{T}^i,\bar{\mathcal{T}}^i,\underline{\mathcal{T}}^i\}$ za $i=1,2$. Ako je prostor $(\sigma,\Theta^1,\Theta^2)$ (1,2)-nula dimenizioni (p-nula dimenzioni), tada je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-nula dimenizoni (p-nula dimenzioni) prostor.

D o k a z. Kako su i (1,2)-nula dimenzionalnost i p-nula dimenzionalnost nasledna svojstva, tvrdjenje se dokazuje korišćenjem leme 3.2. ∇

T e o r e m a 5.5. Ako je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-nula dimenzioni prostor, tada su $(\mathcal{C}^1(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$, $(\mathcal{C}^1(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ i $(\mathcal{C}^1(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ (1,2)-nula dimenzioni prostori.

D o k a z. Dokažimo da je prostor $(\mathcal{C}^1(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ (1,2)-nula dimenzioni ukoliko je (X,τ^1,τ^2) (1,2)-nula dimenzioni prostor.

Neka je $F\varepsilon C^1(X)$ i neka je $\mathcal{U}= \langle U\rangle$ njegova $\bar{\mathcal{T}}^1$ bazna okolina. Za svaki $x\varepsilon F$ postoji $V_x\varepsilon\tau^1$ takav da je V_x τ^2 zatvoren skup i $x\varepsilon V_x\subset U$. Iz τ^1 otvorenog pokrivača $\{V_x | x\varepsilon F\}$ τ^1 kompaktnog skupa F izdvaja se konačan potpokrivač $\{V_{x_j} | j=1,\dots,m\}$. Skup $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j} \varepsilon\tau^1$, $F\subset V\subset U$ i V je τ^2 zatvoren. Označi li se $\mathcal{V}= \langle V\rangle$ u prostoru $C^1(X)$, tada je $F\varepsilon\mathcal{V}\varepsilon\bar{\mathcal{T}}^1$, $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ je $\underline{\mathcal{T}}^2$ zatvorena kolekcija na osnovu P1 iz leme 3.1, odakle sledi da je $(C^1(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\underline{\mathcal{T}}^2)$ (1,2)-nula dimenzioni prostor.

Na isti način se dokazuje da je $(C^1(X),\bar{\mathcal{T}}^1,\mathcal{T}^2)$ (1,2)-nula dimenzioni prostor ako je prostor (X,τ^1,τ^2) (1,2)-nula dimenzioni.

Dokažimo, sada, da se (1,2)-nula dimenzionalnost prostora (X,τ^1,τ^2) prenosi na hiperprostor $(C^1(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$. (Uporediti sa [67].)

Ako je $F\varepsilon C^1(X)$ i $\mathcal{U}= \langle U; U_1,\dots,U_n\rangle$ njegova $\mathcal{T}^1$ bazna okolina, za svaki $x\varepsilon F$ postoji τ^1 otvoren τ^2 zatvoren skup V_x takav da je $x\varepsilon V_x\subset U$. Neka je $\{V_{x_j} | j=1,\dots,m\}$ konačan potpokrivač τ^1 kompaktnog skupa F i neka je $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$. Za svaki $i\varepsilon\{1,\dots,n\}$ postoji $y_i\varepsilon F\cap U_i$ i postoji τ^1 otvoren τ^2 zatvoren skup W_i takav da je $y_i\varepsilon W_i\subset U_i$. Označimo $W = V\cup(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$. Tada je $W\varepsilon\tau^1$, $F\subset V\subset W\subset U$, W je τ^2 zatvoren skup, pa je u prostoru $C^1(X)$ kolekcija $\mathcal{W}= \langle W; W_1,\dots,W_n\rangle\subset\mathcal{U}$, $F\varepsilon\mathcal{W}\varepsilon\mathcal{T}^1$ i $\mathcal{W}$ je $\mathcal{T}^2$ zatvorena kolekcija na osnovu P4 iz leme 3.1. ∇

Iz teoreme 5.5 i stava 5.15. neposredno se dobija sledeće uopštenje teoreme 3.8 iz [67]:

P o s l e d i c a 5.5. Bitopološki prostor (X,τ^1,τ^2) je p-nula dimenzioni prostor ako i samo ako je $(C^*(X),\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ p-nula dimenzioni prostor.

LITERATURA

[1] D. Adnadjević, Ordered spaces and bitopology, Glasnik Mat. 10(30)(1975), 337-340.

[2] Д. Аднаджевич, Аксиомы отделимости и битопологичесние факторпространства, Math. balkanica (u štampi).

[3] ——— , Аксиомы отделимости и сходимость в битопологических упорядоченных пространствах, (u štampi).

[4] C. Amihăesei, Sur les bi-espaces extrêmement diskontinus, An. Şti. Univ. "Al. I. Cusa", Iaşi, Sect. I a, Mat., 19(1973), 19-25.

[5] T. Bîrsan, Sur les espaces bitopologiques connexes, An.Sti.Univ."Al.I.Cusa", Iasi, Sect.Ia, Mat., 14(1968), 293-296.

[6] ——— , Compacité dans les espaces bitopologiques, An.Şti.Univ."Al.I.Cusa", Iaşi, Sect.Ia, Mat., 15(1969), 317-328.

[7] N. Bourbaki, Topologie générale, ch I et II, Hermann, Paris, 1961.

[8] I.C. Cooke and I.L. Reilly, On bitopological compactness, J. London Math.Soc., 9(1975), 518-522.

[9] M.C. Datta, Projective bitopological spaces, J. Austral.Math.Soc., 13(1972), 327-334,

[10] ——— , Projective bitopological spaces II, J.Austral. Math.Soc., 14(1972), 119-128.

[11] A.S. Davis, Indexed systems of neighborhood for general topological spaces, Amer.Math.Montly, 68(1961), 886-893.

[12] П.Б. Двалишвили, Вполне регулярность в терминах направ-

ленностей, Сообщения АНГССР, 72, № 2, (1973), 297-299.

[13] ——— , Отделимость в битопологических пространствах, Сообщения АНГССР, 73, № 2,(1974), 285-288.

[14] ——— , О размерности битопологических пространств, Сообщения АНГССР, 76, № 1,(1974), 49-52.

[15] ——— , О некоторых типах компактности и аксиомах отделимости битопологических пространств, Сообщения АНГССР,80 , № 2,(1975), 289-292.

[16] ——— , О размерности и некоторых других вопросах теории битопологических пространств, Труды Тбилисского мат.инст. АНГССР, Сборник работ по топологии I,Теория размерностей и теория пучков, 1977, 15-51.

[17] Ch. Dorsett, Local connectedness, connectedness im Kleinen, and other properties of hyperspaces of R_0 spaces, (predato za štampu).

[18] R. Engelking, General topology, PWN, Warszawa, 1977.

[19] O. Feichtinger, Properties of the λ-topology, Lecture Notes in Mathematics, № 171, Springer-Verlag 1970, 17-23.

[20] P. Fletcher, Pairwise uniform spaces, Notices Amer. Math.Soc., 12(1965), 612.

[21] P. Fletcher, H.B. Hoyle III and C.W. Patty, The comparison of topologies, Duke Math.J., 36(1969), 325-331.

[22] O. Frink, Topology in lattices, Trans.Amer.Math.Soc., 51(1942), 569-582.

[23] J.T. Goodykoontz,Jr., Connectedness im Kleinen and local connectedness in 2^X and $C(X)$, Pacific Journ.of Math., 53(1974), 387-397.

[24] J.G. Hocking and G.S. Young, Topology, Addison-Wesley, Reading, 1961.

[25] J.L. Kelley, General topology, Van Nostrand, New York, 1957.

[26] J.C. Kelly, Bitopological spaces, Proc. London Math.

Soc., 13(1963), 71-89.

[27] Y.W. Kim, Pairwise compactness, Publ.Math.Debrecen, 15(1968), 87-90.

[28] ——— , Pseudo quasi metric spaces, Proc. Japan Acad., 44(1968), 1009-1012.

[29] K. Kuratowski, Topology, vol I, Academic Press, New York, 1966.

[30] ——— , Topology, vol II, Academic Press, New York, 1968.

[31] E.P. Lane, Bitopological spaces and quasi-uniform spaces, Proc. London Math.Soc., 17(1967), 241-256.

[32] S. N. Maheshwari and R. Prasad, Some new separation axioms, Ann.Soc.Sci. Bruxells, Sér. I, T.89, III (1975), 395-402.

[33] Z.P. Mamuzić, Koneksni prostori, Matematički Institut, Beograd, 1974.

[34] M. Marjanović, Topologies on collections of closed subsets, Publ.Inst.Math.(Beograd) 6(1966), 125-130.

[35] M.M. Marjanović, Topologizing the hypersets, Publ.Inst. Math.(Beograd) 11(25)(1971), 123-134.

[36] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer.Math.Soc., 71(1951), 152-182.

[37] D.N. Misra and K.K. Dube, Pairwise R_0 space, Ann. Soc.Sci. Bruxelles, Sér.I, T.87, I(1973), 3-15.

[38] M. Mršević, Local compactness in bitopological spaces, Mat.Vesnik, 2(15)(30)(1978), 265-272.

[39] ——— , Local compactness in bitopological hyperspaces, Mat.Vesnik, 3(16)(31)(1979), (u štampi).

[40] ——— , On bitopological local compactness, (predato za štampu).

[41] ——— , Connectivity properties of bitopological hyperspaces, (pripremljeno za štampu).

[42] М. Мршевич, Некоторые свойства пространства 2^X топологического R_0-пространства, (pripremljeno za štampu).

[43] M. Mršević, Zbirka rešenih zadataka iz topologije, Naučna knjiga, Beograd, 1977.

[44] M.G. Murdeshwar and S.A. Naimpally, R_1-topological spaces, Canad.Math.Bull., 9(1966), 521-523.

[45] ——— , Quasi-uniform topological spaces, Noordhoff, Groningen, 1966.

[46] S.A. Naimpally, On R_0 topological spaces, Ann.Univ.Sci. Budapest, Eötvös Sect.Math., 10(1967), 53-54.

[47] W.C. Patty, Bitopological spaces, Duke Math.J., 34 (1967), 387-391.

[48] W.J. Pervin, Connectedness in bitopological spaces, Neder.Akad.Wetensch.Proc.Ser. A 70(1967), 369-372.

[49] В.И. Пономарев, Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов, Мат.Сб. Т.48, № 2(1959), 191-212.

[50] T.G. Raghavan and I.L. Reilly, Metrizability of quasimetric spaces, J. London Math.Soc., 15(1977), 169-172.

[51] ——— , On minimal bitopological spaces, Kyungpook Math.J., 17(1977), 57-65.

[52] I.L. Reilly, On pairwise connected bitopological spaces, Kyungpook Math.J., 11(1971), 25-28.

[53] ——— , Bitopological local compactness, Nederl.Akad. Wetensch.Proc.Ser. A 75(1972), 407-411.

[54] ——— , On bitopological separation properties, Nanta Mathematica, V(1972), 14-25.

[55] ——— , Zero dimensional bitopological spaces, Nederl. Akad.Wetensch.Indag.Math., 35(1973), 127-131.

[56] ——— , Pairwise Lindelof bitopological spaces, Kyungpook Math.J., 13(1973), 1-4.

[57] I.L. Reilly, On pairwise R_0 spaces, Ann.Soc.Sci. Bruxelles, Sér.I, T.88, III(1974), 293-296.

[58] ——— , On essentially pairwise Hausdorff spaces, Rend. circ.Mat. Palermo, Ser.II, T XXV(1976), 47-52.

[59] I.L. Reilly and S.N. Young, Quasi-components in bitopological spaces, Math. Chronicle, 3(1974), 115-118.

[60] G.D. Richardson, R_1, pairwise compact, and pairwise complete spaces, Canad.Math.Bull., 15(1972), 1o9-113.

[61] M.J. Saegrove, Pairwise complete regularity and compactification in bitopological spaces, J. London Math.Soc., 7(1973), 286-290.

[62] R.A. Stoltenberg, On quasi-metric spaces, Duke Math.J., 36(1969), 65-71.

[63] J. Swart, Total disconnectedness in bitopological spaces and product bitopological spaces, Nederl.Akad. Wetensch.Indag.Math., 33(1971), 135-145.

[64] Н.А. Шанин, Об отделимости в топологичeских пространствах, ДАН СССР, 38(1943), 118-122.

[65] W.J. Thron, Topological structures, Holt,Rinehart and Winston, New York, 1966.

[66] R. Vasudevan and C.K. Goel, Separation axioms in bitopological hyperspaces, Ann.Soc.Sci. Bruxelles, Sér.I, T.89, IV(1975), 480-496.

[67] ——— , Connectivity properties of bitopological hyperspaces, Kyungpook Math.J., 15(1975), 13-24.

[68] ——— , Bitopological hyperspaces equipped with upper semi-finite and lower semi-finite topologies, (predato za štampu).

[69] J.D. Weston, On the comparison of topologies, J. London Math.Soc., 32(1957), 342-354.

OZNAKE I DEFINICIJE

$\bar{A} \equiv \tau \mathrm{cl} A$ adherencija skupa A u prostoru (X,τ)

$\bar{A} \equiv \mathrm{qcl} A$ kvaziadherencija skupa A u prostoru (X,τ^1,τ^2)

$\bar{A}^i \equiv \tau^i \mathrm{cl} A$ adherencija skupa A u prostoru (X,τ^i)

$A^c \equiv X-A$ komplement skupa A u odnosu na skup X

$\in$ pripadnost skupu

∇ završenost dokaza

R skup realnih brojeva

N skup prirodnih brojeva