Математички институт
Српске академије наука и уметности

Вељко А. Вујичић

ПРЕПРИНЦИПИ МЕХАНИКЕ

Редактор другог издања

др Драгомир Зековић

професор Машинског факултета Универзитета у Београду

2013.

Београд

ПРЕДГОВОР

Ова монографија настала је као самоповратни резултат мојих вишегодишњих предавања на универзитету и расправа у научним скуповима о проблемима науке о кретању тела. Повратни у том смислу што су ме предавања из: аналитичке механике, теорије осцилација, теорије стабилности кретања, тензорског рачуна и диференцијалне геометрије, па и техничке механике, подстицали на оправдану сумњу те и проверу знања које сам као студент стекао, а потом предавао другима и писао у складу са знањима записаним у стручној светској литератури.

Прихватао сам и полазио од тога да је Аналитичка механика, или општије Механика, тачна природна наука; тачна колико и математика или тачнија толико, колико њена тврђења захтевају поред математичких доказа, још и верификацију природе и човекове праксе, те и доказе технологије. Тачна до савршенства - математичка теорија о хармонијском кретању небеских тела и истовремено о грубој техничкој људској пракси. Њени творци су писали да је геометрија део механике (Is. Njutn) или да је механика део (математичке) анализе (Lagrange). Развијена и усавршена до коначности. Скоро да је, по многим, прихваћено схватање да је у овој области природних наука све решено. Тврђења (принципи, закони, теореме) теорије механике скоро да су прихваћена и уче се као закони природе. Стара је колико материјални и писани реликти, који сведоче о развоју сазнања о кретању и мировању тела; савремена је колико и савременост јер скоро све ново што се ствара, гради и разграђује не може се одвојити од ове науке.

При претходној оцени логично се намеће питање: шта се још може додати тој науци? Чему додатна писања која објављују стотине периодних научних часописа? Откуд прилози теорији о кретању тела, ако је та теорија до савршенства логички, опажајно и експериментално складна и коначна? Како су могуће расправе при сагласности свих судова о природи ствари? На та и мноштва других питања, приговора, несагласних исказа и филозофских квалификација и класификација* које су пратиле развој теоријске механике, ова књига покушава да одговори;

---

*види, на пример, П.В. Харламов: "Разномыслие в механике", Академия наук Украини, Донецк, 1993.

њоме се у многом мења знање о механици и у механици: филозофско полазиште, математичко логичка концепција, основни и изведени појмови који се чине јасним; уводе се препринципи; законима динамике дају се другачија значења и одређења, а принципи механике показују се сваки понаособ довољним за инваријантно развијање целе теорије механике; разграничени су појмови: дефиниција, закона, принципа, теорема и лема у механици. Као последица тога заобиђени су аксиоми или закони кретања класичне математичке теорије механике. И општост закона о узајамном привлачењу тела подвргнут је преиспитивању. Називи по ауторима појединих ставова механике замењени су називима значења или појма о коме се пише са разлогом да буду читаоцу јаснији, као и због тога што се у историјским списима о развоју механике наилази на различите податке о прилозима великана теоријске механике. Све наведене новине или модификације нису настале ради самих себе. Ниво умећа у историји развоја механике зависио је од поседовања и развоја математичких знања, као и од оперативности разних теорија. Фактор оцене ваљаности је био и остао логичка провера мисаоног моделирања механичких објеката и потврда изведених релација у примени, посматрањем и мерењем промена процеса у природи. У истакнутој прихваћеној констатацији да је аналитичка механика хармонијска симфонија природних наука, из године у годину уочавао сам извесне несагласности у тој теорији како у полазним ставовима тако и у математичкој анализи кретања. Расправе на научним семинарима и научним скуповима продубљивале су разлике у знањима и поимању математичких ставова механике, до супротних становишта или потпуног неразумевања и суштине механике и значења математичког формализма којим се описује кретање тела. Шта више основни и изведени појмови, постулати, аксиоми, закони, принципи, везе, трансформације,... апсолутно нису јединствено заступљени у стандарној механици.

Следбено том запажању, овде се предлаже једна, логичка конструкција механике, коју укратко приказује следећа шема

П Р Е П Р И Н Ц И П И

Основне дефиниције

ЗАКОНИ ДИНАМИКЕ

П Р И Н Ц И П И   М Е Х А Н И К Е

ТЕОРЕМЕ

Анализа решења диференцијалних
једначина кретања

СТАБИЛНОСТ КРЕТАЊА

Оваквом конструкцијом настојало се да се издвоји рационално језгро класичне механике, али и да се отклоне непотребне претпоставке, математичка поједностављења, а нарочито привидне новине масовне модернизације. Предначелом постојања одређен је предмет разматрања у механици и доминантна математичка нота усмерена на њега, без оправдане сумње о постојању у механици других мисаоних светова. Овим нису окончана знања о кретању тела, али се настојало да се степенују нивои сазнања од интуитивних схватања до сложених и најтананијих математичких доказа и закључака. Истицањем разлика у односу на стандарну стручну и научну литературу из механике није се имало на уму ни једно конкретно дело једног или више аутора уколико то није тачно наведено у самом тексту књиге; свака евентуална подударност или различитост, која није цитирана, је ненамерна, нециљна и случајна.

Писање овог дела, нарочито појединих делова, пратила је не једном сумња у основаност и тачност написаних тврђења, и поред извођења и понављања доказа, као и поред многих рецензија еминентних стручњака при објављивању појединих резултата у научним часописима, који су нашли места у овој монографији. Ту сумњу разумеће високоучени аутори оригиналних дела из природних наука. Поред увек недовољног знања требало је и храбрости ("цара зла свакојега") за заобилажење грандиозног постулата о инерцијским координатним системима, или за модификацију "закона" промене механичке енергије, или остати при тврдјењу да стандардни интегрални рачун разара тензорску природу диференцијалних једначина кретања система механике, или одбацити принцип солидификације (замрзавања) промењљивих веза и мењати још што шта друго, што је предмет и програм учења универзитетских курсева широм света. При таквом стању ствари тешко је искључити евентуалну могућност промашаја и у овој књизи. За сваки такав доказ, заснован на овде уведеним препринципима, као и сваку указану омашку сматраћу ауторизиваним прилогом и изразићу јавну захвалност.

Припремљени текст књиге прочитали су у целости или само поједине делове: дописни члан САНУ Божидар Вујановић, дописни члан ЦАНУ Ранислав Булатовић, професори Математичког факултета Универзитета у Београду др Славиша Прешић и др Зоран Марковић и саопштили ми низ примедби. Већину тих примедби сам прихватио, што је допринело побољшању текста ове књиге. Изражавам им велику и искрену захвалност на тој колегијалној помоћи и признајем дуг за њихово утрошено време, те и доказани допринос објављивању овог дела.

Рукопис по деловима, а потом у целости сложио је и припремио Драган Урошевић, коме се искрено захваљујем на помоћи и сарадњи.

Београд, 4. март 1998.

Вељко А. Вујичић

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

Прво издање књиге ПРЕПРИНЦИПИ МЕХАНИКЕ безуспешно је тражено у продаји, као и више библиотека. Професор Машинског факултета у Београду Др Драгомир Зековић предложио је да се штампа друго издање или, још боље, да се објави електронска верзија првог издања, тако да буде доступно свим заинтересованим читаоцима.

Пажљивим и зналачким читањем и ретком обдареношћу запазио је од тачке и запете до веома сложених математичких релација мноштво штампарских и других погрешака и предложио поправке. У потпуности и на високом нивоу, извршио је прецизирања у математици и механици, у складу са ставовима аутора, везаним за тематику монографије. Аутор је лично проверио и са великом захвалношћу прихватио скоро све примедбе, те је сам исправио све примећене пропусте.

Садржина и величина текста остали су исти као у првом издању. Електронску верзију монографије је припремио Драган Урошевић.

Ово друго побиљшано електронско издање официјелно су одобрили издавачи првог издања - Завод за издавање уџбеника и других издања, Београд и Математички институт Српске академије наука и уметности без чије помоћи не би ни постојала ова монографија.

Вељко А. Вујичић.

Београд 2013.

САДРЖАЈ

0. ПРЕПРИНЦИПИ

Сложеница "препринцип" или "предначело" овде се употребљава као јасан исказ, чија истинитост не подлеже преиспитивању, а од којих полази теоријска механика као природна наука (философија) о кретању тела.

Препринципи дефинишу основно полазиште механике, која се овде схвата као једна од наука о природи, а не као апстрактна математичка теорија без утврђене интерпретације. Као такви препринципима се казује пре почетка излагања механике да се она разликује, на пример, од геометрије, коју данас више не сматрају науком о реалном простору, већ апстрактном формалном теоријом која допушта различите, једнако вредне, интерпретације. Препринципи исказују гносолошку претпоставку да механика има фиксирану интерпретацију, као наука о кретању реалних тела.

Захтев јасности подразумева да се предначела могу исказати и казују усмено или писмено без, претходно уведених појмова и дефиниција, те да се лако и просто схватају казана одређења која су сагласна непосредно стеченом знању или наслућивању, а интересантна су за теорију механике. При описивању кретања тела предначела су таква тврђења која су јасна сама по себи, те која не изазивају питања и не траже одговоре јер се унапред прихвата онај одговор који би себи или другом дао постављач питања. Дакле механика полази од усвојеног које се не доводи у сумњу за било који ниво знања.

Шири смисао препринципа сагледава се изучавањем целе механике. Препринципи су за механику тачни све до неког евентуалног открића експериментом или нове појаве у природи који би им противерчили. Ако и кад научена мисао усклађена са појавама у природи, дође у супротност са препринципима, они могу бити модификовани, те са њима и одговарајућа тврђења овакве механике. Овде се истичу препринципи 1. Постојања, 2. Одређености кретања и 3. Инваријантности

Знања о кретању тела потичу из веома далеке прошлости. До нас су сачувана генетичким наследством, творбеним облицима човекове праксе и мноштвом нагомиланих разних записа од миленијумске старости до сваког данашњег дана. Историчари науке бележе записе старе пет миленијума, који се односе на кретање тела. Постојећи књижни фонд о кретању тела постаје толико велик да далеко прелази границе једне складне разумске теорије. И покушаји формалног уопштавања доспели су на мисаони ниво са којег се не виде човеку потребна знања о кретању тела. Мноштво дефиниција, која се не могу спорити са становишта права аутора да сам одређује своје појмове, доводе до несагласности теорија о битним појмовима, а у следећем кораку и до разлаза теорија.

Често се математичким грубим описом мисаоно упрошћених модела објеката природе објашњава стање кретање тела на начин који не одговара стварности. Стотине теорема о кретању тела, које се сваке године објављују у бројним научним и стручним часописима, садрже и несагласне "истине". А то је довољно да се постави питање "доказане истинитости".

Ово је покушај новог систематизовања рационалног језгра механике, којим би се отклонио несклад и нејасноће постојећих теорија. То је захтевало, поред осталог отступање и одустајање од неких уобичајених и прихваћених знања о принципима, законима, теоремама, аксиомама, или њихову модификацију. Логично је да ће овај приступ изазвати резервисаност или одбојност, нарочито код оних старијих добрих познавалаца механике који су њене законе и тврђења прихватили као непобитне законе природе. У складу са преприниципима, а у циљу веће јасности, основна питања ове студије објашњавају се оним математичким апаратом, којим се лакше доказује испуњеност преприниципа, а нарочито преприниципа инваријантности.

Знање о кретању тела казује се уведеним појмовима, и математичким релацијама. Сазнања се развијају, што за последицу има да општа знања нису дефинитивна те и не морају бити иста и једнако истинита. Тврђења о кретању тела уведена и изведена у овој механици у знатној мери се разликују од многих тврђења у бројним делима механике, нарочито у делу који описује кретање система тела са променљивим везама.

Препринцип постојања

(онтолошке претпоставке)

На основу наслеђених, постојећих и стечених знања механика полази од тога да постоје:

тела, **растојања**, **време**.

Постојање тела манифестује се у теоријској механици масом тела за коју је усвојена ознака m и њена димензија M, ($\dim m = \mathrm{M}$). Свако тело које постоји, према томе, има своју масу. По тој каквоћи се разликује тело које постоји у механици, од геометријског појма тела које се карактерише запремином V (volumen, лат). И то битно, јер се маса тела ни количински не подудара са његовом запремином, чија се димензија изводи помоћу димензије дужине L (лат. Longus - дугачак) $\dim V = \mathrm{L}^3$.

Свако тело, чије кретање проучава механика, има масу ма како била мала или ма колико била велика његова запремина. Тело ма како мале запремине V има коначну масу m. И сваки део тела, има своју масу. Део тела, запремине ΔV има масу Δm. Ако је реч о више тела или више делова тела, њихове масе означавамо сукцесивно индексима m_ν, Δm_ν $(\nu = 1, 2, \ldots,)$ и читамо "маса ν-тог тела", "маса ν-тог дела тела". Ако се говори о ν-тој постојећој честици масе m_ν, писаћемо "честица масе m_ν". Ма које природне бројеве придавали индексу ν, $\nu \in \mathbb{N}$, масе m_ν се увек одређују позитивним реалним бројевима $\mathbb{R}$, именованих јединицама димензије масе M.

Постојање растојања се идентификује свуда: међу честицама, небеским телима или између разних места на путу кретања тела, те удаљености места тела од осматрачког места; означава се словом l и мери се јединицама мере за дужину L (Longus лат.). И ако је непосредно опажено и виђено, наслеђено, стечено и схваћено, растојање између места или положаја тела није просто одредљиво. У потврду те констатације довољно је поменути растојање: између две летелице у ваздуху, два пловила на мору, два возила на путу брдовитог земљишта, два пешака у граду. Растојања су предмет и других наука, а нарочито метрологије ($\mu\varepsilon\tau\rho\omega\nu$ - мера, мерило, $\lambda\omega\gamma\iota\alpha$ - наука), астрометрије ($\alpha\sigma\tau\rho\alpha$ - звезда), геометрије ($\gamma\eta$ - Земља) и топологије ($\tau\omega\pi\omega\sigma$ - место) јер зависе од облика предела којем припадају положаји тела. Заједничка особина, према томе, може се издвојити само за веома мала растојања суседних тачака и то под условом да предели на којима се посматрују растојања нису дегенеративни. Положаји два тела, ма како они били мале честице које постоје, не могу се подударити, те њихово растојање мора бити различит0 од нуле, иако то противречи очигледности да не постоје растојање између тела која се додирују.

Ма како била честица мала она није тачка, али за одређивање растојања, договоримо се, да се то рачуна од једне тачке честице или уопште тела, којој се може придружити маса честице или уопште тела тако, као да је цела маса тела сконцентрисана у тој тачки, те да је фиктивни *центар масе*.

Зато ту тачку називају **масена тачка** или **материјална тачка**. На тај начин питање растојања тела своди се на појам растојања између тачака. Појам масене или материјалне тачке разликује се од геометријског појма тачке не само по томе што масену тачку карактерише маса, а од честице по томе што растојање између две честице увек постоји и није једнако нули, јер честице поред свог центра масе имају и граничне тачке своје запремине. На тај начин масена или материјална тачка се претставља масом и положајем $(m, \boldsymbol{r})$. Геометријске тачке се могу подударати, те њихово растојање може бити једнако нули.

Положај масене тачке у односу на било коју изабрану тачку посматрања може се описати *вектором положаја* $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_3$, где се под симболом $\boldsymbol{R}_3$ подразумева скуп реалних тровектора, или бројевима $r := (r^1, r^2, r^3) \in \mathbb{R}^3$ који су повезани са три линеарно независна вектора, а које ћемо називати базни или координатни вектори и означавати словима $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, $\boldsymbol{э} = (\boldsymbol{э}_1, \boldsymbol{э}_2, \boldsymbol{э}_3)$, или $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$. Ознаку $\boldsymbol{e}$ резервишемо за ортонормиране векторе јединичних интензитета $\boldsymbol{e}_i$, $(i = 1, 2, 3)$, $|\boldsymbol{e}_i| = 1$, а $\boldsymbol{э}_i$ за друге јединичне векторе праволинијских координатних система $(z, \boldsymbol{э})$.

Поред претпоставке да су јединични и ортогонални, претпоставићемо да $\boldsymbol{e}_i$ не мењају ни правац ни смер, те да су константни

$$\boldsymbol{e}_i = \mathbf{const}. \tag{0.1}$$

Приметимо да ова претпоставка о постојаности правца базних вектора нема места у филозофији кретања тела, јер и сва тела на којима се бира векторска база, се крећу. Механика ту претпоставку уводи условно о чему ће бити више речи при увођењу дефиниције брзине и објашњењу инерционе силе.

У оносу на базу $\boldsymbol{e}$ вектор полжаја $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_3$ се може најпростије написати у облику

$$\boldsymbol{r} = r^1\boldsymbol{e}_1 + r^2\boldsymbol{e}_2 + r^3\boldsymbol{e}_3 =: r^i\boldsymbol{e}_i, \tag{0.2}$$

где поновљени индекси доле и горе, означавају сабирање до бројева који узимају индекси; $(r^1, r^2, r^3) \in \mathbb{R}^3$ су координате вектора $\boldsymbol{r}$, а $r^1\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{r}_1$, ..., $r^3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{r}_3$ *ковектори* или *компоненте* тог вектора. Скаларним множењем вектора $\boldsymbol{r}$ векторима $\boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$, тј. $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} r^i = r_j$ добијају се j-те пројекције r_j вектора $\boldsymbol{r}$ на правце j-тих вектора $\boldsymbol{e}_j$. Само у односу на базу $\boldsymbol{e}$ координате r^j вектора једнаке су његовим пројекцијама r_j или координатама r_j ковектора $\boldsymbol{r}_j$, јер је

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \tag{0.3}$$

Посматрано из било које тачке O, од које полазе вектори положаја, усмерено растојање између било које две непосредно блиске тачке M_1 и M_2 одређује разлика вектора $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \Delta\boldsymbol{r}$, где је $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$, $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ и

$$\Delta\boldsymbol{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \left(r_2^i - r_1^i\right)\boldsymbol{e}_i = \Delta r^i \boldsymbol{e}_i. \tag{0.4}$$

Величина $|\Delta\boldsymbol{r}| = \Delta s$ може се назвати *метричко растојање* или *растојање* Δs (лат. Spatium - простор, међупростор, растојање) или *метрика простора.*

$$\dim s = \mathrm{L}\,. \tag{0.5}$$

Време се означава словом t (лат. tempus) а његова димензија T, $(\dim t = \mathrm{T})$. Непрекидно је и непоновљиво. У математичком опису може се представити бројном правом или уређеним мноштвом именованих бројева, те бројност њихових јединица су реални бројеви $\mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Признањем постојања времена прихвата се да постоје: кретање, мењање, трајање, прошло, садашње, будуће.

ПРЕПРИНЦИП КАУЗАЛНЕ ОДРЕЂЕНОСТИ

Растојања, њихове промене и други чиниоци кретања тела једнозначно су одређени у току целог времена, како у будућности тако и у прошлости, онoликом тачношћу колико су познате одреднице кретања у било којем фиксираном тренутку времена.

Овим предначелом механике се предодређује да је механика као теорија о кретању тела математички тачна наука, а као примењена природна наука онолико тачна колико су у одређеном тренутку времена тачно измерени познати подаци, од важности за кретање. Другим речима механика је до савршености тачно осмишљена теорија, а у техничкој пракси применљива онолико колико се та теорија познаје, колика је потреба и колике су техничке могућности њених применилаца.

Појам *кретања* тела обухвата: ходање, вожење, пловљење, пливање, летење, скакање, ломљење, ... и све глаголске именице којим се казује померање и промена растојања или мењање вектора положаја у току времена.

ПРЕПРИНЦИП ИНВАРИЈАНТНОСТИ

Кретање и својства кретања тела не зависе од форме исказа: утврђена истина о кретању и записана једном у одређеном облику неког језика једнако је садржана у запису другог облика или другог писма.

Препринцип постојања казује да постоје *маса*, *време* и *растојање*, одређени именованим реалним бројевима m и t и реалним вектором $\Delta\boldsymbol{r}$. Овај препринцип инваријантности или независности од формалности допушта да се маса као и време могу означавати неким другим словима рецимо $\bar{m}$ и $\bar{t}$ који не мења природу бројева m и t, те за које у целој коресподенцији мора бити да је $\bar{m} = m$ и $\bar{t} = t$. Иста таква ситуација је са растојањем $\Delta\boldsymbol{r}$. Ма где да је изабран координатни почетак од којег почиње вектор положаја, рецимо $\boldsymbol{\rho}$ постоји једначење

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{\rho},$$

те растојање $\Delta\boldsymbol{r}$ не зависи од облика писања. То је израженије у координатном облику у којем је избор форми знатно већи, као

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \left(\Delta r^i\right) \boldsymbol{e}_i = \Delta r^i \boldsymbol{e}_i = \Delta y^i \boldsymbol{e}_i = \\ = \Delta z^i \boldsymbol{\mathfrak{э}}_i = \Delta \rho^j \boldsymbol{g}_j = \cdots .\end{aligned}$$

Као таква сва три реалитета $m \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ и $\Delta \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_3$ су *инваријанте* и то m и t скаларне, а $\Delta \boldsymbol{r}$ векторска инваријанта.

И сви други чиниоци кретања тела су инваријантно изражени у разним координатним системима.

I. ОСНОВНА ОДРЕЂЕЊА

Помоћу претходно усвојених појмова и уведених ознака могуће је и потребно је да се одреде (дефинишу) битни појмови механике и то:

Дефниција 1. - Брзина

Гранична вредност односа растојања и интервала времена Δt за који се материјална тачка помери из једног положаја $\boldsymbol{r}(t)$ у непосредно близак други положај $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$, тј. природни извод вектора положаја по времену

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{v} \tag{1.1}$$

назива се брзина тачке.

Брзина је, према томе, вектор и њена таква природа је инваријантна. У зависности од потребе ужих одређења може се казати: *вектор брзине*, *тренутна брзина материјалне тачке*, *вектор брзине* у одређеном положају или још потпуније вектор брзине кретања материјалне тачке у одређеном тренутку или положају; не противречи ни исказ брзина промене положаја материјалне тачке, ако се под положајем подразумева вектор положаја.

Битније од назива је то, што се дефиницијом брзине успоставља веза између растојања и времена. Димензија брзине је изведена из дефиниције брзине и то

$$\dim \boldsymbol{v} = LT^{-1}. \tag{1.2}$$

Вектор положаја сада се јавља зависним од времена, што за собом у општем повлачи да је:

$$\boldsymbol{r}(t) = r^i(t)\boldsymbol{g}_i(t) \to \boldsymbol{v} = \frac{dr^i}{dt}\boldsymbol{g}_i + r^i\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt}, \tag{1.3}$$

а ова релација отвара проблем тачности механике и неопходности релативизирања теорије о кретању тела која има дефиницију 1.

Према предначелу одређености помоћу релације (1.1) требало би да буде једнозначно одређена брзина ако је познат вектор функција $\boldsymbol{r}(t)$ и обрнуто, вектор положаја ако је познат вектор $\boldsymbol{v}(t)$. Из релације (1.1) следи да је

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt \tag{1.4}$$

или

$$r^i(t)\boldsymbol{g}_i(t) - r^i(t_0)\boldsymbol{g}_i(t_0) = \int_{t_0}^{t} v^i(t)\boldsymbol{g}_i(t)dt,$$

односно

$$\left[r^i(t) - r^k(t_0)g_k^i(t_0,t)\right]\boldsymbol{g}_i(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt, \tag{1.5}$$

где је $g_k^i(t_0,t) : \boldsymbol{g}(t_0) \to \boldsymbol{g}(t)$.

Дакле, дефиниција (1.1) може се написати и у облику

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{c}\right] = \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{c} = \mathbf{const},$$

што показује да брзина кретања тачке не зависи од избора пола вектора положаја у истој бази.

Скривена тешкоћа одређивања брзине тачке јавља се у претходном избору система базних вектора под чим се подразумева и њихов пол и правци тих вектора. Може се претпоставити да су они константни вектори, али објективно све базе, на којима се поставља систем базних вектора $\boldsymbol{g}_i$, се крећу те и вектори $\boldsymbol{g}_i$ се мењају током времена. За човеково битисање и посматрање кретања тела база је Земља, која се, као и друге планете, креће, има релативну брзину у односу на Сунце, као и њену сопствену угаону брзину мере или рачунају до потребне тачности. Ма који правци да се изаберу за осе базних вектора $\boldsymbol{e}_i$, или координатних $\boldsymbol{\text{э}}_i$, $\boldsymbol{g}_i$, укључујући и правце Земља - звезде "некретнице", због кретања Земље не могу бити непроменљиви. Али уз претпоставку да се Земља као и Сунце крећу стационарно, за наше мерење, базне векторе посматрамо као ортонормиране. У циљу свођења релације на скаларни облик, векторе $\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt}$ треба изразити помоћу базних вектора $\boldsymbol{g}_i(t)$. Нека то буде

$$\dot{\boldsymbol{g}}_j = \frac{d\boldsymbol{g}_j(t)}{dt} = \omega_j^i \boldsymbol{g}_i(t), \tag{1.6}$$

где су ω_j^i засад неодређени коефицијенти разлагања вектора $\dot{\boldsymbol{g}}_i$. На основу релације (1.2) следи да је димензија коефицијента ω_j^i време на минус први степен; тј.

$$\dim \omega_j^i = \mathrm{T}^{-1}\,. \tag{1.7}$$

Величине ω димензије T^{-1}, називају се *угловним брзинама*, кружним учесталостима или учесталостима.

Заменом (1.6) у (1.3) добија се

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dr^i}{dt} + \omega_j^i r^j\right)\boldsymbol{g}_i = v^i \boldsymbol{g}_i, \tag{1.8}$$

а одавде, због независности вектора $\boldsymbol{g}_i$, координате вектора брзине су

$$v^i = \frac{dr^i}{dt} + \omega^i_j r^j \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.9}$$

Сходно предначелима решења овог система диференцијалних једначина за познате брзине $v^i(t)$ морају бити једнака решењима (1.5); операције интеграљења морају бити разрађене тако да ти услови одређености и инваријантности буду испуњени. То омогућује коваријантни или тензорски интеграл под условом да је познат двотачкасти тензор $g^i_k(t_0, t)$ и базни вектори $\boldsymbol{g}_i(t)$.

За константне базне векторе, рецимо $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}$ релација (1.6) своди се на систем хомогених једначина

$$\omega^1_j \boldsymbol{e}_1 + \omega^2_j \boldsymbol{e}_2 + \omega^3_j \boldsymbol{e}_3 = 0,$$

одакле следи да су $\omega^i_j = 0$, те координате вектора брзине (1.9) у овом случају су

$$v^i = \frac{dr^i}{dt}. \tag{1.10}$$

То довољно јасно показује да су координате вектора брзине материјалне тачке различите у односу на различите базне векторе. Због предначела неформалности и дефиниције (1.1) може се писати

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dr^i}{dt} + \omega^i_j r^j\right) \boldsymbol{g}_i = \frac{Dr^i}{dt} \boldsymbol{g}_i = \frac{dr^i}{dt} \boldsymbol{e}_i = v^i \boldsymbol{g}_i, \tag{1.11}$$

што задовољава једнакост форме и одговара изразу "природни извод" из дефиниције. С обзиром да је девет наведених коефицијената ω^i_j непознат ако се пође од опште истине да се свака база креће и да се не могу одредити, што противречи предначелу одређености, природно је да се за базне векторе изаберу координатни вектори, који се могу довести у везу са неким базним векторима који се неће мењати у току времена.

Дакле за одређивање положаја материјалне тачке и растојања тачака релацијама (0.2) и (0.4), поред услова (0.3) треба додати и услов непромењивости базних вектора по времену

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = 0. \tag{1.12}$$

Избором једном оријентисаних базних константних вектора, могуће је постављати друге оријентисане координатне системе, укључујући и криволинијске, а који се могу довести у узајамно пресликавање, те у односу на које је брзина инваријантна.

КООРДИНАНТНИ СИСТЕМИ

Под појмом *координатни систем* овде се подразумева уређен скуп реалних бројева и скуп међусобно независних вектора, које називамо координатни вектори. Координатне векторе разликујемо од базних само по томе што су базни претходно утврђени према објектима, а координатни према базним. Ако су координатни првобитни онда су они базни координатни вектори. На базним векторима, првобитно изабраним као у релацијама (0.2) - (0..4) и (1.3) могуће је уводити и друге координатне системе $x = \left(x^1, x^2, x^3\right)$, $\left(x^i \in \mathbb{R}\right)$ у којима се положај материјалне тачке једнозначно пресликава, а вектор брзине има општи инваријантни облик.

Може се изабрати било који други праволинијски координатни систем, рецимо $(z, \boldsymbol{\text{э}})$ чији се правци мењају у току времена у односу на базни систем $(y, \boldsymbol{e})$. Однос два система одређују релације

$$y^i = \gamma^i_\alpha z^\alpha, \quad \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^i}\boldsymbol{\text{э}}_\alpha = \bar{\gamma}^\alpha_i \boldsymbol{\text{э}}_\alpha, \quad \gamma^i_\alpha \bar{\gamma}^\beta_i = \delta^\beta_\alpha.$$

Вектор брзине је

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(y^i \boldsymbol{e}_i\right) = \dot{y}^i \boldsymbol{e}_i = \left(\dot{\gamma}^i_\alpha z^\alpha + \gamma^i_\alpha \dot{z}^\alpha\right)\bar{\gamma}^\beta_i \boldsymbol{\text{э}}_\beta = \\ = \left(\dot{\gamma}^i_\alpha \bar{\gamma}^\beta_i z^\alpha + \delta^\beta_\alpha \dot{z}^\alpha\right)\boldsymbol{\text{э}}_\beta = \left(\dot{z}^\beta + \omega_{\alpha}^{\cdot\beta} z^\alpha\right)\boldsymbol{\text{э}}_\beta = v^\beta \boldsymbol{\text{э}}_\beta\end{aligned}$$

где су

$$\omega_{\alpha}^{\cdot\beta} = \dot{\gamma}^i_\alpha \bar{\gamma}^\beta_i = -\omega^\beta_{\cdot\alpha} = -\gamma^i_\alpha \dot{\bar{\gamma}}^\beta_i$$

антисиметрични коефицијенти, јер је

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma^i_\alpha \bar{\gamma}^\beta_i\right) = \dot{\gamma}^i_\alpha \bar{\gamma}^\beta_i + \gamma^i_\alpha \dot{\bar{\gamma}}^\beta_i = \dot{\delta}^\beta_\alpha = 0.$$

Следи да су координате вектора брзине у односу на координатни обртни систем $(z, \boldsymbol{\text{э}})$

$$v^\beta = \dot{z}^\beta + \omega_{\alpha}^{\cdot\beta} z^\alpha. \tag{1.13}$$

У поређењем са изразом (0.2) се види да је $\boldsymbol{r}$ функција од координата y^i, а посредством њих и од координата x, те је $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(y\left(x\right)\right) = y^i\left(x\right)\boldsymbol{e}_i$. Према дефиницији (1.1) вектор брзине је

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \dot{y}^i \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\dot{x}^k = \\ = \dot{x}^k \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i = \dot{x}^k \boldsymbol{g}_k = v^k \boldsymbol{g}_k.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Из ових релација следи да су координатни вектори $\boldsymbol{g}_k$ за систем координата x изведени помоћу базних вектора $\boldsymbol{e}_i$ коваријантним релацијама

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{g}_i\,(x)\,, \tag{1.15}$$

као и метрички тензор

$$g_{ij} \overset{def}{=} \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j} = \delta_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}. \tag{1.16}$$

Према томе вектор брзине $\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(r^i \boldsymbol{g}_i\right)$ може се свести на општи облик

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{dr^i}{dt}\boldsymbol{g}_i + r^i\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \\ &= \left(\frac{dr^i}{dt} + r^j\Gamma^i_{jk}\frac{dx^k}{dt}\right)\boldsymbol{g}_i = \nabla_k r^i \dot{x}^k \boldsymbol{g}_i = v^i \boldsymbol{g}_i\end{aligned}$$

где су $\Gamma^i_{jk}(x)$ коефицијенти повезаности координатних вектора $\boldsymbol{g}_i$ и њихових парцијалних извода по координатама x и то

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}(x)\boldsymbol{g}_i(x). \tag{1.17}$$

Следи да се координате вектора брзине у било којем систему координата $(x, \boldsymbol{g})$ могу написати у облику

$$v^i = \frac{Dr^i}{dt} = \frac{dr^i}{dt} + r^j\Gamma^i_{jk}\dot{x}^k, \tag{1.18}$$

где $\frac{Dr^i}{dt}$ означавају природне изводе координата вектора положаја по времену, а

$$\nabla_k r^i = \frac{\partial r^i}{\partial x^k} + r^j\Gamma^i_{kj}$$

коваријантни извод тих координата вектора по координатама положаја тачке.

Пројекције вектора брзине $\dot{y}_i$ на осе базних вектора $\boldsymbol{e}_i$, као скаларни производи вектора $\boldsymbol{v}$ и базних вектора e_i, једнаке су координатама $\dot{y}^i$ вектора брзине

$$\dot{y}_i = \delta_{ij}\dot{y}^j,$$

а пројекција v_i на осе координатних вектора $\boldsymbol{g}_i$ су линеарне хомогене форме координата вектора брзине

$$v_i = g_{ij}v^j = g_{ij}\frac{Dr^j}{dt} = g_{ij}\dot{x}^j$$

где је $g_{ij}(x)$ метрички тензор (1.16).

Квадрат брзине, као скаларна инваријанта, може се сада написати у облику

$$v^2 = \delta_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = g_{ij}\frac{Dr^i}{dt}\frac{Dr^j}{dt}. \tag{1.19}$$

С обзиром да је елемент ds пута $s(t)$

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}Dr^i Dr^j$$

следи да се величина вектора брзине v просто одређује као извод пута по времену, тј.

$$v = \frac{ds(t)}{dt}. \tag{1.20}$$

Општије, може се доказати да је *коваријантни извод* $\nabla_i r_j$ *пројекција* r_j *вектора положаја тачке на* j*-ти координатни правац по координати* x^i *једнак, одговарајућим по индексима, координатама метричког тензора* g_{ij}.

Заиста помножили се вектор $\boldsymbol{r} = y^k\boldsymbol{e}_k$ скаларно вектором $\boldsymbol{g}_j$ добија се пројекција вектора положаја на j-ту координатну осу $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{g}_j = r_j = y^k\left(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{g}_j\right)$ или

$$r_j = y^k\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\left(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_l\right) = \delta_{kl}y^k\frac{\partial y^l}{\partial x^j}.$$

Следи, с обзиром на (1.16), да је

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_j}{\partial x^i} &= \delta_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j} + \delta_{kl}y^k\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^i\partial x^j} = \\ &= g_{ij} + \delta_{kl}y^k\frac{\partial y^l}{\partial x^m}\Gamma^m_{ij} = g_{ij} + r_m\Gamma^m_{ij}.\end{aligned}$$

То доказује наведено тврђење да је

$$\nabla_i r_j = \frac{\partial r_j}{\partial x^i} - r_m\Gamma^m_{ij} = g_{ij}.$$

Парцијалним диференцирањем метричког тензора (1.16) по свим координатама и сабирањем добија се да су $\Gamma_{ij,k}(x)$ Кристофелови симболи за дату метрику

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{1.21}$$

За координатни систем z у којем је $g_{ij} = э_{ij} = const$ сви симболи Γ^m_{ij} су једнаки нули па је

$$\nabla_i r_j = \frac{\partial r_j}{\partial z^i} = э_{ij},$$

што јасније указује на однос вектора положаја и метричког тензора.

Претходне релације могу се довести у везу са *коваријантним изводима базних вектора* по координатама

$$\nabla_k \boldsymbol{g}_j = \frac{\partial \boldsymbol{g}_j(x)}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk}(x)\boldsymbol{g}_i(x) = 0 \tag{1.22}$$

који имају веома важно значење у описивању базних вектора и њихових промена у току времена. Као што релације (1.15) успостављају везу између базних вектора $\boldsymbol{e}$ и накнадно уведених кооринатних $\boldsymbol{g}$, тако и коваријантни извод $\nabla_k \boldsymbol{g}_j$, стоји у непосредној вези са условима (1.12). Заиста, изводи по времену једначина (1.15) због услова (1.13) су

$$\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt} = \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^j \partial x^i}\dot{x}^j \boldsymbol{e}_k.$$

Могуће је увек увести такве функције $\Gamma(x)$ да је

$$\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^j \partial x^i} = \Gamma^\lambda_{ij}\frac{\partial y^k}{\partial x^\lambda}$$

па се добија

$$\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt} - \boldsymbol{g}_\lambda \Gamma^\lambda_{ji}\frac{dx^j}{dt} = \frac{D\boldsymbol{g}_i}{dt} = \nabla_j \boldsymbol{g}_i \dot{x}^j = 0. \tag{1.23}$$

То су услови који, као и услови (1.12), показују да су координатни вектори $\boldsymbol{g}_i$ коваријантно константни.

$$y^i = \gamma^i_\alpha z^\alpha, \quad \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^i}\mathbf{э}_\alpha = \bar{\gamma}^\alpha_i \mathbf{э}_\alpha, \quad \gamma^i_\alpha \bar{\gamma}^\beta_i = \delta^\beta_\alpha.$$

Вектор брзине је

$$\boldsymbol{v} = \dot{y}^i \boldsymbol{e}_i = \left(\dot{z}^\beta + \omega^\beta_\alpha z^\alpha\right)\mathbf{э}_\beta = v^\beta \mathbf{э}_\beta$$

где су $\omega^{\cdot\beta}_{\alpha} = \dot{\gamma}^i_\alpha \bar{\gamma}^\beta_i = -\omega^\beta_{\cdot\alpha} = -\gamma^i_\alpha \dot{\bar{\gamma}}^\beta_i$ антисиметрични коефицијенти. Следи да су координате вектора брзине у односу на координатни обртни систем $(z, \mathbf{э})$:

$$v^\beta = \dot{z}^\beta + \omega^{\cdot\beta}_\alpha z^\alpha = \frac{Dz^\beta}{dt}.$$

То довољно јасно показује да су координате вектора брзине различите у односу на различите координатне векторе. Због препринципа неформалности и одређености исказа "природни извод" из дефиниције брзине, природно је да се за координатне векторе изаберу они, који се могу довести у везу са неким базним векторима (0.1) непромењљивим у току времена.

Избором једном базних вектора $\boldsymbol{e}_i$ могу се бирати и други оријентисани координатни вектори $\boldsymbol{g}_i$ укључујући и криволинијске за које ће важити природни изводи (1.23).

Дефиниција 2. Импулс кретања

Производ масе m материјалне тачке и вектора њене брзине $\boldsymbol{v}$ *назива се импулс кретања материјалне тачке* $\boldsymbol{p}$.

Сагласно предначелима, дефиницији брзине и овој дефиницији, импулс кретања се може записати на следећи начин:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{y}^i\boldsymbol{e}_i = m\frac{Dz^i}{dt}\boldsymbol{\vartheta}_i = mv^i\boldsymbol{g}_i = \\ = m\frac{Dr^i}{dt}\boldsymbol{g}_i = m\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\dot{x}^i = m\dot{x}^i\boldsymbol{g}_i.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Посебан значај имаће у каснијим излагањима пројекција p_i овог вектора на координатне правце $\boldsymbol{g}_i$

$$p_i = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_i = mg_{ij}\dot{x}^j = a_{ij}\dot{x}^j, \tag{1.25}$$

где је

$$a_{ij} = mg_{ij} = m\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^j} = a_{ji}\,(m,x) \tag{1.26}$$

инерциони тензор.

У координатном систему $(z,\boldsymbol{\vartheta})$ сагласно (1.13) биће

$$p_i = \vartheta_{ij}\left(\dot{z}^j + \omega_k^{\cdot j}z^k\right) = \vartheta_{ij}\frac{Dz^j}{dt},$$

где су $\omega_k^{\cdot j} = 0$ за $k=j$, а $\vartheta_{ij} = m\boldsymbol{\vartheta}_i\cdot\boldsymbol{\vartheta}_j$. Дакле, постоји импулс кретања материјалне тачке у таквом систему иако се у односу на тај координатни систем тачке не крећу,

$$p_i = \vartheta_{ij}\omega_k^{\cdot j}z^k = \omega_{ik}^{\cdot}z^k = -\omega_{.ik}z^k.$$

Треба запазити да се инерциони тензор $a_{ij}(m,x)$ разликује од метричког тензора $g_{ij}(x)$. Основне физичке димензије вектора импулса су

$$\dim\boldsymbol{p} = \mathrm{M\,L\,T}^{-1}$$

али његове координате и пројекције могу имати и друге димензије. Ако је координата x угао тада је

$$\dim p_i = ML^2T^{-1}.$$

Инерциони тензор a_{ij} успоставља везу између импулса и брзине у било којем положају. Битан његов садржај је маса, која постоји за свако тело или материјалну тачку и у свим координатним системима.

Пример 1. У ортогоналном праволинијском координатном систему $(y, \boldsymbol{e})$ координате инерционог тензора једнаке су управо маси тачке, јер је

$$a_{ij} = m\delta_{ij} = \begin{cases} m & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{1.27}$$

У другим системима, на пример:

Цилиндарски: $x^1 = \rho,\ x^2 = \varphi,\ x^3 = z;\ y^1 = \rho\cos\varphi,\ y^2 = \rho\sin\varphi,\ y^3 = z,$

$$a_{ij} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сферни, $x^1 = \rho,\ x^2 = \varphi,\ x^3 = \theta;\ y^1 = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ y^2 = \rho\sin\varphi\sin\theta,$ $y^3 = \rho\cos\varphi$

$$a_{ij} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2\sin^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Обртно елипсоидални $x^1 = \xi,\ x^2 = \eta,\ x^3 = \theta;\ y^1 = b\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\cos\theta,$ $y^2 = b\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\sin\theta,\ y^3 = b\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,$

$$a_{ij} = mb^2\begin{pmatrix} \mathrm{sh}^2\,\xi & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}^2\,\xi & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{ch}^2\,\xi\sin^2\eta \end{pmatrix}.$$

Обртно-параболоидне $x^1 = \xi,\ x^2 = \eta,\ x^3 = \theta;\ y^1 = \xi\eta\cos\theta,\ y^2 = \xi\eta\sin\theta,$ $y^3 = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right)$

$$a_{ij} = m\begin{pmatrix} \xi^2+\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2+\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2\eta^2 \end{pmatrix}$$

Двополарни (биполарни)* $x^1 = \xi, x^2 = \eta, x^3 = \theta; (0 \le \xi \le \pi, -\infty < \eta < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi); y^1 = b\frac{\sin\xi\cos\theta}{\mathrm{ch}\,\eta - \cos\xi}, y^2 = b\frac{\sin\xi\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi}, y^3 = b\frac{\mathrm{sh}\,\eta}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi},$

$$a_{ij} = mb^2\begin{pmatrix} \frac{1}{(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin^2\xi}{(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi)^2} \end{pmatrix}$$

Цилиндарско-ортогоналне $x^1, x^2, x^3 = z;\ y^1 = f^1\left(x^1, x^2\right),\ y^2 = f^2\left(x^1, x^2\right),\ y^3 = x^3,$

$$a_{ij} = m\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Г.Корн и Т.Корн, Справочник по математике для научных работников и инжинјеров, Изд.Физ.Мат.Лит, Москва, 1978, стр. 831

Инерциони тензор образује позитивно дефинитну матрицу чија је детерминанта различита од нуле. При трансформацији из једних у друге координатне системе треба тражити ограничења у пресликавању и дегенерацији слике, а не у природи инерционог тензора. С обзиром да је његова детерминанта различита од нуле могуће је помоћу релације (1.25) одредити координате вектора брзине $\dot{x}^i$ као хомогене линеарне функције импулса

$$\dot{x}^i = a^{ij} p_j \tag{1.28}$$

где су $a^{ij}(x)$ контраваријантне координате инерционог тензора. Релације (1.28) и (1.27) су постојеће, одредљиве и инваријантне у односу на сва могућа пресликавања из једних у друге координатне системе.

Запазимо још и то да се инерциони тензор a_{ij} мења у току кретанја ако се маса $m(t)$ материјалне тачке мења у току времена. Та важна чињеница указује на знатну квалитативну разлику између инерционог a_{ij} и метричког тензора g_{ij}. Пренебрегавањем те чињенице може се доћи до погрешних општих закључака о кретању тела, како небеских тако и елементарних. То ће се јасније видети у даљим излагањима ове теорије.

Дефиниција 3. - Убрзање

Природни извод вектора брзине по времену назива се вектор убрзања тачке.

Ову дефиницију замењује краћи запис

$$\boldsymbol{a} \stackrel{def}{=} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \quad \dim \boldsymbol{a} = \mathrm{L\,T}^{-2}. \tag{1.29}$$

Сагласно дефиницији и одговарајућим њеним релацијама вектора брзине (1.1) - (1.29), *вектор убрзања* $\boldsymbol{a}$ (лат. acceleratio) може бити записан на више начина, као

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{Dv^i}{dt}\boldsymbol{g}_i = \frac{D^2 r^i}{dt^2}\boldsymbol{g}_i = \ddot{y}^i \boldsymbol{e}_i = \\ &= \left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{dt}\right)\boldsymbol{g}_i = a^i \boldsymbol{g}_i, \end{aligned} \tag{(1.30)}$$

а његове координате

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{dt} = \frac{Dv^i}{dt}. \tag{1.31}$$

При том, као што се види, необходно је знати у односу на које координатне векторе $\boldsymbol{g}_i$ или метрички тензор g_{ij} су израчунати коефицијенти

Γ^i_{jk}. Ако се имају у виду релације (1.15) између базних $\boldsymbol{e}_i$ и координатних вектора $\boldsymbol{g}_i$, из претходних инваријантних релација (1.31), лако је уочити да се координате вектора убрзања могу пресликати из једног система координата y у други x ако је детерминанта матрице $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ различита од нуле, јер се изводе релације

$$\ddot{y}^i = a^k \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \quad \text{и} \quad a^i = \ddot{y}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^k}. \tag{1.32}$$

Од посебног интереса, нарочито са практичног становишта, има анализа убрзања у односу на природни систем координатних вектора $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)$, који су јединични и ортогонални. Нека вектор

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

одређује правац и смер тангенте на путањи s у неком тренутку времена t и подудара се са правцем брзине у том тренутку времена; $\boldsymbol{\eta}_2 \equiv \boldsymbol{n}$ усмерен је по нормали главној ка центру (прве) кривине путање, а $\boldsymbol{\eta}_3 \equiv \boldsymbol{b}$ је усмерен по (другој нормали) бинормали. У односу на базне векторе $\boldsymbol{e}_i$ могу бити одређени помоћу линеарних релација

$$\boldsymbol{\eta}_i = \alpha_i^k \boldsymbol{e}_k \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{e}_k = \bar{\alpha}_k^i \boldsymbol{\eta}_i, \quad \left|\alpha_i^k\right| \neq 0$$

где су α_i^k косинуси одговарајућих углова које заклапају вектори $\boldsymbol{\eta}_i$ и $\boldsymbol{e}_k$.

Вектор брзине у односу на овај природни триедар је

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau} \tag{1.33}$$

где је v, као што се види из (1.20), величина вектора брзине.

Како је $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1 \longrightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, одакле следи да је вектор $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ управан на $\boldsymbol{\tau}$, то се може написати $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \varkappa \boldsymbol{n}$, где је $\varkappa$ кривина путање. Сагласно дефиницији (1.29), вектор убрзања може се разложити дуж тангенте $\boldsymbol{\tau}$ и главне нормале $\boldsymbol{n}$, и то

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho_k}\boldsymbol{n} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \boldsymbol{n}, \tag{1.34}$$

где је ρ_k полупречник кривине путање, а $\boldsymbol{n}$ јединични вектор главне нормале, те је

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \tag{1.35}$$

координата вектора убрзања усмерена по тангенти (*тангентно убрзање*) и

$$a_n = \frac{v^2}{\rho_k} \tag{1.36}$$

координата вектора убрзања $\boldsymbol{a}$ усмерено по главној нормали (*нормално убрзање*). Релација (1.34) довољно јасно показује да једна компонента убрзања, и то $\boldsymbol{a}_\tau = \dot{v}\boldsymbol{\tau}$, припада тангентном векторском пољу, а друга $\boldsymbol{a}_n = a_n\boldsymbol{n}$ оскулаторном управном на тангентну раван, који оријентишу вектори тангенте и главне нормале.

Дефиниција 4. Инерциона сила

Производ масе m материјалне тачке и вектора, једнаког али супротно усмереног вектору убрзања $\boldsymbol{a}$*, назива се инерциона сила материјалне тачке.*

Означимо ли је словом $\boldsymbol{\mathcal{I}}_F$ (Inertia Force) или просто $\boldsymbol{\mathcal{I}}$, дефиницја се може краће написати

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_F \stackrel{def}{=} -m\boldsymbol{a} = -m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{1.37}$$

Изводи се да је

$$\dim \mathcal{I}_F = \mathrm{M\,L\,T^{-2}}\,.$$

Сагласно, релацијама (1.30) и (1.31) може се писати

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{I}}_F &= \mathcal{I}^i\boldsymbol{g}_i = -ma^i\boldsymbol{g}_i = \\ &= -m\frac{Dv^i}{dt}\boldsymbol{g}_i = -m\ddot{y}^i\boldsymbol{e}_i,\end{aligned} \tag{1.38}$$

одакле се види да су координате вектора инерционе силе

$$\mathcal{I}^i = -m\frac{Dv^i}{dt} = -m\left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}v^j\frac{dx^k}{dt}\right). \tag{1.39}$$

Множењем скаларно вектора (1.38) и координатног вектора $\boldsymbol{g}_j$ добијају се пројекције вектора инерционе силе на j-те координатне осе и то

$$I_j = \boldsymbol{I}_F\cdot\boldsymbol{g}_j = a_{ij}\mathcal{I}^i = -a_{ij}\frac{Dv^i}{dt} = -a_{ij}\left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}v^j\frac{dx^k}{dt}\right), \tag{1.40}$$

где је a_{ij} као и у (1.26), инерциони тензор.

Из израза (1.40) је јасно да, инерциона сила може да има више сабирака, као и то да пројекција $\mathcal{I}_j$ на координатне осе, зависно од a_{ij}, могу имати димензије различите од $\mathrm{M\,L\,T^{-2}}$. Зато се координате $\mathcal{I}_j$ могу назвати *генерализоване силе инерције.*

У односу на природни систем координата, с обзиром на релације (1.34), следи да је

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_F = \mathcal{I}^\tau\boldsymbol{\tau} + \mathcal{I}^n\boldsymbol{n} = -m\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} - m\frac{v^2}{\rho_k}\boldsymbol{n}.$$

Одавде се види да је тангентна координата $\mathcal{I}^\tau$ инерционе силе

$$\mathcal{I}^\tau = -m\frac{dv}{dt}, \tag{1.41}$$

а координата на главној нормали криве

$$\mathcal{I}^n = -m\frac{v^2}{\rho_k}.$$

Дакле ова два последња израза показују очигледније него изрази (1.39) да инерциона сила може постојати и у случају када је величина брзине константна, $v = const$. Само у случају да је вектор брзине $\boldsymbol{v} = \mathbf{const}$ тј. да брзина не мења ни величину ни правац, следи из (1.37) да је инерциона сила једнака нули.

Из израза за квадрат брзине (1.19) види се да је $v = const$ ако су све координате брзине $\dot{y}^i$ у односу на базни систем $\boldsymbol{e}$ константне величине. Како су базни вектори $\boldsymbol{e}_i$ у односу на време константни следи да је и вектор брзине константан, $\boldsymbol{v} = \mathbf{const}$. Сагласно томе и дефиницји инерционе силе следи да се материјалне тачке, која се крећу константном брзином $\boldsymbol{v}$, не производе инерциону силу. Координатне системе који се могу везати за таква тела називају се *инерцијски координатни системи.*

Почетну тачку вектора силе називаћемо *динамичка тачка* (гр. $\delta\nu\alpha\mu\iota\sigma$ - сила). Геометријски се подударају, *материјална* и *динамичка тачка*, али се за појам материјалне тачке подразумева маса, а уз ту исту материјалну тачку, када је називамо динамичка тачка, везује се инерциона сила, или општије нека сила која дејствује у тој тачки. У појединим деловима механике говори се само о односима силе без појма масе. У том случају је природније и рационалније користити појам динамичке тачке.

II. ЗАКОНИ ДИНАМИКЕ

Реч "динамика" узимамо из грчког језика ($\delta\iota\nu\alpha\mu\iota\kappa\eta$) са значењем науке о силама, а назив *"закони динамике" овде подразумева формулације и дефиниције којим се одређују поједине силе с тачношћу математичких функција до именоване константе.* Закључна знања неопходна за те формулације, која чине законе динамике, стичу се на основу експеримента и мерења у природи и људској пракси, те нису потребни други логички докази о њиховој истинитости. Могу се исказати усмено или писмено речима или математичким формулама, које задовољавају предначела механике.

Дефиницијом инерционе силе утврђене су димензије силе, те и закони динамике у складу са том дефиницијом формулишу све друге силе као векторске инваријанте које имају димензију $\mathrm{M\,L\,T^{-2}}$. Изрека "до именоване константе" подразумева именоване реалне бројеве, који се одређују разним мерењима експерименталних или природних појава. Зваћемо их *динамичким параметрима* да би се знало да су садржани у функцијама сила.

Ако није довољно јасна и приметна разлика између "одређења - дефиниција" и "одређења - закон" истакнимо да је "дефиниција" производ човековог ума и хтења јединствене тачности, а закони динамике казују речима и формулама претходно дефинисаних појмова, о појединим поновљивим особинама кретања тела тачношћу до димензионе константе динамичких параметара.

Све силе, укључујући и дефинисану силу инерције (1.37), јављају се као међудејства једних тела у њиховој повезаности са другим телима. Једно тело - једна неслободна материјална тачка, може се само условно "одвојити од других тако што се "одвајање" у механици замењује мисаоно силама. Законима природних наука, као и законима динамике описују се само поновљиве и мерљиве поједине особине повезаности једне материјалне тачке од мноштва других. мисаоно ослобађање од веза динамика апстрахује силама, формулисаним појединим законима. Природа је кудикамо сложенија од механичких модела, али помоћу ових модела могу се одређивати бројна кретања тела великом математичком тачношћу. Једним појмом *материјалне* или *динамичке тачке* механика може да описује промену положаја свих тела, како небеских тако и молекула организама. А то мноштво је толико велико да је тешко схватљиво. Сматра се, што треба узети за размишљање, да је маса васионе толика да се може образовати 10^{23} звезда величине Сунца, а само у састав Земље улази око 4×10^{51} протона и неутрона*. Човек се може у овој теорији кретања у неким случајевима (пример падобрана) сматрати материјалном тачком иако рачунају да се састоји у просеку 10^{16} ћелија, за које даље наводе да имају структуру од по $10^{12} - 10^{14}$ атома. Бројеви јединки стоје у некаквим сразмерама с могућностима међусобних повезаности. Примера ради, у молекулу DNK, који се састоји од $10^8 - 10^{10}$ атома, распоред атома те и њихова међусобна веза прелази свако пребројиво мноштво, што само по себи условљава да поједине посебне науке уводе простије моделе којим могу да проучавају своје области, сходно својим наменама и потребама. Механици су довољни појмови материјалне и динамичке тачке.

Закон веза

Из класичне механике и сродних наука о природи проистиче знање да тела утичу једни на друге посредством реалних објеката које називамо везама. Данашње сазнање не указује ни на једно тело из непребројиво великог мноштва тела које је изоловано и постојеће само за себе, те и без утицаја на њега других тела. То се не тврди за цело мноштво тела, јер границе тог мноштва до сада нису сазнане, те ни целина мноштва. У посматраном рационалном или практичном локалитету сазнани су ограничени скупови веза. Многе везе или поједини скупови веза могу се апстраховати одређеним математичким релацијама, којим се повезују битни атрибути кретања, као положаји материјалних тачака $x = (x^1, \ldots, x^n)$, брзине $\dot{x} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ или импулси $p = (p_1, \ldots, p_n)$, као и време t, помоћу геометријских или кинематичких параметара $\varkappa$.

Пример 2. На хоризонталној глаткој плочи, лежи или се креће тачка M_1 масе m_1. Та тачка повезана је са другом тачком M_2 масе m_2 помоћу неке везе (влакно, канап, уже, конац) која пролази кроз глатки отвор O на плочи, као на слици 1. Дате су, дакле, две материјалне тачке познатих маса, чије је кретање ограничено помоћу две везе. А те везе су 1. глатка плоча и 2. влакно, помоћу којег су повезане две тачке. За математички опис ових веза погодно је увести Декартов праволинијски координатни систем $Oxyz$ или цилиндарски систем координата ρ, φ, z са координатним почетком O, тако да је

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z. \tag{П2.1}$$

У оба координатна система "плоча" се може описати ралацијом

$$f_1 := z_1 - C = 0. \tag{П2.2}$$

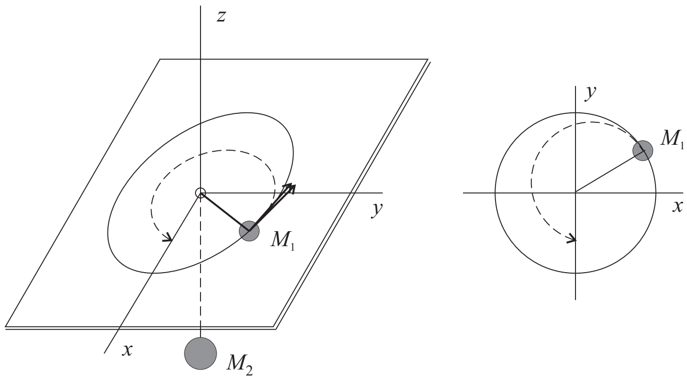
*Киттель Ч., и др., *Механика*, Бреклеевскии курс физики, Том I, (руски превод, изд. "Наука"), 1983.

Међутим, друга веза у координатном систему $Oxyz$ описује се једначином

$$f_2 := \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + |z_2| - l = 0, \tag{П2.3}$$

а у односу на систем $O\rho\varphi z$ еквивалентном једначином

$$f_2 = \rho_1 + \mid z_2 \mid - l = 0. \tag{П2.4}$$



Слика 1

Схватљиво је да ће се при некој попречној брзини материјалне тачке M_1 она кретати по кружној линији

$$x_1^2 + y_1^2 = l^2, \quad z_1 = z_2 = 0. \tag{П2.5}$$

То ће наступити, поред других могућности, када се тачка везивања тачке M_2 подудари са тачком O. Таква једначина описиваће и случај ако се за везу узме не влакно $\overline{M_1O}$, него кружна жица полупречника l по којој клизи тачка M_1. Механичка разлика је значајна. Жица ће пружити отпор кретању уколико није идеално глатка, што није случај везивања влакном. У случају глаткости и једна и друга веза могу се мислено заменити силом везе, коју називају релацијом веза и најчешће обележавају словом $\mathcal{R}$.

Овим примером могу се јасно раздвојити појмови "везе" у математици и механици. У математици је уобичајено да се "везом" сматра свака релација којом се успоставља неки однос између посматраних математичких величина, па према томе и (П2.1), (П2.2), (П2.3) или (П2.4)и (П2.5). У механици, као што се види у овом примеру, везе су (П2.2), (П2.3) или (П2.4) или (П2.5). Дакле, свака математичка релација, као у овом примеру (П2.1), неће се називати везом. Разлика није само формална. Везе (П2.2) и (П2.3) или (П2.4) производе силе, тако да се веза (П2.2) може апстраховати неким вектором $\boldsymbol{R}_1$, а веза (П2.3) или (П2.4) другим вектором $\boldsymbol{R}_2$. Међутим за "математичке везе" (П2.1) и њима сличне: "смене", "трансформације координата", "пресликавање" не производе никакве силе или друге физичке феномене.

Од односа тих сила, што ће друкчије рећи, од односа тачака и њихове повезаности, као од наследног стања кретања (положаја и брзине) у даљем ће зависити да ли ће се, рецимо, материјална тачка M_1 кретати у равни плоче по путањи облика: праве, којој припада тачка O, кружнице $\rho_1 = const$; опадајуће или растуће спирале или неке друге криве линије.

За случај да се и плоча помера тако да веза буде облика

$$f_1 := z_1 - \tau(vt) = 0,$$

где је v параметар брзине, или да се влакно l мења у току времена, везе (П2.2) и (П2.3) или (П2.4) записали би у облику

$$f_1(z_1, \tau) \geq 0 \tag{П2.6}$$

или

$$f_2(x_1, y_1, z_1, z_2, \tau) \geq 0. \tag{П2.7}$$

Тај прост пример постаје сложенији ако се не претпостави да је раван плоче идеално глатка, што у реалности и није, као и то да окружујућа средина није празна, него да постоји. Тада структура вектора силе постаје сложенија.

У најопштијем облику везе, које повезују N материјалних тачака M_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$, могу се записати помоћу k релација

$$f_\mu\left(y_1, \ldots, y_N, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N, \tau(t)\right) \geq 0, \quad y_i \in E^{3N}, \tag{2.1}$$

где је τ нека позната функција времена, или

$$\begin{gathered} f_\mu\left(x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \tau(t)\right) \geq 0, \\ (\mu = 1, \ldots, k) \end{gathered} \tag{2.1a}$$

јер, као што је истакнуто, везе су објекти који су инваријантни у односу било које математичке трансформације. С обзиром да је у стручној литератури о пресликавању веза (2.1) из једног координатног система y у неки други x или обратно, постоји доста нејасности или неразумљивости, поновимо претходну реченицу следећим записом

$$f_\mu\left(y, \dot{y}, \tau(t)\right)_{y=y(x)} = f_\mu\left(x, \dot{x}, \tau(t)\right), \quad \left\|\frac{\partial y}{\partial x}\right\| \neq 0. \tag{2.2}$$

Речима: Једначине веза написане у односу на један координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$ могу се написати и у односу на други координатни систем $(x, \boldsymbol{g})$ у области у којој између њих постоји једнозначно пресликавање. Везе могу бити скаларне или векторске инваријанте.

Дефиниција. *Релације (2.1), у којим су f_μ реалне диференцијабилне функције у посматраној области, а које на одређен начин указују на ограничење кретања називају се релацијама веза или краће везама.*

Дакле везе су динамички објекти који заједно са материјалним или динамичким телима чине *системе материјалних* или, следбено, *динамичких тачака.*

Према структури релација (2.1) и функције f_μ веза се најчешће класификују као:

Једностране или незадржавајуће

$$f_\mu \geq 0. \tag{2.3}$$

Двостране или задржавајуће

$$f_\mu = 0. \tag{2.4}$$

Геометријске или коначне

$$f_\mu(y) = 0. \tag{2.5}$$

Кинематичке или диференцијалне

$$f_\mu\left(y, \dot{y}, \tau(t)\right) \geq 0. \tag{2.6}$$

Непроменљиве или непокретне

$$f_\mu\left(y\right) \geq 0. \tag{2.7}$$

Променљиве или покретне*

$$f\left(y, \dot{y}, \tau(t)\right) = 0. \tag{2.8}$$

Приметимо да се све коначне везе диференцирањем могу бити записане у диференцијалном облику. Међутим, није увек могуће првобитно задате диференцијалне везе свести на коначне. Зато запис диференцијалних веза (2.6) садржи диференцијалне интеграбилне - коначне или

*У литератури су распрострањени и други називи; најчешће: унилатералне (2..3), билатералне (2.4), холономне (2.5), холономне диференцијалне и нехолономне (2.6); склерономне, стационарне или аутономне (2.7); реономне, нестационарне или неаутономне (2.8) холономне, диференцијалне неинтеграбилне - нехолономне везе. Одређења класификација подразумева да се узме у обзир знак неједнакости и једнакости у (2.3) и (2.4) истовремено са класом функција (2.5) - (2.8).

Битнија класификација свих механичких веза је та којом се истичу: *реалне везе* и *идеалне глатке* или просто глатке везе

По природи ствари све везе су реалне и не могу бити идеално глатке. Класификовањем веза да су "идеално глатке" у механици хоће се нагласити за везу да су њени динамички фактори (трење, отпор, чврстина, еластичност), које не описују диференцијабилне функције f_μ, пренебрегнути или су описани другим функцијама. Опште својство свих уређује се одредницом коју ћемо назвати

Закон веза: *Везе ограничавају померање материјалних тачака као силе и апстрахују се реакцијама веза: k веза $f_\mu = 0$ ($\mu = 1, \dots, k$) које ограничавају кретање неке ν-те материјалне тачке апстрахују се векторским збиром*

$$\boldsymbol{R}_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} \boldsymbol{R}_{\nu\mu} \tag{2.9}$$

реакција веза $\boldsymbol{R}_{\nu\mu}$.

Вектор (2.9) назива се резултантом реакција веза ν-те тачке.

За неке класе веза могу се делимично или у потпуности одредити вектор-функције реакција веза. Најбитнија страна задатка у том је да се одреди природа веза.

На пример, веза (П2.2) је једнострана геометријска, коначна, непромењива и непокретна. Међутим релација (П2.2) не даје информацију, која је битна за кретање, да ли је веза (П2.2) реална или идеално глатка. Једна ће сила дејствовати на тачку M_1 ако је површина плоче храпава, друга углачана и сува, трећа ако има исту углачаност али је преливена танким слојем течности, као и то ако се изнад плоче налази разређени ваздух или гас у течном стању.

Реалне везе, поред релације (2.1), карактерише мноштво особина од којих ће зависити реакције веза. У циљу лакшег а истовремено свеобухватнијег решења тог задатка, реакцију везе $\boldsymbol{R}_\nu$ могуће је разложити увек на две компоненте, од којих једна $\boldsymbol{R}_\nu^\tau$ припада тангентној равни у додирној ν-тој тачки тела и друга $\boldsymbol{R}_\nu^N$ управно на њој., тј. нормалној равни,

$$\boldsymbol{R}_{\nu\mu} = \boldsymbol{R}_{\nu\mu}^\tau + \boldsymbol{R}_{\nu\mu}^N. \tag{2.10}$$

Силе $\boldsymbol{R}_\nu^\tau$ јављају се као резултат трења везе или *отпора средине*, која увек постоји. Његова величина одређује се експреиментално и генералише *законом трења* и *законом отпора средине*. Ако је та сила $\boldsymbol{R}^\tau$ занемарљиво мала $\boldsymbol{R}^\tau \approx 0$, те без утицаја на кретање, или ако се $\boldsymbol{R}^\tau \neq 0$ урачунава независно од везе, тада геометријске везе називамо идеално глатке и замењује их мисаоно ракција $\boldsymbol{R}_{\nu}^{N}$, чији правац у односу на путању одређује градијент везе тј.

$$\boldsymbol{R}_{\nu\mu}^{N} = \lambda_{\mu} grad_{\nu} f_{\mu} \tag{2.10a}$$

где је λ_{μ} неки множитељ веза.

Закони трења

1. *У додирној тачки тела и везе јевља се сила трења $\boldsymbol{R}_{\nu}^{\tau}$ која дејствује у тангентној равни везе геометријске у тачки додира; ако се тела додирују површинама нападном тачком силе трења сматра се геометријски центар додирних површина.*

2. *Гранична величина силе сувог трења $R_{\max}^{\tau}$ при мировању пропорционална је величини силе N, управној на вези, тј.*

$$R_{\max}^{\tau} = \mu R^{N}, \quad R^{N} = -N, \tag{2.11}$$

где је μ табулисани коефицијент трења клизања и мировања, који зависи од структуре тела (материјалне тачке), начина обраде (углачаности) и других стања (влажност, температура, ...) тарућих површина, али не и од величине тих површина.

3. *Сила трења реалних веза јавља се у општем случају функцијом брзина и положаја*

$$R_{M}^{\tau} = R^{\tau}(y, \dot{y} = 0) + R_{K}^{\tau}(y, \dot{y}) \neq 0. \tag{2.12}$$

Закони отпора средине

Тела се гранично додирују са околном реалном средином, која се такође може сматрати везом. Флуидна средина дејствује на тело *силом отпора*, која се, слично сили трења, јавља функцијом брзине додира или повезивања честица флуида и тела, силом притиска или потиска.

Закони *отпора* и *потиска* средине*

1. *На сваки елеменат $d\sigma$ површине Σ тела дејствује површинска сила $\boldsymbol{p}_{n} d\sigma$ густине површинске силе $\boldsymbol{p}_{n}$ управљеном по нормали елемента површине $d\sigma$.*

2. *Главни вектор сила*

$$\boldsymbol{F} = \int_{\sigma} \boldsymbol{p}_{n} d\sigma \tag{2.13}$$

*може се изразити као векторски збир силе отпора $\boldsymbol{F}^{\tau}$, супротно усмерене брзини $\boldsymbol{v}$ и потисне силе $\boldsymbol{F}^{N}$ управно на $\boldsymbol{v}$.**

*Л. И. Седов, Механика сплошной среды, Том I, изд. второе, "Наука", Москва, 1973, стр. 133, 454, 455.

*У механици непрекидних средина, уче се методе одређивања ових сила.

Закон еластичности материјала

Тело чије везе између честица имају својство да успостављају свој првобитни облик после ма каквих деформација назива се *еластичним*, а сила успостављања *сила еластичности.*

Закон. *При малим деформацијама* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *еластичног тела сила еластичности* $\boldsymbol{F}$ *је пропорционална деформацији* $\boldsymbol{\varepsilon}$, *тј.*

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.14}$$

где је k *фактор успостављања.*

Закон реактивног потиска

Ток масе $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ *који се одваја од тела масе* $m(t)$ *у току времена* t, *брзином* $\boldsymbol{u}$ *у односу на тело, делује на то тело реактивном силом*

$$\boldsymbol{\Phi} = \dot{m}\boldsymbol{u}. \tag{2.15}$$

Закон гравитације

Хиљадегодишња посматрања и проучавања положаја и кретања небеских тела, као и вештачких сателита једних према другим пружају слику:

- *да мноштво тела у васиони задржавају привидно трајно своје положаје или поновљиво привидно кретање, једних према другим,*
- *да су њихова међусобна растојања постојана или се периодно мењају,*
- *да постоје поједини центри око којих се тела крећу по спиралним путањама које воде ка гравитационом центру.*

Краће речено:

Тела су међусобно повезана силама које, сагласно Њутновој теорији, узрокују одређена кретања једних према другим, а које зависи од њихових маса, растојања и кинематичких карактеристика кретања.

Оваква општа констатација, коју можемо назвати општи закон гравитације, не пружа довољно информација, ни о вези ни о сили међусобне повезаности. Казује, само да постоје међусобне силе и кретање тела.

Људска пракса досегла је до сада да поуздано потврди или модификује теоријске ставове класичне механике о кретању небеских тела, природних и човеком направљених објеката у оквиру Сунчевог система. Под називом Сунчевог система овде подразумевамо сва тела која постоје трајно или ограничено време у простору у којем је, при ма којим кинетичким условима, доминантан утицај Сунца на њихово кретање, непосредно или посредством локалних гравитационих поља планета.

Од интереса за овдашње градиво могу бити Кеплерови закони и Њутнова сила гравитације.

Кеплерови закони

I закон. *Планете описују око Сунца елиптичне путање; у заједничкој жижи тих елипса налази се Сунце.**

II закон. *Радијус вектор повучен од Сунца до планете превлачи у једнаким деловима времена једнаке површине.*

III закон. *Квадрати времена обилажења појединих планета око Сунца стоје у пропорцији трећих потенција великих полуоса њихових путања.*

Примедба. Приметно је да ова три закона не говоре о сили директно и не одређују силе међусобног привлачења, те као такви понаособ не чине законе динамике. Међутим на основу сва три закона Њутн је могао да одреди величину узајамне силе привлачења (2.18).

Њутнова сила гравитације

Једна материјална тачка, масе m_μ, привлачи к себи другу материјалну тачку масе m_ν $(\mu \neq \nu)$ силом $\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$, пропорционалној производу маса m_ν и m_μ, а обрнуто пропорционалној квадрату растојања $r_{\nu\mu}^2$ тих тачака, тј.

$$\boldsymbol{F}_{\nu\mu} = -k\frac{m_\nu m_\mu}{r_{\nu\mu}^2}\boldsymbol{e}_{\nu\mu}, \tag{2.16}$$

где је $k = const > 0$, а

$$\boldsymbol{e}_{\nu\mu} = \frac{\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\mu}{|\boldsymbol{r}_{\nu\mu}|}.$$

Више материјалних тачака m_μ дејствују на ν-ту материјалну тачку, масе m_ν, резултантном силом привлачења

$$\boldsymbol{F}_\nu = \sum_{\mu=1}\boldsymbol{F}_{\nu\mu} = -\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}} k\frac{m_\nu m_\mu}{r_{\nu\mu}^2}\boldsymbol{e}_{\nu\mu}. \tag{2.17}$$

Константа k назива се "*универзална гравитациона константа*".

Због значаја овог закона, који је Исак Њутн (1643-1727) извео на основу Кеплерових закона и објавио у свом генијалном делу "Philosophia naturalis principia mathematica", Londoni, Anno MDCLXXXVII, као и због признања свом професору М. Миланковићу који је својом књигом "Небеска механика", Београд, 1935, учинио доступним ширем кругу читалаца грандиозно Њутново дело, цитирајмо неколико Миланковићевих реченица о овом закону опште гравитације

*Милутин Миланковић, *Небеска механика* , Београд, 1935, стр. 29.

"Сваки делић материје у васиони привлачи сваки други делић силом која пада у праву тих делића, а има интензитет пропорционалан производу маса m_1 и m_2 тих делића, а инверзно пропорционалан квадрату њиховог одстојања r. Величина те силе преставлљена је, дакле, изразом

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{2.18}$$

При томе је фактор f пропорционалности једна универзална константа. У горњем изразу отпао је знак минус, јер реч "привлачи" једнозначно одређује правац те силе."

"Њутновим законом поста одгонетнута хиљадугодишња загонетка планетског кретања и нова сазнања следоваше, сама од себе, из њега. Све неједнакости кретања планета и Месеца испољише се као природна последица тога закона као и јасни изражај међусобног привлачног дејства тих небеских тела. Не само да је тим природа тих неједнакости постала растумачена; оне су се могле израчунавати и пратити у прошлост и будућност. Показало се, и за комете убрзо иза постављења Њутновог закона, да он важи за сва небеска тела без изузетка, дакле и изван Сунчевог система. Прецесија равнодневнца, коју је, као што смо чули, први констатовао Хипархос, нашла је Њутновим законом своје потпуно разјашњење, а исто тако, касније опажена, нутација Земљине осе. И облик наше Земље, а нарочито њена спљоштеност услед ротације доби, у свим појединостима, своје механичко и геометријско образложење. То исто важи и за прастаро питање о постанку морске плиме која се показала као непосредна последица привлачног дејства Сунца и Месеца. Тако се Њутнов закон, највеличанственији што га је икад смртни човек могао да докучи, показао као општи закон природе којем се покорава цела васиона. Иза тога закона је изникла једна нова наука: Небеска Механика." (М.Миланкковић)

На основу закона (2.16) следи да је сила $\boldsymbol{F}$ којом Земља масе m_z привлачи неко тело, масе m, одређена формулом

$$\boldsymbol{F} = -k\frac{m m_z}{(R+h)^2}\boldsymbol{e} = -m g_0 \boldsymbol{e} = -m\boldsymbol{g}_0 \tag{2.19}$$

где су: $R = 6,37 \times 10^8 cm$ средњи полупречник Земље, h растојање посматраног тела од површине Земље, а g_0 је ознака за убрзање

$$g_0 = k\frac{m_z}{(R+h)^2}. \tag{2.20}$$

О законима динамике

Уводно казивање о законима динамике сада постаје јасније и конкретније. Нашем полазишту да се под појмом "закона динамике" подразумевају формулације-одреднице сила, тачношћу до неке константе, припадају наведени закони: веза, трења, отпоре средине, еластичности материјала, реактивне силе, закон гравитације, као и закон о сили Земљине теже (2.19). Сваким од ових основних закона одређују се директно или индиректно у општем поједине силе; неке су више, а неке су мање општости, али све формуле садрже по једну или скуп константи које допуштају или траже тачније одређење за поједине објекте. Тачност тих констаната, а са њима и формула сила, зависиће не само од непознавања природе објеката, него често и од немања математичког знања да се рачуна са веома сложеним релацијама. На пример у формули (2.19) узет средњи полупречник Земље $R = 6,37 \times 10^8 cm$, а екваторијални је $6,38 \times 10^8 cm^*$; "h је растојање тела од површине Замље", а појам "од површине Земље" је недоречен. Једно је од математичке површи наше планете, друго од морске површине на одређеној географској ширини, а сасвим треће у подножју или изнад планинских масива. Најзад и гравитациона константа подлеже научном проверавању за одређене гравитационе просторе. Логично је очекивати да ће развој астронаутике последњих година и њене примене допринети тачнијим сазнањима о сили гравитације, а развој других грана механике од конкретизације, модификације или уопштења других закона динамике. За наше овдашње разматрање остаје се при опредељењу да се законима динамике одређују формуле појединих сила, изузев силе инерције која је уведена дефиницијом. Као што се могло видети закони су мање или више општи за поједине механичке системе.

Наведени број закона није потпун, јер за поједине конкретније системе тела, конкретније се класификују силе, а то значи и закони којим се оне утврђују. Остаје на снази да закони динамике задовољавају предпринципе механике

На основу чињенице да се закони динамике утврђују на основу посматрања и мерења у природи и експерименталној људској пракси прихвата се да је задовољен преприницип постојања.

Преприниип инваријантности при констатованом постојању сила је необходан услов да пресликавања функција сила, при прелазу из једног координатног система у други, не мењају законе динамике.

Историја сазнавања, пракса мерења и осматрања, саме Њутнове теореме о "систему света", као и овдашње решавање "проблема" о кретању два тела (види (3А.70) стр. 114) дају повода да се са становишта преприниипа одређености, постави другачији закон узајамног привлачења него што је (2.18).

---

*Alfen, 1963, *Evaluation of the Solar System*, NASA SP-345, стр. 17.

О сили узајамног привлачења

Две материјалне тачке маса m_1 и m_2 привлаче једна другу на међусобном растојању $\rho(t)$ силом величине

$$F = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 m_2}{\rho} = \chi \frac{m_1 m_2}{\rho} \tag{2.21}$$

где се значење брзине v_{or} појашњава формулом

$$v_{or}^2 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2.$$

Претпостави ли се да се растојање $\rho = r$ не мења у току времена и да претставља растојање између центра масе M Сунца и центра масе m планете, израз (2.21) се своди на

$$F = -\frac{v_{or}^2}{M + m} \frac{Mm}{r}.$$

Уведе ли се и друга претпоставка да је

$$v_{or}(t) = v_{or}(t_0) = R\Omega$$

где је Ω угаона брзина обилажења планете око Сунца, добија се модификована* Њутнова сила (2.18)

$$F = -\frac{R^2\Omega^2 r}{M + m} \frac{Mm}{r^2} = -\varkappa^* \frac{Mm}{r^2}.$$

Принцип одређености казује о тачности до одређене константе. Таблица на страни 118 јасно показује смисао овдашњег појма "до одредјене констане" или "до тачности" динамичких параметара. Такво релативизирање тачности пре уопштавања односи се и на друге законе динамике.

*Опширније видети, М. Миланковић, *Небеска механика* .

III. ПРИНЦИПИ МЕХАНИКЕ

Под појмом принцип или *начело механике* овде се подрзумева *општег значења исказ* помоћу *уведених појмова и дефиниција механике, чија истинитост не подлеже доказивању.* Принципи механике морају бити сагласни са препринципима. На основу до сада уведених основних дефиниција може се поставити *принцип равнотеже.* Са додатним дефинисањем "рада", "дејства", "принуде" могу се увести *принцип рада*, *принцип дејства* и *принцип принуде.* Принципи механике нису сами по себи довољни да би се могли решавати задаци и проблеми механике без закона динамике. Исказ општег значења у механици, као што је принцип механике представља такву основу на којој се може развити цела теорија механике, али за примену те теорије неопходно је познавање закона динамике.

3А. Принцип равнотеже

Тело се налази у динамичкој равнотежи, те збирови свих сила које дејствују у појединим динамичким тачкама тела једнаки су нули.

Краће, овај принцип се може написати у облику векторских једначина

$$\sum_{\mu=1} \boldsymbol{F}_{\nu\mu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{3A.1}$$

где индекс ν означава ν-ту динамичку тачку, а индекс μ силе које дејствују на ν-ту динамичку тачку.

Материјална тачка

Ако се посматра само једна материјална тачка тада уместо система више једначина (3А.1) постоји само једна векторска, и то

$$\sum_{\mu=1} \boldsymbol{F}_{\mu} = 0. \tag{3A.2}$$

Детаљније, у складу са дефиницијом силе инерције и законима динамике, једначине (3А.1) се могу написати у облику

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\nu} + \sum_{i=1} \boldsymbol{F}_{\nu i} = 0, \tag{3A.3}$$

где су $\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu$ - сила инерције одређена дефиницијом (1.37), а $\boldsymbol{F}_{\nu i}$ - силе одредђене законима динамике (2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 2.10, ...). Једначине (3А.3) допуштају да неке силе могу бити унапред непознате, те да буду одредљиве помоћу једначина (3А.3) зависно од броја сила које су познате на основу закона динамике и дефиниције (1.37). То подразумева да релације закона треба дописати једначинама (3А.1), подразумевајући у том и једначине веза. Заменом силе инерције (1.37), сила (2.6) и сила веза (2.7) у једначини (3А.3) добија се векторска једначина кретања материјалне тачке

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}. \tag{3A.4}$$

Одавде се намеће само по себи:

Закључак 1.

Материјална тачка креће се константном брзином $\boldsymbol{v}$ *ако је збир дејствујућих сила* $\boldsymbol{F}$ *и сила веза једнак нули, тј. за*

$$\sum_{\mu=1} \boldsymbol{F}_\mu + \sum_{\mu=1} \boldsymbol{R}_\mu = 0 \longrightarrow \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0). \tag{3A.5}$$

У односу на природни координатни триједар (η_1, η_2, η_3) једначине (3А.3) могу се написати ако се силе $\boldsymbol{F}_i$ разложе дуж тангенте, главне нормале и бинормале, тј.

$$\sum_{\mu=1} \boldsymbol{F}_\mu = \boldsymbol{F} = F_\tau \boldsymbol{\tau} + F_n \boldsymbol{n} + F_b \boldsymbol{b}, \tag{3A.6}$$

$$\sum_{\mu=1} \boldsymbol{R}_\mu = \boldsymbol{R} = R_\tau \boldsymbol{\tau} + R_n \boldsymbol{n} + R_b \boldsymbol{b}. \tag{3A.7}$$

Заменом ових релација, као и координата инерционе силе (1.41) и (1.42) у једначину (3А.1) добијају се скаларне једначине кретања материјалне тачке у природном систему координата

$$F_\tau + R_\tau - m\frac{dv}{dt} = 0, \tag{3A.8}$$

$$F_n + R_n + \mathcal{I}_n = 0, \tag{3A.9}$$

$$F_b + R_b = 0. \tag{3A.10}$$

Из једначина кретања (3А.8) и (3А.9) следи

Закључак 2. *Материјална тачка креће се по величини константном брзином ако се силе* F_τ *и* R_τ *узајамно поништавају, а збир одговарајућих компоненти тих сила и силе инерције на главној нормали путање је једнак нули.*

У односу на друге координатне системе $(y, \boldsymbol{e})$ и $(x, \boldsymbol{g})$ принцип равнотеже (3А.1) је инваријантан и коваријантан. Разложе ли се силе $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ дуж координатних вектора $\boldsymbol{e}$ или $\boldsymbol{g}$, тј.

$$\boldsymbol{F} = Y^i \boldsymbol{e}_i = X^j \boldsymbol{g}_j, \quad \boldsymbol{R} = R^i \boldsymbol{e}_i = R^j \boldsymbol{g}_j \tag{3A.11}$$

и замене, заједно са релацијом (1.38), у једначину (3А.1) очигледна је инваријантност

$$\left(\mathcal{I}_y^i + Y^i + R_y^i\right) \boldsymbol{e}_i = \left(\mathcal{I}_x^j + X^j + R_x^j\right) \boldsymbol{g}_j = 0. \tag{3A.12}$$

Скаларним множењем координатним векторима добијају се, сагласно релацијама (1.11), коваријантне диференцијалне једначине кретања тачке у односу на базни систем $(y, \boldsymbol{e})$

$$m\ddot{y}_i = Y_i + R_i, \tag{3A.13}$$

или у односу на било који други координатни систем $(x, \boldsymbol{g})$ који испуњава услов (1.15),

$$m g_{ij} \frac{Dv^i}{dt} = X_j + R_j, \tag{3A.14}$$

где су

$$X_j = Y_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad R_j = R_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

пројекције сила $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ на координатне правце $\boldsymbol{g}_j$.

Општије, Принцип равнотеже (3А.1) или (3А.3) или (3А.12) може бити записан у односу на било који координатни систем координата $(x, \boldsymbol{g})$ у коваријантном облику

$$g_{ij}\left(\mathcal{I}^j + X^j + R^j\right) = \mathcal{I}_i + X_i + R_i = 0, \tag{3A.15}$$

где су $\mathcal{I}_i = g_{ij}\mathcal{I}^j$, $X_i = g_{ij}X^j$, $R_i = g_{ij}R^j$ координате ковектора сила. Ако се скуп координата X^i вектора $\boldsymbol{F} = X^j \boldsymbol{g}_j$ назива вектор, тада ћемо скуп пројекција $X_i = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{g}_i = \left(X^j \boldsymbol{g}_j\right) \cdot \boldsymbol{g}_i$ називати *коваријантним координатама вектора*. Зато и једначине (3А.15) се могу називати *коваријантне једначине принципа равнотеже* у односу на неки систем координата $(x, \boldsymbol{g})$.

Систем материјалних тачака и коначних веза

Принцип динамичке равнотеже (3А.1) управо се односи на мноштво материјалних и динамичких тачака. Све релације (3А.2) - (3А.13) изведене само за једну материјалну тачку масе m, важе за сваку ν-ту материјалну тачку масе m_ν. Такав систем од N материјалних тачака имаће N векторских једначина облика (3А.1) или (3А.2) - (3А.4), и k

једначина веза (2.6). Битније се ништа не мења. Међутим у начину решавања проблема кретања система јављају се неке тешкоће и новине, које потичу од ограничености математичког апарата који се употребљава , а и од међусобне повезаности материјалних тачака које порађају силе сложене математичке структуре. Најпростији, те и најраспрострањенији начин описивања је у односу на базни координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$. Претпоставимо да постоји N материјалних тачака, маса m_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ чији су вектори положаја $\boldsymbol{r}_\nu = y^i_\nu \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и да их везује k коначних веза

$$f_\mu(y^1_\nu, y^2_\nu, y^3_\nu) = f_\mu(y^1, \ldots, y^{3N}) = 0, \tag{3A.16}$$

где су уведене ознаке

$$y^1_\nu =: y^{3\nu-2},\ y^2_\nu =: y^{3\nu-1},\ y^3_\nu =: y^{3\nu}, \tag{3A.17}$$

$$m_{3\nu-2} \equiv m_{3\nu-1} \equiv m_{3\nu}. \tag{3A.18}$$

Везе (3A.16) морају задовољавати услове брзина

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} \dot{y}^\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, \ldots, k, k+1, \ldots, 3N), \tag{3A.19}$$

као и услове убрзања

$$\ddot{f}_\mu = \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha} \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} \ddot{y}^\alpha = 0. \tag{3A.20}$$

Сматраћемо их независним па је и детерминанта матрице $\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha}\right)$, ранга k, различита од нуле

$$\left| \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} \right| \neq 0. \tag{3A.21}$$

Из једначина (3A.19) следи да су вектори брзина управни на градијенте веза. Та околност упућује на могућност да се силе веза (2.7) посматрају као збир сила трења (2.9) и нормалне компоненте $\boldsymbol{R}^N_\nu = \sum_{\mu=1}^k \lambda_\mu grad_\nu f_\mu$, где би $\boldsymbol{R}^\tau$ биле одређиване законом трења, а $\boldsymbol{R}^N$ помоћу услова убрзања (3A.20). Тако све силе веза $\boldsymbol{R}_\nu$, сходно закону веза и закону трења могу се написати изразом

$$\boldsymbol{R}_\nu = \boldsymbol{R}^\tau_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu grad_\nu f_\mu \tag{3A.22}$$

где су λ_μ неодређени множитељи. У циљу краћег писања силе трења $\boldsymbol{R}^\tau_\nu$ урачунајмо у активне силе, $\boldsymbol{F}_\nu \equiv \boldsymbol{R}^\tau_\nu$, а везе сматрајмо идеално глатким, те да сила везе увек има правац градијента и величину

$$R^N_{\nu\mu} = \left| \lambda_\mu grad_\nu f_\mu \right|. \tag{3A.23}$$

Према наведеном, из начела равнотеже следи систем препознатљивих диференцијалних једначина

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu + \sum_{s=1} \boldsymbol{F}_{\nu s} + \boldsymbol{R}_\nu^N = 0 \tag{3A.24}$$

или, због идеализације веза и дефиниције силе инерције,

$$\left.\begin{aligned} &m_\nu \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} = \boldsymbol{F}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu grad_\nu f_\mu, \\ &f_\mu(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3A.25}$$

у скаларном облику једначине (3A.25) могу се с обзиром на (3A.17) и (3A.18) кратко написати

$$\begin{aligned} &m\ddot{y} = Y + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y} \\ &f_\mu(y) = 0, \end{aligned} \tag{3A.26}$$

и има их $3N+k$, што је довољно да се једнозначно одреди $3N$ координата y ако су познате функције Y, или $3N$ координата силе Y ако је познато кретање $y(t)$, као и k множитеља λ_μ.

Заменом $\ddot{y}$ из (1.32) у једначини (3A.26) и множењем потом једначине (3A.26) матрицом $\frac{\partial y}{\partial x}$, добива се, сагласно релацијама (1.31),

$$\left.\begin{aligned} &a_{rs} \frac{Dv^s}{dt} = X_r + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x^r}, \\ &f_\mu(x) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (r, s = 1, \ldots, 3N) \tag{3A.27}$$

где тензор $a_{rs}(m_\nu, x)$ садржи само по једну масу m_ν појединe материјалне тачке и њене координате $x_\nu^1, x_\nu^2, x_\nu^3$. Ове диференцијалне једначине погодне су због могућности да се велики број веза у разним координатним системима x^i сведе на прост облик $f_\mu = x_\mu^i - const = 0$, те да се силе веза сведу на $R_\mu = \lambda_\mu$. У сваком другом случају једначине (3A.27) су сложеније и компликованије. Други облик ових истих једначина означен је бројем (3A.15).

Системи са промењивим везама

За случај да коначне везе (3A.16) зависе поред координата $y = (y^1, \ldots, y^{3N})$ експлицитно и од времена, услови брзине (3A.19) и убрзања

(3А.20) се знатно мењају, јер се повећава број сабирака у тим условима, што је евидентно у следећим условима брзина

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha}\dot{y}^\alpha + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} = grad_\nu f_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} = 0. \tag{3А.28}$$

Постаје јасно да у случају променљивих веза у току времена, тј. веза облика $f_\mu(y,t) = 0$, вектори брзина $\boldsymbol{v}$ нису ортогонални на градијенту веза, те ни брзине не леже у тангентним равнима веза; тангента путање не подудара се у општем случају и у сваком тренутку времена са тангентом веза. У циљу јасније анализе услова брзина (3А.28) приметимо да механичке везе, не записујемо у облику $f(y,t) = 0$ јер такав запис обухватао би, на пример, и једначину

$$f = t^2 + 2t + 3 = 0,$$

а то губи смисао механичких веза, није сагласно релацији (2.2), као ни закону веза. Променљиве везе у току времена морају задовољавати димензиону једначину, тј. морају бити димензионо хомогене. Да би се постигла та хомогеност између координата y, димензије L, и времена t, димензије T неопходо је да ове величине буду повезане неким параметром $\varkappa$ димензија L и T. Дакле време у механичким везама јавља се у структури функција, које садрже димензионе параметре, те променљиве или покретне везе у складу са дефиницијом (2.6), пишемо у облику

$$f_\mu(y,\tau) = 0 \quad (\mu = 1,\ldots,k), \tag{3А.29}$$

где је τ нека реална функција времена са одређеним реалним коефицијентима који имају физичке димензије. У циљу краћег писања, уместо функције τ са одређеним коефицијентима, уведимо допунску координату y^0 тако да испуњава услов

$$f_0 = y^0(\varkappa,t) - \tau(t) = 0. \tag{3А.30}$$

Пример 3. Нека је кретање две материјалне тачке ограничено помоћу три везе и то:

$$\begin{gathered} f_1 = (y_1 - y_4)^2 + (y_2 - y_5)^2 + (y_3 - y_6)^2 - 4t^2 = 0, \\ f_2 = y_3 - 0,5t = 0, \quad f_3 = y_6 - 0,5t + 0,3 = 0. \end{gathered} \tag{П3.1}$$

Собзиром да координате имају димензију дужине, коефицијенти 4 и 0,3 имаће такође димензију дужине L, а коефицијент 0,5 димензију брзине $\mathrm{L\,T^{-1}}$. Погодним избором параметра једне или друге димензије μ, $\dim\mu = \mathrm{L\,T^{-1}}$, погодно је увести помоћну координату

$$y^0(\mu,t) = 0,5t,\ \dim y^0 = \mathrm{L}\,.$$

Заменом времена из ове уведене релације, $t = 2y_0$, у задате везе може се написати:

$$\begin{gathered} f_1 = (y_1 - y_4)^2 + (y_2 - y_5)^2 + \\ + (y_3 - y_6)^2 - 16y_0^2 = 0 \\ f_2 = y_3 - y_0 = 0, \quad f_3 = y_6 - y_0 + 0,3 = 0 \end{gathered} \tag{П3.2}$$

Са координатом y^0 једначине веза (3A.29) могу бити записане у облику

$$f_\mu(\tilde{y}) = 0, \quad \tilde{y} = (y^0, \underbrace{y^1, \ldots, y^{3N}}_{y}) = (y^0, y) \tag{3A.31}$$

а услови брзине и убрзања у облику (3A.19) и (3A.2), тј.

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial \tilde{y}} \dot{\tilde{y}} = \frac{\partial f_\mu}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0} \dot{y}^0 = 0, \tag{3A.32}$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}_\mu &= \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{y}} \dot{\tilde{y}} \dot{\tilde{y}} + \frac{\partial f_\mu}{\partial \tilde{y}} \ddot{\tilde{y}} = \\ &= \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y \partial y} \dot{y} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^0 \partial y} \dot{y} \dot{y}^0 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^0 \partial y^0} \dot{y}^0 \dot{y}^0 + \frac{\partial f_\mu}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0} \ddot{y}^0 = 0. \end{aligned} \tag{3A.33}$$

Последњу релацију убрзања напишимо краће

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0} \ddot{y}^0 = \Phi \left(\tilde{y}, \dot{\tilde{y}} \right) \tag{3A.34}$$

где је састав функције Φ очигледан. Уврштавањем $\ddot{y}$ из једначине (3A.26) у једначину (3A.34) добија се

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial y} \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y} = m \left(\Phi - \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0} \ddot{y}^0 \right) - \frac{\partial f_\mu}{\partial y} Y.$$

Решења по непознатим множитељима λ_σ показује да силе реакције промењливих веза не зависе само од координата $\tilde{y}$ и брзина $\dot{\tilde{y}}$, него и од $\ddot{y}^0$, те и од инерционе силе $-m\ddot{y}^0$, која се јавља због промене веза по времену.

Везе у једначинама (3A.31) и нарочито (3A.12), (3A.25), (3A.26) или (3A.27) могу се написати у облику

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu \left(q^0, q^1, \ldots, q^n \right), \; n = 3N - k \tag{3A.35}$$

где су $q = \left(q^1, \ldots, q^n \right)$ *независне генералисане координате а* q^0 *реономна координата* која задовољава једначину (3A.30), тј

$$q^0 - \tau(t) = 0. \tag{3A.36}$$

Свођењем коначних веза на геометријски облик (3A.35) смањује се број диференцијалних једначина за број веза и изврши елеминација сила веза $\boldsymbol{R}^N$, што значајно олакшава решавање задатка.

Брзине ν-тих материјалних тачака, сходно дефиницији (1.1), су

$$\boldsymbol{v}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^0}\dot{q}^0 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^n}\dot{q}^n = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \tag{3A.37}$$

где су $\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}(q)$ координатни вектори које ћемо означавати двоиндексним знаком $\boldsymbol{g}_{\nu\alpha}$; индекс ν означава број материјалне тачке, а индекс α број независне координате q^α $(\alpha = 0, 1, ..., n)$. За сабирање по индексу ν употребљавамо знак сабирања $\sum_\nu$, а сабирање по индексима координата α означава понављање једног те истог слова у истом изразу као и доњег и горњег индекса. Вектор (3A.37) као што се види има $n+1$ независних елементарних вектора. Сагласно томе и вектор импулса (1.26) ν-те материјалне тачке масе m_ν посматраног система је

$$p_\nu = m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha. \tag{3A.38}$$

Скаларним множењем координатним векторима $\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta}$ добија се пројекција вектора $\boldsymbol{p}_\nu$ на тангентни правац координате q^β ν-те материјалне тачке. Означићемо је двоиндексним словом

$$p_{\nu\beta} = m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha.$$

То је у сагласности са формулом координата импулса (1.25) једне материјалне тачке. С обзиром да су импулси $p_{\nu\beta}$ скалари могуће их је сабрати

$$p_\beta := \sum_{\nu=1}^{N} p_{\nu\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha, \tag{3A.39}$$

одакле се види да је $a_{\alpha\beta}$ инерциони тензор целог система

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} = \\ &= a_{\alpha\beta}\left(m_1, \ldots, m_N; q^0, q^1, \ldots, q^n\right). \end{aligned} \tag{3A.40}$$

Ако су масе константне величине овај тензор се пише као функција независних координата

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}\left(q^0, q^1, \ldots, q^n\right). \tag{3A.41}$$

Помоћу важних релација (3A.39) уводи се појам генералисаних импулса система материјалних тачака. Дакле: *збир пројекција вектора импулса* *материјалних тачака на координатни правац β-те генералисане координате назива се генералисани импулс p_β. Генералисани импулси јављају се линеарним хомогеним формама генералисаних брзина*, што је сагласно са основном дефиницијом импулса (1.24). С обзиром да је детерминанта инерционог тензора $a_{\alpha\beta}$ у општем случају различита од нуле, могуће је одредити генералисане брзине $\dot{q}^\alpha$ као линеарне хомогене комбинације генералисаних импулса и то

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta, \tag{3A.42}$$

где је $a^{\alpha\beta}$ *контраваријантни инерциони тензор.* Ако везе не зависе јавно од познатих функција времена τ, не јавља се реономна кордината q^0, те у свим изразима (3A.35) до (3A.34) ишчезавају координате $q^0, \dot{q}^0$ и p_0. Форма импулса (3A.39) се не мења изузев што индекси $\alpha = 0, 1, \ldots, n$ не узимају вредности од 0 до n, него од 1 до n. Да бисмо у даљем тексту то лакше разликовали, нека грчки индекси $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ узимају вредности од 0 до n $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, n)$ а латински i, j, k, l од 1 до n $(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$. При таквим индексима може се писати

$$\boldsymbol{v}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^0}\dot{q}^0 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i \tag{3A.43}$$

$$p_i = a_{0i}\dot{q}^0 + a_{ij}\dot{q}^j, \tag{3A.44}$$

$$p_0 = a_{00}\dot{q}^0 + a_{0j}\dot{q}^j, \tag{3A.45}$$

$$\dot{q}^i = a^{i0}p_0 + a^{ij}p_j, \tag{3A.46}$$

$$\dot{q}^0 = a^{00}p_o + a^{0j}p_j. \tag{3A.47}$$

Коваријантне диференцијалне једначине кретања система

Скаларним множењем редом једначина (3A.1) одговарајућим по индексу ν координатним векторима $\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ и сабирањем по индексу ν добија се систем од $n+1$ коваријантних једначина принципа равнотеже и то

$$\sum_\mu \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\nu\mu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^*_\alpha = 0 \tag{3A.48}$$

или, адекватно једначинама (3A.3)

$$\mathcal{I}_\alpha + Q_\alpha = 0 \tag{3A.49}$$

где су сад

$$\mathcal{I}_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \tag{3A.50}$$

генералисане инерционе силе, а

$$Q_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N}\left(\sum_{\mu=1}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \tag{3A.51}$$

генералисане силе.

Диференцијалне једначине (3A.49) представљају систем од $n+1$ диференцијалних коваријантних једначина кретања, које ћемо написати у развијеном облику. Да би се боље разумело њихово механичко значење пођимо од векторских једначина (3A.25). Скаларним множењем једначине (3A.25) векторима $\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ и сабирањем по ν, добија се

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} + \\ + \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu grad_\nu f_\mu\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}.$$

Уведимо уобичајене ознаке

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} := Q_\alpha \tag{3A.52}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu grad_\nu f_\mu\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^i} = 0, \tag{3A.53}$$

јер је $grad_\nu f_\mu\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^i} = \dfrac{\partial f_\mu}{\partial q^i}$ за $i = 1, ..., n$;

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu grad_\nu f_\mu\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^0} = -\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial q^0} =: R_0 \tag{3A.54}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \\ = \sum_{\nu} m_\nu\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma\partial q^\beta}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta}\ddot{q}^\beta\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}.$$

Разложи ли се вектор $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma\partial q^\beta}$ дуж координатних вектора $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\delta}$, тј

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma\partial q^\beta} = \Gamma^\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\delta}$$

следи даље да је

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta + a_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\gamma\beta}\dot{q}^\gamma\dot{q}^\beta = \\ = a_{\alpha\beta}\left(\ddot{q}^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\delta}\dot{q}^\gamma\dot{q}^\delta\right) = a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt}. \tag{3A.55}$$

Заменом (3A.52), (3A.54) и (3A.55), с обзиром (3A.53), добија се систем од $n+1$ коваријантних диференцијалних једначина кретања који се може написати у облику $I_\alpha + Q_\alpha = 0, \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n)$, или

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_\alpha, \tag{3A.56}$$

или

$$a_{i\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3A.56a}$$

$$a_{0\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_0^* + R_0 =: Q_0. \tag{3A.56б}$$

Сагласно дефиницији импулса материјалне тачке следи да су генералисани импулси система $p_\beta = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha$ линеарне комбинације генералисаних брзина, где је инерциони тензор општије и сложеније структуре

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}\left(m_1, \ldots, m_N, q^0, q^1, \ldots, q^n\right).$$

Број степена слободе кретања може се поистоветити са бројем $n+1$ једначина (3A.56). На овај изложени начин, помоћу принципа динамичке равнотеже, закона динамике и основних дефиниција, обухваћена је у целости теорија о кретању материјалних тачака или тела, као и деформибилну средину, с обзиром да материјална тачка може да представља и тело као целину и поједине његове делове.

Пример 4. Материјална тачка масе $m = const$ креће се под дејством веза

$$f_1 = x - l_0 - \varkappa\tau(t) = 0, \;\; \tau = \cos\Omega t,$$

$$f_2 = y = 0, \quad f_3 = z = 0,$$

где су $\varkappa, l_0$ и Ω именовани реални бројеви. Одредити силе које дејствују на тело. Систем диференцијалних једначина (3A.26) у овом случају је:

$$m\ddot{x} = \lambda_1,$$
$$m\ddot{y} = \lambda_2,$$
$$m\ddot{z} = \lambda_3.$$

Из услова (3А.33) следи да је $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а из једначине $\ddot{f}_1 = \ddot{x} - \varkappa\ddot{\tau} = 0$

$$\frac{\lambda_1}{m} - \varkappa\ddot{\tau} = \frac{\lambda_1}{m} + \varkappa\Omega^2 \cos\Omega t = 0,$$

па се добија да дејствује сила

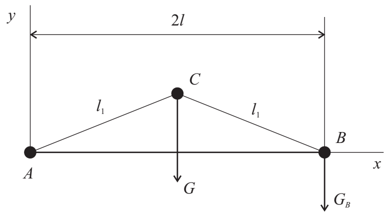
$$X = \lambda_1 = -m\varkappa\Omega^2 \cos\Omega t = -m\Omega^2(x - l_0).$$

Дакле, сила која изазива задато кретање пропорционална је издужењу $(x - l_0)$, где фактор пропорционалности Ω^2 има димензију T^{-2}.

Пример 5. - Три неслободне тачке. Тачке $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$ и $C(x_C, y_C, 0)$ повезане су везама као на слици у равни $z = 0$.

$$\begin{aligned}
&f_1 = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} - l_1 = 0,\\
&f_2 = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} - l_1 = 0,\\
&f_3 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} - 2l = 0,\\
&f_4 = x_A = 0, \quad f_5 = y_A = 0,\\
&f_6 = y_B = 0,\ f_7 = z_A = 0,\ f_8 = z_B = 0,\ f_9 = z_C = 0,
\end{aligned}$$

где је $l = l_0\tau(t)$, при чему је $l_0 = const$, а $\tau(t)$ позната функција времена почетне вредности $\tau(t_0 = 0) = 1$; у тачки B дејствује сила $F_B = (0, -G_B, 0)$, а у тачки C сила $F_C = (0, -G, 0)$, $G = const$ као на слици. Одредимо реакције веза $f_4 = 0$, $f_5 = 0$ и $f_6 = 0$.



Слика 2

Једначина (3А.24), односно (3А.26) за три динамичке тачке има девет. Међутим, скуп пројекција сила на z-оси је празан, па једначине (3А.26) можемо написати у облику:

$$-\lambda_1 \frac{x_C - x_A}{l_1} - \lambda_3 \frac{x_B - x_A}{2l} + \lambda_4 = 0, \tag{П5.1}$$

$$-\lambda_1 \frac{y_C - y_A}{l_1} - \lambda_3 \frac{y_B - y_A}{2l} + \lambda_5 = 0, \tag{П5.2}$$

$$I_x(C) + \lambda_1 \frac{x_C - x_A}{l_1} - \lambda_2 \frac{x_B - x_C}{l_1} = 0 \tag{П5.3}$$

$$I_y(C) + \lambda_1 \frac{y_C - y_A}{l_1} - \lambda_2 \frac{y_B - y_C}{l_1} - G = 0, \tag{П5.4}$$

$$I_x(B) + \lambda_2 \frac{x_B - x_C}{l_1} + \lambda_3 \frac{x_B - x_A}{2l} = 0, \tag{П5.5}$$

$$\lambda_2 \frac{y_B - y_C}{l_1} + \lambda_3 \frac{y_B - y_A}{2l} + \lambda_6 - G_B = 0. \tag{П5.6}$$

Из (П5.3) и (П5.4) следи да је

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{2y_C}\left(G - I_y(C) - I_x(C)\frac{y_C}{l}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{l_1}{2y_C}\left(G - I_y(C) + I_x(C)\frac{y_c}{l}\right),$$

а затим се из (П5.5) добија

$$\lambda_3 = \frac{l}{2y_C}\left(I_y(C) - G\right) - \frac{I_x(C) + 2I_x(B)}{2}.$$

Уврштавањем ових вредности λ_1, λ_2 и λ_3 у једначине (П5.1), (П5.2) и (П5.6) добијају се тражене реакције веза $f_4 = 0, f_5 = 0$ и $f_6 = 0$, и то

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= -I_x(C) - I_x(B) = R_{Ax},\\
\lambda_5 &= \frac{G}{2} - \frac{I_y(C)}{2} - \frac{y_C}{2l} I_x(C) = R_{Ay},\\
\lambda_6 &= \frac{G}{2} + G_B - \frac{I_y(C)}{2} + I_x(C)\frac{y_C}{2l} = R_{By}.
\end{aligned}$$

Узме ли се да су силе инерције:

$$\begin{gathered}
I_x(C) = -m\ddot{x}_C = -m\ddot{l}, \quad I_y(C) = -m\ddot{y}_C,\\
I_x(B) = -m_B\ddot{x}_B = -2m_B\ddot{l},
\end{gathered}$$

нађене реакције веза добијају конкретан облик.

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= R_{Ax} = (m + 2m_B)\ddot{l},\\
\lambda_5 &= R_{Ay} = \frac{G}{2} + \frac{m}{2}\left(\ddot{y}_C + \frac{y_C}{l}\ddot{l}\right),\\
\lambda_6 &= R_{By} = \frac{G}{2} + G_B + \frac{m}{2}\left(\ddot{y}_C - \frac{y_C}{l}\ddot{l}\right).
\end{aligned} \tag{П5.7}$$

С обзиром да су дужи $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ дате као познате функције времена, то се и ордината $y_C = y_C(l, l_1)$ може одредити у зависности од $\tau(t)$, те и извод $\ddot{y}_C$. За дегеративан систем: $C \in \overline{AB}$, $y_C = 0$ из претходних решења следи:

$$R_{Ax} = (m + 2m_B)\ddot{l}, \quad R_{Ay} = \frac{G}{2}, \quad R_{By} = \frac{G}{2} + G_B. \tag{П5.7а}$$

За претпоставку $l = const.$ и $G_B = 0$ следи да је $R_{Ax} = 0$, $R_{Ay} = R_{By} = \frac{G}{2}$.

Такав задатак решава се у механици знатно простије и краће помоћу "момента сила" и "момента спрегова сила".

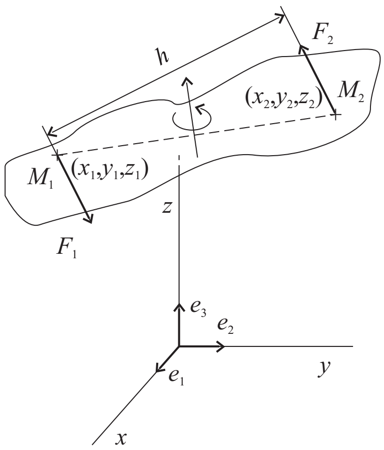
У циљу појашњења те констатације размотимо следећи

Пример 6. - Спрегнуте тачке

Две материјалне тачке маса $m_1 = const.$ и $m_2 = const$ повезане су крутом везом

$$f_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

$l = const.$. На прву тачку дејствује сила $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}$, а на другу њој паралелна а супротно усмерена сила $\boldsymbol{F}_2$ чије су величине једнаке; $F_1 = F = F_2$. Елиминацијом множитеља везе одредити услове динамичке равнотеже материјалних тачака.



Слика 3

Диференцијалне једначине (3А.26) су

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= X_1 - 2\lambda_1(x_2 - x_1),\\ m_1\ddot{y}_1 &= Y_1 - 2\lambda_1(y_2 - y_1),\\ m_1\ddot{z}_1 &= Z_1 - 2\lambda_1(z_2 - z_1),\\ m_2\ddot{x}_2 &= X_2 + 2\lambda_1(x_2 - x_1),\\ m_2\ddot{y}_2 &= Y_2 + 2\lambda_1(y_2 - y_1),\\ m_2\ddot{z}_2 &= Z_2 + 2\lambda_1(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Елиминација је могућа на два начина и то:

1. Сабирањем одговарајућих пројекција добија се:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 &= X_1 + X_2,\\
m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 &= Y_1 + Y_2,\\
m_1\ddot{z}_1 + m_2\ddot{z}_2 &= Z_1 + Z_2.
\end{aligned}
$$

2. Изједначавањем

$$\lambda_1 = \frac{m_1\ddot{x}_1 - X_1}{2(x_1 - x_2)} = \frac{m_1\ddot{y}_1 - Y_1}{2(y_1 - y_2)} = \frac{m_1\ddot{z}_1 - Z_1}{2(z_1 - z_2)}$$

или

$$\lambda_1 = \frac{m_2\ddot{x}_2 - X_2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{m_2\ddot{y}_2 - Y_2}{2(y_2 - y_1)} = \frac{m_2\ddot{z}_2 - Z_2}{2(z_2 - z_1)}$$

добија се

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_z^1 &= (m_1\ddot{x}_1 - X_1)(y_2 - y_1) - \\
&\quad - (m_1\ddot{y}_1 - Y_1)(x_2 - x_1) = 0,\\
\mathfrak{M}_x^1 &= (m_1\ddot{y}_1 - Y_1)(z_2 - z_1) - \\
&\quad - (m_1\ddot{z}_1 - Z_1)(y_2 - y_1) = 0,\\
\mathfrak{M}_y^1 &= (m_1\ddot{z}_1 - Z_1)(x_2 - x_1) - \\
&\quad - (m_1\ddot{x}_1 - X_1)(z_2 - z_1) = 0,\\
\mathfrak{M}_z^2 &= (m_2\ddot{x}_2 - X_2)(y_2 - y_1) - \\
&\quad - (m_2\ddot{y}_2 - Y_2)(x_2 - x_1) = 0,\\
\mathfrak{M}_x^2 &= (m_2\ddot{y}_2 - Y_2)(z_2 - z_1) - \\
&\quad - (m_2\ddot{z}_2 - Z_2)(y_2 - y_1) = 0,\\
\mathfrak{M}_y^2 &= (m_2\ddot{z}_2 - Z_2)(x_2 - x_1) - \\
&\quad - (m_2\ddot{x}_2 - X_2)(z_2 - z_1) = 0,
\end{aligned}
\tag{3A.57}
$$

где смо увели слово $\mathfrak{M}$, за сада, због краћег обележавања.

Сабирањем одговарајућих релација по осама добија се

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_z^1 + \mathfrak{M}_z^2 &= m_1\ddot{x}_1(y_2 - y_1) + m_2\ddot{x}_2(y_2 - y_1) - \\
&- [m_1\ddot{y}_1(x_2 - x_1) + m_2\ddot{y}_2(x_2 - x_1)] - \\
&- [Y_1(x_2 - x_1) - X_1(y_2 - y_1)] - \\
&- [X_2(y_2 - y_1) - Y_2(x_2 - x_1)] = \\
&= \mathfrak{M}_z(\boldsymbol{I}_1) + \mathfrak{M}_z(\boldsymbol{I}_2) + \mathfrak{M}_z(\boldsymbol{F}_1) + \mathfrak{M}_z(\boldsymbol{F}_2) = \\
&= \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{M}_z(\boldsymbol{I}_i) + \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{M}_z(\boldsymbol{F}_i) = 0,
\end{aligned}
\tag{3A.57a}
$$

где су

$$\mathfrak{M}_z\left(\boldsymbol{I}_i\right) = l_x I_{iy} - l_y I_{ix}, \tag{3A.58}$$

$$\mathfrak{M}_z\left(\boldsymbol{F}_i\right) = l_x Y_i - l_y X_i, \tag{3A.59}$$

$$I_{iy} := -m_i \ddot{y}_i, \quad I_{ix} := -m_i \ddot{x}_i, \quad l_x = x_2 - x_1, l_y = y_2 - y_1.$$

На сличан начин би се доказало да следе још две релације и то

$$\sum_{i=1}^{2} \mathfrak{M}_y\left(\boldsymbol{I}_i\right) + \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{M}_y\left(\boldsymbol{F}_i\right) = 0, \tag{3A.60а}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \mathfrak{M}_x\left(\boldsymbol{I}_i\right) + \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{M}_x\left(\boldsymbol{F}_i\right) = 0. \tag{3A.60б}$$

Моменти спрегова сила

За динамичку равнотежу, система тачака повезаних разним везама принцип (3A.1) и последично (3A.24) и (3A.26) производи и друге услове, као што су (3A.56), (3A.57), као и (3A.60). Величина $\mathfrak{M}$ се квалитативно разликује од сила; њихова димензија је $\mathrm{M\,L^2\,T^{-2}}$. Величине те димензије у механици називају *моментима сила*. Момент сила, укључујући и момент сила инерције, је атрибут кретања којег производе силе. Може се показати да генералисане силе (3A.51), које одговарају бездимензионим генералисаним координатама - угловима, имају такође димензију момента сила. Специјално за систем две тачке и дужи, која спреже две паралелне силе једнаких величина а супротних смерова, каже се *спрег сила*, а вектори

$$\mathfrak{M}_k(\boldsymbol{F}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{e}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{e}_j} - \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{e}_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{e}_i}\right) \boldsymbol{k}, \quad i \neq j \neq k$$

називају се *моменти спрегова сила*. Моменти сила, према наведеном, су изведени појмови као посебни производи сила и дужина. Момент спрега сила инерције $\boldsymbol{I}_1$ и $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_1 = -\boldsymbol{I}_2$, као и других сила, може се написати у облику

$$\mathfrak{M} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{I} = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{I} = \boldsymbol{\rho} \times (-m\boldsymbol{a}), \tag{3A.61}$$

где је $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

Сагласно дефиницији (3A.24) и (1.37) момент спрега инерционе силе може се написати као што следи

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\left(\boldsymbol{I}\right) &= \boldsymbol{\rho} \times \left(-m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) = \\ &= \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{v}\frac{dm}{dt} - \boldsymbol{\rho} \times \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \\ &= \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{v}\dot{m} - \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{p}}. \end{aligned} \tag{3A.62}$$

То би се могло читати као: *момент спрега инерционих сила материјалних тачака једнак је разлици момента спрега* $\mathfrak{M}(\boldsymbol{v}\dot{m})$ *реактивних сила* $\boldsymbol{v}_1\dot{m}_1$ *и* $\boldsymbol{v}_2\dot{m}_2$ *и момента спрега* $\mathfrak{M}(\dot{\boldsymbol{p}})$ *вектора* $\dot{\boldsymbol{p}}_1$ *и* $\dot{\boldsymbol{p}}_2$. За случај константне масе релација (3А.62) показује да је *момент спрега инерционих сила једнак моменту спрега промене импулса у току времена,*

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{I}) = -(\boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{p}}), \tag{3А.63}$$

са негативним знаком.

Како израз (3А.61) показује да момент спрега $\mathfrak{M}$ не зависи од избора пола вектора положаја следи да је $\mathfrak{M}$ слободни вектор, те се може сабирати с другим моментима спрегова. Следбено томе: *вектори сила везаним у динамичким тачкама могу се паралелно "преносити" у било коју тачку, те и сабирати, ако се збиру тако паралелно померених сила дода збир момената спрегова одговарајућих сила.*

Пример 7. Хоризонтална греда променљиве дужине.

"Греду" као хомогено тело праволинијског облика, константног попречног пресека моделирамо дегенеративним системом тачака (П5.7).

С обзиром на наведени последични појам спрега требало би да се исти пример може решавати и помоћу момената спрегова. У том случају је потребно констатовати да у равни $z = 0$, постоје динамичке тачке $A(0,0,0)$, $B(2l,0,0)$, $C(l,y_C,0)$, у којима су, уместо веза, присутне координате сила: $R_{Ax}, R_{Ay}; R_{By}, -G_B, I_x(B) = -m_B\ddot{x}_B; I_x(C) = -m\ddot{x}_C, I_y(C) = -m\ddot{y}_C, -G$.

Једначине равнотеже су:

$$\begin{aligned}
&\sum_i X_i = R_{Ax} - m\ddot{x}_C - m_B\ddot{x}_B = 0,\\
&\sum_i Y_i = R_{Ay} - G - m\ddot{y}_c - G_B + R_{By} = 0,\\
&\sum \mathfrak{M}_{iA} = -Gl - m\ddot{y}_c l + m\ddot{x}_c y_c + 2lR_{By} - 2lG_B = 0.
\end{aligned}$$

Из тога следи:

$$\begin{aligned}
R_{Ax} &= (m + 2m_B)\ddot{l},\\
R_{Ay} &= \frac{G}{2} + \frac{my_C}{2l}\ddot{l} + \frac{m}{2}\ddot{y}_C,\\
R_{By} &= \frac{G}{2} + G_B + \frac{m\ddot{y}_c}{2} - \frac{m}{2l}\ddot{l}y_c,
\end{aligned}$$

што се подудара са резултатом примера (П5.7) и (П5.7а).

Пре даљњег развијања теорије механике поново се подсетимо да је момент спрега сила овде уведен посредством реалних веза. Та битна чињеница омогућује да се принцип динамичке равнотеже на прост начин примени на кретање тела, било крутих, било деформабилних. Под "крутим телом" подразумевамо небројиво велико мноштво честица који су међусобно повезани непромењљивим реалним дужима. Из мноштва тих честица посматрамо било које четири, међусобно повезане помоћу шест дужина тетраедра. Дужине страница тетраедра означимо словима $l_{\nu\mu}$ где индекси ν означавају редне бројеве честица 1, 2, 3, 4, а $\mu = 1, ..., 6$ број независних веза. Једначине веза су облика

$$\delta_{ij}(y^i_{\nu+1} - y^i_{\nu})(y^j_{\nu+1} - y^j_{\nu}) = l^2_{\nu}. \tag{3A.64}$$

Посматрањем сваке нове тачке тела, чији положај једнозначно одређују три нова броја, повећава се број нових веза за три. Тако се не мења број независних координата за одређивање положаја тачака крутог тела. Број независних координата за одређивање кретања тачака крутог тела своди се на $4 \cdot 3 - 6 = 6$ којима ће одговарати шест једначина динамичке равнотеже, које ће садржати поред сила и моменте спрегова сила укључујући и моменте спрегова сила инерције.

Пример 8. - Кретање два тела

Кретање система два тела, посматраних као материјалне тачке, познат је у небеској механици под називом "проблем два тела". Кеплерови закони као и Њутнова сила гравитације управо се односе на кретање два тела која се узајамно привлаче; овде је то *прост пример* система две материјалне тачке, али његово свођење на наведене законе чини га проблемом од значаја.

Два тела, посматрана као материјалне тачке M_1 и M_2 чије су масе m_1 и m_2, крећу се једно према другом у равни $z = 0$, тако да је растојање између њихових центара инерција функција времена $\rho(t)$.

Услов "да је растојање између тела функција времена $\rho(t)$", тј.

$$f = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - \rho(t) = 0. \tag{3A.64a}$$

сличан је релацијама (П2.5; стр. 52), (П3.2; стр. 87) или (П5; стр. 92), па се и дато кретање може разматрати на сличан начин.

Диференцијалне једначине кретања (3А.26) за те две материјалне тачке у присуству "везе" (3А.64а) могу се свести на облик

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= \frac{\lambda}{\rho}(x_1 - x_2), \\ m_1\ddot{y}_1 &= \frac{\lambda}{\rho}(y_1 - y_2); \end{aligned} \tag{3A.65}$$

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 &= -\frac{\lambda}{\rho}(x_1 - x_2), \\ m_2\ddot{y}_2 &= -\frac{\lambda}{\rho}(y_1 - y_2). \end{aligned} \tag{3A.66}$$

Из услова убрзања (3А.33) добија се да је множитељ

$$\lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{\rho}$$

где је

$$v_{or}^2 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2.$$

Означимо ли словом χ израз

$$\chi = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{m_1 + m_2} \tag{3А.67}$$

и заменимо у једначине (3А.65) и (3А.66) добиће се следећи облик диференцијалних једначина кретања

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= \chi\frac{m_1 m_2}{\rho^2}(x_1 - x_2), \\ m_1\ddot{y}_1 &= \chi\frac{m_1 m_2}{\rho^2}(y_1 - y_2); \end{aligned}\right\} \tag{3А.68}$$

$$\left.\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 &= -\chi\frac{m_1 m_2}{\rho^2}(x_1 - x_2), \\ m_2\ddot{y}_2 &= -\chi\frac{m_1 m_2}{\rho^2}(y_1 - y_2). \end{aligned}\right\} \tag{3А.69}$$

Десне стране у једначинама (3А.68) су координате вектора $\boldsymbol{F}_1$ који делује на тело масе m_1, те је величина силе F_1 једнака

$$F_1 = \chi\frac{m_1 m_2}{\rho}. \tag{3А.70}$$

Толика сила $\boldsymbol{F}_2$ супротног смера ($\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$) делује на тело масе m_2, што показује измењени предзнак. Ова сила је подударна са силом узајамног привлачења (2.21).

Проблем настаје при интеграцији диференцијалних једначина ако се има у виду структура функције $\chi(t, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$, као и при поређењу са Њутновим силом гравитације

$$F = \kappa\frac{m_1 m_2}{\rho^2}.$$

Задржимо се овде управо на том упоређењу.

Претпоставка 1. За растојање $\rho = R = const$, $v_{or} = const$, следи да је

$$\chi = -\frac{v_{or}^2}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad F = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_{or}^2}{R}$$

Претпоставка 2. Маса m_1 је маса планете, $m_1 = m$, а маса m_2 је маса Сунца, $m_2 = M$, R је растојање центара маса планете и Сунца; брзина v_{or} једнака средњој брзини обилажења Земље око Сунца. У општем облику формула за силу могла би се написати као што следи:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{mM}{m+M}\frac{v_{or}^2}{R} = -\frac{mMR^3}{m+M}\frac{4\pi^2}{T^2R^2} = \\ &= -\frac{mM}{m+M}\frac{Rv_{or}^2}{R^2} = \varkappa^*\frac{mM}{R^2} \end{aligned} \tag{3A.71}$$

где је

$$\varkappa^* = \frac{4\pi^2R^3}{(m+M)T^2} \tag{3A.72}$$

а T период обилажења планете око Сунца. При овим претпоставкама $\varkappa^*$ је константа. Такву формулу за случај да је R велика полуоса елиптичне путање налазимо у књизи "Небеска механика" од М. Миланковића, Београд, 1935, стр. 56, иза које је написано следеће:

"Ова једначина изражава једну важну релацију величина a и T, која није сасвим подударна са трећим Кеплеровим законом. По том закону је количник $\frac{a^3}{T^2}$ за све планете један те исти, што према, предњој једначини не би био случај, јер присуство масе m у тој једначини мења вредност споменутог количника од планете до планете. Но пошто су масе планета веома малене према маси Сунца, то се у горњој једначини може m занемарити поред M, па се, на тај начин, добива подударност трећег Кеплеровог закона са законима Небеске механике."

При занемаривању масе m константа (3A.72) пише се изразом*

$$\varkappa = \frac{4\pi^2a^3}{MT^2}$$

и назива се *универзалном гравитационом константом* чија је усвојена бројна вредност

$$\varkappa = 6,67 \times 10^{-8} cm^3 gr^{-1} sec^{-2}.$$

Разлика између $\varkappa^*$ и $\varkappa$ може се одредити великом тачношћу, с обзиром да је

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+M} &= \frac{1}{M\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \\ &= \frac{1}{M}\left(1-\frac{m}{M}+\left(\frac{m}{M}\right)^2-\cdots\right). \end{aligned}$$

Према томе,

$$\varkappa^* = \varkappa - \varkappa\varepsilon + \varkappa\varepsilon^2 - \cdots$$

*М. Миланковић, *Небеска механика*, Београд, 1935, стр. 38, формула (28). У изразу (2.16) ова константа $\varkappa$ означена је уобичајеним словом κ.

где је $\varepsilon = \frac{m}{M}$. Како је однос маса Земље и Сунца

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{333432} = 299,112263 \times 10^{-8}$$

то је у првом приближавању $\varkappa^* = 0,999997\varkappa = 6,66997999 \times 10^{-8}$. За Јупитер је $\frac{m}{M} = \frac{318,36 m_\oplus}{330000 m_\oplus} = 95479,7379 \times 10^{-8}$ па је $\varkappa^* = 0,999045202\varkappa = 6,663565264 \times 10^{-8}$. За претходно наведене претпоставке из релације (3А.70) се добива

$$\varkappa^* = \frac{R v_{or}^2}{m+M} \tag{3A.73}$$

где би R било средње растојање центра инерције планете од центра инерције Сунца, а v_{or} средња орбитална брзина обилажења планете око Сунца. Маса Сунца M у литератури се најчешће налазе следеће бројне вредности: $M = 330000\, m_\oplus$, $M = 2 \times 10^{33} gr$, $M = 333432 m_\oplus$*. Узмемо ли m као масе планете или сателита, на основу табличних података** лако се израчунава вредност $\varkappa^*$ помоћу формуле (3А.73), као што следи:

Маса Сунца	2×10^{33}	$333432 m_\oplus$
Планете	$\varkappa^*$ $(10^{-8} cm^3 gr^{-1} sec^{-2})$	
Меркур	6.6423	6.6737
Венера	6.6528	6.6843
Земља	6.6603	6.6917
Марс	6.6762	6.7078
Јупитер	6.6993	6.7008
Сатурн	6.6426	6.6739
Уран	6.6547	6.6861
Нептун	6.6582	6.6897
Плутон	6.6559	6.6874
Земља-Месец, Јупитер-Европа	6.63	
Средње	6.6569	6.6864
вредности	6.67	

Дакле, за наведене претпоставке о кретању два тела, добивају се из формуле (3А.73), броје вредности које се само усредњавањем могу свести на једну усвојену гравитациону константу. За добивену средњу вредност $\varkappa^* = 6.6864$, полупречник Земље $R = 6,38 \times 10^8$cm, масу Земље $m_\oplus =$

*МиланковићМ, Небеска механика, 1935, стр. 197.

**Hames Alfen, Evolution of the Solar System, National Aeronautics and Space administration (NASA), SP-345, 1976

$5,974 \times 10^{27}$gr налази се помоћу (3A.73), да би квадрат брзине обилажења тела око Земље у непосредној близини био

$$v_r^2 = \varkappa^* \frac{m + m_\oplus}{R}$$

а према томе убрзање Земљине теже

$$g = \frac{v_r^2}{R} = 6,6864 \frac{5,974 \times 10^{27}}{(6,38 \times 10^8)^2} 10^{-8} = 981,33 cm/sec.$$

Сви наведени бројни подаци уз учињене претпоставке показују под којим и каквим условима се добија класична вредност за силу гравитације. Међутим, формуле (3A.67) и (3A.80) указују да сила привлачења зависи од брзине и убрзања промене растојања између тела. У случају слободног пада тела масе m, $v_r = \dot{\rho} = (R + \zeta)^{\cdot} = \dot{\zeta}$ па следи

$$F_1 = \chi \frac{m M_\oplus}{R + \zeta} = \frac{(R + \zeta)\ddot{\zeta} m M_\oplus}{(m + M_\oplus)(R + \zeta)} =$$
$$= \frac{m\ddot{\zeta}}{1 + \frac{m}{M_\oplus}} \approx m\ddot{\zeta}, \quad \frac{m}{M_\oplus} \approx 0.$$

Како је још давно Галилеј утврдио мерењем да је $\zeta = \frac{1}{2} g t^2$, за величину силе Земљине теже се добија $F_1 = mg$, што се и очекивало [6].

Карактеристичан је случај кретања два тела маса m_1 и m_2 чије се растојање ρ мења по формули $\rho = A\cos(\Omega t + \alpha)$, где су Ω и α константе; $v_r = \dot{\rho}$. Помоћу формуле (3A.67) налази се да је

$$\chi = -\frac{\rho^2 \Omega^2}{m_1 + m_2}.$$

Заменом у диференцијалне једначине кретања (3A.68) и (3A.69) добива се

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_1^2 (x_1 - x_2) \\ \ddot{y}_1 &= -\omega_1^2 (y_1 - y_2); \\ \ddot{x}_2 &= \omega_2^2 (x_1 - x_2) \\ \ddot{y}_2 &= \omega_2^2 (y_1 - y_2), \end{aligned}$$

где су, у циљу краћег писања уведене ознаке,

$$\omega_1^2 = \frac{m_2 \Omega^2}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \frac{m_1 \Omega^2}{m_1 + m_2}.$$

Означи ли се још $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, предњи систем једначина може се свести на две хомогене линеарне диференцијалне једначине

$$\ddot{x} = -\Omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\Omega^2 y.$$

Њихова решења, као што је познато,

$$x = C_1 \cos\Omega t + C_2 \sin\Omega t,$$
$$y = C_3 \cos\Omega t + C_4 \sin\Omega t,$$

за различите почетне услове одређује различите трајекторије, као, на пример,

а) За $t_0 = 0$ и $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 = 0$ добива се осциловање $x = x_0 \cos\Omega t$, $y = y_0 \cos\Omega t$, $z = z_0 \cos\Omega t$ по правој линији

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}.$$

б) За $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, кретање одређују коначне једначине $x = x_0 \cos\Omega t$ и $y = \frac{\dot{y}_0}{\Omega} \sin\Omega t$ по елипси

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{\Omega^2 y^2}{\dot{y}_0^2} = 1,$$

односно

$$\frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)_0^2} + \Omega^2 \frac{(y_1 - y_2)}{(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)_0^2} = 1.$$

3Б. Принцип рада

За исказ овог принципа нису довољни до сада дефинисани појмови. Потребно је пре свега дефинисати насловни појам *рада.* Нека то буде

Дефиниција 5. - Рад

Интеграл

$$A = \int_s \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} \tag{3Б.1}$$

јесте рад силе $\boldsymbol{F}$ *на стварном померању* $\boldsymbol{ds} = d\boldsymbol{r}$ *дуж путање* s.

За разлику од четири основне дефиниције којим су уведени векторске инваријанте (1.1), (1.24), (1.29) и (1.37) ова дефиниција уводи скаларну инваријанту у динамику. То отклања тешкоће које се јављају у алгебри и анализи везаних вектора због паралелног померања вектора и сабирања вектора.

За систем N динамичких тачака рад сила једнак је збиру радова свих сила

$$A = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu = \int_s \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu. \tag{3Б.2}$$

Физичка димензија рада је

$$[\dim A] = \mathrm{M\,L\,T^{-2}\,L} = \mathrm{M\,L^2\,T^{-2}}\,.$$

Интеграл (3Б.1) је криволинијски. У складу са уведеним координатним системима и њима одговарајућимм векторима сила, формула (3Б.1) може се записати у облицима

$$\begin{aligned} A = \int_s \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_s F_i dr^i = \\ = \int_s Y_i dy^i = \int_s X_i dx^i = \int_s Q_\alpha dq^\alpha. \end{aligned} \tag{3Б.3}$$

Ка истим таквим инваријантним формама своди се и интеграл (3Б.2). У општем и крајњем случају рад је функција положаја динамичке тачке на путањи и кинематичких и динамичких параметара од којих зависи фамилија трајекторија. Подинтегралне функције су силе или координате вектора сила, које у општем случају зависе од датих динамичких параметара, координата положаја, координата вектора брзина, као и од координата вектора убрзања када је реч о силама инерције, тј $X(\varkappa, x, \dot{x}, \ddot{x})$.

За поједине силе интеграл (3Б.3) може се интегралити независно од пута; увек ако је форма $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ тотални диференцијал неке функције, рецимо, U, тј.

$$X_i dx^i = dU. \tag{3Б.4}$$

С обзиром да се други извод $\ddot{x}$, због природе сила X може јавити само у линеарном облику, то се $U(x, \dot{x})$ јавља као функција параметара $\varkappa$, положаја x и брзине $\dot{x}$. Функцију називамо *функцијом сила*, а функцију њој супротног знака *функцијом енергије* или краће *енергијом*.

Рад појединих сила

1. **Рад инерционе силе** (1.37) - (1.40) је

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\mathcal{I}}_F) = \int_s \left(-m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \cdot d\boldsymbol{r} = \\ = -m\int_{v_0}^{v} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} = -\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2). \end{aligned} \tag{3Б.5}$$

Претпоставимо ли да је $v_0 = 0$, негативни рад силе инерције је

$$E_k = \frac{m}{2}v^2, \tag{3Б.6}$$

што је у класичној литератури познато као *кинетичка енергија* материјалне тачке масе m.

Рад инерционих сила система N материјалних тачака маса $m_\nu = const$ ($\nu = 1, \ldots, N$), према (3Б.2) је збир кинетичких енергија свих материјалних тачака са негативним знаком

$$\begin{aligned} A(\mathcal{I}) &= -\int_s \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{a}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = \\ &= -\sum_{\nu=1}^N \int_0^{v_\nu} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot d\boldsymbol{v}_\nu = \\ &= -\sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} v_\nu^2 = -E_k. \end{aligned} \tag{3Б.7}$$

За тачке константне масе, интеграл (3Б.5) лако се добива и за израз (1.40). Заиста

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\mathcal{I}}_F) &= -\hat{\int} a_{ij}(x) \frac{Dv^j}{dt} dx^i = -\hat{\int} a_{ij} v^i Dv^j = \\ &= -\frac{1}{2} \hat{\int} D(a_{ij} v^i v^j) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(a_{ij} v^i v^j - a_{ij}(x_0) v_0^i v_0^j \right) = \\ &= -(E_k - E_{0k}), \end{aligned}$$

јер је за $m_\nu = const.$, $Da_{ij} = 0^*$.

За $v_0 = 0$ добива се, с обзиром на (3Б.6), да је кинетичка енергија једнака негативном раду инерционе силе

$$E_k = -A(\boldsymbol{\mathcal{I}}) = \frac{1}{2} a_{ij} v^i v^j. \tag{3Б.7a}$$

Одавде следи, што се види: *рад силе инерције једнак је негативној кинетичкој енергији.*

2. **Рад Њутнове гравитационе силе** (2.1) је

$$A(\boldsymbol{F}_{\nu\mu}) = -\varkappa m_\nu m_\mu \int_0^{r_{\nu\mu}} \frac{dr_{\nu\mu}}{r_{\nu\mu}^2} = \frac{\varkappa m_\nu m_\mu}{r_{\nu\mu}} = -\Pi$$

где је

$$\Pi = -\frac{\varkappa m_\nu m_\mu}{r_{\nu\mu}}$$

гравитациона потенцијална енергија.

*В. Вујичић, *Коваријантна динамика*, Матамеатички институт, 1981.

3. **Потенцијална енергија**. За све силе које имају функције сила $U(x)$, $X(x) = \operatorname{grad} U$, зависне од положаја материјалне тачке, такве да је $dU(x) = X(x)dx$, *потенцијална енергија* E_p, *као негативни рад сила* $X(x)$, је функција положаја x

$$\Pi(x) =: E_p \overset{def}{=} -\int_{x_0}^{x} X(x)dx = -U(x) + U(x_0). \tag{3Б.8}$$

4. **Рад сила реакција веза** (3А.22)

$$A(\boldsymbol{R}) = \int_s \left(\boldsymbol{R}^\tau + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \operatorname{grad} f_\mu\right) \cdot d\boldsymbol{r}, \tag{3Б.9}$$

изискује претходно познавање силе отпора или трења и одређивање Лагранжових множилаца λ_μ. Силе трења $\boldsymbol{R}^\tau$ одређују се на основу закона трења. Интеграл $\int_s \boldsymbol{R}^\tau_\mu \cdot d\boldsymbol{r}$ одређенији је од интеграла (3Б.3) само толико колико се зна да $\boldsymbol{R}^\tau$ припада тангентној равни везе $f_\mu = 0$. Најчешће се јавља као функција брзине, те за одређивање рада, те силе потребно је претходно познавање коначних једначина кретања или друге релације помоћу којих се брзина може одредити у функцији положаја објекта.

Пример 9. Рад силе $\boldsymbol{R}^\tau = -\mu \boldsymbol{v}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}_3$ која узрокује кретање материјалне тачке масе m из почетног стања

$$(y_0^1, y_0^2, y_0^3; \dot{y}_0^1, \dot{y}_0^2, \dot{y}_0^3).$$

Из коначних или диференцијалних једначина добива се

$$\dot{y}_i = \frac{\mu}{m}(y_{0i} - y_i) + \dot{y}_{0i},$$

па је рад задате силе

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{R}^\tau) &= \int_s \boldsymbol{R}^\tau \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_s \mu \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = -\mu \int_s \dot{y}_i dy^i = \\ &= -\mu \int_{y_{0i}}^{y_i} \left[\frac{\mu}{m}(y_{0i} - y_i)dy^i + \dot{y}_{0i} dy^i\right] = \\ &= -\frac{\mu^2}{m}\left(y_{0i}y^i - \frac{1}{2}y_i y^i\right) - \mu \dot{y}_{0i} y^i \Big|_{y_{i0}}^{y_i}. \end{aligned}$$

За $y_{0i} = 0$, што је најчешће могуће узети,

$$A(\boldsymbol{R}_\tau) = \frac{\mu^2}{2m} \sum_{i=1}^{3} y_i^2 - \mu \dot{y}_{0i} y^i; \ \left(\mathrm{M\,L^2\,T^{-2}}\right).$$

Интеграл

$$\int_s \sum_\mu \lambda_\mu \operatorname{grad} f_\mu \cdot d\boldsymbol{r}$$

знатно се поједностављује и то

а) Ако су везе геометријске и зависе само од положаја, $f(\boldsymbol{r}) = 0$. Тада из услова брзине

$$\frac{df}{dt} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0$$

следи да је интеграл (3Б.7) једнак нули, те да компоненте $\lambda_\mu \operatorname{grad} f_\mu$ сила реакције веза $f_\mu = 0$ не производе рад.

б) У случају да су везе променљиве у току времена, тј. функције $f_\mu(\boldsymbol{r}, \tau)$ зависе поред $\boldsymbol{r}$ и од неке јавне функције времена $\tau(\varkappa, t)$, за које су услови брзине облика

$$\frac{df}{dt} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = 0.$$

Зато се претходни интеграл своди на

$$-A_2 = \int_{\tau_0}^{\tau} \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau} d\tau = \mathcal{P} \tag{3Б.10}$$

где ћемо $\mathcal{P}$ називати *реономним квазипотецијалом*, који се може одредити ако се генералисана сила (3А.54) своди на функцију од τ или ако је $d\mathcal{P} = -\sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau} d\tau$ потпуни диференцијал, што је у појединим случајевима могуће.

Од интереса за лакше разумевање градива, које следи, обратимо пажњу и на рад сила зависних од времена $F = (Y_1(\varkappa, t),\ Y_2(\varkappa, t),\ Y_3(\varkappa, t))$. У овом случају интеграл се може решавати

1) као криволинијски по трајекторији, при чему је потребно из коначних једначина $y = y(\varkappa, t)$ кретања одредити време $t = \tau(\varkappa, y)$ или
2) свођењем криволинијског интеграла (3Б.3) на одређени интеграл увођењем независног параметра времена, тј.

$$\begin{aligned} A &= \int_s Y_i(\varkappa, t) dy^i = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} Y_i(\varkappa, t)\dot{y}^i(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} S(\varkappa, t) dt. \end{aligned} \tag{3Б.10а}$$

Са становишта препринципа постојања време t је независна променљива, па је и у једном и у другом случају искључено третирање времена као функције новог независног параметра. Релација $t = t(\varkappa, y, \dot{y})$ није ништа друго него једначина кретања датог систем решена по t.

Пример 10. Кретање материјалне тачке, чија путања има облик елипсе

$$y_1 = a\cos\omega t, \quad y_2 = b\sin\omega t,$$

може се написати у облику

$$t = \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{ay_2}{by_1}.$$

Општије и простије криволинијски интеграли (3Б.3) могу се свести на обичне интеграле, облика

$$A = \int_s Y_i(y,\dot{y},\varkappa,t)dy^i = \int_{t_0}^{t} Y_i(\varkappa,t)\dot{y}^i(\varkappa,t)dt, \tag{3Б.11}$$

тј.

$$A(\varkappa,t) = \int_{t_0}^{t} S(\varkappa,t)dt, \tag{3Б.12}$$

јер при стварном померању dy постоји брзина $\dot{y}$, таква да је $dy^i = \dot{y}^i(t)dt$.

Функција

$$S = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = Y_i\dot{y}^i = X_i\dot{x}^i = Q_\alpha\dot{q}^\alpha \tag{3Б.13}$$

позната је у механици под називом *снага*. Најчешће се пише у облику

$$\frac{dA}{dt} = S = X_i\frac{dx^i}{dt}. \tag{3Б.14}$$

Елементарни рад

Из (3Б.14) или директно из (3Б.11) или (3Б.13) следи да је и диференцијално мали рад

$$dA = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = Y_i dy^i = X_i dx^i = Q_\alpha dq^\alpha \tag{3Б.15}$$

скаларна инваријанта. Овај рад се често назива *елементарни рад сила на стварном померању*. Исказом "на стварном померању" истиче се разлика од другог хипотетичног и произвољно малог рада тих сила на било којем могућем малом померању $\Delta\boldsymbol{r}$,

$$\Delta A = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}. \tag{3Б.16}$$

Под појмом *могуће померање* подразумевамо било које мало одступање од стварног положаја материјалне тачке, које је та тачка могла остварити. Овај појам је општији и од диференцијала $d\boldsymbol{r}$ и од варијације $\delta\boldsymbol{r}$

вектора положаја. Просто схватљиво то је свако хипотетички остварљиво растојање при могућем померању. У пракси би се могло схватити као пробно фактички или мисаоно мало померање. Величина малости није тачно одредљива; произвољно је мала од занемарљиво мале до неке коначне претпостављиво могуће величине. Аналитички, овај појам се може сматрати као разлика вектора положаја могућег померања тачке $\boldsymbol{r}$ и вектора непомераног или задатог положаја $\boldsymbol{r}$, тј $\Delta\boldsymbol{r} := \boldsymbol{r}(x+\Delta x) - \boldsymbol{r}(x)$. По узору на формуле коначних прираштаја вектор функције $\Delta\boldsymbol{r}$ може се изразити у аналитичком облику

$$\Delta\boldsymbol{r} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y^i}(y^{*i} - y^i) = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y^i}\Delta y^i \tag{3Б.17}$$

као и

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\Delta y^i + \cdots = \\ &= \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^j}\Delta x^j + \cdots = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha + \cdots\end{aligned} \tag{3Б.18}$$

где су Δy, Δx, Δq координате вектора могућег померања у разним координатним системима. Управо те координате вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ најчешће називају *могућим померањима.*

Аналогно елементарном раду на стварном померању (3Б.15), формулу (3Б.16) ћемо називати *рад на могућим померањима.*

Формула (3Б.16) је скаларна инваријанта као и (3Б.15), те због могућег и стварног померања, задовољава препринцип постојања. Инваријантна форма

$$\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = Y_i\Delta y^i = X_i\Delta x^i = Q_\alpha\Delta q^\alpha \tag{3Б.19}$$

задовољава препринцип инваријантности, а релације (3Б.18) и (3Б.19) одређују степен тачне одређености, те задовољава и препринцип одредјености. Као скаларне величине $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, могућа су сабирања

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\Delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{k=1}^{3N}Y_k\Delta y^k = \sum_{\beta=1}^{n}Q_\beta\Delta q^\beta \tag{3Б.20}$$

што чини укупан рад свих сила $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1, ..., N)$ на могућим померањима.

Поред елементарног рада (3Б.15) на стварном померању $d\boldsymbol{r}$ и рада (3Б.16) на могућем померању $\Delta\boldsymbol{r}$, значајну важност има "*рад на варијацијама*" $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ или $\delta y, \delta x, \delta q$, који се формулише изразом

$$\delta A := \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{3Б.21}$$

или у другом инваријантном облику

$$\delta A := Y\delta y = X\delta x = Q\delta q. \tag{3Б.22}$$

Овај рад не може се изједначити са елементарним радом dA, без обзира што су релације (3Б.15) и (3Б.22) сличне. Међутим, рад (3Б.21) може се сматрати елементарним радом (3Б.18) на могућем померању, јер варијације δx могу припадати скупу могућих померања Δx. За разлику од диеферницијала

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt = \frac{dx}{dt} dt = \dot{x} dt, \tag{3Б.23}$$

диференцијал δx, који називамо варијација*, показује постојање промене функције $x(\alpha, t)$ због прираштраја параметра $\alpha = \overline{\alpha} - \delta\alpha$.

Дакле под појмом *"варијација функције"* $x = x(\alpha, t)$ *називаћемо производ извода функције по параметру и малог прираштаја тог параметра*, тј.

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \delta\alpha = \frac{dx}{d\alpha} \delta\alpha =: \frac{\delta x}{\delta \alpha} \delta\alpha \tag{3Б.24}$$

То значи да је

$$\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta \alpha} &:= \frac{\partial x}{\partial \alpha|_{t=const}} = \\ &= \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{x(\alpha + \Delta\alpha, t) - x(\alpha, t)}{\Delta \alpha}. \end{aligned} \tag{3Б.25}$$

На исти начин, за рад, написан у облику сложене функције

$$A = \int_s X dx = A(x(t, \alpha)) \tag{3Б.26}$$

или

$$A = \int_{t_0}^{t} X \dot{x} dt = A(t)_{t=t(\alpha, x)}, \tag{3Б.27}$$

те важи операција диференцирања

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta\alpha = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \delta\alpha = \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \tag{3Б.28}$$

или, ако је x изражено посредством времена t, изведеног из кретања $t = t(x)$,

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta\alpha = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \delta\alpha = \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \delta x = \frac{\partial A}{\partial x} \delta x. \end{aligned} \tag{3Б.29}$$

Због ових особина (3Б.28) и (3Б.29) елементарни рад на могућим варијацијама умесније је називати *варијацијама рада.*

---

*Види, на пример, Картан Ели, *Риманова геометрия в ортогональном репере* (Предавања на Сорбони 1926-1927) стр. 27, 177; или [20].

И з в о д: С обзиром да у стручној литератури постоји нејединствено схватање појмова: *стварног померања* $d\boldsymbol{r}$*, могућег померања* $\Delta\boldsymbol{r}$ *и варијација* $\delta\boldsymbol{r}$, па према томе и одговарајућих елементарних радова (3Б.15), (3Б.16) и (3Б.21), овде је потребно запазити:

1 да се стварно елементарно померање, које симболише диференцијал $d\cdot$ односи на промену у току времена дуж стварне или задате трајекторије и непосредно проистиче из дефиниције (1.1).

2. Могуће померање је било које, те и свако мало померање, неодређене малености, хипотетичко одступање динамичке тачке од свог положаја, које омогућавају везе у непрекидној околини те тачке; ово померање, које се стварно не дешава, не узима у обзир фактор времена, нити било ког другог параметра, сем ограничености везама.

3. Варијација, која се симболише диференцијалом $\delta\cdot$ и у непосредној је вези са изводом (3Б.25) је одступање тачака од израчунате или задате трајекторије због недовољно тачне одређености или поремећаја неког параметра, садржаног у коначним једначинама кретања или једначини трајекторије у току времена t, те је као такво и функција времена. Ако варирајући параметар $\alpha + \delta\alpha$ није одређен, него је хипотетичан, може се сматрати да варијација $\delta\boldsymbol{r}$ припада скупу могућих померања.

Претходним закључцима хтело се нагласити и казати да се стварно померање овде не поистовећује ни са могућим померањем, ни са варијацијама.

Најзад, запазимо и то да је димензија рада, под чиме се подразумевају и "елементарни радови", једнака димензији момента силе, тј.

$$\dim A = \dim E = \dim \mathfrak{M} \,\hat{=}\, \mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-2}\,. \tag{3Б.30}$$

Због тога се елементарни рад на могућим померањима понегде назива *могућим моментом сила**. Овде се та два појма рада и момента сила због препринципа неформалности, сматрају различитим, јер је рад по дефиницији скаларна инваријанта, а момент изведена векторска инваријанта или, просто, вектор.

Формулације принципа рада

Суштина насловљеног *принципа рада* у стручној литератури је позната (према Галилеју: "Quanto si guadagna di forza, tanto perdersi in velocitá", Opere 2, p. 1830) још од Аристотела као "златно правило механике", а касније као: "принцип могућих померања", "принцип могућих варијација", "фундаментална основна једначина механике", "принцип виртуалног рада", "Даламбер-Лагранжов принцип", ... Један од најстрожијих математичких аналитичара класичне механике А. М. Љапунов пише следеће:

*А. М. Ляпунов, *Лекции по теоретической механике*, Киев 1982, стр. 410.

"Принцип могућих померања био је познат још Галилеју, а затим га је користио Валлис и Иван Бернули. Али први општи доказ овог принципа било је дато једино од Лагранжа, који га је поставио у основу своје аналитичке механике. После су га доказивали такође Поасон, Коши и други, макар да најбољим доказом остаје ипак Лагранжов."

У овдашњем приступу теорији о кретању тела, принцип се не доказује, него, као што је написано о препринципима (стр 11) или о појму принципа механике (стр 49), принцип је истинити исказ, усмени или писмени, те и једно и друго, онолико тачан колико се на основу тадашњих знања може највише казати. У формулацији принципа обухваћена је његова општост. Уместо доказа тумачи се и показује примена на разне системе. Најкраће речено принцип рада се може казати следећом реченицом:

Укупан рад свих сила на могућим померањима ништаван је, а у присуству једностраних веза, непозитиван.

Математички исказ, с обзиром на (3Б.20) је још краћи и то

$$\sum_{\nu=1} \widetilde{\boldsymbol{F}}_\nu \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu \leq 0. \tag{3Б.31}$$

За математички образованог читаоца је можда још јаснија следећа формулација

Укупан рад свих сила на свим независним могућим померањима једнак је нули, а за систем с једностраним везама непозитиван.

Релација (3Б.31) је веома општа, али није непосредно оперативна. Њена примена изискује строгу математичку анализу, што подразумева, као прво, разумевање елемената које садржи. Ограничена произвољност могућих померања је описана. Вектори $\widetilde{\boldsymbol{F}}_\nu$ садрже као компоненте инерционе силе $\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu$ ν-те материјалне тачке и главне векторе свих других сила $\boldsymbol{F}_{\nu k}$ које дејствују у ν-тој тачки, тј. $\boldsymbol{F}_\nu = \sum_k \boldsymbol{F}_{\nu k}$. Према томе, не умањујући општост релација (3Б.31) овај принцип се може написати у облику

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu + \boldsymbol{F}_\nu) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu \leq 0. \tag{3Б.32}$$

У овако записаном принципу подразумева се да су у вектору $\boldsymbol{F}_\nu$ садржане, као што је наглашено све силе, изузев силе инерције; садржи и реакције веза, сагласно закону веза. То подразумева да су релације μ веза апстраховане силама

$$\boldsymbol{R}_\nu = \sum_\mu \boldsymbol{R}_{\nu\mu}.$$

Уколико релације веза нису априорно израчунате, као што је претходно казано, релацији (3Б.32) треба додати релације којим се описује веза, тј.

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu + \boldsymbol{F}_\nu) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu = 0, \tag{3Б.33}$$

$$f_\mu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\tau) \geq 0. \tag{3Б.34}$$

У погледу знака једнакости и неједнакости уочава се разлика између релација (3Б.33) и (3Б.32); знак неједнакости из (3Б.32) обухваћен је релацијама (3Б.34).

За случај двостраних веза апстрахованих силама, релација принципа (3Б.32) пише се у облику (3Б.33), а за случај да везе нису урачунате у релацији (3Б.32), запис (3Б.33) и (3Б.34) у облику

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu + \boldsymbol{F}_\nu) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu = 0, \tag{3Б.35}$$

$$f_\mu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\tau) = 0. \tag{3Б.36}$$

Полазећи од тога да су везе чешће пишу у координатном облику, као што је то написано релацијама (2.3) - (2.8), посматрајмо примену овог принципа за поједине механичке системе у односу на Декартов координатни систем $y := (y^1, y^2, y^3)$.

Статички системи

Под појмом "статички систем"овде се подразумева N нападних тачака M_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ сила $\widetilde{\boldsymbol{F}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu = Y^i_\nu \boldsymbol{e}_i$ $i = 1, 2, 3)$ које су повезане помоћу k коначних веза (2.5). Ове везе пишемо конкретније

$$f_\mu(y^1_1, y^2_1, y^3_1, \ldots, y^1_N, y^2_N, y^3_N) = 0, \tag{3Б.37}$$

или формализовањем индекса $y^1_\nu = y^{3\nu-2}$, $y^2_\nu = y^{3\nu-1}$, $y^3_\nu = y^{3\nu}$,

$$f_\mu(y^1, \ldots, y^{3N}) = 0. \tag{3Б.38}$$

За овакав систем $\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu = 0$, па релације (3Б.35) и (3Б.36) могу се написати у следећем координатном облику

$$Y_\alpha \Delta y^\alpha := Y_1 \Delta y^1 + \cdots + Y_{3N} \Delta y^{3N} = 0, \tag{3Б.39}$$

$$f_\mu := f_\mu(y^1, \ldots, y^{3N}) = 0. \tag{3Б.40}$$

Прво констатујмо да је неидеални фактор везе апстрахован силом која је садржана у силама Y_α, а релације (3Б.40) описују идеализацију веза. Развијање у ред по могућим померањима ових веза у околини равнотежних положаја тачака $M_\nu(y = b)$, добија се, поред линеарне форме (3Б.39) још k линеарних форми по Δy и то

$$\begin{aligned} f_\mu(y) - f_\mu(b) &= a_{\mu\alpha} \Delta y^\alpha = \\ &= a_{\mu 1} \Delta y^1 + \cdots + a_{\mu 3N} y^{3N} = 0, \end{aligned} \tag{3Б.41}$$

где су

$$a_{\mu\alpha}=\frac{\partial f_\mu}{\partial y^a|_{y^\alpha=b^\alpha}}. \tag{3Б.42}$$

Дакле релације (3Б.39) и (3Б.40) се своде на $k+1$ линеарних једначина

$$Y_\alpha \Delta y^\alpha=0, \tag{3Б.45}$$

$$a_{\mu\alpha}\Delta y^\alpha=0,\ (\mu=1,\ldots,k<3N), \tag{3Б.46}$$

у којим фигурише $3N$ међусобно зависних могућих померања Δy^{3N}. С обзиром да релација (3Б.45) по формулацији принципа рада треба да садржи независна могућа померања, овај задатак даље може се решавати на два начина с циљем да се елеминишу зависна могућа померања, и то

а) директним решењем једначина (3Б.46),

б) увођењем неодређених множилаца веза.

Решавање по зависним могућим померањима

Раздвоје ли се могућа померања на зависна $\Delta y^1,...,\Delta y^k$ и независна: $\Delta y^{k+1},...,\Delta y^{3N}$ то и у једначинама (3Б.45) и (3Б.46) раздвајамо сабирке са зависним и независним могућим померањима,

$$Y_\nu \Delta y^\nu+Y_\beta \Delta y^\beta=0,\ \nu=1,...,k \tag{3Б.47}$$

$$a_{\mu\nu}\Delta y^\nu+a_{\mu\beta}y^\beta=0,\ \beta=k+1,...,3N. \tag{3Б.48}$$

Заменом

$$\Delta y^\nu=-a^{\mu\nu}a_{\mu\beta}\Delta y^\beta=b^\nu_\beta \Delta y^\beta,\quad |a_{\mu\nu}|\neq 0 \tag{3Б.49}$$

где је $a^{\mu\nu}$ инверзна матрица $a_{\mu\nu}$, у једначини (3Б.47) добија се једна релација са независним померањима и то:

$$\left(Y_\beta-Y_\nu b^\nu_\beta\right)\Delta y^\beta=0. \tag{3Б.49а}$$

Због независности померања Δy^β следи да ће систем посматраних сила у присуству веза (3Б.40) бити у равнотежи ако задовољава следећи систем $3N-k$ алгебарских једначина

$$Y_\beta-Y_1 b^1_\beta-\cdots-Y_k b^k_\beta=0. \tag{3Б.50}$$

Као што се види из овог система једначина, могуће је одредити $3N-k$ координата вектора сила помоћу осталих k.

Неодређени множиоци веза

Помножи ли се свака од једначина (3Б.41) одговарајућим множиоцем λ_μ и затим сабере по индексу μ, системи од $k+1$ једначине (3Б.45) и (3Б.46) своде се на две једначине

$$\begin{cases} Y_\alpha \Delta y^\alpha = 0 \\ \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} \Delta y^\alpha = 0. \end{cases} \tag{3Б.51}$$

Збир ове две релације

$$\left(Y_\alpha + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y^\alpha = 0, \tag{3Б.52}$$

омогућава, такође као у претходном методу, да се елиминишу зависна могућа померања $\Delta y^1, ..., \Delta y^k$. С обзиром да су λ_μ засад неодређени множиоци, допустиво је издвојити услове који поништавају k множилаца λ_μ из једначина (3Б.52), тј. да буде

$$Y_\sigma + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\sigma} = 0 \quad \sigma = 1, ..., k. \tag{3Б.53}$$

Остаје k једначина (3Б.52) $3N-k$ независних варијација и то

$$\left(Y_\beta + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\beta} \right) \Delta y^\beta = 0. \tag{3Б.54}$$

Одавде, као из (3Б.49) се добија још $3N-k$ једначина облика (3Б.53). Тако се за решење статичког задатка добија систем од $3N$ једначина сила

$$Y_\alpha + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, ..., 3N).$$

и k једначина веза

$$f_\mu(y^1, ... y^{3N}) = 0.$$

Реономни системи

Као и у претходном статичком систему принцип рада се примењује и за механички систем са промењљивим везама (2.8). Не умањујући општост, у циљу краћег излагања претпоставимо да су везе задате једначинама веза

$$f_\mu(y^0; y^1, ..., y^{3N}) = 0, \quad y^0 = \tau(t), \tag{3Б.55}$$

где је $\tau(t)$ позната функција времена.

Развијањем функције у степени ред, слично као и (3Б.41), показује се да постоји $3N+1$ могућих померања $\Delta y^0, \Delta y^1, ..., \Delta y^{3N}$. Заиста

$$\Delta f_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0}\Delta y^0 + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}\Delta y^i = 0,\ (i = 1, ..., 3N).$$

Принцип рада говори о "свим могућим померањима" и раду одговарајућих сила на тим померањима. Дакле, овде поред радова на могућим померањима $Y_i \Delta y^i$, треба додати и рад на могућем померању Δy^0 тј. $Y_0 \Delta y^0$. Тако за овакав систем са промењљивим везама (3Б.55), уместо релација (3Б.39) и (3Б.40), овде имамо систем једначина

$$Y_\alpha \Delta y^\alpha = Y_0 \Delta y^0 + Y_i \Delta y^i = 0, \tag{3Б.56}$$

$$f_\mu(y^0, y) = f_\mu(y^0, y^1, ..., y^{3N}) = 0, \tag{3Б.57}$$

$(\alpha = 0, 1, ..., 3N; i = 1, ..., 3N)$.

Одавде, истим поступком као од (3Б.51) до (3Б.55), добија се још једна додатна једначина

$$Y_0 + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0} = 0. \tag{3Б.58}$$

Сила

$$Y_0 = -\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0} \tag{3Б.59}$$

је евидентна и у општијим релацијама (3А.56) и (3А.54).

Систем са једностраним и двостраним везама

Принцип рада, записан релацијом (3Б.31) говори да се знак неједнакости односи на једностране везе. За случај само једностраних веза принцип казује да је рад на могућим померањима мањи од нуле, тј. $(\widetilde{\boldsymbol{F}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu)$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu \leq 0 \tag{3Б.60}$$

а за двостране везе као што је показано

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3Б.61}$$

Разматрајмо истовремено присуство двостраних веза

$$f_\mu(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N) = 0 \quad \mu = 1, ..., k \tag{3Б.62}$$

и једностраних

$$\varphi_\sigma(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N) \geq 0 \quad \sigma = 1, ..., l \tag{3Б.63}$$

с тим да је $k + l < 3N$.

Определимо се поново за координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$ и применимо метод неодређених множилаца веза, релације (3Б.60) и (3Б.61) сведимо, слично једначинама (3Б.51), на облик

$$Y_\alpha \Delta y^\alpha = \Delta c, \;\; \Delta c \leq 0 \tag{3Б.64}$$

$$\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} \Delta y^\alpha = 0 \tag{3Б.65}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{l} \chi_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y^\alpha} \Delta y^\alpha = \sum \chi_\sigma \Delta c_\sigma, \tag{3Б.66}$$

где су или $\Delta c_\sigma \geq 0$ или $\Delta c_\sigma \leq 0$.

Збир ових трију једначина

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{3N} \left(Y_\alpha + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^\alpha} + + \sum_{\sigma=1}^{l} \chi_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y^\alpha = \\ = \Delta c + \sum_{\sigma=1}^{l} \chi_\sigma \Delta c_\sigma \end{aligned} \tag{3Б.67}$$

води ка извођењу потребног и довољног броја једначина за решавање задатка.

Као и у случају двостраних или задржавајућих веза зависних $k + l$ могућих померања Δy^α искључимо захтевом да множиоци λ_μ и χ_σ буду такви да су

$$\begin{aligned} & Y_i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i} + \sum_{\sigma=1}^{l} \chi_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y^i} = 0, \\ & i = 1, ..., k; k+1, ..., k+l. \end{aligned} \tag{3Б.68}$$

Осталих $3N - (k + l)$ коефицијената уз независна могућа померања Δy^j $(j = k + l + 1, ..., 3N)$ биће једнаки, такође нули, тј

$$Y_j + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^j} + \sum_{\sigma=1}^{l} \chi_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y^j} = 0, \tag{3Б.69}$$

да би у складу с принципом било $\Delta c + \sum \chi_\sigma \Delta c_\sigma = 0$. Међутим, како је, сагласно (3Б.60) и (3Б.61), $\Delta c < 0$, то следи да је

$$\sum_{\sigma=1}^{l} \chi_\sigma \Delta c_\sigma > 0. \tag{3Б.70}$$

Имајући у виду независност неодређених множилаца веза одавде следе допунски услови једначинама (3Б.68) и (3Б.69) да χ_σ и Δc_σ имају исти знак.

Кинетички системи

Подсетимо, да су у векторским функцијама $\mathcal{F}_\nu$, чије су координате Y, садржане све активне силе $\boldsymbol{F}$, укључујући и силу инерције $\boldsymbol{\mathcal{I}} = -m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Према томе $3N$ диференцијалних једначина кретања (3Б.68) и (3Б.69) и $k+l$ коначних једначина веза са условима проистеклим из (3Б.70) чине потпун систем релација за решавање кретања посматраног система са коначним једностраним и двостраним везама.

Нехолономни системи

Под овим насловом има се у виду систем N материјалних тачака, чије је кретање ограничено, поред осталог, бар једном диференцијалном неинтеграбилном (нехолономном) везом. Имајући у виду претходно ограничење нека то буду везе

$$\varphi_\mu := \varphi_\mu(y^1, ..., y^{3N}, \dot{y}^1, ..., \dot{y}^{3N}) = 0. \tag{3Б.71}$$

Због тешкоћа које се јављају при развијању у ред функција (3Б.71) у околини трајекторије $C(y)$ и сложености могућих једначина ових веза, као и њихове кинематичке природе, а у циљу општости и краћег описа, овде ћемо применити метод апстраховања веза, сагласно закону веза, одговарајућим силама-реакцијама веза $\boldsymbol{R}_{\nu\mu}$. То ће рећи да сваку везу (3Б.71) која делује на ν-ту тачку замењујемо резултантним вектором реакција веза $\boldsymbol{R}_{\nu\mu}$, као у (2.9), то јест $\boldsymbol{R}_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} \boldsymbol{R}_{\nu\mu}$. С обзиром на претходно уведену нотацију то се може написати сажетије, као и остали вектори сила помоћу скупа $3N$ координата $R_1, ..., R_{3N}$. У таквом општем приступу принцип рада (3Б.32) напишимо у координатном облику

$$(\mathcal{I}_\alpha + Y_\alpha + R_\alpha)\, \Delta y^\alpha = 0. \tag{3Б.72}$$

Систем од $3N$ диференцијалних једначина кретања

$$\mathcal{I}_\alpha + Y_\alpha + R_a = 0, \quad (\alpha = 1, ..., 3N) \tag{3Б.73}$$

односно
$$m_\alpha \ddot{y}_\alpha = Y_\alpha + R_\alpha, \tag{3Б.73а}$$
садржи, поред осталог, $3N$ непознатих реакција веза R_α које треба да задовољавају услове убрзања
$$\dot{\varphi}_\mu(y,\dot{y},\ddot{y}) = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y^\alpha}\dot{y}^\alpha + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{y}^\alpha}\ddot{y}^\alpha = 0. \tag{3Б.74}$$

Заменом $\ddot{y}_\alpha$ из једначина (3Б.73) у претходне једначине (3Б.74) добија се k линеарних једначина по R_α и то
$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y^\alpha}\dot{y}^\alpha + \frac{1}{m_\alpha}(Y_a + R_\alpha)\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{y}^\alpha} = 0.$$

Одавде је могуће одредити k реакција
$$R_i = R_i(m, y, \dot{y}, Y, R_{k+1}, ..., R_{3N}) \quad (i = 1, ..., k)$$
у зависности од, поред осталог, $3N$ координата сила Y и $3N - k$ реакција R_j $(j = k+1, ..., 3N)$. Даље заменом R_i у једначине (3Б.73) односно (3Б.73а) у систему од $3N$ диференцијалних једначина кретања остаје још $3N - k$ непознатих реакција веза. Њих је, као такве, могуће одредити из тог система у зависности од осталих функција у тим једначинама или тражити нових $3N - k$ услова који дефинишу или одређују преосталих $3N - k$ непознатих реакција диференцијалних веза (3Б.71). Многе студије су посвећне том проблему, који је још увек актуелан.

Први закључак: Помоћу принципа рада могуће је извести и развити релације динамичке равнотеже као и из принципа равнотеже; принцип рада и принцип равнотеже су еквивалентни.

Инваријантни записи принципа рада

Изрази (3Б.18), (3Б.19) и (3Б.20) указују да се релације (3Б.31) или (3Б.32) могу записати у сличном облику у односу на разне координатне системе. Нека и даље буде $(y, \boldsymbol{e})$ Декартов ортонормирани непокретни координатни систем; $(z, \boldsymbol{э})$ праволинијски координатни систем, $(x, \boldsymbol{g}_{(x)})$ криволинијски систем координата и $(q, \boldsymbol{g}_{(q)})$ систем независних генерализаних координата. Једне те исте везе као што се види из (2.2) пишу се инваријантним изразима:
$$\begin{aligned} &f_\mu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \tau) = 0 \rightarrow f_\mu(y, \dot{y}, \tau) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow f_\mu(z, \dot{z}, \tau) = 0 \rightarrow f_\mu(x, \dot{x}, \tau) = 0, \\ &\tau = y^0 = z^0 = x^0, \ \mu = 1, ..., k. \end{aligned}$$

или у параметарском облику

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q^0, q^1, ..., q^n) =: \boldsymbol{r}_\nu(q) \tag{3Б.75}$$

$$q^0 = \tau(t). \tag{3Б.76}$$

Могућа померања, према (3Б.18), записују се према избору координатног система

$$\Delta\boldsymbol{r}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial y^i}\Delta y^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial z^i}\Delta z^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^i}\Delta x^i \tag{3Б.77}$$

или

$$\Delta\boldsymbol{r}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha =: \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q}\Delta q, \tag{3Б.78}$$

где су $\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q}$ координатни вектори ν-те тачке на конфигурационој многообразности M. Број **могућих** померања допуштају могуће промене веза

$$\begin{aligned} \Delta f_\mu &= \frac{\partial f_\mu}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau}\Delta\tau = \\ &= \frac{\partial f_\mu}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau}\Delta\tau = 0 \\ \Delta f_0 &= \Delta y^0 - \Delta\tau = 0. \end{aligned} \tag{3Б.79}$$

Апстрахујемо ли везу (3Б.76) која постоји онолико колико и друге везе, силом R_0, могуће промене веза (3Б.79) показују да постоји $3N+1$ могућих померања, тако да индекси у (3Б.77) и (3Б.78) узимају вредности $i = 0, 1, ..., 3N$; $\alpha = 0, 1, ..., n$. Зато основна формулација рада (3Б.31) има следеће инваријанте

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}\Delta y &= \widetilde{Z}\Delta z = \widetilde{X}\Delta x = \\ &= \widetilde{Y}_i\Delta y^i = \widetilde{Z}_i\Delta z^i = \widetilde{X}_i\Delta x^i \leq 0, \end{aligned} \tag{3Б.80}$$

$$f_\mu \geq 0; \quad \mu = 1, ..., k < 3N, \ i = 0, 1, ..., 3N$$

као и

$$\widetilde{Q}\Delta q := \widetilde{Q}_\alpha \Delta q^\alpha \leq 0 \quad (\alpha = 0, 1, ..., n). \tag{3Б.81}$$

За случај да функције веза не зависе јавно од времена, координата q^0 не постоји, па у релацијама (3Б.80) и (3Б.81) не постоје ни нулти индекси $i = 0$, $\alpha = 0$. Исте инваријантне форме односе се и на релацију (3Б.32). С обзиром да су посматране релације (3Б.31) и (3Б.32) претходно развијене у односу на праволинијске координате y, у наставку користимо криволинијске координате x и генералисане независне координате $q \in M$.

а) Принцип рада у криволинијским координатним системима

У релацијама (1.40) је показано да су координате вектора инерционе силе у односу на криволинијске координатне системе одређене изразима

$$\mathcal{I}_i = -a_{ij}\frac{Dv^j}{dt}. \tag{3Б.82}$$

Како $\widetilde{X}_i$ у релацији (3Б.80) означава збир активних сила и сила инерције (3Б.82) то је

$$\left(X_i - a_{ij}\frac{Dv^j}{dt}\right)\Delta x^i \leq 0. \tag{3Б.83}$$

То директно следи из релације (3Б.32) ако се има у виду да су могућа померања, као и у (3Б.18)

$$\Delta \boldsymbol{r}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^s}\Delta x^s, \quad (r, s = 1, 2, 3). \tag{3Б.84}$$

Заменом у (3Б.32) добија се с обзиром на (1.38),

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{N}\left(\mathcal{I}_\nu^s\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^s} + X_\nu^s\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^s}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^r}\Delta x^r = \\
&=\sum_{\nu=1}^{N}\left(X_\nu^s\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^s} - m_\nu\frac{dv_\nu^s}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^s}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^r}\Delta x^r = \\
&=\sum_{\nu=1}^{N}\left(g_{(\nu)sr}X_\nu^s - a_{(\nu)rs}\frac{dv_\nu^s}{dt}\right)\Delta x^r \leq 0.
\end{aligned}$$

Ако се уведу индекси $i, j = 1, \ldots, 3N$,

$$m_{3k} = m_{3k-1} = m_{3k-2},\ i = 3\nu, 3\nu - 1, 3\nu - 2$$

следи

$$\left(g_{ij}X^j - a_{ij}\frac{Dv^j}{dt}\right)\Delta x^i \leq 0, \tag{3Б.85}$$

или (3Б.83), с обзиром да је $X_i = g_{ij}X^j$.

Ако се померања ограничавају двостраним или задржавајућим веза-ма

$$f_\mu(x^1, ..., x^{3N}, \tau) = 0 \quad \mu = 1, ..., k$$

у релацији (3Б.83) отпада знак неједнакости, а посредством везе

$$f_0 = x^0 - \tau(t) = 0,$$

коју апстрахујемо силом R_0 добија се k хомогених линеарних једначина по могућим померањима

$$\begin{aligned} \Delta f_\mu &= \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}\Delta x^i + \frac{\partial f_\mu}{\partial x^o}\Delta x^0 = 0, \\ \Delta f_0 &= \Delta x^0 - \Delta\tau = 0, \qquad (i = 1, ..., 3N). \end{aligned} \tag{3Б.86}$$

Множењем одговарајућим неодређеним множитељима λ_μ и λ_0 и сабирањем са

$$\left(X_i - a_{ij}\frac{Dv^j}{dt}\right)\Delta x^i = 0 \tag{3Б.87}$$

добија се

$$\left(X_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} - a_{ij}\frac{Dv^j}{dt}\right)\Delta x^i + \left(\lambda_0 + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^0}\right)\Delta x^0 = 0.$$

Одавде следи $3N$ диференцијалних једначина кретања

$$a_{ij}\frac{Dv^j}{dt} = X_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}, \tag{3Б.88}$$

и сила промене веза

$$\lambda_0 = -\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^0} =: X_0, \tag{3Б.89}$$

којим треба додати k коначних једначина посматраних веза $f_\mu = 0$.

б) Принцип рада у независним генералисаним координатама

Апстрахујмо све везе (3Б.57), одговарајућим реакцијама веза

$$R_i = \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}, \quad (i = 1, ..., 3N) \tag{3Б.90}$$

а додатну везу $y^0 - \tau = 0$ силом R_0. Тада ће једначина (3Б.72) конкретније изгледати овако

$$\left(\mathcal{I}_i + Y_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}\right)\Delta y^i + R_0\Delta y^0 = 0, \tag{3Б.91}$$

$(i = 1, ..., 3N)$. Ако се једначине веза (3Б.57) замене параметарском формом

$$y^i = y^i(q^0, q^1, ..., q^n),\ y^0 = q^0,\ n = 3N - k,$$

а померање Δy^i независним могућим померањима Δy^α,

$$\Delta y^i = \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, ..., n),$$

једначина (3Б.91), с обзиром на (3А.57), се своди на нову инваријантну форму

$$(\mathcal{I}_\alpha + Q_\alpha)\,\Delta q^\alpha + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha = 0.$$

Међутим, како је $f_\mu(q^0, q^1, \ldots, q^n) \equiv 0$, то и

$$\Delta f_\mu(y(q)) = \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}\Delta y^i = \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha = \frac{\partial f_\mu}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha \equiv 0,$$

па за индекс $j = 1, ..., n = 3N - k$, следи да принцип рада посматран у односу на генералисане координатама има ову форму

$$(\mathcal{I}_j + Q_j)\,\Delta q^j + (\mathcal{I}_0 + Q_0^* + R_0)\,\Delta q^0 = 0. \qquad (3Б.92)$$

С обзиром да је ова једначина изведена из једначина (3Б.56), то је и еквивалентни систем једначина (3Б.56) и (3Б.57). Због описане природе могућих независних генералисаних померања Δq^α, поред продуковања једначина (3А.56) и (3А.57), принцип рада (3Б.92) указује и на узајамну повезаност сила $\mathcal{I}_j$, Q_j, померања Δq^α и сила $\mathcal{I}_0, Q_0^*, R_0$.

Други закључак: Као што се види из претходних навода, принцип рада је веома примењив у односу на било који координатни систем, задржавајући при том линеарну инваријантну скаларну форму за све координатне системе, системе веза и системе сила.

Принцип рада на могућим варијацијама

Релацијом (3Б.22) уведен је појам рада на могућим варијацијама уз констатацију да варијације (3Б.24) могу припадати скупу могућих померања. Према томе за одређенији подскуп могућих померања, све уведене релације принципа рада: (3Б.31), (3Б.32), (3Б.39), (3Б.51) и (3Б.52), (3Б.56), (3Б.64), (3Б.72), (3Б.81) и (3Б.92) имаће исти такав облик само што ће уместо могућих померања $\Delta\cdot$ бити уписане могуће варијације $\delta\cdot$. Та истоветност изгледа форми не води закључку да је принцип рада на могућим померањима $\Delta\boldsymbol{r}$ исти што и принцип на могућим варијацијма (3Б.24), јер $\Delta\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$ нису идентични.

3В. ПРИНЦИП ДЕЈСТВА

Реч *дејство* или *акција** у исказима: "под дејством сила ...", "међусобно дејство тела", "акција једнака реакцији", пре се казује о присутности сила и њиховом узроковању, него о одређеном појму *дејство*. С друге стране у аналитичкој механици, теоријској физици па и математици под појмом *дејство* подразумева се мање или више тачно одређен функционал у чијој се дефиницији не помиње сила. Зато и овде, као и у принципу рада, у циљу тачности и јасности одредимо појам *дејство*.

Дефиниција 6. - Дејство

Дејство механичког система је интегрална величина

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{\nu} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu. \tag{3В.1}$$

Физичка димензија дејства је, као и момента импулса,

$$\dim \mathcal{D} = \mathrm{M}\,\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}. \tag{3В.2}$$

Подинтегрални израз дејства је, као што се види, линеарна диференцијална форма, која се, с обзиром на (1.24) или (1.25) може написати инваријантно у односу на све посматране координатне системе, као

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D} &= \int_{t_0}^{t}\sum_{\nu}\boldsymbol{p}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = \int_{t_0}^{t}\sum_{\nu}\sum_{i=1}^{3} m_\nu \dot{y}_\nu^i dy_\nu^i = \\ &= \int_{t_0}^{t} p_j(y)dy^j = \int_{t_0}^{t} p_j(x)dx^j = \int_{t_0}^{t} p_\alpha dq^\alpha, \end{aligned} \tag{3В.3}$$

или, с обзиром на (3Б.7), у облику

$$\mathcal{D} = \int_{t_0}^{t} E_k dt. \tag{3В.4}$$

Овај запис упућује и на схватање да је дејство интеграл производа рада неке силе и интервала времена.

Као што постоји више инваријантних и еквивалентних форми записа дејства, тако се и *принцип дејства* може казати и казује разним али еквивалентним реченицама. Овде је битан математички исказ:

*actio, fr. eng. action - радња, делатност, делање, дејство, веома често се употребљава у механици, али не увек са јединственим значењем

Варијација дејства за време $[t_0,t]$ *је једнака нули ако је рад активних сила на могућим варијацијама за исто време једнак нули*, то ће рећи

$$\delta\mathcal{D}=0 \quad \text{ако је} \quad \delta A=0 \quad \text{за } [t_0,t]. \tag{3В.5}$$

Према (3Б.22) и (3В.5) рад активних сила на могућим варијацијама је

$$\delta A(Y)=Y_j\delta y^j=X_j\delta x^j=Q_\alpha\delta q^\alpha=0 \tag{3В.6}$$

а варијација дејства

$$\delta\mathcal{D}=\delta\int_{t_0}^{t}E_k dt=\int_{t_0}^{t}\delta E_k dt=0. \tag{3В.7}$$

У циљу усклађивања $\delta\mathcal{D}$ и $\delta A(Y)$ помножимо израз принципа рада (3Б.35) са диференцијалом времена $dt>0$ и подведимо под знак интеграла, тј.

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu+\boldsymbol{F}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu dt=\int_{t_0}^{t}\left[\delta A(\boldsymbol{\mathcal{I}})+\delta A(\boldsymbol{F})\right]dt.$$

Одређеним трансформацијама се показује, да је

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\delta E_k dt&=-\sum_{\nu=1}^{N}\int_{t_0}^{t}m_\nu\boldsymbol{a}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu dt=\\&=\int_{t_0}^{t}\sum_{\nu=1}^{N}(-m_\nu\boldsymbol{a}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu dt=\int_{t_0}^{t}\delta A(\boldsymbol{\mathcal{I}})dt\end{aligned} \tag{3В.8}$$

па се принцип дејства сада може операционализовати са релацијом

$$\int_{t_0}^{t}\left[\delta E_k+\delta A(\boldsymbol{F})\right]dt=\int_{t_0}^{t}(\delta E_k+Y_i\delta y^i)dt=0. \tag{3В.8a}$$

Потпуније и тачније одређење релације принципа (3В.8) или (3В.8а), објаснимо применом на поједине механичке системе почев од простијих ка сложенијим.

Статички задатак

а) Тачку $M(y)$ напада k сила $\boldsymbol{F}_\nu=Y_\nu^i\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,3;\ \nu=1,...,N)$. Тачка M припада везама $f_\mu(y)=0$, $\mu\leq 3$. Шта произилази из принципа дејства?

Према (3Б.22) рад активних сила на варијацијама δy_i је

$$\delta A=Y_r^i\delta y_i \tag{3В.9}$$

где су Y_r^i координате резултантне силе $Y_r^i = \sum\limits_{\nu=1}^{N} Y_\nu^i$. Како статички задатак подразумева да је $\ddot{x} = 0$, одсутна је сила инерције, те и $A(\mathcal{I}) = 0$, па се релација принципа дејства (3В.8) своди на

$$\int_{t_0}^{t} Y_r^i \delta y_i dt = 0. \tag{3В.10}$$

Везе морају задовољавати варијацију веза

$$\delta f_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial y_i} \delta y_i = 0. \tag{3В.11}$$

Множењем неодређеним чиниоцима λ_μ, сабирањем по μ, интеграљењем на интервалу $[t_0, t]$ и сабирањем са (3В.11) добија се

$$\int_{t_0}^{t} \left(Y_r^i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_i} \right) \delta y_i dt = 0, \tag{3В.12}$$

што је еквивалентно релацији (3В.10). Методом неодређених множилаца, као од (3Б.52) до (3Б.53) добијају се три једначине равнотеже динамичке тачке

$$\sum_{\nu=1}^{N} Y_\nu^i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

б) Статички систем од N динамичких тачака M_ν $(\nu = 1, ..., N)$, које су повезане везама $f_\mu(x^1, ..., x^{3N}) = 0$; силе $\boldsymbol{F}_\nu = X_\nu^i \boldsymbol{g}_{(\nu)^i}$ су функције координата x положаја тачака $M_\nu(x)$.

Рад датих сила на варијацијама, сагласно дефиницији (3Б.22) и (3Б.36), је

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial x^j} \delta x^j = X_j(x) \delta x^j, \tag{3В.13}$$

па, слично релацији (3В.8), принцип дејства се може записати у облику следеће релације

$$\int_{t_0}^{t} \left(X_j + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x^j} \right) \delta x^j dt = 0, \tag{3В.14}$$

или

$$\int_{t_0}^{t} \left(\delta A^*(\boldsymbol{F}) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \delta f_\mu \right) dt = 0. \tag{3В.15}$$

Кинетички* задатак

За разлику од претходног статичког задатка овде се проширује број сила $\boldsymbol{F}_\nu$ силама инерције (1.37), (1.40), (3A.50) и одређује њихов рад, тј. кинетичка енергија (3Б.7)

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu^N \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \frac{1}{2} a_{ij}(m,y)\dot{y}^i\dot{y}^j =$$
$$= \frac{1}{2} a_{ij}(m,x)\dot{x}^i\dot{x}^j. \quad (i,j = 1,\ldots,3N).$$

Тада релација (3В.15) сагласно (3В.8) постаје

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta E_k + Y_j\delta y^j + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \delta f_\mu\right)dt = 0. \tag{3В.16}$$

Дакле, принцип дејства јавља се овде у облику еквивалентних релација: (3В.5), (3В.7), (3В.8), (3В.10). Битна разлика од принципа рада је та што се њим помоћу функција кинетичке енергије проучава кретање.

Пример 11. Све силе, изузев силе инерције, које делују на материјалну тачку константне масе m, међусобно се поништавају, тј. резултанта тих сила је једнака нули.

Из (3В.16), (3В.12) или (3В.1) произилази да постоји једино дејство

$$\mathcal{D} = \int_{t_0}^{t_1} E_k dt \tag{3В.17}$$

те у том случају принцип се записује као

$$\delta \int_{t_0}^{t} E_k dt = 0 \tag{3В.18}$$

О значају формуле (3В.17) говори и чињеница да она носи назив *дејство по Лагранжу*, а релација (3В.18) *принцип најмањег дејства*, кога су градили и дограђивали истакнути и заслужни ствараоци аналитичке механике*. Јакоби је чак писао да је принцип најмањег дејства мајка целокупне аналитичке механике.

Релацију (3В.18), која је овде проистекла из простог примера, могуће је добити из куд и камо општијег посматрања. Ако је варијација рада активних сила једнака нули, тада је

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta E_k dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0,$$

*гр. *κινετικοσ* - покретан, део динамике који се односи на кретање тела.

*Wolff (1726), Maupertuis (1746), Euler (1748), Lagrange (1760), ...

као и обратно. Према томе релација (3В.5) може се заменити строжијом формулацијом

$$\delta\mathcal{D} = 0 \Leftrightarrow \delta A = 0. \tag{3В.19}$$

За систем са потенцијалном енергијом (3Б.5) релација (3В.19) или (3В.7), (3В.8) се своди на

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k + \delta A(x))\, dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k - \delta E_p)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \end{aligned} \tag{3В.20}$$

где је функција

$$L := E_k - E_p, \tag{3В.21}$$

позната под називима *Лагранжова функција, лагранжијан* или *кинетички потенцијал*.

Релација (3В.20), позната под називом *Хамилтонов принцип* или *принцип стационарног дејства*, а формула

$$\mathcal{D} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L dt \tag{3В.22}$$

под називом *дејство по Хамилтону*, најраспрострањенији су у аналитичкој динамици, макар да се као такав односи само на механичке системе са потенцијалним силама. Релацију (3В.8а), из које следе, као што се види, и (3В.18) и (3В.20) називају *принцип Хамилтон-Остроградског*. С обзиром да се овде приказују све те три релације (3В.8), (3В.15) и (3В.2) у општијем и модификованом облику аутор се определио за назив *принцип дејства*.

У примени Хамилтоновог принципа (3В.20) често се не обраћа пажња на физичко значење функције (3В.21), за коју је принцип постављен па се за функцију L под називом Лагранжијан прихвата било која функција зависна од кориштених независних координата x, њених извода $\dot{x}$ и времена t. Такав приступ довео је до неких резултата који нису у сагласности са препринципима механике, па према томе ни са реалним кретањем. То нарочито у примени принципа на многообразностима. У цуљу лакшег упоређења овдашњих тврђења са стандардима класичне аналитичке механике, покажимо нешто детаљније примену принципа дејства (3В.7) тј. (3В.8) или (3В.16) на конфигурационим многообразностима*.

*У нашој литератури је распрострањен израз "многострукост" уместо многобразност.

Дејство на конфигурационим многобразностима

Посматрајмо N материјалних тачака маса m_ν $(\nu = 1, ..., N)$. У односу на произвољно изабрани пол O и ортонормирани координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$, положај ν-те тачке нека одређује вектор $\boldsymbol{r}_\nu = y^i_\nu \boldsymbol{e}_i$. Нека кретање тачке ограничава $k \le 3N$ задржавајућих веза које се могу представити сходно зкону веза, векторима $\boldsymbol{R}^\tau_\nu$ (отпора, трења, ...) и помоћу независних једначина

$$f_\mu(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N, \tau(t)) = 0 \quad (\mu = 1, ..., k) \tag{3B.23}$$

или, што је исто,

$$f_\mu(y^1_1, y^2_1, y^3_1; ...; y^1_N, y^2_N, y^3_N, \tau(t)) = 0, \tag{3B.24}$$

односно

$$f_\mu(y^1, ..., y^{3N}, y^0) = 0, \quad y^0 = \tau(t). \tag{3B.25}$$

Функције f_μ су идеално глатке и регуларне у области везивања материјалних тачака.

Услов независности веза најпростије одражавају услови брзина на везама

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i}\dot{y}^i + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0}\dot{y}^0 = 0. \tag{3B.26}$$

Ове једначине напишимо, у циљу очевидности, у облику

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_\mu}{\partial y^1}\dot{y}^1 + \cdots + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^k}\dot{y}^k = \\ &= -\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial y^{k+1}}\dot{y}^{k+1} + \cdots + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^{3N}}\dot{y}^{3N} + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^0}\dot{y}^0\right). \end{aligned} \tag{3B.27}$$

Из овог, по брзинама $\dot{y}$ линеарног, система једначина могуће је одредити k брзина $\dot{y}^1, ..., \dot{y}^k$ помоћу осталих $3N - k + 1$ брзина $\dot{y}^{k+1}, ..., \dot{y}^{3N}, \dot{y}^0$, при услову да је детерминанта

$$\left\| \frac{\partial f_\mu}{\partial y^m} \right\|^k_k \ne 0 \quad (\mu, m = 1, ..., k) \tag{3B.28}$$

Много начина или краће *многообразни* избор скупова координата q^α, помоћу којих се одређује положај или конфигурација тачака система у тренутку времена, упућује да се скуп независних координата $q := (q^0, q^1, ..., q^n) \in M^{n+1}$ назове *конфигурациона многообразност.* Адекватно томе скуп координата q и брзина $\dot{q} = (\dot{q}^0, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n)^T$ називаћемо тангентном многообразношћу TM^{n+1}. Прамен свих вектора брзина у тачки q сагласно томе, означаваћемо $\boldsymbol{T}_q M^{n+1}$, што подразумева $n+1$ базних вектора $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}$ у свакој тачки на многообразности M^{n+1}. Дакле у даљем ћемо разматрати два скупа M^{n+1} и TM^{n+1} и прамен $\boldsymbol{T}_q M^{n+1}$ линеарних вектора. У циљу краћег писања уведимо следеће ознаке

$$\mathcal{N} := M^{n+1},\ M := M^n,$$
$$T\mathcal{N} := TM^{n+1},\ TM = TM^n,$$

те сагласно томе и $\boldsymbol{T}_q M$, $\boldsymbol{T}_q \mathcal{N}$.

При овом услову и наведеним особинама функција f_μ, могуће је, према теореми о имплицитним функцијама, из једначина (3В.25) одредити k зависних координата $y^1, ..., y^k$ помоћу осталих $3N-k+1$ координата $y^{k+1}, ..., y^{3N}, y^0$. Избор зависних и независних координата је произвољан уз посебан избор координата q^0, тако се свака координата $y^1, ..., y^{3N}$ понаособ може изразити у функцији $3N-k+1$ координата y. Како се према потреби везе (3В.25) могу изразити, као у (2.2), у криволинијским координатним системима, проширује се могућност избора независних координата. Означе ли се независне генералисане *координате* словима $q^0, q^1, ..., q^n$, произилази да се везе (3В.25) могу написати у параметарском облику

$$y^i = y^i(q^0, q^1, ..., q^n), \quad q^0 = \tau(t), \tag{3В.29}$$

а самим тим и

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q^0, q^1, ..., q^n). \tag{3В.30}$$

Услови брзине (3В.26) при том су замењени, сагласно дефиницији (1.1), релацијама (3А.37), тј.

$$\boldsymbol{v}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^0}\dot{q}^0 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^n}\dot{q}^n =: \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha. \tag{3В.31}$$

У таквој топологији принцип дејства је

$$\int_{t_0}^{t_1} [Q_\alpha \delta q^\alpha + \delta A(\mathcal{I})]\, dt = 0 \tag{3В.32}$$

где су

$$Q_\alpha = Y_i \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \quad i = 0, 1, ..., 3N, \quad \alpha = 0, 1, ..., n$$

генералисане силе.

Рад инерционих сила, за $m_\nu = const$, одређен је у (3Б.7), као негативна кинетичка енергија, те је, с обзиром на (3В.31) и (3Б.7)

$$\begin{aligned} A = -E_k = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \\ = -\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \\ = -\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(m_\nu, q)\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad \dot{q} \in T\mathcal{N}. \end{aligned} \tag{3В.33}$$

Тако релација принципа дејства (3B.32) има инваријантни облик (3B.8a) у генералисаним координатама

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k + Q_\alpha \delta q^\alpha)\, dt = 0, \quad q \in \mathcal{N}. \tag{3B.34}$$

Покажимо још да се релација (3B.16) своди на (3B.34). За помоћну координату y^0 поновно се узима $y^0 = \tau(\varkappa, t)$. Тада за случај веза (3B.24) израз (3B.16) у развијеном облику је

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta E_k + Y_i \delta y^i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i} \delta y^i + R_0 \delta y^0 \right) dt = 0, \tag{3B.35}$$

$(i = 1, ..., 3N)$.

Варијације једначина (3B.29) су

$$\delta y^i = \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha, \quad \delta y^0 = \delta q^0 \quad (\alpha = 0, 1, ..., n).$$

Заменом у (3B.35) следи

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta E_k + Y_i \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + R_0 \delta q^0 \right) dt = 0$$

односно (3B.34),

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k + Q_\alpha \delta q^\alpha)\, dt = 0, \tag{3B.36}$$

с обзиром да је $\frac{\partial f_\mu}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha \equiv 0$ и

$$Q_0 = R_0 + Y_i \frac{\partial y^i}{\partial q^0} = R_0 + Q_0^* \tag{3B.37}$$

као у (3A.57).

Кинетичка енергија је хомогена квадратна форма

$$E_k = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad (\alpha, \beta = 0, 1, ..., n). \tag{3B.38}$$

Следећи класични варијациони рачун, после варирања $\delta E_k = \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha$ и интегралења (3B.36), добија се

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha} + Q_\alpha \right) \delta q^\alpha dt = 0 \tag{3B.39}$$

То је увек задовољено за диференцијалне једначине кретања

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, ..., n),$$

и услове на крајевима

$$\delta q^\alpha(t_1) = 0, \quad \delta q^\alpha(t_0) = 0. \tag{3В.40}$$

Ове диференцијалне једначине, којих има $n+1$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial E_k}{\partial q^i} = Q_i, \quad i = 1, ..., n \tag{3В.40а}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^0} - \frac{\partial E_k}{\partial q^0} = Q_0 = Q_0^* + R_0, \tag{3В.40б}$$

своде се на диференцијалне једначине у развијеном облику, јер се показује да је кинетичку енергију лако саставити за познати инерциони тензор $a_{\alpha\beta}$.

Системима са непромењљивим везама код којих су све генералисане силе једнаке нули, очигледно одговара принцип најмањег дејства (3В.18), који се, са основе (3Б.5) може довести у сагласност са преипринципом постојања.

За системе са непромењљивим везама и потенцијалном енергијом E_p таквом да су активне силе

$$Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q^i}, \tag{3В.41}$$

једначина (3В.40б) не постоји, а једначине (3В.40а) се своде на

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (i = 1, ..., n). \tag{3В.42}$$

Оне су еквивалентне принципу (3В.20).

Дода ли се природном Лагранжијану

$$L = E_k - E_p(q^0, q^1, ..., q^n)$$

функција

$$\mathcal{P}(q^0) = -\int R_0(q^0)dq^0, \tag{3В.43}$$

која се јавља при везама (3В.23) или (3В.29), тј.

$$\mathcal{L} = E_k - E_p + \mathcal{P}, \tag{3В.44}$$

једначине (3B.4) се своде на

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{3B.45}$$

које су еквивалентне принципу

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0. \tag{3B.46}$$

Ова релација производи поред једначина(3B.42) још и $(n+1)$-ву једначину

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0} - \frac{\partial L}{\partial q^0} = R_0. \tag{3B.47}$$

Закључак 1. Принцип дејства омогућава да се кретање механичких система разматра помоћу функција енергије ако су одсутне непотенцијалне силе.

Принцип дејства на $T^*\mathcal{N}$

Под знаком $T^*\mathcal{N}$ овде се подразумевају $2n+2$ димензионе многообразности које чине $n+1$ генералисаних координата $q = (q^0, q^1, ..., q^n)$ и $n+1$ генералисаних импулса $p = (p_0, p_1, ..., p_n)$, значења (1.25), тј. (3.39); $p\&q \in T^*\mathcal{N}$. Речником у којем се $T\mathcal{N}$ називају тангентним многообразностима овај симбол $T^*\mathcal{N}$ се назива *котангентним многообразностима*. У литератури ту и тамо присутни су називи: "фазни простор", "простор стања", "Хамилтонове променљиве", "котангентни простори". Ако се пође од тога да стање кретања карактеришу координате положаја тачке q и координате импулса p онда би се овде могло рећи да је $T^*\mathcal{N}$ "*стање кретања система*" или "*многообразност стања*". Како је $\mathcal{N} := M^{n+1}$ за $T^*\mathcal{N}$ се може казати *проширена многообразност* ако је потребно истаћи разлику од конфигурационе многообразности M^n и њој одговарајуће котангентне многообразности T^*M.

Знатно је битније од назива да се схвати и прихвати да су $p_0, p_1, ..., p_n$ импулси чија је суштина одређена дефиницијом 2, тј. изведена формулама (1.25). При том, као што се види из (3A.39) и (3A.42), постоје узајамно линеарна комбинација између генералисаних импулса p_α и генералисаних брзина q^α,

$$p_\alpha = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta}p_\beta. \tag{3B.48}$$

Даљи поступак у разматрању принципа дејства на $T^*\mathcal{N}$ састоји се просто у замени брзина $\dot{q}^\alpha$ и разматраним релацијама помоћу генералисаних импулса p_β.

Дејство (3В.1) управо је дефинисано помоћу импулса, као што се види у (3В.3),

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p_\alpha dq^\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p_\alpha \dot{q}^\alpha dt. \tag{3B.49}$$

Кинетичка енергија

$$E_k = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = \frac{1}{2}p_\beta\dot{q}^\beta = \frac{1}{2}a^{\beta\gamma}p_\beta p_\gamma. \tag{3B.49}$$

Дејство по Хамилтону (3В.22)

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t}(E_k - E_p)dt = \\ &= \int_{t_0}^{t}(2E_k - (E_k + E_p))dt = \\ &= \int_{t_0}^{t}(p_\alpha\dot{q}^\alpha - H)dt\end{aligned} \tag{3B.50}$$

где је

$$H := E_k + E_p = \frac{1}{2}a^{\beta\gamma}p_\beta p_\gamma + E_p(q,t). \tag{3B.51}$$

Раздвојимо генералисане силе Q_α на потецијалне и непотенцијалне P_α тако да је

$$Q_\alpha = -\frac{\partial E_p}{\partial q^\alpha} + P_\alpha, \tag{3B.52}$$

и заменимо у (3В.36). Добива се

$$\int_{t_0}^{t}\left[\delta\left(p_\alpha\dot{q}^\alpha - H\right) + P_\alpha\delta q^\alpha\right]dt = 0. \tag{3B.53}$$

Даље је

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(p_\alpha\dot{q}^\alpha - H\right)dt = \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\delta p_\alpha\dot{q}^\alpha + p_\alpha\delta\dot{q}^\alpha - \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha\right)\right]dt = \\ &= p_\alpha\delta q^a|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\right)\delta q^\alpha\right]dt.\end{aligned} \tag{3B.54}$$

Заменом у (3B.53) следи

$$p_\alpha \delta q^a|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(P_\alpha - \dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right] dt = 0. \tag{3B.55}$$

Ако се има у виду формула (3B.51) види се да је $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = a^{\alpha\beta} p_\beta$, те због (3B.48) је

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_a}. \tag{3B.56}$$

Због тога (3B.55) се своди на

$$p_\alpha \delta q^\alpha|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(P_\alpha - \dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha dt = 0, \tag{3B.57}$$

што је еквивалентно релацији (3B.39). Уз услове (3B.41) релација (3B.56) је задовољена ако је

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + P_\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, ..., n) \tag{3B.58}$$

а то су диференцијалне једначине кретања система које заједно са трансформацијама (3B.56) чине систем од $2n+2$ диференцијалних једначина

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + P_i, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3B.59}$$

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial q^0} + P_0, \quad \dot{q}^0 = \frac{\partial H}{\partial p_0} \tag{3B.60}$$

где је, као и у (3B.40б), $P_0 = P_0^* + R_0$.

За случај $P_i = 0$ и $P_0^* = 0$ функција (3B.51) се може проширити на потпуну механичку енергију

$$E = H + \mathcal{P}, \tag{3B.61}$$

па систем једначина (3B.56) и (3B.58), као и следујуће (3B.59) и (3B.60) могу се записати у канонском облику

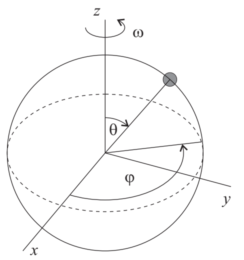
$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha}, \\ \dot{q}^\alpha &= \frac{\partial E}{\partial p_\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad \alpha = 0, 1, ..., n. \tag{3B.62}$$

За случај непромењивих веза система при којима не постоји реономна координата q^0 ишчезавају једначине (3В.60), а у једначинама (3В.62) индекси иду од 1 до n.

Закључак 2. - Принцип дејства омогућава директно разматрање кретања механичког система на $T^*\mathcal{N}$, као и T^*M, релацијама истог типа.

На принципу дејства развијена је аналитичка механика, која је позната под називом Лагранжова и Хамилтонова механика.

Пример 12. Кретање материјалне тачке масе m по вертикалној задржавајућој глаткој кружној линији полупречника r, која се обрће угловном брзином ω око централне вертикалне осе.



Слика 4

Нека су $y_1, y_2, y_3) \in E^3$ Декартове координате, које полазе од центра кружнице O, а оса Oy_3 је усмерена вертикално навише. Уведимо и сферни систем координата: ρ, φ, θ и поставимо га тако да раван кружнице и раван $y_2 = 0$ заклапају угао φ.

Из задатка произилази да је материјална тачка везана двема везама и то

$$f_1 = \rho - r = 0, \quad f_2 = \varphi - \omega t = 0.$$

Означимо: $q := \theta$, $q_0 = \omega t$, а одговарајуће импулсе p и p_0. Многообразност M је кружница, а $\mathcal{N}$ је сфера.

Кинетичка енергија има облике

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m}{2}\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right) = \\ &= \frac{mr^2}{2}\left(\dot{q}^2 + \dot{q}_0^2 \sin^2 q\right) = \frac{1}{2mr^2}\left(p^2 + \frac{p_0^2}{\sin^2 q}\right), \end{aligned}$$

јер је $p = mr^2\dot{q}$ и $p_0 = mr^2\dot{q}_0 \sin^2 q$.

Потенцијална енергија је

$$E_p = mgr(1 + \cos q).$$

Функција H, према томе је

$$H = \frac{1}{2mr^2}\left(p^2 + \frac{p_0^2}{\sin^2 q}\right) + mgr(1+\cos q).$$

Диференцијалне једначине кретања (3В.59) и (3В.60) су

$$\dot{p} = \frac{p_0^2}{2mr^2}\frac{\cos q}{\sin^3 q} - mgr\sin q, \qquad \dot{q} = \frac{p}{mr^2},$$
$$\dot{p}_0 = R_0, \qquad \dot{q}_0 = \frac{p_0}{mr^2\sin^2 q}.$$

3Г. Принцип принуде

У стручној литератури насловљени принцип назива се Гаусов принцип иако га сам аутор није називао принципом. Аналитичку форму Гаусовог принципа разматрали су многи познати учењаци класичне механике*. Не упуштајући се у историјску анализу, овде се прво одређује појам *принуде*.

Дефиниција 7. - Принуда

Принуда је полузбир производа маса m_ν и квадрата разлике убрзања

$$Z \overset{def}{=} \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} - \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu}\right)^2. \tag{3Г.1}$$

Претходна формула за принуду може бити написана у облику

$$Z = \sum m_\nu a_\nu^2 \tag{3Г.2}$$

где су

$$\boldsymbol{a}_\nu := \frac{\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu + \boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu}{m_\nu} \tag{3Г.3}$$

убрзања ν-тих материјалних тачака које изазивају резултантне силе $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu$.

Формуле (1.37), (2.12), (2.15), (2.17) показују да су $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu$ функције вектора положаја $\boldsymbol{r}$, брзине $\dot{\boldsymbol{r}}$ и убрзања $\ddot{\boldsymbol{r}}$. Како се у коначним једначинама кретања вектор положаја увек јављаа као функција параметара $\varkappa$ и времена то следи да и функција Z посредно зависи од тих параметара и времена, тј.

$$Z = Z(a(\varkappa, t)). \tag{3Г.4}$$

*Види на пример: Полак А. С. Примечания, Вариационные принципы механики, Сборник статей, Изд. "Мир" Москва, 1959, стр. 888-891.

Физичка димензија принуде је

$$\dim Z = \mathrm{M\,L^2\,T^{-4}}\,. \tag{3Г.5}$$

Функција Z задовољава препринцип постојања онолико колико постоје маса, растојање и време, или онолико колико закони динамике и дефиниција (1.37) утврђују постојање сила. Препринцип одређености је задовољен ониликом тачношћу колико су тачно измерени параметри $\varkappa$ у функцији (3Г.3). С обзиром да је Z, као што се види из (3Г.1) хомогена квадратна форма убрзања не може се доводити у сумњу инваријантност принуде при било којим регуларним координатним трансформацијама. Према томе нема сметње ни са становишта препринципа инваријантности. Тешкоће, које се у том смислу јављају треба тражити у математичком умећу. Имају ли се у виду бар метрике и координатни системи разматрани уз дефиниције 1 и 3 функција Z се може написати у облицима

$$\begin{aligned}2Z &= \sum_{\nu} m_\nu \boldsymbol{a}_\nu \cdot \boldsymbol{a}_\nu = \\ &= \sum_{\nu} m_\nu a^k_\nu \boldsymbol{e}_k \cdot a^l_\nu \boldsymbol{e}_l = \\ &= \sum_{\nu}^{N} m_\nu \delta_{kl} a^k_\nu a^l_\nu = a_{ij} a^i a^j.\end{aligned} \tag{3Г.6}$$

$k, l = 1, 2, 3,\ \ i, j = 3\nu - 2, 3\nu - 1, 3\nu,\ \ m_{3\nu} = m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1}.$

У односу на природни триједар силе $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu$ могу се разлагати, као на пример (1.40а)

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu = \mathcal{F}^\tau_\nu \boldsymbol{\tau} + \mathcal{F}^n_\nu \boldsymbol{n} + \mathcal{F}^b_\nu \boldsymbol{b} \tag{3Г.7}$$

где узимамо да су $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ ортогонални јединични вектори којим се усмерава тенгента, нормала и бинормала. Тако се принуда опет јавља као збир квадрата

$$2Z = \mathcal{F}^2_\tau + \mathcal{F}^2_n + \mathcal{F}^2_b \tag{3Г.8}$$

где су

$$\mathcal{F}^2_\tau = \sum_\nu m_\nu \left(\mathcal{F}^\tau_\nu\right)^2,\ \ \mathcal{F}^2_n = \sum_\nu m_\nu \left(\mathcal{F}^n_\nu\right)^2,$$

$$\mathcal{F}^2_b = \sum_\nu m_\nu \left(\mathcal{F}^b_\nu\right)^2.$$

Аналогно томе сваки ν-ти вектор $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu$ може се разложити помоћу тангентног прамена $\boldsymbol{T}_\nu M$, $\partial \boldsymbol{r}/\partial q^\alpha \in \boldsymbol{T}_\nu M$ и одговарајућих вектора $\boldsymbol{n}_{(\nu)\alpha}$ управних на $\boldsymbol{T}_\nu M$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu = \mathcal{F}^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} + \widetilde{\mathcal{N}}^\alpha \boldsymbol{n}_{\nu\alpha}. \tag{3Г.9}$$

Заменом у (3Г.6), после скаларног множења при којем је $\partial \boldsymbol{r}_\nu / \partial q^\alpha \cdot \boldsymbol{n}_{\nu\alpha} = 0$, и узимањем у обзир (3Г.3), добива се

$$2Z = a_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta + b_{\alpha\beta} \widetilde{\mathcal{N}}^\alpha \widetilde{\mathcal{N}}^\beta \tag{3Г.10}$$

где су $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ коефицијенти наведених квадратних форми.

Сви наведени изрази за принуду јављају се хомогеним квадратним формама координата вектора $\boldsymbol{a}$ који има димензију убрзања. За примену у механици, поред истицања констатације да је Z хомогена квадратна форма од $\boldsymbol{a}$ и да се присуством $\boldsymbol{a}$ јавља функцијом параметра $\varkappa$ и времена, неопходно је дефинисану принуду (3Г.1) довести на јасније координатне облике. У том циљу разликоваћемо три описа и то помоћу

1. ортонормираног праволинијског координатног система $(y, \boldsymbol{e})$,
2. криволинијског координатног система $(x, \boldsymbol{g})$ и
3. конфигурационих многообразности M.

У сва три случаја се сматра да је $\boldsymbol{F}_\nu$ у формули (3Г.1) резултантни вектор свих сила које дејствују у ν-тој тачки, изузев силе инерције $\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu = -m_\nu \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt}$, која је, дефиницијом 4 посебно издвојена.

1. Принуда у координатном систему $(y, \boldsymbol{e})$

У односу на координатни систем (y, e) вектори убрзања су $\boldsymbol{a}_\nu = \ddot{y}^k_\nu \boldsymbol{e}_k$ а силе $\boldsymbol{F}_\nu = Y^l_\nu \boldsymbol{e}_l$. $(k, l = 1, 2, 3;\ \nu = 1, \ldots, N)$.

Заменом у (3Г.1) следи:

$$\begin{aligned} 2Z &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\ddot{y}^k_\nu \boldsymbol{e}_k - \frac{Y^k_\nu \boldsymbol{e}_k}{m_\nu} \right) \cdot \left(\ddot{y}^l_\nu \boldsymbol{e}_l - \frac{Y^l_\nu \boldsymbol{e}_l}{m_\nu} \right) = \\ &= \sum_{\nu=1} m_\nu \delta_{kl} \left(\ddot{y}^k_\nu \ddot{y}^l_\nu - 2 \frac{\ddot{y}^k_\nu Y^l_\nu}{m_\nu} + \frac{Y^k_\nu Y^l_\nu}{m_\nu \cdot m_\nu} \right). \end{aligned} \tag{3Г.11}$$

Ако се уведу ознаке: $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}$; $i, j = 3\nu-2, 3\nu-1, 3\nu = 1, 2, \ldots, 3N$, као и $\bar{Y}^i_\nu := \frac{Y^i_\nu}{m_\nu}$, добива се

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} \bar{\delta}_{ij} \left(\ddot{y}^i - \bar{Y}^i \right) \left(\ddot{y}^j - \bar{Y}^j \right) = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\delta}_{ij} \ddot{y}^i \ddot{y}^j - \bar{\delta}_{ij} \ddot{y}^i \bar{Y}^j + \frac{1}{2} \bar{\delta}_{ij} \bar{Y}^i \bar{Y}^j, \end{aligned} \tag{3Г.12}$$

где је $\bar{\delta}_{ij} = m_i \delta_{ij}$.

2. Принуда у криволиијским координатним системима

У односу на криволинијске координатне системе који су у једнозначној кореспонеднцијии са $(y, \boldsymbol{e})$, тј.

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3), \quad \boldsymbol{e}_k = \frac{\partial y^l}{\partial x^k}\boldsymbol{g}_l, \quad \left|\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\right| \neq 0.$$

и њиховом простом заменом у (3Г.11) или (3Г.12) добили би

$$Z = \frac{1}{2}a_{ij}\left(\frac{D\dot{x}^i}{dt}\frac{D\dot{x}^j}{dt} - 2\bar{X}^j\frac{D\dot{x}^i}{dt} + \bar{X}^i\bar{X}^j\right), \tag{3Г.13}$$

јер је

$$\ddot{y}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{D\dot{x}^j}{dt}, \quad a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \delta_{kl}\frac{\partial y^k_\nu}{\partial x^i}\frac{\partial y^l_\nu}{\partial x^j}.$$

У циљу бољег разумевања појединости који ће следити изведимо (3Г.13) директно из дефиниције (3Г.1). Према (1.30),

$$\frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} = \frac{D\dot{x}^k_\nu}{dt}\boldsymbol{g}_{\nu k}, \quad \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu} = \bar{X}^k\boldsymbol{g}_{\nu k}$$

Заменом у релацији (3Г.1) следи

$$\begin{aligned} 2Z &= \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\frac{D\dot{x}^k_\nu}{dt} - \bar{X}^k_\nu\right)\boldsymbol{g}_{\nu k}\cdot\left(\frac{D\dot{x}^l_\nu}{dt} - \bar{X}^l_\nu\right)\boldsymbol{g}_{\nu l} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{g}_{\nu k}\cdot\boldsymbol{g}_{\nu l}\left(\frac{D\dot{x}^k_\nu}{dt} - \bar{X}^k_\nu\right)\left(\frac{D\dot{x}^l_\nu}{dt} - \bar{X}^l_\nu\right), \end{aligned}$$

или ако се употребе индекси, као од (3Г.11) до (3Г.12) добива се (3Г.13), где је

$$a_{ij} := \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{g}_{\nu i}\cdot\boldsymbol{g}_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^j}.$$

Дакле, ако се посматра кретање система од N материјалних тачака у којем се везе апстрахују, те свака тачка посматра као "слободна" у којој се сваки вектор може разложити на три компоненте, принуда Z се описује формама од (3Г.12) или (3Г.13) од по $3N$ квадратних сабирака убрзања $(\ddot{y} - \bar{Y})$ или $\left(\frac{D\dot{x}}{dt} - \bar{X}\right)$.

3. Принуда у генералисаним системима координата

У односу на независне генералисане координате $(q^1, \dots, q^n) \in M^n$, $n \leq 3N$, убрзање

$$\boldsymbol{a}_\nu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\ddot{q}^\alpha \tag{3Г.14}$$

има сложену координатну структуру. Тангентни прамен $\boldsymbol{T}_\nu M$ вектора на бази $\boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha} := \partial \boldsymbol{r}_\nu / \partial q^\alpha$, није довољан да би се помоћу њега разложио вектор убрзања. Вектор

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{(\nu)\gamma} + b_{(\nu)\alpha\beta}\boldsymbol{n}_{(\nu)} \tag{3Г.15}$$

не припада у општем случају у целости прамену $\boldsymbol{T}_\nu M$, него поседује у свакој ν-тој тачки и компоненту управну на $\boldsymbol{T}_\nu M$; $\boldsymbol{g}_{(\nu)} \perp \boldsymbol{n}_{(\nu)}$. Разложимо и вектор $\boldsymbol{n}_\nu$ као $\boldsymbol{n}_\nu = \varkappa^\gamma_{(\nu)}\boldsymbol{n}(\nu)\gamma$.

Заменом (3Г.15) у (3Г.14) добива се

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\nu &= \left(\ddot{q}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} + \\ &\quad + b_{(\nu)\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\varkappa^\gamma_{(\nu)}\boldsymbol{n}_{(\nu)\gamma} = \\ &= \frac{D\dot{q}^\gamma}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} + b_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\varkappa^\gamma_{(\nu)}\boldsymbol{n}_{(\nu)\gamma}. \end{aligned} \tag{3Г.16}$$

На тој бази $\boldsymbol{g}_{(\nu)\gamma}$ и $\boldsymbol{n}_{(\nu)}$ разложимо и $\boldsymbol{F}_\nu / m_\nu$,

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu} &= Q^\gamma\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} + \mathcal{F}_N\boldsymbol{n}_\nu = \\ &= Q^\gamma\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} + \mathcal{F}_N\varkappa^\gamma_{(\nu)}\boldsymbol{n}_{(\nu)\gamma}. \end{aligned} \tag{3Г.17}$$

То омогућава да се принуда напише у координатном облику. Заиста, заменом (3Г.17) и (3Г.16) у (3Г.1) следи:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left[\left(\frac{D\dot{q}^\gamma}{dt} - Q^\gamma\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} + \right. \\ &\qquad \left. + \left(b_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - \mathcal{F}_N\right)\varkappa^\gamma_{(\nu)}\boldsymbol{n}_{(\nu)\gamma}\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\left[m_\nu\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\delta}\left(\frac{D\dot{q}^\gamma}{dt} - Q^\gamma\right)\left(\frac{D\dot{q}^\delta}{dt} - Q^\delta\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\varkappa^\gamma_{(\nu)}\varkappa^\delta_{(\nu)}\boldsymbol{n}_{(\nu)\gamma}\cdot\boldsymbol{n}_{(\nu)\delta}\left(b_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - \mathcal{F}_N\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}a_{\gamma\delta}\left(\frac{D\dot{q}^\gamma}{dt} - Q^\gamma\right)\left(\frac{D\dot{q}^\delta}{dt} - Q^\delta\right) + \frac{1}{2}a_N^2, \end{aligned} \tag{3Г.18}$$

где је

$$a_{\gamma\delta} = \sum m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\delta} \tag{3Г.19}$$

инерциони тензор,

$$a_N^2 = \varkappa^2 \left(b_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \mathcal{F}_N \right)^2, \tag{3Г.20}$$

а

$$\begin{aligned} \varkappa^2 &= \sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)} \varkappa_{(\nu)}^{\gamma} \varkappa_{(\nu)}^{\delta} \boldsymbol{n}_{(\nu)\gamma} \cdot \boldsymbol{n}_{(\nu)\delta} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)} \varkappa_{(\nu)}^{\gamma} \varkappa_{(\nu)}^{\delta} \delta_{(\nu)\gamma\delta} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)} \varkappa_{(\nu)}^{2}. \end{aligned} \tag{3Г.21}$$

Упоређивањем са (3Г.13) и (3Г.12) видљива је формална страна принуде

$$\begin{aligned} Z_M &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \left(\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} - Q^\alpha \right) \left(\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} - Q^\beta \right) = \\ &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} \frac{D\dot{q}^\beta}{dt} - Q_\beta \frac{D\dot{q}^\beta}{dt} + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} Q^\alpha Q^\beta. \end{aligned} \tag{3Г.22}$$

То и јесте *принуда на многообразности* M, те као таква је довољна за разматрање кретања онако, како се то кретање описује помоћу енергије (3В.38) на M^n, и M^{n+1}. Принуда (3Г.18) пружа и квалитет и квантитет више

$$Z_N = \frac{1}{2} a_N^2 = \frac{\varkappa^2}{2} \left(b_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \mathcal{F}_N \right)^2, \tag{3Г.23}$$

који се може тумачити као принуда кретања на TM и TM^{n+1}.

Принуда $Z = Z_M + Z_{\mathcal{N}}$ је еквивалентна принудама (3Г.13) и (3Г.12). Али ако се жели описивати само на конфигурационој многообразности довољно је размотрити одговарајућу функцију (3Г.22). Због тешкоћа одређивања чинилаца $\varkappa_\nu$ у изразу (3Г.21) ми ћемо за одређене облике веза прибећи одређивању принуде $Z_{\mathcal{N}}$ на нешто приступачнији начин.

Формулација принципа принуде

Принуда на стварном кретању је најмања.

Другим речима то значи да функција (3Г.4) има најмању вредност при диференцијално малим променама параметра $\varkappa$. Математичка релација овог принципа је веома проста и то

$$\delta Z = 0, \tag{3Г.24}$$

или с обзиром на (3Г.4) и (3Г.2), а слично (3Б.28),

$$\delta Z = \sum_{\nu} \frac{\partial Z}{\partial a_\nu} \delta a_\nu = 0. \tag{3Г.25}$$

Према овоме, прицип принуде може да се формулише и следећом реченицом:

Прва варијација принуде по убрзањима једнака је нули.

Релација (3Г.25) је задовољена за

$$\frac{\partial Z}{\partial a_\nu} = 0. \tag{3Г.26}$$

То исто следи из исказа "принуда је најмања". Заиста, Z је, као што се види у (3Г.2), позитивно дефинитна квадратна координатна форма, која је најмања и једнака нули само ако су $a_\nu = 0$ за свако ν. То исто се добија из (3Г.26). Важи и обратно за сва $a_\nu = 0 \longrightarrow Z = 0$.

На овом принципу механике, као и на претходна три, могуће је развити целу теорију о кретању система материјалних тачака. Покажимо то релацијама, препознатљивим из претходног градива других принципа.

Релација принципа у односу на координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$

а) Посматрамо у односу на ортонормирани координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$ кретање N материјалних тачака маса m_ν под дејством активних сила $\boldsymbol{F}_\nu$ и k геометријски идеално глатких задржавајућих веза

$$f_\mu(y^1_\nu, y^2_\nu, y^3_\nu) = 0, \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{3G.27}$$

Принуда има облик (3Г.11).

Убрзања, која фигуришу у изразу за принуду, условљена са једначинама

$$\ddot{f}_\mu = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y^k_\nu \partial y^l_\nu} \dot{y}^k_\nu \dot{y}^l_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial y^k_\nu} \ddot{y}^k_\nu \right) = 0. \tag{3Г.27a}$$

Сагласно принципу прва варијација по убрзањима $\ddot{y}^k_\nu$ принуде (3Г.11) је

$$\delta Z = \sum_{\nu}^{N} \frac{\partial Z}{\partial \ddot{y}^k_\nu} \delta \ddot{y}^k_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \delta_{kl} \left(\ddot{y}^l_\nu - \frac{Y^l_\nu}{m_\nu} \right) \delta \ddot{y}^k_\nu = 0, \tag{3Г.28}$$

а одговарајуће варијације (3Г.27a) су

$$\delta \ddot{f}_\mu = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\mu}{\partial y^k_\nu} \delta \ddot{y}^k_\nu = 0. \tag{3Г.29}$$

Увођењем k неодређених множитеља веза λ_μ следи

$$\delta Z = \sum_{\nu=1}^{N} \delta_{kl} \left(m_\nu \ddot{y}_\nu^l - Y_\nu^l - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_{\nu l}} \right) \delta \ddot{y}_\nu^k = 0. \tag{3Г.30}$$

То је еквивалентно једначинама (3А.25) или (3А.26).

Релацију (3Г.30) могуће је краће записати у облику

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial Z}{\partial \ddot{y}_\nu^k} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu^k} \right) \delta \ddot{y}_\nu^k = 0. \tag{3Г.31}$$

Према томе диференцијалне једначине посматраног система су

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{y}_\nu^k} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu^k} = 0. \tag{3Г.32}$$

Заједно са k задатих веза $f_\mu = 0$ су потребне и довољне за решење задатка.

До истог резултата би се дошло да су задате везе апстраховане реакцијама веза (2.9), (3.22). У том случају принуда би била

$$Z^* = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} - \frac{\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu}{m_\nu} \right)^2, \tag{3Г.33}$$

а релација (3Г.3)

$$\boldsymbol{a}_\nu = \frac{\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu + \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu}{m_\nu}$$

Једначине (3Г.26) би се свеле на (3Г.32), при чему би се водило рачуна која је разлика између Z и Z^*.

б) За механичке системе који, поред услова из а) садрже и **неинтеграбилне (нехолономне) диференцијалне везе**

$$\varphi_\sigma(y_\nu, \dot{y}_\nu) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, l \leq 3N - k, \tag{3Г.34}$$

здатак се може посматрати као и у (3Г.33), при чему су потребна додатна знања о реакцијама веза $\boldsymbol{R}_\nu(\varphi) = \sum_{\sigma=1}^{l} \boldsymbol{R}_{\nu\mu}(\varphi)$, а може као и у (3Г.31).

Нека је, као и у претходном разматрању функција принуде (3Г.11), варијација услова убрзања биномних веза (3Г.29).

Услови убрзања веза $\varphi_\sigma = 0$ су

$$\dot{\varphi}_\sigma = \sum_{\nu=1}^{N} (\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y_\nu^k} \dot{y}_\nu^k + \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{y}_\nu^k} \ddot{y}_\nu^k) = 0, \tag{3Г.35}$$

а одговарајуће варијације

$$\delta \dot{\varphi}_\sigma = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \dot{\varphi}_\sigma}{\partial \ddot{y}_\nu^k} \delta \ddot{y}_\nu^k = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{y}_\nu^k} \delta \ddot{y}_\nu^k = 0. \tag{3Г.36}$$

Следећи претходни метод неодређених множилаца $\bar{\lambda}_\sigma$ добиће се проширена релација (3Г.31) и то

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial Z}{\partial \ddot{y}_\nu^k} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu^k} - \sum_{\sigma=1}^{l} \bar{\lambda}_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{y}_\nu^k} \right) \delta \ddot{y}_\nu^k = 0. \tag{3Г.37}$$

Криволинијски координатни систем $(x, \boldsymbol{g})$

Пре свега поново истакнимо да је наш полазни или базни координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$ за који важе једначине (1.12). Поновимо и то да координате $y_\nu^1, y_\nu^2, y_\nu^3$ ν-те тачке могу се заменити координатама $x_\nu^1, x_\nu^2, x_\nu^3$ неког другог криволинисјког координатног система. Због мноштва могућих координатних система рећи ћемо да тих $3N$ координата $x = (x_\nu^1, x_\nu^2, x_\nu^3) = (x^1, x^2, \ldots, x^{3N})$ образују конфигурациону многообразност M^{3N}; сваку координату x_ν^k усмерава координатни вектор $\boldsymbol{g}_{(\nu)k}(x)$ чије праменове у појединим тачкама означимо $\boldsymbol{T}_x M^{3N}$.

Заманом $y = y(x)$ у $Z(\ddot{y})$ принуда система од N материјалних тачака је сведена на формуле (3Г.13). Истом заменом веза $f_\mu(y) = 0$ се трансформише на инваријантни облик

$$f_\mu(y)_{y=y(x)} = f_\mu(x_\nu^1, x_\nu^2, x_\nu^3) = 0 \tag{3Г.37a}$$

а релације (3Г.27a), с обзиром на (1.30) и (1.32), на облик

$$\ddot{f}_\mu = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y_\nu^k \partial y_\nu^l} \frac{\partial y_\nu^k}{\partial x_\nu^r} \frac{\partial y_\nu^l}{\partial x_\nu^s} \dot{x}_\nu^r \dot{x}_\nu^s + \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu^k} \frac{\partial y_\nu^k}{\partial x_\nu^r} \frac{D\dot{x}^r}{dt} \right) = 0,$$

или помоћу измењених индекса

$$\ddot{f}_\mu = A_{(\mu)ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} \frac{D\dot{x}^i}{dt} = 0. \tag{3Г.38}$$

Варијација по убрзањима је

$$\delta\ddot{f}_\mu = \frac{\partial \ddot{f}_\mu}{\partial a^i}\delta a^i = \frac{\partial \ddot{f}_\mu}{\partial a^i}\delta\frac{D\dot{x}^i}{dt} = 0. \tag{3Г.39}$$

Ове релације су еквивалентне релацијама (3Г.29), јер је

$$\delta\ddot{y}^j = \delta\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{D\dot{x}^i}{dt}\right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\delta\frac{D\dot{x}^i}{dt} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\delta a^i.$$

У циљу елиминисања зависних варијација убрзања из једначина (3Г.39) искористимо неодређене множиоце λ_μ као у (3Б.51) до (3Б.54):

Варијација принуде (3Г.13) по убрзањима је

$$\frac{\partial Z}{\partial a^i}\delta a^i = g_{ij}\left(\frac{D\dot{x}^j}{dt} - \bar{X}^j\right)\delta\frac{D\dot{x}^i}{dt} = 0, \tag{3Г.40}$$

$$\left(g_{ij}\frac{D\dot{x}^j}{dt} - X_i - \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}\right)\delta\frac{D\dot{x}^i}{dt} = 0, \tag{3Г.41}$$

или

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial a^i} - \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i}\right)\delta a^i = 0. \tag{3Г.42}$$

Поглед на релације (3А.27) и (3Г.41) упућује на закључак да се диференцијалне једначине кретања (3Г.32) могу написати у криволинијском координатном систему у истом облику

$$\frac{\partial Z}{\partial a^i} - \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} = 0 \tag{3Г.43}$$

где су $a^i = D\dot{x}^i/dt$ координате убрзања материјалних тачака.

При дејству нехолономних веза (3Г.34) поред веза (3Г.37), потребно је у једначине веза и услове убрзања (3Г.35) или њихову варијацију (3Г.36) заменти $y = y(x)$, као што следи

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial\dot{y}^k_\nu}\frac{\partial y^k_\nu}{\partial x^l_\nu}\delta\frac{D\dot{x}^l_\nu}{dt} &= \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial\dot{y}^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\delta\frac{D\dot{x}^i}{dt} = \\ &= b_{\sigma i}\delta\left(\frac{D\dot{x}^i}{dt}\right) = b_{\sigma i}\delta a^i = 0.\end{aligned} \tag{3Г.44}$$

Множењем са $\bar{\lambda}_\sigma$, сабирањем по σ и изједначавањем са (3Г.42) добива се

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial a^i} - \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} - \sum_{\sigma=1}^{l}\bar{\lambda}_\sigma b_{\sigma i}\right)\delta a^i = 0. \tag{3Г.45}$$

Та релација је увек задовољена за кретање чије су следеће диференцијалне једначине

$$\frac{\partial Z}{\partial a^i} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} + \sum_{\sigma=1}^{l} \bar{\lambda}_\sigma b_{\sigma i}. \tag{3Г.46}$$

Принцип принуде у независним генералисаним системима координата

У односу на генералисане независне координате принуда (3Г.1) сведена је на облик (3Г.18), тј.

$$Z = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \left(a^\alpha - Q^\alpha\right)\left(a^\beta - Q^\beta\right) + \frac{1}{2} a_N^2, \tag{3Г.47}$$

где су: $a_{\alpha\beta}(m, q)$ - инерциони тензори на M, a^α - координате вектора убрзања, Q^α - генералисане контраваријантне координате сила, а a_N^2 је двострука принуда Z_N одређена изразом (3Г.20); индекси означавају редне бројеве генералисаних координата.

За описивање кретања на многообразностима: M^n, M^{n+1}; TM^n и TM^{n+1}, као што то описује принцип рада (3Б.92) или принцип дејства (3В.34) довољно је посматрати принуду на многообразностима (3Г.22), тј.

$$\begin{aligned} Z_M &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \left(a^\alpha - Q^\alpha\right)\left(a^\beta - Q^\beta\right) = \\ &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta - a_{\alpha\beta} a^\alpha Q^\beta + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} Q^\alpha Q^\beta. \end{aligned} \tag{3Г.48}$$

где индекси иду од 1 до n ако су геометријске везе непромењиве, а од 0, 1, ..., n ако су везе експлицитно зависне од времена.

Закон принуде је овде једноставан

$$\delta Z_M = \frac{\partial Z_M}{\partial a^\alpha} \delta a^\alpha = a_{\alpha\beta}(a^\beta - Q^\beta) \delta a^\alpha = 0. \tag{3Г.49}$$

С обзиром да су све варијације δa^α независне, коефицијенти уз δa^α су једнаки нули, тј:

$$\frac{\partial Z_M}{\partial a^\alpha} = 0$$

или

$$a_{\alpha\beta}(a^\beta - Q^\beta) = a_{\alpha\beta} \frac{D\dot{q}^\beta}{dt} - Q_\alpha = 0, \tag{3Г.50}$$

а ово јесу диференцијалне једначине кретања система (3А.56). Према томе, принцип принуде производи нов облик диференцијалних једначина кретања холономних система на $T\mathcal{M}$ посредством принуде

$$\frac{\partial Z}{\partial a^\alpha} = 0. \tag{3Г.51}$$

За системе са везама (3Г.34) за овај принцип битни су ограничења убрзања условљена једначинама (3Г.35), те је за примену принципа (3Г.49) потребно у једначине (3Г.35) заменити $y^i = y^i(q)$ помоћу генералисаних независних координата q^α. Дакле

$$\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial y^i|_{y(q)}}\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial\dot{y}^i|_{y(q)}}\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}a^\alpha = 0.$$

Како је битан израз са убрзањима, ове једначине напишимо у облику

$$\Phi_\sigma(q,\dot{q}) + C_{\sigma\alpha}a^\alpha = 0 \tag{3Г.52}$$

где смо увели ознаке

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma &:= \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha,\\ C_{\sigma\alpha} &= \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial\dot{y}^i|_{y(q)}}\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}.\end{aligned} \tag{3Г.53}$$

Према томе варијација (3Г.52) по варијацијама убрзања је

$$C_{\sigma\alpha}\delta a^\alpha = 0, \quad \sigma = 1,\dots,l. \tag{3Г.54}$$

Исте варијације убрзања фигуришу у једначини (3Г.49), као израз принципа принуде. Зависне варијације из (3Г.52) елеминишемо на два начина и то:

1. посредством неодређених множилаца веза λ_σ,
2. заменом зависних варијација из (3Г.54) у (3Г.52).

Методом неодређених множилаца једначине (3Г.54) и (3Г.49) сводимо на

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial a^\alpha} - \sum_{\sigma=1}^{l}\lambda_\sigma C_{\sigma\alpha}\right)\delta a^\alpha = 0. \tag{3Г.55}$$

У том случају једначине кретања са десне стране, уместо нуле, добивају генералисане реакције

$$R_\alpha = \sum_{\sigma=1}^{l}\lambda_\sigma C_{\sigma\alpha}, \tag{3Г.56}$$

па заједно са l једначине (3Г.52) омогућавају решавање посматраног проблема.

Метода замене зависних помоћу независних варијација убрзања у суштини није компликованија. Једначине (3Г.54) развијмо, у циљу веће јасности, као што следи

$$\begin{aligned}C_{10}\delta a^0 + C_{11}\delta a^1 + \cdots + C_{1k}\delta a^k &= -C_{1\alpha'}\delta a^{\alpha'}\\ &\vdots\\ C_{k0}\delta a^0 + C_{k1}\delta a^1 + \cdots + C_{kk}\delta a^k &= -C_{k\alpha'}\delta a^{\alpha'}\end{aligned} \tag{3Г.57}$$

$$\alpha' = k+1, \ldots, n$$

или краће

$$C_{\sigma\alpha''}\delta a^{\alpha''} = -C_{\sigma\alpha'}\delta a^{\alpha'}. \tag{3Г.57}$$

За $\|C_{\sigma\alpha''}\| \neq 0$ се добива

$$\delta a^{\gamma''} = -C^{\sigma\gamma''}C_{\sigma\alpha'}\delta a^{\alpha'} = -B^{\gamma''}_{\alpha'}\delta a^{\alpha'} \tag{3Г.58}$$

где је $C^{\sigma\gamma''}$ инверзна матрица $C_{\sigma\alpha'}$.

Заменимо ова решења у (3Г.49)

$$\frac{\partial Z}{\partial a^{\alpha'}}\delta a^{\alpha'} + \frac{\partial Z}{\partial a^{\alpha''}}\delta a^{\alpha''} = \left(\frac{\partial Z}{\partial a^{\alpha'}} - B^{\alpha''}_{\alpha'}\frac{\partial Z}{\partial a^{\alpha''}}\right)\delta a^{\alpha'} = 0.$$

С обзиром да је $n{+}1{-}l$ варијација $\delta a^{\alpha'}$ незаависно, произилази $n{+}1{-}l$ диференцијалних једначина кретања ослобођених од множилаца веза,

$$\frac{\partial Z}{\partial a^{\alpha'}} - B^{\alpha''}_{\alpha'}\frac{\partial Z}{\partial a^{\alpha''}} = 0, \tag{3Г.59}$$

$$(\alpha' = l+1, l+2, \ldots, n+1-l;\ \alpha'' = 1, \ldots, l).$$

Ових једначина има $n{+}1{-}l$ за реономни систем и $n{-}l$ за слкреономни систем, за разлику од једначина

$$\frac{\partial Z}{\partial a^{\alpha}} - \sum \lambda_\sigma C_{\sigma\alpha}, \tag{3Г.60}$$

произашлих из (3Г.55), којих има $n+1+l$ за реономни и $n+l$ за слкреономни систем. Систему једначина (3Г.60) треба још додати систем од l једначина веза.

Једначине (3Г.59) у развијеном облику без функција принуде (3Г.48) или (3Г.47) лако се своде на препознатљивији облик.

$$\begin{aligned} &a_{\alpha'\beta}\left(a^\beta - Q^\beta\right) - B^{\alpha''}_{\alpha'}a_{\alpha''\beta}\left(a^\beta - Q^\beta\right) = \\ &= a_{\alpha'\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} - Q_{\alpha'} - B^{\alpha''}_{\alpha'}\left(a_{\alpha''\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} - Q_{\alpha''}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3Г.61}$$

Закључак 1. Једначине кретања механичких система (3Г.60), (3Г.59), (3Г.51), (3Г.46), (3Г.43), (3Г.32) довољно јасно показују да је принцип принуде не мање оперативан у координатном описивању кретања од других принципа механике, ако не и оперативнији у његовој примени на системе са нехолономним везама.

Поред тога овај принцип указује на постојање принуде (3Г.23) управне на тангентну многообразност, а то значи и на убрзања управна на TM, као и $T\mathcal{M}$. То се лако показује. Принцип (3Г.25), примењен на принуду (3Г.18) даје, поред једначина (3Г.51), још и једначину

$$\frac{\partial Z}{\partial a_N} = a_N = \varkappa(b_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - \mathcal{F}_N) = 0. \tag{3Г.62}$$

Завршни коментар о принципу принуде: Запажено је да се све наведене једначине, добивене парциајлним диференцирањем функције Z по a^i, могу добити на исти начин парцијалним диференцирањем принуде Z по контраваријантним координатама $\bar{Y}^i$, $\bar{X}^i$ или Q^α. То је овде усаглашено са једначинама (3Г.26), јер, као што се види из (3Г.3) и (3Г.17) Q^α су генералисана убрзања. Због тога строжија примена релације (3Г.25) на принуду (3Г.48) своди се на

$$\begin{aligned}\delta Z = &\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\left(a^\beta - Q^\beta\right)\delta a^\alpha + \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\left(a^\alpha - Q^\alpha\right)\delta a^\beta - \\ &- \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\left(a^\beta - Q^\beta\right)\delta Q^\alpha - \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\left(a^\alpha - Q^\alpha\right)\delta Q^\beta = \\ &= a_{\alpha\beta}\left(a^\beta - Q^\beta\right)\left(\delta a^\alpha - \delta Q^\alpha\right) = 0.\end{aligned}$$

Свака дискусија која искључује случај да је $\delta(D\dot{q}^\alpha/dt) = \delta Q^\alpha$, или $\delta\ddot{y} = \delta Y$, доводи до претходних резултата, а то је и учињено.

Извод о принципима механике

Принципи механике су од општег значења искази помоћу уведених појмова и дефиниција механике, чија истинитост не подлеже доказивању. На сваком понаособ принципу може се развити цела теорија механике.

Принцип равнотеже: *Збирови свих сила које дејствују у појединим динамичким тачкама су једнаки нули.*

$$\sum_{\mu=1} \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\nu\mu} = 0.$$

Принцип рада: *Укупан рад свих сила на могућим померањима једнак је нули, а за систем са једностраним везама једнак и мањи од нуле.*

$$\sum \boldsymbol{\mathcal{F}}_\nu \cdot \Delta\boldsymbol{r}_\nu \leq 0.$$

Принцип дејства: *Интеграл суме* $\delta E_k + \delta A(\boldsymbol{F})$, *срачунат на стварном кретању за време* $[t_0, t_1]$, *једнак је нули, тј.*

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k + \delta A(\boldsymbol{F}))dt = 0.$$

Принцип принуде: *Варијација принуде по убрзањима једнака је нула*

$$\delta Z = \frac{\partial Z}{\partial a}\delta a = 0.$$

IV. ТЕОРЕМЕ МЕХАНИКЕ

Под појмом "теорема механике" овде се подразумева математичко тврђење општег значења о кретању материјалних система, чија се истинитост доказује на основу: пупринципа, принципа механике, основних и последичних дефиниција и закона динамике.

Теоремама се операционализују принципи механике.

Тврђења чија се тачност може доказати на основу теорема сматрамо, лемама и последицама.

Теореме, као и последична тврђења потребно је да задовољавају препринципе.

Теорема о промени импулса кретања

Природни изводи по времену генералисаних импулса механичког система константне масе једнаки су генералисаним силама

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha. \tag{4.1}$$

Доказ. Основном дефиницијом 2, и релацијама (3А.39) дефинисани су генералисани импулси. Из принципа равнотеже следиле су диференцијалне једначине кретања (3В.56). Како је $Da_{\alpha\beta}/dt = 0$ за механички систем константних маса, то је

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = \frac{D}{dt}\left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\right) = \frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha,$$

што и тврди теорема.

Лема 1. *Природни извод импулса система константне масе обртног кретања, мереног угловном променом, једнак је моменту сила.*

Доказ 1. Из дефиниције елементарног рада (3Б.15) следи да генералисане силе за бездимензионе угловне координате имају димензију момента сила,

$$ML^2T^{-2} = \dim Q$$

па теорема 1 потврђује ову лему.

Доказ 2. На основу принципа равнотеже изведен је појам момента силе (3А.63). Адекватно томе, за обртно кретање ν-те честице масе Δm_ν, чврсто повезане за неку непомичну тачку O која припада сопственој оси u обртног кретања, изведен је момент инерционе силе. Следећи (3А.63), момент инерционе силе $\mathcal{I}_\nu = -\Delta m_\nu \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt}$ је једнак

$$-M(\boldsymbol{\mathcal{I}}_\nu) = \boldsymbol{r}_\nu \times \Delta m_\nu \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} = \\ = \boldsymbol{r}_\nu \times \frac{d}{dt}(\Delta m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_\nu \times \Delta m_\nu \boldsymbol{v}_\nu).$$

С друге стране за $|r_\nu| = const$ је $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu$, па даље следи

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{M}_\nu(\mathcal{I}_\nu) &= \frac{d}{dt}\left[\Delta m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu))\right] = \\ &= \frac{d}{dt}\left[\Delta m_\nu\left[(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_\nu \cdot \boldsymbol{r}_\nu) - \boldsymbol{r}_\nu(\boldsymbol{r}_\nu \cdot \boldsymbol{\omega}))\right] = \right. \\ &= \frac{d}{dt}\left[\Delta m_\nu\left[r_\nu^2 \omega^j \boldsymbol{e}_j - y_\nu^k \boldsymbol{e}_k(\delta_{ij} y_\nu^i \omega^j)\right]\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

јер је $\boldsymbol{r}_\nu \cdot \boldsymbol{\omega} = y_\nu^i \boldsymbol{e}_i \cdot \omega^j \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} y_\nu^i \omega^j$.

Пројектујемо ли вектор (4.2) на координатне осе добиће се.

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{M}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_i &=: M_{(\nu)i} = \\ &= \frac{d}{dt}\left[\Delta m_\nu\left(r_\nu^2 \delta_{ij}\omega^j - y_{\nu i} y_{\nu j}\omega^j\right)\right] = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}_{(\nu)ij}\omega^j\right) = \frac{d}{dt} p_{\nu i} \end{aligned} \tag{4.3}$$

где су

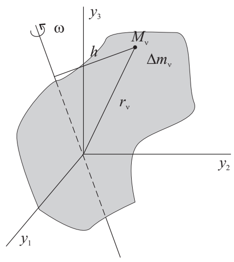
$$p_{\nu i} = \mathcal{I}_{(\nu)ij}\omega^j \tag{4.4}$$

импулси кретања ν-те честице у односу на ортонормирани координатни систем $(y, \boldsymbol{e})$.

Повратком (4.3) у једначину (3А.58) добија се лема 1, која тврди:

$$\frac{dp_{(\nu)i}}{dt} = M_i(\boldsymbol{F}_\nu). \tag{4.5}$$

Пример 13. Примена леме на опис обртног кретања крутог тела константне масе око непомичне тачке.



Слика 5

За сваки ν-ти делић тела важе једначине (4.5) и (4.4) где су индекси $i, j = 1, 2, 3,\ \nu = 1, 2, \ldots$. Саберу ли се импулси делића (4.4) као величине за исту i-ту осу, добија се

$$p_i = \sum_\nu p_{\nu i} = \sum_\nu \Delta m_\nu (r_\nu^2 \delta_{ij} - y_{\nu i} y_{\nu j}) \omega^j = \mathcal{I}_{ij} \omega^j \tag{4.6}$$

где је

$$\mathcal{I}_{ij} = \sum_\nu \Delta m_\nu (r_\nu^2 \delta_{ij} - y_{\nu i} y_{\nu j}) \tag{4.7}$$

тензор инерције.

С друге стране главни моменти свих активних сила у односу на координатне осе су

$$M_i := \sum_\nu M_i(\boldsymbol{F}_\nu)$$

па се добија за посматрано круто тело да је

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}_{ij}\omega^j\right) = M_i; \tag{4.8}$$

ово јесу *диференцијалне једначине обртног кретања тела око непомичне тачке у односу на непокретни координатни систем.*

Даљи развој ових једначина у првом кораку отвара питање извода по времену тензора инерције (4.7), јер претходне једначине

$$\frac{d\mathcal{I}_{ij}}{dt}\omega^j + \mathcal{I}_{ij}\frac{d\omega^j}{dt} = M_i \tag{4.9}$$

очигледно садрже изводе по времену $\dot{\mathcal{I}}_{ij}$. Потражимо њихово аналитичко значење. При том се, за сада, претпоставља да су масе константне. У збиру

$$\frac{d\mathcal{I}_{1j}}{dt}\omega^j = \dot{\mathcal{I}}_{11}\omega^1 + \dot{\mathcal{I}}_{12}\omega^2 + \dot{\mathcal{I}}_{13}\omega^3 \tag{4.10}$$

изводи координата тензора инерције су:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{I}}_{11} &= \left(\sum_\nu \Delta m_\nu (y_{\nu 2}^2 + y_{\nu 3}^2) \right)^{\cdot} = \\
&= 2 \sum_\nu \Delta m_\nu (y_{\nu 2}\dot{y}_{\nu 2} + y_{\nu 3}\dot{y}_{\nu 3}) = \\
&= 2 \sum_\nu \Delta m_\nu \left[y_{\nu 2} \left(y_{\nu 1}\omega^3 - y_{\nu 3}\omega^1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + y_{\nu 3} \left(y_{\nu 2}\omega^1 - y_{\nu 1}\omega^2 \right) \right] = \\
&= 2\mathcal{I}_{21}\omega^3 - 2\mathcal{I}_{31}\omega^2; \\
\dot{\mathcal{I}}_{12} &= - \sum_\nu \Delta m_\nu \left(y_{\nu 1} y_{\nu 2} \right)^{\cdot} = \\
&= - \sum_\nu \Delta m_\nu \left[\left(y_{\nu 3}\omega^2 - y_{\nu 2}\omega^3 \right) y_{\nu 2} + \right. \\
&\quad \left. + y_{\nu 1} \left(y_{\nu 1}\omega^3 - y_{\nu 3}\omega^1 \right) \right] = \\
&= - \sum_\nu \Delta m_\nu \left(y_{\nu 1}^2 \omega^3 - y_{\nu 2}^2 \omega^3 \right) + \\
&\quad + \sum_\nu \Delta m_\nu \left(y_{\nu 3} y_{\nu 2} \omega^2 - y_{\nu 1} y_{\nu 3} \omega^1 \right); \\
\dot{\mathcal{I}}_{13} &= - \sum_\nu \Delta m_\nu \left(y_{\nu 1} y_{\nu 3} \right)^{\cdot} = \\
&= - \sum_\nu \Delta m_\nu \left[\left(y_{\nu 3}\omega^2 - y_{\nu 2}\omega^3 \right) y_{\nu 3} + \right. \\
&\quad \left. + y_{\nu 1} \left(y_{\nu 2}\omega^1 - y_{\nu 1}\omega^2 \right) \right] = \\
&= - \sum_\nu \Delta m_\nu \left(y_{\nu 3}^2 \omega^2 - y_{\nu 1}^2 \omega^2 \right) + \\
&\quad + \sum_\nu \Delta m_\nu \left(y_{\nu 1} y_{\nu 2} \omega^1 - y_{\nu 2} y_{\nu 3} \omega^3 \right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Цикличном променом индекса $1,2,3 \to 2,3,1 \to 3,1,2$ лако се добијају изводи других координата тензора инерције $\mathcal{I}_{2j}$ и $\mathcal{I}_{3j}$.

Заменом у (4.9) једначине (4.8) добивају облик

$$
\begin{aligned}
\frac{Dp_1}{dt} &= \mathcal{I}_{1j}\dot{\omega}^j + (\mathcal{I}_{33} - \mathcal{I}_{22})\omega^2\omega^3 + \mathcal{I}_{21}\omega^1\omega^3 - \\
&\quad - \mathcal{I}_{31}\omega^2\omega^1 + \mathcal{I}_{32}\omega^2\omega^2 - \mathcal{I}_{23}\omega^3\omega^3 = M_1, \\
\frac{Dp_2}{dt} &= \mathcal{I}_{2j}\dot{\omega}^j + (\mathcal{I}_{11} - \mathcal{I}_{33})\omega^3\omega^1 + \mathcal{I}_{32}\omega^2\omega^1 - \\
&\quad - \mathcal{I}_{12}\omega^3\omega^2 + \mathcal{I}_{13}\omega^3\omega^3 - \mathcal{I}_{31}\omega^1\omega^1 = M_2, \\
\frac{Dp_3}{dt} &= \mathcal{I}_{3j}\dot{\omega}^j + (\mathcal{I}_{22} - \mathcal{I}_{11})\omega^1\omega^2 + \mathcal{I}_{13}\omega^3\omega^2 - \\
&\quad - \mathcal{I}_{23}\omega^1\omega^3 + \mathcal{I}_{21}\omega^1\omega^1 - \mathcal{I}_{12}\omega^2\omega^2 = M_3.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

За примену ових једначина у техничкој пракси на моделе обртног кретања тела важно је имати у виду да постоје изводи координата тензора инерције (4.7) $\mathcal{I}_{ij}(y(t))$ по времену (4.11).

Диференцијалне једначине обртног кретања тела знатно се поједностављује ако је могуће за тело везати покретни координатни систем $(z, \mathbf{э})$. У односу на тај координатни систем координате тензора инерције су константне. Избором координатног почетка у центру инерције, а усмерењем координатних оса дуж оса инерције ишчезавају величине $\mathcal{I}_{ij}$ за $i \neq j$, а $\mathcal{I}_{ii}$ се своди на централне и главне моменте инерције $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$. Означи ли се у том покретном координатном систему угаона брзина $\mathbf{\Omega} = \Omega^i \mathbf{э}_i$, диференцијалне једначине обртног кретања тела око центра инерције се своде на познате Ојлерове динамичке једначине

$$
\begin{aligned}
\frac{Dp_1}{dt} &= \mathcal{I}_1\dot{\Omega}^1 + (\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_2)\Omega^2\Omega^3 = \mathcal{M}_1, \\
\frac{Dp_2}{dt} &= \mathcal{I}_2\dot{\Omega}^2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3)\Omega^3\Omega^1 = \mathcal{M}_2, \\
\frac{Dp_3}{dt} &= \mathcal{I}_3\dot{\Omega}^3 + (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1)\Omega^1\Omega^2 = \mathcal{M}_3.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

При том се подразумева да постоји једнозначна веза између координата

$$
y^i = \gamma^i_j z^j \quad \Leftrightarrow \quad z^i = \overline{\gamma}^i_j y^j \tag{4.14}
$$

где се коефицијенти γ^i_j јављају функцијама времена.

Теорема о промени кинетичке енергије

Дефиницијом 5 уведен је појам рада (3Б.1), а негативни рад сила инерције (3Б.6) и (3Б.7а) материјалне тачке константне масе на задатом кретању последично је уведена *кинетичка енергија.* Промена рада по времену (3Б.14) названа је *снага.* Ови појмови су довољни за формулисање теореме о промени кинетичке енергије по времену. Исказ "промена по времену" математички представља природни извод по независној промењљивој t.

Теорема: *Промена кинетичке енергије система материјалних тачака константних маса, на које дејствују силе Q_α, по времену једнака је снази S тих сила, тј.*

$$\frac{dE_k}{dt} = S = Q_\alpha \dot{q}^\alpha. \tag{4.15}$$

Иста теорема може се казати: *Природни извод кинетичке енергије система материјалних тачака са константним масама по времену једнак је снази.*

Доказ 1. Множењем диференцијалних једначина кретања (3В.40) са $\dot{q}^\alpha$ и сабирањем по индексу α добија се

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\alpha - \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = Q_\alpha \dot{q}^\alpha.$$

Како је

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha = 2E_k, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\alpha + \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = \frac{dE_k}{dt},$$

а

$$Q_\alpha \dot{q}^\alpha = S,$$

теорема о промени кинетичке енергије (4.15) је доказана.

Доказ 2. Кинетичку енергију механичког система одређује једна од формула (3Б.7),

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^2. \tag{4.16}$$

Извод по времену, с обзиром на (3А.4), је

$$\frac{dE_k}{dt} = \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} = \sum_\nu \left(\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu\right)\boldsymbol{v}_\nu = S$$

што је требало доказати.

Доказ 3. Кинетичка енергија је задана формулом (3В.49), којој одговарају диференцијалне једначине кретања (3В.58) и (3В.56). Генералисане силе (3В.52) чини збир генералисаних потенцијалних и непотенцијалних сила. Множењем једначина (3В.58) генералисаним брзинама $\dot{q}^\alpha$, а једначина (3В.56) изводима импулса $\dot{p}_\alpha$ и сабирањем по α добива се

$$\dot{p}_\alpha \dot{q}^\alpha = \dot{p}_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \tag{4.17}$$

$$\dot{p}_\alpha \dot{q}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + P_\alpha \dot{q}^\alpha. \tag{4.18}$$

Разлика (4.17) и (4.18) је

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha - P_\alpha \dot{q}^\alpha = 0. \tag{4.19}$$

Узме ли се у обзир (3В.51), тј.

$$H = E_k(q,p) + E_p(q,t) \tag{4.20}$$

и (3В.52), следи даље

$$\frac{\partial E_k}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha + \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = \left(P_\alpha - \frac{\partial E_p}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha \tag{4.21}$$

или

$$\frac{dE_k}{dt} = Q_\alpha \dot{q}^\alpha = S$$

што се тражило.

Промена хамилтонијана

Лема 2. *Ако потенцијалне силе не зависе експлицитно од времена извод хамилтонијана $H(q^0, q^1, ..., q^n; p_0, p_1, ..., p_n)$ по времену t једнак је снази непотенцијалних сила.*

Доказ: Једначина (4.19) потврђује претходни исказ јер је

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = P_\alpha \dot{q}^\alpha = S(P). \tag{4.22}$$

Лема 3. *Промена по времену хамилтонијана $H(q^0, q^1, ..., q^n; p_0, p_1, ..., p_n)$ потенцијалног система са промењљивим везама једнака је снази веза R_0, тј.*

$$\frac{dH}{dt} = R_0. \tag{4.23}$$

Доказ 1. Сагласно једначини (3В.40б) и (3В.60) за непотенцијалне силе је $P_i = 0$, $i = 1, ..., n$, а $P_0 = P_0^* + R_0 = R_0$ јер је $P_0^* = \sum \boldsymbol{P}_\nu \cdot \partial \boldsymbol{r}/\partial q^0 = 0$, десна страна једначине (4.22) дегенерише у

$$P_\alpha \dot{q}^\alpha = P_0 \dot{q}^0,$$

односно, кад се за реономну координату усвоји $q^0 = t$,

$$P_\alpha \dot{q}^\alpha = R_0,$$

што доказује лему 3.

Доказ 2. Помножи ли се свака једначина (3А.25) одговарајућим вектором брзине $\boldsymbol{v}_\nu$ и сабере по индексу ν добија се

$$\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt} = \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \sum_\nu \sum_\mu \lambda_\mu grad_\nu f_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu.$$

За потенцијалне силе $\boldsymbol{F}_\nu = -grad_\nu E_p(\boldsymbol{r}_\nu)$ и услов брзина на везама

$$\dot{f}_\mu = \sum_\nu grad_\nu f_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} = 0$$

претходна једначина се своди на

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu\right) + grad_\nu E_p \cdot \boldsymbol{v}_\nu = -\sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial t}.$$

На основу (3А.54) и (3Б.7) за $q^0 = t$ из претходне једначине произилази

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{dH}{dt} = R_0, \tag{4.24}$$

што и јесте лема 3.

Теорема о промени механичке енергије

Формулама (3В.43), (3В.51) и (3В.61) потпуна механичка енергија потенцијалног реономног холономног система дефинисана је формулом

$$E = E_k(q,p) + E_p(q) + \mathcal{P}(q_0). \tag{4.25}$$

Теорема: *Промена по времену потпуне механичке енергије (4.25) система са константним масама једнака је снази непотенцијалних сила* $\boldsymbol{F}_\nu^*$ *тј*

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} = P_\alpha^* \dot{q}^\alpha. \tag{4.26}$$

Доказ: За $P_\alpha^* \neq 0$ и формулу (3В.43), по којој је

$$R_0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q^0} \tag{4.27}$$

диференцијалне једначине (3B.62) садрже допунске силе P^*_α,

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha} + P^*_\alpha, \tag{4.28}$$

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha}. \tag{4.29}$$

Помноже ли се једначине (4.28) брзинама $\dot{q}^\alpha$, а једначине (4.29) са $\dot{p}_\alpha$ и саберу по индексима α добивају се две једначине

$$\dot{p}_\alpha \dot{q}^\alpha = -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + P^*_\alpha \dot{q}^\alpha,$$

$$\dot{q}^\alpha \dot{p}_\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha.$$

Њихова разлика је

$$\frac{\partial E}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha + \frac{\partial E}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha - P^*_\alpha \dot{q}^\alpha = 0,$$

односно

$$\frac{dE}{dt} = P^*_\alpha \dot{q}^\alpha \tag{4.30}$$

што доказује теорему (4.26).

Последица. За системе са везама које се не мењају током времена сви индекси иду од 1 до n $(i = 1, ..., n)$ уместо од 0 до n $(\alpha = 0, 1, ..., n)$; при том ишчезава додатна координата q^0, и одговарајућа сила или снага R_0, као и "реономни потенцијал" $\mathcal{P}$.

Теорема о управљивости кретања

Под насловљеним појмом "управљивост кретања" овде се подразумева могућност да се кретање механичког система остварује по задатом програму под принудом посебних генералисаних сила. Силе U_α помоћу којих се управља кретањем овде се називају *генералисане силе управљања*. Под "управљање кретањем" овде се подразумева *процес реализације задатог или програмираног кретања*. Програми могу бити разноврсни. Овде обухватамо *програм путања* и *програм брзина*. При постављању и изради програма кретања треба полазити од оних координатних система на којим је заснована механика. За кретање на изведеним многообразностима неопходно је знати и узимати у обзир релације њиховог настанка. У циљу општости и краткоће писања посматрајмо кретање на $(2n+2)$-диемнзионим тангентним многообразностима $T\mathcal{N}$, или њима еквивалентним многообразностима стања $T^*\mathcal{N}$.

Програм путања на $\mathcal{N} = M^{n+1}$ може се задати једном или помоћу више функција

$$f(q^0, q^1, ..., q^n) = 0, \tag{4.31}$$

а програм брзина на $T\mathcal{N}$

$$\varphi(q^0, q^1, ..., q^n; \dot{q}^0, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n) = 0, \tag{4.32}$$

или њима еквивалентни програм импулса на $T^*\mathcal{N}$

$$\varphi^*(q^0, q^1, ..., q^n; p_0, p_1, ..., p_n) = 0. \tag{4.33}$$

Као што се види, релације програма су сличне или једнаке релацијама идеалних веза. Зато и даље решавање задатка може се разматрати као условљено (”везано”) кретање механичких система.

Систем материјалних тачака константних маса принудимо да се креће по програму (4.31) и (4.32) по многообразности $T\mathcal{N}$ чији је инерциони тензор $a_{\alpha\beta}(q^0, q^1, ..., q^n)$; на систем дејствују природне активне генералисане силе Q_α.

Користећи било који од претходно наведених принципа, при узимању услова (4.31), (4.32) доћи ће се до диференцијалних једначина кретања

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_\alpha + U_\alpha \tag{4.34}$$

ако се програми (4.31) и (4.32) апстрахују силом $U = (U_0, U_1, ..., U_m)$, $m \leq n$; или

$$\left.\begin{array}{c} a_{\alpha\beta}\dfrac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_\alpha + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} + \mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha} \\ f(q^0, q^1, ..., q^n) = 0 \\ \varphi(q^0, q^1, ..., q^n; \dot{q}^0, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n) = 0, \end{array}\right\} \tag{4.35}$$

ако се у систем једначина укључују једначине (4.31) и (4.32).

Услов $f = 0$ неопходно задовољава услове брзине и убрзања,, што значи да су први и други природни изводи скаларне функције f једнаки нули,

$$\begin{aligned} \frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = 0 \\ \ddot{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + \frac{\partial\dot{f}}{\partial\dot{q}^\beta}\ddot{q}^\beta = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + \frac{\partial f}{\partial q^\beta}\ddot{q}^\beta = 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q^\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q^\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma - \frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial q^\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma}\right)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma = G_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma \end{aligned} \tag{4.36}$$

где је $G_{\alpha\gamma}$ израз у загради.

После одређивања λ и μ, њихове замене у (4.35) и упоређење са (4.34) добијају се силе управљања.

Програм брзина (4.32) треба да задовољава услов убрзања

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha}\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} - E_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma = 0 \tag{4.36a}$$

где је $E_{\beta\gamma} = \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$.

Заменом

$$\frac{D\dot{q}^\gamma}{dt} = a^{\alpha\gamma}\left(Q_\alpha + \lambda\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha}\right)$$

из (4.35) у (4.36) и (4.36a) следи

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q^\beta}a^{\alpha\beta}\left(Q_\alpha + \lambda\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha}\right) &= G_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\beta}a^{\alpha\beta}\left(Q_\alpha + \lambda\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha}\right) &= E_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Једначина има колико и непознатих множилаца λ и μ те чине решив линеарни систем

$$\left.\begin{aligned} B_{11}\lambda + B_{12}\mu = C_1\\ B_{21}\lambda + B_{22}\mu = C_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.37a}$$

тако да се добива

$$U_\alpha = \lambda(q,\dot{q})\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} + \mu(q,\dot{q})\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha}. \tag{4.38}$$

Дакле, за кретање система на многообразности N по програму (4.31) и (4.32) силе управљања треба, као прво, да задовољавају релације (4.38), и друго да сила U_α по величини $\|U_\alpha\|$ буде већа од природних генералисаних сила $\|Q_\alpha\|$, тј.

$$\|U_\alpha\| \geq \|Q_\alpha\|. \tag{4.39}$$

На аналоган начин одређивању реакција веза могу се одредити силе управљања U_α у функцији положаја q и $\dot{q}$ ако је програм задат помоћу релација (4.31) или (4.32).

На овај начин изведени су потребни услови управљивости неког механичког система. Простије речено може се по формулама (4.37), (4.38) израчунати каква и колика је сила потребна да се тело поведе по одређеној путањи или да се повећа или смањи брзина кретања. За управљање кретањем потребно је, дакле, поред услова (4.31), (4.38), (4.39) и постојања довољно великих сила управљања U да би систем био управљив. Наведено тврђење је управо насловљена теорема управљивости.

Теорема: *Кретање механичког система је управљиво по унапред задатом програму ако постоје такве и толике силе управљања, зависне од параметара програма, а по апсолутној вредности веће од одговарајућих других активних сила.*

Препознатљив пример 14. Одредити силу управљања U којом се може управљати тешком материјалном тачком масе m да се креће у вертикалној равни $z = 0$ по програму

$$f(x,y) = y - \frac{g}{2}x^2 - h = 0$$
$$\varphi(\dot{x}) = \dot{x} - c = 0$$

где су g убрзање Земљине теже, h и c су дате константе.

Диференцијалне једначине кретања су

$$m\ddot{x} = -\lambda g x + \mu = U_x,$$
$$m\ddot{y} = -mg + \lambda = -\mu g + U_y.$$

Једначине (4.37) за дати пример су

$$\left.\begin{array}{r}-g + \frac{\lambda}{m} - g\dot{x}^2 + \frac{gx}{m}(\lambda g x - \mu) = 0 \\ -\lambda g x + \mu = 0 \longrightarrow \mu = \lambda g x,\end{array}\right\}$$
$$\lambda = mg(1+\dot{x}^2) = mg(1+c^2).$$

Према (4.38) даље се добива

$$U_x = -\lambda g x + \mu = 0,$$
$$U_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = mg(1+c^2).$$

Закључно: Силом $U_y = mg(1+c^2)$ може се реализовати задато кретање.

Простији задатак је када су, уместо програма, дате силе управљања у аналитичкој форми без ограничења њихових величина.

Ограничени скупови сила управљања су чешће заступљени у техници од неограничених.

Пример 15. Покренути и усмерити материјалну тачку масе m из стања мировања силом управљања $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, U_3)$,

$$U_1 = U\cos\alpha_1, \quad U_2 = U\cos\alpha_2,$$

$$U_3 = U\cos\alpha_3, \quad \|U\| = 1,$$

по путањи којој припада тачка $M(1,2,3)$.

За $0 \le \alpha_3 < \frac{\pi}{2}$ силе управљања су веће од активних сила. Диференцијалне једначине кретања су

$$m\ddot{y}_i = \cos\alpha_i.$$

Ако се полазни положај из стања мировања узме за пол координатног система $(Oy_1y_2y_3)$, коначне једначине кретања су

$$y_i = \frac{\cos\alpha_i}{2m}t^2,$$

те према томе, једначине путање су

$$\frac{y_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y_2}{\cos\alpha_2} = \frac{y_3}{\cos\alpha_3},$$

при чему је потребно да су задовољени услови:

$$\frac{1}{\cos\alpha_1} = \frac{2}{\cos\alpha_2} = \frac{3}{\cos\alpha_3}, \quad 0 \le \alpha_3 < \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1.$$

Лема. *Кретања (p_α, q^α) механичког система константних маса је управљиво по задатом програму ако постоје такве и толике силе управљања зависне од параметара програма стања кретања, а по условима (4.39) ако се кретање усмерава супротно кретању под дејством сила Q_α.*

Доказ. Диференцијалне једначине кретања (4.34) система материјалних тачака са константним масама на $T^*\mathcal{N}$ су

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha + U_\alpha, \quad \dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta}p_\beta. \tag{4.40}$$

Једначине (4.35) своде се на

$$\left.\begin{aligned} &\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha + \lambda\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} + \mu a_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi^*}{\partial p_\beta} \\ &f(q^0, q^1, \ldots, q^n) = 0 \\ &\varphi^*(q^0, q^1, \ldots, q^n; p_0, p_1, \ldots, p_n) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

јер је

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}^\alpha}\right|_{\dot{q}=\dot{q}(p)} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial\dot{q}^\alpha} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi^*}{\partial p_\beta}.$$

Услов (4.36) се трансформише на

$$\frac{\partial f}{\partial q^\beta}a^{\beta\xi}\frac{Dp_\xi}{dt} = G_{\alpha\gamma}a^{\alpha\xi}p_\xi a^{\gamma\eta}p_\eta = G^{*\xi\eta}p_\eta p_\xi \qquad (\xi,\eta = 0,1,\ldots,n) \tag{4.42}$$

Услов брзине (4.36а) трансформише се на услове ограничења импулса

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial p_\beta}a_{\alpha\beta}a^{\alpha\xi}\frac{Dp_\xi}{dt} = E_{\alpha\gamma}a^{\alpha\xi}a^{\gamma\eta}p_\xi p_\eta,$$

то јест

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial p_\beta}\frac{Dp_\beta}{dt} = E^{*\xi\eta}p_\xi p_\eta, \tag{4.43}$$

где су замене очигледне.

Заменом Dp_α/dt из једначине (4.41) у (4.42) и (4.43) добија се систем једначина структуре (4.37а), чиме је лема доказана.

Пример 16. Превести линеарни осцилатор из почетног стања $p = p_0 = const$, $q = 0$ у равнотежно стање $p = 0$, $q = 0$ помоћу силе управљања U, $|U| \leq 1$.

Диференцијалне једначине кретања су

$$\dot p = -q + U, \quad -1 \leq U \leq 1,$$
$$\dot q = p,$$

под претпоставком да је инерциони коефицијент $a = 1$ и реституциони коефицијент $c = 1$. Елеминацијом диференцијала времена dt добијају се диференцијалне једначине фазне трајекторије

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{(q \mp u)}{p}.$$

Из мноштва кривих

$$p^2 + (q \mp 1)^2 = c_{1,2}$$

за $u = \pm 1$, треба изабрати оне које задовољавају крајње тачке, тј. прву почетну $(0, p_0)$ и другу завршну $(0,0)$. За тачку $(0, p_0)$ то је кружница

$$p^2 + (q \mp 1)^2 = p_0^2 + 1,$$

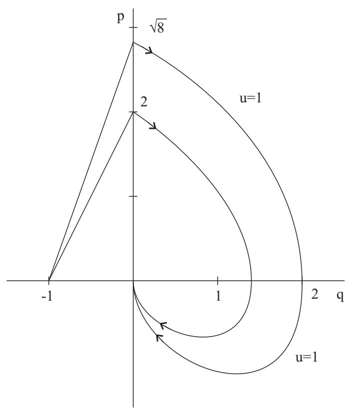
а за тачку (0,0) кружница мањег полупречника

$$p^2 + (q \mp 1)^2 = 1.$$

Очевидно је да кружнице једног те истог знака сила U не решавају задатак; треба тражити решења једначина различитих знакова. Према леми силом U може се управљати само за $\|U\| \geq \|q\|$. Тачка пресека кружница $p^2 + (q+1)^2 = p_0^2 + 1$ и $p^2 + (q-1)^2 = 1$ постојаће за $4q = p_0^2$, односно за $p_0^2 \leq 8$ и то у тачки прекључења $p = 0, q = 2$.

За мање почетне вредности импулса p_0, рецимо $p_0 = 2$, са мањом силом $|U| < 1$ могуће је привести осцилатор без удара у стање мировања. Заиста, заменимо ли у првој једначини $p_0^2 = 4$, $p = 0$ добија се $q = \sqrt{5} - 1$ и према томе $U = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ доводи у положај $p = 0, q = 0$ по фазној трајекторији

$$p^2 + q^2 - (\sqrt{5} - 1)q = 0.$$



Слика 6

Теорема о оптималном кретању управљивих система

Под појмом "*оптимално кретање*" овде се подразумева кретање механичких система чији поједини атрибути имају екстремалне вредности у односу на поједине динамичке параметре. Под такво поимање спадају сви системи најмањег дејства и најмање принуде, описани у петом одељку 3В - "Принцип дејства" и одељку 3Г - "Принцип принуде". С обзиром да и дејство и принуда по својој природи достижу екстремне вредности на стварном кретању може се рећи да диференцијалне једначине кретања механичких система описују екстремалне линије дејства и принуде. Међутим, и ако то јесу оптимална кретања, у стручној литератури оваква кретања се обично не квалификују као оптимална. Тек кад се поред наведених атрибута траже екстремне вредности појединих и посебних динамичких или кинетичких особина (силе, енергије, импулса, масе) управљивих кретања каже се *оптимално кретање*. Због тога овде одређеније се каже оптимално кретање управљивих механичких система.

У општем све наведене особине кретања за које ће се тражити екстремуми поставиће се функционалом

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(p, q, u, t) dt \tag{4.44}$$

који се у литератури теорије управљања најчешће назива "критеријум квалитета" или просто "квалитет". Функција $\mathcal{F}$ је позната и непрекидна заједно са изводима

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}$$

за сваку тачку $(p, q) \in T^*N$ и све вредности $u_1, ..., u_k$. Поред тога $\mathcal{F}(p, q, u, t) \geq a\|P\|^{\mathrm{p}}$, где су $a > 0$, $\mathrm{p} > 1$ и P непотенцијалне силе, међу којима и силе управљања.

Из мноштва форми диференцијалних једначина кретања определимо се за једначине (3B.59) и (3B.60) у облику (4.28) и (4.29), тј.

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha} + P_\alpha(p, q, u), \tag{4.45}$$

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha}, \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n), \tag{4.46}$$

где се у мноштву сила P_α налазе и силе управљања које су ограничене заједно са парцијалним изводима

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial p_\beta}, \ \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial q^\beta}, \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial u^i}, \quad i = 0, 1, \ldots, k \leq n.$$

Силе управљања P_α као и сви параметри управљања $u(t) \in L_{\mathrm{p}}$ су доступни на коначном интервалу времена $[t_0, t_1]$.

У циљу једнозначног схватања претходног увода прихватимо следеће

Одређење 1. Кретање управљивог механичког система описано диференцијалним једначинама (4.45) и (4.46) у присуству сила управљања називаћемо оптималним ако сагласно принципу дејства

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(p_\alpha \dot{q}^\alpha - E) + P_\alpha \delta q^\alpha\right] dt = 0 \tag{4.47}$$

функционал (4.44) достиже екстремну вредност.

Одређење 2. Генералисане силе управљања P_α којим се реализује оптимално управљање кретањем називаћемо оптималним силама управљања а параметре управљања $u_0, u_1, \ldots, u_k$ оптималним параметрима управљања.

Задатак оптималног управљивог кретања је да се нађу силе или параметри кретања које управљиви механички систем преводе из стања $(p(t_0), q(t_0))$ у стање $(p(t_1), q(t_1))$ тако да функционал (4.44) достигне екстремну вредност.

Теорема: *Функционал (4.44) достиже екстремну вредност при директном кретању управљивог механичког система из једне тачке* $p(t_0)\&q(t_0) \in T^*\mathcal{N}$ *у другу* $p(t_1)\&q(t_1) \in T^*\mathcal{N}$ *на:*

- *непразном мноштву решења* $2n+2$ *диференцијалних једначина кретања (4.45) и (4.46),*
- *непразном мноштву решења система* $2n+2$ *диференцијалних једначина вариационог задатка*

$$(\delta q^\alpha)^\cdot = \frac{\partial^2 E}{\partial q^\beta \partial p_\alpha}\delta q^\beta + \frac{\partial^2 E}{\partial p_\beta \partial p_\alpha}\delta p_\beta - \\ - \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha}\delta q^\beta + \gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_\alpha}, \tag{4.48}$$

$$(\delta p_\alpha)^\cdot = -\frac{\partial^2 E}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\delta q^\beta - \frac{\partial^2 E}{\partial p_\beta \partial q^\alpha}\delta p_\beta + \\ + \frac{\partial P_\beta}{\partial q^\alpha}\delta q^\beta - \gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q^\alpha}, \tag{4.49}$$

- *непразном скупу решења мноштва* k *једначина*

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial q^\alpha}\delta q^\alpha - \\ - \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_r}\delta q^\alpha + \gamma \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}}{\partial u_r} = 0, \tag{4.50}$$

$r = 0, 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, k \leq n$ *при* $2n+2$ *услова*

$$\delta q^\alpha(t_0) = 0, \ \delta q^\alpha(t_1) = 0, \tag{4.51}$$

и

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial q^\alpha}\delta q^\alpha - \\ - \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_m}\delta q^\alpha + \gamma \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}}{\partial u_m} < 0, \tag{4.52}$$

$\delta u_m > 0.$

Доказ: На непразном мноштву решења $p(t)$ и $q(t)$ диференцијалних једначина директног управљивог кретања (4.45) и (4.46) испуњен је принцип дејства (4.47).

Функционал (4.44) достиже екстремум на наведеном кретању ако је за неки множитељ $\gamma \in R$

$$\gamma \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(p,q,u,t) dt \leq 0 \tag{4.53}$$

и то минимум за $\gamma < 0$, а максимум за $\gamma > 0$, при услову (4.44), (4.51) у развијеном облику

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& \left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial E}{\partial p_\alpha} \right) \eta_\alpha - \\ & - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial E}{\partial q^\alpha} - P_\alpha \right) \xi^\alpha \Bigg] dt = 0. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Варирајмо овај услов као што следи

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& \left(\delta \left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial E}{\partial p_\alpha} \right) \right) \delta p_\alpha + \left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial E}{\partial p_\alpha} \right) \delta^2 p_\alpha - \\ & - \left(\delta \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial E}{\partial q^\alpha} - P_\alpha \right) \right) \delta q^\alpha - \\ & - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial E}{\partial q^\alpha} - P_\alpha \right) \delta^2 q^\alpha \Bigg] dt = 0. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Због (4.45) и (4.46) отпадају чланови са другим варијацијама $\delta^2 p$ и $\delta^2 q$. Према условима (4.51) је

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta \dot{q}^\alpha \delta p_\alpha dt &= \int_{t_0}^{t_1} \delta p_\alpha d\delta q^\alpha = \\ &= \delta p_\alpha \delta q^\alpha \big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q^\alpha d\delta p_\alpha = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} (\delta p_\alpha)^{\cdot} \, \delta q^\alpha dt, \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \dot{p}_\alpha \delta q^\alpha dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta q^\alpha d\delta p_\alpha = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta q^\beta \right)^{\cdot} \delta p_\beta dt.$$

Према томе релација (4.55) даље се своди на

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ & \left[\left(\delta q^\beta \right)^{\cdot} - \frac{\partial^2 E}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \frac{\partial^2 E}{\partial p_\beta \partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \right. \\ & \left. + \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta} \delta q^\alpha \right] \delta p_\beta - \left[(\delta p_\beta)^{\cdot} + \frac{\partial^2 E}{\partial q^\beta \partial p_\alpha} \delta p_\alpha + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 E}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} \delta q^\alpha - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta} \delta q^\alpha \right] \delta q^\beta - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_r} \delta q^\alpha \right) \delta u_r \Bigg\} dt = 0. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Релација (4.53), у развијеном облику

$$\gamma \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_\beta} \delta p_\beta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q^\beta} \delta q^\beta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_r} \delta u^r \right) dt \leq 0 \tag{4.57}$$

показује да су и у релацији (4.56) садржане исте варијације $\delta p_\beta, \delta q^\beta, \delta u_r$ као и у услову достизања екстремума функцинала квалитета (4.53). Због неодређености и произвољности множитеља γ упоређењем (4.56) и (4.57) добија се:

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \bigg[& (\delta q^\beta)^{\cdot} - \frac{\partial^2 E}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \frac{\partial^2 E}{\partial p_\beta \partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta} \delta q^\alpha - \\ & -\gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_\beta} \bigg] \delta p_\beta - \bigg[(\delta p_\beta)^{\cdot} + \frac{\partial^2 E}{\partial q^\beta \partial p_\alpha} \delta p_\alpha + \frac{\partial^2 E}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} \delta q^\alpha - \\ & - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta} \delta q^\alpha + \gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q^\beta} \bigg] \delta q^\beta - \bigg(\frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \\ & + \frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_r} \delta q^\alpha + \gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_r} \bigg) \delta u_r \Bigg\} dt = 0. \end{aligned}$$

На непразном скупу решења једначина (4.48) и (4.49) претходна интегрална варијациона релација своди се на

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_0}^{t_1} \bigg(& \frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial^2 E}{\partial u_r \partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \\ & - \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_r} \delta q^\alpha + \gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_r} \bigg) \delta u_r dt \leq 0. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Одавде следе и услови (4.52), чиме је теорема доказана.

Последица 1. Ако везе система не зависе од времена број диференцијалних једначина (4.45), (4.46), (4.48), (4.49), (4.50) и (4.51) смањују се за по једну јер не постоји реономна координата q^0 и одговарајући импулс p_0, па индекси α и β узимају вредности од 1 до n $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$.

Лема: *Функционал (4.44) достиже екстремну вредност при кретању механичког система, управљаног неограниченим силама u_α, из једног стања кретања $p(t_0)\&q(t_0)$ у друго $p(t_1)\&q(t_1)$ на*

- *непразном мноштву решења једначина:*

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha} + P_\alpha + U_\alpha, \tag{4.59}$$

$$(\delta q^\alpha)^{\cdot} = \frac{\partial^2 E}{\partial q^\beta \partial p_\alpha} \delta q^\beta + a^{\alpha\beta} \delta p_\beta + \gamma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha} \delta q^\beta, \tag{4.60}$$

$$(\delta p_\alpha)^{\cdot} = -\frac{\partial^2 E}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\delta q^\beta - \frac{\partial^2 E}{\partial p_\beta \partial q^\alpha}\delta p_\beta - \gamma\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial P_\beta}{\partial q^\alpha}\delta q^\beta, \tag{4.61}$$

$$\delta q^\alpha + \gamma\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U_\alpha} = 0, \tag{4.62}$$

($\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, k;\ k \leq n$) *и неједнакости*

$$\delta q^m + \gamma\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_m} < 0, \quad \delta u_m > 0, \tag{4.63}$$

при условима

$$\delta q^\alpha(t_0) = 0, \quad \delta q^\alpha(t_1) = 0. \tag{4.64}$$

Доказ. При управљању силама U_α енергија E и сила P_α не зависе од U_α, па парцијални изводи по U_α ишчезавају из једначина и неједначина (4.48) - (4.52).

Последица 1. За склерономне системе смањује се број једначина (4.59) - (4.64) јер не постоји реономна координата q^0, па су индекси $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$.

Теорема о оптималном управљању кретањем

Теорија оптималног управљања уопште заснована је на одређенијим класификацијама функција и скупова функција или параметара управљања него што је то уобичајено у стандардној механици. У сусрет тој теорији прецизирајмо неке појмове и величине претходно посматраног управљивог оптималног стања кретања на $T^*\mathcal{N}$.

Под називом "оптимално управљање кретањем" механичког система подразумевају се функције $u(t) \in U$ (област U покрива област многообразности $T^*\mathcal{N}$) које, као генералисане силе $P = (P_0, P_1, ..., P_n)$ или њихови елементи реализују оптимално кретање на којем функционал (4.44) достиже екстремум.

Функција $\mathcal{F}$ у функционалу (4.44) је конвексна и

$$\mathcal{F}(p, q, u) \geq a\|P\|^{\mathrm{p}}, \quad a > 0, \quad \mathrm{p} > 1. \tag{4.65}$$

Доступна су сва управљања $u(t)$ из L_{p} на задатом коначном интервалу $[t_0, t_1]$ која заједно са решењима $(p(t), q(t)$ диференцијалних једначина кретања (4.45) и (4.46), дају функционалу (4.44) коначну вредност.

Теорема.

За кретање механичког система на $T^*\mathcal{N}$, који има:

- *непразан скуп решења система* $2n+2$ *диференцијалних једначина кретања (4.45) и (4.46);*
- *непразан скуп решења система* $2n+2$ *једначна (4.48) и (4.49) варијационог задатка;*
- *непразан скуп решења система* k *једначина (4.50) при* $2n+2$ *услова (4.51) и (4.52) као и услова*

$$\begin{aligned} &\left\| \left(q^T(t), p^T(t)\right)^T \right\| \leq \\ &\leq B \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \|P(p,q,u,t)\| \, dt \right) < \infty, \end{aligned} \tag{4.66}$$

где B *монотоно расте заједно са множеним интегралом, постоје оптималне силе управљања* $P^*_\alpha = P_\alpha(p,q,u^*)$ *за које функционал (4.44) достиже екстремум.*

Доказ. Из релације (4.60) следи да скуп ограничених сила управљања за време које је ограничено величином

$$B\left(\int_{t_0}^{t_1} \|P\| dt\right),$$

па, према томе, се силе $P_\alpha(p,q,u(t))$ јављају дозвољеним силама управљања.

Због (4.59), тј. из разлога што је $\mathcal{J} \geq 0$ следи да постоји нетривијална доња граница вредности функционала $\mathcal{J}$. Нека је $P_\alpha^{(k)}$ узастопност функција, које одговарају доступном k-том управљању $u^{(k)}(t)$, за коју одговарајуће узастопно следбено значење $\mathcal{J}(u^{(k)})$ монотоно тежи граници m; следи $\mathcal{J}(u^{(k)}) \leq m+1$. Због (4.59) за довољно велике бројеве k даље следи да је

$$a\int_{t_0}^{t_1} \left\|P^{(k)}(\cdot,s)\right\|^p ds \leq m+1.$$

Зато се може изабрати такво $u^{(k)}$ које ће слабо тежити граници u^* из $L_p(t_0,t_1)$ такво да је

$$a\int_{t_0}^{t_1} \left\|P^{(k)}(\cdot,s)\right\|^p ds \leq \frac{m+1}{a}.$$

Према томе је

$$\int_{t_0}^{t_1} \|P(p,q,u(t))\| \, dt \leq \left(\frac{m+1}{a}\right)^{1/p} (t_1-t_0)^{1/q}$$

где је $1/p + 1/q = 1$. Сагласно томе и релацији (4.60) сва решења (p_α, q^α) диференцијалних једначина кретања (4.45) и (4.46) су равномерно ограничени, тј.

$$\left\| \left(q^T(t), p^T(t)\right)^T \right\| \leq B \left[\left(\frac{m+1}{a} \right)^{1/\mathrm{p}} (t - t_0)^{1/\mathrm{q}} \right].$$

Равномерно ограничене фамилије $(q^k(t),\, p^k(t))$ истостепено су непрекидна на интервалу $t_0 \leq t \leq t_1$, јер за свака два момента t' и t'' $(t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1)$ постоји константа C и D за које је:

$$\left\| q^{(k)}(t') - q^{(k)}(t'') \right\| \leq C|t' - t''|,$$

$$\begin{aligned}\left\| p^{(k)}(t') - p^{(k)}(t'') \right\| &\leq D|t'' - t'| + \\ &+ D \left(\int_{t'}^{t''} \left\| P(p^{(k)}(s), q^{(k)}(s), u^{(k)}(s) \right\|^{\mathrm{p}} ds \right)^{1/\mathrm{p}} \\ &(t'' - t')^{1/\mathrm{q}} \leq D|t'' - t'| + D \left(\frac{m+1}{a} \right)^{1/\mathrm{p}} |t'' - t'|^{1/\mathrm{q}}.\end{aligned}$$

Према Асколијевој теореми могуће је изабрати такву поступност $(q^{(k)}, p^{(k)}(t))$ да је

$$\lim_{k \to m} (q^{(k)}(t), p^{(k)}(t)) = (\bar{q}(t), \bar{p}(t))\,, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Остаје да се покаже, са механичке стране јасан став, да стање кретања $(\bar{q}(t), \bar{p}(t))$ одговара десним странама диференцијалних једначина кретања (4.45) и (4.46), те и $P_\alpha^* = P_\alpha(p, q, u^*)$, тј.

$$\bar{q} = q + \lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial E(q^{(k)}, p^{(k)})}{\partial p^{(k)}} ds;$$

$$\begin{aligned}\bar{p} = p + \lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[&- \frac{\partial E(p^{(k)}, q^{(k)})}{\partial q^{(k)}} + \\ &+ P(p^{(k)}(s), q^{(k)}(s), u^{(k)}(s)) \Bigg] ds.\end{aligned}$$

Због следећих граничних релација

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{\partial E(q^{(k)}, p^{(k)})}{\partial p^{(k)}} - \frac{\partial E(\bar{p}(s), \bar{q}(s))}{\partial \bar{p}} \right\| ds = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\left\|\frac{\partial E(p^{(k)},q^{(k)})}{\partial q^{(k)}}-\frac{\partial E(\bar{p}(s),\bar{q}(s))}{\partial\bar{q}}\right\|ds=0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\Big\|P(p^{(k)},q^{(k)},u^{(k)}(s))-\\ -P(\bar{p}(s),\bar{q}(s),u^k(s))\Big\|\,ds=0,\end{aligned}\tag{4.67}$$

које су равномерно задовољене увек, осим на неком мноштву S произвољно мале мере, као и неједнакости

$$\begin{aligned}&\int_S\left\|P^{(k)}(p^{(k)},q^{(k)},u^{(k)})\right\|ds\le\\ &\le\left(\int_{t_0}^{t_1}\left\|P^{(k)}(p^{(k)},q^{(k)},u^{(k)})\right\|^{\mathrm{p}}ds\right)^{1/\mathrm{p}}|s|^{1/\mathrm{q}},\end{aligned}$$

које је еквивалентна релацији (4.67), следи

$$\bar{q}(t)=q+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial E(\bar{p}(s),\bar{q}(s))}{\partial\bar{p}}ds,$$

$$\begin{aligned}\bar{p}(t)=p+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\Big[&P(\bar{p}(s),\bar{q}(s),u^*(s))-\\ -\frac{\partial E(\bar{p}(s),\bar{q}(s))}{\partial\bar{q}}\Big]&ds.\end{aligned}$$

То показује да силама управљања $P(p,q,u^*)$ одговарају решења $\bar{p}_\alpha(t)$ и $\bar{q}^\alpha(t)$ система од $2n+2$ диференцијалних једначина кретања (4.45) и (4.46).

Део доказа, који се односи на екстремалност функционала (4.44) је идентичан као од (4.53) до (4.56), јер због додатне констатације да је $\mathcal{F}$ конвексна функција од u је

$$\mathcal{J}(u^*)\le\lim_{k\to\infty}\mathcal{I}(u^k)$$

па је $\mathcal{J}(u^*)=m$, што говори да је $P(p,q,u^*)$ оптимална сила управљања, која оптимизира функционал $\mathcal{J}$ на коначну вредност.

Пример 17. Диференцијалне једначине кретања су

$$\dot{q}=\frac{p}{a},\quad \dot{p}=u(t),\quad a=const,\quad \dim a=\mathrm{M}\,.\tag{П17.1}$$

Треба да се нађе оптимална сила управљања за коју функционал

$$\mathcal{J}=\int_{t_0}^{t_1}U^2(\varkappa t)dt,\quad \varkappa\in\mathbb{R}$$

достиже минимум при прелазу из стања кретања $q(t_0 = 0) = 1\,\mathrm{L}$, $p(t_0 = 0) = 2\,\mathrm{M\,L\,T^{-1}}$ у мировање $q(t_1 = 1) = 0$, $p(t_1 = 1) = 0$.

Енергија $E = p^2/2a$, сила $P_\alpha = 0$, $F = U^2$ па једначине (4.60) - (4.62) имају прост облик

$$(\delta p)^{\cdot} = 0 \quad \longrightarrow \quad \delta p = c_1 = const \tag{П17.2}$$

$$(\delta q)^{\cdot} = \frac{\delta p}{a} = \frac{c_1}{a} \quad \longrightarrow \quad \delta q = \frac{c_1}{a}t + c_2$$

$$\delta q + 2\gamma U \leq 0 \quad \longrightarrow \quad U_0 = -\frac{\delta q}{2\gamma} \tag{П17.3}$$

Из услова (4.64) за t_1 следи

$$c_2 = -\frac{c_1}{a}t_1,$$

па се добија

$$U = -\frac{c_1}{2a\gamma}(t - t_1)$$

Заменом у (П17.1) и интеграљењем тако добивене диференцијалне једначине

$$\dot{p} = -\frac{c_1}{2a\gamma}(t - t_1)$$

произилази да је

$$\begin{aligned} p(t) &= -\frac{c_1}{2a\gamma}\left(\frac{t^2}{2} - tt_1\right) + c_3 = \\ &= -\frac{c_1}{2a\gamma}\left(\frac{t^2}{2} - tt_1\right) + p_0, \\ q(t) &= -\frac{c_1}{2a^2\gamma}\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}t_1\right) + \frac{p_0 t}{a} + q_0, \\ &(p_0 = p(t_0),\ q_0 = q(t_0)). \end{aligned}$$

За задате последње услове $q(t_1) = 0$, $p(t_1) = 0$ следи да је

$$c_1 = -\frac{6a^2\gamma\left(\frac{p_0}{a}t_1 + q_0\right)}{t_1^3}.$$

Како из (П17.3) произилази да је $\dim\gamma = \mathrm{M^{-1}\,T^2}$, то се за димензију константе c_1 добива

$$\dim c_1 = \frac{\mathrm{M^2\,M^{-1}\,T^2} \times (\mathrm{L} + \mathrm{L})}{\mathrm{T^3}} = \mathrm{M\,L\,T^{-1}}$$

што је сагласно релацији (П17.2), па се може писати за $\gamma = -1$, $t_1 = 1$, $p_0 = 2$ и $q_0 = 1$,

$$c_1 = 6(ap_0 + a^2 q_0) = 6a(2+a)(\mathrm{M\,L\,T^{-1}}).$$

Према томе је

$$U = 3(2+a)(t - t_1),$$

а функционал

$$\mathcal{J} = \int_0^1 U^2 dt = 9(2+a)^2 \left(\frac{t^3}{3} - t^2 t_1 + t_1^2 t\right) = \\ = 3(2+a)^2(\mathrm{M^2\,L^2\,T^{-3}}).$$

Узме ли се коефицијент инерције a за јединицу ($a = 1$) добива се

$$\mathcal{J}_{\min} = 27(\mathrm{M^2\,L^2\,T^{-3}}).$$

Спрежућа функција

У циљу краћег писања система диференцијалних једначина кретања (4.45), (4.46), (4.48), (4.49), (4.50) и неједнакости (4.52), као и њихових последичних једначина (4.59) - (4.63) уведена је функција

$$\mathcal{H} = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial E}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha - P_\alpha \delta q^\alpha + \gamma \mathcal{F}. \tag{4.68}$$

Ова функција има, као што се види, димензију енергије или рада

$$dim\mathcal{H} = \dim E = \mathrm{M\,L^2\,T^{-2}}\,.$$

Евентуално подозрење о природи збира малих величина $\delta E = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial E}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha$ и $\delta A = P_\alpha \delta q^\alpha$ са коначном величином $\mathcal{F}$ може се отклонити, јер се множитељ γ може сматрати произвољно малом величином или произвољно малим јединичним именованим (димензионим) бројем.

Још краће функција $\mathcal{H}$ може бити написана као

$$\mathcal{H} = \delta E - P_\alpha \delta q^\alpha + \gamma \mathcal{F} \tag{4.68a}$$

где P_α обухватају све непотенцијалне силе и силе управљања.

За системе са непромењљивим (склерономним) везама, енергија E је једнака збиру кинетичке енергије E_k и потенцијалне енергије E_p, као и

Хамилтонова функција $H = E = E_k + E_p$, па се функција спрезања може писати у облику

$$\mathcal{H} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i - P_i \delta q^i + \gamma \mathcal{F} \tag{4.69}$$

или

$$\mathcal{H} = \delta H - P_i \delta q^i + \gamma \mathcal{F}.$$

Ако се диференцијалне једначине кретања пишу у облику помоћу кинетичке енергије E_k и генералисаних сила Q_α, као (3В.40), спрежућа функција има исто значење као и претходне, али други облик

$$\mathcal{H} = \frac{\partial E_k}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha - Q_\alpha \delta q^\alpha + \gamma \mathcal{F}. \tag{4.70}$$

Атрибут "спрежућа" сам се по себи намеће јер функција $\mathcal{H}$ спреже диференцијалне једначине кретања система са варијационим задатком оптималног кретања. Помоћу ове функције наведене једначине (4.45) - (4.46) пишу се у краћем облику

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\delta q^\alpha)}, \quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\delta p_\alpha)} \tag{4.71}$$

$$(\delta p)^{\cdot} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha}, \quad (\delta q^\alpha)^{\cdot} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_r} = 0; \tag{4.73}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_m} < 0, \quad \forall \delta u_m > 0. \tag{4.74}$$

Сагласно томе, теорема и лема о оптималном управљању се исказују помоћу релација (4.71) - (4.74), тј. помоћу функција спрезања.

Пример 18. спрежућа функција у претходном примеру је

$$\mathcal{H} = \frac{\partial E_k}{\partial p}\delta p - U\delta q + \gamma U^2 = \frac{p}{a}\delta p - U\delta q + \gamma U^2.$$

О теоремама. Теоријска механика, као и друге математичке науке садржи више теорема, него што је овде наведено, нарочито у теорији управљања, теорији осцилација или теорији стабилности кретања. У смислу овдашњег поимања теореме то има смисла општије тврђење у оквиру неког краћега научног рада, изван целовите студије о кретању тела и то ако се тако издвојена теорема не доказује на основу других теорема.

Дакле, *теорема у механици је тврђење општег значења о кретању тела чија се истинитост доказује на основу дефиниција и принципа механике.*

V. О ОДРЕЂИВАЊУ КРЕТАЊА
или о решењима
диференцијалних једначина кретања

Интеграција диференцијалних једначина или система диференцијалних једначина кретања и анализа добивених решења за познате параметре у неком тренутку представља спознају кретања механичких објеката. Мало је реалних кретања тела, а поготово система тела, која се могу описати коначним општим аналитичким решењима диференцијалних једначина . Многи модели система, који се описују у уџбеничкој литератури, не одражавају верно реално кретање објеката. Па ипак, са великом тачношћу и доста правилном проценом величине грешке, механика решава успешно проблеме свих механичких кретања доступних човечјем оку, па и више од тога. О томе је напсано много књига и свакодневно се објављују решења нових проблема. Овде се задржавамо само на неколико констатација, које се базирају на претходном градиву, нарочито на преприципима.

О праволинијском кретању

Два закључка, који су следили из диференцијалне једначине (3А.4), а који су рационална полазишта Њутнове механике, траже верификацију у складу са препринципом постојања.

а) На материјалне тачке, као што су небеска тела, балистички пројектили или бачено тело, дејствује гравитациона сила, па релација (3А.5), према садашњем знању о силама, не задовољава предпринцип постојања те се не може тврдити да се тела крећу равномерно по правим линијама.

Када бисмо знали, што не знамо, у сваком тренутку и сваком положају силу опште гравитације свих небеских тела и када би реактивним мотором могли тренутно производити супротне силе, пројектил би се кретао по правој линији, а то је: кад би било, оно што није и што се за наше знање не може предвидети.

б) Кретање пловила по мирним водама океана могу да се крећу брзином константне величине, али не по правој линији.

в) Локално на Земљи у односу на технички систем мерења везан за Земљу може се силама реакције и другим силама принудити тело да се креће константном брзином, али то још не води ка закључку о облику путање, као праве линије; права као појам равне геометрије није доступан логичко-физичком експерименту, те није неопходно на томе основати механику, нарочито ако цела теорија може да се развије без принципа о праволинијском кретању.

Интеграли
импулса кретања материјалне тачке

За материјалну тачку константне масе и услов

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} = 0 \tag{5.1}$$

из једначине (3А.4) се добија да је вектор импулса кретања константан,

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{c} = \text{const} = m\boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{p}_0. \tag{5.2}$$

На први поглед ово је најпростији први векторски интеграл, којим се решава задатак одређивања кретања

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}(t_0)t + \boldsymbol{r}(t_0). \tag{5.3}$$

Међутим, поглед на релације (1.24) и (1.25), а нарочито (3А.39) или (4.6), као и несагласност о координатама импулса, захтева већа појашњења овог суштинског значења.

Интеграл (5.2) задовољава и најбоље појашњава препринцип одредјености. Коликом тачношћу су познати маса и брзина у неком тренутку t_0, толиком тачношћу се може одредити импулс кретања $\boldsymbol{p}(t)$, при услову (5.1), у сваком другом тренутку.

Препринцип неформалности мора бити задовољен, да би интеграл (5.2) - суштински импулс $\boldsymbol{p}$ опстао у овдашњој теорији.

Разложи ли се вектор (5.2) у координатном систему $(y, \boldsymbol{e})$ као у (1.24), тј.

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{y}^i\boldsymbol{e}_i = c^i\boldsymbol{e}_i = m\dot{y}^i_0\boldsymbol{e}_i$$

и помножи скаларно вектором $\boldsymbol{e}_j$ добива се

$$p_j(t) = m\dot{y}_j = m\dot{y}_j(t_0) = p_j(t_0). \tag{5.4}$$

Допуштајући паралелно померање базних вектора $\boldsymbol{e}_i$, а са њима и координатних вектора $\boldsymbol{g}_k = \partial y^i/\partial x^k \boldsymbol{e}_i$ за слободно померање тачке, може се вектор (1.24), тј.

$$\boldsymbol{p} = m\dot{x}^k\boldsymbol{g}_k(x) = m\dot{x}^K(t_0)\boldsymbol{g}_K(x_0) \tag{5.4a}$$

помножити скаларно вектором $\boldsymbol{g}(x)$. Добивају се пројекције интеграла (5.2) на координатне правце $\boldsymbol{g}_l(x)$ у облику

$$\begin{aligned} p_l(x,\dot{x}) &= a_{kl}(x)\dot{x}^k = a_{kl}(x_0,x)\dot{x}^k(t_0) = \\ &= a_{Kl}a^{KL}p_L = a_l^L p_L, \end{aligned} \tag{5.5}$$

где је великим словом у индексу означена односна величина у почетном тренутку времена, а тензор

$$\begin{aligned} a_{Kl} &= m\left(\frac{\partial y}{\partial x^k}\right)_0 \frac{\partial y}{\partial x^l} = \\ &= mg_{Kl} = m\boldsymbol{g}_K(x_0)\cdot \boldsymbol{g}_l(x) \end{aligned} \tag{5.6}$$

је *двотачкасти инерциони тензор*. Тензор g_{Kl} у литератури се налази још под називом "тензор паралелног померања".

Да би био задовољен препринцип инваријантности требало би да се интеграли (5.4) и (5.5) добивају директно из координатних облика једначина кретања (3А.13) и (3А.14).

Према препринципу неформалности ова релација би требало да важи и у односу на криволинијски координатни систем. То се потврђује интегралењем једначина (3.14) за $X_j + R_j = 0$. Коваријантни интеграл је

$$\hat{\int} a_{ij}Dv^j = \hat{\int} D(a_{ij}v^j) = a_{ij}v^j - A_i = 0, \tag{5.7}$$

где је A_i коваријантно константни ковектор $A_i = g_i^K p_K(t_0)$. Према томе интеграл (5.7) јесте интеграл (5.5),

$$p_i(t) = a_{ij}\dot{x}^j = a_{iJ}\dot{x}^J = a_{iJ}a^{JK}p_K = g_i^K p_K(t_0), \tag{5.8}$$

где је $g_i^K p_K$ коваријантно константни вектор; $DA_i/dt = 0$. Без указивања на могућност паралелног померања ковектора $\boldsymbol{g}_i$, могу се импулси (5.4) превести из система координата y на криволинијске координате x. Означимо ли координате x индексима $k, l = 1,2,3$ следиће

$$p_j(t) = p_k\frac{\partial x^k}{\partial y^j} = p_j(t_0) = p_K(t_0)\frac{\partial x^K}{\partial y^j}.$$

Множењем матрицом $\left[\partial y^j/\partial x^l\right]$ добива се

$$p_j(t)\frac{\partial y^j}{\partial x^l} = p_K(t_0)\frac{\partial x^K}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial y^j}{\partial x^l} = g_l^K p_K(t_0) = p_l(t),$$

јер је

$$g_l^K = \frac{\partial x^K}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^l}.$$

Иако коваријантни интеграли задовољавају сва три препринципа, оваква интеграција није распрострањена у механици због ”тешкоћа” у одређивању тензора g_l^K. Зато потражимо обичне прве интерграле, сведене на константе, а не коваријантне константне координате импулса.

Диференцијалне једначине кретања (3A.14) напишимо у развијеном облику

$$\begin{aligned} a_{ij}\frac{D\dot{x}^i}{dt} = \frac{Da_{ij}\dot{x}^i}{dt} = \frac{Dp_j}{dt} = \\ = \frac{dp_j}{dt} - p_k\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt} = X_j + R_j. \end{aligned} \tag{5.9}$$

За услове

$$X_j + R_j + p_k\Gamma^k_{ij}\dot{x}^i = 0, \tag{5.10}$$

који се, треба приметити, разликују од услова (5.1) добијају се први интеграли

$$p_j(t) = \text{const} = p_j(t_0) \tag{5.11}$$

у односу на координатни систем $(x, \boldsymbol{g})$. Дакле као и у случају интеграла (5.4) у базном координатном систему $(y, \boldsymbol{e})$. Ови интеграли разликују се знатно од интеграла (5.8), па према томе по суштини и од (5.4). Због тога ћемо интеграле (5.4) и (5.8) називати *коватијантни интеграли*, за разлику од обичних интеграла (5.11). Обични интеграли разарају тензорску природу посматраних објеката.

Пример 19.* Посматрајмо кретање материјалне тачке упоредо у односу на праволинијски y^1, y^2, y^3 и цилиндарски координатни систем $x^1 := r, x^2 := \varphi, x^3 := z$.

Познато је

$$\begin{aligned} y^1 &= r\cos\varphi,\ y^2 = r\sin\varphi,\ y^3 = z \\ a_{ij} &= m\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \\ g_{iK} &= \begin{Bmatrix} \cos(\varphi-\varphi_0) & r_0\sin(\varphi-\varphi_0) & 0 \\ -r\sin(\varphi-\varphi_0) & rr_0\cos(\varphi-\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Диференцијалне једначине кретања и интеграли за

$$Y + R_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad X + R_X = 0$$

*В. Вујичић, *Коваријантна механика*, стр. 47 и 49.

су

$$
\left.\begin{array}{c} m\ddot{y}^i = 0 \\ (i=1,2,3) \end{array}\right\} \quad \overset{\tau}{\Leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{c} m\left[\ddot{x}^1 - x^1\left(\dot{x}^2\right)^2\right] = 0, \\ m\left[x^1\ddot{x}^2 + 2\dot{x}^1\dot{x}^2\right] = 0, \\ m\ddot{x}^3 = 0 \end{array}\right.
$$

$$
\downarrow \quad \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{*}{\downarrow} \quad \underset{*}{\uparrow}
$$

$$
\dot{y}^i = \dot{y}^i_0 \quad \underset{\tau}{\Leftarrow|\Rightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{x}^1 = \sqrt{\left(\dot{x}^1_0\right)^2 + (x^1_0\dot{x}^2_0)^2\left[1 - \left(\dfrac{x^1_0}{x^1}\right)^2\right]}, \\ \dot{x}^2 = \dot{x}^2_0\left(\dfrac{x^1_0}{x^1}\right)^2, \\ \dot{x}^3 = \dot{x}^3_0. \end{array}\right.
$$

Коваријантно диференцирање и коваријантно интеграљење успоставља еквивалентност при једној те истој трансформацији

$$
\frac{d\dot{y}^i}{dt} = \frac{D\dot{y}^i}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{D\dot{x}^i}{dt} = 0
$$

$$
\updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow
$$

$$
\dot{y}^i = \dot{y}^i_0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{x}^1 = \dot{x}^1_0\cos(x^2 - x^2_0) + \\ \qquad + x^1_0\dot{x}^2_0\sin(x^2 - x^2_0) \\ \dot{x}^2 = \dfrac{x^1}{(x^1)^2}\left[x^1_0\dot{x}^2_0\cos(x^2 - x^2_0) - \right. \\ \qquad \left. - \dot{x}^1_0\sin(x^2 - x^2_0)\right], \\ \dot{x}^3 = \dot{x}^3_0. \end{array}\right.
$$

Краћу, јаснију, општију и значајнију разлику првих интеграла импулса $p_i = c_i$ и коваријантних интеграла $p_i = A_i$ показује интеграљење диференцијалних једначина (5.4) за услов да су генералисане силе $Q_i = 0$. Нека то за сада поново буде кретање једне материјалне тачке у криволинијском систему координата x^1, x^2, x^3, тј.

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial E_k}{\partial x^i} = 0, \quad (i = 1,2,3). \tag{5.12}
$$

Ове једначине се могу написати у облику

$$
\frac{D}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}^i} = 0. \tag{5.13}
$$

Из (5.12) за $\partial E_k/\partial x^i = 0$ добивају се интеграли (5.11), а из (5.13) коваријантни интеграли (5.8), јер је

$$
\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}^i} = p_i.
$$

Канонске једначине (5.59), као што се види из

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + X_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

обично производе интегралне импулсе типа (5.11) за услов да су десне стране тих једначина једнаке нули.

Већа је распрострањеност обичног интегралења и интеграла (5.11) у поређењу са коваријантним интегралима (5.8). То углавном због неразвијенијег рачуна са векторима, односно тензорима, него са скаларним функцијама. Погодност обичне интеграције огледа се и у томе што се при постојању мањег броја интеграла импулса од координата импулса, могу одређивати константе у зависности дате почетне вредности посматраног импулса, на пример,

$$p_1(t) = c_1 = p_1(t_0) \quad \text{и} \quad p_3(t) = c_3 = p_3(t_0);$$
$$p_2 \neq \text{const}\,.$$

Та предност долази до изражаја код система материјалних тачака са везама, а нарочито на многообразностима T^*M. Тачност и једних и других је доказана, али за различите услове. Коваријантна интеграција је инваријантна у односу на линеарне хомогене трансформације координатних система, те одражава тензорску природу интеграла. То није случај са обичном интеграцијом, ни у сагласности са препринципом неформалности, што упућује да коначне резултате синтезе треба проверавати упоређењем са одговарајућим резултатима у координатним системима $(y, \boldsymbol{e})$.

Пример 20. Интеграли импулса кретања по површи.

Диференцијалне једначине кретања материјалне тачке по површи (3А.29)

$$f(y_1, y_2, y_3, y_0) = 0, \quad f_0 = y_0 - \tau(t) = 0 \tag{5.14}$$

су облика (3А.26) и (3Б.53) тј.

$$m\ddot{y}_i = Y_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial y^i} \tag{5.15}$$

и

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial y_0} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0. \tag{5.16}$$

Из услова убрзања (3А.34), тј. у конкретном случају $(y_i = y^i)$

$$\ddot{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^l} \dot{y}^k \dot{y}^l + \frac{\partial f}{\partial y_i} \dot{y}^i + \frac{\partial f}{\partial y_0} \ddot{y}_0 = 0, \tag{5.17}$$

$(k, l = 0, 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3)$. добива се да је

$$\lambda = -\frac{m(\Phi + \frac{\partial f}{\partial y_0}\ddot{y}_0) + \frac{\partial f}{\partial y_i} Y_i}{\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y^i}} \tag{5.18}$$

где је

$$\Phi = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\dot{y}_i\dot{y}_j + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_0}\dot{y}_i\dot{y}_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial y_0}\dot{y}_0\dot{y}_0. \tag{5.19}$$

Постаје очигледно да у десним странама диференцијалних једначина кретања (5.15) фигурише инерциона сила $-m\ddot{y}_0$ за случај да једначина површи (5.14) садржи функцију времена на степен различит од јединице, а у случају првог степена присутна је константна брзина $\dot{y}^0$. Због тога пре интегралења диференцијалних једначина (5.15) је неопходно узети у обзир ту чињеницу, да би се добили тачни интеграли импулса кретања. У циљу истицања те важне констатације неће се изгубити ништа од општег доказа ако претпоставимо отсутност резултанте активних сила Y_i ($Y_i = 0$). Ако је још множитељ (5.18) једнак нули постојали би интеграли импулса кретања (5.4). Претпостави ли се још и треће - да се површ не мења у току времена, тј. да је једначина (5.14) облика $f(y_1, y_2, y_3) = 0$, следило би из (5.18) да је

$$\lambda = -m\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\dot{y}_i\dot{y}_j}{\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y^i}} = 0, \tag{5.20}$$

што нас враћа на разматрање кретања по двостраној непокретној површи. Ако се пак та површ мења, следило би из (5.18) и (5.19) да је

$$\lambda = -m\frac{\frac{\partial f}{\partial y_0}\ddot{y}_0 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_0}\dot{y}_i\dot{y}_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial y_0}\dot{y}_0\dot{y}_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\dot{y}_i\dot{y}_j}{\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y^i}} \tag{5.21}$$

а изједначвање са нулом водило би ка констатацији да су импулси кретанја константни при кретању материјалне тачке по површи која се равномерно и транслаторно креће у одсутности сила. Међутим, учињене претпоставке противрече препринципу постојања, Галилејевим законима, као и општем закону гравитације. Могућа је претпоставка (5.1), али и при том множитељи веза (5.2) и (5.21) указују на знатну разлику између кретања материјалне тачке по непокретној и покретној површи.

У односу на криволинијске системе координата (x, g) једначина везе (5.14) се трансформише у

$$f(x^1, x^2, x^3, x^0) = 0, \quad x^0 = \tau(t) \tag{5.22}$$

а диференцијалне једначине кретања на облик (3А.14). Из тих једначина за претпостављене услове могу се добити коваријантни интеграли импулса (5.8), а за услове (5.10) добиће се први интеграли облика (5.11).

Уколико се посматрано кретање по површи (5.22) одређује помоћу једначина (3В.40) у којима је кинетичка енергија

$$E_k = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta, \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2),$$

а импулси $p_0 = a_{0\beta}\dot{q}^\beta$, $p_1 = a_{1\beta}\dot{q}^\beta$, $p_2 = a_{2\beta}\dot{q}^\beta$, добиће се три коваријантна интеграла

$$p_\alpha(t) = A_\alpha\left(p(t_0), q(t)\right),$$

за услов да су генералисане силе једнаке нули, $Q_\alpha = 0$, или три прва интеграла

$$p_\alpha(t) = c_\alpha = p_\alpha(t_0), \tag{5.23}$$

за услове

$$Q_\alpha + \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha} = 0.$$

За случај да везе (5.22) не зависе експлицитно од времена ишчезава координата q^0, и њој одговарајући импулс. Тад постоје само два импулса (5.23).

Интеграли импулса кретања система

За произвољни систем материјалних тачака из теореме промене импулса тачака (4.1) добијају се коваријантни интеграли импулса

$$p_\alpha = A_\alpha\left(p(t_0), q(t)\right)$$

где су A_α коваријантно константни вектори, ако су генералисане силе једнаке нули. Како коваријантни интеграли на $T^*\mathcal{N}$ нису разрађени, траже се први интеграли $p_\alpha(t) = c_\alpha = p_\alpha(t_0)$, који се најпростије добијају из диференцијалних једначина (3B.58), одакле постаје очигледно да постоје и први интеграли за услове

$$p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = 0, \quad (\alpha = 0, 1, ..., n).$$

За $\alpha = 0$, одавде, као и из (3B.60), се доказује да $p_0 \neq -H$.

Интеграли импулса обртног кретања тела

На основу релација (4.5) и (4.8) следи да постоје интеграли импулса обртног кретања тела константне масе око непомичне тачке и у односу на непомични координатни ортонормирани систем $(y, \boldsymbol{e})$,

$$p_i = \mathcal{I}_{ij}(t)\omega^j(t) = A_i = \mathcal{I}_{ij}(t_0)\omega^j(t_0). \tag{5.24}$$

ако си моменти сила $M_i = 0$, $(i, j = 1, 2, 3)$.

Слично томе, из диференцијалних једначина (4.13) за $\mathcal{M}_i = 0$, и $\mathcal{I}_{ik} = 0^*$ $i \neq k$ добивају се

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \mathcal{I}_{11}\Omega^1 = A_1 = c_1, \\ p_2 &= \mathcal{I}_{22}\Omega^2 = A_2 = c_2, \\ p_3 &= \mathcal{I}_{33}\Omega^3 = A_2 = c_3, \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

где су $c_i = \text{const}$.

Квадрирањем ових једначина и сабирањем добива се

$$\left(\mathcal{I}_{11}\Omega^1\right)^2 + \left(\mathcal{I}_{22}\Omega^2\right)^2 + \left(\mathcal{I}_{33}\Omega^3\right)^2 = c^2 \tag{5.26}$$

где је $c = const$.

Интеграл енергије

Теорема промене кинетичке енергије (4.15) показује да је E_k једнака интегралу

$$E_k = \int S dt + c_1, \tag{5.27}$$

те је константна само ако је снага тог система S једнака нули.

Релација (4.30) показује да је укупна механичка енергија (4.25) стална, тј.

$$E_k + E_p + \mathcal{P}(q^0) = c_2 \tag{5.28}$$

ако је снага непотенцијалних сила једнака нули. С обзиром на (4.32), исти интеграл се може написати у облику

$$E_k + E_p = \int \mathcal{R}_0(q^0) dq^0 + c_2. \tag{5.29}$$

За случај да су још и везе непромењливе ишчезава интеграл са десне стране (5.29) па се добија, под тим условом познати интеграл "о одржању" енергије

$$E_k + E_p = h = \text{const}\,. \tag{5.30}$$

Разлика између интеграла (5.29) и (5.30) опширно и јасно је показана у радовима [54] и [64].

Пробни интеграли канонских диференцијалних једначина кретања

Свака функција $f_\mu(q^0, ..., q^n; p_0, ..., p_n)$ или

$$f_\mu(q^0, ..., q^n; p_0, ..., p_n) = c_\mu = \text{const}\,. \tag{5.31}$$

---

*види, на пример, "Ојлеров случај", А. Билимовић, *Динамика крутог тела*, Београд, 1955, стр. 74.

јесте интеграл једначина

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= \frac{\partial E}{\partial p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha} + P_\alpha \end{aligned} \qquad (\alpha = 0, 1, ..., n) \right\} \tag{5.32}$$

ако је извод по времену функције f_μ једнак нули дуж фазне трајекторије система, тј.

$$\dot{f}_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial q^\alpha}\frac{\partial E}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f_\mu}{\partial p_\alpha}\frac{\partial E}{\partial q^\alpha} + P_\alpha \frac{\partial f_\mu}{\partial p_\alpha} = 0 \tag{5.33}$$

или

$$(f_\mu, E) + P_\alpha \frac{\partial f_\mu}{\partial p_\alpha} = 0, \tag{5.34}$$

где су (f_μ, E) Поасонове (Poisson) заграде за $T^*\mathcal{N}$.

Пример 21. Гироскопске силе су задате формулом

$$P_\alpha = G_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta, \quad G_{\alpha\beta} = -G_{\beta\alpha}.$$

Проверимо да ли је E интеграл диференцијалних једначина (5.32).

Како је $(E, E) \equiv 0$ и

$$G_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta \frac{\partial E}{\partial p_\alpha} = G_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\dot{q}^\alpha = 0$$

следи да постоји интеграл

$$E = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + E_p(q^0, q^1, ..., q^n) + \int \mathcal{R}_0(q^0)dq^0 = c.$$

На сличан начин показује се постојање интеграла енергије у присуству нехолономних веза облика $\varphi_\sigma = b_{\sigma\alpha}(q^0, q^1, ..., q^n)\dot{q}^\alpha = 0$.

Пример 22. Хамилтонова функција $H(p_1, ..., p_n;\ q^1, ..., q^n)$ није интеграл диференцијалних једначина (3В.62) у општем случају, јер је $(H, E) \neq 0$. Заиста, ако се има у виду (3В.51) и (3В.61) добија се

$$\begin{aligned} (H, H + \mathcal{P}) &= (H, H) + (H, \mathcal{P}) = (H, \mathcal{P}) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q^\alpha} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^0}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p_0} - \frac{\partial H}{\partial p_0}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q^0} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_0}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q^0} = \dot{q}^0\mathcal{R}_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Тек за случај да везе не зависе од времена или да је $\mathcal{R}_0 = 0$ Хамилтонијан се јавља интегратом потенцијалног механичког система.

Пример 23. Композицијом диференцијалних једначина (4.13) са Ω^i, за $\mathcal{I}_{ik} = 0$, $(i \neq k)$, $\mathcal{M}_i = 0$, или поступним множењем једначина (4.15) одговарајућим угаоним брзинама $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, сабирањем и интеграцијом добија се *интеграл енергије*

$$E_k = \mathcal{I}_{11}\left(\Omega^1\right)^2 + \mathcal{I}_{22}\left(\Omega^2\right)^2 + \mathcal{I}_{33}\left(\Omega^3\right)^2 = h = \text{const}$$

обртног кретања тела око центра инерције.

Интеграција и препринципи

При развоју теорије механике на основу појединих принципа механике показано је, да се једна те иста кретања једних те истих механичких система, могу описивати различитим диференцијалним једначинама у односу на исти или различите координатне системе. За све наведене системе диференцијалних једначина кретања показано је, да су сагласне са препринципима. Препринцип неформалности (инваријантности) могао је бити заступљен за веома сложене системе диференцијалних једначина кретања благодарећи развијеној теорији диференцијалне геометрије на многообразностима и инваријантности природног ("коваријантног" или "апсолутног") извода вектора по времену.

Међутим, у интегралном рачуну и његовој примени у механици скоро да се не обраћа пажња на питање инваријантности интеграције диференцијалних израза, међу којима су најчешће диференцијалне једначине кретања. Већ је истакнуто да обична интеграција разара тензорску природу геометријских и механичких објеката, а то није у складу са препринципима, нарочито са препринципма одређености и инваријантности. Генерализација вектора као уређеног скупа функција над векторском базом, коју опет чине функције, не води ка одређивању атрибута кретања у механици ни посредством диференцирања, ни посредством интеграције, те на тој општости не може са сагласити изведена теорија са препринципом одређености. Општије категорије знања припадају вишим нивоима математике. Пример 13. јасно показује на какве се тешкоће наилази и са препринципом инваријантности ако није одређена и позната векторска база. Још су присутне "истине": "убрзање није вектор (у тензорском смислу)", "вектор убрзања није вектор", или "тензор инерције није тензор". Такве тезе немају места у теорији која полази од овде уведених препринципа постојања, одређености и неформалности. Не постоји у механици само једна нека општа конфигурациона уређеност - један опште уређен скуп свих тела и њихових међусобних растојања, него много разних скупова и подскупова, чија се проблеми кретања не решавају на један начин, тј. *једнообразно* него на више еквивалентних начина, тј. *вишеобразно* или *многообразно*. Зато исказ "диференцирање и интеграција тензора на многообразности" има смисла ако се појасни о којој је једнообразности реч, или ако се истакну ваљани докази о инваријантности диференцирања и интеграције на многообразностима. Општост говори о мноштву разног, па се у смислу препринципа одређености могу тражити и решење опште тачности; за њих су неопходна и одређена и општа знања о предмету решавања.

Прост интеграл, на пример,

$$f(x) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c = \text{const}.,$$

је *неодређен* или *одређен до константе*, јер ако се не поседује никакво друго знање о функцији $f(x)$ не може се одредити која је то крива (путања, сила, енергија, ...) из непрекидног мноштва кривих за свако $c \in \mathbb{R}$. Тек кад се зна бар још један податак о $f(x)$ у било којој тачки, рецимо $f(2) = 2$, знаће се која је то линија.

Слично је са коваријантним интегралом на метричким диференцијалним многообразностима који су, као што се видело, заступљени у механици. За интеграл

$$\hat{f} = \hat{\int} g_{ij}(x)v^i(x)dv^j(x) = \frac{1}{2}g_{ij}(x)v^i(x)v^j(x) + \mathcal{A} \tag{5.35}$$

или још простије

$$\hat{f} = \hat{\int} g_{ij}(x)dv^j(x) = g_{ij}(x)v^j + \mathcal{A}_i \tag{5.36}$$

може се рећи да је *неодређен* или *одређен до коваријантно константног тензора* ($\mathcal{A}_i$ - вектори, $\mathcal{A}$ - константа). До степена знања многообразности, што значи и метричког тензора $g_{ij}(x)$ и коваријантно константног тензора $\mathcal{A}$ у некој одређеној тачки може се одредити тражени интеграл. Интеграл (5.36) је типа интеграла енергије (5.30), а интеграл (5.36) типа импулса (5.24).

Пример 24. Систем од N материјалних тачака константних маса m_ν ($\nu = 1, ..., N$) и $3N - 2$ коначних веза $f_\mu(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N) = 0$ има дводимензиону многообразност M^2, чији је метрички или тачније инерциони тензор

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^j} = a_{ji}(q^1, q^2). \tag{5.37}$$

Диференцијалне једначине кретања (3В.40а) за $Q_1 = 0,\ Q_2 = 0$ су

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0,$$

или, с обзиром да је

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i} = p_i = a_{ij}\dot{q}^j,$$

$$Dp_i = D(a_{ij}\dot{q}^j) = 0.$$

Коваријантни интеграл је облика (5.7) тј.

$$\hat{\int} D(a_{ij}(q)\dot{q}^j) = a_{ij}\dot{q}^j - \mathcal{A}_i = 0 \tag{5.38}$$

где је $\mathcal{A}_i$ коваријантно константни вектор, тј.

$$D\mathcal{A}_i = d\mathcal{A}_i - \mathcal{A}_k\Gamma^k_{ij}dq^j = 0. \tag{5.39}$$

Ако је M^2 еуклидска многообразност коваријантно константни вектор може се одредити помоћу почетних услова $q(t_0)$, $\dot{q}(t_0)$ и оператора аутопаралелног померања g^a_i, тј. $\mathcal{A}_i = g^a_i p_a(t_0)$. За многообразности сложеније структуре, где метод паралелног преноса (5.39) прави додатне тешкоће, траже се други једноставнији начини одређивања $\mathcal{A}_i$. Тешкоће у одређивању граничних и почетних услова при решавању парцијалних диференцијалних једначина нису разлог за закључивање да "интеграл није тачан" или "немогућ". У појендностављењу примера посматрајмо кретање тачке по обртној површи $z = f(\rho)$ у односу на цилиндарски координатни систем $(\rho, \varphi, z; \boldsymbol{g})$. Инерциони тензор у том случају је

$$a_{ij} = mg_{ij} = m\left\{\begin{matrix} 1+\frac{df}{d\rho} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{matrix}\right\}.$$

С обзиром да координате овог тензора не зависе од $\varphi =: q^2$, координа $\mathcal{A}_2$ биће константна, која ће се одређивати из почетних услова. Друга координата $\mathcal{A}_1$ може се тражити и одредити помоћу метрике посматране површи

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j \quad \rightarrow \quad g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} = 1,$$

односно

$$a_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt} = a^{ij}p_i p_j = h = \mathrm{const}\,.$$

Заменом $\mathcal{A}_2 = a_{2j}\dot{q}^j = p_2(t_0) = c$ и $\mathcal{A}_1 = a_{1j}\dot{q}^j = p_1$, у претходну релацију следиће:

$$a^{11}(\mathcal{A}_1)^2 + a^{22}(c)^2 = h$$

што одређује координату $\mathcal{A}_1$, јер је

$$a^{11} = \frac{m}{1+\left(\frac{df}{d\rho}\right)^2}, \quad a^{22} = \frac{m}{\rho^2}.$$

Тешкоће у интеграцији система векторских диференцијалних једначина, какве у суштини и јесу диференцијалне једначине кретања механичких система, без обзира у каквом координатном облику су написане, најбоље изражава познати Јакобијев интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \text{const}. \quad (i = 1, ..., N) \tag{5.40}$$

где је L Лагранжева функција (3В.21). Тај интеграл задовољава систем диференцијалних једначина кретања (3В.40а) ако кинетичка енергија не зависи експлицитно од времена,

$$E_k = \frac{1}{2}a_{ij}(q^1, ..., q^n)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

а силе $Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q^i}$ су конзервативне, тј. рад тих сила не зависи од пута кинетичка енергија не зависи од времена. Тада је

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = a_{ij}\dot{q}^j\dot{q}^i = 2E_k,$$

па се интеграл (5.40) своди на интеграл одржања енергије

$$E_k(t) + E_p(t) = h = E_k(t_0) + E_p(t_0). \tag{5.41}$$

Међутим интеграл (5.40) је прихваћен и за системе чија је кинетичка енергија облика

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j}_{T_2} + \underbrace{b_i(q)\dot{q}^i}_{T_1} + \underbrace{c(q)}_{T_0},$$

којом приликом се уместо (5.41) добија другачији интеграл

$$T_2 - T_0 + E_p = h_1 = \text{const}. \tag{5.42}$$

Овај интеграл не следи непосредно из теореме (4.15) о промени кинетичке енергије за механичке системе чије се везе мењају у току времена. Тај несклад је последица игнорисања једначине (3В.40б), што је било могуће само за случај да је

$$\partial E/\partial q^0 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^0} = \text{const} = p_0.$$

Према томе, тај посебни интеграл реономног система далеко је од интеграла одржања енергије реономног система. Из теореме (4.15) или из леме (4.23) следи да је за реономни систем

$$H = E_k + E_p = \int R_0 dq^0 + C.$$

или

$$E = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q^0, q^1, ..., q^n)\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \\ + E_p(q^0, q^1, ..., q^n) + \mathcal{P}(q^0) = h_1.$$

Доказано је да n стандардних Лагранжових диференцијалних једначина (3B.40a) друге врсте нису еквивалентне систему диференцијалних једначина прве врсте (3A.25); да би та два система било сагласна потребно је систему стандардних једначина (3B.40a) додати и једначину (3B.40б).

На основу n диференцијалних једначина (3B.40a) или њима одговарајућих $2n$ диференцијалних једначина (3B.59) не може се доказати теорема о промени кинетичке енергије (4.15). Да би се то постигло неопходно је узети у обзир једначину (3B.40б), односно њој еквивалентне релације (3B.60). Имајући то у виду природно је очекивати да интеграли различитих система диференцијалних једначина буду различити. За механику то има велико значење, јер превиђаји или игнорисање појединих параметара, а камоли једначина не дају истиниту информацију о кретању.

До сличних забуна у механици доводе разне смене координата при интеграљењу или преображају диференцијалних једначина на простије облике ако се пренебрегну основа полазишта теорије о кретању. Тешко да се може наћи неко дело о механици које не садржи линеарну диференцијалну једначину или систем једначина облика

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.43}$$

која описује "хармонијски осцилатор". Такав систем једначина, као што је познато, описује периодно кретање по разним елипсоидним фазним путањама, иако у суштини то може да буде само пресликано кретање по фазним спиралама чије су полазне диференцијалне једначине кретања

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + cz = \pm G,$$

где је b коефицијент отпора средине, а G однос силе сувог трења и масе. Заиста, са две смене коориднта

$$\bar{z} = z \mp \frac{c}{k^2} \quad \text{и} \quad \bar{z} = xe^{-bt}$$

претходна једначина се своди на једначину (5.43), али не и на хармонијско кретање. Истина могло би се рећи "хармонијске осцилације" у односу на функцију $x(t) = \bar{z}e^{bt}$, али као што се види по функцији $\bar{z}$ и коефицијенту отпора b, такво кретање механичког објекта није хармонијско. Механика не лежи само на математичким релацијама, него и на изворишту тих релација које задовољавају препринципе механике. Чак и најбрижнијим настојањем да се одреди тачно решење диференцијалних једначина чине се допустиве грешке. Опште решење диференцијалних једначина кретања за различите почетне услове одређује различите трајекторије. Зато решења диференцијалних једначина подлежу провери, коју теоријски највећим делом обухвата квалитативна анализа решења или теорија стабилности кретања, а у примени практични модели.

"Стремио сам да изложим радове Љапунова без лажне модернизације"

Н.Г. Четаев

VI. О Стабилности кретања и мировања

1. Уводне напомене

"Динамика је наука о стварним равнотежама и кретањима материјалних система. Галилеј и Њутн открили су њена начела и показали њихову веродостојност огледима над падањем тешких тела и објашењу кретања планета. Али се не свако стање механичког система, које одговара математички строгом решењу како једначина мировања тако и диференцијалних једначина кретања, осматра у стварности."

"Општи принцип за избор решења, која одговарају стабилним стањима у механици није био дат; био је прихваћен карактер науке о идеализованим системима и за сваку строгу примену на нашу природу, принципијелно сваки пут, су тражена решења задатака стабилности ...."

"Општи проблем о стабилности кретања у класичној поставци решио је Љапунов ...".

Наведених неколико реченица Николаја Гуревича Четаева у потпуном је складу са препринципима ове механике, те дело В.В. Румјанцева и А.С. Озиранара [18] најбоље претходи овдашњем кратком разматрању стабилности кретања механичких система.

Диференцијалне једначине кретања

У циљу обухватања свих механичких система посматрају се $2n+2$ диференцијалних једначина (3В.59) и (3В.60), тј.

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + P_\alpha \tag{6.1}$$

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (\alpha = 0, 1, ..., n), \tag{6.2}$$

где је $H(p_0, p_1, ..., p_n; q^0, q^1, ..., q^n)$ функција одређена формулом (3В.51), тј

$$H = \frac{1}{2}a^{\beta\gamma}(q^0, q^1, ..., q^n)p_\beta p_\gamma + \\ + E_p(q^0, q^1, ..., q^n, t). \tag{6.3}$$

У систему једначина (6.1) и (6.2) фигурише $n+1$ непознатих импулса

$$p_\alpha = a_{\alpha\beta}(q^0, q^1, ..., q^n)\dot{q}^\beta, \tag{6.4}$$

n непознатих и независних генералисаних координата $q^1(t), ..., q^n(t)$ и, до решења диференцијалних једначина (6.1), непозната сила промене веза $R_0(q^0)$. Координата $q^0(\varkappa, t)$ је унапред задата до тачности изабраног параметра.

Инерциона матрица $a_{\alpha\beta}$ је позитивно дефинитна и има ранг n+1. То се лако доказује помоћу позитивно-дефинитне функције кинетичке енергије E_k. Полазећи од одредница (3Б.5), (3Б.7) и (3В.31) из којих се види, као у (3В.33) и (3В.49), да је кинетичка енергија

$$E_k = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta \geq 0 \tag{6.5}$$

хомогена квадратна форма генералисаних брзина $q^0, q^1, ..., q^n$ или генералисаних импулса $p_0, p_1, ..., p_n$ и то позитивна за свако $\dot{q}^\alpha \neq 0$ а једнака нули само за случај мировања, тј. за $\dot{q}^\alpha = 0$ $(\alpha = 0, 1, ..., n)$ или $p_\alpha = 0$. Према томе и матрица $a_{\alpha\beta}$ као и њој инверзна матрица $a^{\alpha\beta}$ су позитивно дефинитне.

Једначина (3В.60), тј

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial q^0} + P_0^* + R_0, \tag{6.6}$$

која једина од целог система (6.1) садржи функцију R_0 може се заобићи посматрањем само система од $2n$ диференцијалних једначина кретања (6.1). Такав систем једначина није потпун - у потпуности не описује кретање механичког система са промењљивим везама, па се може називати систем диференцијалних једначина кретања у односу на део промењљивих. Искључењем помоћне координате q^0, функција (6.5) губи степен хомогености 2, што није у сагласности са препринципом неформалности.

За механичке системе материјалних тачака са везама независним од времена исчезавају релације (3В.60) због непостојања помоћне координате q^0, тако да једначине (6.1) и (6.2) задовољавају исти облик

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + P_i \tag{6.7}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, ..., n), \tag{6.8}$$

где функција

$$H = \frac{1}{2} a_{ij}(q^1, ..., q^n)\dot{q}^i \dot{q}^j + E_p(q^1, ..., q^n) \tag{6.9}$$

садржи позитивно дефинитну матрицу $a_{ij} = a_{ji}$ ранга n.

За системе са промењљивим масама $m_\nu(t)$ инерциона матрица зависи посреством маса $m(t)$ и од времена t, као што се види из релација (1.26), (3А.40) и (3В.33).

Равнотежно стање и положај

Под појмом *равнотежно стање система* подразумева се мировање посматраних тела у одредљивом положају $q^\alpha = q_0^\alpha = const$; све генерлисане брзине су једнаке нули, те, с обзиром на (6.4) и генералисани импулси су $p_a = 0$.

Једначине равнотежног стања, према томе, произилазе из једначина (6.7), тј.

$$\left(P_\alpha - \frac{\partial E_p}{\partial q^\alpha} \right)_{p_\alpha = 0} = 0, \tag{6.10}$$

или, сагласно једначинама кретања (3В.40) и (3В.52),

$$Q_\alpha(\dot{q}, q)|_{\dot{q}=0} = 0 \tag{6.11}$$

те решење једначина (6.10) или (6.11) одређују *равнотежни положај* $q_0^\alpha = const$ материјалног система.

Дефиниција 1. *Под равнотежним стањем механичког система подразумева се скуп решења* $q_0^\alpha \in N$ *једначина* (6.11) *и* $\dot{q}_\alpha(t) = 0$ *или* $\dot{p}_\alpha(t) = 0$.

Дефиниција 2. *Под равнотежним положајем механичког система подразумева се положај* $q^\alpha = q_0^\alpha$ *на координатној многообразности чије координате задовољавају једначине* (6.11).

Пример 25. На обртном елипсоиду чија је једначина у координатном систему $(y, \boldsymbol{e})$

$$f(y, t) = c^2(t)(y_1^2 + y_2^2) + a^2(t)y_3^2 - a^2(t)c^2(t) = 0$$

или у односу на генералисане координате $q^1 = \varphi$, $q^2 = \theta$, $q^0 = a(t)$,

$$y^1 = q^0 \cos\theta \sin\varphi,$$
$$y^2 = q^0 \sin\theta \sin\varphi,$$
$$y^3 = c(q^0) \cos\varphi,$$

налази се тачка тежине G; оса c елипсоида је вертикална, као и координата y^3.

Равнотежни положај посматране тачке одређује 2+1 једначина (6.11) и то

$$\begin{aligned}
&Q_1 = Y_i \frac{\partial y^i}{\partial q^1} = -G\frac{\partial y^3}{\partial \varphi} = Gc\sin\varphi = 0,\\
&Q_2 = 0,\\
&Q_0 = -G\frac{\partial c}{\partial q^0}\cos\varphi + R_0 = 0.
\end{aligned}$$

Следи да су равнотежни положаји при наведеној промењљивој вези

$$\varphi = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

при услову

$$R_0 = \pm G\frac{\partial c}{\partial q^0}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial c}{\partial q^0} = 0 \to R_0 = 0,$$

те да се не мења оса елипсоида дуж које дејствује сила G.

Одступања од решења $q^\alpha = q_0^\alpha$ и $p_\alpha = 0$, која се могу назвати непоремећеним или задатим равнотежним стањем, описују диференцијалне једначине кретања (6.7) и (6.8) па се могу сматрати *диференцијалним једначинама поремећеног ранотежног стања*, које се сагласно (4.1), могу написати у коваријантном облику

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha, \tag{6.12}$$

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta}p_\beta, \tag{6.13}$$

при чему се подразумева да поремећаји припадају околини равнотежног стања у $T^*\mathcal{N}$, а у тачки равнотежног стања $q = q_0$, $p = 0$ десне стране претходних једначина су једнаке нули,

$$Q(0, 0, ..., 0) = 0, \tag{6.14}$$

$$a^{\alpha\beta}p_\beta = 0. \tag{6.15}$$

По томе се претходне једначине кретања (6.7) и (6.8) разликују од једначина поремећеног равнотежног стања (6.12)-(6.15).

Једначине поремећеног равнотежног положаја $\bar{q}^\alpha \neq q_0^\alpha =: b^\alpha = const.$, могу се приближном тачношћу интерпретирати помоћу једначина (6.11).

За неке друге вредности $\bar{q} = b + \Delta q$ и $\dot{\bar{q}} = 0$ силе $\bar{Q}_\alpha$ неће задовољавати једначине (6.11) изузев првог степена тачности

$$\begin{aligned}
\bar{Q}(q,\dot{q})\big|_{\dot{q}=0, q=b} &= Q(b + \Delta q, 0) =\\
&= Q(q, 0) + \frac{\partial Q}{\partial q|_{\substack{q=b,\\ \dot{q}=0}}}\Delta q + \cdots =
\end{aligned}$$

или због (6.11)

$$\overline{Q}_\alpha = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta|_{q=b}} \Delta q^\beta. \tag{6.16}$$

Анализом овог израза за решења $|\Delta q^\alpha| \neq 0$, тј. по смислу извода $\left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\right|_b$ може се доћи до извесних заључака о равнотежном положају $q = b$ система и његовој стабилности.

Диференцијалне једначине поремећеног кретања

У стручној литератури о кретању тела под наведеним насловом не подразумева се увек једно те исто, без обзира што је наслов општи. У општој теорији планетских поремећаја то су у најопштијем смислу диференцијалне једначине кретања*.

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu \tag{6.17}$$

којим су додате силе поремећаја.

При описивању кретања система помоћу једначина (3В.59) у одсутности сила P_i, једначине поремећеног кретања налазе се у облику варијације

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta p_i &= -\frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial q^i}\delta q^j - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q^i}\delta p_j \\ \frac{d}{dt}\delta q^i &= \frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial p_i}\delta q^j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i}\delta p_j. \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

У покушају да се изведу једначине поремећеног кретања, које је описано коваријантим једначинама (6.12), биле су изведене тензорске варијационе једначине**

$$\frac{D^2 \xi^i}{dt^2} + R^i_{jkl}\dot{q}^j \xi^k \dot{q}^l = \nabla_l Q^i \xi^l \tag{6.19}$$

које, због своје сложене нелинеарне структуре нису нашле шире место у теорији стабилности.

Диференцијалне једначине (6.19) су еквивалентне диференцијалним једначинама (6.18) у којим је $\xi^i := \delta q^i$, а Q^i - генералисане силе зависне од положаја q и времена.*

*Види, на пример, М. Миланковић, *Основи небеске механике*, Просвета, издавачко предузеће Србије, Београд, 1947, (стр. 53).

**Syng J.L., *Tensorial methods in dynamics*, Toronto, 1936.

*V. Vujičić, *Covariant equations of Distrabed Motion of Mechanical Systems*, Tensor, N.S., Vol. 22, (1971), p. 41-47.

У теорији стабилнсоти кретања диференцијалне једначине поремећеног кретања сведене су на општи облик

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi), \quad \xi \in R^n. \tag{6.20}$$

Једначине (6.17) суштински се разликују од осталих наведених једначина и над њима је разрађена цела теорија планетских поремећаја. Сви други наведени системи диференцијалних једначина поремећаја формирају се од основних диференцијалних једначина кретања развијањем у степени ред или варирањем функција и њихових извода који фигуришу у њима.

У раду [24] доказано је да варијација пројекције вектора, није једнака пројекцији вектора варијације, те уместо једначина (6.19) изведене су *коваријантне диференцијалне једначине поремећаја* у облику

$$\frac{D\eta_\alpha}{dt} = \psi_\alpha(t, \eta, \xi) \tag{6.21}$$

$$\frac{D\xi^\beta}{dt} = a^{\alpha\beta}\eta_\alpha. \tag{6.22}$$

У циљу појашњења и оцене испуњености препринципа изведимо претходне једначине полазећи од основних једначина динамичке равнотеже (3А.3) или од теореме о промени импулса (4.1), тј.

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t). \tag{6.23}$$

Решења непоремећеног кретања су

$$\boldsymbol{v}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \quad \text{и} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q(t)). \tag{6.24}$$

Сваком другом (поремећеном) решењу

$$\boldsymbol{r}^*_\nu = \boldsymbol{r}_\nu + \xi^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}, \tag{6.25}$$

одговара импулс

$$\begin{aligned} m_\nu \boldsymbol{v}^*_\nu = m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}^*_\nu}{dt} = \\ = m_\nu \left(\boldsymbol{v}_\nu + \dot{\xi}^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} + \xi^\alpha \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\dot{q}^\beta \right) \end{aligned}$$

те поремећаји импулса, сагласно (1.25) и (3А.39), биће:

$$p_\gamma^* - p_\gamma =: \eta_\gamma = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\boldsymbol{v}_\nu^* - \boldsymbol{v}_\nu\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} = $$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} \dot{\xi}^\alpha + \xi^\alpha \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\beta \right).$$

Међутим, како постоји повезаност

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\delta}, \tag{6.26}$$

с обзиром на (1.26) и (3А.41), даље следи да је

$$\begin{aligned} \eta_\gamma &= a_{\alpha\gamma} \dot{\xi}^\alpha + a_{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \xi^\alpha \dot{q}^\beta = \\ &= a_{\alpha\gamma} (\dot{\xi}^\alpha + \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} \xi^\delta \dot{q}^\beta) = a_{\alpha\gamma} \frac{D\xi^\alpha}{dt} \end{aligned} \tag{6.27}$$

или

$$\frac{D\xi^\alpha}{dt} = a^{\alpha\gamma} \eta_\gamma. \tag{6.28}$$

За решења (6.25) диференцијалне једначине кретања (6.23) су

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^*) &= m_\nu (\partial_{\beta\alpha} \boldsymbol{r}_\nu \dot{\xi}^\alpha \dot{q}^\beta + \partial_\alpha r_\nu \ddot{\xi}^\alpha + \\ &+ \partial_{\delta\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\nu \xi^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\delta + \partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\nu \dot{\xi}^\alpha \dot{q}^\beta + \partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\nu \xi^\alpha \ddot{q}^\beta) = \\ &= F_\nu^* (\boldsymbol{r}_\nu + \boldsymbol{\rho}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu + \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu, t), \end{aligned}$$

где су

$$\partial_\alpha := \frac{\partial \cdot}{\partial q^\alpha}, \quad \partial_{\alpha\beta} := \frac{\partial^2 \cdot}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}.$$

После скаларног множења координатним векторима $\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma}$ ових једначина и једначина (6.23) и сабирања по индексу ν, добија се

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\partial_\alpha \boldsymbol{r}_\nu \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\nu \ddot{\xi}^\alpha + 2 \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\nu \cdot \partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\nu \xi^\alpha \dot{q}^\beta + \\ &\quad + \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\nu \cdot \partial_{\delta\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\nu \xi^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\delta + \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\nu \cdot \partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\nu \xi^\alpha \ddot{q}^\beta) = \\ &\quad = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu^* - \boldsymbol{F}_\nu) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Парцијални извод $\partial_{\delta\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\nu$ који фигурише у претходној релацији може се посредством (6.26) свести на

$$\begin{aligned}\partial_{\delta\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\nu &= \partial_\delta(\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\nu) = \partial_\delta(\Gamma^l_{\alpha\beta}\partial_l\boldsymbol{r}_\nu) = \\ &= \partial_l\boldsymbol{r}_\nu\partial_\delta\Gamma^l_{\alpha\beta} + \Gamma^l_{\alpha\beta}\partial_{\delta l}\boldsymbol{r}_\nu = \\ &= \partial_l\boldsymbol{r}_\nu\partial_\delta\Gamma^l_{\alpha\beta} + \Gamma^l_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\delta l}\partial_\mu\boldsymbol{r}_\nu.\end{aligned}$$

Имајући у виду ове изводе, (6.26) и инерциони тензор (3А.41), једначина (6.29) се своди на

$$\begin{aligned}a_{\alpha\gamma}\ddot{\xi}^\alpha &+ a_{\gamma l}\Gamma^l_{\alpha\delta}\dot{\xi}^\alpha\dot{q}^\delta + a_{\gamma l}\Gamma^l_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\dot{\xi}^\alpha + \\ &+ (a_{\gamma l}\partial_\delta\Gamma^l_{\alpha\beta} + a_{\gamma\mu}\Gamma^l_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\delta l})\xi^\alpha\dot{q}^\beta\dot{q}^\delta + \\ &+ a_{\gamma l}\Gamma^l_{\alpha\beta}\xi^\alpha\ddot{q}^\beta = \Psi_\gamma,\end{aligned} \tag{6.30}$$

где су

$$\Psi_\gamma := \sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}^*_\nu - \boldsymbol{F}_\nu)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\gamma} = \Psi_\gamma(\xi,\eta,t). \tag{6.31}$$

Једначине (6.30) могу се даље свести на краћи облик

$$a_{\alpha\gamma}\frac{d}{dt}\left(\dot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\sigma\delta}\xi^\sigma\dot{q}^\delta\right) + \\ + a_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\sigma\beta}\left(\dot{\xi}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\delta}\xi^\alpha\dot{q}^\delta\right)\dot{q}^\beta = \Psi_\gamma$$

или, ако се има у виду (6.27)

$$a_{\alpha\gamma}\frac{d}{dt}\left(\frac{D\xi^\alpha}{dt}\right) + a_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\sigma\beta}\left(\frac{D\xi^\sigma}{dt}\right)\dot{q}^\beta = \Psi_\gamma,$$

тј.

$$a_{\alpha\gamma}\frac{D}{dt}\left(\frac{D\xi^\alpha}{dt}\right) = \frac{D}{dt}\left(a_{\alpha\gamma}\frac{D\xi^\alpha}{dt}\right) = \frac{D\eta_\gamma}{dt} = \Psi_\gamma$$

што, заједно са једначинама (6.28) чини $2n+2$ диференцијалних једначина поремећаја (6.21) и (6.22) и објашњава вектор функције у њима.

Стабилност равнотежног стања и положаја

Овај насловни појам није једнозначан без обзира што су претходно дефинисани појмови равнотежног стања и положаја. Појму *стабилности* неопходно претходе једнозначна одређења - дефиниције.

Одређење 1. *Ако се при било којим задатим позитивним реалним бројевима A_α и B_α, ма колико да нису мали, могу изабрати такви позитивни* *бројеви* λ_α *и* $\overline{\lambda}_\alpha$, *за све бројне вредности координата равнотежног стања* $q_i = q_{i0}$, $p = 0$, *који подлежу ограничењу*

$$\left|q^i(t_0) - q_{i0}\right| \leq \lambda_i, \quad |p_i(t_0)| \leq \overline{\lambda}_i, \tag{6.32}$$

и за свако време $t > t_0$ *задовољавају неједначине*

$$\left|q^i(t) - q_0^i\right| < A^i, \quad |p_i(t)| < B_i \tag{6.33}$$

равнотежно стање $(q_i = q_{i0}; p_i = 0)$ *система је стабилно у односу на поремећаје* $q_i \neq q_{i0}$ *и* $p_i \neq 0$; *у противном је нестабилно.*

Претходно одређење 1 може се формулисати другим речима или релацијама али тако да смисао ограничења поремећаја (6.32) и (6.33) остане исти. Погодним избором почетка координатног система у равнотежном положају, равнотежно стање се може представити нултом тачком на многообразности $T^*\mathcal{N}$, тј. $q^\alpha = 0$, $p_\alpha = 0$; тада се (6.14) своди на

$$Q_\alpha(0, ..., 0, t) = 0. \tag{6.34}$$

Одређење 2. *Ако се при било којем произвољно задатом броју* $A > 0$, *ма како да није мали, може изабрати такав реалан број* λ, *за који су сви почетни поремећаји ограничени релацијом*

$$\delta_{\alpha\beta} q^\alpha(t_0) q^\beta(t_0) + \delta^{\alpha\beta} p_\alpha(t_0) p_\beta(t_0) \leq \lambda, \tag{6.35}$$

и за свако $t \geq t_0$ *задовољена неједнакост*

$$\delta_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + \delta^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta < A, \tag{6.36}$$

непоремећено равнотежно стање $p_\alpha = 0$, $q^\alpha = 0$ *је стабилно; у противном случају је нестабилно.*

$\delta_{\alpha\beta}$ и $\delta^{\alpha\beta}$ су Кронекерови симболи.

Уколико се стабилност равнотежног стања или непоремећеног кретања разматра само у односу на део $2m$ променљивих $q^1, ..., q^m, p_1, ..., p_m$, $m < n$ услов стабилности (6.36) се сужава на посматране променљиве

$$\delta_{kl} q^k q^l + \delta^{kl} p_k p_l < A \qquad (k, l = 1, ..., m) \tag{6.37}$$

Критеријум стабилности. *Ако се за диференцијалне једначине кретања склерономног система (6.12) и (6.13) може наћи позитивно дефинитна функција* $W(t, q^1, ..., q^n)$ *таква да је*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(Q_i + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right) \dot{q}^i \leq 0 \quad (i = 1, ..., n) \tag{6.38}$$

равнотежно стање $q = q_0$, $p = 0$ *или* $q = 0$, $\dot{q} = 0$ *је стабилно.*

Доказ. За претпостављено постојање функције W, функција

$$V = \frac{1}{2}a^{ij}(q^1, ..., q^n)p_i p_j + W(q^1, ..., q^n, t) \tag{6.39}$$

је позитивно дефинитна, јер је кинетичка енергија

$$E_k = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2}a^{ij}p_i p_j$$

по својој дефиницији позитивно дефинитна.

Извод по времену функције (6.39) је

$$\dot{V} = a^{ij}\frac{Dp_i}{dt}p_j + \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt},$$

јер је

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{DV}{dt},$$

а

$$\frac{Da^{ij}}{dt} = 0.$$

Имајући у виду једначине (6.12) и (6.13) претходни извод се своди на

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}Q_i p_j + \frac{\partial W}{\partial q^i}a^{ij}p_j = \\ =&\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(Q_i + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)p_j = \\ =&\frac{\partial W}{\partial t} + \left(Q_i + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i, \end{aligned} \tag{6.40}$$

чиме је теорема доказана.

Последице:

1. Ако је систем аутономан функцију W треба тражити само у зависности од координата па се услов (6.38) своди на

$$\left(Q_i + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i \leq 0. \tag{6.41}$$

Такви су конзервативни механички системи за које постоји потенцијална енергија $E_p(q^1, ..., q^n)$. Избором управо те енергије, ако је позитивно дефинитна, за функцију W, $W = E_p$ показује се

$$a^{ij}\left(-\frac{\partial E_p}{\partial q^i} + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)p_j = \left(-\frac{\partial W}{\partial q^i} + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i \equiv 0$$

да је равнотежно стање система стабилно.

2. Ако се генералисане силе састоје од конзервативних и било којих других сила $P_i(q,\dot{q})$, тј.

$$Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q^i} + P_i(q,\dot{q})$$

поновним избором $W = E_p$, за услов стабилности равнотежног стања система добија се

$$a^{ij} P_i p_j = P_i \dot{q}^i \leq 0. \tag{6.42}$$

3. Ако на систем дејствују гироскопске силе

$$P_i = g_{ij}\dot{q}^j = -g_{ji}\dot{q}^j \tag{6.43}$$

задовољен је услов стабилности равнотежног стања (6.41) јер је

$$P_i \dot{q}^i = g_{ij}\dot{q}^j \dot{q}^i \equiv 0.$$

4. За дисипотивне силе $P_i = b_{ij}\dot{q}^j$ услов (6.41) се своди на то да квадратна функција расипање енергије $R = -b_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ треба да буде већа или једнка нули.

Уопштење критеријума *Претходна теорема важи и за механичке системе са реономним везама. Услов (6.38) се мења само утолико што индекси $i,j = 1,...,n$, узимају вредности $\alpha,\beta = 0,1,...,n$. Дакле добијају се три додатна сабирка*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial t} + a^{\alpha\beta}\left(Q_\alpha + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right) p_\beta = \\
&= \frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(Q_i + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right) p_j + \\
&+ a^{i0}\left(Q_i + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right) p_0 + \\
&+ a^{0j}\left(Q_0 + \frac{\partial W}{\partial q^0}\right) p_j + \\
&+ a^{00}\left(Q_0 + \frac{\partial W}{\partial q^0}\right) p_0 \leq 0.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Доказ је идентичан претходном с тим што се индекси у једначинама (6.12) и (6.13) задржавају у распону $0,1,...,n$.

За случај система сила (3В.52) где је потенцијална енергија $E_p = E_p(q^0,q^1,...,q^n)$, а $P_0 = P_0^* + R_0$, може се изабрати функција $W = E_p$, ако је

E_p позитивно дефинитна функција од $q^0, q^1, ..., q^n$, па се израз (6.43) своди на

$$a^{\alpha\beta} P_\alpha p_\beta = P_\alpha \dot{q}^\alpha = P_i \dot{q}^i + (P_0^* + R_0)\dot{q}^0 \leq 0.$$

Последице

1. Изрази (6.38) - (6.43) јављају се у последицама релација (6.44) за случај да су везе склерономне, јер ишчезава помоћна координата q^0.

2. Класични (стандардни) начин испитивања стабилности равнотежног стања реономног система у односу на променљиве $q^1, ..., q^n; p_1, ..., p_n$ може се сматрати као стабилност у односу на део променљивих.

Неопходни додатни коментар

За доказ критеријума (6.38) или (6.44) полазило се од тога да је функција (6.39), тј.

$$V = E_k + W(t, q^0, q^1, ..., q^n) \tag{6.45}$$

позитивно дефинитна функција. С обзиром да се пошло од претпоставке да је W позитивно дефинитна функција, а E_k је кинетичка енергија, не би требало да је спорно питање о дефинитности функције V. Па ипак поставља се питање дефинитности кинетичке енергије. За доказ подјимо прво од препринципа инваријантности по којем атрибути кретања не зависе од формалног математичког описивања и друго од израза за кинетичку енергију система

$$\begin{aligned} 2E_k &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \cdots + m_N v_N^2 = \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Све масе m_ν су позитивни именовани реални бројеви па се не може спорити да је E_k из (6.46) позитивна функција од $\boldsymbol{v}_\nu$, а једнака нули само ако су све брзине, тј. функције $v_\nu(t)$, једнаке нули. Дакле, истинито је:

$$2E_k = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu \geq 0. \tag{6.47}$$

У односу на ортонормирани координатни систем, с обзиром на (3Б.7), следи такође да је

$$2E_k = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{y}_{\nu 1}^2 + \dot{y}_{\nu 2}^2 + \dot{y}_{\nu 3}^2) \geq 0. \tag{6.48}$$

Ништа се неће изменити ако уведемо друге ознаке

$$m_{3i} = m_{3i-1} = m_{3i-2}; \quad i = 3\nu - 2,\ 3\nu - 1,\ 3\nu$$

јер (6.48) ће бити

$$2E_k = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{y}_i^2 \geq 0.$$

У другим координатним системима, рецимо $(z, \text{э})$ или $(x, \boldsymbol{g})$, између којих постоје једнозначна тачкаста пресликавања $y^i = y^i(z^1, ..., z^{3N})$, $y^i = y^i(x^1, ..., x^{3N})$ или везе $y^i = y^i(q^0, q^1, ..., q^n); n < 3N$, квадратна хомогена форма (6.48) ће остати то што јесте у облицима

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{y}_i^2 &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial y_i}{\partial z^k} \frac{\partial y_i}{\partial z^l} \dot{z}^k \dot{z}^l = \\
&= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial y_i}{\partial x^k} \frac{\partial y_i}{\partial x^l} \dot{x}^k \dot{x}^l = \\
&= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \text{э}_{kl}(m, z) \dot{z}^k \dot{z}^l = \\
&= a_{kl}(m, x) \dot{x}^k \dot{x}^l = a_{\alpha\beta}(m, q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \geq 0,
\end{aligned}$$

где су э_{kl}, a_{kl}, $a_{\alpha\beta}$ позитивно дефинитне матрице. "Одступање од дефинитности матрица" за поједине вредности x или q, не потиче од природе кинетичке енергије, него од нерегуларности матрица трансформација (6.20) $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x^k}\right)$ или $\left(\frac{\partial y_i}{\partial q^k}\right)$ при прелазу од једних на друге координате. За оне вредности координата x за које релације $\dot{y}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha$ није регуларна (дакле непостојећа) не може се оцењивати дефинитност матрице a_{ij}, нити координатне форме кинетичке енергије.

Пример 26. Кинетичка енергија кретања тачке масе m у равни може се написати у односу на цилиндарски координатни систем ρ, θ, z, за који постоје релације

$$y_1 = \rho \cos\theta, \;\; y_2 = \rho \sin\theta, \;\; y_3 = z,$$

при услову $\rho \neq 0$, у облику

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{m}{2} \left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right) = \\
&= \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) \geq 0
\end{aligned} \tag{6.49}$$

или на равни $z = c = const$,

$$E_k = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2\right).$$

Сва три израза за E_k су једнаки нули само ако су брзине једнаке нули, јер се не може узимати у обзир $\rho = 0$, с обзиром да је $\rho = 0$ искључено из разматрања при трансформацији између посматраних координатних система.

Инваријантни критеријум о стабилности кретања

Под насловом "инваријантни критеријум" истиче се општа мера у свим координатним системима за оцену стабилности неког непоремећеног кретања механичких система. Као такав обухвата стабилност равнотежног положаја и стања, стабилност стационарних кретања и стабилност кретања механичких система уопште чије су једначине поремећаја координатног облика (6.21) и (6.22). Ако за диференцијалне једначине поремећаја (6.21) и (6.22) постоји позитивно дефинитна функција W поремећаја $\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n$ и времена t, таква да је израз

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{\alpha\beta}\left(\Psi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta \leq 0 \tag{6.50}$$

мањи или једнак нули, непоремећено стање кретања механичког система је стабилно.

Доказ. Функције Ψ_α, као што се види из (6.31), за непоремећено кретање $\xi^\alpha = 0$, $\eta_\alpha = 0$ једнаке су нули, $\Psi_\alpha(0,0,t) = 0$.

Функција

$$V = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta + W(\xi, t) \tag{6.51}$$

је позитивно дефинитна, јер је

$$a^{\alpha\beta}(q^0(t), q^1(t), ..., q^n(t))$$

позитивно дефинитна матрица функција на M^{n+1}, а $W(\xi,t)$ је претпостављено да је позитивно дефинитна функција поремећаја ξ^α. Као скаларна инваријанта V је тензор нултог реда. Зато је обични извод $\frac{dV}{dt}$ једнак природном изводу

$$\frac{DV}{dt} = a^{\alpha\beta}\frac{D\eta_\alpha}{dt}\eta_\beta + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\frac{D\xi^\alpha}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{6.52}$$

за који је неопходно да буде мањи или идентички једнак нули на поремећајима. Заменом природних извода из (6.21) и (6.22) у (6.52) добија се

$$\frac{DV}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + a^{\alpha\beta}\Psi_\alpha\eta_\beta + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}a^{\alpha\beta}\eta_\beta,$$

а што се, уз захтев критеријума, своди на

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{\alpha\beta}\left(\Psi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta \leq 0. \tag{6.53}$$

Према томе критеријум стабилности је доказан. Ако силе $\boldsymbol{F}_\nu^*$ и $\boldsymbol{F}_\nu$ из (6.31) и ако разлика $\boldsymbol{F}_\nu^* - \boldsymbol{F}_\nu$ не зависе јавно од положаја $\boldsymbol{r}$ и брзине $\boldsymbol{v}$, ни функција Ψ_γ неће зависити јавно од t. Тада и функцију W треба тражити само у зависности од поремећаја $\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n$, тј. $W = W(\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n)$, па се критеријски изрази (6.50) и (6.53) своде на

$$a^{\alpha\beta}\left(\Psi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta \leq 0. \tag{6.54}$$

Ако везе механичког система не зависе од времена ишчезавају: $q^0, \xi^0, \eta_0, \Psi_0$; па се израз (6.50) тј. (6.53) своди на

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(\Psi_i + \frac{\partial W}{\partial \xi^i}\right)\eta_j \leq 0, \tag{6.55}$$

а израз (6.54) на

$$a^{ij}\left(\Psi_i + \frac{\partial W}{\partial \xi^i}\right)\eta_j \leq 0 \tag{6.56}$$

где функције Ψ_i и W не зависе од ξ^0 и η^0.

Сви изрази претходно наведеног критеријума стабилности равнотежног стања јављају се последицом израза (6.53) ако се ξ и η сматрају поремећајима q и p равнотежног стања.

О интегралима коваријантних једначина поремећаја

Коваријантне једначине кретања (6.12) или њима одговарајуће диференцијалне једначине поремећаја (6.21) у развијеном облику и општем случају имају веома сложену структуру која отежава њихово интеграљење. Међутим применом коваријантног интегралења добијају се неки први коваријантно константни интеграли, помоћу којих се може оцењивати стабилност равнотежног стања, као и непоремећеног кретања. Као прилог том тврђењу наведимо два препознатљива и прихватљива примера.

1. Генералисане силе Q_α у једначинама (6.12) нека имају функцију силе $U(q^0, q^1, ..., q^n)$. Помножимо сваку једначину (6.12) одговарајућим диференцијалом из једначине (6.13) и саберимо као што следи

$$a^{\alpha\beta} p_\beta D p_\alpha = Q_\alpha dq^\alpha = \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} dq^\alpha.$$

Како је $Da^{\alpha\beta} = 0$, то

$$\frac{1}{2} D\left(a^{\alpha\beta} p_\beta p_\alpha\right) = dU$$

и даље

$$\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\beta p_\alpha - U = C = const.$$

2. Нека су десне стране коваријантних једначина (6.21) линеарне форме поремећаја од $\xi^1, ..., \xi^n$, тј.

$$\Psi_i = -g_{ij}(q^1(t), ..., q^n(t))\xi^j$$

где је g_{ij}, као и $a^{ij}(q^1, ..., q^n)$, коваријантно константни тензор. За тако задате поремећаје једначине (6.21) и (6.22) могу се написати у коваријантном облику

$$\frac{D\eta_i}{dt} = g_{ij}\xi^j,$$

$$\frac{D\xi^i}{dt} = a^{ij}\eta_j.$$

Међусобним потпуним множењем и сабирањем по индексу i, као у претходном примеру по α, настаје скаларна инваријанта

$$a^{ij}\eta_j D\eta_i = -g_{ij}\xi^j D\xi^i.$$

Коваријантном интеграцијом добива се

$$\frac{1}{2}(a^{ij}\eta_j\eta_i + g_{ij}\xi^j\xi^i) = A$$

где је A константа, $DA = dA = 0$.

Дакле коваријантном или обичном интеграцијом и анализом решења или непосредно применом критеријума (6.50) или (6.38) може се ценити о стабилности непоремећеног кретања $\xi = 0$, $\eta = 0$, или о стабилности равнотежног стања система $q = q_0$, $p = 0$. При додатним условима полазним дефиницијама може се говорити о: *асимптотској, равномерној, еквиасимптотској, ... стабилности у целости или по делу промењљивих.* За стабилност кретања или равнотеже механичких система важније је уочити да ли су поремећаји у једначинама поремећаја последица грешке у прорачуну или су узрок новонастале промене сила; инерционе силе због промене инерционог тензора, а активних сила због приближне тачности динамичких параметара и не идеално тачних закона динамике који производе формуле појединих сила (2.16), (2.11), (2.13) и (2.14). Закони динамике, како се овде схватају, формулисани су на основу стабилних процеса у смислу наведених дефиниција о стабилности. То значи тачно до граничне величине изабраног броја, ма колико мали не био. У диференцијалним једначинама (6.12) и поготово (6.21) свако одступање функција или њихових параметара, ма како мали били, од стварних може али не мора да утиче на стабилност или нестабилност посматраног кретања. Зато стабилност механичких система у односу на силе има велики значај.

Библиографија

[1] Anđelić P.T., Vujičić A. V., *On the Poisson-Jacobi's method in non-autonomous systems*, Bulletin de l'Académie Serbe des Sciences, Classe des sci. math. et nat., N. 18, pp. 7–12, 1992.

[2] Alfven, H., Arrhenius, G., *EVOLUTION OF THE SOLAR SYSTEM*, National Aeronautics and Space administration (NASA), SP–345, Washington, 1976.

[3] Arnold V.I., *MATHEMATICAL METHODS OF CLASSICAL MECHANICS*, Second Edition, Springer-Verlag, 1989.

[4] Bilimović A., (Bilimovich A.), *ДИНАМИКА ЧВРСТОГ ТЕЛА*, Beograd, 1955.

[5] Vujanović B.D., Jones S.E. *METHODS IN NON-CONSERVATIVE PHENOMENA*, Academic Press, 1989.

[6] Gradić S., Disertationes Physico-mathematice quatuor Amstelodami, 168o (prema radu ZHarka Dadića: Stjepan Gradić i problemi gibanja, Mat.Vsznik 5(20), 1968.

[7] Kartan, E., (Cartan E.), *РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ В ОРТОГОНАЛЬНОМ РЕПЕРЕ*,(perevod i redakcija Finikova) MGU, Moskva, 1960.

[8] Китеь, Ч., Најт В.,Рудерман М., Берклиевский курс физики, Том И (руский перевод, "Nauka", 1983.

[9] Kozlov V.V., Vujičić V.A., *A contribution to the theory of rheonomic systems*, Bulletin T. CXI de l'Académie Serbe des Sciences et Arts – classe des Sciences Mathematiques et naturelles, Sciences Mathematiques, No 21, pp. 85–91, 1996.

[10] Lagrange J.L., *MECANIQUE ALANITIQUE*, Paris, 1788.

[11] Ляпунов А.М., (Lyapunov A.M.), *ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ*, Киев, 1982.

[12] Матросов В.М., (Matrosov V.M.), *Принцип сравнения с векторфункцией Ляпунова*, I, II, III, IV, Диференциалкние уравнения, т. 4, No 8, No 10; т. 5, No 7, No 12.

[13] Миланковић М., *НЕБЕСКА МЕХАНИКА*, Београд, 1935.

[14] Миланковић М., *ОСНОВИ НЕБЕСКЕ МЕХАНИКЕ*, "Просвета", Београд, 1947.

[15] Newton Is., *PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA*, Londoni, Anno MDCLXXXVII.

[16] Newton Is., *MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY*, (translated into English by Robert Thorp, MA), London, 1969.

[17] Полак Л.С., (Polak L.S.), *Примечания – ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ*, сборник статей, изд. "МИР", стр. 888–891, Москва, 1959.

[18] Румянцев В.В., Озиранер А., *УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ* ДВИЖЕНИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ, "Наука", Москва, 1987.

[19] Седов Л.И., *МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ*, том I, изд. второе, "Наука", Москва, 1973.

[20] Смирнов В.И, *КУРС ВИШЕЙ МАТЕМАТИКИ*, Том IV, изд. 3, "Гостехиздат", Москва, 1957.

[21] Харламов П.В., РАЗНОМЫСЛИЕ В МЕХАНИКЕ, Академија наука Украини, Донецк' 1993.

[23] Четаев Н.Г., УСТОЙЧИВОСТ ДВИЖЕНИЯ, "Гостехиздат", Москва 1955.

[24] Vujičić A.V., *On the covariant differential equations of motions of dynamical systems with variable mass*, Tensor, Vol. 18, N. 2, pp. 181–183, Fujisawa, 1967.

[25] Вујичић А. В., Критериј об устојчивости систојања равновесија системы динамических точек, Публ.Матх.Т.8(22), п. 69-72, 1968.

[26] Vujičić A.V., *General conditions of stability of the state of equilibrium of the dynamic system of a variable mass*, Tensor, N. S., Vol. 19, pp. 314–316, 1968.

[27] Vujičić A.V., *Über die stabilität der stationären Bevegungen*, ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, GAMM – Tagung, Akademie – Verlag – Berlin, Band 48, pp. 291–293, 1968.

[28] Вујичић А.В., (Vujichich A.V.), *Общее следствие прямого метода Ляпунова об устойчивости (The general corollary of the direct Lyapunov's method of stability)*, Publ. Inst. Math. 9 (23), pp. 139–142, 1969.

[29] Вујичић А.В., *Абсолютньй интеграл тензора (The absolute integral of a tensor)*, Publ. Math. Inst. N. S., t. 10 (24), pp. 199–202, 1970.

[30] Вујичић А.В., *Общее утверждение об устойчивости движения и состояния равновесия механических систем (The general theorem of stability of motion and equilibrium of mechanical systems)*, Publ. Inst. Math., t. 11 (25), pp. 33–41, 1971.

[31] Vujičić A.V., *Covariant equations of disturbed motion of mechanical systems*, Tensor, N. S., Vol. 22, pp. 41–47, Fujisawa, 1971.

[32] Вујичић А.В., *Некоторые общие интегралы нелинейных механических систем движения (Certain general integrals of nonlinear mechanical sys-*

tems) (in Russian, Polish and English summaries), Nonlinear vibration problems, Polish Academy of Sciences, t. 14, pp. 369–377, 1973.

[33] Вујичић А.В., *Ковариантные интегралы в механике*, ПММ – прикладная математика и механика, т. 40, Вып. 2, АН СССР, стр. 346–351, Москва, 1976.

[34] Vujičić A.V., *Covariant integrals in mechanics*, PMM – Journal of App. Mech. 40, pp. 320–326, 1976 (translation of the Soviet journal Прикладная математика и механика), Publ. Pergamon - press, Oxford, Toronto.

[35] Vujičić A.V., *Optimal control of motion of a holonomic system*, Bulletin de l'Academie Serbe des Sciences, LXXVI, N. 11, pp. 1–10, 1981.

[36] Vujičić A.V., *COVARIANT DYNAMICS* (in Serbian: KOVARIJANTNA DINAMIKA , English summary, Matematiki institut SANU, No. 14, pp. 136, Beograd, 1981.

[37] Vujičić A.V., *On the absolute integral in n-dimensional configuration space, Topic in differential geometry, Vol. I, II, pp. 1297–1308 (1984) Debrecen; Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 46, North Holland (1988), New York.*

[38] Vujičić A.V., *Invariance of D'Alembert's principle*, Bulletins for Applied Mathematics (BAM) 218/84, Budapest, 1984.

[39] Вујичић А.В., *К теории интегрирования тензорных дифференциальных уравнений*; (Он тхе тхеоры оф интегратион оф тенсориал дифферентиал ечуатионс), Вес. Мос. Универ; сер. мат. мех., 1985.

[40] Vujičić A. V., *Stability of steady motions of systems with general potential* (in Serbain, English Summary), Glas de l'Académie Serbe des Science, 346, 50, pp. 1–7, 1986.

[41] Vujičić A.V., *The potential and power of rheonomous constraints*, Bulletins for Applied Mathematics, BAM 355–381/86, Budapest.

[42] Vujičić A.V., *The covariant integration on manifolds*, Tensor, Vol. 43, N. 3, Chigasaki, 1986.

[43] Вујичић А.В., *Одно следствые инвариантности принципа Гаусса*, Прикладная математика и механика, т. 51, вып. 5, стр. 735–740, Москва, 1987.

[44] Vujičić A.V., *The modification of analytical dynamics of rheonomic systems*, Tensor, N. S., N. 46, pp. 418–432, Chigasaki, 1987.

[45] Vujičić A.V., *On Hamilton's principle for the rheonomous systems*, Bulletin de l'Académie Serbe des Sciences, Classe des sci. math. et nat., N. 16, pp. 37–50, 1988.

[46] Вујичић А.В., *К принципу возможных перемещеный для реономых систем*, Прикладная механика, Т. 24, N. 7, pp. 114–116, Киев, 1990.

[47] Vujičić A.V., *On the stability of motion of rheonomic sustems*, Proc. of the International Conference on Applied Mechanics, Vol. 1, pp. 143–148 (1989), Beijing, China.

[48] Vujičić A.V., *A consequence of the invariance of the Gauss principle*, PMM Journal of applied mathematics and mechanics (translation of the Soviet journal Прикладная мат. и мех.), Vol. 51, N. 5, pp. 573–578; Printed in Great Britain, Pergamon Press, 1989.

[49] Вујичић А.В., Козлов В.В, *Об устайчивости в непотенциальном сыловом поле (On equilibrium stability in a nonpotential force field)*, Teo. prim. meh., N. 15, pp. 139–145, 1989.

[50] Vujičić A.V., *DYNAMICS OF RHEONOMIC SYSTEMS*, Mat. Inst. Serbian Acad. Sci., éditions spéciales, pp. 96, Beograd, 1990.

[51] Вујичић А.В., *О принципе найменьшего действия для реономных систем (The principle of least action for rheonomous systems)*, Прикладная механика, t. 26, N. 7, pp. 114–116, Kiev, 1990.

[52] Вујичић А.В., *НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ НЕАУТОНОМНЫХ СИСТЕМ*, Математичкии институт САНУ Београд – Институт за механику АН Украјине, Кијев, стр. 109, 1991.

[53] Vujičić A.V., *A theorem in the problem of optimal control of mechanical systems*, Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris, t. 313, série II, N. 1, pp. 1–5, 1991.

[54] Vujičić A.V., *The cocyclic energy integral*, European ournal of Mechanics, A 10, N. 1, pp. 41–44, Paris, 1991.

[55a] Вујичић А.В., Козлов В.В. К задаче Ляпунова об устојчивости по отношению к заданым функциям состояния, Prikladnaya mat. i mex. T. 55, byp 4, str.555-559, Moskva, 1991.

[55b] Vujičić A.V., Kozalov V.V., *On the Lyapunov's problem of stability in comparations with functions of state* (coauthor V. V. Kozlov), Journal of applied math. and mech. (translation of the PMM), Vol. 51, N. 5, 1991.

[56] Vujičić A.V., *A general theorem of optimal control of motion of mechanical non-autonomous systems*, XVIII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, pp. 154, Haifa, 1992.

[57] Вујичић А.В., *О практической устойчивости равновесия и движения механических систем (On the practical stability of equilibrium and motion of mechanical systems)*, Прикладная механика, т. 28, N. 11, стр. 64–69, Киев, 1992.

[58] Вујичић А.В., *О практической устойчивости голономных систем (Practical stability of holonomic systems)*, Докл. Акад. наук Украини, N. 9, стр. 21–23, Киев, 1992.

[59] Vujičić A.V.,, *A universal integral invariant of non-autonomous dynamical systems*, Proc. of the First World Congres of nonlinear analysis (WCNA.92), Tampa, Florida, 1992.

[60] Vujičić A.V., *The principle of optimal motion*, Proc. of the 2^{nd} International Conference on Nonlinear Mechanics, pp. 737–740, Beijing, China, 1993.

[61] Vujičić A.V., Hedrih K., *The rheonomic constraints force*, Facta Universitatis, Vol. 1, N. 3, pp. 313–322, 1993.

[62] Vujičić A.V., *Optimal control of rheonomic mechanical system*, Facta Universitatis, Vol. 1, N. 4, pp. 413–423, 1994.

[63] Вујичић А.В., *Об однородном формализме класической динамики реономних систем*, Електроное моделирование, т. 17, No 4, стр. 10–14, 1995.

[64] Vujičić A.V., *Energy exchange theorems in systems with time-dependent constraints*, teo. prim. mehanika, 21, pp. 105–121, 1995.

[65] Вујичић А.В., Мартинык А.А., *К аналитической динамике управляемых систем*, Прикладная механика, 32, No 9, стр. 88, 1966.

[66] Vujiqiffl A.V., Martinyuk A.A., *Applied Mechanics (Прикладная механика)*, 32 (9), pp. 88, 1996.

[67] Вујичић А.В., *Прилог механици деформабилних тела*, Техника, година LI, стр. 11–12, НГ 1–6, 1996.

[68] Vujičić A.V., *A Deformation Body as a Model of Rheonomic System*, Contemporary problems of fluid mechanics, Beogradski univerzitet, 1996.

[69] Vujičić A.V., *O kretanju dva tela i zaonu gravitacije (one aproach to problem of two and more bodies).* A - Opšta mehanika, Zbornik radova YUCTAM 1997.

[70] Vujičić A.V., *Some comments on the theory of deformation bodies*, Solid Mechanics – Proceeding of Second Serbian – Greek Symposium on Solid Mechanics, 1996, (Scientific Meetings of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Vol. LXXXVII, Department of Technical Sciences, Book 3), pp. 77–86, 1997.

ПОГОВОР

Наслов ове монографије и избор градива њених одељака могу се сматрати уводом у обимнија дела из механике, јер су овде исписани углавном и укратко, по мишљењу аутора, само битни ставови једне теорије о кретању и узајамном садејству тела.

Пошло се не од априорног тврђења, него од наслеђених, постојећих и стечених знања. Стеченим знањем потиснути су неки наслеђени и постојећи логички и математички стандарди , чиме је релативизирана тачност математички најтачније природне науке - Механике. То је нарочито видљиво у релацијама система са променљивим везама, као:

Стандардне релације	Овде усвојена знања
Брзина	
$\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ $\dot{q}=(\dot{q}^1,...,\dot{q}^n)^T$	$\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^0}\dot{q}^0$ $\dot{q}=(\dot{q}^0,\dot{q}^1,...,\dot{q}^n)^T$
Импулс кретања	
$p_i=a_{ij}\dot{q}^j+b_i$ $p_0=:-H$	$p_i=a_{ij}\dot{q}^j+a_{i0}\dot{q}^0$ $p_0=a_{0j}\dot{q}^j+a_{00}\dot{q}^0.$
Убрзање	
$a^i=\frac{D\dot{q}^i}{dt}$	$a^i=\frac{D\dot{q}^i}{dt},\ a^0=\frac{D\dot{q}^0}{dt}$
Силе	
Q	$Q,\ Q_0$
Рад	
$A(Q)=\int_s Qdq$	$A=\int_s(Qdq+Q_0dq^0)$
Варијациони принципи	
$\delta\int_{t_0}^{t_1}E_kdt=0$ $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$	$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta E_k+\delta A(\boldsymbol{F})\right]dt=0$
Кинетичка енергија	
$E_k=\dfrac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j+b_i\dot{q}^i+$ $+c;\quad \lvert a_{ij}\rvert_n^n$	$E_k:=-A(I)=$ $=\dfrac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta,\ \lvert a_{\alpha\beta}\rvert_{n+1}^{n+1}$

Диференцијалне једначине кретања

$$a_{ij}\frac{D\dot{q}^j}{dt} = Q_i \qquad \begin{array}{c} a_{ij}\frac{D\dot{q}^j}{dt} + a_{i0}\frac{D\dot{q}^0}{dt} = Q_i \\ a_{0j}\frac{D\dot{q}^j}{dt} + a_{00}\frac{D\dot{q}^0}{dt} = Q_0 \end{array}$$

или

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \qquad \begin{array}{c} \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \\ \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^0}\right) = 0 \end{array}$$

или

$$\begin{array}{l} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dot{q}^0 = 1,\ \dot{p}_0 = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dot{q}^i = \dfrac{\partial E}{\partial p_i},\ \dot{q}^0 = \dfrac{\partial E}{\partial p_0}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial E}{\partial q^i},\ \dot{p}_0 = -\dfrac{\partial E}{\partial q^0}. \end{array}$$

Поводом оваквих и сличних упоређења постављана су аутору ове књиге значајна и логична питања на научним скуповима: "Сматрате ли да су досадашња тврђена стандардне механике погрешна?" или "Под претпоставком да су Ваша тврђења тачна, како објашњавате да то није примећено у пракси?" Избегавајући реч "погрешно" следио је одговор да је ово боље и потпуније. Од Аристотела до Галилеја, односно Њутна, било је прихваћено становиште да се тело креће равномерно под дејством константне силе. Када је Њутн написао свој први аксиом или закон да се тело креће равномерно и праволинијски у оцутности сила, филозофија је оцењивала и оценила да је Аристотелово тврђење погрешно. Такву грубу оцену није истакао Њутн, као што ни Ајнштајн није назвао погрешним постулат о правплинијском кретању, него је нашао потпунији и лепши исказ да "праволинијско кретање не потиче ни логички ни експериментално из искуства". Пример просте греде (стр. 65) пружа једноставан одговор на друго питање - иако се проста греда у теорији прорачунава без осних (аксијалних) сила у пракси је увек остављања могућност померања једног краја; дакле у пракси је и те како то уочено.

Овдашњим приступом проширују се математичка знања примењлива у теорији о кретању тела, што за собом повлачи и нека другачија виђења појединих атрибута кретања. Приметно са више детаља су истакнути нови ставови од описивања познатих и прихваћених релација. Тако је, на пример, детаљно разграничен појам "материјалне тачке" од појма "честице" или "коваријантна интеграција" од "стандардне интеграције" диференцијалних једначина обртног кретања крутог тела. Истакнуто је да се помоћу модела материјалне тачке да се може развити примењлива теорија за све механичке објекте.

У одељку - **Препринципи**, који претходи целкупном штиву књиге, једнозначно је одређено полазиште механике, њени основни помнови: *маса,* *растојање и време*, те тим и њена област истраживања помоћу три дисјуктна скупа реалних бројева и прамена три орјентирна вектора; напуштен је појам геометријских простора, али не и запремине тела; искључена је могућност подударности две честице, што појам честице у геометријском смислу разликује и од материјалне и од геометријске тачке, а "закон непробојности" чини сувишним. Априорно се предсказује могућност одређивања кретања, али се релативизира тачност доступним знањем релевантних природних параметара у неком одређеном тренутку кретања. Релатовизирано је сазнање о кретању и мировању тела у механици, које се описује математичким релацијама у разним координатним системима, предусловом неформалности (инваријантности) којим се даје већи и битнији значај природним особинама кретања од њиховог формалног начина описивања. Дакле, препринципи објективизују предмет теоријске механике, а релативизују њено опште сазнање; они су пратећи коректор и верификатор свих тврђења теорије о кретању тела.

У одељку I - **Основне дефиниције** уведена су дефиницијама само четири појма, помоћу којих је могуће надградити целу једну теорију о кретању тела. Доследно препринципима необходно је било у почетку отворити проблем избора базних орјентирних вектора, непромењљивих у току времена.. За разлику од дефиниције брзине помоћу граничних вредности растојања, у дефиницији убрзања избегнут је гранични пренос вектора к вектору, те прихваћена стандардна дефиниција убрзања као природни извод брзине по времену. При опису *импулса кретања* нарочито је истакнут значај инерционог тензора и његова разлика од геометријског метричког тензора. Ова дефиниција, као и остале, остају у целој каснијој теорији, што искључује из овдашњег разматрања импулс кретања као негативну енергију (хамилтонијан). Употребљен је назив "импулс кретања" уместо "импулс" да би се истакла разлика од импулса силе. Дефиницијом *силе инерције* одређена је димензија силе уопште, што касније долази до изражаја при увођењу и димензионисању разних динамичких параметара, као и у формулисању закона динамике.

У другом одељку - **Закони динамике** појму "закон" даје се јединствено значење одреднице силе; то је изразита одударност од Њутнових закона, али се њим строго разграничује појам *закон* у механици од појмова принцип и теорема. Доминантно место у овом поглављу припало је *закону веза*, којим се истиче да веза између материјалних тачака или честица моше бити апстрахована силом, т.ј. да су везе извориштa сила, те да је математичку или мисаону релацију под називом веза, неопходно разликовати од појма механичке објектривно постојеће везе.

У поговору под насловом "О сили узајамног привлачења" изведена је формула (2.21) из које, за одређене претпоставке, следи израз за Њутнову силу гравитације. Изостављањем одредница других сила, т.ј. закона динамике, због сажетог излагања, не умањује се новоуведено значење појма *закона динамике.*

Трећи одељак - **Принципи механике** садржи четири принципа на основу који се, сваког понаособ, може развити цела теорија о кретању тела. **Принципу равнотеже** додељено је са разлогом највише текста иако се заснима на најмањем броју дефиниција и последичних одређења. Тај број основних дефиниција довољан је да се обухвате сва кретања тела повезаних било којим везама у било којим координатним системима. Последично је показано дејство момента спрега сила код система материјалних или динамичких тачака потчињеним везама. Повратно из њега је произашла неопходност генерализација формуле силе гравитације или довођење у питање ваљаности диференцијалних једначина кретања са множитељима веза.

Увођењем додатне дефиниције појма рада формулисан је **принцип рада**. За разлику од векторске инваријанте принципа равнотеже, принцип рада се идказије помоћу скаларне инваријанте, чиме се заобилазе тешкоће у сабирању везаних вектора. Последично се јавља, поред потенцијалне нергије, "реономни потенцијал" као негативни рад силе промене веза; исто тако се истиче кинетичка енергија као негативни рад инерционе силе. На сопствен начин карактерищу се *елементарни радови* на стварном померању, на могућем померању, ко и рад на могућим варијацвијама. Увођењем додатне координате - реономне координате - напуштен је принцип солидификације реономних веза, па је релација принципа рада проширена за један адекватан сабирак. Томе је претходила модификација варијација веза, као и рада механичког система са реономним везама.

Помоћу појма рада дефинисан је појам дејства, који је објект општег интегралног варијационог принципа, названог **принцип дејства**. Дакле, за исказ принципа дејства било је потребно шест основних дефиниција. Из овакво формулисаног принципа, при јединственом општем појму варијације, јављају се као последице познати класични интегрални варијациони принципи. Како је предначелом постојања време прихваћено као независна променљива, које као такво не варира, овај интегрални принцип показује се инваријантним на проширеним конфигурационим многообразностима TM^{n+1} и T^*M^{n+1} исто као на TM^n и T^*M^n - другим речима, исти је облик релацијама за аутономне и неаутономне системе. Битније значење овај принцип исказује у делу IV при доказу теореме о оптималном управљању кретањем.

На основу прве четири дефиниције и дефиниције принуде исказан је диференцијални варијациони **принцип принуде**, који у суштини скаларизује векторску инваријанту принципа равнотеже. Описујући принуду као хомогену квадратну форму координата вектора убрзања над инерционим тензором доказана је могућност њеног трансформисања из једног у било који други координатни систем. Из захтева принципа да принуда има најмању вредност на стварном кретању, лако се долази до простих скаларних диференцијалних једначина кретања , изражених помоћу функције принуде.

У одељку IV - **Теореме механике** као прво се јасно казује шта се подразумева под теоремом у механици. Помоћу природног извода по времену доказује се теорема о промени импулса кретања и теорема о промени кинетичке енергије; обе имају , сагласно предначелима, инваријантни смисао. На примеру промене импулса обртног кретања крутог тела развијени су изводи по времену координата тензора инерције. Теореме о управљивом кретању и оптималном управљању кретањем, које обухватају све механичке системе, повезују теорију управљања са њеним основним коренима аналитичке механике.

Одељак V - **Анализа решења диференцијалних једначина кретања** посвећен је углавном неразвијеној коваријантној интеграцији, првим интегралима и коваријантним интегралима; проширене се Поасонове (Poisson) заграде за реономне системе. Задржана је кратка али довољно јасна пажња на модификацији коцикличких интеграла енергије.

Завршницу чини одељак VI - **О стабилност кретања и мировања**, којим се оцењује тачност и ваљаност решења диференцијалних једначина кретања у зависнисти од посматраних динамичких или кинематичких параметара. Поред истицања, не без разлога, мисли високо цењеног професора Николаја Гуревича Четајева о *лажној модернизацији*, које нису мање актуалне данас него када их су писане, изложене су опште, те и коваријантне диференцијалне једначине поремећаја и ауторов општи критеријум о стабилности равнотежног стања и кретања механичких система.

Књига чини једну теоријску целину засновану на ауторовим резултатима објављеним у научним часописима и монографијама, наведеним у библиографском списку. Једном реченицом написано је да ова теорија обухвата све механичке системе, међу којима се подразумевају и крута и деформабилна тела. Овде је изостао ауторов концепт примене реономне координате на деформабилне средине. Показало се [67], [70] да се деформабилна тела могу пртеставити као систем материјалних тачака са реономним везама, те да се деформабилна средина може моделирати (3+1)-димензионим многообразностима. Таква би се механика развијала на изведеном тензору деформације

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{03} \end{pmatrix} \gtreqless 0$$

и метрици

$$ds^2 = \varepsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Далекосежност ове метрике у сазнању процеса у природи аутор назире из страница ове и других књига механике. Њом је подстакнуто навођење примера (П7) и (П8). Више од тога, њом се на крају ове књиге оспорава свако схватење да је механика, као наука о кретању тела, давно завршена и подастиче нова сазнавања о кретању и узајамном дејству тела.