[illegible]

Jelena Bulatović

SPEKTRALNA ANALIZA SLUČAJNIH PROCESA DRUGOG REDA SA NESEPARABILNIM PROSTORIMA

Doktorska disertacija

BEOGRAD
1975

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Slučajne procese drugog reda uveo je Hinčin (Хинчин, А. Я.) 1937 god; on je dobio harmonijsku dekompoziciju kovarijacione funkcije stacionarnog slučajnog procesa. Slucki (Слуцкий, Е. Е.) je, iste godine, dao harmonijsku dekompoziciju samih stacionarnih slučajnih procesa. Četiri godine kasnije Kolmogorov (Колмогоров, А. Н.) je, pomoću aparata Hilbertovog prostora, detaljno proučio stacionarne slučajne nizove drugog reda. Kramer (Cramér, H.) je 1941 god generalisao rezultate Hinčina na slučaj višedimenzionog stacionarnog slučajnog procesa; on je dobio razlaganje slučajnog procesa drugog reda, koje predstavlja rezultat primene Stounove (Stone, M. H.) teoreme o grupi unitarnih operatora u separabilnom Hilbertovom prostoru. U to vreme Karunen (Karhunen, K.) i Loev (Loève, M.), nezavisno jedan od drugog, dobijaju spektralne reprezentacije stacionarnog procesa pomoću sobstvenih funkcija i sobstvenih vrednosti simetričnog jezgra. Haner (Hanner, O.) je, 1950 god, dobio razlaganje neprekidnog stacionarnog slučajnog procesa na ortogonalnu sumu jednog determinističkog i jednog potpuno nedeterminističkog slučajnog procesa; koristeći unitarne transformacije dobio je spektralnu reprezentaciju neprekidnog stacionarnog slučajnog procesa. U periodu od 1950 do 1960 god Levi (Lévy, P.) je proučavao neke klase slučajnih procesa, definisao je neke vrste njihovih reprezentacija i odnose izmedju njih. Uvodjenjem aparata kojim se proučavaju linearni operatori u Hilbertovom prostoru, odnosno primenom tog aparata na proučavanje slučajnih procesa, stvara se mogućnost za spektralnu analizu, ne samo stacionarnih, nego i proizvoljnih slučajnih procesa drugog reda. Hida (Hida, T.) je, 1960 god, dobio jednu specijalnu spektralnu reprezentaciju Gausovog slučajnog procesa, koju je nazvao kanoničkom. Kramer, u periodu od 1961 do 1971 god, daje niz značajnih rezultata u vezi sa spektralnom analizom slučajnih procesa; on uvodi pojam spektralnog tipa slučajnog procesa, definiše nekoliko različitih tipova reprezentacija i rešava problem unitarne ekvivalencije slučajnih procesa. Kasnije, Rozanov (Розановъ, Ю. А.) dokazuje nove rezultate koji se odnose na neke specijalne klase slučajnih procesa, na spektralni tip slučajnog procesa koji nastaje kao rezultat delovanja nekog operatora na dati slučajni proces; on je problem unitarne ekvivalencije slučajnih procesa povezao sa pitanjem ekvivalencije Gausovih mera procesa.

Svim proučavanjima, o kojima smo upravo govorili, zajednička je pretpostavka da posmatrani procesi generišu Hilbertove prostore koji su separabilni. Ovaj rad predstavlja pokušaj da se dosadašnji rezultati generališu u tom smislu da se ne pretpostavlja da slučajni procesi generišu separabilne Hilbertove prostore.

Prvo i potpuno prirodno pitanje je: postoje li slučajni procesi sa neseparabilnim[1]) Hilbertovim prostorom koji dopuštaju proučavanje metodama spektralne teorije i, ako postoje, šta predstavlja osnovni problem u njihovom proučavanju? Pokazaćemo da takvi slučajni procesi postoje, odnosno konstruisaćemo slučajne procese koji zadovoljavaju uslove, dovoljno slabe da pripadni Hilbertovi prostori mogu biti neseparabilni, a dovoljno jake da dopuštaju proučavanje metodama spektralne teorije. Osnovni problem u proučavanju tih procesa predstavlja upravo neseparabilnost njihovih prostora. Objasnimo to boljo. Osnovna ideja spektralne analize slučajnog procesa je da se promene samog procesa prikažu promenama skupa ortogonalnih procesa sa ortogonalnim priraštajima, odnosno da se prostor procesa predstavi kao ortogonalna suma cikličkih potprostora (koji su izomorfni relativno jednostavnim prostorima funkcija); u slučaju da je prostor, generisan procesom, separabilan, moguće je predstaviti ga kao ortogonalnu sumu najviše prebrojivo mnogo cikličkih potprostora, što omogućava da se i sâm proces predstavi kao suma svojih projekcija na te potprostore. Medjutim, kako je svaki ciklički prostor separabilan, jasno je da u svakom ortogonalnom razlaganju neseparabilnog prostora (generisanog slučajnim procesom) mora učestvovati kontinuum mnogo cikličkih potprostora; to znači da ne postoji jedinstveni analitički izraz kojim bi se, u svakom trenutku, promena procesa prikazala promenama njegovih projekcija na cikličke potprostore. Činjenica da medju projekcijama procesa na cikličke potprostore, u ma kom fiksiranom trenutku, ima samo najviše prebrojivo mnogo onih koje su različite od nule, pomaže nam samo utoliko što znamo da proces u svakom trenutku <u>može</u> biti predstavljen pomoću sume svojih projekcija, ali nam ne govori ništa o tome kako bismo do tog predstavljanja došli. Upravo zato izabraćemo drugu mogućnost: naćićemo slučajni proces, koji dopušta onakve reprezentacije kakve imaju procesi sa separabilnim prostorima, ali koji nije jednak datom procesu, nego ga aproksimira u smislu koji će biti objašnjen. Pomoću takvih "aproksimacija" datog procesa pokušaćemo da proučimo sâm proces, odnosno da dobijemo što više informacija o njemu.

Drugo pitanje, koje se može postaviti, je: da li su klasom slučajnih procesa, koje ćemo ovde proučavati, obuhvaćeni svi slučajni procesi? Odgovor na ovo pitanje je negativan. Nešto više o ovome rećićemo u Zaključku. Medjutim, i pored toga što postoje procesi koji ne mogu biti proučavani na način koji ćemo izložiti, skup procesa koji takvo proučavanje dopuštaju daleko je širi od skupa procesa proučavanih do sada.

Najzad, treće pitanje je: da li su rezultati koje ćemo dokazati u skladu sa rezultatima poznatim do sada, u smislu da se ti poznati rezultati mogu dedukovati iz rezultata koje ćemo ovde dokazati. Biće pokazano, a to će i iz samog izlaganja uglavnom biti jasno, da u graničnom slučaju, t.j. kada je prostor slučajnog procesa separabilan, naši rezultati dobijaju upravo oblik već poznatih rezultata.

Rad je podeljen u četiri glave, od kojih prve dve uglavnom sadrže već poznate rezultate, dok su rezultati koji se nalaze u preostale dve glave originalni. Dokazi poznatih rezultata ne navode se, ali se ukazuje na literaturu u kojoj se mogu naći. Rezultati čiji se dokazi navode, originalni su ili u celini ili jednim delom.

U prvoj glavi izlažu se rezultati funkcionalne analize, specijalno teorije operatora u Hilbertovim prostorima i teorije spektralnih tipova, koji se kasnije koriste u proučavanju slučajnih procesa. Druga glava sadrži rezultate u vezi sa teorijom slučajnih procesa koji generišu separabilne prostore; najveći deo tih rezultata je poznat. O strukturi slučajnih procesa sa neseparabilnim prostorima, kao i o strukturi tih prostora, raspravlja se u trećoj glavi. Konačno, četvrta glava je posvećena proučavanju aproksimacija slučajnog procesa sa neseparabilnim prostorom. U Zaključku se pokazuje kako se, iz izloženih rezultata, mogu izvesti poznati rezultati koji se odnose na slučajne procese sa separabilnim prostorom; govori se i o problemu proučavanja proizvoljnog slučajnog procesa drugog reda, kao i o mogućim prirodnim generalizacijama izloženih rezultata.

Leme predstavljaju pomoćne rezultate, dok teoreme sadrže rezultate koje smatramo značajnim; rezultati, koji nemaju pomoćni karakter, ali su ipak manje značajni od teorema, formulisani su u obliku tvrdjenja.

---

1) Prihvatamo hipotezu kontinuuma, odnosno pod "neseparabilnošću prostora" podrazumevamo da je dimenzija tog prostora jednaka $\aleph_1$.

Glava I

OSNOVNI REZULTATI SPEKTRALNE TEORIJE NORMALNIH OPERATORA U HILBERTOVOM PROSTORU

I.1. Razlaganje jedinice

Sa $\mathcal{H}$ ćemo obeležavati apstraktni Hilbertov prostor takav da je

$$\dim \mathcal{H} \leq \aleph_1, \; \|x\| < +\infty \quad \text{za svako } x \in \mathcal{H} \, .$$

Skalarni proizvod u $\mathcal{H}$ označavaćemo sa $(\cdot\,,\cdot)$, a normu, njime induciranu, sa $\|\cdot\|$. Neka je A proizvoljni operator (u smislu [9]) na $\mathcal{H}$. Operatoru A odgovara ([1] , [9]) jedinstveni operator A^*, tako da je jednakost $(Ax, y) = (x, A^*y)$ zadovoljena za sve $x, y \in \mathcal{H}$. Za operator A^* kažemo da je adjungovan operatoru A. Operator A nazivamo normalnim ako je $AA^* = A^*A$; nazivamo ga samoadjungovanim ako je $A = A^*$ (dakle: svaki samoadjungovani operator je normalan; obrnuto ne važi). Rezultati, koje ćemo izložiti, odnose se na normalne, pa dakle, i na samoadjungovane operatore. Za sve operatore pretpostavljaćemo da su definisani na $\mathcal{H}$.

Jedan od osnovnih problema teorije operatora je t.z.v. problem unitarne ekvivalencije. Za dva operatora, A i B, kažemo da su unitarno ekvivalentni ako postoji unitarni operator U, tako da je

(1.1.1) $$B = U^{-1}AU;$$

problem unitarne ekvivalencije je, zapravo, problem odredjivanja potrebnih i dovoljnih uslova za postojanje takvog operatora U, ili, u nešto drukčijim terminima, problem odredjivanja potpunog sistema unitarnih invarijanti operatora A. Neku vrstu rešenja ovog problema daje teorema o spektralnom razlaganju normalnog operatora ([9] , § 44). Mada, kao što ćemo videti, ta teorema ne daje ništa drugo nego mogućnost da se na drugi način napiše jednakost (1.1.1), ona, ipak, ukazuje na pravac za potpuno rešavanje formulisanog problema. Izložićemo sadržaj te teoreme.

Neka je $E = \{E(\lambda),\ \lambda\text{-kompleksan broj}\}$ familija projektora definisanih na $\mathcal{H}$. Ovu familiju nazivamo <u>kompleksnim razlaganjem jedinice</u> prostora $\mathcal{H}$ ako su zadovoljeni uslovi:

1° $E(\lambda) \to 0$ kada $\mathrm{Re}\,\lambda \to -\infty$ ili $\mathrm{Im}\,\lambda \to -\infty$;

2° $E(\lambda) \to I$ kada $\mathrm{Re}\,\lambda \to +\infty$ i $\mathrm{Im}\,\lambda \to +\infty$;

3° $E(\lambda - 0) = E(\lambda)$ za svako λ ;

4° $E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda)$, gde je $\mathrm{Re}\,\lambda = \min\{\mathrm{Re}\,\lambda_1,\ \mathrm{Re}\,\lambda_2\}$, $\mathrm{Im}\,\lambda = \min\{\mathrm{Im}\,\lambda_1,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2\}$.

Ako je λ realan parametar i familija E zadovoljava uslove $1^\circ - 4^\circ$, tada tu familiju nazivamo <u>realnim razlaganjem jedinice</u> prostora $\mathcal{H}$; kada budemo hteli da naglasimo da se radi o realnom razlaganju jedinice, pisaćemo t umesto λ.

Teoremom o spektralnom razlaganju normalnog operatora ([9] , § 44; [21] , VIII.3) tvrdi se da izmedju skupa normalnih operatora i skupa kompleksnih razlaganja jedinice postoji obostrano jednoznačna korespondencija, takva da svakom normalnom operatoru A odgovara jedinstveno razlaganje jedinice E i da je zadovoljena jednakost $A=\int\lambda dE(\lambda)$. Ovo, specijalno, znači da i izmedju skupa samoadjungovanih operatora i skupa realnih razlaganja jedinice postoji obostrano jednoznačna korespondencija, takva da svakom samoadjungovanom operatoru A odgovara jedinstveno realno razlaganje jedinice i da je $A=\int t\,dE(t)$.

Ako su A i B proizvoljni (normalni ili samoadjungovani) operatori, tada njima, prema navedenoj teoremi, odgovaraju razlaganja jedinice E_A i E_B. Kako jednakost

$$U^{-1}AU=\int\lambda d(U^{-1}E_A(\lambda)U)$$

važi za svaki unitarni operator U ([9]), znači da se (1.1.1) može napisati u obliku

$$\int\lambda d(U^{-1}E_A(\lambda)U)=\int\lambda dE_B(\lambda),$$

što je ekvivalentno ([9]) sa

$$U^{-1}E_A(\lambda)U=E_B(\lambda) \text{ za svako } \lambda,$$

odnosno sa

(1.1.2) $$U^{-1}E_A U=E_B.$$

Dakle, ako kažemo da su dva razlaganja jedinice, E_A i E_B, unitarno ekvivalentna ukoliko postoji unitarni operator U tako da je zadovoljena jednakost (1.1.2), tada možemo reći: potreban i dovoljan uslov za unitarnu ekvivalenciju operatora A i B predstavlja unitarna ekvivalencija njihovih razlaganja jedinice. Ovim zaključkom nismo mnogo dobili. Naime, problem odredjivanja potrebnih i dovoljnih uslova za unitarnu ekvivalenciju <u>dva</u> operatora "sveli" smo na problem odredjivanja potrebnih i dovoljnih uslova za unitarnu ekvivalenciju <u>dve familije</u> operatora. Dakle, tvrdjenje da operatori A i B nisu unitarno ekvivalentni znači tvrdjenje da (1.1.1), odnosno (1.1.2), ne važi ni za jedan unitarni operator U.

Očigledno je da je praktično nemoguće proveriti tačnost ovog poslednjeg. Zato ćemo problem unitarne ekvivalencije izložiti i rešiti u terminima koji ne pripadaju teoriji operatora. Tačnije: naćićemo neke karakteristike operatora, koje nisu operatorske prirode, a ne menjaju se pri unitarnim transformacijama. Da bi problem bio potpuno rešen, treba da korespondencija izmedju skupa tih karakteristika i skupa operatora bude obostrano jednoznačna.

Osnovu za odredjivanje ovog skupa karakteristika proizvoljnog operatora predstavlja navedena teorema o spektralnom razlaganju. Kako, u smislu te teoreme, postoji potpuna analogija izmedju normalnih i samoadjungovanih operatora, mi ćemo pretpostavljati da su svi operatori sa kojima radimo samoadjungovani. Svi rezultati, koje ćemo izložiti, važe (uz neophodne izmene tehničke prirode, koje su prouzrokovane razlikom izmedju realnog i kompleksnog razlaganja jedinice) i za normalne operatore.

I.2. Spektralni tipovi I i II reda

Neka je $\mathcal{B}$ Bulova σ-algebra skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva i neka je $\mathcal{M}$ skup konačnih mera na $\mathcal{B}$. Za meru ρ_1 iz $\mathcal{M}$ kažemo da je <u>potčinjena</u> meri ρ_2 iz $\mathcal{M}$ (ili da je <u>manja</u> od ρ_2), i pišemo $\rho_1 < \rho_2$, ako je mera ρ_1 apsolutno neprekidna u odnosu na meru ρ_2, tj. ako jednakost $\rho_1(M)=0$ važi za svako $M\in\mathcal{B}$ za koje je $\rho_2(M)=0$; umesto $\rho_1<\rho_2$ možemo pisati $\rho_2>\rho_1$. Za mere ρ_1 i ρ_2 kažemo da su <u>ekvivalentne</u>, i pišemo $\rho_1\sim\rho_2$, ako je $\rho_1<\rho_2$ i $\rho_2<\rho_1$, istovremeno. Očigledno je da je $\sim$ relacija ekvivalencije u $\mathcal{M}$, tako da postoji skup $\mathcal{M}/\sim$ klasa ekvivalentnih mera skupa $\mathcal{M}$. Klase ekvivalentnih mera skupa $\mathcal{M}$, tj. elemente skupa $\mathcal{M}/\sim$, nazivaćemo spektralnim tipovima. Spektralne tipove ćemo označavati isto kao i mere koje ih generišu. Za svaku meru koja generiše spektralni tip ρ rećićemo da pripada tom spektralnom tipu. Relacija potčinjenosti mera prirodno se prenosi na spektralne tipove: kažemo da je spektralni tip ρ_1 potčinjen (ili manji) spektralnom tipu ρ_2, i pišemo $\rho_1 < \rho_2$ ili $\rho_2 > \rho_1$, ako je bilo koja mera koja pripada spektralnom tipu ρ_1 potčinjena svakoj meri koja pripada spektralnom tipu ρ_2. Spektralni tipovi ρ_1 i ρ_2 su jednaki, u oznaci $\rho_1 = \rho_2$, ako je $\rho_1 < \rho_2$ i $\rho_2 < \rho_1$, istovremeno. Lako je pokazati da je $<$ relacija (parcijalnog) poretka u $\mathcal{M}/\sim$. U $\mathcal{M}/\sim$ postoji minimalni element (to je spektralni tip generisan merom koja je identički jednaka nuli), dok maksimalni element, u opštem slučaju, ne postoji.

Neka su ρ_1 i ρ_2 proizvoljni elementi iz $\mathcal{M}/\sim$. Sa $\rho_1\rho_2$, ili $\inf\{\rho_1, \rho_2\}$, označavaćemo najveći spektralni tip koji je istovremeno potčinjen i spektralnom tipu ρ_1 i spektralnom tipu ρ_2; sa $\rho_1 + \rho_2$, ili $\sup\{\rho_1, \rho_2\}$, označavaćemo najmanji spektralni tip kome su potčinjeni spektralni tipovi ρ_1 i ρ_2. Infimum i supremum dva spektralna tipa uvek postoje, odnosno $\mathcal{M}/\sim$ predstavlja mrežu. Može se pokazati ([16], X.2) da postoje infimum i supremum svakog skupa koji sadrži najviše prebrojivo mnogo spektralnih tipova. Ovo ima za posledicu da je svaki najviše prebrojiv skup spektralnih tipova mreže $\mathcal{M}/\sim$ ograničen elementom te mreže.

Za dva spektralna tipa ρ_1 i ρ_2 iz $\mathcal{M}/\sim$ kažemo da su ortogonalni ako je $\inf\{\rho_1, \rho_2\} = 0$. Važi sledeća

Teorema 1.1. ([16] , T.10.2.4) Ograničen skup uzajamno ortogonalnih i različitih od nule spektralnih tipova ima najviše prebrojivo mnogo elemenata.

Za proizvoljne $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathcal{M}/\sim$ razlika $\varrho_1 - \varrho_2$ definiše se kao element $\varrho \in \mathcal{M}/\sim$ takav da je $\inf\{\varrho, \varrho_2\} = 0$ i $\sup\{\varrho, \varrho_2\} = \varrho_1$; jedinstvenost elementa ϱ sledi iz definicije.

Dosadašnje izlaganje pokazuje da je $\mathcal{M}/\sim$ ideal; ne mora biti glavni ideal, jer u mreži $\mathcal{M}/\sim$ ne mora postojati maksimalni element. Medjutim, ako za proizvoljno $\varrho \in \mathcal{M}/\sim$ sa $\mathcal{M}_\varrho/\sim$ označimo skup svih elemenata mreže $\mathcal{M}/\sim$ koji su potčinjeni elementu ϱ, tada će $\mathcal{M}_\varrho/\sim$ biti jedan glavni ideal mreže $\mathcal{M}/\sim$. Kako u $\mathcal{M}_\varrho/\sim$ postoji komplement $\varrho - \sigma$ svakog elementa $\sigma \in \mathcal{M}_\varrho/\sim$ i jednakost $\inf\{\sigma, \sup_i\{\sigma_i\}\} = \sup_i\{\inf\{\sigma, \sigma_i\}\}$ važi za sve $\sigma, \sigma_i \in \mathcal{M}_\varrho/\sim$, $i = 1, 2, \ldots$, znači da je $\mathcal{M}_\varrho/\sim$ Bulova σ-algebra. Dakle, svaki glavni ideal mreže je Bulova σ-algebra. Daćemo opštije definicije infimuma, supremuma i komplementa, tako da ćemo time učiniti da i čitava mreža $\mathcal{M}/\sim$ postane Bulova σ-algebra (razume se, u odnosu na te nove operacije).

Jednu od osnovnih osobina svakog glavnog ideala daje

Teorema 1.2. ([16] , §.X.2.5) Ideal mreže $\mathcal{M}/\sim$ je glavni ideal ako i samo ako sadržiprebrojivo mnogo uzajamno ortogonalnih elemenata te mreže.

Kako mreža $\mathcal{M}/\sim$, u opštem slučaju, nije glavni ideal, znači da ona sadrži kontinuum mnogo uzajamno ortogonalnih elemenata. Sa $\mathfrak{S}$ označimo skup čiji elementi su sve moguće familije $\{\varrho_\alpha\}$ uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova mreže $\mathcal{M}/\sim$. Neka je $\{\varrho_\alpha\}$ neki element iz $\mathfrak{S}$ i σ proizvoljni spektralni tip; neka je $\sigma_\alpha = \inf\{\sigma, \varrho_\alpha\}$. Kako je $\{\varrho_\alpha\}$ skup uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova, to je i $\{\sigma_\alpha\}$ skup uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova, koji su svi potčinjeni spektralnom tipu σ; ovo, prema teoremi 1.1, znači da u skupu $\{\sigma_\alpha\}$ ima samo najviše prebrojivo mnogo spektralnih tipova različitih od nule, bez obzira na kardinalni broj skupa $\{\varrho_\alpha\}$. Ovo, medjutim, znači da $\sup_\alpha\{\sigma_\alpha\}$ postoji, u smislu definicije koju smo dali. Neka su $\{\varrho_\alpha\}$ i $\{\varrho'_\beta\}$ proizvoljni elementi iz $\mathfrak{S}$; rećićemo da su ti elementi <u>ekvivalentni</u>, i pisaćemo $\{\varrho_\alpha\}\approx\{\varrho'_\beta\}$, ako za svaki spektralni tip σ važi jednakost

$$\sup_\alpha\{\sigma_\alpha\} = \sup_\beta\{\sigma'_\beta\},$$

gde je $\sigma_\alpha = \inf\{\sigma,\varrho_\alpha\}$, $\sigma'_\beta = \inf\{\sigma,\varrho'_\beta\}$. Lako je pokazati da je $\approx$ relacija ekvivalencije, odakle sledi postojanje količnik-skupa $\mathfrak{S}/\approx$. Klase ekvivalencije, tj. elemente iz $\mathfrak{S}/\approx$, nazivaćemo <u>spektralnim tipovima II reda</u> (elemente iz $\mathcal{M}/\sim$ nazivaćemo, kada želimo da naglasimo razliku, i <u>spektralnim tipovima I reda</u>). Spektralne tipove II reda označavaćemo velikim slovima latinice, a spektralne tipove I reda grčkim slovima.

Ako je R spektralni tip II reda, tada svaku familiju $\{\varrho_\alpha\}$, koja pripada klasi ekvivalencije R, nazivamo <u>predstavnikom</u> tog spektralnog tipa; formalno pišemo

(1.2.1) $$R = \sup_\alpha\{\varrho_\alpha\}$$

(ili, što je ekvivalentno, $R=\sum_\alpha \varrho_\alpha$). Ako je skup $\{\varrho_\alpha\}$ najviše prebrojiv, tada $\sup_\alpha\{\varrho_\alpha\}$ postoji, odnosno, tada je R spektralni tip I reda, a $\{\varrho_\alpha\}$ je jedno njegovo razlaganje na uzajamno ortogonalne spektralne tipove; tada, medjutim, R sadrži i sam spektralni tip $\sup_\alpha\{\varrho_\alpha\}=\varrho$. Dakle, svaki spektralni tip I reda je i spektralni tip II reda; obrnuto ne važi. Zato, kada spektralni tip označimo velikim slovom latinice, to će značiti (ako ništa nismo naglasili) da on može biti, kako II, tako i I reda; ako želimo da naglasimo da je neki spektralni tip I reda, označićemo ga grčkim slovom.

<u>Infimum</u> spektralnog tipa R, definisanog sa (1.2.1), i spektralnog tipa ϱ, definišimo sa

(1.2.2) $$\inf\{R,\varrho\} = \sup_{\alpha}\{\inf\{\varrho_\alpha,\varrho\}\}$$

(odnosno, u ekvivalentnim oznakama: $R\varrho = \sum_{\alpha} \varrho\varrho_\alpha$); kako je $\varrho\varrho_\alpha < \varrho$ za svako α, to $\inf\{R,\varrho\}$ uvek postoji i to je spektralni tip I reda, bez obzira na to kog reda je R. Ovo nam dopušta da u skupu $\mathfrak{S}/\approx$ definišemo uredjenje: za spektralni tip R_1 rećićemo da je <u>potčinjen</u> (ili <u>manji</u>) spektralnom tipu R_2, i pisaćemo $R_1 < R_2$, ili $R_2 > R_1$, ako nejednakost $R_1\varrho < R_2\varrho$ važi za svaki spektralni tip ϱ. Odavde sledi da nejednakost $\mathfrak{S} < R$ važi ako i samo ako je $R\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$.

Da bi skup $\mathfrak{S}/\approx$ bio mreža u odnosu na uvedenu relaciju $<$ parcijalnog poretka, treba da $\inf\{R_1,R_2\}$ i $\sup\{R_1,R_2\}$ postoje za proizvoljne spektralne tipove $R_1 = \sum_\alpha \varrho_\alpha^1$ i $R_2 = \sum_\beta \varrho_\beta^2$. Novi spektralni tip R' definišimo na sledeći način. Formirajmo spektralne tipove $\varrho_{\alpha\beta} = \varrho_\alpha^1 \varrho_\beta^2$ za sve moguće vrednosti indeksa α i β. Lako je videti da je $\{\varrho_{\alpha\beta}\}$ skup (dvoindeksni) uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova; spektralni tip čiji predstavnik je $\{\varrho_{\alpha\beta}\}$ obeležimo sa R'. Spektralni tip R' nazivamo <u>preskom</u> spektralnih tipova R_1 i R_2: $R' = R_1R_2$. Jednostavno se pokazuje da je

$$R_1R_2 = \sum_{\alpha,\beta} \varrho_{\alpha\beta} = \inf\{R_1,R_2\}$$

Za spektralne tipove R_1 i R_2 kažemo da su <u>ortogonalni</u> ako je $R_1R_2 = 0$; ako su spektralni tipovi R_1 i R_2 ortogonalni, tada su uzajamno ortogonalni i spektralni tipovi ϱ_α^1 i ϱ_β^2, pa se supremum (ili zbir) spektralnih tipova R_1 i R_2 definiše kao onaj spektralni tip čiji jedan predstavnik je familija koja sadrži obe familije $\{\varrho_\alpha^1\}$ i $\{\varrho_\beta^2\}$, i samo njih. Ako je $R_1R_2 \neq 0$, tada najpre definišemo spektralni tip $R_2^* = \sum_\beta \varrho_\beta^*$, gde je $\varrho_\beta^* = \varrho_\beta^2 - R_1\varrho_\beta^2$; lako se pokazuje da je $R_1R_2^* = 0$. Sada se supremum spektralnih tipova R_1 i R_2 definiše jednakošću

$$\sup\{R_1, R_2\} = \sup\{R_1, R_2^*\} ;$$

umesto $\sup\{R_1, R_2\}$ piše se i $R_1 + R_2$. Infimum i supremum proizvoljnih spektralnih tipova R_1 i R_2 ne zavise od izbora njihovih predstavnika. Očigledno je da je $R_1R_2 = R_2R_1$ i $R_1 + R_2 = R_2 + R_1$. Ovim je pokazano da skup $\mathfrak{S}/\approx$ predstavlja mrežu u odnosu na relaciju $>$.

Poznato je ([16], §X.2.3) da svaki potpun sistem uzajamno ortogonalnih elemenata iz $\mathcal{M}/\sim$ predstavlja bazu u $\mathcal{M}/\sim$; neka je $\{\varrho_\alpha^0\}$ jedan potpun sistem. Element $R_0 \in \mathfrak{S}/\approx$, kome pripada familija $\{\varrho_\alpha^0\}$, je maksimalni element mreže $\mathfrak{S}/\approx$; minimalni element te mreže je onaj koji sadrži nulti spektralni tip. Spektralni tip R_0 zvaćemo spektralnim tipom mreže $\mathfrak{S}/\approx$.

Iz prethodnog izlaganja je jasno da za proizvoljni spektralni tip R postoji spektralni tip R_0^* takav da je

$$\sup\{R, R_0^*\} = R_0 \quad \text{i} \quad \inf\{R, R_0^*\} = 0 ,$$

što znači da je R_0^* komplement za R u mreži $\mathfrak{S}/\approx$. Lako se može pokazati da za proizvoljne spektralne tipove R_1, R_2, R_3 važi jednakost

$$\inf\{R_1, \sup\{R_2, R_3\}\} = \sup\{\inf\{R_1, R_2\}, \inf\{R_1, R_3\}\},$$

što znači da $\mathfrak{S}/\approx$ predstavlja Bulovu algebru.

I.3. Ciklički operatori

U ovom odeljku uspostavićemo vezu izmedju proizvoljnog samoadjungovanog operatora A, odnosno njegovog razlaganja jedinice E_A, i jednog skupa spektralnih tipova.

Neka je A proizvoljni samoadjungovani operator u $\mathcal{H}$ i E_A njegovo razlaganje jedinice. Za svako $x \in \mathcal{H}$, sa

$$F(t) = \|E_A(t)x\|^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3.1}$$

odredjena je funkcija koja je nenegativna, neopadajuća i neprekidna sa leva, pa ona, dakle, odredjuje Lebegovu meru ς_x u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$; za tu meru kažemo da pripada operatoru A. Dakle, operator A, pomoću jednakosti oblika (1.3.1), odredjuje skup $\mathcal{M}_A$ mera, odnosno odredjuje skup $\mathcal{M}_A/\sim$ spektralnih tipova, na način koji je opisan u prethodnom odeljku ove glave; za elemente iz $\mathcal{M}_A/\sim$ kažemo da pripadaju operatoru A, ili, što je ekvivalentno, da pripadaju razlaganju jedinice E_A. Skup $\mathcal{M}_A/\sim$ u opštem slučaju nema maksimalni element.

Neka je $\mathfrak{M}$ potprostor prostora $\mathcal{H}$. Rećićemo da je potprostor $\mathfrak{M}$ invarijantan u odnosu na A ako je $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, tj. ako iz $x \in \mathfrak{M}$ sledi $Ax \in \mathfrak{M}$. Ako su i $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \mathfrak{M}$ invarijantni u odnosu na A, kažemo da $\mathfrak{M}$ svodi A. Može se pokazati da važi

Teorema 1.3. ([1], §74) Potprostor $\mathfrak{M}$ svodi A ako i samo ako svodi razlaganje jedinice E_A operatora A (tj. ako i samo ako je $E_A(t)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ i $E_A(t)\mathfrak{M}^{\perp} \subset \mathfrak{M}^{\perp}$ za svako $t \in \mathbb{R}$).

Kod samoadjungovanog operatora važi: potprostor svodi taj operator ako i samo ako je invarijantan u odnosu na njega. Kod normalnog operatora to, medjutim, nije slučaj.

Neka je x proizvoljni element iz $\mathcal{H}$. Ciklički potprostor $\mathfrak{M}(x)$ operatora A sa generatornim elementom x definiše se kao najmanji potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži x i svodi A. Sa druge s-rane, x odredjuje spektralni tip ς_x, koji nazivamo spektralnim tipom cikličkog potprostora $\mathfrak{M}(x)$.

Teorema 1.4. ([1] , §83) Prostor $\mathfrak{M}(x)$ jednak je skupu svih elemenata iz $\mathcal{H}$ oblika

$$(1.3.2) \qquad y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dE(t)x ,$$

gde je $f(\cdot)$ kvadratno integrabilna funkcija u odnosu na ς_x, tj. $f(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\varsigma_x)$. Preslikavanje definisano sa (1.3.2) je izometričko preslikavanje prostora $\mathcal{L}_2(\varsigma_x)$ na $\mathfrak{M}(x)$.

Neposredna posledica ove teoreme je separabilnost prostora $\mathfrak{M}(x)$ ([2] , III.8).

Može se pokazati ([9] , §57) da je ciklički potprostor $\mathfrak{M}(x)$ jednak zatvorenju lineala obrazovanog nad elementima $E(t)x$, $t \in \mathbb{R}$:

$$(1.3.3) \qquad \mathfrak{M}(x) = \overline{\mathcal{L}}\{E(t)x ,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Iz ove jednakosti jasno je da iz $x_1 \in \mathfrak{M}(x)$ sledi $\varsigma_{x_1} < \varsigma_x$. Obrnuto, u opštem slučaju, ne važi.

Operator A nazivamo cikličkim ako postoji $x_0 \in \mathcal{H}$ tako da je $\mathcal{H} = \mathfrak{M}(x_0)$. Generatorni element cikličkog operatora nije jednoznačno odredjen, ali je jednoznačno odredjen spektralni tip generatornog elementa. Tačnije, važi

Teorema 1.5. ([16] ,§X.1.4) U skupu spektralnih tipova koji pripadaju cikličkom operatoru A postoji maksimalni element, tj. maksimalni spektralni tip I reda; svi generatorni elementi i samo oni imaju taj maksimalni spektralni tip. Skup spektralnih tipova, koji pripadaju operatoru A, poklapa se sa skupom spektralnih tipova koji su potčinjeni maksimalnom spektralnom tipu ovog operatora.

Maksimalni spektralni tip ϱ_A koji pripada cikličkom operatoru A naziva se <u>spektralni tip cikličkog operatora A</u>.

Sledeća teorema rešava problem unitarne ekvivalencije cikličkih operatora:

<u>Teorema 1.6.</u> ([16] , T.10.1.6) Ciklički operatori A i B unitarno su ekvivalentni ako i samo ako imaju isti spektralni tip.

Postavlja se pitanje da li se, u slučaju proizvoljnog samoadjungovanog operatora, problem unitarne ekvivalencije može rešiti svodjenjem na unitarnu ekvivalenciju cikličkih operatora. Odgovor na to pitanje daćemo u sledećem odeljku.

I.4. Proizvoljni operatori

Neka je A proizvoljni samoadjungovani operator. Od osnovnog značaja je sledeća

<u>Teorema 1.7.</u> ([16] , T.10.1.2) Prostor $\mathcal{H}$ može se razložiti na ortogonalnu sumu potprostora koji su ciklički u odnosu na A.

Iz ove teoreme sledi da se i sâm operator A može razložiti na ortogonalnu sumu cikličkih operatora, koji su operatorom A inducirani na odgovarajućim cikličkim potprostorima.

Kažemo da je A <u>operator sa maksimalnim spektralnim tipom</u> ϱ ako postoji $x_0 \in \mathcal{H}$ tako da je $\varrho_{x_0} = \varrho$ i za svako $x \in \mathcal{H}$, $x \neq x_0$, važi nejednakost $\varrho_x < \varrho$.

<u>Teorema 1.8.</u> ([16] , §X.3.2) Ako je $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$, tada operator A, definisan na $\mathcal{H}$, ima element maksimalnog spektralnog tipa. Obrnuto tvrdjenje ne važi.

I u slučaju da je $\dim \mathcal{H} = \aleph_1$, važi

<u>Teorema 1.9.</u> ([16] , T.10.3.5) Proizvoljni operator A može se razložiti na ortogonalnu sumu operatora A_α sa uzajamno ortogonalnim maksimalnim spektralnim tipovima ρ_α.

Ovo, u nešto drukčijim terminima, znači da operator A odredjuje razlaganje prostora $\mathcal{H}$ na ortogonalnu sumu potprostora $\mathcal{H}_\alpha$ koji imaju uzajamno ortogonalne maksimalne spektralne tipove ρ_α. Svaki potprostor $\mathcal{H}_\alpha$ sadrži sve i samo one elemente iz $\mathcal{H}$ čiji spektralni tipovi su potčinjeni spektralnom tipu ρ_α. Kardinalni broj skupa indeksa α proizvoljan je; ako je ovaj kardinalni broj jednak $\aleph_1$, to znači da skup $\mathcal{M}_A/\sim$ nema maksimalnog elementa, odnosno $\{\rho_\alpha\}$ je predstavnik spektralnog tipa R_A II reda. Mada razlaganje prostora $\mathcal{H}$ na ortogonalnu sumu potprostora $\mathcal{H}_\alpha$ nije jednoznačno, spektralni tip R_A jednoznačno je odredjen operatorom A. Ako je ispunjena pretpostavka teoreme 1.8, tada je R_A spektralni tip I reda. No, u svakom slučaju, teorema 1.9 daje mogućnost da se operator A razloži na ortogonalnu sumu operatora A_α maksimalnog spektralnog tipa (I reda). Od posebnog značaja su oni operatori A kod kojih su svi operatori-sabirci A_α ciklički.

Ako je ρ spektralni tip koji pripada operatoru A, tada postoji ciklički potprostor u $\mathcal{H}$, čiji spektralni tip je ρ. Medjutim, u opštem slučaju postoji više uzajamno ortogonalnih cikličkih potprostora spektralnog tipa ρ. Skup uzajamno ortogonalnih cikličkih potprostora spektralnog tipa ρ nazivamo <u>maksimalnim</u> ako u $\mathcal{H}$ ne postoji više ni jedan ciklički potprostor koji je ortogonalan na sve potprostore toga skupa i ima spektralni tip ρ.

<u>Teorema 1.10.</u> ([16] , T.10.4.7) Svi maksimalni skupovi

cikličkih potprostora spektralnog tipa ϱ izomorfni su.

Ova teorema dozvoljava da se <u>multiplicitet</u> m_ϱ <u>spektralnog tipa</u> ϱ definiše kao kardinalni broj maksimalnog skupa cikličkih potprostora spektralnog tipa ϱ; pišemo: $\mathrm{mult}\,\varrho = m_\varrho$. Za operator A kažemo da ima <u>prost spektar</u> ako je multiplicitet svakog njegovog spektralnog tipa jednak jedinici. Ako je A operator sa prostim spektram, tada su svi operatori A_α (koji učestvuju u na kom njegovom razlaganju na ortogonalnu sumu operatora sa maksimalnim spektralnim tipom) ciklički; ako je i $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$, tada je i sâm operator A ciklički. Drugim rečima, operator A sa prostim spektrom, koji ima element maksimalnog spektralnog tipa, ciklički je ([16] , T.10.4.2). Jasno je da svaki ciklički operator ima prost spektar; odavde sledi da, ako je A operator sa prostim spektrom i nije ciklički, to znači da u $\mathcal{H}$ postoji kontinuum mnogo elemenata čiji spektralni tipovi pripadaju operatoru A i ortogonalni su. Odavde sledi da su operatori sa prostim spektrom obavezno definisani na neseparabilnom prostoru. Medjutim, operator definisan na neseparabilnom prostoru ne mora imati prost spektar.

Neka je A operator sa prostim spektrom i $\mathfrak{S}_A$ mreža spektralnih tipova koji pripadaju operatoru A. <u>Spektralnim tipom</u> R_A <u>operatora</u> A nazivaćemo spektralni tip mreže $\mathfrak{S}_A$. Sledećim tvrdjenjem rešava se problem unitarne ekvivalencije operatora sa prostim spektrom.

<u>Teorema 1.11.</u> ([16] , T.10.4.5) Operatori A i B sa prostim spektrom unitarno su ekvivalentni ako i samo ako su im jednaki spektralni tipovi.

Neka je A proizvoljni operator i ϱ, ϱ_1 spektralni tipovi koji mu pripadaju. Lako je pokazati da iz $\varsigma_1 < \varsigma$ sledi $m_{\varsigma_1} \geq m_{\varsigma}$ ([16], § X.4.2). Spektralni tip ς nazivamo <u>homogenim</u> (u odnosu na A) ako jednakost $m_{\varsigma_1} = m_{\varsigma}$ važi za svaki spektralni tip ς_1 za koji je $\varsigma_1 < \varsigma$. Jasno je da, iz toga što je spektralni tip ς homogen, sledi da je homogen i svaki spektralni tip koji mu je potčinjen i da ima isti multiplicitet kao i ς.

<u>Teorema 1.12.</u> ([16], T.10.4.8) Neka je ρ proizvoljni spektralni tip koji pripada operatoru A. Postoji spektralni tip σ, koji je potčinjen spektralnom tipu ς, homogen je i ima isti multiplicitet kao ς; u skupu svih ovakvih spektralnih tipova postoji najveći.

Neka je A proizvoljni operator, $\mathfrak{S}_A$ mreža spektralnih tipova operatora A i R_A spektralni tip te mreže. Za spektralni tip R II reda rećićemo da <u>pripada</u> operatoru A ako je $R < R_A$. Za spektralni tip R kažemo da je <u>homogen</u> (u odnosu na A) ako svaki spektralni tip I reda koji mu je potčinjen ima isti multiplicitet kao R.

<u>Teorema 1.13.</u> ([16], T.10.4.9) Neka je R proizvoljni spektralni tip koji pripada operatoru A. Postoji jedinstveno razlaganje

(1.4.1) $$R = \sum_{\alpha} R_{\alpha},$$

takvo da su R_{α} uzajamno ortogonalni homogeni spektralni tipovi sa medjusobno različitim multiplicitetima.

Ova teorema važi i u slučaju da je $R = R_A$.

Operator A, čiji maksimalni spektralni tip R_A je homogen, nazivaćemo <u>homogenim operatorom</u>. <u>Spektralni tip</u> homogenog operatora A, čiji maksimalni spektralni tip R_A ima multiplicitet m_A, obeležavaćemo sa $m_A R_A$.

<u>Teorema 1.14.</u> ([16] , T.10.4.14) Homogeni operator A, spektralnog tipa $m_A R_A$, razlaže se na ortogonalnu sumu m_A operatora A_α sa prostom spektrom i spektralnim tipom R_A.

Posledica ove teoreme je: ako je $R_A = \varrho$ i mult$\varrho = m_A$, tada se A razlaže na ortogonalnu sumu m_A cikličkih operatora spektralnog tipa ϱ.

Teoremama 1.11 i 1.14 pokazuje se da važi sledeća

<u>Teorema 1.15.</u> ([16] , § X.4.4) Homogeni operatori A i B unitarno su ekvivalentni ako i samo ako imaju isti spektralni tip.

Sledećim teoremama rešava se problem unitarne ekvivalencije proizvoljnih operatora.

<u>Teorema 1.16.</u> ([16] , T.10.4.11, T.10.4.15) Proizvoljni operator A može se na jedinstven način razložiti na ortogonalnu sumu homogenih operatora A_α, čiji spektralni tipovi $m_\alpha R_\alpha$ zadovoljavaju sledeće uslove: spektralni tipovi R_α uzajamno su ortogonalni, a multipliciteti m_α su medjusobno različiti.

<u>Spektralni tip</u> R_A proizvoljnog operatora A obeležavaćemo sa $\sum_\alpha m_\alpha R_\alpha$, gde m_α i R_α imaju značenje koje im daje prethodna teorema.

<u>Teorema 1.17.</u> ([16] , T.10.4.12, T.10.4.16) Proizvoljni operatori A i B unitarno su ekvivalentni ako i samo ako imaju isti spektralni tip.

Ova teorema može biti formulisana i na sledeći način: potpun sistem unitarnih invarijanti proizvoljnog operatora A dat je njegovim spektralnim tipom $\sum_\alpha m_\alpha R_\alpha$.

U sledećem odeljku pokazaćemo da rešenje problema unitarne ekvivalencije dobija zgodniji oblik kada je $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$.

I.5. Separabilni slučaj

Rezultati koje smo do sada naveli nisu zavisili od dimenzije prostora $\mathcal{H}$ u kome je definisan operator A. Tokom ovog odeljka pretpostavljaćemo da je $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$. U tom slučaju, prema teoremi 1.8, spektralni tip operatora A je I reda; obeležimo ga sa ϱ_A. Prema teoremi 1.16, A se razlaže na sumu homogenih operatora A_α, čiji spektralni tipovi zadovoljavaju odredjene uslove. Medjutim, kako je ϱ_A spektralni tip I reda, to i spektralni tipovi operatora A_α moraju biti I reda; isto tako, iz separabilnosti prostora $\mathcal{H}$ sledi da najviše jedan multiplicitet m_α može biti jednak $\aleph_0$, a svi ostali su konačni. Dakle: $\varrho_A = \sum_\alpha m_\alpha \varrho_\alpha$, $m_\alpha \leq \aleph_0$, $m_\alpha \neq m_\beta$ i $\varrho_\alpha \perp \varrho_\beta$ za $\alpha \neq \beta$. Ovo znači i da je skup indeksa α najviše prebrojiv. Prema teoremi 1.14, svaki operator A_α razlaže se na ortogonalnu sumu m_α cikličkih operatora $A_{\alpha i}$ spektralnog tipa ϱ_α: $A_\alpha = \sum_{i=1}^{m_\alpha} A_{\alpha i}$. Označimo sa $A_{(n)}$ ortogonalnu sumu operatora $A_{\alpha n}$ za fiksirano n:

$$A_{(n)} = \sum_\alpha A_{\alpha n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.5.1}$$

Očigledno je da važi jednakost

$$A = \sum_{n=1}^{\max_\alpha \{m_\alpha\}} A_{(n)}. \tag{1.5.2}$$

Kako su spektralni tipovi ϱ_α uzajamno ortogonalni, to je $A_{(n)}$, za svako n, ciklički operator ([16], T.10.4.4) sa spektralnim tipom

$$\varrho_{(n)} = \sum_{\alpha : m_\alpha \geq n} \varrho_\alpha. \tag{1.5.3}$$

Iz poslednje jednakosti dobijamo

$$\varrho_{(1)} > \varrho_{(2)} > \cdots; \tag{1.5.4}$$

ovaj niz ima najviše prebrojivo mnogo članova, zato što je $\max_\alpha \{m_\alpha\} \leq \aleph_0$.

Relacijama (1.5.1) – (1.5.4) dokazana je sledeća

<u>Teorema 1.18.</u> ([16], T.10.4.13) Operator A, definisan u separabilnom prostoru $\mathcal{H}$, može se razložiti na ortogonalnu sumu najviše prebrojivo mnogo cikličkih operatora $A_{(n)}$, čiji spektralni tipovi su jednoznačno odredjeni i zadovoljavaju uslov (1.5.4). Niz (1.5.4) predstavlja potpun sistem unitarnih invarijanti operatora A.

Razlaganju (1.5.4) operatora A odgovara razlaganje prostora $\mathcal{H}$ na ortogonalnu sumu potprostora $\mathfrak{M}(z_n)$ cikličkih u odnosu na A:

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{\max\{m_\alpha\}} \oplus\, \mathfrak{M}(z_n) \; ; \tag{1.5.5}$$

zadovoljena je jednakost $\varrho_{z_n} = \varrho_{(n)}$ za svako n. U razlaganju (1.5.5) izbor generatornih elemenata $z_1, z_2, \ldots$ nije jednoznačno odredjen, ali su jednoznačno odredjeni njihovi spektralni tipovi.

<u>I.6. Zaključak i komentar</u>

Postavlja se pitanje da li se, u slučaju $\dim \mathcal{H} = \aleph_1$, može dokazati teorema analogna teoremi 1.18. Neka je, dakle, $\dim \mathcal{H} = \aleph_1$; posmatrajmo razlaganje operatora A o kome se govori u teoremi 1.16. Mora biti zadovoljen bar jedan od sledeća dva uslova: 1° bar jedan od spektralnih tipova R_α je II reda; 2° bar jedan multiplicitet m_α jednak je $\aleph_1$. Ovo sledi iz toga što, zbog separabilnosti cikličkih potprostora, u svakom razlaganju prostora $\mathcal{H}$ na ortogonalnu sumu cikličkih potprostora, mora biti kontinuum mnogo elemenata. Rasudjivanjem, sličnim onom u I.5, dokazuje se sledeća

<u>Teorema 1.19.</u> ([16], §X.4.5) Operator A, definisan u neseparabilnom prostoru $\mathcal{H}$, može se razložuti na ortogonalnu su-

mu najviše kontinuum mnogo operatora $A_{(\alpha)}$ sa prostim spektrom čiji spektralni tipovi $R_{(\alpha)}$ čine jedan totalno uredjen skup; podskup različitih spektralnih tipova skupa $\{R_{(\alpha)}\}$ najviše je prebrojiv. Skup $\{R_{(\alpha)}\}$ čini potpun sistem unitarnih invarijanti operatora A.

Problem unitarne ekvivalencije operatora ekvivalentan je, kao što je u I.1 pokazano, problemu unitarne ekvivalencije odgovarajućih razlaganja jedinice. Ovo znači da su svi navedeni rezultati mogli biti formulisani u terminima razlaganja jedinice. Iz ovoga, medjutim, sledi sledeće: ako znamo da neki "objekti" jednoznačno odredjuju razlaganje jedinice prostora $\mathcal{H}$, tada nam poznavanje razlaganja jedinice daje informacije i o tim objektima. Upravo ovo biće iskorišćeno pri proučavanju slučajnih procesa.

Glava II

SLUČAJNI PROCESI SA SEPARABILNIM PROSTOROM

II.1. Osnovni pojmovi i definicije

U ovoj glavi izložićemo najvažnije rezultate spektralne teorije slučajnih procesa drugog reda koji generišu separabilne Hilbertove prostore.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ proizvoljni prostor verovatnoće; pretpostavljaćemo da su sve slučajne promenljive definisane na tom prostoru verovatnoće. U ovoj glavi sa $\mathcal{H}$ ćemo označiti skup svih slučajnih promenljivih x za koje je $Ex=0$ i $E|x|^2<\infty$. Slučajne promenljive $x, y \in \mathcal{H}$ za koje je $P\{x=y\}=1$ smatraćemo identičnim. U $\mathcal{H}$ skalarni proizvod i normu definišemo sa

(2.1.1) $$(x,y)=Ex\bar{y}\,,\quad \|x\|=(E|x|^2)^{1/2};$$

rastojanje izmedju x i y definiše se sa $\|x-y\|$. Pod konvergencijom u $\mathcal{H}$ podrazumevamo konvergenciju u srednjem kvadratnom, odnosno, u terminima Hilbertovih prostora, konvergenciju u normi. Skup $\mathcal{H}$ je kompletan u odnosu na uvedeno rastojanje.

Sa $X=\{X(\lambda), \lambda\in K\}$, K-skup kompleksnih brojeva, obeležavaćemo slučajni proces drugog reda, tj. slučajni proces za koji je $EX(\lambda)=0$, $E|X(\lambda)|^2<\infty$ za svako $\lambda\in K$. Ovi slučajni procesi, zavisni od kompleksnog parametra, nazivaju se i slučajna polja. Podskup skupa slučajnih polja predstavljaju oni slučajni procesi koji zavise od realnog parametra. Iz izlaganja koja slede videće se da za slučajne procese i slučajna polja važe isti rezultati, a jedine razlike u tim rezultatima potiču od razlike izmedju realnih i kompleksnih brojeva. Kako su definicije, formulacije i dokazi jednostavniji za slučajne procese nego za slučajna polja, u ovoj i sledećim glavama radićemo sa slučajnim procesima; realni parametar ćemo obeležavati sa t i nazivaćemo ga vremenom. Pretpostavljaćemo, iz sličnih razloga, da su sve slučajne promenljive prostora $\mathcal{H}$ realne. Smatraćemo da su svi slučajni procesi definisani na čitavoj realnoj osi.

Sa $\mathcal{H}(X)$ ćemo obeležavati najmanji potprostor od $\mathcal{H}$ koji je generisan elementima $X(t)$, $t\in\mathbb{R}$, tj. zatvorenje, u odnosu na normu definisanu sa (2.1.1), skupa svih konačnih linearnih kombinacija $c_1X(t_1)+c_2X(t_2)+\cdots+c_nX(t_n)$, gde $c_k, t_k\in\mathbb{R}$ za $k=\overline{1,n}$ i n je proizvoljni prirodni broj; dakle

(2.1.2) $$\mathcal{H}(X)=\overline{\mathcal{L}}\{X(t),\ t\in\mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{H}(X)$ je Hilbertov prostor. Najmanji Hilbertov prostor generisan elementima $X(s)$ za $s\leq t$, gde je t proizvoljni, ali fiksiran, realni broj, obeležavaćemo sa $\mathcal{H}(X;t)$:

(2.1.3) $$\mathcal{H}(X;t)=\overline{\mathcal{L}}\{X(s),\ s\leq t\}$$

$\mathcal{H}(X;t)$ je, za svako $t\in\mathbb{R}$, Hilbertov prostor. Očigledno je $\mathcal{H}(X;t_1)\subset\mathcal{H}(X;t_2)$ za $t_1<t_2$ i $\mathcal{H}(X;t)\subset\mathcal{H}(X)$ za svako t. Uvedimo sledeće oznake

(2.1.4) $$\mathcal{H}(X;-\infty)=\bigcap_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{H}(X;t),$$

(2.1.5) $$\mathcal{H}(X;t-0)=\overline{\mathcal{L}}\{X(s),\ s<t\},$$

(2.1.6) $$\mathcal{H}(X;t+0)=\bigcap_{\ell>0}\mathcal{H}(X;t+\ell).$$

Slučajni proces X, za koji je $\mathcal{H}(X;-\infty)=\mathcal{H}(X;t)$ za svako t, pa dakle i $\mathcal{H}(X;-\infty)=\mathcal{H}(X)$, naziva se <u>determinističkim</u>; <u>nedeterminističkim</u> se naziva onaj slučajni proces X za koji je $\mathcal{H}(X;-\infty)\neq\mathcal{H}(X)$. Ako je $\mathcal{H}(X;-\infty)=0$, kažemo da je slučajni proces X <u>potpuno nedeterministički</u> ili <u>regularan</u>. Proizvoljni slučajni proces može se na jedinstven način predstaviti kao ortogonalna suma jednog determinističkog i jednog potpuno nedeterminističkog slučajnog procesa ([6]). Kako deterministički slučajni procesi nisu interesantni sa stanovišta teorije verovatnoće pretpostavljaćemo, u ovoj i sledećim glavama, da su svi procesi potpuno nedeterministički.

Tokom čitave ove glave pretpostavljaćemo da svi slučajni procesi zadovoljavaju i sledeći uslov:

(N) X je neprekidan za svaku vrednost parametra t, tj.

$$X(t)=\underset{h\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\,X(t-h)=\underset{h\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\,X(t+h),\ t\in\mathbb{R}.$$

Ako uvedemo oznake $\underset{h\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\,X(t-h)=X(t-0)$, $\underset{h\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\,X(t+h)=X(t+0)$, tada poslednja jednakost može da se napiše u obliku: $X(t)=X(t-0)=X(t+0)$. Lako je videti da je uslov (N) dovoljan da jednakost

$$\mathcal{H}(X;t-0)=\mathcal{H}(X;t) \tag{2.1.7}$$

važi za svako $t\in\mathbb{R}$.

Operator projektovanja prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $\mathcal{H}_1$ od $\mathcal{H}$ obeležavaćemo sa $E(\mathcal{H}_1)$ ili sa $P_{\mathcal{H}_1}$. Specijalno, ako je $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}(X;t)$, pisaćemo $E(t)$ umesto $E(\mathcal{H}_1)$. Sa E ćemo obeležavati familiju projektora $E(t)$ za sve realne vrednosti t: $E=\{E(t),t\in\mathbb{R}\}$. Lako je pokazati da E predstavlja razlaganje jedinice prostora $\mathcal{H}(X)$. Kako je za svako t prostor $\mathcal{H}(X;t)$ jednoznačno odredjen procesom X, znači da proces X jednoznačno odredjuje razlaganje jedinice E. Ovo nam daje mogućnost da strukturu prostora $\mathcal{H}(X)$, a time i sâm proces X, proučavamo korišćenjem metoda i rezultata prethodne glave.

II.2. Hida-Kramerova dekompozicija. Spektralni tip slučajnog procesa

Neposredna posledica uslova (N) je separabilnost prostora $\mathcal{H}(X)$ ([3]). Ovo, prema teoremi 1.8, znači da u prostoru $\mathcal{H}(X)$ postoji element maksimalnog spektralnog tipa (u odnosu na razlaganje jedinice E_X odredjeno procesom X). Isto tako, multiplicitet svakog spektralnog tipa (koji pripada razlaganju jedinice E_X) je konačan ili jednak $\aleph_0$, odnosno u svakom razlaganju prostora $\mathcal{H}(X)$ na ortogonalnu sumu potprostora, cikličkih u odnosu na E_X, ima najviše prebrojivo mnogo elemenata.

Kažemo da slučajni proces X ima ortogonalne priraštaje ako jednakost

$$(X(t_2)-X(t_1),\ X(t_4)-X(t_3))=0$$

važi za sve vrednosti $t_1<t_2\leq t_3<t_4$ parametra t. Ako za proizvoljno $z\in\mathcal{H}(X)$ slučajni proces $Z=\{Z(t), t\in\mathbb{R}\}$ definišemo sa

$$Z(t)=E_X(t)z,\ t\in\mathbb{R}, \tag{2.2.1}$$

tada je lako pokazati da je Z slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima; očigledno je $\mathcal{H}(Z)\subset\mathcal{H}(X)$ i $\mathcal{H}(Z;t)\subset\mathcal{H}(X;t)$ za svako t. Sa druge strane, prema (1.3.3), $\mathcal{M}(z)$ je najmanji potprostor prostora $\mathcal{H}(X)$ koji svodi razlaganje jedinice E_X i sadrži z. Kako je

$$\mathcal{H}(Z)=\overline{\mathcal{L}}\{E_X(t)z,\ t\in\mathbb{R}\},$$

a, prema (1.3.3), i

$$\mathcal{M}(z)=\overline{\mathcal{L}}\{E_X(t)z,\ t\in\mathbb{R}\},$$

to je

$$\mathcal{M}(z)=\mathcal{H}(Z).$$

Dakle: ciklički potprostor generisan elementom z poklapa se sa prostorom procesa Z, koji je definisan sa (2.2.1). Ako $\mathcal{M}(z;t)$ definišemo sa

$$\mathcal{M}(z;t)=\mathcal{M}(E_X(t)z), \tag{2.2.2}$$

tada će za proces Z važiti jednakost

$$\mathcal{M}(z;t)=\mathcal{H}(Z;t),\ t\in\mathbb{R}. \tag{2.2.3}$$

Slučajni proces $Z=\{Z(t),t\in\mathbb{R}\}$ nazivaćemo __cikličkim__ (u odnosu na razlaganje jedinice E) ako postoji $z\in\mathcal{H}(Z)$ tako da je $\mathcal{M}(z)=\mathcal{H}(Z)$; očigledno je da je slučajni proces, definisan sa (2.2.1), ciklički u odnosu na E_X.

__Lema 2.1.__ Svaki slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima je ciklički. Obrnuto ne važi.

Dokaz prvog dela tvrdjenja može se naći u [13.a]. Da ciklički proces ne mora imati ortogonalne priraštaje vidi se iz sledećeg primera.

__Primer 2.1.__ Neka je slučajni proces Z ciklički i neka je $z\in\mathcal{H}(Z)$ element za koji je $\mathcal{H}(Z)=\mathcal{M}(z)$. Svaki element iz $\mathcal{H}(Z)$ može se, prema teoremi 1.4, napisati u obliku

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,dE_Z(u)z,\quad f(\cdot)\in\mathcal{L}_2(\rho_z).$$

Dakle, za svako $t\in\mathbb{R}$ postoji funkcija $g(t,\cdot)\in\mathcal{L}_2(\rho_z)$ tako da je

$$Z(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t,u)\,dE_Z(u)z.$$

Očigledno je da jednakost $\int_{-\infty}^{t_1} g(t_1,u)\left[g(t_3,u)-g(t_2,u)\right]dF(u)=0$ ne mora važiti za proizvoljne vrednosti $t_1\leq t_2<t_3$ ($F(u)=\|E_Z(u)z\|^2$, $u\in\mathbb{R}$) parametra t, tako da Z ne mora biti proces sa ortogonalnim priraštajima.

Neka je X proizvoljni slučajni proces. Rećićemo da spektralni tip ϱ pripada slučajnom procesu X ako on pripada njegovom razlaganju jedinice E_X. Lemom 2.1 pokazano je da proces sa ortogonalnim priraštajima ima element maksimalnog spektralnog tipa, pa i da je maksimalni spektralni tip koji pripada tom procesu jednoznačno odredjen. Maksimalni spektralni tip koji pripada procesu sa ortogonalnim priraštajima zvaćemo spektralnim tipom tog procesa. Maksimalni spektralni tip proizvoljnog procesa jednak je maksimalnom spektralnom tipu mreže $\mathfrak{S}_X/\approx$, gde je $\mathfrak{S}_X$ skup svih spektralnih tipova koji pripadaju procesu X, a $\approx$ relacija uvedena u prvoj glavi.

Za proizvoljne slučajne procese X_1 i X_2 kažemo da su unitarno ekvivalentni ako su unitarno ekvivalentna njihova razlaganja jedinice E_{X_1} i E_{X_2}. Na osnovu leme 2.1 i teoreme 1.6 može se pokazati da važi

Teorema 2.1. (vidi [19]) Ciklički slučajni procesi X_1 i X_2 unitarno su ekvivalentni ako i samo ako imaju isti spektralni tip.

Neka je U unitarni operator čije postojanje tvrdi ova teorema; iz nje nikako ne sledi da je $X_2(t)=UX_1(t)$ za ma koje t. Tom teoremom tvrdi se jedino da jednakost

$$E_{X_1}(t)x = U^{-1}E_{X_2}(t)Ux\ ,\quad t\in\mathbb{R},$$

važi za svako $x\in\mathcal{H}(X_1)$. U teoremi 2.5 daćemo dovoljne uslove za postojanje unitarnog operatora $U:\mathcal{H}(X_1)\to\mathcal{H}(X_2)$, takvog da jednakost $X_2(t)=UX_1(t)$ važi za svako $t\in\mathbb{R}$.

Neka je X proizvoljni slučajni proces i $\mathcal{H}_1$ proizvoljni potprostor prostora $\mathcal{H}(X)$. Važi jednakost

$$\mathcal{H}_1=\overline{\mathcal{L}}\{P_{\mathcal{H}_1}X(t),\ t\in\mathbb{R}\}. \tag{2.2.4}$$

Zaista, kada bi postojao element $x\in\mathcal{H}_1$, $x\neq 0$, takav da je $x\perp$

$\perp \overline{\mathcal{L}}\{P_{\mathcal{H}_1} X(t), t\in\mathbb{R}\}$, tada bi, zato što je $X(t)=P_{\mathcal{H}_1}X(t)+$ $+P_{\mathcal{H}(X)\ominus\mathcal{H}_1}X(t)$ za svako t, ovo značilo da je $x\perp X(t)$ za svako t; odavde bi sledilo da je $x\perp\mathcal{H}(X)$, što je moguće jedino u slučaju da je $x=0$, a to je suprotno pretpostavci. Time jepokazano da jednakost (2.2.4) važi.

Prostor $\mathcal{H}(X)$ proizvoljnog slučajnog procesa X može se, prema teoremi 1.18, razložiti na ortogonalnu sumu N (gde N može biti prirodni broj ili $\aleph_0$) potprostora cikličkih u odnosu na E_X:

(2.2.5) $$\mathcal{H}(X)=\sum_{n=1}^{N}\oplus\mathcal{M}(z_n);$$

generatorni elementi $z_1,\dots,z_N$ odredjuju spektralne tipove $\varrho_1,\dots,\varrho_N$ koji zadovoljavaju uslov

(2.2.6) $$\varrho_1>\varrho_2>\cdots\varrho_N,$$

a broj N je jednoznačno odredjen. Ako procese $Z_1,\dots,Z_N$ definišemo jednakostima

$$Z_n(t)=E_X(t)z_n,\ t\in\mathbb{R},$$

tada su ti procesi uzajamno ortogonalni i imaju ortogonalne priraštaje. Kako je $\mathcal{H}(Z_n)=\mathcal{M}(z_n)$, $n=\overline{1,N}$, jednakost (2.2.5) možemo napisati u obliku

(2.2.7) $$\mathcal{H}(X)=\sum_{n=1}^{N}\oplus\mathcal{H}(Z_n),$$

odakle se, zbog (2.2.2) i (2.2.3), dobija

(2.2.8) $$\mathcal{H}(X;t)=\sum_{n=1}^{N}\oplus\mathcal{H}(Z_n;t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Za svako t element $X(t)$ može se predstaviti kao suma svojih projekcija na potprostore $\mathcal{H}(Z_n)$, $n=\overline{1,N}$. Iz (2.2.4) sledi da jednakost

$$\mathcal{H}(Z_n)=\overline{\mathcal{L}}\{P_{\mathcal{H}(Z_n)}X(t),\ t\in\mathbb{R}\}$$

važi za svako $n=\overline{1,N}$, što znači da projekcija procesa X na $\mathcal{H}(Z_n)$, $n=\overline{1,N}$, predstavlja ciklički proces. Ovo, prema teoremi

1.4, znači da se za svako $n=\overline{1,N}$ projekcija procesa X na $\mathcal{H}(Z_n)$ može napisati u obliku

(2.2.9) $$\int_{-\infty}^{t} g_n(t,u)\,dZ_n(u),\ t\in\mathbb{R},$$

pri čemu $g_n(t,\cdot)\in\mathcal{L}_2(\rho_n)$ za svako $t\in\mathbb{R}$. Iz (2.2.7) i (2.2.9) dobijamo reprezentaciju samog procesa X:

(2.2.10) $$X(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{t} g_n(t,u)\,dZ_n(u),\ t\in\mathbb{R};$$

pritom, zbog $\|X(t)\|^2<\infty$, $t\in\mathbb{R}$, jasno je da funkcije $g_n(t,u)$, $t\in\mathbb{R}$, $n=\overline{1,N}$, moraju biti takve da je zadovoljena nejednakost

(2.2.11) $$\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{t}|g_n(t,u)|^2\,dF_n(u)<\infty,\ t\in\mathbb{R},$$

gde je

(2.2.12) $$F_n(u)=\|Z_n(u)\|^2,\ n=\overline{1,N}.$$

Ovim je pokazano da važi

Teorema 2.2. ([6]) Svaki slučajni proces X jednoznačno odredjuje broj N (koji je prirodni broj ili $\aleph_0$) tako da se $X(t)$, za svako $t\in\mathbb{R}$, predstavlja u obliku (2.2.10), gde su $Z_1,\ldots,Z_N$ uzajamno ortogonalni slučajni procesi sa ortogonalnim priraštajima takvi da važi (2.2.8), funkcije $g_1(t,\cdot),\ldots,g_N(t,\cdot)$, $t\in\mathbb{R}$, su neslučajne i zadovoljavaju uslov (2.2.11) pri čemu važi (2.2.12), i, najzad, funkcije $F_1,\ldots,F_N$, odnosno njima odredjeni spektralni tipovi $\rho_1,\ldots,\rho_N$, zadovoljavaju uslov (2.2.6).

Razlaganje procesa X, čije postojanje tvrdi teorema 2.2 naziva se Hida-Kramerovom dekompozicijom procesa X; broj N ćemo zvati multiplicitetom procesa X, a niz $\rho_1,\ldots,\rho_N$, koji zadovoljava uslov (2.2.6), nazivaćemo spektralnim tipom procesa X. Spektralni tip procesa X obeležavaćemo sa $F_X=(F_1,\ldots,F_N)$, ili sa $\rho_X=(\rho_1,\ldots,\rho_N)$.

Pomoću teorema 1.18 i 1.17 može se pokazati da važi

Teorema 2.3. (vidi [19]) Proizvoljni slučajni procesi unitarno su ekvivalentni ako i samo ako imaju isti spektralni tip.

Drugim rečima, $\mathbb{F}_X$ predstavlja potpun sistem unitarnih invarijanti slučajnog procesa X.

Sledeća teorema je, u izvesnom smislu, obrnuta teoremi 2.2.

Teorema 2.4. ([3] , [13.a]) Za svaki niz $\varrho_1, \dots, \varrho_N$ spektralnih tipova, takvih da je $\varrho_1 > \dots > \varrho_N$ (N je prirodni broj ili $\aleph_0$) postoji slučajni proces X takav da je $\varrho_X = (\varrho_1, \dots, \varrho_N)$.

Sledeća teorema rešava problem unitarne ekvivalencije u terminima korelacione funkcije procesa.

Teorema 2.5. ([3]) Dovoljan uslova za unitarnu ekvivalenciju dva slučajna procesa je jednakost njihovih korelacionih funkcija.

Dakle, korelaciona funkcija procesa jednoznačno odredjuje njegov spektralni tip. Može se pokazati ([3]) da obrnuto ne važi.

II.3. Kompletnost familije funkcija

Neka je $\mathbb{F} = (F_1, \dots, F_N)$ proizvoljni spektralni tip i $\{g(t,u),\ t \in \mathbb{R},\ u \leq t\} = (\{g_1(t,u)\}, \dots, \{g_N(t,u)\})$ jedna familija funkcija (u kojoj je t parametar, a u promenljiva). Za tu familiju kažemo da je kompletna u $\mathcal{L}_2(\mathbb{F})$ ako, za svako t, iz jednakosti

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{s} g_n(s,u) f_n(u)\, dF_n(u) = 0 \quad \text{za svako } s \leq t$$

sledi da je $f(u) = 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathbb{F})$, gde je $f(u) = (f_1(u), \dots, f_N(u))$.

Teorema 2.6. ([12] , [13.a]) Slučajni proces X sa korelacionom funkcijom $r(s,t)$, $s,t \in \mathbb{R}$, ima spektralni tip $\mathbb{F} = (F_1, \dots, F_N)$ ako i samo ako postoji familija funkcija $\{g(t,u),\ t \in \mathbb{R},\ u \leq t\}$, koja je kompletna u $\mathcal{L}_2(\mathbb{F})$ i zadovoljava jednakost

(2.3.1) $$r(s,t)=\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{\min\{s,t\}} g_n(s,u)g_n(t,u)\,dF_n(u), \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Ova teorema pokazuje i da je reprezentacija korelacione funkcije procesa X (sa spektralnim tipom $\mathbb{F}$) jedinstvena do na familija funkcija potpunu u $\mathcal{L}_2(\mathbb{F})$. Iz ovoga je jasno i zašto jednakost korelacionih funkcija dva slučajna procesa nije neophodan uslov za njihovu unitarnu ekvivalenciju.

Neka je (2.2.10) Hida-Kramerova dekompozicija slučajnog procesa X, a (2.3.1) reprezentacija njegove korelacione funkcije. Projekcija X_n procesa X na ciklički potprostor $\mathcal{H}(Z_n)$, $n=\overline{1,N}$, je

(2.3.2) $$X_n(t)=\int_{-\infty}^{t} g_n(t,u)\,dZ_n(u), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Lako je videti da iz kompletnosti familije $\{g(t,u)\}$ u $\mathcal{L}_2(\mathbb{F})$ sledi kompletnost familije $\{g_n(t,u)\}$ u $\mathcal{L}_2(F_n)$ za svako $n=\overline{1,N}$. To znači da je (2.3.2) Hida-Kramerova dekompozicija procesa X_n. Kasnije ćemo videti da obrnuto ne važi.

II.4. Kanonička i čisto kanonička reprezentacija

Neka su $Z_1,\dots,Z_M$ uzajamno ortogonalni slučajni procesi sa ortogonalnim priraštajima i spektralnim tipovima koji su, redom, jednaki $\rho_1,\dots,\rho_M$ (odnosno $F_1,\dots,F_M$); neka su, dalje, $\{h_1(t,u),t\in\mathbb{R},u\le t\},\dots,\{h_M(t,u),t\in\mathbb{R},u\le t\}$ familije funkcija takve da $h_n(t,\cdot)\in\mathcal{L}_2(F_n)$ za svako $t\in\mathbb{R}$ i $n=\overline{1,M}$. Slučajni proces X definišimo jednakošću

(2.4.1) $$X(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\,dZ_n(u), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Kažemo da je (2.4.1) <u>kanonička</u> reprezentacija procesa X ako za svako $t\in\mathbb{R}$ i svako $s\le t$ važi jednakost

(2.4.2) $$E_X(s)X(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{s} h_n(t,u)\,dZ_n(u).$$

Kažemo da je (2.4.1) čisto kanonička reprezentacija procesa X ako je, pored (2.4.2), zadovoljena jednakost

$$\mathcal{H}(X;t)=\sum_{n=1}^{M}\oplus\,\mathcal{H}(Z_n;t),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.4.3}$$

Ako je (2.4.1) čisto kanonička reprezentacija procesa X, tada niz $Z_1,\ldots,Z_M$ uzajamno ortogonalnih slučajnih procesa sa ortogonalnim priraštajima nazivamo inovacionim procesom procesa X; pišemo $\mathbb{Z}=(Z_1,\ldots,Z_M)$. Inovacioni proces daje informaciju koja je, u smislu jednakosti (2.4.3), jednaka informaciji koji daje sâm proces X. Ako je N multiplicitet procesa X, a (2.4.1) jedna njegova čisto kanonička reprezentacija, tada je $N\leqslant M$. Hida-Kramerova reprezentacija procesa X je i čisto kanonička; obrnuto ne važi, osim kada je $M=1$ u čisto kanoničkoj reprezentaciji.

Svaka čisto kanonička reprezentacija procesa je i kanonička; obrnuto ne važi. Postavlja se pitanje da li se iz kanoničke reprezentacije procesa može dobiti njegova čisto kanonička reprezentacija. Pre nego što odgovorimo na to pitanje proučićemo neke osobine kanoničke i čisto kanoničke reprezentacije.

Teorema 2.7. ([B.a]) Neka je $\mathbb{Z}=(Z_1,\ldots,Z_M)$ inovacioni proces procesa Y i neka je proces X definisan sa (2.4.1). Reprezentacija (2.4.1) procesa X je kanonička ako i samo ako, za svako t, $\mathcal{H}(X;t)$ svodi razlaganje jedinice E_Y procesa Y.

Posledica. Ako je $X(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,u)\,dZ(u)$, $t\in\mathbb{R}$, kanonička representacija procesa X, onda je proces X ciklički.

Teorema 2.8. ([B.a]) Neka je

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,u)\,dZ(u),\quad t\in\mathbb{R},$$

kanonička reprezentacija procesa X. Tada postoji proces $\widetilde{Z}$ sa ortogonalnim priraštajima, tako da je

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,u)\,d\widetilde{Z}(u),\quad t\in\mathbb{R},$$

čisto kanonička reprezentacija procesa X.

Dokaz ove teoreme zasniva se na tome da je proces X ciklički, pa se generatorni element prostora $\mathcal{H}(X)$ može dobiti projektovanjem generatornog elementa prostora $\mathcal{H}(Z)$ na $\mathcal{H}(X)$.

U slučaju $M>1$ nije moguće na analogan način od kanoničke dobiti čisto kanoničku reprezentaciju. Naime, čak i kada je

$$X_n(t) = \int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\, dZ_n(u), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.4.4}$$

čisto kanonička reprezentacija procesa X_n za svako $n=\overline{1,M}$, reprezentacija (2.4.1) procesa X ne mora biti čisto kanonička.

Iz II.3 sledi: ako je (2.4.1) čisto kanonička reprezentacija procesa X, tada je (2.4.4) čisto kanonička reprezentacija procesa X_n za svako $n=\overline{1,M}$.

<u>Lema 2.2.</u> Neka je $Z=\{Z(t), t\in\mathbb{R}\}$ ciklički slučajni proces spektralnog tipa ρ. Tada je

$$\rho = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{\mu_t\}, \tag{2.4.5}$$

gde je μ_t spektralni tip generisan elementom $Z(t)$.

<u>Dokaz.</u> Pretpostavimo da jednakost (2.4.5) ne važi, tj. da je $\sup\limits_t\{\mu_t\}<\rho$. Neka je

$$\sup_t\{\mu_t\}=\mu<\rho. \tag{2.4.6}$$

Postoji $z'\in\mathcal{H}(Z)$ tako da je $\rho_{z'}=\mu$; z' generiše ciklički potprostor $\mathcal{M}(z')$ čiji maksimalni spektralni tip je $\rho_{z'}$. Kako se $\mathcal{M}(z')$ sastoji iz onih i samo onih elemenata iz $\mathcal{H}(Z)$ čiji spektralni tipovi su potčinjeni spektralnom tipu $\rho_{z'}$ i kako je, prema (2.4.6), $\mu_t<\rho_{z'}$, znači da $Z(t)\in\mathcal{M}(z')$ za svako t. Odavde sledi da je $\mathcal{H}(Z)\subset\mathcal{M}(z')$, a kako $z'\in\mathcal{H}(Z)$, znači da je $\mathcal{H}(Z)=\mathcal{M}(z')$, odnosno da je $\rho=\rho_{z'}$, što je suprotno pretpostavci (2.4.6). Time je pokazano da (2.4.5) važi. QED

<u>Teorema 2.9.</u> (vidi i [16]) Neka su $X_1,\dots,X_M$ (M je pri-

rodni broj ili $\aleph_0$) uzajamno ortogonalni procesi sa uzajamno ortogonalnim spektralnim tipovima i neka je

(2.4.7) $$X_n(t)=\int_{-\infty}^{t} k_n(t,u)\,dE(u)z_n\ ,\quad t\in\mathbb{R},$$

čisto kanonička reprezentacija procesa X_n, $n=\overline{1,M}$. Tada je

(2.4.8) $$X(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{t} k_n(t,u)\,dE(u)z_n,\quad t\in\mathbb{R},$$

čisto kanonička reprezentacija procesa X.

Dokaz. Kako je (2.4.7) čisto kanonička reprezentacija procesa X_n, to je $\mathcal{H}(X_n)=\mathcal{M}(z_n)$, $n=\overline{1,M}$. Iz $\rho_{z_i}\perp\rho_{z_j}$, $i\neq j$, sledi da je $\sum_{n=1}^{M}\oplus\mathcal{H}(X_n)$ takodje ciklički prostor i da je $z=\sum_{n=1}^{M}z_n$ njegov generatorni element, tj. da je

$$\sum_{n=1}^{M}\oplus\mathcal{H}(X_n)=\mathcal{M}\Big(\sum_{n=1}^{M}z_n\Big);$$

važi jednakost $\rho_z=\sum_{n=1}^{M}\rho_{z_n}$. Pretpostavimo da (2.4.8) nije čisto kanonička reprezentacija procesa X, tj. da je $\mathcal{H}(X)\subset\sum_{n=1}^{M}\oplus\mathcal{H}(X_n)=\mathcal{M}\big(\sum_{n=1}^{M}z_n\big)$. No, kako, prema teoremi 2.7, $\mathcal{H}(X)$ svodi razlaganje jedinice E, to je $\mathcal{H}(X)$ ciklički potprostor prostora $\mathcal{M}\big(\sum_{n=1}^{M}z_n\big)$. Postoji $z_0\in\mathcal{H}(X)$, tako da je $\mathcal{M}(z_0)=\mathcal{H}(X)$; zbog $\mathcal{H}(X)\subset\mathcal{M}\big(\sum_{n=1}^{M}z_n\big)$ je $\rho_{z_0}<\rho_z$. Dakle, X je ciklički proces i ρ_{z_0} je njegov spektralni tip. Prema lemi 2.2 to znači da je

(2.4.9) $$\rho_{z_0}=\sup_t\{\mu_t\},$$

gde je μ_t spektralni tip generisan elementom $X(t)$. No, kako su spektralni tipovi procesa X_n, $n=\overline{1,M}$, uzajamno ortogonalni, znači da je

$$\mu_t=\sum_{n=1}^{M}\mu_{X_n(t)}\quad\text{za svako } t\in\mathbb{R},$$

gde je $\mu_{X_n(t)}$ spektralni tip generisan elementom $X_n(t)$. Dakle, (2.4.9) postaje

$$\rho_{z_0}=\sum_{n=1}^{M}\sup_t\{\mu_{X_n(t)}\}<\rho_z=\sum_{n=1}^{M}\rho_{z_n};$$

ova nejednakost biće zadovoljena ako je

$$\sup_t\{\mu_{X_n(t)}\}<\rho_{z_n}$$

za bar jedno n, $n=\overline{1,M}$; a ovo je, zbog leme 2.2, nemoguće. Iz toga sledi da je $\mathfrak{f}_{Z_0}=\mathfrak{f}_t$, odnosno da je (2.4.8) čisto kanonička reprezentacija slučajnog procesa X. QED

<u>Teorema 2.10.</u> ([13.a]) Reprezentacija
$$X(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\,dZ_n(u),\quad t\in\mathbb{R},$$
je kanonička reprezentacija procesa X ako i samo ako je
$$X_n(t)=\int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\,dZ_n(u),\quad t\in\mathbb{R},$$
kanonička reprezentacija procesa X_n za svako $n=\overline{1,M}$.

<u>Teorema 2.11.</u> Neka su $X_1,\dots,X_M$ uzajamno ortogonalni slučajni procesi sa uzajamno ortogonalnim spektralnim tipovima i neka je
$$X_n(t)=\int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\,dZ_n(u),\quad t\in\mathbb{R},$$
kanonička reprezentacija procesa X_n za $n=\overline{1,M}$. Ako je proces X definisan jednakošću

$$X(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\,dZ_n(u),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.4.10}$$

tada postoje procesi $\tilde{Z}_1,\dots,\tilde{Z}_M$ sa ortogonalnim priraštajima, tako da je

$$X(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\,d\tilde{Z}_n(u),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.4.11}$$

čisto kanonička reprezentacija procesa X.

<u>Dokaz.</u> Iz teoreme 2.8 sledi da za svako $n=\overline{1,M}$ postoji slučajni proces $\tilde{Z}_n$ sa ortogonalnim priraštajima takav da je
$$X_n(t)=\int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\,d\tilde{Z}_n(u),\quad t\in\mathbb{R},$$
čisto kanonička reprezentacija procesa X_n. Proces X_n je, prema posledici teoreme 2.7, ciklički i spektralni tip mu je potčinjen spektralnom tipu procesa Z_n. Dakle, procesi $\tilde{Z}_1,\dots,\tilde{Z}_M$ su uzajamno ortogonalni i imaju uzajamno ortogonalne spektralne tipove. Odavde, prema teoremi 2.9, sledi da je (2.4.11) čisto kanonička reprezentacija procesa X. QED

II.5. Potčinjenost i potpuna potčinjenost

Kažemo da je proces Y potčinjen procesu X ako je

$$\mathcal{H}(Y;t) \subset \mathcal{H}(X;t) \text{ za svako } t\in\mathbb{R}. \tag{2.5.1}$$

Kažemo da je proces Y potpuno potčinjen procesu X ako, pored (2.5.1), važi i

$$\mathcal{H}(Y) \ominus \mathcal{H}(Y;t) \subset \mathcal{H}(X) \ominus \mathcal{H}(X;t) \text{ za svako } t\in\mathbb{R}. \tag{2.5.2}$$

Ako je

$$X(t) = \sum_{n=1}^{M} \int_{-\infty}^{t} h_n(t,u)\, dZ_n(u), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.5.3}$$

čisto kanonička (ili Hida-Kramerova) reprezentacija procesa X, tada je proces Z_n, za svako $n=\overline{1,M}$, potpuno potčinjen procesu X. Ako je u (2.5.3) $M=1$, tada je proces X potčinjen procesu Z_1, ali mu ne mora biti i potpuno potčinjen (vidi [13.a]).

Teorema 2.12. ([13.a]) Neka je (2.5.3) čisto kanonička reprezentacija procesa X. Proces Y je potpuno potčinjen procesu X ako i samo ako postoji familija funkcija $\{g(t,u),\, t\in\mathbb{R},\, u\le t\}$ iz $\mathcal{L}_2(\mathbb{F})$, gde $\mathbb{F}$ ima značenje iz teoreme 2.6, tako da je

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{M} \int_{-\infty}^{t} f_n(t,u)\, dZ_n(u), \quad t\in\mathbb{R},$$

kanonička reprezentacija procesa Y.

Neka su $\rho_X=(\rho_1^X,\dots,\rho_N^X)$ i $\rho_Y=(\rho_1^Y,\dots,\rho_M^Y)$ spektralni tipovi, redom, procesa X i Y. Kažemo da je spektralni tip ρ_Y potčinjen spektralnom tipu ρ_X, i pišemo $\rho_Y<\rho_X$, ako je $M\le N$ i $\rho_n^Y<\rho_n^X$ za $n=\overline{1,M}$.

Teorema 2.13. ([13.a]) Ako je proces Y potpuno potčinjen procesu X, tada je spektralni tip ρ_Y procesa Y potčinjen spektralnom tipu ρ_X procesa X.

Posledica ove teoreme i teoreme 2.4 je

Teorema 2.14. ([13.a]) Neka je X proces čiji spektralni tip je $\rho_X=(\rho_1^X,\dots,\rho_N^X)$, $\rho_1^X>\dots>\rho_N^X$. Ako je spektralni tip $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_M)$

potčinjen spektralnom tipu ρ_X, tada postoji proces Y, potpuno potčinjen procesu X, tako da je $\rho_Y = \rho$.

II.6. Linearne transformacije slučajnog procesa

Jedno od važnih pitanja spektralne teorije slučajnih procesa je kako se menja spektralna struktura procesa pri linearnim transformacijama. Preciznije: ako je A linearni operator na $\mathcal{H}(X)$ i ako je proces Y definisan jednakošću

(2.6.1) $$Y(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

u kakvom odnosu su spektralni tipovi ρ_Y i ρ_X procesa Y i X. Nećemo izložiti sve poznate rezultate u vezi sa tim problemom nego samo one koji će nam biti potrebni u daljem izlaganju.

Teorema 2.15. Neka je X proizvoljni slučajni proces i A linearni operator koji preslikava prostor $\mathcal{H}(X)$ u samog sebe i zadovoljava jednakost

(2.6.2) $$AE_X(t) = E_X(t)A, \quad t \in \mathbb{R},$$

gde je E_X razlaganje jedinice procesa X. Spektralni tip ρ_Y slučajnog procesa Y, definisanog sa

$$Y(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

potčinjen je spektralnom tipu ρ_X procesa X.

Dokaz. Ako pokažemo da je proces Y potpuno potčinjen procesu X, iz toga će prema teoremi 2.13, slediti da je $\rho_Y < \rho_X$. Imamo:

$$\mathcal{H}(Y;t) = A\mathcal{H}(X;t) = AE_X(t)\mathcal{H}(X) = E_X(t)A\mathcal{H}(X) = E_X(t)\mathcal{H}(Y) \subset \mathcal{H}(X;t),$$

odnosno

(2.6.3) $$\mathcal{H}(Y;t) \subset \mathcal{H}(X;t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isto tako, važi:

$$\mathcal{H}(Y) \ominus \mathcal{H}(Y;t) = A\mathcal{H}(X) \ominus A\mathcal{H}(X;t) = A\big(\mathcal{H}(X) \ominus \mathcal{H}(X;t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ako $z \in \mathcal{H}(Y) \ominus \mathcal{H}(Y;t)$ znači da postoji $z_0 \in \mathcal{H}(X) \ominus \mathcal{H}(X;t)$, tako da je $z = Az_0$. Važe jednakosti: $E_Y(t)z = E_Y(t)Az_0 = AE_X(t)z_0$, a kako je $E_X(t)z_0 = 0$, to je $AE_X(t)z_0 = 0$, odnosno $E_Y(t)z = 0$, što znači da $z \in \mathcal{H}(Y) \ominus \mathcal{H}(Y;t)$. Dakle:

$$\mathcal{H}(Y) \ominus \mathcal{H}(Y;t) \subset \mathcal{H}(X) \ominus \mathcal{H}(X;t), \quad t \in \mathbb{R},$$

što zajedno sa (2.6.3) znači da je proces Y potpuno potčinjen procesu X. QED

<u>Posledica</u>. (vidi [49]) Neka je $\mathcal{M}$ potprostor prostora $\mathcal{H}(X)$ i neka $\mathcal{M}$ svodi razlaganje jedinice E_X procesa X. Ako je proces Y definisan jednakošću

$$Y(t) = P_{\mathcal{M}} X(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

tada je $\mathcal{G}_Y < \mathcal{G}_X$.

<u>Dokaz</u>. Da bismo ovo pokazali dovoljno je, prema prethodnoj teoremi, da pokažemo da je

(2.6.4) $$P_{\mathcal{M}} E_X(t) = E_X(t) P_{\mathcal{M}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ako $x \in \mathcal{M}$ tada je $P_{\mathcal{M}}x = x$, pa je $E_X(t)P_{\mathcal{M}}x = E_X(t)x$ za svako $t \in \mathbb{R}$; medjutim, kako $\mathcal{M}$ svodi E_X, to je $E_X(t)x \in \mathcal{M}$, pa je $P_{\mathcal{M}}E_X(t)x = E_X(t)x$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Dakle, iz pretpostavke $x \in \mathcal{M}$ sledi jednakost $P_{\mathcal{M}}E_X(t)x = E_X(t)P_{\mathcal{M}}x$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Ako $x \in \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{H}(X) \ominus \mathcal{M}$, tada je $P_{\mathcal{M}}x = 0$, pa i $E_X(t)P_{\mathcal{M}}x = 0$, $t \in \mathbb{R}$; isto tako, zbog $E_X(t)\mathcal{M}^{\perp} \subset \mathcal{M}^{\perp}$, iz $x \in \mathcal{M}^{\perp}$ sledi $E_X(t) \in \mathcal{M}^{\perp}$, pa i $P_{\mathcal{M}}E_X(t)x = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, i ako $x \in \mathcal{M}^{\perp}$ važi jednakost $P_{\mathcal{M}}E_X(t)x = E_X(t)P_{\mathcal{M}}x$, $t \in \mathbb{R}$. Konačno, ako je x proizvoljni element iz $\mathcal{H}(X)$, tada se on može napisati u obliku $x = x_1 + x_2$, gde $x_1 \in \mathcal{M}$, $x_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$, pa je $P_{\mathcal{M}}E_X(t)x = E_X(t)x$ i $E_X(t)P_{\mathcal{M}}x = E_X(t)x_1$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Time smo pokazali da važi jednakost (2.6.4), odnosno da je $\mathcal{G}_Y < \mathcal{G}_X$. QED

Može se pokazati ([13],[49]) da ovo poslednje tvrdjenje ne važi bez pretpostavke da $\mathcal{M}$ svodi E_X.

U opštem slučaju ne može se ništa reći o odnosu spektralnih tipova ρ_Y i ρ_X slučajnih procesa koji su vezani relacijom (2.6.1), gde je A proizvoljni (čak ograničeni) linearni operator (vidi [13.a]).

II.7. Primedbe

Tokom cele ove glave pretpostavljalimo da svi slučajni procesi zadovoljavali uslov (N). Taj uslov je obezbedjivao da familija E_X projektora bude razlaganje jedinice prostora $\mathcal{H}(X)$. Ovo poslednje neophodno je sve dok želimo da ispitujemo strukturu procesa metodama spektralne teorije operatora. Medjutim, uslov (N) obezbedjivao je i separabilnost prostora $\mathcal{H}(X)$, što predstavlja veoma jaku pretpostavku u najvećem broju rezultata koje smo naveli. Sa druge strane, separabilnost prostora $\mathcal{H}(X)$ sa stanovišta spektralne analize, nema nikakvog značaja. Isto tako, postoje slučajni procesi čije familije projektora predstavljaju razlaganje jedinice, ali koji, zbog neseparabilnosti svojih prostora, ne mogu biti proučavani na način izložen u ovom poglavlju. U naredna dva poglavlja bavićemo se proučavanjem jedne relativno široke klase takvih procesa.

Glava III

STRUKTURA SLUČAJNIH PROCESA SA NESEPARABILNIH PROSTORIMA

III.1 Uvod

U ovoj glavi bavićemo se proučavanjem klase slučajnih procesa koja je znatno šira od klase koju smo posmatrali u prethodnoj glavi. Rezultati koje smo izložili u prethodnoj glavi predstavljaće specijalne slučajeve i posledice rezultata koje ćemo ovde dokazati.

Pretpostavljaćemo da su svi slučajni procesi regularni i da su sve slučajne promenljive definisane na istom prostoru verovatnoće.

Osnovna karakteristika slučajnih procesa, koje smo posmatrali u prethodnoj glavi, je separabilnost njihovih Hilbertovih prostora. U vezi sa tim mogu se postaviti sledeća dva pitanja. Prvo, da li i do koje mere uslov (N) može biti oslabljen, a da Hilbertov prostor, generisan slučajnim procesom, i dalje bude separabilan? Drugo, da li je moguće uslov (N) zameniti nekim slabijim uslovom koji nema za posledicu separabilnost odgovarajućeg prostora, ali je takav da dozvoljava ispitivanje procesa metodama spektralne teorije operatora?

III.2. Slučajni procesi neprekidni sa leva

Sledeće teoreme daju odgovor na prvo od dva pitanja koja smo gore postavili.

Teorema 3.1. Neka je $X=\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$ slučajni proces koji z dovoljava jednakost

$$\underset{h\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\, X(t-h)=X(t)\,,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{3.2.1}$$

Postoji najviše prebrojivo mnogo vrednosti parametra t za koje desna granična vrednost slučajnog procesa X ne postoji.

Dokaz. Neka je t_0 proizvoljna vrednost parametra t za koje $X(t_0+0)$ ne postoji; mogu nastupiti sledeća dva slučaja:

1^0 postoji niz $(t_{\lambda n})_n$ vrednosti parametra t, koji opadajući konvergira ka t_0 kada $n\to\infty$, i takav je da odgovarajući niz $(X(t_{\lambda n}))_n$ vrednosti procesa X konvergira ka nekoj slučajnoj promenljivoj $x_{\lambda t_0}$;

2^0 za svaki niz $(t_n)_n$ vrednosti parametra t, koji opadajući konvergira ka t_0, važi jednakost $\lim\limits_{n\to\infty}\|X(t_n)\|=\infty$.[1]

Ako tačka $t=t_0$ ima osobinu 1^0, tada ćemo sa $\{x_{\lambda t_0}, \lambda\in\Lambda\}$ označiti skup svih slučajnih promenljivih dobijenih na način opisan u 1^0; za svaku takvu vrednost parametra t definišimo sledeće veličine:

$$\sigma_{\lambda\nu}(t_0)=\|x_{\lambda t_0}-x_{\nu t_0}\|\,,\quad \lambda,\nu\in\Lambda\,,$$
$$\sigma(t_0)=\sup_{\lambda,\nu\in\Lambda}\sigma_{\lambda\nu}(t_0)\,.$$

Veličinu $\sigma(t)$ za one vrednosti parametra t, koje imaju osobinu 2^0, definišimo sa $\sigma(t)=\infty$.

Pretpostavimo da tvrdjenje teoreme ne važi, tj. da vrednosti parametra t, za koje desna granična vrednost ne postoji, ima kontinuum mnogo; za svako takvo t postoji $\sigma(t)$ i $\sigma(t)>0$. Postoji $\sigma>0$ tako da je nejednakost $\sigma(t)>\sigma$ zadovoljena za kontinuum mnogo vrednosti t (jer, ako bi, za svako $\sigma>0$, nejednakost $\sigma(t)>\sigma$ bila zadovoljena za najviše prebrojivo mnogo vrednosti t, tada bi i onih t-ova za koje $X(t+0)$ ne postoji bilo najviše prebrojivo mnogo, što je suprotno pretpostavci). Dalje, postoji ceo broj i tako da u intervalu $[i,i+1)$ ima kontinuum mnogo vrednosti t za koje je $\sigma(t)>\sigma$ (jer bi, u protivnom, značilo da u svakom intervalu $[i,i+1)$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, ima samo najviše prebrojivo mnogo t-ova za koje je $\sigma(t)>\sigma$, a odatle bi sledilo da ih i u $\mathbb{R}$ ima prebrojivo mnogo, što je suprotno pretpostavci); neka je $[i_0,i_0+1)$ takav interval. Pokazaćemo da postoji vrednost $t^*\in[i_0,i_0+1)$ takva da se u svakoj levoj okolini te vrednosti nalazi beskonačno mnogo t-ova za koje je $\sigma(t)>\sigma$; zaista, kada ne bi bilo tako, značilo bi da u intervalu $[i_0,i_0+1)$ ima samo najviše prebrojivo mnogo t-ova sa osobinom $\sigma(t)>\sigma$, što je nemoguće (naime, ako je $\{[i_0+1-\varepsilon,i_0+1),\ 0<\varepsilon<1\}$ skup svih levih okolina od i_0+1 u kojima ima samo konačno mnogo t-ova sa osobinom $\sigma(t)>\sigma$ i ako je $i^*=\inf\limits_{0<\varepsilon<1}(i_0+1-\varepsilon)$, tada je $i^*=i_0$, jer bi, u protivnom, značilo da postoji leva okolina od i^*, sadržana u $[i_0,i^*)$, pa time i leva okolina od i_0+1, u kojoj ima konačno mnogo t-ova sa osobinom $\sigma(t)>\sigma$, a to je suprotno definiciji broja i^*). Dakle: t^* postoji. Kako je, prema (3.2.1), proces X neprekidan sa leva, znači da je

$$\underset{t\to t^*-0}{\mathrm{l.i.m.}}\, X(t)=X(t^*).$$

Ovo znači da je, kada je t u dovoljno maloj levoj okolini σ vrednosti t^*, zadovoljena nejednakost

$$\|X(t^*)-X(t)\|<\frac{\sigma}{4}.$$

Pritom, kao što je upravo pokazano, svaki t-niz, koji rastući konvergira ka t^*, može biti izabran tako da za svaki njegov element t važi nejednakost $\sigma(t)>\sigma$ (svaki takav niz, prema fusnoti 1), može biti takav da u njemu nema vrednosti t sa osobinom 2°). No, ako $t\in\sigma$, tada i za svako $t'\in(t,t^*)$ važi nejednakost

$$\|X(t^*)-X(t')\|<\frac{\sigma}{4};$$

dakle, poslednja nejednakost važi i za svaki niz koji opadajući konvergira ka $t\in\sigma$. Prema tome, za svako $t\in\sigma$ važi

$$\|X(t^*)-\underset{t'\to t+0}{\mathrm{l.i.m.}}X(t')\|<\frac{\sigma}{2},$$

a odatle dobijamo

$$\sigma(t)=\sup_{t',t''}\|\underset{t'\to t+0}{\mathrm{l.i.m.}}X(t')-\underset{t''\to t+0}{\mathrm{l.i.m.}}X(t'')\|\leq\sigma,$$

što je nemoguće, jer je t tačka za koju je $\sigma(t)>t$. Time je teorema dokazana. QED

Primedba 1. Analizom dokaza vidi se da gornja teorema važi i ako se pretpostavi da proces X, umesto (3.2.1), zadovoljava sledeći slabiji uslov: $X(t-0)$ postoji za svako $t\in\mathbb{R}$.

Teorema 3.2. Neka je slučajni proces X neprekidan sa leva. Nejednakost

$$\dim\left(\mathcal{H}(X;t+0)\ominus\mathcal{H}(X;t)\right)\leq\aleph_0 \tag{3.2.2}$$

zadovoljena je za svako $t\in\mathbb{R}$.

Dokaz. Ako za svako $t\in\mathbb{R}$ postoji $X(t+0)$, tada je prostor $\mathcal{H}(X)$ separabilan, pa je i nejednakost (3.2.2) zadovoljena za svako $t\in\mathbb{R}$. Pretpostavimo, zato, da desne granične vrednosti procesa X ne postoje bar za neke vrednosti parametra t. Neka je t_0 proizvoljna vrednost parametra t; pretpostavimo da (3.2.2) ne važi za $t=t_0$, odnosno da je

$$\dim\left(\mathcal{H}(X;t_0+0)\ominus\mathcal{H}(X;t_0)\right)=\aleph_1. \tag{3.2.3}$$

Neka je, dalje, $\{x_\lambda^0,\ \lambda\in\Lambda\}$ jedna ortonormirana baza prostora

$\mathcal{H}(X;t_0+0)\ominus\mathcal{H}(X;t_0)$ $(\mathrm{card}\,\Delta=\aleph_1)$ i neka je $\{x_\nu, \nu\in N\}$ skup slučajnih promenljivih takvih da za svako $\nu\in N$ postoji niz $(t_{\nu k})_k$ za koji je

$$x_\nu = \underset{t_{\nu k}\to t_0+0}{\mathrm{l.i.m.}}\, X(t_{\nu k}). \tag{3.2.4}$$

Pokažimo da postoji vrednost parametra t, $t>t_0$, takva da u reprezentaciji procesa X u svakoj levoj okolini te vrednosti učestvuje kontinuum mnogo elemenata baze $\{x_\lambda^0, \lambda\in\Lambda\}$. Pretpostavimo da to nije tačno, odnosno da za svako $t\,(>t_0)$ postoji njegova leva okolina $(t-\varepsilon, t]$, sadržana u $(t_0, t]$, takva da u reprezentaciji procesa X u toj okolini učestvuje najviše prebrojivo mnogo elemenata baze; za proizvoljno $t\,(>t_0)$ uočimo skup $\{(t-\varepsilon, t],\ 0<\varepsilon<t-t_0\}$ njegovih levih okolina, sadržanih u $(t_0, t]$ i takvih da u reprezentaciji procesa X u svakoj od njih učestvuje najviše prebrojivo mnogo elemenata baze. Definišimo $\bar{t}$ jednakošću $\bar{t}=\inf\limits_{0<\varepsilon<t-t_0}(t-\varepsilon)$; mora biti $\bar{t}=t_0$ (jer bi, u protivnom, vrednost $\bar{t}$ imala osobinu da u reprezentaciji procesa X u svakoj njenoj levoj okolini učestvuje kontinuum mnogo elemenata baze, a za to je pretpostavljeno da je nemoguće), a to znači da u reprezentaciji procesa X u intervalu $(t_0, t]$ učestvuje samo prebrojivo mnogo elemenata baze, odnosno da prostoru

$$\mathcal{H}(X;t_0+\ell)\ominus\mathcal{H}(X;t_0),\quad 0<\ell<t-t_0,$$

pripada samo prebrojivo mnogo elemenata baze, odakle sledi

$$\dim\Big(\mathcal{H}(X;t_0+0)\ominus\mathcal{H}(X;t_0)\Big)=\aleph_0,$$

što je suprotno pretpostavci (3.2.3). Dakle, opisana vrednost parametra t postoji; obeležimo je sa t^*. Kako je proces X neprekidan sa leva, biće $\underset{t_n\to t^*-0}{\mathrm{l.i.m.}}\, X(t_n)=X(t^*)$ za svaki niz $(t_n)_n$ koji rastući konvergira ka t^*. Možemo pretpostaviti da je $\|X(t^*)\|>0$.

Pokazaćemo sada da za svako $\varepsilon>0$ postoji $t^{**}\in(t_0,t^*]$ tako da je nejednakost

$$(3.2.5)\qquad \|X(t^{**})-X(t)\|<\varepsilon$$

zadovoljena za svako $t\in(t_0,t^{**}]$. Pretpostavimo da nije tako, tj. da za neko $\varepsilon=\varepsilon_0>0$ i svako $t^{**}\in(t_0,t^*]$ nejednakost (3.2.5) važi samo za vrednosti t iz intervala $(t_\ell^{**},t^{**}]$ koji je sadržan u $(t_0,t^{**}]$. Uočimo leve krajeve t_ℓ^{**} tih intervala za sve vrednosti $t^{**}\in(t_0,t^*]$; svakako je $t_\ell^{**}>t_0$. Broj $\bar{\bar{t}}$ definišimo sa

$$(3.2.6)\qquad \bar{\bar{t}}=\inf_{t^{**}\in(t_0,t^*]} t_\ell^{**}$$

Mora biti $\bar{\bar{t}}=t_0$ (jer bi, u protivnom, postojalo $t^{**}\in(t_0,\bar{\bar{t}}]$, tako da je $t_\ell^{**}<t^{**}<\bar{\bar{t}}$, što znači da $\bar{\bar{t}}$ ne bi bio infimum, što nije moguće), a to znači da postoji t^{**} tako da je za svako $t\in(t_0,t^{**}]$ zadovoljena nejednakost (3.2.5) za $\varepsilon=\varepsilon_0$, a to je suprotno pretpostavci koju smo napravili. Time smo pokazali da za svako $\varepsilon>0$ postoji $t^{**}\in(t_0,t^*]$ tako da je nejednakost (3.2.5) zadovoljena za svako $t\in[t_0,t^{**}]$.

Kako važi (3.2.4), znači da je za svako $\nu\in\mathcal{N}$ i dovoljno veliko k zadovoljena nejednakost

$$(3.2.7)\qquad \|x_\nu-X(t_{\nu k})\|<\varepsilon .$$

Isto tako za fiksirano $\varepsilon>0$ i svako $\nu\in\mathcal{N}$ postoji N_ν tako da $t_{\nu k}\in(t_0,t^{**}]$ za $k>N_\nu$; to znači da je nejednakost $\|X(t^{**})-X(t_{\nu k})\|<$ $<\varepsilon$ zadovoljena za svako $k>N_\nu$. Odavde i iz (3.2.7) sledi da za svako $\nu\in\mathcal{N}$ važi

$$(3.2.8)\qquad \|X(t^{**})-x_\nu\|\le\|X(t^{**})-X(t_{\nu k})\|+\|X(t_{\nu k})-x_\nu\|<2\varepsilon$$

pa je

$$(3.2.9)\qquad \|x_\nu-x_\mu\|\le\|x_\nu-X(t^{**})\|+\|X(t^{**})-x_\mu\|<4\varepsilon$$

za sve $\nu,\mu\in\mathcal{N}$. Kako za svako $\varepsilon>0$ postoji $t^{**}\in(t_0,t^*]$ tako da važi (3.2.8), odatle sledi da za svako $\varepsilon>0$ važi (3.2.9). No, to implicira jednakost $x_\nu = x_\mu$ za sve $\nu, \mu \in N$, što je nemoguće zbog pretpostavke card $\Lambda = \aleph_1$. Dakle, mora biti card $\Lambda \leq \aleph_0$, odnosno važi (3.2.2) QED

Primedba 2. Jasno je da i ova teorema važi ako pretpostavimo , ne da je proces X neprekidan sa leva, nego samo da njegove leve granične vrednosti postoje za svako $t \in \mathbb{R}$.

Sledeća teorema je neposredna posledica teorema 3.1 i 3.2.

Teorema 3.3. Neka je X proizvoljni slučajni proces takav da $X(t-0)$ postoji za svako $t \in \mathbb{R}$. Prostor $\mathcal{H}(X)$ ovoga procesa je separabilan.

Dakle, separabilnost prostora $\mathcal{H}(X)$ je potreban uslov za neprekidnost (sa leva) procesa X. Lako je pokazati da taj uslov nije i dovoljan; isto tako, može se pokazati da separabilnost ne obezbedjuje čak ni postojanje levih (i desnih) graničnih vrednosti procesa X za ma koje $t \in \mathbb{R}$.

III.3. Razlaganje proizvoljnog slučajnog procesa

Za slučajni proces X kažemo da u tački t dobija inovaciju ako je $\mathcal{H}(X;t-h) \neq \mathcal{H}(X;t+h)$ za svako $h > 0$. Kažemo da je ta inovacija diskretna ako nije zadovoljena bar jedna od jednakosti $\mathcal{H}(X;t-0) = \mathcal{H}(X;t) = \mathcal{H}(X;t+0)$. Kažemo da je X slučajni proces sa diskretnim inovacijama ako su sve njegove inovacije diskretne.

Teorema 3.4. Neka je X proizvoljni slučajni proces. On se može razložiti na ortogonalnu sumu slučajnih procesa X_1 i X_2, takvih da su zadovoljeni uslovi:

(a) $\mathcal{H}(X_1;t-0) = \mathcal{H}(X_1;t)$ za svako $t \in \mathbb{R}$;

(b) X_2 je slučajni proces sa diskretnim inovacijama.

Opisano razlaganje je jedinstveno.

<u>Dokaz</u>. Neka je

$$x_t = X(t) - \mathcal{P}_{\mathcal{H}(X;t-0)} X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3.2}$$

i

$$\mathcal{S}_2 = \overline{\mathcal{L}}\{x_t, t \in \mathbb{R}\};$$

neka je, isto tako, potprostor $\mathcal{S}_1$ definisan sa

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{H}(X) \ominus \mathcal{S}_2 .$$

Slučajne procese X_1 i X_2 definišimo jednakostima

$$X_1(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1} X(t), \quad X_2(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_2}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kako je $\mathcal{H}(X) = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$, to je

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3.3}$$

Procesi X_1 i X_2 su ortogonalni zato što je $\mathcal{S}_1 \perp \mathcal{S}_2$. Kako je

$$\mathcal{H}(X_1;t) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1} \mathcal{H}(X;t), \quad t \in \mathbb{R},$$

to je

$$\mathcal{H}(X_1;t) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1} \mathcal{H}(X;t-0) \oplus \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1} \overline{\mathcal{L}}\{x_t\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gde je x_t definisano sa (3.3.2). Medjutim, $x_t \in \mathcal{S}_2$, pa je $\overline{\mathcal{L}}\{x_t\} \perp \mathcal{S}_1$, odnosno $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_1} \overline{\mathcal{L}}\{x_t\} = 0$, odakle sledi da je

$$\mathcal{H}(X_1;t) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1} \mathcal{H}(X;t-0) = \mathcal{H}(X_1;t-0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, proces X_1 zadovoljava uslov (a).

Za svako $t \in \mathbb{R}$ važi jednakost

$$X_2(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_2} X(t) = \mathcal{P}_{\overline{\mathcal{L}}\{x_s, s \le t\}} X(t) \tag{3.3.4}$$

zato što je $X(t) \perp x_u$ za $u > t$. Odatle sledi da su jedine inovacije procesa X_2 oblika $X_2(t) - \mathcal{P}_{\mathcal{H}(X_2;t-0)} X_2(t)$, a svaka takva inovacija je, zbog (3.3.4), jednaka $\mathcal{P}_{\overline{\mathcal{L}}\{x_t\}} X_2(t)$. Dakle, proces X_2 zadovoljava uslov (b).

Pokažimo jedinstvenost razlaganja (3.3.3). Naime, ako bi

$$X(t) = X_1^*(t) + X_2^*(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3.5}$$

bilo još jedno razlaganje opisanog tipa procesa X, tada bi zbog (3.3.3) i (3.3.5) bilo

$$X_1(t) - X_1^*(t) = X_2(t) - X_2^*(t), \quad t \in \mathbb{R};$$

medjutim, poslednja jednakost ne može važiti, zato što proces $X_1 - X_1^* = \{X_1(t) - X_1^*(t), t \in \mathbb{R}\}$ zadovoljava uslov (a), dok proces $X_2 - X_2^* = \{X_2(t) - X_2^*(t), t \in \mathbb{R}\}$ ima diskretne inovacije. Time je jedinstvenost razlaganja (3.3.3) pokazana. QED

Posledica 1. Neka je X proces za koji je $x_t \perp X(u)$ za svako t i sve $u \neq t$. Tada je X_2 proces "belog šuma", odnosno zadovoljava jednakost $(X_2(t), X_2(u)) = 0$ za sve t i u, $t \neq u$.

Posledica 2. Neka je X proces za koji granične vrednosti $X(t-0)$ i $X(t+0)$ postoje za svako $t \in \mathbb{R}$. Tada je proces X_1 neprekidan sa leva, a proces X_2 ima najviše prebrojivo mnogo (diskretnih) inovacija.

III.4. Uslov (SN)

Iz jednakosti

(3.4.1) $$X(t-0) = X(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

sledi, kao što je poznato, jednakost

(3.4.2) $$\mathcal{H}(X; t-0) = \mathcal{H}(X; t), \quad t \in \mathbb{R},$$

a ova jednakost ima za posledicu da familija $E_X = \{E_X(t), t \in \mathbb{R}\}$ projektora prostora $\mathcal{H}(X)$ na $\mathcal{H}(X; t)$, $t \in \mathbb{R}$, predstavlja razlaganje jedinice prostora $\mathcal{H}(X)$. Medjutim, uslov (3.4.1) je dovoljan, ali ne i neophodan, za jednakost (3.4.2). Može se pokazati da (3.4.2) ne implicira, čak, ni postojanje granične vrednosti $X(t-0)$, $t \in \mathbb{R}$. Ovo znači da je, u opštem slučaju, uslov (3.4.2) znatno slabiji od uslova (3.4.1). Pokazaćemo da su oni u izvesnom smislu ekvivalentni ako je X proces sa ortogonalnim priraštajima.

Tvrdjenje 3.5. Neka je $Z=\{Z(t), t\in\mathbb{R}\}$ slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima, takav da $Z(t-0)$ postoji za svako $t\in\mathbb{R}$. Ako je $\mathcal{H}(Z;t-0)=\mathcal{H}(Z;t)$, tada je $Z(t-0)=Z(t)$.

Dokaz. Pretpostavimo da jednakost $\mathcal{H}(Z;t-0)=\mathcal{H}(Z;t)$ važi, ali je $Z(t-0)\neq Z(t)$. Kako $Z(t-0)$ postoji, znači da jednakost $Z(t-0)=\underset{t_n\to t-0}{\mathrm{l.i.m.}}Z(t_n)$ važi za svaki niz $(t_n)_n$ koji rastući konvergira ka t. Zbog ortogonalnosti priraštaja procesa Z, jednakost

$$\left(Z(t)-Z(t_n),\ Z(t_k)\right)=0$$

važi za svako n i svako $k=1,2,\dots,n-1$; kako je skalarni proizvod neprekidna funkcija svakog svog argumenta, biće

$$\lim_{n\to\infty}\left(Z(t)-Z(t_n),\ Z(t_k)\right)=\left(Z(t)-Z(t-0),\ Z(t_k)\right)=0$$

za $k=1,2,\dots$. Ovo znači da je razlika $Z(t)-Z(t-0)$ ortogonalna na svako $Z(s)$ za $s<t$, a odatle sledi da je $Z(t)-Z(t-0)$ ortogonalno na $\mathcal{H}(Z;t-0)$. Pošto $Z(t)-Z(t-0)\in\mathcal{H}(Z;t)$, ovo znači da postoji element prostora $\mathcal{H}(Z;t)$ koji je ortogonalan na $\mathcal{H}(Z;t-0)$, a odatle sledi da je $\mathcal{H}(Z;t-0)\neq\mathcal{H}(Z;t)$, što je suprotno pretpostavci. QED

Dakle, za slučajni proces Z sa ortogonalnim priraštajim za koji leve granične vrednosti postoje za svako $t\in\mathbb{R}$, uslovi $Z(t-0)=Z(t)$ i $\mathcal{H}(Z;t-0)=\mathcal{H}(Z;t)$ medjusobno su ekvivalentni. Sledećim primerom pokazaćemo da je, u opštem slučaju, uslov (3.4.2) tako slab da ga može zadovoljavati i slučajni proces koji generiše neseparabilni prostor.

Primer 3.1. Neka je slučajni proces X definisan na sledeći način:

$$X(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ B(\sin\frac{1}{t}), & t>0\end{cases}\qquad (3.4.3)$$

($B=\{B(t), t\in\mathbb{R}\}$ je "beli šum")

Očigledno je da leve i desne vrednosti ovog procesa ne postoje ni za jedno $t>0$. Medjutim, jednakost $\mathcal{H}(X;t-0)=\mathcal{H}(X;t)$ važi za svako $t\in\mathbb{R}$. Zaista, jedini element koji pripada prostoru $\mathcal{H}(X;t)$, a ne mora pripadati i prostoru $\mathcal{H}(X;t-0)$, je element $X(t)=B(\sin\frac{1}{t})$; no kako je

$$(3.4.4) \qquad X\left(\frac{t}{1+2k\pi t}\right)=B\left(\sin\frac{1+2k\pi t}{t}\right)=B\left(\sin\frac{1}{t}\right)=X(t)$$

i $\frac{t}{1+2k\pi t}<t$ za $k=1,2,\dots$, to element $X\left(\frac{t}{1+2k\pi t}\right)$, odnosno element $X(t)$, pripada i prostoru $\mathcal{H}(X;t-0)$. Sa druge strane, kako $\mathcal{H}(X)$ sadrži kontinuum mnogo uzajamno ortogonalni slučajnih promenljivih $B(u)$, $-1\leq u\leq +1$, važi jednakost $\dim\mathcal{H}(X)=\aleph_1$. Primetimo i sledeće. Iz (3.4.4) sledi da je $\bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{H}(X;\varepsilon)=\mathcal{H}(X)$, odnosno da je ceo prostor $\mathcal{H}(X)$ "skoncentrisan" u nuli. Lako je, medjutim, konstruisati proces koji dobija inovacije tipa (3.4.3) na jednom prebrojivom skupu tačaka.

Neka je X proizvoljni slučajni proces koji zadovoljava uslov

$$(\mathrm{SN}) \qquad \mathcal{H}(X;t-0)=\mathcal{H}(X;t) \quad \text{za svako } t\in\mathbb{R}.$$

Postavlja se pitanje da li se ovakav proces može ispitivati metodama spektralne teorije linearnih operatora, odnosno metodama kojima smo u prethodnoj glavi ispitivali procese koji su zadovoljavali uslov (N). U spektralnoj teoriji jednu od osnovnih uloga ima postojanje razlaganja jedinice prostora $\mathcal{H}(X)$. Kako uslov (SN) implicira da familija E_X jeste razlaganje jedinice, to je odgovor na postavljeno pitanje očigledno pozitivan; tvrdjenje 3.5 ima za posledicu da je funkcija $F_z(t)$, definisana sa $F_z(t)=\|E_X(t)z\|^2$, $t\in\mathbb{R}$ (z je proizvoljni element iz $\mathcal{H}(X)$), neprekidna sa leva, odnosno da inducira meru na $\mathbb{R}$. Predmet našeg proučavanja u ovoj i sledećoj glavi biće slučajni procesi koji zadovoljavaju uslov (SN).

U čitavom daljem tekstu pod slučajnim procesom podrazumevaćemo slučajni proces koji zadovoljava uslov (SN) (čime se, dakle, ne isključuje mogućnost da on zadovoljava i uslov (N)). Sve definicije i rezultati prethodne glave, u kojima nije direktno korišćen uslov (N) ili separabilnost, važe i za slučajne procese koji zadovoljavaju samo uslov (SN).

Tvrdjenje 3.6. Neka su X i Y proizvoljni slučajni procesi. Sledeća dva tvrdjenja su ekvivalentna:

1° Proces Y je potpuno potčinjen procesu X.

2° Potprostor $\mathcal{H}(Y;t)$, za svako $t\in\mathbb{R}$, svodi razlaganje jedinice E_X procesa X.

Dokaz. (vidi i [13.a]) Pretpostavimo da je proces Y potpuno potčinjen procesu X; pokažimo da $\mathcal{H}(Y;t)$ svodi E_X za proizvoljno $t\in\mathbb{R}$. Zbog jednakosti $\mathcal{H}(X;s)=\mathcal{H}(Y;s)\oplus[\mathcal{H}(X;s)\ominus\mathcal{H}(Y;s)]$ koja važi za svako s, imamo:

$$E_X(s)\mathcal{H}(Y;t)=P_{\mathcal{H}(Y;s)}\mathcal{H}(Y;t)\subset\mathcal{H}(Y;\min\{s,t\}),$$

što znači da je potprostor $\mathcal{H}(Y;t)$ invarijantan u odnosu na E_X. Osim toga, ako $x\in\mathcal{H}(Y)\ominus\mathcal{H}(Y;t)$ i ako je s, $s>t$, proizvoljno, tada je $x=P_{\mathcal{H}(Y;s)}x+x_1$, pri čemu $x_1\in\mathcal{H}(Y)\ominus\mathcal{H}(Y;s)$; no, tada $x_1\in\mathcal{H}(X)\ominus\mathcal{H}(X;s)$, pa je

$$E_X(s)x=P_{\mathcal{H}(X;s)}\left[P_{\mathcal{H}(Y;s)}x+x_1\right]=P_{\mathcal{H}(Y;s)}x,$$

zato što je $\mathcal{H}(Y;s)\subset\mathcal{H}(X;s)$ i $P_{\mathcal{H}(X;s)}x_1=0$. Dakle, iz $x\in\mathcal{H}(Y)\ominus\mathcal{H}(Y;t)$ sledi da $E_X(s)x\in\mathcal{H}(Y)\ominus\mathcal{H}(Y;t)$ za svako s. Time smo pokazali da $\mathcal{H}(Y;t)$ svodi E_X za svako $t\in\mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da $\mathcal{H}(Y;t)$ svodi E_X za svako $t\in\mathbb{R}$; to znači da $E_X(s)\mathcal{H}(Y;t)\subset\mathcal{H}(Y;t)$ i $E_X(s)\left[\mathcal{H}(X)\ominus\mathcal{H}(Y;t)\right]\subset\mathcal{H}(X)\ominus\mathcal{H}(Y;t)$ za svako s. Kako je $E_X(t)\mathcal{H}(Y;t)\subset\mathcal{H}(X;t)$ i $E_X(t)\mathcal{H}(Y;t)=\mathcal{H}(Y;t)$, to je $\mathcal{H}(Y;t)\subset\mathcal{H}(X;t)$, $t\in\mathbb{R}$. Dalje, ako je $x\in\mathcal{H}(Y)\ominus\mathcal{H}(Y;t)$, tada je, zbog invarijantnosti prostora

$\mathcal{H}(X)\ominus\mathcal{H}(Y;t)$, $E_X(t)x=0$, odnosno $x\perp\mathcal{H}(X;t)$. Ovim je pokazano da je proces Y potpuno potčinjen procesu X.

<u>Posledica</u>. Neka je X proizvoljni slučajni proces i Y slučajni proces za koji je $\dim\mathcal{H}(Y)\leq\aleph_0$. Proces Y je potpuno potčinjen procesu X ako i samo ako postoje uzajamno ortogonalni slučajni procesi $Z_1,\dots,Z_M$ (M je prirodni broj ili $\aleph_0$), $Z_n(t)\in\mathcal{H}(X)$, $n=\overline{1,M}$, $t\in\mathbb{R}$, i familija funkcija $\{g(t,u), t\in\mathbb{R}, u\leq t\}$ iz $\mathcal{L}_2(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}=(F_1,\dots,F_M)$, $F_n(t)=\|Z_n(t)\|^2$, $t\in\mathbb{R}$, $n=\overline{1,M}$, tako da je

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{t}g_n(t,u)\,dZ_n(u),\quad t\in\mathbb{R},$$

kanonička reprezentacija procesa Y.

<u>III.5. Osobine prostora generisanog slučajnim procesom</u>

<u>Tvrdjenje 3.7</u>. Neka je X proizvoljni slučajni proces. Sledeća dva tvrdjenja su ekvivalentna:

1° Prostor $\mathcal{H}(X)$ je separabilan;

2° U $\mathcal{H}(X)$ postoji element maksimalnog spektralnog tipa i svaki element iz $\mathcal{H}(X)$ generiše spektralni tip čiji multiplicitet nije veći od $\aleph_0$.

<u>Dokaz</u>. (vidi i [16]) Neka je $\dim\mathcal{H}(X)=\aleph_0$. Tada u svakom razlaganju prostora $\mathcal{H}(X)$ na ortogonalnu sumu cikličkih potprostora ima najviše prebrojivo mnogo elemenata, pa dakle najviše prebrojivo mnogo njih sa istim spektralnim tipom i najviše prebrojivo mnogo njih sa uzajamno ortogonalnim spektralnim tipovima. Time je pokazano da važi 2°.

Pretpostavimo da važi 2°. Tada, prema teoremi 1.16, $\mathcal{H}(X)$ možemo na jedinstven način razložiti na ortogonalnu sumu potprostora sa nenultim uzajamno ortogonalnim homogenim spektralnim tipovima ρ_α, čiji multipliciteti m_α su medjusobno različiti. Uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova ima, prema teoremi 1.1, najviše prebrojivo mnogo; kako nejednakost $m_\alpha \leq \aleph_0$ važi za svako α, znači da se $\mathcal{H}(X)$ razlažu na ortogonalnu sumu najviše prebrojivo mnogo cikličkih potprostora, pa je $\dim \mathcal{H}(X) = \aleph_0$. QED

Tvrdjenje 3.8. Da bi u prostoru $\mathcal{H}(X)$ slučajnog procesa postojao element maksimalnog spektralnog tipa potrebno je i dovoljno da u skupu $\mathfrak{S}_X$ bude najviše prebrojivo mnogo uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova.

Dokaz. Pretpostavimo da je $z \in \mathcal{H}(X)$ element maksimalnog spektralnog tipa procesa X. Dakle, skup $\mathfrak{S}_X$ je ograničen, što, prema teoremi 1.1, znači da u njemu ima najviše prebrojivo mnogo uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova.

Pretpostavimo sada da u $\mathfrak{S}_X$ ima najviše prebrojivo mnogo uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova. Te spektralne tipove obeležimo sa $\rho_1, \rho_2, \ldots$; za svako $i = 1, 2, \ldots$ postoji $z_i \in \mathcal{H}(X)$ tako da je $\rho_i = \rho_{z_i}$. Potprostori $\mathcal{M}(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, su ciklički, uzajamno ortogonalni i imaju uzajamno ortogonalne spektralne tipove. Dakle, njihova ortogonalna suma $\sum_i \oplus \mathcal{M}(z_i)$ je ciklički potprostor sa generatornim elementom $z = \sum_i z_i$. Za svaki element $z' \in \mathcal{H}(X), z' \neq z$, je $\rho_{z'} < \rho_z$, čime je dokaz završen. QED

Proces koji ima element maksimalnog spektralnog tipa ne mora generisati separabilan prostor; za neseparabilnost prostora, u takvom slučaju, dovoljno je da bar jedan spektralni tip koji pripada tom procesu ima multiplicitet $\aleph_1$.

Tvrdjenje 3.9. Neka je X slučajni proces takav da u $\mathcal{H}(X)$ postoji element maksimalnog spektralnog tipa. Ako je $\operatorname{mult} \rho_{X(t)} \leq \aleph_0$ za svako $t \in \mathbb{R}$, tada je i $\operatorname{mult} \rho_x \leq \aleph_0$ za svako $x \in \mathcal{H}(X)$.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdjenje teoreme ne važi, tj. da u $\mathcal{H}(X)$ postoje elementi, različiti od nule, čiji spektralni tipovi imaju multiplicitete jednake $\aleph_1$. Kako je skup spektralnih tipova sa ovom osobinom ograničen (maksimalnim spektralnim tipom procesa X), to medju njima postoji najveći. Neka je, dakle, $x\in\mathcal{H}(X)$ element čiji spektralni tip ρ_x ima multiplicitet jednak $\aleph_1$ i za svaki drugi element $x'\in\mathcal{H}(X)$, za koji je $\operatorname{mult}\rho_{x'}=\aleph_1$ važi nejednakost $\rho_{x'}<\rho_x$. Ne može za svako $t\in\mathbb{R}$ biti $\rho_x\perp\rho_{X(t)}$. Naime, ako bi bilo $\rho_x\perp\rho_{X(t)}$ za svako $t\in\mathbb{R}$, značilo bi da je $x\perp X(t)$ za svako $t\in\mathbb{R}$, odnosno $x\perp\mathcal{H}(X)$, što je nemoguće. Dakle, postoje vrednosti parametra t takve da ne važi relacija $\rho_{X(t)}\perp\rho_x$. Ali, ni za jedno $t\in\mathbb{R}$ ne može biti $\rho_{X(t)}<\rho_x$, jer bi iz toga sledilo da je $\operatorname{mult}\rho_{X(t)}=\aleph_1$, a to je suprotno pretpostavci. Prema tome, postoje vrednosti t takve da je $\inf\{\rho_{X(t)},\rho_x\}\neq 0$, ali nije $\rho_{X(t)}<\rho_x$. Takvih vrednosti mora biti kontinuum mnogo (jer bi, u protivnom, postojao bar jedan ciklički potprostor, spektralnog tipa ρ_x, koji je ortogonalan na $\mathcal{H}(X)$, što je nemoguće); obeležimo ih sa $X(t_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$. Dakle, za svako $\lambda\in\Lambda$ je: $\rho_{X(t_\lambda)}=\rho_{x_\lambda}+\rho_\lambda$, gde je $\rho_{x_\lambda}<\rho_x$ i $\rho_\lambda\perp\rho_x$, $\rho_\lambda\neq 0$. Proučimo medjusobni odnos spektralnih tipova ρ_λ, $\lambda\in\Lambda$. Ako bi u skupu $\{\rho_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ bilo kontinuum mnogo ortogonalnih spektralnih tipova, to bi značilo da u $\mathcal{H}(X)$ ne postoji element maksimalnog spektralnog tipa, a to je suprotno pretpostavci teoreme. Dakle, u skupu $\{\rho_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ ima najviše prebrojivo mnogo ortogonalnih spektralnih tipova, što znači da multiplicitet bar jednog od njih mora biti $\aleph_1$; obeležimo taj spektralni tip sa ρ_{λ_0}. Kako je za svako ρ_{x_λ} zadovoljena jednakost $\operatorname{mult}\rho_{x_\lambda}=\aleph_1$ (jer je $\rho_{x_\lambda}<\rho_x$ i $\operatorname{mult}\rho_x=\aleph_1$), znači da za svako $\lambda\in\Lambda$ važi $\mathrm{mult}(\rho_{x_\lambda}+\rho_{\lambda_0})=\aleph_1$, pa i $\mathrm{mult}(\rho_{x_{\lambda_0}}+\rho_{\lambda_0})=\aleph_1$. Dakle, za element $X(t_{\lambda_0})$ zadovoljena je jednakost $\mathrm{mult}\,\rho_{X(t_{\lambda_0})}=$ $=\aleph_1$, što je suprotno pretpostavci teoreme. Prema tome, zaista je $\mathrm{mult}\,\rho_x\leq\aleph_0$ za svako $x\in\mathcal{H}(X)$. QED

Tvrdjenje 3.10. Neka je X proizvoljni slučajni proces i ρ proizvoljni spektralni tip ovog procesa takav da je

$$\mathrm{mult}\,\rho=\aleph_1. \tag{3.5.1}$$

Postoji t sa osobinom da jednakost

$$\dim\big(\mathcal{H}(X;t+h)\ominus\mathcal{H}(X;t)\big)=\aleph_1 \tag{3.5.2}$$

važi za svako $h>0$.

Dokaz. Iz (3.5.1) sledi da je $\dim\mathcal{H}(X)=\aleph_1$. Pretpostavimo da tvrdjenje teoreme ne važi, tj. da za svako $t\in\mathbb{R}$ postoji $h>0$ tako da je

$$\dim\big(\mathcal{H}(X;t+h)\ominus\mathcal{H}(X;t)\big)=\aleph_0. \tag{3.5.3}$$

Neka je t_0 proizvoljna vrednost parametra t. Posmatrajmo skup svih onih vrednosti $h>0$ za koje je $\dim\big(\mathcal{H}(X;t_0+h)\ominus\mathcal{H}(X;t_0)\big)=\aleph_0$ i neka je h_0 supremum skupa svih tih vrednosti. Ako bi bilo $h_0<\infty$, to bi značilo da $t_1=t_0+h_0$ ima osobinu da je za svako $h>0$ zadovoljena jednakost $\dim\big(\mathcal{H}(X;t_1+h)\ominus\mathcal{H}(X;t_1)\big)=\aleph_1$, što je suprotno pretpostavci da za svako t postoji $h>0$ tako da važi (3.5.3). Dakle: $h_0=\infty$. Ovo znači da je $\dim\big(\mathcal{H}(X)\ominus\mathcal{H}(X;t)\big)=$ $=\aleph_0$ za svako $t\in\mathbb{R}$, odnosno da je prostor $\mathcal{H}(X)$ separabilan, a to je nemoguće. QED

Poznato je ([3]) da, ako je X neprekidan proces, ne mora biti zadovoljena jednakost $\mathcal{H}(X;t+0)=\mathcal{H}(X;t)$; može čak biti $\dim\big(\mathcal{H}(X;t_0+0)\ominus\mathcal{H}(X;t_0)\big)=\aleph_0$, a da i u tački $t=t_0$ proces X bude neprekidan. Sledećim primerom pokazaćemo da sličnu osobinu imaju procesi koji zadovoljavaju uslov (SN).

Primer 3.2. Neka je u $\mathbb{R}$ relacija $\sim$ definisana na sledeći način: $t_1 \sim t_2$ ako i samo ako je $|t_1 - t_2|$ racionalan broj. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Količnik-skup $\mathbb{R}/\sim$ ima kontinuum mnogo elemenata; svaka klasa ekvivalencije, tj. element iz $\mathbb{R}/\sim$, prebrojiva je i svuda gusta u $\mathbb{R}$. Neka su X_λ, $\lambda \in \Lambda$ ($\operatorname{card}\Lambda = \aleph_1$) neprekidni, uzajamno ortogonalni slučajni procesi. Svakom procesu X_λ korespondirajmo klasu ekvivalencije $R_\lambda \in \mathbb{R}/\sim$; skup $\{X_\lambda(t), t \in R_\lambda\}$ svuda je gust u $\mathcal{H}(X_\lambda)$ (zato što je proces X_λ neprekidan, a skup R_λ svuda gust u $\mathbb{R}$). Proces X definišimo jednakošću

$$X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \leq 0, \\ tX_\lambda(t) & , \ t > 0 \ \text{ i } t \in R_\lambda . \end{cases}$$

Ovako definisan slučajni proces neprekidan je za $t=0$ sa desna, ali je $\dim \mathcal{H}(X; +0) = \aleph_1$. U svim ostalim tačkama ne postoje ni leve ni desne granične vrednosti procesa. Medjutim, jednakost

(3.5.4) $$\mathcal{H}(X; t-0) = \mathcal{H}(X; t)$$

važi za svako t, zato što su procesi X_λ, $\lambda \in \Lambda$, neprekidni.

Primer 3.3. Neka je $\mathcal{B}$ proces belog šuma, a proces X definisan sa

$$X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \leq 1, \\ t\mathcal{B}(\sin \frac{1}{t-1}) & , \ t > 1 ; \end{cases}$$

ovaj proces nema desnu graničnu vrednost u tački $t=1$, a za vrednosti $t>1$ nema ni leve ni desne granične vrednosti. Medjutim, važi jednakost $\dim \mathcal{H}(X; 1+0) = \aleph_1$. Isto tako, jednakost (3.5.4) zadovoljena je za svako $t \in \mathbb{R}$.

III.3. Slučajni proces sa prostim spektrom

Kažemo da slučajni proces X ima <u>prost spektar</u> ako je multiplicitet svakog njegovog spektralnog tipa jednak jedinici. Supremum skupa $\mathfrak{S}_X$ spektralnih tipova koji pripadaju procesu X nazivamo njegovim spektralnim tipom.

<u>Lema 3.1.</u> Ako slučajni proces X ima prost spektar i granična vrednost $X(t-0)$ postoji za svako $t\in\mathbb{R}$, tada je on ciklički.

<u>Dokaz.</u> Iz toga što granična vrednost $X(t-0)$ postoji za svako $t\in\mathbb{R}$ sledi, prema teoremi 3.3, da je $\dim\mathcal{H}(X)=\aleph_0$. Ovo, prema teoremi 1.8, znači da u $\mathcal{H}(X)$ postoji element maksimalnog spektralnog tipa, odnosno da je slučajni proces X ciklički. QED

Ako je X proizvoljni slučajni proces i $z\in\mathcal{H}(X)$ proizvoljni element, tada je slučajni proces Z, definisan sa

$$Z(t)=E_X(t)z\,,\quad t\in\mathbb{R},$$

ciklički i funkcija $F_z(t)=\|E_X(t)z\|^2,\ t\in\mathbb{R}$, generiše njegov maksimalni spektralni tip. Sledećim primerom pokazaćemo da postoje procesi sa prostim spektrom koji nisu ciklički.

<u>Primer 3.4.</u> Neka je na $\mathbb{R}$ definisana relacija $\sim$ iz primera 3.2. Klase $\mathbb{R}_\lambda,\ \lambda\in\Lambda$, su medjusobno disjunktne pa, prema aksiomi izbora, postoji skup $\mathcal{R}$ koji sa svakom od klasa $\mathbb{R}_\lambda$ ima jedan i samo jedan zajednički element; taj element klase $\mathbb{R}_\lambda$, koji pripada skupu $\mathcal{R}$, obeležimo sa t_λ. Neka je $(t_{\lambda n})_n$ niz elemenata klase $\mathbb{R}_\lambda$ koji opadajući konvergira ka t_λ (ovakav niz može, za svako λ, biti izabran na primer tako da mu opšti član bude $t_{\lambda n}=t_\lambda+2^{-n}$). Neka je $\{x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ skup iste kardinalnosti kao $\mathbb{R}/\sim$, čiji elementi su uzajamno ortogonal-

no slučajne promenljive. Slučajni proces X definišimo na sledeći način. Za svako $\lambda\in\Lambda$ neka je

$$X(t_{\lambda n})=(t_{\lambda n}-t_\lambda)x_\lambda,\quad n=1,2,\dots;$$

ako $t\in\mathbb{R}$ i $t\notin\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{t_{\lambda n}\}$, neka je $X(t)=0$. Za ovako definisan proces ne postoji ni leva ni desna granična vrednost ni za jedno $t\in\mathbb{R}$. Medjutim, lako je videti da je zadovoljen uslov (JN). U $\mathcal{H}(X)$ postoji kontinuum mnogo uzajamno ortogonalnih slučajnih promenljivih x_λ, $\lambda\in\Lambda$, i one generišu spektralne tipove ϱ_λ, $\lambda\in\Lambda$, koji su uzajamno ortogonalni. Multiplicitet spektralnog tipa ϱ_λ, za svako $\lambda\in\Lambda$, jednak je jedinici. Dakle, proces X ima prost spektar.

III.7. Primeri slučajnih procesa sa neseparabilnim prostorom

Postavljaju se sledeća pitanja: prvo, postoji li slučajni proces X takav da u $\mathcal{H}(X)$ postoji element x maksimalnog spektralnog tipa ϱ_x za koji je mult$\varrho_x=\aleph_1$?; drugo, postoji li slučajni proces čiji maksimalni spektralni tip je II reda i multiplicitet mu je jednak $\aleph_1$? (Maksimalnim spektralnim tipom proizvoljnog procesa X nazivamo supremum skupa $\mathfrak{S}_X$ spektralnih tipova koji pripadaju tom procesu.) Odgovore na ova pitanja daju sledeći primeri.

Primer 3.5. Neka su $Z_\lambda=\{Z_\lambda(t),t\in\mathbb{R}\}$, $\lambda\in\Lambda$ (card$\Lambda=\aleph_1$) neprekidni, uzajamno ortogonalni ciklički slučajni procesi sa istim spektralnim tipom ϱ. Poznato je ([3]) da, za svako $\lambda\in\Lambda$, postoji prebrojiv skup $t_1, t_2,\dots$ vrednosti parametra t, takav da je skup konačnih linearnih kombinacija elemenata $Z_\lambda(t_1)$, $Z_\lambda(t_2)$, ... svuda gust u $\mathcal{H}(Z_\lambda)$: $\mathcal{H}(Z_\lambda)=\overline{\mathcal{L}}\{Z_\lambda(t_i),\ i=1,2,\dots\}$.

Dakle ta jednakost važi za svaki prebrojiv svuda gust u $\mathbb{R}$ skup vrednosti parametra t.

Neka je q fiksiran iracionalan broj i A skup brojeva oblika $m+nq$, gde su m i n proizvoljni celi brojevi: $A=\{m+nq; m, n$ - celi brojevi$\}$. Na skupu $\mathbb{R}$ definišimo relaciju $*$ na sledeći način: $t_1 * t_2$ ako i samo ako $t_1-t_2\in A$. Pokazuje se ([8]) da je $*$ relacija ekvivalencije na $\mathbb{R}$, da količnik-skup $\mathbb{R}/*$ ima kontinuum mnogo elemenata, tj. klasa ekvivalencije R_λ i da je svaka klasa ekvivalencije prebrojiva i svuda gusta u $\mathbb{R}$.

Označimo sa φ obostrano jednoznačnu korespondenciju između skupa Λ i količnik-skupa $\mathbb{R}/*$: $\varphi(\lambda)=R_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$. Lineal nad skupom $\{Z_\lambda(t_i), t_i\in R_\lambda\}$ svuda je gust u $\mathcal{H}(Z_\lambda)$. Slučajni proces X definišimo jednakošću

$$X(t)=Z_\lambda(t), \quad t\in R_\lambda, \quad \lambda\in\Lambda .$$

Jasno je da je proces X dobro definisan, zato što su klase R_λ disjunktne i $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda=\mathbb{R}$. Lako je pokazati da važi jednakost

$$\mathcal{H}(X;t)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus\,\mathcal{H}(Z_\lambda;t), \tag{3.7.1}$$

(u kojoj je znak sumiranja samo formalan zato što je $\operatorname{card}\Lambda=\aleph_1$). Iz (3.7.1) i neprekidnosti procesa Z_λ, $\lambda\in\Lambda$, sledi da proces X zadovoljava uslov (SN). Jasno je da je ρ maksimalni spektralni tip procesa X i da je $\operatorname{mult}\rho=\aleph_1$.

Primer 3.5.[2] Neka su $Z_\lambda=\{Z_\lambda(t), t\in\mathbb{R}\}$, $\lambda\in\Lambda$ ($\operatorname{card}\Lambda=\aleph_1$) uzajamno ortogonalni slučajni procesi sa prostim spektrom i istim spektralnim tipom ρ; pretpostavimo da proces Z_λ, za svako $\lambda\in\Lambda$, zadovoljava uslov (SN). Proces Z_λ, za svako $\lambda\in\Lambda$, može se predstaviti kao ortogonalna suma kontinuum mnogo uzajamno ortogonalnih cikličkih procesa $Z_{\lambda\mu}$, $\mu\in M$, sa uzajamno ortogonalnim spektralnim tipovima; pretpostavimo, jednostavnosti radi, da su svi slučajni procesi $Z_{\lambda\mu}$, $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \mathcal{M}$, neprekidni.

Neka je $\{\mathcal{F}_\nu, \nu \in \mathcal{N}\}$ jedna particija skupa $\mathbb{R}$ na kontinuum mnogo podskupova koji su medjusobno disjunktni, svaki od njih ima kontinuum mnogo elemenata i svuda je gust u $\mathbb{R}$. Označimo sa ψ obostrano jednoznačnu korespondenciju izmedju skupa Λ i familije $\{\mathcal{F}_\nu, \nu \in \mathcal{N}\}$: $\psi(\lambda) = \mathcal{F}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Pretpostavimo da je, za svako $\lambda \in \Lambda$, lineal nad skupom $\{Z_\lambda(t), t \in \mathcal{F}_\lambda\}$ svuda gust u $\mathcal{H}(Z_\lambda)$ [3]. Kako su skupovi $\mathcal{F}_\lambda$ uzajamno disjunktni, sledeća definicija procesa X je korektna:

$$X(t) = Z_\lambda(t), \ t \in \mathcal{F}_\lambda, \ \lambda \in \Lambda .$$

Iz neprekidnosti procesa Z_λ, $\lambda \in \Lambda$, sledi da proces X zadovoljava uslov (SN). Maksimalni spektralni tip procesa X je $\mathbb{R}$ i mult $\mathbb{R} = \aleph_1$.

Slučajni procesi, koje smo u ovim primerima konstruisala, imaju homogene maksimalne spektralne tipove. Medjutim, lako je videti kako ti primeri mogu da budu modificirani, pa da to ne bude slučaj.

III.8. Razlaganje slučajnog procesa koji zadovoljava uslov (SN)

Teorema 3.11. Neka je X proizvoljni slučajni proces. Postoji razlaganje tog procesa na ortogonalnu sumu slučajnih procesa sa homogenim maksimalnim spektralnim tipovima, pri čemu su ti spektralni tipovi uzajamno ortogonalni i imaju medjusobno različite multiplicitete. Ovakvo razlaganje je jedinstveno.

Dokaz. Prostor $\mathcal{H}(X)$ se, prema teoremi 1.16, razlaže na ortogonalnu sumu potprostora $\mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, čiji maksimalni spektralni tipovi R_λ su uzajamno ortogonalni, homogeni i imaju medjusobno različite multiplicitete m_λ. Ovakvo razlaganje prostora $\mathcal{H}(X)$ je, prema navedenoj teoremi, jedinstveno. Projekcija X_λ procesa X na $\mathcal{H}_\lambda$ jednoznačno je odredjena za svako $\lambda \in \Lambda$; X_λ je proces sa homogenim maksimalnim spektralnim tipom R_λ multipliciteta m_λ. Proces X se, za svako $t \in \mathbb{R}$, predstavlja kao ortogonalna suma procesa X_λ, $\lambda \in \Lambda$. Jedinstvenost razlaganja procesa X sledi iz jedinstvenosti razlaganja samog prostora $\mathcal{H}(X)$. QED

Kako su svi multipliciteti m_λ medjusobno različiti, to znači da najviše jedan od njih može biti jednak $\aleph_1$ i najviše jedan može biti jednak $\aleph_0$; ovo, medjutim, implicira da, u prethodnoj teoremi, slagajućih procesa X_λ ima najviše prebrojivo mnogo. Prethodna teorema ima za posledice i sledeća tvrdjenja.

Posledica 1. Ako proces X ima maksimalni spektralni tip II reda, onda bar jedan od procesa X_λ, $\lambda \in \Lambda$, ima maksimalni spektralni tip II reda. Važi i obrnuto.

Posledica 2. Ako proces X ima element maksimalnog spektralnog tipa i $\dim \mathcal{H}(X) = \aleph_1$, tada postoji $x \in \mathcal{H}(X)$ tako da je mult $\rho_x = \aleph_1$.

Posledica 3. Da bi, za proizvoljni proces X bila zadovoljena jednakost $\dim \mathcal{H}(X) = \aleph_1$, potrebno je i dovoljno da bude zadovoljen bar jedan od sledeća dva uslova:

1° Maksimalni spektralni tip procesa X je II reda;

2° Postoji $x \in \mathcal{H}(X)$ tako da je mult $\rho_x = \aleph_1$.

Teorema 3.11 rešava problem unitarne ekvivalencije proizvoljnih slučajnih procesa. Neka su, naime, R_λ, $\lambda\in\Lambda$, spektralni tipovi o kojima se govori u toj teoremi i m_λ, $\lambda\in\Lambda$, njihovi multiplicateti. <u>Spektralnim tipom</u> slučajnog procesa X nazivamo skup spektralnih tipova R_λ, $\lambda\in\Lambda$, zajedno sa njihovim multiplicitetima m_λ, $\lambda\in\Lambda$; spektralni tip procesa X obeležavamo sa $\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda R_\lambda$.

Neposrednu posledicu teoreme 3.11 i teoreme 2.1 predstavlja sledeća

<u>Teorema 3.12.</u> Dva slučajna procesa unitarno su ekvivalentna ako i samo ako imaju isti spektralni tip.

Sledećom teoremom se pokazuje da je proizvoljni slučajni proces moguće razložiti na ortogonalnu sumu dva slučajna procesa, od kojih jedan generiše separabilan, a drugi neseparabilan prostor. Pre nego što tu teoremu formulišemo, uvedimo sledeću konvenciju: smatraćemo da element $x\in\mathcal{H}(X)$, identički jednak nuli, generiše spektralni tip (identički jednak nuli) proizvoljnog multipliciteta.

<u>Teorema 3.13.</u> Proizvoljni slučajni proces X može se razložiti na ortogonalnu sumu

(3.8.1) $$X(t)=X_{\sigma}(t)+X_{\mu}(t),\quad t\in\mathbb{R},$$

pri čemu procesi X_σ i X_μ zadovoljavaju sledeće uslove 1°, 2° i 3° :

1° a) Maksimalni spektralni tip procesa X_σ je I reda;

b) Za svaki spektralni tip ρ koji pripada procesu X_σ važi nejednakost $\operatorname{mult}\rho\leqslant\aleph_0$.

2° Zadovoljen je bar jedan od sledeća dva uslova:

a) Maksimalni spektralni tip procesa X_μ je II reda i ostalom i $z \in \mathcal{H}(X_u)$, ako je mult $\rho_z \le \aleph_0$, tada postoji kontinuum mnogo elemenata $z_\lambda \in \mathcal{H}(X_u)$, $\lambda \in \Lambda$, takvih da je $\rho_{z_\lambda} \perp \rho_{z_\nu}$ ($\lambda \ne \nu$) i $\rho_{z_\lambda} \perp \rho_z$ za sve $\lambda, \nu \in \Lambda$;

b) Za svaki spektralni tip σ, koji pripada procesu X_u, zadovoljena je jednakost mult $\sigma = \aleph_1$.

3° Za proizvoljne spektralne tipove ρ i σ koji pripadaju, redom, procesima X_σ i X_u, važi: $\rho \perp \sigma$ i mult $\rho \ne$ mult σ.

Opisano razlaganje procesa X jednoznačno je.

Dokaz. Teoremom 3.11 pokazano je da se proces X može, na jedinstven način, razložiti na ortogonalnu sumu procesa X_λ sa homogenim maksimalnim spektralnim tipovima R_λ, pri čemu su ti spektralni tipovi uzajamno ortogonalni i imaju različite multiplicitete m_λ. Označimo sa $\mathcal{H}_\sigma$ ortogonalnu sumu onih potprostora $\mathcal{H}_\lambda$ čiji maksimalni spektralni tipovi su I reda i za koje je $m_\lambda \le \aleph_0$; neka je $\mathcal{H}_u = \mathcal{H}(X) \ominus \mathcal{H}_\sigma$. Jednakost

(3.8.2) $$X(t) = P_{\mathcal{H}_\sigma} X(t) + P_{\mathcal{H}_u} X(t)$$

važi za svako $t \in \mathbb{R}$. Uvedimo oznake: $X_\sigma(t) = P_{\mathcal{H}_\sigma} X(t)$; $X_u(t) = P_{\mathcal{H}_u} X(t)$, $t \in \mathbb{R}$; kako je $\mathcal{H}_\sigma \perp \mathcal{H}_u$, to je suma na desnoj strani jednakosti (3.8.2) ortogonalna. Iz definicije procesa X_σ sledi da je $\mathcal{H}_\sigma = \overline{\mathcal{L}}\{P_{\mathcal{H}_\sigma} X(t), t \in \mathbb{R}\}$; ovo znači da je maksimalni spektralni tip procesa X_σ I reda i da multiplicitet makog spektralnog tipa koji mu pripada nije veći od $\aleph_0$. Dakle, proces X_σ zadovoljava uslove 1°a) i 1°b). Ako je maksimalni spektralni tip procesa X II reda, tada će, zbog 1°a), i maksimalni spektralni tip procesa X_u biti II reda i biće zadovoljen uslov 2°a). Ako je maksimalni spektralni tip procesa X I reda i $\dim \mathcal{H}(X) = \aleph_1$, tada će i maksimalni spektralni tip procesa X_u biti I reda, ali će biti homogen i multiplisistem će mu biti $\aleph_1$; u tom slučaju, dakle, proces X_u će zadovoljavati uslov 2°b). Iz opisane konstrukcije i teoreme 3.11 sledi da je zadovoljen uslov 3°. Istom teoremom obezbedjena je i jednoznačnost razlaganja (3.8.1). QED

Kao posledica ove teoreme dobija se teorema 3.7:

<u>Posledica 1.</u> Proces X generiše separabilan prostor ako i samo ako je $X_u(t)=0$ za svako $t\in\mathbb{R}$.

<u>Posledica 2.</u> Neka proces X ima osobinu: za svako m (koje je prirodni broj, $\aleph_0$ ili $\aleph_1$), ako postoji $z\in\mathcal{H}(X)$ tako da je $\operatorname{mult}\rho_z=m$, tada postoji kontinuum mnogo elemenata $z_\lambda\in\mathcal{H}(X)$ koji imaju osobine $\rho_{z_\lambda}\perp\rho_z$, $\rho_{z_\lambda}\perp\rho_{z_\nu}$ $(\lambda\neq\nu)$, $\operatorname{mult}\rho_{z_\lambda}=m$. Tada je $X_o(t)=0$ za svako $t\in\mathbb{R}$.

---

1) Pokažimo da, za proizvoljno $t=t^{(0)}$, postoji leva okolina od $t^{(0)}$ koja sadrži samo konačno mnogo vrednosti t sa osobinom 2°. Pretpostavimo, naime, da to nije tačno, odnosno da postoji $t=t^{(0)}$ tako da se u svakoj levoj okolini od $t^{(0)}$ nalazi beskonačno vrednosti t sa osobinom 2°; označimo te vrednosti sa $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots$. Vrednost $t^{(0)}$ je tačka nagomilavanja skupa $\{t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots\}$. Sa druge strane, za svako $C>0$ postoji niz $(t_n)_n$ koji rastući konvergira ka $t^{(0)}$ i takav je da n jednakost $\|X(t_n)\|>C$ važi za svako $n=1,2,\ldots$. Odatle sledi da je

$$\|X(t_n)-X(t^{(0)})\|\geq\big|\|X(t_n)\|-\|X(t^{(0)})\|\big|>|C-\|X(t^{(0)})\||,$$

što znači da norma $\|X(t_n)-X(t^{(0)})\|$ može biti učinjena proizvoljno velikom, uniformno za svako $n=1,2,\ldots$, što je suprotno pretpostavci da je proces X neprekidan sa leva za svako $t\in\mathbb{R}$. Time je tvrdjenje dokazano. Posledica ovog tvrdjenja je da na $\mathbb{R}$ ima najviše prebrojivo mnogo t-ova sa osobinom 2°.

2) Za primer koji sledi neophodno je pokazati da je realnu pravu (ili jedan njen konačni ili beskonačni deo) moguće razložiti na kontinuum mnogo disjunktnih podskupova, od kojih svaki sadrži kontinuum mnogo tačaka i svuda je gust u delu prave koji razlažemo. Izložićemo jedan od načina da se to uradi;

opštost tog postupka razlaganja neće se smanjiti time što ćemo ga izložiti za interval $(0,1)$, a ne za čitavu realnu pravu.

Svaki broj a iz intervala $(0,1)$ predstavlja se u obliku

(i) $$a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{3k-2} a_{3k-1} a_{3k} \ldots,$$

gde je a_i $(i=1,2,\ldots)$ ma koja od cifara $0,1,\ldots,9$ (nećemo uzeti u obzir one decimalne razvoje kod kojih se, počev od nekog mesta, pojavljuju samo devetke). Svakom broju a korespondiraju tri niza brojeva, $a'=a'(a)$, $a''=a''(a)$ i $a'''=a'''(a)$, definisana na sledeći način:

(ii) $$\begin{cases} a' = (a_1, a_4, a_7, \ldots, a_{3k-2}, \ldots), \\ a'' = (a_2, a_5, a_8, \ldots, a_{3k-1}, \ldots), \\ a''' = (a_3, a_6, a_9, \ldots, a_{3k}, \ldots). \end{cases}$$

Skup K definišimo jednakošću:

$K = \{a \mid a'(a)$ ima konačno mnogo članova različitih od nule$\}$.

Dakle, u skupu K se nalaze svi oni brojevi a za koje se u nizu $a'(a)$, počev od nekog člana na dalje, nalaze samo nule. Neka je $n=n(a)$ najmanji broj takav da niz $a'(a)$, počev od n-tog člana, sadrži samo nule; dakle, funkcija n preslikava skup K na skup $\{0,1,2,\ldots\}$. Preslikavanje $\tilde{a}=\tilde{a}(a)$ definišimo ovako: za svako a oblika (i) neka je $\tilde{a}(a)$ podniz niza $a'''(a)$ koji počinje od n-tog člana, pri čemu je $n=n(a)$.

Za proizvoljan beskonačan niz $a^0=(a_1^0, a_2^0, a_3^0, \ldots)$ (čiji članovi su cifre $0,1,\ldots,9$) definišimo skup $\mathcal{F}_{a^0}$ jednakošću

$$\mathcal{F}_{a^0} = \{a \mid \tilde{a}(a) = a^0\}.$$

Dakle, skupu $\mathcal{F}_{a^0}$ pripada svaki broj a oblika (i), za koji niz a^0 predstavlja podniz niza $a'''(a)$ i taj podniz se u nizu $a'''(a)$ nalazi počev od nekog proizvoljnog indeksa n, pri čemu su, istovremeno, u nizu $a'(a)$ svi članovi počev od n-tog jednaki nuli; preostali decimali broja a mogu biti ma kakvi, a odgovaraju, osim na nekom početnom delu decimalnog razvoja broja a, skupu svih mogućih nizova a''. Skup $\mathcal{F}_{a^0}$ ima, dakle, kontinuum mnogo članova.

Kako nizova a^0, čiji članovi su cifre $0,1,\ldots,9$, ima kontinuum mnogo ([20]), a svakom takvom nizu odgovara tačno jedan skup $\mathcal{F}_{a^0}$, sledi da i skupova $\mathcal{F}_{a^0}$ ima kontinuum mnogo.

Skup $\mathcal{F}_{a^0}$ je, za proizvoljno a^0, svuda gust u $(0,1)$. Zaista, ako je $\hat{a}$ proizvoljan broj iz $(0,1)$, tada se on može proizvoljno dobro aproksimirati onim elementom $a \in \mathcal{F}_{a^0}$ koji ima proizvoljno, ali konačno mnogo, prvih decimala istih kao broj a, a posle toga nalazimo one decimale koje odredjuju pripadnost broja a skupu $\mathcal{F}_{a^0}$.

Dokažimo još da su skupovi $\mathcal{F}_{a^0}$ i $\mathcal{F}_{a^1}$ disjunktni ako je $a^0 \neq a^1$. Pretpostavimo da nije tako, tj. da postoji broj a takav da $a \in \mathcal{F}_{a^0}$ i $a \in \mathcal{F}_{a^1}$. To znači da nizovi a^0 i a^1 predstavljaju podnizove istog niza $a''(a)$. Kako je za broj a niz $a'(a)$ jednoznačno odredjen, to je jednoznačno odredjen i broj $n(a)$, odnosno indeks onog člana niza $a'''(a)$ od kog mora počoti podniz a^0, odnosno podniz a^1; dakle, od jednog istog indeksa niza $a'''(a)$ moraju početi dva različita podniza a^0 i a^1, što je nemoguće.

3

Za primer koji konstruišemo treba da pokažemo da je, za svako a^0, skup $\mathcal{F}_{a^0}$ moguće razložiti na kontinuum mnogo disjunktnih podskupova $\mathcal{F}_{a^0\mu}$, $\mu \in \mathcal{M}$, takvih da svaki od njih ima bar $\aleph_0$ elemenata i svaki (osim najviše jednog) je svuda gust u intervalu $(0,1)$ (tj. u skupu $\mathbb{R}$). Neka je μ proizvoljni beskonačni niz čiji prvi član je nula, a ostali članovi pripadaju skupu $\{1,2,\dots,9\}$. Neka je, pored toga, $\overline{a}_i(a)$ podniz niza $a''(a)$ koji počinje od i-tog člana, pri čemu je i ma koji prirodni broj. Podskup $\mathcal{F}_{a^0\mu}$ skupa $\mathcal{F}_{a^0}$ definišimo na sledeći način:

$$\mathcal{F}_{a^0\mu} = \{a \mid \overline{a}(a) = a^0, \ \overline{a}_i(a) = \mu \text{ za neki prirodni broj } i\}.$$

Skupu $\mathcal{F}_{a^0\mu}$ pripadaju oni brojevi oblika (i) za koje nizovi (ii) imaju unapred odredjene beskonačne podnizove koji mogu počinjati od ma kog člana (pri čemu taj član mora imati isti indeks za prvi i treći od nizova (ii), a podniz drugog niza obavezno počinje nulom i nema drugih nula osim početne). Dakle, skup $\mathcal{F}_{a^0\mu}$ ima prebrojivo mnogo članova ([20]).

Kako nizova μ, čiji članovi su brojevi $1,2,\dots,9$, ima kontinuum mnogo, a svakom takvom nizu odgovara jedan skup $\mathcal{F}_{a^0\mu}$, znači da i skupova $\mathcal{F}_{a^0\mu}$ (za fiksirano a^0) ima kontinuum mnogo.

Da je skup $\mathcal{F}_{a^0\mu}$ svuda gust u $(0,1)$ pokazuje se isto kao što smo to pokazali za sâm skup $\mathcal{F}_{a^0}$.

Disjunktnost skupova $\mathcal{F}_{a^0\mu}$ i $\mathcal{F}_{a^0\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ obezbedjena je time što svaki niz μ, odnosno ν, mora počinjati nulom i ne sme sadržati drugih nula osim te.

3) Pokažimo da (za ma koje fiksirano λ) postoji proces Z_λ takav da je lineal nad skupom $\{Z_\lambda(t), t\in\mathcal{F}_\lambda\}$ svuda gust u $\mathcal{H}(Z_\lambda)$. Neka je $Z_{\lambda\mu}$, $\mu\in\mathcal{M}$ ($\operatorname{card}\mathcal{M}=\aleph_1$) familija uzajamno ortogonalnih neprekidnih procesa koji su ciklički i imaju uzajamno ortogonalne spektralne tipove (možemo smatrati da sve osnake imaju značenje iz prethodne fusnote); poznato je da je lineal nad skupom $\{Z_{\lambda\mu}(t), t\in\mathcal{F}_{\lambda\mu}\}$, gde je $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$ ma kakav prebrojiv svuda gust (u $\mathbb{R}$) skup, svuda gust u $\mathcal{H}(Z_{\lambda\mu})$. Proces Z_λ definišimo u tačkama iz $\mathcal{F}_\lambda$ jednakošću

$$Z_\lambda(t) = Z_{\lambda\mu}(t), \quad t\in\mathcal{F}_{\lambda\mu};$$

za svako t, takvo da $t\notin\mathcal{F}_\lambda$, neka je proces Z_λ definisan kao proizvoljna linearna kombinacija vrednosti tog procesa u prethodnim tačkama. Kako je $\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}}\mathcal{F}_{\lambda\mu}\subset\mathcal{F}_\lambda$, iz definicije procesa Z_λ sledi da je lineal nad skupom $\{Z_{\lambda\mu}(t), \mu\in\mathcal{M}, t\in\mathcal{F}_{\lambda\mu}\}$, odnosno nad skupom $\{Z_\lambda(t), t\in\mathcal{F}_\lambda\}$, svuda gust u $\mathcal{H}(Z_\lambda)$.

Glava IV

REPREZENTACIJA SLUČAJNIH PROCESA KOJI ZADOVOLJAVAJU USLOV (SN)

IV.1. Uvod

Neka je X proizvoljni slučajni proces (koji zadovoljava uslov (SN)). Ako je $\dim \mathcal{H}(X)=\aleph_0$, tada se teorema 3.11 svodi na teoremu 2.2, u smislu da tada teorema 3.11 daje mogućnost dobijanja Hida-Kramerove dekompozicije procesa sa separabilnim prostorom. Medjutim, analogon Hida-Kramerove dekompozicije može se , formalno, dobiti i kada je $\dim \mathcal{H}(X)=\aleph_1$; ponavljanjem postupka koji je opisan u I.5, pokazuje se da se, u tom slučaju, prostor $\mathcal{H}(X)$ može razložiti na ortogonalnu sumu (u opštem slučaju) kontinuum mnogo potprostora $\mathcal{M}_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, sa prostim spektrom (u odnosu na E_X), čiji spektralni tipovi R_λ, $\lambda\in\Lambda$, čine totalno uredjen skup:

$$\mathcal{H}(X)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus\mathcal{M}_\lambda \ ; \ R_{\lambda_1}>R_{\lambda_2}\,,\ \lambda_1>\lambda_2\,,\ \lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$$

(pod pretpostavkom da je indeks-skup Λ totalno uredjen i da je uredjenje u njemu izomorfno sa uredjenjem u skupu $\{R_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$); sâm proces X predstavlja se kao ortogonalna suma kontinuum mnogo procesa sa prostim spektrom čiji spektralni tipovi čine totalno uredjen skup. Dakle, pitanje reprezentacije procesa X svodi se, u prvom redu, na pitanje reprezentacije procesa sa prostim spektrom, a zatim na pitanje sumiranja proizvoljno mnogo procesa sa prostim spektrom. Medjutim, spektralnu reprezentaciju procesa sa prostim spektrom nemoguće je dobiti zato što ortogonalna baza prostora takvog procesa ima kardinalni broj kontinuuma. Pritom, kada govorimo o "spektralnoj reprezentaciji" mislimo na reprezentaciju svakog elementa procesa (pa i svakog elementa prostora generisanog tip procesom) pomoću elemenata jednog istog skupa cikličkih potprostora; reprezentacije ovog tipa su, recimo, kanonička, čisto kanonička i Hida-Kramerova. Reprezentacije makog od ova tri tipa moguće je naći za proces koji u odredjenom smislu aproksimira proces X sa neseparabilnim prostorom. U ovoj glavi bavićemo se proučavanjem aproksimacija (u smislu koji ćemo precizirati) proizvoljnog procesa X.

IV.2. Pojam aproksimacije

Pretpostavljaćemo, ako nije drukčije naglašeno, da svi slučajni procesi generišu neseparabilne prostore. Neka je X proizvoljni proces sa tom osobinom i $\mathcal{H}_1$ potprostorprostora $\mathcal{H}(X)$ koji svodi razlaganje jedinice E_X procesa X. Za svako $t\in\mathbb{R}$, odnosno za svaki element $X(t)$, postoji $X_1(t)\in\mathcal{H}_1$ tako da je zadovoljena jednakost

$$\| X(t) - X_1(t) \| = \inf_{x\in\mathcal{H}_1} \| X(t) - x \| ;$$

$X_1(t)$ se poklapa sa projekcijom elementa $X(t)$ na $\mathcal{H}_1$ i predstavlja najbolju aproksimaciju (u smislu rastojanja) elementa $X(t)$ pomoću elemenata iz $\mathcal{H}_1$. Isto tako, proces X_1, definisan sa

$$X_1(t) = P_{\mathcal{H}_1} X(t), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{4.2.1}$$

predstavlja najbolju aproksimaciju procesa X pomoću elemenata potprostora $\mathcal{H}_1$. U glavi II pokazali smo da važi jednakost

(4.2.2) $$\mathcal{H}_1 = \overline{\mathcal{L}}\{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_1} X(t),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Ako postoji $z \in \mathcal{H}(X)$ tako da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{M}(z)$, odnosno ako je X_1 ciklički proces, tada, zbog (4.2.2), a prema teoremi 1.4, sledi da postoji familija funkcija $\{g(t,u), t \in \mathbb{R}, u \leq t\}$, kompletna u $\mathcal{L}_2(\rho_z)$ i takva da je

(4.2.3) $$X_1(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t,u)\, dE_X(u)z,\ t \in \mathbb{R},$$

čisto kanonička reprezentacija procesa X_1. Prema teoremi 3.6 proces X_1 potpuno je potčinjen procesu X.

Ako proces X ima prost spektar, tada se skup separabilnih potprostora koji svode razlaganje jedinice E_X poklapa sa skupom cikličkih potprostora prostora $\mathcal{H}(X)$. Ovo znači da svaka aproksimacija procesa X, projektovanjem na separabilan potprostor koji svodi E_X, predstavlja ciklički proces.

Ako je X proizvoljni proces, tada je separabilni potprostor prostora $\mathcal{H}(X)$, koji svodi razlaganje jedinice E_X, jednak ortogonalnoj sumi najviše prebrojivo mnogo cikličkih potprostora prostora $\mathcal{H}(X)$. Projektovanjem procesa X na ovakav potprostor dobija se proces čiji multiplicitet je, u opštem slučaju, veći od jedinice.

Bavićemo se onim aproksimacijama procesa X koje su jednake projekcijama procesa X na ortogonalne sume najviše prebrojivo mnogo cikličkih potprostora (prostora $\mathcal{H}(X)$). Najjednostavnije aproksimacije su aproksimacije cikličkim procesima. Navešćemo neke osobine ovih aproksimacija.

Neka je X proizvoljni proces, $\mathcal{M}(z)$ ciklički potprostor prostora $\mathcal{H}(X)$ i proces X_1 definisan sa

(4.2.4) $$X_1(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}(z)} X(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Za svako $t\in R$ veličinu $d(t)$ definišimo sa

$$d(t) = \|X(t) - X_1(t)\|, \quad t\in R. \tag{4.2.5}$$

Svakako je $0 \leq d(t) \leq \sup\limits_{x\in \mathcal{H}(X)} \|x\|$, $t\in R$. Neka je veličina d definisana sa

$$d = \sup_{t\in R} d(t)\,; \tag{4.2.6}$$

dakle, za svako t važi nejednakost

$$\|X(t) - X_1(t)\| \leq d,$$

pa je d prirodno nazvati merom dobrote aproksimacije procesa X cikličkim procesom X_1, odnosno (pošto je proces X_1 jednoznačno odredjen prostorom $\mathfrak{M}(z)$) merom dobrote aproksimacije procesa X prostorom $\mathfrak{M}(z)$. Veličina d je, kao što sledi iz (4.2.5) i (4.2.6), jednoznačno odredjena prostorom $\mathfrak{M}(z)$, odnosno elementom z; d je, dakle, funkcija elementa z, pa ćemo, kada to želimo da naglasimo, pisati $d=d(z)$.

Neka su $\mathfrak{M}(z_1)$ i $\mathfrak{M}(z_2)$ ciklički potprostori prostora $\mathcal{H}(X)$; sa X_1 i X_2 označimo projekcije procesa X, redom, na $\mathfrak{M}(z_1)$ i $\mathfrak{M}(z_2)$, a sa $d_1=d(z_1)$ i $d_2=d(z_2)$ odgovarajuće mere dobrote aproksimacije procesa X procesima X_1 i X_2, redom. Rećićemo da je X_1 bolja aproksimacija nego X_2 (odnosno da je $\mathfrak{M}(z_1)$ bolja aproksimacija nego $\mathfrak{M}(z_2)$) ako je $d_1<d_2$. Za te dve aproksimacije rećićemo da su podjednako dobre ako je $d_1=d_2$. Iz jednakosti $\mathfrak{M}(z_1)=\mathfrak{M}(z_2)$ sledi da je $d_1=d_2$; obrnuto ne važi. Isto tako, može biti $\rho_{z_1}=\rho_{z_2}$, a da je, ipak, $d_1\neq d_2$, odnosno: mere dobrote aproksimacije ortogonalnim cikličkim potprostorima sa istim spektralnim tipom mogu biti različite; ovo se lako dokazuje korišćenjem Hida-Kramerove reprezentacije.

Lako je videti da iz $\mathfrak{M}(z_1)\subset \mathfrak{M}(z_2)$ sledi $d_2\leq d_1$; obrnuto ne važi. Ako je $\mathfrak{M}(z_1)\perp \mathfrak{M}(z_2)$, $\rho_{z_1}\perp\rho_{z_2}$, i $\mathfrak{M}(z_3)=\mathfrak{M}(z_1)\oplus \mathfrak{M}(z_2)$, $z_3=z_1+z_2$, jednostavno se pokazuje da je tada

$$d_3 \leqslant \min\{d_1, d_2\},$$

gde je $d_3 = d(z_3)$. Kako je ortogonalna suma najviše prebrojivo mnogo cikličkih potptostora, sa uzajamno ortogonalnim spektralnim tipovima, opet ciklički potprostor, važi sledeće: ako su $\mathcal{M}(z_i)$, $i=1,2,\ldots$, uzajamno ortogonalni ciklički potprostori sa uzajamno ortogonalnim spektralnim tipovima i $\mathcal{M}(z_0) = \sum_i \oplus \mathcal{M}(z_i)$, tada je $d_0 \leq \inf_i d_i$, gde je $d_i = d(z_i)$, $i=0,1,\ldots$.

<u>Tvrdjenje 4.1</u>. Slučajni proces X je ciklički ako i samo ako postoji $z \in \mathcal{H}(X)$ tako da je $d(z)=0$.

<u>Dokaz</u>. Dokazaćemo samo netrivijalni deo tvrdjenja. Neka je element $z \in \mathcal{H}(X)$ takav da je $d(z)=0$; pokažimo da je proces X ciklički. Kako $z \in \mathcal{H}(X)$, znači da je $\mathcal{M}(z) \subset \mathcal{H}(X)$. Pretpostavimo da proces X nije ciklički; odatle sledi da postoji $x \in \mathcal{H}(X)$ tako da je $x \perp \mathcal{M}(z)$ i $x \neq 0$. No, kako je $d(z)=0$, znači da $X(t) \in \mathcal{M}(z)$ za svako t, odakle sledi da mora biti $x \perp X(t)$ za svako t, što je nemoguće. QED

<u>IV.3. Aproksimacije slučajnog procesa sa prostim spektrom</u>

Slučajni procesi sa prostim spektrom predstavljaju generalizaciju cikličkih procesa, u smislu da je slučajni proces sa prostim spektrom i elementom maksimalnog spektralnog tipa uvek ciklički.

Neka je Z proizvoljni slučajni proces sa prostim spektrom i spektralnim tipom R; neka je

$$R = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda \tag{4.3.1}$$

jedno razlaganje spektralnog tipa R na sumu uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova I reda; jednakost $\dim \mathcal{H}(Z) = \aleph_1$ važi ako i samo ako je $\operatorname{card} \Lambda = \aleph_1$. Razlaganju (4.3.1) odgovara razlaganje prostora $\mathcal{H}(X)$ na ortogonalnu sumu cikličkih potprostora $\mathcal{M}(z_\lambda)$, takvih da je $\rho_\lambda = \rho_{z_\lambda}$:

$$\mathcal{H}(Z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \oplus \mathcal{M}(z_\lambda). \tag{4.3.2}$$

Označimo sa $\mathcal{M}$ familiju svih cikličkih potprostora $\mathcal{M}(z_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$: $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(z_\lambda), \lambda\in\Lambda\}$. Neka je $\widetilde{\Lambda}$ familija svih najviše prebrojivih podskupova iz Λ; ako je card$\Lambda = \aleph_1$, tada je i card$\widetilde{\Lambda} = \aleph_1$ ([20]). Skupu $\widetilde{\Lambda}$ odgovara familija $\widetilde{\mathcal{M}}$ svih cikličkih potprostora prostora $\mathcal{H}(Z)$ koji se mogu predstaviti kao najviše probrojive ortogonalne sume elemenata familije $\mathcal{M}$. Ta korospondencija se uspostavlja na sljedeći način: ako je $\ell\in\widetilde{\Lambda}$ odnosno ako je ℓ neki najviše prebrojiv skup indeksa iz Λ, tada njemu odgovara ortogonalna suma $\sum_{\lambda\in\ell}\oplus\mathcal{M}(z_\lambda)$; prostor $\sum_{\lambda\in\ell}\oplus\mathcal{M}(z_\lambda)$ je ciklički, njegov spektralni tip je $\sum_{\lambda\in\ell}\rho_\lambda$ i taj spektralni tip uvek postoji ([16]). Dakle, $\widetilde{\mathcal{M}}$ sadrži sve cikličke potprostore familije $\mathcal{M}$ i sve najviše prebrojive ortogonalne sume tih potprostora. Elementi familije $\widetilde{\mathcal{M}}$ su, prema tome, ciklički potprostori, ali nisu obavezno uzajamno ortogonalni; tačnije, familija $\widetilde{\mathcal{M}}$ je parcijalno uredjena relacijom skupovne inkluzije. Elemente iz $\widetilde{\mathcal{M}}$ obeležavaćemo sa $\mathcal{M}(\widetilde{z}_\lambda)$, $\lambda\in\widetilde{\Lambda}$; sa $\widetilde{Z}_\lambda$ ćemo obeležavati ciklički slučajni proces koji se dobija projektovanjem procesa Z na $\mathcal{M}(\widetilde{z}_\lambda)$. Prema IV.2, za svako $\lambda\in\widetilde{\Lambda}$ jednoznačno je odredjena veličina

$$d_\lambda = \sup_{t\in\mathbb{R}} d_\lambda(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| Z(t) - \widetilde{Z}_\lambda(t)\| . \tag{4.3.3}$$

Veličinu $\widetilde{d}$ definišimo sa

$$\widetilde{d} = \inf_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}} d_\lambda . \tag{4.3.4}$$

Iz tvrdjenja 4.1 sledi

<u>Lema 4.1</u>. Neka je Z proces sa prostim spektrom. Taj proces je ciklički ako i samo ako je

$$\widetilde{d} = \min_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}} d_\lambda . \tag{4.3.5}$$

Posledica 1. Ako važi (4.3.5) onda je $\tilde{d}=0$.

Pretpostavili smo da je sa (4.3.1) dato jedno, dakle proizvoljno, razlaganje spektralnog tipa R procesa Z sa prostim spektrom. Neka je

$$R=\sum_{\lambda\in N}\rho_\lambda^o \tag{4.3.6}$$

neko drugo razlaganje istog spektralnog tipa na sumu uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova I reda. Neka je N^* familija svih najviše prebrojivih podskupova indeksa iz N. Razlaganju (4.3.6) odgovara razlaganje

$$\mathcal{H}(Z)=\sum_{\lambda\in N}\oplus\mathcal{M}(z_\lambda^o) \tag{4.3.7}$$

prostora $\mathcal{H}(Z)$ na ortogonalnu sumu cikličkih potprostora $\mathcal{M}(z_\lambda^o)$ spektralnog tipa $\rho_\lambda^o=\rho_{z_\lambda^o}$, $\lambda\in N$. Skupu N^* odgovara familija $\mathcal{M}^*$ koja sadrži sve najviše prebrojive ortogonalne sume cikličkih potprostora koji se pojavljuju na desnoj strani jednakosti (4.3.7). Veličine d_λ^o i d^o odredimo na uobičajeni način, jednakostima:

$$d_\lambda^o=\sup_{t\in R}d_\lambda^o(t)=\sup_{t\in R}\|Z(t)-Z_\lambda^o(t)\|,$$

gde je Z_λ^o projekcija procesa Z na $\mathcal{M}(z_\lambda^o)$, $\mathcal{M}(z_\lambda^o)\in\mathcal{M}^*$, i

$$d^o=\inf_{\lambda\in N^*}d_\lambda^o. \tag{4.3.8}$$

Teorema 4.2. Veličina $\tilde{d}$ ne zavisi od razlaganja (4.3.1).

Dokaz. Kako su (4.3.1) i (4.3.6) proizvoljna različita razlaganja spektralnog tipa R, dovoljno je pokazati da je $\tilde{d}=d^o$. Pretpostavimo da to nije slučaj; neka je, odredjenosti radi, $\tilde{d}<d^o$. Postoji $\varepsilon>0$ tako da je $\tilde{d}+\varepsilon=d^o$. Ovo, zbog (4.3.4), znači da postoji $\lambda_o\in\tilde{\Lambda}$, tako da je $d_{\lambda_o}<\tilde{d}+\varepsilon$, pri čemu je d_{λ_o} mera dobrote aproksimacije cikličkim prostorom $\mathcal{M}(z_{\lambda_o})$ čiji spektralni tip je ρ_{λ_o}. No, kako skup $\{\rho_\lambda^o,\lambda\in N\}$ predstavlja bazu ([16]) skupa spektralnih tipova koji pripadaju procesu Z, to se ρ_{λ_o} može napisati u obliku

$$(4.3.9) \qquad \rho_{\lambda_0} = \sum_{\lambda} \sigma_{\lambda}^{o},$$

gde je $\sigma_{\lambda}^{o} < \rho_{\lambda}^{o}$, $\lambda \in \mathcal{N}$; u (4.3.9) ima najviše prebrojivo mnogo spektralnih tipova σ_{λ}^{o} koji nisu identički jednaki nuli, zato što je ρ_{λ_0} spektralni tip I reda. Uočimo sve one spektralne tipove ρ_{λ}^{o} za koje je, u razlaganju (4.3.9), $\sigma_{\lambda}^{o} \neq 0$; te spektralne tipove obeležimo sa ρ_{λ}^{oo}. Formirajmo sumu

$$\rho^{oo} = \sum_{\lambda : \sigma_{\lambda}^{o} \neq 0} \rho_{\lambda}^{oo}$$

i ciklički prostor $\mathcal{M}(z^{oo})$ čiji spektralni tip je ρ^{oo} : $\rho^{oo} = \rho_{z^{oo}}$. Kako je, zbog (4.3.9), $\rho_{\lambda_0} < \rho^{oo}$, to je $\mathcal{M}(z_{\lambda_0}) \subset \mathcal{M}(z^{oo})$. No, odavde, prema IV.2, sledi nejednakost $d(z_{\lambda_0}) \geqslant d(z^{oo})$, odnosno nejednakost $d^{o} \geqslant d(z^{oo})$. Medjutim, kako veličina $d(z^{oo})$ odgovara razlaganju (4.3.6) spektralnog tipa R, a d^{o} je definisano sa (4.3.8), mora biti $d(z^{oo}) \geqslant d^{o}$. Iz ove i prethodne nejednakosti sledi da je $d^{o} = d(z^{oo})$. Medjutim, $d(z^{oo})$ je mera dobrote aproksimacije procesa Z cikličkim prostorom $\mathcal{M}(z^{oo})$, pa prethodna jednakost znači da je $d^{o} = \min_{\lambda \in \mathcal{N}^{*}} d_{\lambda}^{o}$, što je nemoguće, jer bi, prema posledici 1, odatle sledilo da je $d^{o} = 0$, a kako je $\widetilde{d} < d^{o}$ i $\widetilde{d} \geqslant 0$, bilo bi i $\widetilde{d} = 0$, odnosno $\widetilde{d} = d^{o}$, a to je suprotno pretpostavci. Do istog zaključka dovodi i pretpostavka $d^{o} < \widetilde{d}$. Time je dokaz završen. Q.E.D.

Veličinu $\widetilde{d}$, definisanu sa (4.3.4), zvaćemo pragom aproksimativnosti slučajnog procesa Z procesom koji je potpuno potčinjen procesu Z i generiše separabilan prostor.

Kako je $d_{\lambda} \geqslant 0$ za svako $\lambda \in \widetilde{\Lambda}$, to, u opštem slučaju jedino možemo tvrditi da je $\widetilde{d} \geqslant 0$. Konstruisaćemo proces Z za koji je $\widetilde{d} = 1$.

Primer 4.1. Neka je $\mathbb{R}/\sim$ skup klasa ekvivalencije definisan u primeru 3.2; elemente skupa $\mathbb{R}/\sim$ obeležimo sa R_{λ}, $\lambda \in \Lambda$. Neka su $Z_{\lambda} = \{Z_{\lambda}(t), t \in \mathbb{R}\}$, $\lambda \in \Lambda$, uzajamno ortogonalni ne neprekidni ciklički procesi sa uzajamno ortogonalnim spektralnim tipovima ρ_λ. Slučajni proces Z definišimo jednakošću

$$Z(t) = Z_\lambda(t),\ t \in R_\lambda . \tag{4.3.10}$$

Kako je proces Z_λ, sa svako $\lambda \in \Lambda$, neprekidan, a skup R_λ svuda gust u $\mathbb{R}$, to je

$$\mathcal{H}(Z_\lambda ; t) = \overline{\mathcal{L}}\{Z_\lambda(t),\ t \in R_\lambda\},\ t \in \mathbb{R},$$

pa je

$$\mathcal{H}(Z ; t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \oplus\, \mathcal{H}(Z_\lambda ; t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Proces Z ima prost spektar; njegov spektralni tip obeležimo sa ρ. Pretpostavimo da su svi procesi Z_λ, $\lambda \in \Lambda$, izabrani tako da za sve indekse λ, osim za njih najviše prebrojivo mnogo, važi nejednakost

$$\| Z_\lambda(t) \| \leq 1,\ t \in \mathbb{R}; \tag{4.3.11}$$

neka su, osim toga, oni procesi Z_λ za koje prethodna nejednakost važi, takvi da za svaki od njih postoji $t \in R_\lambda$ za koje je $\| Z_\lambda(t) \| = 1$. Indekse λ, za koje (4.3.11) ne važi, obeležimo sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Odredimo prag aproksimativnosti procesa Z. Neka je $\rho = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda$ jedno razlaganje spektralnog tipa ρ, pri čemu je ρ_λ, $\lambda \in \Lambda$, spektralni tip cikličkog procesa Z_λ. Ciklički prostor $\mathfrak{M}(Z_0)$ definišimo jednakošću

$$\mathfrak{M}(Z_0) = \sum_i \oplus\, \mathcal{H}(Z_{\lambda_i}) ;$$

iz načina na koji su odredjeni indeksi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sledi da je

$$d(Z_0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \| Z(t) - Z_0(t) \| = 1$$

Vidimo da za svaki ciklički prostor $\mathfrak{M}(Z_\lambda)$, takav da je $\mathfrak{M}(Z_\lambda) \supset \mathfrak{M}(Z_0)$, važi jednakost $d(Z_\lambda) = 1$, dok za ciklički prostor $\mathfrak{M}(Z_0)$, takav da je $\mathfrak{M}(Z_0) \subset \mathfrak{M}(Z_0)$, važi $d(Z_0) \geq 1$. Konačno, prema (4.3.4), dobijamo da je $\tilde{d} = 1$.

IV.4. Aproksimacije slučajnog procesa sa homogenim maksimalnim spektralnim tipom

Neka je X slučajni proces sa homogenim maksimalnim spektralnim tipom $\mathcal{R}$ multiplicitota m i neka je

$$\mathcal{R} = \sum_{\nu \in N} \rho_\nu \tag{4.4.1}$$

jedno razlaganje spektralnog tipa $\mathcal{R}$ na sumu uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova I reda. Ovom razlaganju odgovara razlaganje prostora $\mathcal{H}(X)$ na ortogonalnu sumu prostora $\mathcal{H}_\nu$, koji svode E_X, imaju maksimalne spektralne tipove koji su homogeni i mult $\rho_\nu = m$ za svako $\nu \in N$:

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{\nu \in N} \oplus \mathcal{H}_\nu ;$$

prostor $\mathcal{H}_\nu$ se, za svako $\nu \in N$, razlaže na ortogonalnu sumu m cikličkih potprostora (u odnosu na E_X) $\mathcal{M}(z_{\nu\lambda})$, $\lambda \in \Lambda$, pri čemu je $\rho_{z_{\nu\lambda}} = \rho_\nu$ za svako $\lambda \in \Lambda$:

$$\mathcal{H}_\nu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \oplus \mathcal{M}(z_{\nu\lambda}),$$

tako da je

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{\nu \in N} \sum_{\lambda \in \Lambda} \oplus \mathcal{M}(z_{\nu\lambda}). \tag{4.4.2}$$

Izraz na desnoj strani ove jednakosti uslovljen je razlaganjem (4.4.1) spektralnog tipa $\mathcal{R}$, tako da će i aproksimacije procesa X, koje se dobijaju njegovim projektovanjem na najviše prebrojive ortogonalne sume cikličkih potprostora iz (4.4.2) zavisiti od razlaganja (4.4.1).

Označimo sa $\widetilde{N}$ i $\widetilde{\Lambda}$ familije svih najviše prebrojivih podskupova skupova N i Λ, respektivno, i obrazujmo Dekartov proizvod $M = \widetilde{N} \times \widetilde{\Lambda}$. Ako je zadovoljena bar jedna od jednakosti card $\widetilde{N} = \aleph_1$, card $\widetilde{\Lambda} = \aleph_1$, tada će biti i card $M = \aleph_1$ ([20]). Svakom indeksu $\mu \in M$ odgovaraju nizovi $\nu_1, \nu_2, \ldots \in N$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \Lambda$, odnosno prostor

(4.4.3) $$\mathcal{H}_{\mu} = \sum_{i} \sum_{j} \oplus \mathfrak{M}(z_{\nu_i \lambda_j})$$

čiji maksimalni spektralni tip $\rho_{\mu} = \sum_{i} \rho_{\nu_i}$ je homogen i multiplicitet mu nije veći od $\min\{m; \aleph_0\}$. Obeležimo sa X_{μ}, $\mu \in \mathcal{M}$, projekciju procesa X na potprostor $\mathcal{H}_{\mu}$, definisan sa (4.4.3); proces X_{μ} ima homogen maksimalni spektralni tip ρ_{μ} i $\operatorname{mult}\rho_{\mu} \leq \min\{m; \aleph_0\}$. Za svako $\mu \in \mathcal{M}$, veličine $d_{\mu}(t)$ i d_{μ} definišimo sa:

(4.4.4) $$d_{\mu}(t) = \| X(t) - X_{\mu}(t) \|, \quad t \in \mathbb{R},$$

(4.4.5) $$d_{\mu} = \sup_{t \in \mathbb{R}} d_{\mu}(t).$$

Veličina d_{μ} jednoznačno je odredjena procesom X_{μ}, pa ćemo pisati i $d_{\mu} = d(X_{\mu})$; osim toga, kako je prostor $\mathcal{H}(X_{\mu})$ jednak ortogonalnoj sumi $m_{\mu} = \operatorname{mult}\rho_{\mu}$ cikličkih potprostora (istog spektralnog tipa ρ_{μ}), čiji generatorni elementi su $\sum_{i} z_{\nu_i \lambda_j} = z_j$, $j = 1, \ldots, m_{\mu}$, pisaćemo i $d_{\mu} = d(\sum_{j=1}^{m_{\mu}} z_j)$. Veličinu $\tilde{d}$ definišimo sa:

(4.4.6) $$\tilde{d} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} d_{\mu}.$$

Teorema 4.3. Veličina $\tilde{d}$ ne zavisi od razlaganja (4.4.1).

Dokaz ove teoreme sličan je dokazu teoreme 4.2, pa ga nećemo navoditi.

Veličinu $\tilde{d}$, definisanu sa (4.4.6), nazivaćemo pragom aproksimativnosti procesa X procesom koji je potpuno potčinjen procesu X, generiše separabilan prostor i ima homogen maksimalni spektralni tip (čiji multiplicitet nije veći od $\aleph_0$).

Tvrdjenje 4.4. Neka je X proizvoljni slučajni proces sa homogenim maksimalnim spektralnim tipom ρ multipliciteta m. Sledeća dva tvrdjenja medjusobno su ekvivalentna:

1° Spektralni tip ρ je I reda i zadovoljena je nejednakost $m \leq \aleph_0$;

2° Postoji $\mu_0 \in \mathcal{M}$ tako da je $d_{\mu_0} = 0$.

Dokaz nećemo navoditi jer neposredno sledi iz prethodnih izlaganja.

<u>Posledica.</u> Ako je $\tilde{d} = \min\limits_{\mu \in M} d_\mu$, tada je $\tilde{d} = 0$.

Izložićemo još jedan način odredjivanja veličine $\tilde{d}$ za proces X sa maksimalnim homogenim spektralnim tipom R multiplicitета m. Za svaki spektralni tip σ koji pripada procesu X zadovoljena je jednakost mult $\sigma = m$. Formirajmo sve potprostore prostora $H(X)$, koji se mogu predstaviti kao ortogonalne sume najviše prebrojivo mnogo cikličkih potprostora spektralnog tipa σ; projekcije procesa X na ovakve potprostore obeležavaćemo sa X_λ^σ, $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ $(\operatorname{card} \tilde{\Lambda} \leq \aleph_1)$. Neka je, kao i ranije, za svako $\lambda \in \tilde{\Lambda}$:

$$d_\lambda^\sigma(t) = \| X(t) - X_\lambda^\sigma(t) \|, \quad t \in \mathbb{R},$$

(4.4.7)
$$d_\lambda^\sigma = \sup_{t \in \mathbb{R}} d_\lambda^\sigma(t),$$

(4.4.8)
$$d^\sigma = \inf_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} d_\lambda^\sigma$$

Očigledno je da važi nejednakost

(4.4.9)
$$d^\sigma \geq \tilde{d},$$

u kojoj je veličina $\tilde{d}$ definisana sa (4.4.6).

<u>Tvrdjenje 4.5.</u> Neka je X proizvoljni slučajni proces sa homogenim maksimalnim spektralnim tipom R multiplicitета m. Ako postoji spektralni tip σ koji pripada procesu X i ako je

(4.4.10)
$$d^\sigma = \min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} d_\lambda^\sigma,$$

tada je $m \leq \aleph_0$. Obrnuto, ako je $m \leq \aleph_0$, tada je za svaki spektralni tip koji pripada procesu X zadovoljena jednakost (4.4.10).

<u>Dokaz.</u> Neka za neki spektralni tip σ, koji pripada procesu X, važi jednakost (4.4.10). To znači da je $d^\sigma = d_{\lambda_0}^\sigma$ za neko $\lambda_0 \in \tilde{\Lambda}$, pri čemu je $d_{\lambda_0}^\sigma$ definisano jednakošću tipa (4.4.7). Treba da pokažemo da je $m \leq \aleph_0$. Pretpostavimo da to ne važi, odnosno da je $m = \aleph_1$; odavde sledi da postoji ciklični potprostor $\mathcal{M}$, spektralnog tipa σ, koji je ortogonalan na

$\mathcal{H}^{\sigma}_{\lambda_o}$. Sumi $\mathcal{H}^{\sigma}_{\lambda_o}\oplus\mathfrak{M}$ odgovara veličina d^{σ}_{ν}, definisana jednakošću tipa (4.4.7); kako je $\mathcal{H}^{\sigma}_{\lambda_o}\subset\mathcal{H}^{\sigma}_{\lambda_o}\oplus\mathfrak{M}$, to je, prema IV.2, $d^{\sigma}_{\nu}<d^{\sigma}_{\lambda_o}$, što je suprotno pretpostavci (4.4.10). Time je prvi deo tvrdjenja dokazan. Drugi deo je očigledan. QED

Teorema 4.6. Neka je X proizvoljni slučajni proces sa homogenim maksimalnim spektralnim tipom R multiplicitata m. Važi jednakost

$$\tilde{d}=\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}_X} d^{\sigma}, \tag{4.4.11}$$

gde su $\tilde{d}$ i d^{σ} veličine definisane, redom, sa (4.4.6) i (4.4.8).

Dokaz. Zbog (4.4.9) je $\inf\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_X} d^{\sigma}\geqslant\tilde{d}$. Pretpostavimo da (4.4.11) ne važi, odnosno da je $\inf\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_X} d^{\sigma}=\varepsilon>\tilde{d}$. Medjutim, prema (4.4.6), za svako $\varepsilon>\tilde{d}$ postoji ε_o, $\tilde{d}<\varepsilon_o<\varepsilon$, tako da je za neko $\mu\in\mathcal{M}$ zadovoljena jednakost $d_{\mu}=\varepsilon_o$. Veličini d_{μ} odgovara slučajni proces X_{μ} čiji maksimalni spektralni tip ρ_{μ} je homogen i multiplicitet mu nije veći od $\min\{m, n_o\}$. Medjutim, kako je $\rho_{\mu}<R$, to je $d_{\mu}>d^{\rho_{\mu}}$, gde je veličina $d^{\rho_{\mu}}$ definisana jednakošću tipa (4.4.8). Kako je $d^{\rho_{\mu}}\geqslant\inf\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_X} d^{\sigma}$, usled što $\rho_{\mu}\in\mathfrak{S}_X$, to je $d_{\mu}\geqslant\inf\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_X} d^{\sigma}$, odnosno $d_{\mu}\geqslant\varepsilon$, što je suprotno pretpostavci $d_{\mu}=\varepsilon_o<\varepsilon$. QED

Ova teorema pokazuje da se, za slučajni proces X homogenog maksimalnog spektralnog tipa R multipliciteta m, prag aproksimativnosti $\tilde{d}$ može odrediti iz bilo koje od sledećih jednakosti:

$$\tilde{d}=\inf_{\mu\in\mathcal{M}} d_{\mu}=\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}_X} d^{\sigma}.$$

IV.5. Aproksimacije proizvoljnog slučajnog procesa

Neka je X proizvoljni slučajni proces sa maksimalnim spektralnim tipom R. Postoje slučajni procesi X_{σ} i X_{u}, sa osobinama opisanim u teoremi 3.13, takvi da je

(4.5.1) $$X(t) = X_r(t) + X_s(t)\ , \quad t \in R .$$

Kako je prostor $H(X)$ separabilan, problem odredjivanja aproksimacija procesa X identičan je problemu odredjivanja aproksimacija procesa X_r. Pretpostavićemo, radi jednostavnijeg označavanja, da je $X_s(t)=0$ za svako $t \in R$, tako da (4.5.1) postaje

(4.5.2) $$X(t) = X_r(t)\ , \quad t \in R .$$

Generalno, problem je isti kao i ranije: ispitati one aproksimacije procesa X koje su jednake projekcijama ovog procesa na potprostore koji redukuju E_X i separabilni su. Potprostori, koji zadovoljavaju navedene osobine, mogu se predstaviti kao ortogonalne sume najviše prebrojivo mnogo cikličkih potprostora čiji spektralni tipovi su u proizvoljnom medjusobnom odnosu. Kako smo u IV.4 proučili aproksimacije procesa koji ima homogeni maksimalni spektralni tip, to sada možemo pretpostaviti da proces X, na koji važi (4.5.2), ima osobine izražene uslovom 2°a) teoreme 2.13. Prema teoremi 3.12 postoji jedinstveno razlaganje maksimalnog spektralnog tipa R procesa X,

(4.5.3) $$R = \sum_i R_i \ ,$$

takvo da su spektralni tipovi R_i, $i=1,2,\dots$, uzajamno ortogonalni, homogeni i imaju medjusobno različite multiplicitete N_i, $i=1,2,\dots$. Ova suma ima najviše prebrojivo mnogo članova. I sâm prostor $\mathcal{H}(X)$ može se napisati u obliku ortogonalne sume svojih potprostora:

$$\mathcal{H}(X) = \sum_i \oplus \mathcal{H}_i \ ,$$

gde $\mathcal{H}_i$ ima homogen maksimalni spektralni tip R_i multipliciteta N_i, $i=1,2,\dots$.

Neka je

(4.5.4) $$R_i = \sum_{\nu \in N_i} \rho_{i\nu}\ , \quad i=1,2,\dots,$$
jedno razlaganje spektralnog tipa R_i na sumu uzajamno ortogonalnih spektralnih tipova $\rho_{i\nu}$, $\nu \in N_i$, a

(4.5.5) $$\mathcal{H}_i = \sum_{\nu \in N_i} \oplus\, \mathcal{H}_{i\nu}\ , \quad i=1,2,\dots,$$
odgovarajuće razlaganje potprostora $\mathcal{H}_i$. Kako je $\operatorname{mult} R_i = m_i$, to se, za svako $i=1,2,\dots$, prostor $\mathcal{H}_{i\nu}$; $\nu \in N_i$, razlaže na ortogonalnu sumu m_i cikličkih potprostora spektralnog tipa $\rho_{i\nu}$:

(4.5.6) $$\mathcal{H}_{i\nu} = \sum_{\lambda \in \Lambda_i} \oplus\, \mathcal{M}(z_{i\nu\lambda})\ ;$$
dakle, jednakost $\rho_{i\nu} = \rho_{z_{i\nu\lambda}}$ važi za svako $\lambda \in \Lambda_i$. Dalje je

$$\mathcal{H}_i = \sum_{\nu \in N_i} \sum_{\lambda \in \Lambda_i} \oplus\, \mathcal{M}(z_{i\nu\lambda}),$$
tako da konačno dobijamo

(4.5.7) $$\mathcal{H}(X) = \sum_i \sum_{\nu \in N_i} \sum_{\lambda \in \Lambda_i} \oplus\, \mathcal{M}(z_{i\nu\lambda}).$$

Obeležimo sa $\widetilde{N}_i$ i $\widetilde{\Lambda}_i$, $i=1,2,\dots$, familije svih najviše prebrojivih podskupova N_i i Λ_i, respektivno, i neka je $\mathcal{M}_i = \widetilde{N}_i \times \widetilde{\Lambda}_i$. Formirajmo Dekartov proizvod $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \cdots$; svakom indeksu $\mu \in \mathcal{M}$ odgovaraju nizovi $\nu_1^1, \nu_2^1, \dots \in \widetilde{N}_1$, $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots \in \widetilde{\Lambda}_1$, $\nu_1^2, \nu_2^2, \dots \in \widetilde{N}_2$, $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots \in \widetilde{\Lambda}_2, \dots$, odnosno prostor

(4.5.8) $$\mathcal{H}_\mu = \sum_i \sum_j \sum_k \oplus\, \mathcal{M}(z_{\nu_j^i \lambda_k^i})\ ;$$
iz konstrukcije je jasno da $\mathcal{H}_\mu$, $\mu \in \mathcal{M}$, svodi razlaganje jedinice E_X. Maksimalni spektralni tip prostora $\mathcal{H}_\mu$ je

$$\rho_{\mu_1} = \sum_i \sum_j \rho_{\nu_j^i}\ ,$$
pri čemu je spektralni tip $\rho_{\nu_j^i}$ jednak spektralnom tipu generisanom elementom $z_{\nu_j^i \lambda_k^i}$ za svako $k=1,2,\dots$. Spektralni tip ρ_{μ_1}, u opštem slučaju, nije homogen; analizom jednakosti (4.5.8) i (4.5.7) vidi se da članovi na desnoj strani jednakosti (4.5.8) mogu biti pregrupisani tako da prostor $\mathcal{H}_\mu$ bude napisan u obliku ortogonalne sume najviše prebrojivo mnogo cikličkih potprostora čiji spektralni tipovi grade nerastući niz (primetimo da, ako proces X zadovoljava uslov

2°b) teoreme 3.13, svi ciklički potprostori u takvoj reprezentaciji prostora $\mathcal{H}_\mu$ imaju isti spektralni tip, odnosno maksimalni spektralni tip prostora $\mathcal{H}_\mu$ je homogen). Dakle, prostor $\mathcal{H}_\mu$ je separabilan; osim toga, svaki potprostor prostora $\mathcal{H}(X)$ koji je separabilan i svodi E_X ima oblik (4.5.8).

Obeležimo sa X'_μ, $\mu \in \mathcal{M}$, projekciju procesa X na potprostor $\mathcal{H}_\mu$; proces X'_μ je, prema teoremi 3.6, potpuno potčinjen procesu X. Za svako $\mu \in \mathcal{M}$ veličine $d'_\mu(t)$, d'_μ i $\widetilde{d}'$ definišimo sa:

$$d'_\mu(t) = \| X(t) - X'_\mu(t) \|, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$d'_\mu = \sup_{t \in \mathbb{R}} d'_\mu(t),$$

$$\widetilde{d}' = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} d'_\mu \tag{4.5.9}$$

Lako je pokazati da važi

<u>Teorema 4.7.</u> Veličina $\widetilde{d}'$ ne zavisi od razlaganja (4.5.4).

Pretpostavimo sada da je slučajni proces X proizvoljan, tj. da za njega ne važi jednakost (4.5.2). Prostor $\mathcal{H}(X)$ može se napisati u obliku ortogonalne sume $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(X_\sigma) \oplus \mathcal{H}(X_u)$, gde su X_σ i X_u procesi iz teoreme 3.13. Veličinu d_σ definišimo sa

$$d_\sigma = \sup_{t \in \mathbb{R}} \| X(t) - X_\sigma(t) \| \tag{4.5.10}$$

i postupak, koji smo gore opisali, primenimo na proces X_u. Kako je $\dim \mathcal{H}(X_\sigma) \leq \aleph_0$, to "najveći" potprostori koji svode E_X i separabilni su imaju oblik

$$\mathcal{H}(X_\sigma) \oplus \mathcal{H}_\mu, \quad \mu \in \mathcal{M}, \tag{4.5.11}$$

gde je $\mathcal{H}_\mu$ definisano sa (4.5.8). Projekciju procesa X na potprostor oblika (4.5.11) obeležimo sa X_μ. Ako veličine d_μ i $\widetilde{d}$ definišemo jednakostima

$$d_\mu = \sup_{t \in \mathbb{R}} \| X(t) - X_\mu(t) \|,$$

$$\widetilde{d} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} d_\mu \tag{4.5.12}$$

tada iz (4.5.9), (4.5.10) i (4.5.11) sledi da je $\widetilde{d} \leq \widetilde{d}'$ i

$\tilde{\alpha} \leq \alpha_{\chi}$. Veličina $\tilde{\alpha}$ je, prema prethodnoj teoremi i jedinstvenosti procesa X_{χ}, jednoznačno odredjena. Veličinu $\tilde{\alpha}$ zovemo _pragom aproksimativnosti_ slučajnog procesa X procesom koji je potpuno potčinjen procesu X i generiše separabilan prostor.

Pomoću teoreme 3.11 jednostavno je pokazati da važi

Tvrdjenje 4.8. Neka je X proizvoljni slučajni proces. Nejednakost $\dim \mathcal{H}(X) \leq \aleph_0$ važi ako i samo ako je $\alpha_0 = 0$.

Primedba. Veličina $\tilde{\alpha}$ može se odrediti i postupkom koji se razlikuje od postupka koji smo izložili. Taj postupak se bazira na mogućnosti razlaganja prostora $\mathcal{H}(X)$ na ortogonalnu sumu (u opštem slučaju) kontinuum mnogo potprostora sa prostim spektrom.

IV.6. Aproksimabilnost

Neka je X proizvoljni slučajni proces i $\tilde{\alpha}$ prag aproksimativnosti tog procesa procesom koji mu je potpuno potčinjen i generiše separabilan prostor.

Teorema 4.9. Jednakost $\tilde{\alpha} = \infty$ važi ako i samo ako za svako $C > 0$ važi jednakost

$$\dim \overline{\mathcal{L}}\{X(t) \mid \|X(t)\| > C\} = \aleph_1 . \tag{4.6.1}$$

Dokaz. Pretpostavimo da za svako $C > 0$ važi (4.6.1) i pokažimo da je tada $\alpha_\mu = \infty$ za svako $\mu \in \mathcal{M}$. Veličina α_μ, za svako $\mu \in \mathcal{M}$, odgovara procesu X_μ koji generiše separabilan prostor $\mathcal{H}(X_\mu)$, a ovo, zbog (4.6.1), znači da za svako $C > 0$ postoji $u \in \mathbb{R}$ tako da je $X(u) \perp \mathcal{H}(X_\mu)$ i $X(u) \in \overline{\mathcal{L}}\{X(t) \mid \|X(t)\| > C\}$; odavde sledi da je $\alpha_\mu = \infty$ za svako $\mu \in \mathcal{M}$, pa je i $\tilde{\alpha} = \infty$.

Neka je $\tilde{\alpha} = \infty$. Pretpostavimo da (4.6.1) ne važi za svako C, odnosno da postoji $C = C_0$ tako da je

$$\dim \overline{\mathcal{L}}\{X(t) \mid \|X(t)\| > C_0\} = \aleph_0 .$$

No, tada postoji $\mu=\mu_0\in\mathcal{M}$ tako da $\mathcal{H}(X_{\mu_0})\supset\overline{\mathcal{L}}\{X(t)\mid \|X(t)\|>C_0\}$, što znači da je $d_{\mu_0}\leq C_0$. Kako je veličina $\tilde{d}$ definisana sa (4.5.12), iz poslednje nejednakosti sledi da je i $\tilde{d}\leq C_0$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, (4.6.1) važi za svako $C>0$.

Definišemo da je slučajni proces X <u>aproksimabilan</u> ako postoji konstanta $C>0$ tako da je

$$\dim\overline{\mathcal{L}}\{X(t)\mid \|X(t)\|>C\}\leq\aleph_0 .$$

Slučajni procesi koji zadovoljavaju uslov (N) aproksimabilni su, ali, kao što smo videli, ne iscrpljuju klasu aproksimabilnih procesa. Proces iz primera 4.1 aproksimabilan je. Aproksimabilnost procesa konstruisanih u primerima 3.5 i 3.6 zavisi od osobina procesa Z_λ, $\lambda\in\Lambda$.

IV.7. Čisto kanonička reprezentacija projekcije slučajnog procesa

Neka je X proizvoljni slučajni proces i $\mathcal{H}_\mu$ potprostor koji svodi E_X i koji je definisan sa

$$\mathcal{H}_\mu=\sum_{n=1}^{M}\oplus\,\mathcal{M}(z_n) \tag{4.7.1}$$

(M je prirodni broj ili $\aleph_0$). Proizvoljni slučajni proces Y, koji je potpuno potčinjen procesu X i za koji je $\mathcal{H}(Y)\subset\mathcal{H}_\mu$, može se, prema posledici teoreme 3.3, napisati u obliku

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{M}\int_{-\infty}^{t}h_n(t,u)\,dE_X(u)z_n,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{4.7.2}$$

gde $h_n(t,\cdot)\in\mathcal{L}_2(\|E_X(u)z_n\|^2)$, $t\in\mathbb{R}$, $n=\overline{1,M}$; reprezentacija (4.7.2) je kanonička.

<u>Teorema 4.10.</u> Neka je Y proizvoljni slučajni proces sa kanoničkom reprezentacijom (4.7.2). Ako je proces Y jednak projekciji procesa X na $\mathcal{H}_\mu$, tada je (4.7.2) čisto kanonička reprezentacija procesa Y.

Dokaz. U III.2 pokazano je da važi jednakost

$$\mathcal{H}_\mu = \overline{\mathcal{L}}\{P_{\mathcal{H}_\mu} X(t), t\in\mathbb{R}\} = \overline{\mathcal{L}}\{Y(t), t\in\mathbb{R}\} = \mathcal{H}(Y),$$

koja, zajedno sa (4.7.1), znači da je $\mathcal{H}(Y) = \sum_{n=1}^{M} \oplus \mathcal{M}(z_n)$, čime je pokazano da je (4.7.2) čisto kanonička reprezentacija procesa Y. QED

Tvrdjenje, obrnuto ovom iz poslednje teoreme, ne važi, tj iz činjenice da je (4.7.2) čisto kanonička ro rezentacija procesa Y ne sledi da je taj proces jednak projekciji procesa X na $\mathcal{H}_\mu$. Neka je

$$d_\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| X(t) - X_\mu(t) \|, \tag{4.3.3}$$

gde je sa X_μ obeležena projekcija procesa X na $\mathcal{H}_\mu$. Čak ni u slučaju da važi jednakost

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \| X(t) - Y(t) \| = d_\mu, \tag{4.7.4}$$

pri čemu je proces Y zadat svojom čisto kanoničkom reprezentacijom (4.7.2), iz toga ne sledi da su procesi Y i X_μ identični. Važi samo trivijalno tvrdjenje: jednakost (4.7.4), u kojoj je d_μ definisano sa (4.7.3), predstavlja neophodan uslov da proces Y, za koji je (4.7.2) kanonička reprezentacija, bude jednak projekciji X_μ procesa X na $\mathcal{H}_\mu$.

Teorema 4.11. Neka je

$$Y_n(t) = \int_{-\infty}^{t} k_n(t,u)\, dE_X(u) z_n, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{4.7.5}$$

čisto kanonička reprezentacija procesa Y_n, $n=1,2,\dots$ ($k_n(t,\cdot) \in$ [illegible], $n=1,2,\dots$), i neka su procesi Y_n, $n=1,2,\dots$ medjusobno ortogonalni. Ako je, za svako $n=1,2,\dots$, proces Y_n jednak projekciji procesa X na potprostor $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}(Y_n)$, tada je

$$Y(t) = \sum_{n} \int_{-\infty}^{t} k_n(t,u)\, dE_X(u) z_n, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{4.7.6}$$

čisto kanonička reprezentacija procesa Y.

Dokaz. Kako je (4.7.5) čisto kanonička reprezentacija procesa Y_n, $n=1,2,\dots$, to je $\mathcal{H}(Y_n)=\mathcal{H}(z_n)$. Prema teoremi 2.10 reprezentacija (4.7.6) je kanonička. Ako pokažemo da je proces Y jednak projekciji procesa X na $\sum_n \oplus \mathcal{H}(Y_n)$, tada će, prema prethodnoj teoremi, iz toga slediti da je (4.7.6) čisto kanonička reprezentacija procesa Y. Kako je $Y_n = P_{\mathcal{H}_n} X$ za svako $n=1,2,\dots$, to je

$$P_{\sum_n \oplus \mathcal{H}_n} X(t) = \sum_n P_{\mathcal{H}_n} X(t) = \sum_n Y_n(t), \quad t\in\mathbb{R},$$

čime je teorema dokazana. QED

ZAKLJUČAK

Neka je X proizvoljni slučajni proces. Ako je (sa oznakama iz teoreme 3.13) slučajni proces X_u identički jednak nuli, tada teorema 3.11 daje razlaganje prostora $\mathcal{H}(X)=\mathcal{H}(X_\sigma)$ koje je identično Hida-Kramerovoj dekompoziciji separabilnog prostora generisanog procesom; Hida-Kramerova reprezentacija samog procesa $X=X_\sigma$ tada se dobija projektovanjem tog procesa na odgovarajuće cikličke potprostore. Isto tako, teorema 3.12 svodi se, u slučaju $\dim\mathcal{H}(X)=\aleph_0$, na teoremu 2.3.

Osnovnim rezultatima rada smatramo one koji su formulisani u teoremama 3.3, 3.7, 3.11, 4.7 i 4.9; moglo bi se reći da ove teoreme predstavljaju osnovnu nit izlaganja.

Teoremom 4.11 rešen je, u "geometrijskim" terminima, problem odnosa čisto kanoničke reprezentacije procesa i čisto kanoničkih reprezentacija njegovih ortogonalnih komponenata.

Izloženi rezultati važe samo za slučajne procese koji zadovoljavaju uslov (MN). Medjutim, važi

Teorema. Neka je X slučajni proces čije vrednosti pripadaju prostoru $\mathcal{H}$, a koji osim toga ne zadovoljava nikakve uslove. Postoji jedinstveno razlaganje ovog procesa na ortogonalnu sumu slučajnih procesa X_1, X_2, X_3:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

pri čemu su zadovoljeni sledeći uslovi:

1° $\mathcal{H}(X_1; t-0) = \mathcal{H}(X_1; t)$ za svako $t \in \mathbb{R}$ i $\dim \mathcal{H}(X_1) \leq \aleph_0$;

2° $\mathcal{H}(X_2; t-0) = \mathcal{H}(X_2; t)$ za svako $t \in \mathbb{R}$;

3° X_3 je proces sa diskretnim inovacijama.

Dokaz. U teoremi 3.4 pokazano je da se proces X može, na jedinstven način, razložiti na ortogonalnu sumu procesa X^* koji zadovoljava uslov (SN) i procesa X_3 sa diskretnim inovacijama. Teoremom 3.13 pokazano je da se proces X^* može razložiti na ortogonalnu sumu procesa X_1 i X_2 koji imaju osobine navedene u 1° i 2°. QED

Rezultati, izloženi u glavi II, odnose se na proces X_1, dok se rezultati treće i četvrte glave odnose na proces X_2. Medjutim, ne znamo kako bi izgledala odgovarajuća analiza slučajnog procesa X_3.

Lako je pokazati, posle neophodnih izmena u vezi sa merama i spektralnim tipovima, da svi izloženi rezultati važe i za slučajna polja.

Prirodnu generalizaciju izloženih rezultata predstavljalo bi proučavanje vektorskih slučajnih procesa koji generišu neseparabilne prostore.

LITERATURA

1. Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве, Наука, 1966, Москва.

2. Aljančić, S., Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, 1968, Beograd.

3. Cramér, H., Stochastic Processes as Curves in Hilbert Space, Теор. вероятн. и её примен., 9, 1964, 195-204.

4. Cramér, H., A Contribution to the Multiplicity Theory of Stochastic Processes, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., vol. II, 1967, 215-221, Berkeley.

5. Cramér, H., Structural and Statistical Problems for a Class of Stochastic Processes, Princeton University Press, 1961, Princeton.

6. Cramér, H., Leadbetter, M. R., Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley, 1967, New York.

7. Doob, J. L., Stochastic Processes, Wiley, 1953, New York.

8. Halmos, P. R., Measure Theory, Van Nostrand Comp., 1954, New York.

9. Halmos, P. R., Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplisity, Chelsea Publ. Comp., 1951, New York.

10. Hanner, O., Deterministic and non-deterministic stationary random processes, Arkiv för Matematik, 1, 1949, 161-177.

11. Hida, T., Canonical Representation of Gaussian processes and their applications, Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A, 33, 1960, 109-155.

12. Ivković, Z., Rozanov, Yu. A., A Characterization of Cramér Representation of Stochastic Processes, Publ. Math. Inst., 14(28), 1973, 69-74.

13. Ивкович, З., Розанов, Ю. А., О каноническом разложении Хида-Крамера для случайных процессов, Теория вероятн. и её примен., 16, 1971, 348-353.

13.a.[1]

14. Kallianpur, G., Mandrekar, V., Multiplicity and representation theory of purely non-deterministic stochastic processes, Теория вероятн. и её примен., 10:4, 1965, 614-644.

15. Loève, M., Probanility Theory, Van Nostrand Comp., 1955 New York.

16. Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов, Наука, 1965, Москва.

17. Riesz, F., Nagy, B. SZ., Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1965, Paris.

18. Rozanov, Yu. A., Stationary random processes, Holden-Day, 1967, San Francisco.

19. Розанов, Ю. А., Теория обновляющих процессов, Наука, 1974, Москва.

20. Sierpinski, W., Cardinal and ordinal numbers, Polish scientific publishers, 1965, Warszawa.

1) Ivković, Z., Bulatović, J., Vukmirović, J., Živanović, S., Application of spectral multiplicity in separable Hilbert space to stochastic processes, Matem. inst., pos. izdanja, knj. 12, 1974, Beograd.

21. Stone, M. H., _Linear Transformations in Hilbert Space_, American Math. Soc. coll. publ., 1932, New York.