U N I V E R Z I T E T U P R I Š T I N I

Prirodno-matematički fakultet

Haljilj Turku

INTERPOLACIJA U HILBERTOVIM PROSTORIMA I HARDIJEVIM KLASAMA H^p U POLURAVNI

Naučni rukovodilac
Dr. Vojin Dajović,
red. prof. univerziteta

P R I Š T I N A

Januar 1976 god.

Ova disertacija predata je na ocenu Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Prištini u svrhu sticanja naučnog stepena doktora matematičkih nauka.

G L A V A I

U V O D N I D E O

1. U ovom radu daje se prilog rešavanju interpolacionog problema za Hilbertov prostor analitičkih funkcija sa reprodukcionim jezgrom i za Hardijeve klase u poluravni.

2. Neka je $\mathcal{H}$ - neka klasa analitičkih funkcija u oblasti D kompleksne ravni C a $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ niz različitih tačaka oblasti D. Posmatrajmo problem opisivanja prostora nizova kompleksnih brojeva

$$\mathcal{H}(Z) = \{\{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} \; : \; f \in \mathcal{H}\}$$

u zavisnosti od strukture klasa funkcija $\mathcal{H}$ i rasporeda tačaka niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ u oblasti D. U teoriji interpolacije razlikuju se dve glavne grupe problema:

a) za fiksirani niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ tačaka oblasti D i brojni niz $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ treba naći neophodne i dovoljne uslove uključivanja $W \in \mathcal{H}(Z)$ u zavisnosti od strukture klase $\mathcal{H}$;

b) za fiksiranu klasu funkcija $\mathcal{H}$ naći uslove za raspored tačaka niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ u D pod kojima je za dati prostor nizova kompleksnih brojeva S zadovoljeno uključivanje $S \subset \mathcal{H}(Z)$.

Ispitivanja problema interpolacije u prvom od navedenih pravaca, poznata su pod nazivom problemi Nevanline -

Pika [44], [69] i možemo ih sresti u radovima Danžoa (A. Denjoy), Karateodorija (C.Carathéodory), Nevanline (R. Nevanlinna), Pika (G. Pick), Šura (J. Schur) i dr. Tako, na primer, u radu Nevanline [49] i Pika [51] pokazano je da se kao neophodan i dovoljan uslov uključivanja W [illegible] (Z), $W = \{w_k\}_{k=1}$, $Z = \{z_k\}_{k=1}$, za klasu [illegible] analitičkih funkcija u otvorenom jediničnom krugu s pozitivnim realnim delom javlja nenegativnost Ermitove forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{w_i + \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j} c_i \bar{c}_j$$

za ma koji prirodan broj n.

Pomenuti matematičari su utvrdili da je nenegativnost forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{M^2 - w_i \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j} c_i \bar{c}_j \ , \qquad n = 1,2, \ldots \ ,$$

neophodan i dovoljan uslov za postojanje ograničene analitičke funkcije $f^W(z)$ u otvorenom jediničnom krugu koja zadovoljava interpolacione uslove

$$f^W(z_k) = w_k, \quad k=1,2, \ldots \ . \tag{1,1}$$

U Šurovom radu [56] sadržana je jednostavna konstrukcija ograničene analitičke funkcije $f_n^W(z)$ u krugu za ma kakav ograničeni niz $W = \{w_k\}_{k=1}$ i za proizvoljan prirodni broj n, koja zadovoljava relaciju

$$f_n^W(z_k) = w_k, \quad k = 1,2, \ldots \tag{1,2}$$

i minimiziranom vrednošću $\|f_n^W\| = \sup_{|z|=1} |f_n^W(z)|$. Detaljna izlaganja rezultata klasične teorije o funkcionalnoj interpolaciji sadržana su u monografiji Krejna-Nudeljmana(M. Krejin, A. Nudjeljman) [44]; s tim u vezi treba takođe napomenuti i radove Darena-Vilijamsa(P. Duren, D. Williams) [21] i Naga-Koranija(Sz. Nagy, A. Korányi) [69].

Što se tiče interpolacionih problema u drugome od napred navedenih pravaca, za njihovo rešavanje su se klasične metode pokazale nedovoljnim. Tako, na primer, pomenuti rezultati Nevanline, Pika i Šura ne daju nam odgovor na pitanje o postojanju niza tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ u jediničnom krugu za koje je ispunjeno uključivanje $\ell^{\infty} \subset H^{\infty}(Z)$. ($\ell^{\infty}$ - prostor ograničenih nizova, H^{∞} - klasa ograničenih analitičkih funkcija u krugu). Drugim rečima, rezultati napred navedenih istraživanja daju nam odgovor na pitanje egzistencije niza tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ u otvorenom jediničnom krugu za koje je zadovoljeno uključivanje $\ell^{\infty} \subset H^{\infty}(Z)$, tj. takvih da za ma koji ograničeni niz kompleksnih brojeva $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ postoji ograničena analitička funkcija $f^{W}(z)$ u otvorenom jediničnom krugu koja zadovoljava interpolacioni uslov (1,1).

Pitanje egzistencije i opisivanja takvih nizova Z, koji su dobili naziv interpolacioni nizovi, bilo je postav - ljeno 1956 godine od strane Buka(R. Buk) i privlačilo je pažnju mnogih matematičara, kao na primer Makntira (A.J. Macntyr), Rogozinskog (W.W. Rogosinski), Šapira (H. Shapiro), Havincona (S.J. Havinson) i drugih.

Interpolacionim nizovima postavljena im je bila hipoteza, saglasna kojoj je uključivanje $\ell^{\infty} \subset H^{\infty}(Z)$ ispunjeno za niz tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ koji dovoljno brzo teži ka granici kruga; ta pretpostavka bila je potvrđena i od Glisona (A. Glison). Što se tiče neophodnog uslova za uključivanje $H^\infty \subset M^*(Z)$, to, kako se pokazalo, u terminima brzine konvergencije tačaka niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ ka granici, ne postoji jači uslov od uslova

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty ; \tag{1,3}$$

kao što nam je poznato, neophodnost i dovoljnost za postojanje netrivijalne ograničene analitičke funkcije s nulama u tačkama $\{z_k\}$. Naime, iz rezultata Naftaljeviča (A.G. Naftaljvič) [48] i Kabajla (V. Kabaila) [34] sledi da za ma koji niz $\{r_k\}_{k=1}^\infty$, $0 < r_k < 1$, $\sum_{k=1}^\infty (1 - r_k) < \infty$ postoji niz tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ unutar jediničnog kruga takvih da je $|z_k| = r_k$, $k=1,2, \ldots$, i

$$\sup_j \prod \left| \frac{1 - \bar{z}_k z_j}{z_k - z_j} \right| < \infty , \tag{1,4}$$

odakle, na osnovu Karlesonove teoreme (L. Carleson) [8] sledi uključivanje $H^\infty \subset M^*(Z)$.

Odgovor na postavljeno pitanje od strane Buka o opisivanju interpolacionih nizova dat je 1958 godine u radovima Hajmena (W. Hayman) [31], Njumena (D. Newman) [50] i konačno u rešenoj formi, Karlesona [8]. Pokazalo se da se klasa interpolacionih nizova podudara sa klasom ravnomerno raspoređenih tačaka niza čiji su članovi unutar kruga, tj. niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ zadovoljava uslov

$$\inf_j |B_j(z_j)| > 0 \tag{1,5}$$

gde

$$B_j(z) = \prod_{k\neq j} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}$$

predstavlja Blaškeov (Blaschke) proizvod s nulama u tačkama $\{z_k\}_{k\neq j}$.

Hajmen je pokazao takođe da interpolacioni niz raspoređen na jednom radijusu jediničnog kruga potpuno karakteriše eksponencijalna konvergencija ka granici:

$$\sup \frac{1 - |z_{k+1}|}{1 - |z_k|} < \infty \; ; \qquad (1,6)$$

štaviše, uopšte je gornja relacija zadovoljena za sve interpolacione nizove koji konvergiraju ka granici kruga po bilo kojem netangetnom pravcu.

U radovima [14] i [42], umesto dokaza ekvivalenosti uslova (1,6) i uključivanja $\ell^\infty \subset H^\infty(Z)$ u slučaju konvergencije niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ ka granici kruga po bilo kojem netangentnom pravcu, posmatra se analogni interpolacioni problem za normalne funkcije. S tim u vezi Karlesonu i Garnetu (J. Garnet) pripada sledeći rezultat:

Uključivanja $\ell^\infty \subset H^\infty(Z)$ i $\ell^\infty \subset h^\infty(Z)$, gde je $h^\infty(Z)$ klasa kompleksnih ograničanih harmonijskih funkcija u jediničnom krugu, zadovoljena su istovremeno.

Neka uopštavanja navedenog rezultata pripadaju Sarosteu (D. Saroste) [55]. Veliki uticaj na daljnje razvijanje teorije funkcionalne interpolacije odigrao je rad Šapira i Šildsa (G. Shapiro, A. Shields) [57], koji pored novog dokaza Karlesonove teoreme o interpolacionim nizovima, kojoj su posvećeni osnovni odeljci u monografijama [19] i [43], sadrži postavljanje i rešenje problema ponderisane interpolacije u klasama H^p, $1 \leq p \leq \infty$, a naime: relacija (1,5) daje neophodne i dovoljne uslove za postojanje funkcije $f^W(z) \in H^p$ koja zadovoljava uslove

$$f^W(z_k) = (1 - |z_k|^2)^{-1/p} w_k, \quad k = 1,2, \dots ,$$

za ma koji niz $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Rezultati Šapira i A. Šildsa dobili su različita uopštavanja u radovima Rozenbauma (J. Rosenbaum) [52], [53] koji su posvećeni istovremenoj interpolaciji u H^p vrednosti funkcija i njihovih izvoda; Čelmers (B. Chalmers) u svojim radovima [11], [12] i [13] daje uopštavanja po interpolacionim vrednostima linearnih neprekidnih funkcionala u Hilbertovom prostoru s reprodukcionim jezgrom $K(z,\zeta)$. V. Kabajla je u svojim radovima [35], [37], [39], posebnu pažnju posvetio ponderisanoj interpolaciji u klasama H^p za $p < 1$. U radovima Akutovica (E.J. Akutowicz) i L. Karlesona [2] izučava se pitanje mogućnosti analitičkog produžavanja interpolirujućih funkcija na veću i širu oblast. Osobine nizova iz prostora $H^1(Z)$ u odnosu na sumiranje pozitivnih regularnih matrica izučavane su od Šnajdera (A. Snyder) [66]. Pomoću njih pokazana je plodotvornost primene teorije BK - prostora na rešavanje interpolacionih zadataka, i na početku je dokazana egzistencija niza tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ unutar jediničnog kruga za koje uslovi (1,5) nisu zadovoljeni (to jest, niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ne predstavlja interpolacioni niz), ali ima mesto uključivanje $\ell^{\infty} \subset H^2(Z)$.

Poslednji fakt budio je novi interes kod matematičara u vezi s pitanjem interpolacije nizova iz prostora ℓ^q funkcijama klase H^p ; u radovima [22], [63], [70] dokazana je egzistencija interpolacionog niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ za koji je zadovoljeno uključivanje $\ell^{\infty} \subset H^p(Z)$, ali $\ell^{\infty} \not\subset H^{\infty}(Z)$ za $0 < p < \infty$. Drugim rečima, rezultati A. Snajdera uopšteni su za proizvoljno $p < \infty$; neke rezultate u tom pravcu postigli A. Sedlecki (A.M. Sedleckii) [59], S. Švedenko (S.V. Švedenko) i drugi. U nedavno objavljenim radovima A. Sinklera (A. Sinclair) [68], [69] konstruisan je konkretni algoritam za nalženje ekstremalne funkcije iz klase H^p sa zadanim interpolacionim uslovima u tačkama unutar jediničnog kruga.

Nije na odmet podvući da je oslanjajući se na rezultate i na prikaz interpolacionih nizova, L. Karlesonu pošlo za rukom da reši problem "Korona" : Dokazati gustinu tačaka otvorenog jediničnog kruga u prostoru maksimalnih ideala Banahove algebre H^{∞} . Tom problemu posvećeni su i radovi [9], [10], [45].

S. Švedenko u svojim radovima [60], [62], [64] i drugih daje odgovor na pitanje koje se odnosi na interpolaciju funkcijama klase H^p, $1 < p < \infty$, nizovima prostora ℓ^r, $1 \leq r \leq \infty$, i bv; posebno pokazuje se da je uklučivanje $\ell^1 \subset H^p(Z)$ ekvivalentno tome da je za ma kakvo prirodno j, vektor $(1 - \bar{z}_j z)^{-1}$ prostora H^q, $1/p + 1/q = 1$, ravnomerno udaljen od linearnog omotača sistema vektora

$\{(1 - \bar{z}_k z)^{-1}\}_{k \neq j}$, a uključivanje $bv \subset H^p(Z)$ označuje da, ravnomerno za prirodno n, $n-1$ - dimenziona ravan prolazi kroz krajeve vektora $\{(1 - \bar{z}_j z)^{-1}\}_{j=1}^{n}$ ravnomerno je udaljena od linearnog omotača sistema vektora $\{(1 - \bar{z}_j z)^{-1}\}_{k > j}$ prostora H^q.

Neka je S - proizvoljan Banahov prostor nizova kompleksnih brojeva. koji zadovoljava uslove

(S1): konvergencija po normi prostora S obezbeđuje konvergenciju po bilo kojoj koordinati, tj. ako $\|w^n - w\|_S \to 0$ kada $n \to \infty$, tada za proizvoljno k $w_k^n \to w_k$ $(n \to \infty)$.

(S2): S je zatvoreno u odnosu na kompleksnu konjugovanost, tj. ako $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in S$, tada i $\bar{w} = \{\bar{w}_k\}_{k=1}^{\infty} \in S$.

T e o r e m a 1.1 (videti [61], str. 107). Za Banahove prostore nizova S, koje zadovoljavaju uslove (S1) i (S2) ima mesto uključivanje $S \subset \mathcal{J}(Z)$ tada i samo tada, kada je niz operatora $\{\hat{I}^n : S \to S^*\}_{n=1}^{\infty}$ ograničen po normi:

$$\sup_n \|\hat{I}^n\| < \infty$$

T e o r e m a 1.2 (videti [63], str. 137). Niz kompleksnih brojeva $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ pripada prostoru H^p, $1 < p < \infty$, tada i samo tada, kada

$$\sup_n \left\{ \sup_{a_1, \ldots, a_n \in C} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \bar{w}_k a_k\right|}{\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k (1 - \bar{z}_k z)^{-1}\right\|_q} \right\} < \infty$$

$1/p + 1/q = 1$.

L e m a 1.1 (videti [65], str. 110). Za ma kakvo prirodno n u H^p, $p > 0$, postoji jedinstvena funkcija f^j s minimalnom vrednošću $\|f^j\|_p$, koja zadovoljava uslove

$$f^j(z_k) = \delta_k^j \ , \ k = 1,2, \ldots ;$$

pri tome $\|f^j\|_p = (1 - |z_j|^2)^{1/p} |B_j(z_j)|^{-1}$.

A. Sedlecki, koristeći se rezultatima G. Šapira i A. Šildsa, dokazao je:

Da bi bilo $TH^p(0,\infty) = \ell^p$, neophodno je i dovoljno

da :

$$1^\circ \qquad 0 < \inf \operatorname{Re}(z_k) \leq \sup \operatorname{Re}(z_k) < \infty \ ,$$

$$2^\circ \qquad \inf_{n \neq m} |z_n - z_m| > 0.$$

3. Radi bolje preglednosti izlaganja, materija teorije interpolacije za Hilbertov prostor i za Hardijeve klase H^p, $1 \leq p \leq \infty$, u poluravni je raspoređena na tri glave, od kojih je prva uvodni deo. Pri tome svaka glava zasebno predstavlja po jednu celinu, a takođe i sve zajedno čine celinu.

U Glavi II pretpostavlja se u paragrafu 2.1, da je klasa funkcija $\mathcal{H}$ u oblasti D kompleksne ravni Hilbertov prostor u odnosu na skalarni proizvod (f,g) sa reprodukcionim jezgrom, tj. da postoji funkcija $K(z,\zeta)$, $z,\zeta \in D$, takva da pri proizvoljnom fiksiranom $\zeta \in D$ $K(z,\zeta) \in \mathcal{H}$ po promeljivoj z i za proizvoljnu funkciju $f(z) \in \mathcal{H}$

$$f(\zeta) = (f(z), K(z,\zeta)) \ .$$

U paragrafu 2.2 utvrdio sam neophodne i dovoljne uslove za izbor niza $\{\ell_\kappa\}$, za koje su zadovoljeni sledeći uslovi:

(a) za proizvoljni vektor $f \in \mathcal{H}$ niz $\{(f,\ell_\kappa)\} \in \ell^r$, $(r \geq 1)$;

(b) za proizvoljni niz $\{w_k\} \in \ell^r$, $r \geq 1$, postoji vektor $f \in \mathcal{H}$ koji zadovoljava interpolacioni uslov

$$(f, f_k) = w_k, \quad k = 1,2, \ldots .$$

Na osnovu tih uslova i dokazanih lema slede sledeća tvrdenja:

T e o r e m a 2.1. – Uslovi (a) za sistem vektora f_k Hilbertova prostora $\mathcal{H}$ i $r \geq 1$ zadovoljen je tada i samo tada kada Gramova matrica $((f_k, f_j))$ sistema $\{f_k\}$ definiše linearni neprekidni operator

$$\{x_k\} \longrightarrow \{\sum_k (f_k, f_j) x_k\}, \qquad (\{x_k\} \in \ell^s)$$

iz ℓ^s u ℓ^r, $1/r + 1/s = 1$.

Zato, da bi bilo ispunjen uslov (b), u svakom slučaju potrebno je da sistem $\{f_k\}$ poseduje biortogonalnu konjugovanost f^k:

$$(f^k, f_j) = \delta^k_j \qquad (k,j = 1,2, \ldots).$$

Dualna u odnosu na teoremu 2.1 je sledeća teorema:

T e o r e m a 2.2. – Uslovi (b) za sistem vektora $\{f^k\}$ Hilbertova prostora $\mathcal{H}$ i $r \geq 1$ zadovoljeni su tada i samo tada kada Gramova matrica $((f^k, f^j))$ sistema $\{f^k\}$ definiše linearni neprekidni operator

$$\{w_k\} \longrightarrow \{\sum_k (f^k, f^j) w_k\} \qquad (\{w_k\} \in \ell^r)$$

iz ℓ^r u ℓ^s, $1/r + 1/s = 1$.

U paragrafu 2.3. posmatrani su rezultati prethodnog paragrafa za poseban slučaj Hilbertova prostora analitičkih funkcija $f(z)$ u poluravni $\{Re(z) > 0\}$ – Hardijevu klasu funkcija H^2 sa skalarnim proizvodom

$$(f,g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(iy)\overline{g(iy)}\,dy,$$

($f(iy)$ i $g(iy)$ granične vrednosti funkcija $f(z)$ i $g(z)$ iz H^2) i reprodukcionim jezgrom $(z + \bar{\zeta})^{-1}$. U ovom paragrafu posmatrano je pitanje uključivanja ℓ^r u $H^2(Z)$ i $H^2(Z)$ u ℓ^r, $r \geq 1$.

Iz teoreme 2.3 proizilaze sledeće posledice:

1) Za uključivanje $H^2(Z)$ u ℓ^r, $1 \leq r \leq \infty$, neophodno je i dovoljno da preslikavanje

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \Big\{\sum_{k=1}^{\infty}(z_j + \bar{z}_k)^{-1}x_k\Big\}_{j=1}^{\infty}$$

definiše linearni neprekidni operator iz $\ell^{r/(r-1)}$ u ℓ^r.

2) Ako je $\inf\limits_k \operatorname{Re}(z_k) = 0$, tada uključivanje $H^2(Z)$ u ℓ^r nije zadovoljeno ni za ma kakvo r.

3) Neophodan uslov za uključivanje $H^2(Z)$ u ℓ^r za $r < 2$ je $\operatorname{Re}(z_k) \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$.

Očigledno, neophodan uslov za uključivanje ℓ^r u $H^2(Z)$ za proizvoljno r je konvergencija blaškeovog proizvoda

$$B_j(z) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \frac{|1 - z_k|^2}{1 - z_k^2}\,\frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k}, \quad j=1,2,\ldots$$

s nulama u tačkama $\{z_k\}_{k\neq j}$.

Iz leme 2.3 sledi da je za proizvoljno j

$$f^j(z) = \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)}\,\frac{2\operatorname{Re}(z_j)}{z + \bar{z}_j}$$

jedinstvena funkcija minimalne norme u H^2 koja zadovoljava interpolacione uslove

$$f^j(z_k) = \ell^j_k, \qquad k = 1,2, \dots .$$

Elementarnim računanjem (imajući u vidu skalarni proizvod) možemo pokazati da je

$$(f^k, f^j) = \frac{4\,\mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\,\overline{B_j(z_j)}}\;\frac{1}{z_k + \bar{z}_j}, \qquad k,j=1,2,\dots$$

Iz teoreme 2.4, slede sledeća tvrđenja:

1) Ako je $\sup_k \mathrm{Re}(z_k) = \infty$, tada uključivanje ℓ^r u $H^2(.)$ nije zadovoljeno ni za ma kakvo r.

2) Neophodan uslov za uključivanje ℓ^r u $H^2(Z)$ za $r > 2$ jeste $\mathrm{Re}(z_k)|B_k(z_k)|^{-2} \longrightarrow 0 \ (k \longrightarrow \infty)$.

3) Ako niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka poluravni $\mathrm{Re}(z_k) > 0$ zadovoljava uslove:

(a) $0 < \ell < \mathrm{Re}(z_k) < L < \infty$

i

(b) $|z_k - z_n| \geqslant \delta > 0$,

tada, za ma kakvu funkciju $f \in H^2$, $\{f(z_k)\} \in \ell^2$.

4) Ako je $0 < \ell < \mathrm{Re}(z_k) < L < \infty$ i $|z_n - z_k| \geqslant \delta > 0$, matrice (f^j, f^k) i (ℓ_j, ℓ_k) su ekvivalentne.

5) Neka je $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ niz različitih tačaka poluravni $\mathrm{Re}(z_k) > 0$, $k = 1,2, \dots$, i neka je za $k=1,2,\dots$,

$$(f, \ell_k) = f(z_k), \qquad f \in H^2;$$

tada je

$$b^n_{jj} = \frac{2\,\mathrm{Re}(z_j)}{|B_j(z_j)|^{-2}} .$$

6) Ako je $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_k).(1 + |z_k|^2) < \infty$, tada za ma kakav prirodan broj j postoji u H^2 jedinstvena funkcija f_2^j minimalne norme koja zadovoljava uslove

$$f_2^j(z_k) = \delta_k^j, \quad k = 1,2, \dots ,$$

i

$$\|f_2^j\|^2 = 2\operatorname{Re}(z_j)\,|B_j(z_j)|^{-2},$$

gde je $B_j(z)$ Blaškeov proizvod s nulama u tačkama $\{z_p\}_{p\neq j}$.

7) Uključivanje $\ell^1 \subset H^2(Z)$ ekvivalentno je zadovoljavanju uslova

$$\sup_k \frac{2\operatorname{Re}(z_j)}{|B_j(z_j)|^{-2}} < \infty$$

8) Za $r > 2$ uključivanje $\ell^r \subset H^2(Z)$ može imati mesto samo kada je zadovoljen uslov $\lim_{j\to\infty} \operatorname{Re}(z_j)|B_j(z_j)|^{-2}=0$.

U paragrafu 2.4 navedeno je nekoliko tvrđenja koja se odnose na interpolaciona svojstva analitičkih funkcija za Hardijeve klase $\mathcal{H}^p$ u gornjoj poluravni $\{\xi\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}(\xi) > 0\}$. Tu se dokazuje da se poznata svojstva analitičkih funkcija Hardijevih klasa H^p u jediničnom krugu ne mogu neposredno (putem bilinearnog preslikavanja) preneti na slučaj poluravni. Interpolacioni problem za oba slučaja možemo paralelno posmatrati, i za rešavanje tog problema koristićemo analogne metode.

1) Jedinstvena funkcija minimalne norme prostora $\mathcal{H}^2(\mathfrak{Z})$, koja zadovoljava uslove

$$f^j(\xi_k) = \delta_k^j, \quad k = 1,2, \dots ,$$

je funkcija koja leži u zatvorenom linearnom omotaču sistema vektora $\{ i(\xi - \bar{\xi}_k)^{-1} \}_{k=1}^{\infty}$ i takva je da je

$$\|f^j\|^2 = 2\,\mathrm{Im}\,\xi_j \prod_{p \neq j} \left| \frac{\xi_j - \bar{\xi}_p}{\xi_j - \xi_p} \right|^2 .$$

2) Za proizvoljan broj n različitih tačaka $1,\ 2,\ \dots,\ n$ gornje poluravni i za ma koji vektor $w = \{ w_1, w_2, \dots, w_n \} \in C^n$ u prostoru $\mathcal{H}^p$, $1 < p < \infty$, postoji jedinstvena funkcija minimalne norme

$$\|f_n^w\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n^w(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

koja zadovoljava uslove

$$f_n^w(\xi_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

i

$$M_q^{-1} \|f_n^w\|_p \leqslant \sup_{a_k \in \mathbb{C}} \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{w}_k \right|}{\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \dfrac{i}{\xi - \bar{\xi}_k} \right\|_q} \leqslant \|f_n^w\|_p ,$$

gde $M_q \geqslant 1$ zavisi samo od q, $1/p + 1/q = 1$.

3) Neka je $g(x) \in L^q(-\infty, \infty)$, $1 < q < \infty$; tada postoje na jedinstven način definisane funkcije $f_1(\xi)$ i $f_2(\xi) \in \mathcal{H}^q$ takve da je

$$g(x) = f_1(x) + \overline{f_2(x)}$$

i

$$\|f_i\|_q \leqslant M_q \|g\|_q , \quad i = 1, 2,$$

gde $M_q \geqslant 1$ zavisi samo od q.

4. Glava III posvećena je problemu interpolacije analitičkih funkcija $f(z)$ klase H^p u poluravni: izučava se strukturalna zavisnost prostora $H^p(Z)$, $p > 0$, i izbora niza $Z = \{ z_k \}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka u poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Za $p \geq 1$, H^p je Banahov prostor sa normom $\|f\|_p$; ako je $p < 1$, tada je u odnosu na invarijantnu metriku, H^p potpuni linearni metrički prostor.

Skoro svugde na imaginarnoj osi postoje granične vrednosti $f(iy)$ funkcije $f(z)$ iz H^p; pri tome je $f(iy) \in L^p(-\infty, \infty)$; štaviše, $\|f(iy)\|_{L^p(-\infty,\infty)} = \|f(z)\|_p$.

Izbor niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka poluravni $Re(z) > 0$ definiše prostor nizova

$$H^p(Z) = \left\{ \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} : f \in H^p \right\}.$$

Ova glava posvećena je pitanjima uključivanja $H^p(Z)$ u ℓ^r i ℓ^r u $H^p(Z)$, $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$.

Za dalje razvijanje teorije interpolacije pokazalo se korisnim proširiti klasu prostora nizova $H^p(Z)$. Naime, neka je $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ niz pozitivnih brojeva i $\alpha \geq 0$; po definiciji je

$$H^p(Z,\Lambda) = \left\{ \{\lambda_k^{\alpha} f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} : f \in H^p \right\}.$$

Ako je $\lambda_k \equiv 1$ ili $\alpha = 0$, tada je, očigledno, $H^p(Z,\Lambda) = H^p(Z)$.

Navešću neke od važnijih rezultata ove glave:

1) Ako je $H^p(Z,\Lambda) \subset \ell^r$, $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$, tada je preslikavanje

$$f \longmapsto \{\lambda_k^{\alpha} f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}, \qquad f \in H^p$$

ograničeni operator iz Banahova(potpuni linearni metrički, ako je $p < 1$) prostora H^p u Banahov(potpuni linearno metrički ako je $r < 1$) prostor ℓ^r.

2) Ako je $ps = qr$ i $p\alpha = q\beta$, $0 < p,q < \infty$,

$0 < r,s < \infty$, $\alpha, \beta > 0$, tada su uključivanja $H^p(Z,\Lambda^{(\alpha)})$ u ℓ^r i $H^q(Z,\Lambda^{(\beta)})$ u ℓ^s ekvivalentna.

3) Ako je niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ takav da $\inf\limits_k \operatorname{Re}(z_k) = 0$ tada $H^p(Z) \not\subset \ell^r$ ni za ma kakvo $p,r > 0$, $p < \infty$.

4) Uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, ekvivalentno je tome da za ma kakvu funkciju $g(z) \in H^q$, $1/p + 1/q = 1$,

$$\left\| \{ 2\operatorname{Re}(z_k) |B_k(z_k)|^{-1} g(z_k) \}_{k=1}^{\infty} \right\|_s \leq A \|g\|_q ,$$

gde A ne zavisi od g i $1/r + 1/s = 1$.

T e o r e m a 3.1 - Ako su elementi niza $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ definisani relacijom

$$\Lambda_k = 2\operatorname{Re}(z_k) |B_k(z_k)|^{-1}, \quad k = 1,2, \ldots ,$$

i ako je $1 < p < 2$ i $1 \leq r \leq p/(2-p)$ ili $2 \leq p < \infty$ i $1 \leq r \leq \infty$, tada je uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$ za niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ekvivalentno uključivanju $H^2(Z,\Lambda^{(\alpha)})$ u ℓ^s, gde je $\alpha = p/2(p-1)$ i $s = 2(p-1)r/p(r-1)$.

Paragraf 3.3 je uopštavanje paragrafa 2.3; ustvari, ovde imamo proširenje prostora nizova $H^p(Z)$ uvođenjem niza pozitivnih brojeva $\Lambda = \{\lambda_k^{(\alpha)}\}_{k=1}^{\infty}$.

Dalje, koristeći prethodne rezultate, u paragrafu 3.4 se govori o uključivanje $H^p(Z)$ u ℓ^r.

T e o r e m a 3.3.- Uključivanje H^p u ℓ^r, $0 < p < \infty$, $p/2 \leq r < \infty$, zadovoljeno je tada i samo tada kada je preslikavanje

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} \nu_k \right\}_{j=1}^{\infty} \qquad (*)$$

je ograničeni operator iz $\ell^{2r/(2r-p)}$ u $\ell^{2r/p}$.

Iz ove teoreme proizlaze sledeće posledice:

1) Uključivanje $H^p(Z)$ u ℓ^r, $0 < p < \infty$, ekvivalentno je ograničenosti operatora (*) kao preslikavanje iz ℓ^2 u ℓ^2 ; to jest, drugim rečima, ravnomernoj po n ograničenosti sopstvenih vrednosti nenegativne Ermitove matrice $((z_j + \bar{z}_k)^{-1})_{j,k=1}^{\infty}$.

2) Ako je $H^p(Z) \subset \ell^r$ za $r < p < \infty$, tada

$$\{(\mathrm{Re}(z_k))^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{r/(p-r)}.$$

3) Ako je niz tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}$ takav da

$$|\arg(z_k)| \leq \varphi < \pi/2 , \quad k=1,2, \dots ,$$

tada uključivanje $H^p(Z)$ u $\ell^{p/2}$, $0 < p < \infty$, ekvivalentno zadovoljavanju uslova

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} | z_j + \bar{z}_k|^{-1} < \infty .$$

T e o r e m a 3.4. - Ako je $1 < p \leq 2$ i $1 \leq r \leq p/(2-p)$ ili je $2 \leq p < \infty$ i $1 \leq r \leq \infty$, tada uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$ zadovoljeno tada i samo tada kada preslikavanje

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{Re}(z_j)\mathrm{Re}(z_k)}{B_j(z_j)B_k(z_k)} \right)^{\alpha} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} \nu_k \right\}_{j=1}^{\infty} \quad (**)$$

definiše ograničeni operator iz $\ell^{2(p-1)r/(pr+p-2r)}$ u $\ell^{2(p-1)r/p(r-1)}$, $\alpha = p/2(p-1)$.

Iz ove teoreme proizlaze sledeća tvrđenja:

1) Uključivanje ℓ^p u $H^p(Z)$, $1 < p < \infty$, ekvivalentno je ograničenosti operatora (**) kao preslikavanje ℓ^2 u ℓ^2, to jest, drugim rečima, ravnomernoj po n ogra-

ničenosti sopstvenih vrednosti pozitivne Ermitove matrice

$$\left(\left|\frac{\operatorname{Re}(z_j)\operatorname{Re}(z_k)}{B_j(z_j)B_k(z_k)}\right|^{\alpha}(z_j+\bar{z}_k)^{-1}\right)_{j,k=1}^{n}, \qquad \alpha = p/2(p-1).$$

2) Ako je $\ell^r \subset H^p(Z)$ za $r > p > 1$, tada

$$\left\{\operatorname{Re}(z_k)\,|B_k(z_k)|^{-p}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{r/(r-p)}.$$

3) Ako tačke niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ kada $k \to \infty$ teže imaginarnoj osi po netangentnom pravcu, tada je uključivanje

$$\ell^{p/(2-p)} \quad u \quad H^p(Z), \quad 1 < p < 2;$$

$$\ell^{\infty} \quad u \quad H^p(Z), \quad 2 \leqslant p < \infty$$

ekvivalentno ispunjavanju uslova

$$\sum_{j,k=1}\left|\frac{\operatorname{Re}(z_j)\operatorname{Re}(z_k)}{B_j(z_j)B_k(z_k)}\right|^{p/2(p-1)} |z_j+\bar{z}_k|^{-1} < \infty .$$

Pri izučavanju uključivanja ℓ^r u $H^p(Z)$ bitno je proceniti normu (odnosno kvazinormu, ako je $p < 1$) funkcije $f_p^j(z)$ klase H^p koja zadovoljava interpolacione uslove

$$f_p^j(z_k) = \delta_k^j, \quad j,k = 1,2, \ldots .$$

U daljnjem radu je pod pretpostavkom da je za niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka poluravni $\operatorname{Re}(z) > 0$ zadovoljen uslov $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_k)(1+|z_k|^2)^{-1} < \infty$, pokazano da za ma koje prirodno j u klasi H^p, $0 < p < \infty$, postoji jedinstvena funkcija $f_p^j(z)$ minimalne norme $\|f_p^j\|_p^p$, koja zadovoljava interpolacione uslove i takva je da je

$$f_p^j(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z_j)}{z+\bar{z}_j}\right)^{2/p} \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)}$$

i

$$\|f_p^j\|_p^p = 2\,\mathrm{Re}(z_j)|B_j(z_j)|^{-p}.$$

Paragraf 3.5. tretira pitanje interpolacije, to jest pitanje uključivanja $H^p(Z)$ u ℓ^r, $r < p < \infty$, u slučaju kada nije zadovoljen uslov $\mathrm{Re}(z_k) \longrightarrow \infty$ kada $k \longrightarrow \infty$.

Na osnovu navedenog, navešćemo sledeća tvrđenja:

1) Neka je niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ takav da

$$0 \leq \ell < \mathrm{Re}(z_k) < L \leq \infty, \quad k = 1,2, \dots, \tag{a}$$

i neka je broj $N(Z,n)$ tačaka z_k koje su raspoređene u pojasu $n \leq \mathrm{Im}(z) \leq n+1$ ravnomerno po n ograničen:

$$N(Z,n) \leq M, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \tag{b}$$

tada $H^p(Z) \subset \ell^p$ za ma kakvo $p > 0$.

Ako niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ zadovoljava uslov (a), tada su uslovi (b) zadovoljeni, specijalno, ako je za dati niz zadovoljen i uslov

$$|z_j - z_k| \geq \delta > 0, \quad j \neq k. \tag{c}$$

2) Ako su zadovoljeni uslovi (a) i (b), tada je

$$\inf_k |B_k(z_k)| > 0.$$

T e o r e m a 3.5. - Uslovi (a) i (c) neophodni su i dovoljni da bi bilo $H^p(Z) = \ell^p$, $0 < p < \infty$.

5. Pri dobijanju navedenih rezultata korišćeni su rezultati iz teorije interpolacije, pre svega rezultati L. Karlesona, G. Šapira i A. Šildsa, A. Snajdera, P. Darena (P. Duren) i D. Vilijemsa(D. Williams), Tajlora (B.Taylor, kao i najnoviji rezultati V. Kabajle, A. Sedleckoga, S. Švedenka i dr.

Rezultati predstavljeni u ovom radu saopšteni su na

Naučno-istraživačkom seminaru Katedre matematike Prirodno-matematičkog fakulteta u Prištini; takođe, deo navedenih rezultata saopšten je na VI Kongresu matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, održanom od 28. avgusta do 2. septembra 1975. godine u Novom Sadu.

Deo ovih rezultata objavljen je u radovima autora [71], [72] i izložen još u dva druga rada koja u bibliografiji nisu navedena, a predata su za štampu.

G L A V A II

INTERPOLACIJA U HILBERTOVOM PROSTORU

2.1. Osnovna obeležavanja

1. Neka je klasa $\mathcal{H}$ kompleksnih funkcija u oblasti D kompleksne ravni Hilbertov prostor u odnosu na skalarni proizvod (f,g). Pretpostavimo da ma kakvom $\zeta \in D$ korespondiramo preslikavanjem odgovarajuću funkciju $f \in \mathcal{H}$ čija vrednost u tački ζ definiše u Hilbertovom prostoru ograničeni funkcional. Kao što je poznato (videti, na primer, [5], [75]), u tom slučaju postoji jedinstvena funkcija $K(z,\zeta)$; $z, \zeta \in \mathcal{H}$, koju karakterišu sledeći uslovi:

a) za ma koje fiksirano $\zeta \in D$ $K(z,\zeta)$ kao funkcija sa promenljivom z pripada prostoru $\mathcal{H}$;

b) za ma koju funkciju $f \in \mathcal{H}$ i za ma koje $\zeta \in D$,

$$f(\zeta) = (f(z), K(z,\zeta)), \tag{2,1}$$

funkcija $K(z,\zeta)$ se naziva reprodukciono jezgro prostora $\mathcal{H}$.

Kao tipične primere možemo navesti sledeće prostore funkcija:

1) Hardijevu klasu H^2 analitičkih funkcija $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ u jediničnom krugu, to jest klasu funkcija koja zadovoljava uslov

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 .$$

za $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ i $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ iz H^2

$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k$ i $K(z,\zeta) = (1 - \bar{\zeta} z)^{-1}$.

2) Klasu h^2 kompleksnih harmonijskih (to jest, koje zadovoljavaju Laplasovu jednakost $\partial^2 f / \partial z \partial \bar{z} = 0$) funkcija $f(z)$ u jediničnom krugu, čije granične vrednosti $f(e^{it})$ pripadaju klasi $L^2(-\pi,\pi)$.

U odnosu na skalarni proizvod

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})}\, dt$$

h^2 je Hilbertov prostor sa reprodukcionim jezgrom

$$K(z,\zeta) = \frac{1 - |\zeta|^2 |z|^2}{1 - |z|^2} \; ; \tag{2,2}$$

pri tome relacija (1,1) u tom slučaju nije ništa drugo do Poasonova formula

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\, dt, \tag{2,3}$$

$\zeta = re^{i\theta}$.

Bergmanova (Bergman) klasa A_2 analitičkih funkcija $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ u jediničnom krugu koje zadovoljavaju uslove

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^2\, dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1}$$

sa skalarnim proizvodom

$$(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \bar{b}_k}{k+1} ,$$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$; $K(z,\zeta) = (1 - \bar{\zeta} z)^{-2}$.

4) Klasa $\mathcal{D}$ analitičkih funkcija $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $f(0) = 0$, koje imaju ograničen Dirihleov integral

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f'(z)|^2 \, dxdy = \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2$$

za $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ i $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ iz

$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k \bar{b}_k$, a $K(z,\zeta) = -\ln(1 - \bar{\zeta} z)$.

5) Hardijevu klasu $\mathcal{H}^2$ analitičkih funkcija u gornjoj poluravni $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$, koja ima skoro svugde na realnoj osi granične vrednosti $f(x) \in L^2_{(-\infty,\infty)}$; uvođenjem skalarnoga proizvoda

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} \, dx, \qquad f,g \in \mathcal{H}^2,$$

$\mathcal{H}^2$ postaje Hilbertov prostor sa reprodukcionim jezgrom $K(z,\zeta) = i(z - \bar{\zeta})^{-1}$.

6) Hardijeva klasa $H^2\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ analitičkih funkcija $f(z)$ u poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$, koja ima skoro svugde na imaginarnoj osi garnične vrednosti $f(iy) \in L^2_{(-\infty,\infty)}$; uvođenjem skalarnog proizvoda

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(iy)\overline{g(iy)} \, dy, \qquad f,g \in H^2,$$

$H^2\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ postaje Hilbertov prostor sa reprodukcionim jezgrom $K(z,\zeta) = (z + \bar{\zeta})^{-1}$.

2. U dalnjem razmatranju pretpostavićemo da je sistem vektora $\{K(z,\zeta)\}_{\zeta \in D}$ prostora $\mathcal{H}$ linearno nezavisan; ovaj uslov zadovoljavaju delimično prethodno navedeni primeri prostora funkcija (u slučaju klase $\mathcal{D}$ u primeru 4, iz sistema vektora $\{K(z,\zeta)\}_{\zeta \in D}$ potrebno je isključiti nula-vektor, koji

odgovara tački $\xi = 0$).

Za ma koji niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka oblasti D prostor nizova $\mathcal{H}(Z)$ određen je na sledeći način:

$$\mathcal{H}(Z) = \left\{ \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} \quad : \quad f \in \mathcal{H} \right\},$$

to jest niz kompleksnih brojeva $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ pripada prostoru $\mathcal{H}(Z)$ u tom i samo u tom slučaju kada je za ma kakvu funkciju $f \in \mathcal{H}$ zadovoljena relacija

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1,2, \dots . \tag{2,4}$$

2.2. Neka svojstva interpolacije funkcijama minimalne norme

1. U ovome paragrafu posmatra se sledeći interpolacioni problem:

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\{\ell_k\}$ niz vektora Hilbertova prostora $\mathcal{H}$. Treba utvrditi neophodne i dovoljne uslove za izbor niza $\{\ell_k\}$ tako da:

(a) za proizvoljni vektor $f \in \mathcal{H}$ niz $\{(f,\ell_k)\} \in \ell^r$ $(r \geq 1)$;

(b) Za proizvoljni niz $\{w_k\} \in \ell^r$ $(r \geq 1)$ postoji vektor $f \in \mathcal{H}$ koji zadovoljava interpolacioni uslov

$$(f,\ell_k) = w_k, \qquad k = 1,2, \dots . \tag{2,5}$$

Taj problem rešava naša teorema 2.1, u čijem ćemo dokazu koristiti Lemu 2.1 i Lemu 2.2.

L e m a 2.1. - Ako su ispunjeni interpolacioni uslovi

(2,5) za brojni niz $W = \{w_k\}$, tada u $\mathcal{H}$ postoji jedinstveni vektor f^W minimalne norme koji zadovoljava uslove (2,5) i pri tome pripada zatvorenom linearnom omotaču L u $\mathcal{H}$ sistema vektora $\{\ell_k\}$.

D o k a z. - Ako vektor $f \notin L$ zadovoljava uslov (2,5), tada njegova ortogonalna projekcija f^W na potprostor $L \subset \mathcal{H}$ takođe zadovoljava taj uslov, pri čemu je $\|f^W\|_{\mathcal{H}} < \|f\|_{\mathcal{H}}$. Ako f_1^W i f_2^W pripadaju zatvorenom linearnom omotaču L i predstavljaju rešenje interpolacionog uslova (2,5), tada je vektor $f_1^W - f_2^W \in L$ ortogonalan na svaki vektor $\{\ell_k\}$, otkuda sledi da je $f_1^W - f_2^W = 0$.

L e m a 2.2. - Uslovi (a) i (b) ekvivalentni su respektivno sledećim uslovima:

(A) preslikavanje $f \longrightarrow \{(f,\ell_k)\}$ $(f \in \mathcal{H})$ je linearni neprekidni operator iz $\mathcal{H}$ u ℓ^r;

(B) U oznakama Leme 2.1, preslikavanje $W = \{w_k\} \longmapsto f^W$ $(W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^r)$ je linearni neprekidni operator iz ℓ^r u $\mathcal{H}$.

D o k a z. - Linearnost preslikavanja (B) neposredno proizlazi iz leme 2.1; neprekidnost oba preslikavanja neposredna je posledica teoreme o zatvorenom grafu (videti [75], Gl.2).

2. Sada ćemo dokazati sledeću teoremu:

T e o r e m a 2.1. - Uslovi (A) iz Leme 2.2 za sistem vektora $\{\ell_k\}$ Hilbertova prostora $\mathcal{H}$ i $r \geqslant 1$ ispunjeni su u tom i samo u tom slučaju kada Gramova matrica $((\ell_k,\ell_j))$ sistema $\{\ell_k\}$ definiše linearni neprekidni operator

$$\{x_k\} \longrightarrow \Big\{\sum_k (\ell_k, \ell_j) x_k\Big\}, \qquad (\{x_k\} \in \ell^s) \tag{2,6}$$

iz ℓ^s u ℓ^r, $1/r + 1/s = 1$.

D o k a z. - Na osnovu Leme 2.1 i Leme 2.2, uslov (A) je ekvivalentan tome da za proizvoljnu konačnu linearnu kombinaciju vektora $f = \sum_k x_k \ell_k$ sistema $\{\ell_k\}$ niz $\{(f, \ell_j)\} \in \ell^r$, pri čemu

$$\|\{(f, \ell_j)\}\|_{\ell^r} \leqslant M \|f\|_{\mathcal{H}},$$

gde M ne zavisi od f. Drugim rečima, za proizvoljni finitni niz $\{x_k\}$ je

$$\Big\|\sum_k (\ell_k, \ell_j) x_k\Big\|^2_{\ell^r} \leqslant M^2 \Big(\sum_{k,j} (\ell_k, \ell_j) x_k \bar{x}_j\Big). \tag{2,7}$$

S druge strane, za proizvoljni finitni niz $\{x_k\}$ je

$$\Big(\sum_{k,j} (\ell_k, \ell_j) x_k \bar{x}_j\Big) \leqslant \Big\|\Big\{\sum_k (\ell_k, \ell_j) x_k\Big\}\Big\|_{\ell^r} \|\{x_k\}\|_{\ell^s}. \tag{2,8}$$

Upoređujući (2,7) i (2,8) zaključujemo da je prilikom zadovoljavanja uslova (A) sužavanje preslikavanja (2,6) na potprostor finitnih nizova $\{x_k\}$ ograničeno:

$$\Big\|\Big\{\sum_k (\ell_k, \ell_j) x_k\Big\}\Big\|_{\ell^r} \leqslant M^2 \|\{x_k\}\|_{\ell^s}. \tag{2,9}$$

Posebno, za ma koje fiksirano j je $\{(\ell_k, \ell_j)\} \in \ell^r$, otkuda sledi konvergencija reda $\sum_k (\ell_k, \ell_j) x_k$ za ma koji (finitnost nije obavezna) niz $\{x_k\} \in \ell^s$ s invarijantnošću nejednakosti (2,9).

Obrnuto, ako je preslikavanje (2,6) ograničeno, tj. za ma koji niz $\{x_k\} \in \ell^s$ je zadovoljena nejednakost (2,9) s nekom konstantom M, tada matrica $((\ell_k, \ell_j))$ definiše na ℓ^s nenegativnu ograničenu kvadratnu formu

$$0 \leqslant \sum_{k,j} (\ell_k, \ell_j) y_k \bar{y}_j \leqslant M^2 \|\{y_k\}\|^2_{\ell^s}, \quad (\{y_k\} \in \ell^s)$$

otkuda, koristeći Koši-Švarcovu nejednakost, dobijamo nejednakost

$$\left|\sum_{k,j} (\ell_k, \ell_j) x_k \bar{y}_j\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k,j} (\ell_k, \ell_j) x_k \bar{x}_j\right) \left(\sum_{k,j} (\ell_k, \ell_j) y_k \bar{y}_j\right) \leqslant \tag{2,10}$$

$$\leqslant M^2 \|\{y_k\}\|^2_{\ell^s} \left(\sum_{k,j} (\ell_k, \ell_j) x_k \bar{x}_j\right); \quad \left(\{x_k\}, \{y_k\} \in \ell^s\right).$$

Prelazeći, u relaciji (2,8), ka tačnoj gornjoj međi preko niza $\{y_k\}$ iz jedinične lopte(sfere) prostora ℓ^s, dobijamo traženu nejednakost (2,7).

Time je tvrđenje teoreme u potpunosti dokazano.

N a p o m e n a. Da bi bio ispunjen uslov (B) u svakom slučaju je potrebno da sistem $\{\ell_k\}$ poseduje biortogonalnu konjugovanost sa f^k:

$$(f^k, \ell_j) = \delta^k_j \quad (k, j = 1, 2, \ldots). \tag{2,11}$$

Na osnovu Leme 2.1, sistem vektora $\{f^k\}$ jednoznačno se definiše ako zahtevamo da svi vektori f^k pripadaju zatvorenom linearnom omotaču sistema $\{\ell_k\}$.

3. Dualna Teoremi 2.1 je sledeća teorema:

T e o r e m a 2.2. - Uslovi (B) za sistem vektora $\{f^k\}$ Hilbertova prostora $\mathcal{H}$ i $r \geqslant 1$ zadovoljeni su tada i samo kada Gramova matrica $((f^k, f^j))$ sistema $\{f^k\}$ definiše linearni neprekidni operator

$$\{w_k\} \longmapsto \left\{\sum_k (f^k, f^j) w_k\right\} \quad (\{w_k\} \in \ell^r) \tag{2,12}$$

iz ℓ^r u ℓ^s, $1/r + 1/s = 1$.

D o k a z. - Na osnovu Leme 2.1, Leme 2.2 i osobina slaboj kompaktnosti jedinične sfere Hilbertova prostora, uslov (B) ekvivalentan je postojanju konstante $M > 0$ takve da

$$\Big\| \sum_{k=1} f^k w_k \Big\|_H \leq M \|\{w_k\}\|_{\ell^r} \qquad (\{w_k\} \in \ell^r)$$

ili

$$\sum_{k,j=1} (f^k,f^j) w_k \bar{w}_j \leq M^2 \|\{w_k\}\|^2_{\ell^r}. \tag{$*$}$$

Na osnovu nenegativne definisane matrice $((f^k,f^j))$ nejednakost $(*)$ ekvivalentna je tome da za ma koji niz, tj. $\{w_k\}, \{M_j\} \in \ell^r$

$$\Big| \sum_{k,j=1} (f^k,f^j) w_k \bar{M}_j \Big| \leq M^2 \|\{w_k\}\|_{\ell^r} \|\{M_j\}\|_{\ell^r} .$$

Dalji dokaz teoreme izvodi se potpuno analogno dokazu teoreme 2.1.

2.3. Neke interpolacione osobine funkcija iz klase H^2 u poluravni

1. Analitička funkcija $f(z)$ u poluravni $\{Re(z) > 0\}$ po definiciji pripada klasi H^2 ako je

$$\|f\|_{H^2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x > 0} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dy \right)^{1/2} .$$

H^2 je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(f,g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(iy)\overline{g(iy)} \, dy,$$

gde su $f(iy)$ i $g(iy)$ granične vrednosti funkcija $f(z)$ i $g(z)$ iz H^2(videti [43]). Neke od rezultata dobijenih za slučaj $p = 2$ lako možemo preneti na slučaj za proizvoljno p (videti [43], [57]).

Izbor niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka poluravni $\{Re(z) > 0\}$ definiše prostor nizova kompleksnih brojeva

$$H^2(Z) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} \ : \ f \in H^2 \right\}.$$

Neka svojstva prostora $H^2(Z)$ za klasu H^2 u jediničnom krugu razmatrana su u [61]. U ovome paragrafu razmatraćemo problem uključivanja ℓ^r u $H^2(Z)$ i $H^2(Z)$ u ℓ^r, $1 < r < \infty$. Rešenje tog problema daju naše teoreme 2,3; 2,4 i 2.5 u čijem dokazu koristimo odnosne leme.

Neka je $Re(\zeta) > 0$; neposredno se može proveriti da, po promenljivoj z, $(z + \bar{\zeta})^{-1} \in H^2$ i da je za ma koju funkciju $f(z) \in H^2$

$$f(\zeta) = (f(z), (z + \bar{\zeta})^{-1}).$$

Na taj način, prostor H^2 jednoznačno je određen sistemom vektora $\{(z + \bar{\zeta})^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ prostora H^2.

L e m a 2.3. - Ako je za brojni niz $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ zadovoljen interpolacioni uslov

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2,13}$$

u klasi H^2, tada u H^2 postoji jedinstvena funkcija $f^W(z)$ minimalne norme koja takođe zadovaljava uslov (2,13), i pri tome $f^W(z)$ pripada zatvorenom linearnom omotaču L u H^2 sistema vektora $\{(z + \bar{z}_k)^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$.

D o k a z. Pošto je L zatvoreni potprostor prostora H^2, to ma koju funkciju $f \in H^2$ možemo predstaviti u obliku

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in L, \quad f_2 \perp L$$

(videti [43]). Ako f zadovoljava uslov (2,13), tada i f_1 zadovoljava taj uslov i pri tome je

$$\|f_1\| \leqslant \|f\| \text{ ako } f \notin L.$$

Na taj način, sve ekstremalne funkcije koje zadovoljavaju uslov (2,13) pripadaju linearnom zatvorenom omotaču L. Da bismo dokazali jedinstvenost, dovoljno je pokazati da, ako $g \in L$ i $g(z_k) = 0$, $k = 1,2, \dots$, tada $g = 0$.

Za svaki proizvoljno mali pozitivan broj postoji konačna linearna kombinacija $\sum \alpha_k(z + \bar{z}_k)^{-1}$ takva da je

$$\left\| g - \sum \alpha_k(z + \bar{z}_k)^{-1} \right\| < \varepsilon .$$

Pošto je $g(z_k) \perp \{\alpha_k(z + \bar{z}_k)^{-1}\}$, to je

$$\|g\|^2 = (g,g) \leqslant \|g\| \left\| g - \sum \alpha_k(z + \bar{z}_k)^{-1} \right\| < \|g\| \varepsilon .$$

Dakle $\|g\| < \varepsilon$. Na osnovu proizvoljnosti ε, $g = 0$.

L e m a 2,4. Uključivanje $H^2(Z)$ u ℓ^r i ℓ^r u $H^2(Z)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, ekvivalentno je sledećim odgovarajućim uslovima:

(a) preslikavanje $f \longmapsto \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je linearni neprekidni operator iz H^2 u ℓ^r;

(b) preslikavanje $w \longmapsto f^w$ je linearni neprekidni operator iz ℓ^r u H^2.

D o k a z ove leme neposredno sledi iz teoreme o zatvorenom grafiku (videti [75]).

Sada ćemo dokazati sledeću teoremu:

T e o r e m a 2.3. - Uslovi $H^2(Z) \subset \ell^r$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, ekvivalentni su tome da Gramova matrica sistema vektora $\{(z + \bar{z}_k)^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ definiše linearni neprekidni operator

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k \Big\}_{j=1}^{\infty}, \qquad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^s, \quad (2,14)$$

iz ℓ^s u ℓ^r, $1/r + 1/s = 1$.

D o k a z. Iz Leme 2.3 i Leme 2.4 sledi da su uslovi $H^2(Z) \subset \ell^r$ ekvivalentni tome da za ma kakvu konačnu linearnu kombinaciju $f = \sum x_k(z + \bar{z}_k)^{-1}$ sistema vektora $\{(z + \bar{z}_k)^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ niz $\{f,(z + \bar{z}_k)^{-1}\} \in \ell^r$ i pri tome je

$$\|\{f,(z + \bar{z}_k)^{-1}\}\|_{\ell^r} \leqslant M\|f\|_2,$$

gde M ne zavisi od f; drugim rečima, za ma kakav finitni niz $\{x_k\}$ je

$$\Big\|\Big\{\sum (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k\Big\}\Big\|^2_{\ell^r} < M^2\Big(\sum_{k,j} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k \bar{x}_j\Big). \qquad (2,15)$$

S druge strane, za proizvoljan finitni niz $\{x_k\}$ je

$$\sum_{k,j} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k \bar{x}_j \Big) \leqslant \Big\|\Big\{\sum (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k\Big\}\Big\|_{\ell^r} \ \|\{x_k\}\|_{\ell^s} \qquad (2,16)$$

Upoređujući (2,15) i (2,16) zaključujemo kada je uslov $H^2(Z) \subset \ell^r$ zadovoljen, sužavanje preslikavanja (2,14) na potprostor finitnih nizova $\{x_k\} \in \ell^s$ je ograničeno:

$$\Big\|\Big\{ \sum_k (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k\Big\}\Big\|_{\ell^r} < M^2 \|\{x_k\}\|_{\ell^s} \qquad (2,17)$$

Osobito je, za proizvoljno i fiksirano j, $\{(z_j + \bar{z}_k)^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^r$, odakle sledi konvergencija reda $\sum_{k \geq 1} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k$ za proizvoljni (ne mora biti finitan) niz $\{x_k\} \in \ell^s$, pri čemu je nejednakost (2,17) sačuvana.

Obratno, ako je preslikavanje (2,17) ograničeno, tj. ako je za proizvoljni niz $\{x_k\} \in \ell^s$ zadovoljena nejednakost (2,17) s nekom konstantom M, tada Gramova matrica $((z_j + \bar{z}_k)^{-1})$

na ℓ^s definiše nenegativnu ograničenu formu

$$0 \leqslant \sum_{k,j} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} y_k \bar{y}_j \leqslant M^2 \|\{y_k\}\|^2_{\ell^s} \qquad (\{y_k\} \in \ell^s),$$

odakle na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti proizlazi sledeća nejednakost:

$$\Big|\sum_{k,j} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k \bar{y}_j\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{k,j} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k \bar{x}_j\Big)\Big(\sum_{k,j} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} y_k \bar{y}_j\Big) \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \|\{y_k\}\|^2_{\ell^s} \Big(\sum_{k,j} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} x_k \bar{x}_j\Big), \qquad (2,18)$$

$(\{x_k\}, \{y_k\} \in \ell^s)$.

Prelazeći u relaciji (2,18) po nizu $\{y_k\}$ iz jedinične sfere prostora ℓ^s ka tačnoj gornjoj međi, dobijemo potrebnu nejednakost (2,15). -Ovim je Teorema 2.3. u potpunosti dokazana.

Teorema 2.3. ima sledeće posledice:

P o s l e d i c a 1. - Za uključivanje $H^2(Z)$ u ℓ^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, neophodno je i dovoljno da preslikavanje (2,14) definiše linearni neprekidni operator iz $\ell^{r/(r-1)}$ u ℓ^r.

P o s l e d i c a 2. - Ako je $\inf_k \mathrm{Re}(z_k) = 0$, tada uključivanje $H^2(Z)$ u ℓ^r nije zadovoljeno ni za ma kakvo r.

P o s l e d i c a 3. - Neophodan uslov za uključivanje prostora $H^2(Z)$ u ℓ^r za $r < 2$ jeste da

$$\mathrm{Re}(z_k) \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty). \qquad (2.19)$$

Očigledno, neophodan uslov za uključivanje ℓ^r u $H^2(Z)$ za proizvoljno r je konvergencija Blaškeovog proizvoda

$$B_j(z) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}} \frac{|1 - z_k|^2}{1 - z_k^2} \; \frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k}, \quad j = 1,2, \dots ,$$

s nulama u tačkama $\{z_k\}_{k\neq j}$. Ako sa $B_{j,n}(z)$ označimo odgovarajući delimični proizvod

$$B_{j,n}(z) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}} \frac{|1 - z_k|^2}{1 - z_k^2} \frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k}, \quad j,n=1,2,\dots,$$

tada, kao u ([43], Gl. 5), možemo pokazati da za ma kakvo j

$$(z + \bar{z}_j)^{-1} B_{j,n}(z) \longrightarrow (z + \bar{z}_j)^{-1} B_j(z)$$

u H^2 kada $n \to \infty$, i iz Leme 2.3 da je za proizvoljno j

$$f^j(z) = \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_j)}{z + \bar{z}_j}$$

jedinstvena funkcija minimalne norme u H^2 koja zadovoljava interpolacione uslove

$$f^j(z_k) = \delta_k^j, \quad k = 1,2, \dots .$$

Neposrednim računanjem možemo pokazati da je

$$(f^k, f^j) = \frac{4\,\mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\,\overline{B_j(z_j)}} \frac{1}{z_k + \bar{z}_j}, \quad k,j = 1,2, \dots .$$

2. Dualna Teoremi 2.3. je

T e o r e m a 2.4. - Uključivanje ℓ^r u $H^2(Z)$, $1 \leq r \leq \infty$, ekvivalentno je tome da Gramova matrica sistema $\{f^j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ definiše linearni neprekidni operator

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,\mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\,\overline{B_j(z_j)}} \frac{w_k}{z_k + \bar{z}_j} \right\}_{j=1}^{\infty} \qquad \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^r,$$

iz ℓ^r u ℓ^s, $1/r + 1/s = 1$.

Teorema 2.4. ima sledeće posledice:

P o s l e d i c a 1. - Ako je $\sup_k \mathrm{Re}(z_k) = \infty$, tada uključivanje ℓ^r u $H^2(Z)$ nije zadovoljeno ni za ma kakvo r.

P o s l e d i c a 2. - Neophodan uslov za uključivanje ℓ^r u $H^2(Z)$ za $r > 2$ jeste da

$$\mathrm{Re}(z_k)\,|B_k(z_k)|^{-2} \longrightarrow 0, \quad (k \to \infty) . \tag{2,20}$$

N a p o m e n a. Na osnovu Teoreme 3 u radu [72], taj uslov nije neophodan za uključivanje ℓ^2 u $H^2(Z)$.

3. Da bismo dokazali narednu teoremu, najpre ćemo formulisati i dokazati sledeću lemu:

L e m a 2.5. - Ako niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različiti tačaka poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$ zadovoljava uslove:

$$\text{(a)} \qquad 0 < \rho < \mathrm{Re}(z_k) < L < \infty$$

i

$$\text{(b)} \qquad |z_k - z_n| \geq \delta > 0,$$

tada, za ma kakvu funkciju $f \in H^2$, $\{f(z_k)\} \in \ell^2$.

D o k a z. - Ako je $f \in H^2$, tada $g = f^2 \in H^1$. Na taj način, dovoljno je pokazati da je za ma kakvu funkciju $g \in H^1$

$$\sum |g(z_k)| < \infty, \quad \text{tj.} \quad \{g(z_k)\} \in \ell^1.$$

Na osnovu Poasonove formule imamo

$$g(z_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(it)\,\frac{x_k}{x_k^2 + (y_k - t)^2}\,dt. \tag{2,21}$$

Ako je N ma kakav prirodan broj, tada iz (2,21) sledi

$$\sum_{k=1}^{N} |g(z_k)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |g(it)| \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{x_k^2 + (y_k - t)^2}\,dt.$$

Na osnovu prethodno navedenih uslova (a) i (b), red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{x_k^2 + (y_k - t)^2}$$

ravnomerno konvergira po $t \in (-\infty, \infty)$ ka ograničenoj neprekidnoj funkciji $S(t) \leqslant M$ ako je $|y_k - y_m| \geqslant \delta > 0$.

Prema tome sledi da je, za proizvoljno N,

$$\sum_{k=1}^{N} |g(z_k)| \leqslant \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(it)|\, dt = M\|g\|_1 =$$

$$= M\|f^2\|_1 = M\|f\|_2^2.$$

Kako je N proizvoljan prirodan broj, to je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k)|^2 \leqslant M\|f\|_2^2 .$$

T e o r e m a 2.5. - Niz $\{f(z_k)\} \in \ell^2$ za ma kakvo $f \in H^2$ u tom i samo u tom slučaju kada matrica $((\ell_k, \ell_j))$ definiše linearni neprekidni operator

$$L : \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\ell_k, \ell_j) x_k \Big\}_{j=1}^{\infty}$$

iz ℓ^2 u ℓ^2.

4. Dokazaćemo još dve leme:

L e m a 2.6. - Ako je $0 < \ell < \mathrm{Re}(z_k) < L < \infty$ i $|z_n - z_k| \geqslant \delta > 0$, tada su matrice (f^j, f^k) i (ℓ_j, ℓ_k) ekvivalenzne.

D o k a z. - Koristeći se prethodnim oznakama, to jest

$$(\ell_k, \ell_j) = \frac{1}{z_j + \bar{z}_k}, \qquad f^j = \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)} \, \frac{2\,\mathrm{Re}(z_j)}{z + \bar{z}_j},$$

$$B_k(z) = \prod_{p \neq k} \frac{z - z_p}{z + \bar{z}_p} \, \frac{|1 - z_p^2|}{1 - z_p^2}, \qquad (f^j, \ell_k) = \delta_k^j ,$$

za skalarni proizvod (f^k, f^j) dobijamo

$$(f^k, f^j) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^k(it)\, \overline{f^j(it)}\, dt =$$

$$= \frac{4\ \mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\ \overline{B_j(z_j)}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{p\neq k}\frac{it - z_p}{it + \bar{z}_p}\ \frac{1}{it + \bar{z}_k}\prod_{q\neq p}\frac{-it - \bar{z}_q}{-it + z_q}\ \frac{1}{-it + \bar{z}_j}\,dt$$

$$= \frac{4\ \mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\ \overline{B_j(z_j)}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{it + \bar{z}_j}\ \frac{1}{-it + z_k}\,dt =$$

$$= \frac{4\ \mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\ \overline{B_j(z_j)}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{it + \bar{z}_j}\left(\overline{\frac{1}{it + \bar{z}_k}}\right)dt =$$

$$= \frac{4\ \mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\ \overline{B_j(z_j)}}\ \frac{1}{z_k + \bar{z}_j} = \frac{4\ \mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\ \overline{B_j(z_j)}}\ \overline{(\ell_k,\ell_j)}.$$

Prema tome

$$(f^k,f^j) = \frac{4\ \mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{B_k(z_k)\ \overline{B_j(z_j)}}\ \overline{(\ell_k,\ell_j)}.$$

L e m a 2.7. - Ako je $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ niz različitih tačaka poluravni $\mathrm{Re}(z_k) > 0$, $k = 1,2,\ldots$, i za $k = 1,2,\ldots$

$$(f,\ell_k) = f(z_k) \qquad f \in H^2,$$

tada je

$$b_{jj}^n = 2\ \mathrm{Re}(z_j)|B_j(z_j)|^{-2}.$$

D o k a z. Iz Košijeve integralne formule sledi da je u tom slučaju

$$\ell_k(z_j) = (z_k + \bar{z}_j)^{-1}, \qquad k = 1,2,\ \ldots\ ,$$

te na osnovu toga Gramova matrica ima oblik

$$G^n = \begin{pmatrix} (z_1 + \bar{z}_1)^{-1} & \ldots & (z_k + \bar{z}_1)^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (z_1 + \bar{z}_j)^{-1} & \ldots & (z_k + \bar{z}_j)^{-1} \end{pmatrix}$$

Na taj način je

$$\det(G^n) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{z_1 + \bar{z}_1} & \cdots & \dfrac{1}{z_k + \bar{z}_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{z_1 + \bar{z}_j} & \cdots & \dfrac{1}{z_k + \bar{z}_j} \end{vmatrix}$$

a njena vrednost je, kao što je poznato (videti [3]) jednaka

$$\frac{\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (z_k - z_j)(\bar{z}_k - \bar{z}_j)}{\prod_{j,k=1}^{n} (z_k + \bar{z}_j)} .$$

Odavde je

$$\det(G^n) = \frac{\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} |z_k - z_j|^2}{\prod_{i,k=1}^{n} (z_k + \bar{z}_j)} .$$

Analogno tome je

$$\det(G^n) = \frac{\prod_{\substack{1 \leqslant i < k \leqslant n \\ i,k \neq j}} |z_k - z_i|^2}{\prod_{\substack{i,k=1 \\ i,k \neq j}}^{n} (z_k + \bar{z}_j)} ,$$

gde matricu G_j^n dobijamo iz matrice G^n precrtavajući j-ti red i j-tu kolonu.

Elemente inverzne matrice $B^n = (G^n)^{-1}$ određujemo na poznati način pomoću relacije

$$b_{kj}^n = (-1)^{k+j} \det(G_{jk}^n)/\det(G^n) ,$$

pa je na osnovu prethodnog,

$$b_{kj}^n = \frac{4\, \mathrm{Re}(z_k)\mathrm{Re}(z_j)}{z_k + \bar{z}_j} \frac{1}{B_k^n(z_k)} \frac{1}{B_j^n(z_j)} .$$

Specijalno su dijagonalni elementi matrice B^n, $r = 1,2, \dots$, određeni relacijom

$$b^n_{jj} = 2\,\mathrm{Re}(z_j)\,|B_j(z_j)|^{-2}.$$

Lema 2.7 ima sledeće posledice:

P o s l e d i c a 1. - Ako je $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_k)(1+|z_k|^2)$ tada za ma kakav prirodan broj j postoji u H^2 jedinstvena funkcija $f_2^j(z)$ minimalne norme koja zadovoljava uslove

$$f_2^j(z_k) = \delta_k^j, \quad k = 1,2, \dots,$$

i

$$\|f_2^j\|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z_j)\,|B_j(z_j)|^{-2},$$

gde je $B_j(z)$ Blaškeov proizvod s nulama u tačkama $\{z_p\}_{p\neq j}$.

P o s l e d i c a 2. - Uključivanje $\ell^1 \subset H^2(Z)$ ekvivalentno je zadovoljavanju uslova

$$\sup_k \left\{ \frac{2\,\mathrm{Re}(z_j)}{|B_j(z_j)|^2} \right\} < \infty .$$

P o s l e d i c a 3. - Za $r > 2$ uključivanje $\ell^r \subset H^2(Z)$ može imati mesta samo kada je zadovoljen uslov

$$\lim_{j\to\infty} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_j)}{|B_j(z_j)|^2} = 0.$$

2.4. Interpolacioni problem za analitičke funkcije Hardijeve klase $\mathcal{H}^p$ u poluravni $\mathrm{Im}(\xi) > 0$

1. Označimo sa $\mathcal{H}^p$, $p > 0$, klasu funkcija $f(\xi)$ analitičkih u gornjoj poluravni $\{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\xi) > 0\}$ i takvih da je za svaku od njih $\sup_{y>0} \mathfrak{M}_p(y,f) < \infty$, gde je

$$\mathfrak{M}_p(y,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Osnovni rezultati za klase $\mathcal{H}^p$ sadržani su u monografijama P. Darena [19] i K. Hofmana (K. Hoffmann) [43] (gde je mesto gornje poluravni posmatrana desna poluravan). Za ma koju funkciju $f(\xi) \in \mathcal{H}^p$ postoje skoro svugde na realnoj osi granične vrednosti $f(x) \in L^p_{(-\infty, \infty)}$. Ako je $p \geq 1$, tada se $f(\xi) \in \mathcal{H}^p$ poistovećuje sa svojim graničnim vrednostima posredstvom Košijevog integrala

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \xi} \, dx, \quad \mathrm{Im}(\xi) > 0, \qquad (2,22)$$

za vrednosti ξ iz donje poluravni vrednost tog integrala jednaka je 0. Obrnuto, ako je za funkciju $f(x) \in L^p_{(-\infty, \infty)}$, $p \geq 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \xi} dx = 0, \quad \mathrm{Im}(\xi) < 0, \qquad (2,23)$$

tada je pomoću (2,22) određena neka funkcija $f(\xi) \in \mathcal{H}^p$ čije se granične vrednosti podudaraju skoro svugde sa $f(x)$.

Za bilo koji niz $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka poluravni $\operatorname{Im}(\xi_k) > 0$, $k = 1,2, \ldots$, posmatraćemo prostor nizova

$$\mathcal{H}^p(\mathfrak{Z}) = \left\{ \{f(\xi_k)\}_{k=1}^{\infty} \quad : \quad f \in \mathcal{H}^p \right\}.$$

Ako je $z = \varphi(\xi)$ bilinearna funkcija koja gornju poluravan preslikava na jedinični krug, onda, za ma koju funkciju $f(\xi) \in \mathcal{H}^p$, $f(\varphi^{-1}(z)) \in H^p$. Međutim, klasa $H^p\{|z| < 1\}$ ne iscrpljuje sve moguće funkcije oblika $f(\varphi^{-1}(z))$, $f \in \mathcal{H}^p$ (videti [19]); prema tome, uopšte govoreći, ima mesto samo uključivanje $\mathcal{H}^p(\mathfrak{Z}) \subset H^p(Z)$ gde $Z = \varphi(\mathfrak{Z}) = \{\varphi(\xi_k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Odavde, naročito, sledi da je nemoguće neposredno preneti sve osobine prostora $\mathcal{H}^p(\mathfrak{Z})$ na prostor $H^p(Z)$ pomoću preslikavanja bilinearnom funkcijom gornje poluravni na krug. Pa ipak, osobine prostora nizova $\mathcal{H}^p(\mathfrak{Z})$ možemo ispitati koristeći se metodama analognim za ispitivanje prostora nizova $H^p\{|z| < 1\}$.

Celishodno je početi sa razmatranjem slučaja $p = 2$.

2. U odnosu na skalarni proizvod

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \qquad f,g \in \mathcal{H}^2 \tag{2,24}$$

klasa $\mathcal{H}^2$ je Hilbertov prostor sa reprodukcionim jezgrom $K(z,\xi) = i(z - \bar{\xi})^{-1}$ i, na taj način, karakterizaciju zavisnosti strukture prostora $\mathcal{H}^2$ od rasporeda tačaka niza $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ u gornjoj poluravni $\operatorname{Im}(\xi) > 0$ možemo dobiti konkretizujući za dati slučaj opšte rezultate prethodnog paragrafa.

Za dati niz $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka gornje poluravni $\operatorname{Im}(\xi) > 0$ matrica G za linearno nezavisan sistem vektora $\left\{ i(\xi - \bar{\xi}_k)^{-1} \right\}_{k=1}^{\infty}$ ima oblik

$$G^n = \begin{pmatrix} \frac{i}{\xi_1 - \bar{\xi}_1} & \cdots & \frac{i}{\xi_1 - \bar{\xi}_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{i}{\xi_n - \bar{\xi}_1} & \cdots & \frac{i}{\xi_n - \bar{\xi}_n} \end{pmatrix}$$

a elemente inverzne matrice $B^n = (b^n_{kj})^n_{k,j=1}$ nalazimo potpuno analogno kao u prethodnom paragrafu za slučaj H^2:

$$b^n_{kj} = \frac{4i \, \mathrm{Im}(\xi_k) \, \mathrm{Im}(\xi_j)}{\xi_k - \bar{\xi}_j} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}} \frac{\xi_k - \bar{\xi}_p}{\xi_k - \xi_p} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}} \left(\overline{\frac{\xi_j - \bar{\xi}_\ell}{\xi_j - \xi_\ell}} \right). \quad (2,25)$$

Posebno, dijagonalne elemente matrice B^n, $n = 1,2, \ldots$, određujemo pomoću sledećeg izraza:

$$b^n_{jj} = 2 \, \mathrm{Im}(\xi_j) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}} \left| \frac{\xi_j - \bar{\xi}_p}{\xi_j - \xi_p} \right|^2 , \quad j = 1,2, \ldots ,n. \quad (2,26)$$

Jedinstvena funkcija minimalne norme prostora $\mathcal{H}^2(\mathcal{Z})$ koja zadovoljava uslove

$$f^j(\xi_k) = \delta^j_k , \quad k = 1,2, \ldots , \quad (2,27)$$

je funkcija koja leži u zatvorenom linearnom omotaču sistema vektora $\left\{ i(\xi - \bar{\xi}_k)^{-1} \right\}_{k=1}^{\infty}$ i pri tome je

$$\|f^j\|^2 = 2 \, \mathrm{Im}(\xi_j) \prod_{p \neq j} \left| \frac{\xi_j - \bar{\xi}_p}{\xi_j - \xi_p} \right|^2 . \quad (2,28)$$

Postojanje funkcije f^j obezbeđeno je konvergencijom proizvoda na desnoj strani relacije (2,28). Uključivanje

$\ell^1 \subset \mathcal{H}^2(\mathfrak{Z})$ zadovoljeno je tada i samo tada kada je

$$\sup_j \operatorname{Im}(\xi_j) \prod_{p\neq j} \left| \frac{\xi_j - \bar{\xi}_p}{\bar{\xi}_j - \xi_p} \right|^2 < \infty . \qquad (2,29)$$

Neka je $z = \varphi(\xi) = (\xi + i)^{-1}(\xi - i)$ bilinearna funkcija koja preslikava gornju poluravan $\operatorname{Im}(\xi) > 0$ na jedinični krug $|z| \leq 1$ i za $j = 1,2, \dots$, neka je $z_j = \varphi(\xi_j)$. Pošto je $\xi_j = i(1 - z_j)^{-1}(1 + z_j)$, to je

$$\left| \frac{\xi_j - \xi_p}{\bar{\xi}_j - \xi_p} \right| = \left| \frac{1 - \bar{z}_p z_j}{z_p - z_j} \right| , \qquad \operatorname{Im}(\xi_j) = \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - z_j|^2}; \qquad (2,30)$$

sledi da relaciju (2,29) možemo napisati u obliku

$$\sup_j \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - z_j|^2} |B_j(z_j)|^{-2} . \qquad (2,31)$$

3. Istaći ćemo nekoliko karakterističnih slučajeva:

1) 1 nije granična vrednost niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi(\xi_k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Na osnovu relacije (2,31) i posledice 2 Leme 2.7, uključivanja $\ell^1 \subset \mathcal{H}^2(\mathfrak{Z})$ i $\ell^1 \subset H^2(Z)$ su istovremeno zadovoljena. Pri tome su tačke niza $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ raspoređene u pravougaoniku $|\operatorname{Re}(\xi)| < \alpha$, $0 < \operatorname{Im}(\xi) < \beta$.

2) 1 je granična tačka niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ po tangentnom pravcu

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - z_j|^2} = 0.$$

To znači da u tom slučaju uključivanje $\ell^1 \subset H^2(Z)$ može biti zadovoljeno i kada nema uključivanja $\ell^1 \subset \mathcal{H}^2(\mathfrak{Z})$.

Tačke niza $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ kad $k \to \infty$ asimptotski se približavaju realnoj pravoj.

3) Niz tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ kovergira ka 1 po netangentnom pravcu:

$$\inf_j \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - z_j|^2} > 0.$$

Pri tome uključivanje $\ell^1 \subseteq \mathcal{G}^2(\mathfrak{Z})$ biće zadovoljeno tada i samo tada kada je niz tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\{(\xi_k)\}_{k=1}^{\infty}$ u krugu interpolacioni niz:

$$\inf_k |B_k(z_k)| > 0.$$

Na osnovu (2,30), tačke niza $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ moraju biti raspoređene u oblasti $0 < \alpha < \mathrm{Im}(\xi) < \beta$, te uključivanje može biti zadovoljeno samo kada su zadovoljeni uslovi $\inf_{j,p} |\xi_j - \xi_p| > 0$, odakle sledi da tačke niza $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ koje se nalaze u pojasu $0 < \alpha < \mathrm{Im}(\xi) < \beta$ teže ka ∞ brzinom aritmetičke progresije.

Obrnuto, za ma koji niz $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ proizvod

$$\prod_{p \neq j} \left| \frac{\xi_j - \bar{\xi}_p}{\xi_j - \xi_p} \right|$$

(što se može lako pokazati) ravnomerno konvergira u odnosu na $j = 1,2, \ldots$. Koristeći se rezultatima iz rada [57], možemo pokazati da u posmatranom slučaju važi jednakost $\ell^2 = \mathcal{G}^2(\mathfrak{Z})$ videti [58], [71].

Koristeći se dobijenim izrazom (2,26) za elemente matrice $B^n = (G^n)^{-1}$, $n = 1,2, \ldots$, i primenjujući Teoremu 1.1 možemo, dobiti neke bliže podatke u vezi sa uključivanjem

$\ell^r \subset \mathcal{H}^2(\mathfrak{Z})$.

Posebno, zadovoljavanje uslova $\lim_{k\to\infty} I_m(\xi_k) = 0$, $\mathfrak{Z} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, neophodno je za uključivanje $\ell^r \subset \mathcal{H}^2(\mathfrak{Z})$ u slučaju $r > 2$, ali nije neophodno u slučaju $r \leqslant 2$.

4. Za slučaj $1 < p < \infty$ navešću dve leme koje je S. Švedenko (videti [65]) dokazao u okviru funkcionalne interpolacije u Hardijevim klasama H^p, a zajedno preformulisali smo ih za poluravan $\mathrm{Im}(\xi) > 0$, drugim rečima možemo navesti, bez dokaza, opšti kriterijum uključivanja $S \subset \mathcal{H}^p(Z)$ za širu klasu Banahovih prostora nizova S.

L e m a 2.8. - Za proizvoljnih n različitih tačaka $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ gornje poluravni i za ma koji vektor $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \in \mathbb{C}^n$ u prostoru $\mathcal{H}^p$, $1 < p < \infty$, postoji jedinstvena funkcija f_n^w minimalne norme

$$\|f_n^w\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n^w(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \tag{2,32}$$

koja zadovoljava uslove

$$f_n^w(\xi_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{2,33}$$

i

$$M_q^{-1}\|f_n^w\|_p \leqslant \sup_{a_k \in \mathbb{C}} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{w}_k\right|}{\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k \dfrac{i}{\xi - \xi_k}\right\|_q} \leqslant \|f_n^w\|_p, \tag{2,34}$$

gde $M_q \geqslant 1$ zavisi samo od q, $1/p + 1/q = 1$.

L e m a 2.9. - Neka $g(x) \in L^q_{(-\infty, \infty)}$, $1 < q < \infty$; tada postoje na jedinstveni način definisane funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ takve da je

$$g(x) = f_1(x) + \overline{f_2(x)} \quad \text{i} \quad \|f_i\|_q \quad M_q\|g\|_q, \quad i = 1,2$$

gde $M_q \geqslant 1$ zavisi samo od q.

G L A V A III

INTERPOLACIONA SVOJSTVA KLASA H^p U POLURAVNI

3.1. Osnovna obeležavanja

1. Analitička funkcija $f(z)$ u poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$ po definiciji pripada klasi H^p aka je

$$\|f(z)\|_p = \sup_{x>0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p\,dy\right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty; \tag{3,1}$$

$$\|f(z)\| = \sup_{\mathrm{Re}(z)>0}|f(z)| < \infty, \quad p = \infty .$$

Umesto poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$ možemo uzeti poluravan $\mathrm{Im}(z) > 0$ ako argument funkcije pomnožimo sa i. Struktura klasa H^p u poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$ je potpuno analogna strukturi poznatih klasa H^p u jediničnom krugu (videti [16], [43]); pa ipak, za $0 < p < \infty$ klase $H^p\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ s obzirom na definiciju odgovaraju klasama $H^p\{|z| < 1\}$ (videti [16], Gl.2; [43], Gl. 3) i imaju respektivno različite interpolacione osobine.

Za $p \geq 1$, H^p je Banahov prostor sa normom $\|f\|_p$; ako je $p < 1$, tada je u odnosu na invarijantnu metriku

$$\|f - g\|_p^p , \qquad f,g \in H^p$$

H^p potpuno linearni metrički prostor (videti [16], [43]).

Skoro svugde na imaginarnoj osi postoje granične vrednosti

$$f(iy) = \lim_{x \to 0+0} f(x + iy)$$

funkcije $f(z)$ iz H^p; pri tome $f(iy) \in L^p(-\infty, \infty)$; štaviše, $\|f(iy)\|_{L^p(-\infty, \infty)} = \|f(z)\|_p$, i $f(z)$ se svodi na $f(iy)$ posredstvom Poasonovog integrala

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(it) \frac{x}{x^2 + (y - t)^2} dt, \quad z = x + iy, \quad (3,2)$$

Za $p \geqslant 1$ takođe važi Košijeva integralna formula, koju možemo napisati u obliku

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{z - it} dt, \quad Re(z) > 0. \quad (3,3)$$

(dokazi navedenih formula mogu se naći , na primer , u [16] i [43]).

Od posebnog interesa je slučaj $p = 2$ zato što u odnosu na skalarni proizvod

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(it) \overline{g(it)} dt, \quad f,g \in H^2, \quad (3,4)$$

H^2 prestavlja Hilbertov prostor sa reprodukcionim jezgrom $K(z,\xi) = (z + \bar{\xi})^{-1}$, tj. za fiksirano ξ, Re > 0, $(z + \bar{\xi})^{-1} \in H^2$, i za ma koju funkciju $f(z) \in H^2$ je

$$f(\xi) = (f(z),(z + \bar{\xi})^{-1});$$

poslednja činjenica neposredno proizlazi iz definicije skalarnog proizvoda (3,4) i Košijeve integralne formule (3,3).

Osim toga, na osnovu poznate teoreme o faktorizaciji (videti [16], Gl.2; [43], Gl.8) možemo na slučaj $p = 2$ svoditi dokaze nekih rezultata koji važe za klasu H^p sa ma kojim $p > 0$ (videti, na primer, Lemu 3.2 i Teoremu 3.1 iz paragrafa 3.2).

Neka je, kao i obično, sa ℓ^r, $0 < r \leq \infty$, označena celokupnost nizova kompleksnih brojeva $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ takvih da je

$$\|w\|_r = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^r\right)^{1/r} < \infty, \quad 0 < r < \infty; \qquad (3,6)$$

$$\|w\|_\infty = \sup_k |w_k| < \infty, \quad r = \infty.$$

Ako je $r \geq 1$, tada je ℓ^r Banahov prostor s normom (3,6); za $r < 1$

$$\|w - \mu\|_r^r, \qquad w, \mu \in \ell^r$$

definiše invarijantnu metriku, na osnovu koje ℓ^r predstavlja potpuni linearni metrički prostor (videti [17]).

Izbor niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$ definiše prostor nizova

$$H^p(Z) = \left\{ \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} \quad : \quad f \in H^p \right\}.$$

2. Ova glava posvećena je pitanjima uključivanja $H^p(Z)$ u ℓ^r i ℓ^r u $H^p(Z)$, $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$. Slučaj $p = \infty$ nećemo razmatrati jer uključivanje $H^\infty(Z)$ u ℓ^r može biti ispunjeno samo za $r = \infty$; što se pak tiče uključivanja ℓ^r u $H^\infty(Z)$, poznato je da $H^\infty(Z)$ ili ne sadrži nijedan prostor ℓ^r, $r > 0$, ili $\ell^\infty \subset H^\infty(Z)$ (videti [65]), pri čemu neophodan i dovoljan uslov za uključivanje poslednjeg oblika jeste

$$\inf_k |B_k(z_k)| > 0$$

gde je sa $B_k(z)$, $k=1,2, \ldots$, označen Blaškeov proizvod

$$B_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}} \frac{|1 - z_j^2|}{1 - z_j^2} \, \frac{z - z_j}{z + \bar{z}_j} \tag{3,7}$$

s nulama u tačkama $\{z_j\}_{j\neq k}^{\infty}$ (videti [43], Gl.8). Poslednja činjenica je posledica pozatog Karlesonovog rezultata o interpolaciji ograničenih brojnih nizova ograničenim analitičkim funkcijama u jediničnom krugu (videti [16], Gl.9; [43], Gl. 10) čije se prenošenje na slučaj poluravni izvodi pomoću linearno razlomljenih funkcija.

3.2. Ekvivalentna uključivanja

1. Za dalje razvijanje teorije interpolacije pokazalo se korisnim proširiti klasu prostora nizova $H^p(Z)$, navedenih u prethodnom paragrafu. Naime, neka je $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ niz pozitivnih brojeva (moguća je zavisnost od izbora početnog niza tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$) i $\alpha \geq 0$; po definiciji je

$$H^p(Z,\Lambda^{\alpha}) = \left\{ \{\Lambda_k^{\alpha} f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} \; : \; f \in H^p \right\}. \tag{3,8}$$

Ako je $\Lambda_k \equiv 1$ ili $\alpha = 0$, tada je, očigledno, $H^p(Z,\Lambda^{(\alpha)}) = H^p(Z)$.

Glavni rezultat našeg istraživanja predstavlja teorema 3.1, u čijem ćemo dokazu koristiti leme 3.1 - 3.4.

L e m a 3.1. - Ako je $H^p(Z,\Lambda^{(\alpha)}) \subset \ell^r$, $0 < p < \infty$,

$0 < r < \infty$, tada je preslikavanje

$$f \longmapsto \{\Lambda_k^{\alpha} f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}, \qquad f \in H^p,$$

ograničen operator iz Banahova prostora (potpuno linearno metričkog, ako je $p < 1$) H^p u Banahov (potpuno linearno metrički, ako je $r < 1$) prostor ℓ^r.

Tvrđenje leme sledi neposredno iz teoreme o zatvorenom grafiku (videti [16], Gl.6; [17]).

L e m a 3.2. - Ako je $ps = qr$ i $p\alpha = q\beta$, $0 < p,q < \infty$, $0 < r,s \leq \infty$, $\alpha,\beta \geq 0$, tada su uključivanja $H^p(Z,\Lambda^{\alpha})$ u ℓ^r i $H^q(Z,\Lambda^{\beta})$ u ℓ^s ekvivalentna.

D o k a z. Na osnovu Leme 3.1, $H^p(Z,\Lambda^{\alpha}) \subset \ell^r$ tada i samo tada kada je za ma koju funkciju $f \in H^p$

$$\left\| \{\Lambda_k^{\alpha} f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} \right\|_r \leq A \|f\|_p, \tag{3,9}$$

gde A ne zavisi od f.

U slučaju $r < \infty$, relacija (3,9) ekvivalentna je sledećim sistemima nejednakosti:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{r\alpha} |f(z_k)|^r \right)^{p/r} \leq A^p \|f\|_p^p ,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{p\alpha/q} |g(z_k)|^{qr/p} \right)^{p/r} \leq A^p \|g\|_q^q ,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{s\beta} |g(z_k)|^{s} \right)^{q/s} \leq A^p \|g\|_q^q ,$$

a ako je $r = \infty$, tada je relacija (3,9) ekvivalentna nejednakostima

$$\sup_k \Lambda_k^{p\alpha} |f(z_k)|^p \leq A^p \|f\|_p^p ,$$

$$\sup_k \Lambda_k^{q/s} |g(z_k)|^q \leqslant A^p \|g\|_q^q.$$

Kako u tom, tako i u drugom slučaju je

$$\left\| \left\{ \Lambda_k^{1/s} g(z_k) \right\}_{k=1}^{\infty} \right\|_s \leqslant A^{p/q} \|g\|_q. \tag{3,10}$$

Na osnovu teoreme o faktorizaciji (videti [43], Gl. 10), nejednakost (3,10) zadovoljena je za ma koju funkciju $g \in H^q$, što je, na osnovu Leme 3.1, ekvivalentno uslovu $H^q(Z, \Lambda^{(s)}) \subset \ell^s$.

P o s l e d i c a. - Ako je niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ takav da je

$$\inf_k \operatorname{Re}(z_k) = 0, \tag{3,11}$$

tada $H^p(Z) \subset \ell^r$ ni za ma kakvo $p, r > 0$, $p < \infty$.

D o k a z. Neka je ispunjen uslov $H^p(Z) \subset \ell^r$ za neke p i r; Na osnovu Leme 3.1 i Leme 3.2, u tom slučaju za ma koju funkciju $f(z)$ iz H^2 i $k = 1, 2, \ldots$, imamo da je

$$|f(z_k)| \leqslant \left\| \left\{ f(z_k) \right\}_{k=1}^{\infty} \right\|_{2r/p} \leqslant A\|f\|_2, \tag{3,12}$$

gde A ne zavisi od f. Ako mesto f uzmemo vektore $(z + \bar{z}_k)^{-1} \in H^2$, $k = 1, 2, \ldots$, tada iz relacija (3,5) i (3,12) proizlazi nejednakost

$$(2 \operatorname{Re}(z_k))^{-1} \leqslant A(2 \operatorname{Re}(z_k))^{-1/2}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

koja je protivrečna sa (3,11).

2. Sledeći stav pokazuje celishodnost ponderisanih (težinskih) prostora.

L e m a 3.3. - Uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$, $1 < p < \infty$,

$1 \leq r \leq \infty$, ekvivalentno je tome da je za ma kakvu funkciju $g(z) \in H^q$, $1/p + 1/q = 1$,

$$\left\| \left\{ 2\,\mathrm{Re}(z_k) \left| B_k(z_k) \right|^{-1} g(z_k) \right\}_{k=1}^{\infty} \right\|_s \leq A \| g \|_q , \tag{3,13}$$

gde A ne zavisi od g i $1/r + 1/s = 1$.

D o k a z. Ma kakav bio finitni (to jest, koji sadrži konačan broj članova različitih od nule) niz $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, funkcija

$$f^W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_k)}{z + \bar{z}_k} \frac{B_k(z)}{B_k(z_k)} w_k$$

pripada H^p i zadovoljava interpolacione uslove

$$f^W(z_k) = w_k, \qquad k = 1,2, \ldots . \tag{3,14}$$

Na osnovu teoreme faktorizacije, ma koju drugu funkciju iz H^p koja zadovoljava uslov (3,14) predstavićemo u obliku

$$f^W(z) + B(z)f(z), \qquad f(z) \in H^p$$

i

$$B(z) = \frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k} B_k(z).$$

Kako je skoro svugde $|B(iy)| = 1$ (videti [43], Gl.8), imaćemo

$$\| f^W(z) + B(z)f(z) \|_p =$$
$$= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_k)}{B_k(z_k)} \frac{w_k}{iy - z_k} + f(iy) \right\|_{L^p(-\infty, \infty)}, \tag{3,15}$$

$f \in H^p$.

Pošto je $1 < q < \infty$, konjugovani prostor $(H^q)^*$ je izomorfno izometričan faktor-prostoru L^p/H^p (videti [16], Gl. 7; [43], Gl. 9). Prema tome, klasu ekvivalentnih po modulu funkcija H^p na desnoj strani jednakosti (3,15) možemo posmatrati kao linearni neprekidni funkcional na Banahovom prostoru H^q. Iz definicije normi u faktor-prostoru (videti [16], Gl. 7) i Košijeve integralne formule (3,3) proizlazi da je za ma koji finitni niz $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\inf_{f \in H^p} \| f^W(z) + B(z)f(z) \|_p = \tag{3,16}$$

$$= \sup_{g \in H^q} \|g\|_q^{-1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_k)}{B_k(z_k)} g(z_k) w_k \right|.$$

S druge strane, za proizvoljan prirodni broj n preslikavanje

$$T_n : \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \inf \{ \|f\|_p : f(z_k) = w_k, \quad k = 1,2, \ldots, n \}$$

na Banahovom prostoru ℓ^r definiše ograničeni konveksni funkcional (videti [4], § 21); ova je konveksnost, to jest zadovoljavanje uslova

$$T_n(w + \mu) \leq T_n(w) + T_n(\mu); \qquad w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}, \ \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^r,$$

$$T_n(\alpha w) = |\alpha|\, T_n(w), \qquad \alpha \in \mathbb{C},$$

očigledna, a ograničenost proizlazi iz nejednakosti

$$T_n(w) \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_k)}{z + \bar{z}_k} \frac{B_k(z)}{B_k(z_k)} w_k \right\|_p \leq$$

$$\leq M_n \max_{1 \leq k \leq n} |w_k| \leq M_n \|w\|_r ,$$

gde M_n ne zavisi od w. Na osnovu osobina slabe kompaktnosti zatvorene lopte Banahova prostora H^p (videti [43], Gl. 1,2,9) i Košijeve integralne formule (3,3), uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$ za posmatrano p i r ekvivalentno je ograničenosti niza $\{T_n(w)\}_{n=1}^{\infty}$ na svakom vektoru $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^r$. Lema I.M. Geljfanda (videti [4], § 21) kao verzija opšteg principa ravnomerne ograničenosti, pokazuje da je u tom slučaju

$$\sup_n T_n(w) \leqslant M\|w\|_r;$$

drugim rečima, preslikavanje

$$T_n \quad : \quad \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \inf\{\|f\|_p \quad : \quad f(z_k) = w_k,\ k = 1,2,\ \dots\}$$

je ograničeni funkcional na ℓ^r. Uzimajući u obzir relaciju (3,16), otuda proizilazi da će uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$ $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, biti zadovoljeno u tom i samo u tom slučaju kada je za ma koju funkciju $g(z) \in H^q$, $1/p + 1/q = 1$, i za ma koji finitni niz $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}(z_k)(B_k(z_k))^{-1}g(z_k)w_k\Big| \leqslant A\|g\|_q\|w\|_r, \tag{3.17}$$

gde A ne zavisi od g i w, što je, na osnovu poznatih svojstava Banahovih prostora ℓ^r, ekvivalentno sa tvrđenjem (3,13).

T e o r e m a 3.1. - Ako su elementi niza $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ definisani relacijom

$$\Lambda_k = 2\,\mathrm{Re}(z_k)|B_k(z_k)|^{-1}, \qquad k = 1,2,\ \dots\ ,$$

i ako je $1 < p < 2$ i $1 \leqslant r \leqslant p/(2-p)$ ili $2 \leqslant p < \infty$ i $1 \leqslant r \leqslant \infty$, tada je uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$ za niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ekvivalentno uključivanju $H^2(Z, \Lambda^{(\alpha)})$ u ℓ^s, gde je $\alpha = p/2(p-1)$ i $s = 2(p-1)r/p(r-1)$.

D o k a z ove teoreme neposredno sledi iz lema 3.1, 3.2 i 3.3.

3.3. Interpolacioni problem za klasu H^2

1. Iz rezultata prethodnoga paragrafa sledi da se problem određivanja neophodnih i dovoljnih uslova uključivanja $H^p(Z)$ u ℓ^r i ℓ^r u $H^p(Z)$ principijelno svodi na određivanje kriterijuma uključivanja prvoga oblika za parametarski prostor (3,8) u specijalnom slučaju $p = 2$.

Fiksiranom nizu tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ i pozitivnim brojevima $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, a takođe i pozitivnom broju odgovara sistem vektora

$$\ell_k(z) = \lambda_k^{\alpha}(z + \bar{z}_k)^{-1} \in H^2, \quad k = 1,2, \ldots , \tag{3,18}$$

koji poseduje, na osnovu relacije (3,5), takvo svojstvo da je za ma koju funkciju $f(z) \in H^2$

$$\lambda_k^{\alpha} f(z_k) = (f(z), \ell_k(z)) \tag{3,19}$$

u odnosu na skalarni proizvod (3,4).

L e m a 3.4. - Ako je za niz kompleksnih brojeva $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ rešiv interpolacioni problem

$$\lambda_k^{\alpha} f(z_k) = w_k, \quad k = 1,2, \ldots , \tag{3,20}$$

u klasi H^2, tada postoji u H^2 jedinstvena funkcija f^W minimalne norme koja zadovoljava relaciju (3,20) i pri tome f^W pripada linearnom zatvorenom omotaču L u H^2 sistema vektora (3,18).

D o k a z. Neka je f iz klase H^2 koja zadovoljava relaciju (3,20) i $f \notin L$. Na osnovu relacije (3,19), ortogonalna projekcija f^W (videti [43], Gl.I) vektora f na potprostor $L \subset H^2$ takođe zadovoljava relaciju (3,20) i $\|f\|_2 \geq \|f^W\|_2$. Ostaje nam da dokažemo da je $f = 0$ ako $f \in L$ i $f(z_k) = 0$, $k = 1,2, \ldots$.

Za svaki proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$ postoji konačna linearna kombinacija $\sum \nu_k \ell_k$ takva da je

$$\|f - \sum_k \nu_k \ell_k\|_2 < \varepsilon .$$

Ali,pošto je na osnovu (3,19) $f \perp \ell_k$, $k = 1,2,\ldots$, to je

$$\|f\|_2^2 = (f - \sum_k \nu_k \ell_k, f) < \varepsilon \|f\|_2,$$

te je $\|f\| < \varepsilon$, to jest $f = 0$.

2. Dokazi osnovnih rezultata u ovoj glavi bitno se oslanjaju na sledeću teoremu:

T e o r e m a 3.2 - Uključivanje $H^2(Z, \Lambda^{\alpha})$ u ℓ^r, $1 \leq r \leq \infty$, za nizove $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ i brojeve $\alpha \geq 0$ zadovoljeno je tada i samo tada kada Gramova matrica sistema vektora (3,18) definiče ograničeni operator

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} (\ell_k, \ell_j)\, \nu_k\Big\}_{j=1}^{\infty} \tag{3,21}$$

iz ℓ^s u ℓ^r, $1/r + 1/s = 1$.

D o k a z. Iz Leme 3.1 i Leme 3.4, sledi da je uključivanje $H^2(Z,\Lambda^\alpha)$ u ℓ^r ekvivalentno je činjenici da za ma koju linearnu kombinaciju $f = \sum \gamma_k f_k$ vektora sistema (3,18) $\{(f,\ell_j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^r$, pri čemu je

$$\|\{(f,\ell_j)\}_{j=1}^{\infty}\|_r \leq A\|f\|_2,$$

gde A ne zavisi od f; drugim rečima, ma kakav bio finitni niz $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, zadovoljena je nejednakost

$$\left\|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\ell_k,\ell_j)\nu_k\right\}_{j=1}^{\infty}\right\|_r^2 \leq A^2\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}(\ell_k,\ell_j)\nu_k\bar{\nu}_j\right). \quad (3,22)$$

S druge strane, ma koji finitni niz možemo smatrati kao element prostora ℓ^s, te na osnovu Helderove (O.Hölder) nejednakosti sledi nejednakost

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}(\ell_k,\ell_j)\nu_k\bar{\nu}_j\right) \leq \left\|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\ell_k,\ell_j)\nu_k\right\}_{j=1}^{\infty}\right\|_r \|\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}\|_s. \quad (3,23)$$

Upoređivanje relacija (3,22) i (3,23) pokazuje da suženje preslikavanja (3,21) na skup finitnih nizova iz ℓ^s ograničeno ako je $H^2(Z,\Lambda^\alpha) \subset \ell^r$, to jest:

$$\left\|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\ell_k,\ell_j)\nu_k\right\}_{j=1}^{\infty}\right\|_r \leq A^2\|\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}\|_s. \quad (3,24)$$

Posebno, za ma koje fiksirano j $\{(\ell_k,\ell_j)\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^r$, te otuda sledi konvergencija reda $\sum(\ell_k,\ell_j)\nu_k$ za ma koji niz $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ iz ℓ^s s očuvanjem nejednakosti (3,24).

Obrnuto, ako je preslikavanje (3,21) ograničeno, tj. ako je za ma koji niz $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ iz ℓ^s zadovoljena nejednakost (3,24) (s nekom konstantom A), Gramova matrica sistema vektora (3,18) definiše na ℓ^s nenegativnu ograničenu formu

$$0 \leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} (\ell_k, \ell_j) \mu_k \overline{\mu}_j \leqslant A^2 \| \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \|_s^2, \qquad \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^s,$$

otkuda, koristeći Koši-Švarcovu nejednakost, dobijamo nejednakost

$$\left| \sum_{j,k=1}^{\infty} (\ell_k, \ell_j) \, \nu_k \overline{\mu}_j \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} (\ell_k, \ell_j) \, \nu_k \overline{\nu}_j \right) \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} (\ell_k, \ell_j) \mu_k \overline{\mu}_j \right) \leqslant$$

$$\leqslant A^2 \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} (\ell_k, \ell_j) \, \nu_k \overline{\nu}_j \right) \| \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \|_s^2. \tag{3,25}$$

Prelazeći u relaciji (3,25) ka tačnoj gornjoj međi preko nizova $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ iz jedinične sfere Banahovog prostora ℓ^s dobija se relacija (3,22).

Time je tvrđenje u potpunosti dokazano.

3.4 Osnovne interpolacione teoreme i njihove posledice

1. Iz rezultata paragrafa 3.2 i 3.3, to jest iz Leme 3.2 i Teoreme 3.2 proizlazi

T e o r e m a 3.3. - Uključivanje $H^p(Z)$ u ℓ^r, $0 < p < \infty$, $p/2 \leqslant r \leqslant \infty$, zadovoljeno je u tom i samo u tom slučaju kada je preslikavanje

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (z_j + \overline{z}_k)^{-1} \nu_k \right\}_{j=1}^{\infty} \tag{3,26}$$

ograničeni operator iz ℓ^u u ℓ^v, gde je $u = 2r/(2r-p)$ i $v = 2r/p$, $1/u + 1/v = 1$.

Teorema 3.3. ima sledeće posledice:

P o s l e d i c a 1. - Uključivanje $H^p(Z)$ u ℓ^p, $0 < p < \infty$, ekvivalentno je ograničenosti operatora (3,26) kao preslikavanje iz ℓ^2 u ℓ^2, drugim rečima, ekvivalentno je ravnomernoj po n ograničenosti sopstvenih vrednosti nenegativne Ermitove matrice $((z_j + \bar{z}_k)^{-1})_{j,k=1}^{\infty}$.

P o s l e d i c a 2. - Ako je $H^p(Z) \subset \ell^r$ za $r < p < \infty$, tada je

$$\left\{ \left(\mathrm{Re}(z_k) \right)^{-1} \right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{r/(p-r)} .$$

D o k a z. S obzirom na oznake u Teoremi 3.1, iz uslova $H^p(Z) \subset \ell^r$ sledi da je za ma koji niz pozitivnih brojeva $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^u$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} \gamma_k \right|^v < \infty . \tag{3,27}$$

Pošto je $|\arg(z_j + \bar{z}_k)| < \pi/2$, to je za ma koji prirodni broj j

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} \gamma_k \right| > (2\,\mathrm{Re}(z_j))^{-1} \gamma_j . \tag{3,28}$$

2. Iz relacija (3,27) i (3,28) proizilazi da je za ma koji niz pozitivnih brojeva iz ℓ^u zadovoljeno uključivanje $\{(\mathrm{Re}(z_k))^{-1} \gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ u ℓ^v; drugim rečima, niz $\{(\mathrm{Re}(z_k))^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ određuje multiplikator (videti [16],Gl.6) iz ℓ^u u ℓ^v. Tvrđenje posledice proizilazi, na taj način, iz sledeće leme:

L e m a 3.5. - Niz $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ definiše multiplikator iz ℓ^u u ℓ^v, $u > v$, tada i samo tada kada

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{uv/(u-v)}$$

D o k a z. - Neka je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k w_k|^v < \infty \qquad (3,29)$$

za ma koji niz $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ iz ℓ^u, tj. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ definiše multiplikator iz ℓ^u u ℓ^v. Ako niz $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ prolazi kroz sve tačke prostora ℓ^u, tada niz $\{w_k^v\}_{k=1}^{\infty}$ (gde pod w_k^v podrazumevamo sve moguće vrednosti stepene funkcije) prolazi kroz sve tačke prostora $\ell^{u/v}$. Pošto je $1 < u/v < \infty$, to, na osnovu poznate Landanove (E. Landau) teoreme (videti [4], § 21), iz konvergencije reda (3,29) za ma koji niz $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ iz ℓ^u proizlazi uključivanje $\{a_k^v\}_{k=1}^{\infty}$ u $\ell^{u/(u-v)}$, ili, što je isto, uključivanje $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ u $\ell^{uv/(u-v)}$. Obrnuto, ako je $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{uv/(u-v)}$, tada zadovoljavanje uslova (3,29) za ma koji niz $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ iz ℓ^u sledi iz Helderove nejednakosti.

P o s l e d i c a. - Ako je niz tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ takav da je

$$|\arg(z_k)| \leq \varphi < \pi/2, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

tada je uključivanje $H^p(Z)$ u $\ell^{p/2}$, $0 < p < \infty$, ekvivalentno zadovoljavanju uslova

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |z_j + \bar{z}_k|^{-1} < \infty \qquad (3,30)$$

D o k a z. Na osnovu Teoreme 3.1, uključivanje $H^p(Z)$ u $\ell^{p/2}$ pokazuje nam da je za ma koji ograničeni niz $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(z_j + \bar{z}_k)^{-1}\nu_k\right| < \infty . \qquad (3,31)$$

Očigledno, relacija (3,31) je neposredna posledica relacije (3,30); obrnuto, relacija (3,30) proizlazi iz relacije (3,31) za $\nu_k \equiv 1$, imajući u vidu da je

$$\operatorname{Re}(z_j + \bar{z}_k)^{-1} \geqslant |z_j + \bar{z}_k|^{-1}\cos\varphi, \quad j,k = 1,2,\ldots.$$

5. Dualno teoremi 3.3. je sledeće tvrđenje, čiji dokaz neposredno proizlazi iz Teoreme 3.1 (§ 3.2) i Teoreme 3.2 (§ 3.3):

T e o r e m a 3.3. - Ako je $1 < p < 2$ i $1 \leqslant r \leqslant p/(2-p)$ ili je $2 \leqslant p < \infty$ i $1 \leqslant r \leqslant \infty$, uključivanje ℓ^r u $H^p(Z)$ zadovoljeno je u tom i samo u tom slučaju kada preslikavanje

$$\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty} \longmapsto \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Re}(z_j)\operatorname{Re}(z_k)}{B_j(z_j)B_k(z_k)}\right)^{\alpha}(z_j + \bar{z}_k)^{-1}\nu_k\right\}_{j=1}^{\infty} \quad (3,32),$$

definiše ograničeni operator iz ℓ^u u ℓ^v; pri tom je $\alpha = p/2(p-1)$, $u = 2(p-1)r/(pr+p-2r)$, $v = 2(p-1)r/p(r-1)$.

P o s l e d i c a 1. Uključivanje ℓ^p u $H^p(Z)$, $1 < p < \infty$, ekvivalentno je ograničenosti operatora (3,32) kao preslikavanje iz ℓ^2 u ℓ^2; drugim rečima ekvivalentno ravnomernoj po n ograničenosti sopstvenih vrednosti pozitivno definisane Ermitove matrice

$$\left(\left|\frac{\operatorname{Re}(z_j)\operatorname{Re}(z_k)}{B_j(z_j)B_k(z_k)}\right|(z_j + \bar{z}_k)^{-1}\right)_{j,k=1}^{n},$$

pri tome je $\alpha = p/2(p-1)$.

P o s l e d i c a 2. Ako je $\ell^r \subset H^p(Z)$, za $r > p > 1$, tada je

$$\{ Re(z_k) | B_k(z_k)|^{-p} \}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{r/(r-p)} .$$

P o s l e d i c a 3. Ako tačke niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ kada $k \to \infty$ teže ka imaginarnoj osi po netangetnom pravcu, uključivanje

$$\ell^{p/(2-p)} \quad u \quad H^p(Z), \qquad 1 < p < 2;$$

$$\ell^{\infty} \quad u \quad H^p(Z), \qquad 2 \leq p < \infty ,$$

ekvivalentno je ispunjavanju uslova

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \left| \frac{Re(z_j)Re(z_k)}{B_j(z_j)B_k(z_k)} \right|^{p/2(p-1)} |z_j + \bar{z}_k|^{-1} < \infty .$$

Posledice 2 i 3 dokazuju se potpuno analogno kao posledice 2 i 3 Teoreme 3.2.

4. Pri izučavanju pitanja ukjučivanja ℓ^r u $H^p(Z)$ bitno je proceniti normu (kvazinormu, ako je $p < 1$) funkcije $f_p^j(z)$ klase H^p koja zadovoljava interpolacione uslove

$$f_p^j(z_k) = \delta_k^j, \quad j,k = 1,2, \dots . \qquad (3,33)$$

Poznato je (videti [43], Gl.8), da se neophodan i dovoljan uslov za postojanje funkcije $f_p^j(z)$, $0 < p \leq \infty$, javlja u obliku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Re(z_k)}{1 + |z_k|^2} < \infty , \qquad (3,34)$$

koji obezbeđuje konvergenciju Blaškeovog proizvoda (3,7).

L e m a 3.6. - Ako niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ različitih tačaka poluravni $\mathrm{Re}(z) > 0$ zadovoljava uslov (3,34), tada za ma koji prirodni broj j u klasi H^p, $0 < p < \infty$, postoji jedinstvena funkcija $f_p^j(z)$ s minimalnom vrednošću $\|f_p^j\|_p^p$, koja zadovoljava relaciju (3,33) i takva je da je

$$f_p^j(z) = \left(\frac{2\,\mathrm{Re}(z_j)}{z + \bar{z}_j}\right)^{2/p} \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)} \tag{3,35}$$

(imajući u vidu, ako $2/p$ nije ceo broj, odgovarajuću jednoznačnu granu višeznačne funkcije) i

$$\|f_p^j\|_p^p = 2\,\mathrm{Re}(z_j)\,|B_j(z_j)|^{-p} \tag{3,36}$$

D o k a z. Očigledno je da funkcija (3,35) zadovoljava interpolacioni uslov (3,33) za ma koje $p > 0$ i $j = 1,2, \ldots$. Na osnovu Leme 3.4, sledi postojanje i jedinstvenost funkcije sa traženim osobinama u specijalnom slučaju $p = 2$. S druge strane, relacija (3,16) pokazuje da je

$$\|f_2^j\|_2^2 = \sup_{g \in H^2} \|g\|_2^{-2} \left| \frac{2\,\mathrm{Re}(z_j)}{B_j(z_j)}\, g(z_j)\right|^2 . \tag{3,37}$$

Na osnovu Leme 3.4, tačna gornja međa na desnoj strani relacije (3,37) dostiže se na funkciji $(z + \bar{z}_j)^{-1}$, otkuda, na osnovu (3,5) i s obzirom na Lemu 3.4, proizlazi tvrđenje leme za specijalan slučaj $p = 2$. Pošto je skoro svugde $|B(it)| = 1$, iz relacije (3,35) proizlazi da je

$$\|f_p^j\|_p^p = |B_j(z_j)|^{2-p}\, \|f_2^j\|_2^2, \qquad 0 < p < \infty ,$$

odakle sledi tvrđenje leme i za ostale p.

3.5. Interpolacija u prostorima H^p u poluravni $Re(z) > 0$

Kako nam pokazuje posledica 2 Teoreme 3.3, za uključivanje $H^p(Z)$ u ℓ^r, $r < p$, neophodno je da bude ispunjen uslov

$$Re(z_k) \longrightarrow \infty \quad \text{kad} \quad k \longrightarrow \infty . \tag{3,38}$$

Uključivanje pak $H^p(Z)$ u ℓ^p, $0 < p < \infty$, može imati mesto čak i bez ispunjavanja uslova (3,38); naime, to se utvrđuje sledećom lemom:

L e m a 3.7. - Neka je niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ takav da je

$$0 < \ell \leqslant Re(z_k) \leqslant L < \infty , \quad k = 1,2, \ldots , \tag{3,39}$$

a broj $N(Z,n)$ tačaka $\{z_k\}$, koje se rasprostiru u pojasu $n \leqslant Im(z) \leqslant n+1$, ravnomerno je po n ograničen:

$$N(Z,n) \leqslant M, \quad n = 0,\pm 1,\pm 2, \ldots ; \tag{3,40}$$

tada $H^p(Z) \subset \ell^p$ za ma kakvo $p > 0$.

D o k a z. Na osnovu Leme 2.2, dovoljno je posmatrati slučaj $p = 1$. Iz Poasonove integralne formule sledi da je za ma kakvu funkciju $f(z) \in H^1$ i $k = 1,2, \ldots$,

$$|f(z_k)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{x_k^2 + (y_k - t)^2} |f(it)| dt,$$

$z_k = x_k + iy_k$.

Pošto je $|f(it)| \in L^1_{(-\infty , \infty)}$, tvrđenje leme proizlazi iz toga što je, s obzirom na (3,39) i (3,40), ravnomerno u odnosu $t \in (-\infty , \infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{x_k^2 + (y_k - t)^2} \leqslant M\left(\frac{3L}{\ell^2} + \frac{2L}{\ell^2+1^2} + \frac{2L}{\ell^2+2^2} + \dots\right)$$

$$\leqslant 2ML\left(\frac{3}{2\ell^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\right) < \infty .$$

Ako niz $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ zadovoljava uslov (3,39), tada su uslovi (3,40) zadovoljeni, specijalno, ako je niz tačaka $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ravnomerno raspoređen, tj.

$$|z_j - z_k| \geqslant \delta > 0, \quad j \neq k. \tag{3,41}$$

L e m a 3.8. - Ako su zadovoljeni uslovi (3,39) i (3,40), tada je

$$\inf_k |B_k(z_k)| > 0.$$

D o k a z. Neka je z_k ma koja tačka niza $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Mnoštvo pravougaonika P_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, koje se formira presecanjem pojasa $\ell \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant L$ i pravih $\mathrm{Im}(z) = m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, numerišemo sledećim redosledom: P_0 je onaj pravougaonik u kome se nalazi tačka z_k; ostale pravougaonike numerišemo u prirodnom poretku celim brojevima u zavisnosti od njihove udaljenosti od pravougaonika P_0. Očigledno je

$$|B_k(z_k)| = \prod_{j\neq k} \left|\frac{z_k - z_j}{z_k + \bar{z}_j}\right| \geqslant \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\prod_{z_j \in P_n} \left|\frac{z_k - z_j}{z_k + \bar{z}_j}\right| \right)$$

(ako je $\mathrm{Im}(z_j)$ ceo broj, tada ćemo smatrati da tačka z_j pripada susednim pravougaonicima). Prema tome

$$\prod_{z_j \in P_0} \left|\frac{z_k - z_j}{z_k + \bar{z}_j}\right| \geqslant \left(\frac{\delta}{\sqrt{4L^2+1}}\right)^{M-1};$$

$$\prod_{z_j \in P_1 \cup P_{-1}} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k + \bar{z}_j} \right| \geqslant \left(\frac{\delta}{\sqrt{4L^2 + 1}} \right)^{2M};$$

$$\prod_{\substack{z_j \in P_n \cup P_{-n} \\ |n| > 1}} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k + \bar{z}_j} \right| \geqslant \left(\frac{\delta}{\sqrt{4L^2 + (n-1)^2}} \right)^{2M};$$

na taj način je

$$\prod_{n=\infty} \left(\prod_{z_j \in P_n} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k + \bar{z}_j} \right| \right) \geqslant \tag{3,42}$$

$$\geqslant \left(\frac{\delta}{\sqrt{4L^2 + 1}} \right)^{M-1} \left(\frac{}{\sqrt{4L^2 + 1}} \right)^{2M} \prod_{n=1} \left(\frac{n}{\sqrt{4L^2 + n}} \right)^{2M}.$$

S obzirom na elementarni dokaz konvergencije proizvoda na desnoj strani relacije (3,42), sledi

$$|B_k(z_k)| \geqslant c > 0, \quad k = 1,2, \ldots .$$

N a p o m e n a. Očigledno tvrđenje leme ostaje da važi ak je u uslovu (3,39) $\ell = 0$.

T e o r e m a 3.5. - Uslovi (3,39) i (3,41) neophodni su i dovoljni da bi bilo $H^p(Z) = \ell^p$, $0 < p < \infty$.

D o k a z. - Ako su ispunjeni uslovi (3,39) i (3,41), tada je, na osnovu Leme 3.7, $H^p(Z) \subset \ell^p$; posledi•e 1 iz Teorema 3.2 i 3.3, uzimajući u obzir Lemu 3.8, pokazuju da je $\ell^p \subset H^p(Z)$, $1 < p < \infty$. Iz Lema 3.6 i 3.8 sledi da za $p \leqslant 1$ red

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k \, f_p^k(z)$$

konvergira u prostoru H^p za ma koji niz $W = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$, odakle proizlazi uključivanje ℓ^p u $H^p(Z)$ za $p \leq 1$.

Obrnuto, ako je $H^p(Z) = \ell^p$ za neko $p > 0$, tada posledice 1 Teorema 3.2 i 3.3 dokazuju da su uslovi (3,39) i (3,41) zadovoljeni.

*

* *

Kada sam radio magistarski rad u kome je jedno poglavlje posvećeno interpolaciji analitičkih funkcija klase H^p $(1 \leq p \leq \infty)$, unutar jediničnog kruga, formulisao sam i dokazao u vezi sa ovom problematikom dve teoreme, koje su kasnije publikovane u Biltenu PMF br.2, 1974 god. u Priš - tini. Proučavajući monografiju od Hoffmana "Banach spaces of analytic functions" zainteresovala me je naročito njena osma glava, koja je posvećena prostoru H^p u poluravni $Re(w) \geq 0$. Osnovni stavovi prostora H^p u poluravni dokazani su analognim metodama kao za prostor H^p unutar jediničnog kruga poluprečnika r. U pomenutoj glavi detaljno su opisani odnosi među prostorima H^p unutar kruga i H^p u poluravni.

Tada sam upotpunio svoje znanje o odnosima između prostora H^p unutar kruga i prostora H^p u poluravni čitajući monografiju P.L. Duren-a "Theory of H^p spaces".

Poznavajući problem interpolacije u jediničnom krugu počeo sam razmišljati o interpolaciji u poluravni. Pri tom sam imao u vidu činjenicu, da bi analitička funkcija f pripadala klasi H^p u poluravni neophodno je da njene L^p-norme na vertikalnim pravima budu konačne, odnosno ograničene; za razliku od slučaja unutar kruga poluprečnika r gde se ne postavlja uslov o konačnosti L^p-norme. Zahtev ograničenosti

L^p-normi na vertikalnim pravima podjednaka je važna kao za velike vrednosti x tako i za male vrednosti x.

Pročitavši rad "Interpolacija v prostranstvah H^p v poluploskosti" od A.M. Sedleckog (DAN SSSR, 208, 1973) još više sam se zainteresovao za problematiku interpolacije u poluravni.

Svoja razmišlanja izložio sam Dr. Vojinu Dajoviću, redovnom profesoru Univerziteta, koji me je podstakao na dalji rad ukazavši mi raznu literaturu u vezi sa pomenutom prob - lematikom. Svoj boravak na Univerzitetu u Moskvi, iskoristio sam da sa mojim idejama upoznam i dr. J.A. Kazmina koji me upoznao sa S.V. Švedenkom i A.M. Sedleckim. Posle upornog rada, uspeo sam da formulišem i dokažem prethodno navedene rezultate o interpolaciji u poluravni. U saradnji sa ovim matematičarima uspeo sam da zajedno sa S.V. Švedenkom publikujemo jedan rad u DAN SSSR, a nekoliko su pripremljeni za štampu.

Osim gorenavedenih rezultata postoje i otvoreni problemi o kojima dalje razmišljam i pokušavam da ih rešim. Naime, mogu konstatovati da se problemi koje sam rešio odnose na pruge $0 < \ell \leqslant Re(z) \leqslant L < \infty$, a što se tiče daljeg razvoja problematike interpolacije u poluravni koja je inače rešena za krug poluprečnika r, ali još nije rešena za poluravan navodim u tom pravcu već nekoliko učinjenih početnih koraka, kao na primer:

Elementima matrice Grama (G^n) u krugu odgovaraju elementi

$$b_{jj} = (1 - |z_j|^2)\frac{1}{|B_j(z_j)|^2},$$

a ovi u poluravni korespondiramo elemente

$$b_{jj} = \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - z_j|^2}\,\frac{1}{|{}'_j(z_j)|^2},$$

$$z_j = \frac{\xi_j - i}{\xi_j + i}, \quad z_j \longrightarrow 1, \quad \xi_j \longrightarrow \infty .$$

Postavlja se pitanje, na koji način konstruisati interpolacioni niz $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ u poluravni $Re(w) \geqslant 0$ koji odgovara interpolacionom nizu $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ koji se nalazi u unutrašnjosti kruga i ugla $2\varphi < \delta$ čiji kraci polaze iz tačke $z = 1$ put unutrašnjosti kruga pri čemu $z_k \to 1$.

Znajući da je $\operatorname{tg}\varphi = (1 - |z_j|)(|1 - z_j|)^{-1}$, tada razlikujemo sledeće slučajeve:

1) $\operatorname{tg}\varphi \geqslant \delta > 0$,

2) $\operatorname{tg}\varphi \longrightarrow 0$ ali ne brzo,

3) $\operatorname{tg}\varphi \rightrightarrows 0$,

4) $z_j \neq 1, \quad \xi_j \neq \infty$.

Postavlja se pitanje kakvu odgovarajuću interpolaciju možemo korespondirati u poluravni. Naročito su interesantni slučajevi (1) i (3) koji su predmet daljeg ispitivanja.

U izboru problematike, pravca rada i rešavanja navedenih problema interpolacije u poluravni svesrdno me je postakao i pomagao moj naučni rukovodilac dr. Vojin Dajović. Za svaki dobijeni rezultat obavestio sam profesora Vojina Dajovića čije su mi sugestije bile od izuzetnog značaja.

Za uspešno rešavanje navedenih problema kao i za blagovremeno pružanu pomoć i za pažljivo pregledani rukopis, duboku zahvalnost dugujem dr. Vojinu Dajoviću, redovnom profesoru Univerziteta u Beogradu.

B i b l i o g r a f i j a

[1]. Akutowicz E.J. - An interpolations series - Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, N° 4, 559 - 563.

[2]. Akutowicz E., Carleson L. - The analytic continuation of interpolatory functions - J. Analyse Math. , 7, 1959/60, 223 - 247.

[3]. Ahiezer N.I. - Lekcii po teorii aproksimacii - "Nauka" Moskva, 1965.

[4]. Ahiezer N.I., Glazman I.M. - Teorii lineinih operatorov v gilbertovom prostranstve - Moskva, 1966.

[5]. Aronzain N. - Theory of reproducing kernels - Trans. Amer. Math. Soc., 68, 1950, 337 - 404.

[6]. Boas R.P. - Isomorphism between H^p and L^p - Amer. J. Math.,77, 1955, 655 - 656.

[7]. Bonsall F. - Dual extremum problems in the theory of functions - J. London Math. Soc., 31,1956,105 - 110.

[8]. Carleson L. - An interpolation problem for bounded analytic functions - Amer. J. Math.,80,1958,921 - 930.

[9]. Carleson L. - Interpolations by bounded analytic functions an the corona problem - Ann. of Math.,76,1962, 542 - 559.

[10]. Carleson L. - The corona theorem - Lectyre Notes in Math. 118, 1969, 121 - 132.

[11]. Chalmers B. - Subspace kernels and minimum problems in hilbert spaces with kernel functions - Pacific J. Math., 31, 1969, 619 - 628.

[12]. Chalmers B. - Interpolation series and sequences - Arch. Math., 21, 1971, 609 - 616.

[13]. Chalmers B. - Some interpolation problems in hilbert spaces - Michigam Math., J., 18, 1971, 41 - 49.

[14]. Cima J., Colvell P. - Blaschke quotiens and normality, Proc. Amer. Math. Soc., 19, 1968, 796 - 798.

[15]. Dajović V. - Jedan kriterijum za pripadnost analitičke funkcije klasi H^p $(1 < p \leq 2)$ - Vesnik Društva Mat. i Fiz. NRS, VI, 1- 2, 1954, 80 - 85.

[16]. Day M.M. - The spaces L^p with $0 < p < 1$ - Bull. Amer. Math. Soc., 46, 1940, 816 - 823.

[17]. Dei M.M. - Normirovanie lineinie prostranstva-Moskva,1961.

[18]. Détraz J. - Algebres de fonctions analytiques dans le disque - Ann. Sci. École Norm. Sup.,4,1970, 313-352.

[19]. Duren P. - Theory of H^p spaces - N.- Y., 197..

[20]. Duren P. - On the multipliers of H^p spaces - Proc. Amer. Math. Soc., 22, 1969, 24 - 27.

[21]. Duren P., Williams D. - Interpolation problems for function spaces - J. Funct. Anal., 9, 1972, 75 - 86.

[22]. Duren P.,Shapiro H. - Interpolation in H^p spaces - Proc. Amer. Math. Soc., 31, 1972, 162 - 164.

[23]. Duren P., Shields A. - Coefficient multipliers of H^p and B^p spaces - Pacific J. of Math., 32, N° 1, 1970, 69 - 78.

[24]. Duren P., Shields A. - Properties of H^p $(0 < p < 1)$ and its containing Banach space - Trans. Amer. Math. Soc. 141, 1969, 255 - 262.

[25]. Duren P.,Romberg W.,Shields A. - Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$. - J. Reine Angew. Math. 238, 1969, 32 - 60.

[26]. Earl J. - On the interpolation of bounded sequences by bounded functions - J. London Math.Soc.2,1970,544-548.

[27]. Epstein B.,Greenstein P., Minker J. - An extremal problem with infinitely many interpolation conditions - Ann. Akad. Scient. Fenn., 250, 1958, 3 - 9.

[28]. Epstein B., Minker J. - Extremal interpolating problems in the unit disk - Proc. Amer. Math. Soc. II, 1960, 777 - 784.

[29]. Garling D. - On topological sequence spaces - Proc. Cambridge Phil. Soc., 63, 1967, 997 - 1019.

[30]. Garnet J. - Interpolating sequences for bounded harmonic functions - Indiana Uni. Math. J., 21, 1971,187-191.

[31]. Hayman W. - Interpolation by bounded functions - Ann. Inst. Fourier, 13, 1958, 277 - 290.

[32]. Heard E., Veččs J. - An interpolation problem for subalgebras of H - Pacific J. Math.,28,1969,543-553.

[33]. Hejhal D. - Linear extremal problems for analytic functions - Acta Math., 128, 1972, 91 - 122.

[34]. Kabaila V. - Ob interpolacii funkcii v klase H ,- Usp. Mat. Nauk, 13, 1(79), 1958, 181 -188.

[35]. Kabaila V. - O nekotorih zadači interpolacii v klase H^p,

pri $p < 1$ - DAN SSSR, 1960,132,5, 1002 - 1004.

[36]. Kabaila V. - Kai kuriu teoremu apie interpolacija H klaseje patikslinimas - Vilnious valstybinio v kapusko vardo universiteto Mosklo dabrai, 33, mat.fiz. IX, 1960, 15 - 19.

[37]. Kabaila V. - Nekotorih zadači interpolacii v klase H , pri ć ≠ 1 - "Isledovanija po sovremenim problemem teorii funkcii kompleksnogo peremenogo", Moskva,1961 str. 180 - 187.

[38]. Kabaila V. - Interpolacionie posledovatelnosti dlja klasov H_p v slučaje $p < 1$ - Litovski mat. sbornik, 1963, III, 141 - 147.

[39]. Kabaila V. Nekotorie svojstva funkcii klasa H_p i zadači interpolirovanija - Lit.Mat.Sb., 10, 1970, 471 - 490.

[40]. Kabaila V. - Ob odnoi probleme interpolacii v prostranstve H^p - Lit. Mat. Sb., 3, 1974, 87 - 92.

[41]. Kabaila V. - Ob odnoi interpolacii v klasse H_1 - Lit. Mat. Sb., 1, 1974, 33 - 39.

[42]. Kam Fook - tze - Nontangential sequences and interpolation by normal functions - Proc. Amer. Math. Soc., 29, 1971, 351 - 354.

[43]. Kenneth Hoffman - Banach spaces of analytic functions, 1962.

[44]. Krein M.G.,Nudeljman A.A. - Problema momentov Markova i ekstremalnie zadači - M., 1973.

[45]. Livingston A. - The space H^p, $0 < p < 1$, is not normable- Pacific J. Math.,3,1953, 613 - 616.

[46]. Legrand M. - Sur le théoréme de la couronne de L. Carleson - Thése Doct. Fac. Sci. Univ. Grenoble, 1969.

[47]. Macintyre A., Rogosinski W. - Extremum problems in the theory of analytic functions - Acta Math., 82, 1950, 275 - 325.

[48]. Naftaljevič A.G. - Ob interpolirovanii funkcii ograničenogo vida - Uč. zapiski Vilnjus un-ta,5,1956,5-27.

[49]. Nevanlina R. - Über beschrankte analytische Funktionen Ann. Akad. Scient. Fenn., 32, 1929, 1 - 75.

[50]. Newman D. - Interpolation in H - Trans.Amer. Math. Soc. 92, 1959, 501 - 507.

[51]. Pick G. - Über die Beschrankngen analytischer Funktionen welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt sind Math. Ann., 77, 1916, 7 - 23.

[52]. Rosenbaun J. - Simultaneous interpolation in H^2 - Michigam Math. J. ,14, 1967, 65 - 70.

[53]. Rosenbaun J. - Simultaneous interpolation in H_2, II, Pacifik J. Math.,27, 3, 1968, 607 - 610.

[54]. Robertson A., Robertson V. - Topologičeskie vektornie prostranstva - M.,1967.

[55]. Sarroste D. - Suites d 'interpolation - C-R. Acad. Sci. Paris, 274, 1972, A1905 - A1908.

[56]. Schur I. - Über Potenzeihen die im Innern des Einheitskreieses beschrankt sind - J. Reine Angew. Math.,147, 1917, 205 - 232.

[57]. Shapiro H., Shields A. - On some interpolation problems for analytic functions - Amer.J.Math.,83,1961,513-532.

[58]. Sedleckii A.M. - Interpolacija v prostranstvah H^p v poluploskosti - DAN, SSSR, 208, 1973, 1293 - 1295.

[59]. Sedleckii A.M. - Ekvivalentnoe opredelenie prostranstv H^p v poluploskosti i nekotorie priloženija - Mat. Sb. 96(138) N° 1, 1975.

[60]. Shvedenko S.V. - Interpolacionie svojstva nekotorih klassov analitičeskih i garmoničeskih funkcii - Sb."Primenjenie fun. analiza i teorii približenii", I, Kalinin, 1973, 156 - 163.

[61]. Shvedenko S.V. - Interpolacija v nekotorih gilbertovih prostranstvah analitičeskih funkcii - Mat. Zametki 15, 1974, 101 - 112.

[62]. Shvedenko S.V. - Ob odnoi interpolacionoi zadače v klasse funkcii H^2 - Sb. naučnih trudov po mikroelektronike, fiz-mat serija, MIET, M., 1974, 224 - 233.

[63]. Shvedenko S. V. - Funkcionalnie interpolirovanie posledovatelnostei iz ℓ^p funkcijama klassa H^2 - Sb. "Primenjenie funkc. analia v teorii približenii", 2, Kalinin, 1974, 145 - 150.

[64]. Shvedenko S.V. - Interpolacinają zadača v klasse funkcii H^p - Sb."Primenie funkc. analiza v teorii približenii", 2, Kalinin, 1974, 137 - 144.

[65]. Shvedenko S.V. - Funkcionalnaja interpolacija v klassah Hardy H^p - Izv. VUZ Matematika,4(155),1975,230 - 241.

[66]. Snyder A. - Sequence spaces and interpolation problems for analytic functions - Studia Math., 39, 1971, 137-153.

[67]. Sz.-Nagy B., Korányi A. - Rélations d'une probléme de Ne-

vanlinna et Pick avec la théorie des opérations de l'espace hilbertien - Acta Math. Hung. 7, 1956,295-302.

[68]. Sinclair A. - Approximation of extremal functions in H^p by an iterative method , J. Approx. Theory,16,1972.320

[69]. Sinclair A. - Determination of extremal functions in H^p by a Fortran program - SIAM J. Numer. Anal.,10,1973.

[70]. Turku H. - O nekim interpolacionim zadacima funkcija u klasi H^p - Zbornik radova PMF u Prištini,1,1975, 231 - 242.

[71]. Turku H., Švedenko S.V. - Interpolacija v klasse H^2 v poluploskosti - DAN,SSSR, 225, 4, 1975, 771 - 774.

[72]. Taylor B., Williams D. - Interpolation of ℓ^q sequences by H^p functions - Pro. Amer. Math. Soc. 34, 1,1972 181 - 186.

[73]. Walters S. - The space H^p with $0<p<1$, - Proc. Amer. Math. Soc., 1, 1950, 800 - 805.

[74]. Walters S. - Remarks on the space H^p - Pacific J. Math. 1, 1951, 455 - 471.

[75]. Yosida K. - Functional analysis - Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1965.

[76]. Young R. - Interpolation in a classical hilbert space of entire functions - Trans. Amer. Math. Soc., 192, 1974, 97 - 114.

[77]. Zigmund A. - Trigonometričeskie rjadi - tom I i II, M.,1965.

S A D R Ž A J

Strana