

Универзитет у Београду

Математички факултет

МАСТЕР РАД

ТЕМА: Докази теорема средњошколске математике

Студент:
Милутин Којић 1095/2012

Ментор:
Проф. др Небојша Икодиновић

Београд, септембар 2013.

САДРЖАЈ

САДРЖАЈ	2 -
УВОД	3 -
I УВОДНИ ПОЈМОВИ	5 -
1.1. ДЕФИНИЦИЈА, АКСИОМА, ТЕОРЕМА	5 -
1.2. ДОКАЗИ – ФОРМАЛНИ И НЕФОРМАЛНИ	5 -
1.3. ИМПЛИКАЦИЈА И ЕКВИВАЛЕНЦИЈА	7 -
1.4. НЕКА ПРАВИЛА ЛОГИЧКОГ ЗАКЉУЧИВАЊА	8 -
1.5. ОБЕЛЕЖАВАЊЕ ДОКАЗА	10 -
II ДОКАЗИ У ПРВОМ РАЗРЕДУ	11 -
2.1. ДОКАЗИВАЊЕ СКУПОВНИХ ИДЕНТИТЕТА	11 -
2.2. ПРОСТИ БРОЈЕВИ; ДЕЉИВОСТ; ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ	13 -
2.3. ПОЛИНОМИ	15 -
2.4. НЕЈЕДНАКОСТИ	19 -
2.5. ДОДАТАК УЗ ДРУГО ПОГЛАВЉЕ	23 -
III ДОКАЗИ У ДРУГОМ РАЗРЕДУ	26 -
3.1. СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ	26 -
3.2. КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА	30 -
3.3. ОСОБИНЕ ЛОГАРИТАМА	36 -
3.4. ТРИГОНОМЕТРИЈА	39 -
3.5. ДОДАТАК УЗ ТРЕЋЕ ПОГЛАВЉЕ	54 -
IV ДОКАЗИ У ТРЕЋЕМ РАЗРЕДУ	55 -
4.1. ДЕТЕРМИНАНТЕ И ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ	55 -
4.2. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО	58 -
4.3. ВЕКТОРИ	60 -
4.4. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА	67 -
4.5. АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ	72 -
4.6. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА	76 -
4.7. БРОЈЕ	80 -
4.8. ГЕОМЕТРИЈСКИ РЕД	81 -
4.9. АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ	84 -
4.10. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ	87 -
4.11. МОАВРОВА ФОРМУЛА; КОРЕНОВАЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА	90 -
4.12. ПОЛИНОМИ НАД ПОЉЕМ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА	93 -
4.13. ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ	95 -
4.14. ДОДАТАК УЗ ЧЕТВРТО ПОГЛАВЉЕ	96 -
IV ДОКАЗИ У ЧЕТВРТОМ РАЗРЕДУ	98 -
5.1. ФУНКЦИЈЕ	98 -
5.2. НЕКЕ ВАЖНИЈЕ ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ	103 -
5.3. ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ	106 -
5.4. НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ	115 -
5.5. КОМБИНАТОРИКА	118 -
5.6. БИНОМНА ФОРМУЛА	121 -
5.7. ДОДАТАК УЗ ПЕТО ПОГЛАВЉЕ	123 -
ЗАКЉУЧАК	127 -
ЛИТЕРАТУРА	129 -

УВОД

Средњошколски систем је већ годинама мета разноразних критика стручне јавности. Многе ствари у том систему нису онакве какве би требало да буду, али се исто тако већ готово две деценије у њему ништа не мења. Сви се увек крију иза флоскула како је градиво преобимно, како је план и програм неадекватан и слично, али се ретко ко труди да макар у домену свог рада нешто и промени.

Од свих школских предмета, сматрам да је математика убедљиво најнеомиљенија, како међу ђацима, тако и међу одраслим људима у Србији. Јако мали број средњошколаца се математиком бави више него што заиста мора, а неретко се и средње школе бирају по томе где има најмање математике. То је заиста забрињавајуће, али сматрам да је још већи проблем што чак и они који математици посвећују више пажње, то не раде на, по мом мишљењу, адекватан и користан начин.

Средњошколски професори математике ретко када желе да се упуштају у било каква теоријска разматрања, већ се понашају као професори кулинарства – деле рецепте за израду задатака. Тако настаје велики проблем. Колико смо само формула научили у средњој школи а да нам нико није рекао одакле те формуле и због чега оне важе. Када смо уписали Математички факултет, професори су тежили да нас науче неким знатно компликованијим стварима, сматрајући да те средњошколске „тривијалности“ добро знамо.

Поћи ћу од свог примера. Завршио сам природно-математички смер гимназије која је по свим истраживањима међу бољима у Србији, имао сам сјајну професорку математике, годинама сам одлазио на додатну наставу из овог предмета, као и на сва такмичења. Ипак, и поред свега овога, када сам стигао на прву годину Математичког факултета схватио сам колико је моје знање математике заправо сведено на решавање типских задатака. Ниједан једини доказ нисам умео сам да изведем из простог разлога јер ми то никада нико није показао.

Ево једног примера: свако од нас се много пута сусретао са потребом да реши неку квадратну једначину. Сви ми, по аутоматизму, одмах потеземо за добро познатим обрасцем за израчунавање решења квадратне једначине. Ту формулу су нас научили у другом разреду средње школе и ми се тада нисмо превише питали одакле та формула, већ смо веровали на реч нашим професорима. Данас, када смо на почеку радног века, можемо наставити по истом принципу и дати ову формулу ученицима без икаквог објашњења, или се можемо потрудити да ученике заиста убедимо да ова формула има баш такав облик и да то није неко тек тако смислио већ је она последица низа логичких корака. Ово је само један од много примера.

Тема овог рада су, једном речју, докази. Јасно је да средњошколска математика не може бити базирана на доказивању теорема јер је веома мали број ученика спреман да испрати такав начин рада, али, са друге стране, не смемо запостављати напреднију децу и остављати их без објашњења за многе математичке теореме уз реченицу „верујте ми да то важи“. Математика је хармонична средина у коју ниједна формула није тек тако стигла већ је последица различитих логичких законитости. Ако се определимо за потпуно изостављање доказа, како данас многи професори раде, код ученика се ствара утисак да је математика потпуно апстрактна наука и читаво логичко царство које влада у њој почиње да се урушава.

Многи ће рећи да су докази исувише сувопарни и тешко разумљиви деци и донекле ће бити у праву. Ипак, не постоје само такозвани удбенички докази већ за многе теореме постоје и интересантне илустрације које би децу убедиле у важење одређеног тврђења. Наравно, не треба отићи ни у другу крајност и очекивати да професори сваку формулу изводе или сваку теорему доказују. Професор је тај који треба да процени шта би ваљало доказати јер се на тај начин код ученика развија логичко мишљење, што ће им у даљем школовању, ма којим путем кренули, бити од великог значаја. Други важан ефекат који се постиже на овај начин је тај што се ученици непрекидно „шетају“ кроз читаво градиво математике и на тај начин је процес заборављања сведен на мању меру.

Велики проблем је и чињеница да сасвим сигурно ни велики број мојих колега не зна да докаже многе важне теореме јер се просто годинама нису сусретали са потребом да то чине. И ту може настати велики проблем, ако би неко дете затражило објашњење због чега би, на пример, адициона формула морала да има баш онакав облик.

Овај рад представља скраћени преглед свих области алгебре и анализе које се обрађују у средњим школама. У њему су издвојене најважније теореме као и њихови докази. Трудио сам се да теореме буду што разноврсније, од оних које се изводе простим рачунањем преко такозваних доказа у два смера, па све до компликованих теорема за чије разумевање је потребно доста знања и концентрације.

Треба још нагласити да у раду сигурно нису обухваћене баш све теореме које се могу појавити у средњошколској математици. Неке сам сигурно изоставио, али оне круцијалне су ипак овде.

I УВОДНИ ПОЈМОВИ

1.1. ДЕФИНИЦИЈА, АКСИОМА, ТЕОРЕМА

Од велике важности је да се ученици већ на почетку средњошколског образовања упознају са три основна математичка термина као и са њиховим значењем. Често се дешава да ученици ни на крају средње школе не умеју да одреде разлику између дефиниције и теореме, а то не би смело да се дешава.

Дефиниција је реченица која нас упознаје са неким новим појмом и објашњава нам које особине тај појам има и шта га карактерише. На пример, на почетку првог разреда средње школе дефинише се појам исказа као реченице која има тачно једну истинитосну вредност. Дакле, дефиниција нам даје објашњење о неком новоуведеном појму.

Аксиома је математичко тврђење које се не доказује. За разлику од дефиниције, аксиома не уводи никакве нове појмове већ исказује одређене особине већ дефинисаних појмова. Најочигледнији пример би биле геометријске аксиоме са којима се деца сусрећу већ у првом разреду. На пример: сваке две различите тачке одређују тачно једну праву.

Теорема је математичко тврђење које се доказује. По формулацији је исто као аксиома али се оно може доказати.

Неки аутори уместо појма теорема користе појмове **тврђење** или **став**. Ти појмови, у математичком смислу, имају исто значење као и теорема.

Такође, негде се може срести и појам **лема**. То је неко помоћно тврђење које се користи приликом доказивања неке теореме. Дакле, по структури је слично теорему, доказује се, али ипак нема толики значај као сама теорема.

Постојање аксиома се може оправдати чињеницом да без њих не би било смисла ишта доказивати. Морамо имати неке почетне информације за које се зна да важе (аксиоме), те на основу њих и дефиниција можемо изводити даља сложенија тврђења (теореме).

1.2. ДОКАЗИ – ФОРМАЛНИ И НЕФОРМАЛНИ

Као што смо већ рекли, математичко тврђење које се доказује је теорема. Шта значи доказати неку теорему? Како се то ради? На ово питање ретко који средњошколац би умео да да тачан одговор. Иако су темељи математике настајали управо на постављању теорема и њиховом доказивању, данашња настава математике у средњим школама се базира на неким другим фундаментима.

Хајде прво да објаснимо шта заправо значи доказати неку теорему. Прва асоцијација приликом помена речи теорема свима је Питагора и његова теорема о правоуглом троуглу: „Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама правоуглог троугла.“ Како доказати ово тврђење?

Замка у коју се најчешће упада приликом покушаја да се неко тврђење докаже јесте да се нађе неки пример за који постављено тврђење важи и да се на основу тога закључи да је формулисано правило увек тачно. У овом конкретном случају, то би значило да се нађе неки правоугли троугао, да се измери дужина његових страница и да се за те конкретне мере провери тачност тврђења. Након што се испостави да

је тврђење тачно, могли бисмо да га генерализујемо на било који други правоугли троугао. Ово је наравно погрешан пут.

Доказати неку теорему значи показати да је она увек тачна независно од избора елемената који фигурирају у њој. Дакле, Питагорина теорема важи за било који правоугли троугао а не само за неки изабран. Јасно је да није могуће проверити тврђење за сваки правоугли троугао јер их има бесконачно много па се морамо послужити неком другом методом за доказивање ове теореме.

Доказ је расуђивање током којег се установљава истинитост или погрешност неког тврђења (теореме). У доказивању теореме се ослањамо на аксиоме или раније доказане теореме позивајући се при томе на дефиниције појмова.

Са друге стране, када желимо да докажемо да неко тврђење не важи, тада је довољно уочити само један пример (тзв. контрапример) за који постављено тврђење није тачно и на основу њега закључити да тврђење не важи увек.

Доказе можемо поделити у две велике групе. У првој групи би били прави математички докази и то су једини потпуно исправни докази теорема. Дакле, то су докази у којима се користе искључиво дефиниције и већ доказане теореме. Међутим, веома често су формални докази одређених теорема превише тешки да би их деца могла разумети. Стога постоје и нешто мање формални докази који су најчешће разумљивији средњошколцима. То, као што смо рекли, нису строги математички докази већ више неке илустрације и сликовита објашњења која служе да убеди децу у истинитост одређених тврђења иако се са математичког гледишта не могу сматрати „правим“ доказима теорема. Дешава се да у тим поједностављеним доказима неки специјални случајеви не бивају размотрени и слично. Међутим, и ти непотпуни докази су бољи него никакви докази.

Са методичке стране гледано највећи промашај је изаћи пред ученике са неким тврђењем без да имамо начин да децу убедимо у тачност тог тврђења. И када доказ није сасвим математички коректан (односно није стого формалан), ученици то неће знати јер њихово математичко знање још увек није на том нивоу. Али и такав „непотпун“ доказ ће у ученичким очима изазвати осећај да се ради о тврђењу које је потпуно логично и очигледно. Изостављање доказа (или неког другог поткрепљења) одређеног тврђења додатно мистификује ионако доста апстрактну науку каква је математика.

Ако посматрамо формалне доказе, постоји неколико најчешће коришћених механизма за доказивање математичких теорема и о тим механизмима ће бити више речи нешто касније.

Са друге стране, доказе можемо поделити на једноставне и сложене. Једноставно доказивање теореме ради се тако што се крене од дефиниције и користећи већ позната тврђења тежимо да дођемо до жељеног резултата. Код сложених доказа се користе разни помоћни елементи, дефинишу нови објекти и слично. Оваква врста доказа је много интересантнија јер није предвидива. Оно што је међутим проблем код овакве врсте доказа јесте што ако не видимо идеју доказа тешко да бисмо сами успели до ње да дођемо.

1.3. ИМПЛИКАЦИЈА И ЕКВИВАЛЕНЦИЈА

Две логичке операције без којих би било немогуће формирати математичке теореме јесу импликација и еквиваленција. Осврнућемо се сада укратко на њих, како бисмо касније могли да их користимо без додатних објашњења.

Импликација и еквиваленција су логичке операције које су од огромног значаја у читавој математици. Велики број важних теорема, како алгебарских тако и геометријских, у оквиру своје формулације садржи једну од ове две операције.

Ако се неким исказима p и q придружи операција импликације, добијамо нови исказ облика $p \Rightarrow q$. Постоји више начина на које се овај исказ може прочитати.

Ево неких:

- 1) Ако p онда q ;
- 2) p имплицира q ;
- 3) Из исказа p следи исказ q ;
- 4) Исказ p повлачи исказ q ;
- 5) p је довољан услов за q ;
- 6) q је потребан услов за p ...

Треба се још подсетити да је исказ $p \Rightarrow q$ нетачан једино онда када је исказ p тачан, а исказ q нетачан. У свим осталим случајевима наведена импликација је тачна.

Много је теорема које у себи садрже “скривену” импликацију. У наставку овог рада ћемо се посветити неким од њих.

Погледајмо, са друге стране, операцију еквиваленције. Ако се неким исказима p и q придружи операција еквиваленције, добијамо нови исказ облика $p \Leftrightarrow q$. Постоји више начина на које се овај исказ може прочитати. Ево неких:

- 1) Исказ p је еквивалентан исказу q ;
- 2) p ако и само ако q ;
- 3) Ако p онда q и обрнуто;
- 4) p је потребан и довољан услов за q ...

Сада нам преостаје да погледамо какве везе има ово што смо навели са доказима математичких теорема. Погледаћемо сада две конкретне теореме:

Теорема 1: Нека су a, b, c произвољни природни бројеви. Тада важи: ако $a|b$ и $b|c$ онда $a|c$.

Преведимо сада ову теорему на језик математичке логике. То би изгледало овако:

$$(a, b, c \in \mathbf{N} \wedge a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$$

Доказ оваквог тврђења (не само конкретно овог већ многих која су оваквог облика) се изводи на начин да ми користимо оно што нам је дато на левој страни импликације, и на основу тога и неких других, од раније познатих тврђења, доказујемо да важи тврђење са десне стране. Ако успемо у тој намери, можемо рећи да је тврђење доказано и да је $a|c$ последица чињеница $a, b, c \in \mathbf{N}$, $a|b$ и $b|c$.

Погледајмо сада други пример:

Теорема 2: Троугао ABC је правоугли са правим углом у темену C ако и само ако важи $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.

Ако ову теорему запишемо језиком математичке логике, онда би то овако изгледало:

Троугао ABC је правоугли (са правим углом у C) $\Leftrightarrow |AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

Уколико бисмо сада ову теорему покушали да докажемо, то бисмо урадили у два корака. Већ смо нагласили да исказ $p \Leftrightarrow q$ значи ако p онда q и обрнуто. То, другим речима значи да се ово тврђење може раставити на два друга тврђења и то на следећи начин:

1) Троугао ABC је правоугли (са правим углом у C) $\Rightarrow |AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

2) $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \Rightarrow$ Троугао ABC је правоугли (са правим углом у C)

Другим речима, еквиваленција је импликација у два смера. То значи да би најпре морали да докажемо да за сваки правоугли троугао важи релација $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, а затим да уколико важи та релација, посматрани троугао јесте правоугли.

Да резимирамо: тврђење $A \Rightarrow B$ доказује се тако што претпоставимо да је услов A тачан и на основу тога доказујемо да важи и B . Тврђење $A \Leftrightarrow B$ “разбијамо” на два мања тврђења: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ и поступамо као у првом случају.

1.4. НЕКА ПРАВИЛА ЛОГИЧКОГ ЗАКЉУЧИВАЊА

Није могуће у најширем смислу научити механизам за доказивање било које математичке теореме јер таквих механизма има јако много. Ипак, можемо одредити најчешће коришћене “трикове” и логичке законе помоћу којих се неке од теорема могу доказати.

Вероватно најчешће коришћена метода јесте **свођење на противуречност** (лат. *Reductio ad absurdum*). Овом методом се на почетку доказа претпоставља супротно од онога што се жели доказати. Затим вршимо низ еквивалентних тврдњи са циљем проналаска контрадикције (апсурда). Ако пронађемо неку контрадикцију то ће значити да је почетна претпоставка била погрешна, те ће важити њој супротно тврђење а то је управо оно што смо и желели да докажемо. Овде се користи такозвани **закон о непротивречности** који тврди да једна категорична изјава не може бити истовремено и истинита и погрешна. Такође је битан и **закон искључења трећег** који нам каже да категорична изјава мора бити или тачна или погрешна, тј. нема треће могућности. Другим речима, уколико није истинита мора бити погрешна и обрнуто.

Дакле, ако желимо да докажемо да важи неко тврђење A , доказ почињемо тако што претпостављамо супротно, односно да важи $\neg A$. Након тога покушавамо да “извучемо” неку нелогичност. Ако успемо, значи да почетна претпоставка (да је тачно $\neg A$) није била тачна, па важи њој супротно тврђење, односно A .

Овакав начин доказивања се често назива и индиректно доказивање јер не доказујемо жељено тврђење већ оспоравмо супротно тврђење.

У овом раду ће бити приказано неколико доказа који су изведени овом методом.

Следеће често коришћено логичко правило расуђивања познато је по латинском називу **modus ponens**. Ево шта нам овакав начин закључивања говори: ако имамо исказ P и знамо да је он тачан и ако је тачан исказ $P \Rightarrow Q$, тада мора бити тачан и исказ Q . Записано језиком математичке логике, то изгледа овако:

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q.$$

На пример: Ако је исказ P -Данас је уторак, а исказ Q -Милош иде на посао, тада ће исказ $P \Rightarrow Q$ гласити: Ако је данас уторак, онда Милош иде на посао.

Дакле, ако знамо да је данас уторак (важи тврђење P) и ако знамо да је тврђење “Ако је данас уторак, онда Милош иде на посао” тачно (важи $P \Rightarrow Q$), можемо закључити да важи и тврђење “Милош иде на посао”.

Врло сличан претходно наведеном закону логичког расуђивања је и следећи закон познат као **modus tollens**. Суштина оваквог расуђивања састоји се у следећем: ако је тачна импликација $P \Rightarrow Q$ а исказ Q није тачан, тада је и исказ P такође нетачан. Другим речима важи:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

На пример: Исказ “Ако у просторији има ватре, онда у просторији има кисеоника” је тачан (испуњено је $P \Rightarrow Q$). Ако важи и исказ “У просторији нема кисеоника” (ово је исказ $\neg Q$), као логичан закључак се намеће да у просторији нема ватре, а то је управо исказ $\neg P$.

Када је реч о математичким доказима неизоставно је помињање **принципа математичке индукције**. Иако она не може баш да се сврста у ову категорију, наводимо је баш овде јер је један од честих “алата” за доказивање различитих тврђења. Суштина принципа математичке индукције је да се докаже да одређено тврђење важи за било који природан број n . То се, применом овог поступка, ради на следећи начин:

Нека је $P(n)$ тврђење које треба доказати. Тада приступамо следећем поступку:

- 1) Проверавамо да ли важи тврђење за $n=1$. Овај корак се назива **база индукције**.
- 2) Претпоставимо да тврђење важи за неко n . Оваква претпоставка назива се **индуктивна хипотеза**.
- 3) Проверавамо да ли је тврђење тачно за $n+1$. То чинимо тако што се користимо претпоставком важења индуктивне хипотезе.
- 4) Уколико смо доказали ставку 3), закључујемо да ће тражена формула важити за сваки природан број n .

Шта смо заправо на овај начин закључили?

- 1) Доказали смо да важи $P(1)$;
- 2) Доказали смо да ако важи $P(n)$, важиће и $P(n+1)$, што се може написати и на овај начин: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$;
- 3) Из 1) и 2) имамо да је $P(1) \Rightarrow P(1+1)$, па ће важити и $P(2)$;
- 4) На исти начин имамо да $P(2) \Rightarrow P(2+1)$, то јест важи и $P(3)$;
- 5) Можемо да закључимо да овај принцип важи за сваки природан број n .

Ово можемо представити и на један сликовит начин такозвани ефекат домина: Ако имамо дугачак низ домина и ако смо сигурни да:

1) прва домина пада;

2) која год домина да падне, обориће и следећу домину,

онда можемо да закључимо да ће све домине пасти, уколико се обори прва домина.



У оквиру доказа теорема из треће године ће бити још речи о математичкој индукцији. Тада ћемо и доказати нека тврђења помоћу овог метода.

1.5. ОБЕЛЕЖАВАЊЕ ДОКАЗА

У математици постоји уобичајен начин за записивање доказа одређене теореме. Ево сада кратке приче о томе одакле уопште данашњи симболи и терминологија.

Q. E. D. је скраћеница латинског израза ***quod erat demonstrandum*** („што је требало доказати“). Ова скраћеница се обично користи да назначи да је нешто дефинитивно доказано. Обичај је да се математички доказ сваке теореме завршава на овај начин.

Употреба ове скраћенице потиче од конвенционалне форме доказа: почиње се са општим аксиомама, затим се користи дедуктивна логика да би се дошло до нових резултата, све док се не добије исказ који је требало доказати. Сви докази теорема у Еуклидовим „Елементима“ завршавају се том реченицом. Из почасти према њему било је уобичајено да се крај доказа означава на тај начин. Данас се ова скраћеница не користи толико често као некада јер је латински у све мањој употреби и професори га све мање познају.

Са развојем штампаних књига долази до појаве новог симбола који означава крај доказа неке теореме. Тај симбол је $\square$ (празан квадратић) или $\blacksquare$ (црни квадратић). Постоје разне приче откуда баш овај симбол за крај теореме. По једној је човек који је припремао књигу за штампу видевши на крају Q.E.D. помислио да на том месту треба ставити квадрат па је то и учинио. Ипак, та претпоставка је погрешна. Овај симбол увео је Пол Халмош амерички математичар мађарског порекла.

Поред ове, користе се и друге ознаке. У енглеском језику је посебно довитљива ознака w^5 , што је скраћеница од “which was what was wanted” (што је оно што се тражило).

II ДОКАЗИ У ПРВОМ РАЗРЕДУ

План и програм математике за први разред средње школе није превише богат алгебарским теоремама које би се могле доказивати. У овом делу наводимо неке од доказа који се могу ученицима изводити у првој години средњошколског образовања. Пре тога погледајмо важећи план и програм првог разряда у гимназијама на природно-математичком смеру:

Редни број наставне теме	НАСТАВНЕ ТЕМЕ	Број часова по теми	Број часова за	
			обраду	остале типове часова
1.	Логика и скупови	27	11	16
2.	Реални бројеви; пропорционалност	13	8	5
3.	Увод у геометрију, подударност, вектори	19	8	11
4.	Рационални алгебарски изрази	32	9	23
5.	Изометријске трансформације, теореме о троуглу, четвороуглу и кругу	21	8	13
6.	Линеарне једначине и неједначине	16	5	11
7.	Сличност	13	4	9
8.	Тригонометрија правоуглог троугла	7	2	5
	УКУПНО	148	55	93

2.1. ДОКАЗИВАЊЕ СКУПОВНИХ ИДЕНТИТЕТА

Прва потреба за доказивањем код ученика у првом разреду средње школе јавља се приликом изучавања скупова. У тој области постоји читав низ задатака у којима је циљ доказати да важе одређени скуповни идентитети.

Ти докази се темеље на две чињенице које проистичу из основних дефиниција једнакости скупова.

Први начин да се докаже неки скуповни идентитет јесте директна примена дефиниције о једнакости скупова, која каже да су два скупа једнака ако се сваки елемент првог скупа налази и у другом скупу и обрнуто. Језиком математичке логике то би изгледало овако:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

или, краће записано:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Други начин да се нека једнакост докаже јесте примена теореме која каже да су два скупа једнака ако и само ако је први подскуп другог и други подскуп првог, односно:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Задатак 1: Доказати да за све скупове A и B важи $A \cap (A \cup B) = A$.

Решење:

Применићемо први начин за доказивање скуповних идентитета, па ће важити:

$$(\forall x) x \in (A \cap (A \cup B)) \Leftrightarrow (x \in A)$$

Даље, примењујемо дефиниције за скуповне операције уније и пресека па имамо да је:

$$(\forall x) (x \in A \wedge x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow (x \in A),$$

односно:

$$(\forall x) (x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B)) \Leftrightarrow (x \in A)$$

Даље, можемо приметити да у наведеном изразу фигуришу два исказа $x \in A$ и $x \in B$, те смо доказивање тачности овог скуповног идентитета свели на испитивање истинитосне вредности исказне формуле

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p,$$

где је $x \in A$ исказ p а $x \in B$ исказ q . Остаје нам да проверимо да ли је ова исказна формула таутологија, односно да ли је увек тачна. То можемо урадити различитим методама, а ми ћемо овде користити дискусију по слову:

- 1) Ако је $\tau(p)=T$, онда ће бити $T \wedge (T \vee q) \Leftrightarrow T$, односно $T \wedge T \Leftrightarrow T$, што је тачно.
- 2) Ако је $\tau(p)=\perp$, онда ће бити $\perp \wedge (\perp \vee q) \Leftrightarrow \perp$, односно $\perp \wedge q \Leftrightarrow \perp$, што је тачно.

На овај начин, доказали смо да је ова исказна формула таутологија, што даље значи да је и скуповна једнакост $A \cap (A \cup B) = A$ из које смо извели исказну формулу $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ увек тачна, па представља идентитет.

Задатак 2: Доказати да важи $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, где је са $P(A)$ обележен партитивни скуп скупа A .

Решење:

Приликом решавања овог задатка служићемо се такозваном методом инклузије, односно доказаћемо следећа два идентитета:

- 1) $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$
- 2) $P(A \cap B) \supseteq P(A) \cap P(B)$

Прелазимо на доказивање:

1) $\subseteq$:

По дефиницији је потребно да докажемо следећу импликацију:

$$X \in P(A \cap B) \Rightarrow X \in (P(A) \cap P(B)).$$

Из тврђења $X \in P(A \cap B)$ значи да је $X \subset (A \cap B)$, а то даље значи да је $X \subset A \wedge X \subset B$ што се може записати и као $X \in P(A) \wedge X \in P(B)$ а то је еквивалентно са $X \in P(A) \cap P(B)$, што је и требало показати.

2) $\supseteq$:

Сада доказујемо “другу страну”, односно:

$$P(A \cap B) \supset P(A) \cap P(B).$$

Из тврђења $X \in (P(A) \cap P(B))$ знамо да важи $X \in P(A) \wedge X \in P(B)$, што даље значи да је $X \subset A \wedge X \subset B$, па ако је неки скуп истовремено подскуп и скупа A и скупа B , мора бити да је и подскуп њиховог пресека. Дакле, то значи да је $X \in P(A \cap B)$ а то је и требало доказати.

Оваквих скуповних идентитета је много, наведен је по један пример за сваки од начина на који се изводи доказ, а остали докази се раде потпуно аналогно.

2.2. ПРОСТИ БРОЈЕВИ; ДЕЉИВОСТ; ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Иако се налази у плану и програму првог разреда, многи професори не поклањају превише пажње поглављу које носи назив реални бројеви. У оквиру овог поглавља дат је преглед од природних па све до реалних бројева. На овом месту ће бити наведено неколико тврђења која се тичу дељивости бројева као и простих бројева, а која нису превише тешка и неразумљива ученицима за доказивање.

Теорема 1: Нека су a, b, c произвољни природни бројеви. Тада важи:

- 1) ако $a|b$ и $b|c$ онда $a|c$;
- 2) ако $a|b$ онда је $a \leq b$;
- 3) ако $a|b$ и $a|c$ онда је за произвољне целе бројеве x и y : $a|(bx+cy)$;
- 4) ако $a|b$ и $b|a$ онда је $a=b$.

Доказ:

- 1) Из чињенице да $a|b$ следи да постоји неки број m такав да је $b=ma$, а из $b|c$ следи да постоји неки број n такав да је $c=nb$. Ако сада у израз $c=nb$ уместо b заменимо $b=ma$ добићемо да је $c=nma$ из чега је јасно да a дели c што је и требало доказати.
- 2) Слично као и под 1) имамо да из чињенице да $a|b$ следи да постоји неки број $m \geq 1$ такав да је $b=ma$, из чега непосредно следи да је $a \leq b$.
- 3) Из $a|b$ имамо да је $b=ma$, а из $a|c$ ће важити $c=na$. Желимо да проверимо да ли постоји неки број p такав да је $bx+cy=pa$, где су x, y произвољни цели бројеви. Израз $bx+cy=pa$ ћемо трансформисати помоћу података које имамо у њему еквивалентан израз $mxa+na y=pa$, што је даље еквивалентно са $a(mx+ny)=pa$. Одавде је очигледно да постоји тражени број p и да је он једнак $p=mx+ny$.
- 4) Ако $a|b$, онда постоји број $m \geq 1$ такав да је $b=ma$. Даље, ако важи $b|a$, тада постоји број $n \geq 1$ такав да је $a=nb$. То даље значи да је: $b=mn b$, одакле се добија да је $mn=1$, а то је могуће једино када је $m=n=1$, што значи да је $a=b$ а то је и требало доказати. $\square$

Из трећег тврђења претходне теореме следи последица која се најчешће користи:

Последица: Ако су a, b, c произвољни природни бројеви такви да је $a|b$ и $a|c$, тада $a|(b \pm c)$.

Ово тврђење је већ доказано ако у случају под 3) из претходно наведене теореме узмемо да је $p=q=1$ за збир и $p=1, q=-1$ за разлику.

Погледаћемо сада једну теорему о простим бројевима:

Теорема 2: Простих бројева има бесконачно много.

Доказ:

Ову теорему ћемо доказати по принципу свођења на апсурд. Дакле, поћи ћемо од супротне претпоставке: простих бројева има коначно много. Нека су:

$$p_1, p_2, \dots, p_k$$

сви прости бројеви, а сви остали природни бројеви већи од 1 су сложени. Број:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1,$$

је према томе сложен. Но, онда он мора бити дељив неким од простих бројева, што је немогуће јер P при дељењу било којим од бројева $p_1, p_2, \dots, p_k$ даје остатак 1. □

Овај доказ је први извео Еуклид¹ у свом чувеном делу “*Елементи*” (књига X, теорема 20.)

Докази који се помињу још у основној школи јесу докази ирационалности појединих бројева. Сада ће бити наведена два доказа а остали се изводе доста слично њима.

Теорема 3: Не постоји рационалан број x који задовољава једначину $x^2 = 2$.

Другим речима, $\sqrt{2}$ није рационалан број.

Доказ:

И овај доказ ћемо извести користећи се методом свођења на апсурд. Дакле, пођимо од супротне претпоставке: нека је $\sqrt{2}$ рационалан број. Као такав, он би се могао записати у облику разломка, па би важило:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

где је $p, q \in \mathbf{N}$, и p, q су узајамно прости бројеви. Тада би важило и:

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

односно:

$$p^2 = 2q^2. \tag{1}$$

Из (1) се намеће закључак да је број p^2 паран (дељив са 2), што даље значи да и број p такође мора бити дељив са 2. Одатле имплицира да се број p може записати у облику $p = 2k$, где је k произвољан природан број. Ако ово заменимо у (1) добијамо да је:

$$(2k)^2 = 2q^2,$$

то јест:

$$4k^2 = 2q^2,$$

¹ Еуклид (грч. Εὐκλείδης око 300. године) пре нове ере био је антички математичар.

односно:

$$2k^2 = q^2. \quad (2)$$

Из (2) се може закључити да је и број q^2 паран, па и број q такође мора бити паран.

Коначно, добили смо да су и p и q бројеви дељиви са 2, што значи да нису узајамно прости а то је у супротности са почетном претпоставком. Дакле, дошли смо до контрадикције, па је претпоставка да је $\sqrt{2}$ рационалан број била погрешна, што даље значи да важи тврђење супротно овом а то је да је $\sqrt{2}$ ирационалан број, а то је управо оно што смо желели да покажемо. $\square$

Задатак 1: Број $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ је ирационалан.

Доказ:

Поново полазимо од супротне претпоставке. Дакле, нека је $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ рационалан број. Изводимо следећи низ еквивалентних трансформација:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= r - \sqrt{2} \\ 3 &= r^2 - r\sqrt{2} + 2 \\ r\sqrt{2} &= r^2 - 1 \\ \sqrt{2} &= \frac{r^2 - 1}{r}\end{aligned}$$

Последња једнакост нам говори да је број $\sqrt{2}$ могуће записати као количник два рационална броја, што је, како смо већ доказали у претходној теореми, немогуће, па је почетна претпоставка била погрешна, те је збир $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ирационалан број. $\square$

2.3. ПОЛИНОМИ

Још у основној школи ученици се упознају са неким од формула за растављање полинома на чиниоце и сређивање полинома као што су формула за разлику квадрата или формула за квадрат бинома. Доказати све те формуле је поприлично једноставно, потребно је само извршити назначена множења и средити добијене изразе. Погледајмо ове доказе:

Теорема 1 (о разлици квадрата): За изразе A и B важи: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Доказ:

Применићемо дистрибутивни закон на десној страни ове једнакости: $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$. Након тога, пошто знамо да је множење комутативна операција, следи да су мономи AB и BA једнаке вредности, те стога

важи: $(A-B)(A+B) = A^2 + \underbrace{AB-BA}_{=0} - B^2 = A^2 - B^2$, а баш ово смо и желели да покажемо. □

Теорема 2 (о разлици и збиру кубова): За изразе A и B важи:

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2).$$

Доказ:

Исто као и у претходној теореме, потребно је само применом дистрибутивног закона измножити заграде на десној страни ове једнакости. Тако се добија: $(A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2) = A^3 \mp A^2B + AB^2 \pm BA^2 - B^2A \pm B^3$. Након што средимо овај израз биће: $(A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2) = A^3 (\mp A^2B \pm BA^2) + (\underbrace{AB^2 - B^2A}_{=0}) \pm B^3 = A^3 \pm B^3$. □

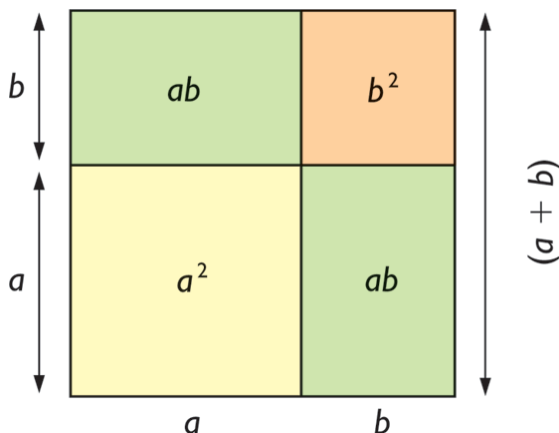
Погледајмо сада теореме о квадрату и кубу бинома:

Теорема 3 (о квадрату бинома): За изразе A и B важи: $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

Доказ:

И ова теорема се доказује једноставном применом дистрибутивног закона. Наиме, треба приметити да је $(A \pm B)^2 = (A \pm B) \cdot (A \pm B)$ и затим извршити назначено множење на десној страни једнакости. На тај начин добијамо: $(A \pm B)^2 = (A \pm B) \cdot (A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$, а то је оно што смо и желели да покажемо. □

Доказ ове теореме има интересантну графичку интерпретацију која веома често ученицима помаже да упамте како формула гласи. Проблем настаје јер многи ученици мисле да важи $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ што, наравно, није тачно. Следеће графичке илустрације нам помажу да убедимо децу у постојање такозваног средњег члана приликом квадрирања бинома:



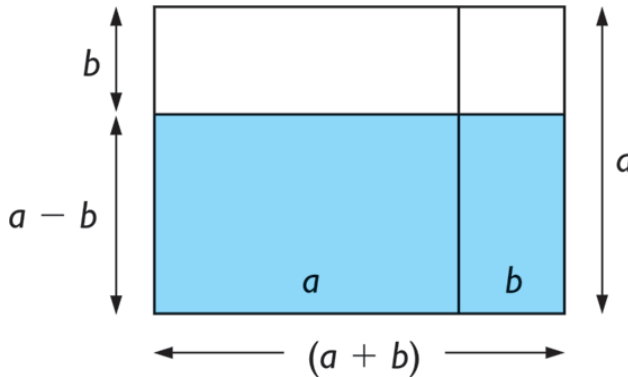
Дакле, ако имамо квадрат ивице $a+b$, јасно је да ће његова површина бити једнака $(a+b)^2$. Читав квадрат смо поделили на два мања квадрата чије су ивице a и b и видели да уколико би важило да је $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ површина великог квадрата би остала без два правоугаоника, сваког површине по ab .

Слична прича важи и за доказивање формуле $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

Узећемо квадрат странице a и без умањења општости посматрати случај да је $b < a$. Тада посматрамо квадрат ивице $a - b$ (на слици је обојен зеленом бојом) чија површина се може добити ако од површине великог квадрата (странице a) одузмемо квадрат странице b и два правоугаоника ивице a и b . На тај начин смо доказали да је:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

И теорема о разлици квадрата се може на сличан начин показати, те ћемо сада и то погледати:



Велики правоугаоник на слици има једну страницу дужине a , а другу страницу дужине $a + b$. Ако посматрамо плави правоугаоник на слици (страница $a + b$ и $a - b$) његова површина се може израчунати на следећи начин:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

а то је даље једнако:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

што смо и желели да покажемо.

Ови графички прикази не представљају формални доказ важења ових једнакости, али су итекако од помоћи деци при учењу, пошто је познато да деца овакве интерпретације доказа много лакше усвајају него класичан доказ.

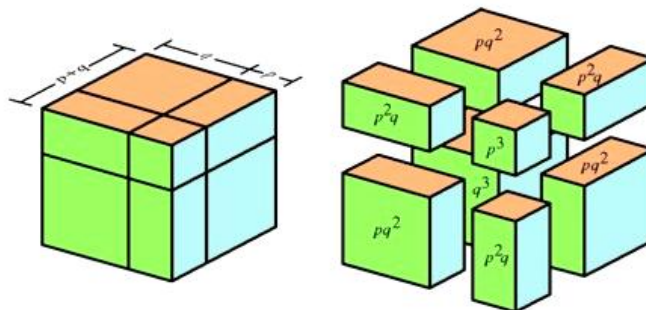
Од основних формула оваквог облика, остало нам је да докажемо важење формула за куб бинома:

Теорема 4 (о кубу бинома): За изразе A и B важи: $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$.

Доказ:

Приметимо да важи $(A \pm B)^3 = (A \pm B)^2(A \pm B) = (A^2 \pm 2AB + B^2)(A \pm B)$. Остаје нам да измножимо десну страну ове једнакости и да затим средимо добијени израз: $(A^2 \pm 2AB + B^2)(A \pm B) = A^3 \pm A^2B \pm 2A^2B + 2AB^2 + B^2A \pm B^3$. Након сређивања, добијамо: $(A^2 \pm 2AB + B^2)(A \pm B) = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$, а то је управо оно што смо и желели да покажемо. $\square$

Постоји и геометријска интерпретација ове формуле, али пошто се ради о кубу неког израза, неће нам више бити довољан геометријски приказ у равни већ ћемо морати да „додамо“ и трећу димензију и преселимо се у простор. Погледајмо то на слици:



На слици је приказано како се коцка ивице $p+q$ чија ће запремина бити једнака $(p+q)^3$ може „размонтирати“ на две коцке (једну ивице p , а другу ивице q) и на по три међусобно подударна квадра (три су ивица p, p, q , а три су ивица p, q, q).

Доказаћемо сада једну веома важну теорему која се тиче дељивости полинома:

Теорема 5: Нека су $A(x)$ и $B(x)$ произвољни полиноми, при чему је полином $B(x)$ различит од нултог. Тада постоје и јединствено су одређени полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ такви да важи:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

при чему је полином $R(x)$ или нулти или има степен мањи од полинома $B(x)$.

Доказ:

Докажимо јединственост полинома $Q(x)$ и $R(x)$. Претпоставимо да постоје два пара полинома $Q_1(x)$ и $R_1(x)$, односно $Q_2(x)$ и $R_2(x)$, који задовољавају услове теореме:

$$A(x) = B(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x)$$

$$A(x) = B(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x)$$

Изједначавањем десних страна тих релација добија се:

$$B(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x) = B(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x),$$

односно:

$$B(x) \cdot (Q_1(x) - Q_2(x)) = R_2(x) - R_1(x).$$

Ако полином на десној страни не би био нулти (то јест, ако не би важило $R_1(x) = R_2(x)$), тај полином би био степена мањег од полинома $B(x)$ (јер ту особину имају оба полинома $R_1(x)$ и $R_2(x)$). Међутим, степен полинома на левој страни је већи или једнак од степена полинома $B(x)$ (опет изузев у случају када је $Q_1(x) = Q_2(x)$). Дакле, та једнакост може да важи само у случају $R_1(x) = R_2(x)$ и $Q_1(x) = Q_2(x)$, а то управо значи да су полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ јединствено одређени, што је и требало доказати. $\square$

Када је реч о полиномима, у првом разреду средње школе изучава се једна доста значајна теорема помоћу које се одређени полиноми могу растављати на чиниоце. У питању је Безуова² теорема.

Безуова теорема: Нека је $P(x)$ полином и a реалан број. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $x-a$ једнак је $P(a)$, односно, вредности полинома $P(x)$ у тачки $x = a$.

Доказ:

Остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x-a$ мора бити или нула или полином нултог степена (јер остатак при дељењу два полинома мора бити степена мањег него делилац). Тај остатак ће бити неки реалан број, означен са r . Дакле, важи:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + r,$$

за неки полином $Q(x)$. Заменујући у тој једнакости $x = a$ добија се:

$$P(a) = (a-a)Q(a) + r = r,$$

што је и требало доказати.

2.4. НЕЈЕДНАКОСТИ

Иако се ова област у редовној настави готово никад не ради током средње школе, свако од ученика који се икада окушао на неком од математичких такмичења сусретао се са бар неком од чувених математичких неједнакости. Таквих неједнакости у математици има поприлично. Сада ћемо навести неколико најзначајнијих, наравно, са све доказима њиховог важења.

Прве у низу неједнакости су неједнакости између такозване четири средине:

Нека су дати произвољни ненегативни бројеви $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1) *Аритметичка средина* ових бројева дефинише се као: $A_s = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

2) *Геометријска средина* ових бројева дефинише се као: $G_s = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

3) *Хармонијска средина* дефинисана је са: $H_s = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

4) *Квадратна средина* ових бројева дефинише се као: $K_s = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$.

Теорема 1: Независно од избора бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$, важе следеће неједнакости:

$$H_s \leq G_s \leq A_s \leq K_s.$$

Специјално, за два броја a и b , важи:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \quad (1)$$

² Етјен Безу (фран. Étienne Bézout 1730-1783), француски математичар.

Доказ:

Доказ важења ових неједнакости изводи се у три корака:

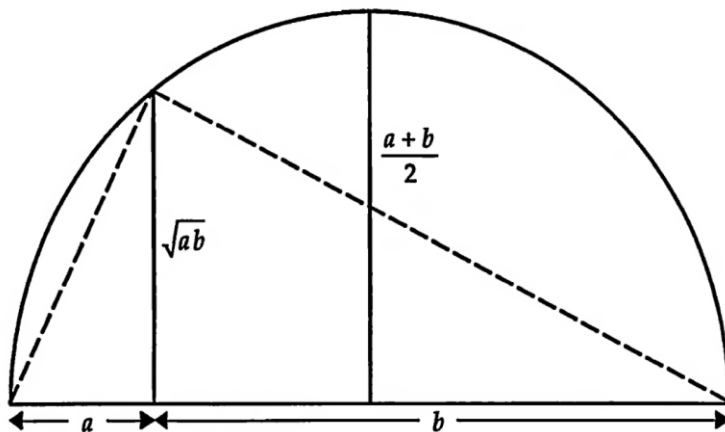
1) Прво доказујемо неједнакост: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$. Трансформисаћемо леву страну

неједнакости тако да се ослободимо двојног разломка: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$. Пошто знамо да су a и b позитивни бројеви, можемо квадрирати и леву и десну страну и тако добијамо: $\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab$. Након што обе стране поделимо са ab и помножимо са $(a+b)^2$ добијамо да је: $4ab \leq (a+b)^2$ а то је еквивалентно тврђењу $0 \leq (a-b)^2$, што је увек тачно.

2) Затим ћемо доказати следећу неједнакост: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Поћи ћемо од очигледне неједнакости $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Квадрирањем израза на левој страни добија се: $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$. Ако се на обе стране ове неједнакости дода $2\sqrt{ab}$, а затим све подели са 2 добија се $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, а то је управо неједнакост која се доказује.

3) Докажимо још на крају последњу у низу неједнакости $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Квадрираћемо обе стране ове неједнакости, након чега ћемо добити $\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. Након што обе стране неједнакости помножимо са 4 и израз на левој страни квадрирамо, добија се: $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Након што све пребацимо на десну страну добијамо $0 \leq a^2 - 2ab + b^2$, односно: $0 \leq (a-b)^2$, а ово је, као што већ знамо, увек тачно. Овим смо доказали и последњу у низу неједнакости, те стога знамо да важи (1). $\square$

Ево сада неколико интересантних графичких приказа који нам помажу да путем слике увидимо важење ових неједнакости:



Нека је дата кружница чији је пречник једнак $a+b$. Конструирамо правоугли троугао као што је овај на слици (правоугли је јер му је хипотенуза пречник круга). Применом теорема о сличности троугла (примена сличности на правоугли троугао), знамо да је висина спуштена из правог угла на хипотенузу једнака геометријској

висина $h = \sqrt{ab}$. Сада је са слике више него очигледно да је $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (неједнакост троугла), а то је баш неједнакост између геометријске и аритметичке средине.

Ево још једног графичког приказа за исту неједнакост. Квадрат странице $a+b$ има површину већу од четири правоугаоника страница a и b , тако да важи:

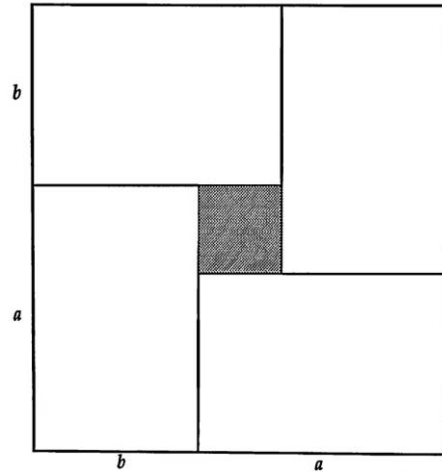
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

Кореновањем и леве и десне стране ове неједнакости добијамо:

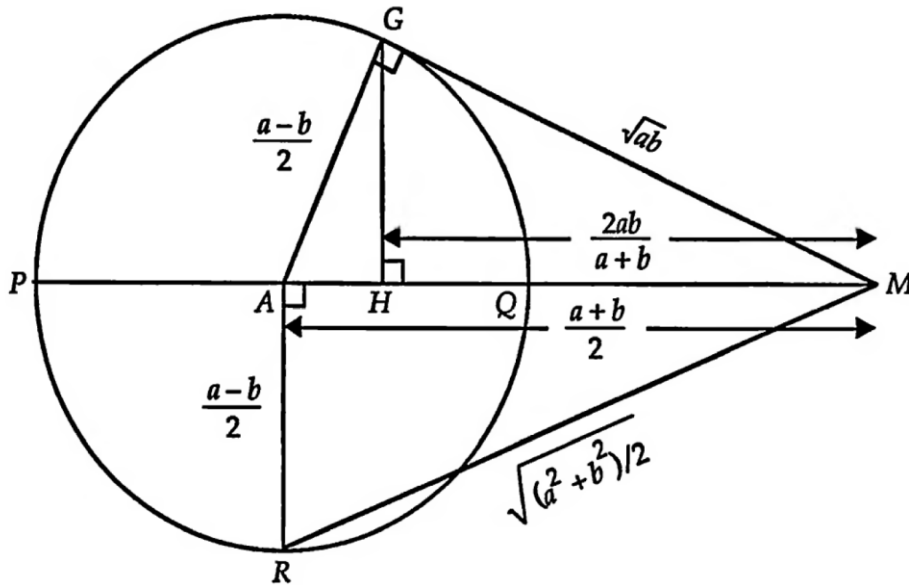
$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

ОДНОСНО:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



Наводимо сада још један графички приказ на којем се јасно виде све четири неједнакости међу срединама:



Нека је $PM = a$, $QM = b$. Тада је $PQ = a - b$, па је $AQ = AG = AR = \frac{a-b}{2}$ и

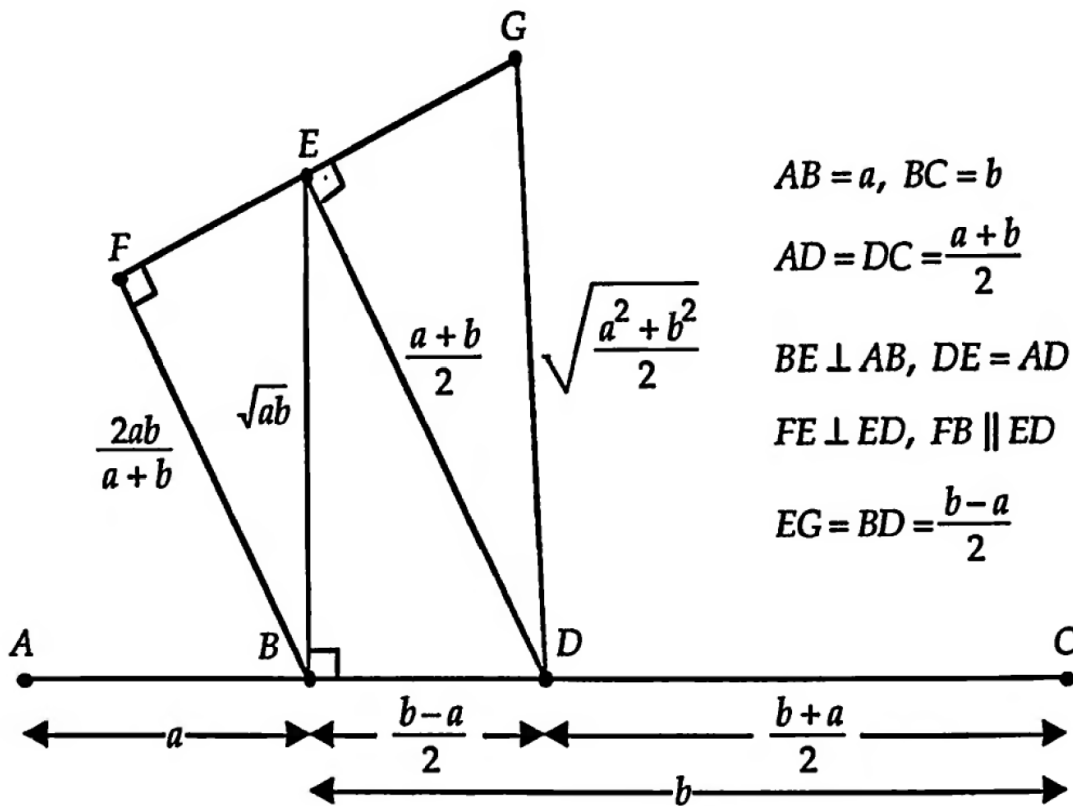
$AM = \frac{a+b}{2}$. Троугао AGM је правоугли (угао између тангенте и одговарајућег полупречника круга је прав), па из тог троугла применом Питагорине теореме добијамо да је: $GM = \sqrt{ab}$. Применом сличности на троуглове AGM и GHM ,

добивамо да је $HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. Такође, применом Питагорине теореме на

троугао AMR , добијамо да је $RM = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Из правоуглог троугла GHM имамо да је $HM < GM$ (катета правоуглог троугла мања је од његове хипотенузе). Односно, важи: $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$, а то је неједнакост између хармонијске и геометријске средине. Даље, из правоуглог троугла AGM , на исти начин следи да је $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ што је неједнакост геометријске и аритметичке средине. Најзад, из троугла ARM закључујемо да је $AM < RM$, односно $\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, а то је ништа друго до неједнакост аритметичке и квадратне средине.

Ево још једног графичког доказа за ове неједнакости:



Ако бисмо желели да докажемо важење наведених неједнакости у општем случају, односно за произвољне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$, морали бисмо да се позовемо на математичку индукцију, а то ученици у првом разреду средње школе још увек не знају. Чак и када науче математичку индукцију, ови докази нису баш једноставни

стога је довољно доказати важење тврђења у случају два броја, што смо већ урадили.

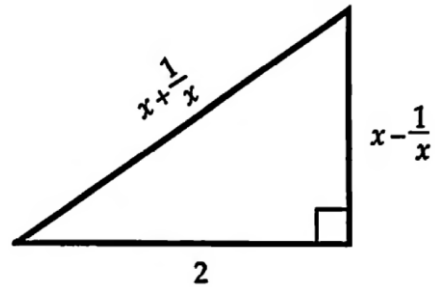
За крај ћемо приказати још једну неједнакост:

Теорема 2: За сваки позитиван број x важи: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Доказ:

Већ смо се више пута уверили да је $(x-1)^2 \geq 0$. Ако ову неједнакост распишемо добијамо да важи: $x^2 + 1 \geq 2x$, па након што читаву неједнакост поделимо са x добијамо управо жељени резултат $x + \frac{1}{x} \geq 2$. $\square$

Ево и графичке интерпретације ове неједнакости:
Ако посматрамо правоугли троугао са катетама 2 и $x - \frac{1}{x}$, добијамо да је хипотенуза тог троугла једнака $x + \frac{1}{x}$. Из особине правоуглог троугла да је хипотенуза његова најдужа страница, добијамо да важи тражена неједнакост.



2.5. ДОДАТАК УЗ ДРУГО ПОГЛАВЉЕ

У првом разреду се не посвећује превише пажње области реалних бројева и многа интересантна тврђења остају непоменута и недоказана. У овом додатку ћемо доказати још неколико интересантних тврђења која на први поглед делују компликовано за доказивање, а ситуација је потпуно другачија.
Већ смо доказали да простих бројева има бесконачно много (на стани 14). Погледајмо сада још једно интересно тврђење које се тиче простих и сложених бројева:

Теорема 1: Увек се може наћи k узастопних сложених бројева, где је k произвољан природан број.

Доказ:

Посматрајмо бројеве:

$$A_1 = (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 = (k+1)! + 2$$

$$A_2 = (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 = (k+1)! + 3$$

$\vdots$

$$A_k = (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 + k + 1 = (k+1)! + k + 1.$$

То су узастопни природни бројеви, има их тачно k и сви су сложени: A_1 је дељив са 2, A_2 је дељив са 3, $\dots$, A_k са $k+1$. Дакле, добили смо k узастопних природних бројева који су сложени. $\square$

Навешћемо сада и један задатак који је на први поглед тешко решити:

Задатак 1: Доказати да између свака два различита рационална броја постоји бесконачно много рационалних бројева.

Решење:

Нека су a и b произвољни рационални бројеви и нека је $a < b$. Тада је и број $\frac{a+b}{2}$

рационалан и важи: $a < \frac{a+b}{2} < b$, што се лако доказује.

Претпоставимо сада да између рационалних бројева a и b постоји коначно много рационалних бројева: $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < b$. То је немогуће, јер на основу већ доказаног имамо да између рационалних бројева a и a_1 мора постојати бар један рационалан број $\frac{a+a_1}{2}$ и тако редом.

Погледајмо сада и један задатак који се (у различитим варијантама) често среће на математичким такмичењима:

Задатак 2: Доказати да је број $9^{44} + 4^{99}$ дељив са 5.

Решење:

Да би неки број био дељив са 5 неопходно је да се завршава цифрама 0 или 5. Дакле, треба показати да је последња цифра броја $9^{44} + 4^{99}$ нека од ове две. Погледајмо како се понаша број 9 када се степенује редом природним бројевима:

$$9^1 = 9$$

$$9^2 = 81$$

$$9^3 = 729$$

$$9^4 = 6561$$

$\vdots$

Оно што можемо да приметимо је да уколико број 9 степенујемо парним бројем, резултат ће се завршавати цифром 1, а уколико га степенујемо непарним бројем, резултат ће се завршавати цифром 9. Одатле закључујемо да се број 9^{44} завршава цифром 1.

Поновимо исти поступак за понашање броја 4 при степеновању природним бројевима:

$$4^1 = 4$$

$$4^2 = 16$$

$$4^3 = 64$$

$$4^4 = 256$$

$\vdots$

Такође, примећујемо да када се број 4 степенује парним бројем добијени резултат се завршава цифром 6, а уколико га степенујемо непарним бројем резултат се завршава цифром 4. Одатле следи да се број 4^{99} завршава цифром 4.

Када саберемо бројеве 9^{44} и 4^{99} добићемо број који се завршава цифром 5, па ће он заиста бити дељив са 5.

III ДОКАЗИ У ДРУГОМ РАЗРЕДУ

Друга година средњошколског изучавања математике читава је посвећена алгебри и изучавању многобројних „нових“ функција, једначина и неједначина. Ако говоримо о доказима теорема, друга година није превише богата доказима какве смо сретали у првом разреду већ су то махом рачунска извођења разноразних формула. Управо из разлога што се ради о рачунским трансформацијама, такви докази су ученицима много ближи и разумљивији. Сада ћемо се детаљно упознати са начином на који се све те многобројне формуле могу доказати односно извести. Пре тога, кратак поглед на план и програм:

Редни број наставне теме	НАСТАВНЕ ТЕМЕ	Број часова по теми	Број часова за	
			обраду	остале типове часова
1.	Степеновање и кореновање	39	13	26
2.	Квадратна једначина и квадратна функција	49	17	32
3.	Експоненцијална и логаритмаска функција	33	10	23
4.	Тригонометријске функције	54	20	34
	УКУПНО	175	60	115

3.1. СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ

Када је реч о области у којој се изучава степеновање и кореновање, ретко када се професори одлучују да ученицима доказују важење неких од основних својстава ових операција, већ се махом ослањају на знање које су ученици стекли у основној школи као и на интуицију. Сада ће бити приказани докази неколико основних својстава за ове две операције. Пођимо од најједноставније:

Теорема 1: За све реалне бројеве a, b и за све природне бројеве m, n важи:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $(a^m)^n = a^{mn}$;
3. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$.

Доказ:

Ако пођемо од чињенице да је :

$$\begin{aligned}
 a^2 &= a \cdot a, \\
 a^3 &= a \cdot a \cdot a, \\
 &\vdots \\
 a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m
 \end{aligned}$$

имаћемо да је: $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^{m+n}$.

Полазећи од исте чињенице, имамо да је:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n = a^{mn}.$$

Применом истог принципа, као и коришћењем особине комутативности за множење, добијамо да важи:

$$(ab)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_m = a^m \cdot b^m.$$

Коначно, лако је приметити да под условом да је $m > n$ важи и:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n} = a^{m-n}.$$

□

Оно што би у овом тренутку требало нагласити да ово није потпуно коректан доказ из простог разлога што се степен неког броја дефинише на следећи начин:

Дефиниција 1: Нека је a произвољан број. Тада важи следеће:

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^{n+1} = a^n \cdot a. \quad (n \in \mathbf{N})$$

Дакле, степеновање се дефинише на такозвани рекурзиван начин. То значи да би се докази тврђења везаних за степеновање изводили применом математичке индукције. Међутим, проблем је што се математичка индукција учи тек на крају трећег разреда средње школе. Стога је у тренутку учења степеновања немогуће показати деци такав доказ.

Пођимо сада корак даље. Жеља нам је да се ослободимо захтева $m > n$ у релацији 4 претходне теореме, уз услов да она и даље важи за све $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, и сада, без ограничења, за све $m, n \in \mathbf{N}$. Тада би морало бити:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

но, то значи да је (због $\frac{a^m}{a^m} = 1$):

$$a^0 = 1, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Исто тако

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2} = \frac{a^1}{a^2} = a^{1-2} = a^{-1} \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{a}{a^3} = \frac{a^1}{a^3} = a^{1-3} = a^{-2} \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

⋮

$$\frac{1}{a^m} = \frac{a}{a^{m+1}} = \frac{a^1}{a^{m+1}} = a^{1-(m+1)} = a^{-m} \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Дакле:

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Уверићемо се сада да за уведене степене важе наведена својства у неким специјалним случајевима.

1) Нека је $m=0, n \in \mathbf{N}$:

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = (a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n} = a^{mn},$$

$$(ab)^m = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0 = a^m \cdot b^m$$

2) Нека је $m=-k, k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$

$$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^n = \frac{1}{a^k} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} = a^{n+(-k)} = a^{n+m} = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = (a^{-k})^n = \left(\frac{1}{a^k}\right)^n = \frac{1}{(a^k)^n} = \frac{1}{a^{kn}} = a^{-kn} = a^{(-k)n} = a^{mn},$$

$$(ab)^m = (ab)^{-k} = \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} \cdot b^{-k} = a^m \cdot b^m$$

3) Нека је $m=-k, k \in \mathbf{N}, n=-l, l \in \mathbf{N}$

$$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-l} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^k \cdot a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{-k+(-l)} = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = (a^{-k})^{-l} = \left(\frac{1}{a^k}\right)^{-l} = \left(\frac{1}{\frac{1}{(a^k)^n}}\right)^l = (a^k)^l = a^{kl} = a^{(-k)(-l)} = a^{mn},$$

Својство $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ смо већ доказали под 2.

Доказаћемо сада неколико својстава која се тичу кореновања.

Теорема 2: За $a, b \geq 0, mn \in \mathbf{N}$. Тада важи:

$$1. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b};$$

$$2. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$3. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Доказ:

Полазећи од својства које смо доказали када смо говорили о степеновању, имаћемо да важи: $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$ (на основу чињенице да је $(\sqrt[n]{a})^n = a$, ако је $a \geq 0$). Такође, важи и: $(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = a \cdot b$. То значи да важи:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a \cdot b})^n$$

па на основу својства да за $x_1, x_2 \geq 0$ важи $x_1^n = x_2^n \Leftrightarrow x_1 = x_2$, закључујемо да је:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Нека је $a \geq 0$ и $b > 0$ и n природан број. Онда је, на основу већ поменутог својства по коме је $(\sqrt[n]{a})^n = a$, ако је $a \geq 0$:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

као и:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^n = \frac{a}{b},$$

па је:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^n,$$

односно:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Ако је $a \geq 0$ а m, n природни бројеви, важе следеће релације:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right)^n \right)^m = \left(\sqrt[m]{a} \right)^m = a$$

$$\left(\sqrt[mn]{a} \right)^{mn} = a$$

Дакле:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right)^{mn} = \left(\sqrt[mn]{a} \right)^{mn},$$

што значи да важи и:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Овим је теорема доказана. □

За крај ћемо поменути да особине степена које смо доказали у случају када су изложници цели бројеви, важе и у случају када су изложници рационални бројеви.

Нека је $a > 0$, $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. Тада добијамо:

$$(a^r)^q = \left(a^{\frac{p}{q}} \right)^q = a^{\frac{p}{q} \cdot q} = a^p.$$

Позитивни бројеви a^r и a^p имају својство да је q -ти степен броја a^r једнак a^p . Стога, према дефиницији корена, број a^r је позитиван q -ти корен позитивног броја a^p . Дакле, важи:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Теорема 3: Нека су a, b позитивни реални бројеви, а r, s произвољни рационални бројеви. Онда је:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2. $(a^r)^s = a^{rs}$;
3. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.

Доказ:

Нека је $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}, m, p \in \mathbf{Z}, n, q \in \mathbf{N}$. Означимо са $x = a^r = \sqrt[n]{a^m}, y = a^s = \sqrt[q]{a^p}$.

Тада су x и y позитивни бројеви и $x^n = a^m, y^q = a^p$. Ако прву од ових једнакости степењујемо са q , а другу са n , добијамо $x^{nq} = a^{mq}, y^{qn} = a^{pn}$. Множењем последњих двеју једнакости налази се $x^{nq} \cdot y^{qn} = a^{mq} \cdot a^{pn}$. Овде су изложени цели бројеви, па се могу применити својства која смо већ доказали, тако да ће важити $(xy)^{nq} = a^{mq+np}$, односно:

$$a^r \cdot a^s = xy = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}.$$

Овим смо доказали прво својство наведене теореме. Слично показујемо остала два својства:

$$(a^r)^s = \left(a^{\frac{m}{n}} \right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^p}.$$

Степеновањем са qn ове једнакости, добијамо:

$$((a^r)^s)^{qn} = \left(\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^p} \right)^{qn} = \left(\left(\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^p} \right)^q \right)^n = \left(\sqrt[n]{a^{mp}} \right)^n = a^{mp}.$$

Са друге стране је $a^{r \cdot s} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$, одакле налазимо: $(a^{r \cdot s})^{qn} = a^{mp}$. Због $((a^r)^s)^{qn} = ((a^r)^s)^{qn}$, имамо да је $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

□

3.2. КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА

Ова област је можда и најзначајнија у читавој другој години средње школе. Од изузетне је важности да ученици добро савладају решавање квадратних једначина јер се многе друге једначине које се уче касније неретко свode управо на квадратне. Показаћемо сада начин на који се изводи образац за решавање квадратних једначина, а који професори врло често ученицима дају само у готовом облику, затим Вијетове формуле, као и још неколико теорема које се тичу природе решења квадратне једначине и растављања квадратних тринома на чиниоце.

Када говоримо о решавању квадратне једначине најпре морамо видети у ком скупу желимо да решимо одређену једначину. Са тим у вези ћемо посматрати два случаја:

- 1) Решавање квадратне једначине у скупу реалних бројева;

2) Решавање квадратне једначине у скупу комплексних бројева.

Теорема 1: Нека је дата једначина $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$).

а) Посматрано у скупу реалних бројева:

1) ако је $b^2 - 4ac > 0$ тада једначина има два реална решења која се рачунају

$$\text{према формулама } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2) ако је $b^2 - 4ac = 0$ тада квадратна једначина има једно реално решење које се добија преко формуле $x = \frac{-b}{2a}$;

3) ако је $b^2 - 4ac < 0$ тада једначина нема решења у скупу реалних бројева.

б) Посматрано у скупу комплексних бројева:

1) ако је $b^2 - 4ac > 0$ тада једначина има два решења у скупу комплексних

$$\text{бројева која се рачунају према формулама } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2) ако је $b^2 - 4ac = 0$ тада квадратна једначина има једно решење у скупу комплексних бројева које се добија преко формуле $x = \frac{-b}{2a}$;

3) ако је $b^2 - 4ac < 0$ тада једначина има два конјугована решења у скупу комплексних бројева и она су: $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Доказ:

Нека је $ax^2 + bx + c = 0$ произвољна квадратна једначина и нека важи $a \neq 0$ (у случају да је $a=0$, та једначина не би била квадратна већ линеарна). Стога ћемо једначину поделити са a и на тај начин добијамо:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \quad (1)$$

Сада ћемо извести низ еквивалентних трансформација:

Прво ћемо да “упакујемо” прва два члана са леве стране једнакости (1) у квадрат бинома:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Након сређивања, добија се:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \quad (2)$$

Даљи ток решавања ове једначине зависи од тога да ли је $b^2 - 4ac$ позитивно, негативно или једнако нули.

1) Ако је $b^2 - 4ac > 0$, тада се једначина (2) може записати у облику:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0.$$

Применом формуле за разлику квадрата леву страну ове једначине растављамо на чиниоце и завршавамо решавање на познат начин:

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0,$$

а то је даље еквивалентно са:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

односно:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Дакле, у овом случају једначина (1) има два реална решења:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Уобичајено је да се ова чињеница записује и на следећи начин:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2) Ако је $b^2 - 4ac = 0$, тада је једначина (2) заправо једначина:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Ова једначина еквивалентна је са $x + \frac{b}{2a} = 0$, па има само једно реално решење

$x = -\frac{b}{2a}$. И у овом случају може се користити формула коју смо добили у претходном:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

У овом случају кажемо да квадратна једначина (1) има “два” једнака решења

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3) Ако је $b^2 - 4ac < 0$, тада је израз са леве стране једначине (2) заправо збир позитивне константе и израза чије су све вредности увек ненегативне и као такав израз са леве стране не може бити једнак нули ни за једну вредност променљиве x :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{ненегативно за свако реално } x} + \underbrace{\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}_{\text{позитивна константа}} > 0$$

Дакле, у овом случају, једначина (1) нема реалних решења. Али, има решења у скупу комплексних бројева.

Како је $b^2 - 4ac < 0$, односно $4ac - b^2 > 0$, имамо да је последња једначина еквивалентна са:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i\right)^2 = 0.$$

Користећи формулу за разлику квадрата, налазимо комплексна решења дате квадратне једначине:

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i\right) = 0,$$

што је еквивалентно са:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i = 0,$$

односно:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i = 0.$$

Дакле, ако је $b^2 - 4ac < 0$, једначина (1) има два комплексна решења:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Ако је $b^2 - 4ac < 0$, комплексна решења квадратне једначине (1) међусобно су конјугована, па се каже да једначина има пар конјуговано комплексних решења.

Иако није потпуно коректно, традиционално се усваја договор: ако је $b^2 - 4ac < 0$, онда се са $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ означава $\pm i\sqrt{4ac - b^2}$. Овакав договор донекле је оправдан једнакостима:

$$\left(i\sqrt{4ac - b^2}\right)^2 = i^2 \cdot \left(\sqrt{4ac - b^2}\right)^2 = (-1) \cdot (4ac - b^2) = b^2 - 4ac$$

При оваквој употреби квадратног корена не смеју се примењивати особине квадратног корена ненегативних реалних бројева.

Наведени договор се усваја зато што се тада решења сваке квадратне једначине (1) могу описати формулом:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

Заиста, ако је $b^2 - 4ac < 0$, онда је према усвојеном договору:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

□

Теорема 2 (о природи решења квадратне једначине): За квадратну једначину са реалним коефицијентима $ax^2 + bx + c = 0$ важи:

- 1) једначина има два различита реална решења ако и само ако је $D = b^2 - 4ac > 0$;
- 2) једначина има једно реално решење ако и само ако је $D = b^2 - 4ac = 0$;
- 3) једначина има један пар конјуговано – комплексних решења ако и само ако је $D = b^2 - 4ac < 0$.

Доказ:

Пошто видимо да наведена тврђења у себи садрже еквиваленцију (ако и само ако), доказ ћемо извести у два дела (као што је већ на почетку рада објашњено). Доказујемо прво смер $\Leftarrow$:

- 1) Ако је дискриминанта D позитивна, онда је и $\sqrt{D}$ позитиван реалан број, па су решења $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ реални и различити бројеви.
- 2) Ако је дискриминанта D једнака нули, онда је и $\sqrt{D}$ једнак нули, па је: $x_1 = \frac{-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-b}{2a}$, што значи да је $x_1 = x_2$, а то смо и желели да покажемо.
- 3) Ако је дискриминанта D негативна, онда је $-D$ позитиван реалан број, па је $\sqrt{-D}$ позитиван реалан број. Стога је у том случају $\sqrt{D} = \sqrt{(-1) \cdot (-D)} = i\sqrt{-D}$ и решења су: $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$, а то је један пар конјуговано комплексних бројева.

Овим смо доказали један смер у наведеној тврдњи. Остаје још да докажемо смер $\Rightarrow$:

Пошто је D реалан број, на основу својства реалних бројева следи да он може бити или позитиван, или једнак нули, или негативан.

- 1) Претпоставимо да једначина има два различита реална решења. Када дискриминанта не би била позитивна, онда би била или једнака нули или негативна. Но, у тим случајевима би решења била реална и једнака, или пар конјуговано – комплексних бројева, што је супротно претпоставци да су реална и различита.

Тврђења 2) и 3) доказују се потпуно аналогно.

Овим је теорема у потпуности доказана. $\square$

Теорема 3 (Вијетове³ формуле) : Бројеви x_1 и x_2 су решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ако и само ако је:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \quad (3)$$

³ Франсоа Вијет (фран. Francois Vite, 1540-1603), француски математичар.

Доказ:

И ово тврђење у себи садржи еквиваленцију, стога доказ изводимо у два дела (две импликације). Докажимо прво импликацију: ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, онда су испуњене једнакости (3).

Пошто су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, онда је:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Сабирањем и множењем, непосредно, добијамо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

као и:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Докажимо сада другу импликацију: ако бројеви x_1 и x_2 задовољавају једнакости (3), онда су они решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$.

Из ових двеју једнакости следи да је $b = -a(x_1 + x_2)$ и $c = a \cdot x_1 \cdot x_2$, па квадратна једначина може да се запише у облику:

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = 0,$$

односно:

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = 0.$$

Ако сада извршимо подесно груписање чланова у загради видимо да важи:

$$a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = 0,$$

што је даље еквивалентно са:

$$a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = 0,$$

односно:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

а одавде је очигледно да су x_1 и x_2 решења те једначине, па самим тим јесу и решења њој еквивалентне полазне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, а то је и требало показати. $\square$

Теорема 4 (о растављању квадратног тринома на чиниоце): Бројеви x_1 и x_2 су решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ако и само ако се квадратни трином $ax^2 + bx + c$ може раставити на линеарне чиниоце на следећи начин:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (4)$$

Доказ:

Користећи се Вијетовим формулама добијамо следећи низ једнакости:

$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x - x_1)(x - x_2)$, што доказује први део нашег тврђења.

Обрнуто, ако за квадратни трином $ax^2 + bx + c$ важи (3) онда су α и β решења једначине $ax^2 + bx + c = 0$. Ово тврђење је очигледно и њиме смо се већ користили код доказа Вијетових формула. Овим је теорема доказана. $\square$

Доказаћемо, на крају још једну теорему о знаку решења квадратне једначине:

Теорема 5: Решења x_1 и x_2 квадратне једначине са реалним коефицијентима $ax^2 + bx + c = 0$ су:

- 1) реална и позитивна ако и само ако је $b^2 - 4ac \geq 0$, $\frac{b}{a} < 0$, $\frac{c}{a} > 0$;
- 2) реална и негативна ако и само ако је $b^2 - 4ac \geq 0$, $\frac{b}{a} > 0$, $\frac{c}{a} > 0$

Доказ:

Нека су x_1 и x_2 позитивни бројеви. Онда је $x_1 + x_2 > 0$ и $x_1x_2 > 0$, па на основу Вијетових формула налазимо да је $-\frac{b}{a} > 0$, односно $\frac{b}{a} < 0$ и $\frac{c}{a} > 0$. Пошто су решења реална, мора бити и $b^2 - 4ac \geq 0$.

Обрнуто, нека је испуњено $b^2 - 4ac \geq 0$, $\frac{b}{a} < 0$, $\frac{c}{a} > 0$. На основу Вијетових формула одавде налазимо да је $x_1 + x_2 > 0$ и $x_1x_2 > 0$. Пошто је дискриминанта ненегативна решења квадратне једначине су реална. Пошто је њихов производ позитиван, решења су истог знака, а како је и њихов збир позитиван, оба решења морају бити позитивна. Теорема је овим доказана.

Случај 2) се доказује на исти начин као и случај 1). $\square$

3.3. ОСОБИНЕ ЛОГАРИТАМА

Веома често се дешава да када се у другом разреду обрађују логаритми, професори десет својстава логаритама наведу без икаквог доказа. На тај начин код ученика се ствара осећај да су логаритми заправо вештачка творевина унутар које важе та правила према некаквом договору, а истина је потпуно другачија. Све те особине логаритама заправо су само логична последица саме дефиниције логаритма и веома лако се могу доказати, што ће сада бити и учињено.

Навешћемо на почетку дефиницију логаритма јер ћемо се приликом доказивања својстава на њу позивати:

Дефиниција: Реалан број x којим треба степеновати основу a ($a > 0$, $a \neq 1$) да би се добио позитиван број b називамо логаритмом броја b за основу a . Другим речима, важи:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad (1)$$

Веома је важно нагласити услове под којима је логаритам дефинисан, јер се то веома често превиди па долази до грешака. Видимо, пре свега, да број a мора бити позитиван. Ако посматрамо логаритамску функцију као функцију инверзну експоненцијалној, јасно је због чега овај услов мора бити задовољен, јер ни експоненцијална функција није дефинисана ако је основа негативна. Даље, број a не сме бити једнак 1 јер би у супротном добили константну функцију $f(x) = 1$ што нам није у интересу. Коначно, последњи услов је да је $b > 0$. Тај услов је само логична последица првог услова и особина експоненцијалне функције: позитиван број степенован ма којим реалним бројем увек је већи од нуле.

Последње што ваља напоменути пре него што се коначно посветимо доказивању особина логаритама јесте да уколико се основа логаритма изостави, не значи да је ми сами можемо произвољно изабрати већ да није од значаја која је основа тог логаритма, односно да наведено својство важи за било коју основу. Прелазимо сада на доказивање познатих десет својстава:

1) $\log_a 1 = 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

Ово својство је поприлично очигледно и није га тешко доказати. Из дефиниције логаритма имамо да је $\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1$. Да би степен неког броја био једнак јединици његов изложилац мора бити једнак нули. Друга варијанта је да буде $a = 1$, али тада овај израз уопште није дефинисан. Дакле, $x = 0$ то јест $\log_a 1 = 0$;

2) $\log_a a = 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

Кренимо опет од дефиниције: $\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a$. Одатле је сасвим очигледно да је $x = 1$.

3) $a^{\log_a b} = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)

Нека је $\log_a b = x$. Одатле знамо да је $a^x = b$. Тада је $a^{\log_a b} = a^x = b$. Ово својство се може доказати и користећи се чињеницом да композиција неке функције и њој инверзне функције дејствовањем на неки елемент даје њега самог ($(f \circ f^{-1})(x) = x$)

4) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$)

Нека је $\log_a x = m$ и $\log_a y = n$. То, по дефиницији, значи да је $x = a^m$ и $y = a^n$. Тада имамо да је:

$$\begin{aligned} \log_a (x \cdot y) &= \log_a (a^m \cdot a^n) \\ &= \log_a a^{m+n} \\ &= m + n \\ &= \log_a x + \log_a y \end{aligned}$$

$$5) \log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0, n \in \mathbf{N})$$

Ако својство 4) применимо више пута за редом, добићемо једнакост:

$$\log_a \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_n = n \cdot \log_a x$$

$$6) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0)$$

Нека је: $\log_a x = m$ и $\log_a y = n$. То, по дефиницији, значи да је $x = a^m$, $y = a^n$.

Тада имамо да је:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \frac{a^m}{a^n} = \log_a a^{m-n} = m - n = \log_a x - \log_a y$$

$$7) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$$

Нека је $\log_a b = m$ и $\log_b a = n$. То, по дефиницији, значи да је $a^m = b$ и $b^n = a$.

Тада је:

$$(b^n)^m = a^m = b.$$

Односно:

$$b^{mn} = b.$$

Одавде закључујемо да је $mn = 1$, односно $m = \frac{1}{n}$. Када заменимо m и n

добивамо баш:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$8) \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, n \in \mathbf{N})$$

Користећи се особинама 5) и 7) имамо да је:

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{\log_b a^n} = \frac{1}{n \cdot \log_b a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{n} \log_a b$$

$$9) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$$

Нека је: $\log_a b = m$, $\log_c b = k$, $\log_c a = n$. То, по дефиницији, значи да важи:

$a^m = b$, $c^k = b$ и $c^n = a$. Тада, по већ доказаним својствима важи:

$$\log_a b = \log_a c^k = k \cdot \log_a c = \log_c b \cdot \frac{1}{\log_c a} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$10) \log_a b = \log_{a^n} b^n \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, n \in \mathbf{N})$$

Из својстава 5) и 8) можемо да закључимо да важи:

$$\log_a b = \log_{a^n} b^n = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \log_a b = \log_a b$$

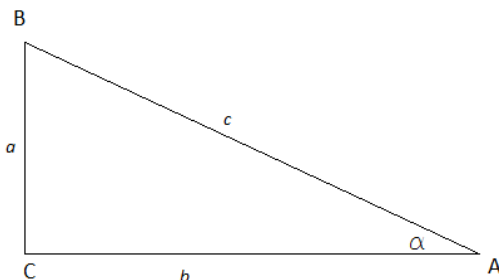
Овим смо доказали важење свих десет својстава логаритама.

3.4. ТРИГОНОМЕТРИЈА

Што се тиче области којом ћемо се сада позабавити, она је вероватно једна од грана математике која је најбогатија разноврсним формулама. Оно што је најинтересантније је што се познавањем двеју основних дефиниција, као и два или три основна својства тригонометријских функција све те многобројне формуле могу без превише муке извести. Неретко се дешава да професори у средњој школи од својих ученика захтевају да све те силне формуле уче напамет, уместо да их науче како да сами изведу све њих. То би било знатно корисније, јер чак и када неко успе да усвоји те формуле, због њихове сличности ће их већ након кратког времена скроз измешати. Сада ћемо “проћи” кроз читаву тригонометрију, део по део, изводећи разне трансформације и доказујући основне тригонометријске идентитете.

Планом и програмом наставе математике за први разред средње школе, предвиђено је да се на крају године неколико часова посвети основним тригонометријским функцијама. Међутим, услед недостатка времена и преобимног програма, професори се најчешће одлучују да и те најосновније појмове из тригонометрије са ученицима ураде у другом разреду. Почећемо са дефиницијом основних тригонометријских функција оштрог угла:

Посматрајмо правоугли троугао ABC и један од његових оштрих углова α код темена A :



Дефиниција 1:

- 1) Синус угла α је количник наспрамне катете угла α и хипотенузе. У случају са слике, то је $\sin \alpha = \frac{a}{c}$;
- 2) Косинус угла α је количник налегле катете угла α и хипотенузе. У случају са слике, то је $\cos \alpha = \frac{b}{c}$;
- 3) Тангенс угла α је количник наспрамне и налегле катете угла α . У случају са слике, то је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$;
- 4) Котангенс угла α је количник налегле и наспрамне катете угла α . У случају са слике, то је $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$

За овако уведене појмове, могу се доказати одређене једнакости. Најважнија међу њима је свакако основна формула тригонометрије:

Теорема 1: За произвољан оштар угао α важи:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Доказ:

Ово тврђење није тешко доказати. Ево како се то ради:

Из $\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot c$, а из $\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos \alpha \cdot c$. Како је посматрани троугао

ABC правоугли, за њега важи Питагорина теорема, односно: $a^2 + b^2 = c^2$. Ако претходно изведене релације, заменимо у ову једнакост добијамо:

$$(\sin \alpha \cdot c)^2 + (\cos \alpha \cdot c)^2 = c^2,$$

односно:

$$\sin^2 \alpha \cdot c^2 + \cos^2 \alpha \cdot c^2 = c^2.$$

Ако обе стране ове једнакости поделимо са c^2 добијамо:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

а то смо и желели да покажемо. □

Теорема 2: За оштар угао α важи: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

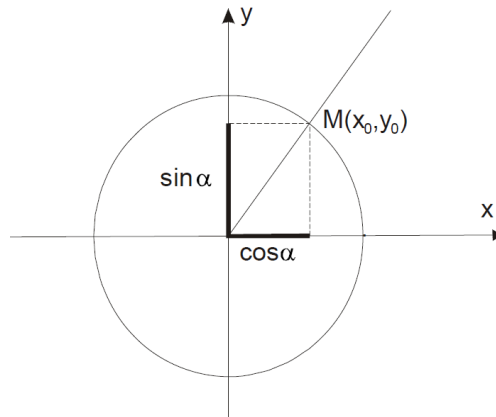
Доказ:

Ово тврђење се доказује непосредно из дефиниције тангенса и котангенса оштрог

угла: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{c \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{c \cdot \cos \alpha}{c \cdot \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. □

Након што се уради уопштење угла, могуће је доказати да основна формула тригонометрије важи за произвољан угао α а не само за оштре углове.

Са тригонометријске кружнице (јединична кружница са центром у координатном почетку) за уочену тачку $M(x_0, y_0)$ можемо прочитати вредности синуса и косинуса за угао чије уопштење та тачка представља.



Апсциса x_0 тачке M је косинус реалног броја t (уопштеног угла t), а ордината y_0 тачке M је синус реалног броја t (уопштеног угла t).

Обзиром да је једначина јединичне кружнице са центром у координатном почетку $x^2 + y^2 = 1$, одатле непосредно следи да је за сваку тачку те кружнице следећа једнакост тачна $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Теорема 3: Косинус је парна, а синус непарна функција.

Доказ:

Нека је $t \in \mathbf{R}$ и нека је P тачка јединичне кружне линије дата са: $P = E(t)$, Тада је тачка $Q = E(-t)$ симетрична тачки P у односу на апсцису. Тачке $P(\cos t, \sin t)$ и $Q(\cos(-t), \sin(-t))$ имају једнаке апсцисе па је:

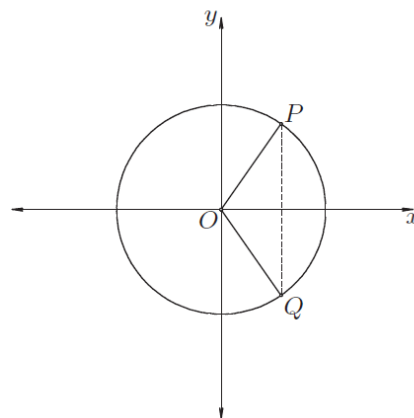
$$\cos(-t) = \cos t,$$

што значи да је косинус парна функција.

Како је $|\sin t| = |\sin(-t)|$, а ординате су супротног знака, добија се:

$$\sin(-t) = -\sin t,$$

а то управо значи да је синус непарна функција.



□

Теорема 4 (адicione теореме за синус и косинус): За произвољне углове α и β важи:

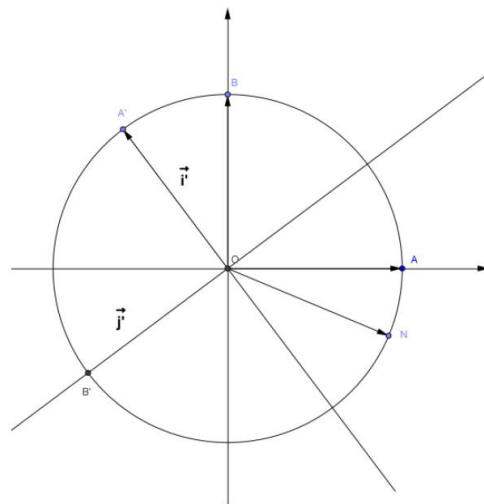
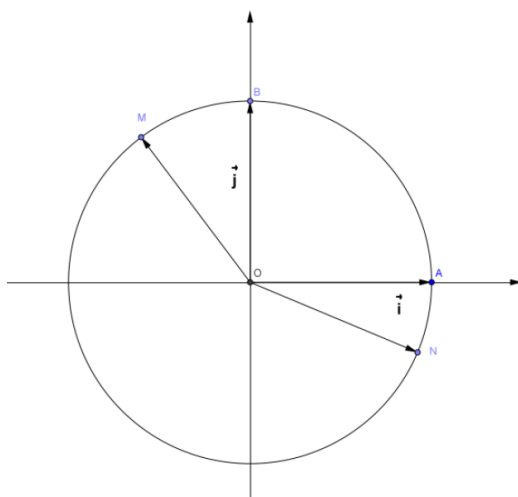
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

Доказ:

Нека је у равни xOy дата јединична кружна линија k са центром O . Ако тачка $M(x, y)$ припада тој кружној линији и ако је $M = E(\alpha)$ (тачка која на тригонометријској кружници представља угао α), тада је, као што знамо:

$$x = \cos \alpha \text{ и } y = \sin \alpha.$$



Вектор $\overrightarrow{OM}$ је вектор положаја тачке M . То значи да ће важити:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}.$$

Ако раван xOy ротирамо око тачке O за неки уопштени угао β , наша кружна линија пресликава се на саму себе. При томе ће се тачка M пресликати у неку

тачку N , при чему је $N = E(\alpha + \beta)$ (тачка која на тригонометријској кружници представља угао $\alpha + \beta$). Вектор положаја тачке N је онда:

$$\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha + \beta)\vec{i} + \sin(\alpha + \beta)\vec{j}.$$

Циљ нам је да координате овог вектора изразимо помоћу синуса и косинуса уопштених углова α и β .

Дефинишимо у истој равни нови Декартов⁴ правоугли координатни систем $x'Oy'$ на следећи начин. Означимо $M = A'$ и нека је нова апсцисна оса права која садржи тачке O и A' оријентисана помоћу јединичног вектора:

$$\vec{i}' = \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OM} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}.$$

Пошто је $A' = E(\alpha)$, нова ординатна оса ће бити права која садржи тачку O и тачку $B' = E\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ и оријентисана је помоћу јединичног вектора:

$$\vec{j}' = \overrightarrow{OB'} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}.$$

Користећи се формулама за свођење на први квадрант, имаћемо да важи:

$$\vec{j}' = \overrightarrow{OB'} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}.$$

У новом координатном систему вектор $\overrightarrow{ON}$ има нове координате и представља се у облику:

$$\overrightarrow{ON} = \cos \beta \cdot \vec{i}' + \sin \beta \cdot \vec{j}'.$$

Ако заменимо у ову једнакост добијене вредности за $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$, налазимо да је:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \cos \beta \cdot (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + \sin \beta \cdot (-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cdot \vec{i} + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cdot \vec{j}.\end{aligned}$$

Пошто је, са друге стране:

$$\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha + \beta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{j},$$

мора бити:

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{j} = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cdot \vec{i} + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cdot \vec{j}.$$

Но, два вектора су једнака ако и само ако су им одговарајуће координате једнаке. Због тога мора да важи:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

и

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Пошто су α и β произвољни уопштени углови (реални бројеви), закључујемо да ове формуле важе за свако $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Ако у претходне две једнакости уместо β ставимо $-\beta$ добићемо:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

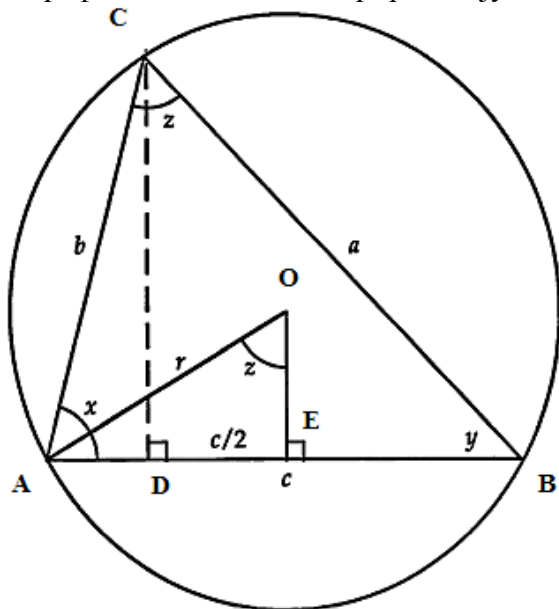
као и:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

⁴ Рене Декарт (фран. René Descartes 1596-1650)-француски математичар

Овде смо се послужили чињеницом да је синус непарна функција, док је косинус парна функција (доказано у претходној теореми). Овим смо доказали адиционе теореме за синус и косинус. $\square$

Навешћемо сада неколико интересантних графичких доказа за адиционе теореме за синус и косинус. Као што смо више пута нагласили, то нису формални докази већ графички начин за интерпретацију ових теорема. Погледајмо прву слику:



Нека је дата кружница k чији је полупречник $r = \frac{1}{2}$. Нека је h висина

троугла ABC и тачка D њено подножје на страници AB . Из троугла ADC имамо да је $\cos x = \frac{AD}{b}$, односно:

$|AD| = b \cdot \cos x$. На исти начин, из троугла DBC ћемо имати да важи $\cos y = \frac{BD}{a}$, односно $|BD| = a \cdot \cos y$.

Сабирањем ових двају једнакости, добија се:

$$|AD| + |BD| = b \cdot \cos x + a \cdot \cos y$$

односно:

$$c = a \cdot \cos y + b \cdot \cos x.$$

Угао $\angle ACB$ је периферијски угао над тетивом AB , па је као такав мањи од одговарајућег централног угла над том тетивом. Како је $\angle AOE = \frac{1}{2} \angle AOB$, то значи

да ће важити $\angle ACB = \angle AOE = z$. Тада из троугла AEO имамо да важи: $\sin z = \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Како је $\sin x = a$ и $\sin y = b$, и ако узмемо у обзир да је

$z = 180^\circ - (x + y)$ имаћемо да важи:

$$\sin(x + y) = \sin(180^\circ - (x + y)) = \sin z = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

а то је управо једна од адиционих теорема.

Ово важи у случају када су x, y оштри углови, док за остале случајеве овим ништа нисмо доказали.

Ево још једног интересантног “доказа” за важење исте теореме:

Посматрајмо ромб странице 1 чији је један угао $x + y$.

Око ромба се може описати правоугаоник (погледати слику) тако да једна страница правоугаоника заклапа са суседним страницама ромба угао x , односно y .

Нека је $\angle KNM = x + y$, па према томе је:
 $\angle BKL = x, \angle AKN = y$. Будући да је
 страница ромба дужине 1, лако
 закључујемо да је његова површина:

$$P = \sin(x + y),$$

а исто тако да су дужине страница AB
 односно CD једнаке $\cos x + \cos y$, а
 странице BC и AD су $\sin x + \sin y$, па је
 површина правоугаоника:

$$P_1 = (\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y).$$

Збир површина троуглова који су “око” ромба (има их четири, два и два су
 подударна) је:

$$P_2 = \sin x \cos x + \sin y \cos y,$$

те је површина самога ромба једнака:

$$P = P_1 - P_2,$$

а када заменимо израчунате вредности то је:

$$\sin(x + y) = (\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y) - \sin x \cos x - \sin y \cos y.$$

Након сређивања добијамо:

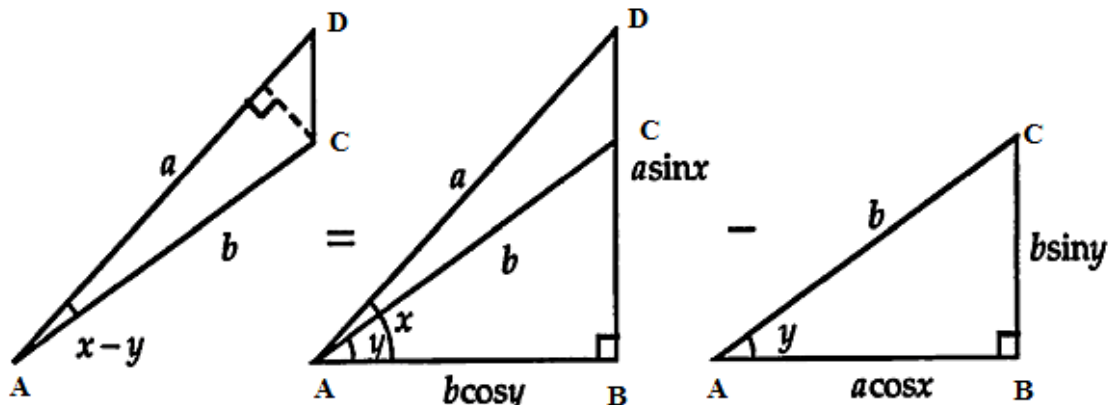
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

а то је адициона теорема за синус збира углова.

Погледаћемо сада још један графички приказ којим децу можемо убедити у
 важење адиционе теореме за синус разлике углова:

Нека је дат правоугли троугао ABD са правим углом код темена B чији угао код
 темена A износи x . Дуж AC која се налази у унутрашњости троугла ABD дели
 наш почетни троугао на два троугла: правоугли ABC и оштроугли ACD . Угао код
 темена A у троуглу ABC износи y . Очигледно је да важи:

$$P_{\triangle ACD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABC}$$



Из троугла ABD важи $BD = a \sin x$ и $AB = a \cos x$, док из троугла ABC имамо да је
 $BC = b \sin y$, а $AB = b \cos y$. Дакле, приметимо да важи $AB = a \cos x = b \cos y$.

Приметимо да у троуглу ACD , висину која одговара страници a можемо одредити на следећи начин $h = b \cdot \sin(x - y)$. Тада ћемо у једнакости $P_{\triangle ACD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABC}$ имати да важи:

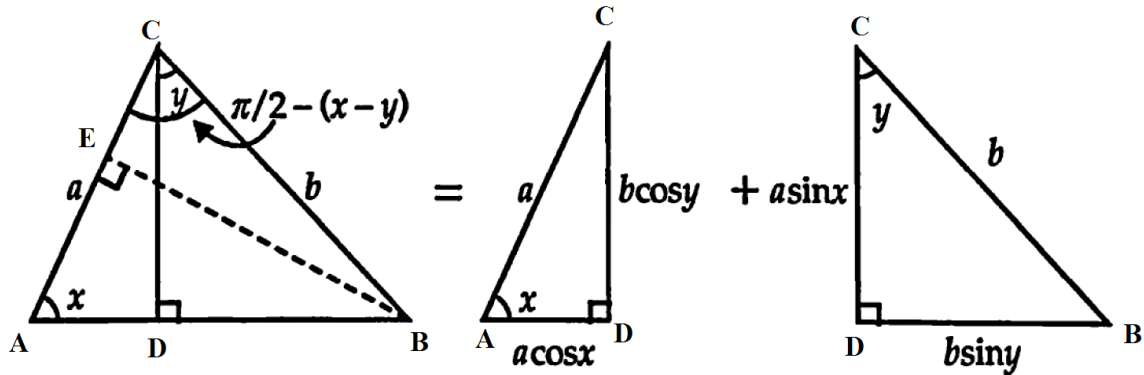
$$\frac{a \cdot b \cdot \sin(x - y)}{2} = \frac{a \sin x \cdot b \cos y}{2} - \frac{a \cos x \cdot b \sin y}{2}.$$

Ако ову једнакост помножимо са 2 и поделимо са ab добићемо:

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

што и јесте формула коју смо желели да добијемо.

И за крај, графички доказ још једне од адиционих формула:



Са слике је јасно да важи:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC} + P_{\triangle BDC}.$$

Применом дефиниција тригонометријских функција, као и формула за површину троугла добијамо да важи:

$$\frac{|AC| \cdot |BE|}{2} = \frac{|AD| \cdot |DC|}{2} + \frac{|DB| \cdot |DC|}{2},$$

односно:

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - (x - y))}{2} = \frac{a \cos x \cdot b \cos y}{2} + \frac{b \sin y \cdot a \sin x}{2},$$

то јест:

$$\frac{a \cdot b \cdot \cos(x - y)}{2} = \frac{a \cos x \cdot b \cos y}{2} + \frac{b \sin y \cdot a \sin x}{2}.$$

Након што читаву једнакост помножимо са 2 и поделимо са ab добија се:

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin y \cdot \sin x.$$

Овим смо доказали важење адиционе теореме за косинус разлике два угла.

Теорема 5 (адиционе теореме за тангенс и котангенс): За углове α и β важи:

$$1) \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ ако је } \cos \beta \neq 0, \cos \alpha \neq 0, \cos(\alpha \pm \beta) \neq 0;$$

$$2) \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}, \text{ ако је } \sin \beta \neq 0, \sin \alpha \neq 0, \sin(\alpha \pm \beta) \neq 0$$

Доказ:

Поћи ћемо од чињенице да је:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$$

а то је применом адиционих формула за синус и косинус једнако даље:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}$$

Под наведеним условима $\cos \beta \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$, $\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$, могуће је и именилац и бројилац овог разломка поделити са $\cos \alpha \cos \beta$, након чега добијамо:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 \mp \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

На сличан начин се доказује и адициона формула за котангенс:

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}.$$

Под условом да важи $\sin \beta \neq 0$, $\sin \alpha \neq 0$, $\sin(\alpha \pm \beta) \neq 0$, поделићемо бројилац и именилац са $\sin \alpha \sin \beta$ и тако добијамо:

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}} = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \mp 1}{\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \pm \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

Овим је доказана адициона теорема за тангенс и котангенс.

□

Доказаћемо сада једну једноставну последицу адиционих теорема:

Теорема 6 (о двоструком углу): За произвољан угао α важи:

1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ за $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$;

4) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$ за $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Доказ:

Приметимо да су ове формуле заправо само специјалан случај већ доказаних адиционих теорема. Ако у адиционим теоремама узмемо да је за $\alpha = \beta$ добићемо:

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

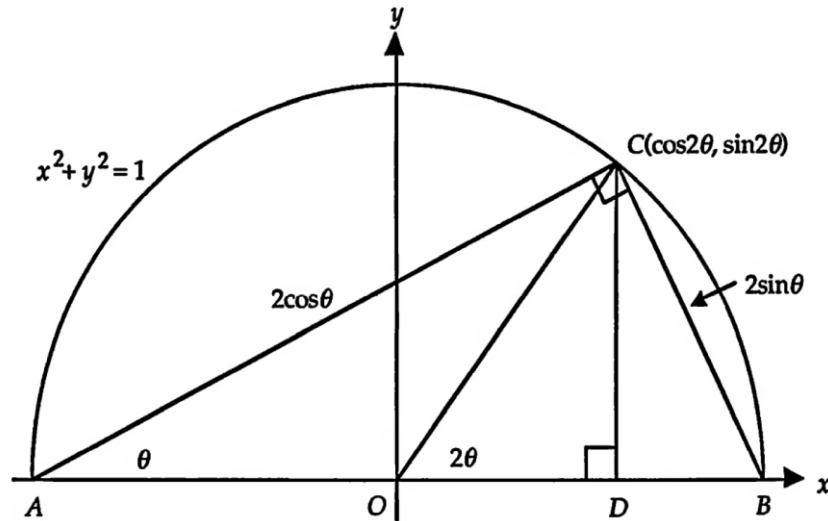
2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

$$3) \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$4) \operatorname{ctg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

□

Ево и једног графичког приакза који ће нам помоћи да ученике уверимо у важење ових формула на један друкчији начин:



Из троугла ABC имамо да је:

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2 \sin \theta$$

Троугао AOC је једнакокраки, јер је $AO = AC$ (полупречник круга), па је спољашњи угао код темена O једнак 2θ . Из троугла ODC имамо да је $OD = \cos 2\theta$, што даље значи да је:

$$AD = 1 + \cos 2\theta.$$

Приметићемо даље да важи $\triangle ABC \sim \triangle ADC$, те на основу тога можемо да закључимо да важи:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB},$$

односно:

$$\frac{\sin 2\theta}{2 \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta}{2}.$$

Одатле следи да важи:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

Са друге стране, из сличности истих троуглова имамо да је:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

то јест:

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{2 \cos \theta} = \frac{2 \cos \theta}{2}.$$

Одатле закључујемо да важи:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1,$$

а ово је другачије записан облик од:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

Овим смо доказали важење формула за двоструки угао синуса и косинуса.

Прелазимо сада на доказивање формула о полууглу:

Теорема 7 (о полууглу): За произвољан угао α важи:

$$1) \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$2) \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$3) \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad \text{за } \alpha \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$4) \left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}, \quad \text{за } \alpha \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Доказ:

Већина ових тригонометријских релација се може доказати на више начина. Ми ћемо показати један од могућих начина за доказивање ове формуле:

Из основне тригонометријске релације имамо да је $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$.

Користећи се формулама за косинус двоструког угла, добијамо да је:

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Ако саберемо ове две једнакости добија се:

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha,$$

односно:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

што је еквивалентно са:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Последња једнакост се употребом апсолутне вредности може записати као:

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

а то је формула за косинус полуугла коју смо и желели да докажемо.

Ако у формулу $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ заменимо резултат који смо добили за $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, добијамо:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

а то је еквивалентно са:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

односно:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

што се може записати и као:

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Остаје нам да докажемо формуле за тангенс и котангенс полуугла што није превише тешко ако имамо изведене формуле за синус и косинус полуугла. Тада ће бити:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

односно:

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Формула за котангенс се изводи на истоветан начин:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

то јест:

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

□

Полако се ближимо крају извођењима разних тригонометријских трансформација. Свакако треба погледати на који начин се изводе формуле које трансформишу производ тригонометријских функција у збир и разлику и обрнуто. Веома често до тог тренутка ученици успевају да меморишу све формуле али у том тренутку дефинитивно долази до презасићења. Управо из тог разлога је много

корисније показати деци како могу веома брзо да изведу ове трансформације ако им некада буду биле потребне. Ево како се то ради:

Теорема 8: За произвољне углове α и β важе следеће једнакости:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

Ове једнакости познате су као формуле за трансформацију производа тригонометријских функција у збир и разлику.

Доказ:

Напишимо адиционе формуле за синус збира и разлике:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

Ако сада саберемо формуле (1) и (2) добићемо:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

односно:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \quad (3)$$

Ако бисмо још написали адиционе формуле за косинус збира и разлике:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad (4)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (5)$$

а затим их сабрали, добили бисмо:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

што је исто као и:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad (6)$$

Ако бисмо, пак, одузели једначине (4) и (5) добили бисмо:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

то јест:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad (7)$$

Формуле (3), (6) и (7) представљају управо оно што смо и желели да покажемо, односно тврђење теореме.

□

Теорема 9: За произвољне углове α и β важе следеће једнакости:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ове једнакости познате су као формуле за трансформацију збира и разлике тригонометријских функција у производ.

Доказ:

Ако у једнакостима (3), (6) и (7) заменимо $x + y = \alpha$ и $x - y = \beta$, односно:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

добивају се следеће формуле:

$$\sin(x + y) \cos(x - y) = \frac{1}{2} (\sin(x + y + x - y) + \sin(x + y - x + y)),$$

односно:

$$(\sin 2x + \sin 2y) = 2 \sin(x + y) \cos(x - y)$$

а то је еквивалентно са:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \quad (8)$$

Даље:

$$\cos(x + y) \sin(x - y) = \frac{1}{2} (\sin(x + y + x - y) - \sin(x + y - x + y)),$$

односно:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2} \quad (9)$$

На исти начин се добија:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \quad (10)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \quad (11)$$

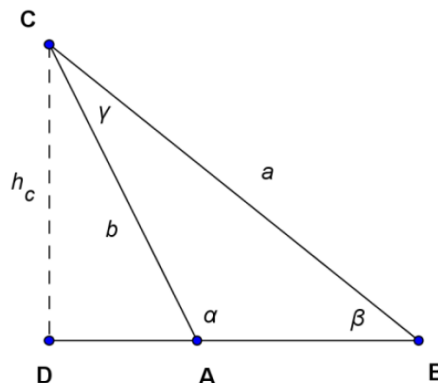
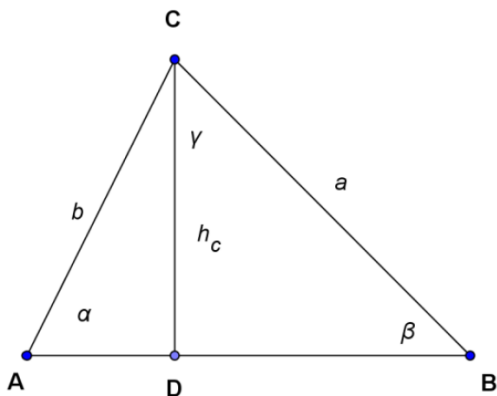
Овим је доказана и ова теорема, чиме смо завршили са доказивањем тригонометријских формула. $\square$

На самом крају приче о тригонометрији, докажимо и синусну и косинусну теорему. Иако те две теореме више припадају геометрији него алгебри, без њих би цела ова прича о тригонометрији била непотпуна.

Теорема 10 (Синусна теорема): Странице троугла пропорционалне су синусима њима насупрмних углова.

Доказ:

Посматрајмо два троугла: оштроугли на првој и тупоугли на другој слици и њихове висине h_c :



На основу дефиниције синуса у правоуглом троуглу, према првој слици, из троугла DBC и троугла ADC , следи:

$$h_c = a \sin \beta$$

$$h_c = b \sin \alpha$$

односно, због $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ важи:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}. \quad (12)$$

Према другој слици из троугла BDC , односно троугла ADC , следи:

$$h_c = a \sin(180^\circ - \beta) = a \sin \beta$$

$$h_c = b \sin \alpha$$

одакле следи иста релација (12).

На потпуно исти начин, када бисмо користили висину h_b , добијамо:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) закључујемо да је:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

чиме смо доказали синусну теорему. □

Теорема 11 (Косинусна теорема): Нека су a, b, c дужине страница и α, β, γ величине одговарајућих углова троугла ABC . Тада важи:

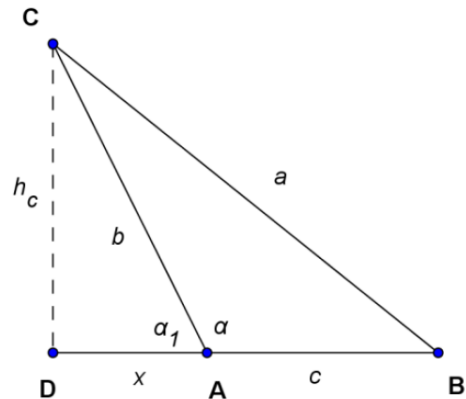
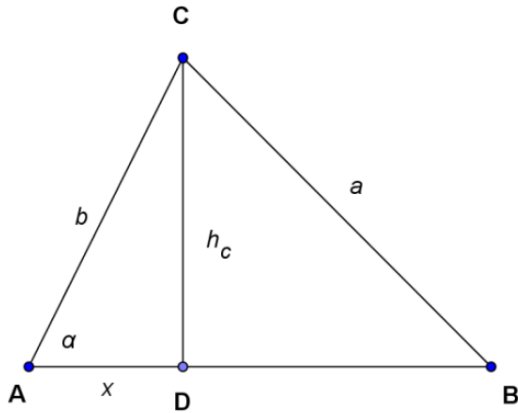
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Доказ:

Нека је дат оштроугли троугао (на првој слици).



Изразимо дужину висине h_c по Питагориној теореме, прво из троугла ACD , а затим из троугла BCD добијамо:

$$h_c^2 = b^2 - x^2;$$

$$h_c^2 = a^2 - (c - x)^2$$

Из једнакости левих страна следи једнакост десних страна, па имамо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Из троугла ACD је $x = b \cos \alpha$, па заменом у претходну једнакост добијамо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Ова једнакост важи и када је α туп угао. Према другој слици, имамо:

$$a^2 = h_c^2 + (c + x)^2 = (b \sin \alpha_1)^2 + (c + b \cos \alpha_1)^2,$$

односно:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha_1 + c^2 + 2bc \cos \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1 \\ &= b^2 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) + c^2 + 2bc \cos(180^\circ - \alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

На потпуно исти начин, ако бисмо изразили висине h_a и h_b , добили бисмо:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Овим је косинусна теорема доказана. □

3.5. ДОДАТАК УЗ ТРЕЋЕ ПОГЛАВЉЕ

У овом одељку ћемо погледати два задатка који на први поглед изгледају тешки за решавање. Чак, када их први пут сретнемо, делује нам да не знамо одакле да почнемо са израдом задатка. Ипак, сви они се решавају доста једноставно уколико имамо добру идеју:

Задатак 1: Доказати да је: $\ln(\operatorname{tg} 1^\circ) + \ln(\operatorname{tg} 2^\circ) + \dots + \ln(\operatorname{tg} 88^\circ) + \ln(\operatorname{tg} 89^\circ) = 0$

Решење:

Прво ћемо применити особину за збир логаритама, према којој ће важити:

$$\ln(\operatorname{tg} 1^\circ) + \ln(\operatorname{tg} 2^\circ) + \dots + \ln(\operatorname{tg} 88^\circ) + \ln(\operatorname{tg} 89^\circ) = \ln(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ).$$

Након тога, послужићемо се чињеницом да за произвољан оштар угао α важи:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right). \text{ То значи да ће важити:}$$

$$\operatorname{tg} 1^\circ = \operatorname{ctg} (90^\circ - 1^\circ) = \operatorname{ctg} 89^\circ$$

$$\operatorname{tg} 2^\circ = \operatorname{ctg} (90^\circ - 2^\circ) = \operatorname{ctg} 88^\circ$$

$\vdots$

$$\operatorname{tg} 44^\circ = \operatorname{ctg} (90^\circ - 44^\circ) = \operatorname{ctg} 46^\circ.$$

Када ово заменимо у нашу једнакост имаћемо да је:

$$\ln(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) = \ln(\operatorname{ctg} 89^\circ \cdot \operatorname{ctg} 88^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ).$$

Приметимо да се тангенси и котангенси свих углова од 46° до 89° појављују у паровима, те можемо искористити чињеницу да је $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, одакле следи да је:

$$\ln(\underbrace{\operatorname{ctg} 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ}_{=1} \cdot \underbrace{\operatorname{ctg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ}_{=1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\operatorname{ctg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ}_{=1} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ) = \ln(\operatorname{tg} 45^\circ) = \ln 1 = 0.$$

Задатак 2: Доказати да важи: $\sin 1 > \sin(\cos 1)$.

Решење:

Очигледне су следеће неједнакости: $0 < \cos 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$. Ако узмемо у обзир да је на

интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ синус растућа функција, тада ће важити и:

$$\sin 0 < \sin(\cos 1) < \sin 1 < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

односно:

$$0 < \sin(\cos 1) < \sin 1 < 1,$$

а то смо и желели да покажемо.

IV ДОКАЗИ У ТРЕЋЕМ РАЗРЕДУ

Трећи разред је што се тиче математике вероватно најинтересантнији из простог разлога јер је садржај градива које се изучава поприлично шаренолик, те свако може за себе да пронађе неку област која му одговара и која му је блиска. Што се тиче доказивања различитих теорема и ту је исти случај. Трећи разред је вероватно и најбогатији различитим теоремама и тврђењима која се ученицима без превише муке могу доказивати. На почетку, као и до сада, глобални план и програм наставе математике у трећем разреду гимназије природно-математичког смера:

Редни број наставне теме	НАСТАВНЕ ТЕМЕ	Број часова по теми	Број часова за	
			обраду	остале типове часова
1.	Планиметрија	11	3	8
2.	Стереометрија - полиедри	12	4	8
3.	Стереометрија – обртна тела	20	6	14
4.	Детерминанте и системи линеарних једначина	13	3	10
5.	Вектори	20	5	15
6.	Аналитичка геометрија у равни	46	16	30
7.	Математичка индукција и низови	22	10	12
8.	Комплексни бројеви и полиноми	36	11	25
	УКУПНО	180	58	122

4.1. ДЕТЕРМИНАНТЕ И ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

Најпре ћемо доказати одређена својства за детерминанте реда два, јер ћемо то користити приликом доказивања особина за детерминанте реда три које су нам најзначајније због решавања система једначина, и касније код вектора и у аналитичкој геометрији.

Познато је да се детерминанта реда два дефинише на следећи начин:

Дефиниција 1: За четири броја a, b, c, d дефинишемо израз:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

који се назива детерминанта реда два.

Теорема 1: За детерминанте реда два важе следећа својства:

- 1) Вредност детерминанте се не мења ако врсте и колоне замене места;
- 2) Ако две врсте (или две колоне) замене места, детерминанта мења знак;
- 3) Ако се једна врста (или једна колона) помножи бројем k , тада је вредност детерминанте такође помножена бројем k ;
- 4) Ако су две врсте (или две колоне) детерминанте пропорционалне, вредност детерминанте је нула;

- 5) Вредност детерминанте се не мења ако се елементима једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне) претходно помножени неким бројем.

Доказ:

Ово су рачунски докази које ћемо извести редом:

- 1) Ако имамо детерминанте $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, није тешко утврдити да је вредност обе од њих (по дефиницији) $ad - bc$;

- 2) Узмимо детерминанте $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$. Погледајмо следећу једнакост:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}, \text{ а то смо и желели да покажемо;}$$

- 3) Погледајмо детерминанту $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, а то је оно што смо желели да покажемо;

- 4) Нека је дата детерминанта $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix}$. У њој су елементи прве и друге врсте

пропорционалне. Вредност ове детерминанте је: $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = akb - kab = 0$, а то

је и требало показати;

- 5) Погледајмо један пример:

$$\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix} = a(d+kc) - c(b+ka) = ad + akc - cb - kca = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

а ово смо и желели да покажемо.

□

Овим смо доказали важење основних особина за детерминанте реда два. Уводимо сада појам детерминанте реда три:

Дефиниција 2: За девет бројева $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ дефинише се једнакост:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

која се назива детерминанта реда три.

Ово је развој детерминанте по првој врсти. Детерминанта реда три се може развити по било којој врсти и колони и њена вредност је увек иста (не зависи од врсте или колоне по којој се развија).

Својства која важе за детерминанте реда два важе и у овом случају:

Теорема 2: За детерминанте реда три важе следећа својства:

- 1) Вредност детерминанте се не мења ако врсте и колоне замене места;
- 2) Ако две врсте (или две колоне) замене места, детерминанта мења знак;

- 3) Ако се једна врста (или једна колона) помножи бројем k , тада је вредност детерминанте такође помножена бројем k ;
- 4) Ако су две врсте (или две колоне) детерминанте пропорционалне, вредност детерминанте је нула;
- 5) Вредност детерминанте се не мења ако се елементима једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне) претходно помножени неким бројем.

Доказ:

- 1) Треба показати да важи:
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$
 Ово се најједноставније

доказује тако што се детерминанта на левој страни развије по првој врсти, а детерминанта на десној страни по првој колони:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Сада је тврђење очигледно.

- 2) Узмимо детерминанте $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, и имамо да за њих важи:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$$

$$= -(a_1 b_3 c_2 - a_1 b_2 c_3 + b_1 a_2 c_3 - b_1 c_2 a_3 - c_1 a_2 b_3 + c_1 b_2 a_3)$$

$$= -(b_1(a_2 c_3 - c_2 a_3) - b_2(a_1 c_3 - c_1 a_3) + b_3(a_1 c_2 - c_1 a_2))$$

$$= -\left(b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\right) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

а то смо и желели да покажемо.

- 3) Да бисмо илустровали ово својство докажимо једнакост:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ако детерминанту на левој страни развијемо по првој колони добијамо:

$$ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - ka_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + ka_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = k \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

а ово је и требало показати.

- 4) Нека је D вредност детерминанте чије су две врсте (или две колоне) пропорционалне. Нека је k константа пропорционалности. Тада се она може “извући испред детерминанте”, па ће важити $D = k \cdot \Delta$ где је Δ детерминанта која има две врсте (колоне) идентичне. Ако те две врсте (колоне) замене места, вредност детерминанте се не мења. Са друге стране, на основу својства 2) детерминанта мења знак. Стога је $\Delta = -\Delta$, односно $\Delta = 0$, па је $D = k \cdot \Delta = 0$. Овим смо доказали жељену особину. Овај доказ је могао да се изведе и рачунски али смо се определили за ову “елегантнију” варијанту.
- 5) Доказаћемо један случај који илуструје последње својство детерминанти из наведене теореме. Доказаћемо једнакост:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Заиста, ако развијемо детерминанту на левој страни по првој колони добијамо:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 + kb_2 \\ b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 + kb_1 \\ b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 + kb_1 \\ b_2 & c_2 + kb_2 \end{vmatrix} = \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

јер смо ово својство већ доказали за детерминанте реда два, и то је управо десна страна тражене једнакости.

□

4.2. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

За решавање линеарног система једначина облика 3×3 врло често користимо такозвано Крамерово⁵ правило или правило детерминанти. Иако се овај механизам може користити за решавање ма ког **квадратног** система једначина (систем у коме је број непознатих и број једначина једнак), он се због сложености рачуна најчешће користи само за системе једначина 2×2 и 3×3 , док се системи једначина вишег реда, као и системи једначина који нису квадратног типа решавају неком другом методом (најчешће Гаусовим⁶ поступком).

⁵ Габријел Крамер (фран. Gabriel Cramer, 1704-1752) – швајцарски математичар

⁶ Карл Фридрих Гаус (нем. Johann Carl Friedrich Gauß 1777-1855) – немачки математичар

Теорема 1 (Крамерово правило): Нека је дат систем три линеарне једначине са три непознате:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

где су x, y, z непознате, а a_i, b_i, c_i, d_i ($i=1, 2, 3$) познати реални бројеви. Означимо детерминанту овог система са:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ако поред ове детерминанте уведемо и ознаке:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

тада важи следеће:

- 1) Ако је $\Delta \neq 0$ онда систем једначина има јединствено решење. То решење је :

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right). \text{ Ако систем има јединствено решење, онда је } \Delta \neq 0$$

$$\text{и то решење је } (x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right);$$

- 2) Ако је $\Delta = 0$ и бар један од $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ је различит од нуле, систем нема решења;

- 3) Ако је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ Крамерово правило не даје никакве информације о решењу система (систем једначина или нема решења или има бесконачно много решења).

Доказ:

Претпоставимо да је (x, y, z) решење система једначина (1). По једној од већ доказаних особина детерминанти, имаћемо да важи:

$$x \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Сада можемо искористити још једну особину детерминанти по којој се вредност детерминанте не мења ако једној врсти (колони) додамо другу помножену неким бројем. Ми ћемо елементима прве колоне додати одговарајуће елементе друге колоне помножене са y па ће бити:

$$x \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Још једном ћемо применити исту особину: елементима прве колоне додаћемо елементе треће колоне помножене са z , након чега ће важити:

$$x \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

И коначно, на основу система (1) добијамо да је:

$$x \cdot \Delta = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_x$$

Потпуно аналогно доказује се да важи $y \cdot \Delta = \Delta_y$ и $z \cdot \Delta = \Delta_z$.

Ако сада претпоставимо да је $\Delta \neq 0$, онда дељењем добијених једнакости са Δ добијамо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Из овога закључујемо да је решење система јединствено (јер зависи само од коефицијената), односно важи:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

Ако претпоставимо да је $\Delta \neq 0$ тада постоји уређена тројка $(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$ и лако провером се доказује да ова тројка јесте решење полазног система.

За случај да је $\Delta = 0$ имали бисмо да важи:

$$x \cdot 0 = \Delta_x$$

$$y \cdot 0 = \Delta_y$$

$$z \cdot 0 = \Delta_z$$

а из тога следи да за случај да је $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ или $\Delta_z \neq 0$ систем једначина (1) нема решења.

□

4.3. ВЕКТОРИ

Ову област нећемо детаљно “претресати” већ ћемо се зауставити на доказима неколико интересантних теорема.

Познато нам је како се свакој тачки равни додељује уређен пар реалних бројева (x, y) – тј. њене координате у Декартовом координатном систему.

Сличан поступак може се применити и за тачке простора. Наиме, нека OX , OY , OZ три узајамно нормалне оријентисане праве које се секу у тачки O . Оријентисане праве OX , OY , OZ називају се координатне осе, и то редом: x -оса, y -оса и z -оса, а тачка O је координатни почетак. Овим елементима је одређен Декартов правоугли координатни систем у простору.

Нека је M произвољна тачка простора. кроз тачку M поставимо три равни паралелне равнима OYZ , OXZ и OXY . Ове равни секу осе OX , OY и OZ редом у

тачкама M_1, M_2, M_3 , а тим тачкама на правима OX, OY и OZ (схваћеним као бројним правима) одговарају бројеви x, y, z . Према томе, тачки M у простору одговара уређена тројка бројева (x, y, z) , а очигледно је да важи и обрнуто да свакој уређеној тројки реалних бројева одговара једна тачка простора.

Нека је дат неки вектор $\overrightarrow{OM}$ (чији је почетак у координатном почетку) одређен тачком M са координатама (x, y, z) . Нека је $\vec{i}$ вектор дужине 1 са почетком у тачки O који има исти смер као x оса, $\vec{j}$ вектор дужине 1 са почетком у тачки O који има исти смер као y оса и нека је $\vec{k}$ вектор дужине 1 са почетком у тачки O који има исти смер као z -оса.

Тада важи:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Заиста, ако су M_1, M_2, M_3 пројекције тачке M редом на x -осу, y -осу, z -осу. Тада је:

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{ON};$$

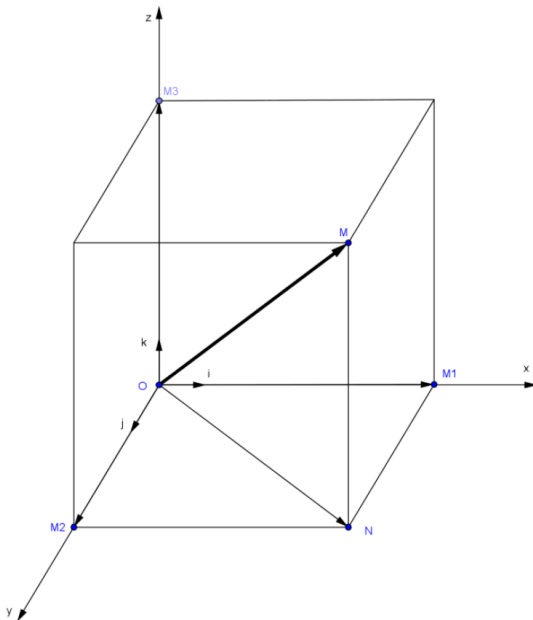
такође је:

$$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM},$$

па је:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Погледаћемо све ово на слици па ће бити јасније:



Дакле, видимо да најпре можемо посматрати нормалну пројекцију тачке M на раван Oxy и њена пројекција је тачка N . Тако смо се “спустили” у раван и лако увиђамо да је у тој равни:

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{ON}$$

Ако сада посматрамо троугао ONM , можемо увидети да ће важити:

$$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM}$$

јер су вектори $\overrightarrow{OM_3}$ и $\overrightarrow{NM}$ заправо исти вектор (истог правца јер су паралелни, истог интензитета јер су и један и други висина квадра и истог смера). Из ове две једнакости непосредно следи:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

Ако сада приметимо да је $\overrightarrow{OM_1} = \lambda\vec{i}$, где је $\lambda = |\overrightarrow{OM_1}|$ па закључујемо да је $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Слично се доказује да је $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$ и $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$. Па закључујемо да је:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Дефинисали смо до сада координате вектора чији је почетак у тачки O , тј. у координатном почетку. Видећемо сада како одредити координате вектора чији почетак није у тачки O . Нека је $\overline{AB}$ произвољан вектор и нека је $\overline{OM}$ вектор једнак вектору $\overline{AB}$. Вектор $\overline{OM}$ добија се транслацијом вектора $\overline{AB}$ тако да се тачка A транслира у тачку O . Координате вектора $\overline{AB}$ дефинишу се као координате њему једнаког вектора $\overline{OM}$.

Извешћемо сада неколико формула за операције са векторима који су задати својим координатама:

Нека су $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ произвољни вектори. Тада је:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \text{ и } \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

па користећи законе који важе за сабирање вектора и множење вектора скаларом добија се:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) + (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k} \end{aligned}$$

односно:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Слично, из једнакости $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, следи:

$$\lambda \vec{a} = \lambda(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) = (\lambda x_1) \vec{i} + (\lambda y_1) \vec{j} + (\lambda z_1) \vec{k}$$

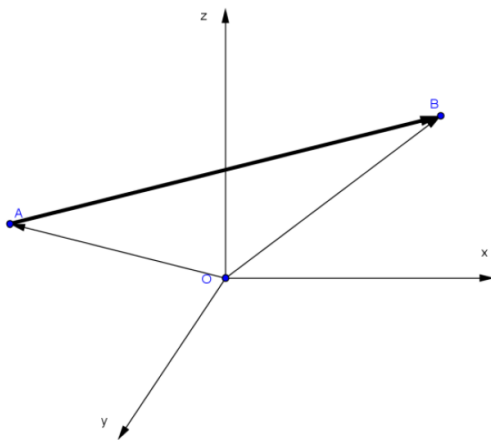
то јест:

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

Погледајмо сада како се одређује интензитет $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$. То можемо урадити једноставном применом Питагорине теореме (рачунамо дијагоналу квадрата чије су ивице x_1, y_1, z_1) и важиће:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Видећемо још како се одређује вектор $\overline{AB}$ ако су нам познате две тачке



$A = (x_1, y_1, z_1)$ и $B = (x_2, y_2, z_2)$. Већ смо напоменули да су координате неке тачке

A једнаке координатама вектора $\overline{OA}$. На основу тога, закључујемо да ће бити:

$$\overline{OA} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$$

Са друге стране, видимо да важи:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

то јест:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

одакле закључујемо да је:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Погледајмо сада једну теорему која нам казује на који начин је могуће испитати да ли су три вектора линеарно независна:

Теорема 1: Вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ су линеарно независни ако и само ако је:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказ:

Ако пођемо од једнакости $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, то јест:

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) + \gamma(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 0)$$

добивамо систем једначина:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0 \end{cases}$$

по непознатим α, β, γ . Овај систем једначина, као што знамо, има тачно једно решење и то $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ако и само ако је

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(јер је $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$).

□

Погледаћемо сада и неке особине скаларног, векторског и мешовитог производа вектора:

Дефиниција 1: За два не-нула вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ њихов скаларни производ у ознаци $\vec{a} \circ \vec{b}$, је:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

где $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ означава угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема 2 (особине скаларног производа): За векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи:

- 1) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (комутативност);
- 2) скаларни производ није асоцијативна операција;
- 3) за произвољан број λ важи: $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \circ \vec{b}$;

Доказ:

- 1) $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{b} \circ \vec{a}$;
- 2) Како је $\vec{a} \circ \vec{b}$ неки број, на пример нека је $\vec{a} \circ \vec{b} = m$, тада је $(\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c} = m \circ \vec{c}$ неки вектор колинеаран са вектором $\vec{c}$. Са друге стране $\vec{a} \circ (\vec{b} \circ \vec{c}) = \vec{a} \circ n$ је неки вектор колинеаран са $\vec{a}$;

3) Ако је $\lambda > 0$, онда је:

$$\begin{aligned}(\lambda \vec{a}) \circ \vec{b} &= |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) \\ &= \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda \vec{a} \circ \vec{b}\end{aligned}$$

јер је у овом случају $|\lambda| = \lambda$ и $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Даље, ако је $\lambda < 0$, тада је:

$$\begin{aligned}(\lambda \vec{a}) \circ \vec{b} &= |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) \\ &= -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (-\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda \vec{a} \circ \vec{b}\end{aligned}$$

јер је у овом случају $|\lambda| = -\lambda$ и $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \pi + \angle(\vec{a}, \vec{b})$ па је $\cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = -\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Најзад, ако је $\lambda = 0$, тада је $(\lambda \vec{a}) \circ \vec{b} = (0\vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{0} \circ \vec{b} = 0$, а такође је $0\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Слично се доказује једнакост $\vec{a} \circ (\lambda \vec{b}) = \lambda \vec{a} \circ \vec{b}$.

□

Ево сада једне, можда и кључне теореме када је у питању скаларни производ:

Теорема 3: Не-нула Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су ортогонални ако и само ако је $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Доказ:

Видимо да у формулацији теореме фигурише операција еквиваленције, тако да доказ изводимо у два смера:

Доказујемо прво тврђење: Ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални онда је $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

Обрнуто: Ако је $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ онда су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални:

Да би једнакост $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ била испуњена, имамо три могућности: $|\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Како се у теорему каже да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не-нула вектори, значи да је $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, тако да остаје $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. То значи да је $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

Изведимо још формулу за скаларни производ вектора помоћу њихових координата.

Нека је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Имамо, дакле:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \circ (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

па на основу особина скаларног производа добијамо:

$$\begin{aligned}\vec{a} \circ \vec{b} &= (x_1 \vec{i}) \circ (x_2 \vec{i}) + (x_1 \vec{i}) \circ (y_2 \vec{j}) + (x_1 \vec{i}) \circ (z_2 \vec{k}) + \\ &\quad (y_1 \vec{j}) \circ (x_2 \vec{i}) + (y_1 \vec{j}) \circ (y_2 \vec{j}) + (y_1 \vec{j}) \circ (z_2 \vec{k}) + \\ &\quad (z_1 \vec{k}) \circ (x_2 \vec{i}) + (z_1 \vec{k}) \circ (y_2 \vec{j}) + (z_1 \vec{k}) \circ (z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 \vec{i} \circ \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \circ \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \circ \vec{k} + \\ &\quad y_1 x_2 \vec{j} \circ \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \circ \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \circ \vec{k} + \\ &\quad z_1 x_2 \vec{k} \circ \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \circ \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \circ \vec{k}\end{aligned}$$

то јест:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Специјално, када је $\vec{a} = \vec{b}$, онда је:

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

односно:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Дефиниција 2: За два неколинеарна вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ њихов векторски производ у ознаци $\vec{a} \times \vec{b}$ је вектор чији је:

- 1) интензитет $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$;
- 2) правац нормалан на раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) смер такав да три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$, тим редом, чине десни систем вектора.

Теорема 4: Не-нула вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни ако и само ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доказ:

Видимо да у формулацији теореме фигурише операција еквиваленције, тако да доказ изводимо у два смера:

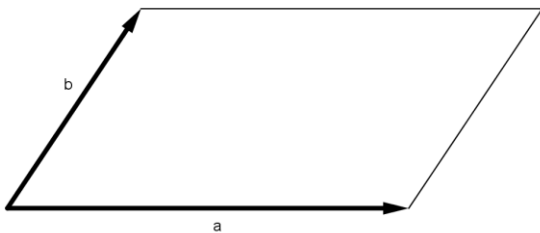
Доказујемо прво тврђење: Ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни онда је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

Обрнуто: Ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ онда су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни:

Да би једнакост $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ била испуњена, имамо три могућности: $|\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Како се у теорему каже да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не-нула вектори, значи да је $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, тако да остаје $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. То значи да је $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$, односно да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заиста јесу колинеарни.

□



Ако над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ конструишемо паралелограм, тада његова површина P износи, као што знамо:

$$P = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Према томе, за површину P паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи:

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Извешћемо сада формулу за векторски производ два вектора помоћу њихових координата. Нека је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Имамо, дакле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

па на основу особина векторског производа (антикомутативни закон и дистрибутивни закон) добијамо:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i}) \times (x_2 \vec{i}) + (x_1 \vec{i}) \times (y_2 \vec{j}) + (x_1 \vec{i}) \times (z_2 \vec{k}) + \\ &\quad (y_1 \vec{j}) \times (x_2 \vec{i}) + (y_1 \vec{j}) \times (y_2 \vec{j}) + (y_1 \vec{j}) \times (z_2 \vec{k}) + \\ &\quad (z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i}) + (z_1 \vec{k}) \times (y_2 \vec{j}) + (z_1 \vec{k}) \times (z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 \vec{i} \times \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \times \vec{k} + \\ &\quad y_1 x_2 \vec{j} \times \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \times \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \times \vec{k} + \\ &\quad z_1 x_2 \vec{k} \times \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \times \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \times \vec{k},\end{aligned}$$

то јест:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}.$$

Дакле, векторски производ вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ је вектор $\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$.

Приметимо да се формула за векторски производ вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ може згодно написати у облику симболичке детерминанте:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

јер се развојем ове детерминанте по првој врсти добија управо једнакост за векторски производ ова два вектора.

Дефиниција 3: Мешовити производ три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, у ознаци $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, јесте број дефинисан помоћу једнакости:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$$

Теорема 5: Три не-нула вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ су копланарна ако и само ако је њихов мешовити производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ једнак нули.

Доказ:

Доказујемо да ако су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ копланарни вектори онда мора бити $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. Како је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$ и како су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ копланарни вектори, то значи да је вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ нормалан на вектор $\vec{c}$ одакле следи да је $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = 0$.

Обрнуто, нека је $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = 0$. Како је, по претпоставци, $\vec{c} \neq \vec{0}$ постоје две могућности: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на $\vec{c}$. Ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, онда су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни, па су стога вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ копланарни. Нека је $\vec{a} \times \vec{b}$ нормалан на $\vec{c}$. Међутим, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ нормалан је и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$. Дакле, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ нормални су на вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, па су стога копланарни. $\square$

Извешћемо сада формулу за мешовити производ вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ помоћу њихових координата. Нека је: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$. Тада је:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \circ (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \circ (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

то јест:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Током овог извођења смо се користили особинама детерминанти које смо раније доказали. □

4.4. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

У уводном делу овог рада већ је било речи о математичкој индукцији. Тада је само било наведено шта математичка индукција представља и који тип доказа се може урадити применом овог механизма. Сада ћемо се мало детаљније позабавити самим смислом овог поступка и објаснити због чега је баш овај облик индукције добар за одређене доказе.

У математици често треба испитати тачност формуле облика:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = F(n), \quad (1)$$

за сваки природан број n . На пример, потребно је показати да је формула

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

тачна за свако $n \in \mathbf{N}$. То не можемо физички урадити за сваки природан број јер природних бројева има бесконачно много. осим тога, ако је она тачна за неколико првих природних бројева, рецимо $n=1, 2, 3, 4, 5$, то не значи да ће бити тачна и за $n=6$.

Код формула облика (1) може се поступити на следећи начин: ако је (1) тачно за сваки природан број n , тада уз (1) имамо и:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = F(n+1),$$

па, после одузимања, добијамо $a_{n+1} = F(n+1) - F(n)$, то јест:

$$F(n) + a_{n+1} = F(n+1).$$

Поред тога, за $n=1$, формула (1) своди се на $a_1 = F(1)$.

Дакле, ако је:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = F(n) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (3)$$

тада је:

$$a_1 = F(1) \quad \text{и} \quad F(n) + a_{n+1} = F(n+1) \quad \text{за свако } n \in \mathbf{N} \quad (4)$$

Докажимо и обрнуто тврђење, то јест да из (4) следи (3). Заиста, из (4) се добија:

$$\begin{aligned} F(1) + a_2 &= F(2) & F(2) - F(1) &= a_2 \\ F(2) + a_3 &= F(3) & F(3) - F(2) &= a_3 \\ &\vdots \\ F(n-1) + a_n &= F(n) & F(n) - F(n-1) &= a_n \end{aligned}$$

и, после сабирања,

$$F(n) - F(1) = a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

или, с обзиром на то што је $F(1) = a_1$,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = F(n).$$

Према томе, (3) је еквивалентно са (4), па се доказивање једнакости (1) за свако $n \in \mathbf{N}$ може заменити доказивањем једнакости (4).

Изложени метод је веома специфичан и може се применити на доказивање једнакости (1). Међутим, он се може тако преформулисати да послужи као основа за такозвани метод математичке индукције, који се касније примењује на много шире класе проблема.

Пређимо сада на ту преформулацију. Видели смо да се уместо једнакости (1) може доказати њој еквивалентни систем који се састоји из једнакости

$$a_1 = F(1) \quad (5)$$

и

$$F(n) + a_{n+1} = F(n+1). \quad (6)$$

Једнакост (5) оставимо каква јесте, а једнакости (6) даћемо један други смисао. Наиме, ако са (ϕ_n) означимо формулу (1), тада се једнакост (6) може интерпретирати и на следећи начин:

Ако је (ϕ_n) тачно за неко n , онда је (ϕ_{n+1}) тачно. Заиста, ако је формула (ϕ_n) тачна за неко n , тада се може и левој и десној страни те формуле додати члан a_{n+1} , па се добија:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = F(n) + a_{n+1},$$

па на основу (6) следи:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = F(n+1),$$

што је управо формула (ϕ_{n+1}) .

Другим речима, да бисмо доказали тачност формуле (ϕ_n) за сваки природан број n , довољно је доказати следећа два тврђења:

1) формула (ϕ_1) је тачна; (7)

2) импликација $(\phi_n) \Rightarrow (\phi_{n+1})$ мора бити тачна за свако $n \in \mathbf{N}$. (8)

Опишимо сада, на други начин, зашто из (7) и (8) излази тачност формуле (ϕ_n) за свако $n \in \mathbf{N}$.

Ако ставимо $n=1$ у (8), добијамо исказ: ако је (ϕ_1) тачно, тачно је и (ϕ_2) . Међутим, на основу (7) знамо да је (ϕ_1) тачно, па закључујемо да је и (ϕ_2) тачно. Овакав начин закључивања је такозвани *modus ponens* (објашњено у уводном делу рада).

Ако ставимо $n=2$ у (8), добијамо: ако је (ϕ_2) тачно, тачно је и (ϕ_3) . Међутим, већ смо доказали да је (ϕ_2) тачно, па закључујемо да је (ϕ_3) такође тачно.

Настављајући овај поступак, видимо да је (ϕ_n) тачно за сваки природан број n .

Доказивање на основу принципа математичке индукције, то јест методом математичке индукције, има широку и разноврсну примену. Емпиријском индукцијом могу се наслутити неке формуле (једнакости, неједнакости и слично) које зависе од природног броја n , а метод математичке индукције омогућује да се у многим случајевима утврди да ли је постављена хипотеза тачна или није.

Овим принцип математичке индукције није доказан већ је само прецизно објашњен. Извешћемо сада један доказ принципа математичке индукције узимајући да је следећа чињеница евидентна:

У сваком непразном подскупу скупа природних бројева постоји најмањи број. (9)
Претпоставимо сада да је $(T_1, T_2, \dots, T_n, \dots)$ низ тврђења за које важи:

а) T_1 је тачно;

б) за свако $n \in \mathbf{N}$, из тачности тврђења T_n излази тачност тврђења T_{n+1} .

Докажимо сада да су сва тврђења $(T_1, T_2, \dots, T_n, \dots)$ тачна. Претпоставимо супротно, то јест да постоји неко тврђење у овом низу које није тачно. То значи да је скуп природних бројева n таквих да је T_n нетачно непразан, па на основу (9) постоји и најмањи природан број p такав да је T_p нетачно. На основу чињенице да је T_1 тачно, закључујемо да је $p > 1$. Међутим, како је $p-1 < p$, тврђење T_{p-1} мора бити тачно. Дакле, T_p је нетачно, док је T_{p-1} тачно, што је у супротности са б). Тиме је доказ завршен.

Урадићемо сада неколико доказа различитих тврђења који се изводе применом принципа математичке индукције:

Пример 1: Доказати да за све природне бројеве n важи:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решење:

Примењујемо принцип математичке индукције:

За $n=1$ је $1 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1 \Rightarrow T(1)$ је тачно.

Сада постављамо индуктивну хипотезу: $T(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Под претпоставком да ово важи, проверавамо да ли ће важити импликација $T(n) \Rightarrow T(n+1)$:

$$T(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Сада ћемо средити овај израз и доказати његово важење:

$$L = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = D, \text{ где је } L \text{ лева страна}$$

једнакости, а D десна страна:

$$\begin{aligned} L &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = D \end{aligned}$$

чиме смо доказали жељену импликацију. Користећи чињеницу да је $T(n)$ тачно, показали смо да важи и $T(n+1)$.

На основу принципа математичке индукције, закључујемо да наведено тврђење важи за сваки природан број n .

Пример 2: Доказати да за све природне бројеве важи тврђење $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$.

Решење:

За $n=1$ је $3 \mid 5^1 + 2^{1+1} \Leftrightarrow 3 \mid 9$ што је тачно тврђење. Сада постављамо индуктивну хипотезу: $T(n)$ је $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$. На основу постављене хипотезе, доказујемо да из:

$T(n): 3 \mid 5^n + 2^{n+1} \Rightarrow T(n+1): 3 \mid 5^{n+1} + 2^{n+2}$. Приступамо сређивању изрази на десној страни импликације:

$$\begin{aligned} 3 \mid 5^{n+1} + 2^{n+2} &\Leftrightarrow 3 \mid 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} = 5 \cdot 5^n + \underbrace{2 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^{n+1}}_{= 5 \cdot 2^{n+1}} - 3 \cdot 2^{n+1} = \\ &= 5 \underbrace{(5^n + 2^{n+1})}_{\substack{\text{по индуктивној} \\ \text{хипотези је дељиво} \\ \text{са три па овај} \\ \text{израз можемо} \\ \text{записати као } 3k, \\ \text{где је } k \text{ неки} \\ \text{цео број}}} - 3 \cdot 2^{n+1} &\Leftrightarrow 3 \mid 5 \cdot (3k) - 3 \cdot 2^{n+1} = 3(5k - 2^{n+1}). \end{aligned}$$

Израз $3(5k - 2^{n+1})$ је очигледно дељив бројем 3, па иако доказано да је $T(n+1)$ тачно, а то нам је и био циљ. Применом принципа математичке индукције, закључујемо да ово важи за све природне бројеве n .

Пример 3 (Бернулијева⁷ неједнакост): Нека је $h \in \mathbf{R}$, $h > -1$ и нека $n \in \mathbf{N}$. тада важи неједнакост:

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

Решење:

За $n=1$ неједнакост је тачна јер се своди на $(1+h) \geq 1+h$.

Претпоставимо да је $(1+h)^n \geq 1+nh$ тачно. Како је $h > -1$, онда је $1+h > 0$, па можемо обе стране неједнакости помножити са $1+h$ након чега добијамо:

$$(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2.$$

Међутим, како $n \in \mathbf{N}$ то значи да је $n > 0$. Такође је $h^2 \geq 0$. Стога је $nh^2 \geq 0$, па закључујемо да је:

$$1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h,$$

што заједно са $(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2$ даје:

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h.$$

На основу принципа математичке индукције, Бернулијева неједнакост је доказана.

Теорема 1: Нека је $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ дата n -торка позитивних бројева. Нека је:

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \text{ и } G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Тада важи:

$$A_n(a) \geq G_n(a)$$

Доказ:

Тврђење ћемо доказати математичком индукцијом. За $k=2$ је тврђење доказано у првом разреду (страна 20).

Претпоставимо да је тврђење тачно за $n=k-1$, то јест, да важи:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1}},$$

и покажимо да важи за $n=k$.

Без губитка општости можемо претпоставити да је $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$.

Тада је:

$$a_1 = \frac{\overbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}^k}{k} \leq A_k(a) \leq \frac{\overbrace{a_k + a_k + \dots + a_k}^k}{k} = a_k. \quad (6)$$

Из претходних неједнакости можемо да приметимо да је: $a_k - A_k(a) \geq 0$, односно $a_1 + a_k - A_k(a) \geq a_1 > 0$.

Посматрајмо $k-1$ позитивних бројева $a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_1 + a_k - A_k(a)$, за које можемо применити индуктивну хипотезу, па ће важити:

$$\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1} + a_1 + a_k - A_k(a)}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a))}.$$

⁷ Јакоб Бернули (нем. Jacob Bernoulli, 1654-1705) швајцарски математичар и научник.

Како је $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k = k \cdot A_k(a)$, претходна неједнакост постаје:

$$\frac{k \cdot A_k(a) - A_k(a)}{k-1} = A_k(a) \geq \sqrt[k-1]{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a))}.$$

Одавде следи да је:

$$A_k^{k-1}(a) \geq a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a)),$$

односно:

$$A_k^k(a) \geq A_k(a) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a)). \quad (7)$$

Из (6) имамо да су $A_k(a) - a_1$ и $a_k - A_k(a)$ позитивни бројеви, па је и њихов производ позитиван, односно важи:

$$(a_k - A_k(a)) \cdot (A_k(a) - a_1) \geq 0.$$

Ако извршимо назначена множења, претходна неједнакост постаје:

$$-a_1 \cdot (a_k - A_k(a)) + A_k(a)(a_k - A_k(a)) \geq 0,$$

односно:

$$A_k(a) \cdot a_1 - a_1 \cdot a_k + A_k(a)(a_k - A_k(a)) \geq 0.$$

Последња неједнакост је еквивалентна са:

$$A_k(a) \cdot (a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1 \cdot a_k.$$

Ако обе стране ове неједнакости помножимо са $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1}$ добијамо:

$$A_k(a) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot a_k = G_k^k(a). \quad (8)$$

Сада из (7) и (8) следи да је:

$$A_k^k(a) \geq G_k^k(a),$$

то јест:

$$A_k(a) \geq G_k(a).$$

□

4.5. АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ

Показаћемо сада како се изводе формуле за рачунање општег члана аритметичког и геометријског низа ако нам је дат први члан низа и разлика (количник код геометријског) низа, као и формуле за збир првих n чланова аритметичког, односно геометријског низа.

За аритметички низ у општем случају важи: $a_{n+1} - a_n = d$ ($n = 1, 2, \dots$). Полазећи од ове једнакости, није тешко приметити да ће важити:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= d \\ a_n - a_{n-1} &= d \end{aligned}$$

Ако саберемо све ове једнакости добићемо:

$$a_n - a_1 = (n-1)d,$$

односно:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

што представља формулу за израчунавање општег члана аритметичког низа ако нам је познат први члан тог низа и разлика низа.

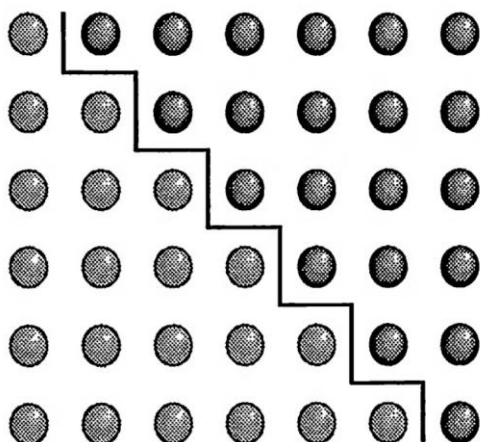
Низ свих природних бројева $(n) = (1, 2, 3, \dots, n)$ чини аритметички низ (са првим чланом 1 и разликом 1). Израчунајмо сада збир првих n чланова овог низа. Методом математичке индукције можемо доказати да важи:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Управо се рекурзивно и дефинише збир првих n бројева и то на следећи начин:

$$1) S_1 = 1;$$

$$2) S_{n+1} = S_n + (n+1).$$



Ево једног графичког приказа који илуструје ову чињеницу:

Претпоставимо да имамо каменчиће тако да узимамо један каменчић, па два каменчића, три, итд, све до n каменчића. Поређамо ли каменчиће на начин на који је то приказано на овој слици видимо да збир

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

износи половину каменчића који формирају правоугаоник са слике чије су странице n и $n+1$, тако да добијамо да је:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ево још једног сличног графичког приказа за исту једнакост:

Дата је половина квадрата странице n . Његова

површина ће бити $\frac{n^2}{2}$. Видимо да се тај квадрат

може изделити на мање квадратиће странице 1. У свакој од n врста недостаје по једна половина малог квадратића. Дакле, за сваке две врсте имамо по један мали квадратић, тако да ће збир

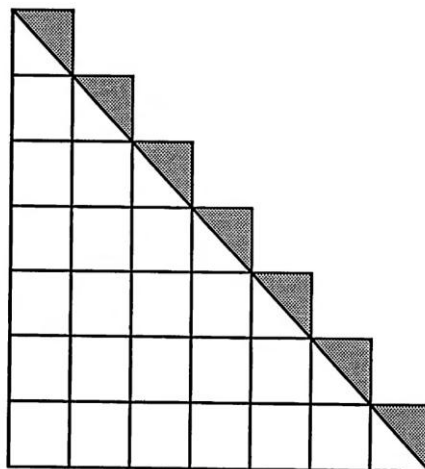
$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

бити једнак:

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Изведимо сада формулу за збир првих n чланова неког аритметичког низа, то јест израчунајмо вредност израза S_n , где је:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$



Формално записано, збир првих n чланова неког низа дефинише се рекурзивно:

$$1) S_1 = a_1;$$

$$2) S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Користећи се формулом за општи члан аритметичког низа налазимо:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$= na_1 + d + 2d + \dots + (n-1)d$$

$$= na_1 + (1 + 2 + \dots + (n-1))d.$$

Међутим, на основу већ доказаног тврђења $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ важиће и:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Када то заменимо у једнакост $S_n = na_1 + (1 + 2 + \dots + (n-1))d$ добијамо:

$$S_n = na_1 + (1 + 2 + \dots + (n-1))d$$

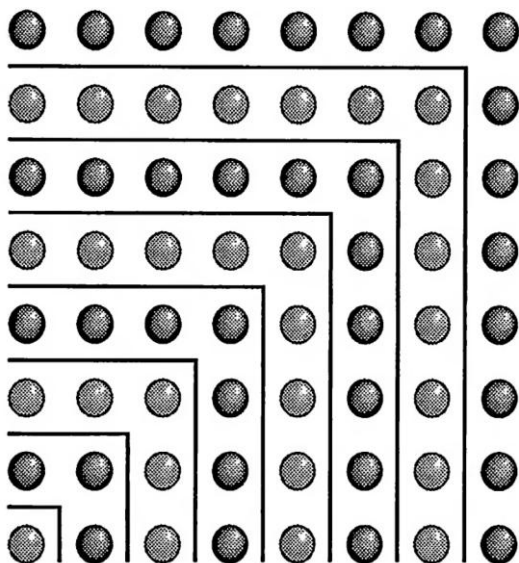
$$= na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d$$

односно:

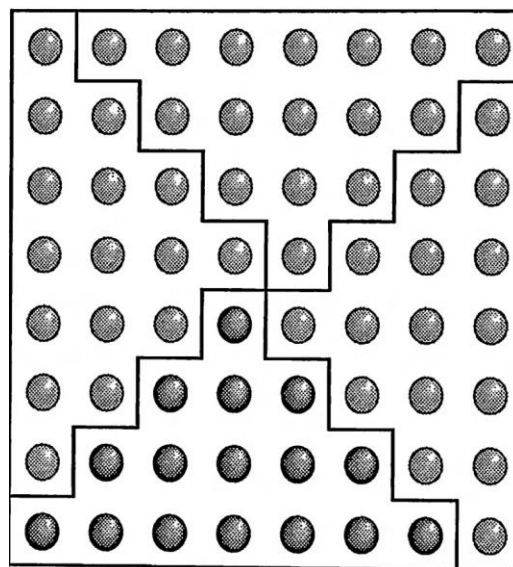
$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Навешћемо сада, без додатних објашњења, још неке графичке илустрације за добијање општих формула за збир првих n чланова различитих аритметичких низова.

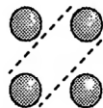
Ови прикази су веома zgodни како би млађа деца (првенствено деца из основних школа), а понекад и старији ђаци могли лакше да упамте све ове формуле:



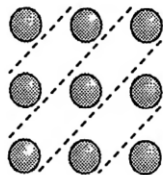
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$



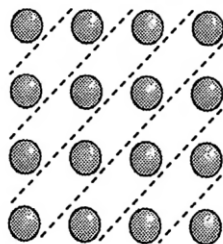
$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{1}{2}(2n)^2 = n^2$$



$$1 + 2 + 1 = 2^2$$



$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$



$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n^2$$

Прелазимо сада на доказивање две основне формуле у вези са геометријским низом:

За геометријски низ у општем случају важи: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($n = 1, 2, \dots$). Полазећи од ове једнакости, није тешко приметити да ће важити:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \frac{a_3}{a_2} = q \dots = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Ако помножимо ове једнакости добићемо:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = q^{n-1},$$

то јест:

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1},$$

односно:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

што представља формулу за израчунавање општег члана геометријског низа ако нам је познат први члан тог низа и количник низа.

Изведимо сада формулу за збир првих n чланова геометријског низа. Како је:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Обзиром на формулу за општи члан геометријског низа $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ добићемо:

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1},$$

па ако обе стране помножимо са q биће:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \dots a_1q^n.$$

Ако сада од једнакости $S_n = a_1 + a_1q + \dots a_1q^{n-1}$ одузмемо $qS_n = a_1q + a_1q^2 + \dots a_1q^n$ биће:

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

Према томе, за $q \neq 1$ (јер је за $q=1$ низ константан) добијамо:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

4.6. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

Крајем треће године средње школе ученици се упознају са појмовима као што су ограничен низ, монотон низ, конвергентан низ, тачка нагомилавања итд. Концепција обрађивања ове теме је таква да је акценат стављен на израчунавању лимеса без превише теоретисања. То је из разлога јер је, по мом мишљењу, теоријска подлога ове области доста сложена и тешка за савладавање просечном осамнаестогодишњаку. Ни овде нећемо доказивати пуно теорема из ове области, већ ћемо на неколико основних показати како се доказују кључна тврђења из области конвергентних низова.

Описно говорећи, један од централних проблема који се поставља за низ $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (a_n)$ јесте питање шта се дешава са општим чланом a_n када n постаје све веће и веће (или, како се каже, када n неограничено расте).

Погледајмо један низ:

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right).$$

Јасно је да што је n већи природни број, општи члан овог низа $a_n = \frac{1}{n}$ постаје све мањи, и обзиром да је $(a_n) = \frac{1}{n} > 0$, све се више приближава броју 0. Наравно, ни за један природан број n израз $\frac{1}{n}$ неће бити једнако 0. Са друге стране, узимајући

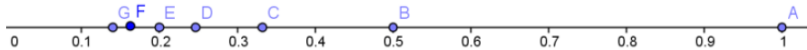
довољно велико n , можемо учинити да се $a_n = \frac{1}{n}$ разликује од 0 за онолико мало колико ми то желимо. Рецимо, ако хоћемо да се a_n разликује од 0 за мање од 0,001, довољно је узети да је $n > 1000$. Јасно је да a_n за довољно велико n може прићи нули још ближе.

Дакле, иако $\frac{1}{n}$ никад није 0, што је n веће и већи, a_n је све ближе и ближе броју

0. Због тога кажемо да је 0 гранична вредност (лимес) низа a_n и пишемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Хајде да видимо како се на геометријски начин може интерпретирати ово о чему смо до сада причали. Ако чланове овог низа: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ прикажемо на бројевној правој, видимо да се чланови тог низа нагомилавају око тачке 0. Штавише, ако око тачке 0 опишемо неки интервал ма колико мале дужине, видимо да ће само коначно много чланова низа лежати изван тог интервала, док ће сви остали чланови тог низа (њих бесконачно много) бити унутар интервала. То се каже и овако: скоро сви чланови низа налазе се у околини тачке 0.



Погледајмо на слици, ако су тачке $A, B, C, D, E, F, G \dots$ редом чланови нашег низа. Видимо да се, како се индекс низа повећава, тако су и те тачке све ближе нули, и оне ће се бесконачно приближавати тачки нула али никада ниједна тачка неће бити баш 0.

Дефинишимо сада и формално граничну вредност низа:

Дефиниција 1: Реалан број a је гранична вредност низа (a_n) ако се у произвољној ε -околини броја a налазе скоро сви чланови низа (a_n) . Ако такав број a постоји, онда се каже да је низ (a_n) конвергентан и да конвергира ка a , и пише се:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Пример 1: Доказати да је:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Решење:

На основу дефиниције граничне вредности, треба доказати да се само коначан број чланова низа $a_n = \frac{n+1}{n} = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\right)$ налази изван ε околине броја 1, тј. изван интервала $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, где је ε произвољан позитиван број.

Приметимо прво да лево од броја $1-\varepsilon$ нема чланова низа. Остаје, дакле, да видимо да ли има чланова низа десно од броја $1+\varepsilon$, то јест, остаје да се реши неједначина $\frac{n+1}{n} > 1+\varepsilon$. Ова неједначина је еквивалентна са:

$$\frac{n+1}{n} - 1 > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \varepsilon \text{ или } n < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Стога закључујемо да су само они чланови низа за које је $n < \frac{1}{\varepsilon}$ изван ε околине броја 1. Како је $\frac{1}{\varepsilon}$ одређен позитиван број, њих је само коначно много. Према томе

доказали смо да важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Ми смо граничну вредност низа дефинисали помоћу појмова околина и скоро сви. Сада ћемо исказати једну мало другачију дефиницију која је најпознатија дефиниција граничне вредности низа и најчешће се среће у таквом облику. Фиксирајмо позитиван број ε и испитајмо прво шта значи да се скоро сви чланови низа (a_n) налазе у ε -околини броја a . Ако скоро сви чланови низа (a_n) припадају ε -околини броја a , то значи да само њих коначно много не мора да припада тој околини. Нека су то чланови: $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$, где је n_0 фиксиран природни број. Како сви остали чланови низа (a_n) припадају ε -околини броја a , имамо:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \quad \text{за свако } n > n_0,$$

то јест:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon, \quad \text{за свако } n > n_0,$$

или:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{за свако } n > n_0, .$$

Из овога проистиче дефиниција:

Дефиниција 2: Низ (a_n) конвергира ка броју a (a је гранична вредност низа (a_n)) ако за сваки позитиван број ε , постоји природан број n_0 такав да је $|a_n - a| < \varepsilon$ за свако $n > n_0$. Математички записано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Уведимо сада још један појам за низове. Кажемо да је низ (a_n) ограничен ако постоји позитиван број K такав да је:

$$|a_n| < K \quad \text{за свако } n = 1, 2, \dots$$

Сада ћемо доказати неколико важних својстава конвергентних низова:

Теорема 1: Конвергентан низ је ограничен. Обрнута тврдња не мора да важи.

Доказ:

Нека је (a_n) конвергентан низ и нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Тада за $\varepsilon = 1$ постоји природан број n_0 такав да је:

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{за } n > n_0.$$

Из ове једнакости следи:

$$a - 1 < a_n < a + 1 \quad \text{за } n > n_0,$$

па, тим пре,

$$a_n < |a| + 1 \quad \text{за } n > n_0.$$

Нека је $M = \max\{|a| + 1, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|\}$. Тада је, очигледно,

$$|a_n| < M,$$

за свако $n \in \mathbf{N}$, што значи да је низ (a_n) ограничен.

Обрнута тврдња не важи. На пример, низ $(b_n) = (-1)^n$ јесте ограничен али није конвергентан. □

Теорема 2: Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ и нека је $a_n \leq b_n$ ($n \in \mathbf{N}$). Тада је $a \leq b$.

Доказ:

Претпоставимо супротно. Нека је $b < a$ и ставимо $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$. тада постоје природни бројеви n_1 и n_2 такви да је $|a_n - a| < \varepsilon$ за $n > n_1$ и $|b_n - a| < \varepsilon$ за $n > n_2$. Специјално, имамо:

$$a - \varepsilon < a_n \quad (\text{за } n > n_1) \quad \text{и} \quad b_n < b + \varepsilon \quad (\text{за } n > n_2).$$

Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада је:

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{1}{2}(a - b) = a - \frac{1}{2}(a - b) = a - \varepsilon < a_n,$$

за свако $n > n_0$, што је у супротности са претпоставком $a_n \leq b_n$. Дакле, неће важити ни $b < a$, па је $a \leq b$. □

Ако за низ (a_n) важи:

$$a_n < a_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

каже се да је низ (a_n) растући. Низ за који важи:

$$a_{n+1} < a_n \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

назива се опадајући низ.

Једним именом, овакви низови се називају монотони.

Теорема 3: Ако је низ (a_n) ограничен и монотон, онда је он и конвергентан.

Доказ:

Не умањујући општост, претпоставићемо да је низ (a_n) ограничен и растући. То значи да постоји број K такав да је $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < K$, то јест, за свако $n \in \mathbf{N}$ важи:

$$a_n < a_{n+1}, \quad a_n < K.$$

Тада обавезно постоји број $a \leq K$ такав да се у произвољној ε -околини броја a налазе скоро сви чланови низа (a_n) . Другим речима, постоји број $a \leq K$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Наиме, десно од броја K нема чланова низа (a_n) , јер су сви мањи од K . Могу да постоје и разни други бројеви, мањи од K (рецимо број K_1) са истом особином. Нека је a најмањи такав број, то јест најмањи број такав да десно од њега нема чланова низа (a_n) . Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Заиста, ако је $\varepsilon > 0$, тада у интервалу $(a - \varepsilon, a)$ мора да буде неки члан a_{n_0} низа (a_n) јер када се у том интервалу не би налазио ниједан члан тог низа, онда a не би био најмањи број десно од којег нема чланова низа (a_n) . Наиме, $a - \varepsilon$ био би број са тим истим својством али који је мањи од a . Међутим, како је низ (a_n) растући, онда и $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ такође припадају интервалу $(a - \varepsilon, a)$. Дакле, скоро сви чланови низа (a_n) налазе се у ε околини броја a .

□

Ово није баш регуларан доказ, већ више врста убеђивања, али за овај стадијум учења математике је сасвим довољан.

4.7. БРОЈ e

Нека је низ (x_n) дефинисан са:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Заједно са низом (x_n) посматрајмо и низ (y_n) , где је:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \quad (n > 1).$$

Ако у Бернулијеву неједнакост: $(1+h)^n \geq 1+nh$,

која важи за $h > -1$ и $n \in \mathbf{N}$, ставимо $h = -n^{-2}$ ($n > 1$), добијамо:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Када применимо формулу за разлику квадрата, ова неједнакост постаје:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n},$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Овим смо доказали да је $x_n > x_{n-1}$, то јест да је низ (x_n) растући.

Ако сада у Бернулијеву неједнакост ставимо $h = \frac{1}{n^2-1}$ ($n > 1$), добијамо:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$$

јер је $\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}$, што није тешко проверити. Међутим, $1 + \frac{1}{n^2-1} = \frac{n^2}{n^2-1}$, па претходна неједнакост постаје:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n+1}{n},$$

одакле излази:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

или:

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

па смо доказали да за низ (y_n) важи $y_n > y_{n+1}$, односно да је тај низ опадајући.

Осим тога, непосредно се проверава да за $n > 1$ важи:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = y_n.$$

Према томе:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < y_n < \dots < y_2.$$

Одатле следи да је за свако $n = 1, 2, \dots$

$$0 < x_n < y_2 = 4,$$

па је низ (x_n) растући и ограничен, односно постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Та гранична вредност

дефинише се као број e . Дакле: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

4.8. ГЕОМЕТРИЈСКИ РЕД

Нека S_n означава збир првих n чланова геометријског низа чији је први члан 1 и количник q , то јест низа:

$$(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots)$$

Доказали смо једнакост:

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{за } q \neq 1,$$

која се може представити у облику:

$$S_n = \frac{1}{1-q} (1-q^n) \quad (q \neq 1).$$

Оваква једнакост дефинише један нов низ $(S_n) = (S_1, S_2, \dots, S_n, \dots)$. Ако је $|q| < 1$ може се израчунати гранична вредност низа (S_n) дефинисаног на наведен начин. Заиста, имамо да ће важити:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} (1-q^n) = \frac{1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{1}{1-q}.$$

Ако другачије запишемо ову једнакост:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

можемо увидети да што више чланова низа саберемо, све смо ближи броју $\frac{1}{1-q}$.

На основу тога, уводи се следећа дефиниција:

Дефиниција 1: Ако је $|q| < 1$, збир свих чланова бесконачног геометријског низа $(1, q, q^2, \dots, q^n, \dots)$ једнак је $\frac{1}{1-q}$. То се записује овако:

$$1+q+q^2+\dots+q^n+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Израз на левој страни једнакости назива се геометријски ред.

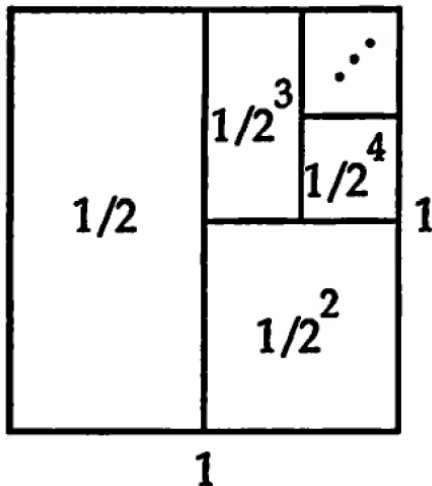
Пример 1: Доказати да је: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$.

Решење:

Применом формуле $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ($|q| < 1$) имамо да је: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Ево и једног графичког доказа ове тврдње:

Како је $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$, то значи да је $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$. Погледајмо слику:



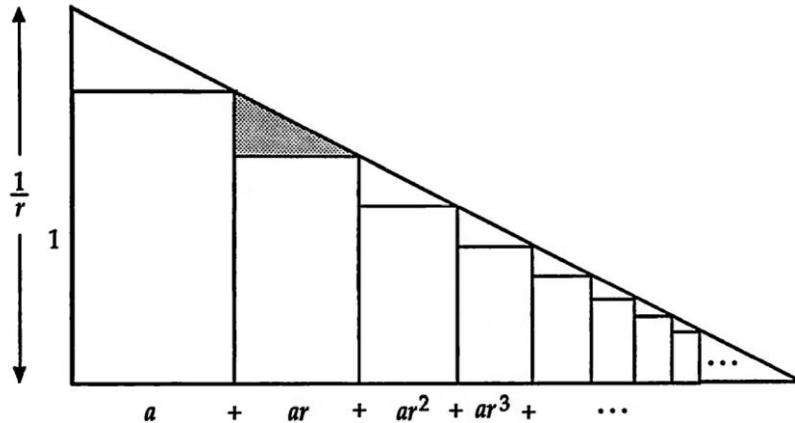
Ако квадрат странице 1 поделимо прво на два правоугаоника страница 1 и $\frac{1}{2}$. Затим један од та два правоугаоника поделимо на два квадрата странице $\frac{1}{2}$. Па један од тих квадрата поделимо на два правоугаоника страница $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ и овај поступак понављамо бесконачно много пута. Јасно је да је површина читавог квадрата једнака 1, а она се може представити и као збир површина правоугаоника и квадрата

који га сачињавају, односно: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$.

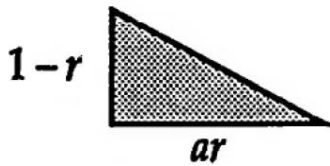
До сада смо посматрали геометријски низ чији је први члан 1. Међутим, једноставно се доказује да је у општем случају:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Погледаћемо сада још једну слику која ће нам помоћи да на геометријски начин дођемо до ове формуле:



Узмимо правоугли троугао чије су катете $a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$ и $\frac{1}{r}$. Поделимо ли овај троугао као на слици, добићемо бесконачно много троуглића који су слични полазном троуглу. Уочимо сада осенчени троугао.



Његове катете су $1-r$ и ar . Ако сада применимо својство сличности троуглова на тај троугао и велики, полазни, троугао имаћемо да важи:

$$\frac{\frac{1}{r}}{a + ar + ar^2 + \dots} = \frac{1-r}{ar}.$$

Одавде произилази:

$$(1-r) \cdot (a + ar + ar^2 + \dots) = \frac{ar}{r},$$

односно:

$$(a + ar + ar^2 + \dots) = \frac{a}{1-r}.$$

Записано уз употребу симбола за суму, то је:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}.$$

4.9. АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

У овом одељку ћемо показати на неколико примера како изгледају најважније алгебарске структуре, односно како се за неки бројевни скуп проверава да ли припада некој алгебарској структури и којој.

Дефиниција 1: Нека је дат непразан скуп S . Ако се сваком уређеном пару (x, y) елемената из S додељује тачно један елемент z скупа S , онда се каже да је на скупу S дефинисана бинарна операција.

Често се пише и $z = x * y$ и каже да је на скупу S дефинисана операција.

Разликоваћемо алгебарске структуре са једном и две операције. Нека је дат скуп S и операција $*$ дефинисана на том скупу. Тада важи:

- 1) ако је операција $*$ бинарна, онда је $(S, *)$ **групоид**;
- 2) ако је у групоиду $(S, *)$ операција $*$ асоцијативна, онда је $(S, *)$ **семигрупа**;
- 3) ако у семигрупи $(S, *)$ постоји неки елемент $e \in S$ (неутрал) такав да за свако $x \in S$ важи $x * e = e * x = x$, структура $(S, *)$ је **моноид**;
- 4) ако у моноиду $(S, *)$ за сваки елемент $x \in S$ постоји неки елемент $x^{-1} \in S$ (инверз) такав да важи $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, онда је $(S, *)$ **група**;
- 5) ако је у групи $(S, *)$ операција $*$ комутативна, онда је то **комутативна (Абелова⁸) група**.

Пример 1: Испитати да ли је $(\mathbf{N}, +)$ нека алгебарска структура и ако јесте која је?

Решење:

Кренимо редом, треба прво испитати да ли је операција $+$ бинарна у скупу природних бројева. Другим речима, да ли ће збир свака два природна броја бити такође природан број. Одговор је потврдан, тако да је први услов испуњен. Проверавамо даље, да ли је у скупу природних бројева операција сабирања асоцијативна. Од раније нам је познато да је и ова особина испуњена. Сада проверавамо да ли постоји неутрал, односно да ли постоји неки природан број e такав да важи: $x + e = e + x = x$ за сваки природан број x . Видимо да би овај услов испунио број 0, али као што знамо то није природан број, стога закључујемо да у нашем скупу не постоји неутрални елемент. Стога је структура $(\mathbf{N}, +)$ семигрупа.

Пример 2: Испитати да ли је $(\mathbf{Z}, +)$ нека алгебарска структура и ако јесте која је?

Решење:

Очигледно да прве две особине важе и за структуру $(\mathbf{Z}, +)$. Погледајмо да ли у овој структури постоји инверзни елемент, односно да ли постоји неки цео број e такав да је $x + e = e + x = x$. Постоји, и у питању је број нула. Што се тиче четврте особине, занима нас да ли за сваки елемент x постоји њему одговарајући x^{-1} такав да је $x + x^{-1} = e = 0$. Очигледно је да такав елемент постоји и да је $x^{-1} = -x$.

⁸ Нилс Хенрик Абел (нор. Niels Abel, 1802-1829)-норвешки математичар

Комутативност у скупу целих бројева важи, па закључујемо да је структура $(\mathbf{Z}, +)$ Абелова група.

Пример 3: Испитати да ли је $(\mathbf{Z}, \cdot)$ нека алгебарска структура и ако јесте која је?

Решење:

Множењем два цела броја увек као резултат добијамо цео број, па је операција множења бинарна на скупу целих бројева. Асоцијативност код множења је очигледна. Сада проверавамо да ли постоји неутрал, односно да ли постоји неки цео број e такав да важи: $x \cdot e = e \cdot x = x$ за сваки цео број x . Јасно је да такав број постоји и да је $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ тј. да је $e = 1$. Проверавамо сада постојање инверза, да ли за сваки цео број x постоји њему инверзни цео број x^{-1} такав да је $x \cdot x^{-1} = e = 1$. Видимо да ће то бити број $x^{-1} = \frac{1}{x}$, али $\frac{1}{x}$ готово никад није цео број (осим за $x = \pm 1$), тако да не постоји инверзни елемент за сваки цео број па закључујемо да је структура $(\mathbf{Z}, \cdot)$ моноид.

Пример 4: Испитати да ли је $(\mathbf{R}, \cdot)$ нека алгебарска структура и ако јесте која је?

Решење:

Није тешко показати да ће ова структура бити група јер важе све потребне особине. Међутим, овде се веома често јавља један превид. Наиме, код проверавања да ли постоји инверзан елемент, кажемо да за сваки реалан број мора постојати његов инверз. И то важи за све реалне бројеве изузев за број нула. заиста, како је: $0 \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot 0 = 0$, видимо да ниједан број помножен са нулом не може дати јединицу. Дакле, структура $(\mathbf{R}, \cdot)$ није група већ “само” моноид. Уколико желимо да од $(\mathbf{R}, \cdot)$ направимо групу, можемо посматрати следећу структуру $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, и онда ће то заиста бити група.

Теорема 1: У групи важи “закон скраћивања”, то јест, из једнакости $x * y = x * z$ следи $y = z$.

Доказ:

Из $x * y = x * z$ имамо да је:

$$x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z),$$

где је x^{-1} инверзан елемент елемента x . Ако сада искористимо закон асоцијативности који важи у групи, претходна једнакост ће бити једнака:

$$(x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z.$$

Будући да је $x^{-1} * x = e$ (e је неутрал у тој групи), имаћемо да је:

$$e * y = e * z,$$

односно:

$$y = z.$$

□

Прелазимо сада на алгебарске структуре са две операције:

Нека је S непразан скуп и нека су $*$ и $\circ$ бинарне операције тог скупа. Структура $(S, *, \circ)$ која има својства:

- 1) $(S, *)$ је Абелова група;
- 2) $(S, \circ)$ је семигрупа;
- 3) за свако $x, y, z \in S$ важе једнакости:

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), \quad (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$$

назива се **прстен**.

Теорема 2: Нека је неутрал групе $(S, *)$ означен са e и нека x^{-1} означава елемент инверзан елементу x . Тада у прстену $(S, *, \circ)$ важе следећи закони:

- 1) $x \circ e = e \circ x = x$;
- 2) $x^{-1} \circ y = x \circ y^{-1} = (x \circ y)^{-1}$;
- 3) $x^{-1} \circ y^{-1} = x \circ y$.

Доказ:

- 1) Имамо:

$$x \circ e = x \circ (e * e) = (x \circ e) * (x \circ e),$$

а такође

$$x \circ e = (x \circ e) * e,$$

и користећи се законом скраћивања који важи у групи $(S, *)$, то јест после “скраћивања” са $x \circ e$, добија се:

$$x \circ e = e.$$

Слично се доказује и једнакост $e \circ x = x$.

- 2) Имамо:

$$(x^{-1} \circ y) * (x \circ y) = (x^{-1} * x) \circ y = e \circ y = y,$$

што значи да је $x^{-1} \circ y$ супротан елемент елементу $x \circ y$, то јест:

$$x^{-1} \circ y = (x \circ y)^{-1}.$$

Слично се доказује и једнакост $x \circ y^{-1} = (x \circ y)^{-1}$

- 3) Имамо:

$$x^{-1} \circ y^{-1} = (x \circ y^{-1})^{-1} = ((x \circ y)^{-1})^{-1} = x \circ y.$$

□

Врло слично појму прстена дефинишемо још једну алгебарску структуру:

Нека је S непразан скуп и нека су $*$ и $\circ$ бинарне операције тог скупа. Структура $(S, *, \circ)$ која има својства:

- 1) $(S, *)$ је Абелова група;
- 2) $(S', \circ)$ је Абелова група, где је $S' = S \setminus \{e\}$, а са e је означен неутрални елемент групе $(S, \circ)$;
- 3) за свако $x, y, z \in S$ важе једнакости:

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), \quad (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$$

назива се **поље**.

4.10. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Постоји више начина да се комплексни бројеви запишу. Са једним од начина се ученици упознају у другој години када се дефинише $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$). Други начин записа је помоћу уређеног пара, где се броју $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$) додељује уређени пар (a, b) и преко тог записа се уводе и све операције са комплексним бројевима. Погледајмо и како:

Нека су $z = (a, b)$ и $w = (c, d)$ произвољни комплексни бројеви. Тада је:

- 1) сабирање: $z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, а ево и зашто:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d);$$

- 2) множење: $z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, јер је:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc);$$

За сам почетак докажимо једну теорему која је у директној вези са претходном темом:

Теорема 1: Структура $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ је поље.

Доказ:

Потребно је доказати следеће ставке:

- 1) Структура $(\mathbf{C}, +)$ је Абелова група;
 - 2) Структура $(\mathbf{C}', \cdot)$ је комутативна група, где је $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \setminus \{(0, 0)\}$;
 - 3) важи дистрибутивност множења према сабирању..
1. Проверавамо да ли је $(\mathbf{C}, +)$ комутативна група:
- 1.1. Бинарност очигледност важи јер је збир ма која два комплексна броја такође комплексан број
 - 1.2. Асоцијативност важи што се доказује непосредном провером;
 - 1.3. Неутрал је број $(0, 0)$. Заиста, за сваки комплексан број $z = (a, b)$ важи следеће: $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b) = z$;
 - 1.4. Сваки комплексан број $z = (a, b)$ има инверз, и он је једнак $(-a, -b)$. Заиста, важиће: $(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0) = e$;
 - 1.5. Комутативност важи и то се проверава непосредно рачунски: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) = (a + c, b + d)$.
2. Проверавамо да ли је $(\mathbf{C}', \cdot)$ комутативна група:
- 2.1. Бинарност очито важи, јер производ два комплексна броја мора бити такође комплексан број.
 - 2.2. Асоцијативност важи јер је: $(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) = ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f)$, што се опет лако рачунски проверава.
 - 2.3. Тражимо неутрал: треба нам неки број e тако да за сваки комплексан број z важи $z \cdot e = z$. Ако је $z = (a, b)$, биће: $(a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$ што је даље еквивалентно са $(ax - by, ay + bx) = (a, b)$, одакле се даље добија да је $ax - by = a$ и $ay + bx = b \Leftrightarrow a(x - 1) - by = 0$ и $ay + b(x - 1) = 0$, па је онда

$ay + b\frac{by}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2y + b^2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ па је $b(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$, јер су a и b различити од нуле (услов). Дакле, добили смо да је $e = (1, 0)$ неутрал структуре $(\mathbb{C}', \cdot)$.

2.4. Сада тражимо инверз, односно број $z^{-1} = (x, y)$ такав да за свако $z = (a, b)$ важи: $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$ што је даље еквивалентно са

$(ax - by, ay + bx) = (1, 0)$ па је: $ax - by = 1$ и $ay + bx = 0 \Rightarrow y = \frac{-bx}{a}$ па ако то

заменимо у прву једначину добијамо: $ax - b\left(\frac{-bx}{a}\right) = 1 \Leftrightarrow ax + \frac{b^2x}{a} = 1$, а то

је даље $a^2x + b^2x = a$ па ће важити и: $a^2x + b^2x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2}$ односно

$y = \frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$. Како су ова два броја увек дефинисала (јер смо тачку $(0, 0)$ у којој нису дефинисани искључили), добијамо да је:

$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ што значи да постоји инверзан елемент.

2.5. Комутативност је очигледна, јер се јасно уочава да важи: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, da + cb)$

3. Дистрибутивност се, такође, проверава директно рачунски:

$$(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c + e, d + f) = (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)$$

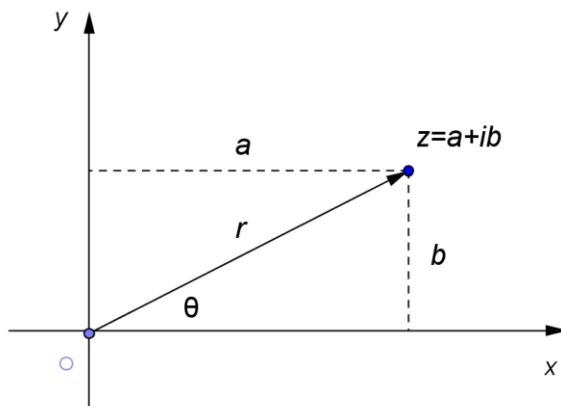
$$((a, b) \cdot (c, d)) + ((a, b) \cdot (e, f)) = (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be)$$

Овим је доказ теореме завршен.

□

Поред два већ виђена начина, комплексни бројеви имају и свој тригонометријски облик. Упознаћемо се сада са њим:

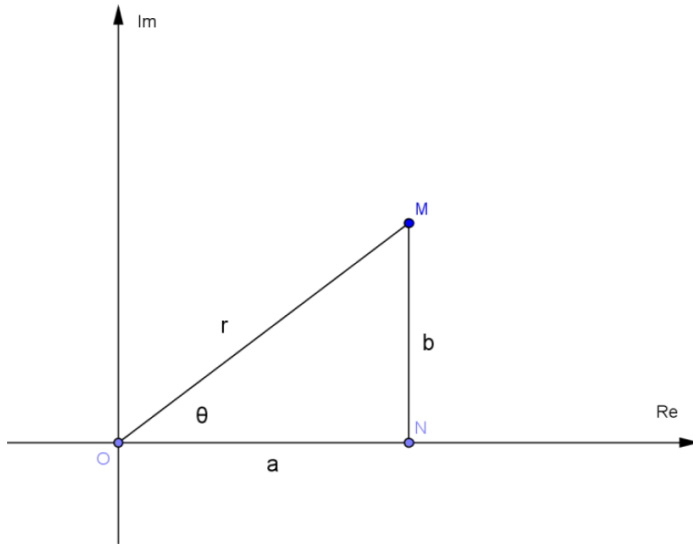
Већ смо видели да се сваки комплексан број може представити преко уређеног пара (a, b) . Ако том уређеном пару доделимо одговарајућу тачку у Декартовом координатном систему, добијамо да свака тачка тог система представља један комплексан број.



Можемо приметити следеће: растојање комплексног броја од координатног почетка може се израчунати применом Питагорине теореме на правоугли троугао чије су катете a и b а хипотенуза је управо број r . Када то израчунамо, видећемо да то растојање заправо представља модуо комплексног броја. Дакле, важи:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Прелазимо сада на одређивање тригонометријског облика комплексног броја:



Нека је комплексан број $z = a + ib \neq 0$ представљен у комплексној равни тачком M , и нека је тачка N подножје нормале из M на x -осу. Као што је познато:

$$ON = a, \quad MN = b.$$

Означимо растојање између тачке O и тачке M са r , а угао између x -осе и праве OM мерен у позитивном смеру (тј. у смеру супротним смеру казаљке на сату) са θ .

Тада из правоуглог троугла ONM можемо закључити да важе једнакости:

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{и} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

односно:

$$a = r \cos \theta \quad \text{и} \quad b = r \sin \theta.$$

То значи да се комплексан број $z = a + ib \neq 0$ може представити у облику:

$$z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

то јест:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Овакав облик записивања комплексног броја је познат као тригонометријски облик комплексног броја.

Бројеви a, b, r, θ везани су релацијама $a = r \cos \theta$ и $b = r \sin \theta$. Из тих релација се након квадрирања и сабирања добија:

$$a^2 + b^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2,$$

па је:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Дефиниција 1: Позитиван број r дефинисан са $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ се зове модуо комплексног броја z и означава се са $|z|$.

Са друге стране, број θ није једнозначно одређен једнакостима $a = r \cos \theta$ и $b = r \sin \theta$. Заиста, ако неки фиксиран број θ задовољава релације $a = r \cos \theta$ и $b = r \sin \theta$, тада и сваки од бројева $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), такође задовољава поменуту релацију.

Било који реалан број θ за који важи $a = r \cos \theta$ и $b = r \sin \theta$ назива се аргумент комплексног броја z и означава се са $\theta = \text{Arg } z$. Према томе, $\text{Arg } z$ није ознака за један одређен број, већ за један из скупа бројева који се међусобно разликују за

целобројне умношке броја 2π . Специјално, број θ који поред услова $a = r \cos \theta$ и $b = r \sin \theta$, испуњава и $-\pi < \theta \leq \pi$ назива се главни аргумент броја z и означава се са $\arg z$.

Теорема 2: Два комплексна броја z_1 и z_2 су једнаки ако и само ако је $|z_1| = |z_2|$ и ако постоји цео број k такав да је $\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$.

Доказ:

Нека је $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Ако је $r_1 = r_2$ то јест: $|z_1| = |z_2|$, и ако постоји $k \in \mathbb{Z}$ тако да је $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, односно $\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$, тада је очигледно $z_1 = z_2$.

Обрнуто, из једнакости:

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

проишљази:

$$r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 \quad \text{и} \quad r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2. \quad (1)$$

После квадрирања и сабирања ових једнакости добијамо:

$$r_1^2 = r_2^2,$$

па с обзиром да је $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ имамо:

$$r_1 = r_2.$$

Међутим, тада једнакости (1) постају:

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 \quad \text{и} \quad \sin \theta_1 = \sin \theta_2,$$

одакле излази да постоји цео број k такав да је $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, односно $\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$, а то смо и желели да покажемо.

4.11. МОАВРОВА ФОРМУЛА; КОРЕНОВАЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

Као што смо већ видели, ако је $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, тада је:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Слично, за три комплексна броја $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ и $z_3 = a_3 + ib_3$ имамо:

$$z_1 + z_2 + z_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + i(b_1 + b_2 + b_3).$$

Настављајући овај поступак, закључујемо да за n бројева $z_k = a_k + ib_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) важи формула:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

Дакле, збир комплексних бројева једноставно се изражава помоћу збирова његових реалних и имагинарних делова.

Са производом ствар стоји друкчије. Наиме, за два броја $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, као што смо већ видели важи:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

За три броја $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ и $z_3 = a_3 + ib_3$ после краћег рачуна добијамо формулу:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3) + i(a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3).$$

Јасно је да ће се ова формула компликовати све више, тако да за производ n комплексних бројева тешко можемо да напишемо општу формулу као што смо учинили када је у питању био збир n комплексних бројева.

Ако бисмо, пак, комплексне бројеве посматрали у тригонометријском облику, ситуација ће се променити.

Нека су $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ два комплексна броја. За њихов производ добијамо:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)) \end{aligned}$$

па на основу адиционих теорема за синус и косинус закључујемо да је:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Дакле, производ два комплексна броја добија се на тај начин што се њихови модули помноже а аргументи саберу.

Узмимо сада три комплексна броја $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ и $z_3 = r_3(\cos \theta_3 + i \sin \theta_3)$. Користећи се управо изведеном формулом добијамо:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= (z_1 z_2) z_3 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \cdot r_3 (\cos \theta_3 + i \sin \theta_3) = \\ &= r_1 r_2 r_3 ((\cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_3 - \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_3) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_3 + \sin \theta_3 \cos(\theta_1 + \theta_2))) \\ &= r_1 r_2 r_3 (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) \end{aligned}$$

Настављајући овај поступак, видимо да за очекивати да за n комплексних бројева $z_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) важи:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))$$

Другим речима, производ бројева $z_1, z_2, \dots, z_n$ добија се на тај начин што се модули помноже а аргументи саберу.

У специјалном случају када су бројеви $z_1, z_2, \dots, z_n$ међусобно једнаки, односно када важи $z_1 = z_2 = \dots = z_n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ из претходног закључка непосредно следи:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad n \in \mathbf{N}$$

Ова формула позната је као Моаврова⁹ формула.

Свакоме ко се бави матеамтиком јасно је да ово што смо управо извели не може да се сматра доказом Моаврове формуле, већ смо се послужили начином закључивања који је познат под именом емпиријска индукција. Да бисмо заиста доказали важење ове формуле морали бисмо у помоћ да позовемо математичку индукцију и њом да докажемо да назначена формула заиста важи за све природне бројеве. Хајде да то урадимо:

Формула $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ може да се запише у еквивалентном облику који ће нам бити подеснији за оно што желимо да докажемо:

$$(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (1)$$

⁹ Абрам де Моавр (фр. Abraham de Moivre 1667-1754) – француски математичар

Ова формула је тачна за $n=1$ јер се своди на очигледну једнакост:

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Претпоставимо да је формула (1) тачна за неко $n \in \mathbf{N}$. Тада, после множења ове стране са $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ добијамо:

$$\begin{aligned} (r(\cos \theta + i \sin \theta))^{n+1} &= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r^{n+1} (\cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta + i(\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta)) \\ &= r^{n+1} (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta) \end{aligned}$$

Дакле, на основу принципа математичке индукције, формула (1) је тачна за све природне бројеве n .

Извешћемо сада и формулу за количник комплексних бројева у тригонометријском облику. На првом месту приметимо да је:

$$\frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Стога, ако је $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, $r_2 > 0$, добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

Дакле, количник $\frac{z_1}{z_2}$ комплексних бројева добија се на тај начин што се модули поделе а аргументи одузму.

Размотрићемо сада на који је начин могуће кореновати комплексне бројеве. Нека је n дати природан број и a дати комплексан број различит од нуле, представљен у тригонометријском облику $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. На скупу $\mathbf{C}$ решавамо једначину по z :

$$z^n = a.$$

Ако је $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, тада на основу Моаврове формуле наша једначина постаје:

$$R^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Користећи се правилом о једнакости комплексних бројева у тригонометријском облику, имаћемо да важи:

$$R^n = r \quad \text{и} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

одакле излази:

$$R = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Стога закључујемо да је сваки од бројева z_k , где је:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

решење једначине $z^n = a$.

Будући да је k произвољан цео број, рекло би се на први поглед да једначина $z^n = a$ има бесконачно много решења. То, међутим, није случај. Заиста, обзиром да нам је познато да важи: $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$, $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ имаћемо да је:

$$\begin{aligned} z_{k+n} &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi \right) \right) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = z_k \end{aligned}$$

то јест:

$$z_{k+n} = z_k.$$

Ако уместо k у ову формулу ставимо $k+n$ добијамо $z_{k+2n} = z_{k+n}$ што заједно са $z_{k+n} = z_k$ даје $z_{k+2n} = z_k$. Настављајући овај поступак видимо да за сваки цео број k важи:

$$z_{k+sn} = z_k,$$

где је s произвољан цео број..

Према томе, уместо свих бројева z_k , $k \in \mathbf{Z}$, довољно је узети само следећих n бројева $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ јер се остали бројеви, касније, понављају (дуплирају се већ постојећа решења).

Дакле, показали смо да важи следеће: ако је $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, тада једначина $z^n = a$ има тачно n решења датих са:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Сва та решења су међусобно различити бројеви али то нећемо доказивати.

4.12. ПОЛИНОМИ НАД ПОЉЕМ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

За комплексне бројеве важи следеће тврђење познато као основна теорема алгебре:

Теорема 1: Сваки полином P над пољем комплексних бројева има бар једну нулу.

Другим речима, било која једначина по z :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

где су $a_0, a_1, \dots, a_n$ дати комплексни бројеви, има у скупу $\mathbf{C}$ бар једно решење.

Важно је приметити да ова теорема не важи у скупу реалних бројева. Најочигледнији пример је полином $x^2 + 1 = 0$ за који је познато да нема ниједну реалну нулу. Међутим, у скупу комплексних бројева, тај полином има нуле и оне су $i, -i$.

Основну теорему алгебре нећемо доказивати јер је то претешко за средњошколце, већ је узимамо аксиоматски и користимо је при доказивању неких других чињеница.

Последица основне теореме алгебре: Сваки полином:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

може се на **јединствен** начин написати у облику:

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n).$$

Доказ:

Ова последица ће неке бити очигледна. Наиме, из основне теореме алгебре знамо да полином P у скупу $\mathbb{C}$ има бар једну нулу. Нека је то α_1 . Тада се, као што знамо, полином P може приказати у облику:

$$P(z) = (z - \alpha_1)S_1(z)$$

где је $\deg S_1 = n - 1$, а најстарији коефицијент полинома S_1 је a_n .

Даље, према основној теореди алгебре и полином S_1 има у скупу $\mathbb{C}$ бар једну нулу α_2 , па се S_1 може приказати у облику:

$$S_1(z) = (z - \alpha_2)S_2(z),$$

при чему је $\deg S_2 = n - 2$, а најстарији коефицијент полинома S_2 је a_n .

Настављајући овај поступак добијамо низ једнакости из којих следи да је:

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n). \quad (1)$$

Докажимо сада да је факторизација јединствена. Претпоставимо да поред факторизације (1) постоји и факторизација:

$$P(z) = b_n (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n). \quad (2)$$

Тада из (1) и (2) следи да за свако $z \in \mathbb{C}$ важи:

$$a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = b_n (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n). \quad (3)$$

Ако ставимо $z = \alpha_1$, добијамо:

$$b_n (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \dots (\alpha_1 - \beta_n) = 0.$$

Како је $b_n \neq 0$, закључујемо да је бар један од фактора $\alpha_1 - \beta_k$, где је $1 \leq k \leq n$ једнак 0. Без смањења општости можемо узети да је $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, односно $\alpha_1 = \beta_1$. Међутим, тада (3) постаје:

$$a_n (z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = b_n (z - \beta_2) \dots (z - \beta_n).$$

Ако ставимо $z = \alpha_2$, добијамо:

$$b_n (\alpha_2 - \beta_2) \dots (\alpha_2 - \beta_n) = 0$$

и можемо узети да је $\alpha_2 = \beta_2$. Настављајући овај поступак закључујемо да је $\alpha_k = \beta_k$ за свако $k = 1, 2, \dots, n$ и најзад да је $a_n = b_n$.

□

Погледајмо још једну теорему:

Теорема 2: Полином P степена n не може имати више од n различитих нула.

Доказ:

Како је P полином степена n , његов најстарији коефицијент a_n мора бити различит од нуле и важи развој:

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) \quad (a_n \neq 0).$$

Из ове једнакости се види да се пополином P анулира за $z = \alpha_1, z = \alpha_2, \dots, z = \alpha_n$.

Дакле за n вредности ако су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ међусобно различити или за мање од n вредности ако међу бројевима $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ има једнаких.

Претпоставимо да се полином P анулира и за $z = \alpha \neq \alpha_i \ (i=1, 2, \dots, n)$, То би значило да је:

$$P(\alpha) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = 0. \quad (4)$$

Међутим, по претпоставци је $\alpha - \alpha_i \neq 0$ па из (4) следи да је $a_n = 0$, што је такође немогуће јер је $\deg P = n$.

□

4.13. ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ

У другом разреду смо се већ упознали са неким Вијетовим формулама које важе код квадратне једначине. Ово је међутим много шири појам од квадратног облика полинома и сада ћемо се тиме позабавити.

Ако је P полином другог степена дефинисан са:

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

тада се, као што знамо, он може представити у облику:

$$P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

при чему нуле α и β полинома P могу бити једнаке. Сада закључујемо да важи:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

то јест:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$$

и изједначајући коефицијенте добијамо:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Ове везе су Вијетове формуле које су нам већ биле познате.

Нека је P полином трећег степена:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

и нека су α, β, γ нуле полинома P . Тада важе једнакости:

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = \\ &= ax^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + a(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)x - a\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

одакле се, изједначавањем коефицијената, добијају Вијетове формуле за полином трећег степена:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a} \quad \text{и} \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

За полином четвртог степена:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad a \neq 0$$

чије су нуле $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ добија се:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta).$$

Ако помножимо факторе на десној страни и средимо полином, након изједначавања коефицијената, добијамо Вијетове формуле за полином четвртог степена:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a} \quad \text{и} \quad \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}.$$

Јасно је да овај поступак можемо наставити и за полином петог, шестог, ..., n -тог степена. Вијетове формуле представљају везу између коефицијената и нула полинома. Приметимо да веза има онолико колики је степен полазног полинома.

4.14. ДОДАТАК УЗ ЧЕТВРТО ПОГЛАВЉЕ

У оквиру овог поглавља ћемо на неколико примера показати како се решавају задаци применом Дирихлеовог¹⁰ принципа. Дирихлеов принцип у основи представља тривијално тврђење које се своди на чињеницу да ако желимо n голубова да сместимо у m кавеза и ако је при томе $n > m$, тада у бар један кавез морамо сместити више од једног голуба.

Ево два проблема који се решавају применом овог принципа:

Задатак 1: Доказати да у Београду постоји најмање двоје људи са истим бројем длака на глави.

Решење:

Просечна особа има око 150 000 длака на глави. Можемо са сигурношћу рећи да не постоји особа која има преко милион длака на глави. У Београду живи више од 1,5 милиона људи, што нам говори да постоје најмање две особе са истим бројем длака на глави.

Задатак 2: У свакој групи од n људи постоје најмање две особе које познају исти број људи из те групе (сматра се да је релација познанства симетрична). Доказати.

Решење:

¹⁰ Јохан Петер Густав Лежен Дирихле (нем. *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*; 1805-1859) - немачки математичар

Број могућих познанстава сваког човека у овој групи је између 0 и $n-1$, што је укупно n могућих познанстава. Ако постоји неко ко познаје $n-1$ особу, тада он познаје све присутне, тако да не постоји особа без иједног познанства. То значи да 0 и $n-1$ не могу бити истовремено број познанстава неких људи из те групе. На основу Дирихлеовог принципа закључујемо да постоје две особе унутар те групе са истим бројем познаника.

Задатак 3: На стандардну шаховску таблу постављена су 33 ловца. Доказати да се са табле може уклонити 28 ловаца, тако да се преосталих 5 не нападају.

Решење:

Приметимо да се два ловца која се налазе у истој врсти не нападају. Како је ловаца 33, а врста 8, то се по Дирихлеовом принципу, у барем једној врсти налази 5 ловаца. Дакле, довољно је уклонити преосталих 28 ловаца.

IV ДОКАЗИ У ЧЕТВРТОМ РАЗРЕДУ

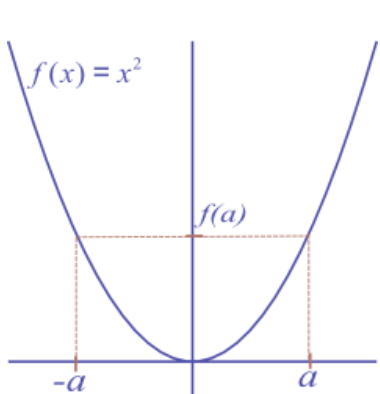
Четврти разред гимназије (и осталих средњих школа) углавном је посвећен областима математичке анализе. Упознајемо појмове извода и интеграла. Остатак градива испуњен је комбинаториком и вероватноћом и статистиком. У овом делу ћемо доказати неке од најважнијих теорема које се срећу у овом стадијуму бављења математиком, али се нећемо превише детаљно посвећивати доказима ситнијих тврђења јер су они ипак претешки за ученике у овом ступњу рада математике. Напоменуо бих да се одређеног интеграла уопште нећемо дотицати јер да бисмо то учинили морали бисмо детаљно да се упустимо у различита теоријска разматрања а обим овог рада то не дозвољава. На почетку, глобални план рада:

Редни број наставне теме	НАСТАВНЕ ТЕМЕ	Број часова по теми	Број часова за	
			обраду	остале типове часова
1.	Функције	35	13	22
2.	Изводи	31	13	18
3.	Интеграл	36	14	22
4.	Комбинаторика	11	6	5
5.	Вероватноћа и статистика	15	9	6
	УКУПНО	128	55	73

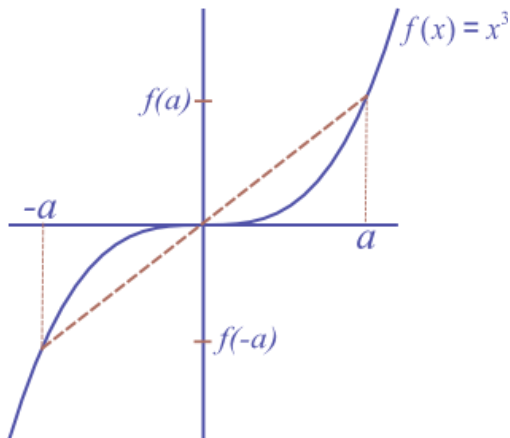
5.1. ФУНКЦИЈЕ

У оквиру овог одељка ћемо доказати неколико најзначајнијих теорема о функцијама.

Теорема 1: График парне функције симетричан је у односу на у-осу док је график непарне функције симетричан у односу на координатни почетак.



парна функција



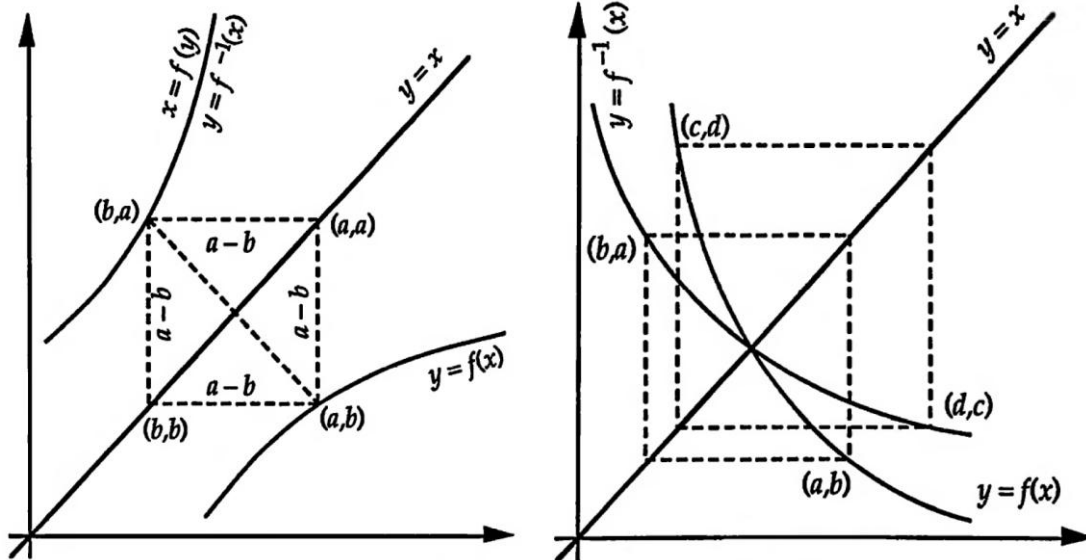
непарна функција

Доказ:

Ако је тачка $M(a, f(a))$ тачка графика парне функције, онда је због $f(-a) = f(a)$ и тачка $M'(-a, f(a))$ тачка графика функције. Тачке M и M' су симетричне у односу на y -осу.

Са друге стране, ако је тачка $M(a, f(a))$ тачка графика непарне функције, онда је због $f(-a) = -f(a)$ и тачка $M'(-a, -f(a))$ тачка графика функције. Тачке M и M' су симетричне у односу на координатни почетак. $\square$

Познато нам је да су графици неке функције $y = f(x)$ и њој одговарајуће инверзне функције $y = f^{-1}(x)$ симетрични у односу на праву $y = x$. Погледајмо сада на слици како се то илуструје:



Видимо да ако тачка $M(a, b)$ припада графику функције $y = f(x)$, онда ће тачка $M'(b, a)$ припадати графику њој инверзне функције $y = f^{-1}(x)$.

Погледајмо сада како се, по дефиницији, доказује непрекидност неке функције. Прво ћемо објаснити шта значи да је функција непрекидна.

Дефиниција 1: Нека је функција f дефинисана у интервалу (a, b) и нека $x_0 \in (a, b)$. За функцију f каже се да је непрекидна у тачки x_0 , ако за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је за свако x за које је $|x - x_0| < \delta$ испуњено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Задатак 1: Доказати да је функција $f(x) = 3x + 1$ непрекидна у тачки $x = 1$.

Решење:

Како је:

$$|f(x) - f(1)| = |3x + 1 - 4| = 3|x - 1|,$$

то је, за произвољно $\varepsilon > 0$, довољно узети да је $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Заиста, у том случају из

$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, добија се:

$$|f(x) - f(1)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Дакле, δ се одређује из услова $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, јер ће за $|x - 1| < \delta$ бити испуњено

$|f(x) - f(1)| < \varepsilon$. Исти поступак може се спровести и за произвољну тачку x_0 .

Погледајмо сада неке особине граничних вредности функција:

Гранична вредност функције (лимес функције) је један од основних појмова математичке анализе који се тиче понашања функције у околини неке вредности независне променљиве. Помоћу граничне вредности функције дефинишу се појмови непрекидности, извода и одређеног интеграла. Поред тога значај граничне вредности се огледа у томе што је помоћу ње могуће анализирати понашање и вредност функције у околини неке тачке чак и када функција у самој тој тачки није дефинисана.

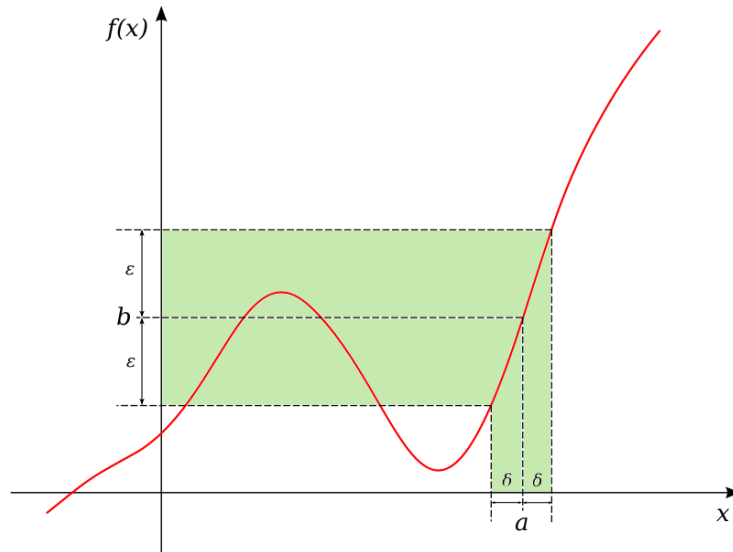
Неформално речено, функција има граничну вредност b у тачки a када је вредност функције „близу“ b кад год је вредност независне променљиве „близу“ a . Другим речима, када се функција примени на вредност довољно близу вредности a , резултат је произвољно близу вредности b . Уколико се вредности функције за тачке у околини a веома разликују (ако се не „стабилизују“ око неке одређене вредности) каже се да функција нема граничну вредност.

Погледајмо сада и формалну дефиницију:

Дефиниција 2: Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке a , осим можда у самој тачки a . Број b назива се гранична вредност функције f када x тежи a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ за које је:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Погледајмо и геометријску интерпретацију ове дефиниције:



За $\varepsilon > 0$ конструишемо траку ограничену правама $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. Одговарајући број δ треба да буде такав да део графика функције f над интервалом $(a - \delta, a + \delta)$ буде садржан у унапред конструисаној траци (осим, можда, вредности у a).

На основу дефиниција непрекидности функције f у тачки и граничне вредности функције у истој тачки, очигледна је веза између ова два појма. Наиме, важи да је функција f непрекидна у тачки a ако и само ако важи $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Погледајмо сада доказе неких теорема о својствима граничних вредности функција:

Теорема 3: а) Ако функција f има граничну вредност у тачки a , тада постоји околина тачке a у којој је функција f ограничена;

б) Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $b > 0$, тада постоји околина тачке a , у којој је $f(x) > 0$ (осим, можда, у самој тачки a).

Доказ:

а) Нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тада, према дефиницији граничне вредности функције, за сваку околину $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ постоји околина $(a - \delta, a + \delta)$ која се (изузев, можда, саме тачке a) функцијом f пресликава у околину $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, то јест, за коју је:

$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, што значи да је функција ограничена.

б) Изаберимо $\varepsilon > 0$ тако да је $b - \varepsilon > 0$ (то можемо да урадимо јер је $b > 0$). За тако изабрано ε постоји $\delta > 0$ такво да је (осим, можда, у тачки a):

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

то јест, за такву околину тачке a је $f(x) > b - \varepsilon > 0$.

□

Следећа теорема је доста важна али није тако једноставна за доказивање, па ћемо овде навести само доказ једног од три тврђења која она даје:

Теорема 4: Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$, тада важе следећа својства:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b_1 + b_2;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b_1 \cdot b_2;$$

$$в) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2} \quad (b_2 \neq 0).$$

Доказ:

а) Нека је дато $\varepsilon > 0$. Користећи својство апсолутне вредности за збир два броја:

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

имамо да је:

$$|f(x) + g(x) - (b_1 + b_2)| = |(f(x) - b_1) + (g(x) - b_2)| \leq |f(x) - b_1| + |g(x) - b_2|. \quad (1)$$

Из $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ добија се да постоји $\delta_1 > 0$ тако да из $0 < |x - a| < \delta_1$ следи

$|f(x) - b_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Слично, из $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$ добија се да постоји $\delta_2 > 0$ тако да се из

$0 < |x - a| < \delta_2$ добија $|g(x) - b_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ако ставимо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ тада из

$0 < |x - a| < \delta$ следи истовремено $|f(x) - b_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x) - b_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, па се, коначно,

из (1) добија да је:

$$|f(x) + g(x) - (b_1 + b_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то јест, да је:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b_1 + b_2.$$

□

Наводимо сада још једну теорему коју ћемо касније доста користити за извођење неких граничних вредности:

Теорема 5: Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ и ако је у некој околини тачке a (осим, можда, у тачки a) задовољена неједнакост $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, тада је и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

Доказ:

Из некеднкости $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ следи неједнакост:

$$f(x) - b \leq g(x) - b \leq h(x) - b. \quad (2)$$

У некој δ околини тачке a , то јест за: $0 < |x - a| < \delta$. Из (2) следи да је:

$$|g(x) - b| \leq \max\{|f(x) - b|, |h(x) - b|\} \quad \text{за } 0 < |x - a| < \delta, \quad (3)$$

(јер не знамо да ли су разлике у (2) позитивног или негативног знака). Нека је дато $\varepsilon > 0$. Тада из $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ следи да постоје бројеви $\delta_1, \delta_2 > 0$ такви да важи:

$$\begin{cases} 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - b| < \varepsilon \end{cases} \quad (4)$$

Ако изаберемо $\delta^* = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тада из (3) и (4) закључујемо да важи:

$$0 < |x - a| < \delta^* \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon,$$

то јест да је $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, што смо и хтели да докажемо. $\square$

Пре него што се посветимо извођењу неких карактеристичних граничних вредности, дефинишимо још два појма:

Дефиниција 3: Број b се назива лева гранична вредност функције f у тачки a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји δ такво да из $a - \delta < x < a$ следи $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Лева гранична вредност означава се са $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

Број b се назива десна гранична вредност функције f у тачки a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји δ такво да из $a < x < a + \delta$ следи $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Десна гранична вредност означава се са $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Лако је закључити да ако нека функција има леву и десну граничну вредност и ако важи: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, тада важи и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

5.2. НЕКЕ ВАЖНИЈЕ ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ

Погледаћемо како се могу пронаћи неке граничне вредности које нису баш очигледне, а које се у математичкој анализи веома често користе. Погледајмо их:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

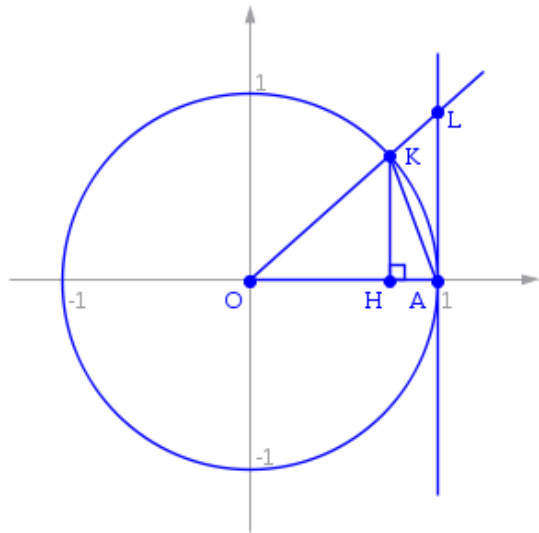
Доказ:

Како је функција $\frac{\sin x}{x}$ парна, можемо разматрати само случај када је $x > 0$.

Докажимо најпре следећу неједнакост за $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (1)$$

Погледајмо следћу слику:



Нека је x дужина кружног лука AK , где је A тачка кружнице на x -оси, а K произволна тачка кружнице у првом квадранту. Означимо са H нормалну пројекцију тачке K на x -осу, а са L пресечну тачку праве OK и тангенте кружнице у тачки A . Као што нам је добро познато, тада је:

$$KH = \sin x, \quad AL = \operatorname{tg} x.$$

Користећи слику закључујемо да се површина исечка OAK налази између површина троуглова OKA и OAL , па је:

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

одакле је:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Користећи се доказаном теоремом (теорема 5, одељак 5.1) и чињеницом да је $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = \cos 0 = 1$ из неједнакости (1) добијамо:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Међутим, због парности функције $\frac{\sin x}{x}$ имамо да је и $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$, па је зато:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказ:

Докажимо прво тачност овог тврђења када $x \rightarrow +\infty$. При том ћемо користити дефиницију броја e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N})$$

Нека је $x \geq 1$ произвољан реалан број, а нека је $[x]$ цео део од x . Тада је тачна неједнакост:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Одавде је: $\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$, а затим:

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]},$$

односно:

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}. \quad (2)$$

Како је:

$$\lim_{[x] \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{[x] \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e$$

$$\lim_{[x] \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{[x] \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^1 = e \cdot 1 = e$$

и како је $[x] \rightarrow +\infty$ еквивалентно са $x \rightarrow +\infty$, на основу већ доказане теореме

(теорема 5, одељак 5.1), из релације (2) закључујемо да је заиста $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

У случају када $x \rightarrow -\infty$, ставимо $y = -x$. Тада $x \rightarrow -\infty$ повлачи $y \rightarrow +\infty$, те је:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

Овде смо искористили резултат претходног случаја када $x \rightarrow +\infty$ и тиме доказали жељено тврђење. □

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Доказ:

Пре свега, из претходно добијене граничне вредности непосредно имамо и граничну вредност:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Наиме, ако код граничне вредности 2) уведемо смену $\frac{1}{x} = y$, онда је $x \rightarrow \infty$

еквивалентно са $y \rightarrow 0$ и $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. користећи се овом чињеницом и непрекидношћу логаритамске функције, имамо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1.$$

□

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1), \text{ или специјално } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказ:

Уведимо смену $y = a^x - 1$ ($x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$). Тада је $x = \log_a(1+y) = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$, па је:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln a \cdot y}{\ln(1+y)} = \ln a \cdot 1 = \ln a,$$

где смо искористили претходно доказану граничну вредност. □

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0)$

Доказ:

Ако $(1+x)^\alpha$ напишемо у облику $e^{\alpha \ln(1+x)}$ и искористимо 3) и 4), добићемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (3)$$

па ако у првој граничној вредности ставимо $y = \alpha \ln(1+x)$ и приметимо да ако $x \rightarrow 0$ онда ће и $y \rightarrow 0$, тада ће једнакост (3) постати:

$$\alpha \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha \cdot 1 \cdot 1 = \alpha,$$

а то смо и желели да покажемо. □

5.3. ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ

Веома важан алат приликом испитивања тока различитих функција представљају изводи функција. Њихова примена у математици и физици је од великог значаја. Ипак, у средњошколској математици, фокус те примене је на испитивању неких особина функција. Није ми жеља да се овде превише бавим различитим теоремама о изводу функција из простог разлога што се оне у средњој школи готово никада не доказују јер су заиста сувише сложене. Ипак, по нека од основнијих теорема се заиста не сме прескочити. Али пођимо од дефиниције извода:

Дефиниција 1: Нека је функција f дефинисана у интервалу (a,b) и нека је $x_0 \in (a,b)$ фиксирана тачка. Нека је Δx прираштај аргумента функције такав да $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Под изводом функције f у тачки x_0 , у ознаци $f'(x)$ подразумева се следећа гранична вредност (уколико постоји):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пример 1: Одредити извод функције $f(x) = x^2$.

Решење:

Ако је $f(x) = x^2$, тада је, по дефиницији:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Дакле, $f'(x_0) = 2x_0$. Овим смо доказали да функција $f(x) = x^2$ има извод у произвољној тачки x_0 и да је $f'(x_0) = 2x_0$. Јасно је такође да се променом x_0 добија нова функција $f'(x) = 2x$, где смо уместо x_0 ставили x . Ако желимо извод у конкретној тачки, онда ту вредност треба заменити уместо x у функцији f' .

Жеља нам је сада да одредимо изводе за неке од елементарних функција. За првих пар ће нам бити довољна само дефиниција извода. Кренимо редом:

1) Нека је $f(x) = C = \text{const}$ за свако x . Тада је за произвољно x : $f(x + \Delta x) = C$, па је:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0,$$

зато је $f'(x) = 0$.

Овим смо показали да је извод константе једнак нули.

2) За функцију $f(x) = x^n$ $n \in \mathbf{N}$ имаћемо за $x \neq 0$ следеће:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{n-1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{n-1} \cdot n = n \cdot x^{n-1}.$$

Приликом преласка на граничну вредност послужили смо се чињеницом да важи:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [(1+x) - 1][(1+x)^{n-1} + (1-x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{n-1} + (1-x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1] = n. \end{aligned}$$

За случај да је $x = 0$ добија се:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^n - 0^n}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} = 0, & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Видимо да се и овај случај уклапа у већ добијени резултат за $x \neq 0$, па је дакле:

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Потупоно аналогно долазимо до извода функције $f(x) = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0$ где је x такво да је функција дефинисана. Наиме, добили бисмо:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

3) За функцију $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, имамо да је:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Овде смо искористили једну од основних граничних вредности (број 4). Дакле, важи:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Специјално, за $a = e$ да је: $(e^x)' = e^x$.

4) Одредимо сада извод функције $f(x) = \ln x$. Нека је $x > 0$ фиксирано а Δx такво да је $x + \Delta x > 0$. Тада се применом граничне вредности $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ добија:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Дакле, добили смо:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5) Одређујемо сада извод функције $f(x) = \sin x$. Како је:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

непосредно се добија:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

где смо користили чињеницу $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ и непрекидност функције $\cos x$. Дакле, важи:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

6) Потпуно слично се добија за функцију $f(x) = \cos x$. Како је:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

добијамо да је:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Дакле, важи:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Да бисмо пронашли изводе осталих елементарних функција најпре морамо да се упознамо са неким особинама извода. Докажимо најпре следећу теорему:

Теорема 1: Ако свака од функција f и g има извод у тачки x , тада функција Cf ($C = \text{const.}$) и збир, разлика, производ и количник функција f и g (у случају

количника претпоставка је да је $q \neq 0$) такође имају извод у тачки x , и при том важе формуле:

$$\begin{aligned} a) [C \cdot f(x)]' &= C \cdot f'(x); \\ б) [f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x); \\ в) [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x); \\ г) \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Доказ:

а) Доказ следи непосредно из чињенице да је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(C \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) = C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, где је са Δf означен прираштај функције f у тачки x који одговара прираштају Δx .

б) Нека је $y(x) = f(x) \pm g(x)$ и нека $\Delta f, \Delta g, \Delta y$ означавају редом прираштаје функција $f(x), g(x), y(x)$ у датој тачки x , који одговарају прираштају Δx . Тада је:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = [f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)] - [f(x) \pm g(x)] \\ &= [f(x + \Delta x) - f(x)] \pm [g(x + \Delta x) - g(x)] \\ &= \Delta f \pm \Delta g. \end{aligned}$$

Одавде се, деобом са $\Delta x \neq 0$, добија:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x} \quad (1)$$

Како, по претпоставци, постоје граничне вредности:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x),$$

то из (1), када $\Delta x \rightarrow 0$, закључујемо да постоји и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$ и да важи:

$$y'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$

што је и требало показати.

в) Сада стављамо $y(x) = f(x) \cdot g(x)$. уз исте ознаке као у претходном случају добија се:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)] \\ &= f(x + \Delta x) \cdot \Delta g + g(x) \cdot \Delta f. \end{aligned}$$

Деобом са $\Delta x \neq 0$ последње једнакости добија се:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (2)$$

Како је по претпоставци $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x)$ и како постојање извода $f'(x)$ повлачи непрекидност функције $f(x)$ у тачки x , то јест: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$

то се са преласком на граничну вредност у (2) када $\Delta x \rightarrow 0$ добија:

$$y'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x),$$

а то и јесте оно што смо желели да докажемо.

з) У овом случају ставићемо $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Сада добијамо:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)] - f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x) \cdot \Delta f - f(x) \cdot \Delta g}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

Деобом са $\Delta x \neq 0$ из последње релације добијамо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \quad (3)$$

Ако, на крају, у релацији (3) $\Delta x \rightarrow 0$, онда ћемо слично као под б) и в) добити да је:

$$y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

а то је оно што смо желели да докажемо. □

Користећи се овом теоремом, сада ћемо извести још неке изводе елементарних функција.

7) Разматрамо извод функције $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Послужићемо се познатом чињеницом да је $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и применићемо правило за извод количника. На тај начин добијамо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Дакле:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right).$$

8) Сличним поступком добићемо и извод функције $f(x) = \operatorname{ctg} x$:

Дакле, имамо да је $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ и применићемо правило за извод количника. На тај начин добијамо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Дакле:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}).$$

Наводимо сада још једну теорему преко које ћемо извести изводе преосталих елементарних функција:

Теорема 2: Нека за функцију $y = f(x)$ постоји инверзна функција $x = f^{-1}(y)$ у околини фиксираних тачака x_0 . Ако постоји извод функције $y = f(x)$ у тачки x_0 и при том је $f'(x_0) \neq 0$, тада постоји и извод инверзне функције $x = f^{-1}(y)$ у тачки $y_0 = f(x_0)$ и једнак је $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказ:

Имајући у виду ознаке $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$ и дефиницију извода функције, као и $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ (због непрекидности инверзне функције у тачки $y_0 = f(x_0)$), можемо писати:

$$\begin{aligned} x'(y_0) &= (f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

то јест:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

На основу ове теореме изводимо и преосталих неколико извода елементарних функција:

9) Нека је $y = \log_a x$. Ова функција је инверзна функцији $x = a^y$ ($a > 0, a \neq 1$).
Применом доказане теореме, добијамо:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Дакле, важи:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0).$$

Специјално, за $a = e$ добија се чињеница коју смо већ доказали $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

10) Одредићемо сада извод функције $y = \arcsin x$:

Како је $y = \arcsin x \Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \sin y = x \right)$, то је:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Према томе, доказали смо да је:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

11) Из дефиниције функције $y = \operatorname{arctg} x$ имамо да је $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} y = x$. Зато је:

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Дакле, показали смо да је:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Сличним поступцима као у 10) и 11) показује се да је:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

и

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Овим је извођење извода елементарних функција завршено.

Докажимо сада још једну изузетно значајну и незаобилазну теорему. Реч је о теорему о изводу сложене функције:

Теорема 3: Ако функција g има извод у фиксированој тачки x , а функција $h = f(g(x))$ има извод у тачки $y = g(x)$, тада и функција $h = f(g(x))$ има извод у тачки x и при том важи формула $h' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Доказ:

Означимо са Δg прираштај који одговара прираштају Δx у тачки x , тј. $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$, а са Δh прираштај функције $h = f(g(x))$ који одговара прираштају Δx . Ако постоји околина тачке x у којој је $\Delta g \neq 0$, тада је:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g + \Delta g) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{f(g + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

јер $\Delta g \rightarrow 0$ када $\Delta x \rightarrow 0$, што следи из непрекидности функције g у тачки x (више пута смо поменули да постојање извода функције у некој тачки повлачи непрекидност исте функције у истој тачки).

Ако је $\Delta g = 0$ на бесконачно много места, произвољно близу тачки x , тада је $\Delta h = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) = f(g(x) + \Delta g) - f(g(x)) = 0$ на бесконачно много места произвољно близу тачки x , па је $h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = 0$.

□

Ово није баш строго формалан доказ али је сасвим довољан за овај стадијум учења.

Наводимо једну теорему која се примењује приликом испитивања тока неке функције. Нећемо је доказивати већ само понудити једно геометријско објашњење.

Теорема 4: Нека је функција f диференцијабилна у интервалу (a, b) (има извод у свакој тачки тог интервала). Ако је $f'(x) > 0$, за свако $x \in (a, b)$, тада је функција f растућа у том интервалу. Ако је $f'(x) < 0$ за свако $x \in (a, b)$, онда је функција f опадајућа у том интервалу.

Геометријски посматрано на интервалу, где је извод позитиван, тангента графика функције образује оштар угао са x -осом (јер је коефицијент правца тангенте у тачки са апсцисом x_0 једнак изводу у тачки x_0). Зато у таквом интервалу функција расте.

Аналогно разматрање имамо у случају када је $f'(x) < 0$.

На крају приче о изводима, наводимо две теореме које спадају у такозвану групу теорема о средњој вредности:

Теорема 5 (Фермаова¹¹ теорема): Нека је дата функција $f:[a,b] \rightarrow R$ која испуњава следеће услове:

-у некој тачки $c \in (a,b)$ достиже своју највећу (најмању) вредност;

-диференцијабилна је у тачки c (постоји $f'(c)$).

Тада је $f'(c) = 0$.

Доказ:

Претпоставимо да f достиже своју највећу вредност у тачки c . Тада је $f(x) \leq f(c)$, за сваки број x из интервала $[a,b]$, па је $f(x) - f(c) \leq 0, \forall x \in [a,b]$.

Ако је $x < c$, тада је $x - c < 0$ па је:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad \forall x \in [a, c) \quad (4)$$

Како према претпоставци постоји $f'(c)$, следи на основу (4) да је $f'(c) \geq 0$.

За $x > c$ следи да је $x - c > 0$ па је:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \quad \forall x \in (c, b] \quad (5)$$

Одавде закључујемо да је $f'(c) \leq 0$, па то значи да мора бити $f'(c) = 0$.

□

Теорема 6 (Ролова¹² теорема): Нека је дата функција $f:[a,b] \rightarrow R$ која испуњава следеће услове:

-непрекидна је на $[a,b]$,

-диференцијабилна је на (a,b) ,

-важи да је $f(a) = f(b)$.

Тада постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је $f'(c) = 0$.

Доказ:

Ако је f константна функција на $[a,b]$, тада је $f'(x) = 0$ за свако x па теорема важи.

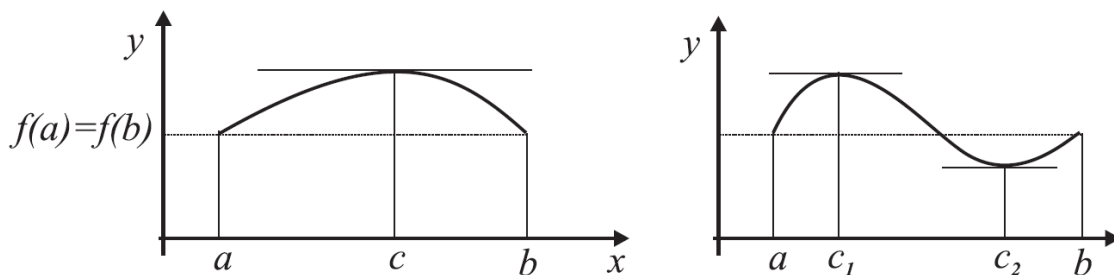
Претпоставимо да постоји $x \in (a,b)$ тако да је $f(x) > f(a) = f(b)$. Тада f достиже своју највећу вредност у некој тачки $c \in (a,b)$ (на основу непрекидности). На основу Фермаове теореме тада је тачка c , таква да је $f'(c) = 0$.

Аналогно се изводи доказ и у случају да је $f(x) < f(a) = f(b)$.

Врло је једноставно геометријско тумачење Ролове теореме. Погледајмо то на слици:

¹¹ Пјер де Ферма (фр. Pierre de Fermat 1601-1665) – француски математичар

¹² Мишел Рол (фр. Michel Rolle 1652-1719) – француски математичар



Дакле, функција која испуњава услове теореме, има бар једну нулу првог извода у интервалу $[a, b]$. Наравно, може имати и више таквих тачака (на другој слици пример функције која има две такве тачке).

5.4. НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Пре него што докажемо неколико најосновнијих тврђења везаних за ову тему погледајмо основне дефиниције:

Дефиниција 1: Нека је дата функција f , дефинисана у неком интервалу (a, b) . Сваку функцију F дефинисану у интервалу (a, b) , која има својство $F'(x) = f(x)$ називамо примитивном функцијом за функцију f .

Операција налажења примитивне функције дате функције назива се интеграција. Ова операција је инверзна операцији диференцирања (налажења извода). Но, за разлику од диференцирања, интеграција није једнозначна операција. Ако је F примитивна функција дате функције f , тада је и свака функција $F(x) + C$, где је C произвољна константа, такође примитивна за f . Заиста, ако је $F'(x) = f(x)$, тада је $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ јер је извод константе свуда једнак нули. Ако функција f у интервалу (a, b) има извод стално једнак нули, тада је функција f једнака некој константи C . Докажимо сада једну теорему:

Теорема 1: Ако функција f дефинисана у интервалу (a, b) има примитивну функцију F , тада скуп функција облика $F(x) + C$, $C \in \mathbf{R}$, представља скуп свих примитивних функција за f .

Доказ:

Треба да докажемо да свака примитивна функција G функције f има облик $F(x) + C$ то јест да за сваку такву функцију G постоји нека константа C таква да је $G(x) = F(x) + C$, $x \in (a, b)$.

Формираћемо функцију $\varphi(x) = G(x) - F(x)$, $x \in (a, b)$. Извод функције φ је једнак нули за свако $x \in (a, b)$: $\varphi'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $x \in (a, b)$. Према томе, функција φ је једнака некој константи (јер на читавом интервалу (a, b) има извод једнак нули). То значи да је $G(x) - F(x) = C$, односно $G(x) = F(x) + C$, $x \in (a, b)$.

□

Дефиниција 2: Неодређени интеграл функције f је скуп свих њених примитивних функција и обележава се овако:

$$\int f(x) dx.$$

На основу доказане теореме можемо писати овако:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Следећа теорема даје нам два основна својства неодређених интеграла:

Теорема 2: а) Ако за функције f и g , дефинисане у интервалу (a, b) , постоје неодређени интеграл, тада и за њихов збир постоји неодређени интеграл и важи:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (1)$$

б) Ако постоји неодређени интеграл за функцију f и ако је $K \in \mathbf{R}$, $K \neq 0$, тада и за функцију $Kf(x)$ постоји неодређени интеграл и важи

$$\int K \cdot f(x) dx = K \cdot \int f(x) dx. \quad (2)$$

Доказ:

а) Ако су F и G примитивне функције за f и g редом, тада је $F + G$ примитивна функција за $f + g$, јер је:

$$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Зато је лева страна у (1) једнака:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C.$$

Покажимо да је и десна страна у (1) једнака овом изразу:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + \int g(x) dx &= [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] = \\ &= F(x) + G(x) + (C_1 + C_2) = F(x) + G(x) + C. \end{aligned}$$

Пошто су C_1 и C_2 произвољне константе, и њихов збир $C_1 + C_2 = C$ је произвољна константа јер се, очигледно, сваки реалан број C може, и то чак на бесконачно много начина, добити сабирањем реалних бројева C_1 и C_2 .

б) Ако је $F'(x) = f(x)$, онда је $[K \cdot F(x)]' = K \cdot f(x)$, што значи да је:

$$\int K \cdot f(x) dx = K \cdot F(x) + C.$$

Десна страна у (2) такође је једнака овом изразу

$$K \cdot \int f(x) dx = K \cdot [F(x) + C_1] = K \cdot F(x) + K \cdot C_1 = K \cdot F(x) + C,$$

јер ако је C_1 произвољна константа, онда је и $K C_1 = C$ произвољна константа.

Наиме, сваки реалан број C је производ броја K ($K \neq 0$) и реалног броја $C_1 = \frac{C}{K}$.

□

Основу за налажење неодређених интеграла широке класе функција чини таблица основних интеграла. Она се формира непосредно на основу таблице извода елементарних функција.

Свака формула $F'(x) = f(x)$ из диференцијалног рачуна даје нам одговарајућу формулу интегралног рачуна $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Пример 1: Одредити $\int \sin x dx$.

Решење:

Из $(\cos x)' = -\sin x$ непосредно се добија $\int (-\sin x)dx = \cos x + C$, односно $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Погледајмо сада две важне теореме које нам омогућавају решавање шире класе интегралних проблема од оне коју нам даје само таблица основних интеграла:

Пођимо од једног примера:

Из таблице неодређених интеграла знамо да је $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Ако у израз на десној страни ставимо $x = t^3 - 1$, добићемо $\sin(t^3 - 1) + C$. За сваку појединачну вредност C ово је једна функција по t . Њен извод је једнак $[\sin(t^3 - 1) + C]' = \cos(t^3 - 1) \cdot 3t^2$. Ово последње значи да је $\int \cos(t^3 - 1) 3t^2 dt = \sin(t^3 - 1) + C$. Према томе, ако подразумевамо да су x и t повезани тако да је $x = t^3 - 1$, тада је $\sin x + C = \sin(t^3 - 1) + C$, односно $\int \cos x dx = \int \cos(t^3 - 1) \cdot 3t^2 dt$. На тај начин смо у интегралу $\int \cos x dx$ извршили замену $x = t^3 - 1$.

Формулишимо сада теорему на чијем принципу је заснован и наведени пример:

Теорема 3: Нека је f функција дефинисана и непрекидна у интервалу (a, b) и нека је ψ једна непрекидно диференцијабилна функција која неки интервал (α, β) пресликава на интервал (a, b) . Тада је:

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt \quad (3)$$

при чему се подразумева да је $x = \psi(t)$

Доказ:

Оба интеграла у (3) постоје јер су функције f, ψ, ψ' непрекидне, па су и оба интеграла непрекидне функције (постоји теорема која то говори). Узмимо било коју примитивну функцију F за f . Тада је $\int f(x)dx = F(x) + C$. Обележимо $F(\psi(t))$ са $\Phi(t)$. Тада је $\Phi(t) = F(\psi(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$. Како је:

$$\Phi'(t) = F'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = f(\psi(t)) \cdot \psi'(t),$$

то је функција Φ једна примитивна функција за $f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$, па је:

$$\int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\psi(t)) + C.$$

Како је $x = \psi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, овај последњи израз је једнак $F(x) + C$, што значи да важи (3).

□

Остаје нам још да погледамо једну теорему када је реч о неодређеним интегралима. Реч је о такозваном методу парцијалне интеграције:

Теорема 4: Нека су функције u и v непрекидне у интервалу (a, b) , и нека имају непрекидне изводе u' и v' . Тада је:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g'(x) \cdot f(x) dx.$$

Доказ:

Према правилу о изводу производа две функције имамо:

$$[(u(x) \cdot v(x))]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

одакле следи:

$$u(x) \cdot v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - u'(x) \cdot v(x).$$

Зато је:

$$\begin{aligned} \int u(x) \cdot v'(x) dx &= \int [u(x) \cdot v(x)]' dx - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx, \end{aligned}$$

што доказује жељено тврђење. При том интеграл постоје јер су подинтегралне функције непрекидне. □

Ова формула се често записује у краћем облику, ако не наглашавамо да функције u, v зависе од x и ако уместо $v' dx$ пишемо dv , односно уместо $u' dx$ пишемо du :

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

5.5. КОМБИНАТОРИКА

Област комбинаторике је често најпроблематичнија ученицима, а и нама наставницима није баш лака за предавање. Овде ћемо показати како се изводе основне формуле за пребројавање пермутација, варијација и комбинација, али ћемо их најпре дефинисати:

Дефиниција 1: Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ од n елемената. Низ од k ($1 \leq k \leq n$) различитих чланова који су елементи скупа A називамо варијација скупа A (од n елемената) класе k .

У случају $k = n$, варијацију класе n скупа A називамо пермутација скупа A .

Дефиниција 2: Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ од n елемената. Подскуп од k ($1 \leq k \leq n$) елемената скупа A назива се комбинација класе k од n елемената.

Докажимо сада прву теорему која нам говори о броју различитих варијација, пермутација, односно комбинација:

Теорема 1: Нека је дат скуп A од n елемената. Нека V_k^n означава број свих варијација класе k од n елемената, нека P_n буде ознака за број свих пермутација скупа A , а C_k^n нека означава број свих комбинација класе k од n елемената (у свим случајевима подразумевамо да је $1 \leq k \leq n$). Тада је:

$$a) V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1);$$

$$б) P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!;$$

$$в) C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Доказ:

а) Нека $x_1, x_2, \dots, x_k$ означава произвољну варијацију класе k скупа $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. На првом месту у низу $x_1, x_2, \dots, x_k$, тј. први члан низа, може бити било који од n елемената скупа A . Са сваким од n елемената као првим чланом низа имамо да други члан низа може бити било који од $n-1$ преосталих елемената скупа A , то јест први и други члан низа могу се изабрати на $n \cdot (n-1)$ начина. За све такве изборе прва два члана имамо $n-2$ могућности за избор трећег члана, па се прва три члана могу изабрати на $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ начина. Сличним поступком закључујемо да се k чланова низа могу изабрати на:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-2)) \cdot (n-(k-1)) = \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1) \text{ начина.} \end{aligned}$$

б) Пошто је, по дефиницији, пермутација скупа A од n елемената једнака варијацији класе n скупа A , то је, према резултату под а),

$$P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(n-1)+1) \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

в) Од једне комбинације класе k , рецимо $x_1, x_2, \dots, x_k$, могли бисмо променом поретка чланова, добити (према б)) $P_k = k!$ пермутација скупа $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, то јест, $k!$ варијација класе k полазног скупа A од n елемената. Ако је C_k^n укупан број комбинација класе k од n елемената, тада је, дакле:

$$C_k^n \cdot k! = V_k^n,$$

одакле се добија:

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!}.$$

□

До сада смо се бавили варијацијама класе k и пермутацијама скупа A од n елемената, дефинишући их као низове са различитим члановима који су елементи скупа A . При томе је $1 \leq k \leq n$. Међутим, можемо посматрати и низове код којих има и чланова који не морају обавезно бити различити, већ се, како се то обично каже, неки чланови могу и понављати у низу. У овом случају ћемо рећи да се ради о варијацијама и пермутацијама са понављањем. Јасно је, такође, да овде може бити и $k > n$. Погледајмо сада дефиницију:

Дефиниција 3: Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Низ $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \geq 1$) код кога неки чланови низа могу бити и међусобно једнаки назива се варијација са понављањем класе k .

Уколико се у низу $x_1, x_2, \dots, x_k$ појављују сви елементи скупа A , и то a_1 тачно k_1 пута, a_2 тачно k_2 пута, $\dots$, a_n тачно k_n пута (тада је $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$), такав низ се назива пермутација са понављањем скупа A од n елемената класе k .

Приметимо да код пермутација са понављањем мора бити $k > n$ и мора се знати колико пута се сваки елемент понавља.

Погледајмо сада како се рачуна број оваквих варијација и пермутација:

Теорема 2: Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

а) Ако са $\overline{V}_k^n$ означимо број свих варијација са понављањем класе k ($k \geq 1$), тада је:

$$\overline{V}_k^n = n^k.$$

б) Ако $P_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n$ означава број свих пермутација са понављањем скупа A , код којих се елемент a_1 појављује (повнавља) k_1 пута, елемент a_2 k_2 пута, $\dots$, a_n k_n пута, тада је:

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

Доказ:

а) На првом месту у низу (тј. први члан низа) $x_1, x_2, \dots, x_k$ може се налазити било који од n елемената, независно од осталих чланова низа. Исто важи и за сва остала места у низу (за све остале чланове низа). Зато ће укупан број варијација таквог типа бити:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k.$$

б) Уколико претпоставимо да су сви чланови у пермутацији са понављањем различити, тада бисмо имали пермутацију без понављања од $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ елемената, те је укупан број једнак $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$. Код сваке пермутације са понављањем можемо мењати места члановима који су једнаки a_1 а да се пермутација не промени. Таквих размештања има $k_1!$. Слично можемо учинити са члановима који су једнаки a_2 . Такви чланови могу мењати места на $k_2!$ начина итд. Дакле, за сваку пермутацију са понављањем има $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$ пермутација без понављања у којима се не мења међусобни распоред различитих чланова скупа A . Мењајући и такве распореде добили бисмо укупан број пермутација без понављања од $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ елемената. Зато важи:

$$k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n! \cdot P_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n = (k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$$

одакле је, коначно:

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

5.6. БИНОМНА ФОРМУЛА

Дефиниција 1: Биномним коефицијентом, у ознаци $\binom{n}{k}$ (чита се “ n над k ”) , где $k, n \in \mathbf{R}$ и $1 \leq k \leq n$, називамо број:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

По дефиницији је $\binom{n}{0} = 1$,

Основне особине биномних коефицијента даје нам следећа теорема:

Теорема 1: За биномне коефицијенте важи:

$$a) \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$б) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

$$в) \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Доказ:

За $k=0$ и $k=n$ једнакост је тачна јер је по дефиницији $\binom{n}{0}=1$ и $0!=1$, док је

$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Нека је $1 \leq k \leq n$. Тада је, према дефиницији:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

б) Коришћењем својства а) добијамо да је:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

па је заиста $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. ово је такозвано својство симетричности биномних коефицијената.

в) Применом једнакости а) и чињенице да је $k! = (k-1)! \cdot k$, добијамо:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right] = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Овим смо доказали правило сабирања биномних коефицијената. □

Назив биномни коефицијент у вези је са развојем бинома $(a+b)^n$. Наиме, за $n=2$ и $n=3$ имамо идентитете:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

које можемо писати у облику

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2; \\
(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3.
\end{aligned}$$

Поставља се питање развоја бинома $(a+b)^4, (a+b)^5, \dots$. Одговор на такво питање даје следећа теорема:

Теорема: Важи следећи идентитет:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n, \quad (1)$$

или краће:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ова формула се назива биномна формула или Њутнова¹³ биномна формула.

Доказ:

Доказ биномног обрасца изводи се путем математичке индукције. За $n=1$ формула (1) има облик:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b,$$

што је очигледно тачно.

Нека је формула тачна за неко n , односно нека важи:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n.$$

¹³ Исак Њутн (енг. ser Isac Newton 1643-1727) – енглески математичар, физичар и филозоф

Тада је:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
 &= \left[\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \right] \cdot (a+b) = \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] a^{n-1} b^2 + \dots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] a b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1},
 \end{aligned}$$

што значи да је формула (1) тачна и за $n+1$. Напоменимо да смо у последњем кораку применили правило о сабирању биномних коефицијената и једнакости

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

□

5.7. ДОДАТАК УЗ ПЕТО ПОГЛАВЉЕ

У оквиру овог поглавља ћемо размотрити два проблема. Први се тиче анализе а други теорије вероватноће:

Задатак 1: Доказати да је $\pi^e < e^\pi$.

Решење:

Претпоставимо супротно: нека је $\pi^e > e^\pi$. Тада, на основу особина логаритамске функције мора да важи и:

$$\ln \pi^e > \ln e^\pi,$$

односно:

$$e \cdot \ln \pi > \pi \cdot \ln e,$$

то јест:

$$e \cdot \ln \pi > \pi.$$

Ако обе стране последње неједнакости поделимо са $\ln \pi$, добијамо:

$$e > \frac{\pi}{\ln \pi}.$$

Ако бисмо посматрали функцију $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ чији је домен $D_f = (0, +\infty)$, применом

првог извода дошли бисмо до следећег резултата:

$f'(x) < 0$ за $x \in (0, 1) \cup (1, e)$, то јест: $f(x)$ је опадајућа за $x \in (0, 1) \cup (1, e)$ и

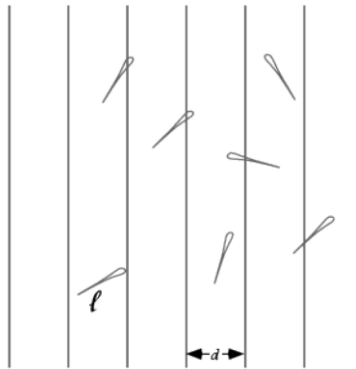
$f'(x) > 0$ за $x \in (e, +\infty)$, то јест: $f(x)$ је растућа за $x \in (e, +\infty)$.

На основу тога имамо да је минимум ове функције тачка (e, e) . То значи да је

$$f(\pi) = \frac{\pi}{\ln \pi} > e. \text{ Дошли смо до контрадикције. Дакле, важи } \pi^e < e^\pi.$$

Други проблем, који ћемо сада погледати базиран је на теорији вероватноће. Проблем је познат као Бифонов¹⁴ проблем и ево како он гласи:

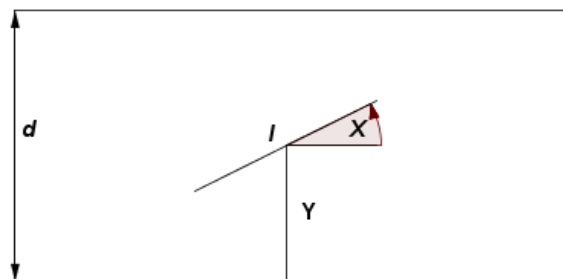
Задатак 1: У равни је дат скуп паралелних правих, при чему је растојање између било које две суседне праве $d (d > 0)$. На раван се баца игла дужине $l (l < d)$. Одредити вероватноћу да игла сече неку од правих.



Решење:

Да бисмо прешли на само решавање проблема мораћемо прво да одредимо полазне елементе и извршимо нека разматрања.

Уочимо за почетак случајне величине које су нам од интереса. Исход експеримента је одређен положајем игле у равни. Због услова по коме је $l < d$ јасно је да игла не може да сече више од једне праве, па је довољно посматрати положај у односу на најближу праву.



У односу на посматрану праву, положај игле је у потпуности одређен двама случајним величинама:

X – угао игле у односу на праву мерен у позитивном смеру;

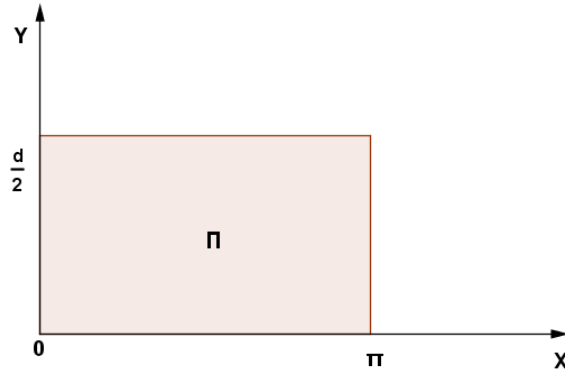
Y – удаљеност средишта игле од праве.

За овако дефинисане случајне величине важи:

$$0 < X < \pi \text{ и } 0 < Y < \frac{d}{2}.$$

Погледајмо сада простор могућих исхода. Он одговара правоугаонику на слици:

¹⁴ Жорж Луј Леклер Бифор (фр. Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon 1707-1788)- француски математичар и природњак



Алгебарски описан овај правоугаоник има облик:

$$\Pi = (X, Y) = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{d}{2} \right\},$$

где x, y представљају реализоване вредности случајних величина X и Y .

Даље је потребно одредити простор повољних исхода. Треба да препознамо оне тачке простора свих исхода у којима игла сече неку од правих, односно, тачке у којима се реализовао експеримент. Игла сече праву уколико је растојање средишта игле од те праве довољно мало за неку фиксирану угаону позицију игле. Ако

координату доњег краја игле напишемо у облику $y - \frac{l}{2} \sin x$, закључујемо да се пресек јавља уколико је ова вредност негативна, односно, ако важи:

$$y \leq \frac{l}{2} \sin x.$$

Потребно је још да одредимо заједничку расподелу вероватноћа случајних величина X и Y . Та расподела је одређена њиховом заједничком функцијом густине $f_{(x,y)}(x, y)$. Да бисмо њу одредили, морамо прво видети на који начин се експеримент изводи. Будући да се игла баца на случајан начин, можемо сматрати да је расподела случајне величине X униформна на интервалу $[0, \pi]$, тако да је њена маргинална густина расподеле:

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

На исти начин можемо сматрати и да случајна величина Y има равномерну расподелу на интервалу $[0, \frac{d}{2}]$, тако да је њена маргинална густина расподеле:

$$f_y(y) = \frac{2}{d}, \quad 0 \leq y \leq \frac{d}{2}.$$

Ако приметимо да угаони положај игле ни на који начин не зависи од њеног растојања од праве, закључујемо да су случајне величине X и Y независне. То значи да је њихова заједничка густина расподеле једнака производу њима одговарајућих маргиналних густина:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{\pi d}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \frac{d}{2}.$$

Остаје нам још да одредимо тражену вероватноћу. То ћемо урадити тако што ћемо интегралити заједничку густину на простору повољних исхода:

$$P = \int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2} \sin x} \frac{2}{\pi d} dx dy = \frac{2}{\pi d} \int_0^{\frac{l}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2} \sin x} dy = \frac{l}{\pi d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{2l}{\pi d}.$$

ЗАКЉУЧАК

Покушао сам да у овом раду мало детаљније проучим доказе теорема које ми математичари свакодневно користимо. Такође, жеља ми је била да апстрактне доказе, колико толико учиним занимљивијима, да често гломазне доказе сведем на меру која би могла бити разумљива и напреднијим средњошколцима, а са друге стране да ти докази и даље остану коректни.

Сматрам да би деци било далеко лакше да упамте поједине формуле или теореме када би знали на који начин се до њих долази, уместо што их само добију у готовом облику.

Важност доказа у математици је вишеструка. Код ученика развија логичко мишљење. Доказ се сликовито може приказати као један ланац на чијем почетку су постављени услови а на крају тражени резултат. Ми доказујући одређено тврђење крећемо од претпоставки које су нам дате у формулацији тврђења. На основу њих изводимо одређени закључак, па на основу тог закључка нови закључак и тако редом све док не стигнемо до циља – жељеног резултата. Уколико се покида само једна карика у овом ланцу, читав ланац ће се распасти. Другим речима, математички доказ не вреди ништа ако само један од међукорака није тачан (или није добро заснован). Слика ланца међутим није баш сасвим ваљана јер није сваки аргумент у том ланцу једнако важан и не долази се до сваког новог аргумента једнако лако, односно тешко. Такође, ми ретко унапред знамо како треба да изгледа следећи корак, колико је велики и у ком смеру треба ићи. Када би било тако, математика би била веома досадна. Доказивање је креативна, спортска и уметничка активност која се не може испланирати. Као што смо већ поменули, ретко када на почетку доказа знамо тачан пут до његовог краја. Знамо само почетну и крајњу тачку. Могућности за прављење пута између те две тачке има много. Потребно је за почетак наћи бар један такав пут, а касније проверити да ли је тај пут оптималан или постоји „јефтиније“ решење. Треба водити рачуна о томе да сваки корак на том путу мора бити стабилан, односно сваки нови закључак мора бити математички коректан. Оно што приликом прављења тог пута смемо да користимо јесу темељи које је неко већ поставио (доказана математичка тврђења).

Веома често се трагајући за доказом одређене теореме долазило до много других великих открића. Неретко, када доказујемо теорему себи поставимо неколико међуциљева како бисмо лакше дошли до главног циља. Такође, некад кренемо погрешним путем али на том путу пронађемо нешто што уопште нисмо тражили али је једнако вредно као и циљ за којим трагамо. Управо су и многе важне теореме доказане баш на овакав начин.

Ако се за тренутак вратимо на причу о доказу као о дугачком ланцу, треба обратити пажњу на следећу ствар. У читавом ланцу аргументације довољна је мала непажња, ситна грешка и све одлази у пропаст. Ту и лежи основа математике: скоро тачно је исто што и погрешно. Треба имати на уму и да је доказивање креативан процес оптерећен грешкама. Дешава се да успемо да докажемо нешто што је противуречно пређашње доказаним теоремама. Тада треба бити упоран и не одустати све док се не открије ненамерна, веома добро скривена грешка. Ипак, ту је искуство пресудан елемент.

Када ученици закораче мало дубље у свет математике, можемо их тренирати и на следећи начин. Извешћемо доказ неког тврђења које није тачно и приликом доказа направити грешку. Тада би требало пустити ученике да покушају сами да нађу шта то у доказу није ваљано. Сетимо се на пример „доказа“ да је $0=1$. Грешку у том чудном доказу би могли да нађу већ ученици у првом разреду средње школе. До овог резултата се долази тако што се у једном кораку доказа изврши дељење нулом, што наравно није дозвољено. Или, на пример, када се ради доказивање да су одређени корени ирационални бројеви, требало би показати ученицима и „доказ“ да је $\sqrt{4}$ ирационалан број. Наравно да сва деца знају да је вредност овог корена 2, што је рационалан број, па самим тим значи да негде у приказаном доказу постоји грешка. Верујем да би било интересно пустити ученике да пронађу грешку у овом „доказу“. Управо овакви примери, утичу на то да деца уче да размишљају а не да само усвајају појмове без имало размишљања и свести о ономе шта уче.

Још једном бих нагласио да је извођење формула, односно доказивање теорема, одличан начин за повезивање нових појмова са већ наученим градивом. Наравно, не треба отићи ни у другу крајност па средњошколце угњавити са сувопарним доказима, то би био начин да децу још више одбијемо од математике, а то никоме од нас није циљ.

Не треба ни терати децу да уче доказе напамет. За средњошколски ниво било би сасвим довољно да разумеју доказ и да стекну осећај за начин на који се теореме доказују. Такође, важно је да деца у том узрасту умеју да процене, када виде неки доказ, да ли је то заиста доказ теореме или је у питању само одређени специјалан случај. Још би требало усадити ученицима у свест да сваки од потребних услова за важење неке теореме морамо проверити ако желимо да употребимо ту теорему. Често се деси да се приликом одређеног доказивања позовемо на неку теорему али да том приликом занемаримо „ситан“ услов. Тако се може доказати много необичних тврђења, која наравно нису тачна.

Све у свему, оно што не би смело да се дешава јесте да ученици заврше средњу школу (првенствено гимназију) а да доказе уопште не сусретну. Као што сам напомену већ много пута, докази представљају срж математике и без њих математика престаје да буде краљица свих наука и претвара се у науку сумњивог квалитета и још сумњивијих резултата.

У крајњем случају овај рад може да буде интересно штиво колегама који раде у средњим школама како би тестирали себе и видели колико теорема знају да докажу сами, а које доказе су временом заборавили.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П.Миличић, В.Стојановић, З.Каделбург, Б.Боричић „Математика 1“, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2004;
- [2] Н.Икодиновић „Математика1“, Клет, 2013;
- [3] В.Мићић, Ж.Ивановић, С.Огњановић „Математика 2“, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2012;
- [4] Ј.Кечкић „Математика 3“, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2006;
- [5] М.Обрадовић, Д.Георгијевић „Математика 4“, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2008;
- [6] R.Nelsen „Proofs Without Words“, The Mathematical Association of America, 1993;
- [7] G.Ziegler “Смем ли да бројим?”, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2012;
- [8] В.Мићић, З.Каделбург, Д.Ђукић “Увод у теорију бројева”, Друштво математичара Србије, Београд, 2004;
- [9] В.Драговић, П.Младеновић, С.Огњановић “Припремни задаци за математичка такмичења за ученике средњих школа”, Друштво математичара Србије, Београд, 1999;
- [10] М.Петковић “Занимљиви математички проблеми великих математичара”, Друштво математичара Србије, Београд 2008;
- [11] J.Neunhauserer “12² beautiful mathematical theorems with short proofs”;
- [12] E. Knuth „Proof as a tool for learning mathematics”, 2002;
- [13] А. Иванковић „Занимљив доказ адиционих теорема“, 2001;
- [14] М. Петковић. Љ. Петковић „Математички времеплов“, Змај, 2006;
- [15] <http://sr.wikipedia.org/> приступано маја 2013. године;
- [16] <http://en.wikipedia.org/> приступано маја 2013. године.