U N I V E R Z I T E T U N O V O M S A D U

P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

Mr ENDRE E. PAP

NEKE OSOBINE SPECIJALNIH PRESLIKAVANJA NAD POLUGRUPAMA I NJIHOVA PRIMENA U FUNKCIONALNOJ ANALIZI I TEORIJI MERE

doktorska disertacija

N O V I S A D

1975.

P R E D G O V O R

Teorija polugrupa je danas važna oblast matematičkih istraživanja i primena. Siromašna aksiomatika polugrupe dala je bogatu matematičku teoriju i primene u drugim oblastima matematike: funkcionalnoj analizi, teoriji grafova, teoriji algoritama, diferencijalnoj geometriji, itd. ; a i u drugim naukama, prvenstveno fizici. Jedan od neimara teorije polugrupa A.D.Wallace [81] je izrekao hipotezu da će topološke polugrupe biti vrlo važne u opisu prirodnih pojava i procesa. Naime, on ističe da je teorija grupa bila podstaknuta problemima geometrije vezanim za simetriju geometrijskih objekata. Dotle, na primer problemi fizike su većinom ireverzibilni te mnogo bliži pojmu polugrupe.

Danas, što se tiče algebarske teorije polugrupa, postoje dve monografije: E.S.Ljapin [45] i A.Clifford,G. Preston [23] . Izdaje se i poseban časopis "Semigroup forum", posvećen problemima teorije polugrupa. Od velikog su interesa polugrupe snabdevene sa još nekom strukturom: parcijalno uredjene polugrupe- L.Fuchs [31] ,topološke polugrupe- A.B.Paalman-de Miranda [63] i K.H.Hofmann, P.S.Mastert [34] .

Današnja strujanja u matematičkoj analizi se sve više približavaju strukturi polugrupe. Teoriju mere sa vrednostima u specijalnoj topološkoj polugrupi razvio je M.Sion [74] , a nekih rezultata u tom pravcu ima i u radu

P.Antosika [14]. L.Berg [16] uočava da se klasična analiza sa svojim pojmovima: skupovi,funkcije,granične vrednosti, neprekidnost,redovi,integrali, te sa druge strane funkcionalna analiza (u širem smislu) sa svojim pojmovima: rastojanje,funkcionela, mera,distribucije, operatori, mogu objediniti polugrupom obogaćenom sa još nekom strukturom. Polugrupe su i ranije imale veliku primenu u funkcionalnoj analizi E.Hille, P.Phillips [33] , ali to je uglavnom analitička teorija polugrupa, vezana za operatore nad Banachovim prostorom.

U ovoj tezi uvodim i proučavam neka preslikavanja vezana za polugrupe, koja se u specijalnim slučajevima svode na dobro poznata preslikavanja funkcionalne i realne analize i teorije mere. Na taj način se izdvaja osnovna matematička ideja, koja se uniformizuje, da bi za specijalne slučajeve dala klasične rezultate.

Teza se sastoji iz dve glave.Doktorsku disertaciju predstavlja prva glava, koja sadrži dublje rezultate iz funkcionalne analize i teorije mere. Druga glava je dopunska za prvu glavu u kojoj su dobijeni i neki dodatni rezultati. Na početku svake glave dat je kratak uvod, tako da se ovde nećemo zadržavati na detaljnom opisu pojedinih glava teze.

U prvoj glavi formulišem i dokazujem nekoliko oblika Dijagonalne teoreme.Pomoću ovih vrlo korisnih teorema izvodim niz važnih poznatih i dosad nepoznatih teorema vezanih za funkcionalnu analizu (izmedju ostalog i za teoriju distribucija) i za teoriju mere nad raznim mrežama kao i teoreme o tačkastoj konvergenciji i uniformnoj ograničenosti familije novo uvedenih skupovnih funkcija. Polugrupa se pojavljuje kao domen ili kodomen posmatranih funkcija.

Druga glava je vezana za uopštenje pojma konveksne funkcije na polugrupi. Ispitujem neke osobine ovako uopštenih konveksnih funkcija, te dajem neke primene dobijenih rezultata. Polugrupa se pojavljuje kao domen i kodomen uopštenih konveksnih funkcija.

U obe glave se pojavljuje korisna funkcija antistepenovanja, koju su nad grupom uveli S.S.Jou, S.Kurepa [35].

Zahvaljujem se mentoru profesoru B.Stankoviću na korisnim savetima i strpljenju, koje mi je pružao tokom izrade disertacije. Profesoru M.Stojakoviću dugujem zahvalnost što je pregledao disertaciju i učinio niz korisnih primedbi. Drago mi je što se mogu zahvaliti docentu O.Hadžić na saradnji u radu [67] i na pregledu poglavlja 1.3, 1.9 i 1.10.

I GLAVA

DIJAGONALNE TEOREME I NEKE NJIHOVE PRIMENE

Teorija Dijagonalne teoreme će nam omogućiti da za polugrupu vežemo važne pojmove funkcionalne analize i teorije mere - skupovnih funkcija. Pokazalo se, u mome radu [66] , u radu P.Antosika [14] i zajedničkom radu sa O.Hadžić [67] da je Dijagonalna teorema vezana za strukturu polugrupe. Kako je Dijagonalna teorema moćno sredstvo u dokazima teorema matematičke analize, to će nam prethodno konstatovana činjenica poslužiti osnovnom cilju--uvodjenju uopštenja nekih objekata funkcionalne analize i teorije mere u polugrupu. Glavne karakteristike dokaza teorema izvedenih pomoću Dijagonalne teoreme (u raznim oblicima) bi bile:

1) Jedinstvenost. Pomoću jedne teoreme se dokazuju fundamentalne teoreme raznih grana matematičke analize. Na taj način se objedinjuju i uniformizuju razne teorije matematičke analize.

2) Elementarnost dokaza. Može se reći da su dokazi klasičnih teorema izvedenih pomoću Dijagonalne teoreme jednostavniji, kraći i zahtevaju elementarniji matematički aparat u odnosu na klasične dokaze. Istina, ovde treba napomenuti da je ovakvo tvrdjenje izrečeno u odnosu na dokaze teorema iz monografija G.Köthe-a [38], N.Dun-

ford-a, J.Schwartz-a [30]. Kako se danas ove monografije smatraju udžbenicima za odredjene oblasti matematičke analize,to se ovakvo tvrdjenje može prihvatiti. Tako sam neke teoreme dokazane pomoću Dijagonalne teoreme uneo i u moju zbirku zadataka [68] str. 267-276 namenjenu studentima matematike.

3) Generalizacija. Dokazi izvedeni sa Dijagonalnom teoremom baš zbog korišćenja samo datih, najneophodnijih pojmova jasnije ukazuju na suštinu problema, te omogućavaju odbacivanje nepotrebnih pretpostavki i tako daju dalja uopštenja već poznatih fundamentalnih stavova (P. Antosik [9] , [11] , [10] , [14] , J.Mikusiński [54]).

U poglavlju 1.1 dat je kratak pregled razvoja Dijagonalne teoreme i njene primene. Izmedju ostalog sadrži i moje rezultate iz rada [66] - Dijagonalne teoreme 1.1.4 , 1.1.5 i lemu 1.1.1 , te teoreme 1.1.6 i 1.1.7 iz rada P.Antosika [14] . Navedeni rezultati će biti od važnosti u sledećim poglavljima prve glave. Dijagonalne teoreme 1.1.4 i 1.1.5 sam formulisao nad polugrupom u kojoj operacija nije neprekidna u opštem slučaju u odnosu na indukovanu topologiju funkcionelom f. Slično je, kasnije, postupio i P.Antosik u teoremi 1.1.6 vezujući se za polugrupu u kojoj je operacija samo parcijalno neprekidna.

Poglavlje 1.2 predstavlja primenu moje Dijagonalne teoreme 1.1.4 u funkcionalnoj analizi. Teoreme 1.2.1, 1.2.3, 1.2.4 sam dobio u saradnji sa dr O.Hadžić [67] , dok je teorema 1.2.2 moje uopštenje ranijeg zajedničkog rezultata [67].

U poglavlju 1.3 uopštavam prostor nizova i dokazujem teoremu 1.3.1 o ograničenosti niza temp. nizova.

U poglavlju 1.4 uopštavam pojam funkcionele f (kvazi-norme) nad polugrupom iz mog rada [66] , što ću iskoristiti u poglavljima 1.7 i 1.8.

Poglavlje 1.5 predstavlja kratak pregled problematike skupovnih funkcija .

U poglavlju 1.6 prenosim delove teorije P.Antosika [14] na specijalne mreže i izvodim svoje teoreme 1.6.1, 1.6.2, 1.6.3 , 1.6.4 .

Poglavlje 1.7 je prilog teoriji u opštem slučaju ne-aditivnih skupovnih funkcija, sa mojim teoremama 1.7.1 i 1.7.2 .

U poglavlju 1.8 razmatram višeznačne skupovne funkcije sa vrednostima u polugrupi, te dokazujem teoreme 1.8.1 i 1. 82 .

U poglavlju 1.9 izvodim opštu teoremu 1.9.2, da bih u poglavlju 1.10 dao njenu primenu.

1.1 Dijagonalne teoreme

Iako je nastanak Dijagonalne teoreme vezan za 1969 godinu u radu [48] J.Mikusińskog, već danas se može reći da je Dijagonalna teorema postala značajan činilac savremene matematike, pre svega funkcionalne analize i teorije mere. Dijagonalna teorema (u raznim oblicima – – J.Mikusiński [48] , P.Antosik [9] , [10] , [14] i moj rad [66])omogućava objedinjavanje raznorodnih a toliko značajnih teorema matematičke analize.

Koreni Dijagonalne teoreme vezani su za metodu "klizajuće grbe" (eng. sliding hump) , koja se primenjivala pre pojave Dijagonalne teoreme. Tehniku "klizajuće grbe" dali su H.Lebesgue i O.Toeplitz (vid. F.Hausdorff [32]) .

Navešćemo ukratko dosadašnje formulacije Dijagonalne teoreme i primene tih teorema. Detaljan pregled razvoja i primene Dijagonalne teoreme može se naći u mom magistarskom radu [64] i mome ekspozitornom članku [65] .

J.Mikusiński je uveo Dijagonalnu teoremu u radu[48].

Sa N ćemo označiti skup prirodnih brojeva.

DIJAGONALNA TEOREMA 1.1.1. Neka je B Banach-ov prostor sa normom $| \ |$. Ako je

$$x_{ij} \in B \ (i,j \in N) , \quad |x_{ii}| > m > 0 \quad \text{i}$$

$$\lim_{j\to\infty} x_{ij} = 0 \quad \text{za svako } i = 1,2,\ldots ,$$

tada postoji beskonačan skup I pozitivnih celih brojeva i podskup $J \subset I$ takvi, da je za svako $i \in I$

$$\sum_{j\in J} | x_{ij}| < \infty$$

$$\left| \sum_{j\in J} x_{ij} \right| > \frac{m}{2} \qquad .$$

Ova teorema je J.Mikusińskom omogućila da u istom radu [48] lako dokaže: Banach-Steinhausovu teoremu (J. Mikusiński,J.K.Brooks [50]) i dva stava iz teorije mere Nikodymov i Vitali-Hahn-Saksov.: o tačkastoj konvergenciji prebrojivo aditivnih odnosno ν -neprekidnih mera (N.Dunford,J.Schwartz [30] , S.Saks [72] , G.Vitali [79] , O.M.Nikodym [59]) .

Drugi poljski matematičar P.Antosik prihvatio je osnovnu ideju J.Mikusińskog i uspeo da u radu [9] prenese Dijagonalnu teoremu na abelovu grupu (G,+) sa kvazi-normom $|x|$, tj. funkcijom $G \to R$ (realni brojevi) za koju važi:

$$(N_1) \quad |0| = 0 \quad ,$$

$$(N_2) \quad |-x| = |x| \quad ,$$

$$(N_3) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad ,$$

gde je 0 neutralni elemenat grupe G.

DIJAGONALNA TEOREMA 1.1.2. <u>Ako $x_{ij} \in G$ $(i,j \in N)$ i $\lim_{j\to\infty} x_{ij} = 0$ za $i = 1,2,\ldots$, tada postoji beskonačan skup pozitivnih celih brojeva I i njegov podskup J takvi</u>, <u>da za svako $i \in I$ važi</u>

$$\sum_{j\in J} |x_{ij}| < \infty$$

$$\left| \sum_{j\in J} x_{ij} \right| \geq \frac{1}{2} |x_{ii}| \quad .$$

Uzima se da je

$$\left| \sum_{j\in J} x_{ij} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{j\in J_n} x_{ij} \right| \quad ,$$

gde su J_n konačni podskupovi od J takvi da je $\lim_{n\to\infty} J_n = J$.

U istom radu [9] P.Antosik je dokazao pomoću Dijagonalne teoreme 1.1.2 stav o podjednakoj neprekidnosti kolekcije linearnih neprekidnih preslikavanja (G.Köthe [38]) i stav o ekvivalentnosti slabe i jake ograničenosti temperiranih vektora (J.Mikusiński [51]).Koristeći Dijagonalnu teoremu 1.1.2 J.Mikusiński [54] je dobio opštiji Nikodymov stav o uniformnoj ograničenosti familije prebrojivo aditivnih mera od onog iz monografije N.Dunforda, J.Schwartza[30], str. 336-337.

P.Antosik uopštava u radu [10] dalje Dijagonalnu teoremu na topološku grupu (vid. N.Bourbaki[19]). Zato su nejednakosti iz ranijih formulacija Dijagonalne teoreme zamenjene pripadanjem nekim zatvorenim ili otvorenim skupovima.

DIJAGONALNA TEOREMA 1.1.3. <u>Neka je G aditivna topološka grupa, neka su $V_i \subset G$ ($i \in N$) otvoreni skupovi i neka $x_{ij} \in G$ $(i,j \in N)$. Ako, za svako $i \in N$, važi</u>

$$x_{ii} \notin \bar{V}_i \quad (\bar{V}_i \text{ je adherencija za } V_i) ,$$

$$V_i + x_{ii} \subset G \setminus V_i \quad ,$$

$$x_{ij} \to 0 \quad \text{kada } j \to \infty \quad ,$$

<u>tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i konačni skupovi $J_n \subset I$ $(n \in N)$ takvi da je</u>

1. $J_{n+1} = J_n \cup K_n$, <u>gde je K_n ili prazan skup ili sadrži samo jedan elemenat koji je veći od elemenata iz J_n</u>,

2. <u>za svako $i \in I$ važi</u>

$$\sum_{j \in J_n} x_{ij} \notin V_i$$

<u>za dovoljno veliko n</u>.

P.Antosik je iskoristio svoju Dijagonalnu teoremu 1.1.3 i dobio vrlo opšte teoreme iz funkcionalne analize [12] i teorije mere [11] . Koristeći pojam L-grupe vezane za konvergentne prostore (A.R.Bednarek, J.Mikusiński [15]), koji je opštiji od topološke grupe, P.Antosik dobija uopštenja teorema ranije dokazanih sa Dijagonalnim teoremama

1.1.1 i 1.1.2 . U radu [12] P.Antosik je izveo i opštu teoremu tipa Orlicz-Pettisa za bezuslovnu konvergenciju (eng. unconditional convergence) - J.K.Brooks i J.Mikusiński[50] ,W.Orlicz [61] , B.J.Pettis [69] .

U mome radu [66] uopštio sam Dijagonalnu teoremu 1.1.2 na polugrupu $(X,*)$ sa funkcionelom $f: X \to R$ koja zadovoljava uslove

$$(f_1) \quad f(x * y) \leq f(x) + f(y) \quad ;$$

$$(f_2) \quad f(x * y) \geq |f(x) - f(y)| \quad .$$

Uslovi (f_1) i (f_2) su nezavisni. Prvo ćemo navesti primer za koji važi (f_1) a ne važi (f_2): $X = N$, + uobičajna operacija i

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , x \in N \ .$$

Primer za koji važi (f_2) a ne važi (f_1): $X = N$, + uobičajna operacija i

$$f(x) = x - 1 \quad , x \in N \ .$$

Dalje, važi:

Funkcionela f definisana nad X tako da važe (f_i) $i = 1,2$ je ne-negativna za svako $x \in X$. To sledi iz

$$f(x) + f(y) \geq f(x * y) \geq |f(x) - f(y)| \ .$$

Stavimo li $x = y$, dobijamo

$$2 f(x) \geq f(x) - f(x) = 0 \ .$$

PRIMEDBA 1.1.1. Ako je X polugrupa sa neutralnim elementom e tada se za funkcionelu f može još zahtevati i

$$(f_3) \qquad f(e) = 0 \quad .$$

U tom slučaju su aksiomi (f_i) $i = 1,2,3$ i (N_k) $k = 1,2,3$

ekvivalentni nad abelovom grupom $(G,+)$.Dokazaćemo samo netrivijalni deo : (f_i) $i=1,2,3 \Rightarrow (N_2)$. Iz (f_2) sledi

$$f(\ x+(-x)\ ) \geqslant |f(x)-f(-x)| \geqslant f(x)-f(-x) \quad ,$$

tj. $\qquad f(0) \geqslant f(x)-f(-x) \quad .$

Na osnovu (f_3) dobijamo

$$0 \geqslant f(x)-f(-x) \quad , \text{ tj. } \ f(-x) \geqslant f(x) \quad .$$

Izmenimo li mesta za x i $-x$, dobijamo $f(x) \geqslant f(-x)$.

Neka je

$$d(x,y) = |f(x)-f(y)| \quad .$$

Tada je lako videti da važi

1. $d(x,x) = 0$;

2. $d(x,y) = d(y,x)$;

3. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

za svako $x,y,z \in X$.Tako funkcionela $d(x,y)$ indukuje topologiju u X (vid. J.Kelly [37]) , koja nije Hausdorffova.

Funkcionela $f(x)$ je neprekidna u ovoj topologiji. U opštem slučaju operacija $*$ u polugrupi nije neprekidna. Jedan kontraprimer: Neka je $(Z,+)$ abelova grupa celih brojeva i $f(x) = |x|$ (apsolutna vrednost od x). Niz $\{1\}$ konvergira ka 1 kada $n \to \infty$ u topologiji indukovanoj sa $d(x,y)$. Tada i niz $\{-1\}$ konvergira ka 1 kada $n \to \infty$, jer je $|1| = |-1|$ .Ako bi operacija u Z bila neprekidna, tada bi za svako $\varepsilon > 0$ postojalo $n_0(\varepsilon)$ tako da je

$$\varepsilon > \big|\,|1+(-1)| - |1+1|\,\big| = |1+1| = 2$$

za $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, što je nemoguće.

Biće nam potrebna sledeća

LEMA 1.1.1. U $(X,*)$ važi

(1.1.1) $$|f(x*y)-f(x)| \leqslant f(y)$$

za sve $x,y \in X$.

Dokaz. Može biti ili $f(x*y)-f(x) \geqslant 0$ ili $f(x*y)-f(x) < 0$.

U prvom slučaju imamo

$$f(x*y)-f(x) \leqslant f(x)+f(y)-f(x) = f(y),$$

na osnovu (f_1).

U drugom slučaju imamo

$$|f(x*y)-f(x)| = f(x)-f(x*y)$$

$$\leqslant f(x)-(f(x)-f(y)) = f(y),$$

na osnovu (f_2).

DIJAGONALNA TEOREMA 1.1.4. Neka je $(X,*)$ polugrupa sa funkcionelom f.

Ako $x_{ij} \in X$ $(i,j \in N)$ i $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{ij}) = 0$ za $i=1,2,\ldots,$ tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i podskup J (konačan ili beskonačan) od I takvi, da je za sve $i \in I$

(1.1.2) $$\sum_{j\in J} f(x_{ij}) < \infty$$

(1.1.3) $$f(\mathop{*}_{j\in J} x_{ij}) \geqslant \frac{1}{2} f(x_{ii}),$$

gde je

$$f(\mathop{*}_{j\in J} x_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f(\mathop{*}_{s=1}^{n} x_{ij_s})$$

a $\{j_s\}$ je rastući niz svih elemenata iz J, a

$$\mathop{*}_{k\in K} x_k = \mathop{*}_{k=1}^{n} x_k = x_1 * \ldots * x_n \quad i \quad K=\{1,2,\ldots,n\}.$$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da nejednakost (1.1.2) povlači egzistenciju $f(\underset{j\in J}{*} x_{ij})$. Na osnovu leme 1.1.1 imamo

$$\begin{aligned} \left| f\left(\overset{m}{\underset{s=1}{*}} x_{ij_s} * \overset{n}{\underset{s=m+1}{*}} x_{ij_s} \right) - f\left(\overset{m}{\underset{s=1}{*}} x_{ij_s} \right) \right| &\leqslant f\left(\overset{n}{\underset{s=m+1}{*}} x_{ij_s} \right) \\ &\leqslant \sum_{s=m+1}^{n} f(x_{ij_s}) \quad \text{za } n > m . \end{aligned}$$

Tada (1.1.2) povlači da je $\left\{ f\left(\overset{n}{\underset{s=1}{*}} x_{ij_s} \right) \right\}$ Cauchyev niz u skupu realnih brojeva, te zbog toga konvergentan.

Zamenjujući kvazi-normu $|\ |$ iz dokaza Dijagonalne teoreme 1.1.2 u radu P.Antosika [9] sa funkcionelom f, dobijamo dokaz Dijagonalne teoreme 1.1.4 .

PRIMEDBA 1.1.2. U slučaju abelove grupe Dijagonalna teorema 1.1.4 se svodi na Dijagonalnu teoremu 1.1.2. Mada se Dijagonalna teorema 1.1.3 može formulisati i nad topološkom polugrupom,Dijagonalna teorema 1.1.4 nije njena posledica jer u opštem slučaju operacija u polugrupi X ne mora biti neprekidna (primer (Z,+) sa $|x|$) .

Dijagonalnu teoremu 1.1.4 sam sa O.Hadžić iskoristio za dokaz jedne teoreme 1.2.1 u samoj polugrupi kao i njegovog integralnog analogona-teorema 1.2.4 u radu [67] , te dali njihovu primenu. Delovi rada [67] sa izvesnim generalizacijama biće izneti u poglavlju 1.1.2.

U radu [66] sam dao i uopštenje teoreme 1.1.4 vezano za blok-matrice.

Neka je K(X) skup svih nepraznih podskupova A skupa X koji imaju konačan broj elemenata.

Uvodimo operaciju $*$ u K(X)

$$A * B \stackrel{\text{def}}{=} \{ a * b \mid a \in A,\ b \in B \} \quad A,B \in K(X) \quad .$$

Koristićemo isti simbol $*$ za operacije u skupovima X i K(X).(K(X),$*$) je polugrupa.Uvodimo funkcionelu F

$$F(A) = \max_{x \in A} f(x) \qquad \text{za} \quad A \in K(X) \quad .$$

Očigledno da funkcionela F zadovoljava uslove (f_i) i=1,2 nad K(X).

DIJAGONALNA TEOREMA 1.1.5. Neka je $(X,*)$ polugrupa sa funkcionelom f.

Neka $x_{ks} \in X$ $(k,s \in N)$ i $\lim_{s \to \infty} f(x_{ks}) = 0$ za k=1,2,... . Matricu $[x_{ks}]_{k,s \in N}$ izdelimo na blokove A_{ij} $(i,j \in N)$ tako da u svim blokovima i-te blok-vrste bude isti broj vrsta matrice $[x_{ks}]_{k,s \in N}$ (za svako $i \in N$), i da bude beskonačno vrsta-blokova i kolona-blokova. Tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i njegov podskup J (konačan ili beskonačan) takvi, da je za svako $i \in I$

$$\sum_{j \in J} f(x^s_{ij}) < \infty$$

$$f\Big(\mathop{*}_{j \in J} x'_{ij} \Big) \geqslant \frac{1}{2} f(x^o_{ii}) \quad ,$$

gde je: $f(x^o_{ij}) = \max_{x \in A} f(x)$, $x^o_{ij} \in A_{ij}$; x^s_{ij} je ma koji elemenat iz A_{ij} ; x'_{ij} je ma koji elemenat iz A_{ij}, možda osim jednog (za fiksno i) $x^o_{ii} \in A_{ii}$.

Definicija $f\big(\mathop{*}_{j \in J} x^s_{ij} \big)$ je ista kao u Dijagonalnoj teoremi 1.1.4 .

Dokaz. Egzistencija izraza $f\big(\mathop{*}_{j \in J} x'_{ij} \big)$ se dokazuje isto kao u Dijagonalnoj teoremi 1.1.4 .

Blokove A_{ij} $(i,j \in N)$ matrice $[x_{ks}]_{k,s\in N}$ posmatraćemo kao podskupove od X .

Prvo ćemo dokazati da blokovi A_{ij} imaju konačan broj elemenata. Skup prirodnih brojeva se ne može podeliti na dva beskonačna skupa tako da se očuva poredak brojeva, jer je $\omega + \omega > \omega$ (gde je ω ordinalni broj za N, W.Sierpiński[76]). Isto tako, posle beskonačnog podskupa od N ne može doći konačan podskup ($\omega + n > \omega$). Izdelimo sada skup N na beskonačno podskupova tako da očuvamo poredak od N. Dobijeni podskupovi moraju imati konačan broj elemenata. Pretpostavimo suprotno, tj. da posle izvesnog broja konačnih podskupova naidjemo na beskonačan podskup (posle ovog skupa nema nijedan podskup od N).Tada je broj konačnih podskupova konačan (jer je $\omega + \omega \neq \omega$) , pa je i ukupan broj podskupova konačan , što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.Primenimo li prethodno konstatovanu činjenicu na vrste i kolone matrice $[x_{ks}]_{k,s\in N}$, dobijamo da svaki od blokova A_{ij} $(i,j\in N)$ sadrži konačan broj elemenata. Tako imamo $A_{ij} \in K(X)$ za $i,j \in N$ i

$$F(A_{ij}) = \max_{x\in A_{ij}} f(x) = f(x^{o}_{ij}) \ , \ x^{o}_{ij} \in A_{ij} \ \text{za} \ i,j\in N.$$

Iz

$$\lim_{s\to\infty} f(x_{ks}) = 0 \quad \text{za} \quad k = 1,2,\ldots \ \text{sledi}$$

$$\lim_{j\to\infty} F(A_{ij}) = 0 \quad \text{za} \ i = 1,2,\ldots \ ,$$

jer su A_{ij} $(i,j\in N)$ blokovi sa konačnim brojem elemenata i sadrže iste vrste matrice $[x_{ks}]_{k,s\in N}$ (za fiksno i).

Sada možemo pretpostaviti da ako je J konačan podskup od N takav, da je za svako $i \in J$

$$f\Big(\mathop{*}_{j\in J} x^{s}_{ij}\Big) \geqslant \frac{1}{2} f(x^{o}_{ii}) ,$$

tada postoji pozitivan ceo broj r veći od svakog elementa iz J takav da je

$$f\Big(\mathop{*}_{j\in J} x^{s}_{ij}\Big) \leqslant \max_{x_{ij}\in A_{ij},\, j\in J} f\Big(\mathop{*}_{j\in J} x_{ij}\Big) < \frac{1}{2} f(x^{o}_{ii})$$

tj.

$$F\Big(\mathop{*}_{j\in J} A_{ij}\Big) < \frac{1}{2} F(A_{ii})$$

za $i > r$. U suprotnom, teorema je trivijalno zadovoljena.

Na osnovu ove dodatne pretpostavke, možemo odabrati rastući niz $i_1, i_2, \ldots$ pozitivnih celih brojeva kao u dokazu Dijagonalne teoreme 1.1.2 u radu P.Antosika [9] (zamenjujući kvazi-normu $|\ |$ sa F). Tako dobijamo egzistenciju za $\sum_{j\in J} f(x^{s}_{ij})$ i drugi deo teoreme iz

$$f\Big(\mathop{*}_{k=1}^{\infty} x'_{i_n i_k}\Big) \geqslant F(A_{i_n i_n}) - F\Big(\mathop{*}_{k=1}^{n-1} A_{i_n i_k}\Big) - \sum_{k=n+1}^{\infty} F(A_{i_n i_k}) ,$$

za $n = 1,2,\ldots$ $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$ i $J = I$ .Time je dokaz Dijagonalne teoreme 1.1.5 završen.

PRIMEDBA 1.1.3. Dijagonalna teorema 1.1.5 je uopštenje Dijagonalne teoreme 1.1.4 jer elementi u $f\Big(\mathop{*}_{j\in J} x'_{ij_s}\Big)$ ne moraju biti iz iste vrste matrice $[x_{ks}]$ $k,s \in N$.

P.Antosik u svom radu [14] proučava aditivne skupovne funkcije nad σ-prstenom R' skupova (za svaki niz $\{A_n\} \subset R'$ važi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R'$ i $A \setminus B \in R'$ za $A,B \in R'$) snabdevenog specijalnom konvergencijom a sa vrednostima u semi-topološkoj polugrupi i komutativnoj grupi, kao i u topološkoj grupi.

Kolekcija C nizova iz R' je (bezuslovna) konvergencija ako važi:

(i) Ako je niz $\{E_n\}$ disjunktan ($E_n \cap E_m = \emptyset$ za $n \neq m$ i $n,m \in N$), tada za svaki disjunktan niz $\{M_n\} \subset P(N)$ (P(N) je partitivni skup od N), niz $\{\bigcup_{j\in M_n} E_j\} \in C$.

(ii) Ako je niz $\{E_n\}$ u C, tada je za svako fiksno $m \in N$, niz $E_m \cap \bigcup_{i=n+m}^{\infty} E_i$ za n =1,2,... u C.

(iii) Ako $\{E_n\} \in C$ i $\{F_n\}$ je disjunktan niz u R', tada $\{E_n \cap F_n\} \in C$.

(iv) Ako $\{E_n\} \in C$, tada $\{E_{m_n}\} \in C$.

P.Antosik je uslovima (i)-(iv) izdvojio najvažnije kolekcije nizova skupova iz teorije mere, odnosno skupovnih funkcija.Specijalna konvergencija je tako kolekcija C_o svih disjunktnih nizova iz R'.

X' je semi-topološka polugrupa sa neutralnim elementom 0, tj. operacija u polugrupi $(x,y) \to x + y$ je neprekidna po svakoj promenljivoj posebno. Skupovna funkcija $\mu : R' \to X'$ je C-neprekidna ako za svako $\{E_n\} \in C$ važi $\mu(E_n) \to 0$ u X' kada $n \to \infty$. μ je aditivno ako je

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{za } A \cap B = \emptyset \text{ i } A,B \in R'.$$

Sa $(R'C, X')$ je označen skup svih skupovnih aditivnih C-neprekidnih funkcija.

Za specijalni δ-prsten skupova P(N) važi (P.Antosik [14])

DIJAGONALNA TEOREMA 1.1.6. <u>Neka $\mu_i \in (P(N)C_0, X')$ (i $\in$ N), i neka su V_i (i $\in$ N) otvorene okoline O u X'. Ako za svako i $\in$ N važi</u>

$$(1.1.4) \qquad (\mu_i(i) + V_i) \cap V_i = \emptyset ,$$

<u>tada postoji beskonačan skup I $\subset$ N i skup J $\subset$ I takvi da</u>

$$(1.1.5) \qquad \mu_i(J) \notin V_i$$

<u>za svako i $\in$ I.</u>

Kada je G' semi-topološka komutativna grupa (tj. osim neprekidnosti operacije u grupi $(x,y) \to x + y$ po svakoj promenljivoj posebno, još je i $x \to -x$ neprekidno) tada važi (P.Antosik [14]):

DIJAGONALNA TEOREMA 1.1.7. <u>Neka $\mu_i \in (R'C, G')$ (i $\in$ N), neka su V_i (i $\in$ N) simetrične otvorene okoline i $\{E_i\} \in$ C . Ako, za svako i $\in$ N važi</u>

$$(1.1.6) \qquad (\mu_i(E_i) + 3V_i) \cap 2V_i = \emptyset ,$$

<u>tada postoji beskonačan skup I $\subset$ N i skup E $\in$ R' takvi da</u>

$$(1.1.7) \qquad \mu_i(E) \notin V_i \qquad \text{za svako } i \in I.$$

Zadnja teorema je P.Antosiku [14] osnovno sredstvo u dokazivanju opštih teorema za aditivne skupovne funkcije vezane za uniformnu ograničenost familije funkcija, zatvorenost podprostora skupovnih funkcija u odnosu na tačkastu konvergenciju, kao i uopštenje Shur-ove leme.

1.2 Neke primene Dijagonalne teoreme 1.1.4 u funkcionalnoj analizi

U ovom poglavlju ćemo iskoristiti Dijagonalnu teoremu 1.1.4 za dokaz nekih teorema iz funkcionalne analize. Deo ovih rezultata je sadržan u zajedničkom radu [67] sa O.Hadžić. Teorema 1.2.1 je vezana za polugrupu $(X, *)$ sa funkcionelom f (poglavlje 1.1) i predstavlja osnovno sredstvo u dokazu uopštene Shurove leme - teorema 1.2.2. Teorema 1.2.3 je vezana za dualni prostor Banachovog prostora. Teorema 1.2.4 je integralna verzija teoreme 1.2.1 i može se iskoristiti za dokaz teoreme analognu Shurovoj lemi za Lebesgue integrabilne funkcije.

TEOREMA 1.2.1. *Neka je $(X, *)$ polugrupa sa funkcionelom f (poglavlje 1.1).*

Neka $a_{nk} \in X$ $(n,k \in N)$ tako da je

$$(1.2.1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(a_{nk}) < \infty \qquad \text{za } k = 1,2,\ldots \, .$$

Ako postoji rastući niz prirodnih brojeva $\{k_i\}$ i niz konačnih skupova prirodnih brojeva $\{S_i\}_{i \in N}$ za koje je $\max_{s \in S_i} s < \min_{s \in S_{i+1}} s$ za $i = 1,2,\ldots$, da za neko $\varepsilon > 0$ važi

$$(1.2.2) \qquad f\Big(\mathop{*}_{n \in S_i} a_{nk_i} \Big) > \varepsilon$$

za $i = 1,2,\ldots$, tada postoji beskonačan skup

$I \subset N$ i skup $S \subset N$ tako da je za svako $i \in I$

$$(1.2.3) \qquad f\Big(\mathop{*}_{n \in S} a_{nk_i} \Big) > \frac{\varepsilon}{2} .$$

Objašnjenje:

$$f\Big(\mathop{*}_{n \in S} a_{nk_i} \Big) = \lim_{m \to \infty} f\Big(\mathop{*}_{s=1}^{m} a_{n_s k_i} \Big)$$

a $\{ n_s \}$ je rastući niz svih elemenata iz S.

PRIMEDBA 1.2.1. Nadalje ćemo podrazumevati da je u izrazu

$$\mathop{*}_{k \in K} x_k ,$$

gde je K konačan podskup od N, redosled operacija po rastućim indeksima iz K.

Dokaz teoreme 1.2.1. Neka je

$$x_{ij} = \mathop{*}_{n \in S_j} a_{nk_i} .$$

Kako numerički redovi $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_{nk})$ ($k = 1,2,\dots$) konvergiraju, to je zadovoljen Cauchy-ev uslov, tj. za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$ postoji $N_i(\varepsilon_1)$ da je

$$(1.2.4) \qquad \sum_{n=n'}^{m} f(a_{nk_i}) < \varepsilon_1 \quad \text{za} \quad n', m > N_i(\varepsilon_1)$$

i za $i = 1,2,\dots$. Kako je funkcionela f nenegativna i zadovoljava uslov (f_1), to je

$$\sum_{n=n_j}^{m_j} f(a_{nk_i}) \geqslant \sum_{n \in S_j} f(a_{nk_i}) \geqslant f\Big(\mathop{*}_{n \in S_j} a_{nk_i} \Big),$$

gde je $n_j = \min\limits_{s \in S_j} s$ a $m_j = \max\limits_{s \in S_j} s$. Na osnovu (1.2.4) je tada

$$f(\mathop{*}_{n\in S_j} a_{nk_i}) < \varepsilon_1 \quad \text{za} \quad j \geqslant j(i),$$

$n_{j(i)} > N_i(\varepsilon_1)$. To znači da je

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{ij}) = 0 \quad \text{za} \quad i = 1,2,\ldots \quad .$$

Odatle, na osnovu Dijagonalne teoreme 1.1.4 sledi egzistencija skupa pozitivnih celih brojeva I i njegovog podskupa J, da je za svako $i \in I$

$$(1.2.5) \qquad f(\mathop{*}_{j\in J} (\mathop{*}_{n\in S_j} a_{nk_i})) \geqslant \frac{1}{2} f(\mathop{*}_{n\in S_i} a_{nk_i}),$$

gde je

$$f(\mathop{*}_{j\in J} (\mathop{*}_{n\in S_j} a_{nk_i})) = \lim_{n\to\infty} f(\mathop{*}_{s=1}^{n} (\mathop{*}_{n\in S_{j_s}} a_{nk_i})),$$

a $\{j_s\}$ je rastući niz svih elemenata iz J. Granica sa desne strane prethodne jednakosti postoji na osnovu Dijagonalne teoreme 1.1.4 . Pokazaćemo sada egzistenciju izraza sa desne strane sledeće jednakosti, kao i samu jednakost. Naime, za $i \in I$ važi

$$f(\mathop{*}_{j\in J} (\mathop{*}_{n\in S_j} a_{nk_i})) = f(\mathop{*}_{n\in S} a_{nk_i}) ,$$

gde je $S = \bigcup_{j\in J} S_j$. Dokazujemo za slučaj kada je J beskonačno. U slučaju kada je J konačno , prethodna jednakost je trivijalno zadovoljena.

Neka je $\{r_m\}_{m\in N} = \bigcup_{j\in J} S_j$. Prvo ćemo pokazati egzistenciju granice

$$\lim_{t \to \infty} f\left(\mathop{*}_{m=1}^{t} a_{r_m k_i} \right) = f\left(\mathop{*}_{n \in S} a_{nk_i} \right) \text{ za } i \in I \;.$$

Na osnovu nejednakosti (1.1.1)

$$\left| f(x * y) - f(x) \right| \leqslant f(y) \quad \text{za} \quad x,y \in X$$

i (1.2.4) sledi da je za $i \in I$ i proizvoljno $\varepsilon' > 0$

$$\left| f\left(\mathop{*}_{m=1}^{u} a_{r_m k_i} \right) - f\left(\mathop{*}_{m=1}^{v} a_{r_m k_i} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant f\left(\mathop{*}_{m=v+1}^{u} a_{r_m k_i} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=v}^{u} f(a_{r_m k_i}) < \varepsilon'$$

za $u > v \geqslant N_i(\varepsilon')$. To znači da je $\left\{ f\left(\mathop{*}_{m=1}^{n} a_{r_m k_i} \right) \right\}$ za $n \in N$ Cauchy-ev niz u prostoru realnih brojeva za $i \in I$, pa time i konvergentan niz.

Niz

$$\left\{ f\left(\mathop{*}_{s=1}^{n} \left(\mathop{*}_{n \in S_{j_s}} a_{nk_i} \right) \right) \right\} \quad n \in N$$

je podniz realnog konvergentnog niza

$$\left\{ f\left(\mathop{*}_{m=1}^{v} a_{r_m k_i} \right) \right\} \quad v \in N \qquad ,$$

pa je i on konvergentan i sa istom granicom

$$f\left(\mathop{*}_{n \in S} a_{nk_i} \right) \qquad \text{za} \quad i \in I \;.$$

Zato, ako u (1.2.5) uvrstimo (1.2.2) dobijamo (1.2.3). Time je dokaz teoreme 1.2.1 završen.

Prethodnu teoremu 1.2.1 ćemo iskoristiti za dokaz uopštene Shurove leme za specijalne polugrupe, što će biti opštiji rezultat od onog iz zajedničkog rada sa O.Hadžić [67] , gde smo teoremu formulisali nad Banachovim prostorom.

Prvo, potrebna nam je sledeća

DEFINICIJA 1.2.1. Konstanta Macphaila M(X) za polugrupu $(X,*)$ sa funkcionelom f je supremum realnih brojeva M , takvih da za svaku konačnu familiju elemenata $x_i \in X$ $(i \in I)$ postoji podskup $J \subset I$ da važi

$$M \sum_{i\in I} f(x_i) \leqslant f\Big(\mathop{*}_{i\in J} x_i\Big) \quad .$$

Sada možemo formulisati uopštenje Shurove leme.

TEOREMA 1.2.2. Neka je $(X,*)$ polugrupa sa funkcionelom f i pozitivnom konstantom Macphaila M(X), $a_{nk} \in X$ $(n,k \in N)$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_{nk}) < \infty \qquad \text{za} \quad k=1,2,\ldots \quad .$$

Ako za svaki podskup $S \subset N$ važi

$$\lim_{k\to\infty} f\Big(\mathop{*}_{n\in S} a_{nk}\Big) = 0$$

(za slučaj kada je S beskonačno videti objašnjenje na kraju teoreme 1.2.1), tada je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} f(a_{nk}) = 0 \quad .$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} f(a_{nk}) \neq 0 \quad .$$

Tada postoji $\varepsilon > 0$ i dva rastuća niza prirodnih brojeva $\{p_i\}_{i\in N}$ i $\{q_i\}_{i\in N}$ tako da je

$$\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} f(a_{nk_{q_i}}) > \varepsilon$$

za $i = 1,2,\ldots$. Odatle sledi

$$f(\underset{n\in S_i}{*} a_{nk_{q_i}}) \geqslant M \cdot \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} f(a_{nk_{q_i}}) > M \cdot \varepsilon > 0$$

za $i = 1,2,\ldots$, gde je $M(X)$ Macphail-ova konstanta za X, a

$$S_i \subset \{p_i + 1, \ldots , p_{i+1}\} \quad .$$

Tada, na osnovu teoreme 1.2.1 postoji beskonačan skup $I \subset N$ i skup $S \subset N$ tako da je za svako $i \in I$

$$f(\underset{n\in S}{*} a_{nk_{q_i}}) > \frac{M}{2} \varepsilon > 0 \quad ,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkama teoreme.

Daćemo sada jedno uopštenje konvergencije niza iz prostora l_1 ka 0 (G.Köthe [38]). Pritom ćemo u dokazu koristiti teoremu 1.2.1 .

TEOREMA 1.2.3. <u>Neka je B Banachov prostor a B′dualni prostor od B. Neka</u> $a_{nk} \in$ <u>B $(n,k \in N)$ i</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| a_{nk} \| < \infty \quad \text{za } k = 1,2,\dots \quad .$$

Ako je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a_{nk}) = 0$$

za svako $(f_1,f_2, \dots) \in \prod_1^{\infty} B'$, $\| f_n \|_{B'} = 0$ ili 1

i

$$\lim_{k\to\infty} \| a_{nk} \| = 0 \quad \text{za} \quad n = 1,2,\dots \quad ,$$

tada je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \| a_{nk} \| = 0 \quad .$$

Dokaz. Ako bi bilo

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} \| a_{nk} \| \neq 0 ,$$

tada bi postojalo $\varepsilon > 0$ i niz prirodnih brojeva $\{k_i\}$ $i \in N$ tako da je

$$(1.2.6) \qquad \sum_{n\in N} \| a_{nk_i} \| \geq \varepsilon \text{ za } \; i = 1,2,\dots \quad .$$

Postupićemo slično kao i u [38], str. 281 , birajući $N_1 \in N$ tako da je

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} \| a_{nk_1} \| < \frac{\varepsilon}{5} \quad .$$

Tada je zbog (1.2.6)

$$\sum_{n=1}^{N_1} \| a_{nk_1} \| > \frac{4}{5} \varepsilon \quad .$$

Odredimo f_n za $n = 1, \dots ,N_1$ da je

$$f_n(a_{nk_1}) = \| a_{nk_1} \| \quad \text{i} \quad \| f_n \|_{B'} = 1$$

(na osnovu direktne posledice Hahn-Banach-ove teoreme- - vid. na pr. S.Aljančić [5] str. 224) .

Neka je k_{j_2} ($j_1 = 1$) takvo da je

$$\sum_{n=1}^{N_1} \| a_{nk_{j_2}} \| < \frac{1}{5} \varepsilon \qquad .$$

Odredimo $N_2 > N_1$ tako da je

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty} \| a_{nk_{j_2}} \| < \frac{1}{5} \varepsilon \qquad .$$

Tada je

$$\sum_{n=1}^{N_2} \| a_{nk_{j_2}} \| > \frac{4}{5} \varepsilon \qquad , \text{ pa je}$$

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} \| a_{nk_{j_2}} \| > \frac{3}{5} \varepsilon \qquad .$$

Odredimo f_n za $n = N_1 + 1, \dots , N_2$ da je

$$f_n(a_{nk_{j_2}}) = \| a_{nk_{j_2}} \| \quad \text{i} \quad \| f_n \|_{B'} = 1 \ .$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$\sum_{n=N_{s-1}+1}^{N_s} f_n(a_{nk_{j_s}}) = \sum_{n=N_{s-1}+1}^{N_s} \| a_{nk_{j_s}} \| > \frac{3}{5} \varepsilon$$

za $s = 1,2,\dots$ ($N_0 = 0$) .

Sada na osnovu teoreme 1.2.1 sledi da postoji beskonačan skup $I \subset N$ i skup $S \subset N$ tako da je za svako $i \in I$

$$\left| \sum_{n \in S} f_n(a_{nk_{j_i}}) \right| > \frac{3}{10} \varepsilon ,$$

što je suprotno pretpostavci teoreme.

Daćemo na kraju integralni analogon teoreme 1.2.1 . Koristićemo integral u smislu Bochner-a (vid. na pr. Hille- Philips [33]) , koji je uopštenje Lebesgue-ovog integrala na funkcije koje preslikavaju realnu pravu u Banach-ov prostor.

TEOREMA 1.2.4. <u>Neka je B Banach-ov prostor, $\{g_n(t)\}$ niz funkcija koje preslikavaju interval $[a, \infty)$ u B tako da je</u>

$$\int_a^{\infty} \| g_n(t) \| \, dt < +\infty \quad \text{za } n = 1,2,\ldots .$$

<u>Ako postoji rastući niz prirodnih brojeva $\{k_i\}_{i \in N}$ i niz ograničenih merljivih skupova $\{S_i\} \subset [a,\infty)$ za koje je</u>

$$\sup_{s \in S_i} s < \inf_{s \in S_{i+1}} s , \quad \inf_{s \in S_i} s \to \infty$$

<u>kada $i \to \infty$, te da za neko $\varepsilon > 0$ važi</u>

$$\left\| \int_{S_i} g_{k_i}(t) \, dt \right\| > \varepsilon$$

<u>za $i = 1,2,\ldots$, tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i merljiv skup $S \subset [a, \infty)$ tako da je za svako $i \in I$</u>

$$\left\| \int_S g_{k_i}(t)\, dt \right\| > \frac{1}{2}\varepsilon \quad .$$

Dokaz. Postupićemo slično kao i u teoremi 1.2.1 .

Uzmimo da je

$$x_{ij} = \int_{S_j} g_{k_i}(t)\, dt \quad .$$

Kako je

$$\int_a^{\infty} \| g_k(t) \| \, dt < \infty \qquad \text{za } k = 1,2,\ldots$$

i $\inf\limits_{s \in S_i} s \to \infty$ kada $i \to \infty$, to se lako može

pokazati da je $\lim\limits_{j \to \infty} x_{ij} = 0$ i $\| x_{ii} \| > \varepsilon$ za

$i = 1,2,\ldots$. Na osnovu Dijagonalne teoreme 1.1.2 postoji beskonačan skup $I \subset N$ i podskup $J \subset I$ da je za $i \in I$

$$\left\| \sum_{j \in J} \left(\int_{S_j} g_{k_i}(t)\, dt \right) \right\| = \left\| \int_{\bigcup\limits_{j \in J} S_j} g_{k_i}(t)\, dt \right\| > \frac{1}{2}\varepsilon \ ,$$

jer je

$$S_i \cap S_j = \emptyset \ (i \neq j) \quad \text{i} \quad \bigcup_{j \in J} S_j \quad \text{je}$$

merljiv skup. Time je završen dokaz teoreme 1.2.4 .

Pomoću prethodne teoreme 1.2.4 se može dobiti već poznata integralna verzija Shur-ove leme (u prostoru funkcija $L^1_{[a,\infty)}$, na pr. monografija [83]).

1.3 Uopšteni prostor nizova i teorema o ograničenosti

U monografiji P.Antosika, J.Mikusińskog, R.Sikorskog [13] izložen je deo teorije prostora nizova (vid. i G.Köthe [38]) vezan za normirani vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Tako razvijena teorija se pokazala vrlo korisnom u teoriji distribucija [13] , B. Stanković [75] .

U ovom poglavlju ću preneti glavni rezultat P.Antosika [9] , dat i u [13] , o ekvivalentnosti jake i slabe ograničenosti temperiranih vektora , na semi-vektorski prostor sa specijalnom funkcionelom f , koristeći moju Dijagonalnu teoremu 1.1.4 . Glavni rezultat je sadržan u teoremi 1.3.1 .

Neka je (X, +) komutativna polugrupa sa neutralnim elementom $0'$. Sa R_+ ćemo obeležiti skup ne-negativnih realnih brojeva.

DEFINICIJA 1.3.1. <u>X je semi-vektorski prostor, ako je za svako $x \in X$ i svako $\alpha \in R_+$ definisan proizvod (spoljašnja operacija) $\alpha x \in X$ tako da važi</u>

1. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ za $\forall x,y \in X$, $\forall \alpha \in R_+$;

2. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta y$ za $\forall x \in X$, $\forall \alpha , \beta \in R_+$;

3. $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$ za $\forall x \in X$, $\forall \alpha , \beta \in R_+$;

4. $0 x = 0'$ za $\forall x \in X$;

5. $1\,x = x$ za $\forall x \in X$;

6. $\alpha\, 0' = 0'$ za $\forall \alpha \in R_+$.

PRIMEDBA 1.3.1. Uvedeni semi-vektorski prostor je uopštenje običnog vektorskog prostora nad poljem realnih brojeva R (S.Aljančić [5]) . Naime, u slučaju semi-vektorskog prostora X = G , gde je (G, +) abelova grupa, prirodno se može proširiti spoljašnja operacija βx za $\beta \in R$. Treba uzeti za $\beta \in R$

$$\beta x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha x & \text{za } \beta = \alpha \geqslant 0 \\ -(\alpha x) & \text{za } \beta = -\alpha < 0 \end{cases}$$

za $\alpha \in R_+$ .Lako je videti da je

$$-(\alpha x) = \alpha(-x) \quad .$$

Tada nije teško pokazati da pravila 1. - 6. iz definicije 1.3.1 važe za proizvoljne $\alpha, \beta \in R$.

Nad semi-vektorskim prostorom X definišemo funkcionelu $f: X \to R_+$ tako da važi

(f_1) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$;

(f_2) $f(x+y) \geqslant |f(x) - f(y)|$;

(f_4) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

za $x, y \in X$ i $\alpha \in R_+$.

PRIMEDBA 1.3.2. Za konačnu funkcionelu f uslov (f_3) iz poglavlja 1.1 sledi iz uslova (f_4).Naime, iz $0\, 0' = 0'$ sledi $f(0') = f(0\,0') = 0\, f(0') = 0$.

PRIMEDBA 1.3.3. Kada je $(X,+) = (G,+)$ abelova grupa, tada se na osnovu primedbe 1.3.1 semi-vektorski prostor prirodno prevodi u vektorski prostor nad R. Kako je tada $f(x) = f(-x)$ za svako $x \in G$ (poglavlje 1.1), to je na osnovu (f_4) za $\beta \in R$ i $x \in G$ $(\beta < 0)$

$$f(\beta x) = f(-(\alpha x)) = f(\alpha(-x)) = \alpha f(-x) =$$

$$= \alpha f(x) = |\beta| f(x) \qquad (\alpha = |\beta|), \text{ tj.}$$

$$(f_4)' \qquad f(\beta x) = |\beta| f(x) \quad \text{za} \quad \beta \in R.$$

To znači, da funkcionela f tada postaje semi-norma nad vektorskim prostorom G sa poljem R.

Nadalje ćemo u čitavom ovom poglavlju pod oznakom X podrazumevati semi-vektorski prostor snabdeven funkcionelom f .

Sa Q ćemo označiti skup svih nizova

$$A = (a_1, a_2, \dots) = \{a_n\},$$

čiji članovi a_n pripadaju X. Uvodimo operacije

$$A + B \overset{\text{def}}{=} (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots)$$

i

$$\alpha A \overset{\text{def}}{=} (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots) \quad \text{za } \alpha \in R_+ ,$$

gde je $A = (a_1, a_2, \dots)$ i $B = (b_1, b_2, \dots)$.
U odnosu na uvedene operacije Q je semi-vektorski prostor nad R_+ .

Uočimo sada još i realne nizove $\bar{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots)$

čiji članovi $\bar{a}_n$ pripadaju R_+ . Za realni niz $\bar{A}$ čiji su svi članovi $\neq 0$ uvodimo

$$\bar{A}^{-1} = \left(\frac{1}{\bar{a}_1}, \frac{1}{\bar{a}_2}, \dots \right) \quad .$$

Za realni niz $\bar{A}$ i $B \in Q$ uvodimo

$$\bar{A}\, B \overset{\text{def}}{=} (\bar{a}_1 b_1, \bar{a}_2 b_2, \dots) \quad .$$

Uvodimo sledeće oznake

$$f(A) = \sup_{j \in N} f(a_j)$$

$$\mathfrak{f}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} f(a_j) \quad .$$

Očigledno je

$$f(A) \leqslant \mathfrak{f}(A) \; .$$

Za realne nizove $\bar{A}$ ćemo upotrebljavati oznake iz [9], [13], tj.

$$f(\bar{A}) = | \bar{A} | = \sup_{j \in N} \bar{a}_j$$

$$\mathfrak{f}(\bar{A}) = \| \bar{A} \| = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_j \quad .$$

Za $f(A)$ važi

$$f(\alpha A) = \alpha f(A) , \qquad f(A + B) \leqslant f(A) + f(B)$$

$$\text{i} \qquad f(\bar{A} B) \leqslant | \bar{A} | f(B) \quad .$$

Za $\mathfrak{f}(A)$ važi

$$\mathfrak{f}(\alpha A) = \alpha \mathfrak{f}(A) , \qquad \mathfrak{f}(A + B) \leqslant \mathfrak{f}(A) + \mathfrak{f}(B)$$

$$\text{i} \qquad \mathfrak{f}(\bar{A} B) \leqslant \| \bar{A} \| \mathfrak{f}(B) \quad .$$

Štaviše, važi

$$f(\bar{A}\ B) \leqslant |\bar{A}|\ f(B) \quad .$$

Pretpostavimo sada da je dat niz $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots$ realnih nizova sa pozitivnim članovima i sa osobinom da je

$$|\ \bar{T}_k\ \bar{T}_{k+1}^{-1}\ | < \infty \quad .$$

Niz $A \in Q$ za koji važi

$$f(\ \bar{T}_k^{-1}\ A\ ) < \infty \quad \text{za neko} \quad k\ ,$$

je <u>temperiran</u> .

Niz $A \in Q$ za koji je

$$f(\ \bar{T}_k\ A) < \infty \quad \text{za} \quad k = 1,2, \ldots$$

je <u>brzo opadajući</u>.

Sada ćemo dati definicije ograničenosti niza A_n temperiranih nizova:

Niz A_n temperiranih nizova je <u>jako ograničen</u> ako i samo ako postoji indeks k i broj M tako da je

$$f(\ \bar{T}_k^{-1}\ A_n\ ) < M \quad \text{za} \quad n \in N \quad .$$

Niz A_n temperiranih nizova je <u>slabo ograničen</u> ako je niz $f(\ A_n,\ \bar{R}\ )$ ograničen za svaki fiksni brzo opadajući realni niz $\bar{R}$ ($n \in N$) , gde je

$$f(\ \bar{A}\ ,\ B\ ) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} f(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j b_j\ ) \quad .$$

Primetimo da možemo pisati i oznaku $f(\ B\ ,\ \bar{A}\ )$ umesto $f(\ \bar{A}\ ,\ B\ )$, jer po dogovoru možemo pisati $x\alpha$ umesto αx .

Kada je $f(\bar{A}\ B) < \infty$, tada $f(\ \bar{A}\ ,\ B\ )$ postoji

(videti lemu 1.1.1 i početak dokaza Dijagonalne teoreme 1.1.4).

Za brzo opadajući niz $\bar{R}$ i temperiran niz A $f(A, \bar{R})$ uvek postoji (to definicija slabe ograničenosti ima smisla), što sledi iz

$$f(\bar{R} A) \leqslant \| \bar{T}_k \bar{R} \| \; f(\bar{T}_k^{-1} A)$$

i prethodne primedbe.

Sada možemo formulisati važnu teoremu o ograničenosti niza temperiranih nizova.

TEOREMA 1.3.1. <u>Niz A_n temperiranih nizova je slabo ograničen ako i samo ako je jako ograničen.</u>

Dokaz. Postupak dokazivanja teoreme je sličan onom u [9] i [13] , te ćemo se ograničiti samo na delove dokaza koji se razlikuju u odnosu na prethodno spomenuti.

Da iz jake ograničenosti sledi slaba dokazuje se isto kao u [9] i [13], samo umesto oznaka $|\ |$ i $\|\ \|$ za nizove iz Q treba staviti oznake f i $\hat{f}$ respektivno, a umesto $|(A_n, R)|$ dodje $f(A_n , \bar{R})$.

Dokazaćemo sada da iz slabe ograničenosti niza A_n sledi jaka ograničenost. Važi ([13] str. 217)

$$(1.3.1) \qquad | \bar{T}_i \bar{T}_j^{-1} | < 2^{i-j} ,$$

za $i,j = 1,2,\ldots$ i $i < j$ .Pretpostavimo da niz A_n $(n \in N)$ nije jako ograničen. Tada postoji rastući niz $\{n_i\} \subset N$ takav da

$$(1.3.2) \qquad f(A_{n_i} \bar{T}_i^{-1}) \to \infty \quad \text{kada} \quad i \to \infty .$$

Zato postoji niz $\{r_i\} \subset N$ takav da je

$$(1.3.3) \qquad f(A_{n_i} \bar{T}_i^{-1}) - 1 < f(\bar{e}_{r_i} A_{n_i} \bar{T}_i^{-1}) =$$

$$= f(a_{r_i}^{n_i} (t_{r_i}^{i})^{-1})$$

za $i = 1,2, \ldots$, gde $\bar{e}_{r_i}$ označava realan niz čiji je r_i-ti član 1 a ostali 0 ,

$$A_{n_i} = (a_1^{n_i} , a_2^{n_i} , \ldots)$$

$$\bar{T}_i^{-1} = ((t_1^i)^{-1}, (t_2^i)^{-1}, \ldots) .$$

Stavimo

$$x_{ij} = a_{r_j}^{n_i} (t_{r_j}^{j})^{-1} .$$

Tada $x_{ij} \in X$ i $\lim_{j \to \infty} f(x_{ij}) = 0$ za $i = 1,2,\ldots$ na osnovu (1.3.1) i temperiranosti niza A_{n_i} (fiksno n_i).

Na osnovu Dijagonalne teoreme 1.1.4 postoji beskonačan skup $I \subset N$ i njegov podskup $J \subset I$ (konačan ili beskonačan) takvi, da je za sve $i \in I$

$$(1.3.4) \qquad \sum_{j \in J} f(\bar{e}_{r_j} A_{n_i} \bar{T}_j^{-1}) < \infty$$

i

$$(1.3.5) \qquad f(\sum_{j \in J} a_{r_j}^{n_i} (t_{r_j}^{j})^{-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} f(a_{r_i}^{n_i} (t_{r_i}^{i})^{-1}) ,$$

gde je

$$f(\sum_{j \in J} a_{r_j}^{n_i} (t_{r_j}^{j})^{-1}) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} f\left(\sum_{s=1}^{k} a_{r_{j_s}}^{n_i} \left(t_{r_{j_s}}^{j_s} \right)^{-1} \right)$$

a $\{ j_s \}$ je rastući niz svih elemenata iz J i

$$\bar{T}_{j_s}^{-1} = \left((t_1^{j_s})^{-1}, (t_2^{j_s})^{-1}, \dots \right).$$

Dobijeni rezultat možemo interpretirati na sledeći način.

Uvodimo realni niz $\bar{R}$ tako da je

$$\bar{e}_i \bar{R} = \sum_{j \in J} \bar{e}_i \bar{e}_{r_j} \bar{T}_j^{-1}$$

za svako $i = 1,2,\dots$ .Na osnovu (1.3.1) red sa desne strane je konvergentan za svako $i = 1,2,\dots$. $\bar{R}$ je brzo opadajući niz (dokaz isti kao u [9] i [13]).

Kako je

$$f(A_{n_i}, \bar{R}) = \lim_{k \to \infty} f\left(\sum_{s=1}^{k} a_{r_{j_s}}^{n_i} \left(t_{r_{j_s}}^{j_s} \right)^{-1} \right) ,$$

gde je $\{ j_s \}$ rastući niz svih elemenata iz J, to na osnovu (1.3.5), (1.3.4), (1.3.3) i (1.3.2) imamo

$$f(A_{n_i}, \bar{R}) \to \infty \quad \text{kada} \quad i \to \infty ,$$

što je u kontradikciji sa slabom ograničenošću A_n ($n \in N$).

PRIMEDBA 1.3.4. Kada je X vektorski prostor sa normom nad R , tada se na osnovu primedbi 1.31 i 1.3.3 teorema 1.3.1 svodi na teoremu o ograničenosti iz [9] i [13] (za slučaj polja realnih brojeva).

1.4 Uopštena kvazi-norma nad polugrupom

U ovom poglavlju ćemo definisati i dokazati neke osobine funkcije, koja predstavlja uopštenje funkcionele f iz moga rada [66] , navedene u poglavlju 1.1 sa osobinama (f_1) i (f_2) .

Neka je $(X,*)$ polugrupa a $(G, +)$ komutativna totalno uredjena grupa, tj. $(G, +)$ je komutativna grupa, G je totalno uredjen skup u odnosu na relaciju poretka $\leqslant$, relacija $\leqslant$ je saglasna sa operacijom + u grupi G – – $a \leqslant b$ povlači $c + a \leqslant c + b$ za sve $c \in G$ i $a,b \in G$ (L.Fuchs [31]). Apsolutna vrednost $|a|$ za elemenat $a \in G$ definisana je sa

$$|a| = \max (a,-a) \quad .$$

DEFINICIJA 1.4.1. <u>Funkcija $f: X \to G$ za koju važi</u>

$$(F_1) \qquad f(x*y) \leqslant f(x) + f(y) ;$$

$$(F_2) \qquad f(x*y) \geqslant |f(x) - f(y)|$$

<u>za sve $x,y \in X$, je uopštena kvazi-norma nad X.</u>

Uslovi (F_1) i (F_2) su nezavisni (primeri iz poglavlja 1.1). Očigledno je funkcionela f iz poglavlja 1.1, koja zadovoljava uslove (f_1) i (f_2), specijalna kvazi-norma (kada je G aditivna grupa realnih brojeva).

Uopštena kvazi-norma je "ne-negativna", tj. $f(x) \geqslant 0$ za sve $x \in X$,gde je 0 neutralni elemenat iz G.Dokaz je isti kao u poglavlju 1.1. Ovu činjenicu možemo i ovako formulisati: $f: X \rightarrow P$ gde je pozitivni konus

$$P = \{ g \mid g \in G, g \geq 0 \}$$

(eng. positive cone).U opštem slučaju , parcijalno uredjenje $\leq$ je jednoznačno odredjeno sa odgovarajućim pozitivnim konusom P (L.Fuchs [31]), tj.

$$a \leq b \iff b + (-a) \in P .$$

G je totalno uredjena grupa ako i samo ako je

$$P \cup (-P) = G ,$$

gde je

$$-P = \{ -g \mid g \in P \} .$$

Tako se možemo ograničiti na funkcije f sa polugrupe X u polugrupu P koja se može potopiti u totalno uredjenu grupu G tako da P bude pozitivni konus za G.Takve polugrupe su okarakterisane recimo u monografiji L.Fuchsa [31] - - teorema Birkhoffa str. 14 i teorema Nakada str. 154 .

Za specijalne polugrupe P uopštena kvazi-norma f se svodi na funkcionelu iz poglavlja 1.1. Ove polugrupe su okarakterisane teoremom Fuchsa - L.Fuchs [31] ,str. 169.

Uočićemo još neke važne osobine uopštene kvazi-norme.

PRIMEDBA 1.4.1. Ako je X polugrupa sa neutralnim elementom e tada se u definiciji 1.3.1 može dodati aksioma

$$(F_3) \qquad f(e) = 0 .$$

Primetimo da se uslovi kvazi-norme (N_k) $k=1,2,3$ iz poglavlja 1.1 nad abelovom grupom, mogu proširiti na funkcije sa vrednostima u komutativnoj totalno uredjenoj grupi. Tada su aksiomi (F_i) $i = 1,2,3$ i (N_k) $k = 1,2,3$ ekvivalentni nad abelovom grupom (dokaz isti kao u primedbi 1.1.1).

Sledeća osobina uopštene kvazi-norme je uopštenje leme 1.1.1 .

LEMA 1.4.1. Za svako $x,y \in X$ važi

$$| f(x * y) - f(x) | \leqslant f(y) \quad .$$

Dokaz je isti kao dokaz leme 1.1.1 .

Dosada razmatrane osobine uopštene kvazi-norme bile su algebarske prirode. Da bismo mogli uočiti i neke topološke osobine ponovićemo neke poznate definicije (S.Aljančić[5])

Neka je $(E, \leqslant)$ parcijalno uredjen skup. Za $A \subset E$ je $b \in E$ majoranta od A ako je $x \leqslant b$ za svako $x \in A$. Ako je i $b \in A$, b je tada maksimum skupa A. Simetrično se definiše i minoranta i minimum. Supremum za skup $A \subset E$ je minimum skupa majoranti za A (simetrično za infimum). Specijalno uvodimo oznake za supremum niza $\{z_n\} \subset E$ $\sup\limits_{n \in N} z_n$ ili $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ i za infimum $\inf\limits_{n \in N} z_n$ ili $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Nad parcijalno uredjenom grupom se obično definišu dve vrste topologije: uredjajna topologija (eng. order topology) i topologija otvorenih intervala (eng. the open-interval topology). Mi ćemo se ograničiti samo na uredjajnu konvergenciju nizova (B.Z.Vulih[80] ,str.38).

DEFINICIJA 1.4.2. Niz $\{x_n\}$ elemenata iz totalno uredjene grupe G je uredjajno konvergentan sa granicom

$x \in G$, u oznaci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ako postoje dva monotona niza elemenata iz G opadajući $\{y_n\}$ i rastući $\{z_n\}$, takvi da je

1) $x = \inf\limits_{n\in N} y_n = \sup\limits_{n\in N} z_n$,

2) $z_n \leqslant x_n \leqslant y_n$ za $n=1,2,\dots$.

Za osobine uredjajne konvergencije nizova videti B.Z.Vulih [80], str.38 -45 .

Definišemo sada funkciju $d: X \times X \to G$ na sledeći način

$$d(x,y) = | f(x) - f(y) | \tag{1.4.1}$$

za $x,y \in X$. Očigledno važi

(D_1) $d(x,x) = 0$

(D_2) $d(x,y) = d(y,x)$

(D_3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

za svako $x,y,z \in X$. Nejednakost (D_3) sledi iz nejednakosti $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ za $a,b \in G$ (L.Fuchs[31],str.76). Ako je uopštena kvazi-norma injektivna, tada važi i

(D_4) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Funkcija d za koju važe (D_1),(D_2) i (D_3) zove se pseudometrika. Problem uopštenja pojma metrike na funkcije koje preslikavaju u neki parcijalno uredjeni skup medju prvima je počeo izučavati Dj.Kurepa [39] . Teoriju uopštenih metričkih prostora nad polupoljem (rus.polupolja) razvili su M.J.Antonovskij, V.G.Boltjanskij,T.A.Sarimsakov [6] , M.J.Antonovskij [7] .R.De Marr i I.Fleischer

[46], [47] razmatraju apstraktne metrike sa vrednostima u specijalnoj parcijalno uredjenoj polugrupi. U radu M.J.Antonovsija i I.G.Koševnikova [8] izvršena je pseudometrizacija i opštih konvergentnih struktura.

U ovoj tezi će nas interesovati samo konvergencija nizova iz polugrupe X, te ćemo se ograničiti samo na tu vrstu konvergencije.

DEFINICIJA 1.4.3. <u>Niz $\{x_n\} \subset X$ konvergira ka elementu $x \in X$ ako je</u>

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0 \quad .$$

Očigledno, da granica iz definicije 1.4.3 u opštem slučaju nije jedinstvena. Ona je jedinstvena onda i samo onda ako je funkcija f injektivna.

Nad polugrupom X definišemo relaciju ekvivalencije

$$x \sim y \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad f(x) - f(y) = 0 \quad .$$

Relacija $\sim$ je saglasna sa konvergencijom nizova - definicija 1.4.3, tj. za dva niza $\{x_n\}$, $\{x_n'\} \subset X$ takva da je $x_n \sim x_n'$ za $n \in N$ uvek važi $x \sim x'$, gde je $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n', x') = 0$.

Naime, neka niz $\{x_n\}$ konvergira ka $x \in X$, tada je očigledno svaki elemenat $x' \in X$, za koji važi $x' \sim x$, granica niza $\{x_n'\}$. Pokazaćemo da niz $\{x_n'\}$ ne može konvergirati ka elementu $y \in X$ koji nije u relaciji $\sim$ sa x. Po pretpostavci je

$$\lim_{n \to \infty} | f(x_n) - f(x) | = 0$$

i

$$\lim_{n \to \infty} | f(x_n') - f(y) | = 0.$$

No tada je (L.Fuchs [31] , str. 30)

$$(1.4.2) \quad \lim_{n \to \infty} \left(|f(x_n) - f(x)| + |f(x_n') - f(y)| \right) = 0.$$

Kako je uvek

$$|f(x_n) - f(x)| + |f(x_n') - f(y)| \geqslant |f(x) - f(y)| ,$$

to na osnovu (1.4.2) sledi, zbog očuvanja relacije $\leqslant$ pri graničnom prilazu (B.Z.Vulih [80] ,str. 39), da je $f(x) = f(y)$, tj. $x \sim y$.

U opštem slučaju relacija $\sim$ nije saglasna sa operacijom $*$ u polugrupi X (primer (Z,+) sa apsolutnom vrednošću). Zato ćemo se ubuduće (i u poglavlju 1.8) ograničiti samo na one slučajeve za koje je relacija $\sim$ saglasna sa operacijom $*$, tj. da iz $x_1 \sim x_1'$ i $x_2 \sim x_2'$ za $x_1, x_1', x_2, x_2' \in X$ sledi $x_1 * x_2 \sim x_1' * x_2'$.

Klase ekvivalencije ćemo obeležavati sa njihovim predstavnicima.

Sada možemo govoriti (za slučaj saglasnosti relacije $\sim$ i operacije $*$) o jedinstvenoj granici u opštijem smislu, tj. kada niz $\{x_n\} \subset X$ konvergira ka elementu $x \in X$ po definiciji 1.4.3, tada mislimo da niz klasa ekvivalencije $\{x_n\} \subset X/\sim$ konvergira ka jednoj klasi ekvivalencije $x \in X/\sim$. U slučaju da je funkcija f injektivna klase ekvivalencije se svode na elemente skupa X. U polugrupu X možemo uvesti i pojam konvergentnog reda na sledeći način: Neka $x_j \in X$ $(j \in N)$. Ako je za neki elemenat $x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} d\left(\mathop{*}_{j=1}^{n} x_j , x \right) = 0 ,$$

ada kažemo da je granica niza $\left\{ \overset{n}{\underset{j=1}{*}} x_j \right\}$ konvergentan
ed sa "sumom" x (koja nije u opštem slučaju jednoznačno
odredjena). Prenesemo li sve u količnik polugrupu $X/\sim$
(za slučaj saglasnosti relacije $\sim$ i operacije $*$) dobi-
jamo definiciju konvergentnog reda kao granicu niza klasa
ekvivalencija $\left\{ \overset{n}{\underset{j=1}{*}} x_j \right\}$ sa "sumom" - klasom ekvivalen-
cije x.

1.5 Skupovne funkcije

Teorija skupovnih funkcija podstaknuta potrebama teo-
rije mere i integrala razvila se danas u samostalnu mate-
matičku disciplinu. Uopšte, pod skupovnom funkcijom podra-
zumevamo funkciju definisanu nad nekom familijom $\mathcal{H}$ pod-
skupova datog skupa H a sa vrednostima u nekoj topološko-
-algebarskoj strukturi A. Današnja stremljenja idu kako
za generalizaciji strukture A i familije $\mathcal{H}$, tako i uzi-
manju što šire familije $\mathfrak{M}$ skupovnih funkcija.

Tako skupovne funkcije mogu imati za skup vrednosti:
ne-negativne realne brojeve, realne brojeve, prošireni
skup realnih brojeva (sa $+\infty$ ili $-\infty$), kompleksne
brojeve , Banach-ov prostor (N.Dunford, J.Schwartz [30]),
normirani vektorski prostor, lokalno konveksni vektorsko
topološki prostor (C.E.Rickart [70] ,[71]) , grupu sa
normom (J.Mikusiński [54], L.Drewnowski [25],[26],[27],
[28]), topološku komutativnu grupu(D.Landers i L.Rogge

[43] , P.Antosik [10] , [14] , I.Labuda [42]) , semi-topološku grupu i polugrupu (P.Antosik [14]) , komutativnu Hausdorff-ovu normalnu topološku polugrupu (M.Sion [74]), parcijalno uredjenu komutativnu polugrupu (L.Berg [16]).

Važnu ulogu u prethodno navedenim radovima imala je i familija $\mathcal{H}$. Naime i tu su nastojanja bila da se što manje pretpostavi o familiji $\mathcal{H}$. Proučavaju se i funkcije čiji su domeni uopštenja skupovnih struktura, kao aditivne funkcije (mere) nad Bool-ovim algebrama (Z.Semadeni [73]), te se primenjuju u teoriji reprezentacije. P.Antosik [11] je posmatrao prebrojivo aditivne funkcije nad L-grupama.

Treća vrsta ograničenja se odnose na osobine samih skupovnih funkcija. Teorija mere i integrala je prvo pokrenula izučavanje prebrojivo aditivnih skupovnih funkcija :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) \qquad \text{za} \quad E_n \cap E_m = \emptyset ,$$

$n \neq m$ i $E_n \in \mathcal{H}$ $(n \in N)$. Kasnije se pokazalo da se može dobiti bogata teorija i samo iz konačne aditivnosti:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \text{za} \quad A \cap B = \emptyset$$

i $A,B \in \mathcal{H}$. Veliki broj autora ima radove iz ove oblasti. Deo teorije konačno aditivnih skupovnih funkcija sadržan je u radovima P.Antosika [14] , M.Siona [74] ,D.H.Tucker, H.B. Maynord [77] . Uočeno je da se i bez aditivnosti mogu dobiti neke važne osobine skupovnih funkcija (L.Drewnowski [25], [26], [27], V.N. Aleksjuk [3], [4]).

Sledeća poglavlja 1.6 , 1.7 , 1.8 i 1.10 biće prilozi napred spomenutim nastojanjima u teoriji skupovnih funkcija.

1.6 Aditivna ekshaustivna funkcija nad M-mrežom

U ovom poglavlju ćemo preneti neke rezultate iz rada P.Antosika [14] na aditivne ekshaustivne funkcije sa domenom M-mrežom(uopštenje definicionog skupa,poglavlje 1.5). Osnovno sredstvo će nam biti Dijagonalna teorema 1.6.1, koja za razliku od slične teoreme 1.1.7 iz rada [14] P.Antosika, osim različitog domena, ima za kodomen polugrupu umesto grupe. Dokazaćemo teoremu 1.6.2 vezanu za uniformnu ograničenost familije aditivnih ekshaustivnih funkcija i teoreme 1.6.3 i 1.6.4 o tačkastoj konvergenciji , kao uopštenja teorema tipa Nikodym-a i Vitali-Hahn-Saksa .

Neke oznake su prenete iz poglavlja 1.4 .

Prvo ćemo uvesti specijalnu mrežu, koja će zameniti σ -prsten skupova iz rada [14] .

DEFINICIJA 1.6.1. Za parcijalno uredjeni skup M ćemo reći da je M-mreža ako važi:

(M_1) M je mreža (eng. lattise , vid. G.Birkhoff [17]), tj. za svaka dva elementa $x,y \in M$ postoje $\sup(x,y) = x \vee y$ i $\inf(x,y) = x \wedge y$ u M;

(M_2) $\{x_i\} \subset M \Rightarrow \sup\limits_{i \in N} x_i \in M$

(upotrebljavamo i oznaku $\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} x_i$) ;

(M_3) $\{y_i\} \subset M,\ x \in M \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \wedge \sup_{i \in N} y_i = \sup_{i \in N}(x \wedge y_i)$$

<u>(beskonačni distributivni zakon)</u> ;

(M_4) <u>u M postoji najmanji elemenat w , tj. postoji $w \in M$ da je $w \leqslant x$ za svako $x \in M$.</u>

Primetimo da je σ - prsten skupova (poglavlje 1.1) specijalna M-mreža.

Iz definicije 1.6.1 direktno slede neke osobine M-mreže.

Na osnovu (M_1) kada $x_i \in M$ za $i = 1, \ldots ,n$, tada i $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$ M (G.Birkhoff [17]).

Iz (M_1), (M_2) i (M_3) sledi

$$(1.6.1) \qquad \sup_{n \in N} x_n \wedge \sup_{k \in N} y_k = \sup_{n,k \in N} (x_n \wedge y_k)$$

za $\{x_n\} \subset M$ i $\{y_k\} \subset M$ (B.Z.Vulih [80]).

Uvešćemo sada neke pojmove u M-mrežu M , odgovarajuće onim iz σ -prstena skupova datih u radu [14] P.Antosika.

DEFINICIJA 1.6.2. <u>Elementi $x,y \in M$ su disjunktni ako i samo ako je</u> $x \wedge y = w$.

Niz $\{x_n\}$ u M je disjunktan ako i samo ako je po parovima disjunktan, tj. $x_n \wedge x_m = w$ za svako $n,m \in N$ i $n \neq m$.

Sa S_o označićemo skup svih disjunktnih nizova iz M.

Pokazaćemo sada da kolekcija S_o zadovoljava uslove analogne sa (i) - (iv) iz poglavlja 1.1 (P.Antosik[14]) za bezuslovnu konvergenciju.

LEMA 1.6.1. Za kolekciju S_o iz M-mreže važi:

(I) Neka je $\{x_n\} \in S_o$, tada za svaki disjunktan niz $\{M_n\} \subset P(N)$ važi

$$\Big\{ \bigvee_{j \in M_n} x_j \Big\} \in S_o .$$

(II) $\{x_n\} \in S_o$ povlači da za svako fiksno $n \in N$ niz

$$\Big\{ x_m \wedge \bigvee_{i=n+m}^{\infty} x_i \Big\}_{n \in N} \in S_o .$$

(III) Za ma koji niz $\{y_n\}$ u M i $\{x_n\} \in S_o$ sledi da niz $\{x_n \wedge y_n\} \in S_o$.

(IV) Ako je $\{x_n\} \in S_o$ tada je i $\{x_{m_n}\} \in S_o$.

Dokaz. Na osnovu (1.6.1) imamo za (I) i $n \neq m$

$$\Big(\bigvee_{j \in M_n} x_j \Big) \wedge \Big(\bigvee_{k \in M_m} x_k \Big) =$$

$$= \sup_{\substack{j \in M_n ,\\ k \in M_m}} (x_j \wedge x_k) = w ,$$

jer $\{x_n\} \in S_o$ i $M_n \cap M_m = \emptyset$ za $n \neq m$.

(II) Za fiksno $m \in N$ i $\{x_n\} \in S_o$ na osnovu (M_2) je za $n \neq s$

$$\Big(x_m \wedge \Big(\bigvee_{i=n+m}^{\infty} x_i \Big)\Big) \wedge \Big(x_m \wedge \Big(\bigvee_{r=s+m}^{\infty} x_r \Big)\Big) =$$

$$= \Big(\bigvee_{i=n+m}^{\infty} (x_m \wedge x_i)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{r=s+m}^{\infty} (x_m \wedge x_r)\Big) = w .$$

(III) Neka $\{x_n\} \in S_o$ i $\{y_n\} \subset M$, tada je zbog komutativnosti i asocijativnosti $\wedge$ za $n \neq m$

$$(x_n \wedge y_n) \wedge (x_m \wedge y_m) =$$

$$= (x_n \wedge x_m) \wedge (y_n \wedge y_m) = w ,$$

jer je $x_n \wedge x_m = w$ za $n \neq m$.

(IV) Trivijalna posledica definicije 1.6.2.

Neka je X' semi-topološka polugrupa sa neutralnim elementom 0 (poglavlje 1.1) .

Posmatraćemo funkcije $\mu : M \to X'$. Za funkciju μ ćemo reći da je ekshaustivna (ili S_o- neprekidna) ako za svaki niz $\{x_n\} \in S_o$ niz $\mu(x_n)$ konvergira ka 0 u X' kada $n \to \infty$. Funkcija μ je aditivna ako za svaka dva disjunktna elementa $x, y \in M$ važi

$$\mu (x \vee y) = \mu(x) + \mu(y) .$$

Sa (MS_o , X') ćemo označiti skup svih aditivnih i ekshaustivnih funkcija iz M-mreže M u polugrupu X'.

Iskoristićemo sada jedan deo dokaza teoreme 1.1.7 iz rada [14] , da bismo dobili Dijagonalnu teoremu za funkcije iz (MS_o, X') .

Ako je $A \subset X'$ tada uzimamo da je

$$1 A = A \quad i \quad n A = (n - 1) A + A .$$

DIJAGONALNA TEOREMA 1.6.1. <u>Neka</u> $\mu_i \in (MS_o, X')$ <u>($i \in N$), neka su</u> V_i <u>otvorene okoline 0 u X' i</u> $\{x_i\} \in S_o$.
<u>Ako za svako $i \in N$ važi</u>

(1.6.2) $$(\mu_i(x_i) + V_i) \cap V_i = \emptyset ,$$

<u>tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i elemenat $x \in M$ tako da</u>

(1.6.3) $$\mu_i(x) \notin V_i$$

<u>za svako $i \in I$.</u>

Dokaz. Uzmimo

$$\nu_i(K) = \mu_i\left(\bigvee_{j \in K} x_j \right) \quad (i \in N) ,$$

gde je $\{x_n\} \in S_o$ i $K \in P(N)$. Lako se proverava da $\nu_i \in (P(N)C_o, X')$, koristeći lemu 1.6.1 .

Na osnovu (1.6.2) možemo pisati

$$(\nu_i(i) + V_i) \cap V_i = \emptyset .$$

Odakle, pošto su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.1.6, sledi da postoji beskonačan skup $I \subset N$ i skup $J \subset I$ takvi da

$$\nu_i(J) \notin V_i \quad \text{za svako } i \in I .$$

Tako

$$\mu_i\left(\bigvee_{j \in J} x_j \right) \notin V_i$$

za svako $i \in I$, što je i trebalo dokazati.

Nadalje će sa G' biti označena semi-topološka komutativna grupa (poglavlje 1.1) .

Kao primenu Dijagonalne teoreme 1.6.1 prvo ćemo dokazati uniformnu ograničenost familije tačkasto ograničenih funkcija $\mu \in (MS_o, G')$ nad specijalnim skupovima $A \subset M$. Pre toga ćemo dati neke definicije analogne onim u radu P.Antosika[14] .

Neka je F familija funkcija iz M u G' i neka je $A \subset M$. $F[A]$ je skup svih tačaka oblika $\mu(x)$ za $\mu \in F$ i $x \in A$. Familija F je uniformno ograničena nad A ako i samo ako je skup $F[A]$ ograničen (podskup $D \subset G'$ je ograničen ako i samo ako za svaku okolinu U $0 \in G'$ postoji prirodan broj n takav da je $D \subset n\,U$). Familija F je tačkasto ograničena nad A ako i samo ako je za svaki elemenat $x \in A$ skup $F[x]$ ograničen.

Sada možemo dati uopštenje teoreme 1 iz rada [14].

TEOREMA 1.6.2. <u>Neka je F familija funkcija $\mu \in (MS_0, G')$. Ako je familija F tačkasto ograničena nad M, tada je za svako $\{x_n\} \in S_0$, ona i uniformno ograničena na skupu</u>

$$A = \{ x_1, x_2, \dots \} .$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno od tvrdjenja teoreme, tj. da je $F[A]$ neograničen skup. Tada postoji simetrična okolina U oko 0 (tj. $U = -U$) takva da za svako $n \in N$ postoji funkcija $\mu_n \in F$ i indeks i_n takvi da

$$\mu_n(x_{i_n}) \notin 2n\,U .$$

Odatle je

$$(\mu_n(x_{i_n}) + n\,U) \cap n\,U = \emptyset .$$

Pošto je na osnovu (IV) iz leme 1.6.1 $\{x_{i_n}\} \in S_0$, to na osnovu Dijagonalne teoreme 1.6.1 postoji beskonačan skup $I \subset N$ i elemenat $x \in G'$ takvi da

$$\mu_n(x) \notin n\,U \quad \text{za svako } n \in I .$$

Ovo je u kontradikciji sa tačkastom ograničenošću familije F. Time je teorema 1.6.2 dokazana.

Druga primena Dijagonalne teoreme 1.6.1 se odnosi na tačkastu konvergenciju ekshaustivnih aditivnih funkcija $\mu : M \to G$, gde je G topološka komutativna grupa. Pokazaćemo da je podgrupa (MS_o, G) grupe svih aditivnih funkcija sa M u G zatvorena podgrupa u odnosu na tačkastu konvergenciju.

Niz $\{g_n\} \subset G$ je Cauchy-ev ako i samo ako za svaki rastući niz prirodnih brojeva $\{p_n\}$, niz $\{g_{p_{n+1}} - g_{p_n}\}$ teži ka 0 kada $n \to \infty$.

Sada ćemo formulisati teoremu analognu teoremi 3 iz rada [14].

TEOREMA 1.6.3. <u>Neka $\mu_i \in (MS_o, G)$ $(i \in N)$. Ako je za svako $x \in M$ niz $\{\mu_i(x)\}$ Cauchy-ev niz, tada za svaki niz $\{x_n\} \in S_o$ niz $\{\mu_i(x_j)\}$ teži ka 0 kada $j \to \infty$ uniformno u odnosu na i.</u>

Dokaz teoreme 1.6.3 je analogan dokazu teoreme 3 iz rada [14] sa nekim izmenama: Umesto nizova skupova $\{E_n\}$ uzimamo nizove $\{x_n\} \in S_o$. Takodje, umesto 7.(1) stavljamo

$$\mu_i(x_i) \notin 3V ,$$

a umesto 7.(3)

$$\mu_{p_{j+1}}(x_{p_{j+1}}) - \mu_{p_j}(x_{p_{j+1}}) \notin 2V ,$$

odakle za $\nu_i = \mu_{p_{i+1}} - \mu_{p_i}$ sledi

$$(\mu_i(x_{p_{i+1}}) + V) \cap V = \emptyset \quad ,$$

te primenom Dijagonalne teoreme 1.6.1 dolazimo do istog zaključka kao u dokazu teoreme 3 iz [14] .

Sada se može formulisati

TEOREMA 1.6.4. <u>Neka</u> $\mu_i \in (MS_o, G)$ <u>$(i \in N)$. Ako je za svako $x \in M$</u>

$$\mu(x) = \lim_{i \to \infty} \mu_i(x) \quad ,$$

<u>tada</u> $\mu \in (MS_o, G)$.

Dokaz teoreme 1.6.4 je analogan dokazu teoreme 4 iz rada [14] sa nekim izmenama: Umesto niza skupova $\{E_n\}$ posmatramo nizove $\{x_n\} \in S_o$ i umesto teoreme 3 iz rada [14] koristimo teoremu 1.6.3.

1.7 Uniformna ograničenost familije ekshaustivnih skupovnih funkcija

Kako je bilo navedeno i u poglavlju 1.5, teorija aditivnih skupovnih funkcija je danas dobro razvijena. Na osnovu toga pružena je mogućnost za razvoj i ne-aditivnih skupovnih funkcija. Ovo poglavlje treba da bude jedan prilog teoriji u opštem slučaju ne-aditivnih skupovnih funkcija. Osnovno sredstvo u dokazu teoreme 1.7.2 o uniformnoj ograničenosti familije ekshaustivnih skupovnih funkcija je Dijagonalna teorema 1.7.1 nad polugrupom.

Značenje simbola će biti isto kao i u poglavlju 1.4.

Jedina dopuna je ta, što je nad totalno uredjenom komutativnom grupom $(G,+)$ definisana i funkcija antistepenovanja γ_2 reda 2, tj. $\gamma_2 : G \to G$ i važi

$$(A_1) \quad \gamma_2(x+y) = \gamma_2(x) + \gamma_2(y)$$

za sve $x,y \in G$;

$$(A_2) \quad \gamma_2(x+x) = x \quad \text{za sve} \quad x \in G.$$

Opšta definicija i važne osobine antistepenovanja nad polugrupom data su u poglavlju 2.2 .

DIJAGONALNA TEOREMA 1.7.1. Neka je f_i $(i \in N)$ niz uopštenih kvazi-normi, $x_j \in X$ $(j \in N)$ i postoje

$$(1.7.1) \qquad \lim_{n \to \infty} f_i\Big(\mathop{\ast}_{s=1}^{n} x_{j_s} \Big)$$

(što ćemo označavati sa $f_i\Big(\mathop{\ast}\limits_{j \in K} x_j \Big)$) za svako $i \in N$ i svako $K \subset N$, gde je $\{j_s\}$ rastući niz svih elemenata iz K.

Ako

$$(1.7.2) \qquad \lim_{j \to \infty} f_i(x_j) = 0 \quad \text{za sve} \quad i \in N,$$

tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i skup $J \subset I$ takvi da za sve $i \in I$ važi

$$(1.7.3) \qquad f_i\Big(\mathop{\ast}_{j \in J} x_j \Big) \geqslant \gamma_2\big(f_i(x_i) \big) \quad .$$

Dokaz. Postupak dokazivanja je sličan dokazu teoreme 1.1.2 iz rada P.Antosika [9] , ali je uneto i nekoliko bitnih izmena.

Možemo pretpostaviti, da ako postoji konačan skup J takav da je

$$(1.7.4)\qquad f_i\Big(\mathop{\ast}_{j\in J} x_j\Big) \geqslant \gamma_2\big(f_i(x_i)\big)$$

za svako $i \in J$, da tada postoji pozitivan ceo broj r veći od svakog elementa iz J da je

$$(1.7.5)\qquad f_i\Big(\mathop{\ast}_{j\in J} x_j\Big) < \gamma_2\big(f_i(x_i)\big)$$

za $i > r$. U suprotnom , teorema je trivijalno zadovoljena. Na osnovu ove dodatne pretpostavke, odabraćemo rastući niz $i_1, i_2, \ldots$ prirodnih brojeva i konstruisaćemo niz $b_1, b_2, \ldots$ pozitivnih elemenata iz G tako da je

$$(1.7.6)\qquad f_{i_n}\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} x_{i_k}\Big) = \gamma_2\big(f_{i_n}(x_{i_n})\big) + (-b_n)$$

(ako je $n=1$ pišemo $f_{i_n}\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} x_{i_k}\Big) = 0$) i

$$(1.7.7)\qquad f_{i_n}(x_{i_{n+q}}) < \gamma_2^q(b_n)$$

za ma koje $n,q \in N$, a γ_2^q označava q-tostruku uzastopnu kompoziciju γ_2 .

Primetimo da funkcija γ_2 očuvava relaciju poretka, tj. iz $a \leqslant b$ za $a,b \in G \Rightarrow \gamma_2(a) \leqslant \gamma_2(b)$ (detaljnije u poglavlju 2.2) .

Iz dodatne pretpostavke sledi egzistencija prirodnog broja r takvog da je $f_i(x_i) > 0$ za $i \geqslant r$. Neka je $i_1 = r$ i

$$b_1 = \gamma_2\big(f_{i_1}(x_{i_1})\big) .$$

Dalje, na osnovu dodatne pretpostavke postoji indeks $s > i_1$ takav da je

$$(1.7.8) \qquad f_i(x_{i_1}) < \gamma_2 (f_i(x_i))$$

za $i > s$. Odaberimo $i_2 \geqslant s$ tako da je

$$f_{i_1}(x_{i_2}) < \gamma_2 (b_1)$$

i uzmimo b_2 tako da je

$$b_2 = \gamma_2 (f_{i_2}(x_{i_2})) + (- f_{i_2}(x_{i_1})) .$$

Pošto je $i_2 \geqslant s$ to je na osnovu (1.7.8) $b_2 > 0$. Očigledno važe (1.7.6) i (1.7.7) za $n = q = 1$.

Pretpostavimo da smo našli odgovarajuće $i_1, \dots ,i_p$ $(p \geqslant 2)$ i $b_1, \dots , b_p$ tako da važe (1.7.6) i (1.7.7) za $1 \leqslant n \leqslant p-1$ i $n + q \leqslant p$ .Na osnovu dodatne pretpostavke postoji indeks $u > i_p$ takav da je

$$(1.7.9) \qquad f_i \Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{p} x_{i_k} \Big) < \gamma_2 (f_i(x_i))$$

za $i > u$. Odaberimo $i_{p+1} > u$ tako da je

$$f_{i_n}(x_{i_{p+1}}) < \gamma_2^{p+1-n} (b_n)$$

za $1 \leqslant n \leqslant p$. To je moguće jer je $f_i(x_i) > 0$ za $i \geqslant r$ i $\lim\limits_{j \to \infty} f_i(x_j) = 0$ za svako fiksno $i \in N$.
Dalje, uzmimo da je

$$b_{p+1} = \gamma_2 (f_{i_{p+1}}(x_{i_{p+1}})) + \Big(- f_{i_{p+1}}\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{p} x_{i_k} \Big)\Big) .$$

Pošto je $f_{i_{p+1}}(x_{i_{p+1}}) > 0$ i $i_{p+1} > u$ na osnovu (1.7.9) sledi $b_{p+1} > 0$. Lako se sada uvidja tačnost (1.7.6) i (1.7.7) za $1 \leqslant n \leqslant p$ i $n + q \leqslant p + 1$. Tako je indukcijom dokazana egzistencija nizova $i_1, i_2, \dots$ i $b_1, b_2, \dots$ za koje važi (1.7.6) i (1.7.7).

Sada, na osnovu osobina (F_1) i (F_2) (poglavlje 1.4) za f_i ($i \in N$) možemo pisati za $p \geqslant i_n$

$$(1.7.10) \quad f_{i_n}\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{p} x_{i_k} \Big) \geqslant f_{i_n}(x_{i_n}) + \Big(- f\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} x_{i_k}\Big)\Big) + \Big(- f_{i_n} \Big(\mathop{\ast}_{k=n+1}^{p} x_{i_k} \Big) \Big) \geqslant$$

$$\geqslant f_{i_n}(x_{i_n}) + \Big(- f_{i_n}\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} x_{i_k} \Big) \Big) + \sum_{k=n+1}^{p} (-f_{i_n}(x_{i_k})).$$

Koristeći (1.7.7) dobijamo

$$(1.7.11) \quad \sum_{k=n+1}^{p} f_{i_n}(x_{i_k}) < \sum_{k=n+1}^{p} \gamma_2^{k-n}(b_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-n} \gamma_2^{k}(b_n) < \sum_{k=1}^{p} \gamma_2^{k}(b_n) \qquad ,$$

jer je $\gamma_2^{k}(b_n) > 0$ za $k \in N$.

Pokazaćemo da je

$$(1.7.12) \quad \sum_{k=1}^{p} \gamma_2^{k}(b_n) = b_n - \gamma_2^{p}(b_n)$$

za $n,p \in N$. Primetimo, da je na osnovu definicije funkcije γ_2

$$b_n + (- \gamma_2(b_n)) = \gamma_2(b_n) \quad .$$

Indukcijom sledi da je

$$(1.7.13) \quad b_n + (- \gamma_2(b_n)) + \dots + (- \gamma_2^{p}(b_n)) = \gamma_2^{p}(b_n) \quad \text{za } n \in N \quad .$$

Kada (1.7.13) uvrstimo u $\sum_{k=1}^{p} \gamma_2^{k}(b_n)$ dobijamo (1.7.12).

Uvrstimo li jednakost (1.7.12) u (1.7.11) dobijamo

$$(1.7.14)\quad \sum_{k=n+1}^{p} f_{i_n}(x_{i_k}) < b_n - \gamma_2^{p}(b_n) \quad .$$

Na osnovu (1.7.14) i (1.7.6) iz (1.7.10) sledi za $p \geqslant i_n$

$$(1.7.15)\quad f_{i_n}\Big(\mathop{*}_{k=1}^{p} x_{i_k} \Big) \geqslant f_{i_n}(x_{i_n}) +$$

$$+ (- (\gamma_2 (f_{i_n}(x_{i_n})) + (-b_n)) + (- (b_n - \gamma_2^{p}(b_n))) >$$

$$> f_{i_n}(x_{i_n}) + (- \gamma_2 (f_{i_n}(x_{i_n}))) = \gamma_2 (f_{i_n}(x_{i_n})),$$

jer je $\gamma_2^{p}(b_n) > 0$ za $p \in N$.

Na osnovu (1.7.1) egzistira

$$\lim_{p \to \infty} f_i \Big(\mathop{*}_{s=1}^{p} x_{i_s} \Big) = f_i \Big(\mathop{*}_{j \in J} x_j \Big)$$

za $i \in I$, gde smo uzeli $J = I = \{ i_1, i_2, \ldots \}$. Zbog osobine uredjajne konvergencije nizova - definicija 1.4.2, da iz $v_n \geqslant a$ za $n \in N$ i $v_n \to v$ kada je $\{ v_n \} \subset G$ i $a \in G$ sledi $v \geqslant a$, dobijamo (1.7.3) za $i \in I$, kada u (1.7.15) pridjemo granici. Time je završen dokaz teoreme 1.7.1 .

Dokazanu Dijagonalnu teoremu 1.7.1 ćemo iskoristiti za dokaz jedne teoreme o uniformnoj ograničenosti familije skupovnih funkcija, koje ćemo sada definisati.

Neka je $R'\sigma$ - prsten skupova (poglavlje 1.1).

DEFINICIJA 1.7.1. Skupovna funkcija $\mu : R' \to G$ je elemenat familije $\mathcal{M}_0$ ako zadovoljava uslove

$$(S_1) \quad \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

za $A \cap B = \emptyset$ i $A, B \in R'$;

$$(S_2) \quad \mu(A \cup B) \geq |\mu(A) - \mu(B)|$$

za $A \cap B = \emptyset$ i $A, B \in R'$;

(S_3) μ je ekshaustivna skupovna funkcija (poglavlje 1.6) ;

(S_4) za svaki disjunktan niz skupova $\{E_n\} \subset R'$ je

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) .$$

PRIMEDBA 1.7.1. Uslov (S_2) ekvivalentan je uslovu

$$(S_2)' \quad \mu(A \cup B) + \mu(B) \geq \mu(A)$$

za $A \cap B = \emptyset$ i $A, B \in R'$.

Razmotrićemo sada vezu izmedju definisanih skupovnih funkcija i uredjajno neprekidnih skupovnih funkcija (eng. order continuous) , tj. funkcija $\mu : R' \to G$ za koje iz $G_i \supset G_{i+1}$ i $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \emptyset$ sledi $\mu(G_i) \to 0$ kada $i \to \infty$ (L.Drewnowski [26]) .

U opštem slučaju, uredjajno neprekidna skupovna funkcija ne mora biti i ekshaustivna, a isto tako i obrnuto (L.Drewnowski [26]). U slučaju da je μ monotona skupovna funkcija, tj. važi

$$(M) \quad A \subset B \text{ za } A, B \in R' \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) ,$$

tada iz uredjajne neprekidnosti skupovne funkcije μ sledi , na osnovu

$$\mu(E_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right)$$

za disjunktan niz $\{E_n\} \subset R'$, da je i ekshaustivna (uslov(S_3)). Primetimo , da je uslov (M) jači od (S_2) .

Ako je skupovna funkcija μ uredjajno neprekidna i zadovoljava uslove (S_1) i (S_2) , tada zadovoljava i uslov (S_4). Naime, ako uvedemo oznake $x_n = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$, $y_n = \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right)$ i $x = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$, gde je $\{E_i\}$ disjunktan niz u R', onda iz (S_1) i (S_2) dobijamo

$$x - y_n \leqslant x_n \leqslant y_n + x \quad .$$

Kako $y_n \to 0$ kada $n \to \infty$, to i $x - y_n \to x$ i $y_n + x \to x$ kada $n \to \infty$, što znači da $x_n \to x$, što je i trebalo pokazati.

Obrnuto u opštem slučaju nije tačno. Naime, možemo uzeti da $y_n \to k \neq 0$ ($0 \leqslant k \leqslant 2x$) a da važi $x_n \to x$ kada $n \to \infty$ .Specijalno, aditivne skupovne funkcije (poglavlja 1.1 i 1.5) μ automatski zadovoljavaju uslove (S_1) i (S_2), a tako i uslov (M). Ako je μ aditivno i zadovoljava (S_4), tada iz jednakosti

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad ,$$

sledi da je μ prebrojivo aditivno .

Kako za aditivnu funkciju važi (L.Drewnowski [26] , P.Antosik [14])

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right),$$

to iz uredjajne neprekidnosti funkcije μ tada sledi prebrojiva aditivnost. Za aditivne skupovne funkcije važi (M), te iz uredjajne neprekidnosti aditivne skupovne funkcije tada sledi njena ekshaustivnost.

Iz svega rečenog možemo zaključiti, da je familija skupovnih funkcija $\mathcal{M}_o$ uopštenje familije uredjajno neprekidnih skupovnih funkcija i da se ove dve familije poklapaju u slučaju aditivnih skupovnih funkcija, tj. obe se tada svode na familiju prebrojivo aditivnih skupovnih funkcija.

Biće nam potrebna sledeća

LEMA 1.7.1. (J.Mikusiński [54]) Neka su $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ neprazne kolekcije nepraznih skupova, koji pripadaju algebri Σ, takve da ako je skup iz Γ_{j+1} unija dva disjunktna skupa, koji pripadaju Σ, tada bar jedan od njih pripada Γ_j. Tada postoj , ili

1) podniz $\{\Gamma_{m_j}\}$ iz kojeg se mogu izvaditi skupovi $E_j \in \Gamma_{m_j}$ koji su svi disjunktni, ili

2) podniz $\{\Gamma_{n_j}\}$ iz kojeg se mogu izvaditi skupovi $E_j \in \Gamma_{n_j}$ takvi da je $E_{j+1} \subset E_j$.

Sada se može formulisati

TEOREMA 1.7.2. Neka je $\mathcal{M}$ podfamilija familije $\mathcal{M}_o$ takva da za neko $g \in G$ $(g > 0)$ postoji $k_E \in N$ za svako $E \in R'$ tako da je

(1.7.16) $\mu(E) < k_E\, g$

za $\mu \in \mathcal{M}$ ($k_E\, g = \underbrace{g + \ldots + g}_{k_E}$) .

Tada postoji $r \in N$ takvo da je

(1.7.17) $\mu(E) < r\, g$ za $\mu \in \mathcal{M}$ i $E \in R'$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno od tvrdjenja (1.7.17) teoreme. Neka je Γ_j kolekcija svih $E \in R'$ takvih da je

(1.7.18) $\mu(E) > 2^j g$ za $\mu \in \mathcal{M}$.

Pokazaćemo da kolekcije Γ_j zadovoljavaju uslove leme 1.7.1.

Naime, za svako $j \in N$ kolekcija Γ_j nije prazna, jer bi u suprotnom teorema 1.7.2 trivijalno bila zadovoljena. Ako $A \in \Gamma_{j+1}$ i $A = A_1 \cup A_2$ a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $(A_1, A_2 \in R')$ tada A_1 ili A_2 pripada Γ_j . Ako to ne bi bilo, tj. $\mu(A_1) \leq 2^j g$ i $\mu(A_2) \leq 2^j g$ za $\mu \in \mathcal{M}$, tada bi zbog osobine (S_1) bilo

$$\mu(A) \leq 2^{j+1} g \quad \text{za} \quad \mu \in \mathcal{M} ,$$

što je u suprotnosti da $A \in \Gamma_{j+1}$. Prema tome ispunjeni su svi uslovi leme 1.7.1 , te važi ili 1) ili 2).

Neka važi 1). Tada postoji niz disjunktnih skupova $\{E_j\}$ takav da je

$$\mu(E_j) > j\, g \quad \text{za} \quad \mu \in \mathcal{M} \text{ i, } j \in N ,$$

jer je

$$2^j g \geq j\, g \quad \text{za} \quad j \in N.$$

Neka sada važi 2). Tada postoji rastući niz $\{n_j\} \subset N$

i skupovi $G_j \in \Gamma_{n_j}$ takvi da je

$$(1.7.19) \qquad \mu(G_j) > 2^{n_j} g \quad \text{za} \quad \mu \in \mathcal{M} .$$

Na osnovu (1.7.16) i (1.7.19) za svako $j \in N$ postoje brojevi p_j , $k_j \in N$ takvi da je

$$\mu(G_{p_j}) < k_j \, g \quad \text{za} \quad \mu \in \mathcal{M}$$

i postoje skupovne funkcije $\mu_j \in \mathcal{M}$ da je

$$\mu(G_{p_{j+1}}) > (k_j + j)\, g .$$

Uzmimo $E_j = G_{p_j} \setminus G_{p_{j+1}}$. Pošto je $G_{p_j} \supset G_{p_{j+1}}$, to su skupovi E_j $(j \in N)$ disjunktni.

Kako je

$$\mu_j(E_j) \geqslant \mu_j(G_{p_{j+1}}) - \mu(G_{p_j}) ,$$

to je

$$(1.7.20) \qquad \mu_j(E_j) > (k_j+j)\, g - k_j \, g = j\, g$$

za $j \in N$. Vidimo da u oba slučaja leme 1.7.1 postoji niz $\{E_j\}$ disjunktnih skupova za koje važi (1.7.20).

Iz osobine (S_3) za μ sledi $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_i(E_j) = 0$ za $i \in N$. Kako je na osnovu (S_4)

$$\lim_{n\to\infty} \mu_i\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) = \mu_i\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) ,$$

to su ispunjeni svi uslovi za verziju Dijagonalnu teoremu 1.7.1 , uzimajući $R' = X$, $\bigcup = *$ i $E_j = x_j$ $(j \in N)$. Zato postoji beskonačan skup $I \subset N$ i njegov podskup $J \subset I$ takvi da je za sve $i \in I$

$$\mu_i\Big(\bigcup_{j\in J} E_j\Big) \geqslant \gamma_2\big(\mu_i(E_i)\big) .$$

Na osnovu (1.7.20) tada dobijamo

$$\mu_i(E) > \gamma_2 (\quad i\, g) \qquad \text{za} \quad i \in I \quad ,$$

gde smo stavili $\bigcup_{j\in J} E_j = E \in R'$. Uzimajući

$$i' = \begin{cases} i, \text{ ako je i parno} \\ i-1 \text{ , ako je i neparno} \end{cases} ,$$

dolazimo do relacije

$$\mu_i(E) > \gamma_2 (i'g) = \frac{i'}{2} \; g$$

za sve $i \in I$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom (1.7.16). To znači da bar jedna kolekcija Γ_i mora biti prazna, čime je dokazana teorema 1.7.2 .

PRIMEDBA 1.7.2. U slučaju da je $\mathcal{M}_0$ familija prebrojivo aditivnih skupovnih funkcija sa vrednostima u komutativnoj grupi sa kvazi-normom , teorema 1.7.2 se svodi na teoremu J.Mikusińskog [54] .

1.8 Uniformna ograničenost familije f-prebrojivo aditivnih višeznačnih skupovnih funkcija sa vrednostima u polugrupi

U ovom poglavlju ćemo zahvaljujući razmatranjima iz poglavlja 1.4 dati jednu generalizaciju Dijagonalne teoreme 1.1.4 .To će nam omogućiti da dokažemo teoremu 1.8.2 o uniformnoj ograničenosti familije f-prebrojivo aditivnih skupovnih funkcija sa vrednostima u polugrupi.

Oznake su iste kao u poglavlju 1.7.

DIJAGONALNA TEOREMA 1.8.1. Neka $x_{ij} \in X$ $(i,j \in N)$ $\lim_{j\to\infty} f(x_{ij}) = 0$ za $i = 1,2,\dots$ i postoji

$$(1.8.1) \quad f(\underset{j\in K}{\ast} x_{ij}) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} f(\overset{n}{\underset{s=1}{\ast}} x_{ij_s})$$

za svako $i \in N$ i svaki skup $K \subset N$, gde je $\{j_s\}$ rastući niz svih elemenata iz K. Tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i njegov podskup J (konačan ili beskonačan) takvi da za sve $i \in I$ važi

$$f(\underset{j\in J}{\ast} x_{ij}) \geqslant \gamma_2 (f(x_{ii})) \quad .$$

Dokaz je sličan dokazu Dijagonalne teoreme 1.7.1, te se nećemo na njemu zadržavati.

PRIMEDBA 1.8.1. U slučaju da je $(G,+)$ aditivna grupa realnih brojeva Dijagonalna teorema 1.8.1 se svodi na Dijagonalnu teoremu 1.1.4. Tada se može izostaviti uslov (1.8.1).

Posmatraćemo višeznačne skupovne funkcije $\mu : R' \to X/\sim$ (vid. poglavlje 1.4, slučaj saglasnosti relacije $\sim$ i operacije $\ast$). Funkcija μ je f-prebrojivo aditivna ako za svaki disjunktan niz $\{E_n\} \subset R'$ važi

$$\lim_{k\to\infty} f(\overset{k}{\underset{n=1}{\ast}} \mu(E_n)) = f(\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)) \quad .$$

Funkcija μ je aditivna ako je $\mu(A \cup B) = \mu(A) \ast \mu(B)$ za $A \cap B = \emptyset$ i $A,B \in R'$.

Funkcija μ je f-ekshaustivna ako je

$$\lim_{n\to\infty} f(\mu(E_n)) = 0 \quad ,$$

za svaki disjunktan niz $\{E_n\} \subset R'$.

Sa $\mathcal{F}_0$ označićemo familiju svih aditivnih f-prebrojivo aditivnih f-ekshaustivnih višeznačnih skupovnih funkcija iz $\dot{\sigma}$ -prstena R' skupova u količnik polugrupu $X/_{\sim}$.

Sada se može formulisati

TEOREMA 1.8.2. <u>Neka je $\mathfrak{F}$ podfamilija familije</u> $\mathfrak{F}_0$ <u>takva da za neko $g \in G$ ($g > 0$) postoji $k_E \in N$ za svako $E \in R'$ tako da je</u>

$$f(\mu(E)) < k_E\, g \quad \underline{\text{za } \mu \in \mathfrak{F}.}$$

<u>Tada postoji $r \in N$ takvo da je</u>

$$f(\mu(E)) < r\, g \quad \underline{\text{za } \mu \in \mathfrak{F} \text{ i } E \in R'.}$$

Dokaz je isti kao i dokaz teoreme 1.7.2 , samo umesto $\mu(\ )$ treba staviti $f(\mu(\ ))$.

PRIMEDBA 1.8.2. U slučaju da su funkcije $\mu : R' \to X/_{\sim}$ i $f: X \to P \subset G$ surjekcije, uslov f-prebrojive aditivnosti za μ se može oslabiti, dovoljna je egzistencija

$$\lim_{k\to\infty} f\Big(\mathop{\ast}_{n=1}^{k} \mu(E_n)\Big).$$

1.9 ρ -aditivne funkcije nad polugrupom

U ovom poglavlju ću formulisati i dokazati teoremu 1.9.2 vezanu za specijalne funkcije definisane nad komutativnom polugrupom a sa vrednostima u komutativnoj grupi sa kvazi-normom. Iz ove važne teoreme u poglavlju 1.10 izvodim niz teorema o očuvanju nekih osobina specijalnih aditivnih funkcija nad mrežama,u odnosu na tačkastu konvergenciju.Osim toga, kao posledica javlja se i jedna važna teorema iz teorije distribucija.

Ovako uniforman prilaz širokom spektru različitih aditivnih funkcija sa različitim definicionim područjima omogućila mi je široka definicija aditivnosti funkcije,koju sam vezao za specijalnu relaciju nad polugrupom. Uzimajući specijalne polugrupe i specijalne relacije nad njima dobijam niz interesantnih posledica, od kojih su neke prvi put formulisane u ovoj tezi.Osnovno sredstvo u dokazu teoreme 1.9.2 je Dijagonalna teorema 1.9.1.

Neka je $(X, *)$ komutativna polugrupa.

DEFINICIJA 1.9.1. <u>Relacija nad X će biti označena sa</u> ρ <u>ako osim</u> $\rho \subset X * X$ <u>zadovoljava uslove</u>:

(R_1) <u>simetrična je, tj. za svako</u> $(x,y) \in \rho \Rightarrow$ $\Rightarrow (y,x) \in \rho$ (<u>umesto</u> $(x,y) \in \rho$ <u>pisaćemo i</u> $x \rho y$);

(R_2) <u>za niz</u> $\{x_n\} \subset X$ <u>za koji je</u> $x_n \rho x_m$ <u>za svako</u> $n,m \in N$ <u>i</u> $n \neq m$ <u>važi</u>

$$\Big(\mathop{*}_{j \in K} x_j\Big) \;\rho\; \Big(\mathop{*}_{k \in M} x_k\Big)$$

za sve konačne skupove $K, M \subset N$ i $K \cap M = \emptyset$.

Za niz $\{x_n\} \subset X$ ćemo reći da je ρ -niz ako je $x_n \rho x_m$ za svako $n, m \in N$ i $n \neq m$.

Familija S nizova $\{x_n\} \subset X$ je subkonvergencija ako važi

(U) $\{x_n\} \in S \Rightarrow \{x_{n_i}\} \in S$, tj. ako niz $\{x_n\}$ pripada S tada i svaki njegov podniz $\{x_{n_i}\}$ pripada S.

Familiju svih ρ -nizova (koja očigledno zadovoljava uslov (U)) označićemo sa S_ρ .Podfamiliju familije S_ρ koja zadovoljava uslov (U) označićemo sa S'_ρ.

Neka je $(X_1, +)$ komutativna polugrupa sa funkcionelom f (poglavlje 1.1).

Preslikavanje $g: X \to X_1$ je ρ -aditivno ako za svako $x, y \in X$ za koje je $x \rho y$ važi

$$g(x * y) = g(x) + g(y) \quad .$$

Iz ove definicije sledi konačna aditivnost funkcije g za proizvoljno $n \in N$, tj. ako je $x_j \rho x_k$ za $j \neq k$ i $j=1,\ldots,n$ i $k=1,\ldots,n$ tada je

$$g\left(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \quad .$$

Funkcija g je S-ekshaustivna ako za svaki niz $\{x_n\} \in S$ $f(g(x_n))$ teži ka 0 kada $n \to \infty$.

Sa $S'_\rho[g_i]$ ćemo označiti niz funkcija g_i $(i \in N)$ koje su ρ -aditivne , S'_ρ -ekshaustivne i takve da ako za $\{x_j\} \in S'_\rho$ postoji

$$\lim_{n \to \infty} f\left(g_i\left(\mathop{*}_{s=1}^{n} x_{j_s}\right)\right)$$

(što ćemo označiti sa $f(g_i(\underset{j\in K}{*} x_j))$) za svako $i\in T\subset N$ i neko $K\subset N$, gde je $\{j_s\}$ rastući niz svih elemenata iz K, tada postoji $x_K \in X$ takvo da je

$$f(g_i(\underset{j\in K}{*} x_j)) = f(g_i(x_K)) \text{ za svako } i\in T.$$

Biće nam potrebna

DIJAGONALNA TEOREMA 1.9.1. <u>Za $S'_\rho[g_i]$ i $\{x_j\}\in S'_\rho$ postoji beskonačan skup $I\subset N$ i elemenat $x\in X$ tako da za sve $i\in I$ važi</u>

$$(1.9.1) \qquad f(g_i(x)) \geq \frac{1}{2} f(g_i(x_i)) \quad .$$

Dokaz. Dijagonalna teorema 1.9.1 je direktna posledica Dijagonalne teoreme 1.1.4. Treba samo staviti

$$x_{ij} = g_i(x_j) \qquad \text{za } i,j\in N \quad \text{i}$$

iskoristiti da je

$$f(g_i(\overset{n}{\underset{s=1}{*}} x_{j_s})) = f(\sum_{s=1}^{n} g_i(x_{j_s})) \quad .$$

Neka je $(G,+)$ komutativna grupa sa kvazi-normom $|\ |$ (poglavlje 1.1).Posmatraćemo sada funkcije $g: X\to G$. Sa $S'_\rho[g_i]$ ćemo označiti niz funkcija g_i $(i\in N)$ sa X u G koje su ρ -aditivne, S'_ρ -ekshaustivne i takve da ako za proizvoljno $\{x_j\}\in S'_\rho$ postoji

$$\lim_{n\to\infty} | g_i(\overset{n}{\underset{s=1}{*}} x_{j_s}) |$$

(što ćemo označiti sa $|g_i(\underset{j\in K}{*} x_j)|$) za svako $i\in T\subset N$ i neko $K\subset N$, gde je $\{j_s\}$ rastući niz svih elemenata iz K, tada postoji

$$\lim_{n\to\infty} g_i(\overset{n}{\underset{s=1}{*}} x_{j_s})$$

u topologiji indukovanoj sa funkcionelom $|u - v|$ za $u, v \in G$, za svako $i \in T$ (u oznaci $g_i(\underset{j \in K}{*} x_j)$) i postoji $x_K \in X$ takvo da je

$$g_i(\underset{j \in K}{*} x_j) = g_i(x_K) \text{ za svako } i \in T. \tag{1.9.2}$$

Sada se može formulisati važna

TEOREMA 1.9.2. <u>Neka je dat niz funkcija</u> $S'_\rho[g_i]$. <u>Ako za svako $x \in X$ postoji</u>

$$\lim_{i \to \infty} g_i(x) = g(x)$$

(<u>konvergencija u odnosu na topologiju indukovanu funkcionelom $|u - v|$ za $u, v \in G$), tada za svaki niz</u> $\{x_j\} \in S'_\rho$ $g_i(x_j) \to 0$ <u>kada $j \to \infty$ uniformno u odnosu na i</u>, <u>t.j. za svako $\varepsilon > 0$ postoji indeks</u> j_0 <u>takvo da je</u>

$$|g_i(x_j)| < \varepsilon$$

<u>za sve $i \in N$ i</u> $j \geq j_0$. <u>Tada je i g</u> ρ <u>-aditivno i</u> S'_ρ <u>-ekshaustivno.</u>

Dokaz. Primetimo da za proizvoljan niz $\{x_j\} \in S'_\rho$ postoji beskonačan skup I_0 tako da je

$$\sum_{j \in I_0} |g_i(x_j)| < \infty \tag{1.9.3}$$

za svako I_0 (P.Antosik [10]) .Iz (U) sledi $\{x_j\}_{j \in I_0} \in S'_\rho$.
Iz (1.9.3) sledi egzistencija (videti dokaz teoreme 1.1.4)

$$\lim_{n \to \infty} \left| g_i(\overset{n}{\underset{s=1}{*}} x_{j_s}) \right|$$

za $i \in I_0$ i $\{j_s\} = I_0$, pa na osnovu (1.9.2) sledi egzistencija elementa $x_{I_0} \in X$ takvog da je

$$g_i\Big(\mathop{*}_{j \in I_0} x_j \Big) = g_i(x_{I_0}) \quad \text{za svako } i \in I_0 .$$

Prema tome, neće biti ograničenje ako pretpostavimo da za nizove $\{x_j\} \in S'_\rho$ i $\{g_i\}$ važi (1.9.3) za $I_0 = N$ (u celom dokazu).

Predjimo sada na dokaz teoreme. Ako pretpostavimo da teorema nije tačna, tada postoji $\varepsilon > 0$ i nizovi $\{n_i\}, \{m_i\} \subset N$ takvi da je

$$| g_{n_i}(x_{m_i}) | > \varepsilon$$

za svako $i \in N$. Uslov (U) povlači $\{x_{m_i}\} \in S'_\rho$. Možemo pretpostaviti da je $n_i = i$ i $m_i = i$ za svako $i \in N$. Uzmimo $\delta > 0$ takvo da je $2\delta < \varepsilon$. Tada je

$$(1.9.4) \qquad | g_i(x_i) | > 2\delta$$

za svako $i \in N$. Indukcijom odaberemo niz $\{p_j\} \subset N$ (na osnovu S'_ρ -ekshaustivnosti) tako da je

$$(1.9.5) \qquad | g_{p_j}(x_{p_{j+1}}) | < \delta$$

za svako $j \in N$.

Na osnovu (1.9.4) i (1.9.5) dobijamo

$$(1.9.6) \qquad | g_{p_{j+1}}(x_{p_{j+1}}) | - | g_{p_j}(x_{p_{j+1}}) | > \delta$$

za svako $j \in N$. Ako uvedemo oznaku

$$G_i = g_{p_{i+1}} - g_{p_i} \qquad (i \in N)$$

iz (1.9.6) dobijamo

$$(1.9.7) \qquad | G_j(x_{p_{j+1}}) | > \delta$$

za svako $j \in N$. G_i $(i \in N)$ su ρ -aditivne i S'_ρ -ekshaustivne. Na osnovu polazne pretpostavke u dokazu, dobijene iz (1.9.3), sledi da je niz funkcija G_i $(i \in N)$ niz $\bar{S}'_{\rho}[G_i]$.

Sada, na osnovu Dijagonalne teoreme 1.9.1 u odnosu na niz funkcija G_i $(i \in N)$ i niz $\{x_{p_{j+1}}\} \in S'_{\rho}$,dobijamo egzistenciju beskonačnog skupa $I \subset N$ i elementa $x' \in X$ takvih da je za sve $i \in I$

$$|G_i(x')| \geq \frac{1}{2} |G_i(x_{p_{i+1}})| .$$

Odatle i na osnovu (1.9.7) sledi

$$(1.9.8) \qquad |G_i(x')| \geq \delta \quad \text{za} \quad i \in I .$$

Sa druge strane, po pretpostavci teoreme, za x' postoji $\lim\limits_{i \to \infty} g_i(x')$. Odatle sledi da za za svako $\varepsilon > 0$ postoji $p_{i_0}(\varepsilon)$ takvo da je

$$|g_{p_{i+1}}(x') - g_{p_i}(x')| < \varepsilon \quad \text{za} \quad p_i \geq p_{i_0}(\varepsilon),$$

tj. $\{g_{p_i}(x')\}$ je Cauchy-ev niz u G. Po definiciji funkcije G_i , tada (jer je $\bar{S}'_{\rho}[G_i]$)

$$G_i(x') \to 0 \quad \text{kada} \quad i \to \infty$$. No to je u kontradikciji sa (1.9.8). Prema tome mora $g_i(x_j) \to 0$ kada $j \to \infty$ uniformno u odnosu na i za svako $\{x_j\} \in S'_{\rho}$.

Dokazaćemo sada drugi deo teoreme vezan za funkciju g. ρ -aditivnost funkcije g je očigledna. Pokazaćemo da je g i S'_{ρ} -ekshaustivno. Podjimo od jednakosti

$$(1.9.9) \qquad g(x_j) = g(x_j) - g_i(x_j) + g_i(x_j)$$

za $\{x_j\} \in S'_{\rho}$ (uz dodatnu početnu pretpostavku).Kao što smo dokazali, za svako $\varepsilon > 0$ postoji indeks j_0 takav da je

$$|g_i(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za svako} \quad i \in N \quad i \quad j \geq j_0 .$$

Tada je na osnovu (1.9.9)

$$(1.9.10) \qquad |g(x_j)| \leq |g(x_j) - g_i(x_j)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

za svako $i \in N$ i $j \geq j_o$. Kako je po pretpostavci teoreme $g(x) = \lim_{i \to \infty} g_i(x)$ za svako $x \in X$, to za svako $j \in N$, postoji indeks $i_j \in N$ takav da je

$$|g(x_j) - g_{i_j}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Odatle i iz (1.9.10) dobijamo

$$|g(x_j)| < \varepsilon$$

za svako $j \geq j_o$, što znači da je g S'_ρ -ekshaustivno.

Time je završen dokaz teoreme 1.9.2.

U sledećem poglavlju je data primena teoreme 1.9.2

1.10 Posledice teoreme 1.9.2 u teoriji mere i teoriji distribucija

U ovom poglavlju razmatram specijalne vrste ρ-aditivnih funkcija nad mrežama (B.Riečan [84] ,[85]) , koje se u slučaju δ -prstena skupova svede na uobičajne aditivne skupovne funkcije. Za uvedene opšte aditivne funkcije nad mrežama izvodim neke teoreme kao posledice teoreme 1.9.2, da bi specijalno u slučaju δ -prstena skupova došao do poznate teoreme tipa Nikodyma (L.Drewnowski [29], J.Mikusiński [48] ,P.Antosik [12]). U ova opšta razmatranja uključene su i distribucije. Tako zahvaljujući teoremi 1.9.2 dobijam i poznatu teoremu 1.10.5 o sekvencijalnoj zatvorenosti prostora distribucija u odnosu na tačkastu konvergenciju niza distribucija (L.Schwartz [86]), i to u funkcionalno-analitičkom prilazu distribucijama za razliku od monografije P.Antosika,J.Mikusińskog,R.Sikorskog [13],gde je to učinjeno preko prostora nizova.

Predjimo sada na razmatranje specijalnih vrsta ρ--aditivnih funkcija nad raznim strukturama.

PRIMER 1.10.1.Neka je L distributivna mreža u kojoj važi:

(1.10.S) Proizvoljni monotono rastući niz elemenata iz L ima najmanje gornje ograničenje.

Da je L distributivna mreža znači da važi

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \qquad (1.10.1)$$

za svako $x,y,z \in L$. Odatle sledi (B.Z.Vulih [80]) da važi

$$(1.10.2) \quad \sup_{i=1,\dots,n} x_i \wedge \sup_{j=1,\dots,p} y_j = \sup_{i,j}(x_i \wedge y_j)$$

za sve $x_i, y_j \in L$ $i=1,\dots,n$ i $j=1,\dots,p$.

Nad L uvodimo relaciju ρ_a na sledeći način:

$$x \, \rho_a \, y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \wedge y = a$$

za fiksno $a \in L$ i $x,y \in L$. Definisana relacija ρ_a je očigledno simetrična, a na osnovu (1.10.2) sledi:

$$x_j \, \rho_a \, y_k \quad \text{za} \quad j=1,\dots,m \text{ i } k=1,\dots,n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\bigvee_{j=1}^{m} x_j \right) \rho_a \left(\bigvee_{k=1}^{n} y_k \right) ,$$

tj. relacija ρ_a zadovoljava definiciju 1.9.1.

Niz $\{x_n\} \subset L$ je ρ_a -niz ako je $x_n \wedge x_m = a$ za svako $n,m \in N$ i $n \neq m$.

Funkcija $\mu : L \to G$ je ρ_a -aditivna ako je za $x \wedge y = a$

$$\mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y) .$$

Funkcija μ je S'_{ρ_a}-ekshaustivna ako za svaki niz $\{x_n\} \in S'_{\rho_a}$ $\mu(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Sa $\mathcal{L}_{S'_{\rho_a}}$ ćemo obeležiti familiju svih ρ_a-aditivnih, S'_{ρ_a} -ekshaustivnih funkcija $\mu : L \to G$ koje zadovoljavaju i uslov:

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \right) = \mu\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} x_i \right)$$

za svako $\{x_i\} \in S'_{\rho_a}$. Zadnji uslov uz ρ_a-aditivnost povlači

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i) = \mu\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} x_i \right) ,$$

tj. ρ_a - prebrojivu aditivnost.

Uzimajući sada u teoremi 1.9.2 specijalno X=L, $*$ =V i umesto funkcija $\bar{S}'_\rho\{g_i\}$ funkcije $\mu_i \in \mathcal{L}_{S'_{\rho_a}}$ (i $\in$ N) dobijamo specijalan slučaj teoreme 1.9.2:

TEOREMA 1.10.1. <u>Neka</u> $\mu_i \in \mathcal{L}_{S'_{\rho_a}}$ (i $\in$ N) . <u>Ako za svako x $\in$ L postoji</u>

$$\lim_{i \to \infty} \mu_i(x) = \mu(x) \quad ,$$

<u>tada je za svaki niz</u> $\{x_j\} \in S'_\rho$ <u>niz</u> μ_i <u>uniformno</u> S'_{ρ_a} <u>-ekshaustivno po i. Tada je</u> μ S'_{ρ_a} <u>-ekshaustivno i</u> ρ_a <u>-aditivno.</u>

PRIMER 1.10.2. Važan je specijalan slučaj prethodnog primera 1.10.1,koji ćemo sada razmotriti.

Neka je L isto kao i u primeru 1.10.1 i još postoji najmanji elemenat w u L (vid. poglavlje 1.6).Tada relacija ρ_w daje tkzv. disjunktne elemente mreže L, tj. dva elementa x,y $\in$ L su disjunktna ako i samo ako je $x \wedge y = w$.

Ako je funkcija μ: L $\to$ G ρ_w-prebrojivo aditivna i $\mu(w)=0$, tada je i ρ_w-aditivna(treba samo uzeti ρ_w -niz sa konačnim brojem elemenata različitih od w).

Primetimo da smo ρ_w-aditivne funkcije već proučavali i u poglavlju 1.6. Tamo smo imali funkcije μ definisane nad specijalnom M-mrežom a sa vrednostima u topološkoj komutativnoj grupi.Familija ρ_w-nizova S_{ρ_w} je tamo označena sa S_o (disjunktni nizovi). Teorema 1.6.4 je tipa teoreme 1.10.1, i one su ekvivalentne za funkcije μ definisane nad M-mrežom a sa vrednostima u komutativnoj grupi sa kvazi-normom, a koje su prebrojivo aditivne, S_{ρ} --ekshaustivne i $\mu(w)=0$ (ili ρ_w-aditivne).

PRIMER 1.10.3. Proučićemo sada opštiji slučaj od primera 1.10.2 ali različit od primera 1.10.1. Naime, isključićemo distributivnost mreže. Tako dobijam teoremu 1.10.2, koja je verujem, nova. Neka je L′ mreža u kojoj važi (1.10.S) i postoji najmanji elemenat w u L′(distributivnost mreže se u opštem slučaju ne pretpostavlja).

Relacija ρ_w (primer 1.10.2) nad L′ u opštem slučaju ne zadovoljava uslov (R_2) iz definicije 1.9.1. (B. Riečan [84]). Zato ćemo izdvojiti one nizove $\{x_n\} \subset L'$ (i nazvati ih disjunktnim) za koje je

$$\left(\bigvee_{j \in K} x_j \right) \wedge \left(\bigvee_{k \in M} x_k \right) = w$$

za sve konačne disjunktne skupove $K, M \subset N$ (B. Riečan [84]). Familiju svih ovako definisanih disjunktnih nizova $\{x_n\} \subset L'$ obeležićemo sa S_{R_2} (a neku proizvoljnu ne uslovnu podfamiliju sa S'_{R_2}). Očigledno je $S_{R_2} \subset S_{\rho_w}$, a ako je mreža L′i distributivna tada je $S_{R_2} = S_{\rho_w}$.

Funkcija $\mu: L' \to G$ je prebrojivo aditivna ako je za svaki niz $\{x_n\} \in S_{R_2}$

$$\mu\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i) \quad .$$

Neka je dalje $\mu(w) = 0$. Tada je funkcija i konačno aditivna za elemente niza $\{x_i\} \in S_{R_2}$, kao i za supremume konačnog broja tih elemenata (S_{R_2} -aditivnost).

Funkcija μ je S'_{R_2} -ekshaustivna ako $\mu(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$ za svako $\{x_n\} \in S'_{R_2}$. Funkcije $\mu : L' \to G$ koje su prebrojivo aditivne, $\mu(w) = 0$ i S'_{R_2}-ekshaustivne su, obeležićemo sa $\mathcal{L}_{S'_{R_2}}$.

Primetimo da su dokazi Dijagonalne teoreme 1.9.1 i teoreme 1.9.2 izvodjeni samo nad nizovima koji ispunjavaju uslove (R_1) i (R_2) iz definicije 1.9.1. Uz ovu primedbu dobija se kao posledica teoreme 1.9.2

TEOREMA 1.10.2. <u>Neka</u> $\mu_i \in \mathcal{L}_{S'_{R_2}}$ $(i \in N)$. <u>Ako za svako $x \in L'$ postoji</u>

$$\lim_{i \to \infty} \mu_i(x) = \mu(x) \quad ,$$

<u>tada je</u> $\{\mu_i\}$ <u>uniformno</u> S'_{R_2}<u>-ekshaustivno po i.</u> <u>Tada je i</u> μ S'_{R_2}<u>-ekshaustivno</u> i S_{R_2} <u>-aditivno.</u>

PRIMER 1.10.4. Sledeći primer je vezan za specijalnu mrežu , tkzv. logiku (B.Riečan [85]). Interesantno je da nam ni ovde neće biti neophodan distributivni zakon.Tako dobijam teoremu 1.10.3, koja je verujem, nova.

Neka je H mreža sa najmanjim elementom w i najvećim elementom q (tj. postoji $q \in H$, $x \leq q$ za sve $x \in H$).

Preslikavanje $\perp : x \to x^\perp$ je ortodopuna (eng. ortho--complemeutation) ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(L_1) Preslikavanje $\perp$ je obostrano jednoznačno.

(L_2) Ako $x, y \in H$ i $x \leq y$, tada $y^\perp \leq x^\perp$.

(L_3) Za sve $x \in H$ važi $x^{\perp\perp} = x$.

(L_4) Za sve $x \in H$ važi $x \wedge x^\perp = w$.

(L_5) Za sve $x \in H$ važi $x \vee x^{\perp} = q$.

Mreža H sa ortodopunom $\perp$ je logika, ako su ispunjena još i sledeća dva uslova:

(L_6) Za svaki niz $\{x_n\} \subset H$ postoje $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \in H$ i $\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n \in H$.

(L_7) Ako $x_1, x_2 \in H$ i $x_1 \leqslant x_2$, tada postoji elemenat $y \in H$, da je $y \leqslant x_1^{\perp}$ i $y \vee x_1 = x_2$.

Karakteristični primeri logike su:

Partititivni skup P(V) za dati proizvoljan skup V u odnosu na relaciju poretka " biti podskup" i komplementiranjem u odnosu na V.

Drugi važan primer (naročito u kvantnoj mehanici) je skup svih zatvorenih linearnih podprostora P datog Hilbertovog prostora u odnosu na relaciju poretka "biti podskup" i ortogonalnim komplementom $P \to P^{\perp}$ kao ortodopunom.

Nad logikom H uvodimo relaciju $\rho_{\perp}$

DEFINICIJA 1.10.1.(B.Riečan [85]) <u>Elemente $x, y \in H$ ćemo zvati ortogonalnim ($x \; \rho_{\perp} \; y$) i pisaćemo $x \perp y$, ako je $x \leqslant y^{\perp}$ (ili, što je isto $y \leqslant x^{\perp}$).</u>

Pokazaćemo da uvedena relacija $\rho_{\perp}$ zadovoljava definiciju 1.9.1. (R_1) je očigledno zadovoljeno. Dalje, u svakoj mreži važi:

Ako je $x_j \leqslant y_k$ za $j=1,\dots,m$ i $k=1,\dots,n$ tada je

$$\bigvee_{j=1}^{m} x_j \leqslant \bigwedge_{k=1}^{n} y_k$$

(G.Birkhoff [17]). Odatle sledi, da ako je $x_j \leqslant y_k^{\perp}$ za

$j=1,\dots,m$ i $k=1,\dots,n$ tada je

$$\bigvee_{j=1}^{m} x_j \leq \bigwedge_{k=1}^{n} y_k^{\perp} = \left(\bigvee_{k=1}^{n} y_k\right)^{\perp} ,$$

gde smo koristili i jednu osobinu logike H.

Familiju svih $\rho_{\perp}$-nizova obeležićemo sa $S_{\rho_{\perp}}$.

Biće nam potrebna sledeća

DEFINICIJA 1.10.2. (B.Riečan [85]) Podmreža K logike H se zove prsten, ako iz $x,y \in K$ sledi $x \wedge y^{\perp} \in K$. Prsten K je σ-prsten, ako za svaki niz $\{x_n\} \subset K$ ograničen odgore elementom iz K sledi $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \in K$. Prsten je Σ-prsten, ako za svaki niz $\{x_n\} \subset K$ sledi $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \in K$.

Nad podmrežom K logike H definišu se specijalne funkcije sa vrednostima u R^+ , koje imaju ulogu mere nad K.

DEFINICIJA 1.10.3. (B.Riečan [85]) Neka je K podmreža logike H kojoj pripada najmanji elemenat w. Merom nad K zvaće se svaka ne-negativna funkcija μ (i ∞ može ući u skup vrednosti), definisana nad K, $\mu(w) = 0$ i prebrojivo aditivna, tj. za koju važi:

Ako je $\{x_n\}$ proizvoljan niz po parovima ortogonalnih elemenata iz K i $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \in K$, tada je

$$\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n) .$$

Očigledne posledice definicije 1.10.3 su (B.Riečan [85]):

Mera μ nad podmrežom K sa w je konačno-aditivna, tj.

$$\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)$$

za konačan niz $x_1,\dots,x_n$ po parovima ortogonalnih elemenata iz K.

Mera μ nad prstenom K je monotona, tj. iz $x \leq y$ i $x, y \in K$ sledi $\mu(x) \leq \mu(y)$.

Do mere nad prstenom K se može doći i slično kao i u primerima 1.10.1 i 1.10.2 (teorema 2.2 B.Riečan [85]):

Neka je K prsten, μ ne-negativna konačno-aditivna funkcija nad K. Funkcija μ je mera tada i samo tada, ako iz $x_n \in K$, $x_n \leq x_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$, $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \in K$ sledi

$$\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(x_n) \quad .$$

Ograničićemo se na σ-prstene K_σ , odnosno Σ-prstene K_Σ . U prvom slučaju ćemo se zadržati na svim ograničenim ρ_1-nizovima $\{x_n\} \subset K_\sigma$, u oznaci familije sa ${}_oS_{\rho_1}$ (a podfamilije sa ${}_oS'_{\rho_1}$).

Sada teorema 1.9.2 dobija sledeći oblik:

TEOREMA 1.10.3. <u>Neka je</u> μ_i $(i \in N)$ <u>niz</u> ${}_oS'_{\rho_1}$ (S'_{ρ_1})-<u>-ekshaustivnih mera nad</u> σ <u>-prstenom</u> K_σ (Σ -<u>prstenom</u> K_Σ). <u>Ako za svako</u> $x \in K_\sigma$ (K_Σ) <u>postoji</u>

$$\lim_{i\to\infty} \mu_i(x) = \mu(x) \quad ,$$

<u>tada je za svaki niz</u> $\{x_j\} \in {}_oS'_{\rho_1}$ (S'_{ρ_1}) <u>niz</u> $\{\mu_i\}$ <u>uni-formno</u> ${}_oS'_{\rho_1}$ (S'_{ρ_1})-<u>ekshaustivno po i. Tada je i</u> μ ${}_oS'_{\rho_1}$ (S'_{ρ_1}) -<u>ekshaustivno i</u> ρ_1-<u>aditivno nad</u> K_σ (K_Σ) .

PRIMER 1.10.5. Neka je R' σ-prsten skupova. Relacija ρ_o nad R' je data sa

$$A \, \rho_o \, B \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad A \cap B = \emptyset \quad ,$$

tj. relacija ρ_o daje disjunktne skupove. Relacija ρ_o očigledno zadovoljava uslove (R_1) i (R_2) iz definicije 1.9.1.

Familija ρ_0-nizova $\{E_n\} \subsetneq R'$ je poznata bezuslovna konvergencija C_0 (poglavlje 1.1, P.Antosik [12]).

ρ_0-aditivna funkcija $\mu : R' \to G$ je uobičajna aditivna skupovna funkcija (poglavlje 1.1).

S_{ρ_0} -ekshaustivne funkcije se svode na C_0-neprekidne skupovne funkcije (poglavlje 1.1).

Funkcija μ je σ-aditivna ako je za svaki niz $\{E_n\} \in C_0$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

.Neka je $\mu(\emptyset)=0$.

Svaka ograničena σ-aditivna funkcija nad R' je konačno aditivna i ekshaustivna (C_0-neprekidna).

PRIMEDBA 1.10.1. Primeri 1.10.2, 1.10.3, 1.10.4 se nad σ-prstenom skupova R' svode na ovde razmatran slučaj.

Uz jedno dodatno objašnjenje (L.Drewnowski [29] , str. 728) važi sledeća posledica teoreme 1.9.2:

TEOREMA 1.10.4. <u>Neka je μ_i $(i \in N)$ niz ograničenih σ-aditivnih skupovnih funkcija $\mu_i : R' \to G$ takvih da za svako $E \in R'$ postoji granica</u>

$$\lim_{i \to \infty} \mu_i(E) = \mu(E) \quad .$$

<u>Tada je familija $\{\mu_n \ (n \in N), \mu\}$ uniformno σ-aditivna.</u>

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.9.2 sledi da je familija $\{\mu_n \ (n \in N)\}$ uniformno ekshaustivna. Za svaku familiju σ-aditivnih funkcija nad R' uniformna ekshaustivnost je ekvivalentna sa uniformnom σ-aditivnošću (L.Drewnowski [26] II, 5.6,5.7). Zato je μ σ-aditivno, a tako je familija $\{\mu_n \ (n \in N), \mu\}$ uniformno σ-aditivna.

Teorema 1.10.4 je tipa Nikodyma (J.K.Brooks,R.S. Jewett [22] ,L.Drewnowski [27] , I.Labuda [42] ,N.Dunford, J.Schwartz [30] ,J.Mikusiński [48] ,P.Antosik [12]).

L.Drewnowski je u radu [29] dokazao ekvivalentnost teoreme tipa Nikodyma sa teoremom tipa Vitali-Hahn-Saksa, te bi onda i to bila jedna posledica teoreme 1.9.2.

PRIMER 1.10.6. Kao još jednu posledicu teoreme 1.9.2 dokazaćemo poznatu važnu teoremu 1.10.5 vezanu za sekvencijalnu zatvorenost prostora distribucija u odnosu na tačkastu konvergenciju niza distribucija.Distribucije ćemo razmatrati u funkcionalno-analitičkom obliku(L.Schwartz [86],B.Stanković [75] ,K.Yosida [83]) za razliku od prilaza preko prostora nizova -P.Antosik,J.Mikusinski,R.Sikorski [13] .

Neka je $\mathcal{D}$ vektorski prostor test-funkcija,tj. svih realnih funkcija $\varphi(x)$ ($x = (x_1,\ldots,x_n) \in R_n$) koje imaju izvode svih redova i finitne su,tj. jednake su nuli izvan nekog kompaktnog skupa (nezavisnog za svaku funkciju).Najmanji kompaktan skup iz R_n izvan kojeg je funkcija $\varphi(x)$ identički nula je nosač funkcije $\varphi(x)$.

Niz $\{\varphi_n\}$ elemenata iz $\mathcal{D}$ konvergira ka funkciji $\varphi \in \mathcal{D}$:

1) Ako nosači svih funkcija φ_n $(n=1,2,\ldots)$ leže u jednom kompaktnom skupu K;

2) niz izvoda $\varphi_n^{(k)}$ reda k (k=o,1,... ,izvod reda o je sama funkcija) uniformno konvergira na skupu K ka $\varphi^{(k)}$. Primetimo da u $\mathcal{D}$ postoji i prava topologija (K.Yosida [83]) .

Distribucija je proizvoljna linearna neprekidna funkcionela T definisana na prostoru $\mathcal{D}$, tj.

1) za svaka dva broja $a,b \in \mathbb{R}$ je

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi) \quad ;$$

2) $\varphi_n \to 0$ kada $n \to \infty$ u prostoru $\mathcal{D}$ povlači $T(\varphi_n) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Distribucije su specijalan slučaj opštih ρ-aditivnih funkcija. Naime, neka je $\rho_d = \mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Tada familija S_{ρ_d} sadrži sve nizove prostora $\mathcal{D}$. Za podfamiliju S'_{ρ_d} biramo one nizove $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ za koje važi $\varphi_n \to 0$ kada $n \to \infty$. Tada je distribucija ρ_d-aditivna, S'_{ρ_d}-ekshaustivna funkcionela nad $\mathcal{D}$.

Sada možemo formulisati posledicu teoreme 1.9.2 u prostoru distribucija:

TEOREMA 1.10.5 (L.Schwartz [86] ,str. 74) Neka je T_i $(i \in N)$ niz distribucija nad prostorom $\mathcal{D}$ i neka postoji

$$\lim_{i \to \infty} T_i(\varphi) = T(\varphi)$$

za svako $\varphi \in \mathcal{D}$. Tada je i funkcionela T distribucija nad $\mathcal{D}$.

Dokaz. Primetimo da ako $\varphi_n \to 0$ kada $n \to \infty$ u $\mathcal{D}$,da tada postoji podniz $\{n_i\} \subset N$ takav da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{n_i}^{(k)} = \varphi^{(k)} \in \mathcal{D}$$

za k=o,1,... . Naime, adaptiranjem dela dokaza Dijagonalne teoreme(P.Antosik [9]) 1.2 indukcijom dolazimo do podniza $\{n_i\} \subset N$ za koji je

$$|\varphi_{n_{k+q}}^{(k)}(x)| < 2^{-q} \qquad (x \in K)$$

za svako $k \in N \cup \{0\}$ i $q \in N$.

Primenimo li sada (dokaz) teoreme 1.9.2 na niz distribucija $\{T_i\}$ i podnizove $\{\varphi_{n_i}\} \in S'_{Pd}$ dobijamo tvrdjenje teoreme 1.10.5.

II GLAVA

N-KONVEKSNE FUNKCIJE NAD POLUGRUPOM SA ANTISTEPENOVANJEM

U poglavljima 1.7 i 1.8 prethodne glave pojavila se funkcija antistepenovanja specijalnog oblika. U ovoj glavi ćemo detaljnije proučiti ovu funkciju , te ćemo pomoću nje preneti pojam Jensen-konveksnosti funkcije na funkcije definisane nad polugrupom sa antistepenovanjem γ_n a sa vrednostima u parcijalno uredjenoj polugrupi sa antistepenovanjem δ_n .Konveksnost funkcije je važan pojam matematičke analize, te njeno proširenje na polugrupe može pomoći razvoju analize nad polugrupom. Rad P.M.Vasića i D.D.Adamovića [78] se može smatrati jednim vesnikom ovakvog prilaza. Nas će u ovoj tezi interesovati samo neke osobine ovako uopštenih konveksnih funkcija.

U poglavlju 2.1 dat je samo kratak pregled definicija i rezultata za konveksne funkcije, potrebnih za razmatranja u ovoj glavi.

U poglavlju 2.2 dajem svoje definicije: antistepenovanja i n-konveksne funkcije nad polugrupom, te dokazujem svoje leme 2.2.1 , 2.2.2, 2.2.3 .

U poglavljima 2.3 i 2.4 razmatram uzajamnu povezanost p-konveksnosti i n-konveksnosti funkcije ($p \leq n$), te dokazujem svoju lemu 2.3.1 i moje teoreme 2.3.1, 2.3.2 i 2.4. 1 .

U poglavlju 2.5 navodim nekoliko primera primene mojih rezultata iz prethodnih poglavlja, te izmedju ostalog dokazujem svoju teoremu 2.5.2.

2.1 Konveksne funkcije

J.L.W.V.Jensen je uveo J-konveksne funkcije sledećom definicijom (vid. D.S. Mitrinović [55]) :

DEFINICIJA 2.1.1. Funkcija $f: [a,b] \to R$ (realni brojevi) se naziva konveksna u Jensenovom smislu na intervalu $[a,b]$ ako za svake dve tačke $x,y \in [a,b]$ važi sledeća nejednakost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad . \tag{2.1.1}$$

Jensen je dokazao teoremu sledećeg oblika (vid.[55],[56])

TEOREMA 2.1.1. Neka je funkcija f J-konveksna na $[a,b]$. Za bilo koje tačke $x_1, \dots ,x_n \in [a,b]$ i bilo koje racionalne nenegativne brojeve $r_1, \dots ,r_n$ takve da je $r_1 + \dots + r_n = 1$, važi nejednakost

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) \quad . \tag{2.1.2}$$

Razlikujemo i konveksne funkcije

DEFINICIJA 2.1.2. Funkcija f se naziva konveksna na intervalu $[a,b]$ ako i samo ako nejednakost

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

važi za sve $x,y \in [a,b]$ i za sve realne brojeve $\alpha \in [0,1]$.

Svaka konveksna realna funkcija je i J-konveksna a svaka neprekodna J-konveksna funkcija je i konveksna.

Teorija realnih J-konveksnih i konveksnih funkcija je danas vrlo razradjena oblast matematičke analize. Za detaljan pregled videti monografiju D.S.Mitrinovića [55] .

Za nas je od interesa generalizacija nejednakosti (2.1.1) date od strane S.Kurepe i S.S.Jou-a [35]. Neka je $(G,+)$ aditivna abelova grupa sa funkcijom antistepenovanja γ_2 reda 2 (poglavlje 1.7) , tada za funkcionelu $f\colon G \to R$ kažemo da je konveksna ako je

$$(2.1.3) \qquad 2(\ f(\ \gamma_2(\ x+y\ )\ )\ ) \leqslant f(x)+f(y)$$

za $x,y \in G$.

2.2 Antistepenovanje i n-konveksna funkcija

U ovom poglavlju ćemo uopštiti pojam antistepenovanja na polugrupu, te ćemo ispitati egzistenciju i neke osobine ovako uopštenog antistepenovanja. Uvodimo pojam n-konveksnosti funkcije sa polugrupe u kojoj postoji antistepenovanje γ_n reda n u parcijalno uredjenu polugrupu u kojoj postoji antistepenovanje δ_n reda n.

Neka je $(X,*)$ polugrupa. Uvodimo sledeće oznake

$$\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i \overset{\text{def}}{=} x_1 * \dots * x_n$$

$$n\,x \overset{\text{def}}{=} \underbrace{x * \dots * x}_{n} \quad .$$

Sada možemo dati opštu definiciju funkcije antistepenovanja.

DEFINICIJA 2.2.1. Funkcija antistepenovanja reda n je funkcija $\gamma_n : X \to X$, za fiksno $n \in N$, za koju važi

$$(A_1) \quad \gamma_n(x) * \gamma_n(y) = \gamma_n(x * y)$$

$$(A_2) \quad \gamma_n(n x) = x$$

za sve $x, y \in X$, ako takva funkcija postoji. Za n=1 je $\gamma_1(x) = x$ za $x \in X$.

Važi sledeća

LEMA 2.2.1. Ako postoji antistepenovanje γ_n reda n nad X, tada je ono jednoznačno odredjeno.

Dokaz. Pretpostavimo da pored γ_n postoji još jedna funkcija antistepenovanja γ_n' reda n. Primenimo li funkciju γ_n' na jednakost

$$n(\gamma_n(x)) = x \quad \text{za proizvoljno } x \in X,$$

dobijamo

$$\gamma_n'(n(\gamma_n(x))) = \gamma_n'(x) \quad .$$

Iskoristivši osobinu (A_2) za γ_n' sa leve strane prethodne jednakosti, dobijamo

$$\gamma_n(x) = \gamma_n'(x) \quad \text{za proizvoljno } x \in X.$$

Očigledno da se ne može nad svakom polugrupom zadati funkcija antistepenovanja proizvoljnog reda. Tako na primer nad polugrupom S sa neutralnim elementom e i sa svim elementima reda 2, tj. $x^2 = e$ za $x \in S$, ne postoji funkcija antistepenovanja reda 2. Jer, za svaku funkciju $h: X \to X$ mora biti $h(x)\, h(x) = e$, pa ne važi (A_2) iz definicije 2.2.1 za $x \neq e$.

Kako se ne može nad svakom polugrupom zadati funkcija antistepenovanja proizvoljnog reda, to je od važnosti okarakterisati polugrupe nad kojima egzistira funkcija antistepenovanja odredjenog reda. Sledeća lema nam bliže opisuje polugrupe sa antistepenovanjem.

LEMA 2.2.2. Funkcija antistepenovanja γ_n reda n postoji nad komutativnom polugrupom X ako i samo ako postoji jedno i samo jedno rešenje u X jednačine po u

$$n\ u = a$$

za svako $a \in X$.

Dokaz. Ako egzistira γ_n (ovaj deo važi i za nekomutativan slučaj), tada je očigledno $\gamma_n(a)$ rešenje jednačine $n\ u = a$. Kako je γ_n jedinstveno antistepenovanje reda n nad X, lema 2.2.1 , i γ_n je funkcija , to je navedeno rešenje i jedino.

Pretpostavimo sada da jednačina $n\ u = a$ ima jedinstveno rešenje y u X (za svako $a \in X$) . Definišemo preslikavanje $g(a) = y$. Neka je $n\ y_1 = a_1$ i $n\ y_2 = a_2$. Zbog komutativnosti operacije $*$ u polugrupi X sledi

$$n(\ y_1 * y_2\ ) = a_1 * a_2 \quad ,$$

odakle zakljčujemo da funkcija g zadovoljava uslov (A_1) iz definicije 2.2.1 . Iz same definicije funkcije g sledi $g(\ n\ y\ ) = g(a) = y$ za svako $y \in X$, što je uslov (A_2). Time smo dokazali lemu 2.2.2.

Primetimo da iz prethodne leme sledi, da je potreban (i u nekomutativnom slučaju) i dovoljan uslov za egzistenciju antistepenovanja reda n da se svaki elemenat $x \in X$ može jedinstveno predstaviti u obliku $x = n\ y$ za neko $y \in X$.

Razmotrimo slučaj grupe G. Jednačina $n\,u = a$ za $a \in G$ i $n \in N$ karakteriše kompletne grupe (rus. polnaja). Naime, kompletna grupa G je grupa u kojoj postoji rešenje jednačine $n\,u = a$ za svako $a \in G$ i svako $n \in N$ (A.G.Kuroš [41]). Kompletne grupe imaju važnu ulogu u teoriji grupa i prilično su obradjene. Važno je napomenuti, da se svaka grupa može potopiti u kompletnu grupu (A.G.Kuroš [41],str. 419).Uvode se i tkzv. R-grupe.To su grupe u kojima jednačina $n\,u = a$ nema više od jednog rešenja za svako $a \in G$ i svako $n \in N$. Svaka R-grupa je torziono slobodna (eng.torsion-free), tj. nijedan elemenat nije konačnog reda. Na osnovu iznetog možemo reći , da ako je komutativna grupa G kompletna R-grupa , tada egzistira γ_n za svako $n \in N$.

U slučaju polugrupa, jednačina $n\,u = a$ nas dovodi do izolovanih podskupova polugrupe - A.H.Clifford,G.B.Preston [23] , str. 164(I) i izolovanih podpolugrupa - E.S.Ljapin [45],str.239. Podpolugrupa B polugrupe X je izolovana ako za svako $x \in X$ i svaki prirodan broj n iz $n\,x \in B$ uvek sledi $x \in B$. U slučaju ideala I polugrupe X (neprazan podskup I polugrupe X je levi ideal od X ako $\{ x * a \mid x \in X, a \in I\} \subset I$ za svako $a \in I$; slično i za desni ideal; I je ideal ako je levi i desni ideal, E.S.Ljapin [45],str. 193) važi interesantno tvrdjenje (E.S.Ljapin [45] ,str. 240):

TEOREMA 2.2.1. <u>Da bi ideal I bio izolovan, dovoljno je da za svako $x \in X$ iz $2\,x \in I$ uvek sledi $x \in I$</u> .

Biće nam potrebna sledeća

LEMA 2.2.3. <u>Ako postoji antistepenovanje reda pq nad komutativno X (u oznaci</u> γ_{pq}) , <u>tada postoje i antistepenovanja</u>

reda p (u oznaci γ_p) i reda q (u oznaci γ_q).
Tada važi

$$(2.2.1) \qquad \gamma_{pq} = \gamma_p \circ \gamma_q = \gamma_q \circ \gamma_p \quad ,$$

gde je sa $\circ$ označena kompozicija (slaganje) funkcija.

Obrnuto, ako postoje antistepenovanja reda p i q, tada postoji i antistepenovanje reda pq.

Dokaz. Neka postoji antistepenovanje γ_{pq} nad X. Uzmimo da je

$$\gamma_p(x) = q\,(\ \gamma_{pq}(x)\ )$$

i

$$\gamma_q(x) = p\,(\ \gamma_{pq}(x)\ ).$$

Očigledno da ovako definisane funkcije γ_p i γ_q zadovoljavaju uslove (A_1) i (A_2) iz definicije 2.2.1, to su γ_p i γ_q antistepenovanja reda p odnosno q. Kako je

$$\gamma_p(\ \gamma_q(x)\ ) = \gamma_p(\ p\,(\ \gamma_{pq}(x)\ )) = \gamma_{pq}(x)$$

$$\gamma_q(\ \gamma_p(x)\ ) = \gamma_q(\ q\,(\ \gamma_{pq}(x)\ )) = \gamma_{pq}(x)$$

za $x \in X$, to važi (2.2.1).

Drugi deo leme 2.2.3 sledi iz osobine antistepenovanja, uzimajući $\gamma_{pq} = \gamma_p \circ \gamma_q$.

Pre nego što damo definiciju n-konveksne funkcije, imamo neka objašnjenja.

Parcijalno uredjena polugrupa je skup X (L.Fuchs[31]) za koji važi

(s_1) X je polugrupa u odnosu na operaciju $\oplus$;

(s_2) X je parcijalno uredjen skup u odnosu na relaciju $\leqslant$;

(s_3) $x \leqslant y$ povlači $x \oplus z \leqslant y \oplus z$ i $z \oplus x \leqslant z \oplus y$ za sve $z \in X$.

Iz (s_3) lako se dobija da $x_i \leqslant y_i$ za $i=1,\dots,n$ povlači $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i \leqslant \bigoplus_{i=1}^{n} y_i$.

Antistepenovanje δ_n definisano nad parcijalno uredjenom polugrupom ima sledeću osobinu: Ako je $x \leqslant y$, tada je ili $\delta_n(x) \leqslant \delta_n(y)$ ili $\delta_n(x)$ i $\delta_n(y)$ nisu uporedljivi. U suprotnom bi bilo $\delta_n(y) \leqslant \delta_n(x)$ ($\delta_n(x) \neq \delta_n(y)$). Odatle bi sledilo

$$n(\delta_n(y)) \leqslant n(\delta_n(x)) \quad (n(\delta_n(x)) \neq n(\delta_n(y)))$$

te $y \leqslant x$ ($x \neq y$), što je nemoguće .

Sada se može formulisati

DEFINICIJA 2.2.2. <u>Neka je $(X_1, *)$ polugrupa sa antistepenovanjem</u> γ_n i $(X_2, \oplus)$ <u>je parcijalno uredjena polugrupa sa antistepenovanjem</u> δ_n . <u>Funkciju</u> $f\colon A \to X_2$ <u>ćemo zvati n-konveksna funkcija nad skupom</u> $A \subset X_1$, <u>sa osobinom da za sve</u> $x_i \in A$ i <u>i=1, ... ,n je</u> $\gamma_n\left(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i\right) \in A$, <u>ako ili zadovoljava nejednakost</u>

$$(2.2.2) \qquad f\left(\gamma_n\left(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i\right)\right) \leqslant \delta_n\left(\bigoplus_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

<u>ili leva i desna strana prethodne nejednakosti nisu uporedljive, za</u> $x_i \in A$ <u>i i = 1, ... ,n.</u>

2.3 Uslovi za n - konveksnost funkcije

U ovom poglavlju ćemo ispitati mogućnost prenosa specijalnog slučaja teoreme 2.1.1 na n-konveksne funkcije. **X_1 i X_2 su komutativne polugrupe.**

Biće nam potrebna

LEMA 2.3.1. <u>Ako je funkcija f p-konveksna nad $A \subset X_1$ (skup A je iz definicije 2.2.2), tada je i p^k-konveksna nad A , za proizvoljno $k \in N$.</u>

Dokaz. Neka je γ_p antistepenovanje nad X_1 a δ_p antistepenovanje nad X_2. Na osnovu leme 2.2.3 γ_p^k (gde k označava k-tostruku uzastopnu kompoziciju funkcije γ_p) je antistepenovanje reda p^k, u oznaci γ_{p^k} . Isto važi i za δ_p^k . Za sve $x_i \in A$ i $i = 1, \ldots , p^k$ važi

$$\gamma_{p^k}\left(\mathop{*}_{i=1}^{p^k} x_i\right) \in A \qquad (k \in N) ,$$

jer

$$\gamma_p\left(\mathop{*}_{i=1}^{p} y_i\right) \in A \quad \text{za sve} \quad y_i \in A$$

i $i = 1, \ldots ,p$.

/ Sada treba još pokazati da važi nejednakost (u uporedljivom slučaju) (2.2.2) za $n = p^k$ i $k \in N$. Pokazaćemo to indukcijom. Za $k=1$ (2.2.2) važi na osnovu pretpostavke. Pretpostavimo da je (2.2.2) tačno za k. Tada za $k + 1$ imamo

$$f\left(\gamma_{p^{k+1}}\left(\mathop{*}_{i=1}^{p^{k+1}} x_i\right)\right) = f\left(\gamma_p\left(\gamma_{p^k}\left(\mathop{*}_{i=1}^{p^k} x_i * \ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\ldots * \mathop{*}_{i=(p-1)p^k+1}^{pp^k} x_i\right)\right)\right) \leqslant \delta_p\left(\mathop{\oplus}_{s=1}^{p} f\left(\gamma_{p^k}\left(\mathop{*}_{i=(s-1)p^k+1}^{sp^k} x_i\right)\right)\right) \leqslant$$

$$\leq \delta_p \Big(\bigoplus_{s=1}^{p} \delta_{p^k} \Big(\bigoplus_{i=(s-1)p^k+1}^{sp^k} f(x_i) \Big)\Big) =$$

$$= \delta_{p^{k+1}} \Big(\bigoplus_{i=1}^{p^{k+1}} f(x_i) \Big) .$$

Time je završen dokaz leme 2.3.1. Ne može se uopštiti na proizvoljan prirodan broj n, tj. da iz p-konveksnosti funkcije f sledi n-konveksnost za sve $n \in N$. Tako recimo, za kom. polugrupu $(T, \cdot)$ sa neutralnim elementom e i $x^3 = e$ za sve $x \in T$, ne postoji antistepenovanje reda 3, dok postoji antistepenovanje reda 2 – $\gamma_2(x) = x^2$ za $x \in T$.

Ipak, može se dokazati sledeća

TEOREMA 2.3.1. <u>Ako je funkcija f p_i-konveksna za $i=1, \ldots, k$ nad $A \subset X_1$ (skup A je iz definicije 2.2.2), tada je f n-konveksna funkcija nad A za svaki prirodan broj oblika $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ gde $a_i \in N'$ $i = 1, \ldots, k$ a $N' = N \cup \{0\}$.</u>

Dokaz. Neka je $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ za $a_i \in N'$ i $i = 1, \ldots, k$. Koristeći lemu 2.2.3 možemo konstruisati antistepenovanja reda n nad polugrupama X_1 i X_2

$$\gamma_n = \gamma_{p_1}^{a_1} \circ \ldots \circ \gamma_{p_k}^{a_k}$$

$$\delta_n = \delta_{p_1}^{a_1} \circ \ldots \circ \delta_{p_k}^{a_k} ,$$

gde je $\gamma_{p_i}^{a_i}$ a_i-tostruka uzastopna kompozicija funkcije γ_{p_i} (nad A važi uslov iz definicije 2.2.2) .

Sada je uz pomoć leme 2.3.1 lako dobiti n-konveksnost funkcije f nad A. Time je završen dokaz teoreme 2.3.1.

Ako u prethodnoj teoremi dodamo još neke pretpostavke , tada možemo dobiti da 2-konveksnost funkcionele nad komutativnom polugrupom povlači njenu n-konveksnost za sve $n \in N$. Tako važi

TEOREMA 2.3.2. Neka je $(X_1, *)$ komutativna polugrupa sa antistepenovanjem γ_n za sve $n \in N$ i R je skup realnih brojeva (ili skup R^+ nenegativnih realnih brojeva) sa uobičajenim sabiranjem (množenjem). Tada iz 2-konveksnosti funkcionele $f: A \to R$ (R^+) nad $A \subset X_1$ (skup A je kao u definiciji 2.2.2 za sve $n \in N$) sledi njena n-konveksnost nad A za sve $n \in N$.

Dokaz. Antistepenovanje nad $(R,+)$ je dato sa $\delta_n(x) = \frac{x}{n}$ (odnosno $\delta_n(x) = \sqrt[n]{x}$ nad $(R^+, \cdot)$) . Iz leme 2.3.1 sledi da je funkcija f 2^k- konveksna nad A za sve $k \in N$. Pretpostavimo da važi (2.2.2) za n. Dokazaćemo da tada (2.2.2) važi i za $n-1$. Iz naše pretpostavke sledi

$$(2.3.1)\quad f(\gamma_n(x_1 * \dots * x_{n-1} * \gamma_{n-1}(x_1 * \dots * x_{n-1}))) \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(\gamma_{n-1}(x_1 * \dots * x_{n-1})).$$

Sa druge strane, $(X_1, *)$ je komutativna polugrupa i $x_i = (n-1)(\gamma_{n-1}(x_i))$. Zato je

$$f(\gamma_n(x_1 * \dots * x_{n-1} * \gamma_{n-1}(x_1 * \dots * x_{n-1})) =$$
$$= f(\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n-1} n(\gamma_{n-1}(x_i))) = f(\gamma_{n-1}(\mathop{*}_{i=1}^{n-1} x_i)) \quad .$$

Uvrštavajući prethodno dobijeni rezultat u (2.3.1) dobijamo (2.2.2) za $n-1$.

Analogno se dokazuje teorema 2.3.2 i za $(R^+, \cdot)$ i

$$\delta_n(x) = \sqrt[n]{x} \quad .$$

PRIMEDBA 2.3.1. Dokaz teoreme 2.3.2 je izveden Cauchy-evom indukcijom. Medjutim dokaz se može sprovesti i običnom potpunom indukcijom, koristeći se idejama J.Aczél-a [1] str. 115-118 za realne funkcije realne promenljive.

PRIMEDBA 2.3.2. Primetimo, da ako je u teoremi 2.3.2 polugrupa $(X_1, \ast)$ ideal neke proizvoljne komutativne polugrupe, tada je na osnovu leme 2.2.2 i teoreme 2.1.1 dovoljno pretpostaviti samo egzistenciju antistepenovanja reda 2.

2.4 p-konveksnost funkcije kao posledica njene n-konveksnosti za $p \leqslant n$

U prethodnom poglavlju smo videli pod kojim uslovima će neka funkcija biti n-konveksna. Morali smo pretpostaviti više nego za realne funkcije realne promenljive. Da bi funkcija bila n-konveksna pretpostavili smo da je p_i -konveksna, gde su p_i prosti delitelji broja n. To je bilo potrebno već i zbog egzistencije antistepenovanja reda n.

Ako se vratimo na primer polugrupe $(S, \cdot)$ iz poglavlja 2.2, vidimo da za nju egzistira antistepenovanje reda 3, definisano sa $\gamma_3(x) = x$ za $x \in S$, a ne postoji antistepenovanje nižeg reda - 2. Zato ćemo u ovom poglavlju ispitati kada iz konveksnosti višeg reda funkcije sledi njena konveksnost nižeg reda.

U odredjenom smislu važi obrnuto od tvrdjenja teoreme 2.31. X_1 i X_2 **su komutativne polugrupe.**

TEOREMA 2.4.1. Ako je funkcija f n-konveksna nad $A \subset X_1$ (A je kao i u definiciji 2.2.2), tada je i p_i-konveksna za $i = 1, \ldots, k$, gde je $p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} = n$ za $a_i \in N'$($i = 1, \ldots, k$) .

Dokaz. Neka važi nejednakost (2.2.2) (uporedljivi slučaj). Na osnovu leme 2.2.3 sa

$$\gamma_{p_i}(x) = n_i (\gamma_n(x))$$

definisana su antistepenovanja reda p_i ($i = 1, \ldots, k$) na X_1 , gde je $n_i = p_1^{a_1} \ldots p_i^{a_i - 1} \ldots p_k^{a_k}$.

Analogno,

$$\delta_{p_i}(y) = n_i (\delta_n(y))$$

su antistepenovanja reda p_i na X_2.

Očigledno da kada $x_s \in A$ za $s = 1, \ldots, p_i$ za $i = 1, \ldots, k$, tada i

$$\gamma_{p_i}(\overset{p_i}{\underset{s=1}{*}} x_s) \in A \quad \text{za } i = 1, \ldots, k.$$

Tako dobijamo reprezentacije

$$\gamma_n = \gamma_{p_1}^{a_1} \circ \ldots \circ \gamma_{p_k}^{a_k}$$

$$\delta_n = \delta_{p_1}^{a_1} \circ \ldots \circ \delta_{p_k}^{a_k} ,$$

koje su nezavisne od poretka antistepenovanja γ_{p_i} , odnosno δ_{p_i} , za $i = 1, \ldots, k$.

Sada imamo (za uporedljivi slučaj)

$$f(\gamma_{p_i}(\overset{p_i}{\underset{s=1}{*}} x_s)) = f(\gamma_{p_i}(\overset{p_i}{\underset{s=1}{*}} n_i(\gamma_{n_i}(x_s)))) =$$

$$= f\left(\gamma_{p_i}\left(\gamma_{n_i}\left(\mathop{*}_{s=1}^{p_i} n_i(x_s) \right)\right)\right) = f\left(\gamma_n\left(\mathop{*}_{s=1}^{p_i} n_i(x_s) \right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_n \left(\bigoplus_{s=1}^{p_i} n_i\, f(x_s) \right) = \delta_{p_i}\left(\delta_{n_i}\left(\bigoplus_{s=1}^{p_i} n_i\, f(x_s) \right)\right) =$$

$$= \delta_{p_i}\left(\bigoplus_{s=1}^{p_i} f(x_s) \right) \qquad \text{za} \quad i = 1, \ldots ,k \ .$$

Time je završen dokaz teoreme 2.4.1 .

Lako je sada na osnovu teoreme 2.3.1 i teoreme 2.4.1 dokazati da važi

POSLEDICA 2.4.1. Ako je funkcija f n-konveksna ($n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ za $a_i \in N'$ i $i = 1, \ldots ,k$) nad $A \subset X_1$ (skup A je kao u definiciji 2.2.2) , tada je i s-konveksna , gde je $s = p_1^{b_1} \ldots p_k^{b_k}$ za $b_i \in N'$ i $i = 1, \ldots ,k$.

2.5 Neke primene n-konveksnosti funkcije

Na sledećih nekoliko primera ilustrovaćemo opštu n-konveksnost funkcije. Prva grupa primera je vezana za realne funkcije realne promenljive , gde se kao specijalan slučaj pojavljuje J-konveksna funkcija (1.2.1). Drugi primer se odnosi na jednu teoremu o funkcioneli nad totalno uredjenom polugrupom.

Podjimo od sledećih skupova realnih funkcija nad podskupovima od R ili R^+ (tamo gde imaju smisla definisani izrazi):

$$K_1 = \left\{ f \;\middle|\; f(\sqrt{xy}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{za } x,y \in I_2 \right\}$$

$$K_2 = \left\{ f \;\middle|\; f(\sqrt{xy}) \leqslant \sqrt{f(x)\, f(y)} \quad \text{za } x,y \in I_2 \right\}$$

$$K_3 = \left\{ f \;\middle|\; f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{za } x,y \in I_1 \right\}$$

$$K_4 = \left\{ f \;\middle|\; f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \sqrt{f(x)\, f(y)} \quad \text{za } x,y \in I_1 \right\},$$

gde je $I_1 \subset R$ sa osobinom srednje tačke, tj. iz $x,y \in I_1$ sledi $\frac{x+y}{2} \in I_1$ i $I_2 \subset R^+$ sa osobinom da $x,y \in I_2$ povlači $\sqrt{xy} \in I_2$.

Primenjujući teoremu 2.3.2 na funkcije iz istog skupa K_i za $i = 1, \ldots, 4$, tj. na one koje zadovoljavaju odgovarajuću nejednakost za 2 , dobijamo da one zadovoljavaju i odgovarajuće nejednakosti za sve $n \in N$.

Uzmimo specijalno funkciju $f(x) = x$ za $x \in R^+$. Ona pripada K_1 . Tako dobijamo poznatu nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine za sve $n \in N$. Primenjujući nejednakost izmedju geometrijske i aritmetičke sredine na skupove funkcija K_i ($i = 1,2,3,4$) dobijamo za $I_1 = I_2$

$$K_2 \subset K_1 \quad \text{i} \quad K_4 \subset K_3 \quad .$$

Ako uzmemo drugi specijalan slučaj $f(x) = \frac{1}{x}$ za $x > 0$ iz K_1 , dobijamo nejednakost izmedju geometrijske i harmonijske sredine za svako $n \in N$.

Skup K_3 je skup običnih Jensen-konveksnih realnih funkcija , a u skup K_4 ulaze logaritamski konveksne funkcije(vid. na pr. D.S.Mitrinović [55]. str. 20-21).

Gama-funkcija $\Gamma(x)$ za $x > 0$ pripada K_4 , te odatle sledi da zadovoljava odgovarajuću nejednakost i za svako $n \in N$ (vid. D.S.Mitrinović [55] , str. 280). Funkcija

$$\frac{\Gamma(x)}{(x-1)^x} \quad \text{za} \quad x > 1$$

pripada skupu K_4 (videti Problem 549, Math.Monthly V 79 (1972) , 917-918).

Drugi primer je vezan za totalno uredjenu polugrupu. Pre svega daćemo neka objašnjenja (L.Fuchs[31] ,str.182--188) .

DEFINICIJA 2.5.1. Grupoid sa sredinom (eng. mean grupoid) je skup W sa osobinama

(i) W je striktno totalno uredjeni grupoid;

(ii) svaki elemenat iz W je idempotentan;

(iii) W zadovoljava zakon entropije

$$(ab)(cd) = (ac)(bd)$$

za sve $a,b,c,d \in W$;

(iv) W je Arhimedovsko ,u smislu da ako je $a < c < b$, tada postoji prirodni broj n takav da množeći a sa b n-puta sa leve (desne) strane dobija se $bb \ldots ba > c$ ($abb \ldots b > c$) i dualno . Uzeli smo $bb \ldots ba = b(\ldots (ba))$.

Za komutativne grupoide sa sredinom važi sledeća (L.Fuchs [31] , str. 183-185)

TEOREMA 2.5.1. Za svaki komutativan grupoid W sa sredinom postoji injektivno preslikavanje f u skup realnih brojeva koje očuvava relaciju poretka i takvo da je

$$(2.5.1) \qquad f(\, x\, y\,) = \frac{1}{2} (\, f(x) + f(y)\,)$$

za sve $x, y \in W$. Ovo preslikavanje je jednoznačno odredjeno do na linearne transformacije, u smislu $g(x) = a\, f(x) + b$ $(\, a > 0\,,\ b \in R)$.

Ako se ograničimo samo na komutativne striktno totalno uredjene polugrupe, vidimo da su uslovi (i) i (iii) iz definicije 2.5.1 automatski zadovoljeni. Zato ćemo sa S označiti komutativnu striktno totalno uredjenu polugrupu za koju važe (ii) i (iv) i zvaćemo je komutativna polugrupa sa sredinom.

Tada važi

TEOREMA 2.5.2. Za svaku komutativnu polugrupu sa sredinom S postoji injektivno preslikavanje f u skup realnih brojeva koja očuvava relaciju poretka i takvo da je

$$(2.5.2) \qquad f\Big(\, \prod_{i=1}^{n} x_i \,\Big) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

za sve $x_i \in S$ i $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz. Kako za S važi (ii) iz definicije 2.5.1, tj. $x^2 = x$ za svako $x \in S$, to je sa

$$(2.5.3) \qquad \gamma_2(x) = x \qquad \text{za } x \in S$$

definisano antistepenovanje reda 2 nad S.

Pošto su ispunjeni uslovi teoreme 2.5.1, to postoji injektivno preslikavanje f u skup realnih brojeva koje očuvava relaciju poretka i takvo da važi (2.5.1) za $x, y \in S$. Na osnovu (2.5.3) umesto (2.5.1) možemo pisati

$$f(\, \gamma_2(\, x\, y\,))= \frac{1}{2} (\, f(x) + f(y)\,) \quad \text{za } x, y \in S.$$

Prethodna jednakost je ekvivalentna sa dve nejednakosti

$$(2.5.4)\qquad f(\gamma_2(x\,y)) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

i

$$(2.5.5)\qquad f(\gamma_2(x\,y)) \geq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

za $x,y \in S$. Primetimo da je nad polugrupom S definisano antistepenovanje proizvoljnog reda $n \in N$ sa $\gamma_n(x) = x$ za $x \in S$. To sledi iz jednakosti

$$x^n = x^2\, x^{n-2} = x\, x^{n-2} = x^{n-1} \qquad \text{za} \quad n \in N \setminus \{1\},$$

što povlači $x^n = x$.

Iz nejednakosti (2.5.4) zaključujemo da je funkcija f 2-konveksna. Kako su ispunjeni svi uslovi teoreme 2.3.2 to sledi da je f i n-konveksna za svako $n \in N$, tj. važi

$$(2.5.6)\qquad f(\gamma_n(\prod_{i=1}^{n} x_i)) = f(\prod_{i=1}^{n} x_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

za $x_i \in S$ i $i=1, \ldots ,n$.

Iz nejednakosti (2.5.5) sledi da je funkcija $-f$ 2-konveksna , te na osnovu teoreme 2.3.2 dobijamo da je $-f$ i n-konveksna za svako $n \in N$, tj. važi

$$(2.5.7)\qquad f(\gamma_n(\prod_{i=1}^{n} x_i)) = f(\prod_{i=1}^{n} x_i) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

za $x_i \in S$ i $i = 1, \ldots ,n$.

Iz nejednakosti (2.5.6) i (2.5.7) sledi jednakost (2.5.2) . Time je završen dokaz teoreme 2.5.1.

L i t e r a t u r a :

1) J.Aczél, Nejednakosti i njihova primena u elementarnom rešavanju zadataka sa maksimumom i minimumom, Mat.bibl. 18, 111-138.

2) J.Aczél, Lectures on functional equations and their applications, New York - London , 1966.

3) V.N.Aleksjuk, Two theorems on the existence of a quasi--base of a family of quasi-measures, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika, 6(1968), 11-18.

4) V.N.Aleksjuk, O slaboj kompaktnosti semejstva kvazimer, O vzaimasvjazi metriki i meri, Sib.Mat.Žurn., T XI(1970) 723-738.

5) S. Aljančić, Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Beograd, 1968.

6) M.J.Antonovskij, V.G.Boltjanskij, T.A. Sarimsakov, Metric spaces over semi-fields, Tashkent State University, 1961.

7) M.J.Antonovskij, Sistemi obobšcenih metrik na proizvolnom množestve, UMN, T 24 1(145), 1969.

8) M.J.Antonovskij, I.G.Koševnikova, Prostranstva shodimosti tipa Freše-Urisona i obobšcennaja metrizacija, Mat. ves. 9(24) , (1972), 373-378.

9) P.Antosik, On the Mikusiński Diagonal Theorem, Bull.Acad. Polon.Sci.Ser.Math.Astronom.Phys., 19(1971),305-310.

10) P.Antosik, A Generalization of the Diagonal Theorem, ibid., 20(1972), 373-377.

11) P.Antosik, Mappings from L-Groups into Topological Groups. I., ibid., 21 (1973), 145-153.

12) P.Antosik, Mappings from L-Groups into Topological Groups. II., ibid., 21 (1973), 155-160.

13) P.Antosik, J.Mikusiński, R.Sikorski, Theory of distributions-The sequential approach, Warszawa, 1973.

14) P.Antosik, The Uniform Approach to Nikodym and Vitali--Hahn-Saks Type Theorems, Studia math. (u štampi).

15) A.R.Bednarek, J.Mikusiński, Convergence and Topology, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Math.Astronom.Phys.,17(1969), 437-441.

16) L.Berg, Analysis in geordneten, kommutativen Halbgruppen mit Nullelement (deo predavanja održan u Akademiji DDR), 1974.

17) G.Birkhoff, Lattice theory, Coloquium Publications, V XXV, 1948.

18) N.Bourbaki, Obšcaja topologija- Osnovnie strukturi, Moskva,1968.

19) N.Bourbaki, Obšcaja topologija-Topologičeskie gruppi, Moskva, 1968.

20) N.Bourbaki, Topologičeskie vektornie prostranstva, Moskva, 1959.

21) J.K.Brooks, On the Vitali-Hahn-Saks and the Nikodym theorems, Proc. Math.Acad.Sci., 64(1969),469-471.

22)J.K.Brooks,R.S.Jewett, On finitely additive vector measures, ibid., 67(1970) , 1294-1298.

23) A.H.Clifford, G.B.Preston, Algebraičeskaja teorija polugrupp I,II , Moskva, 1972.

24) R.B.Darst, The Vitali-Hahn-Saks and Nikodym theorems for additive set functions, Bull.Amer.Math.Soc., 76(1970), 1237-1238.

25) L.Drewnowski, Topological rings of sets, Continuous set functions, Integrations I, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Math. Astronom.Phys., 20(1972), 269-276.

26) L.Drewnowski, isto II, 20(1972), 277-285.

27) L.Drewnowski, isto III, 20(1972), 439-445.

28) L.Drewnowski, Uniform Boundedness Principle for Finitely Additive Vector Measure, ibid., 21(1973),115-118.

29) L.Drewnowski, Equivalence of Brooks-Jewett, Vitali-Hahn-Saks and Nikodym Theorems, ibid.,20(1972),725-731.

30) N.Dunford, J.Schwartz, Linejnie operatori, Moskva, 1962.

31) L.Fuchs, Partially ordered algebraic systems, Pergamon Press, 1963.

32) F.Hausdorff, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, J. reine angew. Math. 167, (1932), 294-311.

33) E.Hille, R.S.Phillips, Funkcionalnij analiz i polugruppi, Moskva, 1962.

34) K.H.Hofmann, P.S.Mostert, Elements of compact semigroups, Columbus, Ohio,1966.

35) S.S.Jou, S.Kurepa, Some properties of almost open sets in topological groups and application, Glasnik Mat. Ser. III 7(27) (1972), 189-200.

36) S.S.Jou, Convex functions on topological groups, Glasnik Mat. Ser.III 8(28), (1973), 175-178.

37) A.Kelly, Obšcaja topologija, Moskva, 1968.

38) G.Köthe, Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag, 1969.

39) Dj.Kurepa, Tableau ramifiés d'ensembles, Espaces pseudodistanciés, C.R. 198(1934),1563-1565.

40) S.Kurepa, Convex functions, Glasnik Mat.Fiz.Astronom. (Ser II) 11(1956), 89-93.

41) A.G.Kuroš, Teorija grupp, Moskva, 1967.

42) I.Labuda, Sur quelques généralisations des théoremes de Nikodym et de Vitali-Hahn-Saks, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser. Math. Astronom.Phys.,20(1972), 447-456.

43) D.Landers, L.Rogge, The Hahn-Vitali-Saks and the Uniform Boundedness Theorem in Topological Groups, Manuscripta Mathematica, 4(1971), 351-359.

44) S.Lang, Algebra, Moskva, 1968.

45) E.S.Ljapin, Polugruppi, Moskva, 1960.

46) R.De Marr, I.Fleischer, Metric spaces over partially ordered semi-groups, Zapiski Karlova universiteta, 7 4(1966), 501-508.

47) R.De Marr, I.Fleischer, Convergence via abstract metrics, Rev.Roum.Math. Pures et Appl. , T 15, 4(1970),515-519.

48) J.Mikusiński, A Theorem on vector matrices and its applications in measure theory and functional analysis, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Math.Astronom.Phys.,18(1970), 193-196.

49) J.Mikusiński, On spaces of sequences, ibid.,17(1969),17-20.

50) J.Mikusiński,J.K.Brooks, On some Theorems in Functional Analysis, ibid.,18(1970),151-155.

51) J.Mikusiński, Weak convergence and strong convergence in some spaces of sequences, ibid.,(1968) 16, 47-50.

52) J.Mikusiński, On the convergence of sequences of periodic distributions, Studia Mathematica, 31(1968), 1-14.

53) J.Mikusiński,R.Sikorski , The elementary theory of distributions I-II, Rozprawy Matematyczne, 12(1957),25(1961).

54) J.Mikusiński, On a theorem of Nikodym on bounded measure, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Math.Astronom.Phys., 19(1971), 441-443.

55) D.S.Mitrinović, Analitičke nejednakosti, Beograd,1970.

56) D.S.Mitrinović, Nejednakosti, Beograd, 1965.

57) T.F.Mulcrone, Semigroup examples in introductory modern algebra, The Amer.Math.Monthly, 69(1962),296-301.

58) K.Musial, Absolute Continuity and the Range of Group Valued Measure, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Math.Astronom. Phys., 21(1973), 105-113.

59) O.M.Nikodym, Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement d'ensemble abstrait, Monatshefte für

Math. und Physik, 40(1933), 427-432.

60) O.M.Nikodym. Sur les familles bornées de fonctions parfaitemeent additives d'ensemble abstrait, ibid., 418-426.

61) W.Orlicz, Uber unbedingte Konvergenz in Funtionenräumen, Studia Math., 1(1930), 83-85.

62) W.Orlicz, Absolute continuity of vector-valued finitely additive set functions I, Studia Math., 30(1968), 121-133.

63) A.B.Paalman-de Miranda, Topological Semigroups, Matematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

64) E.Pap, O Dijagonalnoj teoremi, magistarski rad, Beograd, 1973.

65) E.Pap, O Dijagonalnoj teoremi, Mat. ves. 10(25) (1973), 391-399.

66) E.Pap, A generalization of the Diagonal theorem on a block-matrix, Mat. ves. 11(26) (1974), 66-71.

67) E.Pap, O.Hadžić, Neke primene Dijagonalne teoreme u funkcionalnoj analizi, Zbornik PMF u N.Sadu(u štampi).

68) E.Pap, Zbirka rešenih zadataka iz teorije funkcija kompleksne promenljive, Novi Sad, 1974.

69) B.J.Pettis, On integration vector spaces, Trans.Amer. Math.Soc.,44(1938), 277-304.

70) C.E.Rickart, Integration a convex linear topological space, Trans.A.M.S. , 52(1942), 498-521.

71) C.E.Rickart, Decomposition of additive set functions, Duke. Math. J. , 10(1943), 653-665.

72) S.Saks, Addition to the note on some functionals, Trans.Amer.Math.Soc., 35(1933), 967-974.

73) Z.Semadeni, Banach spaces of continuous functions, Warszawa, 1971.

74) M.Sion, A Theory of Semigroup Valued Measures, Springer--Verlag, 1973.

75) B.Stanković, Uopštavanje funkcija i operacija sa njima -- distribucije, Mat. ves., 1(16), (1964), 221-228.

76) W.Sierpiński, Cardinal and Ordinal Numbers, Warszawa, 1965.

77) D.H.Tucker, H.B.Maynard, Vector and Operator Valued Measures and Applications, Academic Press, New York--London, 1973.

78) P.M.Vasić, D.D.Adamović, Sur un systéme infini d' inégalités fonc ti onnelles, Publ. Inst. Math. , 9(23), (1969), 107-114.

79) G.Vitali, Sull'integrazione per serie, Rend.Circolo Mat. di Palermo 23 (1907), 137-155.

80) B.Z.Vulih, Vvedenie v teoriju poluuporjadočennih prostranstv, Moskva, 1961.

81) A.D.Wallace, His philosophical outlook on mathematics, semigroups, and nature, Semigroup forum,V 7 (1974), 20-23.

82) A.R.Wayne,E.Dale, Convex functions, Academic Press, New York -London, 1973.

83) K.Yosida, Funkcionalniji analiz, Moskva, 1967.

84) B.Riečan, On the extension of a measure on lattices, Mat. čas. 19, (1969), 44 -49.

85) B.Riečan, Abstraktnoe postroenie meri Lebega iz meri Borelja, Mat. čas. 25, (1975), 49-58.

86) L.Schwartz, Théorie des distributions T.I,Paris, 1950.

S A D R Ž A J

strana