PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITET U BEOGRADU

Mr NATAŠA B. BOŽOVIĆ

NEREŠIVI PROBLEMI U TEORIJI GRUPA

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 1975.

S A D R Ž A J

Pregled razvoja problema odlučivosti u teoriji grupa i kratak prikaz rezultata izloženih u ovom radu..... 3

1. OSNOVNI POJMOVI

1.1. Konačno i rekurzivno predstavljive funkcije.... 9
1.2. Markovska svojstva grupa........................16
1.3. Univerzalne grupe.............................19
1.4. Problem odlučivosti u teoriji grupa............25

2. ODREDJENJE KLASE MARKOVSKIH SVOJSTAVA POMOĆU UNIVERZALNIH GRUPA

2.1. Teorema o odnosu univerzalnih grupa i Markovskih svojstava..........................28
2.2. Komentari o mogućnostima primene teoreme.......33

3. NEKI NEODLUČIVI PROBLEMI KOD GRUPA

3.1. Primeri neraspoznatljivih svojstava grupa......38
3.2. Primeri klasa neraspoznatljivih svojstava......41
3.3. O jednom metodu dokazivanja neraspoznatljivosti svojstava i klasa svojstava...................45

4. OSOBINE UNIVERZALNIH GRUPA I MARKOVSKIH SVOJSTAVA

4.1. O osobinama Markovskih i njima komplementarnih svojstava...................................53
4.2. O osobinama univerzalnih grupa.................57

LITERATURA...60

Pregled razvoja problema odlučivosti u teoriji grupa i kratak prikaz rezultata izloženih u ovom radu

Tridesetih godina ovog veka dati su prvi formalni analogoni intuitivnog pojma algoritma: -izračunljive funkcije (A.Church, 1933), rekurzivne funkcije (S.Kleene, 1935), mašine Turing-a (A.Turing, E. Post, 1936), itd. Ubrzo zatim pronadjeni su i prvi primeri matematičkih problema algoritamski nerešivih u gornjem preciznom smislu*).

Nerešivost prvog problema u algebri - problema reči za polugrupe koji je još 1914 postavio A.Thue - dokazali su 1947 god. E.Post /62/ i A.A.Марков /43/. Tri gorine kasnije A.Turing /69/ je dokazao nerešivost istog problema za polugrupe sa koncelacijom.

Algoritamsku nerešivost problema reči za grupe je dokazao П.С.Новиков1952 godine /58/ (kasnije W.Boone /1o/ i J.Britton /16/). To je ujedno bio i prvi algoritamski nerešivi problem u teoriji grupa. Ubrzo je dokazana nerešivost i preostala dva fundamentalna Dehn-ova problema - problema konjugovanosti (П.С.Новиков /59/) i problema izomorfizma (С.И.Адян /2/, M.Rabin /63/).

---

*) Poznato je da postoje matematički problemi na čijem je rešavanju, dugi niz godina, radio veliki broj istraživača, i za koje se na kraju pokazalo da su algoritamski nerešivi. Primer je deseti Hilbert-ov problem, postavljen još 19oo god., čiju je algoritamsku nerešivost dokazao Ю.Матиясевич 197o godine.

Do danas je ispitana algoritamska rešivost velikog broja problema u teoriji grupa.

Rezultate iz ove oblasti možemo grupisati prema različitim kriterijumima. Pre svega možemo ih podeliti na istraživanja sa ciljem da se dokaže principijelna nerešivost odnosno rešivost nekog problema ili klase problema; tako postoje problemi odlučivosti sa 1° negativnim i 2° pozitivnim rešenjem.
Dalju podelu možemo izvršiti prema tome da li su u pitanju problemi koji se tiču elemenata j e d n e grupe, ili problemi u kojima su objekti ispitivanja grupe u celini; u tom smislu govorimo o problemima I odnosno II reda.
Prema domenu algoritama, postoje a) problemi formulisani na klasi svih k.p. grupa (odnosno odgovarajućem skupu prezentacija), kao i b) problemi koji se odnose na neki uži domen.
Konačno, postoji relativno izdvojena grupa radova u kojima se dokazuje egzistencija problema kod k.p. grupa sa proizvoljnim stepenom nerešivosti. Naime, za neki dati problem i proizvoljni stepen nerešivosti D, konstruiše se grupa (ili rekurzivan skup prezentacija) u kojoj je polazni problem nerešiv sa stepenom D.

Pomenimo neke od najvažnijih rezultata iz svake od ovih grupa radova.

Osnovni cilj kod istraživanja problema odlučivosti sa pozitivnim rešenjem je naći što širu klasu grupa za koju je uočeni problem još uvek rešiv. Medju mnogima koji su se bavili ovom problematikom interesantne rezultate je dao A.Mostowski /53/, /54/ za klase nilpotentnih grupa, rezidualno konačnih grupa, grupa separabilnih po konjugaciji, grupa separabilnih po podgrupama itd. Takodje je Ch.Miller /51/, proučavajući neke elementarne klase grupa i na njima tri fundamentalna problema Dehn-a, došao do nekih pozitivnih (kao i negativnih) rešenja. Rešivost nekih problema u teoriji grupa dokazali su i А.Фридман /28/, Е.Тимошенко /68/, М.Гриндлингер /3o/, /31/ i drugi.

U teoriji grupa su veoma važni i dokazi principijelne nerešivosti pojedinih problema. Tu su, izmedju ostalih, sledeći rekurzivno nerešivi problemi I reda: problemi koji se tiču svojstava elemenata i podgrupa kod grupa (G.Baumslag, W.Boone, B.H.Neumann /6/), stepeni i redni problem kod grupa (D.Collins /23/), slabi problem reči i slabi problem konjugovanosti kod uredjenih grupa (В.Френкель /25/), problem n-tog korena kod grupa (S.Lipschutz, M.Lipschutz /39/), problemi u vezi sa direktnim i slobodnim proizvodom grupa (Н.Михайлова /49/, /5o/) itd.

Iz oblasti problema odlučivosti II reda osnovni rezultat sa negativnim rešenjem - dokaz da je svako Markovsko svojstvo konačno predstavljivih grupa neraspoznatljivo - dali su С.И.Адян /2/ i M.Rabin /63/. Ovaj je rezultat analogan rezultatu А.А.Маркова za polugrupe /45/, /46/ i rezultatu J. Addison-a /1/ i W.Feeney-a /24/ za polugrupe sa kancelacijom. U istim radovima /2/, /63/, dokazana je i nerešivost izvesnih meta-problema, tj. problema egzistencije algoritma koji za proivoljnu konačnu prezentaciju Π utvrdjuje da li je za grupu G_Π odredjenu tom prezentacijom uočeni problem rešiv ili ne. Kasnije je D.Collins /22/ dokazao neraspoznatljivost svih tzv. "jakih Markovskih" svojstava k.p. grupa, a G. Sacerdote /65/ neraspoznatljivost svih svojstava k.p. grupa koja se prenose homomorfizmom.

Rešenjem problema E.Post-a 1957 godine (R.Friedberg /29/) o egzistenciji stepenā nerešivosti različitih od najvećeg stepena O′ i najmanjeg, koji se sastoji od rešivih problema, prirodno se nametnuo problem uopštavanja poznatih nerešivih problema kod grupa pomoću proizvoljnih stepena nerešivosti. Prvo ovakvo uopštenje za problem reči sistema Thue je dao W.Boone /11/, a za problem reči kod k.p. grupa C.Clapham /18/ i A.Фридман /27/. Kasnije je W.Boone /14/ uopštio pomoću proizvoljnog stepena nerešivosti postojeće rezultate A.A.Маркова /46/, J.Addison-a /1/, W.Feeney-a /24/, M.Rabin-a /63/ i C.И.Адяна /2/ o neraspoznatljivosti Markovskih svojstava kod polugrupa, polugrupa sa kancelacijom i kod grupa.

S obzirom da se u terminima konačno predstavljivih grupa formulišu izvesni problemi i u drugim matematičkim disciplinama (napr. u topologiji itd.), rezultati koji se tiču problema odlučivosti kod k.p. grupa imaju prirodnu interpretaciju i u ovim disciplinama. Prvi rezultati u tom pravcu su radovi W.Haken-a /33/ i W.Boone, W.Haken, V.Poenary-a /15/.

Ova problematika je još uvek veoma aktuelna i razvija se i dalje u svim navedenim pravcima.

* * * * *

Medju navedenim rezultatima, u izvesnom smislu centralno mesto pripada Адян -Rabin-ovom dokazu algoritamske neraspoznatljivosti svakog Markovskog svojstva k.p. grupa. Naime, klasa Markovskih svojstava je veoma široka i obuhvata mnoga osnovna svojstva k.p. grupa, kao napr. biti jedinična, slobodna, ciklična, Abel-ova grupa itd. Medjutim, nije uvek lako odrediti da li je neko algebarsko svojstvo Markovsko ili nije. Naime, postojeća definicija uključuje egzistenciju izvesne grupe koja mora zadovoljiti odredjene, veoma stroge zahteve. Teškoće nastaju upravo kod efektivnog odredjivanja ovakve grupe.

U ovom radu dat je potreban i dovoljan uslov kojim se problem ispitivanja da li je neko svojstvo k.p. grupa Markovsko, svodi na ispitivanje da li neke fiksirane grupe (univerzalne k.p. grupe) imaju to svojstvo ili ne. Pokazuje se da je navedeni uslov "konstruktivniji" i algoritamski efikasniji u odnosu na postojeću definiciju Markovskog svojstva. Ova reformulacija omogućava da se za izvesna svojstva i klase svojstava k.p. grupa, za koje to dosad nije bilo poznato, relativno lako dokaže pripadnost klasi Markovskih svojstava, a time i nerešivost odgovarajućih algoritamskih problema.

Pokazuje se takodje da ista teorema omogućava dokazivanje izvesnih osobina Markovskih svojstava i grupa univerzalnih za klasu svih k.p. grupa.

Razmatrana je mogućnost prenošenja dokazanih tvrdjenja na druge algebarske strukture; u vezi sa ovim, pokazuje se da važi analogni potreban i dovoljan uslov za Markovska svojstva kod polugrupa.

1. OSNOVNI POJMOVI

1.1. Konačno i rekurzivno predstavljive grupe

1.2. Markovska svojstva grupa

1.3. Univerzalne grupe

1.4. Problem odlučivosti u teoriji grupa

1.1. Konačno i rekurzivno predstavljive grupe

Neka je $A = \{a_1,\dots,a_n,\dots;1;f\}$ skup čije elemente dogovorno nazivamo *slovima* a sam skup *azbukom*. Skup W svih *reči* u azbuci A uvodi se na sledeći način:

(1) $a_1,\dots,a_n,\dots,1$ su reči

(2) $fa_1,\dots,fa_n,\dots,f1$ su reči

(3) ako su u,v reči, onda je uv reč

(4) reči se dobijaju jedino konačno mnogo puta primenjujući (1),(2) i (3).

Reči fa_i označavamo sa a_i^{-1} $(i=1,2,\dots)$.

Reč 1 nazivamo *jediničnom rečju*.

Elementarne formule su oblika $u = v$ gde su u,v reči iz W.

Označimo sa Ax skup aksioma koji se sastoji od aksioma jednakosti (E) i posebnih, grupnih, aksioma (P)

(E) $\quad u=u, \quad \frac{u=v}{v=u}, \quad \frac{u=v,v=w}{u=w}, \quad \frac{u=v}{wu=wv}, \quad \frac{u=v}{uw=vw}$

(P) $\quad u1=1u=u, \quad a_i a_i^{-1}=a_i^{-1}a_i=1 \qquad (i=1,2,\dots).$

Uočimo podskup W´ skupa svih reči W, koji se sastoji od reči u tzv. *svedenom* obliku, tj. od reči koje ne sadrže nijednu podreč oblika $a_i a_i^{-1}$ ili $a_i^{-1}a_i$ $(i=1, 2,\dots)$.

Za svaku reč w postoji reč $\overline{w}$ u svedenom obliku tako da je

$$Ax \vdash w=\overline{w} .$$

Svaku reč w iz W možemo napisati u obliku

$$w=a_i^{\alpha_1}a_i^{\alpha_2}\dots a_i^{\alpha_n}$$

gde su $a_i \in \left\{a_1,\dots,a_n,\dots\right\}$, $\alpha_j=\pm 1$, $j=1,\dots,n$. Reč $w^{-1}=a_i^{-\alpha_n}\dots a_i^{-\alpha_2}\,a_i^{-\alpha_1}$ je *inverzna* reči w. Pritom važi

$$(\forall w)\,(ww^{-1}=w^{-1}w=1)$$

$$(\forall w)\,(w\in W' \Longrightarrow w^{-1}\in W').$$

U skup W′ se može uvesti operacija $\circ$ *složenog nadovezivanja* (tj. nadovezivanja sa svodjenjem) na sledeći način: od reči $u=a_{i_1}^{\alpha_1}\dots a_{i_n}^{\alpha_n}$ i $v=a_{j_1}^{\beta_1}\dots a_{j_k}^{\beta_k}$ ($\alpha_i=\pm 1$, $\beta_j=\pm 1$, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,k$) se prostim nadovezivanjem formira reč $uv=a_{i_1}^{\alpha_1}\dots a_{i_n}^{\alpha_n}\,a_{j_1}^{\beta_1}\dots a_{j_k}^{\beta_k}$ a zatim se ta reč transformiše u reč u svedenom obliku, tj.

$$\circ(u,v)=\overline{uv}.$$

U odnosu na operaciju složenog nadovezivanja skup W′ čini grupu, tzv. *slobodnu* grupu F nad generatorima $a_1,\dots,a_n,\dots$.

Za svako $n=1,2,\dots$ skupom $\left\{a_1,\dots,a_n\right\}$ se jedinstveno odredjuje skup W_n' reči u svedenom odliku (kao podskup skupa W_n svih reči u azbuci $\left\{a_1,\dots,a_n;1;f\right\}$). Analogno, u odnosu na operaciju složenog nadovezivanja, skup W_n' čini *konačno generisanu slobodnu* grupu F_n ranga n nad generatorima $a_1,\dots,a_n$.

Skup W_n' možemo razdeliti na klase u odnosu na neku relaciju kongruencije (što će odgovarati prelasku sa slobodne grupe F_n na neku njenu faktor-grupu). U tom cilju uvodimo konačan skup S *strukturnih jednakosti reči*

$$u_1=v_1,\dots,u_k=v_k\ .$$

Skupom S je odredjena relacija ρ u skupu W_n' reči u svedenom obliku, na sledeći način:

$$u\,\rho\,v \overset{def}{\Longleftrightarrow} Ax,\ S\vdash\!\!\!\text{---}\ u=v\,.$$

Relacija ρ je relacija ekvivalencije u W_n' i saglasna je sa operacijom složenog nadovezivanja, tj. ρ je kongruencija. Označimo sa C_w klasu ekvivalencije reči w u odnosu na ovu relaciju

$$C_w=\{u \mid u\in W_n' \wedge u\,\rho\,w\}\,.$$

U skup svih klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju ρ se uvodi operacija množenja klasa na sledeći način

$$C_u\cdot C_v=C_{uv}\ .$$

U odnosu na ovu operaciju, količnički skup W_n'/ρ čini grupu.

Strukturnu jednakost u=v možemo napisati u obliku $uv^{-1}=1$; reč uv^{-1} zovemo dalje *relatorom*.

DEFINICIJA 1: *Konačna prezentacija* grupe G je uredjeni par $\langle A_n;\ R\rangle$ gde je $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$ skup generatora a $R=\{R_1,\dots,R_k\}$ skup relatora poredjanih u leksikografskom poretku u odnosu na azbuku $\{1,a_1,a_1^{-1},\dots,a_n,a_n^{-1}\}$. Grupa G odredjena ovom prezentacijom je (izomorfna sa) $(W_n'/\rho\ ,\cdot)$ gde je W_n' skup reči u svedenom obliku u azbuci A_n, ρ relacija kongruencije odredjena skupom relatora R, a $\cdot$ operacija množenja klasa.

Može se dokazati da je klasa ekvivalencije C_1 (u odnosu na ρ) koja sadrži jediničnu reč, normalna podgrupa slobodne grupe F_n. C_1 je i minimalna normalna podgrupa koja sadrži sve relatore $R_1, \ldots, R_k$ (minimalno zatvorenje skupa R, u oznaci $[R]$). Tada je konačnom prezentacijom $\langle A_n; R \rangle$ zadata grupa (izomorfna sa) $F_n/ [R]$.

Izostavljajući uslov konačnosti u gornjoj definiciji, analogno se uvodi pojam prezentacije uopšte: uredjeni par $\langle A; R\rangle$ gde je A skup generatora $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ a R poizvoljan podskup skupa svih reči W' u svedenom obliku u azbuci $\{1, a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_n, a_n^{-1}, \ldots\}$, je *prezentacija*. Njom odredjena grupa je izomorfna faktor-grupi slobodne grupe F po minimalnoj normalnoj podgrupi koja sadrži sve reči iz skupa R.

Može se dokazati da svaka grupa ima prezentaciju. Jednu prezentaciju daje naprimer multiplikativna tablica grupe. Tako, ako je grupa G zadata sledećom tablicom

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n & \cdots \\
\hline
g_1 & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} & \cdots \\
g_2 & g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} & \cdots \\
\vdots & & & & & \\
g_m & g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
g_{ij} \in \{g_1, g_2, \ldots\} \\
i, j = 1, 2, \ldots
\end{array}
$$

tada je

$\Pi(G)=\langle g_1,\ldots,g_n,\ldots;g_1g_1g_{11}^{-1},g_1g_2g_{12}^{-1},\ldots,g_mg_ng_{mn}^{-1},\ldots\rangle$ jedna prezentacija grupe G.

Dakle, sve konačne grupe imaju konačnu prezentaciju. Postoje, medjutim, i beskonačne (prebrojive) grupe koje imaju konačnu prezentaciju (napr. svaka slobodna grupa konačnog ranga).

DEFINICIJA 2: Grupa G je *konačno predstavljiva* akko za nju postoji bar jedna konačna prezentacija.

Analogno se definišu *konačno generabilne* grupe za koje postoje prezentacije sa konačnim skupom generatora A i proizvoljnim skupom relatora R.
Klasu svih konačno predstavljivih (k.p.) grupa označimo sa $\mathscr{K}$.

S obzirom na predhodno, svakom prezentacijom Π je jedinstveno (do na izomorfizam) odredjena grupa G_Π . Grupa G, medjutim, može imati više različitih prezentacija. Transformacije kojima se od jedne prezentacije dobijaju druge prezentacije i s t e grupe nazivaju se *Tietze-ovim*.
Označimo sa $\mathscr{P}$ skup svih konačnih prezentacija grupa.

Klasa $\mathscr{K}$ svih apstraktnih grupa koje imaju bar jednu prezentaciju u $\mathscr{P}$ čini široku i, sa gledišta teorije odlučivosti, veoma značajnu klasu grupa. Prirodno se, medjutim, postavlja pitanje mogućnosti proširivanja ove klase grupa, ali takvog da u njemu ostanu smisleni odgovarajući problemi odlučivosti. Drugim rečima, postavlja se pitanje egzistencije rekurzivnog skupa šireg od skupa $\mathscr{P}$ svih konačnih prezentacija, čiji elementi imaju konačan zapis.
Uvedimo sada skup svih tzv. rekurzivnih prezentacija grupa.

Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ konačna azbuka i W skup svih reči u toj azbuci (možemo se ograničiti na konačnu azbuku ne umanjujući opštost, jer se, na način opisan u odeljku 1.3.(1^o), sve reči u prebrojivoj azbuci mogu kodirati rečima u nekoj konačnoj azbuci). Neka je $R_p \subset W$ proizvoljni rekurzivno prebrojivi skup reči iz W. Svaki rekurzivno prebrojivi skup je skup vrednosti neke delimično rekurzivne funkcije; stoga je i skup R_p oblast vrednosti neke delimično rekurzivne funkcije reči $F(w)$ definisane na rečima u azbuci A, tj.

$$R_p = \{ v \mid v = F(w), w \in W \}.$$

Dokažimo da se skup R_p može konačno zadati.

Svakoj reči w iz skupa W može se dodeliti njen *azbučni broj* $n(w)$ na sledeći način:

$$n(\Lambda) = 0$$

$$n(a_i) = i$$

$$n(w) = i_m + i_{m-1}k + \ldots + i_1 k^m$$

gde je $w = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{m-1}} a_{i_m}$ $(a_{i_m} \in A)$.

Označimo sa w_m reč u azbuci A čiji je azbučni broj m.

Koristeći azbučno numerisanje reči, svakoj funkciji reči $F(w)$ u azbuci A može se, jedinstveno, dodeliti brojna funkcija $f(x)$, tzv. *brojni predstavnik funkcije* $F(w)$, na sledeći način:

$$f(i) = n(F(w_i)).$$

Dakle, $\quad F(w_i) = w_{f(i)}.$

Prema tome, svakom rekurzivno prebrojivom skupu reči

R_p pridružuje se delimično rekurzivna brojna funkcija $f(x)$ čije su vrednosti azbučni brojevi reči iz R_p.
S obzirom da se svaka delimično rekurzivna brojna funkcija jednog argumenta može konačno zapisati, uvodimo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 3: *Rekurzivna prezentacija* grupe G je uredjeni par $\langle A_i; f(x) \rangle$ gde je $A_i = \{a_1, \ldots, a_i\}$ skup generatornih elemenata grupe, a $f(x)$ brojna delimično rekurzivna funkcija. Grupa G odredjena ovom prezentacijom je izomorfna faktor -grupi slobodne grupe F_i nad generatorima iz A_i, po minimalnoj normalnoj podgrupi grupe F_i koja sadrži reči čiji su azbučni brojevi vrednosti funkcije $f(x)$.

Kada je oblast vrednosti delimično rekurzivne funkcije $f(x)$ konačan skup, data prezentacija je konačna.

DEFINICIJA 4: Grupa G je *rekurzivno predstavljiva* akko za nju postoji bar jedna rekurzivna prezentacija.

Klasu svih rekurzivno predstavljivih (r.p.) grupa označimo sa $\mathscr{R}$.

1.2. Markovska svojstva grupa

. Neka je $\mathscr{F}(G)$ proizvoljna formula kvantifikatorskog računa prvog reda u kojoj je G jedina slobodna promenljiva (G je oznaka za grupu). Tada je formulom $\mathscr{F}(G)$ odredjeno jedno svojstvo grupa. To svojstvo je pravo akko su tačne formule

$$(\exists G)\,\mathscr{F}(G) \text{ i } (\exists G)\,\neg\,\mathscr{F}(G).$$

Uvodimo sledeće oznake:
svojstva grupa označavamo velikim slovima P,Q,R,S,... a grupe velikim slovima F,G,H,... .
P(G) je zamena za rečenicu "grupa G ima svojstvo P", a $\mathscr{S}(P)$ zamena za rečenicu "svojstvo P pripada klasi svojstava $\mathscr{S}$". Npr. $\mathscr{T}(P)$ označava da je P pravo svojstvo.
Dalje, rečenice "H je podgrupa grupe G", "F je prava podgrupa grupe G" i "N je normalna podgrupa grupe G" zapisujemo redom sa

$$H < G, \quad F \lneq G, \quad N \lhd G.$$

Neka je P proizvoljno svojstvo grupa.
Svojstvo P je *algebarsko* akko je sa osobinom: svi izomorfni likovi f(G) svake grupe G koja ima svojstvo P, takodje imaju svojstvo P.
Jedna važna klasa algebarskih svojstava je klasa $\mathscr{M}$ tzv. Markovskih svojstava.

DEFINICIJA 5: Algebarsko svojstvo P grupa je *Markovsko* akko je pravo i postoji grupa F koja nije izomorfna nijednoj podgrupi H grupe G koja ima svojstvo P,tj.

$$\mathcal{M}(P) \Longleftrightarrow \mathcal{T}(P) \wedge (\exists F)(\forall G)(\forall H)(H < G) \Longrightarrow \neg(P(G) \wedge H \simeq F)),$$

gde $\mathcal{M}(P)$ zamenjuje rečenicu "P je Markovsko svojstvo".

Primeri Markovskih svojstava u klasi $\mathcal{K}$ svih k.p. grupa:

1^{o} biti jedinična grupa, 2^{o} konačna, 3^{o} Abel-ova, 4^{o} slobodna, 5^{o} ciklična, 6^{o} biti slobodan proizvod konačnih grupa, 7^{o} biti grupa za koju postoji prezentacija sa jednim relatorom, itd.

U klasi svih Markovskih svojstava k.p. grupa uočava se sledeća klasa $\mathcal{N}$ svojstava.

DEFINICIJA 6: Pravo algebarsko svojstvo P k.p. grupa je *nasledno* akko sve k.p. podgrupe svake k.p. grupe G koja ima svojstvo P, takodje imaju to svojstvo, tj.

$$\mathcal{N}(P) \Longleftrightarrow (\forall G)(P(G) \Longrightarrow (\forall H < G) P(H)).$$

Naprimer, navedena Markovska svojstva 1^{o} - 5^{o} su nasledna svojstva.

Klasa Markovskih svojstava definisana na klasi $\mathcal{K}$ svih k.p. grupa, je višestruko značajna. Pre svega pokazalo se da su mnoga važna svojstva ovih grupa (uključujući navedena svojstva 1^{o} - 7^{o}) Markovska. Osim toga, najvažniji rezultati u oblasti problema odlučivosti kod grupa, vezani su takodje za Markovska svojstva*). Dakle, prilikom ispitivanja raspoznatlji-

*) M. Rabin /63/ i С.И.Адян /3/ su, nezavisno, pokazali da su sva svojstva k.p. grupa iz klase $\mathcal{M}$ neraspoznatljiva, tj. da ne postoji algoritam koji za proizvoljnu prezentaciju Π iz skupa svih konačnih prezentacija $\mathcal{P}$, odlučuje da li grupa G_{Π}, odredjena tom prezentacijom, ima proizvoljno uočeno Markovsko svojstvo P ili nema.

vosti ili neke druge važne osobine datog algebarskog svojstva k.p. grupa, od interesa je znati da li je to svojstvo Markovsko ili nije.
U opštem slučaju, medjutim, to može biti veoma težak problem. Treba, naime, efektivno dokazujući da je neko svojstvo Markovsko konstruisati grupu F koja ne može da se potopi n i u j e d n u grupu G koja ima proučavano svojstvo. Teškoće koje nastaju prilikom rešavanja ovog tipa problema u matematici su višestruke. U većini slučajeva ne postoji efektivni postupak koji kao rezultat daje traženi matematički objekt (u našem slučaju grupu F sa navedenom osobinom); ili, ako takav postupak i postoji, još uvek nije poznat, itd.

Jedan mogući pristup (M.Rabin /63/) ovom problemu je posmatranje neke druge, uže klase svojstava, dovoljno široke da sadrži ispitivana značajna svojstva ali takve da je pripadnost svojstva toj klasi lakše raspoznatljiva. Takva je napr. klasa naslednih svojstava.

U ovom radu će, medjutim, pristup biti drugačiji. Biće dat potreban i dovoljan uslov da algebarsko svojstvo bude Markovsko, koji je u izvesnom smislu efektivniji od postojeće definicije i pomoću koga se za mnoga algebarska svojstva neposredno utvrdjuje da li su Markovska ili ne.

1.3. Univerzalne grupe

. Neka je $\mathcal{S}$ klasa svih grupa koje imaju neko fiksirano svojstvo S.

DEFINICIJA 7: Grupa $G \in \mathcal{S}$ je *univerzalna za* $\mathcal{S}$, u oznaci $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}(G)$, akko je svaka grupa F iz $\mathcal{S}$ izomorfna nekoj podgrupi H grupe G, tj.

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}}(G) \Longleftrightarrow (\forall F \in \mathcal{S})(\exists H < G)(F \simeq H).$$

Egzistencija univerzalnih grupa je ispitana za neke klase grupa.

Ch.Miller /51/ je dokazao da skup svih k.p. grupa sa rešivim problemom reči nema univerzalnu grupu u smislu gornje definicije.

Medjutim, skup svih prebrojivih lokalno-konačnih grupa ima univerzalnu grupu. Ph. Hall /34/ je konstruisao prebrojivu lokalno-konačnu grupu u koju mogu izomorfno da se potope sve prebrojive lokalno-konačne grupe.

Dakle, neke klase grupa imaju univerzalnu grupu, a neke nemaju.

U daljem tekstu će važnu ulogu imati činjenica da klasa svih konačno predstavljivih grupa, uvedena u 1.1. (u odnosu na istu polaznu azbuku), ima univerzalnu grupu. Njenu egzistenciju je dokazao G.Higman /35/, koristeći svoj poznati stav o podgrupama k.p. grupa:

> *Konačno generisana grupa se može potopiti u konačno predstavljivu grupu akko je rekurzivno predstavljiva.*

Univerzalna grupa U se može uvesti na sledeći način:

Neka je F slobodna grupa nad generatorima a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$, uvedena u 1.1. Elementi grupe F su reči u svedenom obliku, sastavljene od slova azbuke $A = \{1, a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_n, a_n^{-1}, \ldots\}$.

Uočimo sve konačne podskupove X skupa svih reči W' u svedenom obliku u azbuci A. Njih je moguće efektivno poredjati u niz $X_1, X_2, \ldots$. Jedan od postupaka kojim se to postiže je sledeći:

1° Reči u beskonačnoj azbuci A se kodiraju rečima u nekoj konačnoj azbuci A'. To je moguće učiniti na više načina. Neka je napr. $A' = \{a, b\}$. Azbuci A korespondiramo prvo azbuku $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ gde je

$$b_1 = 1, \quad b_{2i} = a_i, \quad b_{2i+1} = a_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dalje, svakom slovu b_i azbuke B dodeljujemo reč

$$a\underbrace{b\ldots b}_{i}$$

u azbuci A'. Pri tom je izmedju svih reči u azbuci A i reči oblika

$$ab^{i_1}ab^{i_2}\ldots ab^{i_k}$$

u azbuci A' uspostavljena uzajamno jednoznačna veza. Možemo, dakle, u daljem tekstu, umesto prebrojive beskonačne azbuke koristiti konačnu, uvedenu na predhodni način.

2° Koristeći azbučnu numeraciju reči uvedenu u 1.1., svakoj reči w u azbuci A' dodeljujemo njen azbučni broj $n(w)$. Tako je svakom konačnom podskupu $X \subset W'$ od n elemenata, dodeljen jednoznačno skup od n prirodnih brojeva.

3° Sve konačne skupove sastavljene od jednog, dva, ...,n,... prirodnih brojeva možemo numerisati koristeći napr. Gödel-ovu funkciju Γ (А.И.Мальцев /42/).

Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ svi konačni skupovi reči u svedenom obliku, poredjani na predhodno opisani način.

Označimo sa $N_i = [X_i]$ $(i=1,2,\dots)$ minimalnu normalnu podgrupu grupe F generisanu skupom X_i elemenata te grupe, a sa G_i faktor-grupu F/N_i $(i=1,2,\dots)$. Neka je dalje,

$$G = \prod_i^{*} G_i = G_1 * G_2 * \dots * G_n * \dots$$

slobodan proizvod grupa $G_1, \dots, G_n, \dots$.

Grupa G ima sledeća važna svojstva:

a) Za svaku k.p. grupu L postoji podgrupa H grupe G koja joj je izomorfna, tj.

$$(\forall L \in \mathcal{K})(\exists H)(H < G \wedge L \simeq H).$$

Koristimo činjenicu da je svaka grupa izomorfna faktor-grupi neke slobodne grupe, odnosno da je svaka grupa sa n generatora izomorfna faktor-grupi slobodne grupe ranga n. Tako je, zaista, svaka k.p. grupa izomorfna podgrupi neke grupe G_i, dakle i podgrupi grupe G.

b) Grupa G se može potopiti u k.p. grupu.

Grupa G je slobodan proizvod grupa $G_1, \dots, G_n, \dots$, pa je skup generatora i skup relatora grupe G jednak uniji skupova generatora, odnosno uniji skupova relatora grupa G_i, $i = 1,2,\dots$.

Dakle, skup generatora grupe G je $\{a_1, a_2, \dots\}$

a skup relatora $R = \bigcup_i X_i$

Skup R je rekurzivno prebrojiv (posledica rezultata da je rekurzivno prebrojiva unija rekurzivno prebrojivih skupova akodje rekurzivno prebrojiv skup, H.Rogers /64/).

Grupa G se, dakle, može potopiti u grupu G' sa dva generatora i rekurzivno prebrojivim skupom relatora (G.Higman, B.H.Neumann, H.Neumann, /36/).

Dalje, koristeći navedenu teoremu G.Higman-a, grupa G' se može potopiti u neku k.p. grupu U, pa se i grupa G može potopiti u U, čime je b) dokazano.

Grupa U je k.p. i u nju se mogu potopiti sve k.p. grupe, pa je ona, po definiciji, univerzalna za klasu $\mathcal{K}$ svih k.p. grupa.

Dosad u literaturi nema mnogo rezultata vezanih za ovu univerzalnu grupu. Tako npr. nije raspravljeno ni pitanje njene jedinstvenosti. Može se, medjutim, dokazati

R1: Postoji beskonačno mnogo neizomorfnih grupa, univerzalnih za klasu $\mathcal{K}$ svih k.p. grupa.

Neka je U predhodno uvedena univerzalna grupa. Označimo sa U_1 i U_2 direktan i slobodan proizvod

$$U_1 = U \times U, \quad U_2 = U * U.$$

Grupe U_1 i U_2 nisu izomorfne, jer se nijedna grupa ne može istovremeno dekomponovati u direktan i slobodan proizvod svojih (pravih) podgrupa (А.Г.Курош /37/).

S druge strane, U_1 i U_2 su takodje univerzalne grupe za klasu $\mathcal{K}$.

Dalje, grupe

$$U_3 = U_1 \times U_2, \quad U_4 = U_1 * U_2$$

su neizomorfne i univerzalne za $\mathcal{K}$ itd.

Po intuiciji, grupe, univerzalne za neke odredjene klase grupa, moraju biti veoma "velike". Naprimer, grupa U, univerzalna za klasu svih k.p. grupa ima podgrupu izomorfnu slobodnoj grupi ranga k, ma kako veliki bio prirodan broj k. Kao kriterijum o tome koje su, napr. medju beskonačnim prebrojivim grupama, najveće, možemo uzeti baš univerzalnost ili SQ-univerzalnost*) (P.M.Neumann /57/).
To, medjutim, ne znači da broj generatora i relatora univerzalnih ili SQ-univerzalnih grupa mora biti veoma veliki. Poznat je primer slobodne grupe ranga dva, koja je po teoremi o potapanju prebrojivih grupa (G.Higman, B.H.Neumann, H.Neumann /36/) SQ-univerzalna. Može se takodje dokazati da za klasu $\mathcal{K}$ postoji univerzalna grupa sa dva generatora.
Zaista, neka je G grupa čija je prezentacija

$$\Pi = \langle a_1, a_2;\ a_1^m, a_2^n \rangle \quad , \quad m > 1, n > 2.$$

F.Levin /38/ je dokazao (kasnije i J.McCool /47/) da je grupa G SQ-univerzalna. Dakle, za svaku k.p. grupu H postoji faktor-grupa G/N_H koja ima podgrupu izomorfnu grupi H. Pritom, ako prezentacija grupe H ima k relatora, faktor-grupa G/N_H ima k+2 relatora (J.McCool /47/).

Neka je U grupa univerzalna za klasu $\mathcal{K}$. Ona se, po predhodnom, može potopiti u grupu G/N_U koja je

*) Grupa G je SQ-univerzalna akko se svaka prebrojiva grupa može potopiti u neku faktor-grupu grupe G.

takodje univerzalna za $\mathcal{K}$ i ima dva genratora.

U daljem tekstu ćemo umesto "grupa univerzalna za skup svih k.p. grupa" pisati samo "univerzalna grupa"..

1.4. Problem odlučivosti u teoriji grupa

Problem egzistencije efektivnog postupka koji rešava neki odredjeni problem u matematici naziva se *problem odlučivosti*. On može biti rešen pozitivno - naprimer navodjenjem postupka koji taj problem rešava, ili negativno - dokazom da takav postupak (principijelno) ne postoji.

Strožija, matematička formulacija problema odlučivosti, kao i prvi primeri ovakvih problema sa negativnim rešenjem javljaju se tek posle definisanja formalnih matematičkih pojmova, analognih intuitivnom pojmu efektivno izračunljive funkcije, odnosno efektivnog postupka.

Možemo, dakle, kada govorimo o odlučivosti nekog problema, govoriti o njegovoj rekurzivnoj rešivosti ili o normalno-algoritamskoj rešivosti ili o rešivosti u smislu neke druge od ekvivalentnih formalizacija pojma efektivno izračunljive funkcije.

U ovom radu će se dokazivati rekurzivna rešivost odnosno nerešivost pojedinih problema u teoriji grupa.

Neka je $\mathcal{P}$ neki dati problem (u matematici). Njegovo rešavanje možemo svesti na izračunavanje neke, zavisno od $\mathcal{P}$ konstruisane funkcije $f(x_1,\ldots,x_n)$ (posmatraju se, s obzirom na mogućnost numeracije, funkcije čiji su argumenti i vrednosti prirodni brojevi). U opštem slučaju, medjutim, funkcija f ne mora biti izračunljiva; funkciju smatramo izračunljivom (prema tezi A.Church-a) akko je rekurzivna.

DEFINICIJA 8: Problem $\mathscr{P}$ kome odgovara funkcija $f(x_1,\ldots,x_n)$ je *rekurzivno rešiv (nerešiv)* akko je funkcija $f(x_1,\ldots,x_n)$ rekurzivna (nije rekurzivna).

Dakle, problem egzistencije efektivnog postupka koji rešava problem $\mathscr{P}$, tj. problem odlučivosti za $\mathscr{P}$, ima pozitivno odnosno negativno rešenje zavisno od rekurzivnosti funkcije $f(x_1,\ldots,x_n)$.

U teoriji grupa su od posebnog interesa sledeća dva tipa problema odlučivosti:

A) Problem egzistencije algoritma koji za neku odredjenu grupu utvrdjuje koji od njenih elemenata zadovoljava uočeni uslov C (koji može biti svojstvo ili relacija veće dužine), a koji ne. Takvi su naprimer problem reči, problem konjugacije, redni i stepeni problem itd.

Ovi problemi, koji se tiču e l e m e n a t a pojedinačnih grupa nazivaju se problemi odlučivosti I reda.

B) Problem egzistencije algoritma koji za proizvoljnu prezentaciju Π utvrdjuje da li grupa G_Π odredjena tom prezentacijom zadovoljava uočeni uslov C ili ne. Takvi su napr. problemi ispitivanja komutativnosti, cikličnosti, konačnosti itd. proizvoljne grupe zadate konačnom prezentacijom.

Ovi problemi, koji se tiču prezentacija i osobina koje ima grupa kao algebarska struktura u celini, su problemi odlučivosti II reda.

U tekstu će dalje biti reči o ovom drugom tipu problema odlučivosti.

2. ODREDJENJE KLASE MARKOVSKIH SVOJSTAVA POMOĆU UNIVERZALNIH GRUPA

2.1. Teorema o odnosu univerzalnih grupa i Markovskih svojstava

2.2. Komentari o mogućnostima primene teoreme

2.1. Teorema o odnosu univerzalnih grupa i Markovskih svojstava

Osnovni rezultat izložen u ovom poglavlju je teorema kojom se formuliše potreban i dovoljan uslov da algebarsko svojstvo k.p. grupa bude Markovsko. Primene ove teoreme biće date u trećem i četvrtom poglavlju.

Neka je $\mathcal{U}$ klasa svih univerzalnih k.p. grupa i neka su $\mathcal{M}(P)$ i $\mathcal{T}(P)$ redom zamene za rečenice "P je Markovsko svojstvo" i "P je pravo svojstvo". Kako se dalji tekst odnosi samo na k.p. grupe, pisaćemo umesto $(\forall G \in \mathcal{K})$ kraće $(\forall G)$ i slično.

TEOREMA 1: *Algebarsko svojstvo P k.p. grupa je Markovsko akko je pravo i nema ga nijedna univerzalna k.p. grupa, tj.*

$$\mathcal{M}(P) \Longleftrightarrow ((\forall U \in \mathcal{U})\ \neg P(U) \wedge \mathcal{T}(P)).$$

DOKAZ

Po definiciji uvedenoj u 1.2., algebarsko svojstvo P k.p. grupa je Markovsko ako je

$$\mathcal{M}(P) \Longleftrightarrow (\mathcal{T}(P) \wedge (\exists F)(\forall G)(\forall H < G)\neg(P(G) \wedge H \simeq F)).$$

Dakle, treba dokazati

$$(\exists F)(\forall G)(\forall H < G)\neg(P(G) \wedge H \simeq F) \Longleftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U})\neg P(U).$$

Dokažimo prvo da je

$$(\exists F)(\forall G)(\forall H<G)\neg(P(G)\wedge H\simeq F)\Longrightarrow(\forall U\in\mathcal{U})\neg P(U)$$

odnosno (koristeći kontrapoziciju) da je

$$(\exists U\in\mathcal{U})P(U)\Longrightarrow(\forall F)(\exists G)(\exists H<G)(P(G)\wedge H\simeq F).$$

Neka je U proizvoljna univerzalna k.p. grupa. Tada je za svaku k.p. grupu F, po definiciji univerzalne grupe, ispunjeno

$$(\forall F)(\forall U\in\mathcal{U})(\exists H<U)(H\simeq F).$$

Odavde je (koristeći uvek tačnu formulu $p\Longrightarrow p\wedge T$)

$$(\exists U\in\mathcal{U})P(U)$$

$$\Longrightarrow(\exists U\in\mathcal{U})P(U)\wedge(\forall F)(\forall U\in\mathcal{U})(\exists H<U)(H\simeq F).$$

$$\Longrightarrow(\exists U\in\mathcal{U})P(U)\wedge(\forall U\in\mathcal{U})(\forall F)(\exists H<U)(H\simeq F)$$

$$\Longrightarrow(\exists U\in\mathcal{U})(P(U)\wedge(\forall F)(\exists H)(H<U\wedge H\simeq F)$$

(jer je valjana formula

$(\exists x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)\Longrightarrow(\exists x)(A(x)\wedge B(x)))$

$$\Longrightarrow(\exists U\in\mathcal{U})(\forall F)(\exists H)(P(U)\wedge H<U\wedge H\simeq F)$$

(koristeći valjane formule

$((\forall x)A(x)\quad B)\Longleftrightarrow(\forall x)(A(x)\wedge B)$

$((\exists x)A(x)\quad B)\Longleftrightarrow(\exists x)(A(x)\wedge B)$)

$$\Longrightarrow(\forall F)(\exists U\in\mathcal{U})(\exists H<U)(P(U)\wedge H\simeq F).$$

(koristeći

$(\exists x)(\forall y)A(x,y)\Longrightarrow(\forall y)(\exists x)A(x,y))$).

Kako klasa svih k.p. grupa $\mathcal{K}$ sadrži klasu svih univerzalnih k.p. grupa $\mathcal{U}$ sledi da je

$$(\exists U\in\mathcal{U})P(U)\Longrightarrow(\forall F)(\exists G)(\exists H<G)P(G)\wedge H\simeq F).$$

Obratno, dokažimo da je

$$(\forall U\in\mathcal{U})\neg P(U)\Longrightarrow(\exists F)(\forall G)(\forall H<G)\neg(P(G)\wedge H\simeq F).$$

Za proizvoljne grupe $G,H\in\mathcal{K}$ i $U\in\mathcal{U}$ je

(1) $$(\forall U\in\mathcal{U})(\forall G)(\forall H<G)(H\simeq U\Longrightarrow G\in\mathcal{U}).$$

Zaista, koristeći definiciju univerzalne grupe:

$$(H<G\wedge H\in\mathcal{U})\Longleftrightarrow(H<G\wedge(\forall F)(\exists H_1)(H_1<H\wedge H_1\simeq F))$$

$$\Longleftrightarrow(\forall F)(\exists H_1)(H_1<H\wedge H<G\wedge H_1\simeq F)$$

$$\Longrightarrow(\forall F)(\exists H_1)(H_1<G\wedge H_1\simeq F)$$

(jer je relacija "biti podgrupa grupe" tranzitivna)

$$\Longrightarrow G\in\mathcal{U}$$

tj.

$$(\forall G)(\forall H)(H<G\wedge H\in\mathcal{U}\Longrightarrow G\in\mathcal{U})$$

ili

$$(\forall G)(\forall H<G)(H\in\mathcal{U}\Longrightarrow G\in\mathcal{U}).$$

Odavde je

$$(\forall U\in\mathcal{U})(\forall G)(\forall H<G)(H\simeq U\Longrightarrow G\in\mathcal{U})$$

odnosno

(1') $$(\forall U\in\mathcal{U})(\forall G)(\forall H<G)(G\notin\mathcal{U}\Longrightarrow\neg(H\simeq U)).$$

Takodje je, za proizvoljnu grupu G iz $\mathscr{K}$, uvek ispunjeno

(2) $$(\forall G)(P(G) \wedge G \in \mathscr{U} \Longrightarrow (\exists U \in \mathscr{U})P(U))$$

$$\Longleftrightarrow (\forall G)((\forall U \in \mathscr{U})\neg P(U) \Longrightarrow \neg P(G) \vee G \notin \mathscr{U})$$

(2´) $$\Longleftrightarrow (\forall U \in \mathscr{U})\neg P(U) \Longrightarrow (\forall G)(\neg P(G) \vee G \notin \mathscr{U})$$

(jer je uvek tačna formula

$$(\forall x)(A \Longrightarrow B(x)) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow (\forall x)B(x))\ ).$$

Koristeći (1´) i (2´) i $p \Longrightarrow p \wedge T \wedge T$ imamo da je

$$(\forall U \in \mathscr{U})\neg P(U)$$

$$\Longrightarrow (\forall U \in \mathscr{U})\neg P(U)$$
$$\wedge ((\forall U \in \mathscr{U})\neg P(U) \Longrightarrow (\forall G)(\neg P(G) \vee G \in \mathscr{U}))$$
$$\wedge (\forall U \in \mathscr{U})(\forall G)(\forall H < G)(G \notin \mathscr{U} \Longrightarrow \neg(H \simeq U))$$

$$\Longrightarrow (\forall G)(\neg P(G) \vee G \notin \mathscr{U})$$
$$\wedge (\forall U \in \mathscr{U})(\forall G)(\forall H < G)(G \notin \mathscr{U} \Longrightarrow \neg(H \simeq U))$$

(koristeći uvek tačnu formulu
$p \wedge (p \Longrightarrow q) \wedge r \Longrightarrow q \wedge r$)

$$\Longleftrightarrow (\forall U \in \mathscr{U})(\forall G)(\forall H < G)(P(G) \Longrightarrow G \notin \mathscr{U}$$
$$\wedge G \notin \mathscr{U} \Longrightarrow \neg(H \simeq U))$$

$$\Longrightarrow (\forall U \in \mathscr{U})(\forall G)(\forall H < G)(P(G) \Longrightarrow \neg(H \simeq U))$$

$$\Longleftrightarrow (\forall U \in \mathscr{U})(\forall G)(\forall H < G)\neg(P(G) \wedge H \simeq U).$$

Dakle,

$$(\forall U \in \mathcal{U}) \neg P(U) \Longrightarrow (\forall U \in \mathcal{U})(\forall G)(\forall H < G) \neg (P(G) \wedge H \simeq U)$$

$$\Longrightarrow (\exists U \in \mathcal{U})(\forall G)(\forall H < G) \neg (P(G) \wedge H \simeq U)$$

tj.

$$(\forall U \in \mathcal{U}) \neg P(U) \Longrightarrow (\exists F)(\forall G)(\forall H < G) \neg (P(G) \wedge H \simeq U).$$

2.2. Komentari o mogućnostima primene teoreme

Navedena teorema daje potreban i dovoljan uslov da algebarsko svojstvo k.p. grupa bude Markovsko, bitno koristeći pritom pojam univerzalne grupe. Dakle, medju mogućim posledicama teoreme su:

1° posledice koje se odnose na osobine Markovskih svojstava, i

2° posledice koje se odnose na osobine univerzalnih grupa

(rezultati ovog tipa su sadržaj četvrtog poglavlja). Dalje, s obzirom na dokazanu neraspoznatljivost Markovskih i komplementarno Markovskih svojstava (M.Rabin /63/ i С.И.Адян /2/), prirodno je ispitivati

3° posledice koje daju nova neraspoznatljiva svojstva k.p. grupa.

Naime, problem raspoznatljivosti nekog datog algebarskog svojstva P k.p. grupa, može se rešavati na više načina: dokazivanjem da svojstvo P pripada nekoj klasi svojstava čija je raspoznatljivost, odnosno neraspoznatljivost već dokazana, ili nekom drugom opštom metodom kojom se rešavaju problemi odlučivosti u različitim oblastima matematike (napr. nekom od metoda svodjenja datog problema na problem čija je rešivost, odnosno nerešivost predhodno dokazana, ili metodom direktnog dokazivanja rekurzivnosti odnosno nerekurzivnosti funkcije koja rešava dati problem, itd).

Dokazati, medjutim, da svojstvo P pripada ili ne pripada nekoj odredjenoj klasi svojstava, nije uvek lako. Tako se naprimer prilikom dokazivanja da je svojstvo P Markovsko ili komplementarno-Markovsko, koristeći definiciju Markovskog svojstva, nailazi na teškoće već za neka veoma jednostavna i prirodna svojstva P k.p. grupa. Treba, naime, za ispitivano svojstvo P ili za njegov komplement, dokazati da postoji k.p. grupa koja ne može da se potopi ni u jednu k.p. grupu sa tim svojstvom. Koristeći teoremu, medjutim, problem se svodi na ispitivanje da li univerzalne k.p. grupe imaju to svojstvo, što je u izvesnom broju slučajeva mnogo jednostavnije. U trećem poglavlju dati su neki primeri svojstava i klasa svojstava čija je neraspoznatljivost direktna posledica teoreme.

Navodimo još neke karakteristike teoreme koje nisu detaljnije obradjene u ovom radu, ali ukazuju na njenu efikasnost, mogućnosti uopštavanja i neka otvorena pitanja u vezi sa njenom primenom.

Pored pravih algebarskih svojstava P k.p. grupa, u tekstu su razmatrana i svojstva $\mathscr{S}$ tih svojstava, kao napr. "biti Markovsko svojstvo", "komplementarno Markovsko", "nasledno", "lokalno", "rezidualno", itd.. Postavlja se pitanje kako se za proizvoljno algebarsko svojstvo P konačno predstavljivih grupa ispituje ima li ono neko uočeno svojstvo $\mathscr{S}$ ili nema, tj. da li je $\mathscr{S}(P)$ ili ne *).

---

*) Ispitivanje mogućnosti formulisanja problema egzistencije algoritma koji za uočeno svojstvo $\mathscr{S}$ svojstava grupa utvrdjuje za svako algebarsko svojstvo P grupa da li je $\mathscr{S}(P)$ ili ne, analognog problemu raspoznatljivosti algebarskih svojstava grupa, vodi pitanjima o mogućnosti konačnog zapisa algebarskih svojstava grupa,

Navedena teorema daje delimičan odgovor na ovo pitanje, za slučaj Markovskih i komplementarno Markovskih svojstava. Naime, problem "višeg nivoa" - ispitivanje da li svojstvo P k.p. grupa ima svojstvo $\mathcal{S}$ (tj. ispitivanje da li je P Markovsko, odnosno komplementarno-Markovsko ili ne) - svodi se na problem "nižeg nivoa" - ispitivanje da li odredjene grupe (univerzalne) imaju svojstvo P ili ne.

Analizirajući dalje teoremu, prirodno se postavlja pitanje o mogućnosti formulisanja analognih teorema za druge algebarske strukture.

Markovska svojstva grupa su definisana po analogiji sa Markovskim svojstvima polugrupa, čiju je neraspoznatljivost dokazao A.A.Марков /46/. S obzirom na egzistenciju k.p. polugrupe univerzalne za klasu svih k.p. polugrupa (В.Л.Мурский /56/), važi sledeća teorema:

TEOREMA 2: *Algebarsko svojstvo Q k.p. polugrupa je Markovsko akko je pravo i nema ga nijedna univerzalna k.p. polugrupa, tj.*

$$\mathcal{M}(Q) \Longleftrightarrow ((\forall U \in \mathcal{U}')\neg Q(U) \wedge \mathcal{P}(Q))$$

gde je $\mathcal{U}'$ klasa svih univerzalnih k.p. polugrupa.

Koristeći ovu teoremu mogu se, analogno rezultatima za k.p. grupe (izloženim u trećem i četvrtom poglavlju ovog rada) dokazati: neraspoznatljivost izvesnog

---

o rekurzivnosti skupa tih zapisa i mnogim drugim. Uopšte, problemi ovog tipa su u izvesnom smislu "višeg nivoa" i zahtevaju rešavanje čitavog niza dodatnih problema.

broja svojstava k.p. polugrupa, kao i rezultati koji se odnose na osobine Markovskih svojstava polugrupa i na osobine univerzalnih k.p. polugrupa.

Dalje, s obzirom na rezultat Л.А.Бокутьа /8/ o neraspoznatljivosti Markovskih svojstava k.p. asocijativnih prstena i algebri, bilo bi interesantno proučiti mogućnost formulisanja teoreme analogne teoremi 1 odnosno teoremi 2 i za ove strukture. Predhodno treba ispitati egzistenciju univerzalnog k.p. asocijativnog prstena i algebre, u smislu definicije iz 1.3. Uopšte, teorema 1 se može preneti na sve one algebarske strukture za koje postoji univerzalna struktura i za koje se mogu definisati Markovska svojstva. Naravno od posebnog su interesa one strukture kod kojih su Markovska svojstva neraspoznatljiva, odnosno raspoznatljiva.

Dalje mogućnosti primene teoreme i njenog uopštavanja, izlaze iz okvira ovog teksta.

3. NEKI NEODLUČIVI PROBLEMI KOD GRUPA

3.1. Primeri neraspoznatljivih svojstava grupa

3.2. Primeri klasa neraspoznatljivih svojstava

3.3. O jednom metodu dokazivanja neraspoznatljivosti svojstava i klasa svojstava

3.1. Primeri neraspoznatljivih svojstava grupa

Sledeći rezultati R2 - R5 se odnose na raspoznatljivost nekih konkretnih algebarskih netrivijalnih svojstava k.p. grupa.
Svojstvo P k.p. grupa je neraspoznatljivo akko ne postoji algoritam *) koji za proizvoljnu prezentaciju Π grupe utvrdjuje da li grupa G_{Π} odredjena tom prezentacijom ima svojstvo P ili nema.
Ako je P Markovsko svojstvo zadato formulom $\mathcal{F}(G)$ (kao u odeljku 1.2.) tada je formulom $\neg\mathcal{F}(G)$ zadato *komplementarno Markovsko* svojstvo $\bar{P}$. Ako je P(G) tačno, $\bar{P}(G)$ nije, i obrnuto; stoga se raspoznatljivost, odnosno neraspoznatljivost svojstva P prenosi na komplementarno svojstvo $\bar{P}$. Dakle, svako komplementarno-Markovsko je neraspoznatljivo.

Navodimo samo neka svojstva k.p. grupa za koja se problem njihove algoritamske raspoznatljivosti rešava direktno primenjujući teoremu 1.

R2: *Svojstvo P k.p. grupa "imati pravu podgrupu izomorfnu sa čitavom grupom", tj.*

$$P(G) \Longleftrightarrow (\exists\, H \lneq G)(H \simeq G)$$

je neraspoznatljivo.

---

*) Pod algoritmom u ovom radu podrazumevamo ma koji ekvivalent pojma rekurzivne funkcije.

DOKAZ

Dokažimo da je P komplementarno-Markovsko svojstvo.

Neka su U_1 i U_2 dve proizvoljne neizomorfne univerzalne grupe. Zbog univerzalnosti, svaka od njih sadrži kao svoju pravu podgrupu izomorfni lik druge, tj.

$$(\exists H_2 \mid\!< U_2)(H_2 \simeq U_1)$$

$$(\exists H_1 \mid\!< U_1)(H_1 \simeq U_2)$$

Neka je

$$H_2 = f(U_1)$$

$$H_1 = g(U_2)$$

gde su $f:U_1 \longrightarrow U_2$ i $g:U_2 \longrightarrow U_1$ redom izomorfna preslikavanja grupe U_1 u U_2 i U_2 u U_1. Tada je $g(f(U_1))$ prava podgrupa grupe U_1, izomorfna sa U_1.

Dakle, svaka univerzalna k.p. grupa U ima pravu podgrupu izomorfnu sa U, pa je svojstvo P komplementarno-Markovsko. Prema tome, P je neraspoznatljivo svojstvo.

R3: *Neka je P sledeće svojstvo k.p. grupa*

$$P(G) \Longleftrightarrow (\forall N \lhd G)(\exists H < G)(G/N \simeq H),$$

tj. grupa ima svojstvo P akko je svaka k.p. faktor-grupa te grupe izmorfna nekoj njenoj podgrupi. Svojstvo P je neraspoznatljivo.

DOKAZ

Dokažimo da svaka univerzalna k.p. grupa ima svojstvo P.

Zaista, sve k.p. faktor-grupe proizvoljne univerzalne grupe U su k.p. grupe, pa se mogu potopiti u svaku univerzalnu k.p. grupu, dakle i u grupu U.

R4: *Svojstvo P k.p. grupa " imati konačno mnogo faktor-grupa" je neraspoznatljivo.*

DOKAZ

Neka je U proizvoljna univerzalna grupa. Ako grupa U ima konačno mnogo faktor-grupa, onda ona ima konačno mnogo endomorfizama. Odavde bi, medjutim, sledilo da je U konačna grupa (R.Baer /5/), što nije tačno (odeljak 4.2.).
Dakle, P je Markovsko svojstvo, pa je neraspoznatljivo.

R5: *Svojstvo k.p. grupa "biti n-konačna grupa", tj. grupa čija je svaka podgrupa generisana sa n elemenata konačna, neraspoznatljivo je za svaki prirodan broj n.*

DOKAZ

Navedeno svojstvo je Markovsko, jer ga nema nijedna univerzalna grupa. Naprimer, svaka univerzalna k.p. grupa mora imati podgrupu izomorfnu sa beskonačnom cikličnom grupom, generisanu samo jednim elementom.

3.2. Primeri klasa neraspoznatljivih svojstava

Rezultati R6 - R8 odnose se na klase svojstava jednake raspoznatljivosti. Naime, opisuju se klase takve da je svako svojstvo iz tih klasa neraspoznatljivo.

R6: *Neka je P proizvoljno pravo algebarsko svojstvo k.p. grupa. Svojstvo $Q[P]$ "imati tačno jednu podgrupu sa svojstvom P", tj.*

$$Q[P]\ (G) \Longleftrightarrow (\exists_1 H < G) P(H)$$

je neraspoznatljivo.

DOKAZ

Dokažimo da je svojstvo $Q[P]$ Markovsko, tj.

$$(\forall U \in \mathcal{U}) \neg Q[P] (U).$$

Predpostavimo suprotno, da postoji univerzalna grupa U_1 koja ima tačno jednu podgrupu H sa svojstvom P. Tada i ma koja druga univerzalna grupa U_2 ima bar jednu podgrupu sa svojstvom P, jer ima podgrupu izomorfnu sa U_1. Medjutim, univerzalna grupa $U_2 * U_2$ ima dve podgrupe sa svojstvom P, pa i U_1 ima dve podgrupe sa svojstvom P (jer je $U_2 * U_2$ izomorfno podgrupi grupe U_1), što je suprotno predpostavci.

Dakle, nijedna univerzalna grupa nema svojstvo $Q[P]$, pa je ono neraspoznatljivo.

Primeri ovakvih svojstava:

1° "imati tačno jednu cikličnu podgrupu reda dva" (sa ovim svojstvom su grupe C_{2k})

2° "imati tačno jednu pravu ne-Abel-ovu podgrupu" (sa ovim svojstvom je grupa $S_3 \times C_2$)

3° "imati tačno jednu pravu konačnu podgrupu" (takve su grupe $C_2 \times C_\infty$, $C_2 \times F$ - gde je F slobodna grupa)

itd.

R7: *Svako pravo algebarsko svojstvo P k.p. grupa koje se sa grupe prenosi na svaku njenu nadgrupu, tj. takvo da je*

$$P(G) \Longrightarrow (\forall H)(G < H \Longrightarrow P(H))$$

je neraspoznatljivo.

DOKAZ

Neka je P svojstvo sa navedenom osobinom i neka je G k.p. grupa koja ima to svojstvo. S obzirom na osnovnu osobinu univerzalnih k.p. grupa, svaka univerzalna grupa U ima podgrupu H izomorfnu sa grupom G; kako je svojstvo P algebarsko, to je i P(H). Svojstvo P prenosi se sa grupe na sve njene nadgrupe, pa i sve univerzalne grupe imaju svojstvo P. Dakle, svojstvo P je komplementarno-Markovsko, tj. neraspoznatljivo je.

Primeri ovakvih svojstava:

1° "imati podgrupu sa svojstvom P" gde je P proizvoljno pravo algebarsko svojstvo

2° "imati pravu podgrupu"

3° "biti ne-Abel-ov"

4° "biti beskonačan"

itd.

Neka je P proizvoljno pravo algebarsko svojstvo i $C[P]$ svojstvo definisano na sledeći način:

(1) $$C[P](G) \Longleftrightarrow (P(G) \Longrightarrow P(\mathrm{Aut}\ G))$$

gde je Aut G grupa automorfizama grupe G. Ovako uvedena svojstva $C[P]$ mogu da budu prava i neprava. Naprimer, ako je P "biti konačna grupa" ili "biti grupa bez centra"*), odgovarajuća svojstva $C[P]$ su neprava, jer se navedena svojstva P prenose sa grupe G na grupu Aut G (А.Г.Курош /37/). Medjutim, ako je P "biti Abel-ov", svojstvo $C[P]$ je pravo, jer postoji Abel-ova grupa G sa ne-Abel-ovom grupom Aut G. Takva je napr. Abel-ova grupa četvrtog reda koja se sastoji od sledećih parnih permutacija

$$(12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\ 1.$$

Njena grupa automorfizama je simetrična grupa S_3.

Označimo sa $\mathscr{C}$ klasu onih svojstava $C[P]$ uvedenih pomoću (1), kod kojih je P proizvoljno Markovsko svojstvo.

---

*) Grupa G je bez centra akko nema nijedan element različit od 1, koji je permutativan sa svim ostalim elementima grupe.

R8: *Svako pravo algebarsko svojstvo iz klase $\mathscr{C}$ je neraspoznatljivo.*

DOKAZ

Uočimo sledeće svojstvo $C_F[P]$

$$C_F[P](G) \Longleftrightarrow (P(G) \Longrightarrow F(P;G))$$

gde je $F(P;G)$ proizvoljna formula u kojoj slobodne promenljive mogu biti jedino promenljive P i G (P označava Markovsko svojstvo a G grupu).
Svako pravo algebarsko svojstvo $C_F[P]$ je komplementarno-Markovsko.
Zaista, za proizvoljnu univerzalnu grupu U je

$$\begin{aligned} C_F[P](U) &\Longleftrightarrow (P(U) \Longrightarrow F(P;U)) \\ &\Longleftrightarrow (\neg P(U) \vee F(P;U)) \\ &\Longleftrightarrow (T \vee F(P;U)) \\ &\qquad \text{(jer je P Markovsko svojstvo)} \\ &\Longleftrightarrow T \end{aligned}$$

tj.

$$(\forall U \in \mathscr{U}) C_F[P](U).$$

Specijalno, ako za formulu $F(P;G)$ izaberemo formulu $P(\mathrm{Aut}\ G)$, svako pravo algebarsko svojstvo

$$C[P](G) \Longleftrightarrow (P(G) \Longrightarrow P(\mathrm{Aut}\ G))$$

je komplementarno-Markovsko, dakle i neraspoznatljivo.

3.3. O jednom metodu dokazivanja neraspoznatljivosti svojstava i klasa svojstava

Neka je P proizvoljno pravo algebarsko svojstvo k.p. grupa i neka je $F(P;G)$ proizvoljna formula u kojoj slobodne promenljive mogu biti jedino promenljive P i G. Svojstvu P se na više različitih načina mogu korespondirati neka nova svojstva grupa.
Označimo sa $A_F[P]$ i $B_F[P]$ svojstva grupa koja odredjuju svojstvo P i formula $F(P;G)$ na sledeći način

(1) $$A_F[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H \triangleleft G)P(H) \wedge F(P;G))$$

(2) $$B_F[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H \triangleleft G)P(H) \Longrightarrow F(P;G))$$

Označimo, dalje, sa $\mathscr{A}$ odnosno $\mathscr{B}$ klase svojstava k.p. grupa koje čine sva prava*) i algebarska svojstva oblika $A_F[P]$ i $B_F[P]$, gde je P proizvoljno pravo algebarsko svojstvo a $F(P;G)$ proizvoljna formula opisanog tipa. S obzirom na veliku slobodu u izboru promenljive P i parametra $F(P;G)$ ovako uvedene klase $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ su veoma široke i sadrže mnoga značajna svojstva i klase svojstava k.p. grupa.

*) Ovo ograničenje je potrebno jer ako napr. za $F(P;G)$ izaberemo konstantu $\perp$, tada je, za svako svojstvo P, $A_\perp[P]$ prazno svojstvo; slično, ako za $F(P;G)$ izaberemo konstantu T, tada je $B_T[P]$ svojstvo "biti k.p.grupa". Nije pravo svojstvo ni $B_F[P]$, ako se za $F(P;G)$ uzme $(\forall H \triangleleft G)P(H)$, itd.

Značajnu osobinu, sa stanovišta odlučivosti, ovih klasa pokazuje sledeća posledica teoreme 1.

POSLEDICA 1: *Svako svojstvo iz klasa svojstava $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je neraspoznatljivo.*

DOKAZ

a) Dokažimo da je za proizvoljnu formulu $F(P;G)$ i proizvoljno pravo algebarsko svojstvo P k.p. grupa, svojstvo $A_F[P]$, ako je pravo i algebarsko, Markovsko.

$$A_F[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H \lessdot G)P(H) \wedge F(P;G))$$

Neka je U proizvoljna univerzalna k.p. grupa. Tada

$$A_F[P](U) \Longleftrightarrow ((\forall H \lessdot U)P(H) \wedge F(P;U))$$

$$\Longleftrightarrow (\bot \wedge F(P;U))$$

(jer je svojstvo P po predpostavci pravo, pa ga nemaju s v e k.p. grupe, tj. sve prave podgrupe grupe U)

$$\Longleftrightarrow \bot \ .$$

Dakle

$$(\forall U \in \mathcal{U}) \urcorner A_F[P](U)$$

tj. po teoremi 1, $A_F[P]$ je Markovsko svojstvo.

b)

$$B_F[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H \lessdot G)P(H) \Longrightarrow F(P;G))$$

Za proizvoljnu univerzalnu grupu U je

$$B_F[P](U) \Longleftrightarrow ((\forall H \lessdot U)P(H) \Longrightarrow F(P;U))$$

$$\Longleftrightarrow (\perp \Longrightarrow F(P;U))$$

(jer je svojstvo P pravo)

$$\Longleftrightarrow T$$

Dakle,

$$(\forall U \in \mathscr{U}) B_F[P](U)$$

tj. svojstvo $B_F[P]$ je komplementarno-Markovsko.

Posledica, analogna posledici 1, važi i za klase svojstava $\mathscr{A}'$ i $\mathscr{B}'$ uvedene na sledeći način:

(1') $\quad A_F'[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H < G)P(H) \wedge F(P;G))$

(2') $\quad B_F'[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H < G)P(H) \Longrightarrow F(P;G))$

Svojstva iz $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}'$, $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ se razlikuju samo po tome što se u prvom slučaju iskaz $(\forall H < G)P(H)$ odnosi na prave podgrupe, a u drugom na proizvoljne. Dokaz ostaje isti jer je za svako pravo algebarsko svojstvo P, $(\forall H < U)P(H)$ takodje netačno.

S obzirom na dokazanu neraspoznatljivost svakog pravog svojstva iz navedenih klasa svojstava, predhodnim je odredjen jedan metod za dokazivanje neraspoznatljivosti pravih algebarskih svojstava k.p. grupa. Metod se sastoji u sledećem:
za ispitivano svojstvo P_1 treba odrediti formulu $F(P;G)$ i svojstvo P_2 tako da je $A_F[P_2]=P_1$ ili $B_F[P_2]=P_1$.
Ili, koristeći posledice 2 i 3 iz četvrtog poglavlja, odrediti $F(P;G)$ i P_2 tako da je

$$P_1 \subseteq A_F[P_2] \quad \text{ili} \quad P_1 \supseteq B_F[P_2].$$

S obzirom na slobodu izbora $F(P;G)$ i P_2, postupak će u izvesnom broju slučajeva biti veoma jednostavan.

Navodimo samo neke primere primene opisanog metodà.

Ako za formulu $F(P;G)$ izaberemo baš $P(G)$, tada

(3) $$A_1[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H \lessdot G) P(H) \wedge P(G))$$

Neka je $\mathscr{A}_1$ klasa svih pravih algebarskih svojstava definisanih pomoću (3).

R9: *Klasa svojstava* $\mathscr{A}_1$ *se poklapa sa klasom* $\mathscr{N}$ *svih naslednih svojstava.*

DOKAZ

Pravo algebarsko svojstvo P je nasledno, u oznaci $\mathscr{N}(P)$ akko je

$$\mathscr{N}(P) \Longleftrightarrow (\forall G)(P(G) \Longrightarrow (\forall H \lessdot G) P(H))$$

S druge strane, pravo algebarsko svojstvo $A[P]$ je u klasi $\mathscr{A}_1$ akko je

$$(A[P]) \Longleftrightarrow (\forall G)(A[P](G) \Longleftrightarrow (\forall H \lessdot G) P(H) \wedge P(G))$$

Dokažimo da je za svako pravo algebarsko svojstvo Q ispunjeno

$$\mathscr{A}_1(Q) \Longleftrightarrow \mathscr{N}(Q).$$

Neka je Q svojstvo iz klase $\mathscr{A}_1$. To znači da postoji neko svojstvo P takvo da je

$$Q = A[P].$$

$$\mathscr{A}_1(A[P]) \Longrightarrow (\forall G)(A[P](G) \Longrightarrow (\forall H \lessdot G) P(H) \wedge P(G))$$

Kako je uvek ispunjeno

$$(\forall H \lhd G)P(H) \Longrightarrow (\forall H \lhd G)(\forall F \lhd H)(P(H) \wedge P(F))$$

biće ,

$$\dot{\mathscr{A}}(A[P])$$

$$\Longrightarrow (\forall G)(A[P](G) \Longrightarrow (\forall H \lhd G)(\forall F \lhd H)(P(H) \wedge P(F)))$$

$$\Longrightarrow (\forall G)(A[P](G) \Longrightarrow (\forall H \lhd G)A[P](H))$$

$$\Longrightarrow \mathscr{N}(A[P]).$$

Obrnuto, neka je Q nasledno svojstvo

$$\mathscr{N}(Q) \Longleftrightarrow (\forall G)(Q(G) \Longrightarrow (\forall H \lhd G)Q(H))$$

Treba dokazati da postoji svojstvo P takvo da je

$$Q = A[P]$$

i da je

$$\mathscr{N}(Q) \Longleftrightarrow (\forall G)(A[P](G) \Longrightarrow ((\forall H \lhd G)P(H) \wedge P(G))).$$

Kako je

$$(Q(G) \Longrightarrow (\forall H \lhd G)Q(H)) \Longrightarrow (Q(G) \Longleftrightarrow ((\forall H \lhd G)Q(H) \wedge Q(G)))$$

sledi da je

$$\mathscr{N}(Q) \Longrightarrow (\forall G)(Q(G) \Longleftrightarrow ((\forall H \lhd G)Q(H) \wedge Q(G)))$$

tj.

$$Q = A[Q],$$

odakle je

$$\mathscr{N}(Q) \Longrightarrow \mathscr{A}(Q).$$

Ako za formulu $F(P;G)$ izaberemo konstantu T, tada je prema (1),

$$A_2[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H \lessdot G)P(H) \wedge T)$$

Označimo sa $\mathscr{A}2$ klasu pravih algebarskih svojstava $A_2[P]$ definisanih na ovaj način, a sa $\mathscr{L}$ klasu svih lokalnih*) svojstava k.p. grupa.

R10: *Klasa $\mathscr{A}2$ se poklapa sa klasom $\mathscr{L}$ lokalnih svojstava k.p. grupa.*

DOKAZ

$$A_2[P](G) \Longleftrightarrow (\forall H \lessdot G)P(H)$$
$$\Longleftrightarrow L[P](G)$$

R11: *Neka je P pravo algebarsko svojstvo k.p. grupa; tada je svako pravo algebarsko svojstvo $Q[P]$ zadato sa*

$$Q[P](G) \Longleftrightarrow ((\exists N \lhd G)P(G/N) \Longrightarrow (\exists H < G)P(H))$$

neraspoznatljivo.

DOKAZ

Grupa G ima svojstvo $Q[P]$ ako je

$$Q[P](G) \Longleftrightarrow ((\forall H < G)\neg P(H) \Longrightarrow (\forall N \lhd G)\neg P(G/N))$$

Odavde je

---

*) Grupa G ima lokalno svojstvo $L[P]$ akko sve prave podgrupe grupe G imaju svojstvo P.

$$Q[P](G) \Longleftrightarrow B_F'[\neg P](G)$$

gde je za formulu F(P;G) izabrano $(\forall N \triangleleft G) \neg P(G/N)$ a $B_F'[\neg P]$ je svojstvo uvedeno pomoću (2′).

Kako je svako pravo svojstvo $B_F'[P]$ neraspoznatljivo (komplementarno-Markovsko), neraspoznatljivo je i svojstvo Q.

Dakle, navedene klase $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}'$, $\mathscr{B}'$ svojstava su veoma široke i, za različite formule F(P;G) obuhvataju mnoge druge, važne klase svojstava.
Za konkretna svojstva P i konkretne formule F(P;G) dobijaju se mnoga značajna neraspoznatljiva svojstva k.p. grupa.

4. OSOBINE UNIVERZALNIH GRUPA I MARKOVSKIH SVOJSTAVA

4.1. O osobinama Markovskih i njima komplementarnih svojstava

4.2. O osobinama univerzalnih grupa

4.1. O osobinama Markovskih i njima komplementarnih svojstava

Rezultati ovog odeljka (posledice 2 i 3) se odnose na osobine Markovskih i komplementarno-Markovskih svojstava, koje se dokazuju koristeći teoremu 1 iz drugog poglavlja.

Neka su P_1 i P_2 proizvoljna svojstva grupa. Svojstvo P_1 je *podsvojstvo* svojstva P_2, u oznaci $P_1 \subseteq P_2$, akko je

$$(\forall G)(P_1(G) \Longrightarrow P_2(G)).$$

Pritom je P_2 *nadsvojstvo* svojstva P_1.
Unija i *presek* svojstava P_1 i P_2 uvode se na sledeći način:

$$(\forall G)((P_1 \cup P_2)(G) \Longleftrightarrow (P_1(G) \vee P_2(G)))$$

$$(\forall G)((P_1 \cap P_2)(G) \Longleftrightarrow (P_1(G) \wedge P_2(G))).$$

Možemo sada formulisati sledeću posledicu teoreme 1.

POSLEDICA 2:

a) Svako pravo podsvojstvo Markovskog svojstva je Markovsko svojstvo.

b) Unija konačno ili prebrojivo mnogo Markovskih svojstava je Markovsko svojstvo.

c) Presek Markovskog i proizvoljnog svojstva k.p. grupa (ako je pravo) je Markovsko svojstvo.

Tvrdjenja a) i c) se mogu dokazati i bez korišćenja teoreme 1; stoga dokazujemo samo tvrdjenje b) koje daje novu i važnu osobinu Markovskih svojstava.

DOKAZ:

Neka je P_o svojstvo k.p. grupa "ne biti univerzalna grupa", tj. neka je

$$P_o(G) \Longleftrightarrow G \in \mathscr{K} \setminus \mathscr{U}.$$

Po teoremi 1, P_o je Markovsko svojstvo. Neka je P_i, $i \in I$, gde je I proizvoljan najviše prebrojiv skup indeksa, familija Markovskih svojstava

$$(\forall i \in I)(\forall U \in \mathscr{U}) \neg P_i(U)$$

i neka je

$$\bigcup_{i \in I} P_i = P'.$$

Dokažimo da je $P' \subseteq P_o$.

$$P'(G) \Longleftrightarrow (\exists i \in I) P_i(G)$$

$$\Longrightarrow P_c(G)$$

$$(\forall i \in I)(\forall U \in \mathscr{U}) \neg P_i(U) \Longrightarrow (\forall U \in \mathscr{U}) \neg P_c(U)$$

Dakle, ako grupa G ima svojstvo $P' = \bigcup_{i \in I} P_i$ (gde su P_i, $i \in I$, Markovska svojstva), onda

$$P'(G) \Longrightarrow (P_c(G) \wedge \neg (\exists U \in \mathscr{U}) P_c(U))$$

$$\Longrightarrow G \notin \mathscr{U}$$

$$\Longleftrightarrow P_o(G)$$

tj.

$$\bigcup_{i \in I} P_i \subseteq P_o.$$

Kako je P_o Markovsko svojstvo, Markovsko je i $\bigcup_{i\in I} P_i$ (koristeći tvrdjenje a) ove posledice).

Gore navedeno svojstvo P_o je maksimalno Markovsko svojstvo k.p. grupa (u smislu da je svako svojstvo P iz $\mathcal{M}$ podsvojstvo svojstva P_o).

Iskazi analogni iskazima posledice 2, važe i za komplementarno-Markovska svojstva.

POSLEDICA 3:

a) Svako pravo nadsvojstvo komplementarno-Markovskog svojstva je komplementarno-Markovsko svojstvo.

b) Unija komplementarno-Markovskog svojstva i proizvoljnog svojstva k.p. grupa (ako je pravo) je komplementarno-Markovsko svojstvo.

c) Presek konačno ili prebrojivo mnogo komplementarno-Markovskih svojstava je komplementarno- Markovsko svojstvo.

DOKAZ

Neka je Q_o svojstvo k.p. grupa " biti univerzalna grupa", tj.

$$Q_o(G) \Longleftrightarrow G \in \mathcal{U}$$

Svojstvo Q_o je komplement Markovskog svojstva P_o uvedenog u dokazu posledice 2,b), tj.

$$Q_o(G) \Longleftrightarrow \neg P_o(G)$$

Dakle, Q_o je komplementarno-Markovsko svojstvo.

Neka je Q_i, $i \in I$ (I je proizvoljni najviše prebrojivi skup indeksa) familija komplementarno-Markovskih svojstava

$$(\forall i \in I)(\forall U \in \mathcal{U})Q_i(U)$$

i neka je

$$\bigcap_{i \in I} Q_i = Q'.$$

Dokažimo da je $Q' \supseteq Q_o$.

Kako su svojstva Q_i $(i \in I)$ komplementarno-Markovska, to je

$$(\forall i \in I)(\forall U)(U \in \mathcal{U} \Longrightarrow Q_i(U))$$
$$\Longrightarrow (\forall i \in I)(G \in \mathcal{U} \Longrightarrow Q_i(G)).$$

Dakle, ako grupa G ima svojstvo Q i ako su Q_i $(i \in I)$ komplementarno-Markovska svojstva, onda

$$Q_o(G) \Longrightarrow ((G \in \mathcal{U}) \wedge (\forall i \in I)(G \in \mathcal{U} \Longrightarrow Q_i(G)))$$
$$\Longrightarrow (\forall i \in I) Q_i(G)$$
$$\Longleftrightarrow Q'(G)$$

tj.

$$\bigcap_{i \in I} Q_i \supseteq Q_o.$$

Kako je Q_o komplementarno-Markovsko svojstvo, komplementarno-Markovsko je i $\bigcap_{i \in I} Q_i$ (koristeći tvrdjenje a) ove posledice).

Svojstvo Q_o je minimalno komplementarno-Markovsko svojstvo k.p. grupa, tj. za svako komplementarno-Markovsko svojstvo Q je ispunjeno $Q \supseteq Q_o$.

4.2. O osobinama univerzalnih k.p. grupa

Egzistenciju grupe univerzalne za klasu $\mathcal{K}$ svih k.p. grupa je dokazao 1961 godine G.Higman /35/. Kasnije, 1970 godine, J.McCool /47/ je dokazao da postoji univerzalna k.p. grupa sa dva generatora (o ovome je detaljnije bilo reči u odeljku 3 prvog poglavlja). Drugih rezultata, medjutim, u vezi sa osobinama univerzalnih grupa, u literaturi nema, tako da su mnoga važna pitanja iz ove problematike još uvek otvorena. Navodimo samo neka od njih:

1° koja algebarska svojstva k.p. grupa imaju univerzalne grupe a koja nemaju (napr. imaju li Markovska svojstva, rezidualna*), poli-svojstva**), itd.)

2° kakve su faktor-grupe univerzalnih grupa (napr. da li sve univerzalne k.p. grupe imaju konačnu, slobodnu, Abel-ovu itd. faktor-grupu, ili koje k.p. grupe su faktor-grupe svih univerzalnih k.p. grupa, itd.)

3° kakvo je, sa gledišta algoritamske raspoznatljivosti, algebarsko svojstvo P k.p. grupa definisano tako da sve univerzalne grupe imaju (odnosno nemaju) to svojstvo, ili tako da neke univerzalne grupe

---

*) Grupa G je rezidualno-P akko je presek svih normalnih podgrupa N takvih da je P(G/N), jednak jediničnom elementu.

**) Algebarsko svojstvo P je poli-svojstvo akko

$$(\forall G)\,(\forall N \lhd G)\,(P(N) \wedge P(G/N) \Longrightarrow P(G))$$

imaju a neke nemaju svojstvo P

itd.

Koristeći teoremu 1 iz 2.1., neki od ovih problema se neposredno rešavaju.

R12: *Univerzalne k.p. grupe nemaju nijedno Markovsko svojstvo, a imaju svako komplementarno-Markovsko svojstvo k.p. grupa.*

DOKAZ

Po teoremi 1 je

$$\mathcal{M}(P) \Longleftrightarrow (\forall\, U \in \mathcal{U})\, \neg P(U)$$

$$\mathcal{CM}(P) \Longleftrightarrow (\forall\, U \in \mathcal{U})\, P(U)$$

gde je P pravo algebarsko svojstvo k.p. grupa, a $\mathcal{M}(P)$ i $\mathcal{CM}(P)$ stoje redom kao zamene za rečenice "P je Markovsko svojstvo", odnosno "P je komplementarno-Markovsko svojstvo".

Kao što je već rečeno u 1.2., Markovska su napr. sledeća svojstva: biti jedinična grupa, konačna, Abel-ova, slobodna, ciklična, biti slobodan proizvod konačnih grupa, imati rešiv problem reči, itd.

Prema tome, univerzalne grupe nisu jedinične, konačne, Abel-ove, ciklične, slobodne, nisu slobodan proizvod konačnih grupa, nemaju rešiv problem reči, itd.; dakle, beskonačne su, imaju nerešiv problem reči (najvećeg stepena 0´) itd.

Zatim, na osnovu rezultata R2 - R8 iz 3.1. i 3.2., sledi da za svaku univerzalnu grupu U važi:

- grupa U ima beskonačno mnogo normalnih podgrupa (R4),

- za svako pravo algebarsko svojstvo P, postoji više od jedne podgrupe H grupe U sa svojstvom P (R6),
- U nije n-konačna (R5),
- U ima pravu podgrupu H takvu da je $H \simeq U$ (R2),
- svaka k.p. faktor-grupa grupe U je izmorfna nekoj podgrupi grupe U (R3),
- U ima svako svojstvo P koje se sa ma koje grupe prenosi na svaku njenu nadgrupu (R7).

Prema tome, ako se na bilo koji način dokaže da je neko svojstvo P Markovsko (po definiciji ili koristeći neke druge potrebne i dovoljne uslove), na osnovu teoreme 1 sledi da nijedna univerzalna grupa nema to svojstvo. Analogno, ako se za P pokaže da je komplementarno-Markovsko, sledi da svaka univerzalna grupa ima svojstvo P.

Zatim, ova teorema daje odgovore na neka od pitanja iz 3°. Naime, neraspoznatljiva su sva prava algebarska svojstva k.p. grupa definisana tako da ih imaju sve univerzalne grupe, kao i ona svojstva koja nema nijedna takva grupa. Ostaje otvoreno pitanje koja su od svojstava takvih da ih neke univerzalne grupe imaju a neke nemaju, raspoznatljiva (ako takvih uopšte ima), a koja nisu.

L I T E R A T U R A

/1/ Addison J.W.Jr.: On some points of the theory of recursive functions, Dissertation, University of Visconsin, 1954

/2/ Адян С.И.: Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп, Докл. АН СССР, 103(1955)533-535

/3/ Адян С.И.: Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в теории групп, Труды Моск.матем. общ., 6(1957)231-298

/4/ Адян С.И.: Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп, Труды матем. ин-та им.В.А.Стеклова,85,Москва,1966

/5/ Baer R.: Finite extensions of abelian groups with minimum condition, Trans. Amer. Math. Soc. 79(1955) 521-54o

/6/ Baumslag G., Boone W.W., Neumann B.H.: Some unsolvable problems about elements and subgroups of groups, Math. Scand. 7(1959) 191-2o1

/7/ Бокуть Л.А.: О группах Новикова,Алгебра и логика, 6(1967)25-38

/8/ Бокуть Л.А.: Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в класе ассоциативны колец, Алгебра и логика, 9(1970)137-144

/9/ Boone W.W.: Certain simple unsolvable problems of group theory I,II,III,IV,V,VI, Indagationes mathematicae (Nederl. Akad. Wetensch. Ser.A) 57(1954)231-237, 57(1954)492-497, 58(1955)252-256, 58(1955)571-577, 60(1957)22-27, 60(1957)227-232

/10/ Boone W.W.: The word problem, Ann.Math.,70(1959) 207-265

/11/ Boone W.W.: Finitely presented group whose word problem has the same degree as that of an arbitrarily given Thue system (an application of methods of Britton), Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 53 (1965)265-269

/12/ Boone W.W.: Word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability.A first paper on Thue systems, Ann.Math.,83(1966)520-571

/13/ Boone W.W.: Word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability. A sequel on finitely presented groups, Ann.Math.,84(1966)49-84

/14/ Boone W.W.: Decision problems about algebraic and logical systems as a whole and recursively enumerable degrees of unsolvability, Contributions to Math.Logic (Colloquium Hannover 1966) North Holland, Amsterdam, 1968

/15/ Boone W.W.,Haken W.,Poenary V.: On recursively unsolvable problems in topology and their classification, Contributions to Math.Logic (Colloquium Hannover 1966) North Holland, Amsterdam,1968

/16/ Britton J.L.: The word problems for groups,Proc. London Math.Soc.,ser.3,8(1958)493-506

/17/ Britton J.L.: The word problem, Ann.Math.,77 (1963)16-32

/18/ Clapham C.R.J.: Finitely presented groups with word problems of arbitrary degrees of insolvability, Proc.London Math.Soc.,ser.3,14(1964) 633-676

/19/ Clapham C.R.J.: An embeding theorem for finitely presented groups, Proc.London Math.Soc.,ser.3, 17(1967)419-430

/20/ Collins D.J.: Recursively enumerable degrees and the conjugacy problem, Acta mathematica, 122(1969)115-160

/21/ Collins D.J.: On recognizing Hopf groups, Arch. Math.,20(1969)521-240

/22/ Collins D.J.: On recognizing properties of groups which have solvable word problem, Arch. Math., 25(1970)31-39

/23/ Collins D.J.: The word, power and order problems in finitely presented groups, Studies in logic and foundations of mathematics, 71 (Word problems), North Holland, Amsterdam,1973

/24/ Feeney W.J.: Certain unsolvable problems in the theory of cancellation semi-groups, Dissertation, Catholic Univ. of America,1954

/25/ Френкель В.И.: Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в группах, заданных системой образующих и определяющими неравенствами, Сиб. матем. журнал, 6(1965)1144-1162

/26/ Фридман А.А.: Взаимоотношение между проблемой тождества и проблемой сопряженности для конечно определенных групп, Тр.Моск.мат.общ.9(1960)329-356

/27/ Fridman A.A.: Degrees of unsolvability of the problem of identity in finitely presented groups, Soviet Math.,3(1962)1733-1737

/28/ Фридман А.А.: Решение проблемы сопряженности в одном классе групп, Тр. матем. ин-та АН СССР, 133(1973)233-242

/29/ Friedberg R.M.: Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (Solution of Post´s problem 1944), Proc.Nat.Acad. Sci.USA,43(1957)236-238

/30/ Greendlinger M.: On Dehn´s algorithm for the conjugacy and word problems, with applications, Comm.Pure Appl.Math.,13(1960)641-677

/31/ Гриндлингер М.: Решения проблемы тождества слов для одного класса групп с помощью алгоритма Дэна и проблемы сопряженности с помощью одного обобщения алгоритма Дэна, Докл. АН СССР, 1541964507-9

/32/ Гриндлингер Е.И.: О неразрешимости проблемы тождества слов для одного класса полугрупп с разрешимой проблемой изоморфизма, Докл. АН СССР,171 (1966)519-520

/33/ Haken W.: Connections between topological and group theoretical decision problems, Studies in logic and foundations of mathematics,71 (Word problems), North Holland, Amsterdam,1973

/34/ Hall Ph.: Some constructions for locally finite groups, J.London Math.Soc.,34(1959)305-319

/35/ Higman G.: Subgroups of finitely presented groups, Proc.Roy.Soc.Ser.A, 262(1961)455-475

/36/ Higman G.,Neumann B.H.,Neumann H.: Embedding theorems for groups, J.London Math.Soc.,24 (1949)247-254

/37/ Курош А.Г.: Теория групп, Наука,Москва,1967

/38/ Levin F.: Factor groups of the modular group, J.London Math.Soc., 43(1968)195-203

/39/ Lipschutz S.,Lipschutz M.: A note on root decision problems in groups, Can.J.Math., 25(1973) 702-705

/40/ Magnus W.: Das identitatsproblem für gruppen mit einer definierenden relation,Math.Ann.,106 (1932)295-307

/41/ Magnus W.,Karrass A.,Solitar D.: Combinatorial group theory,Wiley, New York,1966

/42/ Мальцев А.И.: Алгоритмы и рекурсивные функцйй, Науча,Москва,1965

/43/ Марков А.А.: Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем,Докл. АН СССР,55 (1947)587-590

/44/ Марков А.А.: Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем,II,Докл. АН СССР, 58(1947)353-356

/45/ Марков А.А.: Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем, Докл. АН СССР, 77 (1951) 19-20

/46/ Марков А.А.: Невозможность алгоритмов распознавания некоторых свойств ассоциативных систем, Докл. АН СССР, 77(1951) 953-956

/47/ McCool J.: Embedding theorems for countable groups, Can.J.Math., 22(1970) 827-835

/48/ McCool J.: Unsolvable problems in groups with solvable word problem, Can.J.Math., 22(1970) 836-838

/49/ Михайлова К.А.: Проблема вхождения для прямых произведений групп, Докл. АН СССР, 119 (1958) 1103-1105

/50/ Михайлова К.А.: Проблема вхождения для свободных произведений групп, Докл. АН СССР, 127 (1959) 746-748

/51/ Miller Ch.F.III : On group-theoretic decision problems and their classification, Annals of math.studies, Princeton Univ.Press, 68, 1971

/52/ Miller Ch.F.III : Decision problems in algebraic classes of groups (a survey), Studies in logic and foundations of mathematics, 71 (Word problems), North Holland, Amsterdam, 1973

/53/ Mostowski A.W.: On the decidability of some problems in special classes of groups, Fund. math., 59(1966) 123-135

/54/ Mostowski A.W.: Computational algorithms for deciding some problems for nilpotent groups, Fund.math.,59(1966)137-152

/55/ Mostowski A.W.: Uniform algorithms for deciding group-theoretic problems, Studies in logic and foundations of mathematics,71 (Word problems), North Holland,Amsterdam,1973

/56/ Murskii V.L.: Isomorphic embedability of semigroups with countable sets of defining relations in finitely defined semigroups, Math. Notes,1(1967)145-149

/57/ Neumann P.M.: The SQ-universality of some finitely presented groups, J.Austral.Math.Soc., 16(1973)1-6

/58/ Новиков П.С.: Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества, Докл. АН СССР, 85(1952)702-1[illegible]

/59/ Новиков П.С.: Неразрешимость проблемы сопряженности в теорий групп, Изв. АН СССР, 18(1954) 485-524

/60 Новиков П.С.: Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теорий групп, Труды мат. ин-та им. В.А. Стеклова,44(1955)

/61/ Павлов Р.Д.: Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теорий групп в минимальных алфавитах, Докл. Болг. акад. наук, 24(1971) 855-858

/62/ Post E.L.: Recursive unsolvability of a problem of Thue, J.Symb.Logic, 12(1947)1-11

/63/ Rabin M.: Recursive unsolvability of group theoretic problems, Ann.Math.,67(1958)172-194

/64/ Rogers H.Jr.: Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill,New York,1967

/65/ Sacerdote G.S.: Some undecidable problems in group theory,Proceed.Amer.Math.Soc.,36(1972) 231-238

/66/ Tarski A.: Undecidability of group theory (abstract),J.Symb.Logic (1949)76-77

/67/ Tarski A.,Mostowski A.,Robinson R.M.: Undecidable theories, North Holland, Amsterdam,1971

/68/ Тимошенко Е.И.: Некоторые алгоритмические вопросы для Метабелевых групп, Алгебра и логика, 12(1973)232-240

/69/ Turing A.M.: The word problem in semi-groups with cancellation, Ann.Math.,52(1950)491-505