Miroljub I. Pavlović

PRIMENA VARIJACIONIH PRINCIPA MEHANIKE NA NEKE PROBLEME PRENOŠENJA MASE I ENERGIJE

S a d r ž a j

O z n a k e

a - koeficijent temperaturne vodljivosti

c_p - specifična toplota

c_f - koeficijent otpora trenja

f - debljina dinamičkog graničnog sloja

k - koeficijent provodljivosti toplote

p - pritisak

q - specifični toplotni fluks

T - temperatura

t - vreme

U - brzina na spoljašnjoj granici dinamičkog graničnog sloja

u - podužna komponenta brzine

v - poprečna komponenta brzine

x - koordinata duž površine tela

y - koordinata normalna na površinu tela

x_s - tačka odvajanja

α - koeficijent prelaza toplote

Δ - debljina temperaturskog graničnog sloja

μ - dinamička viskoznost

ν - kinematička viskoznost

Y - odnos debljina graničnih slojeva Δ/f

ρ - gustina

τ - napon smicanja

E - Ekertov broja

N_{pe} - Pekle-ov broj

R_e - Rejnoldsov broj

N_u - Nuseltov broj

σ - Prandtlov broj

Indeksi

x,y,t - parcijalni ili obični izvod po x,y ili t

∞ - veličina na spoljašnjoj granici dinamičkog ili temperaturskog graničnog sloja

w - veličina na površini tela

U V O D

Ovaj rad nastao je kao rezultat višegodišnjeg bavljenja problemima primene varijacionih metoda Hamiltonovog tipa na ireverzibilne procese u mehanici kontinuuma, preciznije, na dinamički i temperaturski granični sloj. On je sinteza i generalizacija dosadašnjih rezultata, do kojih je autor došao, od kojih su neki štampani [1] , [2] , [3] a i saopšteni na XI jugoslovenskom kongresu za racionalnu i primenjenu mehaniku.

Rad je tematski podeljen na tri dela. Prvi deo obuhvata mesto i značaj varijacionih principa, kako u reverzibilnim tako i u ireverzibilnim fizičkim procesima, ukazujući na njihov unificirajući karakter u pogledu jedinstvenog opisivanja procesa iz različitih oblasti fizike i daje kratak istorijski pregled razvoja varijacionih principa Hamiltonovog tipa. Dalje, u ovom delu rada govori se o novijim istraživanjima u oblasti primene varijacionih principa na ireverzibilne procese, koja su uspela da prevazidju teškoće oko primene klasične Hamiltonove varijacione formulacije na procese za koje se ne može formirati Laganževa gustina u klasičnom smislu, daje se osvrt na direktne metode varijacionog računa i navode se elementi teorije lančanih sistema.

U drugom delu rada obuhvaćena je primena jednog novog varijacionog metoda Hamiltonovog tipa, koji je formulisao B. Vujanović - varijacioni metod isčezavajućeg parametra. Iz ove varijacione formulacije izvedene su diferencijalne jednačine dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja za fluid sa promenljivim fizičkim karakteristikama i za konvektivno provodjenje toplote sa viskoznom disipacijom. Dalje, direktnom metodom parcijalne integracije u smislu Kantorovića, dobijene su približne diferencijalne jednačine za opšti profil brzine i temperature.

Treći deo ovog rada obuhvata rešavanje nekih specijalnih problema iz oblasti dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja, korišćenjem varijacionog metoda. Od njih najznačajniji je problem konvekcije sa disipacijom u fluidu sa promenljivim fizičkim karakteristikama. Autor nije našao u pristupačnoj mu literaturi ovako kompleksno obradjen problem, tako da bi ovaj deo mogli smatrati kao sopstveni doprinos autora rešavanju problema stacionarne konvekcije sa disipacijom i promenljivim karakteristikama fluida.

U toku proučavanja problema varijacionog računa i njegove primene, veliku i nesebičnu pomoć pružio mi je Dr. Božidar Vujanović, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Novom Sadu, i ovaj rad predstavlja plod te dugogodišnje saradnje. Veliko mi je zadovoljstvo da mu ovom prilikom, kao veoma cenjenom kolegi najsrdačnije zahvalim.

Docent Mašinskog fakulteta u Novom Sadu Dr. Djordje Djukić veoma mnogo me je zadužio svojom pomoću i stručnim

savetima, pa mu se najtoplije zahvaljujem.

Inženjer Egon Zakrajšek, saradnik Instituta "Jožef Štefan" Univerziteta u Ljubljani, vrlo inventivno i efikasno programirao je rešenje sistema diferencijalnih jednačina dobijenih pri rešavanju problema, čime mi je mnogo pomogao, pa mu se od sveg srca zahvaljujem.

Posebno se zahvaljujem svom bivšem profesoru Dr. Tatomiru Andjeliću što me je svesrdno podržao u naporima da realizujem ovaj rad.

I UVODNA RAZMATRANJA

1. Mesto i značaj varijacionih principa u mehanici. Već od trenutka kada su prvi put bili formulisani, u svom rudimentarnom obliku, varijacionim principima mehanike pridavao se veliki teleološko principijelni značaj. Od samog početka naučnicima je bilo jasno da se radi o jednoj formulaciji koja u sebi sadrži, sa jedne strane mogućnost da se fizički, a specijalno mehanički procesi sintetizuju tj. svedu na kompaktan oblik, a sa druge strane uzme u obzir globalnost procesa u prostoru i vremenu u kome se proces dešava. Evolucijom klasičnog varijacionog računa, a specijalno pojma varijacije, varijacioni principi dobijali su sve više u značaju. Ovo specijalno iz razloga što je vremenom postalo jasno da varijacioni principi imaju unificirajući karakter, tj. da se razne disparatne oblasti fizike, tehnike i drugih naučnih disciplina mogu opisati sa jedinstvenog stanovišta, varijacijom odgovarajućeg akcionog integrala.

Tokom ovog veka, pronalaskom direktnih metoda varijacionog računa, varijacioni principi još više dobijaju u značaju, jer se preko njih može doći do iscrpnih informacija o odvijanju jednog procesa, i to kako kvalitativno tako i kvantitativno. Radi se naime o činjenici da se ispitivanjem unutrašnje simetrije odgovarajućih akcionih integrala može doći do dragocenih informacija o načinu kako se proces odvija u prostoru i vremenu, da se pronadju njegovi prvi integrali i zakoni održanja, invarijante kretanja i td., bez poznavanja "konačnih jednačina kretanja". Ovaj vid varijacionog ispitivanja procesa vezan je za radove Emi Neter i danas je jedna od najprimenjenijih metoda u kvantnoj mehanici pri studiji osobina dinamičke simetrije elementarnih čestica.

Drugi pravac u varijacionom ispitivanju fizičkog procesa sastoji se u kvantitativnom dobijanju informacija, odnosno dobijanju rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina fizičkog procesa iz Hamiltonovog varijacionog principa. Ovaj pravac istraživanja započet je u prvoj deceniji ovoga veka radovima Valtera Rica,a nastavljen od strane Galerkina, Kantorovića i mnogih drugih. Ovaj pravac je dobio u svom značaju primenom u rešavanju složenih nelinearnih problema fizike. Poznato je, naime, da opšte metode nelinearnih procesa, u strogo matematičkom smislu, do sada nisu nadjene. Rešavanjem nelinearnih problema je individualno, ne poseduje nikakvu opštost. Varijacioni metod primenjen na ovu oblast sa pravom reflektira na izvesnu "opštost", jer se rešenja, makar i aproksimativna, dobijaju u analitičkom obliku i to uvek sa jedinstvenog stanovišta, tj. minimizacijom odgovarajućeg integrala akcije. Ovaj način biće vrlo obilato korišćen u ovom radu.

Treći pravac u kome su evoluirali varijacioni principi mehanike, pripada širokoj i modernoj oblasti teorije optimizacije sistema automatskog upravljanja. Grubo govoreći, u ovoj oblasti se radi o optimalnom izboru parametara kojima se upravlja sistemom, tako da neki akcioni integral /energija, vreme, predjeni put , cena koštanja i td./ bude minimalna. Radovi iz ove oblasti najčešće se vezuju za imena L.S. Pontrjagina, Belmana, Kalabu i td.

Na kraju vredno je pomenuti da varijacioni principi mehanike igraju ogromnu ulogu u novijim pokušajima da se izvrši geometrizacija kretanja u klasičnoj dinamici. Uvodjenjem pojma konfiguracionog prostora, kretanje složenog dinamičkog sistema sa n stepeni slobode, može se dovesti u vezu sa kretanjem po geodezijskoj liniji sa stacionarnim najkraćim rastojanjem u tom prostoru. Kada se uzme u obzir da pojam geodezijske linije ulazi u pojam osnove varijacionog računa, jasno je da je i ova oblast mehanike u tesnoj vezi sa klasičnim Hamiltonovim principom. Teško je u ovako jednoj studiji navesti oblast fizike i savremene tehnike gde varijacioni principi, specijalno Hamiltonov, ne igraju značajnu ulogu.

Namera nam je da u ovom radu prikažemo primenu Hamiltonovog principa u ireverzibilnoj fizici, specijalno u nelinearnoj teoriji konvekcije, u kojoj ova tehnika nije bila do danas primenjivana.

2. <u>Kratak prikaz istorijskog razvoja varijacionih principa</u>. Prema M. Planku [4] , prva narativna varijaciona formulacija poznata u istoriji nauke pripada Lajbnicu, koji u svom delu "Teodiseja" iznosi tezu da "Od svih svetova pravi je onaj koji u sebi sadrži minimum zla". Očigledno da se ovde radi o istom tipu varijacionog formulisanja kakvog srećemo u svom završnom obliku u ra-

dovima Hamiltona. Inače, varijacioni principi mehanike razvijali su se naporedo sa klasičnim varijacionim računom, te ovde navodimo nekoliko važnijih detalja u razvoju ove oblasti.

Jedan od prvih problema koji u sebi sadrži esencijalne ideje, koje su prisutne u današnjim formulacijama varijacionih principa, jeste tzv. Njutnov problem o pronalaženju oblika obrtnog tela koje daje minimalan otpor fluidu koji ga optiče. Ovaj problem je štampan u delu "Principia" /1686/. Ako je A koordinatni početak /0,0/ a B tačka $/\bar{X},\bar{Y}/$ u prvom kvadrantu, želimo da nadjemo krivu koja spaja tačke A i B, tako da obrtno čvrsto telo, koje se dobija obrtanjem krive oko Ox ose, trpi najmanji mogući otpor kada se kreće, na levo, kroz vazduh konstantnom brzinom. Na bazi prostih fizičkih razmatranja Njutn daje formulu za veličinu otpora u obliku

$$2\pi\rho V^2\int_0^{\bar{Y}} y \sin^2\psi \, dy \, ,$$

gde je ρ gustina vazduha, V brzina projektila i $\mathrm{tg}\,\psi = y'$ nagib krive. Kasnija eksperimentalna istraživanja su pokazala da se veličina otpora data prethodnom formulom ne slaže sa stvarnom vrednošću otpora, pa ova razmatranja imaju samo akademski karakter. Izostavljajući pozitivni množitelj $2\pi\rho\, V^2$, integral koji želimo da minimiziramo /ako razmatramo običan problem, u kome je kriva oblika $y = \varphi(x)$/ je oblika

$$I = \int_0^{\bar{X}} \frac{y\,y'^3}{1+y'^2}\, dx \, .$$

Kasnije ovaj integral je korigovan na sledeći parametarski oblik

$$I = \int_{T_0}^{T} \frac{y\dot{y}^3}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt .$$

Jedan od sledećih primera je poznati problem brahistohrone,tj. problem pronalaženja **krive najbržeg spuštanja teške materijalne tačke iz neke tačke A u nižu tačku B.** Ovaj problem je u vidu zadatka nastao godinu dana kasnije od Njutnovog problema i rešili su ga Johan Bernuli i njegov brat Jakob, a takodje Njutn, Lajbnic i Lopital. Ovi problemi rešavani su ad hoc metodama. Posle toga Ojler i Lagranž 1760. godine uveli su simbol δ , čime je varijacioni račun ušao u svoju modernu fazu. 1774. godine Ojler je otkrio vezu izmedju minimizacije integrala

$$I = \int_{x}^{\bar{x}} F[x, y(x), y'(x)] dx$$

i diferencijalne jednačine

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

koja je po njemu dobila ime. Ojlerova jednačina je ista kao i dinamička Lagranževa jednačina II vrste za jedan stepen slobode kretanja.

Dalja evolucija varijacionog računa vezana je za imena Vajerštrasa, Ležandra, Jakobija,a kasnija istraživanja za Hilberta, Bolcu, Blisa, Tonelija, Morzea i drugih.

Jedan od osnovnih nedostataka u primeni Hamiltonovog principa u svim oblastima fizike jeste činjenica da se on, uglavnom sve do sredine 2o. veka,primenjivao na reverzibilne - izoenergijske procese. U želji da prošire primenu na nepovratne procese izvršene su izvesne generalizacije varijacionih principa mehanike, koje omogućavaju uključivanje ireverzibilnih procesa u varijaciona razmatranja. Ova proširenja o kojima će kasnije biti opširnije govoreno, u mnogim slučajevima predstavljaju izmene osnovnih pravila varijacionog računa, koje često idu na uštrb matematičke strogosti. Kao neke od nosioca ovog pravca možemo spomenuti Prigožina, Glansdorfa, Morzea, Fežbaha, Šehtera, Čembersa, Beitmana, Bioa, Lardnera i druge.

3. Novija istraživanja u primeni varijacionih principa na ireverzibilne procese. Kao što je rečeno u prethodnom poglavlju, jedan od osnovnih nedostataka klasičnog Hamiltonovog principa jeste,da je on u svom klasičnom obliku primenjivan na usku klasu problema konzervativnog karaktera. U želji da iskoriste prednosti koje pruža varijaciona tehnika, kasnih pedesetih godina ovog veka,učinjeni su pokušaji da se za ireverzibilne probleme nadje ekvivalentna varijaciona deskripcija, koja će da posluži, sa jedne strane za dobijanje potpunog sistema diferencijalnih jednačina procesa i odgovarajućih graničnih i početnih uslova, a sa druge strane da posluži za dobijanje približnih rešenja,upotrebom direktnih metoda varijacionog računa.

Namera nam je da u ovom poglavlju damo kratak osvrt na važnije varijacione prilaze koji su razvijeni poslednjih godina. Radi jasnijeg izlaganja zadržaćemo se na varijacionom izvodjenju klasične parcijalne diferencijalne jednačine provodjenja toplote kroz čvrsto telo, jer je poznato da ova jednačina ne poseduje odgovarajuću Lagranževu gustinu, čiji bi varijacioni izvod bio identičan sa tom jednačinom. Želimo, dakle, da iz varijacionog principa Hamiltonovog tipa izvedemo jednačinu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

gde je $T(x,t)$ temperatura; t - vreme, x - Dekartova koordinata; a je koeficijenat temperaturne vodljivosti. Kao što je rečeno nije poznata Lagranževa gustina

$$L\left(x,t,T,\frac{\partial T}{\partial t},\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

koja bi preko Ojler - Lagranževe jednačine oblika

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial L}{\partial T_t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial T_x} = 0 \tag{3.2}$$

dovela do jenačine /3.1/. Naravno, jednačina /3.2/ je ekvivalentna sa Hamiltonovim principom $\delta I = 0$, čije je dejstvo oblika

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x} L\left(t,x,\frac{\partial T}{\partial t},\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\,dt. \tag{3.3}$$

Navodimo ukratko neke važnije formulacije koje na sledeći način prevazilaze teškoće o kojima je reč:

a/ Glansdorf - Prigožinova formulacija - teorija lokalnog potencijala. Prema ovoj teoriji u razmatranje se uvode dve vrste zavisno promenljivih veličina, u ovom slučaju temperatura $T(x,t)$ i tzv. zamrznuta temperatura $T^0(x,t)$, koja se tokom variranja izraza /3.3/, ili formiranja jednačina /3.2/, ponaša kao konstantna veličina. Po završenom varijacionom procesu ove veličine se izjednačavaju, tj.

$$T^0(x,t) = T(x,t), \tag{3.4}$$

čime se dobija tačna diferencijalna jednačina /3.1/.

Posmatrajmo Lagranžijan

$$L \equiv T\cdot\frac{\partial T^0}{\partial t} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2. \tag{3.5}$$

Zamenom /3.5/ u /3.2/ imaćemo

$$\frac{\partial T^{o}}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

i korišćenjem uslova /3.4/ dobijamo traženu diferencijalnu jednačinu procesa /3.1/.

Napominjemo da ovakav dualni personalitet promenljive T nije opravdan ni sa matematičke ni sa fizičke tačke gledišta. Naprimer, variranjem /3.4/ dobili bi da je $\delta T = 0$, što je očigledno besmisleno, pošto varijacija δT mora biti proizvoljna u celom domenu variranja,izuzev granica. Medjutim, opravdanost ovakve radnje toleriše se, jer se dobijaju,kako tačne diferencijalne jednačine problema, tako i visoko tačni rezultati, direktnom metodom varijacionog računa, što će biti pokazano u idućem poglavlju. Ovaj princip je primenjen na vrlo širok kompleks raznih problema fizike, a naročito u ireverzibilnim transportnim procesima i pokazao je da se približne metode mogu vrlo uspešno primeniti na razne nelinearne probleme mehanike kontinuuma i hidrodinamičke stabilnosti. Bez pretenzija na iscrpnost navodimo neke važnije referencije u kojima je ovaj princip primenjivan. [5] , [6] , [7] , [8] , [9] , [10] , [11] , [12] , [13] , [14] , [15] , [16] , [17] , [18] , [19] , [20] , [21] .

b/ Varijaciona formulacija konjugovanih promenljivih. Beitman je 1929. godine,a kasnije Slateri, Morze i Fešbah i njihovi učenici, primenio jedan varijacioni princip [22] , [23] , [24] , u kome figuriraju dve vrste promenljivih i to realne promenljive, temperatura, pritisak, brzina T, p, v i njima konjugovane promenljive veličine T^*, p^* i v^*, koje su u pogledu variranja potpuno ravnopravne sa realnim fizičkim veličinama T, p, v , ali nemaju odredjenog fizičkog smisla. U isto vreme, obe grupe ovih promenljivih ulaze u Lagranževu gustinu problema. Naporedo sa jednačinama Ojler - Lagranža

$$
/36/ \quad \left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L}{\partial T} - \dfrac{\partial}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial L}{\partial T_t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial L}{\partial T_{x_i}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial p} - \dfrac{\partial}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial L}{\partial p_t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial L}{\partial p_{x_i}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial L}{\partial v_t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial L}{\partial v_{x_i}} = 0 ,
\end{array}\right.
$$

/i=1,2,......, n/

uzimamo i jednačine sa konjugovanim promenljivim

$$
/37/ \quad \left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L}{\partial T^*} - \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{\partial L}{\partial T_t^*} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial L}{\partial T_{x_i}^*} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial p^*} - \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{\partial L}{\partial p_t^*} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial L}{\partial p_{x_i}^*} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial v^*} - \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{\partial L}{\partial v_t^*} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial L}{\partial v_{x_i}^*} = 0 .
\end{array}\right.
$$

/i=1,2,......, n/

Napomenimo da je formiranje Lagranžijana za konkretne fizičke slučajeve jako otežano postojanjem ovih dveju vrsta zavisno promenljivih. Takodje, velike teškoće pri praktičnom radu zadaje činjenica da nam u vezi sa konjugovanim promenljivim nisu zadati nikakvi ni granični ni početni uslovi, pa smo u velikoj i ozbiljnoj nedoumici kako da postupimo u slučajevima kada imamo posla sa kompleksnim fizičkim problemima, kada ima više fizičkih promenljivih, kada je problem nelinearan i ima složene granične uslove i td. Napominjemo takodje da je konjugovni sistem jednačina koji sadrži promenljive T^*, p^*, v^*, u isto vreme spregnut i sa realnim fizičkim promenljivim, što još više komplikuje ionako složenu situaciju. Ipak, uprkos ovim teškoćama, ovaj princip je primenjen u složenim situacijama strujanja viskoznog fluida oko sfere, a rezultati dobijeni ovom metodom su u vrlo dobroj saglasnosti sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim putem /Slateri/. Na kraju prikažimo na našem primeru linearno[9] provodjenja toplote kako se dobijaju diferencijalne jednačine procesa. Posmatrajmo Lagranžijan

$$L=\frac{1}{2}T^*\frac{\partial T}{\partial t}+T\cdot\frac{\partial T^*}{\partial t}-\frac{a}{2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T^*}{\partial x}. \tag{3.8}$$

Zamenom /3.8/ u prve od jednačina /3.6/ i /3.7/ dobija se:

$$\left|\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\\&\frac{\partial T^*}{\partial t}=-a\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}.\end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

Prva jednačina /3.9/ je korektna diferencijalna jednačina procesa /3.1/, a druga je parazitska jednačina bez nekog odredjenog fizičkog smisla.

c/ Biov princip. M. Bio je razradio metod koji omogućava da se zadaci iz provodljivosti toplote razmatraju analogno zadacima mehanike. Razmotrimo matematičku formulaciju problema. Uvedimo pojam o polju vektora toplotnog fluksa $\vec{H}$, koji može biti izražen kao funkcija generalisanih koordinata, čiji broj zavisi od broja stepeni slobode sistema,

$$\vec{H}=\vec{H}(q_1,\cdots q_s;t).$$

Brzina promene vektora $\vec{H}$ po vremenu je specifični toplotni fluks

$$\vec{J_q}=\dot{\vec{H}}=\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

Označimo sa $\theta = T - T_0$

Iz Zakona o održanju energije sleduje da je

$$c\rho\dot{\theta} = -\operatorname{div}\vec{H},$$

gde su c i ρ - specifična toplota i gustina. Bio je uveo termodinamičke analogije potencijalnoj energiji, disipativnoj funkciji i spoljašnjoj sili.

Kao analogon potencijalne energije javlja se funkcija

$$U = \frac{1}{2}\sum b_{ik} q_i q_k .$$

Ova funkcija karakteriše toplotno stanje sistema. U integralnoj formi biće

$$U = \frac{1}{2}\int_V c\rho\theta^2 dV .$$

Disipativna funkcija karakteriše nepovratnost procesa i njena kvadratna forma analogna je formi dobijenoj u mehanici tj.

$$D = \frac{1}{2}\sum a_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k .$$

Uvodeći oznake uobičajene u fizici dobijamo integralni izraz

$$D = \frac{1}{2}\int_V \frac{1}{k}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)^2 dV .$$

Pod silom se podrazumeva temperaturska sila jednaka

$$F_i = \int_A \theta\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial q_i}\, dA .$$

Pod ovim uslovima Bio-ov princip ima formu Ojler-Lagranževih jednačina mehanike, za slučaj kada je kinetička energija jednaka nuli,

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i .$$

Pokazaćemo da je poslednja jednačina ekvivalentna jednačini provodjenja toplote. Razmotrimo varijaciju funkcija U i D, koristeći napred navedene relacije. Tada je

$$\delta U = \int c\rho\theta\delta\theta dV = -\int\theta\delta(\operatorname{div}\vec{H})dV .$$

Parcijalnom integracijom gornje jednačine dobijamo:

$$\delta U=\int_V \delta\vec{H}\cdot \operatorname{grad}\theta\, dV+\int_A \vec{n}\theta\cdot\delta\vec{H}\, dA\,,$$

$$\delta D=\int_V \frac{1}{k}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\cdot\delta\vec{H}\, dV\,.$$

Posle zamene varijacija u sumu

$$\delta U+\delta D=\int_A \vec{n}\theta\cdot\delta\vec{H}\, dA\,,$$

imamo

$$\int_V \delta\vec{H}\left(\operatorname{grad}\theta+\frac{1}{k}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)dV=0\,.$$

Kako prethodna jednačina mora biti zadovoljena za sve varijacije $\delta\vec{H}$, mora biti

$$\operatorname{grad}\theta+\frac{1}{k}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0\,,$$

ili

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}\theta)\,,$$

što je i trebalo dokazati.

Napominjemo da Bio-ov princip nema Hamiltonov karakter, već da je pre baziran na Lagranževom principu virtualnih pomeranja. Ovaj princip bio je takodje mnogo kritikovan od strane Finlejsona i Skrivena, jer su otkrili da postoji jedan vrlo širok krug problema u kojima je ovaj princip neprihvatljiv. Ipak Bio-ov metod je vrlo poznat i cenjen u medjunarodnim razmerama, što potvrdjuje i ovaj kratak spisak referentne literature. [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33].

d/ Gertinov varijacioni princip za stacionarne probleme. U prikazu dosadašnjih varijacionih formulacija bili smo u stanju da dobijemo tačnu diferencijalnu jednačinu nestacionarnog provodjenja toplote u nestacionarnom obliku. U principu nema nikakve teškoće da se izvedu odgovarajuće nelinearne jednačine, naprimer, kada su termodinamičke karakteristike funkcije temperature. Ima, medjutim, i drugih varijacionih formulacija čija se primena ograničava na linearne i stacionarne probleme transporta. Potpunosti radi navodimo jednu koja se pojavila nedavno i koja je vezana za ime M. Gertina i Tao-a. [34]. Prikazaćemo ovaj princip za slučaj laminarnog kretanja fluida kroz cevi čija jednačina provodjenja toplote stacionarnom obliku glasi:

/3.10/ $$\frac{\partial T}{\partial x} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Ovaj varijacioni princip zasnovan je na pojmu kontrakcije. Kontrakcija f * g odredjuje se kao

$$[f*g](x,y,z)=\int_0^x f(x-\xi,y,z)g(\xi,y,z)d\xi,$$

za dve neprekidne funkcije f (x,y,z) i g (x,y,z). Pokazano je da ova kontrakcija ima svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, tj.

$$f*g=g*f$$
$$(f*g)*h=f*(g*h)$$
$$(f+g)*h=f*g+f*h.$$

Očevidno da je f * g = 0 ako je f = 0 ili g = 0. Posmatrajmo dejstvo u obliku

/3.11/ $$I(T)=\int_R\left(T*T+a*\frac{\partial T}{\partial y}*\frac{\partial T}{\partial y}\right)dA.$$

Integral /3.11/ odnosi se na prostornu oblast strujanja. Ako variramo funkcional /3.11/, iskoristimo svojstva kontrakcije i parcijalno integriramo imaćemo:

$$/3.12/ \qquad \delta I(T) = 2\int_R \left[T - a * \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] * \delta T dA + 2\int_C a \frac{\partial T}{\partial y} * \delta T ds ,$$

gde je C kontura oblasti R,a ds elemenat luka te konture; n je kosinus spoljašnje normale na C. Pretpostavljajući da je $\delta T|_C = 0$ poslednji član u /3.12/ jednak je nuli,te /3.12/ dovodi do

$$T - a * \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 .$$

Diferencirajući ovu jednačinu po x,gornja jednačina dovodi do /3.1o/, čime je princip verifikovan.

e/ Varijaciona formulacija Hamiltonovog tipa sa iščezavajućim parametrom. Počev od 197o. godine u literaturi se pojavio jedan varijacioni princip Hamiltonovog tipa,koji je baziran na generalisanoj jednačini provodjenja toplote oblika

$$/3.13/ \qquad \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} ;$$

Stara je i vrlo dobro poznata činjenica da klasična jednačina sprovodjenja toplote

$$/3.14/ \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} ,$$

ima jedan vrlo ozbiljan nedostatak, da se toplotni poremećaj širi kroz telo bezkonačnom brzinom. Ovo, naprimer, znači da se dejstvo toplotnog izvora, koji deluje na telo, oseti na nekom velikom udaljenju trenutno, što očigledno protivreči fizičkom iskustvu. Mnogi istraživači u ovoj oblasti predvidjali su, još od kraja prošlog veka, da klasična jednačina provodjenja toplote oblika /3.14/ mora da bude adaptirana na takav oblik, koji će u sebi sadržati konačnu brzinu prostiranja toplotnog fronta. Morze i Fešbah [35] su predložili, da mesto jednačine /3.14/ opravdanije je koristiti jednačinu /3.13/, gde je τ vreme relaksacije, jedna fizička konstanta,koja se odredjuje eksperimentalno. B. Boley [35] , izvršivši analizu ovog problema zaključio je da je za najveći broj praktičnih problema u provodjenju, efekat konačne brzine toplotnog prostiranja u jednačini /3.13/ zanemarljivo mali, tj. da je jednačina /3.14/ jedna prihvatljiva aproksimacija jednačine /3.13/. U normalnim slučajevima koeficijent temperaturne vodljivosti a je deset puta manji od kvadrata brzine prostiranja /$\frac{a}{\tau}$= c^2, gde je c brzina prostiranja talasa/. Ipak, za vrlo niske temperature,ili za kratke vremenske intervale, brzina prostiranja može da postane važan činilac. 1938. od strane Tise [37] i Landau-a 1941., predvidjala se mogućnost da toplotno prostiranje ima talasnu strukturu sa konačnom brzinom prostiranja. Specijalno kada se radi o tečnom helijumu II. Ovu brzinu oni su nazvali "drugi zvuk" /second sound/, u analogiji sa prvim zvukom akustične transmisije. Peškov [38] , pomoću jednog poboljšanog eksperimenta provodjenja, potvrdio je eksperimentalno ova predvidjanja,ali rezultati su ostali kvalitativne prirode. On je našao da je brzina prostiranja toplote u tečnom helijumu oko 19 m/s pri temperaturi od 1,4 K. Kasnije Čester je [39] razmatrao mogućnost postojanja drugog zvuka i u čvrstim telima i opravdao egzistenciju oblika jednačine /3.13/, bazirajući se na kinetičkoj teoriji Bolcmana i Grada.

Bertman i Sendiford [40] su kritički razmotrili sve ove radove u vezi sa drugim zvukom u čvrstim telima i zaključili da ovaj efekat zaista može da postoji. Medjutim, za njegovu detekciju potrebno je koristiti super čiste materijale na niskim temperaturama. U protivnom slučaju kod tehničkih materijala "drugi zvuk" ne može da bude registrovan zbog fononskog rasipanja. Dakle, kod tehničkih materijala u praktičnoj eksploataciji imamo pre disipativno rasipanje fononskih čestica opisano jednačinom /3.14/, nego talasno kretanje opisano jednačinom /3.13/.

Koristeći jednačinu /3.13/ B. Vujanović [41], [42], [43] našao je tačan Lagranžijan za jednačinu /3.13/ u obliku

$$L = \left[\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}a\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\right]e^{t/\tau}. \qquad /3.15/$$

U svojim radovima Vujanović je naročito obratio pažnju rešavanju jednačine /3.14/. Pri tome, da bi se dobila jednačina /3.14/ zamenom /3.15/ u Lagranževu jednačinu druge vrste

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial T_t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial T_x} = 0,$$

posle deljenja sa $e^{t/\tau}$ i posle izvršenog graničnog prelaza kada $\tau \to 0$, dobije se tražena klasična jednačina /3.14/. Ovakav varijacioni prilaz kasnije je uopšten na nelinearno provodjenje toplote i čitav niz problema transportne teorije. Naravno, pri ovakvoj varijacionoj formulaciji moguće je primeniti standardne direktne metode varijacionog računa sa dobijanjem aproksimativnih rešenja.

Autor ovoga rada za svoje proučavanje dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja, postavio je sebi zadatak da ispita mogućnost primene ovakve jedne varijacione formulacije na kompleks pomenutih problema, što se može i smatrati kao jedan od osnovnih zadataka ovoga rada.

4. Osvrt na direktne metode varijacionog računa korišćene u ovom radu. Kao što je ranije rečeno, razvojem direktnih metoda varijacionog računa, varijacioni principi mehanike dobili su nov podsticaj, jer se pokazalo da je moguće dobiti rešenja raznih problema direktnom studijom akcionog integrala. Jedan od najstarijih i najviše upotrebljavanih metoda je Ricov metod, koji se, ukratko, sastoji u tome da se rešenje izvesnog problema,čiji akcioni integral znamo, predstavi u obliku linearne kombinacije poznatih funkcija,ili nepoznath konstanata. Zamenom ovako pretpostavljenog rešenja u akcioni integral i minimiziranjem dejstva s obzirom na konstante, dobija se traženo rešenje. Medjutim, pokazalo se u problemima transporta da upotreba Ricove metode ne daje dovoljno tačne rezultate, delimično zbog toga što se radi o jako nelinearnim problemima sa jedne strane, a sa druge strane pretpostavljeno rešenje u obliku linearne kombinacije nepoznatih konstanata i poznatih funkcija u mnogim slučajevima nije unapred adekvatno opisivanju datog procesa.

Mi ćemo u ovom radu da koristimo Kantorovičev metod,ili tzv. metod parcijalne integracije. Ideja metoda je u tome, što se rešenje bira u obliku kombinacije poznatih funkcija koje zavise samo od jedne promenljive /recimo x/ i nepoznatih funkcija koje zavise od druge promenljive, recimo od t. Zamenom pretpostavljenih rešenja u integral akcije i njegovom integracijom po prvoj promenljivoj x, dobijemo redukovanu akciju, koja po svojoj strukturi u mnogome podseća na akciju dinamičkog sistema sa konačnim brojem stepeni slobode. Variranjem ovako dobijenog redukovanog dejstva dobijaju se odgovarajuće Lagranževe jednačine, čijom je integracijom problem u principu rešen. Na ovom mestu potrebna je jedna važna napomena. Radi se, naime, o uvodjenju graničnih uslova u odgovarajuće varijacione formulacije. S obzirom da se u većini slučajeva radi o parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa raznovrsnim i složenim graničnim i početnim uslovima, svaka od varijacionih formulacija, pomenutih u prošlom poglavlju, uvodi odgovarajuće granične uslove na više načina i to:

a/ Izbor pretpostavljenog rešenja je takav, da su unapred zadovoljeni granični i početni uslovi.

b/ Granični uslovi smatraju se kao dopunske konačne ili diferencijalne veze, pa se koristi metod Lagranževih množitelja.

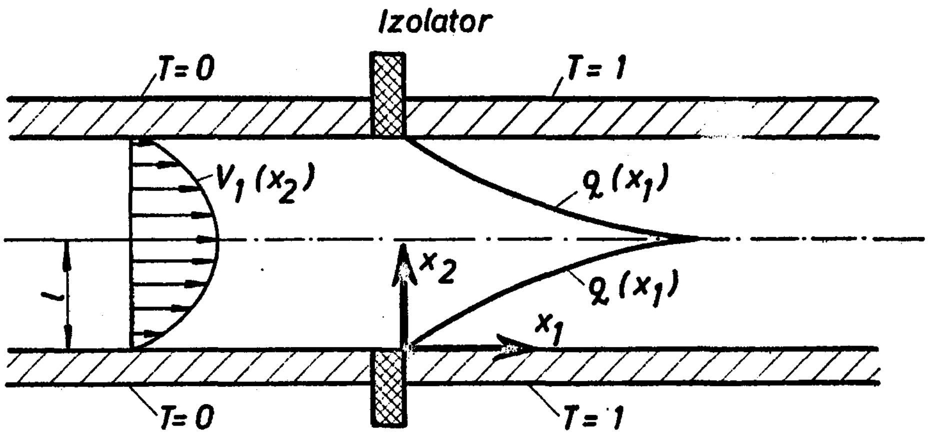
c/ U pretpostavljeno rešenje uvode se suvišne generalisane koordinate, pa se zamenom pretpostavljenog rešenja u granične uslove, dobijaju dopunske algebarske jednačine, koje upotpunjavaju sistem diferencijalnih jednačina redukovanog problema.

Smatramo da je ilustracije radi potrebno navesti nekoliko prostih konkretnih primera, jer će se kasnija izlaganja bazirati na direktnoj metodi u formi Kantorovića.

Ilustracioni primeri

1. Prostiranje toplote u kanalu sa nejednako zagrejanim zidovima.

Kao primenu Glansdorf - Prigožinovog metoda lokalnog potencijala, rešićemo problem o rasporedu temperature u nestišljivoj tečnosti, koja se kreće izmedju dve beskonačne paralelne ploče i ima zadati parabolični raspored brzine. Obe ploče su podeljene izolatorom na dva dela, a na ovim delovima imamo različite date temperature koje su jednake za obe ploče /vidi sl. 1/



Sl.1

Pretpostavimo da se toplota sa zida, koja se predaje tečnosti penetrira u nju na konačno rastojanje $q(x_1)$, kako je na slici prikazano. Na rastojanju $x_1 = L$ dubina penetracije je jednaka polovini rastojanja izmedju ploča. Želimo da nadjemo srednju temperaturu tečnosti kao funkciju rastojanja u oblasti $0 \leq x_1 \leq L$, $0 \leq x_2 \leq l$.

Jednačina energije ovakvog strujanja je [44]

/4.1/ $$\rho c_p v_1(x_2)\frac{\partial T}{\partial x_1} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2},$$

a raspored brzine

$$v_1 = v_{sr}\frac{3}{l}\left(x_2 - \frac{x_2^2}{2l}\right),$$

gde je v_{sr} srednja brzina proticanja koja je zadata, a ostale oznake su očigledne.

Granični uslovi za ovaj slučaj su

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=0 \quad za \quad x_2=0 \quad i \quad x_2=2l,$$

a ostali granični uslovi su dati na sl. 1.

Problem /4.1/ sa odgovarajućim graničnim uslovima, prema Šehteru, ekvivalentan je sa akcionim integralom oblika

/4.2/
$$I=\int_0^L\int_0^{q^o}\left[\frac{k}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)^2+\varrho c_p v_1 T\frac{\partial T^o}{\partial x_1}\right]dx_2dx_1.$$

Temperaturski profil pretpostavimo u sledećem obliku

/4.3/
$$T=1-\frac{10}{7}\frac{x_2}{q}+\frac{5}{7}\left[\frac{x_2}{q}\right]^4-\frac{2}{7}\left[\frac{x_2}{q}\right]^5,$$

gde su koeficijenti ovog polinoma odredjeni iz sledećih graničnih uslova:

$$T=1,\quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}=0,\quad \frac{\partial^3 T}{\partial x_2^3}=0 \quad za \quad x_2=0.$$

Zamenom /4.3/ u /4.2/ dobija se:

$$I=\int_0^L\int_0^{q^o}\left\{\frac{50k}{49q^2}\left[-1+2\left(\frac{x_2}{q}\right)^3-\left(\frac{x_2}{q}\right)^4\right]^2+\frac{3V_{sr}\varrho c_p}{l}\left(x_2-\frac{x_2^2}{2l}\right)\frac{1}{q^o}\frac{dq^o}{dx_1}\times\right.$$
$$\left.\times\left[1-\frac{10}{7}\frac{x_2}{q}+\frac{5}{7}\left(\frac{x_2}{q}\right)^4-\frac{2}{7}\left(\frac{x_2}{q}\right)^5\right]\left[\frac{10}{7}\frac{x_2}{q^o}-\frac{20}{7}\left(\frac{x_2}{q^o}\right)^4+\frac{10}{7}\left(\frac{x_2}{q^o}\right)^5\right]\right\}dx_1dx_2.$$

Uzmimo varijaciju od I po q fiksirajući q^o.

To daje:

$$\delta I=\int_0^L\int_0^{q^o}\left\{\frac{100}{49}k\left(-\frac{1}{q}+\frac{2x_2^3}{q^4}-\frac{x_2^4}{q^5}\right)\left(\frac{1}{q^2}-\frac{8x_2^3}{q^5}+\frac{5x_2^4}{q^6}\right)+\frac{3V_{sr}\varrho c_p}{l}\left(x_2-\frac{x_2^2}{2l}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{q^o}\frac{dq^o}{dx_1}\frac{100}{49}\left(\frac{x_2}{q^2}-\frac{2x_2^4}{q^5}+\frac{x_2^5}{q^6}\right)\left[\frac{x_2}{q^o}-\frac{2x_2^4}{(q^o)^4}+\left(\frac{x_2}{q^o}\right)^5\right]\right\}dx_1dx_2\,\delta q.$$

Pošto je proces variranja završen, prema ranije navedenom pravilu treba staviti $q^{o} = q$. Dakle, izostavljajući indeks ^{o} i integrirajući po x_2 dobijamo

$$/4.4/ \quad \frac{49}{100}\,\delta I = \int_0^L \left(-\frac{k}{q^2}\,\frac{367}{1260} + \frac{3V_{sr}\rho c_p}{l}\,\frac{223}{4620}\,\frac{dq}{dx_1} - \frac{3V_{sr}\rho c_p}{l}\,\frac{379}{12870}\,\frac{q}{2l}\,\frac{dq}{dx_1} \right)\delta q\, dx_1 .$$

Kako je $\delta I = 0$ za proizvoljne varijacije δq, jednačina /4.4/ daje sledeću varijacionu jednačinu

$$-k\,\frac{367}{1260} + \frac{V_{sr}\rho c_p}{l}\,\frac{223}{4620}\,\frac{d}{dx_1}\,q^3 - \frac{3V_{sr}\rho c_p}{8l^2}\,\frac{379}{12870}\,\frac{d}{dx_1}\,q^4 = 0 .$$

Integracijom prethodne diferencijalne jednačine, vodeći računa da su granični uslovi $q = 0$ za $x_1 = 0$, nalazimo debljinu temperaturskog sloja kao funkciju koordinate x_1

$$\left(\frac{q}{l}\right)^3 - 0{,}2288\left(\frac{q}{l}\right)^4 - 24{,}14\,\frac{1}{N_{pe}}\,\frac{x_1}{2l} = 0 .$$

Ovde je N_{pe} - Pekle-ov broj koji je u ovom slučaju definisan sa:

$$N_{pe} = \frac{2l\cdot V_{sr}\rho c_p}{k} .$$

Radi poredjenja sa tačnim rešenjem definišimo srednju temperaturu:

$$T_{sr} = \frac{\int_0^q V_1(x_2)\,T\,dx_2}{\int_0^q V_1(x_2)\,dx_2} .$$

Ova veličina zavisi od funkcije $q(x_1)$ na sledeći način:

$$T_{sr} = \frac{15}{49}\,\frac{q^2}{l^2} - \frac{25}{392}\,\frac{q^3}{l^3} .$$

Nuseltov broj definiše se kao:

$$N_u = -\frac{1}{1-T_{sr}}\left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}\cdot 2l ,$$

ili izraženo preko q

$$Nu = \frac{20}{7}\frac{l}{q}\frac{1}{1-T_{sr}} .$$

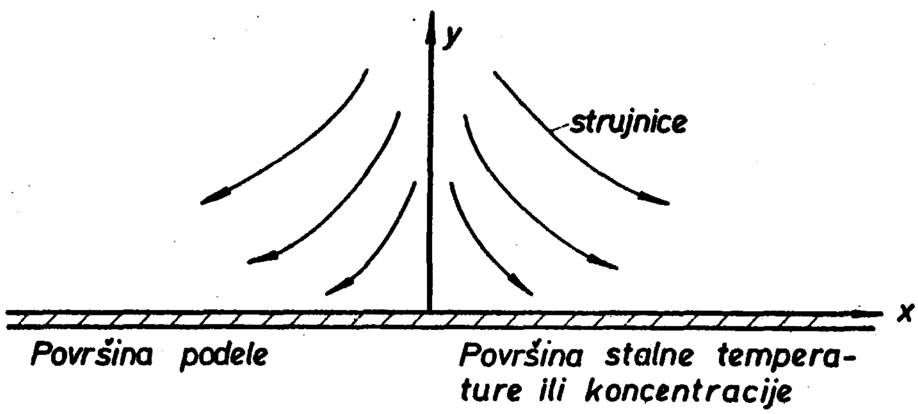
U tablici 1. date su vrednosti srednje temperature i Nuseltovog broja. Vidi se da su rezultati dobijeni varijacionim putem u dobroj saglasnosti sa rezultatima dobijenim tačnom metodom.

Tablica 1

$\frac{x_1}{2l}\frac{1}{N_{Pe}}$	T_{sr}	Nu	T_{sr} tačno [56]	Nu tačno [56]
0,005	0,07	5,28	0,08	5,78
0,01	0,11	4,86	0,13	5,00
0,025	0,21	3,94	0,24	4,10

2. Problem konvekcije u blizini zaustavne tačke [41] .

Kao sledeći primer rešićemo problem rasporeda temperature, ili rasporeda mase fluida, koji struji upravno na ravnu ploču u okolini zaustavne tačke. Geometrija ovog problema data je na slici 2.



Sl.2

Brzina strujanja fluida data je izrazom

$$v_1 = ax$$
$$v_2 = -ay ,$$

gde je a zadata konstanta. Diferencijalna jednačina problema data je sa

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} - 2N_{pe} y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} , \tag{4.5}$$

gde je N_{pe} Pekle-ov broj, T temperatura ili koncentracija, θ je bezdimenziono vreme i y je bezdimenziona koordinata normalna na ploču.

Početni i granični uslovi problema su :

$$\left| \begin{array}{ll} T=0 & za\ \theta=0 \\ T=1 & za\ y=0 \\ T\to 0 & kada\ y\to\infty . \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Posmatrajmo akcioni integral

$$I = \int_0^{\theta_1}\int_0^{\infty} \left[\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right] e^{N_{pe} y^2 + \frac{\theta}{\tau}} d\theta\, dy . \tag{4.7}$$

Lako je proveriti da je Ojler - Lagranževa jednačina

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial L}{\partial T_\theta} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial T_y} ,$$

dovodi do jednačine /4.5/, ako smo prethodno podelili sa faktorom $e^{\theta/\tau}$, a zatim pustili da $\tau \to 0$.

Pretpostavimo rešenje u obliku

$$T = erfc[f(\theta) y] , \tag{4.8}$$

gde je

$$erfc(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\lambda^2} d\lambda .$$

Pretpostavljeni profil zadovoljava sve granične uslove /4.6/ ako

$$f(\theta) \to \infty , \quad kada\ \theta \to 0 .$$

Zamenom /4.8/ u integral akcije /4.7/ dobijamo

$$I=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left\{\frac{\tau}{2}\frac{f'^2}{(f^2-\frac{1}{2}N_{pe})^{3/2}}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda^2}d\lambda-\frac{f^2}{(f^2-\frac{1}{2}N_{pe})^{1/2}}\int_0^\infty e^{-2\lambda^2}d\lambda\right\}e^{\theta/\tau}d\theta,$$

gde je

$$\lambda^2=\left(f^2-\frac{N_{pe}}{2}\right)y^2 \quad ; \quad f'=\frac{df}{d\theta}\;.$$

Koristeći dobro poznate relacije

$$\int_0^\infty \lambda^2 e^{-2\lambda^2}d\lambda=\frac{\pi^{1/2}}{16}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\lambda^2}d\lambda=\frac{\pi^{1/2}}{4},$$

imamo:

$$I=\left\{\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left[\frac{\tau}{2}\frac{1}{4}\frac{f'^2}{(f^2-\frac{N_{pe}}{2})^{3/2}}-\frac{1}{2}\frac{f^2}{(f^2-\frac{N_{pe}}{2})^{1/2}}\right]e^{\theta/\tau}d\theta\right\}\cdot\frac{\pi^{1/2}}{4}.$$

Dakle, Ojler - Lagranževa jednačina daje:

$$\tau\frac{\partial}{\partial f}\left[\frac{f'^2}{8(f^2-\frac{1}{2}N_{pe})^{3/2}}\right]-\frac{1}{2}\frac{f^3-fN_{pe}}{(f^2-\frac{1}{2}N_{pe})^{3/2}}-$$

$$-\tau\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{f'}{4(f^2-\frac{1}{2}N_{pe})^{3/2}}\right]-\frac{1}{4}\frac{f'}{(f^2-\frac{1}{2}N_{pe})^{3/2}}=0.$$

Kada $\tau\to 0$, dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu

$$f'-2N_{pe}f+2f^3=0\;.$$

Integracijom ove jednačine dobijamo

$$f=\left[\frac{1}{N_{pe}}\left(1-e^{-4N_{pe}\theta}\right)\right]^{-1/2}.$$

Prema tome, rešenje našeg problema je

$$T=\mathrm{erfc}\left\{\left[\frac{1}{N_{pe}}\left(1-e^{-4N_{pe}\theta}\right)\right]^{-1/2}.y\right\}. \qquad /4.9/$$

Interesantno je napomenuti da je rešenje /4.9/, tačno rešenje. Ovo treba zahvaliti srećnom izboru profila temperature /4.8/.

3. Problem konvekcije sa integralnim ograničenjem.

Kao ilustraciju Bio-ovog varijacionog principa čiji je matematički model dat jednačinom

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}=k\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2},$$

u prisustvu integralnog ograničenja

/4.10/ $$\int_0^\infty c\rho\theta dy=1 \quad za \quad x>1.$$

Rešenje ovog problema pretpostavićemo u obliku

/4.11/ $$\theta=\frac{3}{2c\rho q}\left(1-\frac{y^2}{q^2}\right), \quad y<q.$$

Ovo rešenje zadovoljava vezu /4.10/. Prema ranije izloženoj teoriji, termalni potencijal dat je izrazom

$$U=\frac{1}{2}c\rho\int_0^q\theta^2dy=\frac{3}{5c\rho q}.$$

Komponenta toplotnog fluksa u pravcu ose y je

$$H=c\rho\int_y^q\theta dy=1-\frac{3}{2}\frac{y}{q}+\frac{1}{2}\frac{y^3}{q^3},$$

a disipativna funkcija je

$$D=\frac{1}{2k}\int_0^q\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2dy=\frac{3}{35k}\frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2,$$

jer x igra ulogu nezavisne koordinate. Pošto je temperaturska sila definisana na sledeći način

$$F_y=\int_A\theta\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{y=0}dx\,dz,$$

zbog $\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{y=0}=0$,

prema jednačini

$$\frac{\partial U}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial q_x}=0 \quad ; \quad q_x=\frac{dq}{dx},$$

imaćemo

$$2q\frac{dq}{dx}=7\frac{k}{c\rho}\,.$$

Integracijom ove jednačine, s obzirom na početne uslove $q = 0$ za $x = 0$, dobijamo:

$$q=\sqrt{\frac{7kx}{c\cdot\rho}}\,.$$

Vrednost funkcije ϑ na granici dobija se stavljajući $y = 0$ u izraz /4.11/:

$$\vartheta=\frac{3}{2c\rho q}\,.$$

Kombinujući prethodne dve jednačine dobijamo

$$\vartheta=\frac{3}{\sqrt{28\,c\rho kx}}\,.$$

Bio je pokazao da se ova vrednost vrlo dobro slaže sa tačnom vrednošću, sa odstupanjem od oko 0,5 %.

5. Varijaciona deskripcija klasične teorije kontinuuma - ranija dostignuća. U ovom radu već je bilo naglašeno da je, grubo govoreći, Hamiltonov varijacioni princip primenjen u gotovo svim oblastima reverzibilne fizike. U isto vreme bilo je naglašeno da postoji vrlo široka klasa fizičkih problema, koji do sada nisu mogli da budu obuhvaćeni klasičnom varijacionom deskripcijom. Namera nam je, da u ovom poglavlju damo kratak sumarni pregled dostignuća varijacionog opisivanja u raznim oblastima mehanike.

1. Klasična teorija elastičnosti.

Na osnovu literature koja se pojavila, čini se da je teorija elastičnosti najbolje eksploatisana oblast klasične mehanike u odnosu na varijacione principe. Činjenica je da su svi diferencijalni i integralni principi primenjeni u teoriji elastičnosti, kako linearnoj tako i nelinearnoj. Specijalno Hamiltonov princip vrlo je lako primenljiv u ovoj oblasti, a pravilo za sastavljanje Lagranževe gustine identično je sa pravilom klasične konzervativne dinamike, tj. Lagranževa gustina je razlika kinetičke i potencijalne energije jedinične mase materijala. Iz iscrpnih monografija, kao što je na primer ona citirana u referenciji [45] , vidi se da je varijaciona tehnika primenjena u svim vrstama naprezanja, da je lako upotrebiti sve direktne metode varijacionog računa za dobijanje približnih rešenja, i da je čak, što je po našem mišljenju izuzetak, moguće kontrolisati konvergenciju dobijenih rešenja na osnovu znaka druge varijacije.

2. Idealni fluidi

Strujanje idealnih fluida, i ako konzervativan proces, nije ni približno tako opisano varijacionim putem kao klasična teorija elastičnosti. Na ovom mestu potrebno je napomeniti da je kretanje idealnog fluida u Lagranževim koordinatama moguće u potpunosti opisati preko Hamiltonovog varijacionog principa. Nažalost, u svim praktičnim problemima tečenja, Ojlerov način opisivanja igra prevalentnu ulogu. Medjutim, prilikom ovog opisivanja nemoguće je naći Lagranževu gustinu za odgovarajuća tečenja, čak i za slučaj inercijalnog kretanja fluida.

Poslednjih godina vršeno je mnogo pokušaja da se pronadje neki adekvatan varijacioni princip Hamiltonovog tipa za idealno strujanje opštega tipa. Medjutim, po našem mišljenju ovaj problem nije na zadovoljavajući način rešen. Kao vrlo iscrpne, detaljne i kompetentne ocene o tome,na kome se stupnju razvoja ovaj problem nalazi, može da posluži monografija Dž. B. Serina [46] i rad Seligera i Vitema [47] . Ovaj poslednji rad značajan je i po tome što se problem pronalaženja Lagranževe gustine za idealnu tečnost dovodi u vezu sa Pfafovim problemom, što se verovatno može dovesti u vezu sa radovima profesora A. Bilimovića i njegovom varijacionom formulacijom /Pfafov princip/.

3. Disipativni procesi

Na više mesta u literaturi je napomenuto da ne postoje konzervativni i disipativni problemi kod kojih je moguća potpuna varijaciona deskripcija u smislu Hamiltonovog principa [48] , [49] , [50] . Medjutim, ova mogućnost varijacionog opisivanja je slučajna i ne poseduje nikakvu opštost. Puno puta, kao u referenciji [49] , varijaciono opisivanje je moguće samo uz drastično zanemarivanje svih inercijalnih članova, a ponekad se vrše i vrlo nerealne fizičke pretpostavke o strujanju, da bi se odgovarajuća varijaciona formulacija mogla uspostaviti.

6. <u>Teorija lančanih sistema</u>. 1951. godine sovjetski naučnik S. Aržanih dao je jednu vrlo interesantnu

Lagranževsko - varijacionu deskripciju,koja je u ovom radu obilato zastupljena, te je u glavnim crtama na ovom mestu iznosimo. Rad S. Aržaniha odnosi se isključivo na diskretnu dinamiku, specijalno nelinearnu teoriju oscilacija. Mišljenja smo da je ovde treba izneti u glavnim crtama,s obzirom da se ona prvi put kod nas proširuje i primenjuje na procese,koji se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metod o kome je ovde reč,Aržanih je nazvao metod lančanih sistema [51]. Na ovom mestu napominjemo da se Aržanihov metod može primeniti na konzervativne i nekonzervativne sisteme i to kako holonomne tako i neholonomne. Prema ovoj teoriji, lančanim sistemom naziva se takav mehanički sistem čije generalisane koordinate možemo podeliti na k grupa

$$q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in_i}, \quad /i = 1, 2, \ldots, k/$$

i kod koga možemo uvesti k parcijalnih Lagranžijana $L^{(i)}$ /i = 1, 2, ..., k/, koji u opštem slučaju zavise od vremena, svih generalisanih koordinata i svih generalisanih brzina, tako da jednačine

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^{(i)}}{\partial \dot{q}_{i\alpha}} - \frac{\partial L^{(i)}}{\partial q_{i\alpha}} = 0,$$

$$/i = 1, 2, \ldots, k; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n_i/$$

daju diferencijalne jednačine kretanja datog sistema.

Napominjemo da se ova napred ukratko formulisana teorija lančanih sistema, koja se odnosi na dinamiku diskretnih sistema, može vrlo lako generalisati na varijaciono opisivanje problema transporta, što će u ovom radu biti i učinjeno.

II VARIJACIONI PRILAZ TEORIJI TEMPERATURSKOG I DINAMIČKOG LAMINARNOG,NESTIŠLJIVOG GRANIČNOG SLOJA SA PROMENLJIVIM FIZIČKIM KARAKTERISTIKAMA

7. Izvodjenje diferencijalnih jednačina varijacionom metodom. Već je napred rečeno da je glavni zadatak ovog rada da se varijaciona formulacija Hamiltonovog tipa sa isčezavajućim parametrom, koju je uveo B. Vujanović, primeni na proučavanje dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja. Po ovoj formulaciji, u integral akcije uvodi se Lagranževa gustina koja sadrži i jedan parametar koji nema nikakvog fizičkog značenja. Kada se prva varijacija integrala akcije izjednači sa nulom, dobijaju se složene diferencijalne jednačine koje sadrže uvedeni parametar. Medjutim, kada se izvrši granični prelaz,pri kome taj parametar teži nuli, dobijaju se tačne diferencijalne jednačine posmatranog procesa. Treba još nepomenuti da je ova varijaciona formulacija naročito podesna za direktan metod varijacionog računa i to za Kantorovičev metod parcijalne integracije. Pokazaćemo sada kako se pomoću ove varijacione formulacije mogu izvesti diferencijalna jednačina dinamičkog graničnog sloja i jednačina provodjenja toplote konvekcijom.

Posmatraćemo nestacionaran, laminaran, nestišljiv granični sloj sa promenljivom kinematičkom viskoznošću ν , koju ćemo smatrati funkcijom temperature.

Uz gornje pretpostavke, uzimajući da je strujanje ravansko, dinamički granični sloj biće opisan sledećom diferencijalnom jednačinom

/7.1/ $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Uvodeći brzinu U = U(x,t), koja se naziva brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja, relacijom

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

diferencijalnu jednačinu /7.1/ možemo napisati u obliku

/7.2/ $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Smatrajući da je koeficijent temperaturne vodljivosti a promenljiva veličina zavisna od temperature i uzimajući u obzir disipaciju mehaničke energije usled viskoznog trenja, jednačinu provodjenja toplote možemo napisati ovako

/7.3/ $$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Jednačine /7.2/ i /7.3/ sa jednačinom kontinuiteta

/7.4/ $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

omogućuju nam u principu da odredimo tri nepoznate funkcije $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ i $T(x,y,t)$, ako su nam date funkcije $U(x,t)$, $\nu(T)$ i $a(T)$, i ako znamo početne i granične uslove. Neka se u trenutku $t = 0$ telo i fluid nalaze na istoj temperaturi T_∞, i neka u tom trenutku ne postoje ni dinamički ni temperaturski granični sloj. Ako sada telo zagrejemo na temperaturu T_w, koja je zadata funkcija ili konstanta, formiraće se dinamički i temperaturski granični sloj. Za $t > 0$ uzimamo da su brzine čestica fluida na telu jednake nuli, da je podužna komponenta u brzine na spoljašnjoj strani dinamičkog graničkog sloja jednaka brzini U(x,t) neporemećene potencijalne fluidne struje, da je temperatura na spoljašnjoj granici temperaturskog graničnog sloja jednaka temperaturi T_∞ fluidne struje van temperaturskog graničnog sloja i da je temperatura fluida na telu jednaka temperaturi tela T_w. Sa ovakvim pretpostavkama imaćemo sledeće početne i granične uslove:

$$/7.5/ \qquad \left| \begin{array}{llllll} u = U(x,t) & v = 0 & T = T_\infty & \text{za} & y = 0 & t = 0 \\ u = v = 0 & & T = T_w & \text{za} & y = 0 & t > 0 \\ u = U(x,t) & & T = T_\infty & \text{za} & y = y_m & t > 0 \, . \end{array} \right.$$

Ovde je

$$/7.5a/ \qquad y_m = f(x,t) \; , \quad y_m = \Delta(x,t) \quad i \quad y_m = \infty \; ,$$

što zavisi od toga da li debljinu graničnog sloja koncipiramo prema približnoj teoriji graničnog "sloja konačne debljine", ili prema tačnijoj teoriji "asimptotskog sloja".

Da bi primenili teoriju lančanih sistema pri varijacionoj formulaciji, formiraćemo dva parcijalna Lagranžijana:

$$/7.6/\quad L^{(1)}=\left\{m\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}e^{x/m}+$$

$$+\mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$/7.7/\quad L^{(2)}=\left\{m\left[\frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{1}{2}u\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial T}{\partial x}\right]-\frac{a}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right\}e^{x/m}.$$

U prvom Lagranžijanu $\mu_1 = \mu_1(x,y,t)$ je nepoznat Lagranžev množitelj. Konstantni parametar m, uveden u izraze za Lagranževe gustine, nema nikakvo fizičko značenje.

Prema teoriji lančanih sistema funkcije u,v,T i μ_1, koje smatramo "generalisanim koordinatama", podelićemo na dve grupe. U prvu grupu uzećemo funkcije u,v i μ_1 sa parcijalnim Lagranžijanom $L^{(1)}$, a u drugu grupu temperaturu T sa parcijalnim Lagranžijanom $L^{(2)}$.

Neka su odgovarajući akcioni integrali:

$$/7.8/\qquad I_1=\int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m}L^{(1)}\,dt\,dx\,dy,$$

$$/7.9/\qquad I_2=\int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m}L^{(2)}\,dt\,dx\,dy.$$

Diferencijalnu jednačinu nestacionarnog ravanskog strujanja /7.2/, jednačinu provodjenja toplote /7.3/ i jednačinu kontinuiteta /7.4/ možemo dobiti po svim pravilima varijacionog računa iz uslova stacionarnosti akcionih integrala /7.8/ i /7.9/, tj. iz uslova

$$\delta I_1 = 0\,, \tag{7.10}$$

$$\delta I_2 = 0\,. \tag{7.11}$$

Pri variranju gornjih integrala akcije mora se voditi računa o tome da su prema teoriji lančanih sistema naše "koordinate" podeljene u dve grupe sa dva parcijalna Lagranžijana. Saglasno ovome, pri variranju prvog integrala akcije /7.8/, operacija variranja odnosi se na prvu grupu "koordinata" /u,v, i μ_1 /, dok se operacija variranja integrala akcije /7.9/ odnosi na drugu grupu "koordinata" /T/.

Ako nadjemo varijacije akcionih integrala i izvršimo parcijalnu integraciju, iskoristivši komutativnost operacije variranja i parcijalnog diferenciranja, dobićemo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l}\left|\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_y}\delta u\right|_0^{y_m} dt\,dx+\int_0^{t=t_1}\int_0^{y_m}\left|\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_x}\delta u\right|_{x_0}^{x=l} dt\,dy+\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m}\left|\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_t}\delta u\right|_0^{t=t_1} dx\,dy+\\
&+\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{t=t_1}\left|\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_y}\delta v\right|_0^{y_m} dt\,dx+\int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m}\left[\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_y}\right]\delta u\,dt\,dx\,dy+\\
&+\int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m}\left(\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_y}\right)\delta v\,dt\,dx\,dy+\\
&+\int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m}\left(\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_1}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_{1t}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_{1x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_{1y}}\right)\delta\mu_1\,dt\,dx\,dy=0\,,
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$/7.13/ \int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l} \left|\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_y}\delta T\right|_0^{y_m} dt\,dx + \int_0^{t=t_1}\int_0^{y_m} \left|\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_x}\delta T\right|_{x_0}^{x=l} dt\,dy + \int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m} \left|\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_t}\delta T\right|_0^{t=t_1} dx\,dy +$$

$$+\int_0^{t=t_1}\int_{x_0}^{x=l}\int_0^{y_m}\left[\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_y}\right]\delta T\,dt\,dx\,dy = 0 .$$

Pošto su brzina u i temperatura T odredjeni na svim granicama izuzev granica $x = l$ i $t = t_1$, prvi članovi gornje dve jednačine biće jednaki nuli, jer je $\delta u = 0 \quad \delta T = 0$

Ako su za $x = l$, $t = t_1$ i $y = y_m$ zadovoljeni sledeći prirodni uslovi za proizvodne vrednosti varijacija δu, δv i δT

$$/7.13a/ \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_x}\delta u\Big|_{x=l} = 0 \; ; \; \frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_t}\delta u\Big|_{t=t_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_y}\delta v\Big|_{y=y_m} = 0 \\ \\ \frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_x}\delta T\Big|_{x=l} = 0 \qquad \frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_t}\delta T\Big|_{t=t_1} = 0 \end{vmatrix}$$

onda, s obzirom na proizvoljno izabanu oblast integracije i na proizvoljnost vrednosti varijacija δu, δv, $\delta \mu_1$, i δT, iz varijacionih jednačina /7.12/ i /7.13/ dobijamo Ojler Lagranževe jednačine:

$$
/7.13b/ \quad \left|\begin{aligned}
&\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial u_y}=0\\
&\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v_y}=0\\
&\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_1}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_{1t}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_{1x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mu_{1y}}=0\\
&\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L^{(2)}}{\partial T_y}=0\,.
\end{aligned}\right.
$$

Zamenjujući Lagranžijane /7.6/ i /7.7/ u odgovarajuće prethodne jednačine /7.13a/ i /7.13b/ dobijamo posle deljenja faktorom $e^{x/m}$:

$$
/7.14/ \quad m\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial U}{\partial x}+\mu_1 e^{-x/m}\right)\delta u\Big|_{x=l}=0\,;\; m\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\Big|_{t=t_1}=0 \quad \mu_1\delta v\Big|_{y=y_m}=0
$$

$$
m\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2-\frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\delta T\Big|_{x=l}=0\,;\; m\frac{\partial T}{\partial x}\delta T\Big|_{t=t_1}=0\,,
$$

$$
/7.15/ \quad m\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial y}+\right.
$$

$$
\left.+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial U}{\partial x}\right)-m\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\mu_1 e^{-x/m}=0\,,
$$

$$m\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\mu_1 e^{-x/m}=0,$$

/7.16/ $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

/7.17/ $$m\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{1}{2}u\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\Big)^2+v\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial T}\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{v}{c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\frac{\partial T}{\partial x}\Big]-\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial T}\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2-$$

$$-m\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial T}{\partial t}-u\frac{\partial T}{\partial x}-v\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial T}\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2+\frac{v}{c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2-m\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+$$

$$+v\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial T}\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2-\frac{v}{c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2-m\frac{\partial}{\partial y}\Big(v\frac{\partial T}{\partial x}\Big)+m\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big(a\frac{\partial T}{\partial y}\Big)=0.$$

Kao što smo već napomenuli, varijacionom metodom dobili smo znatno složenije jednačine nego što su diferencijalne jednačine posmatranog procesa, koje u sebi sadrže parametar m. Ako sada izvršimo granični prelaz pri kome $m\to 0$, jednačine /7.15/, /7.17/ i /7.16/ postaju:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(a\frac{\partial T}{\partial y}\Big)+\frac{\nu}{c_p}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

a to su diferencijalne jednačine /7.2/, /7.3/ i /7.4/ koje opisuju laminaran,nestacionaran, nestišljiv ravanski dinamički granični sloj i konvektivno provodjenje toplotne energije, pri čemu su fizičke karakteristike zavisne od temperature, a uzeta je u obzir i viskozna disipacija.

Zadnja od jednačina /7.14/ daje granični uslov za Lagranžev množitelj:

/7.18/ $$\mu_1(x,y,t)=0 \quad za \quad y=y_m,$$

dok su ostale jednačine identički zadovoljene.

8. <u>Dobijanje aproksimativnih rešenja direktnim metodama varijacionog računa</u>. Za dobijanje aproksimativnih rešenja problema transporta pomoću ove varijacione formulacije,koristićemo Kantorovičevu metodu parcijalne integracije. Suština ove metode je u tome da se unapred pretpostavi oblik traženih funkcija. U ovako pretpostavljenim funkcijama, kao argumenti javljaju se nezavisno promenljive veličine i nepoznate funkcije drugih nezavisno promenljivih. Pri izboru oblika traženih funkcija mora se voditi računa da se zadovolji razuman broj graničnih uslova. Kada se ove funkcije stave u akcioni integral i izvrši integracija po jednoj od nezavisno promenljivih, dobija se tzv. redukovani akcioni integral. Uslov stacionarnosti redukovanog akcionog integrala daje nam Lagranževe jednačine posmatranog problema.

Za transportni problem koji mi posmatramo i koji je opisan diferencijalnim jednačinama /7.2/, /7.3/

i /7.4/, pretpostavićemo oblik traženih funkcija $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $T(x,y,t)$ i $\mu_1(x,y,t)$.

Za komponentu brzine u rešenje ćemo pretpostaviti u obliku

/8.1/ $$u(x,y,t) = U(x,t)\,\phi_1(\lambda),$$

gde je $U(x,t)$ brzina fluida na spoljašnjoj granici dinamičkog sloja, ϕ_1 je data funkcija argumenta λ koji je dat izrazom

$$\lambda = \frac{y}{f(x,t)},$$

gde je $f(x,t)$ debljina dinamičkog graničnog sloja.

Pošto se osnovne hipoteze teorije dinamičkog graničnog "sloja konačne debljine", ili pak teorije "asimptotskog sloja" izražavaju jednačinama

$$u = U \;, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad za \quad y = y_m = f, \infty,$$

potrebno je da funkcija ϕ_1 zadovoljava granične uslove:

$$\phi_1 = 1 \;, \quad \frac{d\phi_1}{d\lambda} = 0 \quad za \quad \lambda = \lambda_m = 1, \infty .$$

Komponentu brzine v tražićemo u obliku

/8.2/ $$v = g(x,t)\,N(\lambda) - \varphi(x,t)\,R(\lambda),$$

gde funkcije $N(\lambda)$ i $R(\lambda)$ biramo tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

/8.3/ $$\frac{dN}{d\lambda}=N'(\lambda)=\Phi_1'(\lambda)\lambda \,. \qquad \left(\Phi_1'=\frac{d\Phi_1}{d\lambda}\right)$$

/8.4/ $$\frac{dR}{d\lambda}=R'(\lambda)=\Phi_1(\lambda),$$

ili

/8.5/ $$N(\lambda)=\int\Phi_1'(\lambda)\lambda\, d\lambda+c_1 \,,$$

$$R(\lambda)=\int\Phi_1(\lambda)\, d\lambda+c_2 \,.$$

Zbog graničnog uslova $v = 0$ za $y = 0$ mora biti:

/8.6/ $$\left|\begin{array}{l} N(0)=0 \\ R(0)=0 \,. \end{array}\right.$$

U daljim izlaganjima smatraćemo T_w konstantnom veličinom.

Slično profilu brzine uvešćemo i profil temperature, smatrajući da je bezdimenzioni odnos temperaturskih razlika

$$\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}=\Phi_2(\eta) \,,$$

gde je Φ_2 data funkcija od η, pri čemu je

$$\eta=\frac{y}{\Delta(x,t)} \,,$$

a $\Delta(x,t)$ je debljina temperaturskog graničnog sloja. Profil temperature T možemo sada napisati u obliku

/8.7/ $$T = T_0 \Phi_2(\eta) + T_w \;;\quad T_0 = T_\infty - T_w .$$

Kako jednačine

$$T = T_\infty \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad za \quad y = y_m = \Delta, \infty ,$$

izražavaju osnovne hipoteze teorije temperaturskog graničnog "sloja konačne debljine", ili pak tačnije teorije "asimptotskog sloja", potrebno je da funkcija Φ_2 zadovoljava sledeće granične uslove:

$$\Phi_2 = 1 \quad \frac{d\Phi_2}{d\eta} = 0 \quad za \quad \eta = \eta_m = 1, \infty .$$

U ovom radu uzećemo da su kinematička viskoznost ν i koeficijent temperaturne vodljivosti a linearne funkcije temperature, odnosno

$$\nu = \nu_\infty (1 + A\theta) ,$$

$$a = a_\infty (1 + B\theta) ,$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} .$$

U gornjim izrazima viskozni koeficijent A i konduktivni koeficijent B su konstantne veličine. Slučaj $A < 0$, $B > 0$ odgovara zagrevanju a $A > 0$, $B < 0$ odgovara hladjenju fluida.

Pošto je $\theta = 1 - \Phi_2(\eta)$, za kinematičku viskoznost i koeficijent temperaturne vodljivosti dobijamo izraze:

$$\nu = \nu_\infty \left[A^* - A\Phi_2(\eta) \right] \; ; \quad A^* = A + 1$$

$$a = a_\infty \left[B^* - B\Phi_2(\eta) \right] \; ; \quad B^* = B + 1 \; .$$

Oblik Lagranževog množitelja μ_1 napisaćemo u obliku

$$\mu_1 = \beta(x,t)\,Q(\lambda)\,, \tag{8.8}$$

gde $Q(\lambda)$ mora biti izabrano tako da budu zadovoljeni granični uslovi /7.18/.

Zamenićemo sada profile brzina /8.1/ i /8.2/, profil temperature /8.7/ i Lagranžev množitelj /8.8/ u akcione integrale /7.1o/ i /7.11/, a zatim ćemo integraliti član po član po debljini dinamičkog, odnosno temperaturskog graničnog sloja. Pri integraciji pojedinih članova moramo voditi računa o odnosu debljina dinamičkog i temperaturskog sloja, odnosno moramo posebno posmatrati slučajeve $\Delta < f$ i $\Delta > f$. Daćemo integrale pojedinih članova.

$$\int_0^f \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\,dy = U_x U_t A_1 - \left(U U_x f_t + U U_t f_x\right) A_2 + \frac{U^2 f_x f_t}{f} A_3 \, .$$

$$A_1 = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1^2(\lambda)\,d\lambda \, . \quad , A_2 = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1(\lambda)\Phi_1'(\lambda)\,\lambda\,d\lambda \quad , \quad A_3 = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1'^2(\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda \, .$$

$$\int_0^f \frac{1}{2} u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy = \frac{1}{2} U U_x^2 f A_4 - \overset{2}{U} U_x f_x A_5 + \frac{U^3 f_x^2}{2f} A_6 .$$

/8.9/ $A_4 = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1^3(\lambda) d\lambda$, $A_5 = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1^2(\lambda) \Phi_1'(\lambda) \lambda d\lambda$, $A_6 = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1(\lambda) \Phi_1'^2(\lambda) \lambda^2 d\lambda$.

$$\int_0^f v \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dy = g U U_x A_7 - \frac{g U^2 f_x}{f} A_8 - \varphi U U_x A_9 + \frac{\varphi U^2 f_x}{f} A_{10} .$$

/8.10/ $A_7 = \int_0^{\lambda_m} N(\lambda) \Phi_1(\lambda) \Phi_1'(\lambda) d\lambda$, $A_8 = \int_0^{\lambda_m} N(\lambda) \Phi_1'^2(\lambda) \lambda d\lambda$, $A_9 = \int_0^{\lambda_m} R(\lambda) \Phi_1(\lambda) \Phi_1'(\lambda) d\lambda$,

/8.11/ $$A_{10} = \int_0^{\lambda_m} R(\lambda) \Phi_1'^2(\lambda) \lambda d\lambda .$$

$$\int_0^f (U_t + U U_x) \frac{\partial u}{\partial x} dy = -(U U_t + U^2 U_x) f_x A_{11} + (U_x U_t + U U_x^2) f A_{12} .$$

$$A_{11} = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1'(\lambda) \lambda d\lambda \quad , \quad A_{12} = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1(\lambda) d\lambda$$

$$\int_0^f \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy = \frac{\nu_\infty U^2}{2f} \left[A^* A_{13} - A \int_0^f \frac{\Phi_2(\eta) \Phi_1'^2(\lambda)}{f} dy \right] .$$

/8.12/ $$A_{13} = \int_0^{\lambda_m} \Phi_1'^2(\lambda) d\lambda .$$

Pošto je za slučaj $\Delta < f$ za $\Delta \leq y \leq f$, $\Phi_2(\eta) = 1$, jer je $T = T_\infty$, biće:

$$\int_0^f \frac{\Phi_2(\eta) \Phi_1'^2(\eta)}{f} dy = \int_0^\Delta \frac{\Phi_2(\eta) \Phi_1'^2(\lambda)}{f} dy + \int_\Delta^f \frac{\Phi_1'^2(\lambda)}{f} dy = F(f, \Delta) ,$$

$$F(f,\Delta)=\int_0^{\Delta/f}\Phi_2\left(\tfrac{f}{\Delta}\lambda\right)\Phi_1'^2(\lambda)\,d\lambda+\int_{\Delta/f}^{\lambda_m}\Phi_1'^2(\lambda)\,d\lambda\,, \tag{8.13}$$

za $\Delta > f$ biće:

$$\int_0^f \frac{\Phi_2(\eta)\Phi_1'^2(\lambda)}{f}\,dy=\Psi(f,\Delta)\,,$$

gde je

$$\Psi(f,\Delta)=\int_0^{\lambda_m}\Phi_2\left(\tfrac{f}{\Delta}\lambda\right)\Phi_1'^2(\lambda)\,d\lambda\,. \tag{8.14}$$

Definitivno imamo za $\Delta < f$

$$\int_0^f \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy=\frac{\nu_\infty U^2}{2f}\left[A^*A_{13}-AF(f,\Delta)\right]\,,$$

a za $\Delta > f$

$$\int_0^f \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy=\frac{\nu_\infty U^2}{2f}\left[A^*A_{13}-A\Psi(f,\Delta)\right]\,,$$

$$\int_0^f \mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=\beta\left(U_x f-\varphi\right)A_{14}+\beta\left(g-Uf_x\right)A_{15}\,,$$

$$A_{14}=\int_0^{\lambda_m}\Phi_1(\lambda)\,Q(\lambda)\,d\lambda\;;\quad A_{15}=\int_0^{\lambda_m}\Phi_1'(\lambda)\,Q(\lambda)\,\lambda\,d\lambda\,.$$

Pri ovom izračunavanju korišćene su relacije /8.3/ i /8.4/.

$$\int_0^{\Delta}\frac{\partial T}{\partial t}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\,dy=\frac{T_0^2\Delta_t\Delta_x}{\Delta}B_1\,,$$

$$B_1=\int_0^{\eta_m}\Phi_2'^2(\eta)\,\eta^2\,d\eta \tag{8.15}$$

$$\int_0^{\Delta} \frac{1}{2} u \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dy = \frac{T_0^2 U \Delta_x^2}{2\Delta} \int_0^{\Delta} \frac{\Phi_1(\lambda)\Phi_2'^2(\eta)\eta^2}{\Delta} dy .$$

Za $\Delta < f$

$$\int_0^{\Delta} \frac{1}{2} u \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dy = \frac{T_0^2 U \Delta_x^2}{2} F_1(f,\Delta) ,$$

/8.16/ $$F_1(f,\Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\eta_m} \Phi_1\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right) \Phi_2'^2(\eta)\eta^2 d\eta .$$

Za $\Delta > f$ je za $y > f$ $\Phi_1(\lambda) = 1$, pa je

$$\int_0^{\Delta} \frac{\Phi_1(\lambda)\Phi_2'^2(\eta)\eta^2}{\Delta} dy = \int_0^{f} \frac{\Phi_1(\lambda)\Phi_2'^2(\eta)\eta^2}{\Delta} dy + \int_f^{\Delta} \frac{\Phi_2'^2(\eta)\eta^2}{\Delta} dy .$$

Dakle, za $\Delta > f$

$$\int_0^{\Delta} \frac{1}{2} u \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dy = \frac{T_0^2 U \Delta_x^2}{2} \Psi_1(f,\Delta) ,$$

/8.17/ $$\Psi_1(f,\Delta) = \frac{1}{\Delta}\left[\int_0^{f/\Delta} \Phi_1\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right) \Phi_2'^2(\eta)\eta^2 d\eta + \int_{f/\Delta}^{\eta_m} \Phi_2'^2(\eta)\eta^2 d\eta .\right.$$

Za $\Delta < f$ je

$$\int_0^{\Delta} v \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} dy = T_0^2 g \Delta x F_2(f,\Delta) + T_0^2 \varphi \Delta x P_1(f,\Delta) ,$$

/8.18/ $$F_2(f,\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\int_0^{\eta_m} N\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'^2(\eta)\eta \, d\eta , \quad P_1 = \frac{1}{\Delta}\int_0^{\eta_m} R\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'^2(\eta)\eta \, d\eta .$$

Za $\Delta > f$ je za $y > f$ $v = 0$, pa je

$$\int_0^{\Delta} v \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} dy = \int_0^{f} v \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} dy = T_0^2 g \Delta x \Psi_2(f,\Delta) + T_0^2 \varphi \Delta x P_2(f,\Delta) ,$$

/8.19/ $$\gamma_2(f,\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\int_0^{f/\Delta} N\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'^2(\eta)\,d\eta \; ; \qquad P_2 = \frac{1}{\Delta}\int_0^{f/\Delta} R\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'^2(\eta)\,d\eta$$

$$\int_0^{\Delta} \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial T}{\partial x}\,dy = \frac{a_\infty B T_0^2 \Delta x}{2\Delta^2} B_2 \, ,$$

/8.20/ $$B_2 = \int_0^{\eta_m} \Phi_2'^3(\eta)\,\eta\,d\eta \, .$$

Za $\Delta < f$

$$\int_0^{\Delta} \frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial T}{\partial x}\,dy = -\frac{\nu_\infty U^2 T_0 \Delta x}{c_p f^2}\left[A^* F_3(f,\Delta) - A F_4(f,\Delta)\right],$$

/8.21/ $$F_3(f,\Delta) = \int_0^{\eta_m} \Phi_1'^2\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'(\eta)\,\eta\,d\eta \; ; \; F_4(f,\Delta) = \int_0^{\eta_m} \Phi_1'^2\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'(\eta)\,\Phi_2(\eta)\,\eta\,d\eta \, .$$

Za $\Delta > f$ za $y > f$ $u = U(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, pa je

$$\int_0^{\Delta} \frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial T}{\partial x}\,dy = \int_0^{f} \frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial T}{\partial x}\,dy = -\frac{\nu_\infty U^2 T_0 \Delta x}{c_p f^2}\left[A^* \gamma_3(f,\Delta) - A \gamma_4(f,\Delta)\right],$$

/8.22/ $$\gamma_3(f,\Delta) = \int_0^{f/\Delta} \Phi_1'^2\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'(\eta)\,\eta\,d\eta \, ,$$

$$\gamma_4(f,\Delta) = \int_0^{f/\Delta} \Phi_1'^2\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2(\eta)\,\Phi_2'(\eta)\,\eta\,d\eta \, .$$

$$\int_0^{\Delta} \frac{a}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 dy = \frac{a_\infty T_0^2}{2\Delta}\left(B^* B_3 - B B_4\right),$$

/8.23/ $$B_3 = \int_0^{\eta_m} \Phi_2'^2(\eta)\, d\eta \quad ; \quad B_4 = \int_0^{\eta_m} \Phi_2(\eta) \cdot \Phi_2'^2(\eta)\, d\eta .$$

Ovde je

$$\Phi_1'(\lambda) = \frac{d\Phi_1}{d\lambda} \quad ; \quad \Phi_2'(\eta) = \frac{d\Phi_2}{d\eta} .$$

Pošto je $\lambda m = \frac{y_m}{f}$ i $\eta_m = \frac{y_m}{\Delta}$, pa zbog /7.5a/ granice λm i η_m uzimaju vrednosti $\lambda m = 1, \infty$; $\eta_m = 1, \infty$.

Posle izvršene integracije dobićemo redukovane integrale akcije koje, ćemo napisati posebno za $\Delta < f$ i za $\Delta > f$.

Za $\Delta < f$ redukovani akcioni integrali biće :

/8.24/ $$I_1 = \int_0^{t_1}\int_{x_0}^{l} L_1(f, f_t, f_x, \Delta, g, \varphi, \beta, x, m)\, dt\, dx ,$$

/8.25/ $$I_2 = \int_0^{t_1}\int_{x_0}^{l} L_2(f, \Delta, \Delta_t, \Delta_x, g, \varphi, x, m)\, dt\, dx ,$$

sa parcijalnim Lagranžijanima :

/8.26/ $$L_1 \equiv \Big\{ m\Big[U_x U_t A_1 - (U U_x f_t + U U_t f_x) A_2 + \frac{U^2 f_x f_t}{f} A_3 + \frac{1}{2} U U_x^2 f A_4 -$$

$$- U^2 U_x f_x A_5 + \frac{1}{2}\frac{U^3 f_x^2}{f} A_6 + g U U_x A_7 - \frac{g U^2 f_x}{f} A_8 - \varphi U U_x A_9 +$$

$$+ \frac{\varphi U^2 f_x}{f} A_{10} + (U U_t + U^2 U_x) f_x A_{11} - (U_x U_t + U U_x^2) f A_{12} \Big] -$$

$$-\frac{\nu_\infty U^2}{2f}\left(A^* A_{13} - AF\right)\Big\} e^{x/m} + \beta(U_x f - \varphi) A_{14} + \beta(g - U f_x) A_{15},$$

$$/8.27/\quad L_2 \equiv \Big\{ m\Big[\frac{T_0^2 \Delta_t \Delta_x}{\Delta} B_1 + \frac{T_0^2 U \Delta_x^2}{2} F_1 + T_0^2 g \Delta_x F_2 + T_0^2 \varphi \Delta_x P_1 - \frac{a_\infty B T_0^2 \Delta_x}{2\Delta^2} B_2 +$$

$$+ \frac{\nu_\infty U^2 T_0 \Delta_x}{c_p f^2}\left(A^* F_3 - \Delta F_4\right)\Big] - \frac{a_\infty T_0^2}{2\Delta}\left(B^* B_3 - B B_4\right)\Big\} e^{x/m}.$$

Za $\Delta > f$ redukovani akcioni integrali biće:

$$/8.28/\qquad \mathcal{J}_1 = \int_0^{t_1}\int_{x_0}^{l} \mathcal{L}_1(f, f_t, f_x, \Delta, g, \varphi, \beta, x, m)\, dt\, dx\,,$$

$$/8.29/\qquad \mathcal{J}_2 = \int_0^{t_1}\int_{x_0}^{l} \mathcal{L}_2(f, \Delta, \Delta_t, \Delta_x, g, \varphi, x, m)\, dt\, dx\,,$$

sa parcijalnim Lagranžijanima:

$$/8.30/\quad \mathcal{L}_1 \equiv \Big\{ m\Big[U_x U_t A_1 - (U U_x f_t + U U_t f_x) A_2 + \frac{U^2 f_x f_t}{f} A_3 + \frac{1}{2} U U_x f A_4 -$$

$$- U^2 U_x f A_5 + \frac{U^3 f_x^2}{2f} A_6 + g U U_x A_7 - \frac{g U^2 f_x}{f} A_8 - \varphi U U_x A_9 +$$

$$+\frac{\varphi U^2 f_x}{f}A_{10}+(UU_t+UU_x^2)f_xA_{11}-(U_xU_t+UU_x^2)fA_{12}\Big]-$$

$$-\frac{\nu_\infty U^2}{2f}(A^*A_{13}-A\gamma)\Big\}e^{x/m}+\beta(U_xf-\varphi)A_{14}+\beta(g-Uf_x)A_{15},$$

$$/8.31/\quad \mathcal{L}_2=\Big\{m\Big[\frac{T_0^2\Delta t\Delta x}{\Delta}B_1+\frac{T_0^2U\Delta_x^2}{2}\gamma_1(f,\Delta)+T_0^2g\Delta x\gamma_2(f,\Delta)+$$

$$+T_0^2\varphi\Delta xP_1(f,\Delta)-\frac{a_\infty BT_0^2\Delta x}{2\Delta^2}B_2+\frac{\nu_\infty U^2T_0\Delta x}{c_pf^2}(A^*\gamma_3(f,\Delta)-A\gamma_4(f,\Delta)\Big]$$

$$-\frac{a_\infty T_0^2}{2\Delta}(B^*B_3-BB_4)\Big\}e^{x/m}.$$

Razmatraćemo prvo slučaj kada je temperaturski granični sloj tanji od dinamičkog, tj. kada je $\Delta <$ f. Funkcije f, g, γ, β, i Δ igraju sada ulogu generalisanih koordinata. Prema teoriji lančanih sistema i s obzirom na veze izmedju funkcija f, g, γ, β, i Δ s jedne, i u, v, T, i μ_1 sa druge strane, možemo smatrati da nam "generalisane koordinate" f, g, γ i β spadaju u prvu grupu, a Δ u drugu grupu i da su im parcijalni Lagranžijani L_1 i L_2 respektivno. Prema tome, pri variranju redukovanog akcionog integrala /8.24/ variraju se funkcije f, g, φ i β, dok se pri variranju akcionog integrala /8.25/, operacija variranja odnosi na funkciju Δ .

Ako su brzina strujanja i temperatura odredjene na svim granicama izuzev krive x = l i ako su na granici x = l i za t = t_1 zadovoljeni sledeći prirodni uslovi za proizvoljne vrednosti varijacija brzine u i temperature T :

$$/8.32/ \quad \frac{\partial L_1}{\partial f_t}\delta f\Big|_{t=t_1}=0\,, \quad \frac{\partial L_1}{\partial f_x}\delta f\Big|_{x=l}=0\,, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \Delta_t}\delta\Delta\Big|_{t=t_1}=0\,, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \Delta_x}\delta\Delta\Big|_{x=l}=0\,,$$

onda uslovima stacionarnosti redukovanih integrala

$$\delta I_1 = 0$$

$$\delta I_2 = 0$$

odgovaraju Ojler - Lagranževe jednačine :

$$/8.33/ \quad \frac{\partial L_1}{\partial f}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L_1}{\partial f_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial f_x}=0$$

$$/8.34/ \quad \frac{\partial L_1}{\partial g}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L_1}{\partial g_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial g_x}=0$$

$$/8.35/ \quad \frac{\partial L_1}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L_1}{\partial \varphi_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial \varphi_x}=0$$

$$/8.36/ \quad \frac{\partial L_1}{\partial \beta}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L_1}{\partial \beta_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial \beta_x}=0$$

$$/8.37/ \quad \frac{\partial L_2}{\partial \Delta}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L_2}{\Delta_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_2}{\partial \Delta_x}=0$$

Ako unesemo vrednosti parcijalnih Lagranžijana /8.26/ i /8.27/ u jednačine /8.32/, /8.33/, /8.34/, /8.35/, /8.36/ i /8.37/, podelimo ih sa faktorom $e^{x/m}$ i izvršimo granični prelaz kada $m \to 0$, onda će jednačine /8.32/, /8.34/ i /8.35/ biti identički zadovoljene, a jednačine /8.33/ i /8.37/ daju:

$$/8.38/ \quad -\frac{\partial}{\partial f}\frac{\nu_\infty U^2}{2f}\left[A^* A_{13} - AF\right] + UU_t A_2 - \frac{U^2 f_t}{f} A_3 + U^2 U_x A_5 -$$

$$- \frac{U^3 f_x}{f} A_6 + \frac{g U^2}{f} A_8 - \frac{\varphi U^2}{f} A_{10} - (UU_t + U^2 U_x) A_{11} = 0 .$$

$$/8.39/ \quad \frac{a_\infty T_0^2}{2\Delta^2}\left(B^* B_3 - BB_4\right) - \frac{T_0^2 \Delta_t}{\Delta} B_1 - T_0^2 U \Delta_x F_1 - T_0^2 g F_2 -$$

$$- T_0^2 \varphi P + \frac{a_\infty B T_0^2}{2\Delta^2} B_2 - \frac{\nu_\infty U^2 T_0}{c_p f^2}\left[A^* F_3 - A F_4\right] = 0 .$$

Jednačina /8.35/ daje jednačinu

$$(U_x f - \varphi) A_{14} + (g - U f_x) A_{15} = 0 ,$$

koja će biti zadovoljena za

$$\varphi = U_x f$$

$$g = U f_x .$$

Sredjivanjem jednačina /8.38/ i /8.39/, posle zamene $g = Uf_x$ i $\varphi = U_x f$, dobijamo:

$$/8.40/ \quad 2ff_tA_3+2U(A_6-A_8)ff_x+\nu_\infty\left(AF-Af\frac{\partial F}{\partial f}-A^*A_{13}\right)-2f^2\frac{U_t}{U}(A_2-A_{11})-$$

$$-2f^2U_x(A_5-A_{11})+2U_xf^2A_{10}=0\ ,$$

$$/8.41/ \quad 2B_1\Delta\Delta_t+2U\Delta^2\Delta_xF_1+2U\Delta^2f_xF_2+2\frac{\nu_\infty U^2}{c_pT_o}\frac{\Delta^2}{f^2}(A^*F_3-AF_4)+$$

$$+a_\infty(BB_4-BB_2-B^*B_3)+2U_xf\Delta^2P_1=0\ .$$

Za slučaj kada je $\Delta > f$ diferencijalne jednačine dobijamo kao i u prethodnom slučaju, pa postupak nećemo detaljno izvoditi. Dakle, posmatraćemo sada integrale akcije /8.28/ i /8.29/ sa parcijalnim Lagranžijanima /8.3o/ i /8.31/ i iz uslova stacionarnosti akcionih integrala dobićemo diferencijalne jednačine problema za slučaj kada je $\Delta > f$.

$$/8.42/ \quad 2ff_tA_3+2U(A_6-A_8)ff_x+\nu_\infty\left(A\Upsilon-Af\frac{\partial \Upsilon}{\partial f}-A^*A_{13}\right)-2f^2\frac{U_t}{U}(A_2-A_{11})-$$

$$-2f^2U_x(A_5-A_{11})+2U_xf^2A_{10}=0\ ,$$

$$/8.43/ \quad 2B_1\Delta\Delta_t+2U\Delta^2\Delta_x\Upsilon_1+2U\Delta^2f_x\Upsilon_2+2\frac{\nu_\infty U^2}{c_pT_o}\frac{\Delta^2}{f^2}(A^*\Upsilon_3-A\Upsilon_4)+$$

$$+a_\infty(BB_4-BB_2-B^*B_3)+2U_xf\Delta^2P_2=0\ .$$

Napred dobijene rencijalne jednačine daju nam aproksimativna rešenja za kompleksne slučajeve u problematici dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja. Kao što vidimo, to je sistem nelinearnih i spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama $f(x,t)$ i $\Delta(x,t)$. Da bi izbegli nepremostive teškoće matematičke prirode pri rešavanju ovakvog sistema, primenićemo dobijene jednačine na neke specijalne slučajeve i uprošćenije probleme, koji dovode do takvih diferencijalnih jednačina koje praktično možemo iskoristiti za dobijanje konkretnih rezultata.

III NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI STRUJANJA FLUIDA I KONVEKTIVNOG PROVODJENJA TOPLOTE

9. Dinamički i temperaturski granični sloj sa konstantnim fizičkim karakteristikama i sa zanemarenom viskoznom disipacijom.

a/ Stacionarna konvekcija [1]

U ovom delu posmatraćemo temperaturski granični sloj na ravnoj ploči konstantne temperature T_w pri laminarnom, stacionarnom strujanju nestišljivog fluida konstantne viskoznosti. Smatraćemo da je koeficijent temperaturne vodljivosti konstantan i zanemarićemo viskoznu disipaciju. Uzećemo da je brzina U konstantna i da je jednaka brzini kojom fluid nailazi na ploču, odnosno $U = U_\infty$. Dakle, radi se o bezgradijentnom strujanju.

Diferencijalne jednačine koje opisuju ovako formulisan problem biće:

$$/9.1/ \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} ,$$

$$/9.2/ \qquad u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

iz kojih treba odrediti tri nepoznate funkcije $u(x,y)$, $v(x,y)$ i $T(x,y)$, koje prema /7.5/ moraju zadovoljavati sledeće granične uslove:

$$u = v = 0 \qquad T = T_w \qquad za \quad y = 0$$

$$u = U_\infty \qquad T = T_\infty \qquad za \quad y = \infty .$$

Diferencijalne jednačine /9.1/ i /9.2/ dobijamo iz jednačina /7.2/ i /7.3/, uzimajući da su parcijalni izvodi po vremenu jednaki nuli, da su $U = U_\infty$, ν i a konstante i da je Ekertov broj $E = \frac{U_\infty^2}{c_p T_0} = 0$, što odgovara zanemarivanju viskozne disipacije. Konstantnost ν i a, s obzirom na jednačine kojima su definisani, izražava se relacijama A = 0 i B = 0.

U ovom problemu razmatramo samo slučaj kada je $\Delta < f$.

Prema tome, približne diferencijalne jednačine posmatranog problema možemo dobiti iz jednačina /8.4o/ i /8.41/ unoseći u njih napred navedene vrednosti. Tako dobijamo:

$$2U_\infty (A_6 - A_8) f f_x - \nu A_{13} = 0 ,$$

$$2U_\infty F_1 \Delta^2 \Delta_x + 2U_\infty F_2 \Delta^2 f_x - a B_3 = 0 .$$

Pošto razmatramo stacionaran slučaj biće $f = f(x)$ $\Delta = \Delta(x)$ $f_x = \frac{df}{dx}$, $\Delta_x = \frac{d\Delta}{dx}$, pa gornje jednačine posle sredjivanja postaju :

$$/9.3/ \qquad f \frac{df}{dx} = \frac{A_{13}}{A_6 - A_8} \frac{\nu}{U_\infty} ,$$

$$/9.4/ \quad \Delta F_1 d\Delta + \Delta F_2 df = \frac{a\Delta}{2U_\infty}\frac{d}{d\Delta}\left(-\frac{B_3}{\Delta}\right)dx .$$

Integracijom jednačine /9.3/ dobijamo debljinu dinamičkog graničnog sloja

$$/9.5/ \qquad f = \sqrt{\frac{2A_{13}}{A_6 - A_8}}\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}x} .$$

Ako postoji funkcija $P(f,\Delta)$, koja zadovoljava sledeće uslove:

$$/9.6/ \qquad \frac{\partial P}{\partial \Delta} = \Delta F_1 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial f} = \Delta F_2 ,$$

onda jednačinu /9.4/ možemo napisati ovako:

$$/9.7/ \qquad dP = \frac{a\Delta}{2U_\infty}\frac{d}{d\Delta}\left(-\frac{B_3}{\Delta}\right)dx .$$

U slučaju stacionarne konvekcije u fluidu sa konstantnim fizičkim karakteristikama za $\sigma = 1$ imamo da je

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} = \frac{u}{U_\infty} \quad ; \quad \Delta = f .$$

Gornje relacije izražavaju sličnost raspodele temperaturske razlike izmedju temperature na ploči i u datoj tački preseka graničnog sloja, i brzine struje u istoj tački, i ukazuju na činjenicu da je debljina temperaturskog graničnog sloja jednaka debljini dinamičkog sloja, ako je Prandtlov broj $\sigma = 1$.

Zbog toga se pri aproksimativnim rešenjima uzima da je

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \Phi_2(\eta) ,$$

tako da su funkcije $\Phi_1(\lambda)$ i $\Phi_2(\eta)$ funkcije istog oblika od različitih argumenata, koje za $\sigma = 1$, odnosno za $\Delta = f$, postaju identički jednake.

Prema Karman - Polhauzenu, za profil brzine uzećemo polinom četvrtog stepena

$$/a/ \qquad \Phi_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{4} a_k \lambda^k,$$

čije koeficijente odredjujemo iz graničnih uslova

$$/b/ \qquad u = v = 0 \quad za \quad y = 0,$$

iz jednačina koje izražavaju osnovne hipoteze teorije dinamičkog graničnog "sloja konačne debljine"

$$/c/ \qquad u = U_\infty \,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad za \quad y = f,$$

iz jednačine Prandtla za ravansko bezgradijentno strujanje

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

koja zbog /b/ daje granični uslov

$$/d/ \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad za \quad y = 0,$$

i iz uslova da profil brzine u(x,y,t) i prava $U = U_\infty$, u bilo kom preseku i bilo kom trenutku, imaju dodir drugog reda, tj.

$$/e/ \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad za \quad y = f.$$

Iz /b/, /d/, /c/ i /e/ zbog $u = U_\infty \Phi_1(\lambda)$ dobijamo:

$$/9.8/ \quad \left| \begin{array}{lll} \Phi_1 = 0 \quad , \quad \dfrac{d^2\Phi_1}{d\lambda^2} = 0 & & za \ \lambda = 0 \\ \Phi_1 = 1 \quad , \quad \dfrac{d\Phi_1}{d\lambda} = 0 \quad , \quad \dfrac{d^2\Phi_1}{d\lambda} = 0 & & za \ \lambda = 1 \end{array} \right.$$

Za profil temperature uzećemo takodje polinom četvrtog stepena

$$/f/ \qquad \Phi_{2(\eta)} = \sum_{k=0}^{4} b_k \eta^k ,$$

čije koeficijente odredjujemo iz graničnih uslova

$$/g/ \qquad T = T_w \qquad\qquad za \quad y = 0$$

$$/h/ \qquad T = T_\infty \ , \ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad\qquad za \quad y = \Delta$$

$$/i/ \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad za \quad y = 0$$

$$/j/ \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad za \quad y = \Delta \ .$$

Granični uslovi /h/ izražavaju osnovne hipoteze teorije temperaturskog graničnog "sloja konačne debljine". Granični uslov /i/ dobijen je iz jednačine provodjenja toplote

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} ,$$

uzimajući u obzir /b/ i /g/, a granični uslov /j/ dobijen je iz zahteva da profil temperature $T(x,y,t)$

i prava $T = T_w$ u svakom preseku i za svaki trenutak imaju dodir drugog reda.

Iz /g/, /i/, /h/ i /j/, zbog $T = T_0 \Phi_{2(\eta)} + T_w$, dobijamo:

$$/9.9/ \quad \left| \begin{array}{lll} \Phi_2 = 0 \;, \quad \dfrac{d^2\Phi_2}{d\eta^2} = 0 & & \text{za } \eta = 0 \\[2ex] \Phi_2 = 1 \;, \quad \dfrac{d\Phi_2}{d\eta} = 0 \;, & \dfrac{d^2\Phi_2}{d\eta^2} = 0 & \text{za } \eta = 1 \;. \end{array} \right.$$

Stavljajući /a/ i /f/ u granične uslove /9.8/ i /9.9/, posle odredjivanja koeficijenata a_k i b_k, dobijamo:

$$/9.10/ \quad \left| \begin{array}{l} \Phi_{1(\lambda)} = 2\lambda - 2\lambda^3 + \lambda^4 \\[2ex] \Phi_{2(\eta)} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \;. \end{array} \right.$$

Za ovako izabrane funkcije je prema /8.5/ i /8.6/

$$N(\lambda) = \frac{1}{10}\left(10\lambda^2 - 15\lambda^4 + 8\lambda^5\right).$$

Stavljajući u /8.9/, /8.1o/ i /8.12/ da je $\lambda_m = 1$, unoseći u njih /9.1o/, integracijom dobijamo:

$$A_6 - A_8 = 0{,}0472 \;,$$

$$2A_{13} = 1{,}484 \;,$$

pa je debljina dinamičkog graničnog sloja prema /9.5/

$$f = 5{,}61\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}x}\,.$$

Zamenom /9.1o/ i $N(\lambda)=\frac{1}{10}(10\lambda^2-15\lambda^4+8\lambda^5)$ u /8.16/, /8.18/ i /8.23/ i uzimajući da je $\eta_m = 1$ dobijamo:

$$F_1 = 4\left(\frac{11}{420}\frac{1}{f}-\frac{7}{990}\frac{\Delta^2}{f^3}+\frac{31}{15015}\frac{\Delta^3}{f^4}\right),$$

$$F_2 = 4\left(-\frac{11}{840}\frac{\Delta}{f^2}+\frac{7}{1320}\frac{\Delta^3}{f^4}-\frac{124}{75075}\frac{\Delta^4}{f^5}\right),$$

$$B_3 = \frac{52}{35}\,.$$

Pošto funkcija

$$P = 4\left(\frac{11}{840}\frac{\Delta^2}{f}-\frac{7}{3960}\frac{\Delta^4}{f^3}+\frac{31}{75075}\frac{\Delta^5}{f^4}\right)$$

zadovoljava uslove /9.6/, jednačinu /9.7/ možemo napisati ovako:

$$4\cdot d\left(\frac{11}{840}\frac{\Delta^2}{f}-\frac{7}{3960}\frac{\Delta^4}{f^3}+\frac{31}{75075}\frac{\Delta^5}{f^4}\right)=\frac{a\Delta}{2U_\infty}\frac{52}{35}\frac{1}{\Delta^2}dx\,,$$

ili uvodeći promenljive $Y = \frac{\Delta}{f}$,

$$/9.11/\quad d\left[f\left(\frac{11}{840}Y^2-\frac{7}{3960}Y^4+\frac{31}{75075}Y^5\right)\right]=\frac{13}{70}\frac{a}{U_\infty}\frac{1}{Y\cdot f}dx\,.$$

Kako je $\Delta < f$ tj. $Y < 1$ u prethodnoj jednačini možemo zanemariti članove

$$\frac{7}{3960}Y^4 \quad i \quad \frac{31}{75075}Y^5\,,$$

pa jednačina /9.11/ postaje

$$\frac{11}{840} Y f \frac{d}{dx}(f Y^2) = \frac{13}{70} \frac{a}{U_\infty},$$

ili

$$Y^2 f \frac{df}{dx} + 2Y^3 f^2 \frac{dY}{dx} = \frac{156}{11} \frac{a}{U_\infty},$$

Zbog

$$f = 5{,}61\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty} x},$$

gornju jednačinu možemo napisati ovako

$$Y^3 + 4Y^2 x \frac{dY}{dx} = \frac{1}{m\sigma} \quad ; \quad m = \frac{11 \cdot 15{,}74}{156}.$$

Uvodjenjem nove promenljive $z = Y^3$ prethodna jednačina postaje

$$z + \frac{4}{3} x \frac{dz}{dx} = \frac{m}{\sigma}.$$

Integrirajući dobijamo:

$$x^{3/4}\left(z - \frac{1}{m\sigma}\right) = C.$$

Ako je x_0 nezagrejana početna dužina ploče, onda su početni uslovi

$$\Delta = 0, \quad Y = 0, \quad z = 0 \quad, za\ x = x_0,$$

pa je

$$C = x_0^{3/4} \frac{1}{m\sigma}.$$

Sada možemo pisati

$$z = \frac{1}{m\sigma}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right] = Y^3 = \frac{\Delta^3}{f^3}.$$

Odavde za debljinu temperaturskog graničnog sloja dobijamo

$$\Delta = \frac{5{,}61\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}x}}{\sqrt[3]{m}\,\sqrt[3]{\sigma}}\sqrt[3]{1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}}\,.$$

Ako uzmemo da je $x_0 = 0$,tj. ako čitava ploča učestvuje u prenošenju toplote i formiranju dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja, onda za Δ dobijamo:

$$\Delta = \frac{5{,}61\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}x}}{\sqrt[3]{m}\,\sqrt[3]{\sigma}}\,.$$

Veza izmedju lokalnog koeficijenta prelaza toplote α_x i koeficijenta toplotne provodljivosti k data je relacijom

$$\alpha_x = \frac{k}{T_\infty - T_w}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}\,.$$

Kako je zbog /8.7/

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left[T_0\,\frac{\Phi_2'(\eta)}{\Delta}\right]_{\eta=0} = 2T_0\cdot\frac{1}{\Delta} = 2(T_\infty - T_w)\frac{1}{\Delta}\,,$$

dobija se da je

$$\alpha_x = \frac{2k}{\Delta} = k\,\frac{2\sqrt[3]{m}}{5{,}61}\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\,,$$

pa je lokalni Nuseltov broj

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{k} = \frac{2\sqrt[3]{m}}{5{,}61}\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{Re_x}\,,$$

$$Nu_x = 0{,}369\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{Re_x}\,.$$

Vrednost Nuseltovog broja dobijena tačnim metodama rešavanja [52] je

$$Nu_x = 0{,}332\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{Re_x}\,.$$

b/ Nestacionaran temperaturski granični sloj - pojava toplotnog talasa.[2]

Kao sledeći primer posmatraćemo laminarno, stacionarno strujanje nestišljivog fluida duž ravne polubeskonačne ploče, pri čemu ćemo zanemariti viskoznu disipaciju i uticaj temperature na fizičke karakteristike fluida. Neka je brzina potencijalne fluidne struje U_∞ i neka ploča i fluid imaju jednaku temperaturu T_∞ . U tom slučaju imaćemo samo dinamički granični sloj. Usvojićemo aproksimaciju da je profil komponente u brzine linearan i da je dat prvim članom Tajlorovog reda u graničnom sloju. Ova aproksimacija je utoliko tačnija, ukoliko je veća vrednost Prandtlovog broja, pošto je u tom slučaju debljina temperaturskog graničnog sloja mala u poredjenju sa debljinom dinamičkog sloja. Dakle, stavićemo

$$/9.12/ \qquad u \approx \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \cdot y = \frac{\tau_w(x)}{\mu}\, y\,,$$

gde je $\tau_w(x)$ napon smicanja na ploči, a μ dinamička viskoznost. Napon smicanja za ravnu ploču dat je formulom Blazijusa:

$$\tau_w(x) = \frac{K}{\sqrt{x}}\,,$$

gde je

/9.13/ $$K = 0{,}332\rho U_\infty^2\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}\,.$$

Iz /9.12/ profil brzine u možemo napisati ovako

$$u = U_\infty \Phi_{1(\lambda)}\,,$$

gde su:

$$\Phi_{1(\lambda)} = \lambda$$

$$\lambda = \frac{y}{f(x)}$$

/9.14/ $$f(x) = \frac{\mu U_\infty}{\tau_w} = \frac{\mu U_\infty}{K}\sqrt{x}\,.$$

Povećamo li temperaturu ploče sa T_∞ na T_w doći će do konvektivnog provodjenja toplote u fluidu. Profil temperature uzećemo u obliku $T = T_0\Phi_{2(\eta)} + T_w$; $T_0 = T_w - T_\infty$. Pri daljim izračunavanjima treba voditi računa da su funkcije $\Phi_{1(\lambda)}$ i $\Phi_{2(\eta)}$ različitog oblika.

Temperatura $T(x,y,t)$ mora zadovoljiti sledeće graničen uslove:

$$T = T_w\,,\quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad za \quad y = 0$$

$$T = T_\infty\,,\quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad za \quad y = \Delta\,.$$

Granični uslov $T = T_w$ za $y = 0$ je očigledan. Granični uslov $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ za $y = 0$ dobija se iz jednačine provodjenja toplote

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,,$$

kada se uzme u obzir da je za $y = 0$ $T = T_w = \text{const.}$ $u = v = 0$. Ostala dva granična uslova izražavaju osnovne hipoteze približne teorije temperaturskog graničnog „sloja konačne debljine".

Funkcija Φ_2 u tom slučaju zadovoljava sledeće granične uslove:

$$\Phi_2 = 1 \quad ; \quad \frac{d^2\Phi_2}{d\eta^2} = 0 \qquad za \ \eta = 0$$

$$\Phi_2 = 0 \quad ; \quad \frac{d\Phi_2}{d\eta} = 0 \qquad za \ \eta = 1 \ .$$

Prema napred iznetim pretpostavkama, približnu diferencijalnu jednačinu za temperaturski granični sloj, dobijenu varijacionom metodom, dobićemo ako u jednačini /8.41/ stavimo da je $A = 0$, $B = 0$ i $E = -\frac{U_\infty^2}{c_p T_0} = 0$

Dakle, za naš slučaj imamo:

$$/9.15/ \qquad 2B_1 \Delta\Delta_t + 2U_\infty \Delta^2 \Delta_x F_1 + 2U_\infty \Delta^2 f_x F_2 - aB_3 = 0 ;$$

prema /8.15/ je

$$/9.16/ \qquad B_1 = \int_0^{\eta_m} \Phi_2'^2(\eta)\eta^2 d\eta = S_1$$

a prema /8.16/

$$F_1 = \frac{1}{\Delta}\int_0^{\eta_m} \Phi_1\left(\frac{\Delta}{f}\eta\right)\Phi_2'^2(\eta)\eta^2 d\eta = \frac{1}{\Delta}\int_0^{\eta_m}\frac{\Delta}{f}\eta\,\Phi_2'^2(\eta)\eta^2 d\eta$$

$$/9.17/ \qquad F_1 = \frac{1}{f} S_2 \qquad ; \qquad S_2 = \int_0^{\eta_m} \Phi_2'^2(\eta)\eta^3 d\eta$$

Iz /8.5/ je

$$N(\lambda) = \int \Phi_1'(\lambda)\lambda d\lambda + C_1 = \frac{1}{2}\lambda^2 + C_1,$$

pa zbog N(0) = 0 dobijamo:

/9.18/ $$N(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2.$$

Kombinujući /9.18/ i /8.18/ dobijamo da je

/9.19/ $$F_2 = -\frac{1}{2}\frac{\Delta}{f^2}S_2 .$$

Iz /8.23/ je

/9.20/ $$B_3 = \int_0^{\eta_m} \Phi_2'^2(\eta) d\eta = S_3 .$$

Unoseći /9.16/, /9.17/, /9.19/ i /9.2o/ u /9.15/ dobijamo:

$$2S_1\Delta\Delta_t + 2U_\infty\Delta^2\Delta_x\frac{1}{f}S_2 - U_\infty\Delta^3\frac{f_x}{f^2}S_2 - S_3 a = 0.$$

Unoseći vrednost za f iz /9.14/ u prethodnu jednačinu imamo:

/9.21/ $$\alpha_2\frac{\Delta K}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta^2}{\sqrt{x}} + 2\alpha_1\frac{\partial\Delta}{\partial t}\cdot\Delta = 0,$$

gde je

/9.22/ $$\alpha_2 = \frac{S_2}{S_3} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{S_1}{S_3} .$$

Ako u jednačinu /9.21/ uvedemo nove bezdimenzione promenljive

$$P = \left(\frac{\alpha_2 K}{2\mu a}\right)^{1/3}\frac{\Delta}{\sqrt{x}} = B\frac{\Delta}{\sqrt{x}} \quad ; \quad B = \left(\frac{\alpha_2 K}{2\mu a}\right)^{1/3}$$

/9.23/ $$F = \frac{a}{2\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2 K}{2\mu a}\right)^{2/3}\frac{t}{x} = D\frac{t}{x} \quad ; D = \frac{a}{2\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2 K}{2\mu a}\right)^{2/3}$$

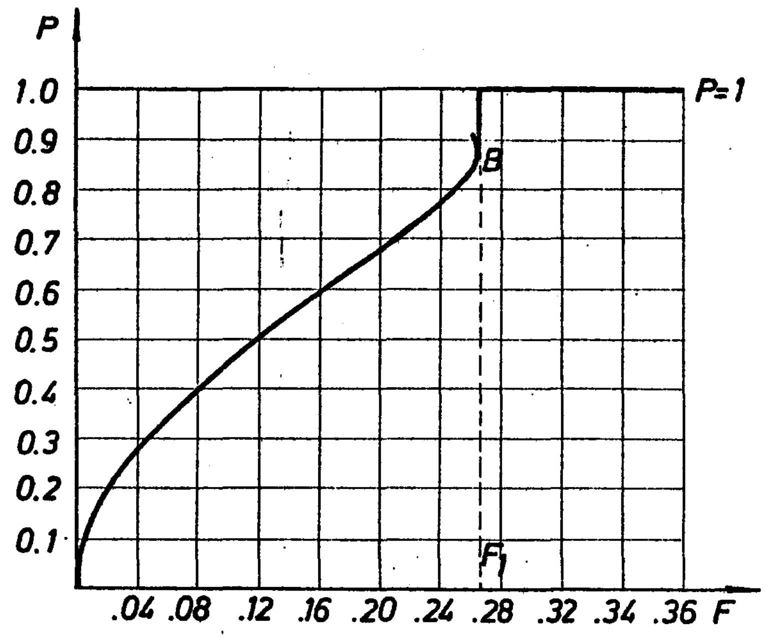
i smatramo da je P = P(F) , dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu

$$(P-4P^2F)\frac{dP}{dF}=1-P^3. \tag{9.24}$$

Ako F smatramo kao nezavisno promenljivu, onda je jednačina /9.24/ linearna. Uz početni uslov P(0) = 0 njeno rešenje biće

$$F=(1-P^3)^{4/3}\int_0^P\frac{p\,dp}{(1-p^3)^{7/3}}, \tag{9.25}$$

čiji je grafik dat krivom na slici 3.



Sl.3

Singularni integral jednačine /9.24/ je

P = 1 .

Ovo rešenje ne zadovoljava početne uslove i ono, s obzirom na /9.22/, predstavlja rešenje za stacionarno stanje.

Iz grafika funkcije P = P(F), koja je data jednačinom /9.24/, a koja je prikazana na sl. 3 , vidi se da je ova kriva nejednoznačna, što je sa fizičke tačke gledišta apsurdno. Ova nejednoznačnost biće ukonjena ako rešenje uzmemo u obliku prekidne krive, gde se kao tačka prekida javlja skok,u kojoj kriva skače na vrednost $P = 1$. Položaj ovog skoka možemo interpretirati kao toplotni talas.

Ovaj toplotni talas nastaje za jednu odredjenu vrednost F, koju ćemo obeležiti sa F_1 i koja odgovara apscisi tačke B, u kojoj kriva ima vertikalnu tangentu. Da bi odredili vrednost F_1 jednačinu /9.24/ napisaćemo u obliku

$$(P-4P^2F)dP=(1-P^3)dF.$$

Stavljajući $F = F_1$, posle integracije dobijamo

$$\frac{1}{2}P^2+\frac{4}{3}P^3F_1 = C. \tag{9.26}$$

Iz prethodne jednačine vidimo da je izraz na levoj strani duž talasa konstantan,pa nam on izražava zakon o konzervaciji duž talasa.

Uzmimo da je na strani talasa,gde je primenljiv partikularni integral /9.25/, $P = P_1$, a na strani gde je primenljiv singularni integral, $P = 1$. Stavljajući to u /9.26/ dobijamo:

$$\frac{1}{2}P_1^2-\frac{4}{3}P_1^3F_1 = \frac{1}{2}-\frac{4}{3}F_1,$$

ili

$$F_1=\frac{3}{8}\,\frac{1+P_1}{1+P_1+P_1^2}. \tag{9.27}$$

Iz /9.27/ i /9.25/ dobijamo da je

/9.28/ $$F_1 = 0{,}266 .$$

Iz svega napred izvedemog vidi se da za

$$F < F_1 \qquad ili \qquad t < \frac{F_1}{D} x$$

imamo nestacionarno rešenje, dok je za

$$F > F_1 \qquad ili \qquad t > \frac{F_1}{D} x$$

rešenje stacionarno.

Dakle, skok u temperaturi ploče prouzrokovaće jedan toplotni talas koji se širi od ivice ploče i predstavlja granicu izmedju dela temperaturskog graničnog sloja sa stacionarnim i dela sa nestacionarnim temperaturskim poljem.

Trajektorija talasa data je sa

$$F = F_1 \qquad ili \qquad D\frac{t}{x} = F_1 .$$

Ako uzmemo kubni profil temperature

$$T = T_0 \Phi_2(\eta) + T_w ,$$

sa polinomom

$$\Phi_2(\eta) = \frac{3}{2}(1-\eta)^2 - \frac{1}{2}(1-\eta)^3 ,$$

čiji su koeficijenti odredjeni iz graničnih uslova

$$T = T_w \ , \ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad za \quad y = 0 ,$$

$$T = T_\infty \ , \ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad za \quad y = \Delta ,$$

onda iz /9.16/, /9.17/ i /9.2o/, stavljajući da je $\eta_m = 1$, dobijamo:

$$S_1 = \frac{6}{35} \quad ; \quad S_2 = \frac{3}{32} \quad ; \quad S_3 = \frac{6}{5} \, ,$$

odnosno prema /9.22/

$$\alpha_1 = \frac{1}{7} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{5}{64} \, . \tag{9.29}$$

Stavljajući /9.13/, /9.28/ i /9.29/ u /9.23/ dobijamo za trajektoriju talasa

$$\frac{U_\infty t}{x} = 1{,}38\, \sigma^{1/3} \, .$$

U referenciji [53] pomoću integralnog metoda dobijeno je

$$\frac{U_\infty t}{x} = 1{,}33\, \sigma^{1/3} \, .$$

Iz /9.23/, s obzirom na /9.13/ i /9.29/, dobijamo da je

$$F = 0{,}19 \frac{U_\infty t}{\sigma^{1/3} x} \, .$$

U napred pomenutoj referenciji [53] je

$$F = 0{,}20 \frac{U_\infty t}{\sigma^{1/3} x} \, .$$

Odredimo i specifični toplotni fluks na površini ploče:

$$q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{k T_0}{\Delta} = \frac{3}{2} k T_0 B \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{P} \, ,$$

$$q_w = \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha_2 K}{2 \mu a} \right)^{1/3} \frac{k T_0}{P \sqrt{x}} \, .$$

Zamenjujući α_2 i K iz /9.29/ i /9.13/ i stavljajući $T_o = T_w - T_\infty$ dobijamo:

$$q_w = 0{,}326\, \sigma^{1/3} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\, \frac{k(T_w - T_\infty)}{P}.$$

U referenciji [53] umesto koeficijenta 0,326 imamo 0,334.

c/ Dvodimenzioni dinamički granični sloj [3]

U ovom slučaju posmatramo gradijentno strujanje kod koga je brzina fluida na spoljašnjoj granici graničnog sloja U = U(x,t). Približnu diferencijalnu jednačinu za ovaj slučaj, izvedenu varijacionom metodom, dobićemo iz jednačine /8.4o/, stavljajući zbog ν = const, da je A = O. Dakle, diferencijalna jednačina problema biće:

$$/9.30/ \quad 2ff_t A_3 + 2U(A_6 - A_8)ff_x - \nu A_{13} - 2f^2 \frac{U_t}{U}(A_2 - A_{11}) -$$

$$- 2f^2 U_x (A_5 - A_{11}) + 2U_x f^2 A_{10} = 0 .$$

Uvodeći novu promenljivu

$$/9.31/ \quad z(x,t) = \frac{f^2}{\nu}$$

i konstante

$$C = \frac{A_3}{A_6 - A_8} \quad ; \quad H = 2\,\frac{A_{10} + A_{11} - A_5}{A_6 - A_8} ,$$

$$h = 2\,\frac{A_{11} - A_2}{A_6 - A_8} \quad ; \quad b = \frac{A_{13}}{A_6 - A_8} .$$

posle izvršenih prostih transformacija, jednačina /9.3o/ postaje:

$$/9.32/ \qquad C\frac{\partial z}{\partial t} + U\frac{\partial z}{\partial x} + \left(H\frac{\partial U}{\partial x} + h\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial t}\right)z = b.$$

Konstante C, H, h i b izračunate su za različite oblike funkcije Φ_1, i date su u tablici 2.

tablica 2.

$\Phi_1(\lambda)$	C	H	h	b
$\operatorname{erf}\lambda$	2,547	8,412	4,221	10,19
$\frac{1}{2}(3\lambda-\lambda^3)$	2,61	7,428	3,59	18,28
$2\lambda-2\lambda^3+\lambda^4$	2,555	7,864	3,898	31,48
$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$	2,59	7,64	3,82	19,9

$$\left(\operatorname{erf}\lambda = \frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^\lambda e^{-\alpha^2}d\alpha\right)$$

1c/ Odredjivanje tačke odvajanja za dvodimenzionalno strujanje.

Da bi odredili tačku odvajanja, kombinovaćemo varijacionu metodu sa Targovom metodom [54] . Suština Targove metode je u tome što se iz diferencijalne jednačine dinamičkog graničnog sloja

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

i jednačine kontinuiteta $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ dobija jednačina

$$/9.33/ \qquad \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Ako zamenimo profil brzine

$$u = U(x,t)\,\Phi_1(\lambda) \tag{9.34}$$

u desnu stranu jednačine /9.33/, integriramo od 0 do y i nadjemo konstantu integracije iz uslova

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=f} = 0 ,$$

dobićemo izraz za gradijent $\frac{\partial u}{\partial y}$. Ako u jednačinu, koju smo na taj način dobili, uvedemo uslov odvajanja

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

i parcijalni izvod $\frac{\partial z}{\partial x}$ iz /9.32/, koji je dobijen varijacionom metodom, rezultujuća jednačina za dobijanje tačke odvajanja z_s je;

$$U_x z_s = -A - D\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s - B\frac{U_t}{U} z_s . \tag{9.35}$$

Za različite profile izračunate vrednosti konstanata A, D i B date su u tablici 3.

tablica 3

$\Phi_1(\lambda)$	A	D	B
$erf\ \lambda$	24,42	-0,3194	1,457
$\frac{1}{2}(3\lambda-\lambda^3)$	9,343	0,04206	0,918
$2\lambda-2\lambda^3+\lambda^4$	25,05	0,0027	0,9688
$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$	11,83	0,0525	0,887

2c/ Neki primeri.

Razmatraćemo sada nekoliko poznatih problema koristeći rezultate dobijene varijacionim metodom. Posmatrajmo stacionarno strujanje. U tom slučaju je

$$U = U(x) \quad , \quad z = z(x),$$

pa parcijalna diferencijalna jednačina /9.32/ postaje

/9.36/ $$U\frac{dz}{dx} + H\frac{dU}{dx}z = b.$$

Rešenje ove jednačine uz početni uslov $z(0) = 0$ je

/9.37/ $$z = \frac{b\int_0^x U_{(x)}^{H-1}\,dx}{U_{(x)}^H}.$$

Ovaj rezultat koristićemo za razmatranje nekih specijalnih slučajeva.

Strujanje preko ravne ploče. Za ovaj slučaj je $U = \text{const}$ i jednačina /9.36/ daje:

/9.38/ $$z = \frac{bx}{U}.$$

Lokalni smičući napon na ploči je

/9.39/ $$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Zamenjujući /9.34/, /9,31/ i /9.38/ u /9.39/ dobijamo:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = C_1 R_{ex}^{-1/2},$$

gde je

$$C_1 = \frac{\Phi_1'(0)}{b^{1/2}},$$

a R_{ex} je lokalni Rejnoldsov broj.

Tablica 4. prikazuje odgovarajuće vrednosti konstance C_1 za različite profile.

tablica 4 [3]

$\Phi_1(\lambda)$	$\frac{1}{2}(3\lambda-\lambda^3)$	$2\lambda-2\lambda^3+\lambda^4$	erf λ	$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$	tačno[53]
C_1	0,351	0,356	0,3535	0,352	0,332

Strujanje oko beskonačnog klina. U ovom slučaju raspored brzina dat je izrazom

$$/9.40/ \qquad U(x) = Kx^p \quad ; \quad K, p = const.$$

Za sva stacionarna strujanja iz /9.35/ dobijamo da je u tački odvajanja $U_x z_s = -A$. Koristeću ovu jednačinu i jednačinu /9.37/ dobijamo:

$$/9.41/ \qquad \frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_s} \int_0^{x_s} U^{H-1}(x)\,dx}{U^H(x_s)} = -\frac{A}{b}.$$

Iz ovog izraza, koristeći /9.4o/, dobijamo vrednosti za p pri kome je lokalni smicajni napon jednak nuli duž čitavog tela:

$$p_s = -\frac{A/b}{1+\frac{A}{b}(H-1)}.$$

Tablica 5. prikazuje vrednosti eksponenta p_s za različite profile.

tablica 5 [3]

$\Phi_1(\lambda)$	$\frac{1}{2}(3\lambda-\lambda^3)$	$2\lambda-2\lambda^3+\lambda^4$	erf λ	$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$	tačno[54]
p_s	-0,119	-0,123	-0,127	-0,1201	-0,0904

Strujanje oko kružnog cilindra. U ovom slučaju raspored brzine dat je izrazom

$$U(x) = 2U_\infty \sin(\frac{x}{R}),$$

gde je R poluprečnik cilindra.

Da bi dobili tačku odvajanja mora se jednačina /9.41/ rešiti numerički. Odgovarajuće vrednosti za $\frac{x_s}{R}$ prikazane su u tablici 6.

tablica 6 [3]

$\Phi_1(\lambda)$	$\frac{1}{2}(3\lambda-\lambda^3)$	$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$	tačno [55]
x_s/R	1,95(111,6°)	1,97 (113°)	1,82 (104,5°)

Iz svih navedenih pr...era vidi se da je slaganje sa tačnim rezultatima potpuno zadovoljavajuće. Može se takodje reći da dobijeni rezultati nisu osetljivi u odnosu na izbor profila.

10. Stacionarna konvekcija sa disipacijom u fluidu sa promenljivim fizičkim karakteristikama. Glavni zadatak koji je sebi postavio autor ovoga rada je da primenom varijacionog metoda dodje do aproksimativnih rešenja problema stacionarne konvekcije u fluidu sa promenljivim fizičkim karakteristikama, uzimamjući u obzir i viskoznu disipaciju.

Problem stacionarne konvekcije u fluidu sa promenljivim fizičkim karakteristikama,ali sa zanemarivanjem disipacije usled viskoznosti fluida,rešavali su, pored drugih autora i CHENG, BIRTA i SU [13] , koristeći Glansdorf - Prigožinov varijacioni metod. U ovom radu oni su razmatrali samo slučaj kada je dinamički sloj deblji od temperaturskog graničnog sloja.

Pregledajući literaturu koja se odnosi na problme stacionarne konvekcije, autor nije naišao na radove u kojima se pored promenljive viskoznosti i temperaturne vodljivosti, u diferencijalne jednačine procesa uvodi i viskozna disipacija. Ako su informacije autora tačne, onda bi ovaj rad predstavljao izvestan originalan doprinos u rešavanju problematike stacionarne konvekcije, a dobijeni rezultati mogu nam dati interesantne informacije o uticaju viskozne disipacije na temperaturski i dinamički granični sloj.

Dakle, posmatramo laminarno, stacionarno strujanje nestišljivog fluida sa promenljivim koeficijentom viskoznosti ν, preko zagrejane polubeskonačne ravne ploče, pri čemu smatramo da je promenljiv i koeficijent temperaturne vodljivosti a, i uzimamo u obzir disipaciju mehaničke energije usled viskoznosti. Veličine ν i a smatraćemo linearnim funkcijama temperature. Pošto je ovo bezgradijentno strujanje, biće brzina fluida na spoljašnjoj granici dinamičkog sloja konstantna tj. $U = U_\infty = \text{const.}$ gde je U_∞ brzina kojom fluid nailazi na ploču.

Diferencijalne jednačine problema dobićemo ako u jednačinama /8.4o/, /8.41/, /8.42/ i /8.43/ stavimo da je $U = U_\infty = \text{const}$, $f = f(x)$ i $\Delta = \Delta(x)$.

Za $\Delta < f$ imaćemo:

$$/101/\quad \left|\begin{aligned} &2U_\infty(A_6 - A_8)ff_x + \nu_\infty\left(AF - Af\frac{\partial F}{\partial f} - A^* A_{13}\right) = 0\,, \\ &2U_\infty\Delta^2\Delta_x F_1 + 2U_\infty\Delta^2 f_x F_2 + 2\frac{\nu_\infty U_\infty^2}{c_p T_0}\cdot\frac{\Delta^2}{f^2}(A^* F_3 - AF_4) + a_\infty(BB_4 - BB_2 - B^* B_3) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

a za $\Delta > f$

$$
\left|\begin{aligned}
&2U_\infty(A_6-A_8)ff_x+\nu_\infty\left(A\psi-Af\frac{\partial\psi}{\partial f}-A^*A_{13}\right)=0\,,\\
&2U_\infty\Delta^2\Delta_x\gamma_1+2U_\infty\Delta^2f_x\gamma_2+2\frac{\nu_\infty U_\infty^2}{c_pT_0}\cdot\frac{\Delta^2}{f^2}(A^*\gamma_3-A\gamma_4)+a_\infty(BB_4-BB_2-B^*B_3)=0\,.
\end{aligned}\right. \tag{/102/}
$$

Za profile brzine i temperature uzećemo profile Targa

$$\Phi_1(\lambda)=\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{2}\lambda^3,$$

$$\Phi_2(\eta)=\frac{3}{2}\eta-\frac{1}{2}\eta^3,$$

koji zadovoljavaju sledeće granične uslove:

$$
\begin{array}{llll}
\Phi_1=0\,, & \Phi_1''=0 & \text{za} & \lambda=0\\
\Phi_1=1\,, & \Phi_1'=0 & \text{za} & \lambda=1\\
\Phi_2=0\,, & \Phi_2''=0 & \text{za} & \eta=0\\
\Phi_2=1\,, & \Phi_2'=0 & \text{za} & \eta=1
\end{array}
$$

Koeficijenti u profilima Targa odredjeni su iz početnih uslova za dinamički i temperaturski granični sloj sa konstantnim fizičkim karakteristikama i to za bezgradijentno strujanje. Medjutim, može se očekivati da u slučaju malih vrednosti viskoznog i konduktivnog koeficijenta, promenljivost fizičkih karakteristika neće uneti velike nelinearnosti, pa će ovaj profil zadovoljavati i slučaj koji ovde razmatramo.

Iz /8.5/ i /8.6/ dobijamo:

$$N(\lambda)=\frac{3}{8}(2\lambda^2-\lambda^4).$$

Zamenom funkcija $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\eta)$ i $N(\eta)$ u /8.9/, /8.11/, /8.12/, /8.13/, /8.14/, /8.16/, /8.17/, /8.18/, /8.19/, /8.2o/, /8.21/, /8.22/, i /8.23/ dobijamo:

$$\left|\begin{array}{l}
A_6 = \frac{39}{320}\,, \quad A_8 = \frac{9}{160}\,, \quad A_{13} = \frac{6}{5} \\[2ex]
F = \frac{9}{8}\left(-\frac{3}{4}\frac{\Delta}{f} + \frac{1}{6}\frac{\Delta^3}{f^3} - \frac{1}{40}\frac{\Delta^5}{f^5}\right) + \frac{6}{5}\,; \quad \gamma = \frac{9}{16}\left(\frac{f}{\Delta} - \frac{1}{12}\frac{f^3}{\Delta^3}\right) \\[2ex]
F_1 = \frac{9}{32}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{f} - \frac{1}{15}\frac{\Delta^2}{f^3}\right); \quad \Psi_1 = \frac{9}{8\Delta}\left(\frac{16}{105} - \frac{1}{12}\frac{f^3}{\Delta^3} + \frac{1}{20}\frac{f^5}{\Delta^5} - \frac{3}{280}\frac{f^7}{\Delta^7}\right) \\[2ex]
F_2 = \frac{9}{32}\left(-\frac{1}{4}\frac{\Delta}{f^2} + \frac{1}{20}\frac{\Delta^3}{f^4}\right); \quad \Psi_2 = \frac{27}{32\Delta}\left(-\frac{1}{3}\frac{f^2}{\Delta^2} + \frac{5}{12}\frac{f^4}{\Delta^4} - \frac{3}{20}\frac{f^6}{\Delta^6}\right) \\[2ex]
F_3 = \frac{27}{8}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^2}{f^2} + \frac{1}{24}\frac{\Delta^4}{f^4}\right); \quad \Psi_3 = \frac{27}{48}\left(\frac{f^2}{\Delta^2} - \frac{1}{4}\frac{f^4}{\Delta^4}\right) \\[2ex]
F_4 = \frac{27}{6}\left(\frac{12}{35} - \frac{88}{315}\frac{\Delta^2}{f^2} + \frac{52}{693}\frac{\Delta^4}{f^4}\right); \quad \Psi_4 = \frac{27}{16}\left(\frac{8}{35}\frac{f^3}{\Delta^3} - \frac{32}{315}\frac{f^5}{\Delta^5} + \frac{8}{693}\frac{f^7}{\Delta^7}\right) \\[2ex]
B_2 = \frac{27}{64}\,, \quad B_3 = \frac{6}{5}\,, \quad B_4 = \frac{33}{64}\,.
\end{array}\right. \qquad /103/$$

Uzimajući potrebne funkcije i konstante iz /lo.3/ i zamenjujući ih u /.lo.1/ i /lo.2/, dobijamo:

/104/
$$\begin{aligned}
&\frac{21}{160}U_\infty f f_x + \nu_\infty\left[\frac{9}{8}A\left(-\frac{3}{2}\frac{\Delta}{f}+\frac{2}{3}\frac{\Delta^3}{f^3}-\frac{3}{20}\frac{\Delta^5}{f^5}\right)-\frac{6}{5}\right]=0\\
&2U_\infty \Delta\Delta_x \frac{9}{32}\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta}{f}-\frac{1}{15}\frac{\Delta^3}{f^3}\right)+2U_\infty\Delta f_x\frac{3}{32}\left(-\frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{f^2}+\frac{1}{20}\frac{\Delta^4}{f^4}\right)+\\
&+2\frac{\nu_\infty U_\infty^2}{T_0 c_p}\frac{27}{16}\left[\left(\frac{11}{70}A+\frac{1}{2}\right)\frac{\Delta^2}{f^2}-\left(\frac{17}{315}A+\frac{1}{3}\right)\frac{\Delta^4}{f^4}+\left(\frac{23}{2772}A+\frac{1}{12}\right)\frac{\Delta^6}{f^6}\right]-\\
&-a_\infty\left(\frac{177}{160}B+\frac{6}{5}\right)=0\ ,
\end{aligned}$$

/105/
$$\begin{aligned}
&\frac{21}{160}U_\infty f f_x + \nu_\infty\left[\frac{3}{32}A\frac{f^3}{\Delta^3}-(A+1)\frac{6}{5}\right]=0\\
&\frac{9}{4}U_\infty\Delta\Delta_x\left(\frac{16}{105}-\frac{1}{12}\frac{f^3}{\Delta^3}+\frac{1}{20}\frac{f^5}{\Delta^5}-\frac{3}{280}\frac{f^7}{\Delta^7}\right)+\frac{27}{16}U_\infty\Delta f_x\left(-\frac{1}{3}\frac{f^2}{\Delta^2}+\frac{5}{12}\frac{f^4}{\Delta^4}-\frac{3}{20}\frac{f^6}{\Delta^6}\right)+\\
&+\frac{27}{24}\frac{\nu_\infty U_\infty^2}{T_0 c_p}\left[(A+1)-\frac{24}{35}A\frac{f}{\Delta}-\frac{1}{4}(A+1)\frac{f^2}{\Delta^2}+\frac{32}{105}A\frac{f^3}{\Delta^3}-\frac{8}{231}A\frac{f^5}{\Delta^5}\right]+a_\infty\left[\frac{3}{32}B-(B+1)\frac{6}{5}\right]=0\ .
\end{aligned}$$

Uvešćemo nove bezdimenzione promenljive

/106/ $$\xi=\frac{x}{l}\ ,\quad \varphi=\frac{f^2}{l^2}\ ,\quad Y=\frac{\Delta}{f}\ ,$$

gde je l karakteristična dužina na ploči. Sada lako nalazimo da je

$$ff_x=\frac{1}{2}l\frac{d\varphi}{d\xi}\ ;\quad \Delta\Delta_x=\frac{1}{2}l\left(Y^2\frac{d\varphi}{d\xi}+2\varphi Y\frac{dY}{d\xi}\right);\quad \Delta f_x=\frac{1}{2}lY\frac{d\varphi}{d\xi}\ .$$

Zamenom prethodnih relacija u jednačine /lo.4/ i /lo.5/ i uvodjenjem Rejnoldsovog broja $Re_\infty = \frac{U_\infty L}{\nu_\infty}$, , Prandtlovog broja $\sigma_\infty = \frac{\nu_\infty}{a_\infty}$ i Ekertovog broja $E = \frac{U_\infty^2}{c_p(T_w - T_\infty)}$, dobijamo definitivno diferencijalne jednačine problema i to:

za $\Delta < f$:

$$
/10.7/ \quad \left|
\begin{aligned}
&\frac{21 Re_\infty}{320}\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{9}{8}A\left(-\frac{3}{2}Y + \frac{2}{3}Y^3 - \frac{3}{20}Y^5\right) - \frac{6}{5} = 0 \\
&\left(\frac{1}{4}Y^3 - \frac{1}{60}Y^5\right)\frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi\left(Y^2 - \frac{2}{15}Y^4\right)\frac{dY}{d\xi} - 12\frac{E}{Re_\infty}\left[\left(\frac{11}{70}A + \frac{1}{2}\right)Y^2 - \left(\frac{17}{315}A + \frac{1}{3}\right)Y^4 + \right. \\
&\left. + \left(\frac{23}{2772}A + \frac{1}{12}\right)Y^6\right] - \frac{32}{9 Re_\infty \sigma_\infty}\left(\frac{177}{160}B + \frac{6}{5}\right) = 0 \,.
\end{aligned}
\right.
$$

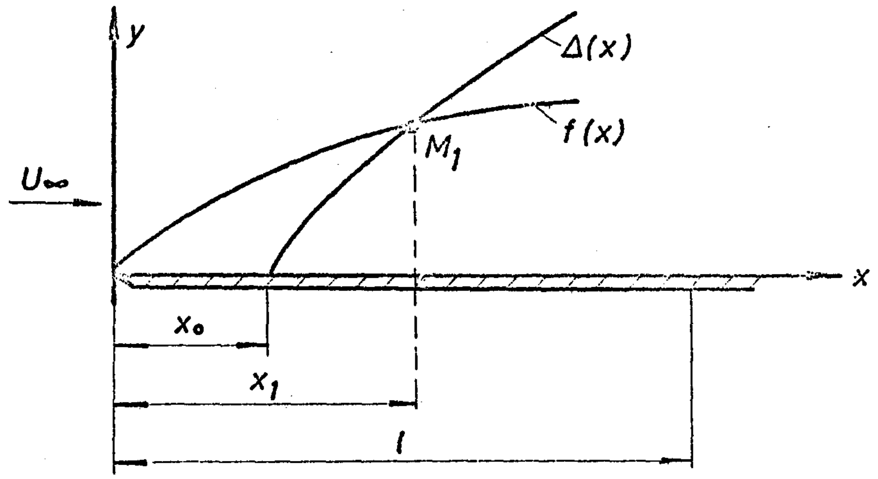
Za $\Delta > f$

$$
/10.8/ \quad \left|
\begin{aligned}
&\frac{21 Re_\infty}{320}\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{3}{32}AY^{-3} - (A+1)\frac{6}{5} = 0 \\
&\left(\frac{64}{315}Y^2 - \frac{4}{9}Y^{-1} + \frac{29}{60}Y^{-3} - \frac{23}{140}Y^{-5}\right)\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{8}{3}\varphi\left(\frac{16}{105}Y - \frac{1}{12}Y^{-2} + \frac{1}{20}Y^{-4} - \frac{3}{280}Y^{-6}\right)\frac{dY}{d\xi} - \\
&- \frac{4}{3}\frac{E}{Re_\infty}\left[(A+1) - \frac{24}{35}AY^{-1} - \frac{1}{4}(A+1)Y^{-2} + \frac{32}{105}AY^{-3} - \frac{8}{231}AY^{-5}\right] - \frac{32}{27 Re_\infty \sigma_\infty}\left(\frac{177}{160}B + \frac{6}{5}\right) = 0 \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Dakle, u oba slučaja dobili smo sisteme od dve spregnute linearne jednačine čija je struktura takva da se mogu rešiti samo numeričkim metodama. Za rešavanje sistema /lo.7/ moramo znati početne uslove, dok se početni uslovi za sistem /lo.8/ mogu dobiti tek posle rešavanja sistema /lo.7/ i odredjivanja tačke u kojoj je $\Delta = f$ odnosno $Y = 1$.

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina /lo.7/, koje opisuju istovremeno transport mase i energije, skopčano je sa teškoćama oko odredjivanja početnih uslova. Naime, ako se ploča greje od njenog početka gde nailazi fluidna struja, onda bi u tački $x = 0$ bilo $f = 0$ i $\Delta = 0$, pa bi zbog $Y = \frac{\Delta}{f} = \frac{0}{0}$ to bila singularna tačka. Da bismo izbegli ovu teškoću, pretpostavićemo da postoji nezagrejana početna dužina x_0 /sl.4/, a njena odgovarajuća bezdimenziona veličina je $\xi_0 = \frac{x_0}{l}$. U ovom radu uzeto je da je $\xi_0 = 0,1$.

Ova vrednost uzeta je zbog toga da bi se dobijeni rezultati uporedili sa rezultatima u referenciji [13], gde je za ξ_0 uzeta ista vrednost.



Sl.4

Ako je M_1 presek funkcija $f(x)$ i $\Delta(x)$, a njena apscisa x_1, onda diferencijalne jednačine /lo.7/ opisuju proces u intervalu $0 \leq x \leq x_1$, ili za bezdimenzionu nezavisno promenljivu $0 \leq \xi \leq \xi_1$; $\xi_1 = \frac{x_1}{l}$.

Na osnovu svega napred rečenog, početni uslovi za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina /lo.7/ biće:

$$(0 \leq \xi \leq 0{,}1\ ;\ Y = 0) \qquad \varphi = 0 \quad za \quad \xi = 0$$
$$(0{,}1 \leq \xi \leq \xi_1) \qquad \varphi = \varphi(0{,}1)\ ,\ Y = 0 \quad za \quad \xi = 0{,}1\ .$$

Prvi početni uslov znači da u intervalu $0 \leq \xi \leq 0{,}1$ prvu jednačinu sistema možemo rešavati nezavisno od druge, stavljajući da je Y = 0, sa početnim uslovom $\varphi(0) = 0$. Posle rešavanja ove jednačine i odredjivanja vrednosti funkcije φ za ξ = 0,1, sistem /lo.7/ rešavamo kao sistem spregnutih jednačina sa novim početnim uslovima.

Posle rešavanja sistema /lo.7/ možemo odrediti koordinate tačke M_1 za koju bezdimenzione promenljive imaju vrednost $\xi = \xi_1$, $\varphi = \varphi(\xi_1)$, $Y = 1$, tako da za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina /lo.8/ koji opisuje transport mase i energije za $\Delta >$ f, tj. za $\xi \geqslant \xi_1$, imamo sledeće početne uslove:

$$(\xi \geqslant \xi_1)\ ,\quad \varphi = \varphi(\xi_1)\ ,\quad Y = 1 \quad za \quad \xi = \xi_1 .$$

Rešavanje napred datih sistema diferencijalnih jednačina izvršeno je u institutu "Jožef Stefan" Univerziteta u Ljubljani. Program za rešavanje dao je inženjer Egon Zakrajšek.

Pri numeričkom rešavanju diferencijalnih jednačina za Rejnoldsov broj, Prandtlov broj, viskozni koeficijent A i konduktivni koeficijent B data je samo po jedna vrednost i to:

$$Re_{\infty} = 80000\ ,\quad \sigma_{\infty} = 2\ ,\quad A = -0{,}5\ ,\quad B = 0{,}1\ ,$$

a za Ekertov broj uzeto je više vrednosti, jer je cilj ovoga rada bio da se ispita uticaj viskozne disipacije na neke karakteristične veličine.

Posle rešavanja diferencijalnih jednačina date su numerički sledeće funkcije uzimajući u obzir /1o.6/

$$f^* = \frac{f}{l} = \sqrt{\varphi}$$

$$\Delta^* = \frac{\Delta}{l} = Y\sqrt{\varphi} ,$$

gde su f^* i Δ^* bezdimenzione debljine dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja.

Kao karakteristike za opisivanje ovoga strujanja razmatraćemo Nuseltov broj i lokalni koeficijent otpora trenja.

Pošto je lokalni Nuseltov broj

$$Nu_x = \frac{x}{T_\infty - T_w}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{x}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} ,$$

zbog $T = T_0 \Phi_2(\eta) + T_w$ i $\Phi_2(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$ imamo

$$Nu_x = \frac{3}{2}\frac{x}{\Delta} = \frac{3}{2}\frac{\xi}{\Delta^*}$$

$$Nu_x = \frac{3}{2}\frac{\xi}{Y\sqrt{\varphi}} .$$

Po definiciji lokalni koeficijent otpora trenja c_f je

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{\mu_w\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} .$$

Pošto je:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \left[\frac{U_\infty \Phi_1'(\lambda)}{f}\right]_{\lambda=0} = \frac{3U_\infty}{2f}$$

$$\frac{\mu_w}{\rho} = (\nu)_{y=0} = \nu_\infty (1+A\Theta)_{\Theta=1} = \nu_\infty (1+A),$$

biće :

$$c_f = \frac{3\nu_\infty(1+A)}{U_\infty f} = \frac{3(1+A)}{R_{e\infty} f^*},$$

ili

$$c_f = \frac{3(1+A)}{R_{e\infty}\sqrt{\varphi}}.$$

Skupni grafici funkcija f^*, Δ^*, Nu_x i c_f za različite vrednosti Ekertovog broja dati su na slikama 5, 6, 7, 8, 9 i lo, a grafici funkcije N_{ux} za različite vrednosti broja E dati su na slici 11.

Uticaj viskozne disipacije na veličine napred navedenih funkcija izražava se preko Ekertovog broja E. Povećanje broja E odgovara povećanju brzine U_∞ pri konstantnoj temperaturskoj razlici $T_w - T_\infty$.

Iz dobijenih grafika možemo da zaključimo sledeće:

a/ Viskozna disipacija nema gotovo nikakvog uticaja na lokalni koeficijent otpora trenja.

b/ Uticaj viskozne disipacije na dinamički granični sloj takodje je neznatan. Sa grafika se vidi da povećanju broja E odgovara smanjenje debljine dinamičkog graničnog sloja. Ovo je u saglasnosti sa tačnim rešenjem za slučaj kada se posmatra samo dinamički sloj sa konstantnom viskoznošću - $f = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$, [55]

c/ Na temperaturski granični sloj viskozna disipacija utiče tako da povećanjem broja E raste debljina ovog sloja. Ovo se može protumačiti tako što se povećanjem brzine U_∞ povećava i gradijent brzine u dinamičkom graničnom sloju $\frac{\partial u}{\partial y}$, a time i viskozno trenje, što dovodi do stvaranja izvesne količine toplote u dinamičkom graničnom sloju koja zagreva fluid, i na taj način smanjuje gradijent temperature $\frac{\partial T}{\partial y}$. Smanjivanjem gradijenta temperature smanjuje se i specifični toplotni fluks na površini ploče, $q_w = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$. Ako provodjenje toplote kroz fluid, čija je debljina jednaka debljini temperaturskog graničnog sloja Δ, približno opišemo Furijeovim zakonom

$$q_w = \frac{k}{\Delta}\left(T_w - T_\infty\right),$$

onda iz jednačine

$$\Delta = \frac{k}{q_w}\left(T_w - T_\infty\right)$$

sledi da debljina temperaturskog graničnog sloja raste, zbog smanjenja specifičnog toplotnog fluksa.

d/ Sa slike 11. vidimo da vrednost Nuseltovog broja opada sa raščenjem broja E. Ovo je potpuno razumljivo s obzirom na vezu

$$Nu_x = \frac{3}{2}\frac{x}{\Delta}$$

i na sve što je rečeno za temperaturski granični sloj. Sa iste slike se vidi, da se povećanjem broja E kod grafika javlja sve izrazitiji ekstrem - minimum. Pojava ovog minimuma nam pokazuje da na početku ploče temperaturski sloj raste brže sa povećanjem broja E.

e/ Grafici sa slike 5, koji su dobijeni za $E = 0$, odlično se slažu sa odgovarajućim graficima dobijenim u referenciji [13].

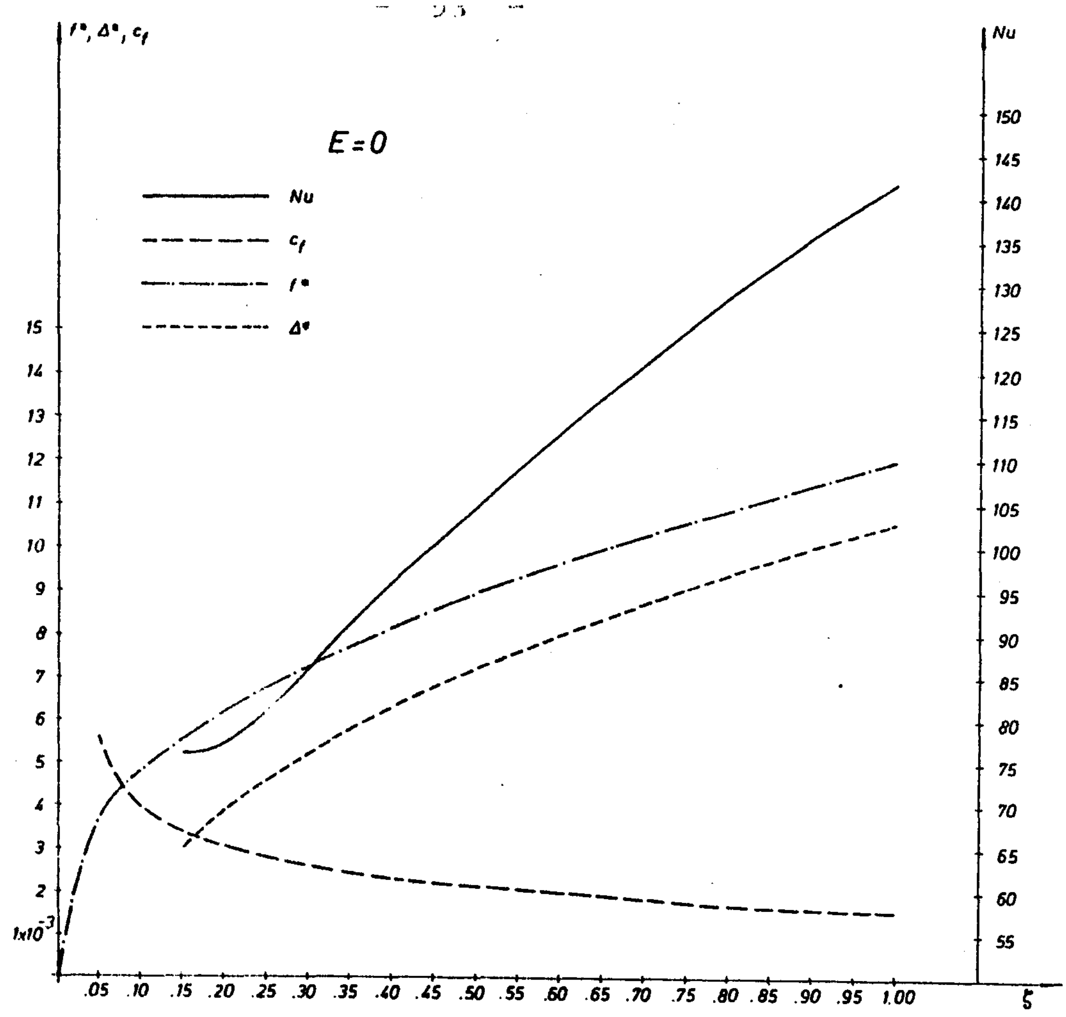
f/ Iz rezultata ovoga rada možemo izvući važan zaključak za proučavanje problema stacionarne konvekcije sa disipacijom. Činjenica što je Prandtlov broj $\sigma > 1$ ne daje nam uvek za pravo da smatramo da je temperaturski granični sloj tanji od dinamičkog sloja. Kao što vidimo iz priloženih grafika, to važi samo dotle dok Ekertov broj ne dostigne neku vrednost E_{gr} /u našem slučaju $E_{gr} \approx 0,45$/. Za veće vrednosti Ekertovog broja, pretpostavka da je za $\sigma > 1$ i $\Delta < f$ unosi grešku i ta greška obuhvata sve veći deo posmatranog intervala što je veća razlika izmedju E i E_{gr}. Prema tome u slučaju konvekcije sa disipacijom moramo voditi računa o odnosu debljina temperaturskog i dinamičkog graničnog sloja, bez obzira na vrednost Prandtlovog broja.

Na kraju možemo izneti neke zaključke o varijacionom principu iščezavajućeg parametra primenjenom u ovom radu i njegovoj primeni na dobijanje aproksimativnih rešenja u problemima dinamičkog i temperaturskog graničnog sloja.

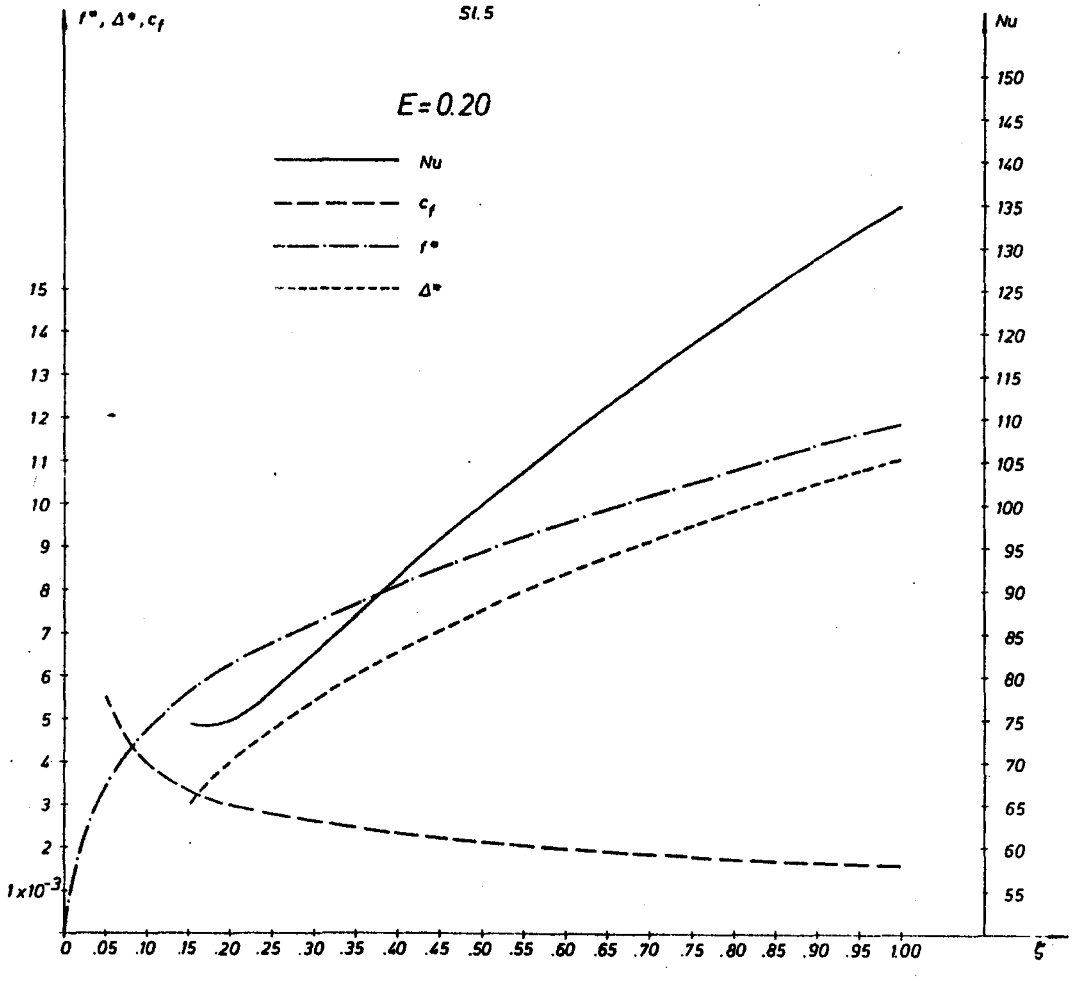
Vidimo da se verificiranje ovog varijacionog principa Hamiltonovog tipa, odnosno, dobijanje diferencijalnih jednačina procesa iz stacionarnosti integrala akcije, vrši po svim pravilima varijacionog računa. Ova konstatacija važi i za dobijanje aproksimativnih rešenja direktnim metodom varijacionog računa.

Samo formiranje Lagranževe gustine ne predstavlja neku naročitu teškoću, tako da se ovaj princip može primeniti na širok krug problema ireverzibilne fizike.

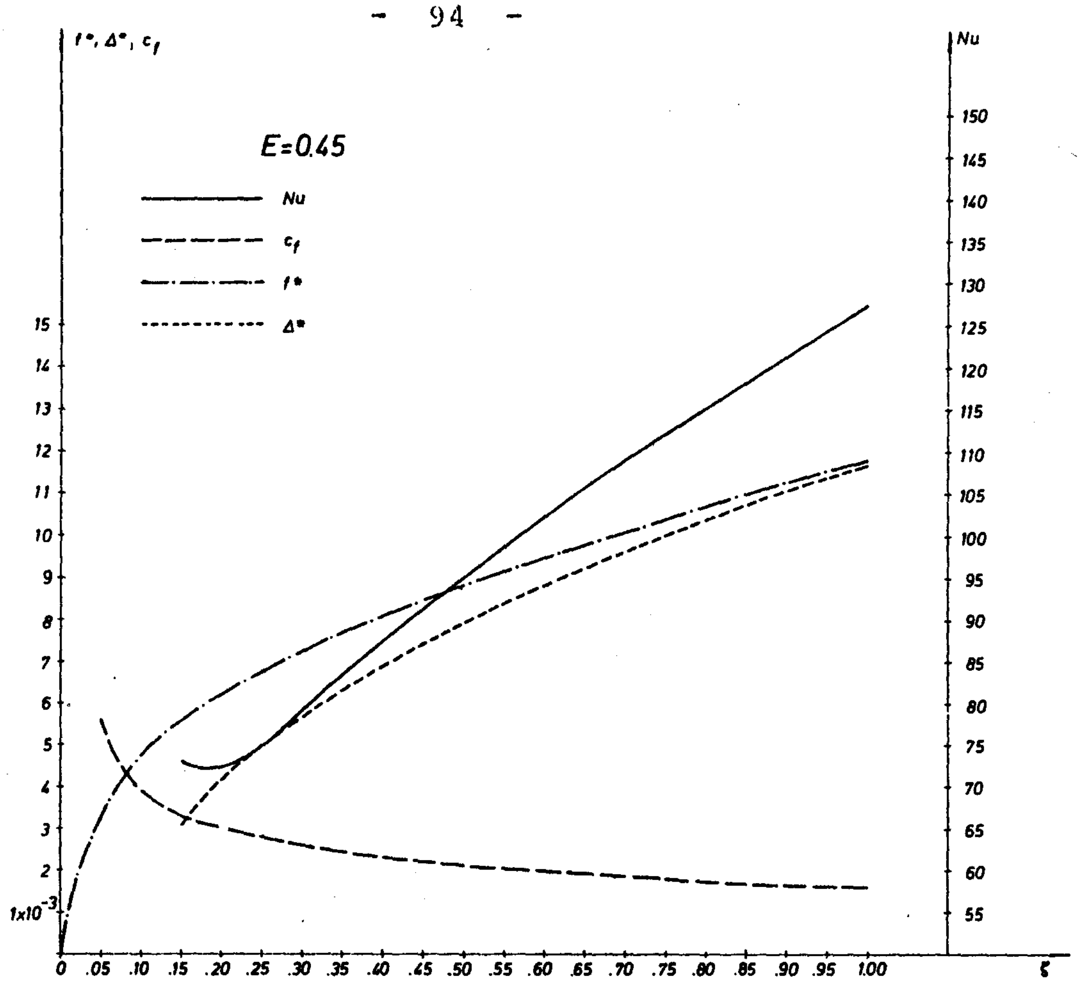
Princip je vrlo pogodan za dobijanje aproksimativnih rešenja direktnim metodom varijacionog računa u smislu Kantoroviča, tj. metodom parcijalne integracije. Dobijena aproksimativna rešenja dobro se slažu sa tačnim rešenjima i ovo slaganje bi moglo biti još veće ako bi se izabrali pogodniji profili brzine i temperature, što izlazi izvan okvira ovoga rada.


f^*, Δ^*, c_f
Nu
E=0
Nu
c_f
f^*
Δ^*
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1x10^-3
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
.05 .10 .15 .20 .25 .30 .35 .40 .45 .50 .55 .60 .65 .70 .75 .80 .85 .90 .95 1.00
ξ

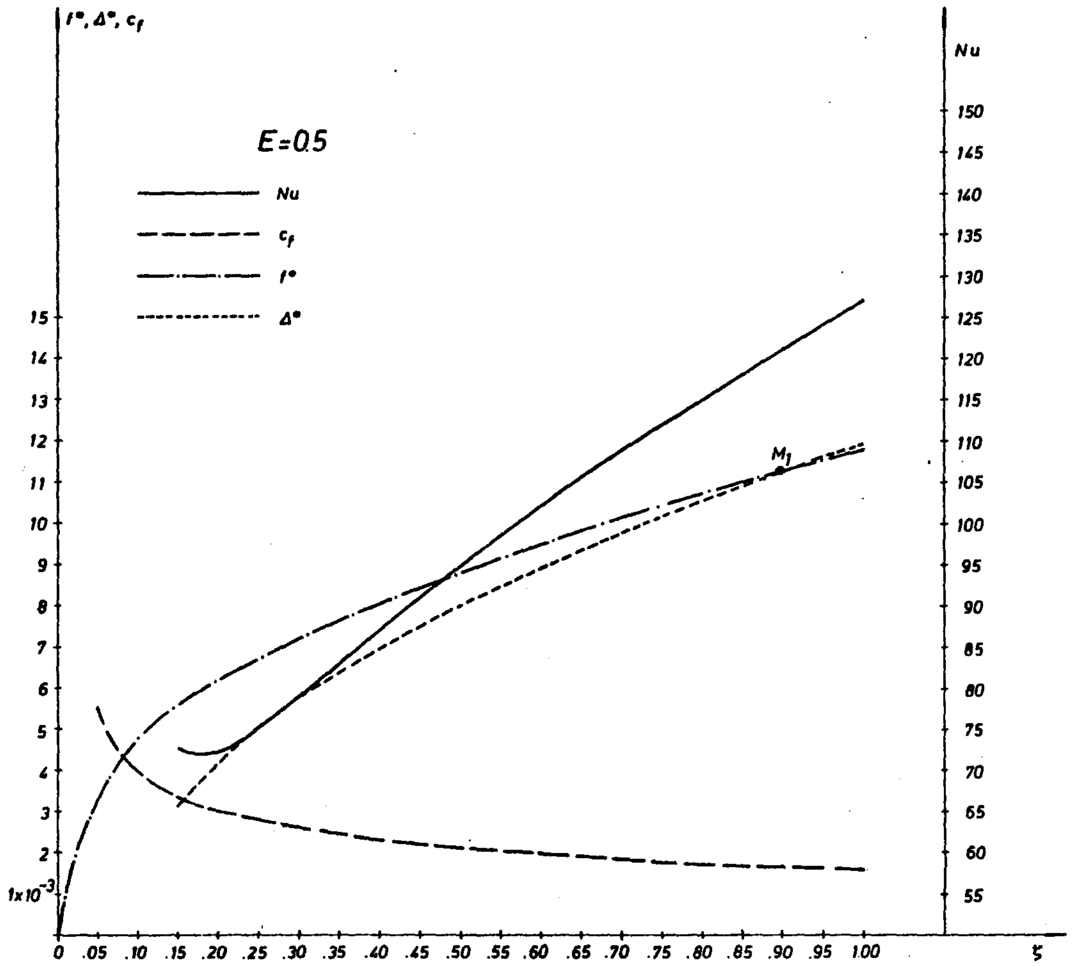
Sl.5


f^*, Δ^*, c_f
Nu
E=0.20
Nu
c_f
f^*
Δ^*
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1x10^-3
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
0 .05 .10 .15 .20 .25 .30 .35 .40 .45 .50 .55 .60 .65 .70 .75 .80 .85 .90 .95 1.00
ξ

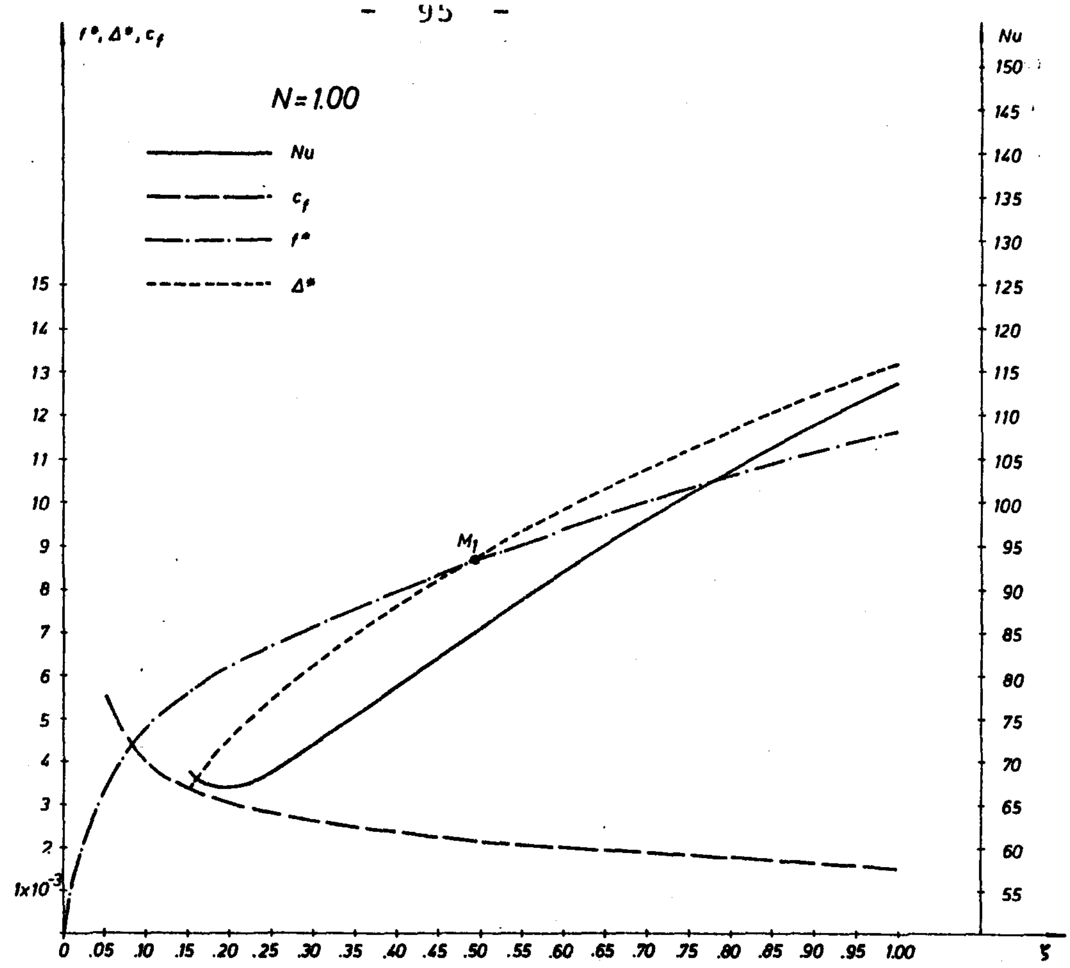
Sl.6


f*, Δ*, c_f
Nu
E=0.45
Nu
c_f
f*
Δ*
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1x10⁻³
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
0 .05 .10 .15 .20 .25 .30 .35 .40 .45 .50 .55 .60 .65 .70 .75 .80 .85 .90 .95 1.00
ζ

Sl. 7

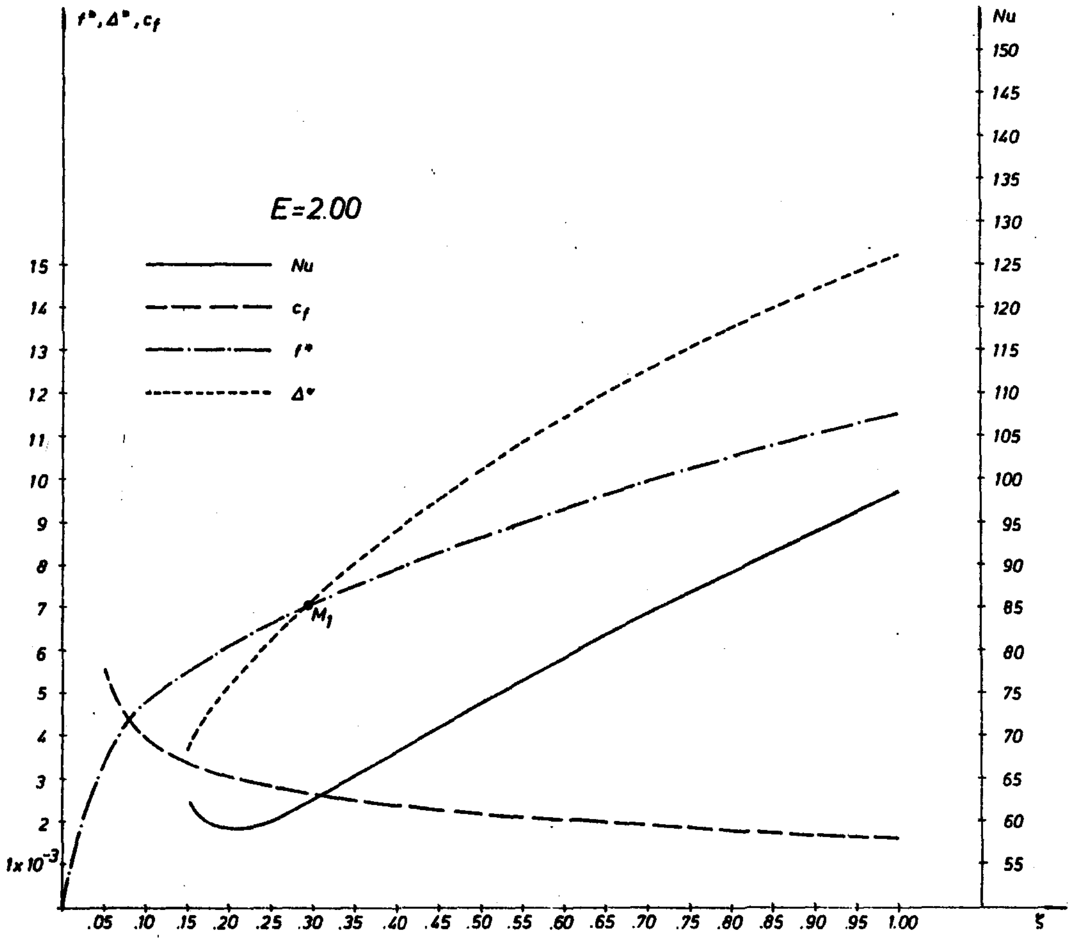

f*, Δ*, c_f
Nu
E=0.5
Nu
c_f
f*
Δ*
M1
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1x10⁻³
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
0 .05 .10 .15 .20 .25 .30 .35 .40 .45 .50 .55 .60 .65 .70 .75 .80 .85 .90 .95 1.00
ζ

Sl. 8



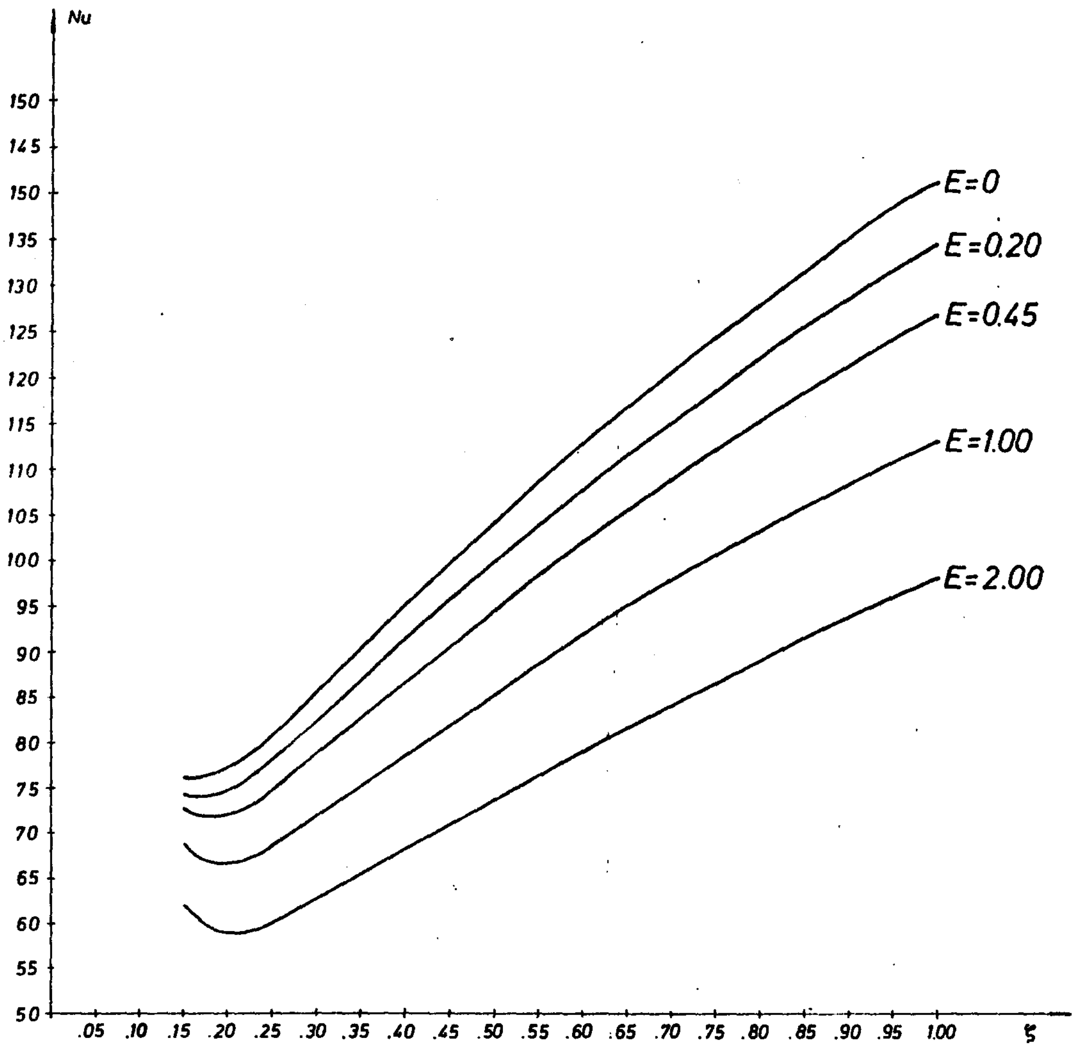
f^*, Δ^*, c_f
N=1.00
Nu
c_f
f^*
Δ^*
M_1
Nu
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
$1x10^{-3}$
0 .05 .10 .15 .20 .25 .30 .35 .40 .45 .50 .55 .60 .65 .70 .75 .80 .85 .90 .95 1.00
ξ

Sl.9



f^*, Δ^*, c_f
E=2.00
Nu
c_f
f^*
Δ^*
M_1
Nu
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
$1x10^{-3}$
.05 .10 .15 .20 .25 .30 .35 .40 .45 .50 .55 .60 .65 .70 .75 .80 .85 .90 .95 1.00
ξ

Sl.10


Nu
150
145
150
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
.05 .10 .15 .20 .25 .30 .35 .40 .45 .50 .55 .60 .65 .70 .75 .80 .85 .90 .95 1.00
ξ
E=0
E=0.20
E=0.45
E=1.00
E=2.00

Sl. 11

L i t e r a t u r a

[1] - M. Pavlović, A Variational Approach to the Theory of Temperature Boundary Layer. Publications de l'institut mathematique T.13 /27/ pp. 89-1oo Beograd 1972.

[2] - M. Pavlović, Primena jednog varijacionog metoda na problem nestacionarnog temperaturskog graničnog sloja. Matematički vesnik 9/24/ sv. 4 1972. str. 4o9-415.

[3] - B. Vujanović, Dj. Djukić, M. Pavlović, A Variational Principle for the Laminar Boundary Layer Theory. Bolletino U.M.I. /4/ 7 /1973/ 377-391.

[4] - M. Planck: Das Prinzip der Kleinsten Wirkung Die Kultur der Gegenwart V.1 Physik 1915. /korišćen ruski prevod u zborniku
1959. . 581.

[5] - Glansdorff, P. and Prigogine, I., "On a General Evolution Criterion in Macroscopic Physics", Physica, Vol. 3o, 1964, pp. 351-374.

[6] - Glansdorff, P. and Prigogine, I., "Variational Properties and Fluctuation Theory", Physica Vol. 31, 1965, pp. 1242-1254.

[7] - Schechter, R. S. The Variational Method in Engineering 1 st ad., McGraw-Hill, New York, 1967.

[8] - Prigogine I., Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes, Charles C. Thomas, Springfield III., 1955.

[9] - Glansdorff, P., Prigogine, I., Sur les propriétès différentielles de la production d'entropie, Physica 2o, p. 773 /1954/

[1o] - Glansdorff, P., On a Non-Linear Law of Irreversible Phenomena with Stationary Constraints, Mol. Phys., 3, p. 277 /196o/

[11] - Glansdorff P., Prigogine I., Hays P., Variational Properties of a Viscons Liquid at a Nonuniform Temperature, Phys. of Fluids, 5, p. 144 /1962/.

[12] - Schechter R. S., On a Variational Principle for the Reiner-Rivlin Fluid, Chem. Eng. Sci. 17, p. 8o3 /1962/

[13] - Cheng S. C., Birta L. G., Su Y. L. Application of a Variational Method to Flow over a Flat Plate in the Eutrance Region with Variable Physical Properties Int. I. Heat Mass Transfer. Vol 15 1933-1952 Pergamon Press 1972. Printed Great Britain.

[14] - D. F. Hays, A Variational Formulation Applied to Conelte and Poisenille Flow, Bul. Acad. Belg. Classe Sciences 49, pp. 576-6o2 /1963/

[15] - H. W. Butler and R. L. Rackley, Application of a Variational formulation to Non-equilibrium Fluid Flow, Int. J. Heat Mass Transfer 1o, pp. 1255-1266 /1967/

[16] - D. F. Hays, An Extended Variational Method Applied to Poisenille Flow: Temperature Beyendent Viscosity. Int. J. Heat Mass Transfer 9, pp. 165-17o /1966/

[17] - R. J. Donnelly, R. Herman and I. Prigogine, Symposium on Non-equilibrium Thermodynamics: Variational Techniques and Stability, Part 1. University of Chicago Press /1966/

[18] - R. S. Schechter, The Variational Method in Engineering, Chapter 5. McGraw-Hill /1967/

[19] - Reynaud J. J. Application of the Local Potential Concept to Time-Dependent Diffusion Problems, Masters thesis, Department of Chemical Engineering Univ. Texas, Austin, Tex., 1962.

[2o] - Finlaxson B. A., Scriven L. E., The Method of Weighted Residuals and Its Relation to Certain Variational Principles for Transport Process, Chem. Engr. Sci 2o, p 395 /1965/

[21] - Schechter R. S. Himmelblau D. M., The Local Potential and Hydrodynamic Stability, Phys. of Fluids, 8 p. 1431 /1965/

[22] - Dryden, H. L., Murnaghau, F. D., and Bateman, H., "Motion of an Incompressible Viscons Fluid", Hydrodynamics, 1 st ed., Dover, 1956., pp 168-171.

[23] - Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics, 1 st ed. McGraw-Hill, New York, 1953. p 298.

[24] - Slattery, J. C., "A Widely Applicable Type of Variational Integral", Institute of Cemical Engineer Science, Vol 19, 1964. pp 8o1-8o6.

[25] - Finlayson B.A., and Scriven L.E /1967./. On the Search for Variational Principles, Int. J. Heat Mass Transfer 1o, 799-821.

[26] - Biot, M.A. /1957/. New Methods in Heat Flow Analysis with Applications to Flight Structures, J. Aero.Sci. 24, 857-873.

[27] - Biot, M. A. /1959/. Further Develoments of New Methods in Heat-Flow Analysis, J. Aerosp. Sci. 26, 367-381.

[28] - Biot, M. A. /1962/. Lagrangian Thermodynamics of Heat Transfer in Systems Including Fluid Motion, J. Aerosp. Sci. 29, 568-577.

[29] - Biot, M. A. /1967/. Compementary Forms of the Variational Principle for Heat Conduction and Convection, J. Franklin Inst. 283, 372-378.

[30] - M. Levinson, "Thermal Stresses in an Idealized Wing Structure", J. Aerospace Sci. 28, 899-901 /1961/.

[31] - T. J. Lardner "Biot's Variational Principle in Heat Conduction", AIAAJ. 1, 196-206 /1963/

[32] - H.N.Chu, "Applikation of Biot's Variational Method to Convective Heating of a Slab", J.Spacecraft Rocket, 1, 686-8 /1964/

[33] - A.F.Emery, "Use of Biot's Variational Technique in Heat Conduktion", AIAAJ. 3, 1525-6 /1965/.

[34] - А.Н. Тао, Вариационый метод расчета теплоотдачи при вынужденом течении жидкости в трубах произвольного поперечног сечения. Достижения в области теплообмена. Москва 1970, 322-338.

[35] - R.M.Morse and S. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill New York 1953.

[36] - B.A.Boley, "The Analysis of Problems of Heat Conduction and Melting: High Temperature Structures and Materials, pp 260-315, Peramon, New York, 1964.

[37] - K.R.Atkins, "Liquid Helium", Cambridge University Press, London 1959.

[38] - V.Peshkov, Second Sound in Helium II, J.Phys.USSR, 8: 381 /1944/.

[39] - M.Chester, Second Sound in Solids, Phys. Rev. 131 /25/: 2013-2015 /1963/.

[40] - B.Bertman and D.J.Sandiford, Second Sound in Solid Helium, Sci. Amer., May, 1970.

[41] - B.Vujanovic: An Approach to Linear and Nonlinear Heat-Transfer Problem Using a Lagrangian, AIAA J. Vol. 9, No 1, 1971. pp 131-134.

[42] - B.Vujanovic and A.M.Strauss, Heat Transfer with Nonlinear Boundary Conditions via a Variational Principle J.AIAA 9:2 /327-330/, 1971.

[43] - B.Vujanovic and Dj.Djukic, On One Variational Principle of Hamilton's Type for Nonlinear Heat Transfer Problem, Int J. Heat Mass Transfer Vol. 15 pp 1111-1123, 1972.

[44] - Р. Шехтер, Вариационый метод в инженерных расчетах стр. 212 , Москва 1971.

[45] - K.Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity Oxford 1968.

[46] - J.Serrin, Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, Berlin 1959.

[47] - R.L.Seliger and G.B.Whithaam, Variational Principles in Continuum Mechanics, Proc. Roy.Soc.A. 305, 1-25 /1968/.

[48] - W.W.Johnson, "Some Variational Theorems for Non-Newtonian Flow", Phys. of Fluids Vol.3, p 871, 1960.

[49] - B.A.Finlayson and L.E.Scriven, On the Search for Variational Principles, Int.J.Heat Mass Transfer Vol. 10, pp 799-821 /1967/.

[50] - R.B.Bird, W.E.Stewart and E.N.Lightfoot, Transport Phenomena, New York, 1960.

[51] - И.С. Аржаных, о цепных системах теории нелинейных колебаний, издательство Академии наук УССР, Киев 1963.

[52] - А. Жукаускас, И. Жюгжда, теплоотдача в ламинарном потоке жидкости, издательство „МИНТИС" Вильнос - 1967.

[53] - T.R.Goodmman, A nonsteady Convection Problem, Advance sin heat transfer, Academic Press, New York - London Vol. 1964. pp 110-115.

[54] - С.М. Тарг, Основные задачи ламинарных течений, Гостехиздат 1951, стр. 178-186.

[55] - Л.Г. Лойцянский, Ламинарный пограничный слой, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1962, стр. 32.

[56] - Nigam S.D., Agrawal H.C., A Variational Principle for the Convection of Heat, J.Math,Mech.9, p. 869 /1960/.