Koriolan S. Gilezan

NEKE GENERALIZACIJE PSEUDO-BULOVOG PROGRAMIRANJA

-doktorska disertacija, naučni rukovodilac Dr Slaviša Prešić-

Beograd, 1971.

S A D R Ž A J

U V O D

Pseudo-Bulovo programiranje je algebarska teorija zasnovana na teoriji Bulove algebre. Pseudo-Bulovo programiranje koristi se kao instrument za ispitivanje u mnogim granama matematike: u rešavanju niza problema iz teorije grafova, teorije transporta,teorije igara, algebarske teorije konačnih automata itd. G. B. Dantzig [27], [28], [29] pokazao je medju prvima da veliki broj različitih problema iz operativnih ispitivanja i drugih srodnih oblasti mogu biti prikazani na jedinstven način, korišćenjem programirane matematike sa bivalentnim promenljivim.

Idejni inicijator za mogućnost primene Bulove algebre u ekonomskim problemima bio je R. Fortet, koji je u radu [38] objasnio čvrstu vezu izmedju Bulove algebre i nekih kombinatornih problema koji se pojavljuju u operativnom ispitivanju. U radu [37] pokazuje da neki značajni problemi iz ekonomike mogu biti tretirani ovim matematičkim aparatom. Značajne rezultate u ovom pravcu isto tako imaju P. Camion [21] i K. Maghout [98], [99], [100].

U radovima [117], [120], [122], [145] i dr. rumunski matematičari predvodjeni Gr. C. Moisilom, koriste Bulovu algebru i teoriju Galois-ovih polja u algebarskoj teoriji automata, dok u [119] Gr. C. Moisil daje mogućnost za korišćenje polivalentne logike u teoriji konačnih automata.

U slučaju pseudo-Bulovog programiranja razmatraju se problemi minimizacije funkcije bez, ili sa dodatnim restrikcijama (forme jednačina ili nejednačina)i pritom polazni domen je dvočlan (ili je neka njegova Dekartova potencija).

U ovom radu razmatraju se opštiji problemi, - slučajevi kada polazni domen ima i više nego dva elementa.

Rad se sastoji iz dva dela.

U prvom delu izlažu se razni poznati rezultati pseudo-Bulovog programiranja koje koristimo, i na koje se pozivamo u daljem izlaganju.

U radu [37] R. Fortet naglašava potrebu za iznala -

ženjem metode minimizacije pseudo-Bulovih funkcija. P. Ivanescu, S. Rudeanu i I. Rosenberg [65] dali su jednu metodu minimizacije funkcije

$$f : L_2^n \longrightarrow C ,$$

gde je $L_2 = \{0,1\}$, C skup realnih brojeva.

U [56] i [57] date su metode za rešavanje Bulovih jednačina i nejednačina. One su proširenje poznatih metoda W. E. Johnson-a [83], C. Löwenheim-a [97] i S. Rudeanu-a [133], [155], [137].

U [57] P. Ivanescu koristi rezultate R. Forteta [38] P. Camiona [21] i proširuje metodu sukcesivnih eliminacija nepoznatih za rešavanje Bulovih jednačina – na pseudo-Bulove jednačine.

U [124] S. Prešić daje opštu metodu rešavanja jednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu.

Drugi deo sadrži generalizacije nekih metoda i neke nove metode pseudo-Bulovog programiranja.

Proširen je definicioni domen pseudo-Bulove funkcije na

$$L_p = \{0,1,\dots,p-1\} \quad (\text{ili } L_p = \{s_0,s_1,\dots,s_{p-1}\},\ s_i \in C).$$

Drugi deo čine pet glava.

Prva glava sadrži proširenje poznate teoreme o kanonskoj disjunktivnoj i o kanonskoj konjunktivnoj normalnoj formi za Bulove funkcije na funkcije $f : L_p^n \longrightarrow S$, gde je S neprazan skup, a L_p konačan skup od p elemenata. Dalje, dokazuje se da se realne funkcije $f : L_p^n \longrightarrow C$ mogu transformisati u kanonsku disjunktivnu normalnu formu.

Druga glava sadrži jedno proširenje metode za odredjivanje skupa tačaka iz L_p^n , gde funkcija $f : L_p^n \longrightarrow C$ ima minimum (ova metoda obradjena je u [45], u saradnji sa B. Latinovićem).

Treća glava sadrži neka proširenja metoda za rešavanje pseudo-Bulovih jednačina i nejednačina kao i nove metode.

Tako, proširena je metoda rešavanja jednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu na nejednačine S. Prešića, tj. dokazano je da se rešavajuća funkcija za jednačine lako transformiše i na nejednačine.

Dalje, proširena je metoda sukcesivne eliminacije nepoznatih za rešavanje Bulovih i pseudo-Bulovih jednačina (S. Rudeanu i P. Ivanescu) na jednačine $f(x_1,\dots,x_n) = 0$, gde su rešenja u skupu L_p^n $(p \geqslant 2)$.

Izložena je nova metoda za rešavanje jednačina čija rešenja pripadaju skupu L_p^n. Ova metoda odredjuje one vektore iz L_p^n, koji nisu rešenja jednačine.

Proširena je L. Löwenheimova teorema za Bulove jednačine. Ako je poznato partikularno rešenje $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ jednačine $f(x_1,\dots,x_n) = 0$, onda je njeno opšte rešenje

$$x_i = \xi_i \left[f(p_1,\dots,p_n) \neq 0\right] + p_i \overline{\left[f(p_1,\dots,p_n) \neq 0\right]}, \quad i=1,\dots,n,$$

gde je $(p_1,\dots,p_n) \in L_p^n$, $p \geqslant 2$.

U četvrtoj glavi dokazano je da se neki problemi matričnih igara mogu svesti na pseudo-Bulovo programiranje. Ovi problemi svode se na odredjivanje minimuma nekih pseudo-Bulovih funkcija i rešavanje jednačina i nejednačina u L_p^n, $p \geqslant 2$.

U petoj glavi proširena su tri problema minimizacije pri realnom funkcionisanju releja sa običnim i specijalnim kontaktima na istoj kotvi releja (problemi su postavljeni i rešeni od strane P. Ivanescua i S. Rudeanua), a čija se aktiviranja i deaktiviranja vrše u p pozicija. Dakle, proširen je problem odredjivanja najprostijeg izraza E, koji definiše funkciju $f : L_p^n \longrightarrow L_2$, i ispunjava tri problema minimizacije.

I DEO

1. PSEUDO-BULOVE FUNKCIJE

U ovom delu prikazaćemo metodu za odredjivanje skupa tačaka u kojima pseudo-Bulova funkcija f ima minimum, a koja je opisana u [55] i [78] i data od S. Rudeanu-a, P. Ivanescu-a i I. Rosenberg-a.

Na skupu $\{0,1\}$ definišemo binarnu operaciju „množenje" u oznaci „$\cdot$" , binarnu operaciju „uniranje" u oznaci „$\vee$" i unarnu operaciju „negacija" u oznaci „$-$" , date tabelarno (tabela 1).

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

a	0	1
$\bar{a}$	1	0

Tabela 1.

Neposredno proizlazi da je

$$a \vee b = a + b - ab$$

$$\bar{a} = 1 - a ,$$

gde su $+$, $-$ i $\cdot$ obične aritmetičke operacije.

U vezi sa bilo kojom relacijom C uvodimo sledeću relaciju:

(1)

$$\left[C(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\right] = \begin{cases} 1, & \text{ako je zadovoljeno } C(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ 0, & \text{u suprotnom slučaju.} \end{cases}$$

Skup $\{0,1\}$ sa operacijama „$\vee$" , „$\cdot$" i „$-$" je jedan model Bulove algebre; obeležavamo ga sa L_2 .

Kartezijanski proizvod $L_2 \times L_2 \times \ldots \times L_2$ obeležavamo sa L_2^n . Dakle:

$$L_2^n = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \middle| \; a_i \in L_2, i=1,2,\ldots,n \right\}.$$

D e f i n i c i j a 1. Preslikavanje f skupa L_2^n u skup realnih brojeva C, tj.

$$(2) \qquad f : L_2^n \rightarrow C$$

zovemo pseudo-Bulova funkcija (PBF).

Poznata je sledeća teorema.

T e o r e m a 1. Svaka PBF može biti prikazana polinomom sa celim koeficijentima, koji je linearan u odnosu na svaku promenljivu.

Tačka $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in L_2^n$ zove se minimalna (apsolutno minimalna) tačka, ako je

$$(3) \qquad f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za svako

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L_2^n .$$

Problem se sastoji u odredjivanju minimalnih tačaka u kojima pseudo-Bulova funkcija (2) ima minimum.

Na osnovu Teoreme 1., možemo pisati

$$(3.1) \quad f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) + h_1(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

gde su g_1 i h_1 pseudo-Bulove funkcije, od $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Smenom $\overline{x}_1 = 1 - x_1$ u (3.1) nejednakost $\big($tipa (3)$\big)$

$$(4.1) \qquad f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f_1(\overline{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se transformiše u

$$(4'.1) \qquad (x_1 - \overline{x}_1) g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq 0 .$$

Uvedimo funkciju

$$\varphi_1 : L_2^n \rightarrow L_2 ,$$

tako da

$$(5.1) \quad x_1 = \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \left[g_1 < 0 \right] + u_1 \left[g_1 = 0 \right] ,$$

gde je u_1 parametar iz L_2 .

Neka je x_1^+ kanonska disjunktivna forma izraza $[g_1 < 0]$.

Prema tome x_1^+ zavisi od $x_2, x_3, \ldots, x_n$, tj.

(5'.1) $$x_1^+ = x_1^+(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Smenom (5'.1) u (3.1) dobijamo

$$f_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f_1\left(x_1^+(x_2, x_3, \ldots, x_n), x_2, x_3, \ldots, x_n\right) =$$

(3.2) $$= x_2 g_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) + h_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) \; .$$

Ponavljamo gornji postupak, tj.

(4.2) $$f_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq f_2(\bar{x}_2, x_3, \ldots, x_n) \; ,$$

gde je

(4'.2) $$(x_2 - \bar{x}_2) g_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) \leq 0 \; .$$

Uvedimo funkciju

$$\varphi_2 : L_2^{n-1} \rightarrow L_2 \; ,$$

tako da

(5.2) $$x_2 = \varphi_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) = [g_2 < 0] + u_2 [g_2 = 0] \; ,$$

gde je u_2 parametar iz L_2 .

Neka je x_2^+ kanonska disjunktivna forma izraza $[g_2 < 0]$. Prema tome x_2^+ zavisi od $x_3, x_4, \ldots, x_n$, tj.

(5'.2) $$x_2^+ = x_2^+(x_3, x_4, \ldots, x_n) \; .$$

Dalje, zamenom (5'.2) u (3.2), dobijamo

(3.3) $$f_3(x_3, x_4, \ldots, x_n) = f_2(x_2^+(x_3, \ldots, x_n), x_3, \ldots, x_n) =$$
$$= x_3 g_3(x_4, \ldots, x_n) + h_3(x_4, \ldots, x_n) \; .$$

Ovaj postupak dalje ponavljamo. Drugim rečima, za svaki indeks i, koji zadovoljava nejednakost $1 \leq i \leq n-1$, imamo

(3.i) $\quad f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_i g_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) + h_i(x_{i+1}, \ldots, x_n)$

i relaciju

(4.i) $\quad f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$,

koju možemo napisati

(4'.i) $\quad (x_i - \bar{x}_i) g_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) \leq 0$.

Uvedimo i funkciju

$$\varphi_i : L_2^{n-i+1} \to L_2 ,$$

tako da

(5.i) $\quad x_i = \varphi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) = [g_i < 0] + u_i [g_i = 0]$,

gde je u_i parametar iz L_2 .

Neka je x_i^+ kanonska disjunktivna forma izraza $[g_i < 0]$, tj.

(5'.i) $\quad x_i^+ = x_i^+(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$.

Zamenom (5'.i) u (3.i) dobijamo funkciju

$$f_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = f_i(x_i^+(x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n) .$$

Ponavljajući gornji postupak, na kraju dobijamo

(3.n) $\quad f_n(x_n) = x_n g_n + h_n$,

gde su g_n i h_n konstante.

Prema tome

(4.n) $\quad f_n(x_n) \leq f_n(\bar{x}_n)$

ili

(4'.n) $\quad (x_n - \bar{x}_n) g_n \leq 0$.

Relacija (4'.n) daje

(5.n) $\quad x_n = [g_n < 0] + u_n [g_n = 0]$,

tj.

$$x_n = X_n(u_n) ,$$

gde je u_n parametar iz L_2 .

Zamenom (5.n) u (5.n-1) eliminišemo x_n ; produžimo postupak eliminacije.

Prema tome iz

(5.n),(5.n-1),...,(5.2),(5.1)

dobićemo

$$\begin{aligned} x_n &= X_n(u_n) \\ x_{n-1} &= X_{n-1}(u_n,u_{n-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i &= X_i(u_n,u_{n-1},\ldots,u_i) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 &= X_1(u_n,u_{n-1},\ldots,u_2,u_1) , \end{aligned} \tag{6}$$

gde su $u_n,u_{n-1},\ldots,u_1$ parametri iz skupa L_2 .

T e o r e m a 2. Za svaki skup vrednosti parametara $(u_1^*,u_2^*,\ldots,u_n^*)\in L_2^n$ sistema (6) dobija se skup vrednosti $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\in L_2^n$, za koje funkcija f_1 ima minimum obrnuto, za svaki skup $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\in L_2^n$, za koje funkcija f_1 ima minimum,- postoji skup $(u_1^*,u_2^*,\ldots,u_n^*)\in L_2^n$ koji zadovoljava relacije (6) .

Drugim rečima, gornji algoritam daje nam sve tačke (apsolutne minimalne) iz L_2^n , za koje funkcija f_1 ima minimum.

P r i m e d b a . Zamenom (5.i) u (3.i), $1\leq i\leq n-1$ dobijamo funkciju f_{i+1} koja ne zavisi od parametra u_i .

2. PSEUDO-BULOVE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

U ovom odeljku skicirane su neke metode za rešavanje skupa pseudo-Bulovih jednačina, koje su opisane u [57], [78] i [151], a koje se oslanjaju na poznate metode za rešavanja Bulovih jednačina u pseudo-Bulovom slučaju (W.E.Johnson [56], L. Löwenheim [97], S. Rudeanu [140]). U radu [124] S. Prešić je dao opštu metodu rešavanja jednačina, čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu.

Ako su

$$\varphi : L_2^n \to L_2 ,$$

$$f : L_2^n \to Z ,$$

Bulova funkcija i pseudo-Bulova funkcija, onda su

(7) $$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 ,$$

(8) $$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 ,$$

Bulova jednačina i pseudo-Bulova jednačina, a

(7') $$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n) \, \rho \, 0 ,$$

(8') $$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \, \rho \, 0 ,$$

(gde je ρ jedna od relacija $\leq$ $\geq$, $<$, $>$) Bulova nejednačina i pseudo-Bulova nejednačina.

U [64], [54], [63], [78] su date metode za rešavanje Bulovih i pseudo-Bulovih nejednačina.

a. Metoda rešavanja jednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu

Neka je $S = \{s_1,s_2,\ldots,s_p\}$ dat konačan skup (sa p elemenata) i neka je

$$J : S \to E$$

jedna funkcija, gde je E izvestan skup koji sadrži i dva elementa označena 0 i 1 .

Rešavajuću funkciju A

$$\left(A(q,U_1,U_2,\ldots,U_{p-1})\in S,\quad U_i\in E\ ,\ q\in S\right),$$

definišemo

$$A(q,0,U_2,\ldots,U_{p-1}) \overset{\text{def}}{=\!=} q$$

$$A(q,u_1,0,\ldots,U_{p-1}) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha q$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A(q,u_1,u_2,\ldots,0) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha^{p-2} q$$

$$A(q,u_1,u_2,\ldots,u_{p-1}) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha^{p-1} q\ ,$$

gde je $u_i \neq 0$; u_i , $U_i\in E$; $q\in S$ i gde je

$$\alpha :\ S \to S$$

sledeće preslikavanje (ciklus) $\alpha s_i = s_{i+1}$, $\alpha s_p = s_1$.

Uvodimo:

$$1\cdot 0 = 0\ ,\quad 0\cdot 0 = 0\ ,\quad 1\cdot 1 = 1\ ,\quad q\cdot 0 = 0\ ,$$

$$q\cdot 1 = q\ ,\quad u+0 = u\ ,\quad u\in E\ ,\ q\in S.$$

Poznate su sledeće leme.

L e m a 1. Neka je $J(x) = 0$ moguća jednačina . Njeno opšte rešenje odredjeno je jednakošću

$$x = A(q,J(q),J(\alpha q),\ldots,J(\alpha^{p-2}q))\ ,$$

gde je q proizvoljan element skupa S .

Detalje i dokaz vidi u radu [124] od S. Prešića.

Eksplicitna formula funkcije A je

$$\begin{aligned} A(q,U_1,U_2,\ldots,U_{p-1}) \overset{\text{def}}{=\!=}\ & [U_1=0]\,q+[U_2=0]\,\overline{[U_1=0]}\,(\alpha q)\ + \\ & +\overline{[U_1=0]}\,\overline{[U_2=0]}\,[U_3=0]\,(\alpha^2 q)+ \\ & +\ldots+\overline{[U_1=0]}\,\overline{[U_2=0]}\ldots\overline{[U_{p-2}=0]}\,[U_{p-1}=0]\,(\alpha^{p-2}q)\ + \\ & +\overline{[U_1=0]}\,\overline{[U_2=0]}\ldots\overline{[U_{p-2}=0]}\,\overline{[U_{p-1}=0]}\,(\alpha^{p-1}q)\ , \end{aligned}$$

gde

$U+V+W+\ldots+R$ znači $(((U+V)+W)+\ldots+R)$;

$U\cdot V\cdot W\cdot\ldots\cdot R$ znači $(((U\cdot V)\cdot W)\cdot\ldots\cdot R)$;

$$[U_i=0]=\begin{cases}1 \ , & \text{ako je } U_i = 0\\ 0 \ , & \text{ako je } U_i \neq 0 \ .\end{cases}$$

Svaka Bulova jednačina (7) može se transformisati u oblik

$$\varphi_1(x_2,\ldots,x_n)x_1 \cup \Psi_1(x_2,\ldots,x_n)\ \bar{x}_1 = 0 \ ,$$

gde su φ_1 i Ψ_1 Bulove funkcije.

L e m a 2. Bulova jednačina

$$a\,x \cup b\ \bar{x} = 0$$

je moguća ako i samo ako $a\cdot b=0$; njeno rešenje je odredjeno relacijom

$$b \leq x \leq \bar{a}$$

ili jednakošću

$$x = [a=0]\,p \cup \overline{[b=0]}\ \bar{p} \ ,$$

gde je p proizvoljan element skupa L_2

ili jednakošću

$$x = b \cup p \ ,$$

gde je $p \leq \bar{a}\ \bar{b}$.

Svaka pseudo-Bulova jednačina (8) može se transformisati u oblik

$$\varphi_1(x_2,\ldots,x_n)x_1 + \Psi_1(x_2,\ldots,x_n)\ \bar{x}_1 = 0 \ ,$$

gde su φ_1 i Ψ_1 pseudo-Bulove funkcije.

L e m a 3. Pseudo-Bulova jednačina

$$ax + b\ \bar{x} = 0$$

je moguća ako i samo ako $a \cdot b=0$; njeno rešenje je odredjeno formulom

$$x = [a=0]\,p + \overline{[b=0]}\,\overline{p} ,$$

gde je p proizvoljan element skupa L_2 .

Neka je $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ partikularno rešenje jednačine (8).

L e m a 4. Ako je $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ jedno partikularno rešenje jednačine (8), onda će njeno opšte rešenje biti

$$x_i = \xi_i \left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right] + p_i \overline{\left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right]},$$

gde su $p_1,\dots,p_n$ proizvoljni elementi skupa L_2 .

Lema 2. i 3. su specijalni slučajevi Leme 1. Postoje i posebni dokazi [78].

b. Metoda sukcesivnih eliminacija

Metodu sukcesivnih eliminacija, koju je dao S. Rudeanu u [133] za Bulove jednačine, proširio je P. Ivanescu u [57] na pseudo-Bulove jednačine i to:

Svaka pseudo-Bulova jednačina može se transformisati u oblik

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1\,\varphi_1(x_2,\dots,x_n) + \overline{x}_1\,\Psi_1(x_2,\dots,x_n) ,$$

gde su φ_1 i Ψ_1 pseudo-Bulove funkcije.

Na osnovu Leme 3. u sledećem koraku stavimo da je

$$f_2(x_2,\dots,x_n) = \varphi_1(x_2,\dots,x_n)\cdot\Psi_1(x_2,\dots,x_n) = 0$$

i

$$f_2(x_2,\dots,x_n) = x_2\varphi_2(x_3,\dots,x_n) + \overline{x}_2\Psi_2(x_3,\dots,x_n) = 0.$$

Uopšte,

$$f_k(x_k,\dots,x_n) = \varphi_{k-1}(x_k,\dots,x_n)\cdot\Psi_{k-1}(x_k,\dots,x_n) = 0$$

i

$$f_k(x_k,\dots,x_n)=x_k\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n)+\overline{x}_k\Psi_k(x_{k+1},\dots,x_n) = 0 .$$

Na kraju, imamo

$$f_n(x_n) = \varphi_n x_n + \Psi_n \overline{x}_n = 0 ,$$

gde su φ_n i Ψ_n konstante.

Definišemo za svako

$$(p_k,p_{k+1},\dots,p_n)\in L_2^{n-k+1}$$

(9.k) $$X_k(p_k,\dots,p_n) = S_k(p_{k+1},\dots,p_n)p_k + T_k(p_{k+1},\dots,p_n)\overline{p}_k, k=1,2\dots,n-1 ,$$

gde je

$$S_k(p_{k+1},\dots,p_n) = [\varphi_k(X_{k+1}(p_{k+1},\dots,p_n),\dots,X_n(p_n)) = 0],$$

$$T_k(p_{k+1},\dots,p_n) = \overline{[\Psi_k(X_{k+1}(p_{k+1},\dots,p_n),\dots,X_n(p)) = 0]}$$

i

$$x_n(p_n) = [\varphi_n = 0]p_n + \overline{[\Psi_n = 0]}\overline{p}_n , \quad p\in L_2 .$$

T e o r e m a 3. Ako je jednačina (8) moguća, sistem

$$x_i = X_i(p_i,\dots,p_n) , \quad i = 1,2,\dots,n,$$

definisan relacijama (9.1) , (9.2),...,(9.n) je opšte rešenje jednačine (8) .

Dokaz je dat u [57] .

c. Karakteristična funkcija

Neka je

(10) $$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\rho\, 0$$

(ρ je jedna od relacija $\leq$ $\geq$, $<$, $>$, $=$) pseudo - Bulova jednačina ili nejednačina.

D e f i n i c i j a 2. Karakteristična jednačina

D e f i n i c i j a 6. Jezgro jednog grafa (V, Γ) je podskup S_0 skupa V akó je S_0 unutrašnji stabilan skup i spoljašnji stabilan skup grafa, tj. ako:

1. Za svako $V_i \in S_0$, $S_0 \cap \Gamma(V_i) = \emptyset$,
2. za svako $V_j \notin S_0$, $S_0 \cap \Gamma(V_j) \neq \emptyset$.

a. Odredjivanje hromatičnog broja $N(G)$

Gornji stabilni unutrašnji skupovi S_n nekog grafa mogu biti odredjeni pomoću minimizacije pseudo-Bulove funkcije

$$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j ,$$

gde je

$$S_w = \{ V_{j_1}, V_{j_2}, \ldots, V_{j_{q_u}} \} ,$$

ako i samo ako W ima minimum u tački

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je } j \in \{j_1, \ldots, j_{q_u}\} \\ 0, & \text{ako je } j \notin \{j_1, \ldots, j_{q_u}\} . \end{cases}$$

Neka je q broj gornjih unutrašnjih stabilnih skupova i neka je

$$d_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } V_i \in S_k \\ 0, & \text{ako } V_i \notin S_k . \end{cases}$$

T e o r e m a 4. Hromatičan broj $r(G)$ jednak je minimumu pseudo-Bulove funkcije

$$F(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{k=1}^{q} x_k + (q+1) \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{q} (1 - d_{ik} x_k) , \tag{13}$$

a jedno hromatično rastavljanje $P_1, P_2, \ldots, P_r$ može se odrediti stavljajući

$$P_1 = N_1$$
$$P_2 = N_2 \setminus N_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_r = N_r \setminus \bigcup_{k=1}^{r-1} N_k,$$

gde su $N_1, N_2, \dots, N_r$ gornji unutrašnji stabilni skupovi,kada je $x_{k_1} = \dots = x_{k_r} = 1$, čije komponente pripadaju nekom vek - toru iz skupa L_2^q za koji funkcija (13) ima minimum.

b. Odredjivanje broja elemenata gornjih unutrašnjih stabilnih skupova

T e o r e m a 5. Za svaki vektor $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ iz L_2^n za koji funkcija

$$E(x_1, \dots, x_n) = (n+1) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

ima minimum i za

$$R^* = \{ V_i \mid V_i \in V \ , \ x_i^* = 1 \}$$

imamo

$$\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* = |R^*|.$$

Obratno, ma koji gornji stabilni unutrašnji skup može se odrediti na ovaj način.

c. Odredjivanje broja elemenata donjih spoljašnjih stabilnih skupova

T e o r e m a 6. Za svaki vektor $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ iz L_2^n za koje funkcija

$$H(x_1, \dots, x_n) = (n+1) \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - (c_{ij} + d_{ij}) x_j\right) + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

ima minimum i za

4. PRIMENA PSEUDO-BULOVOG PROGRAMIRANJA U PROBLEMIMA TRANSPORTA

Egervary-jeva metoda koja rešava probleme transporta([33], [34])sadrži jedan nerešen problem. Ovaj je problem kasnije rešen ([67], [68])pomoću pseudo-Bulovog programira - nja.

Problem je sledeći: Data je jedna matrica i jedan skup elemenata ove matrice koji su markirani. Svakoj vrsti i i svakoj koloni j pridruženi su pozitivni brojevi a_i i b_j. Problem se sastoji u odredjivanju jednog sistema

$$S = \{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\}$$

od vrsta i kolona koje bi pokrivale markirane brojeve (dakle ma koji markirani broj (element) treba da pripada jednoj vrsti ili jednoj koloni) tako da je zbir

$$F(S) = \sum_{h=1}^{p} a_{i_h} + \sum_{k=1}^{q} b_{j_k} \tag{14}$$

minimalan. Postoji sledeća teorema:

T e o r e m a 8. Ako je $(x_1^*, \ldots x_n^*) \in L_2^n$ minimalna tačka pseudo-Bulove funkcije

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \prod_{i \in S_j} x_i , \tag{15}$$

gde je

$$S_j = \{i \setminus i \in \{i_1, \ldots, i_j\}, a_{i_j} \text{ je markirani element}\};$$

i ako je

$$y_j^* = \prod_{i \in S_j} x_i^* \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) ,$$

onda se minimalno pokrivanje S dobija stavljanjem

$$i \in S \quad \text{ako i samo ako} \quad x_i^* = 1,$$
$$j \in S \quad \text{ako i samo ako} \quad y_j^* = 1.$$

Ma koja minimalna pokrivanja mogu se odrediti na ovaj način. Minimum funkcije (15) je jednak minimumu funkcije (14)

II D E O

I GLAVA

POTPUNA KANONSKA DISJUNKTIVNA NORMALNA FORMA I POTPUNA KANONSKA KONJUNKTIVNA NORMALNA FORMA

U [78] i [65] definisane su sledeće funkcije: Bulova funkcija, pseudo-Bulova funkcija i funkcija

(1) $$F : L_3^n \longrightarrow L_2 ,$$

gde je $L_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$L_3^n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in L_3, i=1,2,\dots,n\},$$

i dokazana je sledeća lema:

L e m a 1. Ma koja Bulova funkcija, pseudo-Bulova funkcija i funkcija tipa (1) može biti predstavljena u potpunoj kanonskoj disjunktivnoj normalnoj formi i u potpunoj kanonskoj konjunktivnoj normalnoj formi.

Proširimo definicioni domen i skup vrednosti funkcije, tj. posmatrajmo funkciju

(2) $$F : L_p^n \longrightarrow S ,$$

gde je

(3) $$L_p = \{0,1,2,\dots,p-1\} , \; p \in N ,$$

(ili $L_p = \{0, \frac{1}{p-1} , \frac{2}{p-1} , \dots, \frac{p-2}{p-1} , 1\}$,

$L_p = \{s_0, s_1, \dots, s_{p-1}\}$, $s_i \in C$);

N je skup prirodnih brojeva, C je skup realnih brojeva, S je neprazan skup.

Uvedimo:

1. Relacije

$$
(4) \qquad x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_i = \alpha_i \\ 0, & \text{ako je } x_i \neq \alpha_i \end{cases}, \quad x_i, \alpha_i \in L_p
$$

2. Binarne operacije na skupu L_2, u notaciji „$\cup$", date u tabeli 1.

3. Binarne operacije „$\cup$" , „$\cdot$" , na skupu $S \cup L_2$ definisane

$$
(4') \qquad \begin{aligned} & a \cup 0 = 0 \cup a = a \, , \; a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \, , \; \text{ako je } \; a \in S, \; 0 \in L_2; \\ & a \cup 1 = 1 \cup a = 1 \, , \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \, , \; \text{ako je } \; a \in \;\; , \; 1 \in L_2; \end{aligned}
$$

$a \cup b = b \cup a$, $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$, $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot (b \cdot c) =$ $= (a \cdot b) \cdot c$, $a \cdot (b \cup c) = a \cdot b \cup a \cdot c$, ako je $a, b, c \in S$

4. $\bar{x} = 1 - x$, ako je $x \in L_2$.

Binarne operacije $+$, $-$, $\cdot$ su obične aritmetičke operacije.

Neposredno slede sledeće relacije

$$
(4'') \qquad \begin{aligned} & x_i^{\alpha} \cdot x_i^{\alpha} = x_i^{\alpha} \, , \quad x_i \, , \alpha \in L_p \, , \\ & x_i^{\alpha} \cdot x_i^{\beta} = 0 \, , \; \text{ako je } \, , \alpha \neq \beta \, , \alpha \, , \beta \in L_p \, , \\ & \sum_{\alpha \in L_p} x_i^{\alpha} = 1 \quad \text{ili} \quad \bigcup_{\alpha \in L_p} x_i^{\alpha} = 1 \, . \end{aligned}
$$

T e o r e m a 1. Ma koja funkcija

$$
F : L_p^{\,n} \longrightarrow S
$$

sa promenljivima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može biti predstavljena u potpunoj kanonskoj disjunktivnoj normalnoj formi i u potpunoj kanonskoj konjunktivnoj normalnoj formi, tj.

$$
(5) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_p^{\,n}} a_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \, ,
$$

gde je

$$a_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) ,$$

(6)

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \bigcap_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in L_p^n} \left(a_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \cup \overline{x_1^{\alpha_1}} \cup \overline{x_2^{\alpha_2}} \cup \ldots \cup \overline{x_n^{\alpha_n}}\right),$$

gde je

$$a_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) .$$

Dokaz formula (5) i (6) ove teoreme bazira se na (4) , (4′) i (4″) .

Neka je

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in L_p^n} F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \bigcap_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in L_p^n} \left(F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\cup\overline{x_1^{\alpha_1}}\cup\overline{x_2^{\alpha_2}}\cup\ldots\cup\overline{x_n^{\alpha_n}}\right).$$

Za $(\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n)\in L_p^n$ imamo

(7)

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n)= \bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in L_p^n} F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\, \gamma_1^{\alpha_1}\gamma_2^{\alpha_2}\ldots \gamma_n^{\alpha_n},$$

(8)

$$\Psi(\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n)= \bigcap_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in L_p^n} \left(F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\cup\overline{\gamma_1^{\alpha_1}}\cup\overline{\gamma_2^{\alpha_2}}\cup\ldots\cup\overline{\gamma_n^{\alpha_n}}\right).$$

Na osnovu (4) imamo

$$\gamma_1^{\alpha_1}\gamma_2^{\alpha_2}\ldots\gamma_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, \text{ako je } (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n) \\ 0, \text{ako je } (\alpha_1,\alpha_2,\ldots \alpha_n)\neq(\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n) \end{cases}$$

Dakle konjunkcije

$$\gamma_1^{\alpha_1}\gamma_2^{\alpha_2}\dots\gamma_n^{\alpha_n}\ ,\quad (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in L_p^n\ ,$$

na osnovu (4) i (4') imaju vrednost nulu, osim jedne, koja ima vrednost jedan kada je

$$\alpha_1=\gamma_1,\alpha_2=\gamma_2,\dots,\alpha_n=\gamma_n\ .$$

Prema tome (7) svodi se na

$$\varphi(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)=F(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\ .$$

Slično, na osnovu (4) i (4') imamo da je

$$\overline{\gamma_1^{\alpha_1}}\cup\overline{\gamma_2^{\alpha_2}}\cup\dots\cup\overline{\gamma_n^{\alpha_n}}=\begin{cases}0,\text{ako je }(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\\ 1,\text{ako je }(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n).\end{cases}$$

Dakle disjunkcije

$$\overline{\gamma_1^{\alpha_1}}\cup\overline{\gamma_2^{\alpha_2}}\cup\dots\cup\overline{\gamma_n^{\alpha_n}},\quad(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in L_p^n,$$

na osnovu (4) i (4'), imaju vrednost jedan, osim jedne koja ima vrednost nula kada je

$$\alpha_1=\gamma_1,\alpha_2=\gamma_2,\dots,\alpha_n=\gamma_n\ .$$

Prema tome (8) svodi se na

$$\psi(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)=F(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\ .$$

Jednakosti

$$F(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)=\varphi(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)=\psi(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$$

važe za svaki vektor iz L_p^n , pa imamo

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)\ .$$

Dakle, dokazane su formule (5) i (6), tj. dokazana je teorema.

Neka je data funkcija

(9) $$f : L_p^n \rightarrow C ,$$

gde je C skup realnih brojeva.

T e o r e m a 2. Ma koja funkcija f tipa (9) može se napisati u obliku

(10)
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha \in L_p \setminus \{\beta\}} x_i^{\alpha}\, g_{\alpha}^{(i)}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) + \\ + h_i(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),$$

gde je β jedan fiksiran element skupa L_p, a $g_{\alpha}^{(i)}$ i h_i funkcije tipa (9).

Dokaz proizlazi iz

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha \in L_p} x_i^{\alpha}\Big(f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},\ldots,x_n) - \\ - f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},\beta,x_{i+1},\ldots,x_n)\Big) + \\ + f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},\beta,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

primenom indukcije.

Ako je data funkcija u obliku

(11) $$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \\ = \sum_{i=1}^{m} a_{i_1,i_2,\ldots,i_{k(i)}}\, x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots x_{i_{k(i)}}^{\alpha_{i_{k(i)}}}, \quad (a_{i_1,i_2,\ldots,i_{k(i)}} \in C),$$

problem je svesti je u potpunu kanonsku konjunktivnu normalnu formu ili u potpunu kanonsku disjunktivnu normalnu formu.

Neka konjunkcija

$$C_i = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots x_{i_{k(i)}}^{\alpha_{i_{k(i)}}}$$

ne sadrži promenljive $x_j^{\alpha_j}$. Koristeći relaciju

$$c_i = c_i \sum_{\alpha \in L_p} x_j^{\alpha} = \sum_{\alpha \in L_p} c_i \, x_j^{\alpha}$$

i relacije (4"), data funkcija oblika (11) svodi se u traženu formu.

L e m a 2. Za svako $x_i \in L_p$ imamo da je

$$x_i = \beta - \sum_{\alpha \in L_p \setminus \{\beta\}} (\beta - \alpha) x_i^{\alpha} , \quad x_i \in L_p ,$$

gde je β jedan fiksiran element iz skupa L_p .

Dokaz se izvodi indukcijom.

Neka je data funkcija f u obliku

$$(13) \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{k(i)}} x_{i_1}^{q_{i_1}} x_{i_2}^{q_{i_2}} \ldots x_{i_{k(i)}}^{q_{i_{k(i)}}}$$

gde je $a_{i_1, i_2, \ldots, i_{k(i)}} \in C$, $q_{j_{k(j)}} \in N$, (N skup prirodnih brojeva).

T e o r e m a 3. Svaka funkcija koja je data u obliku (13) može se transformisati na oblik (10).

Dokaz ove teoreme proizlazi na osnovu Leme 2. i relacije (4").

T e o r e m a 4. Skup funkcija f ,

$$f : L_p^n \to S ,$$

je Bulova algebra ako i samo ako je S Bulova algebra.

Dokaz proizlazi iz

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \cup f_2(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigcup_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n} (a^1_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \cup a^2_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)\cdot f_2(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$\bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in L_p^n} (a^1_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\cdot a^2_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n})x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$\overline{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in L_p^n} (\overline{a}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n})x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n})$$

gde je

$$a^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in S \quad (i=1,2) .$$

P r i m e r . Data je funkcija f ,

$$f : L_5^3 \to S,$$

tabelom (tb. 2), gde je

$$L_5 = \left\{0,\tfrac{1}{4},\tfrac{2}{4},\tfrac{3}{4},1\right\} \quad \text{a} \quad S = \left\{2,0,b,a\right\} .$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	1	2
0	1	$\frac{1}{4}$	2
0	1	$\frac{2}{4}$	2
1	0	$\frac{1}{4}$	a
1	$\frac{2}{4}$	0	a
$\frac{1}{4}$	1	0	b
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	b
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	b

Tabela 2.

Za ostale vrednosti iz L_5^3 funkcija f jednaka je nuli.

Potpuna kanonska disjunktivna normalna forma funkcije f je:

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1^0\, x_2^0\, x_3^1 \cup x_1^0\, x_2^1\, x_3^{\frac{1}{4}} \cup x_1^0\, x_2^1\, x_3^{\frac{2}{4}}) \cup$$

$$\cup\, a(x_1^1\, x_2^0\, x_3^{\frac{1}{4}} \cup x_1^1\, x_2^{\frac{2}{4}}\, x_3^0) \cup b(x_1^{\frac{1}{4}}\, x_2^1\, x_3^0 \cup x_1^{\frac{1}{4}}\, x_2^1\, x_3^{\frac{1}{4}} \cup x_1^{\frac{2}{4}}\, x_2^{\frac{2}{4}}\, x_3^{\frac{2}{4}}) ,$$

gde su $\cup$ i $\cdot$ operacije iz (4′) .

Potpuna kanonska konjunktivna normalna forma funkcije f je:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (2 \cup \overline{x_1^0} \cup \overline{x_2^0} \cup \overline{x_3^1}) \cdot (2 \cup \overline{x_1^0} \cup \overline{x_2^1} \cup \overline{x_3^{\frac{1}{4}}}) \cdot (2 \cup \overline{x_1^0} \cup \overline{x_2^1} \cup \overline{x_3^{\frac{2}{4}}})$$

$$(a \cup \overline{x_1^1} \cup \overline{x_2^0} \cup \overline{x_3^{\frac{1}{4}}}) \cdot (a \cup \overline{x_1^1} \cup \overline{x_2^{\frac{2}{4}}} \cup \overline{x_3^0}) \cdot (b \cup \overline{x_1^{\frac{1}{4}}} \cup \overline{x_2^1} \cup \overline{x_3^0})$$

$$(b \cup \overline{x_1^{\frac{1}{4}}} \cup \overline{x_2^1} \cup \overline{x_3^{\frac{1}{4}}}) \cdot (b \cup \overline{x_1^{\frac{2}{4}}} \cup \overline{x_2^{\frac{2}{4}}} \cup \overline{x_3^{\frac{2}{4}}}) \cdot \prod_{f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0} (\overline{x_1^{\alpha_1}} \cup \overline{x_2^{\alpha_2}} \cup \overline{x_3^{\alpha_3}}) .$$

II GLAVA

JEDNA METODA MINIMIZACIJE FUNKCIJE

$$f : L_p^n \to C$$

U radu [65] data je metoda za odredjivanje skupa tačaka gde pseudo-Bulova funkcija ima minimum (apsolutni).

U radu [44] proširena je metoda iz [65] za odredjivanje skupa tačaka, gde funkcija

$$f : L_3^n \to C \,, \qquad L_3 = \{0,1,2\}$$

ima minimum.

U ovoj glavi generalisaćemo metodu(*) za odredjivanje skupa tačaka, gde funkcija

(1) $$f : L_p^n \to C \,,$$

$L_p = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$, (ili $L_p = \{s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}\}$, $s_i \in C$), ima minimum (apsolutni) [45].

D e f i n i c i j a 1. Tačka $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ zove se minimalna (apsolutno) ako je

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leq f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

za svako $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in L_p^n$.

Na osnovu Teoreme 2. Glave I. funkciju (1) možemo pisati u obliku

(2.1)

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{k \in L_{p-1}} x_1^k \, g_k^{(1)}(x_2,x_3,\ldots,x_n) + h_1(x_2,x_3,\ldots,x_n).$$

(*) Ova metoda obradjena je u saradnji sa B. Latinovićem.

su iz L_2 i zadovoljavaju uslove:

$$\text{(I)} \sum \lambda^{(1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} = 1, \quad i_1, i_2, \ldots, i_{r+1} \in \{k, j_1, j_2, \ldots, j_r\}$$

ako je $\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = \ldots = g_{j_r}^{(1)} < 0$, gde je

$$i_2 < i_3 < \ldots < i_{r+1},$$

$$\text{(II)} \sum \mu^{(1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} \leq 1, \quad i_1, i_2, \ldots, i_{r+1} \in \{k, j_1, j_2, \ldots, j_r\}$$

ako je $\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = \ldots = g_{j_r}^{(1)} = 0$, gde je

$$i_2 < i_3 < \ldots < i_{r+1}.$$

L e m a 1. Opšte rešenje sistema (3´.1) je oblika (5.1), gde parametri zadovoljavaju uslove (I) i (II).

Neka je (5.1) rešenje sistema (3´.1). Zamenom (5.1) u (3´.1) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=o}^{p-2} g_k^{(1)} \left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} < 0\right] + \\
&+ \sum_{k=o}^{p-3} g_k^{(1)} \sum_{j_1=k+1}^{p-2} \left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} < 0\right] + \\
(6) \quad &+ \sum_{k=o}^{p-4} g_k^{(1)} \sum_{j_1=k+1}^{p-3} \sum_{j_2=j_1+1}^{p-2} \left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = g_{j_2}^{(1)} < 0\right] + \\
&+ \sum_{k=o}^{p-5} g_k^{(1)} \sum_{j_1=k+1}^{p-4} \sum_{j_2=j_1+1}^{p-3} \sum_{j_3=j_2+1}^{p-2} \left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = g_{j_2}^{(1)} = g_{j_3}^{(1)} < 0\right] + \\
&\ldots + g_o^{(1)} \left[\operatorname{Min} G_1 = g_o^{(1)} = g_1^{(1)} = \ldots = g_{p-2}^{(1)} < 0\right] \leq \sum_{k=o}^{p-2} a^k g_k^{(1)}
\end{aligned}$$

za svako $a \in L_p \setminus \{x_1\}$.

Neka je

$$\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = \ldots = g_{j_r}^{(1)} < 0 .$$

Parametri

$$\lambda^{(1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}}, \quad i_1, i_2, \ldots i_{r+1} \in \{k, j_1, j_2, \ldots, j_r\} ,$$

anuliraju se na osnovu (I), a proizvodi

$$g_k^{(1)} \left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = \ldots \; g_{j_r}^{(1)} = 0\right]$$

uvek su jednaki nuli, jer ako je $g_k^{(1)} \neq 0$, tada je

$$\left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = \ldots = g_{j_r}^{(1)} = 0\right] = 0 ,$$

a ako je

$$\left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = \ldots = g_{j_r}^{(1)} = 0\right] = 1 ,$$

tada je $g_k^{(1)} = 0$.

Očigledno je da je relacija (6) ispunjena za svako $a \in L_p$, jer nju možemo napisati u obliku

$$\sum_{k=0}^{p-2} g_k^{(1)} \left[\operatorname{Min} G_1 = g_k^{(1)} < 0\right] + A \leq \sum_{k=o}^{p-2} a^k g_k^{(1)} ,$$

gde je $A \leq 0$.

Obrnuto, sistem (3.'1) ima rešenja (5.1).

0. $x_1 = 0$, tj. $x_1^o = 1$ rešenje sistema (3.'1). Zamenom u (3.'1) dobijamo

$$g_o^{(1)} \leq \sum_{j \in L_{p-1}} a^j g_j^{(1)} , \quad a \in L_1 \setminus \{0\} , \tag{7.0}$$

1. $x_1 = 1$, tj. $x_1^1 = 1$ rešenje sistema (3.'1). Zamenom u (3.'1) dobijamo

(7.1) $$g_1^{(1)} \leq \sum_{j \in L_{p-1}} a^j g_j^{(1)} \quad , \; a \in L_p \setminus \{1\} \; ,$$

itd.

(7.p-2) p-2. $x_1 = p-2$, tj. $x_1^{p-2} = 1$ rešenje sistema (3.'1). Zamenom u (3.'1) dobijamo

$$g_{p-2}^{(1)} \leq \sum_{j \in L_{p-1}} a^j g_j^{(1)} \quad , \; a \in L_p \setminus \{p-2\} \; .$$

(7.p-1) p-1. $x_1 = p-1$, tj. $x_1^{p-1} = 1$ rešenje sistema (3.'1). Zamenom u (3.'1) dobijamo

$$g_{p-1}^{(1)} \leq \sum_{j \in L_{p-1}} a^j g_j^{(1)} \quad , \; a \in L_p \setminus \{p-1\} \; .$$

Možemo zaključiti sledeće:

A. 1. Ako je

$$\mathrm{Min}\; G_1 = g_k^{(1)} < 0 \quad \mathrm{i} \quad g_k^{(1)} < g_j^{(1)} \quad , \; j \in L_{p-1} \setminus \{k\} \; ,$$

na osnovu (7.k) imamo

$$x_1^k = \left[\mathrm{Min}\; G_1 = g_1^k < 0 \right] \; , \; k \in L_{p-1} \; .$$

2. Ako je

(8.1) $$\mathrm{Min}\; G_1 = g_i^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} < 0 \quad , \; j_1 \in L_{p-1} \setminus \{i\} \; ,$$

na osnovu (7.i) i (7.j_1) imamo

$$x_1^i = \lambda_{ij_1}^{(1)} \left[\mathrm{Min}\; G_1 = g_i^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} < 0 \right] \; ,$$

(8.3)

$$x_1^k = \sum_{j_1, j_2 \in L_{p-1}\setminus\{k\},\ j_1 < j_2} \lambda^{(1)}_{kj_1j_2} \qquad \left[\mathrm{Min}\ G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = g_{j_2}^{(1)} < 0\right], k \in L_{p-1} \ ,$$

gde je

$$\sum_{i_2 < i_3} \lambda^{(1)}_{i_1i_2i_3} = 1 \ , \ i_1, i_2, i_3 \in \{k, j_1, j_2\} \ ,$$

ako je

$$\mathrm{Min}\ G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = g_{j_2}^{(1)} < 0 \ , \ j_1 < j_3 \ ,$$

itd.

p-1. Ako je

$$\mathrm{Min}\ G_1 = g_o^{(1)} = g_1^{(1)} = \dots = g_{p-2}^{(1)} < 0 \ ,$$

na osnovu (7.o) , (7.1),...,(7.p-1) imamo

(8.p-2)

$$x_1^k = \lambda^{(1)}_{kj_1j_2\dots j_{p-2}} \left[\mathrm{Min}\ G_1 = g_o^{(1)} = g_1^{(1)} = \dots = g_{p-2}^{(1)} < 0\right], k \in L_{p-1},$$
$$j_1 < j_2 < \dots < j_{p-2}$$

gde je

$$\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{p-2}} \lambda^{(1)}_{kj_1j_2\dots j_{p-2}} = 1 \ , \ k \in L_{p-1} \ .$$

Iz ove diskusije sledi da na osnovu

(8.1) , (8.2),...,(8.p-2)

imamo

imamo da je $x_1 = p-1$, tj.

(c) $$x_1^k = 0 \,, \quad k \in L_{p-1} \,.$$

Na osnovu A, B i C , tj. na osnovu (a), (b) i (c) proizlazi da je rešenje sistema (3.1) oblika (5.1) .

Na osnovu Leme 2 Glave 1. i relacije (5.1), imamo da je

$$x_1 = p-1 - \sum_{k \in L_{p-1}} (p-1-k)\varphi_1^k (x_2, x_3, \ldots, x_n) \,.$$

L e m a 2 . Ako relacije (5.1) zamenimo u (2.1) dobijamo funkciju f_2 , koja ne zavisi od parametara.

Zaista, zamenom (5.1) u (2.1) koristeći 6, imamo:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=o}^{p-2} g_k^{(1)} \left[\mathrm{Min}\ G_1 = g_k^{(1)} < 0\right] +$$

$$+ \sum_{k=o}^{p-3} g_k^{(1)} \sum_{j_1=k+1}^{p-2} \left[\mathrm{Min}\ G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} < 0\right] +$$

$$+ \sum_{k=o}^{p-4} g_k^{(1)} \sum_{j_1=k+1}^{p-3} \sum_{j_2=j_1+1}^{p-2} \left[\mathrm{Min}\ G_1 = g_k^{(1)} = g_{j_1}^{(1)} = g_{j_2}^{(1)} < 0\right] + \ldots$$

$$\ldots + g_o^{(1)} \left[\mathrm{Min}\ G_1 = g_o^{(1)} = g_1^{(1)} = \ldots = g_{p-2}^{(1)} < 0\right] +$$

$$+ h_1 (x_2, x_3, \ldots, x_n) = f_2 (x_2, x_3, \ldots, x_n) \,.$$

Pošto funkcija f_2 , na osnovu Leme 2., ne zavisi od parametara, možemo uzeti bilo koje vrednosti za parametre . Zbog toga ćemo uzeti one vrednosti za parametre da relacije (5.1) budu najpogodnije i zameniti ih u (2.1). Tada funkciju f_2 transformišemo u oblik

$$f_2(x_2,x_3,\dots,x_n) = \sum_{k\in L_{p-1}} x_2^k\, g_k^{(2)}\,(x_3,x_4,\dots,x_n) + \\ + h_2(x_3,x_4,\dots,x_n)\ .$$

Koristeći Definiciju 1., ako je $(x_2,\dots,x_n)$ minimalna tačka funkcije f_2 , onda je

$$f_2(x_2,x_3,\dots,x_n) \le f_2(a,x_3,\dots,x_n)\ ,\ a\in L_p\setminus\{x_2\}\ .$$

Na osnovu (2.2) i (3.2) je

$$\sum_{k\in L_{p-1}} (x_2^k - a^k)\ g_k^{(2)}\ (x_3,x_4,\dots,x_n) \le 0\ ,\ a\in L_p\setminus\{x_2\}\ .$$

Uvedimo funkcije

$$\varphi_k^{(2)}\ :\ L_2^q \times L_p^{n-2} \to L_2\ ,\ k\in L_{p-1}\ ,$$

gde je

$$q = 1 + 2\sum_{k=2}^{p-1} \frac{(p-2)!}{(k-1)!\,(p-1-k)!}\ .$$

Tada je

$$\begin{aligned} x_2^k = \varphi_k^{(2)}(x_3,x_4,\dots,x_n) &= \left[\mathrm{Min}\ G_2 = g_k^{(2)} < 0\right] + \\ &+ \nu_k^{(2)}\left[\mathrm{Min}\ G_2 = g_k^{(2)} = 0\right] + \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-2}\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_i\in L_{p-1}\setminus\{k\}\ ,\ j_1<j_2<\dots<j_i}} \Big(\lambda_{kj_1j_2\dots j_i}^{(2)}\left[\mathrm{Min}\ G_2 = g_k^{(2)} = g_{j_1}^{(2)} = \dots = g_{j_i}^{(2)} < 0\right] + \\ + \mu_{kj_1j_2\dots j_i}\left[\mathrm{Min}\ G_2 = g_k^{(2)} = g_{j_1}^{(2)} = \dots = g_{j_i}^{(2)} = 0\right]\Big), k\in L_{p-}$$

Parametri

$$\nu_k^{(2)}\ ,\ \lambda_{i_1i_2\dots i_{r+1}}^{(2)},\ \mu_{i_1i_2\dots i_{r+1}}^{(2)},\ r = 1,2,\dots,p-2\ ,$$

su iz L_2 i zadovoljavaju uslove (I) i (II)

Na osnovu Leme 2. Glave I. i relacije (5.2) imamo

$$x_2 = p-1 - \sum_{k \in L_{p-1}} (p-1-k)\, \varphi_k^{(2)}(x_3, x_4, \ldots, x_n)\ .$$

Zamenom relacija (5.2) u funkciji (2.2), koristeći Lemu 2. i Lemu 1., dobijamo funkciju f_3 koja ne zavisi od parametara.

Produžimo postupak eliminacija promenljivih, do funkcije

$$f_n(x_n) = \sum_{k \in L_{p-1}} x_n^k\, g_k^{(n)} + h_n\ ,$$

gde su $g_k^{(n)}$ i h_n konstante.

Na osnovu Definicije 1., ako je x_n minimalna tačka funkcije, onda je

(3.n) $$f_n(x_n) \leq f_n(a)\ ,\ a \in L_p \setminus \{x_n\}\ .$$

Koristeći (2.n) i (3.n) imamo

$$\sum_{k \in L_{p-1}} (x_n^k - a^k)\, g_k^{(n)} \leq 0\ ,\ a \in L_p \setminus \{x_n\}\ .$$

Uvedimo funkcije

$$\varphi_k^{(n)} : L_2^q \to L_2\ ,\ k \in L_{p-1}\ ,$$

gde je

$$q = 1 + 2 \sum_{k=2}^{p-1} \frac{(p-2)!}{(k-1)!\,(p-1-k)!}\ .$$

Tada je

$$x_n^k = \varphi_k^{(n)} = \left[\mathrm{Min}\ G_n = g_k^{(n)} < 0\right] + \nu_k^{(n)} \left[\mathrm{Min}\ G_n = g_k^{(n)} = 0\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{p-2}\sum_{j_1,j_2,\dots,j_i\in L_{p-1}\setminus\{k\}\ ,\ j_1<j_2<\dots<j_i}\Big(\lambda^{(n)}_{kj_1j_2\dots j_i}\left[\mathrm{Min}\ G_n = g_k^{(n)} = g_{j_1}^{(n)}=\dots=g_{j_i}^{(n)}<0\right] +$$

(5.n)

$$+\mu^{(n)}_{kj_1j_2\dots j_i}\left[\mathrm{Min}\ G_n = g_k^{(n)}=g_{j_1}^{(n)}=\dots=g_{j_i}^{(n)} = 0\right]\Big),\ k\in L_{p-1}\,.$$

Parametri

$$\nu_k^{(n)},\ \lambda^{(n)}_{i_1i_2,\dots,i_{r+1}},\mu^{(n)}_{i_1\ i_2\dots\dots i_{r+1}},r=1,2,\dots,p-2,\quad k\in L_{p-1}\ ,$$

su iz skupa L_2 i zadovoljavaju uslove (I) i (II) .

Na osnovu Leme 2. Glave I. i relacija (5.p) imamo

$$x_n = p-1 - \sum_{k\in L_{p-1}}(p-1-k)\ \varphi_k^{(n)}\ ,$$

tj.

(9.n) $$x_n = X_n(q_n)\ ,$$

gde je q_n skup parametara iz L_2 , koji figurišu u (5.n) i zadovoljavaju uslove (I) i (II) .

Zamenom (5.n) u (5.n-1), dobijamo

$$x_{n-1} = X_{n-1}(q_n,q_{n-1})\ ,$$

gde su q_n i q_{n-1} skupovi parametara iz L_2 , koji figurišu u (5.n) i (5.n-1) i zadovoljavaju uslove (I) i (II).Dobijene relacije (9.n) i (9.n-1) zamenimo u (5.n-2) itd. Na kraju imamo

$$x_1 = X_1\ (q_n,q_{n-1},\dots,q_1)\ ,$$

gde su $q_n,q_{n-1},\dots q_1$ skupovi parametara iz skupa L_2 ,koji figurišu u (5.n),(5.n-1),...,(5.1) i zadovoljavaju uslove (I) i (II) .

L e m a 3 . Tačke za koje funkcija f_1 ima minimum zadovoljavaju relacije (5.1),(5.2),...,(5.n) .

Zaista, ma koja minimalna tačka

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\in L_p^n$$

funkcije f_1 zadovoljava nejednačine (3.'1), tj. relacije (5.1.), te otuda proizlazi da je zadovoljena relacija

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = f_2(x_2,x_3,\dots,x_n) \; . \tag{10}$$

Koristeći indukciju pretpostavimo da su zadovoljene relacije (5.i-1), tj.

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = f_i(x_i,x_{i+1},\dots,x_n) \; .$$

Kako minimalna tačka zadovoljava relacije

$$f_1(x_1,\dots,x_n)\leq f_1(y_1,\dots,y_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n),a\in L_p\setminus\{x_1\}$$

za svako $(y_1,\dots,y_{i-1})$; iz (10) proizlazi da ova tačka zadovoljava posebno relacije (3.'i), tj. relacije (5.i) .

Dakle

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = f_i(x_i,x_{i+1},\dots,x_n) =$$
$$= f_{i+1}(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_n) \; ,$$

što kompletira dokaz.

T e o r e m a 1 . Tačka $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in L_p^n$ zadovoljava relacije (5.1),(5.2),...,(5.n) ako i samo ako je apsolutno minimalna tačka funkcije f_1 .

Minimalne tačke funkcije f_1 , na osnovu Leme 3.,zadovoljavaju relacije (5.1),(5.2),...,(5.n) .

Pokazaćemo da su tačke, koje su odredjene ovom metodom, minimalne tačke.

Neka su $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ i $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ dve tačke koje zadovoljavaju relacije (5.1), (5.2), ..., (5.n) . Dovoljno je dokazati da je

$$f_1(a_1,a_2,\dots,a_n) = f_1(e_1,e_2,\dots,e_n) .$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

(11) $$f_1(e_1,e_2,\dots,e_n) < f_1(a_1,a_2,\dots,a_n) .$$

Kako je pokazano u toku dokaza Leme 3., važi

$$f_1(a_1,a_2,\dots,a_n) = f_n(a_n)$$

$$f_1(e_1,e_2,\dots,e_n) = f_n(e_n) ,$$

pa se relacija (11) može napisati u obliku

$$f_n(e_n) < f_n(a_n) .$$

Odavde proizlazi da je $e_n \neq a_n$, pa je $e_n \in L_p \setminus \{a_n\}$, tj.

$$f_n(e_n) < f_n(a_n) , \quad e_n \in L_p \setminus \{a_n\} ,$$

što je suprotno sa (3.n) .

P r i m e d b a . Neka su date funkcije:

a. Funkcija

(12) $$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{s} a_i \, x_{i_1}^{g_{i_1}} \, x_{i_2}^{g_{i_2}} \cdots x_{i_{k(i)}}^{g_{i_{k(i)}}} ,$$

gde su $a_i \in C$, $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in L_p^n$ i $g_i \in N$ (N je skup prirodnih brojeva).

b. Funkcija

(12') $$f : L_p^n \to C ,$$

gde je C skup realnih brojeva, a

$$L_p = \{s_o, s_1, \ldots, s_{p-1}\} , \; s_i \in C .$$

Na osnovu Teoreme 2. i Teoreme 3. svaka funkcija f tipa (12) i (12′) može se napisati u obliku (2.1) .

Prema tome, ovu metodu minimizacije možemo koristiti i za funkcije tipa (12) i (12′) .

III GLAVA

NEKE GENERALIZACIJE PSEUDO-BULOVIH JEDNAČINA I NEJEDNAČINA

U prvom delu ovog rada skicirane su neke metode za rešavanje Bulovih i pseudo-Bulovih jednačina (. Rudeanu, P. Ivanescu) i metode rešavanja jednačina, čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu (S. Prešić).

U ovoj glavi proširićemo neke poznate metode za rešavanje pseudo-Bulovih jednačina i nejednačina, i dati dve nove metode za rešavanje pseudo-Bulovih jednačina.

1. Proširenje metode za rešavanje jednačina,čija rešenja pripadaju konačnom skupu,- na rešavanja nejednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu.

2. Proširenje metode sukcesivnih eliminacija nepoznatih pri rešavanju pseudo-Bulovih jednačina -na metodu sukcesivnih eliminacija nepoznatih, čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu.

3. Novu metodu za rešavanje pseudo-Bulovih jednačina, gde je zbir rešenja maksimum (minimum).

4. Novu metodu za rešavanje jednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu.

5. Proširenje Löwenheimove teoreme za Bulove jednačine ako je poznato jedno partikularno rešenje.

6. Proširenje metode za rešavanje sistema nejednačina i jednačina čija rešenja pripadaju skupu L_p^n, gde se sistem svodi na ekvivalentnu jednačinu.

1. Metoda rešavanja nejednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu

U radu [78] S.Rudeanu i P. Ivanescu dali su metodu rešavanja pseudo-Bulovih nejednačina čija rešenja pripadaju skupu L_2^n, a u radu [124] S.Prešić dao je metodu rešavanja jednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu. Ovde ćemo proširiti metodu na rešavanja nejednačina čija rešenja pripadaju datom skupu [47].

Neka je $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}\}$ dat konačan skup. Neka je

(1) $$J : S \to E,$$

gde je $E \supseteq \{0,1\}$. Na skupu E definisane su relacije

$$\leqslant, \geqslant, <, > .$$

Rešavajuću funkciju

$$\left(A(q, U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}) \in S, U_i \in E, q \in S\right)$$

definišemo sa

(2) $$\begin{aligned} &A(q, k, U_2, U_3, \ldots, U_{p-1}) = q \\ &A(q, u_1, k, U_3, \ldots, U_{p-1}) = \alpha q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A(q, u_1, u_2, u_3, \ldots, k) = \alpha^{p-2} q \\ &A(q, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{p-1}) = \alpha^{p-1} q , \end{aligned}$$

gde je $k \rho 0$, u_i nije u istoj relaciji ρ sa 0;

$$u_i, U_i \in E, \quad q \in S ,$$

ρ je jedna od relacije $\leqslant, \geqslant, <, >$, a

$$\alpha : S \to S$$

(ciklus) preslikavanje.

L e m a 1 . Neka je $J(x)\rho 0$ moguća nejednačina, gde je ρ jedna od relacija $\geqslant$, $\leqslant$, $<$, $>$. Njeno opšte rešenje određeno je jednakošću

$$x = A(q, J(q), J(\alpha q), \ldots, J(\alpha^{p-2} q)) \,, \tag{3}$$

gde je q proizvoljan element skupa S .

Neka je $q \in S$. Uočimo niz

$$J(q), J(\alpha q), \ldots, J(\alpha^{p-1} q)$$

prvi njegov član koji je u relaciji ρ sa 0 .

Neka je to $J(\alpha^{i} q)\rho 0$. Na osnovu (2) i (3) zaključujemo da je $x = \alpha^{i} q$ rešenje nejednačine $J(x)\rho 0$.

Neka je x rešenje nejednačine $J(x)\rho$. Ako u (3) umesto q zamenimo x, na osnovu (2) dobijamo

$$A(x, J(x), J(\alpha x), \ldots, J(\alpha^{p-1} x)) = x \,.$$

Stoga formula (3) daje sva rešenja nejednačine $J(x)\rho 0$.

Eksplicitna forma funkcije A

Pretpostavimo da su u skupu $S \cup E$ uvedene operacije $+$ i $\cdot$ koje imaju sledeća svojstva:

$$\begin{aligned} &0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0 \,,\quad 0\cdot 0 = 0 \,,\quad 1\cdot 1 = 1 \,, \\ &q\cdot 0 = 0\cdot q = 0 \,,\quad 1\cdot q = q\cdot 1 = q \,, \\ &U+0 = 0+U = U \,,\quad (U \in E \,,\ q \in S) \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Dalje, uvedimo sledeće definicije

$$\overline{[x\rho 0]} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} 0 \,, & \text{ako je } x\rho 0 \\ 1 \,, & \text{ako } x \text{ nije u relaciji } \rho \text{ sa } 0 \,, \end{cases}$$

$$[x\rho 0] \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} 1 \,, & \text{ako je } x\rho 0 \\ 0 \,, & \text{ako } x \text{ nije u relaciji } \rho \text{ sa } 0 \,. \end{cases}$$

Jedna eksplicitna formula funkcije A je.

$$
\begin{aligned}
A(q,U_1,U_2,\dots,U_{p-1}) = {} & [U_1 \varrho 0]q + \overline{[U_1 \varrho 0]}\,[U_2 \varrho 0](\alpha q) + \\
& + \overline{[U_1 \varrho 0]}\,\overline{[U_2 \varrho 0]}\,[U_3 \varrho 0](\alpha^2 q) + \dots + \\
(5) \qquad & + \overline{[U_1 \varrho 0]}\,\overline{[U_2 \varrho 0]} \dots \overline{[U_{p-2} \varrho 0]}\,[U_{p-1} \varrho 0](\alpha^{p-2} q) + \\
& + \overline{[U_1 \varrho 0]}\,\overline{[U_2 \varrho 0]} \dots \overline{[U_{p-2} \varrho 0]}\,\overline{[U_{p-1} \varrho 0]}(\alpha^{p-1} q) .
\end{aligned}
$$

P r i m e r . Neka je $S = L_3 = \{0,1,2\}$, a E skup realnih brojeva i neka su $+$ i $\cdot$ obične aritmetičke operacije. Neka su x^0 , x^1 , x^2 funkcije definisane pod (4) Glave I .

Neka je $J(x) \varrho 0$ sledeća nejednačina

$$(6) \qquad a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 \leqslant 0 ,$$

gde su $a_i \in C$ i $x \in L_3$.

Nejednačina (6) je moguća ako i samo ako postoji bar jedan koeficijent a_i tako da $a_i \leqslant 0$.

Na osnovu

$$J(x) = \sum_{i=o}^{2} a_i x^i , \quad [J(x) \leqslant 0] = \sum_{i=o}^{2} [a_i \leqslant 0]\, x^i ,$$

$$\overline{[J(x) \leqslant 0]} = \sum_{i=o}^{2} \overline{[a_i \leqslant 0]}\, x^i$$

i na osnovu (2), (4) i (5) opšte rešenje nejednačine (6) je odredjeno formulom

$$
\begin{aligned}
x = {} & (\overline{[a_0 \leqslant 0]}\,[a_1 \leqslant 0] + 2\,\overline{[a_0 \leqslant 0]}\,\overline{[a_1 \leqslant 0]})q^0 + \\
& + ([a_1 \leqslant 0] + 2\,\overline{[a_1 \leqslant 0]}\,[a_2 \leqslant 0])q^1 + \\
& + (\overline{[a_2 \leqslant 0]}\,\overline{[a_0 \leqslant 0]} + 2\,[a_2 \leqslant 0])q^2 ,
\end{aligned}
$$

2. Rešavanje jednačine metodom sukcesivne eliminacije

U radu [137] S.Rudeanu je dao metodu rešavanja Bulovih jednačina metodom sukcesivnih eliminacija nepoznatih, a u [57] P.Ivanescu proširuje metodu na pseudo-Bulove jednačine.

U ovom odeljku glave proširujemo metodu sukcesivnih eliminacija za rešavanje jednačina čija rešenja pripadaju skupu L_p^n [49].

Neka je funkcija

$$f : L_p^n \to C ,$$

gde je $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in L_p^n$; C je skup realnih brojeva.

Problem je rešiti jednačinu

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0 \tag{7}$$

metodom sukcesivne eliminacije nepoznatih.

Na osnovu Teoreme 2. Glave I. svaka jednačina (7) može se transformisati u oblik

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{k=0}^{p-1} x_1^k \varphi_k^{(1)} (x_2,x_3,\dots,x_n) = 0 , \tag{8.1}$$

gde su $\varphi_k^{(1)}$, $(k=0,1,\dots,p-1)$, funkcije i to

$$\varphi_k^{(1)} : L_p^{n-1} \to C , \quad (k=0,1,\dots,p-1) .$$

Formirajmo jednačinu

$$\prod_{k=0}^{p-1} \varphi_k^{(1)} (x_2,x_3,\dots,x_n) = 0$$

i transformišimo je u oblik

(8.2) $$f_2(x_2,x_3,\dots,x_n) = \sum_{k=o}^{p-1} x_2^k \varphi_k^{(2)}(x_3,x_4,\dots,x_n) = 0 ,$$

gde su $\varphi_k^{(2)}$, $(k = 0,1,\dots,p-1)$, funkcije i to

$$\varphi_k^{(2)} : L_p^{n-2} \to C .$$

Stavimo dalje

$$\prod_{k=o}^{p-1} \varphi_k^{(2)}(x_3,x_4,\dots,x_n) = 0$$

i transformišimo je u oblik

(8.3) $$f_3(x_3,x_4,\dots,x_n) = \sum_{k=o}^{p-1} x_3^k \varphi_k^{(3)}(x_4,x_5,\dots,x_n) = 0 ,$$

gde su $\varphi_k^{(3)}$, $(k = 0,1,\dots,p-1)$, funkcije i to

$$\varphi_k^{(3)} : L_p^{n-3} \to C .$$

Produžimo postupak eliminacije do

(8.n) $$f_n(x_n) = \sum_{k=o}^{p-1} x_n^k \varphi_k^{(n)} = 0 ,$$

gde su $\varphi_k^{(n)}$, $(k = 0,1,\dots,p-1)$, konstante skupa C .

Na kraju, za svako $(q_i,q_{i+1},\dots,q_n) \in L_1^{n-i+1}$ imamo

$$x_i(q_i,q_{i+1},\dots,q_n) = \sum_{k=o}^{p-1} k \left[\varphi_k^{(i)} = 0\right] q_i^k +$$

$$(9)\quad + \sum_{k=0}^{p-1} (p\dot{-}1\dot{+}k) \overline{\left[\varphi_k^{(i)}=0\right]}\,\overline{\left[\varphi_{k\dot{+}1}^{(i)}=0\right]} \cdots \overline{\left[\varphi_{k\dot{+}p\dot{-}2}^{(i)}=0\right]} q_i^k +$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{r=1}^{p-2} (r\dot{+}k) \overline{\left[\varphi_k^{(i)}=0\right]}\,\overline{\left[\varphi_{k\dot{+}1}^{(i)}=0\right]} \cdots \overline{\left[\varphi_{k\dot{+}r\dot{-}1}^{(i)}=0\right]} \left[\varphi_{k\dot{+}r}^{(i)}=0\right] q_i^k ,$$

gde je

$$(10)\quad \varphi_k^{(i)} = \varphi_k^{(i)}\Big(x_{i+1}(q_{i+1}, q_{i+2}, \ldots, q_n), \ldots, X_n(q_n)\Big) ,$$

$$(k = 0, 1, \ldots, p-1) ,$$

($\dot{+}$, $\dot{-}$ su sabiranje i oduzimanje po mod p) .

L e m a 2 . x_n je rešenje jednačine (8.n) ako i samo ako

$$(\mathrm{I}n)\quad \prod_{k=0}^{p-1} \varphi_k^{(n)} = 0$$

$$(\mathrm{II}n)\quad x_n = X_n(q_n) = \sum_{k=0}^{p-1} k \left[\varphi_k^{(n)} = 0\right] q_n^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} (p \dot{-} 1 \dot{+} k) \overline{\left[\varphi_k^{(n)} = 0\right]}\,\overline{\left[\varphi_{k\dot{+}1}^{(n)} = 0\right]} \cdots \overline{\left[\varphi_{k\dot{+}p\dot{-}2}^{(n)} = 0\right]} q_n^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{r=1}^{p-2} (r \dot{+} k) \overline{\left[\varphi_k^{(n)}=0\right]}\,\overline{\left[\varphi_{k\dot{+}1}^{(n)}=0\right]} \cdots \overline{\left[\varphi_{k\dot{+}r\dot{-}1}^{(n)}=0\right]} \left[\varphi_{k\dot{+}r}^{(n)}=0\right]\right) q_n^k ,$$

gde je q_n proizvoljan element skupa L_p .

Koristeći

$$\left[f_n(q_n) = 0\right] = \sum_{k=0}^{p-1} \left[\varphi_k^{(n)} = 0\right] q_n^k ,$$

$$\overline{\left[f_n(q_n) = 0\right]} = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{\left[\varphi_k^{(n)} = 0\right]}\, q_n^k ,$$

$$(\alpha^i q_n)^j = q_n^{j \dot{-} i} ,$$

eksplicitna formula (5) se transformiše u (II_n). Očigledno je da je jednačina (8.n) moguća ako i samo ako ispunjava uslov (I_n) .

L e m a 3 . $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ je rešenje jednačine (8.i) , $1 \leq i \leq n-1$, ako i samo ako

(I_i) $(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ je rešenje jednačine (8.i+1) ,

$$(II_i) \quad x_i = X_i(q_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{p-1} k \left[\varphi_k^{(i)} = 0\right] q_i^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} (p \dot{-} 1 \dot{+} k) \overline{\left[\varphi_k^{(i)} = 0\right]}\, \overline{\left[\varphi_{k \dot{+} 1}^{(i)} = 0\right]} \cdots \overline{\left[\varphi_{k \dot{+} p \dot{-} 2}^{(i)} = 0\right]}\, q_i^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{r=1}^{p-2} (r \dot{+} k) \overline{\left[\varphi_k^{(i)} = 0\right]}\, \overline{\left[\varphi_{k \dot{+} 1}^{(i)} = 0\right]} \cdots \overline{\left[\varphi_{k \dot{+} r \dot{-} 1}^{(i)} = 0\right]} \left[\varphi_{k \dot{+} r}^{(i)} = 0\right] \right) q_i^k ,$$

gde je q_i proizvoljan element iz skupa L_p , a

$$\varphi_k^{(i)} = \varphi_k^{(i)}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) , \quad (k = 0, 1, \dots, p-1) .$$

Ova lema je posledica Leme 2.

Iz Leme 2. i Leme 3. proizlazi sledeća teorema:

T e o r e m a 1 . Ako je jednačina (7) moguća, onda je za svako $(q_1^o, q_2^o, \dots, q_n^o) \in L_p^n$ rešenje jednačine (7) odredjeno formulom:

(11) $$x_i = X_i(q_i^o, q_{i+1}^o, \ldots, q_n^o) \ , \quad (i = 1,2,\ldots,n) \ .$$

...ratno, za svako rešenje $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ jednačina (7) ; ...ednosti $(q_1^o, q_2^o, \ldots, q_n^o) \in L_p^n$ zadovoljavaju relaciju (11) .

Prema tome, rešenja jednačine (7) na osnovu (9) i (10) su:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ x_2 &= X_2(q_2, q_3, \ldots, q_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= X_n(q_n) \ , \end{aligned}$$

gde su $q_1, q_2, \ldots, q_n$ proizvoljni elementi skupa L_p .

Za $p=2$ metoda sukcesivne eliminacije data je u [57]

Neka je funkcija $f: L_3^n \rightarrow C$, $L_s = \{0,1,2\}$,

(12) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

moguća jednačina. Na osnovu relacije (4") i Teoreme 2. Glave I. imamo relacije

$$x_i^o + x_i^1 + x_i^2 = 1 \ , \quad x_i = x_i^1 + 2\, x_i^2 \ .$$

Jednačinu (12) transformišemo u oblik

(12.1) $$x_1^o \varphi_o^{(1)}(x_2, x_3, \ldots, x_n) + x_1^1 \varphi_1^{(1)}(x_2, x_3, \ldots, x_n) + x_1^2 \varphi_2^{(1)}(x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$$

Eliminišemo $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ do

(12.n) $$x_n^o \varphi_o^{(n)} + x_n^1 \varphi_1^{(n)} + x_n^2 \varphi_2^{(n)} = 0 \ ,$$

gde su $\varphi_i^{(n)}$, $(i = 0,1,2)$, konstante iz skupa C.

Na osnovu Leme 3. imamo

$$x_n = \left(\overline{\left[\varphi_o^{(n)} = 0\right]}\left[\varphi_1^{(n)} = 0\right] + 2\left[\varphi_o^{(n)} = 0\right]\overline{\left[\varphi_1^{(n)} = 0\right]}\right) q_n^o +$$

(13.n) $$+\left(\left[\varphi_1^{(n)} = 0\right] + 2\overline{\left[\varphi_1^{(n)} = 0\right]}\left[\varphi_2^{(n)} = 0\right]\right) q_n^1 +$$

$$+\left(\overline{\left[\varphi_2^{(n)} = 0\right]}\;\overline{\left[\varphi_o^{(n)} = 0\right]} + 2\left[\varphi_2^{(n)} = 0\right]\right) q_n^2 ,$$

tj.

(13.'n) $$x_n = X_n(q_n) ,$$

gde je q_n proizvoljan element skupa L_3 .

Zamenom (13.n) u (12.n-1) dobijamo

$$x_{n-1}^o \varphi_o^{(n-1)}(x_n(q_n)) + x_{n-1}^1 \varphi_1^{(n-1)}(x_n(q_n)) +$$

$$+ x_{n-1}^2 \varphi_2^{(n-1)}(x_n(q_n)) = 0 .$$

Prema tome, na osnovu Leme 3. imamo

$$x_{n-1} = \left(\overline{\left[\varphi_o^{(n-1)} = 0\right]}\left[\varphi_1^{(n-1)} = 0\right] +\right.$$

$$\left. + 2\left[\varphi_o^{(n-1)} = 0\right]\overline{\left[\varphi_1^{(n-1)} = 0\right]}\right) q_{n-1}^o +$$

(13.n-1) $$+\left(\left[\varphi_1^{(n-1)} = 0\right] + 2\overline{\left[\varphi_1^{(n-1)} = 0\right]}\left[\varphi_2^{(n-1)} = 0\right]\right) q_{n-1}^1 +$$

$$+\left(\overline{\left[\varphi_2^{(n-1)} = 0\right]}\;\overline{\left[\varphi_o^{(n-1)} = 0\right]} + 2\left[\varphi_2^{(n-1)} = 0\right]\right) q_{n-1}^2 ,$$

tj.

(13.'n-1) $$x_{n-1} = X_n(q_{n-1}, q_n) ,$$

gde su q_{n-1} , q_n proizvoljni elementi skupa L_3 .

Produžimo postupak. Na osnovu (10) imamo

$$\sum_{k=o}^{2} x_1^k \varphi_k^{(1)}\Big(X_2(q_2,q_3,\ldots,q_n),\ldots,X_n(q_n)\Big) .$$

Prema tome, na osnovu Leme 3., imamo

(13.1)
$$x_1 = \left(\overline{\left[\varphi_o^{(1)} = 0\right]}\left[\varphi_1^{(1)} = 0\right] + 2\,\overline{\left[\varphi_o^{(1)} = 0\right]}\;\overline{\left[\varphi_1^{(1)} = 0\right]}\right) q_1^o +$$
$$+\left(\left[\varphi_1^{(1)} = 0\right] + 2\,\overline{\left[\varphi_1^{(1)} = 0\right]}\left[\varphi_2^{(1)} = 0\right]\right) q_1^1 +$$
$$+\left(\overline{\left[\varphi_2^{(1)} = 0\right]}\;\overline{\left[\varphi_o^{(1)} = 0\right]} + 2\left[\varphi_2^{(1)} = 0\right]\right) q_1^2 ,$$

tj.

(13.'1) $$x_1 = X_1(q_1,q_2,\ldots,q_n) ,$$

gde su $q_1,q_2,\ldots,q_n$ proizvoljni elementi skupa L_3 .

Rešenja jednačine (12) data su relacijama

(13.n) , (13.n-1),...,(13.1) ,

odnosno

(13.'n),(13.'n-1),...,(13.'1) .

3. Jedna metoda rešavanja pseudo-Bulovih jednačina gde je zbir rešenja maksimum (ili minimum)

Neka je

$$(14)\quad f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\, x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \cdots x_{i_{k(i)}}^{\varepsilon_{i_{k(i)}}} = 0$$

moguća pseudo-Bulova jednačina, gde je

$$x_i^{\varepsilon_i} = \begin{cases} x_i, & \text{ako je } \varepsilon_i = 1 \\ \overline{x}_i, & \text{ako je } \varepsilon_i = 0 . \end{cases}$$

Skup B je skup rešenja jednačine (14) i

$$f(0,0,\ldots,0) = 0$$

(ili $f(1,1,\ldots,1) = 0$), tj.

$$B = \{(e_1,e_2,\ldots,e_n) \mid f(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 0\}).$$

Problem I. Odrediti podskup A (ili A^*) skupa B tako da je zbir $e_1+e_2+\ldots+e_n$ maksimalan (ili minimalan).

Formirajmo pseudo-Bulove funkcije

$$(15)\quad F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \overline{x}_1+\overline{x}_2+\ldots+\overline{x}_n+M\, f(x_1,x_2,\ldots,x_n) ,$$

$$(15')\quad (\text{ili } F_1^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1+x_2+\ldots+x_n+Mf(x_1,x_2,\ldots,x_n)),$$

gde je $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in L_2^n$ a $M>n$.

Problem II. Odrediti skup tačaka iz L_2^p za koje funkcija F (ili F^*) ima minimum, tj. odrediti

$$(16)\quad A_1 = \{(e_1,e_2,\ldots,e_n) \mid F_1(e_1,\ldots,e_n) \text{ je minimum}\} ,$$

(16′) (ili $A_1^* = \{e_1, e_2, \ldots, e_n) \mid F_1^*(e_1, \ldots, e_n)$ je minimum$\}$.

L e m a 4 . Problem I. je ekvivalentan Problemu II .

Neka je

(17) $(e_1', e_2', \ldots, e_n') \in A$, (ili $(e_1', e_2', \ldots, e_n') \in A^*$) ,

dakle

(18) $$f(e_1', e_2', \ldots, e_n') = 0 ,$$

pa je zbir

(19) $$e_1' + e_2' + \ldots + e_n'$$

maksimalan (ili minimalan).

Zamenom $(e_1', e_2', \ldots, e_n')$ u (15) (ili 15′), na osnovu (18), imamo

$$F_1(e_1', e_2', \ldots, e_n') = n - (e_1' + e_2' + \ldots + e_n') ,$$

(ili $$F_1^*(e_1', e_1', \ldots, e_n') = e_1' + e_2' + \ldots + e_n') .$$

Na osnovu (19) minimum funkcije F_1 (ili F_1^*) je

$F(e_1', e_2', \ldots, e_n)$ (ili $F^*(e_1', e_2', \ldots, e_n)$) .

Prema tome

(20) $(e_1', e_2', \ldots, e_n') \in A_1$ (ili $(e_1', e_2', \ldots, e_n') \in A_1^*$) .

Na osnovu (17) i (20) imamo da je

(21) $A \subseteq A_1$ (ili $A \subseteq A_1^*$) .

Neka je

(22) $(e_1', e_2', \ldots, e_n') \in A_1$ (ili $(e_1', e_2', \ldots, e_n') \in A_1^*$) ,

tj. funkcija F_1 (ili F_1') ima minimum

$$F_1(e_1',e_2',\ldots,e_n') \quad (\text{ili} \quad F_1^*(e_1',e_2',\ldots,e_n')),$$

i to: $F_1(e_1',e_2',\ldots,e_n') \leq n$, (ili $F_1^*(e_1',e_2',\ldots,e_n') \leq n$) ,

jer $(0,0,\ldots,0) \in B$ (ili $(1,1,\ldots,1) \in B$) .

Onda

$$F_1(e_1',e_2',\ldots,e_n') = n-(e_1'+e_2'+\ldots+e_n')$$

$$(\text{ili} \quad F_1^*(e_1',e_2',\ldots,e_n') = e_1'+e_2'+\ldots+e_n') .$$

Prema tome zbir

(23) $$e_1' + e_2' + \ldots + e_n'$$

je maksimalan (ili minimalan), pa je

(24) $$f(e_1',e_2',\ldots,e_n') = 0 .$$

Dakle, na osnovu (23) i (24)

(25) $$(e_1',e_2',\ldots,e_n') \in A , \quad (\text{ili} \quad (e_1',e_2',\ldots,e_n') \in A^*) .$$

Iz (22) i (25) proizilazi da je

$$A_1 \subseteq A \qquad (\text{ili} \quad A_1^* \subseteq A^*) .$$

Time smo dokazali lemu.

P r i m e r . Data je pseudo-Bulova jednačina

(26)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 2x_1x_2x_3+3x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_4x_5x_2 = 0,$$

gde je $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in L_2^5$.

Odrediti rešenja jednačine koja ima maksimalni broj jedinica.

Na osnovu Leme 4. i (15) formiramo pseudo - Bulovu funkciju

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{x}_5 +$$

$$+ 6(2x_1x_2x_3+3x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4+x_2x_3x_4+$$

$$+x_1x_3x_4+x_4x_5x_2) .$$

Skup tačaka za koje funkcija F ima minimum odre - djuje se po poznatoj metodi iz prvog dela.

Funkcija F ima minimum u tačkama:

$$m_1 = (1,0,0,1,1) \;,\; m_2 = (1,0,1,0,1) \;,\; m_3 = (0,0,1,1,1) \;,$$

$$m_4 = (0,1,1,0,1) \;,$$

tj. $$F_{Min}(m_1) = F_{Min}(m_2) = F_{Min}(m_3) = F_{Min}(m_4) = 2 .$$

Prema tome tražena rešenja jednačine (26) su:

$$x_1=1 \;,\; x_2=0 \;,\; x_3=0 \;,\; x_4=1 \;,\; x_5=1 \;;$$

$$x_1=1 \;,\; x_2=0 \;,\; x_3=1 \;,\; x_4=0 \;,\; x_5=1 \;;$$

$$x_1=0 \;,\; x_2=0 \;,\; x_3=1 \;,\; x_4=1 \;,\; x_5=1 \;;$$

$$x_1=0 \;,\; x_2=1 \;,\; x_3=1 \;,\; x_4=0 \;,\; x_5=1 .$$

4. Jedna metoda za rešavanje jednačina čija rešenja pripadaju datom konačnom skupu

Neka je $L_p = \{s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}\}$, $(s_i \in C)$ dat konačan skup. Dalje, neka je funkcija

$$f : L_p^n \to C ,$$

gde je C skup realnih brojeva.

Problem je rešiti jednačinu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 . \tag{27}$$

Na osnovu Teoreme 2. i Teoreme 3. Glave I. jednačinu transformišemo u oblik

$$f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, x_1^{\varepsilon_{i_1}} x_2^{\varepsilon_{i_2}} \ldots x_n^{\varepsilon_{i_n}} , \tag{27'}$$

gde je $a_i = f(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_n})$, dok je

$$M = \left\{ (\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_n}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} a_i \, x_1^{\varepsilon_{i_1}} x_2^{\varepsilon_{i_2}} \ldots x_n^{\varepsilon_{i_n}} = 0 \right\} .$$

Proizlazi sledeća lema.

L e m a 5 . Jednačina (27) i jednačina (27') su ekvivalentne.

L e m a 6 . Skup rešenja jednačine (27) je skup $L_p^n \setminus M$.

Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ rešenje jednačine (27) i neka

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) \notin L_p^n \setminus M , \quad \text{tj.} \quad (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in M .$$

Kako su jednačine (27) i (27') ekvivalentne, onda je

$$f'(e_1,e_2,\ldots,e_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, e_1^{\varepsilon_{i_1}}\, e_2^{\varepsilon_{i_2}} \ldots e_n^{\varepsilon_{i_n}} = 0.$$

Postoji jedna i samo jedna konjunkcija u jednačini (27') koja je različita od nule i to

$$e_1^{\varepsilon'_1}\, e_2^{\varepsilon'_2} \ldots e_n^{\varepsilon'_n} = 1$$

ako i samo ako je

$$e_1 = \varepsilon'_1,\ e_2 = \varepsilon'_2,\ldots,e_n = \varepsilon'_n\ ,$$

dok su ostale konjunkcije jednake nuli.

Prema tome, ako $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ pripada skupu M- nije rešenje jednačine (27), tj. $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ pripada skupu $L_p^n \setminus M$.

Prednost ove metode u odnosu na poznate metode je očigledna u slučaju kad jednačina ima mali broj nepoznatih.

P r i m e r . Data je jednačina

$$xyz + x - y - 1 = 0\ , \tag{a}$$

gde $x,y,z \in \{1,2\}$.

Odrediti skup rešenja.

Na osnovu relacije (4") Glave I. imamo

$$\begin{array}{ll} x = 2 - x^1 & x^1 + x^2 = 1 \\ y = 2 - y^1 & y^1 + y^2 = 1 \\ z = 2 - z^1 & z^1 + z^2 = 1\ , \end{array} \tag{b}$$

gde je

$$a^1 = \begin{cases} 1\ , & \text{ako je } a = 1 \\ 0\ , & \text{ako je } a = 2\ , \end{cases}$$

$$a^2 = \begin{cases} 1 \text{ , ako je } & a = 2 \\ 0 \text{ , ako je } & a = 1 \end{cases} .$$

Zamenom relacije (b) u jednačinu (a) dobijamo jed načinu

$$x^1y^1z^2+2x^2y^1z^1+4x^2y^1z^2+3x^2y^2z^1+5x^2y^2z^1+x^1y^2z^2 = 0 .$$

Na osnovu (27'), imamo da je

$$M = \{(1,1,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2),(1,2,2)\} .$$

Skup rešenja prema Lemi 6. je

$$\{1,2\}^3 \setminus M ,$$

tj.

$$\{(1,1,1),(1,2,1)\} .$$

5. Opšte rešenje jednačine ako je poznato jedno partikularno rešenje

L. Löwenheimovu teoremu [97] za Bulove jednačine proširio je P. Ivanescu [56] na pseudo-Bulove jednačine.

U ovoj glavi proširićemo spomenutu teoremu na jednačine čija rešenja pripadaju konačnom skupu L_p^n [48].

Neka je $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ jedno partikularno rešenje jednačine (27).

L e m a 7. Ako je $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ jedno partikularno rešenje jednačine (27), onda će njeno opšte rešenje biti

$$x_i = \xi_i \left[f(p_1,p_2,\ldots,p_n) \neq 0\right] + p_i \overline{\left[f(p_1,p_2,\ldots,p_n) \neq 0\right]}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

gde je $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ proizvoljni vektor skupa L_p^n.

Na osnovu relacije (4") Glave I. imamo

$$x_i^{\alpha} = \xi_i^{\alpha} \left[f(p_1,p_2,\ldots,p_n) \neq 0\right] + p_2^{\alpha} \overline{\left[f(p_1,p_2,\ldots,p_n) \neq 0\right]}, \alpha \in L_p, \; i=1,\ldots,n.$$

Svaka jednačina (27), na osnovu Teoreme 2. Glave I. može se transformisati u oblik

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_p^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Prema tome:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \in L_p^n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \prod_{i=1}^{n} \left(\xi_i^{\alpha_i} \left[f(p_1,p_2,\ldots,p_n) \neq 0\right.\right.$$

$$+ \; p_i^{\alpha_i}\,\overline{\left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right]}\Big) =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_n)\in L_p^n} f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\Big(\xi_i^{\alpha_1}\,\xi_2^{\alpha_2}\dots\,\xi_n^{\alpha_n}\left[f(p_1,p_2,\dots,p_n)\neq 0\right] +$$

$$+ \; p_i^{\alpha_1}\,p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}\,\overline{\left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right]}\Big) =$$

$$= \left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right] \sum_{(\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_n)\in L_p^n} f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\,\xi_1^{\alpha_1}\,\xi_2^{\alpha_2}\dots\,\xi_n^{\alpha_n} +$$

$$+ \; \overline{\left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right]} \sum_{(\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_n)\in L_p^n} f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n} =$$

$$= \overline{\left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right]}\; f(p_1,p_2,\dots,p_n) +$$

$$+ \left[f(p_1,p_2,\dots,p_n) \neq 0\right]\; f(\xi_1,\xi_2,\dots\,\xi_n) = 0 \;.$$

Ako je $(x_1',x_2',\dots,x_n')$ rešenje jednačine (27), onda $p_i = x_i'$, $i=1,2,\dots,n$, pa imamo

$$x_i = \xi_i\left[f(x_1',x_2',\dots,x_n') \neq 0\right] +$$

$$+ \; x_i'\,\overline{\left[f(x_1',x_2',\dots,x_n') \neq 0\right]} = x_i' \;,\quad i=1,2,\dots,n \;.$$

6. Sistem nejednačina i jednačina čija rešenja pripadaju skupu L_p^n

Neka je funkcija

$$f : L_p^n \to Z ,$$

gde je Z skup celih brojeva, a $L_p = \{0,1,\dots,p-1\}$.

Problem je rešiti nejednačinu

(28) $$f(x_1,x_2,\dots,x_n) \leq 0 .$$

Neka je A minimum funkcije f .

Dalje, $M = |A|$ (apsolutno od A) .

Broj M predstavimo u brojnom sistemu osnove p, tj.

$$M = p^k a_k + p^{k-1} a_{k-1} + \dots + p^o a_o .$$

Formirajmo jednačinu

(29) $$F(x_1,\dots,x_n,y_o,\dots,y_k) = f(x_1,x_2,\dots,x_n) + p^o y_o + \dots + p^k y_k = 0$$

L e m a 8 . Jednačina (29) je ekvivalentna nejednačini (28).

Neka je $(x_1',\dots,x_n',y_o',\dots,y_k')$ jedno rešenje jednačine (29); onda je

$$f(x_1',\dots,x_n') = -(p^o y_o + \dots + p^k y_k) .$$

Prema tome je

$$f(x_1,\dots,x_n') \leq 0 .$$

Ako je $(x_1'',\dots x_n'')$ jedno rešenje nejednačine (28), tj.

$$f(x_1'',\dots,x_n'') \leq 0 ,$$

da postoji $(y_o'', y_1'', \ldots, y_k'') \in L_p^{k+1}$, tako da je

$$f(x_1'', \ldots, x_n'') + p^o y_o'' + \ldots + p^k y_k'' = 0 .$$

Neka je dat sistem jednačina

(30) $$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,m \ ,$$

de je $(x_1, \ldots, x_n) \in L_p^n$, ili

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) + 1 = 1 \ , \ i = 1,2,\ldots,m \ .$$

Formirajmo jednačinu

(31) $$\prod_{i=1}^{m} (f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1) = 1 .$$

L e m a 9 . Sistem jednačina (30) je ekvivalentan sa jednačinom (31).

Na osnovu Leme 8. i Leme 9. proizlazi sledeća teorema:

T e o r e m 2 . Sistem jednačina i nejednačina

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, \rho_i \, 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,m \ ,$$

de je $\rho_i \in \{ = , \geqslant , \leqslant , > , < \}$, ekvivalentan je jednačini

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_o, y_1, \ldots, y_k) = 0 .$$

P r i m e d b a . Svaka nejednačina može se svesti na nejednačinu tipa (28).

Zaista, nejednačinu $f(x_1, \ldots, x_n) < 0$ transformišemo u nejednačinu $f(x_1, \ldots, x_n) + 1 \leqslant 0$, dok nejednačinu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ transformišemo u nejednačinu

$$-f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0 .$$

IV GLAVA

...NSFORMISANJE MATRIČNE IGRE U PSEUDO-BULOVO PROGRAMIRANJE

Date su matrice

$$A = \|a_{ij}\| \ , \ B = \|b_{ij}\| \ , \ (i=1,2,\dots,m), j=(1,2,\dots,n),$$

... su a_{ij} i b_{ij} realni brojevi.

Neka je ρ jedna od relacija $\geqslant, \leqslant, >, <, \neq, =$ ...neka je c fiksiran realan broj.

P r o b l e m I . Odrediti skup matrica

(1) $$C = \|c_{ij}\| \ , \ (i=1,2,\dots,m_1),(j=1,2,\dots,n_1) \ ,$$

$$m_1 = 1,2,\dots,m \ , \ n_1 = 1,2,\dots,n \ ,$$

...ko da:

I. 1° Skup kolona (ili vrsta) matrice C je pod-...up unije skupa kolona (ili vrsta) matrica A i B .

2° Dve kolone (ili vrste) istog indeksa matri- A i B ne mogu istovremeno biti kolone (ili vrste) matri C .

II. Matrica C ima bar jedan element u svakoj ko - ...ni i u svakoj vrsti u relaciji ρ sa c .

P r o b l e m II . Odrediti skup matrica

$$C = \|c_{ij}\| \ , \ (i=1,2,\dots,m)(j=1,2,\dots,n_1), n_1=1,2,\dots,n \ ,$$

...li $C = \|c_{ij}\|$, $(i=1,2,\dots,m_1)(j=1,2,\dots,n)m_1=1,2,\dots,m)$,

...ko da:

I.' 1°. Skup kolona (ili vrsta) matrice C je pod ...up unije skupa kolona (ili vrsta) matrica A i B .

2° Dve kolone (ili vrste) istog indeksa matri-
A i B ne mogu istovremeno biti kolone (ili vrste) matri
C .

II.' Matrica $C_{m\times n_1}$, ima bar jedan element u sva-
koj koloni (ili u svakoj vrsti) u relaciji ϱ sa c .

III.' Da je n_1 (ili m_1) minimalan.

IV.' Da je zbir

$$\sum_{e=j_1}^{j_{n_1}} \sum_{i=1}^{m} |c_{ie}| \quad \left(\text{ili} \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{e=i_1}^{i_{m_1}} |c_{ej}|\right)$$

minimalan.

Svaku matricu

$$C_{m_1\times n_1} \quad (m_1\leq m \ , \ n_1\leq n) \ ,$$

možemo predstaviti pomoću jednog vektora

$$(x_1,x_2,\dots,x_m \ , \ y_1,y_2,\dots,y_n) \ ,$$

koji pripada skupu $L_2^m \times L_3^n$, i to:

1° $x_i = 1$, ako su elementi iz odgovarajuće i-te vrste matrica $A_{m\times n}$ i $B_{m\times n}$ uzeti u matricu $C_{m_1\times n_1}$.

2° $x_i = 0$, ako nisu elementi iz odgovarajuće i-te vrste matrica $A_{m\times n}$ i $B_{m\times n}$ uzeti u matricu $C_{m_1\times n_1}$.

3° $y_j = 1$, ako su elementi iz odgovarajuće j-te kolone matrice $A_{m\times n}$ uzeti u matricu $C_{m_1\times n_1}$, dok elementi iz j-te kolone matrice $B_{m\times n}$ nisu uzeti.

4° $y_j = 2$, ako su elementi iz odgovarajuće j-te kolone matrice $B_{m\times n}$ uzeti u matricu $C_{m\times n_1}$, dok elementi j-te kolone matrice $A_{m\times n}$ nisu uzeti.

5° $y_j = 0$, ako nisu elementi iz odgovarajuće j-te kolone matrica $A_{m \times n}$ i $B_{m \times n}$ uzeti u matricu $C_{m_1 \times n_1}$.

Prema tome, svaka matrica je odredjena jednim vektorom iz $L_2^m \times L_3^n$.

Matrica tipa (1) odredjena je jednim vektorom iz $L_2^m \times L_3^n$.

Matrica tipa (2) odredjena je jednim vektorom iz L_3^n.

Podmatrica

$$A_{m_1 \times n_1} (m_1 \leqslant m_1 \; n_1 \leqslant n)$$

matrice $A_{m \times n}$ odredjena je jednim vektorom iz L_2^{m+n}.

Podmatrica $A_{m \times n_1}, (n_1 \leqslant n)$ matrice $A_{m \times n}$, odredjena je jednim vektorom iz L_2^n.

L e m a 1. Svaka matrica tipa (1) ispunjava uslove I i II ako i samo ako je

$$(x_1, x_2, \dots, x_m \, , \, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

jedno rešenje skupa jednačina:

$$\text{(I)} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i^1 \prod_{j=1}^{n} (1 - [a_{ij} \varrho c] y_j^1 - [b_{ij} \varrho c] y_j^2) = 0$$

$$\text{(II)} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(y_j^1 \prod_{i=1}^{m} (1 - [a_{ij} \varrho c] x_i^1) + y_j^2 \prod_{i=1}^{m} (1 - [b_{ij} \varrho c] x_i^1) \right) = 0$$

$$\text{(III)} \quad \prod_{j=1}^{n} \overline{(y_j^1 + y_j^2)} = 0 \quad \text{ili} \quad \prod_{i=1}^{m} \overline{x_i^1} = 0 \, .$$

A. Zaista, za svaku i-tu vrstu matrice tipa (1), imamo da je $x_i = 1$, pa na osnovu 1°, 3° i 4° sledi

$$1 = [a_{ij} \wp c] y_j^1 + [b_{ij} \wp c] \; y_j^2 \;, \text{ za } \; j = 1,2,\ldots,n \;.$$

Prema tome

$$x_i^1 \prod_{j=1}^{n} (1 - [a_{ij} \wp c] \; y_j^1 - [b_{ij} \wp c] \; y_j^2) = 0 \;, \quad \text{za}$$

$$i = 1,2,\ldots,m \;,$$

tj.

(3) $$\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \prod_{j=1}^{n} (1 - [a_{ij} \wp c] \; y_j^1 - [b_{ij} \wp c] \; y_j^2) = 0 \;.$$

B. Za svaku j-tu kolonu matrice tipa (1) imamo da je $x_j^1 + y_j^2 = 1$, pa na osnovu 3°, 4° i 1° sledi:

ako je $y_j^1 = 1$, onda je $1 = [a_{ij} \wp c] x_i^1$, za $i = 1,2,\ldots,m$;

ako je $y_j^2 = 1$, onda je $1 = [b_{ij} \wp c] x_i^1$, za $i = 1,2,\ldots,m$.

Prema tome:

$$y_j^1 \prod_{i=1}^{m} (1 - [a_{ij} \wp c] \, x_i^1) + y_j^2 \prod_{i=1}^{m} (1 - [b_{ij} \wp c] \, x_i^1) = 0 \;,$$

za $j = 1,2,\ldots,n$, tj.

(4) $$\sum_{j=1}^{n} \left(y_j^1 \prod_{i=1}^{m} (1 - [a_{ij} \wp c] x_i^1 + y_j^2 \prod_{j=1}^{m} (1 - [b_{ij} \wp c] x_i^1) \right) = 0.$$

C. Da bi jedna matrica tipa (1) egzistirala, potrebno je uzeti najmanje jednu vrstu i jednu kolonu matrice $A_{m \times n}$, ili jednu vrstu i jednu kolonu matrice $B_{m \times n}$. Prema tome:

(5) $$\bigcup_{i=1}^{m} x_i^1 = \bigcup_{j=1}^{n} (y^1 + y^2) = 1 \;,$$

ili

$$(5') \qquad \prod_{i=1}^{m} \bar{x}_i = \prod_{j=1}^{n} \overline{(y_j^1 + y_j^2)} = 0 \ .$$

Iz (3) i (4) proizlazi da je dovoljno zadržati samo jednu od jednačina

$$\prod_{i=1}^{m} \bar{x}_i = 0 \quad \text{ili} \quad \prod_{j=1}^{n} \overline{(y_j^1 + y_j^2)} = 0$$

Iz A, B i C proizlazi dokaz Leme 1.

Postavljeni problem I. svodi se na rešavanje skupa jednačina (I), (II) i (III), čija rešenja pripadaju konačnom skupu L_3^{m+n}. Ovaj skup jednačina rešava se po metodi sukcesivne eliminacije date u Glavi III.

L e m a 2 . Svaka matrica tipa (2) ispunjava uslove I′ i II′ ako i samo ako je vektor

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (\text{ili} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m))$$

jedno rešenje jednačine

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 - [a_{ij} \, \varphi \, c] \; y_j^1 - [b_{ij} \, \varphi \, c] \; y_j^2) = 0 \ ,$$

ili

$$(6') \qquad \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (1 - [a_{ij} \, \varphi \, c] x_i^1 - [b_{ij} \, \varphi \, c] \; x_j^2) = 0) \ .$$

Ova lema je posledica Leme 1. Iz (I), (II) i (III), za $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$, dobija se jednačina (6) (ili (6′)) .

L e m a 3 . Svaka matrica tipa (2) ispunjava uslove I′, II′ i III′ ako i samo ako funkcija

(7) $$f(y_1,y_2,\dots,y_n)=\sum_{j=1}^{n}(y_j^1+y_j^2)+$$

$$+(n+1)\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-[a_{ij}\varrho\, c]\,y_j^1-[b_{ij}\varrho\, c]\,y_j^2),$$

(ili

(7′) $$f'(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}(x_i^1+x_i^2)+$$

$$+(m+1)\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(1-[a_{ij}\varrho\, c]\,x_i^1-[b_{ij}\varrho\, c]\,x_i^2))$$

ima minimum za $(y_1,y_2,\dots,y_n)$, (ili $(x_1,x_2,\dots,x_n)$).

Neka matrica (2) ispunjava uslove I′ i II′. Onda na osnovu Leme 2. $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ (ili $(x_1,x_2,\dots,x_m)$) je rešenje jednačine (6) (ili (6′)). Neka je n_1 (ili m_1) broj jedinica u vektoru $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ (ili $(x_1,x_2,\dots,x_m)$); tada na osnovu (6), (6′) i (7), (7′) sledi

$$f(y_1,y_2,\dots,y_n)=n_1 \quad (\text{ili}\quad f'(x_1,x_2,\dots,x_m)=m_1).$$

Na osnovu III′ n_1 (ili m_1) je minimalan, tj. funkcija (7) (ili (7′)) ima minimum u

$$(y_1,y_2,\dots,y_n)\ (\text{ili u}\ (x_1,x_2,\dots,x_m)).$$

Funkcija (7) (ili (7′)) ima minimum u

$$(y_1,y_2,\dots,y_n),\ (\text{ili}\ (x_1,x_2,\dots,x_m))$$

i to

(8) $$f_{Min}(y_1,y_2,\dots,y_n)=n_1,\ (\text{ili}\ f'(x_1,x_2,\dots,x_m)=m_1),$$

gde je $n_1\leq n$ (ili $m_1\leq m$), jer je

$$f(1,1,\dots,1)=f(2,2,\dots,2)=n,$$

ili

$$f'(1,1,\ldots,1) = f(2,2,\ldots,2) = m) \ .$$

Prema tome, $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ (ili $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$) je rešenje jednačine (6) (ili (6′)), a na osnovu Leme 2. matrica (2) ispunjava uslove I′ i II′ .

L e m a 4 . Svaka matrica tipa (2) ispunjava uslove I′, II′ i IV′ ako i samo ako funkcija

$$f(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(y_j^1 \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| + y_j^2 \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|\right) + \tag{9}$$

$$+ M \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n}\left(1 - [a_{ij} \rho\, c]\, y_j^1 - [b_{ij} \rho\, c]\, y_j^2\right),$$

gde je

$$M > \mathrm{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \ , \ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|\right\},$$

(ili funkcija

$$f'(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i^1 \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + x_i^2 \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|\right) +$$

$$+ M \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m}\left(1 - [a_{ij} \rho\, c]\, x_i^1 - [b_{ij} \rho\, c]\, x_i^2\right), \tag{9′}$$

gde je

$$M > \mathrm{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \ , \ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|\right\}),$$

ima minimum $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ (ili u $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$) .

Neka matrica tipa (2) ispunjava uslove II′, I′ i IV′. Kako je na osnovu uslova I′ i II′, odnosno Leme 2.,vektor

$$(y_1,y_2,\ldots,y_n) \qquad (\text{ili} \quad (x_1,x_2,\ldots,x_m))$$

rešenje jednačine (6) (ili (6´)), funkcija (9) (ili (9´)) je

(10) $$f(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \sum_{e=j_1}^{j_{n_1}} \sum_{i=1}^{m} |c_{ie}| \, ,$$

(ili

(10´) $$f'(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{e=i_1}^{i_{m_1}} |c_{ej}|\Big) \, ,$$

gde je $$|c_{ie}| = \begin{cases} |a_{ie}|, & \text{ako je } y_e = 1 \\ |b_{ie}|, & \text{ako je } y_e = 2 \, . \end{cases}$$

Prema tome, zbir (10) (ili (10´)), na osnovu IV´, minimalan je.

Ako funkcija (9) (ili funkcija (9´)) ima minimum u $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, (ili u $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, gde je

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j^1 + y_i^2) = n_1 \, ,$$

(ili

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^1 + x_i^2) = m_1) \, ,$$

i $n \leq n$ (ili $m_1 \leq m$) , onda

$$f_{Min}(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \sum_{e=j_1}^{j_{n_1}} \sum_{i=1}^{m} |c_{ie}| \, ,$$

(ili

$$f'_{Min}(x_1,x_2,\dots,x_m) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{e=i_1}^{i_{m_1}} |c_{ej}|) ,$$

a

$$|c_{ie}| = \begin{cases} |a_{ie}| , & \text{ako je } y_e = 1 \\ |b_{ie}| , & \text{ako je } y_e = 2 , \end{cases}$$

i to

$$f(y_1,y_2,\dots,y_n) \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |c_{ij}| ,$$

jer

$$f(1,1,\dots,1) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$f(2,2,\dots,2) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| .$$

(Isto i za funkciju f') .

Prema tome $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ (ili $(x_1,x_2,\dots,x_m)$) je rešenje jednačine (6) (ili jednačine (6´)), a na osnovu Leme 2. matrica tipa (2) ispunjava uslove I´ i II´, dok je na osnovu (9) ispunjen uslov IV´.

Postavljeni problem II svodi se na odredjivanje skupa tačaka iz L_3^{n+n} , za koje funkcije (7) i (9) imaju minimum. Metod za odredjivanje minimuma ovih funkcija dat je u Glavi II.

Primena 1. Neka je

$$C_G = \|a_{ij}\| , \; i=1,2,\dots,n , \; j=1,2,\dots,n$$

matrica pridružena grafu G , gde je $V = \{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ skup vrhova grafa.

Problem je odrediti skup podgrafova datog grafa.

Na osnovu Leme 1. skup podgrafova datog grafa G dobija se tako što se reši skup jednačina

$$(\mathrm{I}'') \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j=1}^{n} (1-[a_{ij} \neq 0]y_j) = 0 ,$$

$$(\mathrm{II}'') \qquad \sum_{i=1}^{n} y_j \prod_{i=1}^{n} (1-[a_{ij} \neq 0]x_i) = 0 ,$$

$$(\mathrm{III}'') \qquad \prod_{j=1}^{n} \bar{y}_j = 0 \quad \text{ili} \quad \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i = 0 ,$$

čija rešenja pripadaju skupu L_2^{n+n} .

Primena 2. Neka su data dva grafa G_1 i G_2 . Pridružimo im matrice

$$M_{G_1} = \|a_{ij}\| , \ i=1,2,\dots,n , \ j=1,2,\dots,n$$

$$M_{G_2} = \|b_{ij}\| , \ i=1,2,\dots,m , \ j=i,2,\dots,m .$$

Zbir grafova G_1 i G_2 odredjen je matricom

$$M_{G_1 \cup G_2} = \|a_{ij} \ b_{ij}\| , \ i=1,2,\dots,n , \ j=1,2,\dots,n , \ n \geqslant m .$$

Problem je odrediti skup podgrafova tako dobijenog grafa.

Na osnovu Leme 1. skup podgrafova tako dobijenog grafa odredjuje se rešavanjem skupa jednačina I", II" i III" čija rešenja pripadaju skupu L_3^{2n} .

V GLAVA

PRIMENA PSEUDO-BULOVOG PROGRAMIRANJA U ALGEBARSKOJ TEORIJI AUTOMATA

U [114] i [69] postavlja se i studira problem minimizacije strukture šema sa običnim kontaktima (break-before-make), ili sa specijalnim kontaktima (make-before-break) pri realnom funkcionisanju, čije je aktiviranje i deaktiviranje dato u tri pozicije (tabela 1). Dakle, problem se sastoji u pronalaženju najprostijeg izraza E , koji definiše funkciju

(1) $$f : L_3^n \to L_2 ,$$

gde je $L_2 = \{0,1\}$, $L_3 = \{0 , \frac{1}{2} , 1\}$.

U [69] su studirana tri problema minimizacije za funkcije tipa (1) i to:

Prvi problem. Minimizacija broja kontakata koji figurišu u izrazu kojim je definisana funkcija.

Drugi problem. Minimizacija broja slova sadržanih u normalnoj disjunktivnoj formi.

Treći problem. Minimizacija broja konjunkcija, koje se pojavljuju u normalnoj disjunktivnoj formi.

Sva ova tri problema svedena su na problem minimizacije pseudo-Bulovih funkcija.

U ovoj glavi proširićemo sva tri problema minimizacije pri realnom funkcionisanju releja sa običnim i specijalnim (normalno otvorenim i normalno zatvorenim) kontaktima na istu kotvu releja, čije se aktiviranje i deaktiviranje vrši u p pozicija [44] .

Dakle, studiraćemo problem odredjivanja najprostiizraza E , koji definiše funkciju

(2) $$f : L_p^n \to L_2 \text{ , gde je } L_p = \left\{0 \text{ , } \frac{1}{p-1}, \dots, \frac{p-2}{p-1}, 1\right\}$$

ispunjava uslove postavljenih problema.

Neka su

$$K_1, K_2, \dots, K_r$$

normalno otvoreni i normalno zatvoreni kontakti, montirani na istu kotvu releja X .

Pridružimo tim kontaktima promenljive

(3) $$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r} \text{ ,}$$

i kotvi releja promenljivu x , čiji kontakti funkcionišu prema tabeli 2.

x	0	$\frac{1}{2}$	0
x^{00}	1	0	0
x^{10}	0	0	1

x	0	$\frac{1}{2}$	1
x^{0s}	1	1	0
x^{1s}	0	1	1

tabela 1.

x	0	$\frac{1}{p-1}$	$\frac{2}{p-1}$	...	$\frac{p-2}{p-1}$	1
x_{k_1}	ε_{10}	$\varepsilon_{1\frac{1}{p-1}}$	$\varepsilon_{1\frac{2}{p-1}}$	...	$\varepsilon_{1\frac{p-2}{p-1}}$	ε_{11}
x_{k_2}	ε_{20}	$\varepsilon_{2\frac{1}{p-1}}$	$\varepsilon_{2\frac{2}{p-1}}$	...	$\varepsilon_{2\frac{p-2}{p-1}}$	ε_{21}
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
.						
.						
x_{k_r}	ε_{r0}	$\varepsilon_{r\frac{1}{p-1}}$	$\varepsilon_{r\frac{2}{p-1}}$	...	$\varepsilon_{r\frac{p-2}{p-1}}$	ε_{r1}

tabela 2.

U tabeli 2. $\varepsilon_{ij} \in L_2$ za svako $i=1,2,\ldots,r$ i za ako $j \in L_p$.

D e f i n i c i j a 1 . Za konjunkciju C_i kaže- mo da je „kraća" od konjunkcije C_j , u notaciji

$$C_i \subseteq C_j ,$$

ako su sva slova sadržena u C_i sadržana i u C_j .

Svakoj konjunkciji C_i pridružimo prirodan broj $N(C_i)$ sa osobinama:

a. Ako je $C_i \subseteq C_j$, onda je i $N(C_i) \leq N(C_j)$.

b. Ako je $E = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$, onda je i

$$N(E) = \sum_{i=1}^{r} N(C_i) .$$

Neka su vektori $(\varepsilon_{1\alpha}, \varepsilon_{2\alpha}, \ldots, \varepsilon_{r\alpha}), \alpha \in L_p$, kolone matrice $((\varepsilon_{i\alpha}))$, $i=1,2,\ldots,r$ i $\alpha \in L_p$ sa tabele 2.

Formirajmo

$$C_\alpha = \sum_{i=1}^{r} x_{k_i}^{\varepsilon_{i\alpha}} , \quad \alpha \in L_p , \tag{4}$$

gde je

$$x_{k_i}^{\varepsilon_{k_i}} = \begin{cases} \bar{x}_{k_i} , & \text{ako je } \varepsilon_{k_i} = 0 \\ x_{k_i} , & \text{ako je } \varepsilon_{k_i} = 1, \end{cases}$$
$$i=1,2,\ldots,r, \ \alpha \in L_p .$$

Neka je

$$C'_\alpha \subseteq C_\alpha \text{ i } C'_\alpha \nsubseteq C_\beta \quad \text{ako je } \beta \in L_p \setminus \{\alpha\}, \tag{5}$$

i neka je dužina konjunkcije C'_α minimalna.

T e o r e m 1 . Za svaku konjunkciju C'_α iz (5) postoji jedna funkcija x^α, tako da je

$$x^\alpha = C'_\alpha \ , \alpha \in L_p \ ,$$

tj.

$$x^\alpha = \prod_{\varepsilon_{i_j \alpha} \in A_\alpha} x_{k_{i_j}}^{\varepsilon_{i_j \alpha}} , \ \alpha \in L_p \ , \tag{5'}$$

gde je

$$A_\alpha = (\varepsilon_{i_1 \alpha} , \varepsilon_{i_2 \alpha} , \dots , \varepsilon_{i_s \alpha}), \ 1 \leqslant i_j \leqslant r, \ j=1,2,\dots,s.$$

Neka konjunkcija C'_α zadovoljava (5) i neka je

$$x^\alpha = C'_\alpha = x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1 \alpha}} \dots \varepsilon_{k_{i_s}}^{\varepsilon_{i_s \alpha}} , \text{ gde je } 1 \leqslant i_j \leqslant r \ , \ j=1,2,\dots,s \ .$$

Pretpostavimo da postoji funkcija x^β, tako da je

$$x^\beta = C'_\beta \ , \text{ gde je } \beta \neq \alpha,$$

i da je x^β jednaka jedinici za vektor $(\varepsilon_{i_1 \alpha} , \varepsilon_{i_2 \alpha} , \dots , \varepsilon_{i_s \alpha})$.
Tada

$$C'_\alpha \geq C'_\beta ,$$

što je u kontradikciji sa (5), tj.

$$C'_\beta \leqq C_\beta \quad \text{ i } \quad C'_\beta \leqq C'_\alpha \qquad \text{ ako je } \alpha \in L_p \setminus \{\beta\}.$$

Uvek postoji bar jedno slovo iz C_β da nije sadržano u C_α, $\beta \in L_p \setminus \{\alpha\}$ za svako α iz L_p ; ovo proizlazi na osnovu toga što dve kolone matrice sa tabele 2. ne mogu biti jednake.

Metod u [114] i [69] vodi nas do algoritma za određivanje svih prostih implikanata date funkcije

$$f : L_p^n \to L_2 \ .$$

1° Neka za $(\beta_1,\dots,\beta_k,\dots,\beta_n)$ funkcija

$$f(x_1,\dots,x_n)$$

ima vrednost jedan. Na osnovu Teoreme 1., Glava I, u kanon - skoj disjunktivnoj normalnoj formi funkcije f figuriše ele mentarna konjunkcija

$$x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} \dots x_n^{\beta_n} \ .$$

2° Pretpostavimo da funkcija (2) ima sledeće kon - junkcije

(6)
$$\begin{aligned}
C_1 &= x_1^{\beta_1}\dots x_{k-1}^{\beta_{k-1}}\ x_k^{o}\ x_{k+1}^{\beta_{k+1}}\dots x_n^{\beta_n} \ , \\
C_2 &= x_1^{\beta_1}\dots x_{k-1}^{\beta_{k-1}}\ x_k^{\frac{1}{p-1}}\ x_{k+1}^{\beta_{k+1}}\dots x_n^{\beta_n} \ , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_p &= x_1^{\beta_1}\dots x_{k-1}^{\beta_{k-1}}\ x_k^{1}\ x_{k+1}^{\beta_{k+1}}\dots x_n^{\beta_n} \ .
\end{aligned}$$

Na osnovu (6) konjunkcija

$$C = x_1^{\beta_1}\dots x_{k-1}^{\beta_{k-1}}\ x_{k+1}^{\beta_{k+1}}\dots x_n^{\beta_n}$$

je implikanta g za $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$, tj.

$$f_c = 1 \quad \text{ako i samo ako} \quad f_{c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_n} = 1 \ .$$

Neka smo u q koraka iskoristili 2° i dobili kon- junkcije

(7)
$$C_1', C_2', \dots, C_m' \ .$$

Kako se medju ovim konjunkcijama ne možemo koristiti 2^o, kažemo da je skup konjunkcija (7) skup prostih implikanata.

L e m a 1 . Ako su $C_1', C_2', \ldots, C_m'$ proste implikante g konjunkcija $C_1, C_2, \ldots, C_e$, onda

$$\bigcup_{i=1}^{m} C_i' = \bigcup_{i=1}^{e} C_i .$$

Da bismo olakšali algoritam, postupićemo na sledeći način:

I. Za svaku konjunkciju

$$C_i = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \ldots x_{i_n}^{\alpha_{i_n}} ,$$

odredimo njenu težinu $W(C_i)$, gde je

$$W(C_i) = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_n}$$

i gde $+$ označava obično aritmetičko sabiranje.

II. Grupišimo konjunkcije C_i po jednakim težinama u klase. Dve konjunkcije jednakih težina pripadaju istoj klasi.

III. Konjunkcije oblika (6) mogu da se traže izmedju elemenata klasa sledećih težina:

$$w,\ w + \frac{1}{p-1},\ w + \frac{2}{p-1}, \ldots,\ w + \frac{p-2}{p-1},\ w + 1 .$$

Neka je skup prostih implikanata g :

$$C_1, C_2, \ldots, C_e ,$$

dobivenih na osnovu 2^o., koji odredjuje izraz

$$E = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_e .$$

Problem I. Odrediti konjunkcije C'_α , $\alpha \in L_p$, tako da je $C'_\alpha \subseteq C_\alpha$ i $C'_\alpha \subseteq C_\beta$ ako je $\alpha \in L_p \setminus \{\beta\}$, $\beta \in L_p$, i da je $N(C'_\alpha)$ minimalan.

Neka je

$$S^e_\alpha = \left\{ \left(x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1 \alpha}} , x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2 \alpha}} , \ldots , x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e \alpha}} \right) \middle| i_1 < i_2 < \ldots < i_e , i_j = 1,2,\ldots,r \right\}$$

T e o r e m a 2 . $N(C'_\alpha) = e$ je minimum,

$$C'_\alpha \subseteq C \quad \text{i} \quad C'_\alpha \nsubseteq C_\beta , \ \beta \in L_p \setminus \{\beta\},$$

ako i samo ako

$$C'_\alpha = x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1 \alpha}} x_{k_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2 \alpha}} \ldots x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e \alpha}} ,$$

gde je

$$(x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1 \alpha}} , \ldots , x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e \alpha}}) \in S^e_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in L_p \setminus \{\alpha\}} S^e_\beta , \ \alpha \in L_p$$

i

$$S^{e_1}_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in L_p \setminus \{\beta\}} S^{e_1}_\beta = \emptyset \quad \alpha_1 < e .$$

Neka je $N(C'_\alpha) = e$ minimum,

$$C'_\alpha \subseteq C \quad \text{i} \quad C'_\alpha \nsubseteq C_\beta , \ \beta \in L_p \setminus \{\alpha\};$$

onda je

$$C'_\alpha = x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1 \alpha}} x_{k_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2 \alpha}} \ldots x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e \alpha}} ,$$

a ako

$$C'_\alpha \nsubseteq C_\beta , \ \beta \in L_p \setminus \{\alpha\},$$

onda

$$\left(x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1\alpha}}, x_{k_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2\alpha}}, \ldots, x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e\alpha}}\right) \notin \bigcup_{\beta\in L_p\setminus\{\alpha\}} S_\beta^e \ .$$

Prema tome,

$$\left(x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1\alpha}}, x_{k_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2\varepsilon}}, \ldots, x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e\alpha}}\right) \in S_\alpha^e \setminus \bigcup_{\beta\in L_p\setminus\{\alpha\}} S_\beta^e \, .$$

Neka je

$$\left(x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1\alpha}}, x_{k_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2\alpha}}, \ldots, x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e\alpha}}\right) \in S_\alpha^e \setminus \bigcup_{\beta\in L_p\setminus\{\alpha\}} S_\beta^e \, , \quad e \leq r,$$

i za $k = 1,2,\ldots,e-1$

$$S_e^k \setminus \bigcup_{\beta\in L_p\setminus\{\alpha\}} S_\beta^k = \emptyset \, ,$$

tj.

$$\left(x_{k_{i_1}}^{\varepsilon_{i_1\alpha}}, x_{k_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2\alpha}}, \ldots, x_{k_{i_e}}^{\varepsilon_{i_e\alpha}}\right) \in S_k^\alpha$$

a ne pripada $\bigcup S_\beta^e$, $\beta \in L_p\setminus\{\alpha\}$.

Dakle, $N(C_\alpha') = e$ je minimum i $C_\alpha' \subseteq C_\alpha$

i $\qquad C_\alpha' \nsubseteq C_\beta$, $\beta\in L_p\setminus\{\alpha\}$.

Problem II. Odrediti

$$S_\alpha^e \setminus \bigcup_{\beta\in L_p\setminus\{\alpha\}} S_\beta^e \neq \emptyset \, ,$$

tako da je e minimum.

Na osnovu Teoreme 2. Problem I i Problem II su ekvivalentni.

Prema tome, ako je

$$S_\alpha^k \setminus \bigcup_{\beta \in L_p \setminus \{\alpha\}} S_\beta^k$$

prazan skup za svako $k \leq e-1$, a

$$S_\alpha^e \setminus \bigcup_{\beta \in L_p \setminus \{\alpha\}} S_\beta^e$$

nije prazan, onda $N(C'_\alpha) = e$ za neko $\alpha \in L_p$.

Proizlazi da je

$$N(C'_o) = e_o \ , \ N\left(C'_{\frac{1}{p-1}}\right) = e_{\frac{1}{p-1}} \ , \ldots, \ N(C'_1) = e_1 \ ;$$

a na osnovu Teoreme 2.

$$x_o = C'_o \ , \ x_{\frac{1}{p-1}} = C'_{\frac{1}{p-1}} \ , \ldots, \ x_1 = C'_1 \ .$$

U [69] S.Rudeanu i P.Ivanescu, na osnovu $x^{\frac{1}{2}} = \overline{x^o \cup x^1}$, dali su da je

$$N(x^o) = 1 \ , \ N(x^1) = 1 \ \text{ i } \ N(x^{\frac{1}{2}}) = 2 \ ,$$

što ne važi za x^α, $\alpha \in L_p$, ako je $p > 3$.

Na osnovu Teoreme 2. imamo da je

$$x^o = x^{oo}, \ x^{\frac{1}{2}} = \overline{x^{oo}} \cdot \overline{x^{o1}} \ , \ x^1 = x^{1o} \ ,$$

tj. kao i u [69], gde je

$$x^{\frac{1}{2}} = \overline{x^o \cup x^1} \ .$$

Uvedimo relaciju koja će kontrolisati broj kontakata

$$k_1, k_2, \ldots, k_r$$

u konjunkciji C'_α i (5). Na osnovu (5') i Definicije 1. imamo:

$$N(C'_\alpha) = N\Big(\prod_{\varepsilon_{i_j\alpha} \in A_\alpha} x_{k_j}^{\varepsilon_{i_j\alpha}}\Big), \text{ gde je } \alpha \in L_p,\ A_\alpha = \{x_{i_1\alpha}, x_{i_2\alpha}, \ldots, x_{i_s\alpha}\}.$$

Prvi problem minimizacije rešava relacija:

(8) $$N(E) = \sum_{d=1}^{e} N(C_d),$$

gde je

$$N(C_d) = \sum_{\alpha \in L_p} N(C'_\alpha)\, U_d^{(\alpha)}, \quad d=1,2,\ldots,e$$

$U_d^{(\alpha)}$ broj slova u konjunkciji C_d oblika x^d.

Drugi problem minimizacije rešava relacija:

(9) $$N(E) = \sum_{d=1}^{e} U_d,$$

gde je U_d broj slova u konjunkciji C_d, tj.

(9') $$N(C_d) = U_d = U_d^{(o)} + U_d^{(\frac{1}{p-1})} + \ldots + U_d^{(1)}.$$

Treći problem minimizacije rešava relacija:

(10) $$N(E) = 1+1+\ldots+1 = e,$$

tj. broj konjunkcija, gde je

(10') $$N(C_d) = 1.$$

Rešavanje ova tri problema može se izvesti na način dat u [69] i to: odrediti jedan izraz E koji zadovoljava

(11) $f_E(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$ za sve $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A\subset L_p^n$,

(12) $f_E(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ za sve $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in B\subset L_p^n$,

gde je

$$A\cap B=\emptyset \quad \text{i} \quad N(E)\leq N(E')$$

za svaki izraz koji zadovoljava (11) i (12); $N(E)$ je definisan sa a. i b.

Ovaj problem rešava se poznatim metodom iz [69] .

Neka su $(x_1^i,x_2^i,\ldots,x_n^i), i=1,\ldots,m$ vektori iz skupa A i $C_1,C_2,\ldots,C_e$ proste implikante funkcije

(13)

$$g(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1 \text{ , ako je } (x_1,\ldots,x_n)\in A\cup C \text{ , } C=L_p^n\setminus(A\cup B)\\ 0 \text{ , ako je } (x_1,\ldots,x_n)\in B \text{ ,}\end{cases}$$

i neka je matrica $m\times e$, $((a_{ij}))$, definisana sa

(14)

$$a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ , ako je } f_{C_j}(x_1^i,x_2^i,\ldots,x_n^i)=1,\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,e\\ 0 \text{ , za ostale vrednosti .}\end{cases}$$

Ma koji sistem prostih implikanata

$$S=\{c_1,c_2,\ldots,c_e\}$$

može biti okarakterisan pomoću jednog vektora $(y_1,y_2,\ldots,y_e)$, gde je

$$y_i=\begin{cases}1 \text{ , ako je } C_i\in S\\ 0 \text{ , ako } C_i \text{ ne pripada } S \text{ , } i=1,2,\ldots,e,\end{cases}$$

nazvan karakteristični vektor sistema prostih implikanata g.

Traženi izraz je

$$E = \bigcup_{y_j \in n} y_i c_i , \tag{15}$$

de je $n = (y_1, \ldots, y_e)$ minimalna (apsolutna) tačka pseudo-ulove funkcije

$$F = \sum_{j=1}^{e} y_j N(c_j) + M \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{e} \left(1-(a_{ij} y_j)\right), \tag{16}$$

$$M > \sum_{j=1}^{e} N(c_j) .$$

Prema tome: Ako je $N(c_j)$ relacija (12´), onda (15) re-ıva prvi problem minimizacije.

Ako je $N(c_j)$ relacija (10´), onda (15) rešava 'eći problem minimizacije.

Ako je $N(c_j)$ relacija (9´), onda (15) rešava dru . problem minimizacije.

BIBLIOGRAFIJA

[1] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU (HAMMER), The Transportation Problem with Interchangeable Centers (na rumunskom) , St. cerc. mat., 11, 2 (1960).

[2] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU (HAMMER), A Method for Solving Transportation Problems (na rumunskom), Comunicarile Academiei R.P.R., 11, 9 (1961).

[3] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, The Parametric Transportation Problem (na rumunskom), St. cerc. mat., 12, 2, (1961).

[4] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, The Transportation Problem with Variable Centers (na rumunskom), St. cerc. mat . 12, 2 (1961).

[5] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, Transportation Problem with Variable Data, Revue de math. pures et appl., 6, 4 (1961).

[6] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, Transportation of Nonhomoge - neous Products (na rumunskom), St. cerc. mat., 13, 1 (1962).

[7] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, Stability of Optimal Soluti - ons of Transportation Problems with Changing Costs (na rumunskom), Comunicarile Academiei R.P.R.,13,3 (1963).

[8] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, On the Transportation Problem Part I, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opé - rationnelle, 4, 2 (1962).

[9] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, On tre Transportation Problem Part. II, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opé- rationnelle, 4, 3 (1962).

[10] E. BALAŞ, P.L. IVĂNESCU, On the Generalized Transpor - tation Problem, Management Science, 11, 1 (1964).

[11] E. BALAŞ, Un algorithme additif pour la résolution des programmes linéaires en variables bivalentes,C.R. Acad. Sci Paris 258 (1964) 3817-3820.

[12] E. BALAS, Extension de l'algorithme additif à la programmation en nombres entiers et à la programmation linéaire, C.R. Acad. Sci Paris 258 (1964) 5136-5139.

[13] E. BALAS, An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables. Operations Res,13(1965) 517-546.

[14] E.M.L. BEALE, A Method of Solving Linear Programming Problems when Some but Not All the Variables Must Take Integral Values. Statistical Techniques Research Group Princeton University, Princeton, New Jersey,March,1958

[15] R.E. BELLMAN, S.E. DREYFUS, Applied Dynamic Programming Princeton University Press, 1962.

[16] A. BEN-ISRAEL, A CHARNES, On some Problems of Dyophantine Programming Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, 4, 4, 215-280 (1962).

[17] C. BERGE, Théorie des Graphes et ses Applications, Paris, Dunod, 1958.

[18] C. BERGE, Théorie des graphes et ses applications, Paris: Dunod 1958; sec. ed., 1963.

[19] M A. BREUER, The Minimization of Boolean Functions Containing Unequal and Nonlinear Cost Functions.Comm. ACM 5 (1962) 374.

[20] P. CAMION, Quelques propriêtés des chemins et circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes. Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. 2 (1960) 5-36.

[21] P. CAMION, Une mêthode de résolution par l'algèbre de Boole des problèmes combinatoires ou interviennent des entiers. Cahiers Centre Etudes Recherche Opér.2 (1960) 234-289.

[22] C. CARDOT, Application de la théorie des distributifs à l'étude de la distribution de programmes par télé - commande. Revue Générale de l'Electricité Janvier 1957 27-39.

[23] M. CARVALLO, Monographie des treillis et algèbre de Boole, Paris: Gauthier-Villars 1962.

[24] M. CARVALLO, Principes et applications de l'analyse booléenne. Paris: Gauthier-Villars 1965.

[25] A. CHARNES, and W.W. COOPER, Programming with Linear Fractional Functionals, Naval Res. Logist. Quart. 9 (1962) 181-186.

[26] P. CONSTANTINESCU, On Reducing the Number of Contacts by the Introductions of Bridge Circuits (na rumunskom) An. Univ. C. I. Parhon Ser. Sti. Natur. Mat.-Fiz. No. 11 (1956) 45-69.

[27] G.B. DANTZIG, Discrete Variable Extremum Problems. Operations Res. 5 (1957) 266-277.

[28] G.B. DANTZIG, On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables. Econometries 28 (1960) 30-44.

[29] G.B. DANTZIG, Linear Programming and Extensions. Princeton/NJ: Princeton Univ. Press 1963.

[30] G.B. DANTZIG, D.R. FULKERSON and S.M. JOHNSON, Solution of a Large-Scale Travelling-Salesman Problem. Operations Res. 2 (1954) 393-410.

[31] A. DELEANU and P.L. HAMMER (IVANESCU), Optimal Assignement of Numbers to Vertices by Pseudo-Boolean Programming Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. P. Roumaine 7(55) (1963) 149-150.

[32] M. DENIS-PAPIN and Y. MALGRANGE, Exercices de calcul booléin avec leurs solutions. Paris: Ed. Eyrolles 1966

[33] J. EGERVARY, On Combinatorial Properties of Matrices (na madjarskom). Math.-Fiz. Lapok 38 (1931) 16-28.

[34] J. EGERVARY, Combinatorial Methods for Solving Transportation Problems. Mag. Tud. Akad. Mat. Kut. Intéz. Közleményei 4 (1959) 15-28.

[35] R. FAURE and Y. MALGRANGE, Une méthode booléienne pour la résolution des programmes linéaires en nombres entiers. Gestion, No. spécial, avril 1963.

[36] L.R. FORD Jr. and D.R. FULKERSON, Flows in Networks. Princeton/NJ: Princeton Univ. Press 1962.

[37] R. FORTET, L'algébre de Boole et ses applications en recherche opérationnelle. Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. 1, No. 4 (1959) 5-36.

[38] R. FORTET, Applications de l'algèbre de Boole en recherche opérationnelle. Rev. Francaise Recherche Opér. 4 (1960) 17-26.

[39] R. FORTET, Résolution booléenne d'opérations aritmétiques sur les entiers non négatifs et applications aux programmes linéaires en nombres entiers. Rapport SMA. Paris, mars 1960.

[40] D.R. FULKERSON, Note on Dilworth's Theorem for Partially Ordered Sets. Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) 701-702.

[41] D.R. FULKERSON and H.J. RYSER, Widths and Heights of (0,1)-Matrices. Canad. J. Math. 13 (1961) 239-255.

[42] D. GALE, A Theorem on Flows in Networks. Pacific J. Math. 7 (1957) 1073 to 1082.

[43] T. GASPAR, Programming the Algorithm for the Minimization of Pseudo-Boolean Functions for a MECIPT-1 Computer (na rumunskom). Stud. Cerc. Mat. 19 (1967) 1135 - 1148.

[44] K. GILEZAN, Primena pseudo-Bulovog programiranja u algebarskoj teoriji automata, Matematički vesnik 6 (21) Sv. 3, 1969.

[45] K. GILEZAN, B. LATINOVIĆ, Metod odredjivanja minimuma funkcije $f : L_3^n \rightarrow C$, Matematički vesnik, 7 (22) Sv. 1, 1970.

[46] K. GILEZAN, B. LATINOVIĆ, Metod odredjivanja minimuma funkcije $f : L_p^n \rightarrow C$, Matematički vesnik, 7 (22) Sv 3, 1970.

[47] K. GILEZAN, Méthode à resoudre des relations dont les résolutions appartiennent un ensemble finis, Publ.Inst Math., Beograd, Sv. 3 (1970).

[48] K. GILEZAN, Une Généralisation du théorème de Löwen - heim sur les équations de Boole, Publ. Inst. Math. Beo grad, Sv. 3 (1970).

[49] K. GILEZAN, Méthode des éliminations successives pour résoudre les équations dont les solutions appartiennent a un ensemble fini, Kongres matematičara, fizičara i astronoma u Ohridu, 1970.

[50] R.E. GOMORY, Essentials of an Algorithm for Integer So lutions to Linear Programs, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958) 275-278.

[51] C.C. GOTLIEB, The Construction of Class-Teacher Time-Tables. IFIP Congress (1963) 73-77.

[52] H. GRENIEWSKI, Boole-Kolmogoroff Algebra and Input-Out put Analysis. Communication at the First European Con- ference of TIMS and ES. Warsaw, September 1966.

[53] S.L. HAKIMI, Optimum Distrubution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theo retic Problems. Operations Res. 13 (1965) 462-475.

[54] P.L. HAMMER (IVǍNESCU), Programmation polynomiale en nombres entiers. C. R. Acad. Sci. Paris 258 (1964) 424-427.

[55] P.L. HAMMER (IVǍNESCU), On the Minimal Decomposition of Finite Partially Ordered Sets in Chains. Rev. Rou - maine Math. Pures Appl. 9 (1964) 897-903.

[56] P.L. HAMMER (IVǍNESCU), Systems of Pseudo-Boolean Equa tions and Inequalities. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér . Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964) 673-680.

[67] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, On Solving the Transportation Problem by the Egerváry method. I. (na rumunskom). Com. Acad. R.P.Romine 11 (1961) 773-778.

[68] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, On Solving the Transportation Problem by the Egerváry Method. II. (na rumunskom). Stud. Cerc. Mat. 14 (1963) 59-67.

[69] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, Minimization of Switching Circuits in Actual Operation. IFAC Symposium on Hazard and Race Phenomena in Switching Circuits,Circular Letter No. 14. Bucharest 1965; Rev.Roumaine Math Pures Appl. 12 (1967) 407-444.

[70] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, Programmation pseudo-booléenne. I. Le cas linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 263 (1966), 164-167.

[71] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, Programmation pseudo-booléenne. II. Le cas non linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 263 (1966) 217-219.

[72] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, Pseudo- Boolean Methods for Bivalent Programming. Lecture Notes in Mathematics No. 23. Berlin/Heidelberg/New York: Springer 1966.

[73] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, A Pseudo-Boolean Approach to Matching Problems in Graphs, With Applications to Assignment ant Transportation Problems.Théorie des Graphes, Journées Internationales d'Etude, Rome, juillet 1966. Paris/New York: Dunod, and Gordon , Breach 1967, pp. 161-175.

[74] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, Extensions of Pseudo-Boolean Programming. Mat. Vesnik (Beograd)4(19) (1967) 113-118.

[75] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, A Pseudo-Boolean Viewpoint on Systems of Representatives. Applicationes Math. (Wroclaw)

[76] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, Pseudo- Boolean Programming. Communication to the Symp. on Appl.of Math to Economics, Bucharest 1967.

[77] P.L. HAMMER (IVĂNESCU) and S. RUDEANU, Pseudo-Boolean Programming and an Induced Equivalence of Combinatorial Problems. Communication at the Proc. Intern. Symp. on Math. Programming. Princeton 1967.

[78] P.L. HAMMER (IVĂNESCU), S. RUDEANU, Boolean Methods in Operations Research and Related Areas, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1968)

[79] F. HARARY, R.Z. NORMAN and D. CARTWRIGHT, Structural Models. An Introduction to the Theory of Directed Graphs New York/London/Sydney: Wiley 1965.

[80] A.J. HOFFMAN, Some Recent Applications of the Theory of Linear Inequalities to Extremal Combinatorial Analysis. Proc. Symp. Appl. Math. 10 (1960).

[81] A.J. HOFFMAN and H.W. KUHN, On Systems of Distinct Representatives. Linear Inequalities and Related Systems Ann. Math. Studies, vol. 38. Princeton/NJ: Princeton Univ. Press 1956.

[82] A.J. HOFFMAN and H.W. KUHN, Systems of Distinct Representatives and Linear Programming. Amer. Math. Monthly 63 (1956) 455-460.

[83] W.E. JOHNSON, Sur la théorie des équations logiques. Bibl. Congr. Internat. Phil., III (1901).

[84] Y. INAGAKI and K. SUGINO, An Application of Pseudo-Boolean Programming to the State Assignment of Sequential Circuits with High Reliability. Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ. 17 (1965) 173-184.

[85] R. M. KARP, Note on the Application of Graph Theory to Digital Computer Programming, Information and Control 3 (1960) 179-190.

[86] A. KAUFMANN, Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. Tome 2. Paris: Dunod 1964.