Mirjana M. Lukačević

PRIMENA PFAFOVE METODE U RELATIVISTIČKOJ MEHANICI VISKOZNOG FLUIDA

(doktorska disertacija)

S A D R Ž A J

U V O D

Relativistička hidromehanika je počela da se razvija 1914. godine, kada je Ajnštajn [1] formulisao izraz za tenzor energije relativističkog idealnog fluida i izveo njegove diferencijalne jednačine kretanja, ograničivši se pri tome na adijabatska strujanja, kada za fluid važi karakteristična jednačina koja vezuje pritisak i gustinu.

Jednačine kretanja takvog fluida ispitivao je 1924. godine Ajzenhart (Eisenhart) [2]. On je pokazao da je, kada se radi o adijabatskom strujanju idealnog fluida, moguće pronaći metriku koja je konformna metrici prostor-vremena, u odnosu na koju strujne linije fluida predstavljaju geodezijske linije. Pri tome je utvrdio i oblik skalarne funkcije pomoću koje se pomenuta konformna metrika uvodi.

To su, medjutim, bili samo pojedinačni, iako veoma značajni rezultati iz oblasti relativističke mehanike fluida.

Tek 1937. godine pojavljuje se prvi rad koji sistematski izlaže relativističku teoriju idealnog fluida po uzoru na odgovarajuću klasičnu teoriju. To je opširni Singov (J. L. Synge) rad „Relativistička hidrodinamika" [3]. U njemu autor pre svega izlaže ono što je do tada o relativističkom idealnom fluidu bilo poznato, pretpostavljajući [illegible]o i njegovi prethodnici da za fluid važi karakteristična jednačina koja vezuje sopstveni pritisak i sopstvenu gustinu. On prihvata od Ajzenharta skalarnu funkciju pomoću koje se strujne linije idealnog fluida preslikavaju na geodezijske linije jednog prostora čija je metrika konformna metrici prostor-vremena, i pomoću nje uvodi svoju funkciju, tzv. funkciju-indeks[1], koja u relativističkoj hidrodinamici igra veoma važnu ulogu.

Pored toga, Sing je u svome radu uveo i čitav niz novih pojmova: definisao je kinematičku i dinamičku cirkulaciju, uveo pojam kinematičkog i dinamičkog tenzora vrtloženja, kinematičkog i dinamičkog vektor-vrtloga, i definisao je i ispitivao bezvrtložno strujanje. Izvestan broj definicija iz ovoga rada je docnije pretrpeo izmene, pa se čak neki pojmovi definisani u njemu i ne pominju u docnijim radovima, kako Singovim tako i ostalih autora, jer se pokazalo da ne predstavljaju uspela relativistička uopštenja odgovarajućih klasičnih pojmova. Tako, recimo, u današnjim radovima ne možemo naići na Singovu kinematičku cirkulaciju; kao izraz koji predstavlja relativističko uopštenje klasičnog pojma cirkulacije vektora brzine prihvaćena je samo njegova dinamička cirkulacija, pod imenom cirkulacije vektora toka. Ipak, ovaj Singov rad predstavlja značajan doprinos razvoju relativističke teorije fluida, budući da je poslužio kao osnovica na kojoj su docniji autori, uključujući i samoga Singa, gradili dalje tu teoriju.

---

1) Funkcija-indeks koju Sing uvodi, i koju tako naziva zbog njene analogije sa klasičnim indeksom prelamanja date transparentne sredine, ne razlikuje se bitno od pomenute Ajzenhartove funkcije: samo iz formalnih razloga, umesto da koristi Ajzenhartovu funkciju $\phi(p)=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)+p}$ (gde je p sopstveni pritisak fluida, a ρ njegova sopstvena gustina), Sing kao funkciju-indeks definiše $f(p)=\exp\phi(p)$. U svojim radovima Lihnerovič prihvata Singovu funkciju i naziva je indeks fluida.

Posle izvesne praznine u literaturi koju je doneo drugi svetski rat, krajem četrdesetih, a zatim pedesetih i šezdesetih godina, pojavljuje se čitav niz veoma značajnih radova iz ove oblasti. Pomenućemo, pre svega, Taubove (A. H. Taub) radove [4],[5] i [6]. Koristeći Ekartove (C. Eckart) [7] ideje o relativističkoj termodinamici koje prenosi iz specijalne u opštu teoriju relativnosti, Taub se ne ograničava na adijabatska i izotermička strujanja, pri kojima za fluid važi karakteristična jednačina koja vezuje sopstveni pritisak i sopstvenu gustinu, već posmatra opšti slučaj, kada su dve termodinamičke veličine nezavisno promenljive. U svojim radovima on, izmedju ostalog, formuliše i jedan nov oblik tenzora energije relativističkog idealnog fluida. To je oblik u kome se unutrašnja energija pojavljuje eksplicitno, a koji je veoma pogodan za rad kada uz diferencijalne jednačine kretanja fluida i uz jednačinu kontinuiteta treba, pored karakteristične jednačine, koristiti i druge termodinamičke veze.

Uporedo sa Taubovim radovima, u literaturi iz toga perioda nailazimo na niz radova A. Lihneroviča (A. Lichnerowicz) [8],[9] i njegovih učenika. U njima autori uzimaju u obzir pojave provodjenja toplote i elektriciteta kroz idealnu fluidnu sredinu, a takodje posmatraju naelektrisani ili namagnetisani idealni fluid. Tenzor energije koji nalazimo u njihovim radovima dopunjen je članovima koji se odnose na pojave koje smo pomenuli. Veoma značajno mesto u tim radovima zauzima i Košijev problem koji se postavlja i ispituje u različitim slučajevima materijalnih sredina.

Najzad, A. Lihnerovič je prvi koji je u relativističkoj teoriji uzeo u obzir unutrašnje trenje, koje postoji izmedju čestica fluida pri njihovom relativnom pomeranju. Pošto je postavio izraz za tenzor energije relativističkog viskoznog fluida, on je, polazeći od uslova konzervativnosti toga tenzora, izveo i diferencijalne jednačine kretanja takve materijalne sredine i ispitivao nje-no bezvrtložno strujanje.

Relativistički viskozni fluid koji je uz to i naelektrisan proučavao je u svojoj studiji [10] Pišon (G. Pichon). Tenzor viskoznosti koji nalazimo u njegovom radu ne poklapa se sa izrazom koji za taj tenzor daje Lihnerovič. U odeljku 1.1 ovoga rada govorićemo detaljnije o tome zbog čega se izrazi za tenzor viskoznosti kod dvojice pomenutih autora razlikuju.

Primena varijacionih principa u relativističkoj mehanici fluida takodje je razmatrana od nekoliko autora o kojima smo ovde govorili. Koliko nam je poznato, već pomenuti Ajzenhartov rad [2] je prvi rad u kome su diferencijalne jednačine kretanja relativističkog idealnog fluida za koji važi adijabatska jednačina promene stanja izvedene primenom jednog varijacionog principa. Potpunu formalnu analogiju toga principa sa Fermaovim principom geometrijske optike istakao je u svome radu [3] Sing.

Godine 1954. je Taub [11] formulisao varijacioni princip koji dovodi do jednačina polja opšte relativnosti i do jednačina kretanja relativističkog idealnog fluida. Najzad, jedan interesantan prilaz tome pitanju razmatrao je 1970. godine Bernard Šuc (Bernard G. Schutz, Jr.) [12] , držeći se i dalje granica idealnog fluida.

Iz ovog kratkog istorijskog prikaza razvoja relativističke hidromehanike može se zapaziti da je u literaturi uglavnom proučavan relativistički idealni fluid, dok upadljivo mali broj radova uzima u obzir pojavu viskoznosti. Osim dva rada, koje smo ovde citirali, u čitavoj relativističkoj literaturi koja nam je bila dostupna nismo naišli ni na jedan drugi rad u kome se razmatra unutrašnje trenje izmedju čestica fluida pri njihovom relativnom pomeranju. Pri tome se, kao što smo već istakli, izrazi za tenzor viskoznosti u dva pomenuta rada razlikuju, a pri izvodjenju jednačina kretanja posmatrane sredine autori polaze od uslova konzervativnosti tenzora energije, što znači da koriste put koji je u relativističkoj teoriji fluida uobičajen.

U ovome radu ćemo posmatrati relativistički viskozni fluid, sa ciljem da pri izvodjenju diferencijalnih jednačina kretanja takve materijalne sredine primenimo tzv. Pfafovu metodu.

Primeni Pfafove metode u mehanici i teorijskoj fizici posvećen je veliki broj radova objavljenih u Beogradu krajem četrdesetih i pedesetih godina.

Ovde ćemo pomenuti pre svega radove A. Bilimovića [13] i [14]. Baveći se pitanjem utvrdjivanja fenomenološke osnove za Pfafovu metodu, on je u svojoj monografiji [14] formulisao jedan opšti fenomenološki diferencijalni princip. Taj princip analizira stanje posmatranog sistema i uzroke koji izazivaju promenu toga stanja, i na osnovu te analize sastavlja jedan matematički izraz u obliku Pfafove forme, iz koga se dobivaju diferencijalne jednačine kretanja sistema kao Pfafove jednačine. On je zatim primenio Pfafovu metodu na niz problema teorijske mehanike, nebeske mehanike i geometrijske optike [14].

Pri izvodjenju diferencijalnih jednačina kretanja krutog tela, zatim osnovnih diferencijalnih jednačina hidrodinamike i mehanike elastičnih tela, ovu metodu je koristio T. Andjelić [15], [16], [17]. Time je on ukazao na opštu primenljivost Pfafove metode u dinamici - kako krutih tela, tako i deformabilnih sredina.

Najzad, u svome radu [18] Dj. Mušicki je pokazao da se Pfafova metoda može koristiti i u teorijskoj fizici. On je izvršio generalizaciju Pfafovog izraza i Pfafovih jednačina, dokazao da i za takav Pfafov izraz i jednačine važe slične osobine kao i za običan Pfafov izraz i jednačine, a zatim tako generalisanu Pfafovu metodu primenio u različitim oblastima teorijske fizike - termodinamici, elektromagnetizmu i kvantnoj mehanici.

Ovaj rad smo podelili na dve glave.

U prvoj glavi nam je bio cilj da dodjemo do oblika za tenzor energije relativističkog viskoznog fluida. Pošto smo u prvom odeljku objasnili šta nas je navelo da se na tome pitanju, koje je u literaturi već rešavano, ipak zadržimo, u drugom odeljku raspravljamo koji oblik tenzora brzine deformacije i tenzora vrtloženja treba usvojiti u relativističkoj teoriji. Pri tome smo kao osnovicu u našim razmatranjima uzeli zahtev da rezultati do kojih dolazimo moraju biti u skladu sa postojećom Bornovom definicijom krutosti u opštoj teoriji relativnosti, a takodje i u skladu sa rezultatima rada [19] o vrstama kretanja Bornovog relativistički krutog tela.

U poslednjem, trećem odeljku prve glave, dolazimo do relativističkog tenzora viskoznosti polazeći od zahteva da se njegove prostorne komponente u odnosu na sopstveni koordinatni sistem svode na komponente odgovarajućeg klasičnog tenzora, dok mu ostale komponente u odnosu na taj sistem moraju biti jednake nuli.

Osnovnom pitanju koje u ovom radu razmatramo - pitanju primene Pfafove metode u relativističkoj mehanici fluida - posvećena je druga glava rada.

Posle kratkog izlaganja o tome kako je nastala tzv. Pfafova metoda u mehanici, i šta predstavlja njenu sadržinu, u drugom, centralnom odeljku toga dela rada postavlja se izraz za Pfafovu formu koja odgovara posmatranom materijalnom sistemu. Iz toga izraza se zatim, postupkom koji Pfafova metoda nalaže, izvode diferencijalne jednačine kretanja relativističkog viskoznog fluida. Dobivene jednačine, koje predstavljaju relativističko uopštenje Navije-Stoksovih jednačina klasične hidrodinamike, razlikuju se od odgovarajućih jednačina do kojih je došao Lihnerovič [8]; to je razumljivo ako se ima u vidu da se tenzor viskoznosti koji je on formulisao ne poklapa sa izrazom koji smo u ovom radu za taj tenzor dobili.

U trećem, poslednjem odeljku druge glave, ograničili smo se na slučaj relativističkog idealnog fluida za koji važi adijabatska jednačina promene stanja. Pokazali smo da se u tome slučaju Pfafov izraz za delić fluidne sredine može obrazovati na veoma jednostavan način, bez potrebe da se traži relativističko uopštenje za klasični izraz koji predstavlja rad rezultujuće sile pritiska kojom okolina na uočeni delić deluje, prilikom njegovog pomeranja od početnog do krajnjeg položaja. Pri tome fluidnu sredinu moramo posmatrati u prostoru čija je metrika konformna metrici prostor-vremena, a koja se uvodi pomoću indeksa fluida tako da strujne linije fluida predstavljaju geodezijske linije toga prostora.

Najzad, zaključujemo da bi se taj rezultat pod izvesnim uslovima mogao primeniti i u slučaju relativističkog viskoznog fluida.

GLAVA I

1.1. Uvodna razmatranja

Relativistički fluid posmatramo u četvorodimenzionom rimanskom prostoru indefinitne metrike - prostor-vremenu V_4. Obeležićemo sa x^α [2] proizvoljni koordinatni sistem koji prostor V_4 dopušta, sa $g_{\alpha\beta}$ koordinate osnovnog metričkog tenzora u odnosu na sistem x^α; uzećemo da se u odnosu na lokalne pseudoeuklidske koordinate $g_{\alpha\beta}$ svodi na dijagonalni oblik

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} , \qquad (1.1.1)$$

tako da je signatura osnovne metričke forme $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ [3] pozitivna.

Ako fluid (ili uopšte materijalni kontinuum) posmatramo kao sistem čestica C_{ξ^i} (gde smo sa ξ^i označili prostorne parametre, ve-

---

2) Slova grčke azbuke ćemo koristiti za indekse koji uzimaju vrednosti 1,2,3,4; indekse koji idu od 1 do 3 ćemo obeležavati latinskim slovima.

3) Koristimo Ajnštajnovu konvenciju o sabiranju.

zane za odredjenu česticu sistema), onda istoriju posmatrane sredine u prostor-vremenu predstavlja kongruencija svetskih linija C_{ξ^i}. Ove svetske linije - ili jednačine kretanja čestica C_{ξ^i} - u odnosu na sistem x^α možemo napisati kao

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i, s) \quad , \tag{1.1.2}$$

gde smo kao parametar vremenskog tipa odabrali sopstveno vreme duž svetske linije čestice C_{ξ^i}, koje smo označili sa s. Taj parametar, za razliku od prostornih parametara ξ^i, menja se duž svake linije C_{ξ^i}. Jednačine (1.1.2) možemo protumačiti i kao transformaciju kojom se prelazi od koordinata ξ^i, s, koje po analogiji sa odgovarajućim klasičnim nazivom možemo zvati Lagranževe koordinate, na koordinate x^α, koje ćemo nazvati Ojlerovim koordinatama. Pritom pretpostavljamo da je jakobijan te transformacije različit od nule, što znači da ona dopušta inverznu transformaciju.

Kako su (1.1.2) linije vremenskog tipa, jer brzina čestica ne može dostići brzinu svetlosti, niti može biti veća od nje, s obzirom na odabranu signaturu će očigledno biti

$$ds^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta > 0 ,$$

tako da četvorobrzina, vektor

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad , \tag{1.1.3}$$

zadovoljava uslov

$$u^\alpha u_\alpha = -1 \ . \tag{1.1.4}$$

Prvi korak koji treba učiniti u relativističkoj mehanici fluida sastoji se u tome da se obrazuje izraz za tenzor energije posmatrane sredine. To je simetrični tenzor koji sadrži članove koji odgovaraju različitim vrstama energije sredine.

Odavno je poznato da se tenzor energije za proizvoljnu fluidnu sredinu koja nije naelektrisana, i u kojoj se pojave provodjenja toplote i elektriciteta zanemaruju, može napisati u obliku[4]

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - S_{\alpha\beta} , \tag{1.1.5}$$

gde ρ predstavlja sopstvenu gustinu fluida, a $S_{\alpha\beta}$ je tenzor sopstvenih pritisaka, kroz koji dolazi do izražaja naponsko stanje koje vlada u fluidu, i koji zadovoljava uslov

$$S_{\alpha\beta} u^\alpha = 0 . \tag{1.1.6}$$

Za idealni fluid tenzor pritisaka ima oblik[5]

$$S_{\alpha\beta} = -p (u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}) , \tag{1.1.7}$$

gde je p sopstveni pritisak fluida.

Moramo naglasiti da smo se ovde opredelili za takve fizičke jedinice pri kojima je brzina svetlosti c jednaka jedinici. Da to nije slučaj, u jednačini (1.1.7) bi se, umesto p, nalazio količnik $\frac{p}{c^2}$.

---

4) Videti, recimo, [20], str. 154, jednačina (4.78).

5) Videti opet [20], str. 155, jednačina (4.84).

Ako se radi o viskoznom fluidu, dakle ako se pretpostavlja da postoji trenje izmedju čestica fluida pri njihovom relativnom pomeranju, onda se, baš kao u klasičnoj teoriji, tenzoru pritiska za idealni fluid, tj. izrazu na desnoj strani jednačine (1.1.7), superponira još jedan tenzor, koji i u relativističkoj teoriji zovemo tenzor viskoznosti[6].

Koliko je nama poznato, u literaturi postoje dva različita izraza za relativistički tenzor viskoznosti. Jedan izraz je, još 1955 godine, predložio A. Lihnerovič u svojoj monografiji [8], a na drugi nailazimo u radu Pišona [10], objavljenom deset godina docnije.

Izrazi za tenzor viskoznosti kod ova dva autora se razlikuju zbog toga što oni polaze od različitih oblika tenzora brzine deformacije kontinualne sredine, preko koga se, kao i u klasičnoj teoriji, izražava tenzor viskoznosti.

U želji da dodje do tenzora koji bi u relativističkoj teoriji odgovarao klasičnom pojmu tenzora brzine deformacije neprekidne sredine, A. Lihnerovič koristi onaj isti put kojim je, sledeći Ajzenharta [2] i Singa [3], išao proučavajući idealni fluid: pomoću funkcije koju naziva indeks fluida[7] on na odredjeni način uvodi metriku koja je konformna metrici prostor-vremena i definiše vektor toka (ili pseudobrzinu) kao vektor $C_\alpha = f u_\alpha$, gde f označava indeks fluida. Zatim povezuje taj vektor sa jednim vektorom definisanim u odnosu na uvedenu metriku, jediničnog intenzi-

---

6) Videti [8], str. 95, jednačina (51-6).

7) Kao indeks viskoznog relativističkog fluida A. Lihnerovič zadržava onu istu funkciju koja kod njega predstavlja indeks idealne fluidne sredine: $f = \exp\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho + p}$, gde je $\rho = \rho(p)$. Prema tome, on posmatra samo onu fluidnu sredinu koju karakteriše jednačina stanja koja vezuje sopstveni pritisak i sopstvenu gustinu.

teta u toj metrici, i posmatra neprekidnu sredinu (kod njega je to prvo idealni, a zatim i viskozni fluid), u odnosu na uvedenu metriku. Ne možemo se ovde detaljnije zadržavati na teoriji koju Lihnerovič razvija, ali ćemo naglasiti da u toj teoriji vektor toka igra veoma važnu ulogu: u izrazu koji predstavlja relativističko uopštenje klasične cirkulacije vektora brzine po zatvorenoj krivoj u strujnom prostoru, zatim u izrazu za relativistički tenzor vrtložnosti, umesto četvorobrzine, koju bismo mogli očekivati na mestu na kome se u odgovarajućim klasičnim izrazima nalazi brzina, nailazimo na vektor toka. Najzad, i u tenzoru brzine deformacije koji definiše A. Lihnerovič (a koji se i po obliku razlikuje od odgovarajućeg klasičnog tenzora), takodje umesto četvorobrzine nalazimo vektor toka.

U svome radu [10] G. Pišon, ne navodeći pri tome nikakvu literaturu, prihvata kao relativistički tenzor brzine deformacije tenzor koji se po obliku ne razlikuje od klasičnog oblika toga tenzora, sa četvorobrzinom na mestu na kome se u klasičnoj teoriji nalazi vektor brzine. U sledećem odeljku ovoga rada, u kome ćemo opširnije govoriti o tenzoru brzine deformacije neprekidne sredine, izložićemo i razloge zbog kojih smatramo da je takav oblik toga tenzora teško prihvatiti.

Najzad, navedimo još da kod Singa [20] nailazimo na izraz za tenzor brzine deformacije koji se razlikuje od dva prethodno pomenuta izraza. Način izvodjenja koji je Sing koristio da bi došao do toga tenzora[8] je onaj isti koji nalazimo kod Lihnerovića; razlika je samo u tome što Sing neprekidnu sredinu posmatra u odnosu na metriku prostor-vremena, a Lihnerovič, kao što smo već istakli, u odnosu na metriku uvedenu pomoću indeksa fluida, kon-

---

8) Na kraju sledećeg odeljka ovoga rada ukratko ćemo objasniti kojim putem je Sing došao do svoga izraza za tenzor brzine deformacije neprekidne sredine.

formnu metrici prostora V_4. Njihovi su izrazi istog oblika (koji se razlikuje od klasičnog oblika toga tenzora), samo što je kod Singa četvorobrzina zauzela mesto vektora toka iz izraza koji daje A. Lihnerovič.

Nećemo ovde opširnije izlagati ono što postoji u radovima autora koje smo citirali. Želeli smo samo da istaknemo da se danas još uvek raspravlja o tome koji oblik tenzora brzine deformacije treba usvojiti u relativističkoj teoriji, i da se u radovima ravnopravno mogu sresti Singov - kinematički, i Lihnerovičev - dinamički tenzor brzine deformacije neprekidne sredine, kao dva osnovna oblika toga tenzora[9]. Tenzor brzine deformacije iz Pišonovog rada [10], o kome smo ovde govorili, predstavlja samo jednu manje uspelu varijantu odgovarajućeg Singovog tenzora.

U sledećem odeljku ćemo izložiti svoja razmatranja koja su nas, nezavisno od autora koje smo pomenuli i od onoga što smo u literaturi o tome mogli da nadjemo, dovela izmedju ostalog do jednog dvostruko kovarijantnog tenzora za koji smatramo da predstavlja najpogodnije relativističko uopštenje klasičnog pojma tenzora brzine deformacije neprekidne sredine. Taj tenzor se, kako će-

---

9) Ovde smo uveli nazive „kinematički", odnosno „dinamički" tenzor brzine deformacije ugledajući se na Singovu terminologiju u radu [3]: kada govori o relativističkom uopštenju klasičnog pojma cirkulacije vektora brzine, Sing razlikuje kinematičku cirkulaciju, koju definiše pomoću četvorobrzine kao $\int_\Gamma u_\alpha dx^\alpha$, i dinamičku cirkulaciju - izraz u kome je vektor toka zamenio četvorobrzinu u prethodnom integralu: $\int_\Gamma C_\alpha dx^\alpha$. U istom radu on takodje govori o kinematičkom i dinamičkom tenzoru vrtloženja - pri čemu se prvi izražava preko četvorobrzine, a drugi pomoću vektora toka. Kod ostalih autora, pa i kod samog Singa u njegovim docnijim radovima, ne nailazimo više na ovo dvojstvo pri definisanju pojedinih pojmova. U tim radovima, kada se govori o relativističkoj cirkulaciji, ili o relativističkom tenzoru vrtloženja, obično se misli na one izraze za te pojmove u kojima figuriše vektor toka.

mo videti, ne razlikuje od Singovog tenzora brzine deformacije, ali razmišljanje i račun koji su nas doveli do takvog izraza za traženi tenzor potpuno se razlikuju od onoga što postoji u njegovim radovima.

Skrenućemo pažnju, medjutim, da postoji sličnost u našim razmatranjima sa izlaganjem u radu Elersa (Ehlers) [21]. Zbog onoga u čemu se ta razmatranja razlikuju, a što je najviše i uticalo da u svome radu usvojimo upravo Singov oblik tenzora brzine deformacije, izložićemo ih detaljno u sledećem odeljku.

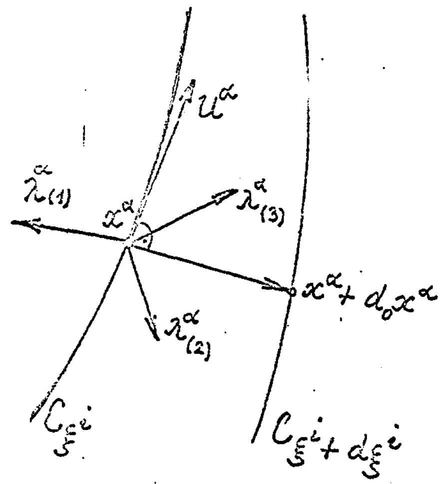
Najzad, dodajmo da nas je usvajanje takvog oblika tenzora brzine deformacije dovelo do tenzora viskoznosti koji se razlikuje od Lihnerovičevog oblika toga tenzora, a poklapa se sa tenzorom iz Pišonovog rada [10]. Može da izgleda čudno na prvi pogled što se tenzor viskoznosti do koga ćemo doći ne razlikuje od Pišonovog oblika toga tenzora, kada znamo da tenzor brzine deformacije u njegovom radu nije onaj koji mi koristimo. Objašnjenje za to je, medjutim, jednostavno: svoj tenzor viskoznosti Pišon ne izražava preko samog tenzora brzine deformacije - kao što to Lihnerovič nalaže, i kao što mi činimo - nego preko tenzora koji on naziva „prostorna komponenta tenzora deformacije", a koji, ustvari, nije ništa drugo nego tenzor brzine deformacije Singovog oblika, koji smo i mi u svome radu usvojili.

1.2. Tenzor brzine deformacije i tenzor vrtloženja neprekidne sredine u relativističkoj teoriji

Posmatraćemo sistem čestica C_{ξ^i} koji predstavlja materijalni kontinuum i čiju istoriju u odnosu na uvedeni koordinatni sistem x^α predstavljaju jednačine (1.1.2), tj. jednačine

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i, s) \; .$$

Uočićemo svetske linije dveju bliskih čestica, C_{ξ^i} i $C_{\xi^i+d\xi^i}$, i vektor d_0x^α, upravan u dogadjaju x^α na C_{ξ^i}, i takav da je dogadjaj $x^\alpha + d_0x^\alpha$ na svetskoj liniji $C_{\xi^i+d\xi^i}$, kao što je na slici predstavljeno.



Vektor d_0x^α očigledno zadovoljava jednačinu

$$g_{\alpha\beta}\, d_0x^\alpha u^\beta = 0 \,, \qquad (1.2.1)$$

gde je, podsetimo ovde na to, $u^\beta = \frac{dx^\beta}{ds}$ četvorobrzina.

U cilju da ispitamo relativno pomeranje čestice $C_{\xi^i+d\xi^i}$ u odnosu na česticu C_{ξ^i}, potražimo prvo kako se prenosi vektor d_0x^α duž svetske linije C_{ξ^i}, pri kretanju posmatrane neprekidne sredine.

Vežimo zato za krivu C_{ξ^i} Fermijev prostorni trijedar $\lambda^\alpha_{(i)}$[10], čija tri jedinična, uzajamno upravna vektora zadovoljavaju jednačine[11]

$$\frac{\delta \lambda^\alpha_{(i)}}{\delta s} = \varkappa_{(1)} n^\beta_{(1)} \lambda_{(i)\beta} u^\alpha \,, \qquad (1.2.2)$$

gde $\frac{\delta}{\delta s}$ označava Bjankijev izvod, $\varkappa_{(1)}$ je prva krivina, a $n^\beta_{(1)}$ prva normala krive C_{ξ^i}.

Razložimo sada vektor d_0x^α na tri pravca $\lambda^\alpha_{(i)}$ Fermijevog trijedra (što je moguće jer je to prostorni trijedar, a d_0x^α

---

10) Indeks u zagradi nema tenzorski karakter, već označava redni broj objekta uz koji se nalazi.

11) Videti [20], str. 22, jednačina (1.84).

je upravan na u^α):

$$d_o x^\alpha = \sum_{i=1}^{3} m_{(i)} \lambda^\alpha_{(i)} \quad , \tag{1.2.3}$$

gde su $m_{(i)} = m_{(i)}(s)$ projekcije $d_o x^\alpha$ na $\lambda^\alpha_{(i)}$.

Iz (1.2.3) je

$$\frac{\delta(d_o x^\alpha)}{\delta s} = \sum_{i=1}^{3} m_{(i)} \frac{\delta \lambda^\alpha_{(i)}}{\delta s} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial m_{(i)}}{\partial s} \lambda^\alpha_{(i)} \quad ,$$

odakle, s obzirom na (1.2.2), imamo

$$\frac{\delta(d_o x^\alpha)}{\delta s} = \varkappa_{(1)} n^\beta_{(1)} u^\alpha \sum_{i=1}^{3} m_{(i)} \lambda_{(i)\beta} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial m_{(i)}}{\partial s} \lambda^\alpha_{(i)} \; . \tag{1.2.4}$$

Ako sada obeležimo

$$A^\alpha = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial m_{(i)}}{\partial s} \lambda^\alpha_{(i)} \quad , \tag{1.2.5}$$

i iskoristimo (1.2.3), dobićemo iz (1.2.4)

$$\frac{\delta(d_o x^\alpha)}{\delta s} = \varkappa_{(1)} n^\beta_{(1)} d_o x_\beta u^\alpha + A^\alpha \; . \tag{1.2.6}$$

Iz jednačine (1.2.5) nije teško proveriti da je vektor A^α upravan na svetsku liniju C_{ξ^i} , tj. da zadovoljava jednačinu

$$A^\alpha u_\alpha = 0 \; . \tag{1.2.7}$$

Iskoristićemo sada jednačinu (1.2.6) da dodjemo do još jednog oblika u kome se može izraziti vektor (1.2.5), oblika koji će nam biti od koristi za dalji rad sa tim vektorom. Pomnožimo zato (1.2.6) tenzorom

$$P^{\gamma}_{\alpha} \stackrel{def}{=} \delta^{\gamma}_{\alpha} + u^{\gamma} u_{\alpha} , \tag{1.2.8}$$

(gde δ^{γ}_{α} predstavlja Kronekerov simbol), i izvršimo sabiranje po indeksu α :

$$P^{\gamma}_{\alpha} \frac{\delta(d_o x^{\alpha})}{\delta s} = P^{\gamma}_{\alpha} \varkappa_{(1)} n^{\beta}_{(1)} d_o x_{\beta} u^{\alpha} + P^{\gamma}_{\alpha} A^{\alpha} . \tag{1.2.9}$$

Kako se apsolutni izvod $\frac{\delta(d_o x^{\alpha})}{\delta s}$ može napisati kao

$$\frac{\delta(d_o x^{\alpha})}{\delta s} = u^{\beta} \nabla_{\beta} d_o x^{\alpha} ,$$

gde simbol ∇_{β} označava kovarijantni izvod, i kako je, s obzirom na uslov (1.1.4),

$$P^{\gamma}_{\alpha} u^{\alpha} = (\delta^{\gamma}_{\alpha} + u^{\gamma} u_{\alpha}) u^{\alpha} = u^{\gamma} - u^{\gamma} = 0 , \tag{1.2.10}$$

a zbog (1.2.7)

$$P^{\gamma}_{\alpha} A^{\alpha} = (\delta^{\gamma}_{\alpha} + u^{\gamma} u_{\alpha}) A^{\alpha} = A^{\gamma} ,$$

dobićemo iz jednačine (1.2.9)

$$A^{\gamma} = P^{\gamma}_{\alpha} u^{\beta} \nabla_{\beta} d_0 x^{\alpha} .$$

Zamenimo u dobivenoj jednačini vektor $d_0 x^{\alpha}$ izrazom[12)]

$$d_0 x^{\alpha} = x^{\alpha}_{,i} d\xi^i + u^{\alpha} u_{\lambda} x^{\lambda}_{,i} d\xi^i , \quad \left(x^{\lambda}_{,i} \equiv \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^i} \right)$$

tj.

$$d_0 x^{\alpha} = P^{\alpha}_{\lambda} x^{\lambda}_{,i} d\xi^i , \qquad (1.2.11)$$

pa ćemo za A^{γ} dalje imati

$$A^{\gamma} = P^{\gamma}_{\alpha} u^{\beta} \nabla_{\beta} (P^{\alpha}_{\lambda} x^{\lambda}_{,i} d\xi^i) ,$$

tj.

$$A^{\gamma} = P^{\gamma}_{\alpha} P^{\alpha}_{\lambda} u^{\beta} \nabla_{\beta} (x^{\lambda}_{,i} d\xi^i) + P^{\gamma}_{\alpha} x^{\lambda}_{,i} d\xi^i u^{\beta} \nabla_{\beta} P^{\alpha}_{\lambda} . \qquad (1.2.12)$$

Izračunajmo sada, pre svega, izraz $u^{\beta} \nabla_{\beta} (x^{\lambda}_{,i} d\xi^i)$ koji se javlja u prvom članu na desnoj strani jednačine (1.2.12) .

---

12) Videti [22], str. 27, jednačina (16). U [22] se radi o relativistički krutom telu, pa je za vektor $d_0 x^{\alpha}$ u tome radu uvedeno ograničenje koje zahteva Bornova definicija krutosti : $g_{\alpha\beta} d_0 x^{\alpha} d_0 x^{\beta} = \mathrm{const}$; medjutim, to ograničenje nije uzeto u obzir pri izvodjenju jednačine (16) na koju se pozivamo, te je možemo koristiti i u slučaju kad neprekidna sredina koju posmatramo nije kruto telo.

Imaćemo

$$u^{\beta}\nabla_{\beta}(x^{\lambda}{}_{,i}\,d\xi^{i}) = \frac{\delta}{\delta s}(x^{\lambda}{}_{,i}\,d\xi^{i}) =$$

$$= \frac{d}{ds}(x^{\lambda}{}_{,i}\,d\xi^{i}) + \left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\} x^{\beta}{}_{,i}\,d\xi^{i}\frac{dx^{\gamma}}{ds},$$

gde smo sa $\left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\}$ označili Kristofelov simbol druge vrste.

Medjutim, kako je

$$\frac{d}{ds}(x^{\lambda}{}_{,i}\,d\xi^{i}) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{i}}\right)d\xi^{i} = \frac{\partial}{\partial \xi^{i}}\left(\frac{dx^{\lambda}}{ds}\right)d\xi^{i} = \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial \xi^{i}}\,d\xi^{i};$$

imaćemo dalje

$$u^{\beta}\nabla_{\beta}(x^{\lambda}{}_{,i}\,d\xi^{i}) = \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial \xi^{i}}\,d\xi^{i} + \left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\} x^{\beta}{}_{,i}\,d\xi^{i}\,u^{\gamma} =$$

$$= \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\,x^{\beta}{}_{,i}\,d\xi^{i} + \left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\} u^{\gamma} x^{\beta}{}_{,i}\,d\xi^{i} =$$

$$= \left[\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\} u^{\gamma}\right] x^{\beta}{}_{,i}\,d\xi^{i},$$

tj.

$$u^{\beta}\nabla_{\beta}(x^{\lambda}{}_{,i}\,d\xi^{i}) = \nabla_{\beta}u^{\lambda}\,x^{\beta}{}_{,i}\,d\xi^{i}.$$

Kada to unesemo u (1.2.12) dobićemo

$$A^{\gamma} = P^{\gamma}_{\alpha}P^{\alpha}_{\lambda}\nabla_{\beta}u^{\lambda}x^{\beta}{}_{,i}\,d\xi^{i} + P^{\gamma}_{\alpha}x^{\lambda}{}_{,i}\,d\xi^{i}u^{\beta}\nabla_{\beta}P^{\alpha}_{\lambda}. \quad (1.2.13)$$

Najzad, kako je

$$P^{\delta}_{\alpha} P^{\alpha}_{\lambda} = (\delta^{\delta}_{\alpha} + u^{\delta} u_{\alpha})(\delta^{\alpha}_{\lambda} + u^{\alpha} u_{\lambda}) = \delta^{\delta}_{\lambda} + u^{\delta} u_{\lambda} + u^{\delta} u_{\lambda} - u^{\delta} u_{\lambda} = P^{\delta}_{\lambda} ,$$

a

$$\nabla_{\beta} P^{\alpha}_{\lambda} = \nabla_{\beta} (\delta^{\alpha}_{\lambda} + u^{\alpha} u_{\lambda}) = u_{\lambda} \nabla_{\beta} u^{\alpha} + u^{\alpha} \nabla_{\beta} u_{\lambda} ,$$

biće iz (1.2.13)

$$A^{\delta} = P^{\delta}_{\lambda} \nabla_{\beta} u^{\lambda} x^{\beta}_{,i} d\xi^{i} + P^{\delta}_{\alpha} x^{\lambda}_{,i} d\xi^{i} u^{\beta} (u_{\lambda} \nabla_{\beta} u^{\alpha} + u^{\alpha} \nabla_{\beta} u_{\lambda}) ,$$

odakle je, kada se iskoristi (1.2.10),

$$A^{\delta} = P^{\delta}_{\lambda} \nabla_{\beta} u^{\lambda} x^{\beta}_{,i} d\xi^{i} + P^{\delta}_{\alpha} x^{\lambda}_{,i} d\xi^{i} u^{\beta} u_{\lambda} \nabla_{\beta} u^{\alpha} . \qquad (1.2.14)$$

Posle podesne razmene nemih indeksa u drugom članu na desnoj strani jednačine (1.2.14), biće

$$\begin{aligned} A^{\delta} &= P^{\delta}_{\lambda} \nabla_{\beta} u^{\lambda} x^{\beta}_{,i} d\xi^{i} + P^{\delta}_{\lambda} x^{\beta}_{,i} d\xi^{i} u^{\alpha} u_{\beta} \nabla_{\alpha} u^{\lambda} = \\ &= P^{\delta}_{\lambda} x^{\beta}_{,i} d\xi^{i} (\delta^{\alpha}_{\beta} \nabla_{\alpha} u^{\lambda} + u^{\alpha} u_{\beta} \nabla_{\alpha} u^{\lambda}) = \\ &= P^{\delta}_{\lambda} x^{\beta}_{,i} d\xi^{i} P^{\alpha}_{\beta} \nabla_{\alpha} u^{\lambda} , \end{aligned}$$

tj., kada se iskoristi (1.2.11),

$$A^{\delta} = P^{\delta}_{\lambda} d_{o} x^{\alpha} \nabla_{\alpha} u^{\lambda} = (\delta^{\delta}_{\lambda} + u^{\delta} u_{\lambda}) d_{o} x^{\alpha} \nabla_{\alpha} u^{\lambda} ;$$

medjutim, kako je zbog (1.1.4)

$$u_\lambda \nabla_\alpha u^\lambda = 0 ,$$

dobićemo najzad

$$A^\gamma = d_0 x^\alpha \nabla_\alpha u^\gamma . \qquad (1.2.15)$$

Jednačina (1.2.15) iskazuje, ako se izrazimo jezikom tenzorskog računa, da vektor A^γ predstavlja promenu vektora u^γ (četvorobrzine) u pravcu vektora $d_0 x^\alpha$. Drugim rečima, vektor A^γ ima smisao <u>relativne brzine</u> čestice $C_{\xi^i + d\xi^i}$ (u dogadjaju $x^\alpha + d_0 x^\alpha$) u odnosu na česticu C_{ξ^i} (u dogadjaju x^α). Uostalom, da vektor A^γ ima taj smisao, moglo je biti jasno i iz jednačine (1.2.5), ako imamo na umu da je Fermijev trijedar $\lambda^\alpha_{(i)}$ <u>pokretni</u> trijedar, koji se pri kretanju materijalne sredine pomera po krivoj C_{ξ^i} zajedno sa uočenom česticom, predstavljajući pri tome, da citiramo Singa [20], „pravilno relativističko uopštenje klasičnog pojma koordinatnog sistema koji se ne obrće".

Za kovarijantne koordinate vektora (1.2.15) ćemo imati

$$A_\alpha = d_0 x^\beta \nabla_\beta u_\alpha . \qquad (1.2.16)$$

U želji da relativnu brzinu čestice $C_{\xi^i + d\xi^i}$ u odnosu na C_{ξ^i} razložimo na dve komponente onako kako se to čini u klasičnoj teoriji – na komponente od kojih jedna predstavlja brzinu pri pomeranju usled <u>čiste deformacije</u> neprekidne sredine, a druga brzinu koja potiče od <u>krutog rotacionog</u> pomeranja okoline oko C_{ξ^i} (kao apola"), poći ćemo putem na koji nas navodi klasična teorija[13]: razložićemo dvostruko kovarijantni tenzor koji se pojavljuje u (1.2.16), tj. tenzor

$$\nabla_\beta u_\alpha \tag{1.2.17}$$

na zbir simetričnog i antisimetričnog tenzora:

$$\nabla_\beta u_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta) + \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha - \nabla_\alpha u_\beta) = \overset{*}{\sigma}_{\alpha\beta} - \overset{*}{\Omega}_{\alpha\beta}\,, \tag{1.2.18}$$

gde smo uveli oznake

$$\overset{*}{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta)\,, \tag{1.2.19}$$

$$\overset{*}{\Omega}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha)\,. \tag{1.2.20}$$

Tada je iz (1.2.16)

$$A_\alpha = d_0 x^\beta \overset{*}{\sigma}_{\alpha\beta} - d_0 x^\beta \overset{*}{\Omega}_{\alpha\beta}\,. \tag{1.2.21}$$

Sada treba ispitati da li razlaganje (1.2.21), koje smo izvršili držeći se formalne analogije sa klasičnom teorijom, ima smisla, tj. da li tenzori (1.2.19) i (1.2.20) mogu da se prihvate kao tenzor brzine deformacije, odnosno tenzor vrtloženja u relativistič-

---

13) Videti [23], str. 271, jednačine (6), (7),..(10), itd; skrenimo pažnju da se u jednačinama koje ovde citiramo nalazi pomeranje na mestu gde je kod nas brzina (upor., recimo, jedn. (9) iz [23] i našu jednačinu (1.2.16). To, medjutim, ni malo ne remeti analogiju na koju ukazujemo, jer se u [23] radi o infinitezimalnim pomeranjima.

koj teoriji[14].

Očigledno je da ako tenzor (1.2.19) treba da definiše relativistički tenzor brzine deformacije neprekidne sredine, onda on treba da bude jednak nuli u slučaju da posmatrana sredina predstavlja relativistički kruto telo.

Kao posledica Bornove definicije prema kojoj materijalni kontinuum predstavlja relativistički kruto telo[15], dobija se da četvorobrzina zadovoljava jednačinu

$$\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta + u_\beta u^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha + u_\alpha u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta = 0 . \tag{1.2.22}$$

Može da se pokaže [19] da se uslov (1.2.22) za četvorobrzinu pri kretanju Bornovog tela uvek svodi na jednu od dveju tenzorskih jednačina

$$\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta = 0 , \tag{1.2.22a}$$

ili

$$\nabla_\alpha u_\beta + u_\alpha u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta = 0 . \tag{1.2.22b}$$

---

14) Interesantno je primetiti da je Sing [3], ne ulazeći uopšte u ovakva razmatranja, još 1937. godine formulisao, po ugledu na klasični tenzor vrtloženja, svoj „kinematički tenzor vrtloženja" u relativističkoj teoriji, kao tenzor (1.2.20). U istom radu, medjutim, on konstatuje da takav tenzor vrtloženja po svojim osobinama ne predstavlja najbolje rel. uopštenje klasičnog pojma tenzora vrtloženja, pa uvodi i „dinamički tenzor vrtloženja", koji je po obliku isti kao (1.2.20), samo što u njemu umesto četvorobrzine u_α stoji tzv. vektor toka $C_\alpha = f u_\alpha$, gde je f indeks fluida. U docnijim radovima iz oblasti relativističke mehanike fluida, kako Singovim tako i ostalih autora, tenzor (1.2.20) se više i ne pominje kao tenzor vrtloženja.

15) Videti [24], str. 36, jednačina (107).

Dakle, može se govoriti o dve vrste kretanja Bornovog tela: jedno je kretanje (1.2.22a) - rotacija oko nepokretne tačke (prema [19]), a drugo je kretanje (1.2.22b) - translacija krutog tela u relativističkoj teoriji (v. opet [19]).

Lako je proveriti da tenzor (1.2.19), za koji smo očekivali da bi mogao da predstavlja relativističko uopštenje tenzora brzine deformacije neprekidne sredine, nije jednak nuli za slučaj kretanja (1.2.22b). Prema tome, već zbog toga (da ovde i ne govorimo o nepodesnosti izraza (1.2.20) za tenzor vrtloženja[16]), moramo zaključiti da razlaganje (1.2.21) nema smisla u relativističkoj teoriji.

Da bismo ipak ostvarili željeno razlaganje relativne brzine na dve komponente - razlaganje koje ne bi došlo u sukob sa Bornovom definicijom krutosti - nastavili smo da razmišljamo ovako: ako se radi o sredini koja predstavlja relativistički kruto telo, onda je sigurno ispunjen uslov (1.2.22) (bilo da se radi o kretanju (1.2.22a), ili (1.2.22b)). Dalje, nije teško uočiti da leva strana jednačina (1.2.22) predstavlja, do na faktor $\frac{1}{2}$, simetrični deo tenzora

$$P^{\gamma}_{\beta}\nabla_{\gamma}u_{\alpha} = \nabla_{\beta}u_{\alpha} + u_{\beta}u^{\gamma}\nabla_{\gamma}u_{\alpha} . \qquad (1.2.23)$$

Prema tome, ako bismo našli opravdanje da umesto tenzora (1.2.17) sada razlažemo na simetrični i antisimetrični deo tenzor (1.2.23), bilo bi sigurno obezbedjeno bar jedno - tako uvedeni tenzor brzine deformacije (simetrični deo tenzora koji razlažemo) bi, u slučaju da materijalni kontinuum predstavlja kruto telo, bio jednak nuli (zbog (1.2.22)).

---

16) Ovde se ne radi o onoj nepodesnosti izraza (1.2.20) za tenzor vrtloženja o kojoj je u svome radu [3] govorio Sing.

Takvo opravdanje, videćemo, nije teško pronaći; naime, odmah pada u oči da u vektoru (1.2.16), zbog uslova (1.2.1), može umesto tenzora (1.2.17) da stoji i tenzor (1.2.23), tj. može se napisati

$$A_\alpha = d_0 x^\beta \nabla_\beta u_\alpha = d_0 x^\beta (\nabla_\beta u_\alpha + u_\beta u^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha) = d_0 x^\beta P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha \, . \qquad (1.2.24)$$

Razlaganjem tenzora $P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha$ iz (1.2.24) na simetrični i antisimetrični deo ćemo imati

$$P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha = \frac{1}{2}\left(P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha + P^\gamma_\alpha \nabla_\gamma u_\beta\right) + \frac{1}{2}\left(P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha - P^\gamma_\alpha \nabla_\gamma u_\beta\right) ,$$

tj.

$$P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta} \, ,$$

gde smo označili

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha + P^\gamma_\alpha \nabla_\gamma u_\beta\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta + u_\beta u^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha + u_\alpha u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta\right) , \qquad (1.2.25)$$

i

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(P^\gamma_\alpha \nabla_\gamma u_\beta - P^\gamma_\beta \nabla_\gamma u_\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha + u_\alpha u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta - u_\beta u^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha\right) . \qquad (1.2.26)$$

Tako se sada vektor (1.2.16) može napisati kao

$$A_\alpha = d_0 x^\beta \sigma_{\alpha\beta} - d_0 x^\beta \Omega_{\alpha\beta} \, . \qquad (1.2.27)$$

Tenzor (1.2.25) koji je, kao što smo već naveli, u slučaju kretanja Bornovog tela zbog (1.2.22) jednak nuli, može da se prihvati kao tenzor brzine deformacije materijalnog kontinuuma u relativističkoj teoriji.

U prilog razlaganju (1.2.27) relativne brzine A_α na dve komponente koje imaju značenje koje smo ranije naveli, ide još i ovo: izbor izraza (1.2.26) za tenzor vrtloženja neprekidne sredine (tj. za tenzor trenutne ugaone brzine, ako se radi o relativistički krutom telu), a taj izbor je vezan sa izborom tenzora (1.2.25) za tenzor brzine deformacije, takodje je u potpunom skladu sa rezultatima rada [19]: ako se radi o kretanju (1.2.22a), koje predstavlja generalizaviju obrtanja krutog tela u relativističkoj teoriji, tenzor (1.2.26) je različit od nule; u slučaju (1.2.22b), tj. u slučaju translacije Bornovog tela - tenzor je jednak nuli.

To što smo ovde izložili nas je navelo da prihvatimo razlaganje (1.2.27) relativne brzine čestice $C_{\xi^i + d\xi^i}$ u odnosu na C_{ξ^i} kao relativističko uopštenje onog razlaganja relativne brzine čestice neprekidne materijalne sredine u okolini neke uočene tačke, koje se vrši u klasičnoj teoriji. Dalje , to razlaganje nas je opredelilo da (1.2.25) prihvatimo kao relativistički tenzor brzine deformacije neprekidne sredine.

Na kraju, skrenimo pažnju na još neke osobine tenzora (1.2.25). Množeći izraz (1.2.25) vektorom četvorobrzine u^α, dobićemo da je

$$\sigma_{\alpha\beta} u^\alpha = 0 . \tag{1.2.28}$$

U toku daljeg rada često ćemo koristiti jedan specijalni lokalni koordinatni sistem - obeležimo ga sa K - tzv. sopstveni koordinatni sistem („comoving coordinates" u radovima američkih autora), u odnosu na koji posmatrana čestica kontinuuma miruje. To je ortonormirani sistem čija su prva tri osnovna vektora prostornog tipa, a četvrti, koji se poklapa sa četvorobrzinom čestice, vremenskog tipa[17]. Da bismo istakli kada je reč o koordinatama posmatranih tenzorskih veličina u odnosu na sopstveni koordinatni sistem, pri obeležavanju tih koordinata dodavaćemo indeksu oznaku „ ' " (naprimer, koordinate četvorobrzine, koje smo u odnosu na sistem x^{α} obeležavali sa u^{α}, u odnosu na sistem K će biti $u^{\alpha'}$, koordinate tenzora (1.2.25) će biti $\sigma_{\alpha'\beta'}$, itd.).

Očigledno je da će u odnosu na K biti

$$u^{i'} = u_{i'} = 0 \quad ; \qquad u^{4'} = -u_{4'} = 1 \ . \tag{1.2.29}$$

Imajući u vidu (1.2.29), nije teško izračunati da će prostorne komponente relativističkog tenzora brzine deformacije u odnosu na uvedeni lokalni koordinatni sistem biti

$$\sigma_{i'j'} = \frac{1}{2}(\nabla_{i'} u_{j'} + \nabla_{j'} u_{i'}) \ . \tag{1.2.30}$$

Za komponente $\sigma_{\alpha'4'}$ ćemo, s obzirom na (1.2.28) i (1.2.29), dobiti:

$$\sigma_{\alpha'4'} = \sigma_{4'\alpha'} = 0 \ . \tag{1.2.31}$$

Neki autori (naprimer Sing [20], str. 151), da bi došli do

---

17) Primetimo da se kao prva tri osnovna vektora sistema K mogu uzeti tri vektora $\lambda^{\alpha}_{(i)}$ Fermijevog trijedra; u tome slučaju sistem K nazivamo Fermijev sistem.

izraza za tenzor brzine deformacije, uvode <u>po definiciji</u> jednačine (1.2.30) i (1.2.31) (tj. zahtevaju da se u odnosu na sopstveni koordinatni sistem prostorne komponente tenzora brzine deformacije svode na komponente odgovarajućeg klasičnog tenzora, dodajući pri tome uslov (1.2.31)); onda, znajući komponente traženog tenzora u odnosu na sistem K, na osnovu poznatih zakona transformacije dolaze do njegovih komponenata u odnosu na proizvoljni koordinatni sistem u V_4 , tj. do izraza (1.2.25).

Iskoristićemo ovu priliku da podvučemo da je to način koji se rado i veoma često koristi u relativističkoj teoriji, kako prilikom dokazivanja različitih stavova (jer jednačine dobivaju mnogo jednostavniji oblik u odnosu na sistem K), tako i pri razmatranjima koja treba da dovedu do izraza koji predstavljaju relativističko uopštenje odgovarajućih klasičnih izraza.

Taj put ćemo i mi koristiti u sledećem odeljku, u kome će nam biti cilj da formulišemo izraz za relativistički tenzor viskoznosti, kako bismo, na kraju, došli do tenzora energije relativističkog viskoznog fluida.

<u>1.3. Relativistički tenzor viskoznosti. Tenzor energije relativističkog viskoznog fluida</u>

Na početku izlaganja, u prvome odeljku ovoga rada, naveli smo da je relativistički tenzor viskoznosti - tenzor koji treba dodati tenzoru pritisaka za idealni fluid, tj. tenzoru $-p(u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}) = -pP_{\alpha\beta}$, da bi se dobio tenzor pritisaka za viskozni fluid[18].

---

18) Podsetimo se da smo jednačinom (1.2.8) definisali mešoviti tenzor $P^{\gamma}_{\beta} = u^{\gamma} u_{\beta} + \delta^{\gamma}_{\beta}$. Tenzor $P_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}$, koji se pojavljuje u tenzoru pritisaka za idealni fluid, očigledno predstavlja kovarijantni oblik tenzora (1.2.8): $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} P^{\gamma}_{\beta}$.

Dakle, ako sa $\beta_{\alpha\beta}$ označimo relativistički tenzor viskoznosti, imaćemo za tenzor pritisaka fluidne sredine u kojoj se unutrašnje trenje izmedju čestica pri njihovom relativnom pomeranju ne zanemaruje:

$$S_{\alpha\beta} = -p\, P_{\alpha\beta} + \beta_{\alpha\beta} \; . \tag{1.3.1}$$

Pomnožimo jednačinu (1.3.1) vektorom u^{α} ; s obzirom na (1.1.6) i (1.2.10) biće tada

$$\beta_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} = 0 \; , \tag{1.3.2}$$

odakle se odmah dobiva da je u odnosu na sistem K, koji smo uveli u prethodnom odeljku,

$$\beta_{4'\beta'} = 0 \; . \tag{1.3.3}$$

Za prostorne koordinate relativističkog tenzora viskoznosti u odnosu na sopstveni koordinatni sistem, koordinate $\beta_{i'j'}$, uzećemo da se svode na koordinate klasičnog tenzora viskoznosti; dakle, za izotropni fluid, kada je veza izmedju koordinata tenzora viskoznosti i tenzora brzine deformacije linearna, možemo napisati:

$$\beta_{i'j'} = c_{i'j'k'l'}\, \sigma^{k'l'} \tag{1.3.4}$$

gde su prostorne koordinate $\sigma^{k'l'}$ odredjene jednačinama (1.2.30), a koeficijenti $c_{i'j'k'l'}$ se mogu izraziti, kao što je poznato iz klasične linearne teorije, pomoću dva koeficijenta viskoznosti, λ

i μ , jednačinama

$$c_{i'j'k'l'} = \lambda\,\delta_{i'j'}\delta_{k'l'} + \mu\,(\delta_{i'k'}\delta_{j'l'} + \delta_{i'l'}\delta_{j'k'})\,. \qquad (1.3.5)$$

Tenzorsku jednačinu koja treba da objedini jednačine (1.3.4) i (1.3.3) ćemo potražiti u obliku

$$\beta_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\sigma^{\gamma\delta}\,, \qquad (1.3.6)$$

gde su $\sigma^{\gamma\delta}$ kontravarijantne koordinate tenzora brzine deformacije (1.2.25), a tenzor četvrtog reda $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$, koji tek treba odrediti, za prostorne koordinate u odnosu na sistem K mora imati veličine (1.3.5). O ostalim koordinatama toga tenzora u odnosu na sopstveni koordinatni sistem izvešćemo sada neke zaključke koji će nam pomoći da utvrdimo njegov oblik.

Napišimo zato jednačinu (1.3.6) u odnosu na lokalni sistem K; imaćemo

$$\beta_{\alpha'\beta'} = c_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\,\sigma^{\gamma'\delta'}\,,$$

tj., s obzirom na (1.2.31),

$$\beta_{\alpha'\beta'} = c_{\alpha'\beta'k'l'}\,\sigma^{k'l'}\,. \qquad (1.3.7)$$

Iz jednačine (1.3.7) ćemo za $\beta' = 4'$ dobiti

$$c_{\alpha'4'k'l'}\,\sigma^{k'l'} = 0\,, \qquad (1.3.8)$$

pri čemu smo iskoristili (1.3.3).

Kako su šest od devet veličina $\sigma^{k'l'}$ 19) linearno nezavisne, i kako je sistem $\mathcal{L}_{\alpha'\beta'k'l'}$ simetričan po indeksima k', l', iz jednačina (1.3.8) zaključujemo da mora biti

$$\mathcal{L}_{\alpha'4'k'l'} = 0 \quad . \tag{1.3.9}$$

Dalje, s obzirom na to da je sistem veličina (1.3.5) simetričan u odnosu na prva dva indeksa, kao i u odnosu na poslednja dva indeksa, zaključujemo da tu osobinu treba da ima i tenzor $\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, čije su to prostorne koordinate u sistemu K.

Prema tome, o tenzoru četvrtog reda $\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ znamo ovo:

1. Njegove prostorne koordinate u odnosu na sistem K su odredjene jednačinama (1.3.5), tj. svode se na izotropni tenzor četvrtog reda za trodimenzioni Euklidov prostor.

2. Koordinate $\mathcal{L}_{\alpha'4'k'l'} = \mathcal{L}_{4'\alpha'k'l'}$ su, prema (1.3.9), jednake nuli.

Na osnovu ovih osobina tenzora $\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, zaključujemo da se on može napisati kao linearna kombinacija dva tenzora četvrtog reda:

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda\, u_{\alpha\beta\gamma\delta} + \mu\, v_{\alpha\beta\gamma\delta} \, , \tag{1.3.10}$$

pri čemu mora biti

$$u_{i'j'k'l'} = \delta_{i'j'}\, \delta_{k'l'} \, , \qquad u_{\alpha'4'k'l'} = 0 \quad . \tag{1.3.11}$$

---

19) Sistem $\sigma^{k'l'}$ je simetričan (vidi jednačine (1.2.30)), pa su samo šest od devet veličina $\sigma^{k'l'}$ medjusobno nezavisne.

i

$$v_{i'j'k'l'} = \delta_{i'k'}\delta_{j'l'} + \delta_{i'l'}\delta_{j'k'} , \qquad v_{\alpha'4'k'l'} = 0 . \tag{1.3.12}$$

Znajući da tenzor

$$P_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta} \tag{1.3.13}$$

ima u odnosu na sistem K koordinate

$$P_{i'j'} = \delta_{i'j'} \quad \text{i} \quad P_{\alpha'4'} = 0 , \tag{1.3.14}$$

što nije teško proveriti ako se imaju u vidu jednačine (1.2.29), odmah uvidjamo da se može napisati

$$u_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\beta}\, g_{\gamma\delta} , \tag{1.3.15}$$

ali takodje i

$$u_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\beta}\, P_{\gamma\delta} , \tag{1.3.16}$$

jer oba izraza, i (1.3.15), i (1.3.16), zadovoljavaju uslov (1.3.11).

Tenzor $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$, koji treba da ispuni uslove (1.3.12), možemo predstaviti na više načina pomoću tenzora $P_{\alpha\beta}$ i $g_{\alpha\beta}$. Navedimo, kao primer, ova dva oblika:

$$v_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}\, g_{\beta\gamma} , \tag{1.3.17}$$

i

$$v_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma} P_{\beta\delta} + P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma} . \qquad (1.3.18)$$

Koje ćemo od navedenih izraza za tenzore $u_{\alpha\beta\gamma\delta}$ i $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$ iskoristiti da bismo predstavili tenzor (1.3.10), sasvim je svejedno. Mi ćemo se opredeliti za izraze (1.3.16) i (1.3.18), koji omogućuju da se tenzor $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ predstavi samo kao kombinacija tenzora $P_{\alpha\beta}$, slično kao što se izotropni tenzor četvrtog reda u klasičnoj teoriji (u odnosu na Dekartove pravougle koordinate) predstavlja kao linearna kombinacija Kronekerovih tenzora[20].

Tako ćemo, najzad, imati[21]

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda P_{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} + \mu (P_{\alpha\gamma} P_{\beta\delta} + P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma}) . \qquad (1.3.19)$$

Ako tenzor (1.3.19) unesemo u izraz (1.3.6), dobićemo

$$\beta_{\alpha\beta} = \lambda P_{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta} + \mu (P_{\alpha\gamma} P_{\beta\delta} + P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma}) \sigma^{\gamma\delta} . \qquad (1.3.20)$$

Potražimo sada čemu je jednak izraz $P_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}$, koji se javlja u prvom članu na desnoj strani jednačine (1.3.20). Ako imamo u vidu uslov (1.2.28), lako ćemo dobiti

$$P_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta} = (g_{\gamma\delta} + u_\gamma u_\delta)\sigma^{\gamma\delta} = g_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta} = \sigma^{\gamma}_{\gamma}$$

---

20) Videti [23], str. 290, jednačina 25.

21) Interesantno je da Sing u svome radu [25], u kome, izmedju ostalog, daje relativističku formulaciju Hukovog zakona, za tenzor $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ po definiciji usvaja oblik $c_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \mu(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})$, dakle oblik koji se ne razlikuje od klasičnog oblika toga tenzora (vidi [25], jedn. (1.12) na str. 83).

tj., s obzirom na (1.2.25),

$$P_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta} = \nabla_\gamma u^\gamma . \qquad (1.3.21)$$

Najzad, kako je $P_{\alpha\gamma}P_{\beta\delta}\sigma^{\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\beta}$, jednačina (1.3.20) postaje

$$\beta_{\alpha\beta} = \lambda P_{\alpha\beta}\nabla_\gamma u^\gamma + 2\mu\sigma_{\alpha\beta} . \qquad (1.3.22)$$

Kada (1.3.22) unesemo u izraz (1.3.1) za tenzor pritisaka relativističkog viskoznog fluida, dobićemo[22]

$$S_{\alpha\beta} = -(p - \lambda\nabla_\gamma u^\gamma)P_{\alpha\beta} + 2\mu\sigma_{\alpha\beta} . \qquad (1.3.23)$$

Jasno je da je i ovde moguće, kao i u klasičnoj teoriji, rastaviti tenzor $\sigma_{\alpha\beta}$ na dve komponente: izotropnu, koja se u prostor-vremenu izražava pomoću tenzora $P_{\alpha\beta}$, i devijator - tenzor drugog reda iz koga se kontrakcijom dobija nula. U tome slučaju možemo pisati, ako uvedemo oznake ${}_{(d)}\sigma_{\alpha\beta}$ za devijator tenzora $\sigma_{\alpha\beta}$, i $\sigma = \nabla_\gamma u^\gamma$,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\sigma P_{\alpha\beta} + {}_{(d)}\sigma_{\alpha\beta} .$$

Tada je iz (1.3.23)

$$S_{\alpha\beta} = -[p - (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\sigma]P_{\alpha\beta} + 2\mu\,{}_{(d)}\sigma_{\alpha\beta} .$$

---

22) Lako je uočiti analogiju izmedju izraza (1.3.23) i izraza za tenzor napona viskoznog fluida u klasičnoj teoriji (vidi, recimo, [26], str. 233, jednačina (7.2.18)).

Ako se radi o nestišljivom fluidu, kada je

$$\sigma = \nabla_\gamma u^\gamma = 0 \,, \tag{1.3.24}$$

tenzor pritisaka će biti

$$S_{\alpha\beta} = -p\,P_{\alpha\beta} + 2\mu\,\sigma_{\alpha\beta} \,. \tag{1.3.25}$$

Najzad, ako u (1.1.5) unesemo izraz (1.3.23) za tenzor pritisaka, dobićemo tenzor energije relativističkog viskoznog fluida

$$T_{\alpha\beta} = \varrho\, u_\alpha u_\beta + (p - \lambda \nabla_\gamma u^\gamma)\, P_{\alpha\beta} - 2\mu\,\sigma_{\alpha\beta} \,,$$

tj.

$$T_{\alpha\beta} = (\varrho + \bar{p})\, u_\alpha u_\beta + \bar{p}\, g_{\alpha\beta} - 2\mu\,\sigma_{\alpha\beta} \,, \tag{1.3.26}$$

gde smo iskoristili (1.3.13), i uveli oznaku

$$\bar{p} = p - \lambda \nabla_\gamma u^\gamma = p - \lambda\sigma \,. \tag{1.3.27}$$

Za nestišljiv viskozni fluid, kada je $\bar{p} = p$, tenzor energije će biti

$$T_{\alpha\beta} = (\varrho + p)\, u_\alpha u_\beta + p\, g_{\alpha\beta} - 2\mu\,\sigma_{\alpha\beta} \,. \tag{1.3.28}$$

G L A V A II

2.1. Pfafova metoda

U ovoj, drugoj glavi svoga rada, pažnju ćemo posvetiti pitanju primene Pfafove metode u relativističkoj mehanici viskoznog fluida.

Proučavajući skalarnu invarijantu u obliku linearne diferencijalne forme

$$\phi = X_i \, dx^i \,, \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2.1.1}$$

gde su

$$X_i = X_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

funkcije nezavisno promenljivih veličina $x^1, x^2, \ldots, x^n$, J. F. Pfaf (J. F. Pfaff) je uveo sistem diferencijalnih jednačina

$$\left(\frac{\partial X_j}{\partial x^i} - \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \right) dx^j = 0, \quad (i,j=1,2,\ldots,n) \,. \tag{2.1.2}$$

Po njemu se forma (2.1.1) naziva Pfafova forma (ili Pfafov izraz), a sistem diferencijalnih jednačina (2.1.2), pridružen formi (2.1.1) - prvi sistem Pfafovih jednačina, ili, kratko, Pfafove jednačine.

Može da se pokaže da forma (2.1.1) i jednačine (2.1.2) imaju čitav niz važnih osobina [14]. Na tim osobinama se zasniva tzv. Pfafova metoda u mehanici.

Prvi koji je, prema [14], formulisao Pfafovu metodu u dinamici, bio je Viteker (E. T. Whittaker). On je pokazao da diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema u kanonskom obliku mogu da se dobiju kao Pfafove jednačine pridružene formi

$$\phi = p_i dq^i - H dt, \quad (i=1,2,\dots,n) \tag{2.1.3}$$

gde su $q^1, q^2, \dots, q^n$ generalisane koordinate posmatranog dinamičkog sistema, $p_1, p_2, \dots, p_n$ njegovi generalisani impulsi, $H = H(p_i, q^i)$ - Hamiltonova funkcija, i t - vreme.

Na osnovu osobine da transformisani Pfafov izraz dovodi do Pfafovih jednačina koje su ekvivalentne sa jednačinama koje odgovaraju polaznom Pfafovom izrazu, on je zatim ukazao na mogućnost da se problem integracije kanonskih jednačina svede na problem transformacije odgovarajućeg Pfafovog izraza, što često znatno pojednostavljuje postupak pri rešavanju različitih zadataka mehanike.

Primenu Pfafove metode u mehanici dalje je detaljno proučavao A. Bilimović [13], [14]. On je pokazao da se Pfafov izraz (2.1.3) svodi na izraz za element akcije u Hamiltonovom smislu:

$$W dt = (T+U)\, dt = (2T-H)\, dt, \tag{2.1.4}$$

gde je $H = T-U$, pri čemu T označava kinetičku energiju posmatranog materijalnog sistema, a U rad svih spoljašnjih sila koje na sistem deluju, pri pomeranju od nekog uočenog početnog položaja sistema, do njegovog krajnjeg položaja.

Pored toga, A. Bilimović je pokazao da se jednačine (2.1.2) mogu napisati u obliku

$$dX_i - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = 0 \,, \quad (i=1,2,\dots,n) \,, \tag{2.1.5}$$

pogodnom zbog toga što se iz njega mogu neposredno dobiti Pfafove jednačine za svaku nezavisno promenljivu veličinu x^i.

Ako se Pfafov izraz u opštem slučaju predstavi pomoću k vektora N-dimenzionog prostora $Z^i_{(a)}$ $(a = 1,2,\dots,k \,;\, i = 1,2,\dots,N)$ i k_1 skalara $Q_{(b)}$ $(b = 1,2,\dots,k_1)$ ovako[23]:

$$\phi = \sum_{a=1}^{k} Z_{i(a)} dz^i_{(a)} + \sum_{b=1}^{k_1} Q_{(b)} dq_{(b)} \,, \tag{2.1.6}$$

onda na osnovu (2.1.5) svakom vektoru $z^i_{(a)}$ odgovara vektorska jednačina

$$dZ_{i(a)} = \frac{\partial \phi}{\partial z^i_{(a)}} \,, \quad (a=1,\dots,k;\; i=1,\dots,N) \tag{2.1.7}$$

gde $\frac{\partial \phi}{\partial z^i_{(a)}}$ označava delimični gradijent Pfafovog izraza (2.1.6) u odnosu na vektor $z^i_{(a)}$, a svakom skalaru $q_{(b)}$ - skalarna jednačina

$$dQ_{(b)} = \frac{\partial \phi}{\partial q_{(b)}} \,, \quad (b=1,\dots,k_1) \,. \tag{2.1.8}$$

---

23) Videti [27], str. 202.

U uvodu smo naveli da je u Beogradu objavljen čitav niz radova posvećenih primeni Pfafove metode u mehanici i teorijskoj fizici. U njima su različiti problemi mehanike, klasične i kvantne, zatim astronomije i fizike, rešeni pomoću te metode.

U ovome radu naš cilj će dalje biti da izvedemo diferencijalne jednačine kretanja relativističkog viskoznog fluida pomoću Pfafove metode, i tako proširimo njenu oblast primenljivosti i na opštu teoriju relativnosti.

2.2. Pfafova forma za relativistički viskozni fluid i njegove diferencijalne jednačine kretanja

Da bismo ostvarili cilj koji smo pred sebe postavili, posmatraćemo opet viskozni fluid u prostor-vremenu V_4, u odnosu na koordinatni sistem x^α koji smo uveli na početku ovoga rada.

Podsetimo se da istoriju fluida, koji posmatramo kao sistem čestica C_{ξ^i}, u V_4 predstavljaju jednačine

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i, s) , \tag{2.2.1}$$

gde su ξ^i prostorni parametri, konstantni duž svetskih linija C_{ξ^i}, a s je sopstveno vreme koje se menja duž svake strujne linije.

Prema postupku koji nalaže Pfafova metoda, prvi korak ka ostvarenju cilja koji je sada pred nama sastoji se u tome da se obrazuje element akcije u Hamiltonovom smislu za delić fluidne sredine, odredjen na jedinicu njegove mase, u obliku Pfafove forme. Postavljajući zatim Pfafove jednačine za dobivenu formu, doći ćemo do traženih diferencijalnih jednačina kretanja.

Pri formiranju pomenutog elementa akcije, kao putokaz će nam poslužiti oblik toga elementa u odgovarajućoj klasičnoj teoriji.

Ne ulazeći ovde u pitanje kako je obrazovan element akcije u klasičnoj teoriji, navedimo samo da on ima oblik[24]:

$$\phi_{kl.} = v_i\, dx^i - H_{kl.}\, dt \tag{2.2.2}$$

gde su x^i koordinate neke čestice u uočenom deliću fluidne sredine na koji se forma (2.2.2) odnosi, v^i - kovarijantne koordinate brzine te čestice, $H_{kl.}$ - Hamiltonova funkcija obrazovana za posmatrani fluidni delić i izračunata na jedinicu njegove mase, i t - vreme.

Po analogiji sa formom (2.2.2), uzmimo za element akcije fluidnog delića u relativističkoj teoriji sledeći invarijantni izraz:

$$\phi = u_\alpha\, dx^\alpha - H\, ds\ , \tag{2.2.3}$$

u kome je četvorobrzina zauzela mesto vektora brzine iz izraza (2.2.2), a sopstveno vreme s - mesto vremena t ; sa H smo obeležili invarijantni izraz koji odgovara funkciji $H_{kl.}$ iz forme (2.2.2).

Da dodjemo do oblika za funkciju H , i dalje ćemo kao putokaz koristiti klasičnu teoriju. Po toj je teoriji

$$H_{kl.} = T_{kl.} - U_{kl.} = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j - U_{kl.}\ ,$$

---

24) Videti [16], str. 219, jednačina (38).

gde je $T_{kl.}=\frac{1}{2}g_{ij}v^{i}v^{j}$ kinetička energija posmatranog delića, izračunata na jedinicu njegove mase, a $U_{kl.}$ - rad svih spoljašnjih sila koje deluju na uočeni delić - zapreminskih i površinskih, odredjenih na jedinicu mase delića.

Uzmimo, dakle, za H :

$$H \overset{def}{=} \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}-U \quad , \tag{2.2.4}$$

gde U označava invarijantni izraz koji odgovara funkciji $U_{kl.}$ u klasičnoj teoriji.

Pri traženju izraza za U vodićemo računa da u opštoj teoriji relativnosti nema gravitacionih sila. Zbog toga ćemo pokušati da obrazujemo invarijantne izraze koji bi u prostor-vremenu odgovarali samo onim izrazima koji u klasičnoj teoriji predstavljaju radove rezultujuće sile pritiska i rezultante viskoznih sila kojima okolina deluje na uočeni elementarni delić, odredjenih na jedinicu mase delića, na pomeranju od nekog uočenog početnog položaja sistema do njegovog krajnjeg položaja, ne tražeći nikakav izraz kome bi u klasičnoj teoriji odgovarao rad gravitacionih sila.

Da bismo došli do tih invarijantnih izraza, koristićemo onaj isti put kojim smo u prvom delu rada išli kada smo tražili oblik za relativistički tenzor viskoznosti: prvo ćemo obrazovati tražene izraze u odnosu na sopstveni koordinatni sistem, zahtevajući da se oni svode na odgovarajuće klasične izraze u odnosu na taj sistem, a zatim ćemo na osnovu njih potražiti i opšte izraze, koji će predstavljati tražene veličine u odnosu na bilo koji koordinatni sistem u V_4 .

Uvedimo, dakle, u nekom dogadjaju na svetskoj liniji čestice C_{ξ^i} (pri čemu uzimamo da ta čestica pripada deliću fluidne sredine za koji obrazujemo formu (2.2.3)) lokalni ortonormirani sistem K u odnosu na koji je, kako smo to već ranije naveli u jednačinama (1.2.29),

$$u_{i'} = u^{i'} = 0 \;, \qquad u^{4'} = -u_{4'} = 1 \;. \tag{2.2.5}$$

Obeležimo sa δV trodimenzioni element zapremine posmatranog delića, a sa S površinu koja ga ograničava. Dalje, sa $dS_{i'}$ ćemo označiti prostorne komponente vektora upravljenog elementa površine S u odnosu na lokalni sistem K.

Onda ćemo za prostorne komponente ukupne četvorosile pritiska kojom okolina preko S deluje na uočeni elementarni delić imati

$$N_{i'}^{(1)} = -\int_S p\, dS_{i'} \;, \tag{2.2.6}$$

gde p, da podsetimo, označava sopstveni pritisak fluida; četvrta, vremenska komponenta četvorosile pritiska će u odnosu na sistem K biti jednaka nuli:

$$N_{4'}^{(1)} = 0 \;. \tag{2.2.7}$$

Ako se radi o idealnom fluidu, dakle o fluidu čiji tenzor energije prema jednačinama (1.1.5) i (1.1.7) ima oblik

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta + p\, g_{\alpha\beta} \;,$$

onda se ukupno dejstvo okoline preko površine S na delić koji smo uočili svodi na rezultujuću četvorosilu čije su prostorne komponente u odnosu na sistem K date izrazima (2.2.6). Ako, medjutim, posmatramo viskozni fluid, moramo uzeti u obzir i ono dejstvo okoline na posmatrani delić, koje se javlja usled viskoznosti sredine. Uzmimo odmah da smo silu viskoznosti kojom okolina deluje preko površine dS razložili na dve komponente: jednu u pravcu normale na dS, tj. kolinearnu sa silom pritiska $-p\,dS_{i'}$, i drugu koja je upravna na nju, tangentnu viskoznu silu.

Razmatrajmo prvo samo dejstvo komponente sile viskoznosti u pravcu normale $dS_{i'}$, komponente koja se javlja samo onda kada se radi o stišljivom fluidu, kada je brzina kubne dilatacije σ (vidi jednačinu (1.3.24)) različita od nule. Prostorne komponente one rezultujuće četvorosile viskoznosti koja se javlja samo usled stišljivosti fluida, koja je dakle posledica one deformacije fluidnog delića pri kojoj on ne menja oblik već samo zapreminu, biće u odnosu na sistem K

$$N^{(2)}_{i'} = \int_S \lambda \nabla_{j'} u^{j'} dS_{i'} = \int_S \lambda \nabla_{\gamma'} u^{\gamma'} dS_{i'} = \int_S \lambda \sigma \, dS_{i'} \,, \qquad (2.2.8)$$

a njena vremenska komponenta će u odnosu na lokalni sistem biti jednaka nuli:

$$N^{(2)}_{4'} = 0 \,. \qquad (2.2.9)$$

Prema jednačinama (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) i (2.2.9), ukupna četvorosila kojom okolina deluje preko površine S na uočeni delić upravno na površinu, imaće u odnosu na sistem K komponente

$$N_{i'} = N_{i'}^{(1)} + N_{i'}^{(2)} = -\int_S (p - \lambda\sigma)\, dS_{i'} = -\int_S \bar{p}\, dS_{i'} \quad , \qquad (2.2.10)$$

(pri čemu smo iskoristili oznaku (1.3.27), tj. $\bar{p} = p - \lambda\sigma$), i

$$N_{4'} = N_{4'}^{(1)} + N_{4'}^{(2)} = 0 \; . \qquad (2.2.11)$$

Iz jednačina (2.2.10) na osnovu Gausovog stava imamo

$$-\int_S \bar{p}\, dS_{i'} = -\int_{\delta V} \bar{p}_{,i'}\, dV \, , \quad \left(\bar{p}_{,i'} \equiv \frac{\partial \bar{p}}{\partial x^{i'}}\right) .$$

Prema tome, za komponente četvorosile kojom okolina preko S na uočeni delić dejstvuje u pravcu normale na površinu , pritom izračunate na jedinicu mase delića, razume se i dalje u odnosu na sistem K, imaćemo

$$P_{i'}^{(1)} = -\frac{1}{\rho + \bar{p}}\, \bar{p}_{,i'} \quad , \quad P_{4'}^{(1)} = 0 \; . \qquad (2.2.12)$$

Skrenimo pažnju da, prema [12][25], ulogu inercione mase po jedinici sopstvene zapremine u relativističkoj mehanici idealnog fluida igra veličina $\rho + p$. U relativističkoj mehanici stišljivog viskoznog fluida, u čijem se tenzoru energije[26] svugde umesto p pojavljuje $\bar{p}$, tu ulogu će, očigledno, igrati zbir

---

25) Videti [12], fusnota 7) na strani 2763, i dalje jednačina (2.19) na strani 2764.

26) Videti jednačinu (1.3.26) ovoga rada.

$\rho+\bar{p}$. Zbog toga smo upravo tu veličinu, $\rho+\bar{p}$, uneli u imenilac izraza (2.2.12).

Nije teško pokazati da se (2.2.12) može u tenzorskom obliku napisati na sledeći način

$$P_{\alpha}^{(1)}=-\frac{1}{\rho+\bar{p}}P_{\alpha}^{\beta}\bar{p}_{,\beta}\ , \tag{2.2.13}$$

gde je tenzor P_{α}^{β} definisan jednačinom (1.2.8).

Zaista, iz jednačine (2.2.13) imamo da je u odnosu na sistem K

$$P_{\alpha'}^{(1)}=-\frac{1}{\rho+\bar{p}}P_{\alpha'}^{\beta'}\bar{p}_{,\beta'}\ , \tag{2.2.14}$$

odakle odmah dobivamo (2.2.12), ako imamo u vidu da je, s obzirom na (1.2.8) i (2.2.5),

$$P_{i'}^{j'}=\delta_{i'}^{j'}\ ,\qquad P_{\alpha'}^{4'}=0\ . \tag{2.2.15}$$

Obrazujmo sada, po ugledu na izraz za rad u klasičnoj teoriji, sledeći invarijantni izraz

$$\int_{x_0^{\alpha}}^{x^{\alpha}}P_{\gamma}^{(1)}dx^{\gamma}=-\int_{x_0^{\alpha}}^{x^{\alpha}}\frac{1}{\rho+\bar{p}}P_{\gamma}^{\beta}\bar{p}_{,\beta}dx^{\gamma}\ . \tag{2.2.16}$$

Izraz (2.2.16) možemo uzeti kao relativističko uopštenje klasičnog pojma rada rezultujuće sile kojom okolina deluje na posmatrani delić upravno na površinu koja ga ograničava, sračunate na jedinicu mase delića, pri pomeranju sistema iz početnog u krajnji položaj.

U vezi sa izrazom (2.2.16) moramo skrenuti pažnju na to da je on samo formalan. Naime, nije teško proveriti računom da je izraz pod znakom integrala u (2.2.16) jednak nuli. Zaista, kako je zbog (1.1.3)

$$u^{\beta} dx^{\alpha} = u^{\alpha} dx^{\beta} , \qquad (2.2.17)$$

biće

$$\begin{aligned} P^{\beta}_{\gamma} \bar{p}_{,\beta} dx^{\gamma} &= (u^{\beta} u_{\gamma} + \delta^{\beta}_{\gamma}) \bar{p}_{,\beta} dx^{\gamma} = \\ &= u_{\gamma} \bar{p}_{,\beta} u^{\beta} dx^{\gamma} + \bar{p}_{,\beta} dx^{\beta} = \\ &= - \bar{p}_{,\beta} dx^{\beta} + \bar{p}_{,\beta} dx^{\beta} = 0 , \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili i uslov (1.1.4) koji zadovoljava četvorobrzina, tj. uslov $u^{\alpha} u_{\alpha} = -1$.

Medjutim, neće nam smetati to što je izraz (2.2.16) jednak nuli, jer je, da bismo postavili Pfafove jednačine za problem koji razmatramo, prema (2.1.7) potrebno da nadjemo gradijent „četvororada" (2.2.16) u odnosu na vektor x^{α}, a to je moguće. Dodajmo još to da je prirodno što smo za (2.2.16) dobili izraz koji je jednak nuli. Naime, u odnosu na lokalni sistem koji smo uveli, izraz za „četvororad" svakako <u>treba</u> da bude jednak nuli, jer je to <u>pokretni</u> koordinatni sistem, koji se pri kretanju fluidne sredine u V_4 pomera <u>zajedno</u> sa uočenim delićem. Kako je izraz (2.2.16), medjutim, <u>skalarni invarijantni izraz</u>, on mora imati istu vrednost u odnosu na sve dopustive koordinatne sisteme u V_4, pa će, dakle, i u odnosu na sistem x^{α} biti jednak nuli.

Najzad, ostalo nam je još da dodjemo do izraza koji bi u relativističkoj teoriji trebalo da odgovara klasičnom radu tangentnih viskoznih sila kojima okolina deluje preko površine S na uočeni delić, tj. sila koje se usled viskoznosti sredine pojavljuju prilikom one deformacije delića pri kojoj on menja samo oblik, dok mu zapremina ostaje nepromenjena.

Uzmimo i ovog puta da se prostorne komponente u odnosu na sistem K rezultujuće viskozne četvorosile[27] kojom okolina deluje na uočeni delić svode na odgovarajuće klasične izraze - tj. na komponente klasične rezultujuće tangentne viskozne sile:

$$T_{i'} = \int_S 2\mu \sigma_{i'}^{j'} dS_{j'} \quad , \qquad (2.2.18)$$

a njena četvrta, vremenska komponenta, u odnosu na sistem K će biti jednaka nuli:

$$T_{4'} = 0 \quad . \qquad (2.2.19)$$

Iz (2.2.18) je na osnovu Gausovog stava

$$T_{i'} = \int_S 2\mu \sigma_{i'}^{j'} dS_{j'} = \int_{\delta V} 2\mu \nabla_{j'} \sigma_{i'}^{j'} dV \quad .$$

Prema tome, za komponente rezultujuće tangentne četvorosile viskoznosti, sračunate na jedinicu mase uočenog delića, u odnosu na uvedeni lokalni koordinatni sistem ćemo imati

---

27) Sada se radi samo o onoj viskoznoj četvorosili koja se pojavljuje usled deformacije pri kojoj delić menja oblik, bez promene zapremine.

$$\bar{P}^{(2)}_{i'} = \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} \nabla_{j'} \sigma^{j'}_{i'} \quad , \tag{2.2.20a}$$

i

$$\bar{P}^{(2)}_{4'} = 0 \, . \tag{2.2.20b}$$

Učinilo nam se verovatno da bi tenzorski izraz

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta}_{\alpha} \nabla_{\gamma} \sigma^{\gamma}_{\beta} \quad , \tag{2.2.21}$$

u kome je σ^{γ}_{β} mešoviti oblik tenzora brzine deformacije (1.2.25), mogao da objedini izraze koje imamo na desnim stranama jednačina (2.2.20a) i (2.2.20b), i da ih predstavlja u odnosu na bilo koji koordinatni sistem u V_4 .

Da bismo to proverili, napišimo prvo izraz (2.2.21) u odnosu na sistem K

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{\alpha'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} \quad . \tag{2.2.22}$$

Za $\alpha' = 4'$, s obzirom da je $P^{\beta'}_{4'} = 0$, (2.2.22) se zaista svodi na nulu, tj. na desnu stranu jednačine (2.2.20b).

Za $\alpha' = i'$, iz (2.2.22) ćemo imati

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{i'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} = \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} (u^{\beta'} u_{i'} + \delta^{\beta'}_{i'}) \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} \quad ,$$

odakle je, s obzirom na (2.2.5),

$$\frac{2\mu}{\varrho+\bar{\mu}} P^{\beta'}_{i'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} = \frac{2\mu}{\varrho+\bar{\mu}} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{i'} ,$$

tj.

$$\frac{2\mu}{\varrho+\bar{\mu}} P^{\beta'}_{i'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} = \frac{2\mu}{\varrho+\bar{\mu}} \nabla_{j'} \sigma^{j'}_{i'} + \frac{2\mu}{\varrho+\bar{\mu}} \nabla_{4'} \sigma^{4'}_{i'} . \qquad (2.2.23)$$

Sada je potrebno da nadjemo na šta se svodi veličina koja se pojavila u drugom sabirku na desnoj strani jednačine (2.2.23).

Napisaćemo zato prvo tenzor brzine deformacije (1.2.25) u mešovitom obliku

$$\sigma^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2} (P^{\gamma\alpha} \nabla_{\gamma} u_{\beta} + P^{\gamma}_{\beta} \nabla_{\gamma} u^{\alpha}) , \qquad (2.2.24)$$

i potražiti kovarijantni izvod $\nabla_{\lambda} \sigma^{\alpha}_{\beta}$:

$$\nabla_{\lambda} \sigma^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2} \nabla_{\lambda} P^{\gamma\alpha} \nabla_{\gamma} u_{\beta} + \frac{1}{2} P^{\gamma\alpha} \nabla_{\lambda} (\nabla_{\gamma} u_{\beta}) + \frac{1}{2} \nabla_{\lambda} P^{\gamma}_{\beta} \nabla_{\gamma} u^{\alpha} + \frac{1}{2} P^{\gamma}_{\beta} \nabla_{\lambda} (\nabla_{\gamma} u^{\alpha}) .$$

Ako jednačinu koju smo dobili napišemo u odnosu na sistem K

$$\nabla_{\lambda'} \sigma^{\alpha'}_{\beta'} = \frac{1}{2} \nabla_{\lambda'} P^{\gamma'\alpha'} \nabla_{\gamma'} u_{\beta'} + \frac{1}{2} P^{\gamma'\alpha'} \nabla_{\lambda'} (\nabla_{\gamma'} u_{\beta'}) + \frac{1}{2} \nabla_{\lambda'} P^{\gamma'}_{\beta'} \nabla_{\gamma'} u^{\alpha'} + \frac{1}{2} P^{\gamma'}_{\beta'} \nabla_{\lambda'} (\nabla_{\gamma'} u^{\alpha'}) .$$

a zatim u njoj stavimo da je $\lambda' = \alpha' = 4'$, $\beta' = i'$, imaćemo, s obzirom na (2.2.15),

$$\nabla_{4'} \sigma^{4'}_{i'} = \frac{1}{2} \nabla_{4'} P^{\gamma' 4'} \nabla_{\gamma'} u_{i'} + \frac{1}{2} \nabla_{4'} P^{\gamma'}_{i'} \nabla_{\gamma'} u^{4'} + \frac{1}{2} \nabla_{4'} (\nabla_{\gamma'} u^{4'}) .$$

Dalje, polazeći od (1.1.4) lako se dobiva da je

$$\nabla_{\gamma'} u^{4'} = 0 \; ; \qquad \nabla_{4'}(\nabla_{i'} u^{4'}) = \nabla_{i'} u^{j'} \nabla_{4'} u_{j'} \; , \tag{2.2.25}$$

pa će biti

$$\nabla_{4'} \sigma^{4'}_{i'} = \frac{1}{2} \nabla_{4'} P^{\gamma' 4'} \nabla_{\gamma'} u_{i'} + \frac{1}{2} \nabla_{i'} u^{j'} \nabla_{4'} u_{j'} \; . \tag{2.2.26}$$

Najzad, ako kovarijantno diferenciramo po x^{λ} tenzor

$$P^{\gamma\alpha} = u^{\gamma} u^{\alpha} + g^{\gamma\alpha}$$

dobićemo

$$\nabla_{\lambda} P^{\gamma\alpha} = u^{\alpha} \nabla_{\lambda} u^{\gamma} + u^{\gamma} \nabla_{\lambda} u^{\alpha} \; .$$

U odnosu na sistem K će biti

$$\nabla_{\lambda'} P^{\gamma'\alpha'} = u^{\alpha'} \nabla_{\lambda'} u^{\gamma'} + u^{\gamma'} \nabla_{\lambda'} u^{\alpha'} \; ,$$

odakle, kada se stavi da je $\lambda' = \alpha' = 4'$, i uzme u obzir da je $u^{4'} = 1$ (vidi (2.2.5)) i $\nabla_{4'} u^{4'} = 0$ (vidi (2.2.25)), sledi

$$\nabla_{4'} P^{\gamma' 4'} = \nabla_{4'} u^{\gamma'} \; .$$

Sada se jednačina (2.2.26) može napisati u obliku

$$\nabla_{4'} \sigma^{4'}_{i'} = \frac{1}{2} \nabla_{4'} u^{\gamma'} \nabla_{\gamma'} u_{i'} + \frac{1}{2} \nabla_{i'} u^{j'} \nabla_{4'} u_{j'} ,$$

ili, kako je $\nabla_{4'} u^{4'} = 0$, u obliku

$$\nabla_{4'} \sigma^{4'}_{i'} = \frac{1}{2} \nabla_{4'} u^{j'} \nabla_{j'} u_{i'} + \frac{1}{2} \nabla_{i'} u_{j'} \nabla_{4'} u^{j'} ,$$

odakle je

$$\nabla_{4'} \sigma^{4'}_{i'} = \nabla_{4'} u^{j'} \sigma_{i'j'} , \qquad (2.2.27)$$

pri čemu smo iskoristili (1.2.30).

Iz (2.2.23) i (2.2.27) ćemo sada imati

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{i'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} = \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} \nabla_{j'} \sigma^{j'}_{i'} + \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} \nabla_{4'} u^{j'} \sigma_{i'j'} . \qquad (2.2.28)$$

Iz jednačine (2.2.28), koja pokazuje da se (2.2.22) za $\alpha' = i'$ ne svodi na izraz koji se nalazi na desnoj strani jednačine (2.2.20a), zaključujemo da veličinu (2.2.21) ne možemo usvojiti kao tenzorski izraz koji predstavlja desne strane jednačina (2.2.20a) i (2.2.20b).

Zbog toga smo dalje razmišljali ovako: nama, u suštini, nije neophodno potrebno da jednačine (2.2.20a) i (2.2.20b) izrazimo u tenzorskom obliku; dovoljno je da obrazujemo skalarni invarijantni izraz - "četvororad" - kome bi u klasičnoj teoriji odgovarao rad tangentnih viskoznih sila koje preko površine S deluju na uočeni delić, na njegovom pomeranju od početnog do krajnjeg položaja. Taj izraz bi, na osnovu onog što smo izložili na strani 46, bio samo formalan i morao bi da bude jednak nuli; dalje, u odnosu na sistem K bi se izraz koji se nalazi pod integralom u tome četvororadu morao svesti na

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}}\,\nabla_{j'}\sigma^{j'}_{i'}\,dx^{i'}\;, \qquad (2.2.29)$$

tj. morao bi se svesti na izraz koji, do na činilac $\frac{1}{\rho+\bar{p}}$, u klasičnoj teoriji predstavlja elementarni rad tangentnih viskoznih sila kojima okolina preko S na delić deluje.

Pokazaćemo sada da skalarni invarijantni izraz

$$\int_{x_0^\alpha}^{x^\alpha} P^{(2)}_\delta\,dx^\delta = \int_{x_0^\alpha}^{x^\alpha} \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}}\,P^\beta_\delta\,\nabla_\gamma\sigma^\gamma_\beta\,dx^\delta\;, \qquad (2.2.30)$$

gde smo sa $P^{(2)}_\delta$ obeležili četvorovektor (2.2.21), zadovoljava uslove koje smo naveli.

Pre svega, kako je zbog (1.1.4)

$$P^\beta_\alpha u^\alpha = (u^\beta u_\alpha + \delta^\beta_\alpha)u^\alpha = -u^\beta + u^\beta = 0\,,$$

biće i $P^\beta_\alpha\,dx^\alpha = 0$, što znači da je podintegralna funkcija u (2.2.30) jednaka nuli.

Potražimo sada kako će izgledati izraz pod integralom u (2.2.30) u odnosu na sistem K[28].

---

28) Očigledno je da će i taj izraz biti samo formalan, tj. i on će biti jednak nuli kao što to već ranije istakli (jer je $dx^{i'}$ = = 0). Mi ćemo ovde, medjutim, tražiti taj izraz koristeći sve ono što smo ranije izveli – jednačine (2.2.15), (2.2.28), itd. – a „zaboravljajući" pri tome da je i $dx^{i'} = 0$.

Imaćemo

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{\delta'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} dx^{\delta'} = \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{i'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} dx^{i'} + \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{4'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} dx^{4'},$$

tj., kako je prema (2.2.15) $P^{\beta'}_{4'} = 0$,

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{\delta'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} dx^{\delta'} = \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{i'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} dx^{i'}.$$

Ako iskoristimo jednačinu (2.2.28), možemo dalje napisati

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{\delta'} \nabla_{\gamma'} \sigma^{\gamma'}_{\beta'} dx^{\delta'} = \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} \nabla_{j'} \sigma^{j'}_{i'} dx^{i'} + \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} \nabla_{4'} u^{j'} \sigma_{i'j'} dx^{i'}. \qquad (2.2.31)$$

Kako je, medjutim, zbog (1.2.28)

$$\sigma_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} = 0 ,$$

biće i u odnosu na sistem K

$$\sigma_{\alpha'\beta'}\, dx^{\alpha'} = 0 ,$$

tj.

$$\sigma_{i'\beta'}\, dx^{i'} + \sigma_{4'\beta'}\, dx^{4'} = 0 . \qquad (2.2.32)$$

Prema (1.2.25) je

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(P^{\gamma}_{\alpha}\nabla_{\gamma}u_{\beta} + P^{\gamma}_{\beta}\nabla_{\gamma}u_{\alpha}\right),$$

pa je u odnosu na lokalni sistem

$$\sigma_{\alpha'\beta'} = \frac{1}{2}\left(P^{\gamma'}_{\alpha'}\nabla_{\gamma'}u_{\beta'} + P^{\gamma'}_{\beta'}\nabla_{\gamma'}u_{\alpha'}\right),$$

odakle, dajući indeksu α' vrednost $4'$, i uzimajući opet u obzir (2.2.15) i (2.2.25), lako dobivamo

$$\sigma_{4'\beta'} = 0 \ .$$

Tako je sada iz (2.2.32)

$$\sigma_{i'\beta'}\, dx^{i'} = 0 \ .$$

Na osnovu gornje jednačine biće iz (2.2.31)

$$\frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^{\beta'}_{\delta'}\nabla_{\gamma'}\sigma^{\gamma'}_{\beta'}\, dx^{\delta'} = \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} \nabla_{j'}\sigma^{j'}_{i'}\, dx^{i'},$$

a to smo i želeli da pokažemo.

Prema tome, invarijantni izraz (2.2.30) zaista možemo prihvatiti kao izraz koji u relativističkoj teoriji formalno odgovara izrazu za rad tangentnih viskoznih sila, sračunatih na jedinicu mase uočenog delića, kojima okolina preko površine delića na njega deluje.

Najzad, koristeći izraze (2.2.16) i (2.2.30), obrazovaćemo funkciju U koja se pojavljuje u (2.2.4) ovako

$$U = -\int_{x_0^\alpha}^{x^\alpha} \frac{1}{\rho+\bar{p}} P^\beta_\delta \bar{p}_{,\beta} dx^\delta + \int_{x_0^\alpha}^{x^\alpha} \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^\beta_\delta \nabla_\gamma \sigma^\gamma_\beta dx^\delta . \qquad (2.2.33)$$

Postavimo sada Pfafove jednačine koje odgovaraju formi (2.2.3). Prema (2.1.7) ćemo imati

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha \delta s = \partial_\alpha \phi = \partial_\alpha (u_\beta dx^\beta - H ds) , \qquad (2.2.34)$$

gde leva strana predstavlja apsolutni diferencijal vektora u_α, i gde smo sa $\partial_\alpha \phi$ označili gradijent Pfafovog izraza ϕ u odnosu na vektor x^α.

Iz (2.2.34) je dalje

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = \partial_\alpha (u_\beta u^\beta - H) = -\partial_\alpha H ,$$

tj., s obzirom na (2.2.4),

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = \partial_\alpha U \qquad (2.2.35)$$

Ako, najzad, unesemo (2.2.33) u (2.2.35), dobićemo

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = -\frac{1}{\rho+\bar{p}} P^\beta_\alpha \bar{p}_{,\beta} + \frac{2\mu}{\rho+\bar{p}} P^\beta_\alpha \nabla_\gamma \sigma^\gamma_\beta . \qquad (2.2.36)$$

Jednačine (2.2.36), do kojih smo došli primenjujući Pfafovu metodu, predstavljaju tražene diferencijalne jednačine strujnih linija relativističkog stišljivog viskoznog fluida.

2.3. Pfafova forma za idealni relativistički fluid

Zadržimo se, na kraju, na slučaju idealnog fluida, kada se zanemaruje trenje izmedju čestica fluida pri njihovom relativnom pomeranju, a tenzor energije, prema (1.1.5) i (1.1.7) ima oblik

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} . \tag{2.3.1}$$

Nije teško zaključiti da će funkcija U, koja je u slučaju viskoznog relativističkog fluida imala dva člana (vidi jednačinu (2.2.33)), sada izgledati ovako

$$U = -\int_{x_0^\alpha}^{x^\alpha} \frac{1}{\rho + p} P_\alpha^\beta p_{,\beta} \, dx^\alpha , \tag{2.3.2}$$

tj. u njoj će ostati samo onaj izraz koji predstavlja relativističko uopštenje klasičnog rada rezultujuće sile pritiska kojom okolina deluje na uočeni delić, izračunate na jedinicu mase delića, na pomeranju sistema od početnog do krajnjeg položaja, dok će izraz koji odgovara radu viskoznih sila, razume se, izostati.

Pfafove jednačine koje odgovaraju formi (2.2.3), tj. jednačine

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = \partial_\alpha \phi ,$$

dovode onda do diferencijalnih jednačina strujnih linija relativističkog idealnog fluida.

$$u^{\beta}\nabla_{\beta}u_{\alpha} = -\frac{p_{,\beta}}{\rho + p}P^{\beta}_{\alpha} \tag{2.3.3}$$

Uzmimo sada da fluidnu sredinu koju posmatramo karakteriše jednačina stanja koja vezuje sopstveni pritisak i sopstvenu gustinu, tj. jednačina

$$\rho = \rho(p). \tag{2.3.4}$$

Odavno je poznato (vidi [2],[8]) da je tada moguće odrediti metriku koja je konformna metrici prostor-vremena, u odnosu na koju će strujne linije fluida predstavljati geodezijske linije.

U tome cilju uvodi se funkcija sopstvenog pritiska

$$f(p) = e^{\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho+p}}, \tag{2.3.5}$$

koju A. Lihnerovič naziva indeks fluida; pomoću te funkcije jednačine (2.3.3), u kojima je sada $\rho = \rho(p)$, mogu da se napišu u obliku

$$u^{\beta}\nabla_{\beta}u_{\alpha} = -\frac{f_{,\beta}}{f}P^{\beta}_{\alpha}. \tag{2.3.6}$$

Nije teško pokazati [8] da jednačine (2.3.6) predstavljaju jednačine geodezijskih linija rimanske metrike čija je metrička forma $\bar{F}$ odredjena jednačinom

$$\bar{F} = f^2 F, \tag{2.3.7}$$

gde smo sa F označili metričku formu prostor-vremena: $F=g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$.

Uvedimo sada, onako kako to čini A. Lihnerovič [8], pomoću funkcije (2.3.5), vektor

$$C_{\alpha}=f u_{\alpha}\ , \tag{2.3.8}$$

poznat pod imenom vektora toka (ili pseudobrzine), i definišimo u odnosu na metriku $\bar{F}$ vektor $\bar{\vec{C}}$ ovako

$$\bar{C}_{\alpha}=C_{\alpha}\ . \tag{2.3.9}$$

Može se pokazati da vektor $\bar{\vec{C}}$ predstavlja jedinični vektor u prostoru uvedenom jednačinom (2.3.7), i da se pomoću toga vektora jednačina (2.3.3) može napisati u obliku

$$\bar{C}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{C}_{\beta}=0\ , \tag{2.3.10}$$

gde smo sa $\bar{\nabla}_{\alpha}$ označili operator kovarijantnog diferenciranja u odnosu na metriku $\bar{F}$. Izraz $\bar{C}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{C}_{\beta}$, koji stoji na levoj strani dobivene jednačine, predstavlja apsolutni izvod jediničnog vektora $\bar{C}_{\alpha}$, tangentnog na strujne linije, u odnosu na uvedenu metriku. To znači da su (2.3.10) jednačine geodezijskih linija prostora čija je metrička forma odredjena izrazom (2.3.7).

Ovo što smo izložili navelo nas je na misao da bi se Pfafov izraz za idealni fluid koji karakteriše jednačina stanja (2.3.4) mogao i jednostavnije obrazo[illegible], ako takav fluid posmatramo u prostoru čija je metrika $\bar{F}$, u kome njegove strujne linije predstavljaju geodezijske linije. Naime, baš kao što, kada smo fluid posmatrali u odnosu na metriku prostora V_4 , pri obrazovanju funkcije (2.3.2) nismo tražili izraz kome bi u klasičnoj teoriji odgovarao rad gravitacionih sila, tako isto sada, kada fluid posmatramo u odnosu na metriku uvedenu jednačinom (2.3.7) - u kojoj kretanje čestica fluida posmatramo kao kretanje po inerciji - ne treba da tražimo izraz koji predstavlja relativističko uopštenje rad rezultujuće sile pritiska, jer je nova metrika uslovljena prisustvom sila pritiska i tako odredjena da kretanje čestica fluida u odnosu na nju možemo posmatrati kao kretanje čestica raspršene sredine[29].

Razume se, pri posmatranju fluidne sredine u odnosu na metriku $\bar{F}$, ulogu vektora četvorobrzine preuzeće vektor (2.3.9).

Obrazujmo, dakle, za posmatranu idealnu fluidnu sredinu Pfafov izraz ovako

$$\Phi_1 = \bar{C}_\alpha \, dx^\alpha ,$$

tj., s obzirom na (2.3.9),

$$\Phi_1 = C_\alpha \, dx^\alpha . \qquad (2.3.11)$$

Prema (2.1.2) Pfafove jednačine koje odgovaraju formi (2.3.11) će biti

$$\left(\frac{\partial C_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\beta} \right) dx^\beta = 0 . \qquad (2.3.12)$$

---

29) Termin „raspršena sredina" koristimo za [illegible] materijalnu sredinu koju A. Lihnerović naziva „matière pure", a kojoj odgovara tenzor energije $T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta$.

Kako je, medjutim, s obzirom na simetriju Kristofelovih simbola druge vrste u odnosu na donje indekse

$$\frac{\partial C_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\beta} = \nabla_\alpha C_\beta - \nabla_\beta C_\alpha \quad ,$$

jednačine (2.3.12) se mogu napisati u obliku

$$(\nabla_\alpha C_\beta - \nabla_\beta C_\alpha)\, dx^\beta = 0,$$

odakle, posle deljenja sa ds , dobivamo

$$(\nabla_\alpha C_\beta - \nabla_\beta C_\alpha)\, u^\beta = 0 \; . \qquad (2.3.13)$$

Najzad, unošenjem izraza (2.3.8) za vektor C_α u jednačine (2.3.13), lako dolazimo do jednačina

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = -\frac{f_{,\beta}}{f} P^\beta_\alpha \quad , \qquad (2.3.14)$$

koje su identične sa jednačinama (2.3.6), te prema tome predstavljaju diferencijalne jednačine strujnih linija idealnog fluida za koji važi jednačina stanja $\rho = \rho(p)$.

Ovaj rezultat, koji smo dobili za idealnu fluidnu sredinu koju karakteriše jednačina stanja (2.3.4), može se proširiti. Naime, za svaku onu materijalnu sredinu za koju je moguće pronaći rimansku metriku u odnosu na koju svetske linije čestica materije predstavljaju geodezijske linije[30], moguće je, pomoću vekto-

---

30) Takvu materijalnu sredinu Lihnerovič naziva <u>holonomna</u> sredina.

ra uvedenog slično vektoru toka (2.3.8), Pfafov izraz postaviti samo pomoću toga vektora, ne tražeći nikakav izraz kome bi u klasičnoj teoriji odgovarala funkcija U_{kl}.

Ne bi bilo teško, sada, potražiti uslove koje treba da ispunjava tenzor viskoznosti (1.3.22), da bi se i za relativistički viskozni fluid, koji smo u ovome radu posmatrali, Pfafova forma mogla obrazovati na takav način.

Medjutim, ovde to pitanje nećemo rešavati; ono se svodi na traženje uslova pod kojima viskozni fluid predstavlja holonomnu materijalnu sredinu, te zahteva posebnu pažnju, koja bi nas isuviše udaljila od onoga što je u ovome radu bio naš osnovni cilj.

L I T E R A T U R A

[1] A. Einstein, Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss, Akad. Wiss., 1914, 2, (1030 - 1085).

[2] L. P. Eisenhart, Trans. American Math. Soc., 26, 205, 1924.

[3] J. L. Synge, Relativistic Hydrodynamics, Proc. Lond. Math. Soc., 43, str. 376, 1937.

[4] A. H. Taub, Relativistic Rankine-Hugoniot Equations, Phys. Rev., vol. 74, str. 328, 1948.

[5] A. H. Taub, Isentropic Hydrodynamics in Plane Symetric Space-Times, Phys. Rev., 103, str. 454, 1956.

[6] A. H. Taub, On Circulation in Relativistic Hydrodynamics, Arch. Ratl. Mech. Anal., 3, str. 312, 1959.

[7] C. Eckart, The Thermodynamics of Irreversible Processes, III. Relativistic Theory of the Simple Fluid, Phys. Rev., 58, str. 919, 1940.

[8] A. Lichnerowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme, Masson, Paris, 1955.

[9] A. Lichnerowicz, Etude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes, Comm. Math. Phys., vol. 1, No. 1, 1965.

[10] G. Pichon, Etude relativiste des fluides visqueux et chargés, Ann. Inst. Henri Poincaré, 2, str. 21 - 85, 1965.

[11] A. H. Taub, Phys. Rev. 94, str. 1468, 1954.

[12] Bernard F. Schutz, Jr., Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle, Phys. Rev. D, vol. 2, No. 12, str. 2762, 1970.

[13] A. Bilimović, Pfafov opšti princip mehanike, Glas SAN 95, str. 119 - 152, Beograd, 1946.

[14] A. Bilimović, O jednom opštem fenomenološkom diferencijalnom principu, SAN, Posebna izdanja Odelj. Prir.-mat. nauka, CCCXIV, knjiga 21, Beograd, 1958.

[15] T. Andjelić, Primena Pfafove metode u dinamici čvrstog tela, Glas SAN 96, str. 201 - 216, Beograd, 1948.

[16] T. Angelitch, Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides, Publ. de l'Inst. Math., str. 211, Tome II, Belgrade, 1948.

[17] T. Andjelić, Izvodjenje osnovnih jednačina elastičnosti po Pfafovoj metodi, Glas SAN CXCVIII, Odelj. Prir.-mat. nauka, Nova serija 3, str. 141, Beograd, 1950.

[18] Dj. Mušicki, Primena Pfaff-ove metode u teoriskoj fizici, Zb. radova SAN, Knj. L, Mat. Inst. Knj. 5, str. 179 - 218, Beograd, 1956.

[19] M. D. Leko, Bornovo relativistički čvrsto telo, doktorska disertacija, nije objavljena.

[20] Дж. Синг, Общая теория относительности, Изд. ин. лит., Москва, 1963.

[21] Jürgen Ehlers, Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien, Abh. Mat-Nat. Kl. Ak. Wiss. Lit., Nr. 11, 1961.

[22] M. D. Leko, An analogy between the classical and the Born relativistic rigid body, Publ. de l'Inst. math., T. 1 (15), str. 25 - 30, 1961.

[23] T. P. Andjelić, Tenzorski račun, Naučna knjiga, Beograd, 1952.

[24] J. L. Synge, Relativity: The special theory, N.H.P.C., 1958.

[25] J. L. Synge, A theory of elasticity in general relativity, Math. Zeitchr. 72, str. 82 - 87, 1959.

[26] A. Cemal Eringen, Mechanics of Continua, New York, 1967.

[27] A. Bilimović, Racionalna mehanika, knjiga II, Naučna knjiga, Beograd, 1951.