Ilija Lukačević:

ALFVEN-OVI TALASI U RELATIVISTIČKOJ MAGNETOHIDRODINAMICI

(Doktorska disertacija)

Beograd 1968

U V O D

Relativistička menanika naelektrisanog idealnog fluida nastala je iz potrebe da se električni protok, koji se pojavljuje na desnoj strani Maxwell-ovih jednačina, izrazi i kao materijalni protok, što je i fizička činjenica. Tako je kretanje elektrona kroz materiju bilo definisano makroskopski kao tečenje nekog idealnog naelektrisanog fluida. Ovim su ustvari, kako je to kasnija analiza pokazala, bili dati osnovi mehanike fluida koji konvektivno prenosi elektricitet (n. pr. slučaj jonizovanog gasa). Za elektromagnetni deo $S_{\alpha\beta}$ tenzora ukupne energije $T_{\alpha\beta}$ uzimana je ista vrednost kao i ona koju on ima u slobodnom prostoru. Kasnije, kada je otpočelo proučavanje elektromagnetnog polja u materijalnoj sredini i kada su, umesto prvobitnog Maxwell-ovog antisimetričnog tenzora polja $F_{\alpha\beta}$ za slobodni prostor, uvedeni novi izrazi $G_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ za posmatranu sredinu, moglo se izvršiti preciznije formulisanje osnovnih jednačina stujanja fluida. Pritom je i vektor električnog protoka potpuno izražen pomoću dve svoje komponente: jedne koja predstavlja konvektivno prenošenje elektriciteta, i druge koja predstavlja provodjenje elektriciteta kroz tu sredinu. Time je napušteno dotadašnje izučavanje isključivo naelektrisanog fluida neprovodnika.

Druga razlika od prvobitne interpretacije fluida bila je u tome što su uzimani u obzir i termodinamički efekti, koji se za stišljive fluide ne mogu zanemariti. Način uvodjenja termodinamičkih promenljivih preuzet je od Tauba (v [6]) koji je radio na mehanici relativističkog idealnog neutralnog fluida.

Medju raznim mogućim slučajevima naelektrisanog fluida posebno je proučavan magnetohidrodinamički fluid, koji ima beskonačno veliku elektroprovodljivost i teče u čisto magnetnom polju.

Na relativističkoj mehanici naelektrisanog fluida počeo je da radi Lichnerowicz 1941 godine. On je takav fluid izučavao nezavisno od tada postojećih oblasti klasične mehanike. Ti osnovni rezultati, sredjeni i prošireni, izneti su u njegovoj monografiji [8] . Odmah zatim, Pham Mau Quan [9] je proučavao fluid u elektromagnetnom polju koje je modifikovano prisustvom materije. On je uzimao u obzir i termodinamičke pojave, medjutim njegova shema "termodinamičkog" fluida nije se održala.

U klasičnoj mehanici prvi teorijski radovi u kojima su talasi u materijalnoj (gasovitoj) sredini posmatrani kao površine diskontinuiteta za neke od fizičkih veličina potiču od Riemanna i Christoffela (koji je uopštio Riemann-ove rezultate). Formulacija jednog od uslova koje diskontinuiteti moraju da zadovolje na površini talasa izvršio je, polazeći od jednačina strujanja i jednačine kontinuiteta fluida, Hugeniot. Veza koju je postavio bivala je uopštavana. Osnovne relacije za udarne talase u gasovima nazvane su kasnije Rankine-Hugoniot-ove jednačine.

Sistematska analiza različitih vrsta diskontinuiteta (običnih i izvodnih, prvog i viših redova) i njihova primena na hidrodinamičke talase, izložena je u Hadamard-ovom radu [1]. Kasniji radovi koji su se odnosili na talase u materijalnoj sredini velikim delom su se oslanjali na Hadamard-ove rezultate.

U relativnosti su za idealni gas izvedene jednačine Rankine-Hugoniot-ovog tipa u Taub-ovom radu [3]. Kasnije su O'Brien i Synge [5] izučavali diskontinuitete tenzora energije, i izveli uslove koje ovi uvek ispunjavaju. Taub je te uslove postavio i dopunio za slučaj idealnog fluida [10], a Y. Fourès-Bruhat je to učinila za magnetohidrodinamički idealni fluid. Počev otada (1959 god., v [14]) izučavani su udarni talasi u relativističkoj magnetohidrodinamici. Od važnijih radova pomenućemo rad [17] Pham Mau Quana koji je analizirao ne-Alfven-ove udarne talase u odnosu na različite lokalne repere, i naročito rad [20] Lichnerowicza, na koji ćemo se često pozivati. U [21] su sistematski sredjeni raniji rezultati, dopunjeni novim, i date su veze, zahvaljujući geometrijskim pojednostavnjenjima, izmedju mnogih, naoko nezavisnih, činjenica. Izbor invarijanata, oznake i način izvodjenja smo najviše preuzeli iz toga rada.

Magnetohidrodinamičke infinitezimalne talase (koje ćemo često zvati samo talasi, za razliku od udarnih talasa ili udara) kao površine na kojima se pojavljuju infinitezimalni diskontinuiteti ili poremećaji prvih izvoda veličina u osnovnim jednačinama, Lichnerowicz donekle koristi u pomenutom radu, ali ih sistematski izučava i primenjuje tek u svom kursu održanom na Collège de France 1967 godine [22].

Talasi u relativističkom naelektrisanom fluidu u opštem slučaju (konačne provodljivosti) takodje su izučavani od više autora. U literaturi smo naveli dva Coburn-ova rada, od kojih je jedan dosta opširan [15]. U njemu su prodiskutovani različiti aspekti nekih problema iz te oblasti.

Švedski naučnik Alfven je 1942 godine prvi teorijski pokazao da se u jednom fluidu čiji je električni otpor zanemarljivo slab (dakle veoma velike provodljivosti) u magnetnom polju može prostirati jedna sasvim nova vrsta talasa za koje brzina i magnetno polje ostaju invarijantni po intenzitetu ali promene pravac. Sve termodinamičke promenljive ostaju takodje invarijantne. Ovi talasi su po njemu i dobili ime. Udarne talase Alfven-ovog tipa prvi su izučavali Teller i Hoffmann [4] 1950 godine. Ovo što smo naveli o radovima Alfvena, Tellera i Hoffmanna odnosilo se na osnove klasične magnetohidrodinamike.

*
* *

Ovaj rad smo podelili na dva dela; prvi se odnosi na udarne a drugi na infinitezimalne Alfven-ove talase u relativističkoj magnetohidrodinamici.

U odeljcima 1, 2, 3 smo izneli sve detalje konstrukcije tenzora energije za magnetohidrodinamički fluid. Naveli smo Maxwell-ove jednačine i osnovnu termodinamičku relaciju. Zatim su izvedene posledice zakona konzervacije za neporemećeno strujanje fluida. Najzad izložen je pojam magnetohidrodinamičkog udarnog talasa, i uvedene osnovne relacije za takav talas.

U odeljku 4 izloženo je izvodjenje skalarnih invarijanata pomoću kombinacija osnovnih invarijantnih vektora i skalara.

U odeljcima 5, 6 izložen je pojam Alfven-ovog udarnog talasa, i navedene hipoteze stišljivosti (bez izvodjenja). Zatim su ispitivana osnovna svojstva invarijantnosti za Alfven-ove talase.

U odeljcima 7, 8, 9 izneti su naši rezultati za Alfven-ove udarne talase. U odeljku 7 je pokazana invarijantnost po jedne od tangentnih komponenata vektora četvorobrzine i magnetnog polja, kao i kolinearnost dva invarijantna vektora; izveden je i izraz za vektor površinske gustine električnog protoka. U sledećem odeljku ispitivano je koji sve magnetohidrodinamički udarni talasi imaju kolinearne diskontinuitete četvorobrzine i magnetnog polja, i dat je dokaz da je to slučaj samo za Alfven-ove talase. U poslednjem odeljku prvog dela ispitivani su Alfven-ovi udarni talasi isključivo u opštoj relativnosti (dosad su zaključci važili za relativističku magnetohidrodinamiku u celini). Izvedene su dve teoreme koje daju potrebne i dovoljne uslove za to da jedan magnetohidrodinamički talas bude Alfven-ov, i to pomoću diskontinuiteta Ricci-evog tenzora i pomoću Ricci-eve identičnosti.

U odeljcima 10, 11 (prva dva odeljka drugog dela) izneti su osnovni pojmovi o infinitezimalnim Alfven-ovim talasima, i, ukratko, o operatoru pomoću kojeg su izraženi poremećaji (perturbacije) prvih izvoda promenljivih. Izneti su, zatim, osnovni rezultati o infinitezimalnim Alfven-ovim talasima.

Odeljci 12, 13, 14 sadrže naše rezultate o infinitezimalnim talasima. U prvom od tih odeljaka, 12, izvedeni su zaključci koji za infinitezimalne talase odgovaraju onim koje smo za udarne talase izveli u odeljcima 7,8. U sledećem odeljku strujanje magnetohidrodinamičkog fluida podeljeno je na vrtložno i bezvrtložno, na osnovu kriterijuma koji smo uveli; pokazano je da se u sredini koja bezvrtložno struji ne mogu prostirati Alfven-

-ovi talasi. U poslednjem odeljku posmatrani su infinitezimalni talasi u opštoj relativnosti, izvedena je jedna teorema koja je za infinitezimalne talase analogon prve teoreme iz odeljka 9 za udarne talase, a zatim druga teorema koja pomoću veza između poremećaja izvoda tenzora konformne krivine prostor-vremena V_4 i izvoda tenzora energije daje potreban i dovoljan uslov za to da jedan magnetohidrodinamički talas bude Alfven-ov.

Beograd
21 decembra 1967

1) Tenzor energije u relativističkoj magnetohidrodinamici

Metrika $g_{\alpha\beta}$ prostor-vremena V_4 biće signature . Pritom nećemo zasad precizirati da li se radi o prostor-vremenu Minkowskog ili o svetu opšte relativnosti, budući da će se uvodni deo ovog rada podjednako odnositi i na specijalnu i na opštu teoriju relativnosti.

a) Poći ćemo od tenzora energije koji odgovara naelektrisanoj idealnoj, fluidnoj sredini. U jednačinama koje opisuju stanje ovakve sredine ne učestvuju, po definiciji, članovi koji bi izražavali uticaj viskoznih sila, pa ćemo, stoga, polaziti od pretpostavke da je ta sredina stišljiva, i da su, zbog toga, pored čisto mehaničkih i elektromagnetnih parametara, zastupljeni i termodinamički. Slučaj nestišljivosti može se pojaviti samo izuzetno, kao granični. U odeljku 6 će biti formulisana hipoteza stišljivosti, i izvedene neke njene posledice.

Tenzor energije ovakve sredine je oblika:

(1.1) $$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$$

gde je ρ takozvana sopstvena gustina energije fluida koja odgovara mehaničkom, "ponderabilnom" (kako ga neki nazivaju) delu tenzora energije, p je mehanički pritisak, u^α komponenta četvorobrzine. Uzećemo da je intenzitet četvorobrzine jednak jedinici. Dakle:

$$u^\alpha u_\alpha = 1$$

$\tau_{\alpha\beta}$ je deo tenzora energije koji odgovara elektromagnetnom polju.

Napomenimo to da je tenzor energije idealnog nenaelektrisanog fluida konstruisan polazeći od zahteva da tri sopstvena korena njegove matrice budu jednaka i da imaju vrednost $-p$. Trodimenzioni vektorski prostor koji odgovara ovim korenima rastežu svi vektori upravni na u^{α}. Oni su, prema tome, prostornog tipa. Četvrtom korenu, koji ima vrednost $c^2 r$ odgovara pravac četvorobrzine. Od ovakvog stanovišta pošao je Eisenhart pri proučavanju idealnog fluida, a Synge ga je podrobno izložio u svom radu [2]. Tenzor energije naelektrisanog idealnog fluida sastavljen je sabiranjem tenzora energije nenaelektrisanog fluida i tenzora energije elektromagnetnog polja, i ima takodje jedan sopstveni vektor vremenskog tipa a preostala tri prostornog, što je Lichnerowicz detaljno izložio u svojoj monografiji [8]. Ta svojstva ovde nećemo detaljnije izlagati.

Sopstvena gustina energije koja odgovara mehaničkom delu tenzora $T_{\alpha\beta}$ data je izrazom:

$$\rho = c^2 r\left(1+\frac{\varepsilon}{c^2}\right)$$

gde je $c^2 r$ specifična gustina energije po jedinici zapremine (v [19]). Napominjemo da smo kvadrat brzine svetlosti u gornjem izrazu označili sa c^2 umesto da pišemo jedinicu, jer treba podvući karakter "gustine energije" toga člana (budući da je energija mirovanja $E=mc^2$). ε je sopstvena unutrašnja energija (u smislu termodinamike).

Specifična entalpija fluida biće uvedena, analogno klasičnoj termodinamici, preko sledeće veze:

$$\rho + p = c^2 r\left(1+\frac{\varepsilon}{c^2}+\frac{p}{c^2 r}\right)=c^2 r\left(1+\frac{i}{c^2}\right) \tag{1.2}$$

Dakle:

(1.2')
$$i = \varepsilon + \frac{p}{n}$$

Umesto entalpije koristićemo redovno funkciju

(1.3)
$$f = 1 + \frac{i}{c^2}\ , \quad f > 0$$

koja se naziva funkcija-indeks ovakvog fluida. Ovu funkciju prvi je koristio Eisenhart u jednačinama strujanja idealnog fluida, zanemarujući termičke pojave; tada ona nije izražena pomoću entalpije, već isključivo u funkciji pritiska.

Tenzor energije ima, dakle, oblik:

(1.1')
$$T_{\alpha\beta} = c^2 n f u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$$

Smatraćemo, što je u skladu s klasičnom termodinamikom, da su u opštem slučaju dve, bilo koje, termodinamičke promenljive nezavisne medju sobom.

Od termodinamičkih promenljivih pojavljivaće se još sopstvena temperatura θ i specifična entropija S.

Osim definicionih veza za entalpiju i i funkciju-indeks f naše termodinamičke promenljive povezane su, po Eckart-ovoj pretpostavci, koju su kasnije prihvatili Taub i drugi istraživači u toj oblasti, jedino klasičnom termodinamičkom relacijom oblika:

(1.4)
$$\theta dS = d\varepsilon + p\, d\left(\frac{1}{n}\right)$$

Iz ove veze možemo, zamenom iz (1.2') i (1.3) dobiti odgovarajuću vezu i za druge termodinamičke promenljive, entalpiju i funkciju-indeks.

b) Predjimo na elektromagnetni deo $\tau_{\alpha\beta}$ tenzora energije. S obzirom na njegovu strukturu i na potrebe daljeg izlaganja, izložićemo ukratko osnovne veze izmedju tenzora i vektora elektromagnetnog polja.

Osnovni tenzori elektromagnetnog polja u materijalnoj sredini su sledeći: $G_{\alpha\beta}$ tenzor magnetnog polja-električne indukcije i $H_{\alpha\beta}$ tenzor električnog polja-magnetne indukcije. U vakuumu oni se svode na jedinstveni "tenzor napregnutosti" ili Maxwell-ov tenzor $F_{\alpha\beta}$. Tenzori $G_{\alpha\beta}$ i $H_{\alpha\beta}$ su apsolutni antisimetrični tenzori isto kao i $F_{\alpha\beta}$. Pomoću Ricci-evog antisimetričnog tenzora $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ izraženi su dualni antisimetrični tenzori $*G^{\alpha\beta}$ i $*H^{\alpha\beta}$ na sledeći način:

$$*G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\gamma\delta}$$

$$*H^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}H_{\gamma\delta}$$

Tenzori $G_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ i njima dualni $*G_{\alpha\beta}$ i $*H_{\alpha\beta}$ poslužiće nam da izrazimo osnovne vektore elektromagnetnog polja: vektor e_α električnog polja, vektor d_α električne indukcije, vektor h_α magnetnog polja i vektor b_α magnetne indukcije (napomenimo to da se, kao i uvek u relativnosti, radi o četvorovektorima). Tako imamo sledeće definicione veze:

$$e_\alpha = u^\beta H_{\beta\alpha} \qquad d_\alpha = u^\beta G_{\beta\alpha}$$
$$(1.5) \qquad b_\alpha = u^\beta (*G_{\beta\alpha}) \qquad h_\alpha = u^\beta (*H_{\beta\alpha})$$

gde je u^β vektor četvorobrzine posmatrane materijalne sredine. Jasno je, s obzirom na vremenski karakter četvorobrzine u^β i na antisimetriju tenzora $G_{\alpha\beta}$ i $H_{\alpha\beta}$ i njihovih dualnih tenzora, da su svi gore uvedeni vektori upravni na u_α, dakle prostornog tipa. Veze izmedju vektora električnog polja i njegove indukcije i izmedju vektora magnetnog polja i njegove indukcije su:

(1.6) $$d^{\alpha}=\lambda e^{\alpha} \qquad b^{\alpha}=\mu h^{\alpha}$$

gde je λ dielektrični koeficijent a μ magnetna permeabilnost. Mi ćemo smatrati da su to konstantne veličine, ali koje mogu biti različite od jedinice.

Izrazimo tenzore $G_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, $^{*}G_{\alpha\beta}$, $^{*}H_{\alpha\beta}$ pomoću vektora polja. Oni su zadati (v [9], [21]) na sledeći način:

(1.7)
$$H_{\alpha\beta}=u_{\alpha}e_{\beta}-u_{\beta}e_{\alpha}-\frac{1}{2\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(u^{\gamma}b^{\delta}-u^{\delta}b^{\gamma})$$

$$G_{\alpha\beta}=u_{\alpha}d_{\beta}-u_{\beta}d_{\alpha}-\frac{1}{2}\mu\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(u^{\gamma}h^{\delta}-u^{\delta}h^{\gamma})$$

$$^{*}H_{\alpha\beta}=\frac{1}{\mu}(u_{\alpha}b_{\beta}-u_{\beta}b_{\alpha})+\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(u^{\gamma}e^{\delta}-u^{\delta}e^{\gamma})$$

$$^{*}G_{\alpha\beta}=\mu(u_{\alpha}h_{\beta}-u_{\beta}h_{\alpha})+\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(u^{\gamma}h^{\delta}-u^{\delta}h^{\gamma})$$

što se može proveriti pomoću (1.5). Veza izmedju tenzora električnog polja-magnetne indukcije i tenzora magnetnog polja-električne indukcije glasi:

(1.8) $$G_{\alpha\beta}=\frac{1}{\mu}H_{\alpha\beta}+\frac{\lambda\mu-1}{\mu}(u_{\alpha}e_{\beta}-u_{\beta}e_{\alpha})$$

što se može proveriti pomoću (1.6) i (1.7).

Maxwell-ove jednačine elektromagnetnog polja u materijalnoj sredini glase:

(1.9) $$\nabla_{\alpha}G^{\alpha\beta}=J^{\beta}$$

(1.10) $$\nabla_{\alpha}H_{\beta\gamma}+\nabla_{\beta}H_{\gamma\alpha}+\nabla_{\gamma}H_{\alpha\beta}=0$$

Drugi sistem Maxwell-ovih jednačina svojom strukturom daje potreban i dovoljan uslov za to da ~~xxx~~ tenzor $H_{\alpha\beta}$ bude rotor jednog vektora koji se naziva vektor-potencijal φ_α elektromagnetnog polja. Medjutim, prvi sistem jednačina koji se odnosi na tenzor $G_{\alpha\beta}$ ne daje odgovor na pitanje da li je ovaj antisimetrični tenzor rotor nekog vektora ili ne. Tako imamo zaključak da u materijalnoj sredini, u opštem slučaju, samo tenzor $H_{\alpha\beta}$ električnog polja-magnetne indukcije predstavlja rotor nekog vektora, odredjenog do na gradijent neke skalarne funkcije $\varphi_\alpha +$ $+ \partial_\alpha N$ (budući da je rotor nekog ~~xxxxxxx~~ gradijenta uvek jednak nuli). Tenzor $G_{\alpha\beta}$ ni na osnovu jednačina (1.9) niti na osnovu algebarske veze (1.8) ne mora imati takvu strukturu. U vakuumu medjutim, tenzor $H_{\alpha\beta}$, budući da je isključivo zastupljen umesto $G_{\alpha\beta}$ i $H_{\alpha\beta}$, predstavlja, na osnovu druge grupe Maxwell-ovih jednačina (1.10), uvek rotor.

Ispitajmo još vektor J^β električnog protoka, koji stoji na desnoj strani prve grupe Maxwell-ovih jednačina (1.9). U opštem slučaju on se sastoji iz dva dela:

$$J^\beta = \gamma u^\beta + \sigma e^\beta \tag{1.11}$$

Prvi deo, gde je sopstvena gustina naelektrisanja γ, a u^β brzina, predstavlja konvektivni deo električnog protoka, onog koji odgovara kretanju naelektrisane materije. Drugi deo, gde je σ provodljivost a e^β električno polje, odgovara provodjenju elektriciteta.

c) Ovaj rad odnosi se na magnetohidrodinamiku, tj. na dinamiku naelektrisanog fluida beskonačne provodljivosti u čisto magnetnom polju. Pošto je tada električno polje veoma slabo, a provodljivost veoma velika, to se u matematičkoj fizici uzima idealizovanð slučaj čiju smo definiciju naveli. Ovo znači da član σe^{β} u (1.11) postaje neodredjeni izraz tipa $\infty \cdot 0$; stoga je i vektor J^{β} električnog protoka u magnetohidrodinamici neodredjeni izraz, pa ćemo njegova pšta svojstva proučavati samo na osnovu divergencije tenzora $G^{\alpha\beta}$, na levoj stmani jednačina (1.9). Pošto je u magnetohidrodinamičkom slučaju vektor e^{β} jednak nuli, što odmah važi i za vektor električme indukcije d^{β}, koji mu je kojinearan, to će se izrazi (1.7) za tenzore $G_{\alpha\beta}$ i $H_{\alpha\beta}$ i njihove dualnem tenzore odmah uprostiti. Isto važi i za vezu (1.8). Tako da ćemo imati:

$$H_{\alpha\beta} = \mu (u_{\alpha} h_{\beta} - u_{\beta} h_{\alpha})$$

(1.7')

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (u^{\gamma} h^{\delta} - u^{\delta} h^{\gamma})$$

i

(1.8')

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta}$$

Iz ove veze vidimo da su tenzori $G_{\alpha\beta}$ i $H_{\alpha\beta}$ proporcionalni. Dualni tenzori koji im odgovaraju lako semizračunavaju iz osnovnih definicionih formula.

Tenzor energije elektromagnetnog polja u materijalnoj sredini $\tau_{\alpha\beta}$ glasi, u opštem slučaju:

(1.12)

$$\tau_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} - (1 - \lambda\mu) E_{\alpha\gamma} u^{\gamma} u_{\beta}$$

gde je $E_{\alpha\beta}$:

(1.13)

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} G^{\gamma\delta} - H_{\alpha\gamma} G_{\beta}{}^{\gamma}$$

Drugi član u izrazu za $\tau_{\alpha\beta}$, ispred kojeg stoji faktor $(1-\lambda\mu)$ pojavljuje se usled samoindukcije. U magnetohidrodinamici, s obzirom na uprošćenje strukture komponentnih tenzora $H_{\alpha\beta}$ i $G_{\alpha\beta}$, taj član unosi samo neznatnu kvantitativnu promenu; kvalitativna promena, kao što ćemo dalje videti, kad budemo izložili osnovne veze koje zadovoljavaju udarni talasi, se ne pojavljuje. Stoga ćemo taj član odbaciti (što mnogi autori čone domah). Uzimaćemo, dakle, da je tenzor energije $\tau_{\alpha\beta}$ elektromagnetnog polja jednak tenzoru $E_{\alpha\beta}$, što će se unašem slučaju, zbog (1.8″) svesti na:

(1.14)
$$\tau_{\alpha\beta} = \mu\left(\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - G_{\alpha\rho} G_{\beta}{}^{\rho}\right)$$

Napomenimo da na ovaj način vidimo da je tenzor $\tau_{\alpha\beta}$ u magnetohidrodinamici istog oblika kao i u vakuumu, samo što je formulisan pomoću tenzora $G_{\alpha\beta}$ umesto tenzora napregnutosti $F_{\alpha\beta}$. Prva posledica toga je da je $\tau_{\alpha\beta}$ simetričan tenzor, i da bez ikakve izmene može uvek da bude sastavni deo uvek simetričnog tenzora ukupne energije $T_{\alpha\beta}$. Ovo je i razlog zbog kojeg se u opštem slučaju naelektrisanog fluida uvodi deo tenzora $\tau_{\alpha\beta}$ za koji se ovaj razlikuje od $E_{\alpha\beta}$: tada $\tau_{\alpha\beta}$ nije simetričan. Ovaj dodatak, koji se pojavljuje usled interakcije materije i elektromagnetnog polja uveo je Pham Mau Quan.

Polazeći od izraza (1.7′) za tenzor $G_{\alpha\beta}$, nadjimo izraz za tenzor energije magnetnog polja $\tau_{\alpha\beta}$ u funkciji četvorobrzine u_{α} i magnetnog polja h_{α}. Primetimo uzgred da uz signaturi -2 (koju koristimo) imamo:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{|g|}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\, e^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Na desnoj strani ovih izraza nalazi se kvadratni koren iz apsolutne vrednosti determinante metričkog tenzora $\sqrt{|g|}$ i sistem potpuno antisimetričnih e-simbola. Na osnovu poznatih obrazaca za proizvode ovih simbola imamo:

$$\tau^{\alpha}_{\beta} = \mu\{\tfrac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}(-e_{\sigma\tau\lambda\mu}e^{\sigma\nu\rho\mu}u_{\nu}h_{\rho}u^{\tau}h^{\lambda}) - (-e_{\beta\tau\lambda\mu}e^{\alpha\nu\rho\mu})u^{\tau}h^{\lambda}u_{\nu}h_{\rho}\} =$$

$$= \mu\{-\tfrac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}\,2(\delta^{\nu}_{\tau}\delta^{\rho}_{\lambda} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\tau})u_{\nu}h_{\rho}u^{\tau}h^{\lambda} + [\delta^{\alpha}_{\beta}(\delta^{\nu}_{\tau}\delta^{\rho}_{\lambda} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\tau}) -$$

$$- \delta^{\alpha}_{\tau}(\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\rho}_{\lambda} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\beta}) + \delta^{\alpha}_{\lambda}(\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\rho}_{\tau} - \delta^{\nu}_{\tau}\delta^{\rho}_{\beta})]u^{\tau}h^{\lambda}u_{\nu}h_{\rho}\}$$

Na osnovu ortogonalnosti u^{α} i h^{α} to će se svesti na:

$$\tau^{\alpha}_{\beta} = \mu(\tfrac{1}{2}h_{\lambda}h^{\lambda}\delta^{\alpha}_{\beta} - h_{\lambda}h^{\lambda}u^{\alpha}u_{\beta} - h^{\alpha}h_{\beta})$$

Ako obeležimo skalarni proizvod vektora h^{α} sa samim sobom:

$$h^{\lambda}h_{\lambda} = -|h|^{2}$$

(budući da je h^{α} prostornog tipa izraz na desnoj strani mora biti negativan) izrazićemo $\tau_{\alpha\beta}$ najzad u ovakvom obliku:

(1.15) $$\tau_{\alpha\beta} = \mu\{|h|^{2}(u_{\alpha}u_{\beta} - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}) - h_{\alpha}h_{\beta}\}$$

Vratimo se tenzoru ukupne energije (1.1') i unesimo vrednost $\tau_{\alpha\beta}$ koju smo dobili. Kad sredimo imaćemo:

(1.16) $$T_{\alpha\beta} = (c^{2}\rho f + \mu|h|^{2})u_{\alpha}u_{\beta} - (p + \tfrac{1}{2}\mu|h|^{2})g_{\alpha\beta} - \mu h_{\alpha}h_{\beta}$$

Koeficijent uz $g_{\alpha\beta}$ u (1.16) koji glasi:

(1.17) $$q = p + \tfrac{1}{2}\mu|h|^{2}$$

može se interpretirati kao <u>ukupni pritisak</u> koji se sastoji iz čisto mehaničkog pritiska p i magnetnog pritiska $\frac{1}{2}\mu|h|^2$ koji se pojavljuje u ovakvom fluidu.

2) Osnovne jednačine relativističke magnetohidrodinamike.

Osnovne jednačine magnetohidrodinamike dele se u tri grupe: 1) jednačina konzervacije materijalnog toka fluida, 2) jednačine strujanja i 3) jednačine elektromagnetnog polja. Prva od ovih, koja predstavlja relativističko proširenje klasične jednačine kontinuiteta, glasi:

(2.1) $$\nabla_\alpha (n u^\alpha) = 0$$ (∇ - simbol kovarijantnog izvoda

Jednačine elektromagnetnog polja sastoje se iz druge grupe Maxwell-ovih jednačina (1.10) (prva grupa nije potrebna jer je sistem uprošćen odsustvom električnog polja). Pomoću ε-simbola one se jednostavno mogu predstaviti:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\beta H_{\gamma\delta} = 0$$

S obzirom na to da je ε-simbol kovarijantno konstantan, to se može pisati kao:

$$\nabla_\alpha (*H^{\alpha\beta}) = 0$$

Kad se izraz za $*H$ uzme iz (1.7') dobićemo najzad:

(2.2) $$\nabla_\alpha (h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha) = 0$$

Jednačine strujanja sleduju iz uslova konzervacije tenzora energije:

(2.3) $$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

Sistemi (2.1), (2.2) i (2.3) predstavljaju sistem osnovnih diferencijalnih jednačina relativističke magnetohidrodinamike.

Ispitajmo neke posledice koje se mogu dobiti iz jednačina (2.1) i (2.3). Ako pomnožimo jednačine (2.3) sa u_β dobićemo:

(2.4) $$u_\beta \nabla_\alpha (c^2 r \rho u^\alpha u^\beta) - u^\alpha \partial_\alpha p + u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0 .$$

Šta predstavlja proizvod $u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta}$? Na osnovu (1.15):

(2.5) $$u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = \mu u_\beta \nabla_\alpha \{ |h|^2 (u^\alpha u^\beta - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}) - h^\alpha h^\beta \} =$$

$$= \mu \{ u^\alpha \partial_\alpha |h|^2 + |h|^2 \nabla_\alpha u^\alpha - \tfrac{1}{2} u^\alpha \partial_\alpha |h|^2 - h^\alpha u_\beta \nabla_\alpha h^\beta \}$$

Ako pomnožimo jednačine (2.2) sa h_β dobićemo:

(2.6) $$h^\alpha h_\beta \nabla_\alpha u^\beta + \tfrac{1}{2} u^\alpha \partial_\alpha |h|^2 + |h|^2 \nabla_\alpha u^\alpha = 0$$

Da bismo sredili (2.5) iskoristićemo:

$$\nabla_\alpha (u_\beta h^\beta) = u_\beta \nabla_\alpha h^\beta + h^\beta \nabla_\alpha u_\beta = 0$$

i napisati ovako:

$$u_\beta \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = \mu (\tfrac{1}{2} u^\alpha \partial_\alpha |h|^2 + |h|^2 \nabla_\alpha u^\alpha + h^\alpha h^\beta \nabla_\alpha u_\beta)$$

Ovaj izraz je na osnovu (2.6) upravo jednak nuli. Tako će se (2.4) svesti na:

(2.4') $$u_\beta \nabla_\alpha (c^2 r \rho u^\alpha u^\beta) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0$$

Ovaj izraz se svodi, zbog konstantnog intenziteta vektora ξ^α na:

$$\nabla_\alpha(c^2 r f u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0$$

što ćemo napisati kao:

$$u^\alpha(c^2 r \partial_\alpha f - \partial_\alpha p) + c^2 f \nabla_\alpha(r u^\alpha) = 0 \qquad (2.4'')$$

Da bismo ispitali posledice ove jednačine u pogledu termodinamike uzećemo u razmatranje osnovnu termodinamičku vezu (1.4) i definiciju entalpije (1.2'):

$$\Theta dS = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{r}\right)$$

i

$$i = \varepsilon + \frac{p}{r}$$

Ako se ova druga veza diferencira:

$$di = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{dp}{r}$$

i smeni u prvoj, imaćemo:

$$\Theta dS = di - \frac{dp}{r}$$

Pošto smo umesto entalpije prihvatili korišćenje funkcije-indeks f u jednačinama kretanja, koja je jednaka $1 + \frac{i}{c^2}$, gornja veza će glasiti:

$$r \Theta dS = c^2 r df - dp \qquad (2.7)$$

Smenom ovog u (2.4'') dobićemo:

$$r \Theta u^\alpha \partial_\alpha S + c^2 f \nabla_\alpha(r u^\alpha) = 0 \qquad (2.7')$$

Medjutim, na osnovu jednačine kontinuiteta (2.1), drugi član gornjeg zbira jednak je nuli, a pošto su gustina i apsolutna temperatura $\neq 0$, imaćemo najzad:

$$u^{\alpha}\partial_{\alpha}S = 0 \tag{2.8}$$

Dakle, entropija ostaje konstantna duž svetskih linija. Ovo predstavlja jedan od uslova konzervacije energije.

3) Magnetohidrodinamički udarni talasi.

Tenzor gravitacionog potencijala $g_{\alpha\beta}$ i njegovi prvi izvodi su neprekidni funkcije koordinata po klasičnoj relativističkoj hipotezi. Ovo se, razume se, odnosi na opštu relativnost, budući da je u specijalnoj to po definiciji ispunjeno.

Udarni talas je hiperpovršina Σ u V_4 na kojoj je prekidna bar jedna od fizičkih veličina koje posmatramo: brzina, magnetno polje ili neka od termodinamičkih promenljivih.

Geometrijski posmatrano, hiperpovršina Σ, na kojoj smo uočili neku tačku x^{α} da da bismo u njoj proučili svojstva udarnog talasa, je lokalno vremenski orijentisana, budući da seče nula-konus dogadjaja x^{α}. U slučaju kad bi talas u prostoru mirovao, u prostor-vremenu bi lokalno dodirivao osu nula-konusa. Kada bi, medjutim, njegova prostorna brzina bila jednaka brzini svetlosti, talas bi u prostor-vremenu dodirivao omotač nula-konusa, i bio izotropan. Kako su oba ova krajnja slučaja fizički nemoguća, vidimo da Σ u svakoj tački preseca nula-konus, a da pritom osa toga konusa ne može nikad ležati u njegovoj tangentnoj hiperravni.

Lokalno hiperpovršina Σ deli svoju okolinu na dve oblasti od kojih ćemo za jednu smatrati da prethodi udaru a za drugu da sleduje udaru. Pritom naglašavamo da je kriterijum koji važi za odredjivanje onog što prethodi ili sleduje udarnom talsu, odnosno, tačnije rečeno, "istoriji talasa" (kako se u anglosaksonskoj literaturi naziva), zasnovan je na tome kojoj od dve navedene oblasti pripada vektor koji lokalno leži na na osi nula-konusa i ima smer vremenskog toka. Taj vektor <u>ne leži</u> u oblasti koja prethodi udaru a <u>leži</u> u oblasti koja sleduje udaru, po ovoj definiciji.

Ako je $\varphi = 0$ lokalno konačna jednačina hiperpovršine Σ u tački x^α, gradijent $\partial_\alpha\varphi$ biće kolinearan s vektorom normale ℓ_α na ovoj hiperpovršini. Ovaj vektor izabraćemo tako da bude orijentisan od površine prema stanju koje sleduje udarnom talasu, i normiraćemo ga ($\ell^\alpha\ell_\alpha = 1$).

Pošto smo uveli vektor normale ℓ^α, možemo razložiti vektor magnetnog polja h^α na jednu tangentnu i jedni normalnu komponentu u odnosu na Σ :

$$h^\alpha = t^\alpha - \eta\,\ell^\alpha \qquad (t^\alpha\ell_\alpha = 0) \tag{3.1}$$

Pošto smo sa η obeležili normalnu komponentu magnetnog polja, imaćemo:

$$-t^\alpha t_\alpha = |h|^2 - \eta^2$$

Pritom $-t^\alpha t_\alpha$ može biti i vremenskog i prostornog tipa, pa i izotropno.

Vrednosti fizičkih veličina koje posmatramo nećemo obeležavati nekim posebnim znakom za stanje koje prethodi talasu, dok ćemo ih za stanje koje sleduje obeležiti jednim $'$. Diskontinuitet neke veličine, recimo P , označavaćemo, kao što je prihvaćeno u većini svetske literature, sa $[P]$ ($[P] = P' - P$).

Osnovne jednačine (2.1), (2.2) i (2.3) zadivoljavaju uopštene funkcije (distribucije) koje u slučaju prostiranja udarnih talasa kroz posmatranu sredinu moraju imati prekide (za izvode prekidnih distribucija v. [18]). Uslov koji na površini diskontinuiteta zadovoljava svaki tenzor energije izveli su Synge i O'Brien u svom klasičnom radu [5] , a kasnije dopunili Taub, uslovima za jednačinu kontinuiteta u hidrodinamici [12] , i Y. Choquet-Bruhat [14] za Maxwell-ove jednačine u magnetohidrodinamici. Na površini Σ jednačine (2.1), (2.2) i (2.3) nameću uslove, preme rezultatima ovih autora:

(3.2) $$\ell_\alpha [\eta u^\alpha] = 0$$

(3.3) $$\ell_\alpha [h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha] = 0$$

(3.4) $$\ell_\alpha [T^{\alpha\beta}] = 0$$

Iz veze (3.2) vidimo da vektor u zagradi, skalarno pomnožen vektorom normale daje jedan skalar čiji je diskontinuitet jednak nuli. Za taj skalar ćemo kazati da je <u>invarijantan</u>. Iz jednačina (3.3) i (3.4) imaćemo odgovarajuće zaključke zaz dva invarijantna vektora:

(3.2') $$\eta u^\alpha \ell_\alpha = a$$

(3.3') $$\eta u^\beta - \frac{a}{\eta} h^\beta = V^\beta$$

(3.4') $$a\left(c^2 \frac{f}{\eta} + \mu \frac{|h|^2}{\eta^2}\right)\eta u^\beta - q\ell^\beta - \mu\eta h^\beta = W^\beta$$

$$\left(q = p + \frac{1}{2}\mu |h|^2\right).$$

gde je a invarijantni skalar, a V^ρ i W^ρ invarijantni vektori. η iz (3.1) je veličina projekcije h^α na ℓ_α, a skalar a iz prve veze iskorišćen je za izračunavanje vrednosti projekcije u^α na ℓ_α. Ako se pomnoži (3.4′) sa ℓ_α, na osnovu (3.2′) i definicije η sleduje:

$$V^\alpha \ell_\alpha = 0 \tag{3.5}$$

4) Invarijante netangentnih udarnih talasa.

Napomenućemo odmah da ćemo u ovom radu izučavati samo t. zv. netangentne udarne talase. Tangentni udarni talasi predstavljaju specijalan slučaj kada je četvorobrzina (dakle svetska linija) lokalno tangentna na Σ. Dakle osnovna hipoteza u odnosu na to pitanje je $u^\alpha \ell_\alpha \neq 0$.

Radi analize magnetohidrodinamičkih udarnih talasa korisno je uvesti izvestan broj skalarnih invarijanata. Ovakve pomoćne veličine korišćene su i u mehanici naelektrisanog fluida konačne provodljivosti (v [15]), i u ranijim proučavanjima magnetohidrodinamike (v [14], [22]), ali ih je sistematski sredio, pojednostavio i uveo nove, znatno pogodnije za proučavanje posebno Alfven-ovih talasa, Lichnerowicz (v [21]).

Izvodjenja koja vode ovim skalarima dosta su dugačka, ali elementarna, načelno nimalo komplikovana. Mi ih dajemo radi potpunosti.

Prva invarijanta, obeležićemo je sa H, biće funkcija invarijantnog vektora V^ρ (3.3′) i invarijante a (3.2′):

$$H = \frac{1}{a^2} V^\rho V_\rho = \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{\eta^2} \tag{4.1}$$

Da bi bilo $H>0$ potrebno je i dovoljno da V^β bude vremenskog tipa.

Pre nego što uvedemo sledeće invarijante treba dovesti vektor W^β iz (3.4') u pogodan oblik. Izrazimo, prethodno, vektor magnetnog polja pomoću h^β iz (3.3'):

$$\ell^\beta = \frac{\eta}{a}\varkappa u^\beta - \frac{\varkappa}{a}V^\beta$$

Kad se ovo unese u izraz za W^β imaćemo:

$$W^\beta = a\left(c^2\frac{f}{\varkappa}+\mu\frac{|h|^2}{\varkappa^2}\right)\varkappa u^\beta - q\ell^\beta + \mu\frac{\varkappa\eta}{a}V^\beta - \mu\frac{\varkappa\eta^2}{a}u^\beta$$

Pomoću invarijante H iz (4.1), to će biti:

(4.2) $$W^\beta = a\left(c^2\frac{f}{\varkappa}-\mu H\right)\varkappa u^\beta - q\ell^\beta + \mu\frac{\varkappa\eta}{a}V^\beta$$

Izraz u zagradi u koeficijentu pri $\varkappa u^\beta$ obeležićemo sa α. Dakle:

(4.2") $$\alpha = c^2\frac{f}{\varkappa} - \mu H$$

To će biti jedan skalar od značaja za dalji rad. Pomoću njega ćemo imati:

(4.2') $$W^\beta = a\alpha\varkappa u^\beta - q\ell^\beta + \mu\frac{\varkappa\eta}{a}V^\beta$$

Ako izvršimo razlaganje vektora $\varkappa u^\beta$ na dve komponente, jednu tangentnu na Σ i drugu normalnu na njoj, imaćemo:

$$\varkappa u^\beta = w^\beta - a\ell^\beta \qquad (w^\beta \ell_\beta = 0)$$

gde smo sa w^β obeležili tangentnu komponentu. Može se neposredno proveriti, množenjem sa ℓ_β, pomoću veze (3.2'), da se gornji izraz pretvara u identičnost. Na osnovu gornje veze, tangentna komponenta w^β vektora $\varkappa u^\beta$ jednaka je:

(4.3) $$w^{\beta} = \varkappa u^{\beta} + a\ell^{\beta}$$

Sad možemo vektor W^{β} iz (4.2') razložiti na dve komponente: jednu tangentnu a drugu normalnu na Σ :

(4.4) $$W^{\beta} = \left(a\alpha w^{\beta} + \mu \frac{\varkappa\eta}{a} V^{\beta}\right) - (q + a^2\alpha)\ell^{\beta}$$

gde je izraz u prvoj zagradi vektor tangentan na Σ . Obeležimo ga sa X^{β}:

$$X^{\beta} = a\alpha w^{\beta} + \mu \frac{\varkappa\eta}{a} V^{\beta}$$

Sad možemo da iskoristimo sledću činjenicu: budući da je vektor W^{β} invarijantan prilikom udara, invarijantne su i obe komponente na koje smo ga razložili. Skalar u drugoj zagradi (4.4), budući da množi vektor normale, je invarijantan. Obeležimo tu invarijantu sa $a\ell$ (što nema veze s jediničnim vektorom normale). Dakle, imamo invarijantu:

(4.5) $$\ell = \alpha + \frac{q}{a^2}$$

Sad možemo izraz u prvoj zagradi, koji smo obeležili sa X^{β} da pomnožimo skalarno sa V_{β} ; ako pritom w^{β} iz (4.3) ponovo izrazimo pomoću u^{β} i ℓ^{β} imaćemo:

$$X^{\beta}V_{\beta} = a\alpha\varkappa u^{\beta}V_{\beta} + \mu \frac{\varkappa\eta}{a} V^{\beta}V_{\beta} \qquad (V^{\beta}\ell_{\beta} = 0)$$

S obzirom na to da smo u (4.1) proizvod $V^{\beta}V_{\beta}$ obeležavali sa a^2H , i da je skalarni proizvod u^{β} i V^{β} jednak η iz (3.3), imaćemo:

$$X^{\beta}V_{\beta} = W^{\beta}V_{\beta} = a\varkappa\eta(\alpha + \mu H)$$

Na osnovu (4.2") ovo će biti:

$$X^{\beta}V_{\beta} = c^{2}a f\eta$$

S obzirom na invarijantnost proizvoda $X^{\beta}V_{\beta}$ (radi se o dva invarijantna vektora) i skalara a, imaćemo novu, relativno vrlo jednostavnu skalarnu invarijantu b:

(4.6) $$b = f\eta$$

Imali smo invarijantni vektor X^{β}, tangentnu komponentu osnovnog invarijantnog vektora W^{β}:

$$X^{\beta} = a\alpha w^{\beta} + \mu\frac{\varkappa\eta}{a}V^{\beta}$$

Formiraćemo sledeću skalrnu invarijantu:

(4.7) $$K = \frac{1}{a^{2}}X^{\beta}X_{\beta}$$

Na osnovu (4.3) će biti:

$$w^{\beta}w_{\beta} = \varkappa^{2} - a^{2} + 2a\varkappa u^{\alpha}t_{\alpha} = \varkappa^{2} + a^{2}$$

Isto tako i skalarni proizvod w_{β} s invarijantnim vektorom V_{β} daje:

$$w^{\beta}V_{\beta} = \varkappa u^{\beta}V_{\beta} = \varkappa\eta$$

Otud, posle kraćeg sredjivanja:

(4.7') $$K = (\varkappa^{2} + a^{2})\alpha^{2} + 2\mu\frac{\varkappa^{2}\eta^{2}}{a^{2}}\alpha + \mu^{2}\frac{\varkappa^{2}\eta^{2}}{a^{2}}H$$

Kako smo imali obeleženo sa α:

$$\alpha = c^{2}\frac{f}{\varkappa} - \mu H = c^{2}\frac{f}{\varkappa} + \mu\frac{|h|^{2}}{\varkappa^{2}} - \mu\frac{\eta^{2}}{a^{2}}$$

biće pomoću tih oznaka:

$$K = c^4(\pi^2+a^2)\frac{f^2}{\eta^2} + 2\mu c^2\frac{f}{\eta}\left\{\frac{\pi^2\eta^2}{a^2}-(\pi^2+a^2)H\right\} - \mu^4 H\left\{\frac{\pi^2\eta^2}{a^2}-(a^2+\pi^2)H\right\}$$

Prema definiciji H imaćemo:

$$\frac{\pi^2\eta^2}{a^2}-(\pi^2+a^2)H = \frac{\pi^2\eta^2}{a^2}-\pi^2\left(\frac{\eta^2}{a^2}-\frac{|h|^2}{\pi^2}\right)-a^2H = |h|^2-a^2H$$

Dalje ćemo obeležiti sa $\varkappa$ sledeći skalar:

(4.8) $$\varkappa = \frac{\pi^2\eta^2}{a^2}-(\pi^2+a^2)H = |h|^2-a^2H = -\ell^{\alpha}\ell_{\alpha}+\frac{a^2}{\eta^2}|h|^2$$

(ℓ^{α} je tangentna komponenta magnetnog polja). Najzad možemo pisati:

(4.7") $$K = c^4(\pi^2+a^2)\frac{f^2}{\eta^2}+2\mu c^2\frac{f}{\eta}\varkappa-\mu^2H\varkappa$$

Ovu invarijantu ćemo kasnije koristiti.

5) Alfven-ovi udarni talasi

Napisaćemo pet skalarnih invarijanata koje smo ustanovili, ili formirali kombinovanjem, u prethodnom odeljku:

(5.1) $$a = \eta u^{*}\ell_{\alpha} = \eta' u'^{*}\ell'_{\alpha}$$

(5.2) $$b = f\eta = f'\eta'$$

(5.3) $$H = \frac{\eta^2}{a^2}-\frac{|h|^2}{\pi^2} = \frac{\eta'^2}{a^2}-\frac{|h'|^2}{\pi'^2}$$

(5.4) $$\ell = \alpha+\frac{q}{a^2} = \alpha'+\frac{q'}{a^2}$$

(5.5) $$K = c^4(\pi^2+a^2)\frac{f^2}{\eta^2}+2\mu c^2\varkappa\frac{f}{\eta}-\mu^2H\varkappa = c^4(\pi'^2+a^2)\frac{f'^2}{\eta'^2}+2\mu c^2\varkappa'\frac{f'}{\eta'}-\mu^2H\varkappa'$$

U ovim izrazima zastupljene su dve termodinamičke veličine η, f, zatim projekcije brzine i magnetnog polja na normalu, i najzad, intenzitet magnetnog polja $|h|$. Ukupno pet veličina u pet relacija (5.1),...,(5.5). Napomenimo to da "totalni pritisak" q nije nezavisna veličina, budući da označava $p + \frac{1}{2}\mu|h|^2$, već je funkcija drugih termodinamičkih promenljivih (nezavisne su najviše dve, toliko smo već i uzeli). Ukoliko znamo stanje pre (odn. posle) udarnog talasa, odrdjivanje ovih veličina za stanje posle (odn. pre) udarnog talasa je jedinstveno. Iz jednačina (5.2) i (5.3) možemo videti i to da ukoliko je magnetno polje bilo jednako nuli s jedne strane udarnog talasa ono to ostaje i posle.

Vratimo se osnovnim jednačinama (3.2), (3.3) i (3.4). Jednačina (5.1) predstavlja ustvari (3.2). (5.4) izražava invarijantnost normalne komponente vektora W^α, koji je invarijantan na osnovu (3.4). Veze (5.2), (5.3) i (5.4) izvedene su iz ovih. Sada se mogu prostudirati prpjekcije osnovnih jednačina na tangentnu ravan Σ. Zato će biti izabran jedan pogodan koordinatni sistem: ortonormirani lokalni reper čiji će jedinični vektor $e_{(4)}$ biti podudaran s vektorom normale l. U tome sistemu ćemo imati:

$$h'^4 u'^i - u'^4 h'^i = h^4 u^i - u^4 h^i$$

(5.6)

$$(c^2 f' + \mu|h'|^2) u'^4 u'^i - \mu h'^4 h'^i = (c^2 f + \mu|h|^2) u^4 u^i - \mu h^4 h^i$$

Ovde imamo ukupno šest jednačina: tri jednačine (3.3') koje izražavaju invarijantnost V^α, i tri koje izražavaju invarijantnost tangentne komponente W^α u tome sistemu. Indeks i uzima vrednosti 0, 2, 3 gde je $u'^{\alpha} = u_a l^{a\alpha}$, $h'^{\alpha} = h_a l^{a\alpha}$. Pormatrajmo determinantu levih strana jednačina (.6), s tim što ćemo za promenljive smatrati šest veličina u'^{α}, h'^{α} koje na levim stranama zastupljene linearno i homogeno. Ta determinanta, šestog reda, posle dužeg računa daje:

$$(5.7) \qquad D' = ((c^2 \rho f' + \mu |h|^2)(u'^{\alpha} l_{\alpha})^2 - \mu (h'^{\alpha} l_{\alpha})^2)^2$$

Za $D' \neq 0$ jednačine (5.6) odredjuju u'^{α} i h'^{α} funkciji termodinamičkih promenljivih, intenziteta magnetnog polja i vrednosti u^{α} i h^{α} koje odgovaraju prethodnom stanju na udarnom talasu. Ako pretpostavimo za trebutak da su nam te veličine poznate, u'^{α}, h'^{α} će biti na jedinstven način odredjene na osnovu njih. Šta ~~ćx~~ će nastupiti ako je $D' = 0$? Postavimo taj uslov:

$$(5.8) \qquad (c^2 \rho f' + \mu |h|^2)(u'^{\alpha} l_{\alpha})^2 - \mu (h'^{\alpha} l_{\alpha})^2 = 0$$

Kad se ispišu veličine $u'^{\alpha} l_{\alpha}$ i $h'^{\alpha} l_{\alpha}$ imaćemo za D':

$$D' = (c^2 \rho f' + \mu |h|^2)\frac{a^2}{\eta'^2} - \mu \eta'^2$$

Otud:

$$(5.8') \qquad D' = a^2\left(c^2 \frac{f'}{\eta'} + \mu \frac{|h|^2}{\eta'^2} - \mu \frac{\eta'^2}{a^2}\right) = \left(c^2 \frac{f'}{\eta'} - \mu H\right) a^2 = a^2 \alpha'$$

Ovim dobijamo jednostavnu vezu izmedju parametra α' i determinante D' čije smo geometrijske značenje izložili. Kada su obe determinante, D i D' jednake nuli istovremeno, na jednom udarnom talasu, Σ predstavlja front jednog Alfven-ovog udarnog talasa. Na osnovu (5.8') tada imamo:

$$(5.9) \qquad \alpha = \alpha' = 0.$$

6) Termodinamička analiza i osnovna svojstva Alfven-ovih talasa

Polazimo od osnovne pretpostavke ralativističke hidrodinamike i magnetohidrodinamike (v [6] i [29]): konačnosti brzine zvuka u toj materijalnoj sredini. Ona je izražena sledećom nejednakošću (čije izvodjenje ovde nećemo dati):

$$(6.1) \qquad f\pi''_f + \pi > 0 \qquad\qquad (\pi'_f = \partial_f \pi)$$

gde su f i S uzeti za nezavisne promenljive. Ako sa v_s obeležimo brzinu prostiranja (trobrzinu) zvuka, a sa c brzinu svetlosti, nejednakost povlači kao posledicu to da u jednoj od klasičnih relacija termodinamike gasova (v [6]), koja u relativnosti glasi:

$$\frac{v_s^2}{c^2} = \frac{\pi'_f}{f\pi''_f}$$

odnos v_s/c mora biti manji od jedinice. To je ono što odgovara zaključku klasične mehanike po kojem je beskonačno velika brzina zvuka, koja bi odgovarala idealnoj nestišljivosti, nemoguća. Ovo je matematička formulacija pretpostavke o stišljivosti, o kojoj je bilo reči na početku odeljka 1.

Ispitaćemo ponašanje termodinamičkih promenljivih pri Alfven-ovim udarnim talasima, oslanjajući se na nejednakost (6.1)

Prethodno doterajmo invarijantu K iz (5.5) u jedan pogodniji oblik. Kad se R smeni iz (4.8) sa $|B|^2 - a^2 H$ i razvije prva zagrada, imaćemo:

$$K = c^4 f^2 + a^2 c^4 \frac{f^2}{\pi^2} + 2\mu c^2 \frac{f}{\pi}(|B|^2 - a^2 H) - \mu^2 H (|B|^2 - a^2 H)$$

što se može pisati

$$K = c^4 f^2 + \mu |B|^2 (2c^2 \frac{f}{\pi} - \mu H) + a^2 (c^4 \frac{f^2}{\pi^2} - 2c^2 \frac{f}{\pi} \mu H + \mu^2 H^2)$$

Pošto smo α definisali (4.2") imaćemo:

(6.2) $$\mathcal{K} = c^4 f^2 + \mu |h|^2 c^2 \frac{f}{\pi} + \mu |h|^2 \alpha + a^2 \alpha^2$$

a) Sad pristupimo razmatranju jednog Alfven-ovog udarnog talasa. Pošto se takav talas pojavljuje za $\alpha = \alpha' = 0$, to ćemo iz veze (5.4) koja je glasila:

$$f = \alpha + \frac{q}{a^2} = \alpha' + \frac{q'}{a^2}$$

imati prvi zaključak:

(6.3) $$[q] = [p + \frac{1}{2}\mu |h|^2] = 0$$

Zatim ćemo, na osnovu definicije α imati posledicu -jednakost člana $c^2 \frac{f}{\pi}$ s invarijantnim članom μH. Dakle:

(6.4) $$\left[\frac{f}{\pi} \right] = 0$$

Dodajmo sad veze (5.1), (5.2) i (5.3):

(6.5) $$[\pi u^\alpha l_\alpha] = 0 \qquad [f\eta] = 0 \qquad \left[\frac{q^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{\pi^2} \right] = 0$$

Iz (6.2) ćemo imati, na kraju:

(6.2') $$\left[c^4 f^2 + c^2 \mu |h|^2 \frac{f}{\pi} \right] = 0$$

Pošto je $\frac{f}{\pi}$ iz (6.4) invarijantne, možemo (6.2') pisati ovako:

$$[c^2 \pi f + \mu |h|^2] = 0$$

Medjutim, veza (6.3) nam daje:

$$2[p] = -\mu [|h|^2]$$

pa dobijamo:

(6.2") $$[c^2 n\rho - 2p] = 0$$

Veze (6.4) i (6.2") su u pogodnom obliku za ispitivanje sa termodinamičkog stanovišta. Radi se o sledećem pitanju: ako su, po osnovnoj pretpostavci, u našem prosesu strujanja, dve, bilo koje, termodinamičke promenljive nezavisne, pod kojim uslovima možemo posmatrati veze (6.4) i (6.2"), u kojima su zastupljene samo termodinamičke promenljive, kao medjusobno nezavisne? Videćemo da je dovoljan uslov njihove nezavisnosti termodinamička hipoteza (6.1).

Treba poći od dve sledeće termodinamičke funkcije:

$$\varphi = c^2 n\rho - 2p \qquad \psi = \ln\left(\frac{\rho}{n}\right)$$

koje ćemo posmatrati kao funkcije promenljivih ρ i S, funkcije-indeks i entropije. Pritom ćemo se osloniti na osnovnu termodinamičku vezu, koju smo uveli u odeljku 2, i to u obliku (2.7)

$$dp = c^2 n\, d\rho - n\Theta\, dS$$

Koristeći ovaj izraz, imaćemo, prilikom diferenciranja funkcija φ i ψ, sledeće izraze:

$$\varphi'_\rho = c^2(\rho n'_\rho - n) \qquad \psi'_\rho = -\frac{\rho n'_\rho - n}{n\rho}$$

$$\varphi'_S = c^2 \rho n'_S + 2n\Theta \qquad \psi'_S = -\frac{n'_S}{n}$$

Jakobijan funkcija φ, ψ u odnosu na ρ i S biće:

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\rho,S)} = (\rho n'_\rho - n)\left(-c^2\frac{n'_S}{n} + c^2\frac{n'_S}{n} + 2\frac{\Theta}{\rho}\right) = 2\frac{\Theta}{\rho}(\rho n'_\rho - n)$$

S obzirom na to da je apsolutna temperatura Θ fluida $\neq 0$ to će gornji jakobijan biti jednak nuli samo onda kada je izraz u zagradi jednak nuli. To je, medjutim, slučaj koji isključuje hipoteza (6.1). Na taj način neprekidnost veličina γ^2 i γ^3 koja povlači neprekidnost (6.4) i (6.2") na udarnom talasu povlači i neprekidnost bilo koje dve termodinamičke promenljive. Kako su, medjutim, najviše dve promenljive nezavisne, to će pri Alfven-ovom udarnom talasu sve termodinamičke veličine biti neprekidne:

(6.6) $$[r]=0 \qquad [p]=0 \qquad [f]=0$$

S obzirom na neprekidnost r, prva od veza (6.5) će postati:

(6.7) $$[u^\alpha l_\alpha]=0$$

Dalje, s obzirom na neprekidnost f, druga veza (6.5) će dati:

(6.8) $$[h^\alpha l_\alpha]=[\eta]=0$$

Treća veza će zbog neprekidnosti (invarijantnosti) η i r dati:

$$[|h|^2]=0$$

S obzirom na invarijantnost normalnih komponenata vektora u^α i h^α, na invarijantnost $|h|$ kao i na invarijantnost termodinamičkih promenljivih pri ovakvom udarnom talasu, drugi sistem jednačina (5.6) će postati:

(6.9) $$(c^2 rf+\mu|h|^2)u^i[u^i]-\mu h^i[h^i]=0$$

gde je korišćen lokalni reper ($\vec{e}_{(1)}$ je podudaran sa $\vec{l}$ dakle u^i h^i su tangentni na Σ).

Ako uvedemo radi jednostavnosti oznaku:

$$\beta=\sqrt{\frac{1}{\mu}(c^2rf+\mu|h|^2)}$$

i uzmemo u obzir činjenicu da je ℓ_α kolinearan s gradijentom hiperpovršine $\varphi(x^\alpha)=C$ udarnog talasa, uslov (5.8) će glasiti:

(6.10) $$\beta^2(u^\alpha\partial_\alpha\varphi)^2-(h^\alpha\partial_\alpha\varphi)^2=0$$

Ovo je jedna parcijalna jednačina prvog reda a drugog stepena. Ona daje dve mogućnosti:

(6.11)
(A) $$(\beta u^\alpha+h^\alpha)\partial_\alpha\varphi=0$$
(B) $$(\beta u^\alpha-h^\alpha)\partial_\alpha\varphi=0$$

Alfven-ove udarne talase obrazuju, shodno teoriji linearnih parcijalnih jednačina prvog reda, ili trajektorije vektora A^α ili vektora B^α:

$$A^\alpha=\beta u^\alpha+h^\alpha$$

$$B^\alpha=\beta u^\alpha-h^\alpha$$

S obzirom nam to da je po svojoj definiciji $\beta>|h|$, A^α i B^α su vektori vremenskog tipa kao i u^α, i zbog pozitivnog znaka β orijentisani prema budućnosti (mi tako uzimamo, iako su oni odredjeni do na znak. Tip vektora, medjutim, je nepromenljiv).

Pošto se (6.9) može napisati u ovom obliku:

$$\beta^2(u^\alpha\ell_\alpha)[u^\alpha]-(h^\alpha\ell_\alpha)[h^\alpha]=0$$

to ćemo pri jednom udaru imati, na osnovu (6.11):

(A) $$\beta(u^\alpha\ell_\alpha)[\beta u^\alpha+h^\alpha]=0$$

ili

(B) $$\beta(u^\alpha\ell_\alpha)[\beta u^\alpha-h^\alpha]=0$$

S obzirom na to da posmatramo netangentne udare ($u^\alpha\ell_\alpha\neq0$), sleduje da je u respektivnim slučajevima jedan ili drugi diskontinuitet jednak nuli. Kako su normalne komponente tih vektora i inače jednake nuli u slučaju udarnog talasa odgovarajućeg tipa (v. (6.7) i (6.8)), to će biti:

(6.12) $[A^\alpha] = 0$ ili $[B^\alpha] = 0$.

Pri Alfven-ovom udarnom talasu vrste (A) odnosno (B), tangentan je i invarijantan vektor A^α odnosno B^α.

b) Ispitajmo šta će biti u slučaju kada je

$$\alpha = \alpha' \neq 0$$

Iz (4.2") ćemo imati, prostim oduzimanjem:

$$\left[\frac{f}{\eta}\right] = 0$$

a iz (5.4)

$$[q] = 0$$

Imamo redom sve veze (6.5):

$$[\eta u^\alpha \ell_\alpha] = 0 \qquad [f\eta] = 0 \qquad \left[\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{|h|^2}{\eta^2}\right] = 0$$

Pod osnovnom pretpostavkom (termodinamičkom) (6.1), i posle celokupne analize koju smo naveli, imaćemo invarijantnost termodinamičkih promenljivih, intenziteta magnetnog polja i normalnih komponenata u^α i h^α. Medjutim, sad je α, pa prema tome i determinanta D iz (5.8') različita od nule. Zbog invarijantnosti svih koeficijenata u (5.6) taj se sistem može pisati:

$$h^0[u^\nu] - u^0[h^\nu] = 0$$

$$(c^2 f + \mu |h|^2) u^0 [u^\nu] - \mu h^0 [h^\nu] = 0$$

što vsled $\mathcal{D} \neq 0$ daje:

(6.13) $$[u^\nu] = 0 \,, \quad [h^\nu] = 0$$

Dakle, za $\alpha' = \alpha \neq 0$ imamo potpunu invarijantnost svih promenljivih-odsustvo udarnog talasa.

7) Dalja svojstva Alfven-ovih udarnih talasa

a) Možemo pokazati da je pri Alfven-ovom talasu vrste (A) (odnosno (B))vektor A^α (odnosno B^α) uvek kolinearan s invarijantnim vektorom V^α.

S obzirom na to da smo projekciju vektora magnetnog polja na jedinični vektor normale obeležili sa η, kao i na vezu (5.1), diferencijalna jed načina Alfven-ovih talasa (6.10) može da se piše:

(7.1)
$$\beta^2 \frac{a^2}{\eta^2} - \eta^2 = 0$$

U slučaju udara vrste (A) gornji izraz jednak je nuli zbog:

$$\beta \frac{a}{\eta} + \eta = 0 \qquad (A^\alpha \xi_\alpha = 0)$$

Napišimo vektore V^α i A^α:

$$V^\alpha = \eta u^\alpha - \frac{a}{\eta} h^\alpha$$

$$A^\alpha = \beta u^\alpha + h^\alpha$$

Uslov njihove kolinearnosti je da determinanta koeficijenata uz u^α i h^α bude jednaka nuli. A to je:

(7.2)
$$\beta \frac{a}{\eta} + \eta = 0$$

Odgovarajući zaključak važi i za udarne talase vrste (B). Imamo dakle:

Na Alfven-ovom udarnom talasu vrste (A) (odnosno (B)), vektor A^α (odnosno B^α) kolinearan je s vektorm V^α.

Očigledno je da je prethodni uslov potreban i dovoljan, jer kolinearnost A^{α} i V^{α} (odgovarajuće važi za B^{α}) povlači (7.2) kao posledicu, a onda važi diferencijalna jednačina (7.1).

Učinimo usput geometrijsku konstataciju da u slučaju Alfven-ovog talasa vektor W^{α} lokalno, pripada 2-ravni odredjenoj vektorima V^{α} i ℓ^{α}, što se može videti iz izraza (4.4) za taj vektor, kad se stavi $\alpha = 0$ (što je potreban i dovoljan uslov za Alfven-ov talas).

Medju tangentnim komponentama vektora u^{α} i h^{α} na Σ, kojih ima tri, po jedna ostaje invarijantna, i to ona koja je kolinearna s vektorom V^{α}. Zaista:

$$(7.3)\qquad \begin{aligned} [u^{\alpha} V_{\alpha}] &= [\eta] = 0 \\ [h^{\alpha} V_{\alpha}] &= a\left[\frac{|h|^{2}}{\eta}\right] = 0 \end{aligned}$$

Dakle, ne samo da vektor $\beta u^{\alpha} + h^{\alpha}$ (odnosno $\beta u^{\alpha} - h^{\alpha}$) kao kombinacija vektora u^{α} i h^{α} ostaje invarijantan, već <u>komponente vektora u^{α} i h^{α} u pravcu A^{α}, odnosno B^{α} (ili V^{α} što je isto) ostaju invarijantne.</u>

b) Imajući u vidu invarijantnost intenziteta vektora u^{α} i h^{α}, invarijantnost njihovih normalnih komponenata kao i odredjenih tangentnih komponenata (7.3), možemo, koristeći pogodni ortonormirani reper u kojem smo imali veze (5.6), ispitati posledice toga. Pritom ćemo precizirati to da, osim što nam je jedinični vektor $\vec{e}_{(1)}$ podudaran s jediničnim vektorom normale na Σ, i jedinični vektor $\vec{e}_{(2)}$ ćemo izabrati tako da bude kolinearan s invarijantnim vektorom $\vec{V}$. Tada ćemo imati:

$$|u|^2 = 1 = (u_0)^2 - (u_1)^2 - (u_2)^2 - (u_3)^2$$

$$|h|^2 = -\{(h_0)^2 - (h_1)^2 - (h_2)^2 - (h_3)^2\}$$

S obzirom na invarijantnost intenziteta u pravcu normale i pravcu V_α (v. (7.3)):

$$[u_2][u_2] + 2u_2[u_2] + [u_3][u_3] + 2u_3[u_3] = 0$$

$$[h_2][h_2] + 2h_2[h_2] + [h_3][h_3] + 2h_3[h_3] = 0$$

Pošto za Alfven-ov udarni talas, s obzirom na (6.12), imamo:

$$[h_\alpha] \pm \rho[u_\alpha] = 0$$

to se gornji izrazi mogu pisati:

$$[u_2]([u_2] + 2u_2) + [u_3]([u_3] + 2u_3) = 0$$

$$[u_2]([h_2] + 2h_2) + [u_3]([h_3] + 2h_3) = 0$$

Pošto su diskontinuiteti $[u_\alpha]$ različiti od nule za udarni talas, imaćemo to da je determinanta ovog sistema jednaka nuli. Otud:

$$(u_2' + u_2)(h_3' + h_3) = (u_3' + u_3)(h_2' + h_2)$$

<u>Aritmetička sredina varijantnih komponenata magnetnog polja i brzine za stanje pre i posle udara su kolinearne.</u>

c) Posmatraćemo sad vektor električnog protoka J^β iz (1.9). Imali smo, kao prvu grupu Maxwell-ovih jednačina:

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta$$

gde je tenzor $G^{\alpha\beta}$ bio:

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(u_\gamma h_\delta - u_\delta h_\gamma) = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\gamma h_\delta$$

S obzirom na strukturu ovog tenzora, funkcije u_α i h_α, možemo konstatovati da on na površini udarnog talasa može imati diskontinuitet. Po pravilima diferenciranja prekidnih funkcija (ili distribucija, v. [$\mathcal{E}$]) na površini talasa Σ se običnom izvodu funkcije (distribucije) s jedne strane te površine, koji ćemo pisati u vitičastim zagradama, dodaje ili oduzima, prema tome s koje strane Σ gledamo, jedan član istog oblika kao što ~~x~~ su leve strane jednačina (3.2)-(3.4). Dakle:

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \{\nabla_\alpha G^{\alpha\beta}\}_{\Sigma^-} + l_\alpha [G^{\alpha\beta}] \tag{7.4}$$

gde smo uzeli da posmatramo obični izvod ~~[illegible]~~ funkcije na strani koja prethodi udaru, a koju smo označili sa Σ^-.

U formuli (7.4) ćemo obeležiti dopunski član na desnoj strani sa:

$$K^\beta = l_\alpha [G^{\alpha\beta}] \tag{7.5}$$

Ovaj vektor, koji se pojavljuje kao posledica diskontinuiteta vektora električnog protoka, nazvaćemo vektor površinske gustine protoka (engleski current-sheet vector, francuski densité superficielle de courant). Kad ga razvijemo, imaćemo:

$$K^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} l_\beta [u_\gamma h_\delta] \tag{7.5'}$$

Iz ovog izraza se odmah vidi da je K^α ortogonalan na l_α, dakle pripada lokalno hiperravni koja tangira Σ. Ovo daje objašnjenje za njegov naziv.

Šta će biti s vektorom K^{α} u slučaju Alfven-ovog talasa? S obzirom na formulu za diskontinuitet proizvoda, koja se odmah može proveriti:

$$[u_{\gamma} h_{\delta}] = u_{\gamma}' h_{\delta}' - u_{\gamma} h_{\delta} = [u_{\gamma}][h_{\delta}] + [u_{\gamma}] h_{\delta} + u_{\gamma} [h_{\delta}]$$

i na činjenicu (v.(6.12)) da su pri Alfven-ovom udarnom talasu $[u^{\alpha}]$ i $[h^{\alpha}]$ kolinearni, vektor površinske gustine će biti:

$$K^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \ell_{\beta} ([u_{\gamma}][h_{\delta}] + [u_{\gamma}] h_{\delta} + u_{\gamma} [h_{\delta}]) = \tag{7.6}$$
$$= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \ell_{\beta} ([u_{\gamma}] h_{\delta} + u_{\gamma} [h_{\delta}])$$

Pretpostavimo da imamo udarni talas vrste (A). Tada, na osnovu već utvrdjene činjenice da je vektor A^{α} invarijantan, možemo zameniti diskontinuitet vektora magnetnog polja diskontinuitetom četvorobrzine. Ako pored toga izmenimo red pisanja proizvoda u drugom sabirku poslednje jednakosti (7.6), imaćemo, s obzirom na potpunu antisimetriju tenzora $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, sledeći izraz:

$$K^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \ell_{\beta} [u_{\gamma}] (h_{\delta} + \beta u_{\delta}) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \ell_{\beta} [u_{\gamma}] A_{\delta} \tag{7.7}$$

Odgovarajući zaključak bi važio za udarni talas vrste (B).

S obzirom na to da je pri Alfven-ovom udarnom talasu bilo koje vrste odgovarajući invarijantan vektor vektor kolinearan s uvek invarijantnim vektorom V_{α}, i da je tada vektor W_{α} lokalno komplanaran s ℓ_{α} i V_{α}, imamo zaključak:

<u>Pri Alfven-ovom udarnom talasu vektor površinske gustine protoka K^{α} uvek je različit od nule i ortogonalan na vektorima ℓ_{α}, V_{α}, W_{α} i $[u_{\alpha}]$ (odn. $[h_{\alpha}]$).</u>

Napomenimo da, s obzirom na to da su l^{α} i V^{α} uvek ortogonalni medjusobno (3.5), $[u^{\alpha}]$, odn. $[h^{\alpha}]$, upravno na njima, a K^{α} upravno na svim navedenim vektorima, to l^{α}, V^{α}, $[u^{\alpha}]$ ($[h^{\alpha}]$) i K^{α} obrazuju ortogonalni sistem vektora za ovakav udarni talas. Pritom je l^{α} prostornog tipa, V^{α} (budući kolinearan s A^{α}, odn. B^{α}) vremenskog tipa, i $[u^{\alpha}]$, $[h^{\alpha}]$, K^{α}, budući upravni na V^{α}, moraju biti prostornog tipa. Svi ti vektori su ujedno i neizotropni.

8) Magnetohidrodinamički udarni talasi s kolinearnim diskontinuitetima $[u^{\alpha}]$ i $[h^{\alpha}]$.

Ispitajmo mogućnost da li postoje udarni talasi, različiti od Alfven-ovih, pri kojima bi diskontinuitet četvorobrzine bio kolinearan s diskontinuitetom magnetnog polja. Postavimo taj uslov:

$$[h^{\alpha}] + \gamma [u^{\alpha}] = 0, \tag{8.1}$$

gde je γ proizvoljna skalarna funkcija. Napomenimo uzgred da je γ već i po samoj definiciji veze (8.1), neprekidan na Σ, jer bi ta veza, posmatrana s druge strane udarnog talasa glasila isto tako (predznak "-" ne bi izmenio stvari, jer je izraz ispred kojeg stoji jednak nuli).

Ispišimo uslove koji iskazuju činjenicu: 1) da četvorobrzina nužno zadržava jedinični intenzitet posle bilo kakvog udarnog talasa i 2) da vektor magnetnog polja ostaje ortogonalan na četvorobrzini posle udarnog talasa:

$$[u^\alpha][u_\alpha] = -2u^\alpha[u_\alpha],$$

(8.2)

$$[u^\alpha h_\alpha] = [u^\alpha][h_\alpha] + [u^\alpha]h_\alpha + u^\alpha[h_\alpha] = 0$$

Prva relacija sleduje iz $u'^\alpha u'_\alpha = u^\alpha u_\alpha$, kad se stavi $u'^\alpha = u^\alpha + [u^\alpha]$.

Ako pomnožimo (8.1) sa $[u^\alpha]$ i smenimo $[u^\alpha][u_\alpha]$ iz prve veze (8.2), i $[u^\alpha][h_\alpha]$ iz druge veze (8.2), imaćemo:

$$[u^\alpha]h_\alpha + u^\alpha[h_\alpha] + 2\gamma u^\alpha[u_\alpha] = 0.$$

Pošto je, na osnovu (8.1) $[h^\alpha] = -\gamma[u^\alpha]$, to ćemo iz gornjeg izraza dobiti:

(8.3) $$[u^\alpha][h_\alpha + \gamma u_\alpha] = 0.$$

Ako sad pomnožimo (8.1) sa h^α, pa smenimo u (8.3) izraz koji dobijemo otud za $u_\alpha[u^\alpha]$, pa opet iskoristimo prvu vezu (8.2) imaćemo:

$$2h^\alpha[h_\alpha] + \gamma^2[u^\alpha][u_\alpha] = 0$$

Kad se iz (8.1) diskontinuitet $[u^\alpha]$ smeni s diskontinuitetom $[h^\alpha]$ to će glasiti:

$$2h^\alpha[h_\alpha] + [h^\alpha][h_\alpha] = 0$$

Analogno prvoj vezi (8.2) za u^α ova veza znači da je intenzitet magnetnog polja posle udarnog talasa neizmenjen, odnosno:

(8.4) $$[|h|^2] = 0$$

Ako pomnožimo (8.1) sa ℓ_α dobićemo:

$$a\gamma\left[\frac{1}{\varkappa}\right]+[\eta]=0. \tag{8.5}$$

Medjutim, imali smo izraz za invarijantu H (4.1):

$$H=\frac{\eta^2}{a^2}-\frac{|h|^2}{\varkappa^2}.$$

Ako uzmemo u obzir uprvo dokazanu invarijantnost $|h|^2$ (8.4), i razvijemo diskontinuitet gornjeg izraza (koji je jednak nuli) imaćemo:

$$\frac{1}{a^2}[\eta]^2-|h|^2\left[\frac{1}{\varkappa}\right]^2+\frac{2}{a^2}\eta[\eta]-|h|^2\frac{2}{\varkappa}\left[\frac{1}{\varkappa}\right]=0. \tag{8.6}$$

Kad $[\eta]$ iz (8.5) smenimo u ovvom izrazu, dobićemo, posle kraćeg sredjivanja:

$$(\gamma^2-|h|^2)\left[\frac{1}{\varkappa}\right]^2-2\left(\frac{1}{a}\gamma\eta+\frac{1}{\varkappa}|h|^2\right)\left[\frac{1}{\varkappa}\right]=0. \tag{8.6'}$$

a) Za $\gamma\neq\pm|h|$ imaćemo dve mogućnosti:

(8.7)

1) $\left[\frac{1}{\varkappa}\right]=0$ pritom $[\eta]=0$ (iz (8.5))

2) $\left[\frac{1}{\varkappa}\right]=\frac{2}{\gamma^2-|h|^2}\left(\frac{1}{a}\gamma\eta+\frac{1}{\varkappa}|h|^2\right)$ pritom

$$[\eta]=-\frac{2a\gamma}{\gamma^2-|h|^2}\left(\frac{1}{a}\gamma\eta+\frac{1}{\varkappa}|h|^2\right).$$

U slučaju 1) imaćemo očigledno Alfven-ov udarni talas. Zaista, iz preostalih invarijanata veza (5.1),..., (5.5) dobićemo invarijantnost i preostalih termodinamičkih promenljivih, i to neposredno. Otud će sledovati, na osnovu celokupne analize odejka 6 da mora biti $\gamma=\pm\beta$. Predjimo na slučaj 2):

Invarijantnost vektora V^α (uslov da njegov diskontinuitet bude jednak nuli) nam daje:

$$[\eta][u^\alpha]+[\eta]u^\alpha+\eta[u^\alpha]-a([\tfrac{1}{\kappa}][k^\alpha]+[\tfrac{1}{\kappa}]k^\alpha+\tfrac{1}{\kappa}[k^\alpha])=0.$$

Posle smene izraza za $[\frac{1}{\kappa}]$ i $[\eta]$ iz (8.7) (slučaj 2) imaćemo:

(8.8) $$\frac{-2a}{\gamma^2-|k|^2}(\tfrac{1}{a}\gamma\eta+\tfrac{1}{\kappa}|k|^2)(\gamma u^\alpha+k^\alpha)+(\eta+\tfrac{a}{\kappa}\gamma)[u^\alpha]=0,$$

gde smo iskoristili vezu (8.1) radi sredjivanja. Ako pomnožimo taj izraz sa $[u_\alpha]$, dobićemo, imajući u vidu (8.3), sledeći izraz:

$$\eta+\frac{a}{\kappa}\gamma=0$$

(pritom smatramo, što ćemo malo dalje dokazati, da je $[u^\alpha][u_\alpha]\neq 0$, tj da diskontinuitet $[u^\alpha]$ ne može biti izotropan). Smena dobijena veze u (8.8) daje:

$$-\frac{2a}{\gamma^2-|k|^2}(\tfrac{1}{a}\gamma\eta+\tfrac{1}{\kappa}|k|^2)=0.$$

Ako pogledamo drugu grupu uslova (8.7), dobićemo:

$$[\eta]=0\ ,\qquad [\tfrac{1}{\kappa}]=0\ .$$

Ispitajmo, uzgred, da li $[u^\alpha][u_\alpha]$ može biti jednako nuli:

$$[u^\alpha][u_\alpha]=(u'^\alpha-u^\alpha)(u'_\alpha-u_\alpha)=u'^\alpha u'_\alpha-2u'^\alpha u_\alpha+u^\alpha u_\alpha=0,$$

odnosno:

$$2(1-u'^\alpha u_\alpha)=0$$

(jer vektor u^α ostaje jedinični, a tenzor $g^{\alpha\beta}$, koji podiže indekse je neprekidan). To bi značilo da je:

$$u'^{\alpha}u_{\alpha} = 1 .$$

Skalarni proizvod ova dva vektora može biti jednak jedinici samo ako je $u'^{\alpha} = u^{\alpha}$, dakle u odsustvu udara.

Imali smo:

$$[|h|^2] = 0 , \quad [\eta] = 0 , \quad [\gamma] = 0 .$$

Na osnovu (5.2) je i $[f]$ jednako nuli, pa su na taj način sve termodinamičke promenljive invarijantne. Ovo povlači invarijantnost ukupnog pritiska q, što na osnovu (5.4) znači da je i parametar α takodje invarijantan. Ovo poslednje, medjutim, znači da udarni talas može biti samo Alfven-ov, i da prema tome, na osnovu rezonovanja koja su vodila do (5.8) mora biti $\gamma = \pm \beta$.

b) Treba da ispitamo slučaj $\gamma = \pm|h|$. Tada će (8.6') dati:

$$(\gamma\eta + \frac{a}{k}|h|^2)[\frac{1}{k}] = 0 .$$

1) $[\frac{1}{k}] = 0$, što povlači $[\eta] = 0$, i vodi, isto kao i slučaj pod 1) od a) Alfven-ovom udaru. Ali, kako sad veza (8.1) glasi:

$$[h^{\alpha}] \pm |h| [u^{\alpha}] = 0 ,$$

a pritom, zbog Alfven-ovog karaktera udara mora biti zadovoljena i relacija tipa:

$$[h^{\alpha}] \pm \beta [u^{\alpha}] = 0 ,$$

to, pošto je $\beta \neq |h|$ uvek ($\beta = \sqrt{\frac{c^2 k f + \mu |h|^2}{k}}$) sleduje da su $[u^{\alpha}] = [h^{\alpha}] = 0$. Dakle odsustvo talasa.

2) $$\gamma\eta + \frac{a}{k}|h|^2 = 0 ,$$

što nam daje, s obzirom na uslov (b):

(8.9) $$\eta \equiv \frac{a}{k}|h| = 0$$

Pošto je intenzitet magnetnog polja invarijantan, iz gornjeg izraza ćemo imati:

(8.10) $$[r\eta] = 0 .$$

Da bismo ispitali posledice veze (8.10) napisaćemo invarijantni vektor W u obliku (4.4):

$$W^{\beta} = a\alpha w^{\beta} + \frac{1}{a}\mu h \eta V^{\beta} - (q + a^{2}\alpha) l^{\beta} .$$

Pomnožimo diskontinuitet gornjeg vektora (koji je jednak nuli) invarijantnim vektorom V_{β}. Sobzirom na (8.10) i $l^{\alpha} \perp V^{\alpha}$ biće:

$$[W^{\beta}]V_{\beta} = a[\alpha w^{\beta}]V_{\beta} = a[\alpha w^{\beta} V_{\beta}] = 0 .$$

Budući da je w^{β}:

$$w^{\beta} = r u^{\beta} + a l^{\beta} ,$$

dobićemo, na kraju:

$$[\alpha r \eta u^{\beta} u_{\beta}] = 0 ,$$

odnosno $[\alpha] = 0$. Što je potreban i dovoljan uslov za Alfven-ov udarni talas. Kad se Alfven-ovom talasu superponira talas (8.1) od kojeg smo pošli, dobićemo odsustvo diskontinuiteta. Otud:

Alfven-ovi udarni talasi su jedini magnetohidrodinamički udarni talasi za koje je diskontinuitet četvorobrzine kolinearan s diskontinuitetom magnetnog polja.

9) Alfven-ovi udarni talasi u opštoj relativnosti.

a) Ispitaćemo veze izmedju diskontinuiteta brzine i magnetnog polja s jedne strane, i Ricci-evog tenzora krivine pri Alfven-ovom udarnom talasu. Napominjemo da, budući da su tenzor gravitacionog potencijala $g_{\alpha\beta}$ i njegovi prvi izvodi neprekidni, na udarnom talasu Σ mogu imati prekide tek drugi izvodi potencijala $\partial_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta}$.

Poći ćemo od gravitacionih jednačina i veza izmedju diskontinuiteta koje na osnovu njih neposredno imamo:

(9.1) $$[R_{\alpha\beta}] - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} [R] = -\varkappa [T_{\alpha\beta}] .$$

Može se neposredno izračunati Ricci-eva krivina iz (1.1'). Njen diskontinuitet je funkcija p, $\varkappa$, f :

$$[R] = \varkappa [T^{\alpha}_{\alpha}] = \varkappa [c^2 r f - 4p]$$

Dakle samo termodinamičkih promenljivih. To je posledica činjenice da je trag τ^{α}_{α} tenzora τ^{α}_{β} jednak nuli (što je lako proveriti).

Za Alfven-ov udar će biti, s obzirom na (6.6):

(9.2) $$[R] = 0 .$$

Iz osnovne relacije (3.3), (9.1) i (9.2) će odmah sledovati:

(9.3) $$[R_{\alpha\beta}] \ell^{\beta} = 0 .$$

Diskontinuitet Ricci-evog tenzora krivine će biti (v. (1.16)):

$$[R_{\alpha\beta}] = -\varkappa\mu \{ \beta^2 ([u_\alpha][u_\beta] + [u_\beta] u_\alpha + [u_\alpha] u_\beta) - ([h_\alpha][h_\beta] + [h_\alpha] h_\beta + h_\alpha [h_\beta]) \} .$$

Ako posmatramo slučaj udarnih talasa vrste (A):

$$[h_\alpha] = -\beta[u_\alpha]$$

imaćemo:

$$[R_{\alpha\beta}] = -\varkappa[T_{\alpha\beta}] = -\varkappa\mu\beta\{(h_\alpha+\beta u_\alpha)[u_\beta]+(h_\beta+\beta u_\beta)[u_\alpha]\} = \tag{9.4}$$
$$= -\varkappa\mu\beta(A_\alpha[u_\beta]+A_\beta[u_\alpha]).$$

U slučaju talasa vrste (B) bilo bi:

$$[R_{\alpha\beta}] = -\varkappa[T_{\alpha\beta}] = -\varkappa\mu\beta(B_\alpha[u_\beta]+B_\beta[u_\alpha]). \tag{9.4'}$$

U odeljku 7 smo pokazali da vektori A^α (odn. B^α), ℓ^α , $[u^\alpha]$ (ili $[h^\alpha]$), K^α obrazuju ortogonalni sistem. Iz veza (9.4) i (9.4') vidimo da diskontinuitet $[R_{\alpha\beta}]$ ima lokalno dva vektora-rešenja sistema linearnih jednačina za njegovu matricu. Jedan je vektor normale ℓ^β (u(9.3)) a drugi vektor površinske gustine električnog protoka K^β:

$$[R_{\alpha\beta}]K^\beta = 0 \tag{9.5}$$

(v. (9.4) i (7.7)).

Pre nego što pristupimo ispitivanju da li su veze (9.3) i (9.5) i dovoljni uslovi za Alfven-ov udarni talas, dovešćemo vektor K^β u jedan oblik koji on ima za slučaj da talas nije Alfven-ov. Taj oblik je izveden u radu [21] , za razliku od slučaja iz odeljka 7 koji smo mi izveli, a biće nam potreban za dalje ispitivanje. U formuli (7.5'):

$$K^\beta = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\ell_\alpha[u_\gamma h_\delta]$$

zamenićemo u_γ njegovom tangentnom komponentom $\frac{w_\gamma}{k}$ iz (4.3) (odnosno odgovarajućim diskontinuitetom), jer će zbog $\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\tau}$ normalna komponenta otpasti. Učinićemo isto i za ℓ_γ iz (3.1). Tako ćemo imati:

$$K^\beta = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\tau} \ell_\alpha \left[\frac{w_\gamma}{\eta} \ell_\tau \right].$$

Vektori w_γ i ℓ_γ mogu se dalje izraziti pomoću V_γ i W_γ. Pritom V_γ možemo napisati kao:

$$V_\gamma = \frac{a}{\eta} w_\gamma - \frac{a}{\eta} \ell_\gamma ,$$

dok je W_γ u (4.4) bio:

$$W_\gamma = (a\alpha w_\gamma + \mu \frac{\eta a}{a} V_\gamma) - (q + a^2\alpha)\ell_\gamma .$$

Ako vektorski pomnožimo $\vec{V}$ s vektorom u prvoj zagradi na desnoj starni izraza za $\vec{W}$, imaćemo:

$$\vec{V} \times (a\alpha \vec{w} + \mu \frac{\eta a}{a} \vec{V}) = a\alpha \vec{V} \times \vec{w} = a^2\alpha \frac{\vec{w}}{\eta} \times \vec{\ell} .$$

Dakle ono što stoji na desnoj strani izraza za $\vec{K}$. Kako će zbog potpune antisimetrije $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau}$ otpasti sve što stoji uz $\vec{\ell}$ u vektoru $\vec{W}$, možemo najzad da pišemo:

(9.6) $$K^\beta = \frac{1}{a^2} (\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\tau} \ell_\alpha V_\gamma W_\tau) \left[\frac{1}{\alpha} \right] .$$

Ovakav izraz imamo s obzirom na to da parametar α jedini nije invarijantan. Pošto se radi o ne-Alfvenovim talasima, diskontinuitet $[\alpha]$ je obavezno različit od nule. Očigledno je odavde da je vektor K^β upravan na V_β i W_β, pored ℓ_β. Isto je važilo i u slučaju Alfven-ovog udarnog talasa (odeljak 7) pa ćemo odsad to smatrati za opšte svojstvo vektora površinske gustine električnog protoka pri svim mogućim magnetohidrodinamičkim udarima.

Podjimo od toga da su nam date veze (9.3) i (9.5) za jedan netangentni udarni talas. Da li je to dovoljno za jedan Alfven-ov udarni talas? Ako ispišemo ove veze, imaćemo:

(9.3′) $$[c^2 r f + \mu|h|^2]\left(\left[\frac{a}{r}\right][u_\alpha] + \frac{a}{r}[u_\alpha] + \left[\frac{a}{r}\right]u_\alpha\right) + (c^2 r f + \mu|h|^2)\left(\left[\frac{a}{r}\right][u_\alpha] + \frac{a}{r}[u_\alpha] + \left[\frac{a}{r}\right]u_\alpha\right) + [c^2 r f + \mu|h|^2]\frac{a}{r}u_\alpha + \left[p - \frac{1}{2}c^2 r f - \frac{1}{2}\mu|h|^2\right]\ell_\alpha - \mu([\eta][h_\alpha] + [\eta]h_\alpha + \eta[h_\alpha]) = 0,$$

(9.5′) $$[c^2 r f + \mu|h|^2](K^\beta[u_\beta][u_\alpha] + K^\beta[u_\beta]u_\alpha + K^\beta u_\beta[u_\alpha]) + (c^2 r f + \mu|h|^2)(K^\beta[u_\beta][u_\alpha] + K^\beta[u_\beta]u_\alpha + K^\beta u_\beta[u_\alpha]) + [c^2 r f + \mu|h|^2]K^\beta u_\beta u_\alpha + \left[p - \frac{1}{2}c^2 r f - \frac{1}{2}\mu|h|^2\right]K_\alpha - \mu(K^\beta[h_\beta][h_\alpha] + K^\beta[h_\beta]h_\alpha + K^\beta h_\beta[h_\alpha]) = 0$$

Ako, s druge strane, napišemo uslov ortogonalnosti vektora K^α na vektorima V_α i W_α, imaćemo:

(9.6) $$\eta K^\alpha u_\alpha - \frac{a}{r}K^\alpha h_\alpha = 0,$$
$$\frac{a}{r}(c^2 r f + \mu|h|^2)K^\alpha u_\alpha - \mu\eta K^\alpha h_\alpha = 0.$$

Imamo dve mogućnosti: ili je determinanta ovog sistema jednaka nuli, ili su $K^\alpha u_\alpha$ i $K^\alpha h_\alpha$ jednaki nuli. Prvi slučaj glasi:

$$\rho^2 \frac{a^2}{r^2} - \eta^2 = 0,$$

što je upravo diferencijalna jednačina Alfven-ovih talasa, ali u odnosu na vrednosti parametara za stanje koje prethodi udaru, ova jednačina, na osnovu (5.8′) povlači:

$$\alpha = 0 .$$

Kako je veza (5.9) iskazivala uslov po kojem je za jedan Alfven-ov udarni talas potrebno i dovoljno da parametar α bude sa obe strane Σ jednak nuli, vidimo da jedan talas nije Alfven-ov onda kada je, bar s jedne strane Σ, parametar α različit od nule. Kada to može da bude? Na osnovu (9.6) ta mogućnost postoji samo onda kada je:

$$K^{\alpha}u_{\alpha} = K^{\alpha}h_{\alpha} = 0 \tag{9.7}$$

Ovo je, dakle, potreban uslov da jedan talas ne bude Alfven-ov (izvodjenje bi bilo simetrično da smo posmatrali s druge strane Σ).

Ispitaćemo, dakle, jednačine (9.3') i (9.5') pod pretpostavkom (9.7). Prvo ćemo navesti vezu koja iskazuje to da je $[V_{\alpha}]$ uvek jednako nuli:

$$[\eta][u_{\alpha}]+[\eta]u_{\alpha}+\eta[u_{\alpha}]-a\left(\left[\tfrac{\ell}{h}\right][h_{\alpha}]+\left[\tfrac{\ell}{h}\right]h_{\alpha}+\tfrac{\ell}{h}[h_{\alpha}]\right)=0$$

Ako ovu vezu i (9.3) skalarno pomnožimo sa K^{α} imaćemo:

$$(\eta+[\eta])K^{\alpha}[u_{\alpha}]-a\left(\tfrac{\ell}{h}+\left[\tfrac{\ell}{h}\right]\right)K^{\alpha}[h_{\alpha}]=0 \tag{9.8}$$

$$a(\beta^{2}+[\beta^{2}])\left(\tfrac{\ell}{h}+\left[\tfrac{\ell}{h}\right]\right)K^{\alpha}[u_{\alpha}]-(\eta+[\eta])K^{\alpha}[h_{\alpha}]=0 \tag{9.9}$$

Pomnožimo sad skalarno jednačinu (9.5'), prvo sa K^{α}, zatim sa $[u^{\alpha}]$. U izrazima koje na taj način dobijemo izvršićemo izvesna jednostavna sredjivanja polazeći od: 1) veze (9.2) koja je posledica (9.3') na osnovu gravitacionih jednačina (9.1) i 2) od činjenice da u^{α} ostaje upravno na h_{α} i da zadržava jedinični intenzitet posle udara (v. (8.2)). Tako ćemo dobiti:

(9.10) $\mu(\beta^2+[\beta^2])(K^\alpha[u_\alpha])^2+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}c^2 rf+\mu|h|^2\right]-\mu(K^\alpha[h_\alpha])^2=0$

(9.11) $\mu(\beta^2+[\beta^2])u^\alpha[u_\alpha]K^\beta[u_\beta]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}c^2 rf+\mu|h|^2\right]K^\beta[h_\beta]-\mu u^\alpha[h_\alpha]K^\beta[h_\beta]=0$

Iz jednačina (9.8), (9.9) i (9.11) imaćemo dva moguća zaključka:

1) $K^\alpha[u_\alpha]=K^\alpha[h_\alpha]=0$.

2) Determinante tih jednačina, koje su linearne i homogene u odnosu na $K^\alpha[u_\alpha]$, $K^\alpha[h_\alpha]$ moraju biti jednake nuli.

U prvom slučaju imaćemo iz (9.10):

$$\left[\frac{1}{2}c^2 rf+\mu|h|^2\right]=0$$

Iz relacije (9.2) koja je, na osnovu gravitacionih jednačina (9.1) posledica zadatog sistema (9.3), smo imali:

$$c^2[rf]-4[p]=0$$

Dobijeni uslov će tako postati:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}c^2 rf+\mu|h|^2\right]=\left[p+\frac{1}{2}\mu|h|^2\right]=[q]=0 \quad .$$

Invarijantnost totalnog pritiska q povlači, na osnovu (5.4) invarijantnost parametra α, koji, s obzirom na to da postoji udarni talas (v. analizu iz odeljka 5 pod b), mora biti jednak nuli. Imamo dakle jedan Alfvenov udarni talas.

Ispitajmo sad slučaj 2). Tada $K^\alpha[u_\alpha]$, $K^\alpha[h_\alpha]$ mogu biti različiti od nule. Posmatrajmo determinante dva sistema jednačina linearnih u odnosu na $K^\alpha[u_\alpha]$ i $K^\alpha[h_\alpha]$: (9.8), (9.9) i (9.9), (9.11). Pošto su one jednake nuli imaćemo:

(9.12) $(\eta+[\eta])^2-(\beta^2+[\beta^2])(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])^2=0$

(9.13) $\mu(\beta^2+[\beta^2])\{a(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])u^\alpha[h_\alpha]-(\eta+[\eta])u^\alpha[u_\alpha]\}-(\eta+[\eta])[q]=0$

Ako (913) pomnožimo sa $a(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])$ i tu smenimo izraz $a^2(\beta^2+[\beta^2])(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])^2$ iz (9.12) imaćemo:

$$\mu\{(\eta+[\eta])^2u^\alpha[h_\alpha]-a(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])(\beta^2+[\beta^2])(\eta+[\eta])u^\alpha[u_\alpha]\}-$$
$$-a(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])(\eta+[\eta])[q]=0$$

Imamo opet dve mogućnosti:

α) $$\eta+[\eta]=0 .$$

Ovo bi značilo, na osnovu (10.13) da je ili

$$\beta'^2=0 \qquad \text{ili} \qquad (\frac{1}{\tau'})^2=0$$

Dakle, sledije da su posle udara ili gustina i magnetno polje jednaki nuli, ili je gustina beskonačno velika. I jedno i drugo predstavljaju fizičke nemogućnosti.

β) $$\mu\{(\eta+[\eta])u^\alpha[h_\alpha]-a(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])(\beta^2+[\beta^2])u^\alpha[u_\alpha]\}-$$
$$-a(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])[q]=0 .$$

Da bismo ispitali posledice ove veze, obrazovaćemo jedna novi sistem, linearan i homogen u odnosu na $K^\alpha[u_\alpha]$, $K^\alpha[h_\alpha]$ od jednačina (9.8) i jedne veze koju ćemo dobiti time što ćemo (8.5') pomnožiti sa u^β. Imajući u vidu (9.7) to će biti:

(9.14) $(\eta+[\eta])K^\alpha[u_\alpha]-a(\frac{1}{\tau}+[\frac{1}{\tau}])K^\alpha[h_\alpha]=0$

(9.15) $(\beta^2+[\beta^2])(1+u^\alpha[u_\alpha])K^\beta[u_\beta]-u^\alpha[h_\alpha]K^\beta[h_\beta]=0$

Pošto determinanta ovog sistema mora takodje da bude jednaka nuli, imaćemo:

$$(9.16) \qquad -(\eta+[\eta])u^{\alpha}[h_{\alpha}]+a(\beta^{2}+[\beta^{2}])\left(\frac{1}{r}+\left[\frac{1}{r}\right]\right)(1+u^{\alpha}[u_{\alpha}])=0$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo sa μ i saberemo s uslovom β) imaćemo:

$$(9.17) \qquad \mu(\beta^{2}+[\beta^{2}])-[q]=0$$

S druge strane, ako (9.5') pomnožimo sa u^{α} imaćemo:

$$(9.18) \qquad a\mu(\beta^{2}+[\beta^{2}])\left(\frac{1}{r}+\left[\frac{1}{r}\right]\right)(u_{\alpha}+[u_{\alpha}])u^{\alpha}-a\mu\beta^{2}\frac{1}{r}-$$
$$-\frac{a}{r}[q]-\mu(\eta+[\eta])u^{\alpha}[h_{\alpha}]=0 .$$

Na osnovu (9.16) ovo će se svesti na:

$$(9.19) \qquad \mu\beta^{2}+[q]=0 .$$

Zbir veza (9.17) i (9.19) jeste:

$$\beta^{2}+\beta'^{2}=0 .$$

Ovo bi značilo jednovremenu jednakost nuli gustine i magnetnog polja i pre i posle udarnog talasa. Što je besmisleno. Tako imamo zaključak:

<u>Potreban i dovoljan uslov za to da jedan udarni talas bude Alfven-ov jeste da diskontinuitet Ricci-evog tenzora krivine zadovoljava veze:</u>

$$[R_{\alpha\beta}]l^{\beta}=0$$
$$[R_{\alpha\beta}]K^{\beta}=0$$

Prethodni zaključak mogao bi biti izveden, i isto bi glasio, i da je u navedenim vezama diskontinuitet Ricci-evog tenzora bio zamenjen diskontinuitetom tenzora energije.

Pomoću Hadamard-ovih uslova (v. [4], [5]) možemo gornje veze napisati u obliku u kojem će biti izražene preko diskontinuiteta drugih izvoda tenzora $g_{\alpha\beta}$. Tako ćemo imati:

$$(9.20)\qquad \begin{aligned} &g^{\gamma\alpha}[\partial_{\gamma\beta} g_{\alpha\mu} + \partial_{\alpha\mu} g_{\beta\gamma} - \partial_{\alpha\beta} g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma\mu} g_{\alpha\beta}] l^{\beta} = 0, \\ &g^{\gamma\alpha}[\partial_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu} + \partial_{\alpha\mu} g_{\beta\gamma} - \partial_{\alpha\beta} g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma\mu} g_{\alpha\beta}] h^{\beta} = 0. \end{aligned}$$

Ako stavimo:

$$(9.21)\qquad [\partial_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu}] = l_{\alpha} \lambda_{\gamma\beta\mu}.$$

dobićemo, posle izvesnih uprošćavanja koja sleduju otud što je $\lambda_{\gamma\beta\mu}$ simetrično u odnosu na poslednja dva indeksa, i da se desna strana (9.21) ne menja kad se indeks vektora l_{α} zameni s prvim indeksom tenzora $\lambda_{\gamma\beta\mu}$, imaćemo:

$$(9.20')\qquad \begin{aligned} &(\lambda_{\alpha\beta\gamma} - \lambda_{\gamma\beta\alpha}) h^{\beta} l^{\gamma} = 0, \\ &\lambda_{\gamma\alpha}{}^{\gamma} + \lambda_{\gamma\alpha\beta} l^{\gamma} l^{\beta} = 0 \end{aligned}$$

b) Osim veza koje postoje izmedju diskontinuiteta samih promenljivih, mogu se, u opštoj relativnosti, proučiti i neke koje se na jednom Alfven-ovom udarnom talasu mogu uspostaviti izmedju diskontinuiteta drugih izvoda vektora u^{α} i h^{α}, i to pomoću Ricci-eve identičnosti. Primenimo tu identičnost na neki proizvoljni vektor v^{α}:

$$\nabla_\beta \nabla_\gamma v_\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\beta v_\alpha = -R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} v_\sigma$$

Pomoću kontrakcije dobićemo:

(9.22) $$\nabla_\alpha \nabla_\beta v^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\alpha v^\alpha = R^{\alpha}_{\beta} v_\alpha$$

Primenimo tu identičnost na vektore u_α i h_α i pomnožimo redom te izraze sa ℓ^β i V^β, i posmatrajmo diskontinuitete desnih strana. Za Alfven-ov udar ćemo imati, posle izvesnih sredjivanja:

(9.23)
$$\ell^\alpha[\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \nabla_\beta u^\beta] = \ell^\alpha[R_{\alpha\beta} u^\beta] =$$
$$= -\varkappa[(\tfrac{1}{2}c^2 r f + q)\tfrac{1}{\eta}] = 0,$$
$$\ell^\alpha[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\beta - \nabla_\alpha \nabla_\beta h^\beta] = \ell^\alpha[R_{\alpha\beta} h^\beta] =$$
$$= \varkappa[(c^2 r f - \mu|h|^2 - 2p)\eta] = 0,$$
$$V^\alpha[\nabla_\beta \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \nabla_\beta u^\beta] - V^\alpha[R_{\alpha\beta} u^\beta] =$$
$$= -\varkappa[(c^2 r f + \mu|h|^2 + 2p)\eta] = 0,$$
$$V^\alpha[\nabla_\beta \nabla_\alpha h^\beta - \nabla_\alpha \nabla_\beta h^\beta] = V^\alpha[R_{\alpha\beta} h^\beta] =$$
$$= \varkappa[(\tfrac{1}{a}c^2 f - \tfrac{1}{2}\mu \tfrac{a}{r}|h|^2 - a\tfrac{p}{r})|h|^2] = 0.$$

Obrnuto, posmatrajmo jedan netangentni udarni talas za koji imamo prve tri veze (9.23). Ako prvo izvršimo oduzimanje a zatim sabiranje druge i treće od tih veza, imaćemo:

(9.24)
$$[r f \eta] = 0,$$
$$[q \eta] = 0.$$

Prvu vezu (9.23) možemo pisati ovako:

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}c^{4}f\eta+q\eta\right)\frac{1}{\rho\eta}\right]=0$$

Usled (9.24) ta veza će postati:

$$\left(\tfrac{1}{2}c^{4}\rho f+q\right)\eta\left[\frac{1}{\rho\eta}\right]=0$$

Izraz u prvoj zagradi različit je od nule jer su i gustina i funkcija-indeks i totalni pritisak različiti od nule (netangentni udarni talas). Tako da dobijamo:

(9.25) $$[\rho\eta]=0$$

Mi smo ovaj uslov već imali u odeljku 8, veza (8.10), i on je povlačio $[V]=0$, tj zaključak da se radi o Alfven-ovom udarnom talasu. Ovo smo sve dobili koristeći prve tri veze (9.23). Otud:

<u>Potreban i dovoljan uslov za to da magnetohidrodinamički udarni talas u opštoj relativnosti bude Alfven-ov jeste da budu zadovoljena prva tri od sledećih uslova:</u>

(9.23') $$\begin{aligned} &l^{\beta}\left[\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}u^{\alpha}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}u^{\alpha}\right]=0\\ &l^{\beta}\left[\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}h^{\alpha}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}h^{\alpha}\right]=0\\ &V^{\beta}\left[\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}u^{\alpha}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}u^{\alpha}\right]=0\\ &V^{\beta}\left[\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}h^{\alpha}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}h^{\alpha}\right]=0 \end{aligned}$$

II DEO

10) Magnetohidrodinamički infinitezimalni talasi.

U ovom delu rada prelazimo na magnetohidrodinamičke infinitezimalne talase, koje ćemo mahom zvati samo talasi, za razliku od udarnih talasa ili udara. Napominjemo da udarne talase nećemo više razmatrati.

Osnovno svojstvo talasa je to što su sve veličine koje posmatramo neprekidne na površinama talasnih frontova. Ranijim diskontinuitetima osnovnih veličina: brzine, magnetnog polja, gustine, pritiska i ostalih termodinamičkih promenljivih sad odgovaraju poremećaji (perturbacije) prvih kovarijantnih izvoda tih veličina. Odstupanja izvoda izražena su jednim diferencijalnim operatorom-operatorom infinitezimalnih poremećaja, koji se uvodi za osnovne jednačine magnetohidrodinamike na način analogan onom na koji se uvode diskontinuiteti samih osnovnih veličina pri udarnim talasima&

Pre nego što pristupimo ispitivanju samih talasa, navešćemo ukratko osnovne osobine diferencijalnog operatora koji se pojavljuje. U relativističkoj magnetohidrodinamici ga je primenio Lichnerowicz u svom radu [21] , medjutim, on ga je sistematski izložio i primenio kasnije, u kursu predavanom na Collège de France 1967 godine.

Prilikom izlaganja osnovnih svojstava pomenutog diferencijalnog operatora susrešćemo se s pojmom tenzora-distribucije. Ne ulazeći u izlaganje osobina distribucija, navodimo to da se o ovim uopštenim funkcijama, s kojima se mnogo operiše u savremenoj matematičkoj fizici, može naći veoma dobro i sažeto izložena teorija u monografiji [18], čiji je autor, Schwartz, jedan od tvoraca teorije distribucija.

Poći ćemo od tenzora-distribucije δT koji je korespondentan tenzoru T preko diferencijalnog operatora kovarijantnog diferenciranja ∇ na sledeći način:

$$\tilde{\delta}[\nabla T] = \nabla(\tilde{\delta}(T)) + \ell\,\delta T, \tag{10.1}$$

gde $\tilde{\delta}$ označava Dirac-ov delta-simbol, ℓ normalu na talasu, a δ diferencijalni operator pomoću kojeg se δT korespondira tenzoru T. Kao i ranije, zagrade su oznaka diskontinuiteta.

Hipoteze koje činimo o tenzoru T su sledeće: T je neprekidan tenzor. On je klase C^2 u oblastima stanja koje prethode i stanja koje sleduje talasu Σ (obeležićemo sa Σ hiperpovršinu infinitezimalnog talasa). Pri takvim hipotezama, formula (10.1) se svodi na:

$$\tilde{\delta}[\nabla_\alpha T] = \ell_\alpha\,\delta T \tag{10.2}$$

Vidimo da je tenzora-distribucija δT korespondentan tenzoru T preko diskontinuiteta kovarijantnog izvoda $[\nabla T]$. δT na taj način definiše distribuciju (v. [18], glava II).

Jednačine koje odgovaraju sistemima (3.2), (3.3) i (3.4) za udarne talase imaće za infinitezimalne talase sledeći oblik:

$$\delta(\rho u^{\alpha})\,\ell_\alpha = 0, \tag{10.3}$$

(10.4) $$\delta(u^{\alpha}h^{\beta}-u^{\beta}h^{\alpha})l_{\alpha}=0,$$

(10.5) $$\delta T^{\alpha\beta}l_{\alpha}=0.$$

Sad imamo osnovne uslove koji povezuju magnetohidrodinamičke veličine na talasu $\mathcal{G}$. Napominjemo da je "poremećena" sredina shvaćena tako da se po njoj prostire beskonačno mnogo infinitezimalnih poremećaja koji se javljaju na hiperpovršinama φ, koje obrazuju familiju rešenja osnovne diferencijalne jednačine odredjene vrste talasa.

Za osnovnu termodinamičku relaciju (1.4) napisanu u obliku (2.7):

$$\theta dS = c^{2}d\rho - \frac{dp}{n}$$

imaćemo na talasu:

$$\theta\delta S l_{\alpha}dx^{\alpha} = (c^{2}\delta\rho - \frac{\delta p}{n})l_{\alpha}dx^{\alpha}.$$

Ukoliko idemo po talasnom frontu $\mathcal{G}$, ova veza će biti zadovoljena identički zbog $l_{\alpha}dx^{\alpha}=\partial_{\alpha}\varphi dx^{\alpha}=0$ ($\varphi = C$ je jednačina hiperpovršine). Medjutim, u opštem slučaju,, za proizvoljno izabrane dx^{α}, imaćemo $l_{\alpha}dx^{\alpha}\neq 0$,, pa otud:

(10.6) $$\theta\delta S = c^{2}\delta\rho - \frac{\delta p}{n}.$$

Napišimo jednačine (10.4) u razvijenom obliku:

(10.4') $$\delta(u^{\alpha}l_{\alpha})h^{\beta} + u^{\alpha}l_{\alpha}\delta h^{\beta} - \eta\delta u^{\beta} - u^{\beta}\delta\eta = 0.$$

Ako se ove jednačine pomnože sa u_β , dobićemo:

(10.7) $$u^\alpha \ell_\alpha u_\beta \underline{\delta} h^\beta - \underline{\delta}\eta = 0 .$$

Ovde je iskorišćena činjenica da je:

$$u^\beta \underline{\delta} u_\beta = 0$$

zbog konstantnog intenziteta četvorobrzine. Leva strana gornjeg sleduje iz $\underline{\delta}(u^\alpha u_\alpha) = 0$. Tenzor $g_{\alpha\beta}$ je, po ~~[illegible]~~ hipotezi, neprekidan, kao i njegovi prvi izvodi. Za infinitezimalne talase čak ni drugi izvodi $g_{\alpha\beta}$ ne moraju biti prekidni. Stoga on podiže indekse pod operatorom $\underline{\delta}$ bez ikakvih posledica. Isto tako vektori u^α i h^α su ortogonalni pre i posle svakog talasa, pa je:

(10.8) $$\underline{\delta}(u^\alpha h_\alpha) = u^\alpha \underline{\delta} h_\alpha + h_\alpha \underline{\delta} u^\alpha = 0 .$$

Ako pomnožimo (10.4') sa h_β imaćemo:

(10.9) $$|h|^2 \underline{\delta}(u^\alpha \ell_\alpha) + \frac{1}{2} u^\alpha \ell_\alpha \underline{\delta}|h|^2 + \eta h_\alpha \underline{\delta} u^\alpha = 0 .$$

Jednačine (10.5), kad se ispišu eksplicitno (imajući u vidu (10.3)) glasiće:

(10.5') $$(c^2 \varkappa f + \mu |h|^2) u^\alpha \ell_\alpha \underline{\delta} u^\beta + c^2 \varkappa u^\alpha \ell_\alpha u^\beta \underline{\delta} f + \mu u^\alpha \ell_\alpha u^\beta \underline{\delta}|h|^2 +$$
$$+ \mu |h|^2 u^\beta \underline{\delta}(u^\alpha \ell_\alpha) - \ell^\beta \underline{\delta}(p + \tfrac{1}{2}\mu |h|^2) - \mu (h^\beta \underline{\delta}\eta + \eta \underline{\delta} h^\beta) = 0 .$$

Ako ovo pomnožimo sa u_β , i grupišemo članove, služeći se opet sa (10.3), imaćemo:

(10.10) $$a\left(c^2 \underline{\delta} f - \frac{\underline{\delta} p}{\varkappa}\right) + \frac{1}{2}\mu u^\alpha \ell_\alpha \underline{\delta}|h|^2 + \mu |h|^2 \underline{\delta}(u^\alpha \ell_\alpha) - \mu \eta u_\alpha \underline{\delta} h^\alpha = 0 .$$

Na osnovu (10.9) i (10.8), od ove jednačine ostaće samo:

(10.11) $$c^2\delta f - \frac{\delta p}{\eta} = 0$$

Iz (10.6) sleduje tada:

(10.12) $$\delta S = 0 .$$

Imamo, dakle, zaključak da pri prostiranju infinitezimalnih magnetohidrodinamičkih talasa proizvoljne vrste entropija ostaje invarijantna (v. [11]).

11) Infinitezimalni Alfven-ovi talasi.

Način na koji ćemo pristupiti infinitezimalnim Alfven-ovim talasima nešto je drukčiji od onog koji smo koristili za udarne talase. Medjutim, posledice će biti potpuno ekvivalentne u pogledu invarijantnosti pojedinih vektora ili skalara.

Pomnožimo jednačine (10.5) sa l_β. Veza koju dobijamo, razvijena, glasi:

$$(c^2\eta f + \mu|h|^2)u^\alpha l_\alpha \delta(u^\beta l_\beta) + c^2\eta(u^\alpha l_\alpha)^2\delta f + \mu|h|^2 u^\alpha l_\alpha \delta(u^\beta l_\beta) +$$
$$+ \mu(u^\alpha l_\alpha)^2\delta|h|^2 + \delta p + \frac{1}{2}\mu\delta|h|^2 - 2\mu\eta\delta\eta = 0 .$$

Ako δp izrazimo iz (10.11) i grupišemo neke članove, imaćemo:

(11.1) $$c^2\eta f u^\alpha l_\alpha \delta(u^\beta l_\beta) + c^2\eta\,[1 + (u^\alpha l_\alpha)^2]\,\delta f + \frac{1}{2}\mu\delta|h|^2 +$$
$$+ 2\mu|h|^2 u^\alpha l_\alpha \delta(u^\beta l_\beta) + \mu(u^\alpha l_\alpha)^2\delta|h|^2 - 2\mu\eta\delta\eta = 0 .$$

Da bismo sredili ovaj izraz, vratimo se jednačini (10.9). Ona se može izmeniti pomoću (10.7) i (10.8), tako da glasi:

(11.2) $$|h|^2 (u^\alpha l_\alpha)\underline{\delta}(u^\beta l_\beta) + \frac{1}{2}(u^\alpha l_\alpha)^2\underline{\delta}|h|^2 - \eta\underline{\delta}\eta = 0 .$$

Na osnovu ove veze, (11.1) će se svesti na:

(11.1') $$c^2\varkappa f u^\alpha l_\alpha \underline{\delta}(u^\beta l_\beta) + c^2\varkappa\{1+(u^\alpha l_\alpha)^2\}\underline{\delta} f + \frac{1}{2}\mu\underline{\delta}|h|^2 = 0 .$$

Ako iz veze (11.2) izrazimo $\underline{\delta}|h|^2$ pomoću poremećaja drugih veličina, pa to smenimo u (11.1') imaćemo najzad:

(11.1") $$u^\alpha l_\alpha\{c^2\varkappa f(u^\gamma l_\gamma)^2 - |h|^2\}\underline{\delta}(u^\beta l_\beta) + c^2\varkappa(u^\alpha l_\alpha)^2\{1+(u^\alpha u_\alpha)^2\}\underline{\delta} f + \eta\underline{\delta}\eta = 0 .$$

Sad treba da iskoristimo termodinamičke relacije koje smo dobili. U (10.11) smo imali $\underline{\delta}p$ izraženo pomoću $\underline{\delta}f$. Ako smatramo f i S za osnovne termodinamičke promenljive, jedna od njih, i to S, na osnovu (10.12) biće invarijantna. Ako izrazimo poremećaj gustine $\varkappa$ pomoću tih osnovnih veličina, imaćemo:

(11.3) $$\underline{\delta}\varkappa = \varkappa'_f\underline{\delta}f + \varkappa'_S\underline{\delta}S = \varkappa'_f\underline{\delta}f .$$

S druge strane, ako razvijemo (10.3), imaćemo:

$$u^\alpha l_\alpha\underline{\delta}\varkappa + \varkappa\underline{\delta}(u^\alpha l_\alpha) = 0 .$$

Kad ovo smenimo u (11.3), dobićemo, posle sredjivanja:

(11.3') $$\varkappa\underline{\delta}(u^\beta l_\beta) + (u^\beta l_\beta)\varkappa'_f\underline{\delta}f = 0 .$$

Veze (10.3), (10.4), (10.5) iskazuju, ustvari, isto kao i veze (3.2), (3.3), (3.4) invarijantnost skalara a i vektora V_β i W_β. Zaista, pošto je l_α očigledno invarijantno (pravac normale, posmatran bilo s jedne, bilo s druge strane σ, je isti), to jednačine (10.3),..., (10.5) povlače:

(10.3") $\delta a = 0,$

(10.4") $\delta V^\beta = 0,$

(10.5") $\delta W^\beta = 0.$

Skalarni proizvod invarijantnog vektora W^β i invarijantnog vektora V^β davao nam je jednu skalarnu invarijantu, koja je, po formuli (4,6), bila jednaka:

$$W^\beta V_\beta = c^2 a f \eta .$$

Njen poremećaj je očigledno jednak nuli. Otud:

(11.4) $\eta\,\delta f + f\,\delta\eta = 0.$

Napišimo sad grupisano veze (11.1"), (11.3') i (11.4):

$$(u^\alpha l_\alpha)\{c^2 a f (u^\beta l_\beta)^2 - (h)^2\}\delta(u^\beta l_\beta) + c^2 a (u^\alpha l_\alpha)^2\{1+(u^\beta l_\beta)^2\}\delta f + \eta\,\delta\eta = 0$$

$$\eta\,\delta(u^\beta l_\beta) + u^\alpha l_\alpha V_\beta\,\delta f = 0$$

$$\eta\,\delta f + f\,\delta\eta = 0 .$$

Ovaj sistem jednačina je linearan i homogen u odnosu na $\delta(u^\alpha l_\alpha)$, δf, $\delta\eta$. Postoje dve mogućnosti: ili je determinanta koeficijenata jednaka nuli, ili su jednaki nuli poremečaji koji uz njih stoje. U prvom slučaju dobili bismo jednu parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda i četvrtog stepena u odnosu na l_α ($= \partial_\alpha \varphi$) gde je φ = const. konačna jednačina hiperpovršine σ. To je slučaj magnetoakustičnih talasa (ondes magnétosoniques) u čije se ispitivanje ovde nećemo upuštati. U drugom slučaju imaćemo Alfven-ove talase.

Ako napišemo dobijeni uslov za Alfven-ov infinitezimalni talas:

$$\underset{\sim}{\delta}(u^\alpha l_\alpha)=0, \quad \underset{\sim}{\delta}\eta=0, \quad \underset{\sim}{\delta}f=0,$$

i to zamenimo u (11.2) imaćemo:

$$\underset{\sim}{\delta}|h|^2=0.$$

Iz (11.3) biće:

$$\underset{\sim}{\delta}r=0.$$

Ako sad izaberemo jedan pogodan ortonormirani lokalni reper, tako da se jedinični vektor $\vec{e}_{(1)}$ podudara s jediničnim vektorom normale $\vec{l}$, tačno onako kao što smo činili u formulama (5.6), mi ćemo, s obzirom na invarijantnost veličina koje smo ~~izmeli~~ naveli, imati, kad projektujemo jednačine (10.4) i (10.5) na ose ovog repera:

$$h^1\underset{\sim}{\delta}u^i-u^1\underset{\sim}{\delta}h^i=0$$

(11.5)

$$(c^2rf+\mu|h|^2)u^1\underset{\sim}{\delta}u^i-\mu h^1\underset{\sim}{\delta}h^i=0.$$

Determinanta ovog sistema daje, po prelasku na proizvoljni lokalni koordinatni sistem:

(11.6) $$(c^2rf+\mu|h|^2)(u^\alpha\partial_\alpha\varphi)^2-\mu(h^\alpha\partial_\alpha\varphi)^2=0,$$

dakle diferencijalna jednačina jednačinu Alfven-ovih talasa (6 (6.10). Ima i u slučaju infinitezimalnih talasa, dve mogućnosti: talase vrste (A) i talase vrste (B), već prema tome da li je prilikom takvog talasa invarijantan vektor:

$$A^{\alpha} = \beta u^{\alpha} + h^{\alpha} \qquad , \left(\beta = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(c^{2} r f + \mu |h|^{2}\right)}\right)$$

ili vektor:

$$B^{\alpha} = \beta u^{\alpha} - h^{\alpha}$$

Ovo važi potpuno ekvivalentno onom štp je izloženo za udarne talase (odeljak 6). Isto tako je determinanta sistema (11.5), kad se izračuna, na osnovu (5.8′) jednaka $a^{2}\alpha$, pa je, prema tome $\alpha = \alpha' = 0$ potreban i dovoljan uslov za to da jedan infinitezimalni magnetohidrodinamički talas bude Alfven-ov.

12) Dalja svojstva infinitezimalnih Alfven-ovih talasa.

a) Za infinitezimalne Alfven-ove talase važe isti zaključci koje smo izveli u odeljcima 7, 8. Zaista, za tangentne komponente vektora u^{α} i h^{α} u pravcu vektora V_{α} imamo, na osnovu zaključaka iz prethodnog odeljka:

$$\delta(u^{\alpha}V_{\alpha}) = \delta\eta = 0,$$

(12.1)

$$\delta(h^{\alpha}V_{\alpha}) = \delta\left(\frac{|h|^2}{\eta}\right) = 0.$$

Isto tako imamo zaključak za vektor površinske gustine električnog protoka k^{β} na hiperpovršini $\mathcal{G}$ koji se pojavljuje kao posledica perturbacije (poremećaja) vektora J^{β}:

$$J^{\beta} = \nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_{\alpha}(u_{\gamma}h_{\delta})$$

Otud imamo:

$$k^{\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\alpha}\delta(u_{\gamma}h_{\delta}) = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} l_{\alpha}(\delta u_{\gamma}h_{\delta} + u_{\gamma}\delta h_{\delta}).$$

Za Alfven-ov talas vrste (A) biće, kad smenimo δh^{β} pomoću $-\beta\delta u^{\beta}$:

(12.2) $$k^{\beta} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} l_{\alpha}(\delta u_{\gamma}h_{\delta} + \beta\delta u_{\gamma}u_{\delta}) = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} l_{\alpha}\delta u_{\gamma}A_{\delta}.$$

Odgovarajuće bi važilo za talase vrste (B) (A^{α} odn. B^{α} je pri odgovarajućoj vrsti talasa kolinearan s V^{α}).

Otud imamo:

<u>Pri Alfven-ovom infinitezimalnom talasu tangentne komponente izvoda vektora u^{α} i h^{α} u pravcu V^{α} ostaju invari-</u>

jantne. Isto tako vektor infinitezimalne površinske gustine električnog protoka δh^{α} različit je od nule i ortogonalan na l_α, δu_α (odn. δh_α), V_α i W_α n(koji pripada lokalno 2-rani l_α, V_α).

b) Sad ćemo ispitati, ekvivalentno onom što smo imali u odeljku 8, koji su sve infinitezimalni talasi za koje važi veza:

$$\delta h^{\beta} + \gamma \delta u^{\beta} = 0, \tag{12.3}$$

gde je γ proizvoljni skalar.

Ako pomnožimo sa u_β gornji izraz, na osnovu invarijantnosti intenziteta vektora u_β, i na osnovu (10.8) imaćemo:

$$h_\beta \delta u^{\beta} = 0. \tag{12.4}$$

Ako sad pomnožimo (12.3) sa h^{β}, imaćemo, na osnovu ovog:

$$h_\beta \delta h^{\beta} = 0, \quad \text{odn.} \quad \delta |h|^2 = 0.$$

Iz (10.7) imaćemo, pomoću (12.4) i (10.8):

$$\delta \eta = 0.$$

Iz (11.2) će tada biti:

$$\delta (u^{\alpha} l_\alpha) = 0,$$

tako da jednačina kontinuiteta (10.3) daje:

$$\delta \kappa = 0.$$

Jednačina (10.4) će se svesti na:

$$(u^{\alpha} l_\alpha) \delta h^{\beta} - \eta \delta u^{\beta} = 0.$$

Kad ovde smenimo uslov(12.3) imaćemo:

$$\frac{a}{h}\gamma + \eta = 0 . \tag{12.5}$$

Jednačine kretanja (10.5') svešće se, pod gornjim uslovima, na:

$$\mu\beta^2 \frac{a}{h} \delta u^\beta + c^2 \eta u^\alpha \ell_\alpha u^\beta \delta f + \mu \eta \gamma \delta u^\beta = 0 ,$$

(gde je δh^α zamenjeno sa $-\gamma\delta u^\alpha$). Pošto je δ uvek invarijantno, to će nam ostale termodinamičke promenljive biti invarijantne (pokazali smo u odeljku 6 da invarijantnost dve medjusobno nezavisne promenljive, pod hipotezom stišljivosti povlači invarijantnost svih ostalih). Tako da ćemo imati:

$$\beta^2 \frac{a}{h} + \eta\gamma = 0 .$$

Iz (12.5) i ovog izraza ćemo dobiti:

$$\gamma = \pm \beta .$$

Imamo zaključak analogan onom iz odeljka 8:

<u>Alfven-ovi talasi su jedini magnetohidrodinamički talasi koji zadovoljavaju vezu oblika:</u>

$$\delta h_\alpha + \gamma \delta u_\alpha = 0 .$$

13) Bezvrtložno strujanje i Alfven-ovi talasi.

Pokazaćemo jednu posledicu prostiranja ovakvih talasa.

Diferencijalne jednačine strujanja (2.2) mogu se dovesti u jedan oblik koji će nam omogućiti da izvršimo podelu na vrtložna i bezvrtložna strujanja. Način na koji će biti uvedeni vektor i tenzor vrtloženja analogan je načinu na koji su te veličine bile uvedene za idealni fluid, idealni naelektrisani fluid neprovodnik i idealni naelektrisani fluid provodnik (konačne provodljivosti) čiji je ovaj granični slučaj. Napomenimo da za ovakav fluid (magnetohidrodinamički) ne možemo neposredno formirati taj tenzor iz prethodnog, jer je σE^{ρ} neodredjen izraz. Isto tako, i za fluid konačne provodljivosti, što smo prethodno naveli, držali smo se jedine moguće analogije s prethodnim slučajevima (naelektrisani fluid neprovodnik), a to je klasifikacija prema lokalnom rangu jedne antisimetrične matrice (v. [8]).

Posmatrajmo magnetohidrodinamičku sredinu poremećenu Alfven-ovim talasima. Eksplicitno napisane jednačine strujanja (2.2) glase:

(13.1) $$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = \nabla_\alpha (n f u^\alpha) u_\beta + n f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \partial_\beta p + \nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = 0$$

(stavili smo $c^2 = 1$ radi jednostavnosti).

Pogledajmo divergenciju elektromagnetnog dela τ^α_β tenzora energije T^α_β. Posle izvesnih jednostavnih sredjivanja na kojima se nećemo zadržavati (v. [8]) dobićemo to da se divergencija $\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta$ može napisati u obliku:

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = \mu G_{\rho\beta} \nabla_\alpha G^{\alpha\rho}.$$

Na osnovu Maxwell-ovih jednačina (1.9), kad se divergencija tenzora $G^{\alpha\rho}$ izrazi pomoću vektora električnog protoka, gornji izraz će glasiti:

(13.2) $$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = \mu G_{\rho\beta} J^\rho.$$

Pomoću ove veze i jednačina kontinuiteta (2.1) moći ćemo da (13.1) napišemo u obliku:

(13.1′) $$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = n f u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + n u_\beta u^\alpha \partial_\alpha f - \partial_\beta p + \mu G_{\alpha\beta} J^\alpha = 0 \,.$$

Uvešćemo vektor $C^\alpha = f u^\alpha$ definisan kao hidrodinamički protok (v. [2]). Pomoću njega će gornje jednačine glasiti:

$$u^\alpha \nabla_\alpha C_\beta - \frac{\partial_\beta p}{n} + \frac{\mu}{n} G_{\alpha\beta} J^\alpha = 0 \,.$$

Primenimo termodinamičku vezu (10.6) na $\frac{\partial_\beta p}{n}$. Tada ćemo imati:

(13.1″) $$u^\alpha \nabla_\alpha C_\beta - \partial_\beta f + \Theta \partial_\beta S + \frac{\mu}{n} G_{\alpha\beta} J^\alpha = 0 \,.$$

Pre svega može se pisati:

$$u^\alpha \nabla_\alpha C_\beta - \partial_\beta f = u^\alpha (\nabla_\alpha C_\beta - \nabla_\beta C_\alpha) \,.$$

Ako imamo u vidu vezu (2.8) koja glasi:

$$u^\alpha \partial_\alpha S = 0,$$

veza (13.1″) će postati:

(13.3) $$u^\alpha (\nabla_\alpha C_\beta - \nabla_\beta C_\alpha + \Theta u_\alpha \partial_\beta S - \Theta u_\beta \partial_\alpha S) + \frac{\mu}{n} G_{\alpha\beta} J^\alpha = 0.$$

Izraz u zagradi je antisimetričan, i za neutralni fluid se smatra kao tenzor vrtloženja (ima autora koji zahtevaju da strujanje bude i izentropsko, $S = \text{const.}$, da bi mogli da izvrše klasifikaciju strujanja, pa smatraju samo rotor C_α za "pravi" tenzor vrtloženja). Naš cilj je da i izraz van zagrada u gornjim vezama predstavimo kao skalarni proizvod vektora u^α i nekog antisimetričnog tenzora. Stoga ćemo napisati izraz za $G_{\alpha\beta} J^\alpha$ na osnovu (1.7′):

$$G_{\alpha\beta}J^{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, u^{\gamma} h^{\delta} J^{\alpha},$$

pa će jednačine (13.3) glasiti:

(13.3') $$u^{\alpha}(\nabla_{\alpha}C_{\beta} - \nabla_{\beta}C_{\alpha} + \Theta u_{\alpha}\partial_{\beta}S - \Theta u_{\beta}\partial_{\alpha}S + \frac{\mu}{\pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\gamma}h^{\delta}) = 0 .$$

Izraz u zagradi smatraćemo kao magnetohidrodinamički tenzor vrtloženja. On je analogan tenzoru vrtloženja naelektrisanog fluida neprovodnika ili provodnika. U slučaju da je on jednak nuli imamo bezvrtložno strujanje:

(13.4) $$\nabla_{\alpha}C_{\beta} - \nabla_{\beta}C_{\alpha} + \Theta(u_{\alpha}\partial_{\beta}S - u_{\beta}\partial_{\alpha}S) + \frac{\mu}{\pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\gamma}h^{\delta} = 0 .$$

Ako se kroz fluid prostiru talasi, pojaviće se poremećaji izvoda koji se nalaze u jednačinama kretanja, i oni će zadovoljavati, u slučaju bezvrtložnog strujanja, a na osnovu (13.4), veze oblika:

$$\bar{\delta}[\nabla_{\alpha}C_{\beta} - \nabla_{\beta}C_{\alpha}] + \Theta u_{\alpha}\bar{\delta}[\partial_{\beta}S] - \Theta u_{\beta}\bar{\delta}[\partial_{\alpha}S] + \frac{\mu}{\pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\delta}[J^{\gamma}]h^{\delta}$$

($\bar{\delta}$ je Dirac-ova funkcija).

Kad ispišemo eksplicitno ove veze, imajući u vidu invarijantnost izvoda entropije S iz (10.12), dobićemo:

$$l_{\alpha}\delta C_{\beta} - l_{\beta}\delta C_{\alpha} + \frac{\mu}{\pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l_{\eta}\delta G^{\eta\gamma}h^{\delta} = 0 .$$

Posmatrajmo fluid kroz koji se prostiru Alfven-ovi talasi. Pošto je tada f invarijantno, imaćemo:

$$f(l_{\alpha}\delta u_{\beta} - l_{\beta}\delta u_{\alpha}) + \frac{\mu}{\pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l_{\eta}\delta G^{\eta\gamma}h^{\delta} = 0 .$$

Ako ovaj izraz pomnožimo skalarno sa h^{α} , dobićemo, zbog a tisimetrije tenzora $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ i veze (12.4):

$$f h^{\alpha} l_{\alpha} \delta u_{\beta} = 0$$

Ukoliko bi $h^{\alpha} l_{\alpha}$ bilo jednako nuli (magnetno polje tangentno na talasu), tada bi na osnovu (11.6) i $u^{\alpha} l_{\alpha}$ bilo jednako nuli, i imali bismo t. zv. tangentni talas, specijalni slučaj koji smo u ovom radu od početka odbacili. Tako će biti:

$$\delta u_{\beta} = 0 \quad \therefore \quad \delta h_{\beta} = 0 \qquad \text{(na osnovu (12.3))}$$

Dakle:

<u>Magnetohidrodinamički fluid kroz koji se prostiru Alfven-ovi talasi ne može strujati bezvrtložno.</u>

14) Alfven-ovi talasi u opštoj relativnosti.

U odeljku 9 smo ispitivali udarne talase u opštoj relativnosti, i iz veza koje zadovoljavaju Ricci-ev tenzor krivine izveli dva potrebna i dovoljna uslova za to da jedan magnetohidrodinamički udarni talas bude Alfven-ov. Jedan od tih uslova možemo, potpuno analogno, formulisati i za obične (tj. infinitezimalne talase) talase. Drugi uslov, izveden pomoću Ricci-eve identičnosti, ne važi za infinitezimalne talase. Umesto njega, izvešćemo vezu u kojoj su dati potrebni i dovoljni uslovi za to da jedan talas bude Alfven-ov, i to pomoću poremećaja <u>tenzora konformne krivine</u>.

a) Podjimo od poremećaja gravitacionih jednačina:

$$\underset{=}{\delta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \underset{=}{\delta} R = -\varkappa \underset{=}{\delta} T_{\alpha\beta}$$

Na osnovu (10.5) množenje s vektorom normale na talasu l^{α} će nam dati:

(14.1) $$\underset{=}{\delta} R_{\alpha\beta} l^{\alpha} - \underset{=}{\delta} R\, l_{\beta} = 0$$

Budući da je

$$R = \varkappa (c^2 \varkappa f - 4p),$$

to će u slučaju Alfven-ovog talasa, kada su sve termodinamičke promenljive invarijantne, biti:

(14.2) $$\underset{=}{\delta} R = 0 .$$

Dakle, analogno vezi (9.3):

(14.3) $$\underset{=}{\delta} R_{\alpha\beta} l^{\alpha} = 0$$

Za poremećaj Ricci-evog tenzora krivine na ovakvom talasu ćemo imati (slično odeljku 9):

$$\underset{=}{\delta} R_{\alpha\beta} = -\varkappa\mu \{\beta^2 (\underset{=}{\delta} u_{\alpha} u_{\beta} + u_{\alpha} \underset{=}{\delta} u_{\beta}) - (\underset{=}{\delta} h_{\alpha} h_{\beta} + h_{\alpha} \underset{=}{\delta} h_{\beta})\}$$

Ako je talas vrste (A), imaćemo, kad smenimo $\underset{=}{\delta} h^{\alpha}$ sa $-\beta \underset{=}{\delta} u^{\alpha}$ u gornjem izrazu:

(14.4) $$\underset{=}{\delta} R_{\alpha\beta} = -\varkappa\mu\beta \{\underset{=}{\delta} u_{\alpha} A_{\beta} + A_{\alpha} \underset{=}{\delta} u_{\beta}\} .$$

Odgovarajuće bi važilo za talase vrste (B). Vektor infinitezimalne površinske gustine električnog protoka k^{β} bio je (12.2):

$$k^{\beta} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} l_{\alpha} \underset{=}{\delta} u_{\gamma} A_{\delta} .$$

Na osnovu ovog izraza i (14.4) očigledno je da će biti:

(14.5) $$\delta R_{\alpha\beta} k^{\alpha} = 0 ,$$

što isto tako važi za talase vrste (B). Uslovi (14.3) i (14.5) su potrebni za jedan talas ovakve vrste. Da li su oni i dovoljni?

Prvo ćemo ispitati vektor k^{α} u slučaju da se radi o jednom ne-Alfvén-ovom talasu. Pošto su na površini infinitezimalnog talasa invarijantni isti vektori i skalari kao i u slučaju udarnog talasa, što sleduje iz jednačina (10.3), (10.4) i (10.5), to ćemo istim rezonovanjem kao i u odeljku 9 doći do veze tipa (9.6), s tim što će se umesto diskontinuiteta $\left[\frac{1}{\alpha}\right]$ pojavljivati poremećaj $\delta\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:

$$k^{\alpha} = \frac{1}{a^2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\beta} V_{\gamma} W_{\delta}\, \delta\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Pošto smo u odeljku 12 pod a) već pokazali ortogonalnost k^{α} na vektorima l_{α}, V_{α} i W_{α}, to će ovo svojstvo površinske gustine dakle važiti (i za Alfvén-ove i za druge talase). Napominjemo i to da zbog perturbacije α', koja je <u>uvek</u> različita od nule za ne-Alfvén-ove talase, i k^{α} mora biti različit od nule u tim slučajevima, dok je za Alfvén-ove talase isto tako različit od nule, što se jasno vidi iz izraza (12.2) i činjenice da je δu_{α} uvek različit od nule. Napišimo eksplicitno izraz za ortogonalnost vektora k^{α} na vektorima V_{α} i W_{α} (imajući u vidu da je $k^{\alpha} l_{\alpha} = 0$):

$$\eta k^{\alpha} u_{\alpha} - \frac{h_{\lambda}}{\eta} k^{\alpha} h_{\alpha} = 0 ,$$

$$\frac{h_{\lambda}}{\eta}\left(c^2 n f + \mu |h|^2\right) k^{\alpha} u_{\alpha} - \mu \eta k^{\alpha} h_{\alpha} = 0 ,$$

što potpuno odgovara izrazima iz odeljka 9. Imamo dve mogućnosti: ili su $k^\alpha u_\alpha$ i $k^\alpha h_\alpha$ jednaki nuli, ili je determinanta toga sistema jednaka nuli. U drugom slučaju imamo:

$$\beta^2 \frac{\lambda^2}{\kappa^2} - \eta^2 = 0 ,$$

što je diferencijalna jednačina Alfvén-ovih talasa (7.1) pomoću već ranije korišćenih oznaka. Potreban uslov za to da jedan talas ne bude Alfvén-ov jeste dakle:

(14.6) $$k^\alpha u_\alpha = k^\alpha h_\alpha = 0 .$$

Ako hoćemo da ispitamo da li i ne-Alfvén-ovi talasi zadovoljavaju veze (14.3) i (14.5), treba da podjemo od uslova (14.6). Pošto su vektori V_α i W_α invarijantni, možemo pisati:

$$\delta V_\alpha = \delta\eta\, u_\alpha + \eta\,\delta u_\alpha - a\,\delta\left(\frac{1}{\kappa}\right) h_\alpha - \frac{a}{\kappa}\,\delta h_\alpha = 0 ,$$

$$\delta W_\alpha = a\mu\,\delta\left(\frac{\beta^2}{\kappa}\right) u_\alpha + a\mu\frac{\beta^2}{\kappa}\,\delta u_\alpha - \mu\,\delta\eta\, h_\alpha - \mu\eta\,\delta h_\alpha - \delta q\, \ell_\alpha = 0 .$$

Ako pomnožimo ovo s k^α, imajući u vidu (14.6), dobićemo:

$$\eta\, k^\alpha \delta u_\alpha - \frac{a}{\kappa} k^\alpha \delta h_\alpha = 0 ,$$

$$\frac{a}{\kappa}\left(c^2 \kappa f + \mu |h|^2\right) k^\alpha \delta u_\alpha - \mu\eta\, k^\alpha \delta h_\alpha = 0$$

Imamo opet dve mogućnosti: ili će talas biti Alfvén-ov, ili ćemo uslov (14.6) dopuniti sa:

(14.7) $$k^\alpha \delta u_\alpha = k^\alpha \delta h_\alpha = 0 .$$

Tako imamo da talas σ, ukoliko može da ne bude Alfvén-ov, mora da zadovolji uslove (14.6) i (14.7).

Vratimo se uslovima (14.3) i (14.5). Iz (14.3) ćemo prvo imati:

(14.8) $$\underline{\delta} R = 0 .$$

Dakle:

(14.9) $$c^2 \underline{\delta}(rf) - 4 \underline{\delta} p = 0 .$$

Kad se ispiše, $\underline{\delta} R_{\alpha\beta}$ glasi:

$$\underline{\delta} R_{\alpha\beta} = \mu(\underline{\delta}\beta^2 u_\alpha u_\beta + \beta^2 \underline{\delta} u_\alpha u_\beta + \beta^2 u_\alpha \underline{\delta} u_\beta) + \underline{\delta}(p - \tfrac{1}{2} c^2 rf - \tfrac{1}{2}\mu |h|^2) g_{\alpha\beta}$$
$$- \mu(\underline{\delta} h_\alpha h_\beta + h_\alpha \underline{\delta} h_\beta)$$

Tako će (14.5) biti:

$$\underline{\delta} R_{\alpha\beta} k^\alpha = \underline{\delta}(p - \tfrac{1}{2} c^2 rf - \tfrac{1}{2}\mu |h|^2) k_\beta = 0 .$$

Na osnovu (14.9) to će dati:

$$\underline{\delta}(p + \tfrac{1}{2}\mu |h|^2) = 0$$

(a obzirom na to da je na svakom talasu $k^\alpha \neq 0$). Ovo znači da je, na osnovu (5.4) i definicije q (v. izraz u zagradi uz (3.3')) i α invarijantno, što je bio uslov za Alfvén-ov talas. Tako imamo:

<u>Potreban i dovoljan uslov za to da jedan magnetohidrodinamički talas u opštoj relativnosti bude Alfven-ov jeste da poremećaj Ricci-evog tenzora zadovoljava veze:</u>

$$\underline{\delta} R_{\alpha\beta} l^\alpha = 0 , \qquad \underline{\delta} R_{\alpha\beta} k^\alpha = 0 .$$

b) Poslednja etapa našeg rada biće ispitivanje da li se, i kako, mogu odraziti poremećaji izazvani jednim Alfven-ovim talasom na tenzor konformne krivine prostor-vremena V_4. Postupićemo na taj način zato što se izmedju izvoda tenzora konformne krivine prostor-vremena i izvoda odgovarajućeg Ricci-evog tenzora može uspostaviti direktna veza, bez posredstva Riemann-Christoffel-ovog tenzora, koji se u opštem slučaju ne može izraziti pomoću tenzora energije.

Tenzor konformne krivine $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ Rieman-ovog prostora V_4 glasi:

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\gamma}R_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R^{\alpha}_{\gamma} - g_{\beta\gamma}R^{\alpha}_{\delta}) +$$
$$+ \frac{1}{6}(\delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma})R$$

Ovaj tenzor zadovoljava sve algebarske identičnosti koje zadovoljava i tenzor $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ (v. [7]). Ako pisanjem indeksa u zagradama ( ) označimo ~~zbir~~ zbir permutovanih članova po indeksima koji stoje izmedju njih, a sa || izuzeće iz tih permutacija članova izmedju njih, imaćemo sledeću relaciju:

$$\nabla_{(\varepsilon}C^{\alpha}{}_{\cdot|\beta|\gamma\delta)} = \frac{1}{2}(g_{\beta(\varepsilon}\nabla_{\gamma}R^{\alpha}_{\cdot\delta)} - g_{\beta(\gamma}\nabla_{\varepsilon}R^{\alpha}_{\cdot\delta)} + \delta^{\alpha}_{(\gamma}\nabla_{\varepsilon}R_{|\beta|\delta)} - \delta^{\alpha}_{(\delta}\nabla_{\varepsilon}R_{|\beta|\gamma)}) +$$
$$+ \frac{1}{6}(\delta^{\alpha}_{(\delta}g_{|\beta|\gamma}\nabla_{\varepsilon)}R - \delta^{\alpha}_{(\gamma}g_{|\beta|\delta}\nabla_{\varepsilon)}R),$$

gde je permutacija izvoda tenzora krivine $R^{\alpha}{}_{\cdot\beta\gamma\delta}$ iščezla na osnovu Bianchi-eve identičnosti:

$$\nabla_{(\varepsilon}R^{\alpha}{}_{\cdot|\beta|\gamma\delta)} = 0 .$$

U slučaju Alfven-ovog talasa koji se prostire kroz naelektrisanu sredinu (fluidnu) u prostor-vremenu s Ricci-evim tenzorom krivine $R_{\alpha\beta}$ imaćemo, na osnovu (14.8):

$$l_{[\varepsilon}\delta C^{\alpha}{}_{\beta]\sigma\tau} = \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\sigma} l_{[\varepsilon}\delta R_{\beta]\tau} - \delta^{\alpha}_{\tau} l_{[\varepsilon}\delta R_{\beta]\sigma} + g_{\beta\sigma} l_{[\varepsilon}\delta R^{\alpha}{}_{\tau]} - g_{\beta\tau} l_{[\varepsilon}\delta R^{\alpha}{}_{\sigma]})$$

Pomnožimo ovaj izraz vektorom površinske gustine električnog protoka k^{β}. Na osnovu (14.5) dobićemo:

$$(14.10) \qquad l_{[\varepsilon}\delta C^{\alpha}{}_{\beta]\sigma\tau}k^{\beta} = \frac{1}{2}(k_{\sigma} l_{[\varepsilon}\delta R^{\alpha}{}_{\tau]} - k^{\alpha} l_{[\varepsilon}\delta R_{\tau]\sigma})$$

Vektor l^{α} je jedinični vektor normale na talasu, orijentisan prostorno. Ima kvadrat -1. Vektor k^{α}, u slučaju da talas nije Alfvén-ov, upravan je na u_{α}, prema tome prostornog tipa. U slučaju Alfvén-ovog talasa, vektor k^{α} ortogonalan je na V_{α} (v. zaključak odeljka 12); medjutim, tada je V_{α} uvek vremenskog tipa (v. zaključak odeljka 7), pa je prema tome, k^{α} uvek prostornog tipa. Pošto nas u ovom delu razmatranja interesuje samo orijentacija k^{α}, a ne i njegov intenzitet, smatraćemo da je normiran, i da mu je kvadrat jednak -1.

Pomnožimo (14.10) prvo s k^{σ}, zatim s l^{σ}. Na osnovu (14.3) i (14.5), kad ispišemo veze koje se dobiju, imaćemo:

$$l_{[\varepsilon}\delta C^{\alpha}{}_{\beta]\sigma\tau}k^{\beta}k^{\sigma} = -\frac{1}{2}(l_{\tau}\delta R^{\alpha}_{\varepsilon} + l_{\varepsilon}\delta R^{\alpha}_{\tau}),$$

$$l_{[\varepsilon}\delta C^{\alpha}{}_{\beta]\sigma\tau}k^{\beta}l^{\sigma} = -\frac{1}{2}(k_{\varepsilon}\delta R^{\alpha}_{\tau} + k_{\tau}\delta R^{\alpha}_{\varepsilon} - 2k^{\alpha}\delta R_{\varepsilon\tau})$$

Pošto je, na osnovu (14.8) R invarijantno pri ovakvim talasima, možemo iz poremećaja gravitacionih jednačina da zamenimo $\delta R_{\alpha\beta}$ pomoću $\delta T_{\alpha\beta}$ i u gornjim izrazima dobijemo veze izmedju poremećaja tenzora konformne krivine i poremećaja tenzora energije:

$$l_{(\epsilon}\underline{\delta}C^{\alpha}_{\cdot\beta|\gamma\delta)}k^{\beta}k^{\gamma} = \frac{1}{2}\varkappa(l_{\delta}\underline{\delta}T^{\alpha}_{\epsilon} + l_{\epsilon}\underline{\delta}T^{\alpha}_{\delta}),$$

(14.11)

$$l_{(\epsilon}\underline{\delta}C^{\alpha}_{\cdot\beta|\gamma\delta)}k^{\beta}l^{\gamma} = \frac{1}{2}\varkappa(k_{\epsilon}\underline{\delta}T^{\alpha}_{\delta} + k_{\delta}\underline{\delta}T^{\alpha}_{\epsilon} - 2k^{\alpha}\underline{\delta}T_{\epsilon\delta}).$$

Pretpostavima sad, obrnuto, da su nam za neki magnetohidrodinamički talas ϵ date veze (14.11) izmedju poremećaja tenzora konformne krivine i tenzora energije. Ispitaćemo kakav talas to može da bude. Pomnožimo stoga prvu vezu (14.11) s l^{δ} a drugu s k^{δ}. Pošto se indeksi ϵ, γ, δ permutuju, to su indeksi γ i δ po kojima smo množili ove veze, jednom sa $\vec{l}$, drugi put sa $\vec{k}$, ravnopravni, i pomnožene veze možemo, usled jednakosti levih strana, izjednačiti. Na osnovu (10.5) to će biti:

$$\underline{\delta}T^{\alpha}_{\epsilon} = -k_{\epsilon}\underline{\delta}T^{\alpha}_{\delta}k^{\delta} + \underline{\delta}T^{\alpha}_{\epsilon} + 2k^{\alpha}\underline{\delta}T_{\epsilon\delta}k^{\delta},$$

odnosno:

$$k_{\epsilon}\underline{\delta}T^{\alpha}_{\delta}k^{\delta} - 2k^{\alpha}\underline{\delta}T_{\epsilon\delta}k^{\delta} = 0.$$

Ako uzmemo u razmatranje (14.6) i (14.7), (1.16), (1.17), tj. potrebne uslove za to da jedan talas ne bude Alfvén-ov, imaćemo:

$$k_{\epsilon}k^{\alpha}\underline{\delta}q - 2k^{\alpha}k_{\epsilon}\underline{\delta}q = 0.$$

Pošto k^{α} ne može biti jednako nuli, sleduje da je tada:

$$\underline{\delta}q = 0,$$

tj. ukupni pritisak $\mathfrak{p}$ je invarijantan. To je bio potreban i dovoljan uslov za Alfvén-ove talase. Otud:

<u>Potreban i dovoljan uslov za to da jedan magnetohidrodinamički talas u opštoj relativnosti bude Alfvén-ov jeste da između poremećaja tenzora konformne krivine $\delta C^{\alpha}{}_{\cdot\rho\beta\gamma}$ i poremećaja tenzora energije $\delta T^{\alpha}_{\sigma}$ prostor-vremena V_4 postoje sledeće veze:</u>

$$l_{(\sigma}\delta C^{\alpha}{}_{\tau)\rho|\beta|\gamma}k^{\beta}k^{\gamma} = \frac{1}{2}\varkappa\left(l_{\tau}\delta T^{\alpha}_{\sigma} + l_{\sigma}\delta T^{\alpha}_{\tau}\right),$$

$$l_{(\sigma}\delta C^{\alpha}{}_{\tau)\rho|\beta|\gamma}k^{\beta}l^{\gamma} = \frac{1}{2}\varkappa\left(k_{\sigma}\delta T^{\alpha}_{\tau} + k_{\tau}\delta T^{\alpha}_{\sigma} - 2k^{\alpha}\delta T_{\tau\sigma}\right)$$

L I T E R A T U R A

1 Hadamard J. : Lecons sur la propagaton des ondes et les équations de de l'hydrodynamique.
Hermann, Paris, 1903.

2 Synge J. : Relativistic Hydrodynamics.
Proc. Lond. Math. Soc., Ser. II, 43, 1937.

3 Taub A. : Relativistic Rankine-Hugoniot relations.
Phys. Rev. 74, 318-334, 1948.

4 Hoffmann B., Teller E. : Magnetohydrodynamic shocks.
Phys. Rev. 80, 1950, 692-703.

5 O'Brien S., Synge J. : Jump conditions at discontinuities in general relativity.
Comm. Dublin. Inst. for Adv. Stud., Ser. A, 9(1953).

6 Schouten J. : Ricci-Calculus.
Springer, Berlin (1954).

7 Taub A. : A general relativistic variational principle for perfect fluids.
Phys. Rev. 94, 1468-1470 (1954).

8 Lichnerowicz A. : Theories relativistes de la gravitation et de l'Electromagnétisme
Paris, Masson, 1955.

9 Pham Mau Quan : Etude electromagnetique et thermodynamique d'un fluide parfait chargé relativiste.
Journ. Ratl. Mech. Anal., 473-538 (1956).

10 Taub A. : Singular hypersurfaces in General Relativity.
Illinois Journal of Mathematics 1 (1957), 370-388.

11 Zumino B. : Some questions in Relativistic hydromagnetics.
Physical Review, 108 (1957) 1116-1121.

12 Taub A. : On circulation in Relativistic Hydrodynamics.
Archive for Ratl. Mech. Anal. 3 (1959) 312-324.

13 Fourès-Bruhat Y. : Les fluides chargés en relativité générale.
Coll. théor. relativ. de la gravitation. CNRS 157-163, 1959

14 Fourès-Bruhat Y. : Fluides chargés de conductivité infinie
C. R. Acad. Sc. (4 mai 1959).

15 Coburn N. : Discontinuity relations for charged, compressible relativistic fluid.
Journal Math. Mech., vol 10, no 3 (1961).

16 Coburn N. : Compressible Relativistic self-inductive fluids.
Symp. on Rel. fluid Mech. Academic Press (1963).

17 Pham Mau Quan : Magnétohydrodynamique relativiste.
Ann. Inst. H. Poincaré Nouv. Ser. t. 2, 1965, p 44-49.

18 Schwartz L. : Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.
Hermann, Paris (1965).

19 Lichnerowicz A. : Etude mathematique des fluides thermodynamiques relativistes.
Comm. Math. Phys., t 1, p 328-373.

20 Cabannes H. : Magnétodynamique des fluides.
Centre de documentation universitaire, Paris, 1965.

21 Lichnerowicz A. : Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste.
Ann. de l'Inst. H. Poincaré T 5, 1966, 37-75.

22 Lichnerowicz A. : Problèmes d'hydrodynamiques relativiste.
Cours au College de France, 1966/67.

23 Lukačević I. : Sur le mouvement irrotationnel des fluides parfaits chargés en relativité générale.
Publ. Math. Inst. T 7 (21), 1967.

S A D R Ž A J