



**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ**  
**МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ**

**МАСТЕР РАД**

*Развијање геометријских концепата*

*у вишим разредима основне школе – примери из јапанске праксе*

**ментор:**

**Професор др Милан Божић**

**студент:**

**Весна Тимотијевић, дипл. мат.**

**Београд, Мај 2013.**

## САДРЖАЈ:

|                                                   |    |
|---------------------------------------------------|----|
| УВОД.....                                         | 3  |
| АКТИВНО УЧЕЊЕ И УЧЕЊЕ МЕТОДОМ ДЕМОНСТРАЦИЈЕ ..... | 4  |
| ГЕОМЕТРИЈА У ШКОЛИ .....                          | 7  |
| 3.1 Учење повезивањем ствари .....                | 8  |
| 3.2 Геометрија свуда око нас .....                | 9  |
| 3.3 Кроз историју до примене.....                 | 10 |
| 3.4 Геометрија и друге науке .....                | 10 |
| ГЕОМЕТРИЈА КРОЗ ОСНОВНУ ШКОЛУ .....               | 11 |
| 4.1 Пети разред .....                             | 12 |
| 4.2 Шести разред.....                             | 13 |
| 4.3 Седми разред .....                            | 16 |
| 4.4 Осми разред .....                             | 19 |
| РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА .....                           | 22 |
| 5.1 Настава математике у Србији.....              | 22 |
| 5.2 Проблем у центру.....                         | 24 |
| 5.3 Часови математике у Јапану.....               | 29 |
| ЈАПАНСКИ ЧАС У ПРАКСИ.....                        | 31 |
| 6.1 „Јапански час“ у учионици у Србији .....      | 31 |
| 6.2 Пропорција у природи .....                    | 39 |
| 6.3 ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА .....                        | 44 |
| ЗАКЉУЧАК.....                                     | 51 |
| Литература .....                                  | 53 |

## Поглавље 1

### УВОД

**Блез Паскал:**

*Математика је сувише озбиљна и због тога, не треба пропустити ни једну прилику да се учини занимљивом.*

**В. Ле:**

*„Суштина математике није у формулама, него у процесу размишљања, путем којег се долази до формула.“*

**Matisse:**

*Цртање  $\cong$  стављање линије око идеје*

**Chern:**

*Док алгебра и анализа пружају основе математике, геометрија је у сржи*

**Feynman's:**

*Природа говори језиком математик*

## Поглавље 2

### АКТИВНО УЧЕЊЕ И УЧЕЊЕ МЕТОДОМ ДЕМОНСТРАЦИЈЕ

*„Ако се већ толико заклињемо  
да нам је од свега важније  
активно учешће деце у настави,  
ако нам је заиста искрена та наша жеља  
да деца мисле, да више разумевају, а мање памте,  
морамо тражити конкретне и ефикасне начине  
да децу покренемо,  
заинтересујемо и активирамо.“*

*Душко Радовић – „На острву писаћег стола“*

Позивајући се на претходну мисао Душка Радовића<sup>1</sup> формулисаћу појам активне наставе. *Активна настава* је оригинална педагошка творевина која почива на теоријским поставкама и практичним покушајима трансформације традиционалне школе у активну школу, тј. школу у којој и ученик и наставник имају активну улогу.

Мишљење код ученика основне школе је повезано са конкретним представама (непосредно опажање или претходно искуство). На основу конкретних операција, ученик

---

<sup>1</sup> Душан „Душко“ Радовић (29. новембра 1922 — 16. августа 1984) је био српски песник, писац, новинар, афористичар и ТВ уредник

је у стању да успостави основне математичке појмове: количина, број, дужина, сабирање, однос „мање од“...

Пијажеов<sup>2</sup> исказ за активну наставу има апсолутно програмско значење: „У једној речи базично начело активних метода, треба да се инспирише историјом наука и може се исказати на следећи начин: разумети нешто значи самостално га открити или извршити реконструкцију путем поновног открића и треба се придржавати тог начела ако у будућности хоћемо да обликујемо људе који ће бити способни да продукују и креирају, а не само да понављају оно што већ постоји.“

*Активна школа* је усмерена на младог човека, који се третира као целовита личност чије интелектуалне потенцијале треба што више ангажовати у наставном процесу.

Споменимо овде како педагогија гледа на реализовање практичне примене и та метода се уопштено зове *метода демонстрације*.

То је облик интерактивног учења и наравно ту је активност наставника веома значајна, јер је он тај који моделира разговор, уствари планира интеракцију и ток часа, при чему се наравно спонтаност подразумева, припрема материјале за рад и остала дидактичка средства, ствара проблемске ситуације, труди се да предочи ученицима што више позитивних модела итд.

Метод демонстрације подразумева приказивање практичних радњи којима треба овладати до нивоа самосталне примене. Овај метод обухвата све оне облике учења у којима је извесна активност практична, али је такође неопходно разумевање смисла практичних радњи.

У ову методу спада обука за коришћење рачунара, технике цртања и сликања, свирање музичких инструмената итд. Активности ученика су усмерене на разумевање смисла практичних радњи које се уче, практично извођење итд.

---

<sup>2</sup> **Жан Пијаже** (фр. *Jean Piaget*; Нешател, 9. август 1896 — Женева, 17. септембар 1980) је био швајцарски развојни психолог и филозоф, познат по својој теорији когнитивног развоја и бројним експерименталним истраживањима о менталним способностима мале деце.

Овом методом ученици уче како се нешто ради, наспрам знања које представља скуп одређених систематизованих информација.

И наравно у настави математике ова метода се најчешће користи код реализације геометријских садржаја, нарочито код конструктивних садржаја, теренских мерења, приказа практичне примене теоријских знања (мерење површине земљишта, мерење висине објекта помоћу сличности коришћењем сенке итд.).

Оно што је данас актуелно сутра ће бити застарело. Право знање је оно знање које чини темељ новом знању, а добра школа је она која даје солидну основу за будуће учење, припрема за критичко размишљање, тј. за анализу, просуђивање аргумената, постављање правих питања.

У јапанском документу *„Модел образовања и друштвене промене“* (1998) се наглашава да друштво улази у период турбулентних промена, а деци су у таквом друштву потребни квалитети и способности који ће им омогућити да, без обзира на друштвене промене, идентификују теме и области проблема, да уче самостално, да мисле за себе, да самостално оцењују, да поступају независно и да стручније решавају проблеме. Поред тога, она би требало да буду прожета хуманошћу, да буду у складу са другима, да имају обзира за потребе других и да саосећају са њима.

Најбитнији задатак наставника је да научи ученика како да учи. Психолози све више наглашавају да у успешном учењу већи значај имају стечене него наслеђене когнитивне функције. Тиме они не потцењују значај наслеђа које и даље остаје битан чинилац у учењу, али тежиште стављају на оне когнитивне функције које се могу стицати. Оно што је ученик наследио не може се ни умањивати ни повећавати. Пошто се когнитивне функције могу и стицати, задатак је наставе да наслеђеном придода и нову количину капацитета.

## Поглавље 3

### ГЕОМЕТРИЈА У ШКОЛИ

*„Млади ум који геометрију сагледава онако како се она обично предаје потпуно ће се одвратити од ње.“*

**Леонард Млодинов<sup>3</sup> – „Еуклидов прозор“**

Опште је позната чињеница да већина ученика нема интересовање за геометрију, а знање овог предмета се налази на недопустиво ниском нивоу. О томе говоре и наставници, и професори са факултета, и родитељи и сами ученици.

Није тајна да се геометријски развој може сматрати најважнијим фактором који омогућава спремност човека за перманентно образовање и самообразовање у најразличитијим областима људске делатности.

У настави геометрије морамо код ученика упорно да тежимо развоју интуиције, просторног и логичког мишљења и формирању њихових конструктивно-геометријских умећа и навика.

Настава геометрије је значајна са различитих гледишта:

- ❖ **логичког** - изучавање геометрије је извор и средство активног интелектуалног развоја човека и његових умних способности;
- ❖ **сазнајног** - помоћу геометрије ученик спознаје свет који га окружује, његове просторне и количинске односе;

---

<sup>3</sup> Леонард Млодинов (рођен у Чикагу 1954. године) је физичар, писац и сценариста.

- ❖ **примењеног** - тродимензионална еуклидска геометрија је основа која обезбеђује човекову спремност за савладавање како блиских области тако и многих професија, чини му доступним непрекидно образовање и самообразовање;
- ❖ **историјског** - на примерима из историје развоја геометрије прати се не само развој математике, већ и људске културе у целини;
- ❖ **филозофског** – геометрија помаже да се осмисли свет у коме живимо, да се код човека формирају развојне научне представе о реалном физичком простору.

Суштина је да ученик у процесу учења геометрије и током свог геометријског развоја мора проћи у кондезованом облику основне етапе развоја геометријске науке, не прескачући при томе ни једну од њих.

*Сликовита геометрија* треба да се учи у основној школи и ту је основни циљ да се обогате основне геометријске представе ученика, упознавање са максимално богатим скупом геометријских фигура (како равних тако и просторних), усвајање основне геометријске терминологије, стицање умећа и навика у представљању (цртању) геометријских фигура.

Основне наставне делатности у овој етапи су посматрање и прављење (цртање) дводимензионих и тродимензионих геометријских фигура од папира, картона, пластелина; једноставни геометријски експерименти којима се утврђују елементарна својства фигура (једнакост, разложива једнакост, једнаке величине, симетричност, мерење, моделирање).

### 3.1 Учење повезивањем ствари

У савременој настави, када је школски програм пренатрпан детаљима из разноврсних области математике, постоји опасност да се учење математике сведе на памћење чињеница и механичко усвајање алгоритама.

Насупрот овој појави, треба настојати да ученици схвате постојеће везе међу феноменима које сусрећу на појединим подручјима математичке наставе. У оквиру оваквих настојања, геометрија може да игра изврсну улогу, јер математичке дисциплине које се предају обилују детаљима за које постоје геометријске илустрације доступне узрасту ученика.

Примена оваквих илустрација, с једне стране олакшава процес разумевања укупног наставног градива, а с друге стране скрећу пажњу на то да је геометрија наука од актуелне важности.

### 3.2 Геометрија свуда око нас

Важност еуклидске геометрије у настави поткрепљује чињеница да се геометријским облицима из ове геометрије сусрећемо у средини у којој живимо.

Нарочито изучавање стереометрије потпомаже изучавање простора; нажалост настава стереометрије се често занемарује.

Већина ђака од најранијих година поседује низ основних знања о телима, као што су на пример коцка или лопта.

Та почетна знања се добро могу користити при увођењу појмова као што су: дефинисани и недефинисани елементи, аксиоме и теореме, потребни и довољни услови и слично.

Сви ти појмови су важни за све области математике – а фамилијарност с простором може послужити за то да ђаци помоћу конкретних примера схвате њихову суштину.

### 3.3 Кроз историју до примене

Математика је једна од најстаријих научних дисциплина, важан део културног наслеђа човека. Та чињеница се мора одржавати на ток математичке наставе: пожељно је при обради разних математичких тема скренути пажњу ученика, кад год се за то укаже прилика, на њихову историјску позадину.

Историја геометрије чини важан део историје математике, као једне од најстаријих грана математике. Важност геометрије потиче махом из разлога да је у овој области, почев од грчког античког доба, било неколико крупних проблема, који су се тек у XIX веку могли решити.

Током векова много се трагало за решењима ових проблема. Покушаји да се проблеми реше довели су до низа нових открића и допринели су даљем развоју математике.

Ученицима су посебно занимљиве легенде које говоре како су познати научници долазили до решења неких (тада) великих проблема. Овакве приче развијају машту и наводе их да и сами испробавају путеве решења. Међу чувеним проблемима је тзв. Делски проблем удвостручења коцке; Проблем рачунања висине пирамиде; Проблем удаљености брода од луке...

### 3.4 Геометрија и друге науке

Настава геометрије игра корисну улогу у илустрацији достигнућа у најмодернијим областима математике.

Стечена знања из наставе геометрије могу допринети бољем разумевању феномена из разних области природних наука.

## Поглавље 4

### ГЕОМЕТРИЈА КРОЗ ОСНОВНУ ШКОЛУ

У основној школи нове појмове би требало објашњавати уочавањем њима сличних објеката у окружењу (ако је то могуће), затим им доделити називе и наводити примере објеката те врсте. Тако је најприродније за ђаке да размишљају. Ученицима тог узраста је тешко да схвате појам бесконачности.

Након појмова, уводе се симболи за те појмове и кратак договор да се тих симбола треба придржавати.

Наставу геометрије треба почети историјским настанком геометрије и испричати како је настала геометрија.

Реч геометрија настала је од грчких речи *gea* (земља) и *metrein* (мерити) и те речи описују на који су начин људи практично применили геометрију први пут. Та прича би требала деци да буде занимљива и довољно лепа, да је запамте а и увиде њено значење за људе и околину.

У Египту, река Нил је плавила обале, и ту се геометрија користила да би се када се вода повуче премериле међе њива, поља и конструисале грађевине.

Такође би им требало поменути да многа велика достигнућа из разних области као што је уметност, техника, наука итд. не би била остварена без геометрије.

Почетно и основно знање из геометрије би требало да помогне ученицима и у оријентацији у простору, ако им се повежу информације из уџбеника са оним које они сами знају везано за своје место становања, њихову кућу, стан и сл.

## 4.1 Пети разред

Програм геометрије петог разреда обухвата *основне геометријске облике и круг*, тј. упознавање са појмовима: тачка, права, раван, круг, угао.

До овог нивоа знања требало је да се ученици већ упознају са појмом тачке, праве и равни. Углавном у том препознавању већ познатих појмова греше у томе што када нацртају модел праве не схватају да уствари цртају само један њен део, слично важи и за полуправу, угао, раван и полураван.

Највећи проблем је да схвате да права нема свој почетак и крај, јер им је то тешко замислити.

Треба инсистирати на прецизности и добром дефинисању појмова, не у смислу учења дефиниција напамет него комплетном разумевању основних појмова и јасном разумевању разлике међу појмовима (права, дуж, полуправа; раван, полураван и сл.).

Примере које користимо у животу, везано за ово градиво, можемо наћи свуда око нас, почев од учионице повезујући тачке са угловима учионице и све остало што у том моменту и сами ученици могу да повежу са градивом и у тим тренуцима их помно слушати и указивати на грешке које кажу.

*„Понекад је дуж само дуж. Али иста дуж може да представља ивицу пирамиде, међу поља или путању лета вране. Знање о једном може се пренети на друго“.*<sup>4</sup>

У овом делу учења геометрије треба инсистирати на коришћењу шестара, али наравно и алтернативно мерење дужине дужи.

---

<sup>4</sup> Леонард Млодинов „Еуклидов прозор“ (28. стр)

## 4.2 Шести разред

Програм геометрије шестог разреда обухвата: *троугао, четвороугао, површина троугла и четвороугла.*

Лако уочавамо да је овде јако важно да су ученици добро савладали знање петог разреда, због прецизности код дефинисања појмова троугла, четвороугла и њихових површина.

Важно је да ученици трајно науче врсте четвороуглова и троуглова, да нађу везу између њихових назива и особина. Треба их пустити да сами дођу до имена, на тај начин ће више размишљати и о особинама фигура.



Посматрајући претходни дијаграм ученици могу јасно увидети на сличности и разлике између врста троуглова.

На сличан начин можемо представити и врсте четвороугла. После увођења особина четвороуглова, као и само груписање као нпр. упознавање са паралелограмом, правоугаоником, квадратом, ромбом, њихове заједничке особине и различитости ученици преко дијаграма веома лепо савладају.



Рачунање површине троугла и четвороугла је готово најприменљивија. Примере можемо наћи свуда око нас: површине њива, дворишта, плочице за купатило, паркет итд.

Изузетно је важно инсистирати на извођењу формула, јер се формула напамет научена брзо заборави.

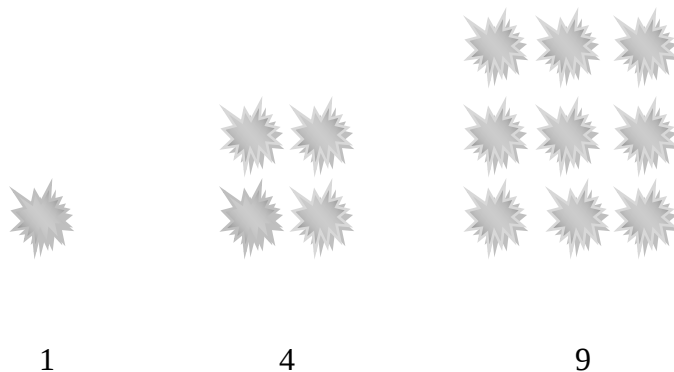
### **Квадратни и троугаони бројеви**

Посебно занимљива прича о Питагорејцима и квадратним и троугаоним бројевима, може ученике подстаћи на размишљање и учинити још занимљивији појам троугла и четвороугла.

„За Питагору<sup>5</sup> је привлачност математике проистицала поглавито из мноштва бројних односа које су он и његови следбеници открили.

Питагорејци су целе бројеве замишљали као камичке или тачке које су распоређивали у одређене геометријске облике. Установили су да неке бројеве могу да добију тако што ће поставити камичке у два реда по два, три по три и тако даље, при чему свака слика представља квадрат. Питагорејци су ове слике саздане од камичака називали „**квадратни бројеви**“, одакле потиче наш данашњи назив „**квадрати**“ за бројеве 4, 9, 16 и тако даље. Такође су установили да се други бројеви могу добити тако што ће се број камичака повећати за по један у сваком реду, чиме настаје слика троугла саздана од 3, 6, 10 и тако даље камичака.

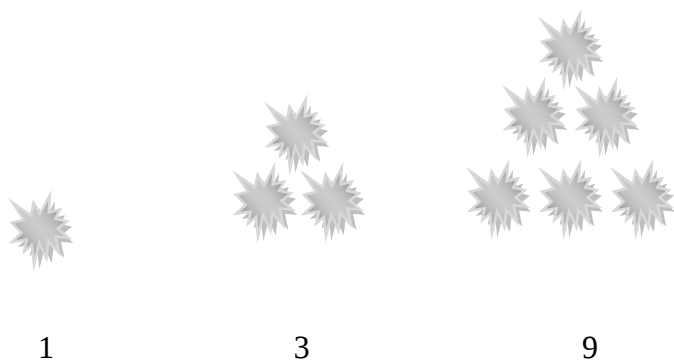
Особине квадратних и троугаоних бројева очаравале су Питагорејце. Тако је, на пример, други квадратни број 4, једнак збиру прва два непарна броја,  $1+3$ . Трећи, 9, једнак је збиру прва три непарна броја  $1+3+5$ , и тако даље. (Ово важи и за први квадрат,  $1=1$ .) Док су квадратни бројеви једнаки збиру наизменичних непарних бројева, Питагорејци су уочили да на исти начин троугаони бројеви представљају збирове свих наизменичних бројева, како парних тако и непарних. Уз то, постоји веза између квадратних и троугаоних бројева: ако саберете неки троугаони број с петходним или потоњим троугаоним бројем, добијате квадратни број.<sup>6</sup>



Квадратни бројеви

<sup>5</sup> **Питагора** (грч. Πυθαγόρας, око 582. п.н.е. – око 496. п.н.е.) је антички грчки математичар, научник, астроном и филозоф, оснивач филозофског, математичког, мистичког и научног друштва или заједнице, која је позната под именом Питагорејска школа

<sup>6</sup> Леонард Млодинов „Еуклидов прозор“ (29. стр)



Троугаони бројеви

### 4.3 Седми разред

Програм геометрије седмог разреда обухвата: *Питагорину теорему, круг, многоугао, график функције, сличност.*

Геометрија која се обрађује у седмом разреду је јако важан део математичког знања. Представља један високи степен, који води до савршене целине геометријског знања.

Питагорина теорема је једно од основних открића у геометрији, њена примена је веома велика и историјски важна за развој геометрије. Зато треба истакнути и занимљиву историјску причу о Питагори.

*„И Питагорина теорема мора да је изгледала чаробњачка. Замислите древне учењаке како испитују све троуглове, а не само оне ретке правоугаоне, мерећи им углове и стране, ротирајући их и поредећи. Када би се таква испитивања спроводила данас, на универзитетима би постојале дисциплине посвећене томе. „Мој син предаје на Математичком факултету у Берклију“, казала би нека поносна мајка. „Он је професор за троуглове.“ Једнога дана, њен син уочава необичну правилност: код сваког правоуглог*

*троугла квадрат над хипотенузом раван је збиру квадрата над катетама. Ово важи за велике, мале, дебеле, мршаве – за свакојаке правоугле троуглове који су икада измерени, али не и за друге врсте троуглова. Ово откриће сигурно би стигло на насловну страну The New York Timesa: „Изненађујућа правилност откривена код правоуглог троугла“. А у поднаслову би, нешто ситније стајало: „До практичне примене протећи ће још много година“.*

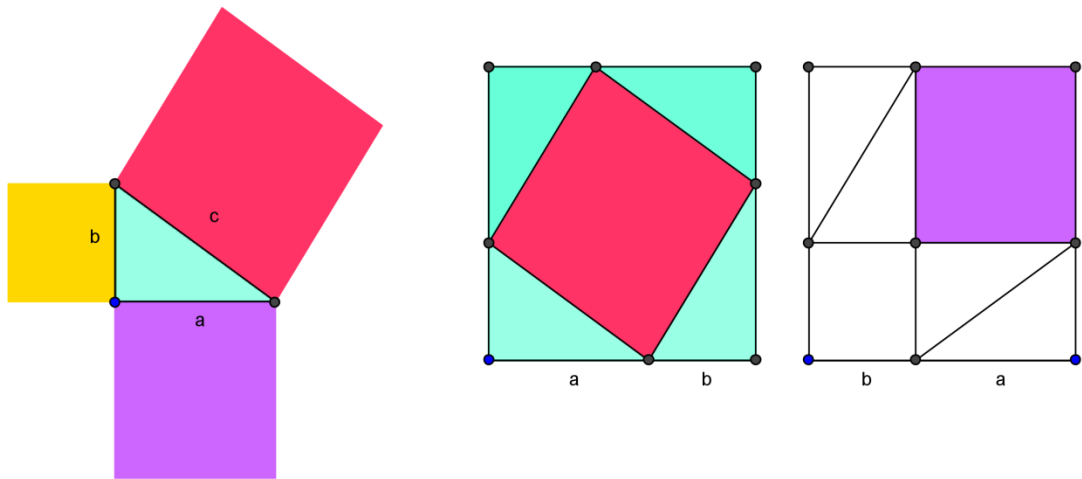
*Због чега се стране свих правоуглих троуглова увек поковавају овом једноставном односу? Питагорина теорема може се доказати помоћу својеврсног геометријског множења које је Питагора често примењивао. Није нам познато да ли је на тај начин доказао своју теорем, али доказ о коме је реч веома је значајан зато што је чисто геометријски. Данас располажемо једноставнијим доказима, заснованим на алгебри или чак тригонометрији, које још нису постојале у Питагорино време. Али геометријски доказ није тежак; посреди је, заправо, мало уврнута математичка верзија повезивања тачака.*<sup>7</sup>

Да би доказали Питагорину теорему на геометријски начин, све што нам је потребно јесте формула за површину квадрата:  $P = a^2$ . Посреди је модеран начин да се исказе Питагорина аналогија с камичцима.

Нацртамо три квадрата код правоуглог троугла: један чије ће све стране бити једнаке дужини хипотенузе и друга два чије ће све стране бити једнаке дужини катете над којом правимо квадрат. Ако можемо да докажемо да је површина квадрата над хипотенузом једнака збиру површина квадрата над катетама, доказали смо Питагорину теорему.

---

<sup>7</sup> Леонард Млодинов „Еуклидов прозор“ (29. стр)



Нацртаћемо квадрат чија је основица збир катета  $a$  и  $b$ , правоуглог троугла. Поделитемо странице квадрата (као на слици), тако да ставимо по једну тачку на место где се сусрећу дужина  $a$  и  $b$ , затим спојимо те тачке. Постоји више начина да се то уради, на слици су приказана два начина. Приметимо да су површине ова два квадрата једнаке.

На првом цртежу имамо квадрат чија је дужина стране једнака дужини хипотенузе  $c$  и четири троугла вишка. На другом цртежу имамо два квадрата чије су дужине страна једнаке дужинама катета  $a$  и  $b$  и два правоугаоника вишка. Ова два правоугаоника се дијагоналама могу поделити на четири троугла, која су једнака троугловима са првог цртежа који су вишак.

Дакле, када од два квадрата са једнаким површинама одузмемо четири иста троугла, добићемо исте површине, тј. добијамо:  $c^2 = a^2 + b^2$ . Тиме смо доказали теорему, једноставни и ученицима разумљиво.

Можемо доказати и помоћу сецања ова два квадрата, где би ученици упоредили и видели да се ради о фигурама истих површина.

Занимљива је и Питагорина теорема у облику песмице, која ми је дубоко урезана у сећање и као да сада чујем свог наставника, који каже:

***„Питагорину теорему, то зна свако дете, квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над обе катете.“***

Многоугао је могуће представити веома лепо преко разлагања неког многоугла на мање и познатије многоуглове. Можемо повезати са применом у грађевинарству, представљање различитих необичних облика и мозаика развија машту ученицима, па и сами ће покушати да праве различите облике.

Круг, као најсавршенији облик, ученицима до сада већ познат, не доноси велике потешкоће при разумевању. Али формуле за површину кружног исечка, појмове централног и периферијског угла треба пажљиво уводити.

И код графика функције можемо направити занимљив историјски увод, кроз интересантне приче ће лакше запамтити оно што им треба.

Код сличности је јако важно објаснити занимљиве приче, како је Талес мерио висину пирамиде и удаљеност брода преко сличности. Дискутовати са њима о томе, јер је сличност за ученике прилично конфузна и брзо је забораве. Можемо дати неке лепе примере, па чак и извести оглед, угледајући се на Талеса, то ће им остати у главама.

## **4.4 Осми разред**

Програм геометрије осмог разреда обухвата: *сличност троуглова, Талесова теорема; тачку, праву и раван; график линеарне функције; ваљак, купа, лопта.*

Дакле, у осмом разреду се обрађује геометрија простора, која заокружује причу о основама геометрије.

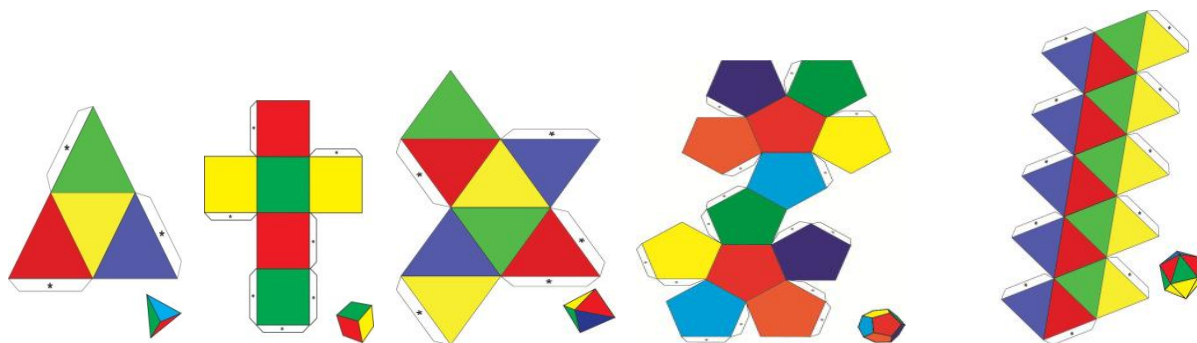
Талесова<sup>8</sup> теорема је јако битно тврђење и историјски потковано, тако да и кроз ову наставну јединицу треба провући занимљивости, које деци привлаче пажњу.

Посебно треба обратити пажњу на увођење полиедара, на историју везану за Платонова<sup>9</sup> тела (правилне полиедре). Ваљало би направити радионицу, где би свако дете добило мреже правилних полиедара и од њих саставили полиедре, како би схватили савршене облике тих тела.

Платонова тела су добила назив по старогрчком филозофу Платону, због њихове употребе у “Тимеју” где су појавама четири елемента додељивани облици геометријских тела. Тетраедар је био повезан са ватром, октаедар ваздухом, икосаедар водом, а хексаедар земљом, док је додекаедар био на располагању Творцу да представи васиону.

Платонова тела задовољавају два услова којим се карактеришу правилни полиедри: све стране су им правилни међусобно подударни многоуглови и сви рогљеви су им правилни, међусобно подударни и конвексни.

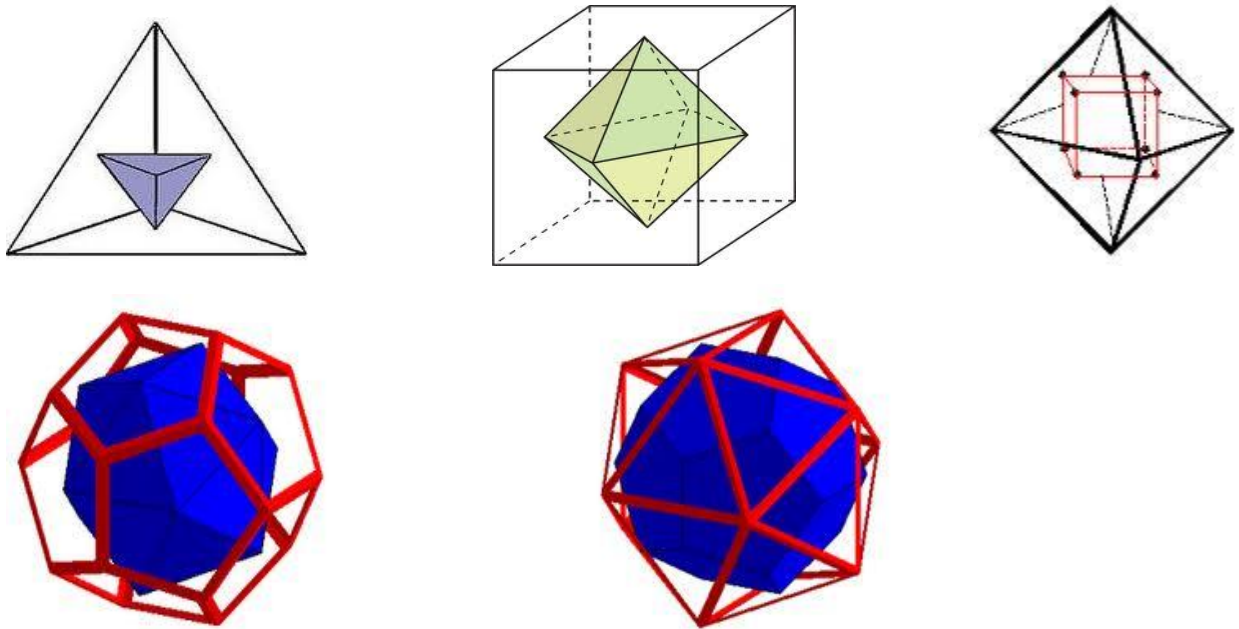
Занимљиво је и то да их има само пет: **тетраедар** (састоји се од четири једнакостранична троугла; *tetra* на грчком - четири); **хексаедар** (састоји се од 6 квадрата; *heksa* на грчком - шест); **октаедар** (састоји се од 8 једнакостраничних троуглова; *okta* на грчком - осам); **додекаедар** (састоји се од 12 једнакостраничних троуглова; *dodeka* на грчком - дванаест); **икосаедар** (састоји се од 20 једнакостраничних троуглова)



<sup>8</sup> **Талес** из Милета (грч. Θαλῆς ὁ Μιλήσιος; рођен 624. п. н. е., умро око 547. п. н. е. или 546. п. н. е.) био је активан као математичар и као државник, важио је у старом веку за првог јонског свестрано образованог природног филозофа кога су убрајали међу Седам мудраца

<sup>9</sup> **Платон** (грч. Πλάτων; рођен 427. п. н. е. у Атини; умро 347. п. н. е.) био је неизмерно утицајан старогрчки филозоф и беседник, Сократов ученик, а Аристотелов учитељ, и оснивач Академије у Атини

Занимљива особина, коју можемо поменути је особина *дуалности* правилних полиедара. Свако Платоново тело има своје дуално тело које се добија тако што се нађе тежиште сваке пљосни полазног полиедра, тако добијамо темена њему дуалног тела. Спојимо темена која представљају тежишта суседних пљосни и добијемо ивице дуалног полиедра.



Ваљак, купа и различите врсте призми и пирамида се најбоље уче кроз радионице, на тај начин ученици боље уче и формуле за површину и запремину. Анализирајући делове из којих се састоји свака од ових фигура се лако долази до формула, док учењем напамет уче само за оцену. Такво знање није трајно и квалитетно.

## Поглавље 5

### РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

*Решавање проблема* је термин општеприхваћен у савременом образовању, а означава активности у моделовању и превазилажењу препрека из реалног живота, где се на први поглед не може одредити увежбани научни шаблон (формула) који би се користио. Решавање проблема се, поред математичке писмености, тестира у програму PISA још од 2003. године. PISA описује компетенције потребне за решавање проблема као: „Способност појединца да овлада когнитивним процесима за разумевање и разрешавање проблемских ситуација, где метод за решавање није очигледан. То укључује спремност појединца да се бави таквим проблемима, како би се развио у конструктивног члана друштва који је у стању да процењује себе и околину.“

#### 5.1 Настава математике у Србији

Ученици из Србије остварили су просечан резултат од 437 (од максималних 600) поена на скали математичке писмености 2003. године и задржали исто просечно постигнуће и у наредном тестирању 2006. године. Статистички значајно боље постигнуће Србија је остварила на тестирању 2009. Ово постигнуће припада другом нивоу на развојној скали, што значи да су, током деветогодишњег школовања, ученици у просеку оспособљени за примену једноставних процедура и алгоритама, за проналажење одређене информације коришћењем једног извора, за проналажење решења у једноставној ситуацији у којој су све релевантне информације дате. Захтеви које ученици решавају на овом нивоу траже од њих репродуктивне когнитивне активности. Можемо рећи да је наш

образовни систем превасходно оријентисан на развијање и подржавање знања која се налазе на нивоу репродукције, с тим да нешто мање од једне петине ученика не успева да реши ни задатке са првог нивоа и да нешто мање од једне трећине ученика може да решава и нешто комплексније захтеве.

То, практично, значи да је просечно постигнуће ученика из Србије не само статистички ниже од међународног просека, већ и да се налази у нижем кластеру компетенција. Такође, ако се зна да једна школска година у просеку доприноси са око 40 поена на скали математичке писмености, то би значило да су наши ученици практично више од једне школске године у заостатку за својим вршњацима из других земаља, што речито говори о неефикасности наставе математике у нашим школама.

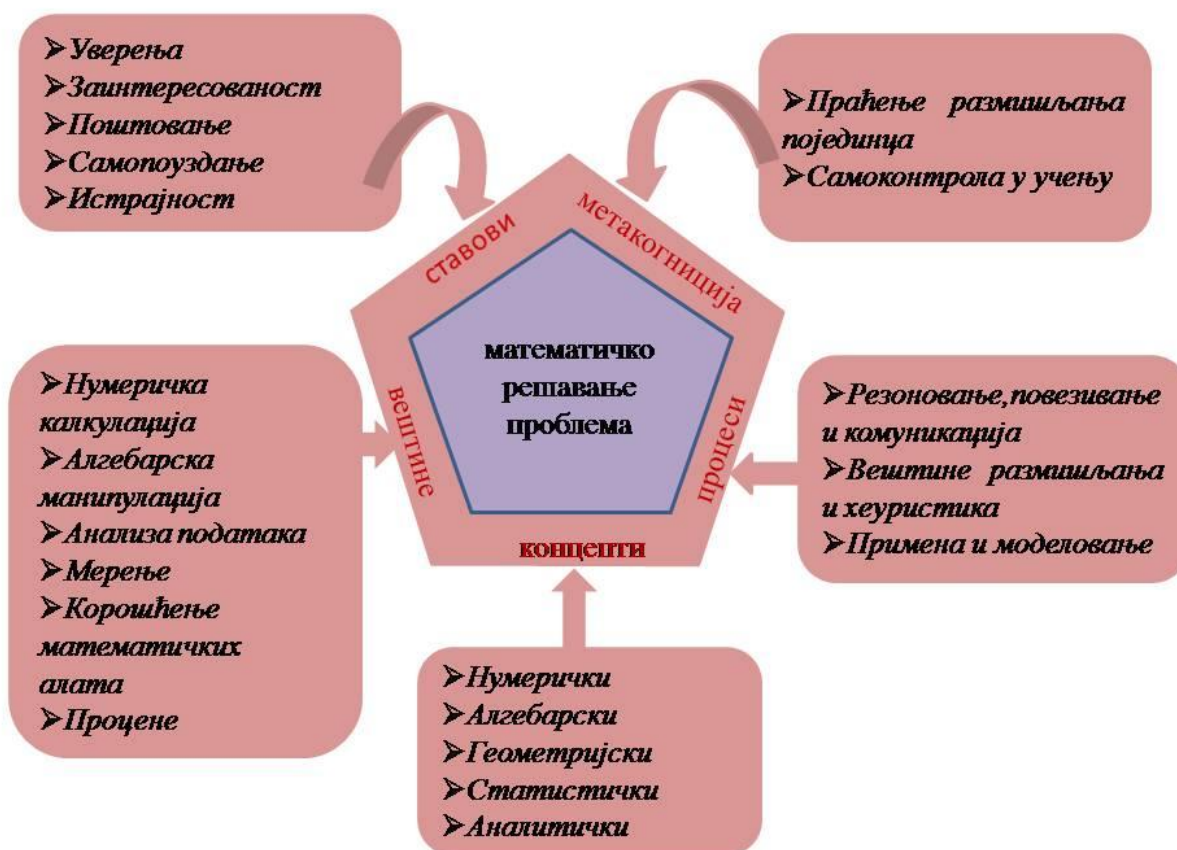
Слика која се ствара кроз медије о нашим такмичарима може да нас доведе у заблуду да је математичко образовање добро. Када је реч о такмичарима треба истаћи да је ту у питању само мали број оних ученика који и нису производ нашег школског система. Њих тренирају специјалисти који не предају у школама – практично они имају приватне тренере. Дакле, такмичарски успеси нису показатељ успешности нашег школског система.

Структура активности у нашој школи пати од велике слабости—она је моновалентна. Своди се на наставу чији је основни задатак стицање знања што није довољно ни ученицима ни друштву. Ако пођемо од тога да је један од основних задатака школе да доприноси развоју ученика, онда морамо признати да настава ни изблиза није довољна и толико моћна да тај задатак и остварује. Чак и сама функција наставе је редукована на когнитивне исходе који се погрешно сматрају њеном једином вредношћу. Образовни процес посвећен је теоријским садржајима који се вербално интерпретирају, а практична примена је потпуно запостављена. У настави, а и укупној школској активности запостављају се емоционални, социјални, етички и естетички елементи веома битни за укупни развој личности.

## 5.2 Проблем у центру

Угледајући се на методе решавања проблема, који се користе у земљама са најуспешнијим резултатима на међународним тестовима из математике, могли би побољшати знање ученика код нас. Сингапур, Јапан, Финска су земље са најуспешнијим школским системом, како показују резултати истраживања.

Математичко решавање проблема има централно место у учењу математике. То подразумева стицање и примену математичких концепата и вештина у широком опсегу ситуација, укључујући нерутинске, проблеме са неодређеним решењем, као и проблеме из реалног живота. Развој математичких способности решавања проблема зависи од пет међусобно повезаних компоненти: *концепти, вештине, процеси, ставови и метакогниција*.



Министарство просвете Сингапура користи овај графикон да прикаже структуру учења математике – петоугао са „математичким решавањем проблема“ у центру, кога окружују неопходних пет компоненти учења математике. Уџбеници који прате наставу написани су тако да подржавају овај графикон – орјентисани су ка решавању проблема и охрабрују ученике да добро разумеју свих пет компоненти. Ученици се охрабрују да истражују како размишљају, како саопштавају закључке и како решавају проблеме.

### **Концепти:**

Математички концепти покривају *нумеричке, алгебарске, геометријске, статистичке, вероватносне и аналитичке концепте.*

Ученици треба да развијају и истражују математичке идеје у дубину, и да схвате да је математика интегрална, а не изоловани комад знања. Треба да се оснаже различитим вештинама учења за дубље разумевање математичких концепата и идеја, као и њихових примена, како би се активније укључили у учење математике и стекли довољно самопоуздања да истражују и примењују математику.

Коришћење конкретног материјала, практични рад и коришћење технолошких помагала треба да буду саставни део учења и значајно помажу разумевању математичких концепата.

### **Вештине:**

Математичке вештине укључују процедуралне вештине за *нумеричку калкулацију, алгебарску манипулацију, просторну визуелизацију, анализу података, мерење, коришћење математичких алата и процењивање.*

Развијање вештина код ученика је од суштинске важности за учење и примену математике. Али, иако ученици треба да постану компетентни у различитим

математичким вештинама, увежбавање процедура, без разумевања основних математичких принципа на којима почивају, треба избегавати. Развијање вештина подразумева и коришћење информационих и других технологија тамо где је то потребно у служби истраживања и решавања проблема.

Важно је укључивати и промишљање, као и хеуристику у процесу развијања математичких вештина. Дакле, развој вештине не би требало да буде исто што и рутинско провежбавање.

### **Процеси:**

Математички процеси се односе на оне вештине које су укључене у стицање и примену математичких знања. То подразумева *резоновање, комуникацију и повезивање, промишљање и хеуристику, и примену и моделовање.*

*Математичко резоновање* се односи на способност да се анализирају математички проблеми и формулишу логични аргументи. То је навика ума која се развија кроз примену математике у разним контекстима. Другим речима, за развој резоновања код ђака треба инсистирати да се користе математичким методама у што више реалних ситуација.

*Комуникација* се односи на способност да се користи математички речник како би се прецизно, концизно и логички коректно изразиле математичке идеје и аргументи. Она помаже ученицима да развију свој поглед на математику и изоштре математичко промишљање.

*Повезивање* се односи на способност да се увиде и направе везе између различитих математичких идеја, између математике и других дисциплина и између математике и свакодневног живота. Оваква способност помаже ученицима да виде смисао у ономе што уче у математици.

Математичко резоновање, комуникација и повезивање би требало да прожимају све нивое учења математике – од основног до највишег нивоа.

Ученици користе различите *мисаоне вештине и хеуристику* као помоћ у решавању проблема. Мисаоне вештине су вештине које се могу користити у процесу размишљања, као што су класификовање, упоређивање, анализирање делова и целине, идентификовање образаца и веза, индукција, дедукција и просторна визуелизација. Хеуристика се своди на неформално закључивање, давање могућих претпоставки и решења користећи мисаоне пречице и неке неочекиване путеве – нешто више од онога што би се могло назвати интуицијом.

*Примена и моделовање* имају витални значај у разумевању математике и развијању математичких компетенција. Веома је важно да ученици примењују вештине математичког решавања проблема и резонување за решавање разних проблема, укључујући проблеме у стварном свету. Математичко моделовање је процес формулисања и увођења математичког модела за представљање и решавање проблема из реалног света. Кроз математичко моделовање ученици уче да користе разноврсне начине представљања података, као и да изаберу и примене одговарајуће математичке алате за решавање реалних проблема. Могућност рада са емпиријским подацима и коришћење математичких алата за обраду података треба да буде део наставног процеса на свим нивоима.

### **Ставови:**

Ставови се односе на афективне аспекте учења математике као што су:

- ❖ увереност у корисност математике
- ❖ заинтересованост и уживање током учења математике
- ❖ поштовање лепоте и снаге математике
- ❖ истрајност у решавању проблема

Ставови ученика према математици се обликују начином учења. Ако је учење математике забавно, смислено и релевантно ученик је на добром путу да успостави позитивне ставове. Посебну пажњу треба посветити дизајнирању наставних активности како би се изградило поверење и развило поштовање према математици.

### **Метакогниција:**

Метакогниција, или „мишљење о мишљењу“, се односи на свест о сопственим мисаоним процесима и способности да се они контролишу, посебно избор и коришћење стратегија за решавање проблема. Она укључује праћење сопствених мисаоних процеса и саморегулацију учења. Снабдевање ученика метакогнитивним искуством је неопходно за развој њихових способности за решавање проблема.

Следеће активности се могу користити за развој метакогниције и стицање метакогнитивног искуства:

- ✚ Охрабривање ученика да наглас излажу своје стратегије и методе које су користили за решавање одређеног проблема;
- ✚ Рад на проблемима који траже планирање (пре решавања) и евалуацију (после решавања);
- ✚ Охрабривање ученика да траже алтернативне путеве за решавање истог проблема, као и да провере прикладност и смисленост одговора.
- ✚ Омогућавање ученицима да дискутују о томе како су решавали проблем и да објасне једни другима методе које су користили.

У многим истраживањима потврђено да је ученицима привлачан онај наставник који код њих подстиче осећања да су вредни и способни, односно наставник који им помаже да стекну позитивну, али и реалну слику о себи.

Наставник је добар ако је ученик мисаоно максимално активан, тј. ако у комуникацији више учествује, ако је интеракција богата. Колико је важна интеракција наставник-ученик, исто толико је важна и интеракција ученик – ученик јер ту је реч о односу равноправних. Кроз сарадњу у учењу ученик се оспособљава и за сарадњу на послу (тимски рад), у друштвеном и приватном животу.

### 5.3 Часови математике у Јапану

Као и Сингапур, Јапан је постигао изузетне резултате у међународним тестовима из математике. Године 1999. Је објављена велика студија о принципима наставе математике и науке у три државе: САД, Немачка и Јапан. Показало се да поред великих сличности у садржајима, постоје огромне разлике у самом наставном процесу.

Ток класичног часа математике у Јапану изгледа овако: Наставник износи проблем пред ученике без претходног објашњавања процедуре за решавање проблема. Даје јасне инструкције о томе шта се сматра решењем проблема. Проблем је по правилу у реалном контексту и прилагођен је искуству ученика и пажљиво је одабран да омогући да се извуче максимум из ученика. Проблеми су веома захтевни – како концептуално тако и процедурално, тако да се сваки час може упоредити са малим истраживачким пројектом. Овакав приступ настави се назива структуисано решавање проблема. Често се у решавању проблема користи и други материјал осим папира и оловке, као и информационе технологије.

Ученици раде на проблему (групно или индивидуално). Наставник се труди да на часу игра мање активну улогу, а да охрабрује ученике да продукују што више сопствених идеја. Може се рећи да овакав начин рада најбоље прати идеје Ђерђа Поље<sup>10</sup> о настави математике. По његовим речима идеја се мора родити у глави ученика, а улога наставника у том процесу се може упоредити са улогом бабице при порођају – да помогне да се идеја роди. Веома је важно да када се проблем решава у малим групама наставник да подршку лидеру или лидерима и да се на тај начин развија позитиван однос према онима који имају

---

<sup>10</sup> **Ђерђ Поља** (мађ. *Pólya György*; 13. децембар 1887 — 7. септембар 1985) је био мађарски математичар. Био је активан у много различитих математичких области, као што су редови, теорија бројева, комбинаторика, и вероватноћа

боља постигнућа. Ово онемогућава негативну селекцију која је присутна у западним школама, а нарочито је изражена код нас.

Након што су ученици дошли до неких идеја или решења, наставник отвара дискусију у којој се сукобљавају различите идеје и решења. Наставник се труди да дискусија конвергира ка решењу и нотира најзанимљивије идеје и закључке. У оваквој дискусији се неретко долази и до идеја које наставник није предвидео у својим анализама и такве идеје треба посебно истаћи.

Наставник заокружује час – сумира резултате и изводи закључке. Ученици су у старту свесни потребе за новим приступима и њихова мотивација је много већа него да су одмах обрађивали нове идеје без радионице која им претходи.

## Поглавље 6

### ЈАПАНСКИ ЧАС У ПРАКСИ

Овде ћу описати ток огледног часа који сам одржала у основној школи за ученике седмог разреда, заједно са њиховом наставницом математике. Тема часа је „Површина кружног исечка“, исто тако ћу дати примере још неких наставних јединица, како би се могле поједноставити и учинити занимљивијим.

#### 6.1 „Јапански час“ у учионици у Србији

Школа: О.Ш. „Бранко Ћопић“, Београд

Датум: 23. 4. 2013. године

Предмет: Математика

Одељење: VII2, VII3

Наставна тема: Круг

Наставна јединица: Површина кружног исечка

Облик рада: фронтални

Наставне методе: дијалошка, илустративна, демонстративна

Наставна средства: хамер папир, колаж папир, уџбеник, збирка, прибор

Васпитни циљ: Изграђивање позитивних особина код ученика, као што су: систематичност, упорност, тачност, уредност, објективност, самоконтрола и смисао за рад у групи.

Функционални циљ: развијање логичког, аналитичког и процедуралног (алгоритамског) мишљења; применом мисаоних операција, нарочито апстракције и генерализације, развијају способности за индуктивни начин закључивања.

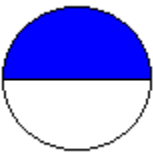
Уводни део часа (5 мин.)

Поновити формулу за површину круга:  $P = r^2 \cdot \pi$ . Поделити ученицима кругове од хамера и кружне одсечке од колаж папира.

Главни део часа (30 мин.)

Објаснити шта је кружни исечак. Предочити ученицима проблем.

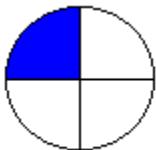
Задатак 1: Налепити кружни исечак чији је централни угао  $180^\circ$ . Како изарчунати површину овог исечка (дела круга)? Дозволити ученицима да сами закључе!



Ученици су одмах закључили да је то половина круга, дакле:

$$P_{ki} = \frac{1}{2} P_k = \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi$$

Задатак 2:  $\alpha = 90^\circ$

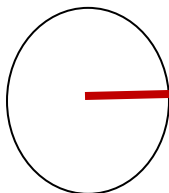


Залепили смо колаж и сви су углас изговорили да је то четвртина круга, дакле:

$$P_{\kappa i} = \frac{1}{4} P_{\kappa} = \frac{1}{4} r^2 \cdot \pi$$

Задатак 3:  $\alpha = 1^\circ$

Овај угао сам направила за мој велики круг од хamera, који сам окачила на таблу. Због величине кружног лука за угао од  $1^\circ$  за ученике нисам могла направити.



Двоје из одељења су одмах одговорили да је то 360-ти део круга, затим су сви то схватили уз закључак, зато што је  $1^\circ$ , 360-ти део од  $360^\circ$  тј.  $P_{\kappa i} = \frac{1}{360} P_{\kappa} = \frac{1}{360} r^2 \cdot \pi$

Овде сам додала да је то уствари  $P_{\kappa i} = \frac{1^\circ}{360^\circ} r^2 \cdot \pi$

Задатак 4:  $\alpha = 2^\circ$

$$P_{\kappa i} = \frac{2^\circ}{360^\circ} r^2 \cdot \pi$$

Задатак 5:  $\alpha = 3^\circ$

$$P_{\kappa i} = \frac{3^\circ}{360^\circ} r^2 \cdot \pi$$

Индукцијом су сами дошли до формуле:  $P_{\kappa i} = \frac{\alpha}{360^\circ} r^2 \cdot \pi$

Пр.1: Израчунати површину кружног исечка, ако је централни угао  $\alpha = 100^\circ$ ,  $r = 2,25\text{dm}$ .

Пр.2: Израчунај површину полице за саксију, која је предвиђена за ћошак зид. Полупречник полице је  $15\text{cm}$ .

Пр.3: Изразити формулу за површину кружног исечка преко кружног лука?

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ}, \quad P_{\kappa i} = \frac{\alpha}{360^\circ} r^2 \cdot \pi = \frac{r \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{2 \cdot 180^\circ} = \frac{l \cdot r}{2}$$

Завршни део(10 мин.): Попуњавање анкете.

Самоевалуација:

На основу реакције ученика и показаног знања при увежбавању, сматрам да је час успешно реализован. Већина ученика са одушевљењем прихвата начин одржавања часа, учествују у комуникацији и решавању проблема.

Велика заинтересованост ученика за излазак на таблу.

Анкета успешно спроведена са позитивним коментарима од већине ученика.

Пример анкете:

**Анкета се спроводи у сврху сазнања шта ученици мисле, желе и очекују од наставе математике и који су њихови предлози за што квалитетнији начин рада.**

Назив школе:

Разред:

**1. Да ли радо идете на час математике?**

- Да
- Не

**2. Сматрате ли да је математика тежак предмет?**

- Да
- Не

**3. Учим математику јер:**

- ме занима
- желим бољу оцену

- желим пролазну оцену
- ништа од наведеног

4. Оно што учите из математике човеку у животу уопште није потребно:

- тачно
- делимично тачно
- нетачно

5. На часу математике више волите:

- Индивидуални рад
- Групни рад

6. Када имате проблем у савладавању градива из математике, ви:

- покушавате сами да пронађете решење
- тражите помоћ од родитеља
- обратите се професору
- ништа од наведеног

7. Колико често на часовима математике користите друга средства, осим креде и табле:

- Често
- Понекад
- Никад

8. Да ли вам је данашњи час занимљивији од предходних:

- Да
- Не

9. Зашто вам се овај час више допада или не допада?

---

---

---

10. Да ли сте савладали данашњу наставну јединицу:

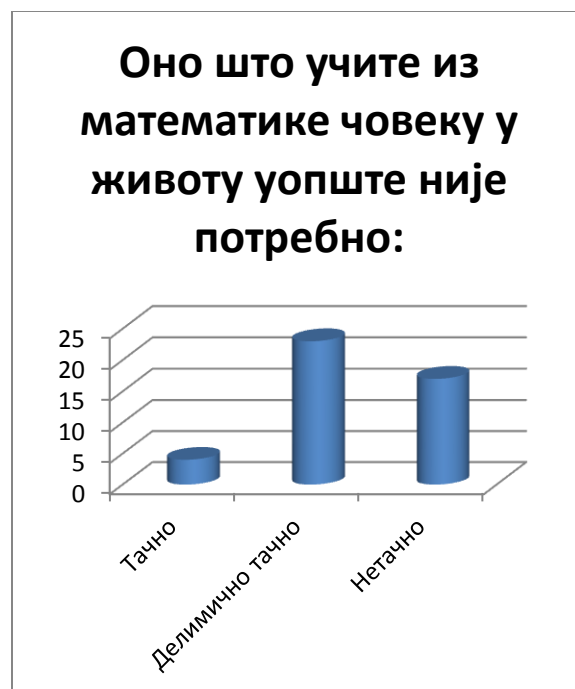
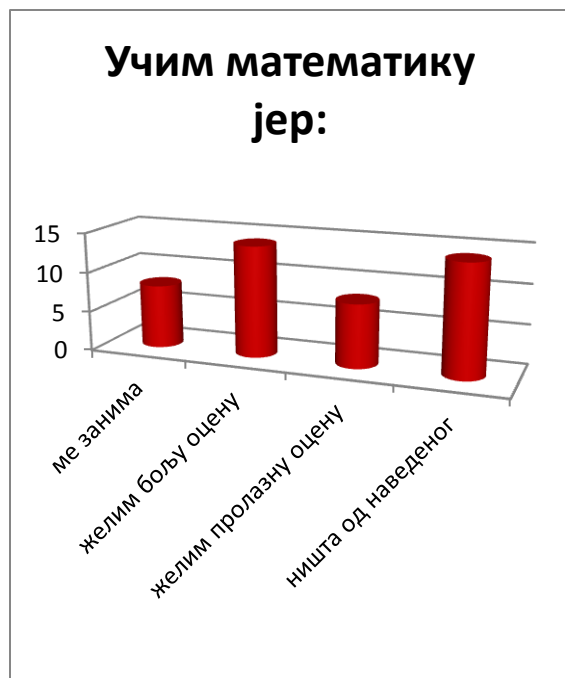
- Да
- Делимично
- Не

Одржала сам исту наставну јединицу у два одељења, у једном је био групни рад (27 ученика), а у другом индивидуални (17 ученика). У оба одељења час је био успешан, с тим што друго одељење више воли математику. Направићу неку статистику одговора ученика из оба одељења, заједно.

На захтев ученика додали смо одговор „онако“ на 1., 2. и 8. питање. Предлог је оправдан, јер ученици различито прихватају различите области математике, нека им је тежа нека лакша, често им математика није најомиљенији предмет, али ни најнеомиљенији, стога је одговор „онако“ смислен.

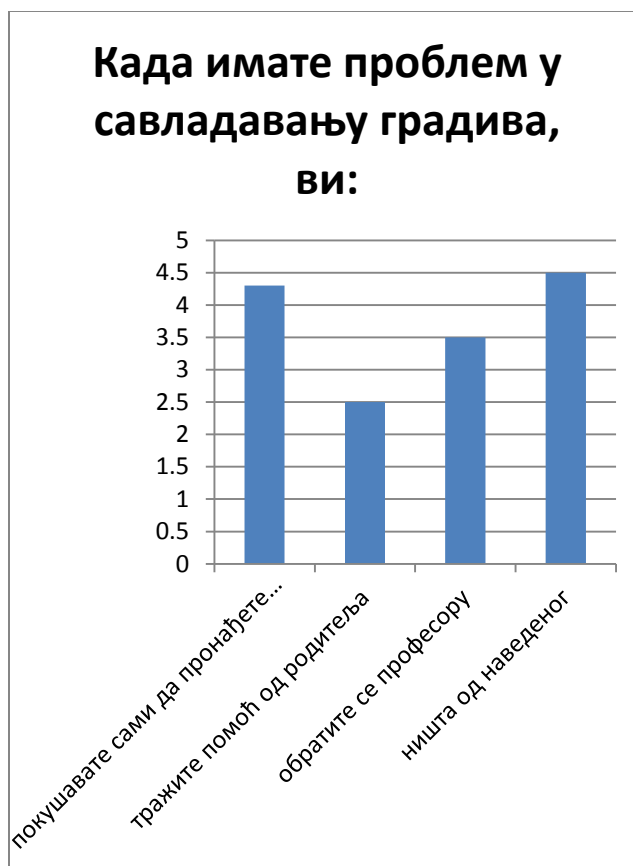
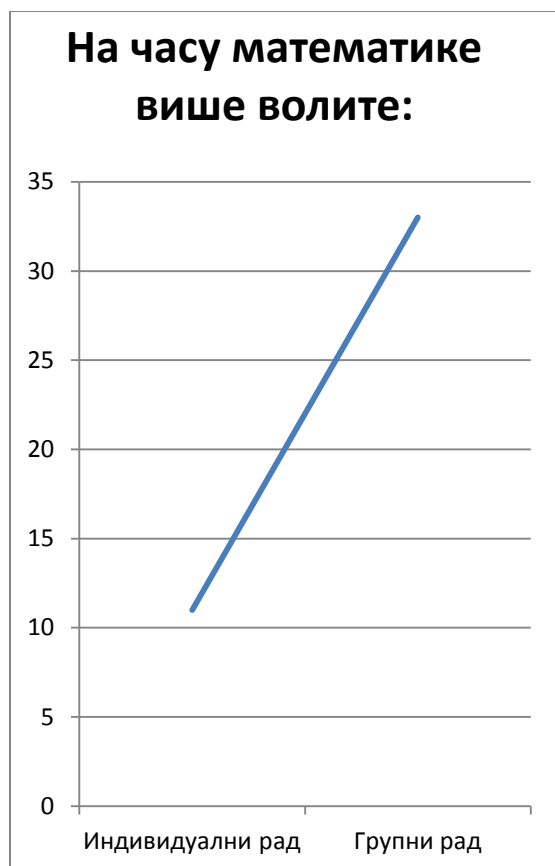


У овим одељењима математика није најомиљенији предмет. Верујем да такав став ученика према математици има везе са начином преношења градива. Тешко је данас, када је интернет толико ушао у животе свих нас, заинтересовати ученике и учинити им часове занимљивим. Зато је велика улога на нама, наставницима да математику учинимо занимљивијом, применљивом. Математика то и јесте, само је треба тако и преносити другима.



Ученици су свесни да им је математика потребна, али више кроз даље школовање него кроз живот. Кроз наставу им требамо показати на широку примену математике и кроз решавање свакодневних проблема, на развој логичког мишљења.

Дечија представа сврхе математике је различита и често је створена под утицајем родитељске и наставничке представе.



Групни рад се не може увек користити, али не треба пропустити прилику да кроз радионице или заједничко решавање проблема одржавамо часове. Већини ученика то одговара, јер се међусобно допуњују, надовезују и друже.



Одговори на 9. питање су разноврсни, али у кореспонденцији са питањем број 8. Свиђа им се јер је час другачији, кроз игру се учи. Сами морају да размишљају и да дођу до формуле. Имало је и одговора, како и није толико другачији од осталих часова. Али најбитније, да су на десето питање да ли су савладали данашњу лекцију, одговорили потврдно. Имало је и негативних одговора (5 ученика), али велики је успех да од 44 ученика њих петоро није савладао лекцију.

## 6.2 Пропорција у природи

Појам пропорционалности дужи се јако мало обрађује, а то је основа за обраду сличности троуглова и Талесову теорему. Зато бих посебну пажњу скренула на разумевању пропорционалности дужи и помињању *златног пресека*. Ученици врло често за златни пресек први пут чују на часовима ликовног, а да им наставници математике то и не спомену.

## Пропорционалност дужи

### Дефиниција:

Ако су дате дужи  $a$ ,  $b$  и  $u$ , где је  $u$  јединична дуж, и ако је  $a = m \cdot u$  и  $b = n \cdot u$ , тада се количник  $m : n$  назива **размером** дужи  $a$  и  $b$ , што се означава са  $a : b = m : n$ , односно  $\frac{a}{b} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$ .

*Размера двеју дужи је размера њихових дужина.*

Ако се дужи мере неком другом јединичном дужи, рецимо  $v$ , тада је  $u = k \cdot v$  па је

$$a = m \cdot k \cdot v, b = n \cdot k \cdot v.$$

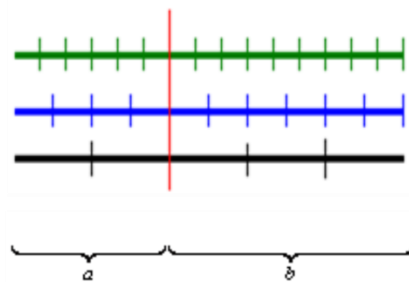
Размера дужи  $a$  и  $b$  у овом случају биће:  $\frac{a}{b} =$

$$\frac{m \cdot k \cdot v}{n \cdot k \cdot v} = \frac{m}{n}.$$

$$a:b=6:9=2:3$$

$$a:b=4:6=2:3$$

$$a:b=2:3$$



Из чега закључујемо да размера двеју дужи не зависи од избора јединичне дужи. Размера двеју дужи  $a$  и  $b$  је дата ако је позната размера њихових дужина или ако је једнака размери двеју датих дужина.

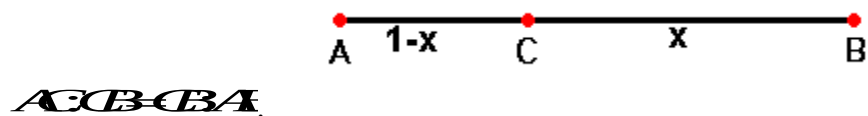
Ако два пара дужи имају једнаке размере онда се каже да су оне **пропорционалне**. Дакле, четири дужи  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , су пропорционалне ако је  $a : b = c : d$ , односно

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Дуж  $x$  која задовољава једнакост  $a : x = x : b$  или  $x : a = b : x$ , *геометријска средина* датих дужи  $a$  и  $b$ .

Ако узмемо једну дуж, њу можемо да поделимо на неограничено много начина. Међутим, ако је поделимо на два дела, тако да се већи део дужи односи према мањем делу као цела дуж према већем делу – онда је та подела изведена по правилу **златног пресека**. Области у којима се примењује златни пресек су заиста многобројне: ботаника, биологија, музика, сликарство, архитектура, хемија, физика, астрономија...

### Дефиниција златног пресека

Најпростије речено, златни пресек је подела дужи  $AB$  тачком  $C$ , тако да је однос краћег дела дужи према дужем делу једнак односу дужег дела према целој дужи, тј.



Узмимо да је дужина  $AB = 1$ , а дужина  $CB = x$ , добијамо да је:

$$(1-x):x=x:1$$

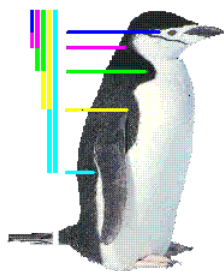
### Златни пресек у природи

Наше очи су такве, да се оптичке осовине не слажу са видним осовинама, јер су оптичке паралелне, а видне конвергентне. Када би и видне осовине биле паралелне, лепа површина би имала однос 1:2 (уместо 1:1,618...). Дакле, та површина ће бити нешто ужа и тако ће се

страни тог правоугаоника налазити на путањи зракова очију, тј. биће у акомодираном размаку и неће захтевати никакав напор за очи.

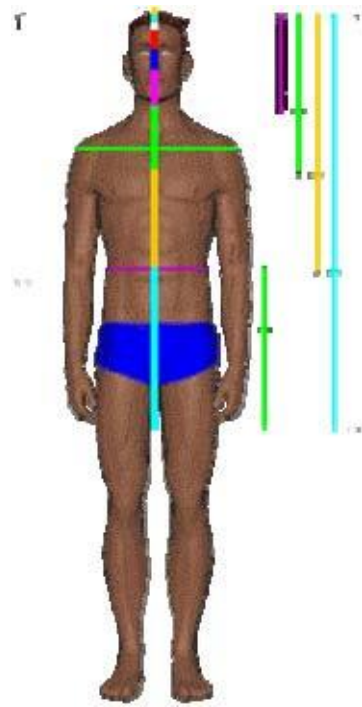
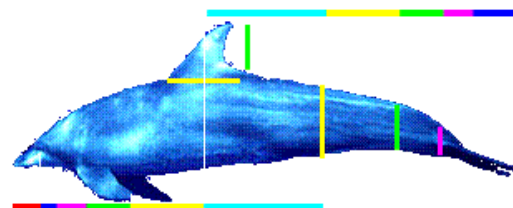
Лепота површине по пропорцији златног пресека објашњава се и нашим бинокуларним гледањем. Када бисмо имали једно око (ако бисмо монокуларно гледали), најлепша површина за нас би била квадрат, тј. тада би квадрат представљао савршену равнотежу између хоризонталног и вертикалног положаја.

Дакле, површина 3:5 је лепа и зато се примењује често у свакодневном животу: израда визиткарти, коверти, књига, рамова, огледала, фотографија...То је површина за коју кажемо да је **уравнотежена**, одговара нашој природи (природи наших очију).



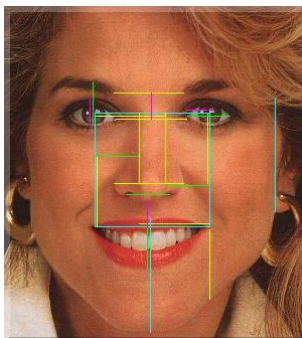
Очи, кљун, крило и кључне тачке тела пингвина се налазе у златном пресеку његове висине.

Око, пераја и реп су у златном пресеку дужине делфиновог тела. Димензије леђног пераја су димензије одсечка златног пресека (**жуто** и **зелено**). Дебљина делфиновог репног дела од говара одсечцима златног пресека од главе до репа.

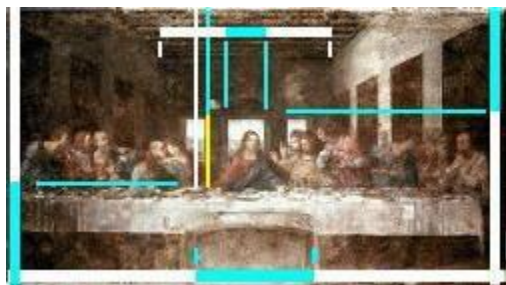


Златни пресек се налази дуж целог човековог тела. Удаљеност од рамена до пода и пупка до пода, те од рамена до врха шаке и од лакта до шаке је златни пресек.

Људско лице представља пример формира златан правоугаоник са висини очију. Уста и нос су раздаљине између очију и браде.



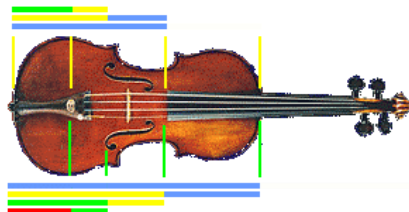
златног пресека. Глава средњом линијом која је у смештени у златном пресеку



Позната слика Леонарда да Винчија, „Тајна вечера“ даје пример примене златног пресека. У овој слици коришћење златног пресека је допринело балансу и лепоти слике.

Неки сматрају да је златни пресек присутан и у музичком стваралаштву. Као пример наводи се Моцартова симфонија у G – молу, затим Бетовенова пета симфонија. Заправо, дошло је до запажања да се чувени “уводни мото” не појављује само на почетку и крају, већ и у златним тачкама симфоније (0,618).

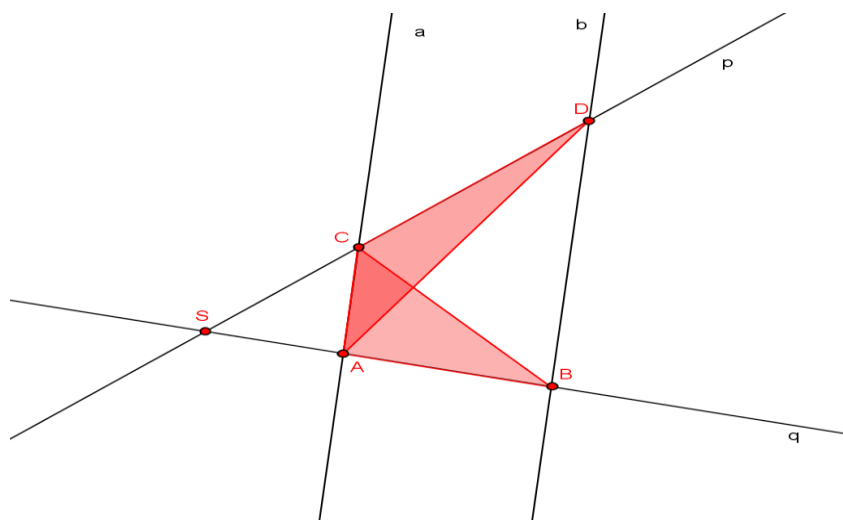
Златни пресек се користи и при конструкцији виолина.



### 6.3 ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА

Ако паралелне праве  $a$  и  $b$  пресецају праву  $p$  у тачкама  $A$  и  $B$ , а праву  $q$  у тачкама  $C$  и  $D$  и ако је  $S$  заједничка тачка правих  $p$  и  $q$ , тада важи:

$$\frac{SA}{AB} = \frac{SC}{CD}$$



Доказ: Троуглови  $ABC$  и  $ACD$  имају исте површине јер: праве  $a$  и  $b$  су паралелне, па троуглови имају исте висине и имају исту основу  $AC$ . Тада важи

$$\frac{SA}{AB} = \frac{P(SAC)}{P(SBC)} = \frac{P(SAC)}{P(SAD)} = \frac{P(SCA)}{P(SDA)} = \frac{SC}{SD}$$

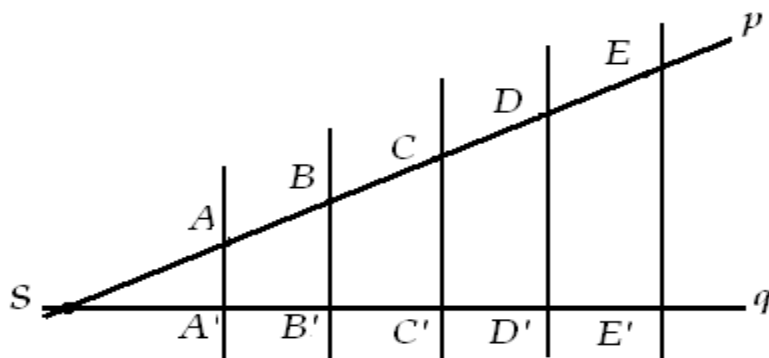
Што је и требало доказати. □

Важи и обрнуто тврђење теореме.

**Теорема :**

Ако су две полуправе  $S_p$  и  $S_q$  пресечене двома правим  $a$  и  $b$ , тако да су одсечци на  $S_p$  и  $S_q$  пропорционални , онда су праве  $a$  и  $b$  паралелне.

Ако две произвољне праве  $p$  и  $q$  пресеца низ паралелних правих , тако да су одсечци на једној правој једнаки међу собом , онда су и одсечци на другој правој међусобом једнаки .



На слици имамо низ паралелних правих које праве једнаке одсечке на  $p$ , то јест  ~~$AB=BC=CD=DE$~~ . Онда су и одсечци, по Талесовој теореме, на  $q$  такође једнаки :  ~~$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'$~~ .

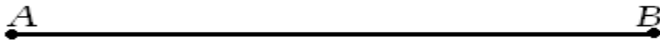
Овај закључак се директно примењује код поделе дужи на једнаке делове .

**Пример 1.**

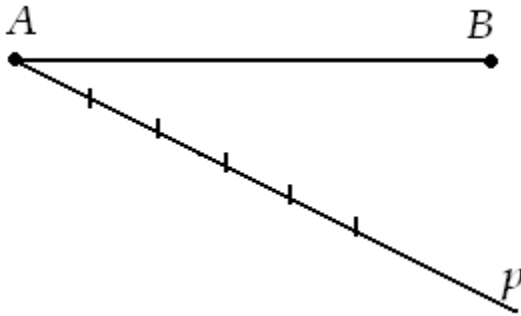
Дату дуж  $AB$  поделити на пет једнаких делова.

**Решење :**

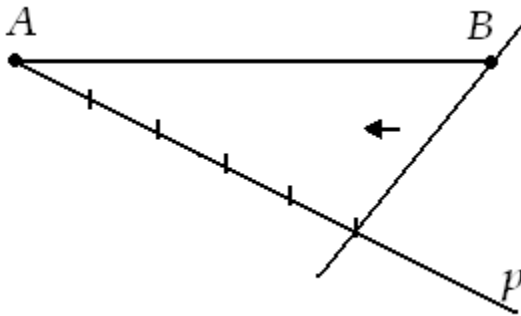
Узмемо произвољну дуж  $AB$ :



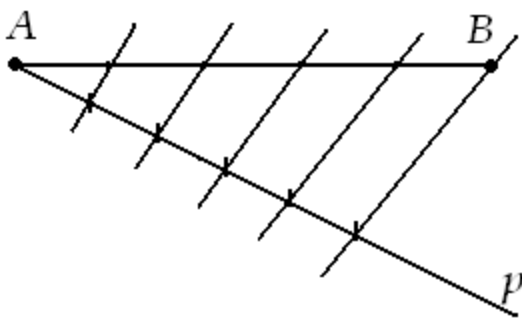
Из тачке  $A$  нанесемо полуправу  $Ap$  ( на било коју страну ) и на њој произвољним отвором шестара нанесемо 5 једнаких дужи.



Крајњу тачку последње нанесене дужи , спојимо се тачком  $B$ .



Паралелно са добијеном правом кроз цртице на  $p$  наносимо праве:



Овим је дата дуж подељена на 5 једнаких делова. Сличан поступак би био и да смо дуж требали поделити на више делова.

### **ТАЛЕС из Милета** (око 624-547. [п.н.е.](#))

Талес из Милета је био свестрано образован. Превазишао је све остале мудраце многостраношћу своје делатности: био је хидротехничар, наутички инжењер, трговац, политичар, астроном, математичар и филозоф, важио је у старом веку као први јонски природни филозоф и убрајали су га међу Седам мудраца.

Верује се да је у своје време установио годишња доба и да је годину поделио на триста шездесет и пет дана. Морнаре је упутио да пазе на Малог медведа, јер он најбоље показује север; прорекао је помрачење сунца од 28. маја 585 п.н.е.; за Земљу је сматрао да, као округла плоча, плива на води.

У складу с традицијом Талес је путовао у Египат где је научио много о египатској геометрији. Никада није имао учитеља, једино што је при посети Египту проводио време с тамошњим свештеницима где је упознао њихове геометријске и астрономске закључке о збиру углова у троуглу, о уписаном кругу (у троугао) итд.

Талес је у Египту израчунао висину пирамиде помоћу бачене сенке (верује се да је посматрао дужину сенке пирмиде у току дана у тренутку када је висина неког објекта једнака дужини његове сенке), први је доказао једнакост унакрсних углова, затим је доказао да су углови једнакокраког троугла подударни наспрам подударних страница и теорему о сличности троуглова.

Један математичар оног доба тврди да је управо Талес био тај који је увео идеално доказивање помоћу прецизног уочавања односа између различитих делова неког лика. То је био нов феномен у ондашњем свету.

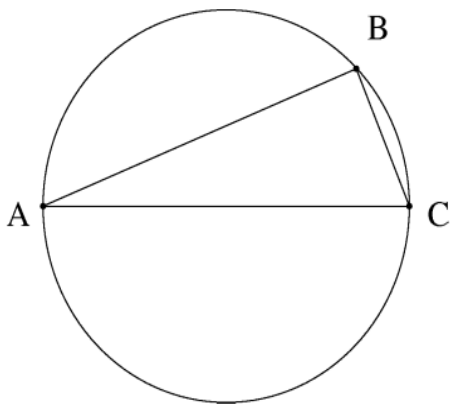
Сматра се првим Грком који је излагао и доказао теореме стога му се приписује следећих 5 теорема:

1. Пречник полови круг
2. Углови на основици једнакокраког троугла су једнаки
3. Наспрамни углови које формирају две праве које се секу су једнаки
4. Троугао је одређен једном страницом и угловима налеглим на њу
5. Угао уписан у полукруг је прав .

***Угао над пречником је прав .***

Ова **Талесова теорема** тврди да :

Ако су  $A$ ,  $B$  и  $C$  тачке на кругу где је  $AC$  пречник круга, тада је угао  $ABC$  прав угао.



Иако многи наводе да је Талес први доказивао теореме, прилично је сигурно да није користио строги логички начин доказивања виђен касније у Еуклидовим Елементима већ првенствено цртежима у песку користећи очигледност као најјачи аргумент.

Талес је први који је понудио објашњења за природне појаве, која нису имала везе са митологијом и црквеним веровањима. Његове мисли су биле нове, смеле и узбудљиве. Није причао у загонеткама, и није посезао за измишљањем недефинисаних супстанци. Многи су покушавали да га дискредитују, али његове хипотезе су биле рационалне и научно засноване.

Најбитније ствари које је Талес оставио у наслеђе су: трагање за знањем ради њега самог; развој научног метода; развој практичних метода у опште принципе; његова радозналост и директан прилаз природним појавама. У шестом веку пре нове ере Талес је поставио питање: „Од чега је саздан космос?“. За одговором се и даље трага.

Наводна година његове смрти,а умро је у дубокој старости,пада отприлике у доба рођења Питагоре.

### Сличност троуглова

Ова наставна јединица је ученицима најмање разумљива и врло брзо је забораве. Кроз причање приче, како је Талес мерио даљину брода од копна или висину пирамиде, ова наставна јединица се може дубоко урезати у памћење ученика.

#### *Мерење висине пирамиде*

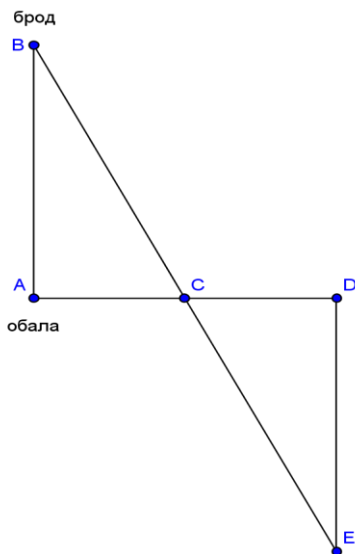
Приче о Талесовом начину да утврди висину пирамиде варирају. Прва верзија потиче од Диогена из Лаерте, који говори да је Талес посматрао дужину сенке пирамиде у тренутку дана када је наша висина једнака дужини наше сенке.

Плутарх каже: „*Поред твојих подвига задивио си (Амазиса) својим мерењем пирамиде када си, без помоћи какве справе само поставио штап на граници бачене сенке пирамиде, начинивши два троугла под дејством сунчевих зрака, показао да се пирамида према штапу односи као њена сенка према његовој.*“

Прва од ових верзија је вероватно оригинална, и подразумева знатно једноставнију процедуру за решавање проблема. Талес није могао да не уочи да у тренутку када је сенка једнака висини одређеног објекта, иста релација важи за све објекте који имају сенку. Узастопним мерењем разних објеката и њихових сенки морао је да утврди правилност.

### *Мерење удаљености брода на мору*

Још једна изванредна примена сличности троуглова, за налажење растојања брода на мору од било ког места на обали. Мерење те удаљености подразумева конструкцију на копну троугла  $EDC$  сличног троуглу  $BAC$ , коме је једно теме  $B$  удаљени брод на мору. Растојање брода  $B$  од тачке на копну  $A$  биће онолико пута веће од растојања тачака  $A$  и  $C$ , колико је растојање тачака  $E$  и  $D$  веће од растојања тачака  $D$  и  $C$ , тј.  $BA : AC = ED : DC$ .



## Поглавље 7

### ЗАКЉУЧАК

Зашто сам изабрала ову тему да о њој пишем?

Као што сам кроз рад наводила, желим да побољшам однос према настави геометрије и да је што више приближим ученицима.

Кроз рад са децом уочавам да ће то бити веома тежак посао, а самим тим се морам помирити да великом броју ученика нећу успети да дочарам лепоту математике из простог разлога што се углавном још пре почетка основне школе усађује страх од математике, од стране родитеља, породице, комшија, такође из њиховог не знања математике.

Уочавам да је тренутна ситуација у школству доста лоша, под тим мислим знање није модерно, па се слабо ђаци и труде да нешто сазнају. Из тог разлога желим да кроз свој радни век што боље презентујем оно што радим и ако могу нешто променим на боље.

### Десет заповести наставницима

Наставницима математике Ђерђ Поја у својој познатој књизи „Математичко откриће“ препоручује десет заповести:

1. Интересуј се за математику!
2. Знај свој предмет!
3. Знај на који начин се може научити то што је неопходно! Најбољи начин учења је самооткривање!
4. Знај да читаш са лица својих ученика! Настој да спознаш шта они од тебе очекују; схвати њихове тешкоће; стави себе у њихову позицију!
5. Не ограничавај се на голе информације; тежи да код ученика развијаш одређене навике, потребан склад мишљења и привикавање на методологију!
6. Труди се да их научиш да наслућују!
7. Настој да их научиш да наслућено доказују!
8. Наглашавај шта се у конкретном задатку може искористити за решавање других проблема; потруди се да из дате конкретне ситуације открију општи метод!
9. Не откривај одмах своје тајне; пусти ученицима да покушају да погоде оно што желиш да им откријеш; уступи самим ученицима да открију што је могуће више!
10. Помажи ученицима корисним упутствима, али не намећи своје мишљење по сваку цену

## Литература

- [1] *Зоран Лучић, ОГЛЕДИ ИЗ ИСТОРИЈЕ АНТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ, Службени гласник, Београд, 2009.*
- [2] *Leonard Mlodinov, ЕУКЛИДОВ ПРОЗОР, превео Зоран Живковић, Лагуна 2005.*
- [3] *С. Јешић, Д. Мишић, М. Игњатовић, Н. Бабачев, МАТЕМАТИКА за 7. разред основне школе, Герундијум 2009.*
- [4] *С. Јешић, Д. Мишић, М. Игњатовић, Н. Бабачев, МАТЕМАТИКА за 8. разред основне школе, Герундијум 2009.*
- [5] *И. Анић, Д. Павловић-Бабић, В. Радак, ФОРМУЛА ЖИВОТА, Математископ 2011.*
- [6] *Академик Никола Поткоњак, БУДУЋА ШКОЛА, зборник радова са научног скупа, Српска академија образовања, Београд, 2009.*
- [7] *L. Desimone, T. Smith, D. Baker, K. Uneo, Assessing Barriers of the Reform of U.S. Mathematics Instruction an International Perspective, American Educational Research Association*
- [8] *В. Мићић, Применимо у основној школи стечена геометријска знања, Семинар за професоре основних школа, Београд, јануар 2007.*
- [9] *Проф. др М. Вилотијевић, Променама до ефикасније школске будућности, Београд, Научни рад*
- [10] *Проф. др М. Матејевић, Савремена школа и усмереност наставника ка аутономији, Ниш, Научни рад*
- [11] *Проф. др Б. Ратковић Његован, М. Бајац, Мултимедији и интерактивност у школској настави, Нови Сад, Научни рад*