Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

ТРИГОНОМЕТРИЈА ХИПЕРБОЛИЧКЕ РАВНИ

Аутор
Мима Стојић

Ментор
Др Мирослава Антић

13. VI 2013.
Београд

Садржај

Увод

Хиперболичка геометрија позната и као геометрија Бољаја-Лобачевског је нееуклидска геометрија у којој не важи пети Еуклидов постулат.

Постулат паралелности у еуклидској геометрији је еквивалентан тврђењу да у дводимензионом простору, за произвољну праву l и тачку P која јој не припада, постоји тачно једна права која садржи P и не сече праву l. За ту праву кажемо да је паралелна са l. У хиперболичкој равни постоје бар две праве кроз P које немају заједничких тачака са l, што значи да не важи постулат паралелности.

У трећој деценији деветнаестог века Николај Лобачевски[1] и Јанош Бољај[2], независно један од другог предлажу да се теорија паралелних правих утемељи на аксиоми која негира пети Еуклидов постулат. Нагласимо да у време настајања теорије нису били познати модели хиперболичке геометрије. Немајући пред собом очигледан модел који би подупро њихов поглед на основегеометрије, они су успели да изграде теорију која је, како је касније показано, исто онолико логички ваљана колико и еуклидска геометрија. Они су како млади Јанош Бољај истиче у једном писму свом оцу, "ни из чега" створили "један сасвим нови свет". Први пут је заснована једна теорија у којој се не може позвати на очигледност, заснована је геометрија у којој постоји тачка B и права a која је не садржи, такве да у њима одређеној равни постоји више од једне праве која садржи B, а са правом a нема заједничких тачака.

Из геометријског света у коме се у потпуности могло ослонити на интуицију засновану на представама које стварају чула, закорачило се у свет који постоји изван дохвата нашег искуства. Стога, није изненађујуће што њихове замисли нису за њихова живота доживеле признање које им припада. Само је Гаус[3] разумео дубину и далекосежност њихових идеја, будући да су се, према његовим речима, оне подударале са његовим замислима од којих је неке снивао више од тридесет година. Занимљиво, Гаус је знао замисли обојице заснивача хиперболичке геометрије, но није упознао ни једног од њих са резултатима другог. До Бољаја је доспела једна расправа на немачком језику Николаја Лобачевског, док Лобачевски никада није расправљао о раду Јаноша Бољаја.

У оквиру еуклидске геометрије конструисани су многи модели који задовољавају аксиоме хиперболичке геометрије, чиме је доказано да је пети постулат независан од осталих постулата. Један од најпознатијих модела конструисао је 1868 године Белтрами[4] иако данас он носи назив Белтрами–

[1] Николай Лобачевский, 1792-1856, руски математичар, поставио је темеље нееуклидске геометрије

[2] János Bolyai, 1802-1860, мађарски математичар, један од оснивача нееуклидске геометрије.

[3] Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, немачки математичар и научник који је дао значајан допринос многим пољима.

[4] Eugenio Beltrami, 1835-1900, италијански математичар, познат по свом раду у диференцијалној геометрији и математичкој физици.

Клајнов[5] пројективни модел. Такође, често се користе и Поенкареов[6] диск модел и Поенкареов полуравански модел као и хиперболоидни модел. Обрнуто, у хиперболичком простору на орисфери се реализује еуклидска геометрија. Зато су еуклидска и хиперболичка теорија еквиконзистентне.

У овом раду приказан је један од начина извођења тригонометријских релација које повезују мере страница и углова троуглова хиперболичке равни, изложен у књизи [6], Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, Широкова. Постоје многи различити начини излагања геометрије, али у њеној сржи је систем аксиома на којима се та геометрија заснива. Зато, иако је тема овог рада тригонометрија хиперболичке равни, прво ћемо изложити директне последице аксиоме Лобачевског, заједничке особине и разлике еуклидске и нееуклидских геометрија, а затим, у другом поглављу ћемо изложити и нека од карактеристичних својстава праменова и епицикала у хиперболичком простору, а која су битна за даља извођења. Затим, у трећем поглављу приказујемо особине концентричних орицикала. Четврто и пето поглавље су посвећени, редом, двема битним метричким релацијама везаним за орицикл и функцију Лобачевског. У шестом и седмом поглављу изведене су тригонометријске релације троуглова, а затим, у осмом и тригонометријске релације везане за Ламбертов[7] четвороугао. На крају, у деветом поглављу дајемо и геометријску интерпретацију параметра кривине k хиперболичке равни.

Илустрације су рађене у софтверу Autocad.

[5]Felix Klein, 1849-1925, немачки математичар, познат по свом раду на теорији група, комплексној анализи, нееуклидској геометрији, као и на вези између геометрије и торије група.

[6]Henri Poincaré, 1854-1912, француски математичар, теоријски физичар, инжењер и филозоф математике.

[7]Johann Heinrich Lambert, 1728– 1777, швајцарски математичар, физичар, филозоф и астроном. Познат је по доказивању ирационалности π. У његову част један астероид је назван Ламберта 187.

1 Аксиома Лобачевског и њене последице

Термин нееуклидска геометрија обухвата све геометрије у којима не важи нека од аксима еуклидске геометрије, међу њима највише пажње се посвећује онима у којима не важи V Еуклидов постулат по коме се две праве једне равни које секу трећу под сагласним угловима, чији је збир мањи од опруженог, секу са исте стране сечице са које је и пар сагласних углова.

У апсолутној геометрији, односно оној у којој важе прве четири групе аксиома (аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности), искази Плејферове[8] аксиоме и петог Еуклидовог постулата су еквивалентни, по њима за произвољну праву и тачку ван ње у њима одређеној равни постоји тачно једна права инцидентна са датом тачком и дисјунктна са датом правом. Негација овог тврђења се може раздвојити у два случаја, онај када не постоји ниједна таква права и када их има бар две. У првом случају добијена геометрија назива се елиптичком и у њој не важе све аксиоме апсолутне равни, још једна од значајних разлика, поред Плејферове аксиоме је та да релација „између” која се односи на три колинеарне тачке мора бити замењена релацијом распореда четири колинеарне тачке.

Заправо, једна од последица аксиома апсолутне равни је да постоје компланарне и дисјунктне праве, односно за дату тачку и праву која је не садржи постоји бар једна права у тој равни инцидентна са том тачком и дисјунктна са датом правом. Сада је негација Плејферове аксиоме следећа

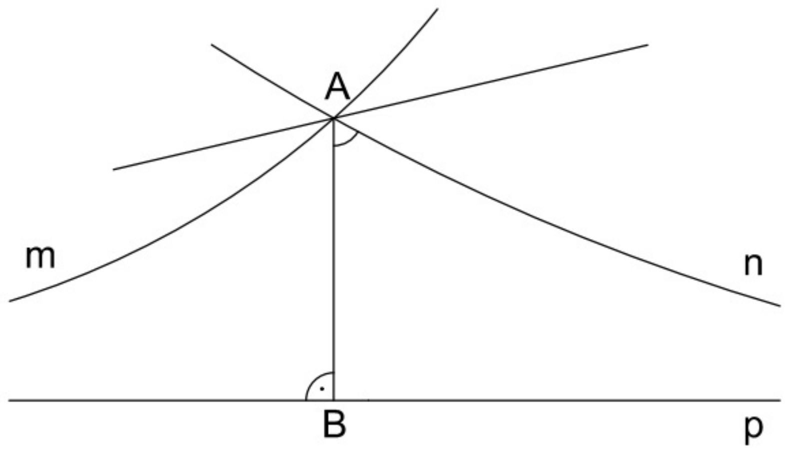
Аксиома Лобачевског За дату тачку A и праву p која је не садржи, у равни њима одређеној постоје бар две праве које садрже тачку A и не секу дату праву p.

Геометрија изграђена на аксиомама апсолутне геометрије и на аксиоми Лобачевског је хиперболичка геометрија. С обзиром да се од система аксиома еуклидске геометрије овај систем разликује у једној аксиоми, ове две геометрије су у многим погледима веома сличне. У наставку ћемо указати на неке од њихових специфичних разлика.

Ако су a и b две праве једне равни које се секу у A, а дисјунктне су са правом p, тада права p припада једном од четири угла на које праве a и b разлажу раван. Тада су и све праве инцидентне са A које припадају пару унакрсних углова којима не припада p такође дисјунктне са p, односно правих кроз A које не секу p има бесконачно много. Помоћу Дедекиндове аксиоме покаже се да међу њима постоје две праве m и n, такве да све остале припадају пару унакрсних углова које одређују m и n којима не припада p. Зато ће свака права кроз A која припада преосталом пару унакрсних углова сећи p. За праве m и n кажемо да су паралелне p. Ова релација очигледно није транзитивна јер се m и n секу. Међутим, релација паралелности дефинисана аналогно на скупу полуправих јесте транзитивна. Две паралелне праве се бесконачно приближавају једна другој у смеру

[8] John Playfair, 1748– 1819, шкотски научник, математичар и професор природне филозофије на Универзитету у Единбургу.

паралелности, можемо замишљати да се секу у бесконачно далекој тачки (видети [3] и [4]).
Нека је B подножје нормале из тачке A на p. Тада су углови које AB заклапа са m и n подударни и оштри и називају се угловима паралелности за дуж AB. Углови паралелности су у општем случају различити, за разне дужи. Двема подударним дужима одговара исти угао паралелности. Функција која дужима придружује њихов угао паралелности назива се функцијом Лобачевског и означава са Π. Функција Лобачевског је монотоно опадајућа, када мера дужи тежи нули, вредност функције тежи $\frac{\pi}{2}$, а када мера дужи тежи бесконачности, вредност функције тежи нули. Такође, за сваки оштар угао хиперболичке равни постоји права ортогонална на једном његовом краку која не сече његов други крак.



Сл. 1.1

За две компланарне праве које се не секу нити су паралелне кажемо да су хиперпаралелне. Ни ова релација није транзитивна. За сваке две хиперпаралелне праве постоји тачно једна заједничка нормала. Ако их она сече у тачкама K и L, тада су K и L две најближе тачке ових правих, растојање тачака ових правих је све веће како се удаљујемо од K и L, односно можемо рећи да се, како се крећемо ка бесконачности, са једне или са друге стране праве KL, хиперпаралелне праве једна од друге удаљују.

Покушавајући да покаже да је хиперболичка геометрија неконзистентна Лежандр[9] је показао да збир углова троугла апсолутне равни није већи од опруженог угла, затим, да је тај збир или код свих троуглова једнак опруженом углу или не постоји троугао са таквим збиром. Такође је показао да је збир унутрашњих углова код једног (а самим тим код свих троуглова) једнак опруженом углу ако и само ако важи Плејферова аксиома. Дакле, збир углова произвољног троугла хиперболичке равни је мањи од π. У

[9] Adrien-Marie Legendre, 1752 — 1833, француски математичар. Значајно је допринео на пољима статистике, теорије бројева, апстрактне алгебре и математичке анализе.

општем случају два разна троугла имају и различит збир унутрашњих углова. Лако је закључити да је збир унутрашњих углова произвољног простог, равног n-тоугла мањи од $(n-2)\pi$.

Четвороугао са три права угла назива се Ламбертовим, и у хиперболичкој равни његов четврти угао је тада очигледно оштар. Сакеријев[10] четвороугао $ABCD$ има два суседна угла права, $\angle A = \angle B = \pi/2$, а бочне стране AD и BC су подударне. Директна последица је да су тада и углови у тачкама C и D подударни, и у хиперболичкој геометрији морају бити оштри док је страница CD већа од основице AB.

[10]Giovanni Girolamo Saccheri, 1667- 1733, италијански математичар, свештеник и филозоф. Сакеријев четвороугао је добио назив по њему.

2 Праменови и снопови правих, епицикли и еписфере

У даљем раду, при извођењу тригонометријских једнакости, често ћемо користити особине паралелних правих хиперболичке равни, као и орицикала и орисфера. Зато у овом поглављу посебну пажњу посвећујемо праменовима и сноповима правих, као и кривама и површима које се помоћу њих генеришу.

Дефиниција 2.1 Максималан скуп свих правих неке равни таквих да за сваке три праве a, b, c из тог скупа важи да је композиција осних рефлексија $S_c \circ S_b \circ S_a$ такође осна рефлексија је прамен правих.

Сваки прамен је на јединствен начин одређен са две своје различите праве.

Дефиниција 2.2 Нека је χ прамен правих и X произвољна тачка равни тог прамена која не припада свим правама тог прамена. Скуп свих тачака те равни основиметричних тачки X у односу на праве прамена χ зове се епицикл.

Сваки епицикл је одређен на јединствен начин праменом и једном својом тачком, али такође и са три своје различите тачке. Праве прамена се некада и називају осама тог епицикла. Права која садржи тачку епицикла и ортогонална је на осу епицикла у тој тачки назива се тангентом епицикла. Тангента и нелинеарни епицикл имају заједничку тачно једну тачку, а све остале тачке епицикла налазе се са исте стране тангенте.

У еуклидској равни разликујемо два вида праменова правих и то:

1. прамен конкурентних правих, тј. правих које се секу у једној тачки, средишту тог прамена

2. прамен паралелних правих, тј. правих ортогоналних на неку фиксирану праву.

Епицикли који одговарају овим праменовима еуклидске равни су редом круг и права.

У хиперболичкој равни постоје три различита вида праменова правих и то:

1. прамен конкурентних правих, тј. правих које се секу у једној тачки, средишту тог прамена; такав прамен називамо епицикличним.

2. прамен правих које су паралелне са неком правом s, у том случају праву s називамо осом тог прамена, а сам прамен параболичким. Паралелне праве се једна другој бесконачно приближавају па можемо сматрати и да се секу у бесконачној тачки.

3. прамен хиперпаралелних правих, управних на једној истој правој n, у том случају праву n називамо осом тог прамена, а сам прамен хиперболичким.

Слично као и у еуклидском случају епицикл који одговара конкурентном прамену назива се круг, а центар прамена је уједно и центар круга (видети [5]). Ако је у питању прамен хиперпаралелних правих, одговарајући епицикл је еквидистанта, крива коју чине тачке подједнако удаљене од основице прамена, која је уједно и основица еквидистанте. Растојање тачака еквидистанте од основице зовемо висином еквидистанте. Еквидистанта је права ако и само ако је њена висина нула. Ако је у питању параболички прамен правих, одговарајући епицикл назива се орицикл. Ако сматрамо да се паралелне праве секу у бесконачној тачки можемо сматрати и да је орицикл специјални случај круга чији је центар бесконачна тачка. Орицикл није линеаран скуп.

Доказаћемо неколико тврђења која појашњавају релације међу параболичким праменовима и орициклима.

Теорема 2.1 *Постоји јединствена права која припада двама разним параболичким праменовима.*

Доказ: Докажимо прво егзистенцију. Нека је X произвољна тачка равни и p и q полуправе са теменом X које су паралелне правама тих параболичких праменова. Уколико су p и q две разне полуправе исте праве пронашли смо праву која испуњава тражени услов. Ако су у питању неколинеарне полуправе, нека је s бисектриса конвексног угла одређеног полуправама p и q. Постоји јединствена права ортогонална на s и паралелна са p, а тада је она паралелна и са q, те припада и параболичким праменовима. Јединственост следи из чињенице да је прамен одређен са две своје праве, те ако би постојале две разне праве које припадају праменовима, праменови би се поклапали. ∎

Теорема 2.2 *Транслацијом дуж праве параболичког прамена, тај прамен се слика у себе.*

Доказ: Транслација је композиција две осне рефлексије $S_q \circ S_p$ где су осе p и q управне на датој правој a. Нека су a_1 и a_2 две комплементне полуправе праве a и нека је дати прамен, прамен правих паралелних са a_1. Произвољна права паралелна a_1 се симетријом S_p слика у праву паралелну полуправој a_2, а затим симетријом S_q у праву паралелну поново полуправој a_1. Одавде директно следи доказ. ∎

Теорема 2.3 *Свака два орицикла су подударни ликови.*

Доказ: Нека су прво орицикли генерисани истим параболичким праменом и нека је s било која права тог прамена, односно било која њихова заједничка оса. Ако s сече ове орицикле у тачкама A и B на основу Теореме 2.2 следи да се транслацијом τ_{AB} један прамен слика у други, тачка A у тачку B, а како је епицикл јединствено одређен праменом и једном својом тачком, један орицикл се слика у други.
Ако два различита прамена генеришу ове орицикле, тада на основу Теореме 2.1 постоји тачно једна заједничка права та два прамена, означимо је s. Ако

она сече орицикле у тачкама A и B, нека је n медијатриса дужи AB. Тада се осном рефлексијом S_n један прамен слика у други, као и један орицикл у други. ∎

Дефиниција 2.3 Сноп правих је максимални скуп свих правих у простору таквих да су сваке две праве тог скупа компланарне, док све праве тог скупа нису у једној равни.

Све праве једног снопа које припадају датој равни чине прамен правих те равни. Сваки сноп је и јединствено одређен са било које две своје праве.

Дефиниција 2.4 Нека је Ξ сноп правих и X тачка која не припада свим правама тог снопа. Скуп свих тачака простора осносиметричних X у односу на праве тог снопа називамо announcementсфером, а праве тог снопа осама announcementсфере.

У еуклидском простору постоје два типа снопова правих и то:

1. сноп конкурентних правих, тј. правих које се секу у једној тачки, средишту тог снопа
2. сноп паралелних правих, тј. правих ортогоналних на неку фиксирану раван.

Announcementсфере који одговарају овим сноповима еуклидског простора су сфере и равни.

У хиперболичком простору, постоје три типа снопова правих и то:

1. сноп конкурентних правих, тј. правих које се секу у једној тачки, који још називамо елиптичким.
2. сноп хиперпаралелних правих, односно оних које су управне на задатој равни, коју називамо основом тог снопа, а сам сноп хиперболичким.
3. сноп паралелних правих, који називамо параболичким.

Announcementсфере хиперболичког простора које редом одговарају овим сноповима су сфера, еквидистантна површ и орисфера. Еквидистантну површ чине тачке подједнако удаљене од основе одговарајућег хиперболичког снопа. Еквидистантна површ је раван ако и само ако је њена висина нула. Орисферу сматрамо граничним случајем сфере, када је њен центар бесконачно далека тачка у којој се секу праве тог параболичког прамена.

Непразни пресек announcementсфере и равни је епицикл. Ако раван, при том, садржи неку од правих снопа који генерише announcementсферу тада је пресек announcementсфере и равни редом круг, еквидистанта, односно, орицикл, ако је announcementсфера сфера, еквидистантна површ, односно, орисфера.

Слично као и у случају орицикала, може се показати да су сваке две орисфере међусобно подударне. Посматрајмо орицикле на сфери који се добијају као пресеци орисфере и равни које садрже праве параболичког снопа који генерише ту орисферу. Дефинишимо да је тачка A између тачака B и C уколико припада луку орицикла BC. Такође, сматрамо да је пар тачака (A, B) подударан пару тачака (C, D) ако постоји изометрија хиперболичког простора која слика орисферу у себе, а која слика један пар тачака у други. Ако све тачке орисфере сматрамо тачкама новог модела геометрије, а скуп ових орициклала скупом правих тог модела, тада ова два скупа и претходно дефинисане две релације задовољавају аксиоме еуклидске геометрије равни, односно важи следећа теорема.

Теорема 2.4 *На орисфери се реализује еуклидска геометрија.*

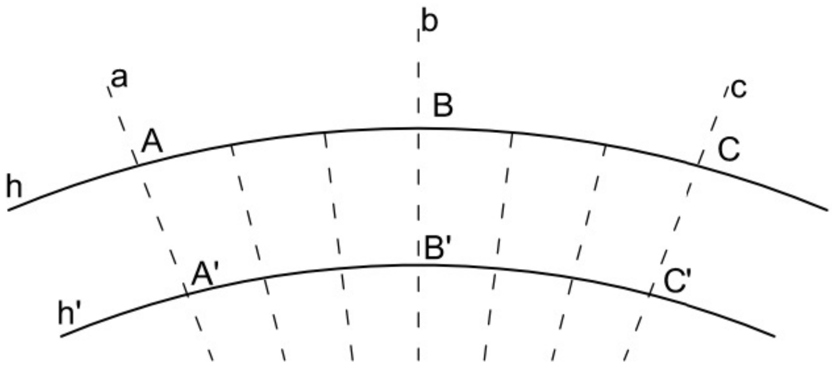
3 Концентрични орицикли и њихове особине

Особине орицикала имају важну улогу у извођењу тригонометријских релација хиперболичке геометрије. Овде ћемо приказати неке од њих.

Дефиниција 3.1 Два разна орицикла који одговарају истом прамену правих називамо концентричним или паралелним.

Теорема 3.1 *Однос лукова двају концентричних орицикала који се налазе између двеју оса тих орицикала не зависе од величине тих лукова, већ само од одстојања између тих орицикала.*

Доказ:



Сл. 3.1

Нека три осе a,b,c двају концентричних орицикала h и h' секу орицикл h у тачкама A, B, C и орицикл h' у тачкама A', B', C'

Претпоставимо најпре да су лукови AB и AC орицикла h самерљиви, нека је њихова заједничка мера m пута садржана у луку AB, а у луку AC садржана n пута. Симетријом у односу на осу орицикла лук орицикла слика се у њему подударан лук. Заједничке осе орицикла h и h' кроз крајње тачке подеоних лукова AB и AC разлажу лукове $A'B'$ и $A'C'$ орицикла h' респективно на m и n делова који су међусобом једнаки, јер:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} = \frac{m}{n} \quad \text{тј.} \quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = \frac{\widehat{AC}}{\widehat{A'C'}}.$$

Претпоставимо сада да лукови AB и AC нису самерљиви. Ако лук поделимо на q једнаких делова, тада према Архимедовом ставу постоји природан број p takav da je:

$$\frac{p}{q} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} < \frac{p+1}{q}.$$

Конструисањем заједничких оса орицикала h и h' кроз деоне тачке налазимо да је такође (видети [6]):

$$\frac{p}{q} < \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} < \frac{p+1}{q}.$$

С обзиром да број q можемо изабрати довољно велики, из добијених неједнакости, следи да је:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \text{ тј. да је } \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = \frac{\widehat{AC}}{\widehat{A'C'}}.$$

На тај начин ми смо доказали да однос лукова двају концентричних орицикала који су одређени двема осама тих орицикала не зависе од величине тих лукова, већ само од одстојања између њих.

Ако су пак, AB и $A'B'$ одсечци двају концентричних орицикала h и h' који су одређени двема њиховим осама AA' и BB', затим CD и $C'D'$ одсечци неких других двају концентричних орицикала h_1 и h_1' који су одређени тим истим или неким другим двема осама CC' и DD' при чему је одстојање AA' између орицикала h и h' једнако одстојању CC' између орицикала h_1 и h_1', тада, с обзиром на подударност било којих двају орицикала постоје на орициклима h и h', са исте стране од осе AA', тачке E и E' такве да је $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ и $\widehat{A'E'} = \widehat{C'D'}$. При томе права EE' такође представља заједничку осу орицикала h и h', те је према доказаном:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = \frac{\widehat{AE}}{\widehat{A'E'}} = \frac{\widehat{CD}}{\widehat{C'D'}}.$$

Из доказаног следи да однос лукова двају концентричних орицикала, који су одређени њиховим двема заједничким осама, зависи искључиво од међусобног растојања тих орицикала.

∎

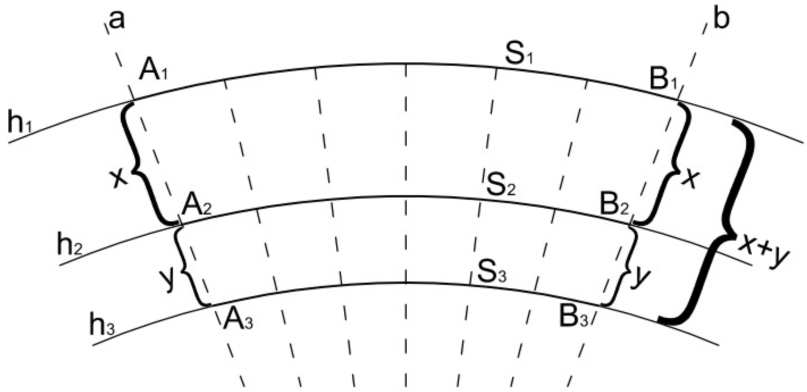
Теорема 3.2 *Лукови концентричних орицикала који се налазе између двеју њихових оса смањују се у смеру паралелности тих оса а повећавају се у супротном смеру.*

Доказ:
Користећи формуле уведене у претходној теореми, имамо да је $A'C' < AC$, па је $A'B' < AB$ и према томе лук који одговара тетиви $A'B'$ орицикла h' је мањи од лука који одговара тетиви AB орицикла h. Овим је теорема доказана. ∎

Теорема 3.3 *Ако обележимо са S_1 и S_2 већи и мањи лук које на двема концентричним орициклима h_1 и h_2 одређују њихове две заједничке осе a и b, а са x међусобно одстојање тих орицикала, тада је:*

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\frac{x}{k}}, \textit{ где је } k \textit{ позитиван реалан број.}$$

Доказ:



Сл. 3.2

Обележимо са h_3 орицикл који је концентричан са орициклом h_1 и h_2, на коме осе a и b одређују лук S_3 такав да је $S_2 > S_3$. Сем тога, ако обележимо са y међусобно одстојање орицикала h_2 и h_3, према Теореми 3.1 биће:

$$\frac{S_1}{S_2} = f(x), \quad \frac{S_2}{S_3} = f(y), \quad \frac{S_1}{S_3} = f(x+y).$$

Множењем одговарајућих страна првих двеју једнакости, затим, поређењем добијене једнакости са трећом, налазимо да:

$$S_1 = f(x)S_2, \quad S_2 = f(y)S_3, \quad S_1 = f(x+y)S_3,$$

односно $S_1 = f(x)f(y)S_3 = f(x+y)S_3$. Дељењем са S_3 добијамо:

$$f(x+y) = f(x)f(y). \tag{1}$$

По дефиницији функције f важи $f > 1$, па је

$$f(x+y) = f(x)f(y) > f(x) \cdot 1 = f(x),$$

те је f растућа функција. Докажимо да је она експоненцијална. Ако је n природан број, према релацији (4) имамо да је:

$$f(n) = f(n-1)f(1)$$

одакле, рекурентним поступком, налазимо да је:

$$f(n) = f(1)^n.$$

Означимо

$$f(1) = a > 1.$$

Тада је $f(n) = a^n$. Ако је x рационалан број облика $x = \dfrac{1}{m}$, где је m природан број, имамо да је

$$f(\frac{1}{m})^m = f(\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{m\text{-пута}}) = f(m \cdot \frac{1}{m}) = f(1) = a,$$

па је

$$f(\frac{1}{m}) = a^{\frac{1}{m}}.$$

Ако је x рационалан број облика $x = \dfrac{n}{m}$ где су m и n природни бројеви, имамо да је:

$$f(\frac{n}{m}) = f(\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{n\text{-пута}}) = f(\frac{1}{m})^n = (a^{\frac{1}{m}})^n = a^{\frac{n}{m}}.$$

Овим смо доказали да за сваки рационалан број x важи релација $f(x) = a^x$. Ако је x ирационалан позитиван број, тада можемо образовати два низа b_v и c_v рационалних бројева, при чему је први од тих низова растући а други опадајући, док оба ковергирају броју x тако да је $b_v < x < c_v$, и према томе

$$f(b_v) < f(x) < f(c_v).$$

Стога је

$$a^{b_v} < f(x) < a^{c_v}.$$

Када $b_v \to x$, $c_v \to x$, тада и $a^{b_v} \to a^x$ и $a^{c_v} \to a^x$. Зато је такође:

$$f(x) = a^x.$$

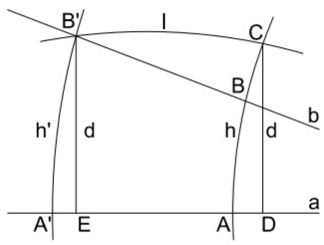
Ако означимо $\ln a = \dfrac{l}{k}$ биће $a = e^{\frac{l}{k}}$, и према томе

$$f(x) = e^{\frac{x}{k}}.$$

∎

Није тешко објаснити какво геометријско значење има параметар k. Ако обележимо $x = k$, према релацији $f(x) = e^{\frac{x}{k}}$ имамо да је $f(k) = e$. То значи да параметар k представља дужину одсечка на оси између двају концентричних орицикала код којих је однос лукова између двеју оса једнак броју e.

Изложимо и начин конструисања тог одсечка чија је дужина k. Обележимо са $\widehat{AB}$ произвољан лук неког орицикла h, а са C тачку на том орициклу такву да је $\widehat{AC} = e \cdot \widehat{AB}$.



Сл. 3.3

Обележимо, затим са a и b осе орицикла h кроз тачке A и B, а са l еквидистанту која садржи тачку C и има за основу праву a. На правој b постоји тачка B' којој је одстојање $B'E$ од праве a подударно унапред задатом одстојању d. Нека је d одстојање тачке C од праве a, односно CD где је D подножје нормале из C на a. При том је тачка B' са оне стране од праве a са које се налазе тачке B и C, па је тачка B' на еквидистанти l. Орицикл h' који садржи тачку B' а концентричан је са орициклом h сече осу a у некој тачки A'. При том се транслацијом за AA', дуж осе a орицикала један орицикл слика у други, а лук AC орицикла h слика се у лук $A'B'$ орицикла h', па су они подударни, а даље је и $\widehat{A'B'} = e \cdot \widehat{AB}$. Отуда је $A'A = B'B = ED = k$.

Дефиниција 3.2 Параметар k у релацији $f(x) = e^{\frac{x}{k}}$ називамо полупречником кривине простора Лобачевског.

4 Две метричке релације

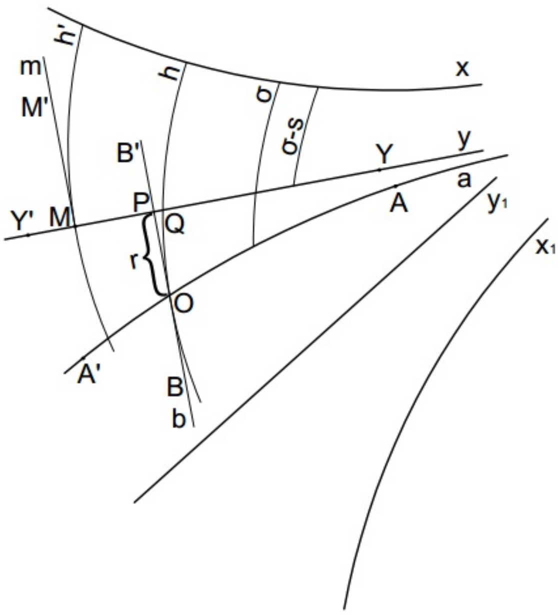
У овом поглављу ћемо извести две битне релације везане за орицикле које ће нам послужити за извођење тригонометријских идентитета.

Теорема 4.1 *Нека је O тачка у којој се секу међусобом управне праве a и b, x је права паралелна са обема правама a и b, а h је орицикл који има за осу праву a и који садржи тачку O. Ако обележимо са P и Q тачке у којима нека друга оса y орицикла h сече респективно b и тај орицикл, са r и v мере дужи OP и PQ, а са σ и s мере лукова орицикла h између оса a и x, односно оса a и y, тада је:*

$$(а)\ e^{\frac{v}{k}} = \cosh(\frac{r}{k}),$$
$$(б)\ s = \sigma \tanh(\frac{r}{k}),$$

где је k полупречник кривине простора Лобчевског.

Доказ:



Сл. 4.1

Нека су x_1 і y_1 праве симетричне правама x и y у односу на праву a. С обзиром да y сече праву b, праве y и y_1 налазе се између правих x и x_1. Нека су B и B' тачке праве b такве да су са различитих страна тачке O и да је полуправа BB' паралелна правој x. Нека су Y и Y' тачке праве y, а A и A' тачке праве a такве да су полуправе $A'A$ и $Y'Y$ паралелне правој x.

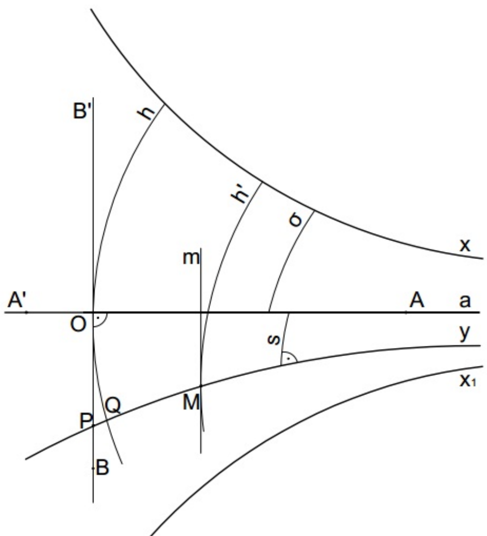
Претпоставимо најпре да се оса y налази између оса a и x, и према томе тачка P на полуправој OB'. Neka је M тачка праве y иза тачке P у односу на тачку Q, тако да је $OP = PM$, а m права управна у тачки M

на правој y. С обзиром да је $PM = OP$ и $\measuredangle MPB' = \measuredangle OPY = \Pi(OP)$, биће $\measuredangle MPB' = \Pi(PM)$. Из ове релације и с обзиром да су праве m и y ортогоналне, следи да су праве m и b међу собом паралелне. Права b је паралелна са правом x, па је и права m паралелна са правом x.

Нека је M' тачка праве m таква да је полуправа MM' паралелна правој x. Нека је h' орицикл који садржи тачку M а концентричан је са орициклом h. С обзиром да је права x паралелна са оба крака сваког од углова $A'OB'$ и $Y'MM'$, тачке O и M једнако су удаљене од праве x', те је и лук орицикла h који се налази између оса a и x једнак са луком орицикла h' који се налази између оса y и x. По претпоставци тачка P је између тачака M и Q, па је $MQ = MP + PQ = OP + PQ = r + v$. Како је још оса y орицикла h између оса a и x лук орицикла h који се налази између оса y и x, означимо га са $\sigma - s$, мањи је од лука орицикла h који се налази између оса a и x, означимо га са σ, дакле и лука орицикла h' који се налази између оса y и x. Стога је према Теореми 3.1

$$\frac{\sigma - s}{\sigma} = \frac{1}{f(r+v)} = e^{-\frac{r+v}{k}}. \tag{2}$$

Претпоставимо сад да се оса y налази са оне стране осе a са које није оса x, односно између правих a и x_1 и према томе се тачка P налази на полуправој OB.



Сл. 4.2

Нека је M тачка праве y са оне стране од тачке P са које је тачка Q таква да је $OP = PM$, а m права управна у тачки M на правој y. С обзиром да је $PM = OP$ и $\measuredangle MPB = \measuredangle OPY = \Pi(OP)$, биће $\measuredangle MPB = \Pi(PM)$. Но праве y и m су ортогоналне, па је полуправа PB' паралелна с правом m. По претпоставци је права PB' паралелна са правом x, те су и праве m и x

међу собом паралелне.

Нека је h' орицикл који садржи тачку M, а концентричан је са орициклом h. Као у претходном случају доказујемо да су растојања тачака O и M од праве x једнака, те је лук орицикла h који се налази између оса a и x једнак с луком орицикла h' који се налази између y и x. Сада је $QM = PM - PQ = r - v$. По претпоставци оса a је између оса x и y, па је и лук орицикла h који се налази између оса x и y већи од лука истог орицикла који се налази између оса x и a, дакле и лука орицикла h' који се налази између x и y. Стога је према Теореми 3.1

$$\frac{\sigma + s}{\sigma} = e^{\frac{r-v}{k}}. \tag{3}$$

Како се симетријом у односу на a права y слика у y_1, а лук орицикла између a и y у лук орицикла између a и y_1, дакле лук s, без обзира на положај праве y важе обе једнакости (2) и (3).

(а) Сабирањем одговарајућих страна релације (2) и (3), налазимо да је:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma - s}{\sigma} + \frac{\sigma + s}{\sigma} = e^{-\frac{r+v}{k}} + e^{\frac{r-v}{k}}\\
&\frac{\sigma - s + \sigma + s}{\sigma} = e^{-\frac{r}{k}}e^{-\frac{v}{k}} + e^{\frac{r}{k}}e^{-\frac{v}{k}}\\
&2 = e^{-\frac{v}{k}}(e^{-\frac{r}{k}} + e^{\frac{r}{k}})\\
&2 = \frac{1}{e^{\frac{v}{k}}}(e^{-\frac{r}{k}} + e^{\frac{r}{k}}) \quad / \cdot e^{\frac{v}{k}}\frac{1}{2}\\
&e^{\frac{v}{k}} = \frac{1}{2}(e^{-\frac{r}{k}} + e^{\frac{r}{k}})\\
&e^{\frac{v}{k}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{r}{k}} + e^{-\frac{r}{k}}) = \cosh\frac{r}{k}\\
&e^{\frac{v}{k}} = \cosh\frac{r}{k}.
\end{aligned}$$

(б) Ако од обеју страна релације (3) одузмемо одговарајуће стране релације (2), налазимо да је:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma + s}{\sigma} - \frac{\sigma - s}{\sigma} = e^{\frac{r-v}{k}} - e^{-\frac{r+v}{k}}\\
&\frac{\sigma + s - \sigma + s}{\sigma} = e^{\frac{r}{k}}e^{-\frac{v}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}e^{-\frac{v}{k}}\\
&\frac{2s}{\sigma} = e^{-\frac{v}{k}}(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}})\\
&2s = \sigma e^{-\frac{v}{k}}(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}})\\
&s = \sigma\frac{1}{2}e^{-\frac{v}{k}}(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}})\\
&s = \sigma e^{-\frac{v}{k}}\sinh(\frac{r}{k})\\
&s = \sigma\frac{\sinh(\frac{r}{k})}{\cosh(\frac{r}{k})}
\end{aligned}$$

где је $e^{\frac{v}{k}} = \cosh\dfrac{r}{k}$, те добијамо

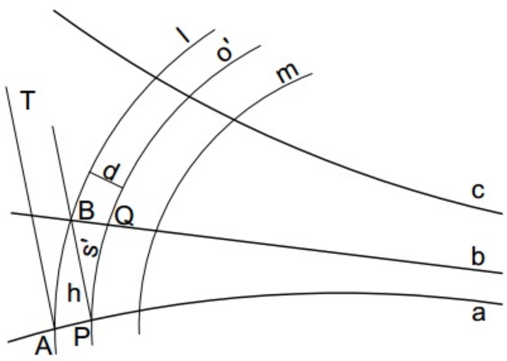
$$s = \sigma\tanh(\frac{r}{k}).$$

∎

Теорема 4.2 *Ако је s лук $\widehat{AB}$ између двеју произвољних оса a и b неког орицикла o, h висина тог лука, σ лук тог орицикла који се налази између осе a и осе c која је паралелна не само са осом a већ и са тангентом t на орициклу у тачки A, а k константа простора Лобачевског, тада је*

$$s = \sigma\sinh\frac{h}{k}.$$

Доказ:



Сл. 4.3

Нека је P подножје нормале из тачке B на правој a, o' орицикл кроз тачку P концентричан са орициклом l, s' лук $\widehat{PQ}$ орицикла o' који се налази између оса a и b и d дуж једнака са дужима AP и BQ. Тада из Теореме 3.1 следи

$$s = s'e^{\frac{d}{k}}. \tag{4}$$

Такође, из Теореме 4.1 следи да:

$$s' = \sigma\tanh\frac{h}{k} \text{ и } e^{\frac{d}{k}} = \cosh\frac{h}{k}.$$

Када ово заменимо у (4) добијамо:

$$s = s'\cosh\frac{h}{k} = \sigma\tanh\frac{h}{k}\cosh\frac{h}{k} = \sigma\frac{\sinh\frac{h}{k}}{\cosh\frac{h}{k}}\cosh\frac{h}{k} = \sigma\sinh\frac{h}{k}.$$

∎

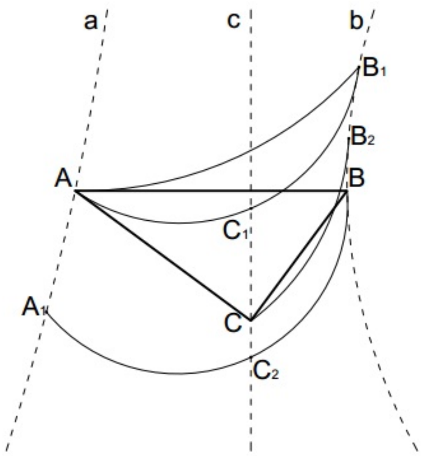
5 Изражавање функције $\Pi(x)$ помоћу елементарних функција

Међу фундаменталним тврђењима из геометрије Лобачевског налази се и став према коме се функција Лобачевског $\Pi(x)$ изражава помоћу елементарних функција.

Теорема 5.1 *Функција Лобачевског* $\Pi(x)$ *изражава се помоћу елементарних функција обрасцем:*

$$\Pi(x) = 2 \arctan e^{-\frac{x}{k}}.$$

Доказ: Нека је ABC раван троугао са правим углом C. Нека су, затим, a права управна у тачки A на равни ABC, а b и c праве кроз тачке B и C паралелне правој a. При том праве a, b и c припадају истом параболичком прамену правих. Обележимо са σ орисферу која одговара том прамену и садржи тачку A, а са B_1 и C_1 тачке у којима осе b и c продиру ту орисферу. Равни одређене паровима паралелних правих a и b, b и c, c и a секу орисферу по трима орициклима који респективно садрже тачке A и B_1, B_1 и C_1, C_1 и A. Ти орицикли одређују на орисфери σ криволинијски троугао AB_1C_1. Угао A тог криволинијског троугла једнак је с углом A праволинијског троугла ABC, докажимо и да је угао C_1 криволинијског троугла AB_1C_1 једнак с углом C праволинијског троугла ABC, тј. да је угао C_1 криволинијског троугла AB_1C_1 прав. С обзиром да раван α правих a и c садржи праву a управну на равни ABC, α и ABC су нормалне и секу се по правој AC, а како је BC управна на правој AC, права BC је управна на равни α. Тада је и раван правих b и c која садржи BC управна на равни α. Стога је угао C_1 криволинијског троугла AB_1C_1 прав.



Сл. 5.1

С обзиром да се на орисфери реализује еуклидска геометрија, тако што су орицикли на орисфери праве модела еуклидске геометрије, а хиперболички углови између орицикала су еуклидски углови између правих модела, код криволинијског троугла AB_1C_1 с правим углом C_1 важи:

$$\frac{\widehat{B_1C_1}}{\widehat{AB_1}} = \sin A.$$

Обележимо са B_2 и C_2 тачке у којима су орицикли кроз тачке C и B концентрични са орициклом B_1C_1 секу праве b и c, а са A_1 тачку у којој орицикл кроз тачку B, концентричан са орициклом AB_1 сече праву a.

При том су дужи AA_1, BB_1 и C_2C_1 једнаке, па је према Теореми 3.1

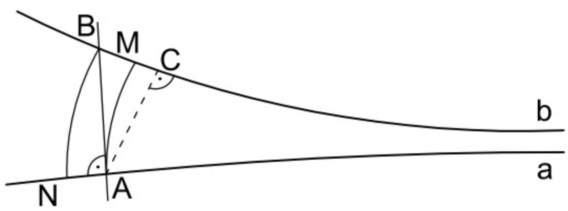
$$\frac{\widehat{B_1C_1}}{\widehat{AB_1}} = \frac{\widehat{C_2B}}{\widehat{A_1B}}.$$

Из добијених релација следи да је:

$$\sin A = \frac{\widehat{B_1C_1}}{\widehat{AB_1}} \Rightarrow \sin A = \frac{\widehat{C_2B}}{\widehat{A_1B}}. \tag{5}$$

На тај начин смо доказали да је синус оштрог угла праволинијског, оштроуглог, троугла једнак односу лука орицикла коме је висина једнака наспрамној катети и лука орицикла коме је висина једнака хипотенузи поменутог троугла. Применимо то својство за одређивање функције $\Pi(x)$.

Нека је, сада, $AB = x$ произвољна дуж, a права управна на дужи AB у тачки A, b права паралелна правој a и C подножје управне из тачке A на правој b. Нека су A' и B' тачке правих a и b такве да су полуправе AA' і BB' и паралелне.



Сл. 5.2

Према дефиницији функције Лобачевског имамо да је $\Pi(x) = \measuredangle ABB'$. С обзиром да су праве AA' и BB' међусобно паралелне, оне припадају параболичком прамену правих. Нека су AM и BN лукови двају орицикла који одговарају том прамену а налазе се између оса a и b.

Према (5) код правоуглог троугла ABC имамо да је:

$$\frac{\widehat{AM}}{\widehat{NB}} = \sin B = \sin \Pi(x).$$

Ако једнаке дужи AN и MB обележимо са y, према Теореми 3.1 имамо да је:

$$\frac{\widehat{AM}}{\widehat{NB}} = e^{-\frac{y}{k}} = \frac{1}{\cosh \frac{x}{k}}.$$

Из $\dfrac{\widehat{AM}}{\widehat{NB}} = \sin \Pi(x)$ и $\dfrac{\widehat{AM}}{\widehat{NB}} = \dfrac{1}{\cosh \frac{x}{k}}$ следи да је $\sin \Pi(x) = \dfrac{1}{\cosh \frac{x}{k}}$.

Отуда, узимајући у обзир да је $\Pi(x)$ оштар угао, налазимо да је:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 \Pi(x) = 1 - \sin^2 \Pi(x) \Rightarrow \cos \Pi(x) = \sqrt{1 - \sin^2(\Pi(x))} \\
&= \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{k}}} = \sqrt{\frac{\cosh^2 \frac{x}{k} - 1}{\cosh^2 \frac{x}{k}}} \\
&= \sqrt{\frac{\sinh^2 \frac{x}{k}}{\cosh^2 \frac{x}{k}}} = \frac{\sinh \frac{x}{k}}{\cosh \frac{x}{k}} = \tanh \frac{x}{k} \\
&\Rightarrow \cos \Pi(x) = \tanh \frac{x}{k}.
\end{aligned}$$

Из

$$\begin{aligned}
\tan \frac{1}{2}\Pi(x) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(x)}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(x)} \cdot \frac{1 + \cos \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(x)}} \\
&= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \Pi(x)}{(1 + \cos \Pi(x))^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \Pi(x)}{(1 + \cos \Pi(x))^2}} \\
&= \frac{\sin \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(x)} = \frac{\frac{1}{\cosh \frac{x}{k}}}{1 + \tanh \frac{x}{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{\cosh\frac{x}{k}}}{1+\frac{\sinh\frac{x}{k}}{\cosh\frac{x}{k}}} = \frac{\frac{1}{\cosh\frac{x}{k}}}{\frac{\cosh\frac{x}{k}+\sinh\frac{x}{k}}{\cosh\frac{x}{k}}}\\
&= \frac{1}{\cosh\frac{x}{k}+\sinh\frac{x}{k}} = \frac{1}{\frac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}{2}+\frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{2}}\\
&= \frac{1}{\frac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}+e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{2}} = \frac{1}{\frac{2e^{\frac{x}{k}}}{2}} = e^{-\frac{x}{k}}\\
&\Rightarrow \tan\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}.
\end{aligned}$$

Одавде непосредно добијамо тражену релацију, тј. да је:

$$\Pi(x) = 2\arctan(e^{-\frac{x}{k}}).$$

$\blacksquare$

Дефиниција 5.1 Добијену релацију којом се функција Лобачевског изражава помоћу елементарних функција називамо основном формулом хиперболичке геометрије.

Уочимо да важи и

$$\cos\Pi(x) = \tanh\frac{x}{k},$$
$$\sin\Pi(x) = \frac{1}{\cosh\frac{x}{k}}.$$

Другим речима, важи

$$\tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

где је $x > 0$, дуж. Међутим, можемо и додефинисати функцију Π за негативне вредности. Формално тумачећи дефиницију следи да је $\Pi(-x) = \pi - \Pi(x)$, a tada је

$$\tan\frac{\Pi(-x)}{2} = \tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\Pi(x)}{2}) = \cot\frac{\Pi(x)}{2} = e^{\frac{x}{k}},$$

па видимо да основна формула хиперболичке геометрије важи и у овом случају.

6 Обрасци хиперболичке геометрије правоуглог троугла

Као и у еуклидској равни, и у хиперболичкој, лакше је прво уочити тригонометријске релације између страница и углова правоуглог троугла.

Теорема 6.1 *Ако су A, B и C одговарајући углови правоуглог троугла ABC, где је $C = \dfrac{\pi}{2}$, а a, b и c редом, странице троугла наспрам тих углова, тада је:*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{(а)}\cosh\dfrac{c}{k} = \cosh\dfrac{a}{k}\cdot\cosh\dfrac{b}{k}, & \textit{(б)}\tanh\dfrac{a}{k} = \sinh\dfrac{b}{k}\cdot\tan A,\\
\textit{(в)}\tanh\dfrac{b}{k} = \tanh\dfrac{c}{k}\cdot\cos A, & \textit{(г)}\tanh\dfrac{b}{k} = \sinh\dfrac{a}{k}\cdot\tan B,\\
\textit{(д)}\tanh\dfrac{a}{b} = \tanh\dfrac{c}{k}\cdot\cos B, & \textit{(ђ)}\cosh\dfrac{c}{k} = \cot A\cdot\cot B,\\
\textit{(е)}\sinh\dfrac{a}{k} = \sinh\dfrac{c}{k}\cdot\sin A, & \textit{(ж)}\cos A = \cosh\dfrac{a}{k}\cdot\sin B,\\
\textit{(з)}\sinh\dfrac{b}{k} = \sinh\dfrac{c}{k}\cdot\sin B, & \textit{(и)}\cos B = \cosh\dfrac{b}{k}\cdot\sin A.
\end{array}
$$

Доказ:

(а) Користимо ознаке из доказа Теореме 5.1. С обзиром да је тачка B_2 између тачака B и B_1 важи $BB_1 = BB_2 + B_2B_1$. Отуда је:

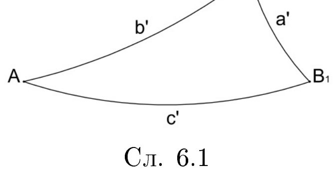
$$e^{\frac{BB_1}{k}} = e^{\frac{BB_2}{k}} \cdot e^{\frac{B_2B_1}{k}},$$

и на основу Теореме 3.1 следи

$$\cosh\frac{c}{k} = \cosh\frac{a}{k}\cdot\cosh\frac{b}{k}.$$

Ова релација успоставља везу између хипотенузе и катете правоуглог троугла, те представља аналогон Питагорине теореме.

(в) Нека су a', b', c' редом странице B_1C_1, C_1A, AB_1 орицикличног троугла AB_1C_1.



Сл. 6.1

С обзиром да се на орисфери реализује еуклидска геометрија, имамо да је $b' = c'\cos A$. Међутим, према Теореми 4.1 налазимо да је:

$$b' = \sigma\tanh\frac{b}{k}, \quad c' = \sigma\tanh\frac{c}{k},$$

па је

$$\tanh\frac{b}{k} = \tanh\frac{c}{k}\cdot\cos A.$$

(д) Истим поступком налазимо да је:

$$\tanh\frac{a}{k} = \tanh\frac{c}{k}\cdot\cos B.$$

(е) С обзиром да је $a' = c'\cdot\sin A$, а према Теореми 4.1 следи да је:

$$c' = \sigma\tanh\frac{c}{k}.$$

Важе и следеће две једнакости

$$\begin{aligned}
&a' = \widehat{CB_2}\cdot e^{\frac{-CC_1}{k}} = \sigma\cdot\tanh\frac{a}{k}\cdot e^{\frac{-CC_1}{k}},\\
&e^{\frac{CC_1}{k}} = \cosh\frac{b}{k},
\end{aligned}$$

па је

$$a' = \sigma\cdot\frac{\tanh\frac{a}{k}}{\cosh\frac{b}{k}}.$$

Сада следи

$$\begin{aligned}
\sigma\cdot\frac{\tanh\frac{a}{k}}{\cosh\frac{b}{k}} &= \sigma\cdot\tanh\frac{c}{k}\cdot\sin A,\\
\frac{\frac{\sinh\frac{a}{k}}{\cosh\frac{a}{k}}}{\cosh\frac{b}{k}} &= \frac{\sinh\frac{c}{k}}{\cosh\frac{c}{k}}\cdot\sin A,\\
\frac{\sinh\frac{a}{k}}{\cosh\frac{c}{k}} &= \frac{\sinh\frac{c}{k}}{\cosh\frac{c}{k}}\cdot\sin A,\\
\sinh\frac{a}{k} &= \frac{\sinh\frac{c}{k}}{\cosh\frac{c}{k}}\cdot\sin A\cdot\cosh\frac{c}{k},\\
\sinh\frac{a}{k} &= \sinh\frac{c}{k}\cdot\sin A.
\end{aligned}$$

(з) Аналогним поступком доказује се да је:

$$\sinh\frac{b}{k} = \sinh\frac{c}{k}\cdot\sin B.$$

(б) Из релације $a' = b' \cdot \tan A$ и релација:

$$a' = \sigma \cdot \frac{\tanh \frac{a}{k}}{\cosh \frac{b}{k}}, \quad b' = \sigma \cdot \tanh \frac{b}{k},$$

налазимо да је

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot \frac{\tanh \frac{a}{k}}{\cosh \frac{b}{k}} &= \sigma \cdot \tanh \frac{b}{k} \cdot \tan A, \\
\tanh \frac{a}{k} &= \sinh \frac{b}{k} \cdot \tan A.
\end{aligned}$$

(г) Истим поступком добијамо да је:

$$\tanh \frac{b}{k} = \sinh \frac{a}{k} \cdot \tan B.$$

(ђ) Множењем одговарајућих страна релације (б) и (г), затим коришћењем релације (а) налазимо да је:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh \frac{a}{k} \cosh \frac{b}{k}} &= \tan A \tan B, \\
\cosh \frac{c}{k} &= \cosh \frac{a}{k} \cosh \frac{b}{k} = \cot A \cot B.
\end{aligned}$$

(ж) Дељењем обеју страна релације (в) са одговарајућим странама релације (з), добијамо да је:

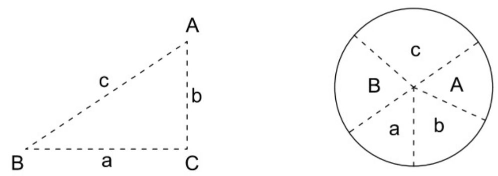
$$\begin{aligned}
&\tanh \frac{b}{k} = \tanh \frac{c}{k} \cdot \cos A, \\
&\sinh \frac{b}{k} = \sinh \frac{c}{k} \cdot \sin B, \\
&\frac{\sinh \frac{c}{k} \cdot \sin B}{\cosh \frac{b}{k}} = \frac{\sinh \frac{c}{k}}{\cosh \frac{c}{k}} \cdot \cos A, \\
&\sin B \cdot \cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{b}{k} \cdot \cos A, \\
&\cos A = \frac{\cosh \frac{c}{k}}{\cosh \frac{b}{k}} \cdot \sin B, \\
&\cos A = \cosh \frac{a}{k} \cdot \sin B.
\end{aligned}$$

(и) Истим поступком доказује се и да је:

$$\cos B = \cosh \frac{b}{k} \cdot \sin A.$$

∎

Формирање свих образаца изведених овом теоремом покорава се извесном правилу које је аналогно Неперовом[11] правилу из сферне тригонометрије. Да бисмо исказали то правило, поређајмо елементе a, b, c, A, B (изостављa-јући прав угао C) правоуглог тоугла ABC, тако да сваком том елементу буду суседни они који су му суседни и у самом троуглу, изостављајући опет угао C. Такав поредак елемената (поменутих) представља се следећом шемом.



Сл. 6.2

Ако претпоставимо да стране троугла у формулама аргументи хиперболичких функција, а углови аргументи тригонометријских функција, тада је:

(1) косинус било ког елемента једнак производу синуса несуседних елемената;

(2) косинус било ког елемента једнак производу котангенса суседних елемената,

и при том, ако под знак функције улази катета, тада одговарајућу функцију треба заменити кофункцијом; другим речима треба заменити синус са косинусом и обратно, а тангенс са котангенсом и обратно.

Напомена: У изведеним обрасцима за правоугли троугао углови улазе под знак тригонометријских функција, а странице под знак хиперболичких функција. Међутим, применом образаца из претходног члана, хиперболичке функције које фигуришу у обрасцима за правоугли троугао могу се изразити помоћу тригонометријских функција угла паралелности. У том случају обрасци из претходне теореме имају облик:

(а) $\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\cdot\sin\Pi(b)$; **(b)** $\cos\Pi(b) = \cos\Pi(c)\cdot\cos A$;

(в) $\cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cdot\cos B$; **(г)** $\sin A = \tan\Pi(c)\cdot\cot\Pi(a)$;

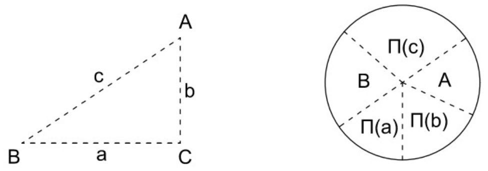
(д) $\sin B = \tan\Pi(c)\cdot\cot\Pi(b)$; **(ђ)** $\cos\Pi(a) = \cot\Pi(b)\cdot\tan A$;

(е) $\cos\Pi(b) = \cot\Pi(a)\cdot\tan B$; **(ж)** $\sin\Pi(c) = \tan A\cdot\tan B$;

(з) $\sin B = \sin\Pi(a)\cdot\cos A$; **(и)** $\sin A = \sin\Pi(b)\cdot\cos B$.

Формирање ових правила може се такође подчинити извесном правилу које је аналогно Неперовом из сферне тригонометрије. У том случају користи се шема слике:

[11] John Napier, 1550–1617, шкотски математичар, физичар, астроном и астролог



Сл. 6.3

Сада правило гласи: Синус било ког елемента једнак је производу тангенса суседних елемената, као и производу косинуса несуседних елемената. При том, ако под знак функције улази катета, тада одговарајућу функцију треба заменити кофункцијом.

7 Основни обрасци из хиперболичке геометрије косоуглог троугла

Сада, на основу тригонометријских релација правоуглог троугла можемо извести тригонометријске релације између страница и углова произвољног троугла.

Теорема 7.1 *Ако су a, b, c странице наспрам темена A, B, C косоуглог троугла ABC, важи*

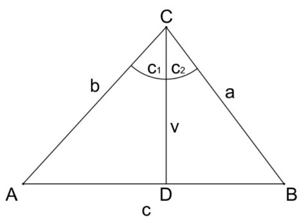
(а) $\dfrac{\sinh \frac{a}{k}}{\sin A} = \dfrac{\sinh \frac{b}{k}}{\sin B} = \dfrac{\sinh \frac{c}{k}}{\sin C}$, *(Синусна теорема)*

(б) $\cosh \dfrac{a}{k} = \cosh \dfrac{b}{k} \cosh \dfrac{c}{k} - \sinh \dfrac{b}{k} \sinh \dfrac{c}{k} \cos A$, *(Косинусна теорема)*

(в) $\cosh \dfrac{a}{k} = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$,

(г) $\sinh \dfrac{a}{k} \coth \dfrac{b}{k} = \cosh \dfrac{a}{k} \cos A + \cot B \sin C$.

Доказ: Нека је v висина из темена C троугла ABC.



Сл. 7.1

Независно од тога да ли се подножје D те висине налази унутар странице AB или ван те дужи, применом обрасца (е), из Теореме 6.1, на троугао ACD и BCD, налазимо да је:

$$\sinh \frac{v}{k} = \sinh \frac{b}{k} \sin A = \sinh \frac{a}{k} \sin B.$$

Отуда је

$$\frac{\sinh \frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\sinh \frac{b}{k}}{\sin B}.$$

Истим поступком доказује се да је

$$\frac{\sinh \frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\sinh \frac{c}{k}}{\sin C},$$

и онда је

$$\frac{\sinh\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\sinh\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\sinh\frac{c}{k}}{\sin C}.$$

(б) Да бисмо доказали други део теореме претпоставимо најпре да се подножје D висине из темена C налази унутар странице AB троугла ABC.

Ако висину CD и дуж AD обележимо са v и d, применом обрасца (а) из Теореме 6.1 на троугао BCD налазимо да је

$$\begin{aligned}\cosh\frac{a}{k} &= \cosh\frac{v}{k}\cosh\frac{c-d}{k}\\ &= \cosh\frac{v}{k}(\cosh\frac{c}{k}\cosh\frac{d}{k} - \sinh\frac{c}{k}\sinh\frac{d}{k})\\ &= \cosh\frac{v}{k}\cosh\frac{c}{k}\cosh\frac{d}{k} - \cosh\frac{v}{k}\sinh\frac{c}{k}\sinh\frac{d}{k}.\end{aligned}$$

Најзад, применом обрасца (б) из Теореме 6.1 на троугао ACD, налазимо да је:

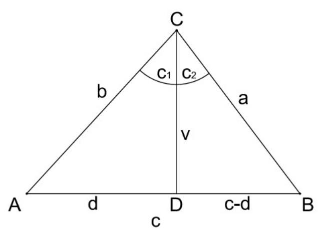
$$\cosh\frac{a}{k} = \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k} - \sinh\frac{c}{k}\cosh\frac{b}{k}\tanh\frac{b}{k}\cos A, \tag{6}$$

тј. да је:

$$\begin{aligned}\cosh\frac{a}{k} &= \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k} - \sinh\frac{c}{k}\cosh\frac{b}{k}\frac{\sinh\frac{b}{k}}{\cosh\frac{b}{k}}\cos A,\\ \cosh\frac{a}{k} &= \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k} - \sinh\frac{c}{k}\sinh\frac{b}{k}\cos A.\end{aligned}$$

Аналогним поступком изводи се доказ и у случају када се тачка D не налази на продужењу странице AB.

(в) Као и у претходном делу доказа ове теореме, претпоставимо најпре да се подножје D висине из темена C налази унутар странице AB. Ако дужи CD и AD обележимо са v и d, а углове ACD и BCD са C_1 и C_2, према обрасцу (з) из Теореме 6.1 код правоуглих троуглова ACD и BCD налазимо да је:



Сл. 7.2

$$\cos C_1 = \cosh\frac{d}{k}\sin A, \quad \sin C_1 = \frac{\cos A}{\cosh\frac{v}{k}},$$

и имамо

$$\cos C_2 = \cosh\frac{c-d}{k}\sin B, \quad \sin C_2 = \frac{\cos B}{\cosh\frac{v}{k}}.$$

Стога је, коришћењем (ж) из Теореме 4.1

$$\begin{aligned}
\cos C &= \cos(C_1 + C_2) \\
&= \cos C_1 \cos C_2 - \sin C_1 \sin C_2 \\
&= \cosh\frac{d}{k}\sin A \cosh\frac{c-d}{k}\sin B - \frac{\cos A}{\cosh\dfrac{v}{k}}\frac{\cos B}{\cosh\dfrac{v}{k}} \\
&= \cosh\frac{d}{k}\cosh\frac{c-d}{k}\sin A\sin B - \frac{\cos A\cos B}{\cosh^2\dfrac{v}{k}},
\end{aligned}$$

а даље

$$\begin{aligned}
\cos C\cosh^2\frac{v}{k} &= \cosh\frac{d}{k}\cosh\frac{c-d}{k}\sin A\sin B\cosh^2\frac{v}{k} - \cos A\cos B, \\
\cos C\cosh^2\frac{v}{k} &= \frac{\cosh\frac{b}{k}}{\cosh\frac{v}{k}}\frac{\cosh\frac{a}{k}}{\cosh\frac{v}{k}}\sin A\sin B\cosh^2\frac{v}{k} - \cos A\cos B, \\
\cos C\cosh^2\frac{v}{k} &= \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{a}{k}\sin A\sin B - \cos A\cos B.
\end{aligned}$$

Сада, дељењем са $\sin A\sin B$ добијамо

$$\begin{aligned}
\cosh\frac{a}{k}\cosh\frac{b}{k}\sin A\sin B &= \cos C\cosh^2\frac{v}{k} + \cos A\cos B, /: \sin A\sin B \\
\cosh\frac{a}{k}\cosh\frac{b}{k} &= \frac{\cos C\cosh^2\frac{v}{k}}{\sin A\sin B} + \frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}.
\end{aligned}$$

Такође, важи и

$$\begin{aligned}
\cosh\frac{a}{k}\cosh\frac{b}{k} &= \cosh\frac{c}{k} + \sinh\frac{a}{k}\sinh\frac{b}{k}\cos C, \\
\sinh\frac{a}{k} &= \frac{\sinh\frac{v}{k}}{\sin B}, \quad \sinh\frac{b}{k} = \frac{\sinh\frac{v}{k}}{\sin A}.
\end{aligned}$$

Заменом ових једнакости у претходној релацији, затим, користећи релацију

$$\cosh^2\frac{v}{k} - \sinh^2\frac{v}{k} = 1,$$

налазимо да је

$$\cosh\frac{c}{k}=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}.$$

Цикличним померањем страница a,b,c и углова A,B,C добијамо још два аналогна обрасца.

(г) Према тачки (в) ове теореме имамо да је

$$\begin{aligned}\cos A&=\cosh\frac{a}{k}\sin B\sin C-\cos B\cos C,\\ \cos B&=\cosh\frac{b}{k}\sin C\sin A-\cos C\cos A,\end{aligned}$$

а према синусној теореми следи да је

$$\sin B=\frac{\sinh\frac{b}{k}}{\sinh\frac{a}{k}}\sin A.$$

Заменом вредности $\sin B$ и $\cos B$ из последњих двеју једнакости у прву, налазимо да је:

$$\begin{aligned}\cos A&=\cosh\frac{a}{k}\frac{\sinh\frac{b}{k}}{\sinh\frac{a}{k}}\sin A\sin C-(\cosh\frac{b}{k}\sin C\sin A-\cos C\cos A)\cos C\\ &=\cosh\frac{a}{k}\frac{\sinh\frac{b}{k}}{\sinh\frac{a}{k}}\sin A\sin C-\cosh\frac{b}{k}\sin C\sin A\cos C+\cos^2 C\cos A.\end{aligned}$$

Одузимањем $\cos^2 C\cos A$, а затим дељењем обеју страна добијене једнакости са $\sin A\sin C$, имамо да је

$$\begin{aligned}&\frac{\cos A}{\sin A\sin C}-\frac{\cos^2 C\cos A}{\sin A\sin C}=\cosh\frac{a}{k}\frac{\sinh\frac{b}{k}}{\sinh\frac{a}{k}}-\cosh\frac{b}{k}\cos C,\\ &\frac{\cos A(1-\cos^2 C)}{\sin A\sin C}=\coth\frac{a}{k}\sinh\frac{b}{k}-\cosh\frac{b}{k}\cos C,\\ &\frac{\cos A\sin^2 C}{\sin C}=\coth\frac{a}{k}\sinh\frac{b}{k}-\cosh\frac{b}{k}\cos C,\\ &\coth\frac{a}{k}\sinh\frac{b}{k}=\cos A\sin C+\cosh\frac{b}{k}\cos C.\end{aligned}$$

Аналогним поступком налазимо да је и:

$$\sinh\frac{a}{k}\coth\frac{b}{k}=\cosh\frac{a}{k}\cos C+\cos B\sin C.$$

∎

Наводимо опште карактеристике образаца изведених у последњој теореми. Док образац (а), тј. синусна теорема успоставља везу између двеју страница и наспрамних углова косоуглог троугла, образац (б), тј. косинусна теорема успоставља везу између три странице и једног угла косоуглог троугла, образац (в) успоставља везу између три угла и једне странице косоуглог троугла, при чему је један од тих углова захваћен поменутим страницама.

Напомена Користећи обрасце по којима се хиперболичке функције трансформишу у тригонометријске фунцкије угла паралелности, обрасце из претходне теореме можемо записати у облику:

(а) $\dfrac{\cot\Pi(a)}{\sin A} = \dfrac{\cot\Pi(b)}{\sin B} = \dfrac{\cot\Pi(c)}{\sin C}$,

(б) $\sin\Pi(a) = \dfrac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{1-\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A}$,

(в) $\sin\Pi(a) = \dfrac{\sin B\sin C}{\cos A + \cos B\cos C}$,

(г) $\dfrac{\cot\Pi(a)}{\cos\Pi(b)} = \dfrac{\cos C}{\sin\Pi(a)} + \cos B\sin C$.

8 Важније релације из хиперболичке геометрије Ламбертовог четвороугла

У хиперболичкој геометрији поред метричких релација које се односе на правоугли и косоугли троугао, особиту примену имају и метричке релације које се односе на Ламбертов четвороугао, тј. четвороугао коме су три угла права. Изведимо неке од релација.

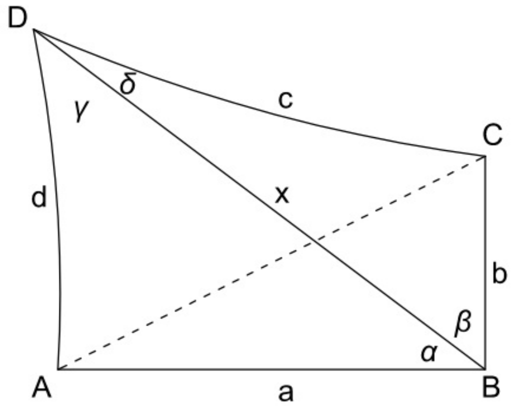
Теорема 8.1 *Ако је $ABCD$ Ламбертов четвороугао коме су углови A, B, C прави, а странице AB, BC, CD, DA и дијагонала ED редом једнаке дужинама a, b, c, d и x, тада је:*

(а) $\cos^2 \Pi(x) = \cos^2 \Pi(a) + \cos^2 \Pi(b)$,

(б) $\cos \Pi(a) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(c)$,

(в) $\cos D = \cos \Pi(c) \cos \Pi(d)$.

Доказ:



Сл. 8.1

(а) Ако $\measuredangle ABD$ и $\measuredangle CBD$ обележимо са α и β, код правоуглих троуглова ABD и CBD, из (а) Теореме6.1 изражене путем функције Π следи

$$\cos \alpha = \frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(x)}, \quad \cos \beta = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(x)}.$$

Како је и $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ биће $\cos \beta = \sin \alpha$, тј.

$$\cos^2 \Pi(x) = \cos^2 \Pi(a) + \cos^2 \Pi(b).$$

(б) Из релације претходне релације и из

$$\sin^2 \Pi(b) = 1 - \cos^2 \Pi(b)$$

следи

$$\sin^2 \Pi(x) = 1 - \cos^2 \Pi(a) - \cos^2 \Pi(b) = \sin^2 \Pi(b) - \cos^2 \Pi(a).$$

Међутим, према Питагориној теореми код правоуглог троугла BCD имамо

$$\sin^2 \Pi(x) = \sin^2 \Pi(b) + \sin^2 \Pi(c),$$

те је

$$\begin{aligned} &\sin^2 \Pi(b) - \cos^2 \Pi(a) = \sin^2 \Pi(b) + \sin^2 \Pi(c), \\ &\sin^2 \Pi(b)(1 - \sin^2 \Pi(c)) = \sin^2 \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) = \cos^2 \Pi(a). \end{aligned}$$

Сада директно следи

$$\cos \Pi(a) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(c).$$

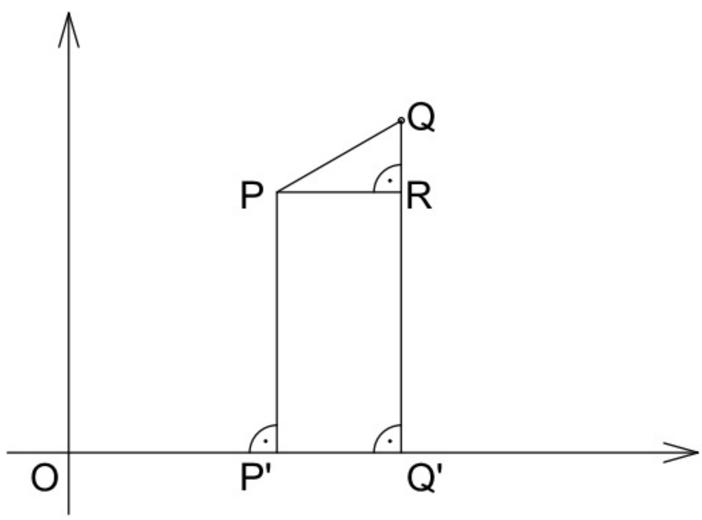
∎

9 Геометријска интерпретација параметра k

У овом поглављу ћемо, користећи изведене тригонометријске идентитете, дати геометријску интерпретацију константе k и показати да је једнака дужини лука σ орицикла између две осе, a и b, где је права b уједно паралелна и тангенти на орицикл која је ортогонална на осу a.

Прво ћемо посматрати погодан координатни систем у хиперболичкој равни. Нека су x и y две ортогоналне праве које се секу у тачки O. Нека је M произвољна тачка и M' њена пројекција на праву x. Тада је тачка M на јединствен начин одређена оријентисаним растојањима $x = OM$ и $y = MM'$. Овако уведене координате називају се Декартовим*. Такође, сваком уређеном пару $(x, y) \in R^2, x, y \in R$ одговара тачно једна тачка хиперболичке равни. Уочимо да је y координата тачке M различита од растојања пројекције тачке M на y осу, осим када тачка M баш припада y оси.

Начин мерења дужине у једном простору задат је метриком, која показује како се бесконачно мали део лука изражава преко датих координата. У еуклидској равни, метрика је дата са $ds^2 = dx^2 + dy^2$, што значи да се квадрат растојања две тачке рачуна као збир квадрата разлика њихових x и y координата, што је директна последица Питагорине теореме. Показаћемо да је у Декартовим координатама метрика хиперболичке равни дата са $ds^2 = \cosh^2 \dfrac{y}{k} dx^2 + dy^2$. Нека су P и Q две тачке хиперболичке равни, P' и Q' њихове пројекције на x осу и R пројекција тачке P на праву QQ'.



Сл. 9.1

*René Descartes, 1596– 1650, француски математичар, филозоф и научник, чије је дело "Геометрија" поставило основе данашњој аналитичкој геометрији.

Означимо $PQ = \delta s$, $QR = p$, $PR = q$. Тада је троугао PQR правоугли троугао и важи

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 \frac{\delta s}{k} = \cosh^2 \frac{p}{k} \cosh^2 \frac{q}{k},\\
&1 + \sinh^2 \frac{\delta s}{k} = (1 + \sinh^2 \frac{p}{k})(1 + \sinh^2 \frac{q}{k}),\\
&\sinh^2 \frac{\delta s}{k} = \sinh^2 \frac{p}{k} + \sinh^2 \frac{q}{k} + \sinh^2 \frac{p}{k} \sinh^2 \frac{q}{k}.
\end{aligned}$$

Када су тачке P и Q близу, односно када p и q теже нули, последњи сабирак је у односу на остале занемарљиво мали, а с обзиром да је $\sinh x \sim x$, за довољно мало x, можемо сматрати

$$(\frac{\delta s}{k})^2 = (\frac{p}{k})^2 + (\frac{q}{k})^2,$$

односно, у инфинитезималној геометрији хиперболичке равни важе формуле еуклидске геометрије. Тада је, даље

$$\sinh \frac{P'Q'}{k} = \frac{\sinh \frac{q}{k}}{\cosh \frac{PP'}{k}},$$

па можемо проценити $q \sim \cosh \frac{PP'}{k} P'Q'$, односно

$$q \sim \cosh \frac{y}{k} \delta x, \tag{7}$$

где је $y = PP'$ координата тачке P, а $\delta x = P'Q'$ разлика првих координата тачака P и Q. Из

$$\cosh \frac{P'Q'}{k} = \tanh \frac{PP'}{k} \coth \frac{RQ'}{k}$$

(Теорема 8.1, тачка б) следи да за довољно мало $P'Q'$ важи $PP' \sim RQ'$. Нека је $PP' = \epsilon + RQ'$. Проценимо величину ϵ.

$$\begin{aligned}
&\cosh \frac{P'Q'}{k} = \tanh \frac{\epsilon + RQ'}{k} \coth \frac{RQ'}{k},\\
&(\tanh \frac{RQ'}{k} + \frac{\epsilon}{k})(1 + \frac{P'Q'^2}{2k^2}) \sim \tanh \frac{PP'}{k}(1 + \frac{\epsilon}{k} \tanh \frac{PP'}{k}),\\
&\epsilon \sim -\frac{1}{2k} \sinh \frac{y}{k} \cosh \frac{y}{k} \delta x^2,
\end{aligned}$$

па је разлика y координата тачака P и Q

$$QQ' - PP' = QR + RQ' - PP' \sim QR = q. \tag{8}$$

Сада из (7) и (8) следи

$$ds^2 = \cosh^2 \frac{y}{k} dx^2 + dy^2,$$

што значи да је дужина вектора (a,b) хиперболичке равни у његовој тачки (x,y) једнака

$$a^2\cosh^2\frac{y}{k}+b^2. \tag{9}$$

Нека је $\gamma:[a,b]\to H, \gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ крива хиперболичке равни. Њена дужина је тада дата са

$$l=\int_a^b|\gamma'(t)|dt,$$

где је $\gamma'(t)=(\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))$ тангентни вектор у тачки $(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$. Сада, нека је x оса орицикла, а y његова тангента у тачки O. Нека је P тачка орицикла са Декартовим координатама (x,y). Тада је $e^{\frac{x}{k}}=\cosh\frac{y}{k}$ па је орицикл дат са

$$\gamma(y)=(k\ln\cosh\frac{y}{k},y).$$

Даље је $\gamma'(y)=(\tanh\frac{y}{k},1)$, а затим је његова дужина (9) једнака

$$|\gamma'(y)|=\sqrt{\tanh^2\frac{y}{k}\cosh^2\frac{y}{k}+1}=\sqrt{\sinh^2\frac{y}{k}+1}=\cosh\frac{y}{k},$$

те је дужина лука орицикла између тачака O и тачке са координатама $(k\ln\cosh\frac{y_0}{k},y_0)$ дата следећом формулом

$$s=\int_0^{y_0}\cosh\frac{y}{k}dy=k\sinh\frac{y_0}{k}.$$

Како је и $s=\sigma\sinh\frac{y_0}{k}$ закључујемо да важи следећа теорема.

Теорема 9.1 *Константа k простора Лобачевског једнака је дужини орицикличног лука коме је висина једнака одсечку паралелности угла $\frac{\pi}{4}$.*

Литература

[1] Bachmann, F. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff,* Springer, (1973)

[2] Carslaw, H. S. *The elements of non-Euclidean plane geometry and trigonometry*, Longmans, Green and Co, (1916)

[3] Coxeter, H. *Non-Euclidean geometry*, 6th ed. The Mathematical association of America, (1998)

[4] Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries,* 3rd ed. W. H. Freeman and Company, (1974)

[5] Lučić, Z. *Euklidska i hiperbolička geometrija,* Total design i Matematički fakultet Beograd, (1997)

[6] Широков, П. А. *Краткий очерк основ геометрии Лобачевского,* 2.изд. Москва Наука, (1983)