UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DRAGICA N. KRGOVIĆ

P R I L O G T E O R I J I R E G U L A R N I H S E M I G R U P A

DOKTORSKA DISERTACIJA

RUKOVODILAC

PROF. DR MARIO PETRICH

BEOGRAD 1982.

S A D R Ž A J

Strana

0. U V O D

Razmatrajući sadašnja proučavanja u Teoriji semigrupa, može se reći da se skoro sva odnose na klasu regularnih semigrupa, preciznije, na odredjene podklase regularnih semigrupa. Posebno se istražuju inverzne i potpuno proste a u novije vreme razmatraju se i njihova uopštenja, ortodoksne i potpuno regularne semigrupe. R.Croisot [6] uvodi semigrupe sa uslovom (m,n) i potpuno ih opisuje. Specijalna klasa tih semigrupa je klasa potpuno regularnih semigrupa, odnosno unije grupa. Posebno značajni radovi o unijama grupa su radovi A.H.Clifford-a, R.Croisot-a i dr.

Kako se u ovom radu opisuju regularne semigrupe (i neke od klasa regularnih) pomoću ideala (II DEO), razmatraju 0-minimalni bi-ideali, uvode (0,2)-bi-ideali (III DEO) i postavlja problem bi-idealne ekstenzije (IV DEO) to ovde navodimo kratak pregleg proučavanja ideala.

Stvarajući Teoriju algebarskih brojeva, Dedekind je uveo pojam ideala koji je predstavljao ključ te teorije. Ovaj pojam ideala uopštila je Emmy Noether za asocijativne prstene. Pojmovi levog i desnog ideala, koje je ona uvela, i sada su centralni pojmovi u Teoriji prstena. Ova konstatacija se s punim pravom može proširiti i na Teoriju semigrupa. Naime, dovoljno je pomenuti Rees-ovu kongruenciju i Green-ove relacije, koji se definišu preko ideala, a osnova su za mnoga dalja istraživanja u teoriji semigrupa. Kasnije se uvode novi pojmovi: bi-ideal (R.A.Good i D.R. Hughes, 1952), kvazi-ideal (O.Steinfeld, 1956), (m,n)-ideal i (m,n)-kvazi-ideal (S.Lajos, 1961). Ovde treba posebno naglasiti ulogu radova A.H.Clifford-a i Š.Schwarz-a koji se odnose na minimalne ideale semigrupa.

Posebno mesto u Teoriji semigrupa pripada ekstenzijama semigrupa a medju ovima najviše se istražuju idealne ekstenzije. Problem idealne ekstenzije proučavan je i sada se proučava od strane mnogih autora. Posebno navodimo neke od njih: A.H.Clifford L.M.Gluskin, P.A.Grillet, M.Petrich.

Ovaj rad se sastoji iz četiri dela.

U prvom delu navedeni su poznati pojmovi i rezultati na koje se pozivamo u ostalim delovima.

U početku drugog dela data je karakterizacija regularnih semigrupa preko elemenata i levih i desnih ideala. Takodje se razmatraju semigrupe koje su regularne i intraregularne i opisuju pomoću bi-ideala. II.3.4 Teorema opisuje (m,n)-regularne semigrupe pomoću (m,0)-ideala i (0,n)-ideala. U vezi s tim posebno se ističu II.3.6 Teorema i II.3.9 Teorema koje daju karakterizaciju unije grupa. (m,n)-regularne semigrupe se karakterišu i preko (m,n)-ideala i (m,n)-kvazi-ideala. (II.3.5 Teorema). II.3.4 Teorema i II.3.5 Teorema uopštavaju odgovarajuće rezultate K.Iseki-a S.Lajos-a i I.Luh-a za regularne semigrupe. Okarakterisane su unije grupa i preko bi-ideala i (0,2)-ideala (II.3.10 Teorema). II.3.11 Teorema daje potreban i dovoljan uslov da svaki element semigrupe bude (2,1)-regularan ili (1,2)-regularan. U ovom delu uvodi se i pojam $(m,n)_T$-ideala, pomoću koga se dobija potreban i dovoljan uslov da podsemigrupa T bude podgrupa semigrupe S (II. 4.7 Teorema).

U trećem delu ispituju se 0-minimalni levi ideali i 0-minimalni bi-ideali. Uvodi se pojam degeneriranog bi-ideala i pomoću njega opisuju 0-minimalni bi-ideali (III.3.4 Lema). Na osnovu toga dat je drugi dokaz tvrdjenja K.Kapp-a (III.3.7 Teorema). Posebno ističemo karakterizaciju potpuno 0-prostih semigrupa i potpuno 0-prostih ideala preko 0-minimalnih bi-ideala (III. 3.15 Teorema), (III.3.16 Teorema). U ovom delu se uvodi pojam (0,2)-bi-ideala i opisuju 0-minimalni (0,2)-bi-ideali. Dokazano je da je semigrupa S 0-(0,2)-dvoprosta ako i samo ako je S levo 0-prosta.

Četvrti deo predstavlja jedan pokušaj rešavanja bi-idealne ekstenzije. Poznato je da je skup $\Pi(S)$, svih unutrašnjih bitranslacija translatognog omotača $\Omega(S)$, ideal za $\Omega(S)$. U ovom delu razmatramo skup $\Omega(S) \cap (\Gamma(S) \times \Delta(S))$, u oznaci $\overline{\Pi}(S)$, i dokazujemo da je $\overline{\Pi}(S)$ takodje ideal za $\Omega(S)$. Uvodi se pojam bi-idealizatora podsemigrupe semigrupe S i odredjuje bi-idealizator za $\overline{\Pi}(S)$ u odnosu na $\Lambda(S) \times P(S)$ (IV.3.5 Posledica). Takodje je odredjen bi-idealizator za $\Pi(S)$ i $\overline{\Pi}(S)$ u odnosu na $\mathcal{T}^*(S) \times \mathcal{T}(S)$ ako je S globalno idempotentna semigrupa.

Ističemo da su u II, III i IV delu svi pojmovi kao i stavovi dati sa dokazom, originalni.

Većina rezultata iz rada prikazani su u okviru Odseka za algebru i matematičku logiku, Odseka za matematiku i Seminara za teoriju semigrupa Matematičkog instituta SRS u Beogradu.

Sa posebnim zadovoljstvom zahvaljujem se Dr Mariu Petriću, Dr Slaviši Prešiću i Dr Branki Alimpić na pomoći i podršci u radu. Zahvaljujem se i svim članovima Seminara za teoriju semigrupa na korisnim sugestijama i primedbama.

I DEO

NEKI POZNATI POJMOVI I REZULTATI IZ TEORIJE SEMIGRUPA

Regularnu semigrupu možemo definisati na sledeći način: Semigrupa S je regularna ako i samo ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S) \quad a = axa.$$

Grupe su regularne semigrupe, ali klasa regularnih semigrupa je obimnija od klase grupa.

Pojam regularnosti uveo je J. von Neumann (1936) u teoriji prstena. Sledeća lema je direktan analogon Leme 6 tog rada.

I.1 LEMA. Neka je a element semigrupe S, $\langle a \rangle_{(0,1)}$ $[\langle a \rangle_{(1,0)}]$ glavni levi [desni] ideal generisan elementom a i E skup svih idempotenata iz S. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) a je regularan.

(ii) $(\exists e \in E)\ \langle a \rangle_{(0,1)} = \langle e \rangle_{(0,1)}$.

(iii) $(\exists e \in E)\ \langle a \rangle_{(1,0)} = \langle e \rangle_{(1,0)}$.

Pojam kvazi-ideala uveo je Steinfeld 1953. za prstene i 1956. za semigrupe.

Podskup Q semigrupe S je kvazi-ideal za S ako je $QS \cap SQ \subseteq Q$. Kvazi-ideal generisan podskupom A semigrupe S je $Q(A) = A \cup A^2 \cup (AS \cap SA)$. Glavni kvazi-ideal generisan elementom a iz S je $Q(a) = \{a\} \cup \{a^2\} \cup (aS \cap Sa)$.

Primetimo da je svaki levi [desni] ideal za S takodje i kvazi-ideal za S.

Neka je $\mathcal{Y}_{(0,1)}$ $[\mathcal{Y}_{(1,0)}]$ skup svih levih desnih ideala semigrupe S. Semigrupa S je kvazi-regularna ako je

$$(\forall R \in \mathcal{J}_{(0,1)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,1)})\ R^2 = R,\ \ L^2 = L.$$

Ove semigrupe je uvela Calais [1] 1961. godine.

Calais [1] je okarakterisala regularne semigrupe preko levih, desnih i kvazi-ideala. Iseki [14] je opisao regularne semigrupe preko levih i desnih ideala. Oba tvrdjenja navodimo ujedno.

I.2 TEOREMA. Neka je $\mathcal{J}_{(0,1)}[\mathcal{J}_{(0,1)}]$ skup svih levih [desnih] ideala i $\mathcal{Q}$ skup svih kvazi-ideala semigrupe S. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je regularna.

(ii) $(\forall R \in \mathcal{J}_{(1,0)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,1)})\ R^2=R,\ L^2=L,\ RL \in \mathcal{Q}.$

(iii) $(\forall R \in \mathcal{J}_{(0,1)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,1)})\ R \cap L = RL.$

Good i Hughes [10] su uveli pojam bi-ideala. Podskup B semigrupe S je <u>bi-ideal</u> za S ako je $BS^1B \subseteq B$. Bi-ideal generisan podskupom A semigrupe S je $\langle A \rangle_{(1,1)} = A \cup A^2 \cup ASA$. Glavni bi-ideal generisan elementom a je $\langle a \rangle_{(1,1)} = \{a\} \cup \{a^2\} \cup aSa$.

Prema definiciji kvazi-ideala i bi-ideala lako je videti da je svaki kvazi-ideal takodje i bi-ideal.

Ako je semigrupa regularna tada svaki bi-ideal za S je i kvazi-ideal za S (Lajos [31]).

Lajos [35] i Luh [36] su okarakterisali regularne semigrupe redom preko bi-ideala i kvazi-ideala, što ujedno navodimo sledećom teoremom.

I.3 TEOREMA. Neka je $\mathcal{J}_{(1,1)}[\mathcal{Q}]$ skup svih bi-ideala [kvazi-ideala] semigrupe S. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S je regularna.

(ii) $(\forall B \in \mathcal{J}_{(1,1)})\ \ BSB = B.$

(iii) $(\forall Q \in \mathcal{Q})\ \ QSQ = Q.$

Pomoću ideala uvode se relacije ekvivalencije tzv. Green-ove relacije. Prvi ih je proučavao Green [11]. One imaju veoma važnu ulogu u proučavanju semigrupa, naročito regularnih.

Ako je a element semigrupe S, tada glavni levi ideal generisan sa a je $a \cup Sa$, što kraće pišemo S^1a. Relacija $\mathcal{L}$ na S definisana je sa: $a\mathcal{L}b$ ako i samo ako a i b generišu isti glavni levi ideal, odnosno

$$a\mathcal{L}b \overset{def}{\iff} S^1a = S^1b.$$

Slično, $\mathcal{R}$ je definisana sa: $a\mathcal{R}b$ ako i samo ako a i b generišu isti glavni desni ideal, tj.

$$a\mathcal{R}b \overset{def}{\iff} aS^1 = bS^1.$$

Ako su a i b elementi semigrupe S tada važi:

i) $a\mathcal{L}b \iff (\exists x,y \in S^1)\ xa=b,\ yb=a.$

ii) $a\mathcal{R}b \iff (\exists x,y \in S^1)\ ax=b,\ by=a.$

Lako se pokazuje da je $\mathcal{L}$ desna a $\mathcal{R}$ leva kongruencija semigrupe S. Relacija ekvivalencije $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ igra veoma važnu ulogu i označava se sa $\mathcal{H}$. Relacije $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ su komutativne tj. $\mathcal{L}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{L}$, te sledi da je $\mathcal{L}\vee\mathcal{R}=\mathcal{L}\circ\mathcal{R}$. Ova relacija se označava sa $\mathcal{D}$. Takodje, se uvodi i relacija :

$$a\mathcal{J}b \overset{def}{\iff} S^1aS^1 = S^1bS^1.$$

Lako se dokazuje da važi

$$a\mathcal{J}b \iff (\exists x,y,u,v \in S^1)\ xay=b,\ ubv=a.$$

Kako je $\mathcal{L}\leq\mathcal{J}$, $\mathcal{R}\leq\mathcal{J}$ to je $\mathcal{D}\leq\mathcal{J}$.

Semigrupa S sa nulom 0 je <u>0-bi-prosta</u> ako je $S\setminus\{0\}$ $\mathcal{D}$-klasa.

Sledeće pojmove uveo je Croisot 6 .

Semigrupa S je <u>intraregularna</u> ako

$$(\forall a\in S)(\exists x\in S)(\exists y\in S)\quad a = xa^2y;$$

S je levo regularna ako $(\forall a \in S)(\exists x \in S) \quad a = xa^2$;

S je desno regularna ako $(\forall a \in S)(\exists x \in S) \quad a = a^2x$;

S je potpuno regularna ako $(\forall a \in S)(\exists x \in S) \quad a = axa^2$.

Navodimo tvrdjenja koja je dao Croisot [6].

I.4 TEOREMA. Semigrupa S je intraregularna ako i samo ako je S unija disjunktnih prostih semigrupa.

I.5 TEOREMA. Semigrupa S je regularna i intraregularna ako i samo ako je S unija disjunktnih regularnih prostih semigrupa.

I.6 TEOREMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je unija grupa.

(ii) S je potpuno regularna.

(iii) S je levo regularna i desno regularna.

(iv) S je levo regularna i regularna.

(v) Svaka $\mathcal{H}$-klasa za S je grupa.

I.7 DEFINICIJA. Neka su m i n nenegativni celi brojevi. Semigrupa S je (m,n)-regularna ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S) \quad a^m x a^n = a.$$

Pritom, dogovorno je $a^0xa^n \stackrel{def}{=} xa^n$ i $a^mxa^0 \stackrel{def}{=} a^mx$.

Croisot [6] je dokazao da postoje tačno četiri klase ovih semigrupa i to su:

i) (m,0)-regularne za $m \geq 2$ (desno regularne).

ii) (0,n)-regularne za $n \geq 2$ (levo regularne).

iii) (1,1)-regularne (regularne).

iv) (m,n)-regularne za $m \geq 1$, $n \geq 1$, $m+n \geq 3$ (potpuno regularne).

Lajos [28] je uveo pojam (m,n)-ideala i (m,n)-kvazi--ideala.

Neka su m i n nenegativni celi brojevi. Podsemigrupa A semigrupe S je (m,n)-ideal za S ako je

$$A^mSA^n \subseteq A.$$

Pri tom, dogovorno je $A^oSA^n \stackrel{def}{=} SA^n$ i $A^mSA^o \stackrel{def}{=} A^mS$.

(m,n)-ideal generisan podskupom A semigrupe S je

$$\langle A \rangle_{(m,n)} = \bigcup_{i=1}^{m+n} A^i \cup A^mSA^n.$$

Glavni (m,n)-ideal generisan elementom a iz S je

$$\langle a \rangle_{(m,n)} = \bigcup_{i=1}^{m+n} \{a^i\} \cup a^mSa^n.$$

Neka su m i n nenegativni celi brojevi. Podsemigrupa Q semigrupe S je <u>(m,n)-kvazi-ideal</u> za S ako je

$$Q^mS \cap SQ^n \subseteq Q.$$

(m,n)-kvazi-ideal generisan podskupom A semigrupe S je $Q(A)=A\cup A^2\cup \dots \cup A^k\cup(A^mS\cap SA^n)$ gde je $k=\max(m,n)$.

Glavni (m,n)-kvazi-ideal generisan elementom a iz S je

$$Q(a)=\{a\}\cup\{a^2\}\cup \dots \cup\{a^k\}\cup a^mS\cap Sa^n$$

gde je $k=\max(m,n)$.

Prema prethodnim definicijama vidimo da je levi [desni] ideal u stvari (0,1)-ideal [(1,0)-ideal] . Takodje, svaki (m,n)--kvazi-ideal je (m,n)-ideal.

Ako je S regularna tada svaki (m,n)-ideal je (m,n)-kvazi--ideal (Lajos [28]).

U ovom radu skup svih levih [desnih] ideala označavaće se sa $\mathcal{J}_{(0,1)}$ [$\mathcal{J}_{(1,0)}$] , skup svih bi-ideala sa $\mathcal{J}_{(1,1)}$ i skup svih (m,n)-ideala [(m,n)-kvazi-ideala] sa $\mathcal{J}_{(m,n)}$ [$\mathcal{Q}_{(m,n)}$] .

Lajos [28] je dao sledeće tvrdjenje:

I.8 TEOREMA. Neprazan podskup Q semigrupe S je (m,n)-kvazi-ideal za S ako i samo ako je presek (m,0)-ideala i (0,n)-ideala za S.

Semigrupa S je <u>prosta</u> [<u>levo prosta</u>, <u>desno prosta</u>] ako ne sadrži prave dvostrane [leve, desne] ideale.

Semigrupa S je levo prosta i desno prosta ako i samo ako je S grupa.

Dvostran [levi, desni] ideal M semigrupe S je <u>minimalan</u> ako ne sadrži pravi dvostrani [levi, desni] ideal za S.

Ako je A ma koji ideal za S istog tipa kao M, tada ili je $M \subseteq A$, ili je $M \cap A = \emptyset$. Specijalno, dva različita minimalna ideala istog tipa su disjunktna.

Kako za ma koja dva dvostrana ideala A i B semigrupe S je $AB \subseteq A$ i $AB \subseteq B$ to postoji najviše jedan minimalan dvostrani ideal za S. Ako S ima minimalan dvostrani ideal K, tada se K naziva jezgrom za S. Kako je K sadržan u svakom dvostranom idealu za S, to je K presek svih dvostranih ideala iz S. Ako je taj presek prazan, tada S nema jezgro. Svaka konačna semigrupa ima jezgro.

Ako je S semigrupa sa nulom 0, tada pojam minimalnog ideala je trivijalan, naime, minimalan ideal je $\{0\}$. Zato se uvodi pojam 0-minimalnosti. Semigrupa S sa nulom 0 označava se $S=S^0$.

Dvostran [levi, desni] ideal M semigrupe $S=S^0$ je <u>0-minimalan</u> ako je:

i) $M \neq \{0\}$,

ii) $\{0\}$ je jedini pravi dvostrani [levi, desni] ideal za S sadržan u M.

Ako je M 0-minimalan dvostrani [levi, desni] ideal semigrupe $S=S^0$, tada M^2 je ideal istog tipa kao M i $M^2 \subseteq M$. Dakle, tada je $M^2=M$ ili $M^2=\{0\}$. Odatle, ili je $M^2=M$, ili je M nulta semigrupa. Jasno, bilo koja dva različita 0-minimalna ideala za S istog tipa su 0-disjunktna, odnosno, njihov presek je $\{0\}$.

Semigrupa $S=S^0$ je <u>0-prosta</u> [<u>levo 0-prosta</u>, <u>desno 0-prosta</u>] ako

i) $S^2 \neq \{0\}$,

ii) $\{0\}$ je jedini pravi dvostrani [levi, desni] ideal za S.

I.9 LEMA. Neka je $S=S^0$ i $\{0\}$ jedini pravi dvostrani ideal za S. Tada, ili je S 0-prosta ili S je nulta semigrupa reda 2.

I.10 LEMA. Za semigrupu $S=S^0$ sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je levo [desno] 0-prosta.

(ii) $S\setminus\{0\}$ je levo [desno] prosta.

(iii) $(\forall a \in S\setminus\{0\})$ $Sa = S$ $[aS = S]$.

I.11 LEMA. Za semigrupu S, sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je 0-prosta.

(ii) $(\forall a \in S\setminus\{0\})$ $SaS = S$.

Sledeća tvrdjenja o 0-minimalnim idealima dokazao je Clifford [3].

I.12 TEOREMA. Neka je M 0-minimalan (dvostran) ideal semigrupe $S=S^0$. Tada, ili je $M^2=\{0\}$ ili je M 0-prosta podsemigrupa za S.

I.13 POSLEDICA. Ako semigrupa S sadrži jezgro K, tada je K prosta podsemigrupa za S.

Za 0-minimalne leve [desne] ideale ne važi tvrdjenje analogno datom sa I.12 Teoremom. To pokazuje sledeći primer.

	e	f	g	a	0
e	e	a	e	a	0
f	0	f	g	0	0
g	g	f	g	f	0
a	0	a	e	0	0
0	0	0	0	0	0

	0	f	a
0	0	0	0
f	0	f	0
a	0	a	0

$L = \{0,f,a\}$ je 0-minimalan levi ideal za S i $L^2 \neq \{0\}$, ali L nije levo 0-prosta jer $\{0,a\}$ je levi ideal za L. L nije ni 0-prosta (III.2.7 Teorema).

I.14 DEFINICIJA. Levi ideal L semigrupe $S=S^0$ je <u>degeneriran</u> ako je $L = \{0,a\}$ i $Sa = \{0\}$.

Analogno se definiše degeneriran desni ideal.

I.15 LEMA. Neka je $S=S^0$ i L 0-minimalan levi ideal za S. Tada, ili je $Sa=L$ za svaki element a iz $L\setminus\{0\}$ ili je L degeneriran.

I.16 LEMA. Ako je L 0-minimalan levi ideal semigrupe $S=S^0$ tada $L\setminus\{0\}$ je $\mathcal{L}$-klasa za S.

I.17. LEMA. Ako je M 0-minimalan ideal semigrupe $S=S^0$ takav da je $M^2 \neq \{0\}$ i $L \neq \{0\}$ levi ideal za S sadržan u M, tada je $L^2 \neq \{0\}$.

Neka je E skup svih idempotenata semigrupe S. Za $e,f \in E$ definiše se relacija $\leq$ na sledeći način

$$e \leq f \overset{def}{\Longleftrightarrow} ef = fe = e.$$

Ova relacija je relacija poretka na E. Ako je $S=S^0$ tada je $0 \leq e$ za sve $e \in E$.

Idempotent f semigrupe S je <u>primitivan</u> ako je $f \neq 0$ i

$$(\forall e \in E)(e \leq f \Rightarrow e=0 \text{ ili } e=f).$$

<u>Potpuno [0-] prosta</u> semigrupa je [0-] prosta semigrupa koja ima primitivan idempotent.

Npr. svaka konačna [0-] prosta semigrupa je potpuno 0-prosta.

I.18 LEMA. Neka je S potpuno 0-prosta semigrupa i neka je e primitivan idempotent za S. Tada su L=Se i R=eS redom 0-minimalni levi i 0-minimalni desni ideali za S tako da je RL (= eSe = R $\cap$ L) grupa sa nulom za koju je e jedinični element.

Clifford [3] je dokazao sledeće tvrdjenje.

I.19 TEOREMA. Neka je $S=S^0$ 0-prosta semigrupa. Tada, S je potpuno 0-prosta ako i samo ako sadrži bar jedan 0-minimalan levi ideal za S i bar jedan 0-minimalan desni ideal za S.

Rich (1949.) je okarakterisao potpuno 0-proste ideale semigrupe $S=S^0$ (videti [4], Corollary 2.50 i ex. § 2.7, zadatak 6). Ta tvrdjenja navodimo ujedno sledećom teoremom.

I.20 TEOREMA. Neka je M ideal semigrupe $S=S^0$. Tada, M je potpuno 0-prosta semigrupa ako i samo ako je $M^2 \neq \{0\}$ i M je 0-minimalan ideal koji sadrži bar jedan 0-minimalan levi ideal za S i bar jedan 0-minimalan desni ideal za S.

Green [11] je dokazao sledeće tvrdjenje: Potpuno 0-prosta semigrupa je 0-biprosta i regularna.

Navodimo ovde osnovne pojmove potrebne za proučavanje idealne ekstenzije.

Neka je S ideal semigrupe V. Relacija τ definisana na V na sledeći način

$$x \, \tau \, y \overset{def}{\iff} x,y \in S \text{ ili } x=y,$$

je kongruencija koja se naziva Rees-ova kongruencija inducirana pomoću S. Kvocijent semigrupa V/τ je Rees-ova kvocijent semigrupa u odnosu na S i označava se sa V/S.

Prema definiciji Rees-ove kongruencije vidimo da semigrupu V/S možemo konstruisati tako što skupu $V\setminus S$ uniramo jednočlan skup $\{0\}$ pričemu $0 \notin V\setminus S$ i u skupu $(V\setminus S)\cup\{0\}$ definišemo operaciju $*$ na sledeći način

$$x * y = \begin{cases} xy & \text{ako } x,y,xy \notin S, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je S ideal semigrupe V tada kažemo da je V idealna ekstenzija pomoću Rees-ove kvocijent semigrupe V/S. V je prava ekstenzija za S ako je $V \neq S$. Kraće, kažemo da je V ekstenzija za S.

Opisujemo problem ekstenzije. Neka je S semigrupa i $Q=Q^0$ semigrupa sa nulom. Rešiti problem ekstenzije znači odrediti sve semigrupe V koje imaju ideal S' tako da je $S \cong S'$ i $V/S' \cong Q$. Možemo identifikovati S' sa S i $Q^* = Q\setminus\{0\}$ sa $V\setminus S$ tako da je $V = S \cup Q^*$ pri čemu su S i Q disjunktni. Problem se svodi na odredjivanje svih asocijativnih operacija na $V = S\cup Q^*$ koje se poklapaju sa datim na S i Q^* i za koje je S ideal za V.

Navodimo metod pomoću translatornog omotača semigrupe koji uspešno rešava problem ekstenzije za slabo reduktivne semigrupe.

Neka je S semigrupa i x,y ma koji elementi iz S. Funkcija λ na S je leva translacija za S ako je $\lambda(xy)=(\lambda x)y$; funkcija ρ na S je desna translacija na S ako je $(xy)\rho = x(y\rho)$.

Leva translacija λ i desna translacija ρ su <u>vezane</u> ako je $x(\lambda y)=(x\rho)y$ i u tom se slučaju kaže da je par (λ,ρ) <u>bitranslacija</u> za S. Leva translacija λ i desna translacija ρ su <u>permutativne</u> ako je $(\lambda x)\rho=\lambda(x\rho)$ za sve $x\in S$.

Skup $\Lambda(S)$ svih levih translacija za S je semigrupa u odnosu na proizvod: $(\lambda\lambda')x=\lambda(\lambda' x)$ za sve $x\in S$; skup $P(S)$ svih desnih translacija za S je semigrupa u odnosu na proizvod: $x(\rho\rho')=(x\rho)\rho'$ za sve $x\in S$. Proizvod dve bitranslacije je opet bitranslacija čime se dolazi do sledećeg pojma.

Podsemigrupa direktnog proizvoda $\Lambda(S)\times P(S)$ koju čine bitranslacije od S je <u>translatorni omotač</u> za S, u oznaci $\Omega(S)$.

Neka je s element semigrupe S. Funkcija λ_s definisana sa $\lambda_s x=sx$ za sve $x\in S$ je <u>unutrašnja leva translacija</u> inducirana sa s; slično $x\rho_s=xs$ definiše <u>unutrašnju desnu translaciju</u> induciranu sa s; par (λ_s,ρ_s) je <u>unutrašnja bitranslacija</u> inducirana sa s. Skup $\Pi(S)$ svih unutrašnjih bitranslacija je <u>unutrašnji deo od $\Omega(S)$</u>; analogno definišemo skupove $\Gamma(S)$ i $\Delta(S)$ svih unutrašnjih levih i svih unutrašnjih desnih translacija kao <u>unutrašnji deo od $\Lambda(S)$ i $P(S)$</u> redom.

Za ma koju semigrupu S, $\Gamma(S)$ je levi ideal za $\Lambda(S)$, $\Delta(S)$ je desni ideal za $P(S)$, $\Pi(S)$ je ideal za $\Omega(S)$.

Preslikavanje

$$\pi : s \to (\lambda_s,\rho_s) \qquad (s\in S)$$

je homomorfizam. Nazivamo ga <u>kanonički homomorfizam</u> od S u $\Omega(S)$ (ili na $\Pi(S)$).

Semigrupa S je <u>slabo reduktivna</u> ako za svako $a,b\in S$

$(\forall x \in S)\ ax=bx,\ \ xa=xb \implies a=b.$

Semigrupa S je <u>levo</u> [<u>desno</u>] <u>reduktivna</u> ako za svako $a,b \in S$

$(\forall x \in S)xa=xb \implies a=b \qquad [(\forall x \in S)ax=bx \implies a=b].$

Semigrupa S je <u>reduktivna</u> ako je levo i desno reduktivna.

Semigrupa S je <u>globalno idempotentna</u> ako je $S^2=S$.

Lako se dokazuju sledeća tvrdjenja.

i) Ma koje dve bitranslacije slabo reduktivne semigrupe S su permutativne.

ii) Ako je S globalno idempotentna semigrupa, tada svaka leva translacija je permutativna sa svakom desnom translacijom.

Ako je S ideal za V, tada svaki element $v \in V$ inducira levu[desnu] translaciju na $S: s \to vs$ [$s \to sv$].

Navodimo sledeći rezultat (Grillet, Petrich [12]).

I.21 TEOREMA. Neka je S ideal semigrupe V. Preslikavanje

$$\tau = \tau(V:S):\quad v \longrightarrow \tau^v = (\lambda^v, \rho^v) \qquad (v \in V)$$

gde za svaki $v \in V$,

$$\lambda^v s = vs, \qquad s\rho^v = sv$$

je homomorfizam za V na semigrupu permutativnih bitranslacija za S i proširuje kanonički homomorfizam $\pi : S \longrightarrow \Omega(S)$. Ako je S slabo reduktivna tada je τ jedinstvena ekstenzija za π do homomorfizma od V u $\Omega(S)$.

Na osnovu ovog tvrdjenja dokazuje se opšte rešenje ekstenzionog problema za slabo reduktivne semigrupe. Prethodno je potreban sledeći pojam.

Neka su S i Q semigrupe i neka Q ima nulu O. Parcijalni homomorfizam $\varphi : Q^* \longrightarrow \Omega(S)$ takav da $(a\varphi)(b\varphi) \in \Pi(S)$ ako $a,b \in Q^*$, $ab=0$, je <u>ekstenziona funkcija</u>.

I.22 TEOREMA. Neka je S slabo reduktivna semigrupa i Q semigrupa sa nulom, disjunktna sa S. Neka je $\varphi : Q^* \longrightarrow \Omega(S)$ odnosno $\varphi : a \longrightarrow \varphi^a = (\lambda^a, \rho^a)$ ekstenziona funkcija. Na $V = S \cup Q^*$ definišemo operaciju $*$ na sledeći način

$$a * b = \begin{cases} a\rho^b & \text{ako } a \in S,\ b \in Q^* \\ \lambda^a b & \text{ako } a \in Q^*,\ b \in S \\ c & \text{ako } a,b \in Q^*,\ ab=0 \text{ u } Q,\ \varphi^a\varphi^b = (\lambda_c, \rho_c) \end{cases}$$

a ostali proizvodi su oni iz S i Q. Tada V je idealna ekstenzija za S pomoću Q, u oznaci $V = \langle S, Q; \varphi \rangle$. Obratno, svaka idealna ekstenzija od S pomoću Q može se tako konstruisati.

Neka je S ideal semigrupe V. Kongruencija δ na V je <u>S-kongruencija</u> ako je njena restrikcija na S jednakost. Ekstenzija V semigrupe S je <u>gusta</u> ako je jednakost jedina S-kongruencija na V. Ideal S semigrupe V je <u>gusto potopljen ideal</u> ako je V u odnosu na inkluziju maksimalna gusta ekstenzija za S.

Neka je A podsemigrupa semigrupe S. Najveća podsemigrupa za S takva da je A njen ideal je <u>idealizator</u> za A u S, u oznaci $i_S(A)$.

Lako se proverava da je

$$i_S(A) = \{ s \in S \mid (\forall a \in A) \quad sa,\ as \in A \}.$$

Gluskin [7] je dokazao: Ako je S slabo reduktivna semigrupa, tada $\Omega(S)$ je idealizator za $\Pi(S)$ i $\Lambda(S) \times P(S)$ i $\Pi(S)$ je gusto potopljen ideal za $\Omega(S)$.

II DEO

NEKE KARAKTERIZACIJE REGULARNIH, INTRAREGULARNIH I (m,n)-REGULARNIH SEMIGRUPA

II.1 UVOD. Prvu karakterizaciju regularnih semigrupa preko levih i desnih ideala dao je Iseki (I.4 Teorema). Takodje, J.Calais, S.Lajos, J.Luh su okarakterisali regularne semigrupe preko levih, desnih ideala, kvazi-ideala i bi-ideala.

U II.2 opisujemo regularne semigrupe preko levih, desnih ideala i elemenata semigrupe (II.2.2 Teorema). Takodje, II.2.4 Teorema opisuje intraregularne semigrupe preko levih i desnih ideala. Zatim karakterišemo regularne i intraregularne semigrupe preko bi-ideala odnosno kvazi-ideala (II.2.7 Teorema).

II.3 počinje sa uopštenjem rezultata J. von Neumann-a (II.3.1 Lema). Glavni rezultat je uopštenje tvrdjenja Iseki-a, odnosno karakterizacija (m,n)-regularnih semigrupa preko (m,0)-ideala i (0,n)-ideala (II.3.4 Teorema). Iste semigrupe opisujemo i preko (m,n)-ideala odnosno (m,n)-kvazi-ideala (II.3.5 Teorema) što uopštava rezultate Lajos-a i Luh-a za slučaj regularnih semigrupa. Posebno razmatramo unije grupa i dajemo potrebne i dovoljne uslove da regularna semigrupa bude unija grupa (II.3.9 Teorema). Unije grupa opisujemo i preko bi-ideala i levih ideala odnosno bi-ideala i desnih ideala (II.3.10 Teorema). II.3.11 Teorema daje potrebne i dovoljne uslove da je svaki element semigrupe S (2,1)-regularan ili (1,2)-regularan.

II.4 sadrži karakterizacije (m,n)-ideala (m,n)-regularnih semigrupa. U tom delu uvodimo pojam $(m,n)_T$-ideala i karakterišemo podgrupu T semigrupe S pomoću $(m,n)_T$-ideala.

II.2 KARAKTERIZACIJE REGULARNIH I INTRAREGULARNIH SEMIGRUPA

Ako je a ma koji element semigrupe S tada je $aSa \subseteq aS \cap Sa$, $\langle a \rangle_{(1,0)}S=aS$ i $S\langle a\rangle_{(0,1)}=Sa$.

Neka je a regularan element semigrupe S, tj. $a=asa$ za neki s iz S. Neka $b\in aS \cap Sa$. Tada je $b=au=va$ za neke $u,v\in S$, te je $b=au=asau=asva$. Dakle, $b\in aSa$ te je $aS\cap Sa\subseteq aSa$. Takodje je

$\langle a\rangle_{(1,0)}=aS=asaS\subseteq aSaS=(\langle a\rangle_{(1,0)})^2$

i dualno, $\langle a\rangle_{(0,1)}\subseteq (\langle a\rangle_{(0,1)})^2$.

Tako smo dobili sledeće tvrdjenje.

II.2.1 LEMA. Za element a semigrupe S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) a je regularan.

(ii) $(\langle a\rangle_{(1,0)})^2=\langle a\rangle_{(1,0)}$, $(\langle a\rangle_{(0,1)})^2=\langle a\rangle_{(0,1)}$, $aS\cap Sa=aSa$.

(iii) $\langle a\rangle_{(1,0)}S=\langle a\rangle_{(1,0)}$, $S\langle a\rangle_{(0,1)}=\langle a\rangle_{(0,1)}$, $aS\cap Sa=aSa$.

Na osnovu prethodnog dokazujemo sledeće tvrdjenje.

II.2.2 TEOREMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je regularna.

(ii) $(\forall R\in \mathcal{J}_{(1,0)})(\forall L\in \mathcal{J}_{(0,1)})(\forall a\in S)$ $R^2=R$, $L^2=L$, $aS\cap Sa=aSa$.

(iii) $(\forall R\in \mathcal{J}_{(1,0)})(\forall L\in \mathcal{J}_{(0,1)})(\forall a\in S)$ $RS=R$, $SL=L$, $aS\cap Sa=aSa$.

DOKAZ. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Neka je S regularna i R desni ideal za S. Neka $a \in R$. Kako je $a=asa$ za neko $s \in S$ i $as \in R$ to $a \in R^2$. Dakle, $R^2=R$ i dualno, $L^2=L$ za ma koji levi ideal L za S. Prema II.2.1 Lemi je $aS \cap Sa = aSa$ za sve $a \in S$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Kako je $R=R^2 \subseteq RS$ to je $RS=R$ za ma koji desni ideal R za S. Analogno je $L^2=L$ za svaki levi ideal L za S.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Neka je a ma koji element iz S. Prema (iii) je $\langle a\rangle_{(1,0)}S=\langle a\rangle_{(1,0)}$, $S\langle a\rangle_{(0,1)}=\langle a\rangle_{(0,1)}$ i $aS \cap Sa=aSa$, pa prema II.2.1 Lemi, a je regularan.

Prema I.4 Teoremi i II.2.2 Teoremi dobijamo

II.2.3 TEOREMA. Neka je S kvaziregularna semigrupa. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je regularna.

(ii) $(\forall R \in \mathcal{J}_{(1,0)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,1)})\ RL \in \mathcal{Q}_{(1,1)}$.

(iii) $(\forall a \in S)\ aS \cap Sa = aSa$.

Sledećim tvrdjenjima opisuju se intraregularne semigrupe preko levih i desnih ideala. Takodje se daju neke osobine ideala intraregularnih odnosno regularnih semigrupa.

II.2.4 TEOREMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je intraregularna.

(ii) $(\forall R \in \mathcal{J}_{(0,1)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,1)})\ R \cap L \subseteq LR$.

(iii) $(\forall a \in S)\langle a\rangle_{(1,0)} \cap \langle a\rangle_{(0,1)} \subseteq \langle a\rangle_{(0,1)}\langle a\rangle_{(1,0)}$.

DOKAZ. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Neka je S intraregularna tj. $a \in Sa^2S$ za svaki element a iz S. Neka $a \in R \cap L$ i $s,t \in S$ tako da je $a=sa^2t$.

Tada je $a=(sa)(at)\in LR$. Dakle, $R\cap L\subseteq LR$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Očigledno.

(iii)$\Rightarrow$(i). Neka $a\in S$ i $\langle a\rangle_{(1,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,1)}\subseteq\langle a\rangle_{(0,1)}\langle a\rangle_{(1,0)}$

Kako je

$\langle a\rangle_{(0,1)}\langle a\rangle_{(1,0)}=(\{a\}\cup Sa)(\{a\}\cup aS)=\{a^2\}\cup a^2S\cup Sa^2\cup Sa^2S$

to $a\in\{a^2\}\cup a^2S\cup Sa^2\cup Sa^2S$. Ako $a\in a^2S$ tj. $a=a^2s$ za neko $s\in S$ tada $a=a^2s=aa^2ss\in Sa^2S$. Dakle, $a\in a^2S$ povlači $a\in Sa^2S$. Dakle, a je intraregularan. Kako je a ma koji element iz S to je S intraregularna.

Prema (ii) prethodne teoreme dobija se: Ako je S intraregularna semigrupa tada je $R\subseteq SR$ $[L\subseteq LS]$ za svaki desni [levi] ideal za S i $I^2=I=SI=IS$ za svaki ideal I za S.

Neka je I ideal intraregularne semigrupe S i neka $a\in I$. Tada je $a=sa^2t$ za neke $s,t\in S$. Odavde je

$a=saat=ssa^2tat=s^2aatat=s^2asa^2ttat=(s^2as)a^2(t^2at)\in Ia^2I$.

Dakle, I je intraregularna semigrupa.

Neka je I ideal regularne semigrupe S i neka $a\in I$. Tada je $a=asa$ za neko $s\in S$ pa je

$a=asa=asasa\in aIa$ te je I regularna semigrupa. Takodje je $IS=SI=I^2=I$ za svaki ideal I regularne semigrupe S.

Neka je I regularan [intraregularan] ideal semigrupe S i A ideal ideala I. Prema prethodnom je $IA=AI=A$ pa je $AS=AIS\subseteq AI=A$ i $SA=SIA\subseteq IA=A$. Dakle, A je ideal za S.

Na osnovu prethodnog dobija se sledeća teorema.

II.2.5 TEOREMA. Neka je S regularna [intraregularna] semigrupa. Tada je

i) $SI=IS=I$ za svaki ideal I za S.

ii) Svaki ideal I za S je regularan [intraregularan] .

iii) Svaki ideal ideala I za S je ideal za S.

Lajos [29] je postavio problem da se opiše klasa semigrupa S sa osobinom da je svaki ideal ideala za S takodje ideal za S. Sledeća teorema je prilog odgovoru na to pitanje.

II.2.6 TEOREMA. Neka je I ideal semigrupe S. Tada, svaki ideal ideala I je ideal za S ako i samo ako za svaki podskup A ideala I je $AS \subseteq \langle A\rangle_I$ i $SA \subseteq \langle A\rangle_I$ gde je $\langle A\rangle_I$ ideal za I generisan sa A.

DOKAZ. Neka je svaki ideal ideala I ideal za S. Neka je A podskup ideala I. Tada je $\langle A\rangle_I = A\cup AI\cup IA\cup IAI$ pa je $(A\cup AI\cup IA\cup IAI)S \subseteq \langle A\rangle_I$ odnosno $AS\cup AIS\cup IAS\cup IAIS \subseteq \langle A\rangle_I$ te je $AS\subseteq\langle A\rangle_I$. Analogno se dokazuje i $SA\subseteq\langle A\rangle_I$.

Obratno, neka je za svaki podskup A ideala I, $AS\subseteq\langle A\rangle_I$ i $SA\subseteq\langle A\rangle_I$. Neka je B ideal za I. Tada je $BS\subseteq\langle B\rangle_I$ i $SB\subseteq\langle B\rangle_I$, tj. $BS\subseteq B$ i $SB\subseteq B$. Dakle, B je ideal za S.

Croisot [6] je proučavao semigrupe koje su regularne i intraregularne (I.5 Teorema). Sledeće tvrdjenje karakteriše te semigrupe preko bi-ideala i kvazi-ideala.

II.2.7 TEOREMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je regularna i intraregularna.

(ii) $(\forall B\in \tilde{\mathcal{J}}_{(1,1)})$ $BSB\cap SB^2=B$.

(iii) $(\forall Q\in \mathcal{Q}_{(1,1)})$ $QSQ\cap SQ^2=Q$.

(iv) $(\forall a\in S)$ $Q(a)SQ(a)\cap SQ^2(a)=Q(a)$.

(v) $(\forall a\in S)$ $\langle a\rangle_{(1,1)}S\langle a\rangle_{(1,1)}\cap S(\langle a\rangle_{(1,1)})^2=\langle a\rangle_{(1,1)}$.

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je S regularna i intraregularna. Tada, za svaki element $a \in S$ postoje $s,u,v \in S$ tako da je $a=asa=ua^2v$. Neka je B bi-ideal za S, tj. $BSB \subseteq B$. Neka $b \in B$. Tada je $b=bsb=tb^2r$ za neke $s,t,r \in S$. Odavde je

$$b=bsb=tb^2rsb=tb(brsb) \in SB(BSB) \subseteq SB^2.$$

Dakle, $B \subseteq BSB \cap SB^2$ te je $B=BSB \cap SB^2$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Jer, svaki kvazi-ideal je bi-ideal.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Očigledno.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Kako je $Q(a)=\{a\} \cup (aS \cap Sa)$ to je

$$Q(a)SQ(a)=(\{a\} \cup (aS \cap Sa))S(\{a\} \cup (aS \cap Sa))=aS(\{a\} \cup (aS \cap Sa))=aSa.$$

Takodje je

$$SQ^2(a)=S(\{a\} \cup (aS \cap Sa))(\{a\} \cup (aS \cap Sa))=Sa(\{a\} \cup (aS \cap Sa)) =$$
$$= Sa^2 \cup Sa(aS \cap Sa) \subseteq Sa^2 \cup Sa^2S.$$

Dakle, prema (iv) je $Q(a) \subseteq aSa \cap (Sa^2 \cup Sa^2S)$ odnosno

$$a \in aSa \cap (Sa^2 \cup Sa^2S).$$

Ako $a \in Sa^2$ tj. $a=sa^2=saa=ssa^2s$ za neko $s \in S$ te $a \in Sa^2S$. Dakle, $a \in aSa$ i $a \in Sa^2S$ te je a regularan i intraregularan.

(ii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv). Očigledno.

II.3 (m,n)-REGULARNE SEMIGRUPE

Semigrupe navedene sa I.7 uveo je Croisot [6] i nazvao ih "semigrupe koje zadovoljavaju uslov (m,n)". Ovde ćemo ih nazivati (m,n)-regularne semigrupe. Razmatramo njihove karakterizacije preko (m,n)-ideala.

Sledećim tvrdjenjem uopštava se rezultat J. von Neumann-a (I.1. Lema).

II.3.1 LEMA. Neka je a element semigrupe S, m ma koji prirodan broj i E skup svih idempotenata za S. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) a je (m,1)-regularan.

(ii) $(\exists e \in E)\ \langle a \rangle_{(m,0)} = eS$.

DOKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je a (m,1)-regularan element iz S tj. $a=a^m sa^n$ za neko $s \in S$. Tada je $a^m sa^m s = a^m saa^{m-1}s = aa^{m-1}s = a^m s$. Dakle, $a^m s \in E$. Kako je

$\langle a \rangle_{(m,0)} = \{a\} \cup \{a^2\} \cup \ \ldots \ \cup \{a^m\} \cup a^m S$

i $a = a^m sa^n$ to je $\langle a \rangle_{(m,0)} = a^m S$.

Neka $b \in a^m S$, tj. $b=a^m t$ za neko $t \in S$. Tada je $b=aa^{m-1}t=a^m saa^{m-1}t= =a^m sa^m t \in a^m sS$. Dakle, $a^m S \subseteq a^m sS$ a odavde $a^m S = a^m sS$.

Dobili smo $\langle a \rangle_{(m,0)} = eS$ gde je $e=a^m s$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Neka je $\langle a \rangle_{(m,0)} = eS$ za neko $e \in E$ tj. $\{a\} \cup \{a^2\} \cup \ldots \cup \{a^m\} \cup a^m S = eS$. Tada je $ea=a$, $e=a^k$ za neko $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ ili $e=a^m s$ za neko $s \in S$.

Neka je $e=a^k$ za neko $k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Tada je $m=k\ell+r$ gde su ℓ i r prirodni brojevi i $r \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}$. Ako je $r=0$ tada je $a^m=a^k=(a^k)^\ell = e^\ell = e$ pa je $a=ea=eea=a^m ea$ tj. a je (m,1)-regularan. Ako $r \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ tada $a^m=(a^k)^\ell a^r = ea^r = a^r$. Kako je $k > r$ to je $k=r+t$ za neki prirodan broj t pa je $a^m a^t a = a^r a^t a = a^{r+t} a = a^k a = ea = a$ te je a (m,1)-regularan.

Neka je $e=a^m s$ za neko $s \in S$. Tada je $a^m sa=ea=a$ te je a (m,1)-regularan.

Dualno ovom tvrdjenju je sledeće: Element a semigrupe S je (1,n)-regularan ako i samo ako je $\langle a \rangle_{(0,n)} = Se$ za neki idempotent e.

II.3.2 LEMA. Neka je S semigrupa, m,n prirodni brojevi i $a \in S$. Tada je

i) $(\langle a \rangle_{(m,0)})^m S = a^m S$.

ii) $S(\langle a \rangle_{(0,n)})^n = Sa^n$.

iii) $(\langle a \rangle_{(m,n)})^m S(\langle a \rangle_{(m,n)})^n = a^m S a^n$.

DOKAZ. i). Kako je $\langle a \rangle_{(m,0)} = \bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S$ to je

$$(\langle a \rangle_{(m,0)})^m S = (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)^m S =$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)^{m-1} (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)S =$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)^{m-1} aS =$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)^{m-2} (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)aS =$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)a^2 S = \ldots = (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)^{m-(m-1)} a^{m-1} S =$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{m} \{a^i\} \cup a^m S)a^{m-1} S = \bigcup_{i=1}^{m} a^{i+m-1} S \cup a^m S a^{m-1} S = a^m S$$

Dakle, $(\langle a \rangle_{(m,0)})^m S = a^m S$.

Analogno se dokazuje ii).

iii). Kako je $\langle a \rangle_{(m,n)} = \bigcup_{i=1}^{m+n} \{a^i\} \cup a^m S a^n$ to je

$$(\langle a \rangle_{(m,n)})^m S = (\bigcup_{i=1}^{m+n} \{a^i\} \cup a^m S a^n)^m S =$$

$$= \left(\bigcup_{i=1}^{m+n} \{a^i\} \cup a^m S a^n \right)^{m-1} \left(\bigcup_{i=1}^{m+n} \{a^i\} \cup a^m S a^n \right) S =$$

$$= \left(\bigcup_{i=1}^{m+n} \{a^i\} \cup a^m S a^n \right)^{m-1} aS = \dots = a^m S.$$

Analogno je

$$S(\langle a \rangle_{(m,n)})^n = Sa^n.$$

Tada je

$$(\langle a \rangle_{(m,n)})^m S(\langle a \rangle_{(m,n)})^n = a^m S(\langle a \rangle_{(m,n)})^n = a^m S a^n.$$

Na osnovu ove Leme lako se dokazuje sledeća.

II.3.3 LEMA. Neka su m i n prirodni brojevi. Tada, semigrupa S je $(m,0)$-regularna $[(0,n)$-regularna$]$ ako i samo ako je $R=R^mS$ $[L=SL^n]$ za svaki $(m,0)$-ideal R $[(0,n)$-ideal L$]$ za S.

Regularne semigrupe okarakterisao je Iseki preko levih i desnih ideala (I.2. Teorema). Naredno tvrdjenje karakteriše (m,n)-regularne semigrupe preko (m,n)-ideala, koje se za $m=n=1$ svodi na tvrdjenje Iseki-a [14].

II.3.4 TEOREMA. Neka je S semigrupa, m,n nenegativni celi brojevi. Tada, S je (m,n)-regularna ako i samo ako je $R \cap L = R^m L \cap RL^n$ za svaki $(m,0)$-ideal R i svaki $(0,n)$-ideal L za S. Pritom je, dogovorno $R^0 L \overset{\text{def}}{=} L$ i $RL^0 \overset{\text{def}}{=} R$.

DOKAZ. Ako je $m=n=0$ tvrdjenje je tačno jer svaka semigrupa je $(0,0)$-regularna.

Ako je $m=0$, $n\neq 0$ onda je $R=S$ pa $R\cap L=R^m L\cap RL^n$ postaje $L=L\cap SL^n$ tj. $L\subseteq SL^n$. Odavde je $L=SL^n$. Dakle tvrdjenje se svodi na: S je $(0,n)$-regularna ako i samo ako je $L=SL^n$ za svaki $(0,n)$-ideal L (II.3.3 Lema).

Ako je $m\neq 0$ i $n=0$ tada tvrdjenje glasi: S je $(m,0)$-regularna ako i samo ako je $R=R^mS$ za svaki $(m,0)$-ideal R za S (II.3.3 Lema).

Neka je $m\neq 0$ i $n\neq 0$. Za ma koju semigrupu S je $R^mL\subseteq R^mS\subseteq R$ i $RL^n\subseteq SL^n\subseteq L$ za svaki $(m,0)$-ideal R i $(0,n)$-ideal L iz S. Tada je

$$R^mL\cap RL^n\subseteq R\cap L.$$

Neka je S (m,n)-regularna. Neka $a\in R\cap L$ i $s\in S$ tako da je $a=a^msa^n$. Tada $a\in R^mL\cap RL^n$ te je $R\cap L\subseteq R^mL\cap RL^n$. Prema ovome i prethodnom je $R\cap L = R^mL\cap RL^n$.

Obratno, neka je $R\cap L = R^mL\cap RL^n$ za svaki $(m,0)$-ideal R i svaki $(0,n)$-ideal L za S. Za $R = \langle a\rangle_{(m,0)}$ i $L = S$ je $\langle a\rangle_{(m,0)} = (\langle a\rangle_{(m,0)})^mS$. Prema II.3.2 Lemi je $\langle a\rangle_{(m,0)}=a^mS$. Za $R=S$ i $L=\langle a\rangle_{(0,n)}$ je $\langle a\rangle_{(0,n)}=S(\langle a\rangle_{(0,n)})^n$ pa je $\langle a\rangle_{(0,n)}=Sa^n$ (II.3.2 Lema). Iz $R\cap L=R^mL\cap RL^n$ sledi $R\cap L\subseteq RL$ pa je $a^mS\cap Sa^n\subseteq a^mSSa^n\subseteq a^mSa^n$. Odavde je $\langle a\rangle_{(m,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,n)}=a^mSa^n$. Dakle, $a\in a^mSa^n$ te je S (m,n)-regularna.

S.Lajos i J.Luh su opisali regularne semigrupe redom preko bi-ideala i kvazi-ideala (I.3 Teorema). To je specijalan slučaj sledećeg tvrdjenja kojim se opisuju (m,n)-regularne semigrupe preko (m,n)-ideala i (m,n)-kvazi-ideala.

II.3.5 TEOREMA. Neka su m i n ma koji prirodni brojevi. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je (m,n)-regularna.

(ii) $(\forall A\in\mathcal{Y}_{(m,n)})\ A^mSA^n=A$.

(iii) $(\forall Q\in\mathcal{Q}_{(m,n)})\ Q^mSQ^n=Q$.

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$(ii). Neka je S (m,n)-regularna. Neka je A (m,n)-ideal za S i $a\in A$. Kako je $a=a^m sa^n$ za neko $s\in S$ to $a\in A^m SA^n$ pa je $A\subseteq A^m SA^n$. Dakle, $A^m SA^n=A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Jer je svaki (m,n)-kvazi-ideal takodje i (m,n)-ideal.

(iii) $\Rightarrow$(i). Neka $a\in S$. Kako je $\langle a\rangle_{(m,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,n)}$ (m,n)-kvazi-ideal (I.8 Teorema) to prema (iii) je

$$(\langle a\rangle_{(m,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,n)})^m S(\langle a\rangle_{(m,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,n)})^n=\langle a\rangle_{(m,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,n)}.$$

Prema ovome i II.3.2 Lemi je

$$\langle a\rangle_{(m,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,n)}\subseteq(\langle a\rangle_{(m,0)})^m S(\langle a\rangle_{(0,n)})^n=a^m Sa^n.$$

Dakle, $a\in a^m Sa^n$ te je S (m,n)-regularna.

Prema prethodnim rezultatima i I.6 Teoremi imamo

II.3.6 TEOREMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je unija grupa.

(ii) $(\forall R\in\mathcal{J}_{(2,0)})(\forall L\in\mathcal{J}_{(0,1)})R\cap L=R^2L$.

(iii) $(\forall R\in\mathcal{J}_{(2,0)})(\forall L\in\mathcal{J}_{(0,2)})$ $R^2S=R$, $SL^2=L$.

(iv) $(\forall R\in\mathcal{J}_{(2,0)})(\forall B\in\mathcal{J}_{(1,1)})$ $R^2S=R$, $BSB=B$.

(v) $(\forall A\in\mathcal{J}_{(2,1)})$ $A^2SA=A$.

(vi) $(\forall Q\ \mathcal{Q}_{(2,1)})$ $Q^2SQ=Q$.

A.N.Clifford je proučavao jednu veoma značajnu klasu regularnih semigrupa.

II.3.7 DEFINICIJA. Regularna semigrupa S čiji su svi idempotenti centralni tj. za koju

$$(\forall e\in E)(\forall x\in S)\quad ex=xe$$

naziva se <u>Cliffordova</u>.

Lako se vidi da Cliffordova semigrupa jeste unija grupa. Jer, ako je S Cliffordova tada je $a=asa=asasa=aassa=a^2s^2a$ za neko $s\in S$ pa je S potpuno regularna odnosno unija grupa. Prirodno, je postaviti pitanje: Ako je S unija grupa, pod kojim uslovom je S Cliffordova? Jedan potreban i dovoljan uslov dao je S.Lajos[33] što navodimo sledećom teoremom.

II.3.8 TEOREMA. Neka je S unija grupa. Tada S je Cliffordova semigrupa ako i samo ako je svaki jednostran ideal i dvostran .

Kako je unija grupa regularna semigrupa to se slično, prirodno postavlja pitanje: Pod kojim uslovom je regularna semigrupa unija grupa. Dobijamo sledeće tvrdjenje.

II.3.9 TEOREMA. Za regularnu semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je unija grupa.

(ii) $\mathcal{J}_{(2,0)} = \mathcal{J}_{(1,0)}$.

(iii) $\mathcal{J}_{(0,2)} = \mathcal{J}_{(0,1)}$.

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$(ii). Ako je S unija grupa onda je ona desno regularna tj. $a\in a^2S$ za svako $a\in S$ (I.6 Teorema). Prema II.3.3 Lemi je $R^2S=R$ za svaki (2,0)-ideal R za S. Dakle, R je desni ideal za S.

(ii) $\Rightarrow$(i). Neka je svaki (2,0)-ideal za S desni ideal za S. Kako je S regularna to prema I.2 Teoremi je $R^2=R$ za svaki desni ideal R za S. Dakle, $R^2=R$ za svaki (2,0)-ideal R za S. Tada, prema I.2 Teoremi je $R\cap L=RL$ odnosno $R\cap L=R^2L$ za svaki (2,0)-ideal R i svaki levi ideal L za S. Prema II.3.4 Teoremi S je (2,1)-regularna, odnosno unija grupa.

Analogno se dokazuje (ii)$\Leftrightarrow$(iii).

Sledeće tvrdjenje daje karakterizaciju unije grupa preko bi-ideala i (0,2)-ideala [(2,0)-ideala] .

II.3.10 TEOREMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S je unija grupa.

(ii) $(\forall B \in \mathcal{J}_{(1,1)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,2)})\ B \cap L \subseteq BL.$

(iii) $(\forall a \in S)\ \langle a \rangle_{(1,1)} \cap \langle a \rangle_{(0,2)} = \langle a \rangle_{(1,1)}\ \langle a \rangle_{(0,2)}.$

(iv) $(\forall B \in \mathcal{J}_{(1,1)})(\forall R \in \mathcal{J}_{(0,2)})\ B \cap R \subseteq RB.$

(v) $(\forall a \in S)\ \langle a \rangle_{(1,1)} \cap \langle a \rangle_{(2,0)} = \langle a \rangle_{(2,0)}\ \langle a \rangle_{(1,1)}.$

DOKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je S unija grupa, B bi-ideal i L (0,2)-ideal za S. Neka $a \in B \cap L$. Kako je $a = asa^2$ za neki $s \in S$ to je $a = a(sa^2) \in B(SL^2) \subseteq BL$. Dakle, $B \cap L \subseteq BL$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Prema (ii) je

$$\langle a \rangle_{(1,1)} \cap \langle a \rangle_{(0,2)} \subseteq \langle a \rangle_{(1,1)}\ \langle a \rangle_{(0,2)}$$

za ma koji element a iz S. Primetimo da za ma koju semigrupu S i $a \in S$ je

$$\langle a \rangle_{(1,1)}\ \langle a \rangle_{(0,2)} \subseteq \langle a \rangle_{(1,1)} \cap \langle a \rangle_{(0,2)}.$$

Jer,

$$a_{(1,1)}\ a_{(0,2)} = (\{a\} \cup \{a^2\} \cup aSa)(\{a\} \cup \{a^2\} \cup Sa^2) = \{a^2\} \cup \{a^3\} \cup aSa^2.$$

$$\langle a \rangle_{(1,1)} \cap \langle a \rangle_{(0,2)} = \{a\} \cup \{a^2\} \cup (aSa \cap Sa^2)$$

(iii)$\Rightarrow$(i). Kako je

$$\{a\} \cup \{a^2\} \cup (aSa \cap Sa^2) = \{a^2\} \cup \{a^3\} \cup aSa^2$$

to $a \in aSa^2$. Dakle, S je (1,2)-regularna, tj. unija grupa.

Slično se dokazuje (i)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(i).

Neka je S semigrupa takva da je svaki element a (1,2)-regularan ili (2,1)-regularan, odnosno $a=asa^2$ ili $a=a^2ta$ za neke $s,t\in S$. Tada je $R\cap L\subseteq RL$ za ma koji (2,0)-ideal R za S i ma koji (0,2)-ideal L za S. Odatle, $\langle a\rangle_{(2,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,2)}\subseteq\langle a\rangle_{(2,0)}\langle a\rangle_{(0,2)}$ za svaki element $a\in S$, tj.

$$\{a\}\cup\{a^2\}\cup(a^2S\cap Sa^2)\subseteq\{a^2\}\cup\{a^3\}\cup aSa^2\cup a^2Sa.$$

Tako smo dobili

II.3.11 TEOREMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) $(\forall a\in S)$ a je (2,1)-regularan ili a je (1,2)-regularan.

(ii) $(\forall R\in\mathcal{J}_{(2,0)})(\forall L\in\mathcal{J}_{(0,2)})\ R\cap L\subseteq RL.$

(iii) $(\forall a\in S)\ \langle a\rangle_{(2,0)}\cap\langle a\rangle_{(0,2)}=\langle a\rangle_{(2,0)}\langle a\rangle_{(0,2)}$:

II.4 (m,n)-IDEALI I $(m,n)_T$-IDEALI

Ovde razmatramo (m,n)-ideale (m,n)-regularnih semigrupa. Takodje, uvodimo pojam $(m,n)_T$-ideala semigrupe S i pomoću njih karakterišemo podgrupu T semigrupe S.

II.4.1 LEMA. Neka je S semigrupa, m,n prirodni brojevi i $\mathcal{P}(S)$ partitivan skup skupa S. Tada

i) $(\forall P\in\mathcal{P}(S))(\forall L\in\mathcal{J}_{(0,n)})\ PL^n\in\mathcal{J}_{(1,1)}$.

ii) $(\forall P\in\mathcal{P}(S)(\forall R\in\mathcal{J}_{(m,0)})\ R^mP\in\mathcal{J}_{(1,1)}$.

DOKAZ. i). Kako je $SL^n\subseteq L$ imamo

$$(PL^n)(PL^n)=PL^{n-1}LPL^n\subseteq PL^{n-1}SL^n\subseteq PL^{n-1}L=PL^n;$$

$$(PL^n)S(PL^n)=PL^{n-1}LSPL^n\subseteq PL^{n-1}SL^n\subseteq PL^{n-1}L=PL^n$$

Prema tome, PL^n je bi-ideal za S.

Analogno se dokazuje i ii).

II.4.2 LEMA. Neka je S semigrupa, m,n nenegativni celi brojevi. Tada

$$(\forall R\in \mathcal{J}_{(m,0)})(\forall L\in \mathcal{J}_{(0,n)})\ R^mL\cap RL^n\in \mathcal{J}_{(1,1)}.$$

DOKAZ. Ako je m=n=0 tada je $R_{(0,0)}=S=L_{(0,0)}$, $R^oL\cap RL^o = L\cap R = S\in \mathcal{J}_{(1,1)}$.

Ako je m=0, $n\geq 1$ tada $R_{(0,0)}=S$ i R^oL $RL^n=L$ $SL^n=SL^n$ pa prema II.4.1 Lemi, $SL^n\in \mathcal{J}_{(1,1)}$.

Ako je $m\geq 1$, n=0, tada $L_{(0,0)}=S$ i $R^mL\cap RL^o=R^mS\cap R=R^mS$. Opet prema II.4.1 Lemi $R^mS\in \mathcal{J}_{(1,1)}$.

Ako je $m\geq 1$ i $n\geq 1$ tada, prema II.4.1 Lemi, R^mL i RL^n pripadaju $\mathcal{J}_{(1,1)}$. Dakle, $R^mL\cap RL^n\in \mathcal{J}_{(1,1)}$.

Koristeći prethodna tvrdjenja, sledećim opisujemo (m,n)-ideale (m,n)-regularnih semigrupa.

II.4.3 TEOREMA. Neka je S (m,n)-regularna semigrupa gde su m i n ma koji nenegativni celi brojevi. Neka je A neprazan podskup skupa S. Tada

$$A \text{ je } (m,n)\text{-ideal za } S \iff (\exists R\in \mathcal{J}_{(m,0)})(\exists L\in \mathcal{J}_{(0,n)})\ A=R^mL\cap RL^n.$$

DOKAZ. Ako je m=n=0 tada A je (0,0)-ideal ako i samo ako je A=S.

Neka je $m\geq 1$ i n=0. Tada $R^mL\cap RL^o=R^mS$ a to je (m,0)-ideal (II.4.1 Lema). Obratno, ako je A (m,0)-ideal, tada $A^mS\cap AS^o=A^mS\cap A=A^mS$. Kako je S (m,0)-regularna to prema II.3.3 Lemi je $A=A^mS$. Dakle, $A=A^mS\cap AS^o$.

Neka je m=0, $n\geq 1$. Tada $R^oL\cap RL^n=SL^n$ i SL^n je (0,n)-ideal. Obratno, ako je A (0,n)-ideal za S tada je $S^oA\cap SA^n=A\cap SA^n=SA^n$. Prema II.3.3 Lemi je $SA^n=A$. Dakle, $A=S^oA\cap SA^n$.

Neka je $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ i $A=R^mL \cap RL^n$. Prema II.4.2 Teoremi, $A \in \mathcal{J}_{(1,1)}$ tako da $A \in \mathcal{J}_{(m,n)}$. Obratno, neka je A (m,n)-ideal. Prema II.3.5 Teoremi je $A=A^mSA^n$, a prema II.3.4 Teoremi je

$$(\forall R \in \mathcal{J}_{(m,0)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,n)})\ R^mL \cap RL^n = R \cap L.$$

Odatle, za $R=\langle A\rangle_{(m,0)}=A \cup A^mS$ i $L=\langle A\rangle_{(0,n)}=A \cup SA^n$ dobijamo

$$(\langle A\rangle_{(m,0)})^m \langle A\rangle_{(0,n)} \cap \langle A\rangle_{(m,0)}(\langle A\rangle_{(0,n)})^n =$$

$$= \langle A\rangle_{(m,0)} \cap \langle A\rangle_{(0,n)} = (A \cup A^mS) \cap (A \cup SA^n) =$$

$$= A \cup (A^mS \cap SA^n) = A \cup A^mSA^n = A.$$

Prema tome,

$$A = (\langle A\rangle_{(m,0)})^m \langle A\rangle_{(0,n)} \cap \langle A\rangle_{(m,0)}(\langle A\rangle_{(0,n)})^n.$$

II.4.4 TEOREMA. Neka je S semigrupa, m,n prirodni brojevi. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S je (m,n)-regularna i $(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,n)})\ L^mS \subseteq L$

(ii) $(\forall A \in \mathcal{J}_{(m,n)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,n)})\ A \cap L = A^mL \cap AL^n$

(iii) $(\forall Q \in \mathcal{Q}_{(m,n)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,n)})\ Q \cap L = Q^mL \cap QL^n$

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je S semigrupa sa osobinom (i). Tada, prema II.3.4 Teoremi, imamo

$$(\forall R \in \mathcal{J}_{(m,0)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,n)})\ R \cap L = R^mL \cap RL^n.$$

Neka je $A \in \mathcal{J}_{(m,n)}$. Prema II.4.3. Teoremi postoje $R \in \mathcal{J}_{(m,0)}$ i $L \in \mathcal{J}_{(0,n)}$ tako da je $A=R^mL \cap RL^n$. Dokazujemo da je A $(m,0)$-ideal.

$$A^mS=(R^mL \cap RL^n)^mS=(R^mL \cap RL^n)(R \cap L)^{m-1}S \subseteq (R^mL \cap RL^n)L^{m-1}S \subseteq$$

$$\subseteq R^mLL^{m-1}S \cap RL^nL^{m-1}S=R^mL^mS \cap RL^{n-1}L^mS \subseteq R^mL \cap RL^{n-1}L=R^mL \cap RL^n=A.$$

Dakle, $A^mS \subseteq A$, tj. $A \in \mathcal{J}_{(m,0)}$. Tada,

$$(\forall A \in \mathcal{J}_{(m,n)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,n)})(A \cap L = A^mL \cap AL^n).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Jer je $\mathcal{Q}_{(m,n)} \subseteq \mathcal{J}_{(m,n)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Prema (iii) i $\mathcal{J}_{(m,0)} \subseteq \mathcal{Q}_{(m,n)}$ imamo

$$(\forall R \in \mathcal{J}_{(m,0)})(\forall L \in \mathcal{J}_{(0,n)})\ R \cap L = R^mL \cap RL^n,$$

tj. S je (m,n)-regularna. Kako je $\mathcal{J}_{(0,n)} \subseteq \mathcal{Q}_{(m,n)}$ i $S^n = S$, to prema (iii) dobijamo

$$L = L \cap S = L^mS \cap LS^n = L^mS.$$

Prethodna tvrdjenja ovog paragrafa su uopštenja rezultata Lajos-a [31], [32].

Sledećom definicijom uvodimo pojam $(m,n)_T$-ideala gde je T podsemigrupa semigrupe S.

II.4.5 DEFINICIJA. Neka je T podsemigrupa semigrupe S. Podskup A semigrupe S je $(m,n)_T$-ideal ako je $A^mTA^n \subseteq A$ (m,n su nenegativni celi brojevi).

II.4.6 LEMA. Neka je $\mathcal{J}_{(m,n)_T}$ skup svih $(m,n)_T$-ideala semigrupe S. Tada

$$(\forall A,B \in \mathcal{J}_{(m,n)_T})(A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}_{(m,n)_T}).$$

DOKAZ. Neka $A,B \in \mathcal{J}_{(m,n)_T}$ tj. $A^mTA^n \subseteq A$ i $B^mTB^n \subseteq B$. Tada je

$$(A \cap B)^mT(A \cap B)^n \subseteq A^mTA^n \subseteq A$$

$$(A \cap B)^mT(A \cap B)^n \subseteq B^mTB^n \subseteq B.$$

Dakle, $(A \cap B)^mT(A \cap B)^n \subseteq A \cap B$.

Sledeća tvrdjenja daju potreban i dovoljan uslov da podsemigrupa T semigrupe S bude podgrupa za S.

II.4.7 TEOREMA. Neka je S semigrupa, m,n prirodni brojevi i $\mathcal{J}_{(m,n)_T}$ skup svih $(m,n)_T$-ideala za S. Tada, sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) T je podgrupa za S.

(ii) $(\forall A \in \mathcal{J}_{(m,n)_T})(T \subseteq A \vee A \cap T = \emptyset)$.

DOKAZ. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Neka je T podgrupa semigrupe S i $A \in \mathcal{J}_{(m,n)_T}$. Ako je $A \cap T \neq \emptyset$, tada prema II.4.6 Lemi, imamo $A \cap T \in \mathcal{J}_{(m,n)_T}$. Neka je $A \cap T = B$. Tada je $B \subseteq T$ i $B^m T B^n \subseteq B$. Kako je T podgrupa i $B \subseteq T$, imamo $B^m T B^n = T$. Prema tome, $T \subseteq B$ tj. $B = T$. Tada je $A \cap T = T$ tj. $T \subseteq A$. Dakle,

$$(\forall A \in \mathcal{J}_{(m,n)_T})(T \subseteq A \vee A \cap T = \emptyset).$$

II.4.8 TEOREMA. Neka je S semigrupa, m,n prirodni brojevi, $\mathcal{J}_{(m,0)_T}$ skup svih $(m,0)_T$-ideala za S, $\mathcal{J}_{(0,n)_T}$ skup svih $(0,n)_T$-ideala za S i $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{(m,0)_T} \cup \mathcal{J}_{(0,n)_T}$. Tada

$$T \text{ je podgrupa za } S \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathcal{J})(T \subseteq A \vee A \cap T = \emptyset).$$

DOKAZ. Neka je T podgrupa za S i $A \in \mathcal{J}$. Neka $A \in \mathcal{J}_{(m,0)_T}$ tj. $A^m T \subseteq A$. Ako je $A \cap T \neq \emptyset$, tada prema II.4.6 Lemi, $A \cap T = B$ je $(m,0)_T$-ideal tj. $B^m T \subseteq B$. Kako je $B \subseteq T$ i T je podgrupa za S to je $B^m T = T$, odnosno $T \subseteq B$. Dakle, $B = T$ tj. $A \cap T = T$ i $T \subseteq A$. Analogno se dokazuje za $A \in \mathcal{J}_{(0,n)_T}$.

Obratno, neka

$$(\forall A \in \mathcal{J})(T \subseteq A \vee A \cap T = \emptyset).$$

Kako je T podsemigrupa za S to je

$$(\forall x \in T)(xT \subseteq T \wedge Tx \subseteq T).$$

Tada je

$$(xT)^m T = (xT)(xT)^{m-1}T \subseteq T.$$

Dakle, $xT \in \mathcal{J}_{(m,0)_T}$ a odavde $xT \in \mathcal{J}$. Prema tome i pretpostavci je

$$T \subseteq xT \vee T \cap xT = \emptyset$$

Dakle, $xT=T$.

Kako je $T(Tx)^n = T(Tx)^{n-1}Tx \subseteq Tx$ to je $Tx \in \mathcal{J}_{(0,n)_T}$ tj. $Tx \in \mathcal{J}$. Tada je

$$T \subseteq Tx \vee T \cap Tx = \emptyset.$$

Dakle, $Tx=T$.

Prema prethodnom je

$$(\forall x \in T)xT = Tx = T.$$

Prema tome, T je podgrupa semigrupe S.

III.4.9 POSLEDICA. Neka je S semigrupa, m,n prirodni brojevi i $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{(m,0)} \cup \mathcal{J}_{(0,n)}$. Tada

$$S \text{ je grupa} \iff \mathcal{J} = \{S\}.$$

Prema III.4.8 Teoremi lako se dokazuje sledeća (oznake su kao u navedenoj teoremi).

III.4.10 TEOREMA. Neka je T podsemigrupa semigrupe S. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) T je podgrupa za S.

(ii) $(\forall A \in \mathcal{J}_{(m,0)_T})(T \subseteq A \vee A \cap T = \emptyset) \wedge (\forall x \in T)xT \subseteq Tx.$

(iii) $(\forall A \in \mathcal{J}_{(0,n)_T})(T \subseteq A \vee A \cap T = \emptyset) \wedge (\forall x \in T)Tx \subseteq xT.$

II.4.11. POSLEDICA. Neka je S semigrupa, m,n prirodni brojevi. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je grupa.

(ii) $(\forall A \in \mathcal{J}_{(m,0)})(A=S) \wedge (\forall x \in S)(xS \subseteq Sx)$.

(iii) $(\forall A \in \mathcal{J}_{(0,n)})(A=S) \wedge (\forall x \in S)(Sx \subseteq xS)$.

III DEO

O-MINIMALNI BI-IDEALI I POTPUNO O-PROSTE SEMIGRUPE

III.1 UVOD. Jedna veoma značajna klasa regularnih semigrupa je svakako klasa potpuno O-prostih semigrupa. U III.3 opisujemo te semigrupe preko O-minimalnih bi-ideala.

Prethodno, tj. u III.2 razmatramo O-minimalne leve ideale i dokazujemo da je O-minimalan levi ideal L semigrupe $S=S^o$ O-prosta semigrupa ako i samo ako je levo O-prosta (III.2.7 Teorema).

Analogno pojmu degeneriranog levog [desnog] ideala (I.14 Definicija), u III.3 uvodimo pojam degeneriranog bi-ideala i pomoću njega opisujemo O-minimalne bi-ideale i dajemo drugi dokaz tvrdjenja K.Kapp-a (III.3.7 Teorema). Posle nekih osobina O-minimalnih bi-ideala semigrupe $S=S^o$ dobijamo tvrdjenje za semigrupu S bez nule: B je minimalan bi-ideal semigrupe S ako i samo ako je minimalan desni ideal nekog minimalnog levog ideala za S. Glavni rezultati daju opis potpuno O-prostih semigrupa i potpuno O-prostih ideala preko O-minimalnih bi-ideala (III.3.15 Teorema, III.3.16 Teorema). Poslednje tvrdjenje u III.3 daje potreban i dovoljan uslov da O-minimalan levi ideal bude O-minimalan bi-ideal.

U III.4 uvodimo pojam (0,2)-bi-ideala. Prethodno opisujemo (0,2)-ideale i (1,2)-ideale (III.4.1 Lema, III.4.2 Teorema). Razmatramo O-minimalne (0,2)-ideale (III.4.5 Lema) i O-minimalne

(0,2)-bi-ideale (III.4.10 Teorema). Takodje, uvodimo 0-(0,2)-dvoproste semigrupe i dokazujemo da je semigrupa $S=S^0$ 0-(0,2)-dvoprosta ako i samo ako je levo 0-prosta (III.4.13 Teorema).

III.2 0-MINIMALNI LEVI IDEALI

Proučavati 0-minimalne leve ideale semigrupe $S=S^0$ u stvari, znači proučavati neke $\mathcal{L}$-klase semigrupe $S=S^0$ (I.16 Lema). Ta Lema je specijalan slučaj sledeće.

III.2.1 LEMA. Za levi ideal L semigrupe $S=S^0$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) L je 0-minimalan.

(ii) $L\setminus\{0\}$ je $\mathcal{L}$-klasa za S.

DOKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je L 0-minimalan levi ideal semigrupe $S=S^0$. Tada je

$$(\forall a\in L\setminus\{0\})\quad \langle a\rangle_{(0,1)} = L.$$

Odavde

$$(\forall a,b\in L\setminus\{0\})\ \langle a\rangle_{(0,1)} = \langle b\rangle_{(0,1)}$$

te je

$$(\forall a,b\in L\setminus\{0\})\ a\mathcal{L}b.$$

Neka $a\in L\setminus\{0\}$. Tada je $L\setminus\{0\}\subseteq L_a$ gde je L_a $\mathcal{L}$-klasa elementa a. Obratno, neka $b\in L_a$. Tada je $b=sa$ za neko $s\in S^1$. Tada, kako je L levi ideal za S i $0\notin L_a$ to $b=sa\in L\setminus\{0\}$. Dakle, $L_a\subseteq L\setminus\{0\}$ te je $L_a=L\setminus\{0\}$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Neka je $L\setminus\{0\}$ $\mathcal{L}$-klasa. Neka je $L_1\neq\{0\}$ levi ideal za S i $L_1\subseteq L$. Neka $a\in L\setminus\{0\}$. Kako je $L_1\neq\{0\}$ to je $a\mathcal{L}b$ za neko $b\in L_1\setminus\{0\}$. Tada je $a=tb$ za neko $t\in S^1$ te $a\in L_1$. Kako i

$0 \in L_1$ to je $L \subseteq L_1$, odnosno $L=L_1$. Dakle, L je 0-minimalan levi ideal za S.

Neka je S semigrupa bez nule, L levi ideal za S i $L_1 \subseteq L$. Tada, L_1 je minimalan levi ideal za L ako i samo ako je L_1 minimalan levi ideal za S. Sledeća tvrdjenja daju dovoljne uslove za L tako da prethodno tvrdjenje važi i za semigrupe sa nulom.

Direktna posledica I.17 Leme je

III.2.2 LEMA. Neka je $S=S^0$ 0-prosta semigrupa i L nenulti levi ideal za S. Tada je $L^2 \neq \{0\}$.

III.2.3 TEOREMA. Neka je L levi ideal semigrupe $S=S^0$ takav da je L 0-prosta semigrupa. Neka je $L_1 \subseteq L$. Tada, L_1 je 0-minimalan levi ideal za L ako i samo ako je L_1 0-minimalan levi ideal za S.

DOKAZ. Neka je L_1 0-minimalan levi ideal za L. Prema III.2.2 Lemi je $L_1^2 \neq \{0\}$ a prema I.15 Lemi je $La = L_1$ za sve $a \in L_1 \setminus \{0\}$. Tada je $SL_1=SLa \subseteq La$, odnosno L_1 je levi ideal za S i jasno, 0-minimalan levi za S.

Obratno, neka je L_1 0-minimalan levi ideal za S. Jasno, L_1 je levi ideal za L. Neka je $L_2 \neq \{0\}$ levi ideal za L sadržan u L_1, tj. $LL_2 \subseteq L_2$ i $L_2 \subseteq L_1$. Prema III.2.2 Lemi je $L_2^2 \neq \{0\}$ Kako je $L_2^2 \subseteq LL_2$ to je $LL_2 \neq \{0\}$. Ali, LL_2 je levi ideal za S sadržan u L_1. Kako je L_1 0-minimalan levi ideal za S to je $LL_2=\{0\}$ ili $LL_2=L_1$. Dakle, $LL_2 \neq \{0\}$ odnosno $LL_2=L_1$. Odatle, $L_1=L_2$. Dakle, L_1 je 0-minimalan levi ideal za L.

Prema prethodnom i I.12 Teoremi dobijamo

III.2.4 POSLEDICA. Neka je $S=S^0$ i M 0-minimalan ideal za S takav da je $M^2 \neq \{0\}$. Neka je $L_1 \subseteq M$. Tada, L_1 je 0-minimalan levi ideal za M ako i samo ako je L_1 0-minimalan levi ideal za S.

Neka je S semigrupa bez nule. Ako je L minimalan levi ideal za S i A ideal za S tada je $L \subseteq A$ ([4], zad. 13; §2.7). Prema tome i III.2.4 Posledici imamo

III.2.5 POSLEDICA. Neka je M jezgro semigrupe S. Tada, L je minimalan levi ideal za M ako i samo ako je L minimalan levi ideal za S.

Ako je L 0-minimalan levi ideal semigrupe $S=S^0$ takav da je $L^2 \neq \{0\}$ tada L ne mora biti levo 0-prosta (primer u I). III.2.7 Teorema kaže da je 0-minimalan levi ideal za S levo 0-prosta ako i samo ako je 0-prosta.

III.2.6 LEMA. Neka je L 0-minimalan levi ideal semigrupe $S=S^0$ i L_1 pravi levi ideal za L. Tada je $L_1^2 = \{0\}$.

DOKAZ. Neka je $L_1 \subseteq L$, $L_1 \neq L$ i $LL_1 \subseteq L_1$ gde je L 0-minimalan levi ideal za S. Tada je $LL_1 \subseteq L$ i LL_1 je levi ideal za S. Kako je L 0-minimalan za S to je $LL_1=\{0\}$ ili $LL_1=L$. Ako je $LL_1=L$ tada je $L=L_1$ što je suprotno pretpostavci. Dakle, $LL_1=\{0\}$ pa je $L_1^2=\{0\}$.

Ovo tvrdjenje možemo i ovako iskazati: svaki pravi levi ideal 0-minimalnog levog ideala semigrupe $S=S^0$ je nulta semigrupa.

III.2.7 TEOREMA. Neka je $S=S^0$ i L 0-minimalan levi ideal za S. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) L je 0-prosta.

(ii) L je levo 0-prosta.

(iii) $L\setminus\{0\}$ je levo prosta.

(iv) $L\setminus\{0\}$ je grupoid.

(v) $(\forall a \in L\setminus\{0\})\ a^2 \in L\setminus\{0\}$.

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$(ii). Neka je L 0-prosta i $L_1 \neq \{0\}$ levi ideal za L. Prema III.2.2 Lemi je $L_1^2 \neq \{0\}$. Tada, prema III.2.6 Lemi je $L_1=L$. Dakle, L je levo 0-prosta.

(ii) $\Rightarrow$(iii). Prema I.10 Lemi.

(iii) $\Rightarrow$(iv) $\Rightarrow$ (v). Očigledno.

(v) $\Rightarrow$ (i). Neka $a^2 \in L\setminus\{0\}$ za svaki element a iz $L\setminus\{0\}$ i neka je $T\neq\{0\}$ ideal za L ($TL \subseteq T$ i $LT \subseteq T$). Kako je LT levi ideal za S i $LT \subseteq L$ a L je 0-minimalan levi ideal za S, to je $LT = 0$ ili $LT=L$. Neka $a \in T \setminus \{0\}$. Tada $a^2 \in LT$ i $a^2 \neq 0$ pa je $LT=L$. Dakle, $L=T$ odnosno, L je 0-prosta.

III.3 0-MINIMALNI BI-IDEALI I POTPUNO 0-PROSTE SEMIGRUPE

Bi-ideal B semigrupe $S=S^0$ je 0-minimalan ako je $B\neq\{0\}$ i B ne sadrži pravi nenulti bi-ideal semigrupe S.

III.3.1 DEFINICIJA. Semigrupa $S=S^0$ je <u>0-dvoprosta</u> ako je $S^2\neq\{0\}$ i S je 0-minimalan bi-ideal za S.

III.3.2 LEMA. Neka je $S=S^0$ tako da je $\{0\}$ jedini pravi bi-ideal za S. Tada, S je 0-dvoprosta ili S je nula semigrupa reda 2.

DOKAZ. Kako je $\{0\}$ pravi bi-ideal semigrupe S to je $S\neq\{0\}$. Ako je $S^2=S$ tada je S 0-dvoprosta. Ako je $S^2=\{0\}$ i $a \in S\setminus\{0\}$ tada je $\{0,a\}$ bi-ideal različit od nule pa je $\{0,a\}=S$.

Analogno pojmu degeneriranog levog ideala (I.14 Definicija), uvodimo degeneriran bi-ideal.

III.3.3 DEFINICIJA. Bi-ideal B semigrupe $S=S^0$ je <u>degeneriran</u> ako je $B= \{0,a\}$ i $aS^1a = \{0\}$.

III.3.4 LEMA. Neka je B 0-minimalan bi-ideal semigrupe $S=S^0$. Tada, ili je B degeneriran bi-ideal ili je $B=aSa$ za sve $a\in B\setminus\{0\}$.

DOKAZ. Neka $a\in B\setminus\{0\}$. Kako je $aSa\subseteq B$ i aSa je bi-ideal za S to je $aSa=\{0\}$ ili $aSa=B$. Neka je $aSa=\{0\}$. Tada je $a^2=0$ ili $a^2=a$ ili $a^2\in B\setminus\{0,a\}$. Ako je $a^2=a$ tada je $a^3=a^2=a$ što nije moguće jer $a^3\in aSa=\{0\}$. Neka $a^2\in B\setminus\{0,a\}$. Tada je $\{0,a,a^2\}\subseteq B$, $\{0,a^2\}\{0,a^2\}=\{0\}$ i $\{0,a^2\}S\{0,a^2\}=\{0\}$. Dakle, $\{0,a^2\}$ je bi-ideal za S sadržan u B i $\{0,a^2\}$ je pravi podskup za B. To nije moguće jer je B 0-minimalan bi-ideal za S. Dakle, $a^2=0$ te je $B=\{0,a\}$ i $aS^1a=\{0\}$.
Ako je $aSa\neq\{0\}$ onda je $aSa=B$ za svaki element $a\in B\setminus\{0\}$.

Na osnovu ove Leme vidimo da ako je B 0-minimalan bi-ideal takav da je $B^2\neq\{0\}$ tada je $B=aSa$ za sve $a\in B\setminus\{0\}$. Specijalno, ako je B minimalan bi-ideal semigrupe S bez nule tada je $B=aSa$ za sve $a\in B$.

III.3.5 POSLEDICA. Neka je B neprazan podskup semigrupe $S=S^0$. Tada, B je nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S ako i samo ako je $B=aSa$ za sve $a\in B\setminus\{0\}$.

DOKAZ. Ako je B nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S tada, prema III.3.4 Lemi, $B=aSa$ za sve $a\in B\setminus\{0\}$.

Obratno, ako je B neprazan podskup takav da je $B=aSa$ za sve $a\in B\setminus\{0\}$, tada je $B^2\subseteq B$ i $BSB=aSaSaSa\subseteq aSa=B$ te je B bi-ideal semigrupe S. Neka je $A\subseteq B$ i A je bi-ideal za S. Neka $a\in A\setminus\{0\}$. Tada je $aSa\subseteq A$ i $aSa=B$ pa je $A=B$. Dakle, B je 0-minimalan bi-ideal za S. Prema III.3.4 Lemi, B je nedegeneriran.

PRIMEDBA. Svaki degeneriran levi ideal semigrupe S je degeneriran bi-ideal. Jer, ako je $L=\{0,a\}$ i $Sa=\{0\}$ tada je $aSa=\{0\}$.

Sledeći primer pokazuje da postoji degeneriran bi-ideal za S koji nije ni levi ni desni ideal za S.

	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	a
c	0	0	0	b

$B = \{0,b\}$, $B^2 = \{0\}$

$bSb = \{0\}$.

III.3.6 LEMA. Neka je $S=S^0$ i $S \neq \{0\}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je grupa sa nulom 0.

(ii) S je 0-dvoprosta.

(iii) $(\forall a \in S \setminus \{0\})\ aSa=S$.

(iv) $(\forall a_1, a_2 \in S \setminus \{0\})\ a_1Sa_2=S$.

DOKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii). U dokazu koristimo tvrdjenje: semigrupa $S=S^0$ je grupa sa nulom ako i samo ako je levo 0-prosta i desno 0-prosta.

Neka je S grupa sa nulom 0 i neka je B bi-ideal za S tj. $BSB \subseteq B$. Kako je BS desni ideal za S to je $BS=\{0\}$ ili $BS=S$. Ako je $BS=\{0\}$ onda je B desni ideal za S pa je $B=\{0\}$ ili $B=S$. Ako je $BS=S$ onda $BSB \subseteq B$ povlači $SB \subseteq B$ pa je B levi ideal za S. Tada je $B=\{0\}$ ili $B=S$. Dakle, S je 0-dvoprosta.

(ii)$\Rightarrow$(i). Jer, tada je S levo 0-prosta i desno 0-prosta.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka je S 0-dvoprosta. Tada je S 0-minimalan bi-ideal za S i $S^2 \neq \{0\}$ pa prema III.3.4 Lemi je $aSa=S$ za sve $a \in S \setminus \{0\}$.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Neka je $aSa=S$ za sve $a \in S \setminus \{0\}$. Neka

$a_1, a_2 \in S\setminus\{0\}$. Tada je $a_1Sa_1=S=a_2Sa_2$ pa je $S=a_1Sa_1=a_1(a_2Sa_2)a_1=$ $=a_1a_2Sa_2a_1$. Dakle, $a_1a_2 \in S\setminus\{0\}$ pa je $a_1a_2Sa_1a_2=S$ te je $S\subseteq a_1Sa_2$. Dakle, $a_1Sa_2=S$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Očigledno.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $aSa=S$ za sve $a\in S\setminus\{0\}$, $B\neq\{0\}$ bi-ideal za S i $a\in B\setminus\{0\}$. Tada je $S=aSa\subseteq BSB\subseteq B$ pa je $B=S$. Dakle, S je 0-minimalan bi-ideal za S. Iz $S=aSa\subseteq S^2$ sledi $S^2\neq\{0\}$ te je S 0-dvoprosta semigrupa.

Pomoću Lema III.3.4 i III.3.6 dobijamo tvrdjenje koje je dato u [17] i dokazano na drugi način.

III.3.7 TEOREMA. Neka je B 0-minimalan bi-ideal semigrupe $S=S^0$. Tada je $B^2=\{0\}$ ili B je grupa sa nulom.

DOKAZ. Prema III.3.4 Lemi, 0-minimalan bi-ideal B je ili degeneriran ili $aSa=B$ za svaki element $a\in B\setminus\{0\}$. Neka je $B^2\neq\{0\}$. Tada je B nedegeneriran bi-ideal i $aSa=B$ za svaki $a\in B\setminus\{0\}$. Neka $a\in B\setminus\{0\}$. Tada, aBa je bi-ideal za S i $aBa\subseteq B$ pa je $aBa=\{0\}$ ili $aBa=B$. Neka je $aBa=\{0\}$. Kako je $aSa=B$ to je $a(aSa)a=\{0\}$ tj. $a^2Sa^2=\{0\}$. Kako $a^2\in B$ i $aSa=B$ za svaki $a\in B\setminus\{0\}$ to je $a^2=0$. Tada je $B^2=(aSa)(aSa)=aSa^2Sa=\{0\}$ što je suprotno pretpostavci. Dakle, $aBa=B$. Kako je $aBa=B$ za sve $a\in B\setminus\{0\}$ to prema III.3.6 Lemi, B je grupa sa nulom.

III.3.8 POSLEDICA. Minimalan bi-ideal semigrupe S bez nule je grupa.

Dalja tvrdjenja opisuju 0-minimalne bi-ideale preko 0-minimalnih desnih i levih ideala semigrupe $S=S^0$.

III.3.9 LEMA. Neka je $S=S^0$ i B nedegeneriran [degeneriran] 0-minimalan desni ideal nekog 0-minimalnog levog ideala L za S. Tada, B je nedegeneriran [degeneriran] 0-minimalan bi-ideal za S.

DOKAZ. Ako je L degeneriran 0-minimalan levi ideal za S tada je B=L i B je degeneriran 0-minimalan bi-ideal za S.

Neka je L nedegeneriran 0-minimalan levi ideal za S. Neka je B degeneriran 0-minimalan desni ideal za L. Tada je $B=\{0,b\}$, $bL=\{0\}$ i $Sb=L$. Dakle, $bS^1b=\{0\}$ te je B degeneriran 0-minimalan bi-ideal za S. Neka je B nedegeneriran 0-minimalan desni ideal za L. Tada je $Sb=L$ i $bL=B$ za sve $b\in B\setminus\{0\}$. Dakle, $B=bSb$ za sve $b\in B\setminus\{0\}$. Prema III.3.5 Posledici, B je nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S.

Šta se može reći o obratu ovog tvrdjenja? Drugim rečima, da li je svaki 0-minimalan bi-ideal semigrupe $S=S^0$, 0-minimalan desni ideal nekog 0-minimalnog levog ideala za S.

Sledeća tvrdjenja daju delimičan odgovor.

III.3.10 LEMA. Neka je $S=S^0$. Neka je B nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S i $b\in B\setminus\{0\}$. Tada je

i) $B=bSb$

ii) Ako je L levi ideal za S sadržan u Sb, tada je $L^2=\{0\}$ ili $L=Sb$.

iii) Ako je R desni ideal za Sb sadržan u B, tada je $R^2=\{0\}$ ili $R=B$.

DOKAZ. i). Prema III.3.5 Posledici.

ii). Neka je $L\subseteq Sb$ i $SL\subseteq L$. Tada je $bL\subseteq bSb=B$ i bL je bi-ideal za S sadržan u B. Tada je $bL=\{0\}$ ili $bL=B$. Ako je $bL=\{0\}$

tada je $SbL=\{0\}$. Kako je $L \subseteq Sb$ to je $L^2=\{0\}$. Ako je $bL=B$ tada $bL \subseteq L$ povlači $B \subseteq L$. Dakle, $Sb \subseteq SL \subseteq L$ tj. $L \subseteq Sb$.

iii) Neka je $R \subseteq B$ i $RSb \subseteq R$. Kako je RSb bi-ideal za S, sadržan u B, to je $RSb=\{0\}$ ili $RSb=B$. Ako je $RSb=\{0\}$ tada je $RB=\{0\}$. Kako je $R \subseteq B$ to je $R^2=\{0\}$. Ako je $RSb=B$ tada je $B \subseteq R$ odnosno $B=R$.

Neka je B 0-minimalan bi-ideal semigrupe $S=S^0$ takav da je $B^2 \neq \{0\}$ tj. B je grupa sa nulom. Neka $b \in B \setminus \{0\}$. Ako je R desni ideal za Sb, sadržan u B, tada je R desni ideal za B, pa kako je B grupa sa nulom to je $R=\{0\}$ ili $R=B$. Ako je $S=S^0$ 0-prosta semigrupa tada je za svaki nenulti levi ideal L semigrupe S, $L^2 \neq \{0\}$. Prema tome i III.3.10 Lemi sledi

III.3.11 POSLEDICA. Neka je S 0-prosta semigrupa i B 0-minimalan bi-ideal koji je grupa sa nulom. Tada, B je 0-minimalan desni ideal 0-minimalnog levog ideala Sb semigrupe S za svako $b \in B \setminus \{0$

Prema III.2.2 Lemi i III.3.10 Lemi dobija se sledeće tvrdjenje.

III.3.12 POSLEDICA. Neka je $S=S^0$ i B nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S. Neka $b \in B \setminus \{0\}$. Tada

i) $B=bSb$

ii) Ako je P 0-prosta podsemigrupa za S takva da je $Sb \subseteq P$ tada je Sb 0-minimalan levi ideal za S.

iii) Ako je T 0-prosta podsemigrupa za S takva da je $B \subseteq T \subseteq Sb$ tada je B 0-minimalan desni ideal za Sb.

Ova Posledica omogućava da se opiše nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal B ako je Sb 0-prosta semigrupa za $b \in B \setminus \{0\}$. Naime, neka je B nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal semigrupe $S=S^0$ i $b \in B\setminus\{0\}$. Ako je Sb 0-prosta semigrupa, tada je Sb 0-minimalan levi ideal za S i B je 0-minimalan desni ideal za Sb. Kako je Sb 0-prosta to je $(Sb)b(Sb)=Sb$ (prema I.11 Lemi). Odavde je $bSbbSb=bSb$ tj. $B^2=B$. Dakle, B je grupa sa nulom.

Prema III.3.9 Lemi i III.3.10 Lemi kao i njihovim dualnim tvrdjenjima dobija se

III.3.13 TEOREMA. Neka je S semigrupa bez nule i B neprazan podskup za S. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) B je minimalan bi-ideal za S.

(ii) B je minimalan desni ideal nekog minimalnog levog ideala za S.

(iii) B je minimalan levi ideal nekog minimalnog desnog ideala za S.

Lajos [34] je dokazao sledeće tvrdjenje.

III.3.14 TEOREMA. Neka je S semigrupa bez nule i B neprazan podskup za S. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) B je bi-ideal za S.

(ii) B je desni ideal nekog levog ideala za S.

(iii) B je levi ideal nekog desnog ideala za S.

Prethodni rezultati se koriste za karakterizaciju veoma važne klase regularnih semigrupa - potpuno 0-proste semigrupe.

III.3.15 TEOREMA. Neka je $S=S^0$ 0-prosta semigrupa. Tada, S je potpuno 0-prosta ako i samo ako S sadrži nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S.

DOKAZ. Neka S sadrži nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal B. Neka $b \in B \setminus \{0\}$. Prema ii) III.3.12 Posledice i dualnom tvrdjenju, bS i Sb su redom 0-minimalan desni i 0-minimalan levi ideal za S. Prema I.19 Teoremi, S je potpuno 0-prosta.

Obratno, neka je S potpuno 0-prosta. Neka je e primitivan idempotent. Prema I.18 Lemi, $R=eS$ i $L=Se$ su redom, 0-minimalan desni i 0-minimalan levi ideal za S i RL je grupa sa nulom. Tada, RL je nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S.

Analogno rezultatu Rich-a (I.20 Teorema), sledeće tvrdjenje karakteriše potpuno 0-proste ideale preko 0-minimalnih bi-ideala.

III.3.16 TEOREMA. Neka je M ideal semigrupe $S=S^0$. Tada, M je potpuno 0-prosta semigrupa ako i samo ako je $M^2 \neq \{0\}$ i M je 0-minimalan ideal za S koji sadrži bar jedan nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal za S.

DOKAZ. Neka je $M^2 \neq \{0\}$ i M je 0-minimalan ideal za S koji sadrži nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal B za S. Prema I.20 Teoremi, M je 0-prosta semigrupa. Neka $b \in B \setminus \{0\}$. Prema III.3.5 Posledici je $B=bSb$. Kako je $Sb \subseteq M$, $bS \subseteq M$ i M 0-prosta, to prema III.3.12 Posledici i dualnom tvrdjenju, Sb i bS su redom 0-minimalan levi i 0-minimalan desni ideali za S. Prema I.20 Teoremi, M je potpuno 0-prosta semigrupa.

Obratno, neka je M potpuno 0-prosta semigrupa. Tada je $M^2 \neq \{0\}$ i M ne sadrži prave nenulte ideale za M. Tada M ne sadrži prave nenulte ideale za S te je M 0-minimalan ideal za S. Prema III.3.15 Teoremi, M sadrži bar jedan nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal B za M. Tada, prema III.3.5 Posledici je $B=bMb$. Kako je

M O-prosta to prema III.3.12 Posledici, bM i Mb su redom O-minimalan desni i O-minimalan levi ideal za M. Kako su bM i Mb redom desni i levi ideali za S to su oni redom O-minimalan desni i O-minimalan levi ideal za S. Tada je bMMb=bMb=B O-minimalan bi-ideal za S i to nedegeneriran.

O-minimalan levi ideal L semigrupe $S=S^o$ može da sadrži nenulte prave bi-ideale. Naime, L ne mora biti O-minimalan bi-ideal za S. Sledeće tvrdjenje daje potreban i dovoljan uslov da O-minimalan levi ideal za S bude O-minimalan bi-ideal za S.

III.3.17 TEOREMA. Neka je L nedegeneriran O-minimalan levi ideal za S. Tada, L je nedegeneriran O-minimalan bi-ideal za S ako i samo ako je L desno O-prosta semigrupa.

DOKAZ. Neka je L nedegeneriran O-minimalan bi-ideal za S. Prema I.15 Lemi i III.3.5 Posledici je

$$(\forall a\in L\setminus\{0\})\ L=Sa=aSa.$$

Odavde je

$$(\forall a\in L\setminus\{0\})\ L=aL.$$

Dakle, L je nedegeneriran O-minimalan desni ideal za L. Kako je $L=aL\subseteq L^2$ to je L desno O-prosta.

Obratno, neka je L desno O-prosta, tj. $L^2\neq\{0\}$ i L je nedegeneriran O-minimalan desni ideal za L. Tada je, prema I.15 Lemi,

$$(\forall a\in L\setminus\{0\})\ L=aL=Sa$$

a odavde

$$(\forall a\in L\setminus\{0\})\ L=aSa.$$

Prema III.3.5 Posledici, L je nedegeneriran O-minimalan bi-ideal za S.

III.4 O-MINIMALNI (0,2)-IDEALI I O-MINIMALNI (0,2)-BI-IDEALI

Neka je A (0,2)-ideal semigrupe S, tj. A je podsemigrupa za S i $SA^2 \subseteq A$. Tada je $(A \cup SA)A = A^2 \cup SA^2 \subseteq A$ te je A levi ideal levog ideala $A \cup SA$ za S. Ako je L levi ideal za S i A levi ideal za L tada je $SA^2 = SAA \subseteq SLA \subseteq LA \subseteq A$ te je A (0,2)-ideal za S. Dakle, dobili smo

III.4.1 LEMA. Podskup A semigrupe S je (0,2)-ideal za S ako i samo ako je A levi ideal nekog levog ideala za S.

Sledeće tvrdjenje opisuje (1,2)-ideale semigrupe S.

III.4.2 TEOREMA. Za podskup A semigrupe S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) A je (1,2)-ideal za S.

(ii) A je levi ideal nekog bi-ideala za S.

(iii) A je bi-ideal nekog levog ideala za S.

(iv) A je (0,2)-ideal nekog desnog ideala za S.

(v) A je desni ideal nekog (0,2)-ideala za S.

DOKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je A (1,2)-ideal za S tj. $AS^1A^2 \subseteq A$. Tada je $(A \cup ASA)A = A^2 \cup ASA^2 \subseteq A$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka je A levi ideal nekog bi-ideala B za S. Dakle, $A \subseteq B$, $BA \subseteq A$ i $BSB \subseteq B$. Tada je

$$A(A \cup SA)A = A^3 \cup ASA^2 \subseteq A \cup BSBA \subseteq A \cup BA = A.$$

(iii)$\Rightarrow$(iv). Neka je A bi-ideal nekog levog ideala L za S. Dakle, $A \subseteq L$, $ALA \subseteq A$ i $SL \subseteq L$. Tada je

$$(A \cup AS)A^2 = A^3 \cup ASA^2 \subseteq A \cup ASLA \subseteq A \cup ALA = A.$$

(iv) $\Rightarrow$ (v). Neka je A (0,2)-ideal nekog desnog ideala R za S tj. $A \subseteq R$, $RA^2 \subseteq A$, $RS \subseteq R$. Tada je

$$A(A \cup SA^2) = A^2 \cup ASA^2 \subseteq A \cup RSA^2 \subseteq A \cup RA^2 = A.$$

(v) $\Rightarrow$ (i). Neka je A desni ideal nekog (0,2)-ideala R za S. Dakle, $A \subseteq R$, $AR \subseteq A$ i $SR^2 \subseteq R$. Tada je

$$ASA^2 \subseteq ASR^2 \subseteq AR \subseteq A.$$

III.4.3' LEMA. Podsemigrupa A semigrupe S je (1,2)-ideal za S ako i samo ako postoje (0,2)-ideal L za S i desni ideal R za S tako da je $RL^2 \subseteq A \subseteq R \cap L$.

DOKAZ. Neka je A (1,2)-ideal za S, tj. $ASA^2 \subseteq A$. Neka je $L = A \cup SA^2$ i $R = A \cup AS$. Tada je

$$RL^2 = (A \cup AS)(A \cup SA^2)^2 = (A^2 \cup ASA)(A \cup SA^2) = A^3 \cup ASA^2 \subseteq A.$$

Jasno, $A \subseteq R \cap L$ te je $RL^2 \subseteq A \subseteq R \cap L$.

Obratno, neka je R desni ideal i L (0,2)-ideal za S tako da je $RL^2 \subseteq A \subseteq R \cap L$. Tada je

$$ASA^2 \subseteq (R \cap L)S(R \cap L)(R \cap L) \subseteq RSL^2 \subseteq RL^2 \subseteq A.$$

Neka je $S = S^0$. Svaki levi ideal za S je i (0,2)-ideal za S. Ako je L 0-minimalan (0,2)-ideal za S tada L ne sadrži prave leve ideale za S različite od $\{0\}$. Prirodno je postaviti pitanje: Šta je sa (0,2)-idealima semigrupe $S = S^0$ koji su sadržani u nekom 0-minimalnom levom idealu za S? Sledeća Lema odgovara na to pitanje.

III.4.4 LEMA. Neka je L 0-minimalan levi ideal za $S = S^0$ i A podsemigrupa za L. Tada, A je (0,2)-ideal za S ako i samo ako je $A^2 = \{0\}$ ili $A = L$.

DOKAZ. Neka je A (0,2)-ideal za S sadržan u L. Kako je $SA^2 \subseteq A \subseteq L$ i SA^2 levi ideal za S to je $SA^2=\{0\}$ ili $SA^2=L$. Ako je $SA^2=L$ onda je $A=L$. Neka je $SA^2=\{0\}$. Tada je A^2 levi ideal za S sadržan u L pa je $A^2=\{0\}$ ili $A^2=L$. Ako je $A^2=L$ onda je $A=L$.

Dakle, $A^2=\{0\}$ ili $A=L$.

Obratno je očigledno.

Analogno opisu 0-minimalnih ideala [4] i 0-minimalnih bi-ideala (III.3.7 Teorema) sledeća Lema karakteriše 0-minimalne (0,2)-ideale.

III.4.5 LEMA. Neka je L 0-minimalan (0,2)-ideal semigrupe $S=S^0$. Tada je $L^2=\{0\}$ ili L je 0-minimalan levi ideal za S.

DOKAZ. Kako je $L^2 \subseteq L$ i $S(L^2)^2=SL^2L^2 \subseteq LL=L^2$ to je L^2 (0,2)-ideal za S, sadržan u L. Tada je $L^2=\{0\}$ ili $L^2=L$. Kako $L^2=L$ povlači $SL \subseteq L$ to je L levi ideal za S i jasno, 0-minimalan. Dakle, $L^2=\{0\}$ ili L je 0-minimalan levi ideal za S.

III.4.6 POSLEDICA. Ako je S semigrupa bez nule, tada L je minimalan (0,2)-ideal za S ako i samo ako je L minimalan levi ideal za S. Specijalno, semigrupa S je levo prosta ako i samo ako je S (0,2)-prosta.

Neka je S semigrupa bez nule i A minimalan (2,1)-ideal za S. Tada je $A^2SA \subseteq A$. Kako je A^2SA (2,1)-ideal za S to je $A^2SA=A$. Dakle, A je minimalan bi-ideal za S. Obratno, neka je A minimalan bi-ideal za S. Neka je $B \subseteq A$ i $B^2SB \subseteq B$. Kako je B^2SB bi-ideal za S to je $B^2SB=A$ tj. $A \subseteq B$. Dakle, $A=B$.

Tako smo dobili

III.4.7 LEMA. Neka je S semigrupa bez nule i $A \subseteq S$. Tada, A je minimalan (2,1)-ideal za S ako i samo ako je A minimalan bi-ideal za S.

Analogno pojmu ideala (levi i desni) semigrupe S, ovde uvodimo i razmatramo podsemigrupe koje su bi-ideali i (0,2)-ideali za S.

III.4.8 DEFINICIJA. Podsemigrupa A semigrupe S je <u>(0,2)-bi-ideal</u> ako je A bi-ideal i (0,2)-ideal za S. (0,2)-bi-ideal A koji ne sadrži prave (0,2)-bi-ideale za S, različite od $\{0\}$, je <u>0-minimalan (0,2)-bi-ideal</u> za S. Semigrupa $S=S^0$ je <u>0-(0,2)-dvoprosta</u> ako je $S^2 \neq \{0\}$ i S ne sadrži prave nenulte (0,2)-bi-ideale za S.

Glavni (0,2)-bi-ideal generisan elementom a je $\{a\} \cup \{a^2\} \cup aSa \cup Sa^2 \cup Sa^2Sa$.

III.4.9 LEMA. Neka je A neprazan podskup semigrupe S. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) A je (0,2)-bi-ideal za S.

(ii) A je ideal nekog levog ideala za S.

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je A (0,2)-bi-ideal za S, tj. podsemigrupa za koju je $ASA \subseteq A$ i $SA^2 \subseteq A$. Tada je $A(A \cup SA) = A^2 \cup ASA \subseteq A$ i $(A \cup SA)A = A^2 \cup SA^2 \subseteq A$.
Dakle, A je ideal levog ideala $A \cup SA$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Neka je A ideal nekog levog ideala L za S. Tada, prema III.4.1 Lemi, A je (0,2)-ideal za S a prema III.3.14 Teoremi, A je bi-ideal za S.

Sledeće tvrdjenje karakteriše 0-minimalne (0,2)-bi-ideale.

III.4.10 TEOREMA. Neka je A 0-minimalan (0,2)-bi-ideal za S. Tada važi tačno jedan od sledeća tri slučaja.

i) $A = \{0,a\}$ i $aS^1a = \{0\}$.

ii) $A = \{0,a\}$, $a^2=0$, $aSa=A$.

iii) $(\forall a \in A\setminus\{0\})$ $Sa^2=A$.

DOKAZ. Neka $a \in A\setminus\{0\}$. Tada je $Sa^2 \subseteq A$ i Sa^2 je levi ideal za S pa je i (0,2)-bi-ideal za S. Dakle, $Sa^2=\{0\}$ ili $Sa^2=A$.

Neka je $Sa^2=\{0\}$. Kako $a^2 \in A$ to je ili $a^2=a$ ili $a^2=0$ ili $a^2 \in A\setminus\{0\}$. Ako je $a^2=a$ onda je $a^3=a^2=a$ što nije moguće jer $a^3 \in Sa^2=\{0\}$. Neka $a^2 \in A\setminus\{0,a\}$. Tada je $S^1\{0,a^2\}^2=\{0\}$ i $\{0,a^2\}S\{0,a^2\} = a^2Sa^2=\{0\}$ te je $\{0,a^2\}$ (0,2)-bi-ideal za S, sadržan u A i različit od $\{0\}$ i A. To nije moguće jer je A 0-minimalan (0,2)-bi-ideal za S. Dakle, $a^2=0$, tj. $A=\{0,a\}$ i $a^2=0$. Kako je aSa bi-ideal za S i $S(aSa)^2=SaSa^2Sa= 0$ to je aSa (0,2)-bi-ideal sadržan u A. Tada je $aSa=\{0\}$ ili $aSa=A$. Dakle, $Sa^2=\{0\}$ povlači $A=\{0,a\}$ i $aS^1a=\{0\}$ ili $A=\{0,a\}$, $a^2=0$ i $aSa=A$.

Ako je $Sa^2 \neq \{0\}$ tada je $Sa^2=A$.

Prema prethodnom tvrdjenju, III.3.3 Definiciji i III.3.4 Lemi zaključujemo: 0-minimalan (0,2)-bi-ideal je ili degeneriran 0-minimalan bi-ideal ili nedegeneriran 0-minimalan bi-ideal (u oba slučaja je nulta semigrupa) ili je nedegeneriran 0-minimalan levi ideal za S.

III.4.11 POSLEDICA. Neka je A 0-minimalan (0,2)-bi-ideal za S takav da je $A^2 \neq \{0\}$. Tada je $A=Sa^2$ za svako $a \in A\setminus\{0\}$.

III.4.12 POSLEDICA. Semigrupa $S=S^0$ je 0-(0,2)-dvoprosta ako i samo ako je $Sa^2=S$ za svako $a \in S\setminus\{0\}$.

DOKAZ. Ako je S 0-(0,2)-dvoprosta, tada je $S^2 \neq \{0\}$ i S je 0-minimalan (0,2)-bi-ideal. Prema III.4.11 Posledici je $S=Sa^2$ za svako $a \in S\setminus\{0\}$.

Obratno, neka je $S=Sa^2$ za svaki element $a \in S\setminus\{0\}$ i neka je A (0,2)-bi-ideal za S, različit od $\{0\}$. Neka $a \in A\setminus\{0\}$. Tada je $S=Sa^2 \subseteq SA^2 \subseteq A$ te je $S=A$. Kako je $S=Sa^2 \subseteq S^2$ to je $S=S^2$. Dakle, S je 0-(0,2)-dvoprosta.

III.4.13 TEOREMA. Semigrupa $S=S^0$ je 0-(0,2)-dvoprosta ako i samo ako je levo 0-prosta.

DOKAZ. Svaki levi ideal semigrupe S je (0,2)-bi-ideal. Dakle, ako je S 0-(0,2)-dvoprosta tada je i levo 0-prosta.

Obratno, ako je S levo 0-prosta, tada prema I.10 Lemi je $Sa=S$ za svako $a \in S\setminus\{0\}$, te je $Sa^2=Saa=Sa=S$. Prema III.4.12 Posledici, S je 0-(0,2)-dvoprosta.

III.4.14 TEOREMA. Neka je A 0-minimalan (0,2)-bi-ideal za S. Tada je ili $A^2=\{0\}$ ili je A levo 0-prosta.

DOKAZ. Neka je $A^2 \neq \{0\}$. Tada, prema III.4.11 Posledici je $Sa^2=A$ za svako $a \in A\setminus\{0\}$. Odavde je $a^2 \in A\setminus\{0\}$ za svako $a \in A\setminus\{0\}$ pa je i $a^4=(a^2)^2 \in A\setminus\{0\}$ za svako $a \in A\setminus\{0\}$.
Neka $a \in A\setminus\{0\}$. Kako je $Aa^2S^1Aa^2 \subseteq AAa^2 \subseteq Aa^2$ i $S(Aa^2)^2=SAa^2Aa^2 \subseteq SA^2a^2 \subseteq Aa^2$, to je Aa^2 (0,2)-bi-ideal za S sadržan u A. Tada je $Aa^2=\{0\}$ ili $Aa^2=A$. Kako je $a^4 \in Aa^2$ i $a^4 \in A\setminus\{0\}$ to je $Aa^2=A$. Prema III.4.12 Posledici i III.4.13 Teoremi, A je levo 0-prosta semigrupa.

Sledeći primer pokazuje da postoji 0-minimalan levi ideal semigrupe $S=\{e,f,g,a,0\}$ koji nije 0-minimalan (0,2)-bi-ideal za S.

	e	f	g	a	0
e	e	a	e	a	0
f	0	f	g	0	0
g	g	f	g	f	0
a	0	a	e	0	0
0	0	0	0	0	0

$L=\{0,f,a\}$ je 0-minimalan levi ideal za S, ali nije 0-minimalan (0,2)-bi-ideal za S. Jer, $A=\{0,a\}$ je (0,2)-bi-ideal za S, naravno 0-minimalan.

$ASA=\{0,a,e\}\ \{0,a\}=\{0,a\}=A.$

$A^2=\{0\}$ pa je $SA^2=\{0\}$

Primetimo da je $L^2=\{0\}$ ali nije $x^2\in L\setminus\{0\}$ za sve $x\in L\setminus\{0\}$ te L nije levo 0-prosta (III.2.7 Teorema).

IV DEO

O PROBLEMU BI-IDEALNE EKSTENZIJE

IV.1 UVOD. Tvrdjenje dato I.21 Teoremom kazuje da se svaka idealna ekstenzija V semigrupe S, homomorfno potapa u translatorni omotač $\Omega(S)$.

Prirodno je postaviti pitanje da li se može definisati neki "omotač" za bi-idealnu ekstenziju, odnosno, za semigrupu V za koju je S bi-ideal. To pitanje nije rešeno, te se ovde navodi kao predmet daljeg proučavanja. Rezultati dati u IV.2 i IV.3, dobijeni su proučavanjem problema bi-idealne ekstenzije.

U IV.2 uvodimo i razmatramo skup $\overline{\Pi}(S)$, tj. skup $\Omega(S) \cap (\Gamma(S) \times \Delta(S))$, gde je $\Gamma(S)\,[\Delta(S)]$ semigrupa unutrašnjih levih [desnih] translacija za S. Posle tvrdjenja o idealizatoru podsemigrupe P semigrupe S, takve da je $\Pi(S) \subseteq P \subseteq \Omega(S)$, opisujemo idealizator za $\Pi(S)$ i $\overline{\Pi}(S)$ u $\Lambda(S) \times P(S)$ za slaboreduktivnu ili globalno idempotentnu semigrupu S.

Dati primeri pokazuju da postoje semigrupe za koje je $\Pi(S) \neq \overline{\Pi}(S)$.

U IV.3 uvodimo pojam bi-idealizatora podsemigrupe semigrupe S i odredjujemo bi-idealizator semigrupe $\overline{\Pi}(S)$ u odnosu na $\Lambda(S) \times P(S)$ (IV.3.5 Posledica). Takodje se za neke specijalne semigrupe (levo [desno] reduktivne, reduktivne, globalno idempotentne) odredjuje bi-idealizator kako za $\Pi(S)$ tako i za $\overline{\Pi}(S)$ (IV.3.7 Teorema, IV.3.8 Posledica).

IV.2 IDEALIZATORI NEKIH PODSEMIGRUPA TRANSLATORNOG OMOTAČA

Neka je S semigrupa, $\mathcal{T}^*(S)$ $[\mathcal{T}(S)]$ semigrupa levih [desnih] preslikavanja S u S.

Uvodimo neke podskupove skupa $\mathcal{T}^*(S) \times \mathcal{T}(S)$ potrebne za dalja proučavanja.

IV.2.1 NOTACIJA. Neka je za semigrupu S

$$\mathcal{L}_\ell(S)=\{(\lambda,\varrho) \in \mathcal{T}^*(S) \times \mathcal{T}(S) \mid (\forall x,y,z \in S)\ xy\,\lambda(z)=(xy)\varrho\, z\}$$

$$\mathcal{L}_r(S)=\{(\lambda,\varrho) \in \mathcal{T}^*(S) \times \mathcal{T}(S) \mid (\forall x,y,z \in S)\ x\lambda(yz)=(x\varrho)yz\}$$

$$\mathcal{L}_o(S)=\mathcal{L}_\ell(S) \cap \mathcal{L}_r(S).$$

$$\mathcal{L}(S)=\{(\lambda,\varrho) \in \mathcal{T}^*(S) \times \mathcal{T}(S)\ (\forall x,y,z \in S)\ x(\lambda y)=(x\varrho)y\}.$$

Očigledno, $\Omega(S) \subseteq \mathcal{L}_o(S)$.

Neka $(\lambda,\varrho) \in \mathcal{L}_\ell(S)$ i $(\lambda',\varrho') \in \Omega(S)$. Tada je za $x,y \in S$

$$xy(\lambda\lambda' z)=xy\lambda(\lambda' z)=(xy)\varrho\ (\lambda' z)$$

$$[(xy)\varrho\varrho']\, z=[(xy)\varrho]\varrho'\, z=(xy)\varrho\ (\lambda' z)$$

Dakle,

$$(\forall x,y,z \in S)\quad xy(\lambda\lambda' z)=[(xy)\varrho\varrho']z.$$

Kako je $(\lambda,\varrho)(\lambda',\varrho')=(\lambda\lambda',\varrho\varrho')$ to je

$$\mathcal{L}_\ell(S)\,\Omega(S) \subseteq \mathcal{L}_\ell(S).$$

Analogno se zaključuje da je

$\Omega(S)\,\mathcal{L}_\ell(S) \subseteq \mathcal{L}_\ell(S)$. Takodje je

$$\mathcal{L}_r(S)\,\Omega(S) \subseteq \mathcal{L}_r(S), \quad \Omega(S)\,\mathcal{L}_r(S) \subseteq \mathcal{L}_r(S)$$

a odavde

$$\mathcal{L}_o(S)\,\Omega(S) \subseteq \mathcal{L}_o(S), \quad \Omega(S)\,\mathcal{L}_o(S) \subseteq \mathcal{L}_o(S).$$

IV.2.2 LEMA. Neka je P podsemigrupa za $\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)$ takva da je

$$\Pi(S) \subseteq P \subseteq \Omega(S).$$

Tada je

$$i_{\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)}(P) \subseteq \mathcal{L}_o(S).$$

DOKAZ. Neka $(\lambda,\rho) \in i_{\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)}(P)$. Kako je $\Pi(S) \subseteq P$ to za svako $s \in S$ je $(\lambda,\rho)(\lambda_s,\rho_s) \in P$ i $(\lambda_s,\rho_s)(\lambda,\rho) \in P$. Neka $x,y,z \in S$. Tada $(\lambda,\rho)(\lambda_y,\rho_y) = (\lambda\lambda_y, \rho\rho_y) \in P$. Kako je $P \subseteq \Omega(S)$ to je $(\lambda\lambda_y, \rho\rho_y) \in \Omega(S)$. Dakle, $x(\lambda\lambda_y z) = (x\rho\rho_y)z$ za sve $x,y,z \in S$. Odavde je $x\lambda(yz) = (x\rho)yz$ te $(\lambda,\rho) \in \mathcal{L}_r(S)$. Takodje, $(\lambda_y,\rho_y)(\lambda,\rho) = (\lambda_y\lambda, \rho_y\rho) \in P$, odnosno, $(\lambda_y\lambda, \rho_y\rho) \in \Omega(S)$. Dakle, $x(\lambda_y\lambda z) = (x\rho_y\rho)z$ za sve $x,y,z \in S$. Odavde je $xy(\lambda z) = (xy)\rho z$ za sve $x,y,z \in S$. Dakle, $(\lambda,\rho) \in \mathcal{L}_\ell(S)$.

Prema tome, $(\lambda,\rho) \in \mathcal{L}_o(S)$.

IV.2.3 POSLEDICA. Ako je S semigrupa, tada je

i) $i_{\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)}(\Pi(S)) \subseteq \mathcal{L}_o(S)$.

ii) $i_{\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)}(\Omega(S)) \subseteq \mathcal{L}_o(S)$.

Za dalja istraživanja uvodimo neke podskupove skupa $\Lambda(S) \times P(S)$.

IV.2.4 NOTACIJA. Neka je za semigrupu S,

$$\Omega_\ell(S) = \mathcal{L}_\ell(S) \cap (\Lambda(S) \times P(S)).$$
$$\Omega_r(S) = \mathcal{L}_r(S) \cap (\Lambda(S) \times P(S)).$$
$$\Omega_o(S) = \Omega_\ell(S) \cap \Omega_r(S).$$

Lako se zaključuje da je

$$\Omega_\ell(S)=\{(\lambda,\rho)\in\Lambda(S)\times P(S)\mid(\forall x,y,z\in S)\ xy(\lambda z)=x(y\rho)z\}$$

$$\Omega_r(S)=\{(\lambda,\rho)\in\Lambda(S)\times P(S)\mid(\forall x,y,z\in S)\ x(\lambda y)z=(x\rho)yz\}$$

$$\Omega_o(S)=\mathcal{L}_o(S)\cap(\Lambda(S)\times P(S)).$$

Takodje se lako dokazuje da su $\Omega_\ell(S)$, $\Omega_r(S)$ i $\Omega_o(S)$ podsemigrupe za $\Lambda(S)\times P(S)$.

IV.2.5 POSLEDICA. Ako je P podsemigrupa za $\Lambda(S)\times P(S)$ takva da je $\Pi(S)\subseteq P\subseteq\Omega(S)$, tada je

$$i_{\Lambda(S)\times P(S)}(P)\subseteq\Omega_o(S).$$

IV.2.6 POSLEDICA. Ako je S semigrupa, tada je

i) $i_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Pi(S))\subseteq\Omega_o(S)$.

ii) $i_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Omega(S))\subseteq\Omega_o(S)$.

Lako se dokazuje da je za levo [desno] reduktivnu semigrupu S,

$$\Omega_\ell(S)=\Omega_o(S)=\Omega(S)\ [\Omega_r(S)=\Omega_o(S)=\Omega(S)].$$

Neka je S slabo reduktivna semigrupa i neka $(\lambda,\rho)\in\Omega_o(S)$. Tada $(\lambda,\rho)\in\Omega_r$ pa je $x(\lambda y)z=(x\rho)yz$ za sve $x,y,z\in S$. Takodje, $(\lambda,\rho)\in\Omega_\ell$ pa je $zx(\lambda y)=z(x\rho)y$ za sve $x,y,z\in S$. Dakle, kako je S slabo reduktivna to

$$(\forall x,y,z\in S)\quad \begin{array}{c} x(\lambda y)z=(x\rho)yz \\ \cdot \\ zx(\lambda y)=z(x\rho)y \end{array} \implies (\forall x,y\in S)\ x(\lambda y)=(x\rho)y$$

odnosno, $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$. Dakle, $\Omega_0(S) \subseteq \Omega(S)$. Kako je $\Omega(S) \subseteq \Omega_0(S)$ za ma koju semigrupu S to smo dobili

IV.2.7 POSLEDICA. Ako je S slabo reduktivna semigrupa, tada je $\Omega_0(S) = \Omega(S)$ i $i_{\Lambda(S)\times P(S)}(P) \subseteq \Omega(S)$ gde je P podsemigrupa za $\Lambda(S)\times P(S)$ za koju je $\Pi(S) \subseteq P \subseteq \Omega(S)$.

Neka je S globalno idempotentna semigrupa. Neka $(\lambda, \varrho) \in \mathcal{L}_\ell(S)$ odnosno $xy(\lambda z) = (xy)\varrho z$ za sve $x,y,z \in S$. Neka $x,y \in S$ i $x = st$ za neke $s,t \in S$. Tada je $x(\lambda y) = (st)(\lambda y) = (st)\varrho y = (x\varrho)y$, te $(\lambda, \varrho) \in \mathcal{L}(S)$. Dakle, $\mathcal{L}_\ell(S) \subseteq \mathcal{L}(S)$. Kako je $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}_\ell(S)$ za ma koju semigrupu S, to je za globalno idempotentnu semigrupu S, $\mathcal{L}_\ell(S) = \mathcal{L}(S)$. Analogno se pokazuje da je $\mathcal{L}_r(S) = \mathcal{L}(S)$ te je za globalno idempotentnu semigrupu S, $\mathcal{L}_\ell(S) = \mathcal{L}_r(S) = \mathcal{L}_0(S)$. Tada je i $\Omega_\ell(S) = \Omega_r(S) = \Omega_0(S) = \Omega(S)$.

Tako smo dobili sledeće tvrdjenje

IV.2.8 POSLEDICA. Neka je S globalno idempotentna semigrupa. Ako je P podsemigrupa semigrupe $\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)$ takva da je $\Pi(S) \subseteq P \subseteq \Omega(S)$, tada je

i) $i_{\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)}(P) \subseteq \mathcal{L}(S)$.

ii) $i_{\Lambda(S)\times P(S)}(P) \subseteq \Omega(S)$.

Prema IV.2.7 Posledici i IV.2.8 Posledici dobijamo

IV.2.9 LEMA. Neka je S slabo reduktivna ili globalno idempotentna semigrupa. Ako je P podsemigrupa za $\Lambda(S)\times P(S)$ takva da je $\Pi(S) \subseteq P \subseteq \Omega(S)$ tada je

$$i_{\Lambda(S)\ P(S)}(P) \subseteq \Omega(S).$$

IV.2.10 TEOREMA. Ako je S slabo reduktivna ili globalno idempotentna semigrupa, tada je

$$i_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Pi(S)) = i_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Omega(S)) = \Omega(S).$$

Kao što je u Uvodu rečeno, Gluskin [8] je dokazao da je za slabo reduktivnu semigrupu S

$$i_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Pi(S)) = \Omega(S).$$

IV.2.11 NOTACIJA. Neka je za semigrupu S

$$\bar{\Pi}(S) = \Omega(S) \cap (\Gamma(S)\times\Delta(S))$$

Skup $\bar{\Pi}(S)$ možemo i ovako izraziti

$$\bar{\Pi}(S) = \{(\lambda_s, \rho_t) \mid (\forall x,y\in S)\ xsy = xty\}.$$

IV.2.12 TEOREMA. Za ma koju semigrupu S je

i) $\Pi(S)\subseteq\bar{\Pi}(S)$.

ii) $\bar{\Pi}(S)$ je ideal za $\Omega(S)$.

iii) Ako je S levo ili desno reduktivna tada je $\Pi(S)=\bar{\Pi}(S)$.

DOKAZ. i) Očigledno.

ii) Neka $(\lambda_s, \rho_t)\in\bar{\Pi}(S)$ i $(\lambda,\rho)\in\Omega(S)$. Tada je $(\lambda_s,\rho_t)(\lambda,\rho)=(\lambda_s\lambda, \rho_t\rho)=(\lambda_{s\rho}, \rho_{t\rho})$. Neka $x,y\in S$. Tada je

$$x(s\rho)y=xs(\lambda y)=xt(\lambda y)=x(t\rho)y.$$

Dakle, $x(s\rho)y=x(t\rho)y$ za sve $x,y\in S$ te $(\lambda_{s\rho},\rho_{t\rho})\in\bar{\Pi}(S)$. Analogno, $(\lambda,\rho)(\lambda_s,\rho_t)=(\lambda_{\lambda s},\rho_{\lambda t})\in\bar{\Pi}(S)$.

Dakle, $\bar{\Pi}(S)$ je ideal za $\Omega(S)$.

iii) Neka je S levo reduktivna semigrupa i $(\lambda_s, \varrho_t) \in \overline{\Pi}(S)$. Tada

$(\forall x,y \in S)xsy=xty \Rightarrow (\forall y \in S)sy=ty \Rightarrow \lambda_s = \lambda_t$.

Dakle, $(\lambda_s, \varrho_t)=(\lambda_t, \varrho_t) \in \Pi(S)$ te je $\overline{\Pi}(S) \subseteq \Pi(S)$. Prema i), dobijamo $\Pi(S) = \overline{\Pi}(S)$.

Ako je S desno reduktivna, tada je $(\lambda_s, \varrho_t)=(\lambda_s, \varrho_s)$, te analogno dobijamo, $\Pi(S) = \overline{\Pi}(S)$.

Na osnovu IV.2.9 Leme i IV.2.12 Teoreme dobijamo

IV.2.13 POSLEDICA. Ako je S slabo reduktivna ili globalno idempotentna, tada je

i) $\underset{\Gamma(S)\times\Delta(S)}{i}(\Pi(S)) = \overline{\Pi}(S)$.

ii) $\underset{\Lambda(S)\times P(S)}{i}(\overline{\Pi}(S)) = \Omega(S)$.

IV.2.14 POSLEDICA. Ako je S levo ili desno reduktivna semigrupa tada je

$$\underset{\Gamma(S)\times\Delta(S)}{i}(\Pi(S)) = \Pi(S).$$

IV.2.15 LEMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je reduktivna.

(ii) $(\forall s,t \in S)((\lambda_s, \varrho_t) \in \Pi(S) \Rightarrow s=t)$.

(iii) $(\forall s,t \in S)((\lambda_s, \varrho_t) \in \overline{\Pi}(S) \Rightarrow s=t)$.

DOKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je S reduktivna. Neka $(\lambda_s, \varrho_t) \in \Pi(S)$. Tada je $(\lambda_s, \varrho_t)=(\lambda_u, \varrho_u)$ za neko $u \in S$. Dakle, $sx=ux$ i $xt=xu$ za sve $x \in S$. Kako je S reduktivna to je $s=u$ i $t=u$, odnosno $s=t$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Neka

$$(\forall s,t \in S)((\lambda_s, \rho_t) \in \Pi(S) \Rightarrow s=t).$$

Neka $(\lambda_s, \rho_t) \in \overline{\Pi}(S)$, odnosno $xsy=xty$ za sve $x,y \in S$. Odavde je $\rho_{sy} = \rho_{ty}$ za sve $y \in S$. Dakle, $(\lambda_{sy}, \rho_{ty}) \in \Pi(S)$ za sve $y \in S$. Tada je $sy=ty$ za sve $y \in S$, odnosno $\lambda_s = \lambda_t$. Dakle, $(\lambda_s, \rho_t) \in \Pi(S)$ te je $s=t$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Neka

$$(\forall s,t \in S)((\lambda_s, \rho_t) \in \overline{\Pi}(S) \Rightarrow s=t).$$

Neka $s,t \in S$. Tada

$$(\forall x \in S)xs=xt \Rightarrow (\forall x,y \in S)\ xsy = xty \Rightarrow (\lambda_s, \rho_t) \in \overline{\Pi}(S) \Rightarrow s=t.$$

Takodje

$$(\forall x \in S)xs=xt \Rightarrow (\forall x,y \in S)ysx = ytx \Rightarrow (\lambda_s, \rho_t) \in \overline{\Pi}(S) \Rightarrow s=t.$$

Dakle, S je reduktivna.

Sledeći primeri pokazuju da postoje semigrupe za koje je $\Pi(S) \neq \overline{\Pi}(S)$.

1)

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	b
c	a	a	a	a
d	a	a	c	d

S je slabo reduktivna i globalno idempotentna.

$\overline{\Pi}(S) = \Pi(S) \cup \{(\lambda_b, \rho_c)\}$

$\overline{\Pi}(S) \neq \Pi(S)$.

2)

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	b
d	a	a	b	c

S nije slabo reduktivna.

$\overline{\Pi}(S) = \Pi(S) \cup \{(\lambda_a, \rho_c), (\lambda_c, \rho_a)\}$

$\overline{\Pi}(S) \neq \Pi(S)$.

S nije globalno idempotentna.

IV.2.12 Teorema pokazuje da je leva, odnosno, desna reduktivnost dovoljan uslov za $\Pi(S) = \overline{\Pi}(S)$. Sledeći primeri pokazuju da taj uslov nije potreban.

3)

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	b	b
c	a	a	c	d
d	a	a	c	d

S je slabo reduktivna ali nije ni levo ni desno reduktivna. S je globalno idempotentna $\overline{\Pi}(S) = \Pi(S)$.

4)

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	b	b

S nije slabo reduktivna ni globalno idempotentna.

$\overline{\Pi}(S) = \Pi(S)$.

IV.3 BI-IDEALIZATORI NEKIH PODSEMIGRUPA TRANSLATORNOG OMOTAČA

Analogno pojmu idealizatora podsemigrupe, ovde uvodimo pojam bi-idealizatora.

IV.3.1 DEFINICIJA. Neka je A podsemigrupa semigrupe S. Ako postoji najveća podsemigrupa za S takva da je A njen bi-ideal onda tu podsemigrupu nazivamo <u>bi-idealizator</u> za A u odnosu na S, u oznaci $bi_S\text{-}i(A)$.

IV.3.2 NOTACIJA. Neka je za podsemigrupu A semigrupe S,

$$B_S(A) = \{ b \in S \mid (\forall x, y \in A)\ xby \in A \}.$$

Kako je $A \subseteq B_S(A)$ to je skup $B_S(A)$ neprazan. Ako podsemigrupa A semigrupe S ima bi-idealizator u odnosu na S, tada je

$$bi_S\text{-}i(A) \subseteq B_S(A).$$

IV.3.3 NOTACIJA. Neka je za semigrupu S,

$$\bar{\mathcal{L}}(S)=\{(\lambda,\varrho)\in\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)\,|\,(\forall x,y,z,u\in S)\ xy\,\lambda(zu)=(xy)\varrho\ zu\}$$

$$\bar{\Omega}(S)=\bar{\mathcal{L}}(S)\cap\Lambda(S)\times P(S).$$

IV.3.4 LEMA. Neka je P podsemigrupa semigrupe $\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)$ takva da je $\Pi(S)\subseteq P\subseteq\Omega(S)$. Tada je

$$B_{\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)}(P)\subseteq\bar{\mathcal{L}}(S).$$

DOKAZ. Neka $(\lambda,\varrho)\in B_{\mathcal{T}^*(S)\times\mathcal{T}(S)}(P)$. Tada $(\lambda_s,\varrho_s)(\lambda,\varrho)(\lambda_t,\varrho_t)\in P$ za sve $s,t\in S$, odnosno $(\lambda_s\lambda\lambda_t,\varrho_s\varrho\varrho_t)\in P$. Kako je $P\subseteq\Omega(S)$ to je $x(\lambda_s\lambda\lambda_t y)=$ $=(x\varrho_s\varrho\varrho_t)y$ za sve $x,y,s,t\in S$. Odavde je $xs\,\lambda(ty)=(xs)\varrho\ ty$ za sve $x,y,s,t\in S$. Dakle, $(\lambda,\varrho)\in\bar{\mathcal{L}}(S)$.

Prema IV.3.3 Notaciji, lako se zaključuje da je $\bar{\Omega}(S)$ podsemigrupa za $\Lambda(S)\times P(S)$. Jer, neka $(\lambda,\varrho),(\lambda',\varrho')\in\bar{\Omega}(S)$. Tada je, za $x,y,z,u\in S$.

$xy(\lambda\lambda' z)u=xy\,\lambda(\lambda' z)u=x(y\varrho)(\lambda' z)u=x[(y\varrho)\varrho']zu=x(y\varrho\varrho')zu.$

Dakle, $(\lambda\lambda',\varrho\varrho')\in\bar{\Omega}(S)$.

Takodje, lako se dokazuje da je $\bar{\mathcal{L}}(S)\,\Omega(S)\subseteq\bar{\mathcal{L}}(S)$ i $\Omega(S)\,\bar{\mathcal{L}}(S)\subseteq\bar{\mathcal{L}}(S)$.

IV.3.5 LEMA. Za ma koju semigrupu S važi

i) $\Pi(S)$ je bi-ideal za $\Omega_\ell(S),\Omega_r(S)$ i $\Omega_o(S)$.

ii) $\bar{\Pi}(S)$ je bi-ideal za $\Omega_\ell(S),\Omega_r(S),\Omega_o(S)$ i $\bar{\Omega}(S)$.

DOKAZ. i). Neka $(\lambda,\varrho)\in\Omega_\ell(S)$ i $s,t\in S$. Tada je $xy(\lambda z)=x(y\varrho)z$ za sve $x,y,z\in S$, tj. $\varrho_{y(\lambda z)}=\varrho_{(y\varrho)z}$ za sve $y,z\in S$. Prema tome je

$(\lambda_s, \varrho_s)(\lambda, \varrho)(\lambda_t, \varrho_t) = (\lambda_{s(\lambda t)}, \varrho_{(s\varrho)t}) = (\lambda_{s(\lambda t)}, \varrho_{s(\lambda t)})$

Kako $(\lambda_{s(\lambda t)}, \varrho_{s(\lambda t)}) \in \Pi(S)$ to je $\Pi(S)$ bi-ideal za $\Omega_\ell(S)$.

Analogno se dokazuje da je $\Pi(S)$ bi-ideal za $\Omega_r(S)$ pa je $\Pi(S)$ bi-ideal i za $\Omega_o(S)$.

ii) Kako je $\Omega_o(S) \subseteq \Omega_\ell(S) \subseteq \bar{\Omega}(S)$ i $\Omega_o(S) \subseteq \Omega_r(S) \subseteq \bar{\Omega}(S)$ dovoljno je dokazati da je $\Pi(S)$ bi-ideal za $\bar{\Omega}(S)$. Neka $(\lambda, \varrho) \in \bar{\Omega}(S)$, tj. $xy(\lambda z)u = x(y\varrho)zu$ za sve $x,y,z,u \in S$. Neka $(\lambda_s, \varrho_t), (\lambda_u, \varrho_v) \in \bar{\Pi}(S)$. Tada je $(\lambda_s, \varrho_t)(\lambda, \varrho)(\lambda_u, \varrho_v) = (\lambda_{s(\lambda u)}, \varrho_{(t\varrho)v})$. Takodje je

$$xs(\lambda u)y = xt(\lambda u)y = x(t\varrho)uy = x(t\varrho)vy$$

za sve $x,y \in S$. Dakle, $(\lambda_{s(\lambda u)}, \varrho_{(t\varrho)v}) \in \bar{\Pi}(S)$, odnosno, $\bar{\Pi}(S)$ je bi-ideal za $\bar{\Omega}(S)$.

Kako je $\bar{\Omega}(S) = \bar{\mathscr{L}}(S) \cap (\Lambda(S) \times P(S))$ to prema IV.3.4 Lemi i IV.3.5 Lemi dobijamo

IV.3.6 POSLEDICA. Neka je P podsemigrupa za $\Omega(S)$ tako da je $\Pi(S) \subseteq P \subseteq \Omega(S)$. Tada je

$$\underset{\Lambda(S)\times P(S)}{B(P)} \subseteq \bar{\Omega}(S).$$

IV.3.7 POSLEDICA. Za ma koju semigrupu S je

$$\underset{\Lambda(S)\times P(S)}{\text{bi-i}(\bar{\Pi}(S))} = \bar{\Omega}(S).$$

Neka je S reduktivna semigrupa i neka $(\lambda, \varrho) \in \bar{\Omega}(S)$. Dakle, $xy(\lambda z)u = x(y\varrho)zu$ za sve $x,y,z,u \in S$. Odavde, zbog leve reduktivnosti je $y(\lambda z)u = (y\varrho)zu$ za sve $y,z,u \in S$. Tada desna reduktivnost povlači $y(\lambda z) = (y\varrho)z$ za sve $y,z \in S$. Dakle, $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$ tj. $\bar{\Omega}(S) \subseteq \Omega(S)$. Kako je $\Omega(S) \subseteq \bar{\Omega}(S)$ za ma koju semigrupu S to je za reduktivnu semigrupu S $\bar{\Omega}(S) = \Omega(S)$.

Neka je S globalno idempotentna semigrupa. Neka $(\lambda, \rho) \in \bar{\Omega}(S)$ i $x, y \in S$. Tada je $x=st$, $y=uv$ za neke $s,t,u,v \in S$ pa je

$$x(\lambda y)=(st)\lambda(uv)=st(\lambda u)v=s(t\rho)uv=(st)\rho\, uv=(x\rho)y.$$

Dakle, $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ te je $\bar{\Omega}(S) \subseteq \Omega(S)$. Prema tome, ako je S globalno idempotentna semigrupa tada je $\bar{\Omega}(S) = \Omega(S)$.

Lako se vidi da ako je S levo [desno] reduktivna tada je $\Omega_r(S) = \bar{\Omega}(S)$ $[\Omega_\ell(S) = \bar{\Omega}(S)]$.

Prema IV.3.5 Lemi, IV.3.6 Posledici i IV.3.7 Posledici je

IV.3.8 TEOREMA. Neka je S semigrupa. Tada važi

i) Ako je S levo reduktivna tada je $\text{bi-i}_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Pi(S)) = \Omega_r(S)$.

ii) Ako je S desno reduktivna tada je $\text{bi-i}_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Pi(S)) = \Omega_\ell(S)$.

iii) Ako je S reduktivna tada je $\text{bi-i}_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Pi(S)) = \Omega_\ell(S)$.

iv) Ako je S globalno idempotentna tada je

$$\text{bi-i}_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Pi(S)) = \text{bi-i}_{\Lambda(S)\times P(S)}(\bar{\Pi}(S)) = \text{bi-i}_{\Lambda(S)\times P(S)}(\Omega(S)) = \Omega(S).$$

Za dalja istraživanja razmatramo semigrupu $\mathcal{L}(S)$ navedenu u IV.2.1 Notaciji. Ovu semigrupu je proučavao Johnson [15].

IV.3.9 TEOREMA. Za ma koju semigrupu S važi

i) $\mathcal{L}(S)$ je semigrupa.

ii) $(\forall(\lambda, \rho) \in \mathcal{L}(S))(\forall s \in S)$ $\lambda_s \lambda = \lambda_{s\rho}$, $\rho \rho_s = \rho_{\lambda s}$.

iii) $\Pi(S)$ je bi-ideal za $\mathcal{L}(S)$.

iv) $\bar{\Pi}(S)$ je bi-ideal za $\mathcal{L}(S)$.

DOKAZ. i). Neka (λ, ϱ), $(\lambda', \varrho') \in \mathcal{L}(S)$. Neka $x, y \in S$. Tada je

$$x(\lambda\lambda' y) = x\lambda(\lambda' y) = (x\varrho)(\lambda' y) = (x\varrho)\varrho' y = (x\varrho\varrho')y$$

Dakle, $(\lambda\lambda', \varrho\varrho') \in \mathcal{L}(S)$.

ii) Neka $s, x \in S$. Tada je

$$(\lambda_s \lambda)x = \lambda_s(\lambda x) = s(\lambda x) = (s\varrho)x = \lambda_{s\varrho} x.$$

$$x(\varrho\varrho_s) = (x\varrho)\varrho_s = (x\varrho)s = x(\lambda s) = x\,\varrho_{\lambda s}.$$

iii) Neka $(\lambda_s, \varrho_s), (\lambda_t, \varrho_t) \in \Pi(S)$ i $(\lambda, \varrho) \in \mathcal{L}(S)$. Tada je $(\lambda_s, \varrho_s)(\lambda, \varrho)(\lambda_t, \varrho_t) = (\lambda_s \lambda \lambda_t, \varrho_s \varrho \varrho_t)$. Prema ii) je $\lambda_s \lambda \lambda_t = \lambda_{s\varrho} \lambda_t = \lambda_{(s\varrho)t}$ i $\varrho_s \varrho \varrho_t = \varrho_s \varrho_{\lambda t} = \varrho_{s(\lambda t)}$. Kako je $(s\varrho)t = s(\lambda t)$ to je $(\lambda_{(s\varrho)t}, \varrho_{s(\lambda t)}) \in \Pi(S)$. Dakle, $\Pi(S)$ je bi-ideal za $\mathcal{L}(S)$.

iv) Neka (λ_s, ϱ_t), $(\lambda_u, \varrho_v) \in \overline{\Pi}(S)$ i $(\lambda, \varrho) \in \overline{\mathcal{L}}(S)$, tj. $xsy = xty$, $xuy = xvy$ i $x(\lambda y) = (x\varrho)y$ za sve $x, y \in S$. Prema ii) je

$$(\lambda_s, \varrho_t)(\lambda, \varrho)(\lambda_u, \varrho_v) = (\lambda_s \lambda \lambda_u, \varrho_t \varrho \varrho_v) = (\lambda_{(s\varrho)u}, \varrho_{t(\lambda v)}).$$

Kako je

$$x(s\varrho)uy = x(s\varrho)vy = xs(\lambda v)y = xt(\lambda v)y$$

za sve $x, y \in S$, to $(\lambda_{(s\varrho)u}, \varrho_{t(\lambda v)}) \in \overline{\Pi}(S)$.

Lako se uočava da je za globalno idempotentnu semigrupu S, $\overline{\mathcal{L}}(S) = \mathcal{L}(S)$.

Tada, prema IV.3.4 Lemi i IV.3.9 Teoremi dobijamo

IV.3.10 POSLEDICA. Ako je S globalno idempotentna semigrupa tada je

$$\underset{\mathcal{G}^*(S)\times\mathcal{G}(S)}{\text{bi-i}}(\Pi(S)) = \underset{\mathcal{G}^*(S)\times\mathcal{G}(S)}{\text{bi-i}}(\overline{\Pi}(S)) = \mathcal{L}(S).$$

L I T E R A T U R A

[1] Calais I., Demi-groupes quasi-inversifs, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 252(1961), 2357-2359.

[2] Clifford, A.H., Semigroups containing minimal ideals. Amer. I.Math. 70(1948), 521-526.

[3] Clifford, A.H., Semigroups without nilpotent ideals, Amer. I. Math. 71(1949) 833-844.

[4] Clifford, A.N. and Preston, G.B., "The Algebraic Theory of Semigroups", Math. Surveys of the American Math. Soc. 7, Providence, R.I., vol I, 1961; vol II, 1967.

[5] Clifford, A.N., Remarks on 0-minimal quasi-ideals in semigroups, Semigroup Forum 16(1978).

[6] Croisot, R., Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup(3) 70(1953), 361-379.

[7] Глускин Л.М., Идеалы полугрупп, Матем, Сборник 55 (1961), 421-448.

[8] Глускин Л.М., О плотных вложениях, Матем. Сборник 61 (1963), 175-206.

[9] Gluskin, L.M. and Steinfeld O., Rings (semigroups) containing minimal (0-minimal) right and left ideals, Publ. Math. Debrecen, T.25(1978).

[10] Good, R.A. and Hughes, D.R., Associated groups for a semigroups, Bull. Amer. Math. Soc., 58(1952), 624-625.

[11] Green, J.A., On the structure of semigroups, Annals of Math., 54(1951), 163-172.

[12] Grillet, P.A., and Petrich, M. Ideal extensions of semigroups, Pacific J.Math. 26(1968), 493-508.

[13] Howie, J.M., "An Introduction to semigroup Theory", Academic Press, 1976.

[14] Iséki, K., A characterization of regular semi-groups, Proc. Japan Acad., 32(1956), 676-677.

[15] Johnson, B.E., An introduction to the theory of centralizers, Proc. London Math. Soc.(3) 14(1964), 299-320.

[16] Kapp, K.M., Gren's relations and quasi-ideals, Czech. Math. J. 19(94) (1969), 80-85.

[17] Kapp, K.M., On bi-ideals and quasi-ideals in semigroups, Publ. Math. Debrecen, 16(1969), 179-185.

[18] Kovács, L., A note on regular rings, A note on regular rings, Publ. Math. Debrecen, 4(1956), 465-468.

[19] Krgović, D.N., Notes on regular semigroups, Mat.Vesnik, 10(25)(1973), 237-239.

[20] Krgović, D.N., On (m,n)-regular semigroups, Publ. Inst. Math.Belgrade 18(32)(1975).

[21] Krgović, D.N., Notes on regular semigroups, Math. Balkanica 5:31(1975), 176-177.

[22] Krgović, D.N., On intra-regular semigroups, Mat.Vesnik 13(28) 1976, 405-406.

[23] Krgović, D.N., On (m,n)-ideals and (m,n)-regular semigroups, Dept. of Math., K.Marx University of Econ.Budapest, 1976, 1-5.

[24] Krgović, D.N., A characterization of (m,n)-regular semigroups, Dept. of Math., K.Marx University of Econ.Budapest, 1976, 6-7.

[25] Krgović, D.N., On $(m,n)_T$-ideals and subgroups of a semigroups, Mat.Vesnik 1(14)(29), 1977, 29-31.

[26] Krgović, D.N., On 0-minimal bi-ideals of semigroups, Publ. Inst. Math. Belgrade 27(41), 1980, 135-137.

[27] Krgović, D.N., On bi-ideals in semigroups, Algebraic, conference, Skopje, 1980, 63-69.

[28] Lajos, S., Generalized ideals in semigroups, Acta Sci. Math., 22(1961), 217-222.

[29] Lajos, S., A note on intra-regular semigroups, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 626-627.

[30] Lajos, S., Notes on (m,n)-ideals II, Proc.Japan Acad., 40(1964), 631-632.

[31] Lajos, S., On the bi-ideals in semigroups, Proc.Japan Acad., 45(1969), 710-712.

[32] Lajos, S., Notes on regular semigroups, Proc. Japan Acad. 46(1970), 253-254.

[33] Lajos, S., On semigroups that are semilattices of groups, Dept. of Math., K.Marx University of Econ. Budapest, 1971, 1-14.

[34] Lajos, S., Theorems on (1,1)-ideals in semigroups, Dept. of Math., K.Marx University of Econ. Budapest, 1972, 1-19.

[35] Lajos, S., On regular rings and semigroups, Dept. of Math., K.Marx University of Econ. Budapest, 1974, 1-25.

[36] Luh J., A characterization of regular rings, Proc. Japan Acad., 39(1963), 741-742.

[37] Ляпин, Е.С., Полугрупп , Физматгиз, Москва, 1960.

[38] Mielke, B.W., A note on bi-ideals and quasi-ideals in semigroups, Publ. Math. Debrecen, 18(1971), 73-75.

[39] Mielke, B.W., A note on Green's relations of BQ-semigroups, Czechoslovak Math. J., 22(1972), 224-229.

[40] Neumann, von J., On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 22(1936), 707-713.

[41] Petrich, M., On extensions of semigroups determined by partial homomorphisms, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 28(1966), 49-51.

[42] Petrich, M., "Topics in semigroups", Pennsylvania State Univ. 1967.

[43] Petrich, M., The translational hull in semigroups and rings, Semigroup Forum 1(1970), 283-360.

[44] Petrich, M., "Introduction to semigroups, Ch.E.Merrill Co., Columbus, Ohio, 1973.

[45] Petrich, M. and Grillet, P.A., Extensions of an arbitrary semigroup, J. Reine Angew. Math. 244(1970), 97-107.

[46] Prešić M. i S.,"Uvod u matematičku logiku", Matematički institut, Beograd, 1979.

[47] Schwarz, Š., On semigroups having a kernel, Czechoslovak Math. J., 1(76)(1951) 229-264.

[48] Steinfeld, O., Uber die Quasiideale von Halbgruppen, Publ. Math. Debrecen, 4(1956), 262-257.

[49] Steinfeld, O., "Quasi-ideals in rings and semigroups", Akadémiai kiadó, Budapest 1978.

[50] Thierrin, G., Sur les éléments inversifs et les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 234(1952), 33-34.