UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

UŠĆUMLIĆ M. ŠĆEPAN

O KVALITATIVNIM I METRIČKIM SVOJSTVIMA ALGORITAMA ANALIZE I SINTEZE KONAČNIH AUTOMATA

(doktorska disertacija)

BEOGRAD
mart 1979.

Ovaj rad je urađen u okviru programa mog specijalističkog usavršavanja na Katedri za matematičku logiku Mehaničko–matematičkog fakulteta Moskovskog državnog univerziteta, pod rukovodstvom docenta Valerija Borisoviča Kudrjavceva.

Zahvaljujem se V.B. Kudrjavcevu za podršku i pomoć u radu, kao i za izvanredan prijem za vreme mog boravka u Moskvi.

Zahvalnost izražavam kandidatu fizičko–matematičkih nauka Aleksandru Sergejeviču Padkolzinu za podršku i pomoć u radu.

Zahvalnost dugujem kolektivu Tehnološko–metalurškog fakulteta u Beogradu koji mi je omogućio specijalističko usavršavanje u SSSR–u, kao i RZN Srbije za devetomesečno finansiranje mog boravka u Moskvi.

Rezultati ovoga rada izloženi su na Seminaru iz teorije automata Mehaničko–matematičkog fakulteta MGU–a.

Beograd, mart 1979.

Šćepan Ušćumlić

S A D R Ž A J

U V O D

Teorija automata je deo teorije sistema upravljanja [8], koji proučava matematičke modele pretvarača diskretne informacije, tzv. automate. Teorija automata se pojavila sredinom dvadesetog veka u vezi sa izučavanjem svojstava konačnih automata, kao matematičkih modela nervnih sistema i računskih mašina. Konačni automat je neformalno, uređaj koji ima ulazni i izlazni kanal i koji se u svakom trenutku diskretnog vremena nalazi u jednom od konačno mnogo stanja. U svakom diskretnom trenutku, preko ulaznog kanala, uređaj prima ulazne signale, koji pripadaju nekom konačnom skupu signala. Stanje uređaja u svakom sledećem trenutku, prema određenom zakonu, menja se u zavisnosti od ulaznog signala i stanja uređaja u prethodnom trenutku. Vrednost izlaznog signala uređaja u tekućem trenutku je funkcija njegovog stanja i ulaznog signala u tom istom trenutku.

Sa teorijskog i praktičnog stanovišta, u teoriji automata važnu ulogu imaju tzv. problemi analize i sinteze automata. Načini opisivanja funkcionisanja automata mogu uslovno biti podeljeni na dve grupe, na grupu jezika, tj. algebarsko logičkog opisivanja i grupu načina koji opisuju unutrašnje procese realnih automata, kao što su na primer Murovi dijagrami, izvornici, itd. Prelazak od prvog načina zadavanja na drugi naziva se <u>sintezom automata</u>, a od drugog na prvi <u>analizom automata</u>. U današnje vreme u teoriji automata i njenim primenama postoji više konkretnih načina opisivanja funkcionisanja automata prvog i drugog tipa, kao i konstruktivnih rešenja odgovarajućih zadataka analize i sinteze.

Važno je primetiti da se prilikom rešavanja problema analize i sinteze automata u prvom redu pažnja obraćala na principijelnu mogućnost njihovog rešavanja, a kvalitativni i metrički problemi vezani sa tim zadacima, po pravilu, ostavljani su u drugi plan. Prema tome i za osnovne algoritme analize i sinteze automata ovi problemi nisu dovoljno izučavani.

U ovom radu se ispituju kvalitativne i metričke karakteristike algoritama analize i sinteze automata V.M. Gluškova, koji su u teoriji automata poznati kao osnovni. Ovi algoritmi se u radu opisuju u nešto modificiranoj formi više pogodnoj za teorijska raz matranja, njima određenih prelaza, sa jednih načina zadavanja automata na druge.

Shema ispitivanja ovoga rada može biti predstavljena na sledeći način. Polazimo od zadavanja automata načinima drugog tipa, specijalno pomoću tzv. izvornika. Po izvorniku pomoću Gluškovljevog algoritma analize automata, koji ćemo dalje označavati sa $\mathcal{A}$, određujemo regularni izraz, koji odgovara događaju predstavljenom zadatim izvornikom. Na toj etapi, tj. pri rešavanju zadatka analize pomoću algoritma $\mathcal{A}$, postavlja se problem opisivanja skupa $\widetilde{R}$ svih odgovarajućih regularnih izraza. Njegovo rešavanje omogućuje utvrđivanje tačne veze između klase izvornika $\mathcal{J}$ i odgovarajućih regularnih izraza dobijenih po njima pomoću algoritma $\mathcal{A}$. Dobijeni opis omogućuje prelazak na zadatak sinteze, tj. zadatak opisa skupa $\mathcal{J}'$ svih izvornika koji predstavljaju događaje zadate pomoću regularnih izraza iz $\tilde{R}$, a koji se dobijaju pomoću algoritma sinteze V.M. Gluškova, koga ćemo označavati sa S . Na ovoj etapi naš osnovni zadatak je opis klase svih izvornika dobijenih na gore navedeni način. Pri tome čini se važnim odnos kako klasa J i J' tako i njihovih delova. U radu se daje konstruktivni opis skupa $\tilde{R}$ i klase J' . Pokazuje se u kojim slučajevima su izvornici G iz J i odgovarajući G' iz J' izomorfni, tj. kada se praktično, uslovno rečeno, poklapaju. Opisano ispitivanje kvalitativnih svojstava, prati i ispitivanje odgovarajućih metričkih karakteristika navedenih algoritama. Utvrđuje se tačna vrednost funkcije šenonovskog tipa, koja karakteriše uvećanje broja stanja izvornika G' iz J' u odnosu na broj stanja polaznog izvornika G iz J . Radi ocene efektivnosti algoritma analize A uvodi se Šenonova funkcija $L_A(n)$, jednaka maksimalnoj složenosti regularnih izraza, dobijenih algoritmom A iz izvornika koji imaju tačno n čvorova. Nalaze se gornje i donje ocene za funkciju $L_A(n)$. Opisuje se algoritam A_1 analize, koji ustvari predstavlja neznatnu izmenu algoritma A , i pokazuje se da je veličina $L_{A_1}(n)$ znatno manja od $L_A(n)$. Dalje se nalazi procena broja $N(n,m)$ svih regularnih događaja, koji se predstavljaju izvornicima nad azbukom od m slova, a čija složenost nije veća od n . Takođe se daje ocena broja $\mathcal{M}(n,m)$ svih regularnih izraza složenosti n nad tom istom azbukom. Ove procene omogućuju da se odredi donja ocena veličine $\mathcal{L}(n)$, jednake maksimalnoj složenosti minimalnih regularnih izraza, koji odgovaraju izvornicima čija složenost nije veća od n .

Prilikom ispitivanja efektivnosti algoritma analize A opisuju se klase izvornika $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$. Primena algoritma A na proizvoljni izvornik iz klase $\mathcal{K}_1$ daje minimalan regularan izraz, dok njegova primena na proizvoljni izvornik iz klase $\mathcal{K}_2$ daje regularan izraz različit od minimalnog. Dokazuje se dalje da odnos broja izvornika, čija složenost nije veća od n i za koje algoritam A daje regularan izraz minimalne složenosti, i broja svih izvornika složenosti n teži nuli kada n teži beskonačnosti.

Na analogan način, prilikom ispitivanja efektivnosti usavršenih algoritama sinteze V.M. Gluškova, izdvajaju se klase $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ regularnih izraza za koje ovaj algoritam daje respektivno samo minimalne i samo neminimalne izvornike.

Pre nego izložimo sadržaj rada, daćemo osnovne definicije i formulisati dobijene rezultate.

Incijalni konačni <u>Murov automat</u> $\mathfrak{A}$ je šestorka $(\mathcal{A}, \mathcal{Q}, \mathcal{B}, \varphi, \psi, q_0)$, gde su $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ulazna azbuka, $\mathcal{Q} = \{q_1, \ldots, q_n\}$ azbuka stanja, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ izlazna azbuka, φ - funkcija prelaska koja preslikava skup $\mathcal{Q} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{Q}$, ψ - funkcija izlaska koja preslikava skup $\mathcal{Q}$ u $\mathcal{B}$, q_0 - početno stanje automata $\mathfrak{A}$.

Definišimo funkciju $\varphi(q,a), (q \in \mathcal{Q}, a \in \mathcal{A})$ za proizvoljnu reč $\alpha = a_{i_1} \cdots a_{i_\ell}$ nad azbukom $\mathcal{A}$. Neka je $\varphi(q,\lambda) = q$; $\varphi(q, a_{i_1} \cdots a_{i_\ell}) = \varphi(\varphi(q, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}), a_{i_\ell})$; (λ - prazna reč). Događajem predstavljenim u automatu $\mathfrak{A}$ pomoću skupa $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ izlaznih signala naziva se skup $L_{\langle \mathfrak{A}, \mathcal{B}' \rangle} = \{\alpha \in \mathcal{A}^* : \psi(\varphi(q_0, \alpha)) \in \mathcal{B}'\}$. (Ovde je $\mathcal{A}^*$ skup reči nad azbukom $\mathcal{A}$). Događaji koji se predstavljaju u automatima, mogu se takođe zadavati pomoću tzv. izvornika.

<u>Izvornik</u> nad azbukom $\mathcal{A}$ je konačni orijentisani graf G čije je svako rebro obeleženo slovom azbuke $\mathcal{A}$, u kojeg je izdvojen tzv. početni čvor v_0 i neprazan podskup F završnih

čvorova, pri čemu su ispunjeni uslovi:

a) različita rebra koja izlaze iz jednog istog čvora obeležena su različitim slovima azbuke $\mathcal{A}$.

b) za svaki čvor v postoji put π_1 koji vodi iz v_0 u v i put π_2 koji vodi iz v u neki završni čvor.

Broj čvorova izvornika G nazivamo njegovom složenošću i označavamo sa $\|G\|$.

Svaki izvornik nad azbukom $\mathcal{A}$ određuje događaj $|G|$ - skup reči $a_{i1}\dots a_{ik}$ u azbuci $\mathcal{A}$, za koje postoji put $\pi = v_0\rho_{i1}v_{i1}\dots\rho_{ik}v_{ik}$ u izvorniku G, koji vodi iz v_0 u završni čvor v_{ik}, čije je rebro ρ_{ij} ($1 \leq j \leq k$) obeleženo slovom a_{ij}. Govorićemo da reč $a_{i1}\dots$ $\dots a_{ik}$ odgovara putu π i označavati je sa $[\pi]$.

Neka je $\mathfrak{O} = (\mathcal{A}, Q, \mathcal{B}, \varphi, \psi, q_0)$ automat i $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ takav da je $L_{(\mathfrak{O},\mathcal{B}')} \neq \emptyset$. Razmotrimo izvornik $G_{(\mathfrak{O},\mathcal{B}')}$, čiji je skup čvorova podskup Q' skupa Q, koji se sastoji is svih $q \in Q$ za koje postoje reči $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^*$, takve da je $q = \varphi(q_0, \alpha)$, $\psi(\varphi(q, \beta)) \in \mathcal{B}'$. Iz čvora q_1 vodi rebro u čvor q_2 izvornika $G_{(\mathfrak{O},\mathcal{B}')}$, obeleženo slovom a iz $\mathcal{A}$, tada i samo tada, kada je $\varphi(q_1, a) = q_2$. Početni čvor je stanje q_0, a skup F završnih čvorova sastoji se iz svih $q \in Q'$ za koje je $\psi(q) \in \mathcal{B}'$. Očigledno, za svaki na ovaj način konstruisani izvornik važi jednakost $L_{(\mathfrak{O},\mathcal{B}')} = |G_{(\mathfrak{O},\mathcal{B}')}|$.

Obrnuto, neka je G -proizvoljni izvornik nad $\mathcal{A}$, v_0 njegov početni čvor i F skup završnih čvorova. Razmotrimo automat $\mathfrak{O} = (\mathcal{A}, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, v_0)$, čiji se skup stanja sastoji iz skupa čvorova izvornika G i dodatnog elementa q'. Ako je $q \in Q$, $q \neq q'$ i izvornik G sadrži rebro iz čvora q u čvor q_1, obeleženo slovom a tada je $\varphi(q, a) = q_1$. Ako iz čvora q ne izlazi rebro obeleženo sa a, tada je $\varphi(q, a) = q'$. Osim toga $\varphi(q', a) = q'$ za proizvoljno a i $\psi(q) = 1$, tada i samo tada, kada $q \in F$. Očigledno je $L_{(\mathfrak{O},1)} = |G|$.

Ukazana ekvivalentnost između načina zadavanja događaja automatima i izvornicima omogućuje svođenje, dalje razmatranih zadataka analize i sinteze automata na odgovarajuće probleme za izvornike, koji su više podesni sa teorijskog aspekta.

U radu   je pokazano da se skup događaja koji se mogu predstaviti automatima, podudara sa skupom regularnih događaja, koji se predstavljaju pomoću tzv. regularnih izraza.

Neka je $\mathcal{A}=\{a_1,\dots,a_m\}$ konačna azbuka i $($, $)$, $\vee$, $\cdot$, $\langle$, $\rangle$, e - pomoćni simboli, koji ne pripadaju azbuci $\mathcal{A}$. Definišimo induktivno regularan izraz nad azbukom $\mathcal{A}$.

1. Svako slovo a_i azbuke $\mathcal{A}$, a takođe i simbol e su regularni izrazi nad $\mathcal{A}$.

2. Ako su R_1 i R_2 regularni izrazi nad $\mathcal{A}$, tada su $R=(R_1 \vee R_2)$, $R=(R_1\cdot R_2)$ i $R=\langle R_1\rangle$ takođe regularni izrazi nad $\mathcal{A}$. Respektivno govorimo da je R disjunkcija, konjunkcija i iteracija izraza R_1 i R_2 .

Definišimo takođe složenost $L(R)$ regularnog izraza R ,

$$L(e)=0$$
$$L(a_i)=1\ ,\ a_i\in\mathcal{A}$$
$$L(\langle R\rangle)=L(R)+1$$
$$L((R_1\vee R_2))=L((R_1\cdot R_2))=L(R_1)+L(R_2)+1\ .$$

Svakom regularnom izrazu R nad azbukom $\mathcal{A}$ pridružimo neki skup reči $|R|$ nad azbukom $\mathcal{A}$, koji ćemo nazivati regularnim događajem, zadanim datim izrazom R . Naime,

$$|e|=\{\lambda\}\quad (\ \lambda\ \text{- prazna reč}\ )$$
$$|a_i|=\{a_i\}$$
$$|(R_1\vee R_2)|=|R_1|\cup|R_2|$$
$$|(R_1\cdot R_2)|=\{p:(\exists p_1,q)(p=q\cdot r\ \&\ q\in|R_1|\ \&\ r\in|R_2|\}$$
$$|\langle R_1\rangle|=\{p:(\exists p_1,\dots,p_s)(p=p_1\dots p_s\ \&\ p_1\in|R_1|\ \&\dots\&\ p_s\in|R_1|)\}\cup\{\lambda\}.$$

Pošto je $|R_1\cdot(R_2\cdot R_3)|=|(R_1\cdot R_2)\cdot R_3|$, $|R_1\vee(R_2\vee R_3)|=|(R_1\vee R_2)\vee R_3|$,

$/(R_1 \vee R_2)/=/(R_2 \vee R_1)/$, to regularne izraze koji se razlikuju rasporedom zagrada u delovima oblika $R_1 \dots R_k$, $R_1 \vee \dots \vee R_k$ i poretkom članova u izrazima oblika $R_1 \vee \dots \vee R_k$, smatraćemo uvek jednakim, ukoliko to nije posebno naglašeno.

Neka je G zadati izvornik. Analizom izvornika G nazivamo postupak određivanja regularnog izraza R , tako da je $/G/ = /R/$.

Opišimo algoritam A analize izvornika.

Označimo sa $G^{v}_{v_0 v_1 \dots v_s}$, $(s \geqslant 0)$ izvornik, koji se dobija iz izvornika G udaljavanjem čvorova $v_0, v_1, \dots, v_s$ i svih ostalih njegovih čvorova koji se ispostave nedostižnim iz čvora v ili iz kojih on nije dostižan, zajedno sa njima susednim rebrima, i kod kojeg je v početni i jedinstveni završni čvor. Regularan izraz koji se dobija postupkom analize izvornika G označimo sa $A(G)$.

Neka izvornik G ima samo jedan čvor v i nema rebara. Tada je po definiciji $A(G) = e$.

Odredimo $A(G)$ za izvornike koji imaju jedinstven završni čvor koji se poklapa sa početnim čvorom. Skup svih takvih izvornika specijalnog oblika označimo sa M .

Neka je $G \in M$, $/\!/G/\!/=1$, tj. G ima oblik predstavljen na sl. 1. Tada je

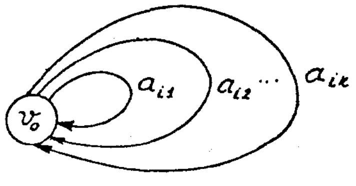
$$A(G) = \langle a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_k} \rangle .$$

Neka je za svaki $G \in M$, takav da je $/\!/G/\!/ \leqslant n$ već određeno $A(G)$. Odredimo za proizvoljni izvornik $G \in M$, $/\!/G/\!/=n+1$ regularan izraz $A(G)$. Neka je v_0 početni čvor izvornika G . Razmotrimo proizvoljni prosti cikl π izvornika G , koji prolazi kroz početni čvor v_0 , sl. 2. Ako je $k=0$, tada je $R(\pi) = a_{i_1}$. Ako je $k>0$ razmotrimo izvornike $G_1 = G^{v_1}_{v_0}$, ...

$G_k = G^{v_k}_{v_0 v_1 \dots v_{k-1}}$. Prema indukcijskoj hipotezi već su određeni izrazi $R_1 = A(G_1)$, ... , $R_k = A(G_k)$. Neka je $R(\pi) = a_{i1} R_1 a_{i2} R_2 \dots a_{ik} R_k a_{ik+1}$.
Tada je

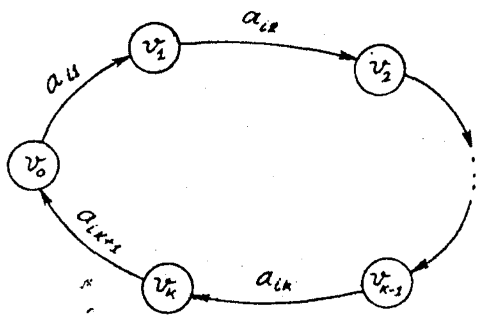
$$A(G) = \langle \bigvee_{\pi \in C} R(\pi) \rangle$$

gde je C skup svih prostih puteva izvornika G , koji pro-



Sl.1.

laze kroz njegov početni čvor v_0. Prema tome za svaki izvornik G iz M već smo odredili $A(G)$.



Sl.2.

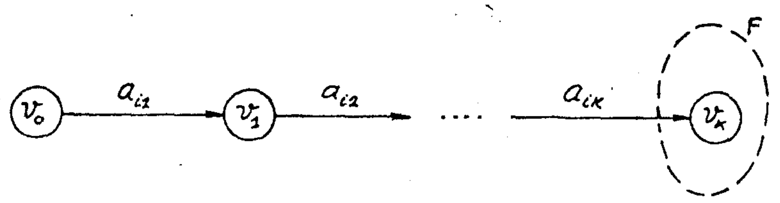
Neka je G proizvoljan izvornik sa početnim čvorom v_0 i skupom F završnih čvorova. Razmotrimo proizvoljan prosti put π iz čvora v_0 u završni čvor v_k , sl.3. Neka je $G_0 = G^{v_0}_V$, $G_1 = G^{v_1}_{v_0}$, ... , $G_k = G^{v_k}_{v_0 v_1 \dots v_{k-1}}$ i neka je $R_0 = A(G_0)$, $R_1 = A(G_1)$, ... , $A_k = A(G_k)$. Uzmimo da je $R(\pi) = R_0 a_{i1} R_1 \dots a_{ik} R_k$.
Ako $v_0 \notin F$, tada je

$$A(G) = \bigvee_{\pi \in P} R(\pi)$$

gde je P skup svih prostih puteva iz čvora v_0 u čvorove iz skupa F . Ako je $v_0 \in F$, onda uzimamo da je

$$A(G) = \bigvee_{\pi \in P} R(\pi) \vee R_0$$

Korektnost opisanog algoritma analize A dokazuje se u teoremi 1.1.1.



Sl.3.

Neka je $\tilde{R} = \{R : R = A(G)\}$.

U cilju opisa strukture izraza iz $\tilde{R}$ uvodimo nekoliko pomoćnih pojmova.

Ako regularan izraz ima oblik $R = R_1 \vee \ldots \vee R_k$ i ako regularni izrazi R_i ($1 \leq i \leq k$) nisu disjunkcije, onda $R_1, \ldots, R_k$ nazivamo <u>članovima izraza</u> R . Ako regularan izraz R nije disjunkcija, onda je on član samoga sebe.

Definišimo induktivno pojam <u>grane regularnog izraza</u> nad azbukom $\mathcal{A}$.

1° Grana prazne reči je sama ta reč.

2° Ako je a proizvoljno slovo azbuke $\mathcal{A}$, onda su njegove grane prazna reč i samo slovo a .

3° Ako je $R = R_1 \vee \ldots \vee R_k$ regularan izraz, onda su njegove grane, grane izraza $R_1, \ldots, R_k$.

4° Grane regularnog izraza $R = \mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_k$ su svi mogući izrazi oblika $\mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_i \mathcal{P}$, gde je $\mathcal{P}$ $(1 \leq i \leq k-1)$ grana izraza $\mathcal{P}_{i+1}$.

5° Grana regularnog izraza $R = \langle \mathcal{P} \rangle$ je e i proizvoljni izraz oblika $\langle\mathcal{P}\rangle\mathcal{L}$, gde je $\mathcal{L}$ grana izraza $\mathcal{P}$.

Neka $\mathcal{R} \prec \mathcal{P}$ označava da je regularan izraz $\mathcal{R}$ grana regularnog izraza $\mathcal{P}$.

Neka se regularan izraz $\mathcal{P}$ može predstaviti u obliku $\mathcal{L}a\mathcal{M}$, gde $\mathcal{L}a \not\prec \mathcal{Q}$ i neka postoji b takvo da je $\mathcal{L}b \prec \mathcal{Q}$. Tada kažemo da je regularan izraz $\mathcal{P}$ <u>razdvojiv</u> od regularnog izraza $\mathcal{Q}$ i pišemo $\mathcal{P} \succ \mathcal{Q}$. $\mathcal{P}$ je <u>slabo razdvojiv</u> od $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{P} \succcurlyeq \mathcal{Q}$) , ako je $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$ i ako je ili $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, ili $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$, ili $\mathcal{P} \succ \mathcal{Q}$, ($\mathcal{L},\mathcal{M}$ - regularni izrazi, a , b - slova).

Neka regularan izraz $\mathcal{R}$ ima oblik

$$\mathcal{P}_0\langle\mathcal{Q}_1\rangle\mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_{m-1}\langle\mathcal{Q}_m\rangle\mathcal{P}_m$$

$m \geq 0$, gde je $\mathcal{P}_i$ ($0 \leq i \leq m$) reč azbuke $\mathcal{A}$ i $\mathcal{P}_i \neq e$ za $i \neq 0, m$. Ako je za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$ izraz

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{P}_i\langle\mathcal{Q}_{i+1}\rangle\mathcal{P}_{i+1} \cdots \langle\mathcal{Q}_m\rangle\mathcal{P}_m$$

slabo razdvojiv od izraza $\mathcal{R}$, tada kažemo da je $\mathcal{R}$ <u>član prvog tipa</u>. Ako je osim toga $\mathcal{P}_0 \neq e$, $\mathcal{P}_m \neq e$ i za proizvoljno $i \in \{1, \ldots, m\}$ izraz $\mathcal{R}_i$ razdvojiv od izraza $\mathcal{Q}_i$, tada $\mathcal{R}$ nazivamo <u>članom drugog tipa</u>.

Sledeća teorema opisuje skup svih regularnih izraza koji se dobijaju algoritmom A analize izvornika.

<u>Teorema 1.1.2.</u> Regularan izraz $\mathcal{R}$ pripada skupu regularnih izraza $\tilde{\mathcal{R}}$, tada i samo tada ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1) Svaki član izraza $\mathcal{R}$ je član prvoga tipa , pri čemu slabo razdvojiv od proizvoljnog drugog njegovog člana.

2) Ako $\mathcal{R}$ sadrži izraz oblika $\langle\mathcal{P}\rangle$, tada je svaki član izraza $\mathcal{P}$ član drugog tipa, pri čemu razdvojiv od proizvoljnog drugog njegovog člana.

Sada razmotrimo problem obrnut problemu analize izvornika, tj. problem sinteze izvornika.

Neka je regularan događaj zadat regularnim izrazom R. Postupak određivanja izvornika G, takvog, da je $|G| = |R|$ nazivamo sintezom izvornika G.

Radi opisa algoritma sinteze izvornika S uvedimo nekoliko novih pojmova.

Mestom razdvajanja u regularnom izrazu R nazovimo specijalni znak, vertikalnu liniju, postavljenu između proizvoljna dva znaka toga izraza (uključujući i zagrade). Mesto koje se nalazi levo od prvog simbola izraza R nazovimo početnim mestom, a mesto koje se nalazi desno od poslednjeg simbola izraza R poslednjim ili konačnim.

Ako se iz mesta α regularnog izraza R može preći u mesto β, koristeći samo prelaz preko e, tada kažemo da je mesto β podređeno mestu α.

Uvode se sledeća pravila podređenosti mesta.

1. Početna mesta svih članova izraza R zatvorenog u obične ili iteracione zagrade, podređena su mestu koje se nalazi neposredno levo od početne zagrade.

2. Mesto , koje se nalazi neposredno desno od zatvorene (desne zagrade), podređeno je konačnim mestima svih članova izraza zatvorenog u odgovarajuće zagrade, a u slučaju iteracionih zagrada , takođe i mestu, koje se nalazi neposredno levo od odgovarajuće otvorene (leve) zagrade.

3. Početna mesta svih članova izraza zatvorenog u iteracione zagrade, podređena su mestu, koje se nalazi neposredno desno od odgovarajuće desne (zatvorene) zagrade.

4. Mesto koje se nalazi neposredno desno od simbola prazne reči, podređeno je mestu koje se nalazi neposredno levo od toga simbola.

5. Ako je mesto γ podređeno mestu β, a mesto β podređeno mestu α, tada je i mesto γ podređeno mestu α.

6. Svako mesto podređeno je samome sebi.

7. Ne postoje drugi slučajevi podređenosti mesta.

Neka je p reč u azbuci $\mathcal{A}$ nad kojom je zadan regularan izraz R. Uvedimo induktivno, definiciju mesta β, koje <u>p - sledi</u> za mestom α toga izraza.

1) Mesto β e - sledi za mestom α, tada i samo tada, ako je β podređeno α.

2) Neka mesto β p - sledi za mestom α i neka je mesto γ podređeno mestu β, pri čemu se neposredno desno od mesta γ nalazi slovo a. Tada mesto δ, koje se nalazi neposredno desno od slova a, pa - sledi za mestom α.

Ukoliko mesto β p - sledi za mestom α, tada drugačije govorimo da je mesto α reči p povezano sa mestom β.

<u>Osnovnim mestom</u> regularnog izraza R, zadatog nad azbukom $\mathcal{A}$, nazivamo mesto neposredno levo od kojeg se nalazi slovo te azbuke, a takođe i početno mesto. Osnovno mesto izraza nazivamo <u>finalnim</u>, ako mu je podređeno konačno mesto toga izraza. Mesto izraza R neposredno desno od kojega se nalazi slovo azbuke $\mathcal{A}$ nazivamo predosnovnim.

Odredimo sada izvornik $G = S(R)$ nad azbukom $\mathcal{A}$ koja se podudara sa azbukom zadatog izraza R, tako da je $|G| = |R|$.

Za početni čvor v_o izvornika $G = S(R)$ uzmimo početno mesto izraza R. Neka je a proizvoljno slovo azbuke $\mathcal{A}$. Odredimo skup v_a svih osnovnih mesta izraza R, koja a-

- slede za njegovim početnim mestom. Ako je $v_a \neq \emptyset$, tada je v_a čvor izvornika G, u koji ulazi rebro koje izlazi iz čvora v_0 i čija je oznaka slovo a. Ukoliko je $v_a = \emptyset$, tada iz čvora v_0 ne izlazi rebro obeleženo slovom a. Pretpostavimo da je v već konstruisani čvor izvornika G, koji je ustvari neprazan skup osnovnih mesta izraza R. Za proizvoljno slovo b azbuke A odredimo skup v_b svih osnovnih mesta izraza R, koja b - slede bar za jednim mestom skupa osnovnih mesta v. Ako je $v_b = \emptyset$, tada se iz čvora v ne konstruiše rebro obeleženo slovom b. Ako je $v_b \neq \emptyset$ i ako se podudara sa nekim već konstruisanim čvorom w izvornika G, tada konstruišemo rebro iz čvora v u čvor w i označavamo ga slovom b. Ako je $v_b \neq \emptyset$ i ne poklapa se ni sa jednim od već konstruisanih čvorova, tada konstruišemo novi čvor v_b i rebro ρ, koje vodi iz v u v_b, označavajući to rebro slovom b. Čvor v konstruisanog izvornika G je završni ako sadrži bar jedno finalno mesto izraza R. (Završne čvorove izvornika G označavamo specijalno, dvostrukim kružićima.) Primetimo, da ako je k broj svih pojavljivanja slova azbuke A u izrazu R, tada broj čvorova izvornika G nije veći od 2^{k+1}. Korektnost opisanog algoritma sinteze S dokazuje se u teoremi 1.2.1.

Put $\pi = v_0 \rho_1 v_1 \dots \rho_\ell v_\ell$ $(\ell \geqslant 0)$ (v_i - čvorovi, ρ_i - rebra) izvornika G sa početnim čvorom v_0, čiji su čvorovi $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}$ međusobno različiti, zovemo <u>poluprostim putem</u>.

Neka je $\pi = v_0 \rho_1 v_1 \dots \rho_\ell v_\ell$ poluprosti put izvornika G i ρ rebro iz čvora v_ℓ u čvor v. Svedeni put $\overline{\pi\rho}$ puta $\pi\rho$ definišemo na sledeći način:

a) Ako je $v_\ell \neq v_i$ ($0 \leq i \leq \ell-1$), tada je $\overline{\pi\rho} = \pi\rho$.

b) Ako je $v_\ell = v_i$ ($0 \leq i \leq \ell-1$), tada je $\overline{\pi\rho} = v_0\rho_1 v_1 \ldots \rho_i v_i \rho v$.

Očigledno $\overline{\pi\rho}$ je ponovo poluprost put.

Neka je G izvornik nad azbukom $\mathcal{A}$ i neka su $R = A(G)$ regularan izraz dobijen algoritmom A analize izvornika G, $G' = S(A(G))$ izvornik konstruisan algoritmom S sinteze izvornika po izrazu $R = A(G)$. U vezi sa teoremom 1.1.2. , koja opisuje skup $\tilde{R}$, prirodno se postavlja pitanje opisa skupa izvornika koji se dobijaju kao rezultat primene algoritma sinteze S na regularne izraze iz $\tilde{R}$, a takođe i pitanje uzajamne zavisnosti izvornika G i $S(A(G))$. Sledeće teoreme 1.2.2. i 1.3.1. daju odgovor na postavljena pitanja.

<u>Teorema 1.2.2.</u> Neka je G izvornik i $G' = S(A(G))$. Tada je G' izomorfan izvorniku $\tilde{G}$, konstruisanom po G na sledeći način:

a) Čvorovi izvornika $\tilde{G}$ su poluprosti putevi izvornika G , pri čemu je početni čvor prazan put, a završni čvorovi putevi koji vode završnim čvorovima izvornika G .

b) Ako je π poluprost put u G , koji vodi u čvor v i ako iz v izlazi rebro ρ obeleženo slovom a , tada iz čvora π izvornika $\tilde{G}$ konstruiše se rebro, obeleženo slovom a , u čvor $\overline{\pi\rho}$.

Algoritmi A analize izvornika i S sinteze izvornika nazivaju se <u>saglasnim</u> na nekom izvorniku G , ako je izvornik $S(A(G))$ izomorfan izvorniku G .

<u>Teorema 1.3.1.</u> Algoritmi A analize izvornika i S sinteze izvornika su saglasni, tada i samo tada, ako je izvornik G drvo sa korenom u početnom čvoru.

Ocenimo broj čvorova izvornika $S(A(G))$ u odnosu na izvornik G .

Označimo sa $\tau(G)=\frac{\|G'\|}{\|G\|}$, gde su G - izvornik, $R=A(G)$, $G'=S(A(G))$.

Važi sledeća teorema.

Teorema 1.3.2. Neka je $\tau(n)=\max\limits_{\|G\|=n}\tau(G)$, $\tilde{\tau}(n)=\min\limits_{\|G\|=n}\tau(G)$.

Tada je

$$\tau(n)=\begin{cases}\frac{m^{n+1}-1}{n(m-1)}, & m>1\\ \frac{n+1}{n}, & m=1\end{cases}$$

$$\tilde{\tau}(n)=1.$$

U radovima [12,14,15,16,17] dobijen je niz rezultata , koji dodiruju problem ocene složenosti izvornika G konstruisanog po regularnom izrazu R zadate složenosti. Razmotrimo obrnut problem, vezan za ocenu složenosti regularnih izraza.

Označimo sa $L_A(n)=\max\limits_{\|G\|=n}\|A(G)\|$, gde $\|R\|$ označava složenost regularnog izraza R .

Teorema 2.1.1. Za proizvoljne prirodne brojeve m i n tačne su sledeće nejednakosti

$$2\cdot m^{\frac{n^2}{8}} \le L_A(n) \le 4\cdot m^{\frac{n^2}{2}+\frac{5n}{2}}.$$

Važno je uočiti da se može konstruisati algoritam A_1 analize izvornika, koji predstavlja modifikaciju algoritma A i za koji funkcija $L_{A_1}(n)=\max\limits_{\|G\|=n}\|A_1(G)\|$ raste znatno sporije od $L_A(n)$. Za opis algoritma A_1 potrebni su nam sledeći pojmovi.

Ako je G izvornik sa početnim čvorom v_0 i $\pi=v_0\rho_1v_1\cdots\rho_sv_s$ prost put u G , kažemo da izvornik $G(\pi)=G^{v_s}_{v_0v_1\dots v_{s-1}}$ odgovara putu π .

Neka je $\mathfrak{M}$ konačan skup reči azbuke A . Drvo $T(\mathfrak{M})$ nazivamo odgovarajućim skupu reči $\mathfrak{M}$, ako su mu čvorovima uzajamno jednoznačno pridruženi počeci reči iz $\mathfrak{M}$ (uključujući i praznu reč) , pri čemu , ako je čvoru v pridružena reč p i čvoru w reč pa ($a \in \mathcal{A}$) tada je rebro iz v u w obeleženo slovom a .

Algoritam A_1 analize izvornika konstruišimo induktivno na sledeći način.

Ako se izvornik G sastoji samo iz jednog čvora i ako nema rebara, tada je $A_1(G)=A(G)$.

Neka je $G \in M$, $\|G\|=1$. Tada je $A_1(G)=A(G)$.

Pretpostavimo da je za svako $G \in M$, $\|G\|=n$ već određeno $A_1(G)$ i neka je $G \in M$, $\|G\|=n+1$ sa početnim čvorom v_0 . Razmotrimo skup $\mathfrak{M}$ svih reči koje odgovaraju prostim putevima izvornika G , koji prolaze kroz v_0 i konstruišimo drvo $T(\mathfrak{M})$. Reč pridruženu čvoru v drveta $T(\mathfrak{M})$ označimo sa p_v . Svakom čvoru v drveta $T(\mathfrak{M})$ pridružimo takođe put π_v izvornika G , koji odgovara reči p_v . Lako je uočiti da je put π prost ukoliko čvor v drveta $T(\mathfrak{M})$ nije krajnji. Pridružimo svakom čvoru v drveta $T(\mathfrak{M})$ regularan izraz R_v na sledeći način. Ako je v krajnji čvor drveta $T(\mathfrak{M})$ i ako u njega ulazi rebro obeleženo slovom a , tada je $R_v=a$. Neka je v čvor $T(\mathfrak{M})$ i neka u v ulazi rebro obeleženo slovom a i izlaze rebra koja vode u čvorove v_1, v_2 , ... , v_k za koje su izrazi R_{v_1}, R_{v_2}, ... , R_{v_k} već određeni. Tada uzimamo da je $R_v = a A_1(G(\pi_v)) \cdot (R_{v_1} \vee \ldots \vee R_{v_k})$. Ako je v_0 koren drveta $T(\mathfrak{M})$ i iz v_0 vode rebra u čvorove v_1 , v_2 , ... , v_s za koje su već određeni izrazi R_{v_1}, R_{v_2}, ... , R_{v_s} tada je $R_{v_0}=R_{v_1} \vee \ldots \vee R_{v_s}$. Konačno imamo da je u ovom specijalnom slučaju

$$A_1(G)=\langle R_{v_0} \rangle .$$

Neka je G proizvoljan izvornik čiji je početni čvor v_o i F skup završnih čvorova. Razmotrimo skup $\mathcal{M}$ svih reči koje odgovaraju prostim putevima izvornika G iz čvora v_o u neki iz čvorova skupa F i konstruišimo drvo $T(\mathcal{M})$. Kao i gore označimo sa p_v reč koja odgovara čvoru v, a sa π_v put izvornika G koji odgovara reči p_v. Označimo takođe, sa ω_v poslednji čvor puta π_v. Očigledno, put π_v je prost. Takođe kao i gore, svakom čvoru v drveta $T(\mathcal{M})$ pridružimo regularan izraz R_v na sledeći način. Neka je v krajnji čvor drveta $T(\mathcal{M})$ u koji uvire rebro obeleženo slovom a. Tada je $R_v = a A_1(G(\pi_v))$. Neka je v čvor $T(\mathcal{M})$ različit od početnog i neka u v ulazi rebro obeleženo slovom a i izlaze rebra koja vode u čvorove $v_1, v_2, \ldots, v_z$ za koje su izrazi $R_{v_1}, R_{v_2}, \ldots, R_{v_z}$ već određeni. Tada, ako $\omega_v \in F$, uzimamo da je $R_v = a A_1(G(\pi_v))(e \vee R_{v_1} \vee \ldots \vee R_{v_z})$, a ako $\omega_v \notin F$, $R_v = a A_1(G(\pi_v))(R_{v_1} \vee \ldots \vee R_{v_z})$. Ako je v_o koren drveta $T(\mathcal{M})$ iz kojeg vode rebra u čvororove $v_1, v_2, \ldots, v_t$ za koje su već određeni izrazi $R_{v_1}, R_{v_2}, \ldots, R_{v_t}$, onda je

$$R_{v_o} = \begin{cases} A_1(G(\pi_{v_o}))(R_{v_1} \vee R_{v_2} \vee \ldots \vee R_{v_t}), & \omega_{v_o} \notin F \\ A_1(G(\pi_{v_o}))(e \vee R_{v_1} \vee \ldots \vee R_{v_t}), & \omega_{v_o} \in F \end{cases}$$

Konačno imamo da je

$$A_1(G) = R_{v_o}$$

Uočimo da je dokaz korektnosti algoritma analize A_1 izvornika sasvim analogan dokazu korektnosti algoritma A analize izvornika koji se daje u teoremi 1.1.1.

<u>Teorema 2.2.1.</u> Ako je $L_{A_1}(n) = \max_{\|G\|=n} \|A_1(G)\|$, onda je

$$2 \cdot m^n \leq L_{A_1}(n) \leq 5 \cdot m^{3n}.$$

Neka je $R(G)$ regularan izraz minimalne složenosti, takav da je $|R(G)|=|G|$ i neka je $\mathcal{L}(n)=\max\limits_{\|G\|\leq n}\|R(G)\|$. Tada za proizvoljan algoritam $\mathcal{A}$ analize izvornika funkcija $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(n)=$ $=\max\limits_{\|G\|\leq n}\|\mathcal{A}(G)\|$, uzeta kao mera efektivnosti algoritma $\mathcal{A}$, majorira funkciju $\mathcal{L}(n)$. Ponašanje funkcije $\mathcal{L}(n)$ može se okarakterisati sledećim tvrđenjem.

Teorema 2.3.1.

$$\mathcal{L}(n)\geqslant\frac{2m}{\log_2 m}\cdot n\cdot\log_2 n.$$

Iz teoreme 2.3.1. specijalno sledi, da nije moguće poboljšati algoritam analize A do te mere kako bi se njime dobijali regularni izrazi čija bi složenost linearno zavisila od složenosti izvornika.

Navedimo dalje, nekoliko tvrđenja vezanih za ispitivanje, u određenom smislu, optimalnosti razmatranih algoritama.

Označimo sa $\mathcal{K}_n$ skup izvornika čija složenost nije veća od n, a sa $\mathcal{K}'_n$ skup svih izvornika G iz $\mathcal{K}_n$ za koje je izraz $A(G)$ minimalan. Pomoću $|\mathcal{K}|$ označimo broj izvornika klase $\mathcal{K}$.

Sledeće tvrđenje pokazuje da "skoro uvek" regularan izraz dobijen pomoću algoritma A nije minimalan.

Teorema 3.1.1. Ako $n\to\infty$, onda $\dfrac{|\mathcal{K}'_n|}{|\mathcal{K}_n|}\longrightarrow 0.$

Pored navedenog tvrđenja mogu se ukazati dve beskonačne klase $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ izvornika sa svojstvom da primena algoritma A na ove klase daje respektivno samo minimalne i samo neminimalne regularne izraze.

Neka je $\mathcal{K}_1$ klasa izvornika oblika kao na Sl., gde je $a_{i\,r_i}\neq a_{j\,r_j}$ za $i\neq j$ i v_f jedinstveni finalni čvor, a v_0 početni.

Neka je takođe $\mathcal{K}_2$ klasa izvornika koji nemaju više od m završnih čvorova (m je broj slova azbuke $\mathcal{A}$).

Teorema 3.1.2.

a) Za proizvoljan izvornik G iz $\mathcal{K}_1$ izraz $A(G)$ je minimalan.

b) Za proizvoljan izvornik G iz $\mathcal{K}_2$ izraz $A(G)$ nije minimalan.

Situacija analogna teoremi 3.1.2. pojavljuje se i za usavršene algoritme sinteze V.M. Gluškova [5] . Polazeći od algoritma S sinteze izvornika V.M. Gluškov je precizirao i predložio niz njegovih izmena, koje omogućuju dobijanje izvornika sa manjim brojem čvorova . Ove izmene ćemo opisati u nešto modificiranom vidu koji je više podesan za ispitivanje kvalitativnih karakteristika izvornika. Uvedimo nekoliko novih pojmova.

Osnovna mesta regularnog izraza R , zadatog nad azbukom $\mathcal{A}$ nazivamo odgovarajućim, ako su skupovi reči azbuke $\mathcal{A}$ koji povezuju početno mesto izraza R sa svakim od tih mesta jednaki.

Osnovna mesta $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ izraza R nazivamo sličnim, ako su istovremeno finalna ili nefinalna, pri čemu za proizvoljno slovo a iz $\mathcal{A}$ skupovi $M_1, \ldots, M_\ell$ osnovnih mesta izraza R koja a - slede za mestima $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ su jednaki ili postaju jednaki ako se u njima mesta $\alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ zamene mestom α_1 .

Na regularan izraz R primenjuje se tzv. operacija izjednačavanja mesta. Ona se sastoji u izjednačavanju grupa odgovarajućih ili sličnih mesta. Uočimo da ako je na neku grupu masta izraza R bilo moguće primeniti proizvoljni iz kriterija izjednačavanja tih mesta, posle primene jednog iz njih može se dogoditi da se više ne može primeniti drugi.

Neka je η proizvoljan niz izjednačavanja odgovarajućih i sličnih mesta izraza R . Skup mesta izraza R koji se dobija kao rezultat primene niza izjednačavanja mesta η nazivamo uopštenim mestom izraza R , koji odgovara nizu izjednačavanja η .

Neka je p reč azbuke A nad kojom je zadat regularan izraz R . Uopšteno mesto β izraza R p - sledi za uopštenim mestom α toga izraza, ako neko osnovno mesto m_β iz β p - sledi bar za jednim mestom m_α iz α . Takođe ćemo govoriti da je mesto β dostižno iz mesta α po reči p ili da reč p povezuje uopšteno mesto α sa uopštenim mestom β .

Neka je R regularan izraz i η proizvoljni niz izjednačavanja odgovarajućih i sličnih mesta toga izraza. Konstruišimo tj. odredimo izvornik $G = S(\eta, R)$ nad azbukom A , zadatog izraza R , takav da je $/R/ = /S(\eta, R)/$. Algoritam dobijanja izvornika $G = S(\eta, R)$ nazivamo <u>usavršenim algoritmom sinteze</u> izvornika V.M. Gluškova. Ovaj algoritam ćemo iz praktičnih razloga označavati sa $S(\eta, R)$, imajući uvek u vidu razliku između samoga algoritma i rezultata njegove primene na konkretni regularan izraz.

Za početni čvor v_0 izvornika $G = S(\eta, R)$ uzimamo uopšteno mesto regularanog izraza R , koje sadrži njegovo početno mesto. Nije teško uočiti da je takvo mesto jedinstveno za R . Neka je a proizvoljno slovo iz A . Odredimo skup v_a svih uopštenih mesta izraza R , koja a - slede za njegovim početnim mestom. Ako $v_a \neq \phi$, onda je v_a čvor izvornika $G = S(\eta, R)$ u koji uvire rebro iz čvora v_o obeleženo slovom a . Pretpostavimo da je v već određeni čvor izvornika G , koji ustvari predstavlja neprazan skup uopštenih mesta izraza R . Za proizvoljno slovo b azbuke A odredimo skup v_b svih uopštenih mesta izraza R , koja b - slede bar za jednim uopštenim mestom skupa uopštenih mesta v . Ako je $v_b = \phi$, onda iz čvora v ne izlazi rebro obeleženo slovom b . Ako je $v_b \neq \phi$ i ako se poklapa sa nekim već dobijenim čvorom w izvornika $G = S(\eta, R)$, onda se konstruiše rebro iz v u w i označava slovom b . Ako se $v_b \neq \phi$ ne poklapa ni sa jednim od već konstruisanih čvorova, tada konstruišemo novi čvor v_b i rebro ρ iz v u v_b , obeležavajući ga sa b . Čvor v konstruisanog izvornika $G = S(\eta, R)$ je završni ako sadrži bar jedno iz uopštenih finalnih mesta izraza R .(Uopšteno mesto izraza R je finalno uopšteno mesto toga izraza, ako sadrži bar jedno finalno mesto izraza R).

Nije teško pokazati da za proizvoljan regularan izraz R i niz η izjednačavanja odgovarajućih i sličnih mesta toga izraza važi jednakost $|S(\eta, R)| = |R|$.

Neka je v proizvoljan čvor izvornika G i G_v izvornik koji se dobija iz izvornika G izborom čvora v za početni čvor i udaljavanjem svih onih čvorova izvornika G koji nisu dostižni iz v zajedno sa njima susednim rebrima. Različite čvorove v_1 i v_2 izvornika G nazivamo <u>ekvivalentnim</u>, (označavamo $v_1 \sim v_2$) , ako je $|G_{v_1}| = |G_{v_2}|$.

Izvornik G nad azbukom A nazivamo minimalnim ukoliko ne postoji izvornik G' nad $\mathcal{A}$ sa manjim brojem čvorova, takav da je $/G/ = /G'/$.

Nije teško dokazati tačnost sledećeg tvrđenja.

Tvrđenje. Izvornik G je minimalan tada i samo tada, kada mu nisu ekvivalentna proizvoljna dva čvora.

Reči p i q nazivamo ciklički sličnim , ako postoje reči z_1 i z_2 , takve da je $p = z_1^k$, $q = z_2^\ell$ i da se z_1 i z_2 dobijaju cikličkim pomeranjem jedna iz druge, $(k,\ell \in N)$.

Neka je $\mathcal{M}$ klasa svih regularnih izraza iz $\hat{\mathcal{R}}$ koji imaju oblik $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \vee \dots \vee \mathcal{D}_s$, $(s \geq 1)$, gde je $\mathcal{D}_i = \mathcal{P}_{i0} \langle Q_{i1} \rangle \mathcal{P}_{i1} \dots$ $\dots \mathcal{P}_{is_i-1} \langle Q_{is_i} \rangle \mathcal{P}_{is_i}$ $(s_i \geq 0)$, $\mathcal{P}_{ij}$, Q_{ij} reči; $\mathcal{P}_{ij}, Q_{ij} \neq e$ za $j \neq 0, s_i$; poslednje slovo reči $\mathcal{P}_{ij}$ je različito od poslednjeg slova reči $Q_{i,j+1}$, početno slovo reči $\mathcal{P}_{ij}$ različito je od početnog slova reči Q_{ij} .

Označimo sa $\mathcal{M}_1$ skup svih regularnih izraza iz $\mathcal{M}$ čije reči Q_{is_i} nisu ciklički slične , $(1 \leq i \leq t$).

Neka je dalje $\mathcal{M}_2$ klasa svih regularnih izraza iz $\mathcal{M}$ za koje postoje $k, \ell \in \{1, 2, \dots, t\}$, tako da je $\mathcal{D}_\ell = R_\ell \langle Q_{\ell s_\ell} \rangle \mathcal{P}_{\ell s_\ell}$, $\mathcal{D}_k = R_k \langle Q_{\ell s_\ell} \rangle \mathcal{P}_{\ell s_\ell}$, pri čemu najkraća reč događaja $/R_j/$ $(j \in \{k, \ell\})$ nije početak nijedne reči događaja $/\mathcal{D}_r/$ za $r \neq j$ i dužina reči (broj slova reči) $Q_{\ell s_\ell}$ veća je od jedinice.

Teorema 3.2.1.

a) Za svaki regularan izraz $\mathcal{D}$ iz $\mathcal{M}_1$ postoji takav niz izjednačavanja η , za koji je izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$ minimalan.

b) Za proizvoljan izraz $\mathcal{D}$ iz $\mathcal{M}_2$ i niz izjednačavanja η izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$ nije minimalan.

Sada pređimo na formalni opis sadržaja ovoga rada. Rad se sastoji iz tri glave.

Prva glava je posvećena ispitivanju kvalitativnih karakteristika algoritma analize A i sinteze S izvornika. Osnovni rezultati formulisani su i dokazani u teoremama 1.1.2., 1.2.2., 1.3.1. i 1.3.2. Navode se i dokazuju takođe, teoreme 1.1.1. i 1.2.1. , koje opravdavaju korektnost opisanih u uvodu algoritma A analize i S sinteze izvornika.

U drugoj glavi razmatraju se metričke karakteristike algoritama A i A_1 analize izvornika. Dokazuju se osnovni rezultati formulisani u teoremama 2.1.1., 2.2.1. i 2.3.3. Osim toga u teoremi 3.3.1. dobija se asimptotska ocena broja svih regularnih događaja, koji se predstavljaju izvornicima čija složenost nije veće od n , zadatih nad osnovnom azbukom $\mathcal{A}$, Takođe se daje ocena odozdo i odozgo broja svih regularnih izraza složenosti n nad azbukom $\mathcal{A}$.

Treća glava rada posvećena je problemima efektivnosti algoritma A analize i usavršenog algoritma $S(\eta, R)$ sinteze V.M. Gluškova. Dokazuju se osnovni rezultati u teoremama 3.1.1., 3.1.2. i 3.2.1.

G L A V A I

K V A L I T A T I V N E K A R A K T E R I S T I K E A L G O R I T A M A $\mathcal{A}$ I $\mathcal{S}$ A N A L I Z E I S I N T E Z E A U T O M A T A

Ova glava sastoji se iz tri paragrafa. U § 1. dokazuje se korektnost algoritma $\mathcal{A}$ analize izvornika i opisuje se skup $\tilde{\mathcal{R}}$ svih regularnih izraza, koji se dobijaju algoritmom $\mathcal{A}$ analize. U § 2. prvo se dokazuje korektnost algoritma $\mathcal{S}$ sinteze izvornika, a zatim se opisuje skup izvornika koji se dobija kao rezultat primene algoritma $\mathcal{S}$ sinteze na izraze iz $\tilde{\mathcal{R}}$. U § 3. razmatra se zadatak saglasnosti algoritma $\mathcal{S}$ sinteze i $\mathcal{A}$ analize izvornika i ocenjuje se usložnjenje izvornika $\mathcal{S}(\mathcal{A}(G))$ u odnosu na izvornik G .

§1.1. OPIS SKUPA $\tilde{\mathcal{R}}$

Pre nego počnemo izučavanje skupa $\tilde{\mathcal{R}}$ svih regularnih izraza, koji se dobijaju algoritmom $\mathcal{A}$ analize izvornika razmotrimo pitanje korektnosti algoritma $\mathcal{A}$. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

<u>Teorema 1.1.1.</u> Za proizvoljan izvornik G tačna je sledeća jednakost $|G| = |\mathcal{A}(G)|$.

<u>Dokaz</u>. Dokažimo prvo da je teorema tačna za proizvoljni izvornik G iz skupa M izvornika specijalnog oblika.

Neka je $G \in M$, $\|G\| = 1$, tj. G ima oblik predstavljen na sl.1 i neka je p proizvoljna reč iz $|G|$. Reči p odgovara put $\pi \in |G|$ oblika $\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_s$, gde je π_i petlja koja prolazi kroz čvor v_0 obeležena slovom a_{ij} $(1 \le j \le s)$. Jasno je da svako slovo a_{ij} iz $\{a_{i1}, \ldots, a_i\}$ pripada događaju $|\mathcal{P}|$ i prema definiciji iteracije događaja, očigledno $p \in |\langle \mathcal{P} \rangle| = A(G)$. Pretpostavimo sada da je $p = a_{ij_1} a_{ij_2} \cdots a_{ij_s}$, $p \in |A(G)|$. Tada svakom slovu a_{ij_t} $(1 \le t \le s)$ odgovara član izraza $\mathcal{P} = a_{i1} \vee \cdots = a_{i1} \vee \cdots \vee a_{iz}$, a svakom članu petlja izvornika G , koja prolazi kroz čvor v_0 i obeležena je slovom a_{ij_t}. Otuda reči p odgovara put π izvornika G čija su rebra obeležena redom slovima te reči, što i pokazuje da je $p \in |G|$.

Pretpostavimo da je za svaki izvornik $G \in M$, $\|G\| \le n$ već dokazano da je $|G| = |A(G)|$. Neka je $G \in M$, $\|G\| = n+1$ i v_0 njegov početni čvor. Neke je p proizvoljna reč iz $|G|$. Za reč p u izvorniku G postoji put π iz čvora v_0 u taj isti čvor. Put π se može predstaviti u obliku $\pi = \pi_1 \cdots \pi_s$, $s \ge 1$, gde je π_i $(1 \le i \le s)$ cikl koji prolazi kroz v_0 tačno jedanput. Otuda je $p = p_1 \cdots p_s$, gde je p_i reč koja odgovara ciklu π_i . Poznato je da ciklu π_i odgovara prosti cikl $\pi_i' = v_0 \rho_{i1} v_{i1} \cdots \rho_{ik} v_{ik} \rho_{i,k+1} v_0$ za koji algoritmom A određujemo regularan izraz $R(\pi_i')$, koji je jedan od članova disjunkcije $\bigvee_{\pi_i' \in C} R(\pi_i')$ (C je skup svih prostih cikla koji prolaze kroz čvor v_0). $R(\pi_i') = a_{i1} R_{i1} \cdots a_{ik} R_{ik} a_{i,k+1}$, gde je a_{ij} $(1 \le j \le k+1)$ slovo kojim je obeleženo rebro ρ_{ij} i R_{it} regularan izraz koji predsavlja regularan događaj zadat izvornikom $G^{v_{it}}_{v_0 v_{i1} \cdots v_{it-1}}$. Prema indukcijskoj pretpostavci $|R_{it}| = |G^{v_{it}}_{v_0 v_{i1} \cdots v_{it-1}}|$. Ako p_{it} označava reč koja pripada događaju $|R_{it}|$ onda je $p_i = a_{i1} p_{i1} a_{i2} \cdots$

$\ldots a_{ik} p_{ik} a_{i,k+1}$ i $p_i \in /R(\pi_i')/$. Otuda $p = p_1 \cdots p_s$ prema definiciji iteracije, pripada događaju $/\langle \bigvee_{\pi_i' \in C} R(\pi_i') \rangle / = /A(G)/$, što je trebalo dokazati.

Obrnuto, neka je $p \in /A(G)/ = /\langle \bigvee_{\pi_i' \in C} R(\pi_i') \rangle /$. Reč p se može predstaviti u obliku $p = p_1 \cdots p_n$, gde je p_i ($1 \leq i \leq n$) reč koja pripada bar jednom od članova disjunkcije $\bigvee_{\pi_i' \in C} R(\pi_i')$. Pretpostavimo da je $p_i \in /R(\pi_i')/$. Prema algoritmu A analize izvornika izrazu $R(\pi_i') = a_{i1} R_{i1} \ldots a_{ik} R_{ik} a_{ik+1}$ odgovara prosti cikl $\tilde{\pi}_i' = v_o \rho_{i1} v_{i1} \cdots \rho_{ik} v_{ik} \rho_{ik+1} v_o$, gde je a_{il} ($1 \leq l \leq k+1$) obeležje rebra ρ_{il}, R_{im} ($1 \leq m \leq k$) regularan izraz koji odgovara izvorniku $G^{v_{im}}_{v_o v_{i1} \cdots v_{im-1}}$ za koji je prema pretpostavci indukcije $/G^{v_{im}}_{v_o v_{i1} \cdots v_{im-1}}/ = /R_{im}/$. Zbog toga, reči p_i odgovara cikl $\tilde{\pi}_i$, koji prolazi kroz v_o i čija su rebra redom obeležena njenim slovima. Tada, očigledno, reči $p = p_1 \cdots p_n$ (n - proizvoljno) odgovara put u izvorniku G koji vodi iz v_o u v_o i čija su rebra redom, kao u reči p, obeležena njenim slovima, pa je zato $p \in /G/$.

Pokažimo sada da je teorema tačna za proizvoljan izvornik G sa početnim čvorom v_o i skupom F završnih čvorova. Neka $v_o \in F$ i neka je $p \in /G/$. Reči p odgovara u izvorniku G put π iz v_o u neki čvor v_{ik} iz F. Putu π odgovara prosti put $\pi' = v_o \rho_{i1} v_{i1} \cdots \rho_{ik} v_{ik}$, $v_{ik} \in F$, a ovome član $R(\pi_i')$ izraza $A(G) = \bigvee_{\pi' \in P} R(\pi_i')$, gde je P skup svih prostih puteva iz v_o u čvorove iz F, $R(\pi') = R_o a_{i1} R_{i1} \cdots a_{ik} R_{ik}$, pri čemu je $R_o = A(G_o)$, $R_{i1} = A(G_{i1})$, ..., $R_k = A(G_{ik})$, $G_o = G^{v_o}$, $G_{i1} = G^{v_{i1}}_{v_o}$, ..., $G_{ik} = G^{v_{ik}}_{v_o v_{i1} \cdots v_{ik-1}}$. Svaki od izvornika G_o, G_{i1}, ..., G_{ik} pripada skupu M izvornika specijalnog oblika za koje je već pokazano da je $/G_o/ = /A(G_o)/$, $/G_{i1}/ = /A(G_{i1})/$, ..., $/G_{ik}/ = /A(G_{ik})/$.

Reč p pripada bar jednom iz događaja $/R(\pi')/$ i može biti zapisana u obliku $p = p_0 a_{i1} p_{i1} \dots a_{ik} p_{ik}$, gde $p_0 \in /G_0/$, $p_{im} \in /G_{im}/$ ($1 \le m \le k$), pa je zato $p \in /A(G)/$. Ako je $p \in /A(G)/$, onda se analogno tome kako je to rađeno u slučaju izvornika specijalnog oblika može pokazati da je $p \in /G/$.

Primetimo, radi potpunog dokaza teoreme, da je u slučaju kada $v_0' \in F$, rasuđivanje potpuno analogno. Teorema je dokazana.

Skup regularnih izraza $\tilde{R}$, koji se dobijaju algoritmom A analize izvornika, opisuje se sledećom teoremom.

Teorema 1.1.2. Regularan izraz R pripada skupu regularnih izraza $\tilde{R}$, tada i samo tada, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1) Svaki član izraza R je član prvoga tipa, pri čemu slabo razdvojiv od proizvoljnog drugog njegovog člana.

2) Ako R sadrži izraz oblika $\langle \mathcal{P} \rangle$, tada je svaki član izraza $\mathcal{P}$ član drugog tipa, pri čemu razdvojiv od proizvoljnog drugog njegovog člana.

Radi dokaza teoreme 1.1.2. dokažimo nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Lema 1.1.1. Za proizvoljne regularne izraze $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, ako je $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ i $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$, onda je $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$.

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukciom po složenosti n regularnog izraza $\mathcal{C}$.

Ako je $n \le 1$, onda je $\mathcal{C}$, ili e ,ili slovo azbuke i tvrđenje je očigledno.

Neka je lema tačna za svako $n \le k$. Razmotrimo izraz $\mathcal{C}$ složenosti $k+1$. Neka je $\mathcal{C} = \langle \mathcal{P} \rangle$. Ako je $\mathcal{A} = e$ ili $\mathcal{B} = e$, onda je tvrđenje očigledno. Neka je $\mathcal{A} = e$ i $\mathcal{B} \neq e$.

Prema definiciji grane regularnog izraza, grana $\mathcal{B}$ izraza $\mathcal{C}$ je izraz $\mathcal{B}=\langle\mathcal{P}\rangle\mathcal{P}'$, gde je $\mathcal{P}'\prec\mathcal{P}$, a grana $\mathcal{A}$ izraza $\mathcal{B}$ je $\mathcal{A}=\langle\mathcal{P}\rangle\mathcal{P}''$ gde je ili $\mathcal{P}''\prec\mathcal{P}$ ili $\mathcal{P}''\prec\mathcal{P}'$. U prvom slučaju očigledno je $\mathcal{A}\prec\mathcal{C}$, a u poslednjem, prema indukcijskoj hipotezi $\mathcal{P}''\prec\mathcal{P}$, odakle sledi da je $\mathcal{A}\prec\mathcal{C}$.

Neka je $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\vee\dots\vee\mathcal{C}_z$. Ako je $\mathcal{B}\prec\mathcal{C}_i$ $(1\le i\le z)$ i $\mathcal{A}\prec\mathcal{B}$, onda je prema pretpostavci indukcije $\mathcal{A}\prec\mathcal{C}_i$, pa je i $\mathcal{A}\prec\mathcal{C}$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\dots\mathcal{C}_s$. Prema definiciji grane regularnog izraza, ako je $\mathcal{B}\prec\mathcal{C}$, onda je $\mathcal{B}=\mathcal{C}_1\dots\mathcal{C}_m\mathcal{C}'_{m+1}$ $(1\le m\le s-1)$, gde je $\mathcal{C}'_{m+1}\prec\mathcal{C}_{m+1}$ i ako je $\mathcal{A}\prec\mathcal{B}$, onda je, ili $\mathcal{A}=\mathcal{C}_1\dots\mathcal{C}_n\mathcal{C}''_{n+1}$ gde je $\mathcal{C}''_{n+1}\prec\mathcal{C}_{n+1}$ $(1< n\le m+1)$, ili je $\mathcal{A}=\mathcal{C}_1\dots\mathcal{C}_m\mathcal{C}''_{m+1}$, gde je $\mathcal{C}''_{m+1}\prec\mathcal{C}'_{m+1}$ pa je $\mathcal{A}\prec\mathcal{C}$. Lema je dokazana.

<u>Lema 1.1.2.</u> Neka je $R_1=\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle\mathcal{L}_1\mathcal{P}_1\langle Q_2\rangle\mathcal{L}_2\mathcal{P}_2\dots\langle Q_i\rangle$, $R_2=\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle\mathcal{L}_1\mathcal{P}_1\langle Q_2\rangle\mathcal{L}_2\mathcal{P}_2\dots\langle Q_j\rangle\mathcal{T}$, gde je $i>j$, $\mathcal{L}_k\prec Q_k$ $(1\le k\le i-1)$, $\mathcal{P}_l\ne e$ reč $(1\le l\le i-1)$, $\mathcal{T}\prec\mathcal{L}_j\mathcal{P}_j$ ili $\mathcal{T}\prec Q_j$, pri čemu $\mathcal{L}_k a_k\prec Q_k$, gde je a_k prvo slovo reči $\mathcal{P}_k$. Tada je $R_1\not\prec R_2$.

<u>Dokaz</u>. Dokaz izvodimo indukciom po i.

Ako je $i=1$, onda je $R_1=\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle$, a $R_2=\mathcal{T}\prec\mathcal{P}_0$. Očigledno u ovom slučaju $R_1\not\prec R_2$.

Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za svako $i\le n$. Dokažimo da je ono tačno za $i=n+1$. Pretpostavimo da nije tačno, tj. da je $R_1\prec R_2$. Razmotrimo prvo slučaj kada je $\mathcal{T}\prec\mathcal{L}_j\mathcal{P}_j$. Poslednji faktor izraza R_1 je $\langle Q_i\rangle$, tako da se R_1 ne može predstaviti u obliku $\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle\mathcal{L}_1\mathcal{P}_1\dots\langle Q_j\rangle\mathcal{L}_j\mathcal{P}'_j$, gde je $\mathcal{P}'_j\prec\mathcal{P}_j$ i $\mathcal{P}_j\ne e$. Zato je R_1 grana izraza $\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle\mathcal{L}_1\mathcal{P}_1\dots\langle Q_j\rangle\mathcal{L}_j$

i takođe, na osnovu leme 1.1.1. i izraza $R_2' = \mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_1 \ldots \langle \mathcal{P}_j\rangle$ jer je $\mathcal{L}_j \prec Q_j$. Ako je $\mathcal{T} \prec Q_j$, onda je ponovo na osnovu leme 1.1.1. $R_1 \prec R_2'$. Razmotrimo granu R_1' izraza R_1 koja ima oblik $R_1' = \mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_1 \ldots \langle Q_j\rangle \mathcal{L}_j a_j$, gde je a_j prvo slovo reči $\mathcal{P}_j$. Prema lemi 1.1.1. $R_1' \prec R_2'$. No, kako $\mathcal{L}_j a_j \not\prec Q_j$ to se može predstaviti u obliku $\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_1 \ldots \langle Q_s\rangle \mathcal{T}'$, gde je $\mathcal{T}' \prec \mathcal{L}_s \mathcal{P}_s$ ili $\mathcal{T}' \prec Q_s$, ($s < j$). Konačno imamo da je $\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_1 \ldots \langle Q_j\rangle \prec$ $\prec R_1'$, tj. $\mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_1 \ldots \langle Q_j\rangle \prec \mathcal{P}_0\langle Q_1\rangle \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_1 \ldots \langle Q_s\rangle \mathcal{T}'$ što je suprotno indukcijskoj pretpostavci. Lema je dokazana.

Lema 1.1.3. Za proizvoljan regularan izraz R oblika $\langle \mathcal{P}\rangle$, koji zadovoljava uslove teoreme 1.1.2., postoji izvornik G, takav da je $\langle \mathcal{P}\rangle = A(G)$, pri čemu

(1) Izvornik G ima jedinstven završni čvor koji se poklapa sa njegovim početnim čvorom.

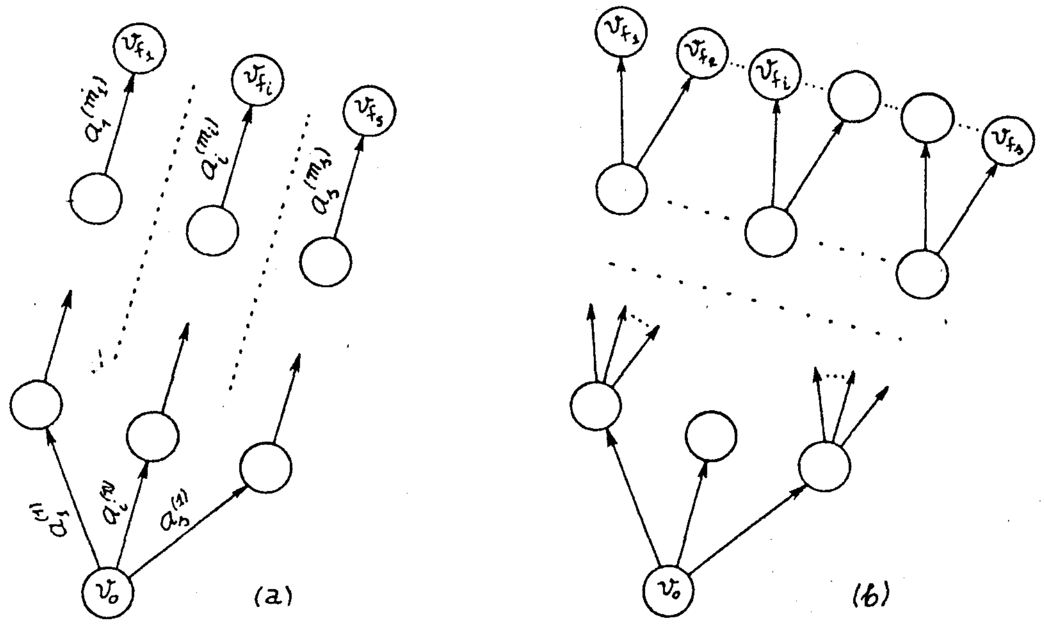
(2) Ako je S regularan izraz i $\{a_{i1}, \ldots, a_{ik}\}$ neprazan skup slova azbuke $\mathcal{A}$ za koja je izraz $S a_{ij}$ ($1 \leq j \leq k$) grana izraza $\mathcal{P}$, onda izvornik G sadrži čvor v, takav da izvornik koji se dobija iz izvornika G uzimanjem čvora v za završni čvor, predstavlja događaj $/\langle \mathcal{P}\rangle S/$ i rebra koja izlaze iz v mogu biti obeležena samo slovima $a_{i1}, \ldots, a_{ik}$.

(3) Za svaki čvor v izvornika G postoji jedinstveni prosti put, koji vodi iz početnog čvora u taj čvor.

Dokaz. Dokaz tvrđenja izvodimo po dubini d regularnog izraza R. Napomenimo da se pod dubinom regulagnog izraza R podrazumeva maksimalni broj iteracija sadržanih jedna u drugoj.

Ako je $d = 1$, onda je $\mathcal{P} = \langle \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_s\rangle$, gde je $\mathcal{P}_i$ ($1 \leq i \leq s$) reč azbuke $\mathcal{A}$. Za svaku reč $\mathcal{P}_i = a_i^{(1)} \ldots a_i^{(m_i)}$

($m_i \geqslant 0$) konstruišimo lanac rebara, koji izlazi iz čvora v_0, sl.4. U tako dobijenom drvetu izjednačimo jednako obeležena rebra prvoga sprata, zatim jednako obeležena rebra drugoga sprata koja izlaze iz jednog istog čvora itd. Konačno dobijamo drvo $\mathcal{D}$ sa početnim čvorom v_0 i skupom završnih čvorova $v_{f_1}, \ldots, v_{f_s}$, sl.4b., koje predstavlja događaj $|\mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_s|$.



Sl.4.

Lako je uočiti da je svaki čvor drveta $\mathcal{D}$ po jedinstvenom prostom putu dostižan iz početnog čvora v_0. Osim toga, neka je $Sa \prec \mathcal{P}'$, $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_s$, gde je a slovo azbuke $\mathcal{A}$ i neka je $\{a_{i1}, \ldots, a_{it}\}$ skup svih slova azbuke $\mathcal{A}$, takvih da je za regularan izraz S izraz Sa_{ij} ($1 \leq j \leq t$) grana izraza $\mathcal{P}'$, tada je lako pokazati, da drvo $\mathcal{D}$ sadrži takav čvor v, i da drvo koje se dobija iz drveta $\mathcal{D}$ izborom čvora v za završni čvor, predstavlja događaj $|S|$ čija su rebra koja izlaze iz v obeležena samo slovima $a_{i1}, \ldots, a_{it}$.

Izjednačavanjem svih finalnih čvorova drveta $\mathcal{D}$ sa čvorom v_0 dobija se izvornik G , koji kako je lako uočiti zadovoljava uslove leme.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svako $d \leq k$. Razmotrimo izraz $R = \langle \mathcal{P} \rangle$ dubine $d = k+1$. Prema uslovima teoreme 1.1.2. izraz $\mathcal{P}$ se može predstaviti u obliku

(1) $\mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_\ell$

gde je $\mathcal{P}_i$ član drugog tipa, tj.

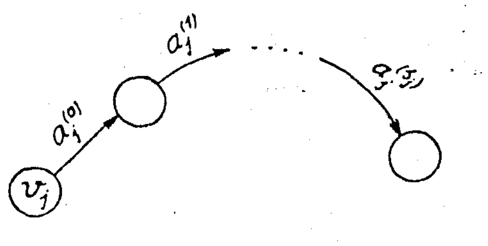
$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_0^{(i)} \langle Q_1^{(i)} \rangle \mathcal{P}_1^{(i)} \ldots \mathcal{P}_{m_i-1}^{(i)} \langle Q_{m_i}^{(i)} \rangle \mathcal{P}_{m_i}^{(i)} , \ m_i \geq 0$$

gde je $\mathcal{P}_j^{(i)}$ neprazna reč $(1 \leq j \leq m_i)$. Primetimo da se izraz $\mathcal{P}_i$ može predstaviti u obliku

$$\mathcal{P}_i = \tilde{\mathcal{P}}_0^{(i)} \langle \tilde{Q}_1^{(i)} \rangle \mathcal{L}_1^{(i)} \tilde{\mathcal{P}}_1^{(i)} \ldots \langle \tilde{Q}_{n_i}^{(i)} \rangle \mathcal{L}_{n_i}^{(i)} \tilde{\mathcal{P}}_{n_i}^{(i)} , \ 1 \leq n_i \leq m_i$$

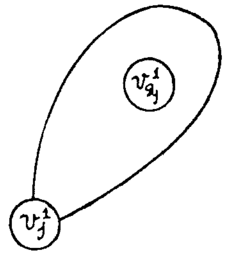
gde je $\tilde{\mathcal{P}}_s^{(i)}$ neprazna reč $(1 \leq s \leq n_i)$, $\tilde{\mathcal{P}}_0^{(i)} = \mathcal{P}_0^{(i)}$, $\tilde{Q}_1^{(i)} = Q_1^{(i)}$, $\tilde{Q}_s^{(i)} = Q_{q_s}^{(i)}$, $(2 \leq s \leq n_i)$ $q_s \in \{2, 3, \ldots, m_i\}$, $\mathcal{L}_j^{(i)} \prec \tilde{Q}_j^{(i)}$, $\mathcal{L}_j^{(i)} a_{j_i}^{(0)} \not\prec \tilde{Q}_j^{(i)}$, $a_{j_i}^{(0)}$ prvo slovo reči $\mathcal{P}_j^{(i)}$.

Uzmimo izraz $\mathcal{P}_1 = \tilde{\mathcal{P}}_0^{(1)} \langle \tilde{Q}_1^{(1)} \rangle \mathcal{L}_1^{(1)} \tilde{\mathcal{P}}_1^{(1)} \ldots \langle \tilde{Q}_{n_1}^{(1)} \rangle \mathcal{L}_{n_1}^{(1)} \tilde{\mathcal{P}}_{n_1}^{(1)}$. Za svaku reč $\tilde{\mathcal{P}}_j^{(1)} = a_j^{(0)} a_j^{(1)} \ldots$ $\ldots a_j^{(s_j)}$ konstruišimo niz rebara koji izlazi iz čvora v_j , sl.5, $(1 \leq j \leq n_1)$. Prema pretpostavci indukcije za svaki



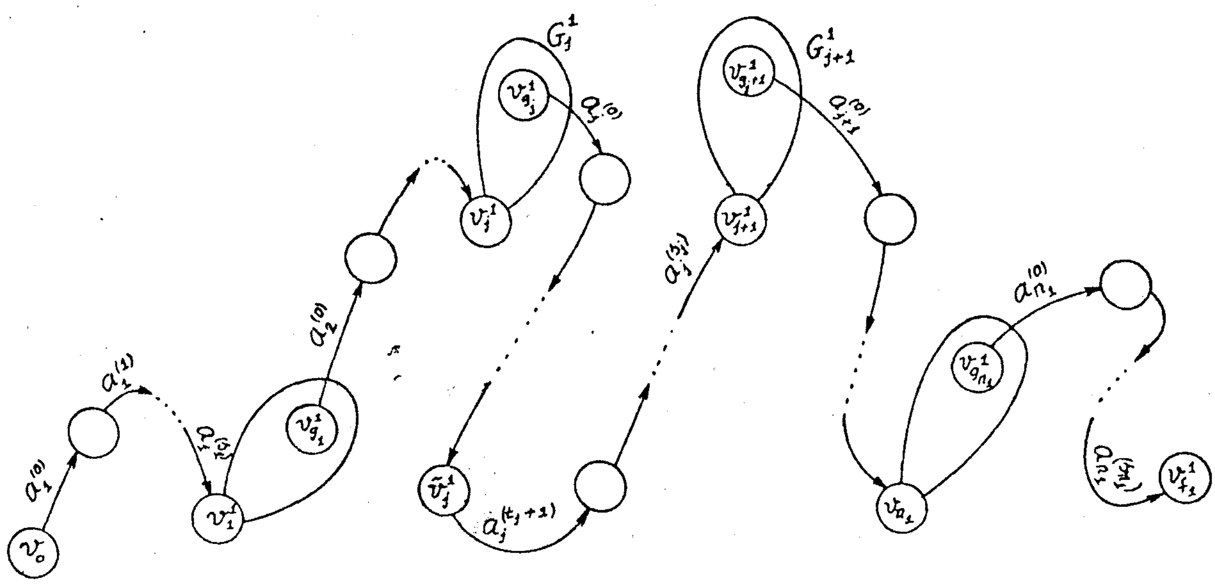
Sl.5.

izraz $\langle \tilde{Q}^{(1)} \rangle$ već umemo konstruisati izvornik G_j^1 koji zadovoljava uslove leme, (vidi sl.6), tj. $A(G_j^1) = \langle \tilde{Q}_j^{(1)} \rangle$, G_j^1 ima jedinstven finalni čvor koji se poklapa sa početnim čvorom v_j^1 i sadrži čvor $v_{q_j}^1$, takav da izvornik, koji se dobija iz izvornika G_j^1 uzimanjem toga čvora za završni čvor, predstavlja događaj $/\langle \tilde{Q}_j^{(1)}\rangle \mathcal{L}_j^{(1)}/$ i iz čvora $v^1_{q_j}$ ne izlazi rebro obeleženo slovom $a_j^{(0)}$. Ako poslednji čvor niza (lanca) rebara koji odgovara reči $\tilde{\mathcal{P}}_0^{(1)}$ spojimo sa početnim čvorom izvornika G_1^1, a zatim redom poslednji čvor niza rebara koji odgovara reči $\tilde{\mathcal{P}}_j^{(1)}$ sa početnim čvorom v^1_{j+1} izvornika G^1_{j+1} i početni čvor toga niza sa čvorom $v^1_{q_j}$ izvornika G^1_j, dobijamo neki izvornik $\mathfrak{A}_1$



Sl.6.

(vidi sl.7) sa početnim čvorom v_0 i finalnim čvorom v_{f_1}, koji očigledno predstavlja događaj $/\mathcal{P}_1/$ i za koji je $A(\mathfrak{A}_1) = \mathcal{P}_1$.



Sl.7.

Iz načina konstruisanja dobijenog izvornika, na očigledan način sledi , da u v_0 ne ulaze rebra i iz v_{f_1} ne izlaze rebra.

Neka postoji grana izraza Sa, gde je a slovo azbuke $\mathcal{A}$, i neka je $\{a_{i1}, \dots, a_{iz}\}$ skup svih slova azbuke $\mathcal{A}$ za koja u $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1$ postoji grana Sa_{ij} ($1 \leq j \leq z$). Pokažimo da u izvorniku $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1$ postoji takav čvor v da izvornik koji se dobija iz izvornika $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1$ izborom čvora v za završni čvor, predstavlja događaj $|S|$, pri čemu oznake rebara, koja izlaze iz v mogu biti samo slova $a_{i1}, \dots, a_{iz}$.

Ako je Sa grana $\tilde{\mathcal{P}}_0^{(1)}$, onda poslednje tvrđenje je očigledno. Neka izraz $\mathcal{P}_1$ sadrži bar jednu iteraciju izraza $\mathcal{P}_1$. Očigledno, Sa ima oblik $\tilde{\mathcal{P}}_0^{(1)}\langle\tilde{Q}_1^{(1)}\rangle\mathcal{L}_1^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_1^{(1)}\dots\langle\tilde{Q}_i^{(1)}\rangle\mathcal{T}$, gde je $\mathcal{T} \prec \tilde{Q}_i^{(1)}$ ili $\mathcal{T} \prec \mathcal{L}_j^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_i^{(1)}$, $\mathcal{T} \neq e$ ($1 \leq i \leq n_1$). Neka je $Sb \prec \mathcal{P}_1$. Tada se Sb može predstaviti u obliku $\tilde{\mathcal{P}}_0^{(1)}\langle\tilde{Q}_1^{(1)}\rangle\mathcal{L}_1^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_1^{(1)}\dots\langle\tilde{Q}_j^{(1)}\rangle\mathcal{T}'$, gde je $\mathcal{T}' \prec \tilde{Q}_j^{(1)}$ ili $\mathcal{T}' \prec \mathcal{L}_j^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_j^{(1)}, \mathcal{T}' \neq e$ ($1 \leq j \leq n_1$). Za $j < i$ dobijamo da je $\mathcal{P}_0^{(1)}\langle Q_1^{(1)}\rangle\mathcal{L}_1^{(1)}\mathcal{P}_1^{(1)}\dots\langle\tilde{Q}_i^{(1)}\rangle \prec Sb$, što nije moguće na osnovu leme 1.1.2. Pošto je $\mathcal{T}'$ neprazno, to je $\tilde{\mathcal{P}}_0^{(1)}\langle\tilde{Q}_1^{(1)}\rangle\mathcal{L}_1^{(1)}\mathcal{P}_1^{(1)}\dots\langle\tilde{Q}_j^{(1)}\rangle \prec Sa$ i ponovo na osnovu leme 1.1.2. za $j > i$ dolazimo do protivurečnosti. Zato je $j = i$. Na taj način , svako Sb koje je grana izraza $\mathcal{P}_1$, može se predstaviti u obliku $\mathcal{N}S'b$ gde je $\mathcal{N}' = \tilde{\mathcal{P}}_0^{(1)}\langle\tilde{Q}_1^{(1)}\rangle\mathcal{L}_1^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_1^{(1)}\dots\langle\tilde{Q}_j^{(1)}\rangle$, pri čemu je ili $S'b \prec \tilde{Q}_j^{(1)}$ ili $S'b \prec \mathcal{L}_j^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_j^{(1)}$. Označimo sa B skup svih slova b , takvih da je $S'b \prec \tilde{Q}_j^{(1)}$.

Razmotrimo tri slučaja.

(1) $S'b = \mathcal{L}_j^{(1)}$. Tada skup svih b takvih da je Sb grana $\mathcal{P}_1$ je $\{a_j^{(0)}\} \cup B$. Lako je uočiti da je u ovom slučaju za čvor v dovoljno uzeti čvor $v_{q_j}^1$ (vidi sl.7).

(2) $S' \neq \mathcal{L}_j^{(1)}$, pri čemu postoji slovo b tako da je $S'b \prec \tilde{Q}_j^{(1)}$. Tada skup svih b takvih da je $Sb \prec \mathcal{P}_1$ je B . Za čvor v uzimamo takav čvor izvornika G_j^1 , da izvornik G_j^v koji se dobija iz izvornika G_j^1 izborom čvora v za finalni čvor, predstavlja događaj $|\langle\tilde{Q}_j^{(1)}\rangle S'|$.

(3) $S' \neq \mathcal{L}_j^{(1)}$, pri čemu ni za jedno b $S'b$ nije grana izraza $\tilde{Q}_j^{(1)}$. Tada, ako je $\tilde{\mathcal{P}}_j^{(1)} = a_j^{(0)} \dots a_j^{(s_j)}$, onda je $S' = \mathcal{L}_j^{(1)} a_j^{(0)} \dots a_j^{(t_j)}$, $(1 \leq t_j \leq s_j)$, $Sb \to \mathcal{P}_1$ samo za $b = a_j^{t_j+1}$ i za čvor v dovoljno je uzeti čvor $\tilde{v}_j^1$ lanca koji odgovara reči $\tilde{\mathcal{P}}_j^{(1)}$ $(1 \leq j \leq n_1)$, koji je očigledno različit od čvorova $v_{q_j}^1$, v_{j+1}^1 (vidi sl.7).

Na taj način u svakom slučaju traženi čvor v postoji.

Pošto za svaki čvor v, prema indukcijskoj pretpostavci postoji u izvorniku G_j^1 $(1 \leq j \leq n_1)$, kojem pripada, jedinstven prosti put koji ga povezuje sa početnim čvorom v_j^1, to očigledno, ovo svojstvo poseduje i svaki čvor izvornika $\mathfrak{A}_1$.

Neka je već konstruisan izvornik $\mathfrak{A}_i$ $(2 \leq i \leq \ell)$, koji predstavlja događaj $|\mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_i|$ sa početnim čvorom v_0 i završnim čvorovima $v_{f_1}, \dots, v_{f_i}$. Neka takođe izvornik $\mathfrak{A}_i$ ima sledeće svojstvo. Ako je $R^{(i)}b$ grana izraza

$$(2)\quad \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_i \quad , (2 \leq i \leq \ell)$$

gde je b slovo i $\{b_{j1}, \dots, b_{jk}\}$ sva slova azbuke $\mathcal{A}$ za koja je izraz $R^{(i)} b_{jt}$ $(1 \leq t \leq k)$ grana izraza (2), onda u izvorniku $\mathfrak{A}_i$ postoji čvor v takav da izvornik koji se dobija iz izvornika $\mathfrak{A}_i$ izborom čvora v za finalni čvor predstavlja događaj $|R^{(i)}|$ i rebra koja izlaze iz v označena su samo slovima $b_{j1}, \dots, b_{jk}$. Neka dalje za svaki čvor v izvornika $\mathfrak{A}_i$ postoji jedinstven prosti put, koji vodi iz početnog čvora v_0 u taj čvor.

Uzmimo član $\mathcal{P}_{i+1}$ izraza (1), koji se kako je već rečeno, može predstaviti u obliku

$$\mathcal{P}_{i+1} = \tilde{\mathcal{P}}_0^{(i+1)} \langle \tilde{Q}_1^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_1^{(i+1)} \tilde{\mathcal{P}}_1^{(i+1)} \dots \langle \tilde{Q}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \tilde{\mathcal{P}}_{n_{i+1}}^{(i+1)}$$

gde je $n_{i+1} \geq 0$, $\tilde{\mathcal{P}}_s^{(i+1)}$ neprazna reč azbuke $\mathcal{A}$ ($0 \leq s \leq n_{i+1}$), $\mathcal{L}_t^{(i+1)} \prec \tilde{Q}_t^{(i+1)}$ ($1 \leq t \leq n_{i+1}$), pri čemu $\mathcal{L}_t^{(i+1)} a_t^{(o)} \not\prec \tilde{Q}_t^{(i+1)}$, gde je $a_t^{(o)}$ prvo slovo reči $\tilde{\mathcal{P}}_t^{(i+1)}$. Iz uslova 2. teoreme 1.1.2. sledi da je izraz $\mathcal{P}_{i+1}$ razdvojiv od svakog člana $\mathcal{P}_t$ ($1 \leq t \leq i$) izraza (1), tj. da se $\mathcal{P}_{i+1}$ može predstaviti u obliku $R_t^{(i+1)} a_t \mathcal{M}_t^{(i+1)}$, no postoji slovo b_t tako da je $R_t^{(i+1)} b_t \prec \mathcal{P}_t$.

Označimo sa $R_{max}^{(i+1)} a$ izraz koji ima maksimalan broj činilaca i koji nije grana ni jednog od izraza $\mathcal{P}_t$ ($1 \leq t \leq i$), pri čemu postoji bar jedno slovo b za koje je izraz $R_{max}^{(i+1)} b$ grana bar jednog izraza $\mathcal{P}_t$. Prema pretpostavci indukcije u izvorniku $\mathcal{O}_i$ postoji takav čvor v, da izvornik koji se dobija iz izvornika $\mathcal{O}_i$ izborom čvora v za završni čvor predstavlja događaj $|R_{max}^{(i+1)}|$ i rebra koja izlaze iz toga čvora mogu biti obeležena samo onim slovima b za koje je $R_{max}^{(i+1)} b \prec \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_i$. Očigledno iz čvora v ne izlazi rebro obeleženo slovom a. Neka je $\mathcal{P}_{i+1} = R_{max}^{(i+1)} a \mathcal{M}_{i+1}^{(i+1)}$, gde je $a \mathcal{M}_i^{(i+1)} = \mathcal{C} \langle \tilde{Q}_{j+1}^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_{j+1}^{(i+1)} \tilde{\mathcal{P}}_{j+1}^{(i+1)} \dots \langle \tilde{Q}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \tilde{\mathcal{P}}_{n_{i+1}}^{(i+1)}$ ($0 \leq j \leq n_{i+1}$), $\mathcal{C}$ izraz oblika $a\mathcal{C}'$. Konstruišimo iz čvora v rebro obeleženo slovom a, a zatim postupimo dalje sa izrazom $\mathcal{C}' \langle \tilde{Q}_{j+1}^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_{j+1}^{(i+1)} \tilde{\mathcal{P}}_{j+1}^{(i+1)} \dots \langle \tilde{Q}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \tilde{\mathcal{P}}_{n_{i+1}}^{(i+1)}$ kako smo postupili sa izrazom $\mathcal{P}_1$ pri konstrukciji izvornika $\mathcal{O}_1$. Konačno dobijamo izvornik $\mathcal{O}_{i+1}$ sa početnim čvorom v_o i finalnim čvorovima $v_{f_1}, \dots, v_{f_i}$, $v_{f_{i+1}}$. Očigledno, u čvor v_o ne ulaze rebra, a iz čvorova v_{f_j} ($1 \leq j \leq i+1$) ne izlaze.

Neka postoji grana Sa izraza $\mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_{i+1}$, gde je a slovo azbuke $\mathcal{A}$ i neka je $\{a_{i1}, \dots, a_{it}\}$ skup svih slova azbuke $\mathcal{A}$ za koja je $Sa_{ij} \prec \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_{i+1}$ ($1 \leq j \leq t$). Pokažimo da u izvorniku $\mathcal{O}_{i+1}$ postoji čvor v takav, da izvornik koji se dobija iz izvornika $\mathcal{O}_{i+1}$ izborom čvora v za finalni čvor predstavlja događaj $/S/$, pri čemu rebra koja izlaze iz v mogu biti obeležena samo slovima $a_{i1}, \ldots, a_{it}$.

Pretpostavimo da je za svako z $(1 \leq z \leq t)$ $Sa_{iz} \prec \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_i$. Tada očigledno, za finalni čvor v dovoljno je uzeti taj isti čvor, koji smo već uzimali za predstavljanje događaja S u izvorniku $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_i$.

Neka postoji slovo a tako da je $Sa \prec \mathcal{P}_{i+1}$ i da $Sa \not\prec \mathcal{P}_1 \vee \ldots \ldots \mathcal{P}_i$. Razmotrimo dva slučaja.

(1) Neka postoji z $(1 \leq z \leq t)$ tako da je $Sa_{iz} \prec \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_i$. Tada je $S = R_{max}^{(i+1)}$ ili $S = R_{max}^{(i+1)} a \mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ može biti i prazna reč). Ako je $S = R_{max}^{(i+1)} a \mathcal{T}$, onda je $Sa_{iz} = R_{max}^{(i+1)} a \mathcal{T} a_{iz} \prec \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_i$ i prema lemi 1.1.1. $R_{max}^{(i+1)} a \prec \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_i$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $R_{max}^{(i+1)} a \not\prec \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_i$. Otuda je $S = R_{max}^{(i+1)}$ i za čvor v_0 dovoljno je uzeti čvor sa kojim počinje niz rebara koji odgovara reči $\mathcal{P}_j^{(i+1)}$.

(2) Za svako slovo a_{iz} , $Sa_{iz} \prec \mathcal{P}_{i+1}$, ali $Sa_{iz} \not\prec \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_i$. Tada za čvor v nije teško odabrati jedan od čvorova izvornika $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_{i+1}$, koji su konstruisani za izraz $\mathcal{C}'\langle \bar{Q}_{j+1}^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_{j+1}^{(i+1)} \bar{\mathcal{P}}_{j+1}^{(i+1)} \ldots \langle \bar{Q}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \rangle \mathcal{L}_{n_{i+1}}^{(i+1)} \bar{\mathcal{P}}_{n_{i+1}}^{(i+1)}$. Na taj način pokazali smo da u svakom slučaju čvor v sa navedenim osobinama postoji.

Istaknimo još jedno svojstvo izvornika $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_{i+1}$. Naime, lako je videti da za svaki njegov čvor v postoji jedinstven prost put, koji povezuje početni čvor v_0 sa tim čvorom.

Analogno kako smo konstruisali izvornik $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_{i+1}$ za izraz $\mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_{i+1}$ konstruišemo dalje izvornike $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_{i+2}$ za izraz $\mathcal{P}_1 \vee \ldots \ldots \mathcal{P}_{i+2}$, $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_{i+3}$ za izraz $\mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_{i+3}$ $(i+3 \leq \ell)$, itd. Konačno konstruišemo izvornik $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_\ell$ sa početnim čvorom v_0 i ℓ različitih finalnih čvorova $v_{f_1}, \ldots, v_{f_\ell}$ iz kojih ne izlaze rebra, koji predstavlja događaj $|\mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_\ell|$ i za koji je $A(\mathcal{O}\!\ell_\ell) = \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_\ell$.

Spajanjem svih finalnih čvorova izvornika $\mathcal{O}\!\ell_\ell$ sa njegovim početnim čvorom dobija se izvornik G koji zadovoljava uslove leme. Lema je dokazana.

Poluprostom putu $\pi = v_0 \rho_1 v_1 \cdots \rho_s v_s$ izvornika G pridružimo izraze $R_1(\pi) = R_0 a_1 R_1 \cdots R_{s-1} a_s$ i $R_2(\pi) = R_0 a_1 R_1 \cdots R_{s-1} a_s R_s$, gde je $[\pi] = a_1 \cdots a_s$, $R_0 = A(G^{v_0})$, $R_i = A(G^{v_i}_{v_0 v_1 \ldots v_{i-1}})$ $(1 \le i \le s)$. Ako je put π prazan, onda je $R_1(\pi) = e$, $R_2(\pi) = R_0$.

<u>Lema 1.1.4.</u> Neka je G izvornik. i neka je $R = A(G)$. Tada

(1) Za proizvoljan poluprost put π izvornika G je $R_1(\pi) \prec R$ i $R_2(\pi) \prec R$.

(2) Za proizvoljnu granu R' izraza R u izvorniku G postoji poluprost put π , tako da je R' ili $R_1(\pi)$ ili $R_2(\pi)$.

<u>Dokaz.</u> Neka je $G \in M$, $\|G\| = 1$, tj. G ima oblik predstavljen na sl.1. Tada je tvrđenje očigledno.

Neka je za svaki izvornik $G \in M$, $\|G\| \le n$ lema već dokazana. Dokažimo da je ona tačna za proizvoljan izvornik $G \in M$, $\|G\| = n+1$. Primetimo da regularan izraz $R = A(G)$ ima oblik iteracije, tj.

$$R = \langle \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_k \rangle , \quad k \geq 1$$

gde su $\mathcal{P}_i$ $(1 \le i \le k)$ članovi drugoga tipa koji odgovaraju prostim ciklima koji prolaze kroz početni čvor izvornika G .

(1) Neka je $\pi = v_0 \rho_1 v_1 \cdots \rho_s v_s$ proizvoljan prost put izvornika G . Ako je π prazno, onda su $R_1(\pi) = e$, $R_2(\pi) = R_0$ grane izraza R . Neka je π neprazan. Pokažimo da su

$R_1(\pi) = R_0 a_1 R_1 \cdots R_{s-1} a_s$ i $R_2(\pi) = R_0 a_1 R_1 \ldots R_{s-1} a_s R_s$ grane izraza R. Prema definiciji izvornika G postoji prost put π' iz v_s u v_0, (moguće i prazan, ako je $v_s \equiv v_0$). Ako π' ne prolazi kroz čvorove $v_0, v_1, \ldots, v_{s-1}$ imamo prosti cikl $\pi\pi'$ kojem odgovara neki izraz $\mathcal{P}_i = a_1 R_1 \cdots a_{s-1} R_{s-1} a_s R_s \ldots R_{\ell_i} a_{\ell_i}$ $(\ell_i \geq s)$. No pošto je $R = R_0$, to je $R_1(\pi) \prec R\mathcal{P}_i \prec R$ i $R_2(\pi) \prec R\pi_i \prec R$. Neka sada put π' prolazi kroz neki od čvorova $v_0, v_1, \ldots, v_{s-1}$. Neka je v_i ($1 \leq i \leq s-1$) čvor sa najmanjim indeksom i koji pripada putu π'. Neka je $\pi' = \pi_1' \pi_2'$, $\tilde{\pi} = \pi_1 \pi_2'$, gde je π_2' kraj puta π' koji počinje iz čvora v_i, a π_1 odrezak puta π od v_0 do v_i. Tada je $\pi_1\pi_2'$ prosti cikl, koji prolazi kroz čvor v_0. Njemu odgovara neki izraz $\mathcal{P}_j = a_1 R_1 a_2 R_2 \ldots a_i R_i \mathcal{T}$. Lako je uočiti da je π_2 prosti put koji pripada izvorniku $G^{v_i}_{v_0 v_1 \ldots v_{i-1}}$. Prema pretpostavci indukcije je $R_1(\pi_2) \prec R_i$, $R_2(\pi_2) \prec R_i$. No $R_m(\pi) = R_0 a_1 R_1 \ldots a_i R_m(\pi_2) \prec$ $\prec R_0 \mathcal{P}_j \prec R\mathcal{P}_j \prec R$, ($m = 1, 2$). Na taj način tvrđenje je dokazano za svaki izvornik $G \in M$.

Neka je sada G proizvoljan izvornik, $\|G\| = n+1$, sa početnim čvorom v_0 i skupom F završnih čvorova. Tada je $R = A(G)$ oblika

$$R = \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_z \quad (z \geq 1)$$

gde je $\mathcal{P}_i$ ($1 \leq i \leq z$) član prvog tipa. Razmotrimo proizvoljan poluprost put $\pi = v_0 \rho_1 v_1 \ldots \rho_s v_s$ izvornika G. Neka je π' prost put (moguće i prazan) iz čvora v_s u neki finalni čvor v_f. Ako je $v_f = v_0$ onda se dokaz da je $R_1(\pi) \prec R$, $R_2(\pi) \prec R$ doslovno izvodi kao da je izvornik G iz skupa M. Za $v_f \neq v_0$ koriste se gornja rasuđivanja sa očiglednim izmenama.

(2) Uzmimo prvo da je $R = A(G) = \langle \mathcal{P} \rangle$. Ako je $R' = e$ ili $R' = \langle \mathcal{P} \rangle = R$, onda za put π dovoljno je izabrati prazan put. Zato uzmimo da je $R' = \langle \mathcal{P} \rangle S$, gde je $S \neq e$. Pokažimo da izvornik G sadrži put π tako da je R' ili $R_1(\pi)$ ili $R_2(\pi)$. Izraz $\mathcal{P}$ predstavimo u obliku $\mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_k$ ($k \geq 1$), pri čemu za svako $\mathcal{P}_i$ u izvorniku G postoji prosti cikl $\pi_i = v_0 \rho_{i0} v_{i1} \dots \rho_{il} v_{il}$ tako da je $\mathcal{P}_i = a_{i1} R_1 a_{i2} R_2 \dots R_{l-1} a_{il}$, gde je $[\pi_i] = a_{i1} a_{i2} \dots a_{il}$, $R_j = A(G^{v_j}_{v_0 v_1 \dots v_{j-1}})$ ($1 \leq j \leq l-1$). Kako je $S \neq e$ i za odgovarajuće i $S \prec \mathcal{P}_i$ to je $S = a_{i1} R_1 a_{i2} R_2 \dots a_{im} S'$, gde je $m \geq 1$, $S' \prec R_m$. Prema pretpostavci indukcije za granu S' izraza $R_m = A(G^{v_m}_{v_0 v_1 \dots v_{m-1}})$ u izvorniku $G^{v_m}_{v_0 v_1 \dots v_{m-1}}$ postoji poluprosti put $\tilde{\pi}$, tako da je S' ili $R_1(\tilde{\pi})$ ili $R_2(\tilde{\pi})$. Nije teško videti da je traženi put $\pi' \tilde{\pi}$, gde je $\pi' = v_0 \rho_{i1} v_{i1} \dots \rho_{im} v_{im}$.

Neka je sada $R = A(G) = \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_q$ ($q \geq 1$), $R' \prec R$. Tada je za neko i ($1 \leq i \leq q$) $R' \prec \mathcal{P}_i$, i dokaz egzistencije poluprostog puta π izvornika G, takvog da je R' ili $R_1(\pi)$ ili $R_2(\pi)$, savršeno je analogan razmatranom gore slučaju. Lema je dokazana.

Dokaz teoreme 1.1.2.

1° Neka regularan izraz R zadovoljava uslove (1) i (2) teoreme , tj. neka je $R = R_1 \vee \dots \vee R_l$ ($l \geq 1$), gde je svaki R_i ($1 \leq i \leq l$) član prvog tipa. Bez ograničenja opštosti možemo smatrati da je za $i < j$ ili $R_j \succ R_i$ ili $R_j \prec R_i$. Tada za izraz R konstruišemo izvornik G analogno, kako smo to radili za izraz (1) u lemi 1.1.3.

2° Neka je $R \in \tilde{R}$. Pokažimo da R zadovoljava uslove teoreme. Za izraz $R \in \tilde{R}$ postoji takav izvornik G da je $R = A(G)$. Pretpostavimo da G pripada skupu M izvornika specijalnog oblika. Neka je $G \in M$, $\|G\| = 1$, tj. neka je G oblika predstavljenog na sl.1. Tada je $A(G) = \langle a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_2} \rangle$ i očigledno zadovoljava uslove (1) i (2) teoreme.

Neka proizvoljan regularan izraz R iz $\tilde{R}$, takav da je $R = A(G)$, $G \in M$, $\|G\| = n$, zadovoljava uslove (1) i (2) teoreme. Neka $R \in \tilde{R}$, $R = A(G)$, $G \in M$, $\|G\| = n+1$. Prema algoritmu A analize izvornika izraz $R = A(G)$ je oblika

$$R = \langle \bigvee_{\pi_i \in C} \mathcal{P}(\pi_i) \rangle$$

gde je C skup svih prostih cikla , koji prolaze kroz početni čvor v_0 izvornika G i $\mathcal{P}(\pi_i)$ regularan izraz koji odgovara ciklu π_i .

Izraz R je član i grana samoga sebe, pri čemu član prvog tipa i zato zadovoljava uslov (1) teoreme. Pokažimo da je svaki član izraza $\bigvee_{\pi_i \in C} \mathcal{P}(\pi_i)$ član drugoga tipa. Uzmimo proizvoljno $\mathcal{P}(\pi_i)$ koje se može predstaviti u obliku

$$\mathcal{P}(\pi_i) = a_{i_1} R_1 a_{i_2} R_2 \dots a_{i_{k-1}} R_{k-1} a_{i_k} \quad (k \geq 1)$$

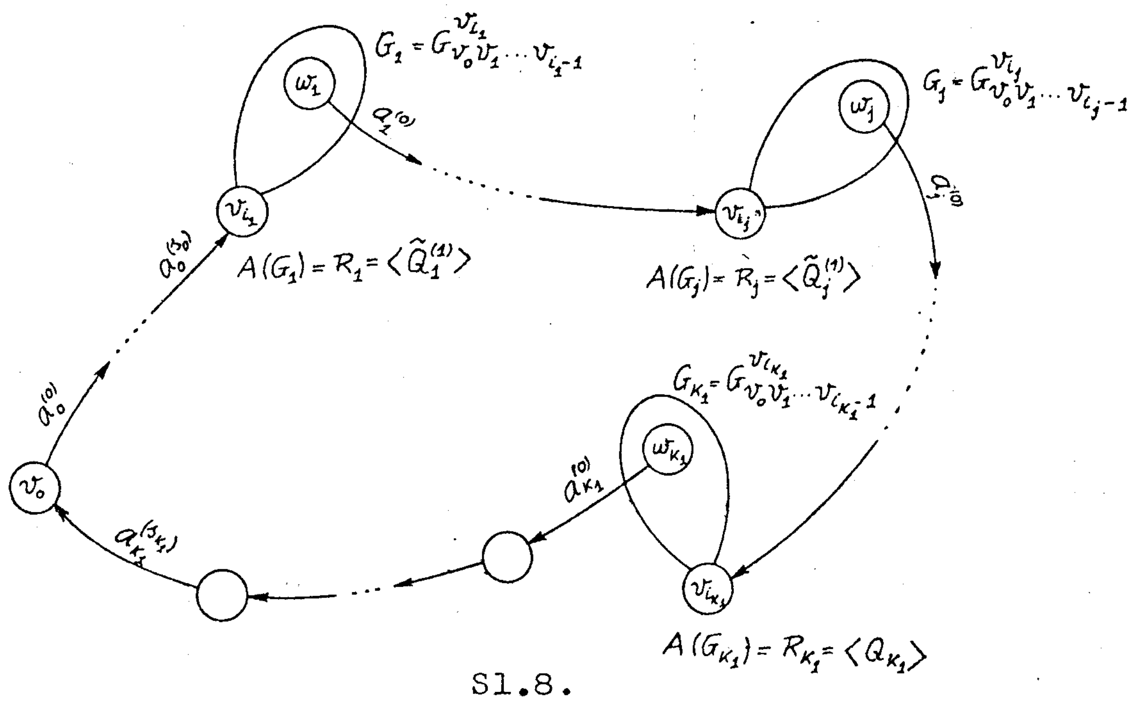
gde je $[\pi_i] = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$.

Neka je $R_j = \langle Q_j \rangle$ $(1 \leq j \leq k-1)$. Razmotrimo izraz $\mathcal{K} = a_{i_{j+1}} R_{i_{j+1}} \dots R_{i_{k-1}} a_{i_k}$ i pokažimo da je $\mathcal{K} \succ Q_j$, tj. da se $\mathcal{K}$ može predstaviti u obliku $\mathcal{L} a \mathcal{M}$ gde $\mathcal{L} a \not\prec Q_j$, ali postoji takvo b da je $\mathcal{L} b \prec Q_j$. Neka je π_i' odrezak puta π_i od čvora v_j do takvog čvora v_{j+s} izvornika $G^{v_j}_{v_0 v_1 \dots v_{j-1}}$ u kojem najpre π_i izlazi iz $G^{v_j}_{v_0 v_1 \dots v_{j-1}}$. Tada ja na osnovu leme 1.1.4. $R_1(\pi_i') = \langle Q_j \rangle a_{i_{j+1}} R_{i_{j+1}} \dots a_{i_{j+s}} R_{i_{j+s}} \prec Q_j$. Saglasno definiciji grane regularnog izraza imamo da je $a_{i_{j+1}} R_{i_{j+1}} \dots a_{i_{j+s}} R_{i_{j+s}} \prec Q_j$. Neka je $\mathcal{L} = a_{i_{j+1}} R_{i_{j+1}} \dots a_{i_{j+s}} R_{i_{j+s}}$. Tada je $\mathcal{K} = \mathcal{L} a_{i_{j+s+1}} \mathcal{M}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{L} a_{i_{j+s+1}} \prec Q_j$. Tada je $\langle Q_j \rangle \mathcal{L} a_{i_{j+s+1}} \prec \langle Q_j \rangle$ i po lemi 1.1.4. postoji poluprost put

$\tilde{\pi}$ takav da je $\langle Q_j\rangle \mathcal{L} a_{i,j+s+1}$ ili $\mathcal{R}_1(\tilde{\pi})$ ili $\mathcal{R}_2(\tilde{\pi})$. Nije teško uočiti da reč $[\tilde{\pi}]$, koja odgovara putu $\tilde{\pi}$ predstavlja ustvari najkraću reč događaja $/\mathcal{R}_q(\tilde{\pi})/$ ($q=1,2$). No najkraća reč događaja $/\langle Q_j\rangle \mathcal{L} a_{i,j+s+1}/$ je $a_{i,j+1}\cdots a_{i,j+s+1}$. Put koji odgovara ovoj reči izlazi iz izvornika $G^{v_j}_{v_0 v_1\cdots v_{j-1}}$, što sa svoje strane predstavlja protivurečnost. Sa druge strane, pošto je iz čvora izvornika $G^{v_j}_{v_0 v_1\cdots v_{j-1}}$ dostižan čvor v_j to iz v_{j+s} izlazi bar jedno rebro. Uzmimo proizvoljno takvo rebro ρ i razmotrimo put $\pi_i'\rho$. Put $\pi_i'\rho$ je poluprost pošto je takav put π_i'. Dobijamo da je $\mathcal{R}_1(\pi_i'\rho)=\langle Q_j\rangle \mathcal{L} b \prec \langle Q_j\rangle$ gde je b oznaka rebra ρ. Iz poslednjeg sledi da je $\mathcal{L} b \prec Q_j$. Na taj način pokazali smo da je proizvoljni član izraza $\bigvee_{\pi_i\in C} \mathcal{P}(\pi_i)$ član drugog tipa.

Neka su $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}(\pi_1)$ i $\mathcal{P}_2=\mathcal{P}(\pi_2)$ proizvoljni članovi izraza $\bigvee_{\pi_i\in C} \mathcal{P}(\pi_i)$ koji odgovaraju redom putevima π_1 i π_2, $\pi_1\neq\pi_2$. Pokažimo da je $\mathcal{P}_2$ razdvojiv od $\mathcal{P}_1$, tj. da se $\mathcal{P}_2$ može predstaviti u obliku $\mathcal{L} a \mathcal{M}$, gde $\mathcal{L} a \not\prec \mathcal{P}_1$, ali postoji slovo b za koje je $\mathcal{L} b \prec \mathcal{P}_1$. Pošto je $\mathcal{P}_1$ član drugog tipa, to ga možemo predstaviti u obliku $\mathcal{P}_1=\tilde{\mathcal{P}}_0\langle \tilde{Q}_1^{(1)}\rangle \mathcal{L}_1^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_1^{(1)}\ldots$ $\ldots\langle \tilde{Q}_{k_1}^{(1)}\rangle \mathcal{L}_{k_1}^{(1)}\tilde{\mathcal{P}}_{k_1}^{(1)}$, gde je $\tilde{\mathcal{P}}_i^{(1)}=a_i^{(0)}a_i^{(1)}\ldots a_i^{(s_i)}$ ($1\leq i\leq k_1$) neprazna reč, $\mathcal{L}_i^{(1)}\prec \tilde{Q}_i^{(1)}$, pri čemu $\mathcal{L}_i^{(1)}a_i^{(0)}\not\prec \tilde{Q}_i^{(1)}$. Tada u putu π_1 izdvojimo niz čvorova $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k_1}}$ tako da je $\langle \tilde{Q}_j^{(1)}\rangle=\mathcal{R}_j=A(G_j)$, $G_j=G^{v_j}_{v_0 v_1\ldots v_{j-1}}$ a u izvorniku G za put π_1 izdvojimo izvornik G^* oblika predstavljenog na sl.8. Neka je $\tilde{G}$ izvornik koji se dobija iz izvornika $\tilde{G}^*$ udaljavanjem rebra označenog slovom $a_{k_1}^{(s_{k_1})}$, tj. rebra koje uvire u čvor v_0 i njegovim provođenjem u novi čvor v_0'.

Analogno tome kako smo to radili u lemi 1.1.3. za izraz $\mathcal{P}_1$ konstruišimo izvornik $\tilde{G}'$, takav da je $A(\tilde{G}')=\mathcal{P}_1$, pri čemu $\tilde{G}'$ poseduje sva svojstva koja ima izvornik $\mathfrak{A}_1$ iz leme 1.1.3.



Sl.8.

Neka je π_2' odrezak puta π_2 u izvorniku G do nekog čvora v u kojem se putevi π_1 i π_2 prvi put razilaze. Tada očigledno, moguća su dva slučaja.

(a) Čvor v pripada nizu rebara izvornika $\tilde{G}$ koji povezuje izvornik G_j s izvornikom G_{j+1}. Tada u izvorniku $\tilde{G}'$ putu π_2' odgovara put π_2'' takav da je $R_2(\pi_2'') \prec \mathcal{P}_2$, pri čemu iz čvora v', koji odgovara čvoru v u izvorniku $\tilde{G}'$, ne izlazi rebro obeleženo slovom a, gde je a oznaka rebra puta π_2 koje izlazi iz čvora v. Na taj način $\mathcal{P}_2 = R_2(\pi_2'') a \mathfrak{M}$, gde $R_2(\pi_2'')a \not\prec \mathcal{P}_1$, pri čemu očigledno, postoji slovo $b = a_j^{(t)}$ ($a_j^{(t)}$ oznaka rebra koje izlazi iz čvora v') takvo da je $R_2(\pi_2'')b \prec \mathcal{P}_1$, tj. $\mathcal{P}_2$ je razdvojiv od $\mathcal{P}_1$.

(b) Čvor v pripada izvorniku G_j. Tada razmotrimo odrezak π_2'' puta π_2 od čvora v_{i_j} do izlaza puta π_2 iz G_j. Prema lemi 1.1.4. $R_2(\pi_2'') \prec R_j$ tj. u $\tilde{G}_j'$ postoji put

π_2''' iz čvora v_{ij}' u neki čvor $\hat{v}$ takav da je $R_2(\pi_2'')=R_2(\pi_2''')$. Ako je $\hat{\pi}_1$ početak puta π_1 u izvorniku G od v_0 do v_{ij}, a $\hat{\pi}_2$ početak puta π_1' (π_1' je put u izvorniku $\tilde{G}'$ koji odgovara putu π_1) od v_0' do v_{ij}', onda je $R_2(\hat{\pi}_2\pi_2'')=R_2(\hat{\pi}_1\pi_2'')\prec \mathcal{P}_2$, pri čemu je $\mathcal{P}_2=R_2(\hat{\pi}_1\pi_2'')a\mathcal{M}$ gde je a oznaka rebra puta π_2 koje izlazi iz poslednjeg čvora puta π_2'. Nije teško uočiti da u izvorniku $\tilde{G}'$ iz čvora $\hat{v}$ ne izlazi rebro obeleženo slovom a, tj. da je $R_2(\hat{\pi}_1\pi_2'')a=\mathcal{L}a\not\prec \mathcal{P}_1$. Prema definiciji izvornika čvor v_{ij} je dostižan iz poslednjeg čvora puta π_2'', tj. postoji b tako da je $\mathcal{L}b\prec \mathcal{P}_1$. Na taj način ako je $R=\langle \mathcal{P}\rangle$ uslov (2) teoreme je zadovoljen. Ako je $\langle \mathcal{P}\rangle$ deo R, onda je uslov (2) za njega zadovoljen prema indukcijskoj pretpostavci. Prema tome ako izvornik G pripada skupu M izvornika specijalnog oblika izraz $A(G)$ zadovoljava uslove teoreme.

Neka je $R\in\hat{R}$, $R=A(G)$, G proizvoljan izvornik sa početnim čvorom v_0 i skupom F završnih čvorova. Prema algoritmu A analize izvornika izraz $R=A(G)$ je oblika $\bigvee_{\pi_i\in C} R(\pi_i)$, gde je C skup svih prostih puteva iz čvora v_0 u neki čvor v_f iz F, $R(\pi_i)$ regularan izraz koji odgovara putu π_i. Rezonujući analogno kao u slučaju kada smo dokazivali da su članovi izraza $\mathcal{P}$ koji ulazi u iteraciju $\langle \mathcal{P}\rangle$, članovi drugoga tipa, može se pokazati da su članovi izraza R članovi prvoga tipa. Koristeći dalje rasuđivanje iz dokaza da je proizvoljni član izraza $\mathcal{P}$ razdvojiv od svakog njegovog člana, uz očigledne izmene može se pokazati da je član $R(\pi_i)$, $\pi_i\in C$, slabo razdvojiv od proizvoljnog drugog člana izraza R. Na taj način teorema je u potpunosti dokazana.

§ 1.2. OPIS STRUKTURE IZVORNIKA

Neka su $\mathcal{R}$ regularan izraz i p reč zadana u azbuci $\mathcal{A}$. Skup osnovnih mesta izraza $\mathcal{R}$, koja p -slede za njegovim početnim mestom nazivamo <u>p - spektrom</u> toga izraza i označavamo ga sa $\mathcal{R}_p$. Specijalno $\mathcal{R}_e$ se sastoji iz početnog mesta izraza $\mathcal{R}$.

<u>Lema 1.2.1.</u> Neka je $\mathcal{R}$ regularan izraz i $\mathcal{M}$ njegovo osnovno mesto. Tada postoji reč q, takva da skup mesta izraza $\mathcal{R}$ koja q - slede za mestom $\mathcal{M}$ sadrži bar jedno njegovo finalno mesto.

<u>Dokaz.</u> Dokaz izvedimo indukciom po složenosti n regularnog izraza $\mathcal{R}$.

Ako je $n=1$, onda je $\mathcal{R}$ slovo i $\mathcal{M}$ početno ili konačno mesto. U prvom slučaju $q=\mathcal{R}$, a u drugom $q=e$.

Neka je lema tačna za sve regularne izraze složenosti $n \leq k$, razmotrimo izraz složenosti $k+1$. Pretpostavimo da je $\mathcal{R}=\langle\mathcal{P}\rangle$. Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljno osnovno mesto izraza $\mathcal{R}$. Lako je uočiti da je $\mathcal{M}$ osnovno mesto izraza $\mathcal{P}$. Prema pretpostavci indukcije za $\mathcal{M}$ postoji reč q', takva da je skup mesta koja q' - slede za $\mathcal{M}$ sadrži bar jedno finalno mesto izraza $\mathcal{P}$. Na osnovu pravilá 2 i 5 o podređenosti mesta regularnog izraza $\mathcal{R}$, finalna mesta izraza $\mathcal{P}$ su i finalna mesta izraza $\mathcal{R}=\langle\mathcal{P}\rangle$, i za reč q može se uzeti reč q'.

Neka je $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{R}_s$ $(s \geq 2)$ i $\mathcal{M}$ njegovo osnovno mesto. $\mathcal{M}$ je osnovno mesto nekog izraza $\mathcal{R}_i$ $(1 \leq i \leq s)$ složenosti $n \leq k$, za koji je prema indukcijskoj hipotezi lema tačna. Ponovo koristeći pravila 2 i 5 o podređenosti mesta regularnog izraza $\mathcal{R}$ imamo da je tvrđenje tačno.

Pretpostavimo da je $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2 \cdots \mathcal{R}_t$ $(t \geq 2)$ i da je $\mathcal{M}$ njegovo osnovno mesto. $\mathcal{M}$ je osnovno mesto nekoga činioca $\mathcal{R}_j$ $(1 \leq j \leq t)$ izraza $\mathcal{R}$. Prema pretpostavci indukcije postoji reč q_j takva da je skup mesta koja q_j - slede za $\mathcal{M}$ u $\mathcal{R}_j$ sadrži bar jedno finalno mesto izraza $\mathcal{R}_j$. Označimo $\mathcal{R}_{j+1} \mathcal{R}_{j+2} \cdots \mathcal{R}_s$ sa $\mathcal{R}'$. Ponovo prema pretpostavci indukcije za proizvoljno osnovno mesto izraza $\mathcal{R}'$ postoji reč q' takva da skup mesta koja q' - slede za početnim mestom izraza $\mathcal{R}'$ sadrži finalno mesto izraza $\mathcal{R}'$. Očigledno, skup mesta koja $q_j q'$ - slede za osnovnim mestom $\mathcal{M}$ izraza $\mathcal{R}$ sadrži finalno mesto $\mathcal{M}_f$. Zato za reč q uzimamo reč $q_j q'$. Lema je dokazana.

Dokažimo da je opisani algoritam S sinteze izvornika korektan.

<u>Teorema 1.2.1.</u> Za proizvoljan izraz $\mathcal{R}$ tačna je jednakost $|\mathcal{R}| = |S(\mathcal{R})|$.

<u>Dokaz.</u> Prvo dokažimo da je orijentisani graf $G = S(\mathcal{R})$ izvornik. Iz načina konstuisanja grafa G sledi da su različita rebra koja izlaze iz proizvoljnog čvora v obeležena različitim slovima azbuke A nad kojom je zadat izraz $\mathcal{R}$. Iz leme 1.2.1. sledi da je iz proizvoljnog čvora v grafa G dostižan neki njegov finalni čvor, pa je zaista graf $G = S(\mathcal{R})$ izvornik.

Pokažimo sada da je $|\mathcal{R}| = |S(\mathcal{R})|$. Neka je p reč, $p \in |\mathcal{R}|$. Tada očigledno $\mathcal{R}_p$ sadrži bar jedno finalno mesto izraza $\mathcal{R}$. Zato u izvorniku $G = S(\mathcal{R})$ postoji put $\pi, [\pi] = p$

iz čvora v_0 u neki završni čvor, tako da je $p \in |S(R)|$. Pretpostavimo da je reč $p \in |S(R)|$. Tada u izvorniku G postoji put π , $[\pi]=p$, po kojem je iz početnog čvora dostižan neki završni čvor. v_f . Pošto je početni čvor izvornika G ustvari početno mesto izraza R , završni čvor v_f podskup skupa osnovnih mesta izraza R koji sadrži bar jedno finalno mesto m_f , to $m_f \in R_p$ i $p \in |R|$. Lema je dokazana.

U teoremi 1.1.2. paragrafa 1.1. opisan je skup $\tilde{R}$ svih regularnih izraza, koji se dobijaju algoritmom A analize izvornika. Opišimo sada strukturu izvornika $S(A(G))$, dobijenog kao rezultat primene algoritma S sinteze izvornika na proizvoljan izraz R koji pripada skupu $\tilde{R}$.

<u>Teorema 1.2.2.</u> Neka je G izvornik i $G'=S(A(G))$. Tada je G' izomorfan izvorniku $\tilde{G}$, konstruisanom po G na sledeći način:

a) Čvorovi izvornika $\tilde{G}$ su poluprosti putevi izvornika G , pri čemu je početni čvor prazan put, a završni čvorovi putevi koji vode završnim čvorovima izvornika G .

b) Ako je π poluprost put u G , koji vodi u čvor v i ako iz v izlazi rebro ρ obeleženo slovom a , tada iz čvora π izvornika $\tilde{G}$ konstruiše se rebro obeleženo slovom a u čvor $\overline{\pi\rho}$.

<u>Dokaz.</u> Dokažimo niz pomoćnih tvrđenja o regularnim izrazima i izvornicima.

<u>Lema 1.2.2.</u> Neka je R regularan izraz i p reč. Tada je R_p prazno, tada i samo tada, kada p nije početak ni jedne reči iz $|R|$.

Dokaz. 1° Neka je $p = a_1 \cdots a_\ell$ reč i $R_p \neq \emptyset$. Pokažimo da je p početak neke reči $w \in |R|$. U izvorniku $G = S(R)$ postoji čvor v i put π_1 iz početnog čvora v_0 u v, tako da je $[\pi_1] = a_1 \cdots a_\ell$. U izvorniku G postoji put π_q iz čvora v u neki završni čvor. Putu π_q odgovara reč q, tj. $[\pi_q] = q$. Očigledno, reč $pq = w \in |R|$ i p je njen početak.

2° Neka je p početak neke reči w, $w \in |R|$. Pretstavimo reč w u obliku $w = pq$, gde q može biti i prazno. Tada u izvorniku $G = S(R)$ postoji čvor $v \neq v_0$ dostižan iz njegovog početnog čvora po putu π, pri čemu je $[\pi] = p$. Kako je čvor v izvornika $G = S(R)$ neprazan podskup skupa osnovnih mesta izraza R, to otuda sledi da je $R_p \neq \emptyset$. Lema je dokazana.

Očigledno važe sledeće leme 1.2.3. i 1.2.4.

Lema 1.2.3. Ako je $\mathcal{P}$ deo regularnog izraza R i m osnovno mesto izraza $\mathcal{P}$ različito od finalnog, onda za proizvoljno slovo a, $a \in A$, svako mesto koje a - sledi za m je mesto izraza $\mathcal{P}$.

Lema 1.2.4. Ako m nije finalno mesto izraza $\mathcal{P}$, koji je deo izraza R, onda m' nije finalno mesto izraza R.

Lema 1.2.5. Neka je $R = R_1 \vee \ldots \vee R_n$ regularan izraz i p reč. Tada je

$$R_p = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{P}_i)_p$$

gde je $(\mathcal{P}_i)_p$ spektar izraza $\mathcal{P}_i$.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukciom po dužini $d(p)$ reči p. Ako je $d(p) = 1$, onda je $p = a$ slovo. Prema pravilu 1.

o podređenosti mesta, za početnim mestom izraza $\mathcal{R}$ e - slede početna mesta njegovih članova. $\mathcal{P}_i$ ($1 \leq i \leq n$). Lako je uočiti da se skup mesta koja e - slede za početnim mestom m_{i_0} izraza $\mathcal{P}_i$ sastoji iz nekog podskupa skupa neosnovnih mesta $\mathcal{P}_i$. Uzmimo proizvoljni član $\mathcal{P}_i$ i razmotrimo skup $\tilde{m}_i$ njegovih neosnovnih mesta koja e - slede za početnim mestom izraza $\mathcal{R}$. Pošto je $\mathcal{R}$ disjunkcija, to konačnom mestu člana $\mathcal{P}_i$ ($1 \leq i \leq n$) nije podređeno početno mesto člana $\mathcal{P}_j$ ($1 \leq j \leq n$), $j \neq i$. Otuda, ako $\mu_i \in \tilde{m}_i$, onda svako mesto μ_i' izraza $\mathcal{R}$ koje a - sledi za mestom μ_i pripada članu $\mathcal{P}_i$ i očigledno je $\mathcal{R}_a = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{P}_i)_a$.

Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za svaku reč p' dužine $d(p') = \ell$. Razmotrimo reč $p = p'a$, $d(p) = \ell + 1$, $a \in \mathcal{A}$. Prema pretpostavci indukcije $\mathcal{R}_{p'} = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{P}_i)_{p'}$. Uzmimo proizvoljno mesto $\nu_i' \in (\mathcal{P}_i)_{p'}$. Ako ono nije finalno, na osnovu leme 1.2.3., skup mesta koja za njim a - slede sastoji se iz mesta koja pripadaju izrazu $\mathcal{P}_i$. Ako je ν_i' finalno mesto člana $\mathcal{P}_i$, onda na osnovu toga što je $\mathcal{R}$ disjunkcija, saglasno pravilima o podređenosti mesta, mesta koja za njim a - slede takođe pripadaju $\mathcal{P}_i$. Prema tome za proizvoljno $\nu_i' \in (\mathcal{P}_i)_{p'}$ svako mesto koje a - sledi za ν_i' pripada članu $\mathcal{P}_i$. Otuda sledi da je $\mathcal{R}_p = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{P}_i)_p$. Lema je dokazana.

<u>Lema 1.2.6.</u> Neka je $\mathcal{R} = (\mathcal{P})$ regularan izraz i p reč. Ako za proizvoljan početak p' reči p, $p' \neq p$, $\mathcal{P}_{p'}$ ne sadrži finalnih mesta izraza $\mathcal{P}$, onda je $\mathcal{R}_p = \mathcal{P}_p$.

<u>Dokaz.</u> Dokaz izvodimo indukcijom po dužini $d(p)$ reči p.

Ako je $d(p) = 1$, onda je $p = a$ slovo. Prema pravilima

1, 2 i 3 o podređenosti mesta regularnog izraza, skup predosnovnih mesta izraza $\mathcal{R}$ koja e - slede za njegovim početnim mestom jednak je skupu predosnovnih mesta koja e - slede za početnim mestom izraza $\mathcal{P}$. Kako prema pretpostavci leme skup mesta koja e - slede za početnim mestom izraza $\mathcal{P}$ ne sadrži finalnih mesta izraza $\mathcal{P}$, to je na osnovu leme 1.2.3. $\mathcal{R}_a = \mathcal{P}_a$.

Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za svaku reč p', $d(p') = \ell$. Razmotrimo reč $p' = pa$, $a \in \mathcal{A}$, $d(p) = \ell + 1$. Prema pretpostavci indukcije $\mathcal{R}_{p'} = \mathcal{P}_{p'}$, a prema pretpostavci leme $\mathcal{P}_{p'}$ ne sadrži finalnih mesta izraza $\mathcal{P}$. Ako je mesto $\mu' \in \mathcal{P}_{p'}$ različito od finalnog mesta izraza $\mathcal{P}$, onda na osnovu leme 1.2.3. svako mesto μ koje a - sledi za μ' pripada skupu mesta izraza $\mathcal{P}$ i očigledno je $\mathcal{R}_p = \mathcal{P}_p$. Lema je dokazana.

<u>Lema 1.2.7.</u> Neka je π neprazan prost put izvornika G iz M i $\mathcal{R} = A(G)$. Tada $\mathcal{R}_{[\pi]}$ ne sadrži finalnih mesta.

<u>Dokaz.</u> Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti n izvornika G .

Neka je $\|G\| = 1$ (vidi sl.1). Tada je $A(G) = \langle a_{i1} \vee \dots \vee a_{in} \rangle$. Izvornik G ne sadrži ni jedan neprazan prost put π i očigledno lema je tačna.

Neka je za svaki izvornik G , $\|G\| \leq n$, lema već dokazana. Dokažimo da je ona tačna za proizvoljan izvornik G , $\|G\| = n+1$. Setimo se da regularan izraz $\mathcal{R} = A(G)$ ima oblik iteracije, tj. $\mathcal{R} = \langle \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_m \rangle$, $m \geq 1$, gde je $\mathcal{P}_i$ ($1 \leq i \leq m$) član drugog tipa koji odgovara prostom ciklu π_i koji prolazi kroz početni čvor v_0 . Ako je

$\pi_i = v_0 \rho_{i1} v_{i1} \cdots \rho_{is} v_{is} \rho_{is+1} v_0$, $[\pi_i] = a_{i1} \cdots a_{is+1}$, $R_{ij} = A(G_{ij})$, $G_{ij} = G^{v_{ij}}_{v_0 v_{i1} \cdots v_{i,j-1}}$, $(1 \le j \le s+1)$, onda je $\mathcal{P}_i = a_{i1} R_{i1} a_{i2} R_{i2} \cdots a_{is} R_{is} a_{is+1}$.

Uzmimo proizvoljan neprazan prost put $\pi = v_0 \rho_1 v_1 \cdots \rho_\ell v_\ell$ i reč $[\pi] = a_1 \ldots a_\ell$. Odredimo $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$ za proizvoljan član $\mathcal{P}_i$ disjunkcije $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_m$ i pokažimo da $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$ ne sadrži finalnih mesta izraza $\mathcal{P}_i$. Označimo sa $\tilde{\pi}_t = v_t \rho_{t+1} v_{t+1} \cdots \rho_\ell v_\ell$ $(1 \le t \le \ell)$ kraj puta π , koji počinje čvorom v_t . Neka je $[\tilde{\pi}_t] = a_t a_{t+1} \cdots a_\ell$ reč koja odgovara putu $\tilde{\pi}_t$.

Pokažimo da je

$$(1) \qquad (\mathcal{P})_{[\pi]} = \bigcup_{j=1}^{k} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$$

gde je $a_1 = a_{i1}$, ... , $a_k = a_{ik}$, $a_{k+1} \ne a_{ik+1}$, $(0 \le k \le \ell)$.

Ako je $d(\pi) = 1$, onda je tvrđenje očigledno. Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za svaki prost put π , $d(\pi) = \ell$. Razmotrimo put π' dužine $d(\pi') = \ell+1$. Predstavimo π' u obliku $\pi\rho$, gde je $d(\pi) = \ell$, ρ rebro. Neka je $[\pi'] = a_1 \ldots a_{\ell+1}$, $a_1 = a_{i1}$, ... , $a_{k'} = a_{ik'}$, $a_{k'+1} = a_{ik'+1}$ $(1 \le k' \le \ell+1)$. Spektar $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]} = \bigcup_{j=1}^{k'} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$ se sastoji iz svih osnovnih mesta izraza koja a - slede za mestima iz $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$, pri čemu je prema pretpostavci indukcije $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]} = \bigcup_{j=1}^{k} (R_{ij})_{\tilde{\pi}_j}$. Neka je $j < i$. Tada je put $\tilde{\pi}_j$ neprazan. Ako se ovaj put ne sadrži u izvorniku G_{ij} , onda reč $[\tilde{\pi}_j]$ nije početak ni jedne reči iz $|R_{ij}|$ i prema lemi 1. 2.2. $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]} = \emptyset$ a zajedno sa time $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j] a_{\ell+1}} = (R_{ij})_{[\tilde{\pi}'_j]} = \emptyset$.
Ako put $\tilde{\pi}_j$ pripada izvorniku G_{ij} , onda prema indukcijskoj hipotezi, pošto je $\|G_{ij}\| \le n$, $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$ ne sadrži finalnih mesta i prema lemi 1. 2.3. skup osnovnih mesta koja $a_{\ell+1}$ - slede za mestima iz $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$ i pripadaju mestima izraza $\mathcal{P}_i$ je $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j] a_{\ell+1}} = (R_{ij})_{[\tilde{\pi}'_j]}$. Neka je sada $j = \ell$. Tada je $k = \ell$, $[\tilde{\pi}_j] = e$ i $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}]}$ u izrazu $\mathcal{P}_i$ je osnovno mesto $\mathcal{M}$, koje sledi za

za slovom a_{il}. Ako je $k'=k$, tj. $a_{l+1} \neq a_{il+1}$, onda skup osnovnih mesta koja a_{l+1} - slede za mestom m je $(R_{il})_{a_{l+1}} = (R_{il})_{[\tilde{\pi}'_l]}$. Ako je $k'=k+1$, tj. $a_{l+1} = a_{il+1}$, onda je taj skup $(R_{il})_{a_{l+1}} \cup (R_{il})_{[\tilde{\pi}'_l]} \cup$ $\cup (R_{il+1})_{[\tilde{\pi}'_{l+1}]}$. Konačno dobijamo jednakost

$$(\mathcal{P}_i)_{[\pi']} = \bigcup_{j=1}^{k'} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}'_j]}$$

čime se i završava dokaz tvrđenja (1). Kako je očigledno $k < < s+1$, to iz (1) sledi da spektar $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$ ne sadrži finalnih mesta izraza $\mathcal{P}_i$. Koristeći leme 1.2.5. i 1.2.6. dobijamo da $(R)_{[\pi]} = \langle \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_m \rangle$ takođe ne sadrži finalnih mesta razmatranog izraza R. Lema je dokazana.

Iz dokazane leme 1.2.7. nije teško dobiti sledeće posledice.

<u>Posledica 1</u>. Ako je

$$\pi = v_0 \rho_1 v_1 \cdots \rho_l v_l$$

poluprost put izvornika G, $G \in M$, $[\pi] = a_1 \ldots a_l$,

$$R = A(G) = \langle \mathcal{P}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_m \rangle$$

gde je $m \geq 1$ i $\mathcal{P}_i = a_{i1} R_{i1} \cdots a_{is} R_{is} a_{is+1}$ odgovara prostom ciklu π_i ($1 \leq i \leq m$), koji prolazi kroz početni čvor v_0 izvornika G, pri čemu je $[\pi_i] = a_{i1} \ldots a_{is+1}$, $R_{ij} = A(G_{ij})$, $G_{ij} = G^{v_{ij}}_{v_0 v_{i1} \ldots v_{ij-1}}$, ($1 \leq j \leq s$), onda je

$$(R)_{[\pi]} = \bigcup_{i=1}^{m} (\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$$

pri čemu je

$$(\mathcal{P}_i)_{[\pi]} = \bigcup_{j=1}^{k_i} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$$

gde je $a_1 = a_{i1}, \ldots, a_{k_i} = a_{ik_i}, a_{k_i+1} \neq a_{ik_i+1}$ ($0 \leq k_i \leq l$).

<u>Posledica 2</u>. Ako je

$$\pi = v_0 \rho_1 v_1 \cdots \rho_l v_l$$

poluprost put izvornika G sa početnim čvorom v_0 i skupom

F završnih čvorova, $[\pi] = a_1 \ldots a_\ell$,

$$R = A(G) = \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_r , \quad r \geq 1$$

gde $\mathcal{P}_i = R_{i0} a_{i1} R_{i1} \ldots a_{is} R_{is}$ odgovara prostome putu π_i , koji vodi iz čvora v_0 u neki završni čvor v_f , pri čemu je $[\pi_i] = a_{i1} \ldots a_{is}$, $R_{i0} = A(G_0)$, $R_{ij} = A(G_{ij})$, $G_{ij} = G^{v_{ij}}_{v_0 v_{i1} \ldots v_{ij-1}}$, onda je

$$(R)_{[\pi]} = \bigcup_{j=1}^{r} (\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$$

pri čemu je

$$(\mathcal{P}_i)_{[\pi]} = \bigcup_{j=0}^{k_i} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$$

gde je $a_1 = a_{i1}$, ... , $a_{k_i} = a_{ik_i}$, $a_{k_i+1} \neq a_{ik_i+1}$, $(0 \leq k_i \leq \min(\ell, s))$.

Lema 1.2.8. Neka je G izvornik, $R = A(G)$ i π_1 i π_2 različiti poluprosti putevi u G . Tada je

$$(R)_{[\pi_1]} \neq (R)_{[\pi_2]} .$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti izvornika G .

Neka je $\|G\| = 1$, (vidi sl.1.). Tada je $A(G) = \langle a_{i1} \vee \ldots \vee a_{ik} \rangle$ $[\pi_1] = a_{ij}$, $[\pi_2] = a_{i\ell}$ $(j \neq \ell)$, $(1 \leq j, \ell \leq k)$, $\pi_1 \neq \pi_2$ i očigledno tvrđenje je tačno.

Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za proizvoljan izvornik G iz M , $\|G\| \leq n$. Razmotrimo izvornik G iz M , $\|G\| = n+1$. Tada je $R = A(G) = \langle \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_m \rangle$, $m \geq 1$, $\mathcal{P}_i = a_{i1} R_{i1} \ldots a_{is} R_{is} a_{is+1}$ član drugog tipa koji odgovara prostom ciklu $\pi_i = v_0 \rho_{i1} v_{i1} \ldots \rho_{is} v_{is} \rho_{i,s+1} v_0$, $[\pi_i] = a_{i1} \ldots a_{i,s+1}$. Neka je $\pi_1 = v_0 \rho_1^{(1)} v_1^{(1)} \ldots \rho_{\ell_1}^{(1)} v_{\ell_1}^{(1)}$ proizvoljan poluprost put koji pripada izvorniku G , $[\pi_1] = a_1^{(1)} \ldots a_{\ell_1}^{(1)}$. Prema definiciji izvornika postoji prost put π_1' iz čvora v_{ℓ_1} u početni čvor v_0. Neka je k maksimalan indeks, za koji čvorovi $v_1^{(1)}, \ldots, v_{k-1}^{(1)}$

ne pripadaju π_1'. Očigledno put $\tilde{\pi}_k^{(1)} = v_k^{(1)} \rho_k^{(1)} \ldots \rho_{\ell_1}^{(1)} v_{\ell_1}^{(1)}$ pripada izvorniku G_k. Označimo kraj puta π_1' koji vodi iz čvora $v_k^{(1)}$ u čvor v_0 sa π_1^*, a početak puta π_1 koji vodi od v_0 do $v_k^{(1)}$ sa π_1^{**}. Tada je $\pi_1^{**}\pi_1^* = \Pi$ prost cikl. Neka je $\mathcal{P}_i$ njemu odgovarajući član izraza $\mathcal{P}$.

Uzmimo proizvoljan poluprost put $\pi_2 \neq \pi_1$, $\pi_2 = v_0 \rho_1^{(2)} v_1^{(2)} \ldots$ $\ldots \rho_{\ell_2}^{(2)} v_{\ell_2}^{(2)}$, $[\pi_2] = a_1^{(2)} \ldots a_{\ell_2}^{(2)}$, $\pi_2 \in G$. Pokažimo da je $(\mathcal{P}_i)_{[\pi_1]} \neq (\mathcal{P}_i)_{[\pi_2]}$. Član $\mathcal{P}_i$ izraza $\mathcal{P}$ možemo predstaviti u obliku

$$\mathcal{P}_i = b_1 R_{i1} b_2 R_{i2} \ldots b_k R_{ik} b_{k+1} \ldots b_s R_{is} b_{s+1}$$

Pretpostavimo da se put π_1 poklapa sa ciklom Π do nekog čvora $v_{t'}$, tj. da je $b_1 = a_1^{(1)}, \ldots, b_{t'} = a_{t'}^{(1)}, b_{t'+1} \neq a_{t'+1}^{(1)}$, a da se put π_2 poklapa sa ciklom Π do nekog čvora v_t, tj. da je $b_1 = a_1^{(2)}, \ldots, b_t = a_t^{(2)}, b_{t+1} \neq a_{t+1}^{(2)}$. Neka je prvo $0 \leq t \leq k$. Prema posledici 1. imamo da je

$$(\mathcal{P}_i)_{[\pi_1]} = \bigcup_{j=1}^{t'} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j^{(1)}]}$$

$[\tilde{\pi}_j^{(1)}] = a_j^{(1)} a_{j+1}^{(1)} \ldots a_{\ell_1}^{(1)}$, pri čemu iz leme 1.2.1. sledi da je $(R_{ik})_{[\tilde{\pi}_k^{(1)}]} \neq$ $\neq \emptyset$. No

$$(\mathcal{P}_i)_{[\pi_2]} = \bigcup_{j=1}^{t} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j^{(2)}]}$$

$[\tilde{\pi}_j^{(2)}] = a_j^{(2)} \ldots a_{\ell_2}^{(2)}$, i očigledno je $(\mathcal{P}_i)_{[\pi_1]} \neq (\mathcal{P}_i)_{[\pi_2]}$.

Pretpostavimo sada da je $t \geq k$. Ako $\tilde{\pi}_k^{(2)}$ ne pripada izvorniku G_{ik}, onda je $(R_{ik})_{[\tilde{\pi}_k^{(2)}]} = \emptyset$ i pošto $(R_{ik})_{[\tilde{\pi}_k^{(1)}]} \neq \emptyset$ to je $(\mathcal{P}_i)_{[\pi_1]} = (\mathcal{P}_i)_{[\pi_2]}$. Neka sada $\tilde{\pi}_k^{(2)}$ pripada izvorniku G_{ik}. Tada iz indukcijske hipoteze sledi da je $(R_{ik})_{[\tilde{\pi}_k^{(2)}]} \neq (R_{ik})_{[\tilde{\pi}_k^{(1)}]}$ i ponovo dobijamo da je $(\mathcal{P}_i)_{[\pi_1]} \neq (\mathcal{P}_i)_{[\pi_2]}$.

Na taj način pokazali smo da je $(\mathcal{P}_i)_{[\pi_1]} \neq (\mathcal{P}_i)_{[\pi_2]}$ iz čega na osnovu posledice 1. neposredno dobijamo da je $(R)_{[\pi_1]} \neq (R)_{[\pi_2]}$, ako je $G \in M$.

Ako je sada G proizvoljan izvornik $\|G\| \leq k+1$, rasuđujući analogno i koristeći posledicu 2. dobijamo da je $(R)_{[\pi_1]} \neq (R)_{[\pi_2]}$. Lema je dokazana.

Lema 1.2.9. Neka je G proizvoljan izvornik iz M, $R = A(G)$, p takva reč, da za proizvoljan njen početak p', $p' \neq p$, $R_{p'}$ ne sadrži ni jedno finalno mesto izraza R. Tada, ako R_p sadrži bar jedno finalno mesto izraza R, onda su sva mesta u R_p finalna.

Dokaz. Prema algoritmu A analize izvornika izraz $R = A(G)$ je oblika $R = \langle \mathcal{P}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_n \rangle$, gde je $\mathcal{P}_i$ član drugog tipa koji odgovara prostom ciklu π_i ($1 \leq i \leq n$) koji prolazi kroz početni čvor v_0 izvornika G. Označimo sa $\mathcal{P}$ izraz $\mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_n$. Na osnovu leme 1.2.5. imamo da je $R_p = (\mathcal{P}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_n)_p = \mathcal{P}_p$. Koristeći postupak konstruisanja izvornika iz leme 1.1.3. za izraz $\mathcal{P}$, konstruišimo izvornik G', takav da je $\mathcal{P} = A(G')$, pri čemu iz njegovih finalnih čvorova ne izlaze rebra. Ako R_p sadrži neko finalno mesto onda je $p \in |\mathcal{P}|$ i u G' postoji put π' iz čvora v_0 u u neki završni čvor v_f', takav da je $[\pi'] = p$. Pošto iz čvora v_f' ne izlaze rebra, to reč p nije sopstveni početak ni jedne reči iz $|\mathcal{P}|$. Pretpostavimo da R_p sadrži mesto m koje nije finalno. Tada prema lemi 1.2.1. postoji reč p' takva da skup mesta koja p' - slede za mestom m sadrži finalno mesto. Međutim tada $(\mathcal{P})_{pp'}$ sadrži to finalno mesto i $pp' \in |\mathcal{P}|$, što je suprotno činjenici otsustvovanja u $|\mathcal{P}|$

reči čiji je sopstveni početak reč p . Lema je dokazana.

Lema 1.2.10. Neka je G izvornik, $R = A(G)$, π poluprost put u G, ρ rebro koje izlazi iz poslednjeg čvora puta π . Tada je

$$(R)_{[\pi][\rho]} = (R)_{[\overline{\pi\rho}]}$$

gde je $\overline{\pi\rho}$ svedeni put puta $\pi\rho$.

Dokaz. 1° Pretpostavimo da je put $\pi = v_0\rho_1 v_1 \cdots \rho_\ell v_\ell$ prost. Tada dodavanjem rebra ρ putu π koje izlazi iz čvora $v_\ell \neq v_i$ ($1 \leq i \leq \ell-1$) i vodi u neki čvor v dobijamo poluprost put $\pi\rho$. Otuda je $(R)_{[\overline{\pi\rho}]} = (R)_{[\pi\rho]} = (R)_{[\pi][\rho]}$.

2° Neka je poluprost put $\pi = v_0\rho_1 v_1 \ldots v_{\ell-1}\rho_\ell v_\ell$ takav da je $v_\ell = v_t$ ($0 \leq t \leq \ell-1$). Tada dokaz tvrđenja izvedimo indukcijom po složenosti izvornika G . Neka je $G \in M$, $\|G\| = 1$. Tada je $R = A(G) = \langle a_{i_1} \vee \cdots \vee a_{i_z} \rangle$, pri čemu je slovom a_{ij} ($1 \leq j \leq z$) obeleženo rebro ρ_{ij} petlje $v_0\rho_{ij}v_0$. Proizvoljan neprazan poluprost put π je oblika $v_0\rho_{ij}v_0$, $[\pi] = a_{ij}$. Očigledno, ako je $\rho = \rho_{ik}$ ($1 \leq k \leq z$) rebro koje izlazi iz poslednjeg čvora v_ℓ puta π , onda je $\overline{\pi\rho} = v_0\rho_{ik}v_0$, $[\overline{\pi\rho}] = a_{ik}$, pri čemu je $(R)_{[\overline{\pi\rho}]} = m_{a_{ik}}$, gde je $m_{a_{ik}}$ osnovno mesto izraza koje sledi za slovom a_{ik} . Pošto je $(R)_{[\pi]} = m_{a_{ij}}$, gde je $m_{a_{ij}}$ osnovno mesto koje sledi za slovom a_{ij} ,to prema pravilima 2, 3 i 5 o podređenosti mesta ,skup mesta koja a_{ik} - slede za mestom $m_{a_{ij}}$ sastoji se iz jednog mesta $m_{a_{ik}}$, tj. $(R)_{[\pi][\rho]} = m_{a_{ik}} = (R)_{[\overline{\pi\rho}]}$, što je i trebalo dokazati. Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za proizvoljan izvornik G , $G \in M$, $\|G\| \leq k$. Razmotrimo izvornik G iz M , $\|G\| = k+1$. Neka je $\pi = v_0\rho_1 v_1 \cdots v_{\ell-1}\rho_\ell v_\ell$ poluprost put, gde je $v_\ell = v_t$ $(0 \leq t \leq \ell-1)$, $[\pi] = a_1 \cdots a_\ell$. Izraz R je oblika $\langle \mathcal{P}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_m \rangle$,

gde $\mathcal{P}_i = a_{i1}R_{i1}\dots a_{is_i}R_{is_i}a_{is_i+1}$ odgovara prostom ciklu $\pi_i = v_o \rho_{i1} v_{i1} \dots$
$\dots v_{is_i} \rho_{is_i+1} v_o$, $[\pi_i] = a_{i1} \dots a_{is_i+1}$, $R_{ij} = A(G_{ij})$, $G_{ij} = G^{v_{ij}}_{v_o v_{i1} \dots v_{i,j-1}}$
($1 \le j \le s_i$). Na osnovu posledice 1. iz leme 1.2.7. imamo da je $(R)_{[\pi]} = \bigcup_{j=1}^{m} (\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$, $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]} = \bigcup_{j=1}^{\kappa_i} (R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$. Neka je ρ rebro koje vodi iz čvora v_i u čvor v , $[\rho] = a$. Tada je $[\overline{\pi\rho}] = v_o \rho_1 v_1 \dots \rho_i v_i v$, $[\overline{\pi\rho}] = a_1 \dots a_i a$ i ponovo prema posledici 1. leme 1.2.7. imamo da je

$$(R)_{[\overline{\pi\rho}]} = \bigcup_{j=1}^{m} (\mathcal{P}_i)_{[\overline{\pi\rho}]}$$

$$(\mathcal{P}_i)_{[\overline{\pi\rho}]} = \bigcup_{j=1}^{z} (R_{ij})_{[(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j]}$$

Ako $(R)_{[\pi]}$ ne sadrži finalnih mesta, onda prema lemama 1.2.5. i 1.2.6. je

$$(R)_{[\pi]a} = \bigcup_{j=1}^{m} (\mathcal{P}_i)_{[\pi]a}$$

Ukoliko $(R)_{[\pi]}$ sadrži bar jedno finalno mesto, prema lemi 1.2.8. takva su i sva ostala mesta $(R)_{[\pi]}$, pri čemu je π prost cikl. Lako je proveriti da je

$$(R)_{[\pi]a} = \bigcup_{j=1}^{m} (\mathcal{P}_i)_a = (R)_{[\rho]} = (R)_{[\overline{\pi\rho}]}$$

Odredimo skup osnovnih mesta koja a - slede za mestima iz $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]}$. Primetimo pre svega da za $j > t$ put $\tilde{\pi}_j$ ne pripada izvorniku G_{ij} ,tako da je $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]} = \emptyset$ i $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$ ne sadrži finalnih mesta izraza R_{ij} . Na osnovu leme 1.2.2. mesta izraza $\mathcal{P}_i$ koja a - slede za mestima iz $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$ pripadaju skupu mesta izraza R_{ij} , tako da je $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]a} = (R_{ij})_{[(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j]}$. Ako se $(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j$ ne sadrži u izvorniku G_{ij} , onda je $(R_{ij})_{[(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j]} = (R_{ij})_{[(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j]} = \emptyset$. Ako pak $(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j$ pripada izvorniku G_{ij} , onda jednakost $(R_{ij})_{[(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j]} = (R_{ij})_{[(\widetilde{\overline{\pi\rho}})_j]}$ sledi iz indukcijske hipoteze. Neka je sada $j \le t$ i neka $(R_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$ sadrži finalno mesto. Tada prema lemi 1.2.8. sva mesta u $(\mathcal{R}_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}$ su finalna. Specijalno dobijamo da je $[\tilde{\pi}_j] \in |\mathcal{R}_{ij}|$. Otuda $\tilde{\pi}_j$ je prost cikl i $\tilde{\pi}_j \in G_{ij}, j=t$. Ako je $a=a_{it+1}$, onda je skup mesta izraza $\mathcal{P}_i$ koja a -slede za mestima iz $(\mathcal{R}_{ij})_{[\tilde{\pi}_j]}=(\mathcal{R}_{it})_{[\tilde{\pi}_t]}$ skup $(\mathcal{R}_{it})_a \cup (\mathcal{R}_{it+1})_e = (\mathcal{R}_{it})_{[(\widetilde{\pi\rho})_t]} \cup \cup (\mathcal{R}_{it})_{[(\widetilde{\pi\rho})_{t+1}]}$, $z_i = t+1$ i ponovo imamo jednakost $(\mathcal{P}_i)_{[\overline{\pi\rho}]} = (\mathcal{P}_i)_{[\pi]a} = \bigcup_{j=1}^{z_i}(\mathcal{R}_{ij})_{[(\widetilde{\pi\rho})_j]} = \bigcup_{j=1}^{t+1}(\mathcal{R}_{ij})_{[(\widetilde{\pi\rho})_j]}$. Ako je $a \neq a_{i+1}$, onda skup mesta izraza $\mathcal{R}_{it}$ koja a - slede za mestima iz $(\mathcal{R}_{it})_{[\tilde{\pi}_t]}$ je $(\mathcal{R}_{it})_a = (\mathcal{R}_{it})_{[(\widetilde{\pi\rho})_t]}$, $z_i = t$ i ponovo je $(\mathcal{P}_i)_{[\pi]a} = (\mathcal{P}_i)_{[\overline{\pi\rho}]}$. Koristeći jednakosti (1), (2) i (3) konačno dobijamo da je $(\mathcal{R})_{[\pi]a} = (\mathcal{R})_{[\overline{\pi\rho}]}$.

Pretpostavimo sada da je G proizvoljan izvornik sa početnim čvorom v_0 i skupom F završnih čvorova, π proizvoljan poluprost put u izvorniku G, ρ rebro koje izlazi iz poslednjeg čvora puta π. Rasuđujući na analogan način kako smo to činili u slučaju izvornika specijalnog vida može se pokazati da je i u ovom slučaju lema tačna.

Dokaz teoreme 1.2.2. neposredno sledi iz niza gore dokazanih lema.

§1.3. O SAGLASNOSTI ALGORITAMA A I S

U prethodnom paragrafu opisali smo kako se po zadanom izvorniku G određuje izvornik $\tilde{G}$, izomorfan izvorniku $G' = S(A(G))$. Sledeća teorema odgovara na pitanje kada je izvornik $S(A(G))$ izomorfan izvorniku G, tj. kada su algoritmi A analize izvornika i S sinteze izvornika saglasni.

<u>Teorema 1.3.1.</u> Algoritmi A analize izvornika i S sinteze izvornika su saglasni tada i samo tada, ako je izvor-

nik G drvo sa korenom u početnom čvoru.

Dokaz. 1° Neka je izvornik G drvo. Tada prema teoremi 1.2.2. možemo konstruisati izvornik $\tilde{G}$ izomorfan izvorniku $G' = S(A(G))$. Lako je uočiti da je izvornik $\tilde{G}$ izomorfan izvorniku G, a otuda i sledi da je G' izomorfan G.

2° Pretpostavimo da je algoritam A analize izvornika saglasan sa algoritmom S sinteze izvornika na nekom izvorniku G. Tada je $\tau(G) = 1$. Pokažimo da je G drvo. Pretpostavimo da G nije drvo. Tada G sadrži bar jedan čvor v koji je iz početnog čvora dostižan po različitim poluprostim putevima π_1 i π_2. Otuda na osnovu teoreme 1.2.2. imamo da je $\tau(G) > 1$. Poslednje je u suprotnosti sa činjenicom da je $\tau(G) = 1$. Torema je dokazana.

Sada razmotrimo usložnjenje izvornika $G' = S(A(G))$ u odnosu na izvornik G. Tačna je sledeća teorema.

Teorema 1.3.2. Neka je $\tau(n) = \max\limits_{\|G\|=n} \tau(G)$, $\tilde{\tau}(n) = \min\limits_{\|G\|=n} \tau(G)$. Tada je

$$\tau(n) = \begin{cases} \dfrac{m^{n+1}-1}{n(m-1)}, & (m>1) \\ \dfrac{n+1}{n}, & (m=1), \end{cases}$$

$$\tilde{\tau}(n) = 1.$$

Dokaz. Jednakost $\tilde{\tau}(n) = 1$ neposredno sledi iz dokaza teoreme 1.3.2.

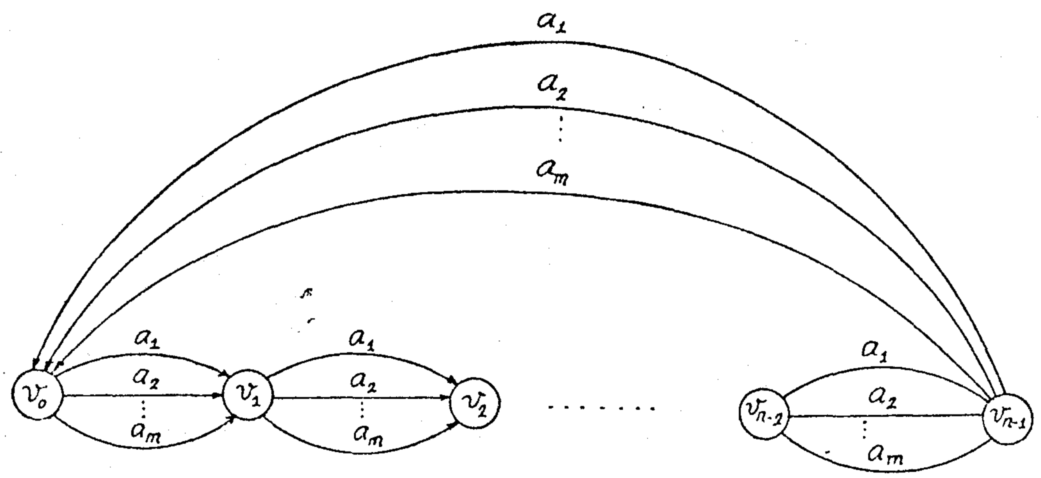
Neka je G izvornik nad azbukom $\mathcal{A}$, $\|G\| = n$. Ako je π proizvoljan poluprost put izvornika G, onda njegova dužina nije veća od n. Prema tome broj poluprostih puteva izvornika G nije veći od broja reči dužine n nad azbukom $\mathcal{A}$, tj. nije veći od veličine $\dfrac{m^{n+1}-1}{m-1}$ za $m>1$

i veličine $n+1$ za $m=1$. Koristeći teoremu 1.2.2. dobijamo da je

$$(1)\qquad \tau(n) \leq \begin{cases} \dfrac{m^{n+1}-1}{n(m-1)}, & (m>1) \\[2ex] \dfrac{n+1}{n}, & (m=1) \end{cases}$$

Razmotrimo izvornik G predstavljen na sl.9. , gde je v_0 početni i jedinstveni finalni čvor. Uočimo da svakoj reči p u azbuci $\mathcal{A}$, čija dužina nije veća od n , odgovara poluprosti put π izvornika G , takav da je $p=[\pi]$. Zato je broj poluprostih puteva u G jednak $\dfrac{m^{n+1}-1}{m-1}$ za $m>1$ i $n+1$ za $m=1$. Otuda sledi da je

$$(2)\qquad \tau(n) \geq \begin{cases} \dfrac{m^{n+1}-1}{n(m-1)}, & (m>1) \\[2ex] \dfrac{n+1}{n}, & (m=1). \end{cases}$$



Sl.9.

Iz nejednakosti (1) i (2) sledi drugi deo tvrđenja teoreme. Teorema je dokazana.

G L A V A II

M E T R I Č K E K A R A K T E R I S T I K E A L G O R I T A M A A I A_1 A N A L I Z E A U T O M A T A

Ova glava sastoji se iz tri paragrafa i posvećena je izučavanju metričkih karaktristika algoritama A i A_1 analize automata. U § 1 nalaze se donja i gornja ocena za funkciju $L_A(n)$. U § 2 određuju se donja i gornja ocena za funkciju $L_{A_1}(n)$ i time pokazuje da je veličina $L_A(n)$ bitno manja od veličine $L_A(n)$. U § 3 nalazi se ocena broja $N(n,m)$ svih regularnih događaja, koji se mogu predstaviti izvornicima nad azbukom $\mathcal{A}$ od m slova, a čija složenost nije veća od n . U ovom paragrafu određuje se takođe, ocena broja $\mathcal{M}(n,m)$ svih regularnih izraza složenosti n nad istom azbukom $\mathcal{A}$. Ove ocene se koriste za nalaženje donje ocene veličine $\mathcal{L}(n)$, jednake maksimalnoj složenosti minimalnih regularnih izraza, koji odgovaraju izvornicima čija složenost nije veća od n .

§ 2.1. OCENE FUNKCIJE $L_A(n)$

U teoremi 1.1.2. bio je opisan skup $\tilde{R}$ svih regularnih izraza, koji se dobijaju algoritmom A analize izvornika. Pozabavimo se sada problemom ocene maksimalne složenosti regularnih izraza skupa $\tilde{R}$. U uvodu rada uveli smo Šenonovu funkciju $L_A(n) = \max\limits_{\|G\|=n} \|A(G)\|$, gde je G izvornik, $A(G)$ regularan izraz iz skupa $\tilde{R}$ i $\|A(G)\|$ složenost izraza $A(G)$. Donja i gornja ocena veličine $L_A(n)$ daje se u sledećoj teoremi.

<u>Teorema 2.1.1.</u> Za proizvoljne prirodne brojeve m i n tačne su sledeće nejednakosti

$$2m^{\frac{n^2}{8}} \leq L_A(n) \leq 4m^{\frac{n^2}{2}+\frac{5n}{2}}.$$

<u>Dokaz.</u> 1° Pokažimo da je

$$(1) \quad L_A(n) \leq 4m^{\frac{n^2}{2}+\frac{5n}{2}}.$$

Razmotrimo prvo skup M izvornika specijalnog oblika. Ako je $G \in M$, $\|G\| = n$, dokažimo da je

$$(2) \quad \|A(G)\| \leq 2m^{\frac{n^2}{2}+\frac{5n}{2}}.$$

Dokaz nejednakosti (2) izvodimo indukcijom po složenosti izvornika G.

Neka je $G \in M$, $\|G\| = 1$. Tada je

$$A(G) = \langle a_{i1} \vee \cdots \vee a_{ik} \rangle$$

gde je a_{ij} ($1 \leq j \leq k$) slovo azbuke $\mathcal{A}$ kojim je obeleženo rebro ρ_{ij} izvornika G (vidi sl.1). Izvornik G sadrži najviše m petlji i prema tome $\|A_1(G)\| \leq 2m$. Otuda i sledi tačnost nejednakosti (2) za $n = 1$.

Pretpostavimo da je nejednakost (2) tačna za proizvoljan izvornik G iz skupa M, $\|G\| \leq n-1$. Pokažimo da je ona tačna i za proizvoljan izvornik G iz M, $\|G\| = n$. Izraz $R = A(G)$ je oblika

$$(3) \quad \langle \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_z \rangle$$

gde je $\mathcal{P}_i$ ($1 \le i \le z$) član drugoga tipa koji odgovara prostom ciklu $\mathcal{K}_i$, koji prolazi kroz početni čvor v_0 izvornika G . Ako je $\mathcal{K}$ prost cikl, koji prolazi kroz početni čvor v_0 , onda, što nije teško uočiti, dužina $\mathcal{K}$ nije veća od n . Prema tome broj različitih prostih cikla koji prolaze kroz početni čvor v_0 , nije veći od broja reči dužine n u azbuci $\mathcal{A}$, tj. nije veći od veličine m^n. Otuda sledi da broj članova disjunkcije $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_z$ nije veći od m^n . Član $\mathcal{P}_i$ možemo predstaviti u obliku

$$(4) \quad a_{i1} R_{i1} a_{i2} R_{i2} \dots a_{in_i-1} R_{in_i-1} a_{in_i}$$

gde je $n_i \le n$, $a_{is} \in \mathcal{A}$ ($1 \le s \le n_i$), $R_{is} = A(G_{is})$, $G_{is} = G^{v_{is}}_{v_0 v_{i1} \dots v_{is-1}}$ .Ocenimo odozdo složenost izraza $\mathcal{P}_i$. Izvornik G_{is} sadrži najviše $n-s$ čvorova, pa složenost izraza $R_{is} = A(G_{is})$ nije veća od veličine $2m^{\frac{(n-s)^2}{2}+\frac{3(n-s)}{2}}$. U izrazu (4) realizuje se $2n_i-2$ konjunkcija između n_i slova azbuke $\mathcal{A}$ i n_i-1 izraza R_{is} . Otuda sledi da složenost izraza (4) nije veća od veličine $3n-2+\sum_{s=1}^{n-1} 2\cdot m^{\frac{(n-s)^2}{2}+\frac{3(n-s)}{2}}$. Kako izraz $\mathcal{P}$ ne sadrži više od m^n članova , to broj operacija disjunkcije između tih članova nije veći od m^n-1 . Zato je

$$\|A(G)\| \le m^n\left(3n-2+\sum_{s=1}^{n-1} 2m^{\frac{(n-s)^2}{2}+\frac{3(n-s)}{2}}\right) + m^n - 1 + 1,$$

tj.

$$(5) \quad \|A(G)\| \le m^n\Big(3n-1+2m^{\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{3(n-1)}{2}} + \dots + 2m^{\frac{(n-2)^2}{2}+\frac{3(n-2)}{2}} + \dots$$

$$\dots + 2m^{\frac{(n-i)^2}{2}+\frac{3(n-i)}{2}} + \dots + 2^{\frac{1^2}{2}+\frac{3}{2}}\Big) =$$

$$= m^{n}\left(3n-1+2m^{\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{3(n-1)}{2}}\left(1+\frac{1}{m^{\frac{3n-2}{2}+\frac{3}{2}}}+\frac{1}{m^{\frac{4n-8}{2}+2\cdot\frac{3}{2}}}+\dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots+\frac{1}{m^{\frac{2n(i-1)+1-i^2}{2}+\frac{3}{2}(i-1)}}+\dots+\frac{1}{m^{\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{3(n-1)}{2}-2}}\right)\right).$$

Kako je odnos i-og člana sume

$$S(m,n)=1+\frac{1}{m^{\frac{2n-3}{2}+\frac{3}{2}}}+\frac{1}{m^{\frac{4n-8}{2}+2\cdot\frac{3}{2}}}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{m^{\frac{2n(i-1)+1-i^2}{2}+\frac{3}{2}(i-1)}}+\dots+\frac{1}{m^{\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{3(n-1)}{2}-2}}.$$

prema (i + 1) -om članu jednak m^{i-n+1} i ima najveću vrednost m^{-2} za $i=n-1$ to iz svojstava geometrijske progresije sledi, da je $S(m,n)\leq\frac{m^2}{m^2-1}$. Otuda dobijamo da je

$$\|A(G)\|\leq m^{n}\left(3n-1+2m^{\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{3(n-1)}{2}}\cdot\frac{m^2}{m^2-1}\right)=$$

$$=m^{n}\left(3n-1+\frac{2m}{m^2-1}\cdot m^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}\right)=$$

$$=m^{\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}}\left(\frac{3n-1}{m^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}}+\frac{2m}{m^2-1}\right).$$

Lako je pokazati da je za proizvoljne $m\geq 2$ i $n\geq 2$

$\frac{3n-1}{m^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}}\leq\frac{2}{3}$ i $\frac{2m}{m^2-1}\leq\frac{4}{3}$. Konačno dobijamo da je

$$\|A(G)\|\leq 2m^{\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}},$$

što je i trebalo dokazati.

Neka je sada G proizvoljni izvornik, $\|G\|=n$, sa početnim čvorom v_0 i skupom F završnih čvorova. Prema algoritmu A analize izvornika izraz $R=A(G)$ je oblika

(6) $\mathcal{P}_1\vee\dots\vee\mathcal{P}_k$,

gde je $\mathcal{P}_i$ ($1\leq i\leq k$) član prvoga tipa koji odgovara prostom putu π_i, koji vodi iz početnog čvora v_0 u neki završni čvor v_f, pri čemu je $[\pi_i] = a_{i1}a_{i2}\dots a_{i\ell}$, $\ell \leq n-1$, njemu odgovarajuća reč. Nije teško uočiti da dužina proizvoljnog puta π_i nije veća od $n-1$. Prema tome broj prostih puteva u izvorniku G nije veći od broja reči azbuke $\mathcal{A}$ čija dužina nije veća od $n-1$, tj. nije veći od veličine $\frac{m^n-1}{m-1}$. Otuda sledi da broj članova disjunkcije (6) nije veći od $\frac{m^n-1}{m-1}$, a broj operacija između tih članova takođe nije veći od $\frac{m^n-1}{m-1}$. Član $\mathcal{P}_i$ disjunkcije (6) može se predstaviti u obliku

$$(7) \quad R_0 a_{i1} R_{i1} \dots a_{n_i-1} R_{in_i-1}$$

gde je $n_i \leq n$, $a_{is} \in \mathcal{A}$ $(1 \leq s \leq n_i-1)$, $R_{is} = A(G_{is})$, $G_{is} = G^{v_{is}}_{v_0 v_{i1}\dots v_{is-1}}$, $R_0 = A(G_0)$, $G_0 = G^{v_0}$ (G^{v_0} izvornik koji se dobija iz izvornika G uzimanjem čvora v_0 za jedinstveni njegov završni čvor). Ocenimo odozgo složenost izraza $\mathcal{P}_i$. Svaki od izvornika G_{is}, a takođe i izvornik G_0, pripada skupu M izvornika specijalnog vida, pa je $\|A(G_{is})\| \leq 2m^{\frac{(n-s)^2}{2}+\frac{3(n-s)}{2}}$ $(1 \leq s \leq n-1)$. U izrazu (7), što je lako uočiti, realizuje se $2n_i-2$ konjunkcija, pri čemu on sadrži n_i-1 slova azbuke $\mathcal{A}$. Iz gore rečenog sledi da složenost izraza (7) nije veća od veličine

$$3n-3+\sum_{s=0}^{n-1} 2m^{\frac{(n-s)^2}{2}+\frac{3(n-s)}{2}}.$$

Konačno dobijamo da je

$$L_A(n) \leq \frac{m^n-1}{m-1}\Big(3n-2+2m^{\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}}+2m^{\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{3(n-1)}{2}}+\dots$$

$$(8) \qquad \dots+2m^{\frac{1^2}{2}+\frac{3\cdot 1}{2}}\Big) \leq \frac{m^n-1}{m-1}\Big(3(n-1)-1+2m^{\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}}+$$

$$+2m^{\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{3(n-1)}{2}}+\dots+2m^{\frac{1^2}{2}+\frac{3\cdot 1}{2}}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{m^n - 1}{m-1} \cdot \frac{1}{m^{n+1}} \cdot m^{n+1} \left(3(n+1) - 1 + 2m^{\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2}} + \ldots + 2m^2 \right)$$

$$\leq \frac{m^n - 1}{m-1} \cdot 2 \cdot m^{\frac{(n+1)^2}{2} + \frac{3(n+1)}{2} - n + 1} \leq 4m^{\frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2}},$$

što je i trebalo dokazati.

2 Sada pokažimo da je

$$(9) \quad L_A(n) \geq 2m^{\frac{n^2}{8}}.$$

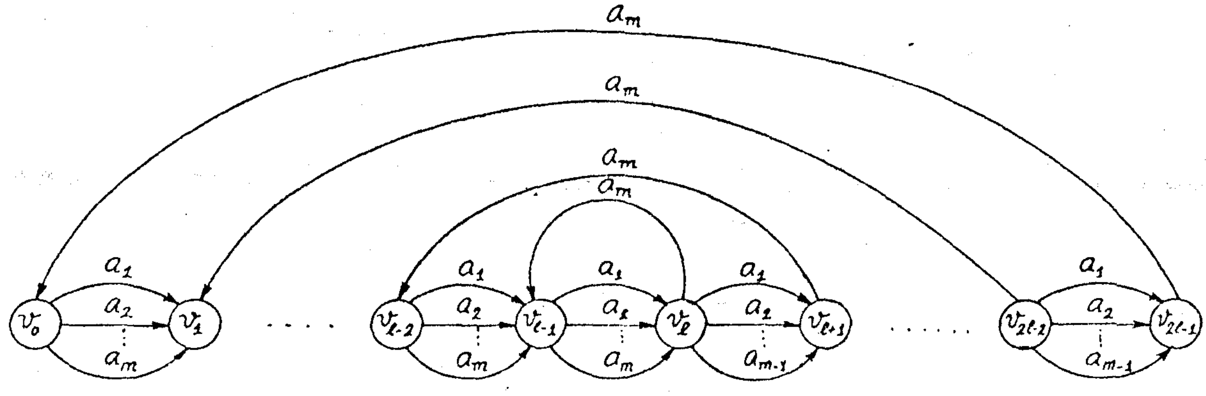
Razmotrimo izvornik G_ℓ (sl.10), zadan nad azbukom $\mathcal{A}$, sa $n = 2\ell$ ($\ell = 1, 2, \ldots$) čvorova, gde je v_0 početni i jedinstveni završni čvor. Nije teško uočiti da je broj prostih cikla izvornika G_ℓ , koji prolaze kroz v_0 jednak $m^\ell (m-1)^{\ell-1}$. Saglasno algoritmu A analize izvornika izraz $R_\ell = A(G_\ell)$ je oblika (3), gde se $\mathcal{P}_i$ može predstaviti u obliku

$$(10) \quad a_{i1} \tilde{R}_{\ell-1} a_{i2} \tilde{R}_{\ell-2} \ldots a_{i\ell-1} \tilde{R}_1 a_{i\ell} a_{i\ell+1} \ldots a_{i2\ell-1} a_m$$

pri čemu je $\tilde{R}_{\ell-j} = A(G^{v_j}_{v_0 v_1 \ldots v_{j-1}}) = R_{\ell-j}$ ($1 \leq j \leq \ell-1$). Ako sa A_ℓ označimo $\| R_\ell \|$ imamo da je

$$(11) \quad A_\ell = m^\ell (m-1)^{\ell-1} (5\ell - 1 + A_{\ell-1} + A_{\ell-2} + \cdots + A_1).$$

Dokaz nejednakosti (9) izvedimo indukcijom posebno za parno i neparno n . Ako je $n = 2\ell$ paran broj, ocenimo



Sl.10.

odozdo složenost izvornika G_ℓ .

Ako je $n=2$, onda je $\ell=1$, $A_1 = 4m$ i $4m \geq 2m^{\frac{1}{2}}$, što se i tražilo.

Pretpostavimo da je $\|A(G_{\ell'})\| \geq 2m^{\frac{(2\ell')^2}{8}}$ za proizvoljan izvornik $G_{\ell'}$, $\ell' < \ell$. Pokažimo da je poslednja nejednakost tačna i za proizvoljan izvornik G_ℓ . Na osnovu jednakosti (11) i indukcijske pretpostavke potrebno je pokazati da je

$$m^{\ell}(m-1)^{\ell-1}(5\ell-1+A_{\ell-1}+A_{\ell-2}+\cdots+A_1) \geq 2m^{\frac{\ell^2}{2}},$$

tj.

$$m^{\ell}(m-1)^{\ell-1}(5\ell-1+2m^{\frac{1}{2}(\ell-1)^2}+2m^{\frac{1}{2}(\ell-2)^2}+\cdots+2m^{\frac{1}{2}}) \geq 2m^{\frac{\ell^2}{2}}.$$

Poslednja nejednakost je tačna ako je

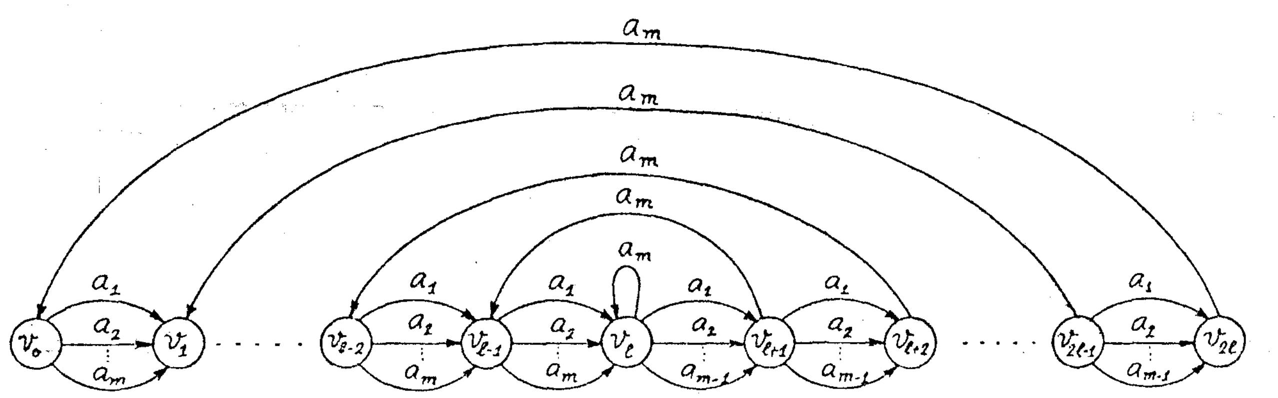
$$(12) \quad m^{\ell}\cdot(m-1)^{\ell-1}\cdot 2\cdot m^{\frac{(\ell-1)^2}{2}} \geq 2\cdot m^{\frac{\ell^2}{2}}.$$

Nije teško pokazati da se nejednakost (12) može predstaviti u obliku

$$m^{\frac{1}{2}+(\ell-1)\log_m(m-1)} \geq 1$$

što je ekvivalentno $\frac{1}{2}+(\ell-1)\log_m(m-1) \geq 0$ i tačno za proizvoljno $m \geq 2$. Na taj način smo pokazali da je nejednakost (9) tačna za proizvoljan paran broj n .

Ako je n neparan broj razmotrimo izvornik $\tilde{G}_\ell$, predstavljen na sl.11, koji ima $2\ell+1$ čvor.



Sl.11.

Rasuđujući analogno tome kako smo to radili u slučaju kada je $n=2\ell$, može se ponovo pokazati da je nejednakost (9) tačna. Teorema je dokazana.

§ 2.2. OCENE FUNKCIJE $L_{A_1}(n)$

Opisani u uvodu algoritam A_1 analize izvornika predstavlja ustvari izvesnu modifikaciju algoritma A. U ovom paragrafu razmotrimo problem ocene efektivnosti algoritma A_1, analogan problemu ocene efektivnosti algoritma A, koji je razmatran u prethodnom paragrafu. Neka je G izvornik, $R=A_1(G)$ regularan izraz dobijen algoritmom A_1 analize izvornika i $L_{A_1}(n)=\max\limits_{\|G\|=n}\|A_1(G)\|$, gde se maksimum uzima po svim izvornicima G složenosti n. U sledećoj teoremi daju se donja i gornja ocena funkcije $L_{A_1}(n)$.

<u>Teorema 2.2.1.</u> Ako je $L_{A_1}(n)=\max\limits_{\|G\|=n}\|A_1(G)\|$, onda je

$$2\cdot m^{n}\leq L_{A_1}(n)\leq 5\cdot m^{3n}.$$

<u>Dokaz.</u> Dokažimo prvo da je

$$(1)\quad L_{A_1}(n)\leq 5m^{3n}$$

Razmotrimo skup izvornika specijalnog oblika. Pokažimo da ako je

$$\tilde{L}_{A_1}(n)=\max_{\substack{\|G\|=n\\ G\in M}}\|A_1(G)\|$$

onda je

$$(2)\quad \tilde{L}_{A_1}(k)\geqslant 3m^{3k}.$$

Dokaz nejednakosti (2) izvodimo indukcijom po n.

Ako je $G \in M$, $\|G\|=1$ onda se lako pokazuje , rasuđujući analogno tome kako smo to radili u slučaju teoreme 2.1.1., da je nejednakost (2) tačna.

Pretpostavimo da je nejednakost (2) tačna za proizvoljno $k<n$. Razmotrimo izvornik $G \in M$, $\|G\|=n$. Prema algoritmu A_1 analize izvornika za skup $\mathcal{M}$ reči koje odgovaraju prostim ciklima koji prolaze kroz početni čvor v_0 , izvornika G konstruišemo drvo $T(\mathcal{M})$. Izraz $R=A_1(G)$ je oblika

(3) $\langle R_{v_1} \vee R_{v_2} \vee \dots \vee R_{v_{s_1}} \rangle$

gde je R_{v_i} ($1 \le i \le s_1$) regularan izraz pridružen i-om čvoru prvog sprata drveta $T(\mathcal{M})$, ($1 \le s_1 \le m$), $R_{v_i} = a A_1(G(\pi_{v_i}))\cdot$ $\cdot(R_{w_1} \vee R_{w_2} \vee \dots \vee R_{w_{s_2}})$, pri čemu je slovom a_i obeleženo rebro drveta $T(\mathcal{M})$, koje ulazi u čvor v_i , $A_1(G(\pi_{v_i}))$ regularan izraz određen za izvornik $G(\pi_{v_i}) = G_{v_0}^{v_i}$, R_{w_j} ($1 \le j \le s_2$), ($1 \le s_2 \le m$) regularni izrazi pridruženi čvorovima drugog sprata drveta $T(\mathcal{M})$. Međutim, izraz R_{w_i} se može prdstaviti u istom obliku kao i izraz R_{v_i} , pri čemu tada ulogu izraza R_{w_j} imaju izrazi koji su pridruženi čvorovima trećeg sprata drveta $T(\mathcal{M})$, itd. Uopšte, proizvoljan regularan izraz pridružen nekom čvoru J -og sprata, ($1 \le J \le n-1$), ima složenost koja nije veća od $m+2+\tilde{L}_{A_1}(n-J)+m\cdot B$, gde je B maksimalna složenost izraza pridruženih $(J+1)$ -om spratu drveta $T(\mathcal{M})$. Kako J -i sprat ne sadrži više od m^J čvorova, ($1 \le J \le n-1$), a poslednji m^n čvorova, uzimajući u obzir oblik izraza (3) neposredno dobijamo da je

$$\tilde{L}_{A_1}(n) \le m + m(m+2+\tilde{L}_{A_1}(n-1)) + \dots + m^{n-1}(m+2+\tilde{L}_{A_1}(1)) + m^n ,$$

tj.

$$(4)\quad \tilde{L}_{A_1}(n) \leq m + m^n + m(m+2) + \dots + m^{n-1}(m+2) + \\ + m\tilde{L}_{A_1}(n-1) + m^2\tilde{L}_{A_1}(n-2) + \dots + m^{n-1}\tilde{L}_{A_1}(n).$$

Prema indukcijskoj hipotezi iz nejednakosti (4) dobijamo da je

$$\tilde{L}_{A_1}(n) \leq m + m^n + (m+2)m(1 + m + \dots + m^{n-2}) + \\ + 3m\,m^{3(n-1)} + 3m^2 \cdot m^{3(n-2)} + \dots + 3m^{n-1} \cdot m^{3\cdot 1} \leq$$

$$\leq m(m+2)(1 + m + m^2 + \dots + m^{n-1}) + \\ + 3m^{3n-2}\left(1 + \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{m^{2i}} + \dots + \frac{1}{m^{2(n-2)}}\right) \leq$$

$$\leq m(m+2)\,\frac{m^n - 1}{m-1} + 3m^{3n-2} \cdot \frac{m^2}{m^2-1} \leq$$

$$\leq 3m^{3n}\left(\frac{1}{3}(m+2)\,\frac{m^n-1}{m^{3n-1}\cdot(m-1)} + \frac{1}{m^2-1}\right).$$

Međutim, lako je pokazati da je za proizvoljno $m \geq 2$ i $n \geq 2$ $\frac{1}{3}\cdot\frac{m+2}{m-1}\cdot\frac{m^n-1}{m^{3n-1}} \leq \frac{2}{3}$ i $\frac{1}{m^2-1} \leq \frac{1}{3}$, tako da konačno dobijamo da je nejednakost (2) tačna.

Neka je sada G proizvoljan izvornik sa početnim čvorom v_0 i skupom F završnih čvorova, $\|G\| = n$. Kako je i rečeno u opisu algoritma A_1 analize izvornika, za skup reči $\tilde{m}$ koje odgovaraju prostim putevima izvornika G iz čvora v_0 u završne čvorove, konstruišemo drvo $T(\tilde{m})$. Očigledno, pri oceni $L_{A_1}(n)$ odozgo možemo uzeti da je proizvoljan čvor izvornika G završni. Izraz $R = A_1(G)$ je oblika

$$A_1(G(\pi_{v_0}))\cdot(e \vee R_{v_1} \vee \dots \vee R_{v_t})$$

gde je $A_1(G(\pi_{v_0}))$ regularan izraz, koji odgovara izvorniku

$G(\mathcal{J}_{v_0})$ čija složenost nije veća od $\tilde{L}_{A_1}(n)$, R_{v_i} ($1 \leq i \leq t$) ($1 \leq t \leq m$) regularan izraz pridružen i -om čvoru prvoga sprata drveta $T(\tilde{m})$. Rasuđujući analogno kao u slučaju izvornika iz skupa M imamo da je

$$L_{A_1}(n) \leq m+2+\tilde{L}_{A_1}(n)+m(m+4+\tilde{L}_{A_1}(n-1))+\dots$$
$$\dots+m^{n-2}(m+4+\tilde{L}_{A_1}(2))+m^{n-1}(2+\tilde{L}_{A_1}(n)),$$

tj.

$$(5)\quad L_{A_1}(n) \leq m+2+2m^{n-1}+m(m+4)+\dots+m^{n-2}(m+4)+$$
$$+\tilde{L}_{A_1}(n)+m\tilde{L}_{A_1}(n-1)+\dots+m^{n-2}\cdot\tilde{L}_{A_1}(2)+m^{n-1}\cdot\tilde{L}_{A_1}(n).$$

Koristeći nejednakost (2) za izvornike iz M , iz (5) dobijamo da je

$$L_{A_1}(n) \leq m(m+4)(1+m+m^2+\dots+m^{n-2})+$$
$$+3m^n\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^4}+\dots+\frac{1}{m^{2(n-1)}}\right) \leq$$
$$\leq m(m+4)\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+3m^{3n}\cdot\frac{m^2}{m^2-1} \leq$$
$$\leq 6m^n+4m^{3n} \leq 5m^{3n}.$$

za $m \geq 2$, $n \geq 2$, što je i trebalo dokazati.

Pokažimo sada da je

$$(6)\quad L_{A_1}(n) \geq 2m^n$$

Razmotrimo izvornik G predstavljen na sl.9, gde je v_0 početni i jedinstveni završni čvor.

Prema algoritmu A_1 analize izvornika za skup $\mathcal{N}$ reči koje odgovaraju prostim ciklima izvornika G , a koji prolaze kroz v_0 , konstruišemo drvo $T(\mathcal{N})$ visine n . Iz svakog čvora drveta $T(\mathcal{N})$, koji nije krajnji, izlazi tačno m rebara. i- i sprat drveta $T(\mathcal{N})$ sadrži m^i čvorova.

Svaka od njih za $i<n$ obeležena je izrazom oblika

$$(7) \quad a_i\,(R_1^{(i)} \vee R_2^{(i)} \vee \ldots \vee R_m^{i})$$

gde je $R_j^{(i)}$ regularan izraz, pridružen nekom čvoru $(i+1)$-og sprata drveta $T(n)$ u koji ulazi rebro koje izlaži iz razmatranog čvora i-og sprata. Lako je pokazati da je složenost izraza (7) jednaka $m+1+m\cdot\ell$, gde je $\ell = \|R_j^{(i)}\|$ $(1 \leq j \leq m)$. Uzimajući u obzir da izraz $R=A_1(G)$ ima oblik iteracije i oznaku $\|R\|=B_n$, dobijamo da je

$$B_n = m(m+2)+m^2(m+1)+\cdots+m^{n-1}\cdot(m+1)+m^n =$$
$$= 2m(1+m+m^2+\cdots+m^{n-1}) = 2m\cdot\frac{m^n-1}{m-1}.$$

Pošto je za proizvoljno $m \geqslant 2$, $n\geqslant 1$, $2m\frac{m^n-1}{m-1} \geqslant 2m^n$ imamo da je nejednakost (6) tačna. Teorema je dokazana.

Dokazano tvrđenje pokazuje da je veličina $L_{A_1}(n)$ bitno manja od veličine $L_A(n)$, tj. da neznatna izmena algoritma A daje algoritam analize izvornika kojim se dobijaju regularni izrazi znatno manje složenosti od složenosti izraza iz skupa $\tilde{R}$.

2.3. OCENA FUNKCIJE $\mathcal{L}(n)$

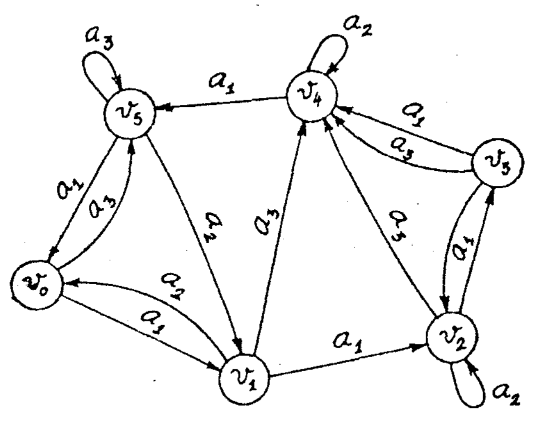
Poznato je da proizvoljan regularan događaj može biti predstavljen različitim regularnim izrazima, [9]. Otuda se postavlja problem njegovog predstavljanja regularnim izrazom minimalne složenosti. U uvodu je data funkcija $\mathcal{L}(n) = \max_{\|G\|\leq n}\|R(G)\|$, gde je $R(G)$ regularan izraz minimalne složenosti, takav da je $|R(G)| = |G|$. Takođe je bilo rečeno da funkcija $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(n)=\max_{\|G\|\leq n}\|\mathfrak{A}(G)\|$ uzeta kao mera efektivnosti algoritma $\mathfrak{A}$

majorira funkciju $\mathcal{L}(n)$. Radi dokaza teoreme koja karakteriše funkciju $\mathcal{L}(n)$, ocenićemo broj $N(n,m)$ svih regularnih događaja, koji se mogu predstaviti izvornicima nad azbukom $\mathcal{A}$ od m slova, a čija složenost nije veća od n, a takođe broj $\mathcal{M}(n,m)$ svih regularnih izraza složenosti n nad istom azbukom $\mathcal{A}$. Ove ocene daju se u sledećim dvema teoremama.

Teorema 2.3.1. Neka je m - const. i $n \to \infty$. Tada je

$$\log_2 N(m,n) \sim n(m-1)\log_2 n .$$

Dokaz. Ocenimo odozdo broj $N(n,m)$. Razmotrimo skup izvornika G_n (nad azbukom $\mathcal{A}$, $n \geq 2$), koji imaju jedinstven završni čvor koji se poklapa sa početnim čvorom v_0. Skup svih čvorova proizvoljnog izvornika iz skupa G_n pripada prostom ciklu $\mathcal{K} = v_0 \rho_1 v_1 \dots \rho_{n-1} v_{n-1} \rho_n v_0$ čije je svako rebro obeleženo slovom a_1. Rebro koje izlazi iz čvora v_j ($1 \leq j \leq n$) i koje je obeleženo nekim slovom iz $\mathcal{A} \setminus \{a_1\}$ uvire u proizvoljan čvor izvornika. Na sl.12. predstavljen je jedan od izvornika iz klase G_6, nad azbukom $\{a_1, a_2, a_3\}$.



Sl.12.

Za fiksirano n odredimo broj izvornika skupa G_n. Neka je v_j ($0 \leq j \leq n-1$) proizvoljan čvor izvornika G_n. Rebra koja iz njega izlaze i koja su različita od rebra ρ_{j+1} a obeležavaju se slovima iz azbuke $\mathcal{A} \setminus \{a_1\}$ mogu se provesti u čvorove izvornika na $(n+1)^{m-1}$ načina. Međutim svaki od izvornika iz skupa G_n ima n čvorova, pa prema tome u skupu G_n ima $(n+1)^{n(m-1)}$ izvornika. Lako je pokazati da različiti izvornici iz skupa G_n zadaju različite regularne događaje. Zaista razmotrimo izvornik G_n', kod kojeg iz čvora v_j ($0 \leq j \leq n-1$) vodi rebro obeleženo slovom a_i ($i \neq 1$) u čvor v_k i izvornik G_n'', kod kojeg iz čvora v_j, rebro obeleženo istim slovom a_i vodi u čvor v_ℓ ($\ell > k$). Očigledno reč $p = \underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{j\text{-puta}} a_i \underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{(n-k)\text{-puta}}$ pripada događaju $|G_n'|$ i ne pripada događaju $|G_n''|$, tj. $|G_n'| \neq |G_n''|$. Na taj način dobijamo da je

$$N(n,m) \geqslant 2^{m-1} + 3^{2(m-1)} + 4^{3(m-1)} + \dots + (n+1)^{n(m-1)} \geqslant$$
$$\geqslant (n+1)^{n(m-1)}.$$

tj.

$$(1) \quad \log_2 N(n,m) \geqslant n(m-1)\log_2(n+1).$$

Sada ocenimo odozgo broj $N(n,m)$. Svaki izvornik G, složenosti n može biti konstruisan na sledeći način.

1° Odabira se skup završnih čvorova izvornika G. To odabiranje se može uraditi na najviše 2^n načina.

2° Iz definicije izvornika, tj. iz činjenice da je svaki njegov čvor dostižan iz početnog čvora, izvornikom G određuje se neko drvo $\mathcal{D}$ koje ima n čvorova i $n-1$ rebara. Početni čvor izvornika G je koren drveta $\mathcal{D}$. Poznato je da broj takvih neizomorfnih drveta nije veći od 4^{n-1}.

3° Svako rebro drveta $\mathcal{D}$ obeležava se nekim slovom azbuke $\mathcal{A}$. Broj načina obeležavanja rebara drveta nije veći od m^{n-1}.

4° Odabira se skup rebara izvornika G, koja nisu rebra drveta $\mathcal{D}$. Broj takvih rebara jednak je $m \cdot n-(n-1)$. Svako iz njih obeleženo je nekim slovom azbuke $\mathcal{A}$. Broj načina provođenja ovih rebara nije veći od $(n+1)^{n(m-1)+1}$.

Konačno dobijamo da je

$$N(n,m) \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{i} \cdot 4^{i-1} \cdot m^{i-1} \cdot (i+1)^{i(m-1)+1} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 2^{3i-2} \cdot m^{i-1} \cdot (i+1)^{i(m-1)+1} \leq$$

$$\leq 2^{3n-2} \cdot m^{n-1} \cdot (n+1)^{n(m-1)+1}.$$

Odavde sledi da je

$$\log_2 N(n,m) \leq 3n-2+(n-1)\log_2 m+(n(m-1)+1)\log_2(n+1)+\log_2 n. \tag{2}$$

Ako je m - const. i $n \to \infty$, onda iz (1) i (2) dobijamo da je

$$\log_2 N(n,m) \sim n(m-1)\log_2 n.$$

Teorema je dokazana.

<u>Teorema 2.3.2.</u> Neka je $\mathcal{M}(n,m)$ broj regularnih izraza složenosti n nad azbukom od m slova. Tada je

$$2^{\frac{n-1}{2}} \cdot m^{\frac{n+1}{2}} \leq \mathcal{M}(n,m) \leq 12^{n-1} \cdot m^{\frac{n+1}{2}}.$$

<u>Dokaz.</u> Neka je R proizvoljan regularan izraz nad azbukom $\mathcal{A}$, složenosti n, i neka se u njemu realizuje n_1 operacija disjunkcije, konjunkcije i iteracije između n_2 slova azbuke $\mathcal{A}$. Za izraz R, $\|R\|=n$, konstruišemo drvo $\mathcal{D}$, koje ima $n-1$ rebara, tj. n

čvorova. Čvor v drveta $\mathcal{D}$ koji nije krajnji obeležavamo jednim iz simbola operacija disjunkcije, konjunkcije i iteracije. Krajnje čvorove drveta $\mathcal{D}$ obeležavamo slovima azbuke $\mathcal{A}$. Očigledno drvo $\mathcal{D}$ sadrži n_2 krajnjih čvorova i n_1 čvorova obeleženih simbolima navedenih operacija. Iz čvora obeleženog simbolima operacija disjunkcije i iteracije izlaze dva rebra, a iz čvora obeleženog simbolom iteracije jedno rebro. Lako je uočiti da broj $\mathfrak{M}(n,m)$ svih regularnih izraza složenosti n nad azbukom $\mathcal{A}$ nije veći od broja svih drveta gore opisanog oblika. Ocenimo broj ovih drveta. Svako takvo drvo može biti konstruisano na sledeći način.

1° Odabira se drvo sa korenom, koje ima $n_1+n_2=n$ čvorova od čega n_2 krajnjih. Ovo odabiranje može se izvršiti na najviše 4^{n-1} načina.

2° Čvorovi različiti od krajnjih, obeležavaju se simbolaima operacija disjunkcije, konjunkcije ili iteracije. Ovo se može uraditi na 3^{n_1} načina.

3° Svaki krajnji čvor obeležava se slovom azbuke $\mathcal{A}$. To obeležavanje se može uraditi na m^{n_2} načina.

Prema tome imamo da je

$$(1)\qquad \mathfrak{M}(n,m) \leq 4^{n-1} \cdot m^{n_2} \cdot 3^{n_1}.$$

Kako je $n_2 \leq n_1+1$, to je $n \leq 2n_1+1$ i $n_1 \geq \frac{n-1}{2}$, $n_2 = n - n_1 \leq \frac{n+1}{2}$. Na osnovu ovoga iz (1) dobijamo da je

$$\mathfrak{M}(n,m) \leq 4^{n-1} \cdot m^{\frac{n+1}{2}} \cdot 3^{n-1},$$

tj. konačno

$$\mathfrak{M}(n,m) \leq 12^{n-1} m^{\frac{n+1}{2}}.$$

Sada ocenimo odozdo broj $\mathcal{M}(n,m)$. Ocenimo broj izraza R, $\|G\|=n$, nad azbukom $\mathcal{A}$, čije odgovarajuće drvo ima oblik predstavljen na sl.13. Broj krajnjih čvorova drveta $\mathcal{D}_R$ jednak je $\frac{n+1}{2}$, a broj onih koji nisu krajnji $\frac{n-1}{2}$. Svaki iz $\frac{n+1}{2}$ krajnjih čvorova drveta $\mathcal{D}_R$ može biti obeležen jednim od m slova azbuke $\mathcal{A}$, tj. svi krajnji čvorovi drveta $\mathcal{D}_R$ mogu biti obeleženi na $m^{\frac{n+1}{2}}$ načina. Čvorovi koji nisu krajnji obeležavaju se simbolima operacija disjunkcije i konjunkcije, na $2^{\frac{n-1}{2}}$ načina. Na taj način dobijamo da je broj izraza R navedenog oblika jednak $2^{\frac{n-1}{2}} \cdot m^{\frac{n+1}{2}}$, tj.

$$(2) \quad \mathcal{M}(n,m) \geqslant 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot m^{\frac{n+1}{2}}.$$

Iz najednakosti (1) i (2) sledi tvrđenje teoreme. Teorema je dokazana.

Sledećom teoremom može biti okarakterisano ponašanje funkcije $\mathcal{L}(n)$.

Teorema 2.3.3.

$$\mathcal{L}(n) \gtrsim \frac{2m}{\log_2 m} \cdot n \log_2 n .$$

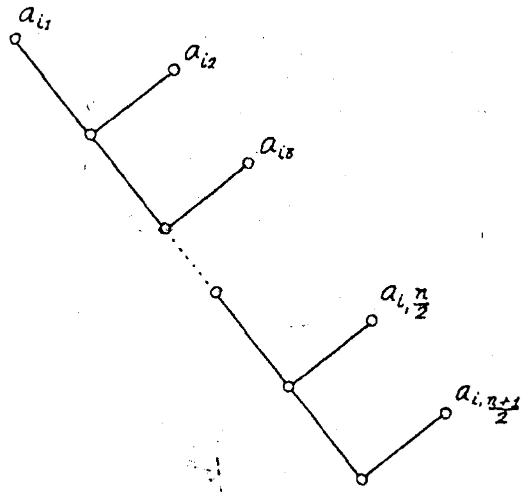
Dokaz. Teoremom 2.3.1. pokazali smo da broj $N(n,m)$ svih regularnih događaja, koji se mogu predstaviti izvornicima čija složenost nije veća od n, nad azbukom $\mathcal{A}$, zadovoljava nejednakost

$$(1) \quad N(n,m) \geqslant (n+1)^{n(m-1)}.$$

U teoremi 2.3.1. dobili smo gornju ocenu broja $\mathcal{M}(n,m)$ svih regularnih izraza, zadatih nad azbukom $\mathcal{A}$, određene složenosti k

$$(2)\quad \mathcal{M}(k,m) \leq 12^{k-1} \cdot m^{\frac{k+1}{2}}$$

Da bi regularnih izraza čija složenost nije veća od k bilo dovoljno za predstavljanje svih regularnih doga-



Sl.13.

đaja zadatih izvornicima složenosti n , mora biti zadovoljena nejednakost

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{k} \mathcal{M}(i,m) \geqslant N(n,m).$$

Iz nejednakosti (3), koristeći (1) i (2) imamo da je

$$\sum_{i=1}^{k} 12^{i-1} \cdot m^{\frac{i+1}{2}} \geqslant (n+1)^{n(m-1)}.$$

Međutim,

$$\sum_{i=1}^{k} 12^{i-1} \cdot m^{\frac{i+1}{2}} = \frac{m(12^k m^{\frac{k}{2}} - 1)}{12\sqrt{m} - 1} \leq \sqrt{m}\left(12^k \cdot m^{\frac{k}{2}} - 1\right) \leq 12^k \cdot m^{\frac{k+1}{2}}.$$

tj. $12^k \cdot m^{\frac{k+1}{2}} \geqslant (n+1)^{m-1}$. Otuda imamo da je

$$k \log_2 12 + \frac{k}{2}\log_2 m + \frac{1}{2}\log_2 m \geqslant n(m-1)\log_2(n+1);$$

$$k \geqslant \frac{n(m-1)\log_2(n+1) - \frac{1}{2}\log_2 m}{\log_2 12 + \frac{1}{2}\log_2 m}.$$

Očigledno je $\mathcal{L}(n) \geqslant k$, tako da iz poslednje nejednakosti za $n \to \infty$ imamo da je $\mathcal{L}(n) \gtrsim \frac{m-1}{\log_2 12 + \frac{1}{2}\log_2 m} \cdot n \log n = c(m) \cdot n \cdot \log_2 n.$

gde je $C(m) = \dfrac{m-1}{\log_2 12 + \frac{1}{2}\log_2 m}$. Ako $m \to \infty$, $C(m) \sim \dfrac{2m}{\log_2 m}$.

Konačno imamo da je $\mathcal{L}(n) \geqslant \dfrac{2m}{\log_2 m} \cdot n \log_2 n$, za $n \to \infty$ i $m \to \infty$, što je i trebalo dokazati. Teorema je dokazana.

GLAVA III

O EFEKTIVNOSTI ALGORITMA $\mathcal{A}$ ANALIZE I $S(\eta, R)$ SINTEZE AUTOMATA

U ovoj glavi razmatraju se problemi efektivnosti algoritma analize $\mathcal{A}$ i usavršenog algoritma sinteze $S(\eta, R)$ izvornika V.M. Gluškova. Ona se sastoji iz dva paragrafa. U § 1 dokazuje se da regularan izraz dobijen pomoću algoritma $\mathcal{A}$ analize izvornika "skoro uvek" nije minimalan. Osim toga opisuju se dve beskonačne klase izvornika $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$, koje imaju svojstvo da primena algoritma $\mathcal{A}$ na elemente ovih klasa rezultira respektivno samo minimalne i samo neminimalne regularne izraze. U § 2 razmatra se efektivnost usavršenog algoritma sinteze izvornika V.M. Gluškova. Terminima teoreme 1.1.2. efektivno se daju klase $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ regularnih izraza, takvih, da za svaki izraz $\mathcal{D}$ iz $\mathcal{M}_1$ izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$ je minimalan, a za svaki izraz $\mathcal{D}$ iz $\mathcal{M}_2$ izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$ nije minimalan.

3.1. O EFEKTIVNOSTI ALGORITMA $\mathcal{A}$

Podsetimo se da smo u uvodu rada sa $\mathcal{K}_n'$ označili skup svih isvornika, koji nemaju više od n čvorova, a sa $\mathcal{K}_n'$ skup svih izvornika G iz $\mathcal{K}_n$ za koje je regularan izraz $A(G)$ minimalan. Pomoću $|\mathcal{K}|$ bio je označen broj izvornika klase $\mathcal{K}$. Sledeće tvrđenje pokazuje da regularan izraz dobijen pomoću algoritma A "skoro uvek" nije minimalan.

<u>Teorema 3.1.1.</u> Ako $n \to \infty$, onda $\frac{|\mathcal{K}_n'|}{|\mathcal{K}_n|} \to 0$.

<u>Dokaz.</u> Konačni orijentisani graf H sa izdvojenim čvorom v_0, čijem je svakom rebru pridruženo slovo azbuke $\mathcal{A}$, nazovimo kvazi-izvornikom ako se izdvajanjem nekog njegovog podskupa čvorova $F \neq \emptyset$ dobija izvornik sa početnim čvorom v_0 i skupom F završnih čvorova.

Označimo sa $M(H)$ skup svih izvornika koji se mogu dobiti iz kvazi-izvornika H.

Neka je H kvazi-izvornik koji ima $k \geq 2m$ čvorova. Ocenimo deo $p(H)$ izvornika G iz $M(H)$ za koje je $A(G)$ minimalan regularan izraz. (Ovde pod $p(H)$ podrazumevamo odnos broja izvornika G iz $M(H)$ za koje je izraz $A(G)$ minimalan prema broju svih izvornika koji se mogu dobiti na gore opisani način iz kvazi-izvornika H). Ako ni za jedan od izvornika G iz $M(H)$ regularan izraz $A(G)$ nije minimalan, onda je $p(H)=0$. Neka je $G \in M(H)$ i neka je $A(G)$ minimalan regularan izraz. Razmotrimo skup F završnih čvorova izvornika G. Pretpostavimo da je njihov broj $|F| > m$. Tada očigledno postoje dva različita prosta puta π_1 i π_2 izvornika G iz početnog čvora v_0 u različite završne čvorove, čiji se počeci poklapaju. Nije teško videti da u tom slučaju putevima π_1 i π_2 u izrazu $A(G)$ odgovaraju članovi oblika $R \cdot R_1$ i RR_2 gde je $R \neq e$, tj. $A(G)$ je oblika $RR_1 \vee RR_2 \vee$ $\vee R_3$. Jasno je da $A(G)$ nije minimalan regularan izraz jer izraz $R(R_1 \vee R_2) \vee R_3$ ima manju složenost. Prema tome $|F| \leq m$ i broj različitih izvornika u $M(H)$, takvih da je $A(G)$ minimalno nije veći od veličine

$$C_k^1 + C_k^2 + \cdots + C_k^m \leq m C_k^m \leq m \cdot \frac{k^m}{m!} \leq k^m .$$

Neka je $G \in M(H)$ i neka je regularan izraz $A(G)$ minimalan, tj. skup F završnih čvorova izvornika G ne sadrži više od m čvorova. Razmatrajući različite skupove $F' \supseteq F$ završnih čvorova, dobijamo različite izvornike iz $M(H)$. Očigledno broj takvih podskupova F' nije manji od 2^{k-m}, tj. $M(H) \geqslant 2^{k-m}$ i $p(H) \leq \frac{k^m}{2^{k-m}}$.

Razmotrimo sada proizvoljno $\varepsilon > 0$ i pokažimo da postoji takvo $N(\varepsilon, m)$ da je za $n > N(\varepsilon, m)$, $\frac{|\mathcal{K}_n'|}{|\mathcal{K}_n|} < \varepsilon$.

Odaberimo $N_1(\varepsilon, m) > 2m$, tako da za $k \geqslant N_1(\varepsilon, m)$ važi nejednakost $\frac{k^m}{2^{k-m}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada je za proizvoljan kvazi-izvornik H, koji ima $k \geqslant N_1(\varepsilon, m)$ čvorova, $p(H) < \frac{\varepsilon}{2}$. Odavde, kako se skup svih izvornika sa k čvorova razbija na međusobno disjunktne podskupove oblika $M(H)$, to deo izvornika G sa k čvorova, takvih da je $A(G)$ minimalno, za $k > N_1(\varepsilon, m)$ nije veći od $\frac{\varepsilon}{2}$. Jasno je takođe da je deo izvornika G za koje je $A(G)$ minimalno, u odnosu na sve izvornike čiji broj čvorova k zadovoljava nejednakost $N(\varepsilon, m) \leq k \leq n$ manji $\frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $A(x)$ broj izvornika koji imaju manje od x čvorova i neka je $B(x, y)$ skup izvornika koji nemaju manje od x ni više od y čvorova. Tada je očigledno

$$|\mathcal{K}_n'| \leq A(N_1(\varepsilon, m)) + \frac{\varepsilon}{2} B(N_1(\varepsilon, m), n),$$

$$|\mathcal{K}_n| = A(N_1(\varepsilon, m)) + B(N_1(\varepsilon, m), n)$$

tj.

$$(*) \qquad \frac{|\mathcal{K}_n'|}{|\mathcal{K}_n|} \leqslant \frac{A(N_1(\varepsilon,m)) + \frac{\varepsilon}{2} B(N_1(\varepsilon,m),n)}{A(N_1(\varepsilon,m)) + B(N_1(\varepsilon,m),n)}$$

Nije teško proveriti da $B(N_1(\varepsilon,m),n) \to \infty$ kada $n \to \infty$. Prema tome naći će se takvo $N(\varepsilon,m) \geqslant N_1(\varepsilon,m)$ da za $n > N(\varepsilon,m)$ desna strana nejednakosti (*) manja je od ε. Teorema dokazana.

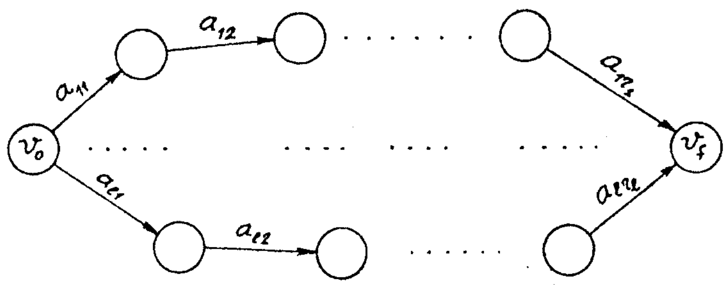
Dokažimo sada da primena algoritma A analize izvornika na izvornike iz klasa $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ rezultira respektivno samo minimalne i samo neminimalne regularne izraze.

<u>Teorema 3.1.2.</u>

a) Za proizvoljan izvornik G iz $\mathcal{K}_1$ izraz $A(G)$ je minimalan.

b) Za proizvoljan izvornik G iz $\mathcal{K}_2$ izraz $A(G)$ nije minimalan.

<u>Dokaz.</u> Razmotrimo klasu $\mathcal{K}_1$ izvornika oblika predstavljenog na sl.14, gde je $a_{i\eta_i} \neq a_{j\eta_j}$ za $i \neq j$. Svaki izvornik



Sl.14

ovog oblika zadaje regularan događaj, čiji je regularan izraz oblika $R = \mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_\ell$, gde je $\mathcal{P}_i = a_{i1} a_{i2} \dots a_{i\eta_i}$ i prva a takođe i poslednja slova različitih reči $\mathcal{P}_i$ su različita, ($1 \leq i \leq \ell$). Pokažimo da je svaki regularan izraz Q ovoga oblika minimalan. Uzmimo prvo da je $|R| = \{\mathcal{P}\}$, tj. događaj R je reč $\mathcal{P}$. Ako je R' minimalan izraz i ako je $/R'/=\{\mathcal{P}\}$, onda na osnovu konačnosti događaja $/R'/$ izraz R' ne može biti iteracija $\langle Q\rangle$. Ako je $R'=Q_1\vee\ldots$ $\ldots Q_q$ ($q\geq 1$), onda neki od događaja $/Q_j/$ ($1\leq j\leq q$) sadrži reč $\mathcal{P}$ i $/R'/=/Q_j/=\{\mathcal{P}\}$, što je u suprotnosti sa minimalnošću izraza R'. Zato se R' može predstaviti u obliku $Q_1\cdots Q_s$, gde je Q_i ($1\leq i\leq s$) ili reč, ili izraz oblika $Q'\vee Q''$. Poslednji slučaj je nemoguć, jer bi tada događaj $/R'/$ imao najmanje dve reči. Prema tome svako Q_i je slovo, tj. R' je oblika $a_{11}\ldots a_{1r_1}$.

Neka je za svako $\ell\leq n-1$ već dokazano da jedinstveni minimalni izraz koji zadaje regularan događaj $\{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_\ell\}$ ima oblik $\bigvee_{i=1}^{\ell} a_{i1}\ldots a_{ir_i}$ i neka je R' minimalan regularan izraz, koji zadaje događaj $\{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_\ell\}$ za $\ell=n$. Očigledno R' ne sadrži operaciju iteracije. Neka je $R'=Q_1\ldots Q_q$. Pošto $/R'/$ sadrži najmanje dve reči, to za neko i $/Q_i/$ sadrži najmanje dve reči. Lako je uočiti, da u tom slučaju, događaj $/R'/$ sadrži ili dve reči koje počinju sa jednim istim slovom, ili dve reči koje se završavaju istim slovima. Prema tome slučaj $R'=Q_1\ldots Q_q$ nije moguć i R' je oblika $Q_1\vee\ldots\vee Q_q$. Očigledno je za proizvoljno i $1\leq/Q_i/\leq\ell-1$, i svako Q_i ($1\leq i\leq q$) je minimalan regularan izraz koji zadaje događaj $/Q_i/$. Prema indukcijskoj pretpostavci Q_i mora imati oblik disjunkcije reči, koje ulaze u događaj $/Q_i/$, a iz minimalnosti R' sledi da je $/Q_i/\cap/Q_j/=\emptyset$ za $i\neq j$. Odavde sledi da R' ima oblik disjunkcije reči $\mathcal{P}_1$, ..., $\mathcal{P}_\ell$, tako da je regularan izraz $A(G)$, gde je G izvornik

Na kraju primetimo da je za klasu $\mathcal{K}_2$ izvornika, za koje algoritam A daje regularne izraze koji nisu minimalni, dovoljno uzeti skup svih izvornika nad azbukom $\mathcal{A}$ od m slova koji imaju više od m završnih čvorova. Teorema je dokazana.

3.2. O EFEKTIVNOSTI ALGORITMA $S(\eta, R)$

Zadatak razmatran u teoremi 3.1.2. može se na prirodan način postaviti i za usavršeni algoritam sinteze izvornika V.M. Gluškova. Usavršeni algoritam sinteze izvornika V.M. Gluškova, koji je opisan u uvodu rada, daje se nekim nizom η izjednačavanja osnovnih mesta regularnog izraza koji se u konkretnom slučaju razmatra. Sledećom teoremom ćemo pokazati da primena usavršenog algoritma sinteze izvornika V.M. Gluškova na proizvoljan izraz $\mathcal{D}$ iz klase $\mathcal{M}_1$ regularnih izraza, opisane u uvodu rada, rezultira minimalan izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$, a njegova primena na proizvoljan regularan izraz iz klase $\mathcal{M}_2$ daje neminimalan izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$.

<u>Teorema 3.2.1.</u>

a) Za svaki regularan $\mathcal{D}$ iz $\mathcal{M}_1$ postoji takav niz η izjednačavanja njegovih osnovnih mesta, za koji je izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$ minimalan.

b) Za proizvoljan izraz $\mathcal{D}$ iz $\mathcal{M}_2$ i niz η izjednačavanja njegovih osnovnih mesta, izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$ nije minimalan.

<u>Dokaz</u>. a) Razmotrimo proizvoljan regularan izraz $\mathcal{D}$

iz $\mathcal{M}_1$. Nije teško uočiti da su osnovna mesta izraza $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1 \vee \dots \vee \mathcal{D}_k$ ($k \geq 1$), $\mathcal{D}_i = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \mathcal{P}_{i1} \dots \mathcal{P}_{is_i-1}\langle Q_{is_i}\rangle \mathcal{P}_{is_i}$ $(s_i \geq 0)$ koja se nalaze neposredno posle poslednjih slova reči $\mathcal{P}_{ij}$ i $Q_{i,j+1}$ ($1 \leq i \leq k$) međusobno slična. Primenimo na ta mesta operaciju izjednačavanja sličnih mesta i prema usavršenom algoritmu sinteze izvornika konstruišimo izvornik $G = S(\eta, \mathcal{D})$.

Neka je m uopšteno mesto izraza $\mathcal{D}$, koje odgovara gore ukazanom nizu izjednačavanja mesta. Pridružimo ovome mestu m izraze $N_m(\mathcal{D})$ i $K_m(\mathcal{D})$, koje ćemo zvati m - početkom i m - krajem izraza $\mathcal{D}$. Mogući su sledeći slučajevi.

a) m se sastoji iz jednog mesta koje je mesto člana $\mathcal{D}_i$ posle slova p_s reči $\mathcal{P}_{ij} = p_1 \dots p_s \dots p_r$, gde je $r > s$ za $j \neq s_i$. Tada je

$$N_m(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \dots \langle Q_{ij}\rangle p_1 \dots p_s$$
$$K_m(\mathcal{D}) = p_{s+1} \dots p_r \langle Q_{i,j+1}\rangle \mathcal{P}_{i,j+1} \dots \langle Q_{is_i}\rangle \mathcal{P}_{is_i} ;$$

b) m se sastoji iz jednog mesta koje pripada članu $\mathcal{D}_i$ i nalazi se posle slova q_s reči $Q_{ij} = q_1 \dots q_s \dots q_r$, $r > s$. Tada je

$$N_m(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \dots \langle Q_{i,j-1}\rangle \mathcal{P}_{i,j-1}\langle Q_{ij}\rangle q_1 \dots q_s .$$
$$K_m(\mathcal{D}) = q_{s+1} \dots q_r \langle Q_{ij}\rangle \mathcal{P}_{ij} \dots \langle Q_{is_i}\rangle \mathcal{P}_{is_i} ;$$

c) m se sastoji iz dva mesta izraza $\mathcal{D}$, koja su raspoređena neposredno posle reči $\mathcal{P}_{ij}$ i $Q_{i,j+1}$. Tada je

$$N_m(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \dots \mathcal{P}_{i,j-1}\langle Q_{ij}\rangle \mathcal{P}_{ij}\langle Q_{i,j+1}\rangle ,$$
$$K_m(\mathcal{D}) = \langle Q_{i,j+1}\rangle \mathcal{P}_{i,j+1} \dots \langle Q_{is_i}\rangle \mathcal{P}_{is_i}$$

d) m je početno mesto. Tada je

Jasno je da se regularan događaj $N_m(\mathcal{D})$ sastoji is svih takvih reči p za koje m ulazi u uopšteni p - spektar izraza $\mathcal{D}$. (Uopšteni p - spektar izraza $\mathcal{D}$ je skup svih njegovih uopštenih mesta m, takvih, da bar jedno od osnovnih mesta koja ulaze u m pripada p - spektru izraza $\mathcal{D}$.)

Lema 3.2.1. Ako je $N_{m_1}(\mathcal{D}) \neq N_{m_2}(\mathcal{D})$, onda su događaji $|N_{m_1}(\mathcal{D})|$ i $N_{m_2}(\mathcal{D})$ disjunktni.

Dokaz. Neka je $N_{m_i}(\mathcal{D}) = R_{i0}\langle S_{i1}\rangle R_{i1}\langle S_{i2}\rangle \cdots R_{it_i-1}\langle S_{it_i}\rangle R_{it_i}$ ($i \in \{1,2\}$). Neka reč $p \in |N_{m_1}(\mathcal{D})| \cap |N_{m_2}(\mathcal{D})|$. Tada se p može predstaviti u obliku

$$R_{i0} S_{i1}^{\ell_{i1}} R_{i1} S_{i2}^{\ell_{i2}} \cdots R_{it_i-1} S_{it_i}^{\ell_{it_i}} R_{it_i}.$$

Odavde se vidi da je jedna od reči R_{10} i R_{20} početak druge. Neka je reč R_{10} početak reči R_{20}. Ako je $t_1 > 0$, onda prema definiciji članova izraza $\mathcal{D}$, R_{10} se mora podudarati sa R_{20} i S_{11} sa S_{21}. Ako je $t_1 = 0$, onda je $p = R_{10}$ i neophodno je da se R_{20} podudara sa R_{10}, jer bi inače reč p, čiji je početak reč R_{20}, imala veću dužinu od dužine reči R_{10}. Pri tome, na osnovu razdvojivosti članova izraza $\mathcal{D}$, $t_2 = 0$ $N_{m_1}(\mathcal{D}) = N_{m_2}(\mathcal{D})$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom leme. Zato je $t_1 > 0$, $R_{10} = R_{20}$, $S_{11} = S_{21}$. Na taj način p se može predstaviti u obliku

$$p = R_{10} S_{11}^{\ell_{11}} R_{11} z_1 = R_{10} S_{11} R_{21} z_2$$

gde su z_1 i z_2 reči. Ako je $\ell_{11} < \ell_{21}$, onda skraćujući poslednju jednakost sleva sa $R_{10} S_{11}^{\ell_{11}}$ dobijamo

$$(1)\quad R_{11} z_1 = S_{11}^{\ell_{21} - \ell_{11}} R_{21} z_2$$

Uočimo da se prema definiciji $N_{m_i}(\mathcal{D})$ ($i = 1,2$) ili prvo slovo reči R_{11} razlikuje od prvog slova reči S_{11}, ili je

R_{11} sopstveni početak reči S_{11} , pri čemu je u poslednjem slučaju $z_1 = e$ i dužina reči R_{11} manja je od dužine reči koja se nalazi na desnoj strani jednakosti (1). U oba slučaja dolazimo do protivurečnosti iz koje zaključujemo da je $\ell_{11} \geqslant \ell_{21}$. Analogno se dokazuje nemogućnost slučaja $\ell_{11} > \ell_{21}$. Konačno imamo da je $\ell_{11} = \ell_{21}$. Na isti način zaključujemo da je $R_{11} = R_{21}$, $S_{12} = S_{22}$, $\ell_{12} = \ell_{22}$, itd. Na kraju krajeva dobijamo da je $N_{m_1}(\mathcal{D}) \equiv N_{m_2}(\mathcal{D})$, što je suprotno pretpostavci leme, tako da ne postoji reč $p \in |N_{m_1}(\mathcal{D})| \cap |N_{m_2}(\mathcal{D})|$. Lema je dokazana.

Lema 3.2.2. Skup uopštenih mesta izraza $\mathcal{D}$ je čvor izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$, tada i samo tada, kada se sastoji iz svih uopštenih mesta m , koja imaju jedan isti m - početak.

Dokaz. Neka je v čvor izvornika G , dostižan iz početnog čvora v_0 po putu čija je odgovarajuća reč p , tj. v je skup svih uopštenih mesta izraza $\mathcal{D}$, koja pripadaju uopštenom p - spektru $\mathcal{D}$. Neka uopšteno mesto m pripada v . Tada je $p \in |N_m(\mathcal{D})|$, tj. svi m - počeci mesta m , koja pripadaju v , sadrže (kao događaji) reč p i na osnovu leme 3.2.1. ovi se m - počeci podudaraju. Ako je m' proizvoljno uopšteno mesto izraza $\mathcal{D}$, takvo da je $N_{m'}(\mathcal{D}) \equiv N_m(\mathcal{D})$, gde $m \in v$, onda $p \in |N_{m'}(\mathcal{D})|$. Drugim rečima, m' ulazi u uopšteni p - spektar izraza $\mathcal{D}$, tako da je v zaista skup svih uopštenih mesta m , koja imaju jedan isti m - početak.

Obrnuto, neka je $\tilde{m}$ skup svih uopštenih mesta m , koja imaju jedan isti m - početak N. Razmotrimo reč $p \in |N|$.

Pokažimo da je $\widetilde{m}$ uopšteni p - spektar izraza $\mathcal{D}$. Ako je $m \in \widetilde{m}$ imamo da je $N_m(\mathcal{D}) = N$, tj. $p \in |N_m(\mathcal{D})|$ i m pripada uopštenom p - spektru izraza $\mathcal{D}$. Ako $m \notin \widetilde{m}$, onda je $|N_m(\mathcal{D})| \cap |N| = \emptyset$, tj. $p \notin |N_m(\mathcal{D})|$ i m ne pripada uopštenom p - spektru izraza $\mathcal{D}$. Lema je dokazana.

Neka je v čvor izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$. Označimo sa M_v skup svih reči, koje prevode čvor v u jedan iz finalnih čvorova izvornika G i nazovimo ga događajem koji odgovara čvoru v.

Očigledna je sledeća lema.

Lema 3.2.3. Ako je v čvor izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$, onda je

$$M_v = |\bigvee_{m \in v} K_m(\mathcal{D})|.$$

Izraz $\bigvee_{m \in v} K_m(\mathcal{D})$ nazivamo odgovarajućim čvoru v.

Lema 3.2.4. Izvornik $G = S(\eta, \mathcal{D})$ ne sadrži čvor koji bi bio dostižan po jednom istom slovu iz dva različita čvora.

Dokaz. Neka je N m - početak izraza $\mathcal{D}$. Čvor v izvornika G, obrazovan iz svih uopštenih mesta m izraza m za koje je $N_m(\mathcal{D}) = N$, označimo sa m_N. Mogući su sledeći slučajevi.

a) $N = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \mathcal{P}_{i1} \cdots \langle Q_{ij}\rangle z_1 \cdots z_s$, gde je $s > 1$ i z_i slovo. Tada je jedinstveni čvor izvornika G iz kojeg se može preći u m_N, čvor $m_{N'}$, gde je $N' = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \mathcal{P}_{i1} \cdots \langle Q_{ij}\rangle z_1 \cdots z_{s-1}$.

b) $N = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \mathcal{P}_{i1} \cdots \langle Q_{ij}\rangle$. Tada se u m_N može preći ili iz čvora $m_{N'}$, gde je $N' = \mathcal{P}_{0}\langle Q_{i1}\rangle \mathcal{P}_{i1} \cdots \langle Q_{i,j-1}\rangle p_1 \cdots p_{t-1}$ $\mathcal{P}_{ij} = p_1 \cdots p_{t-1} p_t$, ili iz čvora $m_{N''}$, gde je $N'' = \mathcal{P}_{i0}\langle Q_{i1}\rangle \mathcal{P}_{i1} \cdots$ $\cdots \langle Q_{i,j-1}\rangle \mathcal{P}_{i,j-1}\langle Q_{ij}\rangle q_1 \cdots q_{s-1}, Q_{ij} = q_1 \cdots q_s$. U prvom slučaju se prelaz realizuje pomoću slova p_t , a u drugom pomoću slova q_s , a prema uslovima na izraz $\mathcal{D}$ je $p_\eta \neq q_s$.

c) $N = e$. Tada se u m_N ne može preći ni iz jednog čvora izvornika.

Nije teško uočiti da je u svim razmatranim slučajevima tvrđenje leme tačno. Lema je dokazana.

Lema 3.2.5. Ako su m_1 i m_2 različiti čvorovi izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$ i čvor m_2 je dostižan iz čvora m_1 , onda m_1 nije ekvivalentno m_2 ($m_1 \nsim m_2$).

Dokaz. Pretpostavimo da je m_1 ekvivalentno m_2 ($m_1 \sim m_2$). Kako je m_2 dostižno iz m_1 po nekoj reči p , to je reč p početak neke reči q , po kojoj je neki finalni čvor dostižan iz čvora m_1 . Iz toga što je $m_1 \sim m_2$ sledi da je po reči q iz čvora m_2 dostižan neki završni čvor, pri čemu je iz čvora m_2 po reči p dostižan neki čvor m_3 . Očigledno $m_2 \sim m_3$. Odaberimo sada čvorove m_2 i m_3 i prema njima kao prema m_1 i m_2 nađimo neki čvor m_4 . Na kraju krajeva dobijamo niz čvorova m_1 , m_2 , m_3 , ..., m_s , pri čemu je $m_s = m$ i za neko $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$. Ako je $i > 1$, lako je pokazati, da u izvorniku G postoji čvor dostižan po jednom istom slovu iz dva različita čvora, što je protivurečno tvrđenju leme 3.2.3. Ako je $i = 1$, tj. $m_1 = m_s$, onda m_1 i m_2 pripadaju jednom istom ciklu. Međutim najkraće reči događaja, koji odgovaraju čvorovima m_1 i m_2 imaju različitu dužinu, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su m_1 i m_2 ekvivalentni. Na taj način pokazali smo da u proizvoljnom slučaju $m_1 \nsim m_2$. Lema je dokazana.

Označimo sa C_v skup svih mesta m izraza $\mathcal{D}$ koja obrazuju čvor v izvornika G .

Lema 3.2.6. Neka su $\mathcal{m}_1$ i $\mathcal{m}_2$ različiti čvorovi izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$, $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_1$, pri čemu je $C_{\mathcal{m}_1} \cap C_{\mathcal{m}_2} \neq \phi$. Tada čvorovi $\mathcal{m}_1$ i $\mathcal{m}_2$ nisu ekvivalentni.

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}_i \in C_{\mathcal{m}_1} \cap C_{\mathcal{m}_2}$, gde je $\mathcal{D}_i$ član izraza $\mathcal{D}$. Kako je $\mathcal{m}_1 \neq \mathcal{m}_2$, to su uopštena mesta m_1 iz $\mathcal{m}_1$ i m_2 iz $\mathcal{m}_2$, raspoređena u članu $\mathcal{D}_i$, različita. Neka se primera radi m_1 nalazi levo od m_2 . Tada nije teško ukazati reč p , takvu da jedno od mesta koje pripada m_2 p - sledi za jednim od mesta koja pripadaju m_1 , tako da ova reč prevodi čvor $\mathcal{m}_1$ u čvor $\mathcal{m}_2$. Prema lemi 3.2.4. nalazimo da $\mathcal{m}_1 \not\sim \mathcal{m}_2$. Lema je dokazana.

Očigledna je sledeća lema.

Lema 3.2.7. Ako je reč $p = q^k$ dobijena cikličkim pomeranjem iz reči $\tilde{p}$ (q je reč, k je prirodan broj), onda je $\tilde{p} = \tilde{q}^k$ gde je $\tilde{q}$ dobijeno cikličkuim pomeranjem iz reči q .

Lema 3.2.8. Neka je $p^m = q^n$ (p , q - reči, m , n - prirodni brojevi). Tada postoji reč z , tako da je $p = z^k$, $q = z^\ell$.

Dokaz. Razmotrimo ω - reč $ppp\ldots\ldots$. Pošto je $p^m = q^n$, to se ona poklapa sa ω - reči $qqq\ldots\ldots$. Neka je a_i , $(i = 1, 2, \ldots)$, i -to slovo ove ω - reči. Neka su $d_p = |p|$ i $d_q = |q|$, redom dužine reči p i q . Očigledno, tada je za proizvoljno i $a_{i+d_p} = a_i$, $a_{i+d_q} = a_i$. Neka je $d = (d_p, d_q)$ najmanji zajednički sadržalac brojeva za d_p i d_q. Tada je za odgovarajuće cele brojeve t i s, $d=td_p+sd_q$, tako da je za i veće od nekog i_0, $a_{i+d}=a_i$. Neka je $md_p>i_0$ i $m\cdot d_q>i_0$. Tada imamo da je $p=a_{md_p+1}\cdots a_{(m+1)d_p}$, $q=a_{md_q+1}\cdots a_{(m+1)d_q}$, pri čemu je $p=r^{\frac{d_p}{d}}$, $q=r^{\frac{d_q}{d}}$, gde je $r=a_{md_p+1}\cdot\ldots\cdot a_{md_p+d}=$ $=a_{md_q+1}\cdots a_{md_q+d}$, što i dokazuje lemu.

Lema 3.2.9. Neka je $R=\mathcal{P}_1\langle Q_1\rangle\mathcal{P}_2\langle Q_2\rangle\ldots\mathcal{P}_s\langle Q_s\rangle\mathcal{P}_{s+1}$, gde su $\mathcal{P}_i$, Q_i reči, $Q_i\neq e$, $(1\leq i\leq s)$ i neka je $p=q\cdot r^n h$ reč događaja $/R/$, pri čemu je $r\neq e$, prva slova reči r i h različita i $n>m(s+2+/q/+/r/)$ ($/q/$, $/r/$ - dužine reči q i r, m - najveća od dužina $/\mathcal{P}_i/$, $/Q_i/$ reči $\mathcal{P}_i$, Q_i). Tada postoji takvo $\ell\geq 1$, da je reč r ciklički slična jednoj od reči $Q_1,\ldots,Q_\ell$, pri čemu je $h\in/\mathcal{P}'_{\ell+1}\langle Q_{\ell+1}\rangle\cdots\langle Q_s\rangle\mathcal{P}_{s+1}/$, gde je $/\mathcal{P}'_{\ell+1}/\leq max(/\mathcal{P}_{\ell+1}/,/Q_{\ell+1}/)$.

Dokaz. Pošto je $p\in/R/$, to je $p=\mathcal{P}_1 Q_1^{i_1}\mathcal{P}_2 Q_2^{i_2}\ldots\mathcal{P}_s Q_s^{i_s}\mathcal{P}_{s+1}$ $(i_j\geq 0,\ 1\leq j\leq s)$. Tada je $qr^n=\mathcal{P}_1 Q_1^{i_1}\ldots\mathcal{P}_{\tilde{\ell}+1}Q_{\tilde{\ell}+1}^{i'_{\tilde{\ell}+1}}Q'$, gde je $i'_{\tilde{\ell}+1}\leq i_{\tilde{\ell}+1}$, pri čemu je za $i'_{\tilde{\ell}+1}<i_{\tilde{\ell}+1}$, Q' početak reči $Q_{\tilde{\ell}+1}$, a za $i'_{\tilde{\ell}+1}=i_{\tilde{\ell}+1}$ Q' je početak reči $\mathcal{P}_{\tilde{\ell}+2}$, (prema izboru n, $/qr^n/>/\mathcal{P}_1/$). Pretpostavimo da je $i_1\leq/q/+/r/$, $\ldots$, $i'_{\tilde{\ell}+1}</q/+/r/$. Tada dužina $\mathcal{P}_1 Q_1^{i_1}\ldots\mathcal{P}_{\tilde{\ell}+1}Q_{\tilde{\ell}+1}^{i'_{\tilde{\ell}+1}}Q'$ nije veća od

$$\sum_{i=1}^{s+1}/\mathcal{P}_i/+(/q/+/r/)\cdot max/Q_i/+max(/Q_{\tilde{\ell}+1}/,/\mathcal{P}_{\tilde{\ell}+2}/)\leq$$

$$\leq m(s+1)+(/q/+/r/)m+m=m(s+2+/q/+/r/),$$

jer prema uslovu, dužina qr^n nije manja od $n>m(s+2+$ $+/q/+/r/)$. Zato postoji takvo j, da je $i_j>/q/+/r/$ (ili za $j=\tilde{\ell}+1$, $i'_j>/q/+/r/$).

Neka je $j=\tilde{\ell}+1$, $i'_{\tilde{\ell}+1}<i_{\tilde{\ell}+1}$. Tada je Q' početak $Q_{\tilde{\ell}+1}$, tj. $Q_{\tilde{\ell}+1}=Q'Q''$ i reč h može se predstaviti u obliku $Q''h'$, gde je h' neka reč. S druge strane $qz^n=\mathcal{P}'Q_{\tilde{\ell}+1}^{i'_{\tilde{\ell}+1}}Q'$ ($\mathcal{P}'=\mathcal{P}_1Q_1^{i_1}\cdots Q_{\tilde{\ell}}^{i_{\tilde{\ell}}}\mathcal{P}_{\tilde{\ell}+1}$), pri čemu je $i'_{\tilde{\ell}+1}>|q|+|z|$. Označimo $Q''Q'$ sa $\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}$. Tada se poslednja jednakost može predstaviti u obliku

$$qz^n=\mathcal{P}'Q_{\tilde{\ell}+1}^{i'_{\tilde{\ell}+1}-|z|}Q'\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}^{|z|}=\mathcal{P}''\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}^{|z|},$$

gde je $|\mathcal{P}''|\geq i'_{\tilde{\ell}+1}-|z|>|q|$. Dalje je $|qz^n|=|q|+n|z|=|\mathcal{P}''|+|z||\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}|$ i iz $|q|<|\mathcal{P}''|$ sledi da je $n>|\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}|$. Odavde je $qz^{n-|\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}|}=\mathcal{P}''\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}^{|z|}$. Kako su dužine reči $z^{|\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}|}$ i $\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}^{|z|}$ jednake, to je $z^{|\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}|}=\tilde{Q}_{\tilde{\ell}+1}^{|z|}$, tj. prva slova reči z i Q'' su jednaka. Pošto je $h=Q''h'$ dobijamo da se podudaraju i prva slova reči z i h, što je protivurečno sa pretpostavkom leme. Zato je za $i'_{\tilde{\ell}+1}<i_{\tilde{\ell}+1}$, $j\neq\tilde{\ell}+1$.

Neka je $\tilde{\mathcal{P}}=\mathcal{P}_1Q_1^{i_1}\cdots Q_{j-1}^{i_{j-1}}\mathcal{P}_j$, $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}=\mathcal{P}_{j+1}Q_{j+1}^{i_{j+1}}\cdots Q_{\tilde{\ell}+1}^{i'_{\tilde{\ell}+1}}Q'$. Tada je $qz^n=\tilde{\mathcal{P}}Q_j^{i_j}\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}$, pri čemu je $i_j>|q|+|z|$, tj. $qz^n=\tilde{\mathcal{P}}Q^{i_j-|z|}Q_j^{|z|}\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}=\mathcal{P}^*Q_j^{|z|}\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}$. Pri tome je $|\mathcal{P}^*|>(i_j-|z|)>|q|$; tako da se $Q_j^{|z|}\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}$ može predstaviti u obliku $z''z^{n'}$, gde je z'' kraj reči z, $z=z'z''$, $|z''|<|z|$, $n'<n$. Ako je $\tilde{z}=z''z'$, tada je $\tilde{z}^{n'}z''=Q_j^{|z|}\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}$. Ako je $n'<|Q_j|$, onda je $|\tilde{z}^{n'}z''|=n'|z|+|z''|\leq(|Q_j|-1)|z|+|z''|=|Q_j||z|+|z''|-|z|<|Q_j||z|$. Poslednje nije moguće, tako da je $n'>|Q_j|$, $\tilde{z}^{|Q_j|}\tilde{z}^{n'-|Q_j|}z''=Q_j^{|z|}\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}$ i pošto su dužine reči $\tilde{z}^{|Q_j|}$ i $Q_j^{|z|}$ jednake, to je $\tilde{z}^{|Q_j|}=Q_j^{|z|}$. Prema lemi 3.2.7. reči $\tilde{z}$ i Q_j su stepeni jedne iste reči t, a prema lemi 3.2.8. reči z i

Q_j su ciklički slične. Ako je $i'_{\tilde{\ell}+1} < i_{\tilde{\ell}+1}$, onda za ℓ uzimamo $\tilde{\ell}$. Tada je r ciklički slična reči Q_j, gde je $1 \leq j \leq \ell$ na osnovu gore date primedbe, pri čemu je $h = Q'' Q_{\ell+1}^{i_{\ell+1}-i'_{\ell+1}-1} \mathcal{P}_{\ell+2} \cdots Q_s^{i_s} \mathcal{P}_{s+1}$, tj. $h \in |Q''\langle Q_{\ell+1}\rangle \cdots \langle Q_s\rangle \mathcal{P}_{s+1}|$ i $|Q''| \leq max(|\mathcal{P}_{\ell+1}|, |Q_{\ell+1}|)$. U slučaju kada je $i'_{\tilde{\ell}+1} = i_{\tilde{\ell}+1}$ dovoljno je uzeti da je $\ell = \tilde{\ell}+1$. Lema je dokazana.

<u>Lema 3.2.10.</u> Neka su $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ različiti čvorovi izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$, pri čemu je $C_{\mathcal{M}_1} \cap C_{\mathcal{M}_2} = \emptyset$ i bar jedan od regularnih izraza koji odgovaraju tim čvorovima sadrži simbol iteracije. Tada $\mathcal{M}_1 \not\sim \mathcal{M}_2$.

<u>Dokaz.</u> Pretpostavimo da je $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$. Neka je $\bigvee_{m \in \mathcal{M}_1} K_m(\mathcal{D}) = \bigvee_{i=1}^{t} \mathcal{L}_i$, $\bigvee_{m \in \mathcal{M}_2} K_m(\mathcal{D}) = \bigvee_{i=1}^{t'} \mathcal{L}'_i$. Pošto je $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$, to je $|\bigvee_{i=1}^{t} \mathcal{L}_i| = |\bigvee_{i=1}^{t'} \mathcal{L}'_i|$. Neka je $\mathcal{L}_j$ član koji ima najviše od svih članova $\mathcal{L}_i$ i $\mathcal{L}'_i$ simbola iteracije, $\mathcal{L}_j = p_1\langle q_1\rangle p_2 \cdots p_r\langle q_r\rangle p_{r+1}$. Razmotrimo reč $\alpha_n = p_1 q_1^n p_2 q_2^n \cdots p_r q_r^n p_{r+1}$, $\alpha_n \in |\mathcal{L}_j|$. Tada postoji takav član $\mathcal{L}'_j$ da događaj $|\mathcal{L}'_j|$ sadrži beskonačno mnogo reči α_n. Neka je $\mathcal{L}'_j = \mathcal{P}_1\langle Q_1\rangle \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_s\langle Q_s\rangle \mathcal{P}_{s+1}$. Razmotrimo $n_0 > k(s+2+max(|p_i|+|q_i|))$, gde je $k = \max_{\mathcal{P}_u, Q_v} (|\mathcal{P}_u|, |Q_v|)$, za koje je $\alpha_{n_0} \in |\mathcal{L}'_j|$. Tada prema lemi 3.2.9. postoji takvo $\ell_1 \geq 1$, da je reč q_1 ciklički slična jednoj od reči $Q_1, \ldots, Q_{\ell_1}$, pri čemu je $\alpha'_{n_0} = p_2 q_2^{n_0} p_3 \cdots p_r q_r^{n_0} p_{r+1} \in |\mathcal{P}'_{\ell_1+1}\langle Q_{\ell_1+1}\rangle \cdots \langle Q_s\rangle \mathcal{P}_{s+1}|$, gde je $\max_{\substack{u \geq \ell_1+2 \\ v \geq \ell_1+1}} \{|\mathcal{P}_u|, |Q_v|, |\mathcal{P}'_{\ell_1+1}|\} = k' \leq k$ i ponovo se može primeniti lema 3.2.9. na reč α'_{n_0} i regularan izraz $\mathcal{P}'_{\ell_1+1}\langle Q_{\ell_1+1}\rangle \cdots \langle Q_s\rangle \mathcal{P}_{s+1}$. Ponavljajući ovo rasuđivanje r puta dobijamo da su reči $q_1, q_2, \ldots, q_r$ ciklički slične rečima $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots$

... , Q_{i_r} (i_j različiti). Kako je $s \leq r$, to je $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, ... , $i_r = r = s$, tj. reči Q_s i q_r su ciklički slične što je suprotno pretpostavci o izrazu $\mathcal{D}$. Lema je dokazana.

<u>Lema 3.2.11.</u> Postoji takav niz $\tilde{\eta}$ izjednačavanja odgovarajućih i sličnih mesta izraza $\mathcal{D}$, a koji produžava izjednačavanja mesta koja odgovaraju algoritmu $S(\eta,\mathcal{D})$, da ako su $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ ekvivalentni i različiti čvorovi izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$, onda je svako mesto m_1 iz skupa mesta koja obrazuju $\mathcal{M}_1$ izjednačeno sa svakim mestom m_2 iz $\mathcal{M}_2$.

<u>Dokaz.</u> Neka je M_1 skup uopštenih mesta izraza $\mathcal{D}$, koja se dobijaju pri opisu algoritma $S(\eta,\mathcal{D})$. Izjednačimo sva moguća odgovarajuća mesta skupa M_1 . Na taj način dobijamo neki skup uopštenih mesta, koga ćemo označiti sa M_2 . Zatim proizvoljnim redom izjednačimo slična mesta u M_2 i tako dobijeni skup uopštenih mesta izraza $\mathcal{D}$ označimo sa M_3 .

Lako je uočiti da su za proizvoljan čvor $\mathcal{M}$ izvornika G proizvoljna uopštena mesta $m, m' \in \mathcal{M}$, $m, m' \in M_1$ odgovarajuća. Prema tome sva mesta m iz $\mathcal{M}$ ulaze u jedno isto uopšteno mesto iz M_3 , koje ćemo označiti sa $\hat{\mathcal{M}}$.

Neka su $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ čvorovi izvornika $G = S(\eta,\mathcal{D})$, pri čemu je $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2$ i $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$. Prema lemi 3.2.6. $C_{\mathcal{M}_1} \cap C_{\mathcal{M}_2} = \emptyset$, pri čemu prema lemi 3.2.10. izrazi $R_1 = \bigvee_{m \in \mathcal{M}_1} K_m(\mathcal{D})$ i $R_2 = \bigvee_{m \in \mathcal{M}_2} K_m(\mathcal{D})$ ne sadrže simbole iteracije, tj. svako $K_m(\mathcal{D})$, $m \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ je reč azbuke $\mathcal{A}$. Očigledno je da u ovom slučaju čvorovi izvornika G koji su dostižni iz čvorova m_1 i m_2 ne pripadaju ciklima. Pretpostavimo da je $\hat{m}_1 \neq \hat{m}_2$. Neka je $L(m_1, m_2)$ broj čvorova izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$, koji su dostižni iz m_1 i m_2. Bez ograničenja opštosti možemo smatrati da je

$$L(m_1, m_2) = \min_{\substack{v_1 \sim v_2 \\ \hat{v}_1 \neq \hat{v}_2}} (L(v_1, v_2))$$

Ako iz čvorova m_1 i m_2 ne izlaze rebra, onda su uopštena mesta $\hat{m}_1$ i $\hat{m}_2$, očigledno, slična, što je suprotno konstrukciji skupa $\mathcal{M}_3$. Neka iz čvorova m_1 i m_2 izlaze rebra. Tada iz fakta $m_1 \sim m_2$ skupovi njihovih oznaka su jednaki. Ako iz čvora m_1 izlazi rebro obeleženo slovom a, koje vodi u čvor m_1', a iz m_2 rebro sa istim obeležjem koje vodi u čvor m_2', onda je $m_1' \sim m_2'$ i, ili je $m_1' \equiv m_2'$, ili je $\hat{m}_1' = \hat{m}_2'$, jer je $L(m_1', m_2') < L(m_1, m_2)$. Na kraju dobijamo da su $\hat{m}_1$ i $\hat{m}_2$ ponovo slični. Dobijena protivurečnost i dokazuje da je $\hat{m}_1 = \hat{m}_2$. Lema je dokazana.

Iz leme 3.2.11 neposredno sledi dokaz punkta (a) naše teoreme.

b) Dokaz tvrđenja neposredno sledi iz naredne leme.

Lema 3.2.12. Ne postoji takav niz η izjednačavanja odgovarajućih i sličnih mesta izraza $\mathcal{D}$ iz klase $\mathcal{M}_2$, da je izvornik $G = S(\eta, \mathcal{D})$ minimalan.

Dokaz. Neka je $d(\eta)$ dužina niza η, $Q_{ls_l} = q_1 \cdots q_l$, $l \geq 2$, gde je $q_i \in \mathcal{A}$. Označimo sa $m_j^{(t)}$ ($t \in \{k, l\}$, $j \in \{1, \cdots, l\}$) mesto koje se nalazi u članu $\mathcal{D}_t$ posle slova q_j reči Q_{ls_l}, a sa $m_0^{(t)}$ konačno mesto izraza R_t ($t \in \{k, l\}$). Pokažimo da u rezultatu izjednačavanja mesta, određenog nizom η, nijedno od mesta $m_j^{(t)}$ za $j \neq 0, l$ ne izjednačuje se ni sa jednim drugim mestom izraza $\mathcal{D}$, a mesta $m_{\ell}^{(t)}$ i $m_0^{(t)}$ ($t \in \{k, \ell\}$) mogu biti izjednačena samo jedno sa drugim. Dokaz izvodimo indukcijom po dužini $d(\eta)$ niza η.

Ako je $d(\eta)=0$, onda je tvrđenje očigledno. Pretpostavimo da je ono dokazano za proizvoljan niz η, dužine manje od n. Neka je niz izjednačavanja mesta dužine $d(\eta)=n$. Tada se η može predstaviti u obliku $\eta'\xi$, gde je $d(\eta')= n-1$, ξ poslednje izjednačavanje. Prema pretpostavci indukcije, u rezultatu izjednačavanja niza η', ni jedno od mesta $m_j^{(t)}$ ($t \in \{k, \ell\}$, $j \in \{1, \dots, k-1$) nije izjednačeno ni sa jednim drugim mestom izraza $\mathcal{D}$, a mesta $m_0^{(t)}$ i $m_k^{(t)}$ ($t \in \{k, \ell\}$) mogu biti izjednačena samo jedno sa drugim.

Neka je $m_j'^{(t)}$ uopšteno mesto izraza $\mathcal{D}$, dobijeno kao rezultat izjednačavanja niza η, i neka $m_j^{(t)} \in m_j'^{(t)}$ ($t \in \{k, \ell\}$, $j \in \{0, 1, \dots, k\}$). Moguća su dva slučaja.

1) ξ je izjednačavanje odgovarajućih mesta izraza $\mathcal{D}$.

Ako je m uopšteno mesto izraza $\mathcal{D}$, onda nazovimo m - snopom u $\mathcal{D}$ skup svih takvih reči p, za koje bar jedno iz mesta p - spektra izraza $\mathcal{D}$ pripada uopštenom mestu m.

Ako $j \notin \{0, k\}$, onda najkraća reč u $m_j'^{(t)}$ - snopu je $p_{tj} = p_t q_1 \cdots q_j$, gde je p_t najkraća reč događaja $/R_t/$. Za $j \in \{0, k\}$ najkraća reč $m_j'^{(t)}$ - snopa je ili $p_{tj} = p_t$ (ako je $m_j'^{(t)} = \{m_k^{(t)}\}$ ili $m_j'^{(t)} = \{m_0^{(t)}, m_k^{(t)}\}$), ili $p_{tj} = p_t q_1 \cdots q_\ell$ (ako je $m_j'^{(t)} = \{m_k^{(t)}\}$). Neka je $m \neq m_j'^{(t)}$ uopšteno mesto izraza $\mathcal{D}$, dobijeno u rezultatu izjednačavanja η', pri čemu su m i $m_j'^{(t)}$ odgovarajuća mesta. Pošto reč p_t nije početak ni jedne reči događaja $/D/$ za $? \neq t$, to

m sadrži mesto m' iz člana $\mathcal{D}_t$, čijem m'- snopu pripada reč p_{it} . Lako je proveriti da ako je m' različito od mesta koja pripadaju $m_j^{(t)}$, da reč p_{tj} ne pripada m' - snopu. Prema tome m sadrži bar jedno mesto iz $m_j'^{(t)}$, što je suprotno uslovu $m \neq m_j^{(t)}$. Na taj način $m_j'^{(t)}$ nije odgovarajuće uopšteno mesto ni jednom uopštenom mestu izraza $\mathcal{D}$, dobijenom kao rezultat izjednačavanja η', i ne može biti izjednačeno ni na poslednjem koraku, ni sa jednim drugim uopštenim mestom izraza .

2) ξ je izjednačavanje sličnih mesta izraza $\mathcal{D}$. Ako $j \notin \{0, k\}$, onda uopšteno mesto $m_j'^{(t)}$, q_{j+1}- sledi za $m_j'^{(t)}$ ($t \in \{k, \ell\}$, $j \in \{1, \ldots, \ell-1\}$). Iz pretpostavke indukcije, a takođe i iz toga što su poslednja slova izraza R_t i $Q_{\ell s_\ell}$ različita , imamo da $m_{j+1}'^{(t)}$ q_{j+1} - ne sledi ni za jednim drugim uopštenim mestom. Otuda mesto $m_j^{(t)}$ nije slično ni jednom drugom uopštenom mestu. Analogno za $j \in \{0, k\}$, nije teško proveriti, da se sličnim mogu ispostaviti samo mesta $m_0'^{(t)} = \{m_0^{(t)}\}$ i $m_k'^{(t)} = \{m_k^{(t)}\}$.

Uočimo da se p_{t0} - spektar ($t \in \{k, \ell\}$) izraza $\mathcal{D}$ sastoji iz jedinstvenog mesta $m_0^{(t)}$ i prema dokazanome $m_0^{(k)} \not\equiv m_0^{(\ell)}$ za proizvoljan niz izjednačavanja mesta η . Otuda imamo da su čvorovi izvornika $G = S(\eta, \mathcal{D})$, koji su iz početnog čvora dostižni po putevima čije su odgovarajuće reči p_{k0} i $p_{\ell 0}$, različiti. Očigledno ovi čvorovi nisu ekvivalentni, tj izvornik $S(\eta, \mathcal{D})$ nije minimalan. Lema je dokazana.

L I T Ě R A T U R A

1. Айзерман М.А., Гусев Л.А., Розоноэр Л.И., Смирнова И.М., Таль А.А., Логика, Автоматы, Алгоритмы. Физматгиз, Москва, 1962 г.

2. Ахо А, Ульман Дж., Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, Том 1, Издательство „Мир" , Москва, 1978 г.

3. Чирков М.В., Основы общей теории конечных автоматов, издательство ЛГУ, Ленинград, 1975 г.

4. Глушков В.М., Абстрактная теория автоматов, Успехи математических наук, XVI, 5 (101), сент.–окт., 1961, (3–62)

5. Глушков В.М., Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, Москва, 1962 г.

6. Глушков В.М., Введение в кибернетику, Издательство АН УССР , Киев, 1964 г.

7. Гринберг В.С., Детерминизация систем графов и синтез конечных автоматов. Сиб. мат. ж. VII № (1966), (1260–1267)

8. Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики Сб. „Проблемы кибернетики", вып. 2, М., 1959 г.

9. Клини С.К., Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах, Сб. „Автоматы", Москва, ИЛ, 1956 г, (15–67)

10. Кобринсеий Н.Е., Трахтенброт Б.А., Введение в теорию конечных автоматов, Москва, 1962 г.

11. Копи И.М., Элгот К.С., Райт Д.Б., Реализация событий логтческими сетями. „Кибернетический сборник", вып. 3, Москва, ИЛ, 1961 г., (147–166)

12. Корпелевич Г.М., О соотношении понятий разрешимости и перечислимости для конечных автоматов, ДАН СССР, 149, № 5 (1963) (1023–1025)

13. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., Элементы теории автоматов, Издательство МГУ, 1978 г.

14. Любич Ю.И., Оценки для оптимальной детерминации недетерминированных автономных автоматов, Сиб. мат. ж. V, № 2 (1964), (337–355)

15. Люобич Ю.И., Лившиц Э.М., Оценки веса регулярного события над однобуквенным алфавитом, Сиб. мат. ж. VI, № 1 (1965) (122–126)

16. Лупанов О.Б., О сравнении двул типов еонечных источников, С.Б., „Проблемы кибернетики", вып. 9 (1963) (321–326)

17. Маслов А.Н., Оценки числа состояний конечных автоматов, ДАН СССР, 194, № 6 (1970), (1966–1268)

18. Мур Э.Ф., Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. Сб. „Автоматы", Москва, ИЛ, 1956 г.

19. Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М., Конечные автоматы, поведение и синтез, Издательство „Наука", Москва, 1970 г.

20. Ушчумлич М.Ш., О некоторых свойствах алгоритмов анализа и синтеза автоматов, Сб. „Методы и системы технической диагностики", Том I, Издательство Саратовского университета (в печати)

21. Ушчумлич М.Ш. Об еффсктивности некоторых алгоритмов анализа и синтеза фвтоматов, сб. „Методы и стстемы технической диагностики", Издательство Саратовского университета (в печати)

22. Ушчумлич М.Ш., Исследование некоторых алгоритмов анализа и синтеза автоматов, ДАН СССР (в печати)

23. Uščumlić Š., Bratičević D., Analysis of the Finite State Automata by State Isolation, Matematički vesnik, Beograd, III sveska, 1978.