UNIVERZITET U BEOGRADU
Prirodno-matematički fakultet

Rade T. Živaljević

DESET ETIDA O HIPERKONAČNOM

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

Beograd, 1983 godine

S A D R Ž A J

U V O D

Govoreći o odnosu burbakista prema matematičkoj logici, Žan Diedone (Jean Dieudonné) je, obraćajući se učesnicima sastanka posvećenog istoriji matematike u Torontu 1982 godine, rekao i ovo:

"... Since 1950 logic has made tremendous progress, but in Bourbaki's opinion it has not brought enough new tools for mathematician to compel a change of attitude. It is possible that in the future the present growth of non-standard analysis and similar uses of mathematical logic will yield startling discoveries, but this is not yet the case; so "Wait and see" is what prevails in this respect. ...."

Ne samo iz ovih reči velikog francuskog matematičara nego i iz oduševljenja i entuzijazma s kojim su jedni prihvatili nestandardnu analizu i neverice, skepse ili čak otvorenog neslaganja koje su ispoljili drugi, vidljivo je da se tu radi o živahnoj i zanimljivoj, novoj ali ne do kraja proverenoj metodi koja obećava. Budući da je to pre metoda nego matematička disciplina, pri pokušaju da se prikažu neke od meni poznatih i interesantnih primena nestandardne analize u različitim oblastima matematike prirodno se nametnula forma relativno nepovezanih ogleda, kraćih rasprava i vežbi, odnosno etida.

Prva etida je uvodnog karaktera; sadrži sve osnovne definicije i sasvim neformalan opis konstrukcije nestandardnog modela. Sledi elementarna etida o infinitezimalnom mikroskopu. "Unutrašnji prostori sa vektorskom merom se takodje mogu kompletirati u smislu Loeba" je naslov sledeće rasprave u kojoj je pokazano da se Loebova (P.Loeb) fundamentalna konstrukcija može, uz potrebne modifikacije, proširiti na *B-značne konačno-aditivne unutrašnje mere gde je B neki Banahov prostor.

Zanimljivo je da je to pitanje formulisano kao problem br. 17 u radu [9] Hensona i Mura (C.W.Henson, L.C.Moore, Jr.). Kao neposredna posledica uvedenih pojmova dobijen je jedan (ne posebno težak) rezultat Prikrija i Armstronga (K.Prikry, T.Armstrong) koji je varijanta teoreme Ljapunova za konačno-aditivne R^n-značne mere. Centralne teoreme u ovoj raspravi su "lifting" teorema 3.6. i "pushing down" teorema 3.8 koje su analogoni R.Anderson-ovih teorema o skalarnim merama dokazanih u [2]. U četvrtoj raspravi dat je prikaz teorije Radonovih mera osnovan na reprezentirajućim Loebovim prostorima u obliku u kom su je razvili: P.Loeb, R.Anderson, T.Lindstrøm i drugi. Ta tehnika je zatim iskorišćena u sledećoj etidi gde su data dva dokaza teoreme Risa (F.Riesz) o reprezentaciji linearnih funkcionala i u etidi br.6 u kojoj je pokazano da, uz odgovarajuće pretpostavke o grupi G, na svakom kompaktu X na kom G dejstvuje kao grupa homeomorfizama postoji G-invarijantna Radonova mera. Taj rezultat treba razumeti kao generalizaciju sličnog i poznatog rezultata koji se dobije ako se G zameni jednim homeomorfizmom metričkog prostora X. Rasprava broj 7 o hiperkonačnim lancima, infinitezimalnim simpleksima i homologiji je medju najinteresantnijim u tezi. Uvodeći teoriju homologije zasnovanu na hiperkonačnim lancima simpleksa infinitezimalnog dijametra, bio sam uveren da se radi o novoj primeni nestandardne analize sve dok nisam naišao na rad Mc Cord-a [23] iz 1972. Ipak, neki novi pojmovi (npr.nosač lanca) dopuštaju detaljniju analizu ove homologije (npr. teorema 7.5, stav 7.10 itd). Paralelno je razvijana i unutrašnja teorija kohomologije koja u [23] nije definisana. Posebno interesantna je teorema 7.6 koja tvrdi da ako je $(O|O \supset K)$ inverzni sistem okolina kompakta K (u metričkom prostoru X) i inkluzionih preslikavanja a $(\mathcal{M}on^*(O)|O \supset K)$ odgovarajući direktni sistem lančastih kompleksa, onda postoji objekt, $st^{-1}(K)$, čiji je kohomološki kompleks izomorfan sa dir lim $(\mathcal{M}on^*(O)|O \supset K)$. Etida 8 je zbirka od nekoliko najinteresantnijih "elementarnijih" rezultata algebarske topologije dokazanih tehnikom etide br. 7

dok je u vežbi br. 9 prikazan dokaz jednog rezultata iz diferencijalne topologije. U destoj i poslednjoj raspravi pokazano je kako se pojam hiperkonačnog grafa asociranog sa datim kompaktom X može iskoristiti za ispitivanje povezanosti nekih skupova u eksponencijalnim prostorima $\exp^{(n)}(X)$, $n \in \mathbb{N}$.

Nakon navedenog kraćeg prikaza sadržaja "vežbanja" iz teze, želim da se kolegama i prijateljima koji su tokom ovih godina delili sa mnom svoje matematičke ideje, entuzijazam kao i iskustvo, najtoplije zahvalim.

1. NESTANDARDNA ANALIZA ZA PEŠAKE

"... a onda svakom skupu A iz polazne familije skupova $\mathcal{U}$, zvaćemo je standardnim univerzumom, dodelimo nestandardnu sliku $*A$ iz za to pripremljenog nestandardnog univerzuma $*\mathcal{U}$ pri čemu preslikavanje $*: \mathcal{U} \longrightarrow *\mathcal{U}$ zadovoljava sledeće principe:

1. Princip raširenja (Extension Principle): Za svaki skup $S \in \mathcal{U}$ važi $S \subset *S$ pri čemu je $S = *S$ ako i samo ako je S konačan.

2. Princip prenosa (Transfer Principle): Matematičko tvrdjenje (na primer "svaki prirodan broj je suma četiri kvadrata") je tačno ako i samo ako je tačna njegova interpretacija u nestandardnom univerzumu (dakle svaki $x \in *\mathbb{N}$ je suma kvadrata četiri elementa iz $*\mathbb{N}$).

3. Princip zasićenja (Saturation Principle): Nestandardni univerzum sadrži mnogo idealnih elemenata.

4. Princip unutrašnjeg definisanja (Internal Definition Principle): Aksiom separacije važi u kolekciji unutrašnjih skupova (internal sets) $\mathrm{int}(*\mathcal{U}) \subset *\mathcal{U}$. Drugim rečima ako je skup dobijen iz unutrašnjih skupova "uobičajenim" matematičkim postupcima on ostaje unutrašnji.

Abraham Robinson istaknuti američki matematičar, bio je prvi koji je (u Januaru 1961. na zajedničkom sastanku Američkog matematičkog društva i Američke matematičke asocijacije) konzistentno realizovao čuvenu Lajbnicovu slutnju ... ".

Gornji odlomak predstavlja jezgro jedne od ranijih verzija ove glave, oslobodjeno dugačkih i dosadnih uvodnih detalja. Detalji konstrukcije i dokazi gore navedenih principa mogu se naći u ma kojoj knjizi posvećenoj nestandardnoj (infinitezimalnoj) analizi navedenoj u bibliografiji. Ipak, čitaocu koji nema pri ruci neku od tih knjiga dugujem neka objašnjenja.

(i) Univerzumi $\mathcal{U}$ i $*\mathcal{U}$ su obično oblika $V_\omega(S)$ i $V_\omega(*S)$ pri čemu je $V_\omega(S) = S \cup \mathcal{P}(S) \cup \mathcal{P}(S \cup \mathcal{P}(S)) \cup \ldots$ takozvana nadstruktura (superstruktura) izgradjena nad skupom S a $*S$ neki nadskup od S. Ipak, za većinu primena dovoljno je za univerzum $\mathcal{U}$ izabrati neku daleko manju familiju, recimo za elementarni diferencijalni račun možemo izabrati

$\mathcal{U} = \mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \{f \mid f:R \to R\}$.

(ii) Pod matematičkim tvrdjenjem u principu prenosa podrazumevamo formulu u smislu matematičke logike.

(iii) Objekt $x \in {}^*U$ se naziva unutrašnjim ako je element nekog objekta $^*S$ za $S \in U$. Napomenimo da se objekt $^*S$ često naziva standardnim.

(iv) Smisao principa zasićenja se ogleda u sledećem. Neka je $D \in \mathcal{U}$ filter skupova iz $\mathcal{U}$. Skup $\mu(D) = \cap\{{}^*A \mid A \in D\}$ je zahvaljujući principu zasićenja uvek neprazan i naziva se nestandardnim jezgrom filtera D. U specijalnom slučaju ako je $D = \mathcal{B}(x)$ filter okolina tačke x u nekom topološkom prostoru onda se $\mu(\mathcal{B}(x))$ zove monada tačke x i označava sa $m(x)$.

Sledeća definicija sadži još nekoliko novih, osnovnih pojmova na koje se neizbežno nailazi u ma kom tekstu posvećenom infinitezimalnoj analizi.

Definicija 1.1. Neka je (X,τ) topološki prostor. Tačka $x \in {}^*X$ je do-standardna (near-standard) ako postoji $y \in X$ sa svojstvom $x \in m(y)$. Skup do-standardnih tačaka se označava sa $ns({}^*X)$. Ovim je definisano (mnogoznačno) preslikavanje $st: ns({}^*X) \to X$ odredjeno sa $st(x) = \{y \mid x \in m(y)\}$.

$x \approx y$ označava beskonačnu bliskost tačaka x i $y \in ns({}^*X)$ tj. $st(x) = st(y)$. Kada je reč o realnoj pravoj R sa običnom topologijom dolazimo do pojma konačnog i hiperkonačnog realnog broja. Broj $x \in {}^*R$ je konačan ako je $|x| < n$ za neki $n \in \mathbb{N}$ a hiperkonačan ili nadkonačan u obrnutom slučaju. Poslednja definicija ima smisla zahvaljujući principu prenosa iz koga sledi da je $^*R$ uredjeno polje koje sadrži R kao uredjeno podpolje. Striktno govoreći nejednakost $|x| < n$ bi trebala da izgleda ovako $^*|x|^* < n$ ili možda $^*<(^*|x|, n)$ gde su $^*|\cdot|$ i $^*<$ $*$ - transformacije funkcije "apsolutna vrednost" i poretka na R. Jedna od prećutnih konvencija je da se ne pišu zvezdice pored (nekih) često upotrebljavanih funkcionalnih ili relacijskih simbola, što je gore i učinjeno. Ostale definicije će biti uvedene tamo gde se za njima ukaže potreba.

Svakako najinteresantniji i najznačajniji medju principima 1-4 je princip prenosa iz koga slede mnoge stvari, npr. $*$ je 1-1, $^*\mathbb{Z}$ je grupa koja nije ciklična ali jeste $*$-ciklična itd. Kao što je rečeno konstrukcija od $^*\mathcal{U}$ i preslikavanja $*: \mathcal{U} \to {}^*\mathcal{U}$ ovde neće biti izvedena, medjutim čitaocu su bila obećana izvesna dodatna objašnjenja. Ta objašnjenja bi se mogla sažeti u sledeću nepreciznu ali vrlo instruktivnu tvrdnju:

Tvrdjenje 1.2. Nestandardni model ${}^*\mathcal{U}$ standardnog modela $\mathcal{U}$ je u izvesnom tačno odredjenom smislu granična struktura niza $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n, \ldots$ (izomorfnih kopija od $\mathcal{U}$), standardnih struktura. Princip prenosa je posledica fenomena da se iskazi definisani na nizu struktura $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n, \ldots$ i na ${}^*\mathcal{U}$ ponašaju kao neprekidne funkcije.

Ostatak ove glave posvećen je intuitivnim, heurističkom dokazu ovog tvrdjenja. Podjimo od dva jednostavna primera. Neka je $r\colon \mathbb{N} \to Q$ konvergentan niz racionalnih brojeva i $\bar{r}\colon a(\mathbb{N}) \to R$ njegovo raširenje na jednotačkovnu kompaktifikaciju $a(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ prirodnih brojeva. Tada je iskaz $1 \leq \bar{r}(\omega) \leq 3$ tačan ako je $1 \leq \bar{r}(m) \leq 3$ tačan iskaz u nekoj okolini tačke ω, ne računajući samu tu tačku. Shvatimo li iskaz $\varphi_i : 1 \leq \bar{r}(i) \leq 3$ kao funkciju koja objektu (tačnije njegovom indeksu) dodeljuje istinitosnu vrednost (0 ili 1) zaključujemo da je funkcija $\varphi\colon a(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$ poluneprekidna odozdo! Napominjem da su svi pojmovi i definicije koji se odnose na Topologiju a upotrebljeni su u ovom tekstu u saglasnosti sa onim iz knjige R.Engelkinga [8]. Opštije, neka je r niz matematičkih struktura (topološki prostori, grupe, prostori s merom) i $r(\omega)$ struktura koja je u nekom smislu granična vrednost tog niza. Na primer neka je $S = \{X_n, p_n^m, \mathbb{N}\}$ inverzni sistem topoloških prostora, $r(n) = X_n$ i $\bar{r}(\omega) = X_\omega = \varprojlim S$ Neka je $p_n : X_\omega \to X_n$ prirodna projekcija. Neka je $\varphi(x,A)$ iskaz $x \in \operatorname{int} A$. Ovaj iskaz ima odredjenu istinitosnu vrednost, 0 ili 1, u nekom topološkom prostoru Y tek ako se interpretiraju simboli x i A, pri čemu se za $\in$ i int pretpostavlja da imaju svoje uobičajeno značenje. Označimo sa x_n, A_n dole definisanu interpretaciju simbola x i A u prostoru X_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, i neka je φ_n oznaka za iskaz $x_n \in \operatorname{int}(A_n)$. Sama interpretacija je izvedena ovako:

$x_\omega \in X_\omega$ i $A_o \subset X_o$ su proizvoljni; $x_n = p_n(x_\omega)$, $A_n = (p_o^n)^{-1}(A_o)$, $A_\omega = p_n^{-1}(A_o)$. Vidimo da u ovom slučaju iskaz $\varphi_n \equiv x_n \in \operatorname{int} A_n$ shvaćen kao funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \cup \{\omega\} \longrightarrow \{0,1\}$ ima svojstvo poluneprekidnosti odozgo.

Pitanje: Zbog čega je važno znati da li neki iskaz, shvaćen kao funkcija, ima odredjena svojstva neprekidnosti?

Odgovor je prost i glasi ovako: U slučaju da je iskaz $\varphi(n)$ interpretiran u strukturi D_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, pri čemu je D_ω u izvesnom smislu granična struktura, tako da je odnekud poznato da je $\varphi : \mathbb{N} \cup \{\omega\} \to \{0,1\}$ neprekidna funkcija, za nalaženje odgovora na pitanje da li je φ_ω tačno u D_ω ili ne, dovoljno je pronaći $\lim\limits_{n \to \omega} \varphi_n$.

U oba gore navedena primera u prvom planu su bili:

1° niz standardnih (polaznih) struktura indeksiran tačkama topološkog prostora.

2° granična struktura, intuitivno shvaćena kao "tačka nagomilavanja" niza standardnih struktura; indeks granične strukture ω je tačka nagomilavanja indeksa standardnih struktura.

3° iskaz, interpretiran u svim strukturama se ponaša kao manje-više neprekidna funkcija indeksa strukture.

Sada smo spremni da, sledeći istu shemu 1°-3°, definišemo jednu posebnu graničnu strukturu koja će i biti jedna od graničnih struktura iz tvrdjenja 1.2.

Pretpostavimo da je cilj konstrukcije ispitivanje realnih brojeva, skupova realnih brojeva i realnih funkcija.

1° Neka je $\mathcal{D}_n = (D_n, =, \in)$ pri čemu je $D_n = R \cup \mathcal{P}(R) \cup \mathcal{P}(R \cup \mathcal{P}(R)) \cup \mathcal{P}(R \cup \mathcal{P}(R) \cup \mathcal{P}(R \cup \mathcal{P}(R)))$; toliko je naime potrebno puta ponoviti "partitivni skup" operaciju da bi se funkcija $f : R \to R$ realizovala kao skup $f = \{\{\{a,b\}\{b\}\} \mid f(a) = b\}$.

2° Neka je $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ bilo koji netrivijalni element Stoun-Čehove kompaktifikacije skupa prirodnih brojeva (dakle jedan ultrafilter), pri čemu neka je na $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ zadana topologija inducirana iz $\beta\mathbb{N}$. Granična struktura $\mathcal{D}_\omega = (D_\omega, =_\omega, \in_\omega)$ je opisana ovako:

$D_\omega = \{f \mid f$ je funkcija sa domenom $\mathbb{N}$ i $(\forall n \in \mathbb{N})\ f(n) \in D_n\}$. Ako iskaze $f(n) = g(n)$ i $f(n) \in g(n)$ za $f, g \in D_\omega$ shvatimo kao funkcije iz $\mathbb{N}$ u $\{0,1\}$ onda je $(f =_\omega g) := \lim\limits_{n \to \omega} (f(n) = g(n))$ i

$$(f \in_\omega g) := \lim_{n \to \omega} (f(n) \in g(n)) .$$

Primetimo da ovi limesi postoje zahvaljujući činjenici da je $\omega \in \beta\mathbb{N}$.

3° Ako su iskazi o kojima je reč u 3° opisani formulama logike prvog reda dakle formulama oblika $\varphi(x,y) \equiv \exists t(t \in x \wedge \neg\, t \in y)$ i slično onda za formulu oblika $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ ($x_1,\ldots x_n$ su sve slobodne promenljive od φ) važi

$$\varphi(f_1,\ldots, f_n) = \lim_{x_i \to f_i} \varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

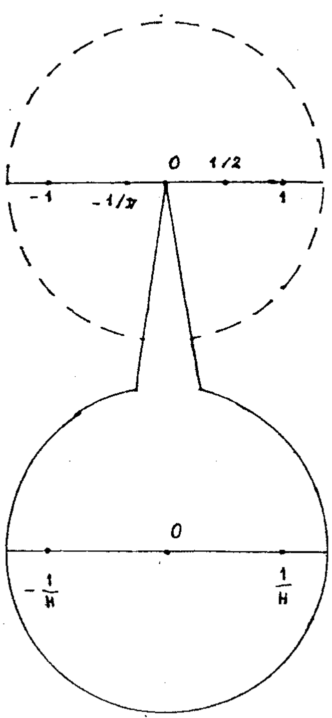
Ova jednakost je poznata kao Lošova teorema i dokazuje se indukcijom po složenosti formule φ. Ta jednakost i nije drugo nego naš princip prenosa u ekvivalentnom obliku.

Na kraju kažimo da je preslikavanje $* : \mathcal{D} \longrightarrow {}^*\mathcal{D}$ definisano sa ${}^*A = (A,A,\ldots,A,\ldots)$ tj. standardni objekti iz ${}^*\mathcal{D} := \mathcal{D}_\omega$ su konstantni nizovi.

2. ETIDA ZA INFISKOP

Infiskop ili duže, infinitezimalni mikroskop je nepostojeći instrument koji služi za posmatranje veoma sitnih matematičkih objekata kao što su delovi monada (za definiciju videti prethodnu glavu), beskonačno mali priraštaji i slično. Poštujući princip permanencije, može se razmatrati i dualan instrument, hiperkonačni teleskop, koji omogućuje hipotetičnim infi-matematičarima da osmatraju nas u trenutku dok mi posmatramo njih pod infiskopom. Budući da se radi o osetljivim i retkim (nepostojećim) instrumentima, njima je potrebno vrlo pažljivo rukovati zbog čega navodimo sledeći aksiom koji je zapravo skraćeni manual za rad sa infiskopom (dobija se uz infinitezimalnu doplatu uz sam instrument).

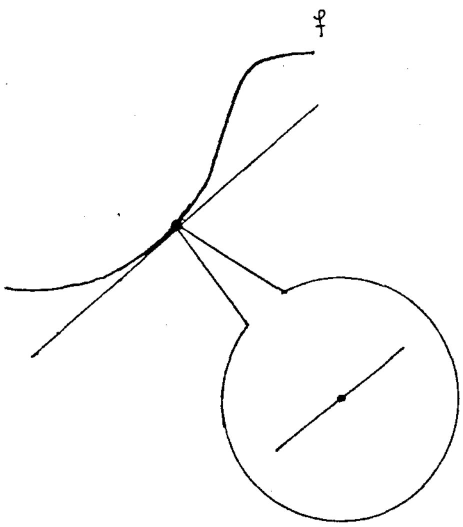
<u>Aksiom infinitezimalnog mikroskopa</u>



Oko pod uobičajenim okolnostima vidi sve realne brojeve u intervalu $[-1,1]$, medjutim ne opaža ni jedan nestandardan realan broj, recimo ε ili $1/2-\varepsilon$ za $\varepsilon \in m(0)$ gde je $m(0)$ monada od 0. (Upravo iz ovog razloga su nestandardni brojevi otkriveni ovako kasno u istoriji civilizacije). Neka je $H\in {}^*R\setminus R$ beskonačno veliki realan broj. Podesiti infinitezimalni mikroskop na povećanje H znači izvršiti homotetiju sa centrom u 0 i koeficijentom H što znači da se u okularu mikroskopa pojavljuju svi brojevi oblika $\frac{1}{H}\cdot r$ za $r\in R$ i $-1\leqslant r\leqslant 1$, dok recimo brojevi oblika $1-\frac{1}{H^3}$ ili $\frac{1}{H^2}$ i dalje ostaju nevidljivi.

Široko je rasprostranjeno verovanje da je realna funkcija $f:R\rightarrow R$ diferencijabilna u tački a akko je lokalno linearna. Infiskop nam omogućava da proverimo tu hipotezu.

Opažanje 2.1. Funkcija $f: R \to R$ je diferencijabilna u tački $a \in R$ ako i samo ako je linearna pri svakom beskonačnom povećanju H.



Zaista, f je diferencijabilna u a znači da je $f(x) = f(a) + A\cdot(x-a) + \varepsilon_{(x-a)}(x-a)$ pri čemu $\varepsilon_{(x-a)} \to 0$ za $x \to a$. Oslanjajući se na princip prenosa imamo $^*f(a+h) = {}^*f(a) + A\cdot h + \varepsilon_h \cdot h$. Ako je $h \in \left[a - \frac{1}{H}, a + \frac{1}{H}\right]$ vidljiv pod infiskopom pri uvećanju H, onda $\varepsilon_h \cdot h$ očevidno nije vidljiv pa je $^*f(x+h) =_H {}^*f(a) + A\cdot h$ pri čemu $=_H$ znači da su navedeni brojevi isti (tj. ne mogu se razlikovati) pri uvećanju H. Time je zaista potvrdjeno da ako je $f'(a) = A$ onda posmatrač pod infiskopom pri beskonačnom uvećanju zaista "vidi" pravu liniju nagiba A.

Proveru opažanja u suprotnom smeru ostavljamo čitaocima.

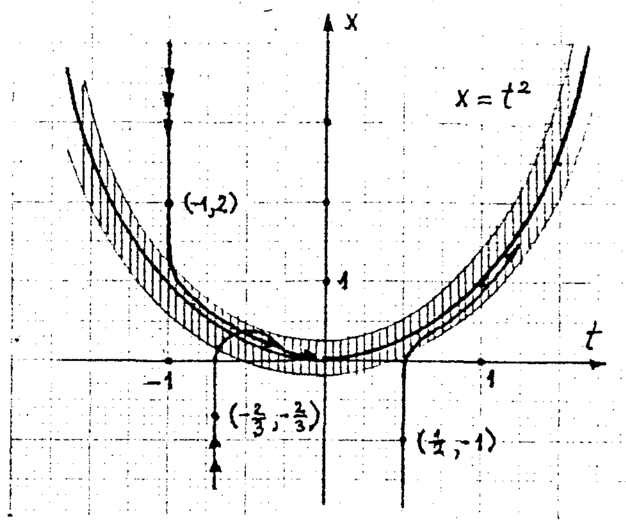
Još atraktivnija je primena infiskopa u ispitivanju integralnih krivih diferencijalnih jednačina sa beskonačno malim parametrima. R.Lutz i M.Goze su u knjizi [21] mnoštvom lepih primera pokazali da se korišćenjem infinitezimalnih metoda može steći duboki uvid u granično ponašanje integralnih krivih, što je upravo slučaj u kom klasične metode nisu tako efikasne.

Ovde ćemo dati samo nagoveštaj tih metoda jednostavnim primerom koji je napravljen po ugledu na primere iz [21].

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu $\varepsilon \cdot \dot{x} + x(t) = t^2$ odnosno ekvivalentan sistem jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon}(t^2 - x) \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned}$$

Ovde se radi o unutrašnjem sistemu jednačina za koga važe *-analogoni stavova o egzistenciji i jedinstvenosti integralne krive kroz zadanu tačku i o neprekidnosti integralnih krivih pri menjanju polazne tačke. Još preciznije, podsećamo čitaoca da važe nejednakosti oblika $\|\gamma(a,t) - \gamma(b,t)\| \leq K\cdot|t|\cdot\|b-a\|$ pri čemu je $\gamma(a,t)$ jedinstvena integralna kriva koja prolazi kroz tačku a.



Slika 2

Ovo nam omogućuje da napravimo sledeću analizu:

1^{o} Integralne krive koje polaze izvan infinitezimalne okoline (monade) parabole $x = t^2$ su praktično vertikalne sve dok se ne približe infinitezimalnoj okolini (šrafirano područje) te parabole.

2^{o} Brzina tačke na toj krivoj je hiperkonačna ($\rightarrow\!\!\rightarrow\!\!\rightarrow$) zbog čega ona za infinitezimalno vreme dostiže neku tačku halo-a krive $x = t^2$. Halo je drugo ime za infinitezimalnu okolinu nekog objekta (Lutz, Goze [21]).

3^{o} Integralna kriva koja polazi iz halo-a ostaje u njemu za svako konačno vreme.

4^{o} Integralna kriva koja polazi iz tačke (-1, 2) ne seče krivu $x = t^2$ kao ni integralna kriva koja polazi iz tačke ($\frac{1}{2}$, -1).

5^{o} Kriva koja polazi iz tačke ($-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$) seče parabolu u blizini tačke ($-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$).

Pojasnimo malo tačke 4^{o} i 5^{o}. Ukoliko bi integralna kriva koja prolazi kroz tačku (-1,2) (slično i za tačku (1/2,-1)) sekla parabolu $x=t^2$ zapažamo da bi levi i desni izvodi te krive u tački preseka bili različiti. S druge strane lako je videti da integralna kriva γ koja polazi iz (-2/3,-2/3) mora imati lokalni maksimum (recimo na osnovu Rolleove teoreme i činjenice da postoje $t_0 < t_1$, $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$). Iz diferencijalne jednačine sledi da tačka lokalnog maksimuma $(\xi, \gamma(\xi))$ mora biti i tačka preseka sa parabolom pošto je $\gamma'(\xi) = 0$.

3. UNUTRAŠNJI PROSTORI SA VEKTORSKOM MEROM SE TAKODJE MOGU KOMPLETIRATI U SMISLU LOEBA

Peter Loeb je u radu [18] uveo konstrukciju kojom se svakom unutrašnjem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sa unutrašnjom konačno-aditivnom merom μ dodeljuje prostor $(X, \sigma(\mathcal{A}), \tilde{\mu})$ sa σ-aditivnom merom $\tilde{\mu}$ pri čemu je $\sigma(\mathcal{A})$ minimalna σ-algebra koja sadrži algebru $\mathcal{A}$. Kompletiranjem poslednjeg prostora s merom, dolazi se do prostora $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu))$ koji se naziva Loeb-ov prostor asociran sa prostorom $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sam Loeb je do ovog kompletiranja došao primetivši da je funkcija $\tilde{\mu}:=\mathrm{st}\mu$ σ-aditivna na $\mathcal{A}$ nakon čega je proširio μ na $\sigma(\mathcal{A})$ oslanjajući se na Karateodorijevu teoremu o ekstenziji mera. Kasnije se pokazalo da se $L(\mu)$ može uvesti direktno i jednostavno sledećom definicijom.

Definicija 3.1. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ unutrašnji prostor sa unutrašnjom, konačno-aditivnom merom μ. Za skup $A \subset X$ kažemo da je Loeb-merljiv ako postoje skupovi B i $C \in \mathcal{A}$ takvi da je $B \subset A \subset C$ i $\mathrm{st}\mu(C-B) < \varepsilon$ za svaki unapred zadani $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$. Familiju Loeb-merljivih skupova označimo sa $L(\mathcal{A})$ a očevidnu ekstenziju mere $\tilde{\mu}:=\mathrm{st}\mu$ sa $\mathcal{A}$ na $L(\mathcal{A})$ označimo sa $L(\mu)$.

Da je $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu))$ zaista prostor sa σ-aditivnom merom čitalac može proveriti u gore pomenutom Loeb-ovom radu ili u knjizi K.Stroyan-a i J.Bajod-a [27]. Cilj ovog ogleda je da pokaže da se Loeb-ova važna konstrukcija može proširiti i na unutrašnje prostore oblika $(X, \mathcal{A}, \mu, {}^*B)$ gde je $(B, \|\cdot\|)$ neki Banahov prostor a μ unutrašnja, konačno-aditivna, $^*B$-značna mera definisana na $\mathcal{A}$. Napominjem da će kao sinonim za $\|\cdot\|$ biti korišćena i oznaka ρ kako bi se izbegle nepregledne formule oblika $\ldots{}^*\,\|{}^*X\|\ldots$. U svim razmatranjima koja slede mera će značiti vektorska mera, preciznije mera koja uzima vrednosti u nekom Banahovom prostoru B, njegovom raširenju $^*B$ ili nestandardnom omotaču $\hat{B}$ (niže definisanom) prostora B. Potpuno analogno se može razmatrati mera sa vrednostima u nekom lokalno-konveksnom linearnom topološkom prostoru ali to se ostavlja za neku drugu priliku. Knjiga [6], Danforda i Švarca (N.Dunford, J.Schwartz) služi kao osnovna referenca kad su u pitanju vektorske mere ili integracija vektorskih mera u odnosu na konačno-aditivnu skalarnu meru. Dakle počnimo.

Neka je B Banahov prostor i $(X, \mathcal{A}, \mu, {}^*B)$ prostor sa konačno-aditivnom ${}^*B$-značnom merom μ. Pretpostavimo da je potpuna varijacija $v(\mu, \cdot)$, definisana sa $v(\mu, A) = {}^*\text{-}\sup_{\mathcal{P}} \sum \{{}^*\|\mu(D)\| \mid D \in \mathcal{P}\}$, gde $\mathcal{P}$ prolazi kroz sve $*$-konačne, $\mathcal{A}$-merljive particije skupa X, konačna unutrašnja pozitivna mera na X. Podsetimo se da se za element $x \in {}^*B$ (dakle i za $x \in {}^*R$) kaže da je konačan $(x \in \mathrm{fin}({}^*B))$ ako postoji $M \in R$ takav da je ${}^*\|x\| \leq M$. Budući da je mera $|\mu| = \mathrm{var}(\mu, \cdot)$ pozitivna, definisan je prostor $(X, L(\mathcal{A}), L(|\mu|))$. Naš zadatak je da definišemo i ustanovimo osnovna svojstva Loeb-ovog kompletiranja $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu), ?)$ prostora $(X, \mathcal{A}, \mu, {}^*B)$. Pojam nestandardnog omotača Banahovog prostora (B, ρ) koji će nam trebati za definiciju tog kompletiranja uveo je W.A.J. Luxemburg i može se naći u [28].

Definicija 3.2. Neka je $\mathrm{fin}({}^*B)$ skup konačnih elemenata iz ${}^*B$ i neka je $\approx$ relacija definisana na $\mathrm{fin}({}^*B)$ sa $x \approx y$ akko ${}^*\rho(x-y) \in m(0)$. $\hat{B} = (\mathrm{fin}(*)/\approx, \hat{\rho})$ gde je $\hat{\rho}([x]) := \mathrm{st}\, {}^*\rho(x)$ je Banahov prostor koji se zove nestandardni omotač (nonstandard hull) Banahovog prostora B. Po analogiji sa slučajem $B = R$ označimo sa $\mathrm{st}: \mathrm{fin}({}^*B) \longrightarrow \hat{B}$ preslikavanje "standardni deo" koje preslikava $x \longrightarrow [x]_{\approx}$.

U slučaju lokalno-kompaktnog, dakle konačno-dimenzioniranog, Banahovog prostora B važi $B = \hat{B}$. U opštem slučaju B je pravi podprostor od $\hat{B}$ zbog čega možemo, tamo gde to neće izazvati nedoumicu, paralelno sa ρ i $\hat{\rho}$ koristiti i oznaku $\|\cdot\|$ za normu kako u B tako i u $\hat{B}$. Uloga $\hat{B}$ u Loeb-ovim raširenjima ${}^*B$-značnih mera je značajna zbog toga što će u opštem slučaju $L(\mu)$ biti $\hat{B}$-značna mera!

Neka je $A \in L(\mathcal{A})$. Prema karakterizaciji $L(\mathcal{A})$ iz definicije 3.1. postoje nizovi $B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset A \subset \ldots \subset C_1 \subset C_0$ skupova iz $\mathcal{A}$ takvi da je $\mathrm{st}\, |\mu|(C_n - B_n) < \frac{1}{n}$. Posmatranjem unutrašnjih ekstenzija ovih nizova dolazimo do skupova $B_\omega, C_\omega \in \mathcal{A}$ koji imaju svojstva $B_\omega \subset C_\omega$ i $\forall n \in \mathbb{N}\, ((B_n \subset B_\omega \,\&\, C_\omega \subset C_n)$. Odavde se vidi da je $A \triangle B_\omega = (A - B_\omega) \cup (B_\omega - A) \subset (C_n - B_\omega) \cup (B_\omega - B_n) \subset (C_n - B_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $L(|\mu|)(A \triangle B_\omega) = 0$. Ovim je pokazano da je $A \in L(\mathcal{A})$ ako i samo ako postoji $B \in \mathcal{A}$ sa svojstvom $L(|\mu|)(A \triangle B) = 0$. Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ dva skupa koji u tom smislu aproksimiraju A onda je $\mathrm{st}\, |\mu|(B_1 \triangle B_2) \leq L(|\mu|)(B_1 \triangle A) + L(|\mu|)(A \triangle B_2) = 0$ pa je i ${}^*\|\mu(B_1) - \mu(B_2)\| \in m(0)$ pošto je ${}^*\|\mu(B_1) - \mu(B_2)\| \leq |\mu|(B_1 \triangle B_2)$. Odavde sledi valjanost sledeće definicije.

Definicija 3.3. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu, {}^*B)$ unutrašnji prostor sa $^*B$-značnom merom čija je potpuna varijacija $|\mu| = var(\mu, \cdot)$ konačna. Neka je $(X, L(\mathcal{A}), L(|\mu|))$ Loeb-ov prostor asociran sa unutrašnjim prostorom $(X, \mathcal{A}, |\mu|)$. Za $A \in L(\mathcal{A})$ i $B \in \mathcal{A}$ koji ima svojstvo $L(|\mu|)(A \Delta B) = 0$, definišemo $L(\mu)(A) = st(\mu(B))$ gde je $st : fin({}^*B) \longrightarrow \hat{B}$ gore definisano preslikavanje.

Mera $L(\mu)$ je očevidno aditivna. Da bi dokazali njenu σ-aditivnost dokažimo prvo sledeću nejednakost.

Lema 3.4. Za svaki $A \in L(\mathcal{A})$ važi nejednakost $\| L(\mu)(A) \| \leq L(|\mu|)(A)$

D o k a z: Neka je $B \in \mathcal{A}$ sa svojstvom $L(|\mu|)(A \Delta B) = 0$. Tada je $\| L(\mu)(A) \| = \| st\, \mu(B) \| = st\, {}^*\|\mu(B)\| \leq st\, |\mu|(B) \leq L(|\mu|)(A)$.

Stav 3.5. $L(\mu)$ je σ-aditivna mera.

D o k a z: Neka je $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ rastući niz skupova iz $L(\mathcal{A})$ i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pokažimo da $L(\mu)(A_n) \longrightarrow L(\mu)(A)$ odnosno da $\| L(\mu)(A_n) - L(\mu)(A) \| \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$. Zaista, $\| L(\mu)(A) - L(\mu)(A_n) \| = \| L(\mu)(A - A_n) \| \leq L(|\mu|)(A - A_n) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, jer je $L(|\mu|)$ σ-aditivna mera.

Evo i jedne primene gore navedenih pojmova. Poznata je teorema Ljapunova koja kaže da je slika σ-aditivne R^n-značne vektorske mere uvek kompaktan, konveksan skup u R^n. Manje je poznat sledeći stav (T. Anderson i K.Prikry) koji će biti dokazan nestandardnim metodom.

Stav 3.6. Neka je $(X, \mathcal{B}, \mu, R^n)$ standardni prostor sa konačno-aditivnom, R^n-značnom, ograničenom merom μ. Tada je skup $\mu(\mathcal{B})$ svuda gust u nekom kompaktnom, konveksnom skupu iz R^n.

D o k a z: Pokažimo prvo da je i potpuna varijacija $|\mu|$ od μ takodje ograničena mera. Za to je dovoljno dokazati da je potpuna varijacija $|\ell \circ \mu|$ od $\ell \circ \mu$ ograničena za svaki linearni funkcional $\ell : R^n \longrightarrow R$. (To je posledica činjenice da je $\| x \| \leq |\langle e_1, x \rangle| + \ldots + |\langle e_n, x \rangle|$ odnosno $|\mu|(A) \leq |e_1 \circ \mu|(A) + \ldots + |e_n \circ \mu|(A)$ gde je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ neki ortonormirani sistem R^n). Medjutim $|\ell \circ \mu|(A) = \sup\{ |\ell \circ \mu(B)| + |\ell \circ \mu(A-B)| \mid B \subset A,\ B \in \mathcal{B} \} \leq 2M$ ako je $\| \mu(C) \| \leq M$ za sve $C \in \mathcal{B}$. Pošto je $|{}^*\mu| = {}^*|\mu|$ odavde sledi da je i varijacija od ${}^*\mu$ konačna. Posmatrajmo unutrašnji prostor s merom $({}^*X, {}^*\mathcal{B}, {}^*\mu)$. Pošto je $\mathrm{st}({}^*\mu({}^*\mathcal{B})) = \mathrm{st}\, {}^*(\mu(\mathcal{B})) = \mathrm{cl}\, \mu(\mathcal{B})$ dovoljno je dokazati da je $\mathrm{st}({}^*\mu({}^*\mathcal{B}))$ konveksan i kompaktan. Medjutim ovo je direktna posledica teoreme Ljapunova ako se zna da je $\mathrm{st}({}^*\mu({}^*\mathcal{B})) = L(\mu)(L({}^*\mathcal{B}))$.

Ovaj ogled ćemo završiti diskusijom o integraciji vektor-funkcija u odnosu na skalarnu meru kao i pitanjem da li postoji vektor funkcija f za koju je $L(\mu)(A) = \int_A f\, dL(|\mu|)$. Ako postoji, funkcija f bi uzimala vrednosti iz $\hat{B}$. Po analogiji sa slučajem $B = R$ postavlja se pitanje kada $L(\mathcal{A})$-merljiva funkcija $g:X \longrightarrow \hat{B}$ ima $\mathcal{A}$ merljiv "lifting" tj. kada postoji $\mathcal{A}$-merljiva funkcija $\bar{g}:X \longrightarrow {}^*B$ takva da je $g = \mathrm{st}\, \bar{g}$ skoro svuda na X.

Teorema 3.6. Neka je $(X, \mathcal{A}, \nu)$ unutrašnji prostor sa konačno-aditivnom merom ν takvom da je $\mathrm{st}\, \nu(X) < +\infty$ i neka je $(X, L(\mathcal{A}), L(\nu))$ odgovarajući Loeb-ov prostor. Ako je $g:X \longrightarrow \hat{B}$ $(X, L(\mathcal{A}), L(\nu))$-merljiva funkcija (Dunford, Schwartz [6]) onda postoji unutrašnja funkcija $h:X \longrightarrow {}^*B$ koja ima sledeća svojstva:

(i) $\mathrm{ran}(h) \subset {}^*B$ je hiperkonačan skup pri čemu je $h^{-1}(t) \in \mathcal{A}$ za svaki $t \in \mathrm{ran}(h)$. Kratko rečeno h je *-jednostavna funkcija.

(ii) Za skoro sve tačke $x \in X$ važi $\mathrm{st}\, h(x) = g(x)$.

D o k a z: Čitaocu kome su poznate "lifting" teoreme R.Anderson-a, npr. Teorema 5.3. iz [2] neće biti teško da i u gornjoj teoremi prepozna jednu takvu "lifting" teoremu. Ipak, gornja teorema ima i jednu specifičnost a to je da je $\mathrm{ran}(g) \subset \hat{B}$ i da ne postoji objekt ${}^*(\hat{B})$ što znači da ova teorema nije posledica neke od poznatih "lifting" teorema. Na sreću, ova poteškoća se može zaobići nevelikom modifikacijom dokaza teoreme 5.3. iz [2].

Dakle, neka je $g:X \longrightarrow \hat{B}$ $L(\nu)$- merljiva funkcija. Na osnovu leme III.6.9. iz [6] koja daje jednu karakterizaciju merljivosti funkcije definisane na prostoru sa konačnom merom, možemo pretpostaviti da je $\mathrm{ran}(g) \subset \hat{B}$ separabilan i da je $g^{-1}(V(a, \varepsilon)) \in L(\mathcal{A})$ za svaku otvorenu kuglu $V(a, \varepsilon) \subset \hat{B}$.

Neka je $(a_n / n \in \mathbb{N})$ niz gust u $\mathrm{ran}(g)$ i $(b_n / n \in \mathbb{N})$ niz u ${}^*X$ koji ima svojstvo st $b_n = a_n$. Poznato je da se poslednji niz može proširiti do unutrašnjeg niza $(b_n / n \in {}^*\mathbb{N})$. Skup otvorenih kugli $\{V(a_n, \frac{1}{m})\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ čini očevidno bazu prostora ran(g). Neka je $U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$ niz kugli $V(b_n, \frac{1}{m}) \subset {}^*B$ uredjen na osnovu poznatog linearnog poretka u $\mathbb{N}^2$, $(n,m) \leqslant (n', m') \longleftrightarrow n+m < n'+m' \vee (n+m = n'+m' \wedge n<n')$. Stavimo $U_o = {}^*B$. Slično, možemo pretpostaviti da su skupovi $\hat{B}$, $\{V(a_n, \frac{1}{m})\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ poredjani u niz $V_o, V_1, \ldots, V_k \ldots$ po istom pravilu. Primetimo da je U_k definisan i za $k \in {}^*\mathbb{N}$. Konstruišimo sada niz $(A_n / n \in \mathbb{N})$ skupova iz $\mathcal{A}$ koji će imati svojstva $A_o = X$, A_n je "podesan" i $L(\nu)(A_n \Delta g^{-1} V_n) = 0$. Neka je $A'_n \in \mathcal{A}$ tako da je $L(\nu)(A'_n \Delta g^{-1} V_n) = 0$ i $A'_o = X$. Ako definišemo

$$A_n = A'_n - \cup\{\bigcap_{i \in S} A'_i \mid S \subset \{1, \ldots, n\} \text{ i } \bigcap_{i \in S} U_i = \emptyset\}$$

skup A_n postaje "podesan" u smislu da možemo definisati unutrašnju funkciju $f_n : X \longrightarrow {}^*B$ kao bilo koju jednostavnu funkciju koja ima svojstvo $f_n(x) = y_S \in \bigcap_{i \in S} U_i$ za $x \in X$ i $S = \{i \mid x \in A_i\}$. f_n je naravno unutrašnja funkcija. Raširimo nizove $(f_n / n \in \mathbb{N})$ i $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ unutrašnjih objekata do nizova $(f_n / n \in {}^*\mathbb{N})$, $(A_n / n \in {}^*\mathbb{N})$ definisanih na ${}^*\mathbb{N}$. Posmatrajmo sledeći skup

$$D = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid f_n \text{ je } *\text{-jednostavna } \mathcal{A}\text{-merljiva funkcija i } (\forall k \leqslant n)\ f_n(A_k) \subset U_k\}$$

Očevidno $\mathbb{N} \subset D$ pa postoji $H \in D \cap ({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Pokažimo da funkcija f_H zadovoljava oba uslova *(i)* i *(ii)* iz teoreme. Dovoljno je proveriti uslov *(ii)*.

Neka je $X' = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \Delta g^{-1}(V_n))$, Tada je $X' \in L(\mathcal{A})$ i $L(\nu)(X-X')=0$. Neka je $x \in X'$. Pošto iz pretpostavke $g(x) \in V_i$ sledi $x \in A_i$, odnosno $f_H(x) \in U_i$ odmah zaključujemo da je st $f_H(x) = g(x)$. Time je dokaz teoreme završen.

Definicija 3.7. Skup $A \subset {}^*B$ nazivamo standardno ili kraće S-separabilnim ako postoji prebrojiv skup $C \subset \text{fin}({}^*B)$ takav da za svaki $x \in A$ i svaki pozitivan, standardan broj ε postoji $y \in C$ sa svojstvom ${}^*\| x-y \| < \varepsilon$. Primetimo da je svaki takav skup podskup od fin(*B).

Ova definicija nam omogućava da formulišemo sledeću teoremu koja je po formi bliska Andersonovoj "pushing down" teoremi iz [2] (Teorema 5.2.).

Teorema 3.8. Kao i pre $(X,\mathcal{A},\nu)$ je unutrašnji prostor sa konačno aditivnom, ograničenom ($\mathrm{st}\,\nu < +\infty$) merom ν. Neka je $g:X \longrightarrow {}^*B$ *-merljiva funkcija s obzirom na prostor $(X,\mathcal{A},\nu)$ takva da je ran(g) S-separabilan podskup od *B. Podsetimo da pod *-merljivošću podrazumevamo *-transformaciju definicije merljivosti vektor funkcije u odnosu na konačno-aditivnu meru (Dunford, Schwartz [6]). Tada je $h:=\mathrm{st}(g) : X \longrightarrow \hat{B}$ $L(\nu)$-merljiva funkcija.

D o k a z: Ponovo ćemo se osloniti na lemu III.6.9. iz [6] koja kaže da je funkcija $h:X \longrightarrow \hat{B}$ merljiva ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1) Postoji $X' \subset X$ mere nula takav da je $h(X-X')$ separabilan podskup od $\hat{B}$

2) $h^{-1}(V(a,r)) \in L(\mathcal{A})$ za svaku otvorenu kuglu $V(a,r)$ iz $\hat{B}$.

Primetimo da iz *-merljivosti funkcije g sledi da postoji unutrašnji skup $A \subset X$ infinitezimalne mere i *-jednostavna funkcija g' takva da je $\forall x \in X-A$ $\mathrm{st}g(x) = \mathrm{st}g'(x)$. Zbog toga možemo pretpstaviti da je $g = g'$. Uslov 1) je zadovoljen pošto je po pretpostavci ran(g) S-separabilan. Neka je $V(a,r)$, $a \in \hat{B}$ i $r > 0$, otvorena kugla iz $\hat{B}$.

Neka $b \in {}^*B$ ima svojstvo $\mathrm{st}\, b = a$.

$$x \in h^{-1}(V(a,r)) \iff \|h(x)-a\| < r \iff \exists n \in \mathbb{N}\ {}^*\|g(x)-b\| < r - \frac{1}{n}$$
$$\iff x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-1}({}^*V(b, r - \frac{1}{n}))$$

Pošto je funkcija g *-jednostavna važi $g^{-1}({}^*V(b, r-\frac{1}{n})) \in \mathcal{A}$ pa je $h^{-1}(V(a,r)) \in L(\mathcal{A})$. Ovim je proveren i uslov 2) čime je dokaz teoreme završen.

Definicija 3.9. Za Banahov prostor B kažemo da ima svojstvo Radona-Nikodyma (RN-svojstvo) ako za svaku σ-aditivnu B-značnu meru μ definisanu na nekoj σ-algebri $\mathcal{B}$ podskupova nekog skupa S sa konačnom varijacijom $|\mu|$, postoji Bohner-integrabilna funkcija f tako da je

$$\mu(A) = \int_A f \, d|\mu| \qquad \text{za sve } A \in \mathcal{B}$$

Poznato je da svi Hilbertovi prostori, šta više i svi refleksivni Banahovi prostori imaju RN-svojstvo.

Stav 3.10. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu, {}^*B)$ unutrašnji prostor sa konačno-aditivnom $^*B$-značnom merom μ čija je potpuna varijacija $|\mu| = \mathrm{var}(\mu, \cdot)$ konačna. Neka $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu), \hat{B})$ odgovarajući Loeb-ov prostor. Ako prostor $\hat{B}$ ima RN-svojstvo onda postoji $*$-jednostavna funkcija $f: X \to {}^*B$ takva da je $L(\mu)(A) = \mathrm{st}\int_A f \, d|\mu|$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Drugim rečima ako je f oblika $f = \sum_{i=1}^{H} a_i \varphi_{A_i}$, pri čemu je $\{A_i\}_{i=1}^{H}$ hiperkonačna particija od X skupovima iz $\mathcal{A}$ onda je $L(\mu)(A) = \mathrm{st} \sum_{i=1}^{H} a_i |\mu|(A \cap A_i)$.

D o k a z: Pošto prostor $\hat{B}$ ima RN-svojstvo, postoji $L(|\mu|)$-merljiva, ograničena funkcija $g: X \longrightarrow \hat{B}$ takva da je svaki $B \in L(\mathcal{A})$

$$(1) \qquad \int_B g \, d \, L(|\mu|) = L(\mu)(B)$$

Prema teoremi 3.6. postoji unutrašnja funkcija $f: X \longrightarrow {}^*B$ koja zadovoljava sledeće uslove:

(i) Postoji unutrašnja particija $\{A_i\}_{i=1}^{H}$, $H \in {}^*\mathbb{N}$, i unutrašnji, hiperkonačni niz $(b_n | 1 \leq n \leq H)$ takvi da je $A_i \in \mathcal{A}$ za sve $i \leq H$ i

$$f = \sum_{i=1}^{H} b_i \cdot \varphi_{A_i}$$

(ii) Za skoro sve tačke $x \in X$ važi $\mathrm{st}\, f(x) = g(x)$.

Zbog (1), dovoljno je očevidno dokazati jednakost

$$\int_A g \, d \, L(|\mu|) = \mathrm{st} \int_A f \, d|\mu|$$

Neka $M \in R$ ima svojstvo $\forall x \in X (\|g(x)\| \leq M \wedge {}^*\|f(x)\| \leq M)$ i neka je $\varepsilon > 0$ unapred zadani standardni realni broj. Tada postoje $B \in \mathcal{A}$ i $j: X \longrightarrow \hat{B}$ jednostavna funkcija oblika

$$j = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_{D_i} \quad \text{takvi da važi } L(|\mu|)(B) < \varepsilon \text{ , } D_i \in \mathcal{A} \quad \text{i}$$

$\forall x \in X - B (\| g(x) - j(x) \| < \varepsilon)$. Ako su $d_i \in {}^*B$ odabrani tako da je $\mathrm{st}\, d_i = c_i$

onda funkcija $\bar{j} = \sum_{i=1}^{k} d_i \cdot \varphi_{D_i}$

ima svojstvo $\forall x \in X-B(*\| f(x)-\bar{j}(x)\| < \varepsilon)$. Odavde imamo sledeće nejednakosti

$$\| \int_X g \, dL(|\mu|) - \sum_{i=1}^{k} c_i \, L(|\mu|)(D_i)\| \leq \varepsilon \cdot L(|\mu|)(X)+2M\cdot\varepsilon$$

$$*\| \int_X f d|\mu| - \sum_{i=1}^{k} d_i |\mu| (D_i)\| \leq \varepsilon \cdot |\mu|(X) + 2M\cdot\varepsilon$$

Prema tome $\| \int_X g \, dL(|\mu|) - st \int_X f d|\mu| \| \leq 2\cdot\varepsilon \, L(|\mu|)(X)+4\varepsilon\cdot M$

što i dokazuje našu jednakost za $A = X$. Za bilo koji $A \in \mathcal{A}$ dokaz teče analogno. Ovim je stav 3.10 dokazan.

U jednom specijalnom i najinteresantnijem slučaju nikakve pretpostavke za prostor $\hat{B}$ nisu potrebne.

Stav 3.11. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu, *B)$ zadan na sledeći način. $X = \{x_i\}_{i=1}^{H}$ je hiperkonačan skup, $(\alpha_i | 1 \leq i \leq H)$ hiperkonačni niz *-kompleksnih brojeva modula 1 a $(b_i | 1 \leq i \leq H)$ unutrašnji niz elemenata iz *B takav da je $\sum_{i=1}^{H} \| b_i \| \leq M$ za $M \in R$. Tada reprezentirajuća *-jednostavna funkcija f iz stava 3.10 uvek postoji (bez obzira na $\hat{B}$) i to je upravo funkcija $f: X \longrightarrow *B$ opisana sa $f(i) = \alpha_i b_i$ dok je $|\mu|$ odredjena sa

$|\mu|(D) = \sum \{ \| b_i \| \mid x_i \in D \}$ za $D \in \mathcal{A}$, unutrašnji podskup od X.

4. RADONOVE MERE KAO PROJEKCIJE LOEBOVIH MERA

Kantorov skup $C = \mathbb{N}_2$, zajedno sa algebrom Borelovih skupova $\mathcal{B}$ i merom proizvoda ν, obrazuje vrlo pravilan, simetričan prostor s merom $(C, \mathcal{B}, \gamma)$. Preslikavanje $d: C \longrightarrow [0,1]$ koje svakom 0,1-nizu $\alpha = (\alpha_i \mid i \in \mathbb{N})$ iz C dodeljuje broj $d(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot 2^{-i-1} \in [0,1]$ je neprekidno, skoro svuda 1-1, čuva meru i projektuje prostor $(C, \mathcal{B}, \gamma)$ na $([0,1], \mathcal{L}, m)$, Lebegov prostor s merom. Prednosti prvog prostora su očevidne, na primer C je topološka grupa na kojoj je ν mera Haar-a. Ideja ovog primera je prosta ali veoma korisna. Preslikati prostor s merom $(Y, \mathcal{B}, \gamma)$, koji je bogat strukturom i s kojim se lako operiše, na prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ koji ispitujemo znači često duboko proniknuti u strukturu prostora $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Napomenimo da $p: Y \longrightarrow X$ preslikava, u gornjem smislu, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ na $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ako je $\forall A \in \mathcal{A} (p^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ i $\mu(A) = \nu(p^{-1}(A)))$. Već pomenuti, u prethodnoj raspravi, Loeb-ovi prostori imaju bogatu strukturu i mogu se na više načina preslikati na druge prostore s merom. Podsetimo se definicije Loeb-ovog prostora s merom.

Definicija 4.1. Neka je $(^*X, \mathcal{A}, \mu)$ unutrašnji prostor sa konačno-aditivnom merom μ. U radu [18] P.Loeb je pokazao da se mera $\tilde{\mu} = {}^{\circ}\mu$ može raširiti do σ-aditivne mere definisane na $\sigma(\mathcal{A})$, minimalnoj σ-algebri generisanoj sa $\mathcal{A}$. Kompletiranjem na taj način dobijenog prostora $(^*X, \sigma(\mathcal{A}), \tilde{\mu})$ dolazimo do prostora $(^*X, L(\mathcal{A}), L(\mu))$ koji se zove Loeb-ov prostor s merom dok se mera $L(\mu)$ zove Loeb-ova mera.

Definicija 4.2. Neka je X Hausdorfov prostor i $\mathcal{E}$ familija podskupova od X. Funkcija $\nu: \mathcal{E} \longrightarrow R^+$ je <u>regularna</u> ako za sve $C \in \mathcal{E}$ važi

$$\nu(C) = \sup \{\nu(F) \mid F \subset C, \quad F \in \mathcal{E} \quad \text{je zatvoren}\}$$
$$= \inf \{\nu(O) \mid C \subset O, \quad O \in \mathcal{E} \quad \text{je otvoren}\}$$

Mera ν definisana na X se zove Radon-ova mera ako je kompletiranje Borel-ove mere i ako za svaki ν-merljiv skup C važi:

$$\begin{aligned} \nu(C) &= \sup\{\nu(K) \mid K\subset C,\ \ K \text{ je kompaktan}\} \\ &= \inf\{\nu(O) \mid C\subset O,\ \ O \text{ je otvoren}\} \end{aligned}$$

Cilj ove rasprave je dokaz teoreme 4.7. Dokaz će biti izveden izvodjenjem nekoliko pomoćnih stavova koji zaslužuju pažnju i sami za sebe. Svi ovi rezultati su dokazani od strane T.Lindstroma u [15] iako su neke manje generalne verzije nekih od njih bile dokazane i od P.Loeba, R.Andersona i E.Fishera.

Stav 4.3. Neka je X Hausdorfov prostor i $({}^*X, \mathcal{A}, P)$ unutrašnji, konačno-aditivni verovatnosni prostor tako da je $st^{-1}(F)\in L(\mathcal{A})$ za svaki zatvoreni skup F. Ako je još i $L(P)(ns({}^*X)) = 1$ onda je mera $st\,L(P)$, odredjena sa $st\,L(P)(B) = L(P)st^{-1}(B)$ regularna, kompletna Borelova mera na X.

D o k a z: Kompletnost od $\mu := stL(P)$ sledi iz kompletnosti mere $L(P)$ dok je Borelovost od μ posledica činjenice da su svi zatvoreni skupovi u X $stL(P)$-merljivi. Dokažimo regularnost. Pošto se radi o verovatnosnoj meri dovoljno je proveriti samo jedan od uslova iz definicije 4.2. Neka je C μ-merljiv i $\varepsilon>0$. Pošto je $st^{-1}C\in L(\mathcal{A})$ iz definicije Loeb-ove mere sledi da postoji $A\in\mathcal{A}$, $A\subset st^{-1}C$ sa svojstvom $L(P)(A) > L(P)st^{-1}C-\varepsilon = \mu(C)-\varepsilon$. Pošto je A unutrašnji skup, $st(A)$ je zatvoren podskup od X (dokaz ove činjenice je zabavna vežba iz primene principa zasićenja). $st^{-1}\,st(A)\supset A\cap ns({}^*X)$, $\mu(stA) = L(P)(st^{-1}stA) \geq L(P)(A) \geq \mu(C) - \varepsilon$.

Posledica 4.4. Neka je X Hausdorfov prostor i $({}^*X, \mathcal{A}, P)$ unutrašnji, konačno-aditivni verovatnosni prostor tako da je $st^{-1}(K)\in L(\mathcal{A})$ za svaki kompakt K iz X. Pretpostavimo li da za svaki $\varepsilon>0$ postoji kompakt K_ε sa svojstvom $L(P)st^{-1}K_\varepsilon > 1-\varepsilon$, možemo zaključiti da je $st\,L(P)$ Radon-ova mera na X.

D o k a z: Oslanjajući se na prethodni stav dovoljno je dokazati da je $st^{-1}F$ Loeb-merljiv za svaki zatvoren skup F iz X. Medjutim iz

$F = (\bigcup_{n\in N}(F\cap K_{1/n}))\cup(F\setminus\bigcup_{n\in N}K_{1/n})$ sledi da je $st^{-1}F$ unija od prebrojivo mnogo Loeb-merljivih skupova.

Lema 4.5. Neka je $K \subset X$ kompaktan i $\mathcal{T}'$ baza za topologiju na X koja je zatvorena u odnosu na konačne unije. Tada je

$$st^{-1}(K) = \cap \{ {}^*O \mid K \subset O,\ O \in \mathcal{T}' \}$$

D o k a z: Očevidno je $st^{-1}(K) \subset {}^*O$ za sve $O \supset K$ otvorene skupove pa je i $st^{-1}(K) \subset \cap\{{}^*O \mid K \subset O,\ O \in \mathcal{T}'\}$. Obrnuto, neka je $y \notin st^{-1} K$. Za svaki $x \in K$ postoji $G_x \in \mathcal{T}'$ sa svojstvom $x \in G_x$ i $y \notin {}^*G_x$ jer bi u protivnom bilo $y \in m(x)$. Neka je $K \subset G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}$, odnosno ${}^*K \subset {}^*(G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}) = {}^*O$ gde je $O \in \mathcal{T}'$. Pošto važi $y \notin {}^*O$ lema je dokazana.

Stav 4.6. Neka je $({}^*X, \mathcal{A}, P)$ kao i ranije, unutrašnji konačno-aditivni verovatnosni prostor i neka je $\mathcal{T}'$ baza za topologiju na X takva da je ${}^*O \in L(\mathcal{A})$ za sve $O \in \mathcal{T}'$. Tada je $st^{-1}(K) \in L(\mathcal{A})$ za svaki kompakt K i ako je $\mathcal{T}'$ zatvorena u odnosu na konačne unije važi

$$L(P)\ st^{-1}(K) = \inf \{ L(P)({}^*O) \mid O \in \mathcal{T}',\ K \subset O \}$$

D o k a z: Skup $\{ O \mid {}^*O \in L(\mathcal{A})$ i O je otvoren$\}$ je očevidno zatvoren u odnosu na konačne unije tako da se ne gubi na opštosti ako se pretpostavi da je i $\mathcal{T}'$ baza zatvorena u odnosu na konačne unije. Neka je

$\alpha_K = \inf\{L(P)({}^*O) \mid O \in \mathcal{T}',\ K \subset O\}$. Posmatrajmo familiju unutrašnjih skupova oblika $\mathcal{D}_{O_1,\ldots,O_{n,m}} = \{B \in \mathcal{A} \mid B \subset {}^*O_1 \cap \ldots \cap {}^*O_n$ i $P(B) > \alpha_k - \frac{1}{m}\}$ gde je $K \subset O_i \in \mathcal{A}$ za sve $i = 1,\ldots,n$. Svaki $\mathcal{D}_{O_1,\ldots,O_{n,m}}$ je neprazan skup pošto je ${}^*O_1 \cap \ldots \cap {}^*O_n$ Loeb-merljiv sa merom $\geq \alpha_K$. Lako se uvidja da se tu radi o centriranoj familiji pa na osnovu Principa zasićenja postoji $B \in \mathcal{A}$ sa svojstvom $st\ P(B) \geq \alpha_K$ i $B \subset {}^*O$ za sve $O \in \mathcal{T}'$, $O \supset K$. Dovoljno je još primetiti da lema 4.5. povlači $B \subset st^{-1}K$ pa da se stav 4.6. dobije kao posledica kompletnosti mere $L(P)$.

Teorema 4.7. Neka je $({}^*X, \mathcal{A}, P)$ unutrašnji, konačno-aditivni verovatnosni prostor. Pretpostavimo da postoji baza $\mathcal{T}'$ topologije na X koja je zatvorena u odnosu na konačne unije a koja ima svojstvo ${}^*O \in L(\mathcal{A})$ za svaki $O \in \mathcal{T}'$. Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompakt K_ε sa svojstvom

$$\alpha_{K_\varepsilon} := \inf\{L(P)(^*O) \mid K \subset O,\ O \in \tau'\} > 1-\varepsilon .$$

Tada je stL(P) Radon-ova mera na X i važi $stL(P)(K) = \alpha_K$ za svaki kompakt $K \subset X$.

D o k a z: Dovoljno je osloniti se na posledicu 4.4. i stav 4.6.

Svi prethodni rezultati su ispitivali uslove pod kojima se projektovanjem Loeb-ovog prostora s merom, $(^*X, L(\mathcal{A}), L(P))$, asociranim sa unutrašnjim konačno-aditivnim verovatnostima prostorom $(^*X, \mathcal{A}, P)$ (X je Hausdorfov topološki prostor), dobijaju Radon-ovi prostori s merom. Prirodno je zapitati se da li su ti uslovi i potrebni i da li se projektovanjem pomoću "standardni deo" preslikavanja može dobiti svaki Radon-ov prostor s merom.

Odgovor daje sledeća teorema R.Anderson-a, to je Teorema 3.3. iz [2].

Teorema 4.8. Neka je $(X, \mathcal{B}, \mu)$ Radonov verovatnosni prostor. Neka je $\mathcal{A}$ neka unutrašnja podalgebra od $^*\mathcal{B}$ (jasno je da možemo uzeti i celu $^*\mathcal{B}$), takva da za svaki $T \in$ topologija (X) ili $^*T \in \mathcal{A}$ ili $st^{-1}(T) \in L(\mathcal{A})$. Pod ovim uslovima važi

$L(^*\mu)(ns(^*X)) = 1$ i $st: (^*X, L(\mathcal{A}), L(^*\mu)) \longrightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je preslikavanje koje čuva meru.

D o k a z: $L(^*\mu)(ns^*(X)) = 1$ je jednostavna posledica činjenica da je $\sup\{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompaktan}\} = 1$. Medjutim, odavde sledi da je i za svaki zatvoreni skup F, a ne samo za otvoren, ili $^*F \in \mathcal{A}$ ili $st^{-1}(F) \in L(\mathcal{A})$. Neka je $B \in \mathcal{B}$. Postoje, niz C_n kompaktnih skupova i niz T_n otvorenih skupova sa svojstvom $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset B \subset \ldots \subset T_2 \subset T_1$ takvi da je $\lim \mu(T_n - C_n) = 0$. Pošto je C_n kompaktan a T_n otvoren, imamo

$$^*C_n \subset st^{-1}(C_n) \subset st^{-1}(B) \subset st^{-1}(T_n) \subset {}^*T_n \quad \text{i} \quad {}^*\mu(^*T_n - {}^*C_n) =$$

$$= \mu(T_n - C_n) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty. \text{ Ili je } C_n \in \mathcal{A} \text{ ili } st^{-1}(C_n) \in L(\mathcal{A});$$

u poslednjem slučaju je $L(^*\mu)(st^{-1}C_n) \geqslant st(^*\mu(^*C_n)) = \mu(C_n)$. Takodje, ili je $^*T_n \in \mathcal{A}$ ili $st^{-1}(T_n) \in L(\mathcal{A})$ a u tom slučaju važi $L(^*\mu)(st^{-1}T_n) \leqslant st(^*\mu(^*T_n)) = \mu(T_n)$. U svakom slučaju $st^{-1}(B)$ je stešnjen izmedju dva Loeb-merljiva skupa sa merama $\mu(C_n)$ i $\mu(T_n)$ pa je $st^{-1}(B) \in L(\mathcal{A})$ i $L(^*\mu)(st^{-1}(B)) = \mu(B)$.

Dakle, projektovanjem nekog Loeb-ovog prostora pomoću "standardni deo" preslikavanja se dobija svaki Radon-ov prostor. Da li se tim postupkom može dobiti svaki, ne obavezno Radon-ov prostor.

Odgovor na ovo pitanje je negativan i to je sadržaj sledećeg primera.

Primer. Neka je ω_1+1 prostor sa topologijom poretka. Neka je $\mathcal{A}$ algebra podskupova od ω_1+1 koji ili sadrže zatvoren, kofinalan skup u ω_1 ili su disjunktni sa jednim takvim skupom. Lako se može proveriti da je $\mathcal{A}$ σ-algebra koja sadrži sve Borel-ove skupove iz X i da je

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{A sadrži kofinalan u } \omega_1 \text{ i zatvoren skup} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

σ-aditivna mera definisana na $\mathcal{A}$. Nije teško videti da je $L(^*\mu)st^{-1}(\{\omega_1\}) = 1$ dok $\mu(\{\omega_1\}) = 0$ što znači da se ovaj prostor <u>ne</u> može predstaviti na gore navedeni način.

Primetimo da je do ove disharmonije došlo zbog velike "koncentracije" prostora oko tačke ω_1, na primer pseudo-karakter od ω_1 je neprebrojiv. Primetimo li da iz istih razloga skup $\{\omega_1\}$ nije Berov (R.Baire) iako jeste Borelov, pitamo da li se posmatranjem σ-algebre skupova merljivih u smislu Bera mogu dobiti odgovarajući stavovi reprezentacije. Odgovor je potvrdan i detalji se mogu naći u već citiranom radu R.Andersona.

Čitalac koji je strpljivo prošao kroz sve rezultate ove rasprave za uzvrat dobija efikasnu i elegantnu metodu za konstruisanje raznih vrsta Radon-ovih mera. Neki primeri će biti izloženi u ostalim glavama a sada samo nejjednostavniji.

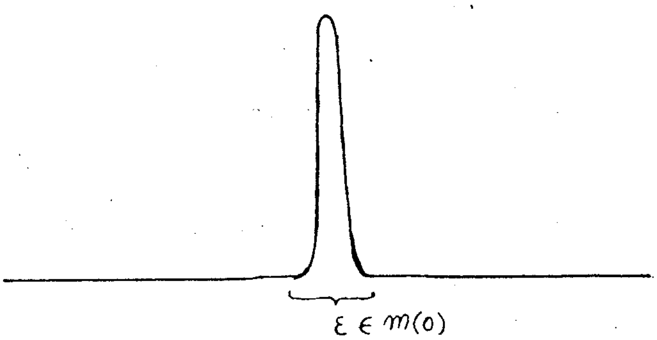
Lebegova mera na $[0,1]$. Neka je $A \subset {}^*[0,1]$ hiperkonačan skup ravnomerno rasporedjen na $^*[0,1]$ u smislu da je za sve $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha < \beta$, ispunjeno $st \dfrac{\#(A \cap {}^*(\alpha,\beta))}{\# A} = \beta - \alpha$, gde je $\#(B)$ broj elemenata hiperkonačnog skupa B. Ako je $\mathcal{A}$ algebra unutrašnjih podskupova od $^*[0,1]$ a μ unutrašnja konačno-aditivna mera na $\mathcal{A}$ definisana sa $\mu(B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)}$ za $B \in \mathcal{A}$, onda je projekcija st $L(\mu)$, Loeb-ove mere $L(\mu)$, Lebegova mera na intervalu $[0,1]$.

D o k a z: Na osnovu teoreme 4.7. st $L(\mu)$ je Borelova mera (kompletna) na intervalu $[0,1]$. Pošto je zbog uslova st $\frac{\#(A \cap {}^*(\alpha,\beta))}{\#A} = \beta - \alpha$ st $L(\mu)(\alpha,\beta) = \beta - \alpha$ zaključujemo da je st$L(\mu)$ zaista Lebegova mera.

5. TEOREMA RISA O REPREZENTACIJI LINEARNIH FUNKCIJA NA C(X)

Ovo je jedna od klasičnih teorema koja već duže vreme stoji na početku svakog detaljnijeg upoznavanja sa funkcionalnom analizom, teorijom mere ili nekom drugom disciplinom matematičke analize. Iako fundamentalna teorema, kao što je ova, uvek izaziva interes i stimuliše nova otkrića, njen razvoj u užem smislu je počeo 1909 godine kada je F. Ris (F.Riesz) izveo dokaz za slučaj $X = [0,1]$ a završio se 1941 godine kada je S.Kakutani dao dokaz za slučaj bilo kakvog kompaktnog Hausdorfovog prostora X.

Jedan od standardnih dokaza ove teoreme se oslanja na činjenicu da se ekstenzijom zadanog funkcionala L na prostor funkcija koji sadrži karakteristične funkcije svih Borelovih skupova iz X može "pogoditi" kako izgleda reprezentirajuća mera ν. Ideja oba ovde navedena nestandardna dokaza je sasvim suprotna. Posmatranjem odredjene hiperkonačne familije *-neprekidnih funkcija norme 1 sa infinitezimalnim nosačem (slika) i primenom *L na te funkcije dolazi se do unutrašnje mere na hiperkonačnom podskupu od *X što omogućuje primenu rezultata iz prethodne rasprave. Kako bi čitanje ovog ogleda učinio što nezavisnijim a i da bi elementarnost dokaza došla do izražaja, dokazaćemo prethodno jednu lemu koja je inače jednostavna posledica teoreme 4.7.



Lema 5.1. Neka je X kompaktan Hausdorfov prostor i $(^*X, \mathcal{A}, \mu)$ unutrašnji prostor sa konačno-aditivnom konačnom merom μ. Ako je $^*O \in \mathcal{A}$ za svaki otvoreni skup iz X onda je mera $\nu = \mathrm{st}\, L(\mu)$ (ili drugačije zapisano $L(\mu)\mathrm{st}^{-1}$) definisana sa $\nu(B) = L(\mu)\mathrm{st}^{-1}(B)$ Radon-ova mera na X.

D o k a z: Neka ν je definisana na σ-algebri $\mathcal{M}$ skupova B iz X koji imaju svojstvo da je $\mathrm{st}^{-1}(B) \in L(\mathcal{A})$. Pokažimo da je ν regularna mera. Zaista, pošto je $\mathrm{st}^{-1}B \in L(\mathcal{A})$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji unutrašnji skup $A \in \mathcal{A}$ sa svojstvom $L(\mu)(A) \geq L(\mu)(B) - \varepsilon$. Medjutim skup $st(A) \subset B$ je kompaktan i važi $\nu(st(A)) = L(\mu)\ st^{-1}\ stA \geq L(\mu)(A)$. Dokažimo sada da σ-algebra $\mathcal{M}$ sadrži sve Borelove skupove. Za to je dovoljno pokazati da je $st^{-1}(K) \in L(\mu)$ za svaki kompakt $K \subset X$. Medjutim ovo se dokazuje potpuno isto kao Stav 4.6. pa se ovaj dokaz prepušta čitaocu.

Teorema 5.2. (Risova teorema). Neka je X kompaktan Hausdorfov prostor i $L: C(X) \longrightarrow R$ pozitivni linearni funkcional. Tada postoji Radonova mera ν na X takva da je $L(f) = \int_X f\, d\nu$ za sve $f \in C(X)$.

D o k a z: Neka je $(\mathcal{P}, \leq)$ sledeći parcijalno uredjeni skup:

$a \in \mathcal{P}$ je ekvivalentno sa $a = (\mathcal{U}, \mathcal{F})$

gde je $\mathcal{U}$ konačan otvoren pokrivač od X i $\mathcal{F}$ konačno razlaganje jedinice potčinjeno pokrivaču $\mathcal{U}$. Dalje predpostavljamo da su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{F}$ u 1-1 korespondenciji $\varphi: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$ tako da je supp $\varphi(V) \subset V$ za svaki $V \in \mathcal{U}$ pri čemu je $\operatorname{supp}(f) := \operatorname{cl}\{x \in X \mid f(x) > 0\}$. Napomenimo da ako funkcija u nekom, unapred zadanom, razlaganju jedinice ima više nego elemenata pokrivača dovoljno je sabrati sve one funkcije koje imaju nosač u istom otvorenom skupu. Poredak $\leq$ je definisan na sledeći način. Ako je $a = (\mathcal{U}, \mathcal{F})$ i $b = (\mathcal{V}, \mathcal{G})$ onda je

(1) $a \leq b \iff$ (i) i (ii) gde je

(i) $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists S \subset \mathcal{V}\ (U = \text{unija } (S))$

(ii) $\forall O \subset X$ otvoren skup

$$\sum \{f \in F \mid \operatorname{supp}(f) \subset O\} \leq \sum \{g \in G \mid \operatorname{supp}(g) \subset O\}.$$

Neka je $\mathcal{T}: \mathcal{U} \longrightarrow X$ funkcija izbora koja ima svojstvo $\mathcal{T} V \in$ supp $\varphi(V)$ ako je poslednji skup neprazan. Potrebno nam je sledeće tvrdjenje. $(\mathcal{P}, \leq)$ je usmeren parcijalno uredjeni skup.

Zaista, ako su $a = (\mathcal{U}, \mathcal{F})$ i $b = (\mathcal{V}, \mathcal{G})$ iz onda je $c = (\mathcal{W}, \mathcal{H})$ definisan ovako, $\mathcal{W} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}$ i $U \cap V \neq \emptyset\}$, $\mathcal{H} = \{f \cdot g \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ majoranta za skup $\{a, b\}$.

Na osnovu principa zasićenja postoji $\bar{a} = (\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathcal{F}}) \in {}^*\mathcal{P} - \mathcal{P}$ koji majorira sve elemente od $\mathcal{P}$. $\bar{\mathcal{U}}$ je hiperkonačan skup i neka je $\mathcal{A}$ hiperkonačna algebra generisana sa $\bar{\mathcal{U}}$. Primetimo da je ${}^*O \in \mathcal{A}$ za svaki otvoren

$O \subset X$ što sledi iz uslova (i) od (1). Preciznije, $O \in \mathcal{U}$ za neki $a = (\mathcal{U},\mathcal{F}) \in \mathcal{P}$. Neka je $\bar{\mathcal{T}} : \bar{\mathcal{U}} \longrightarrow {}^*X$ funkcija izbora asocirana sa $\bar{a} = (\bar{\mathcal{U}},\bar{\mathcal{F}})$. Ako je $A \in \mathcal{A}$ definišimo unutrašnju meru μ ovako

$$\mu(A) := {}^*\sum\{{}^*L(f) \mid \exists V \in \bar{\mathcal{U}}(\bar{\mathcal{T}}V \in A \text{ i } ({}^*\mathrm{supp})(f) \subset V)\}$$

$({}^*X, \mathcal{A}, \mu)$ je unutrašnji prostor sa konačno-aditivnom, konačnom merom μ pa primenom leme 5.1. dobijamo da je $\nu = \mathrm{st}L(\mu)$ Radonova mera na X. Pokažimo da je ν tražena mera. Neka je $O \subset X$ otvoren skup i $f \in C(X)$ takva da je $0 \leqslant f \leqslant 1$ i $\mathrm{supp}(f) \subset O$. Tada je

(2) $\quad L(f) \leqslant \nu(O)$

Da dokažemo ovu nejednakost primetimo da je $(\{O,X\}, \{f,1-f\}) \in \mathcal{P}$ i da iz $O \neq X$ sledi $\mathrm{supp}(1-f) \not\subset O$ pa na osnovu uslova (ii) iz (1) imamo ${}^*f \leqslant {}^*\sum\{h \in \bar{\mathcal{F}} \mid ({}^*\mathrm{supp})(h) \subset {}^*O\}$. Koristeći ovu nejednakost i pozitivnost funkcionala L imamo

$$L(f) = {}^*L({}^*f) \leqslant {}^*\sum\{{}^*L(h) \mid h \in \bar{\mathcal{F}} \text{ i } {}^*\mathrm{supp}(h) \subset {}^*O\} \leqslant \mu({}^*O)$$

na osnovu definicije mere μ. Očevidno otvoren skup u nejednakosti $L(f) \leqslant \mu({}^*O)$ može biti zamenjen otvorenim skupom G koji ima svojstvo $\mathrm{supp}(f) \subset G \subset \mathrm{cl}(G) \subset O$. Zbog toga važi

$$L(f) \leqslant \mathrm{st}\,\mu({}^*G) \leqslant \mathrm{st}\,\mu({}^*\mathrm{cl}G) \leqslant L(\mu)\mathrm{st}^{-1}(\mathrm{cl}G) \leqslant L(\mu)\mathrm{st}^{-1}(O) = \nu(O)$$

Sada uzmimo bilo koju funkciju $f \in C(X)$. Očevidno je $L(1_X) = \nu(X)$ što sledi iz činjenice da je $\bar{\mathcal{F}}$ razlaganje jedinice. Zbog toga možemo bez uticaja na opštost pretpostaviti da je $f(X) \subset [s,t]$ za $s \geqslant 0$. Neka je $s = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = t$ podela intervala $[s,t]$ takva da je $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ za $0 \leqslant i \leqslant n-1$ i $\gamma(f^{-1}(x_i)) = 0$ što je moguće na osnovu σ-aditivnosti mere ν. Za svaki $F_i = f^{-1}[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, postoji otvoren skup $O_i \supset F_i$ takav da je $\nu(O_i - F_i) < \varepsilon/2^i \cdot x_i$. Neka je $0 \leqslant f_i \leqslant 1$ izabrana tako da je $f_i(F_i) = \{1\}$ i $\mathrm{supp}(f_i) \subset O_i$. Očevidno je $f \leqslant \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i$ pa je prema tome $L(f) \leqslant \sum_{i=1}^n x_i \cdot L(f_i) \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n x_i\, \nu(O_i) \leqslant \sum_{i=1}^n x_i \nu(F_i) + \varepsilon .$$

Pošto je $F_i \cap F_j$ skup ν-mere nula za $i \neq j$, na desnoj strani poslednje nejednakosti se zapaža suma koja aproksimira $\int_X f\, d\nu$ sa unapred zadanom tačnošću. Prema tome važi $L(f) \leqslant \int_X f\, d\nu$ za svaku funkciju

$f \in C(X)$. Poslednja nejednakost važi i za funkciju $-f$ čime se dobija tražena nejednakost

$$L(f) = \int_X f\, d\nu .$$

Gore navedeni dokaz se odnosio samo na pozitivne, linearne funkcionale na realnom Banahovom prostoru $C(X) = C(X, \mathbb{R})$, realnih neprekidnih funkcija na kompaktu X. Medjutim, Risova teorema u punom obliku glasi ovako.

Teorema 5.3. Neka je X kompaktan Hausdorfov prostor i $C(X, \mathbb{C})$ kompleksan Banahov prostor svih neprekidnih kompleksnih funkcija na X. Ako je $L: C(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ograničen linearni funkcional na $C(X, \mathbb{C})$ onda postoji kompleksna Radonova mera μ na X koja reprezentira ovaj funkcional, tj.

$$L(f) = \int_X f\, d\mu \text{ za svaku funkciju } f \in C(X, \mathbb{C}).$$

Pre nego što pristúpim dokazu ove teoreme navešću nekoliko činjenica o kompleksnim merama i integraciji kompleksnih funkcija u odnosu na ovakve mere. Lema što sledi već je formulisana i dokazana (u većoj generalnosti) u raspravi o Loeb-ovom kompletiranju vektorskih mera. Sam rezultat je kompleksna analogija odgovarajućeg "realnog" rezultata koji je dokazan od strane P.Loeba (Teorema 3 iz [18]). Opštiju "realnu" verziju tog rezultata dokazao je R.Anderson u [1] i to je jedan od osnovnih rezultata u nestandardnoj teoriji mere i integracije.

Lema 5.4. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ unutrašnji prostor sa konačno-aditivnom *-kompleksnom merom μ. Šta više, pretpostavljamo da je μ i konačna mera (S-konačna) što znači da postoji $M \in R$ sa svojstvom $|\mu(E)| \leq M$ za sve $E \in \mathcal{A}$. Tada za svaku unutrašnju, standardno-ograničenu, $\mathcal{A}$-merljivu funkciju $f: X \longrightarrow {}^*C$ važi

$$st \int_X f d\mu = \int_X st(f) dL(\mu) \quad \text{gde je} \quad L(\mu) \text{ Loebova mera asocira-}$$

na sa μ.

Posledica 5.5. Neka je $Y = \{y_i \mid 1 \leq i \leq D\}$ hiperkonačan skup, $D \in {}^*\mathbb{N}$, a $(\alpha_i \mid 1 \leq i \leq D)$ unutrašnji niz *-kompleksnih brojeva takav da je

$*\sum\{|\alpha_i| \mid 1 \leq i \leq D\}$ ograničen *-realan broj. Ako je $f:Y \longrightarrow {}^*\mathbb{C}$ S-ograničena unutrašnja funkcija onda je

$$\int_Y {}^{o}f \; d\, L(\mu) = \mathrm{st} \sum_{i=1}^{D} f(y_i)\cdot\alpha_i$$

pri čemu je μ unutrašnja mera definisana na skupu svih internalnih podskupova od Y jednakošću $\mu(E) = \sum\{\alpha_i \mid y_i \in E\}$.

D o k a z. Dokaz sledi iz leme 5.4. i činjenice da je u ovom slučaju

$$\int_Y f d\mu = \sum_{i=1}^{D} f(y_i)\cdot\alpha_i$$

Lema 5.6. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s merom kao i u lemi 5.4. Ako je $g:X \longrightarrow \mathbb{C}$ $L(\mathcal{A})$-merljiva funkcija onda postoji $\mathcal{A}$-merljiva unutrašnja funkcija $f:X \longrightarrow {}^*\mathbb{C}$ sa svojstvom $\mathrm{st} f = g$ $L(|\mu|)$-skoro svuda.

D o k a z. Ova lema je kao i prethodna u većoj generalnosti dokazana u trećoj glavi (Teorema 3.6.) gde se može naći i definicija od $L(|\mu|)$. Lemu takodje možemo dokazati oslanjajući se na "lifting" rezultat R.Andersona.

Dokaz teoreme 5.3. Neka je $F = \{f_i \mid 1 \leq i \leq D\}$ hiperkonačno razlaganje jedinice tj. $0 \leq f_i \leq 1$ za sve $1 \leq i \leq D$ i $\sum_{i=1}^{D} f_i = 1$ koje ima svojstvo $\forall i \; \exists x \in X \; (\mathrm{supp}\,(f_i) \subset m(x))$. Neka je $\{y_i \mid 1 \leq i \leq D\}$ unutrašnji niz takav da je $y_i \in \mathrm{supp}(f_i)$ za sve i i μ mera definisana kao u posledici 5.5. pri čemu je za sve $1 \leq i \leq D$, $\alpha_i := {}^*L(f_i)$.

$\nu = \mathrm{st}L(\mu)$ je kompleksna Radonova mera na osnovu argumenta leme 5.1. Podsetimo se da je $\mathrm{st}L(\mu)(A) = L(\mu)\,\mathrm{st}^{-1}(A)$. Pokažimo da je ν tražena mera.

Neka je $f \in C(X,\mathbb{C})$. $L(f) = {}^*L({}^*f) = \sum_{i=1}^{D} {}^*L({}^*f\cdot f_i)$ pa je

$$\left|L(f) - \int_X f d\nu\right| = \left|L(f) - \int_{{}^*X} {}^{o*}f \; dL(\mu)\right| = \left|\sum_{i=1}^{D} {}^*L({}^*f\cdot f_i) - {}^{o}\sum_{i=1}^{D} {}^*f(y_i)\; {}^*L(f_i)\right|$$

Pošto je funkcija f uniformno neprekidna na X to je njena oscilacija na svakom skupu $\mathrm{supp}(f_i)$, $1 \leq i \leq D$, manja od nekog infinitezimalnog broja η.

Znači, za svaki $x \in {}^*X$ $\quad |[{}^*f(x)-{}^*f(y_i)]f_i(x)| \leq \eta \cdot f_i(x)$ pa prema tome

$$^*\|\sum_{i=1}^{D}[{}^*f-{}^*f(y_i)]f_i\| = \sup_{x \in {}^*X}\left|\sum_{i=1}^{D}[{}^*f(x)-{}^*f(y_i)]f_i(x)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{x \in {}^*X}\sum_{i=1}^{D}|({}^*f-{}^*f(y_i))f_i| \leq \sup_{x \in {}^*X}\sum_{i=1}^{D}\eta \cdot f_i(x) = \eta$$

Pošto je $\|L\| = {}^*\|{}^*L\| < +\infty$ imamo

$$\left|\sum_{i=1}^{D}{}^*L({}^*f \cdot f_i) - \sum_{i=1}^{D}{}^*L({}^*f(y_i)f_i)\right| = \left|{}^*L\left(\sum_{i=1}^{D}[{}^*f-{}^*f(y_i)]f_i\right)\right| \leq$$

$$\leq \|L\|\,{}^*\|\sum_{i=1}^{D}[{}^*f-{}^*f(y_i)]f_i\| \leq \eta\,\|L\| \approx 0.$$

Dakle $|L(f) - \int_X f d\nu| = 0$ čime je dokaz završen.

6. KONSTRUKCIJA G-INVARIJANTNIH MERA

Teorema 6.1. Neka je G komutativna grupa koja dejstvuje na kompaktnom Hausdorfovom topološkom prostoru X kao grupa homeomorfizama. Tada na X postoji Borelova verovatnosna mera ν invarijantna u odnosu na sve transformacije iz grupe G.

Pre nego što pristupimo dokazu ove teoreme korisno je uvesti nekoliko čisto algebarskih pojmova.

Definicija 6.2. Neka je $(G,\cdot)$ grupa (opštije polugrupa ili čak grupoid) i A konačan podskup od G. Neka je α pozitivan realan broj. Za konačan skup $B \subset G$ kažemo da je (α, A)-dobar ako važi

$\forall a \in A \ \frac{|a\cdot B \,\Delta\, B|}{2|B|} \leqslant \alpha$ gde je $a\cdot B = \{a\cdot b \mid b \in B\}$ i $|C|$ broj elemenata skupa C. Definišimo sledeće brojeve

$$\alpha_1(A) = \inf\{\alpha \mid (\exists B \subset G) \quad B \text{ je } (\alpha, A)\text{-dobar i } A \subset B\}$$

$$\alpha(G) = \sup\{\alpha_1(A) \mid A \subset G, \quad |A| < +\infty\}$$

Lema 6.3. Neka je $(G,\cdot)$ komutativna grupa. Tada je $\alpha(G) = 0$. Drugim rečima za svaki konačan skup $A \subset G$ i bilo koji $\varepsilon > 0$ postoji $B \supset A$ konačan skup takav da je $\frac{|a\cdot B \,\Delta\, B|}{2|B|} < \varepsilon$ za svaki $a \in A$.

D o k a z. Neka je G_1 podgrupa od G generisana sa A. Prema dobro poznatom stavu o konačno generisanim Abelovim grupama postoje elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G_1$ takvi da je $G_1 = \mathbb{Z}\cdot a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\cdot a_n \oplus \mathrm{Tor}(G_1)$ gde je $\mathrm{Tor}(G_1)$ torzioni deo grupe G_1. Odmah se vidi da se traženi skup B može definisati ovako

$B = [-m,m]a_1 \oplus \ldots \oplus [-m,m]a_n \oplus \mathrm{Tor}(G_1)$ gde je m dovoljno veliki prirodan broj. Detalji ovog jednostavnog dokaza se ostavljaju čitaocu.

Dokaz teoreme 6.1. Neka je $D \subset {}^*G$ hiperkonačan skup koji sadrži celu grupu G kao podskup. Oslanjajući se na princip transfera i lemu 6.3. zaključujemo da postoji hiperkonačan skup $E \subset {}^*G$, nadskup od D, koji je (η, D)-dobar za neku fiksiranu infinitezimalu η. Neka je $x \in {}^*X$ proizvoljan. Definišimo skup $H := \{a(x) \mid a \in E\}$ i unutrašnju meru μ formulom $\mu(B) = \frac{|\{b \in E \mid b(x) \in B\}|}{|E|}$ gde je B unutrašnji podskup ${}^*X$. Prema lemi 5.1 $\nu = \mathrm{st}L(\mu)$ je Borelova mera na X.

Dokažimo da je to tražena invarijantna mera. Neka je B unutrašnji podskup od ${}^*X$. Sa a(B) ćemo označiti skup $a(B) := \{a(y) \mid y \in B\}$.

$$\mu(a(B)) = |E|^{-1} |\{c \in E \mid c(x) \in a(B)\}| \geqslant |E|^{-1} |\{a \cdot b \in E \mid b(x) \in B\}|$$

$$|\{a \cdot b \in E \mid b(x) \in B\} \,\Delta\, a\{b \in E \mid b(x) \in B\}| \leqslant$$

$$\leqslant |\{a \cdot b \in E \mid b \notin E\} \cup \{a \cdot b \mid b \in E \text{ i } a \cdot b \notin E\}| \leqslant |\{b \in a^{-1}E \mid b \notin E\} \cup$$

$$\cup \{b \in E \mid b \notin a^{-1}E\}| = |a^{-1}E \,\Delta\, E| \leqslant 2 \cdot \eta \cdot |E|.$$

Odavde dobijamo

$$\mu(a(B)) \geqslant |E|^{-1} \cdot |a \cdot \{b \in E \mid b(x) \in B\}| - 2\eta = \mu(B) - 2\eta .$$

Prema tome za svaki $a \in G$ i unutrašnji skup B važi nejednakost $L(\mu)(a(B)) \geqslant L(\mu)(B)$. Stavljajući a^{-1} umesto a i a(B) umesto B dobijamo i suprotnu nejednakost što znači da važi jednakost $L(\mu)(a(B)) = L(\mu)(B)$ za svaki unutrašnji skup B. Pošto se svaki Loeb-merljiv skup može aproksimirati unutrašnjim skupovima i iznutra i spolja, poslednja jednakost važi i u tom slučaju. Ako je $R \subset X$ neki Borelov skup onda je $\mathrm{st}^{-1}(f(R)) = f(\mathrm{st}^{-1}(R))$ sko je f neprekidno i otvoreno standardno preslikavanje i naravno ako je f homeomorfizam. Otud,

$$\nu(a(R)) = L(\mu)\ \mathrm{st}^{-1}(a(R)) = L(\mu)(a(\mathrm{st}^{-1}(R)) = L(\mu)(\mathrm{st}^{-1}(R)) = \nu(R)$$

čime je dokaz završen.

7. HIPERKONAČNI LANCI, INFINITEZIMALNI SIMPLEKSI I HOMOLOGIJA

Pre svega, apstrakt za rad koji se neće nikad pojaviti.

Abstrakt: Non-standard analysis of A.Robinson is used to establish a homology theory suitable for applications both in standard and *-standard mathematics. This theory satisfies first three requirements of Eilenberg and Steenrod for a decent homology theory, namely homotopy, exactenss and axcision axiom (see Spanier [26], pg.199--200) while the zero homology group of a one-point space is *Z, the nonstandard pisture of integers.

Navodjenje apstrakta je bilo sve što sam mogao da uradim za moj rad posvećen unutrašnjoj ili infinitezimalnoj teoriji homologije nakon što sam ustanovio da se njegov sadržaj poklapa sa sadržajem Mc Cord-ovog rada [23] objavljenog u Fundamenta Matehematicae, 1972.

Definicija 7.1. Neka je X Hausdorfov topološki prostor. Neka je $\mathcal{Tot}_p(X)$ *-slobodna abelova grupa generisana sa $({}^*X)^{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$. Ove grupe obrazuju lančasti kompleks $\langle\{\mathcal{Tot}_p(X)\}_{p\in\mathbb{N}}, \partial_p\rangle$ pri čemu je granični homomorfizam $\partial_p : \mathcal{Tot}_p(X) \longrightarrow \mathcal{Tot}_{p-1}(X)$ definisan ovako:

$$\partial_p \sum_{i=1}^{H} n_i(a_o^i,\ldots,a_p^i) = \sum_{i=1}^{H} \sum_{j=o}^{p} (-1)^j \, n_i(a_o,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_p).$$

Ovako definisan lančasti kompleks je acikličan, odnosno ima trivijalne homološke grupe. Zbog toga predjimo na interesantniji kompleks $\langle\{\mathcal{Mon}_p(X)\},\partial\rangle$, kratko $\mathcal{M}_*(X)$, koji je sastavljen od onih elemenata kompleksa $\mathcal{Tot}(X)$ koji su generisani simpleksima infinitezimalnog dijametra.

$$\mathcal{Mon}_p(X) = \left\{\sum_{i=1}^{H} n_i s_i \mid \forall_i \exists x \in X (\mathrm{st}\ s_i = x)\right\}$$

Napominjem da $\mathrm{st} s_i = x$ po definiciji znači $s_i=(a_o,\ldots,a_p)$ i $\mathrm{st} a_o = \ldots = \mathrm{st} a_p = x$.

Neka je $s = \sum n_i \cdot s_i \in \mathcal{M}(X)$. Nosač od s je skup $|s| = \{x \in X \mid \exists i \ x = st s_i\}$. Nije teško proveriti da je $|s|$ uvek zatvoren skup.

Lako je videti, imajući u vidu nestandardnu karakterizaciju neprekidnosti, da neprekidno preslikavanje $f:X \longrightarrow Y$ na prirodan način inducira lančasto preslikavanje $\mathcal{M}(f) : \mathcal{Mon}(X) \longrightarrow \mathcal{Mon}(Y)$. Specijalno ako je $A \subset X$ podprostor i $i:A \hookrightarrow X$ inkluzija onda je $\mathcal{M}(i):\mathcal{Mon}(A) \longrightarrow \mathcal{Mon}(X)$ injekcija. Neka je $\mathcal{Mon}(X,A) \overset{def}{=} \mathcal{Mon}(X)/\mathcal{Mon}(A)$ tj. $\mathcal{Mon}(X,A)$ čini kratki niz $o \longrightarrow \mathcal{Mon}(A) \longrightarrow \mathcal{Mon}(X) \longrightarrow \mathcal{Mon}(X,A) \longrightarrow o$ tačnim. Zanimljivo je primetiti da se taj niz cepa (splits) ako je A zatvoren skup ali ne i u opštem slučaju.

Teorema 7.2. $\mathcal{Mon}_*$ je kovarijantni funktor iz kategorije Hausdorfovih topoloških parova u kategoriju lančastih kompleksa. Kombinovanjem funktora $\mathcal{Mon}_*$ sa običnim funktorom homologije dolazimo do funktora H_* iz kategorije prostora u kategoriju indeksiranih (graded) Abelovih grupa. Uz, na odgovarajući način definisanu, prirodnu transformaciju $\partial(X,A) = \{\partial_p(X,A):H_p(X,A) \longrightarrow H_{p-1}(A)\}$ funktor H_* zadovoljava prve tri aksiome teorije homologija (Spanier [26], 199-200). dok za jednotačku P važi $H_o(P) = {}^*\mathbb{Z}$.

Ovako definisanu teoriju zvaćemo unutrašnja teorija homologije.

DOKAZ:

1. Aksiom tačnosti (exactness axiom)

Ovaj aksiom kaže da za svaki topološki par (X,A) sa inkluzionim preslikavanjima $i:A \hookrightarrow X$ i $j:(X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ postoji prirodni homomorfizam $\partial_p(X,A):H_p(X,A) \longrightarrow H_{p-1}(A)$ koji čini dugi niz grupa i homomorfizama

$$\ldots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{H_p(i)} H_p(X) \xrightarrow{H_p(j)} H_p(X,A) \xrightarrow{\partial_p(X,A)} H_{p-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

egzaktnim.

Medjutim ovo sledi direktno iz leme 4.5.3. iz [26] pošto je

$$o \longrightarrow \mathcal{Mon}(A) \longrightarrow \mathcal{Mon}(X) \longrightarrow \mathcal{Mon}(X,A) \longrightarrow o$$

kratak tačan niz lančastih kompleksa.

2. Aksiom homotopije

Ovaj aksiom kaže da dva homotopna preslikavanja $f_o, f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ induciraju lančasto homotopna lančasta preslikavanja $\mathcal{M}on(f_o), \mathcal{M}on(f_1) :$ $: \mathcal{M}on(X,A) \longrightarrow \mathcal{M}on(Y,B)$. Kao što je poznato, dovoljno je to dokazati za dva specijalna preslikavanja

$i_o, i_1 : X \longrightarrow X \times I$, gde je $I = [0,1]$ i za sve $x \in X$, $i_o(x) = (x,o)$ i $i_1(x) = (x,1)$.

Dakle treba konstruisati lančastu homotopiju izmedju $\mathcal{M}(i_o)$ i $\mathcal{M}(i_1)$ tj. homomorfizam $D_p : \mathcal{M}on_p(X) \longrightarrow \mathcal{M}on_{p+1}(X \times I)$ stepena jedan za koji važi $\mathcal{M}_p(i_1) - \mathcal{M}_p(i_o) = \partial D_p + D_{p-1}\partial$. Počnimo sledećim jednostavnim opažanjem. Definišimo unutrašnji homomorfizam $E_p : \mathcal{T}ot_p(X) \longrightarrow \mathcal{T}ot_{p+1}(X \times I)$ kao jedinstveni unutrašnji homomorfizam koji za svaki $S = (a_o, \dots, a_p) \in \mathcal{T}ot_p(X)$ zadovoljava jednakost

$$E_p(a_o, \dots, a_p) = \sum_{j=o}^{p} (-1)^j \, (a_o,o) \dots (a_j,o)(a_j,1) \dots (a_p,1)) .$$

Tada se direktno proverava da važi

$$((a_o,1)\dots(a_p,1)) - ((a_o,o)\dots(a_p,o)) = \partial E_p(a_o \dots a_p) + E_{p-1}\partial(a_o \dots a_p) \tag{1}$$

E_p ipak nije lančasta homotopija koju smo tražili jer su simpleksi iz $E_p(a_o \dots a_p)$ previše veliki, medjutim ovo se lako može ispraviti. Neka je $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Definišimo

$$D_p(a_o \dots a_p) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=o}^{p} (-1)^j ((a_o, \tfrac{k-1}{H}) \dots (a_j, \tfrac{k-1}{H})(a_j, \tfrac{k}{H}) \dots$$
$$\dots (a_p, \tfrac{k}{H}))$$

Jasno je da je D_p unutrašnja funkcija pa se može raširiti na sve hiperkonačne "sume" simpleksa $(a_o \dots a_p)$. Medjutim važi

$D_p : \mathcal{M}on_p(X) \longrightarrow \mathcal{M}on_{p+1}(X \times I)$ i zbog (1)

$\mathcal{M}_p(i_1) - \mathcal{M}_p(i_o) = \partial D_p + D_{p-1}\partial$.

3. Aksioma isecanja (excision axiom)

Neka su X_1 i X_2 podprostori prostora X pri čemu je X_1 zatvoren i $X = \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$. Tada je lančasto preslikavanje $\mathcal{M}on(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow \mathcal{M}on(X, X_2)$ inducirano inkluzionim preslikavanjem, izomorfizam.

U standardnim dokazima, na primer za singularnu teoriju homologija, prvo se pokazuje da su lančasti kompleksi $\Delta(\mathcal{U})$ i $\Delta(X)$, gde je $\Delta(X)$ singularni kompleks $\Delta(\mathcal{U})$ njegov podkompleks generisan malim singularnim simpleksima tj. simpleksima podčinjenim pokrivaču $\mathcal{U} = \{\operatorname{int} X_1, \operatorname{int} X_2\}$, lančasto ekvivalentni. U našem slučaju su simpleksi već veoma mali tako da možemo dokazati $\mathcal{M}on_p(X) = \mathcal{M}on_p(X_1) + \mathcal{M}on_p(X_2)$.

Dovoljno je uveriti se u istinitost inkluzije $\mathcal{M}on_p(X) \subset \mathcal{M}on_p(X_1) + \mathcal{M}on_p(X_2)$.

Neka je $u = \sum_{i=1}^{H} n_i \cdot s_i \in \mathcal{M}on_p(X)$. Neka je $H_1 = \{i \mid s_i \in ({}^*X_1)^{p+1}\}$ i $H_2 = \{i \mid i \notin H_1\}$. Zapažamo da za $i \in H_1$ važi st $s_i \in X_1$, zbog zatvorenosti X_1, dok za $i \in H_2$ imamo st $s_i \in \operatorname{int}(X_2)$ pa je $s_i \in ({}^*X_2)^{p+1}$. Odavde sledi da je $u_1 = \sum_{i \in H_1} n_i \cdot s_i \in \mathcal{M}on_p(X_1)$ i $u_2 = \sum_{i \in H_2} n_i \cdot s_i \in \mathcal{M}on_p(X_2)$ i da je $u = u_1 + u_2$ tražena dekompozicija.

Na kraju

$$\mathcal{M}on_p(X)/\mathcal{M}on_p(X_2) = \mathcal{M}on_p(X_1) + \mathcal{M}on_p(X_2)/\mathcal{M}on_p(X_2) \cong \mathcal{M}on_p(X_1)/\mathcal{M}on_p(X_1 \cap X_2)$$

4. Aksiom dimenzije

$$X = \{a\} \; ; \quad H_p(\{a\}) = \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ {}^*\mathbb{Z} & p = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{M}on_p(X) \; : \; (a)^*\mathbb{Z} \xleftarrow{0} (a,a)\; {}^*\mathbb{Z} \xleftarrow{id} (a,a,a)\; {}^*\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \ldots$$

Ovim je Teorema 7.2. dokazana.

U poslednjoj rečenici gore već citiranog rada [23], Mc Cord definiše i kohomološke grupe para (X,A) topoloških prostora (A=clA) na sledeći način.

$$H^n(X,A;\ G)\ := H^n(\mathrm{Hom}(\mathcal{M}on(X,A),G))$$

Ovde je sa Hom(·,·) označen standardni "homomorfizam" funktor dok je G ma kakva Abelova grupa. Čini mi se da je definicija koja sledi prirodnija, uzbudljivija i da obećava lepše slaganje sa već definisanom nestandardnom teorijom homologije (npr. kod teorije dualnosti). Glavna razlika je u tome što je Hom zamenjen unutrašnjim funktorom *Hom dok je G neka unutrašnja grupa.

Definicija 7.3. Neka je X Hausdorfov topološki prostor i G neka unutrašnja grupa. Neka je $\mathcal{T}ot^{\,p}(X,G) = \{f \mid f\colon {}^*X^{p+1} \longrightarrow G$ unutrašnja funkcija$\}$. $\mathcal{T}ot^{\,p}(X,G)$ poseduje strukturu grupe (pošto je G grupa) i jasno je da su grupe $\mathcal{T}ot^{\,p}(X,G)$ i $^*\mathrm{Hom}(\mathcal{T}ot_p(X),G)$ izomorfne; zbog toga možemo svaki element $f \in \mathcal{T}ot^{\,p}(X,G)$ identifikovati sa njegovom ekstenzijom na $\mathcal{T}ot_p(X)$. Kogranični operator $\delta_p\colon \mathcal{T}ot^{\,p}(X) \longrightarrow \mathcal{T}ot^{\,p+1}(X)$ je definisan sa $\delta_p(f(s)) = f(\partial_p(s))$. Objekt našeg interesovanja nije ovaj nego sledeći kogranični kompleks.

$$\mathcal{M}on^{\,p}(X) = \mathcal{T}ot^{\,p}(X)/\mathcal{M}on^{\,p}_{o}(X) \qquad \text{gde je}$$

$$\mathcal{M}on^{\,p}_{o}(X) = \{\ f \in \mathcal{T}ot^{\,p}(X) \mid \ \forall s \in {}^*X^{p+1}((\exists x \in X\ ns(s)=x) \Rightarrow f(s)=0\}$$

Ekvivalentno, ako je $\Delta_p = \{s \in {}^*X^{p+1} \mid \exists\ x \in X\ ns(s) = x\}$,

$$\mathcal{M}on^{\,p}(X) \cong \{g : \Delta_p \longrightarrow G \mid \exists f \in \mathcal{T}ot^{\,p}(X)\ \ (g = f \restriction \Delta_p)\}.$$

Elemente od $\mathcal{M}on^{p}(X)$, a i od $\mathcal{T}ot^{\,p}(X)$, kao što je uobičajeno zovemo kolancima dimenzije p. Nosač kolanca $f \in \mathcal{M}on^{p}(X)$ je zatvoren skup $|f| = \{x \in X \mid \exists\, s \in (m(x))^{p+1}\ \ \ f(s) \neq 0\}$. Očevidno važi

$$|\delta f| \subset |f|,\quad |f+g| \subset |f| \cup |g| \quad \text{i} \quad \mathcal{M}on^{\,p}_{o}(X) \cong \{f \mid |f| = \emptyset\}.$$

Ako je $A \subset X$ podprostor, definišemo

$$\mathcal{M}on^{\,p}(X,A;\ G) = Ker\{\mathcal{M}on^{p}(X,G) \xrightarrow{q} \mathcal{M}on^{\,p}(A,G)\}$$

gde je q "restrikcija"-preslikavanje. Zbog toga imamo tačan kratki niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}on^{\,p}(X,A;\ G) \longrightarrow \mathcal{M}on^{\,p}(X;G) \longrightarrow \mathcal{M}on^{\,p}(A,G) \longrightarrow 0$$

Teorema 7.4. $\mathcal{M}on^*$ je kontravarijantni funtor iz kategorije Hausdorfovih topoloških parova u kategoriju lančastih kompleksa. Kombinovanjem funktora $\mathcal{M}on^*$ sa običnim funktorom homologije dolazimo do funktora H^* iz kategorije prostora u kategoriju indeksiranih (graded) Abelovih grupa. Uz na odgovarajući način definisanu prirodnu transformaciju $\delta = \left\{\delta^p(X,A) : H^p(A) \longrightarrow H^{p+1}(X,A)\right\}$ funktor H^* zadovoljava sve aksiome teorije kohomologije sa koeficijentima iz G (za aksiome pogledati Spanier [26], strana 240).

DOKAZ:

1. Aksiom tačnosti (exactness axiom)

Ovaj aksiom kaže da za svaki topološki par (X,A) sa inkluzionim preslikavanjima $i : A \hookrightarrow X$ i $j : (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ postoji prirodni homomorfizam $\delta^p : H^p(A) \longrightarrow H^{p+1}(X,A)$ koji čini dugi niz grupa i homomorfizama

$$\ldots \longrightarrow H^p(X,A) \xrightarrow{H^p(j)} H^p(X) \xrightarrow{H^p(i)} H^p(A) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(X,A) \longrightarrow \ldots$$

egzaktnim.

Pošto je $0 \longrightarrow \mathcal{M}on^*(X,A;\ G) \longrightarrow \mathcal{M}on^*(X,G) \longrightarrow \mathcal{M}on^*(A,G) \longrightarrow 0$

tačan niz, aksiom tačnosti je direktna posledica leme 4.5.3. iz [26] pri čemu je δ^p spajajući (connecting) homomorfizam.

2. Aksiom homotopije

Treba pokazati da ako su $f_o, f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ dva homotopna preslikavanja da je $H^*(f_o) = H^*(f_1) : H^*(Y,B) \longrightarrow H^*(X,A)$. Kao i u slučaju homologije, dovoljno je dokaz izvesti za specijalni slučaj $i_o, i_1 : X \longrightarrow X \times I$ gde je $I = [0,1]$, $i_o(x) = (x,o)$ $i_1(x) = (x,1)$ i $A = B = \emptyset$. Potrebno je konstruisati lančastu homotopiju izmedju lančastih preslikavanja $\mathcal{M}on^*(i_o)$, $\mathcal{M}on^*(i_1) : \mathcal{M}on^*(X,I) \longrightarrow \mathcal{M}on^*(X)$. Neka je $D_p : \mathcal{M}on_p(X) \longrightarrow \mathcal{M}on_{p+1}(X \times I)$ lančasta homotopija medju preslikavanjima $\mathcal{M}_p(i_o)$ i $\mathcal{M}_p(i_1)$ definisane u dokazu teoreme 7.2. Definišimo traženu lančastu homotopiju $E^{p+1} : \mathcal{M}on^{p+1}(X \times I) \longrightarrow \mathcal{M}on^p(X)$ na sledeći način. Neka je $[f] \in \mathcal{M}on^{p+1}(X \times I)$ gde je $f \in \mathcal{T}ot^{p+1}(X \times I)$. Tada je

$$E^{p+1}([f])(s) = [f(D_p(s))]$$

i lako se proverava korektnost ove definicije. Čitaocu se prepušta da direktno proveri da E^* ima tražena svojstva.

3. Aksiom isecanja (excision axiom)

Neka je (X,A) topološki par i U otvoren skup takav da je $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$. Tada inkluzivno preslikavanje $j:(X-U, A-U)$ inducira izomorfizam

$H^*(j): H^*(X,A) \longrightarrow H^*(X-U, A-U)$.

Pokazaćemo i nešto više, naime da je $\mathcal{M}^*(j): \mathcal{M}on^*(X,A) \longrightarrow \mathcal{M}on^*(X-U,A-U)$ izomorfizam. $\mathcal{M}^*(j)$ je očevidno 1-1. Dokažimo da je i na. Neka je $[f] \in \mathcal{M}on^*(X-U, A-U)$ reprezentiran unutrašnjim preslikavanjem $f \in \mathcal{T}ot^*(X-U)$ koje ima svojstvo da se anulira na infiniterimalnim simpleksima smeštenim u $A=U$.

Neka je $g \in \mathcal{T}ot^*(X)$ definisan sa

$$g(s) = \begin{cases} f(s) & s \text{ je ceo u } X-U \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Iz uslova $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$ sledi da je $[g] \in \mathcal{M}on^*(X,A)$ i $\mathcal{M}^*(j)[g]=[f]$.

4. Aksiom dimenzije

$$X=\{a\}, \quad H^p(\{a\}) = \begin{cases} 0 & p\neq 0 \\ G & p=0 \end{cases}$$

$$\mathcal{M}on^*(\{a\}) : \quad G \xrightarrow{o} G \xrightarrow{id} G \xrightarrow{o} G \xrightarrow{id}$$

Neka je (X,d) metrički prostor i $K \subset X$, kompaktan podprostor. Uslov metrizabilnosti, u teoremi koja sledi, može se oslabiti ali je dokaz u metričkom slučaju pregledniji.

Definišimo $\mathcal{M}on_p(st^{-1}(K)) = \{\ell \in \mathcal{T}ot_p(X) \mid \ell = \sum_{i=1}^{H} n_i s_i \in \mathcal{M}on_p(X)$ i

$s_i \in st^{-1}(K)^{p+1}$ za sve $i \in [1,H]\}$.

Direktno se uveravamo da je $(\mathcal{M}on_p(st^{-1}(K)), \partial)$ lančasti podkompleks od $(\mathcal{M}on_p(X), \partial)$ i odmah se nameće pitanje odnosa medju kompleksima $(\mathcal{M}on_p(K), \partial)$ i $(\mathcal{M}on_p(st^{-1}K), \partial)$. Primetimo da je $st^{-1}(K)$ vanjski (external) objekt. Činjenica da se na prirodan način funktor $\mathcal{M}on_p$ širi i na vanjske objekte asocirane sa topološkim prostorima obećava nove i raznovrsne primere. Evo jednog primera.

Teorema 7.5. Ulaganje $i:(\mathcal{M}on_p(K), \partial) \longrightarrow (\mathcal{M}on_p(st^{-1}(K)), \partial)$ je lančasta ekvivalencija.

DOKAZ:

Konstruišimo lančasto preslikavanje $h_p: \mathcal{M}on_p(st^{-1}(K)) \longrightarrow \mathcal{M}on_p(K)$ koje će imati sledeća svojstva:

$h_p \circ i = id$ i $i \circ h_p \approx id$ tj. $i \circ h_p$ je lančasto homotopno sa id. Neka je ch: $*\mathcal{P}(K) \longrightarrow *K$ jedna unutrašnja funkcija izbora. Pošto je skup K kompaktan, definisano je mnogoznačno preslikavanje $mp: *X \longrightarrow *K$, $mp(x) = \{ y \in *K \mid *d(x,y) = *d(x,*K)\}$. Neka je $h: *X \longrightarrow *K$ funkcija definisana sa $h(x) = ch(mp(x))$. Očevidno, preslikavanje h je retrakcija, drugim rečima $h(x) = x$ za $x \in *K$. Primetimo da u opštem slučaju iz $x \approx y$ ne sledi $h(x) \approx h(y)$, medjutim ako su $x, y \in m(z)$ za $z \in K$ onda je očevidno $h(x) \approx h(y)$. Prema tome definisano je lančasto preslikavanje $h_p: \mathcal{M}on_p(st^{-1}(K)) \longrightarrow \mathcal{M}on_p(K)$ koje simpleks $s = (a_o, \dots, a_p)$ preslikava u $h_p(s) = (ha_o, \dots, ha_p)$. Pošto je h retrakcija važi $h_p \circ i = id$. Ostaje još da se konstruiše lančasta homotopija $D_p : \mathcal{M}on_p(st^{-1}(K)) \longrightarrow \mathcal{M}on_p(st^{-1}(K))$ izmedju preslikavanja $i \circ h_p$ i id.

Neka je $x = \sum_{i=1}^{\omega} n_i s_i \in \mathcal{M}on_p(st^{-1}(K))$ pri čemu je $s_i = (a_o^i, \dots, a_p^i)$, $1 \leq i \leq \omega$. Definišemo,

$$D_p x = \sum_{i=1}^{\omega} n_i D_p(s_i) = \sum_{i=1}^{\omega} n_i \sum_{k=o}^{p} (-1)^k (a_o^i, \dots, a_k^i, ha_k^i, \dots, ha_p^i).$$

D_p je dobro definisani homomorfizam i direktno proveravamo očekivanu jednakost

$$(ha_o, \dots, ha_p) - (a_o, \dots, a_p) = \partial D_p(a_o, \dots, a_p) + D_{p-1}\, \partial(a_o, \dots, a_p)$$

iz koje odmah sledi da je $\{D_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ tražena lančasta homotopija.

Cenjeno svojstvo unutrašnje teorije kohomologija, koje ne poseduje singularna teorija a poseduje teorija Aleksandera-Speniera-Čeha (Alexander, Spanier, Čech), je sledeće t-svojstvo (tautness). Kažemo da je prostor A t-uložen u prostor X ako je

$$H^q(A) = \varinjlim \langle H^q(O) \mid O \supset A \text{ otvoren skup} \rangle, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Skup A ima t-svojstvo ako je svako njegovo ulaganje (u prostor iz neke klase) t-ulaganje.

Teorema 7.6. Svaki kompaktan podprostor K, metričkog prostora X je t-uložen u X.

DOKAZ:

Po ugledu na definiciju 7.3. i definiciju $\mathcal{M}on_p(st^{-1}(K))$, definišimo $\mathcal{M}on^p(st^{-1}(K))$ kao skup svih restrikcija funkcija $f \in \mathcal{T}ot^p(X)$ na skup $(st^{-1}(K))^{p+1} \cap \mathcal{M}on_p(X)$. Iz teoreme 7.5. sledi da su i kompleksi $(\mathcal{M}on^p(st^{-1}K), \delta)$, $(\mathcal{M}on^p(K), \delta)$ lančasto ekvivalentni. Dokažimo da je $\mathcal{M}on^p(st^{-1}(K)) \cong \varinjlim \langle \mathcal{M}on^p(O) | O \supset K \text{ otvoren}\rangle$ pri čemu je prirodno "restrikcija"-preslikavanje r traženi izomorfizam. Preslikavanje $r: \varinjlim \langle \mathcal{M}on^p(O)\rangle_{K \subset O} \to \mathcal{M}on^p(st^{-1}(K))$ je očevidno surjektivno. Dokažimo injektivnost. Neka je $f \in \mathcal{T}ot^p(X)$ takav da je $f(s) = 0$ za svaki simpleks $s \in (st^{-1}(K))^{p+1} \cap \mathcal{M}on_p(X)$. Odavde sledi da postoji pokrivač $\mathcal{V}$ od K takav da $\forall V \in \mathcal{V}\ \forall s \in {}^*V^{p+1}\ f(s) = 0$. Dakle za $O = \bigcup \mathcal{V}$ f inducira trivijalni element u $\mathcal{M}on^p(O)$ pa je r zaista 1-1 preslikavanje. Medjutim funktor homologije komutira sa direktnim limesima, dakle

$$H^q(K) = H^q(\mathcal{M}on^*(st^{-1}(K))) = \varinjlim \langle H^q(O) | O \supset K \text{ otvoren}\rangle.$$

Pozabavimo se za trenutak sledećim problemom. Neka je X Hausdorfov topološki prostor i $I \subset ns(^*X)$ unutrašnji skup do-standardnih tačaka. Šta se može kazati o skupu $st(I) \subset X$.

Stav 7.7. Neka je X Hausdorfov, potpuno regularan ($T_{3\frac{1}{2}}$) topološki prostor i $I \subset ns(^*X)$ unutrašnji skup do-standardnih tačaka. Tada je skup $K = st(I)$ kompaktan.

DOKAZ: Neka je Y kompaktno raširenje prostora X. Skup I je unutrašnji i u $^*Y$ pa je st(I) zatvoren i u Y, dakle i kompaktan!

U trenutku dok pišem ove redove nije mi poznato da li se i kako pretpostavka o potpunoj regularnosti prostora X u gornjem stavu može oslabiti, specijalno da li postoji regularan ne-potpuno regularan prostor koji bi imao svojstvo iz stava 7.7. Sledeći primeri pokazuju da to svojstvo nemaju svi neregularni prostori.

Primeri 7.8. Definišimo topologiju na $[0,1]$ pomoću fundamentalnih sistema okolina na sledeći način. Okolina tačke $x \neq 0$ je obična okolina. Tipična okolina tačke 0 je oblika $U \setminus \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$ gde je U neka standardna okolina nule. Lako se uveravamo da je dobijeni prostor $L = ([0,1], \mathcal{T})$ neregularan u tački 0 i da je $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diskretan zatvoren skup. Neka je $I = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n \cdot H} \,\middle|\, 1 \leq n \leq H\right\}$. Direktno proveravamo da je $I \subset ns(^*L)$ i $st(I) = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Drugi primer, označimo ga sa $\mathcal{T}\mathbb{N}$, je prostor dobijen od $\beta\mathbb{N}$, skupa svih ultrafiltera prirodnih brojeva, tako što su sve tačke iz $\mathbb{N}$ proglašene izolovanim, dok je tipična okolina ultrafiltera D skup $\{D\} \cup A$ za $A \in D$. Lako se uveravamo da je $I = {}^*\mathbb{N} \subset ns(^*\mathcal{T}\mathbb{N})$ unutrašnji skup koji ima svojstvo $st(I) = \mathcal{T}\mathbb{N}$.

U definiciji 7.1 i 7.3 definisani su pored ostalog i nosači lanca $s = \sum n_i s_i \in \mathcal{M}on_p(X)$ i kolanca $f \in \mathcal{M}on^p(X)$, u oznaci $|s|$ i $|f|$. Tamo je napomenuto da su to uvek zatvoreni skupovi. Stav 7.7 nam dopušta da budemo precizniji kada je reč o nosaču lanca s, $|s|$, ako je prostor X potpuno regularan.

Stav 7.9. Nosač $|s|$ lanca $s \in \mathcal{M}on_p(X)$ $T_{3\,1/2}$ prostora X je kompaktan.

DOKAZ: s je oblika $s = \sum_{i=1}^{H} n_i s_i$ gde je $s_i = (a_0^i, \ldots, a_p^i)$ infinitezimalni simpleks, dakle simpleks sa svojstvom $st\, a_0^i = \ldots = st\, a_p^i = x \in X$. Odavde je $|s| = st\left\{a_j^i \mid 1 \leq i \leq H,\ 0 \leq j \leq p\right\}$ pa rezultat sledi iz prethodnog stava.

U Mc Cordovom radu [23] ustanovljena je konačna aditivnost unutrašnje teorije homologija što je tamo iskorišćeno za izračunavanje nuldimenzionalne homološke grupe kompakta sa konačno mnogo komponenti. Sledeći rezultat je daleko opštiji.

Stav 7.10. Neka je $X = \sum_{i\in I} X_i$ **direktna** suma $T_{3\frac{1}{2}}$ topoloških prostora $X_i, i \in I$. Tada je $H_p(X) = \sum_{i\in I} H_p(X_i)$.

DOKAZ: Očevidno je $\sum_{i\in I} H_p(X_i) \hookrightarrow H_p(X)$. Da bi se uverili kako se $\hookrightarrow$ može zameniti jednakošću primetimo da ako je $s \in \mathcal{M}on_p(X)$ onda je $s \in \mathcal{M}on_p(\sum_{i\in D} X_i)$ za neki konačan skup $D \subset I$, to je posledica stava 7.9. Dakle $\mathcal{M}on_*(X) \cong \sum_{i\in I} \mathcal{M}on_*(X_i)$. Odavde je $H_*(X) \cong \sum_{i\in I} H_*(X_i)$

pošto H-funktor komutira sa direktnim limesima (dakle i sa direktnim sumama) lančastih kompleksa.

Stav 7.11. (Mc Cord [23]) Ako je X povezan Hausdorfov kompaktan prostor onda je $H_o(X) \cong {}^*\mathbb{Z}$.

DOKAZ: Za svaki prostor X definisano je prirodno proširenje (augmentation) ${}^*\mathbb{Z} \longleftarrow \mathcal{M}on_*(X)$. Homološke grupe tog kompleksa se zovu redukovane homološke grupe i označavaju se sa $\tilde{H}_q(X)$. Poznato je da je $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$ za $q \geqslant 1$ dok je $\tilde{H}_o(X)$ opisana egzaktnim nizom $0 \longleftarrow {}^*\mathbb{Z} \longleftarrow H_o(X) \longleftarrow \tilde{H}_o(X) \longleftarrow 0$ što sledi iz kratkog tačnog niza lančastog kompleksa

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}on_*(X) & \xrightarrow{1-1} & \mathcal{M}on_*(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & {}^*\mathbb{Z} & \xrightarrow{1-1} & {}^*\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

i odgovarajućeg dugog niza homoloških grupa.

Neka je $\mathcal{V}$ neki pokrivač od X i $s = \sum_{i=1}^{H} n_i s_i \in \mathcal{M}on_o(X)$ jedan cikl u kompleksu ${}^*\mathbb{Z} \longleftarrow \mathcal{M}on_*(X)$, drugim rečima $\sum_{i=1}^{H} n_i = 0$. Tada, zbog povezanosti X, postoji jednodimenzionalan (hiperkonačan) lanac $d_1 = \sum_{j=o}^{m} (a_{2j}, a_{2j+1})$ takav da je $s = \partial d_1$ i $(\forall o \leqslant j \leqslant m)(\exists V \in \mathcal{V})$ $\{a_{2j}, a_{2j+1}\} \subset V$. Oslanjajući se na princip zasićenja slično važi i za neki unutrašnji pokrivač koji rafinira sve standardne pokrivače odakle je (X je kompaktan) odgovarajući $d \in \mathcal{M}on_1(X)$. Dakle $\tilde{H}_o(X) \cong 0$ tj. $H_o(X) \cong {}^*\mathbb{Z}$.

Sledeći stav navodim bez dokaza.

Stav 7.12. Neka je $\mathcal{V}$ konačni otvoreni pokrivač normalnog prostora X. Definišimo $\mathcal{M}on_*(\mathcal{U}) = \{s \in \mathcal{M}on_*(X) \mid |s| \subset V \text{ za neki } V \in \mathcal{V}\}$. Tada je inkluziono preslikavanje $i : \mathcal{M}on_*(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{M}on_*(X)$ lančasta ekvivalencija.

Na kraju nekoliko reči o odnosu unutrašnje teorije homologija i kohomologija prema standardnim teorijama. Teorema 4.8.14 iz [26] garantuje jednakost unutrašnjih homoloških grupa $H_q(X,A)$ i singularnih homoloških grupa sa koeficijentima iz $*\mathbb{Z}$, na svim poliederskim parovima (X,A). Lako je konstruisati primer prostora čije se singularne i unutrašnje grupe razlikuju; možemo uzeti bilo koji povezani kompakt koji nije lučno povezan. Odnos unutrašnje teorije prema teoriji Čeha mi je u ovom trenutku manje jasan iako verujem da se unutrašnja teorija u još većoj meri podudara sa Čehovom teorijom sa koeficijentima iz $*\mathbb{Z}$. Očekujem da unutrašnja teorija zadovoljava neke uslove neprekidnosti analogno Čehovoj teoriji što bi dovelo do poklapanja ovih grupa na širokoj klasi prostora.

U slučaju unutrašnje kohomologije slika je mnogo jasnija. Na osnovu teoreme 6.6.8 iz [26] i generalnije verzije teoreme 7.6. možemo zaključiti da se unutrašnja teorija kohomologija podudara sa teorijom Aleksandera-Spenijera (Alexander-Spanier), sa koeficijentima iz unutrašnje grupe G, na svim kompaktnim Hausdorfovim parovima.

8. NEKOLIKO REZULTATA IZ ALGEBARSKE TOPOLOGIJE

Matematičar logičar koji se upoznao sa osnovnim elementima unutrašnje teorije homologija ili kohomologija, opisanih u prethodnoj studiji, za uzvrat dobija dokaze nekih od najinteresantnijih teorema matematike. Usput će se javljati novi i novi dosadni tehnički detalji (po definiciji stav je dosadan ako nema jasnu geometrijsku interpretaciju i samo u tom smislu je reč "dosadan" ovde upotrebljena). Kako kaže Masi (W. Massey): "Treba imati u vidu da teorija homologija i kohomologija puni osamdeset godina i da su se njom bavili najinventivniji i najobdareniji matematičari sveta. Nema jednostavnog puta za izučavanje algebarske topologije".

Evo i prvog tehničkog detalja.

Stav 8.1. (egzaktni niz trojke) Neka je (X,A,B) trojka prostora što u topološkom žargonu znači da je $B \subset A \subset X$. Tada je, prirodno definisan, kratki niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_*(A,B) \longrightarrow \mathcal{H}om_*(X,B) \longrightarrow \mathcal{H}om_*(X,A) \longrightarrow 0$$

tačan a takav je i dugi niz homoloških grupa

$$\ldots \longrightarrow H_q(A,B) \longrightarrow H_q(X,B) \longrightarrow H_q(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A,B) \longrightarrow \ldots$$

DOKAZ: Pročitati stav još jedanput i uveriti se da se dokaz podudara sa dokazom aksiome egzaktnosti iz prethodne studije.

Sada smo već potpuno spremni za izračunavanje homoloških grupa jednostavnih prostora kao što su kugla ili sfera što je dovoljno za dokaz Brauverove (Brouwer) teoreme o nepokretnoj tački. Neka je Δ_n n-dimenzionalni simpleks realizovan kao

$$\operatorname{conv}\{e_o,\ldots,e_n\} \subset R^{n+1}, \quad \dot{\Delta}_n \text{ njegova granica tj.}$$

$$\dot{\Delta}_n = \{\lambda_o e_o + \ldots + \lambda_n e_n \in \Delta_n \mid \lambda_i = 0 \text{ za neki } 0 \leq i \leq n\} \quad \text{i}$$

$$\Lambda_n = \{x \in \dot{\Delta}_n \mid \lambda_j = 0 \text{ za neki } j > 0\}.$$

Lema 8.2. Sledeće grupe su izomorfne

$$H_k(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow[\cong]{\bar{\partial}} H_{k-1}(\dot{\Delta}_n, \Lambda_n) \xleftarrow[\cong]{i_*} H_{k-1}(\dot{\Delta}_n - \{e_o\}, \Lambda_n - \{e_o\}) \xleftarrow{\cong}$$
$$\xleftarrow{\cong} H_{k-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}).$$

DOKAZ: Zapazimo li da je par (Δ_n, Λ_n) kontraktibilan, dakle $H_k(\Delta_n, \Lambda_n) = 0$, prvi izomorfizam, $\bar{\partial}$, je posledica stava 8.1. Drugi izomorfizam se dobija isecanjem (aksiom isecanja) vrha e_o dok je poslednji izomorfizam posledica činjenice da je par $(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$ ili preciznije njemu homemorfan par deformacioni retrakt od $(\dot{\Delta}_n - \{e_o\}, \Lambda_n - \{e_o\})$ (aksiom homotopije).

Kao što je uobičajeno, B^n je n-dimenzionalna kugla a S^n n-dimenzionalna sfera.

Stav 8.3. (a) $\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ *Z & k = n \end{cases}$

(b) $H_k(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ *Z & k = n \end{cases}$

(c) $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - P) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ *Z & k = n, \end{cases}$ gde je P jednotačka iz R^n

DOKAZ: Na osnovu leme 8.2. $H_k(B^n, S^{n-1}) = H_k(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong$ $\cong H_{k-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \cong \ldots \cong H_{k-1}(\Delta_o, \dot{\Delta}_o) \cong H_{k-n}(\Delta_o)$ čime je (b) dokazano. Tvrdjenje pod (a) se dobija iz (b) oslanjanjem na tačni niz para (B^{n+1}, S^n) uz korišćenje kontraktibilnosti kugle B^{n+1}. Slično, (c) se dobija iz tačnog niza para $(R^n, R^n - P)$ uz zapažanje da je R^n kontraktibilan a $R^n - P$ homeomorfan sa S^{n-1}.

Posledica tvrdjenja pod (c) je činjenica da R^n i R^m ne mogu biti homeomorfni za $m \neq n$.

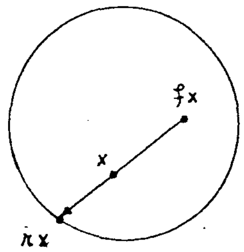
Posledica 8.4. Sfera S^{n-1} nije retrakt kugle B^n.

DOKAZ: Naprotiv, neka je $r: B^n \longrightarrow S^{n-1}$ hipotetična retrakcija. Tada je i $H_{n-1}(r) : H_{n-1}(B^n) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ retrakcija u kategoriji grupa što znači da je $H_{n-1}(S^{n-1}) = *Z$ direktni sumand od $H_{n-1}(B^n) = 0$.

Kontradikcija!

Brauverova teorema o neprekidnoj tački 8.5. Svako neprekidno preslikavanje $f: B^n \longrightarrow B^n$ ima nepokretnu tačku.

DOKAZ:



U slučaju da f nema nepokretnu tačku sličica pokazuje da onda postoji retrakcija $r : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ što se kosi sa posledicom 8.4.

Posledica 8.6. Svako neprekidno preslikavanje $f : S^{2k} \longrightarrow S^{2k}$ ima ili nepokretnu tačku ili antipodalnu tačku, $fx=x$ ili $fx=-x$ za neki $x \in S^{2k}$.

DOKAZ: Neka f nema antipodalnih tačaka. To znači da duž $[x, fx]$ ne sadrži centar sfere pa je radijalna projekcija linearne homotopije na sferu S^{2k} homotopija izmedju $id : S^{2k} \longrightarrow S^{2k}$ i f. Dakle $H_{2k}(f)$ je identičko preslikavanje. Slično, ako f nema nepokretnih tačaka f komponovano sa antipodalnim preslikavanjem $a : S^{2k} \longrightarrow S^{2k}$ nema antipodalnih tačaka što znači da je $H_{2k}(f)$ antidentičko preslikavanje, $H_{2k}(f)z = -z$, jer je takvo i antipodalno preslikavanje. $H_{2k}(f)$ ne može jednovremeno biti i identičko i antiidentičko, dakle f ima ili nepokretnu ili antipodalnu tačku.

Specijalan slučaj upravo dokazanog rezultata za $k = 1$, može se shvatiti kao teoretska potvrda empirijskog fakta da i najbrižljivije očešljana glava mora negde imati razdeljak.

Sledeća primena tehnike razvijene u prethodnoj raspravi je dokaz čuvene Helijeve (E.Helly) teoreme o presecima konveksnih skupova. Dokaz koji sledi je specijalan slučaj dokaza H.E.Debrunner-a, Amer. Math.Monthly 77/4, (1970), 375-380. Pre toga upoznajmo se sa značajnim nizom Majera i Vietorisa.

Stav 8.7. (Mayer, Vietoris) Neka su A i B otvoreni podprostori od $A \cup B$. Neka je

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "j_1"] & \\ A \cap B \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & A \cup B \\ & B \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

dijagram inkluzionih preslikavanja. Tada je sledeći niz $0 \longrightarrow \mathcal{M}on_*(A \cap B) \xrightarrow{(i_1 - i_2)} \mathcal{M}on_*(A) \oplus \mathcal{M}on_*(B) \xrightarrow{j_1 + j_2} \mathcal{M}on_*(A \cup B) \longrightarrow 0$

lančastih kompleksa i preslikavanja tačan što dovodi do dugačkog egzaktnog niza

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(A\cup B) \xrightarrow{\bar{\partial}} H_n(A\cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n^{\bullet}(A\cup B) \longrightarrow \cdots$$

DOKAZ: Prilikom dokaza teoreme 7.2, tačnije kod provere aksioma isecanja, već je bilo dokazano da je $\mathcal{M}on_*(A\cup B) = \mathcal{M}on_*(A) + \mathcal{M}on_*(B)$. Za dokaz prvog dela tvrdjenja dovoljno je primetiti da je

$$\operatorname{Ker}\left\{\mathcal{M}on_*(A) \oplus \mathcal{M}on_*(B) \xrightarrow{j_1+j_2} \mathcal{M}on_*(A\cup B)\right\} = \mathcal{M}on_*(A\cap B).$$

Drugi deo tvrdjenja sledi direktno iz leme 4.5.3 iz [26]; to je ona ista lema upotrebljena u dokazu 8.1.

Stav 8.8. Ako je U otvoren podskup od R^n onda je $\tilde{H}_q(U) = 0$ za $q \geq n$ pri čemu je $\tilde{H}_q(U)$ q-ta redukovana homološka grupa od U definisana u dokazu stava 7.11.

DOKAZ: U stavu 7.7 je dokazano da lanci sa kojima radimo imaju kompaktne nosače. Neposredna posledica toga je $\mathcal{M}on_*(U) = \varinjlim \mathcal{M}on_*(K_n)$ gde je sa K_n označena unija od konačno mnogo n-kocki (n-kocka je kocka koja homotetijom sa centrom u 0 i koeficijentom n postaje obična kocka iz celobrojne mreže u R^n) pri čemu zahtevamo i $U = \bigcup_{n\in N} K_n$. Pošto je $\tilde{H}_*(U) = \varinjlim \tilde{H}_*(K_n)$ očevidno je dovoljno dokazati sledeće tvrdjenje

D(n,k): Ako je sa P označena unija od k n-dimenzionalnih kubova iz celobrojne mreže na R^n onda je $\tilde{H}_q(P) = 0$ za $q \geq n$.

Za $n = 1$ ili $k = 1$ tvrdjenje je očevidno tačno. Pretpostavimo da $D(n',k')$ važi za sve (n',k') za koje je ili $n' < n$ i $k' \leq k$ ili $n' \leq n$ i $k' < k$. Pošto možemo pretpostaviti da posmatrani skup P ima bar dva n-dimenzionalna kuba neka je H hiperravan koja je paralelna jednoj od koordinatnih hiperravni i koja seperira ova dva kuba i neka su H_1 i H_2 odgovarajući otvoreni poluprostori. Neka je P_1 skup svih kubova iz P koji nisu celi u H_2 i slično P_2 skup svih kubova iz P koji nisu celi u H_1. Vidimo da je $P_1 \cap P_2$ skup onih kubova iz P koji seku H. Identifikujući P_1 i P_2 sa skupovima UP_1 i UP_2 razmotrimo sledeće slučajeve:

(i) $P_1 = P_2 = P$

U ovom slučaju postoji skup P' $(n-1)$-dimenzionalnih kubova iz H koji je deformacioni retrakt od P.

(ii) Možemo pretpostaviti da je H odabrana tako da je i $P_1 \neq P_1 \cap P_2$ i $P_2 \neq P_1 \cap P_2$ što znači da skupovi P_1 i P_2 imaju manje od k n-kocki pa se na njih može primeniti indikacijska hipoteza. Prema stavu 8.7 imamo tačni niz

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_q(P_1) \oplus \tilde{H}_q(P_2) \longrightarrow \tilde{H}_2(P) \xrightarrow{\bar{\partial}} H_{q-1}(P_1 \cap P_2) \longrightarrow \ldots$$

Kao i u slučaju (i) $P_1 \cap P_2$ se može deformisati na odgovarajući P' zbog čega je $\tilde{H}_q(P_1 \cap P_2) = 0$ za $q \geqslant n-1$. Dakle važi $\tilde{H}_q(P) = 0$ za $q \geqslant n$.

Teorema 8.9. (E.Helly) Neka je data familija od m $(m \geqslant n+2)$ otvorenih konveksnih skupova iz R^n takva da svakih m-1 skupova te familije imaju neprazni presek. Tada svi skupovi te familije imaju neprazni presek.

DOKAZ: Pretpostavimo suprotno. Neka je $\{U_1, \ldots, U_m\}$ familija za koju tvrdjenje teoreme nije tačno. Majer-Vietorisov niz za par prostora $U_1 \cup \ldots \cup U_{m-1}, U_m$ izgleda ovako

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_q(U_1 \cup \ldots \cup U_{m-1} \cup U_m) \xrightarrow{\bar{\partial}} \tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap U_m) \cup \ldots \cup (U_{m-1} \cap U_m)) \longrightarrow 0$$

zbog toga što su oba prostora $U_1 \cup \ldots \cup U_{m-1}$ i U_m homološki trivijalna. Primenjujući isti postupak na familiju $\{U_i \cap U_m \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$ itd. dobijamo

$$\tilde{H}_q(\cup_{i=1}^m U_i) \cong \tilde{H}_{q-1}(\bigcup_{i=1}^{m-1} (U_i \cap U_m)) \cong \ldots \cong$$

$$= \tilde{H}_{q-(m-2)} \left[(U_1 \cap (\cap_{i \geqslant 3} U_i)) \cup (U_2 \cap (\cap_{i \geqslant 3} U_i)) \right]$$

Dakle za $q = m-2$ imamo $\tilde{H}_{m-2}(\bigcup_{i=1}^m U_i) \neq 0$ što protivreči stavu 8.8. Kontradikcija!

Matematičar logičar kome ovih nekoliko primera nije dovoljno jer je u medjuvremenu postao ubedjeni algebarski topolog, može testirati svoje razumevanje homologije proučavajući neke od standardnih rezultata ove teorije, npr. homologiju CW-kompleksa; drugi plan bi bio ispitivanje proizvoda u homologiji i kohomologiji pri čemu se odsustvo metode acikličnih modela može kompenzovati ... . Kako!?

9. O JEDNOM MEDJUOBJEKTU U DIFERENCIJALNOJ TOPOLOGIJI

Zanimljiva je sledeća teza koja se provlači kroz nekoliko lekcija, iz knjige [21] R.Lutza i M.Goze-a (pogledati na primer stimulativnu desetu lekciju iz treće glave). Čest je slučaj da se intuitivna predstava o nekom objektu ili pojavi ne slaže u potpunosti sa matematičkim formalizmom upotrebljivim za opis tog objekta. Autori gore navedene knjige pokazuju da se u nekim slučajevima nestandardna analiza može uspešno iskoristiti za konstrukciju medjuobjekata (intermediate objects) koji čine prelaz od intuitivnog ka formalizovanom prirodnijim i jasnijim.

U lekciji III.9 iz [21] je pokazano da ako vektorsko polje na C^1-diferencijabilnoj mnogostrukosti M (matematički) odgovara intuitivnoj predstavi o istovremnenim beskonačno malim pomerajima svih tačaka iz M onda je traženi medjuobjekt opisan sledećom definicijom.

Definicija 9.1. Trojka $(\xi,\bar{\xi},\tau)$ gde su $\xi,\bar{\xi}$: $^*M \longrightarrow {}^*M$ unutrašnje funkcije a τ pozitivna infinitezimala naziva se <u>infinitezimalna transformacija</u> na M ako su zadovljeni sledeći uslovi

(i) iz $n\cdot\tau \approx 0$ sledi $\xi^n(x) \approx 0$ i $\bar{\xi}^n(x) \approx 0$ za sve $x \in {}^*M$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) ako je $n\cdot\tau$ konačan onda iz $x \approx y$ sledi $\xi^n(x) \approx \xi^n(y)$ i $\bar{\xi}^n(x) \approx \bar{\xi}^n(y)$.

(iii) ako je $n\cdot\tau$ konačan onda je $\xi^n\ \bar{\xi}^n(x) \approx \bar{\xi}^n\ \xi^n(x) \approx x$.

Tok (flow) definisan ovom infinitezimalnom transformacijom je funkcija

$$\gamma: M \times R \longrightarrow M, \quad \gamma(x,t) = \begin{cases} st(\xi^m(x)) & \text{za } t \geq o,\ m = [t/\tau] \\ st(\bar{\xi}^m(x)) & \text{za } t < o,\ m = [-t/\tau] \end{cases}$$

Teorema 9.2. Neka je M kompaktan topološki prostor. Svaka infinitezimalna transformacija generiše standardnu jednoparametarsku neprekidnu grupu homeomorfizama na M.

DOKAZ: Pokažimo da familija preslikavanja $\gamma_t(\cdot) = \gamma(\cdot,t):M \longrightarrow M$ ima tažena svojstva. Neka je $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ i $n = [t/\tau]$, $m = [s/\tau]$. Po definiciji za $x \in M$, $\gamma_t(x) \approx \xi^n(x)$ i $\gamma_s(\gamma_t(x)) \approx \xi^m(\gamma_t(x))$. Iz uslova (i) i (ii) sledi $\xi^m(\gamma_t(x)) \approx \xi^{m+n}(x) \approx \gamma_{t+s}(x)$ jer je $\left[\frac{t+s}{\tau}\right] = m+n$ ili $m+n+1$. Dakle $\gamma_s(\gamma_t(x)) = \gamma_{t+s}(x)$. Slično se dokazuje i za slučaj $s \leqslant 0$, $t \leqslant 0$. Iz uslova (iii) sledi $\gamma_t(\gamma_{-t}(x)) \approx \xi^n(\gamma_{-t}(x)) \approx \xi^n \bar{\xi}^n(x) \approx x$ odnosno $\gamma_t(\gamma_{-t}(x)) = x$ i slično $\gamma_{-t}(\gamma_t(x)) = x$. Ovim je dokazano da je $\langle \gamma_t | t \in R \rangle$ jednoparametarska grupa.

S druge strane, prema uslovima (i) i (ii) preslikavanja $(x,t) \mapsto \xi^{[t/\tau]}(x)$ i $(x,t) \longmapsto \bar{\xi}^{[t/\tau]}(x)$ su s-neprekidna (unutrašnja funkcija f je s-neprekidna ako je ispunjen uslov $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 (d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(fx,fy) < \varepsilon))$ odakle sledi da su γ_t, $t \in R$, neprekidne standardne funkcije. Pošto je $\gamma_t \circ \gamma_{-t} = id$ γ_t je i homeomorfizam.

Teorema 9.3. Neka je M C^1-diferencijabilna mnogostrukost i neka je X lokalno Lipšicovo standardno vektorsko polje na M. Tada postoji infinitezimalna transformacija $(\xi, \bar{\xi}, \tau)$ na M čija jednoparametarska grupa transformacija zadovoljava uslov

$$\left.\frac{d\gamma_t}{dt}\right|_{t=o} = X(x), \text{ drugim rečima X je polje izvoda (u nuli)}$$

od γ_t u odnosu na parametar t.

DOKAZ: Ako je U jedan element atlasa na M i $r:U \hookrightarrow R^p$ homeomorfno ulaganje, polje X je lokalno opisano lipšicovim poljem X^U definisanim na r(U). Pošto je M kompakt polazni atlas $\{(U,r)\}$ može biti zamenjen finijim konačnim atlasom $\{(V_i, r_i)\}_{i\in I}$ koji zadovoljava sledeće uslove:

- za svaki $i \in I$ $r_i(V_i)$ je otvorena lopta standardnog radiusa $2\rho_i > 0$
- otvoreni skupovi $W_i = r_i^{-1} K_i$ pokrivaju M pri čemu je K_i otvorena lopta radijusa ρ_i sa istim centrom kao i $r_i(V_i)$.

- na $r_i(V_i)$, X^i zadovoljava k_i-uslov Lipšica, $k_i \in R$.

Neka je $k = \max\{k_i \mid i \in I\}$, $\rho = \min\{\rho_i \mid i \in I\}$ i $\mu = \sup_{i\in I}(\sup_{x\in V_i} \| X^i_{r_i(x)} \|)$; možemo pretpostaviti da su svi ovi brojevi pozitivni. $x \in M$ možemo izabrati trojku (V_x, W_x, r_x) tako da je $x \in V_x$. Naravno, taj izbor je jedno standardno preslikavanje pa zbog konačnosti $\{V_i\}_{i\in I}$, (V_x, W_x, r_x) postoji (bez pisanja zvezdica) i za $x \in {}^*M$. Definišimo unutrašnje preslikavanje ϕ: ${}^*M \times (-\rho/\mu, +\rho/\mu) \to {}^*M$,

$$\phi(x,t) = r_x^{-1}(r_x(x) + tX^x_{r_x(x)}).$$

X^x je standardno, ograničeno polje i r_x standardno neprekidno preslikavanje odakle sledi $\phi(x,t) \approx x$ za $t \approx 0$. Izaberimo $\tau \approx 0$, $\tau > 0$ i definišimo $\xi(x) = \phi(x, \tau)$ i $\bar{\xi}(x) = \phi(x, -\tau)$. Ostaje da se pokaže da je time definisana infinitezimalna transformacija sa traženim svojstvima.

Lema. Ako je $x \in W_z$ onda je $r_z(\xi(x)) = r_z(x) + \tau X^z_{r_z(x)} + \tau\cdot\varepsilon$ i $r_z(\bar{\xi}(x)) = r_z(x) - \tau X^z_{r_z(x)} + \tau\cdot\bar{\varepsilon}$ gde je $\varepsilon \approx \bar{\varepsilon} \approx 0$.

Čitaocu se ostavlja da sam proveri ovu lemu imajući na umu nestandardnu karakterizaciju neprekidne diferencijabilnosti. Neka je $n_o = [\frac{\rho}{\mu\tau}]$, dakle najveći nestandardni prirodni broj n za koji je $\xi^n(x)$ i $\bar{\xi}^n(x)$ definisano. Lako se proverava da je za $n \leq n_o$, $\xi^n(W_z) \subset V_z$ što povlači sledeće nejednakosti.

i) $\|r_z(\xi^n(x)) - r_z(x)\| \leq n\tau\mu$,

ii) $\|r_z(\xi^n(x)) - r_z(\xi^n(y))\| \leq \|r_n(x) - r_n(y)\| (1+n\tau K)^n$,

iii) $\|r_z(\bar{\xi}^n \xi^n(x)) - r_z(x)\| \leq n\tau^2 K\mu$

kao i odgovarajuće nejednakosti za $\bar{\xi}$.

Dakle, ako je $n\tau \approx 0$ onda je $n \leq n_o$ i zbog i), $\xi^n(x) \approx \bar{\xi}^n(x) \approx x$. Ako je $x \approx y$, iz ii) se (uzimajući $z = stx = sty$) dobija $\xi^n(x) \approx \xi^n(y)$ za $n \leq n_o$; za ostale n za koje je $n\tau$ konačan, $n/n_o = n\tau/n_o\tau$ je takodje konačan, stavimo $\ell = [n/n_o]$ odakle je $\xi^n(x) = \xi^{n_o\ell}(\xi^{n-n_o\ell}(x)) \approx \xi^{n_o\ell}(x)$ jer je $(n-n_o\ell)\tau \approx 0$. Običnom indukcijom po ℓ se dokazuje da je $\xi^n(x) \approx \xi^n(y)$ i $\bar{\xi}^n(x) \approx \bar{\xi}^n(y)$ za $x \approx y$.

Na sličan način se, oslanjanjem na iii), mogu dobiti relacije $\bar{\xi}^n \xi^n(x) \approx \xi^n \bar{\xi}^n(x) \approx x$ za konačan $n\tau$. Time je dokazano da je $(\xi, \bar{\xi})$ infinitezimalna transformacija, neka je $\gamma: M \times R \longrightarrow M$ tok (fl w) te transformacije. Ostaje da se izračuna derivat toka γ (brzina toka!) u standardnoj tački $x \in M$. U karti (V_x, r_x), označimo sa

$\Delta = \| r_x(\xi^n(x)) - r_x(x) - t x^*_{r(x)} \|$ gde je $t > 0$ standardan broj i $n = [\frac{t}{\tau}]$. Ako je $t < \frac{\varrho}{\mu}$ iz i), stavljajući $z = x$, dobijamo $\Delta \leq (\tau n)^2 k\mu \approx t^2 k\mu$, dakle $\frac{\Delta}{t} \leq tk\mu$ što dokazuje da

$\frac{1}{t}(r_x(\gamma(x,t) - r_x(x)) \longrightarrow x^*_{r_x(x)}$, $t \longrightarrow 0$, jer je $\gamma(x,t) \approx \xi^n(x)$.

Isti limes se dobija za $\bar{\xi}$. Time je tvrdjenje dokazano u potpunosti.

10. KOMPAKTNI METRIČKI PROSTORI I NJIHOVI HIPERKONAČNI GRAFOVI

Ova etida je u velikoj meri inspirisana dole formulisanom teoremom 10.8. Kratak i elegantan dokaz te teoreme dao je Vrećica Siniša dokazujući, u okviru programa ispitivanja eksponencijalnih prostora formulisanim od strane Milosava Marjanovića, da je inverzni limes iteriranih kontinuum-stepena zadanog Peanovog kontinuuma X homeomorfan sa Hilbertovim kubom. Kontinuum-stepen ili kratko c-stepen zadanog prostora X, označava se sa $c(X)$, je podprostor eksponencijalnog prostora $\exp(X)$ čiji su elementi svi povezani elementi od $\exp(X)$. Podsetimo se da je $\exp(X)$ prostor svih nepraznih zatvorenih podskupova od X sa topologijom Vietorisa. Ako je $A \in \exp(X)$ i $U_1, U_2, \dots, U_n$ niz otvorenih skupova iz X koji zadovoljavaju uslove $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $A \cap U_i \neq \emptyset$ za sve $1 \leq i \leq n$, onda je tipična okolina tačke $A \in \exp(X)$ u Vietorisovoj topologiji opisana ovako:

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ B \in \exp(X) \,\middle|\, B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \quad \text{i} \quad B \cap U_i \neq \emptyset \text{ za sve } 1 \leq i \leq n \right\}$$

Koristićemo i oznake $\exp^{(2)}(X) : \exp(\exp(X))$, $c^{(3)}(X) = c(c(c(X)))$ itd.

U slučaju kompaktnog metričkog prostora X topologija Vietorisa je indukovana Hausdorfovom metrikom $d(A,B) = \inf \{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B) \wedge B \subset O_\varepsilon(A)\}$ gde je $O_\varepsilon(C)$ ε-okolina skupa C.

Navešćemo, radi potpunosti i jednostavan opis monada tačaka iz $\exp(X)$ u Vietorisovoj topologiji (Juhasz [10]). Pošto postoji mogućnost mešanja pojmova, koristićemo oznaku $\mu(A) := \cap \{{}^*O \mid A \subset O \text{ i } O \text{ je otvoren skup}\}$ za monadu skupa A a $m(A)$ za monadu elemenata A u Vietorisovoj topologiji.

Stav 10.1. Neka je $A \in \exp(X)$. Tada je $B \in m(A)$ ako i samo ako je

(1) $B \subset \mu(A)$ i (2) $\forall p \in A \quad B \cap m(p) \neq \emptyset$.

DOKAZ: Neka je $B \in m(A)$ i U otvorena okolina od A. Tada je $B \in {}^*\langle U \rangle$ tj. $B \subset {}^*U$ čime je (1) dokazano. Neka je $p \in A$ i $O \ni p$ otvoren skup. Očevidno $B \in {}^*\langle O, X \setminus \{p\} \rangle$ (osim u trivijalnom slučaju $A = \{p\}$), dakle $B \cap {}^*O \neq \emptyset$. Iz principa zasićenja sledi $B \cap m(p) \neq \emptyset$ čime je i (2) dokazano. Obrnuto, neka je $\langle O_1, \ldots, O_n \rangle$ okolina od A. Iz (1) sledi $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} {}^*O_i$ a iz (2) $B \cap {}^*O_i \neq \emptyset$ za sve $1 \leq i \leq n$, dakle $B \in {}^*\langle O_1, \ldots, O_n \rangle$ i dalje $B \in m(A)$.

U nastavku ćemo se ograničiti isključivo na kompaktne metričke prostore (X,d) uz napomenu da se korišćenjem pseudometrika svi dole navedeni pojmovi i rezultati mogu formulisati i dokazati za slučaj bilo kakvog kompakta.

Neka je $I \subset {}^*X$ hiperkonačan skup koji ima svojstvo $\forall x \in X \, \exists b \in I$ $\mathrm{st}\, b = x$; drugim rečima $I \in m(X)$. Metrički prostor $(I, {}^*d) \subset {}^*X$ se naziva hiperkonačna senka, ili kratko senka prostora X. Naravno senka od X nije jednoznačno odredjena, medjutim ako je senka $(I, {}^*d)$ poznata prostor X se lako može rekonstruisati. Zaista, $\mathrm{st}({}^*d)$ je jedna pseudometrika i lako se pokazuje da je odgovarajući metrički faktor-prostor $(I, \mathrm{st}({}^*d))/\approx$ izometričan sa X. Dakle iako je hiperkonačna senka samo senka ona sasvim verno odražava svojstva prostora X. Svojstva koja nas ovde interesuju su svojstva povezanosti raznih skupova u X, $\exp(X)$, $\exp^{(2)}(X)$, itd. Zbog toga navedimo dobro poznatu lemu.

Lema 10.2. Kompaktan metrički prostor X je povezan ako i samo ako

$\forall x,y \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad$ x i y su ε-povezani tj. postoji niz $y_0, y_1, \ldots, y_n$ u X tako da je $\quad y_0 = x,\ y_n = y \quad$ i $\quad \forall j \quad d(y_j, y_{j+1}) < \varepsilon$.

DOKAZ: Skup $\{y \mid y$ je ε-povezan sa $x\}$ je otvoreno-zatvoren, dakle navedeni uslov je potreban. Obrnuto, ako je $X = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ i F_1, F_2 su neprazni kompakti čija je najveća blizina ε , onda za $(x,y) \in F_1 \times F_2$, x i y nisu ε-povezani.

Lema 10.3. $x,y \in X$ su ε-povezani za svaki $\varepsilon > 0$ $\iff$
x,y su ε-povezani za neki $\varepsilon \in m(0)$.

DOKAZ: $\{\varepsilon \mid x,y$ su ε-povezani$\}$ je oblika $]\alpha, +\infty[$ za $\alpha \in {}^*R$.

Posledica 10.4. X je povezan $\Leftrightarrow$ $(I,{}^*d)$ je ε-povezan za neki $\varepsilon \in m(0)$.

Stav 10.5. I je senka od X $\Rightarrow$ $({}^*\exp)(I)$ je senka od $\exp(X)$.

DOKAZ: $({}^*\exp)(I)$ je običan *-partitivni skup od I. Dovoljno je dokazati da za svaki neprazan zatvoren skup $F \subset X$ postoji hiperkonačan skup $L \subset I$, $L \in m(F)$. Neka je d obična Hausdorfova metrika na *X. Lako se uveravamo da skup $\{\varepsilon \in {}^*R \mid \varepsilon > 0 \wedge \exists D \in ({}^*\exp)(I) \ \ d(F,D) < \varepsilon\}$ sadrži sve standardne pozitivne brojeve, dakle sadrži i jednu infinitezimalu.

U posledici 10.4. se kaže da je X povezan ako i samo ako je $(I,{}^*d)$ ε-povezan za neki $\varepsilon \in m(0)$. Ako hoćemo da budemo sasvim sigurni o kom se ε tu radi možemo izabrati posebnu senku I. Od sada pa do kraja ove rasprave podrazumevamo da je I fiksirana hiperkonačna $\varepsilon/3$-mreža u *X. Broj $\varepsilon/3$ je izabran zbog sledećeg. Ako je X povezan onda je *X η-povezan za sve $\eta > 0$ pa i za $\eta = \varepsilon/3$. Odavde odmah sledi da je I ε-povezan jer se svaki $\varepsilon/3$-lanac iz *X koji spaja dve tačke $x,y \in {}^*X$ može zameniti ε-lancem u I. Dakle X je povezan ako i samo ako je I ε-povezan. Zanimljivo je i važno da ako je I $\varepsilon/3$-mreža u *X onda je $({}^*\exp)(I)$ $\varepsilon/3$-mreža u $^*\exp(X)$ tako da je u ovom slučaju stav 10.5. očevidan.

Svakom metričkom prostoru X možemo pridružiti ε-graf, $\mathrm{graf}_\varepsilon(X)$ ili samo graf(X) ako se $\varepsilon > 0$ podrazumeva, na sledeći način:

$$\{x,y\} \in \mathrm{graf}_\varepsilon(X) \iff d(x,y) < \varepsilon$$

Lema 10.6. Neka je $I \subset {}^*X$ hiperkonačna $\varepsilon/3$-mreža i graf(I) = $= \mathrm{graf}_\varepsilon(I)$ sa njom asocirani graf. Tada je prostor X povezan ako i samo ako je graf(I) povezan (u smislu teorije grafova). Slično exp(X) je povezan ako i samo ako je graf(*exp(I)) povezan.

DOKAZ: Dokaz je trivijalan jer je lema zapravo rezime onoga što je rečeno u prethodnim redovima.

Sada smo spremni da nešto i dokažemo. Rezultat koji sledi je dokazao L.Vietoris 1923 godine.

Teorema 10.7. Ako je X kompaktan i povezan metrički prostor onda je i exp(X) takodje povezan.

DOKAZ: Pošto je X povezan iz leme 10.6 sledi da je graf(I) takodje povezan. Iz iste leme sledi da je dovoljno dokazati povezanost grafa (*exp(I)). Primetimo da je $\{A,B\}\in$graf(*exp(I)) ako i samo ako $\forall x\in A\ \exists\, y\in B\ \ \{x,y\}\in$graf(I) i $\forall x\in B\ \exists\, y\in A\ \ \{x,y\}\in$ graf(I). Poslednje zapažanje dopušta da se na prirodan način operacija exp proširi na grafove tj. eksponencijalni graf exp(G) datog grafa G je graf na skupu nepraznih podskupova od G zadan na sledeći način:

$$\{A,B\}\in \exp(G) \iff \forall x\in A\ \exists\, y\in B\ \{x,y\}\in G \quad \text{i} \quad \forall x\in B\ \exists\, y\in A\ \{x,y\}\in G$$

Dakle, oslanjajući se na princip prenosa, dovoljno je dokazati da iz povezanosti standardnog konačnog grafa G sledi povezanost od exp(G). Dokaz ove činjenice je trivijalan. Zaista neka je $\{a_1,\dots,a_k\}\in\exp(G)$ i $a_o\in G$. Pošto je G prema pretpostavci povezan, za dovoljno veliki prirodan broj m postoje nizovi $(b^i_j\,|\,0\leq j\leq m)$, $1\leq i\leq k$, tako da je $b^i_o = a_o$ za sve i, $b^i_m = a_i$ i za svaki $1\leq i\leq k$ i $0\leq j,\ j+1\leq m$ ili $b^i_d = b^i_{j+1}$ ili $\{b^i_j,\ b^i_{j+1}\}\in G$. Očevidno niz $(\{b^i_j\ |\ 1\leq i\leq k\}\,|\,0\leq j\leq m)$ predstavlja lanac u exp(G) koji povezuje $\{a_o\}$ i $\{a_1,\dots,a_k\}$ što dokazuje da je exp(G) povezan.

Na sličan način se može pokazati da je i c(X) povezan što se prepušta čitaocu.

Ako je G graf označimo sa c(G) podgraf od exp(G) koji se sastoji od svih povezanih elemenata od exp(G).

Teorema 10.8. Neka je $u:\exp^{(2)}(X)\to\exp(X)$ "unija" preslikavanja tj. $u(a) = \cup a$. Pošto je $u(c^{(2)}(X))\subset c^{(1)}(X)$ koristićemo istu oznaku i za restrikciju od u na $c^{(2)}(X)$. Neka je X povezan, tj. $X\in c^{(1)}(X)$. Tada je $u^{-1}(X) = \{h\in c^{(2)}(X)\ |\ \cup h = X\}$ takodje povezan skup.

DOKAZ: Ako je $I\subset {}^*X$ $\varepsilon/3$-mreža u *X onda je (*exp)(I) $\varepsilon/3$-mreža u *exp(X) pa je i $({}^*\exp^{(2)})(I)$ $\varepsilon/3$-mreža u ${}^*\exp^{(2)}(X)$. Odavde sledi da je skup $\{a\in({}^*\exp^{(2)})(I)\ |\ \cup a = I\}$ senka skupa $u^{-1}(X)$ iako, striktno govoreći, ne mora uvek biti podskup od $*u^{-1}(X)$. Prelazeći na grafove ovo znači da će teorema biti dokazana ako se dokaže sledeće tvrdjenje. Ako je G konačan povezan graf onda je $\{d \in c^{(2)}(G) \mid \cup d = G\}$ takodje povezan graf pri čemu je struktura grafa indukovana iz $c^{(2)}(G)$. Ovo već nije teško proveriti. Pretpostavimo suprotno što znači da se $u^{-1}(G) = \{d \in c^{(2)}(G) \mid \cup d = G\}$ može razložiti na dva skupa F_1 i F_2 tako da se ni jedan element iz F_1 ne može povezati lancem ni sa jednim elementom iz F_2. Pretpostavimo da je $c^{(1)}(G) \in F_1$ (to jeste povezan skup) i neka je $d \in F_2$ sa maksimalnim brojem elemenata. Pošto je $d \neq c^{(1)}(G)$ postoji skup $x \in c^{(1)}(G)$ koji nije u d. Ali $c^{(1)}(G)$ je povezan pa postoji lanac u $c^{(1)}(G)$ koji počinje u x a završava u nekom $y \in d$. Idući po tom lancu od y ka x dolazimo do prvog elementa lanca, z, koji nije u d. To znači da je $d \cup \{z\}$ povezan i da se nalazi u istoj komponenti u kojoj se nalazi i d što je kontradikcija sa maksimalnošću od d. Time je teorema dokazana.

Posledica 10.9. Neka je X povezan, kompaktan metrički prostor i $A \in c^{(1)}(X)$. Tada je $u^{-1}(A) = \{d \in c^{(2)}(X) \mid \cup d = A\}$ povezan skup u $c^{(2)}(X)$.

DOKAZ: $u^{-1}(A) \subset c^{(2)}(A)$.

Potpuno istim metodom se mogu dokazati sledeći rezultati.

Rezultati: Neka je X povezan i $A \in c^{(1)}(X)$. Tada su skupovi $\{d \in c^{(2)}(X) \mid \cup d \supset A\}$, $\{d \in \exp^{(2)}(X) \mid \cup d = A\}$ itd. takodje povezani. Slično ako je $A \in c^{(n)}(X)$ onda je $\{d \in c^{(n+1)}(X) \mid \cup d = A\}$ takodje povezan skup.

B I B L I O G R A F I J A

[1] R.M.Anderson, A non-standard representation for Brownian motion and Ito Integration, Israel J.Math. 25(1976),15-46.

[2] R.M.Anderson, Star-finite Representations of Measure Spaces, Trans.Amer.Math.Soc. 271(1982), 667-687.

[3] R.M.Anderson, S.Rashid; A Nonstandard Characterization of Weak Convergence, Proc. Amer. Math. Soc. 69(1978),327-332.

[4] M.Davis, Applied non standard analysis, New York, Wiley,1977.

[5] J.Distel, J.J.Uhl, Jr., The Radon-Nikodym theorem for Banach space volued measures, Rocky Mountain Journ. of Math. 6(1976), 1-46.

[6] N.Dunford, J.T.Schwartz, Linear Operators, Part I, John Wiley and Sons, 1957.

[7] J.C.Dyre, Non-standard Characterizations of Ideals in C(X), Math. Scand. 50(1982).

[8] R.Engelking, General Topology, Monografie Matematyczne vol 60, Warszawa 1977.

[9] C.W.Henson, L.C.Moore, Jr., Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces, preprint.

[10] I.Juhasz, Non-standard notes on the hyperspace, in Contributions to Non-standard Analysis, Eds. W. A. J. Luxemburg and A. Robinson, North-Holland, 1972.

[11] H.J.Keisler, Hyperfinite Model Theory, in R.O.Gandy and J.M.E. Hyland, eds., Logic Colloquium 76, North-Holland Publ.Comp., 1977, 5-110.

[12] H.J.Keisler, An infinitesimal approach to stochastic analysis, Am.Math.Soc. Memoirs, u pripremi.

[13] T.L.Lindstrøm, Hyperfinite stochastic integration I,II,III i Addendum, Math.Scand. 46(1980).

[14] T.L.Lindstrøm, A Loeb-measure Approach to Theorems by Prohorov, Sazonov and Gross, Trans. Amer. Math. Soc. 269(1982), 521-534.

[15] T.L.Lindstrøm, Applications of Nonstandard Analysis to Probability Theory, zapisi leksċija sa seminara u Medisonu, University of Wisconsin, Madison, u jesen 1981 godine.

[16] P.A.Loeb, An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory, Probabilistic Analysis and Related Topics, A.T.Brarucha-Reid, ed., Academic Press, New York, 1979.

[17] P.A.Loeb, Weak Limits of Measures and the Standard Part Map, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 128-135.

[18] P.A.Loeb, Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 113-122.

[19] P.A.Loeb, Applications of nonstandard analysis to ideal boundaries in potential theory, Israel J.Math. 25 (1976), 154-187.

[20] P.A.Loeb, A functional approach to nonstandard measure theory, preprint.

[21] R.Lutz, M.Goze, Nonstandard Analysis, Lecture Notes in Mathematics 881, Springer-Verlag, 1981.

[22] W.S.Massey, Homology and Cohomology Theory, Marcel Dekker, Inc. 1978.

[23] M.C.Mc Cord, Non-standard analysis and homology, Fund.Math. 74 (1972), 21-28.

[24] A.Robinson, Non-standard Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[25] W.Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, 1974.

[26] E.H.Spanier, Algebraic Topology, Mc Graw-Hill, 1966.

[27] K.D.Stroyan, J.M.Bayod; Foundation of Infinitesimal Stochastic Analysis, u štampi.

[28] K.D.Stroyan, W.A.J.Luxemburg, Introduction to the Theory of Infinitesimals, Academic Press, New York, 1976

[29] F.Wattenberg, Nonstandard analysis and the theory of shape, Fund. Math. 98 (1978), 41-60.

[30] R.Živaljević, A Loeb Measure Approach to the Riesz Representation Theorem, Publ. Inst. Math., Belgrade, 32(46) 1982, pp. 175-177.