UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET

MIRKO DJ. VUKOBRAT

PRIMENA NETEROVE TEOREME U MIKROPOLARNOJ MEHANICI KONTINUUMA

BEOGRAD
1978.

S A D R Ž A J

Strana

1. U V O D

Veza izmedju invarijantnosti varijacionih principa pri jednoj grupi infinitezimalnih vektorskih i koordinatnih rans-formacija i egzistencije odredjene klase zakona konzervacije je jedna veoma interesantna oblast mehanike. Ona nam daje mogućnost dubljeg upoznavanja strukture mehanike i služi da nadjemo zakone konzervacije ili konstante kretanja. Ovi zakoni ili konstante kretanja smanjuju složenost posmatranog problema i omogućuju nam nalaženje odgovarajućih rešenja u konkretnim problemima mehanike kontinuuma i mehanike materijalnog sistema tačaka. Tako na primer mogu se upotrebiti u analizi prskotina i zareza [1], diskusiji prostiranja talasa [2], kao i u analizi stabilnosti kretanja [3].

Vezu izmedju invarijantnosti i egzistencije zakona konzervacije uočio je Jakobi [4]. On je izveo zakon održanja količine kretanja i momenta količine kretanja iz Euklidove invarijantnosti Lagranžove funkcije. Fundamentalni rezultati iz ove oblasti mehanike pripadaju Emi Neter [5]. Kasnije su se mnogi autori bavili proučavanjem ove oblasti. Radovi [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 - 19] tretiraju proširenje Neterove teoreme na razne oblasti fizike i pojedine probleme mehanike. U većini spomenutih radova proučavana je egzistencija prvih integrala samo u mehanici sistema materijalnih tačaka. Medjutim, u mehanici kontinuuma to je do skora prošlo nezapaženo.

Svakako da je ta činjenica kao i rezultati u nekim oblastima, koji su pobudili interesovanje, uticala na to da su Knowles i Sternberg u svom radu [19] učinili značajan korak dalje u proširenju ove teorije i njene primene u teoriji elastičnosti. Oni izvode nove zakone konzervacije, izvodeći ograničenu grupu koordinatnih i vektorskih transformacija. Način i rezultati do kojih su oni došli otvara put za dalje proširenje primene Neterove teoreme i na druge oblasti mehanike i matematičke fizike. Njihovo interesovanje za ovu oblast naročito je potstaknuto rezultatima koje je dobio Rice u radu [1]. U tom radu, koji je posvećen analizi koncentracije napona blizu krajeva pukotine, Rice je uveo nezavisni integral od putanje koji nastaje iz jednačina polja elastostatike u obliku

$$\int_{\Gamma}\left(W\,dy - \underset{\sim}{T}\frac{\partial u}{\partial x}\,ds\right)=0 \,. \tag{1.1}$$

Ovaj integral je izazvao ogromno interesovanje kod velikog broja istraživača, zbog svog značaja u primeni na spomenute probleme. Knowles i Sternberg, primenjujući Neterovu teoremu na elastostatiku, su pokazali da ovaj integral u obliku zakona konzervacije na prirodan način sledi iz nje kao i njegov dvodimenzioni analogon. Integral je dobijen kao posledica primene teorije o nepromenljivosti varijacionih principa primenjen na princip minimalne potencijalne energije u elastostatici. Ali pored ovog zakona konzervacije dobili su još dva dodatna zakona konzervacije. Ovi zakoni imaju oblik

$$\int\left[W\delta_{ij} - u_{i,k}t_{kj}\right]n_j\,ds = 0\,, \tag{1.2}$$

$$\int\left[\left(W\delta_{ij} - u_{i,k}t_{ij}\right)x_k - \frac{1}{2}t_{ij}u_i\right]n_i\,ds = 0\,, \tag{1.3}$$

$$\int \varepsilon_{kml}\left[\left(W\delta_{kj} - u_{i,k}t_{ij}\right)x_m + t_{kj}u_m\right]n_j\,ds = 0\,, \tag{1.4}$$

gde su W, t_{kj}, u_i, x_i, ε_{kml} i n_j respektivno, elastični potencijal, tenzor napona, vektor pomeranja, vektor položaja, Ričijev antisimetrični tenzor i jedinični vektor spoljne normale na S. Ovako dobijeni zakoni konzervacije u slučaju linearne homogene izotropne elastičnosti su kompletni, tj. jedini zakoni koji se mogu dobiti primenom Neterove teoreme na ograničenu grupu transformacija koje se razmatraju.

Korak dalje u istraživanju ove oblasti učinio je Fletcher [20] izvodeći odredjene zakone konzervacije primenom ove teoreme razmatrajući slučaj linearne elastodinamike. On primenjuje nešto širu grupu transformacija od onih koje su primenjene u radu [19] , i izvodi šest zakona konzervacije od kojih su tri poznati zakoni. Druga tri zakona predstavljaju ustvari dinamičku generalizaciju nezavisnih integrala izvedenih za elastostatiku od strane Knowles i Sternberg, a koji su bili od posebnog interesa u poslednje vreme. Isto tako pokazuje kompletnost u smislu da su to i jedini zakoni konzervacije koji se mogu dobiti koristeći Neterovu teoremu. Na ovaj način se zaokružuje primena Neterove teoreme u linearnoj elastičnosti. Ostaje i dalje otvoreno pitanje njene primene u konačnoj elastičnosti, gde su autori rada [19] u slučaju konačne elastostatike dali delimičan odgovor, dok je u slučaju konačne elastodinamike problem još netaknut.

Logično, put je sada bio utrt za dalje proširenje ove teoreme u smislu njenog korišćenja i na šire polje primene od dosadašnjeg u okviru mehanike kontinuma. Jarić u radu [21] koristi ovu teoremu za dobijanje zakona konzervacije u slučaju linearne mikropolarne elastostatike, dajući proširenje Neterove teoreme i grupe transformacija u onom obimu koliki je potreban da bi je bilo moguće primeniti na konkretan slučaj. Izmedju četiri dobijena zakona konzervacije naročito je važno istaći jedan koji se odnosi na invarijantnost potencijalne energije pri koordinatnoj translaciji. On u sebi sadrži Riceov nezavisni integral od putanje kao specijalan slučaj, kada su naponski spregovi jednaki nuli.

Na osnovu svega iznetog vidi se da je problem dalje primene Neterove teoreme vrlo aktuelan, s obzirom da su se radovi koji tretiraju ovu oblast pojavili poslednjih godina. Rad Knowles i Sternberg datira iz 1972. godine i predstavlja prvi pokušaj primene Neterove teoreme u mehanici kontinuuma. Drugi rad iz te oblasti je rad Fletcher iz 1976. godine koji predstavlja uopštenje dobijenih rezultata Knowles i Sternberg-a, da bi se 1977. godine pojavio rad Chen i Shield-a koji tretira tu oblast sa jednog drugog stanovišta.

Izučavanju problema loma u mehanici kontinuuma do skora se prilazilo na jedan poseban način i koristile posebne metode koje su vezane sa velikim matematičkim teškoćama. Medjutim, tretiranje istih problema koristeći rezultate integrala nezavisnih od putanje, koji slede kao zakoni konzervacije iz primene Neterove teoreme znatno uprošćava analizu istih, što je svakako jedan od osnovnih razloga povećanog interesovanja u traženju integrala nezavisnih od putanje i metoda za njihovo nalaženje. Aktuelnost problema kao i odredjena mogućnost eventualne primene u praksi su inicirali i izradu ovog rada.

U ovom radu se daje proširena verzija Neterove teoreme, dokazuje njena primenljivost na linearnu mikropolarnu elastodinamiku, koristi se nov metod za odredjivanje koordinatnih i vektorskih transformacija koji se zasniva na fizičkoj pretpostavci da ove transformacije ne zavise od materijalnih svojstava tela, nalaze njima odgovarajući zakoni konzervacije, diskutuju dobijeni rezultati, pokazuje saglasnost sa do sada poznatim rezultatima i daju novi integrali koji bi se mogli koristiti u dinamičkim problemima mikropolarne elastodinamike. Sa teorijskog stanovišta rezultati su egzaktni i mogu se direktno proveriti. Primena dobijenih rezultata je tesno povezana sa odredjivanjem materijalnih konstanti mikropolarnog kontinuuma, što je novijeg datuma. U radu se ukazuje na put primene dobijenih rezultata. Metod dobijanja integrala ili zakona konzervacije je vrlo pogodan i opšt i može se koristiti i u drugim oblastima mehanike kontinuuma.

2. OSNOVI NETEROVE TEOREME I NJEN ZNAČAJ U MEHANICI

U ovom odeljku ćemo se zadržati na nekim osnovama izvodjenja jedne ograničene verzije Neterove teoreme o invarijantnosti varijacionih principa potrebnim za naša dalja istraživanja. U tom cilju, da bi izlaganje bilo matematički dosledno sprovedeno i da bi se rad nesmetano mogao pratiti, potrebno je uvesti odredjene matematičke pojmove i definicije koje će se u toku dalje izlaganja koristiti.

Neka E označava trodimenzionalni Euklidski prostor, a V njemu asocirani vektorski prostor. R je regularna oblast u E ako je R ograničena zatvorena oblast u E. Pretpostavlja se da važi teorema o divergenciji za sva odgovarajuća glatka vektorska polja definisana na R. Može se reći da je regularnost ograničene zatvorene oblasti R osigurana ako je njena granica R unija "ograničenog broja nepovezanih zatvorenih regularnih površina" u smislu Kellogg-a.

Sa masnim slovima označavamo tenzore pozitivnog reda i matrice. Komponente tenzora i elementi matrica su odredjeni u odnosu na fiksni sistem Dekartovih koordinata ili u odnosu na bilo koji drugi dopustivi sistem koordinata u E. U daljem radu isključivo ćemo koristiti Dekartov sistem koordinata, bez da se gubi u opštosti zaključaka. Sa T označavamo prostor svih tenzora drugoga reda, sa L otvoreni linearni interval. Ako je F neka funkcija definisana na prostoru ExVxTxL vrednostima

$$F(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{t}; \eta) , \tag{2.1}$$

gde je $\underset{\sim}{x}$ vektor položaja tačke u E, $\underset{\sim}{v}$ vektor u V, t tenzor drugog reda u T a η parametar na intervalu L, mogu se parcijalni izvodi takve funkcije po spomenutim promenljivim napisati u obliku

$$\begin{aligned} F_{,i}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{t}; \eta) &= \frac{\partial}{\partial x_i} F(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{t}; \eta) \\ F_{,v_i}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{t}; \eta) &= \frac{\partial}{\partial v_i} F(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{t}; \eta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$F_{,t_{ij}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{t};\eta)=\frac{\partial}{\partial t_{ij}}F(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{t};\eta)$$
$$F'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{t};\eta)=\frac{\partial}{\partial \eta}F(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{t};\eta) \qquad (2.2)$$

Isto označavanje biće dosledno primenjivano i u slučaju vektorskih i tenzorskih veličina višeg reda kao i za njihove izvode višeg reda.

U daljem radu umesto bilo kakve funkcije F, zavisne u opštem slučaju od proizvoljnih elemenata prostora E, V, T, L, koristićemo njen konkretni oblik funkcionalne zavisnosti od odredjenih elemenata ovih prostora i obeležiti je sa H, tj.

$$H(\underset{\sim}{\xi},\underset{\sim}{w}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}),w_{(p)i,\alpha}(\underset{\sim}{\xi});\eta). \qquad (2.3)$$

Pretpostavimo dalje da je funkcija $H \in C^{\infty}$ za sve $(\underset{\sim}{\xi},\underset{\sim}{w}_{(p)},\underset{\sim}{w}_{(p)i,\alpha})$ $\in (E\times V\times T)$ gde je $\underset{\sim}{\xi}$ vektor položaja tačke u E, $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ vektorsko polje definisano u V i $\underset{\sim}{w}_{(p)i,\alpha}$ tenzorsko polje drugoga reda definisano u T, η proizvoljno mali parametar na intervalu L. Indeks u zagradi označava redni broj vektora i mi pretpostavljamo da ih ima n, tj. p = 1,2,......, n.

Dalje neka je ϕ funkcional definisan nad Ω sa

$$\phi\{\underset{\sim}{w}_{(p)}\}=\int_{R}H(\underset{\sim}{\xi},\underset{\sim}{w}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}),\nabla\underset{\sim}{w}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}))d\underset{\sim}{\xi} \qquad (2.4)$$

gde je Ω bilo koja regularna podoblast fiksirane otvorene podoblasti D u E za svako vektorsko polje $\underset{\sim}{w}_{(p)} \in C(D)$, a $\nabla\underset{\sim}{w}_{(p)}$ označava matricu komponenata $[w_{(p)i,\alpha}]$.

Tako definisani funkcional nazivaćemo dopustivim funkcionalom nad D odredjenim (generisanim) sa H. Za naša dalje razmatranja potrebno nam je da definišemo jednoparametarsku familiju funkcionala. Da bismo to mogli učiniti, potrebno je prethodno promenljive $\underset{\sim}{\xi}$ i $\underset{\sim}{w}_{(p)}$, u H, pomoću koje smo definisali funkcional (2.4), svaku posebno podvrći jednoparametarskoj familiji preslikavanja.

U tom cilju nazvaćemo $\underset{\sim}{f}$ regularnom familijom koordinatnih preslikavanja nad D ako je $\underset{\sim}{f}$ vektorska funkcija definisana na DxL takva da je

$$\underset{\sim}{\xi}^{*}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\xi},\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}),\nabla\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi});\eta) \tag{2.5}$$

za η = o $\underset{\sim}{f}$ identička transformacija, tj.

$$\underset{\sim}{f}\in C^{2}(D\times L) \qquad \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\xi},\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}),\nabla\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi});0)=\underset{\sim}{\xi}.$$

Iz istih razloga $\underset{\sim}{h}$ ćemo nazivati regularnom familijom vektorskih preslikavanja kada je $\underset{\sim}{h}$ vektorska funkcija definisana na VxL takva da je

$$W^{*}_{(p)}(\xi^{*})=\underset{\sim}{h}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi},\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}),\nabla\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi});\eta) \tag{2.6}$$

za η = o $\underset{\sim}{h}$ identička transformacija, tj.

$$h\in C^{2}(V\times L);\quad \underset{\sim}{h}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi},\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}),\nabla\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi});0)=\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi})\quad ;\quad L(-\eta_{o},\eta_{o})$$

Uvedimo sada jednoparametarsku familiju funkcionala Φ_{η} definisanu sa

$$\Phi_{\eta}\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\}=\int_{R_{\eta}}H(\underset{\sim}{\xi}^{*},W^{*}_{(p)}(\xi),\nabla_{\xi}W^{*}_{(p)}(\xi^{*}))d\xi^{*} \tag{2.7}$$

za svako vektorsko polje $\underset{\sim}{w}_{(p)}\in C(D)$. Saglasno prethodnim oznakama odmah se može zaključiti da je

$$\nabla^{*}_{\xi}W^{*}_{(p)}(\xi^{*})=[W_{(p)i,\alpha}(\underset{\sim}{\xi})] \tag{2.8}$$

matrica tipa m x n, dok je Ω_{η} slika Ω pod familijom koordinatnih preslikavanja $\underset{\sim}{f}$.

Iz izraza

$$\nabla^{*}_{\xi}\underset{\sim}{W}^{*}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}^{*})\Big/_{\eta=0}=\nabla\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi})\ \text{za svako}\ \xi\in D \tag{2.9}$$

i svojstva uvedenih koordinatnih i vektorskih preslikavanja lako se može pokazati da je

$$\phi_\eta\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\}\big|_{\eta=0} = \phi\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\} \tag{2.10}$$

tj. ϕ je član jednoparametarske familije funkcionala ϕ_η u slučaju kada je η = o. Radi odredjenosti kažemo da je ϕ_η jednoparametarska familija funkcionala nad D izvedena nad funkcionalom ϕ i uvedenim familijama koordinatnih $\underset{\sim}{f}$ i vektorskih $\underset{\sim}{h}$ transformacija.

U tom slučaju kažemo da je ϕ invarijantno u $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ u odnosu na $\underset{\sim}{f}$ i $\underset{\sim}{h}$ uvek ako je

$$\phi_\eta\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\} = \phi\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\}. \tag{2.11}$$

Isto tako kažemo da je ϕ infinitezimalno invarijantno u $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ u odnosu na dati par familija preslikavanja pod uslovom da je

$$\phi_0'\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\} \equiv \frac{\partial}{\partial\eta}\phi_\eta\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\}\big|_{\eta=0} = 0. \tag{2.12}$$

Očigledno, ϕ je infinitezimalno invarijantno ako je invarijantno. Izloženi stavovi daju nam dovoljno elemenata da možemo formulisati ograničenu verziju Neterove teoreme, ali dovoljno opštu da zadovolji zahteve koji se postavljaju pred nas u daljem radu. Verzija ovde iznete Neterove teoreme je šira od odgovarajuće verzije date u radu [19]. S druge strane originalna Neterova teorema data u [5] je mnogo opštija od verzije koja se ovde daje.

Teorema 2.1. Neka je D oblast u E i neka je ϕ dopustivi funkcional za D obrazovan nad H. Neka je $\underset{\sim}{f}$ regularna familija koordinatnih preslikavanja nad D, a $\underset{\sim}{h}_{(p)}$ regularna familija vektorskih preslikavanja.

Pretpostavimo da je $\underset{\sim}{w}_{(p)} \in C(D')$ vektorsko polje koje zadovoljava Ojler-Lagranžove jednačine

$$H_{,w_{(p)i}}(\underset{\sim}{X}) - \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}[H_{,w_{(p)i,\alpha}}(\underset{\sim}{X})] = 0 \tag{2.13}$$

gde je

$$\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{\xi},\ \underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}),\ \nabla\underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi})) \qquad \xi\in D \quad \begin{matrix} p=1,2,\dots n \\ \alpha=1,2,\dots n+1 \end{matrix}$$

Onda je ϕ infinitezimalno invarijantno u $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ u odnosu na $\underset{\sim}{f}$ i $\underset{\sim}{h}$ ako i samo ako $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ zadovoljava

$$\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[H_{,W_{(p)i,\alpha}}(\underset{\sim}{X})\cdot\bar{\beta}_{(p)i}(\underset{\sim}{X})+H(\underset{\sim}{X})\cdot\alpha_\alpha(\underset{\sim}{X})\right]=0 \qquad (2.14)$$

gde je

$$\begin{aligned} \alpha_\alpha(\underset{\sim}{X}) &= \frac{\partial}{\partial\eta}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{X};\eta)\big|_{\eta=0} \\ \underset{\sim}{\beta}_{(p)i}(\underset{\sim}{X}) &= \frac{\partial}{\partial\eta}\underset{\sim}{h}_{(p)i}(\underset{\sim}{X};\eta)\big|_{\eta=0} \qquad (2.15) \\ \bar{\beta}_{(p)i}(\underset{\sim}{X}) &= \underset{\sim}{\beta}_{(p)i}(\underset{\sim}{X})-W_{(p)i,\alpha}(\underset{\sim}{\xi})\,\alpha_\alpha(\underset{\sim}{X}). \end{aligned}$$

Dalje, (2.14) je ekvivalentno zakonu konzervacije u integralnom obliku koji na osnovu teoreme o divergenciji iz (2.14) odmah neposredno

$$\int_S\left[H_{,W_{(p)i,\alpha}}(\underset{\sim}{X})\cdot\bar{\beta}_{(p)i}(\underset{\sim}{X})+H(\underset{\sim}{X})\cdot\alpha_\alpha(\underset{\sim}{X})\right]n_\alpha(\underset{\sim}{\xi})\,ds=0 \qquad (2.16)$$

za svaku površinu S koja je granica podoblasti D, gde je sa $\underset{\sim}{n}$ obeležen jedinični vektor spoljne normale na S.

Uslov da je $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ rešenje Ojler-Lagranževih jednačina predstavlja u suštini uslov stacionarnosti funkcionala (2.4). Zaista, nije teško pokazati da $\underset{\sim}{w}_{(p)}\in C$ (D) zadovoljava (2.13) ako i samo ako za svaku fisiranu regularnu oblast $\Omega\in D$ važi da je

$$\delta\phi\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\}=0 \qquad (2.17)$$

gde se prva varijacija od ϕ uzima iz klase svih vektorskih polja dva puta neprekidno deferencijabilnih nad D koji se poklapaju sa $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ na granici ∂ R.

Važnost izložene teoreme kao metoda za dobijanje zakona konzervacije u bilo kojoj oblasti matematičke fizike vezano je za postojanje odgovarajućeg varijacionog principa i egzistencije familija regularnih koordinatnih $\underset{\sim}{f}$ i vektorskih $\underset{\sim}{h}$ preslikavanja u odnosu na koje je stacionarni funkcional infinitezimalno invarijantan.

Dokaz Teoreme 2.1. Na osnovu uvedenih pretpostavki o koordinatnim i vektorskim transformacijama (2.5) i (2.6), možemo ih razviti u stepeni red po η i zadržavajući se na linearnom članu dobijamo

$$f_\alpha(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}); \eta) = \xi_\alpha + \alpha_\alpha(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}))\eta + O(\eta^2) \qquad (2.18)$$

$$h_{(p)i}(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{W}_{(p)}(\xi); \eta) = W_{(p)i}(\underset{\sim}{\xi}) + \beta_{(p)i}(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{W}_{(p)}(\underset{\sim}{\xi}))\cdot\eta + O(\eta^2)$$

gde je α_α i $\beta_{(p)i}$ dato sa (2.15).

Neka je J (ξ^*, ξ) Jakobijeva determinanta definisana sa

$$J(\xi^*, \xi) = \det\left(\frac{\partial \xi_i^*}{\partial \xi_j}\right). \qquad (2.19)$$

Sada možemo funkcional (2.4) napisati u obliku

$$\Phi_\eta\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\} = \int H(\underset{\sim}{X})\, d\xi^* \qquad (2.20)$$

odnosno na osnovu (2.19)

$$\Phi_\eta\{\underset{\sim}{W}_{(p)}\} = \int H(\underset{\sim}{X})\, J(\xi^*, \xi)\, d\xi. \qquad (2.21)$$

Da bi funkcional (2.21) bio infinitezimalno invarijantan u odnosu na spomenute koordinatne i vektorske transformacije (2.18) na osnovu (2.12), mora biti

$$\Phi'_\eta\{W_{(p)}\} = \frac{\partial}{\partial \eta}\int H(\underset{\sim}{X})\, J(\xi^*, \xi)\, d\xi. \qquad (2.22)$$

Kako je oblast integracije nezavisna od parametra η , operacija diferenciranja po η i integracije su komutativne tako da iz (2.22) sledi

$$\int\left\{\frac{d}{d\eta}\left[H(\underset{\sim}{X})\, J(\xi^*, \xi)\right]\right\}_{/\eta=0} d\xi = 0 \qquad (2.23)$$

...im, kako je oblast integracije proizvoljna (2.23), biće ...oljeno za svako Ω onda i samo onda ako je

$$\frac{d}{d\eta}\left[H(\underset{\sim}{X})J(\xi^{*},\xi)\right]_{|\eta=0}=0 \qquad (2.24)$$

...predstavlja potreban uslov da bi funkcional Φ_{η} bio infi-...imalno invarijantan u odnosu na koordinatne i vektorske ...formacije (2.18).

Diferencirajući (2.24) dobijamo

$$\left[\frac{dH}{d\eta}J(\xi^{*},\xi)+H\frac{dJ}{d\eta}\right]_{|\eta=0}=0 \qquad (2.25)$$

...sno,

$$\left(\frac{dH}{d\eta}\right)_{|\eta=0}J(\xi^{*},\xi)_{|\eta=0}+H_{|\eta=0}\left(\frac{dJ}{d\eta}\right)_{|\eta=0}=0. \qquad (2.26)$$

...snovu (2.3) je

$$\frac{dH}{d\eta}=\frac{\partial H}{\partial\xi^{*}_{\alpha}}\frac{\partial\xi^{*}_{\alpha}}{\partial\eta}+\frac{\partial H}{\partial W^{*}_{(p)i}}\frac{\partial W^{*}_{(p)i}}{\partial\eta}+\frac{\partial H}{\partial W^{*}_{(p)i\alpha}}\frac{\partial W^{*}_{(p)i\alpha}}{\partial\eta} \qquad (2.27)$$

...imo da je potrebno da nadjemo izvode promenljivih po para-... Pri izvodjenju potrebnih izraza koristićemo osobinu ko-...ivnosti operacije parcijalnih izvoda po promenljivim (ξ , ..., $W_{(p)i}$, , η).

Poznato je da je

$$\frac{\partial\xi^{*}_{\alpha}}{\partial\xi_{\beta}}\frac{\partial\xi_{\beta}}{\partial\xi^{*}_{\gamma}}=\delta_{\alpha\gamma} \qquad (2.28)$$

...osnovu (2.18) sledi

$$\left(\frac{\partial\xi^{*}_{\alpha}}{\partial\xi_{\beta}}\right)_{|\eta=0}=\delta_{\alpha\beta} \qquad (2.29)$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \xi^*_\alpha}{\partial \eta}\right)_{/\eta=0} = \alpha_\alpha \\
&\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)_{/\eta=0} = \beta_{(p)i} \\
&\frac{\partial H}{\partial \xi^*_\alpha}\Big/_{\eta=0} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \\
&\frac{\partial H}{\partial W^*_{(p)i}}\Big/_{\eta=0} = \frac{\partial H}{\partial W_{(p)i}} \\
&H_{/\eta=0} = H \\
&J_{/\eta=0} = 1 \\
&\left(\frac{dJ}{d\eta}\right)_{/\eta=0} = \alpha_{\gamma,\gamma}
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

i

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial W^*_{(p)i,\alpha}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial W^*_{(p)i}}{\partial \xi^*_\alpha}\right]_{/\eta=0} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial W_{(p)i}}{\partial \xi_\beta}\frac{\partial \xi_\beta}{\partial \xi^*_\alpha}\right]_{/\eta=0} \\
&= \beta_{(p)i,\alpha} + W_{(p)i,\beta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi_\beta}{\partial \xi^*_\alpha}\right)_{/\eta=0}
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

i s obzirom na (2.28)

$$
\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi_\beta}{\partial \xi^*_\alpha}\right)_{/\eta=0} = -\alpha_{\beta,\alpha}
\tag{2.32}
$$

dobijamo da je

$$
\left(\frac{\partial W_{(p)i,\alpha}}{\partial \eta}\right)_{/\eta=0} = \beta_{(p)i,\alpha} - W_{(p)i,\beta}\,\alpha_{\beta,\alpha}.
\tag{2.33}
$$

Sada (2.26) koristeći (2.27), (2.30) i (2.33) postaje

$$
\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}\alpha_\alpha + \frac{\partial H}{\partial W_{(p)i}}\beta_{(p)i} + \frac{\partial H}{\partial W_{(p)i,\alpha}}\left[\beta_{(p)i,\alpha} - W_{(p)i,\beta}\,\alpha_{\beta,\alpha}\right] + H\alpha_{\gamma,\gamma} = 0
\tag{2.34}
$$

Medjutim, izraz u zagradi možemo transformisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\beta_{(p)i,\alpha} - W_{(p)i,\beta}\,\alpha_{\beta,\alpha} &= \left[\beta_{(p)i} - W_{(p)i,\beta}\,\alpha_{\beta}\right]_{,\alpha} + W_{(p)i,\beta\alpha}\,\alpha_\beta \\
&= \bar{\beta}_{(p)i} + W_{(p)i,\beta\alpha}\,\alpha_\beta
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

smenjujući sada ovaj izraz u (2.34) dobijamo

$$H_{,\alpha}\alpha_{\alpha}+H_{,w_{(p)i}}\beta_{(p)i}+H_{,w_{(p)i,\alpha}}\bar{\beta}_{(p)i,\alpha}+H_{,w_{(p)i,\alpha}}W_{(p)i,\beta\alpha}\alpha_{\beta}+ \\ +H\alpha_{\delta,\delta}=0 \tag{2.36}$$

ili koristeći parcijalnu integraciju to možemo napisati

$$H_{,\alpha}\alpha_{\alpha}+H\alpha_{\alpha,\alpha}+H_{,w_{(p)i}}\beta_{(p)i}+\left[H_{,w_{(p)i,\alpha}}\bar{\beta}_{(p)i}\right]_{,\alpha}-\left[H_{,w_{(p)i,\alpha}}\right]_{,\alpha}\bar{\beta}_{(p)i} \\ +H_{,w_{(p)i,\alpha}}W_{(p)i,\beta\alpha}\alpha_{\beta}=0. \tag{2.37}$$

Kako je

$$H_{,\alpha}\alpha_{\alpha}+H\alpha_{\alpha,\alpha}=(H\alpha_{\alpha})_{,\alpha}-H_{,w_{(p)i}}W_{(p)i,\alpha}\alpha_{\alpha}-H_{,w_{(p)i,\beta}}W_{(p)i,\beta\alpha}\alpha_{\alpha} \tag{2.38}$$

imamo posle dužeg računanja da je

$$H_{,w_{(p)i}}\left[\beta_{(p)i}-W_{(p)i,\alpha}\alpha_{\alpha}\right]-\left[H_{,w_{(p)i,\alpha}}\right]_{,\alpha}\bar{\beta}_{(p)i}+ \\ \left[H_{,w_{(p)i,\alpha}}\bar{\beta}_{(p)i}+H\alpha_{\alpha}\right]_{,\alpha}=0, \tag{2.39}$$

odnosno,

$$\bar{\beta}_{(p)i}\left[H_{,w_{(p)i}}-\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha}}H_{,w_{(p)i,\alpha}}\right]+\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha}}\left[H_{,w_{(p)i,\alpha}}\bar{\beta}_{(p)i}+H\alpha_{\alpha}\right]=0. \tag{2.40}$$

Odavde neposredno sledi zaključak da ako je vektorsko polje $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ rešenje Ojler-Lagranževih jednačina (2.13), onda iz (2.40) sledi (2.14). Ove jednačine predstavljaju potreban i dovoljan uslov da bi funkcional Φ bio infinitezimalno invarijantan u vektorskom polju $\underset{\sim}{w}_{(p)}$ u odnosu na familiju koordinatnih i vektorskih preslikavanja $\underset{\sim}{f}$ i $\underset{\sim}{h}$. Ekvivalentnost zakona konzervacije (2.14) i (2.16) je jasna i sledi iz neposredne primene teoreme o divergenciji. Ovim je dokaz Neterove teoreme završen.

Značaj Nererove teoreme sa stanovišta njene primene u raznim oblastima matematičke fizike je ogroman, jer n m služi za dobijanje zakona konzervacije na jedan veoma pregledan i sistematičan način.

Potrebno je istaći da je Neterova teorema korišćena u elektromagnetici, teoriji relativnosti, kvantnoj mehanici itd., a da je posebno našla svoju punu primenu u mehanici. Ovo samo po sebi dovoljno govori o širokim mogućnostima primene ove teoreme i iz toga razloga se objašnjava veliko interesovanje koje danas vlada za njeno korišćenje. Ne treba izgubiti iz vida da ovako povećano interesovanje ukazuje na to da nisu iscrpene sve mogućnosti u pogledu njene primenljivosti na još neistražene oblasti moderne fizike.

Iz tih razloga mi ćemo se u našim daljim razmatranjima zadržati na njenoj primeni u mehanici.

3. PRIMENA NETEROVE TEOREME U MEHANICI SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA

Kao što je već rečeno, mogućnost primene Neterove teoreme prevazilazi okvire mehanike. Medjutim, u cilju dobijanja potpunije slike o mogućnostima njene primene, mi ćemo se ovde ograničiti vrlo kratko na njenom značaju u mehanici i to prvenstveno sa istorijskog stanovišta. Prvi pokušaj primene Neterove teoreme su vezani za mehaniku sistema materijalnih tačaka. To je i potpuno razumljivo kada se ima u vidu da je to najbolje istražena oblast mehanike.

Moramo istaći da se Neterova teorema kao metod za rešavanje i nalaženje prvih integrala u mehanici sistema materijalnih tačaka pokazala kao vrlo pogodna u odredjenoj klasi problema kod kojih dotadašnje metode nisu davale zadovoljavajuće rezultate.

Zbog toga je niz autora diskutovao generalizacije Neterovih direktnih i inverznih teorema. Vrlo skoro Vujanović i Djukić su izučavali generalizacije ovih teorema i njihove primene pretpostavljajući da fundamentalne grupe transformacija zavise i od brzina. Ističemo da su ovi utori proširili rezultate R. Stojanovića koji se odnose na pretpostavku o mogućnosti da se kretanje krutog tela poveže sa rešenjima sistema Kilingovih parcijalnih diferencijalnih jednačina o dobijanju prvih integrala dinamičkih sistema, koji slede kao posledica invarijantnosti diferencijalnih jednačina kretanja i odgovarajućih akcionih integrala u Hamiltonovom smislu u odnosu na infinitezimalne grupe kretanja u Li-ovom smislu. Sve generalizacije vršene su sa ciljem da se primena Neterove teoreme proširi na šire klase problema od do tada posmatranih. Navodimo neke od tih generalizacija koje su vezane za imena spomenutih autora.

Poznato je da su dva Lagranžijana ekvivalentna, tj. dovode do istih jednačina kretanja ako se razlikuju do na totalni diferencijal neke funkcije u odnosu na vreme. U tom cilju se razmatra ne samo apsolutna invarijantnost Lagranžijana, već (gauge) Lagranžijan koji je invarijantan do na totalni diferencijal [12]. Za takve sisteme Neterova teorema je uopštena i upotrebljena za dobijanje prvih integrala kretanja. Mnogi autori su razmatrali postojanje transformacija koje ostavljaju odgovarajući Lagranžijan invarijantnim kao jedan apriori pojam, ali nisu pokazivali kako se dobijaju te transformacije, medjutim u [12] je pokazan i način na koji se one dobijaju.

U radovima [10] , [12] , [15] , [21] pokazuje se da egzistencija prvih integrala sledi kao posledica invarijantnosti Hamiltonovog dejstva u odnosu na grupe infinitezimalnih transformacija i da ove grupe nisu apriori uzete kao što su u radu [5] , već da se dobijaju kao rezultat integracije sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina tz. Kilingovih jednačina. U praktičnim primenama Neterove teoreme pogodno je koristiti infinitezimalne transformacije koje zavise od vremena, položaja i generalisanih brzina umesto transformacija kao funkcija vremena i položaja. Takav prilaz upravo koriste spomenuti autori jer omogućava da se dobiju prvi integrali koji sadrže više stepene generalisanih brzina.

Do skora većina autora je razmatrala mehaničke sisteme samo sa potencijalnim silama. U tom slučaju kretanje mehaničkog sistema je potpuno karakterisano poznavanjem Lagranžove funkcije, tj. integrala akcije u Hamiltonovom smislu. U novije vreme pokazano je da Hamiltonov varijacioni princip sa Lagranžovom funkcijom ne-standardnog oblika može da opiše izvesne sistem sa disipativnim silama. Pored toga Vujanović formuliše varijacioni princip Hamiltonovog tipa za klasičnu nekonzervativnu mehaniku [24] čija je glavna ideja da varijacije generalisanih brzina nisu odredjene potpuno sa varijacijama generalisanih koordinata, nego još i sa generalisanim disipativnim silama. Imajući u vidu te činjenice u radu [27] se pretpostavlja da su infinitezimalne transformacije vremena i generalisanih koordinata nezavisne i da te transformacije zajedno sa disipativnim silama odredjuju infinitezimalne transformacije generalisanih brzina. Za tako pretpostavljene transformacije izvodi se Neterova teorema, inverzna Neterova teorema i Neter-Besel-Hagenove jednačine. Važno je napomenuti da je Neterova inverzna teorema [5] , [15] (za svaku konstantnu veličinu odgovara jedna infinitezimalna transformacija koja ostavlja integral akcije invarijantnim), bila manje razmatrana, mada je to jedna veoma značajna teorema teorijske mehanike, moderne fizike, posebno kvantne mehanike i kao takva vrlo interesantna za proučavanje. Medjutim, do pojave pomenutog rada i ova problematika je bila ograničena na proučavanje samo mehaničkih sistema sa isključivo potencijalnim silama.

Dobro je poznata činjenica da je u mnogim slučajevima kao na primer u dinamici čvrstog tela i neholonomnoj mehanici jednostavnije proučavati probleme koristeći umesto stvarnih koordinata, kvazikoordinate. Imajući to u vidu u radu [15] se uopštava Neterova teorema, inverzna Neterova teorema i Neter-Besel-Hagenove jednačine za mehaničke sisteme u kvazikoordinatama i nalaze odgovarajući integrali kretanja.

Prilaz Djukića i Vujanovića smo naveli s obzirom na važnost doprinosa koji su dali, njegovu aktuelnost, kao i interesovanje koje su pobudili kod naučnih radnika koji se bave tim problemima.

Neki od rezultata Vujanovića i Djukića su prošireni od strane drugih autora na osobine invarijantnosti holonomnih dinamičkih sistema sa vezama koje zavise od vremena i Lagranžijana koji su godž (gauge) invarijantni pod dejstvom simetričnih infinitezimalnih transformacija.

Neterova teorema sa teorijskog stanovišta izaziva interesovanje i sa fundamentalnog stanovišta, tj. sa stanovišta njenog izvodjenja na drugi način kao na primer u radu [26]. U ovom radu je dat potpuno novi prilaz Neterove teoreme formalno, konceptualno i praktično. Generalisana Neterova teorema [26] je razmatrana nezavisno od koordinatnih transformacija, oblika varijacija ili čak egzistencije Lagranžijana gustine simetrije invarijantnosti.

4. DOSADAŠNJA PRIMENA NETEROVE TEOREME U MEHANICI KONTINUUMA

Primena Neterove teoreme u mehanici kontinuuma do skora nije bila predmet interesovanja niti istraživanja. Interesantno je napomenuti da je Neterova teorema u mehaniku kontinuuma ušla "na mala vrata". Prva oblast mehanike kontinuuma u kojoj su se pojavili novi zakoni konzervacije bila je teorija defekata kristalne rešetke i teorija loma i prskotina.

Eshelby je u svom radu [28] , posvećenom teoriji kontinuma defekata kristalne rešetke, izveo površinsku integralnu reprezentaciju za "silu na elastičnu singularnost ili nehomogenost" koja u otsustvu takvih efekata daje zakon konzervacije za regularno elastostatičko polje svojstveno homogenim, ali ne neophodno i izotropnim čvrstim telima pri infinitezimalnim deformacijama. Isto tako je napomenuo da taj razultat, kada se pravilno interpretira, ostaje striktno važeći za konačne deformacije čvrstih tela.

Dvodimenzionalni analogon zakona konzervacije koji pokazuje nezavisnost putanje liniskog integrala za ravno elstostatičko polje

$$\int_C \left(W n_i - t_{kj} u_{k,i} n_j \right) dl = 0 \qquad (4.1)$$

nezavisno je uveo Rice u svom radu [1] posvećenom analizi koncentracije napona blizu krajeva naprsline i demonstrirao je njegovu važnost u vezi sa asimptotskom analizom singularnih naponskih polja. Ovaj integral je inače poznat ne samo kao zakon konzervacije, nego i kao integral J-tipa. U ovom radu je posmatrao infinitezimalne deformacije, ali je dopustio i mogućnost nelinearnih naponskih relacija.

Fizička interpretacija linijskog integrala koji je uveo Rice [1] zasniva se na energetskoj kvazi-statičkoj ekstenziji pukotine. Rezultat koji je dat u radu [1] odnosi se na ranije istraživanje Sandersa [29] i Cherepanova [30] . Pored značajnog teorijskog interesa, zakon konzervacije (4.1) je od praktične koristi vezane za direktne asimptotske analize geometrijski pobudjene pojedinačnim naponskim koncentracijama, kao na pr. one koje nastaju u pukotinama i zarezima.

Primene ove vrste mogu se naći u [1] , [30] i odnose se u većini slučajeva na neelastična ponašanja, kao i u radovima [31] [32].

Trodimenzionalni zakon konzervacije može se jednostavno iskazati na sledeći način:

Neka su (x_1, x_2, x_3) pravougle Dekartove koordinate i pretpostavimo da su $\underset{\sim}{u}$, $t_{\alpha\beta}$ komponente pomeranja i napona respektivno, vezani sa trodimenzionalnom infinitezimalnom deformaciom homogenog elastičnog tela u otsustvu zapreminskih sila. Neka je W(x) gustina energije deformacije tačke sa vektorom položaja $\underset{\sim}{x}$.

Ako je S bilo koja zatvorena površina na kojoj ili unutar koje važe jednačine ravnoteže i veze izmedju napona i gradijenata pomeranja infinitezimalne elastičnosti, trodimenzionalna analogija nezavisnog integrala (4.1) glasi

$$\int_S \left(W n_i - t_{\kappa i} u_{\kappa,i} n_j \right) ds = 0 \qquad (4.2)$$

gde je $\underset{\sim}{n}$ jedinični vektor spoljne normale na S a ds označava element površine na S. Činjenica da (4.2) sledi iz jednačina ravnoteže i relacija napon gradijent pomeranja i definicije W lako se potvrdjuje pomoću teoreme o divergenciji. U dve dimenzije takav dokaz (4.2) dao je Rice [1].

Medjutim, takva ad hoc verifikacija ne daje nikakve indikacije za:

1. njegove analitičke korene unutar teorije koja se razmatra kao i odgovor na pitanja
2. zašto važi
3. da li postoje i drugi nezavisni integrali.

Odgovor na ta pitanja dali su Knowles i Sternberg u radu [19] koji pokazuju da zakon konzervacije (4.2) i njegov dvodimenzioni analogon mogu konsekventno da se izvedu koristeći Neterovu teoremu o invarijantnosti varijacionih principa zajedno sa principom o stacionarnoj potencijalnoj energiji u elastostatici.

Prema Neterovoj teoremi:

Ako dati skup diferencijalnih jednačina može da se identifikuje kao Ojler-Lagranžove jednačine koje se odnose na jedan varijacioni princip, koji ostaje invarijantan pod n-parametarskom grupom infinitezimalnih transformacija, onda postoji skup zakona konzervacije koji su zadovoljeni svim rešenjima originalnih diferencijalnih jednačina.

Na ovaj način izvedeno (4.2) se dobija kao posledica invarijantnosti elastičnog potencijala homogenog elastičnog materijala pri koordinatnoj translaciji.

Ako je elastični materijal izotropan i homogen, elastični potencijal se takodje ne menja pri rotaciji koordinata. Ova osobina zajedno sa Neterovom teoremom korišćena je za dobijanje drugog novog zakona konzervacije (1.3).

Spomenuti zakoni konzervacije koji se odnose na invarijantnost elastičnog potencijala pri translaciji i rotaciji ostaju u važnosti u konačnoj elastičnosti pod uslovom da se odgovarajuće veličine odnose na konačnu deformaciju.

Pokazuje se da važi i treći zakon konzervacije (1.4), ali striktno za linearnu elastostatiku koji se odnosi na infinitezimalnu invarijantnost elastičnog potencijala pod jednom grupom skalnih (scale) promena.

Pomenuta tri zakona konzervacije su kompletna u smislu da su to i jedini netrivijalni zakoni konzervacije koji se dobijaju u linearnoj elastostatici koristeći Neterovu teoremu i primenjujući odgovarajuću grupu transformacija.

Fletcher u svom radu [20] vrši proširenje rezultata dobijenih u [19] primenom Neterove teoreme na linearnu elastodinamiku. On u ovom radu dobija šest zakona konzervacije od kojih su prva tri poznati zakoni:

a) zakon količine kretanja

b) zakon momenta količine kretanja

c) zakon konzervacije energije

a druga tri, prošireni zakoni konzervacije dobijeni u [19] za elastostatiku. Ovi zakoni konzervacije se izvode za nešto opštiju grupu transformacija od onih pod kojima su izvedeni zakoni konzervacije u [19] , i pokazuje se da su to i jedini zakoni konzervacije koji se mogu dobiti primenom Neterove teoreme na linearnu elastodinamiku.

Na ovaj način je zaokružena primena Neterove teoreme za nepolarnu linearnu elastičnost. Odmah se postavlja pitanje da li ju je moguće koristiti i u mehanici fluida ili polarnoj elastičnosti? Odgovor je: da. I dat je u radu [21] gde su izvedeni zakoni konzervacije za linearnu mikropolarnu elastostatiku koristeći Neterovu teoremu. Zbog specifičnosti problema korišćena je nešto opštija teorema Netera u modifikovanom obliku pogodnom za primenu u mikropolarnoj elastostatici. Uvodeći pretpostavke koje su fizički opravdane izvedene su koordinatne i vektorske transformacije kojima odgovaraju zakoni konzervacije u obliku integrala J-tipa.

Na taj način se još jednom potvrdjuje široka mogućnost korišćenja Neterove teoreme i ukazuje na eventualnu dalju mogućnost njene primene u ovoj oblasti.

Logično se sada nameće pitanje mogućnosti primene Neterove teoreme na mikropolarnu elastodinamiku i izvodjenja odgovarajućih koordinatnih i vektorskih transformacija i njima odgovarajućih zakona konzervacije korišćenjem iste. Razmatrajući ideje Knowlesa i Sternberga kao i Flechera i koristeći metod za odredjivanje koordinatnih i vektorskih transformacija primenjen u radovima [21] , [36] , [37] , daje se odgovor na to pitanje što upravo predstavlja predmet razmatranja ovog rada.

U svim citiranim radovima dominantni deo je posvećen linearnoj teoriji kontinuuma. Izuzev rada Knowlesa i Sternberga, u ostalim radovima nije razmatran problem nelinearne teorije mehanike kontinuuma i ona ostaje otvorena za ispitivanje mogućnosti primene Neterove teoreme. Drugi važan momenat je vezan za otsustvo zapreminskih sila u problemima mehanike kontinuuma, kojem bi u racionalnoj mehanici odgovarao slučaj problema holonomnih sistema sa potencijalnim silama.

5. PRIMENA NETEROVE TEOREME U MIKROPOLARNOJ TEORIJI

5.1. Osnovne napomene

Mehanika kontinuuma je bazirana na pretpostavci o neprekidnosti materije. U slučaju kada se deformiše telo konačne zapremine v, tada se podrazumeva da je zapremina v tela u potpunosti ispunjena materijom. Drugim rečima, pretpostavlja se da u svakoj tački zapremine v postoji materija. Jasno da ovakve pretpostavke imaju svojih pogodnosti, jer se na taj način fizičke predstave o materiji uskladjuju sa geometrijskim predstavama o prostoru. Pored toga, na ovaj način se omogućuje primena teorije polja, što je veoma bitno u teorijskim istraživanjima. Medjutim, fizička je činjenica da materija nije neprekidna, već poseduje diskretnu strukturu. Ovo nameće pitanje: Ima li smisla i u kojim slučajevima pretpostavka da je materija neprekidna? Odgovor na to pitanje se dobija ako se posmatra talasno kretanje kroz strukturu. U slučaju kada su talasne dužine veoma velike u odnosu na rastojanje izmedju dve susedne materijalne tačke strukture, tj. u slučaju kada je u talasnoj dužini sadržan veliki broj materijalnih tačaka, može se rastojanje izmedju materijalnih tačaka zanemariti, tj. pretpostaviti da je materija neprekidna.

Kratko rečeno, mehanika kontinuuma proučava makroskopsko ponašanje realnih materijala pod dejstvom spoljašnjih efekata i zbog toga predstavlja tzv. fenomenološku teoriju.

Mikrostruktura realnih materijala ima, medjutim, uticaja na njihova makroskopska ponašanja. Korektno opisivanje ponašanja realnih materijala ne može se, prema tome, učiniti bez uzimanja u obzir njihove mikrostrukture. Iz tog razloga u mehanici kontinuuma su formirani i takvi modeli u kojima se obuhvata uticaj mikrostrukture na makroskopsko ponašanje.

Klasičan model kontinuuma pretpostavlja da se materijal sastoji iz neprekidno rasporedjenih materijalnih tačaka čija pomeranja u potpunosti odredjuju kretanje, odnosno deformaciju kontinuuma. Takav model prema tome, karakterisan je sa tri lokalna stepena slobode i ne uzima u obzir uticaj mikrostrukture na makroskopsko ponašanje.

U tom slučaju naponsko stanje, asocirano polju pomeranja, opisuje simetrični tenzor napona, jer se uzimaju u obzir samo prvi gradijenti deformacije.

Uzimanje u obzir mikrostrukture na ponašanje materijala dovodi do povećanja broja lokalnih stepeni slobode. To povećanje se dobija na taj način što se svakoj materijalnoj tački pridoda izvestan broj vektora orijentacije čija je deformacija nezavisna od pomeranja materijalnih tačaka.

U slučaju mikropolarnog kontinuuma, koji su formulisali A.C.Eringen i E.S.Sunhubi [33], može se intrepretirati kao orijentisani kontinuum sa tri nedeformabilna vektora orijentacije, čija je rotacija nezavisna od pomeranja tačaka kontinuuma. Imajući u vidu da se vektori orijentacije ne deformišu, već samo kruto rotiraju nezavisno od pomera nja tačaka kontinuuma, onda ovakav model kontinuuma ima šest lokalnih stepeni slobode. Model kontinuuma sa mikrostrukturom formiran je iz razloga što se pokazalo da za opisivanje ponašanja nekih materijala, klasični model nije dovoljan. To se prvenstveno odnosi na tzv. materijale granularne strukture, a potom i za fluidne suspenzije, polikristale itd. Svakako je značajno napomenuti da je model kontinuuma sa mikrostrukturom uveden proučavajući elastične materijale.

5.2. Model. Kretanje i deformacija

Već je rečeno da su model kontinuuma sa mikrostrukturom formulisali A.C.Eringen i E.S.Suhubi [33], prvenstveno proučavajući elastične materijale. Da bi obuhvatili uticaj mikrostrukture na makroskopsko ponašanje materijala, posmatrali su mali element tela čija zapremina ima graničnu vrednost ispod koje se, iz fizičkih razloga, ne može ići a da se materija u njemu može smatrati neprekidnom. Takav element tela oni su nazvali makroelement. Prema tome, telo konačne zapremine V, ograničene zatvorenom površi S, sastoji se iz velikog broja makroelemenata zapremine dV, a svaki makroelement sastoji se opet, iz velikog broja mikroelemenata zapremine dV'.

Neka se sada telo $\mathcal{B}$, zapremine V ograničene zatvorenom površi S u početnom trenutku vremena t_o nalazi u nedeformisanoj konfiguraciji K_o, koju ćemo smatrati početnom. U deformisanoj konfiguraciji K, koja odgovara trenutku vremena $t > t_o$, telo će imati zapreminu v ograničenu zatvorenom površi S.

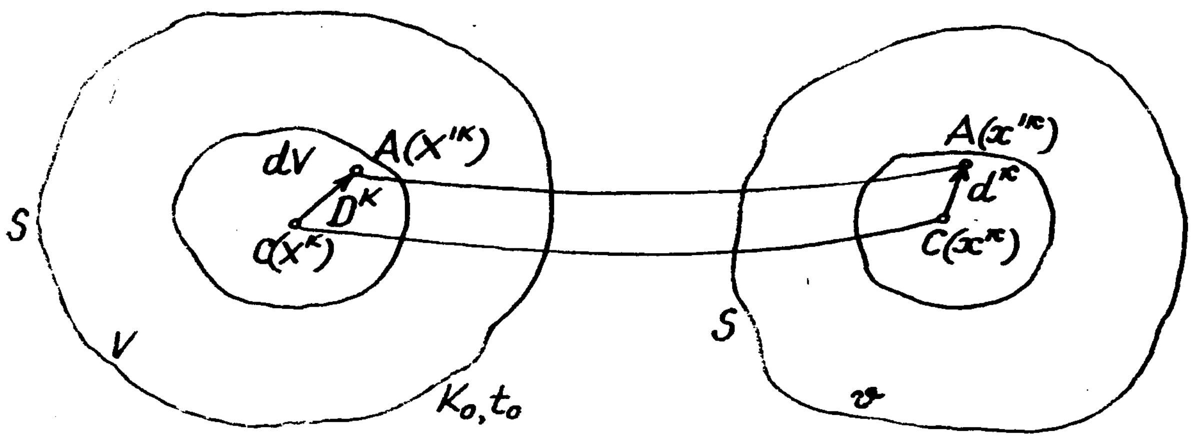
Makroelement dV tela $\mathcal{B}$ usled deformacije prelazi u makroelement dv a mikroelement dV' mikroelement dv'. Pretpostavimo da u mikroelementima nema izvora mase, tako da njihova masa ostaje očuvana tokom kretanja. Na isti način i masa makroelementa ostaje očuvana.

Sa fenemenološkog stanovišta materijalna tačka m·kromorfnog kontinuuma je ekvivalentna deformabilnom telu koje se homogeno deformiše, za razliku od materijalne tačke mikropolarnog kontinuuma kod koga su materijalne tačke ekvivalentne krutom telu.

Neka je $C(X^k)$ centar mase makroelementa zapremine dV, posmatran u odnosu na sistem materijalnih koordinata X^k. Položaj proizvoljne tačke $A(X^k)$ makroelementa, koja reprezentuje jedan mikroelement, može biti odredjen u odnosu na $C(X^k)$, vektorom D^k tako da je

$$X'^K = X^K + D^K \tag{5.1}$$

u odnosu na isti sistem materijalnih koordinata, jer pretpostavljamo da je rastojanje izmedju tačaka $C(X^k)$ i $A(X^k)$ infinitezimalno.



Pri deformaciji, nakon vremena t, makroelement zapremine dV pređe u dv, tačka $C(X^k)$ u tačku $C(x^k)$ i vektor D^k u vektor d^k tako da je

$$x'^{\kappa}=x^{\kappa}+d \tag{5.2}$$

u odnosu na posmatrani sistem koordinata x, pri čemu je

$$d^{\kappa}=d^{\kappa}(X^{K},D^{K},t) \tag{5.3}$$

Razvijajući (5.3) u stepeni red i zadržavajući se na prvoj aproksimaciji dobijamo

$$d^{\kappa}=\chi^{\kappa}_{\cdot K}D^{K} \tag{5.4}$$

Veličine $\chi^{\kappa}_{\cdot K}$ nazivaju se gradijenti mikrodeformacije i karakterišu homogenu deformaciju makroelementa i nezavisne su od kretanja njegovog centra masa.

Kretanje kontinuuma sa mikrostrukturom je tada u potpunosti odredjeno nezavisnim sistemom jednačina

$$\begin{aligned} x^{\kappa}&=x^{\kappa}(X^{K},t)\\ \chi^{\kappa}_{\cdot K}&=\chi^{\kappa}_{\cdot K}(X^{L},t) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

gde prva jednačina u (5.2.5) oredjuje pomeranje tačaka kontinuuma prema tome i translatorno pomeranje, dok druga odredjuje nezavisnu rotaciju.

S obzirom da je tenzor $\chi^{\kappa}_{\cdot K}$ ortogonalan zaključujemo da ima tri medjusobno nezavisne koordinate. Uslov ortogonalnosti možemo napisati u obliku

$$\chi_{\kappa K}=\chi_{K\kappa} \qquad (\chi^{T}=\chi^{-1}) \tag{5.2.6}$$

U tom slučaju (5.2.2) glasi:

$$x'^{\kappa}=x^{\kappa}+\chi^{\kappa}_{\cdot K}D^{K}. \tag{5.2.7}$$

Ako (5.2.7) diferenciramo po vremenu dobijamo

$$v'^{\kappa} = v^{\kappa} + \nu^{\kappa}_{\cdot \ell} d^{\ell} \qquad (5.2.8)$$

što predstavlja izraz za brzinu proizvoljne tačke makroelementa pri čemu je

$$\nu_{\kappa\ell} = \dot{\chi}_{\kappa K} \chi^{K}_{\cdot \ell} \qquad (5.2.9)$$

definisano u centru masa makroelementa i odredjuje trenutnu brzinu rotacije a naziva se giracioni tenzor. U teoriji mikropolarnog kontinuuma giracioni tenzor je antisimetričan,

$$\nu_{\kappa\ell} = -\nu_{\ell\kappa} \qquad (5.2.10)$$

i prema tome ima tri medjusobno nezavisne koordinate.

Gradijenti mikrodeformacije $\chi^{\kappa}_{\cdot K}$ mogu se predstaviti gradijentima mikropomeranja $\varphi^{\kappa}_{\cdot K}$ na isti način kao i gradijenti deformacije sa gradijentima vektora pomeranja tj.

$$\chi^{\kappa}_{\cdot K} = g^{\kappa}_{\cdot K} + \varphi^{\kappa}_{\cdot K} \qquad (5.2.11)$$

S obzirom da je $\chi^{\kappa}_{\cdot K}$ ortogonalan tenzor, na osnovu (5.2.6), sledi

$$\varphi_{\kappa\ell} + \varphi_{\ell\kappa} - \varphi_{m\kappa} \varphi^{m}_{\cdot \ell} = 0 \qquad (5.2.12)$$

odnosno u linearnoj teoriji

$$\varphi_{\kappa\ell} = -\varphi_{\ell\kappa} \qquad (5.2.13)$$

Tenzoru $\varphi_{\kappa\ell}$ odgovara vektor mikrorotacije φ_{κ} definisan sa

$$\varphi_{\kappa} = \varepsilon_{\kappa\ell m} \varphi_{\ell,m}$$

Poznato je [34] da su pogodne mere relativne deformacije za izotropne materijale tenzori

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} - \varepsilon_{ijk}\varphi_k$$
$$\varkappa_{ij} = \varphi_{i,j} \qquad (5.2.14)$$

gde u_i predstavlja vektorsko polje pomeranja a ε_{ijk} je trodimenzionalni alternativni tenzor.

Odgovarajuće jednačine kretanja mikropolarnog kontinuuma su [35]

$$t_{kl,k} + \rho f_l = \rho \ddot{u}_l$$
$$m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn} t_{mn} + \rho l_l = \rho j \ddot{\varphi}_l \qquad (5.2.15)$$

gde su: t_{kl} tenzor napona, ρ gustina mase, f_l zapreminska sila, m_{kl} tenzor naponskih spregova, l_l moment zapreminskih sila, $j\delta_{kl}$ tenzor mikroinercije.

Pored toga jednačinama polja (5.2.14) pridružujemo konstitutivne jednačine, pretpostavljajući postojanje skalarne vrednosti elastičnog potencijala W(ε_{ij} , $\varkappa_{ij}$), u obliku

$$t_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$
$$m_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varkappa_{ij}} \qquad (5.2.16)$$

Pretpostavljamo da je W neprekidna i diferencijabilna funkcija svojih argumenata. Ako pretpostavimo da nema inicijalnih napona, u linearnoj teoriji, ona je kvadratni polinom oblika

$$W = \frac{1}{2} A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} B_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} \qquad (5.2.17)$$

gde su

$$A_{ijkl} = \nu_1 \delta_{ij}\delta_{kl} + \nu_2 \delta_{ik}\delta_{jl} + \nu_3 \delta_{il}\delta_{jk} \qquad (5.2.18)$$

$$B_{ijkl} = \tau_1 \delta_{ij}\delta_{kl} + \tau_2 \delta_{ik}\delta_{jl} + \tau_3 \delta_{il}\delta_{jk} \qquad (5.2.19)$$

materijalni izotropni tenzori a ν_1 , ν_2 , ν_3 , τ_1 , τ_2 i τ_3 materijalne konstante.

Za pisanje jednačina kretanja u odsustvu zapreminskih sila (5.2.15) u kompaktnom obliku, koji je pogodan za naša dalja razmatranja, pogodno je izraziti (5.2.14) na sledeći način:

$$\varepsilon_{i\alpha} = u_{i,\alpha} - \varepsilon_{i\alpha k4}\varphi_k$$
$$\varkappa_{i\alpha} = \varphi_{i,\alpha} \qquad (5.2.20)$$

Grčki indeksi uzimaju vrednosti 0, 1, 2, 3, dok Latinski indeksi uzimaju vrednosti 1, 2,3, a sabiranje se vrši po ponovljenim indeksima. Sa R označavamo četverodimenzionu oblast

$$R = [0,T] \times D$$

čiji je tipični element

$$\xi_\alpha = \begin{cases} x_i & \alpha = i \\ t & \alpha = 4 \end{cases}$$

Dalje, definišemo

$$A_{i\alpha k\beta} = \begin{cases} A_{ijkl} & \alpha = j, \beta = l \\ -\rho\delta_{ik} & \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \end{cases}$$

$$B_{i\alpha k\beta} = \begin{cases} B_{ijkl} & \alpha = j, \beta = l \\ -\rho j\delta_{ik} & \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \end{cases} \qquad (5.2.21)$$

Lagranžijan gustine definišemo na sledeći način:

$$L = W - \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i - \frac{1}{2}\rho j\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_i \qquad (5.2.22)$$

Koristeći (5.2.16) i (5.2.21) možemo Lagranžijan gustine (5.2.22) napisati u mnogo kompaktnijem obliku:

$$L = \frac{1}{2}A_{i\alpha k\beta}\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon_{k\beta} + \frac{1}{2}B_{i\alpha k\beta}\varkappa_{i\alpha}\varkappa_{k\beta} \qquad (5.2.23)$$

Na osnovu (5.2.20) jasno je da se (5.2.23) može napisati u obliku

$$L(\varepsilon_{i\alpha}, \varkappa_{i\alpha}) = \mathcal{L}(u_{i,\alpha}, \varphi_i, \varphi_{i,\alpha}) \qquad (5.2.24)$$

gde $\mathcal{L}$ predstavlja isto tako Lagranžijan gustine.

Koristeći (5.2.16), jednačine kretanja (5.2.15) u odsustvu zapreminskih sila, možemo napisati u obliku:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{i\alpha}}\right)_{,\alpha} = 0$$
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \kappa_{i\alpha}}\right)_{,\alpha} + \mathcal{E}_{ijk}\frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{j\alpha}} = 0 \qquad (5.2.25)$$

5.3. Specijalni slučaj Neterove teoreme

Videli smo da je Neterova teorema bazirana na pretpostavci da je osnovni integral invarijantan pri odredjenoj grupi transformacija i da je o velikog značaja u primenama teorije pola jer ustanovljava postojanje i tačnu prirodu izvesnih zakona konzervacije koji rezultuju iz datih zahteva invarijantnosti.

Pretpostavimo da nam je data funkcija H(ξ_α , u_i, u_i , φ_i , $\varphi_{i\alpha}$) klase C od 34 nezavisno promenljivih koje su sve funkcije ξ , koje je dato sa (5.2.21), tj.

$$u_i = u_i(\xi_\alpha)$$
$$u_{i,\alpha} = u_i(\xi_\alpha)$$
$$\varphi_i = \varphi_i(\xi_\alpha) \qquad (5.3.1)$$
$$\varphi_{i,\alpha} = \varphi_i(\xi_\alpha)$$

Pretpostavimo dalje da nam je data jednoparametarska familija transformacija klase C u obliku

$$\xi_\alpha^* = \xi_\alpha^*(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi}; \eta)$$
$$u_j^* = u_j^*(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi}; \eta) \qquad (5.3.2)$$
$$\varphi_j^* = \varphi_j^*(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi}; \eta)$$

U slučaju η =o zahtevamo da se transformacije redukuju na identičnost, tj.

$$\xi^*_\alpha = \xi_\alpha$$
$$u^*_j = u_j$$
$$\varphi^*_j = \varphi_j \; .$$

U tom slučaju moguće je (5.3.2) izraziti u obliku

$$\left.\begin{aligned} \xi^*_\alpha &= \xi_\alpha + \alpha_\alpha(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi})\cdot\eta + O(\eta^2) \\ u^*_j &= u_j + \beta_j(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi})\cdot\eta + O(\eta^2) \\ \varphi^*_j &= \varphi_j + \gamma_j(\underset{\sim}{\xi}, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi})\cdot\eta + O(\eta^2) \end{aligned}\right\} \eta\to 0 \qquad (5.3.3)$$

gde je po definiciji

$$\begin{aligned} \alpha_\alpha &= \left(\frac{\partial \xi^*_\alpha}{\partial \eta}\right)_{/\eta=0} \\ \beta_j &= \left(\frac{\partial u^*_j}{\partial \eta}\right)_{/\eta=0} \\ \gamma_j &= \left(\frac{\partial \varphi^*_j}{\partial \eta}\right)_{/\eta=0} . \end{aligned} \qquad (5.3.4)$$

Neka je sada funkcional Φ na osnovu uvedenih funkcija za bilo koja vektorska polja $\underset{\sim}{u}$ i $\underset{\sim}{\varphi}$ dvostruko diferencijabilna na $D \times [0,\infty]$ definisan sa

$$\Phi\{\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi}\} = \int_0^T \int_D H(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}, \nabla \underset{\sim}{u}, \dot{\underset{\sim}{u}}, \underset{\sim}{\varphi}, \nabla\underset{\sim}{\varphi}, \dot{\underset{\sim}{\varphi}}) dx dt \qquad (5.3.5)$$

i tako definisano Φ smatrajmo dopustivim funkcionalom odredjenim sa H podoblasti Ω za svaku regularnu otvorenu oblast D u E. Sada možemo formulisati sledeću teoremu.

Teorema 5.3.

Nek̦a D bude oblast u E^3 i neka Φ bude dopustivi funkcional u D generisan sa H. Neka (5.3.2) bude regularna familija koordinatnih i vektorskih transformacija. Pretpostavimo da su $\underset{\sim}{u}$ i $\underset{\sim}{\varphi}$ vektorska polja koja zadovoljavaju Ojler-Lagranžove jednačine

$$\begin{aligned} H_{,u_k}(\underset{\sim}{X}) - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[H_{,u_{k,\alpha}}(\underset{\sim}{X})\right] &= 0 \\ H_{,\varphi_k}(\underset{\sim}{X}) - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[H_{,\varphi_{k,\alpha}}(\underset{\sim}{X})\right] &= 0 \end{aligned} \qquad (5.3.6)$$

gde je $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}, \nabla\underset{\sim}{u}, \dot{u}, \underset{\sim}{\varphi}, \nabla\underset{\sim}{\varphi}, \dot{\varphi})$

Onda je Φ infinitezimalno invarijantno u $(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\varphi})$ u odnosu na (5.3.2) ako i samo ako vektorska polja $(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\varphi})$ zadovoljavaju

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[p_i H_{,u_{i,\alpha}} + q_i H_{,\varphi_{i,\alpha}} + \alpha_\alpha H\right] = 0 \tag{5.3.7}$$

gde je

$$\begin{aligned} p_i &= \beta_i - u_{i,\alpha}\alpha_\alpha \\ q_i &= \gamma_i - \varphi_{i,\alpha}\alpha_\alpha \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

a α_α, β_i , i γ_i dati su pomoću (5.3.4).
Štaviše, (5.3.7) je ekvivalentno zakonu konzervacije u integralnom obliku

$$\int\left[p_i H_{,u_{i,\alpha}} + q_i H_{,\varphi_{i,\alpha}} + \alpha_\alpha H\right] n_\alpha \, dS = 0 \tag{5.3.9}$$

za svaku površinu S koja je granica regularne podoblasti D pod uslovom da je n_α jedinični vektor spoljne normale na R.

Jednačine (5.2.20) i (5.2.24) daju veze

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,\alpha}} &= \frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{i\alpha}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} &= -\varepsilon_{i\alpha\kappa 4}\frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{j\kappa}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i,\alpha}} &= \frac{\partial L}{\partial \kappa_{i\alpha}} \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

koje su nam potrebne da bismo primenili Teoremu 5.3.
Za dalja konkretna istraživanja biramo H u Teoremi 5.3. da bude $\mathcal{L}$ tj.

$$H(x_i, u_i, u_{i,\alpha}, \varphi_i, \varphi_{i,\alpha}) \equiv \mathcal{L}(u_{i,\alpha}, \varphi_i, \varphi_{i,\alpha}). \tag{5.3.11}$$

Restrikcija na H data sa (5.3.11) jasno pokazuje da se (5.3.6) redukuje na

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\mathcal{L}_{,u_{\kappa,\alpha}} = 0 \\ &\mathcal{L}_{,\varphi_\kappa} - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\mathcal{L}_{,\varphi_{\kappa,\alpha}} = 0 \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Koristeći (5.3.10) Ojler-Lagranžove jednačine (5.3.12) sada se redukuju na jednačine

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{i\alpha}}\right)_{,\alpha}=0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \varkappa_{i\alpha}}\right)_{,\alpha}+\varepsilon_{ij\alpha}\frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{j\alpha}}=0 \qquad (5.3.13)$$

koje važe zbog (5.2.25).

Sada možemo formulisati sledeću teoremu.

Teorema 5.3

Neka D bude oblast u trodimenzionalnom prostoru E^3 i pretpostavimo da u D, polje pomeranja $\underset{\sim}{u}$ i polje mikrorotacije $\underset{\sim}{\varphi}$ zadovoljavaju jednačine kretanja (5.2.25) za linearne homogene izotropne elastične mikropolarne materijale. Tada važi sledeći zakon konzervacije:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[p_i \mathcal{L}_{,u_{i,\alpha}}+q_i \mathcal{L}_{,\varphi_{i,\alpha}}+\alpha_\alpha \mathcal{L}\right]=0 \qquad (5.3.14)$$

Korisnost Teoreme 5.3. kao sredstva za izvodjenje zakona konzervacije u mikropolarnom kontinuumu zavisi od postojanja regularnih familija koordinatnih i vektorskih preslikavanja (5.3.3).

Naš sledeći zadatak sastoji se u tome da pokažemo da zaista postoje familije preslikavanja (5.3.3) u odnosu na koje je Φ infinitezialno invarijantno u $(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\varphi})$.

5.4. Inverzna Neterova teorema

Na osnovu ovde izložene Neterove teoreme videli smo da se mogu dobiti odgovarajući zakoni konzervacije. Osnovni problem pri iznalaženju tih zakona konzervacije vezan je za nalaženje odgovarajućih koordinatnih i vektorskih transformacija (5.3.3) pod kojima je funkcional Φ infinitezimalno invarijantan. Na osnovu iste teoreme može se zaključiti da postojanje vektorskih polja $(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\varphi})$, koja zadovoljavaju (5.3.6), i uslova infinitezimalne invarijantnosti Φ povlači za sobom da $(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\varphi})$ moraju zadovoljavati (5.3.7).

Ove relacije u tom slučaju predstavljaju jedine podatke na osnovu kojih se mogu odrediti tražene transformacije. Medjutim, iz (5.3.4) i (5.3.7) se vidi da se transformacije (5.3.3) mogu odrediti samo do na linearni član po η . Ali veličine definisane sa (5.3.4) su i jedine koje su nam potrebne za odgovarajuće zakone konzervacije.

Prema tome, naš zadatak se svodi na odredjivanje veličina (5.3.4) u datim konkretnim slučajevima. Mi ćemo se u ovom odeljku zadržati na razmatranju linearnih mikropolarnih elastodinamičkih problema izotropnih tela. U tom cilju pre nego što predjemo na formulaciju teoreme za ovaj slučaj, dajemo diferencijalni oblik (5.3.14) koji ćemo dalje koristiti

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[p_i \mathcal{L}_{,u_{i,\alpha}} + q_i \mathcal{L}_{,\varphi_{i,\alpha}} + \alpha_\alpha \mathcal{L}\right] = 0. \qquad (5.4.1)$$

Teorema 5.4.

Pretpostavimo da razmatramo mikropolarni izotropni elastični materijal i neka je funkcional ϕ dat pomoću

$$\phi = \int_0^T \int_D \mathcal{L}(\nabla u, \dot{u}, \varphi, \nabla\varphi, \dot{\varphi})\, dx\, dt \qquad (5.4.2)$$

gde je $\mathcal{L}$ Lagranžijan gustine dat sa (5.2.24) a D ograničena regularna podoblast u E. Neka su (5.2.23) i (5.2.25) zadovoljeni. U tom slučaju ϕ je infinitezimalno invarijantno u ($\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varphi}$) pod skupom transformacija (5.3.3) ako $\underset{\sim}{u}$ i $\underset{\sim}{\varphi}$ zadovoljavaju jednačine (5.2.25) za svako D ako i samo ako su α_α , β_i i γ_i dati sa

$$\begin{aligned} \alpha_\alpha &= a_\alpha \\ \beta_i &= \varepsilon_{ijk} x_j c_k + d_i \\ \gamma_i &= c_i \end{aligned} \qquad (5.4.3)$$

gde su a_α , b_i , c_i i d_i realne konstante.

Dokaz Teoreme 5.4.

Iz Teoreme 5.4. videli smo da (5.4.1) važi za izotropne mikropolarna elastodinamička tela. Koristeći jednačine

(5.2.24) i (5.3.10) zakon konzervacije (5.4.1) može biti napisan u obliku

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[p_i \frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{i\alpha}} + q_i \frac{\partial L}{\partial \kappa_{i\alpha}} + \alpha_\alpha L\right] = 0. \qquad (5.4.4)$$

Smenjujući jednačine kretanja (5.2.25) u (5.4.4) dobijamo

$$\frac{\partial L}{\partial \mathcal{E}_{i\alpha}} r_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \kappa_{i\alpha}} S_{i\alpha} + L \alpha_{\gamma,\gamma} = 0 \qquad (5.4.5)$$

gde su $r_{i\alpha}$ i $S_{i\alpha}$ dati pomoću

$$\begin{aligned} r_{i\alpha} &= p_{i,\alpha} - \mathcal{E}_{\kappa i\alpha 4} q_\kappa + \mathcal{E}_{i\alpha,\beta}\alpha_\beta \\ &= \beta_{i,\alpha} - u_{i,\beta}\alpha_{\beta,\alpha} - \mathcal{E}_{\kappa i\alpha 4}\gamma_\kappa \\ S_{i\alpha} &= q_{i,\alpha} + \kappa_{i\alpha,\beta}\alpha_\beta \\ &= \gamma_{i,\alpha} - \varphi_{i,\beta}\alpha_{\beta,\alpha} \end{aligned}$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{aligned} r_{i\alpha} = {} & \beta_{i,\alpha} + \beta_{i,u_n} u_{n,\alpha} + \beta_{i,\varphi_n}\varphi_{n,\alpha} - u_{i,\beta}\alpha_{\beta,\alpha} \\ & - u_{i,\beta}\alpha_{\beta,u_n} u_{n,\alpha} - u_{i,\beta}\alpha_{\beta,\varphi_n}\varphi_{n,\alpha} - \mathcal{E}_{\kappa i\alpha 4}\gamma_\kappa \end{aligned} \qquad (5.4.6)$$

$$\begin{aligned} S_{i\alpha} = {} & \gamma_{i,\alpha} + \gamma_{i,u_n} u_{n,\alpha} + \gamma_{i,\varphi_n}\varphi_{n,\alpha} - \alpha_{\beta,\alpha}\varphi_{i,\beta} - \\ & - \varphi_{i,\beta}\alpha_{\beta,u_n} u_{n,\alpha} - \varphi_{i,\beta}\alpha_{\beta,\varphi_n}\varphi_{n,\alpha}\,, \end{aligned} \qquad (5.4.7)$$

gde smo koristili (5.2.20) i (5.3.8).

Zamenjujući (5.2.20) u (5.4.5) imamo da je

$$A_{i\alpha\kappa\beta}\left(2 r_{i\alpha} + \mathcal{E}_{i\alpha}\alpha_{\beta,\beta}\right)\mathcal{E}_{\kappa\beta} + B_{i\alpha\kappa\beta}\left(2 S_{i\alpha} + \kappa_{i\alpha}\alpha_{\beta,\beta}\right)\kappa_{\kappa\beta} = 0 \qquad (5.4.8)$$

Izraz (5.4.8) mora biti zadovoljen bez ikakvih ograničenja na $u_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ da bi Lagranžijan bio infinitezimalno invarijantan u odnosu na (5.3.3) tj. zahteva se da odgovarajuće koordinatne i vektorske transformacije (5.3.3) ne zavise od materijalnih osobina kontinuuma. Ovaj zahtev je sa fizičke strane potpuno opravdan jer zakoni konzervacije, bilo koje vrste, važe za sve vrste mikropolarnih materijala i ne zavisni su od njihovih materijalnih svojstava. Sa matematičke tačke gledišta to je ekvivalentno zahtevu da su izrazi uz nezavisne koeficijente ν_1 , ν_2 , ν_3 , τ_1 , τ_2 , τ_3 , ρ i j jednaki nuli.

U tom slučaju očigledno je da u (5.4.8) mora biti posebno

$$A_{i\alpha\kappa\beta}\left(2r_{i\alpha}+\varepsilon_{i\alpha}\alpha_{\beta,\beta}\right)\varepsilon_{\kappa\beta}=0 \qquad (5.4.9)$$

$$B_{i\alpha\kappa\beta}\left(2S_{i\alpha}+\kappa_{i\alpha}\,\alpha_{\beta,\beta}\right)\kappa_{\kappa\beta}=0 \qquad (5.4.10)$$

S obzirom na (5.2.21) i gore navedene zahteve ovi izrazi postaju

$$\begin{aligned}
\rho:&\quad \left(2r_{io}+\varepsilon_{io}\alpha_{\beta,\beta}\right)\varepsilon_{io}=0\\
\nu_1:&\quad \left(2r_{ii}+\varepsilon_{ii}\alpha_{\beta,\beta}\right)\varepsilon_{jj}=0\\
\nu_2:&\quad \left(2r_{ij}+\varepsilon_{ij}\alpha_{\beta,\beta}\right)\varepsilon_{ij}=0\\
\nu_3:&\quad \left(2r_{ij}+\varepsilon_{ij}\alpha_{\beta,\beta}\right)\varepsilon_{ji}=0
\end{aligned} \qquad (5.4.11)$$

$$\begin{aligned}
j:&\quad \left(2S_{io}+\kappa_{io}\,\alpha_{\beta,\beta}\right)\kappa_{io}=0\\
\tau_1:&\quad \left(2S_{ii}+\kappa_{ii}\,\alpha_{\beta,\beta}\right)\kappa_{jj}=0\\
\tau_2:&\quad \left(2S_{ij}+\kappa_{ij}\,\alpha_{\beta,\beta}\right)\kappa_{ij}=0\\
\tau_3:&\quad \left(2S_{ij}+\kappa_{ij}\,\alpha_{\beta,\beta}\right)\kappa_{ji}=0
\end{aligned} \qquad (5.4.12)$$

Ispitivanje ovih jednakosti vršićemo odredjenom logikom.

Izraz uz ρ

Koristeći (5.4.6) u slučaju $\alpha=0$ izraz (5.4.11) može da se napiše u obliku

$$\begin{aligned}
&\Big[2\beta_{i,o}+2\beta_{i,u_n}U_{n,o}+2\beta_{i,\varphi_n}\varphi_{n,o}-2U_{i,\beta}\,\alpha_{\beta,o}-\\
&-2U_{i,\beta}\,\alpha_{\beta,u_n}U_{n,o}-2U_{i,\beta}\,\alpha_{\beta,\varphi_n}\varphi_{n,\rho}+\\
&+U_{i,o}\left(\alpha_{\beta,\beta}+\alpha_{\beta,u_n}U_{n,\beta}+\alpha_{\beta,\varphi_n}\varphi_{n,\beta}\right)\Big]U_{i,o}=0
\end{aligned} \qquad (5.4.13)$$

Pošto su α_β , β_i i δ_i nezavisni po $U_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ sledi da linearni, kvadratni i kubni članovi po $U_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ u (5.4.13) moraju pojedinačno biti jednaki nuli tj.:

Linearni član po $u_{i,\alpha}$

$$\left(2\beta_{i,0} + 2\beta_{i,\varphi_n}\varphi_{n,0}\right)u_{i,0} = 0 \tag{5.4.14}$$

Kvadratni član po $u_{i,\alpha}$

$$\begin{aligned}&\left(2\beta_{i,u_n}u_{n,0} - 2u_{i,j}\alpha_{j,0} - 2u_{i,0}\alpha_{0,0} - \right.\\ &- 2u_{i,j}\alpha_{j,\varphi_n}\varphi_{n,0} - 2u_{i,0}\alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}\\ &\left. + u_{i,0}\alpha_{\gamma,\gamma} + u_{i,0}\alpha_{j,\varphi_n}\varphi_{n,j} + u_{i,0}\alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}\right]u_{i,0} = 0\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Kubni član po $u_{i,\alpha}$

$$\begin{aligned}&\left(-2u_{i,j}\alpha_{j,u_n}u_{n,0} + u_{i,0}\alpha_{j,u_n}u_{n,j} + \right.\\ &\left. + u_{i,0}\alpha_{0,u_n}u_{n,0} - 2u_{i,0}\alpha_{0,u_n}u_{n,0}\right)u_{i,0} = 0\end{aligned} \tag{5.4.16}$$

Iz linearnog člana s obzirom na nezavisnost od $u_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ imamo da je

$$\begin{aligned}&\beta_{i,0} = 0\\ &\beta_{i,\varphi_n} = 0\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Grupišući u kvadratnom članu (5.4.15) članove po $u_{i,\alpha}$ imamo

$$\begin{aligned}&\left[2\beta_{i,u_n}u_{n,0} - 2\alpha_{0,0}u_{i,0} - 2\alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}u_{i,0} + \right.\\ &\qquad\left. + \alpha_{\gamma,\gamma}u_{i,0} + \alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}u_{i,0}\right]u_{i,0} + \\ &\quad + \left[2\alpha_{j,0} - 2\alpha_{j,\varphi_n}\varphi_{n,0}\right]u_{i,j}u_{i,0} = 0.\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

Jednačina (5.4.18) mora biti zadovoljena nezavisno po kvadratnom i linearnom delu po $u_{i,0}$ tj.

$$\begin{aligned}&\left[2\beta_{i,u_n}u_{n,0} - 2\alpha_{0,0}u_{i,0} - 2\alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}u_{i,0} + \right.\\ &\qquad\left. + \alpha_{\gamma,\gamma}u_{i,0} + \alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}u_{i,0}\right]u_{i,0} = 0\\ &\left[2\alpha_{j,0} - 2\alpha_{j,\varphi_n}\varphi_{n,0}\right]u_{i,j}u_{i,0} = 0\end{aligned} \tag{5.4.19}$$

gde su iskorišćeni uslovi (5.4.17).

Iz ($5.4.19_2$) direktno sledi, s obzirom na linearnost jednačine po članovima $u_{i,0}$ i $u_{i,j}$, da je

$$\begin{aligned}&\alpha_{j,0} = 0\\ &\alpha_{j,\varphi_n} = 0\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

Na isti način, zbog nezavisnosti izraza od $u_{i,\rho}$ i $\varphi_{i,o}$ (5.4.19$_2$), može se napisati nezavisno po kvadratnom članu od $u_{i,\rho}$ i linearnom članu po $\varphi_{i,o}$

$$\left[2\beta_{i,u_n}u_{n,o}-2\alpha_{o,o}u_{i,o}-\alpha_{\gamma,\gamma}u_{i,\rho}\right]u_{i,\rho}=0$$
$$\alpha_{o,\varphi_n}\varphi_{n,o}u_{i,o}u_{i,\rho}=0. \tag{5.4.21}$$

Vidimo da iz (5.4.21$_2$) neposredno sledi

$$\alpha_{o,\varphi_n}=0 \tag{5.4.22}$$

kao koeficijent uz mešoviti član.
Zbog toga (5.4.21$_1$) postaje

$$\left[\alpha_{\gamma,\gamma}u_{i,\rho}+2\beta_{i,u_n}u_{n,o}-2\alpha_{o,o}u_{i,\rho}\right]u_{i,\rho}=0. \tag{5.4.23}$$

Diferenciranjem (5.4.23) po $u_{j,\rho}$ dobija se

$$\left[\left(\alpha_{\gamma,\gamma}-2\alpha_{o,o}\right)\delta_{ij}+\left(\beta_{j,u_i}+\beta_{i,u_j}\right)\right]u_{i,\rho}=0,$$

odakle neposredno sledi da je

$$\beta_{(i,u_j)}=-\frac{1}{2}\left(\alpha_{\gamma,\gamma}-2\alpha_{o,o}\right)\delta_{ij} \tag{5.4.24}$$

<u>Izraz uz j</u>

S obzirom na (5.2.20) i (5.4.7) možemo (5.4.12$_1$) napisati u obliku

$$\left[2\gamma_{i,\rho}+2\gamma_{i,u_n}u_{n,o}+2\gamma_{i,\varphi_n}+2\alpha_{\beta,o}\varphi_{i,\beta}-\right.$$
$$-2\varphi_{i,\beta}\alpha_{\beta,u_n}u_{n,o}-2\varphi_{i,\beta}\alpha_{\beta,\varphi_n}\varphi_{n,o}+$$
$$\left.+\varphi_{i,o}\left(\alpha_{\gamma,\gamma}+\alpha_{\beta,u_n}u_{n,\beta}+\alpha_{\beta,\varphi_n}\varphi_{n,\beta}\right)\right]\varphi_{i,o}=0. \tag{5.4.25}$$

Iz istih razloga kao i u prethodnom slučaju, pošto su α_γ i γ_i nezavisni od $u_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$, sledi opet da linearni, kvadratni i kubni članovi po $u_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ u (5.4.25) moraju biti nezavisno jednaki nuli:
Linearni član po $\varphi_{i,o}$

$$\left[2\gamma_{i,o}+2\gamma_{i,u_n}u_{n,o}\right]\varphi_{i,o}=0 \tag{5.4.26}$$

Kvadratni član po $\varphi_{i,0}$

$$\begin{aligned}\Big[2\gamma_{i,\varphi_n}\varphi_{n,0}-2\alpha_{0,0}\varphi_{i,0}-2\varphi_{i,j}\alpha_{j,u_n}U_{n,0}-\\ -2\varphi_{i,0}\alpha_{0,u_n}U_{n,0}+\varphi_{i,0}\alpha_{\gamma,\gamma}+\\ +\varphi_{i,0}\alpha_{j,u_n}U_{n,j}+\varphi_{i,0}\alpha_{0,u_n}U_{n,0}\Big]\varphi_{i,0}=0.\end{aligned} \tag{5.4.27}$$

Kubni član po $\varphi_{i,0}$

$$\begin{aligned}\Big[-2\varphi_{i,j}\alpha_{j,\varphi_n}\varphi_{n,0}-2\varphi_{i,0}\alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}+\\ +\varphi_{i,0}\alpha_{j,\varphi_n}\varphi_{n,j}+\varphi_{i,0}\alpha_{0,\varphi_n}\varphi_{n,0}\Big]\varphi_{i,0}=0.\end{aligned} \tag{5.4.28}$$

Zbog linearnosti po $\varphi_{i,0}$ iz (5.4.26) sledi

$$\begin{aligned}\gamma_{i,0}&=0\\ \gamma_{i,u_n}&=0\end{aligned} \tag{5.4.29}$$

U tom slučaju, koristeći (5.4.29), kvadratni član (5.4.27) se raspada na kvadratni po $\varphi_{i,0}$ i mešoviti deo

$$\Big[2\gamma_{i,\varphi_n}\varphi_{n,0}-2\alpha_{0,0}\varphi_{i,0}+\varphi_{i,0}\alpha_{\gamma,\gamma}\Big]\varphi_{i,0}=0 \tag{5.4.30}$$

$$\alpha_{0,u_n}U_{u,0}\varphi_{i,0}\varphi_{i,0}=0. \tag{5.4.31}$$

Očigledno iz (5.4.31) neposredno sledi

$$\alpha_{0,u_n}=0. \tag{5.4.32}$$

Diferencirejući (5.4.30) po $\varphi_{j,0}$ i sredjujući na isti način kao i (5.4.23) dobijamo

$$\gamma_{(i,\varphi_n)}=-\frac{1}{2}\left(\alpha_{\gamma,\gamma}-2\alpha_{0,0}\right)\delta_{ij}. \tag{5.4.33}$$

Kubni član (5.4.28) s obzirom na (5.4.20) i (5.4.22) je, identički zadovoljen.
Imajući u vidu (5.4.32) kubni član (5.4.16) može se sada napisati u obliku

$$\alpha_{j,u_n}\left(U_{i,0}U_{n,j}-2U_{i,j}U_{n,0}\right)=0 \tag{5.4.34}$$

odakle posle kraćeg računanja sledi da je

$$\alpha_{j,u_n}=0 \tag{5.4.35}$$

odnosno na, osnovu (5.4.32) i (5.4.35),

$$\alpha_{\beta,u_n}=0. \tag{5.4.36}$$

Izraz uz ν_1

Uzimajući u obzir (5.4.17), (5.4.20), (5.4.22) i (5.4.36), (5.4.6) postaje

$$r_{ii}=\beta_{i,i}+\beta_{i,u_n}u_{n,i}-u_{i,\beta}\,\alpha_{\beta,i}. \tag{5.4.37}$$

Smenjujući (5.4.37) u (5.4.11$_2$) i koristeći (5.4.20) dobijamo

$$\begin{aligned}&[2\beta_{i,i}+2\beta_{i,u_n}u_{n,i}-2u_{i,j}\alpha_{j,i}-2u_{i,o}\alpha_{o,i}-\\&-2u_{i,j}\alpha_{j,u}\alpha_{j,u_n}u_{n,i}-\alpha u_{i,o}\alpha_{o,u_n}u_{n,i}+\\&+u_{i,i}\alpha_{\gamma,\gamma}+u_{i,i}\alpha_{j,u_n}u_{n,j}+u_{i,i}\alpha_{o,u_n}u_{n,o}]u_{j,i}=0.\end{aligned} \tag{5.4.38}$$

Vodeći računa da su α_β i β_i nezavisni od $u_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ sledi da linearni, kvadratni i kubni član po $u_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ u (5.4.38) moraju pojedinačno biti jednaki nuli tj.
Linearni član po $u_{i,j}$

$$2\beta_{i,i}\,u_{j,j}=0. \tag{5.4.39}$$

Kvadratni član po $u_{i,j}$

$$\begin{aligned}&[2\beta_{i,u_n}u_{n,i}-2u_{i,j}\alpha_{j,i}-2u_{i,o}\alpha_{o,i}+\\&+u_{i,i}\alpha_{\gamma,\gamma}]u_{p,p}=0.\end{aligned} \tag{5.4.40}$$

Kubni član po $u_{i,j}$

$$\begin{aligned}&[-2u_{i,j}\alpha_{j,u_n}u_{n,i}-2u_{i,o}\alpha_{o,u_n}u_{n,i}+\\&+u_{i,i}\alpha_{j,u_n}u_{n,j}]u_{p,p}=0.\end{aligned} \tag{5.4.41}$$

Iz linearnog člana (5.4.39) imamo neposredno da je

$$\beta_{i,i}=0 \tag{5.4.42}$$

zbog linearnosti po $u_{j,j}$.
Kvadratni član (5.4.40) možemo napisati na sledeći način:

$$[2\beta_{i,u_n} u_{n,i} - 2u_{i,j}\alpha_{j,i} + u_{i,i}\alpha_{\gamma,\gamma}]u_{p,p} = 0 \qquad (5.4.43)$$

$$2\alpha_{o,i}u_{i,o}u_{p,p} = 0 \qquad (5.4.44)$$

Iz (5.4.44) direktno sledi, s obzirom na linearnost jednačine po članovima $u_{i,o}$ i $u_{p,p}$ da je

$$\alpha_{o,i} = 0. \qquad (5.4.45)$$

Pišući (5.4.43) u obliku

$$[2\beta_{i,u_n} - 2\alpha_{i,n} + \alpha_{\gamma,\gamma}\delta_{in}]u_{n,i}u_{p,p} = 0 \qquad (5.4.46)$$

i diferencirajući dva puta u odnosu na gradijente pomeranja $u_{i,j}$ nalazimo da je

$$[\beta_{\ell,u_k} - \alpha_{\ell,k} + \alpha_{\gamma,\gamma}\delta_{\ell k}]\delta_{ij} + [\beta_{i,u_j} - \alpha_{i,j}]\delta_{\ell k} = 0. \qquad (5.4.47)$$

Ako sada u (5.4.47) izvršimo konstrakciju indeksa, najpre u odnosu na k i l, a potom u odnosu na i i j dobijamo

$$3(\beta_{i,u_j} - \alpha_{i,j}) + (\beta_{k,u_k} - \alpha_{k,k} + 3\alpha_{\gamma,\gamma})\delta_{ij} = 0 \qquad (5.4.48)$$

$$2\beta_{n,u_n} - 2\alpha_{n,n} = -3\alpha_{\gamma,\gamma}. \qquad (5.4.49)$$

Koristeći (5.4.48) i (5.4.49) imamo

$$\beta_{i,\kappa_j} - \alpha_{i,j} = -\frac{1}{2}\alpha_{\gamma,\gamma}\delta_{ij}. \qquad (5.4.50)$$

Kubni član (5.4.41), imajući u vidu (5.4.32) i (5.4.35), je indentički zadovoljen.

Izraz uz τ_1

Koristeći rezultate (5.4.20), (5.4.22), (5.4.29), (5.4.32), (5.4.35) i (5.4.45) možemo (5.4.7) za α=i napisati

$$S_{ij} = \varepsilon_{i,i} + \varepsilon_{i,\varphi_n}\varphi_{n,i} - \alpha_{n,i}\varphi_{i,n} \qquad (5.4.51)$$

u tom slučaju (5.4.12$_2$) postaje

$$[2\varepsilon_{i,i}]\varphi_{j,j} + [2\varepsilon_{i,\varphi_n}\varphi_{n,i} - \alpha_{n,i}\varphi_{i,n} + \varphi_{i,i}\alpha_{\gamma,\gamma}]\varphi_{j,j} = 0 \qquad (5.4.52)$$

kako su α_{γ} i ε_{i} nezavisni od $u_{i,\alpha}$ i $\varphi_{i,\alpha}$ to moraju linearni i kvadratni član po $\varphi_{i,j}$ u (5.4.52) pojedinačno biti jednaki nuli tj. Linearni član po $\varphi_{j,j}$

$$2\varepsilon_{i,i}\varphi_{j,j} = 0. \qquad (5.4.53)$$

Kvadratni član po $\varphi_{j,j}$

$$[2\varepsilon_{i,\varphi_n}\varphi_{n,i} - \alpha_{n,i}\varphi_{i,n} + \varphi_{i,i}\alpha_{\gamma,\gamma}]\varphi_{j,j} = 0. \qquad (5.4.54)$$

Iz linearnog člana (5.4.53) zbog proizvoljnosti $\varphi_{j,j}$ odmah sledi

$$\varepsilon_{i,i} = 0. \qquad (5.4.55)$$

Kvadratni član (5.4.54) razmenom indeksa postaje

$$[2\varepsilon_{i,\varphi_n} - 2\alpha_{i,n} + \alpha_{\gamma,\gamma}\delta_{in}]\varphi_{n,i}\varphi_{j,j} = 0. \qquad (5.4.56)$$

Uporedjujući (5.4.56) i (5.4.46) očigledno je da su istog oblika. Prema tome, rešenje (5.4.56) dobijamo na isti način kao i rešenje (5.4.50) iz (5.4.46) tj.

$$\varepsilon_{i,\varphi_j} - \alpha_{i,j} = -\frac{1}{2}\alpha_{\gamma,\gamma}\delta_{ij}. \qquad (5.4.57)$$

<u>Izraz uz τ_2</u>

Uzimajući u obzir rezultate (5.4.20), (5.4.22), (5.4.29), (5.4.32), (5.4.35) i (5.4.45), možemo (5.4.7) za α =j napisati

$$S_{ij} = \varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,\varphi_n}\varphi_{n,j} - \alpha_{n,i}\varphi_{n,j} \qquad (5.4.58)$$

Zamenom (5.4.58) u ($5.4.12_3$) i, koristeći (5.2.20) dobijamo

$$[2\varepsilon_{i,j}]\varphi_{i,j}+[2\varepsilon_{i,\varphi_n}\varphi_{n,j}-2\varphi_{i,n}\alpha_{n,j}+\varphi_{i,j}\alpha_{k,k}]\varphi_{i,j}=0. \tag{5.4.59}$$

Zbog proizvoljnosti $\varphi_{i,j}$ i linearni i kvadratni član po $\varphi_{i,j}$ mora svaki za sebe biti jednak nuli:

Linearni član po $\varphi_{i,j}$

$$2\varepsilon_{i,j}\varphi_{i,j}=0. \tag{5.4.60}$$

Kvadratni član po $\varphi_{i,j}$

$$[2\varepsilon_{i,\varphi_n}\varphi_{n,j}-2\varphi_{i,n}\alpha_{n,j}+\varphi_{i,j}\alpha_{k,k}]\varphi_{i,j}=0. \tag{5.4.61}$$

Vidi se da iz linearnog člana (5.4.60) neposredno sledi

$$\varepsilon_{i,j}=0. \tag{5.4.62}$$

Kvadratni član (5.4.61), koristeći (5.4.57), postaje

$$(\alpha_{i,n}\varphi_{n,j}-\alpha_{n,j}\varphi_{i,n})\varphi_{i,j}=0 \tag{5.4.63}$$

ili

$$(\alpha_{i,p}\delta_{\ell j}-\alpha_{\ell,j}\delta_{ip})\varphi_{i,j}\varphi_{p,\ell}=0$$

što neposredno dovodi do izraza

$$\alpha_{ip}\delta_{\ell j}-\alpha_{\ell,j}\delta_{ip}=0.$$

Množeći ovaj izraz sa $\delta_{\ell j}$ dobijamo

$$\alpha_{ik}=\frac{1}{3}\alpha_{j,j}\delta_{ik}. \tag{5.4.64}$$

Na osnovu (5.4.20) i (5.4.35) zaključujemo da je α_i funkcija samo od x.

Izraz uz τ_3

Smenjujući (5.4.58) u (5.4.12) i koristeći (5.2.20) možemo napisati

$$[2\delta_{i,j}]\varphi_{j,i}+[2\delta_{i,\varphi_n}\varphi_{n,j}-\varphi_{i,n}\alpha_{n,j}+\varphi_{i,j}\alpha_{\delta,\delta}]\varphi_{j,i}=0. \qquad (5.4.65)$$

Vidimo da je (5.4.65), s obzirom na (5.4.57), (5.4.62) i (5.4.63), identički zadovoljeno.

Izraz uz ν_1

Koristeći rezultate date sa (5.4.17), (5.4.20), (5.4.22) i (5.4.35) možemo (5.4.6) pisati u obliku

$$r_{ij}=\beta_{i,j}+\beta_{i,u_n}u_{n,j}-u_{i,n}\alpha_{n,j}-\varepsilon_{kij}\delta_k. \qquad (5.4.66)$$

Zamenjujući (5.4.66) u (5.4.12$_2$) i koristeći (5.2.20) dobijamo

$$[2\beta_{i,j}+2\beta_{i,u_n}u_{n,j}-2u_{i,n}\alpha_{n,j}-2\varepsilon_{kij}\delta_k+\alpha_{\delta,\delta}u_{i,j}-\varepsilon_{ije}\varphi_e\alpha_{\delta,\delta}]\cdot$$

$$(u_{i,j}-\varepsilon_{ijm}\varphi_m)=0. \qquad (5.4.67)$$

Linearni i kvadratni članovi uz$u_{i,j}$, kao i linearni član uz φ_i jednačine (5.4.67) su dati sa

$$\begin{aligned}
&[2\beta_{ij}-\varepsilon_{ijk}(2\delta_k+\varphi_k\alpha_{\delta,\delta})]u_{i,j}-\\
&-\varepsilon_{ijm}\varphi_m(2\beta_{i,u_k}u_{k,j}-2\alpha_{k,j}u_{i,k}+\alpha_{\delta,\delta}u_{i,j})=0\\
&(2\beta_{i,u_n}u_{n,j}-2\alpha_{n,j}u_{i,n}+\alpha_{\delta,\delta}u_{i,j})u_{i,j}=0\\
&[2\beta_{i,j}-2\varepsilon_{ijk}(2\delta_k+\varphi_k\alpha_{\delta,\delta})]\varepsilon_{ijm}\varphi_m=0.
\end{aligned} \qquad (5.4.68)$$

Nije teško pokazati, koriteći (5.4.50) i (5.4.64), da je

$$2\beta_{i,u_n}u_{n,j}-2\alpha_{n,j}u_{i,n}+\alpha_{\delta,\delta}u_{i,j}=0. \qquad (5.4.69)$$

Zamenjujući (5.4.69) u (5.4.68), dobijamo

$$\begin{aligned}
&[2\beta_{i,j}-\varepsilon_{ijk}(2\delta_k+\varphi_k\alpha_{\delta\delta})]u_{i,j}=0\\
&[2\beta_{i,j}-2\varepsilon_{ijk}(2\delta_k+\varphi_k\alpha_{\delta,\delta})]\varepsilon_{ijm}\varphi_m=0
\end{aligned} \qquad (5.4.70)$$

Pošto su β_i i δ_i nezavisni od $u_{i,j}$, iz (5.4.70) sledi

$$2\beta_{i,j}-\varepsilon_{ijk}\left(2\delta_k+\varphi_k\alpha_{\delta,\delta}\right)=0. \qquad (5.4.71)$$

Diferenciranjem ovoga izraza po φ_ℓ dobijamo sledeću jednačinu:

$$2\beta_{i,j\varphi_\ell}-\varepsilon_{ijk}\left(2\delta_{k,\varphi_\ell}+\delta_{k\ell}\,\alpha_{\delta,\delta}\right)=0.$$

Vodeći računa da je β_{i,φ_ℓ} =o na osnovu (5.4.17$_2$) imamo da je

$$\varepsilon_{ijk}\left(2\delta_{k,\varphi_\ell}+\delta_{k\ell}\,\alpha_{\delta,\delta}\right)=0.$$

Odavde sledi da je

$$2\delta_{k,\varphi_\ell}+\delta_{k\ell}\,\alpha_{\delta,\delta}=0. \qquad (5.4.72)$$

Zamenjujući jednačinu (5.4.72) u (5.4.57) dobijamo

$$\alpha_{i,j}=0 \qquad (5.4.73)$$

U tom slučaju iz (5.4.24) i (5.4.50) sledi da je

$$\alpha_{(k,\ell)}=\alpha_{0,0}\,\delta_{k\ell}.$$

Imajući u vidu (5.4.64) dobijamo

$$\frac{1}{3}\alpha_{j,j}=\alpha_{0,0}=0\,,$$

odnosno,

$$\alpha_{\delta,\delta}=0. \qquad (5.4.74)$$

Jasno je da iz (5.4.50), (5.4.57), (5.4.73) i (5.4.74) sledi

$$\beta_{i,u_j}=0\,, \qquad (5.4.75)$$

$$\delta_{i,\varphi_j}=0\,, \qquad (5.4.76)$$

$$\beta_{i,j}=\varepsilon_{ijk}\,\delta_k. \qquad (5.4.77)$$

Izraz uz ν_3

Ako iskoristimo (5.4.66) i zamenimo i (5.4.6$_4$) dobijamo

$$\left[2\beta_{i,j}+2\beta_{i,u_n}U_{n,j}-2U_{i,n}\alpha_{n,j}-2\varepsilon_{kij}\gamma_k+\alpha_{\gamma,\gamma}U_{i,j}-\varepsilon_{ije}\varphi_e\alpha_{\gamma,\gamma}\right]\cdot$$

$$\left(U_{j,i}-\varepsilon_{jim}\varphi_m\right)=0\,. \tag{5.4.78}$$

Ako se uzme u obzir (5.4.73), (5.4.74) i (5.4.77) onda (5.4.78) postaje identički zadovoljeno.

Zaključci iz potrebnih uslova

U prethodnom delu ovog poglavlja došli smo do izvesnog broja ograničenja koja su se odnosila na funkcije α_γ, β_i i γ_i koje su nam karakterisale infinitezimalne delove transformacija. Sada sumirajmo dobijena ograničenja i izvedimo odgovarajuće zaključke u pogledu oblika traženih funkcija α_β, β_i i γ_i .

(5.4.79)	$\alpha_{\beta,\gamma}=0$
(5.4.36)	$\alpha_{\beta,u_j}=0$
(5.4.80)	$\alpha_{\beta,\varphi_j}=0$
(5.4.17)	$\beta_{i,0}=0$
(5.4.77)	$\beta_{i,j}=\varepsilon_{ijk}\gamma_k$
(5.4.75)	$\beta_{i,u_j}=0$
(5.4.17)	$\beta_{i,\varphi_j}=0$
(5.4.29)	$\gamma_{i,0}=0$
(5.4.62)	$\gamma_{i,j}=0$
(5.4.29)	$\gamma_{i,u_j}=0$
(5.4.76)	$\gamma_{i,\varphi_j}=0$

Analizom sumiranih ograničenja vrlo lako je zaključiti da je

$$\alpha_0=a_0 \tag{5.4.81}$$

$$\alpha_i=a_i \tag{5.4.82}$$

$$\beta_i=\varepsilon_{ijk}x_jc_k+b_i \tag{5.4.83}$$

$$\gamma_i=c_i \tag{5.4.84}$$

gde su a_α , b_i i c_i realne konstante.

5.5. Zakoni konzervacije

Na osnovu ovako dobijenih vrednosti za funkcije α_β , β_i i δ^μ_i nije teško napisati eksplicitni oblik razmatranih transformacija (5.3.2) pod kojima dopustvi funkcional (5.4.2) ostaje infinitezimalno invarijantan. Zakoni konzervacije (5.4.1) u tom slučaju proizilaze kao posledica primene posebnih koordinatnih i vektorskih transformacija koje se razmatraju.

U našem slučaju odgovarajući zakoni konzervacije dati su sa (5.4.4). Vidimo da je za dobijanje odredjenih zakona konzervacije potrebno u (5.4.4) odrediti funkcije p_i i q_i . Iz (5.4.4) imamo onoliko nezavisnih integrala koliko imamo nezavisnih parova funkcija p_i i q_i . Iz (5.4.81), (5.4.82), (5.4.83) i (5.4.84) sledi da je nezavisan broj parova funkcija p_i i q_i odredjen brojem nezavisnih proizvoljnih konstanti α_β , β_i i δ^μ_i . Lako je videti u tom slučaju da imamo sledeće slučajeve:

i) $a_0 \neq 0$; $a_i = 0$; $b_i = 0$ i $c_i = 0$. U tom slučaju iz (5.4.81), (5.4.82), (5.4.83), (5.4.84) i (5.3.8) sledi

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = a_0 \\ &\alpha_i = 0 \qquad\qquad p_i = -\dot{u}_i a_0 \\ &\beta_i = 0 \qquad\qquad q_i = -\dot{\varphi}_i a_0 \\ &\delta^\mu_i = 0 \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

a odgovarajuće familije transformacija su oblika

$$\begin{aligned} t^* &= t + \eta a_0 \\ x^*_i &= x_i \\ u^*_{i,i} &= u_i \\ \varphi^*_i &= \varphi_i . \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

Na ovakav način uvedene transformacije predstavljaju translaciju vremena a odgovarajući zakon konzervacije glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho L + \frac{1}{2}\rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{2}\rho j \dot{\varphi}_j \dot{\varphi}_j\Big] + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[-\dot{u}_i t_{ij} - \dot{\varphi}_i m_{ij}\Big] = 0 . \tag{5.5.3}$$

Može se izvesti zaključak da opštem obliku zakona konzervacije (5.4.4) odgovara zakon konzervacije energije (5.5.3) koji sledi iz osobine invarijantnosti Lagranžijana pri vremenskoj translaciji.

ii) $b_i \neq 0$; $a_\alpha = 0$; $c_i = 0$. Tada iz (5.4.81), (5.4.82), (5.4.83), (5.4.84) i (5.3.8) sledi da je

$$\alpha_\alpha = 0 \qquad p_i = b_i$$
$$\beta_i = b_i \qquad q_i = 0 \tag{5.5.4}$$
$$\gamma_i = 0$$

Odavde odgovarajuća grupa transformacija je

$$\begin{aligned} t^* &= t \\ x_i^* &= x_i \\ u_i^* &= u_i + \eta b_i \\ \varphi_i^* &= \varphi_i \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Transformacije (5.5.5) predstavljaju krutu translaciju i odgovarajući zakon konezrvacije (5.4.4) glasi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[-\rho \dot{u}_i\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[t_{ij}\right] = 0 \tag{5.5.6}$$

što predstavlja ništa drugo nego zakon količine kretanja. Na taj način se zakon količine kretanja vezuje sa invarijantnošću Lagranžijana pri krutim translacijama.

iii). $c_i \neq 0$; $a_\alpha = 0$, $b_i = 0$. Iz (5.4.81), (5.4.82), (5.4.83), (5.4.84) i (5.3.8) dobijamo da je

$$\alpha_\alpha = 0 \qquad p_i = \varepsilon_{ijk} x_j c_k$$
$$\beta_i = \varepsilon_{ijk} x_j c_k \qquad q_i = c_i \tag{5.5.7}$$
$$\gamma_i = c_i$$

Na ovaj način su odredjene infinitezimalne transformacije oblika

$$\begin{aligned} t^* &= t + O(\eta^2) \\ x_i^* &= x_i + O(\eta^2) \\ u_i^* &= u_i + \varepsilon_{ijk} x_j c_k \eta + O(\eta^2) \\ \varphi_i^* &= \varphi_i + \eta \cdot c_i + O(\eta^2) \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

koje predstavljaju rotaciju krutog tela. Odgovarajući zakon konzervacije onda glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j \dot{u}_k + \rho j \dot{\varphi}_j\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-\varepsilon_{ikm} x_k t_{mj} - m_{ij}\right] = 0 \tag{5.5.9}$$

Naravno, to nije ništa drugo nego zakon konzervacije momenta količine kretanja. To znači da se konzervacija momenta količine kretanja vezuje za invarijantnost Lagranžijana pri krutim rotacijama tela.

iv). $a_i \neq 0;\ a_o = 0;\ b_i = c_i = 0$. Iz (5.4.81), (5.4.82), (5.4.83), (5.4.84) i (5.3.8) imamo da je

$$\begin{aligned} &\alpha_o = 0 && \\ &\alpha_i = a_i && p_i = -u_{i,k}\, a_k \\ &\beta_i = 0 && q_i = -\varphi_{i,k}\, a_k \\ &\gamma_i = 0 && \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

tada dobijamo da je

$$\begin{aligned} t^* &= t \\ x_i^* &= x_i + \eta a_i \\ u_i^* &= u_i \\ \varphi_i^* &= \varphi_i \end{aligned} \tag{5.5.11}$$

tj. uvodimo familiju koordinatnih translacija.
Odgovarajući zakon konzervacije onda dobija oblik

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \dot{u}_i u_{i,k} + \rho j \dot{\varphi}_i \varphi_{i,k}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-u_{k,i} t_{ij} - \varphi_{k,i} m_{ij} + L\delta_{kj}\right] = 0 \tag{5.5.12}$$

Vidimo da se ovaj zakon konzervacije dobija kao posledica invarijantnosti Lagranžijana pri koordinatnim translacijama. Veruje se da je ovaj zakon konzervacije za linearnu elastodinamiku mikropolarnog kontinuuma nov.

Sada dajemo integralne oblike zakona konzervacije (5.5.3), (5.5.6), (5.5.9) i (5.5.12) uz nekoliko dodatnih primedbi.

Ako je D_o bilo koja ograničena pravilna podoblast od D teorema o divergenciji primenjena na (5.5.3), (5.5.6), (5.5.9) i (5.5.12) odmah daje za $o \leq t \leq T$.

i). $$\frac{d}{dt}\int_{D_o}\left[L + \frac{1}{2}\rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{2}\rho j \dot{\varphi}_j \dot{\varphi}_j\right] dx - \oint_{\partial D_o}\left[t_{ij}\dot{u}_i + m_{ij}\dot{\varphi}_i\right] n_j\, ds = 0 \tag{5.5.13}$$

ii). $$\frac{d}{dt}\int_{D_o} \rho \dot{u}_i\, dx - \oint_{\partial D_o} t_{ij} n_j\, ds = 0 \tag{5.5.14}$$

iii). $$\frac{d}{dt}\int_{D_o}\left[\rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{u}_k + \rho j \dot{\varphi}_i\right] dx - \oint_{\partial D_o}\left[\varepsilon_{ikm} x_k t_{mj} - m_{ij}\right] n_j\, ds = 0 \tag{5.5.15}$$

iv). $\frac{d}{dt}\int\limits_{D_0}[\rho\dot{u}_k u_{k,i}+\rho j\dot{\varphi}_k\varphi_{k,i}]dx+\oint\limits_{\partial D_0}[Ln_i-(u_{j,i}t_{jk}+\varphi_{j,i}m_{jk})n_k]dS=0$ . . .

U (5.5.13-5.5.16) ∂D_o je granica od D a n je jedinični vektor spoljne normale na ∂D_o. Važnost izloženih zakona konzervacije može se odmah potvrditi pomoću (5.2.16), (5.2.20) i (5.2.25). Naročito zakon konzervacije (5.5.12) je analogon linearnog elastodinamičkog zakona konzervacije koji je dobijen u radu [20]. On sledi direktno iz (5.5.12) ako pretpostavimo da ne postoje naponski spregovi m_{ij} .

6. SPECIJALNI SLUČAJEVI

U ovom delu rada eksplicitno ćemo pokazati da su do sada svi poznati rezultati iz ove oblasti specijalni slučaj ovde iznete teorije.

6.1. Nepolarna linearna elastodinamika

Dobijeni zakon konzervacije (5.5.12) u prethodnom odeljku u slučaju nepolarne elastodinamike dobijen u [20] sledi direktno iz (5.5.12) ako pretpostavimo da ne postoje naponski spregovi m_{ij}. To znači da se nepolarni slučaj može razmatrati kao specijalan slučaj mikropolarnog kontinuuma.

U toku daljeg rada razmatraćemo samo infinitezimalne deformacije elastičnih tela. Važno je napomenuti da postupak odredjivanja zakona konzervacije nepolarne teorije na osnovu rezultata dobijeni za mikropolarnu teoriju nije trivijalan. Zakoni konzervacije nepolarne teorije se ne dobijaju trivijalnom modifikacijom zakona konzervacije mikropolarne teorije.

Za nepolarni slučaj

$$e_{ij} = u_{(i,j)} \qquad (6.1.1)$$

označava infinizezimalni tenzor deformacije.

Jednačine kretanja date su relacijama

$$t_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \qquad (6.1.2)$$

$$\varepsilon_{ijk} t_{jk} = 0 \qquad (6.1.3)$$

Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (6.1.2) je kompletan kada je tenzor napona dat relacijama (5.2.16$_1$).

Elastični potencijal u linearnoj teoriji ima oblik

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl}\, e_{ij} e_{kl} \qquad (6.1.4)$$

Tenzor C_{ijkl} se naziva tenzor elasticiteta. U slučaju izotropnog materijala tenzor C_{ijkl} postaje izotropni tenzor četvrtog reda.

$$C_{ij\varkappa\ell} = \lambda\delta_{ij}\delta_{\varkappa\ell} + \mu\left(\delta_{i\varkappa}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{j\varkappa}\right). \tag{6.1.5}$$

Radi kratkoće pisanja uvedimo oznaku

$$e_{i\alpha} = \begin{cases} e_{ij} & \alpha = j \\ u_{i,0} & \alpha = 0 \end{cases} \tag{6.1.6}$$

i iskoristimo način označavanja u (5.2.21) za C_{ijkl}.

U tom slučaju Lagranžijan gustine (5.2.23) postaje

$$L(e_{i\alpha}) = \frac{1}{2} C_{i\alpha\varkappa\beta}\, e_{i\alpha}\, e_{\varkappa\beta} \tag{6.1.7}$$

Dalje primećujemo da sledeći rezultati važe i da su nezavisni od φ_i: ($5.3.2_{1,2}$), ($5.3.3_{1,2}$), ($5.3.4_{1,2}$) i ($5.3.8_1$).

Kako je

$$\mathcal{Q}_i \equiv 0 \tag{6.1.8}$$

to (5.4.1) glasi:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[p_i \frac{\partial L}{\partial e_{i\alpha}} + L\, \alpha_\alpha \right] = 0 \tag{6.1.9}$$

Pošto ($5.2.16_1$) sada postaje

$$t_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \tag{6.1.10}$$

tada (5.2.25) postaje

$$\left(\frac{\partial L}{\partial e_{i\alpha}}\right)_{,\alpha} = 0 \tag{6.1.11}$$

ili koristeći (6.1.1), (6.1.6) i (6.1.7)

$$C_{i\alpha\varkappa\beta}\, e_{\varkappa\beta,\alpha} = C_{i\alpha\varkappa\beta}\, u_{\varkappa\beta,\alpha} = 0 \tag{6.1.12}$$

Sada zakon konzervacije (6.1.9) može biti napisan u obliku

$$C_{i\alpha\kappa\beta}\left(2\Psi_{i\alpha}+e_{i\alpha}\alpha_{\gamma,\gamma}\right)e_{\kappa\beta}=0 \qquad (6.1.13)$$

gde smo iskoristili (6.1.7) i (6.1.11), a za $\Psi_{i\alpha}$ uveli

$$\Psi_{i\alpha}=p_{i,\alpha}+e_{i\alpha,\gamma}\alpha_{\gamma}$$

$$=\beta_{i,\alpha}-u_{i,\alpha\gamma}\alpha_{\gamma}-u_{i,\gamma}\alpha_{\gamma,\alpha}+e_{i\alpha,\gamma}\alpha_{\gamma} \qquad (6.1.14)$$

Izraz (6.1.13) mora biti zadovoljen bez ograničenja na $u_{i,\alpha}$. Štaviše, izrazi uz koeficijente ρ, Λ i μ moraju biti jednaki nuli u skladu sa uvedenim zahtevom: da odgovarajuće koordinatne i vektorske transformacije ne zavise od materijalnih svojstava kontinuuma. Izrazi uz gore spomenute koeficijente su sledeći:

$$\rho: \qquad \left(2\Psi_{io}+e_{io}\alpha_{\gamma,\gamma}\right)e_{\kappa o}=0$$

$$\Lambda: \qquad \left(2\Psi_{i,i}+e_{ii}\alpha_{\gamma,\gamma}\right)e_{jj}=0$$

$$\mu: \qquad \left(2\Psi_{i,j}+e_{ij}\alpha_{\gamma,\gamma}\right)e_{ij}=0 \qquad (6.1.15)$$

U slučaju da je α=o (6.1.14) postaje Ψ_{io}.
Zamenjujući (6.1.16) u ($6.1.15_1$) dobijamo

$$\left(2\beta_{i,o}+2\beta_{i,u_n}u_{n,o}-2u_{i,\beta}\alpha_{\beta,o}-2u_{i,\beta}\alpha_{\beta,u_n}u_{n,o}+\right.$$
$$\left.+u_{i,o}\alpha_{\gamma,\gamma}+u_{i,o}\alpha_{\gamma,u_n}u_{n,\gamma}\right)u_{i,o}=0 \qquad (6.1.17)$$

Ovaj izraz je ekvivalentan (5.4.13) kada su α_i i β_i nezavisni od Ψ_i . Dalje postupamo na isti način kao što smo činili u (5.4.13). Zaključujemo da (5.4.17), (5.4.20) i (5.4.24) važe.

U slučaju da je α=j (6.1.14) postaje

$$\Psi_{ij}=\beta_{i,j}-u_{i,\gamma}\alpha_{\gamma,j}-W_{ij,\gamma}\alpha_{\gamma}\,, \qquad (6.1.18)$$

gde je

$$W_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}-u_{j,i}\right) \qquad (6.1.19)$$

i predstavlja komponente infinitezimalnog tenzora rotacije. Stavljajući da je j=i u (6.1.18) i zamenjujući tako dobijeni izraz u ($6.1.15_2$) dobijamo

$$\Big(2\beta_{i,i}+2\beta_{i,u_n}U_{n,i}-2U_{i,o}\alpha_{o,i}-2U_{i,n}\alpha_{n,i}-2U_{i,o}\alpha_{o,u_n}U_{n,i}-$$

$$-2U_{i,n}\alpha_{n,u_k}U_{k,i}+U_{i,i}\alpha_{\gamma,\gamma}+U_{i,i}\alpha_{j,u_n}U_{n,j}+U_{i,i}\alpha_{o,u_n}U_{n,o}\Big)U_{j,j}=0 \quad (6.1.20)$$

Ovaj izraz je ekvivalentan sa (5.4.38) kada su α_i i β_i nezavisni od φ_i . Postupimo li na isti način kao što smo to činili u (5.4.38) možemo zaključiti da (5.4.42), (5.4.45), (5.4.49) i (5.4.50) važe. Smenimo li na kraju (6.1.12) u ($6.1.15_3$) imaćemo

$$\Big(2\beta_{i,j}+2\beta_{i,u_n}U_{n,j}-2U_{i,n}\alpha_{n,j}+e_{ij}\alpha_{\gamma,\gamma}\Big)e_{ij}+$$

$$+e_{ij}\alpha_{o,u_n}U_{n,o}+e_{ij}\alpha_{k,u_n}U_{n,k}e_{ij}=0 \quad (6.1.21)$$

Odatle sledi

$$\alpha_{o,u_n}=0 \quad (6.1.22)$$

kao član uz linearno $u_{i,o}$ i

$$\alpha_{k,u_n}=0 \quad (6.1.23)$$

kao član uz kubno $u_{i,j}$.

Tada je

$$\Big(2\beta_{i,j}+2\beta_{i,u_n}U_{n,j}-2U_{i,n}\alpha_{n,j}+e_{ij}\alpha_{\gamma,\gamma}\Big)e_{ij}=0. \quad (6.1.24)$$

Odatle imamo

$$\beta_{(i,j)}=0 \quad (6.1.25)$$

jer je $2\beta_{i,j}e_{ij}$ linearni član (6.1.24) po $u_{i,j}$.

Zamenjujući (6.1.25) i (5.4.50) u (6.1.22) dobijamo

$$\Big(\alpha_{i,p}\delta_{j,k}-\alpha_{q,j}\delta_{ip}\Big)e_{ij}U_{p,q}=0, \quad (6.1.26)$$

de smo iskoristili činjenicu da je

$$-(e_{ij}-u_{i,j})e_{ij} = W_{ij}\, e_{ij} = 0 \tag{6.1.27}$$

z (6.1.26), zbog nezavisnosti od $u_{i,j}$, dobijamo

$$\left[\alpha_{(i,p)}\,\delta_{jq} - \alpha_{(q,j)}\,\delta_{ip}\right] = 0 \tag{6.1.28}$$

li

$$\alpha_{(i,j)} = \frac{1}{3}\,\alpha_{p,p}\,\delta_{ij}\,. \tag{6.1.29}$$

iferencirajući (5.4.24) u odnosu na x_i i koristeći (6.1.23) i 5.4.45) dobijamo

$$\alpha_{\gamma,\gamma i} = 0\,. \tag{6.1.30}$$

osle integracije (6.1.30) vidi se da je

$$\alpha_{\gamma,\gamma} = const.$$

oristeći (5.4.24), (5.4.50) i (   ) dobijamo

$$\hat{\alpha}_{0,0} = \frac{1}{3}\,\alpha_{p,p} = \kappa\,, \tag{6.1.31}$$

de je korišćeno

$$\alpha_{\gamma,\gamma} = \alpha_{0,0} + \alpha_{p,p}\,.$$

ada (6.1.29) i (5.4.50) daju

$$\alpha_{(i,j)} = \kappa\,\delta_{ij} \tag{6.1.32}$$

$$\beta_{(i,u_j)} = -\kappa\,\delta_{ij}\,. \tag{6.1.33}$$

zvodeći diferenciranje (6.1.32) po x_k imamo:

$$\alpha_{i,jk} = 0$$

osle integracije ovoga izraza i koristeći (6.1.29) dobijamo

$$\hat{\alpha}_{i,j} = \kappa\,\delta_{ij} + \phi_{ij} \tag{6.1.34}$$

gde je $\phi=\{\phi_{ij}\}$ konstantna antisimetrična matrica.
Koristeći (6.1.34) jednačina (6.1.33) postaje

$$\beta_{i,u_j} = -\kappa\,\delta_{ij} + \phi_{ij}. \tag{6.1.35}$$

Jednačine (6.1.25) i (6.1.35) formiraju odredjen sistem jednačina za β_i. Direktnom integracijom (6.1.35) daje

$$\beta_i = (-\kappa\,\delta_{ij} + \phi_{ij})u_j + A_i(x_k) \tag{6.1.36}$$

onda iz (6.1.36) i (6.1.25) sledi:

$$A_{(i,j)} = 0.$$

Stoga je

$$A_i = H_{ij}x_j + h_i \tag{6.1.37}$$

gde je h_i realna konstanta a $H = \{H_{ij}\}$ konstantna antisimetrična matrica.

Konačno, posle integracije (6.1.31) i (6.1.32) i zamene (6.1.37) u (6.1.36) imamo

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \kappa t + e_0 \\ \alpha_i &= \kappa x_i + \phi_{ij}x_j + g_i \\ \beta_i &= -\kappa u_i + \phi_{ij}u_j + H_{ij}x_j + h_i \end{aligned} \tag{6.1.38}$$

gde su e_0, g_i i h_i realne konstante.

Opšti oblik zakona konzervacije (5.4.4) i nadjene grupe transformacija (6.1.38) posle primene teoreme o divergenciji daju odgovarajuće zakone konzervacije u integralnom obliku

i). $\alpha_0 = e_0$
$\alpha_i = 0$
$\beta_i = 0$ $\qquad p_i = -\dot{u}_i e_0$

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0}\left[L + \frac{1}{2}\rho\,\dot{u}_i\dot{u}_i\right]dx - \oint_{\partial D_0} t_{ij}\dot{u}_i n_j\,ds = 0 \tag{6.1.39}$$

ii). $\alpha_0 = 0$

$\alpha_i = 0 \qquad\qquad p_i = h_i$

$\beta_i = h_i$

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} \rho \dot{u}_i dx - \oint_{\partial D_0} t_{ij} n_j ds = 0 \qquad (6.1.40)$$

iii). $\alpha_0 = 0$

$\alpha_i = 0$

$\beta_i = H_{ij} x_j \qquad\qquad p_i = \varepsilon_{ijk} x_j H_k$

$H_{ij} = \varepsilon_{ijk} H_k$

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} [\rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{u}_k] dx - \oint_{\partial D_0} \varepsilon_{ikm} x_k t_{mj} n_j ds = 0 \qquad (6.1.41)$$

iv). $\alpha_0 = 0$

$\alpha_i = g_i \qquad\qquad p_i = -u_{i,k} g_k$

$\beta_i = 0$

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} [\rho \dot{u}_k u_{k,i}] dx - \int_{\partial D_0} [L n_i - u_{j,i} t_{jk} n_k] ds = 0 \qquad (6.1.42)$$

v). $\alpha_0 = \kappa t$

$\alpha_i = \kappa x_i \qquad\qquad p_i = -\kappa (u_i + u_{i,k} x_k + t \dot{u}_i)$

$\beta_i = -\kappa u_i$

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} [\rho \dot{u}_i (u_i + u_{i,k} x_k + t\dot{u}_i) + tL] dx -$$

$$- \int_{\partial D_0} [t_{jk} n_k (u_j + u_{j,m} x_m + t\dot{u}_j) - n_k x_k L] ds = 0 \qquad (6.1.43)$$

vi). $\alpha_0 = 0$

$\alpha_i = \phi_{ij} x_j \qquad\qquad p_i = (\delta_{ik} u_j - u_{i,k} x_j) \varepsilon_{kje} \phi_e$

$\beta_i = \phi_{ij} u_j$

$\phi_{ij} = \varepsilon_{ijk} \phi_k$

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} \varepsilon_{ijk} (\rho u_k \dot{u}_j + \rho x_j \dot{u}_m u_{m,k}) dx + \qquad (6.1.44)$$

$$+ \oint_{\partial D_0} \varepsilon_{imj} [(L\delta_{jk} - u_{e,j} t_{ek}) x_m + t_{kj} u_m] n_k ds = 0$$

6.2. Mikropolarna linearna elastostatika

U ovom odelku razmotrićemo mikropolarni elastostatički slučaj, kao specijalni slučaj elastodinamičkog slučaja. Potrebno je primetiti da tada ni jedna veličina koja figuriše ne zavisi od vremena. Prema tome, ograničimo se na infinitezimalne deformacije elastičnih tela i dajmo neophodne veličine koje su nam potrebne. Važno je primetiti i u ovom slučaju da postupak dobijanja rezultata ne predstavlja trivijalnu modifikaciju rezultata za mikropolarnu linearnu elastodinamiku.

U ovom slučaju mere deformacije su:

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} - \varepsilon_{ijk}\varphi_k \tag{6.2.1}$$

$$\varkappa_{ij} = \varphi_{i,j} \tag{6.2.2}$$

Uslovi ravnoteže su dati sa

$$t_{ij,j} = 0 \tag{6.2.3}$$

$$m_{ij,j} + \varepsilon_{imn} t_{mn} = 0 \tag{6.2.4}$$

i čine potpun sistem jednačina kada su tenzori napona t_{ij} i naponskih spregova m_{ij} dati relacijama (5.2.16).

Elastični potencijal ima oblik (5.2.17)

$$W = \frac{1}{2} A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} B_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} \tag{6.2.5}$$

a Lagranžijan gustine je

$$L(u_{i,j}\,,\varphi_{i,j}) = W(\varepsilon_{ij}\,,\varkappa_{ij}) \tag{6.2.6}$$

Dalje primećujemo da sledeći rezultati važe i da ne zavise od vremena t : (5.3.2), (5.3.3), (5.3.4) i (5.3.8)

$$\begin{aligned} p_i &= \beta_i - u_{i,k}\alpha_k \\ q_i &= \delta_i^{\varkappa} - \varphi_{i,k}\alpha_k . \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Tada (5.4.4) glasi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[p_i W_{,\varepsilon_{ij}} + q_i W_{,\kappa_{ij}} + W \alpha_j \right] = 0 \qquad (6.2.8)$$

jednačine ravnoteže (6.2.3) i (6.2.4) zbog (6.2.6) postaju

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j} = 0$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}}\right)_{,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} = 0 \qquad (6.2.9)$$

ıkon konzervacije (6.2.8) sada može biti napisan u obliku

$$A_{ijkl}\left(2 r_{ij} + \varepsilon_{ij}\alpha_{p,p}\right)\varepsilon_{kl} + B_{ijkl}\left(2 S_{ij} + \kappa_{ij}\alpha_{p,p}\right)\kappa_{kl} = 0, \qquad (6.2.10)$$

le smo iskoristili (6.2.6) i (6.2.9).

Vrednosti za izraze r_{ij} i S_{ij} prema (5.4.6) i (5.4.7) u .učaju α=j date su sa

$$r_{ij} = p_{i,j} - \varepsilon_{kij} q_k + \varepsilon_{ij,p}\alpha_p = \beta_{i,j} - u_{i,n}\alpha_{n,j} - \varepsilon_{kij}\delta_k$$

$$S_{ij} = q_{i,j} + \kappa_{ij,p}\alpha_p = \delta_{i,j} - \varphi_{i,n}\alpha_{n,j} \; . \qquad (6.2.11)$$

:raz (6.2.10) mora biti zadovoljen bez ikakvih ograničenja na .,j i $\varphi_{i,j}$. Tačnije, izrazi uz koeficijente ν_1 , ν_2 , ν_3 , τ_1 , τ_2 i moraju biti jednaki nuli u skladu sa uvedenim zahtevom.

Što dovodi do sledećih jednačina:

$$\nu_1 : \quad \left(2 r_{ii} + \varepsilon_{ii}\alpha_{p,p}\right)\varepsilon_{ii} = 0$$

$$\nu_2 : \quad \left(2 r_{ij} + \varepsilon_{ij}\alpha_{p,p}\right)\varepsilon_{ij} = 0 \qquad (6.2.12)$$

$$\nu_3 : \quad \left(2 r_{ij} + \varepsilon_{ij}\alpha_{p,p}\right)\varepsilon_{ji} = 0$$

$$\tau_1 : \quad \left(2 S_{ii} + \kappa_{ii}\alpha_{p,p}\right)\kappa_{ii} = 0$$

$$\tau_2 : \quad \left(2 S_{ij} + \kappa_{ij}\alpha_{p,p}\right)\kappa_{ij} = 0 \qquad (6.2.13)$$

$$\tau_3 : \quad \left(2 S_{ij} + \kappa_{ij}\alpha_{p,p}\right)\kappa_{j,i} = 0$$

.dimo da je ovaj skup jednačina ekvivalentan sa skupom (5.4.11) (5.4.12) u slučaju kada Grčki indeksi uzimaju vrednost Latin- :ih indeksa tj. β=i. Jednačine ($5.4.11_1$) i ($5.4.12_1$) za slu- ıj α=o su identički zadovoljene.

Dalja analiza skupa jednačina (6.2.12) i (6.2.13), postupkom istim kao i ranije i korišćenjem istih zahteva, što je učinjeno u radu [21], dovodi do sledećih koordinatnih i vektorskih transformacija:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a_i \\ \beta_i &= \varepsilon_{ijk} x_j c_k + b_i \\ \gamma_i &= c_i \end{aligned} \qquad (6.2.14)$$

Njima odgovarajući zakoni balansa su

i).

$$\begin{aligned} a_i &= 0 & p_i &= b_i \\ c_i &= 0 & Q_i &= 0 \\ \alpha_i &= 0 \\ \beta_i &= d_i & \int t_{ij} n_j \, ds &= 0 \\ \gamma_i &= 0 \end{aligned} \qquad (6.2.15)$$

ii).

$$\begin{aligned} b_i = c_i &= 0 & p_i &= -u_{i,k} a_k \\ \alpha_i &= a_i & Q_i &= -\varphi_{i,k} a_k \\ \beta_i &= 0 \\ \gamma_i &= 0 \end{aligned} \qquad (6.2.16)$$

$$\int \left(W \delta_{jk} - t_{ij} u_{i,k} - m_{ij} \varphi_{i,k} \right) n_j \, ds = 0$$

iii).

$$\begin{aligned} a_i = b_i &= 0 & p_i &= \varepsilon_{ijk} x_j c_k \\ \alpha_i &= 0 & Q_i &= c_i \\ \beta_i &= \varepsilon_{ijk} x_j c_k \\ \gamma_i &= c_i \end{aligned} \qquad (6.2.17)$$

$$\int \left(t_{ij} \varepsilon_{ilk} x_l + m_{kj} \right) n_j \, ds = 0$$

6.3. Nepolarna linearna elastostatika

Nepolarna elastostatika je specijalan slučaj teorije mikropolarnog kontinuuma. Tada nema nikakvih zapreminskih ni naponskih spregova. Veličine koje figurišu u nepolarnoj statičkoj teoriji kontinuuma nezavisne su od vremena, a vektor mikrorotacije je identički jednak nuli.

Dalje se ograničimo na infinitezimalne deformacije tela i dajmo neophodne veličine koje će nam biti potrebne. Naglasimo da postupak svodjenja ni u ovom slučaju nije trivijalna modifikacija ni jednog prethodnog slučaja.

U ovom slučaju iz (5.2.15) sledi da je tenzor napona t_{ij} simetričan tj.

$$t_{ij} = t_{ji} \tag{6.3.1}$$

Sada (6.3.1) zajedno sa (6.2.16) daje

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \tag{6.3.2}$$

To neposredno dovodi do zaključka da je W funkcija samo od $\varepsilon_{(ij)}$, ili prema (5.2.20) od infinitezimalnog tenzora deformacije:

$$\varepsilon_{(ij)} = u_{(i,j)} \overset{def}{=} e_{ij} \, . \tag{6.3.3}$$

Uslovi ravnoteže su:

$$\begin{aligned} & t_{ij,j} = 0 \\ & \varepsilon_{ijk} \, t_{jk} = 0 \, . \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (6.3.4) je kompletan kada je tenzor napona t_{ij} dat relacijama (5.2.16).

Elastični potencijal u linearnoj teoriji ima oblik (6.1.4). A Lagranžijan gustine

$$L(u_{i,j}) = W(e_{ij}) \tag{6.3.5}$$

Primećujemo da važe sledeći rezultati i da ne zavise od $\mathcal{Y}_i$: (5.3.2), (5.3.3), (5.3.4) i (5.3.8).
Kako je

$$\mathcal{L}_i = 0 \tag{6.3.6}$$

to (5.4.4) za α=j glasi:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left[p_i \, W_{,e_{ij}} + W \alpha_j \right] = 0 \tag{6.3.7}$$

Pošto (5.2.16) sada postaje

$$t_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \tag{6.3.8}$$

tada (6.3.4) može da se napiše u obliku

$$\left(\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\right)_{,j} = 0 \tag{6.3.9}$$

ili koristeći (6.3.3), (6.3.5) i (6.3.9)

$$C_{ijkl}\, e_{kl,j} = C_{ijkl}\, u_{k,lj} = 0 \tag{6.3.10}$$

Sada zakon konzervacije (6.3.7) može biti napisan u obliku

$$C_{ijkl}\left(2\Psi_{ij} + e_{ij}\,\alpha_{p,p}\right) e_{kl} = 0 \tag{6.3.11}$$

gde smo iskoristili (6.3.5) i (6.3.10).

Veličinu Ψ_{ij} uvodimo definicijom

$$\Psi_{ij} \stackrel{def}{=} \beta_{ij} - u_{i,n}\,\alpha_{n,j} - W_{ij,n}\,\alpha_n , \tag{6.3.12}$$

gde je

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right),$$

i predstavlja komponente infinitezimalnog tenzora rotacije. Izraz (6.3.11) mora biti zadovoljen bez ikakvih ograničenja na $u_{i,j}$. Tačnije, izrazi uz koeficijente Λ i μ moraju biti jednaki nuli u skladu sa uvedenim zahtevom, što dovodi do sledećih jednačina:

$$\begin{aligned} \Lambda : \quad & \left(2\Psi_{ii} + e_{ii}\,\alpha_{p,p}\right) e_{ii} = 0 \\ \mu : \quad & \left(2\Psi_{ij} + e_{ij}\,\alpha_{p,p}\right) e_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Uočavamo da je ovaj skup jednačina ekvivalentan sa $(5.4.11_{23})$ u slučaju kada Grčki indeksi uzimaju vrednosti Latinskih indeksa tj. $\beta = i$ Jednačine $(5.4.11_1)$ i $(5.4.12_1)$, za $\alpha = o$ i jednačine $(5.4.12_{2,3,4})$ su identički zadovoljene.

Dati skup jednačina (6.3.13) postupkom istim kao i ranije i koristeći iste zahteve, što je učinjeno u radu [37] dovode, do sledećih koordinatnih i vektorskih transformacija:

$$\alpha_i = \kappa x_i + \phi_{ij} x_j + e_i$$
$$\beta_i = -\frac{1}{2}\kappa u_i + \phi_{ij} u_j + H_{ij} x_j + h_i \tag{6.3.14}$$

gde su $\phi = \{\phi_{ij}\}$ i $H = \{H_{ij}\}$ konstantne antisimetrične matrice a k, e_i i h_i realne konstante.

Odgovarajući zakoni konzervacije su:

i). $\alpha_i = 0$ $\quad p_i = \kappa_i$

$\beta_i = \kappa_i$ $\quad \int t_{ij} n_j \, ds = 0$ (6.3.15)

ii). $\alpha_i = 0$ $\quad p_i = \varepsilon_{ijk} x_j H_k$

$\beta_i = H_{ij} x_j$ $\quad \int \varepsilon_{\ell ik} t_{ij} x_k n_j \, ds = 0$

$H_{ij} = \varepsilon_{ijk} H_k$

(6.3.16)

iii). $\alpha_i = e_i$ $\quad p_i = -u_{i,k} e_k$

$\beta_i = 0$

$$\int [W\delta_{ij} - u_{i,k} t_{ij}] n_j \, ds = 0 \tag{6.3.17}$$

iv). $\alpha_i = \kappa x_i$ $\quad p_i = -\kappa\left(\frac{1}{2} u_i + u_{i,k} x_k\right)$

$\beta_i = -\frac{1}{2}\kappa u_i$

$$\int [(W\delta_{jk} - u_{i,k} t_{ij}) x_k - \frac{1}{2} t_{ij} u_i] n_j \, ds = 0 \tag{6.3.18}$$

v). $\alpha_i = \phi_{ij} x_j$ $\quad p_i = (\delta_{ik} u_j - u_{i,k} x_j)\varepsilon_{kj\ell}\phi_\ell$

$\beta_i = \phi_{ij} u_j$

$\phi_{ij} = \varepsilon_{ijk}\phi_k$

$$\int \varepsilon_{km\ell}[(W\delta_{kj} - u_{i,k} t_{ij}) x_m + t_{kj} u_m] n_j \, ds = 0 \tag{6.3.19}$$

7. INTEGRAL J NEZAVISAN OD PUTANJE

Odredjivanje polja deformacije (koncentris.polj.defor.) blizu zareza i prskotina naročito kod nelinearnih materijala, prate velike matematičke teškoće. Ove teškoće su uticale na traženje približnih metoda analize različitih problema koncentracije deformacija koje su zaobilazile detaljno rešenje problema graničnih vrednosti, utoliko pre što to nije bilo moguće uraditi dosadašnjim metodama.

Problem prskotina i lomova sa stanovišta mehanike kontinuma predstavljaju problem diskontinuuma i kao takvi zahtevaju posebne metode i matematički aparat. Polazna tačka u analizi niza problema zareza i prskotina jeste poznavanje prosečnih vrednosti za lokalno polje koncentracije deformacije. Rezultati koji se na ovaj način dobijaju su ili približni ili tačni u ograničenim slučajevima. Približnosti imaju nedostatak u načinu i mogućnosti za procenu greške.

Rice [1] koristi linijski integral, poznat u literaturi pod imenom integral nezavisan od putanje ili integral J-tipa, koji ima iste vrednosti za sve putanje integracije koje obuhvataju klase vrhova prskotina u dvodimenzionalnim deformacionim poljima linearnih i nelinearnih materijala. Značaj primene ovog integrala leži u tome što se izborom putanje blizu vrha direktno povezuje integral sa lokalnom koncentracijom polja deformacija. Medjutim, alternativni izbor putanje često dopušta direktno izračunavanje integrala.

U cilju poredjenja rezultata dobijenih u ovom radu i pomenutih rezultata Rice-a navodimo kratko dokaz nezavisnosti od putanje integrala J-tipa Rice-a i ovde dobijenih integrala (6.2.16).

Nezavisnost od putanje

Posmatrajmo homogeno linearno ili nelinearno elastično telo bez zapreminskih sila, izloženo ravnom naprezanju tako da naponi zavise od Dekartovih koordinata $x_1 = x$ i $x_2 = y$. Pretpostavimo da telo ima zarez prema slici 1. koji ima ravne površine paralelne x-osi i zaobljen vrh označen lukom Γ_v. Prava pukotina predstavlja specijalan slučaj opšteg problema.

Gustina energije napona W definiše se

$$W=\int_0^e \sigma_{ij}\, de_{ij} \tag{7.1}$$

gde je $e=[e_{ij}]$ infinitezimalni tenzor deformacije.

Rice definiše integral

$$J=\int_\Gamma \left(W dy - \underset{\sim}{T}\frac{\partial u}{\partial x} ds\right). \tag{7.2}$$

Γ je kriva koja okružuje vrh zareza, a integracija se vrši u smislu obrnutom od kazaljke na satu, polazeći od donje ravne površine. $\underset{\sim}{T}$ je vektor napona definisan prema spoljnoj normali duž Γ, sa $T_i=\sigma_{ij}n_j$ $\underset{\sim}{u}$ vektor pomeranja, a ds element luka duž Γ. Da bi se za ovako definisan integral dokazala nezavisnost putanje, uočimo bilo koju zatvorenu krivu Γ^* koja zatvara oblast A* u dvodimenzionalnom deformacionom polju u kome nema zapreminskih sila. Koristeći Grinovu teoremu i jednačine ravnoteže pokazuje se da je za svaku zatvorenu krivu

$$\int_{\Gamma^*} \left(W dy - \underset{\sim}{T}\frac{\partial u}{\partial x} ds\right)=0 \tag{7.3}$$

Detaljan dokaz dat je u radu [1].

Naveli smo poznati J integral mehanike loma (7.2) koji je bio povezan sa lokalnom koncentracijom polja napona oko vrha zareza ili prskotine i njegovu nezavisnost od putanje u linearnoj ili nelinearnoj elastičnosti.

Pokažimo sada da je i zakon konzervacije izveden u odeljku 6 (6.2.16) a koji se odnosi na invarijantnost Lagranžijana pri koordinatnim translacijama u mikropolarnoj elastičnosti

$$\int\left[W\delta_{ij}-t_{\kappa i}u_{\kappa,j}-m_{\kappa i}\varphi_{\kappa,j}\right]n_i\,d\ell=0 \tag{7.4}$$

nezavisan od putanje.

Dokaz koji se ovde daje je mnogo uopšteniji i u specijalnom slučaju u sebi sadrži i dokaz koji je dat od strane Rice [1] a koji je bio ograničen s obzirom na postojanje samo jednog integrala:

Posmatrajmo dvodimenzionalno mikropolarno deformaciono polje za koje vektor pomeranja u i mikrorotacije zavisi od koordinata x_1 i x_2. Odgovarajuće mere deformacije u tom slučaju su

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta 3}\varphi_3$$
$$\kappa_{3\alpha} = \varphi_{3,\alpha} \tag{7.5}$$

a naponi i naponski spregovi su dati relacijama

$$t_{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}$$
$$m_{3\alpha} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{3\alpha}} \,. \tag{7.6}$$

W je gustina energije data sa (5.17).

Jednačine ravnoteže su

$$t_{\alpha\beta,\alpha} = 0$$
$$m_{\alpha\beta,\alpha} + \varepsilon_{\beta\gamma\delta} t_{\gamma\delta} = 0 \,. \tag{7.7}$$

Integral (7.4) je

$$J_\beta = \oint_C \left(W\delta_{\alpha\beta} - t_{\gamma\alpha} u_{\gamma,\beta} - m_{3\alpha}\varphi_{3,\beta}\right) n_\alpha \, dl = 0$$
$$J_3 \equiv 0 \tag{7.8}$$

gde je C zatvorena kriva u ravni x_1, x_2, W gustina energije a n_α vektor jedinične normale na C koja leži u istoj ravni, pri čemu je integral (7.8$_2$) s obzirom na (5.17), (7.5) i (7.6) identički zadovoljena.

Pokažimo sada da je svaka komponenta od J_β za sve zatvorene putanje koje ograničavaju oblast u kojoj je W zavisno od komponenata deformacije $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\kappa_{3\alpha}$ jednaka nuli.

U tom cilju integral (7.8) možemo napisati u obliku

$$J_\beta = \oint_C W n_\beta \, dl - \oint_C \left(t_{\gamma\alpha} u_{\gamma,\beta} + m_{3\alpha}\varphi_{3,\beta}\right) n_\alpha \, dl \tag{7.9}$$

Prvi deo integrala (7.9) možemo napisati

$$\oint_C W n_\alpha dl = \oint_C W e_{\alpha\beta} dl_\beta , \tag{7.10}$$

gde je

$$\begin{aligned} \tau_\beta &= e_{\beta\gamma} n_\gamma \\ dl_\beta &= \tau_\beta dl \\ dl_\beta &= e_{\alpha\beta} n_\beta dl. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Koristeći Grinovu teoremu možemo onda (7.10) pisati

$$\oint_C W e_{\alpha\beta} dl_\beta = \int_A e^{\gamma\beta} (W e_{\alpha\beta})_{,\gamma} da = \int_A W_{,\alpha} da , \tag{7.12}$$

Na isti način drugi deo integrala (7.9) može da se piše

$$\oint_C (t_{\gamma\alpha} u_{\gamma,\beta} + m_{3\alpha} \varphi_{3,\beta}) n_\alpha dl = \int_A [(t_{\gamma\alpha} u_{\gamma,\beta})_{,\alpha} + (m_{3\alpha} \varphi_{3,\beta})_{,\alpha}] da . \tag{7.13}$$

Kako je

$$W = W(\varepsilon_{\alpha\beta} , \varkappa_{3\beta}) \tag{7.14}$$

to je

$$W_{,\beta} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \frac{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial W}{\partial \varkappa_{3\delta}} \frac{\partial \varkappa_{3\delta}}{\partial x_\beta} . \tag{7.15}$$

Koristeći (7.5) i (7.6) data (7.15) postaje

$$W_{,\beta} = t_{\gamma\delta} u_{\gamma,\delta\beta} - t_{\gamma\delta} e_{\gamma\delta 3} \varphi_{3,\beta} + m_{3\delta} \varphi_{3,\delta\beta} .$$

Sada integral (7.8) može da se piše

$$J_\beta = \int_A [t_{\gamma\delta} u_{\gamma,\beta\delta} - t_{\gamma\delta} e_{\gamma\delta} \varphi_{3,\beta} + m_{3\delta} \varphi_{3,\beta\delta}] da - \int_A [(t_{\gamma\alpha} u_{\gamma,\beta})_{,\alpha} + (m_{3\alpha} \varphi_{3,\beta})_{,\alpha}] da$$

ili preuredjujući i grupišući članove imamo

$$\begin{aligned} J_\beta = \int_A \{ & [t_{\gamma\alpha,\alpha}] u_{\gamma,\beta} - [m_{3\alpha,\alpha} + t_{\gamma\delta} e_{\gamma\delta}] \varphi_{3,\beta} + \\ & + t_{\gamma\delta} u_{\gamma,\beta\delta} + m_{3\delta} \varphi_{3,\beta\delta} - t_{\gamma\alpha} u_{\gamma,\beta\alpha} - m_{3\alpha} \varphi_{3,\beta\alpha} \} da = 0 \end{aligned} \tag{7.16}$$

na osnovu jednačina ravnoteže (7.7) za mikropolarnu elastostatiku. Ako se uoče bilo koje dve putanje Γ_1 i Γ_2 koje okružuju vrh zareza, kao što to čini Γ u Sl. 1. tako da Γ_1 obilazi vrh u smislu kazaljke na satu a Γ_2 u suprotnom smislu tako da opisuje zatvorenu konturu onda s obzirom na (7.16) sledi da je

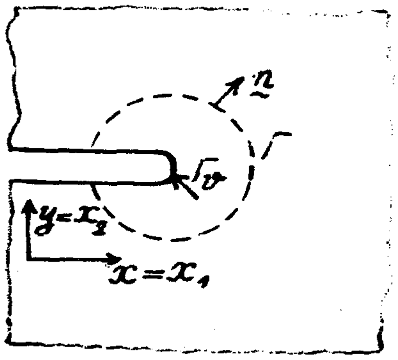
$$\oint_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_2}$$

Na delovima putanje duž ravnih površina zareza su $t_{\alpha\beta}\, n_\beta = o$ i $m_{3\alpha}\, n_\alpha = o$ i $dy = o$. Tada integral duž Γ_1 u suprotnom smislu kazaljke na satu i integral Γ_2 u smeru kazaljke iznosi nula. Naravno, pretpostavlja se da je oblast unutar krivih Γ_1 i Γ_2 bez singularnosti.

Očigledno, uzimajući Γ blizu vrha zareza možemo učiniti da integral zavisi samo od lokalnog polja. Posebno putanja može obuhvatiti vrh Γ_ϑ Sl.1 zareza glatkih krajeva (gde je $t_{\alpha\beta}\, n_\beta = o$ i $m_{3\alpha}\, n_\alpha = o$) tako da je

$$J_\beta = \int_{\Gamma_\vartheta} W n_\beta \, d\ell$$

što predstavlja srednju meru deformacije na vrhu zareza. Naravno, ta granična vrednost ne važi za oštru pukotinu. Pošto granica male krive Γ može biti izabrana da okružuje vrh, može se učiniti da integral zavisi samo od singularnosti vrha pukotine u deformacionom polju. Prednost ovoga metoda je u mogućnosti alternativnog izbora putanje integracije koje dozvoljavaju izračunavanje J integrala.



sl. 1

L I T E R A T U R A

Rice, J.R., A path independent integral and the approximate by notches and cracks. Journal of Applied Mechanics, 35, 2, 379 (1968).

Fletcher, D.C., The Conservation Laws of Linearized Elasticity Theory. Doctoral Dissertation, California Institute of Technology 1973.

Rubanovskii, N.V., and Stepanov Ya.C., Routh s Theorem and Chetayev s Method for Construction of Lyapunov s Functions-from Integrals of Equations of Motion, Prikladna Matematika i Mehanika 33, 904, 1969.

Jacobi, C.G.J., Vorlesungen über Dynamik, Werke, Supplementband, Berlin 1884.

Noether, E., Invariante Variationsprobleme, Göttinger Nachrihten Mathematisch-Physicalische Klasse 2, 235 (1918).

Bessel-Hagen, E., Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, Mathematische Annalen 84, 259 (1921).

Rund, H., Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations, Van Nostrand Co. (1966).

Hill, E.L., Rev. Mod, Phys. 23, 253 (1951).

Levy-Leblond, J.M., Amer. J.Phys. 39, 502 (1971).

Vujanović, B., A Group-Variational Procedure for Finding First Integrals of Dynamical Systems, Internat. J. Non-Linear Mech. 5, 269 (1970).

Gelfand, I.M., S.V. Fomin, Calculus of Variations, Fiz. Mat. Lit. Moscow, 1961.

Djukić, Dj., A procedure for Finding First Integrals of Mechanical Systems with Gauge-Variant Lagrangians, Internal. J. Non-Linear Mech. 8, 479 (1973).

Ray, J.R., Amer. J. Phys. 40, 493 (1973).

Houtappel, R.M.F., H.Van Dam, and E.P.Wigner, Rev. Mod. Phys. 37, 595 (1965).

15 Djukić, S.Dj., Conservation Laws in Classical Mechanics for Quasi-Coordinates, Arch. Rational Mech. Anal. 56, 79 (1974).

16 Djukić, S. Dj., A Contribbution to the Generalized Noether s Theorem, Archives of Mechanics 26, 243 (1974).

17 Plybon, B., J. Math. Phys. 12, 57 (1971).

18 Logan, J.D., J.Math. Anal. Appl. 42, 191 (1973).

19 Knowles, J.K., E.Sternberg, On a clas of conservation laws in linearized and finite elasticitty, Archive for Rational Mech. Anal. 44, 187 (1972).

20 Fletcher, D.C., Conservation Laws in Linear Elastodynamics, Archive for Rational Mechanics and Analysis 60, 329 (1976).

21 Jarić, J., Conservation Laws in Micropolar Elastostatics of the J-Integral Type, Pripremljeno za štampu.

22 Chen, F.H.K. and R.T. Shield, Conservation Laws in Elasticity of the J-Integral Type, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 28, 1 (1977).

23 Stojanović, R., On the Dynamics of a Rigid Body in Riemannian Spaces, Z. Angew. Math. Mech. 37, 7 (1957).

24 Vujanović, B., On One Variational Principle for Irreversible Phenomena Acta Mechanica 19, 259 (1974).

25 Vujanović, B., A Variational Principle for Non-Conservative Dynamical Systems ZAMM 55, 329 (1975).

26 Rosen, J., Generalized Noether s Theorem. II. Application, Annl. of Phys. 82. 70 (1974).

27 Djukić, S.Dj., B.D.Vujanović, Noether s Theory in Clasical Nonconservative Mechanics, Acta Mechanica, 23, 17 (1975).

28 Eshelby, J.D., The Continuum Theory of Lattice Defects, Solid State Physics, edited by F. Seitz and D. Trunbull, volume 3. New York Academic Press 1956.

29 Sanders, L. J. On the Grifith-Jrvin fracture theory. Journal of Applied Mechaniccs 27, 2, 352 (1960).

30 Cherepanov, G.P., Grack propagation in continuaus media. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, English Translation 31 (1967), 3, 504.

31 Hutchinson, J.W., Singular behavior of the end of a tensile crack in a hardening material. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 16 (1968).

32 Hutchinson, J.W., Plastics stress and strain fields at a crack tip. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 16 (1968).

33 Eringen, A.C. and E. S. Suhubi, Nonlinear theoru of simple microelastic solids, Int. J. Engn. Sci., 2, 189 (1964).

34 Plavšić M. and J. Jarić, The principle of vartual work and the constitutive equations in generalized theories of elasticity, Engineering Transaction, 22, 2, 181 (1974).

35 Plavšić M., Mehanika prostih polarnih kontinuuma, Matematički institut, Posebno izdanje 13, (1975).

36 Jarić J. and M. Vukobrat, On conservation Laws in elastostatics Teorijska i primjenjena mehanika 3, (1977).

37 Jarić J. and M. Vukobrat, On conservation Laws in elastodynamics, Pripremljeno za štampu.

38 Muki, R. and Sternberg E., Int. J. Solids Structures 3, 69 (1967).

39 Atkinson C. and Leppington G. F., Int. J. Solids Structures 13, 1103, (1977).