UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

STRUKTURNA SVOJSTVA PROŠIRENJA NEKIH KLASA POLUGRUPA

(Doktorska disertacija)

BLAGOJE STAMENKOVIĆ

BEOGRAD 1989.

S A D R Ž A J

U V O D

Teorija polugrupa je relativno mlada matematička disciplina. Smatra se da je nastala 1928. godine kada je ruski matematičar Suškevič objavio rad o konačnim prostim polugrupama. Intezivniji razvoj Teorija polugrupa doživljava desetak godina kasnije po objavljivanju radova Reesa o potpuno prostim polugrupama i Clifforda o polumrežnim dekompozicijama nekih klasa polugrupa. U to vreme, a i nešto kasnije istraživanja u Teoriji polugrupa motivisana su idejama i istraživanjima u Teoriji grupa i Teoriji prstena. Otuda se prvi rezultati Teorije polugrupa odnose na klase polugrupa koje su dosta bliske grupama. Takodje, pojmovi regularan element, π-regularan element se prvo javljaju u Teoriji prstena. Kasnije je Teorija polugrupa nastavila da se razvija svojim putevima koristeći svoj aparat za izučavanje struktura raznih klasa polugrupa. Klasa regularnih polugrupa se pokazala kao veoma plodan teren za istraživače. Ova klasa, a naročito neke njene podklase su dobro proučene, što ne znači da u ovoj oblasti nema mesta za dalje istraživanje. Negde od 1980. godine pažnju istraživača privlači klasa π-regularnih polugrupa koja obuhvata i klasu regularnih polugrupa. O intezivnom razvoju Teorije polugrupa svedoči desetak monografija o polugrupama, kao i specijalizovani časopis u kome se objavljuju radovi iz Teorije polugrupa.

U ovom radu su razmatrane polugrupe koje se dobijaju proširivanjem neke zadate, već dobro proučene, polugrupe tako da zadata polugrupa bude ideal u dobijenoj polugrupi. Takva proširenja su idealska proširenja. Jedan od prvih rezultata u vezi sa idealskim proširenjima polugrupa dao je

Clifford 1950.god., u radu |19|. Kasnije se veći broj matematičara bavi problemima proširenja polugrupa. Tako M.Petrich 1966.godine uvodi pojam retraktivnog proširenja |42|. Godine 1987, S.Milić i S.Bogdanović su dali metod za konstrukciju retraktivnih proširenja |14|.

U glavi I ovog rada navodimo osnovne pojmove i rezultate sa ciljem da se formuliše neophodni osnovni materijal za dalje izlaganje. Materijal za ovu glavu nije originalan. Rezultati na koje se pozivamo formulisani su u obliku teorema sa naznakom rada odakle je rezultat preuzet.

Druga glava ovog rada podeljena je na četiri odeljka. U prvom odeljku razmatrana je veza izmedju n-inflacija koje su definisali Putcha i Weissglass |49|sa jedne strane i n-inflacija koju su definisali S.Bogdanović i S.Milić sa druge strane |14| (Teorema 1.2). Takodje, ovde je data konstrukcija za n-inflacije definisane u |49|. Konstrukcija je data u Teoremi 1.3. Iz ove konstrukcije dobija se konstrukcija n-inflacije iz |14|.

U tački 2 ove glave razmatramo polugrupe u kojima je S^n potpuno prosta polugrupa (Teorema 2.1) kao i n-inflacija potpuno proste polugrupe (Teorema 2.2). Teorema 2.3. daje strukturni opis polugrupa S za koje je S^{n+1} potpuno prosta polugrupa.

U tački 3 ove glave uvodimo pojam L_n-polugrupe. Ove polugrupe čine klasu polugrupa kojom su obuhvaćene polugrupe u kojima je svaka podpolugrupa levi ideal, a koje su razmatrane u radovima |33| i |52|. Iz teorema 3.3. i 3.4. se vidi da su L_n-polugrupe specijalan slučaj retraktivnih ekstenzija polugrupa desnih nula. Ovde je pomoću skupova i funkcija data konstrukcija za L_2- polugrupe (Teorema 3.5).

U četvrtom odeljku ove glave razmatramo jednu pravu podklasu L_n-polugrupa. To su polugrupe S kod kojih je $S^nA=A^{n+1}$ gde je A bilo koja podpulugrupa od S i n neki prirodan broj. Ove polugrupe smo nazvali λ_n-polugrupama. Za n=1 dobijaju se polugrupe razmatrane u radovima |33| i |52|. Iz Teoreme 4.3. se vidi da je λ_n-polugrupa S jedan specijalan slučaj n+1-inflacije polugrupe desnih nula. U Teoremi 4.4. data je konstrukcija za takve polugrupe. Konstrukcije za λ_1-polugrupu S dali su Petrich |39| i nezavisno od njega Shutov |52|.

U tački 1. treće glave razmatramo polugrupe u kojima je S^{n+1}: polumreža desnih grupa (Teorema 1.1), polumreža periodičkih desnih grupa (Teorema 1.2). Teorema 1.1 je uopštenje sličnog rezultata S.Bogdanovića iz |11|. Osim toga, ona predstavlja osnovu za razmatranje nekih polugrupa iz odeljka tri ove glave.

U tački 2 ove glave razmatramo n-inflacije polugrupa iz tačke 1 iste glave. Teorema 2.1 i njene posledice od 2.1 do 2.4 predstavljaju uopštenje sličnih rezultata S.Bogdanovića i S.Milića iz |14| kao i S.Bogdanovića iz |11|.

Razmatranja u tački 3 ove glave su u vezi sa Tamurinim problemima iz rada |57|. Ova razmatranja su data u obliku primera. Ovde se daje odgovor na pitanje kakva je struktura polugrupe S koja zadovoljava neki identitet. U vezi sa ovim pitanjem dati su odgovori u nekim slučajevima. Opšti slučaj nije rešen. Takodje, ovde je data konstrukcija za neke slučajeve u Teoremi 3.1 i Teoremi 3.2.

U mnogim radovima ispitivana su strukturna svojstva regularnih polugrupa pomoću kongruencija ili pomoću uredjenja na tim polugrupama. Pomenućemo ovde radove |3,5,16,23,24|. U četvrtoj glavi ovog rada uvodimo pojam r-kancelativne polugrupe koja ne mora biti regularna i na njoj definišemo prirodno parcijalno uredjenje (Teorema 1.1). U Teoremi 1.2. daju se ekvivalentne definicije uredjenja iz Teoreme 1.1, čime se uopštavaju neki rezultati iz |23,30,36,37|.

U tački 2 ove glave uvodimo pojam L^*-unipotentne polugrupe i na nekim takvim polugrupama ispitujemo saglasnost prirodnog uredjenja sa množenjem. U Teoremi 2.1.

dajemo karakterizaciju nekih L^*-unipotentnih polugrupa pomoću uredjenja.

U tački 3 ove glave dajemo opis najveće idempotentno razdvajajuće kongruencije na L^*-unipotentnoj r-polugrupi S. U Teoremi 3.5 dajemo potrebne i dovoljne uslove da polugrupa S bude desno regularna traka nil-ekstenzija grupa.

Neki rezultati iz ove disertacije već su publikovani ili su prihvaćeni za publikovanje i to neki od rezultata iz glave III i glave IV u radu B.Stamenković i S.Bogdanović |53|, rezultati iz tačke 1 glave IV u B.Stamenković i P.Protić |55|,i rezultati iz tačke 2 glave IV u B.Stamenković i P.Protić |54|.

Literatura korišćena u ovom radu nalazi se na kraju i čini je 58 bibliografskih jedinica.

Najtoplije se zahvaljujem profesoru Dr Branki Alimpić na predusretljivosti i korisnim sugestijama koje mi je davala pri izradi disertacije.

Veliku zahvaljonst dugujem profesoru Dr Stojanu Bogdanoviću na nesebičnoj pomoći koju mi je pružao u toku izrade disertacije.

GLAVA I

UVODNI POJMOVI I REZULTATI

Ova glava sadrži neke poznate pojmove i rezultate iz Teorije polugrupa koje koristimo u daljem radu. U prvoj tački navodimo neke osnovne pojmove i rezultate Teorije polugrupa. Druga tačka sadrži neke pojmove i rezultate o π-regularnim polugrupama i treća tačka sadrži neke pojmove i rezultate o idealskim proširenjima polugrupa.

1. OSNOVNI POJMOVI I REZULTATI

1.1. *Binarna operacija* f nepoznog skupa S je svako preslikavanje $f: S\times S \to S$. Za $a,b \in S$ element $f(a,b)$ označava se takodje sa afb. Umesto slova f koristićemo oznake $\cdot, *, \circ$. Za $a,b \in S$ umesto $a.b$, najčešće ćemo pisati ab.

Ako je f preslikavanje nepraznog pravog podskupa od $S\times S$ u S, onda f nazivamo *parcijalnom binarnom operacijom* na S.

1.2. *Grupoid* je uredjeni par $(S,\cdot)$ nepraznog skupa S i binarne operacije $\cdot$ definisane na njemu. Grupoid $(H,*)$ je *podgrupoid* grupoida $(S,\cdot)$ ako je $H \subseteq S$ i $*$ je *restrikcija* operacije $\cdot$ na H tj. $(\forall a,b \in H)a*b=a\cdot b$. U ovakvim slučajevima koristićemo istu oznaku za binarne operacije na H i na S.

Parcijalni grupoid je uredjeni par $(S,\cdot)$ pri čemu je $\cdot$ parcijalna binarna operacija na S.

1.3. Grupoid $(S,\cdot)$ je *polugrupa* ako na njoj važi *asocijativni zakon* tj. ako je

$$(\forall a,b,c\in S)\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Dalje ćemo u mesto reči "$(S,\cdot)$ je polugrupa" pisati "S je polugrupa". Polugrupa S je *komutativna* ako na S važi *komutativni zakon* tj. ako je

$$(\forall a,b\in S)\ a\cdot b=b\cdot a\ .$$

Podpolugrupa polugrupe S je podgrupoid polugrupe S.

1.4. *Monoid* je polugrupa S koja ima takav element 1 da na S važi

$$(\forall a\in S)\quad a\cdot 1=1\cdot a=a$$

Element $1\in S$ je *jedinica* u S. Ako S ima jedinicu 1, onda pišemo $S=S^1$, a ako nema, onda sa S^1 obeležavamo polugrupu $S\cup\{1\}$, gde je 1 naknadno dodata jedinica.

1.5. Element $a\in S$ je *idempotent* polugrupe S ako je $a\cdot a=a$. Skup idempotenata polugrupe S označavaćemo sa $E(S)$. Polugrupa B, čiji su svi elementi idempotentni, je *polugrupa idempotenata* ili *traka*. *Polumreža* je komutativna traka. B je traka

levih nula ako je $(\forall a,b\in B)ab=a$
desnih nula ako je $(\forall a,b\in\ )ab=b$
levo normalna ako je $(\forall a,b,c\in B)abc=acb$
desno normalna ako je $(\forall a,b,c\in B)cba=bca$
pravougaona ako je $(\forall a,b\in B)aba=a$
levo kvazinormalna ako je $(\forall a,b,c\in B)abc=abac$
desno kvazinormalna ako je $(\forall a,b,c\in B)cba=caba$.

1.6. Element a S je *regularan* ako je $a=axa$ za neki $x\in S$. Sa Reg(S) ćemo označavati skup regularnih elemenata polugrupe S. Polugrupa S čiji su svi elementi regularni je *regularna* polugrupa. Regularna polugrupa S za koju E(S) podpolugrupa od S je *ortodoksna* polugrupa.

1.7. Element $a \in S$ je *potpuno* regularan ako postoji $x \in S$ takav da je $a=axa$ i $ax=xa$. Polugrupa čiji su svi elementi potpuno regularni je *potpuno regularna.*

1.8. Element a' polugrupe S je *inverzan* elementu $a \in S$ ako je $a=aa'a$ i $a'=a'aa'$. Sa $V(a)$ ćemo označavati skup svih elemenata iz S inverznih elementu a iz S. Polugrupa S je *inverzna* ako svaki element a iz S ima tačno jedan inverz.

1.9. Polugrupa S je *grupa* ako na S važe uslovi

(i) $(\exists e \in S)(\forall x \in S)xe=x$

(ii) $(\forall x \in S)(\exists y \in S)xy=e.$

Podpolugrupa od S koja je grupa je *podgrupa* polugrupe S.

Teorema 1.1. |12| Neka je e idempotent polugrupe S. Tada

$$G_e=\{a \in S \mid a=ea=ae,\ (\exists a' \in S)e=aa'=a'a\}$$
$$=\{a \in S \mid a \in eS \cap Se,\quad e \in aS \cap Sa\}$$

je maksimalna podgrupa od S u kojoj je e jedinica.

Teorema 1.2. |12| Neka je x element polugrupe S tako da x^n leži u podgrupi G od S za neki n Z^+. Ako je e jedinica podgrupe G, tada

(a) $ex=xe \in G_e$,

(b) $x^m \in G_e$ za svaki $m > n$. □

Teorema 1.3. |21| Za element a polugrupe S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) a je potpuno regularan;

(ii) a je sadržan u (maksimalnoj) podgrupi od S;

(iii) $a \in a^2Sa$.

Sada, za potpuno regularan element polugrupe S možemo reći da je *grupni*. Skup grupnih elemenata polugrupe S označavaćemo sa $G_r(S)$

Teorema 1.4. |21| Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je potpuno regularna;

(ii) S je unija (maksimalnih) grupa;

(iii) $(\forall a \in S) a \in a^2Sa$. □

Teorema 1.5. |40| Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) E(S) je podpolugrupa od S;

(ii) Za svaki $a,b \in S$ i $a' \in V(a)$, $b' \in V(b)$ je $b'a' \in V(ab)$;

(iii) Ako je za svaki $a,b,x,y \in S$, $a=axa$ i $b=byb$, onda je $ab=abyxab$. □

1.10. Polugrupa S je *levo kancelativna* ako

$$(\forall a,b,x \in S)(xa=xb \Rightarrow a=b).$$

Analogno se definiše *desno kancelativna* polugrupa. Polugrupa S je *kancelativna* ako je levo kancelativna i desno kancelativna.

1.11. Polugrupa S je *levo prosta* ako je

$$(\forall x \in S)\ Sx=S,$$

desno prosta ako je

$$(\forall x \in S)\ xS=S,$$

prosta ako je

$$(\forall x \in S)\ SxS=s.$$

Teorema 1.6. |31| Polugrupa S je prosta ako i samo ako

$$(\forall a,b \in S)(\exists x,y \in S)\ b=xay \qquad \square$$

1.12. Polugrupa S je *potpuno prosta* ako je prosta i ako ima nenulti idempotent e takav da je

(1.1) $(\forall f \in E(S)(ef=f=fe \Rightarrow f=e).$

Idempotent koji ima svojstvo (1.1) je *primitivan* idempotent.

Teorema 1.7. |43| Za polugrupu S su sledeći uslivi ekvivalentni:

(i) S je potpuno prosta;

(ii) S je potpuno regularna i prosta;

(iii) Za svaki $a,b \in S$, $a \in abSa$.

1.13. *Desna grupa* je polugrupa S koja je desno prosta i levo kancelativna. *Leva grupa* je polugrupa S koja je levo prosta i desno kancelativna.

Lema 1.1. |12| Svaki idempotent desno proste polugrupe S je leva jedinica u S.

Teorema 1.8. |12| Za polugrupu S sledeći uslivi su ekvivalentni:

(i) S je desna grupa;

(ii) S je desno prosta i sadrži idempotent;

(ii) S je regularna i $E(S)$ polugrupa desnih nula. □

1.14. Polugrupa S je *polumreža Y polugrupa* S_α, $\alpha \in Y$ ako postoji homomorfizam ϕ polugrupe S na polumrežu Y takav da je za svaki $\alpha \in Y$, $S_\alpha = \alpha\phi^{-1}$ gde je

$$\alpha\phi^{-1} = \{x \in S \mid x\Phi = \alpha\}.$$

Teorema 1. 9. |31| Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S je potpuno regularna;

(ii) S je polumreža potpuno prostih polugrupa. □

Teorema 1.10. |42| Polugrupa S je polumreža desnih grupa ako i samo ako za svaki $e,f \in E(S)$ je $efe=fe$. □

1.15. Ako je a element polugrupe S, onda

$$\langle a\rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$$

je *ciklična* podpolugrupa polugrupe S generirana elementom a. Kardinalni broj polugrupe $\langle a\rangle$ je *red* elementa a.

Teorema 1.11. |20| Neka je a element polugrupe S i $\langle a\rangle$ ciklična podpolugrupa polugrupe S generirana elementom a. Ako je $\langle a\rangle$ beskonačna, onda su svi njeni elementi različiti. Ako je $\langle a\rangle$ konačna, onda postoje dva pozitivna cela broja r i m za koje je $a^r = a^{r+m}$ i

$$\langle a\rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots a^{m+r-1}\}.$$

Red polugrupe $\langle a\rangle$ je $m+r-1$, r je *indeks* a m *perioda* elementa a. Skup

$$K_a = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$$

je ciklična podgrupa reda m polugrupe S. □

1.16. Polugrupa S je *periodička* ako svaki njen element ima konačan red.

1.17. Polugrupa S je *levo distributivna* ako

$$(\forall a,x,y \in S)\ axy = axay.$$

Polugrupa S je *desno distributivna* ako

$$(\forall a,x,y \in S)\ xya=xaya.$$

Polugrupa S je *distributivna* ako je levo distributivna i desno distributivna.

1.18. Polugrupa S sa nulom 0 je *nil-polugrupa* ako za svaki $a \in S$ postoji $n \in Z^+$ (Z^+ je oznaka za pozitivne cele brojeve) takav da je $a^n=0$.

2. π-REGULARNE POLUGRUPE

Pojam π-regularnosti za elemente prstena uveo je G.Azumaya 1954. godine u radu |1|. M.S.Putcha 1973. godine |48| uvodi pojam π-regularne polugrupe. Ove polugrupe se intezivno izučavaju od 1982. godine pod raznim imenima: stepeno regularne, a zatim π-regularne u radovima S.Bogdanovića i S.Milića, kvazi regularne u radovima J.L.Galbiati i M.L.Veronesi, eventualno regularne u radovima D.Easdowna i R.Edwardsa i kvazi-periodičke u radovima Ševrina.

U ovoj tački navodimo neke osnovne pojmove i rezultate o π-regularnim polugrupama koje koristimo u daljem radu.

2.1. Element a polugrupe S je *π-regularan* ako postoje $m \in Z^+$ i $x \in S$ takvi da je $a^m=a^mxa^m$. Polugrupa S je *π-regularna* ako je svaki $a \in S$ π-regularan.

Element a polugrupe S je *potpuno π-regularan* ako postoje $m \in Z^+$ i $x \in S$ takvi da je $a^m=a^mxa^m$ i $a^mx=xa^m$ Polugrupa S je *potpuno π-regularna* ako je svaki $a \in S$ potpuno π-regularan.

Teorema 2.1. |13| Ako je S π-regularna polugrupa čiji su svi idempotenti primitivni, tada je S potpuno

π- regularna polugrupa sa maksimalnim podgrupama oblika

$$G_e = eSe, \quad (e \in E(S)).$$

2.2. Polugrupa S je *π-ortodoksna* ako je π-regularna i idempotenti čine podpolugrupu.

Teorema 2.2. |40| Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni

(*i*) S je π-ortodoksna;

(*ii*) Reg(S) je ortodoksna podpolugrupa od S;

(*iii*) $(\forall a,b \in Reg(S))(\exists a' \in V(a))(\exists b' \in V(b))b'a' \in V(ab)$. □

2.3. Polugrupa S je *π-inverzna* ako za svaki $a \in S$ postoji $m \in Z^+$ i tačno jedan $x \in S$ da je $a^m = a^m x a^m$ i $x = x a^m x$.

Idempotenti π-inverzne polugrupe ne moraju da čine podpolugrupu. Polugrupa S je *jako π-inverzno* ako je π-regularna i idempotenti čine polumrežu.

2.4. Na π-regularnoj polugrupi definisano je preslikavanje $r: S \rightarrow Reg(S)$ na sledeći način

$$(\forall a \in S) r(a) = a^m$$

gde je m najmanji prirodan broj takav da je $a^m \in Reg(S)$ polugrupa S je *r-polugrupa* ako je r homomorfizam polugrupe S na Reg(S).

2.5. Na π-regularnoj polugrupi S definisane su relacije ekvivalencije $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*$ i $\mathcal{H}^*$ na sledeći način

$$a\mathcal{L}^*b \Longleftrightarrow Sr(a) = Sr(b),$$

$$a\mathcal{R}^*b \Longleftrightarrow r(a)S = r(b)S,$$

$$\mathcal{H}^* \Longleftrightarrow \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*.$$

Ove relacije definisale su J.L.Galbiati i M.L.Veronesi |28|.

pa ćemo ih zvati GV-*relacijama*. Na regularnoj polugrupi relacije L^*,R^*,H^* se poklapaju sa Greenovim relacijama L,R i H, respektivno. Jasno je da na π-regularnoj polugrupi S moguće je posmatrati Greenove i GV-relacije. GV-relacije imaju veliki značaj za izučavanje strukturnih svojstava π-regularnih polugrupa.

Teorema 2.3. |28| Neka je S π-regularna polugrupa. Tada

(*i*) $aL^*b \Rightarrow (\forall a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b))a'r(a)=b'r(b)$;

(*ii*) $aR^*b \Rightarrow (\forall a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))r(a)a'=r(b)b'$;

(*iii*) $H^*b \Rightarrow (\forall a' \; V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))a'r(a)=b'r(b)$,

$r(a)a'=r(b)b'$. □

Teorema 2.4. |9| Polugrupa S je π-inverzna ako i samo ako S je π-regularna i svaka L^*-klasa i svaka R^*-klasa sadrži po tačno jedan idempotent. □

Neka je S π-regularna polugrupa. L^*-(R^*-,H^*-) klasu koja sadrži element $a \in S$ označavamo sa L_a^* (R_a^*, H_a^*). Uredjenje u skupu L^*-klasa polugrupe S uvedeno je na sledeći način

$$L_a^* \leq L_b^* \Leftrightarrow Sr(a) \subseteq Sr(b).$$

2.6. Relacija ρ na π-regularnoj polugrupi S je r-*poluprosta* ako $(a,r(a)) \in \rho$ za svaki $a \in S$. Ekvivalencije L^*,R^*,H^* su r-poluproste.

Lema 2.1. |47| Svaka relacija ρ koja sadrži r-poluprostu relaciju je r-poluprosta. □

2.7. Kongruencija ρ na polugrupi S je *idempotentno-razdvajajuća* ako svaka π-klasa sadrži najviše jedan idempotent.

Teorema 2.5. |47| Ako je S π-regularna polugrupa, tada r-poluprosta kongruencija ρ na S je idempotentno-razdvajajuća ako i samo ako $\rho \subseteq H^*$.

P.M. Edwards je u radu |26| dokazao da na π-regularnoj polugrupi S postoji najveća idempotentno-razdvajajuća kongruencija.

Neka je S polugrupa. Relacija ekvivalencije ρ na S je *leva kongruencija* ako za svaki $a,b,c \in S, (a,b) \in \rho$ povlači $(ca,cb) \in \rho$. *Desna kongruencija* se definiše dualno. ρ je *kongruencija* na S ako je ona istovremeno leva i desna kongruencija.

Ako je ρ kongruencija na S. Sa $a\rho$ ćemo označavati ρ-klasu elementa $a \in S$. Skup S/ρ svih ρ-klasa u odnosu na množenje definisano sa

$$(a\rho)(b\rho)=(ab)\rho$$

je polugrupa koju nazivamo količnikom polugrupom.
Ako je C neka klasa polugrupa i ako $S/\rho \in C$, tada je ρ C-kongruencija na S.

Teorema 2.6. |31| Ako je ρ ekvivalencija na polugrupi S, tada je

$$\rho \;=\{(a,b) \in S x S \mid (\forall x,y \in S^1)(xay,xby) \in \rho\}$$

najveća kongruencija na S sadržana u ρ. □

Teorema 2.7. |46| Kongruencija ρ na π-regularnoj polugrupi S je r-kongruencija ako i samo ako S/ρ je regularna polugrupa.

2.8. S je GV-polugrupa ako je S π-regularna i ako je $Reg(S)=G_r(S)$. Ove polugrupe razmatrale su J.L. Galbiati i M.L. Veronesi u radu |28|.

3. NEKA IDEALSKA PROŠIRENJA POLUGRUPA

Jedan od načina karakterizacija polugrupe S je konstrukcija polugrupe koja je izomorfna sa S. Sledeća konstrukcija kojom se daje opis potpuno proste polugrupe potiče od Reesa |50|.

Konstrukcija 3.1. Neka je G grupa, I i Λ neprazni skupovi čije elemente označavamo sa $i,j,k,\dots i$ $\lambda,\mu,\nu,\dots$ respektivno. Neka je P matrica tipa $\Lambda x I$ sa elementima $p_{\lambda i}$ iz grupe G. Na skupu $S=GxIx\Lambda$ definišemo množenje sa

$$(a;i,\lambda)(b;j,\mu)=(ap_{\lambda j}b;\ i,\mu)$$

Skup S sa ovako definisanom operacijom je polugrupa koju nazivamo *Reesova matrična polugrupa nad grupom* G *sa sendvič matricom* P i iznačavamo je sa $M=M(G;I,\Lambda;P)$.

Jedna od metoda konstruisanja polugrupa zasniva se na idealskim proširenjima neke poznate polugrupe S.

3.1. Neka je S ideal polugrupe V. Relacija ρ na V definisana formulom

$$x\,\rho\,y \iff x,y\in S \text{ ili } x=y$$

je *Reesova kongruencija* inducirana sa S. Količnička polugrupa V/ρ je *Reesova količnička polugrupa.* U polugrupi V/ρ klasa S je nula. Polugrupu V/ρ ćemo označavati sa V/S. V je *idealsko proširenje* polugrupe S pomoću Reesove količničke polugrupe V/S. U daljem tekstu ćemo kraće pisati: V je proširenje polugrupe S.

Polugrupa V je *nil-ekstenzija* polugrupe S ako je V proširenje od S i za svaki $x\in V$ postoji $n\in Z^{+}$ tako da $x^{n}\in S$.

Navedimo sledeće dve teoreme kojima se opisuju GV-polugrupe pomoću proširenja desnih grupa. Ove teoreme će nam biti potrebne u daljem radu.

Teorema 3.1. |11| S je polumreža nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa ako i samo ako S je GV-polugrupa.

Teorema 3.2. |11| Polugrupa S je polumreža nil-ekstenzija desnih grupa ako i samo ako S je GV-polugrupa i za svaki $e,f \in E(S)$ postoji $n \in Z^+$ tako da je $(ef)^n=(fef)^n$. $\square$

Problem nalaženja proširenja neke polugrupe S sastoji se u tome da se na skupu $V=S \cup Q^*$, gde je Q polugrupa sa (eventualno dodatom) nulom 0 disjunktna sa S i $Q^*=Q-\{0\}$, definiše množenje $\circ$ tako da $a \circ b=ab \in Q$ ako je $ab \neq 0$ u Q i $a \circ b \in S$ u ostalim slučajevima tako da je $(V,\circ)$ polugrupa. Problem konstrukcije proširenja sastoji se u tome da se operacija $\circ$ tako definiše da je asocijativna i da je S ideal u $(V,\circ)$.

Konstrukciju jednog proširenja potpuno proste polugrupe dali su S.Milić i V.Pavlović |35|.

Konstrukcija 3.2. Neka je $M(G;I,\Lambda;P)$ Reesova matrična polugrupa nad grupom G i Q parcijalna polugrupa takva da je $(G\times I\times\Lambda) \cap Q=\emptyset$.

Neka $\xi: p \to \xi_p$ preslikavanje polugrupe Q u simetričnu polugrupu $\tau(I)$ i $\eta: p \to \eta_p$ preslikavanje iz Q u simetričnu polugrupu $\tau(\Lambda)$. Neka za svaki $p,q \in Q$ važi:

(i) $\quad pq \in Q \Rightarrow \xi_{pq}=\xi_q\xi_p,\ \eta_{pq}=\eta_p\eta_q$

(ii) $\quad pq \notin Q \Rightarrow \xi_q\xi_p=\text{const.}, \eta_p\eta_q=\text{const.}$

Neka je $\Phi: Q\times I \to G$ preslikavanje za koje važi

(iii) $\quad pq \in Q \Rightarrow \Phi(pq,i)=\Phi(p,i\xi_q)\Phi(q,i)$

(iv) $\quad$ izraz $p_{\lambda i\xi_p}\Phi(p,i)p^{-1}_{\lambda\eta_p i}$ ne zavisi od $i \in I$ za $p,q \in Q$.

Ovaj izraz ćemo označiti sa $\Psi(p,\lambda)$.

Na skupu $\Sigma=(G\times I\times\Lambda) \cup Q$ definišemo proizvod sa

(1) $(a;i,\lambda)(b;j,\mu)=(ap_{\lambda j}b;i,\mu)$,

(2) $p(a;i,\lambda)=(\Phi(p,i)a;\ i\xi_p,\lambda)$,

(3) $(a;i,\lambda)p=(a\Psi(p,\lambda);i,\lambda\eta_p)$,

(4) $pq=r\in Q \Rightarrow pq=r\in\Sigma$,

(5) $pq\notin Q \Rightarrow pq=(\Phi(p,i\xi_q)\Phi(q,i)p^{-1}_{\lambda\eta_p\eta_q i};i\xi_q\xi_p,\lambda\eta_p\eta_q)$

Skup Σ u odnosu na ovako definisanu operaciju je polugrupa. $\square$

Teorema 3.3. |35| Polugrupa S sadrži ideal koji je Reesova matrična polugrupa nad grupom ako i samo ako S je izomorfna sa polugrupom iz Konstrukcije 3.2. $\square$

3.2. Neka je V proširenje polugrupe S. Tada V je *retraktivno proširenje* od S ako postoji homomorfizam Φ iz V na S takav da je $\Phi(x)=x$ za svaki $x\in S$. U tom slučaju S je *retraktivan ideal* i Φ *retrakcija.*

Jedan od prvih rezultata u vezi sa proširivanjem polugrupa jesta sledeći rezultat A.H.Clifforda |19|.

Neka je Q polugrupa sa nulom 0 koja je disjunktna sa polugrupom S i $\Phi:Q^*\rightarrow S$ parcijalni homomorfizam. Neka je na skupu $V=S\cup Q^*$ definisano množenje sa

$$a\circ b=\begin{cases} a(b\Phi) & \text{ako } a\in S, b\in Q^* \\ (a\Phi)b & \text{ako } a\in Q^*, b\in S \\ (a\Phi)(b\Phi) & \text{ako } a,b\in Q^* \text{ i } ab=0 \text{ u } Q \end{cases}$$

i proizvod $a\circ b$ se poklapa sa proizvodom u S ako $a,b\in S$ odnosno sa proizvodom u Q ako $a,b\in Q$ i $ab\neq 0$. Tada je V proširenje od S *odredjeno parcijalnim homomorfizmom.* Ako S ima jedinicu, onda se svako proširenje V od S može dobiti na opisani način.

Konstrukcija 3.3. Neka je S polugrupa. Svakom $a\in S$ pridružimo skup Y_a tako da je

$$a \in Y_a,\ Y_a \cap Y_b = \emptyset \text{ , ako je } a \neq b.$$

Neka su

$$\Phi^{(a,b)}:\ Y_a x Y_b \to Y_{ab}$$

funkcije za koje važi

$$\Phi^{(ab,c)}(\Phi^{(a,b)}(x,y),z) = \Phi^{(a,bc)}(x,\Phi^{(b,c)}(y,z)) \tag{1.1}$$

$$\Phi^{(a,b)}(x,b) = \Phi^{(a,b)}(a,y) = ab \tag{1.2}$$

za svaki $x \in Y_a$, $y \in Y_b$, $z \in Y_c$. Na skupu $V = \bigcup_{a \in S} Y_a$ definišimo množenje $*$ sa

$$x*y = \Phi^{(a,b)}(x,y), \text{ ako } x \in Y_a, y \in Y_b$$

Tada $(V,*)$ je polugrupa i V je retraktivno proširenje od S.

Sledeća teorema je osnovna za proširenje odredjeno parcijalnim homomorfizmom.

Teorema 3.4. |11|,|46|,|14| Za polugrupu V sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) V je proširenje odredjeno parcijalnim homomorfizmom;

(ii) V je retraktivno proširenje;

(iii) V je izomorfna sa nekom polugrupom iz Konstrukcije 3.3.

3.3. Polugrupa S je *n-inflacija* polugrupe T ako je T ideal od S, $S^{n+1} \subseteq T$ i postoji homomorfizam Φ. S na T takav da je $\Phi(t)=t$ za svaku $t \in T$. n-inflacija polugrupe T je retraktivno proširenje od T pomoću *n+1-nilpotentne polugrupe.*

Konstrukciju n-inflacije dali su S.Bogdanović i S.Milić u radu |14|. Za n=1 imamo inflaciju koju je uveo Clifford |20| i za n=2 imamo jaku inflaciju koju je uveo Petrich |46|.

Teorema 3.5. |14| Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je n-inflacija unije grupa;

(ii) $(\forall x,y \in S)xS^{n-1}y=x^2S^ny^2$;

(iii) S^{n+1} je unija grupa i

$$(\forall x_1,\dots,x_{n+1} \in S)(x_i^{n+1} \in G_{e_i} \Rightarrow x_1\dots x_{n+1}=e_1x_1\dots x_{n+1}e_{n+1}$$

$\square$

Teorema 3.6. |14| Na polugrupi S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je n-inflacija polumreže grupa;

(ii) $(\forall x,y \in S)xS^{n-1}y=y^2S^nx$;

(iii) S^{n+1} je polumreža grupa; $\square$

G L A V A II

POLUPRUGE U KOJIMA JE S^{N+1} POTPUNO PROSTA POLUGRUPA

U ovoj glavi ćemo konstruisati neke polugrupe S koje se dobijaju proširenjem neke poznate polugrupe T pomoću skupova. Jedna ideja za takve konstrukcije sastoji se u tome da se svakom $a \in T$ pridruži skup Y_a tako da je $Y_a \cap Y_b = \emptyset$ za $a \neq b$, pa se na skupu $S = \bigcup_{a \in T} Y_a$ definiše množenje tako da je S retraktivno proširenje polugrupe T. Za ovakve konstrukcije videti |6,8,14,39,45|. U Lemi 1.1 dajemo jednu konstrukciju ovakve vrste za slučaj kada T nije ideal od S. U Teoremi 1.3. konstruišemo polugrupu S koja je n-inflacija polugrupe T u smislu definicije koju su dali M.Putcha i J.Weissiglass u radu |49| i koju zovemo n-PW-inflacija. Iz konstrukcije date u Teoremi 1.3. dobija se konstrukcija n-inflacije polugrupe T u smislu definicije koju su dali S.Bogdanović i S.Milić u radu |14|, koju ćemo zvati n-BM-inflacija.

U Teoremi 3.6. konstruišemo polugrupu čija je svaka podpolugrupa levi ideal od S^2. Iz Teoreme 3.5. se vidi da je polugrupa S retraktivno proširenje polugrupe desnih nula pomoću 5-nilpotentne polugrupe sa istim svojstvom. Ovakve polugrupe nazivamo L_2-polugrupama. U ovoj glavi razmatramo L_n-polugrupe za bilo koji $n \in Z^+$ (Teorema 3.3, Teorema 3.4). Problem konstrukcije L_n-polugrupe u opštem slučaju nije rešen. U tački 4. ovog poglavlja izdvajamo jednu podklasu klase L_n-polugrupa. Polugrupe te podklase nazivamo λ_n-polugrupama. Iz Teoreme 4.3. se vidi da je

λ_n-polugrupa S specijalan slučaj n-BM-inflacije polugrupe desnih nula, što nam omogućuje da konstruišemo takvu polugrupu (Teorema 4.4.).

S. Milić i V. Pavlović u radu |35| dali su konstrukciju proširenja potpuno proste polugrupe pomoću parcijalne polugrupe Q. U Teoremi 2.3. data je konstrukcija proširenja potpuno proste polugrupe u slučaju kada je Q bilo koji neprazan skup.

1. ODNOS IZMEDJU N-PW-INFLACIJE I N-BM-INFLACIJE

U ovoj tački navodimo pojam n-inflacije ($n \in Z^+$) u smislu M.Putche i J.Weissglassa |49|, koju ćemo zvati n-PW-inflacija i pojam n-inflacije u smislu S.Bogdanovića i S.Milića |14|, koju ćemo zvati n-BM-inflacija.

Teoremom 1.2. data je veza izmedju ovih pojmova, a Teoremom 1.3. dajemo karakterizaciju n-PW-inflacije.

Definicija 1.1. |49| Neka je T podpolugrupa polugrupe S. Tada S je n-PW-inflacija od T ako postoji homomorfizam $\Phi:S \to T$ tako da je

(1.1) $(\forall a \in T)\Phi(a)=a$

(1.2) $(\forall x_1,x_2,\dots,x_{n+1} \in S)x_1x_2\dots x_{n+1}=\Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_{n+1})$

Definicija 1.2. |14| Polugrupa S je n-BM-inflacija polugrupe T ako je $S^{n+1} \subseteq T$ i S je retraktivna ekstenzija od T.

Teorema 1.1. |14|,|49| Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S je 1-PW-inflacija polugrupe T;

(ii) S je 1-BM-inflacija polugrupe T;

(iii) S je inflacija polugrupe T u smislu Clifford-Prestona. $\square$

Da je klasa polugrupa koje su n-PW-inflacije šira od klase polugrupa koje su n-BM-inflacije u slučaju za $n \geq 2$ pokazuje sledeći

Primer 1.1. Polugrupa S data tablicom

	b	c	a	a^2	a^3	a^4
b	a^2	a^3	c	a^3	a^4	a^4
c	a^3	a^4	a^3	a^4	a^4	a^4
a	c	a^3	a^2	a^3	a^4	a^4
a^2	a^3	a^4	a^3	a^4	a^4	a^4
a^3	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4
a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4

jeste 2-PW-inflacija polugrupe $T=\{a,a^2,a^3,a^4=a^5\}$ jer je preslikavanje

$$\Phi = \begin{pmatrix} b & c & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a & a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

homomorfizam od S na T, $\Phi(x)=x$ za sve $x \in T$ i za svaki $x,y,z \in S$ je $xyz=\Phi(x)\Phi(y)\Phi(z)$. Polugrupa S nije 2-BM-inflacija, jer je $ab=c \notin T$, pa T nije ideal od S.

Teorema 1.2. Neka je $n \geq 2$. Tada S je n-PW-inflacija polugrupe T i T je ideal od S ako i samo ako S jeste n-BM-inflacija polugrupe T.

Dokaz. Neka je S n-BM-inflacija polugrupe T i $\Phi: S \to T$ retrakcija. Tada za proizvoljne $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in S$ je

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} = \Phi(x_1 x_2 \dots x_{n+1}) \text{ (jer je } S^{n+1} \subseteq T)$$
$$= \Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_{n+1}).$$

Dakle, S je n-PW-inflacija od T i T je ideal od S.

Obratno, neka je S n-PW-inflacija od T, T ideal od S i neka je $\Phi:S \to T$ homomorfizam za koji važi (1.1) i (1.2). Jasno je da je $S^{n+1} \subseteq T$ i da je Φ retrakcija tj. S jeste n-BM-inflacija od T.

$\square$

Lema 1.1. Neka je T polugrupa. Svakom $a \in T$ pridružimo skup Y_a tako da je

$$a \in Y_a, \quad Y_a \cap Y_b = \emptyset, \quad \text{ako je } a \neq b.$$

Neka su

$$\Phi^{(a,b)}: Y_a x Y_b \to Y_{ab}$$

funkcije za koje važi

$$\Phi^{(ab,c)}(\Phi^{(a,b)}(x,y),z) = \Phi^{(a,bc)}(x,\Phi^{(b,c)}(y,z))$$

i na $S = \bigcup_{a \in T} Y_a$ definišimo operaciju $*$ sa:

$$x*y = \Phi^{(a,b)}(x,y), \text{ ako } x \in Y_a, \quad y \in Y_b.$$

Tada $(S,*)$ jeste polugrupa i postoji homomorfizam Φ od S na T da je $\Phi(a)=a$ za svaki $a \in T$.

Obratno, neka je T podpolugrupa polugrupe S i neka je Φ homomorfizam od S na T takav da je $\Phi(a)=a$ za svaki $a \in T$. Tada se S može konstruisati na opisani način.

Dokaz. Neka S zadovoljava uslove Leme. Tada za $x \in Y_a$, $y \in Y_b$, $z \in Y_c$ je

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= \Phi^{(a,b)}(x,y)*z = \Phi^{(ab,c)}(\Phi^{(a,b)}(x,y),z)\\ &= \Phi^{(a,bc)}(x,\Phi^{(b,c)}(y,z)) = x*\Phi^{(b,c)}(y,z)\\ &= x*(y*z)\end{aligned}$$

Dakle, $(S,*)$ jeste polugrupa. Definišimo preslikavanje

$\Phi : S \to T$ sa $\Phi(Y_a)=a$. Jasno je da Φ preslikava S na T i da je $\Phi(a)=a$. Za $x \in Y_a$, $y \in Y_b$ je

$$\Phi(x*y)=\Phi(\Phi^{(a,b)}(x,y))=ab \quad (\text{jer} \quad \Phi^{(a,b)}(x,y)\in Y_{ab})$$

$$=\Phi(x)\Phi(y).$$

Dakle Φ je homomorfizam.

Obratno, za $a \in T$ neka je $Y_a=\Phi^{-1}(a)$. Tada je $S=\bigcup_{a\in T} Y_a$. Neka je $a,b \in T$, $a\neq b$ i neka je $x \in Y_a \cap Y_b$. Tada je $a=\Phi(x)=b$, što je kontradikcija. Dakle, za $a\neq b$ je $Y_a \cap Y_b=\emptyset$. Za $x,y \in S$ postoje $a,b \in T$ tako da $x \in Y_a$, $y \in Y_b$, pa $\Phi(x)=a$, $\Phi(y)=b$. Kako je i

$$\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)=ab \in Y_{ab}$$

tj. xy $\Phi^{-1}(ab,)=Y_{ab}$, onda postoje funkcije $\Phi^{(a,b)}$ koje slikaju $Y_a x Y_b$ u Y_{ab}. Jasno je da $\Phi^{(a,b)}(x,y)=xy$, odakle sledi da za te funkcije važi uslov iz konstrukcije. $\square$

Posledica 1.1. |14| Neka je T polugrupa. Svakom $a \in T$ pridružimo skup Y_a tako da je

$$a \in Y_a, \quad Y_a \cap Y_b=\emptyset \ , \quad \text{ako je } a\neq b.$$

Neka su

$$\Phi^{(a,b)} : Y_a x Y_b \to Y_{ab}$$

funkcije za koje veži

$$\Phi^{(ab,c)}(\Phi^{(a,b)}(x,y),z)=\Phi^{(a,bc)}(x,\Phi^{(b,c)}(y,z))$$

$$\Phi^{(a,b)}(x,b)=\Phi^{(a,b)}(a,y)=ab$$

za svaki $x \in Y_a$, $y \in Y_b$, $z \in Y_c$ i na $S=\bigcup_{a\in T} Y_a$ definišimo operaciju $*$ sa

$$x*y=\Phi^{(a,b)}(x,y), \text{ ako } x \in Y_a, \ y \in Y_b.$$

Tada $(S,*)$ jeste retraktivna ekstenzija polugrupe T.

Obratno, svaka retraktivna ekstenzija S polugrupe T se može ovako konstruisati. $\square$

Teorema 1.3. Neka je T polugrupa. Svakom $a \in T$ pridružimo familiju skupova X_i^a $(i=1,2,\dots,n)$ tako da je $a \in X_{r(a)}^a$ za neki $r(a) \in \{1,2,\dots,n\}$ i da važe uslovi

(1.3) $\quad X_i^a \neq \emptyset \quad$ za $r(a)<i\leq n$

(1.4) $\quad r(a)+r(b)>n \Rightarrow r(ab)=n$

(1.5) $\quad \begin{cases} X_i^a \cap X_i^b = \emptyset & \text{za} \quad i\neq j \\ X_i^a \cap X_j^b = \emptyset & \text{za} \quad a\neq b. \end{cases}$

Neka su za neprazne skupove X_i^a i X_j^b

$$\Phi^{(a,b)}_{(i,j)} : X_i^a \times X_j^b \to \bigcup_{\nu=i+j}^{n} X_\nu^{ab} \qquad \text{ako } i+j\leq n$$

$$\Phi^{(a,b)}_{(i,j)} : X_i^a \times X_j^b \to \{ab\} \qquad \text{ako } i+j>n$$

funkcije za koje važi:

(1.6) $\quad \Phi^{(a,b)}_{(i,j)}(a,b)=ab$

(1.7) $\quad (\forall s)(\forall t)\Phi^{(ab,c)}_{(s,k)}(\Phi^{(a,b)}_{(i,j)}(x,y),z)= \\ \qquad =\Phi^{(a,bc)}_{(i,t)}(x,\Phi^{(b,c)}_{(j,k)}(y,z))$

za svaki $a,b,c \in T$.

Neka je $Y_a = \bigcup_{i=1}^{n} X_i^a$ i neka je $*$ operacija definisana na skupu $S = \bigcup_{a\in T} Y_a$ sa

$$x*y=\Phi^{(a,b)}_{(i,j)}(x,y) \quad \text{za} \quad x\in X_i^a,\ y\in X_j^b.$$

Tada $(S,*)$ je n-PW-inflacija polugrupe T.

Obratno, svaka n-PW-inflacija polugrupe T se može na ovakav način konstruisati.

Dokaz. Neka $x,y,z \in S$. Tada postoje $a,b,c \in T$ i postoje $i,j,k \in \{1,2,\dots,n\}$ tako da $x \in X_i^a$, $y \in X_j^b$, $z \in X_k^c$. Takodje postoje $s,t \in \{2,3,\dots,n\}$ tako da

$$x*y=\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,y) \in X_s^{ab}, \quad y*z=\Phi_{(j,k)}^{(b,c)}(y,z) \in X_t^{bc}$$

Kako je sada

$$(x*y)*z=\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,y)*z=\Phi_{(s,k)}^{(ab,c)}(\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,y),z)$$

$$x*(y*z)=x*\Phi_{(j,k)}^{(b,c)}(y,z)=\Phi_{(i,t)}^{(a,bc)}(x,\Phi_{(j,k)}^{(b,c)}(y,z))$$

i kako važi uslov (1.7), onda na S važi asocijativni zakon, pa $(S,*)$ jeste polugrupa. Na osnovu uslova (1.6) T je podpolugrupa od S.

Uočimo preslikavanje $\Phi:S \to T$ zadato sa $\Phi(Y_a)=a$. Jasno je da za preslikavanje Φ važi $\Phi(a)=a$ za svaki $a \in T$. Za svaki $x,y \in S$ postoje $a,b \in T$ tako da $x \in Y_a$, $y \in Y_b$ tj. $x \in X_i^a$, $y \in X_j^b$ za neke $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ i

$$\begin{aligned}\Phi(x*y)&=\Phi(\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,y))\\ &= ab \qquad, \text{ jer } \Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,y) \in Y_{ab}\\ &=\Phi(a)\Phi(b) \qquad, \text{ jer } \Phi(a)=a, \Phi(b)=b.\end{aligned}$$

Dakle, Φ je homomorfizam.

Neka $x_r \in S$, $r=1,2,\dots,n+1$. Tada postoje $a_r \in T$ tako da $x_r \in X_{j_r}^{a_r}$ za neki $j_r \in \{1,2,\dots,n\}$.

Ako za svaki $r\in\{1,2,\dots,n+1\}$ $x_r\in T$, onda je jasno da važi

$$x_1*x_2*\dots*x_{n+1}=a_1*a_2*\dots*a_{n+1} \tag{1.8}$$

Neka za neki $r\in\{1,2,\dots,n+1\}$ $x_r\notin T$. Tada je

$$u=x_1*x_2*\dots*x_{n+1}=\Phi^{(a_1,a_2)}_{(j_1,j_2)}(x_1,x_2)*x_3*\dots*x_{n+1}$$

Ako je $j_1+j_2>n$, onda je zbog (1.3) $r(a_1)+r(a_2)>n$ i zbog (1.4) $r(a_1a_2)=n$. Zato je

$$u_1=\Phi^{(a_1,a_2)}_{(j_1,j_2)}(x_1,x_2)=a_1a_2\in X_n^{a_1a_2}$$

i

$$u=a_1a_2*x_3*\dots*x_{n+1}.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo da važi (1.8).

Ako je $j_1+j_2\leq n$, onda $\Phi^{(a_1,a_2)}_{(j_1,j_2)}(x_1,x_2)\in X_{t_1}^{a_1a_2}$ pri čemu je $j_1+j_2\leq t_1\leq n$ i

$$u=u_1*x_3*\dots*x_{n+1}=\Phi^{(a_1a_2,a_3)}_{(t_1,j_3)}(u_1,x_3)*x_4*\dots*x_{n+1}.$$

Ako je $t_1+j_3>n$, onda je $u_2=\Phi^{(a_1a_2,a_3)}_{(t_1,j_3)}(u_1,x_3)=$ $=a_1a_2a_3\in X_n^{a_1a_2a_3}$ pa zaključujemo da važi (1.8).

Ako je $t_1+j_3\leq n$, onda $u_2\in X_{t_2}^{a_1a_2a_3}$, $t_1+j_3\leq t_2\leq n$ i $u=u_2*x_4*\dots*x_{n+1}$.

Nastavljajući ovaj postupak zaključujemo da važi (1.8) ili da je

$$u=u_{n-1}*x_{n+1} \quad \text{gde} \quad u_{n-1}\in X_{t_{n-1}}^{a_1a_2\dots a_n} \quad \text{i}$$

$$t_{n-2}+j_n\leq t_{n-1}\leq n$$

Kako je

$$t_{n-1}+j_{n+1}\geq t_{n-2}+j_n+j_{n+1}\geq\ldots\geq j_1+j_2+\ldots+j_{n+1}>n,$$

onda je

$$u=u_{n-1}*x_{n+1}=\Phi^{(a_1a_2\ldots a_n,a_{n+1})}_{(t_{n-1},j_{n+1})}(u_{n-1},x_{n+1})=a_1a_2\ldots a_{n+1}$$

pa i u ovom slučaju važi (1.8)

Koristeći činjenicu da je $\Phi(x_r)=a_r$ za svaki $r\in\{1,2,\ldots,n+1\}$ i jednakost (1.8) dobijamo da je

$$x_1*x_2*\ldots*x_{n+1}=\Phi(x_1)\Phi(x_2)\ldots\Phi(x_{n+1})$$

Dakle,polugrupa $(S,*)$ je n-PW-inflacija od T.

Obratno neka je S n-PW-inflacija polugrupe T i neka je $\Phi:S\to T$ homomorfizam za koji važi (1.1) i (1.2). Za bilo koji $a\in T$ neka je $Y_a=\Phi^{-1}(a)$ i neka je

$$X_i^a = Y_a\cap(S^i-S^{i+1}) \quad , \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

$$X_n^a = Y_a\cap S^n$$

Kako a pripada nekom od disjunktnih skupova

$$S-S^2,\ S^2-S^3,\ldots,S^{n-1}-S^n,S^n,$$

onda $a\in X^a_{r(a)}=Y_a\cap(S^{r(a)}-S^{r(a)+1})$ za neki $r(a)\in\{1,2,\ldots,n-1\}$

ili $a\in Y_a\cap S^n=X_n^a$. Na ovaj način smo konstruisali skupove za koje važe uslovi (1.5). Takodje je jasno da je $Y_a=\bigcup_{i=1}^{n} X_i^a$ i $S=\bigcup_{a\in T}Y_a$. Neka je za neki i za koji je $r(a)<i\leq n$ $X_i^a\neq\emptyset$. Tada postoji $b\in Y_a$ takav da je $b=b_1b_2\ldots b_i$, pa je

$$a=\Phi(b)=\Phi(b_1b_2\ldots b_i)=\Phi(b_1)\Phi(b_2)\ldots\Phi(b_i)\in S^i$$

što je kontradikcija jer $X_i^a\cap X^a_{r(a)}=\emptyset$. Dakle, za skupove X_i^a važi uslov (1.3).

Neka je za $a,b \in T$ $r(a)+r(b)>n$. Tada $a \in S^{r(a)}$, $b \in S^{r(b)}$ i $ab \in S^{r(a)+r(b)} \subseteq S^n$. Kako $ab \in Y_{ab}$, onda $ab \in Y_{ab} \cap S^n$ tj. $r(ab)=n$. Dakle, važi uslov (1.4).

Neka su $x,y \in S$. Tada postoje $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ tako da $x \in X_i^a$, $y \in X_j^b$. Kako je $Y_a Y_b \subseteq Y_{ab}$ i kako $xy \in S^{i+j}$, onda $xy \in X_{i+j}^{ab}$. Na taj način funkcije $\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}$ definišemo kao restrikcije množenja u S na skupove $X_i x X_j$. Pri tome je jasno da za $i+j \leq n$, $\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}: X_i x X_j \to \bigcup_{\nu=i+j}^{n} X_\nu^{ab}$

Ako je $i+j>n$, onda je $xy=ab$ jer je zbog uslova (1.2) $S^{n+1} \subseteq T$ i $Y_{ab} \cap T=\{ab\}$. Dakle, ako je $i+j>n$, onda

$$\Phi_{(i,j)}^{(a,b)} : X_i^a \times X_j^b \to \{ab\}$$

Jasno je da za funkcije $\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}$ važe uslovi (1.6) i (1.7). $\square$

Ako uslov (1.6)u Teoremi 1.3. zamenimo uslovom

$$\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(a,y)=\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,b)=ab$$

onda se iz Teoreme 1.3. dobija Lema 2.1. i Teorema 2.1. iz|14|.

2. POLUGRUPE S ZA KOJE JE S^{N+1} POTPUNO PROSTA POLUGRUPA

Problemom proširenja potpuno prostih polugrupa bavili su se A.H. Clifford u radu |19| S.Milić i V. Pavlović u radu |35|, P.Protić i S.Bogdanović u radu |45|. U ovim radovima dati su potrebni i dovoljni uslovi kada polugrupa S ima potpuno prosto jezgro. U ovoj tački dajemo potrebne i dovoljne uslove kada će S^{n+1} biti potpuno prosta polugrupa, takodje dajemo strukturni opis takvih polugrupa.

Teorema 2.1. Neka je S polugrupa. Tada S^n je potpuno prosta polugrupa ako i samo ako

(2.1) $\qquad (\forall u\in S^n)(\forall y\in S)\, u\in uySu$

Dokaz. Neka je S^n potpuno prosta polugrupa i neka je $u\in S^n$ proizvoljan element. Tada postoje $x_1,x_2,\dots,x_n\in S$ tako da je $u=x_1x_2\dots x_n$ i da je

$$u\in uyx_1x_2\dots x_{n-1}S^nu \text{ (na osnovu Teoreme I.1.7)}$$
$$\subseteq uySu$$

Obratno, neka važi (2.1). Tada za bilo koji element $u\in S^n$ važi $u\in u^2Su$, pa po Teoremi I.1.3., $u\in G_r(S)$ tj. $S^n\subseteq G_r(S)$. Kako važi i obratna inkluzija, onda je $S^n=G_r(S)$. Pošto za bilo koje $a,b\in G_r(S)$ važi

$$\begin{aligned}
a &= axa, \quad \text{za neki } x\in G_r(S)\\
&= (ax)^{n-1}a, \quad \text{jer } ax\in E(G_r(S))\\
&\in (ax)^{n-1}abS(ax)^{n-1}a, \quad \text{jer važi (2.1)}\\
&= ab\,S(ax)^{n-1}a\\
&\subseteq abS^na\\
&= abG_r(S)a,
\end{aligned}$$

onda, po Teoremi I.1.7., $G_r(S)=S^n$ je potpuno prosta polugrupa.

Teorema 2.2. S je n-inflacija potpuno proste polugrupe ako i samo ako

$$(2.2) \qquad (\forall x_1,x_2,\dots,x_{n+1},y\in S)\ x_1x_2\dots x_{n+1}\in x_1^2S^nySx_{n+1}^2$$

Dokaz. Neka je S n-inflacija potpuno proste polugrupe. Tada je S^{n+1} potpuno prosta polugrupa, pa na osnovu Teoreme 2.1,

$$x_1x_2\dots x_{n+1}\in x_1x_2\dots x_{n+1}ySx_1x_2\dots x_{n+1}$$

za svaki $x_1,x_2,\dots,x_{n+1},y\in S$. Kako je S^{n+1} unija grupa, onda na osnovu Teoreme I.3,5., je

$$x_1x_2\dots x_{n+1}\in x_1^2S^nx_{n+1}^2$$

za svaki $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$. Sada,

$$\begin{aligned} x_1x_2\dots x_{n+1}&\in x_1x_2\dots x_{n+1}ySx_1x_2\dots x_{n+1}\\ &\subseteq x_1^2S^nx_{n+1}^2ySx_1^2S^nx_{n+1}^2\\ &\subseteq x_1^2S^nySx_{n+1}^2\end{aligned}$$

Dakle, važi (2,2).

Obratno, neka važi (2.2). Tada je

$x_1S^{n-1}x_{n+1}\subseteq x_1^2S^nySx_{n+1}^2\subseteq x_1^2S^nx_{n+1}^2\subseteq xS^{n-1}y$, pa na osnovu Teoreme I.3.5, S je n-inflacija unije grupa tj. S^{n+1} je potpuno regularna polugrupa. Neka su $a,b\in S^{n+1}$ proizvoljni elementi. Tada postoje $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$ da je $b=x_1x_2\dots x_{n+1}$ i da je

$$\begin{aligned} b&\in x_1^2S^nax_1x_2\dots x_{n-2}Sx_{n+1}^2 \quad \text{(jer važi (2.2))}\\ &\subseteq S^{n+1}aS^{n+1}\end{aligned}$$

Dakle, $S^{n+1} \subseteq S^{n+1} a S^{n+1}$ za proizvoljan $a \in S^{n+1}$ pa S^{n+1} je prosta polugrupa (Teorema I.1.6). Pošto je S^{n+1} potpuno regularna i prosta, onda je po Teoremi I.1.7, S^{n+1} je potpuno prosta polugrupa. Dakle, S je n-inflacija potpuno proste polugrupe.

/_7

Teorema 2.3. Neka je $M=M(G;I,\Lambda;P)$ Reesova matrična polugrupa nad grupom G i neka je X_i $(i=1,2,\dots,n+1)$ familija skupova takva da je $X_{n+1}=G \times I \times \Lambda$ i

$$X_i \cap X_j = \emptyset \quad \text{ako je} \quad i \neq j$$

Neka je $\xi : x \to \xi_x$ preslikavanje skupa $Y=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ u simetričnu polugrupu $\tau(I)$, $\eta : x \to \eta_x$ preslikavanje skupa Y u simetričnu polugrupu $\tau(\Lambda)$, $\Phi : Y \times I \to G$ preslikavanje i neka su, za neprazne skupove X_i, X_j, preslikavanja

$$(p)\qquad \begin{aligned} &\Phi_{ij} : X_i \times X_j \to \bigcup_{r=i+j}^{n+1} X_r, \quad \text{ako je} \quad i+j \leq n \\ &\Phi_{ij}(x,y) \in X_{n+1}, \quad \text{ako je} \quad i+j > n \end{aligned}$$

Neka su tačne formule:

(i) $(x,y) \in A \Rightarrow \xi_{\Phi_{ij}(x,y)} = \xi_y \xi_x$, $\eta_{\Phi_{ij}(x,y)} = \eta_x \eta_y$

(ii) $(x,y) \in B \Rightarrow \xi_y \xi_x = \text{const.}, \eta_x \eta_y = \text{const.}$

(iii) $(x,y) \in B \Rightarrow \Phi(\Phi_{ij}(x,y),\alpha) = \Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)$

(iv) Izraz $p_{\lambda,\alpha\xi_x} \Phi(x,\alpha) p^{-1}_{\lambda\eta_x,\alpha}$, ne zavisi od $\alpha \in I$.

Ovaj izraz ćemo označavati sa $\Psi(x,\alpha)$

(v) $(\forall s \geq i+j)(\forall t \geq j+k)\Phi_{sk}(\Phi_{ij}(x,y),z) = \Phi_{it}(x,\Phi_{jk}(y,z))$

gde je

$$A=\{(x,y)\in X_i \times X_j \mid (\exists t)(i+j\leq t\leq n,\ \Phi_{ij}(x,y)\in X_t\}$$

$$B=\{(x,y)\in X_i \times X_j \mid (i+j\leq n \wedge \Phi_{ij}(x,y)\in X_{n+1})$$

$$\vee(1\leq i,j\leq n \wedge i+j>n)\}$$

Na skupu $S=\bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$ definišimo operaciju $*$ sa:

(1) $(a;\alpha,\lambda)*(b;\beta,\mu)=(ap_{\lambda\beta}b;\alpha,\mu)$

(2) $x*(a;\alpha,\lambda)=(\Phi(x,\alpha)a;\alpha\xi_x,\lambda)$

(3) $(a;\alpha,\lambda)*x=(a\Psi(x,\lambda);\alpha,\ \lambda\eta_x)$

(4) $x*y=\Phi_{ij}(x,y)$, ako $(x,y)\in A$

(5) $x*y=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha};\alpha\xi_y\xi_x\ ,\lambda\eta_x\eta_y)$

za sve $a,b\in G$; $\alpha,\beta\in I$; $\lambda,\mu\in\Lambda$; $x\in X_i$, $y\in X_j$ $(1\leq i,j\leq n)$

Tada $(S,*)$ je polugrupa za koju je S^{n+1} potpuno prosta polugrupa.

Obratno, svaka polugrupa S za koju je S^{n+1} potpuno prosta polugrupa može se na ovaj način konstruisati.

Dokaz. Primetimo najpre da je $A\cup B=Y\times Y$ i $A\cap B=\emptyset$. Takodje, zbog uslova (4) i (5), $(Y,*)$ je parcijalni grupoid takav da $x*y\in Y$ ako i samo ako postoje i,j,t takvi da $x\in X_i$, $y\in X_j$, $\Phi_{ij}(x,y)\in X_t$, $i+j\leq t\leq n$. Sada iz konstrukcije I.3.2 sledi da je operacija $*$ dobro definisana, pa $(S,*)$ jeste grupoid.

Dokažimo da je $(S,*)$ polugrupa proverom asocijativnosti za operaciju $*$.

Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $x\in X_i$, $y\in X_j$, $z\in X_k$ $(1\leq i,j,k\leq n)$

1.1. Neka je $i+j\leq n$; $j+k\leq n$. Tada $\phi_{ij}(x,y)\in X_s$ za neki s za koji je $i+j\leq s\leq n+1$, $\phi_{jk}(y,z)\in X_t$ za neki t za koji je $j+k\leq t\leq n+1$

1.1.1. Neka je $i+j\leq s\leq n-k$; $j+k\leq t\leq n-i$. Tada $(x,y)\in A$, $(y,z)\in A$. Takodje, postoji skup X_r, $r\leq n+1$ $\Phi_{sk}(\Phi_{ij}(x,y)z)$, $\Phi_{it}(x,\Phi_{jk}(y,z))\in X_r$, jer važi (v). Ako je $r\leq n$, onda zbog $s+k\leq r\leq n$, $i+t\leq r\leq n$, parovi $u=(\Phi_{ij}(x,y),z)$, $v=(x,\Phi_{jk}(y,z))\in A$. Sada je

$$(x*y)*z=\Phi_{ij}(x,y)*z \qquad \text{, zbog (4) i } (x,y)\in A$$

$$=\Phi_{sk}(\Phi_{ij}(x,y),z) \qquad \text{, zbog (4) i } u\in A$$

$$x*(y*z)=x*\Phi_{jk}(y,z) \qquad \text{, zbog (4) i } (y,z)\in A$$

$$=\phi_{it}(x,\phi_{jk}(y,z)) \qquad \text{, zbog (4) i } v\in A$$

Dakle, $(x*y)*z=x*(y*)$, na osnovu (v)

Ako je $r=n+1$, onda $u,v\in B$ po definiciji skupa B. Sada je

$$(x*y)*z=\phi_{ij}(x,y)*z \qquad \text{, zbog (4) i } (x,y)\in A$$

$$=(\phi(\phi_{ij}(x,y),\alpha\xi_z)\phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_{\phi_{ij}(x,y)}\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_{\phi_{ij}(x,y)},\lambda\eta_{\phi_{ij}(x,y)}\eta_z)$$

$$\text{, zbog (5) i } u\in B$$

$$=(\Phi(\Phi_{ij}(x,y),\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z) \text{ , zbog } (i) \text{ i } (x,y)\in A$$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z)\text{, zbog } (iii) \text{ i } (x,y)\in A.$$

$$x*(y*z)=x*\Phi_{jk}(y,z) \text{ ,} \qquad \text{zbog (4) i } (y,z)\in A$$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_{\phi_{jk}(y,z)})\Phi(\Phi_{jk}(y,z),\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_{\phi_{jk}(y,z)},\alpha};\alpha\xi_{\phi_{jk}(y,z)}\xi_x,\lambda\eta_x\eta_{\phi_{jk}(y,z)})$$

,zbog (5) i $v\in B$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(\Phi_{jk}(y,z),\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z)$$,zbog (i) i $(y,z)\in A$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z),$$ zbog (iii)i$(y,z)\in A$

Dakle, i u ovom slučaju je $(y*y)*z=x*(y*z)$.

1.1.2. Neka je $i+j\leq s\leq n-k$; $t\geq j+k$ i $t>n-i$. Tada $(x,y)\in A$; $(y,z)\in A\cup B$. Kako je $t+i>n$, onda $\Phi_{it}(x,\Phi_{jk}(y,z)\in X_{n+1}$. Sada zbog uslova (v) $\Phi_{sk}(\Phi_{ij}(x,y),z)\in X_{n+1}$. Takodje,par $u=(\Phi_{ij}(x,y),z)\in B$ jer $\Phi_{ij}(x,y)\in X_s$, $s\leq n$, $z\in X_k$, $k\leq n$. Par $V=(x,\Phi_{jk}(y,z))\in B$ ako $(y,z)\in A$ tj. ako $\Phi_{jk}(y,z)\in X_t$, $t\leq n$, na osnovu definicije skupa B.

Sada, ako $(x,y);(y,z)\in A$, dobijamo kao u 1.1.1 da je

$$(x*y)*z=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z)=x*(y*z)$$

Ako je $(x,y)\in A$, $(y,z)\in B$, onda kao u slučaju 1.1.1. dobijamo da je

$$(x*y)*z=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z).$$

Kako je i

$$x*(y*z)=x*(\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y,\lambda\eta_x\eta_y),$$ zbog (5),jer $(y,z)\in B$

$$=x*(\Phi(x,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,$$ zbog (ii),jer $(y,z)\in B$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y\xi_x)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z),\text{zbog (2)},$$

onda je $(x*y)*z=x*(y*z)$.

1.1.3. Neka je $j+k\leq t\leq n-i$; $s\geq i+j$, $s>n-k$. Tada $(y,z)\in A$ i $(x,y)\in A\cup B$. Kako je $s+k>n$, onda $\Phi_{sk}(\Phi_{ij}(x,y),z)\in X_{n+1}$. Sada zbog uslova (v) $\Phi_{it}(x,\Phi_{ij}(y,z))\in X_{n+1}$. Takodje, par $v=(x,\Phi_{jk}(y,z))\in B$ na osnovu definicije skupa B, jer $(x,\ _{jk}(y,z))\in X_i\times X_k$ $(i,k\leq n)$. Ako $(x,y)\in A$, onda par $u=(\Phi_{ij}(x,y),z)\in B$, po definiciji skupa B.

Ako $(x,y),(y,z)\in A$, onda na osnovu razmatranja u 1.1.1.

$$(x*y)*z=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z)=x*(y*z)$$

Ako je $(x,y)\in B$, $(y,z)\in A$, onda je

$$(x*y)*z=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha};\alpha\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y)*z,\ \text{zbog (5), jer } (x,y)\in B$$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha\xi_z};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y)*z$$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha\xi_z}\Psi(x,\lambda\eta_x\eta_y);\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z),\text{zbog (3)}$$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha\xi_z}p_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha\xi_z}\ \Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};$$
$$\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z),\ \text{zbog } (iv)$$

$$=(\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y\eta_z)$$

$= x*(y*z)$, na osnovu razmatranja u 1.1.1.

1.1.4. Neka je $s \geq i+j$, $s > n-k$ i $t \geq j+k$, $t > n-i$. Tada $(x,y) \in A \cup B$, $(y,z) \in A \cup B$.

Ako $(x,y) \in A$, onda, zbog $s > n-k$, $(\Phi_{ij}(x,y),z) \in B$, pa je na osnovu razmatranja u 1.1.1.

$$(x*y)*z = (\Phi(x,\alpha\xi_z\xi_y)\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y\xi_x;\lambda\eta_x\eta_y\eta_z).$$

Desnu stranu poslednje jednakosti označavaćemo nadalje sa w.

Ako je $(x,y) \in B$, onda na osnovu razmatranja u 1.1.3. $(x*y)*z = w$.

Ako je $(y,z) \in A$, onda, zbog $t > n-i$, $(\Phi_{ij}(x,y),z) \in B$, pa je na osnovu razmatranja u 1.1.1. $x*(y*z) = w$. Ako je $(y,z) \in B$, onda je na osnovu razmatranja u 1.1.2. $x*(y*z) = w$.

Dakle, i u ovom slučaju važi asocijativnost.

1.2. Neka je $i+j \leq n$; $j+k > n$. Tada $\Phi_{ij}(x,y) \in X_s$, pri čemu je $s > n-k$. Zaista, ako bi bilo $s \leq n-k$, onda iz $i+j \leq s$ sledi da je $i+j+k \leq n$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $j+k > n$.

Sada je (x,y) $A \cup B$, $(y,z) \in B$.

Ako $(x,y) \in A$, onda $(\Phi_{ij}(x,y),z) \in B$ i na osnovu razmatranja u 1.1.1. je $(x*y)*z = w$. Ako $(x,y) \in B$, onda je na osnovu razmatranja u 1.1.3. $(x*y)*z = w$. Kako je $(y,z) \in B$, onda na osnovu razmatranja u 1.1.2. je $x*(y*z) = w$.

Dakle, i u ovom slučaju važi asocijativnost.

1.3. Neka je $i+j > n$; $j+k \leq n$. Tada $\Phi_{jk}(y,z) \in X_t$, pri čemu je $t > n-i$. Zaista, ako bi bilo $t \leq n-i$, onda iz $j+k \leq t$, sledi da je $i+j+k \leq n$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $i+j > n$.

Sada $(x,y) \in B$, $(y,z) \in A \cup B$.

Ako $(y,z) \in A$, onda $(x,\Phi_{jk}(y,z)) \in B$ pa na osnovu razmatranja u 1.1.1. je $x*(y*z)=w$. Ako je $(y,z)\in B$, onda na osnovu razmatranja u 1.1.2. je $x*(y*z)=w$. Kako je $(x,y)\in B$, onda na osnovu razmatranja u 1.1.3. $(x*y)*z=w$.

Dakle, i u ovom slučaju važi asocijativnost.

1.4. Neka je $i+j>n$; $j+k>n$. Tada je $(x,y);(y,z)\in B$. Zbog $(x,y)\in B$ i razmatranja u 1.1.3. zaključujemo da je $(x*y)*z=w$. Takodje, zbog $(y,z)\in B$ i razmatranja u 1.1.2. zaključujemo da je $x*(y*z)=w$.

Dakle, i u ovom slučaju važi asocijativnost.

2. $x\in X_i$, $y\in X_j$, $1\leq i,j\leq n$, $z=(a,\alpha,\lambda)\in M$

2.1. Ako je $i+j\leq n$, onda u slučaju da $\Phi_{ij}(x,y)\in X_s$, $s\leq n$ je

$(x*y)*z=\Phi_{ij}(x,y)*z$

$=(\Phi(\Phi_{ij}(x,y),\alpha)a;\alpha\xi_{\Phi_{ij}(x,y)},\lambda)$ (na osnovu (2))

$=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\phi(y,\alpha)a;\alpha\xi_y\xi_x,\lambda)$ (na osnovu (*i*)i(*iii*))

ili u slučaju $\Phi_{ij}(x,y)\in X_{n+1}$, na osnovu (5) i (2) je

$(x*y)*z=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha};\alpha\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y)*(a;\alpha,\lambda)$

$=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha}p_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha}\ a;\ \alpha\xi_y\xi_x,\lambda)$

$=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)a;\ \alpha\xi_y\xi_z,\lambda)$.

Kako je u oba slučaja

$x*(y*z)=x*(y*(a;\alpha,\lambda))$

$=x*(\Phi(y,\alpha)a,\alpha\xi_y,\lambda)$ (na osnovu (2))

$=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)a;\alpha\xi_y\xi_x,\lambda)$ (na osnovu (2)) onda je $(x*y)*z=x*(y*z)$.

2.2. Ako je $i+j>n$, onda se na osnovu (2) jednostavno dokazuje da je

$$(x*y)*z=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)a;\alpha\xi_y\xi_x,\lambda)=x*(y*z).$$

3. $x,z\in Y$, $y=(a,\alpha,\lambda)\in M$. Tada, pošto je

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*(a,\alpha,\lambda))*z \\ &=(\Phi(x,\alpha)a;\alpha\xi_x,\lambda)*z \qquad \text{(na osnovu (2))} \\ &=(\Phi(x,\alpha)a\Psi(z,\lambda);\alpha\xi_x,\lambda\eta_z) \qquad \text{(na osnovu (3))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x*(y*z)&=x*((a;\alpha,\lambda)*z) \\ &=x*(a\Psi(z,\lambda);\alpha,\lambda\eta_z) \qquad \text{(na osnovu (3))} \\ &=(\Phi(x,\alpha)a\Psi(z,\lambda);\alpha\xi_x,\lambda\eta_z) \qquad \text{(na osnovu (2))},\end{aligned}$$

onda je $(x*y)*z=x*(y*z)$.

4. $x=(a;\alpha,\lambda)$; $y\in X_i$, $z\in X_j$.

4.1. Ako $i+j\leq n$, onda u slučaju da $\Phi_{ij}(y,z)\in X_s$, $s\leq n$ na osnovu (4), (3), (*iv*), (*i*), (*iii*), je

$$\begin{aligned}x*(y*z)&=(a;\alpha,\lambda)*\Phi_{ij}(y,z) \\ &=(a\Psi(\Phi_{ij}(y,z),\lambda);\alpha,\lambda\eta_{\Phi_{ij}(y,z)}) \\ &=(ap_{\lambda,\alpha\xi_{\Phi_{ij}(y,z)}}\Phi(\Phi_{ij}(y,z)\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_{\Phi_{ij}(y,z)},\alpha};\alpha,\lambda\eta_{\Phi_{ij}(y,z)}) \\ &=(ap_{\lambda,\alpha\xi_z\xi_y}\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha,\lambda\eta_y\eta_z)\end{aligned}$$

$$=(ap_{\lambda,\alpha\xi_z\xi_y}\,\Phi(y,\alpha\xi_z)p^{-1}_{\lambda\eta_y\alpha\xi_z}p_{\lambda\eta_y\alpha\xi_z}\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha,\lambda\eta_y\eta_z)$$

$$=(a\Psi(y,\lambda)\Phi(z,\lambda\eta_y);\alpha,\lambda\eta_y\eta_z)$$

ili u slučaju da $\Phi_{ij}(y,z)\in X_{n+1}$ a na osnovu (5), (3) i (*iv*), je

$$x*(y*z)=x*(\Phi(y,\alpha\xi_z)\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_y\eta_z};\alpha\xi_z\xi_y,\lambda\eta_y\eta_z)$$

$$=x*(p^{-1}_{\lambda,\alpha\xi_z\xi_y}p_{\lambda,\alpha\xi_z\xi_y}\Phi(y,\alpha\xi_z)p^{-1}_{\lambda\eta_y,\alpha\xi_z}\,p_{\lambda\eta_y,\alpha\xi_z}\Phi(z,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_y\eta_z,\alpha};\alpha\xi_z\xi_y,\lambda\eta_y\eta_z$$

$$=(a;\alpha,\lambda)*(p^{-1}_{\lambda,\alpha\xi_z\xi_y}\Psi(y,\lambda)\Psi(z,\lambda\eta_y);\alpha\xi_z\xi_y,\lambda\eta_y\eta_z)$$

$$=(ap_{\lambda,\alpha\xi_z\xi_y}\,p^{-1}_{\lambda,\alpha\xi_z\xi_y}\Psi(y,\lambda)\Psi(z,\lambda\eta_y);\alpha,\lambda\eta_y\eta_z)$$

$$=(a\Psi(y,\lambda)\Psi(z,\lambda\eta_y);\alpha,\lambda\eta_y\eta_z)$$

Kako je u oba slučaja, na osnovu (3),

$$(x*y)*z=((a;\alpha,\lambda)*y)*z$$

$$=(a\Psi(y,\lambda);\alpha,\lambda\eta_y)*z$$

$$=(a\Psi(y,\lambda)\Psi(z,\lambda\eta_y);\alpha,\lambda\eta_y\eta_z),$$

onda je $(x*y)*z=x*(y*z)$.

4.2. Ako je $i+j>n$, onda kao u slučaju 4.1. je $(x*y)*z=(a\Psi(y,\lambda)\Psi(z,\lambda\eta_y);\alpha,\lambda\eta_y\eta_z)=x*(y*z)$.

5. $x\in Y$, $y=(a;\alpha,\lambda)$, $z=(b;\beta,\mu)\in M$. Tada je

$$(x*x)*z=(x*(a;\alpha,\lambda))*(b;\beta,\mu)$$

$$=(\Phi(x,\alpha)a;\alpha\xi_x,\lambda)*(b;\beta,\mu) \quad \text{(na osnovu (2))}$$

$=(\Phi(x,\alpha)ap_{\lambda\beta}b;\alpha\xi_z,\mu)$

Kako je i

$$x*(y*z) = x*((a;\alpha,\lambda)*(b;\beta,\mu))$$

$$= x*(ap_{\lambda\beta}b;\alpha,\mu)$$

$$=(\Phi(x,\alpha)ap_{\lambda\beta}b;\alpha\xi_x,\mu) \qquad \text{(na osnovu (2))},$$

onda je $(x*y)*z=x*(y*z)$.

6. $x=(a;\alpha,\lambda)$, $z=(b;\beta,\mu)\in M$, $y\in Y$. Tada je

$$(x*y)*z=((a;\alpha,\lambda)*y)*(b;\beta,\mu)$$

$$=((a\Psi(y,\lambda);\alpha,\lambda\eta_y)*(b;\beta,\mu) \text{ (na osnovu (3))}$$

$$=(a\Psi(y,\lambda)p_{\lambda\eta_y,\beta}b;\alpha,\mu)$$

$$=(ap_{\lambda,\beta\xi_y}\Phi(y,\beta)p^{-1}_{\lambda\eta_y,\beta}p_{\lambda\eta_y,\beta}b;\alpha,\mu)\text{(zbog } (iv))$$

$$=(ap_{\lambda,\beta\xi_y}\Phi(y,\beta)b;\alpha,\mu)$$

Kako je i

$$x*(y*z)=(a;\alpha,\lambda)*(y*(b;\beta,\mu))$$

$$=(a;\alpha,\lambda)*(\Phi(y,\beta)b;\beta\xi_y,\mu) \text{ (zbog (2))}$$

$$=(ap_{\alpha,\beta\xi_y}\Phi(y,\beta)b;\alpha,\mu),$$

onda je $(x*y)*z=x*(y*z)$

7. $X=(a;\alpha,\lambda)$, $y=(b;\beta,\mu)\in M$, $z\in Y$. Tada je

$$(x*y)*z=((a;\alpha,\lambda)*(b;\beta,\mu))*z$$

$$=(ap_{\lambda\beta}b;\alpha,\mu)*z$$

$$=(ap_{\lambda\beta}b\Psi(z,\mu);\alpha, \mu\eta_z)$$

Kako je i

$$x*(y*z)=(a;\alpha,\lambda)*((b;\beta,\mu)*z)$$

$$=(a;\alpha,\lambda)*(b\Psi(z,\mu);\beta,\mu\eta_z) \quad (\text{zbog } (3))$$

$$=(ap_{\lambda\beta}b\Psi(z,\mu);\alpha,\mu\eta_z),$$

onda je $x*(y*z)=(x*y)*z$.

8. U slučaju $x,y,z\in M$, onda je $(x*y)*z=x*(y*z)$ na osnovu definicije operacije u M.

Kako drugih mogućnosti nema, time je dokazana asocijativnost za operaciju $*$. Dakle, $(S,*)$ je polugrupa.

Dokažimo sada da je $S^{n+1}=M$. Na osnovu definicije operacije $*$, jasno je da je M ideal od S. Neka je $u\in S^{n+1}$ tj. $u=x_1*x_2*\ldots*x_{n+1}$ i da $x_r\notin M$, $r=1,2,\ldots,n+1$. Pretpostavimo da $x_r\in X_1$.

Ako je $2>n$, tada $x_1*x_2\in M$, pa $u\in M$.

Ako je $2\leq n$, onda za $u_1=x_1*x_2=\Phi_{1,1}(x_1,x_2)$ razlikujemo slučajeve

a$_1$) $u_1\in M$. Tada $u\in M$

b$_1$) $u_1\in X_{t_1}$, $2\leq t_1\leq n$. Tada je $u=u_1*x_3*\ldots*x_{n+1}$.

Ako je sada $t_1+1>n$, onda $u_1*x_3\in M$, pa $u\in M$

Ako je $t_1+1\leq n$, onda za $u_2=u_1*x_3=\Phi_{t_1,1}(u_1,x_3)$ razlikujemo slučajeve

a$_2$) $u_2\in M$. Tada $u\in M$

b$_2$) $u_2\in X_{t_2}$, $3\leq t_2\leq n$. Tada $u=u_2*x_4*\ldots*x_{n+1}$.

Nastavajući ovaj postupak dobijamo da $u\in M$ ili postoji $u_{n-2}\in X_{t_{n-2}}$ pri čemu je $n-1\leq t_{n-2}\leq n$ i $u=u_{n-2}*x_n*x_{n+1}$.

Ako je $t_{n-2}+1>n$, tada $u_{n-2}*x_n \in M$, pa $u \in M$

Ako je $t_{n-2}+1=n$, onda za $u_{n-1}=u_{n-2}*x_n=\Phi_{t_{n-2},1}(u_{n-2},x_n)$ razlikujemo slučajeve.

a_{n-1}) $u_{n-1} \in M$. Tada $u \in M$

b_{n-1}) $u_{n-1} \in X_n$. Tada $u=u_{n-1}*x_{n+1} \in M$.

U slučaju da $x_r \in X_{k_r}$, $1<k_r\leq n$ slično se dokazuje da $u \in M$. Tadkoje, ako za neki $1\leq r\leq n+1$ $x_r \in M$ onda $u \in M$.

Dakle, $S^{n+1} \subseteq M$. Kako je M regularna podpolugrupa, onda $M \subseteq S^{n+1}$, pa smo dokazali da je $S^{n+1}=M$ tj. S^{n+1} je potpuno prosta polugrupa.

Obratno, neka je S polugrupa takva da je za neki $n \in Z^+$, S^{n+1} potpuno prosta polugrupa. Polugrupa S je izomorfna Reesovoj matričnoj polugrupi nad grupom G tj. $S^{n+1} \cong M(G;I,\Lambda;P)$. Uočimo particiju

$$S-S^2,\ S^2-S^3, \dots,\ S^n-S^{n+1}, S^{n+1}$$

polugrupe S. Na taj način smo odredili skupove $X_i=S^i-S^{i+1}$, $i=1,2,\dots,n$. Poistovetimo li polugrupu S^{n+1} sa Reesovom matričnom polugrupom $M=M(G;I,\Lambda;P)$, onda skupovi X_i, $(i=1,2,\dots,n)$ i $X_{n+1}=(G\times I\times\Lambda)$ zadovoljavaju uslove konstrukcije.

Neka su $x \in X_i$, $y \in X_j$, $1\leq i$, $j\leq n+1$. Tada proizvod $xy \in \bigcup_{r=i+j}^{n+1} X_r$. Na taj način su definisane funkcije Φ_{ij} kao restrikcije operacije sa S na $X_i x X_j$. Jasno je da, ovako definisane funkcije zadovoljavaju uslove (p) konstrukcije. Kako je

$$\Phi_{sk}(\Phi_{ij}(x,y),z)=(xy)z=x(yz)=\Phi_{it}(x,\Phi_{jk}(y,z))$$

za svaki $z \in X_k$, onda važi uslov (ν) konstrukcije.

Uočimo skup $Y=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Za bilo koje $x \in X_i, y \in X_j$, ako je $i+j\leq n$, onda $xy=\Phi_{ij}(x,y)\in X_t$, $i+j\leq t\leq n+1$. Ako je $t\leq n$, onda skup svih takvih parova (x,y) označimo sa A. Ako je $t=n+1$ ili $i+j>n$, onda skup svih takvih parova označimo sa B. Jasno je da je $A\cup B=Y\times Y$, $A\cap B=\emptyset$. Takodje, je jasno da je $Y=S-S^{n+1}$ parcijalna polugrupa i M ideal od S. Sada, na osnovu Teoreme I.3.3., postoje funkcije: $\xi:x\to\xi_x$, $\eta:x\to\eta_x$, $\Phi:Y\times I\to G$, $\Psi:Y\times\Lambda\to G$ i za funkciju Φ važi uslov (*iv*) konstrukcije. Takodje, na osnovu iste Teoreme važe uslovi (2) i (3). Dalje, na osnovu Teoreme I.3.3,

$$(x,y)\in A \Rightarrow \Phi_{ij}(x,y)=xy\in Y$$

$$\Rightarrow \xi_{\Phi_{ij}(x,y)}=\xi_y\xi_x \text{ i } \eta_{\Phi_{ij}(x,y)}=\eta_x\eta_y,$$

$$(x,y)\in B \Rightarrow xy\notin Y \Rightarrow \xi_y\xi_x=\text{const} \text{ i } \eta_x\eta_y=\text{const}.$$

$$(x,y)\in A \Rightarrow \Phi_{ij}(x,y)=xy\in Y$$

$$\Rightarrow \Phi(\Phi_{ij}(x,y),\alpha)=\Phi(xy,\alpha)=\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha),$$

$$(x,y)\in B \Rightarrow xy\notin Y$$

$$\Rightarrow xy=(\Phi(x,\alpha\xi_y)\Phi(y,\alpha)p^{-1}_{\lambda\eta_x\eta_y,\alpha};\alpha\xi_y\xi_x,\lambda\eta_x\eta_y)$$

Na taj način smo dokazali da na S važe uslovi (*i*), (*ii*), (*iii*) i (5). Uslov (4) očigledno važi. $\square$

3. $\mathcal{L}_N$-POLUGRUPE

E.G.Šutov |52|, te N.Kimmura, T.Tamura i R.Merkel |33| su razmatrali λ-(ρ-) polugrupe tj. polugrupe u kojima svaka podpolugrupa jeste levi (desni) ideal. U ovoj tački uvodimo pojam L_n-(R_n-)polugrupe i dajemo karakterizaciju L_n-polugrupa iz koje se vidi da je reč o jednoj vrsti retraktivnog proširenja polugrupe desnih nula. Takodje, ovde je data konstrukcija za L_2-polugrupe.

Definicija 3.1. Polugrupa S je L_n- (R_n-) *polugrupa* ako za svaku podpolugrupu A od S je

$$S^nA\subseteq A \qquad (AS^n\subseteq A).$$

Lema 3.1. Klasa L_n-polugrupa zatvorena je za podpolugrupe i za homomorfne slike.

Dokaz. Neka je S L_n-polugrupa, T podpolugrupa od S i A podpolugrupa od T. Tada A jeste podpolugrupa od S i $T^nA\subseteq S^nA\subseteq A$, pa T jeste L_n-polugrupa.

Neka je P grupoid i $f:S\to P$ homomorfizam. Neka je $T=f(S)$ i $x',y',z'\in T$. Tada postoje $x,y,z\in S$ da je $x'=f(x)$, $y'=f(y)$, $z'=f(z)$. Sada, korišćenjem činjenice da je f homomorfizam, jednostavno proveravamo da je T podpolugrupa. Dokažimo da je T L_n-polugrupa. Neka je K podpolugrupa od T i neka je $H=\{x\in S\mid f(x)\in K\}$. Skup H je podpolugrupa od S i $f(H)=K$ što se jednostavno proverava. Kako je

$$T^nK=f(S)^nf(H)=f(S^n)f(H)=f(S^nH) \quad f(h)=K,$$

onda sledi da je T L_n-polugrupa. $\square$

Lema 3.2. Polugrupa S je L_n-polugrupa ako i samo ako

(3.1) $\qquad (\forall a\in S)\ S^na\subseteq \langle a\rangle$

Dokaz. Neka je S L_n-polugrupa i $a \in S$. Tada je

$$S^n a \subseteq S^n \langle a \rangle \subseteq \langle a \rangle$$

Obratno, neka važi (3.1) i neka je A proizvoljna podpolugrupa od S. Tada za bilo koje $a \in T$ je $A^n a \subseteq \langle a \rangle \subseteq T$, pa $S^n T \subseteq T$. Dakle S jeste L_n-polugrupa. □

Lema 3.3. Ako je S L_n-polugrupa, onda:

(*i*) S je periodička,

(*ii*) E(S) je polugrupa desnih nula,

(*iii*) E(S) je ideal od S,

(*iv*) Reg(S)=E(S).

Dokaz.(i) Neka je $x \in S$. Tada, na osnovu pretpostavke i Leme 3.2., je

$$x^{2n+1} = x^{n-1} x^n x^2 \in S^n x^2 \subseteq \langle x^2 \rangle$$

odakle sledi da je S periodička.

(*ii*) Neka je $e \in E(S)$. Tada, zbog (3.1), $S^n e \subseteq \langle e \rangle = \{e\}$ i otuda $fe = f^n e = e$, pa E(S) je polugrupa desnih nula.

(*iii*) Neka je $x \in S$, $e \in E(S)$. Tada je, na osnovu hipoteze i Leme 3.2., $xe = xe^{n-1} e \in \langle e \rangle$ tj. $xe = e$. Sledi da je E(S) levi ideal od S. Sada je i

$$(ex)^2 = (e(xe))x = e^2 x = ex \in E(S),$$

pa je E(S) i desni ideal od S. Dakle E(S) jeste ideal od S.

(*iv*) Neka je $a \in Reg(S)$. Tada je $a = axa$ za neki $x \in S$. Kako je $ae = e$ za svaki $a \in S$ i svaki $e \in E(S)$ i kako je $ax \in E(S)$, onda je $a(ax) = ax$. Sada je $a^2 = a(axa) = (a(ax))a = axa = a$. Dakle, $Reg(S) \subseteq E(S) \subseteq Reg(S)$, pa važi (*iv*). □

Lema 3.4. Ako je S L_{2k-1}- polugrupa, onda je za svaki $x\in S$, $\langle x\rangle=\{x,x^2,\ldots,x^m=x^{m+1}\}$ gde je $1\le m\le 2k+1$ i x^m je nula polugrupe $\langle x\rangle$.

Dokaz. Na osnovu (*i*) Leme 3.3. S je periodička a na osnovu Leme 3.1. za svaki $x\in S$ ciklična podpolugrupa $\langle x\rangle$ je periodička sa idempotentom x^m za neki $m\in Z^+$. Na osnovu (*iii*) Leme 3.3. i Leme 3.1. x^m je nula polugrupe $\langle x\rangle$, pa $\langle x\rangle=\{x,x^2,\ldots,x^m=x^{m+1}\}$. Ako je $m>2k+1$, onda $x^{2k+1}\in S^{2k-1}x^2$ i $x^{2k+1}\notin\langle x^2\rangle$ što je u konstradikciji sa Lemom 3.2. $\square$

Lema 3.5. Ako je S L_{2k}-polugrupa, onda je za svaki $x\in S$, $\langle x\rangle=\{x,x^2,\ldots,x^m=x^{m+1}\}$ gde je $1\le m\le 2k+1$ i x^m je nula polugrupe $\langle x\rangle$.

Dokaz. Da je za svaki $x\in S$, $\langle x\rangle=\{x,x^2,\ldots,x^m=x^{m+1}\}$ i da je x^m nula polugrupe $\langle x\rangle$ za neki $m\in Z^+$ dokazuje se kao u Lemi 3.4. Predpostavimo da je $m>2k+3$. Tada $x^{2k+3}=x^{2k+1}x^2\in S^{2k}x^2$ i $x^{2k+3}\notin\langle x^2\rangle$ što je u konstradikciji sa Lemom 3.2. Dakle, $1\le m\le 2k+3$. $\square$

Teorema 3.1. Neka je S ciklična polugrupa. Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(*i*) S je L_{2k}-polugrupa;

(*ii*) S je ${}_{2k+1}$-polugrupa;

(*iii*) S je $2k+3$-nilpotentna polugrupa.

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*iii*). Neka je $S=\langle x\rangle$ L_{2k}-polugrupa. Na osnovu Leme 3.5. x^{2k+3} je nula polugrupe $\langle x\rangle$. Sada zaključujemo da je $S^{2k+3}=\{x^{2k+3}\}$ i otuda S je $2k+3$-nilpotentna polugrupa.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) Neka je $S=\langle x\rangle$ L_{2k+1}-polugrupa.

Na osnovu Leme 3.4. zaključujemo, kao u prethodnom slučaju, da je S $2k+3$-nilpotentna polugrupa.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* $S=\langle x\rangle$ i $S^{2k+3}=0$. Tada ja $x^{2k+3}=0$. Sada se neposredno proverava da je za svaki $a\in S$ $S^{2k}a\subseteq\langle a\rangle$, pa na osnovu Leme 3.2. S jeste L_{2k}-polugrupa.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*. Dokaz je analogan dokazu za *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*.

$\square$

Teorema 3.2. Neka je S ciklična polugrupa. Tada S je L_1-polugrupa ako i samo ako je $S=0$.

Dokaz. Neka je $S=\langle x\rangle$ L_1-polugrupa. Tada je na osnovu Leme 3.4. $x^3=0$, pa $S^3=0$. Obrat sledi neposredno.

$\square$

Teorema 3.3. Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je L_{2k}- polugrupa;

(ii) $(\forall x_1,x_2,\dots,x_{2k},\ y\in S)\ x_1x_2\dots x_{2k}y\in\{y^2,y^3,\dots,y^{2k+3}\}$

(iii) S je retraktivna ekstenzija polugrupe desnih nula pomoću L_{2k}-nil-polugrupe.

Dokaz (i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Neka važi *(i)*. Tada na osnovu Lema 3.2. i 3.5., za bilo koje $x_1x_2,\dots,x_m,y\in S$

$$x_1x_2\dots x_{2k}y\in\langle y\rangle=\{y,y^2,\dots,y^{2k+3}=y^{2k+4}\}.$$

Ako je $x_1x_2\dots x_{2k}y=y$, onda je

$$\begin{aligned}(x_1x_2\dots x_{2k})^{2k+3}y&=(x_1x_2\dots x_{2k})^{2k+2}(x_1x_2\dots x_{2k}y)\\&=(x_1x_2\dots x_{2k})^{2k+2}y\\&\ \vdots\\&=x_1x_2\dots x_{2k}y\\&=y\in\langle y\rangle\end{aligned}$$

Kako je $(x_1x_2\ldots x_m)^{2k+3}\in E(S)$ (Lema 3.5) i $(x_1x_2\ldots x_{2k})^{2k+3}y\in E(S)$ ((*iii*) Lema 3.3), onda je

$$y=(x_1x_2\ldots x_{2k})^{2k+3}y\in E(S)\cap\langle y\rangle=y^{2k+3}$$

Dakle, važi (*ii*).

(*ii*) => (*i*). Neka je A bilo koja podpolugrupa od S. Tada,na osnovu hipoteze (*ii*),za proizvoljne $x_1,x_2,\ldots,x_{2k}\in S$, $y\in A\subseteq S$ sledi da $x_1x_2\ldots x_{2k}y\in\langle y\rangle\subseteq A$. Dakle,$S^{2k}A\subseteq A$ pa S jeste L_{2k}-polugrupa.

(*i*) => (*iii*). Neka važi (*i*). Na osnovu (*iii*) Leme 3.3. S jeste idealska ekstenzija polugrupe desnih nula E(S). Formulom

$$(\forall x\in S)\Phi(x)=x^{2k+3}$$

definisano je preslikavanje polugrupe S na E(S). Sada $\Phi(xy)\in E(S)\cap\langle y\rangle$, jer

$$\begin{aligned}\Phi(xy) &= (xy)^{2k+3}\\ &=((xy)^{2k+2}x)y\\ &\in S^{2k}y\\ &\subseteq\langle y\rangle \qquad \text{(po Lemi(3.2))}\end{aligned}$$

i $\Phi(x\cdot y)\in E(S)$, pa na osnovu Leme 3.5. $\Phi(xy)=y^{2k+3}$. Dalje je

$$y^{2k+3}=\Phi(y)=\Phi(x)\Phi(y)$$

Dakle, Φ je epimorfizam. Kako je $\Phi(x^{2k+3})=x^{2k+3}$ jer $x^{2k+3}\in E(S)$, zaključujemo da je Φ retrakcija. Dokazali smo da je S retraktivna ekstenzija polugrupe desnih nula E(S). Kako je Reesova faktor polugrupa S/E(S) L_{2k}-nil-polugrupa , jer E(S) je nula u S/E(S) i za svaki

$x \in S-E(S)$ postoji $m \in Z^+$ tako da je $x^m \in E(S)$ (Lema 3.5), onda važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka je A proizvoljna podpolugrupa od S. Za proizvoljne $x_1x_2,\dots x_{2k} \in S$, $y \in A$ $x_1x_2\dots x_{2k}y \in E(S)$ ili $x_1x_2\dots x_{2k}y \notin E(S)$.

Ako $x_1x_2\dots x_{2k}y \in E(S)$, onda je

$$
\begin{aligned}
x_1x_2\dots x_{2k}y &= \Phi(x_1x_2\dots x_{2k}y) \\
&= \Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_{2k})\Phi(y) \\
&= \Phi(y) \quad \text{(jer } E(S) \text{ je pol.desnih nula).}
\end{aligned}
$$

Sada,ako $y \in E(S)$, onda je $x_1x_2\dots x_{2k}y = \Phi(y) = y$ A. Ako $y \notin E(S)$, onda postoji $m \in Z^+$, $m>1$ da $y^m \in E(S)$, pa je

$$x_1x_2\dots x_{2k}y = \Phi(y) = \Phi(y^{m-1})\Phi(y) = \Phi(y^m) = y^m \in \langle y\rangle \subseteq A.$$

Ako $x_1x_2\dots x_{2k}y \notin E(S)$, onda $x_1x_2\dots x_{2k}y \in \langle y\rangle$ jer $S/E(S)$ je L_{2k}-polugrupa.

Dakle, polugrupa S ima svojstvo $S^{2k}A \subseteq A$ za bilo koju podpolugrupu A od S tj. S je L_{2k}-polugrupa. $\square$

Teorema 3.4. Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je L_{2k+1}-polugrupa;

(ii) $(\forall x_1x_2,\dots,x_{2k+1},y \in S)x_1x_2\dots x_{2k+1}y \in \{y^2,y^3,\dots,y^{2k+3}\}$

(iii) S je retraktivna ekstenzija polugrupe desnih nula pomoću L_{2k+1}-nil-polugrupe. $\square$

Dokaz ove teoreme izostavljamo jer je gotovo istovetan dokazu Teoreme 3.3.

Teorema 3.5. Polugrupa S je L_2-polugrupa ako i samo ako S je retraktivna ekstenzija polugrupe desnih nula pomoću 5-nilpotentne L_2-polugrupe.

Dokaz. Neka je S L_2-polugrupa. Dokažimo da je broj 5 najmanji prirodan broj za koji je $S^5=E(S)$. Dokažimo najpre da je $S^6=E(S)$. Za bilo koje $x_1,x_2,\dots,x_6 \in S$ je

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3x_4x_5x_6 &= x_1x_2x_3x_6^i, \quad i\geq 2 && \text{(po Teoremi 3.3.)}\\ &= x_1x_6^{ij}, \quad j\geq 2 && \text{(po Teoremi 3.3.)}\\ &= x_1x_6x_6^{ij-1} && \\ &= x_6^{(ij-1)k}, \quad k\geq 2 && \text{(po Teoremi 3.3.)}\\ &\in E(S) && \text{(po Lemi 3.5 jer } (ij-1)k\geq 6) \end{aligned}$$

Sada, za bilo koje $x,y,z \in S$ za koje je $xyz=z^2$, sledi da je $z^4=xyzxyz \in E(S)$.

Neka su $x_1,x_2,x_3,x_4,y \in S$ proizvoljni elementi. Tada $x_3x_4y \in \{y^2,y^3,y^4,y^5\}$ po Teoremi 3.3. Ako $x_3x_4y=y^2$, onda $x_1x_2x_3x_4y=x_1x_2y^2=y^{2k} \in E(S)$, jer $2i\geq 4$ i $y^4 \in E(S)$. Ako je $x_3x_4y=y^k$, $3\leq k\leq 5$, onda je $x_1x_2x_3x_4y=x_1x_2y^k=y^{ki} \in E(S)$, jer je $ki\geq 6$. Dakle $S^5=E(S)$.

Jasno je da je 5 najmanji prirodan broj za koji je $S^5=E(S)$, jer $S=\{x,x^2,x^3,x^4,x^5=x^6\}$ je L_2-polugrupa i $S^4\neq E(S)$. Dakle Réesova faktor polugrupa $S/E(S)$ je 5-nilpotentna i jasno L_2-polugrupa. Kao u Teoremi 3.3. dokazujemo da je preslikavanje $\Phi(x)=x^5$ za svaki $x \in S$ retrakcija od S na E(S).

Obrat dokazujemo kao u slučaju (*iii*) => (*i*) iz Teoreme 3.3. uzimajući k=1. /7

Teorema 3.6. Neka je E polugrupa desnih nula. Svakom $e \in E$ pridružimo familiju skupova X_i^e, i=1,2,3,4 tako da je

$$(3.2)\quad \begin{cases} e \in X^e \\ X_i^e \cap X_j^e = \emptyset\ , & \text{ako je } i \neq j,\quad e \in E \\ X_i^e \cap X_j^f = \emptyset\ , & \text{ako je } e \neq f \end{cases}$$

Za neprazne skupove X_i^e, X_j^f, $1 \leq i,j \leq 4$, neka su

$$(3.3)\quad \begin{cases} \Phi_{(i,j)}^{(e,f)} : X_i^e x X_j^f \to \bigcup\limits_{\nu=i+j}^{4} X_\nu^f\ , & \text{ako je } i+j \leq 4 \\ \Phi_{(i,j)}^{(e,f)}(x,y) = f, & \text{ako je } i+j > 4 \end{cases}$$

Funkcije za koje važi

$$(3.4)\quad (\forall s \geq i+j)(\forall t \geq j+k)\ \Phi_{(s,k)}^{(f,g)}(\Phi_{(i,j)}^{(e,f)}(x,y),z) = \Phi_{(i,t)}^{(e,g)}(x,\Phi_{(j,k)}^{(f,g)}(y,z))$$

i neka su

$$A = \{(x,y,z) \mid z \in X_1^g, x \in X_i^e, y \in X_j^f, i+j \leq 3\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$B = \{(x,y,z) \mid z \in X_2^g, x \in X_1^e, y \in X_1^f\} = B_1 \cup B_2$$

skupovi takvi da je

$$(3.5)\quad \underset{2 \leq i+j \leq s \leq 3}{\Phi_{(s,1)}^{(f,g)}(\Phi_{(i,j)}^{(e,f)}(x,y),z)} = \begin{cases} \Phi_{(1,1)}^{(g,g)}(z,z), \text{ako} & (x,y,z) \in A_1 \\ \Phi_{(\ell,1)}^{(g,g)}(\Phi_{(1,1)}^{(g,g)}(z,z),z), \text{ako} & (x,y,z) \in A_2,\ 2 \leq \ell \leq 3 \\ \Phi_{(3,1)}^{(g,g)}(\Phi_{(2,1)}^{(g,g)}(\Phi_{(1,1)}^{(g,g)}(z,z),z),z), \text{ako} & (x,y,z) \in A_3 \\ g,\ \text{ako } (x,y,z) \in A_4 \end{cases}$$

$$(3.6)\quad \underset{2 \leq i+j \leq s \leq 3}{\Phi_{(s,2)}^{(f,g)}(\Phi_{(i,j)}^{(e,f)}(x,y),z)} = \begin{cases} \Phi_{(2,2)}^{(g,g)}(z,z), & \text{ako } (x,y,z) \in B_1 \\ g, & \text{ako } (x,y,z) \in B_2 \end{cases}$$

(3.7) $\quad \Phi^{(f,g)}_{(s,k)}(\Phi^{(e,f)}_{(i,j)}(x,y),z)=g \quad$ u ostalim slučajevima

Na $S=\bigcup_{e\in E} Y_e$, gde je $Y_e=\bigcup_{i=1}^{4} X_i^e$, definišimo množenje $*$ tako da je za $x\in Y_e$, $y\in Y_f$

$$x*y=\Phi^{(e,f)}_{(i,j)}(x,y), \text{ ako } x\in X_i^e,\ y\in X_i^f,\ 1\le i,j\le 4.$$

Tada $(S,*)$ jeste L_2-polugrupa.

Obratno, svaka L_2-polugrupa se može ovako konstruisati.

Dokaz. Na $(S,*)$ važi osacijativni zakon zbog (3.4), pa je $(S,*)$ polugrupa. Neka su $x,y,z\in S$ proizvoljni elementi. Tada postoje $e,f,g\in E$ takvi da $x\in X_i^e, y\in X_j^f$, $z\in X_k^g$, $1\le i,j,k\le 4$.

Ako je $i+j\le 3$, $k=1$, onda na osnovu (3.5) je

(3.8) $\quad x*y*z \quad \{z^2,z^3,z^4,g\}$

Ako je $i=j=1$, $k=2$, onda na osnovu (3.6) važi (3.8).

U ostalim slučajevima tj. kada je $i+j>3$, $k\in\{1,2,3,4\}$ ili $k>3$, $i+j\in\{2,3,4\}$,takodje važi (3.8) na osnovu (3.7) Kako je $u=z*z*z\in X_\nu^g$, $\nu\ge 3$, onda je zbog (3.7)

$$z^5=z*z*u=g \quad i \quad z^6=z*z*z*u=z*g=g$$

Dakle, $x*y*z\in\{z^2,z^3,z^4,z^5=z^6\}$,pa na osnovu Teoreme 3.3. S je L_2-polugrupa.

Pošto je $(S,*)$ L_2-polugrupa, onda na osnovu Teoreme 3.5 $(S,*)$ je posebna vrsta 4-inflacije polugrupe desnih nula E gde je $x\to x^5$ retrakcija.

Obratno, neka je S L_2-polugrupa. Za polugrupu S uočimo particiju

$$S-S^2;\ S^2-S^3,\ S^3-S^4,\ S^4$$

Za svaki $e \in E(S)$ neka je $Y_e = \Phi^{-1}(e)$, gde je $\Phi: S \to E(S)$ retrakcija. Skupovi

$$X_1^e = Y_e \cap (S-S^2),\quad X_2^e = Y_e \cap (S^2-S^3),\quad X_3^e = Y_e \cap (S^3-S^4),\quad X_4^e = Y_e \cap S^4$$

zadovoljavaju uslov (3.2) konstrukcije. Takodje, na osnovu Teoreme 1.3,

$$Y_e = \bigcup_{i=1}^{4} X_i^e \quad \text{i} \quad S = \bigcup_{e \in E} Y_e$$

gde je Y_e polugrupa sa jednim idempotentom.

Neka su $x \in X_i^e$, $y \in X_j^g$, $1 \leq i,j \leq 4$. Tada

$$xy \in Y_e Y_f \subseteq Y_{ef} = Y_f,$$

gde je $E(S)$ polugrupa desnih nula i $xy \in S^{i+j}$. Ako je $i+j \leq 4$, onda $xy \in \bigcup_{\nu=1}^{4} X_\nu^f$. Ako je $i+j>4$, onda, zbog $S^5 = E(S)$ (Teorema 3.5), je $xy \in Y_f \cap S^5 = f$.

Na taj način smo za neprazne skupove X_i^e, X_j^f, $1 \leq i,j \leq 4$ definisali funkcije (3.3). Neposredno je jasno da za te funkcije važi uslov (3.4).

Skupovi

$$A = \{(x,y,z) \mid x \in X_i^e, y \in X_j^f, z \in X_1^g, e,f,g \in E(S),\ i+j \leq 3\}$$

$$B = \}(x,y,z) \mid x \in X_1^e, y \in X_1^f, z \in X_2^g, e,f,g \in E(S)\}$$

$$C = \{(x,y,z) \mid x \in X_i^e, y \in X_j^f, z \in X_k^g,\ e,f,g \in E(S),\ i+j+k \geq 5\}$$

su medjusobno disjunktni i $A \cup B \cup C = S^3$.

Po Teoremi 3.3. za bilo koji $(x,y,z) \in S^3$ je $xyz \in \{z^2, z^3, z^4, z^5 = z^6 = g\}$.

Ako $(x,y,z) \in A$, onda postoje po parovima disjunktni skupovi

$$A_k = \{(x,y,z) \in A \mid xyz = z^k\} \quad , \quad k=1,2,3,5$$

takvi da je

$$A = \bigcup_{k=1}^{5} A_k$$

i da za njih važi uslov (3,5) konstrukcije,

Ako $(x,y,z) \in B$, onda $z^3, z^4, z^5 \in E(S)$ (jer $z \in S^2$ i zbog Teoreme 3.5. $S^5 = E(S)$). Zato postoje disjunktni skupovi $B_1 = \{(x,y,z) \in B \mid xyz = z^2\}$ i $B_2 = \{(x,y,z) \in B \mid xyz \in E(S)\}$ takvi da je $B = B_1 \cup B_2$ i da za njih važi uslov (3.6).

Ako $(x,y,z) \in C$, onda $xyz \in S^5 = E(S)$, pa važi uslov (3.7) konstrukcije. □

4. λ_N-POLUGRUPE

U ovoj tački definišemo pojam λ_n-polugrupe i dokazujemo da se radi o jednoj podklasi L_n-polugrupa. U slučaju za n=1 dokazujemo da su λ, λ_1, L_1 jednake klase. M.Petrich je u |39| dao jednu konstrukciju za λ-polugrupe. Ovde ćemo dati karakterizaciju i konstrukciju za λ_n-polugrupe. Videćemo da su λ_n-polugrupe izvesne n+1-inflacije polugrupe desnih nula.

Definicija 4.1. S je λ_n*-polugrupa* ako za svaku podpolugrupu A od S važi $S^n A = A^{n+1}$.

Lema 4.4. Svaka λ_n-polugrupa S je L_n-polugrupa

Dokaz. Neka je S λ_n-polugrupa, onda je

$$S^n A = A^{n+1} \subseteq A$$

za svaku podpolugrupu A od S tj. S je L_n-polugrupa. □

Lema 4.2. S je λ_n-polugrupa ako i samo ako

(4.1) $(\forall a\in S)\ S^n a = \langle a\rangle^{n+1}$

Dokaz. Neka je S λ_n-polugrupa. Tada za svaki $a\in S$,

$$S^n a \subseteq S^n\langle a\rangle = \langle a\rangle^{n+1} \subseteq S^n a$$

tj. važi (4.1).

Obratno, neka važi (4.1) i neka je A podpolugrupa od S. Tada za svaki $a\in A$ imamo da je $S^n a = \langle a\rangle^{n+1} \subseteq A^{n+1}$. Sledi da je $S^n A \subseteq A^{n+1}$ i kako je $A^{n+1} \subseteq S^n A$ imamo da je S λ_n-polugrupa.

Teorema 4.1. Ako je S λ_n-polugrupa, onda za svaki $x\in S$,

$$\langle x\rangle = \{x, x^2, \ldots, x^m = x^{m+1}\}$$

gde je $1\le m\le n+2$.

Dokaz. Neka je S λ_n-polugrupa. Pošto je S L_n-polugrupa onda za polugrupu S važe leme 3.1 i 3.3. Na osnovu tih lema ciklična podpolugrupa $\langle x\rangle$, $x\in S$ je periodička sa idempotentom x^m za neki $m\in Z^+$. Sada na osnovu *(iii)* Leme 3.3. x^m je nula podpolugrupe $\langle x\rangle$, pa

$$\langle x\rangle = \{x, x^2, \ldots, x^m = x^{m+1}\}$$

Ako je $m>n+2$, onda $\langle x\rangle^n x^2 \neq \langle x^2\rangle^{n+1}$ jer $x^{n+2}\in \langle x^2\rangle^{n+1} = \{x^{2n+2}, \ldots, x^m = x^{m+1}\}$, što je u kontradikciji sa Lemom 4.2. $\square$

Teorema 4.2. Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je λ-polugrupa;

(ii) S je L_1-polugrupa;

(iii) S je λ_1- polugrupa.

Dokaz *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*. Važi na osnovu definicija λ- polugrupe i L_1-polugrupe.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Neka je S L_1-polugrupa i A proizvoljna podpolugrupa od S. Tada na osnovu Teoreme 3.4. za proizvoljne $x \in S$ i $y \in S$ je $xy \in \{y^2, y^3\}$, pa $xy \in A^2$ tj. $SA \subseteq A^2$. Kako je $A^2 \subseteq SA$, sledi da je $SA = A^2$ tj. S jeste λ_1-polugrupa.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*. Važi na osnovu Leme 4.1. $\square$

Primer 4.1. Polugrupa $\langle x\rangle = \{x, x^2, x^3, x^4 = x^5\}$ je λ_2-polugrupa ali nije λ_1-polugrupa, jer $\langle x^2\rangle$ nije levi ideal od $\langle x\rangle$.

Teorema 4.3. Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) S je λ_n-polugrupa;

(ii) $(\forall x_1, \dots, x_n, y \in S)\ x_1 x_2 \dots x_n y \in \{y^{n+1}, y^{n+2}\}$;

(iii) S je (n+1)-inflacija polugrupe desnih nula E(S) i

(4.2) $(\forall x_1, \dots x_n, y \in S) x_1 \dots x_n y \notin E \Rightarrow x_1 \dots x_n y = y^{n+1}$.

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Neka je S λ_n-polugrupa. Tada zbog Teoreme 4.1., za svaki $y \in S$, $\langle y\rangle = \{y, y\ , \dots, y^m = y^{m+1}\}$, gde je $1 \le m \le n+2$. Ako je $m = n+2$, tada je $\langle y\rangle^{n+1} = \{y^{n+1} = y^{n+2}\}$. Ako je $m > n+2$, onda je $\langle y\rangle^{n+1} = \{y^{n+2}\}$. Sada, na osnovu Leme 4.2. sledi *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Neka važi *(ii)* i neka $y \in A$, gde je A podpolugrupa od S. Tada $S^n A \subseteq \{y^{n+1}, y^{n+2}\} \subseteq A^{n+1} \subseteq S^n A$, pa S jeste λ_n-polugrupa.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Iz Teoreme 4.1. sledi da $y^{n+2} \in E(S)$ za svaki $y \in S$. Ako je $x_1 x_2 \dots x_n y = y^{n+1}$, tada za

bilo koji $z \in S$

$$z\, x_1 x_2 \ldots x_n y = zy^{n+1} = (zy^n)y = \begin{cases} y^{n+1}y \\ y^{n+2}y \end{cases} = y^{n+2}$$

Ako je $x_1 x_2 \ldots x_n y = y^{n+2}$, tada je $zx_1 x_2 \ldots x_n y = zy^{n+2} = y^{n+2}$.

Dakle, $S^{n+2} = E(S)$.

Preslikavanje $\Phi : S \to S^{n+2}$ definisano formulom

$$(\forall x \in S)\Phi(x) = x^{n+2}$$

je očigledno na. Kako je

$$\begin{aligned} \Phi(xy) &= (xy)^{n+2} \\ &= xy((xy\ldots xyx)y) \\ &= \begin{cases} xy\cdot y^{n+1} \\ xy\cdot y^{n+2}, \quad \text{pošto } xy\ldots xyx \in S^n \end{cases} \\ &= xy^{n+2} \\ &= y^{n+2} \qquad \text{(po Lemi 3.3)} \\ &= x^{n+2}y^{n+2} \qquad \text{(po Lemi 3.3)} \\ &= \Phi(x)\Phi(y). \end{aligned}$$

i $\Phi^2(x) = \Phi(x)$, onda je Φ retrakcija.

Dakle, S jeste (n+1)-inflacija polugrupe desnih nula E(S).

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n, y \in S$ takvi da $x_1 x_2 \ldots x_n y \notin E(S)$. Tada na osnovu hipoteze i činjenice da je $y^{n+2} \in E(S)$, sledi da je $x_1 x_2 \ldots x_n y = y^{n+1}$. Dakle, važi (4.2).

(iii) => *(ii)*. Neka je S (n+1)-inflacija polugrupe desnih nula E(S) i neka važi (4.2). Tada je $S^{n+2} = E(S)$. Neka je $a \in E(S)$ i neka je $Y_a = \Phi^{-1}(a)$, gde je $\Phi : S \to E(S)$ retrakcija. Tada Y_a je unipotentna podpolugrupa od S i $Y_a \cap Y_b = \emptyset$ ako je $a \neq b$, $a, b \in E(S)$. Jasno je da je $S = \bigcup_{a \in T} Y_a$. Za svaki $x_1, x_2, \ldots, x_n, y \in S$ postoje $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in E(S)$

takvi da $x_1 \in Y_{a_1}, x_2 \in Y_{a_2}, \ldots, x_n \in Y_{a_n}$, $y \in Y_b$. Sada

$$x_1 x_2 \ldots x_n y \in Y_{a_1} Y_{a_2} \ldots Y_{a_n} Y_b \subseteq Y_{a_1 a_2 \ldots a_n b} =$$

$$= Y_b = Y_{y^{n+2}} .$$

Ako $x_1 x_2 \ldots x_n y \in E(S)$, onda je $x_1 x_2 \ldots x_n y = y^{n+2}$ jer $x_1 x_2 \ldots x_n y \in T \cap Y_{y^{n+2}}$ i $Y_{y^{n+2}}$ je unipotentna polugrupa. Ako $x_1 x_2 \ldots x_n y \notin T$, onda na osnovu (4.2) $x_1 x_2 \ldots x_n y = y^{n+1}$. Dakle, važi (*ii*).

$\square$

Teorema 4.4. Neka je T polugrupa desnih nula. Svakom $a \in T$ pridružimo familiju skupova X_i^a, $i=1,2,\ldots,n+1$ tako da

$$(4.3)\qquad \begin{cases} a \in X_{n+1}^a \\ X_i^a \cap X_j^b = \emptyset, & \text{ako je } i \neq j \\ X_i^a \cap X_j^b = \emptyset, & \text{ako je } a \neq b \end{cases}$$

Neka su, za neprezne skupove X_i^a i X_j^b , $1 \leq i,j \leq n+1$,

$$(4.4)\qquad \begin{cases} \Phi_{(i,j)}^{(a,b)} : X_i^a \times X_j^b \to \bigcup_{\nu=i+j}^{n+1} X_\nu^b , & \text{ako } i+j \leq n+1 \\ \Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,y) = b , & \text{ako } i+j > n+1 \end{cases}$$

funkcije za koje važi:

$$(4.5)\qquad (\forall s \geq i+j)(\forall t \geq j+k)\Phi_{(s,k)}^{(b,c)}(\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}(x,y),z) = \Phi_{(i,t)}^{(a,c)}(x,\Phi_{(j,k)}^{(b,c)}(y,z))$$

za sve $a,b,c \in T$, gde je $i+j \leq n+1$ ili $j+k \leq n+1$ ili $i+t \leq n+1$ ili $s+k \leq n+1$ i

$$(4.6)\qquad \Phi_{(n,1)}^{(a,b)}(u,y) = \Phi_{(n,1)}^{(b,b)}(\Phi_{(n-1,1)}^{(b,b)}(\ldots(\Phi_{(2,1)}^{(b,b)}(\Phi_{(I,1)}^{(b,b)}(y,y),y)\ldots),y))$$

pri čemu

$$\Phi^{(b,b)}_{(i,1)}(\ldots,(\Phi^{(b,b)}_{(1,1)}(y,y),y)\ldots),y)\in X^b_{i+1}, \quad 1\le i\le n.$$

Naka je $Y_a=\bigcup_{i=1}^{n+1} X^a_i$ i na $S=\bigcup_{a\in T} Y_a$ definišimo množenje $*$ sa:

$$x*y=\Phi^{(a,b)}_{(i,j)}(x,y) \text{ ako } x\in X^a_i,\ y\in X^b_j,\quad 1\le i,j\le n+1.$$

Tada $(S,*)$ λ_n-polugrupa.

Obratno, svaka λ_n-polugrupa može se konstruisati na ovakav način.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.3. $(S,*)$ je polugrupa. Ostaje da se dokaže da važi (*ii*) Teoreme 4.3.

Za $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ y\in S$ pretpostavimo da $x_r\in X^{a_r}_{i_r}$, gde $a_r\in T$, $r=1,2,\ldots,n$; $1\le i_r\le n+1$, $y\in X^b_j$, $1\le j\le n+1$.

Neka je $i_r\ge 2$ ili $j\ge 2$. Tada na osnovu (4.4) je $y^{n+2}=b$ i $x_1*x_2*\ldots*x_n*y=b$, pa važi

$$x_1*x_2*\ldots*x_n*y=b=y^{n+2} \tag{4.7}$$

Neka $x_r\in X^{a_r}_1$, $y\in X^b_1$. Tada

$$w=x_1*x_2*\ldots*x_n*y=\Phi^{(a_1,a_2)}_{(1,1)}(x_1,x_2)*x_3*\ldots*x_n*y.$$

Ako je $u_1=\Phi^{(a_1,a_2)}_{(1,1)}(x_1,x_2)=a_2$, tada je $w=b=y^{n+2}$, pa važi (4.7). Ako je $u_1\ne a_2$, onda

$$w=u_1*x_3*\ldots*x_n*y \quad (\text{pri čemu } u_1\in X^{a_2}_{t_1},\ 2\le t_1\le n+1)$$

$$=\Phi^{(a_2,a_3)}_{(t_1,1)}(u_1,x_3)*x_4*\ldots*x_n*y.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$w=u_{n-1}*y \quad \text{pri čemu } u_{n-1}\in X^{a_n}_{t_{n-1}},\quad n\le t_{n-1}\le n+1.$$

Ako $u_{n-1} \in X_{n+1}^{a_n}$, onda $w=b=y^{n+2}$ tj. važi (4.7). Ako $u_{n-1} \in X_n^{a_n}$, onda na osnovu (4.6) $w=y^{n+1}$.

Dakle, važi uslov (*ii*) Teoreme (4.3) zbog čega je na osnovu iste teoreme $(S,*)$ λ_n-polugrupa.

Obratno, neka je S λ_n-polugrupa. Tada na osnovu Teoreme 3.4. S je (n+1)-inflacija polugrupe desnih nula $S^{n+2}=E(S)$. Neka je Φ retrakcija od S na E(S). Za $a\in E(S)$ definišimo skupove:

$$
\begin{aligned}
&Y_a=\Phi^{-1}(a),\\
&X_1^a = Y_a \cap (S-S^2)\\
&X_2^a = Y_a \cap (S^2-S^3)\\
&\vdots\\
&X_n^a = Y_a \cap (S -S^{n+1})\\
&X_{n+1}^a = Y_a \cap S^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Jasno je da za ovako definisane skupove važe uslovi (4.3) za svaki X_i^a i X_j^b, $1\leq i,j\leq n+1$.

Ako je $a\in E(S)$, tada $Y_y = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i^a$, $S=\bigcup_{a\in T} Y_a$ i takodje je $Y_aY_b \subseteq Y_{ab}=Y_b$.

Neka $x\in X_i^a$, $y\in X_j^b$, $1\leq i,j\leq n+1$. Tada $xy\in Y_b$ i $xy\in S^{i+j}$. Ako je $i+j\leq n+1$, tada $xy \in \bigcup_{\nu=i+j}^{n+1} X_\nu^b$. Ako je $i+j>n+1$, tada su definisane funkcije $\Phi_{(i,j)}^{(a,b)}$ i za njih važi uslov (4.5), jer $xy\in Y_b\cap E(S)=\{b\}$.

Neka $u\in X_n^a$, $y\in X_1^b$. Tada postoje $x_1,x_2,\dots,x_n\in S$ takvi da je $u=x_1x_2\dots x_n$ (jer $X_n^a\subseteq S^n$) i $\langle y\rangle=\{y,y^2,\dots,y^m=y^{m+1}\}$ gde je $m\in\{2,3,\dots,n+1,n+2\}$ (Teorema 4.1). Ako je $2\leq m\leq n+1$, onda je na osnovu (*ii*) Teoreme 4.3.

$$uy=x_1x_2\dots x_ny=y^{n+1}=b,\quad y^m=y^{m+1}=b.$$

Ako je $m=n+2$, onda na osnovu (*iii*) Teoreme 4.3. je

$$uy = x_1x_2\ldots x_ny=y^{n+1}\notin E(S)$$

i pri tome jasno je da $y^k\in X_k^b$, $2\leq k\leq n$. Time smo dokazali da za definisane funkcije važi uslov (4.6).

G L A V A III

POLUGRUPE U KOJIMA JE S^{N+1} POLUMREŽA DESNIH GRUPA

Pitanje, kakva svojstva ima polugrupa S ako je za neki n Z^{+}, S^{n+1} iz neke klase polugrupa, često se postavlja u Teoriji polugrupa. Primetimo da je ovo pitanje u vezi sa idealskim proširenjima polugrupa. U tački 1. ove glave dajemo odgovor na postavljeno pitanje u slučajevima kada je S^{n+1} polumreža desnih grupa (Teorema 1.1), polumreža periodičkih desnih grupa (Teorema 1.2), desna grupa, periodička desna grupa, polugrupa desnih nula. S.Bogdanović i S.Milić u njihovom radu |14| opisali su n-inflacije polumreže grupa. U Teoremi 2.1. dajemo opis n-inflacije polumreže desnih grupa. Osim toga, u tački 2 data je karakterizacija n-inflacija još nekih klasa polugrupa. U tački 3. ove glave data je klasifikacija polugrupa u kojima važi identitet

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = \prod_{j=1}^{k+1} \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{m_{ij}}$$

Neki specijalni slučajevi dati su u radovima |11|,|17|, |50|

1. POLUGRUPE U KOJIMA JE S^{N+1} POLUMREŽA DESNIH GRUPA

M.Petrich je 1966. god., u svom radu |43| je dao karakterizaciju polumreže desnih grupa a S.Bogdanović 1987. u radu |11| polugrupa u kojima je S^2 polumreža desnih grupa.

Ovde razmatramo polugrupe u kojima je S^{n+1} polumreža desnih grupa. (Teorema 1.1.) kao i polugrupe u kojima je S^{n+1} polumreža periodičkih desnih grupa (Teorema 1.2.).

Lema 1.1. S je desna grupa ako i samo ako

(1.1) $\quad (\forall x,a\in S)\ x\in aSx$

Dokaz. Neka je S desna grupa. Tada S je regularna (Teorema I.1.8), pa za bilo koji $a\in S$, postoji $b\in S$ tako da je $a=aba$ pri čemu $ab\in E(S)$. Kako je S desno prosta polugrupa, onda je idempotent ab leva jedinica u S (Lema I.1.1), pa za bilo koji $x\in S$ je $x=abx\in aSx$.

Obratno, neka važi (1.1). Tada S je regularna i za bilo koje $e,f\in E(S)$ postoji $y\in S$ da je

$$e=fye=f.fye=fe,$$

Dakle, S je regularna i E(S) je polugrupa desnih nula tj. S jeste desna grupa (Teorema I.1.8), $\square$

Posledica 1.1. S je periodička desna grupa ako i samo ako

(1.2) $\quad (\forall x,a\in S)(\exists k\in Z^{+})x=a^{k}x$.

Dokaz. Neka je S periodička desna grupa. Tada za svaki $a\in S$ postoji $k\in Z^{+}$ tako da $a^{k}\in E(S)$. Na osnovu Leme 1.1., za bilo koje $x\in S$ postoji $u\in S$ da je $x=a^{k}ux$. Otuda je $x=a^{k}ux=a^{k}a^{k}ax=a^{k}x$.

Obratno, neka važi (1.2). Tada za k=1 je $x=ax=a\cdot ax\in aSx$, za k>1 je $x=a^{k}x=a\cdot a^{k-1}x\in aSx$. Dakle, S jeste desna grupa (Lema I.1.1). Iz (1.2) takodje sledi da je S periodička. $\square$

Teorema 1.1. Sledeći uslovi su ekvivalentni za polugrupu S:

(*i*) $\quad S^{n+1}$ je polumreža desnih grupa;

(*ii*) S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu je S_α^{n+1} desna grupa i za svaki $x_i \in S_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in Y$, je

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} \in S^{n+1}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}} ;$$

(*iii*) $x_1 x_2 \dots x_{n+1} \in x_{n+1} S x_1 x_2 \dots x_{n+1}$

za svaki $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in S$.

Dokaz. *(i)* => *(ii)*. Neka je S^{n+1} polumreža desnih grupa. Tada je bilo koji regularan element polugrupe S u nekoj desnoj grupi, pa je po Lemi 1.1., potpuno regularan. Dakle, $\mathrm{Reg}(S) \subseteq G_r(S)$. Kako važi i obratna inkluzija, onda je $\mathrm{Reg}(S) = G_r(S)$, tj. S je GV-polugrupa. Sada, na osnovu Teoreme I.3.1. S je polumreža Y nil-ekstenzija S_α, $\alpha \in Y$ desnih grupa K_α. Za bilo koje $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in S_\alpha$ je $y_1 y_2 \dots y_{n+1} \in S_\alpha \cap S^{n+1} = K_\alpha$ tj. $S_\alpha^{n+1} \subseteq K_\alpha$. Kako važi i obratna inkluzija, onda je $S_\alpha^{n+1} = K_\alpha$ desna grupa. Sada za proizvoljne $x_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$,

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} \in S_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}} \cap S^{n+1} = K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}} = S^{n+1}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}} .$$

(*i*) => (*iii*). Na osnovu Leme 1.1. i hipoteze imamo da je za bilo koje $x_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} \in x_{n+1} \dots x_2 x_1 S^{n+1}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}} x_1 x_2 \dots x_{n+1}$$

$$\subseteq x_{n+1} S x_1 \dots x_{n+1}$$

(*iii*) => (*i*). Neka je $x_1 x_2 \dots x_{n+1} \in x_{n+1} S x_1 \dots x_{n+1}$. Tada postoje $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$, $v_1, v_2 \in S$ da je

$$x_1x_2\ldots x_{n+1}=x_{n+1}u_1x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}$$

$$=x_{n+1}x_nu_2u_1x_1x_2\ldots x_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$=x_{n+1}x_n\ldots x_1u_{n+1}\ldots u_1(x_1x_2\ldots x_{n+1})$$

$$=x_1x_2\ldots x_{n+1}\, v_1x_{n+1}\ldots x_1u_{n+1}\ldots u_1(x_1x_2\ldots x_{n+1})$$

$$=(x_1x_2\ldots x_{n+1})^2v_2v_1x_{n+1}\ldots x_1u_{n+1}\ldots u_1(x_1\ldots x_{n+1})$$

$$\in (x_1x_2\ldots x_{n+1})^2S^{n+1}(x_1x_2\ldots x_{n+1}).$$

Dakle, S^{n+1} je unija grupa. Za svaki $e,f\in E(S)$ postoji $u\in S$ tako da je

$$ef=eff\ldots f=fueff\ldots f,$$

odakle sledi $fef=ef$. Sada, na osnovu Teoreme I.1.9., S^{n+1} je polumreža desnih grupa. $\square$

Posledica 1.2. S^{n+1} je desna grupa ako i samo ako

(1.3) $$(\forall x_1,x_2,\ldots,x_{n+1},a\in S)x_1x_2\ldots x_{n+1}\in aSx_1x_2\ldots x_{n+1}.$$

Dokaz. Neka je S^{n+1} desna grupa. Tada, na osnovu Leme 1.1., za bilo koje $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$, $a\in S$ je

$$x_1x_2\ldots x_{n+1}\in ax_1x_2\ldots x_{n+1}S^{n+1}x_1x_2\ldots x_{n+1}\subseteq aSx_1x_2\ldots x_{n+1}.$$

Obratno, zbog (1.3) imamo da za bilo koje $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in S$ je $x_1x_2\ldots x_{n+1}\in x_{n+1}Sx_1x_3\ldots x_{n+1}$. Sada, na osnovu Teoreme 1.1, S^{n+1} je polumreža desnih grupa. Kako je, takodje na osnovu Teoreme 1.1., desno prosta polugrupa, onda S^{n+1} je desna grupa. $\square$

Teorema 1.2. S^{n+1} je polumreža periodičkih desnih grupa ako i samo ako

$$(1.4)\quad (\forall x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S)(\exists m\in Z^+)x_1\dots x_{n+1}=(x_{n+1}x_1\dots x_n)^m x_1\dots x_{n+1}.$$

Dokaz. Neka je S^{n+1} polumreža periodičkih desnih grupa. Na osnovu Teoreme 1.1. S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha\in Y$, pri čemu je S_α^{n+1}, $\alpha\in Y$, periodička desna grupa. Zato za bilo koje $x_i\in S_{\alpha_i}$, $\alpha_i\in Y; i=1,2,\dots,n+1$,

$$x_1x_2\dots x_{n+1},\ x_{n+1}x_1x_2\dots x_n\in S^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1}}=K$$

gde je K periodička desna grupa. Sada, na osnovu Posledice 1.1., neposredno sledi (1.4).

Obratno, neka važi (1.4). Tada je za proizvoljne $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$, $x_1x_2\dots x_{n+1}\in x_{n+1}Sx_1x_2\dots x_{n+1}$, pa na osnovu Teoreme 1.1., S^{n+1} je polumreža desnih grupa. Takodje, na osnovu (1.4), S^{n+1} je periodička polugrupa. Dakle, S^{n+1} je polumreža periodičkih desnih grupa.

Posledica 1.3. S^{n+1} je periodička desna grupa ako i samo ako

$$(1.5)\quad (\forall x_1,x_2,\dots,x_{n+1},a\in S)(\exists k\in Z^+)x_1x_2\dots x_{n+1}=a^k x_1x_2\dots x_{n+1}.$$

Dokaz. Neka je S^{n+1} periodička desna grupa. Tada za svaki $a\in S$ postoji $k\in Z^+$ takav da $a^k\in E(S)\subseteq S^{n+1}$. Sada, na osnovu Leme I.1.1, a^k je leva jedinica u S^{n+1} pa važi (1.5).

Obratno, neka važi (1.5). Tada S^{n+1} je periodička polugrupa. Takodje, iz (1.5) sledi da je S^{n+1} desno prosta. Kako iz (1.5) sledi uslov (1.4), onda je S^{n+1} polumreža periodičkih desnih grupa, pa S^{n+1} je levo kancelativna. Dakle, S^{n+1} je periodička desna grupa.

Posledica 1.4. S^{n+1} je polugrupa desnih nula ko i samo ako

$$(1.6)\qquad (\forall x_1,x_2,\dots,x_{n+1},a\in S)\, x_1x_2\dots x_{n+1}=a\, x_1x_2\dots x_{n+1}$$

Dokaz. Neka je S^{n+1} polugrupa desnih nula. Tada za bilo koje $x_1,x_2,\dots,x_{n+1},a\in S$, $x_1x_2\dots x_{n+1}$, $ax_1x_2\dots x_{n+1}\in E(S)=S^{n+1}$ i

$$x_1x_2\dots x_{n+1}=(ax_1x_2\dots x_{n+1})(x_1x_2\dots x_{n+1})=ax_1x_2\dots x_{n+1}.$$

Obratno, ako y S važi (1.6), onda je za bilo koje $x_1,x_2,\dots,x,x_{n+1}\in S$, $x_1x_2\dots x_{n+1}=(x_1x_2\dots x_{n+1})^2$. Dakle S^{n+1} je traka. Sada za bilo koje $y_1,y_2,\dots,y_{n+1}\in S$, ponovo na osnovu (1.6), imamo

$$x_1x_2\dots x_{n+1}=(y_1y_2\dots y_{n+1})(x_1x_2\dots x_{n+1}).$$

Dakle, S^{n+1} je polugrupa desnih nula:

$\square$

2. N-INFLACIJA POLUMREŽE DESNIH GRUPA

S. Bogdanović i S. Milić su 1987. godine u radu |14| dali karakterizaciju n-inflacije polumreže grupa, kao i polumreže periodičkih desnih grupa. Takodje 1987. godine S. Bogdanović u radu |11| daje karakterizaciju inflacije polumreže desnih grupa. U ovoj tački razmatramo polugrupe koje su n-inflacija polumreže desnih grupa. (Teorema 2.1). Takodje, kao posledice Teoreme 2.1., date su karakterizacije n-inflacija: polumreže periodičkih desnih grupa, desnih grupa i periodičkih desnih grupa.

Teorema 2.1. S je n-inflacija polumreže desnih grupa, ako i amo ako

(2.1) $$(\forall x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S)\, x_1x_2\dots x_{n+1} \in x_{n+1}S\, x_1x_2\dots x_{n+1}Sx_{n+1}^2.$$

Dokaz. Neka je S n-inflacija polumreže desnih grupa T. Tada je $S^{n+1}\subseteq T$. Kako je T regularna polugrupa, onda je $T\subseteq S^{n+1}$. Dakle, $S^{n+1}=T$ je polumreža desnih grupa, pa na osnovu Teoreme I.1.10, T je potpuno regularna polugrupa. Sada, na osnovu Teoreme 1.1. (*iii*), za bilo koje $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$ postoji $u\in S$ tako da je $x_1x_2\dots x_{n+1}=$ $=x_{n+1}ux_1x_2\dots x_{n+1}$ i x_{n+1}^{n+1} je u grupi, koju ćemo označavati sa $G_{e_{n+1}}$. Dalje, na osnovu Teoreme I.3.5. je

$$x_{n+1}u\, x_1x_2\dots x_{n+1}=e_{n+1}x_{n+1}u\, x_1x_2\dots x_{n+1}e_{n+1}$$

$$= x_{n+1}u\, x_1x_2\dots x_{n+1}e_{n+1}$$

(jer e_{n+1} je leva jedinica u desnoj grupi)

$$= x_{n+1}u\, x_1x_2\dots x_{n+1}(x_{n+1}^{n+1})^{-1}(x_{n+1}^{n+1})$$

$$\in x_{n+1}S\, x_1x_2\dots x_{n+1}S\, x_{n+1}^2.$$

Na taj način smo dokazali da važi (2.1).

Obratno, posle konačno puta primenjene formule (2.1) dobijamo da za bilo koje $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$ postoji $u\in S^n$ tako da je

$$x_1x_2\dots x_{n+1}=x_1^2u\, x_{n+1}^2.$$

Sada, na osnovu Teoreme I.3.5, sledi da je S n-inflacija potpuno regularne polugrupe T. Na osnovu Cliffordove Teoreme I.1.9. T je polumreža potpuno prostih polugrupa. Kako je za bilo koje e,f $E(S)=E(T)$, na osnovu (2.1)

$$ef=e\dots ef=fue\dots evf=fsf$$

za neke $u,v\in S$, pri čemu je $s=ue\dots ev$, onda je

$$fef=f\cdot fsf=fsf=ef$$

Sada, na osnovu Teoreme I.3.5, T je polumreža desnih grupa. Dakle, S je n-inflacija polumreže desnih grupa. /7

Posledica 2.1. S je n-inflacija polumreže periodičkih desnih grupa ako i samo ako

(2.2) $$(\forall x_1,\ldots,x_{n+1}\in S)(\exists m,k\in Z^+)x_1\ldots x_{n+1}=(x_{n+1}x_1\ldots x_n)^m x_1\ldots x_n x_{n+1}^{k+1}$$

Dokaz. Neka je S n-inflacija polumreže periodičkih desnih grupa. Tada S^{n+1} je polumreža periodičkih desnih grupa pa za $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in S$ postoji $m\in Z^+$ tako da $(x_{n+1}x_1\ldots x_n)^m\in E(S)$ je leva jedinica u polumrežnoj komponenti. Zato je

$$\begin{aligned}x_1x_2\ldots x_{n+1}&=(x_{n+1}x_1\ldots x_n)^m x_1x_2\ldots x_{n+1}\\&=(x_{n+1}x_1\ldots x_n)^m x_1x_2\ldots x_{n+1}e_{n+1}\\&\text{(po Teoremi I.3.5)}\\&=(x_{n+1}x_1\ldots x_n)^m x_1x_2\ldots x_{n+1}^k\\&=(x_{n1}x_1\ldots x_n)^m x_1x_2\ldots x_{n+1}^{k+1}\end{aligned}$$

gde je $x_{n+1}^{k+1}\in G_{e_{n+1}}$ i za neko $k\in Z^+$, $e_{n+1}=x_{n+1}^k$.

Obratno, ako važi (2.2), onda za bilo koje $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in S$ je $x_1x_2\ldots x_{n+1}\in x_{n+1}S\,x_1x_2\ldots x_{n+1}Sx_{n+1}^2$. Sledi da je S n-inflacija (jasno, periodičkih) desnih grupa (Teorema 2.1).

Posledica 2.2. S je n-inflacija polugrupe desnih nula ako i samo ako

(2.3) $$(\forall x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in S)x_1x_2\ldots x_{n+1}=x_{n+1}^{n+1}.$$

Dokaz. Neka je S n-inflacija polugrupe desnih nula E i neka je Φ retrakcija od S na E. Tada je $S^{n+1}=E$ i za svaki $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
x_1x_2\dots x_{n+1} &= \Phi(x_1x_2\dots x_{n+1})\\
&= \Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_{n+1})\\
&= \Phi(x_{n+1})\\
&= (\Phi(x_{n+1}))^{n+1} \qquad , \text{ jer } \Phi(x_{n+1})\in E(S)\\
&= \Phi(x_{n+1}^{n+1})\\
&= x_{n+1}^{n+1} \qquad , \text{ jer } x_{n+1}^{n+1}\in E(S)
\end{aligned}
$$

Obratno, iz (2.3) sledi da je

$x^{n+2}=x^2x\dots x=x^{n+1}\in E(S)$ za svaki $x\in S$. Dakle, $S^{n+1}=E(S)$. Za bilo koje $e,f\in E(S)$ je $ef=e^nf=f$, pa $E(S)$ jeste polugrupa desnih nula. Dokažimo da je preslikavanje $\Phi:S\to E(S)$, definisano sa $\Phi(x)=x^{n+1}$, retrakcija. Za bilo koje $x,y\in S$ je

$$
\begin{aligned}
\Phi(xy) &= (xy)^{n+1}\\
&= y^{n+1} \qquad , \text{ na osnovu (2.3)}\\
&= x^{n+1}y^{n+1} \qquad , \text{ jer } E(S) \text{ je polugrupa desnih nula}\\
&= \Phi(x)\Phi(y).
\end{aligned}
$$

Kako je i $\Phi^2(x)=\Phi(x)$ za svaki $x\in S$, onda je Φ retrakcija od S na E(S). Na taj način smo dokazali da je S n-inflacija polugrupe desnih nula.

$\square$

Posledica 2.3. S je n-inflacija desne grupe ako i samo ako

(2.4) $(\forall x_1,\dots,x_{n+1},a\in S)x_1\dots x_{n+1}\in aSx_1\dots x_{n+1}S\,x_{n+1}^2$.

Dokaz. Neka je S n-inflacija desne grupe. Tada

S^{n+1} je desna grupa, pa na osnovu Posledice 1.2., za bilo koje $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, $a \in S$ postoji $u \in S$ takav da je

$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} = aux_1 x_2 \ldots x_{n+1}$$

$$= aux_1 x_2 \ldots x_{n+1} e_{n+1}, \text{ gde } x_{n+1}^{n+1} \in G_{e_{n+1}},$$

(po Teoremi I.3.5)

$$= aux_1 x_2 \ldots x_{n+1} (x_{n+1}^{n+1})^{-1} x_{n+1}^{n+1}$$

$$\in aSx_1 x_2 \ldots x_{n+1} S x_{n+1}^2$$

Obratno, iz (2.4) i Teoreme 2.1. sledi da je S n-inflacija polumreže desnih grupa. Takodje iz (2.4) sledi da je S^{n+1} desno prosta. Kako je S^{n+1} levo kancelativna, onda je S^{n+1} desna grupa. Na taj način smo dokazali da je S n-inflacija desne grupe. $\square$

Posledica 2.4. S je n-inflacija periodičke desne grupe ako i samo ako

$$(2.5) \qquad (\forall x_1, \ldots, x_{n+1}, a \in S)(\exists k, m \in Z^+) x_1 \ldots x_{n+1} = a^k x_1 \ldots x_{n+1}^{m+1}$$

Dokaz. Neka je S n-inflacija periodičke desne grupe. Tada S^{n+1} je periodička desna grupa, pa na osnovu Posledice 1.3. za bilo koje $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, $a \in S$ postoji $k \in Z^+$ tako da je

$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} = a^k x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$$

$$= a^k x_1 x_2 \ldots x_{n+1} e_{n+1}, \quad \text{gde } x_{n+1}^{n+1} \in G_{e_{n+1}}$$

(na osnovu Teoreme I.3.5)

$$= a^k x_1 x_2 \ldots x_{n+1} x_{n+1}^m, \quad \text{gde } x_{n+1}^m = e_{n+1}$$

i m je neki prirodan broj (koji postoji jer $x_{n+1}^{n+1} \in G_{e_{n+1}}$ i

$G_{e_{n+1}}$ je periodička grupa).

Obratno, neka u polugrupi S važi (2.5). Tada važi i (2.4) pa, na osnovu Posledice 2.3., S jeste n-inflacija (jasno, periodičke) desne grupe. $\square$

3. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI

Odredjivanje strukture polugrupa koje zadovoljavaju identitet

$$xy=y^{m_1}x^{n_1}\dots y^{m_{h-1}}x^{m_{h-1}}y^{m_h}$$

gde je $m_1\neq 0$, $m_h\neq 0$ i $h\geq 2$ je poznato kao Tamurin Problem 2. a odredjivanje strukture polugrupa koje zadovoljavaju identitet

$$xy=x^{m_1}y^{n_1}\dots x^{m_{h-1}}y^{m_{h-1}}$$

gde je $m_1\neq 0$, $m_{h-1}\neq 0$ kao Tamurin Problem 3. Ove probleme postavio je T.Tamura 1969. u radu |57| .

U ovoj tački razmatramo strukturu nekih klasa polugrupa u vezi sa Tamurinim problemima. Primer 3.1. predstavlja uopštenje Problema 2. Rešenjem tog problema uopšteni su rezultati T.G.Clarka |17| i S.Bogdanovića |11|. U Primeru 3.2. delimično je rešen Problem 3. Teoremama 3.1. i 3.2. rešeni su neki specijalni slučajevi u vezi sa Problemom 3. U Primeru 3.3. dobijen je rezultat koji predstavlja uopštenje rezultata M.S.Putcha i J.Weissglassa iz rada |50|

Primer 3.1. Neka $k\in\{1,2,\dots,n\}$ i $r\in\{1,2,\dots,n+1\}$. Polugrupa S zadovoljava identitet

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_{k+1}^{m_{k+1},r}\left(\prod_{j=1}^{h+1}\prod_{i=1}^{n+1} x_i^{m_{ij}}\right) \tag{3.1}$$

ako i samo ako S^{n+1} jeste polumreža desnih grupa, pri čemu podgrupe iz S zadovoljavaju isti identitet.

Dokaz. Neka S zadovoljava identitet (3.1) Tada za $m_{n+1;h+1}$ razlikujemo slučajeve:

a) $m_{n+1,h+1} \geq 2$. Tada dobijamo da je $x_1x_2\ldots x_{n+1} \in x_1^2S^nx_{n+1}^2$ tj. dobijamo da je $x_1S^{n-1}x_{n+1}=x_1^2S^nx_{n+1}^2$ za svaki $x_1,x_{n+1} \in S$. Sada, na osnovu Teoreme I.3.5, dobijamo da S^{n+1} jeste unija grupa. Kako je u ef=fef, onda je po Teoremi I.1.10, S^{n+1} polumreža desnih grupa.

b) $m_{n+1,h+1}=1$. Tada dobijamo da je $x_1x_2\ldots x_{n+1}$ iz $x_{n+1}S\,x_1x_2\ldots x_n$. Sada, na osnovu Teoreme 3.1., S^{n+1} je polumreža desnih grupa.

Jasno je da u svakoj podgrupi od S veži identitet (3.1) jer taj identitet važi u S.

Obratno, neka je S^{n+1} polumreža desnih grupa i neka u podgrupama od S važi (3.1). Tada, na osnovu Teoreme 1.1, S je polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, pa za bilo koje $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1} \in S$ postoje polugrupe S_{α_i} tako da $x_i \in S_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in Y$, i da $x_1x_2\ldots x_{n+1} \in S^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$. Kako je $S^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$, desna grupa, onda $x_1x_2\ldots x_{n+1} \in G_e \subseteq S^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$. Zato je sada

$$(3.2) \qquad x_1x_2\ldots x_{n+1}=x_1x_2\ldots x_{n+1}e=ex_1x_2\ldots x_{n+1}.$$

Primetimo da za svaki $i=1,2,\ldots,n+1$

$$x_ie \in S_{\alpha_i}\cdot S^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}} \subseteq S_{\alpha_i}\, S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$$
$$\subseteq S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}} \cap S^{n+1} = S^{n+1}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}$$

Sada, na osnovu Teoreme I.2.1. i Leme I.1.1., sledi da je

$$(3.3) \qquad x_ie = ex_ie \in G_e$$

Označimo sa $F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ desnu stranu identiteta (3.1). Na osnovu hipoteze, te na osnovu (3.2) i (3.3) dobijamo da je

$$x_1x_2\ldots x_{n+1}=(x_1e)(x_2e)\ldots(x_{n+1}e)=F(x_1e,x_2e,\ldots,x_{n+1}e)$$
$$=F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})e=F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

Primer 3.2. Polugrupa S zadovoljava identitet

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_{n+1}^{m_{n+1,h}}\Big(\prod_{j=1}^{h}\prod_{i=1}^{n+1} x_i^{m_{ij}}\Big)x_1^{m_{11}} \tag{3.4}$$

ako i samo ako S je n-inflacija polumreže grupa, pri čemu podgrupe zadovoljavaju isti identitet.

Dokaz. Neka u polugrupi S važi identitet (3.4). Tada za bilo koje $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in S$ je

$$x_1S^{n-1}x_{n+1}=x_{n+1}^2S^nx_1,$$

pa, na osnovu Teoreme I.3.6., S jeste n-inflacija polumreže grupa. Jasno je da sve podgrupe polugrupe S zadovoljavaju identitet (3.4).

Obratno, neka je S n-inflacija polumkreže Y grupa G_α, $\alpha\in Y$, pri čemu sve podgrupe iz S zadovoljavaju identitet (3.4). Tada za bilo koje $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in S$, $x_1x_2\ldots x_{n+1}\in G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$. Označimo sa e jedinicu grupe $G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$. Jasno je da je $x_1x_2\ldots x_{n+1}=ex_1x_2\ldots x_{n+1}=x_1x_2\ldots x_{n+1}e$ i da je za svaki $i=1,2,\ldots,n+1$, $x_ie\in G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$ i da je $x_ie=ex_ie$. Sada zaključujemo, kao u Primeru 3.1, da u S važi identitet (3.4).

Primer 3.3. Neka $k,p\in\{1,2,\ldots,n+1\}$. Tada polugrupa S zadovoljava identitet

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_k^p \tag{3.5}$$

ako i samo ako važi jedan od uslova:

1. S je n-inflacija polugrupe levih nula i $x^p \in E(S)$,
2. S je $(n+1)$-nilpotentna polugrupa i $x^p \in E(S)$,
3. S je n-inflacija polugrupe desnih nula i $x^p \in E(S)$, za svaki $x \in S$.

Dokaz. Neka u polugrupi S važi identitet (3.5). Tada za proizvoljan $x \in S$ je $x^{n+1}=x^p=x^{n+1}x=x^{n+2} \in E(S)$. Dakle, $S^{n+1}=E(S)$.

Uzmimo da je $k=n+1$. Tada za proizvoljne $e,f \in E(S)$ je $ef=ee\ldots ef=f^{n+1}=f$. Dakle $E(S)$ je polugrupa desnih nula. Dokažimo da je preslikavanje $\Phi(x)=x^{n+1}$ retrakcija od S na $E(S)$. Zaista, za bilo koje $x,y \in S$ je

$$\Phi(xy)=(xy)^{n+1}=y^{n+1}=x^{n+1}y^{n+1}=\Phi(x)\Phi(y)$$

i $\phi^2(x)=\Phi(x)$. Prema tome, za $k=n+1$ imamo da je S n-inflacija polugrupe desnih nula.

Slično se dokazuje da za $k=1$, S jeste n-inflacija polugrupe levih nula.

Uzmimo da je $2 \leq k \leq n$. Tada za proizvoljne $e,f \in E(S)$ je $ef=e\ldots eff\ldots f=f^p=f$ i $ef=e\ldots eef\ldots f=e^p=e$, pa je $e=f$. Dakle, S ima tačno jedan idempotent. Kako je i $xe=xe\ldots e=$ $=e^p=e=e\ldots ex=ex$, onda je e nula u S. Otuda S je $(n+1)$-nilpotentna polugrupa.

Obratno, neka je S n-inflacija desnih nula E i neka je $x^p \in E$. Tada je $S^{n+1}=E$. Neka je Φ retrakcija od S na $E(S)$. Tada za bilo koje $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1} \in S$ je

$$x_1x_2\ldots x_{n+1}=\Phi(x_1x_2\ldots x_{n+1})=\Phi(x_1)\Phi(x_2)\ldots\Phi(x_{n+1})$$

$$=\Phi(x_{n+1})=(\Phi(x_{n+1}))^p=\Phi(x_{n+1}^p)=x_{n+1}^p.$$

Dakle, u S važi (3.5).

Slično se dokazuje da važi identitet (3,5) u slučaju kada je S n-inflacija polugrupe levih nula pri čemu je $x^p \in E(S)$.

Ako je S (n+1)-nilpotentna polugrupa, tada je $|E(S)|=1$ i $\Phi(x_k)=\Phi(x_{n+1})$, $k=1,2,\ldots,n+1$, pa i u ovom slučaju važi identitet (3.5).

$\square$

Primer 3.4. Ako polugrupa S zadovoljava identitet

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_1\left(\prod_{j=1}^{h}\prod_{i=1}^{n+1} x_i^{m_{ij}}\right)x_{n+1}, \tag{3.6}$$

tada S jeste n-inflacija unije grupa, pri čemu podgrupe iz S zadovoljavaju isti identitet.

Dokaz. Iz hipoteze, neposredno sledi da je $x_1 S^{n-1} x_{n+1} = x_1^2 S^n x_{n+1}^2$ za bilo koje $x_1, x_{n+1} \in S$. Sada, na osnovu Teoreme I.3.5., sledi da S jeste n-inflacija unije grupa. Jasno je da sve podgrupe iz S zadovoljavaju identitet (3.6).

$\square$

Prethodnim primerima nisu obuhvaćene polugrupe u kojima važi identitet

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = \prod_{j=1}^{h}\prod_{i=1}^{n+1} x_i^{m_{ij}}$$

za $m_{11}=1$ ili $m_{n+1,h}=1$. U opštem slučaju ovo ostaje kao problem. U sledećim dvema teoremama dajemo konstrukcije za neke specijalne slučajeve.

Lema 3.1. Neka je S polugrupa u kojoj važi

$$(\forall x,y \in S)(\exists m \in Z^+-\{1\})\, xy=xy^{m+1}. \tag{3.7}$$

Tada

(i) $x^m \in E(S)$ za neki $m \in Z^+$,

(ii) $Reg^2(S)=Reg(S)=G_r(S)$,

(iii) $Reg(S)\cdot S=Reg(S)$.

Dokaz. *(i)*. Iz (3.7) sledi da je $x^2=x^{m+2}$ za neki $m\geq 2$. Ako je $m=2$, onda $x^m \in E(S)$. Ako je $m>2$, onda

$$x^{2m}=x^{m+2}\cdot x^{m-2}=x^2x^{m-2}=x^m \in E(S).$$

Na taj način smo dokazali (i)

(ii). Za bilo koje $e,f \in E(S)$ je $ef=e\cdot ef=e(ef)^{m+1}=$ $=(ef)^{m+1}$ za neki $m\geq 2$, pa $ef \in Reg(S)$. Sada za proizvoljne $a,b \in Reg(S)$ postoje $x,y,z \in S$ tako da je

$$ab=axabyb=axabyzxabyb=ab(yzx)ab \in abSab$$

Dakle, $Reg^2(S)=Reg(S)$. Uzmimo da je $a\in Reg(S)$. Tada je $a=axa=axa^{m+1} \in G_r(S)$, za neki $m \in Z^+$, pa $Reg(S)=G_r(s)$.

(iii). Neka je $x \in Reg(S)$, $y \in S$. Na osnovu (i) i Teoreme I.1.1., postoji $m \in Z^+$, $e \in E(S)$ tako da $y^{m+1}=$ $=ey=ye \in G_e \subseteq Reg(S)$. Sada, iz hipoteze i (ii), dobijamo

$$xy=xy^{m+1} \in Reg(S)Reg(S)=Reg(S)$$

za neki $m \in Z^+$, pa važi (iii) $\square$

Teorema 3.1. Neka je E traka. Svakom $e \in E$ pridružimo skup Y_e tako da je

(3.8) $e \in Y_e$, $Y_e \cap Y_f=\emptyset$ za $e\neq f$.

Neka su

$$\Phi^{(e,f)}: Y_e x Y_f \to \bigcup_{e \in E} Y_e$$

funkcije za koje važi

(3.9) $\Phi^{(e,e)}(x,y)=e$

(3.10) $\Phi^{(e,f)}(e,y)=ef$

(3.11) $\Phi^{(e,f)}(x,y)=\Phi^{(e,f)}(x,f)$

(3.12) $\Phi^{(e,f)}(x,f)\cdot g=\Phi^{(e,\Phi^{(f,g)}(y,g))}(x,\Phi^{(f,g)}(y,g))$.

Na $S=\bigcup_{e\in E} Y_e$ definišimo operaciju $*$ sa

$$x*y=\Phi^{(e,f)}(x,y),\ \text{ako}\ \ x\in Y_e,\ y\in Y_f.$$

Tada $(S,*)$ jeste polugrupa u kojoj je

(3.13) $x*y=x*y*y$

za svaki $x,y\in S$.

Obratno, svaka polugrupa u kojoj važi (3.13) može se ovako konstruisati.

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi konstrukcije. Tada za $x\in Y_e$, $y\in Y_f$, $z\in Y_g$ je

$$x*(y*z)=x*\Phi^{(f,g)}(y,z)=x*\Phi^{(f,g)}(y,g)=\Phi^{(e,\Phi^{(f,g)}(y,g))}(x,\Phi^{(f,g)}(y,g))$$

$$(x*y)*z=\Phi^{(e,f)}(x,y)*z=\Phi^{(\Phi^{(e,f)}(x,f),g)}(\Phi^{(e,f)}(x,f),g)=\Phi^{(e,f)}(x,f)\cdot g$$

pa na osnovu (3.12) u S važi asocijativnost. Dalje, je

$$x*y*y=x*\Phi^{(f,f)}(y,y)=x*f=\Phi^{(e,f)}(x,f)=x*y.$$

Obratno, neka je S polugrupa u kojoj važi identitet

(3.13) $xy = xy^2$.

Tada je $x^2=x^3$. Dakle, $x^2\in E(S)$ za svaki $x\in S$. Kako je za proizvoljne $e,f\in E(S)$

$$ef = e\cdot ef = e(ef)^2=(ef)^2,$$

onda je $E(S)$ traka. Za proizvoljne $e\in E(S)$, $y\in S$ je

$$(3.14)\qquad ey = ey^2.$$

Definišimo skup $Y_e=\{x\in S|x^2=e\}$, $e\in E(S)$. Jasno da je $S=\bigcup_{e\in E}Y_e$ i da je ispunjen uslov (3.8). Neka su $x,y\in Y_e$. Tada na osnovu Teoreme I.1.1. i (3.13) sledi da je

$$xy=xy^2=xe=ex=ex^2=ee=e$$

Dakle, važi (3.9). Sada, zbog (3.14), važi (3.10). Neka je $x\in Y_e$, $y\in Y_f$. Tada je $xy=xy^2=xf$, pa je ispunjen uslov (3.11). Na kraju, zbog asocijativnosti u S, važi (3.12).

$\square$

Posledica 3.1. Ako umesto funkcije $\Phi^{(e,f)}$ iz Teoreme 3.1 uzmimo funkcije

$$\Phi^{(e,f)}: Y_e \times Y_f \to E,$$

tada $(S,*)$ jeste polugrupa koja ispunjava uslov (3.13) i E je ideal od S.

Obratno, svaka polugrupa S koja ispunjava uslov (3.13) u kojoj je $E(S)$ ideal se može ovako konstruisati.

$\square$

Teorema 3.2. Neka je E leve kvazinormalna traka. Svakom $e\in E$ pridružimo skupove X_1^e i X_2^e tako da je

$$(3.15)\qquad e\in X_2^e,\quad X_1^e\cap X_2^e=\emptyset\ ,\quad X_i^e\cap X_j^f=\emptyset \text{ ako je } e\neq f.$$

Neka su

$$\Phi_{(1,1)}^{(e,f)}: X_1^e \times X_1^f \to \bigcup_{h\in E}X_2^h,\ e\neq f,$$

$$\Phi_{(1,1)}^{(e,e)}: X_1^e \times X_1^e \to X_2^e$$

$$\Phi^{(e,f)}_{(i,j)}: X^e_i \times X^f_j \to E \quad \text{za } i+j>2, \quad e\neq f$$

$$\Phi^{(e,e)}_{(i,j)}: X^e_i \times X^e_j \to \{e\}, \quad \text{za } i+j>2$$

funkcije za koje važi

$$\Phi^{(e,f)}_{(i,2)}(x,\Phi^{(f,g)}_{(j,k)}(y,z))=\Phi^{(\omega,g)}_{(2,k)}(\Phi^{(e,f)}_{(i,j)}(x,y),z) = \tag{3.16}$$

$$=\Phi^{(e,\Phi^{(f,\delta)}_{(j,2)}(y,\Phi^{(e,g)}_{(i,k)}(x,z)))}_{(i,2)}(x,\Phi^{(f,\delta)}_{(j,2)}(y,\Phi^{(e,g)}_{(i,k)}(x,z))$$

za svaki $e,f,g,h,\omega,\delta \in E$, $x\in X^e_i$, $y\in X^f_j$, $z\in X^g_j$. Neka je $Y_e= X^e_1\cup X^2_2$ i na $S=\bigcup_{e\in E} Y_e$ definisano množenje $*$ sa:

$$x*y=\Phi^{(e,f)}_{(i,j)}(x,y) \quad \text{ako } x\in X^e_i,\ y\in X^f_j.$$

Tada S sa ovako definisanom operacijom jeste levo distributivna polugrupa i $E*S=E$.

Obratno, svaka levo distributivna polugrupa u kojoj je $ES=E$ se može ovako konstruisati.

Dokaz. Neposredno se iz uslova konstrukcije proverava da je S levo distributivna polugrupa za koju je $E*S=E$.

Obratno, neka je S levo distributivna polugrupa u kojoj je $E(S)\cdot S=E(S)$. Tada $E^2(S)\subseteq E(S)\cdot S=E(S)$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S. Iz leve distributivnosti polugrupe S sledi da je traka $E(S)$ leva kvazi normalna. Za bilo koje $e\in E(S)$ i $x\in S$ je $xe=xee=xexe$. Dakle, $E(S)$ je levi ideal od S, pa na osnovu hipoteze imamo da je $E(S)$ ideal od S. Dalje, za svaki $x,y,z\in S$, zbog leve distributivnosti, je

$$xyz=xyxz=xyx^2z=xyx^3z, \quad x^3\in E(S)$$

pa dobijamo da je $xyz\in E(S)$. Prema tome $S^3=E(S)$. Stavimo da je

$$Y_e=\{x\in S\,|\,x^3=e\}\ ,\quad e\in E(S)$$

Ako su $x,y\in Y_e$, tada je $x^3=y^3=e$, pa je zato i zbog leve distributivnosti,

$$(xy)^3=xyxyxy=xy^2xy=xy^3=xx^3=x^4=x^3=e.$$

Dakle, $xy\in Y_e$ tj. $Y_e,(e\in E(S))$ je podpolugrupa od S. Napomenimo ovde da je e nula u Y_e jer $xe\in Y_e\cap E=\{e\}$ i $ex\in Y_e\cap E=\{e\}$. Za $e\in E(S)$ definišimo skupove:

$$X_1^e=Y_e\cap(S-S^2)\ ,\quad X_2^e=Y_e\cap S^2.$$

Jednostavno se proverava da ovako definisani skupovi zadovoljavaju uslov (3.15) i takodje da je $Y_e=X_1^e\cup X_2^e$ i $S=\bigcup_{e\in E}Y_e$. Za $x,y\in S$ razlikujemo slučajeve:

$x\in X_1^e$, $y\in X_1^f$, $e\neq f$. Tada $xy\in S^2$, pa $xy\in X_2^h$ za neki $h\in E(S)$. Na taj način funkcije $\Phi_{(1,1)}^{(e,f)}$ su definisane.

$x\in X_1^e$, $y\in X_1^e$. Tada $xy\in X_2^e$, jer $xy\in Y_e^2\cap S^2\subseteq Y_e\cap S^2$. Dakle, definisane su i funkcije $\Phi_{(1,1)}^{(e,e)}$.

$x\in X_i^e$, $y\in X_j^f$, $e\neq f$, $i+j>2$. Tada $xy\in S^3=E(S)$, pa su tako definisane i funkcije $\Phi_{(i,j)}^{(e,f)}$. Specijalno, ako je $e=f$, tada je $\Phi_{(i,j)}^{(e,e)}(x,y)=e$, jer $xy\ \ Y_e^2\cap E\subseteq Y_e\cap E=\{e\}$.

Zbog asocijativnosti i leve distributivnosti imamo da za funkcije $\Phi_{(i,j)}^{(e,f)}$ važi uslov (3.16).

Posledica 3.2. Neka su X_1 i X_2 skupovi i 0 fiksan element tako da je

$$0\in X_2,\quad X_1\cap X_2=\emptyset$$

Neka su

$$\Phi_{(i,j)}:\ X_i\times X_j\to X_2$$

funkcije za koje važi

$$(3.17)\qquad \Phi_{(2,j)}(x,y)=\Phi_{(i,2)}=\Phi_{(1,1)}(x,x)=0.$$

Na $S\dot{=}X_1 \bigcup X_2$ definišimo množenje $*$ sa

$$x*y=\Phi_{(i,j)}(x,y) \quad \text{ako } x\in X_i, y\in X_i,\ 1\leq i,j\leq 2.$$

Tada $(S,*)$ jeste polugrupa sa tačno jednim idempotentom u kojoj važi

$$x*y*z\in\{x*x, y*y, z*z\}.$$

Obratno, svaka polugrupa S sa tačno jednim idempotentom u kojoj važi

$$(3.18)\qquad (\forall x,y,z\in S)xyz\in\{x^2,y^2,z^2\}$$

može se na ovakav način konstruisati.

Dokaz. Neka važe uslovi konstrukcije. Tada iz (3.17) sledi da je $(S,*)$ polugrupa u kojoj je 0 jedini idempotent i u kojoj je $x*y*z=x*x=y*y=z*z=0$.

Obratno, neka za polugrupu S važe uslovi Posledice. Obeležimo sa 0 jedinstveni idempotent u S. Tada, iz (3.18), sledi da je $x^2=0$ za svaki $x\in S$ i da je $S^3=0$. Takodje, S je levo distributivna i $E(S)S=E(S)=0$. Sada, na osnovu Teoreme 3.2, sledi da je $S=X_1\bigcup X_2$, gde je $X_1=S-S^2$, $X_2=S^2$ i da postoje funkcije $\Phi_{(i,j)}$ za koje važi (3.17).

G L A V A IV

NEKE KONGRUENCIJE NA $\mathcal{L}^*$-UNIPOTENTNIM POLUGRUPAMA

Strukturna svojstva polugrupa često se ispituju pomoću relacija uredjenja i kongruencija. Tako, naprimer u radovima |3,5,16,23| ispitivana su strukturna svojstva nekih regularnih polugrupa pomoću uredjenja. C.Edwards je u radu |24| dala opis L-unipotentne polugrupe S pomoću idempotentno razdvajajuće kongruencije na S.

U ovoj glavi u Teoremi 1.1. definišemo relaciju uredjenja na r-kancelativnoj polugrupi S. Tako definisano uredjenje na S nazivamo prirodno uredjenje. Teoremom 1.2. omogućujemo neke ekvivalentne definicije prirodno parcijalnog uredjenja, Teoremom 2.1. daćemo opis jedne π-regularne polugrupe pomoću prirodnog parcijalnog uredjenja. U Teoremi 3.3. opisaćemo najveću idempotentno razdvajajuću kongruenciju na L^*-unipotentnoj r-polugrupi. U Teoremi 3.6. dajemo opis desne regularne trake nil-ekstenzija grupa pomoću najveće idempotentno razdvajajuće kongruencije na polugrupi. Na kraju ove glave, u Teoremi 3.8. daćemo vezu izmedju prirodnog parcijalnog uredjenja na jednoj L^*-unipotentnoj polugrupi i najmanje grupne kongruencije na toj polugrupi.

1. PRIRODNO PARCIJALNO UREDJENJE NA R-KANCELATIVNOJ POLUGRUPI

Uredjenje definisano na skupu E(S) formulom

(1.1) $(\forall e,f \in E(S))(e\leq f \iff ef=fe=e)$

poznato je kao prirodno parcijalno uredjenje. Obeležavaćemo ga sa $\leq_n$. K.S.Nambooripad je 1980. godine u radu |37| definisao relaciju parcijalnog uredjenja na regularnoj polugrupi S formulom

$$(1.2) \qquad (\forall a,b \in S)(a \leq b \iff R_a \leq R_b \quad (\exists e \in E(R_a))a=eb)$$

Ovo uredjenje je proširenje uredjenja $\leq_n$ sa E(S) na S. Nambooripad ga je nazvao prirodnim parcijalnim uredjenjem. Mi ćemo ga obeležavati sa $\leq_N$. U radovima |23,30,36,37| date su ekvivalentne definicije za uredjenje $\leq_N$.

U ovoj tački definišemo pojam r-kancelativne polugrupe. Klasa r-kancelativnih polugrupa, videćemo, obuhvata klasu regularnih polugrupa. Na r-kancelativnoj polugrupi definisaćemo relaciju uredjenja koja čuva kako uredjenje $\leq_n$ na E(S) tako i uredjenje $\leq_N$ na Reg(S). U ovoj tački ćemo, takodje, razmatrati maksimalne elemente u odnosu na definisano uredjenje.

Definicija 1.1. Polugrupa S je *r-kancelativna* ako je π-regularna i ako

$$(1.3) \qquad (\forall a,b \in S-\mathrm{Reg}(S))(r(a)=r(b) \Rightarrow a=b).$$

Primer 1.1. Polugrupa S zadata tablicom

	1	2	3	4	5
1	2	2	1	1	2
2	2	2	2	2	2
3	5	5	3	3	5
4	5	5	3	3	5
5	5	5	5	5	5

je r-kancelativna. Za ovu polugrupu Reg(S)={2,3,5}, S-Reg(S)={1,4}, r(1)=2, r(4)=3.

Jasno je da klasa r-kancelativnih polugrupa uključije klasu regularnih polugrupa kao svoju pravu podklasu.

Teorema 1.1. Neka je S r-kancelativna polugrupa. Za a,b S definišimo

(1.4) $a\leq b \Leftrightarrow R_a\leq R_b \wedge (\forall b'\in V(r(b)))(r(a)=r(a)b'r(a)=r(a)b'r(b)=r(b)b'r(a)).$

Relacija $\leq$ je uredjenje na S.

Dokaz. Pošto je za svaki $a\in S$ i svaki $a'\in V(r(a))$ $r(a)=r(a)a'r(a)$, onda $\leq$ je refleksivna. Pretpostavimo da je $a\leq b$ i $b\leq a$. Tada je na osnovu (1.4)

$$(\forall b'\in V(r(b)))r(a)=r(a)b'r(a)=r(a)b'r(b)$$

i

$$(\forall a'\in V(r(a)))r(b)=r(a)a'r(b).$$

Zato je

$$r(a)=r(a)b'r(b)=r(a)b'r(a)a'r(b)=r(a)a'r(b)=r(b).$$

Sada, ako $a,b\in Reg(S)$, onda je $a=r(a)=r(b)=b$. Ako $a,b\in S\text{-}Reg(s)$, onda je, zbog r-kancelativnosti $a=b$. Ako $a\in Reg(S)$, $b\in S\text{-}Reg(S)$, tada iz $a\leq b$ i $b\leq a$ sledi $R_a=R_b$, pa je $a\mathcal{D}b$ što je nemoguće jer svaka $\mathcal{D}$-klasa ne može sadržati regularan i neregularan element. Slično se dokazuje da ne može biti $a\leq b$ i $b\leq a$ u slučaju kada $a\in S\text{-}Reg(S)$ i $b\in Reg(S)$. Dakle,

$$(\forall a,b\in S)(a\leq b\wedge b\leq a \Rightarrow a=b),$$

pa $\leq$ je antisimetrična relacija.

Pretpostavimo da je $a\leq b\leq c$. Tada, zbog (1.4), imamo da $R_a\leq R_c$ i za svaki $b'\in V(r(b))$, $c'\in V(r(c))$

$$r(a)=r(a)b'r(a)=r(a)b'r(b)b'r(a)=$$
$$=r(a)b'r(b)c'r(b)b'r(a)=r(a)c'r(a),$$

$$r(a)=r(a)b'r(b)=r(a)b'r(b)c'r(c)=r(a)c'r(c),$$

$$r(a)=r(b)b'r(a)=r(c)c'r(b)b'r(a)=r(c)c'r(c).$$

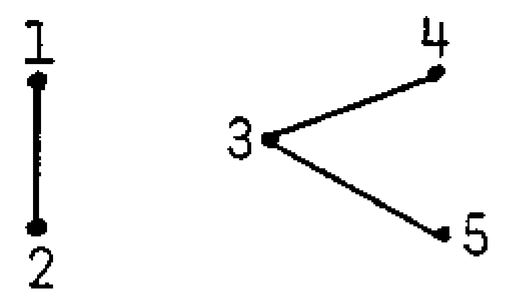
Dakle $a\leq c$, pa relacija $\leq$ je tranzitivna. $\square$

Definicija 1.2. Relacija $\leq$ na r-kancelativnoj polugrupi S definisana sa (1.4) je *prirodno uredjenje* na S.

Za polugrupu S iz Primera 1.1. je $V(r(1))=V(2)=V(5)=\{2,5\}$, $V(r(4))=V(3)=\{3\}$, $R(1)=\{1,2\}$, $R(2)=\{2\}$, $R(3)=\{3,5\}$, $R(4)=\{3,4,5\}$, $R(5)=\{5\}$, pa

$$\leq\ =\{(1,1)(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,1),(5,3),(3,4),(5,4)\}$$

Hesseov dijagram ove relacije je



Prirodno uredjenje $\leq$ je parcijalno. Primetimo da se iz (1.4) uslov $R_a\leq R_b$ ne može izostaviti. Jer, ako bi to bilo moguće, onda bismo imali $3\leq 4$ i $4\leq 3$, pa bi bilo $3=4$.

Posledica 1.1. Prirodno parcijalno uredjenje $\leq$ na r-kancelativnoj polugrupi S je proširenje uredjenja $\leq_n$ sa E(S) na S.

Dokaz. Neka su $e,f\in E(S)$, Tada je $r(e)=e$, $r(f)=f$. Ako je $e\leq f$, tada je $e=efe=eff=ffe$ i zato je $e\leq_n f$.

Obratno, neka je $e\leq_n f$. Tada je $e=ef=fe$ i za svaki $f'\in V(f)$ imamo

$$ef'e=eff'fe=efe=e,$$
$$ef'f=eff'f=ef=e,$$
$$ff'e=ff'fe=fe=e.$$

Pošto je $eS=feS\subseteq fS$ tj. $R_e\leq R_f$ i $r(e)=e$, $r(f)=f$, onda je $e\leq f$ u S.

Lema 1.1. Ako je S π-regularna polugrupa i $a,b\in S$, onda

$$H^*_a\leq H^*_b \Leftrightarrow r(a)\in r(b)Sr(b).$$

Dokaz. Neka $a,b\in S$. Tada

$$H^*_a\leq H^*_b\Leftrightarrow R^*_a\leq R^*_b, L^*_a\leq L^*_b\Leftrightarrow (\exists x,y\in S)(r(a)=r(b)x=yr(b)). \tag{1.5}$$

Kako sada za svaki $a'\in V(r(a))$ je $r(a)=r(a)a'r(a)=r(b)xa'yr(b)\in r(b)Sr(b)$, onda $H^*_a\leq H^*_b \Rightarrow r(a)\in r(b)Sr(b)$. Obratno sledi iz (1.5). $\square$

Teorema 1.2. Na r-kancelativnoj polugrupi S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(*i*) $a\leq b$;

(*ii*) $R_a\leq R_b\wedge R^*_a\leq R^*_b\wedge(\exists e\in E(R_a))r(a)=er(b)$;

(*iii*) $R_a\leq R_b\wedge(\exists a'\in V(r(a))r(a)=r(a)a'r(b)=r(b)a'r(a)$;

(*iv*) $R_a\leq R_b\wedge(\exists e,f\in E(S))r(a)=er(b)=r(b)f$;

(*v*) $R_a\leq R_b\wedge(\exists x\in S)r(a)=r(a)xr(a)=r(a)xr(b)=r(b)xr(a)$;

(*vi*) $R_a\leq R_b\wedge H^*_a\leq H^*_b\wedge(\forall b'\in Vr(b)))r(a)=r(a)b'r(a)$.

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Neka je $a\leq b$. Ako je $e=r(a)b'$ za bilo koji $b'\in V(r(b))$, onda je

$$e^2=r(a)b'r(a)b'=r(a)b'=e\in E(S).$$

Takodje, je $e\in R^*_a$, jer iz $r(a)S=r(a)b'r(a)S\subseteq r(a)b'S\subseteq r(a)S$ sledi $r(a)S=r(a)b'S=eS$. Dakle, postoji $e\in E(R^*_a)$ da je $r(a)=er(b)$. Iz $r(a)=r(b)b'r(b)$ sledi da je $R^*_a\leq R^*_b$.

(*ii*) => (*iii*). Neka je $e\in E(R_a^*)$ takav da je $r(a)=er(b)$. Na osnovu Teoreme I.2.3. postoji $a'\in V(r(a))$ takav da je $e=r(a)a'$. Sada je $r(a)=r(a)a'r(b)$. Iz $R_a^*\leq R_b^*$ sledi da postoji $x\in S$ takav da je $r(a)=r(b)x$. Neka je $f=xa'r(b)$.

Tada je $f\in E(S)$ i $r(b)f=r(a)$. Ako je $b'\in V(r(b)$, onda $fb'\in V(r(a))$, jer je

$$
\begin{aligned}
r(a)fb'r(a) &= r(a)a'r(b)fb'r(a), && \text{jer } r(a)=r(a)a'r(b)\\
&= r(a)a'r(a)b'r(a), && \text{jer } r(b)f=r(a)\\
&= r(a)b'r(a)\\
&= r(a)a'r(b)b'r(a), && \text{jer } r(a)=r(a)a'r(b)\\
&= r(a)a'r(b)b'r(b)f, && \text{jer } r(a)=r(b)f\\
&= r(a)a'r(b)f\\
&= r(a)a'r(a), && \text{jer } r(b)f=r(a)\\
&= r(a),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
fb'r(a)fb' &= xa'r(b)b'r(a)fb', && \text{jer } f=xa'r(b)\\
&= xa'r(b)b'r(b)f^2b', && \text{jer } r(a)=r(b)f\\
&= xa'r(b)fb'\\
&= f^2b', && \text{jer } xa'r(b)fb'=f\\
&= fb'.
\end{aligned}
$$

Stavimo da je $fb'=a''$. Sada je

$r(b)a''(a)=r(b)fb'r(a)=r(b)ffb'r(a)=r(a)a''r(a)=r(a)$.

Neka je $a''r(a)a'=a^o$. Jednostavno se proverava da $a^o\in V(r(a))$ i da je

$$r(a)a^or(b)=r(a)a''r(a)a'r(b)=r(a)a'r(b)=r(a)$$

$$r(b)a^or(a)=r(b)a''r(a)a'r(a)=r(b)a''r(a)=r(a),$$

pa važi (*iii*).

(iii) => *(iv)*. Ako važi *(iii)*, onda postojeći idempotenti za koje važi *(iv)* su $e=r(a)a'$, $f=a'\cdot r(a)$.

(iv) => *(i)*. Iz *(iv)* sledi da je za svaki $b'\in V(r(b))$

$$r(a)b'r(a)=er(b)b'r(b)f=er(b)f=er(a)=e\cdot er(a)=er(b)=r(a),$$

$$r(a)b'r(b)=er(b)b'r(b)=er(b)=r(a),$$

$$r(b)b'r(a)=r(b)b'r(b)f=r(b)f=r(a).$$

(i) => *(vi)*. Za bilo koji $a\in S$ je

$$r(a)=r(a)b'r(b)=r(b)b'r(a)b'r(b)\in r(b)Sr(b),$$

pa po Lemi 1.1. je $H_a^*\leq H_b^*$. Kako je, na osnovu hipoteze, $r(a)=r(a)b'r(a)$, za svaki $b'\in V(r(b))$, onda važi *(vi)*.

(vi) => *(i)*. Na osnovu Leme 1.1., iz $H_a^*\leq H_b^*$ sledi $r(a)=r(b)xr(b)$ za neki $x\in S$. Ako $b'\in V(r(b))$, tada je

$$r(a)b'r(b)=r(b)xr(b)b'r(b)=r(b)xr(b)=r(a)$$

$$r(b)b'r(a)=r(b)b'r(b)xr(b)=r(b)xr(b)=r(a)$$

Kako iz hipoteze sledi da je i $r(a)=r(a)b'r(a)$, onda je $a\leq b$.

(i) => *(v)*. Ako važi *(i)*, onda važi *(v)* jer postojeći x je neki $b'\in V(r(b))$.

(v) => *(iv)*. Neka važi *(v)*. Tada $e=r(a)x$, $f=xr(a)\in E(S)$ i $r(a)=er(b)=r(b)f$. $\square$

Posledica 1.1. Neka je S regularna polugrupa. Za $a,b\in S$ definišimo

(1.6) $\quad a\leq b \iff (\forall b'\in V(b))\, a=ab'a=ab'b=bb'a.$

Relacija $\leq$ je parcijalno uredjenje na S.

Dokaz. Kako je na regularnoj polugrupi $r(a)=a, r(b)=b$, onda iz Teoreme 1.1. sledi (1.6). Sada iz $a=bb'a$ sledi $R_a \leq R_b$, pa na osnovu Teoreme 1.1 $\leq$ je parcijalno uredjenje na S. $\square$

Posledica 1.2. Na regularnoj polugrupi sledeći uslovi su ekvivalentni:

(*i*) $a \leq b$;

(*ii*) $a \leq_N b$;

(*iii*) $(\exists a' \in V(a))a=aa'b=ba'a$;

(*iv*) $(\exists e,f \in E(S))a=eb=bf$;

(*v*) $(\exists x \in S)a=axa=axb=bxa$;

(*vi*) $H_a \leq H_b \wedge (\forall b' \in V(b))a=ab'a$.

Dokaz. Pošto je na regularnoj polugrupi $R=R^*$, $L=L^*$, onda na osnovu Teoreme 1.1. i Posledice 1.1., sledi dokaz Posledice 1.2. $\square$

Nambooripad je u |37| dokazao da je (*ii*) <=> (*vi*). Hartwig u |30|, nezavisno od Nambooripada, definiše parcijalno uredjenje pomoću (*iii*). Dokaz da je (*ii*) <=> (*iii*) je dala Gomes u |4|. Da je (*iii*) <=> (*v*) dokazao je Drazin u |23|.

Primedba. Ako S jeste π-regularna polugrupa, onda relacija $\leq$ definisana sa (1.6) je očigledno parcijalno uredjenje na skupu Reg(S) i na Reg(S) je $\leq = \leq_N$.

Teorema 1.3. Neka je S r-kancelativna polugrupa. Za a,b S definišimo

$$a\gamma b \iff r(a) \leq_N r(b) \wedge R_a \leq R_b,$$

Tada je relacija γ parcijalno uredjenje na S i $\gamma = \leq$, gde je relacija $\leq$ definisana sa (1.4).

Dokaz. Neka su $a,b\in S$. Tada

$$a\gamma b \Leftrightarrow r(a)\leq_{N} r(b)\wedge R_a\leq R_b$$

$$\Leftrightarrow r(a)\leq r(b)\wedge R_a\leq R_b, \text{ jer } \leq=\leq_{N} \text{na Reg}(S)$$

$$\Leftrightarrow (\forall b'\in V(r(b)))(r(a)=r(a)b'r(a)=r(a)b'r(b)=r(b)b'r(a) \quad R_a\leq R_b$$

$$\Leftrightarrow a\leq b, \text{ na osnovu } (1.4).$$

Zato, ako je S r-kancelativna polugrupa, onda je prirodno parcijalno uredjenje $\leq$ na S proširenje prirodnog parcijalnog uredjenja $\leq_{N}$ sa Reg(S) na S. $\square$

Teorema 1.4. Ako je S r-kancelativna polugrupa,onda:

(*i*) $(\forall a\in S)r(a)\leq a$,

(*ii*) $(e\in E(S)\wedge a\in Reg(S)\wedge a\leq e) \Rightarrow a\in E(S)$,

(*iii*) $(a,b\in Reg(S)\vee a,b\in S-Reg(S))\wedge a\mathcal{R}^{*}b\wedge a\leq b)\Rightarrow a=b$,

(*iv*) Ako S ima nulu 0, onda $(\forall a\in S)0\leq a$,

(*v*) Ako S ima jedinicu 1,onda $(\forall a\in S)(a\leq 1 \Leftrightarrow r(a)\in E(S))$,

(*vi*) Ako S ima nulu 0, onda $(\forall b\in Reg(S))(r(a)=0\wedge R_a\leq R_b \Rightarrow a\leq b)$.

Dokaz. (i) sledi neposredno iz definicije $\leq$ na S.

(*ii*). Neka su $e\in E(S)$, $a\in RegS$ takvi da je $a\leq e$. Tada je, na osnovu (*ii*) Teoreme 1.2, $R_f^{*}=R_a^{*}\leq R_e^{*}$ za neki $f\in E(R_a^{*})$ i $a=fe$. Sada je $a^2=fe\cdot fe=f\cdot ef\cdot e=fe^2=fe=a\in E(S)$.

(*iii*). Neka su $a,b\in S$ takvi da je $a\mathcal{R}^{*}b$ i $a\leq b$.

Tada je $R_a^{*}=R_b^{*}=R_f^{*}$ za neki $f\in E(R_a^{*})$ i $r(a)=fr(b)$. Odavde sledi da je $r(a)=r(b)$. Sada, iz hipoteze u (*iii*), sledi $a=b$.

Jasno je da na S važi (*iv*).

(v) Da polugrupa S ima svojstvo (v) sledi iz (iii) Teoreme 1.2.

(vi) Ako za $a,b\in S$ važi hipoteza iz (vi), onda je $a\leq b$, po definiciji uredjenja $\leq$. $\square$

Definicija 1.3. Element a π-regularne polugrupe S je *jako π-regularan* ako

$$(\forall x\in S)(r(a)=r(a)xr(a) \Leftrightarrow x=xr(a)x).$$

Definicija 1.4. Element a r-kancelativne polugrupe S je *maksimalan* ako je maksimalan u odnosu na relaciju prirodnog uredjenja na S.

Neka je S r-kancelativna polugrupa i neka je

$$A=\{x\in Reg(S)\,|\,(\exists y\in S-Reg(S))x=r(y)\},\quad B=Reg(S)-A.$$

Teorema 1.5. Ako je S r-kancelativna polugrupa, onda svaki jako π-regularan element iz S-A je maksimalan.

Dokaz. Neka je a jako π-regularan element iz S i $b\in S$ takav da je $a\leq b$. Tada, po Teoremi 1.1, za svaki $b'\in V(r(b))$ je

$$r(a)=r(a)b'r(a)=r(a)b'r(b)=r(b)b'r(a).$$

Pošto je a jako π-regularan element, onda je $b'=b'r(a)b'$. Sada je

$$(1.7)\qquad r(b)=r(b)b'r(b)=r(b)b'r(a)b'r(b)=r(a)b'r(b)=r(a).$$

Neka je $a\in S-Reg(S)$. Ako je $b\in S-Reg(S)$, onda iz (1.7) sledi da je a=b jer S je r-kancelativna. Ako je $b\in Reg(S)$, tada iz (1.7) sledi da je $b=r(a)$, pa po Teoremi 1.4, imamo da je $b=r(a)\leq a$. Dakle, imamo da je $a\leq b$ i $b\leq a$ pa a=b što je nemoguće.

Neka $a\in B$. Ako $b\in Reg(S)$, onda iz (1.7) sledi $a=b$. Ako je $b\in S-Reg(S)$, onda je zbog (1.7) $a=r(b)$ što je nemoguće jer $a\in B$. Dakle, jako π-regularan element iz $S-A$ je maksimalan.

Jasno je da jako π-regularan element $a\in A$ nije maksimalan, jer $a=r(x)\leq x$ za neki $x\in S-Reg(S)$. $\square$

Obrat ove teoreme ne važi jer u Primeru 1.1. element 1 jeste maksimalan ali nije jako π-regularan.

Kada je S regularna polugrupa, skupovi A i $S-Reg(S)$ su prazni i $B=S$. Zato važi.

Posledica 1.3. |5|. Neka je S regularna polugrupa. Tada svaki jako regularan element iz S je maksimalan. $\square$

2. SAGLASNOST PRIRODNOG UREDJENJA SA MNOŽENJEM NA NEKIM R-KANCELATIVNIM POLUGRUPAMA

U prethodnoj tački definisali smo prirodno uredjenje na r-kancelativnoj polugrupi. Ovo uredjenje nije saglasno sa množenjem u opštem slučaju. Ovde uvodimo pojam L^*-(R^*-) unipotentne polugrupe i na takvoj polugrupi ispitujemo saglasnost prirodnog uredjenja sa množenjem.

Nambooripad u radu |38| definiše skup

$$(2.1)\qquad S(e,f)=f\cdot V(ef)\cdot e=E(S))\cap V(ef)\cap fSe = \{g\in E(S)\mid ge=g=fg, egf=ef\},$$

gde je S regularna polugrupa i $e,f\in E(S)$, i naziva ga sendvič skup. Primenom sendvič skupa Blyth i Gomes u |4| ispituju saglasnost relacije $\leq_N$ sa množenjem na nekim regularnim polugrupama. Teoreme 2.1.,2.2. i 2.3. predstavljaju uopštenje rezultata Blytha i Gomesa iz |4|.

Primetimo da je na regularnoj polugrupi S $S(e,f)\neq\emptyset$, jer $fxe\ S(e,f)$ za svaki $x\in V(ef)$. Medjutim, ako je S π-regularna polugrupa, onda može biti $S(e,f)=\emptyset$, jer mogu postojati $e,f\in E(S)$, takvi da $ef\notin Reg(S)$, pa $V(ef)=\emptyset$.

Lema 2.1. Neka je S π-regularna polugrupa i Reg(S) podpolugrupa od S. Tada za $e,f\in E(S)$ je:

(*i*) $S(e,f)\neq\emptyset$,

(*ii*) $S(e,f)$ je pravougaona traka,

(*iii*) $\begin{cases} eL^*f = (\forall g\in E(S))\ S(e,g)=S(f,g) \\ eR^*f = (\forall g\in E(S))\ S(g,e)=S(g,f) \end{cases}$

(*iv*) $(\forall a'\in V(r(a)))(\forall b'\in V(r(b)))(\forall g\in S(a'r(a),r(b)b')$

$b'ga'\in V(r(a)r(b)))$.

Dokaz. Neka su $e,f\in E(S)$ i neka je Reg(S) podpolugrupa od S. Tada $ef\in E^2(S)\subseteq Reg^2(S)\subseteq Reg(S)$. Kako je i $r(a),r(b)\in Reg(S)$ za svaki $a,b\in S$, onda dokaz je potpuno istovetan kao u radu |4| Blyhta i Gomesa.

$\square$

Lema 2.2. Neka su a,b elementi r-kancelativne polugrupe S takvi da je $a\leq b$ i $b'\in V(r(b))$. Tada postoje $a',a''\in V(r(a))$ takvi da je

(2.2) $r(a)b'=r(a)a'\leq_n r(b)b'$ i $r(a)=r(a)a'r(b)$

(2.3) $b'r(a)=a''r(a)\leq_n b'r(b)$ i $r(a)=r(b)a''r(a)$

Dokaz. Neka su $a,b\in S$ takvi da je $a\leq b$. Tada je za svaki $b'\in V(r(b))$

$$r(a)=r(a)b'r(a)=r(a)b'r(b)=r(b)b'r(a)$$

Sada iz

$$R_a^* = R_{r(a)}^* = R_{r(a)b'r(a)}^* \leq R_{r(a)b'}^* \leq R_{r(a)}^* = R_a^*$$

sledi $r(a)b' \in R_a^*$. Jasno je da $r(a)b' \in E(S)$. Dakle, $r(a)b' \in E(R_a^*)$, pa na osnovu Teoreme I.2.3., postoji $a' \in V(r(a))$ tako da je

$$r(a)b' = r(a)a'.$$

Dalje, iz $r(a)b'r(b)b' = r(a)b'$ i $r(b)b'r(a)b' = r(a)b'$ sledi da je

$$r(a)b' = r(a)a' \leq_n r(b)b' .$$

Takodje, iz $a \leq b$ i $r(a)a' = r(a)b'$, sledi da je

$$r(a) = r(a)b'r(b) = r(a)a'r(b).$$

Na taj način smo dokazali (2.2). Na sličan način se dokazuje (2.3). $\square$

Lema 2.3. Ako je S π-regularna polugrupa, onda eSe je π-regularan podmonoid od S za svaki $e \in E(S)$.

Dokaz. Jasno je da eSe jeste podmonoid od S za svaki $e \in E(S)$. Neka $a \in eSe$. Tada je $a = exe$ za neki $x \in S$ i postoje $m \in Z^+, t \in S$ takvi da je $a^m = a^m t a^m$. Sada je

$$a^m = a^m t a^m = a^{m-1} ata\ a^{m-1} = a^{m-1} exe \cdot ete \cdot exea^{m-1} =$$
$$= a^m \cdot ete \cdot a^m.$$

Pošto $ete \in eSe$, sledi da je eSe π-regularna polugrupa.

Podmonoid eSe zvaćemo *lokalni* podmonoid od S. $\square$

Definicija 2.1. Polugrupa S je L^**-unipotentna* (R^**-unipotentna)* ako je π-regularna i svaka L^*-klasa (R^*-klasa) sadrži tačno jedan idempotent.

Definicija 2.2. Polugrupa S je *lokalno* $\mathcal{L}^*$*-unipotentna* ($\mathcal{R}^*$*-unipotentna*) ako je svaki lokalni podmonoid od S $\mathcal{L}^*$-unipotentan ($\mathcal{R}^*$-unipotentan).

Primer 2.1. Polugrupa S zadata tablicom

	1	2	3	4	5
1	2	3	1	1	2
2	3	1	2	2	3
3	1	2	3	3	1
4	1	2	3	4	1
5	2	3	1	1	2

je lokalno $\mathcal{L}^*$-unipotentna polugrupa. Podmonoidi ove polugrupe su $3S3=\{1,2,3\}$ i $4S4=\{1,2,3,4\}$. Podmonoid 3S3 ima jednu $\mathcal{L}^*$-klasu $L_1^*=\{1,2,3\}$ sa jedinstvenim idempotentom. Podmonoid 4S4 ima dve $\mathcal{L}^*$-klase $L_1^*=\{1,2,3\}$ i $L_4^*=\{4\}$ sa po tačno jednim idempotentom.

Ova polugrupa zadovoljava uslov

(2.4) $\quad (\forall a,b,c \in S)(R_a \leq R_b \Rightarrow R_{ac} \leq R_{bc}).$

Takodje, S je r-kancelativna r-polugrupa.

Propozicija 1.1. Ako je T π-regularna podpolugrupa π-regularne polugrupe S, tada $\mathcal{L}_T^* = \mathcal{L}_S^* \cap T \times T$.

Dokaz. Neka je $(a,b) \in \mathcal{L}_T^*$, tada postoji $x,y \in T \cap S$ tako da je $r(a)=xr(b)$ i $r(b)=yr(a)$. Zato, $(a,b) \in \mathcal{L}^*_S \cap T\times T$.

Obratno, neka $(a,b) \in \mathcal{L}_S^* \cap T\times T$ i neka $a' \in V(r(a)) \cap T$, $b' \in V(r(b)) \cap T$. Tada

$$(a'r(a),a),(a,b),(b,b'r(b)) \in \mathcal{L}_S^*$$

pa $(a'r(a),b'r(b)) \in \mathcal{L}_S^*$. Sada postoje $x,y \in S$ tako da je

$$a'r(a)=xb'r(b), \quad b'r(b)=ya'r(a),$$

odakle dobijamo

$$a'r(a)\cdot b'r(b)=a'r(a), \quad b'r(b)\cdot a'r(a)=b'r(b).$$

Pošto $a'r(a)$, $b'r(b)\in T$ imamo da $(a'r(a),b'r(b))\in L^*_T$. Sada iz

$$(a,a'r(a)),(a'r(a),b'r(b)),(b'r(b),b)\in L^*_T.$$

sledi $(a,b)\in L^*_T$. $\square$

Teorema 2.1. Neka je S r-kancelativna r-polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(*i*) S je lokalno L^*-unipotentna i zadovoljava uslov (2.4);

(*ii*) Prirodno parcijalno uredjenje $\leq$ je saglasno u odnosu na množenje u S sa desne strane;

(*iii*) Za svaki $e,f\in E(S)$ skup $S(e,f)$ je polugrupa desnih nula i S zadovoljava uslov (2.4).

Dokaz. (i) => (ii). Neka su $a,b,c\in S$ i neka je $a\leq b$. Tada na osnovu (2.2) postoji $a'\in V(r(a))$ takav da je

$$(2.5) \qquad r(a)=r(a)a'r(b).$$

Sendvič skup $S(a'r(a), r(c)c')\neq\emptyset$ na osnovu (*i*) Leme 1.1. Ako je $c'\in V(r(c))$ i $g\in S(a'r(a), r(c)c')$, onda je

$$\begin{aligned}
r(ac)c'ga'\cdot r(bc) &= r(a)r(c)c'ga'r(b)r(c) && \text{,jer S je r-polugrupa,}\\
&= r(a)ga'r(b)r(c) && \text{,jer } g\in S(a'r(a),r(c)c')\\
&= r(a)ga'r(a)a'r(b)r(c) && \text{,jer } a'\in V(r(a))\\
&= r(a)ga'r(a)r(c) && \text{, zbog (2.5)}\\
&= r(a)gr(c) && \text{,jer } g\in S(a'r(a),r(c)c')\\
&= r(a)a'r(a)gr(c)c'r(c) &&\\
&= r(a)a'r(a)r(c)c'r(c) && \text{,jer } g\in S(a'r(a),r(c)c')\\
&= r(a)r(c), &&\\
&= r(ac). && \text{,jer S je r-polugrupa.}
\end{aligned}$$

Stavimo li sada $e=r(ac)c'ga'$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} e^2 &= r(ac)c'ga'r(ac)c'ga' \\ &= r(ac)c'ga'r(a)r(c)c'ga' \\ &= r(ac)c'ga' && \text{,zbog } (iv) \text{ Leme 2.1.} \\ &= e \in E(S). \end{aligned}$$

Dakle, postoji $e \in E(s)$ da je

(2.6) $\quad r(ac)=er(bc)$.

Za $b' \in V(r(b))$, na osnovu (2.3), postoji $a'' \in V(r(a))$ da je

(2.7) $\quad a''r(a)=a''r(a)b'r(b)=b'r(b)a''r(a), \quad r(a)=r(b)a''r(a)$.

Sada za $c'' \in V(r(c))$ i $h \in S(a''r(a),r(c)c'')$ imamo da $a''r(a)h, b'r(b)h \in E(S)$. Takodje, imamo da

$$\begin{aligned} a''r(a)h &= b'r(b)a''r(a)h && \text{(na osnovu 2.7))} \\ &= b'r(b)a''r(a)ha''r(a) && (\text{jer } h \in S(a''r(a),r(c)c'')) \\ &= b'r(b)a''r(a)ha''r(a)b'r(b) && \text{(zbog (2.7))} \\ &\in b'r(b)Sb'r(b) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} b'r(b)h &= b'r(b)ha''r(a) && (\text{jer } h \in S(a''r(a),r(c)c'') \\ &= b'r(b)ha''r(a)b'r(b) && \text{(zbog (2.7)} \\ &\in b'r(b)Sb'r(b) \end{aligned}$$

Kako je S lokalno L^*-unipotentna polugrupa i kako iz

$$\begin{aligned} a''r(a)h \cdot b'r(b)h &= a''r(a)ha''r(a)b'r(b)h && (\text{jer } h \in S(a''r(a),r(c)c'')) \\ &= a''r(a)ha''r(a)h && \text{(zbog (2.7))} \\ &= a''r(a)h \end{aligned}$$

$$b'r(b)ha''r(a)h=b'r(b)hh \quad (\text{jer } h\in S(a''r(a),r(c)c''))$$
$$=b'r(b)h$$

sledi da $a''r(a)h$, $b'r(b)h$ pripadaju istoj L^*-klasi u $b'r(b)Sb'r(b)$, onda važi

(2.8) $a''r(a)h = b'r(b)h$

Dalje je

$$r(bc).c''ha''r(a)r(c)=r(b)r(c)c''ha''r(a)r(c)$$
$$=r(b)hr(c) \quad (\text{jer } h\in S(a''r(a),r(c)c''))$$
$$=r(b)b'r(b)hr(c)$$
$$=r(b)a''r(a)hr(c) \quad (\text{na osnovu } (2.8))$$
$$=r(a)hr(c) \quad (\text{na osnovu } (2.7))$$
$$=r(a)a''r(a)hr(c)c''r(c)$$
$$=r(a)a''r(a)r(c)c''r(c) \quad (\text{jer } h\in S(a''r(a),r(c)c''))$$
$$=r(a)r(c)$$
$$=r(ac).$$

Stavimo li $f=c''ha''r(a)r(c)$, dokazujemo da $f\in E(S)$. Dakle, postoji $f\in E(S)$ da važi

(2.9) $r(ac) = r(bc)\cdot f$

Pošto je $R_a\leq R_b$ i pošto na S važi (2.4), onda je

(2.10) $R_{ac}\leq R_{bc}$.

Iz (2.6), (2.9),(2.10) i Teoreme 1.2. (*iv*) sledi da je $ac\leq bc$.

(*ii*) => (*iii*). Pošto je S r-polugrupa, tada $Reg(S)$ je podpolugrupa od S. Zato, ako $e,f\in E(S)$, onda je $S(e,f)\neq\emptyset$ (Lema 2.1). Neka $g,h\in S(e,f)$. Tada $gf\cdot gf=gf$, pa $gf\in E(S)$. Kako je $gf=gf\cdot f=f.gf$, onda je $gf\leq_n f$. Pošto je $\leq|_{E(S)}=\leq_n$ i pošto je $\leq$ saglasno u odnosu na množenje sa desne strane, onda iz $gf\leq_n f$ i $h\in S(e,f)$, dobijamo

$$gf = g\cdot fh\leq_n fh=h \tag{2.11}$$

Sada na osnovu (*ii*) Leme 2.1. i (2.11) dobijamo

$$gh = hgh = h.$$

Dakle, $S(e,f)$ je polugrupa desnih nula.

(*iii*) => (*i*). Neka $e\in E(S)$, a $eSe, f,g\in E(S)\cap eSe$ i neka $f,g\in L_a^*$ u eSe. Tada, na osnovu Propozicije 1.1, $f,g\in L_a^*$ u S, pa, na osnovu (*iii*) Leme 1.1. je $S(f,e)=S(g,e)$. Kako je $S(f,e)=S(g,e)$ polugrupa desnih nula, onda $f,g\in S(f,e)=S(g,e)$ i $f=fg=g$. Dakle, S je lokalno L^*-unipotentna polugrupa. □

Teorema 2.2. Neka je S r-kancelativna r-polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(*i*) S je lokalno R^*-unipotentna;

(*ii*) Prirodno parcijalno $\leq$ je saglasno u odnosu na množenje u S sa leve strane,

(*iii*) Za svaki $e,f\in E(S)$ skup $S(e,f)$ je polugrupa levih nula.

Dokaz. Pošto na proizvoljnoj polugrupi važi uslov

$$(\forall a,b\in S)(R_a\leq R_b \Rightarrow R_{ca}\leq R_{cb}),$$

onda je taj uslov u Teoremi izostavljen. Dokaz Teoreme je sličan dokazu Teoreme 2.1., te ga izostavljamo. □

Definicija 2.3. Polugrupa S je *lokalno π-inverzna* ako je π-regularna i svaki lokalni podmonoid od S je π-inverzna polugrupa.

Lema 2.4. Polugrupa S je lokalno π-inverzna ako i samo ako za svaki $e \in E(S)$ polugrupa eSe je L^*-unipotentna i R^*-unipotentna.

Dokaz. Na osnovu Teoreme I.2.4. $\square$

Teorema 2.3. Neka je S r-kancelativna r-polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(*i*) S je lokalno π-inverzna i zadovoljava uslov (2.4),

(*ii*) Prirodno parcijalno uredjenje $\leq$ je saglasno sa množenjem u S,

(*iii*) Za svaki $e,f \in E(S)$ skup $S(e,f)$ je jednočlani i S zadovoljava uslov (2.4).

Dokaz. (i) => (ii). Iz hipoteze i Leme 2.4. polugupra S je lokalno L^*-unipotentna i lokalno R^*-unipotentna. Na osnovu Teoreme 2.1. i Teoreme 2.2. sledi (*ii*).

(*ii*) => (*iii*). Neka su $e,f \in E(S)$. Na osnovu Teoreme 2.1. $S(e,f)$ je polugrupa desnih nula, a na osnovu Teoreme 2.2. $S(e,f)$ je polugrupa levih nula. Zato je za svaki $g,h \in S(e,f)$ $h=gh=g$, pa $S(e,f)$ je jednočlani skup. Polugrupa S zadovoljava uslov (2.4) po definiciji uredjenja $\leq$.

(*iii*) => (*i*). Na osnovu Teoreme 2.1. S je lokalno L^*-unipotentna, a na osnovu Teoreme 2.2. S je lokalno R^*-unipotentna. Sada, po Lemi 2.4, S je lokalno π-inverzna. $\square$

3. NAJVEĆA IDEMPOTENTNO RAZDVAJAJUĆA I NAJMANJA GRUPNA KONGRUENCIJA NA $\mathcal{L}^*$-UNIPOTENTNOJ R-POLUGRUPI

Kongruencije na L-unipotentnoj polugrupi proučavali su S.Edwards u radovima |24|,|25| kao i Sh.Shimokawa u radu |56|. U tački 2. ovog poglavlja definisali smo pojam L^*-unipotentne polugrupe. Jednu karakterizaciju L^*-unipotentne polugrupe dao je S.Bogdanović u radu |9|. Ovde, u Teoremi 3.1. dajemo karakterizaciju L^*-unipotentne polugrupe S za koju je Red(S) podpolugrupa od S. Dalje, u ovoj tački dajemo opis najveće idempotentno razdvajajuće kongruencije na L^*-unipotentnoj r-polugrupi S i pomoću nje dajemo potrebne i dovoljne uslove da polugrupa S bude desno regularna traka nil-ekstenzija grupa (Teorema 3.5). Takodje, u ovoj tački dajemo opis najmanje grupne kongruencije na L^*-unipotentnoj r-kancelativnoj r-polugrupi pomoću prirodnog parcijalnog uredjenja.

Lema 3.1. Ako je S L^*-unipotentna polugrupa, onda važi

(3.1) $\quad (\forall a\in S)(\forall a',a''\in V(r(a)))a'r(a)=a''r(a)$

Dokaz. Neka $a\in S$, $a',a''\in V(r(a))$. Tada $a'r(a)$, $a''r(a)\in E(S)$ i $Sa'r(a)\subseteq Sr(a)=Sr(a)a'r(a)\subseteq Sa'r(a)$ pa je $a'r(a)L^*r(a)$. Slično, dokazujemo da je $r(a)\,L^*a''r(a)$. Dakle, $a'r(a)L^*a''r(a)$, pa $a'r(a)=a''r(a)$, jer S je L^*-unipotentna. $\square$

Teorema 3.1. Na polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(*i*) $\quad$ S je L^*-unipotentna i $Reg^2(S)\subseteq Reg(s)$;

(*ii*) $\quad$ S je π-regularna i

(3.2) $\quad (\forall e,f\in E(S))\ fef = ef$;

(*iii*) $\quad$ S je π-otodotksna L^*-unipotentna.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Neka su $e,f \in E(S)$. Tada $ef \in E^2 \subseteq Reg^2(S) \subseteq Reg(S)$, pa postoji $x \in V(ef)$. Jednostavno se dokazuje da $fx, xe \in V(ef)$. Sada, na osnovu (3.1) imamo

$$x = xefxefx = xexefx = xex,$$

pa $xe.xe = xex.e = xe \in E(S)$. Jasno je da $xe, ef \in V(xe)$. Kako je

$$\begin{aligned}
ef\cdot ef &= efxeef\cdot efxeef && \text{(jer } ef \in V(xe)\text{)}\\
&= xexeef\cdot xexeef && \text{(na osnovu (3.1))}\\
&= xe\cdot efxe\cdot ef && \text{(jer } xe \in E(S)\text{)}\\
&= xe\cdot xexe.ef && \text{(na osnovu (3.1))}\\
&= xexe\cdot ef && \text{(jer } xe \in E(S)\text{)}\\
&= efxeef && \text{(na osnovu (3.1))}\\
&= ef && \text{(jer } ef \in V(xe)\text{)}\\
&\in E(S),
\end{aligned}$$

onda $E(S)$ je podpolugrupa od S. Sada iz

$$Sr(ef) = Sef = Sefef \subseteq Sfef = Sr(fef) \subseteq Sef = Sr(ef)$$

i L^*-unipotentnosti polugrupe S sledi da je $ef=fef$.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Neka su $e,f \in E(S)$. Tada iz (3.2) i hipoteze sledi da S jeste π-ortodoksna. Ako eL^*f, onda iz $Se = Sr(e) = Sr(f) = Sf$ sledi da je $ef=e$ i $fe=f$. Sada je $e=ef=fef=ff=f$, pa S jeste L^*-unipotentna.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Na osnovu Teoreme I.2.2.

$\square$

Posledica 3.1. Ako je S π-ortodoksna L^*-unipotentna polugrupa, onda za svaki $a,b \in S$, $e \in E(S)$, $b' \in V(r(b))$, $a', a'' \in V(r(a))$ važi:

(*i*) $er(a)=r(a)a'er(a)$,

(*ii*) $a''er(a)=a'er(a)$,

(*iii*) $E(S)r(a)\subseteq r(a)E(S)$,

(*iv*) $E(S)r(a)E(S)=r(a)E(S)$,

(*v*) $r(a)E(S)\cap r(b)E(S)\neq\emptyset \Rightarrow (\exists f\in E(S))r(a)f=r(b)f$.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.1, Reg(S) je podpolugrupa od S. Jasno je da Reg(S) jeste L-unipotentna polugrupa. Kako $r(a),r(b)\in Reg(S)$ za svaki $a,b\in S$, onda se dokaz svodi na dokaz Posledice 1.3. |25| čiji se iskaz formalno razlikuje od iskaza Posledice 3.1 što u Posledici 1,3. |25| stoji a,b umesto r(a),r(b). /7

Za realaciju ρ π-regularne polugrupe kažemo da je *r-poluprosta* ako je $a\,\rho\, r(a)$ za svaki $a\in S$. Pojam r-poluproste relacije uveli su P.Protić i S.Bogdanović u radu |47|.

Teorema 3.2. Ako je S π-ortodoksna L^*-unipotentna polugrupa, onda relacija

(3.3) $\mu=\{(a,b)\in S\times S \mid (\exists a'\in V(r(a)))(\exists b'\in V(r(b)))(\forall e\in E(S))a'er(a)=b'er(b)\}$

je idempotentno razdvajajuća r-poluprosta ekvivalencija na S koja sadrži svaku idempotentno razdvajajuću r-poluprostu kongruenciju na S.

Najveća idempotentno razdvajajuća kongruencija na S je

$$\mu^b=\{(a,b)\in S\times S \mid (\forall x,y\in S^1)(xay,xby)\in\mu\}.$$

Dokaz. Jasno je da μ jeste r-poluprosta refleksivna i simetrična relacija. Neka $(a,b),(b,c)\in\mu$. Tada postoje $a'\in V(r(a))$, $b',b''\in V(r(b))$, $c'\in V(r(c))$ takvi da je za svaki $e\in E(S)$

$$a'er(a) = b'er(b)\ , \quad b''er(b) = c'er(c).$$

Kako je, na osnovu (*ii*) Posledice 3.1. $b'er(b)=b''er(b)$, onda je

$$a'er(a)=b'er(b)=b''er(b)=c'er(c).$$

Dakle, relacija μ je tranzitivna. Neka je za $e,f\in E(S)$ $(e,f)\in\mu$. Tada postoje $e'\in V(e)$, $f'\in V(f)$ da je $e'he=f'hf$ za svaki $h\in E(S)$. Sada, na osnovu (*ii*) Posledice 3.1 imamo da je $ehe=e'he=f'hf=fhf$ za svaki $h\in E(S)$, odakle sledi da je $e=f$. Dakle, μ je idempotentno razdvajajuća ekvivalencija na S.

Neka je ρ idempotentno razdvajajuća r-poluprosta kongruencija na S i neka $(a,b)\in\rho$. Tada, na osnovu Teoreme I.2.5, $(a,b)\in H^*$. Dalje, po Teoremi I.2.3, postoje $a'\in V(r(a))$, $b'\in V(r(b))$ za koje je

$$r(a)a'=r(b)b' \;,\quad a'r(a)=b'r(b).$$

Sada je

$$b'=b'r(b)b'=b'r(a)a'\rho b'r(b)a'=a'r(a)a'=a' \;,$$

pa $(a'er(a),b'er(b))\in\rho$ za svaki $e\in E(S)$. Kako su $a'er(a)$, $b'er(b)$ idempotenti, onda je $r'er(a)=b'er(b)$. Na taj način smo dokazali da ekvivalencija μ sadrži svaku idempotentno razdvajajuću r-poluprostu kongruenciju na S. Napomenimo da na S ne postoji idempotentno razdvajajuća kongruencijakoja sadrži relaciju μ. Pretpostavimo li suprotno, onda bi za neku idempotentno razdvajajuću kongruenciju ρ koja nije r-poluprosta bilo $\mu\subseteq\rho$, onda bi ρ bilo r-poluprosta što je kontradikcija.

Na osnovu Teoreme I.2.6., $\mu^\flat$ je najveća kongruencija sadržana u μ i zato $\mu^\flat$ je idempotentno razdvajajuća. Na osnovu Leme I.2.1, kongruencija $\mu^\flat$ je r-poluprosta jer sadrži r-poluprostu relaciju

$$\sigma=\{(a,b)\in S\times S\,|\,r(a)=r(b)\}.$$

Kako na bilo kojoj π-regularnoj polugrupi postoji najveća idempotentno razdvajajuća kongruencija (P.M.Edwards |26|, onda je ona r-poluprosta i sadržana je u μ. Dakle, μ^b je najveća idempotentna razdvojajuća kongruencija na S.

$\square$

Teorema 3.3. Ako je S L^*-unipotentna r-polugrupa, onda je relacija μ definisana sa (3.3) najveća idempotentno razdvajajuća kongruencija na S.

Dokaz. Neka je S L^*-unipotentna r-polugrupa. Tada, na osnovu Teoreme 3.1 i Teoreme I.2.2, S jeste π-ortodoksna L^*-unipotentna polugrupa pri čemu je Reg(S) ortodoksna polugrupa. neka su $a,b \in S$ takvi da $(a,b) \in \mu$ i neka je $c \in S$ proizvoljan element. Tada postoje $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$, $c' \in V(r(c))$ tako da $c'a' \in V(r(a)r(c)=V(r(ac))$, $c'b' \in V(r(b)r(c))=V(r(bc))$. Sada je

$$c'a'er(ac)=c'a'er(a)r(c)=c'b'er(b)r(c)=c'b'er(bc)$$

za svaki $e \in E(S)$, pa μ jeste leva kongruencija. Slično se dokazuje da je μ i desna kongruencija. Dakle, μ je kongruencija na S. Dalje, na osnovu Teoreme 3.2., sledi da je μ najveća idempotentna razdvajajuća kongruencija na S.

$\square$

Definicija 3.2. Podskup

$$E\eta=\{x \in S \mid (\forall x' \in V(r(x)))(\forall e \in E(S)))ex'r(x)=x'er(x)\}$$

π-regularne polugrupe S nazivamo *neutralizator* skupa E(S).

Pojam neutralizatora za slučaj kada je S regularna polugrupa uvela je C.Edwards u radu |24|.

Lema 3.2. Ako je S π-ortodoksna L^*-unipotentna polugrupa, onda je $E(S) \subseteq E\eta$.

Dokaz. Neka je $f \in E(S)$. Tada je, na osnovu Posledice 3.1, Teoreme 3.1 i Leme 3.1;

$$f'er(f)=f'ef=fef=ef=ef'f=ef'r(f)$$

za svaki $f' \in V(r(f)$ i svaki $e \in E(S)$. Dakle, $f \in E\eta$. $\square$

Teorema 3.4. Neka je S L^*-unipotentna r-polugrupa. Tada za relaciju μ definisanu formulom (3.3) važi

(3.4) $(a,b) \in \mu \Leftrightarrow ((\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))(a'r(a)=b'r(b), r(a)b' \in E\eta)$

Dokaz. Pošto je μ idempotentno razdvajajuća r-poluprosta kongruencija na S, onda je $\mu \subseteq H^*$ (Teorema I.2.5). Ako $(a,b) \in \mu$, onda na osnovu Teoreme I.2.2, postoje $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b)$, tako da je $a'r(a)=b'r(b)$. Primetimo da je $r(r(a)b')=r(a)b'$ jer $r(a)b' \in Reg(S)$. Označimo sa c' bilo koji invezr elementa $r(a)b'$. Tada, pošto $r(b)a' \in V(r(a)b')$, imamo da je za svaki $e \in E(S)$

$$
\begin{aligned}
ec' \cdot r(a)b' &= er(b)a'r(a)b' && \text{(po Lemi 3.1)}\\
&= er(b)b'r(a)b' && \text{(jer } a'r(a)=b'r(b))\\
&= er(b)b' &&\\
&= r(b)b'er(b)b' && \text{(po } (i) \text{ Posledice 31.1)}\\
&= r(b)a'er(a)b' && \text{(jer } (a,b) \in \mu)\\
&= c'er(a)b' && \text{(po Lemi 3 .1)}
\end{aligned}
$$

Đakle $r(a)b' \in E\eta$.

Obratno, neka za neke $a' \in V(r(a))$, $b' \in V(r(b))$

$a'r(a)=b'r(b)$ i $r(a)b' \in E\eta$.

Označimo sa c' bilo koji inverz elementa $r(a)b'$. Pošto je $r(b)a' \in V(r(a)b')$, onda za svaki $e \in E(S)$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
a'er(a) &= a'r(a)a'er(a)a'r(a) &&\\
&= b'r(b)a'er(a)b'r(b) && \text{(jer je } a'r(a)=b'(b))\\
&= b'c'er(a)b'r(b) && \text{(po Lemi 3.1)}
\end{aligned}
$$

$=b'ec'r(a)b'r(b)$ (jer $r(a)b' \in E\eta$)

$=b'er(b)a'r(a)b'r(b)$ (po Lemi 3.1)

$=b'r(b)b'r(b)b'r(b)$ (jer je $a'r(a)=b'r(b)$)

$=b'er(b)$

Dakle, $(a,b) \in \mu$. $\square$

π-*grupa* je π-regularna polugrupa sa tačno jednim idepotentom. Pojam π-grupe uveli su S.Milić i S.Bogdanović u radu |13|. U istom radu oni su dokazali da je polugrupa π-grupa ako i samo ako S jeste nil-ekstenzija grupe (Teorema 4.|13|).

Lema 3.3. Svaka π-klasa L^*-unipotentne r-polugrupe S koja sadrži idempotent je nil-ekspenzija grupe.

Dokaz. Neka $a,b \in e\mu$. Tada $ab \in (e\mu)(e\mu)=e^2\mu=e\mu$, pa je $e\mu$ podpolugrupa od S. Kako je μ idempotentno razdvajajuća kongruencija na S, onda je e jedinstveni idempotent polugrupe $e\mu$. Kako je $\mu \subseteq H^*$ (po Teoremi I.2.5) i kako je restrikcija relacije H^* na Reg(S) relacija H na Reg(S) (po Propoziciji 1.1), onda iz $r(a)\mu a\mu e$ sledi da $r(a) \in H_e$, gde je H H-klasa na Reg(S). Pošto $H_e^2 \cap H_e \neq \emptyset$, onda je H_e grupa. Zato $r(a)$ ima grupni inverz $x \in H_e$ za koji je

$$x=xr(a)x=ex=eex\mu er(a)x=e$$

tj. $x \in e\mu$. Dakle, $e\mu$ je π-regularna polugrupa sa tačno jednim idempotentom, pa na osnovu Teoreme 4.|13|, $e\mu$ je nil-ekstenzija grupe. $\square$

Teorema 3.5. Neka je S L^*-unipotentna r-polugrupa. Tada je $E\eta=\bigcup_{e \in E(S)} e\mu$ desno regularna traka nil-ekstenzija grupa.

Dokaz. Neka $a \in e\mu$ za neki $e \in S$. Tada postoje $a^* \in V(r(a))$, $e^* \in V(e)$ da je $a^*fr(a)=e^*fe$ za svaki $f \in E(S)$.

Odavde, koristeći (*ii*) Posledice 3.1. i Teoremu 3.1, dobijamo da je

$$a'fr(a) = efe = fe$$

za svaki $a' \in V(r(a))$. Kako je $(a,e) \in \mu \subseteq \mathcal{H}^*$ onda je $a''r(a)=e$ za neki $a'' \in V(r(a))$, a na osnovu Leme 3.1, je

$$fa'r(a) = fe$$

za svaki $a' \in V(r(a))$. Dakle, $a'fr(a)=fa'r(a)$ za svaki $a' \in V(r(a))$ i svaki $f \in E(S)$. Na taj način smo dokazali da je $\bigcup_{e \in E(S)} e\mu \subseteq E\eta$.

Obratno, neka $a \in E\eta$. Tada, na osnovu Teoreme 3.4, dobijamo da $(a,a'r(a)) \in \mu$, pa je $E\eta \subseteq \bigcup_{e \in E(S)} e\mu$.

Neka su $e, f \in E(S)$. Tada $(e\mu)(f\mu)(e\mu)=(efe)\mu= =(fe)\mu=(f\mu)(e\mu)$, pa $E\eta$ je desno regularna traka μ-klasa polugrupe S koje sadrže idempotente. Sada, na osnovu Leme 3.3., $E\eta$ je desno regularna traka nil-ekstenzija grupa. $\square$

Teorema 3.6. Na $\mathcal{L}^*$-unipotentnoj r-polugrupi S sledeći uslovi su ekvivalentni:

(*i*) $E\eta = S$

(*ii*) $S/\mu \cong E$

(*iii*) S je desno regularna traka nil-ekspenzije grupa:

Dokaz. (*i*) => (*ii*). Primetimo da je na polugrupi S tačna formula

$$(3.5) \qquad (a,b) \in \mu \Leftrightarrow (\exists a' \in V(r(a)))(\exists b' \in V(r(b)))a'r(a)=b'r(b).$$

jer iz $E\eta=S$ sledi da je $r(a)b' \in E\eta=S$. Na osnovu (3.5) i Leme 3.1. imamo da je $(x,x'r(x)) \in \mu$ za svaki $x \in S$ i svaki $x' \in V(r(x))$. Definišimo preslikavanja Φ: $S/\mu \to E(S)$ formulom

$$(\forall x \in S)\Phi(x\ )=x'r(x).$$

Jednostavno se proverava da je Φ bijekcija. Neka su

$x\mu, y\mu \in S/\mu$. Tada je

$$\begin{aligned}
\Phi(x\mu)(y\mu) &= \Phi((xy)\mu) \\
&= \Phi((r(xy))\mu) && (\mu \text{ je } r\text{-poluprosta kongruencija}) \\
&= \Phi((r(x)r(y))\mu) && (S \text{ je } r\text{-polugrupa}) \\
&= (r(x)r(y))' r(x)r(y) \\
&= y'x' r(x)r(y) && (y'x' \in V(r(xy)) \\
&= x' r(x) y' r(y) && (\text{ jer } y \in E\eta) \\
&= \Phi(x\mu)\Phi(y\mu).
\end{aligned}$$

(ii) => *(iii)*. Neka je $\Phi: S/\mu \to E$ izomorfizam. Tada je $F = (nat\mu)\circ\Phi$: $S \to E(S)$ epimorfizam gde je, po Teoremi 3.1., $E(S)$ desna regularna traka. Zato je S desno regularna traka polugrupa $S_\alpha = \alpha F^{-1}$, $\alpha \in E(S)$. Jasno je da za svaki $\alpha \in E(S)$ je $S_\alpha = x\mu$ za neki $x \in S$ i $F(x\mu) = \alpha$. Takodje je jasno da svaka polugrupa S_α sadrži jedinstveni idempotent, odakle, na osnovu Leme 3.3., sledi da je S desno regularna traka nil-ekstenzija grupa.

(iii) => *(i)*. Neka je S desna regularna traka Y nil-ekstenzija grupa S_α, $\alpha \in Y$. Neka $x \in S$ i $e \in E(S)$. Tada postoje $\alpha, \beta \in Y$ tako da $x, r(x) \in S_\alpha$, $e \in S_\beta$ i svaki $x' \in V(r(x)) \cap S_\alpha$. Sada

$$ex' r(a) \in S_\beta S_\alpha \subseteq S_{\beta\alpha}$$

$$x' e r(x) \in S_\alpha \; S_\beta \; S_\alpha \subseteq S_{\alpha\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}.$$

Kako je $S_{\beta\alpha}$ π-grupa i kako su $ex'r(x)$, $x'er(x)$ idempotenti u $S_{\beta\alpha}$, onda je $ex'r(x) = x'er(x)$. Dakle $x \in E\eta$, pa je $S \subseteq E\eta$. Obratna inkluzija, jasno, važi. Na taj način smo dokazali da *(iii)* implicira *(i)* .

$\square$

P.Protić i S.Bogdanović su u |47| dokazali da je relacija

(3.5) $\rho=\{(a,b)\in SxS|(\exists e\in E(S)er(a)e=er(b)e\}$

najmanja grupna kongruencija na π-ortodoksnoj r-polugrupi. Ovde ćemo definisati najmanju grupnu kongruenciju na L^*-unipotentnoj r-polugrupi.

Teorema 3.6. Ako je S L^*-unipotentna r-polugrupa, onda relacija

(3.6) $\sigma=\{(a,b)\in SxS|(\exists e\in E(S)r(a)e=r(b)e\}$

je najmanja grupna kongruencija na S.

Dokaz. Neka $(a,b)\in\rho$, gde je ρ relacija definisana formulom (3.5). Tada postoji $f\in E(S)$ da je $fr(a)f=fr(b)f$. Kako je, na osnovu(*iv*) Posledice 3.1.

$$fr(a)f\in E(S)r(a)E(S)=r(a)E(S),$$

$$fr(b)f\in E(S)r(b)E(S)=r(b)E(S),$$

onda je $r(a)E(S)\cap r(b)E(S)\neq\emptyset$. Sada, na osnovu (*v*) Posledice 3.1, postoji f $E(S)$ tako da je $r(a)f=r(b)f$ tj. $(a,b)\in\sigma$. Dakle, $\rho\subseteq\sigma$. Obratno, neka $(a,b)\in\sigma$. Tada iz $r(a)e=r(b)e$ sledi $er(a)e=er(b)e$ za neki $e\in E(S)$. $\square$

Sada ćemo opisati kongruenciju σ pomoću prirodnog uredjenja na S.

Lema 3.4. Ako je S π-ortodoksna r-kancelativna L^*-unipotentna polugrupa, onda važi formula

(3.7) $(\exists e,f\in E(S))r(a)=er(b)=r(b)f \iff (\exists e\in E(S))r(a)=er(b)$

za svaki a,b S.

Dokaz. Neka $a,b\in S$ i neka je $r(a)=er(b)$ za neki $e\in E(S)$. Tada na osnovu (*iii*) Posledice 3.2, postoji f E(S) da je $r(a)=r(b)f$. Jasno je da iz leve strane ekvivalencije (3.7) sledi desna strana. $\square$

Teorema 3.7. Neka je S L^*-unipotentna r-kancelativna r-polugrupa. Relacija ρ na S definisana formulom

$$(3.8) \qquad a\rho b \Longleftrightarrow R_a \leq R_b \wedge (\exists e \in E(S)) r(a) = er(b)$$

je uredjenje na S.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.2. i Leme 3.4. relacija ρ se poklapa sa prirodnim parcijalnim uredjenjem ρ definisanim u Teoremi 1.1. Dakle, relacija ρ jeste prirodno parcijalno uredjenje na S. $\square$

Uredjenje ρ ćemo u sledećoj teoremi označavati sa $\leq$.

Teorema 3.8. Neka je S L^*-unipotentna r-kancelativna r-polugrupa i σ najmanja grupna kongruencija na S definisana formulom (3.6). Tada važi formula

$$(3.9) \qquad (\forall a,b \in S)((a,b) \in \sigma \Longleftrightarrow (\exists b' \in V(r(b))) r(a)b' \in E\omega)$$

gde je $E\omega = \{x \in S \mid (\exists e \in E(S)) e \leq x\}$.

Dokaz. Dokažimo najpre da $x \in E\omega$ ako i samo ako je $E(S) \cap r(x)E(S)$ neprazan skup za bilo koji $x \in S$. Neka $x \in E\omega$. Tada je $e \leq x$ za neki $e \in E(S)$, pa na osnovu (3.7), postoje $f,g \in E(S)$ tako da je $e = fr(x) = r(x)g \in E \cap r(x)E$. Dakle, $E(S) \cap r(x)E(S) \neq \emptyset$. Obratno, neka je $E(S) \cap r(x)E(S) \neq \emptyset$. Tada postoji $e \in E(S)$ takav da je $e = r(x)g$ za neki $g \in E(S)$. Kako je $x'er(x) \in E(S)$ za svaki $x' \in V(r(x))$ i $e = r(x)g$, onda je $x'er(x) = (x'r(x)g)r(x)$. Odavde i na osnovu (3.7), sledi da je $x'er(x) \leq r(x)$. Kako je $r(x) \leq x$ za svaki $x \in S$, onda je $x'er(x) \leq x$ i zato $x \in E\omega$.

Dokažimo sada da na S važi formula (3.9). Neka $(a,b) \in \sigma$. Tada, na osnovu (3,6), postoji $e \in E(S)$ tako da je $r(a)e=r(b)e$. Ako su $b' \in V(r(b))$, $a' \in V(r(a))$ proizvoljni, onda je, na osnovu Teoreme I.1.5, $eb' \in V(r(a)e=r(b)e)$. Kako je $r(a)ea' \in E(S)$ i kako je $E(S)$ desno regularna traka, onda je

$$\begin{aligned} r(a)ea' &= r(a)e\cdot eb'r(a)ea' \quad (\text{jer } eb' \in V(r(a)e) \\ &= r(a)eb'r(a)ea' \\ &= r(a)eb'r(b)b'r(a)ea' \\ &= r(a)b'r(b)eb'r(b)b'r(a)ea' \\ &= r(a)b'(r(b)eb'r(a)ea') \\ &\in E\cap r(a)b'E(S). \end{aligned}$$

Dakle, $E(S)\cap r(a)b'E(S)\neq\emptyset$, pa $r(a)b' \in E\omega$.

Obratno, neka je $r(a)b' \in E\omega$ za neki $b' \in V(r(b))$. Tada je $h\leq r(a)b'$ za neki $h \in E(S)$, pa, na osnovu (3.8) $h=er(a)b'$ za neki $e \in E(S)$. Iz poslednje jednakosti sledi da je

$$hr(b)=er(a)b'r(b) \in E(S)r(b)\cap E(S)r(a)E(S).$$

Kako je, na osnovu (*iv*) Posledice 3.1, $E(S)r(a)E(S)=$ $=r(a)E(S)$, onda $hr(b) \in E(S)r(b)\cap r(a)E(S)$. Sada na osnovu (*v*) Posledice 3.1., postoji $f \in E(S)$ za koji je $r(a)f=r(b)f$, pa po Teoremi 3.6 $(a,b) \in \sigma$.

$\square$

Posledica 3.2. Ako je S regularna L-unipotentna polugrupa tada je relacija

$$\sigma=\{(a,b) \in S\times S \mid (\exists f \in E(S))af=bf\}$$

najmanja grupna kongruencija na S i važi formula

$$(\forall a,b \in S)(\exists b' \in V(B))(a\sigma b \sigma \Leftrightarrow ab' \in E\omega)$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.6., Teoreme 3.8 i činjenice da je na regularnoj polugrupi $r(a)=a$ za svaki $a \in S$.

$\square$

INDEKS

L I T E R A T U R A

|1| B.ALIMPIĆ.: Some congruences on generalized inverse semigroup. Prosc.of the Conference "Algebra and Logic",Zagreb (1984),1-7.

|2| G.AZUMAYA.: Strongly π-regular rings. J.Fac.Sci. Hokkaido Univ. 13 (1954), 34-39.

|3| G.BIJEV and K.TODOROV.: Coregular semigroups. Notes on semigroups VI, Dep.of Math. K.M. Univ. of Econom. Budapest, (1980), 1-11.

|4| T.BLYTH and G.GOMES.: On the compatibility of the natural order on a regular semigroup, Prosc.of the Royal Soc.of Edinburgh, 94A, (1983), 79-84.

|5| T.BLYTH and J.HICKEY.: RP-dominated regular semigroups, Prosc.of the Royal Soc.of Edinburgh, 99A, (1984), 185-191.

|6| S.BOGDANOVIĆ.: Inflations of a union of groups, Math. vesnik 37. (1985). 351-353.

|7| S.BOGDANOVIĆ.: Power regular semigroups, Zbornik radova PMF Novi Sad, 12. (1982),417-428.

|8| S.BOGDANOVIĆ.: Retractive nil-extensions of a completely regular semigroup.

|9| S.BOGDANOVIĆ.: Right π-inverse semigroups, Zbornik radova PMF Novi Sad, 14,2 (1984), 187-195.

|10| S.BOGDANOVIĆ.: Semigroups of Galbiati-Veronesi I, Prosc.of the Conf. "Algebra and Logic", Zagreb, (1984).9-20.

|11| S.BOGDANOVIĆ.: Semigroups of Galbiati-Veronesi II, Facta Univ.(Niš), Ser.Math.Inform,2 (1987) 61-66.

|12| S.BOGDANOVIĆ.: "Semigroups with a sistem of subsemigroups". Inst.of Math.Novi Sad 1985.

|13| S.BOGDANOVIĆ and S.MILIĆ.: A nil-extension of a completely simple semigroups, Publ.Ins. Math. 36(50),(1984),45-50.

|14| S.BOGDANOVIĆ and S.MILIĆ.: Inflations of semigroups, Publ.Inst.Math.41(55),(1987),63-73.

|15| S.BOGDANOVIĆ and S.GILEZAN.: Semigroup with completely simple kernel, Zbornik radova PMF Novi Sad, 12(1982),429-445.

|16| W.BURGESS and R.RAPHAEL.: On Conards partial order on semiprime rings and on semigroups, Semigroups Forum 16 (1978),133-140.

|17| G.T.CLARKE.: Semigroups varieties of inflations of a union of groups, Semigroups Forum 23, N^{o}4 (1981), 311-319.

|18| A.H.CLIFFORD.: Bands of semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954), 499-504.

|19| A.H.CLIFFORD.: Extension of semigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 165-173.

|20| A.H.CLIFFORD and G.B.PRESTON.: "The Algebraic Theory of Semigroups, Vol.I., Amer.Math.Soc. 1964.

|21| R.CROISOT.: Demi-groups inversifs et demi-groups réunions de demi-groupes simples, Ann. Sci.Ecol Norm.Sup.(3), 70 (1953), 361-349.

|22| G.ČUPONA.: Semigroups in which some left ideal is a group, Ged.Zbornik radova PMF Skopje, T 14(1963), 15-17.

|23| M.P.DRAZIN.: A Partial Order in Completely Regular Semigroups, Journal of Algebra 98,(1986) 362-374.

|24| C.C.EDWARDS.: The greates idempotent-separating congruence on an L-unipotent semigroup, Semigroup Forum Vol.14 (1977), 127-135.

|25| C.C.EDWARDS.: The minimum group congruence on an L-unipotent semigroup, Semigroups Forum Vol. 18(1979),9-14.

|26| P.M.EDWARDS.: Eventually regular semigroups,Bull. Austral.Math.Soc.28 (1983),23-38.

|27| J.L.GALBIATI e M.L.VERONESI.: Sui semigruppi che sono und band di t-semigrouppi, Instit.Lombardo.Rend.Sc.A-114, (1980), 217-234.

|28| J.L.GALBIATI e M.L.VERONESI.: Sui semigruppi quasi regolari, Instituto Lombardo,Rend. Sc A-116 (1982).

|29| T.E.HALL.: On regular semigroups, J.Algebra, 24 (1973) 1-24.

|30| R.E.HARTWIG.: How to partially order regular elements, Math. Japenica 25, No.1 (1980),1-13.

|31| J.M.HOWIE.: "An introduction to semigroup theory" Academic Press, London 1976.

|32| J.M.HOWIE.: The maximal idempotent-separating congruence on an inverse semigroup, Proc.Edinburgh Math.Soc.,(2) 14 (1964), 71-49.

|33| N.KIMURA, T.TAMURA and R.MERKEL.: Semigroups in which all subsemigroups are left ideals, Semigroup Forum4 (1972), 262-266.

|34| D.N.KRGOVIĆ.: Idempotent separating congruences on regular semigroups, Prosc. of the conference "Algebra and Logic",Beograd (1982) 85-91.

|35| S.MILIĆ and V.PAVLOVIĆ.: Semigroups in which some ideal is a completely simple semigroup, Publ. Inst. Math. 30(44)(1982), 123-130.

|36| H.MITCH.: A natural partial order for semigroups, Proc.of the Amer. Math.Soc.,Vol 97 (3) (1986), 384-388.

|37| K.S.S.NAMBOORIPAD.: The natural partial order on a regular semigroup, Prosc.Edinburgh Math, Soc.23 (1980), 244-260.

|38| K.S.S.HAMBOORIPAD.: The strustucture of regular semigroups I,II, Publ.Amer.Math.Soc.,Vol 22, N°.224 (1979),1-115.

|39| M.PETRICH.: A simple construction of semigroups all of whose subsemigroups are left ideals, Semigroup Forum 4(1972),262-266.

|40| M.PETRICH.: "Introduction to semigroups", Merill Publ. Comp.Ohio 1973.

|41| M.PETRICH.: "Inverse semigroups". New York 1984.

|42| M.PETRICH.: On extension of semigroups determined by partial homomorphisms, Nederl.Acad. Wetensch. Indag. Math. 28(1966),49-51.

|43| M.PETRICH.: Semigroups certain of whose subsemigroups have identities,Czech. Math.J.16 (71) (1966) 186-198.

|44| M.PETRICH.: Structure des demi-grupes et anneaux distributis, C.R.Acad. Sci.Paris,Ser.A 268 (1969), 849-852.

|45| M.PETRICH.: Sur certain classes de demi-grupes III, Acad.Roy.Belg.Cl.Sci.53 (1967),60-73.

|46| P.PROTIĆ and S.BOGDANOVIĆ.: On a class of semigroups, Algebraic conference, Novi Sad (1981), 113-119.

|47| P.PROTIĆ and S.BOGDANOVIĆ.: Some congruences on a strongly π-inverse r-semigroup, Zbornik radova PMF Novi Sad, Vol 15, N^{o}2 (1985) 79-89.

|48| P.PROTIĆ and S.Bogdanović.: Some idempotent-separating congruences on a π-regular semigroup, Note di Matematica Vol.VI(1986)253-272.

|49| M.S.PUTCHA.: Semilattice decompositions demigroups, Semigroup Forum 6, N^{o}1 (1973) 12-40.

|50| M.S.PUTCHA and J.WIESSGLASS.: Semigroups satisfyng variable identities, Semigroup Forum, 3(1971) 64-67.

|51| D.REES.: On semigroups, Proc.Combridge Phil. Soc.36 (1940), 387-400.

|52| E.G.SHUTOV.: Semigroups with ideal subsemigroups. Math. Zb. 57 (1962), 179-186 (Russian).

|53| B.STAMENKOVIĆ and S.BOGDANOVIĆ.: Semigroups in which S^{n+1} is a semilattice of right groups (to appear,Instituto Lombardo).

|54| B.STAMENKOVIĆ and P.PROTIĆ.: On the compatibility of the natural partial order on an r-cancelative r-semigroup, Zbornik radova Fil.Fak (Niš), Serija Mat.1(11) (1987) 69-87.

|55| B.STAMENKOVIĆ and P.PROTIĆ.: The natural partial order on an r-cantelative semigroup. Mat.ves.39 (1987), 455-462.

|56| Sh.SHIMAKAVA.: Congruences on L-unipotent semigroups Proc.of the 6th Symposium on Semigroups Kyoto (1982), 39-51.

|57| T.TAMURA.: Semigroups satisfying xy=f(x,y), Pacific J.of Math. 31(1969) 513-521.

|58| V.V.WAGNER.:Generalized groups, Doklady Akad.Nauk SSSR 84(1952), 1119-1122 (Russian).