UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KOČINAC LJUBIŠA

NEKE OSOBINE KARDINALNIH FUNKCIJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd, 1983.

PREDGOVOR

Veliki značaj koji u teoriji skupova, kao osnovi opšte topologije, imaju kardinalni brojevi, morao se prirodno projektovati i na ispitivanja u vezi sa topološkim prostorima: svakom prostoru X (određene klase) pridružiti kardinalni broj $\varphi(X)$ koji će davati neku informaciju u vezi sa X(na primer, "koliko" je skupova potrebno za potpuno opisivanje topologije prostora, kakve su moći neki interesantniji podskupovi prostora,i tako dalje). Otuda je potpuno razumljivo što su neke kardinalne funkcije posmatrane još od vremena definisanja pojma prostora.

Iako su ta rana istraživanja dala niz interesantnih rezultata, ipak to nije poprimilo formu jedne sistematski izučavane teorije, jer su rezultati bili "rasuti" i raznorodni. ek šezdesetih godina teorija kardinalnih funkcija ili, kako esto govorimo, kardinalnih invarijanti dobija oblik organizovane teorije, a rešenja dobijaju neki vrlo stari problemi, gde u prvom redu treba istaći rezultat A.V.Arhangeljkog iz 1969.god. o moći bikompakta s prvom aksiomom prebrojivosti čime je rešen problem P.S.Aleksandrova star skoro pola veka. Koliko je istraživanje u ovoj oblasti bilo intenzivno pokazuje i to što se već 1971.god. pojavljuje i knjiga I.Juhásza gde su rezultati tih istraživanja sistematski izloženi; ta će knjiga 1980. god. doživeti i drugo izdanje no ovaj put sa sasvim novim sadržajem.

Ovako burnom razvoju teorije kardinalnih funkcija u velikoj meri doprinose novi rezultati i metodi u matematičkoj logici: rešenje kontinuum problema, Suslinovog problema, Cohenov metod forsinga. U topologiji se počinju intenzivno izučavati neki konkretni modeli za sistem aksioma teorije skupova: Gödelov konstruktivni univerzum V=L, aksioma Martina, princip Jensena, itd. Ova proučavanja, intenzivirana naročito početkom sedamdesetih godina, pokazala su da su mnoge,po formi jednostavne,hipoteze konzistentne sa sistemom ZFC ili, pak, nezavisne od njega [52], [81], [116], [130], [133].

Ovaj rad odnosi se na izučavanje nekih pitanja u vezi sa gore opisanom problematikom. Struktura rada je sledeća:

Prva glava je uvodnog karaktera i u njoj se navode, bez dokaza, poznati rezultati iz teorije skupova i topologije, specijalno rezultati o kardinalnim invarijantama, koji se koriste u celom radu. Pojedini poznati rezultati koji se tiču određenih posebnih pitanja daju se u A-delovima odgovarajućih odeljaka, odnosno glava, i takođe se ne dokazuju.

U drugoj glavi posmatraju se kardinalne funkcije na nekim specijalnim klasama prostora. Posmatraju se pseudoradijalni prostori i na njima se definiše radijalna tesnota i radijalni poredak i daje veza između njih. Takođe je dokazano da su pseudoradijalni prostori prebrojivog pseudokaraktera sekvencijalni. Dalje, uvode se nove klase slabo savršenih i $\mathcal{N}$-prostora i dokazuje samosvojnost tih klasa prostora. Izučavaju se osobine tih prostora, pri čemu su osnovni rezultati: $\mathcal{N}$-prostor je prebrojivog raspona ako i samo ako je nasledno Lindelöfov; ako je X Hausdorffov i prostor expX je slabo savršen, tada X ima slabu G_δ-dijagonalu.

U trećoj glavi posmatrano je ponašanje kardinalnih funkcija pri prelasku na proširenja prostora, specijalno pri prelasku na bikompaktna proširenja. Pokazano je da se svaki potpuno regularan prostor ili T_0-prostor ili nuldimenzioni prostor težine $\leq$expk može potopiti, kao zatvoren podskup, u prostor istog tipa sa Kurepa-Suslinovim svojstvom. Posmatrano je i ponašanje osobine "imati bikompaktifikaciju gustine $\leq$k, odnosno s narastom gustine $\leq$k" pri preslikavanjima i dat je jedan uslov pri kome prostor ima bikompaktifikaciju s narastom prebrojive tesnote. Na kraju definiše se i stepen pseudokompaktnosti i ispituje njegova veza sa nekim kardinalnim funkcijama.

Četvrta glava posvećena je jednom novom prilazu ispitivanja kardinalnih funkcija. Polazi se od, prirodnim načinom, zadatih osobina kardinalne funkcije i ispituje njena veza sa poznatim kardinalnim funkcijama. U tom smislu daje se niz ocena, a neke funkcije su i potpuno okarakterisane. Na primer, pokazano je da je kardinalna funkcija φ definisana na klasi diadskih bikompakta jednaka težini w ako i samo ako zadovoljava data četiri nezavisna uslova.

U popisu literature, koji i pored opširnosti predstavlja jedva delić radova koji se odnose na teoriju kardinalnih funkcija, nalaze se i neki radovi na koje nema direktnog pozivanja, ali sam smatrao da bi njihovim izostavljanjem spisak radova bio dosta osiromašen.

Autor se najsrdačnije zahvaljuje A.V.Arhangeljskom, profesoru Moskovskog univerziteta na velikoj pomoći u izboru problema razmatranih u radu, i profesoru Đ.Kurepi na pomoći oko konačnog oblikovanja rada.

S A D R Ž A J

1. UVOD

1.1. Teorija skupova 1

1.2. Definicije kardinalnih funkcija 3

1.3. Topološki prostori 11

2. NEKE KLASE PROSTORA I KARDINALNE FUNKCIJE

2.1. Radijalni i pseudoradijalni prostori.. 16

2.2. Savršeni i slabo savršeni prostori ... 23

2.3. $\mathcal{N}$-prostori 31

2.4. Lokalna konačnost i kardinalne funkcije 42

3. PROŠIRENJA PROSTORA I KARDINALNE FUNKCIJE

3.1. Pregled poznatih rezultata 47

3.2. Kurepa-Suslinov broj,gustina,tesnota.. 54

4. KARAKTERIZACIJA KARDINALNIH FUNKCIJA

4.1. Osobine kardinalnih funkcija 62

4.2. Karakterizacija kardinalnih funkcija.. 65

LITERATURA 78

SPISAK POJMOVA 88

1. UVOD

1.1. TEORIJA SKUPOVA

Terminologija i oznake iz teorije skupova koriste se iz knjiga [75], [76], [79], [93].

1.1.1. Pod ordinalom se podrazumeva skup svih njegovih prethodnika; ordinale ćemo označavati sa $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sa indeksima. Kardinali se identifikuju sa odgovarajućim početnim ordinalima ω_α iste moći, a označavamo ih sa k, m, n,...; za prebrojiv beskonačni kardinal $\aleph_0$ upotrebljavaćemo i oznaku ω. Umesto 2^k pisaćemo expk ; kada ne postoji opasnost od nejasnoće, exp $\aleph_0$ označavačemo i sa c (kako je i uobičajeno). Sa k^+ označava se kardinalni sledbenik kardinala k, a sa cf(k) kofinalnost od k, to jest, minimalna moć podskupa $A \subset k$, takvog da za svaki $m \in k$ postoji $n \in A$ tako da je $m \leq n$; kardinal k je regularan ako je $cf(k)=k$. Pod logaritmom logk kardinala k podrazumeva se najmanji kardinal m takav da je $\exp m \geq k$. ZFC je oznaka za sistem aksioma (teorije skupova) Zermelo-Frenkela zajedno sa aksiomom izbora, a rezultati koji važe u okviru ove teorije su "naivni". CH je kontinuum hipoteza $\exp \aleph_0 = \aleph_1$.

1.1.2. MA označava aksiomu Martina (uvedenu u D.A.Martin, R.M.Solovay, Internal Cohen extensioins, Ann. Math. Logic 2:2 (1970),143-178;specijalno str.149), čiji topološki analogon, koji nas interesuje,glasi [75;str.101], [76;str.231], [113;str. 131], [93;str.52]:

Bikompakt s Kurepa-Suslinovim svojstvom ne može se prikazati kao unija manje od c nigde gustih skupova.

(Da je MA+$\neg$CH konzistentno sa ZFC pokazano je u pomenutom radu Martina i Soloveja i u: R.M.Solovay,S.Tennenbaum,Iterated Cohen extensions and Souslin's problem,Ann. Math.94:2 (1971),201-245 ; videti o tome [76;teor.51].)

1.1.3. V=L je Gedelova aksioma konstruktivnosti (Gedelov konstruktivni univerzum): svaki skup je konstruktivan.

1.1.4. Važna posledica Gedelove aksiome konstruktivnosti je princip Jensena $\diamondsuit$ (v. R.B.Jensen, The fine structure of the constructible hierarchy,Ann.Math.Logic 4:2(1972),229-308, specijalno str.293) [116;str.32], [76;str.226], [93;str.80].

$\diamondsuit \equiv$ Postoji familija $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ podskupova od ω_1, tako da je $A_\alpha \subset \alpha$ i ako je $A \subset \omega_1$,tada je skup $\{\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ stacionaran u ω_1 .

Nekoliko reči o pojmovima koji se sreću u formulaciji $\diamondsuit$.

Skup $C \subset \omega_1$ naziva se zatvorenim,ako za svaki niz $\alpha_0, \dots, \alpha_\xi, \dots$ $(\xi < \gamma)$ dužine $\gamma < \omega_1$ je, $\lim\limits_{\xi<\gamma} \alpha_\xi \in C$; $C \subset \omega_1$ je neograničen,ako za svaki $\alpha < \omega_1$ postoji $\beta > \alpha$ tako da $\beta \in C$; skup $S \subset \omega_1$ je stacionaran u ω_1, ako seče svaki svaki zatvoren neograničen $C \subset \omega_1$.

1.1.5. A.Ostaševski u [109;str.506] uvodi princip $\clubsuit$

koji sledi iz $\Diamond$. Neka je $\{\lambda_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ skup svih graničnih ordinala u ω_1 tako da je $\lambda_\alpha < \lambda_\beta$ kad god je $\alpha < \beta$.

$\clubsuit \equiv$ Postoji familija $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ podskupova od ω_1 tako da je A_α kofinalan podskup od λ_α i ako je $A \subset \omega_1$ neprebrojiv, tada postoji $\alpha < \omega_1$ tako da je $A_\alpha \subset A$.

1.2. DEFINICIJE KARDINALNIH FUNKCIJA

Pod kardinalnom funkcijom podrazumeva se proizvoljna funkcija φ definisana na nekoj (određenoj) klasi topoloških prostora s vrednostima u skupu beskonačnih kardinala (sem ako nije naglašeno suprotno), pri čemu na homeomorfnim prostorima ima istu vrednost.

Neka je X topološki prostor (u celom radu za sve prostore pretpostavlja se da su T_1), $\mathcal{T}$ familija svih njegovih otvorenih skupova. Definišimo neke kardinalne funkcije pridržavajući se oznaka i terminologije iz [18], [79], [82]. Napomenimo da, u skladu s prethodnim dogovorom, treba smatrati da je kardinal na desnoj strani svake jednakosti u definicijama pomnožen sa $\aleph_0$.

1.2.1. Uvode se sledeće kardinalne funkcije:

$o(X) = |\mathcal{T}|$;

$\mathcal{K}(X) =$ moć skupa svih bikompaktnih skupova iz X;

$\rho(X) =$ moć skupa svih kanonski otvorenih podskupova od X($U \subset X$ je kanonski otvoren ako je $U = \operatorname{int}(\overline{U})$).

1.2.2. Težina prostora X definiše se sa

$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ je baza u X$\}$.

1.2.3. Familija $\mathcal{M}$ podskupova od X naziva se mreža u X, ako za svaki otvoren skup $U \subset X$ i svaku tačku $x \in U$ postoji $M \in \mathcal{M}$ tako da je $x \in M \subset U$. Mrežna težina nw(X) prostora X je kardinal

$$nw(X) = \min\{|\mathcal{M}| : \mathcal{M} \text{ je mreža u } X\}.$$

1.2.4. Familija $\Pi \subset \mathcal{T}\setminus\emptyset$ naziva se π-baza za X, ako za svaki otvoren skup $U \subset X$ postoji $P \in \Pi$ tako da je $P \subset U$. Stavimo

$$\pi w(X) = \min\{|\Pi| : \Pi \text{ je } \pi\text{-baza za } X\};$$

ovaj kardinal se naziva π-težina prostora X.

1.2.5. Familija $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ naziva se pseudobaza u X, ako je za svaki $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$. Pseudotežina pw(X) prostora X definiše se kao minimalna moć pseudobaza u X.

1.2.6. Neka $\mathcal{B}_x$ označava proizvoljnu lokalnu bazu tačke $x \in X$. Karakter prostora X u tački x, $\chi(x,X)$, definiše se sa

$$\chi(x,X) = \min\{|\mathcal{B}_x| : \mathcal{B}_x \text{ je lokalna baza u } x \in X\},$$

a karakter $\chi(X)$ prostora X sa

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x,X) : x \in X\}.$$

Za prostore prebrojivog karaktera kaže se da zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti.

Napomenimo da se za dati skup $A \subset X$ definiše i $\chi(A,X)$ kao minimalna moć lokalnih baza skupa A u X.

1.2.7. Familija $\Pi_x \subset \mathcal{T}\setminus\{\emptyset\}$ naziva se (lokalna) π-baza prostora X u tački x, ako za svaku okolinu Vx tačke x postoji $U \in \Pi_x$, tako da je $U \subset Vx$. Kardinal

$$\pi\chi(x,X) = \min\{|\Pi_x| : \Pi_x \text{ je } \pi\text{-baza u } x \in X\}$$

se naziva π-karakter prostora X u tački x, a

$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x,X) : x \in X\}$$

π-karakter prostora X.

1.2.8. Lokalna pseudobaza prostora X u tački x je familija $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{T}$, takva da je $\{x\} = \bigcap\{V:\ V \in \mathcal{V}_x\}$. Pseudokarakter prostora X u tački x je

$$\psi(x,X) = \min\{\ |\mathcal{V}_x| : \mathcal{V}_x \text{ je pseudobaza u } x \in X\},$$

dok se kardinal

$$\psi(X) = \sup\{\psi(x,X)\ :\ x \in X\}$$

naziva pseudokarakter prostora X.

Slično se definiše i pseudokarakter skupa $A \subset X$. Specijalno,

$$\Delta(X) = \psi(\Delta, X \times X)$$

je pseudokarakter dijagonale Δ u prostoru $X \times X$.

1.2.9. Familija $\delta = \{\overline{U}\}$ kanonski zatvorenih podskupova prostora X naziva se δ-sistem u $x \in X$, ako je

(i) $\bigcap\{\overline{U}\ :\ \overline{U} \in \delta\} = \{x\}$;

(ii) familija $\{\operatorname{int}(\overline{U}) :\ \overline{U} \in \delta\}$ je centrirana ;

(iii) za svaku okolinu V_x tačke x postoji $\overline{U} \in \delta$ sa $\overline{U} \subset V_x$.

δ-karakter $\delta\chi(x,X)$ prostora X u tački x definiše se kao

$$\delta\chi(x,X) = \min\{\,|\delta| : \delta \text{ je } \delta\text{-sistem u } x \in X\}\ [43],$$

a masivnost $m(X)$ prostora X sa

$$m(X) = \sup\{\ \delta\chi(x,X) : x \in X\}.$$

1.2.10. Gustina $d(X)$ prostora X je minimum moći gustih podskupova od X; separabilan je prostor prebrojive gustine.

1.2.11. Familija $\mathcal{C}$ nepraznih, otvorenih po parovima disjunktnih podskupova od X naziva se celularna. Kurepa-Suslinov broj $c(X)$ prostora X je definisan sa

$$c(X) = \sup\{\,|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ je celularna u } X\}.$$

Za prostore za koje je $c(X) = \aleph_0$ kažemo da zadovoljavaju Kurepa-Suslinovo svojstvo ili da su ccc prostori.

1.2.12. Pod Lindelefovim brojem $l(X)$ prostora X podrazumeva se najmanji kardinal k, takav da se svaki otvoren pokrivač prostora X može svesti na podpokrivač moći $\leq k$.

Otvoren pokrivač $\mathcal{P}$ prostora X naziva se slab, ako je unija njegovih članova gust podskup od X.

Slab Lindelefov broj $wl(X)$ prostora X je najmanji kardinal k, takav da se svaki otvoren pokrivač za X može svesti na slab podpokrivač kardinalnosti $\leq k$.

Kvazi-Lindelefov broj $ql(X)$ prostora X je najmanji kardinal k, takav da za proizvoljnu familiju $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ i proizvoljan zatvoren $F \subset X$ sadržan u $\bigcup \mathcal{U}$, postoji $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tako da je $|\mathcal{U}'| \leq k$ i $\overline{\bigcup \mathcal{U}'} \supset F$ [21].

1.2.13. Tesnota prostora X u tački x ovako se definiše:

$$t(x,X) = \min\{k : A \subset X \text{ i } x \in \overline{A} \text{ implicira da postoji } B \subset A \text{ tako da je } |B| \leq k \text{ i } x \in \overline{B}\};$$

$t(X) = \sup\{t(x,X) : x \in X\}$ je tesnota prostora X.

1.2.14. Za datu kardinalnu funkciju φ posmatra se i njena nasledna varijanta $h\varphi$, definisana sa

$$h\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \subset X\}.$$

Od posebnog su značaja nasledni Kurepa-Suslinov broj, nasledna gustina i nasledni Lindelefov broj. Ove kardinalne funkcije imaju i direktno opisivanje koje ćemo sada dati.

1.2.15. Funkcija hc naziva se raspon, a može se definisati s

spread $s(X) = \sup\{|A| : A \text{ je diskretan potprostor od } X\}$.

Napomenimo odmah da se posmatra i funkcija

$$p(X) = \sup\{|F| : F \text{ je zatvoren diskretan potprostor u } X\}$$

Radi opisa funkcija hd i hl potrebno je najpre definisati nekoliko pojmova.

Skup $Y \subset X$ podskup linearno uređenog prostora $(X, \leq)$ naziva se levi ili početni (odnosno, desni ili završni) komad skupa X, ako iz $y \in Y$ i $x < y$ (odnosno, $x > y$), sledi $x \in Y$. Prostor X se naziva levim (odnosno, desnim), ako na njemu postoji dobro uređenje $\leq$, tako da je svaki levi (odnosno, desni) komad u X zatvoren.

Pokazuje se da je

$$hd(X) = \sup\{|A| : A \subset X \text{ je levi potprostor}\};$$

$$hl(X) = \sup\{|A| : A \subset X \text{ je desni potprostor}\}.$$

1.2.16. NAPOMENA. A.V.Arhangeljski [14], [15], [16], [18] uopštava pojmove levog i desnog prostora, i definiše rastegnute, α-rastegnute i α-leve prostore kako sledi.

Prostor X se naziva α-levim, ako na njemu postoji dobro uređenje $\leq$ tako da je za svako $x \in X$, skup $\{a \in X : a \leq x\}$ zatvoren u X.

Ako na X postoji linearno uređenje $\leq$, tako da je svaki početni komad u X (odnosno, svaki skup $\{a \in X : a \leq x\}$, $x \in X$) zatvoren, tada se X naziva rastegnutim (odnosno, α-rastegnutim).

1.2.17. Kardinal k se naziva kalibar (odnosno, predkalibar) prostora X, ako svaka familija moći k nepraznih otvorenih podskupova od X, sadrži podfamiliju iste moći koja je sa nepraznim presekom (odnosno, centrirana).

Najmanji kardinal k takav da je k^+ kalibar za X, naziva se Šaninov broj $sh(X)$ prostora X; uslov Šanina za X je $sh(X) = \aleph_0$.

1.2.18. Navedimo nekoliko napomena istorijskog karaktera u vezi sa definisanim kardinalnim funkcijama.

Neke od pojmova i funkcija koje smo ovde posmatrali sreće-još od samih početaka opšte topologije. Tako je još Kantor u nizu radova od 1879.-1884.god. (u okviru Euklidskih prostora) uveo i izučavao neke pojmove. On je uveo pojam gustog skupa, a Freše 1906.god. pojam serarabilnog prostora, te se može smatrati da od njih dvojice potiče pojam gustine.

Kantor dokazuje,takođe, da Euklidski prostori zadovoljavaju Kurepa-Suslinovo svojstvo ; 1920. Suslin posmatra ovu osobinu na realnoj pravoj, a pojam funkcije c u punoj opštosti uvodi Đ.Kurepa [94;str.131].

Baza i lokalna baza, a time težina i karakter (ali bez definisanja tih pojmova) potiču od poznate "Teorije skupova" Hausdorfa (1914.), gde su posmatrani prostori prebrojive težine i karaktera. Značajna uopštenja ovih pojmova, pojmove mrežne težine i π-težine uveli su Arhangeljski (1959.) i Ponomarjov [111;str.110], redom.

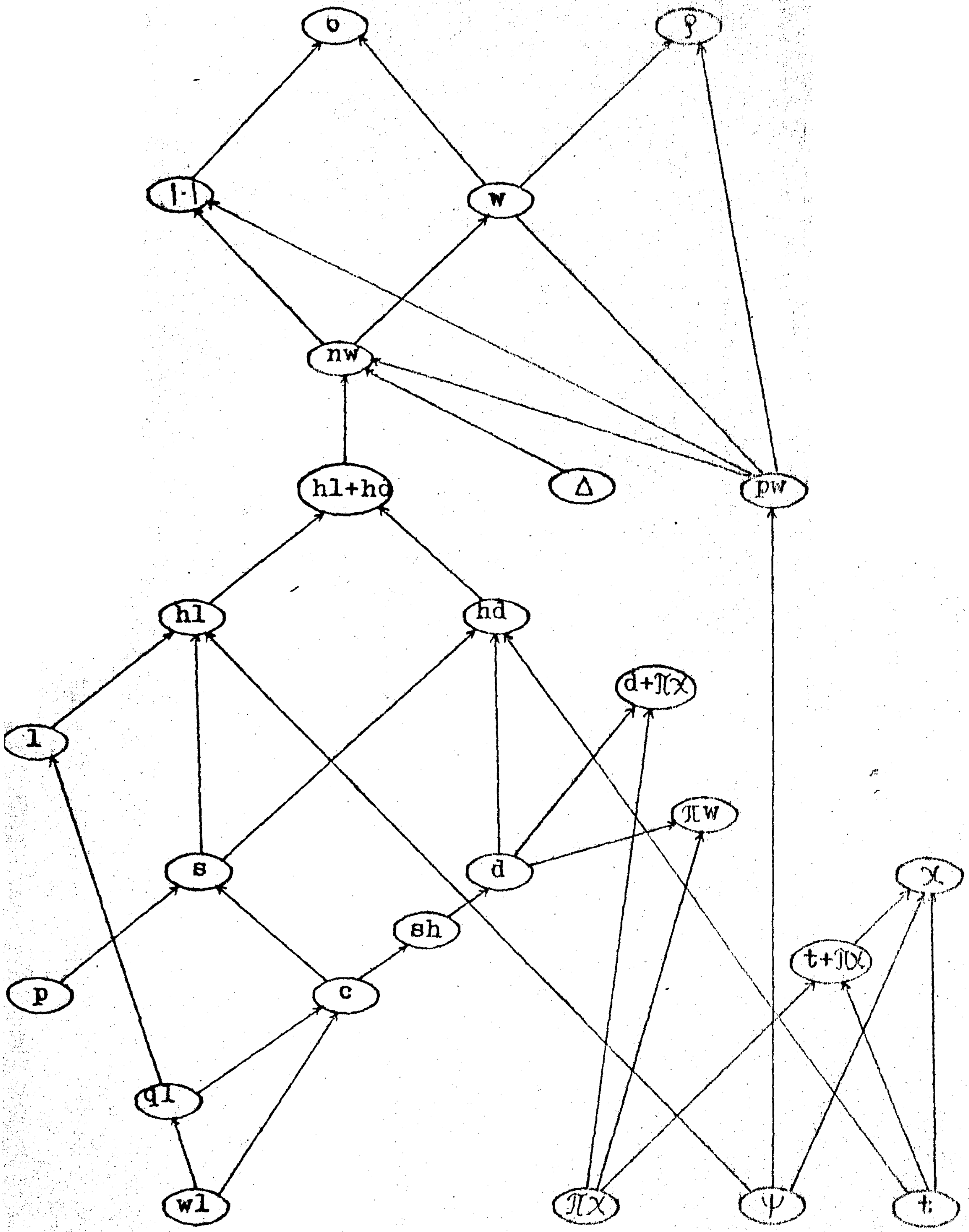
Pseudokarakter je definisao Aleksandrov 1924.god. Uopštavajući jedan rezultat Lindelefa iz 1903.god.,da je $l(R^n)= \aleph_0$, Aleksandrov i Urison u [2] definišu Lindelefov prostor, što će dovesti i do pojma Lindelefovog broja.

Pojmove kalibra i predkalibra uvodi 1946.god. Šanin, a prebrojiv slučaj za funkcije s, hd, hl posmatrao je još 1921. Sierpinski;na značaj levih i desnih prostora ukazali su Juhas i Hajnal.

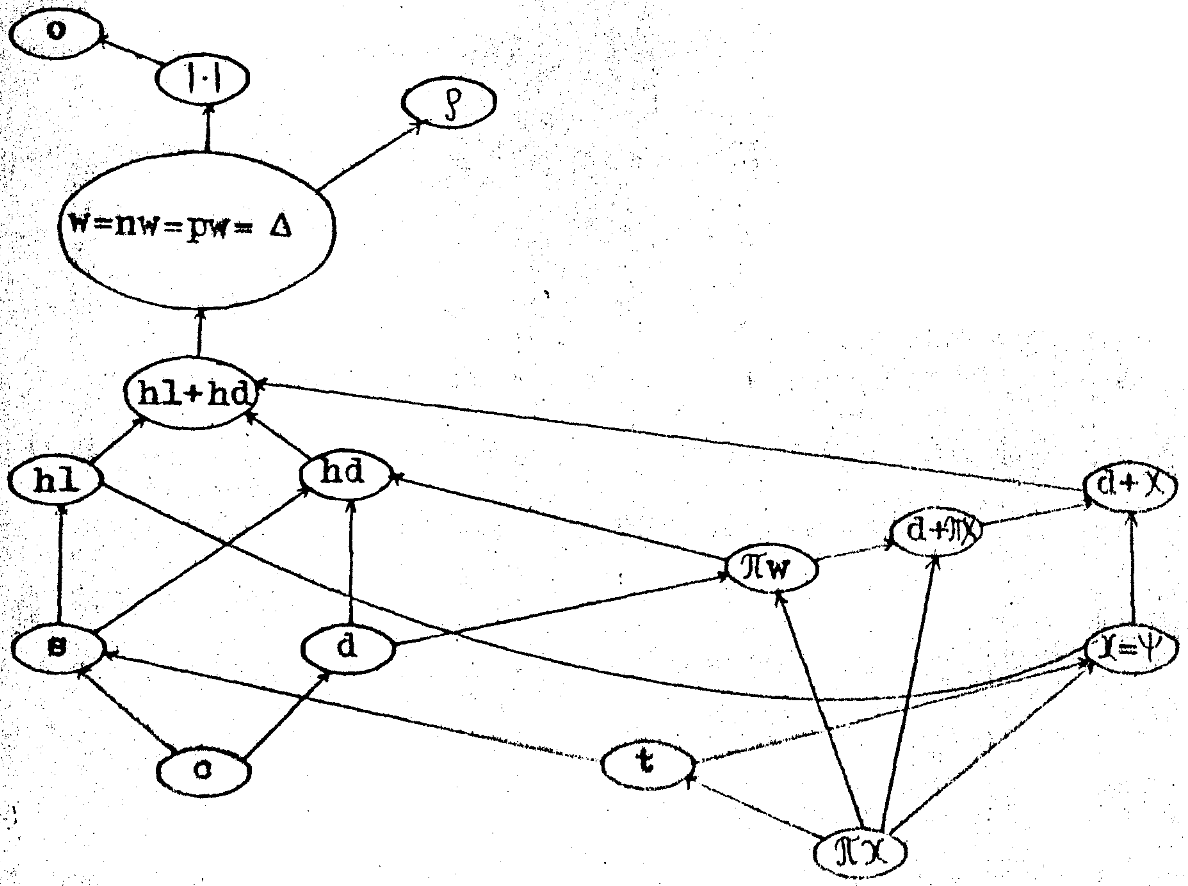
Tesnotu je uveo Arhangeljski [27],[8](mada su prostore prebrojive tesnote, ali bez isticanja samog pojma, posmatrali R. Mur i Mruvka 1964.god.).

Veze među kardinalnim funkcijama date su sledećim shemama:

1) Hausdorfovi prostori



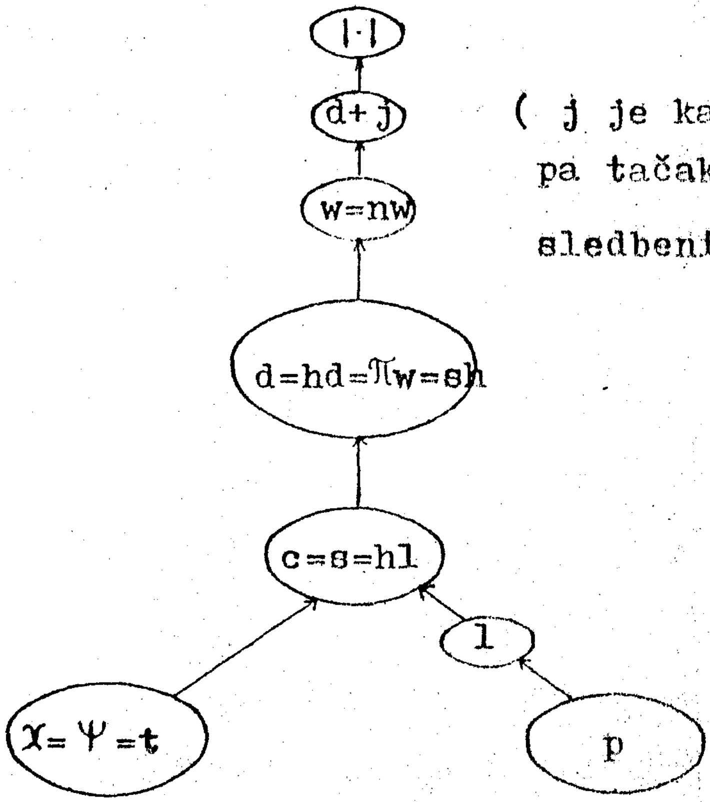
II) Bikompakti



III) Diadski bikompakti

$d \leq \psi = \chi = w = nw = pw = \pi w = \Delta = s = hl = hd = t \leq |\cdot|$; $c = l = p = \aleph_0$.

IV) Linearno uređeni prostori



(j je kardinalnost sku-
pa tačaka s neposrednim
sledbenikom)

1.3. TOPOLOŠKI PROSTORI

Topološka terminologija je standardna i može se naći u knjigama [1], [2a], [28], [51], [57], [140]. Radi toga nećemo definicije poznatih pojmova (neke ćemo definisati kad se za to ukaže potreba), već ćemo pažnju obratiti na one rezultate koji su u najtešnjoj vezi sa kardinalnim invarijantama i koji će biti korišćeni u daljem radu. Dokaze nećemo davati i toga se držimo u celom radu.

Sa D i $D(k)$ označavaćemo diskretan prostor od dve tačke i diskretan prostor kardinalnosti k, redom; prebrojiv diskretan prostor označavaćemo sa N. Kantorov, Aleksandrovski i Tihonovski kub težine k označava se, redom, sa D^k, F^k, I^k.

Dobro su poznati sledeći rezultati Aleksandrova i Tihonova (v., na primer, [2a; teoreme 23, 24 i 14] ili [51; teoreme 2.3.26, 6.2.16 i 2.3.33]).

1.3.1. TEOREMA. Aleksandrovski kub F^k, Kantorov kub D^k i tihonovski kub I^k, redom, univerzalni su prostori za sve T_0, nuldimenzione i potpuno regularne prostore težine k, redom.

Podsetimo da je diadski bikompakt prostor koji je neprekidna slika Kantorovog kuba D^k za neko k. Ali, važi

1.3.2. TEOREMA. (Šanin) Diadski bikompakt težine k je neprekidna slika prostora D^k. (v. [51; str. 292], [42; str. 235])

Često je važno znati i obrnut problem: kada je dati bikompakt X moguće preslikati na D^k ili na I^k. Prve značajnije rezultate u tom pravcu dobili su B.A. Jefimov i S.V. Kisljakov, a tu se bitno koristi jezik teorije kardinalnih funkcija.

1.3.3. TEOREMA. (Kisljakov) Ako je X ekstremalno nepovezan bikompakt, tada se za svaki $k < w(X)$, X neprekidno preslikava na D^{k^+}; ako je još i $c(X) = \aleph_0$, tada se X može neprekidno preslikati na $D^{w(X)}$. (v. [18;teorema 3.3.2], [113;str.130].)

(Setimo se da je prostor ekstremalno nepovezan, ako je u njemu zatvorenje svakog otvorenog skupa otvoren skup.)

I sledeća dva rezultata su sličnog tipa.

1.3.4.TEOREMA.(Jefimov) Ako je X ekstremalno nepovezan bikompakt i $\mathcal{C}$ (beskonačna) celularna familija podskupova od X, tada se X može neprekidno preslikati na $D^{\exp|\mathcal{C}|}$.([46;str.250], [49])

1.3.5.TEOREMA. Ako je X (beskonačan) ekstremalno nepovezan bikompakt homogen u odnosu na težinu (to znači da je $w(U)=w(X)$ za svaki otvoren $U \subset X$), tada se on može neprekidno preslikati na $D^{w(X)}$, ako je ispunjen bilo koji od uslova: (a) $c(X)$ je dostiživ (što znači da postoji celularna familija moći $c(X)$); (b) $w(X)$ je regularan kardinal; (c) $c(X) \neq cfw(X)$ [31;teoreme 4 i 5].

Rezultate o mogućnosti preslikavanja prostora na Kantorov kub zaključimo sa sledeće dve teoreme, od kojih je druga u nekom smislu najprirodnija.

1.3.6.TEOREMA. Proizvoljan nuldimenzioni bikompakt masivnosti $m(X) \geq k$ može se neprekidno preslikati na $D^{\log k}$ [45;teor.1bis]

1.3.7. TEOREMA.(Bandlov) Ako je X ekstremalno nepovezan bikompakt i $\chi(x,X) \geq k$ za svaki $x \in X$, tada se X može neprekidno preslikati na D^k [29;teorema 6].

Navedimo sada tri teoreme o mogućnosti preslikavanja prostora na Tihonovske kubove; teorema Šapirovskog predstavlja i potpuno rešenje tog problema.

1.3.8. TEOREMA.([45;teorema 1]) Proizvoljan bikompakt X masivnosti $m(X) \geqslant k$ može se neprekidno preslikati na $I^{\log k}$.

1.3.9. TEOREMA.([45;teorema 3]; v. i [46]) Ako se bikompakt X može neprekidno preslikati na I^k, tada je $hm(X) \geqslant k$; obrnuto, ako je $hm(X) > k$, tada se X može preslikati na $I^{\log(k^+)}$.

1.3.10. TEOREMA.(Šapirovski) Bikompakt X može se neprekidno preslikati na I^k ako i samo ako postoji zatvoren skup $F \subset X$ takav da je $\pi\chi(x,X) \geqslant k$ za svaki $x \in F$.(v. [126;teorema 1]; [125]; [82;str.63])

U preostalom delu ovog odeljka istaknimo nekoliko teorema koje se odnose na veze među pojedinim kardinalnim funkcijama, ocenu moći prostora, a koje će nam biti nužne za dalji rad.

1.3.11.TEOREMA.(Hewitt-Marczewski-Pondiczery) Ako je X proizvod familije $\{X_s;\ s \in S\}$ prostora gustine $\leqslant k$ i $|S| \leqslant \exp k$, tada je $d(X) \leqslant k$; ako je $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ i $d(X_s) \leqslant k$ za svaki $s \in S$, tada je $c(X) \leqslant k$. (v. [51;teorema 2.3.15 i posl.2.3.17])

1.3.12. TEOREMA.(Đ.Kurepa, [97]) Ako je $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ i važi $c(X_s) \leqslant k$ za svaki $s \in S$, tada je $c(X) \leqslant \exp k$.

1.3.13. TEOREMA.(Malihin) Ako je $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ proizvod familije bikompakta, tada je $t(X) = |S| \sup\{t(X_s) : s \in S\}$ [101;teor.4.]. (v.takođe i [82;str.112])

1.3.14. TEOREMA.(Rančin) Ako je bikompakt(ili čak k-prostor) X unija familije $\{X_s : s \in S\}$ zatvorenih podskupova i $|S| \leqslant k$, $t(X_s) \leqslant$ $\leqslant k$ za svaki $s \in S$, tada je $t(X) \leqslant k$ [114;teorema 1].(v. i [18])

1.3.15. TEOREMA.(Šapirovski) Ako je X bikompakt prebrojive tesnote, tada

(a) X ima tačkovno-prebrojivu π-bazu, to jest, π-bazu takvu da je svaka tačka prostora sadržana u najviše prebrojivo mnogo članova te π-baze; ako je još $\aleph_1$ kalibar za X, tada X ima prebrojivu π-bazu ;

(b) (MA+$\rceil$CH) Ako je $c(X)=\aleph_0$, tada X ima prebrojivu π-bazu. (v. posledice 13, 13', 14 u [128] ili §3 u [127])

1.3.16. TEOREMA. Za proizvoljan Hausdorfov prostor X važi:

(i) (Hajnal-Juhász) $|X| \leq \exp\exp(s(X))$ [62;posl.1] i [63;T.2]; (povodom ove teoreme videti i [41], [61], [72])

(ii) (Juhász) $o(X) \leq \exp\exp(s(X))$ [82;str.24].

Sledeće dve teoreme pokazuju da se prva gornja ocena može u nekim slučajevima poboljšati.

1.3.17. TEOREMA.(Arhangeljski) Ako je X α-rastegnut bikompakt, tada je $|X| \leq \exp\exp(c(X))$ [16;teorema 15]; ako je X α-levi bikompakt, tada je $|X| \leq s(X)$ [16;teorema 16].

1.3.18. TEOREMA. Ako je X linearno uređen prostor ili sekvencijalni bikompakt,redom, tada je $|X| \leq \exp(c(X))$.(v.str.18 u [79] i posl.1 u [8], redom)

1.3.19. TEOREMA. Za svaki T_2 prostor X je:

(i) $d(X) \leq \exp(s(X))$ i strože $hd(X) \leq \exp(s(X))$ [61;T.1], [82;s.

(ii) ako je X još i bikompaktan, onda je $hd(X) \leq s(X)^+$ [120;T.1]

1.3.20.TEOREMA. Neka je X Hausdorfov prostor, Tada je:

(i) $|X| \leq \exp(hl(X))$ [de Groot, [61;str.539] i takođe $\mathcal{K}(X) \leq \exp(hl(X))$ [32;posl.2.7];

(ii) (teoreme Arhangeljskog) $|X| \leq \exp(l(X)\,\chi(X))$ [7] (ova teorema o moći bikompakta s prvom aksiomom prebrojivosti je kasnije dokazana nizom autora [77], [110], [112], [115], [120], dok je u [60] i [103] dokazano da i moć T_1 bikompaktnog prostora prebrojivog karaktera ne prelazi moć kontinuuma);

(iii) (Hajnal-Juhász) $|X| \leq \exp(c(X)\chi(X))$ [62;teorema 5];

(iv) (van Douwen, [38;teorema 1.1]) ako je X još i homogen, tada je $|X| \leq \exp(\pi w(X))$. (za dokaz videti i [56])

U [30] i [21] data su poboljšanja (i objedinjenja) teorema Hajnala-Juhásza ((iii) u prethodnoj teoremi) i Arhangeljskog ((ii) prethodne teoreme), ali za normalne i regularne prostore.

1.3.21. TEOREMA. Ako je X normalan prostor, tada je ispunjeno $|X| \leq \exp(\chi(X)wl(X))$ [30;teorema 2.1] ; ako je X regularan, tada je $|X| \leq \exp(\chi(X)ql(X))$ [21].

1.3.22. TEOREMA. Za proizvoljan T_1-prostor je :

(i) (Hajnal-Juhász, [62;teorema 6]) $|X| \leq \exp(s(X)\psi(X))$;

(ii) (Ginsburg-Woods, [58;teorema 2.1]) $|X| \leq \exp(p(X)\Delta(X))$.

(Za Hausdorfov prostor X važi i $\mathcal{K}(X) \leq \exp(p(X)\Delta(X))$ [58]).

2. NEKE KLASE PROSTORA I KARDINALNE FUNKCIJE

Klasifikacija topoloških prostora može se vršiti polazeći od raznih kriterijuma. Jasno da je od velikog značaja znati:

(a) kakvi podskupovi datog prostora su otvoreni, odnosno zatvoreni;

(b) način i mogućnost definisanja otvorenih, odnosno zatvorenih skupova.

Budući da poznavanje činenica (a) i (b) ukazuje na osnovnu strukturu nekog topološkog prostora, to je klasifikacija prostora na osnovu ovih kriterijuma krajnje prirodna. U ovoj glavi izučavaju se osobine, i specijalno kardinalnoznačne karakteristike, nekih prostora koji su definisani prema zahtevima (a) i (b). Deo rezultata u vezi sa ovom glavom može se naći u [87] i [89].

2.1. RADIJALNI I PSEUDORADIJALNI PROSTORI

A

2.1.1. DEFINICIJA. Topološki prostor X naziva se Frešе-Urisonov ako za svaki $A \subset X$ i svaki $x \in \bar{A}$ postoji niz tačaka u A koji konvergira ka x; X je sekvencijalan ako za svaki nezatvoren

$A\subset X$ postoji $x\in\bar{A}\setminus A$ i niz tačaka iz A koji konvergira ka x (v. [28;str.57],[51;str.78]).

Uloga i značaj ovih klasa prostora dobro su poznati. Takođe je poznat i veliki značajlinearno uređenih prostora. Značajna uopštenja sve tri pomenute klase prostora predstavljaju radijalni i pseudoradijalni prostori koje je uveo H.Herlih u [69]. On je praktično pokazao (kako primećuje Arhangeljski) da su radijalni prostori, koji su uopštenja Freše-Urisonovih prostora, slike linearno uređenih prostora pri pseudootvorenim preslikavanjima. (Preslikavanje $f:X\longrightarrow Y$ naziva se pseudootvoreno ako je neprekidno i za svaki $y\in Y$ i proizvoljnu okolinu U skupa $f^{-1}(y)$ važi $y\in int(f(U))$); pseudoradijalni prostori uopštavaju sekvencijalne prostore i predstavljaju količnik-prostore linearno uređenih prostora. Napomenimo da je u [33] G.I.Čertanov dokazao da su konačni proizvodi linearno uređenih bikompakta pseudoradijalni.

Definiciju ovih prostora dajemo sledeći A.V.Arhangeljskog (v. [18], [24]).

2.1.2.DEFINICIJA. Neka je A podskup prostora X, $x\in X$ i $\mathcal{S}$ familija podskupova od X tako da je zadovoljeno:

(i) $\mathcal{S}$ je linearno uređen skup u odnosu na relaciju inkluzije

(ii) $\bigcap\{S:S\in\mathcal{S}\}=\{x\}$;

(iii) $S\cap A\neq\emptyset$ za svaki $S\in\mathcal{S}$;

(iv) za svaku okolinu Vx tačke x postoji $S\in\mathcal{S}$ sa $x\in S\subset Vx$.

Skup svih tačaka iz X za koje postoji familija $\mathcal{S}$ koja zadovoljava (i)-(iv) označimo sa r(A) i nazovimo radijalnim zatvorenjem skupa A. Prostor X se naziva radijalnim ako je za proizvoljan $A\subset X$, $r(A)=\overline{A}$, i pseudoradijalnim ako za svaki nezatvoren $A\subset X$ postoji $x\in r(A)\setminus A$.

Označimo sa $seq(A)$ skup onih tačaka iz X koje su granice nizova tačaka iz A. Važi

2.1.3.LEMA. [24;stav 7] Ako je A prebrojiv podskup od X, tada je $r(A)=seq(A)$; u radijalnom Hausdorfovom prostoru X za svaki $A\subset X$ za koji je $c(A)=\aleph_0$ važi $r(A)=\overline{A}=seq(A)$.

2.1.4.TEOREMA. Radijalan prostor X koji zadovoljava bilo koji od uslova: (a) $t(X)=\aleph_0$, (b) $s(X)=\aleph_0$, (c) $\Psi(X)=\aleph_0$ je Frošeov-Urisonov prostor (v.teoremu 6, stav 3 i teoremu 8 u [24]).

Ocena moći Hausdorfovog prostora data u teoremi 1.3.20, može se za slučaj radijalnih prostora poboljšati. Važi sledeća

2.1.5.TEOREMA. [24;teorema 3] Za proizvoljan Hausdorfov radijalan prostor X je $|X|\leq \exp(l(X)\Psi(X))$.

U slučaju pseudoradijalnih bikompakta ocena moći prostora ista je kao ocena moći linearno uređenih prostora data u teoremi 1.3.18.

2.1.6.TEOREMA. [24;teorema 11] Ako je X (proizvoljan) pseudoradijalni bikompakt, tada je

$$|X|\leq \exp(c(X)) \quad \text{i} \quad w(X)\leq \exp(c(X)).$$

Navedimo i sledeće interesantno tvrđenje.

2.1.7.TEOREMA. Tvrđenje $D^{\aleph_1}$ je pseudoradijalan prostor nezavisno je od ZFC (v. [24;teorema 14] ili [18;1.3.7]).

B

Sada ćemo proučiti nekoliko pitanja vezanih za pseudoradijalne prostore.

Najpre, po analogiji s pojmom tesnote, definišimo radijalnu tesnotu.

2.1.8. DEFINICIJA. Neka je $x \in X$ i $A \subset X$. Definišimo

$$rt(x,X)=\min\{k: x \in r(A) \text{ implicira postojanje } B \subset A \text{ sa } |B| \leq k \text{ i } x \in r(B)\};$$

$$rt(X)=\sup\{rt(x,X): x \in X\}.$$

Kardinal $rt(X)$ zvaćemo radijalna tesnota prostora X.

Istaknimo da su u radijalnim prostorima (zbog $r(A)=\overline{A}$, za svaki $A \subset X$) tesnota i radijalna tesnota jednaki. U pseudoradijalnim prostorima situacija je drukčija; tačnije, ako je X proizvoljan pseudoradijalni prostor, tada je $t(X) \leq rt(X)$. Zaista, neka je $rt(X)=k$ i pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da je $t(X)>k$. Znači postoji nezatvoren $A \subset X$ tako da je za svaki $B \subset A$ moći $\leq k$, $\overline{B} \setminus A=\emptyset$. Kako je X pseudoradijalan, sledi postojanje tačke $x \in r(A) \setminus A$, a iz $rt(X)=k$ i postojanje skupa $C \subset A$ za koji je $|C| \leq k$ i $x \in r(C)$. Otuda imamo $x \in \overline{C}$, odnosno $x \in \overline{C} \setminus A$, što je kontradikcija.

U [74] konstruisani su primeri pseudoradijalnih prostora prebrojive tesnote koji nisu sekvencijalni. No, pseudoradijalni prostori prebrojive radijalne tesnote su sekvencijalni (v. stav 2.1. što znači da u pseudoradijalnim prostorima tesnota može biti strogo manja od radijalne tesnote. (U istom radu [74; teorema 1] pokazano je da za proizvoljan Hausdorfov pseudoradijalni prostor X važi $t(X) \leq s(X)$).

Definišimo sada i pojam sličan pojmu sekvencijalnog roda definisanog u [28].

2.1.9. DEFINICIJA. Neka je $A \subset X$. Stavimo

$$A^0=A \;;$$

$$A^{\alpha}=\bigcup\{A_{\beta}:\beta<\alpha\}, \text{ako je } \alpha \text{ granični ordinal;}$$
$$A^{\alpha+1}=r(A^{\alpha})$$

i definišimo

$$ir(A)=\min\{\alpha : A^{\alpha}=\bar{A}\},$$
$$ir(X)=\sup\{ir(A):A\subset X\}.$$

Ordinal $ir(X)$ zvaćemo <u>indeks radijalnosti</u> prostora X.

Jasno, za radijalan prostor X je $ir(X)\leq 1$.

Vezu između uvedenih pojmova i egzistenciju indeksa radijalnosti daje sledeća

<u>2.1.10.TEOREMA.</u> Prostor X je pseudoradijalan ako i samo ako postoji $ir(X)$. Sem toga, tada je $ir(X)\leq rt(X)^{+}$.

Dokaz. Neka $ir(X)$ postoji i neka X nije pseudoradijalan prostor. Tada u X postoji nezatvoren skup A takav da je $r(A)\setminus A=\emptyset$, odnosno, $r(A)\subset A\subsetneqq\bar{A}$. Kako je r monoton operator, dobijamo

$$\bar{A}\supsetneqq A\supset r(A)\supset r(r(A))\supset\ldots ,$$

što protivreči pretpostavci.

Obrnuto, pretpostavimo sada da je X pseudoradijalan prostor i neka je $rt(X)=k$. Pretpostavimo da je $ir(X)>k^{+}=m$. Sledi da je neprazan skup $A^{m+1}\setminus A^{m}=r(A^{m})\setminus A^{m}$ i zato iz njega možemo izabrati neku tačku x. Kako je $rt(X)=k$, u skupu A^{m} postoji podskup B tako da je $|B|\leq k$ i $x\in r(B)$. Svaki $b\in B$ pripada nekom A^{n} za neko $n<m$. Pošto je $m=k^{+}$ regularan kardinal, to postoji $m_1<m$ takav da je $B\subset A^{m_1}$. Ovo implicira

$$x\in r(B)\subset r(A^{m_1})=A^{m_1+1}\subset A^{m},$$

što protivreči pretpostavci $x\notin A^{m}$, i teorema je time dokazana.

<u>2.1.11.DEFINICIJA.</u> Ako za skup $A\subset X$ važi $r(A)=X$, tada ćemo A

zvati <u>r-gustim</u> u X; najmanju moć r-gustih podskupova od X zvaćemo <u>r-gustinom</u> od X i označavati sa $d_r(X)$.

Očevidno, $d_r(X)=d(X)$ za svaki radijalan prostor X i $d(X)\leq d_r(X)$ za proizvoljan pseudoradijalan prostor X.

<u>2.1.12.TEOREMA.</u> Neka je X Hausdorfov pseudoradijalan prostor. Tada je:

(a) za svaki $A\subset X$ je $|r(A)|\leq \exp(|A|)$; specijalno, $|X|\leq \exp(d_r(X))$

(b) $|X|\leq d_r(X)^{rt(X)}$.

Dokaz. (a) Za svaki $x\in r(A)$ postoji skup $B_x\subset A$ za koji je x tačka hiper nagomilavanja (to jest, $|B_x\cap V|=|B_x|$ za svaku okolinu V od x) [24;str.97]. Kako je X Hausdorfov prostor, to je za $x\neq y$ i $B_x\neq B_y$. Sledi da kardinalnost skupa r(A) nije veća od kardinalnosti partitivnog skupa skupa A, to jest,

$$|r(A)|\leq \exp(|A|).$$

(b) Neka je A r-gust podskup od X takav da je $|A|=d_r(X)$. Imamo najpre

$$X=r(A)=\cup\{r(B):B\subset A \text{ i } |B|\leq rt(X)\}.$$

Kako je

$$|\{B\subset A:|B|\leq rt(X)\}|\leq |A|^{rt(X)},$$

i prema (a)

$$|r(B)|\leq \exp(|B|)\leq \exp(rt(X)),$$

to je

$$|X|\leq |A|^{rt(X)}\exp(rt(X))=|A|^{rt(X)}=d_r(X)^{rt(X)}.$$

Budući da je klasa sekvencijalnih prostora podklasa klase pseudoradijalnih prostora, to je logično pitati se kada će pseudoradijalan prostor biti sekvencijalan(uporediti s teoremom

2.1.4).

Ako je pseudoradijalan prostor X prebrojive radijalne tesnote i $A \subset X$ nezatvoren, tada postoji $x \in r(A) \setminus A$ i zato i $B \subset A$ sa $|B| \leq \aleph_0$, $x \in r(B)$. Po lemi 2.1.3 imamo da $x \in seq(B)$, a time i $x \in seq(A)$, te je X sekvencijalan. Znači dobijamo

2.1.13.STAV. Pseudoradijalan prostor prebrojive radijalne tesnote je sekvencijalan.

Važi i

2.1.14.TEOREMA. Pseudoradijalan prostor prebrojivog pseudokaraktera je sekvencijalan.

Dokaz. Neka je $A \subset X$ proizvoljan nezatvoren skup u X. Zbog pseudoradijalnosti prostora X postoji $x \in r(A) \setminus A$. Neka je $\mathcal{B} = \{U_i : i \in N\}$ prebrojiva pseudobaza prostora X u tački x, a $\mathcal{S}$ familija podskupova od X koja zadovoljava uslove (i)-(iv) definicije 2.1.2. Za svaki $U_i \in \mathcal{B}$ postoji, po (iv), $S_i \in \mathcal{S}$ tako da je $x \in S_i \subset U_i$. Pokažimo da familija $\mathcal{S}_1 = \{S_i : S_i \subset U_i, i \in N\}$ takođe zadovoljava uslove (i)-(iv) (u odnosu na A i x). Radi toga treba, očigledno, proveriti samo (iv). Pretpostavimo da je Vx okolina tačke x koja ne sadrži ni jedno $S_i \in \mathcal{S}_1$. Ali, postoji $S' \in \mathcal{S}$ za koje važi $x \in S' \subset Vx$. Pošto je $\mathcal{S}$ linearno uređen skup, $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$ i $S_i \setminus Vx \neq \emptyset$ za svaki $S_i \in \mathcal{S}_1$, imamo

$$S' \subset \bigcap\{S_i : i \in N\} \subset \bigcap\{U_i : i \in N\} = \{x\},$$

što implicira $S' \cap A = \emptyset$. Ovo je, međutim, nemoguće, jer iz $S' \in \mathcal{S}$ sledi $S' \cap A \neq \emptyset$. Znači, $\mathcal{S}_1$ zaista zadovoljava (i)-(iv).

Izaberimo sada iz svakog $S_i \cap A$ po jednu tačku p_i i uočimo skup $B = \{p_i : i \in N\}$. B je prebrojiv podskup od A i $x \in r(B)$, odnosno po lemi 2.1.3, $x \in seq(B) \subset seq(A)$. Teorema je time dokazana.

2.2. SAVRŠENI I SLABO SAVRŠENI PROSTORI

A

Prostor X se naziva savršenim ako je u njemu svaki zatvoren skup tipa G_δ (ili, što je ekvivalentno, svaki otvoren skup je F_δ)

Pokazalo se da su savršeno normalni prostori, i specijalno savršeno normalni bikompakti, one klase topoloških prostora na kojima se dobijaju neki neočekivani rezultati u vezi sa kardinalnoznačnim funkcijama. Navedimo neke od tih rezultata.

2.2.1. STAV. Svaki savršeno normalan bikompakt ima prebrojiv Kurepa - Suslinov broj [116; str.16]. Prebrojivo kompaktan savršen prostor je prebrojivog spreda [109; prop.2.1.].

U vezi sa prvim delom prethodnog stava V.I. Ponomarjov je postavio pitanje: je li svaki savršeno normalan bikompakt separabilan? Pokazalo se da je ovo, na izgled jednostavno pitanje vrlo suptilno i čak da je separabilnost takvog bikompakta nezavisna od ZFC sistema aksioma teorije skupova. I. Juhas je pokazao sledeće

2.2.2. TEOREMA (MA+¬CH). Svaki savršeno normalan bikompakt je nasledno separabilan [78; posledica].

(A.V. Arhangeljski je kasnije uopštio ovaj rezultat pokazavši da je pri MA+¬CH svaki bikompakt prebrojivog spreda nasledno separabilan).

Naivan rezultat u vezi sa teoremom 2.2.2. je sledeći rezultat B.E. Šapirovskog iz [120; posledica 1] (v. i [127; posl.2.1])

2.2.3. TEOREMA. Savršeno normalan bikompakt ima naslednu gustinu i gustinu $\leq \aleph_1$.

Interesantno je uporediti rezultat Juhasa (teorema 2.2.2.) i sledeći vrlo interesantan rezultat A.J. Ostaševskog.

2.2.4. PRIMER (♧) [1o9; teorema]. Postoji savršeno normalan, lokalno prebrojiv i lokalno bikompaktan prostor koji nije bikompaktan, ali je nasledno separabilan.

Niz interesantnih primera prostora bliskih savršeno normalnim (bikompaktima) konstruisao je na osnovu aksiome konstruktivnosti V=L ili njenih (važnih) posledica V.V. Fedorčuk (v. [52] - [55]).

(B)

2.2.5. DEFINICIJA. Za prostor X kazaćemo da je slabo savršen ako svaki zatvoren skup $F \subset X$ sadrži svuda gust (u F) G_δ-skup.

Posmatrajmo sada otvoren skup U datog slabo savršenog prostora X. Kako je $X \setminus U$ zatvoren u X, to postoji G_δ-skup $A=\bigcap\{V_i: i\in N\} \subset X \setminus U$, tako da je $\bar{A}=X \setminus U$. Prelazeći na komplement dobijamo $U \subset \bigcup\{X \setminus V_i : i \in N\}$ i sem toga

$$\operatorname{int}(\bigcup\{X \setminus V_i : i \in N\}) = X \setminus \overline{(X \setminus \bigcup\{X \setminus V_i : i \in N\})} = X \setminus \bar{A} = U,$$

što znači da važi

2.2.6. STAV. Prostor X je slabo savršen ako i samo ako svaki otvoren skup u njemu je unutrašnjost nekog F_σ- skupa.

Iz definicije je jasno da je svaki savršen prostor slabo savršen. Sledeći primer pokazuje da postoji slabo savršen prostor koji nije savršen (nažalost, za konstrukciju tog primera koristimo Jensenov princip $\Diamond$).

2.2.7. PRIMER ($\Diamond$). U [73; teorema 2] (uz pretpostavku $\Diamond$) konstruisan je primer nemetrizabilnog savršeno normalnog bikompakta Y čiji su svi konačni stepeni (savršeno $\mathcal{H}$- normalni) nasledno separabilni. Bikompakt Y je inverzni limes neprekidnog (to znači da u dobro uredjenom inverznom sistemu $\{Y_\alpha ; p_\beta^\alpha, \alpha < \lambda\}$ za proizvoljan granični ordinal α je $Y_\alpha = \varprojlim \{Y_\beta ; p_\gamma^\beta\}_{\gamma<\alpha}$ v. [129]) inverznog sistema $\{Y_\alpha ; p_\beta^\alpha ; \alpha < \omega_1\}$ kompakta pri čemu važi:

(i) $|Y_\alpha| = \mathrm{ehp}\, \aleph_0 = c$, za svaki $\alpha < \omega_1$;

(ii) $|\{y \in Y_\alpha : |p_\alpha^{-1}(y)| > 1\}| = \aleph_0$ za sve $\alpha < \omega_1$, gde $p_\alpha : Y \longrightarrow Y_\alpha$ su granične projekcije;

(iii) ako je $|p_\alpha^{-1}(y)| > 1$ za neko $\alpha < \omega_1$ i neko $y \in Y_\alpha$, tada je $|(p_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(y)| = c$;

(iv) za proizvoljno $y \in \varprojlim Y_\alpha = Y$ postoji $\alpha < \omega_1$ tako da je $|p_\alpha^{-1}(p_\alpha(y))| = 1$.

Posmatrajmo sada prostor $X = Y^2$, kvadrat prostora Y. Prostor X nije savršeno normalan bikompakt, jer bi u suprotnom, po dobro poznatom metrizacionom kriterijumu V.E Šnejdera (v. na primer, [51;4.2.B]), bikompakt Y bio metrizabilan.

Dokažimo da je X slabo savršen prostor. Neka je $F \subset X$ proizvoljan zatvoren skup u X. Kako je F separabilan, to postoji prebrojiv skup $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ svuda gust u F. Za svaki $i \in N$ postoji $\alpha_i < \omega_1$ tako da je, prema osobini (iv),

$$(*) \qquad (p_{\alpha_i}^2)^{-1}(p_{\alpha_i}^2(a_i)) = a_i,$$

gde je $p_{\alpha_i}^2 : Y^2 \longrightarrow Y_{\alpha_i}^2$ proizvod preslikavanja p_{α_i} sa sobom. Stavimo $\alpha = \lim\{\alpha_i : i \in N\}$. Kako je dati inverzni sistem neprekidan i Y_α^2 kompakt, to je

$$p_\alpha^2(F) = \bigcap \{U_i : i \in N\}.$$

Uočimo skup $B_\alpha \subset Y_\alpha$ takav da je (v.(ii)) $|Y_\alpha \setminus B_\alpha| \leq \aleph_0$; za svaki $b \in B_\alpha^2$ je, prema (ii), $|(p_\alpha^2)^{-1}(b)| = 1$.

Kako je $Y_\alpha \setminus B_\alpha$ F_σ - skup, jer je prebrojiv, sledi da je B_α^2 G_δ - skup u Y_α^2 . Sem toga je, na osnovu (*), $B_\alpha^2 \supset p_\alpha^2(A)$. Skup p_α^2 (A) je gust podskup od $p_\alpha^2(F)$(jer se separabilnost očuvava neprekidnim preslikavanjima). Imamo da je $B_\alpha^2 \cap p_\alpha^2(F)$ G_δ -skup i gust je u $p_\alpha^2(F)$ i dalje

$$F \supset (p_\alpha^2)^{-1}(B_\alpha^2 \cap p_\alpha^2(F)).$$

Skup na desnoj strani poslednje relacije je G_δ i gust je u F, jer sadrži A. Tvrdjenje je dokazano. ●

Potpuno je prirodno postaviti sledeće

<u>2.2.8. PITANJE.</u> Postoji li naivni primer slabo savršenog prostora?

Pošto je svaki slabo savršen prostor prebrojivog pseudokaraktera i pošto je za proizvoljan bikompakt pseudokarakter jednak karakteru, to zaključujemo da su svi slabo savršeni bikompakti prostori s prvom aksiomom prebrojivosti. Poznati prostor "dva kruga Aleksandrova" [2; str.31] , [51; primer 3.1.26] je primer bikompakta s prvom aksiomom prebrojivosti koji nije slabo savršen. Na taj način u klasi bikompakta slabo savršeni prostori su medjuklasa, izmedju savršenih i prvih prebrojivih prostora, što ukazuje i na njihov značaj.

Iz teoreme Arhangeljskog (teorema 1.3.2o(ii)) o moći bikompakta s prvom aksiomom prebrojivosti dobijamo elementaran ali važan

<u>2.2.9. STAV</u>. Moć slabo savršenog bikompakta ne prelazi moć kontinuuma.

<u>2.2.1o. STAV.</u> Slaba savršenost je nasledna po otvorenim i zatvorenim potprostorima.

DOKAZ.(a) Neka je Y otvoren podskup slabo savršenog prostora X i $W\subset Y$ otvoren u Y. Tada je W otvoren i u X, te je zato $W=\mathrm{int}(\bigcup\{F_i : i\in N\})$, gde je svaki F_i zatvoren u X (v.stav 2.2.6.). Dalje je $Y\cap(\bigcup\{F_i:i\in N\})=\bigcup\{Y\cap F_i : i\in N\}$ F_σ - skup u Y i W je sadržan u njemu. Osim toga je $\mathrm{int}_Y(Y\cap(\bigcup\{F_i:i\in N\}))=\mathrm{int}_X(Y\cap(\bigcup\{F_i:i\in N\}))\cap Y=W\cap Y=W$, te je Y slabo savršen po stavu 2.2.6.

(b) Ako je $Y\subset X$ zatvoren u slabo savršenom prostoru X i F zatvoren u Y, tada je zbog zatvorenosti skupa F u X, $F=\overline{A}$, gde je $A=\bigcap\{U_i:i\in N\}$ G_δ - skup u X. Tada je $Y\cap A=\bigcap\{Y\cap U_i:i\in N\}$ G_δ - skup u Y sadržan u F i

$$\mathrm{Cl}_Y(Y\cap A)=\mathrm{Cl}_X(Y\cap A)\cap Y=\mathrm{Cl}_X(A)\cap Y=F,$$ to jest, Y je slabo savršen.

Na osnovu definicije iz stava 2.2.10 lako se dokazuje

<u>2.2.11. STAV</u>. Topološka suma konačno mnogo slabo savršenih prostora je slabo savršen prostor.

Metodi dokazivanja teorema navedenih u A-delu ovog odeljka u vezi sa savršenim bikompaktima ne mogu dati slične rezultate i za slabo savršene bikompakte; čak verujem da takvi rezultati i ne važe. S tim u vezi logično je postaviti sledećih nekoliko pitanja.

<u>2.2.12. PITANJA.</u> 1) Da li je za slabo savršene bikompakte nasledna gustina $\leq \aleph_1$? (uporediti sa teoremom 2.2.3.)

2) Da li slabo savršen potpuno regularan Lindelefov prostor (ili slabo savršen bikompakt) ima prebrojiv Kurepa-Suslinov broj ili spred? (uporedi sa stavom 2.2.1.)

3) Je li slabo savršen potpuno regularan Lindelefov prostor nasledno Lindelefov? nasledno slabo savršen? (v. zadatke 2o6

i 2o7 u III delu knjige [28] i stav 2.2.1o).

Neka $\exp X$ označava prostor svih zatvorenih podskupova datog prostora X s topologijom Vietorisa, tj. s topologijom za koju bazu čine skupovi oblika

$\langle U_1, U_2, \dots, U_k\rangle = \{(F) \in \exp X : F \subset \bigcup\{U_i : i=1,2,\dots,k\}, F \cap U_i \neq \emptyset$ za sve $i=1,2,\dots,k\}$. (v. [51;str. 162])

Važi sledeća

<u>2.2.13.TEOREMA.</u> Ako je $\exp X$ slabo savršen prostor i X Hausdorfov, tada dijagonala Δ prostora X sadrži svuda gust G_δ - skup.

Dokaz. Posmatrajmo skup

$$\mathcal{F} = \{(F) \in \exp X : |F| \leq 1\}.$$

Kako je $\mathcal{F}$ zatvoren podskup od $\exp X$, a $\exp X$ po pretpostavci slabo savršen, to postoje otvoreni (u $\exp X$) skupovi $W_i, i \in N$ tako da je

$$\mathcal{F} \supset \bigcap\{W_i : i \in N\} \quad \text{i} \quad \mathcal{F} = \overline{\bigcap\{W_i : i \in N\}}.$$

Za svaki $i \in N$ stavimo

$$V_i = \{(x,y) \in X \times X : (\{x,y\}) \in W_i\}.$$

Jasno je da su ovi skupovi otvoreni u $X \times X$. Dokažimo da je

$$\Delta = \overline{\bigcap\{V_i : i \in N\}}.$$

(i) Neka $(x,y) \in \bigcap\{V_i : i \in N\}$. Tada $(x,y) \in V_i$ za svako $i \in N$, odnosno, po definiciji, $(\{x,y\}) \in W_i$ za sve $i \in N$. Zato

$$(\{x,y\}) \in \bigcap\{W_i : i \in N\} \subset \mathcal{F},$$

odakle, prema načinu definisanja $\mathcal{F}$, $|\{x,y\}| \leq 1$, to jest, $x=y$ ili $(x,y) \in \Delta$. Pošto je Δ zatvoren skup u $X \times X$, to iz

$$\bigcap\{V_i : i \in N\} \subset \Delta \quad \text{sledi i} \quad \overline{\bigcap\{V_i : i \in N\}} \subset \Delta.$$

(ii) Neka je sada $(x,x)\in\Delta$ proizvoljna tačka i $O(x,x)=Ux\times Ux$ proizvoljna okolina te tačke. Po definiciji skupa $\mathcal{F}$ imamo $(\{x,x\})=(\{x\})\in\mathcal{F}$, tj. $(\{x\})\in\overline{\bigcap\{W_i:i\in N\}}$. Svaka okolina tačke $(\{x\})$, dakle, seče skup $\bigcap\{W_i:i\in N\}$, te je zato, specijalno, $\langle Ux\rangle\cap(\bigcap\{W_i:i\in N\})\neq\emptyset$. Ako je $(H)\in\langle U\rangle\cap(\bigcap\{W_i:i\in N\})$, tada je $(H)=(\{p\})$, što znači da $(p,p)\in\bigcap\{V_i:i\in N\}$, odnosno $(p,p)\in(Ux\times Ux)\cap(\bigcap\{V_i:i\in N\})$. Zato $(x,x)\in\overline{\bigcap\{V_i:i\in N\}}$ i imamo da je $\Delta\subset\overline{\bigcap\{V_i:i\in N\}}$. Teorema je dokazana.

2.3. $\mathcal{N}$- PROSTORI

Podsetimo da se tačka x prostora X naziva P- tačkom ako za svaku prebrojivu kolekciju $\{V_i:i\in N\}$ njenih okolina, skup $\bigcap\{V_i:i\in N\}$ je okolina te tačke; prostor čije su sve tačke P- tačke naziva se P - prostor. O P-prostorima i njihovim osobinama detalji se mogu naći u [57], [1o6] i [14o].

Dokažimo sada jednu jednostavnu osobinu P-tačaka i P-prostora koja će nam omogućiti definisanje nove klase prostora koja će sadržati sve P-prostore.

<u>2.3.1. LEMA.</u> Ako je x P-tačka prostora X, tada ona ne može biti tačka nagomilavanja ni jednog prebrojivog podskupa od X; Specijalno, u P-prostoru svi prebrojivi podskupovi su zatvoreni i diskretni.

Dokaz. Neka je $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od X i $x\in X\setminus A$ (ako je $x\in A$ posmatramo prebrojiv skup $B=A\setminus\{x\}$).

Za svaki $i \in N$ skup $U_i = X \setminus \{a_i\}$ je okolina tačke x, i kako je ova P-tačka, to je skup $\bigcap \{U_i : i \in N\} = U$ okolina za x. No, za tu okolinu važi $U \cap A = \emptyset$ i zato $x \notin \overline{A}$.

Obrnuto tvrdjenje (ako $x \in X$ nije tačka nagomilavanja ni jednog prebrojivog podskupa od X, tada je x P-tačka) ne važi uvek. Zato možemo uvesti sledeću definiciju.

2.3.2. DEFINICIJA. Tačka x prostora X naziva se $\mathcal{N}$- tačka ako ona nije tačka nagomilavanja ni jednog prebrojivog podskupa od X; prostor X čije su sve tačke $\mathcal{N}$- tačke naziva se $\mathcal{N}$- prostor.

Dakle, svaka P-tačka je i $\mathcal{N}$- tačka (odnosno, svaki P-prostor je $\mathcal{N}$- prostor). Uz pretpodstavku kontinuum hipoteze M.E.Rudin je dokazala da u prostoru $\beta N \setminus N$ postoje ne-P-tačkekoje nisu tačke nagomilavanja ni za koji prebrojiv skup P-tačaka. K.Kunen u [92; teorema o.2] dokazuje da pri MA u $\beta N \setminus N$ postoje $\mathcal{N}$- tačke koje nisu P-tačke, a A.A.Grizlov u [59] utačnjuje rezultat Kunena pokazavši da u $\beta N \setminus N$ postoji, uz pretpostavku CH, expc $\mathcal{N}$- tačaka koje nisu P-tačke.

Sledeći primer pokazuje da postoje $\mathcal{N}$- prostor koji nije P-prostor (čak ni jedna tačka u njemu nije P-tačka).

2.3.3. PRIMER. Postoji Hausdorfov (tačnije $T_{2,5}$) $\mathcal{N}$-prostor X koji nije P-prostor i za koji je: $c(X)=s(X)=\psi(X)=\aleph_0$, $d(X)=t(X)=\aleph_1$.

Skup X=R realnih brojeva topologiziramo tako da je $U \subset X$ otvoren ako i samo ako je $U = G \setminus C$, gde je G otvoren u uobičajenoj (metričkoj) topologiji brojne prave R, a C prebrojiv podskup od X. Kako je svaki prebrojiv podskup od X zatvoren, to je X $\mathcal{N}$- prostor. S druge strane, ako je $x \in X$ proizvoljna tačka, tada je $\{V_i=(x-1/i,x+1/i):i\in N\}$ prebrojiva kolekcija okolina od x za koju skup $\bigcap\{V_i:i\in N\}$ nije otvoren, to jest x nije P- tačka.

2.3.4. PRIMEDBA. U linearno uredjenim prostorima x je $\mathcal{N}$- tačka ako i samo ako je P-tačka. Zaista, ako je x $\mathcal{N}$- tačka (linearno uredjenog) prostora X, tada ona, specijalno, ne može biti granica nikakvog rastućeg i nikakvog opadajućeg niza i zato [57; 5.0] je P-tačka.

Jednu zanimljivu razliku izmedju P-prostora i $\mathcal{N}$- prostora daje nam primer 2.3.3. Hausdorfovog $\mathcal{N}$- prostora sa Kurepa-Suslinovim svojstvom i sledeća

2.3.5. TEOREMA. Neprebrojiv Hausdorfov P-prostor X je neprebrojivog Kurepa-Suslinovog broja.

Dokaz. Pretpostavimo, suprotno tvrdjenju teoreme, da je X Hausdorfov P-prostor za koji je $c(X)=\aleph_0$. Neka je $x\in X$ neizolovana tačka. Za svaki $y\neq x$ postoji okolina Vy tako da $x\notin \overline{Vy}$. Stavimo

$$\mathcal{A}=\{Vy:y\in X\setminus\{x\}\}$$

i posmatrajmo familiju $\mathcal{S}$ svih celularnih podfamilija od $\mathcal{A}$ uredjenu relacijom inkluzije $\subset$. Po lemi Zorna $\mathcal{S}$ ima maksimalan element,označimo ga sa $\mathcal{C}$ .Imamo da je $Y=\bigcup\{U:U\in\mathcal{C}\}$ gust podskup od X i zato $x\in\overline{Y}$, mada $x\notin\bigcup\{\overline{U}:U\in\mathcal{C}\}$.Dalje, zbog toga što je Y gust, zaključujemo da je $c(Y)=c(X)=\aleph_0$, što znači da je $\mathcal{C}$ prebrojiva kolekcija, to jest možemo staviti

$$\mathcal{C}=\{U_1,U_2,\dots\}.$$

Posmatrajmo sada familiju $\{X\setminus\overline{U}_i:i\in N\}$ otvorenih okolina tačke x. Kako je X P-prostor, to je $\bigcap\{X\setminus\overline{U}_i:i\in N\}=U$ okolina za x. Ali $U \cap Y=\emptyset$, što je nemoguće (jer je Y gust; ili zato što x nije izolovana tačka). Znači $c(X) > \aleph_0$ i teorema je time dokazana.

2.3.6. NAPOMENA. Primer 2.3.3. omogućava da ukažemo na još neke razlike izmedju P-prostora i $\mathcal{N}$- prostora. Iz definicije sledi da P-prostor prebrojivog pseudokaraktera je diskretan, što u slučaju $\mathcal{N}$- prostora ne mora biti, kako to pomenuti primer pokazuje.

Takodje prostor X iz primera 2.3.3. je povezan, a identično preslikavanje $i: X \longrightarrow R$ neprekidno ali nije konstantno, što je osobina P-prostora [106;prop.5.1].

Neke karakteristike $\mathcal{N}$- prostora daje sledeći

2.3.7. STAV. (a) X je $\mathcal{N}$- prostor ako i samo ako je svaki prebrojiv skup u njemu zatvoren i diskretan; specijalno, prebrojiv prostor je $\mathcal{N}$- prostor ako i samo ako je diskretan;

(b) Neprebrojiv $\mathcal{N}$- prostor ne može biti separabilan i neprebrojive je tesnote;

(c) Svaki prebrojivo kompaktan $\mathcal{N}$- prostor je konačan;

(d) Lokalno bikompaktan $\mathcal{N}$- prostor je diskretan;

(e) $\mathcal{N}$- prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti ako i samo ako je diskretan; specijalno, svaki metrizabilan potprostor $\mathcal{N}$- prostora je diskretan.

Dokaz. (a), (b) i (c) slede neposredno iz definicije $\mathcal{N}$- prostora. Radi toga dokažimo samo (d) i (e).

(d) Neka je x proizvoljna tačka lokalno bikompaktnog $\mathcal{N}$- prostora X. Tada postoji okolina Vx ove tačke tako da je Vx bikompaktan prostor. Po (c) Vx je konačan i diskretan skup, to jest x je izolovana tačka.

(e) Neka je x neizolovana tačka u $\mathcal{N}$-prostoru X. Pretpostavimo da je $\{U_i : i \in N\}$ prebrojiva baza okolina u x. Birajući iz svakog skupa U_i po jednu tačku x_i različitu od x, dobijamo prebrojiv skup A takav da $x \notin A$ ali $x \in \overline{A}$, pošto svaka bazna okolina U_i tačke x seče A. Ovo je , međutim, nemoguće zbog toga što je x $\mathcal{N}$-tačka.

Vladanje $\mathcal{N}$-prostora (klasu ovih prostora označimo sa $\mathcal{N}$) pri osnovnim operacijama s prostorima pokazuje sledeći

2.3.8.STAV. (a) Ako je $X \in \mathcal{N}$ i $Y \subset X$, tada $Y \in \mathcal{N}$; što više skup svih $\mathcal{N}$-tačaka datog prostora X je $\mathcal{N}$-prostor ;

(b) Proizvoljna topološka suma i konačan proizvod $\mathcal{N}$-prostora je $\mathcal{N}$-prostor ;

(Beskonačan proizvod $\mathcal{N}$-prostora ne mora biti $\mathcal{N}$-prostor; u svojstvu primera možemo uzeti prostor $N^{\exp \aleph_0}$ koji je po teoremi 1.3.11 separabilan i zato nije $\mathcal{N}$-prostor.)

(c) Ako je $X = \bigcup\{X_s : s \in S\}$ unija lokalno konačne familije zatvorenih potprostora i $X_s \in \mathcal{N}$ za svaki $s \in S$, tada i $X \in \mathcal{N}$;

(d) Količnik prostor $\mathcal{N}$-prostora pri odozgo poluneprekidnom razbijanju je $\mathcal{N}$-prostor.

Dokaz. (c) Neka je C proizvoljan prebrojiv podskup od X. Tada je za svaki $s \in S$, $C \cap X_s$ prebrojiv podskup $\mathcal{N}$-prostora X_s i zato je zatvoren u X_s, odnosno i u X zbog pretpostavke da je X_s zatvoren u X. Koristeći sada lokalnu konačnost familije $\{X_s : s \in S\}$ imamo

$$C = \bigcup\{C \cap X_s : s \in S\} = \bigcup\{\overline{C \cap X_s} : s \in S\} = \overline{\bigcup\{C \cap X_s : s \in S\}} = \overline{C} \ ,$$

to jest C je zatvoren (u X) ,što znači $X \in \mathcal{N}$.

(d) Neka je Y količnik prostor $\mathcal{N}$-prostora X pri odozgo poluneprekidnoj dekompoziciji i B proizvoljan prebrojiv podskup od Y. Sa f označimo prirodnu projekciju prostora X na Y. Za svaki $b \in B$ uočimo po jednu tačku x iz $f^{-1}(b)$ i označimo sa A skup svih tačaka dobijenih na ovaj način. Kako je A prebrojiv, to je on zatvoren (i diskretan) u X. Pošto je, kao što je dobro poznato [51;str.126], [85;str.138], preslikavanje f zatvoreno, to je skup $f(A)=B$ zatvoren i diskretan u Y i zato $Y \in \mathcal{N}$.

Neprekidna slika $\mathcal{N}$-prostora ne mora biti $\mathcal{N}$-prostor. Na primer, realna linija R je neprekidna slika $\mathcal{N}$-prostora X iz primera 2.3.3, ali ona nije $\mathcal{N}$-prostor. Međutim za neke druge klase preslikavanja situacija se menja. Ispravan je sledeći

<u>2.3.9.STAV.</u> Kvazi-savršena slika $\mathcal{N}$-prostora je $\mathcal{N}$-prostor. (Preslikavanje $f:X\longrightarrow Y$ je kvazi-savršeno ako je neprekidno, zatvoreno i za svaki $y \in Y$ je skup $f^{-1}(y)$ prebrojivo kompaktan.)

Dokaz. Neka je $f:X\longrightarrow Y$ kvazi-savršena surjekcija iz $\mathcal{N}$-prostora X na prostor Y i B proizvoljan prebrojiv podskup u Y. Za svaki $y \in B$ skup $f^{-1}(y)$ je konačan podskup od X budući prebrojivo kompaktan (v. stav 2.3.7). Prema tome, skup $f^{-1}(B)=\bigcup\{f^{-1}(y) : y \in B\}$ je prebrojiv u X i zbog toga diskretan i zatvoren. Radi toga je, jer je f zatvoreno preslikavanje, $B=f(f^{-1}(B))$ zatvoren i diskretan u Y, to jest $Y \in \mathcal{N}$.

Sa stanovišta problematike kardinalnih funkcija najznačajniji rezultati koji se tiču $\mathcal{N}$-prostora su sledeće dve teoreme i posledica koja iz njih proizilazi.

<u>2.3.10.TEOREMA.</u> Neka je X ne-Lindelefov $\mathcal{N}$-prostor. Tada X

sadrži neprebrojiv diskretan potprostor (to jest, $s(X) > \aleph_0$).

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač prostora X koji se ne može svesti na prebrojiv podpokrivač. Transfinitnom indukcijom definišimo skup $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tačaka prostora X i skup $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ otvorenih podskupova u X tako da:

(i) $p_\alpha \in U_\alpha$ i

(ii) $p_\alpha \notin \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}} = \{p_\beta : \beta < \alpha\}$

za svaki $\alpha < \omega_1$.

Neka je $p_0 \in X$ proizvoljna tačka i $V_0 \in \mathcal{V}$ proizvoljan član takav da $p_0 \in V_0$. Stavimo $U_0 = V_0$. Neka je sada $\alpha < \omega_1$ fiksiran i pretpostavimo da za svaki $\beta < \alpha$ imamo definisane tačke p_β i skupove U_β tako da su zadovoljeni uslovi (i) i (ii). Kako X nije Lindelefov prostor, skup $X \setminus \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ nije prazan, to jest postoji tačka $p_\alpha \in X \setminus \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$. S druge strane, zato što je X $\mathcal{N}$-prostor, imamo $p_\alpha \notin \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}}$. Neka je V_α takav element iz $\mathcal{V}$ da $p_\alpha \in V_\alpha$. Stavimo

$$U_\alpha = V_\alpha \cap (X \setminus \overline{\{p_\beta : \beta < \alpha\}}) = V_\alpha \cap (X \setminus \{p_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Konstrukcija skupova $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ i $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ je time završena. Skup $A = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ je neprebrojiv diskretan potprostor od X i teorema je na taj način dokazana.

Vrlo važna posledica prethodne teoreme je

<u>2.3.11.TEOREMA.</u> $\mathcal{N}$-prostor je prebrojivog raspona, tada i samo tada kada je nasledno Lindelefov.

Dokaz. Svaki nasledno Lindelefov prostor je prebrojivog raspona (v. str. 9). Neka je sada raspon $\mathcal{N}$-prostora X prebrojiv i pretpostavimo, suprotno tvrđenju teoreme, da je $hl(X) > \aleph_0$. Dakle, postoji podskup $Y \subset X$ takav da je $l(Y) > \aleph_0$. Po stavu 2.3.8 (a) Y je $\mathcal{N}$-prostor i zato, po teoremi 2.3.10, imamo $s(Y) > \aleph_0$. Kako je spred monotona kardinalna funkcija imamo i $s(X) > \aleph_0$, što je suprotno pretpostavci. Znači, $hl(X) = \aleph_0$ i teorema je dokazana.

Iz teoreme de Grota (teorema 1.3.20(i)) i teoreme 2.3.11 dobija se

2.3.12. POSLEDICA. Hausdorfov $\mathcal{N}$-prostor prebrojivog rupona ima moć ne veću od moći kontinuuma.

U vezi sa poslednjom posledicom istaknimo činjenicu da postoji Hausdorfov $\mathcal{N}$-prostor kardinalnosti veće od $\exp \aleph_0$: to je primer Grizlova pomenut na početku ovog odeljka.

U preostalom delu ovog odeljka svi prostori će biti potpuno regularni. Posmatraćemo dve klase prostora u kojima, kao i kod $\mathcal{N}$-prostora, prebrojivi podskupovi igraju značajnu ulogu i na izvestan način karakterišu prostor.

Napomenimo najpre da se za podskup A prostora X kaže da je C-potopljen (C^*-potopljen) u X, ako svaka neprekidna (neprekidna ograničena) realna funkcija definisana na A ima neprekidnu (neprekidnu ograničenu) ekstenziju na X.

Posmatrajmo sledeća dva svojstva datog prostora X :

($\mathcal{C}$) Svaki prebrojiv podskup od X je C-potopljen u X.

($\mathcal{C}^*$) Svaki prebrojiv podskup od X je C^*-potopljen u X.

Klase (potpuno regularnih) prostora koji zadovoljavaju uslove ($\mathcal{C}$) i ($\mathcal{C}^*$) označimo prosto sa $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$, redom.

Poznato je [57;4K] da proizvoljan (potpuno regularan) P-prostor pripada klasi $\mathcal{C}$. Iz definicije je takođe jasno da je $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^*$. Ova inkluzija je stroga, jer prostor Σ iz [57;4M](v. i [140]) pripada $\mathcal{C}^*$ ali nije u $\mathcal{C}$.

Sledeći primer pokazuje da postoji prostor iz $\mathcal{C}$ koji nije P-prostor.

<u>2.3.13.PRIMER</u>. Prostor X navedenih osobina dobićemo modifikacijom tzv. fortissimo prostora(v.[131;str.53]). Na skupu $X=R$ realnih brojeva definišimo topologiju $\mathcal{T}$ na sledeći način: ako $x \in R \setminus \{0\}$, tada je x izolovana tačka; sistem $\mathcal{T}$-okolina 0 (nule) biće skup svih okolina nule u odnosu na uobičajenu topologiju brojne prave R zajedno sa svim podskupovima od X koji sadrže nulu i imaju prebrojive komplemente u X. Očevidno, 0 nije P-tačka u X, to jest X nije P-prostor. Kako za proizvoljan prebrojiv $A \subset X$ imamo da je $X \setminus A$ otvoren skup, to je svaki prebrojiv skup u X zatvoren (dakle, X je $\mathcal{N}$-prostor). X je i normalan. Stvarno, ako su A i B disjunktni zatvoreni skupovi u X, tada samo jedan od njih, recimo A, sadrži nulu. Sledi, B je otvoren. Ali i $X \setminus B$ je otvoren, te su $X \setminus B$ i B disjunktne okoline skupova A i B, redom. Sada je jasno da je svaki prebrojiv podskup od X, budući zatvoren u normalnom prostoru, C-potopljen u X (po Tietzovoj teoremi ekstenzije).

Iz [57;3B] sledi da je svaki prebrojiv C-potopljen skup prostora X zatvoren u X, što znači da je $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$.

Na osnovu poslednje činjenice i Urisonove(velike) leme zaključujemo da važi

2.3.14.STAV. Normalan prostor X pripada klasi $\mathcal{C}$ ako i samo ako je $\mathcal{N}$-prostor.

Stavu 2.3.7(c) o $\mathcal{N}$-prostorima pridružimo sledeći stav o prostorima klase $\mathcal{C}$.

2.3.15.STAV. Ako pseudokompaktan prostor X pripada $\mathcal{C}$, tada je on konačan.

Dokaz. Ako je X beskonačan, tada iz činjenice da je on $\mathcal{N}$-prostor sledi da je svaki prebrojiv podskup od X zatvoren (i diskretan), dok iz $X \in \mathcal{C}$, sledi i da je C-potopljen u X. Znači, prostor X sadrži C-potopljenu kopiju prebrojivog diskretnog prostora N, što po dobro poznatom rezultatu E.Hjuita(Hewitt) [140; str.97] implicira da X ne može biti pseudokompaktan. Kontradikcija dokazuje ispravnost tvrđenja teoreme.

2.3.16.POSLEDICA.(v. [140;prop.1.65]) Pseudokompaktan P-prostor je konačan.

Neka $X \in \mathcal{C}$. Kao u dokazu prethodnog stava zaključujemo da X sadrži C-potopljenu kopiju prostora N. Uzimajući sada zatvorenje te kopije u Stoun-Čehovoj bikompaktifikaciji βX prostora X, imamo da $\beta X \setminus X$ sadrži kopiju prostora $\beta N \setminus N$ [140;s.97] čija je kardinalnost expc. Slično, ako je $X \in \mathcal{C}^*$ bikompaktan, tada on sadrži kopiju prostora βN [57;14N].

Na taj način, za razliku od $\mathcal{N}$-prostora koji su konačni ako su bikompaktni(v. stav 2.3.7), imamo

2.3.17.STAV. Ako beskonačan prostor X pripada $\mathcal{C}$, tada je $|\beta X \setminus X| \geqslant$ expc ; ako beskonačan bikompakt X pripada $\mathcal{C}^*$, tada je $|X| \geqslant$ expc.

Naredna teorema bliže opisuje klasu $\mathcal{C}^*$.

2.3.18. TEOREMA. Ako su svaka dva disjunktna prebrojiva podskupa prostora X funkcionalno razdvojena, tada $X \in \mathcal{C}^*$.

Dokaz. Ako je A proizvoljan prebrojiv podskup od X i A_1 i A_2 funkcionalno razdvojeni podskupovi u A, tada su, očevidno, A_1 i A_2 disjunktni prebrojivi skupovi u X. Zbog toga su po pretpostavci A_1 i A_2 funkcionalno razdvojeni u X. Po Urisonovoj teoremi ekstenzije: $A \subset X$ je C^*-potopljen u X ako i samo ako su proizvoljna dva funkcionalno razdvojena podskupa od A, funkcionalno razdvojena u X(v. [57;teorema 1.17] ili [140;teorema 1.2]), sledi da je A C^*-potopljen u X, to jest $X \in \mathcal{C}^*$.

2.3.19.PRIMEDBA. Ako $X \in \mathcal{C}^* \cap \mathcal{N}$, tada su proizvoljna dva disjunktna prebrojiva podskupa A i B iz X funkcionalno razdvojena.

Stvarno, kako $X \in \mathcal{N}$, to je preslikavanje $f: A \cup B \to R$ definisano sa $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$ neprekidno i ograničeno. Iz $X \in \mathcal{C}^*$ sledi da f ima neprekidnu ekstenziju F na ceo prostor X, te su A i B funkcionalno razdvojeni posredstvom funkcije F.

Na kraju dokažimo sledeću teoremu u vezi sa proizvodom prostora iz $\mathcal{C}^*$.

2.3.20.TEOREMA. Ako proizvod XxY pripada $\mathcal{C}^* \cap \mathcal{N}$, tada $X \in \mathcal{C}^*$ ili $Y \in \mathcal{C}^*$.

Dokaz. Pretpostavimo nasuprot da $X \notin \mathcal{C}^*$ i $Y \notin \mathcal{C}^*$. Po teoremi 2.3.18, tada postoje prebrojivi disjunktni podskupovi A_1 i A_2 u X okji nisu funkcionalno razdvojeni, i prebrojivi disjunktni skupovi B_1 i B_2 u Y koji takođe nisu funkcionalno razdvojeni. Neka su $f: X \to R$ i $g: Y \to R$ neprekidne ograničene funkcije takve da je $f(a_1)=f(a_2)$ i $g(b_1)=g(b_2)$ za neke $a_i \in A_i$ i $b_i \in B_i$ $(i=1,2)$. Sada su skupovi $A_1 x B_1$ i $A_2 x B_2$ disjunktni prebrojivi podskupovi od XxY koji nisu funkcionalno razdvojeni, jer za neprekidnu ograničenu funkciju $\varphi: X x Y \longrightarrow R$, definisanu sa $\varphi(x,y)=f(x)-g(y)$, važi $\varphi(a_1,b_1)=\varphi(a_2,b_2)$. Prema 2.3.19, tada $XxY \notin \mathcal{C}^* \cap \mathcal{N}$, što je suprotno pretpostavci.

2.4. LOKALNA KONAČNOST I KARDINALNE FUNKCIJE

Veliki značaj pojma lokalno konačne familije podskupova nekog topološkog prostora naročito se ističe posle definicije parakompaktnih prostora (Didone,1944.) i metrizacionog stava Nagate-Smirnova (1951.) izraženog baš jezikom lokalne konačnosti. Uopštavajući pomenuti metrizacioni kriterijum Nagate-Smirnova, R.E.Hodel u [71] definiše stepen metrizabilnosti m(X) datog regularnog prostora X kao najmanji kardinal k takav da X ima k-lokalno konačnu bazu — bazu koja je unija $\leqslant k$ lokalno konačnih kolekcija otvorenih skupova. Hodel je takođe definisao i stepen parakompaktnosti pa(X) proizvoljnog regularnog prostora X i stepen p-osti pe(X) potpuno regularnog prostora; pa(X) je najmanji kardinal k takav da se u svaki otvoren pokrivač za X može upisati k-lokalno konačan otvoren pokrivač, a pe(X) je najmanji kardinal k takav da postoji kolekcija $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < k\}$ otvorenih pokrivača prostora X skupovima otvorenim u βX i da važi $\bigcap_{\alpha<k} st(x,\mathcal{U}_\alpha) \subset X$ za svaki $x \in X$ (st je oznaka za "zvezda") (v. [71]).

Sada ćemo izučiti neke osobine funkcija m,pa,pe.

Prostim dupliranjem dokaza za slučaj parakompaktnih ili p-prostora dokazuje se

2.4.1.STAV. (i) U regularnom prostoru X osobinu $pa(X) \leq k$ nasleđuju i zatvoreni i F_k-podskupovi.

(ii) Ako je X regularan (odnosno, potpuno regularan) i $f: X \to Y$ savršeno preslikavanje, onda je $pa(X) \leq pa(Y)$ (odnosno, $pe(X) \leq pe(Y)$).

(iii) Ako je X regularan, Y bikompakt i $pa(X) \leq k$, onda je $pa(X \times Y) \leq k$.

Supremum pseudokaraktera zatvorenih podskupova od X označimo sa $\Psi_{cl}(X)$. Važi

2.4.2.STAV. Neka su X i Y regularni prostori takvi da je $pa(X) \leq k$, $\Psi_{cl}(X) \leq k$ i $m(Y) \leq k$. Tada je $pa(X \times Y) \leq k$.

Dokaz. Pošto je $m(Y) \leq k$ možemo u Y zafiksirati k-lokalno konačnu bazu $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < k\}$, gde je $\mathcal{B}_\alpha = \{B_{\alpha s} : s \in S_\alpha\}$ ($\bigcup_{\alpha<k} S_\alpha$ označimo sa S). Pokažimo najpre da je $\Psi_{cl}(X \times Y) \leq k$, ili, što je isto, da je svaki otvoren skup $G \subset X \times Y$ tipa F_k. Za svaki $(x,y) \in G$ postoje otvoreni skupovi $U \subset X$ i $B \in \mathcal{B}$ sa $(x,y) \in U \times B \subset G$, to jest, postoji $T \subset S$ tako da je $\bigcup\{U_t \times B_t : t \in T\} = G = \bigcup\{U_t \times \overline{B}_t : t \in T\}$. Iz $\Psi_{cl}(X) \leq k$ sledi da je svaki U_t oblika $U_t = \bigcup\{F_{t\beta} : \beta < k\}$. Stavimo

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \{F_{t\beta} \times \overline{B}_t : B_t \in \mathcal{B}_\alpha, t \in T\} \quad \text{i} \quad A_{\alpha\beta} = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}_{\alpha\beta}\}.$$

Svaka kolekcija $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ je lokalno konačna, sastavljena od zatvorenih skupova i, očevidno, važi $G = \bigcup\{A_{\alpha\beta} : \alpha, \beta < k\}$. Ovo i znači $\Psi_{cl}(X \times Y) \leq k$.

Uočimo sada proizvoljan otvoren pokrivač $\mathcal{P}$ prostora $X \times Y$. Za svaki $s \in S$ neka je $\mathcal{C}_s = \{U_i : i \in T_s\}$ familija otvorenih skupova iz X, takva da je $\{U_i \times B_s : i \in T_s, s \in S\}$ pokrivač upisan u $\mathcal{P}$. Neka je $V_s = \bigcup\{U_i : i \in T_s\}$. Po pretpostavci skup V_s je tipa F_k, te je prema stavu 2.4.1, $pa(V_s) \leq k$ i zato se u njegov otvoren pokrivač $\mathcal{C}_s$ može upisati k-lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{H}_s = \bigcup\{\mathcal{H}_{s\beta} : \beta < k\}$. Stavljajući $\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \{H \times B_s : H \in \mathcal{H}_{s\beta}, s \in S_\alpha\}$ i $\mathcal{W} = \bigcup\{\mathcal{W}_{\alpha\beta} : \alpha, \beta < k\}$ dobićemo k-lokalno konačan otvoren pokrivač za XxY upisan u $\mathcal{P}$, to jest $pa(X \times Y) \leq k$.

Neznatno modifikujući dokaz VI.68 i VI.70 u [28] dokazuje se

<u>2.4.3.STAV.</u> Ako je X normalan lokalno povezan prostor sa $\psi_{cl}(X) \leq k$, $f: X \to Y$ zatvoreno nuldimenziono preslikavanje na (regularan) prostor Y sa $m(Y) \leq k$, onda je i $m(X) \leq k$.

Definišimo sada novu kardinalnu funkciju.

<u>2.4.4.DEFINICIJA.</u> Za proizvoljan topološki prostor X stavimo $lf(X) = k$, ako svaka lokalno konačna familija otvorenih nepraznih podskupova od X ima moć $\leq k$.

Prema poznatoj teoremi Gliksberga (v. 3.10.22 u [51]) imamo da je za potpuno regularan prostor X $lf(X)$ prebrojiv ako i samo ako je X pseudokompaktan. Zato funkciju lf možemo zvati <u>stepen pseudokompaktnosti</u>.

Funkcija lf je "mala" kardinalna funkcija (v. str. 9). Naime, važi

<u>2.4.5.TEOREMA.</u> Za proizvoljan prostor X je $lf(X) \leq c(X)$.

Dokaz. Neka je $c(X) = k$ i $\mathcal{L}$ proizvoljna lokalno konačna familija nepraznih otvorenih podskupova od X. Stavimo

$\mathcal{U} = \{U : U$ je otvoren i seče ga konačno članova iz $\mathcal{L}\}$.

$\mathcal{U}$ je baza za X. Stvarno, ako je $x \in X$ proizvoljan i G proizvoljan otvoren skup koji sadrži x, tada označujući sa H onu okolinu od x koja seče konačno mnogo članova iz $\mathcal{L}$ i stavljajući $U=G\cap H$, dobijamo $U\in\mathcal{U}$ i $x\in U\subset G$. Saglasno II.102 iz [28], postoji celularna familija $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ takva da je skup $Y=\bigcup\{V:V\in\mathcal{V}\}$ gust u X. Tada je $c(Y)=c(X)=k$, pa je zato $|\mathcal{V}|\leq k$. Ali, zato što je Y gust u X, svaki član iz $\mathcal{L}$ seče neki element iz $\mathcal{V}$, što prema načinu definisanja familije $\mathcal{U}\supset\mathcal{V}$ daje $|\mathcal{L}|\leq k$, ili $lf(X)\leq k$.

Lako se proverava sledeće svojstvo funkcije lf:

2.4.6.STAV. Ako je A otvoreno-zatvoren podskup od X (ova je pretpostavka bitna), onda je $lf(A)\leqslant lf(X)$; ako je A gust u X, onda je $lf(X)\leqslant lf(A)$.

Za specijalne klase prostora može se dati veza između lf i broja Lindelofa, odnosno naslednog broja Lindelofa.

2.4.7.TEOREMA. (i) Ako je za regularan prostor X $pa(X)=k$, tada za svaki kardinal $m\geqslant k$ iz $lf(X)=m$ sledi $l(X)\leqslant m$.

(ii) Ako je za regularan prostor X $hpa(X)=k$, tada je za svaki $m\geqslant k$, $lf(X)=m$ ako i samo ako je $hl(X)=m$.

Dokaz. Dokažimo samo (ii). Uvek je $lf(X)\leqslant hl(X)$. Neka je $lf(X)=m$. Dokažimo $hl(X)\leqslant m$, ili što je isto, da iz $hl(X)>m$ sledi $lf(X)>m$. Neka je $A\subset X$ takav da je $l(A)>m$ i neka je $\mathcal{V}$ pokrivač skupa A skupovima otvorenim u X, koji se ne može redukovati na podpokrivač moći $\leqslant m$. Stavimo $H=\bigcup\{V:\ V\in\mathcal{V}\}\supset A$. Tada je $pa(H)\leq k(\leqslant m)$, te postoji k- lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{U}_\alpha:\alpha<k\}$ upisan u $\mathcal{V}$. Razume se, $|\mathcal{U}|>m$ (pošto bi u suprotnom postojao $\mathcal{V}'\subset\mathcal{V}$, $|\mathcal{V}|\leqslant m$ koji bi bio pokrivač za A), i zato postoji $\alpha_0<k$ tako da je $|\mathcal{U}_{\alpha_0}|>m$, odnosno $lf(X)>m$.

3. PROŠIRENJA PROSTORA I KARDINALNE FUNKCIJE

U ovoj glavi razmatra se ponašanje date kardinalne funkcije φ pri prelasku sa prostora X na neki obuhvatniji prostor Y - proširenje prostora X. Pitanja u vezi sa ovim mogu se ovako podeliti:

1) Ako je φ data kardinalna funkcija, u kakvom su odnosu kardinali $\varphi(X)$ i $\varphi(Y)$ i šta se može reći o $\varphi(Y\setminus X)$? Razume se, ako je φ monotona kardinalna funkcija, onda je u prvom redu važno ispitati za kakve prostore X i pod kojim uslovima iz $\varphi(X)\leqslant k$ sledi postojanje proširenja Y određenog tipa, tako da bude $\varphi(Y)\leqslant k$.

2) Ako prostor X ima proširenje Y određenog tipa za koje je $\varphi(Y)\leqslant k$, odnosno $\varphi(Y\setminus X)\leqslant k$, šta se može reći o prostoru X, tačnije, o njegovoj unutrašnjoj karakterizaciji?

Zbog velike važnosti bikompaktnih proširenja, naročito su interesantna razmatranja pitanja 1) i 2) kada je Y (Hausdorffova) bikompaktifikacija prostora X. Zbog ovoga, iz razumljivih razloga, svi prostori u ovoj glavi su potpuno regularni (u suprotnom će biti posebno naglašen tip prostora). βX označava bikompaktifikaciju Stoun-Čeha.

Rezultati autora iz ovog dela rada objavljeni su u [88].

A

3.1. PREGLED POZNATIH REZULTATA

Najpre ćemo posmatrati ponašanje klasičnih kardinalnih funmoć, težina, karakter(i pseudokarakter) pri prelasku na bikompaktifikaciju.

Jednostavan primer prebrojivog diskretnog prostora N pokazuje da se pomenute funkcije uvećavaju prelaskom na (neko) proširenje. Mada je $|N| = w(N) = \aleph_0$, imamo $|\beta N| = \exp\exp\aleph_0$ i $w(\beta N) = \exp\aleph_0$ [28;IV.53], [51;posl.3.6.12], [57], [140]. Dalje, $\chi(N) = \aleph_0$ (preciznije $\chi(N) = 1$, ali je ovo u skladu sa dogovorom, str.1), ali ni jedna tačka u $\beta N \setminus N$ nije G_δ [57;6S], a time joj je i karakter neprebrojiv.

Međutim, iz teoreme Tihonova (o potapanju potpuno regularnih prostora u Tihonovske kubove) sledi da prostor X ima bikompaktifikaciju bX takvu da je $w(bX) = w(X)$.

Sa moći i karakterom situacija je potpuno drukčija, kako ćemo videti iz razmatranja koja slede.

3.1.1. DEFINICIJA. [48] Minimalna moć bikompaktifikacija prostora X naziva se hipermoć od X i označava sa $\sigma(X)$.

Iz $d(bX) \leq d(X) \leq |X|$ i $w(bX) \leq \exp d(bX)$, sledi da je $w(bX) \leq \exp|X|$, što zajedno sa $|bX| \leq \exp w(bX)$ daje da za hiper moć prostora X važi

$$|X| \leq \sigma(X) \leq \exp\exp|X| .$$

Jefimov je dokazao [47;4.4], [48;posl.5.10] da postoji prebrojiv prostor X za koji je $\sigma(X) = \exp\exp\aleph_0$. Tačnije važi

3.1.2. TEOREMA. Hiper moć $\sigma(X)$ proizvoljnog prebrojivog gustog podskupa X diadskog bikompakta težine c je $\exp c$ [48;s.61].

(Istaknimo da i prebrojiv prostor X konstruisan u [102] takođe ima hiper moć expc; takav je i prostor Σ koji će u narednom biti opisan).

Napomenimo da je veza između hiper moći i π-težine prostora nađena u [48;teorema 5.12].

3.1.3. TEOREMA($\exp k < \exp(k^+)$). Prostor X koji ima bar jednu diadsku bikompaktifikaciju ima hiper moć $\leqslant \exp k$ ako i samo ako je $\pi w(X) \leqslant k$.

Opišimo sada konstrukciju jednog interesantnog primera van Dauena-Przimušinskog datog u [39]. Radi se o prostoru čije sve bikompaktifikacije sadrže kopiju prostora βN.

3.1.4. PRIMER. Neka je $I=[0,1]$ zatvoren jedinični interval i Q skup svih racionalnih brojeva iz I. Skup $\mathcal{P}(N)$ svih podskupova prostora N predstavimo u obliku $\mathcal{P}(N)=\{A_x : x \in I\}$. Za svaki $x \in I$ i $i \in N$ neka je $q_x(i) \in Q$ takav da je $0<|x-q_x(i)|<1/i$. Stavimo $Q_x = \{q_x(i) : i \in N\}$.

Skup $\Delta = (I \times \{0\}) \cup (Q \times N)$ topologizirajmo na sledeći način: sve tačke skupa $Q \times N$ su izolovane; za $(x,0) \in I \times \{0\}$ bazu okolina čine skupovi

$$B_i(x)=\{(a,b)\in \Delta : |x-a|<1/i\} \setminus ((Q_x \times A_x) \cup (\{x\} \times N)),\ i \in N.$$

Neka je $\Sigma = \Delta/I$ količnik prostor prostora Δ dobijen identifikacijom tačaka skupa $I \times \{0\}$.

Za prostore Δ i Σ imamo sledeće:

Δ je Lindelefov prostor s prvom aksiomom prebrojivosti i prebrojive mrežne težine;

Σ je prebrojiv Freše-Urisonov prostor;

Sve bikompaktifikacije prostora Δ i Σ su neprebrojive karaktera, čak i neprebrojive tesnote (tačnije, tesnota svake njihove bikompaktifikacije je $\exp \aleph_0$).

Dakle, postoji prostor s prvom aksiomom prebrojivosti čije sve bikompaktifikacije imaju neprebrojiv karakter. Prve primere takvih prostora dao je Uljanov u [138]: konstruisani su prostori Y_1 i Y_2 prebrojivog karaktera (i nizom drugih interesantnih osobina) čije sve bikompaktifikacije imaju tesnotu $\geqslant \aleph_1$ (v. i [139;str.245]).

Pitanje kada (regularan Lindelefov) prostor s prvom aksiomom prebrojivosti ima bikompaktifikaciju prebrojivog karaktera razmatrao je u nizu radova [136]-[139] Uljanov, ali se i dalje to pitanje može smatrati otvorenim. Sumirajmo sada te rezultate.

Ako je $f:X\longrightarrow Y$ dato (neprekidno) preslikavanje, stavimo

$$A_f=\{y\in f(X):\ w(f^{-1}(y),X)=\aleph_0\},$$

$$B_f=\{y\in f(X):\ f^{-1}(y) \text{ je bikompaktan i za svaki zatvoren } F\subset X \text{ iz } y\in\overline{f(F)} \text{ sledi } F\cap f^{-1}(y)\neq\emptyset\}.$$

Označimo dalje sa $\mathfrak{b}$ skup svih jednotačkovnih podskupova skupa A_f i svih zatvorenih bikompaktnih podskupova od B_f, a sa $\mathcal{L}_\mathfrak{b}$ sledeću osobinu:

$\mathcal{L}_\mathfrak{b}$ ≡ za svaki $x\in X$ u svakom od slučajeva: (i) za svaku okolinu Ox tačke x i (ii) za svako $x'\in f^{-1}(f(x))\setminus\{x\}$, postoje $F\in\mathfrak{b}$, okolina $Vf(x)$ tačke $f(x)$ i preslikavanja $g:Vf(x)\setminus F\longrightarrow[0,1]$, $\tilde{g}: f^{-1}(Vf(x))\longrightarrow[0,1]$, tako da važi $\tilde{g}|f^{-1}(Vf(x)\setminus F)=gf|f^{-1}(Vf(x)\setminus F)$ i

(i') $\tilde{g}(x)\notin\overline{\tilde{g}(f^{-1}(Vf(x)\setminus Ox)}$ u slučaju (i), (ii') $\tilde{g}(x')\neq\tilde{g}(x)$ u slučaju (ii).

Važi

3.1.5. TEOREMA. [139;teorema 5] Neka je X prostor prebrojivog karaktera i težine $w(X)< k$, gde je k neki kardinal. X ima bikompaktifikaciju bX prebrojivog karaktera i težine $<k$, onda i samo onda kada postoje bikompakt Y prebrojivog karaktera i težine $<k$ i neprekidno preslikavanje $f:X\longrightarrow Y$ sa osobinom $\mathcal{Y}_b$ tako da je $f(X)= A_f\cup B_f$.

U vezi sa istom problematokom navedimo i sledeće:

(A) V.I.Malihin je pokazao da ne postoji univerzalni bikompakt s prvom aksiomom prebrojivosti.(v. o tome [139;str.253])

(B) (V.I.Ponomarjov) Lindelefov lokalno povezan periferno bikompaktan(to znači da za svaku tačku prostora postoji okolina s bikompaktnom granicom) prostor s prvom aksiomom prebrojivosti ima bikompaktifikaciju prebrojivog karaktera.

(C) Ako je $X=F_1\cup F_2$ prostor s prvom aksiomom prebrojivosti predstavljen kao unija zatvorenih prostora koji (oba) imaju bikompaktifikacije s prvom aksiomom prebrojivosti, tada i X ima bikompaktifikaciju prebbrojivog karaktera. (v. T.Terada, A note on first countable compactification, Bull. Acad. Polon. Sci. 27:5(1979), 369-371)

Što se tiče unutrašnje karakterizacije prostora s bikompaktifikacijom prebrojivog karaktera mogu se navesti sledeći (parcijalni) rezultati (v. teoreme 8 i 9 u [139]):

3.1.6. TEOREMA. Prostor X prebrojivog karaktera ima bikompaktifikaciju prebrojivog karaktera tada i samo tada kada u X postoji podčinjenje v (definiciju podčinjenja videti na str. 275 u [1]) tako da svaki maksimalan centriran sistem otvorenih u X skupova ima prebrojiv kofinalni deo.

3.1.7.TEOREMA. Ako prostor X ima bikompaktifikaciju prebrojivog karaktera, tada je

(i) $\chi(X)=\aleph_0$; (ii) $w(X)\leq|X|\leq\exp\aleph_0$;

(iii) X se može, kao zatvoren potprostor, potopiti u R^c.

Sada ćemo navesti nekoliko rezultata o (klasičnim) funkcijama c i d . Kako za Kurepa+Suslinov broj c važi: $c(X)=c(bX)$ za proizvoljnu bikompaktifikaciju bX (isto važi i za ϱ i πw) ,to za c treba posmatrati samo $c(bX\setminus X)$. Osnovni rezultati na ovu temu pripadaju Komfortu i Gordonu , a mogu se naći u [36] i [140].

3.1.8. TEOREMA. Ako je k proizvoljan kardinal, tada postoji lokalno bikompaktan prostor X tako da je

(i) $c(\beta X\setminus X)=k$;

(ii) proizvoljan prostor Y za koji je $\beta Y\setminus Y=\beta X\setminus X$ je pseudokompaktan. (v. [140;str.124])

3.1.9. TEOREMA. Za dati kardinal k je $c(\beta X\setminus X)\geq k$ ako i samo ako X sadrži kolekcijumoći k sastavljenu od konul skupova $\{U_\alpha : \alpha\in k\}$ tako da

(i) svaki U_α sadrži nebikompaktan nul skup ;

(ii) za $\alpha\neq\beta$ skup $U_\alpha\cap U_\beta$ je relativno bikompaktan.

Za funkciju d imamo sledeće: kako je X gust u proizvoljnoj bikompaktifikaciji bX, to je $d(bX)\leq d(X)$, to jest gustina ne raste prelaskom na bikompaktna proširenja. Prvi primer prostora za koji je gustina bikompaktifikacije manja od gustine prostora dat je u [35]: taj prostor je $\sum$-proizvod kontinuum primeraka dvotačkovnog diskretnog prostora D.

(Ako je $\{X_s : s\in S\}$ familija prostora i a tačka proizvoda $X=\prod\{X_s : s\in S\}$, tada je $\sum$-proizvod ove familije prostora s baznom tačkom a skup svih tačaka iz X koje se od a razlikuju u najviše prebrojivo mnogo koordinata(Korson).)

R.Levi i MekDovel u [100], koristeći činjenice da identičko preslikavanje $i:X\to X$ ima (jedinstvenu) neprekidnu nesvodljivu savršenu ekstenziju $\tilde{i}:\beta X\to bX$ i da se gustina ne menja nesvodljivim preslikavanjima, dokazuju da sve bikompaktifikacije datog prostora X imaju istu gustinu (označimo je sa $d(\beta X)$)

U [37] van Dauen daje unutrašnju karakterizaciju prostora X za koje je $d(\beta X)\leq k$.

(Zasad je d jedina funkcija za koju je data takva karakterizacija.)

3.1.10. TEOREMA.(van Douwen) $d(\beta X)\leq k$ ako i samo ako X ima k-centriranu bazu (to jest, bazu koja je unija k centriranih familija).

Dokaz. Neka je $d(\beta X)\leq k$ i A gust podskup od βX sa $|A|\leq k$. Za svaki otvoren skup $U\subset X$ stavimo $Ex(U)=\beta X\setminus Cl_{\beta X}(X\setminus U)$ i za svaki $x\in A$ definišimo

$$\mathcal{U}_x=\{U : U \text{ je otvoren u } X \text{ i } x\in Ex(U)\}.$$

Kako je A gust u βX, to je $\mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{U}_x : x\in A\}$ baza za X. Proverimo da je $\mathcal{U}_x$ centrirana familija za svaki $x \in A$. Zaista, ako $U_1, U_2, \ldots, U_i$ konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{U}_x$, tada $x \in Ex(U_j)$ za sve $j \leq i$, to jest, $x \in \bigcap\{Ex(U_j): j=1,2,\ldots,i\} = Ex(\bigcap\{U_j: j=1,2,\ldots,i\})$, te je $\bigcap\{U_j: j=1,2,\ldots,i\} \neq \emptyset$.

Obrnuto, neka je $\mathcal{U} = \bigcup\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha<k\}$ k-centrirana baza u X. Zbog bikompaktnosti prostora βX je $\bigcap\{Cl_{\beta X}(U): U \in \mathcal{U}_\alpha\} \neq \emptyset$. Birajući po jedno x_α iz svakog ovakvog preseka, dobija se skup A moći $\leq k$. No, A je gust u βX. Stvarno, ako je G proizvoljan otvoren skup u βX i $H \subset \beta X$ otvoren sa $Cl_{\beta X}(H) \subset G$, tada zbog $X \cap H \neq \emptyset$, postoji $\alpha < k$ i $U \in \mathcal{U}_\alpha$ tako da je $U \subset H$. Ovo implicira $x \in Cl_{\beta X}(U) \subset G$.

U istom radu van Dauen daje karakterizaciju nigde lokalno bikompaktnih prostora X (to su prostori koji ni u jednoj tački nisu lokalno bikompaktni - ekvivalentno, za koje je $\beta X \setminus X$ gust u βX) za koje je $d(\beta X \setminus X) \leq k$.

3.1.11.TEOREMA.(van Douwen) Za proizvoljan nigde lokalno bikompaktan prostor X je $d(\beta X \setminus X) \leq k$ ako i samo ako postoji kolekcija $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < k\}$ familija podskupova od X tako da važi:

(i) svaka familija $\mathcal{B}_\alpha$ je centrirana ;

(ii) $\bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha<k\}$ je π-baza u X ;

(iii) $\bigcap\{\overline{B}: B \in \mathcal{B}_\alpha\} = \emptyset$ za svaki $\alpha<k$ (zatvorenje uzeto u X)

Pitanje odnosa gustine prostora X i njegovog proširenja Y koje nije bikompakt, razmatrano je u [40]. Dokazano je

3.1.12. TEOREMA. (a) Proizvoljan prostor X težine $\leq \exp k$ koji je T_2 ili T_3 može se dodavanjem novih k tačaka potopiti u prostor Y istog tipa i gustine $\leqslant k$. (v.teoremu 1.4 u [40])

(b) pri dodatnim pretpostavkama teorije skupova, svaki prostor X težine $\leqslant k$ koji je Hausdorfov ili regularan ili potpuno regularan ili s prvom aksiomom prebrojivosti ili lokalno bikompaktan ili bikompaktan može se potopiti u separabilan prostor Y istog tipa. (v. [40;teorema 1.3])

B

3.2. KUREPA - SUSLINOV BROJ, GUSTINA, TESNOTA

Već smo napomenuli da ispitivanja u vezi sa Kurepa-Suslinovim brojem treba da idu u drugom pravcu u odnosu na razmatranja u prethodnom odeljku (jer je $c(X)=c(Y)$ za proizvoljan prostor Y u kome je X gust). Činjenice da je $c(U)\leqslant c(X)$ za proizvoljan otvoren skup $U\subset X$, što se lako proverava, i da c ni nije monotona kardinalna funkcija, sugerišu sledeće pitanje:

> Ako je dat prostor X, koliko mu novih tačaka treba dodati da bi se dobio prostor Y u kome je X zatvoren i važi $c(Y)<c(X)$?

3.2.1. Neka je X proizvoljan(potpuno regularan) prostor težine $\leqslant \exp k$. Na osnovu teoreme Tihonova, X možemo potopiti u Tihonovljev kub $T= I^{\exp k}$ težine $\exp k$. Posmatrajmo sada prostor

$$Y = T\setminus(\overline{X}\setminus X),$$

gde je zatvorenje uzeto u T. U odnosu na topologiju (pot)prostora Y sve tačke nagomilavanja skupa X pripadaju samom X, te je X zatvoren podskup od Y. S druge strane, Y je gust potprostor od T, te je zato $c(Y)=c(T)=\aleph_0$ (v. teoremu 1.3.11).

Na taj način je gore navedeni problem o umanjenju Kurepa-Suslinovog broja datog prostora X rešen, ali ali je ovde nedostatak što je skup $Y\setminus X$ "veliki", to jest ima mnogo tačaka.

Razmotrićemo zato isto pitanje i na drugi način.

<u>3.2.2.</u> Potopimo ponovo X u T i uočimo skup $A=T\setminus\overline{X}$. Po teoremi 1.3.11 je $d(T)\leq k$. Neka je B gust podskup od T moći $\leq k$. Kako je A otvoren podskup u T, to je trag skupa B na A, to jest skup $C=A\cap B$, gust u A i, jasno, kardinalnosti je $\leq k$. Stavimo $Y=X\cup C$. Lako se proverava da je X zatvoren potprostor od Y i da je Y gust u T, zbog čega je $c(Y)=c(T)=\aleph_0$.

<u>3.2.3. NAPOMENA</u>. Ako je X proizvoljan T_0-prostor ili nuldimenzioni prostor težine $\leq \exp k$, tada se po teoremi 1.3.1 X može potopiti u $F^{\exp k}$, odnosno u $D^{\exp k}$, redom. Postupajući ponovo kao u 3.2.2. i vodeći računa o tome da je

$$c(F^{\exp k}) = c(D^{\exp k}) = \aleph_0$$

$$d(F^{\exp k})\leq k \quad \text{i} \quad d(D^{\exp k})\leq k,$$

(što proističe iz teoreme 1.3.11) zaključujemo da i ovakve prostore možemo dodavanjem $\leq k$ tačaka potopiti (kao zatvoren potprostor) u prostor s Kurepa-Suslinovim svojstvom.

Prethodna razmatranja mogu se sumirati u obliku sledeće teoreme (uporediti s teoremom 3.1.12).

<u>3.2.4. TEOREMA</u>. Svaki potpuno regularan ili T_0 ili nuldimenzioni prostor težine $\leq \exp k$ može se dodavanjem $\leq k$ novih tačaka potopiti kao zatvoren potprostor u prostor istog tipa s Kurepa-Suslinovim svojstvom .

<u>3.2.5. PITANJE.</u> Može li se za neku klasu prostora (težine $k > \exp\aleph_0$) prethodni zadatak rešiti dodavanjem prebrojivo mnogo tačaka ?

Posmatrajmo sada sledeće osobine prostora X :

$\mathcal{P}_1 : d(\beta X) \leq k$; $\mathcal{P}_2 : d(\beta X \setminus X) \leq k$.

Ispitajmo pri kojim operacijama s prostorima i pri kakvim preslikavanjima se očuvavaju osobine $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$.

Lako je proveriti da je osobina $\mathcal{P}_1$ konačno aditivna i expk-multiplikativna. U prvom slučaju bikompaktifikacija gustine $\leq k$ za topološku sumu konačno mnogo prostora je topološka suma bikompaktifikacija pojedinih prostora ; drugi deo tvrđenja sledi iz teoreme 1.3.11 i toga što je $\prod\{\beta X_s : s \in S\}$ bikompaktifikacija za $\prod\{X_s : s \in S\}$, pri čemu je $|S| = \exp k$.

Neka je sada $d(\beta X) \leq k$ i neka je Y neprekidna slika prostora X pri preslikavanju f. Preslikavanje f ima neprekidnu (Stounovsku) ekstenziju $F: \beta X \longrightarrow \beta Y$ i zato imamo

$$d(\beta Y) \leq d(F(\beta X)) \leq d(\beta X).$$

Znači, upravo je dokazan

<u>3.2.6. STAV.</u> Osobina $\mathcal{P}_1$ je konačno aditivna, expk-multiplikativna i invarijanta je neprekidnih preslikavanja.

Sledeći primer pokazuje da $\mathcal{P}_1$ nije inverzna invarijanta neprekidnih preslikavanja.

<u>3.2.7. PRIMER .</u> Uzmimo $c = \exp\aleph_0$ kopija otvorenog jediničnog intervala $J = (0,1)$ i posmatrajmo proizvod J^c. Tihonovski kub I^c je bikompaktifikacija od J^c i, po teoremi 1.3.11, $d(I^c) = \aleph_0$ to jest, $d(\beta J^c) = \aleph_0$. Proizvoljno preslikavanje $f: D(\exp c) \xrightarrow{na}$

J^c je neprekidno. Međutim, prostor $\beta D(\exp c)$ nije separabilan, jer je s jedne strane $|\beta D(\exp c)| = \exp\exp c$ [28], [57;teorema 9.2], [51;teorema 3.6.11], a s druge za svaki Hausdorffov prostor X je $|X| \leq \exp\exp d(X)$ [82;teorema Pospišila, str.13].

Iz teoreme 3.1.10 van Dauena i činjenice da otvoreno-zatvorena konačno-kratna preslikavanja ($f:X \to Y$ je konačno-kratno ako je $f^{-1}(y)$ konačan za svaki $y \in Y$) ne menjaju težinu (v.zad. IV.127 u [28]), prorodno izlazi

3.2.8. PITANJE. Je li $\mathcal{P}_1$ inverzna invarijanta otvoreno-zatvorenih konačno-kratnih preslikavanja ?

Podsetimo sada da se preslikavanje $f:X \to Y$ naziva nesvodljivim ako je $f(F) \neq Y$ za svaki pravi zatvoren podskup F u X, i da je za dato preslikavanje $f:X \to Y$, $f^{\#}(A) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\}$, $A \subset X$.

3.2.8. LEMA. Neka je $f:X \to Y$ (neprekidno) nesvodljivo preslikavanje i $\mathcal{U}$ centrirana familija otvorenih podskupova od X. Tada je $f^{\#}(\mathcal{U}) = \{f^{\#}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ centrirana familija u Y.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno, to jest neka postoji konačna podfamilija $\{f^{\#}(U_i) : i=1,2,\dots,n\}$ od $f^{\#}(\mathcal{U})$ za koju je $\bigcap\{f^{\#}(U_i) : i \leq n\} = \emptyset$. Tada je

$$\emptyset = \bigcap\{Y \setminus f(X \setminus U_i) : i \leq n\} = Y \setminus \bigcup\{f(X \setminus U_i) : i \leq n\} =$$
$$Y \setminus f(X \setminus \bigcap\{U_i : i \leq n\},$$

odnosno,

$$f(X \setminus \bigcap\{U_i : i \leq n\}) = Y.$$

Međutim, $\bigcap\{U_i : i \leq n\}$ je neprazan otvoren skup u X i, kako je f nesvodljivo preslikavanje, poslednja jednakost nije moguća.

Neka su sada prostori X i Y nigde lokalno bikompaktni. Tada važi

3.2.10. TEOREMA. Ako je $f:X\to Y$ (neprekidno) nesvodljivo zatvorena surjekcija, tada je $d(\beta X\setminus X)\leq k$ ako i samo ako je $d(\beta Y\setminus Y)\leq k$. (Drugim rečima, u klasi nigde lokalno bikompaktnih prostora osobina $\mathcal{P}_2$ je invarijanta i inverzna invarijanta nesvodljivih zatvorenih preslikavanja.)

Dokaz. Neka je najpre $d(\beta X\setminus X)\leq k$. Po teoremi 3.1.11 postoji kolekcija $\{\mathcal{U}_\alpha:\alpha<k\}$ familija otvorenih podskupova od X tako da važe uslovi (i)-(iii) te teoreme. Posmatrajmo familiju $\{f^{\#}(\mathcal{U}_\alpha):\alpha<k\}$ i dokažimo da ona takođe zadovoljava uslove (i)-(iii) teoreme 3.1.11. Kako je f nesvodljivo preslikavanje, to po po prethodnoj lemi za svaki $\alpha<k$ je $f^{\#}(\mathcal{U}_\alpha)$ centrirana familija otvorenih skupova u Y. Po stavu 1 u str. 360 u [2](v. i [111]), $\bigcup\{f^{\#}(\mathcal{U}_\alpha):\alpha<k\}$ je π-baza u Y. Ostaje da se dokaže (iii), odnosno da je za sve $\alpha<k$ zadovoljeno $\bigcap\{\overline{f^{\#}(U)}:U\in\mathcal{U}_\alpha\}=\emptyset$. Pretpostavimo da ovo nije tačno za neko α. Znači, $Y\setminus\bigcap\{\overline{f^{\#}(U)}:U\in\mathcal{U}_\alpha\}\neq Y$ i zato je

$$f^{-1}(Y\setminus\bigcap\{\overline{f^{\#}(U)}:U\in\mathcal{U}_\alpha\})\neq X\quad,\ \text{ili}$$

$$X\setminus f^{-1}(\bigcap\{\overline{f^{\#}(U)}:U\in\mathcal{U}_\alpha\})\neq X\quad,\ \text{to jest}$$

$$\bigcap\{f^{-1}(\overline{f^{\#}(U)}):U\in\mathcal{U}_\alpha\}\neq\emptyset.$$

Koristeći dalje zatvorenost i neprekidnost preslikavanja f dobijamo

$$\emptyset\neq\bigcap\{\overline{f^{-1}(f^{\#}(U))}:U\in\mathcal{U}_\alpha\}=\bigcap\{\overline{X\setminus f^{-1}(f(X\setminus U))}:U\in\mathcal{U}_\alpha\}=$$
$$=\bigcap\{X\setminus f^{-1}(\overline{f(X\setminus U)}):U\in\mathcal{U}_\alpha\}=\bigcap\{X\setminus \overline{f^{-1}(f(X\setminus U))}:U\in\mathcal{U}_\alpha\}$$

Iz $X\setminus\overline{(X\setminus U)}\supset X\setminus \overline{f^{-1}(f(X\setminus U))}$ i $\overline{X\setminus U}\supset X\setminus\overline{U}$ imamo zatim

$$\bigcap\{\overline{X \setminus (X \setminus \overline{U})} : U \in \mathcal{U}_\alpha\} \neq \emptyset \quad , \text{ odnosno}$$

$$\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}_\alpha\} \neq \emptyset \ ,$$

što protivreči pretpostavci o $\mathcal{U}_\alpha$.

Obrnuto, neka je sada $d(\beta Y \setminus Y) \leq k$ i $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < k\}$ kolekcija familija podskupova od Y za koju važi (i)-(iii) teoreme 3.1.11. Tvrdimo da familija $\{f^{-1}(\mathcal{V}_\alpha) : \alpha < k\}$ zadovoljava (i)-(iii). Svojstva (i) i (iii) proveravaju se bez većih poteškoća, dok osobina (ii) je sadržana u već pomenutom dokazu stava1 u [2]. Teorema je dokazana.

Za razliku od gustine, tesnote različitih bikompaktifikacija istog prostora mogu biti različite. Na primer, za prostor N je $t(\alpha N) = \aleph_0$ (gde αN označava bikompaktifikaciju jednom tačkom = bikompaktifikacija Aleksandrova), dok je $t(\beta N) = \exp \aleph_0$ [28;zad.IV.64]. Ali, ako je za dati prostor X, $t(\beta X) \leq k$, tada je $t(bX) \leq k$ i za proizvoljnu bikompaktifikaciju bX, jer je ekstenzija $\tilde{i} : \beta X \to bX$ identičnog preslikavanja $i : X \to X$ savršeno preslikavanje, a ova preslikavanja ne uvećavaju tesnotu [18 ;str.32], [27], [82;str.10].

Postoje prostori prebrojive tesnote čije sve bikompaktifikacije imaju neprebrojivu tesnotu. Prvi takav primer je ranije pominjani prostor koji je u [102] konstruisao Malihin, a takav je i prostor Σ iz primera 3.1.4. Značajna istraživanja u istom pravcu vršena su u [11] i u široj i dopunjenoj verziji [20] tog rada, kao i u [19].

Iz teoreme Rančina (teorema 1.3.14) o aditivnosti tesnote i teoreme 1.3.13 Malihina o multiplikativnosti tesnote bikompakta sledi

3.2.11. STAV. Osobina"imati bikompaktifikaciju tesnote $\leqslant k$" je konačno aditivna i k-multiplikativna.

Ukažimo sada na neke osobine prostora koji imaju bikompaktifikaciju prebrojive tesnote.

(Napomenimo da na pitanje Arhangeljskog: kakvi prostori imaju bikompaktifikaciju prebrojive tesnote ? [10], još uvek nije dat zadovoljavajući odgovor.)

3.2.12. TEOREMA. Neka prostor X ima bikompaktno proširenje bX prebrojive tesnote. Tada

(i) X ima tačkovno-prebrojivu π-bazu ; ako je još $\aleph_1$ predkalibar za X, tada X ima prebrojivu π-bazu ;

(ii) (MA+$\rceil$CH) Ako je X sa Kurepa-Suslinovim svojstvom, tada je $\pi w(X)=\aleph_0$ i $d(\beta X)=d(X)$.

Prvi deo teoreme sledi iz teoreme 1.3.15(a) i činjenica da je $\pi w(X)=\pi w(bX)$ i ako je k predkalibar za X, tada je k kalibar za bX [18;str.42], [82;str.11]; drugi deo je posledica teoreme 1.3.15(b) i sledećih lako proverljivih nejednakosti: $d(\beta X)\leqslant d(X)\leqslant d(\beta X)t(bX)$.

Iz toga što za svaki diadski bikompakt Z i svaki ekstremalno nepovezan bikompakt B važi: $w(Z)=t(Z)$ (v.str.10) i $w(B)=t(B)$ (v.[18;3.3.12]),sledi, na osnovu klasičnog metrizacionog kriterijuma Urisona,

3.2.13. STAV. Ako prostor X ima bilo diadsku bilo ekstremalno nepovezanu bikompaktifikaciju prebrojive tesnote, tada je on metrizabilan.

Razmatranje u teoremi koja sledi inspirisano je rezultatom Malihina [102] da za $p\in\beta N\setminus N$ svaka bikompaktifikacija prostora $N\cup\{p\}$ ima neprebrojivu tesnotu i utačnjenjem Jefimova da je ta tesnota jednaka $\exp\aleph_0$ [50;teorema 2].

2.3.14. TEOREMA. Ako je X lokalno bikompaktan prostor, $p\in\beta X\setminus X$ i postoji savršeno preslikavanje $f\colon A\xrightarrow{na}D(k)$, gde je k neki kardinal, a $A=\beta X\setminus(X\cup\{p\})$, tada $X\cup\{p\}=Y$ ima bikompaktifikaciju bY za koju je $t(bY\setminus Y)=\aleph_0$.

Dokaz. Kako je X lokalno bikompaktan prostor, to je $\beta X\setminus X$ bikompakt, kako je dobro poznato. Zato imamo da je $A\cup\{p\}=\beta X\setminus X$ bikompaktifikacija Aleksandrova prostora A. Dato savršeno preslikavanje $f\colon A\to D(k)$ može se proširiti do neprekidnog preslikavanja $F\colon\beta X\setminus X\to\alpha D(k)=D(k)\cup\{\infty\}$, tako da je $F^{-1}(\infty)=\{p\}$ (v. [28;VI.45]). U prostoru βX posmatrajmo relaciju ekvivalencije $\sim$ datu sa

ako $x,y\in X$, onda $x\sim y$ akko $x=y$;

ako $x,y\in\beta X\setminus X$, onda $x\sim y$ akko $F(x)=F(y)$.

Pošto je $\beta X\setminus X$ zatvoren u βX, f savršeno, sledi da je $\sim$ odozgo poluneprekidno razbijanje [51]. To znači da je prirodna projekcija $\varphi\colon\beta X\to X/\sim$ savršeno preslikavanje. Prema tome, imamo da je $\varphi|(\beta X\setminus X)$ homeomorfizam na $\alpha D(k)$ i $\beta X/\sim$ sa količnik topologijom je bikompaktifikacija za $X\cup\{p\}$.

Dakle, $X\cup\{p\}$ ima bikompaktifikaciju prebrojive tesnote, jer je $t(\alpha D(k))=\aleph_0$ [10]. Ovim je dokaz teoreme završen.

2.3.15. PITANJE. Ako je $f\colon X\xrightarrow{na}Y$ savršeno preslikavanje prostora X prebrojive tesnote na prostor Y koji ima bikompaktifikaciju prebrojive tesnote, ima li i X takvu bikompaktifikaciju?

4. KARAKTERIZACIJA KARDINALNIH FUNKCIJA

Ako je na određenoj klasi topoloških prostora zadata neka kardinalna funkcija φ, tada je prirodno posmatrati kako se ona ponaša pri osnovnim operacijama sa prostorima (prelazak na potprostor, proizvod, proširenje) i pri pojedinim preslikavanjima prostora (neprekidnim, otvorenim, savršenim i drugim). Razume se da je potpuno prirodno ispitivati i sledeće: ako je data proizvoljna kardinalna funkcija φ koja zadovoljava neki skup (prirodno) zadatih uslova, kakva je njena veza sa poznatim kardinalnim funkcijama, odnosno kakve se još osobine za φ mogu izvesti iz tog skupa uslova. Ova glava posvećena je takvom ispitivanju. Deo rezultata može se naći u [86] i [90].

4.1. OSOBINE KARDINALNIH FUNKCIJA

Neka je φ kardinalna funkcija. Posmatrajmo sledeće osobine funkcije φ :

(1) Za svaki diskretan prostor X je $\varphi(X)=|X|$;

(2) $\varphi(X)\leq |X|$ za svaki prostor X ;

(3) φ je monotona kardinalna funkcija, to jest, ako je A proizvoljan podskup prostora X, tada je $\varphi(A)\leq \varphi(X)$;

(3a) Ako je A zatvoren podskup od X, tada je $\varphi(A) \leq \varphi(X)$;

(4) Ako je A gust podskup od X, tada je $\varphi(A) \leq \varphi(X)$;

(5) Ako je A gust u X, onda je $\varphi(A) \geq \varphi(X)$;

(6) Ako je Y neprekidna slika od X, tada je $\varphi(Y) \leq \varphi(X)$;

(6a) Ako je $f:X \longrightarrow Y$ neprekidna otvorena surjekcija, tada je $\varphi(Y) \leq \varphi(X)$;

(6b) Ako je $f:X \longrightarrow Y$ neprekidna bijekcija, tada je $\varphi(X) \leq \varphi(Y)$;

(7) Ako je $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ proizvod familije prostora, tada je

$$\varphi(X) \leq |S| \sup\{\varphi(X_s) : s \in S\} ;$$

(7a) $\varphi(X \times Y) \leq \max\{\varphi(X), \varphi(Y)\}$;

(8) Ako je $X = \bigcup\{X_s : s \in S\}$, tada je $\varphi(X) \leq |S| \sup\{\varphi(X_s) : s \in S\}$;

(9) Svaki potpuno regularan prostor X ima bikompaktifikaciju bX takvu da je $\varphi(bX) \leq \varphi(X)$.

Jasno je da važe sledeće implikacije:

$$(3) \longrightarrow (3a) \quad \text{i} \quad (3) \longrightarrow (4) \quad ;$$

$$(6) \longrightarrow (6a) \quad \text{i} \quad (7) \longrightarrow (7a) \quad ;$$

$$(4)+(5) \longrightarrow \text{jednakost u } (4) \text{ i u } (5).$$

Pošto prostor $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ sadrži kopiju prostora X_s za svaki $s \in S$, a projekcije su neprekidna otvorena preslikavanja, to sledi da ako φ zadovoljava bilo uslov (3) bilo uslov (6a), onda je

$$\varphi(X) \geq \sup\{\varphi(X_s) : s \in S\} .$$

Dalje, ako (kardinalna) funkcija φ zadovoljava (7), tada je osobina "X ima bikompaktifikaciju bX za koju je $\varphi(bX) \leq k$" k-multiplikativna, dok je za funkciju φ koja zadovoljava (8) ista osobina konačno aditivna.

φ \ ρ	1	2	3	3a	4	5	6	6a	6b	7	7a	8	9
|·|	+	+	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	− [47]
c	+	+	− [51]	− [51]	+ [79]	+ [79]	+ [51]	+	−	− [98]	− [98]	+	+ [79]
d	+	+	− [51]	− [51]	− [35]	+ [51]	+ [51]	+	−	+ [18]	+	+	− [35]
w	+	−	+ [82]	+	+	−	− [51]	+ [51]	− [18]	+ [18]	+	− [18]	+ [51]
nw	+	+	+ [82]	+	+	−	+	+	− [18]	+ [82]	+ [19]	+ [18]	− [39]
πw	+	−	− [82]	−	+ [82]	− [18]	−	+	− [18]	+ [82]	+	?	+ [82]
pw	+	+	± [82]	+	+	−	−	−	+ [18]	+	+	−	−
l	+	+	− [51]	+ [2a]	−	−	+	+	−	− [79]	− [79]	+	+
hl	+	+	+ [18]	+	+	− [39]	+	+	−	− [79]	−	+	− [39]
hd	+	+	+ [18]	+	+	− [139]	+	+	−	− [79]	−	+	− [139]
ɿ	+	+	+ [18]	+	+	− [39]	+	+	−	− [79]	−	+	− [39]
χ	−	−	+ [82]	+	+	− [39]	− [51]	+ [51]	−	+ [82]	+	− [114]	− [39]
πχ	−	−	− [82]	−	+ [82]	−	−	+	−	+ [82]	+	?	?
ψ	−	+	+ [82]	+	+	− [57]	−	−	+	+ [82]	+	−	− [139]
ŧ	−	+	+ [18]	−	+	− [39]	−	−	−	− [18]	−	−	− [39]

U prethodnoj tablici prikazano je ponašanje nekih poznatih kardinalnih funkcija u odnosu na osobine (1)-(9). Neki od tih podataka mogu se lako proveriti, dok se za neke pozivamo na literaturu (pozivanje nije uvek na izvorni rad).

4.2. KARAKTERIZACIJA KARDINALNIH FUNKCIJA

4.2.1. TEOREMA. (i) Kurepa - Suslinov broj c je najmanja kardinalna funkcija koja zadovoljava uslove (1), (4) i (6);

(ii) Raspon s je najmanja kardinalna funkcija koja zadovoljava uslove (1) i (3) ;

(iii) Gustina d je najveća kardinalna funkcija koja zadovoljava (2) i (5).

Dokaz. (i) Neka je $\varphi(X)=k$ i neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna celularna familija podskupova od X. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathcal{C}$ maksimalna celularna familija. Zato je skup $Y=\bigcup\{U:U\in\mathcal{C}\}$ gust podskup od X, te je prema (4)

$$(*) \qquad \varphi(Y)\leq \varphi(X).$$

S druge strane, preslikavajući svaki $U\in\mathcal{C}$ u po jednu tačku diskretnog prostora $Z=D(|\mathcal{C}|)$ kardinalnosti $|\mathcal{C}|$, dobija se neprekidno preslikavanje iz Y na Z. Prema (1) i (6) sada će biti

$$|\mathcal{C}|=|Z|=\varphi(Z)\leq\varphi(Y).$$

Poslednja nejednakost i (*) daju $|\mathcal{C}|\leq\varphi(X)$, što znači da će (po definiciji c) biti i

$$c(X)\leq\varphi(X).$$

Kako funkcija c zadovoljava data tri uslova (videti tablicu) to je tvrđenje dokazano.

(ii) Neka je $\varphi(X)=k$ i neka je A proizvoljan diskretan potprostor od X. Tada je, prema (1), $\varphi(A)=|A|$, a prema (3), $\varphi(A) \leq \varphi(X)$. Znači, $|A| \leq \varphi(X)$. Zato je i

$$s(X)=\sup\{|A| : A \text{ je diskretan potprostor od } X\} \leq \varphi(X).$$

Pošto s zadovoljava data dva uslova, to je zaista najmanja kardinalna funkcija koja zadovoljava (1) i (3).

(iii) Ako je $d(X)=k$ i A (proizvoljan) gust podskup od X sa $|A|=k$, tada iz (5) sledi $\varphi(X) \leq \varphi(A)$, dok je prema (2), $\varphi(A) \leq |A|=k$. Zaključujemo da je $\varphi(X) \leq d(X)$. Dokaz završavamo primećujući da gustina zadovoljava (2) i (5).

4.2.2. PRIMEDBA. Na potpuno isti način kao što je dokazano (ii) u prethodnoj teoremi, dokazuje se da je p najmanja kardinalna funkcija koja zadovoljava (1) i (3a).

4.2.3. PRIMEDBA. Ako je X parakompaktan prostor i kardinalna funkcija φ zadovoljava (1) i (3), tada je $l(X) \leq \varphi(X)$.

Zaista, neka je $\varphi(X)=k$ i, suprotno tvrđenju, $l(X) > k$. Neka je $\mathcal{P}$ otvoren pokrivač prostora X, čiji je svaki podpokrivač sastavljen iz više od k članova. Upišimo u ovaj pokrivač lokalno konačan podpokrivač $\mathcal{P}^*$ (čija će kardinalnost takođe biti veća od k). Iz svakog $U \in \mathcal{P}^*$ izaberimo po jednu tačku $x(U)$. Jasno, ona može biti sadržana u najviše konačno mnogo članova iz $\mathcal{P}^*$. Stoga postoji $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}^*$ tako da je $|\mathcal{A}|=|\mathcal{P}^*| > k$ i $x(U) \neq x(V)$ za $U,V \in \mathcal{A}$ takve da je $U \neq V$. Skup

$$A=\{x(U) :\ U \in \mathcal{A}\}$$

je diskretan prema načinu konstruisanja i kardinalnosti je $> k$.

Zato je, prema (3) i (1),

$$\varphi(X) \geqslant \varphi(A) = |A| > k,$$

što je suprotno pretpostavci.

Kako su u metričkim prostorima funkcije c i d jednake [28], to se iz teoreme 4.2.1 neposredno dobija

4.2.4. POSLEDICA. Ako je X metrički prostor i φ kardinalna funkcija, tada je $\varphi(X)=c(X)$ ako i samo ako φ zadovoljava (1), (2), (4), (5) i (6).

4.2.5. PRIMEDBA. U prethodnoj karakterizaciji Kurepa - Suslinovog broja za metričke prostore može se uslov (6) izostaviti i istovremeno (4) zameniti sa (3).

Dokaz. Neka je X metrički prostor i neka je $c(X)=k$.

Pokažimo najpre da je $c(X) \leqslant \varphi(X)$. Poznato je [36;teorema 4] da je u metričkim prostorima Kurepa - Suslinov broj dostiživ, to jest postoji celularna familija (u X) moći $c(X)=k$. Izaberimo iz svakog člana te familije po jedan element i dobićemo skup A koji je diskretan potprostor od X i moći je k. Zato, prema (3) i (1), dobijamo

$$\varphi(X) \geqslant \varphi(A) = |A| = k = c(X).$$

Dokažimo sada obrnutu nejednakost $c(X) \geqslant \varphi(X)$. Za svaki prirodni broj n posmatrajmo pokrivač $\mathcal{P}_n$ prostora X (otvorenim) skupovima dijametra $< 1/n$. Neka je $\mathcal{C}_n$ kolekcija svih celularnih podfamilija od $\mathcal{P}_n$ parcijalno uređena relacijom inkluzije $\subset$. Pošto svaki lanac u $\mathcal{C}_n$ ima gornju granicu (to je unija elemenata tog lanca), to po lemi Zorna $\mathcal{C}_n$ ima maksimalni element $\mathcal{M}_n$. Jasno, zbog $c(X)=k$ je $|\mathcal{M}_n| \leqslant k$. Iz svakog člana familije $\mathcal{M}_n$ izaberimo po jedan element i sa A_n označimo tako dobijeni skup. Stavimo

$$A=\bigcup\{A_n : n\in N\}.$$

Razume se, $|A|\leqslant k$. Dokažimo da je A gust u X. U suprotnom postoji $p\notin \bar{A}$, to jest, $p\in X$ tako da je $r(p,A)>0$, gde r označava metriku u X. Postoji $i\in N$ tako da je $r(p,A_i)\geqslant r(p,A)>1/i$. Tada otvorena kugla s centrom u p i dijametra $<1/i$ ne seče ni jedan član familije $\mathcal{M}_i$, što je nemoguće zbog maksimalnosti ove familije. Znači, A je gust u X. Prema (5) i (2) dobija se

$$\varphi(X)\leqslant\varphi(A)\leqslant|A|\leqslant k=o(X)$$

i dokaz je kompletiran.

Napomenimo još da se (slično) može pokazati da je kardinalna funkcija φ definisana na klasi bikompakta Eberleina jednaka c ako i samo ako zadovoljava (1), (2), (3) i (5). (v. [86])

(Bikompakt X se naziva bikompakt Eberleina ako u njemu postoji σ-tačkovno-konačna familija $\mathcal{F}$ otvorenih F_σ-skupova tako da važi: za proizvoljne različite tačke x i y iz X postoji $U\in\mathcal{F}$ koji sadrži samo jednu od tih tačaka [12;str.29].)

Iz teoreme 4.2.1 i nekih ranije navedenih teorema dobija se

<u>4.2.6. POSLEDICA</u>. (a) Ako kardinalna funkcija φ zadovoljava uslove (1), (4) i (6), tada je za proizvoljan linearno uređen prostor X ili proizvoljan sekvencijalan bikompakt X ili pseudoradijalan bikompakt X ili Hausdorfov prostor s prvom aksiomom prebrojivosti

$$|X|\leqslant\exp(\varphi(X))$$ (v. teoreme 1.3.18, 2.1.6, 1.3.20(iii));

ako je X α-rastegnut bikompakt, onda je

$|X| \leq \exp\exp(\varphi(X))$ (v. teoremu 1.3.17);

(b) Ako je X nasledno normalan prostor ili bikompakt u koji se ne može potopiti βN, φ kardinalna funkcija koja zadovoljava (1), (4) i (6), onda je $\varrho(X) \leq \exp(\varphi(X))$ (v. [82; str. 72]);

(c) Ako kardinalna funkcija φ zadovoljava (1) i (3), tada za proizvoljan Hausdorfov prostor X je

$$|X| \leq \exp\exp(\varphi(X)) \text{ i } o(X) \leq \exp\exp(\varphi(X)) \text{ (v. teor. 1.3.16)}$$

ako je X α-levi bikompakt, tada je $|X| \leq \varphi(X)$ (v. teor. 1.3.17);

(d) Neka kardinalna funkcija φ zadovoljava (1) i (3a). Tada za proizvoljan Hausdorfov prostor X s G_δ-dijagonalom važi

$$|X| \leq \exp(\varphi(X)) \text{ i } \mathcal{K}(X) \leq \exp(\varphi(X)) \text{ (v. teoremu 1.3.22)};$$

(e) Ako je φ_1 kardinalna funkcija koja zadovoljava (1) i (3), a φ_2 funkcija koja zadovoljava (2) i (5), tada je za svaki Hausdorfov prostor X

$$\varphi_2(X) \leq \exp(\varphi_1(X)) \text{ (v. teoremu 1.3.19)};$$

šta više

ako je X bikompakt, tada je $\varphi_2(X) \leq \varphi_1(X)^+$ (v. teor. 1.3.19),

ako je X diadski bikompakt, onda je $\varphi_2(X) \leq \varphi_1(X)$ (v. str. 10).

4.2.7. NAPOMENA. U (e) prethodne posledice važi stroža nejednakost: za svaki Hausdorfov prostor X je $h\varphi_2(X) \leq \exp(\varphi_1(X))$.

Zaista, ako pretpostavimo da tvrđenje nije tačno, onda postoji $Y \subset X$ tako da je $\varphi_2(Y) > \exp(\varphi_1(X))$. Kako je po pretpostavci φ_1 monotona (kardinalna) funkcija, to je $\varphi_1(Y) \leq \varphi_1(X)$, odakle se dobija

$$\varphi_2(Y) > \exp(\varphi_1(X)) \geq \exp(\varphi_1(Y)).$$

Ovo, međutim, protivreči rezultatu (e) (jer je Y Hausdorfov prostor).

Jasno, slične strože rezultate od rezulteta u (e) dobijamo i za slučajeve bikompakta i diadskih bikompakta.

4.2.8. TEOREMA. Neka je φ kardinalna funkcija koja zadovoljava uslove (1), (3) i (7). Tada

(i) $\varphi(D^k)=k$ i osim toga $\varphi(D(k)^{k^+})=k^+$;

(ii) $\varphi(\prod\{X_s:s\in S\})\geqslant|S|$;

(iii) U klasi nuldimenzionih prostora težina w je najveća kardinalna funkcija koja zadovoljava data tri uslova.

Dokaz. (i) Prostor D^k sadrži diskretan potprostor A moći k. Taj potprostor definišemo sa

$$A=\{x\in D^k:\ x_\alpha=1 \text{ i } x_\beta=0 \text{ za } \beta\neq\alpha\},\quad \alpha\in k.$$

Prema (3) i (1) tako dobijamo

$$\varphi(D^k)\geqslant\varphi(A)=|A|=k,$$

a prema (7) i (1) je

$$\varphi(D^k)\leq k\,\varphi(D)=k.$$

Za dokaz drugog dela koristimo jedan rezultat Mycielskog, koji kaže da se $D(k^+)$ može (kao zatvoren potprostor) potopiti u $D(k)^{k^+}$(v.,na primer,[79;str.83]). Zato imamo

$$\varphi(D(k)^{k^+})\leq k^+\,\varphi(D(k))=k^+\cdot k=k^+\quad \text{(prema (1) i (7))}$$

i takođe

$$\varphi(D(k)^{k^+})\geqslant\varphi(D(k^+))=k^+\quad \text{(prema (1) i (3))},$$

što daje

$$\varphi(D(k)^{k^+})=k^+.$$

(Jasno je da smo u drugom delu (3) mogli zameniti slabijim (3a)

(ii) Pošto (zbog pretpostavke da su svi prostori T_1) prostor $\prod\{X_s:s\in S\}$ sadrži skup $D^{|S|}$, to je prema (3)

$$\varphi(\prod\{X_s : s\in S\}) \geqslant \varphi(D^{|S|})$$

odnosno prema (i)

$$\varphi(\prod\{X_s : s\in S\}) \geqslant |S|.$$

(iii) Neka je X proizvoljan nuldimenzioni prostor težine $w(X)=k$. Po teoremi Aleksandrova (teorema 1.3.1), X možemo potopiti u Kantorov kub D^k. Na osnovu uslova (3) je tada $\varphi(X)\leqslant \varphi(D^k)$, odnosno prema (i) u ovoj teoremi, $\varphi(X)\leqslant k$. Znači, $w(X) \geqslant \varphi(X)$.

Iz tablice (str. 64) se vidi da w zadovoljava data tri uslova, što znači da je tvrdenje dokazano. ●

4.2.9. POSLEDICA. Ako funkcija φ zadovoljava (1), (3) i (7), a $f:\prod\{X_s : s\in S\}\longrightarrow Y$ je neprekidno preslikavanje, pri čemu su svi prostori X_s i Y Hausdorfovi, tada iz $\varphi(Y) < k$ i $d(X_s) < cfk$ za svaki $s\in S$, sledi da f zavisi od manje od k koordinata, to jest postoji $S_1\subset S$ sa $|S_1| < k$ tako da svake dve tačke x i y čije su S_1-koordinate jednake važi $f(x)=f(y)$. (uporediti sa posledicom u [82;str.123])

4.2.10. NAPOMENA. Ako funkcija φ zadovoljava (2), (3), (5) i (7), tada za proizvoljan potpuno regularan prostor X važi $\varphi(X)\leqslant w(X)$.

Stvarno, potopimo X u Tihonovski kub $I^{w(X)}$. Prema (3) i (7) dobićemo

$$\varphi(X) \leqslant \varphi(I^{w(X)}) \leqslant w(X)\,\varphi(I).$$

Prema dokazanom u teoremi 4.2.1 sledi da je, zbog (2) i (5), $\varphi(I)\leqslant d(I)=\aleph_0$, te zato prethodna nejednakost postaje $\varphi(X)\leqslant w(X)$.

4.2.11. TEOREMA. Neka je φ kardinalna funkcija koja zadovoljava (1),(3),(6) i (7). Tada je:

(i) $\varphi(\prod\{X_s : s \in S\}) = |S| \sup\{\varphi(X_s) : s \in S\}$;

(ii) U klasi bikompakta težina w je najveća kardinalna funkcija koja zadovoljava data četiri uslova ;

(iii) Ako φ sem ovih uslova zadovoljava i uslov

(* *) ako je $f:X \to Y$ neprekidna nesvodljiva surjekcija, tada je $\varphi(X) \leq \varphi(Y)$,

onda je za svaki bikompakt X, $\varphi(X) \leq \pi w(X)$;

(iv) Ako je X bikompakt i $\varphi(X) < k$, tada je za bar jednu tačku $x \in X$, $\pi\chi(x,X) < k$;

(v) Ako je X ekstremalno nepovezan bikompakt i $\varphi(X) < k$, tada je $\chi(x,X)<k$ za bar jedno $x \in X$.

Dokaz. (i) Po (ii) teoreme 4.2.8 iz (1),(3) i (7) imamo $\varphi(\prod\{X_s : s \in S\}) \geq |S|$. Prema (6), zbog neprekidnosti svih projekcija, dobijamo $\varphi(\prod\{X_s : s \in S\}) \geq \varphi(X_s)$ za svaki $s \in S$. (Na osnovu primedbe na 63. strani, vidi se da se ovde (6) može zameniti slabijim uslovom (6a)). Ove činjenice zajedno sa (7) dovode do zaključka o jednakosti u (i).

(ii) Poznato je da je svaki bikompakt X težine $w(X)=k$ neprekidna slika nekog zatvorenog podskupa H Kantorovog kuba D^k. Zato je prema (6), $\varphi(X) \leq \varphi(H)$, dok je prema (3), $\varphi(H) \leq \varphi(D^k)$, to jest $\varphi(H) \leq k$, prema (i) iz teoreme 4.2.8. Dakle, $\varphi(X) \leq w(X)$.

Pošto u klasi bikompakta w zadovoljava data četiri uslova [18;str.54], [82;str.103], to je tvrđenje potpuno dokazano.

(iii) Neka je X proizvoljan bikompakt za koji je $\pi w(X)=k$. Po teoremi V.I.Ponomarjova (teorema 12.1 u [111]) postoji neprekidno nesvodljivo preslikavanje prostora X na bikompakt Y težine k. Prema upravo dokazanom u (ii) ove teoreme, imamo $\varphi(Y)\leq w(Y)=k$ (zbog (1),(3),(6) i (7)), a uslov (**) daje $\varphi(X)\leq\varphi(Y)$, te je konačno $\varphi(X)\leq k=\pi w(X)$.

(iv) Pretpostavimo, suprotno tvrđenju teoreme, da je za svaki $x\in X$ zadovoljeno $\pi\chi(x,X)\geq k$. Po teoremi 1.3.10 Šapirovskog, tada se X može neprekidno preslikati na Tihonovski kub I^k. Zato (6) daje $\varphi(X)\geq\varphi(I^k)$. Prema (ii) u ovoj teoremi i činjenici da je I bikompakt imamo $\varphi(I)\leq w(I)=\aleph_0$. Sada prema (1), (3) i (7) dobijamo

$$\varphi(X)\geq\varphi(I^k)=k\cdot\varphi(I)=k,$$

što je kontradikcija.

(v) Neka je $\chi(x,X)\geq k$ za svaki $x\in X$. Tada se po teoremi 1.3.7 X može neprekidno preslikati na Kantorov kub D^k. Prema (6) je zato $\varphi(X)\geq\varphi(D^k)$, odnosno $\varphi(X)\geq k$ na osnovu (i) teoreme 4.2.8. Ovo je, međutim, suprotno pretpostavci $\varphi(X)<k$.

Teorema je potpuno dokazana.

Iz teoreme 1.3.8, teoreme 1.3.9 i upravo dokazane teoreme lako se dobija sledeći

4.2.12. STAV. Ako za kardinalnu funkciju φ koja zadovoljava (1),(3),(6) i (7) i bikompakt X važi

(a) $\varphi(X)\leq\log(k^+)$ (b) $\varphi(X)<\log k$,

tada je (a') $hm(X)\leq k$ i (b') $m(X)<k$, redom.

Iz teoreme 2.1.6, teoreme 15 u [16]: za svaki α-rastegnut bikompakt X je $w(X) \leq \exp(c(X))$, zajedno sa (i) u teoremi 4.2.1 i (ii) teoreme 4.2.11, dobija se

4.2.13. POSLEDICA. Ako su φ_1 i φ_2 kardinalne funkcije takve da prva zadovoljava uslove (1), (3), (6) i (7) a druga (1), (4) i (6), tada za svaki α-rastegnut bikompakt X i svaki pseudoradijalni bikompakt X važi

$$\varphi_1(X) \leq \exp \varphi_2(X).$$

4.2.14. PRIMEDBA. Za klasu diadskih bikompakta može se uslov (3) u ocenjivanju težine prostora ((ii) u teoremi 4.2.11) izostaviti.

Zaista, prema teoremi 1.3.2, diadski bikompakt X težine k je neprekidna slika prostora D^k. Zato je prema (6), (7) i (1), redom,

$$\varphi(X) \leq \varphi(D^k) \leq k \cdot \varphi(D) = k,$$

to jest, $\varphi(X) \leq w(X)$.

Šta više, može se umesto (1) uzeti uslov (2) i težina će biti najveća kardinalna funkcija definisana na klasi diadskih bikompakta koja zadovoljava uslove (2), (6) i (7).

Iz primedbe 4.2.14 (i teoreme 4.2.11), (ii) u teoremi 4.2.1 i činjenice da je za svaki diadski bikompakt $w=s$ (v. str.10), dobija se važna

4.2.15. POSLEDICA. Kardinalna funkcija φ definisana na klasi diadskih bikompakta jednaka je težini w ako i samo ako zadovoljava uslove (1),(3),(6) i (7).

Istaknimo da su ova četiri uslova ((1),(3),(6) i (7)) nezavisna. Zaista, kardinalne funkcije

$$s,\ d,\ \varphi(X)=\begin{cases}|X|, & \text{ako je } X \text{ diskretan}\\ \chi(X), & \text{u suprotnom}\end{cases},\quad \varphi(X)=\aleph_0 \ \text{za svaki } X$$

zadovoljavaju, redom, svaki od datih uslova osim uslova (7), (3), (6) i (1), redom.

U vezi sa ocenama za d i s datim u teoremi 4.2.1 daćemo i sledeće.

Sa $C_p(X)$ označimo prostor svih neprekidnih realno-značnih funkcija definisanih na datom prostoru X u odnosu na topologiju potprostora stepena R^X (topologija tačkovne konvergencije).

Za datu kardinalnu funkciju φ (i dati prostor X) stavimo

$$\phi(X)=\varphi(C_p(X)).$$

Jasno je da je potpuno logično sledeće načelno pitanje: Ako funkcija φ zadovoljava određen skup uslova, koje uslove zadovoljava funkcija ϕ ?

Evo odgovora za dva takva skupa uslova (povezanih sa d i s).

Neka φ zadovoljava uslove (2),(3),(5) i (7). Tada imamo

$$\varphi(C_p(X)) \overset{(3)}{\leq} \varphi(R^X) \overset{(7)}{\leq} |X|\cdot\varphi(R) \leq \ ((\text{iii}) \text{ u teoremi } 4.2.1)$$
$$\leq |X|\, d(R)=|X|,$$

odnosno, $\phi(X)\leq |X|$.

Neka sada φ zadovoljava (1),(3),(5) i uslov

$$(\ast\ast)\quad \varphi(\prod\{X_s : s\in S\}) \geq |S| \sup\{\varphi(X_s): s\in S\}.$$

Tada je

$$\varphi(C_p(X)) \overset{(5)}{\geq} \varphi(R^X) \overset{(\ast\ast)}{\geq} |X|\, \varphi(R) \overset{(1)+(3)}{\geq} ((\text{ii}) \text{ teorema } 4.2.1)$$
$$\geq |X|\, s(R)=|X|.$$

Dakle, važi sledeći (jednostavan)

4.2.16. STAV. (i) Ako funkcija φ (2),(3),(5) i (7), tada ϕ zadovoljava (2);

(ii) Ako φ zadovoljava (1),(3),(5) i (**), onda je za proizvoljan prostor X, $\phi(X) \geq |X|$.

Napomenimo još da ako φ zadovoljava (6b), tada ϕ zadovoljava (6). Stvarno, ako je $f:X \to Y$ neprekidna surjekcija, tada je preslikavanje $T:C_p(Y) \to C_p(X)$ definisano sa $T(g)=g\circ f$ neprekidna bijekcija, pa je prema (6b), $\varphi(C_p(Y)) \leq \varphi(C_p(X))$, odnosno $\phi(Y) \leq \phi(X)$, što je uslov (6).

Na kraju dokažimo i sledeću teoremu o pseudokarakteru topoloških grupa.

4.2.17. TEOREMA. U klasi topoloških grupa pseudokarakter ψ je najveća kardinalna funkcija koja zadovoljava uslove (6b), (7) i uslov

(M) za svaki metrički prostor X je $\varphi(X)=\aleph_0$.

Dokaz. Kako ψ zadovoljava data tri uslova (v. tabelu u 4.1) to je potrebno samo dokazati da ako je φ proizvoljna kardinalna funkcija definisana na klasi topoloških grupa koja zadovoljava date uslove, tada je $\varphi \leq \psi$. Neka je G proizvoljna topološka grupa sa $\psi(G)=k$ i $\mathcal{B}$ familija otvorenih podskupova od G takva da je $\bigcap\{U:U\in\mathcal{B}\}=\{e\}$ i $|\mathcal{B}| \leq k$ (e je neutral u G). Za svaki $U\in\mathcal{B}$ postoji neprekidno preslikavanje $f_U:G\to M_U$, gde je M_U metrizabilan prostor, tako da za svako $x\in G$ postoji okolina Vx za koju je $f_U^{-1}(Vx)\subset xU$ (v.,na primer, [23;stav 1.7]).

Dijagonalni proizvod f preslikavanja f_U, $U \in \mathcal{B}$, je neprekidna bijekcija iz G na $\prod\{M_U : U \in \mathcal{B}\} = M$. Zato je prema (6b), (7) i (M), redom,

$$\psi(G) \leq \psi(M) \leq |\mathcal{B}| \sup\{\psi(M_U) : U \in \mathcal{B}\} \leq |\mathcal{B}| \cdot \aleph_0 = |\mathcal{B}| \leq k,$$

što je i trebalo dokazati.

L I T E R A T U R A

[1] D.ADNAĐEVIĆ, Topologija, Naučna knjiga, Beograd,1980,str.232.

[2a] П.С.АЛЕКСАНДРОВ, Введение в теорию множеств и общую топологию, "Наука",Москва,1977, стр.368.

[2b] П.С.АЛЕКСАНДРОВ,П.С.УРЫСОН, Мемуар о компактных топологических пространств, "Наука",Москва,1971, стр.144.

[3] Г.П.АМИРДЖАНОВ, Плотность,число Суслина и теснота топологических пространств, ДАН СССР 209:2(1973),265-268.

[4] Г.П.АМИРДЖАНОВ, О всюду плотных подпространствах счетного псевдохарактера и других обобщениях сепарабельности,ДАН СССР 234:5(1977),993-996;Вестник МГУ 6(1977),64-71.

[5] Г.П.АМИРДЖАНОВ,Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О всюду плотных подмножеств топологических пространств,ДАН СССР 214:2(1974),249-252.

[6] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Аппроксимация теории диадических бикомпактов, ДАН СССР 184:4(1969),767-770.

[7] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О мощности бикомпактов с первой аксиомой счётности, ДАН СССР 187:5(1969),967-970.

[8] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Число Суслина и мощность,характеры точек в секвенциальных бикомпактах, ДАН СССР 192:2(1970),255-8.

[9] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О бикомпактах,которые удовлетворают условию Суслина наследственно.Теснота и свободные последовательносты, ДАН СССР 199:6(1971), 227- 230.

[10] A.V.ARHANGELSKIJ,On cardinal invariants,III Prague Symp.,37-46.

[11] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Спектр частот топологического пространства и классификация пространств,ДАН 206:2(1972),265-268.

[12] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О некоторых топологических пространств,встречающихся в функциональном анализе,УМН 31:5(1976),17-32

[13] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Теоремы о мощности семейств множеств в бикомпактах, ДАН СССР 226:5(1976),993-996.

[14] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О пространствах, растянутых влево, Вестник МГУ сер.матем.,мех.5(1977),30-36.

[15] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О топологиях,допускающих слабую связь с упорядочениями, ДАН СССР 238:4(1978),773-776.

[16] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Об α-растянутых простанствах,ДАН СССР 239:3(1978),505-508.

[17] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О пространствах непрерывных функций в топологии поточечной сходимости,ДАН 240:3(1978),505-508.

[18] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты,УМН 33:6,29-84.

[19] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Об инвариантах типа характера и веса,Труды Моск.мат.общества 38(1979),3-27.

[20] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Спектр частот топологического пространства и операция произведения,Труды ММО 40(1979),171-206.

[21] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ,Одна теорема о мощности,УМН 34:4(1979),177-78.

[22] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Кардинальные инварианты топологических групп.Вложения и уплотнения,ДАН 247:4(1979),779-783.

[23] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпрос.,УМН 35:3(1980),3-22.

[24] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, О некоторых свойствах радиальных пространств, Матем.заметки 27:1(1980),95-104.

[25] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Классы топологических групп,УМН 36:3(1981).

[26] A.V.ARHANGELSKII,S.P.FRANKLIN, Ordinal invariants for topological spaces,Mich.Math.J.15:3(1968),313-320.

[27] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ,В.И.ПОНОМАРЁВ, О диадических бикомпактах, ДАН СССР 182:5(1968),993-996.

[28] А.В.АРХАНГЕЛЬСКИЙ,В.И.ПОНОМАРЁВ, Основы общей топологии в задачах и упражнениях,"Наука",Москва,1974,стр.424.

[29] И.БАНДЛОВ, Непрерывные отображения экстремально несвязных бикомпактов на Канторов дисконтинуум, Вестник МГУ сер. матем.,мех.,5(1979),56-59.

[30] M.BELL,J.GINSBURG,G.WOODS, Cardinal inequalities for topological spaces involving the weak Lindelof number ,

Pacific J.Math.79:1(1978),37-45.

[31] A.BLASZCZYK, On mappings of extremally disconnected compact spaces onto Cantor cubes,Coll.Math.Soc.Janos Bolyai Budapest 1978,Amsterdam,1980,143-153.

[32] D.K.BURKE,R.E.HODEL, The number of compact subsets of a topological space,Proc.Amer.Math.Soc.58:3(1976),363-368.

[33] Г.И.ЧЕРТАНОВ, Опсевдорадиальности конечных произведений,IV Тирасп.симп.по общей топол.1979,160.

[34] A.CHARLESWORTH, On the cardinality of topological space,Proc. Amer.Math.Soc.66:1(1977),138-142.

[35] W.W.COMFORT, An example in density character,Arch.Math.14:6 (1963),422-423.

[36] W.W.COMFORT, A survey of cardinal invariants, Gen.Top. and Appl.1:2(1971),163-199.

[37] E.K.van DOUWEN, Density of compactifications, in:Set-theoretic topology,Academic Press,New York,1977,97-110.

[38] E.K.van DOUWEN, Nonhomogeneity of products of preimages and π-weight, Proc.Amer.Math.Soc.69:1(1978),183-192.

[39] E.K.van DOUWEN,T.C.PRZYMUSIŃSKI, First countable and countable spaces all compactifications of which contain N, Fund.Math.102:3(1979),229-234.

[40] E.K.van DOUWEN,T.C.PRZYMUSIŃSKI, Separable extensions of first countable spaces,Fund.Math.80:2(1980),147-158.

41] Б.А.ЕФИМОВ, О мощности хаусдорфовых пространств, ДАН СССР 164:5(1965),967-970.

42] Б.А.ЕФИМОВ, Диадические бикомпакты, Труды Моск.мат.общества 4(1965),211-247.

13] Б.А.ЕФИМОВ, Об экстремально несвязных бикомпактах, ДАН СССР 172:4(1967), 771-774.

4] Б.А.ЕФИМОВ, О подпространствах диадических бикомпактов, ДАН СССР 185:5(1969),987-990.

5] Б.А.ЕФИМОВ, О вложении Стоун-Чеховских компактификаций дискретных пространств в бикомпакты,ДАН 189:2(1969),244-246.

[46] Б.А.ЕФИМОВ, Экстремально несвязные бикомпакты и абсолюты,Труды ММО 23(1970), 235-276.

[47] B.A.EFIMOV, On the embeddings of extremally disconnected spaces into bicompacta, Proc.third Prague Topol.Symp.1971, Prague,1972, 103-107.

[48] Б.А.ЕФИМОВ, О мощности расширений диадических пространств, Матем.сборник 96:4(1975),614-632.

[49] Б.А.ЕФИМОВ, Отображения и вложения диадических пространств, Матем.сборник 103:1(1977),52-68.

[50] Б.А.ЕФИМОВ, О сверхмощности пространств,ассоцированных с ультрафильтрами, Матем.заметки 24:2(1978),279-288.

[51] R.ENGELKING, General topology, PWN,Warszawa,1977,str.626.

[52] В.В.ФЕДОРЧУК, Совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств,ДАН 220:4(1975),786-788.

[53] В.В.ФЕДОРЧУК, О мощности наследственно сепарабельных бикомпактов, ДАН СССР 222:2(1975),302-305.

[54] V.V.FEDORČUK, A compact space having the cardinality of the continuum with no convergent sequences, Math.Proc.Camb.Phil.Soc.81:2(1977),177-181.

[55] V.V.FEDORČUK, Fully closed maps,scannable spectra and cardinality of hereditarily separable spaces, Gen.Topol. and Appl.10:2(1979),247-274.

[56] R.FRANKIEWICZ, A short proof of a cardinal inequality involving homogeneous spaces,Proc.AMS 75:2(1979),372-373.

[57] L.GILLMAN,M.JERISON, Rings of continuous functions,New York, 1976,str.XIV+300.

[58] J.GINSBURG,R.G.WOODS, A cardinal inequality for topological space involving closed discrete sets,Proc.Amer.Math. Soc.64:2(1977),357-360.

[59] А.А.ГРЫЗЛОВ, О прелельных точках счётных множеств пространства N,IV Тирас.сим.по общей топол. 1979,29.

[60] А.А.ГРЫЗЛОВ, Две теоремы о мощности топологических пространств,ДАН СССР 251:4(1980),780-783.

[61] J.de GROOT, Discrete subspaces of Hausdorff spaces,Bull.Acad. Polon.Sci.sér.math.,astr.et phys.13:8(1965),537-544.

[62] A.HAJNAL,I.JUHÁSZ, Discrete subspaces of topological spaces, Indag.Math.29:3(1967),343-356.

[63] A.HAJNAL,I.JUHÁSZ, Discrete subspaces of topological spaces II, Indag.Math.31:1(1969),18-30.

[64] A.HAJNAL,I.JUHÁSZ, Some remarks on a property of topological cardinal functions,Acta Math. Acad.Sci. Hung. 20:(1-2) (1969),25-37.

[65] A.HAJNAL,I.JUHÁSZ, On discrete subspaces of product spaces, Gen.Top.and Appl.2:1(1972),11-16.

[66] A.HAJNAL,I.JUHÁSZ, A consistency results concerning hereditarily α-separable spaces, Indag. Math.35:4(1973),301-307.

[67] A.HAJNAL,I.JUHÁSZ, A consistency results concerning hereditarily α-Lindelof spaces, Acta Math.Acad.Sci.Hung. 24:(3-4)(1973),307-312.

[68] A.HAJNAL,I.JUHÁSZ, On hereditarily α-Lindelof and α-separable spaces II,Fund.Math.81:2(1974),147-158.

[69] H.HERRLICH, Quotienten geordneter Räume und Folgenkonvergenz, Fund.Math.61:1(1967),79-81.

[70] R.E.HODEL, New proof of a theorem Hajnal and Juhasz on the cardinality of topological spaces,Bull.Acad.Polon.Sci. sér.math.,astr.and phys.34:11(1976),999-1000.

[71] R.E.HODEL, Extensions of metrization theorems to higher cardinality, Fund.Math.87:2(1975),219-229.

[72] J.R.ISBELL, Remarks on spaces of large cardinal numbers, Czechosl.Math.J.14:1(1964),89-91.

[73] А.В.ИВАНОВ, О бикомпактах,все конечные степени которых наследственно сепарабельны,ДАН СССР 243:5(1978),1109-1112.

[74] I.JANE,P.R.MEYER,R.G.WILSON, On tightness in chain-net spaces,1980,preprint.

[75] Т.ЙЕХ, Теория множеств и метод форсинга,"Мир",Москва,1973,с150

[76] T.JECH, Set theory, Academic Press,New York,1978,str.XIV+622.

[77] F.B.JONES, The utility of empty inverse limits, Proc.third Prague Top.Symp.1971, Prague,1972,223-228.

[78] I.JUHÁSZ, Martin's axiom solves Ponomarev's problem, Bull.Acad Polon.Sci.,sér.math.,astr. et phys.18:2(1970),71-74.

[79] I.JUHÁSZ, Cardinal functions in topology, Math.Centrum, Amsterdam,1971,str.XIII+149.

[80] I.JUHÁSZ, On two problems of A.V.Arhangelskii, Gen.Top.and Appl.2:2(1972),151-156.

[81] I.JUHÁSZ, Consistency results in topology, Handbook of Math. Logic,North-Holand,Amsterdam,1977,503-523.

[82] I.JUHÁSZ, Cardinal functions in topology - ten years later, Math.Centrum,Amsterdam,1980,str.IV+160.

[83] I.JUHÁSZ,K.KUNEN, On the weight of Hausdorff spaces, Gen.Top. and Appl.3:1(1971),47-49.

[84] I.JUHÁSZ,K.KUNEN,M.E.RUDIN, Two more hereditarily separable non - Lindelof spaces, Canad. J. Math. 28:5(1976), 998-1005.

[85] Дж.Л.КЕЛЛИ, Общая топология,"Наука",Москва,1981,стр.432.

[86] Lj.KOČINAC, O nekim osobinama kardinalnoznačnih funkcija, Zbornik radova Fifozofskog fakulteta Niš(1981),301-306.

[87] Lj.KOČINAC, A note on pseudo-radial spaces, Math. Balkanica (u pripremi)11(1981).

[88] Lj.KOČINAC, The extensions of topological spaces and some cardinal functions,Math.Balkanica(u pripremi)11(1981).

[89] Lj.KOČINAC, On countable subsets of topological spaces(u pr.)

[90] Lj.KOČINAC, Quelques propriétés des fonctions cardinales, Publ.Inst.Math.Belgrade 34(48)(1983).

[91] А.И.КРИВОРУЧКО, О кардинальных инвариантах пространств отображений,ДАН СССР 213:1(1973),34-37.

[92] K.KUNEN, Some points in βN, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80:3(1977),385-398.

[93] K.KUNEN, Set theory(an introduction to independence proofs), North-Holland,Amsterdam,1980,str.XVI+313.

[94] D.KUREPA, Ensembles ordonnés et ramifiés,Thèsis,Paris,1935.

[95] D.KUREPA, Le problème de Souslin et les espaces abstraits, C.R.Acad.Sci.Paris,sér.A-B 204(1937),325-327.

[96] Đ.KUREPA, On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence of the cardinal number of its chains and antichains,Gl.MFA 14(1959),187-203.

[97] Đ.KUREPA, The cartesian multiplication and cellularity number,Publ.Inst.Math.(Beograd)2(1962),121-139.

[98] G.KUREPA, La condition de Souslin et une propriété caracteristique des nombres réels, C.R.Acad.Sci.Paris,sér. A-B 231:2(1950),1113-1114.

[99] G.KUREPA, Sur une propriété caracteristique du continu linéaire et la problème de Souslin, Publ. Inst. Math. (Beograd)4(1952),97-108.

[100] R.LEVY,R.H.Mc DOWELL, Dense subsets of βX, Proc.Amer.Math. Soc.50:3(1975),426-430.

[101] В.И.МАЛЫХИН, О тесноте и числе Суслина в expX и в произведений пространств,ДАН СССР 203:5(1972),1001-1003.

[102] В.И.МАЛЫХИН, О счётних пространствах,не имеющих бикомпактификаций счётной тесноти,ДАН 206:6(1972),1293-1296.

[103] V.I.MALYHIN, On the power of first countable T_1-bicompacta, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai Budapest 1978,Amsterdam, 1980, 827-828.

[104] В.И.МАЛЫХИН,В.И.ПОНОМАРЁВ, Общая топология, "Итоги науки и техники 13(1975),149-229.

[105a] M.MARJANOVIĆ, Numerical invariants of 0-dimensional spa-

ces and their cartesian multiplication,PIM 17(1974),113.

[105] В.И.МАЛЫХИН,Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, Аксиома Мартина и свойства топологических пространств,ДАН 213:3(1973),532-535.

[106] A.K.MISRA, A topological view of P-spaces, Gen. Top. and Appl.2:4(1972),349-362.

[107] T.MIZOKAMI, Cardinal functions on hyperspaces, Coll. Math. 41:2(1979),201-205.

[108] P.NYIKOS,H.C.REICHEL, Some results on cardinal functions in metrization theory,Glasnik Mat.15(1980),183-202.

[109] A.J.OSTASZEWSKI, On countably compact,perfect normal spaces, J.London Math.Soc.14:2(1976),505-516.

[110] R.POL, Short proofs of two theorems on cardinality of topological spaces, Bull. Acad. Polon. Sci.,sér.math., astr. et phys.22:12(1974),1245-1249.

[111] В.И.ПОНОМАРЁВ, О пространствах,соабсолютных с метрическими, Успехи мат.наук 21:4(1966),101-132.

[112] В.И.ПОНОМАРЁВ, О мощности бикомпактов с первой аксиомой счётности,ДАН СССР 196:2(1971),296-298.

[113] В.И.ПОНОМАРЁВ,Л.Б.ШАПИРО, Абсолюты топологических пространств и их непрерывные отображения,УМН 31:5(1976),121-136

[114] Д.В.РАНЧИН, Теснота,секвенциальность и замкнутые покрития, ДАН СССР 232:5(1977),1015-1018.

[115] P.ROY, The cardinality of first countable spaces, Bull.Amer. Math.Soc.77:6(1971),1o57-1o59.

[116] M.E.RUDIN, Lectures on set theoretic topology, CBMS N^{o}23, AMS Providence, Rhode Island,1975,str.II+76.

[117] Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О дискретных подпространствах топологических пространств.Вес,теснота и число Суслина, ДАН СССР 202:4(1972),779-782.

[118] Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О плотности топологических пространств,ДАН СССР 206:3(1972),559-562.

Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О сепарабельности метризуемости пространств с условием Суслина, ДАН СССР 207:4(1972),800-803.

Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, Канонические множества и характер. Плотность и вес в бикомпактах, ДАН СССР 218:1(1974),58-61.

Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О пространствах с условием Суслина и Шанина, Матем.заметки 15:2(1974),281-288.

Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О π-характере и π-весе в бикомпактах, ДАН СССР 223:4(1975),799-802.

Б.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О мощности наследственно нормальных пространств, ДАН СССР 225:4(1975),767-770.

.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О тесноте, π-весе и близких к ним понятиях, Уч.зап.Латв.ун.-та 257:2(1976),88-99.

.Э.ШАПИРОВСКИЙ, О наследственно нормальных бикомпактах, топол.конф. Минск 1977,205.

.Э.ШАПИРОВСКИЙ, Об отображениях на Тихоновские кубы, УМН 35:3(1980),122-130.

.Э.ШАПИРОВСКИЙ, Кардинальные инварианты в бикомпактах, у: Семинар по общей топологии, МГУ,1981,162-187.

.E.ŠAPIROVSKII, Special types of embeddings in Tychonoff cubes. Subspaces of Σ-products and cardinal invariants, Budap.1978 Symp., Amsterdam 1980,1055-1086.

.В.ЩЕПИН, Топология предельных пространств несчётных обратных спектров, УМН 31:5(1976),191-226.

.SHELAH, Remarks on cardinal invariants in topology, Gen. Top.and Appl.7:2(1977),251-259.

.D.TALL, Some set-theoretic consistency results in topology, Proc.III Prague 1971 Symp., Prague,1972,419-425.

A.STEEN, J.A.SEEBACH, Jr, Counterexamples in topology, New York,1970, str.XIV+210.

D.TALL, The countable chain condition versus separability-applications of Martin's axiom, Gen.Top. and Appl. 4:4(1974),315-339.

И.Г.ТКАЧЕНКО, Цепи и кардиналы, ДАН СССР 239:3(1978), 546-549.

И.Г.ТКАЧЕНКО, О поведении кардинальных инвариантов, Вестник МГУ сер.матем., мех.4(1978), 50-58.

В.М.УЛЬЯНОВ, О бикомпактных расширениях с первой аксиомой счётности, Вестник МГУ сер.мат., мех.2(1973), 13-18.

В.М.УЛЬЯНОВ, О бикомпактных расширениях с первой аксиомой счётности, не повышающие веса и размерности, ДАН СССР 217:6(1974), 1263-1265.

В.М.УЛЬЯНОВ, Примеры финально компактных пространств, не имеющих бикомпактных расширений счётного характера, ДАН СССР 220:6(1975), 1282-1285.

В.М.УЛЬЯНОВ, О бикомпактных расширениях счётного характера и абсолютах, Матем.сборник 98:2(1975), 233-254.

R.C.WALKER, The Stone-Čech compactification, New York, 1974, str.X+332.

S P I S A K   P O J M O V A

ıioma konstruktivnosti 2
- Martina 2
levi prostor 7;69
'astegnut prostor 7;68

:ompakt Eberleina 68
:ompaktifikacija 46
· prebrojivog karaktera 49
· prebrojive tesnote 60

.ularna familija 5
i $\mathcal{C}^*$-potopljen skup 38
. $\mathcal{C}^*$klase 38

ıni prostor 7
:arakter 5
ıistem 5

ıtremalno nepovezan 12
ɔX 30
slabo savršen prostor 30

ːchét-Urisonov prostor 16

ıtina bikompaktifikacije 52
- prostora 5
- - je najveća 65

ɔer moć prostora 47

Indeks radijalnosti 20
- - je $\leq rt^+$ 20

Kalibar 7
Karakter prostora 4;72
- bikompaktifikacije 49
Kardinalna funkcija 3
Kardinal,regularan 1
Kvazi-Lindelöfov broj 6
Kontinuum hipoteza 1
Kurepa-Suslinov broj 5
- - - proširenja 55
- - -je jednak φ 67
- - - je najmanji 65
- - - P-prostora 33
- - svojstvo 5

Levi prostor 7
Lindelofov broj 6
- - parakompakta 66

Masivnost 5;73
Mreža 4
Mrežna težina 4

Naslednа gustina 7
- Lindelefov broj 7
$\mathcal{N}$-prostor 32
- - prebrojivog raspona [illegible]
$\mathcal{N}$-tačka 32

π-baza 4
π-karakter 4;72
π-težina 4;72
Predkalibar 7
Princip Jensena 2;26
- Ostaševskog 3;26
Pseudobaza 4
Pseudokarakter 5
- je najveći 76
Pseudoradijalan prostor 17
- - je sekvencijalan 22
Pseudotežina 4
P-prostor 31

Raspon prostora 6
- je najmanji 65
r-gustina 21
Radijalan prostor 17
Radijalno zatvorenje 17
Radijalna tesnota 19

Savršen prostor 23
Slab Lindelofov broj 6
Slab pokrivač 6
Slabo savršen prostor 26
Stacionaran skup 2
Stepen metrizabilnosti 42
- parakompaktnosti 42
- p-osti 42
- pseudokompaktnosti 44
- - je $\leq c$ 44
Šaninov broj 7

Teorema Arhangeljskog 14
- Hajnala-Juhásza 14;15
- Juhásza 14
- Kurepe 13
- Šapirovskog 13;73
Tesnota prostora 3
- proširenja 49;60
Težina prostora 3
- je najveća 70;72
- diadskog bikompakta 74