UNIVERZITET U BEOGRADU

Jarić P. Jovo

TEORIJA POVRŠINA DISKONTINUITETA U MEHANICI KONTINUUMA

/Doktorska disertacija/

Beograd, 1972

S a d r ž a j

1. Uvod

Za reafirmaciju i značaj problema površina diskontinuiteta posebno je bila značajna 1961 godina. Te godine pojavila su se dva značajna reda iz ove oblasti. U knjizi " Progress in solid mechanics ", čiji su editori I.N. Sneddon i R. Hill, nalazio se rad monografskog karaktera " Discontinuity relations in mechanics of solids " od R. Hill-a [1]. U samom uvodu se kaže:

" Bitna komponenta tehnike za rešavanje graničnih problema u mehanici kontinuuma je izučavanje površina diskontinuiteta zavisno promenljivih i njihovih izvoda. Ove površine mogu biti izolovane ili karakteristične u punom smislu; mogu biti stacionarne ili se prostirati kao talas. Problem je očaravajući, težak ali i široko primenljiv. Biće to, bez sumnje, problem od velikog značaja u bliskoj budućnosti sa nastankom novih i reorganizacijom starih grana mehanike solida.

Medjutim, jasna analitička sredstva za razmatranje opštih diskontinuiteta su daleko od poznatih, a nije se pojavio ni neki iscrpan nov prilog. Glavni izvori su Hadamard-ova monumetalna klasika od 19o3 god., sada uveliko zaboravljena; privlačna, mada ograničena, mala knjiga Levi Čivita-e od 1932 god. i niz vrednih ali ne i lako čitljivih radova Thomas-a od 1953 god. pa na ovamo.

Sadašnji trenutak poziva hitno na sveobuhvatno i detaljno izlaganje osnovne analize ...."

U radu je na nekim primerima izložena primena površina diskontinuiteta. Dat je i niz originalnih rezultata ali ne i jedna nova opšta teorija površina diskontinuiteta.

Iste godine štampan je rad C. Truesdell-a: General and exact theory of waves in finite elastic strain " [2] . Može se slobodno reći da je to fundamentalan rad u problemu prostiranja talasa.

Dobijeni rezultati su opšteg karaktera i obuhvataju kao specijalan slučaj rezultate niza drugih radova, npr. Hayes-a i Rivlina [3] , Toupin-a i Berstein-a [4] . Ono što je za nas ovde posebno značajno jeste metoda. To je bila metoda površina diskontinuiteta. U radu su date dve fundamentalne teoreme kao i analiza značaja i nedostataka teorije površina diskontinuitea. Prvi put je pokazano da je metoda površina diskontinuiteta potpuna i egzaktna.

Time je potvrdjen, u istoj godini, stav koji je izrekao R. Hill.

U istom radu C. Truesdell detaljno diskutuje sve komponente primene teorije površina diskontinuiteta i ističe nedostatak nepostojanja njene opšte teorije i opasnost da se na ovom stepenu njenog razvoja njena primena ne pretvori u čisti formalizam.

Mada nije proteklo mnogo vremena ipak smo u mogućnosti da ocenimo svu dalekovidost predvidjanja C. Truesdell-a i R. Hill-a. Od tada pa do danas samo broj radova iz oblasti prostiranja talasa, koji se baziraju na primeni teorije površina diskontinuiteta, je ogroman. Posebno poglavlje čine radovi koji tretiraju problem talasa ubrzanja za razne materijale. Navešćemo neke.

Talase ubrzanja u elastičnim materijalima izučavali su Thomas [5] , Toupin i Berstein [4] , Truesdell [2] , Hill [6], Chen [7] ;

u visko-elastičnim materijalima Varly [8] , Dunwoody [9] ; u hiper-elastičnim materijalima Niroboli [10] , Varley i Dunwoody [11] ; u elektro-magnetnim solidima McCarty [12] , McCarty i Green [13] ; u termoelastičnim materijalima Chen [14] ; u mikropolarnim visko-elastičnim materijalima McCarty i Eringen [15] ; u materijalima sa memorijom Coleman 16 , Gurtin i Herrera [17], Coleman i Gurtin [18] itd..

Dobar deo radova odnosi se na rast ili opadanje talasa ubrzanja kao što su radovi Chen-a [19] , Suhubi-a [20] , Nariboli-a i Juneja [21] itd..

U istom vremenskom razmaku i mehanika kontinuuma se obogatila nizom novih teorija. Posebna pažnja je bila posvećena nelinearnoj mehanici kontnuuma. To je uslovilo razvoj pojedinih matematičkih disciplina kao što su teorija grupa, teorija invarijanata, funkcionalna analiza, diferencijalna geometrija i drugih oblasti primenjene matematike. Najnoviji rezultati drugih posebnih nauka nalaze svoje primene u mehanici kontinuuma. To se prvenstveno odnosi na fiziku i hemiju. Unutrašnja struktura materijala postaje predmet istraživanja i u mehanici kontinuuma. Izučavaju se razni modeli materijala i daju odgovarajuće teorije koje adekvatno opisuju ponašanje takvih materijala. Takve teorije su teorija polarnog i multipolarnog kontinuuma, teorija orijentisanog kontinuuma, teorija mikropolarnog kontinuuma, teorija mikromorfnog kontinuuma itd..

U dinamičkim problemima ovih teorija posebno interesovanje izazivaju efekti nelinearnosti. To se odnosi prvenstveno na problem prostiranja talasa. Efekti talasa višeg reda i mogućnost prostiranja talasa u materijalima sa mikrostrukturom ili orijentisanih materijala postaje predmet eksperimentalnih istraživanja i to iz dva osnovna razloga. Prvi je vezan za proveru ispravnosti teorije. Tako npr. u teoriji mikropolarnih kontinuuma javljaju se i talasi mikrorotacije. Njih u klasičnoj teoriji nema. Eksperimentalno utvrdjivanje postojanja ovih talasa prestavlja potvrdu ispravnosti teorije. S druge strane, rezultati koji se dobijaju na osnovu ovih teorija prestavljaju poboljšanja klasičnih rezultata, koji su od izvanrednog značaja za praktičnu primenu.

Teorija površina diskontinuiteta se i ovde javlja kao egzaktna metoda za izučavanje mogućnosti prostiranja talasa bilo kog reda i tipa.

Ali, dalja njena primena, izvan same složenosti fizičkog problema prostiranja talasa, leži i u složenosti izvodjenja odgovarajućih relacija diskontinuiteta. Relacije koje su izvedene drugog su reda ili najviše trećeg /ne u potpunosti/. O nekim opštim zaključcima, izvan specijalnih slučajeva, može biti reči samo na osnovu opštih relacija diskontinuiteta. Neosporno je da se ove relacije mogu izvesti samo na osnovu jedne opšte i potpune teorije površina diskontinuiteta, jedne sveobuhvatne i detaljno izložene analize teorije površina diskontinuiteta o kojoj je govorio R. Hill.

Na osnovu svega ovoga bilo bi pogrešno zaključiti da se primena teorije površina diskontinuiteta prostire na poslednjih deset godina. Mi smo već na samom početku istakli reč "reafirmacija". Time smo želeli da naglasimo nagli porast interesovanja i potrebu za veobuhvatnijim izučavanjem ovog problema.

Istorijski posmatrano problem površina diskontinuiteta prvi put se pojavljuje u radovima Euler-a [22] /1764/, [23] /1765/ u kojima se posmatra površina na kojoj gradijenti brzine imaju diskontinuitet. Činjenica da brzina može biti prekidna bila je prvi put i istaknuta od strane Stokes-a [24] /1848/. Veliki prilog razmatranju ovog problema dali su Christoffel [25] /1877/ i Hugoniot [26] /1885/. Proširenje njihovih ideja dao je Hadamard u knjizi "Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equtions de l Hydrodynamique" [27] /1903/. Osnovni nedostatak ovog monumentalnog rada leži u zahtevu neprekidnosti funkcije na površini diskontinuiteta. Rezultati su izvedeni preko klasičnog matematičkog aparata - preko parcijalnih izvoda-ali u invarijantnom obliku. Tu su još radovi Zemplen-a [28] /1905/ i Lichtenstein-a [29] /1929/

Proširene uslove kompatibilnosti /kako se relacije diskotinuiteta nazivaju u poslednje vreme/, bez ograničenja za funkciju za koju se traže uslovi kompatibilnosti, prvi je diskutovao T.Y. Thomas [30] /1957/. Izvedeni na ovaj način uslovi kompatibilnosti poznati su u literaturi kao THomas-ovi iterativni uslovi kompatibilnosti /vidi npr. C. Truesdell i R.A. Toupin: CFT [31] /. Dobijeni su izrazi za uslove kompatibilnosti prvog i drugog reda. Time je ujedno dat i postupak za odredjivanje uslova kompatibilnosti višeg reda. Nedostatak ovog rada bio je u izboru specijalnot sitema - Dekartovih-koordinata čime se gubilo u invarijantnosti. Medjutim, osnovni nedostatak bio je i ostao u složenosti izvodjenja ovih relacija i nemogućnosti izvodjenja opštih izraza. U radu od 1966 god. Thomas [32] razmatra isti problem ali u odnosu na proizvoljni sistem koordinata dopustiv u Euklidskom prostoru, čime je ispravio prvi nedostatak, tj. relacije imaju invarijantan oblik. To je verovatno i razlog naslova ovog rada "The general theory of compatibility conditions". Važno je istaći da se izvan toga ova dva rada uopšte ne razlikuju, čime je pitanje njene opštosti, o kojoj je R. Hill govorio, i dalje ostalo aktuelno.

Od značaja je svakako da se istakne i razlika u korišćenju matematičkog aparata izmedju Hadamard-a i Thomas-a. Thomas se služio tenzorskom analizom čime je izvodjenje relacija bilo znatno uprošćeno, postupak vrlo elegantan a dobijene relacije imale automatski invarijantan oblik.

Kako je tenzorska analiza postala jedna od osnovnih matematičkih disciplina koja se koristi u mehanici kontinuuma i koja se razvijala uporedo sa razvojem mehanike kontinuuma to su se radovi T.Y. Thomasa sve više koristili kao i njegovi iterativni uslovi kompatibilnosti a Hadamard-ovi postajali sve više klasika u toj oblasti. I terminologija Thomasovih radova počela je sve više da se koristi. Tako je u poslednje vreme ustaljen naziv singularne površine za površine diskontinuiteta, a relacije diskontinuiteta nazivaju uslovima kompatibilnosti. Mi ćemo koristiti i jedne i druge nazive.

Ovaj rad prestavlja prilog teoriji površina diskontinuiteta. Tačnije, on prestavlja pokušaj da se da jedna sveobuhvatna i detaljno izložena teorija površina diskontinuiteta o čemu je govorio R. Hill. Osnovna razlika u razmatranju ovog problema i drugih teorija i ovog rada je u samom prilazu. Mi ćemo prilaz izložen u ovom radu nazvati direktan. Pod tim podrazumevamo direktno ispitivanje ponašanja f-je na površini bez posebnih ograničenja bilo f-je bilo površine, tj. da je to površina diskontinuiteta za posmatranu f-ju. Na taj način dobijeni su opšti rezultati potvrdjeni i dokazani kroz date stavove i teoreme. Zatim je na osnovu ovih rezultata razmatran problem površina diskontinuiteta i dobijeni izrazi za relacije diskontinuiteta. Sam postupak za njihovo izvodjenje je vrlo prost a dobijeni rezultati su opšti.

Pokazano je da su svi do sadapoznati rezultati specijalan slučaj izložene teorije. Na nizu primera ilustrovana je jednostavnost izvodjenja relacija diskontinuiteta. Predpostavljajući da je f-a, za koju se ispituju relacije diskontinuiteta, tenzorskog karaktera, bilo kog reda i tipa, dobijeni su rezultati invarijantnog oblika. U radu je podvučena razlika izmedju rezultata teorije površine diskontinuiteta koju je dao T.Y. Thomas i ovde izložene. U odnosu na nedostatak Hadamardove teorije Thomas-ova teorija prestavlja njeno proširenje. Može se slobodno reći da je ovde izložena teorija proširenje Thomasove, čime je ujedno odredjen i njen odnos prema Hadamardovoj teoriji.

Rad se može podeliti na dva dela. U prvom su razmatrani geometrijski uslovi kompatibilnosti. Date su tri teoreme, koje prestavljaju osnov cele teorije. Izvedeni su osnovni rezultati. Definisan je operator diskontinuiteta i pokazane njegove osobine. Njegovom primenom dobijeni su opšti izrazi za geometrijske uslove kompatibilnosti. Izvedena je analiza dobijenih rezultata. Dati su neki primeri njene primene čime je ujedno ilustrovana jednostavnost njihovog izvodjenja.

U drugom delu je razmatran problem kinematičkih uslova kompatibilnosti. Data je u sažetom obliku teorija površina koje se kreću. Posebno je razmatrana kinematika takvih površina. Definisan je δ izvod. Izveden je izraz za $\frac{\delta^n \varphi}{\delta t^n}$, koji je ujedno i primenjen za izvodjenje kinematičkih uslova kompatibilnosti. Ove relacije su izvedene na vrlo prost način, pri čemu je korištena osobina komutativnosti izmedju operatora $[\ ]$ i δ. Kao i u prvom delu rada, na nizu primera ilustrovana je izložena teorija. Izvedeni su opšti zaključci i pokazano da su do sada poznati rezultati specijalan slučaj izložene teorije.

Teoreme i dokazi, kao i izrazi za uslove kompatibilnosti, odnose se na Euklidski /E_3/ trodimenzioni prostor, prostor fizičkih dogadjaja. Lako je videti da se rezultati automatski odnose i na Euklidski prostor bilo kojeg reda dimenzije. Koordinatni sistem u odnosu na koji se vrši ispitivanje je bilo koji dopušten u Euklidskom prostoru, tj. x^i su generalisane koordinate. Notacija je tenzorskog karaktera.

I. GEOMETRIJSKI USLOVI KOMPATIBILNOSTI

2. Osnovne formule iz teorije površina

Neka su x^i /i=1,2,3/ neke krivolinijske koordinate dopuštene u Euklidskom prostoru E_3.

Tada

/2.1/ $$x^i = x^i(u^\alpha, t)$$

prestavlja površinu S koja se kreće u E_3. Koordinate u^α /α=1,2/ su krivolinijske koordinate površine, a t-vreme. U daljem delu rada podrazumevaće se da latinski indeksi idu od 1 do 3, a grčki 1 i 2. Pretpostavlja se da su f-je /2.1/ neprekidne i diferencijabilne po u^α i t do reda koji nam treba.

Osnovna metrička forma površine je data izrazom

/2.2/ $$a_{\alpha\beta} = g_{ij}\, x^i_{,\alpha}\, x^j_{,\beta}$$

gde je g_{ij} osnovni metrički tenzor E3 u odnosu na sistem koordinata x^i. Kontravarijantne osnovne metričke tenzore obeležavamo, kao što je uobičajeno, sa g^{ij} i $a^{\alpha\beta}$. U /2.2/ primenili smo Einstein-ovu konvenciju sabiranja po indeksima koji se dva puta ponavljaju. Pomoću osnovnih metričkih tenzora moguće je podizati ili spuštati indekse neke tenzorske veličine. Tako je

/2.3/ $$a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta, \quad p^i = g^{ij} p_j, \quad p^i_{\cdot\alpha} = g^{ij} a_{\alpha\beta}\, p_j^{\cdot\beta}.$$

Komponente jediničnog vektora normale $\underset{\sim}{n}$ na površini /2.1/ obeležićemo sa n^i. Tada je, na osnovu teorije površina /vidi npr. T.Y. Thomas [33] /:

/2.4/
$$n_i n^i = 1 \,,$$

/2.5/
$$n_i x^i_{,\alpha} = 0 \,,$$

/2.6/
$$x^i_{,\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} n^i \,,$$

/2.7/
$$n^i_{,\alpha} = - b^\beta_\alpha x^i_{,\beta} \,.$$

Iz /2.5/ se vidi da su $\underset{\sim}{x}_{,\alpha}$ vektori u tangentnoj tavni površine S, čije komponente u odnosu na obvojni prostor su $x^i_{,\alpha}$. Napominjemo da je $x^i_{,\alpha}$ kontravarijantni tenzor pri transformaciji x^i; isto tako je to kovarijantni tenzor po α pri transformaciji u^α.

Formule /2.2/, /2.3/, /2.4/,/2.5/,/2.6/ i /2.7/ često ćemo koristiti u daljem radu.

3. Osnovne teoreme i dokazi

Neka je u Euklidskom trodimenzionom prostoru /E_3/ data dovoljno glatka površina S definisana sa /2.1/. Neka je u E_3 data neka tenzorska funkcija φ

a/ definisana i neprekidna na S i

b/ diferencijalibilna na S do reda koji nam treba, recimo k

/k je bilo koji prirodan broj, tj. k=1,2,3,......./.

F-ja φ može biti skalarna ili tenzorska veličina bilo kojeg reda i tipa.

<u>T e o r e m a   1:</u> Kovarijantni izvod reda k f-e može se na površini S prestaviti u obliku

$$\varphi_{,i_1\dots i_k} = \sum_{s=0}^{k} \overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\dots\alpha_s}\left\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\dots x^{i_s}_{,\alpha_s}\, n^{i_{s+1}}\dots n^{i_k}\right\}$$

$$/3.1/ \qquad = \overset{(k)}{A}\, n^{i_1}\dots n^{i_k} + \overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1}\left\{x^{i_1}_{,\alpha_1} n^{i_2}\dots n^{i_k}\right\} + \dots$$

$$\dots + \overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\dots\alpha_s}\left\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\dots x^{i_s}_{,\alpha_s}\, n^{i_{s+1}}\dots n^{i_k}\right\} + \dots$$

$$\dots + \overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\dots\alpha_k} x^{i_1}_{,\alpha_1}\dots x^{i_k}_{,\alpha_k}.$$

Sa

$$/3.2/ \qquad \left\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\dots x^{i_s}_{,\alpha_s}\, n^{i_{s+1}}\dots n^{i_k}\right\}$$

obeležen je zbir svih permutacija sa ponavljanjem od k-elemenata medju kojima ima s jednakih jedne vrste /svi $x^{i_p}{}_{,\alpha_p}$/ i $k-s$ jednakih druge vrste /svi n^{i_q}/ /$p=1,2,\dots,s$; $q=s+1,s+2,\dots,k$/.

Pre nego što predjemo na striktni dokaz teoreme dužni smo da objasnimo smisao postojanja /3.2/ u /3.1/.

Prvo, s obzirom da je E_3 Euklidski prostor $\varphi_{,i_1\dots i_k}$ je potpuno simetričan tenzor po indeksima i_r /$r=1,2,\dots,k$/, tada i desna strana /3.1/, pod pretpostavkom da /3.1/ važi, mora biti potpuno simetrična po ovim indeksima. Svaki član desne strane formiran je od komponenata vektora normale n^i i vektora $x^i{}_{,\alpha}$ na S. U svaki od članova ulazi ukupno onoliko n^i i $x^i{}_{,\alpha}$ koliki je red izvoda f-je φ, tj. k. Broj članova desne strane jednak je $k+1$, jer je $0 \leq s \leq k$.

Izuzimajući $\overset{(k)\alpha_1 \dots \alpha_s}{A}$, $o \leq s \leq k$, to su

$$n^{i_1} n^{i_2} \dots n^{i_k}$$

$$x^{i_1}_{,\alpha_1} n^{i_2} \dots n^{i_k}$$

$$/3.3/ \qquad \dots\dots\dots$$

$$x^{i_1}_{,\alpha_1} \dots x^{i_{k-1}}_{,\alpha_{k-1}} n^{i_k}$$

$$x^{i_1}_{,\alpha_1} \dots x^{i_{k-1}}_{,\alpha_{k-1}} x^{i_k}_{,\alpha_k}. \qquad /1/$$

Drugo, da bi desna strana /3.1/ bila simetrična mora biti svaki član /3.3/ simetričan po indeksima i_r /r=1,2,..,k/. Iz /3.3/ se vidi da samo prvi član zadovoljava uslov simetričnosti. Ostali članovi se moraju simetrizovati. Radi kratkoće uvedimo opšti član za /3.3/

$$/3.4/ \qquad x^{i_1}_{,\alpha_1} \dots x^{i_s}_{,\alpha_s} n^{i_{s+1}} \dots n^{i_k}, \qquad /o \leq s \leq k/.$$

Očigledno je da je /3.4/ već simetrično po $\underset{\sim}{n}$. Dalje, potpuna simetričnost /3.4/ po i_r povlači za sobom potpunu simetričnost po α_p. Obrnuto, simetričnost po α_p povlači simetričnost samo po i_p /p=1,2,...,s/.

/1/ Očigledno je da se radi o broju kombinacija sa ponavljanjem od dva elementa /$\underset{\sim}{n}$ i $\underset{\sim}{x}_{,\alpha}$; α je fiksiran broj/-k-te klase. S obzirom na poznati izraz

$$C'^{k}_{p} = C^{k}_{p+k-1} = \binom{p+k-1}{k}$$

gde je C'^{k}_{p} - broj kombinacija sa ponavljanjem od p-elemenata k-te klase, a C^{k}_{p+k-1} broj kombinacija bez ponavljanja od k+p-l elementa k-te klase i da je u našem slučaju p=2 biće

$$C'^{k}_{2} = C^{k}_{k+1} = \binom{k+1}{k} = k+1$$

U svakom slučaju je $\overset{(k)\alpha_1\ldots\alpha_s}{A}$ potpuno simetričan tenzor. To povlači za sobom simetričnost po i_p u /3.4/. Tada u /3.4/ imamo potpunu simetričnost po i_p i i_q /$p=1,2,\ldots.s$; $q=1+s$, $s+2,\ldots\ldots,k$/, tj. medjusobnu simetričnost x^{i_p},α_p za sebe i n^{i_q} za sebe. Zato da bismo dobili sve članove /3.3/ simetričnim nije potrebno izvoditi simetrizaciju po svim indeksima i_r već samo izmedju indeksa elemenata x^{i_p}, α_p i n^{i_q} u /3.3/. Tada u /3.4/ mesto bilo koja dva indeksa skupa i_p je ravnopravno. Isto važi za α_p kao i za i_q. Formiranje svih članova kojim bi se /3.4/ učinilo simetričnim po i_r se svodi na permutacije sa ponavljanjem k-elemenata medju kojima ima s jednakih jedne vrste /$\underset{\sim}{x},\alpha$/ i k-s jednakih druge vrste /$\underset{\sim}{n}$/. Njihov ukupan broj je

$$/3.5/ \qquad P_{\frac{k}{s,k-s}} = \frac{k!}{s!(k-s)!} = \binom{k}{s} = C_k^s ,$$

gde smo sa C_k^s obeležili broj kombinacija bez ponavljanja k elemenata s-te klase.

Treće, odredjivanje ovih članova vrši se leksikografski. Za /3.4/ raspored indeksa $i_1\ i_2\ldots\ldots\ldots i_s i_{s+1}\ldots.i_k$ je početni. Mi ćemo smatrati da su oni uredjeni po veličini, tj. $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{s+1} \leqslant \ldots \leqslant i_k$. Tada se svi ostali članovi formiraju pomeranjem elemenata u /3.4/ s leva na desno na već poznati način. Mi ćemo dati tabelu za ovaj postupak.

Tabela br. 1

i_1	i_2	.	.	.	.	i_s	i_{s+1}	.	.	.	.	.	i_{n-1}	i_n
x	x	.	.	.	.	x	n	n	.	.	.	.	n	n
x	x	.	.	.	.	n	x	n	.	.	.	.	.	n
x	x	.	.	.	x	n	n	x	n	.	.	.	.	n
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x	x	.	.	.	x	n	n	.	.	.	.	.	n	x
x	x	.	.	x	n	x	x	n	.	.	.	.	.	n
x	x	.	.	x	n	x	n	x	n	.	.	.	.	n
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x	x	.	.	x	n	x	n	.	.	.	.	.	x	n
x	x	.	.	x	n	x	n	.	.	.	.	.	n	x
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	n	n	.	.	n	x	x	x	.	.	.	.	x	n
n	n	n	.	.	n	x	x	x	.	.	.	x	n	x
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	n	n	.	.	n	x	n	x	.	.	.	.	.	x
n	n	n	.	.	n	n	x	x	.	.	.	.	.	x

Važno je uočiti da indeksi α_p odredjuju medjusobni raspored elemenata $\underset{\sim}{x}$ u prethodnoj tabeli i da njihov raspored ostaje nepromenjen za sve $\underset{\sim}{x}$ u tabeli br. 1. Tačnije, kako je $x^{i_1}{}_{,\alpha_1}\, x^{i_2}{}_{,\alpha_2} \ldots\ldots x^{i_s}{}_{,\alpha_s}$, s obzirom na $\overset{(k)}{A}{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, potpuno simetrično po α_p, medjusobni raspored α_p ne igra nikakvu ulogu. S druge strane, kako indeksi i odredjuju mesto $\underset{\sim}{x}$ u tabeli, što je od bitnog značaja, raspored indeksa α_p zadržavamo nepromenjenim. To ćemo ilustrovati na primeru k=5, s=3.

Tabela br. 2

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
$x^{i_1}_{,\alpha_1}$	$x^{i_2}_{,\alpha_2}$	$x^{i_3}_{,\alpha_3}$	η^{i_4}	η^{i_5}
$x^{i_1}_{,\alpha_1}$	$x^{i_2}_{,\alpha_2}$	η^{i_3}	$x^{i_4}_{,\alpha_3}$	η^{i_5}
$x^{i_1}_{,\alpha_1}$	$x^{i_2}_{,\alpha_2}$	η^{i_3}	η^{i_4}	$x^{i_5}_{,\alpha_3}$
$x^{i_1}_{,\alpha_1}$	η^{i_2}	$x^{i_3}_{,\alpha_2}$	$x^{i_4}_{,\alpha_3}$	η^{i_5}
$x^{i_1}_{,\alpha_1}$	η^{i_2}	$x^{i_3}_{,\alpha_2}$	η^{i_4}	$x^{i_5}_{,\alpha_3}$
$x^{i_1}_{,\alpha_1}$	η^{i_2}	η^{i_3}	$x^{i_4}_{,\alpha_2}$	$x^{i_5}_{,\alpha_3}$
η^{i_1}	$x^{i_2}_{,\alpha_1}$	$x^{i_3}_{,\alpha_2}$	$x^{i_4}_{,\alpha_3}$	η^{i_5}
η^{i_1}	$x^{i_2}_{,\alpha_1}$	$x^{i_3}_{,\alpha_2}$	η^{i_4}	$x^{i_5}_{,\alpha_3}$
η^{i_1}	$x^{i_2}_{,\alpha_1}$	η^{i_3}	$x^{i_4}_{,\alpha_2}$	$x^{i_5}_{,\alpha_3}$
η^{i_1}	η^{i_2}	$x^{i_3}_{,\alpha_1}$	$x^{i_4}_{,\alpha_2}$	$x^{i_5}_{,\alpha_3}$

Ukupan zbir svih članova Tabele br.1 obeležili smo /3.2/. Prema tome /3.2/ je potpuno simetričan tentor po indeksima i_r. Tako je ukupan zbir svih članova Tabele br.2

$$\{x^{i_1}_{,\alpha_1} x^{i_2}_{,\alpha_2} x^{i_3}_{,\alpha_3} n^{i_4} n^{i_5}\} = x^{i_1}_{,\alpha_1} x^{i_2}_{,\alpha_2} x^{i_3}_{,\alpha_3} n^{i_4} n^{i_5} +$$
$$x^{i_1}_{,\alpha_1} x^{i_2}_{,\alpha_3} n^{i_3} x^{i_4}_{,\alpha_3} n^{i_5} + x^{i_1}_{,\alpha_1} x^{i_2}_{,\alpha_2} n^{i_3} n^{i_4} x^{i_5}_{,\alpha_3} +$$
$$x^{i_1}_{,\alpha_1} n^{i_2} x^{i_3}_{,\alpha_2} x^{i_4}_{,\alpha_3} n^{i_5} + x^{i_1}_{,\alpha_1} n^{i_2} x^{i_3}_{,\alpha_2} n^{i_4} x^{i_5}_{,\alpha_3} +$$
$$x^{i_1}_{,\alpha_1} n^{i_2} n^{i_3} x^{i_4}_{,\alpha_2} x^{i_5}_{,\alpha_3} + n^{i_1} x^{i_2}_{,\alpha_1} x^{i_3}_{,\alpha_2} x^{i_4}_{,\alpha_3} n^{i_5} +$$
$$n^{i_1} x^{i_2}_{,\alpha_1} x^{i_3}_{,\alpha_2} n^{i_4} x^{i_5}_{,\alpha_3} + n^{i_1} x^{i_2}_{,\alpha_1} n^{i_3} x^{i_4}_{,\alpha_2} x^{i_5}_{,\alpha_3} +$$
$$n^{i_1} n^{i_2} x^{i_3}_{,\alpha_1} x^{i_4}_{,\alpha_2} x^{i_5}_{,\alpha_3} .$$

Očigledno da je

$$\{n^{i_1} n^{i_2} \dots n^{i_k}\} = n^{i_1} n^{i_2} \dots n^{i_k},$$

/3.6/

$$\{x^{i_1}_{,\alpha_1} x^{i_2}_{,\alpha_2} \dots x^{i_k}_{,\alpha_k}\} = x^{i_1}_{,\alpha_1} x^{i_2}_{,\alpha_2} \dots x^{i_k}_{,\alpha_k},$$

s obzirom na /3.4/ i da je $s=o$ i $s=k$.

<u>D o k a z   t e o r e m e   1.</u> Teoremu ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Zaista, $\varphi^{,i}$ se može rastaviti na S u odnosu na trijedar vektora $\underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{x}_{,\alpha}$ / α =1,2/, koji je definisan u svakoj tački površine S, tj.

/3.7/ $$\varphi^{,i} = A n^i + A^\alpha x^i_{,\alpha}$$

gde su A i A^α komponente $\varphi^{,i}$ u pravcima $\underset{\sim}{n}$ i $\underset{\sim}{x}_{,\alpha}$ respektivno.

Odmah se vidi da su

$$A = \varphi^{,i} n_i ,$$

/3.8/

$$A_\alpha = \varphi_{,i} x^i_{,\alpha} = \varphi_{,\alpha} ,$$

s obzirom na /2.3-5/, potpuno jednoznačno odredjene veličine.

U slučaju $\varphi^{,ji}$ možemo koristiti prethodne rezultate. Kako je $\varphi^{,ji} = (\varphi^{,j})^{,i}$ i kako /3.7/ važi nezavisno od prirode funkcije φ /tj. da li je ona skalarna ili tenzorska veličina/ biće

/3.9/ $$\varphi^{,ji} = (\varphi^{,j})^{,i} = A^j n^i + A^{j\alpha} x^i_{,\alpha} ,$$

jer je leva strana kontravarijantni tenzor drugog reda. Ali tada su A^j i $A^{j\alpha}$ kontravarijantni tenzori prvog reda /vektori/ s obzirom na transformaciju $\underset{\sim}{x}$. Kako su ove veličine definisane na S tada i za njih važi /3.//, pa je

$$A^j = B n^j + B^\alpha x^j_{,\alpha} ,$$

/3.1o/

$$A^{j\alpha} = C^\alpha n^j + B^{\alpha\beta} x^j_{,\beta} ,$$

gde su B, B^α, C^α i $C^{\alpha\beta}$ potpuno jednoznačno odredjene veličine preko A^j i $A^{j\alpha}$ respektivno, analogno sa /3.8/.

Zamenom /3.1o/ u /3.9/ dobijamo

$$\varphi^{,ji} = (B n^j + B x^j_{,\alpha}) n^i + (C^\alpha n^j + B^{\alpha\beta} x^j_{,\beta}) x^i_{,\alpha} =$$

$$= B n^i n^j + B^\alpha n^i x^j_{,\alpha} + C^\alpha n^j x^i_{,\alpha} + B^{\alpha\beta} x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} .$$

U ovom izrazu je

$$B^{\alpha}=C^{\alpha},$$

jer je

$$B_{\alpha}=\varphi_{,ji}n^{i}x^{j}_{,\alpha}=\varphi_{,ij}n^{j}x^{i}_{,\alpha}=\varphi_{,ji}n^{j}n^{i}_{,\alpha}=C_{\alpha},$$

gde smo koristili osobinu simetričnosti tenzora $\varphi_{,ji}$.

Tada je

/3.11/ $$\varphi^{,ji}=\varphi^{,ij}=Bn^{i}n^{j}+B^{\alpha}(n^{i}x^{j}_{,\alpha}+n^{j}x^{i}_{,\alpha})+B^{\alpha\beta}x^{i}_{,\alpha}x^{j}_{,\beta}.$$

Ako se u /3.1/ stavi k=1 i k=2 dobićemo /3.7/ i /3.11/, tj. /3.1/ važi za k=1,2.

Pretpostavimo da /3.1/ važi za neko n>2. Tada je, prema /3.1/,

$$\varphi^{,ji_1\ldots i_n}=(\varphi^{,j})^{,i_1\ldots i_n}=$$

/3.12/

$$=\sum_{s=0}^{n}\overset{(n)}{A}{}^{j\alpha_1\ldots\alpha_s}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}\}.$$

Koristeći /3.7/ dobijamo da je

/3.13/ $$\overset{(n)}{A}{}^{j\alpha_1\ldots\alpha_s}=\overset{(n+1)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}n^{j}+\overset{(n+1)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s\alpha}x^{j}_{,\alpha},$$

jer su indeksi α samo redni brojevi pri transformaciji $\underset{\sim}{x}$.

Zamenom /3.13/ u /3.12/ dobijamo

$$\varphi^{,ji_1\ldots i_n}=\sum_{s=0}^{n}\overset{(n+1)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}\}n^{j}+$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\overset{(n+1)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}\}x^{j}_{,\alpha}=$$

/3.14/ $$=\overset{(n+1)}{A}\{n^{i_1}\ldots n^{i_n}\}n^{j}+\sum_{s=1}^{n}\overset{(n+1)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}\}n^{j}+$$

$$+\sum_{s=0}^{n-1}\overset{(n+1)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s\alpha}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}\}x^{j}_{,\alpha}+$$
$$+\overset{(n+1)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_n}_{,\alpha_n}\}x^{j}_{,\alpha}\,.$$

Ako se u drugoj sumi stavi $s=S-1$ i uzme u obzir /3.6/ dobićemo da je

/3.15/
$$\varphi_{,ji_1\ldots i_n}=\overset{(n+1)}{A}n^{i_1}\ldots n^{i_n}n^{j}+$$
$$+\overset{(n+1)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_n}_{,\alpha_n}x^{j}_{,\alpha}+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\Big(\overset{(n+1)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}\}n^{j}+$$
$$+\overset{(n+1)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\alpha}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}n^{i_s}\ldots n^{i_n}\}x^{j}_{,\alpha}\Big).$$

Lako je pokazati na osnovu Tabele br.1 da je

/3.16/
$$g_{i_1j_1}\ldots g_{i_tj_t}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}\}x^{j_1}_{,\beta_1}\ldots x^{j_t}_{,\beta_t}n_{t+1}\ldots n_{i_n}=$$
$$=\begin{cases} a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_s\beta_s} & t=s\\ 0 & t\neq s\,. \end{cases}$$

Tada je, prema /3.15/ i /3.16/,

/3.17/
$$\overset{(n+1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=\varphi_{,ji_1\ldots i_s i_{s+1}\ldots i_n}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_n}n^{j},$$

$$\overset{(n+1)}{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=\varphi_{,ji_1\ldots i_{s-1}i_s\ldots i_n}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}n^{i_s}\ldots n^{i_n}x^{j}_{,\alpha}\,.$$

iz /3.17/, koristeći simetričnost $\varphi_{,ji_1\ldots i_n}$ i preuredjujući raspored indeksa u /3.17/, sledi da je

$$/3.18/ \qquad \overset{(n+1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \overset{(n+1)}{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} .$$

Koristeći /3.18/ u /3.15/ i obeležavajući j sa i_{n+1} moguće je /3.15/ napisati u obliku

$$\varphi,^{i_{n+1} i_1 \ldots i_n} = \varphi,^{i_1 \ldots i_n i_{n+1}} =$$

$$/3.19/ \qquad = \sum_{s=0}^{n+1} \overset{(n+1)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s} \Big(\{ x,^{i_1}_{\alpha_1} \ldots x,^{i_s}_{\alpha_s} \eta^{i_{s+1}} \ldots \eta^{i_n} \} \eta^{i_{n+1}} +$$

$$+ \{ x,^{i_1}_{\alpha_1} \ldots x,^{i_{s-1}}_{\alpha_{s-1}} \eta^{i_s} \ldots \eta^{i_n} \} x,^{i_{n+1}}_{\alpha_s} \Big).$$

Izraz u maloj zagradi pod znakom sume u /3.19/, prema Tabeli br.1, ne prestavlja ništa drugo nego zbir svih permutacija sa ponavljanjem n+1 elementa medju kojima ima s-jednakih jedne vrste i n+1-s jednakih druge vrste / jer se permutacije sa ponavljanjem mogu rastaviti na one koje se završavaju na $n^{i_{n+1}}$ i $x^{i_n}{}_{s}$/. Tada je konačno

$$/s.2o/ \qquad \varphi,^{i_1 \ldots i_{n+1}} = \sum_{s=0}^{n+1} \overset{(n+1)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s} \{ x,^{i_1}_{\alpha_1} \ldots x,^{i_s}_{\alpha_s} \eta^{i_{s+1}} \ldots \eta^{i_{n+1}} \}$$

što je trebalo dokazati.

<u>T e o r e m a 2.</u> Prestavljanje /3.1/ je jednoznačno.

<u>D o k a z t e o r e m e 2.</u> Zaista, ako pretpostavimo da je moguće i prestavljanje oblika

$$/3.21/ \qquad \varphi,^{i_1 \ldots i_k} = \sum_{s=0}^{k} \overset{(k)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s} \{ x,^{i_1}_{\alpha_1} \ldots x,^{i_s}_{\alpha_s} \eta^{i_{s+1}} \ldots \eta^{i_k} \}$$

bilo bi

$$/3.22/ \quad \sum_{s=0}^{k}\left(\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}-\overset{(k)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}\right)\left\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_s}_{,\alpha_s}\, n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_k}\right\}=0.$$

Ali, s obzirom na /3.16/, sledi da je

$$\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}-\overset{(k)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}\equiv 0,$$

tj.

$$/3.23/ \quad \overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}\equiv\overset{(k)}{B}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}$$

čime je teorema dokazana.

Veličine $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ različitog reda su medjusobno nezavisne kao posledica /3.16/. Zato možemo /3.1/ shvatiti kao sistem jednačina po $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ $/o\leq s\leq k/$.

T e o r e m a 3. Sistem jednačina /3.1/ je potpun.

Dokaz teoreme 3: Broj jednačina sistema /3.1/ jednak je broju nezavisnih komponenata tenzora k-tog reda $\varphi_{,i_1\ldots i_k}$. Ovaj broj jednak je broju kombinacija sa ponavljanjem n elemenata k-te klase / u našem slučaju n=3 jer je prostor u kome se problem razmatra trodimenzioni Euklidski /

$$/3.24/ \quad C'^{k}_{n}=\binom{n+k-1}{k}=\sum_{s=0}^{k}\binom{n+s-2}{s}.$$

S druge strane i $\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ su potpuno simetrični tenzori tako da je njihov broj, za neko fiksirano s , prema /3.24/, jednak

$$/3.25/ \quad C'^{s}_{n-1}=\binom{n-1+s-1}{s}=\binom{n+s-2}{s},$$

jer je površina S prostor za jednu dimenziju manji od obvojnog prostora /u našem slučaju to je prostor od dve dimenzije/. Njihov ukupan broj je

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{n+s-2}{s},$$

tj. broj jednačina /3.1/ jednak je ukupnom broju nepoznatih $\overset{(k)\alpha_1 \ldots \alpha_s}{A}$ /$o \leq s \leq k$/, ili kratko rečeno sistem jednačina /3.1/ je potpun.

4. Izračunavanje $\overset{(k)\alpha_1 \ldots \alpha_s}{A}$

Prema /3.17/ vidimo da je

/4.1/ $$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \varphi_{,i_1 \ldots i_s i_{s+1} \ldots i_k} x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_s}_{,\alpha_s} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k}.$$

Medjutim, kako je

/4.2/ $$\varphi_{,\alpha} = \varphi_{,i} x^{i}_{,\alpha}$$

i kako je $\varphi_{,i_1 \ldots i_k}$ simetričan po svim indeksima, biće za $1 \leq s \leq k$

/4.3/ $$\begin{aligned} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} &= \varphi_{,i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_k i_s} x^{i_s}_{,\alpha_s} x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k} \\ &= \varphi_{,i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_k \alpha_s} x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k} \\ &= (\varphi_{,i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_k} x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k})_{,\alpha_s} - \\ &= \varphi_{,i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_k} (x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k})_{,\alpha_s}. \end{aligned}$$

Saglasno sa oznakama vidi se da je

$$\varphi_{,i_1\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_k}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_k}=\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}},$$

pa, je

$$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\alpha_s}-$$

$$-\varphi_{,i_1\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_k}\Big(\sum_{\rho=1}^{s-1}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_\rho}_{,\alpha_\rho\alpha_s}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_k}+$$

$$+\sum_{\rho=s+1}^{k}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_\rho}_{,\alpha_s}\ldots n^{i_k}\Big)$$

$$=\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1},\alpha_s}-$$

$$-\varphi_{,i_1\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_k}\Big(\sum_{\rho=1}^{s-1}b_{\alpha_\rho\alpha_s}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{\rho-1}}_{,\alpha_{\rho-1}}x^{i_{\rho+1}}_{,\alpha_{\rho+1}}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}\ldots n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_k}n^{i_\rho}-$$

$$-\sum_{\rho=s+1}^{k}b^{\delta}_{\alpha_s}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}x^{i_\rho}_{,\delta}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_{\rho-1}}n^{i_{\rho+1}}\ldots n^{i_k}\Big)=$$

$$=\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1},\alpha_s}-$$

$$-\sum_{\rho=1}^{s-1}b_{\alpha_\rho\alpha_s}\varphi_{,i_1\ldots i_{\rho-1}i_\rho i_{\rho+1}\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_k}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{\rho-1}}_{,\alpha_{\rho-1}}x^{i_{\rho+1}}_{,\alpha_{\rho+1}}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_k}n^{i_\rho}+$$

$$+\sum_{\rho=s+1}^{k}b^{\delta}_{\alpha_s}\varphi_{,i_1\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_{\rho-1}i_\rho i_{\rho+1}\ldots i_k}x^{i_1}_{,\alpha_1}\ldots x^{i_{s-1}}_{,\alpha_{s-1}}x^{i_\rho}_{,\delta}n^{i_{s+1}}\ldots n^{i_{\rho-1}}n^{i_{\rho+1}}\ldots n^{i_k}$$

Konačno, saglasno sa oznakama, dobijamo

/4.4/ $$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1},\alpha_s}-\sum_{\rho=1}^{s-1}b_{\alpha_\rho\alpha_s}\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{\rho-1}\alpha_{\rho+1}\ldots\alpha_{s-1}}+$$

$$+(k-s)\,b^{\delta}_{\alpha_s}\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\delta}\qquad(1\le s\le k),$$

/4.5/ $$\overset{(k)}{A}=\varphi_{,i_1\ldots i_k}n^{i_1}\ldots n^{i_k}\qquad(s=0).$$

što se direktno dobija iz /3.1/ i /3.17/. Odmah se vidi da suma u /4.4/ nema smisla za s=1. To je i potpuno razumljivo kad se podje od /4.3/ za s=1. Tada u /4.3/ ne postoji u zagradi nijedan element $x^{i}_{,\alpha}$ koji inače obrazuju sumu. Uzimajući to u obzir, konačno možemo napisati

$$\overset{(k)}{A} = \varphi_{,i_1\ldots i_k} n^{i_1}\ldots n^{i_k} ,$$

$$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1} = \overset{(k-1)}{A}_{,\alpha_1} + (k-1)\, b^{\delta}_{\alpha_1} \overset{(k-1)}{A}_{\delta} ,$$

/4.6/
$$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1},\alpha_s} - \sum_{\rho=1}^{s-1} b_{\alpha_\rho\alpha_s} \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{\rho-1}\alpha_{\rho+1}\ldots\alpha_{s-1}} + (k-s)\, b^{\delta}_{\alpha_s} \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\delta}$$
$$(2\leq s\leq k-1) ,$$

$$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\alpha_k} - \sum_{\rho=1}^{k-1} b_{\alpha_\rho\alpha_k} \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{\rho-1}\alpha_{\rho+1}\ldots\alpha_{k-1}} .$$

U daljem delu rada javlja će se i slučaj k=o. U tom slučaju definišemo

/4.7/ $$\overset{(0)}{A} = \varphi$$

čime se proširuje /4.6/ kad je k=o.

5. Analiza formula za izračunavanje $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$

Analizom prvog izraza u /4.6/ vidi se da se on ne može napisati jednostavnije. To nije slučaj za ostale izraze /4.6/. Zato je sasvim logično očekivati da će se ostali članovi /4.6/ izračavati preko $\overset{(\beta)}{A}$, $0 \leq \beta \leq k$ i njihovih izvoda.

Zaista, izrazi /4.6/$_{2,3,4}$ prestavljaju rekurentne obrasce za izračunavanje $\overset{(\varkappa)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ /$1\leq s\leq k$/.

Tako je /4.6/$_2$

$$\begin{aligned}\overset{(\varkappa)}{A}_{\alpha} &= \overset{(\varkappa-1)}{A}_{,\alpha} + (\varkappa-1)\, b_{\alpha}^{s_1} \overset{(\varkappa-1)}{A}_{s_1} = \\ &= \overset{(\varkappa-1)}{A}_{,\alpha} + (\varkappa-1)\, b_{\alpha}^{s_1} \Big[\overset{(\varkappa-2)}{A}_{,s_1} + (\varkappa-2)\, b_{s_1}^{s_2} \overset{(\varkappa-2)}{A}_{s_2} \Big] = \\ &= \overset{(\varkappa-1)}{A}_{,\alpha} + (\varkappa-1)\, b_{\alpha}^{s_1} \overset{(\varkappa-2)}{A}_{,s_1} + (\varkappa-1)(\varkappa-2)\, b_{\alpha}^{s_1} b_{s_1}^{s_2} \overset{(\varkappa-2)}{A}_{s_2}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Primenjujući rekurentni obrazac do kraja dobijamo

$$\begin{aligned}\overset{(\varkappa)}{A}_{\alpha} &= \overset{(\varkappa-1)}{A}_{,\alpha} + (\varkappa-1)\, b_{\alpha}^{s_1} \overset{(\varkappa-2)}{A}_{,s_1} + \ldots \\ &\ldots + (\varkappa-1)(\varkappa-2)\ldots(\varkappa-p)\, b_{\alpha}^{s_1} b_{s_1}^{s_2} \ldots b_{s_{p-1}}^{s_p} \overset{[\varkappa-(p+1)]}{A}_{,s_p} + \ldots \\ &\ldots + (\varkappa-1)(\varkappa-2)\ldots 2\, b_{\alpha}^{s_1} b_{s_1}^{s_2} \ldots b_{s_{\varkappa-3}}^{s_{\varkappa-2}} \overset{(1)}{A}_{,s_{\varkappa-2}} + \\ &+ (\varkappa-1)!\, b_{\alpha}^{s_1} \ldots b_{s_{\varkappa-2}}^{s_{\varkappa-1}} \overset{(0)}{A}_{,s_{\varkappa-1}},\end{aligned} \tag{5.2}$$

ili

$$\overset{(\varkappa)}{A}_{\alpha} = \overset{(\varkappa-1)}{A}_{,\alpha} + \sum_{p=1}^{\varkappa-1} (\varkappa-1)\ldots(\varkappa-p)\, b_{\alpha}^{s_1} b_{s_1}^{s_2} \ldots b_{s_{p-1}}^{s_p} \overset{[\varkappa-(p+1)]}{A}_{,s_p}. \tag{5.3}$$

Izrazi /5.2/ ili /5.3/ prestavljaju formulu za izračunavanje $\overset{(k)}{A}_{\alpha}$.

Medjutim, odredjivanje formula za /4.6/$_{3,4}$ je vrlo teško. Mi se ovde nećemo zadržavati na tome već ćemo izvršiti analizu svih članova i na osnovu toga izvesti opšte zaključke. Zato ćemo izraze /4.6/$_{3,4}$ napisati u obliku

$$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1},\alpha_s}-$$

/5.4/
$$-b_{\beta\alpha_s}P^{\beta_1\ldots\beta\ldots\beta_{s-2}}_{\alpha_1\ldots\alpha_\rho\ldots\alpha_{s-1}}\overset{(k-1)}{A}_{\beta_1\ldots\beta_{s-2}}+$$

$$+(k-s)b^{\gamma}_{\alpha_s}\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\gamma},$$

gde je

/5.5/
$$P^{\beta_1\ldots\beta\ldots\beta_{s-2}}_{\alpha_1\ldots\alpha_\rho\ldots\alpha_{s-1}}=\sum_{\rho=1}^{s-1}\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}\cdots\delta^{\beta_{\rho-1}}_{\alpha_{\rho-1}}\delta^{\beta}_{\alpha_\rho}\delta^{\beta_\rho}_{\alpha_{\rho+1}}\cdots\delta^{\beta_{s-2}}_{\alpha_{s-1}}$$

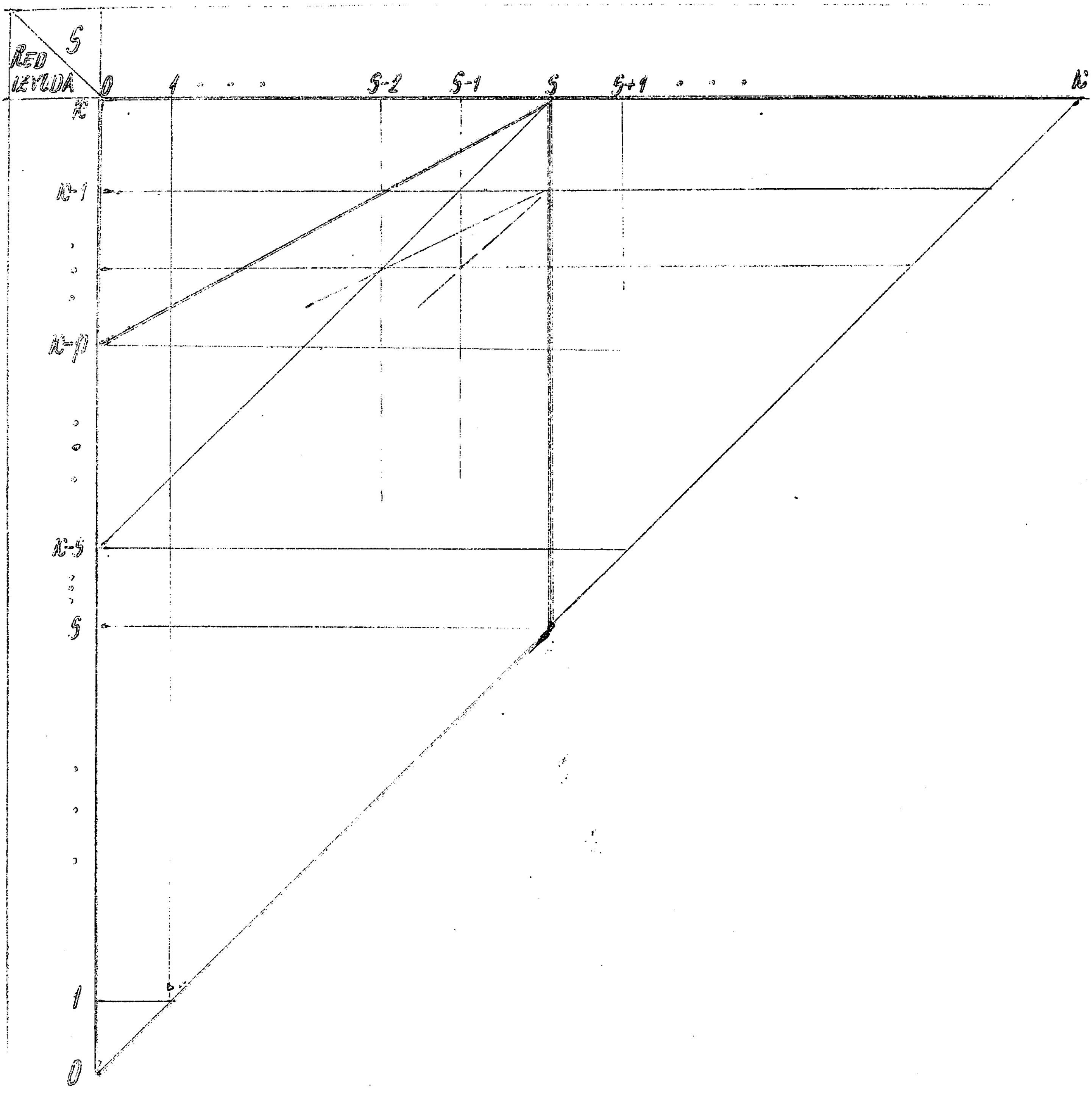
i gde su δ^{β}_{α} Kronekerovi simboli. Iz /5.4/ se vidi da se $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ Izražava preko tri susedna člana /k-1/-og izvoda f-je φ, tj.

$$\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s},\ \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}},\ \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-2}}$$

uz komponente druge osnovne forme $b_{\alpha\beta}$. Ako je $1\leq s\leq k$ tada je očigledno da će se time obuhvatiti svi članovi /k-1/-og izvoda f-je φ. Na isti način bi se zaključilo da se ovi izražavaju preko članova /k-2/-og izvoda. Nastavljajući postupak istim redom došli bismo do izvoda prvog reda.

Da bi analiza bila očiglednija prestavimo sve članove svih izvoda u sledećem tabelarnom obliku:

Tabela br. 3



U ovoj tabeli A, recimo, u k-p-toj vrsti i s-toj koloni označava $\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$. Mi ova označavanja nismo unosili u tabelu u cilju preglednosti same tabele.

Mi polazimo, s obzirom na /5.4/, od člana $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ koji se nalazi u s-toj koloni i k-toj vrsti naše tabele. Činjenica da se on izražava preko

$$\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}, \quad \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}}, \quad \overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-2}}$$

izražena je crtama koje polaze od $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ ka ovim članovima. Članovi $\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ i $\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-2}}$ ulaze u /5.4/ bez izvoda /ali sa $b_{\alpha\beta}$/. To je ovde izraženo spoljnim crtama. Ako se $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ i $\overset{(k-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-2}}$ izraze preko članova /k-2/-og izvoda funkcije φ, izmedju ostalih, pojaviće se $\overset{(k-2)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ i $\overset{(k-2)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-4}}$ koji su na tabeli prestavljeni spoljnim crtama. Nastavljajući dalje postupak videćmo da će ove crte seći ivice naše tabele. Vertikalna crta, koja označava s-tu kolonu, seče hipotenuzu po članu

$$\overset{(s)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$$

S obzirom na /4.6/$_4$ ovaj član će se izražavati preko $\overset{(s-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ i $\overset{(s-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}}$ /član $\overset{(s-1)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ se ne pojavljuje/. Zato ova spoljna crta daljom primenom /4.6/$_{3,4}$ klizi duž hipotenuze do člana $\overset{(1)}{A}_{\alpha_1}$ /ili do $\overset{(0)}{A}_{\alpha}$ što je isto/. Što se tiče druge spoljne crte ona će seći kolonu označenu sa O po članu $\overset{(k-\frac{s}{2})}{A}$ ili $\overset{(k-\frac{s+1}{2})}{A}$, u zavisnosti od toga da li je s-parno ili neparno. Svi ostali članovi preko kojih se izražava $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ sadržini su izmedju ovih spoljnih crta. Odavde sledi zaključak:

Član $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ izražava se preko

$$\overset{(k-p)}{A} \qquad k-1 \geq p \geq \begin{cases} \dfrac{s}{2} & \text{kad je s parno} \\ \dfrac{s+1}{2} & \text{kad je s neparno} \end{cases}$$

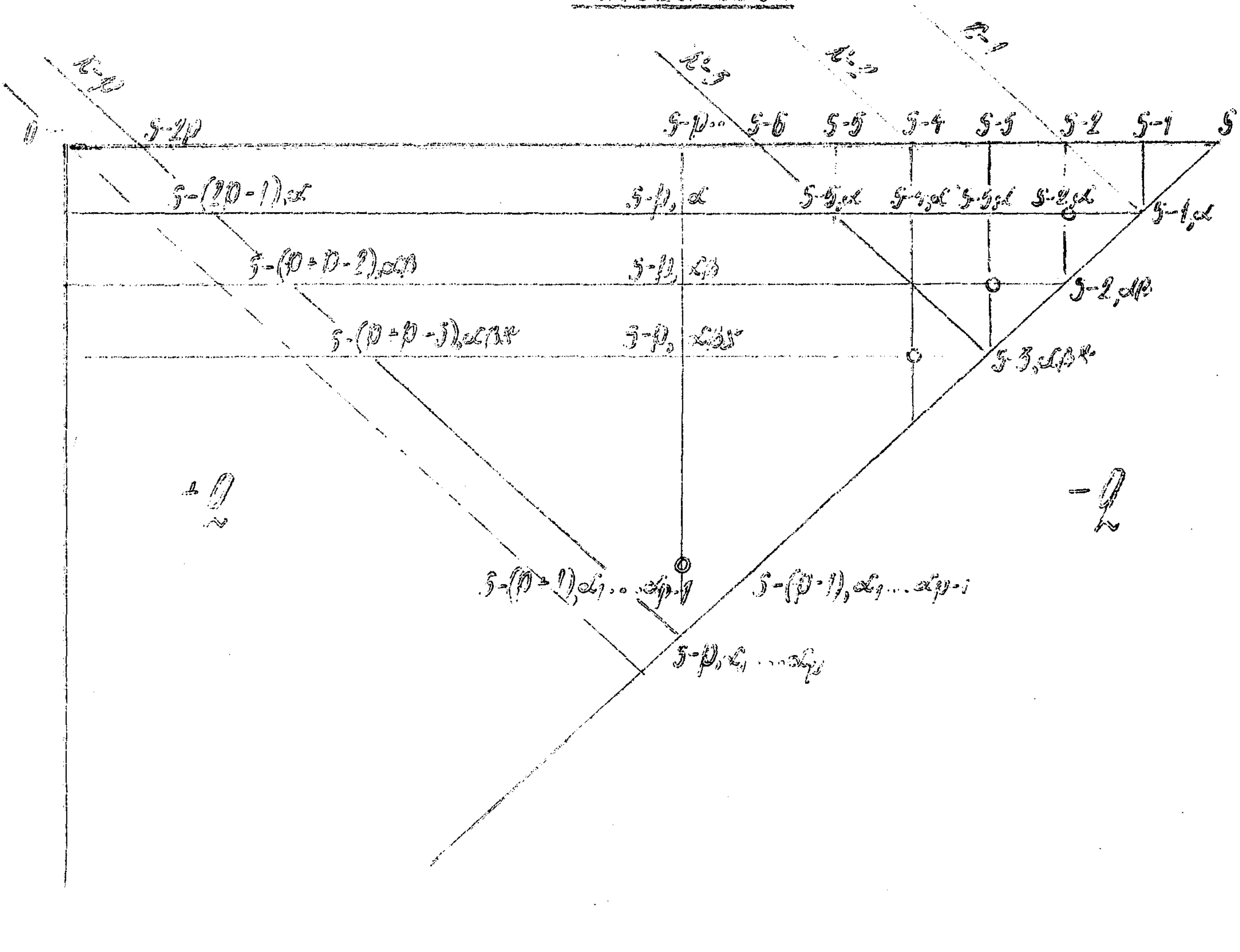
i

$$\overset{(1)}{A}_{\alpha} = \overset{(0)}{A}_{,\alpha} = \varphi_{,\alpha}$$

njihovih izvoda.

Na koji način ovi članovi ulaze u izraz za $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ za sada ne znamo. Zato ćemo se poslužiti sledećom tabelom:

Tabela br.4



Ona nam pokazuje koji sve članovi /k-p/-tog izvoda ulazi u izraz za $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$. Red izvoda preko koga izražavamo $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ naznačen je u prvom redu tabele sa brojevima k-1,k-2,..,k-p uz kose crte. Svi članovi desno od neke kose crte, recimo k-3, zajedno sa članovima na toj crti odredjuju članove datog reda / u našem primeru reda k-3 / preko koga se izražava $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$.

Način formiranja tabele je prost: npr. članovi /k-3/-eg izvoda se dobijaju iz članova /k-2/-og izvoda, tj. svih članova desno od kose crte /k-2/. Svi se oni pojavljuju u /k-3/-em izvodu sa dodatnim članovima na crti /k-3/ ili /s-6/ i crte koja prolazi kroz /s-5/.

Opšti članovi ove tabele su

$$\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-(p\pm q)}}$$

$$\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-(p\pm q)}, \beta_1}$$

/5.6/ $$\vdots$$

$$\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-(p\pm q)}, \beta_1 \ldots \beta_{p-q-1}}$$

$$\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-(p\pm q)}, \beta_1 \ldots \beta_{p-q}}$$

gde je

/5.7/ $$0 \leq q \leq p \, .$$

Važno je uočiti da je za srednji stubac q=o

$$
\begin{array}{l}
\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-p}} \\
\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-p},\beta_1} \\
\quad\vdots \\
\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-p},\beta_1\ldots\beta_{p-2}} \\
\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-p},\beta_1\ldots\beta_{p}}
\end{array}
\tag{5.8}
$$

pri čemu se izostavlja član $\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-p},\beta_1\ldots\beta_{p-1}}$, koji se ne pojavljuje pri korišćenju rekurentnog obrasca /5.4/.

Za $q=p$ biće dobijeni krajnji članovi naše trouglaste tabele, i to

$$
\begin{array}{ll}
\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-2p}} & \text{kad je znak plus,} \\
\overset{(k-p)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s}} & \text{kad je znak minus.}
\end{array}
\tag{5.9}
$$

Uopšte, sa znakom plus odredjeni su članovi levo od kolone $q=o$, a sa znakom minus članovi desno od kolone $q=o$ naše tabele.

Samo po sebi se razume da /5.6/ ima smisla samo ako je

$$s-(p\pm q)\geqslant 0 . \tag{5.10}$$

U slučaju kad je

$$s-(p\pm q)\geqslant 0 \tag{5.11}$$

/5.6/ postaje oblika

$$
\begin{array}{l}
\overset{(k-p)}{A} \\
\overset{(k-p)}{A}_{,\beta_1} \\
\\
\overset{(k-p)}{A}_{,\beta_1\ldots\beta_{p-q}}
\end{array}
\tag{5.12}
$$

tj. dobijaju se članovi na koje se rekurentni obrasci /4.6/$_{3,4}$ ne mogu više primeniti. U našoj tabeli to su članovi na stubcu O.

Članovi izraza /5.12/ su oni preko kojih se $\overset{(x)}{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ izražava u konačnom obliku. To i jeste cilj našeg daljeg rada i zato će nas interesovati samo slučaj kad je zadovoljena relacija /5.11/, tj.

/5.13/ $$p \pm q = s \, .$$

Ovaj izraz sadrži dve jednakosti. U slučaju da je u /5.13/ znak plus biće

$$p = \frac{s}{2} \qquad (q = p)$$

a

$$p = s \qquad (q = 0)$$

najveća i najmanja vrednost p, tj.

/5.14/ $$\frac{s}{2} \leq p \leq s$$

U slučaju da je u /5.13/ znak minus biće

/5.15/ $$s \leq p \leq x$$

Radi potpunije diskusije detaljnije ćemo ispitati /5.6/ u zavisnosti od /5.13/.

5.1 Slučaj kad je s parno

a/ Neka je u /5.6/ ispred q znak plus. Tada je, s obzirom na /5.13/, q=s-p a interval promene p definisan sa /5.14/. Izraz /5.6/ tj. /5.12/ postaje oblika

/5.1.1/ $$\begin{matrix} \overset{(x-p)}{A} \\ \overset{(x-p)}{A}{}_{,\beta_1} \\ \vdots \\ \overset{(x-p)}{A}{}_{,\beta_1 \dots \beta_{2p-s}} \, . \end{matrix}$$

Za p=s/2 dobijamo

$$\overset{(\kappa-\frac{s}{2})}{A} \qquad /5.1.2/$$

a za p=s /q=o/ sledi

$$\begin{matrix} \overset{(\kappa-s)}{A} \\ \overset{(\kappa-s)}{A}_{,\beta_1} \\ \vdots \\ \overset{(\kappa-s)}{A}_{,\beta_1 \dots \beta_{s-2}} \\ \overset{(\kappa-s)}{A}_{,\beta_1 \dots \beta_s} \end{matrix} \qquad /5.1.3/$$

Za $p > s$ bilo bi $q=s-p$ o što je u suprotnosti sa /5.7/.

b/ Tada /5.6/ ima smisla samo ako je ispred q znak minus ili, prema /5.13/,

$$q = p - s$$

Interval promene p definisan je sa /5.15/. Izraz /5.6/ postaje

$$\begin{matrix} \overset{(\kappa-p)}{A} \\ \overset{(\kappa-p)}{A}_{,\beta_1} \\ \vdots \\ \overset{(\kappa-p)}{A}_{,\beta_1 \dots \beta_{s-2}} \\ \overset{(\kappa-p)}{A}_{,\beta_1 \dots \beta_{s-1}} \\ \overset{(\kappa-p)}{A}_{,\beta_1 \dots \beta_s} \end{matrix} \qquad /5.1.4/$$

5.2 s je neparno

Tada je, prema /5.1.1/,

/5.2.1/ $$2p-s=1$$

najmanja vrednost ovog izraza. Odavde je $p=\frac{s+1}{2}$. Unoseći ovu vrednost za p u /5.1.1/ dobijamo

/5.2.2/ $$\begin{matrix} \overset{\left(k-\frac{s+1}{2}\right)}{A} \\ \overset{\left(k-\frac{s+1}{2}\right)}{A}{}_{,\beta_1} \end{matrix} .$$

Svi ostali rezultati su isti kao i kad je s parno.

5.3 Neke napomene

Napomena 1. Važno je uočiti, da se u slučaju s=1 ne javljaju članovi $\overset{(k-p)}{A}$ u izrazu za $\overset{(k)}{A}_{\alpha}$.

Zaista, za s=1 je, prema /5.14/, p=1 i /5.1.1/ postaje

/5.3.1/ $$\begin{matrix} \overset{(k-1)}{A} \\ \overset{(k-1)}{A}{}_{,\beta_1} \end{matrix}$$

Ali tada je q=o i važi /5.8/,tj. nema u /5.3.1/ člana $\overset{(k-1)}{A}$.

Ako se uzme u obzir /5.15/ tada je $1\leq p\leq k$ i /5.1.4/ postaje

/5.3.2/ $$\begin{matrix} \overset{(k-p)}{A} \\ \overset{(k-p)}{A}{}_{,\beta_1} \end{matrix} .$$

Ali sada se ne mogu pojaviti članovi $\overset{(k-p)}{A}$ jer nema člana $\overset{(k-1)}{A}$ kao najvećeg medju njima. Razlog je jednostavan. Svi ovi članovi nalaze se na istom mestu šeme pri čemu se menja samo p.

Ako se pri nekom p ne pojavi $\overset{(k-p)}{A}$ onda se ne mogu pojaviti ni članovi $\overset{(k-\rho)}{A}$ za $\rho > p$. Ovi rezultati su u potpunosti saglasni sa izrazom /5.2/.

<u>Napomena 2.</u> Za p=k u /5.1.4/ dobijamo

$$
\begin{array}{l}
\varphi \\
\varphi_{,\beta_1} \\
\vdots \\
\varphi_{,\beta_1\dots\beta_{s-1}} \\
\varphi_{,\beta_1\dots\beta_s}
\end{array}
\qquad /5.3.3/
$$

Očigledno je da se na osnovu ovoga zaključuje da se $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ izražava i preko φ. Ovo je protivurečno zaključku koji se može izvesti na osnovu Tabele br. 3. Razlog protivurečnosti je sledeći:

Pri izražavanju $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ preko članova nižeg reda koristili smo rekurentne obrasce /4.6/. Pri tome smo postepeno $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ izražavali preko $\overset{(k-1)}{A}$ i njegovih izvoda, zatim itd.. Tako smo došli i do članova prvog izvoda, tj. $\overset{(1)}{A}$ i njegovih izvoda, a tek zatim do $\overset{(0)}{A}=\varphi$ i njegovih izvoda.

Ako je u /5.6/ p=k-1 mora biti $s-/p\pm q/\leq 1$.

Slučaj kad je $s-/p\pm q/=o$ već smo ispitali. Ostaje slučaj $s-/p\pm q/=1$.

Ako je u /5.6/ $s-/p-q/=1$ dobićemo

$$
\begin{array}{l}
\overset{(1)}{A}_{\alpha_1} \\
\overset{(1)}{A}_{\alpha_1,\beta_1} \\
\vdots \\
\overset{(1)}{A}_{\alpha_1,\beta_1\dots\beta_{s-1}}
\end{array}
\qquad /5.3.4/
$$

tj. član $\overset{(1)}{A}_{\alpha_1}$ i njegove izvode na koje se još može primeniti rekurentni obrazac /4.6/. Ali kako je

$$\overset{(1)}{A}_{,\alpha_1} = \overset{(0)}{A}_{,\alpha_1} = \varphi_{,\alpha_1}$$

to /5.3.4/ postaje

$$
\begin{array}{ll}
 & \varphi_{,\alpha_1} \\
 & \varphi_{,\alpha_1\beta_1} \\
/5.3.5/ & \vdots \\
 & \varphi_{,\alpha_1\beta_1\ldots\beta_{s-1}}\,.
\end{array}
$$

Očigledno je da se /5.3.3/ i /5.3.5/ razlikuju samo za φ, koje se zaista ne pojavljuje u izrazima za $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ o čemu treba strogo voditi računa pri njihovom izračunavanju.

Na isti način se zaključuje kad je s-/p+q/=1.

Rezime

Na kraju da zaključimo da se članovi $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ izražavaju preko

$$
\begin{array}{ll}
 & \overset{(k-p)}{A} \\
 & \overset{(k-p)}{A}_{,\beta_1} \\
/5.1.1/ & \vdots \\
 & \overset{(k-p)}{A}_{,\beta_1\ldots\beta_{2p-s}}\,, \\
 & \frac{s}{2} \leq p \leq s
\end{array}
$$

i

$$
\begin{array}{l}
\overset{(k-p)}{A} \\
\overset{(k-p)}{A}{}_{,\beta_1} \\
\vdots \\
\overset{(k-p)}{A}{}_{,\beta_1\ldots\beta_{s-1}} \\
\overset{(k-p)}{A}{}_{,\beta_1\ldots\beta_s} \,,
\end{array}
\tag{/5.1.4/}
$$

$$s \leq p \leq k \,,$$

vodeći računa o napomenama 1 i 2 i s /tj. da li je s parno ili neparno/.

6. Neki posebni rezultati

Do sada smo analizirali rekurentne obrasce /4.6/ i pokazali preko kojih se članova i njihovih izvoda oni izražavaju. Tačnije, posmatrali smo jedan potpuno odredjen član $\overset{(k)}{A}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$; s je bilo fiksirano a p je variralo. Nas interesuje obrnut slučaj, tj. kad je p fiksirano a s varira. Drukčije rečeno, nas interesuje na koji se način $\overset{(k-p)}{A}$ pojavljuje u /3.1/. Odgovor na to daje /5.1.1/ i /5.1.4/. Najveći red izvoda po s u svim ovim izrazima biće kad je s=p . Tada /5.1.1/ postaje oblika

$$
\begin{array}{l}
\overset{(k-p)}{A} \\
\overset{(k-p)}{A}{}_{,\beta_1} \\
\\
\overset{(k-p)}{A}{}_{,\beta_1\ldots\beta_p} \,,
\end{array}
\tag{/6.1/}
$$

jer je $p \leqq s \leqq 2p$. U /5.1.4/ najveća vrednost s može biti **p**, pa se ponovo dolazi do /6.1/.

Ako je $o \leqq p \leqq k$ dobićemo sve $\overset{(k-p)}{A}$ i njihove izvode koji ulaze u odredjivanje koeficijenata izraza /3.1/. To su

$$
\begin{array}{l}
\overset{(k)}{A} \\
\overset{(k-1)}{A} \; ; \; \overset{(k-1)}{A}_{,\alpha_1} \\
\overset{(k-2)}{A} \; ; \; \overset{(k-2)}{A}_{,\alpha_1} \; ; \; \overset{(k-2)}{A}_{,\alpha_1\alpha_2} \\
\vdots \\
\overset{(k-p)}{A} \; ; \; \overset{(k-p)}{A}_{,\alpha_1} \; ; \; \ldots \; \overset{(k-p)}{A}_{,\alpha_1 \ldots \alpha_p}
\end{array}
\tag{6.2}
$$

$$
\begin{array}{l}
\overset{(1)}{A} \; ; \; \overset{(1)}{A}_{,\alpha_1} \; ; \; \ldots \; \overset{(1)}{A}_{,\alpha_1 \ldots \alpha_p} \; ; \; \ldots \; ; \; \overset{(1)}{A}_{,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} \\
\qquad \varphi_{,\alpha_1} \; ; \; \ldots \; \varphi_{,\alpha_1 \ldots \alpha_p} \; ; \; \ldots \; ; \; \varphi_{,\alpha_1 \ldots \alpha_k} \, .
\end{array}
$$

7. Neki primeri primene izložene teorije

Koristeći se dosadašnjim rezultatima izvešćemo izraze za

$\varphi_{,i_1\ldots i_k}$ (k=1,2,3,4).

Za k=1, prema /4.6/, biće

$$\overset{(1)}{A} = \varphi_{,i} n^i ,$$

/7.1/

$$\overset{(1)}{A}_{\alpha} = \overset{(0)}{A}_{,\alpha} = \varphi_{,\alpha} ,$$

pa je, s obzirom na /3.1/,

/7.2/ $$\varphi^{,i} = \overset{(1)}{A} n^i + \varphi^{,\alpha} x^i_{,\alpha} .$$

Za k=2

$$\overset{(2)}{A} = \varphi_{,ij} n^i n^j$$

/7.3/ $$\overset{(2)}{A} = \overset{(1)}{A}_{,\alpha} + b^{\beta}_{\alpha} \overset{(0)}{A}_{,\beta} = \overset{(1)}{A}_{,\alpha} + b^{\beta}_{\alpha} \varphi_{,\beta}$$

$$\overset{(2)}{A}_{\alpha\beta} = \overset{(1)}{A}_{\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta} \overset{(1)}{A} = \varphi_{,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \overset{(1)}{A} ,$$

pa je

$$\varphi^{,ij} = \overset{(2)}{A} n^i n^j +$$

/7.4/ $$+ \left(\overset{(1)}{A}{}^{,\alpha} + b^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta}\right)\left(n^i x^j_{,\alpha} + n^j x^i_{,\alpha}\right) +$$

$$+ \left(\varphi^{,\alpha\beta} - b^{\alpha\beta} \overset{(1)}{A}\right) x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} .$$

Za k=3

$$\overset{(3)}{A} = \varphi_{,ijk}\, n^i n^j n^k ,$$

$$\overset{(3)}{A}_{\alpha} = \overset{(2)}{A}_{,\alpha} + 2 b_{\alpha}^{\beta} \overset{(1)}{A}_{,\beta} + 2 b_{\alpha}^{\beta} b_{\beta}^{\gamma} \overset{(1)}{A}_{,\gamma} =$$

$$= \overset{(2)}{A}_{,\alpha} + 2 b_{\alpha}^{\beta} \overset{(1)}{A}_{,\beta} + 2 b_{\alpha}^{\beta} b_{\beta}^{\gamma} \varphi_{,\gamma} ,$$

$$\overset{(3)}{A}_{\alpha\beta} = \overset{(2)}{A}_{\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta} \overset{(2)}{A} + b_{\beta}^{\gamma} \overset{(2)}{A}_{\alpha\gamma} =$$

$$= b_{\alpha,\beta}^{\gamma} \varphi_{,\gamma} + \left(b_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + b_{\beta}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}\right) \varphi_{,\gamma\delta} -$$

$$- b_{\beta}^{\gamma} b_{\alpha\gamma} \overset{(1)}{A} + \overset{(1)}{A}_{,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \overset{(2)}{A} ,$$

/7.5/

$$\overset{(3)}{A}_{\alpha\beta\gamma} = \overset{(2)}{A}_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma} \overset{(2)}{A}_{\beta} - b_{\beta\gamma} \overset{(2)}{A}_{\alpha} =$$

$$= \overset{(2)}{A}_{\alpha\beta,\gamma} - \left(b_{\alpha\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + b_{\beta\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}\right) \overset{(2)}{A}_{\delta} =$$

$$= \varphi_{,\alpha\beta\gamma} - b_{\alpha\beta,\gamma} \overset{(1)}{A} - b_{\alpha\beta} \overset{(1)}{A}_{,\gamma} -$$

$$- \left(b_{\alpha\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + b_{\beta\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}\right) \left(\overset{(1)}{A}_{,\delta} + b_{\delta}^{\sigma} \varphi_{,\sigma}\right) =$$

$$= \varphi_{,\alpha\beta\gamma} - b_{\alpha\beta,\gamma} \overset{(1)}{A} - b_{\alpha\beta} \overset{(1)}{A}_{,\gamma} -$$

$$- \left(b_{\alpha\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + b_{\beta\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}\right) \overset{(1)}{A}_{,\delta} -$$

$$- \left(b_{\alpha\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + b_{\beta\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}\right) b_{\delta}^{\sigma} \varphi_{,\sigma}$$

$$= \varphi_{,\alpha\beta\gamma} - (b_{\alpha\gamma} b^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\gamma} b^{\delta}_{\alpha})\varphi_{,\delta} - b_{\alpha\beta,\gamma}\overset{(1)}{A} -$$

$$- (b_{\alpha\gamma}\delta^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\gamma}\delta^{\delta}_{\alpha} + b_{\alpha\beta}\delta^{\delta}_{\gamma})\overset{(1)}{A}_{,\delta},$$

pa ja

$$\varphi^{,ijk} = \overset{(3)}{A} n^i n^j n^k +$$

$$+ (\overset{(2)}{A}{}^{,\alpha} + 2A b^{\alpha\beta}\overset{(1)}{A}_{,\beta} + 2 b^{\alpha\beta} b^{\gamma}_{\beta}\varphi_{,\gamma}) \times$$

$$\times (x^i_{,\alpha} n^j n^k + x^j_{,\alpha} n^i n^k + x^k_{,\alpha} n^i n^j) +$$

$$+ [b^{\alpha\gamma,\beta}\varphi_{,\gamma} + (b^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} a^{\alpha\delta})\varphi_{,\gamma\delta} -$$

/7.6/ $$- b^{\alpha}_{\gamma} b^{\beta\gamma}\overset{(1)}{A} + \overset{(1)}{A}{}^{,\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}\overset{(2)}{A}] \times$$

$$\times (x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} n^k + x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} n^j + x^k_{,\beta} x^j_{,\alpha} n^i) +$$

$$+ [\varphi^{,\alpha\beta\gamma} - (b^{\alpha\gamma} b^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} b^{\alpha\delta})\varphi_{,\delta} -$$

$$- b^{\alpha\beta,\gamma}\overset{(1)}{A} -$$

$$- (b^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} a^{\alpha\delta} + b^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta})\overset{(1)}{A}_{,\delta}] \times$$

$$\times x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma}.$$

Za k=4

$$\overset{(4)}{A} = \varphi_{,ijkl}\, n^i n^j n^k n^l,$$

$$\overset{(4)}{A}_\alpha = \overset{(3)}{A}_{,\alpha} + 3 b^\beta_\alpha \overset{(2)}{A}_{,\gamma} + 6 b^\beta_\alpha b^\gamma_\beta \overset{(1)}{A}_{,\gamma} +$$

$$+ 6 b^\beta_\alpha b^\gamma_\beta b^\delta_\gamma \overset{(0)}{A}_{,\delta},$$

$$\overset{(4)}{A}_{\alpha\beta} = \overset{(3)}{A}_{\alpha,\beta} - b_{\alpha\beta} \overset{(3)}{A} + 2 b^\gamma_\beta \overset{(3)}{A}_{\alpha\gamma} =$$

$$= 2\left(b^\gamma_{\alpha,\beta} b^\delta_\gamma + b^\gamma_\alpha b^\delta_{\gamma,\beta} + b^\gamma_\beta b^\delta_{\alpha,\gamma}\right)\varphi_{,\delta} +$$

/7.7/ $$+ 2\left(b^\delta_\alpha b^\gamma_\beta \delta^\tau_\gamma + b^\gamma_\beta b^\delta_\gamma \delta^\tau_\alpha + b^\gamma_\alpha b^\delta_\gamma \delta^\tau_\beta\right)\varphi_{,\delta\tau} +$$

$$+ 2 b^\gamma_{\alpha,\beta} \overset{(1)}{A}_{,\gamma} +$$

$$+ 2\left(b^\gamma_\alpha \delta^\delta_\beta + b^\gamma_\beta \delta^\delta_\alpha\right) \overset{(1)}{A}_{,\gamma\delta} -$$

$$- 2 b_{\alpha\delta} b^\gamma_\beta b^\delta_\gamma \overset{(1)}{A} - 2 b_{\alpha\gamma} b^\gamma_\beta \overset{(2)}{A} +$$

$$+ \overset{(2)}{A}_{,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \overset{(3)}{A},$$

$$\overset{(4)}{A}_{\alpha\beta\gamma} = \Big[\!\Big[b^{\delta}_{\alpha,\beta\gamma} - 2\left(b_{\alpha\gamma} b^{\tau}_{\beta} b^{\delta}_{\tau} + b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha} b^{\delta}_{\tau}\right) -$$

$$- \left(b_{\alpha\tau} b^{\tau}_{\gamma} b^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\tau} b^{\tau}_{\gamma} b^{\delta}_{\alpha}\right)\Big]\!\Big] \varphi_{,\delta} +$$

$$+ \left(b^{\delta}_{\alpha,\gamma} \delta^{\tau}_{\beta} + b^{\delta}_{\beta,\gamma} \delta^{\tau}_{\alpha} + b^{\delta}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\gamma}\right) \varphi_{,\delta\tau} +$$

$$+ \Big[\!\Big[b^{\delta}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\beta} \delta^{\rho}_{\gamma} + b^{\delta}_{\beta} \delta^{\tau}_{\alpha} \delta^{\rho}_{\gamma} + b^{\rho}_{\gamma} \delta^{\delta}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\beta} \Big]\!\Big] \varphi_{,\delta\tau\rho} -$$

$$- \left(b_{\alpha\delta,\gamma} b^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\delta,\gamma} b^{\delta}_{\alpha} + b_{\alpha\beta,\delta} b^{\delta}_{\gamma}\right) \overset{(1)}{A} -$$

$$- \Big[\!\Big[2 b^{\tau}_{\delta} \left(b_{\alpha\gamma} \delta^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\gamma} \delta^{\delta}_{\alpha}\right) +$$

$$+ b^{\delta}_{\gamma} \left(b_{\alpha\delta} \delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\delta} \delta^{\tau}_{\alpha} + b_{\alpha\beta} \delta^{\tau}_{\delta}\right) +$$

$$+ b^{\delta}_{\beta} b_{\alpha\delta} \delta^{\tau}_{\gamma} \Big]\!\Big] \overset{(1)}{A}_{,\tau} +$$

$$+ \overset{(1)}{A}_{,\alpha\beta\gamma} - b_{\alpha\beta,\gamma} \overset{(2)}{A} -$$

$$- \left(b_{\alpha\beta} \delta^{\delta}_{\gamma} + b_{\alpha\gamma} \delta^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\gamma} \delta^{\delta}_{\alpha}\right) \overset{(2)}{A}_{,\delta} \,,$$

$$\overset{(4)}{A}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -(b_{\alpha\gamma,\delta} b^{\sigma}_{\beta} + b_{\alpha\gamma} b^{\sigma}_{\beta,\delta} + b_{\beta\gamma,\delta} b^{\sigma}_{\alpha} +$$

$$+ b_{\beta\gamma} b^{\sigma}_{\alpha,\delta} + b_{\alpha\delta} b^{\sigma}_{\beta,\gamma} + b_{\beta\delta} b^{\sigma}_{\alpha,\gamma} +$$

$$+ b_{\gamma\delta} b^{\sigma}_{\alpha,\beta})\varphi_{,\sigma} -$$

$$-[\![(b_{\alpha\gamma} b^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha})\delta^{\sigma}_{\delta} +$$

$$+(b_{\alpha\delta} b^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\delta} b^{\tau}_{\alpha})\delta^{\sigma}_{\gamma} +$$

$$+(b_{\gamma\delta} b^{\tau}_{\alpha} + b_{\alpha\delta} b^{\tau}_{\gamma})\delta^{\sigma}_{\beta} +$$

$$+(b_{\beta\delta} b^{\tau}_{\gamma} + b_{\gamma\delta} b^{\tau}_{\beta})\delta^{\sigma}_{\alpha}]\!]\varphi_{,\tau\sigma} +$$

$$+ \varphi_{,\alpha\beta\gamma\delta} -$$

$$-[\![b_{\alpha\beta,\gamma\delta} - (b_{\alpha\delta} b_{\beta\sigma} b^{\sigma}_{\gamma} + b_{\beta\delta} b_{\alpha\sigma} b^{\sigma}_{\gamma} +$$

$$+ b_{\gamma\delta} b_{\alpha\sigma} b^{\sigma}_{\beta})]\!]\overset{(1)}{A} -$$

$$-(b_{\alpha\beta,\gamma}\delta^{\tau}_{\delta} + b_{\alpha\gamma,\delta}\delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\gamma,\delta}\delta^{\tau}_{\alpha} +$$

$$+ b_{\alpha\beta,\delta}\delta^{\tau}_{\gamma})\overset{(1)}{A}_{,\tau} -$$

$$-[\![(b_{\alpha\gamma}\delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\gamma}\delta^{\tau}_{\alpha} + b_{\alpha\beta}\delta^{\tau}_{\gamma})\delta^{\rho}_{\delta} +$$

$$+(b_{\alpha\delta}\delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\delta}\delta^{\tau}_{\alpha})\delta^{\rho}_{\gamma} +$$

$$+ b_{\gamma\delta}\, \delta^{\tau}_{\alpha} \delta^{\rho}_{\beta}] \overset{(1)}{A}_{,\tau\rho} +$$

$$+ (b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma} + b_{\beta\delta} b_{\alpha\gamma} + b_{\gamma\delta} b_{\alpha\beta}) \overset{(2)}{A} ,$$

a je

$$\varphi_{,}{}^{ijkl} = \overset{(4)}{A} n^i n^j n^k n^l +$$

$$+ \overset{(4)}{A}{}^{\alpha} (x^i_{,\alpha} n^j n^k n^l + x^j_{,\alpha} n^i n^k n^l +$$

$$+ x^k_{,\alpha} n^i n^j n^l + x^l_{,\alpha} n^i n^j n^k) +$$

$$+ \overset{(4)}{A}{}^{\alpha\beta} (x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} n^k n^l + x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} n^j n^l +$$

$$+ x^i_{,\alpha} x^l_{,\beta} n^j n^k + x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta} n^i n^l +$$

/7.8/

$$+ x^j_{,\alpha} x^l_{,\beta} n^i n^k + x^k_{,\alpha} x^l_{,\beta} n^i n^j) +$$

$$+ \overset{(4)}{A}{}^{\alpha\beta\gamma} (x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma} n^l + x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^l_{,\gamma} n^k +$$

$$+ x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} x^l_{,\gamma} n^j + x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta} x^l_{,\gamma} n^i) +$$

$$+ \overset{(4)}{A}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma} x^l_{,\delta} .$$

8. Neki osnovni pojmovi i definicija singularnih površina /površina diskontinuiteta/

Obeležimo sa F neki skup funkcija od $\underset{\sim}{x}$ i t. Površina S/t/ na kojoj postoji diskontinuitet bilo koje funkcije iz F ili njenih izvoda zove se singularna ili površina talasa u opštem smislu. Još preciznije, kažemo da je S/t/ talas nultog reda /singularna površina nultog reda/ ako bar jedna funkcija $F/\underset{\sim}{x},t/$ je prekidna po koordinatama $\underset{\sim}{x}$ na S/t/. Talas nultog reda zove se i udarni talas.

Površina S/t/ je talas prvog reda ako

a/ f-je $F/\underset{\sim}{x},t/$ su neprekidne na S/t/ i

b/ bar jedan prvi izvod $F_{,i}$ je prekidan na S/t/.

Singularne površine ili talasi reda $n \geqslant 2$ definišu se na analogan način.

Mi pretpostavljamo da je površina S/t/ dovoljno glatka.

Skup funkcija u odnosu na koji se definiše singularna površina u mehanici kontinuuma najčešće se sastoji od funkcija u^i $/\underset{\sim}{x},t/$- komponenata vektora pomeranja.

Naziv geometrijski uslovi kompatibilnosti /geometrijske relacije diskontinuiteta/ se koristi za one relacije kompatibilnosti koje ne zavise od kretanja površine S/t/, za razliku od kinematičkih uslova kompatibilnosti /kinematičkih relacija diskontinuiteta/ koje zavise od kretanja površine S/t/.

Red uslova kompatibilnosti odredjen je redom izvoda za koji se ovi uslovi traže.

9. Definicija i osobine operatora $[\ ]$

Za odredjivanje uslova kompatibilnosti neophodno je razmotriti osobine operatora $[\ ]$ [34]. Pomoću ovog operatora vrlo lako i kratko izvodimo potrebne uslove.

Kao i do sada, neka je zadata glatka površina S/t/.

Neka je u oblasti prostora E_3, koja sadrži i S/t/, definisana f-ja φ. Funkcija φ je neprekidna i diferencijabilna u okolini S/t/. Granične vrednosti uočene f-je kao i njihovi izvodi neprekidne su f-je na S/t/, pri čemu ćemo sa φ_1 označiti f-ju φ sa unutrašnje, a sa φ_2 f-ju φ sa spoljne strane površine S/t/. Pod spoljnom stranom podrazumevamo stranu površine u pravcu spoljne normale na površini S/t/.

Operatorom $[\ ]$ definišemo razliku vrednosti f-je φ na površini S/t/, tj.

/9.1/ $$[\varphi]=\varphi_2-\varphi_1$$

Diskontinuitet /9.1/ f-je φ na S/t/ često puta se u literaturi naziva i skok f-je φ na S/t/.

Operator diskontinuteta poseduje odredjene osobine. Navešćemo neke.

A. Diskontinuitet neprekidne f-je je nula.

U tom slučaju je $\varphi_1=\varphi_2$ a

/9.2/ $$[\varphi]=0,$$

s obzirom na /9.1/.

B. Operator $[\ ]$ je linearan.

Zaista, za bilo koje dve f-je φ i ψ iz skupa realnih promenljivih i bilo koja dva broja λ i μ iz skupa realnih brojeva po definiciji je

$$[\lambda\varphi+\mu\psi]=\lambda\varphi_2+\mu\psi_2-(\lambda\varphi_1+\mu\psi_1)=$$

/9.3/
$$=\lambda(\varphi_2-\varphi_1)+\mu(\psi_2-\psi_1)=$$

$$=\lambda[\varphi]+\mu[\psi],$$

što je trebalo pokazati.

C. Diskontinuitet proizvoda dveju f-je odredjen je sa

$$[\varphi\psi]=[\varphi][\psi]+\varphi_1[\psi]+\psi_1[\varphi]=$$

/9.4/
$$=-[\varphi][\psi]+\varphi_2[\psi]+\psi_2[\varphi].$$

Ako su $\varphi_2=\psi_2=0$ onda je

/9.5/
$$[\varphi\psi]=-[\varphi][\psi],$$

što neposredno sledi iz /9.4/.

Ako je jedna od njih neprekidna, npr. ψ, onda je $\psi_1=\psi_2=\psi$ pa je $[\psi]=0$, a

/9.6/
$$[\varphi\psi]=\psi[\varphi].$$

D. Pod navedenim pretpostavkama za funkciju φ važi

Lema Hadamard-a:

Diskontinuitet /skok/ tangentnog izvoda jednak je tangentnom izvodu diskontinuiteta /skoka/ [32].

Da bi ovo dokazali podjimo od izraza

$$\varphi_{1,\alpha}=\varphi_{1,i}x^i_{,\alpha}\quad ;\ \varphi_{2,\alpha}=\varphi_{2,i}x^i_{,\alpha}\ ,$$

koji su definisani na S/t/. Tada je

$$[\varphi_{,\alpha}]=\varphi_{2,\alpha}-\varphi_{1,\alpha}=(\varphi_2-\varphi_1)_{,\alpha}=$$

$$=[\varphi]_{,\alpha}=(\varphi_{2,i}-\varphi_{1,i})x^i_{,\alpha}=$$

$$=[\varphi_{,i}]x^i_{,\alpha}\ ,$$

ili konačno

/9.7/ $$[\varphi_{,\alpha}]=[\varphi]_{,\alpha}=[\varphi_{,i}]x^i_{,\alpha}.$$

Osobine A,B,C i D operatora $[\ \ ]$ često ćemo koristiti u daljem radu.

lo. Uslovi kompatibilnosti k-tog reda

Prema definiciji red singularne površine /površine diskontinuiteta/ odredjen je redom f-je φ za koju se traže uslovi kompatibilnosti. Na osnovu toga ovde je reč o diskontinuitetu k-tog izvoda f-je φ. Zato ćemo koristiti

/3.1/ $$\varphi_{,i_1\dots i_k}=\sum_{s=0}^{k}\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1\dots\alpha_s}\{x^{i_1}_{,\alpha_1}\dots x^{i_s}_{,\alpha_s}n^{i_{s+1}}\dots n^{i_k}\}$$

i operator diskontinuiteta $[\ \ ]$ čije smo osobine razmotrili u prethodnom odeljku. Primenom $[\ \ ]$ na /3.1/ dobijamo

$$[\varphi, i_1 \ldots i_k] =$$

$$= \left[\sum_{s=0}^{k} \overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \{ x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_s}_{,\alpha_s} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k} \} \right] =$$

/lo.1/
$$= \sum_{s=0}^{k} \left[\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \{ x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_s}_{,\alpha_s} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k} \} \right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \left[\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \right] \{ x^{i_1}_{,\alpha_1} \ldots x^{i_s}_{,\alpha_s} n^{i_{s+1}} \ldots n^{i_k} \},$$

s obzirom na osobine B i C operatora $[\ \ ]$. Pretpostavljajući glatkost površine S/t/ mi pretpostavljamo ustvari neprekidnost n^i, $x^i_{,\alpha}$ kao i svih ostalih elemenata unutrašnje geometrije površine S/t/.

Sada je jasno da se problem odredjivanja uslova kompatibilnosti k-tog reda svodi na odredjivanje diskontinuiteta koeficijenata $\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ u /3.1/, tj.

/lo.2/
$$\left[\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \right]$$

Medjutim, na osnovu prethodnih izlaganja /u odeljku 5/ zaključili smo da se $\overset{(k)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ /$0 \leqq s \leqq k$/ izražavaju preko /6.2/. Kako svi oni ulaze u linearnom obliku problem se svodi na diskontinuitete veličina

$$
\begin{array}{ll}
 & [\overset{(k)}{A}], \\
 & [\overset{(k-1)}{A}], [\overset{(k-1)}{A}_{,\alpha_1}], \\
 & [\overset{(k-2)}{A}], [\overset{(k-2)}{A}_{,\alpha_1}], [\overset{(k-2)}{A}_{,\alpha_1\alpha_2}], \\
 & \vdots \\
/10.3/ & [\overset{(k-p)}{A}], [\overset{(k-p)}{A}_{,\alpha_1}], \cdots [\overset{(k-p)}{A}_{,\alpha_1\ldots\alpha_p}], \\
 & \vdots \\
 & [\overset{(1)}{A}], [\overset{(1)}{A}_{,\alpha_1}], \cdots [\overset{(1)}{A}_{,\alpha_1\ldots\alpha_p}], \cdots [\overset{(1)}{A}_{,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}], \\
 & \qquad [\varphi_{,\alpha_1}], \cdots [\varphi_{,\alpha_1\ldots\alpha_p}], \cdots [\varphi_{,\alpha_1\ldots\alpha_k}].
\end{array}
$$

Ali prema osobini D operatora $[\ \ ]$ ovo se svodi na

$$
\begin{array}{ll}
 & [\overset{(k)}{A}], \\
 & [\overset{(k-1)}{A}], [\overset{(k-1)}{A}]_{,\alpha_1}, \\
 & [\overset{(k-2)}{A}], [\overset{(k-2)}{A}]_{,\alpha_1}, [\overset{(k-2)}{A}]_{,\alpha_1\alpha_2}, \\
 & \vdots \\
/10.4/ & [\overset{(k-p)}{A}], [\overset{(k-p)}{A}]_{,\alpha_1}, \ \ldots\ , [\overset{(k-p)}{A}]_{,\alpha_1\ldots\alpha_p}, \\
 & \vdots \\
 & [\overset{(1)}{A}], [\overset{(1)}{A}]_{,\alpha_1}, \ \ldots\ , [\overset{(1)}{A}]_{,\alpha_1\ldots\alpha_p}, \ldots, [\overset{(1)}{A}]_{,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}, \\
 & \qquad [\varphi]_{,\alpha_1}, \ \ldots\ , [\varphi]_{,\alpha_1\ldots\alpha_p}, \ldots, [\varphi]_{,\alpha_1\ldots\alpha_k}.
\end{array}
$$

11. Primeri. Geometrijski uslovi kompatibilnosti prvog, drugog, trećeg i četvrtog reda

Zaključno sa prethodnim, desetim, odeljkom teorija površina diskontinuiteta sa stanovišta geometrijskih uslova kompatibilnosti je zaokružena. Sada smo u stanju da damo i konkretne rezultate, koji ujedno prestavljaju i ilustraciju primene do sada izložene teorije. Mi ćemo se ovde zadržati na izvodjenju uslova kompatibilnosti f-je φ do četvrtog reda. Medjutim, način izvodjenja uslova kompatibilnosti viših redova je potpuno istovetan.

Sve potrebne uslove kompatibilnosti izvodimo na osnovu /10.1/ i /10.4/. Pri tome se svakako koriste rekurentni obrasci /4.6/. U našem slučaju mi ćemo koristiti rezultate odeljka 7 i to izraze: /7.2/, /7.4/, /7.6/, /7.7/ i /7.8/. Radi jednostavnosti pisanja konačnih izraza obeležimo sa $\overset{(k)}{B}$ veličine $[\overset{(k)}{A}]$, tj.

/11.1/ $$\overset{(k)}{B}=[\overset{(k)}{A}] \quad ; \quad B=[\overset{(0)}{A}]=[\varphi]$$

Tada je, s obzirom na /7.2/, /10.1/ i /11.1/, geometrijski uslov kompatibilnosti prvog reda

/11.2/ $$[\varphi_{,i}]=\overset{(1)}{B}n^i+B^{\alpha}x^i_{,\alpha} \, .$$

Geometrijski uslovi kompatibilnosti drugog reda, s obzirom na /7.4/, /10.1/ i /11.1/, glase

$$
\begin{aligned}
[\varphi_{,ij}] = {} & \overset{(2)}{B} n^i n^j + \\
& + \left(\overset{(1)}{B}{}^{\alpha} + b^{\alpha\beta} B_{,\beta}\right)\left(n^i x^j_{,\alpha} + n^j x^i_{,\alpha}\right) + \\
& + \left(B^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta} \overset{(1)}{B}\right) x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} .
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

Geometrijski uslovi kompatibilnosti trećeg reda, koristeći /7.6/, /10.1/ i /11.1/ postaju oblika

$$
\begin{aligned}
[\varphi_{,ijk}] = {} & \overset{(3)}{B} n^i n^j n^k + \\
& + \left(\overset{(2)}{B}{}^{\alpha} + 2 b^{\alpha\beta} \overset{(1)}{B}_{,\beta} + 2 b^{\alpha\beta} b^{\gamma}_{\beta} B_{,\gamma}\right) \times \\
& \times \left(x^i_{,\alpha} n^j n^k + x^j_{,\alpha} n^i n^k + x^k_{,\alpha} n^i n^j\right) + \\
& + \Big[\!\Big[b^{\alpha\delta,\beta} B_{,\delta} + \left(b^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma} + b^{\beta\gamma} a^{\alpha\delta}\right) B_{,\gamma\delta} - \\
& - b^{\alpha}_{\delta} b^{\beta\delta} \overset{(1)}{B} + \overset{(1)}{B}{}^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta} \overset{(2)}{B} \Big]\!\Big] \times \\
& \times \left(x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} n^k + x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} n^j + x^k_{,\beta} x^j_{,\alpha} n^i\right) + \\
& + \Big[\!\Big[B^{\alpha\beta\gamma} - \left(b^{\alpha\gamma} b^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} b^{\alpha\delta}\right) B_{,\delta} - \\
& - b^{\alpha\beta,\gamma} \overset{(1)}{B} - \\
& - \left(b^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} a^{\alpha\delta} + b^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta}\right) \overset{(1)}{B}_{,\delta} \Big]\!\Big] \times \\
& \times x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma} .
\end{aligned}
\tag{11.4}
$$

Na isti način kao i do sada izvodjenje uslova kompatibilnosti bilo kog reda praktično se svodi na formalno zamenjivanje odgovarajućih diskontinuiteta veličina $[\overset{(k)}{A}]$ u konačnim relacijama /3.1/, što je ilustrovano na relacijama prvog, drugog i trećeg reda. Zato se uslovi kompatibilnosti četvrtog reda direktno čitaju iz /7.7/ i /7.8/. Mi ćemo je napisati u eksplicitnom obliku da bi kompletirali naše rezultate. Tako je

/11.5/
$$\begin{aligned}
\overset{(4)}{B} &= [\varphi^{,ijkl}]\, n^i n^j n^k n^l, \\
\overset{(4)}{B}_{\alpha} &= \overset{(3)}{B}_{,\alpha} + 3 b_\alpha^\beta \overset{(2)}{B}_{,\beta} + 6 b_\alpha^\beta b_\beta^\gamma \overset{(1)}{B}_{,\gamma} + \\
&\quad + 6 b_\alpha^\beta b_\beta^\gamma b_\gamma^\delta B_{,\delta}\,, \\
\overset{(4)}{B}_{\alpha\beta} &= 2\left(b^\gamma_{\alpha,\beta} b^\delta_\gamma + b^\gamma_\alpha b^\delta_{\gamma,\beta} + b^\gamma_\beta b^\delta_{\alpha\gamma}\right) B + \\
&\quad + 2\left(b^\delta_\alpha b^\gamma_\beta \delta^\tau_\gamma + b^\gamma_\beta b^\delta_\gamma \delta^\tau_\alpha + b^\gamma_\alpha b^\delta_\gamma \delta^\tau_\beta\right) B_{,\delta\tau} + \\
&\quad + 2 b^\gamma_{\alpha\beta} \overset{(1)}{B}_{,\gamma} + \\
&\quad + 2\left(b^\gamma_\alpha \delta^\delta_\beta + b^\gamma_\beta \delta^\delta_\alpha\right) \overset{(1)}{B}_{,\gamma\delta} - \\
&\quad - 2 b_{\alpha\delta} b^\gamma_\beta b^\delta_\gamma \overset{(1)}{B} - 2 b_{\alpha\delta} b^\delta_\beta \overset{(2)}{A} + \\
&\quad + \overset{(2)}{B}_{,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \overset{(3)}{B},
\end{aligned}$$

gde smo sa $\overset{(k)}{B}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ obeležili $[\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}]$, tj.

/11.6/
$$\overset{(k)}{B}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = [\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}], \quad (0 \leq s \leq k)$$

Dalje je

$$\overset{(4)}{B}_{\alpha\beta\gamma} = [\![b^{\delta}_{\alpha,\beta\gamma} - 2\left(b_{\alpha\gamma} b^{\tau}_{\beta} b^{\delta}_{\tau} + b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha} b^{\delta}_{\tau} \right) -$$

$$- \left(b_{\alpha\tau} b^{\tau}_{\gamma} b^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\tau} b^{\tau}_{\gamma} b^{\delta}_{\alpha} \right)]\!] B_{,\delta} +$$

$$+ \left(b^{\delta}_{\alpha,\gamma} \delta^{\tau}_{\beta} + b^{\delta}_{\beta,\gamma} \delta^{\tau}_{\alpha} + b^{\delta}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\gamma} \right) B_{,\delta\tau} +$$

$$+ [\![b^{\delta}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\beta} \delta^{\rho}_{\gamma} + b^{\delta}_{\beta} \delta^{\tau}_{\alpha} \delta^{\rho}_{\gamma} + b^{\rho}_{\gamma} \delta^{\delta}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\beta}]\!] B_{,\delta\tau\rho}$$

$$- \left(b_{\alpha\delta,\gamma} b^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\delta,\gamma} b^{\delta}_{\alpha} + b_{\alpha\beta,\delta} b^{\delta}_{\gamma} \right) \overset{(1)}{B} -$$

$$- [\![2 b^{\delta}_{\gamma} \left(b_{\alpha\delta} \delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\delta} \delta^{\tau}_{\alpha} + b_{\alpha\beta} \delta^{\tau}_{\delta} \right) +$$

/11.7/ $$+ b^{\delta}_{\beta} b_{\alpha\delta} \delta^{\tau}_{\gamma}]\!] \overset{(1)}{B}_{,\tau} +$$

$$+ \overset{(1)}{B}_{,\alpha\beta\gamma} - b_{\alpha\beta,\gamma} \overset{(2)}{B} -$$

$$- \left(b_{\alpha\beta} \delta^{\delta}_{\gamma} + b_{\alpha\gamma} \delta^{\delta}_{\beta} + b_{\beta\gamma} \delta^{\delta}_{\alpha} \right) \overset{(2)}{B}_{,\delta} \, ,$$

$$\overset{(4)}{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \left(b_{\alpha\gamma,\delta} b^{\sigma}_{\beta} + b_{\alpha\gamma} b^{\sigma}_{\beta,\delta} + b_{\beta\gamma,\delta} b^{\sigma}_{\alpha} + \right.$$

$$+ b_{\beta\gamma} b^{\sigma}_{\alpha,\delta} + b_{\alpha\delta} b^{\sigma}_{\beta,\gamma} + b_{\beta\delta} b^{\sigma}_{\alpha,\gamma} +$$

$$\left. + b_{\gamma\delta} b^{\sigma}_{\alpha,\beta} \right) B_{,\sigma} -$$

$$- [\![\left(b_{\alpha\gamma} b^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha} \right) \delta^{\sigma}_{\delta} +$$

$$+(b_{\alpha\delta} b^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\delta} b^{\tau})\delta^{\sigma}_{\gamma} + (b_{\gamma\delta} b^{\tau}_{\alpha} + b_{\alpha\delta} b^{\tau}_{\gamma})\delta^{\sigma}_{\beta} +$$

$$+(b_{\beta\delta} b^{\tau}_{\gamma} + b_{\gamma\delta} b^{\tau}_{\beta})\delta^{\sigma}_{\alpha}]]B_{,\tau\sigma} + B_{,\alpha\beta\gamma\delta} -$$

$$-[[b_{\alpha\beta,\gamma\delta} - (b_{\alpha\delta} b_{\beta\delta} b^{\delta}_{\gamma} + b_{\beta\delta} b_{\alpha\delta} b^{\delta}_{\gamma} + b_{\gamma\delta} b_{\alpha\delta} b^{\delta}_{\beta}]]\overset{(1)}{B} -$$

$$-(b_{\alpha\beta,\gamma}\delta^{\tau}_{\delta} + b_{\alpha\gamma,\delta}\delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\gamma,\delta}\delta^{\tau}_{\alpha} + b_{\alpha\beta,\delta}\delta^{\tau}_{\gamma})\overset{(1)}{B}_{,\tau} -$$

$$-[[(b_{\alpha\gamma}\delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\gamma}\delta^{\tau}_{\alpha} + b_{\alpha\beta}\delta^{\tau}_{\gamma})\delta^{\rho}_{\delta} +$$

$$+(b_{\alpha\delta}\delta^{\tau}_{\beta} + b_{\beta\delta}\delta^{\tau}_{\alpha})\delta^{\rho}_{\gamma} + b_{\gamma\delta}\delta^{\tau}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}]]\overset{(1)}{B}_{,\tau\rho} +$$

$$+(b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma} + b_{\beta\delta} b_{\alpha\gamma} + b_{\gamma\delta} b_{\alpha\beta})\overset{(2)}{B},$$

s obzirom na /7.7/ i /11.6/. Uslovi kompatibilnosti četvrtog reda se mogu napisati u obliku

$$[\varphi^{,ijkl}] = \overset{(4)}{B} n^i n^j n^k n^l + \overset{(4)}{B}{}^{\alpha}(x^i_{,\alpha} n^j n^k n^l +$$
$$+ x^j_{,\alpha} n^i n^k n^l + x^k_{,\alpha} n^i n^j n^l + x^l_{,\alpha} n^i n^j n^k) +$$
$$+ \overset{(4)}{B}{}^{\alpha\beta}(x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} n^k n^l \;\; x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} n^j n^l +$$
$$+ x^i_{,\alpha} x^l_{,\beta} n^j n^k + x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta} n^i n^l +$$
$$/11.8/ \qquad + x^j_{,\alpha} x^l_{,\beta} n^i n^k + x^k_{,\alpha} x^l_{,\beta} n^i n^j) +$$
$$+ \overset{(4)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma}(x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma} n^l + x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^l_{,\gamma} n^k +$$
$$+ x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} x^l_{,\gamma} n^j + x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta} x^l_{,\gamma} n^i) +$$
$$+ \overset{(4)}{D}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma} x^l_{,\delta}$$

gde su $\overset{(4)}{B}, \overset{(4)}{B}{}^{\alpha}, \overset{(4)}{B}{}^{\alpha\beta}, \overset{(4)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma}, \overset{(4)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ odredjeni sa /11.5/ i /11.7/.

12. Osnovni zaključci

Na osnovu svega što je do sada izloženo mogu se izvesti sledeći zaključci:

1/ Uslovi kompatibilnosti bilo kog reda odredjeni su samo diskontinuitetima normalnih komponenti, njihovih izvoda na površini diskontinuiteta i geometrijom same površine diskontinuiteta;

2/ U relacijama diskontinuiteta ne učestvuje diskontinuitet same f-je za koju se diskontinuitet traži nego njeni izvodi na površini diskontinuiteta. Ovaj zaključak je suprotan pretpostavci Hadamard-a a koja je ekspicitno ponovljena od strane Truesdell-a i Toupin-a u CFT, str. 496, & 176;

3/ Svi do sada poznati rezultati specijalan su slučaj ove teorije.

Ako uvedemo sledeće oznake

$$B = A,$$

$$\overset{(1)}{B} = B, \qquad /12.1/$$

$$\overset{(2)}{B} = C$$

dobijamo za k=1,2 iz /11.2/ i /11.3/ isti oblik uslova kompatibilnosti prvog i drugog reda koji je dobio i T.X. Thomas [30] :

$$[\varphi^{,i}] = B n^i + A^{,\alpha} x^i_{,\alpha} \;,$$

$$[\varphi^{,ij}] = C n^i n^j + (B^{,\alpha} + b^{\alpha\beta} A_{,\beta})(n^i x^j_{,\alpha} + n^j x^i_{,\alpha}) + (A^{,\alpha\beta} - b^{\alpha\beta} B) x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} .$$

Ako uvedemo novu oznaku

/12.2/ $\overset{(3)}{B} = D$

i primenimo /12.1/ i /12.2/ u /11.4/ dobićemo uslove kompatibilnosti trećeg reda u obliku

$$
\begin{aligned}
[\varphi_{,}^{ijk}] = {} & D n^i n^j n^k + \\
& + (C^{,\alpha} + 2 b^{\alpha\beta} B_{,\beta} + 2 b^{\alpha\beta} b_\beta^\gamma A_{,\gamma})(x_{,\alpha}^i n^k n^j + x_{,\alpha}^j n^i n^k + \\
& + x_{,\alpha}^k n^i n^j) + [b^{\alpha\beta,\gamma} A_{,\gamma} + (b^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} a^{\alpha\delta}) A_{,\gamma\delta} - \\
& - b_\gamma^\alpha b^{\beta\gamma} B + B^{,\alpha\beta} - b^{\alpha\beta} C](x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^j n^k + \\
& + x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^k n^j + x_{,\beta}^k x_{,\alpha}^j n^i) + \\
& + [A^{,\alpha\beta\gamma} - (b^{\alpha\gamma} b^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} b^{\alpha\delta}) A_{,\delta} - b^{\alpha\beta,\gamma} B - \\
& + (b^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + b^{\beta\gamma} a^{\alpha\delta} + b^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta}), B_{,\delta}] \times \\
& \times x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^j x_{,\gamma}^k .
\end{aligned}
$$

U specijalnom slučaju kad su

/12.3/ $A = 0 \, , \; B = 0 \, ,$

tj. kad su f-ja φ i $\varphi_{,i}$ neprekidni, dobićemo

$$
\begin{aligned}
[\varphi_{,}^{ijk}] = {} & D n^i n^j n^k + C^{,\alpha}(x_{,\alpha}^i n^j n^k + x_{,\alpha}^j n^i n^k + x_{,\alpha}^k n^i n^j) - \\
& - b^{\alpha\beta} C (x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^j n^k + x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^k n^j + x_{,\beta}^k x_{,\alpha}^j n^i)
\end{aligned}
$$

koji je potpuno identičan rezultatu Nariboli-a i Juneja [21] , /197o/.

Ako su f-ja φ i njeni izvodi reda 1,2,......,k-1 neprekidni biće, prema /1o.1/,

$$[\varphi_{,i_1\ldots i_k}]=[\overset{(k)}{A}]n_{i_1}\cdots n_{i_k}= \qquad /12.4/$$

$$=[\varphi_{,j_1\ldots j_k}n^{j_1}\cdots n^{j_k}]n_{i_1}\cdots n_{i_k},$$

jer su svi

$$[\overset{(s)}{A}]=[\varphi_{,i_1\ldots i_s}n^{i_1}\cdots n^{i_s}]=[\varphi_{,i_1\ldots i_s}]n^{i_1}\cdots n^{i_s}=0,$$

/12.5/

$$[\overset{(s)}{A}]_{,\alpha_1\ldots\alpha_\rho}=[\varphi_{,i_1\ldots i_s}n^{i_1}\cdots n^{i_s}]_{,\alpha_1\ldots\alpha_\rho}=0,$$

$$/0\leq s\leq k-1,\ 0\leq\rho\leq s/$$

na osnovu naše pretpostavke o neprekidnosti f-je φ i njenih izvoda. Istu relaciju /12.4/ možemo napisati u nekoliko ekvivalentnih oblika

$$[\varphi_{,i_1\ldots i_k}]=[\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}\varphi]=$$

$$=[\varphi_{,j_1\ldots j_k}n^{j_1}\cdots n^{j_k}]n_{i_1}\cdots n_{i_k}= \qquad /12.6/$$

$$=[n^{j_1}\cdots n^{j_k}\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\varphi]n_{i_1}\cdots n_{i_k}=$$

$$=[\varphi^{,j_1}{}_{,j_1}{}^{,j_2}{}_{,j_2}\cdots{}^{,j_{k/2}}{}_{,j_{k/2}}]n_{i_1}\cdots n_{i_k}$$

/kad je k parno/

$$=\left[n_{j_k}\,\varphi^{,j_1}{}_{,j_1}{}^{,j_2}{}_{,j_2}\cdots{}^{,j_{\frac{k-1}{2}}}{}_{,j_{\frac{k-1}{2}}}{}^{j_k}\right]n_{i_1}\ldots n_{i_k}$$

/kad je k neparno/.

Pri izvodjenju ovih izraza vodili smo računa o neprekidnosti f-je φ i njenih izvoda do k-l reda kao i relaciji

/12.7/ $$n^i n^j = g^{ij} - a^{\alpha\beta} x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} \ .$$

Izrazi /12.6/ u potpunoj su podudarnosti sa rezultatima Truesdell-a i Toupin-a /vidi CFT, str. 498, /176.11/.

4/ Bitne razlike izmedju Thomas-ove teorije i ovde izložene su sledeće:

a- Thomasov postupak je iterativan. Postupak izložen u ovom radu je rekurentan. Ova teorija daje veze izmedju diskontinuiteta dva uzastopna reda što je kod Thomas-ove teorije isključeno.

b- Za izvodjenje relacija diskontinuiteta bilo kog reda na osnovu Thomas-ove teorije nužno je provesti celokupan račun. Već kod diskontinuiteta trećeg reda ove računice su vrlo komplikovane pa je postupak praktično nepodesan /vidi Truesdell i Toupin, CFT, str. 498/.

Rezultati ovde izložene teorije omogućuju izračunavanje uslova kompatibilnosti daleko prostije i bez provodjenja celokupne računice. Njena primena u tom smislu je bila izložena u odeljcima 7 i 11.

c- Thomasova teorija ne daje mogućnost da se da opšti zaključak o diskontinuitetima bilo kog reda, pa prema tome ne može se ni nazvati opštom.

U ovde izvedenoj teoriji, videli smo, problem odredjivanja uslova kompatibilnosti bilo kod reda svodi se na odredjivanje diskontinuiteta veličina $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$. U odeljku 5 pokazano je da se konačan izraz za $\overset{(k)}{A}_{\alpha_{(k)}}$ dobija u elegantnom obliku /5.3/. I za ostale koeficijente $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ moguće je dobiti konačne izraze. Na taj način moguće je izvesti najopštije zaključke o diskontinuitetima bilo kog reda. /Napominjem da smo se ovde, zbog komplikovanosti ovih izraza, zadržali na detaljnoj analizi izraza za $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ koja nam daje dovoljno podataka na osnovu kojih možemo zaključiti dovoljno o diskontinuitetima bilo kog reda./.

d- Izložena teorija je egzaktna i počiva na dokazima datih teorema. Thomas-ova teorija je više metod.

e- Već u c- je rečeno da se relacije diskontinuiteta odredjuju diskontinuitetima $\overset{(k)}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$. To znači da su u ovoj teoriji odgovarajući članovi grupisani, čime se problem znatno uprošćuje. Primenom operatora diskontinuiteta i korišćenjem njegovih osobina praktično se problem svodi na formalizam.

II. KINEMATIČKI USLOVI KOMPATIBILNOSTI

13. Kretanje površina

Već smo ranije definisali pojam kinematičkih uslova kompatibilnosti. Oni su bitno vezani za kretanje površina diskontinuiteta. Zato je neophodno potrebno proučiti njihovo kretanje.

Jednačina površine S/t/, koja se kreće, definisana je sa

/2.1/ $$x^i = x^i(u^\alpha, t),$$

ili

/2.1a/ $$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{u}, t),$$

gde je sa $\underset{\sim}{x}$ obeležena tačka u prostoru čije su koordinate x^i, a sa $\underset{\sim}{u}$ obeležena tačka na površini sa koordinatama u^α. Ovaj način obeležavanja je vrlo praktičan, sažet i gde je moguće mi ćemo ga koristiti i u buduće.

U uočenom trenutku t tačke površine potpuno su odredjene svojim koordinatama u^α na S/t/. Brzina kretanja uočene tačke površine definisana je sa

/13.1/ $$\underset{\sim}{w} = \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial t}\Big|_{\underset{\sim}{u}=const.}$$

Ako eliminišemo parametre $\underset{\sim}{u}$, možemo /2.1/ napisati u obliku

/13.2/ $$f(\underset{\sim}{x}, t) = 0 .$$

Obrnuto, na osnovu prostorne relacije /13.2/ površine S/t/ nije moguće dati jednoznačan oblik /2.1/. Prema tome, /2.1/ je jedan od mogućih parametarskih oblika površine S/t/, čiji je analitički oblik dat sa /13.2/.

Pretpostavimo da nam je dat bilo koji parametarski oblik /2.1/ površine S/t/. Diferencirajući /2.1/ po vremenu dobićemo

/13.3/ $$\frac{\partial f}{\partial t} + \underset{\sim}{w} \cdot \mathrm{grad} f = 0$$

Kako je jedinični vektor normale na površinu S/t/ odredjen relacijom

/13.4/ $$\underset{\sim}{n} = \frac{\mathrm{grad} f}{|\mathrm{grad} f|}$$

biće, na osnovu /13.4/,

/13.5/ $$\sigma = \underset{\sim}{w} \cdot \underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{w} \cdot \frac{\mathrm{grad} f}{|\mathrm{grad} f|} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{f_{,k} f^{,k}}} .$$

Iz /13.5/ se vidi da je σ upotpunosti odredjeno sa /13.2/, tj. nezavisno je od našeg parametarskog prestavljanja /2.1/ površine S/t/. Drukčije rečeno, sve moguće brzine $\underset{\sim}{w}$ površine koja se kreće imaju istu normalnu komponentu σ, koja se zove brzina pomeranja površine.

U specijalnom slučaju moguće je S/t/ prestaviti u posebnom parametarskom obliku /2.1/ za koji je $\underset{\sim}{w}$ upravno na S/t/, tj.

/13.6/ $$\underset{\sim}{w} = \sigma \underset{\sim}{n} .$$

Ova brzina zvaće se normalna brzina površine. Ako bi bilo $G=\Psi(t)$ površine obrazovane za različita vremena t bile bi paralelne.

Pretpostavimo sada da je /2.1/ bilo koji parametarski oblik S/t/ saglasan sa /13.2/. Tada /3.1/ i /13.2/ može biti korišteno jednovremeno tako da je /13.2/ identički jednako nuli, tj. $f(\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{u},t),t)=0$. Diferencirajući ovaj izraz po vremenu dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial t}+f_{,k}\frac{\partial x^k}{\partial t} .$$

S obzirom na /13.5/ sledi

/13.7/
$$G=n_k\frac{\partial x^k}{\partial t}$$

Obrnuto, /13.5/ sledi iz /13.7/ tako da /13.5/ i /13.7/ ekvivalentno definišu brzinu pomeranja s obzirom na /2.1/ ili /13.2/ kojima je definisana površina S/t/.

Do sada je $\underset{\sim}{u}$ bilo nezavisno od vremena, tj. prestavljalo je tačku površine. Ako $\underset{\sim}{u}$ prestavlja npr. materijalne tačke na površini, koje u toku vremena uvek ostaju na S/t/, tada je u opštom slučaju $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}$ /t/. U tom slučaju biće, s obzirom na /2.1/,

/13.8/
$$\frac{\partial x^k}{\partial t}+x^k_{;\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}=Gn^k.$$

Veličina $\frac{d\underset{\sim}{u}}{dt}$ se naziva tangentna brzina parametrizacije.
Iz /13.8/ direktno sledi da je

/13.9/
$$\frac{du^\alpha}{dt}=-g_{km}\frac{\partial x^k}{\partial t}x^m_{,\alpha} ,$$

kao i zaključak da je potrebni dovoljan uslov da u^{α} prestavlja tačke na površini za normalno kretanje: $\frac{du^{\alpha}}{dt}=0$.

14. Materijalna i prostorna reprezentacija površina

Sva dosadašnja naša razmatranja bila su nezavisna od kretanja bilo koje materijalne sredine. Sada pretpostavljamo da je sredina, koja se sastoji od čestica $\underset{\sim}{X}$, u kretanju. Neka je kretanje materijalne sredine definisano sa

/14.1/ $$\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X},t) \quad ; \quad \underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{x},t).$$

Mi pretpostavljamo, do daljnjeg, da su f-je /14.1/ jednoznačne i neprekidne. Zamenom /14.1/ u /13.2/ dobijamo

/14.2/ $$F(\underset{\sim}{X},t)=f(\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{X},t),t),$$

ili

/14.3/ $$f(\underset{\sim}{x},t)=F(\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{x},t),t)$$

identički po $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{X}$ i t. Otuda alternativne reprezentacije površine koja se kreće

/14.4/ $$f(\underset{\sim}{x},t)=0 \quad ; \quad F(\underset{\sim}{X},t)=0.$$

U drugom prestavljanju površine S/t/, koji obeležavamo sa $\mathcal{S}(t)$, mi smatramo čestice $\underset{\sim}{X}$ nepokretnim. Fizički smisao $\mathcal{S}(t)$ je njeno kretanje medju česticama $\underset{\sim}{X}$. Tačnije, u svakom trenutku t različit skup čestica $\underset{\sim}{X}$ je na $\mathcal{S}(t)$.

U specijalnom slučaju kad je

/14.5/ $$f(\underset{\sim}{x})=0$$

mi kažemo da je S/t/ s[illegible]narna površina. Ako je

/14.6/ $$F(\underset{\sim}{X})=0$$

onda je $\mathcal{S}(t)$ materijalna površina.

Reprezentacije S/t/ i $\mathcal{S}(t)$, tj. $f(\underset{\sim}{x},t)=0$ i $F(\underset{\sim}{X},t)=0$ su dualne. One prestavljaju na različite načine isti fenomen. Medjutim, one su sa geometrijskog stanovišta potpuno različite. S/t/ je površina u prostoru položaja, dok je $\mathcal{S}(t)$ površina u prostoru čestica, tj. početnih položaja čestica $\underset{\sim}{X}$, koje se u trenutku t nalaze na S/t/. $\mathcal{S}(t)$ nema trenutne geometrijske interpretacije, jer ne postoji neko /bilo koje/ geometrisko svojstvo koje bi posmatrač u prostoru mogao uočiti.

Dualan izraz za brzinu definisan je sa

/14.7/ $$\sigma=-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{F_{,K}F^{,K}}}$$

i zove se brzina prostiranja.

Površina koja je površina diskontinuiteta za neku veličinu i ima brzinu prostiranja σ različitu od nulezove se površina prostiranja diskontinuiteta /singularna površina prostiranja/ ili talas.

Očigledno je da vrednost σ za datu površinu $f(\underset{\sim}{x},t)=0$ u datom kretanju, sem kad je $\sigma=0$, zavisi u opštem slučaju, od izbora trenutka posmatranog kao t=o za kretanje svake čestice /s obzirom na dualnu reprezentaciju $\underset{\sim}{X}=X(\underset{\sim}{x},t)$/.

Vrlo često je pogodno uzeti za t=o uočeni trenutak. Onda je $X^K=\delta^K_k x^k$, $\frac{\partial X^K}{\partial x^k}=\delta^K_k$ i funkcionalni oblici F i f, u tom uočenom trenutku, su identični. Ali, izvod po vremenu računat kad je x=const. nije u opštem slučaju jednak izvodu po vremenu kad je X= const.. U ovom specijalnom slučaju, sa ovim izborom materijalnih koordinata X, brzinu prostiranja G obeležićemo sa U i zvaćemo lokalna brzina prostiranja površine. Ova brzina je normalna brzina površine u odnosu na čestice koje se trenutno nalaze na njoj i vezana je sa brzinom pomeranja relacijom

/14.8/ $$U\frac{\partial f}{\partial t}=G\frac{\partial F}{\partial t}\,.$$

Kako je u opštem slučaju

/14.9/ $$\begin{aligned} G\sqrt{F_{,K}F^{,K}} &= -\frac{\partial F}{\partial t}=-\mathring{f} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial t}-f_{,k}\dot{x}^{k} \\ &= (G-\dot{x}_n)\sqrt{f_{,k}f^{,k}}\,, \end{aligned}$$

gde je $\dot{\underset{\sim}{x}}$ brzina čestice koja se trenutno nalazi na površini a $\dot{x}_n$ njena normalna komponenta na površini, biće, za specijalni izbor materijalnih koordinata $X^K=\delta^K_k x^k$ /ako se trenutna konfiguracija izabere kao početna/,

$$F_{,K}F^{,K}=f_{,k}f^{,k}\,,$$

zbog čega se /14.9/ svodi na

/14.1o/ $$U=G-\dot{x}_n$$

Ova relacija izražava očiglednu činjenicu: normalna brzina kojom materijalne tačke napuštaju S/t/ jednaka je razlici njene normalne brzine i normalne brzine površine.

U slučaju da je površina S/t/ materijalna biće $G-\dot{x}_n=U=0$. Na osnovu ovoga i /14.9/ lako je dokazati teoremu Lagrange-a:

Potreban i dovoljan uslov da bi površina $f(\underset{\sim}{x},t)=0$ bila materijalna jeste $\mathring{f}=0$.

Primer takvih površina su granične površine na telima /za detalje klasifikacije graničnih površina videti CFT, & 184/.

15. δ izvod po vremenu

U daljem radu diferenciranje po vremenu biće osnovna operacija za izvodjenje kinematičkih uslova kompatibilnosti. Mi ćemo kad god je moguće koristiti δ izvod po vremenu, koji je definisao T.Y. Thomas [30] . Njegovo uvodjenje dovodi do velikih uprošćavanja inače složenih matematičkih operacija i izraza.

δ izvod f-je φ , definisane i diferencijabilne na s/t/, definisan je sa

/15.1/
$$\frac{\delta\varphi}{\delta t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi_{,k}\frac{\delta x^k}{\delta t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+G\varphi_{,k}n^k.$$

Kratko rečeno, to je totalni izvod po vremenu f-je $\varphi(\underset{\sim}{x},t)$ u pravcu normalnih trajektorija tačaka površine S/t/ za koje je

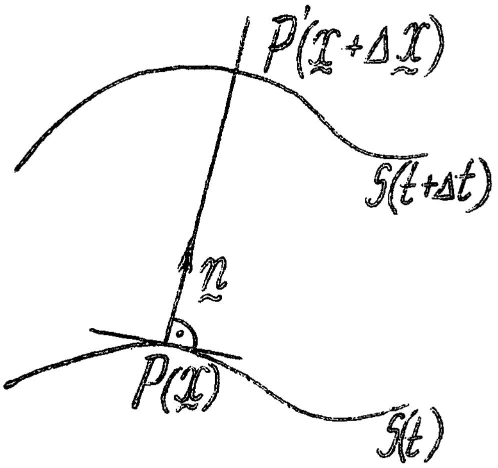
/15.2/
$$\frac{\delta x^k}{\delta t}=Gn^k,$$

tj.

/14.3/ $\frac{\delta \underset{\sim}{x}}{\delta t} = \underset{\sim}{w} = G\underset{\sim}{n}$

Stav: Operator $[\ ]$ i δ izvod po vremenu su komutativni.

Pri dokazivanju ovog stava mi ćemo slediti T.Y.Thomas-a [3o].
Posmatrajmo dva položaja S/t/ i s/t +Δ t/ površine S/t/.
U nekoj tački P/x/ na S/t/ povucimo normalu $\underset{\sim}{n}$ kao što je prikazano na sl.1. Prava određjena normalom $\underset{\sim}{n}$ prodire S/t+Δt/ u tački P/$\underset{\sim}{x}$+$\Delta\underset{\sim}{x}$/, pri čemu $\Delta\underset{\sim}{x}$ prestavlja razliku koordinata dveju tačaka, tj. komponente vektora relativnog položaja dveju tačaka koji ima pravac normale $\underset{\sim}{n}$.



sl.1

Neka je

/15.3/ $$[\varphi] = A = \varphi_2(P,t) - \varphi_1(P,t) \ ,$$

gde su φ_2 i φ_1 vrednosti f-je φ na spoljnoj i unutrašnjoj strani S/t/. Obeležimo sa ΔA razliku vrednosti f-je A u tačkama P' i P, tj.

$$\Delta A = \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$$
$$= \varphi_2(P', t+\Delta t) - \varphi_1(P,t) - \varphi_1(P', t+\Delta t) + \varphi_1(P,t).$$

Tada je

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\varphi_2(P', t+\Delta t) - \varphi_2(P,t)}{\Delta t} - \frac{\varphi_1(P', t+\Delta t) - \varphi_1(P,t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t} - \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t}$$

Kako su P i P' na pravcu normale $\underset{\sim}{n}$ biće

/15.4/ $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\delta A}{\delta t}\ .$$

Na isti način je

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \varphi_2}{\Delta t}=\frac{\delta \varphi_2}{\delta t}\ ,$$

/15.5/

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t}=\frac{\delta \varphi_1}{\delta t}\ .$$

Tada se $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ u graničnom slučaju svodi na izraz

/15.5/ $$\frac{\delta A}{\delta t}=\frac{\delta \varphi_2}{\delta t}-\frac{\delta \varphi_1}{\delta t}=\left(\frac{\delta \varphi}{\delta t}\right)_2-\left(\frac{\delta \varphi}{\delta t}\right)_1=\left[\frac{\delta \varphi}{\delta t}\right]\ ,$$

a prema definiciji operatora $[\ \ ]$ i osobina f-je φ **na S/t/.**
Uzimajući u obzir /15.3/ može se /15.5/ napisati u obliku

/15.6/ $$\frac{\delta[\varphi]}{\delta t}=\left[\frac{\delta \varphi}{\delta t}\right]\ ,$$

što je trebalo pokazati.

16. δ izvod nekih veličina

Već smo videli da geometrija površine S/t/ utiče na geometrijske uslove kompatibilnosti. Normalno je očekivati da će to biti slučaj i za kinematičke uslove kompatibilnosti. Zato ćemo proučiti δ izvod osnovnih geometrijskih objekata površine S/t/: n^i, $x^i{}_{;\alpha}$, $a_{\alpha\beta}$ i $b_{\alpha\beta}$.

T.X. Thomas je izveo sledeće relacije [3o] :

/16.1/ $$\frac{\delta n^i}{\delta t} = -a^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} x^i_{,\beta} ,$$

/16.2/ $$\frac{\delta x^i}{\delta t} = \sigma n^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} + x^i_{,\alpha} \frac{\delta u^\alpha}{\delta t} .$$

Pre nego što predjemo na izvodjenje novih relacija za druge geometrijske veličine površine S/t/, napominjemo da je δ izvod, do daljnjeg, izvod u pravcu normalnih trajektorija tačaka površine S/t/. Tada je

/16.3/ $$\frac{\delta u^\alpha}{\delta t} = 0 ,$$

/16.4/ $$\frac{\delta x^i}{\delta t} = \frac{\partial x^i}{\partial t} = \sigma n^i ,$$

što smo već zaključili u odeljku 13.

Stav: Operacije $\frac{\delta}{\delta t}$ i diferenciranje po u^α su komutativne.

Dokažimo to za f-je $x^i_{,\alpha}$.

Zaista,

/16.5/ $$\frac{\delta x^i_{,\alpha}}{\delta t} = \frac{\partial x^i_{,\alpha}}{\partial t} + x^i_{,\alpha\beta} \frac{\delta u^\beta}{\delta t} = \frac{\partial x^i_{,\alpha}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{,\alpha} = \left(\frac{\delta x^i}{\delta t}\right)_{,\alpha} ,$$

pri čemu smo koristili /16.3/, /16.4/ kao i činjenicu da je

/16.6/ $$\frac{\partial x^i_{,\alpha}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{,\alpha}$$

s obzirom da se radi o parcijalnom diferenciranju po u^α i t.

Za bilo kakvu f-ju Ψ, diferencijabilnu i neprekidnu na $S/t/$, biće

$$\frac{\delta \Psi_{,\alpha}}{\delta t}=\frac{\delta}{\delta t}\left(\Psi_{,i}\, x^{i}_{,\alpha}\right)=\frac{\delta \Psi_{,i}}{\delta t}\, x^{i}_{,\alpha}+\Psi_{,i}\,\frac{\delta x^{i}_{,\alpha}}{\delta t}=$$

$$=\left(\frac{\partial \Psi_{,i}}{\partial t}+\Psi_{,ij}\,\frac{\delta x^{j}}{\delta t}\right)x^{i}_{,\alpha}+\Psi_{,i}\left(\frac{\delta x^{i}}{\delta t}\right)_{,\alpha}=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{,i}+\Psi_{,ij}\,\frac{\delta x^{j}}{\delta t}\right]x^{i}_{,\alpha}+\Psi_{,j}\left(\frac{\delta x^{j}}{\delta t}\right)_{,i}x^{i}_{,\alpha}=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{,i}+\Psi_{,j}\left(\frac{\delta x^{j}}{\delta t}\right)_{,i}+\Psi_{,ji}\,\frac{\delta x^{j}}{\delta t}\right]x^{i}_{,\alpha}= \tag{16.7}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{,i}+\left(\Psi_{,j}\,\frac{\delta x^{j}}{\delta t}\right)_{,i}\right]x^{i}_{,\alpha}=$$

$$=\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}+\Psi_{,j}\,\frac{\delta x^{j}}{\delta t}\right)_{,i}x^{i}_{,\alpha}=$$

$$=\left(\frac{\delta \Psi}{\delta t}\right)_{,\alpha}\ ,$$

pri čemu smo koristili /4.2/ i /16.6/. Sa /16.5/ i /16.7/ stav je dokazan. Ovaj stav ćemo dalje često koristiti, jer se novi rezultati dobijaju daleko jednostavnije.

Tako je

$$\frac{\delta x^{i}_{,\alpha}}{\delta t}=\left(\frac{\delta x^{i}}{\delta t}\right)_{,\alpha}=\left(G n^{i}\right)_{,\alpha}= \tag{16.8}$$

$$=G_{,\alpha}\, n^{i}-G\, b^{\beta}_{\alpha}\, x^{i}_{,\beta}$$

s obzirom na /16.2/, /16.5/ i /2.7/. Na isti način se dobija

$$\frac{\delta n^{i}_{,\alpha}}{\delta t}=\left(\frac{\delta n^{i}}{\delta t}\right)_{,\alpha}=\left(G^{,\beta}\, x^{i}_{,\beta}\right)_{,\alpha}= \tag{16.9}$$

$$=G^{,\beta}_{\ \ ,\alpha}\, x^{i}_{,\beta}+G^{,\beta}\, b_{\beta\alpha}\, n^{i}\ .$$

Od značaja su i relacije

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t}=0, \tag{16.10}$$

$$\frac{\delta a_{\alpha\beta}}{\delta t}=-2\sigma b_{\alpha\beta}, \tag{16.11}$$

$$\frac{\delta a^{\alpha\beta}}{\delta t}=2\sigma b^{\alpha\beta}, \tag{16.12}$$

koje su dobro poznate /vidi npr. CFT, Dodatak/, a koje se na jednostavan način mogu dobiti koristeći prethodni stav. Na isti način mogli bi odrediti $\frac{\delta^2 n^i}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2 a_{\alpha\beta}}{\delta t^2}$, $\frac{\delta^2 x^i_{\alpha}}{\delta t^2}$ itd.. Medjutim, to bi bio ogroman posao. Mi ćemo dati postupak za odredjivanje $\frac{\delta^{(k)} x^i}{\delta t^{(k)}}$, gde je k=1,2,.....,N bilo koji prethodan broj.

Isti postupak se može primeniti i na $x^i_{,\alpha}$.

Opravdano je ovde postaviti pitanje zašto nas interesuju izvodi baš ovih veličina. U ovom trenutku odgovor bi mogao biti samo intuitivan. Naime, pokazalo se u dosadašnjim poznatim rezultatima za uslove kompatibilnosti prvog reda da je $\frac{\delta n^i}{\delta t}$ od bitnog značaja. Mi pretpostavljamo da će se za uslove kompatibilnosti višeg reda $\frac{\delta n^i}{\delta t}$ i dalje pojavljivati, kao i da će se red njegovog izvoda povećavati. Pokazaćemo kasnije koliko su naša očekivanja bila opravdana.

Uočimo da izvod δ ne menja tenzorski karakter veličina na koje se primenjuje. Tako je $\frac{\delta^{(k)} n^i}{\delta t}$, vektor /definisan na S/t/, pa je

$$\frac{\delta^{(k)} n^i}{\delta t^{(k)}}=\overset{(k)}{A} n^i+\overset{(k)}{B}{}^{\alpha} x^i_{,\alpha} \quad , \tag{16.13}$$

gde su $\overset{(k)}{A}$ i $\overset{(k)}{B}{}^{\alpha}$ komponente $\dfrac{\delta \overset{(k)}{n}{}^{i}}{\delta t^{(k)}}$ u pravcu normale i na tangentnoj ravni respektivno. Indeks k u ovim izrazima nema temzorski karakter što smo naglasili stavljajući ga u zagradu. On definiše na levoj strani /16.13/ red izvoda, a na desnoj kojeg reda izvoda su ove komponente.

Kako je

$$\frac{\delta \overset{(k)}{n}{}^{i}}{\delta t^{(k)}} = \frac{\delta}{\delta t}\,\frac{\delta \overset{(k-1)}{n}{}^{i}}{\delta t^{(k-1)}} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\overset{(k-1)}{A} n^{i} + \overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha} x^{i}_{,\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\delta \overset{(k-1)}{A}}{\delta t} n^{i} + \overset{(k-1)}{A}\frac{\delta n^{i}}{\delta t} + \frac{\delta \overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha}}{\delta t} x^{i}_{,\alpha} +$$

$$+ \overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha}\frac{\delta x^{i}_{,\alpha}}{\delta t} =$$

/16.14/
$$= \frac{\delta \overset{(k-1)}{A}}{\delta t} n^{i} - G^{,\alpha}\overset{(k-1)}{A} x^{i}_{,\alpha} + \frac{\delta \overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha}}{\delta t} x^{i}_{,\alpha} +$$

$$+ G_{,\alpha}\overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha} n^{i} - G b^{\beta}_{\alpha}\overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha} x^{i}_{,\beta} =$$

$$= \left[\frac{\delta \overset{(k-1)}{A}}{\delta t} + G_{,\alpha}\overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha}\right] n^{i} +$$

$$+ \left[\frac{\delta \overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha}}{\delta t} - G^{,\alpha}\overset{(k-1)}{A} - G b^{\alpha}_{\beta}\overset{(k-1)}{B}{}^{\beta}\right] x^{i}_{,\alpha} ,$$

gde smo koristili /16.1/ i /16.8/, biće, s obzirom na /16.13/,

/16.15/
$$\overset{(k)}{A} = \frac{\delta \overset{(k-1)}{A}}{\delta t} + G_{,\alpha}\overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha} ,$$

/16.16/
$$\overset{(k)}{B}{}^{\alpha} = \frac{\delta \overset{(k-1)}{B}{}^{\alpha}}{\delta t} - G^{,\alpha}\overset{(k-1)}{A} - G b^{\alpha}_{\beta}\overset{(k-1)}{B}{}^{\beta} .$$

Ovi izrazi prestavljaju rekurentne obrasce za izračunavanje $\overset{(\kappa)}{A}$ i $\overset{(\kappa)}{B}{}^{\alpha}$. Tačnije, oni prestavljaju rekurentne obrasce za izučavanje $\dfrac{\delta^{(\kappa)} n^i}{\delta t^{(\kappa)}}$.

Navešćemo nekoliko primera njihove primene.

Za k=1

$$\overset{(0)}{A}=1 \quad , \quad \overset{(0)}{B}{}^{\alpha}=0 ,$$

pa je

$$\overset{(1)}{A}=0 \quad , \quad \overset{(1)}{B}{}^{\alpha}=-G^{,\alpha} ,$$

tj.

/16.1/
$$\frac{\delta n^i}{\delta t}=-G^{,\alpha}x^i_{,\alpha} .$$

Za k=2

$$\overset{(2)}{A}=-G_{,\alpha}G^{,\alpha} ,$$

$$\overset{(2)}{B}{}^{\alpha}=-\frac{\delta G^{,\alpha}}{\delta t}+G b^{\alpha}_{\beta}G^{,\beta} ,$$

pa je

/16.17/
$$\frac{\delta^2 n^i}{\delta t^2}=-G_{,\alpha}G^{,\alpha}n^i+\left(G b^{\alpha}_{\beta}G^{,\beta}-\frac{\delta G^{,\alpha}}{\delta t}\right)x^i_{,\alpha} .$$

Za k=3

$$\overset{(3)}{A}=-\frac{\delta G_{,\alpha}G^{,\alpha}}{\delta t}+G_{,\alpha}\left(G b^{\alpha}_{\beta}G^{,\beta}-\frac{\delta G^{,\alpha}}{\delta t}\right) ,$$

/16.18/
$$\overset{(3)}{B}{}^{\alpha}=\frac{\delta}{\delta t}\left(G b^{\alpha}_{\beta}G^{,\beta}-\frac{\delta G^{,\alpha}}{\delta t}\right)+G^{,\alpha}\frac{\delta G_{,\beta}G^{,\beta}}{\delta t}-$$
$$-G\, b^{\alpha}_{\beta}\left(G b^{\beta}_{\gamma}G^{,\gamma}-\frac{\delta G^{,\beta}}{\delta t}\right)$$

čime je odredjeno i $\dfrac{\delta^3 n^i}{\delta t^3}$ prema /16.13/. Izrazi /16.15/ i /16.16/ mogu biti primenjeni i za izračunavanje $\dfrac{\delta^{(\kappa)} x^i_{,\alpha}}{\delta t^{(\kappa)}}$ u nešto modifikovanom obliku, jer je

/16.19/
$$\frac{\delta^{(\kappa)} x^i_{,\alpha}}{\delta t^{(\kappa)}}=\overset{(\kappa)}{A}_{\alpha}n^i+\overset{(\kappa)}{B}{}^{\beta}_{\alpha}x^i_{,\beta} .$$

Koristeći /16.17/ i /16.18/ u ovom slučaju dobićemo da je

$$\overset{(k)}{A}_{\alpha} = \frac{\delta \overset{(k-1)}{A}_{\alpha}}{\delta t} + \sigma_{,\beta}\overset{(k-1)}{B}{}^{\beta}_{\alpha}, \tag{16.20}$$

$$\overset{(k)}{B}{}^{\beta}_{\alpha} = \frac{\delta \overset{(k-1)}{B}{}^{\beta}_{\alpha}}{\delta t} - \sigma^{,\beta}\overset{(k-1)}{A}_{\alpha} - \sigma b^{\beta}_{\gamma}\overset{(k-1)}{B}{}^{\gamma}_{\alpha}. \tag{16.21}$$

Primenimo ove rezultate u nekim slučajevima.

Za $k=0$

$$\overset{(0)}{A}_{\alpha} = 0, \quad \overset{(0)}{B}{}^{\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha},$$

pa je

$$\overset{(1)}{A}_{\alpha} = \sigma_{,\alpha}, \quad \overset{(1)}{B}{}^{\beta}_{\alpha} = -\sigma b^{\beta}_{\alpha},$$

tj.

$$\frac{\delta x^{i}_{,\alpha}}{\delta t} = \sigma_{,\alpha} n^{i} - \sigma b^{\beta}_{\alpha} x^{i}_{,\beta}. \tag{16.?}$$

Za $k=2$

$$\overset{(2)}{A}_{\alpha} = \frac{\delta \sigma_{,\alpha}}{\delta t} - \sigma\sigma_{,\beta} b^{\beta}_{\alpha},$$

$$\overset{(2)}{B}{}^{\beta}_{\alpha} = -\frac{\delta}{\delta t}(\sigma b^{\beta}_{\alpha}) - \sigma^{,\beta}\sigma_{,\alpha} + \sigma^{2} b^{\beta}_{\gamma} b^{\gamma}_{\alpha},$$

pa je

$$\frac{\delta^{2} x^{i}_{,\alpha}}{\delta t^{2}} = \left(\frac{\delta \sigma_{,\alpha}}{\delta t} - \sigma\sigma_{,\beta} b^{\beta}_{\alpha}\right) n^{i} + \tag{16.22}$$

$$+\left[\sigma^{2} b^{\beta}_{\gamma} b^{\gamma}_{\alpha} - \frac{\delta}{\delta t}(\sigma b^{\beta}_{\alpha}) - \sigma^{,\beta}\sigma_{,\alpha}\right] x^{i}_{,\beta},$$

itd. Svi ovi rezultati su neophodno potrebni za izvodjenje kinematičkih uslova kompatibilnosti. Važno je uočiti da su ovi rezultati specijalnog karaktera s obzirom na odredjen izbor parametrizacije u $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(u, t)$. U našem slučaju je $\frac{\delta u^{\alpha}}{\delta t} = 0$. Medjutim, opštijeg karaktera je takva parametrizacija za koju je $\underset{\sim}{W}=G\underset{\sim}{n}$ bez uslova da je $\frac{\delta u^\alpha}{\delta t}=0$, tj. da je reč o normalnim trajektorijama tačaka površine. Mi ćemo se i koristiti njima kao opštijim pri izvodjenju opšte teorije. Ali pri konkretnom izračunavanju kinematičkih uslova kompatibilnosti pogodnije su normalne koordinate, jer se mnogi izrazi uprošćavaju. Ove koordinate /normalne trajektorije tačaka površine/ jednoznačno su odredjene.

17. δ izvod n-tog reda f-je φ

Za opšte razmatranje kinematičkih uslova kompatibilnosti neophodno je naći δ izvod bilo kog reda /recimo n-tog/ neke f-je φ neprekidne i diferencijalne na S/t/ po $\underset{\sim}{x}$ i t. Naša razmatranja biće opšta. Time ujedno želimo da naglasimo da je i $x^i=x^i(\underset{\sim}{u},t)$ bilo koji parametarski oblik S/t/.

Po definiciji je

/17.1/ $$\frac{\delta}{\delta t}=\frac{\partial}{\partial t}+Gn^k\nabla_k ,$$

gde je ∇_k operator kovarijantnog diferenciranja, tj.

/17.2/ $$\nabla_k\varphi\equiv\varphi_{,k}$$

Tada je

/17.3/ $$\frac{\delta\varphi}{\delta t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+G\varphi_{,k}n^k ,$$

a

/17.4/ $$\begin{aligned}\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+Gn^k\nabla_k\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+n^l\nabla_l\right)\varphi=\\&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+Gn^k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{,k}+\frac{\delta}{\delta t}\left(Gn^k\varphi_{,k}\right)=\\&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+Gn^k\frac{\partial\varphi_{,k}}{\partial t}+\frac{\delta}{\delta t}\left(Gn^k\varphi_{,k}\right),\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili /4.2/.

<u>T e o r e m a 4:</u> n-ti δ izvod f-je φ može se prestaviti u obliku

/17.5/
$$\frac{\delta^n\varphi}{\delta t^n}=\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}+\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\delta^\ell}{\delta t^\ell}\left[\!\left[\frac{\partial^{n-1-\ell}\varphi_{,\kappa}}{\partial t^{n-1-\ell}}n^\kappa G\right]\!\right]=$$
$$=\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}+\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\delta^\ell}{\delta t^\ell}\left[\!\left[\left(\frac{\partial^{n-1-\ell}\varphi}{\partial t^{n-1-\ell}}\right)_{,\kappa}n^\kappa G\right]\!\right].$$

<u>D o k a z t e o r e m e 4.</u> Mi ćemo teoremu dokazati potpunom matematičkom indukcijom. Odmah se vidi da /17.5/ važi za n=1,2. Pretpostavimo sada da je /17.5/ tačno i za $n\geqslant 2$. Tada je

/17.6/
$$\frac{\delta^{n+1}\varphi}{\delta t^{n+1}}=\frac{\delta}{\delta t}\frac{\delta^n\varphi}{\delta t^n}=$$
$$=\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right)+\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\delta^{\ell+1}}{\delta t^{\ell+1}}\left[\!\left[\frac{\partial^{n-1-\ell}\varphi_{,\kappa}}{\partial t^{n-1-\ell}}n^\kappa G\right]\!\right]=$$
$$=\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial t^{n+1}}+n^\kappa G\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right)_{,\kappa}+$$
$$+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\delta^\ell}{\delta t^\ell}\left[\!\left[\left(\frac{\partial^{n-\ell}\varphi}{\partial t^{n-\ell}}\right)_{,\kappa}n^\kappa G\right]\!\right]$$
$$=\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial t^{n+1}}+\sum_{\ell=0}^{n}\frac{\delta^\ell}{\delta t^\ell}\left[\!\left[\left(\frac{\partial^{n-\ell}\varphi}{\partial t^{n-\ell}}\right)_{,\kappa}n^\kappa G\right]\!\right],$$

pri čemu smo koristili /4.2/, /17.5/, a u $/17.6/_2$ stavili $\ell=\ell-1$. Na osnovu /17.6/ proizilazi da /17.5/ važi i za n+1 pa prema tome i za svako n što je trebalo dokazati.

Iz /17.5/ sledi da je

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}=\frac{\delta^n \varphi}{\delta t^n}-\sum_{l_1=0}^{n-1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\left[\frac{\partial^{n-1-l_1}\varphi_{,\kappa_1}}{\partial t^{n-1-l_1}}n^{\kappa_1}G\right]. \tag{/17.7/}$$

Već smo ranije pomenuli da je φ bilo koja tenzorska veličina. Tada /17.7/ važi i za $\varphi_{,\kappa_1}$, tj.

$$\frac{\partial^{n-1-l_1}\varphi_{,\kappa_1}}{\partial t^{n-1-l_1}}=\frac{\delta^{n-1-l_1}\varphi_{,\kappa_1}}{\delta t^{n-1-l_1}}-\sum_{l_2=0}^{n-2-l_1}\frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}}\left[\frac{\partial^{n-2-(l_1+l_2)}\varphi_{,\kappa_1\kappa_2}}{\partial t^{n-2-(l_1+l_2)}}n^{\kappa_2}G\right]. \tag{/17.8/}$$

Smenom /17.8/ u /17.7/ dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}=&\frac{\delta^n \varphi}{\delta t^n}-\sum_{l_1=0}^{n-1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\left\{n^{\kappa_1}G\frac{\delta^{n-1-l_1}}{\delta t^{n-1-l_1}}\right\}+\\&+\sum_{l_1=0}^{n-1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\left\{n^{\kappa}G\sum_{l_2=0}^{n-2-l_1}\frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}}\otimes\right.\\&\left.\otimes\left\{\frac{\partial^{n-2-(l_1+l_2)}\varphi_{,\kappa_1\kappa_2}}{\partial t^{n-2-(l_1+l_2)}}n^{\kappa_2}G\right\}\right..\end{aligned} \tag{/17.9/}$$

Ako primenimo /17.7/ na $\varphi_{,\kappa_1\kappa_2}$ i to smenimo u /17.9/ biće

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} = \frac{\delta^n \varphi}{\delta t^n} & - \\
& - \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}} \left\{ n^{\kappa_1} G \, \frac{\delta^{n-1-l_1} \varphi_{1,\kappa_1}}{\delta t^{n-1-l_1}} \right\} + \\
& + \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}} \left\{ n^{\kappa_1} G \sum_{l_2=0}^{n-2-l_1} \frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}} \left\{ n^{\kappa_2} G \times \right.\right. \\
& \left.\left. \times \frac{\delta^{n-2-(l_1+l_2)} \varphi_{1,\kappa_1 \kappa_2}}{\delta t^{n-2-(l_1+l_2)}} \right\}\right\} - \\
& - \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}} \left\{ n^{\kappa_1} G \sum_{l_2=0}^{n-2-l_1} \frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}} \left\{ n^{\kappa_2} G \times \right.\right. \\
& \left.\left. \times \sum_{l_3=0}^{n-3-(l_1+l_2)} \frac{\delta^{l_3}}{\delta t^{l_3}} \left\{ \frac{\partial^{n-3-(l_1+l_2+l_3)} \varphi_{1,\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}}{\partial t^{n-3-(l_1+l_2+l_3)}} \, n^{\kappa_3} G \right\}\right\}\right\} \cdots \Big\} .
\end{aligned}
\tag{17.10}
$$

Nastavljajući ovaj postupak dalje, konačno dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} = \frac{\delta^n \varphi}{\delta t^n} & - \\
& - \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}} \left\{ n^{\kappa_1} G \, \frac{\delta^{n-1-l_1} \varphi_{1,\kappa_1}}{\delta t^{n-1-l_1}} \right\} + \\
& + \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}} \left\{ n^{\kappa_1} G \sum_{l_2=0}^{n-2-l_1} \frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}} \otimes \right. \\
& \left. \otimes \left(n^{\kappa_2} G \, \frac{\delta^{n-2-(l_1+l_2)} \varphi_{1,\kappa_1 \kappa_2}}{\delta t^{n-2-(l_1+l_2)}} \right) \right\} - \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
\tag{17.11}
$$

. . . .

$$+(-1)^{s}\sum_{l_1=0}^{n-1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{\eta^{\kappa_1}\sigma\sum_{l_2=0}^{n-2-l_1}\frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}}\Big\{\eta^{\kappa_2}\sigma\times$$

$$\times\sum\cdots\sum_{l_s=0}^{n-s-(l_1+l_2+\cdots l_{s-1})}\frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}}\Big\{\eta^{\kappa_s}\sigma\,\frac{\delta^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}\varphi_{,\kappa_1\ldots\kappa_s}}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}}\Big\}\cdots\Big\}+$$

. . . .

$$(-1)^{n-1}\sum_{l_1=0}^{n-1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{\eta^{\kappa_1}\sigma\sum\cdots$$

$$\cdots\sum_{l_{n-1}=0}^{1-(l_1+\cdots+l_{n-2})}\frac{\delta^{l_{n-1}}}{\delta t^{l_{n-1}}}\Big(\eta^{\kappa_{n-1}}\sigma\,\frac{\delta^{1-(l_1+\cdots+l_{n-1})}\varphi_{,\kappa_1\ldots\kappa_n}}{\delta t^{1-(l_1+\cdots+l_{n-1})}}\Big)\Big\}\cdots\Big\}+$$

$$+(-1)^{n}\big(\varphi_{,\kappa_1\ldots\kappa_n}\,\eta^{\kappa_1}\cdots\eta^{\kappa_n}\big)\sigma^{n},$$

pri čemu smo strogo vodili računa da je

/17.12/ $n-s-(l_1+\cdots l_{s-1})\geqslant 0$

i

/17.13/ $l_1, l_2, \ldots, l_{s-1}\geqslant 0$

za svako $1\leqslant s\leqslant n$. U specijalnom slučaju kad je s=n biće svi

/17.14/ $l_s=0,\qquad (s=1,2,\ldots,n).$

Iz /17.12/ i /17.13/ se vidi da je npr.

/17.15/ $0\leqslant l_1\leqslant n-s$.

Odmah se vidi da se /17.11/ može napisati u sažetom obliku

/17.16/

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} = \frac{\delta^n \varphi}{\delta t^n} + \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}} \Big\{ n^{\kappa_1} G \times \sum_{l_2=0}^{n-2-l_1} \frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}} \Big\{ n^{\kappa_2} G \sum \cdots \times \sum_{l_s}^{n-s-(l_1+\cdots+l_{s-1})} \frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}} \Big\{ n^{\kappa_s} G \frac{\delta \varphi_{,\kappa_1 \ldots \kappa_s}}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}} \Big\} \cdots \Big\},$$

$$0 \leq l_1 + l_2 + \cdots + l_{s-1} \leq n-s,$$

$$l_1, l_2, \ldots, l_{s-1} \geq 0.$$

Iz /17.16/ i /3.1/ sledi da će se $\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}$ izražavati preko $\overset{(\kappa)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ i njihovih δ izvoda. Medjutim, kako se $\overset{(\kappa)}{A}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ izražava preko $\overset{(s)}{A}$ i njihovih izvoda po u^{α} to će se u konačnom obliku i $\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}$ izražavati preko $\overset{(s)}{A}$ i njihovih izvoda po u^{α} i δ izvoda. δ izvodi n^i i $x^i{}_{,\alpha}$ takodje učestvuju u /17.16/ i odredjuju uticaj geometrije površine S/t/ na $\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}$.
U odeljku 16 mi smo napomenuli da se može očekivati i δ izvod n^i i $x^i{}_{,\alpha}$ što se pokazalo tačnim.

18. Neki primeri

Do sada izvedenu teoriju primenićemo na nekoliko primera. Tako je za

n=1, s=1, l=o pa je

/18.1/ $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\delta \varphi}{\delta t} - G n^{\kappa_1} \varphi_{,\kappa_1} = \frac{\delta \varphi}{\delta t} - G \overset{(1)}{A}$$

Za n=2, 1 s 2 pa je

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}-\sum_{l_1=0}^{1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\left(n^{k_1}G\,\frac{\delta^{1-l_1}\varphi_{,k_1}}{\delta t^{1-l_1}}\right)+G^2\varphi_{,k_1k_2}n^{k_1}n^{k_2}$$

$$=\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}-G\,n^{k_1}\frac{\delta\varphi_{,k_1}}{\delta t}-\frac{\delta}{\delta t}G n^{k_1}\varphi_{,k_1}+G^2\overset{(2)}{A},$$

ili konačno

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}-\frac{\delta G}{\delta t}\overset{(1)}{A}-2G\frac{\delta\overset{(1)}{A}}{\delta t}-GG^{,\alpha}\varphi_{,\alpha}+G^2\overset{(2)}{A}, \tag{18.2}$$

pri čemu smo koristili rezultate odeljka 7, /16.1/ i /4.2/.

Za n=3, 1 s 3 pa je

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}=\frac{\delta^3\varphi}{\delta t^3}-\sum_{l_1=0}^{2}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\left(n^{k_1}G\,\frac{\delta^{2-l_1}\varphi_{,k_1}}{\delta t^{2-l_1}}\right)+$$

$$+\sum_{l_1=0}^{2}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\left[n^{k_1}G\sum_{l_2=0}^{1-l_1}\frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}}\left(n^{k_2}G\,\frac{\delta^{1-(l_1+l_2)}\varphi_{,k_1k_2}}{\delta t^{1-(l_1+l_2)}}\right)\right]-$$

$$-G^3\overset{(3)}{A}$$

$$= \dots$$

U cilju dobijanja konačnog rezultata potrebno je koristiti rezultate odeljka 7 i odeljka 16. Mi se na tome nećemo zadržavati. Za naše odredjivanje uslova kompatibilnosti i ovaj rezultat je sasvim dovoljan.

19. Kinematički uslovi kompatibilnosti n-tog reda

Primenimo operator diskontinuiteta $[\ ]$ na /17.16/. Tada je

/19.1/
$$\left[\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right]=\frac{\delta^n[\varphi]}{\delta t^n}+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\sum_{l_1=0}^{n-1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{n^{\kappa_1}G\times$$
$$\times\sum_{l_2=0}^{n-2-l_1}\frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}}\Big\{n^{\kappa_2}G\sum\cdots$$
$$\cdots\sum_{l_s=0}^{n-s-(l_1+\cdots l_{s-1})}\frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}}\Big\{n^{\kappa_s}G\,\frac{\delta^{n-s-(l_1+\cdots l_s)}[\varphi,_{\kappa_1\ldots\kappa_s}]}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots l_s)}}\Big\}\cdots\Big\}$$
$$=\frac{\delta[\varphi]}{\delta t^n}+\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^s\sum_{l_1=0}^{n-1}\frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{n^{\kappa_1}G\times$$
$$\times\cdots\sum_{l_s=0}^{n-s-(l_1+\cdots l_{s-1})}\frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}}\Big\{n^{\kappa_s}G\,\frac{\delta^{n-s-(l_1+\cdots l_s)}[\varphi,_{\kappa_1\ldots\kappa_s}]}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots l_s)}}\Big\}\cdots\Big\}$$
$$(-1)^n G^n[\varphi,_{\kappa_1\ldots\kappa_n}\,n^{\kappa_1}\ldots n^{\kappa_n}],$$
$$0\leq l_1+\cdots+l_{s-1}\leq n-s;\quad l_1,l_2,\ldots l_{s-1}\geq 0,$$

kao posledica osobina operatora diskontinuiteta i njegove komutativnosti sa δ izvodom. /19.1/ prestavlja kinematičke uslove kompatibilnosti n-tog reda f-je φ na površini S/t/. Odmah se vidi da će se oni izražavati preko $[\overset{(s)}{A}]$, njihovih izvoda po u^α i δ izvoda. Sve veličine izvan ovih su geometrijski uticaj površine S/t/. One u /19.1/ ulaze preko δ izvoda n^i i $x^i{}_{,\alpha}$.

U specijalnom slučaju kad je f-ja φ neprekidna zajedno sa svojim izvodima do n-1-og reda /19.1/ postaje

/19.2/ $$\left[\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right]=(-1)^n G^n [A^n]=(-G)^n \overset{(n)}{B}.$$

Iz /19.2/ dobijamo

$$(-G)^n=\frac{\left[\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right]}{B^n}=\frac{\left[\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right]}{[\varphi_{,\kappa_1\ldots\kappa_n} n^{\kappa_1}\ldots n^{\kappa_n}]}=$$

/19.3/

$$=\frac{\left[\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right]}{[n^{\kappa_1}\ldots n^{\kappa_n}\partial_{\kappa_1}\ldots\partial_{\kappa_n}\varphi]}$$

što prestavlja interpretaciju Hugoniot-Duhem-ove teoreme:

Brzina pomeranja singularne površine na kojoj su f-ja φ i njeni izvodi do n-l-og reda neprekidni ali bar jedan izvod n-tog reda je prekidan odredjena je do na znak količnikom diskontinuiteta $\left[\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}\right]$ i normalne komponente n-tog izvoda f-je φ /ili n-tog izvoda u pravcu normale f-je φ /, tj. $\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}$ [CFT] .

Da bi kompletirali do sada izvedenu teoriju napisaćemo kinematičke uslove kompatibilnosti prvog i drugog reda. Ovi neposredno slede iz /18.1/ i /18.2/ kad se primeni operator diskontinuiteta[ ]i uzme u obzir /11.1/.

Kinematički uslov kompatibilnosti prvog reda glasi

/19.4/ $$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=\frac{\delta B}{\delta t}-G\overset{(1)}{B},$$

a drugog reda

/19.5/ $$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]=\frac{\delta^2 B}{\delta t^2}-\frac{\delta G}{\delta t}\overset{(1)}{B}-2G\frac{\delta \overset{(1)}{B}}{\delta t}-GG^{,\alpha}B_{,\alpha}+G^2\overset{(2)}{B}.$$

2o. Mešoviti uslovi kompatibilnosti

Pri izvodjenju /19.1/ mi smo pošli od najopštijih pretpostavki za f-ju φ. Zato /19.1/ važi za bilo koju tenzorsku f-ju nezavisno od njenog reda i tipa.

Ako je to f-ja oblika onda je

$$\frac{\partial^n \varphi_{,i_1\ldots i_m}}{\partial t^n} = \frac{\delta^n \varphi_{,i_1\ldots i_m}}{\delta t^n} +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{n^{k_1} G \sum \cdots$$

$$\cdots \sum_{l_s=0}^{n-s-(l_1+\cdots+l_{s-1})} \frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}}\Big(n^{k_s} G\, \frac{\delta^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)} \varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_s}}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}}\Big)\Big\}\cdots\Big\}$$

/2o.1/

$$= \frac{\delta^n \varphi_{,i_1\ldots i_m}}{\delta t^n} +$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^s \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{n^{k_1} G \sum_{l_2=0}^{n-2-l_1} \frac{\delta^{l_2}}{\delta t^{l_2}}\Big\{n^{k_2} G \sum \cdots$$

$$\cdots \sum_{l_s=0}^{n-s-(l_1+\cdots+l_{s-1})} \frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}}\Big(n^{k_s} G\, \frac{\delta^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)} \varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_s}}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}}\Big)\Big\}\cdots\Big\}$$

$$+(-1)^n G^n\big(\varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_n} n^{k_1}\cdots n^{k_n}\big).$$

Primenom operatora diskontinuiteta na /2o.1/ dobijamo

$$\Big[\frac{\partial^n \varphi_{,i_1\ldots i_m}}{\partial t^n}\Big] = \frac{\delta^n [\varphi_{,i_1\ldots i_m}]}{\delta t^n} +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{n^{k_1} G \sum \cdots$$

/2o.2/

$$\cdots \sum_{l_s=0}^{n-s-(l_1+\cdots+l_{s-1})} \frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}}\Big(n^{k_s} G\, \frac{\delta^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)} [\varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_n}]}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}}\Big)\Big\}\cdots\Big\}$$

ili

$$\left[\frac{\partial^n \varphi_{,i_1\ldots i_m}}{\partial t^n}\right] = \frac{\delta^n[\varphi_{,i_1\ldots i_m}]}{\delta t^n} +$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^s \sum_{l_1=0}^{n-1} \frac{\delta^{l_1}}{\delta t^{l_1}}\Big\{n^{k_1} G \sum \ldots$$

/2o.3/

$$\ldots \sum_{l_s=0}^{n-s-(l_1+\cdots+l_{s-1})} \frac{\delta^{l_s}}{\delta t^{l_s}}\left(n^{k_s} G \frac{\delta^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}[\varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_s}]}{\delta t^{n-s-(l_1+\cdots+l_s)}}\right)\Big\}\ldots\Big\}+$$

$$+(-1)^n G^n [\varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_n} n^{k_1}\cdots n^{k_n}],$$

$$0 \leq l_1+\cdots+l_{s-1} \leq n-s \quad ; \quad l_1, l_2, \ldots, l_{s-1} \geq 0,$$

što prestavlja mešovite uslove kompatibilnosti.

U specijalnom slučaju kad je f-ja φ neprekidna zajedno sa svojim izvodima do m+n-l-og reda biće

$$\left[\frac{\partial^n \varphi_{,i_1\ldots i_m}}{\partial t^n}\right] = \left[\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}\right)_{,i_1\ldots i_m}\right] =$$

$$= \left[\partial_{i_m}\cdots\partial_{i_1}\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}\right] =$$

$$= (-G)^n [\varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_n} n^{k_1}\cdots n^{k_n}] =$$

$$= (-G)^n [\varphi_{,i_1\ldots i_m k_1\ldots k_n}] n^{k_1}\cdots n^{k_n} =$$

/2o.4/

$$= (-G)^n [n^{j_1}\cdots n^{j_m} n^{p_1}\cdots n^{p_n} \varphi_{,j_1\ldots j_m p_1\ldots p_n}] \times$$

$$\times\, n_{i_1}\cdots n_{i_m}$$

$$= (-G)^n [n^{j_1}\cdots n^{j_m} n^{p_1}\cdots n^{p_n} \partial_{p_n}\cdots\partial_{p_1}\partial_{j_m}\cdots\partial_{j_1}\varphi] \times$$

$$\times\, n_{i_1}\cdots n_{i_m} \qquad [CFT]$$

Napominjemo da smo ove uslove kompatibilnosti nazvali mešovitim zato što se pojavljuju i izvodi po koordinatama kao i po vremenu. S druge strane, kako je

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi_{,i_1\ldots i_m} = \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}\right)_{,i_1\ldots i_m} \qquad /2o.5/$$

mešoviti uslovi kompatibilnosti se mogu interpretirati i kao kinematički i kao geometrijski. U prvom slučaju mi zanemarujemo činjenicu da se radi o m-tom kovarijantnom izvodu f-je φ a u drugom da je reč o n-tom izvodu iste f-je po vremenu. Izraz /2o.5/ nam pokazuje da je sve jedno na koji način ćemo izračunavati uslove kompatibilnosti za ovaj slučaj. Nama se čini da je za nas pogodnije, s obzirom na prilaz ovom problemu, da ih odredjujemo na način prikazan izrazom /2o.2/ ili /2o.3/. U tom slučaju je $\varphi_{,i_1\ldots i_m}$ u potpunosti definisano preko $\overset{(s)}{A}$ i njihovih izvoda na površini S/t/. Primenom /19.1/ na ovaj izraz dobijamo konačne rezultate.

21. Diskusija

Odmah želimo da naglasimo da su relacije kinematičkih uslova kompatibilnosti vrlo složenog oblika. To se moglo i očekivati s obzirom na definiciju $\overset{\delta}{\partial}$ izvoda. $\overset{\delta}{\partial}$ izvod i kovarijantni izvod nisu komutativni kao što je slučaj za $\frac{\partial}{\partial t}$ i ∇_k. Medjutim, i pored sve svoje složenosti, one nam omogućuju izračunavanje uslova kompatibilnosti daleko jednostavnije nego bilo koja do sada poznata metoda, što smo ilustrovali na izvesnom broju primera. Pokazali smo da su svi do sada poznati rezultati, tj. relacije kinematičkih uslova kompatibilnosti, specijalan slučaj ove teorije. U radu je dat i originalan postupak za odredjivanje δ izvoda n^i i $x^i{}_{,\alpha}$ u slučaju normalne parametrizacije jednačine površine S/t/. Ovi rezultati su bitan deo ovde izložene teorije, jer nam omogućuje dobivanje uprošćenijih izraza za uslove kompatibilnosti /vidi T.Y. Thomas [32] /.

U radu se ne razmatraju dinamički uslovi kompatibilnosti. To su relacije koje zadovoljavaju odgovarajuće veličine koje karakterišu ponašanje materijalne sredine /kontinuuma/ na površini diskontinuiteta. Takve veličine su gradijenti deformacije $x^k_{;K}$, tenzor deformacije e_{ij}, tenzor napona t_{ij} itd.. Primenom $[\ ]$ na prvu Cauchy-jevu jednačinu kretanja dobijamo dobro poznate dinamičke uslove kompatibilnosti. U sadašnjem trenutku razvoja mehanike kontinuuma najnovije teorije nam daju sisteme diferencijalnih jednačina, koje nam omogućuju daleko kompleksije i egzaktnije sagledavanje ponašanja materijala. Svaka od jednačina ovih sistema daje nam dinamički uslov kompatibilnosti. S druge strane, nove teorije se ne zadržavaju na efektima prvog reda. O tome je već bilo reči u uvodu ovog rada.

Sve su to problemi od bitnog interesa za dalja istraživanja, pogotovu sa aspekta primene površina diskontinuiteta.

Literatura

[1] R. Hill: Discontinuity relations in mechanics of solids, Progress in Solid Mechanics, Vol.II,247-276 /1961/.

[2] C. Truesdell: General and exact theory of waves in finite elastic strain, Arch. Rational Mech. Anal. 8,263-296.

[3] M. Hayes i R.S. Rivlin: Propagation of a plane wave in an isotropic elastic material subject to pure homogeneous deformation. Arch. Radional Mech. Anal. 8, 15-22.

[4] R. Roupin i B. Berstein: Sound waves in deformed perfectly elastic materials; the acousto-elastic effect. J. Acoust. Soc. Amer. 33, 216-225.

[5] T.Y. Thomas: Plastic flow and fracture in solids. Academic Press, New York /1961/.

[6] R. Hill, J. Mech. Phys. Solids 1o,1 /1962/.

[7] P.J. Chen: The Growth of acceleration waves of arbitrary form in homogeneously deformed elastic materials, Arch. Rational Mech. Anal. 3o, 81-9o /1968/.

[8] E. Varley, Arch. Rational Mech. Anal. 19,215 /1968/.

[9] J. Dunwoody i N.T. Dunwoody, Int. J. Engng Sci. 3,417 /1965/.

[10] G.A. Nariboli, J. math. Analysis Applic.8,57/1964/.

[11] E. Varley i J. Dunwoody, J. Mech. Phys. Solids 13, 17 /1965/.

[12] M.F. McCarthy: The propagation and growth of plane acceleration waves in perfectly electrically conducting elastic material in a magnetic field. Int. J. Engng Sci.4,361/1966/.

[13] M.F. McCarthy i W.A.Green; Int. J. Engng Sci. 4, 403 /1966/.

[14] P.J. Chen: Thermodynamic influences on the propagation and the growth of acceleration waves in elastic materials. Arch. Rational Mech. Anal. 31,228-254 /1968/.

[15] M.F. McCarthy i A.C. Eringen; Int. J. Engng Sci. 7, 447 /1969/.

[16] B.D. Coleman; Arch. Rational Mech. Anal. 17, 1-46 /1964/.

[17] R.I. Herrera i M.E. Gurtin:Quart. Appl. Math. 22, 360-364 /1965/.

[18] B.D. Coleman i M.E. Gurtin: Waves in materials with memory. Arch. Rational Mech. Anal. 19, 266-298 /1965/.

[19] P.J. Chen: On the growth of longitudinal waves in anisotropic elastic materials. Arch. Rational Mech. Anal. 36, 381-390 /1970/.

[20] E.S. Suhubi; The growth of acceleration waves of arbitrary form in deformed hyperelastic materials. Int.J. Engng Sci. 8, 699-711 /1970/.

[21] G.A. Nariboli i B.L. Juneja: Growth of acceleration waves in an unsrained non-linear isotropic elastic medium, Non-linear mechanics, 5, 513-525 /1970/.

[22] L. Euler: De motu fluidorum a diverso caloris gradu oriundo. Novi Comm. Acad. Sci, Petrop. 11 /1764/.

[23] L. Euler: Theoria motus corporum solidorum seu Rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnis motus.

[24] G.G. Stokes: Notes on hydrodynamics. Cambr. Dubl. Math. J.3,209-219 /1848/.

[25] E.B. Shristoffel: Uber die Fortpflanzung von Stossen durch elastische feste Korper. Ann. Mat. /2/ 8,193-244 /1877/

[26] H.Hugoniot: Sur la propagation du mouvement dans un fluide indefini. C.R.Acad.Sci. Paris 101,1118-1120,1229-1232 /1885/.

[27] J. Hadamard: Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'Hydrodynamique. Paris /1903/.

[28] G.Zemplen: Sur L'impossibilite des ondes de choc negatives dans les gas. C.R. Acad. Sci, Paris 141, 710-712 /1905/.

[29] L. Lichtenstein: Grundlagen der Hydromechanik. Berlin. Springer. /1929/.

[30] T.Y. Thomas: Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in continuum mechanics, J. Math. Mech. 6,311-322 /1957/.

[31] C. Truesdell i R.A. Toupin: The Clasical Field Theories C F T, Handbuch der Physik, III/1, 225-793 /1960/.

[32] T.Y. Thomas: The general theory of compatibility conditions, Int.J. Engng. Sci. 4,207-235 /1966/.

[33] T.Y. Thomas: Concepts from tensor analysis and differential geometry, Second edition, Academic Press, New York and London /1965/.

[34] J. Jarić: Prostiranje elastičnih talasa u kubnim kristalima. Magistarski rad /1970/.

I s p r a v k e

Strana	red odozgo	stoji	treba
5	13	THomas	Thomas
"	16	specijalnot	specijalnog
7	1	sadapoznati	sada poznati
"	4	f-a	f-ja
17	13	/3.//	/3.7/
2o	13	x^{in} s	x^{in+1}, α s
	U tabeli br. 3 treba da stoji na preseku		
	k-p-te vrste i s-te kolone		A.
35	17	itd	$\overset{(k-2)}{A}$ itd.
65	1	potrebni	potreban i
66	2	s narna	stacionarna
66	17	nulezove	nule zove
68	17	s/t/	S/t/
86	4		$\varphi, i_1 \ldots i_m$