U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

MILIVOJE G. LAZIĆ

O NEKIM KLASAMA FUNKCIJSKIH POSTUPAKA ZBIRLJIVOSTI

Doktorska disertacija

BEOGRAD, 1973.

O NEKIM KLASAMA
FUNKCIJSKIH POSTUPAKA ZBIRLJIVOSTI

S A D R Ž A J

U V O D

Pri pokušajima da se domen primene matričnog postupka konvergencije snabde strukturom Banach-ovog prostora došlo se do zaključka da ista nije adekvatna odnosima u oblasti pomenutog skupa (u smislu da postoji matrični postupak čiji domen primene nije moguće snabdeti strukturom Banach-ovog prostora). Postavilo se stoga pitanje definisanja i izučavanja složene matematičke strukture koja u potpunosti odgovara mogućnostima organizacije domena primene matričnih postupaka. Taj problem, pored ostalog, doveo je do uvođenja pojma prostora B_o — jedne generalizacije Banach-ovih prostora, koji se, po autorima, nazivaju i prostorima Mazur-a i Orlicz-a [1]. Isti autori [30] su deo svojih rezultata, doduše bez dokaza, objavili već 1933 godine. Kompletne rezultate o strukturi domena primene matričnih postupaka i nekim činjenicama koje odatle proističu, Mazur i Orlicz [31] publikovali su tek 1954. U međuvremenu se istom problematikom bave mnogi matematičari, od kojih na prvom mestu (kako po broju tako i po dubini rezultata) treba istaći K. Zeller-a. Njihovi doprinosi bili su od značaja kako za rešavanje problema iz teorije postupaka konvergencije tako i za razvoj funkcionalne analize uopšte (dolazi, naime, do uvođenja i izučavanja raznovrsnih algebarsko-topoloških struktura).

Pri proučavanju potrebnih i dovoljnih uslova da domen primene postupka konvergencije sadrži skup nula-nizova, skup konvergentnih nizova odnosno skup ograničenih nizova pokazali su se sasvim dovoljnim pojam i svojstva Banach-ovih prostora. Pri rešavanju takvih problema za slučaj skupa svih nizova dolazi se, međutim, do zaključka da to više nije tako. U novom slučaju primenjuje se teorija Fréchet-ovih prostora čijom se specijalizacijom dobija važna klasa prostora — klasa više pomenutih prostora Mazur-a i Orlicz-a. Stoga je već početak ovog rada — njegov prvi deo, posvećen najneophodnijim pojmovima i rezultatima teorije metričkih linearnih prostora i teorije pseudonormiranih prostora, Fréchet-ovim i prostorima Mazur-a i Orlicz-a kao njihovim specijalnim slučajevima.

Inače, celo izlaganje raspoređeno je u tri dela: I, II i III. Delovi se sastoje iz odeljaka koji su numerisani arapskim ciframa. Odeljci imaju pododeljke, označene takođe arapskim ciframa, u kojima se bez posebnog numerisanja izlažu definicije, stavovi, leme i druga tvrđenja. Posledice, napomene, primeri i drugi komentari, ukoliko ih ima u nekom pododeljku, nose oznake pododeljaka u kojima se nalaze i pored toga numerisani su malim rimskim ciframa. Pri pozivanju na druge činjenice iz rada ukazuje se na deo, odeljak i pododeljak u kome se iste nalaze. Oznake dela, pa i odeljka, izostavljaju se ukoliko je reč o činjenicama iz istog dela odnosno odeljka.

Što se tiče drugog dela rada, on je posvećen funkcijskim postupcima konvergencije — postupcima pridruženim nekom nizu funkcija definisanih na skupu koji ima tačku nagomilavanja, čijom se specijalizacijom dobijaju kako matrični tako i mnogi drugi nematrični postupci. Pridruživanje postupaka izvedeno je na dva bitno različita načina (definicije II.2.2 i II.3.1). Osnovnu problematiku u tom delu rada sačinjavaju rezultati sa potrebnim i dovoljnim uslovima da domen primene funkcijskog postupka sadrži sve nula-nizove, sve konvergentne nizove, sve ograničene nizove i sve nizove uopšte. Radi sistematičnosti i pojednostavljenja izlaganja prethodno se rešavaju takvi problemi za doseg dejstva i doseg b-dejstva funkcijskih operatora (definicije II.2.1 i II.3.1). Glavnim rezultatima ovog dela našega rada, kako zbog dubine tako i zbog primene, smatramo stav II.2.9 i lemu II.3.4.

U trećem delu rada posmatra se jedna potklasa klase funkcijskih postupaka — klasa neprekidnih postupaka (definicije III.1.6 i III.2.3), čijom se specijalizacijom dobijaju kako matrični postupci tako i postupci neprekidni u smislu definicija Wlodarski-og i Orlicz-a. Pored rezultata analognih rezultatima drugog dela rada, ovde se izučava još i topološka struktura domena primene neprekidnih postupaka. Pokazuje se da neprekidni funkcijski postupci zadržavaju mnoga svojstva matričnih postupaka i neprekidnih postupaka Wlodarski-og i Orlicz-a. Kao i u prethodnom delu, i ovde se najpre raspravlja o specijalnim funkcijskim operatorima (definicije III.1.1 i III.2.1), da bi se zatim odgovarajući rezultati za neprekidne postupke dobijali uglavnom kao posledice. U tom smislu treba shvatiti naše mišljenje da su centralni rezultati trećeg dela rada stavovi III.1.2, III.3.1 i III.3.5. Primetimo na kraju da odeljku III.4 pripada posebno mesto u čitavom radu zbog toga što se tu, možda po prvi put, raspravlja o algebarsko-topološkoj strukturi domena primene funkcijskih postupaka konvergencije generalisanog tipa (definicija II.3.1).

Autor ovog rada izražava svoju iskrenu zahvalnost prof. dr S. Aljančiću i doc. dr D. Adamoviću za njihovu nesebičnu pomoć u toku njegove izrade.

I. METRIČKI LINEARNI PROSTORI

1. Pseudometrički prostori

Neka je X proizvoljan neprazan skup i $d(x,y)$ realna funkcionela definisana na Dekartovom proizvodu $X \times X$.

1. D e f i n i c i j a. Ako je

$1'$ $d(x,x)=0$; 2^0 $d(x,y)=d(y,x)$ i 3^0 $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$,

onda kažemo da smo skup X snabdeli pseudometrikom d. Par (X,d), ili samo X kada je jasno o kojoj pseudometrici je reč, zovemo tada pseudometričkim prostorom[1]; elemente $x \in X$ zovemo sada tačkama pseudometričkog prostora (X,d) (odnosno X), a $d(x,y)$ pseudorastojanjem tačaka x i y.

Pseudometrika $d(x,y)$ je metrika kada $1''$ $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$. Tada govorimo o metričkom prostoru i o rastojanju između tačaka. (Konjunkcijom $1'$ i $1''$ očigledno dobijamo uslov 1^0 $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.)

U pseudometričkim prostorima pojmovi sfere, Cauchy-evog i konvergentnog niza, a time i na njima zasnovani pojmovi otvorenog i zatvorenog skupa, kompletnog prostora, adherencije, gustog i svuda gustog skupa, separabilnog prostora itd., uvode se na isti način kao kod metričkih prostora. Iz definicije metrike i pseudometrike, jasno je da se svi rezultati teorije metričkih prostora čiji dokazi bitno ne koriste uslov $1''$ automatski prenose na pseudometričke prostore. Sledeća napomena pokazuje kako se rešavanje nekog problema u pseudometričkom prostoru na prirodan način može svesti na rešavanje istog takvog problema u metričkom prostoru.

1) Iz konteksta će biti jasno da li je reč o skupu ili o pseudometričkom prostoru.

1.i. Svakom pseudometričkom prostoru (X,d) može se korespondirati metrički prostor sa gotovo istim svojstvima. U tom cilju u X se uvodi relacija ekvivalencije $\underline{r}$ tako da je $x\ r\ y \Leftrightarrow d(x,y)=0$. Funkcionela $d_1(C_x,C_y)=d(x,y)$ je tada jedna metrika na skupu klasa ekvivalencije X/r. Želeći da istaknemo njegovu zavisnost od polaznog pseudometričkog prostora (X,d), tako dobijeni metrički prostor $(X/r,d_1)$ označavamo sa $X(d)$.

Iz definicije metrike d_1 sledi da $x_n \to x$ u prostoru (X,d) ako i samo ako $C_{x_n} \to C_x$ u prostoru $X(d)$. Na osnovu toga je, naprimer, skup Y separabilan u prostoru (X,d) ako i samo ako je odgovarajući skup Y_1 (tj. skup svih klasa ekvivalencije koje sadrže elemente iz Y) separabilan u prostoru $X(d)$.

Ako je (X,d) pseudometrički prostor i $Y \subseteq X$, onda pseudometrički prostor $(Y, d|_{Y\times Y})$ kratkoće radi označavamo sa (Y,d). U tom smislu treba shvatiti i sledeću definiciju.

2. D e f i n i c i j a. Neka su na X definisane dve najviše prebrojive familije[1] pseudometrika d_j^1 $(j=0,1,\dots)$ i d_k^2 $(k=0,1,\dots)$[2] i neka je $Y \subseteq X$. Ako iz

$$y_n \to y \quad \text{u prostoru} \quad (Y,d_j^1) \quad \text{za svako} \quad j=0,1,\dots$$

sledi

$$y_n \to y \quad \text{u prostoru} \quad (Y,d_k^2) \quad \text{za svako} \quad k=0,1,\dots,$$

onda kažemo da je familija pseudometrika d_j^1 $(j=0,1,\dots)$ jača na skupu Y od familije pseudometrika d_k^2 $(k=0,1,\dots)$. Ako je u isto vreme familija d_k^2 $(k=0,1,\dots)$ jača na Y od familije d_j^1 $(j=0,1,\dots)$, onda kažemo da su familije pseudometrika d_j^1 $(j=0,1,\dots)$ i d_k^2 $(k=0,1,\dots)$ ekvivalentne na skupu Y. U slu-

---

[1] Koristićemo u istom značenju i termine "sistem", "skup" odnosno "ukupnost". Familije pseudometrika ne moraju istovremeno biti konačne odnosno beskonačne.

[2] Iako su familije pseudometrika [illegible] u obliku nizova, red navođenja pseudometrika-članova nije bi[illegible]

čaju $Y=X$ govorimo o jačoj familiji pseudometrika, odnosno o ekvivalentnim familijama pseudometrika.

Napomena 1.i i sledeći stav omogućavaju da se dokaže separabilnost nekih konkretnih pseudometričkih prostora (primer primene navodi se u 2.7.i).

3. STAV ([1],1.41). Ako je na X definisana pseudometrika d i njoj ekvivalentna familija pseudometrika d_k $(k=0,1,\ldots)$, tada iz separabilnosti prostora (X,d_k) za svako $k=0,1,\ldots$ sledi separabilnost prostora (X,d), i obrnuto.

Ako su d_k^1 $(k=0,1,\ldots)$ i d_j^2 $(j=0,1,\ldots)$ ekvivalentni sistemi pseudometrika definisanih na X, onda iz stava 3 sledi da je prostor (X,d_k^1) separabilan za svako $k=0,1,\ldots$ ako i samo ako je prostor (X,d_j^2) separabilan za svako $j=0,1,\ldots$ (jer je, recimo, pseudometrika

$$d(x,y)=\sum_i 2^{-i}\, d_i^1(x,y)(1+d_i^1(x,y))^{-1}$$

ekvivalentna sa skupom pseudometrika d_k^1 $(k=0,1,\ldots)$).

Iako se ista problematika može raspravljati i u pseudometričkim prostorima, do kraja našeg odeljka biće reč isključivo o metričkim prostorima.

4. D e f i n i c i j a. Skup $Y\subseteq X$ je nigde gust u metričkom prostoru X, ako njegova adherencija $\overline{Y}$ ne sadrži ni jednu kuglu, tj. ako je unutrašnjost od $\overline{Y}$ prazan skup.

Skup $Y\subseteq X$ je prve kategorije u X, ako se može predstaviti kao najviše prebrojiva unija skupova nigde gustih u prostoru X. U suprotnom slučaju kažemo da je skup $Y\subseteq X$ druge kategorije u prostoru X.

Skup $Y\subseteq X$ je prve kategorije u tački x_0, ako postoji okolina O tačke x_0 takva da je skup $Y\cap O$ prve kategorije u prostoru X; kada takva okolina ne postoji, govorimo o skupu Y druge kategorije u tački x_o.

Skup $Y \subseteq X$ zadovoljava Baire-ov uslov u prostoru (X,d), ako svaki neprazan perfektan skup Z sadrži tačku x_o takvu da je bar jedan od skupova $Z \cap Y$ i $Z-Y$ prve kategorije u tački x_o u prostoru (Z,d).

4.i. Primetimo da skup druge kategorije ne može biti prazan, što se bitno koristi (eksplicitno ili implicitno) pri dokazu svih rezultata u odeljcima II.3, III.2 i III.4. Pokazano je takođe (npr., [2], Uvod, teorema 2) da je svaki kompletan metrički prostor druge kategorije u samom sebi.

5. D e f i n i c i j a. Neka je $\mathcal{B}$ najuža (u smislu inkluzije) od svih familija skupova $Y \subseteq X$ takvih da

1) svaki zatvoren skup pripada familiji,
2) unija prebrojivo mnogo skupova iz familije pripada familiji

i

3) ako neki skup pripada familiji, onda njegov komplement takođe pripada familiji.

Za skup $Y \in \mathcal{B}$ kažemo tada da je B-merljiv (ili, da je merljiv u Borel-ovom smislu).

5.i. Banach ([3], str. 398) je dokazao da svaki B-merljiv skup zadovoljava Baire-ov uslov.

6. D e f i n i c i j a. Skup $Y \subseteq X$ je koneksan u prostoru (X,d) ako se ne može prikazati kao unija dva neprazna disjunktna skupa otvorena u prostoru (Y,d). U slučaju $Y=X$ kažemo jednostavno da je prostor (X,d) koneksan.

7. D e f i n i c i j a. Operator A, koji preslikava prostor (X,d) u prostor Y, zadovoljava Baire-ov uslov, ako sva-

ki neprazan perfektan skup $Z \subseteq X$ ima podskup Z_1 prve kategorije u prostoru (Z,d) i takav da je restrikcija $A|_{Z-Z_1}$ jedno neprekidno preslikavanje prostora $(Z-Z_1,d)$ u prostor Y.

8. D e f i n i c i j a. Neka operatori A_n $(n=0,1,\ldots)$ i A preslikavaju prostor X u jedan isti prostor Y. Ako je za svako $x \in X$

$$\lim_n A_n(x)=A(x),$$

onda kažemo da niz operatora A_n $(n=0,1,\ldots)$ konvergira ka A. Operator A zovemo tada granicom niza A_n $(n=0,1,\ldots)$.

9. D e f i n i c i j a. Neka je $\mathcal{B}$ najuža (u smislu inkluzije) od svih klasa operatora koji neki prostor X preslikavaju u jedan isti prostor Y takvih da

1) svaki neprekidan operator pripada klasi

i

2) granica svakog konvergentnog niza operatora iz klase takođe pripada klasi.

Za operator $A \in \mathcal{B}$ kažemo tada da je B-merljiv (ili, da je merljiv u Borel-ovom smislu).

Pri tome, za neprekidne operatore kažemo da pripadaju nultoj klasi Baire-a; granica niza operatora iz nulte klase koja ne pripada nultoj klasi je, po definiciji, iz prve klase Baire-a; operator koji ne ulazi ni u nultu ni u prvu klasu Baire-a i koji je granica niza operatora iz prve klase, pripada drugoj klasi Baire-a; itd.

9.i. Očigledno, operator iz bilo koje klase Baire-a je B-merljiv. S druge strane, Banach ([3],str.397) je pokazao da svaki B-merljiv operator zadovoljava Baire-ov uslov.

10. D e f i n i c i j a. Neka su tačke metričkog prostora (X,d) nizovi realnih (ili kompleksnih) brojeva $x=(u_j)$. Ako je za svako $n=0,1,\ldots$ operator $A_n(x)=u_n$ neprekidan, tj. ako

iz $x_k=(u_j^k)\in X$ $(k=0,1,\ldots)$, $x=(u_j)\in X$ i $d(x_k,x)\to 0$ $(k\to\infty)$ sledi $u_n^k\to u_n$ $(k\to\infty)$ za svako $n=0,1,\ldots$, onda kažemo da prostor (X,d) ima svojstvo K, ili da je tipa K.

Svojstvo K dakle znači da iz konvergencije u smislu metrike sledi konvergencija po (svim) koordinatama. Stav 2.11 pokazuje da to svojstvo može imati značajne posledice po algebarsko-topološku strukturu prostora formiranih od nizova.

11. D e f i n i c i j a. Par (X,d) je prostor tipa G (ili, par (X,d) je G-prostor), ako je (X,d) kompletan metrički prostor i ako je X grupa u odnosu na neku binarnu operaciju, koju ćemo zvati sabiranje i označavati sa +, pri čemu su metrika d i operacija + saglasne, tj. u prostoru (X,d)

$$\text{iz } x_n\to x \quad \text{sledi} \quad -x_n\to -x$$

i

$$x_n\to x \text{ i } y_n\to y \quad \text{povlači} \quad x_n+y_n\to x+y.$$

(Primetimo uzgred da se G-prostor naziva i kompletnom metričkom grupom.)

G-prostor tipa K zovemo GK-prostorom (ili prostorom tipa GK).

Sledeći stav (npr., [2], glava I, teorema 1) utvrđuje važna topološka svojstva izvesnih podgrupa u G-prostorima. Naime:

12. STAV. Neka je X prostor tipa G i Y podgrupa grupe X. Ako je sem toga Y druge kategorije i zadovoljava Baire-ov uslov u prostoru X, onda je Y istovremeno otvoren i zatvoren skup u prostoru X.

Na osnovu definicije koneksnog prostora dobija se onda sledeći rezultat (npr., [2], glava I, teorema 2):

13. STAV. U koneksnom G-prostoru X, podgrupa Y koja u X zadovoljava Baire-ov uslov je ili skup prve kategorije u prostoru X, ili se podudara sa čitavim X.

Struktura G-prostora dopušta uvođenje pojma aditivnog operatora, tj. operatora A sa svojstvom $A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$. U tim prostorima od posebnog interesa su operatori koje uvodi sledeća definicija.

14. D e f i n i c i j a. Linearni operator je aditivno i neprekidno preslikavanje jednog G-prostora u drugi G-prostor.[1)]

Kombinacijom aditivnosti i neprekidnosti operatora dobijeno je efikasno sredstvo za proučavanja u teoriji G-prostora. Sledeći stav pokazuje da aditivnost i neprekidnost nisu sasvim disparatna svojstva. Preciznije, linearnost operatora sledi iz aditivnosti i svojstva koje je slabije od neprekidnosti.

15. STAV(npr.,[2], glava I, teorema 4 i napomena). Neka je A aditivno preslikavanje jednog G-prostora u drugi G-prostor. Ako pri tome A zadovoljava Baire-ov uslov, onda je A linearan operator.

Kompletnosti radi, a i zbog toga što u praksi može biti veoma efikasan, navodimo sledeći rezultat (npr.,[2], glava I, teorema 5):

16. STAV. Neka je X koneksan G-prostor i A_n $(n=0,1,\ldots)$ niz linearnih operatora definisanih na X sa vrednostima $A_n(x)$ u jednom istom G-prostoru. Tada je skup $x\in X$ takvih da $\lim\limits_n A_n(x)$ postoji ili prve kategorije u prostoru X, ili se podudara sa X.

16.i. Primer. Kao prilog tvrdnji o efikasnosti stava 16, navodimo sledeći primer. Dokazaćemo naime da je skup nizova $U=(u_j)$ takvih da red $\sum\limits_{j=0}^{\infty} u_j$ konvergira prve kategorije u prostoru nula nizova T^o [2)]. (Izloženi dokaz nije nam bio poznat.) U tom cilju

[1)] U slučaju linearnih prostora u upotrebi je i definicija prema kojoj je linearnost operatora isto što i aditivnost zajedno sa homogenošću. Ovde navedena definicija pripada tzv. poljskoj školi, i ona će u ovom radu, zbog češće upotrebe u korišćenoj literaturi, biti uvek podrazumevana.

[2)] I na drugim mestima T^o označava isključivo skup odnosno prostor nula-nizova.

primetimo da je sa metrikom $d(U,V)=\sup_j|u_j-v_j|$, gde je $V=(v_j)$, i uobičajenim sabiranjem nizova T^o koneksan GK-prostor i, na osnovu toga, da je sa

$$A_k(U)=\sum_{j=o}^{k}u_j \qquad (U=(u_j)\in T^o)\ (k=0,1,\ldots)$$

definisan niz funkcionela linearnih u prostoru T^o. Skup T_1 tačaka $U\in T^o$ za koje postoji $\lim_k A_k(U)$ je ustvari skup nizova $U=(u_j)$ za koje red $\sum_{j=o}^{\infty}u_j$ konvergira. Kao što je dobro poznato, T_1 je pravi podskup od T^o. Na osnovu stava 16, skup T_1 je prve kategorije u prostoru T^o.

Pri dokazivanju rezultata egzistencijalnog tipa (naprimer, leme II.3.2) koristiće se, pored ostalog, tzv. teorema o kondezaciji singulariteta (npr.,[2], glava I, teorema 6):

17. STAV. Neka je na koneksnom G-prostoru X definisan dvojni niz linearnih operatora $A_{m,n}$ $(m,n=0,1,\ldots)$ sa vrednostima $A_{m,n}(x)$ u G-prostorima $Y_m(m=0,1,\ldots)$. Pretpostavimo zatim da za neki niz (x_m) tačaka iz X $\lim_n A_{m,n}(x_m)$ ne postoji ni za jedno $m=0,1,\ldots$. Tada je skup tačaka $x\in X$ takvih da $\lim_n A_{m,n}(x)$ ne postoji ni za jedno $m=0,1,\ldots$ druge kategorije u prostoru X, a njegov komplement je u istom prostoru skup prve kategorije.

2. Pseudonormirani prostori

Ako u definiciji metričkog linearnog prostora (npr.,[4], str. 155) metriku zamenimo pseudometrikom, onda dobijamo definiciju pseudometričkog linearnog prostora. U teoriji zbirljivosti od naročitog interesa i značaja su pseudometrički linearni prostori kod kojih se pseudometrika uvodi preko realne funkcionele sa svojstvima navedenim u sledećoj definiciji.

Neka je dakle X realan (ili kompleksan) linearan prostor i

$p=p(x)$ realna funkcionela definisana na X.

1\. D e f i n i c i j a. Ako je

1° $p(0)=0$; 2° $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$; 3° $p(-x)=p(x)$ i

4° $a_n \to a$ i $p(x_n - x)\to 0 \Rightarrow p(a_n x_n - ax)\to 0$,

onda kažemo da je <u>p</u> <u>pseudonorma</u> na X; par (X,p), ili samo X ako je reč o nekoj uobičajenoj pseudonormi odnosno svojstvu koje važi za svaku pseudonormu, tada zovemo <u>pseudonormiranim prostorom</u>[1], a elemente $x\in X$ <u>tačkama</u> toga prostora.

Funkcionela $p(x)$ je <u>homogena</u> pseudonorma kada su ispunjeni uslovi 2° i

$$5^\circ\ p(ax)=|a|p(x).$$

2\. D e f i n i c i j a. (Homogena) pseudonorma $p(x)$ je (<u>homogena</u>) <u>norma</u> ako iz $p(x)=0$ sledi $x=0$. Tada se kaže da je (X,p) (odnosno X) <u>prostor</u> F^* (B^*). Normu ćemo obično označavati sa $n=n(x)$.

F^*-prostor (X,n) je <u>prostor</u> B_0^* kada na X postoji konačno ili prebrojivo mnogo homogenih pseudonormi $p_i(x)$ $(i=0,1,\dots)$ takvih da

$$n(x_k)\to 0\ (k\to\infty) \iff \text{za svako } i=0,1,\dots\ p_i(x_k)\to 0\ (k\to\infty).$$

Ukoliko ne postoji potreba za isticanjem norme <u>n</u>, govorimo o B_0^*-prostoru $(X;p_0,p_1,\dots)$, ili samo o B_0^*-prostoru X kada su pseudonorme p_i $(i=0,1,\dots)$ dogovorene.

2.i. Ako je $p(x)$ (pseudo)norma na X, onda je funkcionela $d(x,y)=p(x-y)$ (pseudo)metrika na X. Na osnovu toga ima smisla (sa uobičajenim značenjem) govoriti o separabilnosti, kompletnosti, kompaktnosti, itd. pseudonormiranih prostora, kao i, pored ostalog, o ekvivalentnim najviše prebrojivim familijama pseudonormi.

---

1) Iz konteksta će biti jasno da li je reč o skupu, linearnom prostoru ili pseudonormiranom prostoru.

Iz definicije (pseudo)norme $p(x)$ sledi da je inducirana (pseudo)metrika $d(x,y)=p(x-y)$ u saglasnosti sa pretpostavljenom algebarskom strukturom kod X. Odatle izlazi da je tada (X,d) (pseudo)metrički linearan prostor.

3. D e f i n i c i j a. Ako je F^* (B_o^* ili B^*)-prostor X kompletan, onda kažemo da je X prostor F (B_o, odnosno B). (Prostori F i B su poznatiji kao Fréchet-ov odnosno Banach-ov prostor; prostor B_o poznat je i kao prostor Mazur-a i Orlicz-a.)

4. D e f i n i c i j a. F^*-prostori X i Y su izomorfni ako postoji aditivno i homeomorfno preslikavanje X na Y. Kada je taj homeomorfizam ekvivalencija, tj. kada je norma slike jednaka normi originala, govorimo o ekvivalentnim F^*-prostorima X i Y.

Primetimo da se lakim rasuđivanjem ustanovljava da su dva izomorfna F^*-prostora istovremeno kompletna ili ne.

S obzirom na sledeći stav Mązur-a i Orlicz-a ([1], 1.1), uvek možemo smatrati da je posmatrani F^*(B_o^* odnosno B^*)-prostor deo nekog F (B_o odnosno B)-prostora.

STAV. Svaki F^*(B_o^* i B^*)-prostor je ekvivalentan linearnom potprostoru nekog F (B_o odnosno B)-prostora.

5. Ako su na linearnom prostoru X definisane homogene pseudonorme $q_i(x)$ $(i=0,1,\dots)$ tako da iz $q_i(x)=0$ $(i=0,1,\dots)$[1)] sledi $x=0$, onda je funkcionela

$$n(x)=\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} q_i(x)(1+q_i(x))^{-1}$$

norma na X (jasno je da promena reda navođenja pseudonormi $q_i(x)$ $(i=0,1,\dots)$ dovodi "samo" do izomorfnog prostora (sa identičnim preslikavanjem kao izomorfizmom), dakle do iste topologije, pa se na datom redu navođenja ne mora ni insistirati); iz

1) Ovde, a i na nekim drugim mestima, što će biti jasno iz odgovarajućeg konteksta, $(i=0,1,\dots)$ znači: za svako $i=0,1,\dots$.

$$n(x_k)\to 0\ (k\to\infty) \iff \text{za svako}\ \ i=0,1,\dots\ \ q_i(x_k)\to 0\ (k\to\infty),$$

sledi zatim da je u posmatranom slučaju (X,n) prostor B_o^* .

Na osnovu prethodnog, svaki linearni prostor X formiran od nizova $x=(u_j)$ na kome je definisana prebrojiva familija homogenih pseudonormi $q_i(x)$ $(i=0,1,\dots)$ koja, pored ostalih pseudonormi (ne izuzimajući mogućnost da drugih i ne bude), uključuje sve pseudonorme $p_j(x)=|u_j|$ $(j=0,1,\dots)$, dopušta strukturu prostora B_o^* . Tada se, dakle, postavlja samo pitanje da li je (X,n), gde je

$$n(x)=\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} q_i(x)(1+q_i(x))^{-1} ,$$

prostor B_o, tj. da li je B_o^*-prostor (X,n) kompletan. U vezi s tim, u praksi od koristi može biti i sledeća napomena (čija tačnost se lako proverava).

Naime, ako je (X,n) prostor B_o^* sa homogenim pseudonormama $q_i(x)$ $(i=0,1,\dots)$, onda niz (x_k) konvergira u prostoru (X,n) ka tački $\underline{x}$ ako i samo ako isti niz konvergira ka $\underline{x}$ u svakom od pseudonormiranih prostora (X,q_i) $(i=0,1,\dots)$. Odatle sledi, a to će upravo biti i primenjivano, da je za kompletnost B_o^*-prostora (X,n) sa homogenim pseudonormama $q_i(x)$ $(i=0,1,\dots)$ dovoljno (a, naravno, i potrebno) da $x_k\in X$ $(k=0,1,\dots)$ i

$$q_i(x_k-x_\ell)\to 0\ (k\to\infty\ ,\ \ell\to\infty)\ \ \text{za svako}\ \ i=0,1,\dots$$

povlači egzistenciju tačke $x\in X$ takve da

$$q_i(x_k-x)\to 0\ (k\to\infty)\ \ \text{za svako}\ \ i=0,1,\dots\ \ .$$

U nastavku ćemo navedene okolnosti sistematski i često (naročito u odeljcima II.4 i III.3) koristiti, pa, zbog konciznosti izlaganja, to neće eksplicitno biti napominjano. Takođe neće biti ni proveravanja homogenosti pseudonormi iz familija kojima u ovom radu operišemo, budući da će ona u svim slučajevima biti očigledna.

6. Po šemi primenjenoj u napomeni 1.1.i, svakom pseudonormiranom prostoru (X,p) korespondiramo F^*-prostor sa skoro istim algebarskim i topološkim svojstvima. Tako dobijeni F^*-prostor obeležavamo sa $X(p)$, da bismo istakli njegovu tesnu vezu sa polaznim elementima X i $\underline{p}$. Ako je pri tome $\underline{p}$ homogena pseudonorma, onda je $X(p)$ prostor B^*. Primetimo takođe da kompletnost prostora (X,p) povlači kompletnost prostora $X(p)$, i obrnuto.

7. Neka je (X,n) prostor B_o^* i p_k $(k=0,1,\ldots)$ niz homogenih pseudonormi čiju egzistenciju i svojstvo pretpostavlja definicija. Tada, na osnovu 1.3 i 2.i, iz separabilnosti prostora (X,p_k) za svako $k=0,1,\ldots$ sledi separabilnost prostora (X,n), i obrnuto.

7.i. <u>Primer</u>. Primenom prethodnog rezultata možemo, naprimer, ustanoviti separabilnost prostora T svih nizova $U=(u_j)$ u odnosu na normu

$$n(U)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}|u_j|(1+|u_j|)^{-1}.\ ^{1)}$$

U tom cilju primetimo da je data norma ekvivalentna skupu homogenih pseudonormi $p_k(U)=|u_k|$ $(k=0,1,\ldots)$, i na osnovu toga da je (T,n) prostor B_o^* (ustvari, (T,n) je B_o-prostor, ali u posmatranom slučaju njegovu kompletnost ne koristimo). Pokazaćemo sada da je za svako $k=0,1,\ldots$ prostor (T,p_k) separabilan. Posmatrajmo stoga prostore $T(p_k)$ $(k=0,1,\ldots)$. Nije teško zaključiti da je svaki od tih prostora ekvivalentan sa prostorom realnih (odnosno kompleksnih) brojeva[2)]. Odatle sledi njihova separabilnost i, na osnovu napomene 6, separabilnost prostora (T,p_k) $(k==0,1,\ldots)$. Separabilnost prostora (T,n) dobija se onda primenom

---

1) U daljem tekstu T označava isključivo pomenuti skup odnosno prostor.

2) Ekvivalencije, recimo, ostvaruju redom preslikavanja $A_k(C_U)=u_k$ $(k=0,1,\ldots)$, gde je $U=(u_j)$.

napomene 7.

Napomenimo još da pored našeg dokaza separabilnosti prostora T postoji i dokaz koji se sastoji u efektivnoj konstrukciji prebrojivog skupa svuda gustog u tom prostoru (npr.,[5], str. 21).

8. Iz definicija 1, 2, 3 i 1.11 sledi da je svaki F-prostor prostor tipa G. Sem toga, svaki F-prostor je koneksan prostor (npr.,[2], glava III, § 1). Odatle izlazi da svi objekti iz prethodnog odeljka mogu biti predmet pažnje i u F-prostorima, kao i da su svi rezultati prethodnog odeljka tačni i u slučaju F-prostora (tim pre to onda važi za B_o- odnosno B-prostore). Tu činjenicu ćemo često koristiti u II i III delu ovoga rada.

Tako, analogno definicijama 1.10 i 1.11, uvodimo pojmove prostora tipa FK, B_oK odnosno BK. Da je reč o važnom svojstvu prostora formiranih od nizova, pokazuje već sledeći rezultat. (Pomenuti rezultat nije nam bio poznat, ali smo kasnije ustanovili da on ustvari predstavlja deo stava 4.4 [6] Zeller-a. Preciznosti radi, primetimo da se pomenuti rezultat Zeller-a odnosio na B_oK-prostore. Ta razlika (iako dokaz ostaje nepromenjen) može biti operativna, s obzirom na egzistenciju prostora FK koji istovremeno nisu i prostori B_oK (videti napomenu 15.i).)

9. STAV. <u>Neka je</u> X <u>prostor</u> FK, <u>i neka za neki niz</u> (a_j) <u>red</u> $\sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j$ <u>konvergira za svaki niz</u> $U=(u_j)\in X$. <u>Tada je sa</u>

$$A(U)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j \qquad (U=(u_j)\in X)$$

<u>definisana linearna funkcionela na prostoru</u> X.

<u>Dokaz</u>. Stavimo

$$A_k(U)=\sum_{j=0}^{k} a_j u_j \qquad (U=(u_j)\in X)\ (k=0,1,\dots).$$

Iz pretpostavke da je X prostor FK, tj. da iz konvergencije po normi toga prostora sledi konvergencija po koordinatama, izlazi da je $A_k(U)$ $(k=0,1,\dots)$ niz neprekidnih (ustvari, linearnih, zbog očigledne aditivnosti) funkcionela na prostoru X. Funkcionela $A(U)$ je aditivna i, zbog

$$A(U) = \lim_k A_k(U) \quad (U \in X),$$

ona je najviše iz prve klase Baire-a (tj. iz nulte ili iz prve klase). Odatle (napomena 1.9.i) izlazi da funkcionela $A(U)$ zadovoljava Baire-ov uslov. Na osnovu stava 1.15, funkcionela $A(U)$ je linearna (dakle, i neprekidna), što dovršava dokaz našega stava.

Stav 10 pokazuje da pri neprekidnom preslikavanju jednog F-prostora u drugi aditivnost operatora može bitno uticati na "raspoređenost" skupa vrednosti operatora u prostoru-slici. O čemu je reč biće jasnije posle jedne naše napomene.

U opštem slučaju, pri neprekidnom preslikavanju A F-prostora X u F-prostor Y skup $A(X)$ može biti skup prve kategorije u prostoru Y (prema 1.4.i, tada je $A(X)$ pravi podskup od Y). To svojstvo imaju, naprimer, sva preslikavanja kod kojih skup $A(X)$ ima konačno ili prebrojivo mnogo elemenata. Isto tako, skup $A(X)$ može biti druge kategorije u prostoru Y i u isto vreme pravi podskup od Y. Naprimer, neka je $X=Y=R$ prostor realnih brojeva sa uobičajenom algebarsko-topološkom strukturom i $A(x)= x^2$. Tada je skup $A(X)=[0,+\infty)$ skup druge kategorije u prostoru $Y=R$ (inače bi i skup $(-\infty,0]$, pa prema tome i skup Y, bio prve kategorije u prostoru Y, što bi bilo u kontradikciji sa 1.4.i), i pri tome je $A(X)$ pravi podskup od Y. Naravno, može nastupiti i treći slučaj, tj. da se skup $A(X)$ podudara sa Y (naprimer, pri identičnom preslikavanju prostora na samog sebe). Sledeći rezultat pokazuje da kod linearnih operatora drugi od tri pomenuta slučaja ne može nastupiti. Važi naime (npr., [2], glava III, teorema 3)

10. STAV. Neka je A linearno preslikavanje F-prostora X

u F-prostor Y. Tada je skup A(X) ili prve kategorije u prostoru Y, ili se podudara sa skupom Y.

Svojstvo K kod F-prostora formiranih od nizova realnih (ili kompleksnih) brojeva ima za posledicu da je topologija FK-prostora određena jedinstveno do homeomorfizma. Do takvog zaključka dolazi se specijalizacijom sledećeg rezultata koji je poznat kao Zeller-ov stav ([6], 4.5).

11. STAV. Neka su (X,n_1) i (Y,n_2) prostori tipa FK i pri tome je X podgrupa grupe Y. Tada je norma n_1 jača (na X) od norme n_2, tj.

$$x_k \in X \ (k=0,1,\ldots) \quad \text{i} \quad n_1(x_k)\to 0 \ (k\to\infty) \Rightarrow n_2(x_k)\to 0 \ (k\to\infty),$$

i pri tome je X potprostor linearnog prostora Y (drugim rečima, i množenje skalarom u prostoru X inducirano je množenjem skalarom u prostoru Y).

11.i. U slučaju X=Y imamo dakle da je i norma n_2 jača (na Y=X) od norme n_1, i prema tome da su norme n_1 i n_2 ekvivalentne. Homeomorfizam prostora (X,n_1) i (X,n_2) ostvaruje se tada, recimo, identičkim preslikavanjem prostora X na samog sebe.

Kada je X pravi podskup od Y, na osnovu stava 10 dobijamo da je tada skup X prve kategorije u prostoru Y (njegov komplement je prema 1.4.i druge kategorije u prostoru Y). Odatle, naprimer, sledi da je skup nula-nizova T^o prve kategorije u prostoru konvergentnih nizova T^c, zatim da je skup T^c prve kategorije u prostoru ograničenih nizova T^b i, na kraju, da je skup T^b prve kategorije u prostoru svih nizova T.[1)]

Ovde se, koliko nam je poznato, prvi put formuliše stav Zeller-a u našem obliku. Njegova prvobitna formulacija odnosila se na

1) U čitavom tekstu našega rada oznake T^c i T^b upotrebljavamo u ovde datom značenju.

prostore B_0K. Wlodarski ([7], lema 9; ili, [8], lema 1) je primetio da isti rezultat važi za proizvoljne FK-prostore. U oba slučaja se, međutim, (implicitno) pretpostavlja da je X potprostor linearnog prostora Y. Naša formulacija stava Zeller-a pokazuje da se ta pretpostavka može oslabiti time što će se uzeti samo da je X podgrupa grupe Y. Uslov da je X potprostor linearnog prostora Y dobija se onda kao posledica činjenice da je pri preslikavanju jednog F-prostora u drugi linearan operator istovremeno i homogen (npr.,[2], glava III, teorema 2).

U teoriji F-prostora pokazuje se da se neki od rezultata za Banach-ove prostore mogu preneti ne samo na B_0-prostore već i na F-prostore. U II delu našega rada (stav II.2.9 i II.2.10.i) primenjujemo dva takva rezultata, pa ćemo ih stoga ovde navesti. Prvi od tih rezultata koristi pojam uopštenog niza, na čemu ćemo se najpre zadržati. Drugi rezultat je poznat kao princip uniformne neprekidnosti.

12. D e f i n i c i j a. Delimično uređen skup $(D, \leq)$ je usmeren, ako svaki konačan podskup od D ima majorantu. Preslikavanje $f: D \to X$ usmerenog skupa D u skup X zovemo uopštenim nizom elemenata skupa X ili jednostavno uopštenim nizom u X. Uopšteni niz $f: D \to X$ u topološkom prostoru X konvergira ka tački x' iz X, ako za svaku okolinu O tačke x' postoji $d_0 \in D$, tako da $d \geq d_0$ povlači $f(d) \in O$. U tom slučaju kažemo takođe da granična vrednost uopštenog niza f postoji i jednaka je x', i pišemo $\lim f(d) = x'$ ili, ako treba istaći D, $\lim_D f(d) = x'$.

13. STAV (npr.,[9], str. 67). Neka je $A_\alpha : X \to Y$ $(\alpha \in D)$ — uopšteni niz linearnih preslikavanja F-prostora X u F-prostor Y. Ako $\lim_D A_\alpha x$ postoji za svako x iz nekog fundamentalnog skupa (tj. podskupa $X_1 \subseteq X$ takvog da je lineal nad X_1 svuda gust u X),

i ako je za svako $x \in X$ skup $Y_x = \{A_\alpha x \mid \alpha \in D\}$ ograničen [1]), onda granica $Ax = \lim_D A_\alpha x$ postoji za svako $x \in X$ i $A: X \to Y$ je jedno linearno preslikavanje (prostora X u Y).

14. STAV (npr., [9], str. 64). Neka je za svaki element q skupa Q A_q linearno preslikavanje F-prostora X u F-prostor Y. Ako je za svako $x \in X$ skup $Y_x = \{A_q x \mid q \in Q\}$ ograničen[1]), onda je

$$\lim_{x \to 0} A_q x = 0 \quad \text{uniformno u odnosu na} \quad q \in Q .$$

Struktura F^*-prostora ne obezbeđuje sama po sebi egzistenciju najviše prebrojive familije homogenih pseudonormi sa svojstvom o kome je reč u definiciji prostora B_o^*. To se može dokazati pomoću sledećeg stava.

15. STAV ([1], 1.61). F^*-prostor X je prostor B_o^* ako i samo ako za svako $m=0,1,\dots$ kugla $K(0, \frac{1}{m+1})$ sadrži konveksnu okolinu tačke 0.

15.i. Primenom prethodnog stava Mazur i Orlicz su, naprimer, pokazali da F-prostor ℓ^p $(0<p<1)$ (prostor nizova $U=(u_j)$ takvih da je $\sum_{j=0}^{\infty} |u_j|^p < \infty$ i norma $n(U) = \sum_{j=0}^{\infty} |u_j|^p$) nije i prostor B_o ([1], 1.62). Na osnovu 11.i sledi onda da se pri $0<p<1$ linearni prostor ℓ^p uopšte ne može snabdeti strukturom prostora B_oK.

Da postoje prostori B_o^* koji nisu ni izomorfni nekom prostoru B^*, može se pokazati primenom sledećeg rezultata:

16. STAV ([1], 1.52). B_o^*-prostor (X,n) sa homogenim pseudonormama p_i $(i=0,1,\dots)$ izomorfan je nekom prostoru B^* ako i samo ako postoji indeks i_o takav da je već skup pseudonormi p_i $(i=0,1,\dots,i_o)$ ekvivalentan normi n .

16.i. (Naša napomena) Oslanjajući se na prethodni stav možemo, naprimer, konstatovati da B_o-prostor T (tj. prostor svih ni-

1) U smislu: za svaku okolinu O nule u prostoru Y postoji $\delta > 0$ tako da iz $|a| \leq \delta$ sledi $aY_x \subseteq O$.

snova $U=(u_j)$ sa pseudonormama $p_i(U)=|u_i|$ $(i=0,1,\dots)$ i normom

$$n(U)=\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}p_i(U)(1+p_i(U))^{-1} \text{)}$$

nije izomorfan nekom B-prostoru. Zaista , pri ekvivalenciji norme $n(U)$ sa nekim konačnim skupom pseudonormi $p_i(U)$ $(i=0,1,\dots, i_o)$ imali bismo da $p_i(U)=0$, tj. $u_i=0$, $(i=0,1,\dots, i_o)$ povlači $n(U)=0$, dakle $U=0$ što, međutim, nije moguće.

Ako je $p(x)$ homogena pseudonorma na X i $f(x)$ linearna funkcionela na prostoru (X,p), onda se na uobičajen način (npr., [10], str. 220) definiše ograničenost i norma funkcionele $f(x)$ u odnosu na pseudonormu $\underline{p}$. Da bismo istakli zavisnost norme funkcionele $f(x)$ od posmatrane pseudonorme $\underline{p}$, označavamo je sa $n(f;p)$. Primetimo takođe da tada, na osnovu Hahn-Banach-ovog stava o produženju aditivne i homogene funkcionele sa linearnog potprostora na čitav prostor (npr.,[9], str. 74), za proizvoljno $x_o \in X$, $x_o \neq 0$, postoji funkcionela $f(x)$ linearna na prostoru (X,p) koja ispunjava uslove $f(x_o)=p(x_o)$ i $n(f;p)\leq 1$. Ako pseudonorma $\underline{p}$ nije homogena, onda se može desiti da čak ni za jedno $x_o \neq 0$ ne postoji funkcionela sa pomenutim svojstvima. Tako, naprimer, u prostoru L^p $(0<p<1)$ (prostor funkcija $U=u(t)$ merljivih na intervalu $(0,1)$ i takvih da je $\int_0^1 |u(t)|^p dt < \infty$, sa normom

$$n(U)= \int_0^1 |u(t)|^p \, dt \text{)}$$

jedina linearna funkcionela je ona koja iščezava na čitavom prostoru (npr.,[9], str. 475, primer 37). Sem toga, kod prostora sa nehomogenom pseudonormom, pa prema tome i kod prostora B_o^* , ne može se govoriti o normi linearne funkcionele. Ipak, struktura prostora B_o^* je daleko produktivnija od strukture prostora F^* u pogledu egzistencije funkcionela koje ispunjavaju određene uslove. To je posledica lokalne konveksnosti prostora B_o^* (koja sledi iz stava 15). Naprimer, za lokalno konveksne topološke linearne prostore, pa znači i za prostore B_o^*, važi sledeći stav egzistencijalnog tipa (npr., [4], str. 148):

17. STAV. Neka je X lokalno konveksan topološki linearan prostor, $Y \subseteq X$ zatvoreni potprostor linearnog prostora X i $x_o \in X-Y$. Tada postoji funkcionela $f(x)$ linearna[1] na X takva da je $f(x_o)=1$ i $f(x)=0$ za svako $x \in Y$.

U B_o^*-prostoru (X,n) sa homogenim pseudonormama $p_i (i=0,1,\ldots)$ pored funkcionela linearnih u odnosu na normu n, koju inače nećemo uvek pominjati, i funkcionela linearnih u odnosu na neku od pseudonormi p_i, mogu se posmatrati i funkcionele linearne u odnosu na neku od pseudonormi $p_m^o(x)=\max (p_o(x),p_1(x),\ldots,p_m(x))$ $(m=0,1,\ldots)$. Iz definicije prostora B_o^* sledi da linearnost funkcionele u nekom od prostora (X,p_m^o) povlači njenu linearnost u prostoru (X,n). Sledeći rezultat pokazuje da se sa takvim funkcionelama ustvari iscrpljuju sve funkcionele linearne u prostoru (X,n). Njegova formulacija koristi pojam koji uvodi sledeća

18. D e f i n i c i j a. Neka je (X,n) B_o^*-prostor sa homogenim pseudonormama p_i $(i=0,1,\ldots)$ i $f(x)$ linearna funkcionela na X. Ako je za neko m funkcionela $f(x)$ linearna i u prostoru (X,p_m^o), onda kažemo da je funkcionela $f(x)$ stepena m.

19. STAV ([11], 2.21). Neka je X prostor B_o^* i $f(x)$ linearna funkcionela na X. Tada je funkcionela $f(x)$ nekog stepena m (tj. tada postoji broj m takav da je funkcionela $f(x)$ stepena m).

Sledeći stav pak pokazuje da je funkcionela stepena m u tesnoj vezi sa funkcionelama linearnim u prostorima (X,p_i) $(i=0,1,\ldots,m)$. Naime:

---

1) U smislu: aditivna, homogena i neprekidna.

20. STAV ([11], 2.23). Ako je funkcionela $f(x)$ stepena m u $B_0^{\mathbb{K}}$-prostoru X sa homogenim pseudonormama $p_i (i=0,1,\dots)$, onda postoje funkcionele $f_i(x)$ $(i=0,1,\dots,m)$ linearne redom u prostorima (X,p_i) $(i=0,1,\dots,m)$ takve da je

$$(1) \qquad f(x)=\sum_{i=0}^{m} f_i(x)$$

i

$$n(f;p_m^0) = \sum_{i=0}^{m} n(f_i;p_i) \; .$$

Ako je neka funkcionela $f(x)$ oblika (1), gde su funkcionele $f_i(x)$ $(i=0,1,\dots,m)$ linearne redom u prostorima (X,p_i) $(i==0,1,\dots,m)$, onda je ona stepena m i za njenu normu $n(f;p_m^0)$ važi procena

$$(2) \qquad n(f;p_m^0)\leq \sum_{i=0}^{m} n(f_i;p_i) \; .$$

Primenom stavova 19 i 20, naprimer, dobijamo:

20.i. Ako je funkcionela $f(U)$ linearna u prostoru T svih nizova $U=(u_j)$, onda postoje brojevi m i a_i $(i=0,1,\dots,m)$ (koji zavise samo od funkcionele f) takvi da je

$$f(U)= \sum_{i=0}^{m} a_i u_i \qquad (U=(u_j)\in T)$$

i

$$n(f;p_m^0) = \sum_{i=0}^{m} |a_i|$$

(pretpostavlja se da su norma i homogene pseudonorme uvedene kao u primeru 7.i).

Tačnost tvrđenja 20.i dobija se na osnovu činjenice da je za svako $k=0,1,\dots$ prostor $T(p_k)$ ekvivalentan sa prostorom realnih (kompleksnih) brojeva (videti primer 7.i) i dobro poznate reprezentacije linearne funkcionele u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva. Primetimo takođe da je u posmatranom slučaju u nejednakosti (2) znak "$<$" isključen.

Pored našeg dokaza reprezentacije funkcionele $\underline{f}$ linearne u prostoru T, postoji i dokaz zasnovan na činjenici da red $\sum_{j=o}^{\infty} a_j u_j$ konvergira za svaki niz $U=(u_j)\in T$ ako i samo ako postoji indeks j_o takav da je $a_j=0$ za svako $j>j_o$ ([2], glava III, teorema 11). U njemu, međutim, nema reči o normi $n(f;p_m^o)$, gde je $\underline{m}$ stepen funkcionele $\underline{f}$ (pojam prostora B_o^* je kasnije uveden ([1], 1)).

21. Već iz dosad navedenih primera vidi se da algebarsko-topološka struktura skupova formiranih od nizova brojeva zavisi od svojstva koje karakteriše nizove uočenog skupa. Ako se pri tome postavi zahtev da dobijeni prostori budu tipa K, onda se, na osnovu Zeller-ovog stava, dolazi do zaključka da je posmatrana struktura i "predodređena" (određena do na izomorfizam). U tom smislu se može reći da je struktura B-prostora prirodna za skupove T^o, T^c i T^b; u slučaju skupa T prirodnom se javlja struktura B_o-prostora. (U 2.16.i pokazano je da prostor T nije izomorfan ni sa jednim B-prostorom.) Kod skupa ℓ^p $(0<p<1)$ "najviša moguća" (od ovde pomenutih) je struktura F-prostora (što se, kako je već navedeno, dobija kao posledica stava 15).

Prema tome, algebarsko-topološka struktura kojom se mogu snabdeti skupovi formirani od nizova brojeva može biti veoma raznovrsna. Ostaje, međutim, činjenica da su u svim datim slučajevima, sa sabiranjem nizova i množenjem niza skalarom definisanim na uobičajen način, posmatrani skupovi dobijali strukturu linearnog prostora. Neke klase skupova sa tim svojstvom i njihov odnos (u smislu inkluzije) prema skupovima T^o, T^c, T^b i T čine osnovnu problematiku sledećeg dela našega rada.

II. FUNKCIJSKI POSTUPCI

1. Definicije, oznake i napomene

1. Mada se ista problematika može donekle i opštije posmatrati (npr., [12], [13], [14], [15], [16]), u ovom radu se ograničavamo isključivo na postupke konvergencije za nizove realnih ili kompleksnih brojeva. Inače postupkom konvergencije P zovemo pravilo P na osnovu koga su nekim nizovima $U=(u_j)$ korespondirani brojevi $P(U)$, koje zovemo graničnim vrednostima (kraće: granicama) tih nizova u smislu postupka P, ili jednostavnije njihovim P-graničnim vrednostima (granicama); pri tome pišemo

$$P(U) = P - \lim u_j \; .$$

Dakle, postupak konvergencije P je jedna funkcionela $P=P(U)$ definisana na nekom skupu nizova $U=(u_j)$.

Skup nizova $U=(u_j)$ za koje postoji P-lim u_j zovemo domenom [1)] primene postupka P i obeležavamo sa P^c; u istom smislu upotrebljavamo i termin domen konvergencije u smislu postupka P, ili kratko domen P-konvergencije. Skup nizova $U=(u_j) \in P^c$ takvih da je P-lim $u_j=0$, zovemo domenom o-primene postupka P (domenom o-konvergencije u smislu postupka P, odnosno domenom P-o-konvergencije), i obeležavamo sa P^o. Pri tome, termine konvergencija i o-konvergencija rezervišemo isključivo za postupke konvergencije odnosno konvergencije ka nuli u običnom smislu (sa domenima primene T^c i T^o). Za oznaku granične vrednosti nizova $U=(u_j)$ tada upotrebljavamo kao i obično lim u_j. Kada ne postoji bojazan od neodređenosti, u prethodnim terminima možemo izostaviti reč "primena", pa, dakle, govoriti o domenu postupka, o-domenu postu-

---

1) Sa istim značenjem koriste se i termini: oblast, područje, polje, a mogla bi se uzeti i reč doseg.

pka, itd.

Najveći nedostatak napred predložene definicije postupka konvergencije je u tome što ona daje "status" postupka i najrazličitijim funkcionelama definisanim na nekom skupu nizova. Zahvaljujući tome, možemo, naprimer, navesti postupke čiji se domen primene podudara sa skupom T svih nizova (videti 2.13). Naša tendencija je, međutim, da se najtolerantnijom definicijom obuhvate svi do sada uvedeni i proučavani postupci konvergencije, a da se zatim njihova praktična vrednost ceni prema tome kakav je njihov odnos prema drugim postupcima (posebno prema konvergenciji) i prema tome da li dati postupak ima ovo ili ono svojstvo. Neka od najčešće proučavanih svojstava navode se u sledećim definicijama.

2. D e f i n i c i j a. Neka su dati postupci P_1 i P_2 i skup $T_1 \subseteq T$. Ako je $P_1^c \cap T_1 \subseteq P_2^c$, onda kažemo da je postupak P_2 <u>poluopštiji na</u> T_1 od postupka P_1.

Postupci P_1 i P_2 su <u>saglasni na skupu</u> T_1, ako je $P_1\text{-lim}\, u_j = P_2\text{-lim}\, u_j$ za svako $U=(u_j) \in P_1^c \cap T_1 \cap P_2^c$.

Kada je postupak P_2 poluopštiji na T_1 od postupka P_1, i sem toga su postupci P_1 i P_2 saglasni na skupu T_1, onda kažemo da je postupak P_2 <u>opštiji na</u> T_1 od postupka P_1.

Ako je $P_1^c \cap T_1 \subseteq P_2^c$ i postoji $U=(u_j) \in P_2^c \cap T_1 - P_1^c$, onda kažemo da je postupak P_2 <u>strogo poluopštiji na</u> T_1 od postupka P_1. Sa istim smislom, govorimo i o postupku P_2 <u>strogo opštijem na</u> T_1 od postupka P_1.

U slučaju $T_1=T$, kažemo jednostavno da je postupak P_2 <u>poluopštiji</u> od postupka P_1, itd., tj. tada u terminima ne pominjemo skup $T_1=T$ s obzirom na koji su prethodni pojmovi uvedeni. Isto tako, kratkoće radi, a i zbog toga da bismo istakli fundamentalnu ulogu pojma granične vrednosti u običnom smislu, u slučaju kada je postupak P_1 konvergencija u običnom smislu, govorimo o postupku P_2 poluregularnom na T_1, odnosnu o postupku P_2 regularnom na T_1. Ako je pak postupak P_1 konvergencija ka nuli (u običnom smislu), onda kažemo da je postupak P_2 polu-o-regularan na T_1, odnosno da je postupak P_2 o-regularan na T_1. U slučaju $T_1=T$, govorimo kraće o poluregularnom, regularnom, polu-o-regularnom, odnosno o-regularnom postupku P_2.

Ako je postupak P_2 poluopštiji na T_1 od postupka P_1 i, obrnuto, postupak P_1 poluopštiji na T_1 od postupka P_2, onda kažemo da su postupci P_1 i P_2 poluekvivalentni na T_1. Kada su uz to postupci P_1 i P_2 saglasni na skupu T_1, tada kažemo da su postupci P_1 i P_2 ekvivalentni na T_1. U slučaju $T_1=T$, govori se o poluekvivalentnim odnosno ekvivalentnim postupcima. (Primećujemo da su ekvivalentni postupci ustvari identične funkcionele.)

3. D e f i n i c i j a. Postupak P je translativan na levo, ako za svako $U=(u_j)\in P^c$ niz $U^1=(u_{j+1})\in P^c$, i pri tome je $P(U^1)=P(U)$. Postupak P je translativan na desno, ako za svako $U=(u_j)\in P^c$ i proizvoljan broj u_{-1} niz $U^d=(u_{j-1})\in P^c$, i sem toga je $P(U^d)=P(U)$. Postupak P je translativan, ako je translativan na levo i na desno.

Pri radu sa specijalnim klasama postupaka od koristi mogu biti i sledeća dva svojstva.

4. D e f i n i c i j a. Postupak P je aditivan, ako za svako $U=(u_j)\in P^c$ i $V=(v_j)\in P^c$ niz $U+V=(u_j+v_j)\in P^c$, i pri tome je $P(U+V)=P(U)+P(V)$.

Postupak P je homogen ako za svako $U=(u_j)\in P^c$ i svaki skalar a niz $aU=(au_j)\in P^c$, i sem toga je $P(aU)=aP(U)$.

4.i. Na pitanje "dokle najviše može dopreti" domen regularnog aditivnog i homogenog postupka odgovor je dao H. Steinhaus [17]. On je, naime, koristeći aksiomu izbora, dokazao da postoji regularan aditivan i homogen postupak konvergencije P takav da je $P^c=T$. Međutim, (koliko nam je poznato) do sada nije efektivno konstruisan ni regularan aditivan i homogen postupak P takav da je $T^b \subseteq P^c$.

Problem, međutim, ne postoji ukoliko se izostavi zahtev o aditivnosti postupka. Tako je, naprimer, postupak (primer potiče od Đ. Adamovića)

$$P(U)=\begin{cases} \lim u_j, & U=(u_j)\in T^c \\ 0, & U\in T-T^c \end{cases}$$

homogen i regularan, i pri tome je $P^c=T$ (neaditivnost posmatranog postupka vidi se na primeru zbira niza $U\in T^c-T^o$ sa bilo kojim divergentnim nizom; njegova homogenost lako se može ustanoviti upoređivanjem $P(aU)$ i $aP(U)$ za slučaj $a=0$ i $a\neq 0$ u kombinaciji sa $U\in T^c$ i $U\in T-T^c$).

Iz definicije 4 sledi da je domen primene aditivnog i homogenog postupka potprostor linearnog prostora svih nizova T. Jedna klasa takvih postupaka, zvaćemo je klasom funkcijskih postupaka, biće osnovna problematika našega rada.

2. Funkcijski postupci tipa (X,F,x')

Uvod. Znatan broj definicija granične vrednosti niza u nekom novom smislu sastoji se u sledećem: nizu $U=(u_j)$ korespondira se na neki način funkcija (specijalno, niz) i njena granična vrednost u običnom smislu uzima se za graničnu vrednost niza $U=(u_j)$ u smislu te korespondencije. Takvi postupci su dakle određeni operatorima koji vrše preslikavanja iz skupa nizova u skup funkcija (specijalno, nizova). Pri tome svojstva operatora impliciraju određena svojstva rezultujućih postupaka. Ona, naravno, zavise od načina na koji su ti operatori zadani.

Mi ćemo se, uglavnom, baviti operatorima koji su pridruženi nekom nizu $F=(f_j)$ realnih (ili kompleksnih) funkcija $f_j=f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ definisanih na jednom istom nepraznom skupu X. Pridruživanje operatora može biti izvedeno na dva bitno različita načina. Jedan od njih opisujemo sada, a drugi će biti predmet naše pažnje u sledećem odeljku.

1. Stavimo, naime, za $x\in X$ i $U=(u_j)\in T$,

$$(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j$$

i

$$(X,F)(U)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j\right)_{x\in X}^{x}.$$

Ako pri tome red $(x,F)(U)$ konvergira za svako $x\in X$, onda tako dobijenu funkciju $(X,F)(U)$ zovemo <u>transformacijom</u> niza $U=(u_j)$ <u>operatorom</u> (X,F). Skup nizova $U=(u_j)$ takvih da transformacija $(X,F)(U)$ postoji, tj. da red $\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j$ konvergira za svako $x\in X$, zovemo <u>dosegom</u>[1] <u>dejstva</u> operatora (X,F) i obeležavamo sa $(X,F)^d$.

Skup

$$\left\{U \;\Big|\; \sup_{x\in X}|(x,F)(U)|<\infty\right\},$$

zovemo <u>dosegom b-dejstva</u> operatora (X,F) i obeležavamo sa $(X,F)^b$. Jasno je da za skupove $(X,F)^d$ i $(X,F)^b$ važi inkluzija $(X,F)^b\subseteq(X,F)^d$.

2. Neka je sada $(Y,\mathcal{T})$ neki topološki prostor, $X\subseteq Y$ i x' tačka nagomilavanja skupa X koja u prostoru $(Y,\mathcal{T})$ ima prebrojivu okolinsku bazu. (Pretpostavka da tačka x' ima prebrojivu okolinsku bazu implicitno će se koristiti u dokazima zasnovanim, pored ostalog, na egzistenciji niza elemenata skupa X koji kon-

---

1) Sa istim značenjem mogu se upotrebiti i nazivi: <u>domen</u>, <u>oblast</u>, <u>polje</u> odnosno <u>područje</u> dejstva operatora. Kada je jasno o čemu se radi, reč "dejstvo" može se izostaviti.

vergira ka x'.) Radi jednostavnijeg pisanja, a bez gubitka u opštosti razmatranja, pretpostavimo još da $x' \notin X$ (u slučaju $x' \in X$ umesto skupa X posmatramo skup $X_o = X - \{x'\}$). (U specijalnom slučaju dakle može biti $X \cup \{x'\} = Y$.)

(Inače, naša prvobitna zamisao bila je da se posmatraju skupovi X u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva. Ideja da se umesto toga uzme da je skup X deo nekog topološkog prostora i x' njegova tačka nagomilavanja sa prebrojivom okolinskom bazom potiče od D. Adamovića.)

Ako za $U=(u_j) \in (X,F)^d$ postoji granična vrednost

$$\lim_{x \to x'} (x,F)(U) = \lim_{x \to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j \ ,$$

zovemo je <u>graničnom vrednošću</u> niza $U=(u_j)$ <u>u smislu postupka</u> (X,F,x'). Prema tome je

$$(X,F,x')\text{-}\lim u_j = (X,F,x')(U) = \lim_{x \to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j \ .$$

Domen primene i domen o-primene postupka (X,F,x'), kako smo već rekli u 1.1, označavamo sa $(X,F,x')^c$ odnosno $(X,F,x')^o$. Primetimo takođe da je svaki postupak tipa (X,F,x') aditivan i homogen, što će se u daljem tekstu koristiti i bez eksplicitne napomene.

3. Matrični operatori čine jednu potklasu klase operatora tipa (X,F). Naime, može se smatrati da je operator (F) pridružen matrici $F=(f_{ij})$ ustvari pridružen skupu $X=\{0,1,\dots,i,\dots\}$ i nizu funkcija $F=(f_j)$ takvih da je $f_j(i)=f_{ij}$ $(i,j=0,1,\dots)$. Ista napomena važi i za matrične postupke, pri čemu se za tačku nagomilavanja skupa X uzima njegova jedina tačka nagomilavanja $x'=\infty$. U tom slučaju oznaku (X,F,x') zamenjujemo sa (F').

(Napominjemo uzgred da u korišćenoj literaturi nije (eksplicitno) bilo reči o dosegu dejstva i dosegu b-dejstva matričnog operatora. Što se tiče domena primene matričnog postupka, o njemu se govori, pored ostalog, u [6], dok se u [31] posmatra još i domen o-primene matričnog postupka.)

Operatori i postupci kod kojih je $X=[a,x')$ čine takođe važnu potklasu klase operatora tipa (X,F) odnosno klase postupaka oblika (X,F,x'). U tom slučaju oznake (X,F) i (X,F,x') zamenjujemo jedinstvenom oznakom (a,x',F), nastojeći da uvek bude jasno da li je reč o operatoru ili postupku. Među takvim operatorima i postupcima posebno mesto pripada tzv. stepenim operatorima i postupcima (Abel-ov operator i postupak, Borel-ov operator i postupak, itd.) (videti 3.1.v i III.1.1.i).

Svakom funkcijskom postupku (X,F,x') može se na prirodan način korespondirati čitava familija matričnih postupaka koji su sa njim u neposrednoj i jednostavnoj vezi. O tim postupcima je reč u sledećoj definiciji.

4. D e f i n i c i j a. Matrični postupak (G'), $G=(g_{ij})$, <u>izveden</u> je iz postupka (X,F,x'), ako je $g_{ij}=f_j(x_i)$, gde je $x_i \in X$ $(i=0,1,\ldots)$ i $x_i \to x'$ $(i \to \infty)$.

Iz definicije 4 sledi da je svaki izvedeni postupak (G') opštiji od polaznog postupka (X,F,x'), tj. da je $(X,F,x')^c \subseteq (G')^c$ i $(G')\text{-}\lim u_j = (X,F,x')\text{-}\lim u_j$ za svaki izvedeni postupak (G') i svako $U=(u_j) \in (X,F,x')^c$. Odatle se dobija da je

$$(+) \qquad (X,F,x')^c \subseteq \bigcap_{(G')\in I} (G')^c \ ,$$

gde je sa I označena familija svih matričnih postupaka izvedenih iz postupka (X,F,x'). Pokazaćemo da važi i obrnuta inkluzija, tj. da imamo

5. STAV. <u>Domen primene funkcijskog postupka</u> (X,F,x') <u>jednak je preseku domena primene iz njega izvedenih matričnih postupaka, u oznakama</u>

$$(X,F,x')^c = \bigcap_{(G')\in I} (G')^c \ .$$

Dokaz. Na osnovu (+), treba još pokazati da je

$$(++) \qquad \bigcap_{(G')\in I} (G')^c \subseteq (X,F,x')^c .$$

U tom cilju pretpostavimo suprotno, tj. da postoji niz $U=(u_j)\in \bigcap_{(G')\in I} (G')^c -(X,F,x')^c$. Pri tome, $U=(u_j)\notin(X,F,x')^c$ znači: ili postoji $x_o\in X$ takvo da red $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x_o)u_j$ divergira, ili ne postoji

$$\lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j .$$

Prva mogućnost otpada s obzirom na pretpostavku $U=(u_j)\in \bigcap_{(G')\in I} (G')^c$ (naime, tada posmatrani niz ne bi pripadao domenima izvedenih postupaka koji odgovaraju nizovima $(x_o,x_1,x_2,\dots)$, ma kako uzimali njihove članove $x_1,x_2,\dots$).

Dopustimo sada drugu mogućnost, tj. da ne postoji

$$\lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j .$$

Tada postoji niz (x_i) tačaka iz X koji konvergira ka x' takav da $\lim_i \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x_i)u_j$ ne postoji. Odatle sledi $U=(u_j)\notin(G_1')^c$, gde je (G_1') postupak izveden iz postupka (X,F,x') koji je pridružen nizu (x_i). Dobijena kontradikcija sa pretpostavkom $U\in \bigcap_{(G')\in I} (G')^c$ dovršava dokaz inkluzije (++), a time i dokaz našeg stava.

Napominjemo takođe da će kasnije (videti pododeljak II.4.4) biti reči i o matričnim operatorima izvedenim iz operatora (X,F).

Ukoliko nije moguće naći potrebne i dovoljne uslove da niz pripada dosegu dejstva (ili dosegu b-dejstva) datog operatora, obično se ide na to da se ispita da li doseg dejstva (doseg b-dejstva) sadrži neki unapred (i nezavisno od operatora) izabran skup nizova. U slučaju neke klase operatora, cilj može biti izdvojiti sve operatore iz te klase čiji doseg dejstva (ili doseg b-dejstva) sadrži dati skup nizova. To praktično znači naći potrebne i dovoljne uslove da doseg dejstva (doseg b-dejstva) operatora iz posmatrane klase sadrži taj skup nizova. Jasno je da se takva ispitivanja mogu vršiti i s obzirom na domen primene i domen o-primene postupaka.

Kao unapred date skupove nizova u našem radu uzimamo T^o, T^c, T^b i T. Istraživanja ovog odeljka odnose se na klasu operatora tipa (X,F) i postupaka tipa (X,F,x'). Sistematičnosti radi, najpre izlažemo rezultate sa potrebnim i dovoljnim uslovima da doseg dejstva odnosno doseg b-dejstva operatora (X,F) sadrži neki od više pomenutih skupova.

6. STAV. <u>Uslov</u>

(1) $$\sum_{j=o}^{\infty} |f_j(x)| < \infty \quad \underline{\text{za svako}} \quad x \in X$$

<u>je potreban i dovoljan da doseg dejstva operatora</u> (X,F) <u>sadrži</u> <u>skup</u> T^o.

Kao jednostavna posledica stava 6 dobija se da je uslov (1) potreban i dovoljan i da doseg dejstva operatora (X,F) sadrži skup T^c odnosno skup T^b.

<u>Dokaz</u> stava 6. Tačnost stava 6 sledi neposredno na osnovu definicije dosega dejstva operatora (X,F) i rezultata koji daje potrebne i dovoljne uslove da red $\sum_{j=o}^{\infty} u_j v_j$ konvergira za svaki nula-niz $U=(u_j)$ (npr., [10], stav IV.5.3 odnosno njegova verzija u kojoj bi reči "konvergentan niz" bile zamenjene sa "nula-niz" (videti i stavove IV.4.7 i IV.5.2 u istoj knjizi)).

7. STAV. <u>Potreban i dovoljan uslov da doseg dejstva operatora</u> (X,F) <u>sadrži skup</u> T, <u>tj. da se doseg dejstva operatora</u> (X,F) <u>podudara sa</u> T, <u>jeste</u>

(2) <u>za svako</u> $x \in X$ <u>postoji</u> j_x <u>tako da je</u> $f_j(x)=0$ <u>za</u> $j > j_x$.

Primetimo da j_x može varirati sa $x \in X$ i da kod matričnih operatora ($X=\{0,1,\ldots,i,\ldots\}$) uslov (2) izražava konačnovrsnost matrice.

Dokaz stava 7. Iz uslova (2) na trivijalan način sledi da za svako $U=(u_j)\in T$ red $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ konvergira za svako $x\in X$, tj. da je $T\subseteq(X,F)^d$ (ustvari, $(X,F)^d=T$). Pokazaćemo da važi i obrnuto. Pretpostavimo dakle da je $T\subseteq(X,F)^d$. Tada je za (fiksirano) $x\in X$

$$(x,F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j \quad (U=(u_j)\in T)$$

jedna linearna funkcionela na prostoru T (stav I.2.9). Na osnovu I.2.20.i, postoji indeks j_x sa svojstvom o kome je reč u našem stavu. Uslov (2) inače sledi iz proizvoljnosti izbora $x\in X$.

8. STAV. Doseg b-dejstva operatora (X,F) sadrži skup T^o ako i samo ako je

$$\sup_{x\in X}\sum_{j=o}^{\infty}|f_j(x)|<\infty . \tag{3}$$

Uslov (3) je potreban i dovoljan i da doseg b-dejstva operatora (X,F) sadrži skup T^c odnosno T^b, što se dobija kao neposredna posledica stava 8.

U [18], str. 34-35, izložen je dokaz stava 8 u slučaju kada je X skup realnih (kompleksnih) brojeva. Isti je inače izveden po šemi primenjenoj u slučaju $X=[x_o,x')$ ([20], teorema I). U [19], teorema 1, primećeno je da dokaz može ostati nepromenjen i kada je u pitanju bilo kakav (dakle amorfan) skup X. Ovde se dokaz navodi iz razloga potpunosti našeg izlaganja.

Dokaz stava 8. Da iz uslova (3) sledi $T^o\subseteq(X,F)^b$, očigledno je. Pokazaćemo da važi i obrnuto. U tom cilju pretpostavimo suprotno, tj. da za neki operator (X,F) istovremeno važi $T^o\subseteq(X,F)^b$ i $\sup_{x\in X}\sum_{j=o}^{\infty}|f_j(x)|=\infty$. Tada postoji niz (x_k) elemenata skupa X takav da je

(x) $$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x_k)| = \infty .$$

Na osnovu pretpostavke $T^o \subseteq (X,F)^b$ (stav I.2.9), izlazi da je sa

$$(x_k,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_k)u_j \qquad (U=(u_j)\in T^o)\ (k=0,1,\ldots)$$

definisan niz funkcionela linearnih na prostoru T^o sa normama (redom)

$$n((x_k,F))=\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x_k)| \qquad (k=0,1,\ldots)$$

(npr., [10], str. 230). Prema (x) za niz normi $n((x_k,F))$ $(k=0,1,\ldots)$ važi relacija

(x x) $$\lim_{k\to\infty} n((x_k,F))=\infty .$$

Iz $T^o \subseteq (X,F)^b$ sledi takođe da je

$$\lim_{k\to\infty} \sup |(x_k,F)(U)| < \infty \quad \text{za svako } U\in T^o .$$

Na osnovu principa rezonancije (npr., [10], str. 245), dobija se onda da je niz normi $n((x_k,F))$ $(k=0,1,\ldots)$ ograničen. To je međutim u kontradikciji sa (x x). Dobijena protivurečnost dovršava dokaz stava 8.

9. STAV. Doseg b-dejstva operatora (X,F) sadrži skup T ako i samo ako su ispunjeni uslovi (3) i

(4) postoji j_o tako da je $f_j(x)\equiv 0$ na X za svako $j>j_o$.

Primetimo da, pri uslovu (4), uslov (3) znači

$$\sup_{x\in X} \sum_{j=0}^{j_o} |f_j(x)| < \infty ,$$

što je ekvivalentno sa

(5) $$\sup_{x\in X} |f_j(x)| < \infty \ (j=0,1,\ldots,j_o).$$

Dokaz stava 9. Iz uslova (4) i (5) na očigledan način sledi $T\subseteq(X,F)^b$. Uverićemo se da važi i obrnuto. Ustvari, na osnovu stava 8, dovoljno je pokazati da iz $T\subseteq(X,F)^b$ sledi uslov (4). S tim ciljem primetimo da je prema stavu I.2.9 (ili prema stavu 7) za

(fiksirano) $x\in X$ sa
$$(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j=\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)u_j \quad (U=(u_j)\in T)$$
(j_x je broj iz uslova (2)) definisano linearno preslikavanje B_o--prostora T u B-prostor realnih(kompleksnih) brojeva. Iz pretpostavke da je za svako $U\in T$ skup $\{(x,F)(U)\,|\,x\in X\}$ ograničen[1] sledi onda, na osnovu principa uniformne neprekidnosti (stav I.2.14),
$$\lim_{U\to 0}(x,F)(U)=\lim_{U\to 0}\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)u_j=0 \quad \text{uniformno u odnosu na } x\in X.$$
To znači da tada za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takvo da iz $n(U)<\delta$, gde je $n(U)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}p_j(U)(1+p_j(U))^{-1}$, sledi
$$|(x,F)(U)|=\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)u_j\Big|<\varepsilon \quad \text{za svako } x\in X.$$

Uzmimo sada da je $\varepsilon>0$ fiksirano i j_o izabrano tako da za odgovarajuće $\delta>0$ imamo $\sum_{j=j_o+1}^{\infty}2^{-j}<\delta$. Tada za svaki niz $U=(u_j)$ takav da je $u_j=0$ $(j=0,1,\dots,j_o)$ važi
$$n(U)=\sum_{j=j_o+1}^{\infty}2^{-j}\,p_j(U)(1+p_j(U))^{-1}\leq\sum_{j=j_o+1}^{\infty}2^{-j}<\delta,$$
i na osnovu toga
$$|(x,F)(U)|=\Big|\sum_{j=j_o+1}^{j_x} f_j(x)u_j\Big|<\varepsilon \quad \text{za svako } x\in X.$$
Stavljajući $u_{j_o+k}=m$ i $u_j=0$ za $j\neq j_o+k$ $(m=1,2,\dots)$, gde je <u>k</u> fiksiran prirodan broj, dobijamo
$$|mf_{j_o+k}(x)|<\varepsilon \quad \text{za svako } x\in X \text{ i } m=1,2,\dots,$$
odnosno
$$|f_{j_o+k}(x)|<\frac{\varepsilon}{m} \quad \text{za svako } x\in X \text{ i } m=1,2,\dots .$$
Odatle izlazi da je $f_{j_o+k}(x)=0$ za svako $x\in X$ i, s obzirom na proizvoljnost broja <u>k</u>, da je $f_j(x)=0$ <u>za svako</u> $x\in X$ i $j>j_o$. Tako izabrano j_o ima dakle svojstvo o kome je reč u uslovu (4), što, kako smo na početku rekli, dovršava dokaz našega stava.

---

1) U Banach-ovim prostorima pojam ograničenosti u smislu fusnote na str. 20 podudara se sa pojmom ograničenosti po normi prostora.

9.i. Dokaz stava 9 može se izvesti još na jedan način. Kako je već napomenuto, netrivijalan je samo dokaz da iz pretpostavke $T \subseteq (X,F)^b$ sledi uslov (4). Primetimo stoga da je T prostor B_oK (u odnosu na ukupnost pseudonormi $p_k(U)=|u_k|$ (k=0,1,...)). Pokazaćemo da je T prostor B_oK i u odnosu na ukupnost pseudonormi p(U) i $p_k(U)$ (k=0,1,...), gde je

$$p(U)=\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\Big|=\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)u_j\Big| \quad (U=(u_j)\in T)$$

(j_x su indeksi sa svojstvom iz uslova (2)), tj. da iz $U^m=(u_j^m)\in T$ (m=0,1,...),

(a) $$p(U^m-U^n)\to 0 \quad (m\to\infty,\ n\to\infty)$$

i

(b) $$p_k(U^m-U^n)\to 0 \quad (m\to\infty,\ n\to\infty)\ (k=0,1,...)$$

sledi da postoji niz $U=(u_j)$ takav da važe relacije

(a′) $$p(U^m-U)\to 0 \quad (m\to\infty)$$

i

(b′) $$p_k(U^m-U)\to 0 \quad (m\to\infty)\ (k=0,1,...).$$

Ustvari, već iz (b) sledi egzistencija niza $U=(u_j)$ takvog da važi (b′). Ustanovićemo da isti niz zadovoljava relaciju (a′).

Na osnovu (a), za dato $\varepsilon>0$ postoji m_o takvo da je

$$p(U^m-U^n)=\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)(u_j^m-u_j^n)\Big|<\varepsilon \quad \text{za}\quad m>m_o \ \text{i}\ n>m_o,$$

odnosno da je

$$\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)(u_j^m-u_j^n)\Big|<\varepsilon \quad \text{za svako}\quad x\in X,\ m>m_o \ \text{i}\ n>m_o.$$

Prelazeći, pri fiksiranom $x\in X$, na graničnu vrednost kad $n\to\infty$, s obzirom na uslov (b′) (koji znači konvergenciju po koordinatama), dobijamo

$$\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za svako}\quad x\in X \ \text{i}\ m>m_o,$$

ili

$$p(U^m-U)=\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za}\quad m\geq m_o.$$

Relacija (a′) sledi onda iz proizvoljnosti $\varepsilon>0$. Dakle, T je B_0K-prostor i u odnosu na ukupnost pseudonormi $p(U)$ i $p_k(U)$ $(k=0, 1, \ldots)$.

Na osnovu stava Zeller-a (I.2.11), tada je ukupnost pseudonormi $p_k(U)$ $(k=0,1,\ldots)$ ekvivalentna sa ukupnošću pseudonormi $p(U)$ i $p_k(U)$ $(k=0,1,\ldots)$. Odatle sledi da $p_k(U)\to 0$ za svako $k=0,1,\ldots$, tj. $n(U)\to 0$, gde je

$$n(U)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\, p_j(U)(1+p_j(U))^{-1},$$

povlači

$$p(U)=\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)u_j\Big|\to 0.$$

To znači da za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takvo da je

$$p(U)=\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)u_j\Big|\leq\varepsilon\ ,$$

tj.

$$\Big|\sum_{j=0}^{j_x} f_j(x)u_j\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za svako} \quad x\in X,$$

kada je $n(U)<\delta$. Završetak i ove varijante dokaza stava 9 može se izvesti po šemi korišćenoj u drugom delu već izložene varijante dokaza istog stava.

U specijalnom slučaju, kada je reč o matričnom operatoru (F), tj. operatoru pridruženom matrici $F=(f_{ij})$, uslovi (4) i (5) znače egzistenciju indeksa j_0 takvog da je $f_{ij}=0$ za svako $\underline{i}$ i $j>j_0$, i $\sup_i|f_{ij}|<\infty$ $(j=0,1,\ldots,j_0)$. Prema tome, doseg b-dejstva matričnog operatora (F) sadrži sve nizove ako i samo ako je matrica F tipa

$$(*)\qquad F=\begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0j_0} & 0 & 0 & \cdots \\ f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1j_0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ f_{i0} & f_{i1} & \cdots & f_{ij_0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

i uz to je $\sup_i|f_{ij}|<\infty$ $(j=0,1,\ldots,j_0)$.

9.ii. Primenom stava 9 dobija se da u slučaju matričnih postupaka iz $(F')^c=T$, $F=(f_{ij})$, sledi da postoji indeks j_0 takav da je $f_{ij}=0$ za svako i i $j>j_0$, tj. da je matrica F oblika (✻). To izlazi iz činjenice da za svaku matricu F važi inkluzija $(F')^c \subseteq (F)^b$ (iz konvergencije niza sledi njegova ograničenost) i, na osnovu toga, da iz $(F')^c=T$ sledi $(F)^b=T$ (što u slučaju proizvoljnog postupka (X,F,x') ne mora biti tačno).

Da postoje netrivijalne matrice F takve da je $(F')^c=T$ navodi se u pododeljku 13 (nula-matrica očigledno ima to svojstvo). Karakterizaciju tih matrica, i uopšte postupaka (X,F,x') takvih da je $(X,F,x')^c=T$, daje stav 14.

U daljem tekstu ovog odeljka rešavaju se pitanja uslova potrebnih i dovoljnih da domen primene odnosno domen o-primene postupka (X,F,x') sadrži neki od skupova T^o, T^c, T^b i T. U slučaju skupa T^b navodi se više kombinacija takvih uslova. Iz definicije postupka (X,F,x') je jasno da će se dokazi novih rezultata moći zasnovati, pored ostalog, na stavovima izloženim u prethodnom tekstu našeg odeljka.

10. STAV. <u>Da bi domen (X,F,x')-konvergencije sadržao skup T^o potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi:</u>

(6) <u>postoji okolina O tačke x′ takva da je</u>

$$\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| + \sup_{y\in X\cap O}\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(y)|<\infty \quad \underline{\text{za svako}} \quad x\in X$$

<u>i</u>

(7) <u>za svako</u> $k=0,1,\ldots$ <u>postoji</u> $\lim\limits_{x\to x'} f_k(x) = a_k$.

<u>Ako je postupak (X,F,x') polu-o-regularan, tj. ako su ispunjeni uslovi (6) i (7), onda za (svako) $U=(u_j)\in T^o$ imamo</u>

$$(X,F,x')\text{-}\lim u_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k .$$

<u>Dokaz</u>. Uslovi (6) i (7) su dovoljni. Neposredan dokaz, zasnovan na proceni razlike

II.2

$$\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j - \sum_{j=o}^{\infty} a_j u_j$$

kad $x \to x'$, po modelu korišćenom u slučaju $X = [x_o, x')$ ([20], teorema II), dat je u [18], str. 19. U nešto izmenjenom obliku, taj dokaz se sastoji u sledećem.

Iz uslova (6) i (7) sledi konvergencija reda $\sum_{j=o}^{\infty} |a_j|$, i na osnovu toga konvergencija reda $\sum_{j=o}^{\infty} a_j u_j$ za svako $U=(u_j) \in T^o$. U isto vreme iz uslova (6) sledi da red $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ konvergira za svako $x \in X$ i $U=(u_j) \in T^o$, tj. da je u posmatranom slučaju $T^o \subseteq (X,F)^d$. Ne gubeći u opštosti možemo posmatrati samo elemente $x \in X \cap O$, gde je O okolina iz uslova (6). Tada za fiksirano $U=(u_j) \in T^o$, $x \in X$ i $k=0,1,\ldots$ imamo

$$\Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j - \sum_{j=o}^{\infty} a_j u_j \Big| \leq$$

$$\Big| \sum_{j=o}^{k} [f_j(x) - a_j] u_j \Big| + \Big[\sup_{y \in X \cap O} \sum_{j=o}^{\infty} |f_j(y)| + \sum_{j=o}^{\infty} |a_j| \Big] \cdot \sup_{j > k} |u_j| \leq$$

$$\Big| \sum_{j=o}^{k} [f_j(x) - a_j] u_j \Big| + 2 \sup_{y \in X \cap O} \sum_{j=o}^{\infty} |f_j(y)| \cdot \sup_{j > k} |u_j| .$$

Iz uslova (7) sledi onda da je za svako $k=0,1,\ldots$

$$\limsup_{x \to x'} \Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j - \sum_{j=o}^{\infty} a_j u_j \Big| \leq 2 \sup_{y \in X \cap O} \sum_{j=o}^{\infty} |f_j(y)| \cdot \sup_{j > k} |u_j| ,$$

i, na osnovu pretpostavke $U=(u_j) \in T^o$, da je

$$\limsup_{x \to x'} \Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j - \sum_{j=o}^{\infty} a_j u_j \Big| = 0,$$

tj.

$$\lim_{x \to x'} \Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j - \sum_{j=o}^{\infty} a_j u_j \Big| = 0 .$$

Dovoljnost uslova (6) i (7), a ujedno i tvrđenje drugog dela našeg stava, je time dokazana.

Uslovi (6) i (7) su potrebni. Iz $E_k \in T^o (k=0,1,\ldots)$ [1] sledi $E_k \in (X,F,x')^c (k=0,1,\ldots)$. Otuda postoji

$$\lim_{x \to x'} (x,F)(E_k) = \lim_{x \to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x) e_{kj} = \lim_{x \to x'} f_k(x) = a_k \quad (k=0,1,\ldots),$$

---

1) $E_k = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$ (jedinica je na k-tom mestu).

tj. ispunjen je uslov (7). Dokaz potrebnosti uslova (6) zasnovaćemo na rezultatu sledeće leme (koju ćemo primenjivati i pri dokazu nekih rezultata u daljem tekstu ovoga rada).

10.i. LEMA. <u>Ako je</u> $T^o \subseteq (X,F)^d$ (što je, prema stavu 6, ekvivalentno sa uslovom (1)), <u>onda važi ekvivalencija:</u>

(A) <u>Za svako</u> $U=(u_j)\in T^o$ <u>postoji okolina</u> O_U <u>tačke</u> x' <u>takva da je</u> $\sup\limits_{x\in X\cap O_U}\left|\sum\limits_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j\right|<\infty$.

<u>ako i samo ako</u>

(B) <u>Postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>takva da je</u> $\sup\limits_{x\in X\cap O}\sum\limits_{j=o}^{\infty}|f_j(x)|<\infty$.

Primetimo da se u lemi 10.i umesto skupa T^o može uzeti skup T^c odnosno T^b.

Inače, pod pretpostavkom da je X skup realnih (ili kompleksnih) brojeva, lema 10.i dokazana je u [18], str. 18-19, po šemi korišćenoj u slučaju $X=[x_o,x')$ ([20], lema 1). U [21], lema 1 i napomena 8, primećeno je da dokaz može ostati nepromenjen i kada je X deo nekog topološkog prostora i x' njegova tačka nagomilavanja sa prebrojivom okolinskom bazom.

<u>Dokaz</u> leme 10.i. Uslov (A) je trivijalna posledica uslova (B) (i bez primene pretpostavke $T^o\subseteq(X,F)^d$). Ostaje dakle da se dokaže da iz $T^o\subseteq(X,F)^d$ i uslova (A) sledi (B). Pretpostavimo stoga da važi $T^o\subseteq(X,F)^d$ i (A), i da ne važi (B). Tada postoji niz (x_k) elemenata iz X koji konvergira ka x' takav da je

$$(\ast)\qquad \lim_{k\to\infty}\sum_{j=o}^{\infty}|f_j(x_k)| = \infty .$$

Iz pretpostavke da je $T^o\subseteq(X,F)^d$ sledi (stav I.2.9) da je sa

$$(x_k,F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty}f_j(x_k)u_j \quad (U=(u_j)\in T^o\ )\ (k=0,1,\ldots)$$

definisan niz funkcionela linearnih na prostoru T^o sa normama (redom) $n((x_k,\ F))=\sum\limits_{j=o}^{\infty}|f_j(x_k)|$ $(k=0,1,\ldots)$ (npr., [10], str. 230).

Na osnovu (x) važi onda

$$(\ast\ast) \qquad \lim_{k\to\infty} n((x_k,F)) = \infty .$$

Iz uslova (A) i konvergencije niza (x_k) ka x' sledi pak da je

$$\limsup_{k\to\infty} |(x_k,F)(U)| < \infty \quad \text{za svako} \quad U=(u_j)\in T^o.$$

Primenom principa rezonancije (npr., [10], str. 245), dolazi se do kontradikcije sa (x x), a time i do završetka dokaza leme 10.i (videti kraj dokaza stava 8).

Sada se može izvesti dokaz potrebnosti uslova (6), tj. dovršiti dokaz stava 10. Iz pretpostavke $T^o \subseteq (X,F,x')^c$ sledi da je $T^o \subseteq (X,F)^d$ i, na osnovu stava 6, da je

$$(+) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty \quad \text{za svako} \quad x\in X.$$

Iz iste pretpostavke sledi takođe da za svako $U=(u_j)\in T^o$ postoji okolina O_U tačke x' takva da je $\sup_{x\in X\cap O_U} \left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\right| < \infty$ (iz egzistencije limes-a sledi ograničenost u nekoj okolini). Na osnovu leme 10.i,

(++) postoji okolina O tačke x' takva da je $\sup_{x\in X\cap O} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty .$

Uslov (6) se očigledno dobija konjunkcijom uslova (+) i (++).

10.ii. I dokaz dovoljnosti uslova (6) i (7) i drugog dela stava 10 može se zasnovati na rezultatima funkcionalne analize. U tom cilju primetimo da iz uslova (6) sledi da je za svako $x\in X$ sa

$$(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j \quad (U=(u_j)\in T^o)$$

zadata linearna funkcionela u prostoru T^o. Ne umanjujući opštost zaključka, možemo posmatrati samo elemente $x\in X\cap O$, gde je O okolina iz uslova (6). Uzmimo zatim niz (x_n) elemenata iz $X\cap O$ koji konvergira ka x'. Tada je $(x_n,F)(U)$ $(n=0,1,\ldots)$ niz (običan, pa prema tome i uopšten) linearnih preslikavanja prostora T^o u prostor realnih (kompleksnih) brojeva. Iz $x_n\in X\cap O$ $(n=0,1,\ldots)$ sledi da je za svako $U=(u_j)\in T^o$ skup $\{(x_n,F)(U) \mid n=0,1,\ldots\}$ ograničen (na ovom mestu se koristi svojstvo okoline O iz uslova (6)). Prema (7), postoji $\lim_n (x_n,F)(E_k)$ $(= \lim_n f_k(x_n)= a_k)$ za svako $k=0, 1,\dots$. Kako je niz E_k $(k=0,1,\dots)$ fundamentalan u prostoru T^o, to na osnovu stava I.2.13 postoji $\lim_n (x_n,F)(U) = \lim_n \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x_n)u_j$ za svako $U=(u_j)\in T^o$ i pri tome je funkcionela $\lim_n (x_n,F)(U)$ linearna na prostoru T^o. Odatle sledi da je skup T^o sadržan u domenu primene svakog matričnog postupka izvedenog iz postupka $(X\cap O,F,x')$. Na osnovu stava 5, T^o je sadržano i u skupu $(X\cap O,F,x')^c$. Iz uslova (6) izlazi onda da je skup T^o sadržan i u domenu primene postupka (X,F,x'), čime je dovoljnost uslova (6) i (7) ustanovljena.

Iz linearnosti funkcionele $\lim_n (x_n,F)(U)$ i razlaganja (u smislu norme prostora T^o)

$$U = \sum_{k=o}^{\infty} u_k E_k \quad (U=(u_j)\in T^o),$$

sledi zatim da je $\lim_n (x_n,F)(U) = \lim_n (x_n,F)(\sum_{k=o}^{\infty} u_k E_k) =$ $=\sum_{k=o}^{\infty} u_k \lim_n (x_n,F)(E_k) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k u_k$ za svako $U=(u_j)\in T^o$. Tačnost drugog dela stava 10 dobija se sada na osnovu proizvoljnosti izbora niza (x_n).

10.iii. Iz stava 10 sledi <u>da je postupak</u> (X,F,x') <u>o-regularan ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (6) <u>i</u>

(7′) $$\lim_{x\to x'} f_k(x) = 0 \quad (k=0,1,\dots)$$

(drugim rečima, ako i samo ako je polu-o-regularan i regularan u tačkama E_k $(k=0,1,\dots)$). Na osnovu istog stava dobija se takođe <u>da su polu-o-regularni postupci</u> (X,F,x') <u>i</u> (Y,G,y') <u>saglasni na skupu</u> T^o <u>ako i samo ako je</u> $a_k = b_k$ $(k=0,1,\dots)$, <u>gde je</u> $b_k=\lim_{y\to y'} g_k(y)$.

11. STAV. <u>Domen</u> (X,F,x')-<u>konvergencije sadrži skup</u> T^c <u>ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (6), (7) <u>i</u>

(8) <u>postoji</u> $\lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x) = a$.

<u>Pod navedenim uslovima</u>, <u>za svaki konvergentan niz</u> $U=(u_j)$ <u>je</u>

$$(X,F,x')\text{-}\lim u_j = \sum_{k=o}^{\infty} a_k u_k + u(a- \sum_{k=o}^{\infty} a_k) ,$$

<u>gde je</u> $u= \lim_j u_j$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo (6), (7) i (8). Uočimo zatim $U=(u_j)\in T^c$, pri čemu je $\lim_j u_j = u$. Tada $U^o=(u_j- u)= U- uE \in T^o$ [1], i na osnovu stava 10 imamo

$$(X,F,x')(U^o)=(X,F,x')(U- uE)=\sum_{k=o}^{\infty} a_k(u_k- u) .$$

Prema (6) i (8), $E\in(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')(E)= a$, pa se na osnovu prethodnog dobija $U=(U- uE)+ uE \in(X,F,x')^c$ i

$$(X,F,x')(U)= (X,F,x')(U- uE)+ u (X,F,x')(E) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k(u_k-u) +au.$$

Iz $\sum_{k=o}^{\infty} |a_k|<\infty$ (što je posledica uslova (6) i (7)) i $U=(u_j)\in T^c$ sledi onda

$$(X,F,x')(U) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k u_k + u(a- \sum_{k=o}^{\infty} a_k) .$$ Na taj način, inkluzija $T^c\subseteq(X,F,x')^c$ i deo stava koji se odnosi na (X,F,x')-graničnu vrednost konvergentnih nizova su dokazani.

Pretpostavimo sada $T^c\subseteq(X,F,x')^c$. Tada uslovi (6) i (7) slede na osnovu stava 10. Iz $E\in T^c$ sledi $E\in(X,F,x')^c$. Otuda postoji

$$\lim_{x\to x'} (x,F)(E) = \lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x) = a ,$$

tj. ispunjen je i uslov (8), čime je dokaz stava 11 dovršen.

11.i. Iz stava 11 sledi <u>da je postupak</u> (X,F,x') <u>regularan</u> <u>ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (6), (7') <u>i</u>

(8') $\lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x) = 1$

(dakle, ako i samo ako je poluregularan, i regularan u tačkama E i E_k (k=0,1,...)).

---

1) $E=(1,1,\ldots,1,\ldots)$.

Navodimo još dve očigledne posledice stava 11.

11.ii. Domen o-primene postupka (X,F,x') sadrži sve konvergentne nizove ako i samo ako su ispunjeni uslovi (6), (7′) i

$$(8'') \qquad \lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = 0.$$

11.iii. Poluregularni postupci (X,F,x') i (Y,G,y') saglasni su na skupu T^c ako i samo ako je $a_k = b_k$ $(k=0,1,\dots)$ i $a=b$, gde je $b = \lim_{y\to y'} \sum_{j=0}^{\infty} g_j(y)$.

12. STAV. Domen primene postupka (X,F,x') sadrži sve ograničene nizove ako i samo ako su ispunjeni uslovi (6), (7) i

$$(9) \qquad \lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x) - a_j| = 0.$$

Pri tome, iz uslova (6), (7) i (9) sledi da je za (svako) $U=(u_j)\in T^b$

$$(X,F,x')\text{-}\lim u_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k .$$

Iz stava 12 sledi da su uslovi (6) i

$$(9') \qquad \lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| = 0$$

potrebni i dovoljni da domen o-primene postupka (X,F,x') sadrži skup T^b (tj. uz uslov $T^b \subseteq (X,F,x')^c$ dovoljna je i, naravno, potrebna regularnost postupka (X,F,x') za nizove E_k $(k=0,1,\dots)$). Na osnovu istog stava može se takođe zaključiti da su postupci (X,F,x') i (Y,G,y') čiji domeni sadrže sve ograničene nizove saglasni na skupu T^b ako i samo ako je $a_k = b_k$ $(k=0,1,\dots)$.

Dokaz stava 12. U [18], str. 23, izložen je dokaz stava 12 pod pretpostavkom da je X skup realnih (ili kompleksnih) brojeva. U [21], teorema 3 i napomena 8, istaknuto je da dokaz može ostati nepromenjen i u slučaju nove pretpostavke o skupu X i tački x′.

Uslovi (6), (7) i (9) su dovoljni. Iz uslova (6) sledi da je $T^b \subseteq (X,F)^d$. Uslovi (6) i (7) impliciraju konvergenciju reda

$\sum\limits_{j=0}^{\infty}|a_j|$, i time konvergenciju reda $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_ju_j$ za svako $U=(u_j)\in T^b$.

Egzistencija $(X,F,x')-\lim u_j = \lim\limits_{x\to x'}\sum\limits_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j$ za svako $U=(u_j)\in T^b$ i drugi deo stava 12 slede onda iz nejednakosti

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j - \sum_{j=0}^{\infty}a_ju_j\right| \leq \sup_j|u_j|\cdot\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)-a_j| \qquad (x\in X)$$

i uslova (9).

Uslovi (6), (7) i (9) su potrebni. Potrebnost uslova (6) i (7) dobija se primenom stava 10. Radi dokaza potrebnosti uslova (9), uočimo matrični postupak (G') izveden iz postupka (X,F,x') koji odgovara nizu (x_n). Domen primene postupka (G') takođe sadrži skup T^b (napomena uz definiciju 4). Na osnovu poznate teoreme Schur-a [22] (videti i [23], str. 44), tada je

$$\lim_n \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x_n)-a_j| = 0.$$

Uslov (9) sledi onda iz proizvoljnosti izbora izvedenog postupka (G') (tj. niza (x_n) elemenata iz X koji konvergira ka x').

Primetimo da je dokaz stava 12 izveden po sledećoj šemi (izvesnih elemenata takve procedure imali smo i u napomeni 10.ii u vezi dokaza stava 10): situacija u vezi sa funkcijskim postupkom svodi se na odgovarajuću situaciju u vezi sa proizvoljnim izvedenim matričnim postupkom, na njega se primenjuje poznat odgovarajući rezultat, pa se najzad, vraćanjem na funkcijski postupak, dolazi do željenog rezultata.

Po istoj šemi mogu biti izvedeni i dokazi velikog dela drugih rezultata ovoga rada, kako onih u vezi funkcijskih postupaka tako i onih u vezi funkcijskih operatora (u drugom slučaju, naravno, operisalo bi se proizvoljnim izvedenim matričnim operatorima). U radu se, međutim, ta mogućnost ne koristi sistematski, pored ostalog i zbog toga što glavni njegov sadržaj sačinjavaju rezultati za funkcijske operatore i postupke takvi da nam odgovarajući rezultati za matrične operatore odnosno postupke nisu bili ni poznati.

Primetimo da se u stavu 12 može izvršiti izvesna restrikcija uslova (6), (7) i (9). Dokazaćemo naime da važi sledeća jednostavnija varijanta stava 12.

12.i. STAV. <u>Domen</u> (X,F,x')-<u>konvergencije sadrži skup</u> T^b <u>ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (1) <u>i</u>

(10) <u>postoji niz</u> (a_k) <u>takav da važi</u> (9) .

<u>Dokaz</u>. S obzirom na stav 12, dovoljno je ustanoviti da je kombinacija uslova (6), (7) i (9) ekvivalentna sa kombinacijom uslova (1) i (10). Da iz uslova (6), (7) i (9) slede uslovi (1) i (10), očigledno je. Ostaje dakle da se dokaže da važi i obrnuto (ustvari, da iz (1) i (10) slede (6) i (7)).

Najpre ćemo pokazati da iz uslova (1) i (10) sledi konvergencija reda $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$. U tom cilju primetimo da iz uslova (10) sledi egzistencija okoline O tačke x' takve da je

$$\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)-a_j|\leq 1 \quad \text{za svako} \quad x\in X\cap O.$$

Iz nejednakosti

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\leq \sum_{j=0}^{\infty}|a_j-f_j(x)| + \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| \quad (x\in X)$$

(koja ima smisla i u slučaju divergencije nekog od posmatranih redova) sledi onda

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\leq 1 + \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| \quad \text{za svako} \quad x\in X\cap O,$$

i, s obzirom na uslov (1), konvergencija reda $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$. U isto vreme iz nejednakosti

$$\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|\leq \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)-a_j| + \sum_{j=0}^{\infty}|a_j| \quad (x\in X)$$

dobija se da je

$$\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|\leq 1 + \sum_{j=0}^{\infty}|a_j| \quad \text{za svako} \quad x\in X\cap O,$$

i na osnovu toga da je $\sup\limits_{x\in X\cap O} \sum\limits_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty$. Sa uslovom (1) to daje uslov (6). Uslov (7) sledi iz (9) (ovaj uslov je sadržan u uslovu (10)), budući da za svako $x \in X$ i svako $k=0,1,\ldots$ važi nejednakost

$$|f_k(x) - a_k| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x) - a_j| .$$

Kako smo na početku napomenuli, time je dokaz stava 12.i završen.

Schur [22] je dokazao da su kod matričnih postupaka (F′), $F=(f_{ij})$, uslovi (6), (7) i (9) ekvivalentni sa uslovima (7) i

(11′) red $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |f_{ij}|$ konvergira uniformno po $i=0,1,\ldots$;

tj. da važi (dokaz se može naći i u [23], str. 44):

12.ii. STAV. *Domen (F′)-konvergencije sadrži skup* T^b *ako i samo ako su ispunjeni uslovi* (7) (*koji u slučaju matričnog postupka* (F′) *glasi: postoji* $\lim\limits_{i} f_{ik} = a_k$ *za svako* $k=0,1,\ldots$) *i* (11′).

U Odeljku III.1 pokazaćemo da takav rezultat važi i za jednu širu klasu funkcijskih postupaka (X,F,x′). Sledeći primer pokazuje, međutim, da to nije tačno u slučaju proizvoljnih postupaka (X,F,x′).

Uzmimo naime $X = [-3,-1] \cup \{0,1,2,\ldots\}$, $x'=\infty$ i za $j=0,1,\ldots$

$$f_j(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{[1+(x+2)^2]^{j+1}} , & x \in [-3,-1] \text{, odnosno} \\[2ex] \dfrac{1}{2^{x+j}} , & x \in \{0,1,2,\ldots\} . \end{cases}$$

Lako je videti da su u posmatranom slučaju ispunjeni uslovi (6), (7) i (9), tj. da domen primene datog postupka (X,F,x′) sadrži sve ograničene nizove. U isto vreme red $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |f_j(x)|$ ne konvergira uniformno na X (funkcije $f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ neprekidne su na X, a suma reda ima prekid u tački $x = -2$).

Prema tome, uslov

(11) red $\sum_{j=o}^{\infty} |f_j(x)|$ uniformno konvergira na X

nije potreban za $T^b \subseteq (X,F,x')^c$. Nije, međutim, teško videti da su uslovi (7) i (11) dovoljni za $T^b \subseteq (X,F,x')^c$.

Iz stava 12 sledi da domen primene regularnog postupka (X,F,x') ne može sadržati skup T^b (jer ne može istovremeno biti $\lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x) = 1$ (na osnovu 11.i) i $\lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} |f_j(x)| = 0$ (prema 11.i i stavu 12). Primećujemo takođe da iz (6), (7) i (9) sledi uslov (8) i jednakost $a = \sum_{k=o}^{\infty} a_k$. Odatle se ponovo dobija da domen (X,F,x')-konvergencije regularnog postupka (X,F,x') ne može sadržati sve ograničene nizove. Dublji rezultat u tom smislu za matrične postupke potiče od H. Steinhaus-a [17]. On je na efektivan način pokazao da domen primene regularnog matričnog postupka $(F^{\sim})$ ne može sadržati ni sve nizove čiji su članovi 0 ili 1, tj. sve dijadske nizove. Drugim rečima, za svaki regularan matrični postupak (F') postoji dijadski niz $U=(u_j)$ takav da $U \notin (F')^c$. U opštem slučaju konstrukcija niza $U=(u_j)$ sa pomenutim svojstvom je prilično komplikovana (npr., [24] , str. 93). U nekim specijalnim slučajevima do takvog niza se može doći na relativno lak način. Tako, naprimer, dijadski niz

$$U=(1,0,1,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,\ldots)$$

(na nultom mestu je 1, na prvom mestu je 0 i dalje se ređa onoliko jedinica odnosno nula koliko ih prethodno ukupno ima) nema granicu u smislu C_1-postupka (Cesàro-ovog postupka prvog reda).

Tvrdimo dakle da za dati niz $U=(u_j)$ ne postoji

$$\lim_i \frac{u_o+u_1+\cdots+u_i}{i+1} .$$

Zaista, ako uzimamo redom zbirove $u_o+u_1+\ldots+u_i$ do prve nule, onda imamo $\frac{u_o}{1} = 1$, i dalje $\frac{u_o+u_1+\ldots+u_i}{i+1} = \frac{2}{3}$; uzimajući redom zbirove $u_0+u_1+\ldots+u_i$ do prvih jedinica imamo $\dfrac{u_0+u_1+\ldots+u_i}{i+1} = \dfrac{1}{2}$.

Prema tome, naveli smo dva podniza niza $\dfrac{u_0+u_1+\ldots+u_i}{i+1}$ $(i=0,1,\ldots)$ koji ne konvergiraju istoj graničnoj vrednosti, odakle sledi tačnost našeg tvrđenja.

Posredstvom matričnih postupaka izvedenih iz postupka (X,F,x') rezultat Steinhaus-a prenosi se na proizvoljne funkcijske postupke (X,F,x') ([21], napomena 3).

Iz dokaza stava 12.ii navedenog u [23], str. 44, jasno je da se (zahvaljujući aditivnosti i homogenosti matričnih postupaka) u iskazu stava 12.ii izraz "skup T^b" može zameniti sa "sve dijadske nizove". Prema tome, ako skup $(F')^c$ sadrži sve dijadske nizove, onda isti skup sadrži sve ograničene nizove. (Obrnuto pogotovu važi.) Sledeći rezultat pokazuje da isto važi i za proizvoljne postupke (X,F,x').

12.iii. Potreban i dovoljan uslov da skup $(X,F,x')^c$ sadrži sve ograničene nizove jeste da skup $(X,F,x')^c$ sadrži sve dijadske nizove.

Lako je videti da analogno tvrđenje imamo i u odnosu na skup $(X,F,x')^o$, tj. u odnosu na domen o-primene postupka (X,F,x'). Sem toga, iz 12.iii sledi da se u stavovima 12, 12.i, 12.ii i njihovim posledicama umesto skupa T^b može posmatrati skup dijadskih nizova.

Dokaz 12.iii. Navedeni uslov je očigledno potreban. Pokazaćemo da je isti uslov i dovoljan. Pri tome ćemo koristiti jednakost $(X,F,x')^c = \bigcap_{(G')\in I} (G')^c$, gde je I familija svih matričnih postupaka izvedenih iz postupka (X,F,x').

Pretpostavimo dakle da domen postupka (X,F,x') sadrži sve dijadske nizove. Kako je (svaki) izvedeni postupak (G') opštiji od polaznog postupka (X,F,x'), to domen primene svakog izvedenog postupka $(G')\in I$ takođe sadrži sve dijadske nizove. Na osnovu rezultata Schur-a, domen primene $(G')^c$ svakog postupka $(G')\in I$ sadrži i sve ograničene nizove. Odatle izlazi da i $\bigcap_{(G')\in I} (G')^c$, tj. skup $(X,F,x')^c$, sadrži sve ograničene nizove, što dovršava dokaz našeg tvrđenja.

Svaki dijadski niz može se prikazati kao poluzbir dva niza čiji su članovi -1 ili 1; svaki niz sa članovima -1 ili 1 može se predstaviti u obliku razlike dva dijadska niza. Odatle sledi da domen (X,F,x')-konvergencije sadrži sve dijadske nizove ako i samo ako sadrži sve nizove sa članovima -1 ili 1. Na osnovu toga se u prethodnom izlaganju umesto sa dijadskim može raditi sa nizovima čiji su članovi -1 ili 1 (npr., [25], str.88). (Ustvari, opštije, mogu se posmatrati nizovi sa članovima $-a$ ili $\underline{a}$ za bilo koje $a\neq 0$.)

13. Ostatak našeg odeljka posvećen je postupcima (X,F,x') čiji domen primene obuhvata sve nizove. Da takvi postupci postoje pokazuju primeri postupaka pridruženih matricama

$$G_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & & k & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & . & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ . & . & \ldots & . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix} \end{array} \qquad (k=0,1,\ldots) .$$

U datom slučaju je $(G_k)(U)=u_k$ $(i=0,1,\ldots)$, i na osnovu toga $(G_k')(U)= u_k$ za svako $k=0,1,\ldots$ i svako $U=(u_j)\in T$. Naravno, tada i za $G=\sum_{k=o}^{k_o} a_k G_k$ domen (G')-konvergencije sadrži sve nizove, i pri tome je $(G')(U)=\sum_{k=o}^{k_o} a_k (G_k')(U) = \sum_{k=o}^{k_o} a_k u_k$. U nastavku ćemo pokazati da je granična vrednost po postupku (X,F,x') upravo oblika $\sum_{k=o}^{k_o} a_k u_k$, gde indeks k_o ne zavisi od niza $U=(u_j)$, svaki put kada se domen primene $(X,F,x')^c$ podudara sa skupom T. Preciznije:

13.i. <u>Ako je</u> $(X,F,x')^c=T$, <u>onda postoje indeks</u> k_o <u>i brojevi</u> a_k $(k=0,1,\ldots,k_o)$ (<u>koji zavise samo od postupka</u> (X,F,x')) <u>takvi da je za svako</u> $U=(u_j)\in T$

$$(X,F,x')\text{-}\lim u_j = \sum_{k=o}^{k_o} a_k u_k .$$

Iz prethodne jednakosti sledi da je tada $a_k = \lim_{x\to x'} f_k(x) = \lim_{x\to x'}(x,F)(E_k) = (X,F,x')(E_k)$, kao i da je $(X,F,x')(U)=0$ za sve nizove oblika $U=(0,0,\ldots,\overset{k_o}{0},u_{k_o+1},u_{k_o+2},\ldots)$.

<u>Dokaz</u> 13.i. Funkcionela $(X,F,x')(U) = \lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ $(U=(u_j)\in T)$ je aditivna i najviše iz druge klase Baire-a u B_oK-prostoru T (jer se može predstaviti u obliku $(X,F,x')(U) = \lim_i \lim_n \sum_{j=o}^{n} f_j(x_i)u_j$, gde $x_i\in X$ $(i=0,1,\ldots)$ i $x_i\to x'$ $(i\to\infty)$). Na osnovu napomene I.1.9.i i stava I.1.15, funkcionela $(X,F,x')(U)$ je linearna u prostoru T. Prema I.2.20.i, tada postoje indeks k_o i brojevi a_k $(k=0,1,\ldots,k_o)$ sa svojstvom o kome je reč u našem tvrđenju.

Primetimo da drugi deo dokaza 13.i može teći i na sledeći način. Naime, iz konstatacije da je funkcionela $(X,F,x')(U)$ linearna u prostoru T, na osnovu stava I.2.19 Mazur-a i Orlicz-a, sledi da je ona u tom prostoru nekog stepena k_o. Drugim rečima, tada postoje indeks k_o i broj $M>0$ takvi da je

$$|(X,F,x')(U)| \leq M \max_{0\leq k\leq k_o} p_k(U) \quad \text{za svako } U\in T.$$

Za nizove oblika $U=(0,0,\ldots,\overset{k_o}{0},u_{k_o+1},u_{k_o+2},\ldots)$ i $k=0,1,\ldots,k_o$ je $p_k(U)=0$, pa se dobija da je za takve nizove $(X,F,x')(U)=0$. Odatle izlazi da je za proizvoljan niz

$$U=(u_o,u_1,\ldots,u_{k_o},u_{k_o+1},\ldots)$$

i

$$U^1=(u_o,u_1,\ldots,u_{k_o},0,0,\ldots)$$

ispunjeno

$$(X,F,x')(U) = (X,F,x')(U^1) \,.$$

S obzirom na razlaganje $U^1 = \sum_{k=0}^{k_0} u_k E_k$, proizlazi da za svako $U=(u_j)\in T$ imamo

$$(X,F,x')(U) = \sum_{k=0}^{k_0} u_k\,(X,F,x')(E_k) = \sum_{k=0}^{k_0} a_k u_k \,.$$

Iz prethodnog tvrđenja sledi da nizovi

$$U=(u_0,\dots,u_{k_0},u_{k_0+1},\dots)$$

i

$$V=(u_0,\dots,u_{k_0},v_{k_0+1},v_{k_0+2},\dots)$$

imaju jednake (X,F,x')-granične vrednosti. To znači da u slučaju $(X,F,x')^c=T$ članovi niza od izvesnog indeksa pa na dalje, uopšte ne utiču na graničnu vrednost u smislu postupka (X,F,x'). To nas je navelo na pomisao da postoji okolina O tačke x' takva da funkcije $f_j(x)$ počev od nekog indeksa pa na dalje iščezavaju na $X\cap O$. Sledeći stav pokazuje da tako postavljena hipoteza nije bila pogrešna.

14. STAV. <u>Da bi domen</u> (X,F,x')-<u>konvergencije sadržao sve nizove potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov</u>:

(12) <u>postoje okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>i indeks</u> j_0 <u>takvi da</u>: a) <u>za svako</u> $x\in X-O$ <u>postoji takvo</u> j_x <u>da</u> $j>j_x$ <u>povlači</u> $f_j(x)=0$; b) $f_j(x)\equiv 0$ <u>na</u> $X\cap O$ <u>za svako</u> $j>j_0$; c) <u>postoji</u> $\lim_{x\to x'} f_j(x) = a_j$ <u>za svako</u> $j=0,1,\dots,j_0$.

<u>Ako je ispunjen uslov</u> (12), <u>za svako</u> $U=(u_j)\in T$ <u>važi</u>

$$(X,F,x')\text{-}\lim u_j = \sum_{j=0}^{j_0} a_j u_j \,.$$

Iz stava 14 sledi <u>da domen o-primene postupka</u> (X,F,x') <u>sadrži sve nizove ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (12) a), b) i c') $\lim_{x\to x'} f_j(x)=0$ $(j=0,1,\dots,j_0)$, tj. ako i samo ako je $T\subseteq (X,F,x')^c$ i pri tome je postupak (X,F,x') regularan u tačkama E_j

$(j=0,1,\dots,j_o)$, gde je j_o indeks iz uslova (12)). Isto tako, lako je videti da su postupci (X,F,x') i (Y,G,y') čiji domeni primene sadrže sve nizove saglasni ako i samo ako je $a_j = b_j$ $(j=0,1,\dots)$, gde je $b_j = \lim_{y\to y'} g_j(y)$ (ustvari, ako i samo ako je $a_j=b_j$ $(j=0,1,\dots,\max(j_o^1,j_o^2))$, gde indeksi j_o^1 i j_o^2 odgovaraju postupcima (X,F,x') i (Y,G,y') u smislu uslova (12); ostale jednakosti slede iz (12) b)).

Dokaz stava 14. Uslov (12) je dovoljan. Iz uslova (12) a) i b) sledi da je $(X,F)^d=T$. Prema (12) b) i c) za svako $U=(u_j)$ imamo

$$\lim_{x\in X,x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j = \lim_{x\in X\cap O,x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j = \lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{j_o} f_j(x)u_j = \sum_{j=0}^{j_o} a_j u_j .$$

Dovoljnost uslova (12) i drugo tvrđenje stava 14 su tako pokazani.

Uslov (12) je potreban. Uslov (12) a) sledi na osnovu stava 7. Uslov (12) c) dobija se već na osnovu stava 10 ($\lim_{x\to x'} f_j(x)=a_j$ postoji za svako $j=0,1,\dots$, samo što će iz (12) b) slediti $a_j= 0$ za $j> j_o$). Ostaje, dakle, da se ustanovi egzistencija okoline O i indeksa j_o sa svojstvom (12) b). Dokaz ćemo izvesti tako što ćemo pokazati da suprotna pretpostavka dovodi do kontradikcije.

Uzmimo prema tome da takva okolina O i indeks j_o ne postoje, tj. da za svaku okolinu O tačke x' i svaki indeks i postoje indeks $j_i > i$ i tačka $x_i\in X\cap O$ tako da je $f_{j_i}(x_i)\neq 0$. Prema tome postoje i rastući niz indeksa (j_i) i niz (x_i) elemenata iz X koji konvergira ka x' tako da je $f_{j_i}(x_i)\neq 0$ za svako $i=0,1,\dots$.

Posmatrajmo sada matrični postupak (G') izveden iz postupka (X,F,x') koji odgovara tako dobijenom nizu (x_i), tj. matrici $G=(f_j(x_i))$. Iz $(X,F,x')^c=T$ sledi da je tim pre $(G')^c=T$, pa primenom napomene 9.ii dolazimo do indeksa j_* takvog da je $f_j(x_i)=$

$= 0$ za $j > j_x$ i svako $i=0,1,\ldots$ (videti i varijantu 9.i dokaza stava 9). To je, međutim, u kontradikciji sa uslovom $f_{j_i}(x_i) \neq 0$ za svako $i=0,1,\ldots$, gde je (j_i) rastući niz indeksa. Time smo pokazali da je naša pretpostavka da ne postoje okolina O i indeks j_o sa svojstvom (12) b) neodrživa. Dakle, iz $T \subseteq (X,F,x')^c$ sledi (12), čime je stav 14 u potpunosti dokazan.

Primetimo sada da je tvrđenje 13.i očigledna posledica stava 14. Iz tog razloga su se to tvrđenje i njegov dokaz u ovom izlaganju mogli izostaviti. Što tako nismo postupili, posledica je želje da, kako je delom napomenuto, pripremimo stav 14 i objasnimo njegovu genezu.

Napomenimo još da se deo dokaza stava 14 koji se odnosi na dovoljnost uslova (12) i dokaz drugog tvrđenja stava može izvesti i korišćenjem rezultata funkcionalne analize po modelu primenjenom u dokazu stava 10 (videti 10.ii). (Slična napomena mogla se učiniti i pri dokazu stava 11.) Pri tome (na osnovu (12) c)), bez restikcije u opštosti zaključka, možemo pretpostaviti da je $\sup\limits_{x \in X \cap O} \sum\limits_{j=o}^{j_o} |f_j(x)| < \infty$ i posmatrati samo elemente $x \in X \cap O$. Uz to bi se koristila i činjenica da je niz E_k $(k=0,1,\ldots)$ fundamentalan u prostoru T. Mi smo, međutim, videli da je u posmatranom slučaju i neposredan dokaz izuzetno jednostavan.

Ako domen primene postupka (X,F,x') sadrži sve nizove, onda je postupak (X,F,x') ekvivalentan sa postupkom $(X \cap O,F,x')$, gde je O okolina tačke x' čiju egzistenciju i svojstvo garantuje stav 14. Postupak $(X \cap O,F,x')$ sa svoje strane može se u tom slučaju predstaviti kao "zbir" postupaka $(X \cap O,F_j,x')$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$ koji su redom pridruženi nizovima $F_j=(0,0,\ldots,\overset{j}{f_j}(x),0,0,\ldots)$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$. Termin "zbir" može se opravdati činjenicom da je za svako $x \in X \cap O$ i $U=(u_j) \in T$

$$(x,F)(U) = \sum_{j=0}^{j_0} f_j(x)u_j = \sum_{j=0}^{j_0} (x,F_j)(U) ,$$

i na osnovu toga

$$(X\cap O,F,x')\text{-}\lim u_k = \sum_{j=0}^{j_0} [(X\cap O,F_j,x')\text{-}\lim u_k] .$$

Da domen primene pomenutog "zbira" sadrži sve nizove bilo je jasno i bez stava 14. Značaj stava 14 je, međutim u tome što pokazuje da drugačijih postupaka (X,F,x') sa skupom T kao domenom primene praktično i nema (budući da se bez bitnih gubitaka mogu posmatrati samo elementi $x \in X\cap O$).

14.i. U slučaju matričnog postupka (F') određenog matricom $F=(f_{ij})$ uslov (12) znači da postoje indeksi i_0 i j_0 takvi da vrste sa indeksima $i \leq i_0$ imaju najviše konačno mnogo elemenata različitih od nule, zatim da je $f_{ij}=0$ za svako $i > i_0$ i $j > j_0$, kao i da postoji $\lim\limits_i f_{ij} = a_j$ $(j=0,1,\ldots,j_0)$. Odatle sledi da domen primene postupka pridruženog matrici $F=(f_{ij})$ sadrži sve nizove ako i samo ako postoji indeks j_1 takav da je $f_{ij}=0$ za svako $i= =0,1,\ldots$ i $j > j_1$, tj. da je posmatrana matrica oblika

$$(\ast) \qquad F = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & \ldots & f_{0j_1} & 0 & 0 & \ldots \\ f_{10} & f_{11} & \ldots & f_{1j_1} & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ f_{i0} & f_{i1} & \ldots & f_{ij_1} & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix} ,$$

i pri tome su kolone sa indeksima $j \leq j_1$ konvergentni nizovi.

Neka je sada (F), $F=(f_{ij})$, operator čiji doseg b-dejstva sadrži sve nizove. Prema stavu 9, matrica F je oblika $(\ast)$ i pri tome je $\sup\limits_i |f_{ij}| < \infty$ $(j=0,1,\ldots,j_1)$. Odatle sledi da postoji rastući niz indeksa (i_k) takav da $\lim\limits_k f_{i_kj} = a_j$ postoji za svako $j=0,1,\ldots,j_1$. Na osnovu napomene 14.i, domen primene postupka (F_1') pridruženog matrici $F_1=(f_{i_kj})$ sadrži sve nizove. Na taj način došli smo do zaključka da za svaku matricu $F=(f_{ij})$ takvu da je $(F)^b=T$ postoji podmatrica $F_1=(f_{i_k j})$ takva da je $(F_1')^c=T$. Inače u slučaju matričnog operatora (F) i odgovarajućeg postupka (F′) važi inkluzija $(F')^o \subseteq (F')^c \subseteq (F)^b \subseteq (F)^d$, što u opštem slučaju ne mora biti tačno.

3. Funkcijski postupci tipa $(X,F,x')_g$

Opravdanost uvođenja nekog operatora ili postupka ocenjuje se, pored ostalog, i na osnovu širine (u smislu inkluzije) njegovog dosega dejstva odnosno domena primene. U nastojanju da pri istim polaznim elementima X, F, x′ (2.Uvod i 2.2) dobijemo operator ili postupak što prostranijeg dosega dejstva odnosno domena primene, došli smo, podstaknuti definicijom opšte klase linearnih postupaka zbirljivosti (npr., [26], str. 418), na ideju da se to postigne slabljenjem nekih uslova iz definicije operatora (X,F) i postupka (X,F,x′). Naime, pokazuje se svrsishodnim da se u tim definicijama izvesni zahtevi globalnog tipa zamene zahtevima lokalnog tipa. O tome i o nekim svojstvima operatora i postupaka dobijenih na nov način, reč je u ovom odeljku našega rada.

1. Neka, dakle, X, F i x′ imaju isto značenje kao u odeljku 2 (Uvod i pododeljak 2). Definisaćemo sada jedno proširenje $(X,F)_g$ operatora (X,F) na sledeći način. Uzećemo naime da $U=(u_j)\in (X,F)_g^d$ ako postoji okolina O tačke x′ (koja može varirati sa U) takva da $U\in (X\cap O,F)^d$. Drugim rečima, $U=(u_j)\in (X,F)_g^d$ ako postoji okolina O tačke x′ takva da red $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ konvergira "tek" za svako $x\in X\cap O$ (dok je pri $U=(u_j)\in (X,F)^d$ zahtevana konvergencija istog reda na čitavom skupu X). Slikom $(X,F)_g(U)$ niza $U=(u_j)\in (X,F)_g^d$ (tj. slikom niza $U=(u_j)\in (X,F)_g^d$ pri preslikavanju $(X,F)_g$) smatraćemo funkciju čiju oblast definisanosti sačinjavaju elementi $x\in X$ za koje red $(x,F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ konvergira,

sa sumama posmatranog reda kao njenim vrednostima.

Označimo sa X_U oblast definisanosti funkcije $(X,F)_g(U)$ i primetimo da je X_U maksimalan od svih skupova oblika $X\cap O$, gde O prolazi skup $\mathcal{O}_1$ okolina O tačke x' takvih da je $U\in(X\cap O,F)^d$, tj. da je $X_U=\bigcup_{O\in\mathcal{O}_1}(X\cap O)$. (Inkluzija $\bigcup_{O\in\mathcal{O}_1}(X\cap O)\subseteq X_U$ je očigledna. Pretpostavimo zatim $x_1\in X_U$. Tada red $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x_1)u_j$ konvergira i postoji okolina O_1 tačke x' takva da $U\in(X\cap O_1,F)^d$, tj. red $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ konvergira za svako $x\in X\cap O_1$. Okolina $O_2=O_1\cup\{x_1\}$ tačke x' očigledno ima svojstvo: $U\in(X\cap O_2,F)^d$. Odatle izlazi da $x_1\in\bigcup_{O\in\mathcal{O}_1}(X\cap O)$, čime je i inkluzija $X_U\subseteq\bigcup_{O\in\mathcal{O}_1}(X\cap O)$ dokazana.) Iz jednakosti $\bigcup_{O\in\mathcal{O}_1}(X\cap O) = X\cap(\bigcup_{O\in\mathcal{O}_1} O)$ sledi onda da je $X_U=X\cap O^*$, gde je O^* maksimalna od svih okolina iz skupa $\mathcal{O}_1$.

Iz definicije dosega dejstva $(X,F)_g^d$ operatora $(X,F)_g$ sledi da je $(X,F)_g^d=\bigcup_{O\in\mathcal{O}}(X\cap O,F)^d$, gde je $\mathcal{O}$ familija svih okolina tačke x'. Lako je, međutim videti da važi i

$$(X,F)_g^d=\bigcup_{i=o}^{\infty}(X\cap O_i,F)^d$$

za svaku prebrojivu okolinsku bazu O_i $(i=0,1,\dots)$ tačke x'.

Na analogan način se definiše i doseg b-dejstva $(X,F)_g^b$ operatora $(X,F)_g$ i zaključuje da je

$$(X,F)_g^b=\bigcup_{i=o}^{\infty}(X\cap O_i,F)^b$$

za svaku prebrojivu okolinsku bazu O_i $(i=0,1,\dots)$ tačke x'.

Nastavljajući u istom smislu, definišemo domen primene $(X,F,x')^c$ postupka $(X,F,x')_g$ kao skup nizova $U=(u_j)$ za koje postoji okolina O tačke x' takva da je $U=(u_j)\in(X\cap O,F,x')^c$. Graničnu vrednost $(X\cap O,F,x')(U)=(X\cap O,F,x')\text{-}\lim u_j$ proglašavamo tada graničnom vrednošću niza $U=(u_j)$ u smislu postupka

$(X,F,x')_g$, tj.

$$(X,F,x')_g(U) = (X,F,x')_g\text{-}\lim u_j = (X\cap O,F,x')\text{-}\lim u_j.$$

Nije teško videti da je granična vrednost nizova u smislu postupka $(X,F,x')_g$ dobro, tj. jedinstveno, definisana, kao i da je

$$(X,F,x')_g^c = \bigcup_{i=o}^{\infty} (X\cap O_i,F,x')^c$$

i

$$(X,F,x')_g^o = \bigcup_{i=o}^{\infty} (X\cap O_i,F,x')^o$$

za svaku prebrojivu okolinsku bazu O_i $(i=o,1,\dots)$ tačke x', pri čemu je sa $(X,F,x')_g^o$ označen domen o-pripreme postupka $(X,F,x')_g$.

(Domen primene postupka $(X,F,x')_g$ može se, ekvivalentno, definisati i kao skup svih nizova $U=(u_j)$ takvih da $\lim\limits_{x\to x'} \sum\limits_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ postoji (što, implicitno, pretpostavlja egzistenciju okoline O tačke x' takve da $U\in(X\cap O,F)^d$).)

U vezi sa definicijom operatora $(X,F)_g$ primetimo još da ona pretpostavlja da skup X ima tačku nagomilavanja x' sa prebrojivom okolinskom bazom, dok u slučaju operatora (X,F) X može biti bilo kakav skup.

Operatore i postupke matričnog tipa u smislu naše nove definicije obeležavaćemo sa $(F)_g$ odnosno $(F')_g$, gde je $F=(f_{ij})$ polazna matrica. U slučaju pak $X=[x_o,x')$ oznake $(X,F)_g$ i $(X,F,x')_g$ zamenjujemo jedinstvenom oznakom $(x_o,x',F)_g$, pri čemu će iz konteksta biti jasno da li je reč o operatoru ili postupku.

Kao i kod postupka tipa (X,F,x'), uporedo sa svakim postupkom $(X,F,x')_g$ može se posmatrati i familija I_g postupka $(G')_g$ izvedenih iz postupka $(X,F,x')_g$. Pokazuje se takođe da tada važi stav analogan stavu 2.5, tj.

STAV. Domen primene postupka $(X,F,x')_g$ jednak je preseku domena primene svih iz njega izvedenih matričnih postupaka $(G')_g$, ili u oznakama $(X,F,x')^c_g = \bigcap_{(G')_g \in I_g} (G')^c_g$.

Dokaz. Inkluzija

$$(X,F,x')^c_g \subseteq \bigcap_{(G')_g \in I_g} (G')^c_g$$

je očigledna. Pokazaćemo da važi i obrnuto

$$\bigcap_{(G')_g \in I_g} (G')^c_g \subseteq (X,F,x')^c_g .$$

U tom cilju pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $U=(u_j) \in \bigcap_{(G')_g \in I_g} (G')^c_g - (X,F,x')^c_g$. $U \notin (X,F,x')^c_g$ znači: ili za svaku okolinu O tačke x' postoji $x \in X \cap O$ takvo da red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ divergira, ili ne postoji $\lim_{x \to x'} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$. Prva mogućnost implicira egzistenciju niza (x_i) tačaka iz X koji konvergira ka x' takvog da red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i)u_j$ divergira za svako $i=0,1,\ldots$. Odatle sledi da $U=(u_j) \notin (G_1')^c_g$, gde je $(G_1')_g$ postupak izveden iz $(X,F,x')_g$ koji odgovara nizu (x_i), što je u kontradikciji sa $U=(u_j) \in \bigcap_{(G')_g \in I_g} (G')^c_g$. Ostatak dokaza našeg stava može se izvesti po šemi primenjenoj u dokazu stava 2.5.

Iz definicija operatora (X,F) i $(X,F)_g$ sledi da je $(X,F)^d \subseteq (X,F)^d_g$ i $(X,F)^b \subseteq (X,F)^b_g$. Isto tako, iz definicija postupaka (X,F,x') i $(X,F,x')_g$ sledi da je $(X,F,x')^c \subseteq (X,F,x')^c_g$ i $(X,F,x')^o \subseteq (X,F,x')^o_g$, kao i da je $(X,F,x')\text{-}\lim u_j = (X,F,x')_g\text{-}\lim u_j$ za svako $U=(u_j) \in (X,F,x')^c$. Dakle, postupak $(X,F,x')_g$ je opštiji od odgovarajućeg postupka (X,F,x'). Niže naveden primer 1.iii pokazuje da pri tome postupak $(X,F,x')_g$ može biti strogo opštiji od postupka (X,F,x').

Budući da je reč o operatorima koji su pridruženi nizu funkcija i koji vrše preslikavanje nizova u funkcije, operatore oblika (X,F) ili $(X,F)_g$ zvaćemo jednim imenom <u>funkcijskim operatorima</u>; iz istih razloga za postupke oblika (X,F,x') ili $(X,F,x')_g$ reći ćemo da su <u>funkcijski postupci</u>. Doslednim korišćenjem indeksa g nastojaćemo da uvek bude jasno da li je reč o jednom ili drugom tipu operatora odnosno postupka.

Jednostavnim primerima pokazaćemo da našom restrikcijom uslova u definicijama operatora (X,F) i postupka (X,F,x') možemo dobiti operator $(X,F)_g$ i postupak $(X,F,x')_g$ znatno šireg dosega dejstva odnosno domena primene. Navodimo i trivijalne primere sličnog odnosa dosega b-dejstva operatora i domena o-primene postupka (u smislu stare i nove definicije).

1.i. <u>Primer</u>. U slučaju matrice

$$F = \begin{pmatrix} f & f & f & f & \dots \\ f_{1o} & f_{11} & o & o & \dots \\ f_{2o} & f_{21} & f_{22} & o & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

gde je $f \neq 0$ i f_{ij} $(i=1,2,\dots;\ j=o,1,\dots;\, j \leq i)$ proizvoljni brojevi, imamo $(F)^d = \left\{ U=(u_j) \;\middle|\; \sum_{j=o}^{\infty} u_j \text{ konvergira} \right\}$ i $(F)_g^d = T$.

1.ii. <u>Primer</u>. Posmatrajmo matricu

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ 1 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{4^2} & \dots \\ 1 & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{3^3} & \frac{1}{4^3} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}.$$

Iz

$$(F)(U) = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{u_j}{(j+1)^i} \quad (i=0,1,\dots)$$

sledi da svaki ograničen niz $U=(u_j)$ pripada dosegu b-dejstva operatora $(F)_g$ (ako je niz $U=(u_j)$ ograničen, onda red $\sum_{j=o}^{\infty}\frac{u_j}{(j+1)^i}$ konvergira za svako $i=2,3,\ldots$ i pri tome je

$$\sup_{i\geqslant 2}\left|\sum_{j=o}^{\infty}\frac{u_j}{(j+1)^i}\right| \leqslant \sup_j|u_j|\cdot\sum_{j=o}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^2}\ ),$$

tj. u našem slučaju je $T^b\subseteq(F)^b_g$. Niz $u_j=\sqrt{j+1}$ $(j=0,1,\ldots)$ pokazuje da je ustvari T^b pravi podskup od $(F)^b_g$. S druge strane, $U=(u_j)\in(F)^b$ zahteva pre svega konvergenciju reda $\sum_{j=o}^{\infty}\frac{u_j}{(j+1)^i}$ za svako $i=0,1,\ldots$, pa prema tome i konvergenciju reda $\sum_{j=o}^{\infty}u_j$. Odatle izlazi da je u posmatranom slučaju skup $(F)^b$ pravi podskup skupa nula-nizova T^o.

1.iii. <u>Primer</u>. Uočimo sada matricu

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ldots & 0 & \ldots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots\end{pmatrix}.$$

Tada $U=(u_j)\in(F')^c$ znači da red $\sum_{j=o}^{\infty}u_j$ konvergira i da niz $\frac{u_o+\ldots+u_i}{i+1}$ $(i=1,2,\ldots)$ konvergira. Odatle izlazi da je ustvari

$$(F')^c=\left\{U=(u_j)\ \middle|\ \sum_{j=o}^{\infty}u_j \text{ konvergira}\right\},$$

i na osnovu toga da je $(F')^c$ pravi podskup skúpa T^o (u I.1.16.i smo videli da je u našem slučaju skup $(F')^c$ prve kategorije u prostoru T^o). Nije, međutim, teško videti da je u posmatranom slučaju $(F')^c_g=(C'_1)^c$, gde je

$$C_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ldots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\end{pmatrix}.$$

$(C_1')^c$ je očigledno domen primene Cesàro-ovog postupka prvog reda, pa je stoga $(F')^c_g$ pravi nadskup skupa konvergentnih nizova T^c (npr., niz $u_j = (-1)^j$ $(j=0,1,\ldots)$ nije konvergetan i pripada skupu $(C_1')^c = (F')^c_g$).

1. iv. Matrica F iz primera 1.iii pokazuje takođe da skup $(X,F,x')^o$ može biti pravi podskup od skupa $(X,F,x')^o_g$. Naime, u datom slučaju je $(F')^o = (F')^c$ pravi podskup skupa T^o, dok je u isto vreme skup $(F')^o_g$ pravi nadskup skupa T^o (sadrži očigledno sve nula- nizove i, naprimer, niz $u_j = (-1)^j$ $(j=0,1,\ldots)$). Na istom primeru vidimo da postupak $(X,F,x')_g$ može biti regularan i onda kada odgovarajući postupak (X,F,x') nema to svojstvo.

Isto tako, domeni postupaka (X,F,x') i $(X,F,x')_g$ ne moraju istovremeno sadržati ni sve ograničene nizove. Naprimer, u slučaju postupaka određenih matricom

$$F = \begin{pmatrix} f_o & f_o & f_o & f_o & \ldots \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & f_2 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix},$$

gde je $f_o \neq 0$ i $\lim\limits_i f_i = 0$, imamo $(F')^c = \left\{ U=(u_j) \,\middle|\, \sum\limits_{j=o}^{\infty} u_j \text{ konvergira} \right\}$ i $(F')^c_g \supseteq T^b$ (nije teško naći primer koji bi pokazao da je za posmatranu matricu $(F')^c_g$ pravi nadskup od T^b). Ista matrica pokazuje da postupci (X,F,x') i $(X,F,x')_g$ ne moraju u isto vreme sadržati ni sve dijadske nizove (skup $(F')^c$ sadrži samo one dijadske nizove koji imaju konačno mnogo jedinica).

1.v. Navedene činjenice su samo neki od razloga da se izučavanju svojstava postupaka tipa $(X,F,x')_g$ posveti posebna pažnja. No, pre toga napomenimo da u slučaju konačnovrsnih matrica i stepenih postupaka (tj. postupaka određenih stepenim redom $s(x) = \sum\limits_{j=o}^{\infty} a_j x^j$ sa poluprečnikom konvergencije, recimo, R, pri čemu se uzima $X = [0,R)$, $f_j(x) = \frac{a_j x^j}{s(x)}$ $(j=0,1,\dots)$ i $x' = R$) definicije operatora $(X,F)_g$ i postupka $(X,F,x')_g$ ne daju nikakav efekat (u odnosu na operator (X,F) odnosno postupak (X,F,x')).(Kod stepenih postupaka to sledi iz poznatog ponašanja stepenih redova u intervalu konvergencije.)

U nastavku iznosimo rezultate za operatore $(X,F)_g$ i postupke $(X,F,x')_g$ analogne rezultatima iz Odeljka 2 za operatore (X,F) odnosno postupke (X,F,x'). U izlaganju se, radi njegove konciznosti, detaljnije zadržavamo samo na bitno novim momentima kod operatora i postupaka generalisanog tipa. U ostalim slučajevima navodimo samo formulacije rezultata, izostavljajući pri tome njihove neposredne posledice analogne posledicama stavova iz prethodnog odeljka.

Kako će se iz daljeg teksta videti, za naš rad sa operatorima i postupcima novoga tipa od presudne važnosti će biti rezultati dve leme: leme 2 i leme 4. Ostali rezultati se, uglavnom, dobijaju kao posledice leme 4 i odgovarajućih stavova za operatore odnosno postupke već proučenog tipa.

2. LEMA. Neka je X koneksan GK-prostor u odnosu na uobičajeno sabiranje nizova i a_{ij} $(i,j=0,1,\dots)$ dvojni niz brojeva sa svojstvom da za svako $i=0,1,\dots$ postoji niz $U^i = (u^i_j) \in X$ takav da red $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}u^i_j$ divergira. Tada je skup nizova $U=(u_j) \in X$ takvih da red $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}u_j$ divergira za svako $i=0,1,\dots$ druge kategorije u prostoru X (te prema napomeni I.1.4.i taj skup nije prazan), a njegov komplement je u istom prostoru skup prve kategorije. (Primetimo da na osnovu leme 2 ponovo dobijamo rezultat primera I.1.16.i. To se vidi ako se, naprimer, uzme $a_{ij} = 1$ $(i,j=0,1,\dots)$ i $u^i_j = \frac{1}{j+1}$ $(i,j=0,1,\dots)$.)

Dokaz. Stavimo

$$A_{ik}(U) = \sum_{j=o}^{k} a_{ij}u_j \qquad (U=(u_j)\in X \ ; \ i,k=0,1,\ldots).$$

Na osnovu toga što je X prostor tipa K, sledi da su funkcionele $A_{ik}(U)$ $(i,k=0,1,\ldots)$ linearne u prostoru X. Iz pretpostavke naše leme izlazi zatim da postoji niz U^i $(i=0,1,\ldots)$ tačaka u prostoru X takav da $\lim\limits_k A_{ik}(U^i)$ ne postoji ni za jedno $i=0,1,\ldots$. Na osnovu teoreme o kondezaciji singulariteta (I.1.17), sledi da je skup nizova $U=(u_j)\in X$ takvih da $\lim\limits_k A_{ik}(U)$ ne postoji ni za jedno $i=0,1,\ldots$, tj. skup nizova $U=(u_j)\in X$ takvih da red $\sum\limits_{j=o}^{\infty} a_{ij}u_j$ divergira za svako $i=0,1,\ldots$, druge kategorije u prostoru X, a njegov komplement je u tom prostoru skup prve kategorije. Naša lema je time dokazana.

3. STAV. Doseg dejstva operatora $(X,F)_g$ sadrži sve nula-nizove ako i samo ako

(1) postoji okolina O tačke x' takva da je

$$\sum_{j=o}^{\infty} |f_j(x)| < \infty \qquad \text{za svako} \quad x\in X\cap O,$$

tj., prema stavu 2.6, ako i samo ako

(1′) postoji okolina O tačke x' takva da doseg dejstva operatora $(X\cap O,F)$ sadrži sve nula-nizove.

Stav 3, pod pretpostavkom da je X skup realnih (kompleksnih) brojeva i da je reč o postupcima konvergencije za nizove realnih brojeva, formulisan je i dokazan u [18], str. 27. U [21], lema 2 i napomena 8, pokazano je da tvrđenje stava važi pod opštijim pretpostavkama o skupu X i tački x' i kada su u pitanju postupci za nizove kompleksnih brojeva. Oba prethodna dokaza koristila su teoremu o kondenzaciji singulariteta na neposredan način. Ovde se to, međutim, čini posredstvom leme 2 kao posebnog rezultata.

Dokaz stava 3. Inkluzija $T^o \subseteq (X,F)_g^d$ je očigledna posledica uslova (1). Pokazaćemo da važi i obrnuta implikacija. Pretpostavimo stoga da za neki operator $(X,F)_g$ imamo $T^o \subseteq (X,F)_g^d$ i da istovremeno ne važi uslov (1), tj. da za svaku okolinu O tačke x' postoji $x_0 \in X \cap O$ tako da je $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x_0)| = \infty$. Odatle sledi egzistencija niza (x_k) elemenata iz X koji konvergira ka x' takvog da je $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x_k)| = \infty$ za svako $k=0,1,\ldots$.

Neka su zatim (r_{kj}) $(k=0,1,\ldots)$ nula-nizovi pozitivnih brojeva takvi da je i $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x_k)\, r_{kj}| = \infty$ za svako $k=0,1,\ldots$ (takvi nizovi postoje, kako je pokazano, naprimer, u [26], str. 292). Stavimo onda $U^k = (u_j^k)$ $(k=0,1,\ldots)$, gde je

$$u_j^k = r_{kj}\, e^{-i \arg\{f_j(x_k)\}} \quad (k,j=0,1,\ldots).$$

Tada su U^k $(k=0,1,\ldots)$ nula-nizovi i red

$$\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x_k)|\, r_{kj} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_k) u_j^k \quad \text{divergira za svako } k=0,1,\ldots$$

Na osnovu leme 2, skup nizova $U=(u_j) \in T^o$ takvih da red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_k) u_j$ divergira za svako $k=0,1,\ldots$ je druge kategorije u prostoru T^o (a njegov komplement je u istom prostoru skup prve kategorije). Prema tome postoji niz $\bar{U} = (\bar{u}_j) \in T^o$ takav da

(+) red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_k)\bar{u}_j$ divergira za svako $k=0,1,\ldots$.

S druge strane, iz pretpostavke $T^o \subseteq (X,F)_g^d$ izlazi $\bar{U} = (\bar{u}_j) \in (X,F)_g^d$, odakle, s obzirom na definiciju skupa $(X,F)_g^d$ i konvergenciju niza (x_k) ka x', sledi egzistencija indeksa k_0 takvog da red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_k)\bar{u}_j$ konvergira za $k \geq k_0$. To je očigledno u kontradikciji sa (+), što dokazuje implikaciju $T^o \subseteq (X,F)_g^d \Rightarrow (1)$ i dovršava dokaz stava 3.

3.i. Iz stava 3 neposredno izlazi da je uslov (1) potreban i dovoljan i da doseg dejstva operatora $(X,F)_g$ sadrži sve konvergentne nizove, odnosno sve ograničene nizove.

4. LEMA. <u>Neka je</u> Y <u>koneksan</u> GK-<u>prostor u odnosu na uobičajeno sabiranje nizova i</u> $Y \subseteq (X,F)_g^d$. <u>Tada postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>takva da za svako</u> $U=(u_j) \in Y$ <u>oblast konvergencije reda</u> $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ <u>sadrži skup</u> $X \cap O$, <u>tj. da je</u> $Y \subseteq (X \cap O,F)^d$.

<u>Dokaz</u>. Uzmimo da pod učinjenim pretpostavkama naše tvrđenje nije tačno, tj. da za svaku okolinu O tačke x' postoji $x \in X \cap O$ i niz $U=(u_j) \in Y$ tako da red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ divergira. Odatle izlazi da postoje i niz (x_i) tačka iz X i niz $U^i=(u_j^i)$ $(i=0,1,\dots)$ tačaka prostora Y takvi da $x_i \to x'$ $(i \to \infty)$ i da red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i)u_j^i$ divergira za svako $i=0,1,\dots$. Na osnovu leme 2, skup tačaka $U=(u_j) \in Y$ takvih da red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i)u_j$ divergira za svako $i=0,1,\dots$ je druge kategorije u prostoru Y (a njegov komplement je skup prve kategorije u istom prostoru). Dakle, postoji $\bar{U} = (\bar{u}_j) \in Y$ tako da red

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i)\bar{u}_j \quad \text{divergira za svako} \quad i=0,1,\dots .$$

Iz definicije dosega dejstva $(X,F)_g^d$ operatora $(X,F)_g$ i konvergencije niza (x_i) ka x' sledi zatim da je to u kontradikciji sa pretpostavkom $Y \subseteq (X,F)_g^d$ (videti završetak dokaza stava 3). Dobijena protivurečnost dokazuje lemu.

Primećujemo da se stav 3 može izvesti i iz leme 4. Naime s obzirom na (ekvivalentan) oblik (1') uslova (1), lema 4 je direktno uopštenje stava 3.

Ovakvo izvođenje, međutim, pored teoreme o kondenzaciji singulariteta (preko leme 4) koristi i stav o reprezentaciji linearne funkcionele u prostoru T^o (izvođenje stava 2.6, na osnovu koga su uslovi (1) i (1') ekvivalentni), što u prvoj varijanti dokaza nije bilo potrebno.

5. STAV. Da bi doseg dejstva operatora $(X,F)_g$ sadržao sve nizove potrebno je i dovoljno je da bude ispunjen uslov:

(2) postoji okolina O tačke x' takva da za svako $x \in X \cap O$ postoji indeks j_x takav da je $f_j(x)=0$ za $j > j_x$,

tj., prema stavu 2.7, da bude ispunjen uslov:

(2') postoji okolina O tačke x' takva da doseg dejstva operatora $(X \cap O,F)$ sadrži sve nizove.

U slučaju matričnog operatora $(F)_g$, $F=(f_{ij})$, uslov (2) znači da postoji indeks i_o takav da vrste sa indeksima $i > i_o$ imaju samo konačno mnogo elemenata različitih od nule, tj. konačnovrsnost matrice od nekog indeksa pa na dalje.

Inače, netrivijalan deo dokaza stava 5 (tj. potrebnost uslova (2)) dobija se uzastopnom primenom leme 4 na prostor $Y=T$ i stava 2.7 na operator $(X \cap O,F)$, gde je O okolina čiju egzistenciju i svojstvo utvrđuje lema 4.

6. STAV. Doseg b-dejstva operatora $(X,F)_g$ sadrži sve nula nizove ako i samo ako

(3) postoji okolina O tačke x' takva da je

$\sup_{x \in X \cap O} \sum_{j=o}^{\infty} |f_j(x)| < \infty$, ili na osnovu stava 2.8, ako i samo ako

(3') postoji okolina O tačke x' takva da doseg b-dejstva operatora $(X \cap O,F)$ sadrži sve nula-nizove.

Napomenimo da stav 6 možemo smatrati poboljšanjem leme 2.1o.i, jer je u formulaciji stava 6 pretpostavka o konvergenciji reda $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ za svako $x \in X$ i svako $U=(u_j) \in T^o$ (tj. pretpostavka $T^o \subseteq (X,F)^d$) izostavljena. To, međutim ne čini lemu 2.10.i suvišnom u ovom izlaganju, pošto se naš dokaz stava 6 u smeru koji nije očigledan (implikacija $T^o \subseteq (X,F)^b_g \Rightarrow (3)$) upravo sastoji u primeni rezultata leme 2.10.i.

Naime, iz pretpostavke $T^o \subseteq (X,F)^b_g$ sledi, prema lemi 4 (ili stavu 3), egzistencija okoline O_1 tačke x' tako da je $T^o \subseteq (X \cap O_1, F)^d$. Tada skup $X \cap O_1$ i njegova tačka nagomilavanja x' ispunjavaju i uslov (A) leme 2.10.i. Primenom leme dolazimo do okoline O_2 tačke x' sa svojstvom

$\sup_{x \in (X \cap O_1) \cap O_2} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty$. Tada se za okolinu O iz uslova (3) očigledno može uzeti skup $O = O_1 \cap O_2$.

Inače, stav 6, u slučaju skupa realnih (ili kompleksnih) brojeva X, dokazan je prethodno u [18], str. 28. Napomena o mogućnosti (ovde iznetih) opštijih pretpostavki, učinjena je u [21], lema 3 i napomena 8.

6.i. Primećujemo da je uslov (3) potreban i dovoljan i da doseg b-dejstva operatora $(X,F)_g$ sadrži sve konvergentne odnosno sve ograničene nizove.

7. STAV. <u>Da bi skup $(X,F)^b_g$ sadržao sve nizove potrebno i dovoljno je da bude ispunjen uslov:</u>

(4) <u>postoje okolina O tačke x' i indeks j_o takvi da važi:</u>

1^o $f_j(x)$ <u>iščezava na</u> $X \cap O$ <u>za svako</u> $j > j_o$;

2^o $\sup_{x \in X \cap O} \sum_{j=0}^{j_o} |f_j(x)| < \infty$,

tj., prema stavu 2.9, <u>da bude ispunjen uslov</u>

(4') <u>postoji okolina O tačke x' takva da skup $(X \cap O, F)^b$ sadrži sve nizove.</u>

<u>Dokaz</u>. Da je uslov (4) dovoljan za $T=(X,F)^b_g$, očigledno je. U nastavku ćemo pokazati da je isti uslov i potreban. U tom cilju ćemo formulisati i dokazati jedan rezultat tipa leme 2.10.i za slučaj skupa svih nizova T. Naime, važi

7.i. LEMA. <u>Ako je</u> $(X,F)^d = T$ (što je ekvivalentno sa uslovom 2.(2)), <u>onda važi ekvivalencija:</u>

(I) Za svako $U=(u_j)\in T$ postoji okolina O_U tačke x' takva da je $\sup\limits_{x\in X\cap O_U}\left|\sum\limits_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j\right|<\infty$.

<u>ako i samo ako</u>

(II) <u>Postoje okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>i indeks</u> j_o <u>takvi da je</u>:

1^o $f_j(x)\equiv 0$ na $X\cap O$ za svako $j>j_o$;

2^o $\sup\limits_{x\in X\cap O}\sum\limits_{j=o}^{j_o}|f_j(x)|<\infty$.

<u>Dokaz</u>. Iskaz (I) je očigledna posledica iskaza (II) (i bez pretpostavke $(X,F)^d = T$). Treba, dakle, još da pokažemo da iz $(X,F)^d=T$ i uslova (I) sledi (II). Pod datim pretpostavkama, na osnovu leme 2.10.i (ili stava 6), postoji okolina O_1 tačke x' takva da je $\sup\limits_{x\in X\cap O_1}\sum\limits_{j=o}^{\infty}|f_j(x)|<\infty$. Pokazaćemo da u isto vreme postoje okolina O_2 tačke x' i indeks j_o takvi da je $f_j(x)\equiv 0$ na $X\cap O_2$ za svako $j>j_o$. Jasno je da će tada okolina $O=O_1\cap O_2$ ispunjavati uslove 1^o i 2^o iskaza (II).

Pretpostavimo stoga da ne postoje okolina O_2 i indeks j_o sa navedenim svojstvima, tj. da za svaku okolinu O tačke x' i svaki indeks <u>i</u> postoje tačka $x_i\in X\cap O$ i indeks $j_i>i$ tako da je $f_{j_i}(x_i)\neq 0$. Prema tome, tada postoje rastući niz indeksa (j_i) i niz (x_i) elemenata iz X koji konvergira ka x' tako da je $f_{j_i}(x_i)\neq 0$ za svako $i=0,1,\dots$. Iz $(X,F)^d = T$, s obzirom na stav 2.7, sledi da je sa

$$(x_i,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x_i)u_j=\sum_{j=0}^{j_{x_i}}f_j(x_i)u_j\quad (U=(u_j)\in T)(i=0,1,\dots)$$

definisan niz linearnih funkcionela na prostoru T, tj. niz linearnih preslikavanja prostora T u prostor realnih (kompleksnih) brojeva. Pretpostavka (I) i $x_i\to x'(i\to\infty)$ impliciraju ograničenost skupa $\{(x_i,F)(U)\mid i=0,1,\dots\}$ za svako $U=(u_j)\in T$. Na osnovu principa uniformne neprekidnosti (stav I.2.14), dobija se da je tada

$$(\ast)\quad \lim_{U\to 0}(x_i,F)(U)=\lim_{U\to 0}\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x_i)u_j=0\quad \text{uniformno po } i=0,1,\dots,$$

gde $U\to 0$ znači $n(U)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}p_j(U)(1+p_j(U))^{-1}\to 0$ $(p_k(U)=|u_k|\ (k=0,1,\dots))$. Dakle, za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takvo da $n(U)<\delta$ povlači

$$|(x_i,F)(U)|=\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x_i)u_j\right|=\left|\sum_{j=0}^{j_{x_i}}f_j(x_i)u_j\right|<\varepsilon\ \text{za svako } i=0,$$

$1,\dots$. Postupkom koji je primenjen u drugom delu dokaza stava 9, može se sada ustanoviti egzistencija indeksa $j_\ast$ takvog da je $f_j(x_i)=0$ za svako $i=0,1,\dots$ i $j>j_\ast$. To je, međutim, u kontradikciji sa uslovom $f_{j_i}(x_i)\neq 0$ za svako $i=0,1,\dots$, gde je (j_i) rastući niz indeksa. Odatle sledi da je naša polazna pretpostavka neodrživa, što dovršava dokaz leme 7.i.

(Primetimo da se relacija $(\ast)$ dobija i kao posledica činjenice da je u posmatranom slučaju skup pseudonormi $p_k(U)$ $(k=0,1,\dots)$ ekvivalentan na T sa skupom pseudonormi $p_k(U)$ $(k=0,1,\dots)$ i $p(U)=\sup_i|(x_i,F)(U)|$ (videti 2.9.i).)

Dokaz potrebnosti uslova (4) može se sada izvesti uzastopnom primenom leme 4 na prostor $Y=T$ i leme 7.i na skup $X\cap O_1$, gde je O_1 okolina dobijena na osnovu leme 4, isto onako kao što je dokaz implikacije $T^o \subseteq (X,F)^b_g \Rightarrow (3)$ (stav 6) dobijen primenom leme 4 i leme 2.10.i.

Primetimo takođe da se lema 7.i zbog svoje prirode (pretpostavka $(X,F)^d = T$ je svojstvo globalnog tipa) mogla uvrstiti u rezultate prethodnog odeljka. (Mesto bi joj ustvari bilo u dokazu stava 2.14 (radi dokaza implikacije $(X,F,x')^c=T \Rightarrow (12)$ b)).) Ovakvim našim izlaganjem i rasporedom rezultata, želeli smo, međutim, da istaknemo da je za dokaz stava 2.14 bilo sasvim dovoljno imati pojam izvedenog postupka i odgovarajuće rezultate za matrične postupke kao i da ukažemo na stvarni tok naših istraživanja u ovoj oblasti.

7.i. U slučaju matričnog operatora $(F)_g$, $F=(f_{ij})$, uslov (4) znači da postoje indeksi i_o i j_o takvi da je $f_{ij} = 0$ za svako $j \geq j_o$ i $i > i_o$, kao i da je $\sup_i |f_{ij}| < \infty$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$. Možemo, dakle, reći da doseg b-dejstva operatora $(F)_g$ sadrži sve nizove ako i samo ako je matrica F oblika

$$F = \begin{pmatrix} f_{oo} & f_{o1} & \cdots & f_{oj_o} & f_{oj_o+1} & f_{oj_o+2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ f_{i_oo} & f_{i_o1} & \cdots & f_{i_oj_o} & f_{i_oj_o+1} & f_{i_oj_o+2} & \cdots \\ f_{i_o+1o} & f_{i_o+11} & \cdots & f_{i_o+1j_o} & 0 & 0 & \cdots \\ f_{i_o+2o} & f_{i_o+21} & \cdots & f_{i_o+2j_o} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

i uz to su kolone sa indeksom $j \leq j_o$ ograničene.

Stavovi 6 i 7, a time stavovi 3 i 5, imaju neposrednu primenu pri dokazu rezultata sa potrebnim i dovoljnim uslovima da domen primene odnosno domen o-primene postupka $(X,F,x')_g$ sadrži neki od skupova T^o, T^c, T^b i T. Pri tome će, kao i u slučaju operatora, osnovna razlika prema postupcima oblika (X,F,x') biti u tome što će sada iz uslova izostati zahtevi globalnog tipa.

Primetimo takođe da pod pretpostavkom leme 4 o prostoru Y i inkluzija $Y \subseteq (X,F,x')_g^c$ povlači egzistenciju okoline O tačke x' takve da je $Y \subseteq (X \cap O,F)^d$ ([27], stav 2; u [28], teoreme 2, i [18], str. 56, Y je domen primene postupka neprekidnog u smislu definicije 8 L. Wlodarski-og [20]). Odatle sledi da je tada $Y \subseteq (X \cap O,F,x')^c \subseteq (X,F,x')_g^c$, pa imamo sledeći rezultat:

Ako je Y *koneksan* GK-*prostor, onda je* $Y \subseteq (X,F,x')_g^c$ $((X,F,x')_g^o)$ *ako i samo ako postoji okolina* O *tačke* x' *takva da je* $Y \subseteq (X \cap O,F,x')^c$ $((X \cap O,F,x')^o)$.

Iz poznatih svojstava prostora T^o, T^c, T^b i T, izlazi da navedeni rezultat važi specijalno kada se za Y uzme neki od tih prostora, što prilikom sledećih stavova neće biti eksplicitno napomenuto.

8. STAV. *Domen primene postupka* $(X,F,x')_g$ *sadrži sve nula-nizove ako i samo ako*

(5) postoji okolina O tačke x' takva da je $\sup\limits_{x \in X \cap O} \sum\limits_{j=o}^{\infty} |f_j(x)| < \infty$

i

(6) *za svako* $k=0,1,\ldots$ *postoji* $\lim\limits_{x \to x'} f_k(x) = a_k$,

tj., prema stavu 2.10, *ako i samo ako*

postoji okolina O *tačke* x' *takva da domen primene postupka* $(X \cap O,F,x')$ *sadrži sve nula-nizove.*

Ako su ispunjeni uslovi (5) *i* (6), *za svaki nula-niz* $U = (u_j)$ *važi* $(X,F,x')_g\text{-}\lim u_j = \sum\limits_{j=o}^{\infty} a_j u_j$.

Primetimo da je uslov (5) nešto jednostavniji od uslova koji bi se dobio formalnom primenom stava 2.10 na postupak $(X\cap O,F,x')$. Lako je, međutim, videti da ta razlika nema principijelan značaj. Slične napomene važe i u slučaju sledećih stavova 9, 10 i 11.

Dokaz stava 8, sa ranije pomenutim uopštenjem pretpostavki o skupu X i tački x', izložen je u [18], str. 29, i [21], teorema 4 i napomena 8. On, ukratko, može teći na sledeći način.

Dovoljnost uslova (5) i (6) i drugi deo stava 8 slede na osnovu polu-o-regularnosti postupka $(X\cap O,F,x')$. Potrebnost uslova (5) i (6) dobija se uzastopnom primenom leme 4 i stava 2.10 (ili: ulov (5) sledi na osnovu stava 6; uslov (6) proizlazi, kao i obično, iz činjenice da su E_k $(k=0,1,\dots)$ nula-nizovi).

Slična obrazloženja mogu se dati i uz dokaze daljih stavova 9, 10 i 11, na čemu se nećemo posebno zadržavati. (Naravno, u novom slučaju se pozivanje vrši na odgovarajuće stavove prethodnog odeljka.)

Primetimo takođe da već uslovi (5) i (6) povlače konvergenciju reda $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$ i nejednakost $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| \leq \sup_{x\in X\cap O}\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$. Štaviše, važi pri tome

$$(+)\qquad \sum_{j=0}^{\infty}|a_j| \leq \inf_{O\in\mathcal{O}}\ \sup_{x\in X\cap O}\ \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| ,$$

gde je $\mathcal{O}$ familija svih okolina tačke x'. Znak "$<$" u nejednakosti (+) imamo, naprimer, kod regularnih postupaka (tada je $\lim_{x\to x'}\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x) = 1$ i, zbog toga, $\sup_{x\in X\cap O}\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)| \geq 1$ za svaku okolinu O tačke x'; u isto vrema je $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| = 0$); znak „=" imamo, recimo, kod postupaka čiji domen primene sadrži sve ograničene nizove (videti stav 10).

9. STAV. Skup $(X,F,x')^c_g$ sadrži sve konvergentne nizove ako i samo ako su ispunjeni uslovi (5), (6) i

(7) <u>postoji</u> $\lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = a,$

ili, prema stavu 2.11, <u>ako i samo ako</u>

<u>postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>takva da skup</u> $(X\cap O,F,x')^c$ <u>sadrži sve konvergentne nizove</u>.

<u>Iz uslova</u> (5), (6) <u>i</u> (7) <u>sledi da je svaki niz</u> $U=(u_j)\in T^c$ $(X,F,x')_g$-<u>konvergentan ka broju</u>

$$(X,F,x')_g(U) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j + u(a - \sum_{j=0}^{\infty} a_j),$$

<u>gde je</u> $u = \lim_j u_j$.

Od posledica stava 9 ističemo samo

9.i. <u>Postupak</u> $(X,F,x')_g$ <u>je regularan ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (5), (6) i (7), <u>i pri tome je</u> $a=1$ i $a_j = 0$ $(j=0,1,\ldots)$.

10. STAV. <u>Domen</u> $(X,F,x')_g$- <u>konvergencije sadrži skup</u> T^b <u>ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (5), (6) <u>i</u>

(8) $$\lim_{x\to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x) - a_j| = 0,$$

ili, prema stavu 2.12, <u>ako i samo ako</u>

<u>postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>takva da domen</u> $(X\cap O,F,x')$-<u>konvergencije sadrži skup</u> T^b.

Iz uslova (5), (6) i (8) sledi da je za svako $U=(u_j)\in T^b$

$$(X,F,x')_g\text{-}\lim u_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j.$$

Kao i u slučaju postupaka (X,F,x'), može se pokazati da je kombinacija uslova (5), (6) i (8) ekvivalentna sa kombinacijom uslova (1) i

(9) postoji niz a_j $(j=0,1,\ldots)$ takav da važi (8), tj. da imamo

II.3

10.i. STAV. <u>Domen</u> $(X,F,x')_g$-<u>konvergencije sadrži skup</u> T^b <u>ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (1) i (9). (Pri tome je niz a_j $(j=0,1,\ldots)$ jednoznačno određen.)

Sličnim postupkom može se ustanoviti tačnost i sledeće varijante stava 10:

10.ii. STAV. <u>Uslov</u>

(10) <u>postoji niz</u> a_j $(j=0,1,\ldots)$ <u>takav da je</u>: 1° $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$ <u>i</u> 2° <u>važi</u> (8),

<u>je potreban i dovoljan da domen</u> $(X,F,x')_g$-<u>konvergencije sadrži</u> skup T^b.

Primetimo da se pri tome pretpostavke o apsolutnoj konvergenciji reda $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$ ne može izostaviti. To se vidi na primeru postupka $(F')_g$ pridruženog matrici $F=(f_{ij})$, gde je

$$f_{ij}=\frac{1}{(j+1)^i}+\frac{1}{j+1}\quad (i,j=0,1,\ldots).$$

U posmatranom slučaju za

$$a_j=\begin{cases}2, & j=0,\\ \frac{1}{j+1}, & j=1,2,\ldots\end{cases}$$

imamo $\sum_{j=0}^{\infty}|f_{ij}-a_j|=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^i}\longrightarrow 0$ $(i\to\infty)$, dok iz $\sum_{j=0}^{\infty}|f_{ij}|=\infty$ za svako $i=0,1,\ldots$ sledi (stav 10.i) da domen primene našeg postupka $(F')_g$ ne sadrži sve ograničene nizove. (znači, uslov (10) 1° nije posledica pretpostavke (8), što pokazuje i jednostavni primer (D. Adamović) postupka $(F')_g$ pridruženog matrici $F=(f_{ij})$ takvoj da je $f_{ij}=a_j$ $(i,j=0,1,\ldots)$ i red $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$ divergira.)

U slučaju matričnih postupaka $(F')_g$, $F=(f_{ij})$, na osnovu stava 10 i stava 2.12.ii, dobija se sledeći rezultat:

10.iii. STAV. Skup T^b sadržan je u $(F')_g^c$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi (6) (za svako $k=0,1,\ldots$ postoji $\lim_i f_{ik} = a_k$) i

(11) postoji indeks i_o takav da red $\sum_{j=o}^{\infty} |f_{ij}|$ konvergira uniformno po $i > i_o$.

U Odeljku III.2 pokazaćemo da uslove iste prirode imamo i u slučaju jedne šire klase postupaka tipa $(X,F,x')_g$.

Posledica 9.i i stav 10 pokazuju da domen primene regularnog postupka $(X,F,x')_g$ ne može sadržati sve ograničene nizove. Primećujemo, međutim, da domen primene regularnog postupka $(X,F,x')_g$ ne može sadržati ni sve dijadske nizove. Naime, iz regularnosti postupka $(X,F,x')_g$ sledi da je postupak $(X \cap O,F,x')$, gde je O okolina iz uslova (5), regularan i opštiji od postupka $(X,F,x')_g$ na skupu T^b. Prema tome, ako bi skup $(X,F,x')_g^c$ sadržao sve dijadske nizove, onda bi to tim pre važilo za skup $(X \cap O,F,x')^c$ što, kako znamo, nije moguće.

S obzirom na poznati odnos postupaka $(X,F,x')_g$, $(X \cap O,F,x')$ i postupka (G') izvedenog iz postupka $(X \cap O,F,x')$, zaključujemo da se konstrukcija dijadskog niza koji nema granicu u smislu datog regularnog postupka $(X,F,x')_g$ može svesti na konstrukciju dijadskog niza koji nema granicu u smislu nekog izvedenog postupka (G'). U slučaju specijalnih postupaka, do takvih dijadskih nizova može se doći i na jednostavniji način. Tako, naprimer, već posmatrani niz $U=(1,0,1,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,\ldots)$ nema granicu u smislu postupka $(F')_g$ pridruženog matrici F iz primera 1.iii (koji je ustvari ekvivalentan Cesàro-ovom postupku prvog reda).

Na osnovu jednostavnog odnosa između dijadskih nizova i nizova čiji su članovi -1 ili 1 (videti 2.12.iv), u prethodnom razmatranju se (s obzirom na aditivnost i homogenost postupka $(X,F,x')_g$) umesto dijadskih nizova mogu uzeti nizovi sa članovima -1 ili 1 (ili, opštije, nizovi čiji su članovi $-a$ ili a, gde je $a\neq 0$).

U odeljku 2 videli smo da postoje postupci tipa (X,F,x') čiji domen primene sadrži sve nizove (stav 2.14 daje njihovu karakterizaciju). Tim pre onda postoje postupci tipa $(X,F,x')_g$ sa skupom T kao domenom primene (postupak $(X,F,x')_g$ je opštiji od odgovarajućeg postupka (X,F,x')).

Ako je $(X,F,x')_g^c = T$, onda na osnovu leme 4 postoji okolina O tačke x' takva da je $(X\cap O,F)^d = T$. Jasno je, međutim, da su tada postupci $(X,F,x')_g$ i $(X\cap O,F,x')$ ekvivalentni, što (prema 2.13.i) implicira egzistenciju indeksa k_o i brojeva a_k $(k=0,1,\dots,k_o)$ tako da je

$$(X,F,x')_g\text{-lim}\ u_j = \sum_{k=o}^{k_o} a_k u_k \qquad \text{za svako} \quad U=(u_j)\in T.$$

Dakle, kao i kod postupka tipa (X,F,x'), u slučaju $(X,F,x')_g^c = T$ članovi niza $U=(u_j)$ sa indeksima većim od nekog fiksiranog broja nemaju uticaja na $(X,F,x')_g$-graničnu vrednost. Kompletnu predstavu o takvim postupcima daje, međutim, sledeći stav.

11. STAV. <u>Da bi domen $(X,F,x')_g$-konvergencije sadržao sve nizove potrebno i dovoljno je da bude ispunjen uslov</u>

(12) <u>postoje okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>i indeks</u> j_o <u>tako da</u>:

1^o $f_j(x)$ <u>iščezava na skupu</u> $X\cap O$ <u>za svako</u> $j>j_o$;

2^o <u>za svako</u> $j=0,1,\dots,j_o$ <u>postoji</u> $\lim\limits_{x\to x'} f_j(x) = a_j$,

tj., prema stavu 2.14, <u>da bude ispunjen uslov</u>

(12′) <u>postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>takva da domen</u> $(X\cap O,F,x')$-<u>-konvergencije sadrži sve nizove.</u>

<u>Ako je uslov</u> (12) <u>ispunjen, za svako</u> $U=(u_j)\in T$ <u>važi</u>

$$(X,F,x')_g\text{-}\lim u_j = \sum_{j=0}^{j_0} a_j u_j .$$

Primetimo da se s obzirom na uslov (12) 2^o okolina O iz uslova (12) može izabrati tako da je još i

$$\sup_{x\in X\cap O} \sum_{j=0}^{j_0} |f_j(x)| < \infty .$$

U slučaju matričnog postupka $(F')_g$, $F=(f_{ij})$, uslov (12) znači da postoje indeksi i_0 i j_0 takvi da je $f_{ij}=0$ za svako $i>i_0$ i $j>j_0$, tj. da je matrica F oblika navedenog u 7.i, i da pri tome kolone sa indeksom $j\leq j_0$ formiraju konvergentne nizove.

4. <u>Struktura domena primene funkcijskih postupaka</u>

1. Iz napred navedenih definicija sledi da su doseg dejstva i doseg b-dejstva operatora (X,F) i $(X,F)_g$, kao i domen primene i domen o-primene postupka (X,F,x') i $(X,F,x')_g$, linearni prostori u odnosu na uobičajeno sabiranje nizova i množenje niza skalarom. Moguća topološka struktura tih skupova i stepen njene saglasnosti i povezanosti sa pomenutom algebarskom strukturom zavise od svojstva polaznih elemenata X, F, x'. Prva istraživanja te vrste odnosila su se na strukturu domena primene matričnih postupaka tipa (F'). Ona počinju sa radovima tzv. poljske škole (Banach, Mazur, Orlicz). Tako je Mazur [29] pokazao da je domen primene $(F')^c$ normalnog postupka (F') (postupka određenog matricom $F=(f_{ij})$ takvom da je $f_{ij}=0$ za $i<j$ i $f_{ii}\neq 0$ $(i=0,1,\ldots)$) prostor B u odnosu na normu

$$n(U) = \sup_i \left| \sum_{j=0}^{i} f_{ij} u_j \right| \quad (U=(u_j) \in (F')^c).$$

(Nije, međutim, teško videti da je tada $(F')^c$ jedan BK-prostor, kao i da su u datom slučaju doseg b-dejstva $(F)^b$ operatora (F) i domen o-primene $(F')^o$ postupka (F') takođe prostori BK u odnosu na posmatranu normu; u isto vreme doseg dejstva $(F)^d$ operatora (F) je čitav skup T i, na osnovu napomene I.2.21, "najviše" je prostor B_oK. Na osnovu toga zaključujemo da u opštem slučaju pri istim polaznim elementima X, F, x' "najviša moguća" algebarsko-topološka struktura posmatranih skupova može biti različita.)

Pokušaji da se domen primene proizvoljnog matričnog postupka snabde strukturom B-prostora nisu urodili plodom (sa razlogom, kako ćemo videti u pododeljku 3). Najviše što se u tom smislu postiglo (koliko nam je poznato) sadržano je u niže navedenim rezultatima 1.i i 1.iii (videti, npr., [36], str. 38).

1.i. ([30] i [31]: 1.3.3, 1.3.4 i 1.3.5) Ako je matrica $F=(f_{ij})$ konačnovrsna (tj. za svako $i=0,1,\ldots$ postoji indeks j_i takav da je $f_{ij}=0$ za $j > j_i$) i tipa U (sistem jednačina $\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij} u_j = 0$ $(i=0,1,\ldots)$ ima niz $U=(u_j)=0$ kao jedino rešenje), onda su domen primene i domen o-primene $(F')^c$ odnosno $(F')^o$ postupka (F') prostori BK u odnosu na normu

$$n(U)= \sup_i \left| \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij} u_j \right| = \sup_i \left| \sum_{j=0}^{j_i} f_{ij} u_j \right| \quad (U=(u_j) \in (F')^c \ ((F')^o)).$$

Mi ćemo pokazati da je pod navedenim pretpostavkama o matrici $F=(f_{ij})$ i doseg b-dejstva operatora (F) prostor BK u odnosu na posmatranu normu $n(U)$. (Što se tiče dosega dejstva operatora (F), on se u datom slučaju podudara sa skupom svih nizova T (zbog konačnovrsnosti matrice F).) Pri tome ćemo, sem na završetku, iskoristiti šemu dokaza Mazur-a i Orlicz-a ([31], 1.3.3) primenjenu u slučaju skupova $(F')^c$ i $(F')^o$.

Treba, dakle, dokazati da iz $U^k=(u_j^k)\in(F)^b$ i

(a) $n(U^k-U^\ell)=\sup_i\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}(u_j^k-u_j^\ell)\right|\to 0 \quad (k\to\infty,\ \ell\to\infty)$

sledi egzistencija niza $U=(u_j)\in(F)^b$ takvog da

(a') $n(U^k-U)=\sup_i\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}(u_j^k-u_j)\right|\to 0 \quad (k\to\infty).$

U tom cilju primetimo da je (na osnovu (a)) za svako $i=0,1,\ldots$ niz $\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j^k$ $(k=0,1,\ldots)$ Cauchy-ev u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva. Otuda za svako $i=0,1,\ldots$ postoji $\lim_k\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j^k=A_i$. Na uobičajen način dolazi se onda do zaključka da važi

(b) $\sup_i\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j^k-A_i\right|\to 0 \quad (k\to\infty).$

Pokazaćemo da za tako dobijen niz (A_i) postoji niz $U=(u_j)$ takav da je za svako $i=0,1,\ldots$ $\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j=A_i$, tj. da sistem jednačina $\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j=A_i$ $(i=0,1,\ldots)$ ima rešenje. To ćemo izvesti primenom Toeplitz-ovog rezultata (npr., [31], 1.2):

Neka je $F=(f_{ij})$ konačnovrsna matrica. Tada sistem

$$\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j=A_i \quad (i=0,1,\ldots)$$

ima rešenje $U=(u_j)$ ako i samo ako je $\sum_{i=0}^{p}h_iA_i=0$ za svako $\underline{p}$ i svaki sistem brojeva h_i $(i=o,1,\ldots,p)$ takav da je $\sum_{i=0}^{p}h_if_{ij}=$ $=0$ $(j=0,1,\ldots)$.

Pretpostavimo stoga da za neki sistem brojeva h_i $(i=0,1,\ldots,p)$ važe jednakosti $\sum_{i=0}^{p}h_if_{ij}=0$ $(j=0,1,\ldots)$. Tada je za svako $k=0,1,\ldots$ $\sum_{j=0}^{\infty}u_j^k\sum_{i=0}^{p}h_if_{ij}=0$, odnosno $\sum_{i=0}^{p}h_i\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j^k=0$.

Iz definicije brojeva A_i $(i=0,1,\ldots)$ sledi onda da je $\sum_{i=0}^{p}h_iA_i=$ $=0$. Na osnovu navedene teoreme Toeplitz-a, postoji niz $U=(u_j)$ takav da je $\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}u_j=A_i$ $(i=0,1,\ldots)$. Prema (b), tako dobijeni niz $U=(u_j)$ zadovoljava relaciju (b′) $$\sup_i \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}(u_j^k - u_j)\Big| \to 0 \quad (k\to\infty),$$

pa je (s obzirom na definiciju norme $n(U)$) do završetka dokaza ostalo samo da se ustanovi da $U=(u_j)\in(F)^b$, tj. da je

$$\sup_i \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j\Big| < \infty .$$

To je, međutim, neposredna posledica nejednakosti

$$\Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}u_j\Big| \leq \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}(u_j - u_j^k)\Big| + \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}u_j^k\Big| \leq$$

$$\leq \sup_i \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}(u_j - u_j^k)\Big| + \sup_i \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j^k\Big| \quad (m,k=0,1,\dots),$$

pretpostavke $U^k=(u_j^k)\in(F)^b$ $(k=0,1,\dots)$ i relacije (b′). (Inače, pretpostavka da je matrica $F=(f_{ij})$ tipa U koristi se pri utvrđivanju činjenice da je funkcionela $n(U)$ homogena norma.)

U slučaju skupa $(F')^c$ dokaz se razlikuje samo u tome što na kraju treba ustanoviti da $U=(u_j)\in(F')^c$, tj. da niz $(F)(U)= \sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j$ $(i=0,1,\dots)$ konvergira. Za to je dovoljno pokazati da je isti niz Cauchy-ev u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva. To se sada dobija kao posledica nejednakosti

$$\Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{i_1j}u_j - \sum_{j=o}^{\infty} f_{i_2j}u_j\Big| \leq \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{i_1j}(u_j - u_j^k)\Big| +$$

$$+ \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{i_1j}u_j^k - \sum_{j=o}^{\infty} f_{i_2j}u_j^k\Big| + \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{i_2j}(u_j^k - u_j)\Big| \leq$$

$$\leq 2\sup_i \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}(u_j^k - u_j)\Big| + \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{i_1j}u_j^k - \sum_{j=o}^{\infty} f_{i_2j}u_j^k\Big| \quad (i_1,i_2,k=0,1,\dots),$$

pretpostavke $U^k=(u_j^k)\in(F')^c$ $(k=0,1,\dots)$ i relacije (b′).

Kada je reč o skupu $(F')^o$, zaključak $U=(u_j)\in(F')^o$, tj. konvergencija ka nuli niza $(F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j$ $(i=0,1,\dots)$, dobija se primenom nejednakosti

(c) $$\Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}u_j\Big| \leq \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}(u_j - u_j^k)\Big| + \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}u_j^k\Big| \leq$$

$$\leq \sup_i \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}(u_j^k - u_j)\Big| + \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}u_j^k\Big| \quad (m,k=0,1,\dots),$$

pretpostavke $U^k=(u_j^k)\in(F')^o$ $(k=0,1,\dots)$ i relacije (b'). (Poslednja dva postupka se praktično svode na dokaz da su skupovi $(F')^c$ i $(F')^o$ zatvoreni u prostoru $((F)^b,n)$.)

Što se tiče tvrđenja da su tako dobijeni B-prostori tipa K, njegova tačnost se dobija primenom niže navedenih stavova 2.iv i 2.v (str. 89) i sledećeg rezultata (npr., [2], glava III, teorema 6):

1.ii. Neka su (X,n) i (X,n_1) F-prostori i neka je pri tome identično preslikavanje $I(x)=x$ neprekidno preslikavanje prostora (X,n) na prostor (X,n_1). Tada važi i obrnuto, tj. $I(x)=x$ je i neprekidno preslikavanje prostora (X,n_1) na prostor (X,n). (Dakle, tada su norme $\underline{n}$ i n_1 ekvivalentne.)

1.iii. ([32], [33], [34] i [35]) Ako je matrica $F=(f_{ij})$ reverzibilna (što znači da za svako $V=(v_j)\in T^c$ postoji tačno jedan niz $U=(u_j)$ takav da je $(F)(U)=V$, tj. $\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j = v_i$ $(i=0,1,\dots)$, onda je domen primene $(F')^c$ postupka (F') prostor BK u odnosu na normu

$$n(U) = \sup_i \Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j\Big| \quad (U=(u_j)\in(F')^c).$$

Tačnost iskaza 1.iii (videti, npr., [36], str. 38) sledi iz činjenice da je pod učinjenom pretpostavkom o matrici $F=(f_{ij})$ preslikavanje

$$U=(u_j)\in(F')^c \longrightarrow \sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j \quad (i=0,1,\dots)\in T^c$$

jedna ekvivalencija (aditivna biunivoka korespondencija sa svojstvom da su norme slike i originala jednake) B^*-prostora $((F')^c,n)$ i B-prostora T^c.

Na isti način se može konstatovati da iz reverzibilnosti matrice $F=(f_{ij})$ sledi da je i domen o-primene $(F')^o$ postupka (F') prostor B u odnosu na posmatranu normu $n(U)$. (Ustvari, dovoljno je ustanoviti da je tada skup $(F')^o$ zatvoren u prostoru

$((F')^c, n)$, što se može izvesti primenom nejednakosti (c).)

Inače, da su tako dobijeni B-prostori tipa K, pokazuje se isto kao u slučaju opisanom u 1.i. Primetimo takođe da se i pri reverzibilnosti matrice $F=(f_{ij})$ može desiti da doseg dejstva $(F)^d$ operatora (F) ima strukturu prostora B_o kao najvišu moguću (u ranije navedenom smislu). To vidimo na primeru normalne matrice $F=(f_{ij})$ koja je uvek reverzibilna (štaviše, tada sistem jednačina $\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j = v_i$ $(i=0,1,\ldots)$ ima tačno jedno rešenje $U=(u_j)$ za svaki niz $V=(v_j)\in T$) i pri tome je doseg dejstva operatora (F) sastavljen od svih nizova.

2. Već nula-matrica dokazuje egzistenciju matrice F takve da se doseg dejstva $(F)^d$ operatora (F) ne može snabdeti strukturom prostora BK. Manje trivijalan je primer matrice $F=(f_{ij})$ sa svojstvom: postoji indeks j_o takav da je $f_{ij}= 0$ za svako $i=0,1,\ldots$ i $j>j_o$. Konačnovrsne (specijalno, normalne) matrice predstavljaju još širu klasu matrica F takvih da se doseg dejstva $(F)^d$ operatora (F) ne može snabdeti strukturom prostora BK.

Primer matrica $F=(f_{ij})$ tipa

$$(\ast) \qquad F = \begin{pmatrix} f_{oo} & f_{o1}\cdot\cdot f_{oj_o} & 0 & 0 & \ldots \\ f_{1o} & f_{11}\cdot\cdot f_{1j_o} & 0 & 0 & \ldots \\ f_{2o} & f_{21}\cdot\cdot f_{2j_o} & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot\ \cdot\cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix}$$

i sa svojstvom $\sup_i |f_{ij}|<\infty$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$ dokazuje egzistenciju matrice F takve da se doseg b-dejstva $(F)^b$ operatora (F) ne može snabdeti strukturom prostora BK. Matrica $F=(f_{ij})$ tipa $(\ast)$ kod koje postoje $\lim_i f_{ij} = a_j$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$ pokazuje egzistenciju matrice $F=(f_{ij})$ takve da domen primene $(F')^c$ postupka (F') ne može dobiti strukturu prostora BK. U slučaju $a_j=0$ $(j=0,1,\ldots,$ j_o) imamo primer matrice F takve da domen o-primene $(F')^o$ postupka (F′) ne možemo snabdeti strukturom prostora BK.

Navedeni primeri pokazuju da, pri zahtevu da dobijeni prostori imaju svojstvo K, struktura B-prostora nije adekvatna odnosima u dosegu dejstva i dosegu b-dejstva matričnih operatora, kao ni odnosima u domenu primene i domenu o-primene matričnih postupaka. (Potpunosti radi, napomenimo da su se prva istraživanja te vrste odnosila na domen primene matričnih postupaka, prvenstveno.) Stavovi 2.i, 2.iv i 2.v pokazuju da je sa prostorima B_o (tj., prema stavu I.2.15, sa kompletno metrizabilnim lokalno konveksnim topološkim linearnim prostorima) dobijena složena matematička struktura koja u slučaju matrica u potpunosti odgovara situaciji u oblasti skupova nizova koji predstavljaju osnovne objekte naših istraživanja. Značaj te činjenice nije samo u tome što su B_o-prostori odgovarajući za matrične operatore i postupke (što bi se moglo reći već za F-prostore), već više u tome što B_o-prostori (zahvaljujući lokalnoj konveksnosti) predstavljaju veoma efikasnu algebarsko-topološku strukturu. Oni, naime, zadržavaju mnoga dobra svojstva B-prostora (videti, npr., stav I.2.17), što sa F-prostorima nije slučaj. To ih, pored njihove opštosti, čini podesnim za rad, pogotovu u nekim oblastima teorije postupaka konvergencije (naprimer, pri ispitivanju perfektnosti permanentnih matričnih postupaka).

2.i. Doseg dejstva $(F)^d$ operatora (F) je prostor B_oK u odnosu na normu

$$n(U)=\sum_{j=o}^{\infty}2^{-j}|u_j|(1+|u_j|)^{-1}+\sum_{i=o}^{\infty}2^{-i}\sup_k\Big|\sum_{j=o}^{k}f_{ij}u_j\Big|\Big(1+\sup_k\Big|\sum_{j=o}^{k}f_{ij}u_j\Big|\Big)^{-1}$$

$$(U=(u_j)\in(F)^d),$$

pri čemu se može uzeti da familiju homogenih pseudonormi iz definicije prostora B_o sačinjavaju pseudonorme

$$p_j(U)=|u_j|\,(j=0,1,\ldots)$$

$\underline{i}$

$$p_i^1(U) = \sup_k \left|\sum_{j=0}^{k} f_{ij} u_j\right| \quad (i=0,1,\ldots).$$

(U svojstvu homogenih pseudonormi mogu se uzeti takođe

$$p_j(U)=|u_0|+|u_1|+\ldots+|u_j| \quad (j=0,1,\ldots)$$

i

$$p_i^1(U)=\sup_k\left|\sum_{j=0}^{k} f_{0j}u_j\right| + \cdots + \sup_k\left|\sum_{j=0}^{k} f_{ij}u_j\right| \quad (i=0,1,\ldots) ;$$

ili:

$$p_j(U)=\max(|u_0|,|u_1|,\ldots,|u_j|) \quad (j=0,1,\ldots)$$

i

$$p_i^1(U)=\max\left(\sup_k\left|\sum_{j=0}^{k} f_{0j}u_j\right| , \ldots , \sup_k\left|\sum_{j=0}^{k} f_{ij}u_j\right|\right) \quad (i=0,1,\ldots) ;$$

jasno je, međutim, da se može navesti i mnogo drugih izbora najviše prebrojivih familija homogenih pseudonormi ekvivalentnih sa onom koja je (zbog jednostavnosti) ušla u iskaz stava 2.i.)

(Iako je o tome već bilo reči (delom) u I.2.5, zbog toga što istoj napomeni ima mesta i uz više rezultata daljeg izlaganja, primetimo takođe da promena reda navođenja posmatranih pseudonormi, kao i njihovo grupisanje u jedan ili više drugačijih nizova, dovode "najviše" do izomorfnih prostora B_0K (što nas do određenog stepena oslobađa obaveze da o načinu zapisivanja korišćene familije pseudonormi vodimo računa).)

Dokaz 2.i može se izvesti neposredno, tj. tako što će se (s obzirom na vezu između norme $\underline{n}$ i pseudonormi p_j $(j=0,1,\ldots)$ i p_i^1 $(i=0,1,\ldots)$) pokazati da $U^k=(u_j^k)\in(F)^d$ $(k=0,1,\ldots)$

$$p_j(U^k-U^\ell)\to 0 \quad (k\to\infty,\ell\to\infty) \quad (j=0,1,\ldots)$$

i

$$p_i^1(U^k-U^\ell)\to 0 \quad (k\to\infty,\ell\to\infty) \quad (i=0,1,\ldots)$$

povlače egzistenciju niza $U=(u_j)\in(F)^d$ takvog da

$$p_j(U^k-U)\to 0 \quad (k\to\infty) \quad (j=0,1,\ldots)$$

i

$$p_i^1(U^k-U)\to 0 \quad (k\to\infty) \quad (i=0,1,\ldots).$$

Pri tome, prvi sabirak u izrazu za normu $n(U)$ implicira svojstvo K kod tako dobijenog B_0-prostora. Detalje dokaza ne navodimo budući da se stav 2.i javlja kao posledica stava III.3.5 koji se odnosi na jednu širu klasu postupaka. Jedan drugi dokaz stava 2.i dobija se primenom sledeća dva rezultata Zeller-a.

2.ii. ([6], stav 4.10 a)) Neka su dati matrica $F=(f_{ij})$ i B_oK-prostor $(Y; q_o,q_1,\dots)$. Tada je linearni prostor X nizova $U=(u_j)$ takvih da transformacija $(F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j$ $(i=0,1,\dots)$ postoji i pripada skupu Y B_oK-prostor u odnosu na pseudonorme $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\dots)$, $p_i^1(U)=\sup_k\left|\sum_{j=o}^{k} f_{ij}u_j\right|$ $(i=0,1,\dots)$ i $q_k((F)(U))$ $(k=0,1,\dots)$. Ako je matrica F konačnovrsna, onda se pseudonorme $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\dots)$ mogu izostaviti. Kada je uz to matrica F tipa U, i pseudonorme $p_j(U)$ $(j=0,1,\dots)$ mogu biti izostavljene. (U poslednjem slučaju svojstvo K sledi na osnovu 1.ii.)

Neka su $p_j(x)$ $(j=0,1,\dots)$ homogene pseudonorme definisane na linearnom prostoru X. Tada kažemo da niz (x_k) konvergira ka tački $\underline{x}$ u prostoru $(X; p_o,p_1,\dots)$ ako za svako $j=0,1,\dots$ $x_k \to x$ $(k\to\infty)$ u prostoru (X,p_j). Na analogan način se uvodi i pojam Cauchy-evog niza u prostoru $(X; p_o,p_1,\dots)$. Time je u prostoru $(X; p_o,p_1,\dots)$ određena klasa konvergentnih kao i klasa Cauchy-evih nizova, ili: u prostoru $(X; p_o,p_1,\dots)$ uveden je pojam konvergencije[1]. Može se desiti da se pojam konvergencije ne menja ispuštanjem pojedinih pseudonormi p_j. Koje pseudonorme se mogu izostaviti vidi se iz sledećeg stava ([6], stav 3.3):

---

[1] Budući da se ovde upotrebljena oznaka $(X; p_o,p_1,\dots)$ podudara sa onom koja je korišćena za označavanje B_o^*-prostora X sa homogenim pseudonormama $p_o,p_1,\dots$ (videti pododeljak I.2.2), to, da ne bi bilo zabune, ističemo da je sada reč o opštijem pojmu topološkog linearnog prostora. Takođe napominjemo da je ovde navedenom definicijom konvergencije uvedena u X topologija saglasna sa njegovom algebarskom strukturom, kao i da se (odgovarajući) deo primedbe I.2.5 može iskazati na sledeći način:

B_o^*-prostor $(X; p_o,p_1,\dots)$ je kompletan ako i samo ako je prostor $(X; p_o,p_1,\dots)$, u smislu nove definicije, kompletan.

2.iii. Prostori $(X;\ p_o,p_1,\ldots;\ q_o,q_1,\ldots)$ i $(X;\ p_o,p_1,\ldots)$ imaju isti pojam konvergencije ako i samo ako je za svako $i=0,1,\ldots$ pseudonorma $q_i(x)$ neprekidna u prostoru $(X;\ p_o,p_1,\ldots)$.

Kao posledicu dobijamo: Ako su homogene pseudonorme $q_i(x)$ $(i=0,1,\ldots)$ neprekidne u prostoru $(X;\ p_o,p_1,\ldots)$ i ako je pri tome $(X;\ p_o,p_1,\ldots;\ q_o,q_1,\ldots)$ prostor B_o, onda je i $(X;\ p_o,p_1,\ldots)$ prostor B_o.

U slučaju linearnog prostora $(F)^d$, primenom prvog rezultata Zeller-a (uzimajući $Y=T$ i $q_i(V)=|v_i|$ $(i=0,1,\ldots)$) dolazimo do zaključka da je $(F)^d$ prostor B_o u odnosu na pseudonorme

$$p_j(U)=|u_j|\quad (j=0,1,\ldots),$$

$$p_i^1(U)=\sup_k\Big|\sum_{j=o}^{k} f_{ij}u_j\Big|\quad (i=0,1,\ldots)$$

i

$$p_m^2(U)=q_m((F)(U))=\Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}u_j\Big|\quad (m=0,1,\ldots).$$

Iz $p_m^2(U)\leqslant \sup\limits_k\Big|\sum\limits_{j=o}^{k} f_{mj}u_j\Big| = p_m^1(U)$ $(m=0,1,\ldots)$ sledi da je za svako $m=0,1,\ldots$ pseudonorma $p_m^2(U)$ neprekidna u prostoru

$$((F)^d;\ p_o,p_1,\ldots;\ p_o^1,p_1^1,\ldots)\ .$$

Primenom drugog rezultata Zeller-a (odnosno njegove posledice) dolazimo do zaključka da je i $((F)^d;\ p_o,p_1,\ldots;\ p_o^1,p_1^1,\ldots)$ prostor B_o, što je trebalo pokazati.

Primećujemo da pri konačnovrsnosti matrice F i pseudonorme $p_i^1(U)=\sup\limits_k\Big|\sum\limits_{j=o}^{k} f_{ij}u_j\Big|$ $(i=0,1,\ldots)$ možemo izostaviti. To sledi iz činjenice da je tada (i, na osnovu stava II.2.7, samo tada) $(F)^d=T$. Do istog zaključka može se doći i bez korišćenja poslednje jednakosti. Naime, konačnovrsnost matrice $F=(f_{ij})$ znači da svakom $i=0,1,\ldots$ odgovara indeks j_i tako da je $f_{ij}=0$ za $j>j_i$. Iz nejednakosti

$$p_i^1(U)=\sup_k\Big|\sum_{j=o}^{k} f_{ij}u_j\Big| = \max_{o\leqslant k\leqslant j_i}\Big|\sum_{j=o}^{k} f_{ij}u_j\Big|\leqslant \sum_{j=o}^{j_i}|f_{ij}|\ p_j(U)$$

$(i=0,1,\ldots)$ sledi da je za svako $i=0,1,\ldots$ pseudonorma $p_i^1(U)$ neprekidna u prostoru $((F)^d;\ p_o,p_1,\ldots)$. Tačnost našeg tvrđenja sledi onda primenom stava 2.i i posledice stava 2.iii.

Na osnovu stava 2.ii Zeller-a, u slučaju konačnovrsne matrice $F=(f_{ij})$ sa svojstvom $(F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j\ (i=0,1,\ldots)=0$ $\Longrightarrow u_j=0\ (j=0,1,\ldots)$, tj. $U=(u_j)=0$, možemo izostaviti pseudonorme $p_j(U)\ (j=0,1,\ldots)$ i $p_i^1(U)\ (i=0,1,\ldots)$, tj. tada je $(F)^d$ prostor B_oK u odnosu na pseudonorme

$$p_m^2(U)=\Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{mj}u_j\Big|\ (m=0,1,\ldots).$$

2.iv. Doseg b-dejstva $(F)^b$ operatora (F) je prostor B_oK u odnosu na homogene pseudonorme $p_j(U)=|u_j|\ (j=0,1,\ldots)$, $p_i^1(U)=$ $=\sup_k\Big|\sum_{j=o}^{k} f_{ij}u_j\Big|\ (i=0,1,\ldots)$ i $p(U)=\sup_i\Big|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j\Big|\ (U=(u_j)\in(F)^b)$.

Dokaz ovog stava može ići neposredno, tj. tako što će se pokazati da se u B_o^*-prostoru $((F)^b;\ p_o,p_1,\ldots;\ p_o^1,p_1^1,\ldots;\ p)$ skup Cauchy-evih nizova podudara sa skupom konvergentnih nizova. Na tome se nećemo zadržavati, jer će takva procedura biti primenjena pri dokazu generalizacije stava 2.iv — stava III.3.6. Drugi dokaz stava 2.iv dobija se primenom stava 2.ii Zeller-a, uzimajući pri tome da je $(Y;\ q_o,q_1,\ldots)$ prostor T^b sa uobičajenom topologijom.

Na osnovu stava 2.ii, u slučaju konačnovrsnosti matrice $F=(f_{ij})$ $((F)^b;\ p_o,p_1,\ldots;\ p)$ je takođe prostor B_oK. Ako se uz to pretpostavi i svojstvo U matrice F, onda iz istog stava sledi da je tada $((F)^b,\ p)$ prostor BK.

2.v. Domen primene (o-primene) $(F')^c$($(F')^o$) postupka (F') je prostor B_oK u odnosu na pseudonorme $p_j(U)\ (j=0,1,\ldots)$, $p_i^1(U)\ (i=0,1,\ldots)$ i $p(U)$ posmatrane u 2.iv.

Direktan dokaz stava 2.v može se izvesti po šemi dokaza njegove generalizacije — stava III.3.7 (praktično, treba samo ustanoviti da je skup $(F')^c$ $((F')^o)$ zatvoren u prostoru $((F)^b;\ p_o,p_1,\dots;\ p_o^1,p_1^1,\dots;\ p)$). Dokaz Zeller-a zasnovan je na primeni stava 2.ii, pri čemu se u ulozi prostora $(Y;\ q_o,q_1,\dots)$ nalazi B-prostor T^c (T^o) ([6], stav 5.1).

(U vezi sa 2.i, 2.iv i delom 2.v koji se odnosi na skup $(F')^o$, napominjemo da je naš"doprinos" samo u tome što smo napred pomenute opšte rezultate Zeller-a primenili na tri konkretnije situacije.)

3. Stavovi 2.i, 2.iv, 2.v i stav I.2.16 omogućavaju da navedemo sasvim netrivijalne primere matrica takvih da doseg dejstva i doseg b-dejstva odgovarajućih operatora kao i domen primene i domen o-primene odgovarajućih postupaka nije moguće snabdeti strukturom prostora BK. U tom cilju posmatrajmo matricu $F=(f_{ij})$ takvu da je postupak (F') o-regularan, tj. regularan za nula-nizove. Formirajmo zatim matricu $G=(g_{ij})$ na sledeći način: za $i,j=0,1,\dots$ stavimo

$$g_{ij}=\begin{cases} f_{i\ell}\ , & \text{kada je } j=2\ell \\ 0\ , & \text{u slučaju } j=2\ell+1. \end{cases}$$

Iz o-regularnosti postupka (F') očigledno sledi o-regularnost tako dobijenog postupka (G'). Prema stavu 2.i, doseg dejstva $(G)^d$ operatora (G) je prostor B_oK u odnosu na pseudonorme $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\dots)$ i $p_i^1(U)=\sup_k\left|\sum_{j=0}^{k} g_{ij}u_j\right|$ $(i=0,1,\dots)$. Pretpostavimo da je u isto vreme $(G)^d$ prostor BK u odnosu na neku homogenu normu $n_1(U)$. Prema napomeni I.2.11.i, tada je familija pseudonormi $p_j(U)$ $(j=0,1,\dots)$ i $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\dots)$ ekvivalentna sa normom $n_1(U)$, tj. prostori $((G)^d;\ p_o,p_1,\dots;\ p_o^1,p_1^1,\dots)$ i $((G)^d,n_1)$ su izomorfni. Na osnovu stava I.2.16, postoje indeksi j_o i i_o takvi da su pseudonorme

$$n_2(U) = \max\,(p_o(U),\ldots,p_{j_o}(U);\ p_o^1(U),\ldots,p_{i_o}^1(U)\ )$$

i $n_1(U)$ ekvivalentne. Tada je i funkcionela $n_2(U)$ jedna homogena norma. Odatle izlazi da $n_2(U)=0$, tj. $p_j(U)=0$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$ i $p_i^1(U)=0$ $(i=0,1,\ldots,i_o)$ povlači $U=0$. S obzirom na definicije pseudonormi $p_j(U)$ i $p_i^1(U)$, to znači da $U=(u_j)\in(G)^d$ i

(d) $u_j=0$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$ i $\sum_{j=o}^{k} g_{ij}u_j=0$ $(i=0,1,\ldots,i_o;k=0,1,\ldots)$ povlači $u_j=0$ $(j=0,1,\ldots)$.

Pokazaćemo da u posmatranom slučaju taj uslov nije ispunjen. Uzmimo, naime, niz $U=(u_j)$ određen na sledeći način: $u_j=0$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$ i

$$u_j=\begin{cases}0\ , & j=2\ell\\ \dfrac{1}{\ell+1}\ , & j=2\ell+1\end{cases}\qquad (j=j_o+1,j_o+2,\ldots)\ .$$

Tako definisan niz $U=(u_j)\in(G)^d$ (činjenica da je U nula-niz i o-regularnost postupka (G') impliciraju $U=(u_j)\in(G')^o$; u slučaju pak matrica važi inkluzija $(G')^o\subseteq(G')^c\subseteq(G)^b\subseteq(G)^d$) i zadovoljava uslov (d), ali ne i relaciju $U=0$, tj. $u_j=0$ $(j=0,1,\ldots)$.

Dobijena kontradikcija pokazuje da se doseg dejstva $(G)^d$ posmatranog operatora (G) ne može snabdeti strukturom prostora BK. Štaviše, iz navedenog dokaza je jasno da uočeni B_oK-prostor $((G)^d;\ p_o,p_1,\ldots;\ p_o^1,p_1^1,\ldots)$ nije ni izomorfan nekom B-prostoru (videti stav I.2.16). (Primetimo takođe da se u ulozi korišćenog niza $U=(u_j)$ može uzeti, opštije, $u_j=0$ $(j=0,1,\ldots,j_o)$ i

$$u_j=\begin{cases}0\ , & j=2\ell\\ a_\ell\ , & j=2\ell+1\end{cases}\qquad (j=j_o+1,j_o+2,\ldots),$$

gde je (a_ℓ) bilo koji nula-niz sa beskonačno mnogo članova različitih od nule.)

Posmatrana matrica G (i uočeni niz $U=(u_j)$) može nam poslužiti kao primer matrice G takve da se ni doseg b-dejstva $(G)^b$ operatora (G), ni domen primene $(G')^c$, kao ni domen o-primene $(G')^o$ postupka (G') ne može snabdeti strukturom prostora BK (odnosno matrice G takve da B_oK-prostor $(G)^b$ $((G')^c, (G')^o)$ sa pseudonormama $p_j(U)$ $(j=0,1,\ldots)$, $p_i^1(U)=\sup_k\left|\sum_{j=o}^{k} g_{ij}u_j\right|$ $(i=0,1,\ldots)$ i $p(U)=\sup_i\left|\sum_{j=o}^{\infty} g_{ij}u_j\right|$ nije izomorfan ni sa jednim B-prostorom). U novom slučaju, koristeći (umesto stava 2.i) stav 2.iv (odnosno stav 2.v), došlo bi se do zaključka da postoje indeksi j_o i i_o takvi da $U=(u_j)\in(G)^b((G')^c,(G')^o)$ i

$$\text{(e)}\qquad \begin{aligned} &u_j=0\ (j=0,1,\ldots,j_o),\quad \sum_{j=o}^{k} g_{ij}u_j = 0\ (i=0,1,\ldots,i_o;\ k=0,1,\ldots)\\ &\text{i}\quad \sum_{j=o}^{\infty} g_{ij}u_j = 0\ (i=0,1,\ldots)\end{aligned}$$

povlače $U=0$, tj. $u_j=0$ $(j=0,1,\ldots)$. Kako je već rečeno, dati nula-niz $U=(u_j)$ pripada svakom od pomenutih skupova. Takođe, lako je videti da isti niz zadovoljava i treći uslov iz (e). Jednakost $U = 0$, već smo konstatovali, nije ispunjena, što dovršava dokaz i drugog tvrđenja našeg pododeljka. Iz prethodnog izlaganja je isto tako jasno da se na sličan način mogu formirati i mnoge druge matrice koje dokazuju tačnost navedenih tvrđenja.

4. Posle stavova 2.i, 2.iv i 2.v prirodno se postavlja pitanje topološke strukture dosega dejstva i dosega b-dejstva proizvoljnih operatora (X,F), kao i pitanje topološke strukture domena primene i domena o-primene proizvoljnih postupaka (X,F,x'). U vezi s tim možemo reći da (koliko nam je poznato) to pitanje u više pogleda još nije rešeno. Pri tome mislimo na sledeće: Nije nam poznat primer operatora (X,F) takvog da $(X,F)^d$ ili $(X,F)^b$ nije prostor B_o, kao ni primer postupka (X,F,x') sa svojstvom da $(X,F,x')^c$ ili $(X,F,x')^o$ nije prostor B_o (to, svakako, ne mogu biti operatori odnosno postupci matričnog tipa); isto tako

nije nađeno da li je neka od efikasnijih složenih matematičkih struktura adekvatna operatorima (X,F) odnosno postupcima (X,F,x') u celini.

Stavovi 2.i, 2.iv i 2.v omogućavaju, međutim, da se navedeno pitanje svede (praktično) na problem iz funkcionalne analize. Kako, biće jasno posle sledećih napomena.

4.i. Označimo sa J familiju svih matričnih operatora generisanih operatorom (X,F), tj. operatora (G) takvih da je $G=$ $=(g_{ij})$, $g_{ij}=f_j(x_i)$ i $x_i \in X$ $(i=0,1,\ldots)$. Tada važe jednakosti

(f) $$(X,F)^d = \bigcap_{(G)\in J} (G)^d$$

i

(g) $$(X,F)^b = \bigcap_{(G)\in J} (G)^b \quad .$$

U slučaju postupka (X,F,x') već smo videli (stav II.2.5) da važi jednakost

(h) $$(X,F,x')^c = \bigcap_{(G')\in I} (G')^c \quad ,$$

gde je sa I označena familija matričnih postupaka izvedenih iz postupka (X,F,x'). Lako je zaključiti da istovremeno važi i relacija

(k) $$(X,F,x')^o = \bigcap_{(G')\in I} (G')^o \quad .$$

S obzirom na stavove 2.i, 2.iv i 2.v, jednakosti (f), (g), (h) i (k) prikazuju linearne prostore $(X,F)^d$, $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$ u vidu preseka B_oK-prostora. Pitanje da li je na navedenim linearnim prostorima moguće zadati topologiju tako da u rezultatu imamo prostore B_o (ili bar F-prostore) svodi se dakle na pitanje kada je presek B_oK-prostora B_o(odnosno F)-prostor (kao i da li su u našem slučaju uslovi za to ispunjeni); i, uopšte, da li je moguće navedene preseke snabdeti strukturom topološkog linearnog prostora sa nekim od svojstava koja bi ih činila efikasnim za rad u oblasti teorije postupaka konvergencije.

Na postavljeno pitanje odgovor je dat samo delimično. Zeller ([6], stav 4.7 a)) je, naime, pokazao da važi rezultat:

4.ii. Neka je dato najviše prebrojivo mnogo B_oK-prostora $(X_i; p_o^{(i)}, p_1^{(i)}, \ldots)$ $(i=0,1,\ldots)$. Tada je $X = \bigcap_i X_i$ B_oK-prostor u odnosu na pseudonorme $p_j^{(i)}(i,j=0,1,\ldots)$.

Radi primene navedenog rezultata Zeller-a, označimo sa J_1 (J_2) minimalnu (u smislu inkluzije; ako postoji) od svih podfamilija J^1 (J^2) familije J takvih da je još uvek $\bigcap_{(G)\in J^1}(G)^d = (X,F)^d$ (odnosno $\bigcap_{(G)\in J^2}(G)^b = (X,F)^b$). Pretpostavimo zatim da su I_1 i I_2 podfamilije familije I koje u istom smislu odgovaraju skupovima $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$. (Primetimo da u slučaju podfamilija I^1 familije I važi implikacija:

$$\bigcap_{(G')\in I^1}(G')^c = (X,F,x')^c \Rightarrow \bigcap_{(G')\in I^1}(G')^o = (X,F,x')^o .$$

Pri tome inkluzija $I^1 \subseteq I$ čini očiglednom inkluziju $(X,F,x')^o \subseteq \bigcap_{(G')\in I^1}(G')^o$. S druge strane, iz $U=(u_j) \in \bigcap_{(G')\in I^1}(G')^o$ sledi $U \in \bigcap_{(G')\in I^1}(G')^c = (X,F,x')^c$. Relacija $(X,F,x')\text{-lim } u_j = 0$ izlazi onda iz pretpostavke $(G')\text{-lim } u_j = 0((G')\in I^1)$, što dovršava dokaz tačnosti posmatrane implikacije. Pitanje obrnute implikacije ostaje, međutim, otvoreno.)

Svrsishodnost posmatranja minimalnih podfamilija familija J i I (u napred pomenutom smislu) sastoji se u sledećem:

4.iii. Ako postoji najviše prebrojiva podfamilija J_1, onda je, na osnovu stava 4.ii, linearni prostor $(X,F)^d$ prostor B_oK (u odnosu na sistem homogenih pseudonormi koje efektivno daje pomenuti stav). Isti zaključak imamo i za linearne prostore $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$ s obzirom na podfamilije J_2, I_1 odnosno I_2. U suprotnom slučaju, kako smo već rekli, pitanje topološke strukture navedenih linearnih prostora ostaje otvoreno.

Niže navedeni primeri pokazuju da minimalne podfamilije J_1, J_2, I_1 i I_2 mogu biti jednoelementne čak i onda kada skup X ima moć kontinuuma.

4.iv. <u>Primer</u>. U slučaju stepenih operatora (videti II.3.1.v), na osnovu dobro poznatog svojstva stepenih redova, imamo $(X,F)^d = (G)^d$ za svako $G=(f_j(x_i))$, gde je (x_i) niz elemenata iz $[0,R)$ koji konvergira ka R.

4.v. <u>Primer</u>. (L. Wlodarski ([20], napomena 2) je isti primer upotrebio u jednom drugom kontekstu.) Neka je za svako $j=0,1,\ldots$ funkcija $f_j(x)$ neprekidna u $[0,\infty)$ i linearna u intervalima $[i,i+1]$ $(i=0,1,\ldots)$. Stavimo $g_{ij}=f_j(i)$ $(i,j=0,1,\ldots)$, $G=(g_{ij})$, $X=[0,\infty)$ i $x'=\infty$. Tada je za svako $i,j=0,1,\ldots$ i $x\in[i,i+1]$

$$f_j(x)=g_{ij} + (g_{i+1,j}- g_{ij})(x- i).$$

Odatle na lak način izlazi da je u posmatranom slučaju $(X,F)^d=(G)^d$, $(X,F)^b=(G)^b$ (što je, pored ostalog, posledica činjenice da za $x\in[i,i+1]$ $(i=0,1,\ldots)$ važi nejednakost

$$\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\Big| \leq 3 \sup_k\Big|\sum_{j=0}^{\infty} g_{kj}u_j\Big| \;),$$

$(X,F,x')^c = (G')^c$ (štaviše, postupci (X,F,x') i (G') su ekvivalentni) i $(X,F,x')^o = (G')^o$.

Iz definicije familije J matričnih operatora pridruženih operatoru (X,F) sledi da njene minimalne podfamilije J_1 i J_2 imaju jedan ili neprebrojivo mnogo članova (što sledi iz poznate činjenice da je unija najviše prebrojivo mnogo prebrojivih skupova prebrojiv skup). U slučaju familije I matričnih postupaka izvedenih iz postupka (X,F,x') treba, međutim, dopustiti i mogućnost da minimalne familije I_1 i I_2 imaju i prebrojivo mnogo članova. (Može se navesti primer kada se od prebrojivo mnogo nizova koji konvergiraju istoj tački ne može uopšte formirati konvergentan niz. Slučaj $(X,F,x')^c = \bigcap_{k=0}^{n}(G_k')^c$, gde izvedeni postupci (G_k') $(k=0,1,\ldots,n)$ odgovaraju redom nizovima $(x_i^{(k)})$ $(k=0,1,\ldots,n)$, svodi se, očigledno, na $(X,F,x')^c = (G')^c$, gde je (G') izvedeni postupak pridružen nizu

$$(x_0^{(o)},\ldots,x_0^{(n)},x_1^{(o)},\ldots,x_1^{(n)},\ldots,x_i^{(o)},\ldots,x_i^{(n)},\ldots)\ ;$$

isti zaključak važi i za skup $(X,F,x')^o$.)

Osnovni nedostatak kriterija 4.iii je njegova slaba operativnost. Naime, čini se da u mnogim slučajevima neće biti sasvim jednostavno efektivno utvrditi kardinalan broj posmatranih minimalnih podfamilija familija J i I. Druga primedba (a koja se nadovezuje na prethodnu) bi bila u tome što pomenuti kriterij daje samo dovoljne uslove da se skupovi $(X,F)^d$, $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$ mogu snabdeti strukturom prostora B_oK. Preciznije, u slučaju da je kardinalni broj svake minimalne podfamilije J_1, J_2, I_1 i I_2 veći od $\aleph_o$, ništa se (zasad) pouzdano ne može reći da li su odgovarajući preseci prostori B_o ili neke manje zahvalne algebarsko-topološke strukture. Stoga je po našem mišljenju neophodno postavljeni problem izučiti najpre sa funkcionalno-analitičke tačke gledišta (što ne može biti predmet ovoga rada), a zatim ispitati da li se dobijeni rezultati mogu primeniti pri rešavanju zadataka iz naše problematike. To će, kako smo na početku odeljka primetili, zavisiti od polaznih elemenata X, F, x'. Tu, međutim, leži i mogućnost sasvim drugačijeg prilaza posmatranom problemu.

Radi se ustvari o tome da se daju uslovi za elemente X, F i x' dovoljni da su linearni prostori $(X,F)^d$, $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$ prostori B_oK . O takvim postupcima je reč u sledećem (poslednjem) delu ovoga rada. Na istom mestu raspravlja se (koliko nam je poznato, prvi put) i o algebarsko-

-topološkoj strukturi skupova $(X,F)_g^d$, $(X,F)_g^b$, $(X,F,x')_g^c$ i $(X,F,x')_g^o$. Pokazuje se pri tome da razlike u definicijama opera-ratora i postupaka jednog i drugog tipa imaju bitne posledice po mogućnost dobijanja neke efikasnije složene strukture posmatranih skupova nizova.

III. NEPREKIDNI FUNKCIJSKI POSTUPCI

1. Neprekidni (X,F,x')-postupci

Slučaj stava II.2.12.ii pokazuje da se svi rezultati za matrične postupke ne mogu preneti na proizvoljne postupke (X,F,x'). Suprotna očekivanja ne bi bila ni realna s obzirom na činjenicu da se u definiciji operatora (X,F) i postupka (X,F,x') malo ili nimalo ne pretpostavlja o polaznim elementima X, F i x'. Primetimo takođe da pri radu sa matričnim operatorima i postupcima stoji na raspolaganju veoma razvijen aparat teorije beskonačnih matrica. U tome se sastoje i razlozi što nije moguće razviti jednu još širu i dublju raspravu o proizvoljnim operatorima (X,F) i postupcima (X,F,x'). Dolazi se, dakle, do zaključka da se u težnji za obogaćivanjem teorije funkcijskih operatora i postupaka mora ići na nove pretpostavke o skupu X, nizu F, kao i tački nagomilavanja x'. Pri tome treba imati u vidu sledeća dva (prirodna, ali suprotna) zahteva. Prvo, klase operatora i postupaka dobijenih specijalizacijom operatora i postupaka tipa (X,F) odnosno (X,F,x') treba da budu što šire (inkluzija). Drugo, tako uvedene klase operatora i postupaka treba da uključuju matrične operatore odnosno postupke; ostali pak članovi tih klasa treba da poseduju bar glavna svojstva matričnih operatora odnosno postupaka. Kako se u daljem pokazuje, definicijama 1 i 6 su u priličnoj meri zadovoljene (mogli bismo reći i pomirene) obe navedene tendencije.

1. D e f i n i c i j a. Operator (X,F) je tipa N [1] ako postoji najviše prebrojiva familija topoloških prostora $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $(i=0,1,\ldots)$ takvih da je: 1° $\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i = X$; 2° za svako $i=0,1,\ldots$

---

1) takođe: operator (X,F) ima svojstvo N; ili: (X,F) je N-operator

$(X_i, \mathcal{T}_i)$ je kompaktan Hausdorff-ov prostor sa najviše prebrojivom bazom; 3^o za svako $j=0,1,\ldots$ i svako $i=0,1,\ldots$ funkcija $f_j(x)$ neprekidna je na prostoru $(X_i, \mathcal{T}_i)$; 4^o red $(x,F)(U) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ uniformno konvergira na svakom od skupova X_i ($i=0,1,\ldots$) za svaki niz $U=(u_j)$ takav da red $(x,F)(U)$ konvergira na X.

Svrsishodnost predložene definicije vidi se delom iz sledeće napomene.

1.i. Matrični operatori čine jednu potklasu klase operatora tipa N. (Kako je već napomenuto u II.2.3, matrični operator (F), $F=(f_{ij})$, generisan je skupom $X=\{0,1,\ldots,i,\ldots\}$ i nizom funkcija $F=(f_j)$ takvih da je $f_j(i)=f_{ij}$ ($i,j=0,1,\ldots$).) To se vidi ako se, naprimer, uzme $X_i=\{i\}$ ($i=0,1,\ldots$) i za $\mathcal{T}_i$ ($i=0,1,\ldots$) topologija koju na X_i inducira topologija prostora realnih (kompleksnih) brojeva, pri čemu su uslovi $1^o - 4^o$ iz definicije 1 očigledno ispunjeni. Lako je, međutim, videti da se kod matričnih operatora u svojstvu skupova X_i ($i=0,1,\ldots$) mogu uzeti bilo kakvi konačni podskupovi skupa nenegativnih celih brojeva X (naravno, uz uslov 1^o).

Stepeni operatori (tj. operatori generisani nekim stepenim redom $s(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ tako što se pretpostavlja da je $s(x)\neq 0$ za $x \in X=[0,R)$ i uzima $f_j(x)=\dfrac{a_j x^j}{s(x)}$ ($j=0,1,\ldots$), gde je R poluprečnik konvergencije posmatranog reda) takođe čine potklasu klase N-operatora. U ovom slučaju se može uzeti $X_i=[0,x_i]$ ($i=0,1,\ldots$), gde je (x_i) niz tačaka iz intervala $[0,R)$ koji konvergira ka R; tada je tačnost $1^o - 3^o$ očigledna, dok 4^o sledi iz poznatih svojstava stepenih redova. Primećujemo, međutim, da se može uzeti i $X_i=[x_i,x_{i+1}]$ ($i=0,1,\ldots$), gde niz (x_i) ispunjava još i uslov $x_0=0$. Ustvari, opštije, može se uzeti da su X_i ($i=0,1,\ldots$)

kompaktni podskupovi intervala $[0,R)$ koji sačinjavaju jedno njegovo pokrivanje.

U daljem radu od koristi će biti i sledeća napomena:

1.ii. Ako je operator (X,F) tipa N i ako za neki niz $U=(u_j)$ red $(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ konvergira na X, onda je funkcija $(X,F)(U)$ ograničena na svakom skupu familije X_i $(i=0,1,\ldots)$. Naime, po definiciji N-operatora (X,F), red $(x,F)(U)$ uniformno konvergira na svakom od skupova X_i $(i=0,1,\ldots)$; odatle sledi neprekidnost funkcije $(X,F)(U)$ na svakom od prostora $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $(i=0,1,\ldots)$ (na osnovu poznatog stava, s obzirom na svojstvo 3^o iz definicije 1); ograničenost funkcije $(X,F)(U)$ na skupovima X_i $(i=0,1,\ldots)$ (a time i na svakoj uniji konačno mnogo članova pokrivanja X_i $(i=0,1,\ldots)$) sledi onda na osnovu pretpostavke 2^o.

U nastavku biće reči o potrebnim i dovoljnim uslovima da doseg dejstva i doseg b-dejstva N-operatora (X,F) obuhvata sve nizove nekog od skupova T^o, T^c, T^b i T. Radi pojednostavljenja iskaza operisaćemo sa jednim fiksiranim (ali proizvoljno odabranim) pokrivanjem X_i $(i=0,1,\ldots)$ skupa X u smislu definicije 1, što se više neće eksplicitno napominjati.

2. STAV. <u>Doseg dejstva</u> N-<u>operatora</u> (X,F) <u>sadrži sve nula-nizove</u> (<u>sve konvergentne nizove</u>, <u>sve ograničene nizove</u>) <u>ako i samo ako je ispunjen uslov</u>

(1) <u>red</u> $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)|$ <u>uniformno konvergira na svakom od skupova</u> X_i $(i=0,1,\ldots)$.

<u>Dokaz</u>. Iz uslova (1) i $X=\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ sledi uslov II.2.(1) (uslov (1) iz odeljka II.2) što prema stavu II.2.6 (i inače je očigledno) implicira inkluziju $(X,F)^d \supseteq T^o$ (T^c, T^b). Pokazaćemo da važi i obrnuto, tj. da pri svojstvu N operatora (X,F) inkluzija

$(X,F)^d \geq T^o$ povlači uslov (1). U tom cilju (izaberimo proizvoljno pa) fiksirajmo skup X_i iz datog pokrivanja X_i $(i=0,1,\dots)$ skupa X. Po pretpostavci, postoji topologija $\mathcal{T}_i$ na X_i takva da je $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompaktan Hausdorff-ov prostor sa prebrojivom bazom i takva da je svaka od funkcija $f_j(x)$ niza $F=(f_j)$ neprekidna na prostoru $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Sem toga, inkluzija $(X,F)^d \geq T^o$ povlači uslov II.2.(1) i time konvergenciju reda $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ za svaki ograničen niz $U=(u_j)$. Iz svojstva N operatora (X,F) sledi onda uniformna konvergencija na skupu X_i reda $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$. Uslov (1) dobija se tada na osnovu sledećeg rezultata:

2.i. LEMA. Neka je Y kompaktan Hausdorff-ov prostor sa prebrojivom bazom i $f_j(x)$ $(j=0,1,\dots)$ niz funkcija neprekidnih na Y. Tada važi ekvivalencija:

Red $(x,F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ uniformno konvergira na Y za svaki ograničen niz $U=(u_j)$ ako i samo ako red $\sum_{j=o}^{\infty} |f_j(x)|$ uniformno konvergira na Y.

Lema 2.i je jedno prirodno uopštenje leme 3[8] L. Wlodarski-og koja se odnosi na slučaj zatvorenog intervala $Y=[x_o,x_1]$, pri čemu šema dokaza može ostati nepromenjena. Naime:

Dokaz leme 2.i. Zadržaćemo se samo na netrivijalnom delu dokaza, tj. na utvrđivanju da iz uniformne konvergencije na Y reda $\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ za svaki ograničen niz $U=(u_j)$ sledi uniformna konvergencija na Y reda $\sum_{j=o}^{\infty} |f_j(x)|$. Pretpostavimo stoga suprotno, dakle da postoji $\varepsilon>0$ takvo da za svako $k=0,1,\dots$ postoji $y_k \in Y$ sa svojstvom $\sum_{j=k}^{\infty} |f_j(y_k)| \geqslant \varepsilon$. Iz pretpostavke o prostoru Y izlazi zatim da postoji podniz (y_{k_n}) niza (y_k) koji konvergira ka nekoj tački $\bar{y} \in Y$. Tada je, dakle, $\sum_{j=k_n}^{\infty} |f_j(y_{k_n})| \geqslant \varepsilon$ za svako $n=0,1,\ldots$, na osnovu čega se zaključuje da red $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(y)|$ ne konvergira uniformno na skupu $\{y_{k_0}, y_{k_1},\ldots,y_{k_n},\ldots\}$, tj. da red $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(y_{k_n})|$ ne konvergira uniformno po $n=0,1,\ldots$.

Posmatrajmo sada matrični postupak (G') pridružen matrici $G=(g_{nj})$, gde je $g_{nj}=f_j(y_{k_n})$ $(j,n=0,1,\ldots)$. Domen primene $(G')^c$ tako dobijenog matričnog postupka (G') sadrži sve ograničene nizove. Naime, za fiksirano $U=(u_j)\in T^b$ funkcija $(X,F)(U)$ neprekidna je na Y, na osnovu čega

$$\lim_n (y_{k_n},F)(U) = \lim_n \sum_{j=0}^{\infty} f_j(y_{k_n})u_j$$

postoji i jednak je $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(\bar{y})u_j$ za svako $U=(u_j)\in T^b$ (videti napomenu 1.ii). (Štaviše, za svako $U=(u_j)\in T^b$ funkcija $(X,F)(U)$ je uniformno neprekidna na Y.) Na osnovu teoreme Schur-a (II.2.12.ii), sledi onda uniformna konvergencija reda $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(y_{k_n})|$ po $n=0,1,\ldots$. Dobijena kontradikcija dovršava dokaz leme 2.i, a time i dokaz stava 2.

Neposredna posledica stava 2 je

2.ii. Iz svojstva N operatora (X,F) i relacije $T^o\subseteq(X,F)^d$ sledi neprekidnost funkcije određene redom $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ na prostoru (X_i, τ_i) $(i=0,1,\ldots)$, što implicira ograničenost te funkcije na svakom skupu familije X_i $(i=0,1,\ldots)$, pa dakle i njenu ograničenost na uniji skupova bilo koje konačne podfamilije posmatrane familije.

Primetimo takođe da pod navedenim uslovima red $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ uniformno konvergira na svakoj uniji konačno mnogo članova pokrivanja X_i $(i=0,1,\ldots)$. Primer Abel-ovog operatora (tj. operatora pridruženog stepenom redu $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$) pokazuje međutim da u slučaju

N-operatora (X,F) iz uslova $T^o \subseteq (X,F)^d$ ne sledi uniformna konvergencija reda $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ na uniji svih skupova familije X_i $(i=0,1,\ldots)$, tj. na skupu X.

3. STAV. Da bi doseg dejstva N-operatora (X,F) sadržao sve nizove potrebno i dovoljno je da bude ispunjen uslov:

(2) za svako $i=0,1,\ldots$ postoji indeks j_i takav da je $f_j(x)\equiv 0$ na X_i za svako $j>j_i$.

Dokaz. Dovoljnost uslova (2) za $T\subseteq(X,F)^d$, očigledna je. Ustanovićemo i njegovu potrebnost. U tom cilju uočimo jedan (proizvoljno izabran) skup X_i iz pokrivanja skupa X. Iz pretpostavke $(X,F)^d=T$ i napomene 1.ii, izlazi da je $(X_i,F)^b=T$. Egzistencija indeksa j_i takvog da za svako $j>j_i$ funkcija $f_j(x)$ iščezava na X_i, dobija se onda na osnovu stava II.2.9, čime je dokazana potrebnost uslova (2).

3.i. Napomenimo uzgred da $\sup_i j_i^*$, gde je j_i^* $(i=0,1,\ldots)$ najmanji od indeksa j_i sa svojstvom iz uslova (2), ne mora biti konačan, što pokazuje primer normalnih matričnih operatora (F) $(F=(f_{ij}),\ f_{ij}=0\ (i<j),\ f_{ii}\neq 0)$.

4. STAV. Doseg b-dejstva N-operatora (X,F) sadrži sve nula-nizove (sve konvergentne nizove, sve ograničene nizove) tada i samo tada, kada su ispunjeni uslovi (1) i

(3) postoji i_o tako da je $\sup_{x\in \bigcup_{i=i_o}^{\infty} X_i} \sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|<\infty$.

Dokaz. Pretpostavimo $T^o(T^c,\ T^b)\subseteq(X,F)^b$. Uslov (1) sledi tada na osnovu stava 2, dok se uslov (3) dobija primenom stava II.2.8 (pri čemu se za i_o može uzeti bilo koji prirodan broj). Da iz uslova (1) i (3) sledi $T^b\subseteq(X,F)^b$, sledi na osnovu napomene 2.ii i stava II.2.8.

(Iz navedenog dokaza stava 4 jasno je da se u njegovoj formulaciji deo "postoji i_o tako da je" može zameniti sa "za svako $i_o \in \{0,1,\ldots\}$ je". Preciznije, uslov (3) sa univerzalno kvantifikovanim i_o je potreban, a sa egzistencijalno kvantifikovanim i_o je dovoljan.)

Primećujemo da je pri neprekidnosti funkcija $f_j(x)$ ($j=0,1,\ldots$) na kompaktnim prostorima $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ($i=0,1,\ldots$), konjunkcija uslova (1) i (3) stroži zahtev od uslova II.2.(3), što se vidi na primeru niza funkcija navedenog u komentaru stava II.2.12.ii i skupova $X_o=[-3,-1]$ i $X_i=\{i-1\}$ ($i=1,2,\ldots$) sa topologijama koje inducira prostor realnih brojeva.

5. STAV. <u>Da bi doseg b-dejstva N-operatora (X,F) sadržao sve nizove potrebno i dovoljno je da budu ispunjeni uslovi</u>

(4) $j^*=\sup_i j_i^* < \infty$, <u>gde su</u> j_i^* <u>indeksi iz napomene</u> 3.i (što je ekvivalentno sa egzistencijom indeksa j^* sa osobinom da za svako $j > j^*$ funkcija $f_j(x)$ iščezava na svakom od skupova X_i ($i=0,1,\ldots$), tj. na čitavom skupu X)

<u>i</u>

(5) <u>postoji indeks</u> i_o <u>takav da je</u> $\sup_{x\in \bigcup_{i=i_o}^{\infty} X_i} \sum_{j=0}^{j^*} |f_j(x)| < \infty$

(što je ekvivalentno sa $\sup_{x\in \bigcup_{i=i_o}^{\infty} X_i} |f_j(x)| < \infty$ ($j=0,1,\ldots,j^*$)).

<u>Dokaz</u>. Potrebnost uslova (4) i (5) sledi na osnovu stava II.2.9. Njihova dovoljnost pak dobija se primenom istog stava i napomene 2.ii.

Ostatak našeg odeljka posvećen je jednoj specijalnoj klasi postupaka tipa (X,F,x′), koju određuje sledeća

6. D e f i n i c i j a. Neka je $(Y,\mathcal{T})$ Hausdorff-ov topološki prostor, $X\subseteq Y$, $x'\notin X$ tačka nagomilavanja skupa X i $F=(f_j)$

niz realnih (kompleksnih) funkcija definisanih na X. Tada kažemo da je postupak (X,F,x') <u>neprekidan</u>, ako

(A) postoji prebrojiva okolinska baza $\{O_i\}_{i=0,1,\dots}$ tačke x' takva da je: 1° za svako $i=0,1,\dots$ $(X-O_i,\mathcal{T})$ kompaktan prostor sa prebrojivom bazom; 2° za svako $i=0,1,\dots$ i svako $j=0,1,\dots$ funkcija $f_j(x)\big|_{X-O_i}$ neprekidna je na prostoru $(X-O_i,\mathcal{T})$; 3° ako za neki niz $U=(u_j)$ red $(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ konvergira na X, onda isti red $(x,F)(U)$ uniformno konvergira na skupu $X-O_i$ za svako $i=0,1,\dots$.

Definiciju 6 propratićemo sa nekoliko napomena sa ciljem da razjasnimo njene bitne momente i istaknemo neke njene neposredne posledice važne za dalje izlaganje.

6.i. U definiciji 6 uslov 3° može se zameniti (ekvivalentnom) pretpostavkom da red $(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ skoro uniformno konvergira na skupu X s obzirom na tačku x' (u značenju: red $(x,F)(U)$ uniformno konvergira na skupu $X-O$ za svaku okolinu O tačke x') za svaki niz $U=(u_j)$ takav da isti red konvergira na X.

6.ii. Iz uslova (A)2° izlazi da su funkcije $f_j(x)\big|_{X-O}$ $(j=0,1,\dots)$ neprekidne na prostoru $(X-O,\mathcal{T})$ za svaku okolinu O tačke x'. Mi ćemo, međutim, pokazati da su u slučaju neprekidnog postupka (X,F,x') funkcije $f_j(x)$ $(j=0,1,\dots)$ neprekidne na prostoru $(X,\mathcal{T})$. Uočimo stoga $x_0\in X$ i sa O^1 i O^2 označimo disjunktne okoline tačaka x_0 i x' (koje postoje na osnovu pretpostavke da je $(Y,\mathcal{T})$ Hausdorff-ov prostor). Tada postoji okolina O_{i_0} iz baze $\{O_i\}_{i=0,1,\dots}$ takva da je $O_{i_0}\subseteq O^2$, što ima za posledicu da je $(X-O_{i_0})\cap O^1=X\cap O^1$. Za proizvoljno izabrano (pa fiksirano) j i dato $\varepsilon>0$ odaberimo onda okolinu O^3 tačke x_o tako da je

$$|f_j(x)-f_j(x_o)|\leq \varepsilon \quad \text{za svako} \quad x\in (X-O_{i_o})\cap O^3$$

(što je moguće s obzirom na neprekidnost funkcije $f_j(x)\big|_{X-O_{i_o}}$ na prostoru $(X-O_{i_o},\mathcal{T})$). Iz relacije

$$X\cap(O^1\cap O^3)=[(X-O_{i_o})\cap O^1]\cap O^3\subseteq (X-O_{i_o})\cap O^3$$

izlazi zatim da je

$$|f_j(x)-f_j(x_o)|\leq \varepsilon \quad \text{za svako} \quad x\in X\cap(O^1\cap O^3),$$

što dokazuje neprekidnost funkcija $f_j(x)$ $(j=0,1,\dots)$ u prostoru $(X,\mathcal{T})$ (O^1 i O^3 su okoline tačke x_o u prostoru $(Y,\mathcal{T})$, pa je $X\cap(O^1\cap O^3)$ okolina iste tačke u prostoru $(X,\mathcal{T})$). Kako je obrnuto očigledno tačno, to se u definiciji 6 uslov 2^o može zameniti pretpostavkom o neprekidnosti funkcija $f_j(x)$ $(j=0,1,\dots)$ na prostoru $(X,\mathcal{T})$.

6.iii. Ako već polazni prostor $(Y,\mathcal{T})$ ima prebrojivu bazu, onda se može uzeti da okoline O_i $(i=0,1,\dots)$ baze

$$\{O_i\}_{i=0,1,\dots}$$

formiraju monotono opadajući niz skupova. Naime, tada je monotono opadajući niz skupova $\bigcap_{k=o}^{i} O_k$ $(i=0,1,\dots)$ jedna prebrojiva okolinska baza tačke x' koja ispunjava uslove 1^o (unija konačno mnogo kompaktnih prostora je kompaktan prostor; potprostor prostora prebrojive baze ima prebrojivu bazu), 2^o (napomena 6.ii) i 3^o (napomena 6.i).

6.iv. Matrični postupci tipa (F') (videti II.2.3) sačinjavaju jednu potklasu klase neprekidnih postupaka tipa (X,F,x'). Ustvari, tada bilo koja prebrojiva okolinska baza tačke $x'=\infty$ ispunjava uslove 1^o (skup konačno mnogo realnih brojeva je kompaktan, a odgovarajući prostor je najviše prebrojive baze), 2^o (u prostoru od konačno mnogo tačaka niz njegovih tačaka je konvergentan ako i samo ako se članovi toga niza od izvesnog indeksa pa na dalje podudaraju sa graničnom tačkom) i 3^o (iz konvergencije funkcionalnog reda na nekom konačnom skupu sledi njegova uniformna konvergencija na tom skupu). Prema tome, pri tretiranju matričnog postupka tipa (F') kao neprekidnog postupka tipa (X,F,x'), prebrojiva okolinska baza $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ tačke $x'=\infty$ (u smislu definicije 6) može se izabrati na proizvoljan način.

6.v. L. Wlodarski [20] je izučavao postupke (x_o,x',F) (videti II.2.3) i, pored ostalog, uveo sledeću definiciju:

Postupak (x_o,x',F) je <u>neprekidan</u> ako su ispunjeni uslovi: 1^o funkcije $f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ niza $F=(f_j)$ neprekidne su na intervalu $[x_o,x')$; 2^o postoji rastući niz (x_n) tačaka intervala $[x_o,x')$ koji konvergira ka x' takav da red $(x,F)(U)=\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$ uniformno konvergira na intervalu $[x_{i-1},x_i]$ za svaki niz $U=(u_j)$ takav da red $(x,F)(U)$ konvergira za $x=x_{i-1}$ i $x=x_i$.

Lako je videti da je postupak (x_o,x',F) neprekidan u smislu navedene definicije Wlodarski-og (zvaćemo ga u daljem W-neprekidnim) neprekidan i u smislu definicije 6, tj. da je klasa W-neprekidnih postupaka potklasa klase postupaka (X,F,x') neprekidnih u smislu definicije 6. Naime, ako je postupak (x_o,x',F) W-neprekidan, onda red $(x,F)(U)$ uniformno konvergira na intervalu $[x_o,x_m]$ za svaki niz $U=(u_j)$ takav da isti red konvergira za $x=x_i$ $(i=0,1,\ldots,m)$; otuda red $(x,F)(U)$ uniformno konvergira na bilo kom intervalu $[x_o,y_o]$ $(y_o<x')$ za svaki niz $U=(u_j)$ takav da isti red konvergira za $x=x_i$ pri svakom $i=0,1,\ldots$ (što je, naprimer, ispunjeno ako red $(x,F)(U)$ konvergira na $[x_o,x'))$. Na taj način, prebrojiva okolinska baza tačke x': $O_i=(-\infty,2x_o-x_i)\cup(x_i,+\infty)$ $(i=0,1,\ldots)$ ako je $x'=\infty$ i $O_i=(x_i,2x'-x_i)$ $(i=0,1,\ldots)$ ako je x' konačno, gde je (x_i) niz

iz definicije W-neprekidnog postupka, ispunjava uslove iz definicije 6. (Jasno je, međutim, da se u posmatranom slučaju može navesti i mnoštvo drugih prebrojivih okolinskih baza tačke x' sa istim svojstvom.)

Primećujemo da stepeni postupci (videti [illegible].1.v) obrazuju jednu potklasu klase W-neprekidnih postupaka. U ulozi niza (x_i) iz definicije W-neprekidnog postupka (x_0,x',F) tada se može uzeti bilo koji rastući niz tačaka intervala $[0,R)$ koji konvergira ka R takav da je $x_0=0$. Značaj proučavanja W-neprekidnih postupaka ogleda se, međutim, i u tome što se svakom matričnom postupku (G'), $G=(g_{ij})$, može korespondirati ekvivalentan W-neprekidan postupak $(0,\infty,F)$, gde su funkcije $f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ definisane kao u primeru II.4.4.v. Pri tome se za niz (x_i) iz definicije W-neprekidnog postupka može uzeti $x_i=i$ $(i=0,1,\ldots)$. Razlika između polaznog matričnog i tako formiranog W-neprekidnog postupka može [illegible] praviti jedino pri posmatranju nekih njihovih numeričkih karakteristika, a inače se mogu identifikovati. Time je deo teorije matričnih postupaka tipa (F') automatski uključen u teoriju W-neprekidnih postupaka (x_0,x',F).

6. vi. W. Orlicz [38] je nazvao <u>neprekidnim</u> postupak (x_0,x',F) takav da su ispunjeni uslovi 1^o iz definicije W-neprekidnog postupka (x_0,x',F) i 3^o red $(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j$ uniformno konvergira u svakom intervalu $[x_0,y_0]$ $(y_0<x')$ za svaki niz $U=(u_j)$ takav da isti red konvergira na intervalu $[x_0,x')$.

Postupke (x_0,x',F) neprekidne u smislu definicije Orlicz-a zvaćemo O-neprekidnim postupcima. U vezi s tim primećujemo da je svaki W-neprekidan postupak (x_0,x',F) istovremeno i O-neprekidan, kao i da su O-neprekidni postupci (x_0,x',F) neprekidni i u smislu definicije 6. (Pri tome se, kao i u prethodna dva slučaja, izbor prebrojive okolinske baze $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ tačke x' može izvršiti na više načina.) Iz tih razloga, a i zbog toga što su nam definicije Wlodarski-og i Orlicz-a poslužile kao inspiracija, postupke (X,F,x') koji ispunjavaju uslove iz definicije 6 nazvali smo takođe neprekidnim. Značaj ovakvog pojma neprekidnog postupka (X,F,x'), na koji će se odnositi naša razmatranja uvek kad drugo nije rečeno, vidimo i u tome što on uključuje u istu klasu matrične postupke (F'), W-neprekidne postupke i O-neprekidne postupke (x_0,x',F) i što su istovremeno, što će se iz daljeg izlaganja videti, u njemu sačuvana osnovna svojstva tih postupaka.

6.vii. Sada možemo objasniti i razloge upotrebe termina "operator (X,F) tipa N" u definiciji 1. Naime, ako je postupak (X,F,x') neprekidan, onda je odgovarajući operator (X,F) jedan N-operator [1]. U svojstvu skupova X_i $(i=0,1,\ldots)$ iz definicije 1 mogu se tada uzeti skupovi $X_i=X-O_i$ $(i=0,1,\ldots)$, gde je $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ okolinska baza tačke x' čiju egzistenciju i svojstva pretpostavlja definicija neprekidnog postupka (X,F,x'). (Iz pretpostavke da je polazni prostor $(Y,\mathcal{T})$ Hausdorff-ov i $x'\notin X$ sledi $\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i = \bigcup_{i=0}^{\infty}(X-O_i) = X\cap C(\bigcap_{i=0}^{\infty} O_i) = X\cap C\{x'\}= X$, kao i da je za svako $i=0,1,\ldots$ $(X_i,\mathcal{T})=(X-O_i,\mathcal{T})$ Hausdorff-ov prostor. Primećujemo takođe da se u svojstvu skupova X_k $(k=0,1,\ldots)$ iz definicije 1 može uzeti $X_k=X-O_{i_k}$ $(k=0,1,\ldots)$, gde je $\{O_{i_k}\}_{k=0,1,\ldots}$ bilo koja podfamilija familije $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ koja sama za sebe čini jednu prebrojivu okolinsku bazu tačke x'.)

(Tu, ustvari, leži i mogućnost (nešto jednostavnije) ekvivalentne definicije neprekidnog postupka (X,F,x'):

---

1) Termin "neprekidan operator (X,F)" ne može se koristiti jer izraz "neprekidan operator" ima sasvim određeno (i drugačije) značenje u teoriji operatora uopšte.

Neka je $(Y,\mathcal{T})$ Hausdorff-ov topološki prostor, $X\subseteq Y$, $x'\in Y-X$ tačka nagomilavanja skupa X i $F=(f_j)$ niz realnih (kompleksnih) funkcija definisanih na X. Tada kaž [illegible] ostupak (X,F,x') neprekidan ako

(A′) postoji prebrojiva okolinska baza $\{O_i\}$ $i=0,1,\ldots$ tačke x' takva da je (X,F) operator tipa N, pri čemu ulogu topoloških prostora $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $(i=0,1,\ldots)$ iz definicije 1 igraju topološki prostori $(X-O_i,\mathcal{T})$ $(i==0,1,\ldots)$.)

Navedena činjenica koristiće se u nastavku, gde će biti reči o potrebnim i dovoljnim uslovima da domen primene i domen o-primene neprekidnog postupka (X,F,x') sadrži neki od skupova T^o, T^c, T^b i T. Budući da su ti problemi u slučaju proizvoljnih postupaka (X,F,x') detaljno proučeni u odeljku II.2, zadržavaćemo se više samo na novim momentima kod neprekidnih postupaka (X,F,x') (koje je realno očekivati s obzirom na jače zahteve u definiciji 6).

7\. STAV. Domen primene (o-primene) neprekidnog postupka (X,F,x') sadrži sve nula-nizove ako i samo ako su ispunjeni uslovi

(6) red $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ konvergira uniformno na skupu $X-O$ za svaku okolinu O tačke x',

(7) postoji okolina O_* tačke x' takva da je
$$\sup_{x\in X\cap O_*}\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|<\infty$$

i

(8) postoji $\lim_{x\to x'} f_k(x) = a_k$ (0) $(k=0,1,\ldots)$.

Primetimo da iz uslova (6) i (7) i pretpostavke da su funkcije $f_j(x)\big|_{X-O_i}$ neprekidne na $X-O_i$ $(i,j=0,1,\ldots)$ sledi

$$\sup_{x\in X}\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|<\infty$$

(dakle i uslov II.2.(6)), što je zajedno sa (8) dato kao potreban i dovoljan uslov da domen primene (o-primene) W-neprekidnog postupka (x_o,x',F) (tada je $X=[x_o,x')$) sadrži sve nula-nizove ([20], teorema IIc). Stav 7, međutim, pokazuje da je tada (i uopšte) potreban jedan jači uslov: uslov koji se dobija konjunkcijom (6) i (7). Analognu primedbu imamo i u slučaju sledećeg stava, što nećemo posebno napominjati. Ta činjenica se može koristiti pri ispitivanju da li je neki dati postupak (X,F,x') neprekidan, na način kako se to vidi iz sledećeg primera.

Pokazaćemo, naime, da postupak (X,F,x') naveden u komentaru stava II.2.12.ii nije neprekidan. U tom cilju primetimo da domen primene posmatranog postupka sadrži sve nula-nizove (ustvari, sve ograničene nizove). Ako bi, dakle, taj postupak bio neprekidan, onda bi prema stavu 7 (uslov (6)) red $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ konvergirao uniformno na skupu

$$([-3,-1]\cup\{0,1,\ldots\})-((-\infty,-3)\cup[0,\infty))=[-3,-1]$$

što, kako smo videli, nije slučaj. Na osnovu činjenice da svaka prebrojiva okolinska baza $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ tačke $x'=\infty$ ispunjava uslove 1^o i 2^o iz definicije 6, dolazimo zatim do zaključka da u posmatranom slučaju za svaku okolinsku bazu $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ tačke x' postoji indeks i_o i niz $U=(u_j)$ takvi da red $(x,F)(U)=$ $=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j$ konvergira na X, a da pri tome njegova konvergencija na $X-O_{i_o}$ nije uniformna.

<u>Dokaz</u> stava 7. Da uslovi (6), (7) i (8) povlače $T^o\subseteq(X,F,x')^c$ sledi na osnovu stava II.2.10. Prema istom stavu, inkluzija $T^o\subseteq(X,F,x')^c$ implicira uslove (7) i (8). Uslov (6) pak dobija se primenom napomene 6.vii i stava 2 (imajući pri tome u vidu da je $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ jedna okolinska baza tačke x').

8. STAV. <u>Da bi domen primene</u> (<u>o-primene</u>) <u>neprekidnog postupka</u> (X,F,x′) <u>sadržao sve konvergentne nizove potrebno i dovoljno je da budu ispunjeni uslovi</u> (6), (7), (8) <u>i</u>

(9) <u>postoji</u> $\lim\limits_{x \to x'} \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(x) = a(0)$.

<u>Dokaz</u>. Dovoljnost uslova (6) - (9) sledi na osnovu stava II.2.11. Primenom istog stava dobija se potrebnost uslova (9), dok potrebnost uslova (6), (7) i (8) dobijamo primenom prethodnog stava.

9. STAV. <u>Konjunkcija</u> (6), (7), (8) <u>i</u>

(10) $$\lim_{x \to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x) - a_j| = 0$$

<u>je potreban i dovoljan uslov da domen primene</u> (<u>o-primene</u>) <u>neprekidnog postupka</u> (X,F,x′) <u>obuhvata sve ograničene nizove</u>. <u>U slučaju domena o-primene potreban i dovoljan uslov može se očigledno svesti na konjunkciju</u> (6) <u>i</u>

(10′) $$\lim_{x \to x'} \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| = 0.$$

<u>Dokaz</u> dovoljnosti navedene konjunkcije dobija se primenom stava II.2.12. Na osnovu istog stava dobija se potrebnost uslova (10), dok potrebnost uslova (6), (7) i (8) sledi iz stava 7.

U nastavku ćemo dati jednu drugu kombinaciju uslova čija konjunkcija je potrebna i dovoljna da domen (X,F,x′)-konvergencije neprekidnog postupka sadrži sve ograničene nizove. Kako smo već nagovestili u komentaru stava II.2.12.ii, pokazaćemo da u slučaju neprekidnih postupaka (X,F,x′) važi analogon teoreme Schur-a za matrične postupke, tj.

10. STAV. <u>Domen</u> (X,F,x′)-<u>konvergencije neprekidnog postupka sadrži sve ograničene nizove ako i samo ako su ispunjeni uslovi</u> (8) <u>i</u>

(11) <u>red</u> $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ <u>uniformno konvergira na</u> X .

<u>Dokaz</u>. U komentaru stava II.2.12.ii izneli smo da pri proizvoljnom (X,F,x') iz uslova (8) i (11) sledi inkluzija $T^b \subseteq (X,F,x')^c$. (Pri tome uniformna konvergencija na X reda $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ i egzistencija $\lim_{x\to x'} f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ intervenišu na bitan način.) To je onda pogotovu tačno u slučaju neprekidnih postupaka (X,F,x'). (Moglo bi se takođe pokazati da (8) i (11) povlače (6), (7), (8) i (10), pa primeniti stav 9.) Pokazaćemo da važi i obrnuto, tj. da iz $T^b \subseteq (X,F,x')^c$ slede (8) i (11). Na osnovu dosadašnjeg izlaganja, uslov (8) je očigledno ispunjen. Ostaje, dakle, da se ustanovi da je i (11) posledica navedene inkluzije. U tom cilju primetimo da su tada, na osnovu stava 9, ispunjeni uslovi (6), (7) i (10), što ima za posledicu konvergenciju reda $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$ kao i $\lim_{x\to x'}\sum_{j=k+1}^{\infty}|f_j(x)-a_j| = 0$ za svako $k=0,1,\ldots$. Odatle i iz nejednakosti

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}|f_j(x)| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty}|f_j(x)-a_j| + \sum_{j=k+1}^{\infty}|a_j| \quad (k=0,1,\ldots;\ x\in X),$$

sledi da za dato $\varepsilon>0$ postoje prirodan broj <u>m</u> i okolina 0 tačke x' tako da je

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}|f_j(x)|<\varepsilon \quad \text{za svako} \quad x\in X\cap 0 .$$

Prema uslovu (6), za tako dobijenu okolinu 0 tačke x' red $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$ uniformno konvergira na skupu $X-0$, pa postoji prirodan broj <u>n</u> takav da je

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|f_j(x)|<\varepsilon \quad \text{za svako} \quad x\in X-0.$$

Jasno je da tada broj $p=\max(m,n)$ zadovoljava relaciju

$$\sum_{j=p+1}^{\infty}|f_j(x)|<\varepsilon \quad \text{za svako} \quad x\in X,$$

čime je dokazana uniformna konvergencija na X reda $\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|$, tj. potrebnost uslova (11).

U vezi sa stavom 9 primetimo takođe da on ostaje tačan i kada se iz njegovog iskaza izostavi uslov (7). Preciznije rečeno, uslov (7) je posledica (6), (8) i (10), što se dokazuje isto kao varijanta II.2.12.i stava II.2.12.

11. STAV. <u>Da bi domen</u> (X,F,x')-<u>konvergencije</u> ((X,F,x')-<u>-o-konvergencije</u>) <u>neprekidnog postupka sadržao sve nizove potrebno i dovoljno je da bude ispunjen uslov</u>:

(12) <u>postoji indeks</u> j_o <u>takav da je</u>: 1^o $f_j(x) \equiv 0$ <u>na</u> X <u>za</u> $j > j_o$; 2^o <u>za svako</u> $j=0,1,\ldots,j_o$ <u>postoji</u> $\lim\limits_{x \to x'} f_j(x) = a_j(0)$.

Stavovi 11 i II.2.14 pokazuju bitnu razliku između neprekidnih i proizvoljnih postupaka (X,F,x'). Naime, u slučaju neprekidnih postupaka (X,F,x') jednakost $(X,F,x')^c=T$ implicira egzistenciju indeksa j_o takvog da za svako $j > j_o$ funkcija $f_j(x)$ iščezava na čitavom X, tj. $F=(f_o(x),\ldots,f_{j_o}(x),0,0,\ldots)$; odatle izlazi da je tada postupak (X,F,x') jednak "zbiru" postupaka (X,F_j,x') $(j=0,1,\ldots,j_o)$, gde je $F_j=(0,\ldots,0,\overset{j}{f_j(x)},0,0,\ldots)$. U slučaju pak proizvoljnih postupaka (X,F,x') relacija $(X,F,x')^c= =T$ povlači egzistenciju indeksa j_o i okoline O tačke x' takvih da za svako $j > j_o$ funkcija $f_j(x)$ iščezava "tek" na skupu $X \cap O$; pri tome uopšte ne mora postojati indeks j_o sa svojstvom kao kod neprekidnih postupaka (za šta je lako konstruisati primer).

<u>Dokaz</u> stava 11. Dovoljnost uslova (12) za $T=(X,F,x')^c$ sledi na osnovu stava II.2.14. Ostaje, dakle, da se ustanovi njegova potrebnost. Primetimo stoga da na osnovu napomena 6.vii i 1.ii za neprekidne postupke (X,F,x') i odgovarajuće operatore (X,F) važi inkluzija $(X,F,x')^o \overset{o}{\subseteq} (X,F,x')^c \overset{c}{\subseteq} (X,F)^b \overset{b}{\subseteq} (X,F)^d$ —

(Sporno može biti samo $(X,F,x')^c \subseteq (X,F)^b$. Međutim, $U=(u_j) \in (X,F,x')^c$ povlači egzistenciju okoline O tačke x′ takve da je $\sup_{x \in X \cap O} |(x,F)(U)| < \infty$. Označimo sa O_{i_o} okolinu iz baze $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ takvu da je $O_{i_o} \subseteq O$. Prema 6.vii i 1.ii, tada je $\sup_{x \in X - O_{i_o}} |(x,F)(U)| < \infty$, pa je tim pre $\sup_{x \in X - O} |(x,F)(U)| < \infty$. Otuda je $\sup_{x \in X} |(x,F)(U)| < \infty$, tj. $U=(u_j) \in (X,F)^b$.) Prema tome, ako je $T=(X,F,x')^c$, onda je i $T=(X,F)^b$. Tačnost uslova (12) dobija se sada primenom stavova II.2.9 i II.2.10.

2. Neprekidni $(X,F,x')_g$-postupci

Definicija operatora $(X,F)_g$ (pododeljak II.3.1) uvedena je u odnosu na neku tačku nagomilavanja x′ skupa X ($x' \notin X$). Da bi se moglo raspravljati o potrebnim i dovoljnim uslovima da doseg dejstva i doseg b-dejstva takvih operatora uključuje sve nizove skupa T^o, T^c, T^b ili T, pretpostavljeno je takođe da tačka x′ ima prebrojivu okolinsku bazu u polaznom prostoru $(Y,\mathcal{T})$. Ta činjenica zahteva specijalniji pristup (od onog kod operatora (X,F)) prilikom izdvajanja potklase klase $(X,F)_g$-operatora u cilju dobijanja mogućnosti za nova istraživanja u toj oblasti. Pri tome treba imati u vidu zahteve analogne onim koji su navedeni u pripremi definicije (X,F)-operatora tipa N. Kao rezultat tih okolnosti uvodimo sledeću definiciju.

1. D e f i n i c i j a. Neka je $(Y,\mathcal{T})$ Hausdorff-ov prostor, $X \subseteq Y$, $x' \notin X$ tačka nagomilavanja skupa X i $F=(f_j)$ niz realnih (kompleksnih) funkcija definisanih na X. Kažemo tada da je operator $(X,F)_g$ <u>tipa</u> N, ako za svaku okolinu O tačke x′ postoji okolina $O_{\overline{x}} \subseteq O$ iste tačke takva da skup $X \cap O_{\overline{x}}$, niz funkcija $f_j(x)|_{X \cap O_{\overline{x}}}$ (j=0,1,...) i tačka x′ ispunjavaju uslov (A) iz definicije $1.\overline{6}$.

(Kao i u slučaju operatora (X,F), govorićemo takođe: operator $(X,F)_g$ ima svojstvo N odnosno $(X,F)_g$ je N-operator.)

1.i. Kao primere $(X,F)_g$-operatora tipa N navodimo matrične operatore $(F)_g$, $F=(f_{ij})$. Naime, tada je $X=\{0,1,\ldots,i,\ldots\}$ i $f_j(i)=f_{ij}$ $(i,j=0,1,\ldots)$, pa nije teško proveriti da u posmatranom slučaju za svaku okolinu O tačke $x'=\infty$ skup $X\cap O$, niz funkcija $f_j(x)\big|_{X\cap O}$ $(j=0,1,\ldots)$ i tačka $x'=\infty$ ispunjavaju uslov (A) iz definicije 1.6. (Primetimo takođe da je u datom slučaju za svaku okolinu O tačke $x'=\infty$ $(X\cap O,F)$ jedan matrični, pa prema tome i jedan N-operator (F_1). Matrica F_1 se dobija iz polazne matrice F tako što se izostavi konačno mnogo njenih vrsta.)

Operatori $(x_o,x',F)_g$ takvi da su odgovarajući postupci (x_o,x',F) W-neprekidni, predstavljaju nove primere $(X,F)_g$-operatora sa svojstvom N. Zaista, tada je $X=[x_o,x')$, pa se pri datoj okolini O tačke x' za $O_{\overline{x}}\subseteq O$ može uzeti okolina tačke x' takva da je $X\cap O_{\overline{x}}=[x_{i_o},x')$, gde je x_{i_o} neki od članova niza (x_i) iz definicije W-neprekidnog postupka koji pripada okolini O. Da tako izabran skup $X\cap O_{\overline{x}}$, niz $f_j(x)\big|_{X\cap O_{\overline{x}}}$ $(j=0,1,\ldots)$ i tačka x' ispunjavaju uslov (A) iz definicije 1.6, sledi na osnovu definicije W-neprekidnog postupka.

1.ii. Primećujemo da je, pri svojstvu N operatora $(X,F)_g$, za svaku okolinu O tačke x' operator $(X\cap O_{\overline{x}},F)$, gde je $O_{\overline{x}}$ okolina tačke x' koja u smislu definicije 1 odgovara okolini O, jedan N-operator (definicija 1.1; videti i napomenu 1.6.vii). Ta činjenica, u kombinaciji sa lemom II.3.4 i stavovima 1.2- 1.5, omogućava dobijanje potrebnih i dovoljnih uslova da doseg dejstva i doseg b-dejstva $(X,F)_g$-operatora tipa N obuhvataju skup T^o, T^c, T^b odnosno T. Radi konciznosti izlaganja, navodimo jedan opšti rezultat iz koga specijalizacijom dobijamo potrebne i dovoljne uslove pomenute vrste.

2\. STAV. Neka je Z koneksan GK-prostor u odnosu na uobičajeno sabiranje nizova i $(X,F)_g$ operator tipa N. Tada važi ekvivalencija: $Z\subseteq(X,F)_g^d$ $((X,F)_g^b)\Longleftrightarrow$ postoji okolina O_* tačke x' takva da je operator $(X\cap O_*,F)$ tipa N i važi inkluzija

$$Z\subseteq(X\cap O_*,F)^d\ ((X\cap O_*,F)^b).$$

Dokaz. Pretpostavimo $Z\subseteq(X,F)_g^d$. Tada na osnovu leme II.3.4 postoji okolina O tačke x' takva da je $Z\subseteq(X\cap O,F)^d$. Iz svojstva N operatora $(X,F)_g$ sledi egzistencija okoline $O_*\subseteq O$ tačke x' takve da je operator $(X\cap O_*,F)$ tipa N. Inkluzija $Z\subseteq (X\cap O_*,F)^d$ je onda posledica relacije $(X\cap O,F)^d\subseteq(X\cap O_*,F)^d$.

U slučaju skupa $(X,F)_g^b$, zbog $(X,F)_g^d\supseteq(X,F)_g^b$, iz $Z\subseteq (X,F)_g^b$ takođe sledi egzistencija okoline O_* tačke x' takva da je operator $(X\cap O_*,F)$ tipa N i važi $Z\subseteq(X\cap O_*,F)^d$. Pokazaćemo da je tada $Z\subseteq(X\cap O_*,F)^b$. Zaista, $U=(u_j)\in Z\subseteq(X,F)_g^b$ povlači egzistenciju okoline O_+ tačke x', možemo pretpostaviti $O_+\subseteq O_*$, takve da je $\sup\limits_{x\in X\cap O_+}|(x,F)(U)|<\infty$. S druge strane, iz svojstva N operatora $(X\cap O_*,F)$ i $U=(u_j)\in Z\subseteq(X\cap O_*,F)^d$ izlazi (definicije 1 i 1.1 i napomene 1.1.ii i 1.6.vii)

$$\sup_{x\in X\cap O_*-O_+}|(x,F)(U)|<\infty .$$

Prema tome je $\sup\limits_{x\in X\cap O_*}|(x,F)(U)|<\infty$, tj. $U=(u_j)\in(X\cap O_*,F)^b$. Budući da je tačnost druge implikacije u stavu 2 očigledna (i bez pretpostavke da je operator $(X\cap O_*,F)$ tipa N), njegov dokaz je završen.

Uzimajući za Z prostore T^o, T^c, T^b odnosno T, primenom stava 2 i stavova 1.2 - 1.5 koji se odnose na N-operatore (X,F) dolazimo do analognih stavova za N-operatore $(X,F)_g$, na čemu se nećemo zadržavati. (Pri tome treba imati u vidu da se u slučaju operatora $(X\cap O_*,F)$ tipa N može uzeti da je $X_i=X\cap O_*-O_i$ $(i=0,1,\dots)$, gde je $\{O_i\}_{i=0,1,\dots}$ prebrojiva okolinska baza tačke x' koja postoji po definiciji 1, kao i da je tada $X\cap O_{*}-\bigcup_{i=0}^{i_0} X_i=(X\cap O_{*})\cap\bigcap_{i=0}^{i_0} O_i$.)

Definicija $(X,F)_g$-operatora tipa N nalaziće se u osnovi definicije jedne potklase klase postupaka tipa $(X,F,x')_g$ kojom se želi postići slično što i definicijom neprekidnog postupka (X,F,x').

3. D e f i n i c i j a. Neka X, F i x' ispunjavaju pretpostavke iz definicije 1. Ako je pri tome operator $(X,F)_g$ tipa N, onda za odgovarajući postupak $(X,F,x')_g$ kažemo da je neprekidan.

3.i. Na osnovu napomene 1.i, matrični postupci $(F')_g$ i postupci $(x_o,x',F)_g$ takvi da su odgovarajući postupci (x_o,x',F) W-neprekidni sačinjavaju potklase klase neprekidnih $(X,F,x')_g$-postupaka.

Primetimo da postupak $(X,F,x')_g$ može biti neprekidan i kada to sa odgovarajućim postupkom (X,F,x') nije slučaj. To pokazuje primer postupka (X,F,x') navedenog u komentaru stava II.2.12.ii. Isti postupak, kako je navedeno u posledici stava 1.7, nije neprekidan. U isto vreme, za svaku okolinu O tačke $x'=\infty$ koja ne sadrži tačke intervala $[-3,-1]$ $X\cap O$ je jedan podskup skupa prirodnih brojeva (skup $X\cap O$ ne sadrži samo konačno mnogo prirodnih brojeva). Stoga za svaku takvu okolinu O skup $X\cap O$, funkcije $f_j(x)\big|_{X\cap O}$ $(j=0,1,\ldots)$ i tačka $x'=\infty$ ispunjavaju uslov (A) iz definicije 1.6. Prema tome, odgovarajući operator $(X,F)_g$ je tipa N, odakle, po definiciji, sledi da je postupak $(X,F,x')_g$ neprekidan.

Stavovi sa potrebnim i dovoljnim uslovima da domen primene i domen o-primene neprekidnih postupaka $(X,F,x')_g$ sadrži skup T^o,T^c, T^b odnosno T, dobijaju se specijalizacijom (uzimajući $Z=T^o$, T^c, T^b, T) sledećeg rezultata i odgovarajućih stavova (1.7-1.11) za neprekidne postupke (X,F,x'), na čemu se nećemo zadržavati.

4. STAV. Neka je Z koneksan GK-prostor u odnosu na uobičajeno sabiranje nizova i $(X,F,x')_g$ neprekidan postupak. Tada je $Z \subseteq (X,F,x')^c_g$ $((X,F,x')^o_g)$ ako i samo ako postoji okolina O_x tačke x' takva da je postupak $(X \cap O_x, F, x')$ neprekidan i važi inkluzija $Z \subseteq (X \cap O_x, F, x')^c$ $((X \cap O_x, F, x')^o)$.

Dokaz. Pretpostavimo $Z \subseteq (X,F,x')^c_g$. Kako je $(X,F,x')^c_g \subseteq (X,F)^d_g$, to, na osnovu leme II.3.4, postoji okolina O tačke x' takva da je $Z \subseteq (X \cap O, F)^d$, a stoga i $Z \subseteq (X \cap O, F, x')^c$. Iz neprekidnosti postupka $(X,F,x')_g$ sledi egzistencija okoline $O_x \subseteq O$ tačke x' takve da je postupak $(X \cap O_x, F, x')$ neprekidan (definicije 3 i 1 i napomena 1.ii). Inkluzija $Z \subseteq (X \cap O_x, F, x')^c$ sledi onda na osnovu $(X \cap O, F, x')^c \subseteq (X \cap O_x, F, x')^c$.

Tačnost posmatrane implikacije u slučaju skupa $(X,F,x')^o_g$ dokazuje se na sličan način (imajući pri tome u vidu $(X,F,x')^o_g \subseteq (X,F)^d_g$, zatim da $Z \subseteq (X,F,x')^o_g$ i $Z \subseteq (X \cap O, F, x')^c$ impliciraju $Z \subseteq (X \cap O, F, x')^o$, kao i da je $(X \cap O, F, x')^o \subseteq (X \cap O_x, F, x')^o$, gde su O i O_x okoline tačke x' o kojima je reč u prethodnom delu dokaza). Pošto su obrnute implikacije očigledne, to je dokaz našeg stava dovršen.

3. Struktura domena primene neprekidnih (X,F,x')-postupaka

Izlaganje u ovom odeljku počećemo stavovima koji se tiču algebarsko-topološke strukture dosega dejstva i dosega b-dejstva proizvoljnih operatora (X,F), kao i strukture nekih specijalnih delova domena primene i domena o-primene proizvoljnih postupaka (X,F,x'). Odgovarajući stavovi za neprekidne postupke dobijaju se onda kao njihove posledice.

1. STAV. Ako je $(X,F)^d$ prostor B_0K sa (homogenim) pseudonormama $p_i(U)$ $(i=0,1,\ldots)$, onda je $(X,F)^b$ prostor B_0K u odno-

su na ukupnost pseudonormi $p_i(U)$ $(i=0,1,\ldots)$ i $p(U)=\sup_{x\in X}|(x,F)(U)|=$
$=\sup_{x\in X}|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j|$.

Dokaz. Pretpostavimo da je niz (U^m), $U^m=(u_j^m)$ $(m=0,1,\ldots)$, Cauchy-ev u prostoru $((X,F)^b;\ p_0,p_1,\ldots;\ p)$ tj. da

(a) $$p_i(U^m-U^n)\to 0\ (m\to\infty,\ n\to\infty)\ (i=0,1,\ldots)$$

i

(b) $$p(U^m-U^n)\to 0\ (m\to\infty,\ n\to\infty).$$

Tada iz (a) i pretpostavke da je $((X,F)^d;\ p_0,p_1,\ldots)$ prostor B_0K sledi da postoji $U=(u_j)\in(X,F)^d$ tako da

(a′) $$p_i(U^m-U)\to 0\ (m\to\infty)\ (i=0,1,\ldots).$$

Pokazaćemo da tako dobijen niz $U=(u_j)\in(X,F)^b$ kao i da

(b′) $$p(U^m-U)\to 0\ (m\to\infty).$$

S tim ciljem primećujemo da iz (b) sledi da za dato $\varepsilon>0$ postoji m_0 tako da je

$$p(U^m-U^n)=\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)(u_j^m-u_j^n)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za } m>m_0 \text{ i } n>m_0,$$

tj. da je

$$\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)(u_j^m-u_j^n)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za svako } x\in X,\ m>m_0 \text{ i } n>m_0 .$$

Puštajući $\underline{n}$ da teži ka ∞ i imajući u vidu da je za svako (fiksirano) $x\in X$

$$(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j \quad (U=(u_j)\in(X,F)^d)$$

linearna funkcionela na B_0K-prostoru $((X,F)^d;\ p_0,p_1,\ldots)$ (stav I.2.9), kao i da (a′) znači da $U^m\to U$ u prostoru

$$((X,F)^d;\ p_0,p_1,\ldots) ,$$

dolazimo do zaključka da je

$$\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za svako } x\in X \text{ i } m>m_0,$$

tj.

$$\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za } m>m_0.$$

Važi, dakle, relacija

(b′′) $$\sup_{x\in X}\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\to 0 \quad (m\to\infty) .$$

Iz nejednakosti

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(y)u_j\right| \leq \sup_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)(u_j - u_j^m)\right| + \sup_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j^m\right|$$

$(y\in X;\ m=0,1,\dots)$

i pretpostavke $U^m=(u_j^m)\in(X,F)^b$ $(m=0,1,\dots)$, sledi onda $U=(u_j)$ $\in(X,F)^b$. Što se tiče relacije (b′), relacija (b′′) je samo njen eksplicitni oblik. Prema tome, B_o^*K-prostor $((X,F)^b;p_o,p_1,\dots;p)$ je kompletan.

2. STAV. <u>Neka je</u> (X,F,x') <u>funkcijski postupak takav da je doseg dejstva</u> $(X,F)^d$ <u>odgovarajućeg operatora</u> (X,F) <u>prostor</u> B_oK <u>sa homogenim pseudonormama</u> $p_i(U)$ $(i=0,1,\dots)$. <u>Tada je</u>

$$(X,F,x')^c\cap(X,F)^b$$

<u>prostor</u> B_oK <u>u odnosu na familiju pseudonormi</u> $p_i(U)$ $(i=0,1,\dots)$ <u>i</u> $p(U) = \sup_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\right|$.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu prethodnog stava, dovoljno je ustanoviti da je skup $(X,F,x')^c\cap(X,F)^b$ zatvoren u prostoru

$$((X,F)^b;\ p_o,p_1,\dots\ ;\ p)\ .$$

Pretpostavimo, dakle, da $U^m\to U$ $(m\to\infty)$ u prostoru

$$((X,F)^b;\ p_o,p_1,\dots\ ;\ p)\ ,$$

gde je $U^m=(u_j^m)\in(X,F,x')^c$ $(m=0,1,\dots)$ i $U=(u_j)$. Pokazaćemo da tada $U=(u_j)\in(X,F,x')^c$. U tom cilju primetimo da iz nejednakosti

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1)u_j - \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_2)u_j\right| \leq \left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1)(u_j - u_j^m)\right| +$$

$$+\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1)u_j^m - \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_2)u_j^m\right| + \left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_2)(u_j^m - u_j)\right|$$

$(x_1\in X,\ x_2\in X;\ m=0,1,\dots)$

sledi

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1)u_j - \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_2)u_j\right| \leq 2\ p(U^m - U) +$$

$$+\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1)u_j^m - \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_2)\ u_j^m\right| \quad (x_1\in X,\ x_2\in X;\ m=0,1,\dots).$$

Na osnovu $p(U^m - U) \to 0$ $(m \to \infty)$ i pretpostavke $U^m \in (X,F,x')^c$ $(m=0,1,\dots)$, uobičajenim postupkom dolazi se do zaključka da postoji $\lim_{x \to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j$, tj. da $U=(u_j) \in (X,F,x')^c$. Tako je dokazana zatvorenost skupa $(X,F,x')^c \cap (X,F)^b$ u prostoru

$$((X,F)^b;\ p_o, p_1, \dots ;\ p\ ),$$

a time i stav 2.

3. STAV. <u>Neka je</u> (X,F,x') <u>funkcijski postupak takav da je doseg dejstva</u> $(X,F)^d$ <u>odgovarajućeg operatora</u> (X,F) <u>prostor</u> B_oK <u>u odnosu na pseudonorme</u> $p_i(U)$ $(i=0,1,\dots)$. <u>Tada je</u>

$$(X,F,x')^o \cap (X,F)^b$$

<u>prostor</u> B_oK <u>sa pseudonormama</u> $p_i(U)$ $(i=0,1,\dots)$ <u>i</u>

$$p(U) = \sup_{x \in X} \Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j \Big| .$$

<u>Dokaz</u>. Kao i u prethodnom slučaju, dovoljno je ustanoviti zatvorenost skupa $(X,F,x')^o \cap (X,F)^b$ u prostoru

$$((X,F)^b;\ p_o, p_1, \dots ;\ p\ ),$$

tj. da iz $U^m=(u_j^m) \in (X,F,x')^o \cap (X,F)^b$, $U=(u_j) \in (X,F)^b$ i $U^m \to U$ $(m \to \infty)$ u prostoru $((X,F)^b;\ p_o, p_1, \dots ;\ p\ )$ sledi $U=(u_j) \in (X,F,x')^o$. To se, međutim, dobija kao neposredna posledica nejednakosti

$$\Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(y)u_j \Big| \leq \Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(y)(u_j - u_j^m) \Big| + \Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(y)u_j^m \Big| \leq$$

$$\leq p(U^m - U) + \Big| \sum_{j=o}^{\infty} f_j(y)u_j^m \Big| \quad (y \in X;\ m=0,1,\dots) ,$$

i pretpostavki $p(U^m - U) \to 0$ $(m \to \infty)$ i $U^m=(u_j^m) \in (X,F,x')^o$ $(m=0,1,\dots)$.

4. Na osnovu stavova 1, 2 i 3, zaključujemo da se pri izučavanju algebarsko-topološke strukture skupova $(X,F)^d$, $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$ osnovni problem sastoji u tome kada i kako se može doseg dejstva $(X,F)^d$ operatora (X,F) snabdeti struk-

turom prostora B_oK. U vezi s tim primetimo da u slučaju operatora (X,F) takvog da za svako $x\in X$ postoji indeks j_x takav da $j>j_x$ povlači $f_j(x)=0$, imamo $(X,F)^d=T$ i na osnovu toga da je tada $(X,F)^d$ prostor B_oK u odnosu na homogene pseudonorne $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\ldots)$. Prema stavovima 1, 2 odnosno 3, u takvom slučaju su $(X,F)^b$, $(X,F)^b\cap(X,F,x')^c$ i $(X,F)^b\cap(X,F,x')^o$ prostori B_oK u odnosu na homogene pseudonorme $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\ldots)$ i

$$p(U)=\sup_{x\in X}\left|\sum_{j=o}^{\infty}f_j(x)u_j\right|=\sup_{x\in X}\left|\sum_{j=o}^{j_x}f_j(x)u_j\right| .$$

U nastavku ćemo pokazati da za doseg dejstva operatora (X,F) važi i obrnuto, tj.

4.i. Doseg dejstva $(X,F)^d$ operatora (X,F) je prostor B_oK sa pseudonormama $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\ldots)$ ako i samo ako je $T=(X,F)^d$ (što, prema stavu II.2.7, znači da za svako $x\in X$ postoji indeks j_x takav da $j>j_x$ implicira $f_j(x)=0$).

Pošto je o trivijalnom delu našeg tvrđenja već bilo reči, pretpostavimo da je $(X,F)^d$ prostor B_oK u odnosu na pseudonorme $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\ldots)$. Tada iz pretpostavke da su funkcije $f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ definisane na X sledi $E_j\in(X,F)^d$ za svako $j=0,1,\ldots$. Uočimo zatim proizvoljno $U=(u_j)\in T$. Iz prethodno rečenog izlazi $U^k=\sum_{j=o}^{k}u_jE_j\in(X,F)^d$ $(k=0,1,\ldots)$. Tako formiran niz (U^k) je Cauchy-ev u prostoru $((X,F)^d;\ p_o,p_1,\ldots)$, pa postoji $U^*=(u_j^*)\in(X,F)^d$ takvo da $U^k\to U^*$ $(k\to\infty)$ u prostoru

$$((X,F)^d;\ p_o,p_1,\ldots) .$$

Međutim, konvergencija u posmatranom prostoru je ustvari konvergencija po koordinatama, a niz (U^k) po koordinatama teži polaznom nizu $U=(u_j)$. U zaključku dobijamo $U^*=U$, i na osnovu toga $U\in(X,F)^d$ i $(X,F)^d=T$.

Prethodnom tvrđenju u slučaju skupova $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$

i $(X,F,x')^o$ odgovaraju sledeća tri tvrđenja koja se dokazuju na sličan način, pri čemu je, kao i ranije, $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\ldots)$.

4.ii. $(X,F)^b = T$ ako i samo ako je $((X,F)^b;\ p_o,p_1,\ldots)$ prostor B_oK i $\sup_{x\in X}|f_j(x)|<\infty$ $(j=0,1,\ldots)$.

(Primećujemo da, prema stavu II.2.9, uslovi:

$$((X,F)^b;\ p_o,p_1,\ldots)$$

je prostor B_oK i $\sup_{x\in X}|f_j(x)|<\infty$ $(j=0,1,\ldots)$, povlače egzistenciju indeksa j_o takvog da je $f_j(x)\equiv 0$ na X za svako $j>j_o$.)

4.iii. $(X,F,x')^c$ $((X,F,x')^o) = T$ ako i samo ako je $((X,F,x')^c;\ p_o,p_1,\ldots)$ $(((X,F,x')^o;\ p_o,p_1,\ldots))$ prostor B_oK i postoji $\lim_{x\to x'} f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ $(\lim_{x\to x'} f_j(x) = 0$ $(j=0,1,\ldots))$.

Analogne konstatacije mogu se učiniti i u slučaju skupova $(X,F,x')^c\cap(X,F)^b$ i $(X,F,x')^o\cap(X,F)^b$, na čemu se nećemo zadržavati. Inače, u opštem slučaju važi sledeći stav Mazur-a i Orlicz-a ([31], 3.1):

Ako je $(X;\ p_o,p_1,\ldots)$ beskonačno-dimenzionalan B_oK-prostor, onda su prostori $(T;\ p_o,p_1,\ldots)$ i $(X;\ p_o,p_1,\ldots)$ izomorfni. (Može se, međutim, dokazati da važi i obrnuto.)

Imajući u vidu i njihovu najavu na početku našeg odeljka, primećujemo da njegovi dosadašnji rezultati u izvesnom pogledu upotpunjuju rezultate odeljka II.4, pa bi im, s te tačke gledišta, tamo bilo i mesto. Njihovo raspoređivanje u odeljak III.3, kao njegovog prvog dela, posledica je i okolnosti da oni upravo u tom odeljku igraju jednu od glavnih uloga.

Na osnovu napomene 4 i činjenice da u slučaju neprekidnih postupaka (X,F,x') važi relacija $(X,F,x')^o\subseteq(X,F,x')^c\subseteq(X,F)^b\subseteq(X,F)^d$, u ostatku ovog odeljka centralno mesto pripada sledećem stavu.

5. STAV. <u>Doseg dejstva</u> $(X,F)^d$ N-<u>operatora</u> (X,F) <u>je prostor</u> B_oK <u>u odnosu na pseudonorme</u> $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\ldots)$ <u>i</u>

$$p_i^1(U) = \sup_{k,x\in X_i} \Big|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\Big| .$$

<u>Dokaz</u>. Pokazaćemo najpre da su pseudonorme $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\ldots)$ dobro definisane, tj. da je za svako $U=(u_j)\in(X,F)^d$ i svako $i=0,1,\ldots$ $p_i^1(U)$ konačno. U tom cilju primetimo da je

$$\text{(c)}\qquad \Big|\sum_{j=0}^{k} f_j(y)u_j\Big| \le \Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(y)u_j\Big| + \Big|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(y)u_j\Big| \le$$

$$\le \sup_{x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\Big| + \Big|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(y)u_j\Big|$$

$$(U=(u_j)\in(X,F)^d;\ y\in X_i;\ k=0,1,\ldots) .$$

Na osnovu svojstva N operatora (X,F) je $\sup_{x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\Big|<\infty$ (napomena 1.1.ii) i red $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ uniformno konvergira na X_i. Dakle, postoji k_o takvo da je $\sup_{k\geq k_o,x\in X_i}\Big|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x)u_j\Big|\le 1.$ Tada, prema (c), imamo

$$\text{(d)}\qquad \sup_{k\geq k_o,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\Big| \le \sup_{x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\Big| +$$

$$+ \sup_{k\geq k_o,x\in X_i}\Big|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x)u_j\Big|<\infty .$$

S druge strane, po definiciji operatora (X,F) tipa N, funkcije $f_j(x)$ $(j=0,1,\ldots)$ neprekidne su na kompaktnom topološkom prostoru $(X_i,\mathcal{T}_i)$, a time i ograničene na skupu X_i. Otuda je

$$\sup_{k<k_o,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\Big|<\infty ,$$

što sa (d) daje

$$p_i^1(U) = \sup_{k,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\Big| < \infty$$

za svako $U=(u_j)\in(X,F)^d$ i svako $i=0,1,\ldots$ (zbog proizvoljnosti izbora niza $U=(u_j)\in(X,F)^d$ i skupa X_i).

Pretpostavimo sada da je niz (U^m), $U^m=(u_j^m)$ $(m=0,1,\ldots)$ Cauchy-ev u prostoru $((X,F)^d;\ p_o,p_1,\ldots;\ p_o^1,p_1^1,\ldots)$, tj. da

(e) $\quad p_j(U^m-U^n)\to 0 \ (m\to\infty,\ n\to\infty)\ (j=0,1,\dots)$

i

(f) $\quad p_i^1(U^m-U^n)\to 0 \ (m\to\infty,\ n\to\infty)\ (i=0,1,\dots).$

Tada iz (e) sledi egzistencija niza $U=(u_j)$ takvog da

(e′) $\quad p_j(U^m-U)\to 0 \quad (m\to\infty)\ (j=0,1,\dots).$

Pokazaćemo da tako dobijen niz $U=(u_j)\in(X,F)^d$, kao i da $U^m\to U\ (m\to\infty)$ u prostoru $((X,F)^d;\ p_0,p_1,\dots;\ p_0^1,p_1^1,\dots)$, tj., prema (e′), da i

(f′) $\quad p_i^1(U^m-U)\to 0 \ (m\to\infty)\ (i=0,1,\dots).$

Zaista, na osnovu (f), pri proizvoljno izabranom (pa fiksiranom) $\underline{i}$, za dato $\varepsilon>0$ postoji broj m_0 takav da je

$$p_i^1(U^m-U^n)=\sup_{k,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k}f_j(x)(u_j^m-u_j^n)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za } m>m_0 \text{ i } n>m_0\,,$$

tj.

$$\Big|\sum_{j=0}^{k}f_j(x)(u_j^m-u_j^n)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za svako } x\in X_i,\ \text{svako } k=0,1,\dots,\ m>m_0 \text{ i } n>m_0.$$

Puštajući $\underline{n}$ da teži ka ∞ i imajući u vidu da (e′) znači konvergenciju po koordinatama, dolazimo do zaključka da je

$$\Big|\sum_{j=0}^{k}f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za svako } x\in X_i,\ \text{svako } k=0,1,\dots \text{ i } m>m_0,$$

odnosno

$$\sup_{k,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k}f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\leq\varepsilon \quad \text{za } m>m_0\,.$$

Prema tome,

(f″) $\quad \sup_{k,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k}f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|\to 0\ (m\to\infty)$ za svako $i=0,1,\dots$.

Dobijena relacija upravo omogućava da se ustanovi $U=(u_j)\in(X,F)^d$, tj. da red $\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j$ konvergira za svako $x\in X$. Naime, uočivši $y\in X$ izaberimo X_{i_0} iz familije X_i $(i=0,1,\dots)$ tako da $y\in X_{i_0}$ (to je moguće na osnovu $X=\bigcup_{i=0}^{\infty}X_i$). Tada je

$$\Big|\sum_{j=p+1}^{q}f_j(y)u_j\Big|\leq\Big|\sum_{j=0}^{q}f_j(y)(u_j-u_j^m)\Big|+\Big|\sum_{j=0}^{p}f_j(y)(u_j^m-u_j)\Big|+$$

$$+\Big|\sum_{j=p+1}^{q}f_j(y)u_j^m\Big|\leq 2\sup_{k,x\in X_{i_0}}\Big|\sum_{j=0}^{k}f_j(x)(u_j^m-u_j)\Big|+\Big|\sum_{j=p+1}^{q}f_j(y)u_j^m\Big|\,.$$

Konvergencija reda $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(y)u_j$ sledi onda na osnovu (f′′) i pretpostavke $U^m=(u_j^m)\in(X,F)^d$ $(m=0,1,\ldots)$. Što se tiče relacije (f′), relacija (f′′) je njen eksplicitni oblik. Kompletnost B_0^*K-prostora $((X,F)^d;\ p_0,p_1,\ldots;\ p_0^1,p_1^1,\ldots)$ je time dokazana.

5.i. U slučaju matričnih operatora (F), $F=(f_{ij})$, pseudonorme $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\ldots)$ mogu se svesti na $p_i^1(U)=\sup_k\left|\sum_{j=0}^{k} f_{ij}u_j\right|$ $(i=0,1,\ldots)$ (videti napomenu 1.1.i). U slučaju pak N-operatora (x_0,x',F) takvih da je odgovarajući postupak (x_0,x',F) O-neprekidan (1.6.vi i 1.6.vii) u svojstvu pseudonormi $p_i^1(U)$ mogu se uzeti $p_i^1(U)=\sup_{k,x_0\leq x\leq x_{i+1}}\left|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\right|$ $(i=0,1,\ldots)$, gde je (x_i) niz tačaka iz intervala $[x_0,x')$ koji konvergira ka x'. L. Wlodarski je pokazao [20] da se pri posmatranju operatora (x_0,x',F) tipa N takvih da je odgovarajući postupak (x_0,x',F) W-neprekidan (napomena 1.6.v) u svojstvu pseudonormi $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\ldots)$ mogu uzeti $p_i^1(U)=\sup_k\left|\sum_{j=0}^{k} f_j(x_i)u_j\right|$, gde je (x_i) niz čiju egzistenciju i svojstvo pretpostavlja definicija W-neprekidnog postupka.

I uopšte, pri svojstvu N operatora (X,F), postoje mnogobrojne mogućnosti izbora pseudonormi $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\ldots)$ takvih da je $((X,F)^d;\ p_0,p_1,\ldots;\ p_0^1,p_1^1,\ldots)$ prostor B_0K. Tako, naprimer, možemo uzeti

$$p_i^1(U)=\sup_{k,x\in Y_i}\left|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\right| \quad (i=0,1,\ldots),$$

gde su Y_i $(i=0,1,\ldots)$ unije po konačno mnogo skupova familije X_i $(i=0,1,\ldots)$ takve da je i $\bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i=X$. Novi izbori pseudonormi $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\ldots)$ ne dovode, međutim, do bitno novih prostora $((X,F)^d;\ p_0,p_1,\ldots;\ p_0^1,p_1^1,\ldots)$ u odnosu na onaj koji je posmatran u stavu 5. Naime, na osnovu Zeller-ovog stava (I.2.11), važi:

5.ii. Neka je operator (X,F) tipa N i neka su pseudonorme $p_j(U)$ $(j=0,1,\dots)$ i $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\dots)$ definisane kao u stavu 5. Ako je pri tome $((X,F)^d,n)$ prostor FK, onda je norma $n(U)$ ekvivalentna sa sistemom pseudonormi $p_j(U)$ $(j=0,1,\dots)$ i $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\dots)$, tj. tada su prostori

$$((X,F)^d;\ p_0,p_1,\dots;\ p_0^1,p_1^1,\dots)$$

i $((X,F)^d,n)$ izomorfni.

Dakle, algebarsko-topološka struktura dosega dejstva $(X,F)^d$ N-operatora (X,F) određena je na jedinstven način. Stoga se tada može govoriti jednostavno o B_oK-prostoru $(X,F)^d$ i, ako je to potrebno, operisati (eksplicitno i implicitno) samo sa pseudonormama $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\dots)$ i

$$p_i^1(U)=\sup_{k,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\Big| \quad (U=(u_j)\in(X,F)^d).$$

Sledeće tvrđenje pokazuje da je, pri svojstvu N operatora (X,F), svako $U=(u_j)\in(X,F)^d$ granica niza (U^k) takvog da za svako $k=0,1,\dots$ $U^k=(u_j^k)$ ima samo konačno mnogo koordinata različitih od nule. Preciznije, imamo:

5.iii. Ako je operator (X,F) tipa N, onda za svako $U=(u_j)\in(X,F)^d$ u prostoru $((X,F)^d;\ p_0,p_1,\dots;\ p_0^1,p_1^1,\dots)$ važi razlaganje

$$U=\sum_{j=0}^{\infty}u_jE_j .$$

<u>Dokaz</u>. Stavimo $U^m=\sum_{j=0}^{m}u_jE_j$. Tada iz $p_j(U^m-U)=0$ za $m>j$ sledi da $p_j(U^m-U)\to 0$ $(m\to\infty)$ za svako $j=0,1,\dots$. U isto vreme imamo $p_i^1(U-U^m)=\sup_{k,x\in X_i}\Big|\sum_{j=0}^{k}f_j(x)(u_j-u_j^m)\Big|=$

$$=\sup_{k>m,x\in X_i}\Big|\sum_{j=m+1}^{k}f_j(x)u_j\Big|\to 0\ (m\to\infty)$$

za svako $i=0,1,\dots$ (po definiciji N-operatora (X,F) red $\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j$ uniformno konvergira na X_i za svako $i=0,1,\dots$), što, s obzirom na proizvoljnost izbora $U=(u_j)\in(X,F)^d$, dokazuje tačnost našeg tvrđenja.

Na sličan način se može dokazati i sledeći rezultat:

Ako doseg dejstva $(X,F)^d$ operatora (X,F) tipa N· sadrži sve nula-nizove, onda za svako $U=(u_j)\in(X,F)^d$ i svaki ograničen dvojni niz $v_m^{(n)}$ $(m,n=0,1,\ldots)$ niz (U^m), gde je

$$U^m=(u_o,u_1,\ldots,u_m,v_{m+1}^{(m)},v_{m+2}^{(m)},\ldots)\ (m=0,1,\ldots)\ ,$$

konvergira ka U u prostoru $((X,F)^d;\ p_o,p_1,\ldots;\ p_o^1,p_1^1,\ldots)$. Šta više, ta konvergencija je uniformna po svim nizovima $v_m^{(n)}$ $(m,n=0,1,\ldots)$ ograničenim jednim istim brojem, što može biti od značaja (naprimer, pri ispitivanju perfektnosti regularnih neprekidnih postupaka (X,F,x')).

Primenom stavova 1 i 5, dobijamo sledeći

6. STAV. Doseg b-dejstva N-operatora (X,F) je prostor B_oK u odnosu na pseudonorme $p_j(U)$ $(j=0,1,\ldots)$,

$$p_i^1(U)=\sup_{k,x\in X_i}\left|\sum_{j=o}^{k}f_j(x)u_j\right|\quad(i=0,1,\ldots)$$

i $p(U)=\sup_{x\in X}\left|\sum_{j=o}^{\infty}f_j(x)u_j\right|$.

Iz istih razloga kao i ranije, može se govoriti jednostavno o B_oK-prostoru $(X,F)^b$. Sličan komentar može se dati i uz sledeći rezultat.

7. STAV. Domen primene $(X,F,x')^c$ i domen o-primene $(X,F,x')^o$ neprekidnog postupka (X,F,x') su prostori B_oK u odnosu na pseudonorme $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\ldots)$, $p_i^1(U)=$

$$=\sup_{k,x\in X-O_i}\left|\sum_{j=o}^{k}f_j(x)u_j\right|\ (i=0,1,\ldots)\quad \text{i}\quad p(U)=\sup_{x\in X}\left|\sum_{j=o}^{\infty}f_j(x)u_j\right|\ ,$$

gde je $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ okolinska baza tačke x' čiju egzistenciju i svojstva pretpostavlja definicija 1.6.

Tačnost stava 7 sledi na osnovu napomene 1.6.vii i stavova 5 i 2 odnosno 3. Primetimo takođe da pored različitih izbora pseudonormi p_i^1 napomenutih kod proizvoljnih operatora

(X,F) tipa N, u slučaju neprekidnih postupaka (X,F,x') takvih da polazni prostor $(Y,\mathcal{T})$ ima prebrojivu bazu možemo uzeti

$$p_i^1(U) = \sup_{k,x\in X\cap O_{i-1}-O_i} \left|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\right| \quad (i=0,1,\ldots),$$

gde je $O_{-1}=Y$ i $\{O_i\}_{i=0,1,\ldots}$ prebrojiva okolinska baza tačke x' koja predstavlja monotono opadajući niz skupova i ispunjava uslove iz definicije neprekidnog postupka (videti napomenu 1.6.iii). Ta napomena može se primeniti, naprimer, pri radu sa O-neprekidnim postupcima.

Stavovi 6 i 7 pokazuju da se struktura dosega b-dejstva $(X,F)^b$ N-operatora (X,F) i struktura domena primene $(X,F,x')^c$ i domena o-primene $(X,F,x')^o$ neprekidnog postupka (X,F,x') na prirodan način "naslanjaju" na strukturu dosega dejstva $(X,F)^d$ odgovarajućeg N-operatora (X,F). To, međutim, ne znači da se sva svojstva prostora $(X,F)^d$ prenose na prostore $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$. Tako, naprimer, tvrđenje 5.iii nema analogona u slučaju prostora $(X,F,x')^o$, a time ni u slučaju prostora $(X,F,x')^c$ i $(X,F)^b$. To pokazuje sledeći primer.

7.i. <u>Primer</u>. Posmatrajmo postupak (F') određen matricom $F=(f_{ij})$, gde je $f_{ii}=f_{i,i+1}=\frac{1}{2}$ $(i=0,1,\ldots)$ i $f_{ij}=0$ u ostalim slučajevima (očigledno, postupak (F') takav je da je

$$(F)(U) = \frac{u_i+u_{i+1}}{2} \quad (i=0,1,\ldots)$$

i $(F')(U)=\lim_i \frac{u_i+u_{i+1}}{2}$), i niz $U=(u_j)$ sa $u_j=(-1)^j$ $(j=0,1,\ldots)$. Tada je $(F')(U)=0$, tj. $U\in(F')^o$. Uzimajući

$$U^m=(u_o,u_1,\ldots,u_m,0,0,\ldots)$$

u datom slučaju imamo $U-U^m=(0,0,\ldots,\overset{m}{0},(-1)^{m+1},(-1)^{m+2},\ldots)$ i $(F)(U-U^m)=(v_i)$, gde je $v_m=\frac{(-1)^{m+1}}{2}$ i $v_i=0$ za $i\neq m$ $(m=0,1,\ldots)$. Na osnovu toga je $p(U-U^m)=\sup_i|v_i|=\frac{1}{2}\not\to 0$ $(m\to\infty)$, odakle sledi da za posmatrani niz $U=(u_j)$ $U^m \not\to U$ $(m\to\infty)$ u prostoru $(F')^o$ (dakle i prostorima $(F')^c$ i $(F)^b$). Primetimo takođe da u datom slučaju niz (U^m) uopšte ne konvergira u prostoru $(F')^o$. (Prostor $(F')^o$ je tipa K, pa ako bi niz (U^m) konvergirao u tom prostoru, onda bi njegova granica bio niz U, što, videli smo, nije slučaj.) Može se, dakle, reći da tada red $\sum_{j=o}^{\infty} u_j E_j$ ne konvergira u prostoru $(X,F,x')^o$ (i, naravno, prostorima $(X,F,x')^c$ i $(X,F)^b$). Sledeći stav pokazuje da red $\sum_{j=o}^{\infty} u_j E_j$ može divergirati u prostoru $(X,F,x')^c$ ($(X,F)^b$) i onda kada je niz $U=(u_j)$ konvergentan a postupak (X,F,x') poluregularan (definicijja II.1.2). Naime, važi

8. STAV. <u>Neka je</u> (X,F,x') <u>poluregularan neprekidan postupak takav da je</u> $a_j=\lim_{x\to x'} f_j(x) = 0$ $(j=0,1,\dots)$ <u>i</u> $a=\lim_{x\to x'} \sum_{j=o}^{\infty} f_j(x) \neq 0$ <u>i</u> $U=(u_j)\in T^c - T^o$. <u>Tada red</u> $\sum_{j=o}^{\infty} u_j E_j$ <u>divergira u prostoru</u> $(X,F,x')^c$ ($(X,F)^b$).

Dokaz stava 8, pod pretpostavkom da je X skup realnih (kompleksnih)brojeva izložen je u [18], str. 46. Njegovom analizom ustanovljava se da dokaz i u novom slučaju može teći na isti način.

Stav 8 pokazuje da, pod njegovim pretpostavkama o postupku (X,F,x'), iz $U=(u_j)\in T^c$ i konvergencije reda $\sum_{j=o}^{\infty} u_j E_j$ u prostoru $(X,F,x')^c$ sledi $U=(u_j)\in T^o$. Nije, međutim, teško videti da važi i obrnuto.

L. Wlodarski [20] je pokazao da je domen primene $(X,F,x')^c$ W-neprekidnog postupka (x_o,x',F) prostor B_oK u odnosu na pseudonorme $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\dots)$, $p_i^1(U)=\sup_k \left|\sum_{j=o}^{k} f_j(x_i)u_j\right|$ $(i=0,1,\dots)$ i $p(U)=\sup_{x_o\leq x<x'} \left|\sum_{j=o}^{\infty} f_j(x)u_j\right|$, gde je (x_i) niz tačaka intervala $[x_o,x')$ iz definicije W-neprekidnog postupka. Prime-

ćujemo uzgred da su tada i $(x_o,x',F)^b$ i $(x_o,x',F)^o$ prostori B_oK u odnosu na posmatrane pseudonorme.

Nizom (x_i) iz definicije W-neprekidnog postupka (x_o,x',F) određen je na uobičajen način matrični postupak (G') izveden iz postupka (x_o,x',F). Tada su $(G')^o$, $(G')^c$ i $(G)^b$ B_oK-prostori u odnosu na pseudonorme $p_j(U)$ $(j=0,1,\ldots)$ i $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\ldots)$ posmatrane od Wlodarski-og i $p^1(U)=\sup_m\left|\sum_{j=o}^{\infty}f_j(x_m)u_j\right|$. Primer matričnog postupka i ekvivalentnog W-neprekidnog postupka (videti II.4.4.v) pokazuje da posmatrani izveden postupak (G') i polazni W-neprekidan postupak (x_o,x',F) mogu biti ekvivalentni. Tada se, dakle, domeni primene postupaka (x_o,x',F) i (G') podudaraju. U opštem slučaju treba, međutim, dopustiti mogućnost da je skup $(X,F,x')^c$ pravi podskup od $(G')^c$. Međutim, primenom stavova I.2.11 i I.2.10 dobijamo da pri neprekidnosti postupka (X,F,x') mogu nastupiti samo dva slučaja: ili je skup $(X,F,x')^c$ prve kategorije u prostoru $(G')^c$, ili se $(X,F,x')^c$ podudara sa $(G')^c$. Naime, prema stavu I.2.11, identično preslikavanje $A(U)=$ $=U$ $(U=(u_j)\in(X,F,x')^c)$ je jedno linearno preslikavanje B_oK-prostora $(X,F,x')^c$ u B_oK-prostor $(G')^c$. Tačnost našeg tvrđenja sledi onda na osnovu stava I.2.10 (u posmatranom slučaju je $A((X,F,x')^c) = (X,F,x')^c)$.

Postavlja se sada pitanje kada, pri datom neprekidnom postupku (X,F,x'), postoji izvedeni postupak (G') takav da je skup $(X,F,x')^c$ prve kategorije u prostoru $(G')^c$. Prema prethodnom, dovoljno je naći izvedeni postupak (G') takav da skup $(G')^c$ ima bar jedan elemenat više od skupa $(X,F,x')^c$. Takvu mogućnost imamo, naprimer, kod regularnih neprekidnih postupaka (X,F,x').

Zaista, ako je neprekidan postupak (X,F,x') regularan, onda je

$$\sup_{x\in X}\sum_{j=o}^{\infty}|f_j(x)|<\infty .$$

(videti komentar stava 1.7) i postoji ograničen niz $U=(u_j)$ takav da $U=(u_j)\notin(X,F,x')^c$. Odatle sledi $\sup_{x\in X}\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j\right|<\infty$ i, na osnovu toga, egzistencija niza (x_i) elemenata iz X koji konvergira ka x' tako da postoji (konačan) $\lim_i \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_i)u_j$. Posmatrani niz $U=(u_j)$ očigledno ima granicu u smislu postupka (G') izvedenog iz postupka (X,F,x') i pridruženog nizu (x_i), ali, kako smo pretpostavili, ne i u smislu polaznog postupka (X,F,x'). Na osnovu toga, skup $(X,F,x')^c$ je prve kategorije u prostoru $(G')^c$.

4. Struktura domena primene neprekidnih $(X,F,x')_g$-postupaka

Stavovi 1-3 i 5-7 iz prethodnog odeljka pokazuju da se pri uvođenju topološke strukture u skupove $(X,F)^d$, $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$ bitno koristi činjenica da $U=(u_j)\in(X,F)^d$ ($(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ odnosno $(X,F,x')^o$) pretpostavlja konvergenciju reda $(x,F)(U)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)u_j$ za svako $x\in X$. Pri definisanju skupova $(X,F)_g^d$, $(X,F)_g^b$, $(X,F,x')_g^c$ i $(X,F,x')_g^o$, $U=(u_j)\in(X,F)_g^d$ ($(X,F)_g^b$, $(X,F,x')_g^c$, $(X,F,x')_g^o$) pretpostavlja egzistenciju okoline O_U tačke x' takve da red $(x,F)(U)$ konvergira "tek" za svako $x\in X\cap O_U$ (dopuštajući, dakle, mogućnost da red $(x,F)(U)$ divergira za svako $x\in X-O_U$). Već taj podatak pokazuje da treba računati sa većim teškoćama pri tendenciji da skupove $(X,F)_g^d$, $(X,F)_g^b$, $(X,F,x')_g^c$ i $(X,F,x')_g^o$ snabdemo strukturom prostora B_oK (ili nekom drugom iole efikasnom složenom matematičkom strukturom). Naše dalje izlaganje pokazuje da ta struktura ne mora biti obezbeđena čak ni u slučaju kada je operator $(X,F)_g$ tipa N (a time postupak $(X,F,x')_g$ neprekidan). To će slediti iz stavova sa potrebnim i dovoljnim uslovima da doseg dejstva i doseg b-dejstva N-operatora $(X,F)_g$ i domen primene i domen o-primene neprekidnog postupka $(X,F,x')_g$ budu koneksni prostori GK (u odnosu na uobičajeno sabiranje nizova), koji su osnovna problematika ovog (poslednjeg) odeljka našega rada. I sada, kao i u slučaju odeljaka II.3 i III.2, svi rezultati će se bazirati na rezultatu leme II.3.4 i odgovarajućim stavovima za operatore (X,F) tipa N odnosno neprekidne postupke (X,F,x'), što lemi II.3.4 daje izuzetno važno mesto u ovom radu.

1. STAV. Doseg dejstva N-operatora $(X,F)_g$ je koneksan GK-prostor ako i samo ako postoji okolina O tačke x' takva da je $(X,F)_g^d = (X\cap O,F)^d$.

Dokaz. Pretpostavimo da je operator $(X,F)_g$ tipa N i da je $(X,F)_g^d$ koneksan GK-prostor u odnosu na uobičajeno sabiranje nizova. Tada, prema lemi II.3.4 (uzimajući za Y upravo prostor $(X,F)_g^d$), postoji okolina O tačke x' takva da je $(X,F)_g^d \subseteq (X\cap O,F)^d$. Kako obrnuta inkluzija pogotovu važi, to je za tako dobijenu okolinu O tačke x' $(X,F)_g^d = (X\cap O,F)^d$. (Iz dokaza našeg stava u posmatranom smeru vidi se da taj deo stava važi za proizvoljne, a ne samo za N-operatore $(X,F)_g$.) Obrnuto, neka je operator $(X,F)_g$ tipa N i neka postoji okolina O tačke x' takva da je $(X\cap O,F)^d = (X,F)_g^d$. Po definiciji N-operatora $(X,F)_g$ (pododeljak 2.1), postoji okolina $O_{\bar{x}} \subseteq O$ tačke x' takva da je operator $(X\cap O_{\bar{x}},F)$ tipa N. Tada iz $(X,F)_g^d = (X\cap O,F)^d \subseteq (X\cap O_{\bar{x}},F)^d \subseteq (X,F)_g^d$ sledi $(X,F)_g^d = (X\cap O_{\bar{x}},F)^d$. Na osnovu stava 3.5, $(X\cap O_{\bar{x}},F)^d$, pa prema tome i $(X,F)_g^d$, je prostor B_oK (u odnosu na pseudonorme $p_j(U)=|u_j|$ $(j=0,1,\dots)$ i

$$p_i^1(U)=\sup_{k,x\in X\cap O_{\bar{x}}-O_i}\Big|\sum_{j=0}^{k} f_j(x)u_j\Big| \quad (i=0,1,\dots),$$

gde je $\{O_i\}_{i=0,1,\dots}$ prebrojiva okolinska baza tačke x' čiju egzistenciju i svojstva pretpostavlja definicija 2.1). Time je dokaz stava 1 dovršen, s obzirom na to da je svaki B_oK-prostor i GK-prostor.

1.i. Analizom dokaza stava 1 dolazimo do zaključka da je doseg dejstva $(X,F)_g^d$ N-operatora $(X,F)_g$ moguće snabdeti strukturom prostora B_oK ako i samo ako ga je moguće snabdeti strukturom koneksnog prostora GK. U tom smislu se može reći da je struktura B_oK-prostora prirodna za doseg dejstva operatora $(X,F)_g$ tipa N i u stavu 1 umesto koneksnim prostorima GK operisati prostorima B_oK. Ista konstatacija važi i u slučaju skupova $(X,F)_g^b$, $(X,F,x')_g^c$ i $(X,F,x')_g^o$ kod N-operatora $(X,F)_g$ odnosno neprekidnog postupka $(X,F,x')_g$, pa će stoga u sledećim stavovima biti reči samo o prostorima B_oK.

2. STAV. <u>Da bi doseg b-dejstva</u> $(X,F)_g^b$ <u>N-operatora</u> $(X,F)_g$ <u>bio prostor</u> B_oK <u>potrebno i dovoljno je da postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x′ <u>takva da je</u> $(X\cap O,F)^b=(X,F)_g^b$.

<u>Dokaz</u>. Dovoljnost. Pretpostavimo da je operator $(X,F)_g$ tipa N i da postoji okolina O tačke x′ sa svojstvom $(X\cap O,F)^b=(X,F)_g^b$. Po definiciji N-operatora $(X,F)_g$, postoji i okolina $O_*\subseteq O$ tačke x′ takva da je operator $(X\cap O_*,F)$ tipa N. Zbog $(X\cap O,F)^b\subseteq(X\cap O_*,F)^b\subseteq(X,F)_g^b$, dolazimo do zaključka da je $(X\cap O_*,F)^b=(X,F)_g^b$, pa dovoljnost navedenog uslova dobijamo primenom stava 3.6 na operator $(X\cap O_*,F)$. (Na osnovu navedenog stava je $(X\cap O_*,F)^b$, dakle $(X,F)_g^b$, prostor B_oK u odnosu na pseudonorme $p_j(U)$ $(j=0,1,\dots)$, $p_i^1(U)$ $(i=0,1,\dots)$ navedene pri dokazu prethodnog stava i $p(U)=\sup_{x\in X\cap O_*}\left|\sum_{j=0}^{\infty}f_j(x)u_j\right|$.)

Potrebnost. Pretpostavimo da je doseg b-dejstva $(X,F)_g^b$ N-operatora $(X,F)_g$ prostor B_oK. Na osnovu inkluzije $(X,F)_g^b\subseteq(X,F)_g^d$ i leme II.3.4 (uzimajući $Y=(X,F)_g^b$), postoji okolina O_1 tačke x′ takva da je $(X,F)_g^b\subseteq(X\cap O_1,F)^d$. Na osnovu definicije N-operatora $(X,F)_g$, postoji okolina $O_{\bar{x}} \subseteq O_1$ tačke x' takva da je operator $(X \cap O_{\bar{x}}, F)$ tipa N. Tada iz $(X \cap O_1, F)^d \subseteq (X \cap O_{\bar{x}}, F)^d$ sledi $(X,F)_g^b \subseteq (X \cap O_{\bar{x}}, F)^d$. Slično kao za Z u dokazu stava 2.2, može se zatim ustanoviti da je (preciznije) $(X,F)_g^b \subseteq \subseteq (X \cap O_{\bar{x}}, F)^b$, što, budući da je pogotovu $(X \cap O_{\bar{x}}, F)^b \subseteq (X,F)_g^b$, implicira $(X,F)_g^b = (X \cap O_{\bar{x}}, F)^b$. Potrebnost navedenog uslova (sa $O = O_{\bar{x}}$) i stav 2 su time dokazani.

3. STAV. <u>Domen primene</u> $(X,F,x')_g^c$ <u>neprekidnog postupka</u> $(X,F,x')_g$ <u>je prostor</u> B_oK <u>ako i samo ako postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>takva da je</u> $(X \cap O, F, x')^c = (X,F,x')_g^c$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je postupak $(X,F,x')_g$ neprekidan, kao i da postoji okolina O tačke x' sa svojstvom $(X \cap O, F, x')^c = (X,F,x')_g^c$. Tada neprekidnost postupka $(X,F,x')_g$ (definicija 2.3) implicira egzistenciju okoline $O_{\bar{x}} \subseteq O$ tačke x' takve da je postupak $(X \cap O_{\bar{x}}, F, x')$ neprekidan (2.1, 2.1.ii i 1.6). Da je $(X,F,x')_g^c$ prostor B_oK sledi onda na osnovu $(X \cap O_{\bar{x}}, F, x')^c = (X,F,x')_g^c$ i stava 3.7. Obrnuto, neka je domen primene $(X,F,x')_g^c$ neprekidnog postupka $(X,F,x')_g$ prostor B_oK. Tada, zbog $(X,F)_g^d \supseteq (X,F,x')_g^c$, postoji okolina O tačke x' takva da je $(X,F,x')_g^c \subseteq (X \cap O, F)^d$ (lema II.3.4). Lako je, međutim, videti da je u tom slučaju i $(X,F,x')_g^c \subseteq (X \cap O, F, x')^c$, što implicira $(X,F,x')_g^c = = (X \cap O, F, x')^c$ i dovršava dokaz stava 3.

Na analogan način se dokazuje i tačnost sledećeg rezultata:

4. STAV. <u>Da bi domen o-primene neprekidnog postupka</u> $(X,F,x')_g$ <u>bio prostor</u> B_oK <u>potrebno i dovoljno je da postoji okolina</u> O <u>tačke</u> x' <u>takva da je</u> $(X \cap O, F, x')^o = (X,F,x')_g^o$.

Stavovi 1 i 2 pokazuju da su doseg dejstva i doseg b-dejstva N-operatora $(X,F)_g$ (dakle, operatora generalisanog tipa) prostori B_oK ako i samo ako se isti podudaraju sa dosegom dejstva odnosno dosegom b-dejstva operatora $(X\cap O,F)$ za neku okolinu O tačke x' (tj. operatora prvobitnog tipa dobijenog od $(X,F)_g$ tako što se iz posmatranja ispuste tačke skupa $X-O$). Analogna konstatacija ima se (na osnovu stavova 3 i 4) i u slučaju domena primene i domena o-primene neprekidnog postupka $(X,F,x')_g$. Kod matričnih operatora $(F)_g$ to praktično znači da je doseg dejstva $(F)_g^d$ (doseg b-dejstva $(F)_g^b$) prostor B_oK ako i samo ako postoji matrica F_1 dobijena od matrice F ispuštanjem konačno mnogo prvih vrsta takva da je $(F_1)^d=(F)_g^d$ $((F_1)^b=(F)_g^b)$. Isti komentar se može dati i u vezi sa domenom primene i domenom o-primene matričnih postupaka $(F')_g$. Te činjenice omogućavaju da navedemo primer matrice F takve da ni jedan od skupova $(F)_g^d$, $(F)_g^b$, $(F')^c$ i $(F')^o$ nije prostor B_oK (šta više, ni koneksan GK-prostor, kako smo već napomenuli).

5. <u>Primer</u>. Posmatrajmo matricu

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{j+1} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2^i} & \frac{1}{3^i} & \cdots & \frac{1}{(j+1)^i} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \end{pmatrix}.$$

a) Pretpostavimo da je za datu matricu F skup $(F)_g^d$ prostor B_oK. Tada prema stavu 1 postoji indeks i_o takav da je $(F)_g^d=(F_o)^d$, gde je

$$F_o=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^{i_o+1}} & \frac{1}{3^{i_o+1}} & \cdots & \frac{1}{(j+1)^{i_o+1}} & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2^{i_o+2}} & \frac{1}{3^{i_o+2}} & \cdots & \frac{1}{(j+1)^{i_o+2}} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \end{pmatrix}.$$

Nije, međutim, teško videti da niz $U=(u_j)$, gde je $u_j=(j+1)^{i_o}$

$(j=0,1,\ldots)$, pripada skupu $(F)_g^d$ (red $\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j$ konvergira za $i>i_o+1$), ali ne i skupu $(F_o)^d$ (posmatrani red divergira za $i=i_o+1$). Dobijena kontradikcija pokazuje da se u datom slučaju $(F)_g^d$ ne može snabdeti strukturom prostora B_oK.

b) Uzmimo sada da je za posmatranu matricu F skup $(F)_g^b$ prostor B_oK. Onda, prema stavu 2, postoji indeks i_1 takav da matrica

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^{i_1+1}} & \frac{1}{3^{i_1+1}} & \ldots & \frac{1}{(j+1)^{i_1+1}} & \ldots \\ 1 & \frac{1}{2^{i_1+2}} & \frac{1}{3^{i_1+2}} & \ldots & \frac{1}{(j+1)^{i_1+2}} & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots \end{pmatrix}$$

ima svojstvo $(F)_g^b = (F_1)^b$. Međutim, niz $U=(u_j)$, gde je $u_j=(j+1)^{i_1}$ $(j=0,1,\ldots)$ pripada skupu $(F)_g^b$ $\left(\left|\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j\right| = \sum_{j=o}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{i-i_1}} \leq \sum_{j=o}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^2} \text{ za } i>i_1+1 \right)$, ali ne i skupu $(F_1)^b$ (posmatrani niz $U=(u_j)$ ne pripada skupu $(F_1)^d$, pa prema tome ni skupu $(F_1)^b$). Dakle, u posmatranom slučaju ni skup $(F)_g^b$ nije moguće snabdeti strukturom prostora B_oK.

c) Neka je u datom slučaju skup $(F')_g^c$ prostor B_oK. Na osnovu stava 3, tada postoji matrica

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^{i_2+1}} & \frac{1}{3^{i_2+1}} & \ldots & \frac{1}{(j+1)^{i_2+1}} & \ldots \\ 1 & \frac{1}{2^{i_2+2}} & \frac{1}{3^{i_2+2}} & \ldots & \frac{1}{(j+1)^{i_2+2}} & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots \end{pmatrix}$$

takva da je $(F_2')^c = (F')_g^c$. Slično prethodna dva slučaja, pokazaćemo da poslednja jednakost ne važi. Naime, niz $U=(u_j)$ sa $u_j = (j+1)^{i_2}$ $(j=0,1,\ldots)$ ne pripada skupu $(F_2')^c$ (jer ne pripada skupu $(F_2)^d$), dok je u isto vreme posmatrani niz elemenat skupa $(F')_g^c$ (red $\sum_{j=o}^{\infty} f_{ij}u_j = \sum_{j=o}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{i-i_2}}$ konvergira za svako $i>i_2+1$

i (ako se posmatraju samo te vrednosti i) postoji $\lim_{i} \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}u_j$ (može se pokazati da je jednak 1)). Iz dobijene kontradikcije proizlazi da se kod posmatrane matrice F ni skup $(F')_g^c$ ne može snabdeti strukturom prostora B_oK.

d) Na osnovu stava 4, operišući sa (eventualno) nekim novim indeksom i_3, i nizom $U=(u_j)$, gde je $u_o=0$ i $u_j=(j+1)^{i_3}$ $(j=1,2,\ldots)$ došli bismo do zaključka da se ni skup $(F')_g^o$ naše matrice F ne može snabdeti strukturom prostora B_oK.

Analizom stavova 1-4 može se, pri svojstvu N operatora $(X,F)_g$, konstatovati sledeće:

Ako se bilo koji od skupova $(X,F)_g^d$, $(X,F)_g^b$, $(X,F,x')_g^c$ i $(X,F,x')_g^o$ može snabdeti strukturom prostora B_oK, onda to svojstvo imaju i svi sledeći skupovi (po redu navođenja).

Odatle, naprimer, sledi da ako se u slučaju neprekidnosti postupka $(X,F,x')_g$ bilo kom od četiri posmatrana skupa ne može nametnuti struktura prostora B_oK, onda to isto važi i za prethodne skupove. Na osnovu toga je u primeru 5 bilo dovoljno pokazati samo da se skup $(F')_g^o$ ne može snabdeti strukturom prostora B_oK (deo pod d)), dok bi se sve ostalo (a), b) i c)) pojavilo kao posledica.

Na kraju ovog dela našega rada primetimo da pri dokazu stavova o strukturi skupova $(X,F)^d$, $(X,F)^b$, $(X,F,x')^c$ i $(X,F,x')^o$ nije uopšte korišćena pretpostavka da su $(X_i,\mathcal{T}_i)$ $(i=0,1,\ldots)$, odnosno $(X-0_i,\mathcal{T})$ $(i=0,1,\ldots)$, topološki prostori prebrojive baze. Stoga bi se za tu priliku ta pretpostavka mogla izostaviti iz definicije operatora (X,F) tipa N, odnosno definicije neprekidnog postupka (X,F,x'). U slučaju pak stavova sa potrebnim i dovoljnim uslovima da posmatrani skupovi sadrže neki od skupova T^o, T^c, T^b i T, ta pretpostavka intervenisala je na bitan način. Radi što veće jedinstvenosti izlaganja (a time i njegove bolje preglednosti) mi smo se ipak opredelili za jedinstvenu definiciju operatora tipa N odnosno neprekidnog postupka.

L i t e r a t u r a

[1] Mazur, S. et Orlicz, W.: Sur les espaces métriques linéaires (I), Studia Math. 10(1948), str. 184-208.

[2] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires, Monografje Matematyczne I, New York, 1955.

[3] Banach, S.: Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fundamenta Mathematicae XVI(1930).

[4] Taylor, A.E.: Introduction to Functional Analysis, New York, 1958.

[5] Aljančić, S.: Uvod u funkcionalnu analizu, Beograd, 1963.

[6] Zeller, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Zeitschrift 53(1951), str. 463-487.

[7] Wlodarski, L.: Sur les méthodes continues de limitation (II), Studia Math. 14(1954), str. 188-199.

[8] Wlodarski, L.: On some strong continuous summability methods, Proc. London math. Soc. (3) 13(1961), str. 273-289.

[9] Danford, N. i Švarc, Dž.: Linjejnyje operatory, I, Izdateljstvo inostranoj literatury, Moskva, 1962.

[10] Aljančić, S.: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Beograd, 1968.

[11] Mazur, S. et Orlicz, W.: Sur les espaces métriques linéaires (II), Studia Math. 13(1953), str. 137-179.

[12] Jajte, R.: General theory of summability I, Acta Sci. Math. (Szeged) 26(1965), str. 107-116.

[13] Prullage, D.L.: Summability in Topological Groups, Math. Zeitschrift 96(1967), str. 259-278.

[14] Prullage, D.L.: Summability in Topological Groups II, Math. Zeitschrift 103(1968), str. 129-138.

[15] Persson, A.: Summation methods on locally compact spaces, Med. Lunds Univ. Math. Sem. 18(1965).

[16] Nowak, B.: A remark on the general theory of summability, Annales Polonici Mathematici XXIV(1971), str. 241-246.

[17] Steinhaus, H.: Kilka slow o uogólnieniu pojecia granicy, Prace matematyczno-fizyczne 22(1911), str. 121.

[18] Lazić, M.G.: Magistarski rad, Beograd, 1968.

[19] Lazić, M.G.: Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour que le domaine d'un procédé continu contienne toutes les suites bornées, Mat.vesnik 7(22) sv.2 (1970), str. 217-222.

[20] Wlodarski, L.: Sur les méthodes continues de limitation (I), Studia Math. 14(1954), str. 161-187.

[21] Lazić, M.: Sur les procédés fonctionnels (de limitation), Mat. vesnik 6(21) sv. 4 (1969), str. 425-436.

[22] Schur, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reichen, J.f. reine u.ang. Math.151(1921),79-111.

[23] Hardy, G.H.: Divergent series, Oxford, 1949.

[24] Kuk, R.: Beskonječnyje matrici i prostranstva posljedovateljnostjej, Moskva, 1960.

[25] Gelbaum, B. i Olmsted, Dž.: Kontrprimjery v analjize,Moskva,196

[26] Fihtengoljc, G.M.: Kurs diferencialjnovo i integraljnovo isčisljenija II, Fizmatgiz, Moskva, 1962.

[27] Lazić, M.G.: O perfektnosti permanentnih trougaonih postupaka, Mat. vesnik 8(23) sv. 3 (1971), str. 271-280.

[28] Lazić, M.G.: Sur la perfection des procédés continus permanents, Publ. de l'Inst. math.(Nouvelle sér.) t.11(25) (1971), str. 93-97.

[29] Mazur, S.: Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren, Studia Math. 2 (1930), str. 40.

[30] Mazur, S. et Orlicz, W.: Sur les méthodes linéaires de sommation, Comptes Rendus 196(1933), str. 32-34.

[31] Mazur, S. et Orlicz, W.: On linear methods of summability, Studia Math. 14(1954), str. 129-160.

[32] Hill, J.D.: On perfect methods of summability, Duke math. J. 3(1937), str. 702-714.

[33] Hill, J.D.: Some properties of summability, Duke math. J. 9(1942), str. 373-381.

[34] Wilansky, A.: A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence, Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949), str. 914-916.

[35] Wilansky, A.: An application of Banach linear functionals to summability, Trans. Amer. Math. Soc. 67(1949), str. 59-68.

[36] Zeller, K. ; Beekmann, W.: Theorie der Limitierungsverfahren, Springer-Verlag; Berlin • Heildelberg • New York, 1970.

[37] Wlodarski, L.: On a new approach to continuous methods of summation, Colloquium math. 10(1963), str. 61-71.

[38] Orlicz, W.: On the Summability of Bounded Sequences by Continuous Methods, Bull. de l'Acad. Pol. des sci., Sér. des sci. math., astr. et phys. - Vol. VI, No 9 (1958).