

PD 10116

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO—MATEMATIČKI FAKULTET

Žarko V. Pavićević

**GRANIČNA SVOJSTVA NEKIH KLASA
MEROMORFNIH FUNKCIJA**
— DOKTORSKA DISERTACIJA —

Beograd, 1983.

Želim da izrazim zahvalnost dr V.I.Gavrilovu na podršci i pomoći koje mi je pružio za vrijeme trogodišnjeg naučnog rukovođenja u toku kojeg sam dobio rezultate koji su izloženi u ovom radu .

Takođe dugujem zahvalnost dr Mioljubu Nikiću za korisne savjete i podsticaj da istrajem u izradi ovoga rada .

S a d r Ź a j

U V O D	4
G l a v a I	
P O M O Ć N I R E Z U L T A T I	11
1.1. Kapacitet i neka njegova svojstva	11
1.2. Neki rezultati koji se odnose na preslikavanja jediničnog diska D u $\mathbb{R}$	16
G l a v a II	
K O N V E R G E N C I J E N I Z O V A N E K I H K L A S A M E R O M O R F N I H F U N K C I J A	33
2.1. Konvergencije nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama meromorfnihi funkcija $\mathcal{T}_\alpha$	35
2.2. Konvergencije nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama analitičkih funkcija $\mathcal{T}_\alpha^*$	47
2.3. Hiperbolička varijacija tetiva u okolini tačaka Fatou	56
2.4. Konvergencija nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama analitičkih funkcija $\mathcal{T}_\alpha^L$	60
2.5. Granična svojstva meromorfnihi i analitičkih funkcija sa integrabilnim izvodima	64
2.6. Konvergencije nizova $\{f_n(z, \tau)\}$ u klasi neprekidno diferencijabilnih funkcija $\mathcal{T}$ i njenim potklasama $\mathcal{T}_\alpha$	77
G l a v a III	
L O K A L I Z A C I J A U B O R E L O V O M S M I S L U	85

3.1. Konvergencija nizova $\{f_n(z, \varphi)\}$ u klasama meromorfnih funkcija Π^B i Π_α^B	85
3.2. Konvergencija nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama analitičkih funkcija Π^*B i Π_α^*B	90
3.3. Hiperbolička varijacija tetiva u okolini tačaka Fatou	93
3.4. Konvergencija nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama analitičkih funkcija Π^hB i Π_α^hB	94
3.5. Konvergencija nizova $\{f_n(z, \varphi)\}$ u klasama neprekidno diferencijabilnih funkcija Π^B i Π_α^B	96
3.6. O jednoj teoremi jedinstvenosti u hiperboličkoj metrici	99
L I T E R A T U R A	105

U V O D

U ovom radu rješavam niz problema iz Teorije graničnih skupova koji su vezani za neka granična svojstva meromorfnih , analitičkih i neprekidno diferencijabilnih na jediničnom disku D funkcija .

Osnove Teorije graničnih skupova postavili su P.Painleve i P.Fatou krajem XIX i početkom XX vijeka ; posebno ističem njihove radove / 28 / i / 40 / ; dok je prvi rezultat iz te teorije , koji je u klasičnoj teoriji analitičkih funkcija poznat pod nazivom teorema Weiestrassa-Sohockog , dobijen još šezdesetih-sedamdesetih godina prošlog vijeka a dobili su ga C.Briot i C.Bouquet / 8 / , F.Casoreti / 21 / , K.Weierstrass / 47 / i J.S.Sohocki / 32 / .

Tridesetih godina ovoga vijeka , zahvaljujući rezultatima F.Iversena , W.Grossa , A.Denjuya , C.Cabatheodorya , H.H.Luzina , I.I.Privalova , F.Riesza , M.Riesza , V.V.Golubejeva , R.Nevanlinna i dr. , dolazi do intezivnog razvoja Teorije graničnih skupova .

Danas Teorija graničnih skupova obrađuje veoma široku problematiku ; našla je mjesto u mnogim matematičkim disciplinama kao na primjer u Teoriji potencijala , Teoriji analitičkih i meromorfnih funkcija , Funkcionalnoj analizi , Teoriji mjere , Teoriji diferencijalnih jednačina , Topologiji .

Kako cilj ovoga rada nije sistematsko izučavanje istorije Teorije graničnih skupova , što bi iziskivalo mnogo vremena i truda , to će u buduće biti riječi samo o onim momentima iz

njenog historijata koji omogućavaju bolje shvatanje rezultata datih u ovom radu .

Osnovni problem koji rješavam u ovom radu vezan je za ispitivanja konvergencija nizova ugaonih (tetivnih) graničnih vrijednosti meromorfnih i analitičkih funkcija koje su definisane na jediničnom disku $D = \{z : |z| < 1\}$ kompleksne ravni $\mathbb{C}$. Takođe dokazujem da slični rezultati važe i za neke klase neprekidno diferencijabilnih funkcija čija su granična svojstva izučavali L.Carleson , V.I.Gavrilov i A.N.Ajrapetjan (pogledati literaturu) .

Od mnoštva matematičara koji su se bavili rješavanjem sličnih problema pomenuću samo neke : K.Weierstrass , P.Montel , A.J.Hinčin , A.Ostrowski , I.I.Privalov , G.M.Fihtengoljc , S.Warrowschawski i dr .

Posebno ističem rezultat A.J.Hinčina i A.Ostrowskog iz dvadesetih godina ovoga vijeka koji je u literaturi poznat pod nazivom teorema Hinčin-Ostrowskog . Ona se bavi rješavanjem sljedećeg problema : Posmatra se niz funkcija $\{f_n(z)\}$ u klasi analitičkih na jediničnom disku D funkcija čiji elementi $f(z)$ imaju ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ za skoro svaku tačku $\xi = e^{i\theta}$ skupa E . Skup E je podskup granice Γ jediničnog diska D koji ima pozitivnu Lebesgueovu mjeru . P stavlja se pitanje koje uslove treba da zadovoljava niz $\{f_n(e^{i\theta})\}$ na E da bi niz $\{f_n(z)\}$ ravnomjerno konvergirao na svakom kompaktnom skupu jediničnog diska D .

A.J.Hinčinu pripada sljedeći rezultat : Ako niz $\{f_n(z)\}$ ograničenih , analitičkih na jediničnom disku D funkcija zadovoljava uslove : i) postoji skup E na granici Γ diska

D pozitivne Lebesgueove mjere na kome niz $\{f_n(e^{i\theta})\}$ konvergira, ii) $\int_{\Gamma} \ln^+ |f_n(re^{i\theta})| d\theta < C$, $0 < r < 1$, $n = 1, 2, \dots$, tada niz $\{f_n(z)\}$ konvergira ravnomjerno na svakom kompaktnom kupu diska D , / 43 /.

Isti takav rezultat je dobio A. Ostrowski, / 27 /, ali za klasu analitičkih funkcija sa ograničenom Nevanlinnovom karakteristikom.

Krajem četrdesetih godina G. C. Tumarkin dokazuje teoremu Hinčin-Ostrowskog pod slabijim uslovima. Naime, uslov i) zamjenjuje slabijim pretpostavljajući da niz $\{f_n(e^{i\theta})\}$ konvergira po mjeri na skupu E (/ 29 /, str. 118).

Pedesetih i šezdesetih godina G. C. Tumarkin intenzivno rješava probleme koji su vezani za teoremu Hinčin-Ostrowskog kao i probleme koji predstavljaju inverzne probleme naprijed formulisano problema.

Inverzan problem se može formulisati na sljedeći način :
 Pretpostavimo da je $\{f_n(z)\}$ niz analitičkih ili meromorfnih na jediničnom disku D funkcija čiji članovi $f_n(z)$ imaju ugaone (tetivne) granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$ ($f_n(\zeta, \eta)$) za svaku tačku $\zeta = e^{i\theta}$ sa granice Γ diska D , osim za tačke koje obrazuju skupove Lebesgueove mjere nula ili kapaciteta nula. Pretpostavimo da niz $\{f_n(z)\}$ ravnomjerno konvergira na svakom kompaktnom skupu diska D ka funkciji $f(z)$. Postavlja se pitanje kako će se ponašati niz $\{f_n(e^{i\theta})\}$ ($\{f_n(\zeta, \eta)\}$) ugaonih (tetivnih) graničnih vrijednosti na granici Γ diska D .

Rezultati koji su dobijeni do osamdesetih godina naprijed formulisani inverzni problem rješavaju na sljedeći način :

Ako niz $\{f_n(z)\}$ ravnomjerno konvergira na svakom kompaktnom skupu jediničnog diska D i zadovoljava još neke uslove, o nekim od tih uslova biće više riječi u drugoj glavi ovoga rada, onda se dokazuje da niz ugaonih graničnih vrijednosti $\{f_n(e^{i\theta})\}$ konvergira po mjeri na granici Γ diska D .

Moji rezultati o konvergenciji nizova $\{f_n(e^{i\theta})\} (\{f_n(z, r)\})$ bave se takođe rješavanjem naprijed formulisanog inverznog problema. Njihov značaj je što povezuju svojstvo ravnomjerne konvergencije niza $\{f_n(z)\}$ na kompaktnim skupovima diska D sa svojstvom da niz $\{f_n(e^{i\theta})\} (\{f_n(z, r)\})$ konvergira skoro svuda na granici Γ diska D , odnosno da niz $\{f_n(e^{i\theta})\} (\{f_n(z, r)\})$ konvergira u svim tačkama $z=e^{i\theta}$ skupa Γ , osim u tačkama koje obrazuju skup koji ima α -kapacitet jednak nuli.

Interesantno je istaći da je do sada objavljen samo jedan rad, koji, kao i ja, rješava srodne probleme, i to je rad američkog matematičara W. Abikoffa, / 1 /.

I dok se rezultati W. Abikoffa odnose na klasu meromorfnih funkcija sa ograničenim Dirichletovim integralom, dotle se moji rezultati odnose na klase meromorfnih, analitičkih i neprekidno diferencijabilnih funkcija čija su granična svojstva izučavali L. Carleson, V. I. Gavrilov i A. J. Ajrapetjan. Napominjem, da se klasa meromorfnih funkcija sa ograničenim Dirichletovim integralom sadrži u klasi meromorfnih funkcija koje se izučavaju u ovom radu.

Posebno, na ovom mjestu, želim da istaknem rezultate koje sam dobio lokalno za konvergenciju nizova ugaonih (tetivnih) graničnih vrijednosti za meromorfne, analitičke i neprekidno diferencijabilne na disku D funkcije.

Inače , ni problem čijim rješavanjem se bavi teorema
 Hinčin-Ostrowskog ni njemu inverzan problem , u opštem slučaju
 ne mogu se riješiti . Naime , korišćenjem teoreme Rungea , može
 se konstruisati niz polinoma $\{p_n(z)\}$ koji će skoro svuda na
 granici Γ diska D konvergirati proizvoljnoj , unaprijed
 zadanoj mjerljivoj funkciji $\varphi(e^{i\theta})$ a unutar diska D
 proizvoljnoj , unaprijed zadanoj analitičkoj funkciji $f(z)$
 (/ 29 / , str. 131) . Otuda slijedi prirodnost načina na
 koji su rješavani naprijed formulisani problemi .

U ovom radu , takođe izučavam , koristeći hiperboličku
 metriku $|d_h z| = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|$, kako se u blizini tačaka
 $z = e^{i\theta} \in F(f)$ ponašaju ograničene , analitičke na jedini-
 čnom disku D funkcije $f(z)$. Naime , u proizvoljnoj
 tački $z = e^{i\theta} \in F(f)$ funkcija $f(z)$ konvergira ka određenoj
 konačnoj ugaonoj graničnoj vrijednosti $f(e^{i\theta})$ po svakoj tetivi
 $h(z, \varphi)$, $-\frac{\bar{u}}{2} < \varphi < \frac{\bar{u}}{2}$, $h(z, \varphi) \subset D$, $h(z, \varphi) \cap \Gamma = z$.

Postavljaju se pitanja :

- A) Da li će slika svake tetive $h(z, \varphi)$ za tačku $z = e^{i\theta} \in F(f)$
 pri preslikavanju $f(z)$ biti rektrifibilna kriva u odnosu
 na hiperboličku metriku diska D ?
- B) Naći klase analitičkih na jediničnom disku D funkcija
 $f(z)$ za koje će se svaka tetiva $h(z, \varphi)$ za tačku $z = e^{i\theta} \in F(f)$
 preslikati u rekt ifibilnu krivu pri preslikavanju $f(z)$ u
 odnosu na hiperboličku metriku diska D . Pri tome se
 još zahtijeva da tačke $z = e^{i\theta} \in F(f)$ koje ne zadovoljavaju
 naprijed formulisano svojstvo , obrazuju skup koji ima Lebes-
 gueovu mjeru nula ili kapacitet nula .

Naprijed formulisani zadaci su vezani za izučavanje

funkcija

$$\Lambda_f(z, \varphi) = \int_{\Gamma(z, \varphi)} (1 - |f(z)|^2)^{-1} |f'(z)| |dz|, \quad z = x + iy.$$

W. Rudin, / 30 /, konstruisao je proizvod Bljaškea $B(z)$ koji ima svojstvo da mu je vrijednost funkcije

$$L_f(z, \varphi) = \int_{\Gamma(z, \varphi)} (1 + |f(z)|^2)^{-1} |f'(z)| |dz|, \quad z = x + iy,$$

beskonačna za skoro svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ i $\varphi = 0$. Kako je

$L_f(z, \varphi) \leq \Lambda_f(z, \varphi)$, tada je $\Lambda_B(z, \varphi)$ beskonačno za skoro svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ i $\varphi = 0$. Otuda, primjer $B(z)$, koji je konstruisao W. Rudin, daje negativan odgovor na postavljeni zadatak A).

Rezultati koje sam dobio rješavanjem zadatka B), s jedne strane, predstavljaju poboljšanje klasične teoreme Fatou o ugaonim graničnim vrijednostima za neke klase ograničenih analitičkih na jediničnom disku D funkcija, a s druge strane, predstavljaju dokaz rezultata S. Yamashite za mnogo šire klase ograničenih, analitičkih na jediničnom disku D funkcija od klase funkcija koju je S. Yamashita izučavao u / 46 /.

Kako je

$$L_f(z, \varphi) \leq \ell_f(z, \varphi) = \int_{\Gamma(z, \varphi)} |f'(z)| |dz| \leq \Lambda_f(z, \varphi)$$

za svaku analitičku na jediničnom disku D funkciju $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, to ovi rezultati takođe predstavljaju poboljšanje rezultata M. Tsujia iz / 34 /, V. I. Gavrilova i V. S. Zaharjana iz / 15 / i A. N. Ajrapetjana iz / 2 /, za, u ovom radu, izučavane klase ograničenih, analitičkih

na jediničnom disku D funkcija .

Napominjem , da će se dobijeni rezultati o rektifikabilnosti u hiperboličkoj metrici koristiti u rješavanju nekih problema iz konvergencije nizova ugaoih graničnih vrijednosti za ograničene, analitičke na jediničnom disku D funkcije .

Takođe, ovaj rad sadrži jedan interesantan rezultat koji sam formulisao i dokazao u obliku teoreme jedinstvenosti u hiperboličkoj metrici .Njegov značaj je što pokazuje da neki rezultati koji važe u sfernoj metrici važe i u hiperboličkoj metrici. Ističem da dobijeni rezultat u Teoriji graničnih skupova u izvjesnom smislu daje pojačanje teoreme jedinstvenosti Luzina i Privalova za ograničene , analitičke na disku D funkcije .

Ovaj rad se sastoji iz uvoda, tri glave i literature koja je data na kraju rada .

U prvoj glavi su dati neki osnovni rezultati iz Teorije potencijala koji su vezani za pojam kapaciteta kao i neki rezultati koji se odnose na preslikavanja jediničnog diska D u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Oni daju matematički aparat koji je neophodan za dokaz rezultata druge i treće glave .

U drugoj glavi su izloženi bitni rezultati ovoga rada , izuzev jedne teoreme jedinstvenosti koja je data u trećoj glavi .

Treća glava , osim već pominjane teoreme jedinstvenosti , sadrži rezultate koji predstavljaju lokalizaciju nekih rezultata druge glave u Borelovom smislu .

G l a v a I

P O M O Ć N I R E Z U L T A T I

Ova glava kako je rečeno u Uvodu , sadrži pomoćne rezultate koji daju matematički aparat neophodan za dokaz rezultata druge i treće glave ovoga rada . Ona se sastoji iz dva dijela.

U 1.1 se definišu α i konveksni kapacitet i daju neka njihova svojstva neophodna za dalji rad .

U 1.2 se dokazuje niz lema (1.2.1 - 1.2.6) koje zajedno sa rezultatom V.I.Gavrilova i V.S.Zaharjana , koji se formuliše u obliku leme 1.2.7 , i njima analognim rezultatima koji važe za proizvoljne Borelove skupove sa zatvorenog intervala $[0, 2\pi]$, odnosno $\mathbb{P}$, daju rezultate neophodne za dokaz svih glavnih rezultata ovoga rada .

Takođe se u 1.2 definiše topološki prostor $(C(D), \tau)$ čija topologija u prostoru meromorfnih na jediničnom disku D funkcija $M(D)$ indukuje topologiju u kojoj su neke klase meromorfnih i analitičkih funkcija , koje se izučavaju u drugoj i trećoj glavi , zatvoreni skupovi .

Rezultati iz 1.2 ako se gledaju u okviru Teorije potencijala ili Teorije funkcija , mogu imati samostalan značaj .

1.1. Kapacitet i neka njegova svojstva

1. Neka je K proizvoljan kompaktan skup sa zatvorenog inter-

vala $[0, 2\pi]$, i neka $\mathcal{M}_K$ označava skup svih mjera μ koje imaju sljedeća svojstva:

- i) μ je mjera na σ -algebri Borelovih skupova $\{B\}$ sa zatvorenog intervala $[0, 2\pi]$,
- ii) nosač mjere μ , $S(\mu)$, je podskup od K ,
- iii) $\mu([0, 2\pi]) = \mu(K) = \mu(S(\mu)) = 1$.

Za kompaktan skup K sa zatvorenog intervala $[0, 2\pi]$ i proizvoljnu mjeru $\mu \in \mathcal{M}_K$ funkcija

$$\rho_\alpha^\mu(t) = \begin{cases} \int_K |e^{it} - e^{i\theta}|^{-\alpha} d\mu(\theta), & 0 < \alpha < 1, \\ \int_K \ln \frac{1}{|e^{it} - e^{i\theta}|} d\mu(\theta), & \alpha = 0, \end{cases}$$

naziva se α -potencijal kompaktnog skupa K za mjeru μ , dok se integral

$$I_\alpha(\mu) = \begin{cases} \iint_{K \times K} |e^{it} - e^{i\theta}|^{-\alpha} d\mu(\theta) d\mu(t), & 0 < \alpha < 1, \\ \iint_{K \times K} \ln \frac{1}{|e^{it} - e^{i\theta}|} d\mu(\theta) d\mu(t), & \alpha = 0, \end{cases}$$

naziva α -energija kompaktnog skupa K za mjeru μ .

Definicija 1.1.1. Broj $\zeta_\alpha(K) = [W_\alpha(K)]^{-1}$ za $0 < \alpha < 1$, odnosno $e^{-W_\alpha(K)}$ za $\alpha = 0$, gdje je $W_\alpha(K) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_K} I_\alpha(\mu)$

predstavlja α -kapacitet kompaktnog skupa K .

α -kapacitet za $\alpha = 0$ poznatiji je pod nazivom logaritamski kapacitet.

Sljedeća dva rezultata, koja će se često koristiti za dokaz rezultata druge i treće glave ovoga rada kao i nekih rezultata u 1.2, predstavljaju osnovne rezultate iz Teorije potencijala za α -kapacitet kompaktnih skupova K .

Teorema 1.1.1 (teorema o minimizirujućoj mjeri). Postoji mjera $\lambda \in \mathcal{M}_K$ takva da je $I_\alpha(\lambda) = W_\alpha(K) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_K} I_\mu(\alpha)$.

Teorema 1.1.2 (rezultat Frostmana). Za svako $t \in [0, 2\alpha]$ važi $\rho_\alpha^t(K) \leq W_\alpha(K)$.

2. Za proizvoljan skup E sa $[0, 2\alpha]$ broj

$$\underline{C}_\alpha(E) = \inf_{K \subseteq E} C_\alpha(K)$$

naziva se unutrašnji α -kapacitet skupa E , dok se broj

$$\bar{C}_\alpha(E) = \sup_{E \subset G} C_\alpha(G)$$

gdje su G -ovi otvoreni skupovi sa $[0, 2\alpha]$, naziva spoljašnji α -kapacitet skupa E .

Ako je $\underline{C}_\alpha(E) = \bar{C}_\alpha(E) = C_\alpha(E)$, kaže se da je skup E C_α -mjerljiv ili α -kapacitabilan. Broj $C_\alpha(E)$ je α -kapacitet skupa E .

Teorema 1.1.3. Ako je $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, i $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, onda je $C_\alpha(E_n) \leq C_\alpha(E_{n+1})$ i $C_\alpha(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_\alpha(E_n)$.

Teorema 1.1.4. Svaki Borelov skup sa zatvorenog intervala $[0, 2\pi]$ je C_α -mjerljiv .

Teorema 1.1.5. Prebroiva unija Borelovih skupova sa zatvorenog intervala $[0, 2\pi]$ je C_α -mjerljiv skup .

Teorema 1.1.6. Borelovi skupovi koji imaju α -kapacitet nula imaju i Lebesgueovu mjeru nula .

Teorema 1.1.7. Neka su E_n , $n = 1, 2, \dots$, Borelovi skupovi, tada za α -kapacitet, $0 < \alpha < 1$, važi polu aditivnost tj.

$$C_\alpha \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha (E_n)$$

a za $\alpha = 0$

$$\left[\ell_\alpha \left(2 \left[C_\alpha \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \right]^{-1} \right) \right]^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ell_\alpha \left(2 \left[C_\alpha (E_n) \right]^{-1} \right) \right]^{-1}.$$

Formulacije i dokazi naprijed navedenih teorema o α -kapacitetu, koji će se takođe koristiti za dokaz rezultata ovoga rada, mogu se naći u svim knjigama u kojima se izlažu osnove iz Teorije potencijala kao, naprimjer, / 7 / , / 25 / , / 35 /

3. Poopštenje α -kapaciteta daje konveksni kapacitet . Kako je za dokaz nekih rezultata iz ovog rada potreban i ovaj kapacitet, to na ovom mjestu se daje njegova definicija i neka njegova svojstva .

Neka je $\{\lambda_n\}$ niz realnih brojeva koji zadovoljava uslove:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

ii) $\{\lambda_n\}$ je konveksan niz , tj. $\lambda_n - 2\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \geq 0, n=0,1,\dots$

Poznato je da za niz $\{\lambda_n\}$ (/ 5 / , str. 364) red

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos nx$$

konvergira svuda , osim možda u tački $x=0$, i da predstavlja nenegativnu integrabilnu funkciju . Otuda je

$$Q(x,r) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n \cos nx$$

kao Poussinova suma funkcije $Q(x)$, nenegativna funkcija za $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq r < 1$.

Koristeći naprijed date rezultate , K.Temko (v. / 5 / , str. 364) definiše kapacitet na sljedeći način :

Definicija 1.1.2. Za Borelov skup E , $E \subset [0, 2\pi]$, kaže se da ima pozitivan konveksni kapacitet u odnosu na niz $\{\lambda_n\}$, ako postoji mjera μ na σ -algebri Borelovih skupova zatvorenog intervala $[0, 2\pi]$, takva da je :

$$i) \mu(E) = 1$$

ii) funkcija $V(x,r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x-t) d\mu(t)$ je uniformno ograničena po x kada $r \rightarrow 1$, tj. $\lim_{r \rightarrow 1, 0 \leq x < 2\pi} V(x,r) < +\infty$.

Ako ne postoji mjera μ sa naprijed navedenim svojstvima

i) i ii) , kaže se da skup E ima konveksni kapacitet jednak nuli u odnosu na niz $\{\lambda_n\}$.

Teorema 1.1.8. Borelov skup E koji ima pozitivnu Lebesgueovu mjeru ima pozitivan konveksni kapacitet u odnosu na svaki konveksan niz $\{\lambda_n\}$.

Obrnuto tvrđenje teoreme 1.1.8 , u opštem slučaju , ne mora da važi jer se za svaki konveksan niz $\{\lambda_n\}$ može konstruisati savršen skup sa $[0, 2\pi]$, koji će imati Lebesgueovu mjeru nula a konveksni kapacitet u odnosu na niz $\{\lambda_n\}$ pozitivan .

Činjenica da se α -kapacitet , $0 \leq \alpha < 1$, može posmatrati kao specijalan slučaj konveksnog kapaciteta , slijedi iz sljedeće teoreme :

Teorema 1.1.9. Borelov skup E , $E \subset [0, 2\pi]$, ima pozitivan α -kapacitet , $0 \leq \alpha < 1$, ako i samo ako ima pozitivan konveksni kapacitet u odnosu na niz $\left\{ \frac{1}{t^{1-\alpha}} \right\}$.

Iz svega naprijed kazanog , može se zaključiti , da pojam kapaciteta daje metričku karakteristiku skupa. Otuda se on može koristiti za poboljšanje rezultata koji se karakterišu Borelovim skupovima Lebesgueove mjere nula . U tom pravcu će ovaj pojam i biti korišćen u ovom radu

1.2. Neki rezultati koji se odnose na preslikavanja jediničnog diska D u $\mathbb{R}$

1. Neka je G jednostruko povezana oblast koja pripada jediničnom disku D i koja zadovoljava sljedeće uslove :

- i) granica ∂G oblasti G sa granicom diska D ima jednu i samo jednu zajedničku tačku $z=1$,
- ii) prava $x=1$ nije tangenta za ∂G ,

iii) za G postoji broj R , $0,9 < R < 1$, i nenegativna funkcija $A(r, G)$, $R < r < 1$, tako da veličina $r A(r, G)$ predstavlja Lebesgueovu mjeru skupa $G \cap \{z: |z|=r\}$.

$$\text{iv)} \quad 0 < \inf_{R < r < 1} (1-r)^{-1} A(r, G)$$

$$\text{v)} \quad \sup_{R < r < 1} (1-r)^{-1} A(r, G) < +\infty.$$

Skup svih G -ova opisanih na gornji način označavamo sa $\mathcal{G}$.

Da $\mathcal{G}$ nije prazan skup pokazuje primjer oblasti G diska D koja je ograničena sa dvije tangente koje su konstruisane iz tačke $\xi = 1$ na kružnicu $\Gamma_R = \{z: |z|=R\}$, $0,9 < R < 1$, naprimjer, manjim lukom kružnice Γ_R . Ako je $A(r, G)$ veličina centralnog ugla koja odgovara luku koji se dobija kao presjek skupa G sa skupom $\{z: |z|=r, R < r < 1\}$, tada funkcija $r A(r, G)$ mjeri dužinu tog luka, što predstavlja njeovu Lebesgueovu mjeru.

Da na gornji način konstruisana oblast G zadovoljava slove iv) i v) slijedi iz relacije

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^{-1} A(r, G) = \frac{2R}{\sqrt{1-R^2}} \quad (1.2.1)$$

koja se lako dokazuje (pogledati / 9 /).

Neka je, dalje, $G(\theta) = \{ze^{i\theta}: z \in G, G \in \mathcal{G}\}$ i neka je g proizvoljnu neprekidnu na disku D funkciju $g(z)$, $g(z) \geq 0$,

$$S_g(\theta, G) = \iint_{G(\theta)} g(z) dx dy, \quad z = x + iy,$$

$$i \quad \|g(z)\| = \iint_D g(z) dx dy.$$

Neka je, dalje

$$\tilde{S}_g(\theta, \phi) = \int_{\phi} d\varphi \int_{\ell(\theta, \varphi)} g(z) |dz|,$$

gdje je $\ell(\theta, \varphi)$ tetiva koja spaja tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ sa tačkom granice ∂G oblasti G i koja sa poluprečnikom diska D u tački $z = e^{i\theta}$ obrazuje orijentisani ugao φ . Sa ϕ smo označili podskup intervala $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ za koji je $\bigcup_{\varphi \in \phi} \ell(\theta, \varphi) = G(\theta)$.

Lema 1.2.1. Za svako fiksirano $G \in \mathcal{G}$, funkcija $\tilde{S}_g(\theta, \varphi)$ je Borelova funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

Dokaz leme 1.2.1. Dokaz leme 1.2.1 može se izvesti po šemi po kojoj je dokazana lema 2.1.1 u / 2 /.

Naime, neka je $\{\beta_n\}$ proizvoljan niz realnih brojeva koji zadovoljava uslove:

$$i) \quad \inf \{|z| : z \in G(\theta)\} = R < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n < \beta_{n+1} < \dots < 1,$$

$$ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$$

Neka je, zatim, $\{D_{\beta_n}\}$ niz zatvorenih prstenova $\{z : R \leq |z| \leq \beta_n\}$,

$$i \quad \tilde{S}_g(\theta, \varphi) = \int_{\ell(\theta, \varphi)} g(re^{i\theta}) |dz| = \int_{\ell(\theta, \varphi)} g(re^{i(\theta+\omega)}) |dz|, \quad z = re^{i\theta}.$$

Neka je, dalje

$$S_g^n(\theta, \varphi) = \int_{\ell(\theta, \varphi) \cap D_{\beta_n}} g(re^{i(\theta+\omega)}) |dz|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

i

$$S_g^u(z)(\theta) = \int_{\phi} \delta_g^u(\theta, \varphi) d\varphi, \quad u = 1, 2, \dots$$

Dokazaćemo da za proizvoljno $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, niz $\delta_g^u(\theta, \varphi)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ravnomjerno konvergira u odnosu na argument φ , $\varphi \in \phi$, ka $\delta_g^u(\theta_0, \varphi)$ kada $\theta \rightarrow \theta_0$.

Posmatrajmo nejednačinu

$$\begin{aligned} |\delta_g^u(\theta, \varphi) - \delta_g^u(\theta_0, \varphi)| &\leq \int_{\ell(\theta, \varphi) \cap D_{p_n}} |g(ze^{i(\theta+\omega)}) - g(ze^{i(\theta_0+\omega)})| |dz| \leq \\ &\leq \left\{ \max_{ze^{i\theta} \in D_{p_n}} |g(ze^{i(\theta+\omega)}) - g(ze^{i(\theta_0+\omega)})| \right\} \cdot \max_{\varphi \in \phi} \int_{\ell(\theta, \varphi) \cap D_{p_n}} |dz|. \end{aligned}$$

Kako se prvi činilac u posljednjem izrazu gornje nejednačine može učiniti proizvoljno malim, zbog ravnomjerne neprekidnosti funkcije $g(z)$ na kompaktnom skupu D_{p_n} , i kako je drugi činilac u tom istom izrazu konačan, to $\delta_g^u(\theta, \varphi)$ konvergira ka $\delta_g^u(\theta_0, \varphi)$ ravnomjerno u odnosu na φ , $\varphi \in \phi$, kada $\theta \rightarrow \theta_0$. Otuda slijedi da su $S_g^u(z)(\theta)$ neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu $[0, 2\pi]$.

Iz konstrukcije funkcija $S_g^u(z)(\theta)$, $u = 1, 2, \dots$, vidi se da je $\lim_{u \rightarrow \infty} S_g^u(z)(\theta) = \tilde{S}_g(\theta, \zeta)$. Kako je svaka funkcija $S_g^u(z)(\theta)$ neprekidna na $[0, 2\pi]$, tada je $\tilde{S}_g(\theta, \zeta)$, kao granična vrijednost niza neprekidnih funkcija, Borelova funkcija.

2.

Lema 1.2.2. Da bi $\|(1-z)g(z)\| < +\infty$ potrebno je i dovoljno da pri svakom fiksiраном $\zeta \in \mathcal{U}$ funkcija $S_g(\theta, \zeta)$ bude integrabilna funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

Dokaz leme 1.2.2 . Neka je $\chi(z, \theta, G)$ karakteristična funkcija skupa $G(\theta)$ tj.

$$\chi(z, \theta, G) = \begin{cases} 1, & z \in G(\theta) \\ 0, & z \notin G(\theta) \end{cases}$$

Za $0 < R < r < 1$, neka je

$$A(r, G) = \int_0^{2\pi} \chi(z, \theta, G) d\theta. \quad (1.2.1)$$

Funkcija $A(r, G)$ predstavlja vrijednost centralnog ugla koji odgovara luku koji se dobija kao presjek $G(\theta) \cap \Gamma_r$ pa je otuda $r A(r, G)$ veličina koja daje Lebesgueovu mjeru skupa $G(\theta) \cap \Gamma_r$. Znači da je funkcija $A(r, G)$ dobro definisana.

Koristeći (1.2.1) dobijamo :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} S_g(\theta, G) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\iint_{G(\theta)} g(z) dx dy \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\iint_D \chi(z, \theta, G) g(z) dx dy \right] d\theta = \\ &= \iint_D \left[\int_0^{2\pi} \chi(z, \theta, G) d\theta \right] g(z) dx dy = \iint_D A(|z|, G) g(z) dx dy. \end{aligned}$$

Dalje, iz uslova iv) i v), koje zadovoljava $A(r, G)$, slijedi da postoje konstante $c_1 = c_1(G)$ i $c_2 = c_2(G)$ za koje je

$$c_1(G) (1 - |z|) \leq A(|z|, G) \leq c_2(G) (1 - |z|).$$

Iz naprijed datih nejednacija dobijamo :

$$C_1 \iint_{R < |z| < 1} (1-|z|) g(z) dx dy \leq \iint_{R < |z| < 1} A(|z|, \theta) g(z) dx dy \leq \iint_{R < |z| < 1} C_2 (1-|z|) g(z) dx dy.$$

Iz gornje nejednačine slijedi da je $S_g(\theta, \theta)$ integrabilna funkcija argumenta θ ako i samo ako je

$$\iint_{R < |z| < 1} (1-|z|) g(z) dx dy < +\infty \quad (1.2.3)$$

Kako je $g(z)$ neprekidna funkcija na D , tada je funkcija $(1-|z|)g(z)$ ograničena na kompaktnom skupu $\{z: |z| \leq \rho < 1\}$ pa se uslov (1.2.3) može zamijeniti njemu ekvivalentnim uslovom $\|(1-|z|)g(z)\| < \infty$, čime je lema 1.2.2 dokazana.

Lema 1.2.2 važi i u slučaju kada se uslov neprekidnosti funkcije $g(z)$ zamijeni slabijim uslovom mjerljivosti. U tom slučaju oblast G iz $\mathcal{G}$ mora da sadrži koordinatni početak $z=0$. Dokaz tako dobijenog tvrđenja isti je kao dokaz leme 1.2.2. Za oblast G kao na stranici 17 takvo tvrđenje je dokazao V.I.Gavrilov, / 9 /. Lema 1.2.2 pokušava da ukaže na jednu mogućnost poopštenja rezultata V.I.Gavrilova. Naime, interesantno bi bilo odgovoriti na pitanje kakvi sve skupovi pripadaju skupu $\mathcal{G}$. Rješenjem ovog problema mogao bi se dobiti čitavi niz rezultata iz Teorije graničnih skupova za meromorfne i analitičke funkcije koje su definisane na jediničnom disku D .

3. Neka je $\mathcal{U}_\alpha = \{ \lambda_\alpha : (\exists k \in [0, 2\pi]) (\lambda_\alpha \in \mathcal{U}_k, I_\alpha(\lambda_\alpha) = W_\alpha(k)) \}$, $0 \leq \alpha < 1$.

Neka je, dalje :

$$g_R(z) = \begin{cases} g(z) & , \quad R < |z| < 1, \\ 0 & , \quad R \geq |z|, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}g(z) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{h(\varphi, \varphi)} g(z) |dz| .$$

Ša $h(\varphi, \varphi)$ je označena tetiva koja spaja tačku $z = e^{i\varphi}$ sa tačkom kružnice $\Gamma_R: |z| = R$, $0,9 < R < 1$, i koja sa poluprečnikom diska D u tački $z = e^{i\varphi}$ obrazuje orijentisani ugađ φ . Nije teško vidjeti da za $\vartheta = 0$ skup $\Delta_R(\vartheta)$ pripada naprijed definisanoj familiji $\mathcal{G}_D$ kao i da je $\Delta_R(0) \subset G$ gdje je G oblast diska D opisana na stranici 17.

Posmatrajmo, sada , funkciju

$$V_\alpha(r, \vartheta) = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|e^{it} - re^{i\vartheta}|} d\lambda_\alpha(t) , \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (1.2.4)$$

$$\lambda_\alpha \in \mathcal{M}_d \quad \text{i} \quad re^{i\vartheta} \in \mathbb{C} .$$

Za svako α , $0 \leq \alpha < 1$, i $re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$ integral (1.2.4) postoji i predstavlja ograničenu harmonijsku funkciju u $\mathbb{C}$, (pogl. / 10 /) . Za funkciju $V_\alpha(r, \vartheta)$ dokazaćemo sledeći rezultat :

Lema 1.2.3. Za svako $\lambda_\alpha \in \mathcal{M}$, $0 \leq \alpha < 1$, važi nejednačina

$$\iint_D (1-z)^{-\alpha} \left[\frac{\partial V_\alpha(z, \theta)}{\partial z} \right]^2 r dr d\theta \leq C_\alpha I_\alpha(\lambda_\alpha)$$

$0 < C_\alpha < +\infty$, C_α je konstanta koja može da zavisi samo od parametra α .

Dokaz leme 1.2.3. Neka je

$$g_\alpha(z, \theta) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{ (1 - z e^{i(\theta-t)})^{-\alpha} \} d\lambda_\alpha.$$

U podintegralnoj funkciji $\operatorname{Re} \{ (1 - z e^{i(\theta-t)})^{-\alpha} \} = \operatorname{Re} \{ \exp(-\alpha \log[1 - z e^{i(\theta-t)}]) \}$ za logaritam se uzima jednoznačna grana $\log z = \log |z| + i \arg z$,

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

U / 10 / je pokazano da je za svako $z e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ funkcija

$g_\alpha(z, \theta)$ ograničena i da je

$$\int_0^{2\pi} g_\alpha(z, \theta) d\lambda_\alpha(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n z^n (a_n^2 + b_n^2),$$

gdje su

$$\mu_n^{(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} = \frac{\tilde{C}_\alpha}{n^{1-\alpha}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

$$a_n = \int_0^{2\pi} \cos nt d\lambda_\alpha(t), \quad b_n = \int_0^{2\pi} \sin nt d\lambda_\alpha(t).$$

Kako postoji konstanta $0 < K_\alpha < +\infty$, takva da je za svako

$n > n_0$, n_0 je dovoljno veliki prirodan broj,

$$0 < K_\alpha < \frac{\mu_n}{n^{\alpha-1}} \quad (\text{v. / 5 / , str. 885}), \text{ to je}$$

$$0 < K_\alpha < \tilde{C}_\alpha \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \text{za svako } n > n_0. \text{ Otuda je}$$

$$0 < \min(K_\alpha, \mu_1(\alpha), \dots, \mu_{n_0}(\alpha)) = \mu(\alpha) < \tilde{C}_\alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$\int_0^{2\pi} g_\alpha(r, \theta) d\lambda_\alpha(\theta) \geq \mu(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n (a_n^2 + b_n^2)}{n^{1-\alpha}}. \quad (1.2.5)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \iint_D (1-z)^{-\alpha} \left[\frac{\partial V_\alpha(z, \theta)}{\partial z} \right]^2 r dr d\theta &= \sum (B(1-\alpha, 2n)) (a_n^2 + b_n^2) \leq \\ &\leq C'_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{n^{1-\alpha}} \quad (1.2.6) \end{aligned}$$

gdje je $B(1-\alpha, 2n)$ Ojlerova B -funkcija (/ 10 /),
tada se iz (2.1.5) i (2.1.6) dobija

$$\iint_D (1-z)^{-\alpha} \left[\frac{\partial V_\alpha(z, \theta)}{\partial z} \right]^2 r dr d\theta \leq \frac{C'_\alpha}{\mu(\alpha)} \int_0^{2\pi} g_\alpha(1, \theta) d\lambda_\alpha(\theta) \quad (2.1.7)$$

Dalje, kako je

$$\operatorname{Re} \{ [1 - ze^{i(\theta-\varphi)}]^{-\alpha} \} \leq \frac{1}{|e^{it} - ze^{i\theta}|^\alpha}$$

za svako $ze^{i\theta} \in \mathbb{C}$, to je

$$g_\alpha(z, \theta) \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{it} - ze^{i\theta}|^\alpha} d\lambda_\alpha(t) \quad (1.2.8)$$

za svako $ze^{i\theta} \in \mathbb{C}$. Iz (1.2.8) slijedi da jwe

$$\int_0^{2\pi} g_\alpha(1, \theta) d\lambda_\alpha(\theta) \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{it} - e^{i\theta}|} d\lambda_\alpha(\theta) d\lambda_\alpha(t) = I_\alpha(\lambda_\alpha), \quad (1.2.9)$$

a iz (1.2.7) i (1.2.9) dobija se da je

$$\iint_D (1-z)^{-\alpha} \left[\frac{\partial V_\alpha(z, \theta)}{\partial z} \right]^2 r dr d\theta \leq \frac{C'_\alpha}{\mu(\alpha)} I_\alpha(\lambda_\alpha)$$

što je i trebalo dokazati.

Lema 1.2.4. Neka je $g(z) \geq 0$ Borelova na disku D funkcija, $\|(1-z)^{\alpha} [g(z)]^2\| < +\infty$, $0 \leq \alpha < 1$. Tada je za svako $\lambda_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha}$ i svako R , $0,9 < R < 1$,

$$\int_0^{2\pi} g_R(z)(t) d\lambda_{\alpha}(t) \leq C_{\alpha} \|(1-z)^{\alpha} [g_R(z)]^2\|^{1/2} [\max(z, I_{\alpha}(\lambda_{\alpha}))]^{1/2},$$

C_{α} je konstanta koja može da zavisi samo od parametra α .

Dokaz leme 1.2.4. Neka je $0 < \alpha < 1$. Posmatrajmo integral

$$I = \iint_D g_R(re^{i\theta}) \frac{\partial V_{\alpha}(r, \theta)}{\partial r} r dr d\theta.$$

Primjenom integralne nejednačine Cauchy-Bunjakovskog dobijamo

$$I^2 \leq \|(1-z)^{\alpha} [g_R(z)]^2\| \cdot \iint_D (1-r)^{-\alpha} \left[\frac{\partial V_{\alpha}(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 r dr d\theta. \quad (1.2.10)$$

U / 10 / je dokazano da je

$$I = \int_0^{2\pi} d\lambda_{\alpha}(t) \cdot \iint_D g_R(z) p(r, \theta, t) dr d\theta,$$

gdje je $p(r, \theta, t) = r \frac{\cos(\theta - t) - r}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)}$, odnosno

$$I = \int_0^{2\pi} \sigma(t) d\lambda_{\alpha}(t), \quad \sigma(t) = \iint_D g_R(z) p(r, \theta, t) dr d\theta \quad (1.2.11)$$

Dalje posmatrajmo funkciju $\sigma(t)$ kao

$$\sigma(t) = \iint_{D_t} g_R(z) p(r, \theta, t) dr d\theta + \iint_{D/D_t} g_R(z) p(r, \theta, t) dr d\theta$$

gdje je $D_t = \{ |z - \frac{1}{2} e^{it}| < \frac{1}{2} \}$. Za svako $z = re^{i\theta} \in D/D_t$ imamo da je $p(r, \theta, t) < 0$ i $|p(r, \theta, t)| < r$ pa je

$$\int_0^{2\pi} d\lambda_{\alpha}(t) \iint_{D/D_t} g_R(re^{i\theta}) |p(r, \theta, t)| dr d\theta \leq \|(1-z)^{\alpha} [g_R(z)]^2\|^{1/2} \cdot \left\{ \iint_D \frac{r dr d\theta}{(1-r)^{\alpha}} \right\}^{1/2} \quad (1.2.12)$$

U / 24 / je dokazano da je

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_{h(0,\varphi)} g_R(z) |dz| \leq \iint_{D_t} g_R(re^{i\theta}) p(r, \theta, t) dr d\theta \leq$$

$$\iint_D g_R(re^{i\theta}) p(r, \theta, t) dr d\theta + \iint_{D \setminus D_t} g_R(re^{i\theta}) |p(r, \theta, t)| dr d\theta. \quad (1.2.13)$$

Sada nije teško vidjeti da se iz (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12), (1.2.13) i leme 1.2.3 dobija

$$\int_0^{\lambda} \alpha g_R(z)(t) d\lambda_\alpha(t) \leq C_\alpha \| (1-|z|)^\alpha [g_R(z)]^2 \|^{1/2} [\max(2, I_\alpha(\lambda_\alpha))]^{1/2}$$

što je i trebalo dokazati da bi dokazali lemu 1.2.4. za

$$0 < \alpha < 1.$$

Neka je $\alpha = 0$. U / 1 / je dokazano da je

$$\int_0^{\lambda} \alpha g_R(z)(t) d\lambda_\alpha(t) \leq C_0 \| [g_R(z)]^2 \|^{1/2} [\max(2, p_{\lambda_0}^0(t))]^{1/2}. \quad (1.2.14)$$

Iz (1.2.14) i teoreme 1.1.2 dobijamo da je

$$\int_0^{\lambda} \alpha g_R(z)(t) d\lambda_\alpha(t) \leq C_0 \| [g_R(z)]^2 \|^{1/2} [\max(2, I_0(\lambda_0))]^{1/2}$$

čime je lema 1.2.4 dokazana za $\alpha = 0$.

4. Lema 1.2.5. Za svako $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, i $0 \leq \alpha < 1$, ako je $\| (1-|z|)^\alpha [g(z)]^2 \| < +\infty$, postoji broj R , $0,9 < R < 1$, takav da je $\alpha g_R(z)(\theta) < \varepsilon$ za svako $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma/e'$, $C_\alpha(e') < \delta$,

Dokaz leme 1.2.5. Neka je α , $0 \leq \alpha < 1$, fiksirano. Posmatrajmo skupove $E(R) = \{e^{i\theta} : \alpha g_R(z)(\theta) \geq \varepsilon\}$, $0,9 < R < 1$. Iz leme 1.2.1 slijedi da su $E(R)$ Borelovi skupovi pa su, na osnovu teoreme 1.1.4 C_α -mjerljivi. Otuda je, za svako R , α -kapacitet C_α skupa $E(R)$ jednak unutrašnjem α -kapacitetu $\underline{C}_\alpha$ skupa $E(R)$. To nam omogućava da se u buduću zadržimo na ocjeni $\underline{C}_\alpha$ kapaciteta skupa $E(R)$ koja nam, u stvari, daje ocjenu njegovog C_α kapaciteta.

Kako je $\underline{C}_\alpha(E(R)) = \inf_{K \subset E(R)} C_\alpha(K)$, ocjenu $\underline{C}_\alpha(E(R))$ dobijamo ako ocijenimo kapacitet $C_\alpha(K)$, $K \subset E(R)$.

Dalje, koristeći naprijed kazano, dokaz izvodimo razlikujući dva slučaja.

I. slučaj: Ako za neko R , $0,9 < R < 1$, $E(R)$ ne sadrži nijedan kompaktan skup K za koji je $C_\alpha(K) > 0$, onda je $C_\alpha(E(R)) = 0$, a odatle stavljajući $e' = E(R)$ slijedi da je lema 1.2.4 dokazana.

II. slučaj: Neka za svako R , $0,9 < R < 1$, $E(R)$ sadrži bar jedan kompaktan skup K za koji je $C_\alpha(K) > 0$.

Za fiksirano R , $0,9 < R < 1$, sa $\mathcal{U}_{E(R)}$ označimo skup svih mjera λ_α iz $\mathcal{U}_\alpha$ za koje postoje kompaktne skupovi K , $K \subset E(R)$, da je $C_\alpha(K) = [W_\alpha(K)]^{-1} = [I_\alpha(\lambda_\alpha)]^{-1} > 0$. Skup $\mathcal{U}_{E(R)}$ neće biti prazan zbog pretpostavke da $E(R)$ sadrži bar jedan kompaktan skup K za koji je $C_\alpha(K) > 0$ i teoreme 1.1.1. Mjere iz $\mathcal{U}_{E(R)}$ označavaćemo sa μ_R a njima odgovarajuće kompaktne skupove K sa K_R .

Koristeći naprijed uvedene oznake, dobija se

$$C_\alpha(E(R)) = \underline{C}_\alpha(E(R)) = \inf_{\mu_R \in \mathcal{U}_{E(R)}} [I_\alpha(\mu_R)]^{-1} = \inf_{K_R \subset E(R)} [W(K_R)]^{-1}.$$

Dalje koristeći lemu 1.2.4 dobijamo:

$$0 < \varepsilon < \int_K g_R(z) d\mu_R(z) \leq C_\alpha \|(1-z)^{\alpha} [g_R(z)]^2\|^{1/2} [\max(2, I_\alpha(\mu_R))]^{1/2} \quad (1.2.16)$$

za svako fiksirano α .

Iz (1.2.16) na osnovu teoreme 1.1.1 dobijamo

$$0 < \varepsilon < C_\alpha \|(1-z)^{\alpha} [g_R(z)]^2\|^{1/2} [\max(2, W_\alpha(K_R))]^{1/2} \quad (1.2.17)$$

za svako $K_R \subset E(R)$.

Kako je , dalje, po uslovu leme $\|(1-z)^{\alpha} [g(z)]^2\| < +\infty$, to

$$\lim_{R \rightarrow 1} \|(1-z)^{\alpha} [g_R(z)]^2\|^{1/2} = 0. \quad (1.2.18)$$

Iz (1.2.17) i (1.2.18) dobijamo :

$$\lim_{R \rightarrow 1} W_{\alpha}(R) = \infty, \quad (1.2.19)$$

za svako $K_R \in E(R)$ i α , α fiksirano.

Iz (1.2.15) i (1.2.19) dalje slijedi da se α -kapacitet skupa $E(R)$ može učiniti proizvoljno malim ako se za R uzima broj koji se nalazi dovoljno blizu jedinice. Otuda, za svako $\delta > 0$ postoji R , $0,9 < R < 1$, takav da ako je $e' = E(R)$, onda je $C_{\alpha}(e') < \delta$, čime je lema 1.2.5 dokazana.

Posljedica 1.2.1. Ako je $\|(1-z)^{\alpha} [g(z)]^2\| < +\infty$, $0 \leq \alpha < 1$, onda je $C_{\alpha}(\{e^{i\theta} : (\exists \varepsilon > 0) (\forall R \in (0,9,1)) \angle g_R(z)(\theta) \geq \varepsilon\}) = 0$

Posljedica 1.2.1 neposredno slijedi iz leme 1.2.5 i teoreme 1.1.3, pošto je $E(R_1) \subset E(R_2)$ za svako $0 < R_2 < R_1 < 1$ i $\{e^{i\theta} : (\exists \varepsilon > 0) (\forall R \in (0,9,1)) \angle g_R(z)(\theta) \geq \varepsilon\} = \bigcap_{R \in (0,9,1)} E(R)$.

5. Za Lebesgueovu mjeru važe rezultati koji su slični rezultatima iz 4. Naime važi sljedeći rezultat :

Lema 1.2.6. Za svako $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ ako je

$\|g(z)\| < +\infty$, postoji broj R , $0,9 < R < 1$, takav da je $\angle g_R(z)(\theta) < \varepsilon$ za svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma/e'$, $m_{\delta} e' < \delta$.

Napomena 1.2.1. Simbol $m_{\delta} e'$ označava Lebesgueovu mjeru skupa e' .

Dokaz leme 1.2.6. Posmatrajmo ponovo skupove $E(R) = \{z:$

$$|g_R(z)| \geq \varepsilon \}$$

. Kako su oni Borelovi skupovi, što

slijedi iz leme 1.2.1, oni su mjerljivi u Lebesgueovom smislu.

Dokaz leme 1.2.6 izvodimo slično kao dokaz leme 1.2.5.

Naime, prvo posmatrajmo funkciju

$$V(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|e^{it} - re^{i\theta}|} dt$$

integral

$$I = \iint_D g_R(z) \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} r dr d\theta \quad (1.2.20)$$

Kako je $V(r, t)$ harmonijska funkcija, to je na $|z| = r$

$$r \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} r \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta - t) - r}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} dt.$$

Studa je

$$\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta - t) - r}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} dt. \quad (1.2.21)$$

Iz (1.2.21) imamo da je

$$\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} dt = 1$$

a svako $r < 1$. Znači, dobili smo da je $\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} < 1$

a svako $r < 1$.

Slično kao i u dokazu leme 1.2.4 može se pokazati da je

$$I = \int_0^{2\pi} \sigma(t) dt$$

a dalje, koristeći se sa (1.2.13)

obija se da je

$$\int_0^{2\pi} |g_R(z)(t)| dt \leq C \int_0^{2\pi} dt \iint_D g_R(z) p(z, \theta, t) dr d\theta + C \int_0^{2\pi} dt \iint_{D \setminus D_t} g_R(z) |p(z, \theta, t)| dr d\theta. \quad (1.2.22)$$

z (1.2.22) i činjenice da je $\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} < 1$ za svako $r < 1$ dobija-

o da je

$$\int_0^{2\pi} |g_R(z)(t)| dt \leq 4C\pi \|g_R(z)\|, \quad (1.2.23)$$

Stada, korišćenjem (1.2.23), lako se dokazuje da je

$$0 < \varepsilon \text{mes} E(R) \leq 2\pi C \|g_R(z)\| \quad (1.2.24)$$

Iz (1.2.24) i činjenice da je $\lim_{R \rightarrow 1} \|g_R(z)\| = 0$ dobija se da se Lebesgueova mjera skupa $E(R)$ može učiniti proizvoljno malom ako se za R uzima broj koji se nalazi dovoljno blizu jedinice. Uzimajući $e' = E(R)$ završavamo dokaz leme 1.2.6.

Posljedica 1.2.2. Ako je $\|g(z)\| < +\infty$, onda je

$$\text{mes} \{e' : (\exists \varepsilon > 0) (\forall R \in (0, 1)) \int_{e'} |g_R(z)|^2 > \varepsilon\} = 0$$

Posljedica 1.2.2 neposredno slijedi iz leme 1.2.6.

6. U ovom dijelu dajemo jedan rezultat V.I.Gavrilova i V.S.Zaharjana koji ima opšti karakter i kojeg koristimo za dokaz nekih rezultata u drugoj glavi ovoga rada.

Za nenegativnu, nerastuću, neprekidnu na $(0, +\infty)$ funkciju $H(t)$ kaže se da pripada klasi $\tilde{C}_H$ ako zadovoljava sljedeće uslove:

i) $\lim_{t \rightarrow +0} H(t) = +\infty$

ii) $\lim_{t \rightarrow +0} tH(t) = 0$

iii) $\int_0^{+\infty} [tH(t)]^{-1} dt < +\infty.$

U / 15 / V.I.Gavrilov i V.S.Zaharjan posmatraju konveksan kapacitet skupa E , $C_H(E)$, u odnosu na konveksan niz $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} [kH(\frac{1}{k})]^{-1}$, $n=1, 2, \dots$, gdje je $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$, i dokazuju sljedeći rezultat:

Lema 1.2.7 (/ 15 / , osnovna lema). Neka je

$$\|(1-z)|H(1-z)|[g(z)]^2\| < +\infty, \quad H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$$

Ako je

$$\Lambda_g(\sigma, \tau) = \int_{\sigma(\tau)} g(z) |dz|,$$

$$L(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lg(\theta, \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

gdje je $h(\theta, \varphi)$ tetiva kružnice $\Gamma_\zeta = \{z: |z - \frac{1}{2}\zeta| = \frac{1}{2}\}$ koja sa poluprečnikom kružnice Γ u tački $\zeta = e^{i\theta}$ obrazuje orijentisani ugao φ , tada tačke $\zeta = e^{i\theta}$ za koje je $L(\theta) = +\infty$ obrazuju skup E , $C_4(E) = 0$.

7. Ako bismo u svim naprijed formulisanim lemama osim u lemi 1.2.2 $[0, 2\alpha]$, odnosno Γ zamijenili proizvoljnim Borelovim skupom B , $B \subset [0, 2\alpha]$, odnosno $B \subset \Gamma$, a D sa $G_B = \bigcup_{\zeta \in B} D_\zeta(\zeta)$, gdje je $D_\zeta(\zeta) = \{z: |z - \zeta| < 1 - \zeta\}$, $\frac{1}{2} \leq \zeta < 1$, dobili bismo nova tvrđenja koja poopštavaju prethodna.

Nije teško vidjeti da se dokazi svih tih rezultata mogu izvesti kao dokazi naprijed formulisanih rezultata za Γ , odnosno $[0, 2\alpha]$. Kako oni, u neku ruku, predstavljaju lokalizaciju rezultata sa Γ , odnosno $[0, 2\alpha]$, i kako se odnose na Borelove skupove, zvaćemo ih rezultati lokalizovani u Borelovom smislu.

Lokalizaciju leme 1.2.6 u Borelovom smislu dao je A.N. Ajrapetjan, / 2 /.

Rezultate lokalizovane u Borelovom smislu koristićemo za dokaz rezultata u trećoj glavi ovoga rada.

8. Sa simbolom $C(D)$ označimo vektorski prostor funkcija

$f: D \rightarrow \Omega$, koje su neprekidne u odnosu na Euklidovu metriku $|dz|$ kompleksne ravni $\mathbb{C}$ i sfernu metriku

$|d_s z| = (1 + |z|^2)^{-1} |dz|$ sfere Riemanna $\mathbb{R}$, a sa $f_m(z) \Rightarrow f(z)$ ravnomjernu konvergenciju na D niza $\{f_m(z)\}$, $f_m(z) \in C(D)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, ka funkciji $f(z)$ u metrikama $|dz|$ i $|d_s z|$.

Za proizvoljnu funkciju $f(z) \in C(D)$ i proizvoljan par (K, ε) , koji se sastoji iz kompaktnog skupa K , $K \subset D$, i ε , $0 < \varepsilon < 2$, neka je

$$V_f(K, \varepsilon) = \{g(z) : g(z) \in C(D), \sup_K d_s(f(z), g(z)) < \varepsilon\}.$$

Sa τ označimo topologiju prostora $C(D)$ koju rađa predbaza $\{\mathcal{O}_f^\varepsilon : f(z) \in C(D), 0 < \varepsilon < 2\}$, gdje je $\mathcal{O}_f^\varepsilon = \bigcap_{K \subset D} V_f(K, \varepsilon)$.

Nije teško vidjeti da važi sljedeći rezultat:

Teorema 1.2.1. Topologija τ prostora $C(D)$ je ekvivalentna sa topologijom koja se u prostoru $C(D)$ dobija iz konvergencije $f_m \Rightarrow f(z)$.

G l a v a II

K O N V E R G E N C I J E N I Z O V A N E K I H
K L A S A M E R O M O R F N I H F U N K C I J A

U ovoj glavi, kao što je istaknuto, dati su bitni rezultati ovoga rada. Oni, uglavnom, rješavaju sljedeća dva problema:

i) Pretpostavimo da niz meromorfni (neprekidno diferencijabilni) na jediničnom disku D funkcija $\{f_n(z)\}$ ravnomjerno konvergira na svakom kompaktnom skupu diska D ka meromorfnoj (neprekidno diferencijabilnoj) na disku D funkciji $f(z)$. Postavlja se pitanje, da li će nizovi ugao-
nih (tetivnih) graničnih vrijednosti $\{f_n(e^{i\theta})\}$ ($\{f_n(\zeta, \varphi)\}$) niza $\{f_n(z)\}$, konvergirati ugaonim (tetivnim) graničnim vrijednostima $f(e^{i\theta})$ ($f(\zeta, \varphi)$) funkcije $f(z)$. Naravno, ovdje se a priori pretpostavlja postojanje ugaonih (tetivnih) graničnih vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$ ($f_n(\zeta, \varphi)$), $n=1,2,\dots$, i $f(e^{i\theta})$ ($f(\zeta, \varphi)$) za tačke $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$.

ii) Koje uslove trebaju da zadovoljavaju niz $\{f_n(z)\}$ i funkcija $f(z)$ da bi imali konvergenciju niza $\{f_n(e^{i\theta})\}$ ($\{f_n(\zeta, \varphi)\}$) ka $f(e^{i\theta})$ ($f(\zeta, \varphi)$) za skoro svaku tačku $\zeta = e^{i\theta}$ granice Γ diska D , odnosno za svaku tačku $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $C_\alpha(E) = 0$.

Kao što je rečeno u Uvodu, korišćenjem teoreme Rungea, može se konstruisati niz polinoma $\{p_n(z)\}$ koji će skoro svuda na Γ konvergirati proizvoljnoj, unaprijed zadanoj mjer-

ljivoj funkciji $\varphi(e^{i\theta})$ a unutar diska D , proizvoljnoj, unaprijed zadanoj analitičkoj funkciji $f(z)$, te otuda, u opštem slučaju, slijedi negativan odgovor na postavljeni problem i).

Sjedeća dva prosta primjera daju takođe negativan odgovor na postavljeni problem i) i pokazuju da problem ii) i te kako ima smisla.

Primjeri: Neka je na jediničnom disku D zadan niz funkcija $f_n(z) = z^n$ ($f_n(z) = (x^2 + y^2)^n$, $z = x + iy$), $n = 1, 2, \dots$. Nije teško vidjeti, da niz $\{z^n\}$ ($\{(x^2 + y^2)^n\}$) ravnomjerno konvergira na svakom kompaktnom skupu diska D ka nuli, dok mu ugaone a samim tim i tetivne granične vrijednosti, koje su po modulu jednake jedinici, ne mogu konvergirati ka nuli.

Ideje kojima se rješavaju naprijed formulisani problemi imaju, u neku ruku, opšti karakter. To se vidi iz činjenice da se sa njima formulisani problemi rješavaju za veoma veliki broj klasa meromorfni (neprekidno diferencijabilnih) na jediničnom disku D funkcija, kao i iz činjenice da se rješenja daju u sve tri metrike $|dz|$, $|d_1 z|$ i $|d_R z|$.

Takođe se, u ovoj glavi, u 2.3, rješava zadatak B) čija je formulacija data u Uvodu. Kao što je rečeno u Uvodu, ovaj zadatak u oštem slučaju nema rješenje u prostoru meromorfni funkcija $M(D)$.

Na kraju napominjemo, da će oznake koje su korišćene u Uvodu i prvoj glavi, a koje će biti korišćene u ovoj glavi, imati isto značenje kao u Uvodu i Glavi I.

2.1. Konvergencije nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama meromorfnih funkcija T_α

1. Radi boljeg sagledavanja rezultata ovoga paragrafa, na početku se formulišu i dokazuju neki rezultati za Nevanlinnovu klasu meromorfnih funkcija N ; za klasu koja ima veoma značajno mjesto u Teoriji meromorfnih i analitičkih funkcija.

Definicija 2.1.1. Meromorfna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija N ako je

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) < +\infty, \quad 0 < r < 1$$

gdje je :

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$N(r, f) = \int_0^{2\pi} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \log r,$$

a $n(t, \infty)$ je broj polova funkcije $f(z)$ u disku $D_t = \{ |z| \leq t \}$.

Veličina $T(r, f)$ se naziva Nevanlinnova karakteristika funkcije $f(z)$ a klasa N klasa meromorfnih funkcija sa ograničenom Nevanlinnovom karakteristikom ili klasa meromorfnih funkcija ograničenog vida.

Teorema 2.1.1 (teorema R.Nevanlinna, / 10 /). Ako je $f(z) \in N$, tada $f(z)$ ima ugaone granične vrijednosti

$f(e^{i\theta})$ u skoro svakoj tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$.

Napomena 2.1.1. Za meromorfnu na jediničnom disku D funkciju $f(z)$ kaže se da u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ ima ugaonu graničnu vrijednost $f(e^{i\theta}) \in \mathcal{P}$ ako i samo ako ^{su} joj granične vrijednosti po svim uglovima diska D koji imaju za tjemena tačku $z = e^{i\theta}$ jednake vrijednosti $f(e^{i\theta})$.

Teorema 2.1.2 (/ 9 /). Meromorfna na D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija N ako i samo ako je

$$\|(1-|z|)[g(f(z))]^2\| < +\infty, \quad z = x+iy.$$

$g(f(z)) = (1+|f(z)|^2)^{-1} |f'(z)|$ je takozvani sferni izvod funkcije $f(z)$.

2. Iz leme 1.1.2 i teoreme 2.1.2 direktno slijedi sljedeći rezultat :

Teorema 2.1.3. Meromorfna na D funkcija $f(z)$ pripada klasi N ako i samo ako je za svako fiksirano $\theta \in \mathcal{Y}$ funkcija $\int_{[\theta, \theta+2\pi]} \frac{d\theta}{[g(f(z))]^2}$ integrabilna funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

3. Ako je sa τ' označena topologija prostora $M(D)$ indukovana ~~topologijom ravnomjerne konvergencije na D odgovarajućim nizovima odredak stepena~~ topologijom τ prostora $C(D)$, onda važi sljedeća teorema :

Teorema 2.1.4. U topološkom prostoru $(M(D), \tau')$ skup N je zatvoren skup.

Dokaz teoreme 2.1.4. Pretpostavimo da je $f(z) \in M(D)$ tačka nagomilavanja skupa N u topološkom prostoru $(M(D), \tau')$. Tada, po teoremi 1.2.1, postoji niz funkcija $\{f_n(z)\}$, $f_n(z) \in M(D)$, $n = 1, 2, \dots$, takav da $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$. Otuda i činje-

nice da su $g(f_n(z))$, $n=1,2,\dots$, i $g(f(z))$ neprekidne na disku D funkcije, slijedi da niz $\{g(f_n(z))\}$ ravnomjerno konvergira na D ka $g(f(z))$. Na taj način, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 , takav da je za svako $n > n_0$ i svako $z \in D$ $|(1-|z|)[g^2(f_n(z)) - g^2(f(z))]| < \varepsilon$ odnosno

$$(1-|z|)g^2(f(z)) \leq \varepsilon + (1-|z|)g^2(f_n(z)). \quad (2.1.1)$$

Iz (2.1.1) dobijamo

$$\|(1-|z|)[g(f(z))]^2\| \leq \bar{u}\varepsilon + \|(1-|z|)[g(f_n(z))]^2\|, \quad (2.1.2)$$

a iz (2.1.2) slijedi da je $f(z) \in N$ što je i trebalo dokazati da bi dokazali teoremu 2.1.4.

4. Simbolom $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ označimo ravnomjernu konvergenciju niza $f_n(z) \in M(D)$, $n=1,2,\dots$, na svakom kompaktnom skupu diska D , ka funkciji $f(z)$ u metrikama $|d_1 z|$ i $|d_2 z|$.

Ako $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$, tada je $f(z) \in M(D)$ ili $f(z) \equiv \infty$.

Koristeći naprijed uvedene oznake dokazaćemo tvrđenja koja lokalno, za proizvoljnu tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ rješavaju neke probleme koji se odnose na konvergenciju niza ugaonih graničnih vrijednosti meromorfnih funkcija.

Ti rezultati će kasnije biti korišćeni za dokaz teorema koje globalno rješavaju probleme konvergencije nizova ugaonih vrijednosti na granici Γ diska D za neke klase meromorfnih funkcija koje su potklase Nevanlinnove klase funkcija N .

Lema 2.1.2. Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ meromorfne na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z=e^{i\theta} \in \Gamma$

imaju ugaone granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1,2,\dots$, i $f(e^{i\theta})$

neka je $\mathcal{L}_R(f(z))(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$. Ako $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$

kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu $\Delta_R(\theta)$ i

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}_R(f_n(z))(\theta) < \varepsilon)$,

onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Dokaz leme 2.1.2. Dokaz leme 2.1.2 izvodimo redukcijom ad absurdum.

Naime, pretpostavimo da nije $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Tada postoje $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ i podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takvi da je $d_4(f_{n_k}(e^{i\theta}), f(e^{i\theta})) > \varepsilon_0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Iz uslova $\mathcal{L}_R(f(z))(\theta) < +\infty$, $0,9 < R < 1$, i

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}_R(f_n(z))(\theta) < \varepsilon)$,

sljedeći da za ε_0 postoji R_0 , $0,9 < R < R_0 < 1$, i postoji n_0 , $n_0 = n_0(R)$, takvi da je $\mathcal{L}_{R_0}(f(z))(\theta) < \frac{\varepsilon_0}{\delta}$ i za svako $n > n_0$,

$$\mathcal{L}_{R_0}(f_n(z))(\theta) < \varepsilon_0. \quad (2.1.3)$$

Neka je, dalje,

$$L_{f_n}(p(\theta, \varphi)) = \int_{\Gamma_{R_0}} \mathcal{L}_{R_0}(f_n(z)) |dz|. \quad (2.1.4)$$

Tada je

$$L_{f_n}(p(\theta, \varphi)) \geq d_4(f_n(e^{i\theta}), f_n(q_\varphi)), \quad (2.1.5)$$

gdje je $q_\varphi = p(\theta, \varphi) \cap \Gamma_{R_0}$, $\Gamma_{R_0} = \{ |z| = R_0 \}$.

Za svako φ , $-\frac{\bar{u}}{4} < \varphi < \frac{\bar{u}}{4}$, na osnovu aksijske metrike i nejednakosti trougla, imamo da je

$$d_2(f_n(e^{i\varphi}), f_n(a_r)) \geq d_2(f_n(e^{i\varphi}), f(e^{i\varphi})) - d_2(f(e^{i\varphi}), f(a_r)) - d_2(f(a_r), f_n(a_r)) \quad (2.1.6)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Koristeći (2.1.4), (2.1.5) i (2.1.6) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(f_n(z))(\varphi) &= \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} L_f(\ell(\varphi, \tau)) d\tau \geq \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f_n(e^{i\varphi}), f(a_r)) d\tau \geq \\ &\int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f_n(e^{i\varphi}), f(e^{i\varphi})) d\tau - \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f(e^{i\varphi}), f(a_r)) d\tau - \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f(a_r), f_n(a_r)) d\tau \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Otuda za svako $k \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$\mathcal{L}_f(f_k(z))(\varphi) \geq \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f_k(e^{i\varphi}), f(e^{i\varphi})) d\tau - \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f(e^{i\varphi}), f(a_r)) d\tau - \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f(a_r), f_k(a_r)) d\tau \quad (2.1.8)$$

Kako je za svako $k \in \mathbb{N}$ $d_2(f_k(e^{i\varphi}), f(e^{i\varphi})) > \varepsilon_0$ to prvi integral sa desne strane nejednačine (2.1.8) nije manji od $\varepsilon_0 \cdot \frac{\bar{u}}{2}$.

Drugi integral sa desne strane nejednačine (2.1.8) nije veći od $\frac{\varepsilon_0}{8}$ jer je

$$\int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} d_2(f(e^{i\varphi}), f(a_r)) d\tau \leq \int_{-\frac{\bar{u}}{4}}^{\frac{\bar{u}}{4}} L_f(\ell(\varphi, \tau)) d\tau = \mathcal{L}_f(f(z))(\varphi) < \frac{\varepsilon_0}{8}$$

Treći integral sa desne strane nejednačine (2.1.8) ne prelazi $\frac{\varepsilon_0}{8} \cdot \frac{\bar{u}}{2}$ za svako $k > k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, što slijedi iz uslova da $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\varphi)$.

Koristeći naprijed dobijene integralne ocjene i (2.1.8) dobijamo

$$\mathcal{L}_{g_R}(f_{n_k}(z))(\theta) \geq \varepsilon_0$$

svako $k > \max(k_0, n_0)$ što je suprotno (2.1.3), čime je
 a 2.1.1 dokazana .

Neka je dalje , za svako $f_n(z)$, $f(z) \in M(D)$, $n=1,2,\dots$,

$$f_n(z) = \{ e^{i\theta} | f(e^{i\theta}), f_n(e^{i\theta}) \text{ postoje, } d_2(f_n(e^{i\theta}), f(e^{i\theta})) > \varepsilon \text{ i} \\ z \in (0,1,1) (\mathcal{L}_{g_R}(f(z))(\theta) < \varepsilon) \}.$$

Posljedica 2.1.1. Ako su $f(z)$, $f_n(z) \in M(D)$, $n=1,2,\dots$
 $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$, tada je za svako $\varepsilon > 0$
 ako n , $n > n_0$, i svaku tačku $z = e^{i\theta} \in E_n(f, \varepsilon)$.
 $(\mathcal{L}_{g_R}(f_n(z)) - \mathcal{L}_{g_R}(f(z)))(\theta) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Nije teško vidjeti da posljedica 2.1.1 slijedi iz leme 2.1.1.
 Posljedicu 2.1.1 za meromorfne na jediničnom disku D funk-
 je sa ograničenim Dirichletovim integralom , tj. za meromorfne
 funkcije za koje je $\| \mathcal{L}_g(f(z)) \|^2 < \infty$, dokazao je W.Abikoff
 / 1 / , lema 3) .

Ostaju neriješena sljedeća dva problema :

1) Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ meromorfne
 na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$
 imaju ugaone granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1,2,\dots$, i $f(e^{i\theta})$,
 neka je $\mathcal{L}_{g_R}(f(z))(\theta) < +\infty$, $0,9 < R < 1$. Ako $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$
 kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$
 ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, onda, da li je

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}_{g_R}(f_n(z))(\theta) < \varepsilon)?$$

2) Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$ i $f(z)$ meromorfne

na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju konačne ugaone granične vrijednosti $f_\mu(e^{i\theta})$, $\mu = 1, 2, \dots$, i $f(e^{i\theta})$ i neka je

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0, 1)) (\exists \mu_0 = \mu_0(R)) (\forall \mu > \mu_0) (\mathcal{L}_{\varphi_R}(f_\mu(z))(\theta) < \varepsilon).$$

Ako $f_\mu(z) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i ako je $\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, onda, da li je $\mathcal{L}_{\varphi_R}(f(z))(\theta) < \infty$?

5. Definicija 2.1.2. Meromorfnu na jediničnom disku D funkciju $f(z)$ pripada klasi T_α , $0 \leq \alpha < 1$, ako je $\|(1-z)^{-\alpha} [f(z)]^2\| < \infty$.

Klasa funkcija T_α za $\alpha = 0$ naziva se klasa funkcija sa ograničenim Dirichletovim integralom.

Iz definicija 2.1.1 i 2.1.2 slijedi da je $T_{\alpha_1} \subset T_{\alpha_2} \subset N$ za $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

Granična svojstva klasa funkcija T_α izučavali su za $\alpha = 0$ A. Beurling, / 6 /, i M. Tsuji, / 33 /, / 34 /, a za $0 < \alpha < 1$ L. Carleson, / 19 /, / 20 / i V. I. Gavrilov, / 10 /. Njihove rezultate formulišemo u obliku sljedeće teoreme:

Teorema 2.1.5. Ako je $f(z) \in T_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, onda za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $Q(E) = 0$, postoje ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ i $\angle f(z, \varphi) < \infty$ za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

6. Teorema 2.1.6. Funkcija $f(z) \in M(D)$ pripada klasi T_α , $0 \leq \alpha < 1$, ako i samo ako je za svako fiksirano $\theta \in \mathbb{R}$

funkcija $S_g(\theta, G)$, gdje je $g(z) = (1-z)^{\alpha-1} [g(f(z))]^2$, integrabilna funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

Teorema 2.1.6 neposredno slijedi iz leme 1.2.2.

7. Teorema 2.1.7. U topološkom prostoru $(M(D), \tau')$ skupovi Γ_α , $0 \leq \alpha < 1$, su zatvoreni skupovi.

8. Teorema 2.1.8. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_\mu(z) \in \Gamma_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $\mu = 1, 2, \dots$,
- 2) $f_\mu(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z) \in M(D)$,
- 4) $\sum_{\mu=1}^{\infty} \|(1-z)^\alpha [g(f_\mu(z)) - g(f(z))]^2\| < +\infty$ (2.1.3)

Tada je $f(z) \in \Gamma_\alpha$ i $\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in P \setminus E$, $C_\alpha(E) = 0$.

Teorema 2.1.9. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_\mu(z) \in M(D)$, $\mu = 1, 2, \dots$,
- 2) $f(z) \in \Gamma_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$,
- 3) $f_\mu(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$,
- 4) $\|(1-z)^\alpha [g(f_\mu(z))]^2\| \rightarrow \|(1-z)^\alpha [g(f(z))]^2\|$ kada $\mu \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{\mu_k}(z)\}$ niza $\{f_\mu(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\mu_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in P \setminus E$, $C_\alpha(E) = 0$.

Teoreme 2.1.8 i 2.1.9 za $\alpha = 0$ dokazao je W. Abikoff u [1].

9. Dokaz teoreme 2.1.8. Neka je α , $0 \leq \alpha < 1$, fiksirano. Prvo ćemo dokazati da iz uslova 1), 2), 3) i 4) slijedi da je $f(z) \in \Gamma_\alpha$.

Koristeći integralnu nejednačinu Minkowskog, za svako r , $0 < r < 1$, dobijamo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\iint_{D_r} [(1-|z|)^{\alpha/2} \rho(f(z))]^2 dx dy \right)^{1/2} = \\ &= \left(\iint_{D_r} [(1-|z|)^{\alpha/2} |\rho(f(z)) - \rho(f_n(z)) + \rho(f_n(z))|]^2 dx dy \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\iint_{D_r} (1-|z|)^{\alpha} [\rho(f_n(z)) - \rho(f(z))]^2 dx dy \right)^{1/2} + \left(\iint_{D_r} (1-|z|)^{\alpha} [\rho(f_n(z))]^2 dx dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ili, prelazeći u gornjim nejednačinama na limes kada $r \rightarrow 1$, dobijamo da je za svako $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\iint_D (1-|z|)^{\alpha} [\rho(f(z))]^2 dx dy \right)^{1/2} \leq \left(\iint_D (1-|z|)^{\alpha} [\rho(f_n(z))]^2 dx dy \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\iint_D (1-|z|)^{\alpha} [\rho(f_n(z)) - \rho(f(z))]^2 dx dy \right)^{1/2} \leq \varepsilon + C_n < +\infty, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je $f(z) \in T_{\alpha}$.

Ostaje da se dokaže drugi, teži, dio teoreme 2.1.8 koji se odnosi na konvergenciju nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ na granici Γ diska D .

Neka je E skup tačaka $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ za koje nije $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Pokazaćemo da je $C_{\alpha}(E) = 0$.

Skup E se može prikazati kao unija $\tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2$, $\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 = \emptyset$, gdje je $\tilde{E}_1$ skup tačaka $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ u kojima ne postoje ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ ili $f_n(e^{i\theta})$ za neko $n \in \mathbb{N}$, i $\tilde{E}_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, gdje je

$$e_v = \{e^{i\theta} : \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(f_n(e^{i\theta}), f(e^{i\theta})) \geq \frac{1}{v}\}$$

Kako su $f_n(z), f(z) \in \Gamma_\alpha$, $n=1,2,\dots$, tada je $C_\alpha(E_1)=0$ (pogledati teoreme 1.1.5, 1.1.7 i 2.1.5).
Ostalo je da se pokaže da je $C_\alpha(E_2)=0$. To će biti ako pokažemo da je $C_\alpha(e_v)=0$ za svako $v \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo skupove

$$e'_v = \{e^{i\theta} : (\exists \varepsilon > 0) (\forall R \in (0, 1)) \exists \rho_R(f(z))(\theta) \geq \frac{1}{\rho_v}\}$$

$$e''_v = e_v / e'_v.$$

Iz posljedice 1.2.1, ako je $g(z) = \rho(f(z))$, slijedi da je $C_\alpha(e'_v)=0$ za svako $0 \leq \alpha < 1$; α je fiksirano.

Neka je, dalje, $E^k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n(f, \frac{1}{v})$, gdje su $E_n(f, \frac{1}{v})$ skupovi iz posljedice 2.1.1 za niz $\{f_n(z)\}$. Nije teško vidjeti da je za svako $k \in \mathbb{N}$, $E^{k+1} \subset E^k$ i $e''_v \subset E^k$. Pokazaćemo da $C_\alpha(E^k) \rightarrow 0$ kada $k \rightarrow \infty$, a odatle na osnovu teoreme 1.1.3 slijedi da je $C_\alpha(e''_v)=0$.

Neka je $\mathcal{M}_{E_n}$ skup svih mjera $\mu_n^F \in \mathcal{M}_\alpha$, za koje postoje zatvoreni skupovi F , $F \subset E_n(f, \frac{1}{v})$, da je

$$C_\alpha(F) = \begin{cases} [W_\alpha(F)]^{-1}, & 0 < \alpha < 1, \\ e^{-W_\alpha(F)}, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Kako je $\alpha |\rho(f_n(z)) - \rho(f(z))|(\theta) \geq \alpha (|\rho_R(f_n(z)) - \rho_R(f(z))|)(\theta)$ za svako R , $0 < R < 1$, i svako $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, tada iz leme 1.2.4 slijedi da je za svako n , $n > n_0(\frac{1}{v})$, za koje postoji F , $F \subset E_n(f, \frac{1}{v})$, i za koji je $C_\alpha(F) > 0$,

$$0 < \frac{1}{3v} \leq C_\alpha \| (1-|z|)^\alpha [\rho(f_n(z)) - \rho(f(z))]^2 \|^{1/2} [\max(2, I_\alpha(\mu_n^F))]^{1/2}. \quad (2.1.10)$$

Iz (2.1.10) dobijamo

$$\frac{1}{W_\alpha(f)}^{1/2} \leq (8\gamma) C_\alpha \| (1-|z|)^\alpha [g(f_n(z)) - g(f(z))]^2 \|^{1/2} \quad (2.1.11)$$

za svako n , $n > n_0(\frac{1}{\gamma})$, za koje je $f \in E_n(\frac{1}{\gamma})$ i $C_\alpha(f) > 0$.

Iz (2.1.11) i jednakosti $C_\alpha(E_n(\frac{1}{\gamma})) = \sup_{f \in E_n(\frac{1}{\gamma})} C_\alpha(f)$ (ona važi za $E_n(\frac{1}{\gamma})$ jer je $E_n(\frac{1}{\gamma})$ Borelov skup, što slijedi iz leme 1.2.1 i teoreme 1.8, / 31 / str.11) dobijamo:

$$\frac{1}{W_\alpha(E_n(\frac{1}{\gamma}))} \leq (8\gamma)^2 C_\alpha^2 \| (1-|z|)^\alpha [g(f_n(z)) - g(f(z))]^2 \| \quad (2.1.12)$$

za svako n , $n > n_1 > n_0(\frac{1}{\gamma})$, za koje je $C_\alpha(E_n(\frac{1}{\gamma})) > 0$.

Kako je $E^k = \bigcup_{n=k}^\infty E_n(\frac{1}{\gamma})$, tada iz (2.1.12) i teoreme 1.1.7 slijedi:

$$C_\alpha(E^k) \leq \sum_{n=k}^\infty C_\alpha(E_n(\frac{1}{\gamma})) \leq (8\gamma C_\alpha)^2 \sum_{n=k}^\infty \| (1-|z|)^\alpha [g(f_n(z)) - g(f(z))]^2 \|$$

za svako $0 < \alpha < 1$, odnosno

$$\begin{aligned} [L_n(2 \cdot [C_\alpha(E^k)]^{-1})]^{-1} &\leq \sum_{n=k}^\infty [L_n(2 \cdot [C_\alpha(E_n(\frac{1}{\gamma}))]^{-1})]^{-1} \leq \\ &\leq \sum_{n=k}^\infty [L_n(2 \cdot e^{W_\alpha(E_n(\frac{1}{\gamma}))})]^{-1} \leq (8\gamma C_\alpha)^2 \sum_{n=k}^\infty \| (1-|z|)^\alpha [g(f_n(z)) - g(f(z))]^2 \| \end{aligned}$$

za $\alpha = 0$.

Iz naprijed dobijene nejednakosti i (1.2.9) dobijamo da $C_\alpha(E^k) \rightarrow 0$ kada $k \rightarrow \infty$.

Kako je $C_\alpha(e_v) = 0$, to je $C_\alpha(e_v) = 0$, što je i trebalo dokazati da bi dokazali teoremu 2.1.8.

Primjedba 2.1.1. Da teorema 2.1.8 daje samo dovoljne uslove za konvergenciju nizova ugaonih graničnih vrijednosti pokazuje niz $f_n(z) = \frac{z}{L_n(n+1)}$, $n = 1, 2, \dots$, koji ravno-

mijerno na svakom kompaktnom skupu diska D konvergira ka nuli, ugaone mu granične vrijednosti za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ takođe konvergiraju ka nuli (u stvari navedeni niz ravnomjerno na zatvorenom disku D konvergira ka nuli) dok sam niz $\{f_n(z)\}$ i funkcija $f(z) = 0$ ne zadovoljavaju uslov (2.1.9) teoreme 2.1.8.

10. Dokaz teoreme 2.1.9. Iz uslova $f_n(z) \in M(D)$, $n = 1, 2, \dots$, i $f(z) \in \Gamma_\alpha$, i $\|(1-z)^{\alpha} g^2(f_n(z))\| \rightarrow \|(1-z)^{\alpha} g^2(f(z))\|$ kada $n \rightarrow \infty$, slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svako $n > n_0$ $f_n(z) \in \Gamma'_\alpha$.

Otuda i iz uslova teoreme 2.1.9, slijedi da za proizvoljno ε , $\varepsilon > 0$, postoji $R = R(\varepsilon)$, $0 < R < 1$, i $n = n(\varepsilon)$, $n > n_0$, da je $\|(1-z)^{\alpha} [g_R(f_n(z))]^2\| < 2\varepsilon$ i $\|(1-z)^{\alpha} [g_R(f(z))]^2\| < \varepsilon$ i $\|(1-z)^{\alpha} [g(f_n(z)) - g(f(z))]^2\| = \|(1-z)^{\alpha} [g_R(f_n(z)) - g_R(f(z))]^2\| < 2\varepsilon^2$.

Iz gornjih nejednčina dobijamo

$$\|(1-z)^{\alpha} [g(f_n(z)) - g(f(z))]^2\| \leq 2\varepsilon \varepsilon^2 + \|(1-z)^{\alpha} [g_R(f_n(z)) - g_R(f(z))]^2\| \leq \leq 2\varepsilon \varepsilon^2 + (\varepsilon + \varepsilon)^2 \leq (2\varepsilon + 2) \varepsilon^2.$$

Posmatrajmo, sada, proizvoljan niz $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, za koji je $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 < +\infty$, i neka je $n = n(\varepsilon_k) = n_k$.

Koristeći naprijed dobijene ocjene, za niz $\{\varepsilon_k\}$ može se konstruisati podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$, za koji je

$$\|(1-z)^{\alpha} [g(f_{n_k}(z)) - g(f(z))]^2\| \leq 2(\varepsilon_k + 2) \varepsilon_k^2 \text{ za svako } k \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(1-\frac{1}{2})^{\alpha} [g(f_{\mu_k}(z)) - g(f(z))] \|^2 \leq 2(\alpha+2) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 < +\infty,$$

tada niz $\{f_{\mu_k}(z)\}$ zadovoljava sve uslove teoreme 2.1.8 pa je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\mu_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $C_{\alpha}(E) = 0$, čime je teorema 2.1.9 dokazana.

11. Primjedba 2.1.2. Konvergenciju nizova ugaonih graničnih vrijednosti funkcija klase $\mathcal{T}_{\alpha}$, $\alpha = 0$, izučavao je G.C. Tumarkin, / 37 /. On je dokazao da ako niz meromorfnih na jediničnom disku D funkcija $\{f_{\mu}(z)\}$ zadovoljava uslove: i) $f_{\mu}(z) \xrightarrow{p} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$ i ii) $\| [g(f(z))] \|^2 < \text{const}$ za svako $\mu \in \mathbb{N}$, tada niz $\{f_{\mu}(e^{i\theta})\}$ konvergira po mjeri ka $f(e^{i\theta})$ na granici Γ diska D .

Primjedba 2.1.3. Teoreme 2.1.8 i 2.1.9 važe i za klase p -listnih analitičkih na jediničnom disku D funkcija jer su one potklase klase $\mathcal{T}_{\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$.

Primjedba 2.1.4. Napominjemo da postoje ograničene analitičke na disku D funkcije koje imaju beskonačne Reimanove površine $\| [g(f(z))] \|^2$. Takve funkcije su, naprimjer Brjaškeovi beskonačni proizvodi.

2.2. Konvergencije nizova $\{f_{\mu}(e^{i\theta})\}$ u klasama analitičkih funkcija $\mathcal{T}_{\alpha}^*$

U ovom dijelu su dokazani rezultati koji su slični rezultatima prethodnog dijela ove glave. Oni se odnose na Hardyjevu klasu funkcija H^p i njene potklase $\mathcal{T}_{\alpha}^*$, $0 \leq \alpha < 1$.

1. Definicija 2.2.1. Neka je $f(z)$ analitička funkcija definisana na jediničnom disku D i neka je

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty$$

Funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija H^p , $0 < p < \infty$, ako

je $\sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f(z)) < +\infty$.

Klase funkcija H^p , $0 < p < \infty$, nazivaju se Hardyjeve klase analitičkih funkcija.

Iz definicija 2.1.1 i 2.2.1 slijedi da je $H^{p_1} \subset H^{p_2} \subset N$ ako je $0 < p_1 < p_2 < \infty$ (inkluzije su prave).

Neka je

$$\|f(z)\|_{H^p} = \lim_{r \rightarrow 1} M_p(r, f(z)).$$

Teorema 2.2.1 (/ 16 /). Klase funkcija H^p , $1 \leq p < \infty$, su Banachovi prostori sa normama $\|f(z)\|_{H^p}$, dok su H^p , $0 < p < 1$, kompletni metrički prostori sa metrikama $d(f(z), g(z)) = (\|f(z) - g(z)\|_{H^p})^p$.

Teorema 2.2.2 (/ 17 /). Ako je $f(z) \in H^p$, $0 < p < \infty$, onda funkcija $f(z)$ ima konačne ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ za skoro svaku tačku $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$.

Dalje ćemo se baviti izučavanjem Hardyjeve klase funkcija H^2 i nekih njenih potklasa.

2. Formulisaćemo dva rezultata za klasu funkcija H^2 koji će nešto kasnije, biti korišćeni za dokaz rezultata koji se odnose na konvergenciju nizova ugaonih graničnih vrijednosti.

Teorema 2.2.3 (/ 17 /). Ako je $f(z) \in H^2$ i $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onda je

$$\|f(z)\|_{H^2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 2.2.4 (/ 9 /). Funkcija $f(z)$ je iz klase H^2 ako i samo ako je $\|(1-z)|f'(z)|^2\| < \infty$.

3. Teorema 2.2.5. Klasa funkcija H^2 je zatvoren skup u topološkom prostoru $(M(D), \tau')$.

Dokaz teoreme 2.2.5 je isti kao dokaz teoreme 2.1.4 .

Iz teoreme 2.2.4 i leme 1.2.2 direktno slijedi sledeći rezultat :

Teorema 2.2.6. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija H^2 ako i samo ako je za svako fiksirano $G \in \mathcal{U}$ funkcija $S_{|f'(z)|^2}(\theta, G)$ integrabilna funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

5. Teorema 2.2.7. Sa $(|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\|)^{1/2}$ u prostoru H^2 je definisana norma koja je ekvivalentna sa normom $\|f(z)\|_{H^2}$.

Dokaz teoreme 2.2.7 . Iz definicije $\|(1-z)|f'(z)|^2\|$ slijedi da je $(|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\|)^{1/2} \geq 0$ za svako $f(z) \in H^2$.

Lako se provjerava da je

$$(|\alpha f(0)|^2 + \|(1-z)|\alpha f'(z)|^2\|)^{1/2} = |\alpha| (|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\|)^{1/2}, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$(|f(0) + g(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z) + g'(z)|^2\|)^{1/2} \leq (|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\|)^{1/2} + (|g(0)|^2 + \|(1-z)|g'(z)|^2\|)^{1/2}.$$

Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tada je

$$\begin{aligned} (|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\|)^{1/2} &= \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r) |f'(ze^{i\theta})|^2 r d\theta dr \right)^{1/2} = \\ &= \left(|f(0)|^2 + 2\pi \int_0^1 (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-1} dr \right)^{1/2} = \\ &= \left(|f(0)|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} |a_n|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2.1) \end{aligned}$$

Iz (2.2.1) slijedi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\| \right)^{1/2} \leq \left(5 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

iz datle i teoreme 2.2.3 dobijamo da je

$$\|f(z)\|_{H^2} \leq \left(|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\| \right)^{1/2} \leq 5^{1/2} \|f(z)\|_{H^2} \quad (2.2.2)$$

Iz teoreme 2.2.1 i (2.2.2) slijedi da je

$$\left(|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\| \right)^{1/2} = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad f(z) \equiv 0.$$

Naprijed dobijeni rezultati pokazuju da je na

$$\left(|f(0)|^2 + \|(1-z)|f'(z)|^2\| \right)^{1/2} \quad \text{definisana norma u prostoru } H^2.$$

Da je ona ekvivalentna sa normom $\|f(z)\|_{H^2}$ slijedi iz (2.2.2).

6. Sa $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ označimo ravnomjernu konvergenciju na svakom kompaktnom skupu diska D niza $\{f_n(z)\}$ analitičkih na jediničnom disku D funkcija ka funkciji $f(z)$ u Euklidovim metrikama.

Napomena 2.2.1. U ovom dijelu svi problemi će biti rješavani u Euklidovim metrikama $|dz|$.

Kao i u 2.1 prvo ćemo dokazati tvrđenja koja lokalno, za proizvoljnu tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ rješavaju neke probleme koji se odnose na konvergenciju niza ugaonih graničnih vrijednosti analitičkih funkcija. Ti rezultati su analogni rezultatima punkta 4 iz 2.1.

Lema 2.2.1. Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju konačne ug one granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1,2,\dots$, i $f(e^{i\theta})$, i neka je $\sum |f'_n(z)|_R(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$. Ako $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$, na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\sum |f'_n(z)|_R(\theta) < \varepsilon),$$

onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Neka su, dalje, $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije i neka je

$$E_n(f, \varepsilon) = \{e^{i\theta} : f_n(e^{i\theta}), f(e^{i\theta}) \text{ postoje, } |f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| > \varepsilon \text{ i } \exists R \in (0, 1) (\forall |f'(z)|_R(\theta) < \varepsilon)\}.$$

Posljedica 2.2.1. Ako su $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije i $f_n(z) \xrightarrow{c} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$, tada za svako $\varepsilon > 0$, svako n , $n > n_0(\varepsilon)$, i svaku tačku $z = e^{i\theta} \in E_n(f, \varepsilon)$, $\exists (|f'_n(z)|_R - |f'(z)|_R)(\theta) \geq \delta$.

Ostaju otvorena sljedeća pitanja :

1) Neka su $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju konačne ugaone granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1, 2, \dots$, i $f(e^{i\theta})$, i neka je $\exists |f'(z)|_R(\theta) < +\infty$, $0, 5 < R < 1$. Ako $f_n(z) \xrightarrow{c} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, onda, da li je $(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0, 1)) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall n > n_0) (\exists |f'_n(z)|_R(\theta) < \varepsilon)?$

2) Neka su $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju konačne ugaone granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1, 2, \dots$, i $f(e^{i\theta})$, i neka je

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0, 1)) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall n > n_0) (\exists |f'_n(z)|_R(\theta) < \varepsilon).$$

Ako $f_n(z) \xrightarrow{c} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$, i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, onda, da li je $\exists |f'(z)|_R(\theta) < \infty$?

7. Definicija 2.2.2. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija T_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, ako je $\|(1-|z|)^\alpha |f'(z)|^2\| < \infty$.

Iz definicija 2.2.1 i 2.2.2 slijedi da je $T_{\alpha_1}^* \subset T_{\alpha_2}^* \subset H^2$ za $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

Granična svojstva klasa funkcija T_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, izučavao je V.I. Gavrilov, / 10 /, Njegov rezultat formulišemo u obliku sljedeće teoreme:

Teorema 2.2.8. Ako je $f(z) \in T_\alpha^*$, $0 \leq \alpha < 1$, onda za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in T \setminus E$, $C_\alpha(E) = 0$, postoje konačne ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ i $\ell_f(z, \varphi) < \infty$ za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

8. Iz leme 1.2.2 direktno slijedi sljedeći rezultat:

Teorema 2.2.9. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi T_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, ako i samo ako je za svako fiksirano $\theta \in \mathbb{R}$ funkcija $S_g(\theta, \phi)$, gdje je $g(z) = (1-|z|)^{\alpha-1} [f'(z)]^2$, integrabilna funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

9. Teorema 2.2.10. Klase funkcija T_α , $0 \leq \alpha < 1$, su zatvoreni skupovi u topološkom prostoru $(M(D), \tau')$.

10. Teorema 2.2.11. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $f_n(z) \in T_\alpha^*$, $0 \leq \alpha < 1$, $n = 1, 2, \dots$,

2) $f(z)$ je analitička na disku D funkcija,

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = f(0)$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|(1-|z|)^\alpha [f'_n(z) - f'(z)]^2\| < +\infty$ (2.2.3)

Tada je $f(z) \in T_\alpha^*$, $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ i

$$i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \text{za svaku tačku } z = e^{i\theta} \in \Gamma/E, \quad C_\alpha(E) = 0.$$

Teorema 2.2.12. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f(z) \in T_\alpha^*$, $0 \leq \alpha < 1$,
- 2) $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, su analitičke na disku D funkcije,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = f(0)$,
- 4) $\|(1-z)^{\alpha} |f'_n(z)|^2\| \rightarrow \|(1-z)^{\alpha} |f'(z)|^2\|$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je $f_{n_k}(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $k \rightarrow \infty$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $C_\alpha(E) = 0$.

11. Dokaz teoreme 2.2.11. Dokaz da je $f(z) \in T_\alpha^*$ isti je kao dokaz da je $f(z) \in T_\alpha$ u dokazu teoreme 2.1.8.

Skup E čiji su elementi tačke $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ za koje nije

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \text{ može se prikazati kao } \tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2 \cup \tilde{E}_3,$$

$\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_j = \emptyset$ $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, gdje je $\tilde{E}_1$ skup tačaka $e^{i\theta}$ u kojima ne postoje $f(e^{i\theta})$ ili $f_n(e^{i\theta})$ za neko $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{E}_2 = \{e^{i\theta} : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| > \varepsilon, (\forall n \in \mathbb{N}) |f_n(e^{i\theta})| < \infty, |f(e^{i\theta})| < \infty\}$$

$$\tilde{E}_3 = \{e^{i\theta} : \limsup_{n \rightarrow \infty} d_1(f_n(e^{i\theta}), f(e^{i\theta})) > \varepsilon (\forall n \in \mathbb{N}) |f_n(e^{i\theta})| = \infty \text{ ili } |f(e^{i\theta})| = \infty\}$$

Iz teorema 2.2.8 slijedi da je $C_\alpha(\tilde{E}_1) = 0$ i $C_\alpha(\tilde{E}_3) = 0$.

Da bi dokazali teoremu 2.2.11 potrebno je još da se dokaže da je $C_\alpha(\tilde{E}_2) = 0$ i da $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$.

Prvo dokažimo da $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$.

Iz uslova 3) teoreme 2.2.11, (2.2.3) i teorema 2.2.3 i 2.2.7 slijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma/\tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_3} |f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0. \quad (2.2.4)$$

Iz (2.2.4) i svojstva da u L^p prostorima, $p > 0$, iz konvergencije niza nenegativnih funkcija u L^p metrikama slijedi konvergencija po mjeri, dobijamo da niz $\{f_n(e^{i\theta})\}$ konvergira po mjeri na skupu $\Gamma/\tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_3$.

Kako je da je $u^p \geq p u^{p-1} + u$ za svako $p > 0$ i $u \geq 0$, tada iz (2.2.3) i teoreme 2.2.7 slijedi da je

$$\int_0^{2\pi} u^{p-1} |f_n(e^{i\theta})| d\theta < C$$

za svako n , $0 < n < 1$, i svako $n \in \mathbb{N}$.

Iz naprijed dobijenih tvrdjenja slijedi da niz $\{f_n(z)\}$ zadovoljava uslove teoreme Hinčin-Ostrowskog a otuda imamo da $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$.

Koristeći naprijed dobijeni rezultat da $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ dokaz da je $C_\alpha(\tilde{E}_2) = 0$ možemo izvesti slično kao dokaz da je $C_\alpha(\tilde{E}_1) = 0$ u dokazu teoreme 2.1.8.

12. Dokaz teoreme 2.2.12 izvodi se pomoću teoreme 2.2.11 slično kao dokaz teoreme 2.1.9 pomoću teoreme 2.1.8.

13. Primjedba 2.2.1. Interesantno bi bilo vidjeti da li za klasu funkcija H^2 , važe rezultati koji su slični teoremima 2.2.11 i 2.2.12.

Primjedba 2.2.2. U / 52 / S.Warschawski dokazuje sljedeći rezultat :

Ako niz funkcija $\{f_n(z)\}$ iz klase funkcija H^p , $0 < p < \infty$, p je fiksirano, zadovoljava uslove :

$$1) f_n(z) \xrightarrow{C} f(z) \quad \text{kada} \quad n \rightarrow \infty,$$

$$2) \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0.$$

Znači, S.Warschawski, u stvari, dokazuje konvergenciju niza ugaonih graničnih vrijednosti $\{f_n(e^{i\theta})\}$ za klase H^p po mjeri, ka ugaonim graničnim vrijednostima $f(e^{i\theta})$ funkcije $f(z)$ na granici Γ diska D .

Teorema 2.2.11 daje, u izvjestnom smislu, poboljšanje naprijed formulisanog rezultata S.Warschawskog za potklase Π_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, Hardyjeve klase analitičkih funkcija H^2 .

Naime, ako je

$$a_n = \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

i niz $\{a_n\}$ konvergira ka nuli dovoljno brzo, tj. niz $\{a_n\}$ zadovoljava uslov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, onda, ^{dale}će niz $\{f_n(e^{i\theta})\}$

konvergirati skoro svuda na granici Γ diska D ka $f(e^{i\theta})$?

2.3. Hiperbolička varijacija tetiva u okolini tačkaka Fatou

1. Osnovni rezultat u ovom dijelu druge glave je sljedeća teorema :

Teorema 2.3.1. Ako je $f(z)$ analitička funkcija na disku D , $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$ i $\|(1-z)H(1-z)[\rho^h(f(z))]\| < \infty$ gdje je $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{1/t\}$ i $\rho^h(f(z)) = (1-|f(z)|^2)^{-1/2} |f'(z)|$, onda je integral $\int \rho_f(z, \varphi)$ konačan za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $C_H(E) = 0$. U tačkama $z = e^{i\theta} \in \Gamma/E$ funkcija $f(z)$ ima konačne granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$.

Veličina $\rho^h(f(z)) = (1-|f(z)|^2)^{-1/2} |f'(z)|$ naziva se hiperbolički izvod funkcije $f(z)$.

Rezultati tipa teoreme 2.3.1 za meromorfne odnosno analitičke na jediničnom disku D funkcije koje zadovoljavaju redom uslove $\|(1-z)H(1-z)[\rho(f(z))]\| < \infty$, $\|(1-z)H(1-z)|f'(z)|^2\| < \infty$, za $\rho_f(z, \varphi)$ i $\rho_f(z, \varphi)$, dokazani su u / 15 / , / 14 / i / 35 / .

2. Pomoću dokaza teoreme 2.3.1 formulisaćemo i dokazati neka pomoćna tvrđenja koja su neophodna za dokaz teoreme 2.3.1.

Lema 2.3.1 (/ 18 / , lema). Neka je $\eta(t)$ pozitivna, neprekidna funkcija definisana na $[0, +\infty)$. Ako je

za proizvoljnu analitičku na jediničnom disku D funkciju $f(z)$

$$\int \eta(|f(z)|) |f'(z)| |dz| < +\infty,$$

tada je $\lim_{\substack{z \rightarrow z \\ z \in h(z, \varphi)}} f(z) = f(z, \varphi)$ konačan ili beskonačan.

Lema 2.3.2 (/ 46 / , lema 3). Neka je $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\Delta = \{ze^{i\theta} : 0 < r \leq 1, |\theta| \leq \varphi\}$, $\Delta \subset \Delta^*$ i Δ^* je otvoren skup iz $\mathbb{C}$. Ako je $f(z)$ analitička na Δ^* funkcija, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in \Delta^*$ i

$$\int_0^1 \varrho^h(f(re^{i\varphi})) dr < +\infty, \quad \int_0^1 \varrho^h(f(re^{i\theta})) d\varphi < +\infty,$$

tada je

$$\int_0^1 \varrho^h(f(re^{i\theta})) dr < +\infty$$

za svako $\theta \in [-\varphi, \varphi]$.

Lema 2.3.3. Ako je $f(z)$ analitička na jediničnom disku D funkcija, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, i ako je $\lambda_f(z, \varphi) < +\infty$ za skoro svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tada je $\lambda_f(z, \varphi) < +\infty$ za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dokaz leme 2.3.3. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tako da je $\lambda_f(z, \varphi_0) = +\infty$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\varphi_0 = 1$.

Neka je ℓ dužina tetive $h(1, \varphi_0)$ i neka je

$k = \{z : |z-1| = \ell\}$. Kako je $\lambda_f(1, \varphi)$ konačno za skoro svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tada postoji ugao φ_1 , takav da je $|\varphi_1| > \varphi_0$,

$\Lambda_f(1, \varphi_1) < +\infty$ i $\Lambda_f(1, -\varphi_1) < +\infty$. Neka je dalje Δ podskup diska D koji leži između pravih ℓ_1 , $\ell_1 \supset h(1, \varphi_1)$, ℓ_2 , $\ell_2 \supset h(1, -\varphi_1)$, i kružnice K i neka je $\Delta = \bar{\Delta} \setminus \{1\}$.

Sa Δ_1 označimo skup koji se dobija preslikavanjem skupa Δ pomoću funkcije $f_1(z) = \frac{z}{\ell} - 1$, a sa D_1 skup koji se dobija translacijom skupa D na vektor $\xi = -1$. Ako je $F(z) = f(\ell z + 1)$, tada je $F(z)$ analitička na Δ_1 funkcija za koju je

$$\int_0^1 \varrho^h(F(re^{i\varphi})) dr = \int_{\ell(1, \varphi)} \varrho^h(f(z)) |dz|$$

za svako $\varphi \in [-\varphi_1, \varphi_1]$; sa $\ell(1, \varphi)$ označili smo poluprečnik kružnice K koji sa poluprečnikom diska D u tački $\xi = 1$ obrazuje ugao φ .

Lako se provjerava da funkcija $F(z)$ na Δ_1 i D_1 zadovoljava uslove leme 2.3.2. Otuda, sa učešćem jednakosti $\ell(1, \varphi_0) = h(1, \varphi_0)$, dobijamo

$$\int_0^1 \varrho^h(F(re^{i\varphi_0})) dr = \Lambda_f(1, \varphi_0) < +\infty$$

Posljednja jednakost protivurječi pretpostavci da je $\Lambda_f(1, \varphi_0) = \infty$, čime je lema 2.3.3 dokazana.

3. Teorema 2.3.1 je direktna posljedica leme 1.2.4 primijenjene na funkciju $g(z) = \varrho^h(f(z))$, leme 2.3.1, leme 2.3.3 i teoreme Lindelöfa (/ 24 / , str. 36).

4. Posljedica 2.3.1. Neka je $f(z)$ analitička na D funkcija koja zadovoljava uslove teoreme 2.3.1. Tada, tačke $z = e^{i\theta} \in \Gamma$

u kojima postoje ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ za koje je $|f(e^{i\theta})| = 1$, obrazuju skup E_1 , $C_+(E_1) = 0$.

Dokaz posljedice 2.3.1. Posljedica 2.3.1 neposredno slijedi iz teoreme 2.3.1. Naime, kako integral $1f(z, \varphi)$ geometrijski predstavlja hiperboličku dužinu slike tetive $l(z, e)$ pri preslikavanju $f(z)$, i kako je hiperbolička dužina svake krive koja spaja tačku $z \in D$ sa tačkom $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ beskonačna, tada je za tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ za koju je ugaona granična vrijednost $|f(e^{i\theta})| = 1$ $1f(z, \varphi) = \infty$ za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Iz teoreme 2.3.1 slijedi da je skup tačaka $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ za koji je $1f(z, \varphi) = \infty$ za neko $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ skup E , $C_+(E) = 0$. Kako je skup E_1 skup tačaka $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, za koje je $|f(e^{i\theta})| = 1$, podskup skupa E , tada je $C_+(E_1) = 0$.

5. Primjedba 2.3.1. Iz posljedice 2.3.1 slijedi da analitičke na jediničnom disku D funkcije $f(z)$ koje zadovoljavaju uslove teoreme 2.3.1 obrazuju klasu funkcija koja ima prazan presjek sa Seidelovom klasom analitičkih na jediničnom disku D funkcija.

Napomena 2.3.1. Seidelova klasa analitičkih na jediničnom disku D funkcija se definiše kao skup analitičkih na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ koje imaju svojstvo da je za skoro svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, $|f(e^{i\theta})| = 1$.

Bljaškeovi proizvodi pripadaju Seidelovoj klasi analitičkih funkcija. Otuda slijedi da se nijedna funkcija $f(z)$ koja zadovoljava uslove teoreme 2.3.1 ne može prikazati kao Bljaškeov proizvod.

2.4. Konvergencija nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama analitičkih funkcija H_α^1

Koristeći se rezultatima iz 2.3 u ovom dijelu druge glave dokazujemo rezultate za Hardyjevu hiperboličku klasu analitičkih funkcija H_R^1 i njene potklase H_α^1 , $0 \leq \alpha < 1$, koji su slični rezultatima iz 2.1. Dobijeni rezultati su interesantni zato što pokazuju da se neki problemi koji se rješavaju pomoću sferne, odnosno Euklidove metrike, mogu riješiti, na sličan način, i pomoću hiperboličke metrike.

1. Definicija 2.4.1. Neka je $f(z)$ analitička funkcija definisana na jediničnom disku D i neka je $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$. Funkcija $f(z)$ pripada klasi H_R^1 ako je $\|(1-z^2)[g^h(f(z))]\|^2 < \infty$.

Iz definicija 2.2.1 i 2.4.1 slijedi da je $H_R^1 \subset H^2$. Inače, klasu analitičkih funkcija H_R^1 japanski matematičar S.Yamashita nazvao je Hardyjeva hiperbolička klasa analitičkih funkcija.

U radu / 44/ S.Yamashita dokazuje dvije teoreme koje daju potreban i dovoljan uslov kada neka analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, pripada klasi funkcija H_R^1 .

Jedna od tih teorema je sljedeći rezultat :

Teorema 2.4.1 (/ 44 /). Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, pripada klasi funkcija H_R^1 ako i samo ako je za svako fiksirano $\theta \in \mathbb{R}$ funkcija $S_\theta(\theta, \theta)$ integrabilna funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

Primjedba 2.4.1. Teorema 2.4.1 neposredno slijedi iz leme 1.2.2 .

2. Sa $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ označimo ravnomjernu konvergenciju na svakom kompaktnom skupu diska D niza $\{f_n(z)\}$ ka funkciji $f(z)$ u hiperboličkim metrikama $|d_R z|$.

Kao u 2.1 i 2.2, prije dokaza teorema koje globalno rješavaju problem koji se odnose na konvergenciju nizova ugaonih graničnih vrijednosti na Γ , formulisaćemo tvrđenja koja lokalno, za proizvoljnu tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, rješavaju taj problem. Ti rezultati su analogni rezultatima punkta 4 iz 2.1 i punkta 6 iz 2.2 .

Lema 2.4.1. Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju konačne ugaone granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1,2,\dots$, i $f(e^{i\theta})$, i neka je $\mathcal{L}_{\rho_R}^p(f(z))(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$, i $|f_n(z)| < 1$, $n=1,2,\dots$, i $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$. Ako $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svako kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}_{\rho_R}^p(f_n(z))(\theta) < \varepsilon),$$

onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Za analitičke na jediničnom disku D funkcije $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$; $|f_n(z)| < 1$, $n=1,2,\dots$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$; neka je

$$E_n(f, \varepsilon) = \{e^{i\theta} : f_n(e^{i\theta}), f(e^{i\theta}) \text{ postoje, } |f_n(e^{i\theta})| < 1, |f(e^{i\theta})| < 1, d_R(f_n(e^{i\theta}), f(e^{i\theta})) > \varepsilon \text{ i } (\exists R \in (0,9,1)) (\mathcal{L}_{\rho_R}^p(f(z))(\theta) < \varepsilon)\}$$

Posljedica 2.4.1. Ako su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije, $|f_n(z)| < 1$, $n=1,2,\dots$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$ i $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$, tada je za svako $\varepsilon > 0$, svako n , $n > n_0(\varepsilon)$, i svaku tačku $z = e^{i\theta} \in E_n(f, \varepsilon)$, $\mathcal{L}_{\rho_R}^p(f_n(z))(\theta) - \mathcal{L}_{\rho_R}^p(f(z))(\theta) \geq \frac{\varepsilon}{\rho}$.

Sljedeća dva problema, koji su slični problemima iz punkta 4 paragrafa 2.1 i punkta 6 paragrafa 2.2, ostaju otvorena:

1) Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z=e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju konačne ugaone granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1,2,\dots$, $f(e^{i\theta})$, i neka je $\mathcal{L}_{g_R^h}(f(z))(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$, $|f_n(z)| < 1$, $n=1,2,\dots$, i $|f(z)| < 1$ za svaku tačku $z \in D$. Ako $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, onda, da li je $(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists N_0 = N_0(R)) (\forall n > N_0) (\mathcal{L}_{g_R^h}(f(z))(\theta) < \varepsilon)$?

2) Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ analitičke na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z=e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju konačne ugaone granične vrijednosti $f_n(e^{i\theta})$, $n=1,2,\dots$, $f(e^{i\theta})$, i neka je $|f_n(z)| < 1$, $n=1,2,\dots$, i $|f(z)| < 1$ za svaku tačku $z \in D$ i

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists N_0 = N_0(R)) (\forall n > N_0) (\mathcal{L}_{g_R^h}(f(z))(\theta) < \varepsilon).$$

Ako $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, onda, da li je $\mathcal{L}_{g_R^h}(f(z))(\theta) < \infty$?

3. Definicija 2.4.2. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svaku tačku $z \in D$, pripada klasi funkcija Π_{α}^h , $0 \leq \alpha < 1$, ako je $\|(1-z)^{\alpha} \mathcal{L}_{g^h}(f(z))\|^2 < \infty$.

Iz definicija 2.4.1 i 2.4.2 slijedi da je $\Pi_{\alpha_1}^h \subset \Pi_{\alpha_2}^h \subset H_h^1$ za $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

Granična svojstva klasa funkcija Π_{α}^h , $0 \leq \alpha < 1$, izučavana su u paragrafu 2.3 ove glave; slučaj $H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, $0 \leq \alpha < 1$.

4. Iz leme 1.2.2 direktno slijedi sljedeći rezultat :

Teorema 2.4.2. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, pripada klasi funkcija T_α^h , $0 \leq \alpha < 1$, ako i samo ako je za svako fiksirano $\epsilon \in \mathbb{C}$ funkcija $Sg(\cdot, \epsilon)$, gdje je $g(z) = (1-z)^{\alpha-1} [p^h(f(z))]^2$, integrabilna funkcija argumenta θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

5. Teorema 2.4.3. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in T_\alpha^h$, $0 \leq \alpha < 1$, $n = 1, 2, \dots$,
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z)$ je analitička na jediničnom disku D funkcija,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|(1-z)^{\alpha} [p^h(f_n(z)) - p^h(f(z))]^2\| < +\infty$.

Tada je $f(z) \in T_\alpha$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $G_\alpha(E) = 0$.

Teorema 2.4.4. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, su analitičke na jediničnom disku D funkcije,
- 2) $f(z) \in T_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$,
- 3) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\|(1-z)^{\alpha} [p^h(f_n(z)) - p^h(f(z))]^2\| \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $G_\alpha(E) = 0$.

6. Dokaz teoreme 2.4.3. Dokaz da je $f(z) \in T_\alpha^h$ isti je kao dokaz da je $f(z) \in T_\alpha$ u dokazu teoreme 2.1.8.

Skup E čiji su elementi tačke $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ za koje nije $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ može se prikazati kao unija $\tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2 \cup \tilde{E}_3$,

$\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. Skup $\tilde{E}_1$ je skup tačaka $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ u kojima ne postoje $f_u(e^{i\theta})$ ili $f(e^{i\theta})$ za neko $u \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{E}_2 = \{e^{i\theta} \mid \limsup_{u \rightarrow \infty} d_k(f_u(e^{i\theta}), f(e^{i\theta})) > \varepsilon, (\forall u \in \mathbb{N}) (|f_u(e^{i\theta})| < 1), |f(e^{i\theta})| < 1\}$$

$$\tilde{E}_3 = \{e^{i\theta} \mid \limsup_{u \rightarrow \infty} |f_u(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| > \varepsilon, (\exists u \in \mathbb{N}) (|f_u(e^{i\theta})| = 1) \text{ ili } |f(e^{i\theta})| = 1\}.$$

Iz teoreme 2.3.1 slijedi da su $C_\alpha(\tilde{E}_1) = 0$ i $C_\alpha(\tilde{E}_3) = 0$.

Dokaz da je $C_\alpha(\tilde{E}_2) = 0$ sličan je dokazu da je $C_\alpha(\tilde{E}_2) = 0$ u dokazu teoreme 2.1.8.

7. Dokaz teoreme 2.4.4 izvodi se pomoću teoreme 2.4.3 kao dokaz teoreme 2.1.9 pomoću teoreme 2.1.8.

2.5. Granična svojstva meromorfnih i analitičkih funkcija sa integrabilnim izvodima

U ovom dijelu druge glave produžava se izučavanje problema čija je formulacija data u Uvodu ali za klase meromorfnih i analitičkih funkcija koje su karakteristične po tome što sadrže naprijed izučavane klase meromorfnih i analitičkih funkcija

$$\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha^* \text{ i } \mathcal{T}_\alpha^L, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Dobijeni rezultat će se odnositi na konvergencije nizova pozitivnih graničnih vrijednosti i uglovnih graničnih vrijednosti.

1. Definicija 2.5.1. Meromorfna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi $\mathcal{T}$ ako je $\|g(f(z))\| < \infty$.

Lako se može pokazati, korišćenjem integralne nejednačine Cauchy-Bunjakovskog, da svaka meromorfna na jediničnom

disku D funkcija $f(z)$ koja zadovoljava uslove

$\|(1-z)H(1-z)[g(f(z))]^2\| < \infty$, $H(t) \in \tilde{C}_4 \cup \{\frac{1}{t}\}$, pripada klasi funkcija T . Otuda je $T_\alpha \subset T$, $0 \leq \alpha < 1$.

Granična svojstva klase funkcija T izučavao je V.I. Gavrilov, / 11 / . On je dokazao sljedeći rezultat :

Teorema 2.5.1 (/ 11 /). Ako je $f(z) \in T$, onda $f(z)$ u svakoj tački $z = e^{i\varphi} \in \Gamma/E$, $\text{mes } E = 0$, ima konačan integral $L_f(s, \varphi)$ za skoro svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a odgovarajuće tetivne granične vrijednosti $f(s, \varphi)$ međusobom su jednake.

Napomena 2.5.1. Meromorfna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ u tački $z = e^{i\varphi} \in \Gamma$ ima tetivnu graničnu vrijednost $f(s, \varphi) = \omega(s)$ ako je $\lim_{\substack{z \rightarrow z \in \Gamma(s, \varphi) \\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} f(z) = f(s, \varphi) = \omega(s)$.

2. **Teorema 2.5.2.** U topološkom prostoru $(M(D), \tau')$ skup T je zatvoren skup.

3. Koristeći teoremu 2.5.1 možemo dokazati sljedeći rezultat:

Teorema 2.5.3. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in T$, $n = 1, 2, \dots$,
- 2) $f(z) \in M(D)$,
- 3) $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|g(f_n(z)) - g(f(z))\| < \infty$. (2.5.1)

Tada je $f(z) \in T$ i za svaku tačku $z = e^{i\varphi} \in \Gamma/E$, $\text{mes } E = 0$, postoji skup B_φ , $B_\varphi \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\text{mes } B_\varphi = \bar{u}$, takav da je za svako $\varphi \in B_\varphi$, $f_n(s, \varphi) = \omega_n(s)$, $f(s, \varphi) = \omega(s)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(s) = \omega(s)$.

Teorema 2.5.4. Neka su ispunjeni uslovi :

$$1) f_{\mu}(z) \in M(D), \mu = 1, 2, \dots,$$

$$2) f(z) \in \Gamma,$$

$$3) f_{\mu}(z) \xrightarrow{P} f(z) \text{ kada } \mu \rightarrow \infty,$$

$$4) \|g(f_{\mu}(z))\| \rightarrow \|g(f(z))\|$$

Tada postoji podniz $\{f_{\mu_k}(e^{i\theta})\}$ niza $\{f_{\mu}(e^{i\theta})\}$ takav da za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $\text{mes } E = 0$, postoji skup B_z , $B_z \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\text{mes } B_z = \bar{\alpha}$, takav da je za svako $\varphi \in B_z$, $f_{\mu_k}(z, \varphi) = \omega_{\mu_k}(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{\mu_k}(z) = \omega(z)$.

4. Prije dokaza teorema 2.5.3 i 2.5.4 dokazaćemo tvrđenja koja lokalno, za proizvoljnu tačku $z = e^{i\theta}$ sa granice Γ diska D rješavaju neke probleme koji se odnose na konvergenciju niza tetivnih graničnih vrijednosti meromorfnih funkcija.

Lema 2.5.1. Neka su $f_{\mu}(z)$, $\mu = 1, 2, \dots$, i $f(z)$ meromorfne na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju tetivne granične vrijednosti $f_{\mu}(z, \varphi) = \omega_{\mu}(z)$, $\mu = 1, 2, \dots$, i $f(z, \varphi) = \omega(z)$, za svako $\varphi \in B_z$, $B_z \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\text{mes } B_z = \bar{\alpha}$, i neka je $\angle_{\rho_R}(f(z))(\theta) < \infty$, $0 < R < 1$, Ako $f_{\mu}(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in (0, 1))(\exists \mu_0 = \mu_0(R))(\forall \mu > \mu_0)(\angle_{\rho_R}(f_{\mu}(z))(\theta) < \varepsilon),$$

onda je $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \omega_{\mu}(z) = \omega(z)$.

Dokaz leme 2.5.1. Dokaz leme 2.5.1 izvodi se slično kao dokaz leme 2.1.1.

Naime, pretpostavimo da nije $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$. Tada postoji $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ i podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takvi da je $d_1(\omega_{n_k}(z), \omega(z)) > \varepsilon_0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Iz uslova $\mathcal{L}_{g_R}(f(z))(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$, i

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}_{g_R}(f_n(z))(\theta) < \varepsilon),$$

slijedi da za ε_0 postoji R_0 , $0,9 < R < R_0 < 1$, i postoji n_0 , $n_0 = n_0(R)$, takvi da je $\mathcal{L}_{g_{R_0}}(f(z))(\theta) < \frac{\varepsilon_0}{\delta}$, i za svako $n > n_0$

$$\mathcal{L}_{g_{R_0}}(f_n(z))(\theta) < \varepsilon. \quad (2.5.2)$$

Neka je, dalje

$$L_{f_n}(\ell(\theta, \varphi)) = \int_{\ell(\theta, \varphi)} g_{R_0}(f_n(z)) |dz|. \quad (2.5.3)$$

Tada je

$$L_{f_n}(\ell(\theta, \varphi)) \geq d_1(f_n(z, \varphi), f_n(q_\varphi)), \quad (2.5.4)$$

gdje je $q_\varphi = \ell(\theta, \varphi) \cap \Gamma_{R_0}$, $\Gamma_{R_0} : |z| = R_0$, $\varphi \in B_S$.

Za svako $\varphi \in B_S \cap (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, na osnovu aksiome metrike o nejednakosti trougla, imamo da je :

$$d_1(f_n(z, \varphi), f_n(q_\varphi)) \geq d_1(f_n(z, \varphi), f(z, \varphi)) - d_1(f(z, \varphi), f(q_\varphi)) - d_1(f(q_\varphi), f_n(q_\varphi)) \quad (2.5.5)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Koristeći (2.5.3), (2.5.4) i (2.5.5) dobijamo

$$\mathcal{L}_{g_{R_0}}(f_n(z))(\theta) = \int_{(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cap B_S} L_{f_n}(\ell(\theta, \varphi)) d\varphi \geq \int_{(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cap B_S} d_1(f_n(z, \varphi), f_n(q_\varphi)) d\varphi \geq$$

$$\int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} d_1(f_n(z, v), f(z, v)) dv - \int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} d_1(f(z, v), f(a, v)) dv - \int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} d_1(f(a, v), f_n(a, v)) dv \quad (2.5.6)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Otuda za svako $k \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$\mathcal{L}_{p_R}(f_{n_k}(z))(0) \geq \int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} d_1(f_{n_k}(z, v), f(z, v)) dv - \int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} d_1(f(z, v), f(a, v)) dv - \int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} d_1(f(a, v), f_{n_k}(a, v)) dv \quad (2.5.7)$$

Kako je za svako $k \in \mathbb{N}$ $d_1(f_{n_k}(z, v), f(z, v)) > \varepsilon_0$ to prvi integral sa desne strane nejednačine (2.5.7) nije manji od $\varepsilon_0 \frac{\bar{u}}{2}$.

Drugi integral sa desne strane nejednačine (2.5.7)

nije veći od $\frac{\varepsilon_0}{8}$ jer je

$$\int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} d_1(f(z, v), f(a, v)) dv \leq \int_{\left(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}\right) \cap B_5} L_f(f(0, v)) dv = \mathcal{L}_{p_R}(f(z))(0) < \frac{\varepsilon_0}{8}.$$

Treći integral sa desne strane nejednačine (2.5.7)

ne prelazi $\frac{\varepsilon_0}{8} \cdot \frac{\bar{u}}{2}$ za svako $k > k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, što slijedi iz uslova da $f_n(z) \xrightarrow{p} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(0)$.

Koristeći naprijed dobijene integralne ocjene i (2.5.7)

dobijamo

$$\mathcal{L}_{p_R}(f_{n_k}(z))(0) \geq \varepsilon_0$$

za svako $k > \max(k_0, k_1)$, što je suprotno sa (2.5.2), čime je lema 2.5.1 dokazana.

Neka je, dalje, za svako $f_n(z), f(z) \in M(D)$, $n=1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} E_n(\varepsilon) = \{e^{i\theta} : \text{za } z=e^{i\theta} \text{ postoji skup } B_5^n, B_5^n \subset (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2}), \\ \text{mes } B_5^n = \bar{u}, (\forall v \in B_5^n) (f_n(z, v) = \omega_n(z), f(z, v) = \omega(z)), d_1(\omega_n(z), \omega(z)) \geq \varepsilon, \\ \exists R \in (0, 1) (\mathcal{L}_{p_R}(f(z))(0) < \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Posljedica 2.5.1. Ako su $f_n(z), f(z) \in M(D)$, $n=1, 2, \dots$,

i $f_n(z) \xrightarrow{p} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$, tada je za svako $\varepsilon > 0$, svako

n , $n > n_0$, i svaku tačku $z = e^{i\theta} \in E_n(f, \varepsilon)$,
 $\mathcal{L}_R(f_n(z)) - \mathcal{L}_R(f(z))(\theta) \geq \frac{\varepsilon}{R}$.

Nije teško vidjeti da posljedica 2.5.1 slijedi iz leme 2.5.1.

Ostaju neriješena sljedeća dva problema :

1) Neka su $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, i $f(z)$ meromorfne
na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$
imaju tetivne granične vrijednosti $f_n(z, \varphi) = \omega_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$,
i $f(z, \varphi) = \omega(z)$, za svako $\varphi \in B_\varepsilon$, $B_\varepsilon \subset (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$, $\omega|_{B_\varepsilon} = \bar{\omega}$,
i neka je $\mathcal{L}_R(f(z))(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$. Ako $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$
kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i
ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$, onda, da li je

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}_R(f_n(z))(\theta) < \varepsilon)$?

2) Neka su $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, i $f(z)$ meromorfne
na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$
imaju tetivne granične vrijednosti $f_n(z, \varphi) = \omega_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$,
i $f(z, \varphi) = \omega(z)$, za svako $\varphi \in B_\varepsilon$, $B_\varepsilon \subset (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$, $\omega|_{B_\varepsilon} = \bar{\omega}$,
i neka je

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}_R(f_n(z))(\theta) < \varepsilon)$.

Ako $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti

$\Delta_R(\theta)$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$, onda, da li je
 $\mathcal{L}_R(f(z))(\theta) < \infty$.

Primijetimo da su naprijed formulisani problemi slični na-
prijed formulisanim problemima za ugaone granične vrijednosti iz
paragrafa 2.1, 2.2 i 2.4. Njihovim rješenjem dobili bi se
rezultati koji bi predstavljali automatski i rješenja sličnih
problema iz paragrafa 2.1, 2.2 i 2.4.

Dokaz teorema 2.5.3. Iz uslova $f_n(z) \in T$, $n=1,2,\dots$, $f(z) \in M(D)$ i (2.5.1) neposredno slijedi da je $f(z) \in T$.

Ostalo je da se pokaže da skup E čiji su elementi tačke $z=e^{i\theta} \in \Gamma$, za koje nije ispunjeno da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$, prema Lebesgueovu mjeru nula.

Lako se uočava da se skup E može prikazati kao unija $\tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2$, gdje je $\tilde{E}_1$ skup tačaka $z=e^{i\theta} \in \Gamma$ za koje ne postoje $\omega(z)$ ili $\omega_n(z)$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i $\tilde{E}_2 = \bigcup_{\gamma=1}^{\infty} E_\gamma$ gdje je $E_\gamma = \{e^{i\theta} : \limsup_{n \rightarrow \infty} d_2(\omega_n(z), \omega(z)) > \frac{1}{\gamma}\}$.

Kako su $f_n(z), f(z) \in T$, $n=1,2,\dots$, tada je po teoremi 2.5.1, $\text{mes } \tilde{E}_1 = 0$. Ostalo je da se pokaže da je $\text{mes } \tilde{E}_2 = 0$, a to će biti ako pokažemo da je za svako $\gamma \in \mathbb{N}$ $\text{mes } E_\gamma = 0$.

Posmatrajmo skupove

$$E'_\gamma = \{e^{i\theta} : (\exists \varepsilon > 0) (\forall R \in (0, 1)) \mathcal{L}_{g_R}(f(z))(0) > \frac{1}{\gamma}\}$$

$$E''_\gamma = E_\gamma / E'_\gamma.$$

Iz posljedice 1.2.2 slijedi da je $\text{mes } E'_\gamma = 0$ za svako fiksirano $\gamma \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5.3 biće dokazana ako se pokaže da je $\text{mes } E''_\gamma = 0$ za svako $\gamma \in \mathbb{N}$. Da bismo to pokazali, neka je $E^K = \bigcup_{n=K}^{\infty} E_n(f, \frac{1}{\gamma})$, gdje su $E_n(f, \frac{1}{\gamma})$ skupovi iz posljedice 2.5.1 za niz $\{f_n(z)\}$. Nije teško vidjeti da je za svako $K \in \mathbb{N}$, $E^{K+1} \subset E^K$ i $E''_\gamma \subset E^K$. Pokazaćemo da $\text{mes } E^K \rightarrow 0$ kada $K \rightarrow \infty$, a odatle i naprijed rečenog slijedi da je $\text{mes } E''_\gamma = 0$.

$$\text{Kako je } \mathcal{L}(|g(f_n(z)) - g(f(z))|)(0) \geq \mathcal{L}(|g_R(f_n(z)) - g_R(f(z))|)(0)$$

za svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, tada iz posljedice 2.5.1 i dokaza lemele 2.6 slijedi da je za svako fiksirano $\nu \in \mathbb{N}$ i svako $z = e^{i\theta} \in E_\nu(f, \frac{1}{\nu})$

$$\frac{1}{8\nu} \leq \text{mes } E_\nu(f, \frac{1}{\nu}) \leq 4\nu C \| |g(f_\nu(z)) - g(f(z))| \| . \quad (2.5.8)$$

Iz (2.5.8) i (2.5.1) slijedi da je

$$\text{mes } E^k \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \text{mes } E_\nu(f, \frac{1}{\nu}) \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} 4\nu C \| |g(f_\nu(z)) - g(f(z))| \| ,$$

a odatle dobijamo da $\text{mes } E^k \rightarrow 0$ kada $k \rightarrow \infty$ što je i trebalo dokazati da bi dokazali teoremu 2.5.3.

6. Dokaz teoreme 2.5.4 izvodi se pomoću teoreme 2.5.3 kao dokaz teoreme 2.1.9 pomoću teoreme 2.1.8.

7. Posmatrajmo, sada, meromorfne na D funkcije $f(z) \in \mathcal{T}$ koje zadovoljavaju uslov $\lim_{|z| \rightarrow 1} \sup (1-|z|) g(f(z)) < \infty$, tj. posmatrajmo funkcije $f(z)$ iz $\mathcal{T}$ koje su normalne u smislu Lahta i Virtanena, / 26 / .

Za takve funkcije tačke $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ za koje je integral $L_f(z, \varphi)$ beskonačan bar za jednu tetivu $L(z, \varphi)$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obrazuju skup E , $\text{mes } E = 0$, i $\Gamma/E \subset F(f)$, gdje je $F(f)$ skup tačaka Fatou za funkcije $f(z)$, teorema 1 u / 12 / .

Nije teško vidjeti da iz naprijed navedenog rezultata V.I.Gavrilova i teorema 2.5.3 i 2.5.4 slijede sljedeća tvrdjenja :

Posljedica 2.5.2. Neka su $f_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, \dots$, i $f(z)$ funkcije koje zadovoljavaju uslove teoreme 2.5.3 i neka su normalne u smislu Lahta i Virtanena. Tada je $f(z) \in \mathcal{T}$ i $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $\text{mes } E = 0$.

Posljedica 2.5.3. Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ funkcije koje zadovoljavaju uslove teoreme 2.5.4 i neka su normalne u smislu Lahta i Virtanena. Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je za svako $\zeta = e^{i\theta} \in E$, $\mu(E) = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}).$$

Ostaje neriješen sljedeći problem: Ako su $f_n(z) \in T$, $n=1,2,\dots$, normalne funkcije u smislu Lahta i Virtanena, $f(z) \in T$, i $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ da li je tada $f(z)$ normalna funkcija u smislu Lahta i Virtanena.

8. Klasa funkcija T sadrži Tsujievu klasu meromorfnih na jediničnom disku D funkcija, koja se karakteriše sa

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} g(f(re^{i\theta})) d\theta < +\infty.$$

Otuda, rezultati koji važe za klasu funkcije T važe i za Tsujievu klasu meromorfnih funkcija. Znači, naši rezultati daju neke nove rezultate za Tsujievu klasu meromorfnih funkcija.

Inače Tsujieva klasa meromorfnih funkcije je dosta izučavana klasa meromorfnih funkcija (pogledati naprimjer : / 11 / , / 22 / , / 23 / , / 34 / , / 36 / , / 42 /).

9. Kako je $T_\alpha \subset T$, $0 \leq \alpha < 1$, i kako za klase funkcija T_α , $0 \leq \alpha < 1$, skupovi $\tilde{E}_\alpha$ imaju α -kapacitet jednak nuli, tada se teoreme 2.5.3 i 2.5.4, za klase T_α mogu formulirati na sljedeći način :

Teorema 2.5.3' Neka su $f_n(z), f(z) \in T_\alpha$, $n=1,2,\dots$, $0 \leq \alpha < 1$, funkcije koje zadovoljavaju uslove teoreme 2.5.3. Tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $\zeta = e^{i\theta} \in E$, $\mu(E) = 0$.

Teorema 2.5.4' Neka su $f_n(z)$, $f(z) \in T_\alpha$, $n=1,2,\dots$, $0 \leq \alpha < 1$, funkcije koje zadovoljavaju uslove teoreme 2.5.4.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z=e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $\text{mes } E = 0$.

Primjedba 2.5.2. Kako je za svako $f_n(z)$, $f(z) \in M(D)$, $n=1,2,\dots$, $0 \leq \alpha < 1$,

$$\| \rho(f_n(z) - f(z)) \| \leq \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha} \right)^{1/2} \| (1-z)^{-\alpha} [\rho(f_n(z)) - \rho(f(z))] \|^{1/2},$$

tada ako funkcije $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$, zadovoljavaju uslove teoreme 2.1.8 one zadovoljavaju i uslove teoreme 2.5.3'.

Otuda slijedi da teorema 2.5.3' daje bolju mogućnost da se ispituje konvergencija nizova ugaonih graničnih vrijednosti funkcija u klasama T_α , $0 \leq \alpha < 1$, od teoreme 2.1.8.

Međutim, to poboljšanje ide na štetu samoga skupa na kome imamo konvergenciju. Naime, skup iz teoreme 2.5.3 na kome imamo konvergenciju ima "slabiju" metričku karakteristiku od skupa iz teoreme 2.1.8.

10. Definicija 2.5.2. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija T^* ako je $\|f'(z)\| \leq \infty$.

Iz definicija 2.5.1, 2.5.2 i 2.2.2 slijedi da je

$$T_\alpha^* \subset T^* \subset T, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Ako je $f(z) \in T^*$, onda tačke $z=e^{i\theta} \in \Gamma$ za koje je integral $\rho_f(s, \varphi)$ beskonačan bar za jednu tetivu $h(s, \varphi)$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, obrazuju skup E , $\text{mes } E = 0$, takav da je $\Gamma \setminus E \subset F(f)$, teorema 2 u [12].

Teorema 2.5.5. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in T^*$, $n=1, 2, \dots$,
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z)$ je analitička na D funkcija,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \| |f'_n(z)| - |f'(z)| \| < \infty$.

Tada je $f(z) \in T^*$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $\zeta = e^{i\theta} \in T \setminus E$, $\text{mes } E = 0$.

Teorema 2.5.6. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, su analitičke na disku D funkcije
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z) \in T^*$,
- 4) $\| |f'_n(z)| \| \rightarrow \| |f'(z)| \|$ kada $n \rightarrow \infty$,

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $\zeta = e^{i\theta} \in T \setminus E$, $\text{mes } E = 0$.

Dokazⁱ teorema 2.5.5 i 2.5.6 slični su dokazima teorema 2.5.3 i 2.5.4.

Primijetimo da je klasa funkcija T^* potklasa Hardyjeve klase analitičkih funkcija H^1 , / 12 /.

11. Primjedba 2.5.3. Kao što je rečeno, klase analitičkih na jediničnom disku D funkcija T_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, su potklase klase funkcija T^* . Otuda sva tvrđenja koja su dokazana za klasu funkcija T^* važe i za klase funkcija T_α^* .

Kako u prostoru analitičkih funkcija za svaki niz $\{f_n(z)\}$ i svaku funkciju $f(z)$ važi

$$\| |f'_n(z)| - |f'(z)| \| \leq \left(\frac{2n}{1-\alpha} \right)^{1/2} \| (1-\alpha)^\alpha [|f'_n(z)| - |f'(z)|]^2 \|^{1/2}$$

za svako $0 \leq \alpha < 1$ i $n=1,2,\dots$, tada slijedi da teorema 2.5.5 daje bolju mogućnost da se ispituje konvergencija ugaonih graničnih vrijednosti u klasama Π_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, od teoreme 2.2.11. Na ovom mjestu, za teoreme 2.5.5 i 2.2.11, važi komentar koji je sličan komentaru iz primjedbe 2.5.2 za teoreme 2.5.3 i 2.1.8.

12. Definicija 2.5.3. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, pripada klasi funkcija Π^h ako je $\|g^h(f(z))\| < \infty$.

Iz definicija 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3 i 2.4.2 slijedi da je $\Pi_\alpha^h \subset \Pi^h \subset \Pi^* \subset \Pi$, $0 \leq \alpha < 1$.

Teorema 2.5.7. Ako je $f(z) \in \Pi^h$, onda je integral $\Lambda_f(s, \varphi)$ konačan za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $\text{mes } E = 0$. U tačkama $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ funkcija $f(z)$ ima ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$, $|f(e^{i\theta})| \leq 1$.

Teorema 2.5.7 je posljedica teorema 3 iz [11], leme 2.3.1, leme 2.3.3 i teorema Lindelofa ([24] str.36).

Posljedica 2.5.4. Neka je $f(z)$ analitička na disku D funkcija koja zadovoljava uslove teorema 2.5.7. Tada tačke $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, u kojima postoje ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ za koje je $|f(e^{i\theta})| = 1$, obrazuju skup E_1 , $\text{mes } E_1 = 0$.

Posljedica 2.5.4 neposredno slijedi iz teoreme 2.5.7 i geometrijske interpretacije integrala $\Lambda_f(s, \varphi)$.

Primjedba 2.5.4. Iz posljedice 2.5.4 slijedi da klasa Π^h ima prazan presjek sa Seidelovom klasom funkcija.

13. Koristeći posljedicu 2.5.4 možemo dokazati sljedeća tvrđenja :

Teorema 2.5.8. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in \Gamma^h$, $n = 1, 2, \dots$,
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z)$ je analitička na disku D funkcija,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|g^h(f_n(z)) - g^h(f(z))\| < +\infty$.

Tada je $f(z) \in \Gamma^h$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $\text{mes } E = 0$.

Teorema 2.5.9. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, su analitičke na disku D funkcije,
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z) \in \Gamma^h$,
- 4) $\|g^h(f_n(z))\| \rightarrow \|g^h(f(z))\|$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $\text{mes } E = 0$.

Dokazi teorema 2.5.8 i 2.5.9 slični su dokazima teorema 2.5.5 i 2.5.6.

Napominjmo da se pri dokazu teorema 2.5.8 koristimo i idejom sa kojom smo dokazali teoremu 2.4.3. Naime, skup $\tilde{E}_2$ se prikazuje kao unija sljedeća dva skupa :

$$\tilde{E}_2' = \{e^{i\theta} : \limsup_{n \rightarrow \infty} d_R(f_n(e^{i\theta}), f(e^{i\theta})) > \varepsilon, (\forall n \in \mathbb{N}) (|f_n(e^{i\theta})| = 1), |f(e^{i\theta})| = 1\},$$

$$\tilde{E}_2'' = \{e^{i\theta} : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| > \varepsilon, (\exists n \in \mathbb{N}) (|f_n(e^{i\theta})| = 1) \text{ ili } |f(e^{i\theta})| = 1\},$$

i dokazuje se da je $\text{mes } \tilde{E}_2' = 0$ i $\text{mes } \tilde{E}_2'' = 0$.

Primjedba 2.5.4. Za teoreme 2.4.3 i 2.5.8, koje govore o konvergenciji nizova ugaonih graničnih vrijednosti klasa funkcija T^p i T_α^h , $0 \leq \alpha < 1$, važi komentar sličan komentaru koji je dat u primjedbi 2.5.3 za teoreme 2.5.3 i 2.1.8.

2.6. Konvergencija nizova $\{f_n(z, \varphi)\}$ u klasi neprekidno diferencijabilnih funkcija T i njenim potklasama T_α

U ovom dijelu druge glave se izučavaju konvergenције nizova tetivnih graničnih vrijednosti za klase neprekidno diferencijabilnih na jediničnom disku D funkcija čija su granična svojstva izučavali L.Carleson, / 19 /, i V.I.Gavrilov, / 14 /.

1. Definicija 2.6.1. Neprekidno diferencijabilna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija T ako je $\| \operatorname{grad} f(z) \| < +\infty$.

Teorema 2.6.1. (/ 11 /, teorema 4*). Neka je $f(z) \in T$

i

$$L(\theta, \varphi) = \int_{h(\theta, \varphi)} |\operatorname{grad} f(z)| |dz| \dots$$

Tada :

1) za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ funkcija $L(\theta, \varphi)$ je integrabilna funkcija argumenta $\theta \in [0, 2\pi]$,

2) na zatvorenom intervalu $[0, 2\pi]$ postoji skup M , $\operatorname{mes} M = 2\pi$, takav da je za svako $\theta \in M$ funkcija $L(\theta, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

3) za svako $\theta \in M$ i svako $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ za koje je

$L(\vartheta, \varphi) < \infty$ i $L(\vartheta, \varphi_2) < \infty$, postoje granične vrijednosti $f(\zeta, \varphi_1)$, $f(\zeta, \varphi_2)$ i $f(\zeta, \varphi_1) = f(\zeta, \varphi_2)$.

2. Koristeći teoremu 2.6.1 možemo dokazati sljedeće rezultate:

Teorema 2.6.2. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in T$, $n=1, 2, \dots$,
- 2) $f(z)$ je neprekidno diferencijabilna na jediničnom disku D funkcija,
- 3) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D ,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \| |grad f_n(z)| - |grad f(z)| \| < \infty$.

Tada je $f(z) \in T$ i za svaku tačku $\zeta = e^{i\vartheta} \in \Gamma/E$, $mes E = 0$, postoji skup B_ζ , $B_\zeta \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $mes B_\zeta = \bar{\mu}$, takav da je za svako $\varphi \in B_\zeta$, $f_n(\zeta, \varphi) = \omega_n(\zeta)$, $f(\zeta, \varphi) = \omega(\zeta)$, i $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(\zeta) = \omega(\zeta)$.

Teorema 2.6.3. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, su neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije,
- 2) $f(z) \in T$,
- 3) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D , $|grad f_n(z)| \rightarrow |grad f(z)|$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\| |grad f_n(z)| \| \rightarrow \| |grad f(z)| \|$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da za svaku tačku $\zeta = e^{i\vartheta} \in \Gamma/E$, $mes E = 0$, postoji skup B_ζ , $B_\zeta \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $mes B_\zeta = \bar{\mu}$, takav da je za svako $\varphi \in B_\zeta$, $f_{n_k}(\zeta, \varphi) = \omega_{n_k}(\zeta)$, $f(\zeta, \varphi) = \omega(\zeta)$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{n_k}(\zeta) = \omega(\zeta)$.

3. Prije dokaza teorema 2.6.2 i 2.6.3 dokazaćemo tvrđenja koja lokalno, za proizvoljnu tačku $z = e^{i\theta}$ sa granice Γ diska D rješavaju neke probleme koji se odnose na konvergenciju niza tetivnih graničnih vrijednosti neprekidno diferencijabilnih funkcija.

Lema 2.6.1. Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju tetivne granične vrijednosti

$$f_n(z, r) = \omega_n(z), \quad n=1,2,\dots, \quad f(z, r) = \omega(z), \quad \text{za svako } \varphi \in B_z,$$

$$B_z \subset \left(\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2}\right), \quad \text{mes } B_z = \bar{u}, \quad \text{i neka je } \mathcal{L}|\text{grad } f(z)|_R(\theta) < \infty, \quad 0,9 < R < 1.$$

Ako $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}|\text{grad } f_n(z)|_R(\theta) < \varepsilon),$$

onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$.

Dokaz leme 2.6.1. Dokaz leme 2.6.1 izvodimo slično dokazu leme 2.5.1.

Naime, pretpostavimo da nije $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$. Tada postoje $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ i podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takvi da je $|\omega_{n_k}(z) - \omega(z)| > \varepsilon_0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Iz uslova $\mathcal{L}|\text{grad } f(z)|_R(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$, i

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0,9,1)) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}|\text{grad } f_n(z)|_R(\theta) < \varepsilon)$$

slijedi da za ε_0 postoji R_0 , $0,9 < R < R_0 < 1$, i

postoji n_0 , $n_0 = n_0(R)$, takvi da je $\mathcal{L}|\text{grad } f(z)|_{R_0}(\theta) < \frac{\varepsilon_0}{\rho}$, i za svako $n > n_0$

$$\mathcal{L}|\text{grad } f_n(z)|_{R_0}(\theta) < \varepsilon_0 \quad (2.6.1)$$

Neka je $\varphi \in B_5$ i

$$L_{f_n}(\ell(z, \varphi)) = \int_{\ell(z, \varphi)} |\operatorname{grad} f_n(z)| |dz|. \quad (2.6.2)$$

Kako je $\frac{\partial f_n(z)}{\partial \ell(z, \varphi)} \leq |\operatorname{grad} f_n(z)|$ za svako $z \in \ell(z, \varphi)$ i svako $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$L_{f_n}(\ell(z, \varphi)) \geq |\omega_n(z) - f(q_r)|, \quad (2.6.3)$$

gdje je $q_r = \ell(z, \varphi) \cap \Gamma_{r_0}$, $\Gamma_{r_0}: |z| = r_0$, $\varphi \in B_5$.

Za svako $\varphi \in B_5 \cap (\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4})$, na osnovu aksiome metrike o nejednakosti trougla, imamo da je

$$|\omega_n(z) - f_n(q_r)| \geq |\omega_n(z) - \omega(z)| - |\omega(z) - f(q_r)| - |f(q_r) - f_n(q_r)|. \quad (2.6.4)$$

Koristeći (2.6.2), (2.6.3) i (2.6.4) dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\operatorname{grad} f_n(z)|_{r_0}(\theta) d\varphi &= \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} L_{f_n}(\ell(\theta, \varphi)) d\varphi \geq \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\omega_n(z) - f_n(q_r)| d\varphi \geq \\ &\geq \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\omega_n(z) - \omega(z)| d\varphi - \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\omega(z) - f(q_r)| d\varphi - \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |f(q_r) - f_n(q_r)| d\varphi \quad (2.6.5) \end{aligned}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Otuda za svako $k \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$\int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\operatorname{grad} f_k(z)|_{r_0}(\theta) d\varphi \geq \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\omega_k(z) - \omega(z)| d\varphi - \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\omega(z) - f(q_r)| d\varphi - \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |f(q_r) - f_k(q_r)| d\varphi \quad (2.6.6)$$

Kako je za svako $k \in \mathbb{N}$ $|\omega_k(z) - \omega(z)| > \varepsilon_0$, to prvi integral sa desne strane nejednačine (2.6.6) nije manji od $\frac{\varepsilon_0 \bar{u}}{2}$.

Drugi integral sa desne strane nejednačine (2.6.6)

nije veći od $\frac{\varepsilon_0}{8}$ jer je

$$\int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\omega(z) - f(q_r)| d\varphi \leq \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} L_f(\ell(\theta, \varphi)) d\varphi = \int_{(\frac{\bar{u}}{4}, \frac{\bar{u}}{4}) \cap B_5} |\operatorname{grad} f(z)|_{r_0}(\theta) d\varphi < \frac{\varepsilon_0}{8}.$$

Treći integral sa desne strane nejednačine (2.6.6) prelazi $\frac{\varepsilon_0}{8} \cdot \frac{5}{2}$ za svako $K > K_0$, $K_0 \in \mathbb{N}$, što slijedi iz uslova da $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$.

Koristeći naprijed dobijene integralne ocjene i (2.6.6) dobijamo

$$\alpha | \int_0^{2\pi} f_{n_k}(z) |_{R_0}(\theta) \geq \varepsilon_0$$

za svako $K > \max(K_0, M_0)$ što je suprotno (2.6.1), čime je lema 2.6.1 dokazana.

Neka su, dalje, $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije i neka je

$$E_n(\varepsilon, \eta) = \{ e^{i\theta} : \text{za } z = e^{i\theta} \text{ postoji skup } B_\varepsilon^\eta, B_\varepsilon^\eta \subset (-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}), \\ \text{takoz } B_\varepsilon^\eta = \bar{\alpha} \cdot (\forall \varphi \in B_\varepsilon^\eta) (f_n(z, \varphi) = \omega_n(z), f(z, \varphi) = \omega(z)), \\ |\omega_n(z) - \omega(z)| \geq \varepsilon \text{ i } (\exists R \in (0, 1)) (\alpha | \int_0^{2\pi} f(z) |_R(\theta) < \varepsilon) \}$$

Posljedica 2.6.1. Ako su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije i $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D , tada je za svako $\varepsilon > 0$, svako n , $n > n_0$, i svaku tačku $z = e^{i\theta} \in E_n(\varepsilon, \eta)$, $\alpha | \int_0^{2\pi} f_n(z) |_R(\theta) - | \int_0^{2\pi} f(z) |_R(\theta) | \geq \frac{\varepsilon}{p}$.

Posljedica 2.6.1 slijedi iz leme 2.6.1.

Ostaju neriješena sljedeća dva problema :

- 1) Neka su $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z)$ neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju tetivne granične vrijednosti $f_n(z, \varphi) = \omega_n(z)$, $n=1,2,\dots$, i $f(z, \varphi) = \omega(z)$ za svako $\varphi \in B_\varepsilon$, $B_\varepsilon \subset (-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2})$,

mes $B_\Sigma = \bar{u}$, i neka je $\mathcal{L}|\operatorname{grad} f(z)|_R(\theta) < \infty$, $0,9 < R < 1$. Ako $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$, onda, da li je

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0, 9, 1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}|\operatorname{grad} f_n(z)|_R(\theta) < \varepsilon)?$$

2) Neka su $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, i $f(z)$ neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije koje u tački $z=e^{i\theta} \in \Gamma$ imaju tetivne granične vrijednosti $f_n(z, \varphi) = \omega_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, i $f(z, \varphi) = \omega(z)$, za svako $\varphi \in B_\Sigma$, $B_\Sigma \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, mes $B_\Sigma = \bar{u}$, i neka je-

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists R \in (0, 9, 1)) (\exists n_0 = n_0(R)) (\forall n > n_0) (\mathcal{L}|\operatorname{grad} f_n(z)|_R(\theta) < \varepsilon).$$

Ako $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu oblasti $\Delta_R(\theta)$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$, onda, da li je $\mathcal{L}|\operatorname{grad} f(z)|_R(\theta) < \infty$?

4. Teorema 2.6.2 može se dokazati korišćenjem rezultata teoreme 2.6.1 i posljedice 2.6.1 po šemi po kojoj je dokazana teorema 2.5.3.

Dokaz teoreme 2.6.3 izvodi se pomoću teoreme 2.6.2 slično kao dokaz teoreme 2.5.4 pomoću teoreme 2.5.3.

5. Definicija 2.6.2. Neprekidno diferencijabilna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija $\mathcal{T}_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, ako je $\|(1-z)^{\alpha} |\operatorname{grad} f(z)|^2\| < \infty$.

Teorema 2.6.4 (/ 10 / , teorema 1). Ako je $f(z) \in \mathcal{T}_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, onda postoji skup E sa Γ , $C_\alpha(E) = 0$.

akva da je za svako $s = e^{i\theta} \in \Gamma/E$ i skoro svako $\varphi \in (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$ integral $L(\theta, \varphi)$ konačan a odgovarajuće tetivne granične vrijednosti $f(s, \varphi)$ međusobom su jednake.

Nije teško vidjeti da za klase neprekidno diferencijabilnih funkcija T_α , $0 \leq \alpha < 1$, važe sljedeći rezultati koji predstavljaju poboljšanje, u skupovnom dijelu, teorema 2.6.3 i 2.6.2 za te klase funkcija:

Teorema 2.6.5. Neka su ispunjeni uslovi:

- 1) $f_n(z) \in T_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $n = 1, 2, \dots$,
- 2) $f(z)$ je neprekidno diferencijabilna na jediničnom disku D funkcija,
- 3) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D ,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|(1-|z|)^\alpha | \operatorname{grad} f_n(z) | - | \operatorname{grad} f(z) | \|^2 \| < \infty$.

Tada je $f(z) \in T_\alpha$ i za svaku tačku $s = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $C_\alpha(E) = 0$, postoji skup B_s , $B_s \subset (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$, $\operatorname{mes} B_s = \bar{u}$, takav da je za svako $\varphi \in B_s$, $f_n(s, \varphi) = \omega_n(s)$, $f(s, \varphi) = \omega(s)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(s) = \omega(s)$.

Teorema 2.6.6. Neka su ispunjeni uslovi:

- 1) $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, su neprekidno diferencijabilne na disku D funkcije,
- 2) $f(z) \in T_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$,
- 3) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D , $| \operatorname{grad} f_n(z) | \rightarrow | \operatorname{grad} f(z) |$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\|(1-|z|)^\alpha | \operatorname{grad} f_n(z) |\|^2 \rightarrow \|(1-|z|)^\alpha | \operatorname{grad} f(z) |\|^2$ kada $n \rightarrow \infty$,

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da za svaku tačku $s = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $C_\alpha(E) = 0$, postoji skup B_s , $B_s \subset (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$,

$\mu(B_\Sigma) = \bar{\omega}$, takav da je za svako $\varphi \in B_\Sigma$, $f_k(z, \varphi) = \omega_k(z)$,
 $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k(z) = \omega(z)$.

Primjedba 2.6.1. Za teoreme 2.6.2 i 2.6.5 važi komentar sličan komentaru koji je dat u primjedbi 2.5.3 za teoreme 2.5.3 i 2.1.8 .

Primjedba 2.6.2. L.Carleson je dokazao da ako se pretpostavi da su funkcije iz klase Π_α , $0 \leq \alpha < 1$, apsolutno neprekidne kao funkcije od θ pri skoro svakom r i kao funkcije od r pri skoro svakom θ , $z = re^{i\theta}$, tada one imaju radijalne granične vrijednosti za svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $C_\alpha(E) = 0$. Otuda ako se u teoremama 2.6.5 i 2.6.6 pretpostavi da su funkcije $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, i $f(z)$ apsolutno neprekidne u gornjem smislu , dobili bi da odgovarajući nizovi radijalnih graničnih vrijednosti niza $\{f_n(z)\}$ konvergiraju ka odgovarajućim radijalnim vrijednostima funkcije $f(z)$ za svako $z = e^{i\theta} \in \Gamma/E$, $C_\alpha(E) = 0$.

G l a v a III

L O K A L I Z A C I J A U B O R E L O V O M
S M I S L U

U ovoj glavi se izučavaju granični problemi za meromorfne, analitičke i neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije, koji su slični problemima koji su izučavani u drugoj glavi ovoga rada. Naime, rezultati koji su dokazani u drugoj glavi za granicu Γ diska D prenose se na proizvoljne Borelove skupove B , $B \subset \Gamma$, te smo u tom smislu ovu glavu nazvali "Lokalizacija u Borelovom smislu".

Kako se rezultati ove glave mogu dokazati tehnikom sa kojom su dokazani rezultati u prethodnoj glavi, to ćemo se u ovoj glavi uglavnom ograničiti na formulaciju njenih rezultata sa eventualnim kratkim napomenama kako se oni dokazuju. Pun dokaz daćemo jedino za jednu teoremu jedinstvenosti u hiperboličkoj metrici, koji se bitno razlikuje od dokaza ostalih rezultata ovoga rada i koji ima samostalan značaj.

3.1. Konvergencija nizova $\{f_n(z, \tau)\}$ u klasama meromorfnih funkcija T^B i T_α^B

1. Na početku dajemo nekoliko osnovnih oznaka koje ćemo koristiti u ovoj glavi.

Sa G_B označavamo skup $\bigcup_{s \in B} D_s(z)$, gdje je B proizvoljan Borelov skup sa $\bigcap_{s \in B} D_s(z) = \{z: |z - g_s| < 1 - s\}$, $\frac{1}{2} < s < 1$, a sa $\|u(z)\|_B$ integral

$$\iint_{G_B} u(z) dx dy, \quad z = x + iy.$$

Dalje, napominjemo da oznake koje smo koristili u Uvodu, prvoj glavi i drugoj glavi a koje će biti korišćene u ovoj glavi, imaju ista značenja kao u Uvodu, Glavi I i Glavi II.

2. Definicija 3.1.1. Meromorfna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija T^B ako je $\|g(f(z))\|_B < \infty$.

Granična svojstva klase funkcija T^B izučavao je A.N. Ajrapetjan, / 2 /, / 4 /. On je dobio sljedeći rezultat :

Teorema 3.1.1 (/ 2 /, teorema 3.2.1). Ako je $f(z) \in T^B$, onda je :

- 1) za svako fiksirano $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, funkcija $L_f(z, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta θ , $z = e^{i\theta} \in B$,
- 2) na skupu B postoji skup B_1 , $\text{mes } B = \text{mes } B_1$, takav da je za svako fiksirano θ , $z = e^{i\theta} \in B_1$, funkcija $L_f(z, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta φ , $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- 3) za svaku vrijednost θ , $z = e^{i\theta} \in B_1$, i svako φ_1 i φ_2 , $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, za koje je $L_f(z, \varphi_1) < \infty$ i $L_f(z, \varphi_2) < \infty$ postoje pozitivne granične vrijednosti $f(z, \varphi_1)$ i $f(z, \varphi_2)$ i $f(z, \varphi_1) = f(z, \varphi_2)$,
- 4) za svaku vrijednost θ , $z = e^{i\theta} \in B_1$, i $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, za koju je $L_f(z, \varphi) = +\infty$, tetiva $h(z, \varphi)$ je P -tetiva funkcije $f(z)$.

Napomena 3.1.1. Niz tačaka $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $n=1,2,\dots$, je P -niz funkcije $f(z)$ ako je :

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$,
- 2) za svako $\varepsilon > 0$ i proizvoljan podniz $\{z_{n_k}\}$ niza $\{z_n\}$, funkcija $f(z)$ na skupu $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{z: z \in D, d_R(z, z_{n_k}) < \varepsilon\}$ uzima beskonačno često sve vrijednosti ω sfere Riemanna $\mathcal{P}$ osim najviše dvije.

Napomena 3.1.2. Tetiva $h(s, \varphi)$ zove se P -tetiva funkcije $f(z)$ ukoliko sadrži barem jedan P -niz.

Ističemo da je V.I.Gavrilov, / 13 /, prvi definisao pojam P -niza i pojam P -tetive za meromorfne na jediničnom disku D funkcije.

Koristeći teoremu 3.1.1 možemo dokazati sljedeća tvrđenja:

Teorema 3.1.2. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in \mathcal{M}^B$, $n=1,2,\dots$,
- 2) $f(z) \in M(D)$,
- 3) $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \| \rho(f_n(z)) - \rho(f(z)) \|_B < \infty$.

Tada je $f(z) \in \mathcal{M}^B$ i za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B \setminus E$, $\text{mes } E = 0$, postoji skup B_z , $B_z \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\text{mes } B_z = \bar{\alpha}$, takav da je za svako $\varphi \in B_z$, $f_n(z, \varphi) = \omega_n(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$.

Teorema 3.1.3. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in M(D)$, $n=1,2,\dots$,
- 2) $f(z) \in \mathcal{M}^B$,
- 3) $f_n(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\| \rho(f_n(z)) \|_B \rightarrow \| \rho(f(z)) \|_B$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da za svaku tačku $z=e^{i\theta} \in B \setminus E$, $\mu(E)=0$, postoji skup B_z , $B_z \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\mu(B_z)=\bar{\mu}$, takav da je za svaku tačku $\varphi \in B_z$, $f_{n_k}(z, \varphi) = \omega_{n_k}(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{n_k}(z) = \omega(z)$.

Teoreme 3.1.2 i 3.1.3 dokazuju se slično kao teoreme 2.5.3 i 2.5.4.

Posebno skrećemo pažnju da se u dokazima teorema 3.1.2 i 3.1.3 koriste rezultati iz 1.2 lokalizovani u Borelovom smislu.

3. Definicija 3.1.2. Meromorfna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija Π_H^B , $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$, ako je $\|(1-t)H(1-t) [g(f(z))]^2\| < \infty$.

A.N.Ajrapetjan je takođe izučavao granična svojstva funkcija iz klase Π_H^B , $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$. Za te klase on je dobio sljedeći rezultat:

Teorema 3.1.4 (/ 2 /, teorema 2.2.1). Ako je $f(z) \in \Pi_H^B$, onda je:

1) na skupu B postoji skup E , $C_H(E)=0$, takav da je za svaku tačku $z=e^{i\theta} \in B \setminus E$ funkcija $L_f(z, \varphi)$ konačna za skoro svako φ , $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

2) za svako θ , $z=e^{i\theta} \in B \setminus E$, φ_1 i $\varphi_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ za koje je $L_f(z, \varphi_1) < \infty$ i $L_f(z, \varphi_2) < \infty$ postoje tetivne granične vrijednosti $f(z, \varphi_1)$, $f(z, \varphi_2)$ i $f(z, \varphi_1) = f(z, \varphi_2)$,

3) za svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $z=e^{i\theta} \in B \setminus E$ za koje je $L_f(z, \varphi) = \infty$ tetiva $L(z, \varphi)$ je P -tetiva funkcije $f(z)$.

Ako je $H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, $0 \leq \alpha < 1$, klase funkcija Π_H^B

označavaćemo sa T_α^B .

Nije teško vidjeti da za klase funkcija T_α^B , $0 \leq \alpha < 1$, važe sljedeći rezultati koji predstavljaju poboljšanje teorema 3.1.2 i 3.1.3 za te klase funkcija :

Teorema 3.1.5. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_\mu(z) \in T_\alpha^B$, $0 \leq \alpha < 1$, $\mu = 1, 2, \dots$,
- 2) $f_\mu(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z) \in M(D)$,
- 4) $\sum_{\mu=1}^{\infty} \|(1-z)^{\alpha} [g(f_\mu(z)) - g(f(z))]^2\|_B < \infty$.

Tada je $f(z) \in T_\alpha^B$ i za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B|E$, $C_\alpha(E) = 0$, postoji skup B_z , $B_z \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\text{mes } B_z = \bar{u}$, takav da je za svako $\varphi \in B_z$, $f_\mu(z, \varphi) = \omega_\mu(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \omega_\mu(z) = \omega(z)$.

Teorema 3.1.6. Neka su ispunjeni uslovi:

- 1) $f_\mu(z) \in M(D)$, $\mu = 1, 2, \dots$,
- 2) $f(z) \in T_\alpha^B$, $0 \leq \alpha < 1$,
- 3) $f_\mu(z) \xrightarrow{P} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$,
- 4) $\|(1-z)^{\alpha} [g(f_\mu(z))]^2\|_B \rightarrow \|(1-z)^{\alpha} [g(f(z))]^2\|_B$ kada $\mu \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{\mu_k}(z)\}$ niza $\{f_\mu(z)\}$ takav da za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B|E$, $C_\alpha(E) = 0$, postoji skup B_z , $B_z \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\text{mes } B_z = \bar{u}$, takav da je za svaku tačku $\varphi \in B_z$, $f_{\mu_k}(z, \varphi) = \omega(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{\mu_k}(z) = \omega(z)$.

4. Ako u teoremama 3.1.2, 3.1.3, 3.1.5 i 3.1.6 pretpostavimo da su funkcije $f(z)$ i $f_\mu(z)$, $\mu = 1, 2, \dots$, normalne u smislu Lahta i Virtanena, tada bi umjesto $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \omega_\mu(z) = \omega(z)$, odnosno $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{\mu_k}(z) = \omega(z)$, važilo da je $\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, odnosno $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\mu_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Znači, umjesto konvergencije tetivnih graničnih vrijednosti imali bi konvergenciju ugaonih

graničnih vrijednosti .

U / 46 / je dokazano , teorema 1 za $j = 2$, da funkcija $f(z) \in \mathcal{T}_\alpha^B$, $\alpha = 0$, u svakoj tački $z = e^{i\theta} \in B \setminus E$, $C_0(E) = 0$, ima ugaone granične vrijednosti . Koristeći se time nije teško vidjeti da u teoremama 3.1.5 i 3.1.6 za $\alpha = 0$ umjesto konvergencija tetivnih graničnih vrijednosti imamo konvergenciju ugao-
nih graničnih vrijednosti .

Isti takav rezultat bi se dobio za klase meromorfnih na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ za koje je

$$\| (1-z)^{\alpha} [g(f(z))]^4 \|_B < \infty , \quad 0 \leq \alpha < 1 .$$

3.2. Konvergencija nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama
analitičkih funkcija $\mathcal{T}^{*B}$ i $\mathcal{T}_\alpha^{*B}$

1. Definicija 3.2.1. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija $\mathcal{T}^{*B}$ ako je $\|f'(z)\| < \infty$.

Za klase funkcija $\mathcal{T}^{*B}$ A.N.Ajrapetjan je dokazao sljedeći rezultat :

Teorema 3.2.1 (/ 2 / , teorema 3.2.2) . Ako je $f(z) \in \mathcal{T}^{*B}$, onda :

1) za svako fiksirano $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, funkcija $f_f(z, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta θ , $z = e^{i\theta} \in B$,

2) na skupu B postoji skup B_1 , $mes B = mes B_1$, takav da je za svako fiksirano θ , $z = e^{i\theta} \in B_1$, funkcija $f_f(z, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

3) funkcija $f(z)$ na B_1 ima konačne ugaone granične vrije-

dnosti ,

- 4) za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B_1$ i svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ imamo da je $\ell_f(z, \varphi) < +\infty$.

Koristeći se tim rezultatom možemo dokazati sljedeća tvrđenja :

Teorema 3.2.2. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_\mu(z) \in \mathcal{T}^{*B}$, $\mu = 1, 2, \dots$,
- 2) $f_\mu(z) \xrightarrow{\mathcal{C}} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z)$ je analitička na jediničnom disku D funkcija,
- 4) $\sum_{\mu=1}^{\infty} \| |f'_\mu(z)| - |f'(z)| \|_B < \infty$.

Tada je $f(z) \in \mathcal{T}^{*B}$ i za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B|_E$, $\text{mes } E = 0$, je $\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Teorema 3.2.3. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_\mu(z)$, $\mu = 1, 2, \dots$, su analitičke na jediničnom disku D funkcije,
- 2) $f(z) \in \mathcal{T}^{*B}$,
- 3) $f_\mu(z) \xrightarrow{\mathcal{C}} f(z)$ kada $\mu \rightarrow \infty$,
- 4) $\| |f'_\mu(z)| \|_B \rightarrow \| |f'(z)| \|_B$ kada $\mu \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{\mu_k}(z)\}$ niza $\{f_\mu(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\mu_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B|_E$, $\text{mes } E = 0$.

2. Definicij 3.2.2. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija $\mathcal{T}_H^{*B}$, $H(z) \in \tilde{\mathcal{C}}_H \cup \{ \frac{1}{z} \}$, ako je $\| (1-|z|) H(1-|z|) |f'(z)|^2 \|_B < +\infty$.

Iz definicija 3.2.1 i 3.2.2 slijedi da je $\mathcal{T}_H^{*B} \subset \mathcal{T}^{*B}$ za svako $H(z) \in \tilde{\mathcal{C}}_H \cup \{ \frac{1}{z} \}$.

Teorema 3.2.4 (/ 2 / , teorema 2.2.2). Ako je $f(z) \in \mathcal{T}_H^{*B}$, onda funkcija $f(z)$ ima konačne ugaone granične

vrijednosti $f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z=e^{i\theta} \in B|_E$, $C_H(E)=0$,
a odgovarajući integrali $\ell_f(z, \varphi)$ su konačni za svako
 $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Slično kao u prethodnom paragrafu, ako je $H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$,
 $0 \leq \alpha < 1$, klase funkcija T_H^{*B} označavaćemo sa T_α^{*B} .

Za klase funkcija T_α^{*B} , $0 \leq \alpha < 1$, važe sljedeći
rezultati :

Teorema 3.2.5. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in T_\alpha^{*B}$, $0 \leq \alpha < 1$, $n=1, 2, \dots$,
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z)$ je analitička na jediničnom disku D funkcija,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|(1-z)^{\alpha} [f'_n(z) - f'(z)]^2\|_B < +\infty$.

Tada je $f(z) \in T_\alpha^{*B}$ i za svaku tačku $z=e^{i\theta} \in B|_E$, $C(E)=0$, je
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Teorema 3.2.6. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, su analitičke na jediničnom
disku D funkcije,
- 2) $f(z) \in T_\alpha^{*B}$, $0 \leq \alpha < 1$,
- 3) $f_n(z) \xrightarrow{C} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\|(1-z)^{\alpha} \|f'_n(z)\|^2\|_B \rightarrow \|(1-z)^{\alpha} \|f'(z)\|^2\|_B$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je
 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z=e^{i\theta} \in B|_E$, $C(E)=0$.

3.3. Hiperbolička varijacija tetiva u okolini tačaka Fatou

1. Definicija 3.3.1. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svaku tačku $z \in D$, pripada klasi funkcija $\mathcal{T}^L_B$ ako je $\|\phi^L(f(z))\|_B < \infty$.

Definicija 3.3.2. Analitička na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $|f(z)| < 1$ za svaku tačku $z \in D$, pripada klasi funkcija $\mathcal{T}^L_H$, $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$, ako je $\|(1-|z|)H(1-|z|)[\phi^L(f(z))]^2\| < \infty$.

Iz definicija 3.3.1 i 3.3.2 slijedi da je $\mathcal{T}^L_H \subset \mathcal{T}^L_B$ za svako $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$.

Teorema 3.3.1. Ako je $f(z) \in \mathcal{T}^L_B$, onda je :

1) za svako fiksirano $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, funkcija $\Lambda_f(z, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta θ , $z = e^{i\theta} \in B$,

2) na skupu B postoji skup B_1 , $\text{mes } B = \text{mes } B_1$, takav da je za svaku fiksiranu vrijednost θ , $z = e^{i\theta} \in B_1$, funkcija $\Lambda_f(z, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta φ , $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

3) funkcija $f(z)$ na skupu B_1 ima konačne ugaone granične vrijednosti,

4) funkcija $\Lambda_f(z, \varphi)$ je konačna za svako $z = e^{i\theta} \in B_1$ i svako $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Teorema 3.3.2. Ako je $f(z) \in \mathcal{T}^L_H$, $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$, tada na skupu B postoji skup E , $C_H(E) = 0$, takav da za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B \setminus E$ postoje ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ funkcije $f(z)$ a odgovarajući integrali $\Lambda_f(z, \varphi)$

su konačni za svako $\varphi \in (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$.

Teorema 3.3.1 je posljedica teoreme 3.1.2 iz / 2 / gdje je $u(z) = g^L(f(z))$, leme 2.3.1 i 2.3.3 i teoreme Lindelofa (/ 24 / , str. 36).

Teorema 3.3.2 je posljedica teoreme 2.1.2 iz / 2 / gdje je $u(z) = g^L(f(z))$, lema 2.3.1 i 2.3.3 i teoreme Lindelofa (/ 24 / , str. 36).

2. Iz teorema 3.3.1 i 3.3.2 direktno slijedi sljedeći rezultat :

Posljedica 3.3.1. Neka je $f(z) \in \mathcal{T}^{LB}$ i neka je $E_1 \subset B$ skup tačaka $z = e^{i\theta}$ za koje postoje ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ za koje je $|f(e^{i\theta})| = 1$. Tada je $\text{mes } E_1 = 0$.

Posljedica 3.3.2. Neka je $f(z) \in \mathcal{T}_H^{LB}$, $(H) \in \tilde{\mathcal{C}}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$, i neka je $E_1 \subset B$ skup tačaka $z = e^{i\theta}$ za koje postoje ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta})$ za koje je $|f(e^{i\theta})| = 1$. Tada je $C_H(E_1) = 0$.

Primjedba 3.3.1. Iz posljedica 3.3.1 i 3.3.2 slijedi da klase funkcija $\mathcal{T}^{LB}$ i $\mathcal{T}_H^{LB}$, $(H) \in \tilde{\mathcal{C}}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$, imaju prazan presjek sa Seidelovom klasom analitičkih na jediničnom disku D funkcija.

3.4. Konvergencija nizova $\{f_n(e^{i\theta})\}$ u klasama analitičkih funkcija $\mathcal{T}^{LB}$ i $\mathcal{T}_\alpha^{LB}$

1. Koristeći teoremu 3.3.1 za klasu analitičkih na jediničnom

disku D funkcija $\mathcal{T}^{LB}$ možemo dokazati sljedeće teoreme:

Teorema 3.4.1. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in \mathcal{T}^{LB}$, $n=1,2,\dots$,
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z)$ je analitička na jediničnom disku D funkcija,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|g^n(f_n(z)) - g^n(f(z))\| < +\infty$.

Tada je $f(z) \in \mathcal{T}^{LB}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svako $s=e^{i\theta} \in B/E$, $\text{mes } E = 0$.

Teorema 3.4.2. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, su analitičke na jediničnom disku D funkcije,
- 2) $f(z) \in \mathcal{T}^{LB}$,
- 3) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\|g^n(f_n(z))\| \rightarrow \|g^n(f(z))\|$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $s=e^{i\theta} \in B/E$, $\text{mes } E = 0$.

2. Ako je $H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, $0 \leq \alpha < 1$, klase funkcija $\mathcal{T}_H^{LB}$ označavaćemo sa $\mathcal{T}_\alpha^{LB}$.

Za klase funkcija $\mathcal{T}_\alpha^{LB}$, $0 \leq \alpha < 1$, važe sljedeći rezultati :

Teorema 3.4.3. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in \mathcal{T}_\alpha^{LB}$, $0 \leq \alpha < 1$, $n=1,2,\dots$,
- 2) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 3) $f(z)$ je analitička na disku D funkcija,

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \|(1-|z|)^{\alpha} [g^n(f_n(z)) - g^n(f(z))]^2\|_B < \infty.$$

Tada je $f(z) \in \Pi_{\alpha}^{LB}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B \setminus E$, $C_{\alpha}(E) = 0$.

Teorema 3.4.4. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $f_n(z)$, $n=1, 2, \dots$, su analitičke na jediničnom disku D funkcije,

2) $f(z) \in \Pi_{\alpha}^{LB}$, $0 \leq \alpha < 1$,

3) $f_n(z) \xrightarrow{D} f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$,

4) $\|(1-|z|)^{\alpha} [g^n(f_n(z))]^2\| \rightarrow \|(1-|z|)^{\alpha} [g^n(f(z))]^2\|$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B \setminus E$, $C_{\alpha}(E) = 0$.

3.5. Konvergencija nizova $\{f_n(z, \varphi)\}$ u klasama

neprekidno diferencijabilnih funkcija

$$\Pi^B \quad \text{ i } \quad \Pi_{\alpha}^B$$

U ovom dijelu treće glave izučavaju se konvergenције nizova tetivnih graničnih vrijednosti za neke klase neprekidno diferencijabilnih na jediničnom disku D funkcija čija je granična svojstva izučavao A.N. Ajrapetjan, / 2 /.

1. Definicij 3.5.1. Neprekidno diferencijabilna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija Π^B ako je $\| |grad f(z)| \| < \infty$.

Teorema 3.5.1 (/ 2 /, teorema 3.1.1). Ako je $f(z) \in \Pi^B$, tada je :

1) za svako fiksirano $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, funkcija $L(\varphi, \varphi)$

integrabilna funkcija argumenta θ , $z = e^{i\theta} \in B$,

2) na skupu B postoji skup B_1 , $mes B = mes B_1$, takav da je za svako θ , $z = e^{i\theta} \in B_1$, funkcija $L(\theta, \varphi)$ integrabilna funkcija argumenta φ , $\varphi \in (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$,

3) za svako θ , $z = e^{i\theta} \in B_1$, i svako $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$ za koje je $L(\theta, \varphi_1) < \infty$ i $L(\theta, \varphi_2) < \infty$, postoje tetivne granične vrijednosti $f(z, \varphi_1)$, $f(z, \varphi_2)$ i $f(z, \varphi_1) = f(z, \varphi_2)$.

Koristeći se naprijed formulisanom teoremom za klasu funkcija $\mathcal{T}^B$ možemo dokazati sljedeće rezultate:

Teorema 3.5.2. Neka su ispunjeni uslovi:

- 1) $f_n(z) \in \mathcal{T}^B$, $n = 1, 2, \dots$,
- 2) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D ,
- 3) $f(z)$ je neprekidno diferencijabilna na disku D funkcija,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \| |grad f_n(z)| - |grad f(z)| \|_B < \infty$.

Tada je $f(z) \in \mathcal{T}^B$ i za svaku tačku $z = e^{i\theta} \in B \setminus E$, $mes E = 0$, postoji skup B_φ , $B_\varphi \subset (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$, $mes B_\varphi = \bar{u}$, takav da je za svako $\varphi \in B_\varphi$, $f_n(z, \varphi) = \omega_n(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z)$.

Teorema 3.5.3. Neka su ispunjeni uslovi:

- 1) $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, su neprekidno diferencijabilne na disku D funkcije,
- 2) $f(z) \in \mathcal{T}^B$,
- 3) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D , $|grad f_n(z)| \rightarrow |grad f(z)|$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\| |grad f_n(z)| \| \rightarrow \| |grad f(z)| \|$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da za svaku

tačku $z = e^{i\varphi} \in B/E$, $\text{mes } E = 0$, postoji skup B_S , $B_S \subset (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$, $\text{mes } B_S = \bar{u}$, takav da je za svaku tačku $\varphi \in B_S$, $f_{n_k}(z, \varphi) = \omega_{n_k}(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{n_k}(z) = \omega(z)$.

2. Definicija 3.5.2. Neprekidno diferencijabilna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$ pripada klasi funkcija $\Pi_{\#}^B$, $\#(t) \in \tilde{C}_{\#} \cup \{\frac{1}{t}\}$, ako je $\|(1-|z|)\#(1-|z|)|\text{grad } f(z)|^2\|_B < \infty$.

Teorema 3.5.4. (/ 2 / , teorema 2.1.1.). Ako je $f(z) \in \Pi_{\#}^B$, onda :

1) na skupu B postoji skup E , $C_{\#}(E) = 0$, takav da je za svaku tačku $z = e^{i\varphi} \in B/E$ funkcija $L(z, \varphi)$ konačna za skoro svako $\varphi \in (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$,

2) za svaku tačku $z = e^{i\varphi} \in B/E$ i svako $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$, za koje je $L(z, \varphi_1) < \infty$ i $L(z, \varphi_2) < \infty$ postoje tetivne granične vrijednosti $f(z, \varphi_1)$ i $f(z, \varphi_2)$ funkcije $f(z)$ i $f(z, \varphi_1) = f(z, \varphi_2)$.

Ako je $\#(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, $0 \leq \alpha < 1$, klase funkcija Π_{α}^B označavaćemo sa Π_{α}^B .

Za klase funkcija Π_{α}^B , $0 \leq \alpha < 1$, važe sljedeći rezultati :

Teorema 3.5.5. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z) \in \Pi_{\alpha}^B$, $0 \leq \alpha < 1$, $n = 1, 2, \dots$,
- 2) $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D ,
- 3) $f(z)$ je neprekidno diferencijabilna na disku D funkcija,
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \|(1-|z|)^{\alpha} [|\text{grad } f_n(z)| - |\text{grad } f(z)|]^2\|_B < \infty$.

Tada je $f(z) \in \Pi_{\alpha}^B$ i za svaku tačku $z = e^{i\varphi} \in B/E$, $\mathcal{Q}(E) = 0$, postoji skup B_S , $B_S \subset (-\frac{\bar{u}}{2}, \frac{\bar{u}}{2})$, $\text{mes } B_S = \bar{u}$, takav da je za svako $\varphi \in B_S$, $f_n(z, \varphi) = \omega_n(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(z) = \omega(z) .$$

Teorema 3.5.6. Neka su ispunjeni uslovi :

- 1) $f_n(z)$, $n=1,2,\dots$, su neprekidno diferencijabilne na jediničnom disku D funkcije ,
- 2) $f(z) \in T_\alpha^B$, $0 \leq \alpha < 1$,
- 3) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ kada $n \rightarrow \infty$ na svakom kompaktnom skupu diska D , $|\arg f_n(z)| \rightarrow |\arg f(z)|$ kada $n \rightarrow \infty$,
- 4) $\|(1-z)^{\alpha} |\arg f_n(z)|^2\| \rightarrow \|(1-z)^{\alpha} |\arg f(z)|^2\|$ kada $n \rightarrow \infty$.

Tada postoji podniz $\{f_{n_k}(z)\}$ niza $\{f_n(z)\}$ takav da za svaku tačku $z=e^{i\theta} \in B \setminus E$, $C_\alpha(E)=0$, postoji skup B_z , $B_z \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\arg B_z = \bar{u}$, takav da je za svaku tačku $\varphi \in B_z$, $f_{n_k}(z, \varphi) = \omega_k(z)$, $f(z, \varphi) = \omega(z)$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{n_k}(z) = \omega(z)$.

3.6. O jednoj teoremi jedinstvenosti u hiperboličkoj metrici

1. Klasična teorema jedinstvenosti za meromorfne funkcije Luzina i Privalova , u Teoriji graničnih skupova , govori da proizvoljna meromorfna na jediničnom disku D funkcija $f(z)$, $f(z) \neq \cos$, može imati ugaone granične vrijednosti $f(e^{i\theta}) = \omega$, $\omega \in \mathcal{D}$, samo na skupu E , $E \subset \Gamma$, $\arg E = 0$,

A.Beurlin , / 6 / , a kasnije V.I.Gavrilov i V.S.Zaharjan , / 10 / , 15 / , dokazuju teoreme koje predstavljaju poboljšanje teoreme jedinstvenosti Luzina i Privalova .Naime, ako je ω B_H -normalna vrijednost funkcije $f(z)$, A.Beurling , odnosno V.I.Gavrilov i V.S.Zaharjan , dokazuju da u tom slučaju skup E ima $C_\#(E)=0$, $H(t) \in \tilde{C}_\# \cup \{ \frac{1}{t} \}$.

Napomena 3.6.1. Tačka $\omega \in \mathcal{D}$ je B_H -normalna vrijednost meromorfne na jediničnom disku D funkcije $f(z)$ ako je

$$u_H(\omega) = \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta_\rho(\omega)} (1-|z|) H(1-|z|) [\rho(f(z))]^2 dx dy}{\rho^2 \bar{u}} < \infty, \quad z = x + iy.$$

Skup $\Delta_\rho(\omega)$ je oblast diska D koja predstavlja inverznu sliku kruga $K_\rho(\omega) = \{w : w \in \mathcal{D}, d_f(\omega, w) < \rho\}$ pri preslikavanju $f(z)$ a $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$. Za $H(t) = \frac{1}{t}$ dobija se normalnost u Beurlingovom smislu.

Cilj ovog paragrafa je da dalje razvije klasifikaciju tačaka $\omega \in \mathcal{D}$, $\omega = f(e^{i\theta})$, koristeći ideje Beurlinga, Tsuija, Gavrilova i Zaharjana.

2. Neka je $f(z)$ analitička na jediničnom disku D funkcija, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, i $K_\rho^h(\omega) = \{w : d_h(\omega, w) < \rho, |w| < 1\}$. Sa $\Delta_\rho^h(\omega)$ označimo oblast diska D koja predstavlja inverznu sliku kruga $K_\rho^h(\omega)$ pri preslikavanju $f(z)$. Neka je dalje

$$A_H^h(\omega, \rho) = \iint_{\Delta_\rho^h(\omega)} (1-|z|) H(1-|z|) [\rho^h(f(z))]^2 dx dy, \quad z = x + iy,$$

i

$$u_H^h(\omega) = \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{A_H^h(\omega, \rho)}{\rho^2}$$

gdje je $H(t) \in \tilde{C}_H \cup \{\frac{1}{t}\}$.

Definicija 3.6.1. Za tačku $\omega \in \mathcal{D}$ reći ćemo da je hiperbolički B_H -normalna vrijednost funkcije $f(z)$ ako je $u_H^h(\omega) < \infty$.

Teorema 3.6.1. Ako je $f(z)$ analitička na jediničnom disku D funkcija, $f(z) \neq \text{const}$, $|f(z)| < 1$ za svako $z \in D$, i ako je ω , $|\omega| < 1$, hiperbolički B_H -normalna vrijednost funkcije $f(z)$, tada tačke $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ za koje je $f(e^{i\theta}) = \omega$ obrazuju skup E , $C_H(E) = 0$.

Dokaz teoreme 3.6.1. Ne ograničavajući opštost možemo pretpostaviti da je $\omega = 0$. Kako je $\omega = 0$ hiperbolički B_H -normalna vrijednost funkcije $f(z)$ tada postoji konstanta $C < \infty$ takva da je

$$\iint_{\Delta_{\mathcal{D}}^L(0)} (1-|z|) H(1-|z|) [\varrho^L(f(z))]^2 dx dy \leq C \varrho^2, \quad z = x+iy, \quad (3.6.1)$$

za dovoljno malo ϱ .

Pretpostavimo da za skup E iz teoreme 3.6.1 važi $C_H(E) > 0$. U tom slučaju postoji funkcija

$$u_H(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \mu \frac{1}{|e^{it} - e^{i\theta}|} d\mu(t)$$

gdje je $\mu \in \mathcal{M}$.

Za funkciju $u_H(r, \theta)$ važi sljedeća nejednakost:

$$\| [(1-|z|) H(1-|z|)]^{-1} \left[\frac{\partial u_H(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 \| < C_1 < \infty \quad (3.6.2)$$

gdje je $z = re^{i\theta}$ (pogledati / 10 /).

Neka je, dalje,

$$I(\varrho) = \iint_{\Delta_{\mathcal{D}}^L(0)} \varrho^L(f(re^{i\theta})) \left[\frac{\partial u_H(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 r dr d\theta \quad (3.6.3)$$

Iz (3.6.3), primjenom integralne nejednačine Cauchy-Bunjakovskog, dobijamo:

$$I(\varrho)^2 \leq \iint_{\Delta_{\varrho}^L(0)} (1-r)H(1-r) [\varrho(f(z))]^2 r dr d\theta \cdot \iint_{\Delta_{\varrho}^L(0)} [(1-r)H(1-r)]^{-1} \left[\frac{\partial u_H(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 r dr d\theta.$$

Iz gornje nejednačine i (3.6.1) slijedi

$$[I(\varrho)]^2 \leq C_1 \varrho^2 \iint_{\Delta_{\varrho}^L(0)} [(1-r)H(1-r)]^{-1} \left[\frac{\partial u_H(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 r dr d\theta.$$

Saglasno nejednačini (3.6.2) imamo da je :

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \iint_{\Delta_{\varrho}^L(0)} [(1-r)H(1-r)]^{-1} \left[\frac{\partial u_H(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 r dr d\theta = 0,$$

te otuda dobijamo da je

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{I(\varrho)}{\varrho} = 0. \quad (3.6.4)$$

Neka je dalje:

$$\sigma_{\varrho}(t) = \iint_{\Delta_{\varrho}^L(0)} \varrho^L(f(z)) p(r, \theta, t) dr d\theta,$$

$$\text{gdje je } p(r, \theta, t) = \frac{\partial \varrho^L(ze^{i\theta} - e^{it})}{\partial \theta}, \quad t \in [0, 2\bar{u}].$$

Pokazuje se da je

$$I(\varrho) = \int_0^{2\bar{u}} \sigma_{\varrho}(t) d\mu(t).$$

Ne narušavajući opštost, pretpostavimo da je $t=0$, odnosno $\zeta=1 \in \mathbb{E}$. Otuda, $f(z)$ ravnomjerno konvergira ka nuli kada $z \rightarrow 1$ i $z \in \Delta(1, \varrho, \frac{\bar{u}}{4})$; $\Delta(1, \varrho, \frac{\bar{u}}{4})$ je ugao u jediničnom disku D kojeg obrazuju prave l_1 , $l_1 > h(1, \frac{\bar{u}}{4})$,

l_2 , $l_2 > h(1, -\frac{\bar{u}}{4})$, i kružnica $\Gamma_{1-\varrho}^1: |z|=1-\varrho$. Neka je, dalje, $D^*(0, \varrho) = \Delta_{\varrho}^L(0) \cap \Delta(1, \varrho, \frac{\bar{u}}{4})$. Za svako ϱ , $\varrho > 0$,

skup $D^*(0, \varrho)$ sadrži presjek ugla $\Delta(1, \varrho, \frac{\pi}{4})$ sa nekom okolinom tačke $\zeta = 1 \in E$.

Pokazuje se da je $\rho(r, \theta, 0)$ nenegativna funkcija na skupu $\{z: |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$ (pogledati / 10 /).

Koristeći naprijed kazano i integrlnu nejednačinu Cauchy-Bunjakovskog dobijamo

$$\sigma_{\varrho}(0) \geq \iint_{D^*(0, \varrho)} \varrho^h(f(re^{i\theta})) \rho(r, \theta, 0) dr d\theta - \\ \left[\iint_{\Delta_{\varrho}^h(0)} (1-r)H(1-r) (\varrho(f(re^{i\theta})))^2 r dr d\theta \right]^{1/2} \left[\iint_{\Delta_{\varrho}^h(0)} [(1-r)H(1-r)]^{-1} \left[\frac{\partial u_h(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 r dr d\theta \right]^{1/2}$$

Iz gornje nejednačine i (3.6.1) i (3.6.2) slijedi

$$\sigma_{\varrho}(0) \geq \iint_{D^*(0, \varrho)} \varrho^h(f(re^{i\theta})) \rho(r, \theta, 0) dr d\theta - \varrho \cdot \varepsilon(\varrho),$$

gdje je $\varepsilon(\varrho) > 0$ i $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \varepsilon(\varrho) = 0$.

Dalji dio dokaza teoreme 3.6.1 isti je kao dokaz teoreme Beurlinga u / 24 / str. 92-93. Naime dobija se

$$\sigma_{\varrho}(0) \geq \frac{\varrho}{\sqrt{2}} - \varrho \varepsilon(\varrho) \quad (3.6.5)$$

Kako je tačka $\zeta = 1 \in E$ uzeta proizvoljno, ocjena (3.6.5) bez ograničenja važi za svako $\zeta = e^{i\theta} \in E$ (odnosno t , $t \in [0, 2\pi]$, za koje je $\zeta = e^{it} \in E$).

Koristeći se sa (3.6.5) dobijamo da je

$$I(\varrho) \geq \frac{\varrho}{\sqrt{2}} - \varrho \varepsilon(\varrho)$$

odnosno

$$\frac{I(\varrho)}{\varrho} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(\varrho)$$

što protivrječi (3.6.4) .

Dobijeno protivrječje dokazuje ispravnost teoreme 3.6.1.

Primjedba 3.6. 1. Problemima klasifikacije tačaka ω , $\omega \in \mathcal{R}$, koje predstavljaju ugaone granične vrijednosti funkcije $f(z)$, kao što je rečeno na početku ovoga paragrafa, bavio se V.I.Gavrilov. On u svojoj doktorskoj disertaciji , / 14 / , kaže da su zadaci koji su vezani za rješavanj ovih problema interesantni ali dosta teški . U tom smislu ovaj paragraf završavamo sa napomenom da bi problemi klasifikacije tačaka ω , $\omega \in \mathcal{R}$, koje predstavljaju ugaone (tetivne) granične vrijednosti funkcije $f(z)$ mogli biti interesantni za buduća istraživanja u Teoriji graničnih skupova meromorfnih funkcija .

L I T E R A T U R A

Abikoff W.

/ 1 / On the boundary behavior of functions in the spherical Dirichlet class, Illinois J. Math. , v.25, No 3, 1981 , 441-445 .

Айрапетян А.Н.

/ 2 / Некоторые вопросы граничного поведения мероморфных функций, диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук , Ереван , 1976 .

/ 3 / Об исключительных множествах подклассов мероморфных функций, Изв. АН АрмССР , серия математика , т.II, No 1 , 1976 , 25-33 .

/ 4 / О локальных граничных свойствах мероморфных функций, суммируемых по площади со сферической производной , Изв. АН АрмССР , серия математика , т.I2, No 3 , 1976 , 243-240 .

Бари Н.К.

/ 5 / Тригонометрические ряды , " Мир " , Москва, 1961 .

Beurling A.

/ 6 / Ensembles exceptionnelles, Acta Math. , v.72 , 1940 , 1-13 .

Brelot M. (Брело М.)

/ 7 / Основы классической теории потенциала , " Мир " , Москва , 1964 .

Briot C., Bouquet C.

/ 8 / Theorie des fonctions doublement periodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques, Paris , 1859 .

Гаврилов В.И.

/ 9 / Об одном характеристическом свойстве функций ограниченного вида , Вест. Моск. ун-та , No3 , 1974 , 47-49 .

/ 10 / О теоремах Бьёрлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Математ. Сбор., 94:1 , 1974 , 3-15 .

/ 11 / Об одной теореме Цудзи , Сибирский математ. журнал, т.14 , No5 , 1973 , 951-956 .

/ 12 / Нормальные функции, обладающие почти всюду угловыми граничными значениями , Математ. заметки, т.15 , No6 , 1974, 839-846 .

/ 13 / О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными , Математ. Сбор. , т.67 , No3 , 1965 , 403-427 .

/ 14 / Нормальные семейства и граничные свойства мероморфных функций, диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук , Москва , 1978 .

Гаврилов В.И. , Захарян В.С.

/ 15 / Об исключительных множествах подклассов мероморфных функций ограниченного вида , Изв. АН АрмССР , т.11 , No2 , 1976 , 113-123 .

Duren P.L.

/ 16 / Theories of H^p spaces , Academic Press , Now York , London , 1970 .

Zygmund A. (Зигмунд А.)

/17/ Тригонометрические ряды, " Мир ", Москва, 1965

Канатников А.Н.

/18/ Об одной теореме Коллингвуда, Вестн. моск. ун-та
No 4 , 1976 , 3-9

Carleson L. (Карлесон Л.)

/19/ Избранные проблемы теории исключительных множеств ,
" Мир " , Москва , 1971 ,

/20/ On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets , Thesis, Univ. of Uppsala , 1950

Casorati F.

/21/ Teorica delle funzioni di variabile complesse ,
Pavia , 1868

Collingwood E.F.

/22/ Tsuji functions with Julia points , Сборник " Современ. проблемы теории аналит. функций " , Москва , 1966 ,
177-179

/23/ A boundary theorem for Tsuji functions , Nagoya
Math. J. , v.29. 1967 , 197-200

Collingwood E.F., Lohwater A.J. (Коллингвуд Э., Ловатер А.)

/24/ Теория предельных множеств , " Мир " , Москва ,
1971

Ландкоф Н.С.

/25/ Основы современной теории потенциала , " Мир " ,
Москва , 1971

Lahto O., Virtanen K.J.

/26/ Boundary behavior and normal meromorphic functions,
Acta Math. J. , v.97, 1957 , 47-65

Ostrowski A.

/27/ Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige
Fragen der komplexen Funktionentheorie , Acta Litt. Sci. Szeged,
1922/23 , 1 , 80-87

Painleve P.

/28/ Lecons sur la theorie analytique des equations
differentielles professees a Stocholm 1895 , Herman, Paris ,
1897

Привалов И.И.

/29/ Граничные свойства аналитических функций, " ГИТТЛ "
Москва, Ленинград , 1950

Rudin W.

/30/ The radial variation of analytic functions , Duke
Math. J. , v.22, 1955 , 235-242

/31/ Real and Complex Analysis , Book Company, Now York,
1974

Сохоцки Ю.В.

/32/ Об определённых интегралах и функциях, употребляемых
при разложениях в ряды, докторская диссертация, С.Петербург, 1873

Tsuji M.

/33/ Beurlings Theorem on exceptional sets , Tohoku Math. J. , (2) , 2 , 1950 , 113-125 .

/34/ A theorem on the boundary behavior of a meromorphic function in $|z| < 1$, Comment. Math. Univ. St. Pauli , v.8 , No 1 , 1960 , 53-55 .

/35/ Potential theory in modern function theory , Tokyo , 1959 .

Tse K.F.

/36/ Some results on value distribution of meromorphic functions in the unit disk , Nagoya Math. J. , v.34 , 1969 , 105-119 .

Тумаркин Г.Ц.

/37/ О последовательностях мероморфных функций с равномерно ограниченными площадями Римановых поверхностей над сферой, Доклады АН СССР , т.106 , No 2 , 1956 , 199-202 .

/38/ Локальные условия сходимости граничных значений последовательностей аналитических функций, " Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного " Москва , ФИЗМАТГИЗ , 1961 , 249-261 .

/39/ Условия сходимости граничных значений аналитических функций и приближение на спрямляемых кривых , " Современные проблемы теории аналитических функций " , " Наука " , Москва , 1966 .

Fatou P.

/40/ Series trigonometriques et series de Taylor ,
Acta Math. , 30 , 1906 , 335-400 .

Hayman W.K.

/41/ Regular Tsuji functions with infinitaly many
Julia points , Nagoya Math. J. , 29 , 1976 , 185-187 .

/42/ The boundary behaviour of Tsuji functions , Mich.
Math. J. , 15 , No 1 , 1968 , 1-26 .

Хинчин А.Я.

/43/ О последовательностях аналитических функций , Матем.
Сборник , 31 , 1924 , 147-151 .

Yamashita S.

/44/ Hiperbolic Hardy class H^1 , Math. Skan. , v.45 ,
No 2 , 1979 , 261-266 .

/45/ Criteria for functions to be of Hardy class H^p ,
Procdd. Amer. Math. Society. , v.75, No 1 , 1979 .

/46/ Function-theoretic metrics and boundary behaviour
of functions meromorphic or holomorphic the unit disk , Nagoya
Math. J. , v. 45 , 1972 , 105-117 .

Warschawski S.

/47/ Über einige Konvergenzsätze aus der Theorie der
konformen Abbildunen , Gött. Nachr. , 1930 , 344-369 .

Weierstrass K.

/48/ Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen ,
Abh. Königl. Akad. Wiss. , 1876 .

Pavićević Z.

/49/ O uglovnim graničnim vrednostima nekih klasa funkcija jedne kompleksne promenljive , mag. rad , Beograd , 1981 .

/50/ Замечения к теореме Фатоу об угловых граничных значениях , Математички весник , к.5 , св.3 , 1981, 289-294 .

/51/ A uniqueness theorem for bounded holomorphic functions, Abstrakt Amer.Math.Soci. , v.2, No6 , 1981, p.542.

/52/ Сходимость последовательностей в подклассах функций ограниченного вида , Тезисы конференции молодых ученых МГУ , Москва , 1982 .