PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET UNIVERZITETA
U BEOGRADU

Mr. DUŠAN J. MIKIČIĆ

Parametri upravljanja i funkcionalni prostori u mehanici

DISERTACIJA

ZA STICANJE ZVANJA DOKTORA MEHANIČKIH NAUKA

BEOGRAD, DECEMBAR 1975

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

U ovoj tezi prikazani su neki rezultati,do kojih sam došao,radeći na problemima teorije automatskog upravljanja,u okviru studijske grupe za upravljanje kretanjem pri Matematičkom institutu u Beogradu.Ova grupa je formirana od saradnika Matematičkog instituta početkom 1970 godine, kada je i počela sa naučnoistraživačkim radom.Članovi ove grupe su bili asistenti Prirodnomatematičkog,Mašinskog i Elektrotehničkog fakulteta iz Beograda,a bili su profesionalno vezani za probleme iz teorijske mehanike.

U okviru svog zadatka,uspelo mi je da rešim neke probleme u oblasti teorije optimalnog upravljanja za pojedine klase dinamičkih sistema.Zapravo,u celini gledano u tezi su,pored uvodnog dela i prve i druge glave,koje obuhvataju osnove poznate teorije,prikazani prvi rezultati tek u trećoj glavi.

Prvi rezultat je iz oblasti linearnih kontinualnih nestacionarnih sistema.Ovde je predložena metoda za odredjivanje fundamentalne matrice u obliku beskonačnog reda po stepenima $(t-t_o)^n$,a samim tim i mogućnost direktnog izračunavanja faznog vektora $x(t)$ u okolini početnog stanja $x(t_o)$.Dobijeni teoretski rezultat je ilustrovan jednim primerom.

Drugi rezultat je iz oblasti diskretnih nestacionarnih linearnih sistema,i nadovezuje se na prvi u smislu šire praktične primene za konačno veliki interval vremena (t_o,t_1),a prikazan je u trećoj glavi,pod naslovom "diskretan model linearnog nestacionarnog dinamičkog sistema". Ovde je predložen jedan postupak za rekurentno izračunavanje faznog vektora u diskretnim trenutcima vremena,pri čemu je vremenski interval posmatranja konačan.Ovaj rezultat je ilustrovan detaljno uradjenim primerom na elektronskom računaru,čime je potvrdjena njegova ispravnost.

Treći rezultat je prikazan u petoj glavi,u delu "Optimalnost dinamičkog sistema u smislu najbržeg prelaza". Ovde je formulisana teorema o dovoljnim uslovima optimalnosti,u smislu najbržeg prelaza.Teorema pretstavlja uopštenje,već poznate teoreme definisane od strane sovjetskog naučnika V.I.Zubova.Dobijeni rezultat je ilustrovan jednim primerom,gde se vidi mogućnost,odredjivanja optimalne upravljačke funkcije za jednu klasu nelinearnih dinamičkih sistema.

Inače,cela četvrta glava i većina pete glave pretstavljaju izvode poznate teorije optimalnog upravljanja,koju je razvio sovjetski naučnik N.N.Krasovski zajedno sa svojim saradnicima E.G.Aljbrehtom,A.B.Kuržanskim,J.S.Osipovim,V.E.Tretljakovim i G.S.Šelementevim.Iznošenje ove materije u tezi je potrebno,da bi dobijeni teoretski rezultati našli svoje mesto kao rešenja pojedinih nerešenih problema,iz skupa velikog broja nerešenih problema u oblasti teorije optimalnog upravljanja.

U V O D

Za teoriju upravljanog kretanja se može reći,da pretstavlja deo šire oblasti,teorije upravljanja i komunikacija mašina i živih bića t.k.zv."Kibernetika".Pojam "Kibernetika" u stručnoj literaturi se počeo koristiti od 1947 godine,kada su ga predložili Norbert Viner,Bajglou i Rozenblut,saradnici Masačusetskog tehničkog instituta[8]. U prevodu κυβερνητης znači kormilar-upravljač,a inače se smatra,da su mašine za upravljanje brodom prvi i najrazvijeniji oblici mehanizma povratne sprege.Kibernetika po zamisli svojih autora,treba da bude interdisciplinarna naučna disciplina,i njeno nastajanje,pretstavlja rezultat čovekove težnje,da objedini naučna znanja iz širokog spektra naučnih disciplina,u cilju dobijanja novih sveobuhvatnijih znanja,i radi konstrukcije novih aparata i mašina,koje će zameniti čoveka,u situacijama gde je potrebno brzo reagovati na veliki broj informacija.

Prvi koraci u oblasti automatskog upravljanja,mnogi autori [8],[9] vezuju za pojavu Vatovog regulatora,koji pretstavlja lep praktičan primer mehanizma automaskog upravljanja sa povratnom spregom.Inače prvi značajniji naučni rad teorijskog karaktera [8] ,o mehanizmu povratne sprege,saopštio je Maksvel 1868 godine.Intenzivan razvoj ove naučne discipline i pojava većeg broja naučnih radova,počinje polovinom ovog veka,a naročito zadnjih 20 godina,tako da se danas veliki broj ljudi u svetu bavi ovom problematikom. Danas su tehnološki postupci toliko automatizovani,da u njima čovek služi samo kao kontrola praćenja rada u slučaju nepredvidjenih činioca.Čak i u slučajevima,kada se ne radi o čisto tehničkoj disciplini,teorija i tehnika automatskog upravljanja je našla svoju primenu.Obrada statističkih podataka(statistika,ekonomija,sociologija),zamena pojedinih delova-organa živih bića(medicina).Analiza velikog broja ~~broja~~ ulaznih i izlaznih podataka,problem optimalnosti transporta velikog broja delova,u smislu minimizacije dužine puta ili vremena,i dr.

Imajući u vidu veliku raznovrsnost ove naučne discipline,kojoj je teško naći primer u pogledu opštosti i raznovrsnosti postupaka,za rešavanje konkretnih problema,normalno je da iz toga proističu i velike teškoće naučnih radnika koji na ovome rade.Zato nije ni čudo,da se veliki broj autora,u svojim radovima,ograničava,na rešavanje pojedinih klasa problema,koji se postojećim matematičkim aparatom mogu dovesti do praktično upotrebljivih rešenja.Tako smo danas svedoci,da veliki broj naučnih radova obradjuje problematiku automatskog upravljanja linearnih sistema.Čak i ovako sužen problem nije do kraja rešen u zatvorenoj formi(slučaj nestacionarnih linearnih sistema),tako da se problemi optimalnosti rešavaju od slučaja do slučaja,a konačna rešenja su poznata samo za neke specijalne slučajeve,od kojih su neki prikazani u tezi.Tako je i svrha ove teze,da izmedju ostalog,doprinese boljem sagledavanju i rešavanju linearnih nestacionarnih dinamičkih sistema.

G L A V A I

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA DINAMIČKOG SISTEMA

U opštem slučaju dinamički sistem može biti objekat različite fizičke prirode,kao što je naprimer materijalna tačka,sistem materijalnih tačaka(čiji je poseban slučaj kruto telo),fluidna masa,model živog bića,električno kolo i sl. što zavisi od toga u kojoj se oblasti nalazimo.Da bi se mogla vršiti analiza ponašanja dinamičkog sistema u toku vremena,potrebno je uspostaviti vezu izmedju veličina koje utiču na njegovo ponašanje(sile momenti,masa,moment inercije,napon, jačina struje,...) i kinematičkih karakteristika sistema koje su dovoljne za opis njegovog stanja(položaj,brzina i ubrzanje).U najprostijem slučaju tu vezu je definisao Njutn za kretanje materijalne tačke M,mase m=konst pod dejstvom sile F,koja zavisi od vremena t,položaja $\vec{r}$ i brzine $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$

$$m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}) \tag{1.1}$$

Formiranje diferencijalnih jednačina za složenije dinamičke sisteme je problem koji je rešen u analitičkoj mehanici za mnoge slučajeve na osnovu integralnih i diferencijalnih principa,ili na osnovu zakona o promeni količine kretanja,kinetičkog momenta i kinetičke energije.Tako naprimer,ako se posmatra objekat oblika materijalne tačke promenljive mase m(t) u smislu Meščerskog,onda diferencijalna jednačina kretanja na osnovu [19] ima oblik

$$m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \dot{m}_1(\vec{u}_1-\vec{v}) + \dot{m}_2(\vec{u}_2-\vec{v}) \tag{1.2}$$

gde su $\dot{m}_1(t)$ i $\dot{m}_2(t)$ brzine dinamičke promene mase usled odvajanja čestica od osnovne mase m(t),odnosno od pripajanja respektivno.Tako se osnovna masa m(t) menja po zakonu

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{m}_1(t)dt + \int_{t_0}^{t} \dot{m}_2(t)dt \qquad (1.3)$$

Vektor $\vec{u}_1 - \vec{v} = \vec{V}_{r(1)}$ pretstavlja relativnu brzinu odvajanja čestica od osnovne mase $m(t)$, a vektor $\vec{u}_2 - \vec{v} = \vec{V}_{r(2)}$ relativnu brzinu pripajanja čestica.

Diferencijalnoj jednačini(1.2)napisanoj u vektorskoj formi odgovaraju tri skalarne diferencijalne jednačine, poznate kao opšte jednačine Meščerskog u Dekartovom(Descartes)koordinatama $D_3\{y^1, y^2, y^3\}$, koje na osnovu [7] imaju oblik

$$m(t)\ddot{y}^i = Y^i + \dot{m}_1(t)V^i_{r(1)} + \dot{m}_2(t)V^i_{r(2)} \qquad (1.4)$$
$$(i=1,2,3)$$

gde su Y^i komponente aktivnih spoljašnjih sila u D_3, $V^i_{r(1)} = u^i_1 - \dot{y}^i$, $V^i_{r(2)} = u^i_2 - \dot{y}^i$, u^i_1 je vektor apsolutne brzine otpadanja čestica, a u^i_2 je vektor apsolutne brzine pripajanja čestica osnovnoj masi $m(t)$ koja se kreće brzinom $\vec{v}(t)$.

Ako se jednačine(1.4) transformišu iz Dekartovog sistema koordinata u krivolinijski sistem Rimanovog prostora V_n sa metrikom

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \,, \quad (i,j = 1,2,3) \qquad (1.5)$$

onda će jednačine(1.4) imati na osnovu [7] oblik

$$\frac{\delta \dot{x}^i}{\delta t} \equiv \ddot{x}^i + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} \dot{x}^j \dot{x}^k = Q^i + F^i \qquad (1.6)$$

gde $\frac{\delta}{\delta t}$ pretstavlja operator apsolutnog diferenciranja u V_n. $\left\{ {i \atop j\,k} \right\}$ — je Kristofelov simbol druge vrste, a Q^i i F^i su kontravarijantne koordinate generalisane sile, i kontravarijantne koordinate reaktivne sile.

Ako se sada uzme u obzir da je jednačina(1.1) poseban slučaj jednačine(1.2), kada je m=konst, onda se može smatrati da je dinamički sistem oblika materijalne tačke opisan sa tri jednačine oblika (1.6).

Uporedo sa razvojem teorije kretanja dinamički promenljive tačke na osnovu jednačina Meščerskog, razradjena je i teorija kretanja sistema tačaka promenljive mase. Ne ulazeći u to kako se dolazi do diferencijalnih jednačina kretanja, koristićemo samo njihov krajnji oblik, pri čemu ćemo se ograničiti na posmatranje holonomnih skleronomnih sistema.

Poznato je [7] da za ovakav slučaj, kada se sistem sastoji od N materijalnih tačaka te jednačine imaju sledeći oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = \tilde{Q}_i + \tilde{P}_i \qquad (1.7)$$

što se u kontravarijantnim koordinatama svodi na

$$\ddot{x}^i + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} \dot{x}^j \dot{x}^k = Q^i + F^i \qquad (1.8)$$

U ovim jednačinama $i=1,2,\ldots,3N-s$, gde je s broj holonomnih veza, a $3N-s$ broj stepeni slobode kretanja.

Ove jednačine (1.7) i (1.8) se razlikuju od poznatih Lagranževih jednačina druge vrste za član reaktivnih sila P_i odnosno F^i, kao i po tome što su Kristofelovi simboli funkcije, ne samo koordinata, nego i vremena. Tako sada ove jednačine pretstavljaju uopštenje već poznatih jednačina kretanja dinamičkih sistema u konfiguracionom prostoru V_n, $n=3N-s$. Za dalji rad bitno je konstatovati da su jednačine (1.8) i (1.6) istog oblika, samo jednačina (1.8) ima više, tako da se posebno ne moraju analizirati jednačine (1.6). Prema tome kretanje holonomnog skleronomnog dinamičkog sistema u toku vremena se može prikazati sistemom od $n=3N-s$ diferencijalnih jednačina drugog reda oblika (1.8), gde je n broj stepena slobode kretanja.

Sa gledišta teorije upravljanja kretanjem i analize dinamičkih sistema koja se vrši u ovoj oblasti, diferencijalne jednačine (1.8) neće uvek biti pogodne za neposredno korišćenje. Zato se ove jednačine zamenjuju sistemom od 2n diferencijalnih jednačina prvog reda, pri čemu se ova zamena može izvršiti na više načina. U klasičnoj mehanici je to već uradjeno ispisivanjem kanonskih Hamiltonovih jednačina kretanja [17]

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (1.9)$$

$$(i=1,2,\ldots,n)$$

Drugi način koji se često koristi je formalne prirode. Polazeći od opštih izraza(1.8) napisanih u obliku

$$\ddot{x}^i = f^i(t,x^j,\dot{x}^j,Q^k) \quad ,(i,j=1,2\ldots,n) \tag{1.10}$$

gde su Q^k samo one komponente čijim podešavanjem možemo upravljati dinamičkim sistemom, može se sistem diferencijalnih jednačina(1.8) svesti na sistem od 2n diferencijalnih jednačina prvog reda na sledeći način:

Ako se uvedu oznake

$$x^1 = x_1 \ , \ x^2 = x_3 \ , \ \ldots\ldots, \ x^n = x_{2n-1}$$

$$\dot{x}^1 = x_2 \ , \ \dot{x}^2 = x_4 \ , \ \ldots\ldots, \ \dot{x}^n = x_{2n}$$

$$Q^k = u_k \ , \ (k=1,2,\ldots,r\leq n)$$

onda jednačine(1.8)postaju

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\\
\dot{x}_2 &= f^1(t,x_i,u_k)\\
\dot{x}_3 &= x_4\\
\dot{x}_4 &= f^2(t,x_i,u_k)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_{2n} &= f^n(t,x_i,u_k)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$(i=1,2,\ldots,2n)$, $(k=1,2,\ldots,r\leq n)$

U jednačinama(1.11) veličine u_k su parametri upravljanja(sile, momenti, njihove kombinacije i sl.) koji utiču na kretanje dinamičkih sistema i mogu se podešavati i menjati u toku kretanja dinamičkih sistema.

Ovakav način pisanja diferencijalnih jednačina kretanja dinamičkih sistema, pogodan je zato što se sada kao celina može posmatrati u kompaktnoj formi u faznom prostoru u obliku [9]

$$\dot{x} = f(t,x,u) \tag{1.12}$$

Ovde je x fazni vektor kolona sa koordinatama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, f je vektor kolona sa koordinatama $f^1, f^2, \ldots, f^n$, dok je u vektor upravljanja sa koordinatama $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

Diferencijalne jednačine kretanja dinamičkog sistema napisane u obliku(1.12) poznate su [9] kao Košijeva forma pisanja diferencijalnih jednačina. Svodjenje sistema diferencijalnih jednačina na Košijevu formu pisanja je pogodno sa gledišta korišćenja metoda optimizacije, analize stabilnosti, primene računskih mašina za numeričko rešavanje ovih jednačina, a i savremena literatura i rezultati iz teorije diferencijalnih jednačina se oslanjaju na ovakvom prilazu. Jasno je sada da se na sličan način i Hamiltonove jednačine(1.9) mogu svesti na Košijevu formu(1.12) pogodnim smenama. Naprimer mogu se Hamiltonove promenljive zameniti sa

$$q^i = x_{2i-1}, \quad p_i = x_{2i}, \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1.13}$$

tako da u ovom slučaju fazni vektor $x = (x_j), (j=1,2,\ldots,2n)$ u jednačini(1.12) ima neparne koordinate generalisane koordinate q^i, a parne koordinate generalisane impulse p_i.

U opštem slučaju diferencijalne jednačine kretanja date relacijom(1.8) pretstavljaju sistem od n nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, a odgovarajuća Košijeva forma(1.12) sistem od 2n nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Nelinearnost ovih jednačina čini mnoge probleme u oblasti automatskog upravljanja nerešivim, ili bar nerešivim u konačnom obliku. Sa gledišta teorije upravljanja kretanjem naročito su interesantni oni tipovi dinamičkih sistema koji se mogu opisati sistemom linearnih diferencijalnih jednačina, jer je za takve sisteme u mnogim posebnim slučajevima definisan matematički postupak za odredjivanje upravljačke funkcije u. U takve slučajeve spadaju i diferencijalne jednačine koje opisuju poremećeno kretanje dinamičkih sistema u slučaju da su poznate konačne jednačine neporemećenog kretanja.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE POREMEĆENOG KRETANJA

Neka se mehanički sistem sastoji od N materijalnih tačaka $M_i (i=1,2,\ldots,N)$ sa masama m_i, čiji je položaj u neporemećenom kretanju odredjen vektorima $\vec{r}_i$. Kretanje sistema odredjeno je dobro poznatim jednačinama

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}) \tag{1.14}$$

Na osnovu [33] diferencijalne jednačine neporemećenog kretanja u faznom prostoru(q^α, p_α), $(\alpha = 1,2,\dots,n<3N)$ su

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta \ , \ D\, p_\alpha/dt = Q_\alpha \tag{1.15}$$

gde je p_α generalisani impuls, Q_α generalisana sila a D/dt operator apsolutnog diferenciranja.

Ako u mehaničkom sistemu(1.14) dolazi do poremećaja vektora položaja $\vec{r}_i$ i brzina $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$, tako da su poremećene vrednosti ovih veličina sada

$$\begin{aligned} \vec{r}_i^{\,*} &= \vec{r}_i + \vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \xi^\alpha \partial_\alpha \vec{r}_i \\ \vec{v}_i^{\,*} &= \vec{v}_i + \partial_{\alpha\beta} \vec{r}_i\, \xi^\alpha \dot{q}^\beta + \partial_\alpha \vec{r}_i\, \dot{\xi}^\alpha \end{aligned} \tag{1.16}$$

onda se menjaju i sile $\vec{F}_i$, i generalisani impulsi p_α, tako da postaju $\vec{F}_i^{\,*}$ odnosno p_α^*.

Ne ulazeći u to, kako se dolazi do diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja, koristićemo samo krajnji oblik dat u [33]

$$\frac{D\xi^\alpha}{dt} = a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma \ , \ \frac{D\eta_\alpha}{dt} = \psi_\alpha \tag{1.17}$$

Ove jednačine(1.17) pretstavljaju diferencijalne jednačine poremećenog kretanja mehaničkog sistema u faznom prostoru(ξ^α, p_α).U ovim jednačinama je

$$\begin{aligned} \eta_\gamma &= p_\gamma^* - p_\gamma = a_{\alpha\gamma}(\dot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\delta\beta}\xi^\delta \dot{q}^\beta) \\ \psi_\alpha &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{\,*} - \vec{F}_i)\, \partial_\alpha \vec{r}_i \end{aligned} \tag{1.18}$$

U opštijem slučaju kada se posmatra mehanički sistem materijalnih tačaka promenljive mase $m_i(t)$ u smislu Meščerskog, diferencijalne jednačine poremećenog kretanja prema [5] imaju oblik

$$\ddot{\xi}^{\alpha} + 2\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta} + \dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\xi^{\delta}\frac{\partial}{\partial q^{\delta}}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} =$$
$$= \frac{\partial Q^{\nu}}{\partial q^{\delta}}\xi^{\delta} + \frac{\partial Q^{\nu}}{\partial \dot{q}^{\delta}}\dot{\xi}^{\delta} + \frac{\partial F^{\nu}}{\partial q^{\delta}}\xi^{\delta} + \frac{\partial F^{\nu}}{\partial \dot{q}^{\delta}}\dot{\xi}^{\delta} \qquad (1.19)$$

Jednačine(1.19) su varijacione jednačine kretanja sistema promenljive mase u promenljivom konfiguracionom prostoru sa metrikom

$$d\,s^2 = a_{\alpha\beta}\,dq^{\alpha}\,dq^{\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,2,\dots,n) \qquad (1.20)$$

U slučaju da su poznate konačne jednačine kretanja neporemećenog kretanja $q^{i}(t)$ onda jednačine(1.19) dobijaju oblik

$$\ddot{\xi}^{\nu} = A^{\nu}_{\delta}(t)\,\xi^{\delta} + B^{\nu}_{\delta}(t)\,\dot{\xi}^{\delta} \qquad (1.21)$$

gde su

$$A^{\nu}_{\delta}(t) = \frac{\partial Q^{\nu}}{\partial q^{\delta}} + \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial q^{\delta}} - \dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\frac{\partial}{\partial q^{\delta}}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$$
$$B^{\nu}_{\delta}(t) = \frac{\partial Q^{\nu}}{\partial \dot{q}^{\delta}} + \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial \dot{q}^{\delta}} - 2\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha} \qquad (1.22)$$

Kao što se vidi ove jednačine(1.21) su linearne diferencijalne jednačine drugog reda po poremećajima ξ^{r}.One su čak i homogene što olakšava njihovu matematičku analizu.Zato će rad sa ovim jednačinama biti mnogo lakši nego u drugim slučajevima,bilo da se radi o nehomogenim ili o nelinearnim diferencijalnim jednačinama.I ove se jednačine mogu pogodnim smenama svesti na Košijevu formu(1.12) jer je taj oblik pisanja diferencijalnih jednačina najviše korišćen u daljem radu.Naprimer smene koje se često koriste su oblika

$$\xi^{1} = x_1\,,\ \xi^{2} = x_3\,,\ \xi^{3} = x_5\,,\ \dots\,,\ \xi^{n} = x_{2n-1}$$
$$\dot{\xi}^{1} = x_2\,,\ \dot{\xi}^{2} = x_4\,,\ \dot{\xi}^{3} = x_5\,,\ \dots\,,\ \dot{\xi}^{n} = x_{2n} \qquad (1.23)$$
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})^{T} = (x_{\ell})\,,\ (\ell = 1,2,\dots,2n)$$

Ako se sada uzmu u obzir diferencijalne jednačine kretanja(1.4),(1.7) i (1.8) onda se može konstatovati:

1° Da se diferencijalne jednačine kretanja dinamičkog sistema mogu pisati na više različitih načina,u zavisnosti od toga koje su nezavisne promenljive odabrane u konkretnom slučaju.

2° U slučajevima,kada je dinamički sistem opisan sistemom od n diferencijalnih jednačina drugog reda,može se izvršiti zamena promenljivih tako,da se posmatra isti dinamički sistem,ali preko sistema od 2n diferencijalnih jednačina prvog reda.Zamena promenljivih se može vršiti na način prikazan u tekstu ili na neki drugi način koji zadaje manje teškoća za kasnije matematičko rešavanje.

3° Bez obzira na oblik polaznih diferencijalnih jednačina kretanja,uvek se može izvršiti zamena promenljivih tako,da diferencijalne jednačine kretanja dobiju Košijevu formu(1.12).U ovom izrazu x je fazni vektor ili vektor stanja, a njegove koordinate x_i $(i=1,2,\ldots,2n)$ fazne promenljive ili promenljive stanja.

Dalje treba posebno podvući da je vektor $u = (u_k)$ upravljajuća funkcija,čije koordinate $u_k(k=1,2,\ldots,r)$ mogu biti različite fizičke prirode(sila,moment,generalisana sila,napon,jačina struje i sl).Obzirom da je u analitičkoj mehanici pojam generalisane sile definisan na jedan poseban način,onda je jasno da se za veličine u_k mora usvojiti novi termin,jer se u opštem slučaju ove dve veličine neće poklapati.Zato neka veličine u_k za dalje budu parametri upravljanja.Ograničićemo se na slučajeve u kojima su $u_k=u_k(t)$ ili nešto opštije $u_k= u_k(t,x_i)$.

Sa ovakvom interpretacijom,osnovni problem koji će biti rešavan u tezi,može se formulisati na sledeći način:

Poznato je početno stanje sistema u trenutku $t=t_o$,poznata je oblast dopuštenih upravljanja $U \ni u$.Promenom parametara upravljanja u_k,dobićemo skup faznih krivih,koje sve prolaza kroz početno stanje $x(t_o) = x_o$.U problemima automatskog upravljanja traži se,da odredimo parametre upravljanja tako,da pored uslova(1.12) bude zadovoljen i dopunski uslov,da kriterijum optimalnosti dostigne ekstremnu vrednost na jednoj faznoj krivoj. Takva fazna kriva zove se optimalna fazna kriva, a odgovarajuće upravljanje optimalno u smislu postavljenog kriterijuma.

Sam kriterijum optimalnosti može biti raznovrstan u pogledu forme matematičkog pisanja, što zavisi od tehničke discipline u kojoj se nalazimo i od konkretnog problema. U mehanici kriterijum optimalnosti je obično integralnog oblika

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \omega(t, x, u)\, dt \tag{1.24}$$

Fizičko značenje izraza (1.24) se ogleda obično u potrošnji minimalne energije, upotrebi minimalne sile, minimalnog impulsa, minimalnog otstupanja od unapred izabrane fazne krive i sl. Oni parametri upravljanja koji dinamički sistem (1.12) čine optimalnim u smislu minimizacije integrala (1.24) imaće indeks nula u_k^o i zvaćemo ih optimalni upravljajući parametri.

U onim slučajevima kada fazne promenljive $x_i(t)$ nisu istovremeno izlazi sistema (krajnji rezultati), već pretstavljaju samo veličine pomoću kojih treba izračunati izlaze sistema $c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t)$, potrebno je istovremeno posmatrati pored jednačina (1.12) i dopunske veze izmedju $c_i(t)$ i prethodno izračunatih veličina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,u) \\ c &= g(t,x,u)\ , \quad c=(c_1,c_2,\dots,c_m)^T \end{aligned} \tag{1.25}$$

U specijalnom slučaju kada se radi o linearnom dinamičkom sistemu, vektori f i g su linearne funkcije po x i u.

$$\begin{aligned} f(t,x,u) &= A(t)\,x + B(t)\,u + w(t) \\ g(t,x,u) &= D(t)\,x + H(t)\,u + l(t) \end{aligned} \tag{1.26}$$

pa bi matrični model linearnog dinamičkog sistema bio

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)\,x + B(t)\,u + w(t) \\ c(t) &= D(t)\,x + H(t)\,u + l(t) \end{aligned} \tag{1.27}$$

gde su A, B, D i H poznate matrice, a w i l poznati vektori koji potiču od sila koje se ne mogu podešavati u toku vremena.

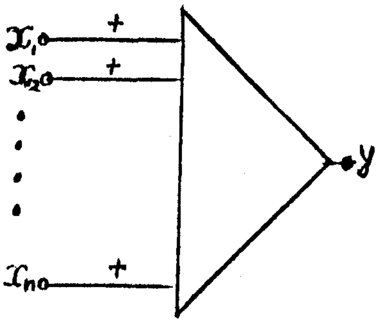
Za dinamički sistem se kaže da je stacionaran ako su matrice A,B,D i H konstantne marice.Ako ovo nije ispunjeno onda je dinamički sistem nestacionaran.U odnosu na neline-aran sistem(1.25),linearan sistem(1.27) pretstavlja veliko sužavanje oblasi primenljivosti dobijenih rezultata.Medjutim i tako sužen problem obuhvata veliki broj praktičnih problema iz mehanike,elektrotehnike i drugih oblasti,jer su mnoga realna kretanja dovoljno korektno opisana sistemom linearnih jednačina(1.27).Naprimer linearni oscilatori,diferencijalne jednačine poremećenog kretanja u blizini stanja ravnoteže i sl.Čak i oni dinamički sistemi koji su opisani nelinearnim diferencijalnim jednačinama mogu se nekada u prvim aproksimacijama opisati linearnim jednačinama(1.27).Tako se težak nelinearan problem zamenjuje nešto lakšim linearnim problemom.Ako je linearizacija moguća,onda se proučavanjem pomoćnog linearnog problema, mogu dobiti polazni podaci, za dalje korišćenje u nelinearnom slučaju.Treba podvući, da se svaka linearizacija mora precizno obrazložiti.

Proučavanje linearnog sistema, je korisno i zbog toga, što su za takve modele razradjeni matematički postupci, za dobijanje konačnih rezultata u zatvorenoj formi za pojedine klase linearnih dinamičkih sistema.Zato će od sada pa na dalje(sem u izuzetnim slučajevima), biti razmatrani samo linearni dinamički sistemi, čije je kretanje opisano linearnim jednačinama(1.27)

SIMULACIJA LINEARNIH SISTEMA

U toku teoretskog razmatranja rada nekog novog dinamičkog sistema,može se doći do novih rezultata.Pre praktične realizacije,potrebno je na neki način izvršiti proveru dobivenih rezultata.Ta provera se može izvršiti simulacijom [9] dinamičkog sistema upotrebom elektronskih računskih mašina. Simulacija se vrši po analognoj metodi,tako što se dinamičke promenljive x_i,u_k i c_j zamene odgovarajućim naponima,tako da izmedju njih postoji linearna zavisnost.Savremene elektronske računske mašine su tako konstruisane,da se na njima može vršiti simulacija linearnih kontinualnih i diskretnih dinamičkih sistema.Čak postoje gotovi programi(simulacioni jezici) za navedene sisteme.Konačne rezultate računar daje numerički u diskretnim trenutcima vremena i u vidu kontinualnog grafika.

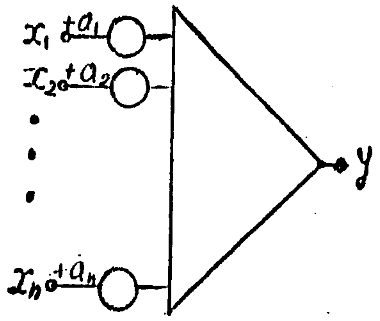
Simulacija linearnih stacionarnih kontinualnih dinamičkih sistema može se izvršiti sa tri standardna elementa: sabiračem, ponderišućim sabiračem i integratorom.



$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

sabirač

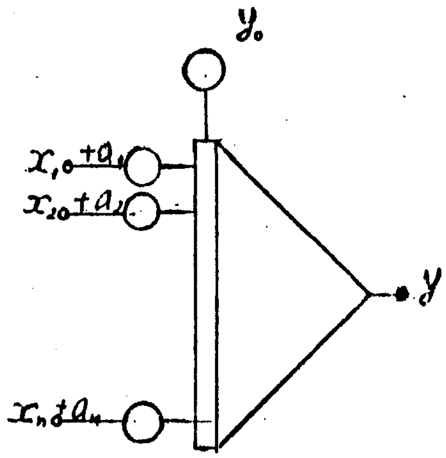
sl. 1



$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

ponderišući sabirač

sl. 2



$$y = y_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

integrator

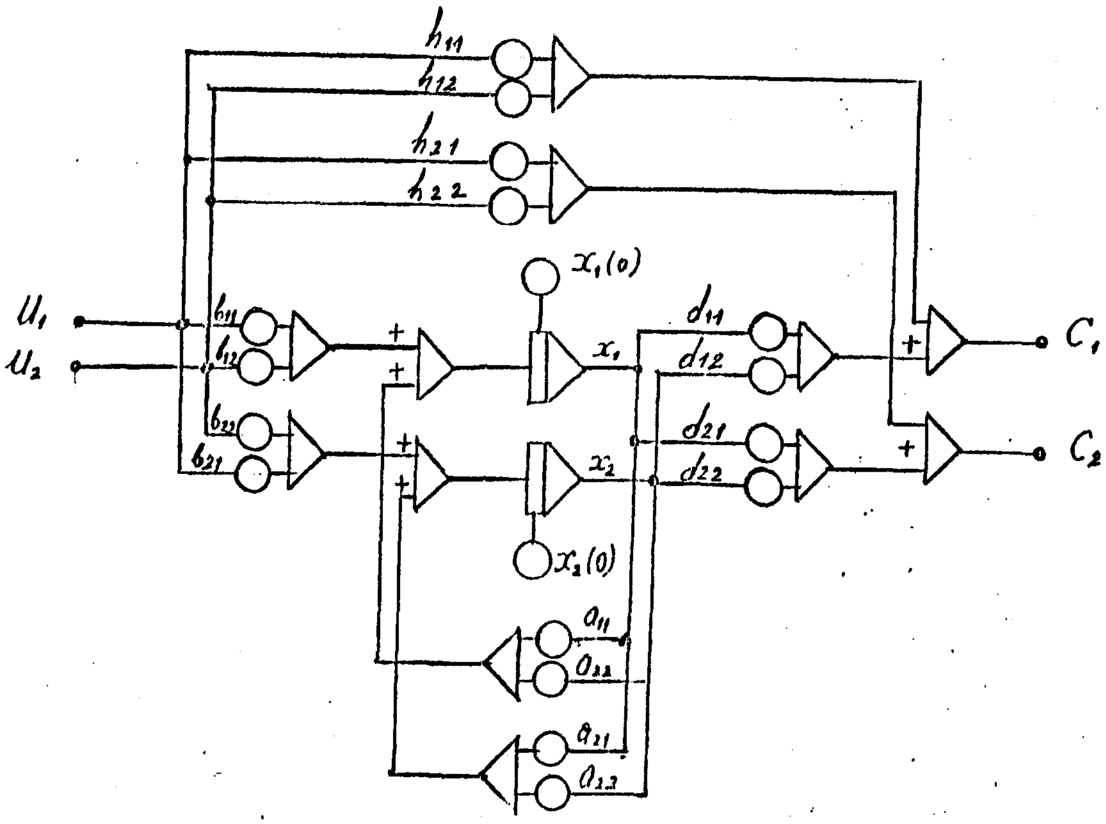
sl. 3

Ako se sada uzme u obzir da je sistem (1.27) moguće skalarno prikazati pomoću jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}(t)\, u_k + w_i(t) \\ c_i &= \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(t)\, x_j + \sum_{k=1}^{r} h_{ik}(t)\, u_k + l_i(t) \end{aligned} \qquad (1.28)$$

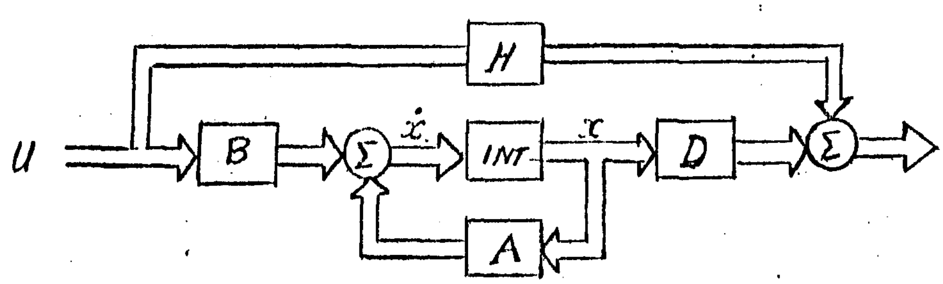
Onda se na osnovu definisanih standardnih elemenata-operatora može prikazati simulacioni dijagram linearnog sistema slikom 4. Na slici 4 prikazan je specijalan slučaj linearnog sistema kod koga su veličine $w_i=0$, $l_i=0$, $n=r=2$

Praktična realizacija rada po datoj šemi, znači rešavanje izlaznih veličina c_i, $(i=1,2)$ za date ulazne signale u_1 i u_2. Promenom elemenata matrica A, B, D i H, može se podešavati rad dinamičkog sistema tako,da budu zadovoljeni traženi zahtevi u pogledu optimalnosti ili zahtevi druge vrste.



sl. 4

Jasno je sada,da će se povećanjem broja ulaznih signala u_j,(j=1,2,...,r) i broja izlaznih veličina c_i,(i=1,2,. ...,n) opšti simulacioni dijagram promeniti samo po broju pojedinih veličina,a da će suština njegovog prikazivanja ostati ista.Zato se radi uprošćenja,kada detalji nisu bitni, može opšti simulacioni dijagram prikazati slikom 5



sl. 5

Simulacioni dijagram sistema(1.27) za w=0,l=0

G L A V A II

ELEMENTI FUNKCIONALNE ANALIZE

Elementi teorije funkcija i funkcionalne analize su se počeli koristiti za rešavanje zadataka optimalnog upravljanja(u obliku prikazanom u ovoj tezi),počev od 1957 godine radovima sovjetskih naučnika Kulikovskog i Krasovskog[14]. Ovi radovi se odnose na prve pokušaje da se nadju neke opšte metode za rešavanje raznovrsnih zadataka iz ove oblasti.S obzirom da neki dinamički sistemi imaju veliki broj ulaznih i izlaznih veličina,onda je moguće u izvesnim slučajevima uspostaviti analogiju sa elementima funkcionalne analize,gde se operiše sa velikim brojem nezavisnih promenljivih veli-veličina.Na osnovu dosadašnjih rezultata,koji su dobiveni korišćenjem funkcionalne analize u formi datoj u tezi,ne može se doneti neki precizan sud,o vrednosti ovakvog tretiranja problema teorije upravljanja.Bilo bi neskromno reći,da su na ovaj način postignuti neki veliki rezultati,ali sigurno je,da su postignuti rezultati interesantni,i daju lepu perspektivu za dalji rad u ovoj oblasti.

U ovoj glavi će biti prikazani osnovni elementi teorije funkcija i funkcionalne analize koji su neophodni za dalje izlaganje i formalno apstraktni matematički prikaz dinamičkih sistema,dok će neki stavovi igrati suštinsku ulogu kod pitanja optimalnosti.

<u>Metrički prostor</u> : Jedan od osnovnih pojmova u funkcionalnoj analizi je metrički prostor,koji je definisan kao par(X,ρ).Ovde je X skup elemenata $x\in X$,a ρ je oznaka za nenegativnu funkciju rastojanja izmedju elemenata $x\in X$.

Elementi prostora X mogu biti različite prirode(vektori,funkcije,nizovi,i sl.).Za nenegativnu funkciju ρ se zahteva da ispunjava tri aksiome(2.1),koje se nadovezuju analogno pojmu realnog rastojanja u trodimenzionom realnom Euklidovom prostoru R^3,tako da se intuitivna pretstava o rastojanju formalno prenosi i na vektore sa n koordinata$(n>3)$

Tako sada te tri aksiome na osnovu [18] imaju oblik

$$\forall \; x, y, z, \in X$$

$$1^\circ \quad \rho(x,y) = 0 \iff x = y$$

$$2^\circ \quad \rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \text{aksioma simetrije} \qquad (2.1)$$

$$3^\circ \quad \rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z) \quad \text{nejednakost trougla}$$

Primeri metričkih prostora

I. Skup realnih brojeva na brojnoj pravoj sa rastojanjem

$$\rho(x,y) = |x - y| \qquad (2.2)$$

čini jednodimenzioni metrički prostor R^1.

II. Skup vektora u trodimenzionom realnom prostoru, sa rastojanjem

$$\rho(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3)$$

čini trodimenzioni metrički prostor R^3.

III. Skup uredjenih grupa $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sa rastojanjem

$$\rho(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} \qquad (2.4)$$

čini n dimenzioni aritmetički Euklidov prostor R^n.

Primeri I i II su takvi da je ispravnost aksioma 1°, 2° i 3° očigledna iz same definicije (intuitivno geometrijsko rastojanje), što se ne može reći i za primer III. Za ovaj primer se neposredno vidi da važe aksiome 1° i 2°, a dokaz ispravnosti aksiome 3° je dat u [18].

IV. Skup uredjenih grupa od n brojeva $x_i \in R, (i=1,2,\ldots,n)$ sa rastojanjem

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{K=1}^{n} |y_i - x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p>1 \qquad (2.5)$$

čini metrički prostor R_p^n, gde je R_p^n prostor dimenzije n.

Tačnost aksioma broj 1° i 2° je očigledna iz same definicije(2.5),a dokaz ispravnosti aksiome 3^o za ovaj slučaj je dat u kursu [18].Ovaj primer je posebno interesantan,jer se za posebne vrednosti skalara n i p,mogu dobiti ostali navedeni primeri.Tako naprimer,za p=2, n=1, dobijamo primer I,za p=2, n=3, primer II,za p=2, n > 3, primerIII.

Slučaj kada $p \to \infty$ je posebno interesantan sa gledišta primene u oblasti mehanike upravljanog kretanja,kada se optimalnost ogleda u smislu dejstva silom minimalnog modula.Tako sada ,ako se u izrazu(2.5) pusti da $p \to \infty$,dobija se primer broj pet.

V.

$$\rho_{\infty}(x,y) = \lim_{\rho\to\infty} \rho_{\rho}(x,y) = \max_{1\leq k\leq n} |y_k - x_k| \qquad (2.6)$$

Navedena pet primera pokazuju da se jedan isti skup tačaka u prostoru R^n,može na različite načine snabdeti metrikom $\rho_p(x,y)$,pa se tako dobijaju različiti metrički prostori R^n_p.Slične definicije se mogu usvojiti i u prostoru čiji su elementi funkcije.

VI. Prostor čiji su elementi realne i neprekidne funkdije u intervalu $[a,b]$ sa rastojanjem

$$\rho(f,g) = \max_{a\leq t\leq b} |g(t) - f(t)| \qquad (2.7)$$

je prostor $C[a,b]$.

U ovom slučaju je važnost aksioma $1^o,2^o$ i 3^o očigledna iz same definicije(2.7)

VII. Ako se isti prostor snabde drugom metrikom

$$\rho(f,g) = \left\{\int_a^b [g(t) - f(t)]^2 dt\right\}^{1/2} \qquad (2.8)$$

onda se opet dobija primer metričkog prostora $C^2[a,b]$,takozvani prostor neprekidnih funkcija sa kvadratnom metrikom.Znači i u prostoru funkcija se može, na različite načine definisati funkcija rastojanja ρ ,pa se tako mogu dobiti različiti funkcionalni metrički prostori.

Navedeni primeri pokazuju veliko bogatstvo mogućnosti formiranja metričkih prostora,biranjem elemenata tog prostora, ili biranjem funkcije rastojanja ρ, što zavisi od kasnijih potreba i primenljivosti, za rešavanje nekih praktičnih problema.

Linearni funkcional u vektorskom prostoru

Vektorski ili linearni n dimenzioni prostor N_n ćemo smatrati da je sastavljen od skupa vektora $x = (x_i)$, $(i=1, 2,\ldots,n)$. Funkcija rastojanja $\rho(x,y)$ definisana aksiomama 1^o, 2^o i 3^o, svodi se za slučaj da je $y=0$ na normu vektora x, odnosno na $\rho(x)$, Nenegativna funkcija $\rho(x)$ u ovom slučaju mora da zadovoljava aksiome

$$1^o \quad \rho(x) = 0 \iff x = 0$$

$$2^o \quad \rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y) \tag{2.9}$$

$$3^o \quad \rho(ax) = |a|\rho(x), \text{ a je realan skalar}$$

Pojam norme $\rho(x)$ igra suštinsku ulogu u daljem izlaganju, jer će u konkretnim slučajevima imati odredjeni fizički smisao (modula sile, impulsa, energije, i sl.)

Ako se u nekom prostoru N_n odabere norma $\rho(x)$ tako da su zadovoljene aksiome (2,9), onda se tako odabrani prostor zove normirani prostor. Neka je u tako normiranom linearnom prostoru definisana neka funkcija $\varphi[x]$, koja svaki vektor $x\in N_n$ transformiše u skalar, odnosno

$$\varphi[x] = a , \quad a\in R \tag{2.10}$$

Za operaciju φ se kaže da je linearna ako zadovoljava uslov

$$\varphi[ax + by] = a\varphi[x] + b\varphi[y] \qquad \forall\, x,y\in N_n \wedge a,b\in R \tag{2.11}$$

Na osnovu definicije (2.11) može se tvrditi da se svaka linearna operacija (linearni funkcional) $\varphi[x]$ u linearnom prostoru $N_n \ni x$ može prikazati kao [16]

$$\varphi[x] = (x)^T(u) = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n \tag{2.12}$$

gde je $u = (u_i)$ ponovo vektor iz N_n.

Iz izraza (2.12) se vidi da svakom vektoru $u\in N_n$ odgovara odredjena linearna operacija i obrnuto, svakoj linearnoj operaciji $\varphi[x]$, $x \in N_n$ odgovara odredjeni vektor $u \in N_n$. U slučaju da je n=3, linearna operacija(2.10) definiše jednačinu ravni u trodimenzionalnom realnom prostoru. Analogno za $n > 3$, jednačina(2.10) definiše jednačinu hiperravni u n dimenzionom prostoru N_n.

<u>Norma linearne operacije</u> Linearna operacija $\varphi[x]$ kao skalar može imati različite vrednosti na skupu $N_n \ni x$. U svakom slučaju za proizvoljnu linearnu operaciju $\varphi[x]$ može se pronaći takav broj γ da bude zadovoljena nejednakost

$$|\varphi[x]| \leq \gamma \rho(x) \quad , x \in N_n \tag{2.13}$$

Najmanji od svih brojeva γ koji zadovoljava nejednakost(2.13) obeležićemo sa γ^* i zvaćemo ga norma linearne operacije(linearnog funkcionala) $\varphi[x]$. Na osnovu ove definicije, date u kursu [16], sledi da je norma linearne operacije $\varphi[x]$ data na sledeći način

$$\gamma^* = \inf_{x \neq 0} \gamma = \sup_{x \neq 0} \frac{|\varphi[x]|}{\rho(x)} = \rho^*(\varphi) \tag{2.14}$$

Pošto se norma linearne operacije φ neposredno koristi u teoriji optimalnog upravljanja, ovde će biti prikazane dve mogućnosti za odredjivanje pomenute norme, koje će kasnije biti korišćene. U tom cilju pretpostavimo da razlomak (2.14) dostiže najveću vrednost za $x = x^*$

$$\rho^*(\varphi) = \frac{|\varphi[x^*]|}{\rho(x^*)} = \frac{|\beta|}{|\beta|} \cdot \frac{|\varphi[x^*]|}{\rho(x^*)} = \frac{|\varphi[\beta x^*]|}{\rho(\beta x^*)} \tag{2.15}$$

Vrednost razlomka(2.15) ne zavisi od vrednosti skalara $\beta \neq 0$, pa se može odabrati β tako da je $\rho(\beta x^*) = 1$, pa je

$$\rho^*(\varphi) = \sup_{x \neq 0} \left(|\varphi[x]| \quad \wedge \quad \varphi[x] = 1 \right) \tag{2.16}$$

Ako je odredjivanje norme linearne operacije pomoću izraza(2.16) nepogodno,onda se može potražiti norma na drugi način.Naprimer može se odabrati skalar β tako da je $\varphi[\beta x^*]=1$,odakle dalje sledi drugi poznati [16] način odredjivanja norme ρ^* linearne operacije $\varphi[x]$.

$$\rho^*(\varphi) = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{1}{\rho(x)} \wedge \varphi[x]=1 \right) \qquad (2.17)$$

Na osnovu prethodnog izlaganja može se u zaključku konstatovati,da se norma linearne operacije, može odredjivati na dva načina,datih izrazima(2.16) i (2.17).Rečnikom funkcionalne analize izraz(2.16) kaže daje norma $\rho^*(\varphi)$ linearne operacije $\varphi[x]$ jednaka $|a|$,gde hiperravan $\varphi[x]=a$ dodiruje jediničnu sferu $\rho(x) = 1$.Analogno ovome, izraz (2.17) kaže da je $\rho^*(\varphi)=(\rho^0)^{-1}$,pri čemu sfera $\rho(x) = \rho^0$ dodiruje hiperravan $\varphi[x] = 1$.

Sada se može konstatovati sledeća situacija:Postoje dva prostora $N_{(1)} \ni x$ i $N_{(2)} \ni u$,gde su vektori $x = (x_i)$, $u = (u_i)$, $(i=1,2,..,n)$.Ako se u prostoru $N_{(1)}$ definiše norma na neki način,dobiće se normirani prostor $B_n \ni x$,sa normom $\rho(x)$.Svaki vektor $u \in N_{(2)}$ definiše linearnu operaciju $\varphi[x]$ datu izrazom(2.12).Ako se sada, u prostoru $N_{(2)} \ni u$ definiše norma vektora u kao

$$\rho^*(u) = \rho^*(\varphi), \qquad (2.18)$$

dobija se drugi normirani prostor $B_n \ni u$,odnosno svakom normiranom prostoru $B_n \ni x$ sa normom $\rho(x)$, odgovara na odredjeni način prostor $B_n^* \ni u$,sa normom $\rho^*(u)$.Za ova dva prostora se kaže da su pridruženi jedan drugom,odnosno [16] to su konjugovani prostori.

Karakteristični izrazi, koji su ispisani za vektore sa konačnim brojem koordinata,mogu se na poseban način proširiti i na vektore sa beskonačnim brojem koordinata, Tako se naprimer proizvoljna skalarna realna funkcija $h(t)$, $t \in [t_0, t_\beta]$ koja ima beskonačno mnogo vrednosti na posmatranom intervalu realnih brojeva $t \in [t_0, t_\beta]$,može tretirati kao vektor sa beskonačno koordinata $h_k = h(t_k)$, $t_0 \leq t_k \leq t_\beta$.

Opšti oblik linearnog funkcionala u konačnodimenzionom prostoru(1.12),u ovom slučaju dobija poseban oblik[16].

$$\varphi[h(t)] = \int_{t_0}^{t_\beta} h(t)u(t)dt \qquad (1.19)$$

Ako se sada u funkcionalnom prostoru B,čiji su elementi realne skalarne funkcije $h(t) \in B$,uvede norma na odredjeni način,onda se dobija odredjeni normirani funkcionalni prostor.Kao što je u konačnodimenzionalnom prostoru uvodjenje norme bilo moguće na više načina,tako će i ovde to biti moguće(biranjem elemenata prostora-funkcija sa različitim osobinama ili biranjem norme u jednom istom skupu funcija).Definisanje konjugovanog prostora i konjugovane norme je analogno kao u prostoru sa konačnim brojem koordinata, samo što je ovde,opšti oblik linearnog funkcionala dat izrazom(1.19),a ne sa izrazom(1.12) kao u prethodnom slučaju prostora sa konačnim brojem koordinata.

Sa gledišta teorije upravljanja kretanjem i pitanja optimalnosti,korisno je sastaviti tabelu,u kojoj će biti data medjusobna zavisnost polazne norme $\rho(x)$ i njene konjugovane norme $\rho^*(u)$,u cilju daljeg lakšeg korišćenja.

Korišćenjem izraza(1.16) ili (1.17),u kojima je linearna operacija data u formi(1.12) ili (1.19),a norma $\rho(x)$ definisana izrazom(1.5) ili (1.7) i (1.8),možemo sada birati skalar $p>1$,i kombinovati navedene izraze u cilju dobijanja velikog broja raznovrsnih slučajeva.Od velikog broja raznovrsnih slučajeva ovde će,u tabeli broj jedan,biti prikazani oni koji su interesantni sa praktične tačke gledišta,odnosno oni slučajevi koji će biti korišćeni u daljem izlaganju.Iz tabele koja je data u kursu [16] izdvojićemo samo one slučajeve koji imaju smisao modula sile,impulsa, energije i sl.odnosno odabraćemo one slučajeve polazne i odgovarajuće konjugovane norme,koje će imati konkretan fizički smisao naveden u tekstu.

TABELA BROJ I

	$\rho(x)$	$\rho^{*}(u)$
	$x(t)$ - skalar	$u(t)$ - skalar
1	$\left[\int_{t_0}^{t_\beta} x^2(t)\,dt\right]^{1/2}$	$\left[\int_{t_0}^{t_\beta} u^2(t)\,dt\right]^{1/2}$
2	$\left[\int_{t_0}^{t_\beta} x^2(t)\,dt + x^2(t_\beta)\right]^{1/2}$	$\left[\int_{t_0}^{t_\beta} u^2(t)\,dt + u^2(t_\beta)\right]^{1/2}$
3	$\int_{t_0}^{t_\beta} \lvert x(t)\rvert\,dt$	$\sup_{t_0 \le t \le t_\beta} \lvert u(t)\rvert$
	$x(t)$ - vektor $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$	$u(t)$ - vektor $u(t) = (u_1, u_2, \dots, u_r)$
4	$\left[\int_{t_0}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2(t)\right) dt\right]^{1/2}$	$\left[\int_{t_0}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)\right) dt\right]^{1/2}$
5	$\int_{t_0}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2(t)\right)^{1/2} dt$	$\sup_{t_0 \le t \le t_\beta} \left[\sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)\right]^{1/2}$
6	$\int_{t_0}^{t_\beta} \left(\max_i \lvert x_i(t)\rvert\right) dt$	$\sup_{t_0 \le t \le t_\beta} \left[\sum_{i=1}^{r} \lvert u_i(t)\rvert\right]$
7	$\int_{t_0}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} \lvert x_i(t)\rvert\right) dt$	$\sup_{t_0 \le t \le t_\beta} \left[\max_i \lvert u_i(t)\rvert\right]$
8	$\max_i \int_{t_0}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2(t)\right)^{1/2} dt$	$\max\left\{\sup_{t_0 \le t \le t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)\right)^{1/2}\right\}$

G L A V A III

ANALIZA LINEARNIH SISTEMA

U prvoj glavi je pokazano,da se kretanje dinamičkih sistema u faznom prostoru može opisati sistemom diferencijalnih jednačina,koje u Košijevoj(vektorskoj) formi imaju oblik(1.12).U ovom delu ćemo se ograničiti na posmatranje linearnih nestacionarnih dinamičkih sistema oblika

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + w(t) \quad , \; x(t_o) = x_o \qquad (3.1)$$

gde je $x = (x_1,x_2,...,x_n)^T$ fazni vektor, $u = (u_1,u_2,..,u_r)^T$ vektor upravljanja,$A(t)$ je poznata kvadratna matrica tipa (n,n),$B(t)$ je poznata matrica tipa (n,r) a $w(t)$ je poznata vektor funkcija.

Obzirom da postupak efektivnog rešavanja sistema(3.1) nije tema ovog rada,koristićemo već poznate izraze.Tako je na osnovu Košijeve formule[16],rešenje sistema(3.1) dato sa

$$x(t) = X[t,t_o]x_o + \int_{t_o}^{t} X[t,s]\left\{B(s)u(s) + w(s)\right\}ds \qquad (3.2)$$

gde je $X[t,t_o]$ fundamentalna matrica sistema(3.1)

U ovom delu analiziraćemo linearni sistem oblika(3.1), ne postavljajući za sada dopunske uslove optimalnosti,koji će kasnije biti uzimani u obzir.Zato pretpostavimo da su u jednačini(3.1),sem faznog vektora $x(t)$ sve ostale veličine poznate funkcije vremena,a da treba efektivno odrediti $x(t)$ po Košijevoj formuli(3.2).U ovoj formuli figuriše fundamentalna matrica $X[t,t_o]$,čije odredjivanje zadaje velike teškoće onima koji se bave ovom problematikom.Zato se može reći da je ključni i najteži deo posla,prilikom rešavanja linearnog sistema po formuli(3.2),kako odrediti fundamentalnu matricu $X[t,t_o]$.Poznato je [16]da se ona može

G L A V A III

ANALIZA LINEARNIH SISTEMA

U prvoj glavi je pokazano,da se kretanje dinamičkih sistema u faznom prostoru može opisati sistemom diferencijalnih jednačina,koje u Košijevoj(vektorskoj) formi imaju oblik(1.12).U ovom delu ćemo se ograničiti na posmatranje linearnih nestacionarnih dinamičkih sistema oblika

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + w(t) \ , \ x(t_o) = x_o \qquad (3.1)$$

gde je $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ fazni vektor, $u = (u_1,u_2,\dots,u_r)^T$ vektor upravljanja,$A(t)$ je poznata kvadratna matrica tipa (n,n),$B(t)$ je poznata matrica tipa (n,r) a $w(t)$ je poznata vektor funkcija.

Obzirom da postupak efektivnog rešavanja sistema(3.1) nije tema ovog rada,koristićemo već poznate izraze.Tako je na osnovu Košijeve formule [16],rešenje sistema(3.1) dato sa

$$x(t) = X[t,t_o]x_o + \int_{t_o}^{t} X[t,s]\left\{B(s)u(s) + w(s)\right\}ds \qquad (3.2)$$

gde je $X[t,t_o]$ fundamentalna matrica sistema(3.1)

U ovom delu analiziraćemo linearni sistem oblika(3.1), ne postavljajući za sada dopunske uslove optimalnosti,koji će kasnije biti uzimani u obzir.Zato pretpostavimo da su u jednačini(3.1),sem faznog vektora $x(t)$ sve ostale veličine poznate funkcije vremena,a da treba efektivno odrediti $x(t)$ po Košijevoj formuli(3.2).U ovoj formuli figuriše fundamentalna matrica $X[t,t_o]$,čije odredjivanje zadaje velike teškoće onima koji se bave ovom problematikom.Zato se može reći da je ključni i najteži deo posla,prilikom rešavanja linearnog sistema po formuli(3.2),kako odrediti fundamentalnu matricu $X[t,t_o]$.Poznato je [16]da se ona može prikazati kao proizvod $X[t,t_o] = Z(t)\, Z^{-1}(t_o)$,pri čemu je matrica $Z(t)$ sastavljena od vektor-kolona koji zadovoljavaju homogeni deo linearnog sistema(3.1),a medjusobno su linearno nezavisni.Do ovih vektora $z^{(i)}(t),(i=1,2,\dots,n)$ se može doći Ojlerovom metodom traženja karakterističnih vrednosti matrice A,ali samo u stacionarnom slučaju kada su odgovarajuće algebarske jednačine rešive.U nestacionarnom slučaju za sada opšti postupak odredjivanja vektora $z^{(i)}$ ne postoji.Jedino za neke posebne slučajeve može se,Laplasovom transformacijom doći,do konačnih rezultata(onda kada se može odrediti inverzna Laplasova transformacija).Na osnovu ovoga se vidi,da čak ni u stacionarnom slučaju problem odredjivanja fundamentalne matrice nije u opštem slučaju rešen,pa će utoliko više problema biti u nestacionarnom slučaju.Poznato je[16],da se u stacionarnom slučaju(kada nismo u stanju da odredimo fundamentalnu matricu u konačnom obliku) fundamentalna matrica $X[t,t_o]$ može aproksimirati sa prvih nekoliko članova reda

$$X[t,t_o] = e^{A(t-t_o)} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(t-t_o)^n/n! \qquad (3.3)$$

U nestacionarnom slučaju matrice $A(t)$ i $B(t)$ iz sistema(3.1),su matrice sa vremenski promenljivim koeficijentima.Ako izuzmemo one retke slučajeve,u kojima smo u stanju da odredimo fundamentalnu matricu u konačnom obliku,onda je jasno da ćemo vrlo često biti u situaciji,da odredjujemo fundamentalnu matricu približno.Ovde će biti korišćen postupak za odredjivanje fundamentalne matrice,do koga sam došao 1970 godine[3].

$$X[t,t_o] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t_o)(t-t_o)/n! \qquad (3.4)$$

U izrazu(3.4) kvadratne matrice A_n su date kao

$A_o = I$ jedinična kvadratna matrica reda n.

$A_1 = A$ data kvadratna matrica iz(3.1)

$$A_2 = \dot{A} + A^2 = \dot{A}_1 + A_1^2 \qquad (3.5)$$

$$A_3 = \ddot{A} + 2\dot{A}A + A\dot{A} + A^3 = AA_2 + 2\dot{A}A + \ddot{A}$$

Rekurentna formula za odredjivanje matrica A_n je

$$A_n = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \overset{(p)}{A} \cdot A_{n-1-p} \,, n \geq 1, A = \overset{(o)}{A} \,,\ \overset{(p)}{A} = \frac{d^p A}{dt^p} \qquad (3.6)$$

tako da se sa prvih nekoliko članova fundamentalna matrica linearnog nestacionarnog sistema može prikazati izrazom

$$X[t,t_o] = I + A(t_o)(t-t_o)/1! + (\dot{A} + A^2)_o(t-t_o)^2/2! +$$
$$+ (\ddot{A} + 2\dot{A}A + A\dot{A} + A^3)_o(t-t_o)^3/3! + \dots \qquad (3.7)$$

U stacionarnom slučaju matrica A = konstanta,njeni izvodi su nula matrice,pa se iz izraza(3.5) i (3.6) vidi da je u ovom posebnom slučaju $A_n = A^n$,tako da beskonačni red(3.4) postaje ekvivalentan sa(3.3).

U nestacionarnom slučaju korišćenje izraza(3.4), se principijelno može vršiti na dva načina.

1° Ako je moguće,poželjno je odrediti graničnu funkciju, kojoj teži dati beskonačni red.Tako dobivena granična funkcija pretstavlja fundamentalnu matricu i može se koristiti u daljem računu.

2° Ako nije moguće odrediti graničnu funkciju, a samim tim ni fundamentalnu matricu u konačnom obliku kao u prethodnom slučaju,ili je sama granična funkcija složena po obliku i nepogodna za dalje korišćenje,onda se beskonačni red (3.4) aproksimira sa prvih nekoliko članova,tako da aproksimacija bude korektna.Istina problem nije zaokružen u tom smislu, da se i greška može proceniti u opštem slučaju.Medjutim u nekim specijalnim slučajevima,kada se procena greške može vršiti za sve članove $x_{ij}(t,t_o)$, fundamentalne matrice $X[t,t_o]$,date beskonačnim redom(3.4),možemo i praktično koristiti izraz(3.4) za približno izračunavanje fundamentalne matrice.Jedan od takvih slučajeva je prikazan u [5] ,a ovde će biti uradjen još jedan primer,u kome će se pokazati praktična primena izraza(3.4).Radi uporedjenja dobivenih rezultata,odabraćemo primer čije je rešenje dato u [27].

Neka se posmatrani objekat kreće saglasno jednačini

$$\ddot{y} + y\cdot\cos t = 0\ ,\quad y(t_o) = y_o\ ,\quad \dot{y}(t_o) = \dot{y}_o\ .$$

potrebno je odrediti $y(t)$ za $t \geqslant t_o = 0$.

Sa novim oznakama $y=x_1$, $\dot{y}=x_2$, polazna diferencijalna jednačina dobija Košijevu formu

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Longrightarrow A(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos t & 0\end{pmatrix}$$

Ako se sada izračunaju matrice $A_n(o)$ po izrazima(3.5) i (3.6) i zamene u red(3.4), dobija se

$$X[t,o] = I + A(o)t + A_2(o)t^2/2! + A_3(o)t^3/3! + \ldots. =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}t^2/2! + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}t^3/3! +$$

$$+ \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}t^4/4! + \begin{pmatrix}0 & 4\\ -9 & 0\end{pmatrix}t^5/5! + \begin{pmatrix}-9 & 0\\ 0 & -19\end{pmatrix}t^6/6! + \ldots.$$

$$X[t,0] = \begin{pmatrix}1-t^2/2! + 2t^4/4! - 9t^6/6! + \ldots, & t-t^3/3! + \ldots\\ -t+2t^3/3! - 9t^5/5! + \ldots. & , 1-t^2/2! + \ldots\end{pmatrix}$$

tako da se sada zamenom dobivenog izraza u Košijevu formulu(3.2) dobija rešenje u obliku

$$x(t) = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = X[t,0]\cdot x_o = X[t,0]\begin{pmatrix}y_o\\ \dot{y}_o\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$y(t) = y_o(1 - t^2/2! + 2t^4/4! - 9t^6/6! + \ldots..) +$$

$$+ \dot{y}_o(t - t^3/3! + 4t^5/5! - \ldots...)$$

što se poklapa sa rešenjem istog zadatka datog u zbirci [27].

Ako se prikazani postupak za odredjivanje fundamentalne matrice $X[t,t_o]$ u obliku beskonačnog reda(3.4), uporedi sa postupkom koji je predložen u[32], gde se fundamentalna matrica traži kao

$$X[t,t_o] = \lim_{\kappa \to \infty} X_{k+1}[t,t_o] \ , \ X_o[t,t_o] = I$$
$$X_{k+1}[t,t_o] = I + \int_{t_o}^{t} A(s) \, X_k[s,t_o] ds \quad , \ \kappa \geqslant 0 \tag{3.8}$$

mogu se konstatovati neke prednosti postupka(3.4) u odnosu na(3.8).

1^o Pre svega izvod skoro svake funkcije je moguće naći, što se ne može reći i za integral, pa je samim tim i primenljivost izraza(3.4) u tom smislu šira u odnosu na (3.8).

2^o U slučaju diskretizacije, greška R_n u računu je proporcionalna sa $(t-t_o)^n$ u izrazu(3.4), što daje izvesnu pretstavu o redu veličine greške, dok se iz izraza(3.8) to ne može zaključiti. Jedino u posebnom slučaju kada su elementi matrice $A(t)$ polinomi vremena t, isti zaključak se može doneti i za slučaj(3.8).

3^o I na kraju postupak integracije se može pokazati nemogućim već posle prvog ili drugog koraka u izrazu(3.8), što zadaje velike teškoće u praktičnom radu. U svakom slučaju na osnovu izraza(3.4) ćemo brže doći do praktično primenljivih vrednosti fundamentalne matrice $X[t,t_o]$, jer su u njemu zastupljene prostije matematičke operacije u poredjenju za izrazom(3.8).

Prilikom izrade nekoliko prostijih primera vidi se, da oba navedena postupka dovode do istog rezultata u slučaju da su elementi matrice $A(t)$ polinomi vremena t. U složenijim zadacima proveru je skoro i nemoguće izvršiti, zbog nepogodnosti izraza(3.8). U svakom slučaju vreme i kasnija praktična primena oba navedena postupka, će pokazati prednosti i mane jednog ili drugog. Primer koji je uradjen na prethodnoj strani, pokazuje da je praktična upotrebljivost izraza (3.4) vezana za mali interval $(t-t_o)$, a članovi fundamentalne matrice $X[t,0]$ su alternativni redovi, pa se za njihovu konvergenciju može koristiti Lajbnicov kriterijum.

U onim slučajevima kada je interval $(t-t_o)>1$,konvergencija izraza(3.4) je dosta spora,pa je njegova praktična upotrebljivost u datom obliku nepogodna.Zato će korišćenje ovog izraza u ovom slučaju biti posredno preko diskretnog modela,u kome interval $(t-t_o)$ može biti konačno veliki.

DISKRETAN MODEL LINEARNOG NESTACIONARNOG SISTEMA

U slučajevima u kojima neposredna primena formule(3.4) za aproksimativno odredjivanje fundamentalne matrice,ne daje zadovoljavajuće rezultate,neće ni fazni vektor $x(t)$ biti dobro izračunat po Košijevoj formuli(3.2).U cilju što tačnijeg izračunavanja faznog vektora,ovde će biti predložen diskretan model za izračunavanje faznog vektora u diskretnim trenutcima vremena $t_k \in [t_o, t_f]$ .Ovaj model pretstavlja sintezu izraza(3.4) i Košijeve formule(3.2) i može se koristiti za konačno veliki vremenski interval $t-t_o$.

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu kretanja linearnog kontinualnog nestacionarnog dinamičkog sistema u Košijevom obliku

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \ , \ x(t_o) = x_o \qquad (3.9)$$

Pod pretpostavkom da su sve veličine u jednačini(3.9) poznate sem $x(t)$ za $t>t_o$,može se postaviti ovakav problem:

Proveriti rad dinamičkog sistema pre njegove realizacije(praktične konstrukcije),kako bi se uklonili eventualni nedostaci.Analiza ponašanja rada dinamičkog sistema oblika(3.9) se izmedju ostalog može vršiti na računskoj mašini u diskretnim trenutcima vremena,pod uslovom da je napravljen odgovarajući model.Na osnovu diskretnog modela se dalje može napraviti program računskoj mašini,tako da će ona davati rezultate vektora $x(t_k)$ u diskretnim trenutcima vremena i tako dati približnu sliku o kretanju dinamičkog sistema.

Konstruisati diskretan model za dati kontinualni sistem,znači zameniti diferencijalnu jednačinu(3.9) odgovarajućom diferencnom jednačinom,u kojoj će biti data zavisnost

$$x(t_{k+1}) = F(x_k,u_k,t_k), \ x(t_k)=x_k \ ,(k=1,2,\dots\ ) \qquad (3.10)$$

Početni uslov diferencne jednačine(3.10) je isti kao i polazne diferencijalne jednačine $x(t_o) = x_o$, a u daljem radu se smatra poznatim vektorom.

U cilju konstruisanja diskretnog modela(3.10) za polazni sistem(3.9), podjimo od rešenja polazne jednačine, datog Košijevom formulom

$$x(t) = X[t,t_o]x(t_o) + \int_{t_o}^{t} X[t,s]B(s)u(s)ds \qquad (3.11)$$

Ako se uzme u obzir nestacionarnost polaznog sistema (3.9), onda je direktna primena formule(3.4), praktično nepogodna za unošenje u izraz(3.11), jer je fundamentalna matrica $X[t,t_o]$ u ovom slučaju teško izračunljiva zbog veličine intervala $t-t_o$. Ali u slučaju diskretizacije već se mogu dobiti praktično upotrebljivi rezultati. Uočimo zato vremensku osu i izvršimo diskretizaciju posmatranog intervala $[t_o, t_\beta]$ tako da je korak diskretizacije T konstantan i da je

$$t_{k+1} - t_k = T, \quad t_\beta - t_o = mT \quad ,(k=0,1,2,.,m) \qquad (3.12)$$

pri čemu treba birati T tako, da se sa dovoljnom tačnošću može smatrati da je

$$u(t_k) = u(t) \quad , \quad t \in (t_k, t_{k+1}) \qquad (3.13)$$

Uslov(3.13) je u zadacima optimalnog upravljanja vrlo često ispunjen, jer su konačna rešenja u ovoj oblasti u mnogim slučajevima po delovima konstantne funkcije u(t). U onim slučajevima u kojima uslov(3.13) nije ispunjen, potrebno je aproksimaciju vršiti na drugi način. Vrednost funkcije u(t) u konačnom broju tačaka t_k na vremenskoj osi ne igra bitnu ulogu, pa se može usvojiti da je neprekidna s desna kao što je uobičajeno u[16].

Ako se sada po Košijevoj formuli(3.11) izračuna $x(t_1)$

$$x(t_1) = X[t_1,t_o]x(t_o) + \left\{\int_{t_o}^{t_1} X\, t_1,s\; B(s)ds\right\}u(t_o) \qquad (3.14)$$

dobija se formalno izraz istog oblika kao(3.11), ali suština je u tome što je sada interval $[t_1,t_o]$, za koji se izračunava fundamentalna matrica mnogo puta kraći u poredjenju sa intervalom $[t,t_o]$,koji figuriše u(3.11).

Kada se sada na isti način izračuna $x(t_2)$,pri čemu ulogu $x(t_o)$ preuzima $x(t_1)$,pa se ovaj postupak nastavi izračunavanjem $x(t_3),x(t_4),\ldots$,dolazi se do rekurentne formule

$$x(t_{k+1}) = X[t_{k+1},t_k]x(t_k) + \left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} X[t_{k+1},s]\,B(s)ds\right\}u(t_k) \tag{3.15}$$

$$x(t_o) = x_o \;, \quad (k = 0,1,2,\ldots,m)$$

što se korišćenjem izraza(3.4) svodi na

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) = & \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t_k)}{n!}\, T^n\right\} x(t_k) \; + \\ & + \left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(s)}{n!}(t_{k+1} - s)^n B(s)ds\right\} u(t_k) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ako se u izrazu(3.16) uvedu oznake,$E(t_k)$ za prvi beskonačni red uz $x(t_k)$,odnosno $F(t_k)$ za integral uz $u(t_k)$ dobija se konačno

$$x(t_{k+1}) = E(t_k)\; x(t_k) + F(t_k)\; u(t_k) \tag{3.17}$$

Izraz(3.16) može da posluži kao osnova,za konstrukciju diskretnog modela linearnog nestacionarnog sistema(3.9). Ovde će biti pokazano,kako se u nekim posebnim slučajevima, koristi dobiveni izraz.

1^o Pre svega,u stacionarnom slučaju matrice A i B su konstantne,pa se iz definicije(3.5) i (3.6) vidi da su u ovom posebnom slučaju sve $A_n(t_k) = A^n$.Ako se ovo iskoristi i zameni u izraz(3.16),pri čemu je radi uprošćenja izvršena smena $t_{k+1} - s = z$, $ds = - dz$,dobija se

$$x(t_{k+1}) = e^{AT}\, x(t_k) + \left\{\int_0^T e^{Az}\cdot B\cdot dz\right\} u(t_k) \tag{3.18}$$

Uporedjivanjem izraza(3.17) i (3.18),vidi se,da su u ovom slučaju,matrice $E(t_k)$ i $F(t_k)$ date sa

$$E(t_k) = E(T) = e^{AT}, \quad F(t_k) = F(T) = \left(\int_0^T e^{Az}dz\right)B \tag{3.19}$$

Dobiveni izraz(3,18) je poznat [9] kao diskretan model linearnog stacionarnog sistema, pa se na osnovu svodjenja opšteg izraza(3.16), u posebnom stacionarnom slučaju na poznati izraz(3.18) vidi potvrda ispravnosti izraza(3.16).

2^o U nestacionarnom slučaju korišćenje izraza(3.16) se principijelno može vršiti na dva načina. U onim slučajevima kada beskonačni redovi u izrazu(3.16) pretstavljaju razvoje poznatih matrica $E(t_k)$ i $F_1(t_k)$, odnosno kada je moguće odrediti granične funkcije pomenutih redova, onda je problem rešen u konačnom obliku. Tako odredjene matrice treba zameniti u izraz(3.17) i on se može sada koristiti kao diskretan model. Ako ovo nije moguće, onda se izraz(3.16) mora koristiti aproksimativno, kao što se u analognom skalarnom slučaju koristi Tajlorov red, zamenom beskonačnog reda sa prvih nekoliko članova. U tom cilju smatraćemo da u beskonačnim redovima(3.16) broj n uzima vrednosti 0,1,2,...,m gde je m konačan broj, za sada neodredjen, a treba ga birati tako da aproksimacija bude korektna.

Najgrublja aproksimacija bi se dobila za m=1, što bi se na osnovu izraza(3.16) svelo na

$$x(t_{k+1}) = \left\{I + TA(t_k)\right\}x(t_k) + \left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[I + (t_{k+1} - s)A(s)\right]B(s)ds\right\} u(t_k) \tag{3.20}$$

U slučaju da aproksimacija(3.20) ne daje zadovoljavajuće rezultate, treba uzeti i sledeći član, t.j. m=2, pa bi u ovom slučaju poboljšana aproksimacija bila

$$x(t_{k+1}) = \left\{I + TA(t_k) + T^2(\dot{A} + A^2)_k/2!\right\} x(t_k) + \left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[I + (t_{k+1} - s)A(s) + (t_{k+1} - s)^2(\dot{A} + A^2)_s/2!\right] B(s)ds\right\} u(t_k) \tag{3.21}$$

ako sada i ova aproksimacija ne daje zadovoljavajuće rezultate, onda treba uzeti i sledeći član(uzeti d[illegible]), i tako dalje povećavati m, sve dok se ne dobije zadovoljavajuća tačnost.

U izvedenim izrazima korak diskretizacije T definisan sa(3.12) treba birati tako,da redovi brzo konvergiraju,uz istovremeno zadovoljenje uslova(3.13).Ova veličina se može podešavati i u toku ispitivanja rada diskretnog sistema na elektronskom računaru,pri čemu se vrši njeno smanjivanje , ako prvi rezultati pokazuju velika odstupanja od očekivanih rezultata.Medjutim u onim slučajevima kada računar ima ograničeni kapacitet u pogledu broja decimalnih mesta,pozitivna veličina $T<1$ se ne može neograničeno smanjivati,pa se akumulirana greška može na konačni rezultat tako odraziti da je on praktično neupotrebljiv.U ovakvoj situaciji kada se iz navedenih razloga ili iz nekih drugih razloga korak diskretizacije ne može više smanjivati,možemo preciznost aproksimacije povećati povećanjem broja m, sve dok ne dobijemo zadovoljavajuću tačnost.

Tako se sada u zaključku može konstatovati,da se diskretan model linearnog nestacionarnog kontinualnom sistema može prikazati kao

$$x(t_{k+1}) = E(t_k)\, x(t_k) + F(t_k)\, u(t_k) \qquad (3.22)$$

gde su matrice $E(t_k)$ i $F(t_k)$ date sa

$$E(t_k) = \sum_{n=0}^{m} \frac{A_n(t_k)}{n!} T^n \; , \quad m \geqslant 1$$

$$F(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{n=0}^{m} \frac{A_n(s)}{n!} (t_{k+1} - s)^n B(s)\,ds \qquad (3.23)$$

gde su matrice A_n definisane izrazima(3.5) i (3.6).

U poredjenu sa diskretnim modelom stacionarnog linearnog sistema izvedenog u kursu[9],može se uočiti da su matrice E i F ovde funkcije vremena,dok su one u stacionarnom slučaju konstantne matrice(zavise od koraka diskretizacije T koji je konstantan).

Dobijeni teoretski rezultati su provereni na primeru, čije je rešenje dobijeno na drugi način,a zatim se uporedjenjem oba rezultata mogu doneti odgovarajući zaključci.

Posmatrajmo pravolinijsko kretanje materijalne tačke, čiji je položaj definisan koordinatom y(t), saglasno jednačini

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qe^{2pt}y = u(t), \quad y(t_o)=y_o, \quad \dot{y}(t_o)=\dot{y}_o \qquad (3.24)$$

gde su p i q poznate konstante, a u(t) funkcija upravljanja. Potrebno je odrediti kretanje tačke y(t) za $t > t_o$, ako je $u(t) = \delta(t-t_o)$ Dirakov impuls.

Rešenje ovog zadatka za početne uslove $y_o=0, \dot{y}_o= 0$ je dato u [27]

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{q}}e^{-pt}\sin\left[\frac{\sqrt{q}}{p}(e^{pt}- e^{pt_o})\right] \qquad (3.25)$$

Radi poredjenja, zadatak(3.24) je rešen pomoću diskretnog modela(3.22) numerički na elektronskom računaru, a zatim je dobijeno rešenje uporedjeno sa tačnim rešenjem(3.25).

Da bi se postavljeni zadatak rešio pomoću diskretnog modela prikazanog u tezi, potrebno je kretanje dinamičkog sistema prikazati u Košijevom obliku. U tom cilju transformisaćemo polaznu diferencijalnu jednačinu(3.24) smenama $y = x_1$, $\dot{y} = x_2$ na oblik(3.26), za p=0,2 i q=0,25.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}25e^{0{,}4t} & -0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \qquad (3.26)$$

pa se poredjenjem dobivenog izraza sa Košijevom formom(3.9) vidi da su u ovom slučaju matrice A(t) i B(t) date kao

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}25e^{0{,}4t} & -0{,}2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.27)$$

Za korišćenje diskretnog modela(3.22) neophodno je izračunati matrice $E(t_k)$ i $F(t_k)$ saglasno izrazima(3.23). U tom cilju izračunajmo ove matrice uzimajući ~~xx~~ m=3.

$$E(t_k) = A_o(t_k) + A_1(t_k)T + A_2(t_k)T^2/2! + A_3(t_k)T^3/3!$$

što bi nas saglasno oznakama(3.5), dovelo do konačnog rezultata u obliku

$$E(t_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,25e^{0,4t_k} & -0,2 \end{pmatrix} T +$$

$$+ \begin{pmatrix} -0,25e^{0,4t_k} & -0,2 \\ -0,05e^{0,4t_k} & 0,04 - 0,25e^{0,4t_k} \end{pmatrix} T^2/2! + \tag{3.28}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,4e^{0,4t_k} & 0,04-0,25e^{0,4t_k} \\ -0,03e^{0,4t_k} + 0,0625e^{0,8t_k} & -0,008-0,1e^{0,4t_k} \end{pmatrix} T^3/3!$$

$$F(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{pmatrix} (t_{k+1} - s) - 0,1(t_{k+1} - s)^2 + \\ 1 - 0,2(t_{k+1} - s) + (0,02-0,125e^{0,4s})(t_{k+1}-s)^2 + \\ + \frac{1}{6}(0,04 - 0,25e^{0,4s})(t_{k+1} - s)^3 \\ + \frac{1}{6}(-0,008 - 0,1e^{0,4s})(t_{k+1} - s)^3 \end{pmatrix} ds$$

Ovako izračunate matrice $E(t_k)$ i $F(t_k)$ su unešene u izraz(3.22) i tako je dobivena diferencna jednačina za rekurentno izračunavanje faznog vektora $x(t_k)$. Za konkretno izračunavanje je odabran korak diskretizacije $T = 0,05$sec $t_o = 2$sec, $t_k = kT + t_o$, $(k=o,1,2,\ldots,120)$, $t_\beta = t_{120} = 8$sec, a Dirakov impuls $u(t) = \delta(t-t_o)$ je aproksimativno prikazan funkcijom

$$\delta(t-t_o) = \begin{cases} 20 & \text{za} \quad 2 \leqslant t < 2,05 \\ 0 & \text{za} \quad t \geqslant 2,05 \end{cases} \tag{3.29}$$

Sada su definisani svi elementi u diskretnom modelu (3.22), neophodni za pravljenje programa za numeričko rešavanje. Ovaj primer je numerički rešen na elektronskom računaru IBM 1130 u računskom centru Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu na dva načina

1° Po programu pravljenom za diskretan model prikazan u tezi.

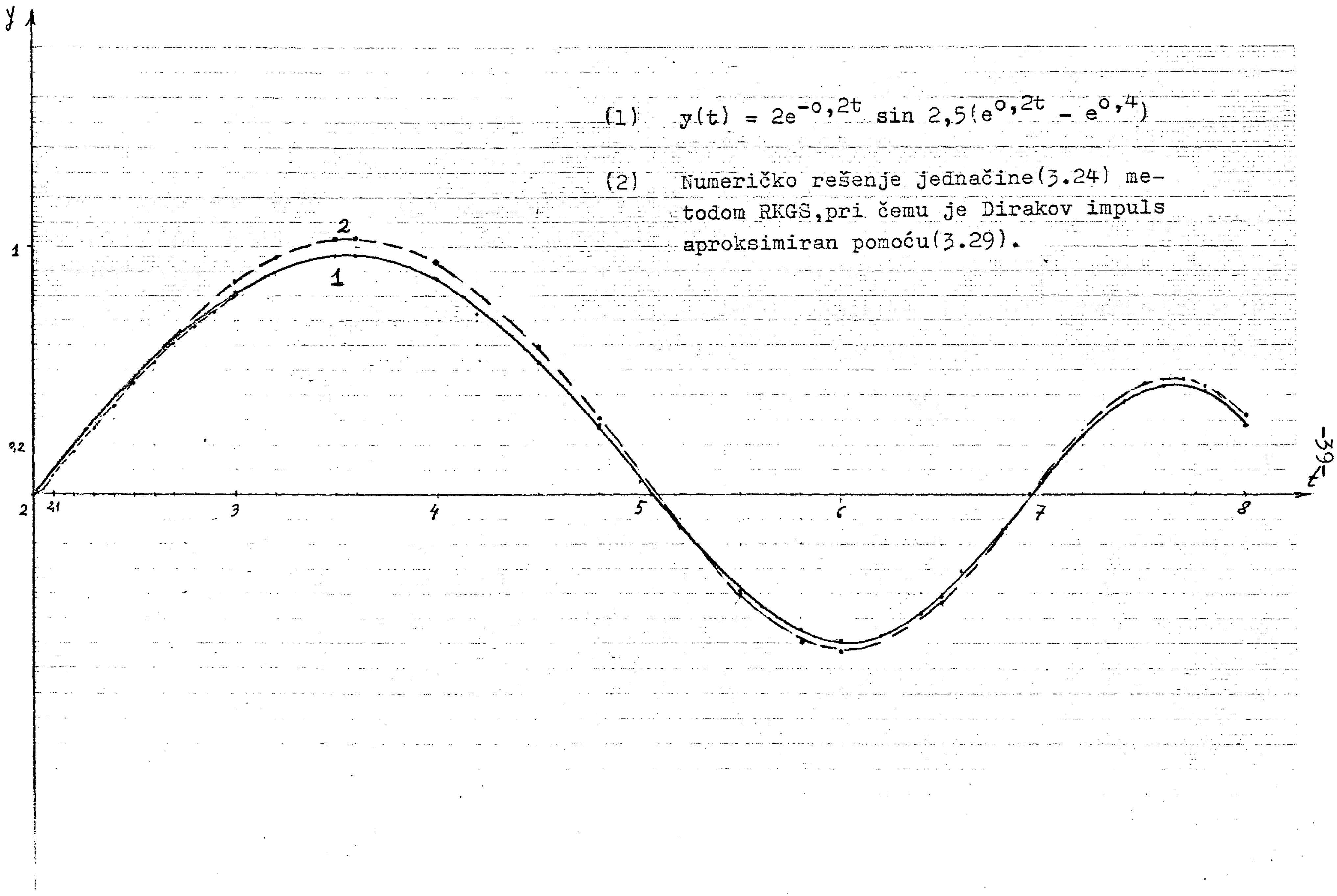
2° Po programu RKGS (Metodom Runge-Kuta).

Dobijeni numerički podaci su radi poredjenja prikazani u istom koordinatnom sistemu gde je nacrtana i kriva(3,25) koja pretstavlja tačno rešenje polazne diferencijalne jednačine(3.24).Da bi priloženi dijagram(sl.6) bio potpuniji,u priloženoj tabeli II su dati i numerički podaci za preciznije definisanje koordinata pojedinih tačaka nacrtane trajektorije.Od velikog broja podataka koje je računar štampao,ovde su prikazani samo karakteristični podaci,na osnovu kojih se mogu donositi zaključci o vrednosti dobijenih teoretskih rezultata.

TABELA II

t_k (sec)	tačno rešenje kriva(3.25)	numeričko reš. po (3.22)	numeričko reš. po RKGS
2	0	0	0
2,6	0,544	0,524	0,566
3	0,807	0,793	0,858
3,2	0,894	0,884	0,956
3,6	0,960	0,958	1,037
4	0,868	0,872	0,945
4,5	0,537	0,549	0,595
5	0,055	0,069	0,076
5,5	-0,397	-0,387	-0,418
6	-0,596	-0,596	-0,644
6,5	-0,406	-0,414	-0,447
7	0,052	0,052	0,056
7,5	0,415	0,433	0,445
8	0,282	0,288	0,311

Na osnovu podataka datih u priloženoj tabeli II,vidi se,da numeričko rešenje po(3.22) daje dosta dobru aproksimaciju tačnog rešenja(3.25)


y
t
1
0,2
2
2,1
3
4
5
6
7
8
2
1
(1) y(t) = 2e^{-0,2t} sin 2,5(e^{0,2t} - e^{0,4})
(2) Numeričko rešenje jednačine(3.24) metodom RKGS,pri čemu je Dirakov impuls aproksimiran pomoću(3.29).

Sl. 5

Na slici(6) numeričko rešenje po diskretnom modelu (3.22) nije prikazano,jer se približne vrednosti izračunate na ovaj način,razlikuju od tačnih vrednosti toliko malo,da se na priloženom dijagramu to ne može registrovati(krive se razlikuju za debljinu linije).Jedino uočljiva razlika postoji u početku za $t_0 \leq t \leq 2{,}6$sec,zato što je u postupku(3.22) Dirakov impuls aproksimativno prikazan funkcijom(3.29), dok je kod tačnog rešenja on uzet na najbolji način,kao skok prvog izvoda u trenutku t_0 za jedinicu.Treba imati u vidu,da se funkcionisanje matrice $F(t_k)$ u izrazu(3.22), može ispitati u ovom primeru,jedino ako se Dirakov impuls prikaže aproksimativno u obliku(3.29),ali ako je potrebno izračunati što tačnije vrednosti ordinata $y(t_k)$, onda je najbolje Dirakov impuls zameniti novim početnim uslovima $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0 + 1$, $F(t_k) = 0$

Vrednosti ordinata krive tačnog rešenja(3.25) su izračunavane na digitronu M.P.ALAS 841 sa osam cifara,od kojih su uzimane u obzir prve četiri cifre konačnog rezultata,jer se veća tačnost ne može ni registrovati na slici(6). Slično je uradjeno kod prepisivanja numeričkih podataka za obe numeričke metode,pri čemu su u sva tri slučaja zadnje cifre zaokruživane prema petoj cifri.

Jasno je da se na osnovu jednog primera, ne mogu donositi opšti zaključci o praktičnoj vrednosti diskretnog modela(3.22).Medjutim,ipak ćemo na osnovu dosadašnjeg rada konstatovati neke dobre i loše osobine,kao i ograničenja u pogledu neposrednog korišćenja diskretnog modela.

Ako se uzme u obzir,da je za konstrukciju diskretnog modela polazni izraz bila Košijeva formula(3.11),u kojoj figuriše fundamentalna matrica(3.4),data u obliku beskonačnog reda,onda je jasno da se za elemente $a_{ij}(t)$ matrice $A(t)$ u diferencijalnoj jednačini(3.9), mora pretpostaviti da su neprekidne i ograničene funkcije vremena t u posmatranom intervalu $[t_0, t_\beta]$, zajedno sa svojim izvodima do reda m-1.Odnosno za ove elemente se zahteva da su sporo promenljive funkcije vremena t u posmatranom intervalu $[t_0, t_\beta]$. Pojam sporo promenljive funkcije je preciznije formulisan naprimer u [27].

Osnovni nedostatak je procena greške,za koju u opštem slučaju ne postoji konačan izraz koji je praktično upotrebljiv.Za sada postoji mogućnost da se govori o veličini greške na taj način,što se smanjivanjem koraka diskretizacije T,ili povećavanjem broja m,uporedjuju dobijena rešenja Ako se novo dobijena rešenja malo razlikuju od prethodnih onda se može reći da je rešenje blizu tačnog,u protivnom greške mogu biti jako velike.Svakako da će rad sa izrazom (3.22) prilikom rešavanja većeg broja primera doprineti boljem sagledavanju problema greške,a možda otkriti i neke nove nedostatke.

U poredjenju sa metodom RKGS (bez obzira na uradjeni primer),za linearne sisteme treba očekivati da se na osnovu diskretnog modela(3.22) dobiju tačniji numerički podaci za $m \geqslant 4$,baš zbog toga što je metoda RKGS opšta metoda za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina,pa je logično očekivati manje tačne rezultate u odnosu na metodu (3.22) koja je specijalno pravljena za linearne sisteme. Sem toga preciznost numeričkog računanja se u metodi RKGS povećava jedino smanjivanjem koraka diskretizacije T,dok je u diskretnom modelu pored ovoga moguće povećavati preciznost i biranjem broja m do željene tačnosti.

Inače,na sledeće tri strane je dat program,na osnovu koga je numerički rešen navedeni primer.

T = 0,05 sec

```
PAGE  1

// JOB    2222

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000        2222        2222         0000

V2 M10   ACTUAL 16K   CONFIG 16K

// FOR
*IOCS(CARD,1132PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      EXTERNAL F1,F2
      DIMENSION AUX(10)
      COMMON XN
      TZ=2.
      VRED=20.
      X=2.
      DX=0.05
      X1=0.
      X2=0.
    1 XN=X+DX
      WRITE(3,100) X,X1,X2
  100 FORMAT(3F15.6)
      W=EXP(0.4*X)
      DIR=DIRAC(X,TZ,VRED)
      XP=(1.-0.125*W*DX*DX+0.066666*W*DX*DX*DX)*X1
      XD=(DX-0.1*DX*DX+(0.006666-0.041666*W)*DX*DX*DX)*X2
      CALL QATR(X,XN,0.01,10,F1,XT,IER,AUX)
      XC=(-0.25*W*DX-0.025*W*DX*DX+(-0.005000*W+0.0104166*W*W)*DX*DX*DX)
     **X1
      XG=(1.-0.2*DX+(0.02-0.125*W)*DX*DX+(-0.001333-0.01666*W)*DX*DX*DX)
     **X2
      CALL QATR(X,XN,0.01,10,F2,XS,IER,AUX)
      WRITE(3,101) XP,XD,XT,XC,XG,XS,DIR
  101 FORMAT(7F15.6)
      XT=XT*DIR
      XS=XS*DIR
      X1=XP+XD+XT
      X2=XC+XG+XS
      X=XN
      GO TO 1
   11 SRDJA=1.
      CALL EXIT
      END

UNREFERENCED STATEMENTS
 11

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON       2  VARIABLES      58  PROGRAM     358

END OF COMPILATION

// XEQ
```

t(sec)	y	Z = ẏ		
2.000000	0.000000	0.000000		
0.000000	0.000000	0.001245	0.000000	[illegible]
2.050000	0.024914	0.994776		
0.024896	0.049479	0.001245	-0.000710	0.98416[illegible]
2.099999	0.074376	0.983456		

```
// JOB    2222

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        2222        2222        0000
                          7771        0001

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      FUNCTION F2(X)
      COMMON XN
      F2=1.-0.2*(XN-X)+(0.02-0.125*EXP(0.4*X))*(XN-X)**2+(-0.001333-0.01
     *6666*EXP(0.4*X))*(XN-X)**3
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR F2
 COMMON       2  VARIABLES      16  PROGRAM      98

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0020 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*DELETE              F2
D 26 NAME NOT FOUND IN LET/FLET


*STORE      WS  UA  F2
CART ID 2222   DB ADDR  6070   DB CNT   0009
```

```
// JOB      22

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        2222         2222        0000
                           7771        0001

V2 M10   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      FUNCTION F1(X)
      COMMON XN
      F1=XN-X-0.1*(XN-X)**2+(0.006666-0.041666*EXP(0.4*X))*(XN-X)**3
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR F1
 COMMON       2  VARIABLES      10  PROGRAM      68

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0014 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*DELETE                 F1
D 26 NAME NOT FOUND IN LET/FLET


*STORE       WS  UA  F1
CART ID 2222   DB ADDR  606A   DB CNT   0006
```

G L A V A IV

OPŠTA DEFINICIJA I REŠENJE ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

U ovoj glavi je precizno formulisan problem optimalnog upravljanja i njegova interpretacija u normiranom funkcionalnom prostoru,da bi na kraju bilo dato i rešenje ovako postavljenog problema za neke linearne sisteme[16].

Posmatrajmo linearni sistem oblika

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + w(t),\ x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

gde su x(t),u(t) i w(t) vektori sa koordinatama $x_i(t)$,$u_j(t)$ i $w_i(t)$,$(i=1,2,\ldots,n)$,$(j=1,2,\ldots,r\leq n)$.

U poredjenju sa prethodnom glavom,gde je rešavan problem odredjivanja faznog vektora x(t),u slučaju da su sve ostale veličine u jednačini(4.1) poznate,ovde se problem uopštava utoliko,što je potrebno odrediti i funkciju upravljanja u(t) tako,da prevede dinamički sistem(4.1) iz stanja $x(t_0) = x_0$ u stanje $x(t_\beta) = x_\beta$.Fizički je jasno,da dinamički sistem(objekat upravljanja) iz stanja x_0 u stanje $x_\beta \neq x_0$ može preći na beskonačno mnogo načina,bilo da se kreće istom trajektorijom različitim brzinama,ili da se kreće po različitim trajektorijama.Ako se ne postave neki dopunski uslovi za upravljačku vektor funkciju u(t),ili za faznu trajektoriju $x(t),t\in[t_0,t_\beta]$,onda problem neće biti jednoznačno rešiv.Prema tome postojaće beskonačno mnogo upravljačkih funkcija u(t),koje mogu dinamički sistem prevesti u stanje x_β.U praksi je od interesa da dinamički sistem predje iz jednog u drugo stanje na odredjeni način.Naprimer,da potrošnja energije bude minimalna,upotrebom sile minimalnog modula,za najkraće vreme i sl.Ako smo u problemu uspeli da pronadjemo u(t) tako,da zadovoljava i jedan od navedenih zahteva u pogledu optimalnosti,onda smo pronašli takozvani optimalni vektor $u^0(t)$,a odgovarajuća fazna trajektorija $x^o(t)$,koja odgovara vektoru $u^o(t)$,biće optimalna fazna trajektorija u smislu postavljenog kriterijuma.

Fizički zahtevi kojima se dinamički sistem usmerava da radi optimalno u odredjenom smislu,ili zahtevi druge vrste,matematički izraženo pretstavljaju ograničenja vektorima $x(t)$ i $u(t)$ istovremeno ili posebno samo jednom od njih Ova ograničenja mogu biti jako raznovrsna(integralne jednačine i nejednačine,vezani ekstremumi,algebarske nejednačine i sl.),što zavisi od toga u kojoj se oblasti nalazimo.Sa mehaničke tačke gledišta interesantna su ograničenja u smislu minimizacije energije,impulsa,modula sile ili momenta,vremena prelaza iz jednog u drugo stanje,minimizacije predjenog puta i sl.Teško je naći opšti izraz,kojim bi se obuhvatila sva ova ograničenja samo iz jedne oblasti,pa će mo prihvatiti već usvojen naziv "intenzivnost upravljanja" [16] sa oznakom $\mathcal{H}$,pri čemu je ova veličina prikazana izrazom (1.24).

Od velikog broja raznovrsnih mogućnosti biranja integralnog izraza(1.24),ovde će mo se ograničiti na posmatranje samo takvih dinamičkih sistema,u kojima ograničenja u pogledu optimalnosti nameću ograničenja vektoru upravljanja $u(t)$, sa sledećim osobinama

$$
\begin{aligned}
&1^o \quad \mathcal{H}(u) = 0 \iff u(t) = 0 \quad \forall t \in [t_o, t_\beta] \\
&2^o \quad \mathcal{H}(u + v) \leq \mathcal{H}(u) + \mathcal{H}(v) \qquad\qquad (4.2) \\
&3^o \quad \mathcal{H}(au) = |a|\mathcal{H}(u) , \quad a \in R
\end{aligned}
$$

Praksa je pokazala,da u velikom broju slučajeva veličina $\mathcal{H}(u)$ ima navedene osobine(4.2),odnosno da se može tretirati kao norma vektora $u(t)$.Tako će mo od sada pa na dalje smatrati da je izraz(1.24) nenegativna funkcija $\mathcal{H}(u)$ sa osobinama(4.2) i da je ,

$$\mathcal{H}(u) = \rho^*(u) = \int_{t_o}^{t_\beta} \omega(t, u)\,dt \qquad (4.3)$$

pri čemu je $\rho^*(u)$ skalarna realna funkcija,prikazana u koloni broj dva u tabeli I.

Sa ovakvom interpretacijom, osnovni problem upravljanog kretanja se može formulisati na sledeći način [16].

<u>DEFINICIJA I</u>. Poznate su jednačine kretanja dinamičkog sistema (4.1), početno i krajnje stanje x_0 i x_β. Izmedju dopuštenih upravljanja $u(t) \in G$, koje prevode dinamički sistem iz stanja x_0 u x_β, treba pronaći optimalnu upravljačku funkciju $u^0(t)$, koja dinamički sistem čini optimalnim u smislu minimizacije norme $\mathcal{H}(u) = \rho^*(u)$, odnosno

$$\rho(u^0) \leq \rho^*(u) \ , \quad \forall u(t) \in G \tag{4.4}$$

gde je G oblast dopuštenih upravljanja.

Oblast G se zadaje na osnovu mogućnosti i konstruktivnih osobina dinamičkog sistema. Ova ograničenja su obično algebarske nejednačine, i njima se naglašava, da pojedine koordinate $u_j(t)$, ili ceo vektor $u(t)$ ne može izaći izvan ekstremnih vrednosti, jer bi u protivnom moglo doći do oštećenja pojedinih delova dinamičkog sistema. Naprimer, u slučaju da je upravljačka funkcija $u(t)$ moment, koji dejstvuje na osovinu, jasno je da taj moment ne sme preći onu vrednost, koja bi u materijalu osovine izazvala napon veći od dozvoljenog napona. Ako je osa pomenute osovine promenljivog pravca u trodimenzionom prostoru, onda je upravljačka funkcija $u(t)$ vektor sa tri koordinate $(r=3)$, pa bi u ovom slučaju oblast G bila unutrašnjost lopte

$$(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 = M^2 \tag{4.5}$$

gde je M, moment koji u osovini izaziva dozvoljeni napon.

Uopštem slučaju pretpostavićemo, da je oblast dopuštenih upravljanja G, konveksna oblast u prostoru sa koordinatama $u_1, u_2, \ldots, u_r$, pri čemu ona postaje lopta u slučaju (4.5), odnosno r-dimenzioni paralelepiped ako su ograničenja oblika $a_j \leq u_j \leq b_j$, $(j=1,2,\ldots,r)$, gde su a_j i b_j ekstremne vrednosti koordinata vektora upravljanja $u(t)$.

Obzirom da je ovako formulisan problem u definiciji I, rešen detaljno u kursu [16], ovde će biti korišćeni gotovi rezultati sa najnužnijim objašnjenjima. U tom cilju podjimo od Košijeve formule (3.2) u kojoj je stavljeno $t = t_\beta$. Tako dobiveni izraz možemo shvatiti kao integralnu jednačinu po nepoznatoj funkciji u(t)

$$\int_{t_0}^{t_\beta} H[t_\beta,t]u(t)dt = c \tag{4.6}$$

gde je $H[t_\beta,t] = X[t_\beta,t]\cdot B(t)$ takozvana impulsna prelazna matrica tipa $n\times r$,dok je poznati vektor c dat kao

$$c = x(t_\beta) - X[t_\beta,t_0]x(t_0) - \int_{t_0}^{t_\beta} X[t_\beta,t]w(t)dt \tag{4.7}$$

Dalje treba imati u vidu,da se svaka vrsta matrice H, može smatrati kao transponovani r-dimenzioni vektor kolona $h^{(i)}[t_\beta,t]$,$(i=1,2,\ldots,n)$,kojih ima ukupno n,a svaki ima po r koordinata $h_j^{(i)}[t_\beta,t]$,$(j=1,2,\ldots,r)$.Tako se sada,matrični način pisanja izraza(4.6) može zameniti skalarnim

$$\int_{t_0}^{t_\beta} h^{T(i)}[t_\beta,t]u(t)dt = c_i \;,(i=1,2,\ldots,n) \tag{4,8}$$

U izrazu(4.8) će mo smatrati da je nepoznata funkcija vektor kolona $u(t) = (u_j)$,$(j=1,2,\ldots,r)$,dok su ostale veličine poznate.Vektor funkciju u(t) treba odrediti tako, da reši problem iz definicije I.Za vektore $h^{(i)}[t_\beta,t]$ dalje pretpostavljamo,da pripadaju normiranom funkcionalnom prostoru $\mathcal{B}\{h(t),t_0\le t\le t_\beta\}$,sa normom $\rho(h)$,koja je za sada neodredjena.Slično se za vektor funkciju u(t) pretpostavlja da pripada normiranom funkcionalnom prostoru $\mathcal{B}^*$ odnosno $u(t)\in\mathcal{B}^*$,pri čemu je norma $\rho^*(u)$ data izrazom(4.3).

Ako se dalje uzme u obzir,da se leve strane izraza (4.8) mogu tretirati kao linearni funkcionali(u kursu [16] je usvojen termin linearna operacija) $\varphi_u[h]$ upravljačke funkcije $u(t)\in\mathcal{B}^*$,nad vektorima $h^{(i)}(t)$ iz prostora $\mathcal{B}$, onda je nov oblik diferencijalnih jednačina(4.8)

$$\varphi_u\left[h^{(i)}(t)\right] = c_i \;,\; (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.9}$$

Na osnovu objašnjenja datih u drugoj glavi gde je definisan opšti oblik linearne operacije izrazima(2.12) i (2.19),može se korišćenjem veze(2.18) odrediti norma $\rho(h)$ iz

$$\rho(h) = \max_u\left(\varphi_u[h(t)] \;,\rho^*(u) = 1\right) \tag{4.10}$$

gde je $\varphi_v[h(t)]$ linearna operacija,koja u ovom slučaju ima oblik

$$\varphi_v[h] = \int_{t_0}^{t_\beta} h^T(t)u(t)dt = \int_{t_0}^{t_\beta}\left(\sum_{j=1}^{r} h_j(t)u_j(t)\right)dt \qquad (4.11)$$

U onim slučajevima,kada se korišćenjem izraza(4.10), teško dolazi do konačnih rezultata,treba koristiti tabelu broj I,gde je data veza izmedju normi $\rho(h)$ i $\rho^*(u)$ za neke posebne slučajeve,ili ako ova veza ne postoji u pomenutoj tabeli,onda se može,norma $\rho(h)$ potražiti iz izraza(2.16) i (2.17).

Sa ovakvom interpretacijom,problem sadržan u definiciji I,može se formulisati kao [16].

PROBLEM MOMENTA. Neka je u prostoru $\mathcal{B}\{h(t);t_0 \leq t \leq t_\beta\}$ sa normom $\rho(h)$, zadano n elemenata $h^{(i)}(t)$.Neka je dalje dato n skalara c_i,(i=1,2,...,n),tako da je $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$, $c_i \in R$. Potrebno je pronaći linearnu operaciju $\varphi^o[h(t)]$,definisanu nad celim prostorom $\mathcal{B} \ni h(t)$,tako da bude zadovoljena jednačina(4.9),i da je norma $\rho^*(\varphi^o)$ operacije $\varphi^o[h(t)]$ najmanja od normi svih operacija $\varphi[h]$,koje zadovoljavaju(4.9).

Operacija $\varphi^o[h] = \varphi^o_v$ koja zadovoljava formulisane zahteve,zove se optimalna linearna operacija.

Treba imati u vidu,da problem momenta u svojoj prvobitnoj verziji nije sadržao i dopunski uslov o optimalnosti,već samo zadovoljenje jednačina(4.9).Medjutim,ovde će se pod problemom momenta podrazumevati,da pored uslova(4.9) treba da budu zadovoljeni i zahtevi o optimalnosti.

Inače,problem momenta na koji je sveden osnovni zadatak o optimalnom upravljanju,dobio je ovo ime,jer je potekao iz konkretnih problema o načinu rasporeda masa,naelektrisanja,verovatnoće i sl. tako da se obezbede odredjeni momenti(moment sile,moment inercije,moment verovatnoće,...).

U definiciji problema momenta uslov $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$ je uvek zadovoljen,jer u protivnom ako bi bilo $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 0$,onda ne bi bilo nikakvog upravljanja,pošto bi funkcija $u(t) \equiv 0$, $t \geq t_0$ zadovoljavala sve zahteve(4.9) i zahteve o optimalnosti. Prema tome u slučaju da su sve konstante c_i jednake nuli, optimalna upravljačka funkcija u^o je identički jednaka nuli.Za dalje pretpostavljamo da je bar jedna realna konstanta c_i različita od nule.

Na osnovu [16], rešenje problema momenta je definisano sledećom teoremom:

TEOREMA Optimalna operacija $\varphi^{o}[h(t)]$, koja rešava problem momenta, postoji tada i samo tada, kada je

$$\rho^{o} = \rho(h^{o}) > 0 \ , \tag{4.12}$$

pri čemu je

$$\rho^{*}(\varphi^{o}) = \left(\rho^{o}\right)^{-1} , \tag{4.13}$$

gde je h^{o} takozvana minimalna vektor funkcija, data kao

$$h^{o} = \sum_{i=1}^{n} l_i^{o} h^{(i)} \ , \tag{4.14}$$

a skalari l_i^{o} pretstavljaju rešenja vezanog ekstremuma

$$\rho^{o} = \min_{h} \rho(h) = \min_{l_i} \rho\left(\sum_{i=1}^{n} l_i h^{(i)}\right) \text{ pri } \sum_{i=1}^{n} l_i c_i = 1 \tag{4.15}$$

Dokaz ove teoreme detaljno je prikazan u [16], a ovde će biti dat samo fizički smisao najvažnijeg stava (4.13).

Pre svega, treba imati u vidu, da izraz (4.13) pretstavlja matematičku interpretaciju intenzivnosti upravljačke funkcije u(t), odnosno da je $\mathcal{H}(u) = \rho^{*}(u)$, koja fizički pretstavlja rezervu upravljačke funkcije u(t) u smislu konačne količine energije, konačno velikog modula sile, momenta, impulsa i sl., onda je jasno da veličina $\mathcal{H}(u) = \rho^{*}(u)$, mora biti ograničena funkcija. Tako se sada uslov (4.12) slaže sa intuitivnom pretstavom o konačnoj vrednosti intenzivnosti upravljačke funkcije. Sem toga, dubok fizički smisao nejednakosti (4.12) je iskorišćen u [16], za definisanje dovoljnih uslova upravljanosti (kontrolabilnosti) linearnih nestacionarnih dinamičkih sistema oblika (4.1), za slučaj da je $w(t) = 0$. U cilju definisanja ovih uslova posmatraćemo linearni sistem

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\,u \ , \ x(t_o) = x_o \tag{4.16}$$

Za sistem (4.16) se kaže da je potpuno upravljajući (kontrolabilan), ako je moguće pronaći upravljačku funkciju u(t) tako, da dinamički sistem prebaci iz stanja x_o u stanje $x(t_\beta) = x_\beta$, za proizvoljne vrednosti x_o i x_β, i za konačno vreme $t_o - t_\beta$. U ovoj definiciji nisu sadržani zahtevi o optimalnosti dinamičkog sistema.

Posmatrajmo matrice $L_k(t)$ definisane kao:

$$
\begin{aligned}
L_1(t) &= B(t) \\
L_2(t) &= A(t)\, L_1(t) - \dot{L}_1(t) \\
&\vdots \\
L_k(t) &= A(t)\, L_{k-1}(t) - \frac{dL_{k-1}(t)}{dt}\,, \quad (k=2,3,\ldots,n)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Obzirom da u definisanim matricama $L_k(t)$ figurišu matrice $A(t)$ i $B(t)$ iz sistema(4.16),kao i njihovi izvodi do reda n-1,onda je jasno da će mo posmatrati samo takve sisteme, u kojima su ove matrice neprekidne zajedno sa svojim izvodima do n-1 reda,u posmatranom intervalu $t \in (t_0, t_\beta)$. U krajnjim tačkama t_0 i t_β reč je o desnom odnosno levom izvodu respektivno.

Neka je u intervalu $t \in (t_0, t_\beta)$ moguće pronaći trenutak $t = t^*$,u kome je rang matrice

$$K(t) = \left\{ L_1(t) \,\vdots\, L_2(t) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, L_n(t) \right\} \tag{4.18}$$

jednak n.Tada je dinamički sistem(4.16) potpuno upravljajući u posmatranom intervalu.

Dokaz ovog stava je dat u[16],a kao osnova i polazna relacija je korišćena nejednakost(4.12).

U specijalnom slučaju,kada su matrice A i B konstantne(stacionarni sistemi),biće iz(4.17) $L_k = A^{k-1} \cdot B$ pa je

$$K(t) = K = \left\{ B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, A^3B \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A^{n-1}B \right\} \tag{4.19}$$

pa se u ovom specijalnom slučaju, stav o upravljanosti može formulisati na sledeći način:

Da bi linearni stacionarni sistem $\dot{x} = Ax + Bu$,bio kotrolabilan,neophodno je i dovoljno,da rang matrice(4.19) bude n.Razlika je u tome, što su u stacionarnom slučaju ovi uslovi istovremeno potrebni i dovoljni,dok su oni u slučaju (4.16) dovoljni, a nisu i neophodni .

Dalje se na osnovu izraza(2.14) može postaviti vrlo važan princip maksimuma za linearnu operaciju $\varphi[h]$

Korišćenjem izraza(2.14) i (4.13) može se doći do važnih nejednakosti

$$\rho^*(\varphi) = \sup_h \frac{|\varphi[h]|}{\rho(h)} \Rightarrow \rho^*(\varphi)\cdot\rho(h) \geq \varphi[h]$$

$$\varphi^o[h^o] = 1 \quad , \quad \rho^*(\varphi^o) = (\rho_o)^{-1} \tag{4.20}$$

Ako se uoči neka druga linearna operacija $\varphi[h] \neq \varphi^o$, koja ima istu normu $\rho^*(\varphi) = \rho_o^{-1}$ kao optimalna operacija φ^o, onda se iz nejednakosti(4.20) dobija za $h = h^o$

$$\varphi[h^o] \leq \rho^*(\varphi)\rho(h^o) = \rho_o^{-1}\cdot\rho_o = 1 = \varphi^o[h^o]$$

$$\varphi[h^o] \leq \varphi^o[h^o] \tag{4.21}$$

Tako sada, rečima formulisana nejednakost(4.21), pretstavlja princip maksimuma.

<u>PRINCIP MAKSIMUMA</u>(*) Optimalna linearna operacija $\varphi^o[h]$ koja ima normu $\rho^*(\varphi^o) = \rho_o^{-1}$, izdvaja se izmedju svih ostalih linearnih operacija $\varphi[h]$, sa istom normom $\rho^*(\varphi) = \rho_o^{-1}$ sledećim svojstvom maksimuma nad minimalnom funkcijom $h^o(t)$

$$\varphi^o[h^o(t)] = \max_{\varphi} \varphi[h^o(t)] = 1 \ , \ \rho^*(\varphi) = \rho_o^{-1} \tag{4.22}$$

Tako se sada, posle odredjivanja minimalne vektor funkcije $h^o(t)$ iz (4.15), može na osnovu relacije(4.22), doći u velikom broju slučajeva do eksplicitnog oblika linearne operacije $\varphi^o[h(t)]$, a samim tim i do rešenja optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$. Praksa je pokazala, da najveće probleme zadaje odredjivanje fundamentalne matrice $X[t,t_o]$, i minimalne funkcije $h^o(t)$, dok se po pravilu(4.22) relativno lako dolazi do konačnih rezultata. Zato će mo u zaključku konstatovati

1° Problem momenta ima rešenje tada i samo tada, kada je za minimalnu funkciju $h^o(t)$ ispunjen uslov $\rho(h^o) = \rho^o > 0$, gde je $\rho(h^o)$ nadjeno po pravilu(4.15)

(*) Ne radi se o principu maksimuma L.S.Pontrjagina iz [25], već o principu definisanog u obliku(4.22)

2° Kriterijum optimalnosti optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$ zadovoljava uslove

$$\max_{u} \int_{t_o}^{t_\beta} (h^o)^T u(t)dt = \int_{t_o}^{t_\beta} h^o(t)\, u^o(t)dt = 1$$
$$\text{i} \quad \rho^*(u^o) = \mathcal{H}(u^o) = (\rho^o)^{-1} \tag{4.23}$$

Ako bi sada trebalo dati praktična uputstva, za rešavanje zadataka o optimalnom upravljanju po metodi iz [16], koja je prikazana u četvrtoj glavi, onda bi se ta uputstva svela na sledeće:

I. Postaviti diferencijalne jednačine kretanja dinamičkog sistema i svesti ih na Košijevu formu(1.27).

II. Proveriti da li je sistem kontrolabilan na osnovu ranga matrice $K(t)$, date relacijom(4.19).

III. Proveriti, da li kriterijum optimalnosti (intenzivnost upravljačke funkcije) zadovoljava aksiome norme, t.j. da li se može smatrati da je $\mathcal{H}(u) = \rho^*(u)$.

IV. Ako su prethodni uslovi ispunjeni, može se pristupiti rešavanju optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$, tako što se prvo odredi fundamentalna matrica $X[t,t_o]$, a zatim matrica $H[t_\beta,t] = X[t_\beta,t]\cdot B(t)$, da bi pomoću ove mogli definisati vektor funkciju $h(t) = H^T[t_\beta,t]$ oblika(4.14).

V. Sada treba odrediti normu $\rho(h)$ na osnovu polazne norme $\rho^*(u)$, što se može uraditi korišćenjem tabele I, ili ako ovaj slučaj ne postoji u tabeli onda po pravilu(4.10).

VI. Dalje zreba odrediti minimalnu funkciju $h^o(t)$ po pravilu(4.15), a zatim tako izračunato $h^o(t)$ uneti u izraz (4.23), odakle se neposredno rešava $u^o(t)$.

VII. Na kraju se, ovako izračunato $u^o(t)$ unese u Košijevu formulu(3.2) i tako kao konačni rezultat dobije rešenje faznog vektora $x^o(t)$.

Na kraju četvrte glave biće data formulacija problema momenta u nešto izmenjenom obliku, jer je nekada baš ovako izmenjen oblik pogodan za dalje korišćenje u problemima odredjivanja optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$.

U tom cilju će mo, oslanjajući se na princip maksimuma(4.22), poći od vektor funkcije $h(t)$ oblika(4.15) napisane u obliku

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i h^{(i)}(t) = H^T[t_\beta, t] \cdot \ell , \qquad (4.24)$$

gde je ℓ vektor kolona sa koordinatama ℓ_i.

Potrebno je iz skupa vektora(4.24), pronaći minimalnu vektor funkciju $h^o(t)$ po pravilu(4.15). U tom cilju transvormisaćemo matricu $H[t_\beta, t]$ na sledeći način

$$H^T[t_\beta, t] = \left\{X[t_\beta, t]\, B(t)\right\}^T = B^T(t)\left\{X^{-1}[t, t_\beta]\right\}^T \qquad (4.25)$$

Zamenom poslednjeg izraza u (4.24) dobija se

$$h(t) = B^T(t)\left\{X^{-1}[t, t_\beta]\right\}^T \cdot \ell = B^T(t)\ s(t) \qquad (4.26)$$

Ako se sada uzme u obzir da je $\left\{X^{-1}[t, t_\beta]\right\}^T$ fundamentalna matrica sistema $\dot{s} = - A^T(t)\ s$, $s(t_\beta) = \ell$,onda se traženje minimalne funkcije $h^o(t)$ svodi na rešavanje vezanog ekstremuma

$$\rho\left(B^T(t) s^o(t)\right) = \min_s \rho\left(B^T(t) s(t)\right), \quad c^T s(t_\beta) = 1 \qquad (4.27)$$

Tako se sada traženje optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$, može formulisati kao

<u>PRAVILO MINIMAKSA</u> Da bi rešili problem momenta, treba iz jednačine $\dot{s} = - A^T s$ odrediti $s(t)$. Iz skupa rešenja $s(t)$ treba odabrati $s^o(t)$, za koje je ispunjen uslov(4.27). Probleb momenta ima rešenje tada i samo tada, kada je

$$\rho\left(B^T(t)\ s^o(t)\right) = \rho(h^o) = \rho^o > 0 \qquad (4.28)$$

i izmedju svih dopuštenih upravljanja $u(t)$ sa normom(4.13), izdvaja se uslovom maksimuma(4.23) nad minimalnom funkcijom $h^o(t) = B^T(t)\ s^o(t)$.

GLAVA V

ODREDJIVANJE UPRAVLJAČKE FUNKCIJE U NEKIM SPECIJALNIM SLUČAJEVIMA OPTIMALNOSTI

Da bi opšta teorija prikazana u četvrtoj glavi,dobila konkretni smisao,za rešavanje problema optimalnosti,potrebno je intenzivnosti upravljačke funkcije $\mathcal{H}(u) = \int^{*}(u)$ dati konkretne vrednosti,tako da prikazuje raznovrsne kriterijume optimalnosti.Iz skupa velikog broja raznovrsnih problema,ovde će biti birani samo oni,koje možemo do kraja rešiti u zatvorenoj formi.

1^{o} <u>Upravljanje minimalnom energijom</u>.Jedan od najlakših slučajeva,koji skoro uvek daje rešenje optimalne funkcije $u^{o}(t)$ u konačnom obliku,je slučaj upravljanja minimalnom energijom.Ako se uzme u obzir,da je upravljanje sa sa električnom energijom danas često zastupljeno,a u ovim slučajevima je obično upravljačka funkcija $u(t)$ srazmerna jačini struje $u(t) = k \cdot i(t)$,onda se,kao kriterijum optimalnosti pojavljuje ukupna količina potrošene energije

$$E(t_{\beta}) = k^{2}\int_{t_0}^{t_{\beta}} i^{2}(t)\, dt \quad , \tag{5.1}$$

gde parametar k reguliše dimenzionu jednakost.

Uočimo oblik izraza(5.1),koji je napisan za slučaj,da vektor upravljačke funkcije ima jednu koordinatu(r=1),onda je logično da će za $r > 1$ kriterijum optimalnosti biti oblika

$$\mathcal{H}(u) = \left(\int_{t_0}^{t_{\beta}} \sum_{i=1}^{r} u_i^{2}(t)\, dt\right)^{1/2} \tag{5.2}$$

U zavisnosti od toga,šta je dimenziono upravljačka funkcija $u(t) = u_j(t)$,$(j=1,2,\ldots,r)$,izraz(5.2) će nekada pretstavljati ukupno potrošenu energiju,a nekada nešto drugo.Medjutim,bez obzira što izraz(5.2) neće uvek pretstavljati ukupnu rezervu energije,koja se može utrošiti za upravljanje dinamičkim sistemom,usvojeno je u [16],da se takvo upravljanje dinamičkim sistemom,u kome treba minimizirati izraz(5.2),zove upravljanje minimalnom energijom.

Pošto će ovde,biti dat samo principijelan put za odredjivanje optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$,u smislu minimizacije izraza(5.2),smatraćemo da je dinamički sistem sveden na normalni oblik,da je kontrolabilan i da je rešena fundamentalna matrica $X[t,t_o]$.Prvo treba konstatovati,da izraz(5.2) može pretstavljati normu $\rho^*(u)$ vektor funkcije $u(t)$,jer ispunjava aksiome norme.Sledeći korak je odredjivanje pridružene norme $\rho(h)$.Ona se može pronaći u tabeli I slučaj 4,tako da je u ovom slučaju

$$\rho(h) = \left(\int_{t_o}^{t_\beta}\sum_{i=1}^{r} h_i^2(t)\,dt\right)^{1/2} \qquad (5.3)$$

gde je r-dimenzioni vektor $h(t) = \{h_j(t)\}$,$(j=1,2,..,r)$ iz prostora $\mathcal{B} \ni h(t)$,dok je r-dimenzioni vektor $u(t)$ iz konjugovanog prostora $\mathcal{B}^* \ni u(t)$.

Saglasno pravilu minimaksa,sledeća etapa je odredjivanje vektor funkcije $h^o(t)$,koja se odredjuje na osnovu izraza(4.15).Po pretpostavci vektori $h^{(i)}(t)$ su poznati, ima ih n,i svaki ima po r koordinata.Ako se još uzme u obzir,da će izraz(5.3) dostići minimalnu vrednost istovremeno kada i njegov kvadrat $\rho^2(h)$,onda se izračunavanjem ovog poslednjeg,dobija kvadratna forma

$$P(l_1,l_2,\dots,l_n) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}l_il_j \qquad (5.4)$$

tako da se izračunavanje minimalne funkcije $h^o(t)$ svelo na odredjivanje skalara l_i iz uslova

$$\min_{l_i}\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}l_il_j \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} l_i\cdot c_i = 1 \qquad (5.5)$$

Lagranžovom metodom neodredjenih koeficijenata dobijaju se rešenja vezanog ekstremuma(5.5) l_i^o,$(i=1,2...,n)$. Na taj način je odredjena minimalna funkcija(4.14),a samim tim i kvadrat integrala(5.3) koji je u ovom slučaju

$$(\rho^o)^2 = \left[\rho(h^o)\right]^2 = P(l_1^o,l_2^o,\dots,l_n^o) \qquad (5.6)$$

Ako je $\rho^o > 0$,onda je sledeća etapa odredjivanje optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$ iz uslova(4.23).U ovom slučaju uslov(4.23) se pretvara u

$$\int_{t_0}^{t_\beta} \left[h^o(t)\right]^T \cdot u^o(t)dt = \max_u \int_{t_0}^{t_\beta} \left[h^o(t)\right]^T u(t)dt = 1$$

$$\text{pri} \quad \int_{t_0}^{t_\beta} \sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)dt = (\rho_0)^{-2} \tag{5.7}$$

Varijacioni problem(5.7) se može rešiti Lagranžovom metodom neodredjenih koeficijenata. Na osnovu[16] rešenja su

$$h_i^o(t) = -2a\, u_i^o(t) \implies h^o(t) = -2a\, u^o(t) \tag{5.8}$$

Parametar a se može odrediti tako, što se rešenje(5.8) zameni u(5.7), odakle sledi da je $-2a = (\rho_0)^2$, pa je

$$u^o(t) = (\rho_0)^{-2} h^o(t) \tag{5.9}$$

Na taj način je dobiveno jedinstveno rešenje optimalne upravljačke funkcije u konačnom obliku(5.9).

Na završetku ove oblasti (upravljanje minimalnom energijom), treba imati u vidu, da se krug problema, koji se može na ovaj način rešavati, može proširiti na sledeći način.

Ako se obrati pažnja na integral(5.2), vidi se da pod integralom figuriše homogena kvadratna forma koordinata u_i. U slučajevima, kada je podintegralna funkcija pozitivno definitna kvadratna forma oblika

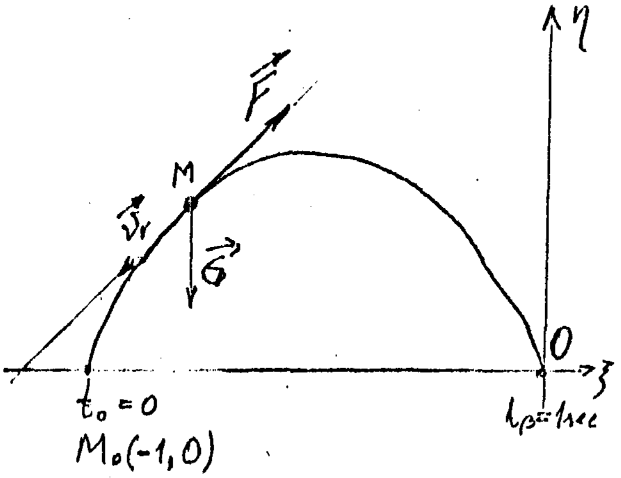
$$\omega(u) = \sum_{i,j=1}^{r} m_{ij}\, u_i \cdot u_j \ , \tag{5.10}$$

može se izvršiti smena $v(t) = P(t) \cdot u(t)$, pri kojoj se data kvadratna forma(5.10) svodi na kanonski oblik

$$\|v(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{r} v_i^2 \tag{5.11}$$

Postojanje nesingularne linearne transformacije P(t) je dokazano u teoriji kvadratnih formi[16]. Na ovaj način bi se problem odredjivanja upravljačke funkcije $u^o(t)$, sveo na prethodni, kada je intenzivnost upravljačke funkcije data izrazom(5.2).

Kao primer, odredimo upravljačku funkciju za kretanje materijalne tačke M,mase m(t),koja se kreće u vertikalnoj ravni,pod dejstvom sile zemljine teže i reaktivne sile usled odvajanja čestica od osnovne mase m(t).Odgovarajuća diferencijalna jednačina kretanja tačke m će imati oblik



$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{G} + \vec{F}$$

gde su: $m = m(t)$-masa tačke, promenljiva u toku vremena sa poznatim ili traženim zakonom promene.$\vec{G}$-težina tačke M,dok je $\vec{F} = (\vec{u} - \vec{v})\cdot\dot{m}$ -reaktivna sila.Skalarne jednačine su

$$m(t)\,\ddot{\xi} = \dot{m}\,v_{r\xi} \quad \text{i} \quad m(t)\,\ddot{\eta} = \dot{m}\,v_{r\eta} - m(t)\,g$$

$$\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}\,,\quad v_{r\xi} = |\vec{v}_r|\cos(\vec{v}_r,\xi) = A\cos\alpha_\xi\,, v_{r\eta} = A\sin\alpha_\xi$$

$$\frac{\dot{m}}{m}\,A\cos\alpha_\xi = u_1\,,\quad \frac{\dot{m}}{m}\,A\sin\alpha_\xi = u_2$$

tako da sa ovim oznakama diferencijalne jednačine postaju

$$\ddot{\xi} = u_1 \quad \text{i} \quad \ddot{\eta} = u_2 - g$$

Dobijene su dve linearne diferencijalne jednačine drugog reda.Da bi sveli ove jednačine na normalni oblik,uvedimo sledeće oznake: $\xi = x_1$, $\dot{\xi} = x_2$, $\eta = x_3$, $\dot{\eta} = x_4$.Sa novim oznakama skalarne diferencijalne jednačine postaju

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_2 - g \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},\quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.1)$$

Poslednje jednačine se mogu napisati u matričnom obliku

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + w(t)$$

gde su vektori x i u već prikazani a matrice A(t) i B(t) su u ovom slučaju date kao

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Zadatak će mo formulisati na sledeći način:Odrediti upravljačku funkciju $u^{o}(t)$ tako,da prebaci tačku M iz stanja $x(t_o) = (-1,0,0,0)$ u stanje $x(t_\beta) = (0,0,0,0)$ za vreme $T = t_\beta - t_o = 1$ sec,uz dopunski uslov,minimalnosti izraza

$$\mathcal{H}[u] = \left(\int_{t_o}^{t_\beta} \left[u_1^2 + u_2^2\right] dt \right)^{1/2}, \tag{5.15}$$

ne ulazeći u fizički smisao tog uslova.

Nastavimo rešavanje postavljenog zadatka,odredjivanjem fundamentalne matrice $X[t,t_o]$.

$$X[t,t_o] = e^{A(t-t_o)} = I + A(t-t_o) + A^2(t-t_o)^2/2! + \dots$$

$$A^2 = 0 \qquad A^3 = A^4 = \dots = A^n = 0 \ , \ n \geqslant 2, \text{ pa je}$$

$$X[t,t_o] = \begin{pmatrix} 1 & t-t_o & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t-t_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H[t_\beta,t] = X[t_\beta,t]B(t) = X^{-1}[t,t_\beta]B(t) = S'[t,t_\beta]B(t)$$

$$H[t_\beta,t] = \begin{pmatrix} t_\beta-t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & t_\beta-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}$$

$$h(t) = H'[t_\beta,t]\cdot l = \begin{pmatrix} l_1(t_\beta-t) + l_2 \\ l_3(t_\beta-t) + l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

Sledeći korak je odredjivanje vektora c na osnovu(4.7) pri čemu je $t_0 = 0, x(t_\beta) = 0$, pa je

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g(t_\beta - t_0)^2/2 \\ g(t_\beta - t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g/2 \\ g \end{pmatrix}$$

Ako se sada uzme u obzir, da se zamenom vektora h(t) u integral(5.3), dobija kvadriranjem izraz(5.4), onda izraz(5.5) u ovom slučaju postaje

$$\min_{l_i} \int_0^1 \left\{ \left[\ell_1(1-t) + \ell_2\right]^2 + \left[\ell_3(1-t) + \ell_4\right]^2 \right\} dt$$

pri $\qquad \ell_1 + g/2\,\ell_3 + g\,\ell_4 = 1$

Rešenja ovog vezanog ekstremuma su skalari ℓ_i^0

$$\ell_1^0 = \frac{12}{g^2+12}, \quad \ell_2^0 = \frac{-6}{g^2+12}, \quad \ell_4^0 = \frac{g}{g^2+12}, \quad \ell_3^0 = 0$$

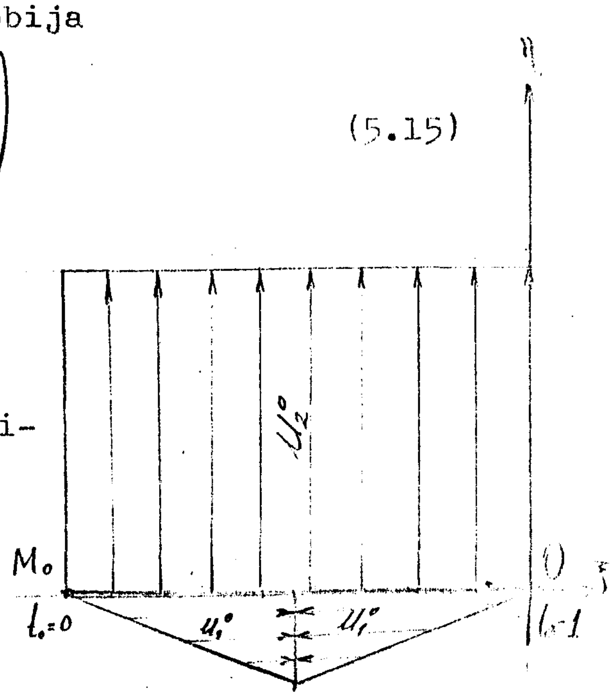
Sada je iz(4.14) i (4.15)

$$h^0(t) = \frac{1}{g^2+12} \begin{pmatrix} 6 - 12t \\ g \end{pmatrix} \qquad \left(\rho^0\right)^2 = (g^2 + 12)^{-1}$$

pa se na kraju zamenom u (5.9) dobija

$$u^0(t) = \begin{pmatrix} 6 - 12t \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ u_2^0(t) \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Zamenom $u^0(t)$ u Košijevu formulu(3.2) dobija se fazna trajektorija $x^0(t)$, koja je na slici prikazana sa duži M_0O. Na samoj slici su prikazane i vrednosti upravljačke funkcije u pojedinim tačkama trajektorije, pri čemu u_2^0 kompenžira silu teže.



2° Upravljanje minimalnom silom. Sa mehaničke tačke gledišta, ovo je drugi karakterističan slučaj optimalnog upravljanja silom u(t), čiji je modul ograničen.

Ako se pretpostavi, da je u(t) r-dimenzioni vektor sa koordinatama $u_j(t)$, $(j=1,2,\ldots,r)$, onda intenzivnost $\mathcal{H}(u)$ može biti oblika

$$\mathcal{H}(u) = \rho^{*}(u) = \max_{t_0 \le t \le t_\beta} \|u(t)\| = \max \left(\sum_{i=1}^{r} u_i^2(t) \right)^{1/2} \tag{5.16}$$

pa se iz tabele I (slučaj 5), vidi, da je odgovarajuća pridružena norma

$$\rho(h) = \int_{t_0}^{t_\beta} \|h(t)\|\, dt = \int_{t_0}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} h_i^2(t) \right)^{1/2} dt \tag{5.17}$$

Ako se u toku upravljanja dinamičkim sistemom zahteva, da svaka koordinata $u_j(t)$ ne predje svoju ekstremnu vrednost po modulu, onda se kao kriterijum optimalnosti javlja izraz

$$\mathcal{H}(u) = \rho^{*}(u) = \max_{t_0 \le t \le t_\beta} \left[\max_{i} |u_i(t)| \right] \tag{5.18}$$

pa je u ovom slučaju pridružena norma iz tabele I (slučaj 7)

$$\rho(h) = \int_{t_0}^{t_\beta} \left(\sum_{i=1}^{r} |h_i(t)| \right) dt \tag{5.19}$$

Tako bi se sada, u slučaju da je $\rho(h)$ oblika (5.17), minimalna funkcija $h^o(t)$ tražila rešavanjem vezanog ekstremuma

$$\rho(h^o) = \min_{l_i} \int_{t_0}^{t_\beta} \left\| \sum_{i=1}^{n} l_i h^{(i)}(t) \right\| dt, \quad \sum_{i=1}^{n} l_i c_i = 1 \tag{5.20}$$

Pod pretpostavkom da je minimalna funkcija $h^o(t)$ rešena, može se dalje, odrediti optimalna upravljačka funkcija $u^o(t)$ na osnovu principa maksimuma (4.23), koji u ovom slučaju dovodi do rešenja

$$u^o(t) = (\rho_o)^{-1} \cdot \frac{h^o(t)}{\|h^o(t)\|} \tag{5.21}$$

Dobiveni rezultat (5.21) odgovara polaznoj normi (5.16), dok bi se, u slučaju da je polazna norma oblika (5.18), sličnim rezonovanjem došlo do zaključka, da je optimalna upravljačka funkcija $u^o(t)$ vektor sa koordinatama

$$u_i^o(t) = (\rho^o)^{-1} \operatorname{sgn} h_i^o(t) \;, \quad (i=1,2,\ldots,r) \qquad (5.22)$$

Izrazi (5.21) i (5.22) su definisani za sve vrednosti $t \in [t_o, t_\beta]$ sem onda kada je $h^o(t) = 0$. U tačkama gde je $h^o = 0$ usvojeno je u [16], da je upravljačka funkcija neprekidna s desna, jer njena vrednost u konačnom broju trenutaka t_j, u kojima se anulira $h^o(t)$, nema suštinskog značaja zbog inercionih osobina dinamičkih sistema.

Radi uporedjenja, odabraćemo isti primer kao u slučaju upravljanja minimalnom energijom, pa će se videti razlika u konačnim rezultatima. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke M su date izrazom (5.12). Sa istim početnim i graničnim uslovima potrebno je, prevesti tačku M iz početnog položaja M(-1,0) u koordinatni početak, uz izmenjeni uslov optimalnosti. Ovde se sada zahteva, da u toku upravljanja bude zadovoljen uslov $\rho^*(u^o) = \min_u \rho^*(u)$, gde je

$$\rho^*(u) = \mathcal{H}(u) = \max_{t_o \le t \le t_\beta} \left[u_1^2(t) + u_2^2(t)\right] \qquad (5.23)$$

Za ovaj slučaj je optimalna upravljačka funkcija $u^o(t)$ data izrazom (5.21), što u konkretnom slučaju znači da je

$$u^o(t) = \frac{(\rho^o)^{-1}}{\| h^o(t) \|} \begin{pmatrix} l_1^o(1-t) + l_2 \\ l_3^o(1-t) + l_4 \end{pmatrix} \qquad (5.24)$$

gde se minimalna funkcija $h^o(t) = \{h_1^o(t), h_2^o(t)\}$ traži iz uslova (4.15), koji u našem slučaju postaje

$$\rho^o = \min_{l_i} \int_0^1 \left\{ \left[l_1(1-t) + l_2\right]^2 + \left[l_3(1-t) + l_4\right]^2 \right\}^{1/2} dt$$

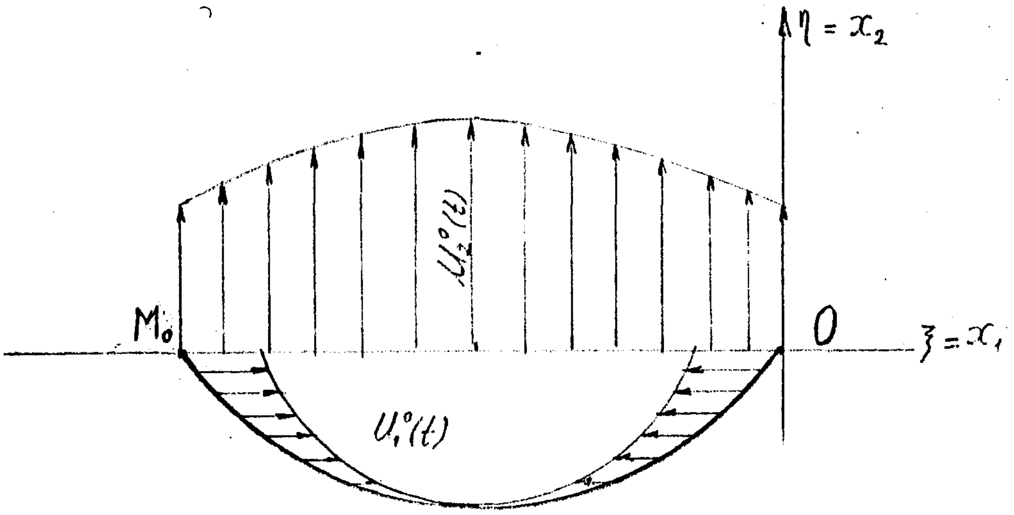
$$\text{pri:} \quad l_1 + g l_3/2 + g l_4 = 1 \qquad (5.25)$$

Rešenja poslednjeg vezanog ekstremuma su skalari l_i^o, $(i=1,2,3,4)$, datih u [16], tako da je $l_1^o = 0{,}1116$; $l_2^o = -0{,}0558$ $l_3^o = 0$; $l_4^o = 0{,}0888$; $\rho^o = 0{,}0944$; $g \approx 10$. Zamenom ovih vrednosti u (5.24) dobijaju se sledeće vrednosti za koordinate optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$

$$u_1^o(t) = \frac{0{,}0558(1-2t)}{0{,}0944(0{,}0124t^2 - 0{,}0124t + 0{,}012)^{1/2}}$$

$$u_2^o(t) = \frac{}{0{,}0944(0{,}0124t^2 - 0{,}0124t + 0{,}012)^{1/2}} \qquad (5.26)$$

Kada se ovako izračunate vrednosti, zamene u Košijevu formulu(3.2), dobija se fazna trajektorija $x^o(t)$ (u vertikalnoj ravni trajektorija je na priloženoj slici izvučena debelom linijom M_oO). Na samom crtežu su date i vrednosti koordinata $u_i^o(t)$ u pojedinim tačkama fazne trajektorije, radi uporedjenja sa prethodnim primerom.



U zaključku se može konstatovati, da se aparatom funkcionalne analize(u formi prikazanoj u četvrtoj glavi), mogu rešavati zadaci optimalnosti i da su rešenja data u konačnom obliku, onda kada je moguće rešiti vezani ekstremum (4.15) i njemu odgovarajući(4.23). Da bi se problemi optimalnosti mogli rešavati na ovaj način, neophodno je, da kriterijum optimalnosti bude veličina sa osobinama norme. Ako ovo nije ispunjeno, onda se krug problema može proširiti i u onim slučajevima, kada se polazni kriterijum optimalnosti, koji nema osobine norme u funkcionalnom prostoru, može nekim matematičkim transformacijama svesti na kriterijum optimalnosti sa osobinama norme. Ovde će biti prikazan jedan takav slučaj.

3^o Optimalnost dinamičkih sistema u smislu najbržeg prelaza. Jedan od čestih slučajeva je, kada želimo da dinamički sistem prevedemo iz jednog u drugo stanje, za najkraće vreme. Tako se sada, kao kriterijum optimalnosti javlja vremenski interval $t_o - t_\beta$. Jasno je dakle, da trenutak završetka dejstva upravljačke funkcije $u^o(t)$, t.j. trenutak t_β nije fiksiran, već se odredjuje u toku rešavanja optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$. Pored osnovnog zahteva, da dinamički sistem prebacimo za najkraće moguće vreme, u ovakvim problemima su uvek dati i neki dopunski uslovi, kojima se naglašava, da vektor u(t) ne može preći neke granične vrednosti, jer bi u protivnom moglo doći do oštećenja dinamičkog sistema. Ti uslovi mogu biti oblika

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j \ , \ a_j \neq b_j \ , (j=1,2,\ldots,r), \qquad (5.27)$$

a mogu biti i drugačije vrste. Uslov oblika (5.27), gde su a_j i b_j poznate realne konstante, definiše u prostoru U za u r-dimenzioni paralelepiped, odnosno definiše oblast dopuštenih upravljanja G, koja u drugim slučajevima može biti i složenijeg oblika.

Posmatrajmo prvo nelinearan sistem oblika

$$\dot{x} = f(t,x,u) \ , \ x(t_o) = x_o \qquad (5.28)$$

gde su x,f i u vektori kolone sa n koordinata.

Neka je data oblast dopuštenih upravljanja G. Tada svakom $u \in G$ odgovara integralna kriva sistema (5.28)

$$x = x(t,u,x_o) \qquad (5.29)$$

Neka je dalje, S površina koja se nalazi na površi F za

$$F(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \qquad (5.30)$$

Zadatak upravljanja neka se sastoji u tome, da odaberemo neko $u \in G$, tako da integralna kriva (5.29) dostigne površinu S u trenutku $t = t_1 > t_o$. Jasno je da ovako formulisan problem nije jednoznačno rešiv, sve dok se ne postave i neki dopunski uslovi optimalnosti.

U tom cilju posmatrajmo još i neku pozitivno definitnu funkciju V(t,x), koja na bilo koji način definiše "rastojanje" pokretne tačke (5.29) od krajnjeg cilja-površine S.

Ovo poslednje znači,da je $V(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ funkcija sa osobinama

$$V(t,x) > 0,\ \forall x \notin S,\ V(t,x_1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 \in S \qquad (5.31)$$

tako,da će mo je za dalje,zvati funkcija rastojanja.

U specijalnom slučaju,kada je krajnji cilj $x_1 = 0$, odnosno kada se površina S svodi na koordinatni početak faznog prostora,tada se iz(5.31) vidi da funkcija $V(t,x)$ ima osobine norme.

Za funkciju $u^o(t)$ se kaže,da je optimalna u odnosu na odabranu funkciju rastojanja $V(t,x)$,ako funkcija $V(t,x)$ najbrže opada duž integralne krive

$$x^o = x(t,u^o,x_o) \qquad (5.32)$$

Odredimo zato vrednost funkcije $V(t,x)$ i njen izvod po vremenu na krivoj(5.29),onda će saglasno sa(5.28) biti

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t,x,u) \qquad (5.33)$$

Ako se uzme u obzir prethodna definicija o optimalnosti funkcije $u^o(t)$,onda se može konstatovati da je

$$\inf \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}\Big/_{u=u^o},\quad u \in G,\quad t \in [t_o,t_1] \qquad (5.34)$$

što je ekvivalentno sa:

$$\frac{dV}{dt}\Big/_{u \neq u^o} = \frac{dV}{dt}\Big/_{u=u^o} + h(t),\ h(t) \geqslant 0,\ h(t) \not\equiv 0 \qquad (5.35)$$

Jednačina(5.34) služi za odredjivanje optimalne upravljačke funkcije $u^o(t)$,ako se u konkretnom slučaju može rešiti.

U cilju formulisanja dovoljnih uslova optimalnosti u smislu najbržeg prelaza,dokazaćemo sledeću teoremu:

<u>TEOREMA</u> Neka je $u^o(t,x)$ optimalna upravljačka funkcija u smislu definicije(5.34).Neka su $V(t,x)$ i njen izvod po vremenu(5.33) realne i neprekidne funkcije u posmatranom intervalu $t \in [t_o,t_1]$.Ako je još ispunjen uslov

$$a \leq \dot{V}(t,x)\Big/_{u=u^o} \leq b < 0,\quad (a=\text{konst},b=\text{komst}) \qquad (5.36)$$

onda se može tvrditi,da izmedju svih $u \in G$,funkcija $u^o \in G$

prevodi sistem(5.28) za najkraće vreme u položaj $x(t_1) = x_1 \in S$.

DOKAZ: Poznato je, na osnovu srednje vrednosti integrala, da je

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dV(t,x)}{dt}\Big/_{u^o} dt = V(t_1,x_1) - V(t_o,x_o) = M(t_1-t_o)$$

$$a = \inf_t \frac{dV}{dt} \leq M \leq \sup_t \frac{dV}{dt} = b \tag{5.37}$$

što se u našem slučaju, zbog(5.31) svodi na

$$t_1 - t_o = T_1^o = - \frac{V(t_o,x_o)}{M} \tag{5.38}$$

Izraz(5.38) nam omogućuje da procenimo ukupno vreme trajanja dejstva T_1^o upravljačke funkcije $u^o(t)$.

$$- \frac{V(t_o,x_o)}{a} \leq T_1^o \leq - \frac{V(t_o,x_o)}{b} \tag{5.39}$$

Da bi dokazali formulisanu teoremu, podjimo od izraza (5.35), množenjem sa dt i integracijom dobijamo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\Big/_{u \neq u^o} dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\Big/_{u=u^o} dt + \int_{t_0}^{t} h(t)dt \tag{5.40}$$

Ako se pretpostavi, da je sistem upravljan funkcijom $u \neq u^o$ $u \in G$, i da je funkcijom $u \neq u^o$ moguće prevesti dinamički sistem iz položaja x_o u $x_1^* = x(t_1^*, u, x_o) \in S$, tako da je $V(t_1^*, x_1^*) = 0$ Onda se zadatak sastoji u tome, da dokažemo da je

$$t_1^* > t_1 \tag{5.41}$$

U tom cilju, izračunajmo vrednost izraza(5.40) za $t = t_1^*$

$$- V(t_o,x_o)\Big/_{u \neq u^o} = V(t_1^*,x_1^*)\Big/_{u=u^o} - V(t_o,x_o)\Big/_{u=u^o} + \int_{t_0}^{t_1^*} h(t)dt \tag{5.42}$$

Drugi član sa desne strane je isti kao leva strana, jer za proizvoljno $u \in G$, sve krive(5.32) polaze od $x_o = x(t_o)$. Zato je na kraju

$$V(t_1^*,x_1^*)_{u=u^o} = - \int_{t_0}^{t_1^*} h(t)dt < 0 \tag{5.43}$$

što je moguće jedino za $t_1^* > t_1$. Objašnjenje se svodi na činjenicu,da neprekidna pozitivna funkcija $V(t,x)$ mora proći kroz nulu,pre nego što postane negativna.

U specijalnom slučaju,kada je $\dot{V}(t,x) = a = b = konst$ onda je iz(5.39) ukupno utrošeno vreme za upravljanje

$$t_1 - t_o = T_1^o = - V(t_o,x_o)/a \qquad 5.44)$$

tako da se za a = b = - 1, dobija da je $T_1^o = V(t_o,x_o)$, što je inače poznat rezultat iz[29].

Na ovaj način je dokazana formulisana teorema,koja inače pretstavlja uopštenje već date slične teoreme u[29].

Primer koji je ovde konstruisan,služi za ilustraciju definisane teoreme,a zaključci koji slede iz njega,ne bi se mogli doneti na osnovu teoreme iz[29].

Posmatrajmo kretanje sistema oblika $\dot{x}_i = u_i$,(i=1,2, ...,n).Oblast dopuštenih upravljanja neka je G,data kao

$$G: \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - R^2 \leq 0, R(t) = Ae^{-t} + B, (A,B = konst > 0), \qquad (5,45)$$

Neka se,zadatak upravljačke funkcije sastoji u tome da sistem prevede iz položaja $x(t_o) = x_o = 0$,u položaj $x_1 = 0$,t.j u koordinatni početak.

Odaberimo funkciju rastojanja u obliku $V(x) = \| x \|$ pri čemu se simbol $\| x \|$,koristi za označavanje Euklidove norme,pa je

$$V(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2} \Rightarrow V(x) > 0, \forall x \neq 0, V(0) = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = (\mathrm{grad}\ V, u) \Rightarrow \inf_{u\ G} \frac{dV}{dt} = (\mathrm{grad}\ V, u^o) \Rightarrow$$

$$u_i^o = - R(t) \frac{\partial V}{\partial x_i}\ ,\ u^o = (u_1^o, u_2^o, \ldots, u_n^o)^T \qquad (5.46)$$

$$- (A + B) \leq \dot{V} \leq - B < 0 \Rightarrow \frac{\| x_o \|}{A + B} \leq T_1^o \leq \frac{\| x_o \|}{A + B}$$

U prikazanom primeru oblast dopuštenih upravljanja se smanjuje(smanjuje se jačina struje,pritisak fluida i sl. a sa ovim veličinama je upravljačka funkcija često u linearnoj vezi).Dobivena optimalna upravljačka funkcija $u^o = (u_i^o)$

prevodi sistem za najkraće vreme T_1^o u koordinatni početak, jer su ispunjeni svi uslovi definisane teoreme.

U prostijem slučaju, kada se radi o linearnom sistemu oblika

$$\dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u + w(t),\quad x(t_o) = x_o \qquad (5.47)$$

optimalna upravljačka funkcija u^o se može tražiti na osnovu principa maksimuma(4.23). Da bi se problem optimalnosti (u smislu najbržeg prelaza) mogao rešavati na ovaj način, neophodno je da se ograničenja, kojima je definisana oblast dopuštenih upravljanja G, mogu nekim matematičkim transformacijama svesti na izraze sa osobinama norme. Tako naprimer, ako su ta ograničenja oblika(5.27), onda se transformacijom

$$v_j = \left(u_j - \frac{a_j + b_j}{2}\right) \frac{2E}{b_j - a_j} \qquad (5.48)$$

ta ograničenja pretvaraju u ograničenja oblika:

$$\rho^*(v) = \max_j \sup_t \left\{ |v_j(t)| \right\} \leq E \qquad (5.49)$$

Ograničenja oblika(5.49) sada ponovo definišu istu oblast dopuštenih upravljanja G, kao i ograničenja(5.27). Razlika je samo u tome, što ograničenja(5.49) imaju osobinu norme(ovaj slučaj je obuhvaćen u tabeli I, slučaj 7).

Nekada nije potrebno vršiti nikakvu matematičku transformaciju, jer polazna ograničenja već imaju osobine norme. Takav slučaj je naprimer, problem upravljanja u smislu najbržeg prelaza, kada se raspolaže sa konačnom količinom energije E, što znači da je oblast G data kao

$$G:\quad \left(\int_{t_0}^{\infty} \| u(t) \| \, dt \right)^2 \leq E \qquad (5.50)$$

Gornja granica integrala je beskonačna, da bi se naglasilo, da je trenutak završetka procesa upravljanja t_β nepoznat, a po dogovoru [16] je $u(t) \equiv 0$ za $t > t_\beta$. Tako se sada osnovni problem može formulisati na sledeći način:

Poznate su jednačine kretanja sistema(5.47), početno i krajnje stanje x_o i x_β, faznog vektora $x(t)$, i oblast dopuštenih upravljanja G definisana izrazom $\mathcal{H}(u^o) \leq E$.Potrebno je,odrediti trenutak $t = t^o_\beta$ i odgovarajuće upravljanje $u^o(t)$,koje zadovoljava uslove:

1^o Upravljačka funkcija $u^o(t)$ prevodi sistem(5.47) iz stanja $x(t_o) = x_o$ u stanje $x(t^o_\beta) = x_\beta$,a stalno se nalazi u oblasti dopuštenih upravljanja G,t.j. $\mathcal{H}(u^o) \leq E$.

2^o Za bilo koji drugi vektor $u(t) \neq u^o(t)$,koji isto tako prevodi sistem(5.47) u istu tačku $x_\beta = x(t_\beta) = x(t^o_\beta)$, mora biti zadovoljena nejednakost $t^o_\beta < t_\beta$.

Rešenje ovog problema je prikazano u[16],a ovde će biti prikazani samo krajnji rezultati.

<u>TEOREMA</u> Neka je $h^o_T(t),(t_o \leq t \leq t_\beta = t_o + T)$, minimalna funkcija nadjena po pravilu(4.15),a njoj odgovarajuća upravljajuća funkcija $u_T(t)$ izračunata iz uslova(4.23) tako da je

$$\rho_T = \min_h \rho(h_T(t)) = \rho(h^o_T(t)), \quad s'_T(t_\beta)\cdot c(T) = 1$$
$$\mathcal{H}(u_T) = \rho^*(u_T) = \rho_T^{-1} \tag{5.51}$$

Onda je najmanji koren jednačine $\rho_T = E^{-1}$,optimalno najmanje utrošeno vreme prevodjenja sistema,a odgovarajuće upravljanje $u^o_T(t,T)$ je tražena optimalna upravljačka funkcija.

Za ilustraciju ovog postupka uzećemo isti primer,kretanja materijalne tačke M,mase m(t) u vertikalnoj ravni, čije su diferencijalne jednačine(5.12),ali sa izmenjenim graničnim uslovima.Neka je sada potrebno tačku M,prebaciti iz stanja $x_o(-1,0,1,0)$ pri $t_o = 0$,u stanje $x_\beta = (0,0,0,0)$ na najbrži način.Pri tome je oblast dopuštenih upravljanja definisana izrazom

$$G: \quad \int_{t_o}^{\infty} \left[u_1^2(t) + u_2^2(t)\right] dt \leq E^2 \tag{5.52}$$

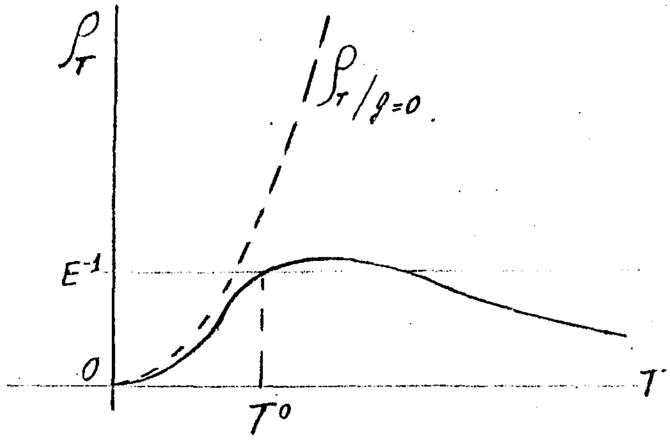
Obzirom,da je sličan problem rešavan u oblasti optimalnosti minimalnom energijom,ovde će biti korišćeni svi medjurezultati.Zato će mo kod rešavanja vezanog ekstremuma(5.5),gde smo u izraz(5.3) umesto t_β ,stavili gornju granicu integrala $t_o + T = T$,tako da se na osnovu[16],dobija da je iz(5.51)

$$\rho_T = \mathcal{H}_T^{-1} = (g^2\, T + 24\, T^{-3})^{-1/2}, \tag{5.53}$$

tako da je optimalno vreme T^o rešenje jednačine

$$\rho_T = E^{-1} \implies g^2T^4 - E^2T^3 + 24 = 0 \tag{5.54}$$

Najmanji koren poslednje jednačine T^o, prikazan je na priloženoj slici. Iz slike se vidi, da za male vrednosti ukupne energije E, rešenje za T^o neće postojati. Jedino u slučaju da je $g = 0$, za proizvoljne vrednosti $E \neq 0$, postojaće uvek konačno rešenje T^o.



Na kraju je iz (5.9), optimalna upravljačka funkcija u ovom slučaju data kao

$$u_T^o(t,T^o) = \begin{pmatrix} u_1^o \\ u_2^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(T^o - 2t)(T^o)^{-3} \\ -6(T^o - 2t)(T^o)^{-3} + g \end{pmatrix}$$

Iz slike se vidi, da se u slučaju povećanja ukupne količine energije E, vreme T^o smanjuje, a intenziteti komponenata upravljačke funkcije $u^o(t,T^o)$ se povećavaju, što je i logično.

LITERATURA

1. Andjelić P.T. Stojanović R. : Racionalna mehanika, zavod za izd. udžbenika S.R.S. Beograd 1965
2. Bilimović A. : Racionalna mehanika II (mehanika sistema), Beograd 1951
3. Mikičić J.D. : Jedna približna metoda za odredjivanje fundamentalne matrice sistema lin. difer.jedn.Matem.vesn.8(23) 1971
4. - : - : Jedno približno rešenje upravljanja kretanjem lin.nest.sistema,Mat.vesnik Beograd 1972
5. - : - : Prilog teoriji upravljanja kretanjem nestacionarnih linearnih sistema,mag. rad,Beograd 1971
6. - : - : O dovoljnim uslovima optimalnosti upravljajućih sistema u smislu najbržeg prelaza,Matem.vesn.12(27) 1975
7. Vujičić A.V. : Kretanje dinamički promenljivih objekata i njegova stabilnost,dokt.diser. Prirodno-matem.fak.Beograd 1962
8. Viner N. : Kibernetika I.C.S. Beograd 1972
9. Milić R.S. : Kontinualni sistemi automatskog upravljanja,Gradj.knj.Beograd 1973
10. Айзекс Р. : Дифференциальные игры,перевод с английского В.И.Аркина и Э.Н.Симаковой, издательство "Мир",Москва 1967
11. Аоки М. : Проблема минимума нормы и некоторые другие методы оптимизации систем управления,изд."Наука",Москва 1970,перевод с англиского Я.А.Когана,Ю.Сагалова и В.Тиме,под редакц.Я.Э.Цыпкина
12. Байбазаров М. : Достаточые условия оптимальности в дифференциальных играх,Прикладная матем. и механ.Том 35,1971

13. Гусятников П.Б. : Необходимые условия оптимальности в линейнои задаче преследования, Прикл.мат. и мех. Том 35, 1971

14. Воронов А.А. : Применение методов функционального анализа в задачах оптимального управления, "Энергия" Ленинград, 1970

15. Константинов М. : Проблем управления движением при помощи начальной функции систем, описываемых диференциально-функциональными уравнениями, 12 Югосл.конр.рац.мех. Охрид 1974

16. Красовский Н.Н. : Теория управления движением, изд.физ.матем.литер. "Наука", Москва 1968

17. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. : Теоретическая физика, Том 1, механика, изд. физ.мат.лит. "Наука" Москва 1973

18. Колмогоров А.Н. Фомин С.В. : Элементы теории функций и функционального анализа, "Наука" Москва 1972

19. Космодемьянский А. Курс теоретической механики, часть 2, издательство "Просвещение", Москва 1966

20. Мартынюк А.А. : Техническая устойчивость в динамике, изд. "Техника", Киев 1973

21. Понтрягин Л.С. : Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд. "Наука", Москва 1970

22. Пропой А.И. : Элементы теории оптимальных дискретных процессов, "Наука" Москва 1973

23. Пачепская Л.Б. Формальский А.М. : Область управляемости систем с двумя и тремя ограничениями на управление, Прикл.матем.и механ. Том 35, 1971

24. Пожарицкий Г.К. : К задаче об импулсной встрече движений. Прикл.матем. и механ. Том 35, 1971

25. Понтрягин Л.С. Болтяский В.Г. Мищенко Е.Ф. Гамкрелидзе Р.В. : Математическая теория оптимальных процесов, Физматгиз, Москва, 1969.

26. Новоселов В.С. : Некоторые вопросы механики переменных масс с учетом внутреннего движения частиц. "Весник" Ленингр.университета, 19 вып. 4, 1956, и № 1, вып. 1, 1957.

27. Солодов А.В. : Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, Физматгиз,Москва,1962.

28. Хси Х.С.
Несбит Р.А. : Функциональньй анализ и его применение к задачам минимума средне квадратичной ошибки.Перевод с англиского Я.А.Когана,Ю.З.Сагалова,под редакц.Я.З.Цыпкина."Наука",Москва,1970.

29. Зубов В.И. : Лекции по теории управления №1.Издательство Ленингр.университета 1972.

30. Шилов Г.Е. : Математическая анализ,Москва,1967.

31. Зельдович Я.Е.
Мышкис А.Д. : Элементы прикладной математики.Издательство Физматгиз,Москва,1967.

32. Padulo L.
Arbib M. : SYSTEM THEORY,SAUNDERS COMPANY Philadelphia-London-Toronto 1974.

33. Vujičić A.V. : COVARIANT EQUATIONS OF DISTURBED MOTION OF MECHANICAL SYSTEMS.Tenzor,N.S.Vol.22(1971).