UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

PRILOG TEORIJI INTERMEDIJALNIH ISKAZNIH LOGIKA

(Doktorska teza)

Branislav R. Boričić

Beograd, 1983.

ΑΞΙΟΝ ΕΣΤΙ τό φῶς καί ἡ πρώτη
χαραγμένη στήν πέτρα εὐχή τοῦ ἀνθρώπου...

(Ο. 'Ελύτης)

(VRIJEDNA JE svjetlost i prva
u kamenu uklesana želja čovjekova...)

P R E D G O V O R

Stranice ovog teksta su nastajale od 1981. godine
skoro da predstavljaju tri cjeline od kojih svaka ima
a predmet izučavanja intermedijalne logičke sisteme, tj.
proširenja Heyting-ove logike.

Prva cjelina (druga glava) je posvećena izučavanju
ekih podsistema Dummett-ovog računa iskaza, druga (treća
lava i dodatak 1) se bavi logikom slabog zakona isključe-
ja trećeg, a u trećoj (četvrta glava) se daje jedna sinta-
sna procedura odlučivosti primjenljiva na izvjesne klase
ntermedijalnih računa.

U metodološkom pogledu, mogu se razdvojiti dvije
ti, od kojih se jedna, na kojoj je i bilo težište, pro-
že cijelom dužinom rada i spada, prije svega, u sintaksna
straživanja i okvire strukturne teorije dokaza (genceniza-
je i sistemi prirodnih dedukcija), i druga (mali djelovi
ve, druge i treće glave), koju čine elementi teorije
ipke-ovih modela.

U prvoj glavi se uvode osnovni pojmovi. To su najprije
stemi izvođenja i iskazni sistemi izvođenja za koje se
kazuje da adekvatno obuhvataju , kao svoj poseban slučaj,
steme prirodnih dedukcija i sisteme Hilbert-ovog tipa.
dijelu sa podnaslovom "Metasistemi izvođenja" se pokazuje

da određeno proširenje implikativnog fragmenta Heyting-ove logike iskaza predstavlja reproduktivnu metateoriju, što je, vjerovatno, posledica deduktivne potpunosti ovog fragmenta. Zatim se navode poznate formulacije Heyting-ovog računa u stilu Hilbert-a i Gentzen-a uz niz napomena o njihovim proširenjima. Tu se daje i formulacija klasičnog računa iskaza kao višezaklučnog sistema prirodne dedukcije iz koje se, uz neka ograničenja, može dobiti i formulacija logike slabog zakona isklučenja trećeg, a kao poseban slučaj, takođe, i poznata formulacija Heyting-ovog računa iskaza kao sistema prirodne dedukcije. Navedeni sistem se razliku od poznatih nam (v. D. Prawitz (1965, 1971), D. J. Shoesmith, T. J. Smiley (1978), E. G. K. López-Escobar (1982)), a ima sve dobre osobine često razmatrane (jednozaključne) formulacije Heyting-ovog računa - mogućnost normalizacije izvođenja i separabilnost - što se ovdje i dokazuje. Posljednji dio prve glave posvećen je elementima teorije Kripke-ovih modela i to u onoj mjeri u kojoj nam je to potrebno za djelove razmatranja koja slijede u drugoj i trećoj glavi, jer se, prije svega, namjeravamo baviti sintaksom pojedinih formalnih sistema.

Druga glava se bavi jednom klasom iskaznih intermedijalnih logika. Najprije se dokazuje da niz intermedijalnih logika dat u radu E. G. K. López-Escobar-a (1982) sadrži svega tri različita iskazna sistema, od kojih je jedan nov, pa se za njega dokazuje potpunost u odnosu na određenu klasu Kripke-ovih modela, odlučivost, separabilnost (što

je ujedno i rješenje problema postavljenog u pomenutom
adu) i nezavisnost logičkih veznika. Zatim se definišu
va niza intermedijalnih logika u vezi sa kojima se uka-
uje na uopštenje pomenutog problema separabilnosti, da
i se nakon toga dalo i njegovo rješenje. Pokazuje se,
akođe, da je granična vrijednost posmatranih nizova logi-
a, Heyting-ova logika, tj. da među definisanim logikama
mamo i dobre aproksimacije Heyting-ove logike. Djelovi
ve glave su saopšteni na Seminaru za matematičku logiku
ri Matematičkom institutu u Beogradu, decembra 1982. go-
ine, na Odjeljenju Matematičkog instituta u Beogradu,
prila 1983. godine i na Evropskom sastanku udruženja za
imboličku logiku (ASL) u Aachen-u, jula 1983. godine, a
jelovi će biti objavljeni pod naslovima "A note on some
ntermediate propositional calculi" (The Journal of Symbolic
ogic) i "On some subsystems of Dummett's LC" (Zeitschrift
ür mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik).

Treća glava je posvećena logici iskaza slabog za-
ona isključenja trećeg. U prva dva dijela dat je kratak
regled poznatih rezultata koji se tiču ove logike, a
atim formulacija jednog Gentzen-ovog sistema koji odgo-
ara ovoj logici. Za pomenutu formulaciju se dokazuje
eorema o eliminaciji pravila sječenja, odakle se kao po-
redne ili neposredne posledice izvode neka od poznatih
vrđenja kao što su separabilnost, odlučivost, teoreme inte-
polacije itd. Pristup ovim problemima, kada se radi o
voj logici, je na ovom mjestu metodološki esencijalno
azličit u odnosu na do sada poznate nam. Daje se takođe

jedna interpretacija klasične logike u logici slabog zakona isključenja trećeg. Na kraju se navodi i formulacija ove logike kao višezaključnog sistema prirodne dedukcije sa teoremom o normalizaciji izvođenja. Djelovi ove glave su izlagani na Seminaru za matematičku logiku pri Matematičkom institutu u Beogradu, maja 1983. godine.

U četvrtoj glavi se navodi jedna formalizacija fragmenta Heyting-ove logike iskaza koja dopušta eliminaciju pravila tranzitivnosti već na objekt-nivou, odakle se dobija jedna sintaksna karakterizacija formula dokazivih u Heyting-ovoj implikativno-negativnoj logici, na kojoj bazira i jedna sintaksna procedura odlučivosti opisana u tom dijelu. Dalje se, uz pomoć poznatih rezultata pokazuje kako se ova procedura može proširiti na bilo koju konačno aksiomatizibilnu intermedijalnu logiku bez disjunkcije. Dio ovog teksta je izložen takođe na Seminaru za matematičku logiku pri Matematičkom institutu u Beogradu, maja 1982. godine, a biće objavljen pod naslovom "A decision procedure for certain disjunction free intermediate propositional calculi" (Publications de l'Institut Mathématique).

Na kraju rada su još i dva dodatka. U prvom od njih se posmatra logika predikata slabog zakona isključenja trećeg gdje se daje produžetak razmatranja iz treće glave. Uvodi se Gentzen-ov sistem koji odgovara ovoj logici, dokazuje se teorema o eliminaciji pravila sječenja, a kao posledice se dobijaju: separabilnost, jednakost fragmenata bez negacije ove logike i Heyting-ove logike predikata, te teoreme interpolacije. Pored nekonstruktivnog dokaza D. M. Gabbay-a (1971a) da ova logika zadovoljava interpolacioni uslov Craig-a, nije nam poznat još neki dokaz ove činjenice. Ovdje se dokazuje da ova logika zadovoljava i jači uslov, interpolacioni uslov Lyndon-a, a sam dokaz omogućuje neposrednu konstrukciju interpolanta u konkretnoj situaciji. U drugom dodatku se navode neki otvoreni problemi i mogući pravci daljih istraživanja u ovoj oblasti.

Ovaj rad nije, niti je to mogao biti, rezultat samo mojih, ličnih napora. Neposredne ili posredne doprinose, izuzev, naravno, autora citiranih djela datih na zadnjim stranicama, dali su i mnogi drugi, pa, na ovom mjestu, vjerovatno zaboravljajući ponekog, jer se to ovim prilikama najčešće i dešava, srdačno zahvaljujem profesoru dr Slaviši B. Prešiću na stručnoj pomoći, na pokazanom strpljenju tokom saradnje sa mnom, na pravim riječima, dr Kosti Došenu na veoma pažljivom čitanju teksta i nizu značajnih sugestija i ispravki, te na stručnoj pomoći, dr Zoranu Markoviću, dr Žarku Mijajloviću, dr Milanu Božiću, mr Miodragu Kapetanoviću na pažljivom slušanju izlaganja djelova ovog rada i korisnim primjedbama učinjenim tom prilikom.

S A D R Ž A J

0. UVOD

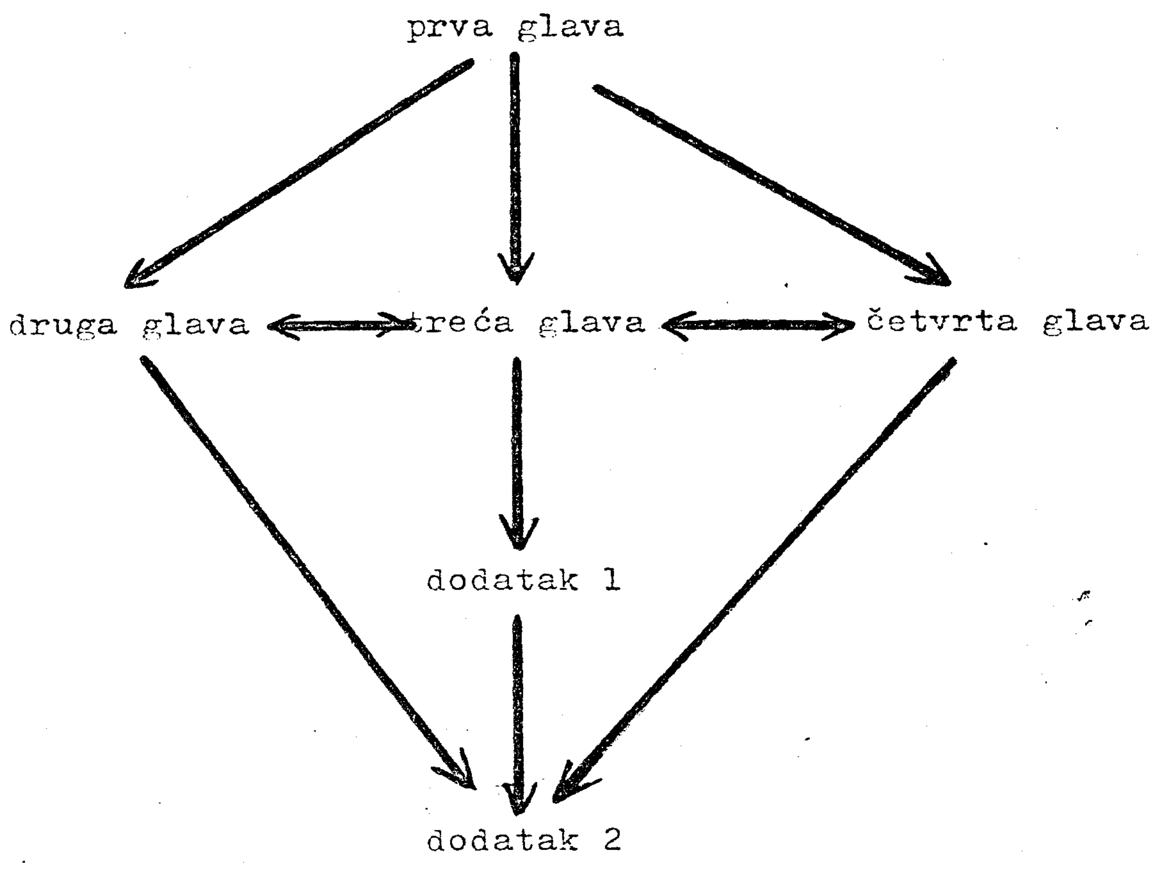
Pošto ćemo se na stranicama što slijède baviti pri-
: svega teorijom logičkih sistema, to ćemo minimum drugih
jelova matematičke logike i matematike uopšte, koji je ne-
ɔhodan za korektno izlaganje ove materije, a čije bi postu-
ıo uvođenje na ovom mjestu bilo suvišno i nepotrebno, najče-
še pretpostavljati. Tako ćemo, na primjer, pod <u>skupom</u> i
<u>.asom</u> podrazumijevati pojmove definisane u Gödel-Bernays-
ovoj (ili von Neumann-Gödel-Bernays-ovoj) teoriji skupova
'. E. Mendelson (1964), S. B. Prešić (1968), H. Wang (1970)).
:upovne operacije i relacije ćemo označavati na uobičajeni
ıčin. Takođe se nećemo zadržavati na definiciji <u>ordinala</u>
'. G. Takeuti (1975), K. Schütte (1977)).

Zbog učestalih induktivnih definicija, uslov
ıvaki izraz navedenog tipa se može izgraditi "konačnom pri-
enom gornjih pravila", biće iz stilskih razloga izosta-
.jan, mada će napomena da se radi o induktivnoj definiciji
:azivati na to da se isti podrazumijeva.

Simbole & i $\Rightarrow$ upotrebljavamo isključivo na
ta-nivou kao oznake za konjunkciju i implikaciju. Slično
ristimo i kvantifikatore, sa izuzetkom dodatka 1.

Meta-logika na koju se oslanjamo u dokazima je klasična, mada su dokazi, koji se tiču čisto sintaksnih razmatranja i koji kasnije pružaju mogućnosti konstrukcija izvjesnih objekata (npr. izvođenja bez sječenja, interpolirajuće formule, procedure odlučivosti), i intuicionistički dopustivi.

Mogući redoslijed čitanja pojedinih glava je dat slijedećom shemom.



P r v a   g l a v a

1. OSNOVNI POJMOVI TEORIJE ISKAZNIH SISTEMA IZVOĐENJA

1.1. Sistemi izvođenja. Neka je $\underline{F}$ proizvoljan nepra- skup i $\underline{R}$ skup relacija oblika

$$\frac{\begin{matrix} ([A_i])_{i<a} \\ \vdots \\ (A_i')_{i<a} \end{matrix} \qquad (B_i)_{i<b}}{(C_i)_{i<c}} \quad (R),$$

e su a, b i c proizvoljni ordinali, a $A_i, B_j, C_k \in \underline{F}$ i $A_i' \subseteq \underline{F}$ $i<a$, $j<b$, $k<c$). Elemente skupa $\underline{F}$ nazivamo osnovnim formama, kupa $\underline{R}$ pravilima izvođenja (ili, kraće, pravilima). Za $a=0$ $c=0$, na primjer, gornje pravilo izvođenja (R) bi izgledalo

$$\frac{(B_i)_{i<b}}{(C_i)_{i<c}} \quad (R), \text{ odnosno } \quad \frac{\begin{matrix} ([A_i])_{i<a} \\ \vdots \\ (A_i')_{i<a} \end{matrix} \qquad (B_i)_{i<b}}{} \quad (R).$$

Posmatrano pravilo izvođenja (R), za $c \leqslant 1$ i kardinalnost cog od skupova A_i' ne veću od 1, nazivamo jednozaključnim ilom. U protivnom, kažemo da je višezaključno. Ako su svi nali a, b i c, kao i skupovi A_i', konačni, onda kažemo je pravilo (R) konačno. Inače, kažemo da je beskonačno (infi-

nitarno). Ako je a=0, pravilo (R) nazivamo *otvorenim*.

Uređen par $(\underline{F},\underline{R})$ nazivamo *sistemom izvođenja*. Ako su sva pravila skupa $\underline{R}$ jednozaključna, odnosno konačna, sistem izvođenja $(\underline{F},\underline{R})$ nazivamo *jednozaključnim*, odnosno *finitarnim*; inače kažemo da je sistem *višezaključan*, odnosno *infinitaran*.

Klasu izvođenja sistema izvođenja $(\underline{F},\underline{R})$, u oznaci Der, te *pretpostavke* Hyp(x) i *posledice* (*zaključke*) Cn(x) nekog izvođenja x, definišemo induktivno na slijedeći način:

(i) ako je $x \in \underline{F}$, onda je $x \in \mathrm{Der}$ i $\mathrm{Hyp}(x)=\mathrm{Cn}(x)=\{x\}$;

(ii) ako je

$$\begin{array}{c} ([A_i])_{i<a} \\ \vdots \end{array}$$

$$x = \frac{(A_i')_{i<a} \qquad (B_i)_{i<b}}{(C_i)_{i<c}} \in \underline{R}, \quad x_i, y_j \in \mathrm{Der}\ (i<a,\ j<b),$$

$A_i \in \mathrm{Hyp}(x_i)$ $(i<a)$, $A_i' \subseteq \mathrm{Cn}(x_i)$ $(i<a)$ i $B_i \in \mathrm{Cn}(y_i)$ $(i<b)$, onda

$$x' = \frac{(x_i)_{i<a} \qquad (y_i)_{i<b}}{(C_i)_{i<c}} \in \mathrm{Der},$$

$$\mathrm{Hyp}(x') = \Big(\bigcup_{i<a} (\mathrm{Hyp}(x_i) - \{A_i\})\Big) \cup \Big(\bigcup_{i<b} \mathrm{Hyp}(y_i)\Big) \qquad \text{i}$$

$$\mathrm{Cn}(x') = \Big(\bigcup_{i<a} (\mathrm{Cn}(x_i) - A_i')\Big) \cup \Big(\bigcup_{i<b} (\mathrm{Cn}(y_i) - \{B_i\})\Big) \cup \{C_i : i<c\}.$$

Posebno za $x = \dfrac{}{(C_i)_{i<c}} \in \underline{R}$, imamo $x \in \mathrm{Der}$, $\mathrm{Hyp}(x) = \emptyset$ i $\mathrm{Cn}(x) = \{C_i : i<c\}$.

Elemente klase Der nazivamo *izvođenjima* (*derivacijama*) sistema $(\underline{F},\underline{R})$.

Izvođenje x za koje je $\mathrm{Hyp}(x)=\emptyset$ nazivamo još i *dokazom* za Cn(x) u datom sistemu.

U slučajevima kada bude neophodno razlikovati konkreı sistem izvođenja $S=(\underline{F},\underline{R})$ od nekih drugih, te klasu njegovih ,ođenja, skupove njegovih osnovnih formi i pravila izvođenja, jesto Der, $\underline{F}$ i $\underline{R}$, pisaćemo i Der(S), $\underline{F}(S)$ i $\underline{R}(S)$.

Relaciju posledičnosti (dedukcije) nekog sistema ,ođenja S, u oznaci $\vdash_S$, definišemo kao podskup od $\underline{P}(\underline{F})\times\underline{P}(\underline{F})$ lje sa $\underline{P}(X)$ označavamo **partitivni** skup skupa X) koji zadovo- ıva uslov:

$(\Gamma,\Delta)\in\vdash_S$ (ili u skladu sa tradicionalnim oznakama $\vdash_S\Delta$) akko postoji $x\in \mathrm{Der}(S)$ tako da je $\mathrm{Hyp}(x)\subseteq\Gamma$ i $\mathrm{Cn}(x)\subseteq\Delta$.

,a kažemo da je $\Gamma\vdash_S\Delta$ prema izvođenju x. Kada bude jasno o ı se sistemu radi ili kada to ne bude bilo važno, umjesto $\vdash_S$ ıo pisati samo $\vdash$, a $\Gamma,A\vdash\Delta,B$ biće zamjena za $\Gamma\cup\{A\}\vdash\Delta\cup\{B\}$.

L e m a 1. Ako $x,y\in \mathrm{Der}$ i postoji osnovna forma $\mathrm{Cn}(x)\cap \mathrm{Hyp}(y)$, onda postoji $z\in \mathrm{Der}$ tako da $\mathrm{Cn}(z)=(\mathrm{Cn}(x)-\{A\})\cup$ $\mathrm{n}(y)$ i $\mathrm{Hyp}(z)=\mathrm{Hyp}(x)\cup(\mathrm{Hyp}(y)-\{A\})$.

D o k a z. (Indukcijom po izgrađenosti izvođenja y.) $(y)\neq\emptyset$ jer $A\in \mathrm{Hyp}(y)$. Ako je $y=A$, onda $\mathrm{Cn}(y)=\{A\}$, pa za .ženo izvođenje z možemo uzeti samo izvođenje x, jer $\mathrm{Hyp}(x)=$ $\mathrm{p}(x)\cup(\mathrm{Hyp}(y)-\{A\})$ i $\mathrm{Cn}(x)=\mathrm{Cn}(y)\cup(\mathrm{Cn}(x)-\{A\})$. Ako je

$$y=\frac{(x_i)_{i<a}\qquad\qquad (y_i)_{i<b}}{(C_i)_{i<c}}\quad (\in \mathrm{Der})$$

neko pravilo

$$\begin{array}{c}([A_i])_{i<a}\\ \vdots\\ \hline (A_i')_{i<a}\qquad\qquad (B_i)_{i<b}\\ \hline (C_i)_{i<c}\end{array}$$

e neka od izvođenja (x_i) i (y_j), recimo (x_{i_m}) i (y_{j_n}), imaju osobinu da $A\in Hyp(x_{i_m})-\{A_{i_m}\}$ i $A\in Hyp(y_{j_n})$, onda, prema indukcijskoj hipotezi, postoje izvođenja x'_{i_m} i y'_{j_m} takva da $Hyp(x'_{i_m})=Hyp(x)\cup(Hyp(x_{i_m})-\{A\})$, $Cn(x'_{i_m})=Cn(x_{i_m})\cup(Cn(x)-\{$ $Hyp(y'_{j_n})=Hyp(x)\cup(Hyp(y_{j_n})-\{A\})$ i $Cn(y'_{j_n})=Cn(y_{j_n})\cup(Cn(x)-\{A\}$ Definišimo nizove izvođenja

$$x''_i=\begin{cases}x_i & \text{, ako } i\neq i_m\\ x'_{i_m} & \text{, inače}\end{cases}\quad (i<a)\quad \text{i}\quad y''_j=\begin{cases}y_j & \text{, ako } j\neq j_n\\ y'_{j_n} & \text{, inače}\end{cases}\quad (j<b$$

Može se vidjeti da izvođenje

$$z=\frac{(x''_i)_{i<a}\qquad (y''_i)_{i<b}}{(C_i)_{i<c}}$$

možemo uzeti u svojstvu traženog izvođenja jer ima osobine $Hyp(z)=Hyp(x)\cup(Hyp(y)-\{A\})$ i $Cn(z)=(Cn(x)-\{A\})\cup Cn(y)$.$\dashv$

L e m a 2. (1) Ako $\Gamma\vdash\Delta$, onda $\Gamma\cup\Pi\vdash\Delta\cup\Lambda$. (2) Ako $\Gamma\vdash\Delta,A$ i $A,\Pi\vdash\Lambda$, onda $\Gamma\cup\Pi\vdash\Delta\cup\Lambda$.

D o k a z. (1) Kako je $\Gamma\vdash\Delta$ prema nekom izvođenju x za koje je $Hyp(x)\subseteq\Gamma$ i $Cn(x)\subseteq\Delta$, to iz $Hyp(x)\subseteq\Gamma\cup\Pi$ i $Cn(x)\subseteq\Delta\cup\Lambda$ slijedi da $\Gamma\cup\Pi\vdash\Delta\cup\Lambda$.
(2) Neka je $\Gamma\vdash\Delta,A$ prema $x\in Der$ i $A,\Pi\vdash\Lambda$ prema $y\in Der$. Ako $A\notin Cn(x)$ ili $A\notin Hyp(y)$, onda bi prema x, odnosno y, imali i $\Gamma\vdash\Delta$, odnosno $\Pi\vdash\Lambda$, odakle je, u oba slučaja, prema (1) $\Gamma\cup\Pi\vdash\Delta\cup\Lambda$. Ako $A\in Cn(x)$ i $A\in Hyp(y)$, onda prema prethodnoj lemi postoji $z\in Der$ tako da $Cn(z)=(Cn(x)-\{A\})\cup Cn(y)$ i $Hyp(z)=Hyp(x)\cup(Hyp(y)-\{A\})$, pa je i $\Gamma\cup\Pi\vdash\Delta\cup\Lambda$, prema z.$\dashv$

1.2. <u>Iskazni sistemi izvođenja</u>. Iskazne formule uvodimo na uobičajeni način (v. npr. M. Božić (1978), S. B. Prešić (1979), K. Segerberg (1982)): neka je PL skup <u>iskaznih slova</u> $\{p_i : i\in I\}$ i LC skup <u>logičkih veznika</u> $\{o_j : j\in J\}$, gdje su I i J neki skupovi indeksa. U vezi sa svakim logičkim vezni-

o_j je ordinal $L(o_j)$ koji nazivamo <u>dužinom</u> tog logičkog ve-
ka. Sa PC označavamo skup svih logičkih veznika dužine 0, a
gove elemente nazivamo <u>iskaznim konstantama</u>.

Opštim pretpostavkama: $PL \cap LC = \emptyset$, $PL \cup PC \neq \emptyset$ i
$PC \neq \emptyset$, ako drugačije ne naglasimo, dodajemo još i: PL, PC
C-PC su najviše prebrojivi skupovi.

<u>Skup</u> For <u>iskaznih formula</u> je najmanji skup koji sa-
i elemente skupa $PL \cup PC$ (tzv. <u>atomične formule</u>) i zadovolja-
uslov:

ako $A_i \in For$ $(i<a)$, $* \in LC$ i $L(*)=a>0$, onda

$\ldots A_i \ldots \in For$.

Za a=2 ćemo umjesto $*AB$ pisati $(A*B)$, pa, dakle,
tpostavljati i postojanje pomoćnih simbola (i) u
ekt-jeziku, usvajajući pri tom uobičajene konvencije o izo-
vljanju pojedinih zagrada. Takođe ćemo pretpostavljati da
svi logički veznici konačnih dužina, kao i da se radi o ko-
nim sistemima izvođenja.

Ubuduće ćemo slova P, Q i R, sa ili bez indeksa,
trebljavati na meta-nivou kao promjenljive nad skupom ato-
nih formula, a A, B, C i D kao promjenljive nad skupom formu-

<u>Složenost formule</u> A, u oznaci /A/, definišemo indu-
vno:

(i) ako je A atomična formula, onda $/A/=0$;

(ii) ako je A formula $*A_0 \ldots A_{m-1}$, $L(*)=m(>0)$,
a $/A/ = /A_0/ + \ldots + /A_{m-1}/ + 1$.

<u>Predikatske formule</u> (prvog reda) se mogu definisati
azeći od:

(i) prebrojivih skupova:
n-arnih funkcijskih konstanti: $f_0^n, f_1^n, \ldots$ $(n \geq 0)$;
n-arnih predikatskih konstanti: $R_0^n, R_1^n, \ldots$ $(n \geq 0)$;
individualnih promjenljivih: $x_0, x_1, \ldots$;
n-arnih logičkih veznika: $o_0^n, o_1^n, \ldots$ $(n \geq 0)$, me-
kojima su svakako unarni veznici $\forall x_0$, $\exists x_0$, $\forall x_1$, $\exists x_1, \ldots$

(kvantifikatori)[1];

(ii) skupa pomoćnih simbola $\{(,),,\}$;

(iii) skupa terma koji je najmanji skup što zadovoljava uslove:

a) sve 0-arne funkcijske konstante i individualne promjenljive su termi;

b) ako su $t_1,\ldots,t_n$ termi i f n-arna funkcijska konstanta, onda je i $f(t_1,\ldots,t_n)$ term.

Skup <u>predikatskih formula</u> (prvog reda) je najmanji skup koji zadovoljava uslove:

(i) ako je R n-arna predikatska konstanta i $t_1,\ldots,$ termi, onda je $R(t_1,\ldots,t_n)$ predikatska formula (<u>atomične formule</u>);

(ii) ako su A_i $(i<n)$ predikatske formule i $*$ n-arna logička konstanta, onda je $*A_0\ldots A_i\ldots$ predikatska formula.

Usvajaju se slične konvencije o pisanju formula sa binarnim logičkim veznicima i zagradama kao u slučaju iskaznih formula.

Pošto ćemo nadalje u ovom radu, sa izuzetkom jednog od posljednjih djelova (Dodatak 1.), razmatrati iskazne račune to ćemo pod skupom formula uvijek podrazumijevati skup iskaznih formula, uz napomenu da pojmovi i problemi koji budu uvođeni i razmatrani u vezi sa iskaznim računima mogu na sličan način postati predmet istraživanja koja se tiču predikatskih računa.

Ako je skup osnovnih formi nekog sistema izvođenja skup iskaznih (predikatskih) formula, onda taj sistem nazivamo još i <u>iskaznim</u> (<u>predikatskim</u>) <u>sistemom izvođenja</u>.

Znak jednakosti "=", kada se odnosi na sintaksne objekte (kao, na primjer, formule), upotrebljavamo u najstrožem smislu - "jednakost slovo po slovo" ili jednakost u slobodnoj semigrupi $W(PL\cup PC)$ svih riječi nad skupom $PL\cup PC$ sa

[1] Sličan tretman imaju operacije cilindrifikacije (v. L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski (1971)) koje u teoriji cilindričkih algebri inspirisanoj klasičnim predikatskim računom prvog reda, odgovaraju egzistencijalnom kvantifikatoru.

racijom dopisivanja (konkatenacije) i praznom riječju " "
jediničnim elementom (v. A. G. Kuroš (1974), E. Fried (1972), Grätzer (1968)).

L e m a 3. (Lema o jedinstvenoj čitljivosti) Neka $\ast$ i $+$ m-arni i n-arni logički veznici, redom, $A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{b-1}$ formule i $m \leqslant a$ i $n \leqslant b$. Tada

$$\ast A_0 A_1 \ldots A_{m-1} = +B_0 B_1 \ldots B_{n-1} \quad \underline{\text{akko}}$$

<u>akko</u> $\ast = +$, $m = n$ i za svaki $i < m$ $A_i = B_i$.

D o k a z. Pokazaćemo da je za jednakost dviju riječi Bw, gdje su A i B formule, potrebno da bude w = " ". Ovo azujemo indukcijom po broju k simbola riječi A. Ako je k = 1, o je A formula, A mora biti iskazno slovo ili iskazna konsta-, što je i B, pa w = " ". Za $k > 1$, prvi simbol u formuli A neki logički veznik, u oznaci $\ast$, dužine m. Formula B takođe a počinjati simbolom $\ast$, odnosno moraju postojati formule $\ldots, C_{m-1}, D_0, \ldots, D_{m-1}$, takve da je $A = \ast C_0 \ldots C_{m-1}$ i $B = D_0 \ldots D_{m-1}$. Ako je broj simbola riječi C_0 veći od broja si-la riječi D_0, onda mora postojati riječ w_0 takva da $C_0 = Dw_0$, no kako su C_0 i D_0 formule, po indukcijskoj hipotezi a biti w_0 = " ", tj. $C_0 = D_0$. Slično se razmatraju i ostali čajevi. Slijedi: w = " ".

Dokaz same leme se izvodi neposrednom primjenom upra-dokazanog tvrđenja. $\dashv$

Slova Γ, Δ, Π i Λ ubuduće koristimo kao metapro-nljive nad skupom svih <u>riječi</u> (nizova) nad For, ako druga-e nije naglašeno, uz napomenu da upotreba skupovnih opera-a i relacija nad $\Gamma - \Lambda$ podrazumijeva da se u tim sluča-ima radi o <u>skupovima</u> formula koje grade odgovarajuću eč.

Prirodno se produžuje definicija relacije posledično-na riječi Γ i Δ u nekom sistemu izvođenja S, pa će biti:

$\Gamma \vdash_S \Delta$ <u>akko</u> postoje skupovi formula Γ' i Δ' takvi da se svaka formula skupa Γ', odnosno Δ', pojavljuje u riječi Γ, odnosno Δ, i $\Gamma' \vdash_{S} \Delta'$.

Sa For_{xy}, gdje je $x \subseteq PL \cup PC$ i $y \subseteq LC - PC$, ćemo označavati skup formula induktivno definisan slijedećim uslovima:

(i) $x \subseteq For_{xy}$;

(ii) ako $A_1,\ldots,A_n \in For_{xy}$, $* \in y$ i $L(*)=n$, onda $*A_1\ldots A_n \in For_{xy}$.

Ako je $x = PL \cup PC$, onda pišemo samo For_y, a u kontekstu fiksiranog skupa y, pišemo For_x.

Formulu skupa For_{xy} nazivamo još i y-formulom.

Jedan od pojmova koji će biti važan za djelove izlaganja što slijedi, pojam separabilnosti iskaznog sistema izvođenja, možemo već sada definisati:

za iskazni sistem izvođenja kažemo da je *separabilan* ako za svaka dva skupa y-formula Γ i Δ za koje je $\Gamma \vdash \Delta$, postoji skup veznika $y' \subseteq y$ i izvođenje x sa osobinama: $Hyp(x) \subseteq \Gamma$, $Cn(x) \subseteq \Delta$ i sve formule koje se javljaju u izvođenju x su y'-formule.

Skup $sub(A)$ *svih podformula formule* A definišemo induktivno:

(i) ako je A atomična formula, onda $sub(A) = \{A\}$;

(ii) ako su $A_1,\ldots,A_n$ formule, $*$ logički veznik dužine n i $A = *A_1\ldots A_n$, onda $sub(A) = \{A\} \cup sub(A_1) \cup \ldots \cup sub($

Supstitucija s je funkcija koja preslikava skup PL iskaznih slova u skup For iskaznih formula.

Ako je substitucija s definisana sa

$$s(P)=\begin{cases} A_i, & \text{za } P = P_i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \\ P, & \text{inače} \end{cases}$$

la sa sA ili $A(P_1/A_1,\ldots,P_k/A_k)$ označavamo riječ nad
ıpom PL $\cup$ LC koja se dobija iz formule A jednovremenom za-
:nom svih pojavljivanja različitih iskaznih slova $P_1,\ldots,P_k$
.skaznoj formuli A redom formulama $A_1,\ldots,A_k$. Umjesto
$_1/P_1,\ldots,P_k/P_k$) pišemo samo $A(P_1,\ldots,P_k)$.

Sa $A(A_1/B_1,\ldots,A_k/B_k)$ ćemo označavati i riječ nad
.pom PL $\cup$ LC koja se dobija iz riječi A jednovremenom zamjenom
h pojavljivanja riječi $A_1,\ldots,A_k$ u A redom riječima $B_1,\ldots,B_k$,
lučaju kada je opisana zamjena nedvosmislena i korektna.

L e m a 4. Neka je s supstitucija definisana kao
e i $P_1,\ldots,P_k$ međusobno različita iskazna slova. Tada:

(1) ako $\{P_1,\ldots,P_k\} \cap \mathrm{sub}(A) = \emptyset$, onda $sA = A$;

(2) $sA \in \mathrm{For}$;

(3) ako je $Q_1,\ldots,Q_k,P_1,\ldots,P_k$ niz međusobno razli-
ih iskaznih slova, onda $sA(Q_1/P_1,\ldots,Q_k/P_k) = s'A$, gdje je

$$s'(P) = \begin{cases} A_i, & \text{za } P=Q_i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \\ P, & \text{inače.} \end{cases}$$

D o k a z. Sva tri dijela tvrđenja se dokazuju indu-
jom po složenosti/A/ formule A.

(1) Za $/A/ = 0$, po definiciji funkcije s je $sA=A$.
je $/A/ = n+1$ i $A=\ast B_1\ldots B_m$, za $L(\ast)=m$, $sA=\ast sB_1\ldots sB_m$, a
na indukcijskoj hipotezi je $sB_i=B_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, pa i $sA=A$.

Slično - (2) i (3). $\dashv$

Iskazni sistem izvođenja nazivamo <u>iskaznim shema</u>

sistemom izvođenja ako je skup pravila izvođenja tog sistema zatvoren za svaku supstituciju, tj. ako je

$$\frac{\begin{array}{c}([A_i])_{i<a}\\ \vdots \\ (A_i')_{i<a} \qquad (B_i)_{i<b}\end{array}}{(C_i)_{i<c}} \qquad (R)$$

neko pravilo izvođenja tog sistema, onda je i

$$\frac{\begin{array}{c}([sA_i])_{i<a}\\ \vdots \\ (sA_i')_{i<a} \qquad (sB_i)_{i<b}\end{array}}{(sC_i)_{i<c}} \qquad (sR)$$

pravilo izvođenja tog sistema, gdje je $sA_i' = \{sA : A \in A_i'\}$.

Nadalje ćemo razmatrati uglavnom samo iskazne shema sisteme izvođenja, što često nećemo naglašavati.

L e m a 5. Ako je S iskazni shema sistem izvođenja, $x \in Der(S)$ i s bilo koja supstitucija, onda $sx \in Der(S)$, gdje smo sa sx označili figuru koja se dobija iz izvođenja x zamjenom svake formule A koja se pojavljuje u njemu formulom sA.

D o k a z. Indukcijom po broju n primijenjenih pravila u izvođenu x.

Za $n = 0$, $x \in For(S)$, pa je i $sx \in For(S)$, prema ıi 4, odnosno, po definiciji, $sx \in Der(S)$.

Indukcijski korak:

$$\begin{array}{c}([A_i])\\ \vdots \end{array}$$

je (R) $\dfrac{(A_i') \qquad\qquad (B_i)}{(C_i)} \in \underline{R}$, onda je i

$$\begin{array}{c}([sA_i])\\ \vdots \end{array}$$

) $\dfrac{(sA_i') \qquad\qquad (sB_i)}{(sC_i)} \in \underline{R}$, po definiciji. Ako je

$\dfrac{(x_i) \qquad\qquad (y_i)}{(C_i)}$ i $A_i \in Hyp(x_i)$, $A_i' \in Cn(x_i)$,

$:Cn(y_i)$, onda je po indukcijskoj hipotezi: $sx_i, sy_i \in Der(S)$, $\in Hyp(sx_i)$, $sA_i' \in Cn(sx_i)$ i $sB_i \in Cn(sy_i)$, pa je po definiciji

$$sx = \frac{(sx_i) \qquad\qquad (sy_i)}{(sC_i)} \in Der(S).$$

P o s l e d i c a. Ako je S iskazni shema sistem ›đenja i s bilo koja supstitucija, onda iz $\Gamma \vdash_S \Delta$ slijedi $\vdash_S s\Delta$, gdje je sAB = (def.) $sAsB$.

Da bismo lakše uočili veze između ovakvog i tradi-ıalnih načina definisanja formalnih logičkih sistema iskaznog tipa (i ne samo iskaznog), u skupu pravila izvođenja $\underline{R}$ izdvojićemo sva otvorena jednozaključna pravila R za koja je Hyp(R) $= \emptyset$, dakle pravila oblika $\dfrac{\qquad}{A}$. Sve takve formule A ćemo nazivati <u>aksiomama</u> datog sistema izvođenja, a skup svih aksioma označavati sa Ax.

Ako je Ax $= \emptyset$, onda dati sistem izvođenja nazivamo <u>sistemom prirodne dedukcije</u> , a ako su sva pravila izvođenja jednozaključna, otvorena i Ax $\neq \emptyset$, za sistem kažemo da je <u>Hilbert-ovog tipa</u>. Sisteme Hilbert-ovog tipa ćemo tretirati kao uređenu trojku (For, Ax, $\underline{R}$ - Ax).

Pošto se u ovom radu ne namjeravamo dalje baviti višezaključnim sistemima izvođenja, mada to ostaje kao vrlo privlačna mogućnost (v. D. J. Shoesmith, T. J. Smiley (1978)) naročito u vezi sa strukturnom teorijom dokaza (v. G. Kreisel (1977), R. Statman (1974)), pokazaćemo da pojam relacije posledičnosti,uveden nakon opšte definicije sistema izvođenja, u potpunosti pokriva pojam relacije posledičnosti koji se uvodi na uobičajeni način, a u okviru razmatranja jednozaključnih sistema prirodne dedukcije, u oznaci $\vdash_{ND}$ (v. D. Prawit (1965), M. E. Szabo (ed.) (1969)), i sistema Hilbert-ovog tipa, u oznaci $\vdash_{HT}$ (v. S. C. Kleene (1952), S. B. Prešić (1968)).

T e o r e m a 1. Ako je S jednozaključni sistem prirodne dedukcije, onda $\Gamma \vdash_{S} A$ akko $\Gamma' \vdash_{ND} A$, gdje je Γ' skup svih formula koje se pojavljuju u nizu Γ.

D o k a z. Dio "ako"- indukcijom po izgrađenosti ođenja x prema kojem je $\Gamma \vdash_{S} A$. Neka je $Hyp(x) \subseteq \Gamma'$ i $x) \subseteq \{A\}$. Ako je $Hyp(x) = Cn(x) = \{A\}$, onda je svakako i $\vdash_{ND} A$. Ako je

$$x = \frac{(x_i)_{i<a} \qquad\qquad (y_i)_{i<b}}{A} \in Der(S)$$

$$(\text{ili} \quad x = \frac{(x_i)_{i<a} \qquad\qquad (y_i)_{i<b}}{} \in Der(S)),$$

$$\begin{array}{c} ([A_i])_{i<a} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$\frac{(A_i')_{i<a} \qquad\qquad (B_i)_{i<b}}{A} \in \underline{R}$$

$$\begin{array}{c} ([A_i])_{i<a} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$\text{ili} \quad \frac{(A_i')_{i<a} \qquad\qquad (B_i)_{i<b}}{} \quad \underline{R}),$$

$Hyp(x_i)$ $(i<a)$, $Cn(x_i) \subseteq \{A_i'\}$ $(i<a)$, $Cn(y_i) \subseteq \{B_i\} (i<b)$, onda a $Hyp(x_i) \subseteq \Gamma_i'$ $(i<a)$, $Hyp(y_i) \subseteq \Pi_i'$ $(i<b)$ i svakako $(\Gamma_i' - \{A_i\})) \cup (\bigcup_{i<b} \Pi_i') \subseteq \Gamma'$, po indukcijskoj hipotezi: $\vdash_{ND} A_i'$ $(i<a)$, $\Pi_i' \vdash_{ND} B_i$ $(i<b)$, pa je i $\Gamma' \vdash_{ND} A$.

Obrnuto: slično - indukcijom po broju primijenjenih ila u izvođenju A iz Γ'. $\dashv$

T e o r e m a 2. Ako je S sistem Hilbert-ovog tipa, onda $\Gamma \vdash_S A$ akko $\Gamma' \vdash_{HT} A$, gdje je Γ' skup svih formula koje se pojavljuju u nizu Γ.

D o k a z. Dio "ako" - indukcijom po izgrađenosti izvođenja x prema kojem je $\Gamma' \vdash_S A$. Neka je $x \in Der(S)$ tako da $Hyp(x) \subseteq \Gamma'$ i $Cn(x) \subseteq \{A\}$. Ako je $Hyp(x) = Cn(x) = \{A\}$, onda je, jasno, i $\Gamma' \vdash_{HT} A$. Ako je $x = \dfrac{\quad}{A}$, tj. A je aksiom, onda je i $\Gamma' \vdash_{HT} A$. Ako je $x = \dfrac{(y_i)_{i<b}}{A} \in Der(S)$ (ili $x = \dfrac{(y_i)_{i<b}}{} Der(S)$), $\dfrac{(B_i)_{i<b}}{A} \in \underline{R}$ (ili $\dfrac{(B_i)_{i<b}}{} \in \underline{R}$), $Hyp(y_i) \subseteq \Gamma_i'$ $(i<b)$, $Cn(y_i) \subseteq \{B_i\}$ $(i<b)$ i $\bigcup_{i<b} \Gamma_i' \subseteq \Gamma'$, onda prema indukcijskoj hipotezi imamo $\Gamma_i' \vdash_{HT} B_i$ $(i<b)$. Kako je $\dfrac{(B_i)_{i<b}}{A} \in \underline{R}$ (ili $\dfrac{(B_i)_{i<b}}{} \in \underline{R}$), tj. $\{B_i : i<b\} \vdash_{HT} A$, to po tranzitibnosti imamo $\bigcup_{i<b} \Gamma_i' \vdash_{HT} A$, pa i $\Gamma' \vdash_{HT} A$.

Obrnuto: neka je niz $B_1, \ldots, B_m, A$ izvođenje formule A iz Γ' u S prema HT. Ako je $A \in Ax$ ili $A \in \Gamma'$, onda i u smislu naše definicije $\Gamma \vdash_S A$, jer $x = \dfrac{\quad}{A} \in Der(S)$, $Hyp(x) = \emptyset$ i $Cn(x) = \{A\}$, odnosno $x = A \in Der(S)$, $Hyp(x) = Cn(x) = \{$ Ako se A dobija po pravilu $\dfrac{(A_i)_{i<a}}{A}$, gdje $\{A_i : i<a\} \subseteq \{B_i :\ 1 \leq i \leq m\}$ i svaka od formula A_i ima osobinu $A_i \in Ax$ ili $A_i \in \Gamma'$ ili $A_i = B_{i_o}$ slijedi po nekom pravilu iz nekih od formula $B_1, \ldots, B_{i_o-1}$. Ako je $A_i \in Ax$, onda za x_i uzimamo $\dfrac{\quad}{A_i}$, a ako je $A_i \in \Gamma'$, za x_i uzimamo samu formulu A_i.

trećem slučaju, prema indukcijskoj hipotezi, postoje $x_i \in$ Der(S) tako da $Hyp(x_i) \subseteq \Gamma'$ i $Cn(x_i) \subseteq \{A_i\}$, pa je

$$x = \frac{(x_i)_{i<a}}{A} \in Der(S), \quad Hyp(x) \subseteq \Gamma' \text{ i}$$

$Cn(x) \subseteq \{A\}$, tj. $\Gamma' \vdash_S A$. ⊣

Za formulu A kažemo da je <u>dokaziva</u> u sistemu izvođenja S ako je $\vdash_S A$. Ako su S_1 i S_2 dva sistema izvođenja, onda $S_1 \subseteq S_2$ ($S_1 \subsetneq S_2$) znači da je skup svih formula dokazivih u S_1 (pravi) podskup skupa formula dokazivih u S_2, a $S_1 = S_2$ je zamjena za $S_1 \subseteq S_2$ i $S_2 \subseteq S_1$.

Za relaciju posljedičnosti $\vdash$ nekog sistema izvođenja kažemo da zadovoljava uslov <u>kompaktnosti</u> (ili da je <u>kompaktna</u>) (v. K. Segerberg (1982)), ako iz $\Gamma \vdash \Delta$ slijedi da postoje konačni skupovi Π i Λ takvi da je $\Pi \subseteq \Gamma$, $\Lambda \subseteq \Delta$ i $\Pi \vdash \Lambda$. Termin "kompaktnost" se inače u literaturi češće upotrebljava u vezi sa odgovarajućim svojstvom semantičke relacije posljedičnosti (v. C. C. Chang, H. J. Keisler (1973)).

<u>Teorija</u> je uređen par (Γ, Δ) takav da $\Gamma, \Delta \subseteq For$ (v. D. M. Gabbay (1981)). Teorija (Γ, Δ) je $\vdash$- <u>protivrječna</u> ako $\Gamma \vdash \Delta$. Teorija (Γ, Δ) je $\vdash$-<u>neprotivrječna</u> ako nije $\vdash$-protivrječna. Teorija (Π, Λ) je <u>proširenje</u> teorije (Γ, Δ) ako $\Gamma \subseteq \Pi$ i $\Delta \subseteq \Lambda$. (Π, Λ) je <u>pravo proširenje</u> teorije (Γ, Δ) ako je (Π, Λ) proširenje teorije (Γ, Δ), ali (Γ, Δ) nije proširenje teorije (Π, Λ). Teorija (Γ, Δ) je <u>maksimalno</u> $\vdash$-<u>neprotivrječna</u> ako nema pravih $\vdash$-neprotivrječnih proširenja.

L e m a 6. (Lindenbaum-ova lema) (v. K. Segerberg

(1982)) Ako je $\vdash$ kompaktna relacija posljedičnosti, onda svaka $\vdash$-neprotivrječna teorija ima maksimalno $\vdash$-neprotivrječno proširenje.

D o k a z. Pretpostavimo da su sve formule uređene u niz $(A_n)_{n\geqslant 0}$ i da je (Γ_0, Δ_0) neka $\vdash$-neprotivrječna teorija. Neka je $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A_i\}$ i $\Delta_{i+1} = \Delta_i$, ako je $(\Gamma_i \cup \{A_i\}, \Delta_i)$ $\vdash$-neprotivrječna teorija i $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ i $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{A_i\}$, inače. Teorija (Γ, Δ), gdje je $\Gamma = \bigcup_{i<\omega}$ i $\Delta = \bigcup_{i<\omega} \Delta_i$, je maksimalno $\vdash$-neprotivrječno proširenje polazne teorije (Γ_0, Δ_0). Iz konstrukcije je jasno da je $(\Gamma,$ proširenje teorije (Γ_0, Δ_0). Da bismo pokazali da je (Γ, Δ) $\vdash$-neprotivrječna, pretpostavimo suprotno. Kako je $\vdash$ kompaktna, postoje konačni skupovi Π i Λ takvi da $\Pi \subseteq \Gamma$, $\Lambda \subseteq$ $\Pi \vdash \Lambda$. Dakle postoji neki i za koji je $\Gamma_i \vdash \Delta_i$. Neka je $m = \min\{i: \Gamma_i \vdash \Delta_i\}$. Prema konstrukciji: ili $A_{m-1} \in \Gamma_m$ ili $A_{m-1} \in \Delta_m$, i to $A_{m-1} \in \Gamma_m$ akko nije $\Gamma_m \vdash \Delta_m$. Kako je $\Gamma_m \vdash \Delta_m$ to je $A_{m-1} \in \Delta_m$ i $\Gamma_{m-1}, A_{m-1} \vdash \Delta_{m-1}$. Ali kako je $\Gamma_{m-1} = \Gamma_m$ $\Delta_{m-1} \cup \{A_{m-1}\} = \Delta_m$, to iz $\Gamma_{m-1} \vdash \Delta_{m-1}, A_{m-1}$ i $A_{m-1}, \Gamma_{m-1} \vdash \Delta_{m-1}$ dobijamo protivrječnost: $\Gamma_{m-1} \vdash \Delta_{m-1}$. Slijedi: (Γ, Δ) je $\vdash$-neprotivrječna teorija. Teorija (Γ, Δ) nema pravih $\vdash$-neprotivrječnih proširenja. Pretpostavimo da su Π i Λ takvi da $\Gamma \subseteq \Pi$, $\Delta \subseteq \Lambda$ i nije $\Pi \vdash \Lambda$. Ako je $A_i \in \Pi$, onda je $A_i \in \Gamma$ ili $A_i \in \Delta_i$. Ako je $A_i \in \Delta_i$, iz $\Delta_i \subseteq \Delta \subseteq \Lambda$, slijedi da $A_i \in \Lambda$ pa bi moralo biti da $\Pi \vdash \Lambda$ što je suprotno pretpostavci. Dakle, $A_i \in \Gamma_i \subseteq \Gamma$, pa $\Pi \subseteq \Gamma$, tj. $\Pi = \Gamma$. Slično se može pokazati da je $\Lambda = \Delta$. $\dashv$

L e m a 7. Ako je (Γ, Δ) maksimalna $\vdash$-neprorječna teorija, onda za svaku formulu A važi: ili $A \in \Gamma$

$A \in \Delta$.

D o k a z. Pretpostavimo suprotno: $A \notin \Gamma$ i $A \notin \Delta$.

a $\Gamma, A \vdash \Delta$ i $\Gamma \vdash \Delta, A$, jer bi inače neka od teorija

$\cup\{A\}, \Delta)$ ili $(\Gamma, \Delta \cup \{A\})$ bila pravo $\vdash$-neprotivrječno

širenje. Odavde slijedi $\Gamma \vdash \Delta$, što je u suprotnosti sa pre-

stavkom da je (Γ, Δ) $\vdash$-neprotivrječna teorija. $\dashv$

1.3. Metasistemi izvođenja. Polazeći od skupa F osno-

ı formi nekog sistema izvođenja, izdvajajući neke simbole

nužno nove u odnosu na polazni jezik) koje možemo interpre-

ati na različite načine - kao operacije ili predikate nad

om F, na primjer - dolazimo do nekog (ne nužno novog) skupa

etaformi. Pod metasistemom izvođenja sistema izvođenja

) podrazumijevamo sistem izvođenja (MF,R′), gdje je R′

skup pravila izvođenja koja se odnose na metaforme.

Od posebnog su značaja metasistemi izvođenja iska-

ı, odnosno predikatskih, sistema izvođenja, a, u ovom konte-

ı, naročito metasistemi koji će među svojim simbolima imati

znak koji se može interpretirati kao relacija posledično-

Među najvažnijim takvim su svakako računi sekvenata dati

rije u radovima G. Gentzena 1934. godine (v. M. E. Szabo

) (1969), G. Takeuti (1975)), gdje se, ukratko, radi

o jednozaključnom metasistemu višezaključnog objektsi-

a (v. D. J. Shoesmith, T. J. Smiley (1978)). Zanimljivu

ćnost za ovakva razmatranja pruža i ideja "horizontaliza-

" pravila objektsistema uz razlikovanje nivoa (v. K. Došen

0)).

Na ovom mjestu ćemo pomenuti još i, bliske nam, jednakosne (i nejednakosne) prerade formalnih teorija (v. S. B. Prešić (1975)) koje za određene klase objektsistema predstavljaju direktan opis njhovih algebarskih modela.

Tokom rada seminara "Uvod u metodologiju istraživanja tematike" kojim je, školske 1981/82. godine na Prirodno-matemat fakultetu u Beogradu, rukovodio profesor S. B. Prešić, došlo se do prirodnog problema opisa metasistema izvođenja u kojem bi bila izraziva sopstvena relacija posledičnosti, kao i relacija posledičnosti polaznog objektsistema.

Evo jednog takvog primjera:

Neka je $S = (\underline{F}, \underline{R})$ finitarni jednozaključni sistem izvođenja čija su sva pravila otvorena i neka je iHS sistem nad skupom metaformi $\underline{MF}$ definisanim induktivno uslovima: (i) $\underline{F} \subseteq \underline{MF}$ i (ii) ako $A, B \in \underline{MF}$, onda $(A \to B) \in \underline{MF}$; sa aksiomama

(i1) $A \to (B \to A)$

(i2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

i jedinim pravilom izvođenja

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \quad \text{(mp - modus ponens)},$$

gdje je "$\to$" simbol jezika sistema S za koji je $\vdash_S A \to (B \to A)$, $\vdash_S (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ i $A, A \to B \vdash_S B$, a ukoliko takav simbol u jeziku sistema S ne postoji, onda je "$\to$" nužno nov simbol.

Sa $f_{iH}(S)$ ćemo označavati sistem izvođenja

$, Ax(S) \cup Ax(iHS), \underline{R}(f_{iH}(S)))$, gdje je $\underline{R}(f_{iH}(S))$ skup pravila ođenja koji pored pravila (mp) sadrži i sva pravila oblika

$$\frac{(\bigwedge_i A_i \to B_j)_{j<b}}{\bigwedge_i A_i \to C},$$

e je

$$\frac{(B_j)_{j<b}}{C}$$

vilo polaznog sistema S, $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ konačan niz proizvoljnih aformi, a $\bigwedge_{1\leq i\leq n} A_i \to C$ skraćenica za $A_1 \to (\ldots \to (A_n \to C)\ldots)$, ı ćemo i ubuduće koristiti.

L e m a 8. (Teorema dedukcije) Ako $\ldots, A_n \vdash_{f_{iH}(S)} A$, onda $\vdash_{f_{iH}(S)} \bigwedge_i A_i \to A$.

D o k a z. Dovoljno je pokazati da iz $\Gamma, A \vdash B$ sli- i $\Gamma \vdash A \to B$. Odatle se indukcijom po n može dokazati i naša a. Dokaz pomoćnog tvrđenja izvodimo indukcijom po dužini do- a za $\Gamma, A \vdash B$ u $f_{iH}(S)$.
a indukcije: Ako je $B \in Ax(S) \cup Ax(iHS) \cup \{A\} \cup \Gamma$, onda je sva- ɔ $\Gamma \vdash A \to B$. Ako je $C, C \to B \in \Gamma \cup \{A\}$ za neku formulu C, onda za (1) $C=A$ svakako i $\Gamma \vdash A \to B$; (2) $C \to B = A$ i $\Gamma \vdash A \to B$, je $\Gamma \vdash A \to C$ i $A \to C \vdash A \to B$; (3) $C \neq A$ i $C \to B \neq A$, svakako B i $B \vdash A \to B$ odakle je i $\Gamma \vdash A \to B$. Ako je $\bigwedge_i A_i \to B_j \in$ $\cup \{A\}$ $(j<b)$ i $B = \bigwedge_i A_i \to C$, onda (1') za $\bigwedge_i A_i \to B_{j_o} = A$ za i $j_o < b$, i $\bigwedge_i A_i \to C = B$, $\Gamma \vdash A \to B$, jer $\Gamma \vdash A \to (\bigwedge_i A_i \to B_j)$ $j_o)$ i $\{A \to (\bigwedge_i A_i \to B_j) : j \neq j_o\} \vdash A \to B$; (2') ~~za~~ $\bigwedge_i A_i \to B_j \neq$

$\nvdash A$, za svaki $j<b$, razmatramo kao slučaj (3).

Indukcijska hipoteza: Ako je $\Gamma, A \vdash B$ dokazivo u k koraka u $f_{iH}(S)$, onda je $\Gamma \vdash A \to B$ dokazivo u $f_{iH}(S)$.

Indukcijski korak: neka je $\Gamma, A \vdash B$ dokazivo u $f_{iH}(S)$ u k+1 koraka. Ako je u zadnjem koraku dokaza bilo primijenjeno pravilo (mp) na $\Gamma, A \vdash C$ i $\Gamma, A \vdash C \to B$, onda je po inukcijskoj hipotezi $\Gamma \vdash A \to C$ i $\Gamma \vdash A \to (C \to B)$. Imajući u vidu aksiomu (i2), po (mp) imamo $\Gamma \vdash A \to B$. Ako je u zadnjem koraku primijenjeno pravilo

$$\frac{(\bigwedge_i A_i \to B_j)_{j<b}}{\bigwedge_i A_i \to C},$$

onda iz $\Gamma, A \vdash \bigwedge_i A_i \to B_j$ $(j<b)$, prema indukcijskoj hipotezi, imamo $\Gamma \vdash A \to (\bigwedge_i A_i \to B_j)$ $(j<b)$, odakle po istom pravilu izvođenja zaključujemo $\Gamma \vdash A \to B$. ⊣

L e m a 9. (Uopšteno pravilo (mp)) Ako $\vdash_{f_{iH}(S)} \bigwedge_i A_i \to A$, onda $A_1, \ldots, A_n \vdash_{f_{iH}(S)} A$.

D o k a z. Indukcijom po n i primjenom pravila (mp).

Može se pokazati da je iHS, za $S=(\underline{F}, \emptyset)$, minimalan sistem za koji važi teorema dedukcije i u kojem je dopustivo pravilo (mp) (v. H. B. Curry (1959), J. Porte (1982)). Minimalan podsistem za koji važi (samo) teorema dedukcije dao je W. A. Pogorzelski (1968).

L e m a 10. Neka je $A_1, \ldots, A_n, A \in \underline{F}$. Tada iz $A_1, \ldots, A_n \vdash_S A$ slijedi $\vdash_{f_{iH}(S)} \bigwedge_i A_i \to A$.

D o k a z. Pošto su sva pravila i aksiome sistema

redom, pravila i aksiome sistema $f_{iH}(S)$, iz $A_1,\ldots,A_n \vdash_S A$
mo $A_1,\ldots,A_n \vdash_{f_{iH}(S)} A$, odakle po teoremi dedukcije slijedi
$\vdash_{f_{iH}(S)} \bigwedge_i A_i \to A$. ⊣

Lema 11. $\vdash_{f_{iH}(f_{iH}(S))} A$ akko $\vdash_{f_{iH}(S)} A$.

Dokaz. Dio "samo ako": dovoljno je pokazati da je
vilo

$$\frac{\bigwedge_i A_i \to A \qquad \bigwedge_i A_i \to (A \to B)}{\bigwedge_i A_i \to B}$$

ustivo u $f_{iH}(S)$. Neka je

$$A_1 \to (\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to A) \qquad (1)$$

$$A_1 \to (\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to (A \to B))$$

kle izvodimo i $A \to (\bigwedge A_i \to B)$, ili, uzastopnim primjenama
vila

$$\frac{A \to B \qquad C \to D}{A \to ((B \to C) \to D)}$$

je dopustivo u iHS (v. glavu 4),

$$\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to ((\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to A) \to (\bigwedge A_i \to B)),$$

$$A_1 \to ((\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to A) \to (\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to B)) \qquad (2).$$

čimo sa A' i B' redom formule $\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to A$ i $\bigwedge_{i\neq 1} A_i \to B$.
je $(A_1 \to (A' \to B')) \to ((A_1 \to A') \to (A_1 \to B'))$ aksioma (i2),
davde i iz (1) i (2) po pravilu (mp) dobijamo $A_1 \to B'$, tj.
$\to B$.
uto – prema prethodnoj lemi. ⊣

Odavde, prema rezultatu S.B. Prešića (1972), zaključujemo da je $X = f_{iH}(Y)$ opšte rješenje problema određivanja finitarnih jednozaključnih sistema izvođenja X sa otvorenim pravilima , koji zadovoljavaju uslov $X = f_{iH}(X)$, za proizvolja sistem Y pomenutog tipa.

Slijedeći već pomenutu Gentzen-ovu ideju, <u>račun sekvenata</u> možemo definisati kao jednozaključni sistem $G = (Seq, \{(A,A) : A \in For\}, \underline{R})$, gdje je Seq Descartes-ov stepen $W^2(For)$ skupa svih riječi $W(For)$ nad skupom formula i $\underline{R}$ izvjestan skup otvorenih pravila. U skladu sa tradicionalnim oznakama, element (Γ, Δ) skupa Seq ćemo označavati sa $\Gamma \Vdash \Delta$, a riječi Γ i Δ , redom, nazivati antecedentom i konekventom sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$. Račun sekvenata G je <u>gencenizacija</u> sistema izvođenja $S = (For, Ax, \underline{R}')$ ako

$$\vdash_G \Gamma \Vdash \Delta \qquad \text{akko} \vdash_S f(\Gamma \Vdash \Delta) \text{ za neku funkciju}$$

$f : Seq \rightarrow For$.

Upravo navedena definicija gencenizacije možda bitno odstupa od onoga što se najčešće u literaturi podrazumijeva pod gencenizacijom, naročito ako se imaju u vidu poznati računi sekvenata kod kojih je jedna od najvažnijih činjenica teorema o eiminaciji pravila sječenja (Hauptsatz). Stoga ćemo takve gencenizacije zvati još i <u>pravim</u> gencenizacijama.

1.4. <u>Heyting-ov račun iskaza i neka njegova proširenja</u>. Vrlo često se u literaturi neopravdano ne naglašava razlika između <u>konstruktivizma</u> i <u>intuicionizma</u>, te <u>logike intuicionizma</u> i <u>Heyting-ove logike</u>. Intuicionizam koji počinje radovima Brouwer-a (v. L. E. J. Brouwer (1907,1913), A. Heyting (1956), I. M. Bocheński (1961)) predstavlja tek jednu mogućnost za kon-

:uktivno zasnivanje matematike, jer s druge strane imamo i
› značajnu struju konstruktivizma škole Markova (v. A. A.
:ov (1956, 1962, 1968, 1970, 1972)) koja dopušta izvjesne
ıicionistički nedopustive principe (npr. princip Markova
princip konstruktivnog izbora). Heyting-ova logika (v. A.
;ing (1930, 1959), P. S. Novikov (1977), D. M. Gabbay (1981)),
pokušaj formalnog opisa dijela intuicionističke logike, je,
.zvjesnog stanovišta, njena zadovoljavajuća aproksimacija.
;o je opet samo jedna od mogućnosti za logiku konstruktivne
·matike. Značajne i zanimljive alternative svakako treba tra-
. i među podsistemima Heyting-ove logike (v. H. B. Curry
;3), K. Segerberg (1968)), njenim proširenjima (v. T. Ume-
. (1959, 1959a), S. Görnemann (1971), D. M. Gabbay (1981)),
.ogikama Markova (A. A. Markov (1950)), Vorobjova (v. N. N.
·bjov (1952, 1964)), Nelson-a (v. D. Nelson (1949, 1959)),
.avskog (v. I. D. Zaslavski (1978)) itd.

Od interesa je naravno i razmatranje konstruktivno
ıstivih logičkih zakona i sistema, njihovih mogućih kla-
kacija i međusobnih odnosa, a u vezi sa eksplicitno de-
.sanim principima konstruktivizma.

Logički sistemi bliski Heyting-ovom sistemu razma-
.i su najprije u radovima Glivenka (v. V. I. Glivenko (1928)),
ing-a (v. A. Heyting (1930, 1956)), Kolmogorova (v. A. N.
.ogorov (1932)), Johansson-a (v. I. Johansson (1937)), da
·ili detaljno razrađivani kod Jaśkowskog (v. S. Jaśkowski
4)), Gentzen-a (v. M. E. Szabo (ed.) (1969)), Tarskog (v.
arski (1938)), Kripke-a (v. S. Kripke (1965)), Beth-a (v.
'. Beth (1959)), Dragalina (v. A. G. Dragalin (1979)) i

mnogih drugih. Osnovni zadatak bio je aksiomatizovanje sistema iskaza u kojem klasično važeći zakon isključenja trećeg (tertium non datur) ne bi bio dopustiv. Kasnija istraživanja proširenja Heyting-ovog računa pokazuju da takvih sistema ima beskonačno mnogo, ali da među njima Heyting-ov sistem ima izuzetan značaj.

Aksiomatizacija Heyting-ove logike iskaza Hilbert-ovog tipa nad skupom iskaznih formula građenih unarnim veznikom $\neg$ i binarnim $\rightarrow$, $\wedge$ i $\vee$, u oznaci H, koju navodimo ovdje sa (mp) kao jedinim pravilom izvođenja, je data kod Kleene-a (v. S. C. Kleene (1952)):

(i1) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(i2) $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(c3) $A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$

(c4) $A\wedge B\rightarrow A$

(c5) $A\wedge B\rightarrow B$

(d6) $A\rightarrow A\vee B$

(d7) $B\rightarrow A\vee B$

(d8) $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$

(n9) $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)$

(n10) $\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$

Podsjetimo se da smo navedeni sistem djelimično već razmatrali (For, $\{$(i1),(i2)$\}$, (mp)) govoreći o jednom reproduktivnom metasistemu izvođenja. Kao važna činjenica o sistemu H koja neposredno slijedi iz pomenutih razmatranja je i <u>teorema dedukcije</u>. Za navedenu aksiomatizaciju se može pokazati da separabilna (v. A. Horn (1962)), tj. da se sve i- (ic-, id-, , icd-, icn-, idn-) (odnosno $\rightarrow$-($\rightarrow, \wedge$ -, $\rightarrow, \vee$ -, $\rightarrow, \neg$ -, $, \wedge, \vee$ -, $\rightarrow, \wedge, \neg$ -, $\rightarrow, \vee, \neg$ -))teoreme sistema H mogu esti primjenom pravila (mp) iz i-(ic-, id-, in-, icd-, icn-, -)aksioma. Stoga ćemo sa iH, icH, itd. označavati, redom, teme ($For_{\rightarrow}$,{(i1),(i2)}, (mp)), ($For_{\rightarrow,\wedge}$,{(i1),(i2),(c3),),(c5)}, (mp)), itd.

Gencenizacija Heyting-ovog računa iskaza, u oznaci podrazumijeva račun sekvenata (Seq,$\{(P,P):P \in PC \cup PL\}$, R), e se skup pravila izvođenja R sastoji iz

strukturnih pravila izvođenja:

$$\frac{\Gamma AB\Pi \Vdash \Delta}{\Gamma BA\Pi \Vdash \Delta}\ (LP) \qquad \frac{\Gamma \Vdash \Delta AB\Lambda}{\Gamma \Vdash \Delta BA\Lambda}\ (RP)$$

$$\frac{\Gamma AA \Vdash \Delta}{\Gamma A \Vdash \Delta}\ (LC) \qquad \frac{\Gamma \Vdash \Delta AA}{\Gamma \Vdash \Delta A}\ (RC)$$

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma A \Vdash \Delta}\ (LW) \qquad \frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \Delta A}\ (RW)$$

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta A \qquad A\Pi \Vdash \Lambda}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda}\ (C)\ (\text{sječenje})$$

i logičkih pravila izvođenja:

$$\frac{\Gamma A \Vdash \Delta}{\Gamma A \wedge B \Vdash \Delta}\ (L\wedge_1) \qquad \frac{\Gamma B \Vdash \Delta}{\Gamma A \wedge B \Vdash \Delta}\ (L\wedge_2)$$

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta A \qquad \Gamma \Vdash \Delta B}{\Gamma \Vdash \Delta A \wedge B} \ (R\wedge)$$

$$\frac{\Gamma A \Vdash \Delta \qquad \Gamma B \Vdash \Delta}{\Gamma A \vee B \Vdash \Delta} \ (L\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta A}{\Gamma \Vdash \Delta A \vee B} \ (R\vee_1) \qquad \frac{\Gamma \Vdash \Delta B}{\Gamma \Vdash \Delta A \vee B} \ (R\vee_2)$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A \qquad B\Pi \Vdash \Delta}{\Gamma A \to B\,\Pi \Vdash \Delta} \ (L\to) \qquad \frac{\Gamma A \Vdash B}{\Gamma \Vdash A \to B} \ (R\to)$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A}{\Gamma \neg A \Vdash} \ (L\neg) \qquad \frac{\Gamma A \Vdash}{\Gamma \Vdash \neg A} \ (R\neg)$$

Navedeni sistem GH se neznatno razlikuje od originalnog Gentzen-ovog sistema (v. M. E. Szabo (ed.) (1969)), ali zadržava njegovo bitno svojstvo (v. T. Umezawa (1959), M. E. Szabo (1978)) da je svaki sekvent dokaziv u sistemu GH dokaziv i bez upotrebe pravila sječenja (teorema o eliminaciji pravila sječenja) (tj. radi se o pravoj gencenizaciji sistema H!), što ima za posljedicu teoremu interpolacije, separabilnost, odlučivost, svojstvo podformulnosti itd.

Dodajući Peirce-ov zakon $((A\to B)\to A)\to A$ u svojstvu (shema)aksiome sistemu H dobijamo separabilnu aksiomatizaciju klasičnog računa iskaza, u oznaci C, (v. H. B. Curry (1963) – "Teorema Tarski-Bernays-a", T. Hosoi (1966, 1966a)) svakako najviše proučen logički sistem. Dopuštajući u konsekventu pravila $(R\to)$ (sljedstveno i pravila $(R\neg)$) više od jedne formule ija se prava gencenizacija klasičnog računa iskaza (v. M. Szabo (ed.)(1969), G. Takeuti (1975)).

Poznate nam formulacije klasičnog računa iskaza jednozaključnog sistema prirodne dedukcije (v. D. Prawitz 55, 1971), M. E. Szabo (ed.) (1969)), prije svega, nisu se-abilne. S druge strane, jedna separabilna formulacija, da-u radu E. G. K. López-Escobar-a (1982), nam više ne pruža ıćnosti da dokažemo jedno tvrđenje, tako značajno za razma-ıja sistema prirodnih dedukcija sa stanovišta teorije do-ı, kao što je teorema o normalizaciji izvođenja. Sve to jda zato što, kada se radi o klasičnoj logici, radi se za-ro o jednoj suštinski višezaključnoj logici. Jedna od nje-mogućih formulacija, u oznaci NC, je i slijedeća:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma A}\ (u)$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \Gamma B\end{matrix}}{\Gamma\ A \rightarrow B}\ (u\rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma A \qquad \Gamma A \rightarrow B}{\Gamma\ B}\ (e\rightarrow)$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \Gamma\end{matrix}}{\Gamma \neg A}\ (u\neg) \qquad\qquad \frac{\Gamma A \qquad \Gamma \neg A}{\Gamma}\ (e\neg)$$

$$\frac{\Gamma A \qquad \Gamma B}{\Gamma A \wedge B}\ (u\wedge) \qquad \frac{\Gamma A \wedge B}{\Gamma A}\ ,\ \frac{\Gamma A \wedge B}{\Gamma B}\ (e\wedge)$$

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma A \vee B}\ ,\ \frac{\Gamma B}{\Gamma A \vee B}\ (u\vee) \qquad \frac{\Delta A \vee B \qquad \begin{matrix}[\Delta A]\\ \vdots \\ \Gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Delta B]\\ \vdots \\ \Gamma\end{matrix}}{\Gamma}\ (e\vee)$$

uz dogovor da ćemo sa ΓA označavati skup formula $\Gamma \cup \{A\}$, jednočlane skupove identifikovati sa njihovim elementima, a na mjesto praznog skupa (ili konstante za apsurd) ostavljati prazan prostor.

Radi lakšeg čitanja teksta, kod opšte definicije sistema izvođenja zaobiđena je mogućnost da nam se kao pretpostavke kod nekog pravila izvođenja pojave skupovi formula, kao što je to slučaj sa našim sistemom NC. Stoga, bi trebalo imati u vidu da se svaki neprazan skup Γ može interpretirati kao disjunkcija $\check{\Gamma}$ svojih formula, a sama činjenica da se iz skupova $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ može izvesti Δ, imala bi za posledicu da se u datom sistemu može dokazati da, ako je za svaki i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $\Gamma_i \cap \Gamma \neq \emptyset$, onda $\Gamma \vdash \Delta$. Ovakvo shvatanje dedukcije bi nam opravdavala formula

$$(A \vee B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$$

dokaziva u Heyting-ovom računu iskaza.

Tako bi se, na primjer, pravilo $(e\vee)$ moglo terpretirati kao

$$((A \vee B) \vee \check{\Delta}) \wedge ((A \vee \check{\Delta}) \rightarrow \check{\Gamma}) \wedge ((B \vee \check{\Delta}) \rightarrow \check{\Gamma}) \rightarrow \check{\Gamma},$$

iz činjenice da se iz AB i C može izvesti D, slijedilo bi je $AC \vdash D$ i $BC \vdash D$.

Ipak, za prirodniju i jednostavniju alternativu, u ›m trenutku, a za koju se na ovom mjestu i odlučujemo, čini ı se ograničenje da nam <u>sva izvođenja u našim sistemima prirodnih dedukcija, pa i sistemu NC, počinju jednočlanim skupo- ıa,</u> tj. formulama. Drugim riječima, svako drvo izvođenja za ›je maksimalne elemente ima jednočlane skupove, pa izvođenje hipoteza poimamo na uobičajeni način, a samu činjenicu da (u NC) iz Γ može izvesti Δ interpretiramo kao $\hat{\Gamma} \rightarrow \check{\Delta}$, je nam $\hat{\Gamma}$ označava konjunkciju formula iz Γ, a za $\Gamma = \emptyset$ $\hat{\Gamma} = \top$ i $\check{\Delta} = \bot$ za $\Delta = \emptyset$.

Sve formule (ili skupove formula) što se pojavlju- iznad crte datog pravila, a nisu u zagradi, nazivamo <u>pre-</u> <u>ıama</u> tog pravila, a one ispod crte nazivamo <u>zaključkom</u>.

Premise ΓA i Γ u pravilima $(e \rightarrow)$, $(e \neg)$ i $\vee)$ nazivamo <u>malim premisama</u>. Sve ostale premise su <u>velike</u> <u>mise</u>.

Formule A, $A \rightarrow B$, $\neg A$, $A \wedge B$ i $A \vee B$ nazivamo <u>vnim formulama</u> pravila (u), $(u, e \rightarrow)$, $(u, e \neg)$, $(u, e \wedge)$ i $e \vee)$, redom.

Pravila (u), $(u \rightarrow)$, $(u \neg)$, $(u \wedge)$ i $(u \vee)$ nazivamo <u>ravilima</u>, a pravila $(e \rightarrow)$, $(e \neg)$, $(e \wedge)$ i $(e \vee)$ <u>e-pravi-</u> <u>a</u>.

Heyting-ova logika iskaza se odavde može dobiti kao jednozaključni sistem prirodne dedukcije, dakle, kao sistem za koji je zadovoljen uslov da su skupovi Γ i Δ kod svih pravila prazni, izuzev kod pravila $(e\vee)$, gdje je Γ ne više nego jednočlan skup.

Da bi se pokazalo da je data formulacija klasičnog računa iskaza separabilna, dovoljno je pokazati da se samo uz upotrebu pravila (u), $(u\to)$ i $(e\to)$ može izvesti Peirce--ov zakon, što nam garantuje slijedeći dokaz

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^{(1)}}{AB}\,(u)}{AA\to B}\,(u\to)(1) \qquad \dfrac{[(A\to B)\to A]^{(2)}}{A(A\to B)\to A}\,(u)}{A}\,(e\to)}{((A\to B)\to A)\to A}\,(u\to)(2) \;.$$

Primijetimo da nam u-pravila imaju osobinu podformulnosti, tj. da su sve formule koje se pojavljuju iznad crte nekog pravila, podformule formula koje se pojavljuju u zaključku tog pravila.

Pod <u>segmentom dužine</u> n (v. D. Prawitz (1965)) izvoda $x \in Der(NC)$ podrazumijevamo niz istih skupova $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ koji se uzastopno pojavljuju jedan ispod drugog u izvođenju x i zadovoljavaju uslove:

(i) Γ_1 nije zaključak pravila $(e\vee)$;

(ii) Γ_i, za $i<n$, je mala premisa pravila $(e\vee)$;

(iii) Γ_n nije mala premisa pravila $(e\vee)$.

Segment je <u>maksimalan</u> ako počinje skupom koji je zaključak nekog u-pravila, a završava skupom koji je velika premisa nekog e-pravila, sa istom glavnom formulom u oba slučaj

T e o r e m a 3. (Princip inverzije) Ako se prema
om izvođenju $x \in \mathrm{Der(NC)}$ može zaključiti da se u sistemu
iz $A_1,\dots,A_n$ može izvesti Δ, onda postoji izvođenje
Der(NC) prema kojem se to isto može zaključiti, a u kojem,
zev u maksimalnim segmentima dužine veće od 1, ne postoji
mula koja se pojavljuje kao glavna formula nekog u-pravila
ao glavna formula velike premise nekog e-pravila.

D o k a z. Dovoljno je pokazati kako se svaki dokaz
ojem se neka formula pojavljuje u zaključku nekog u-pravila
velikoj premisi nekog e-pravila i to oba puta kao glavna
nula (izuzimajući, naravno, maksimalne segmente dužine veće
1), može prevesti u dokaz bez takve formule.

Dokaz izvodimo indukcijom po broju pojavljivanja
ve formule A u datom izvođenju.

Baza indukcije - prije svega, jasno je, da ako se
i o upotrebi pravila (u), onda se takvo izvođenje može za-
ıniti drugim na način kako se to ovdje čini:

je $B \rightarrow C$:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \hline \Gamma B \rightarrow C \\ \hline \Gamma C \\ \hline\hline \Delta \end{array} \qquad \text{zamijeniti sa} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \hline \Gamma C \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

e $\neg B$:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma B \qquad \dfrac{\Gamma}{\Gamma \neg B}}{\Gamma} \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$ zamijeniti sa $$\begin{array}{c} \Gamma \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

A je $B \wedge C$:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\Gamma}{\Gamma B \wedge C}}{\Gamma B} \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$ zamijeniti sa $$\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma}{\Gamma B} \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

A je $B \vee C$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\Gamma B \vee C} \qquad \begin{array}{c} [\Gamma B] \\ \hline\hline \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\Gamma C] \\ \hline\hline \Delta \end{array}}{\Delta}$$ zamijeniti sa $$\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma}{\Gamma B} \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

Ako je posmatrana formula A glavna formula nekog od pravila za uvođenje logičkih veznika, onda:

za $A = B \rightarrow C$:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma B \qquad \dfrac{\begin{array}{c} [B] \\ \hline\hline \Gamma C \end{array}}{\Gamma B \rightarrow C}}{\Gamma C} \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$ zamjenjujemo sa $$\begin{array}{c} \Gamma B \\ \hline\hline \Gamma C \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$A = \neg B$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & \begin{array}{c} [B] \\ \hline\hline \Gamma \\ \hline \Gamma\neg B \end{array} \end{array} \\ \hline \Gamma \\ \hline\hline \Delta \end{array} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad \begin{array}{c} \Gamma B \\ \hline\hline \Gamma \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$A = B \wedge C$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Gamma B & \Gamma C \end{array} \\ \hline \Gamma B \wedge C \\ \hline \Gamma B \\ \hline\hline \Delta \end{array} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad \begin{array}{c} \Gamma B \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$A = B \vee C$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B \vee C & \begin{array}{c} [\Gamma B] \\ \hline\hline \Pi \end{array} & \begin{array}{c} [\Gamma C] \\ \hline\hline \Pi \end{array} \end{array} \\ \hline \Pi \\ \hline\hline \Delta \end{array} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad \begin{array}{c} \Gamma B \\ \hline\hline \Pi \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

Indukcijski korak - ako se formula A uvodi pravilom , onda za

$B \rightarrow C$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \Gamma' \\ \hline \Gamma' B \rightarrow C \\ \hline\hline \Gamma B \rightarrow C \end{array} \\ \hline \Gamma C \\ \hline\hline \Delta \end{array} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad \begin{array}{c} \Gamma' \\ \hline \Gamma' C \\ \hline\hline \Gamma C \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$A = \neg B$

$$\dfrac{\Gamma B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma'}{\Gamma' \neg B}}{\Gamma \neg B}}{\dfrac{\Gamma}{\Delta}} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}}{\Delta}$$

$A = B \wedge C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma'}{\Gamma' B \wedge C}}{\Gamma B \wedge C}}{\Gamma B}}{\Delta} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma'}{\Gamma' B}}{\Gamma B}}{\Delta}$$

$A = B \vee C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma'}{\Gamma' B \vee C}}{\Gamma B \vee C} \qquad \dfrac{[\Gamma B]}{\Pi} \qquad \dfrac{[\Gamma C]}{\Pi}}{\dfrac{\Pi}{\Delta}} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma'}{\Gamma' B}}{\Gamma B}}{\Pi}}{\Delta}$$

inače, ako je:

$A = B \to C$

$$\dfrac{\Gamma B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]}{\Gamma' C}}{\Gamma' B \to C}}{\Gamma B \to C}}{\dfrac{\Gamma C}{\Delta}} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma B}{\Gamma \Gamma' C}}{\Gamma C}}{\Delta}$$

$\neg B$ slično kao u prethodnom slučaju,

$B \wedge C$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma' B \qquad \Gamma' C}{\Gamma' B \wedge C}}{\Gamma B \wedge C}}{\Gamma B}}{\Delta} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma' B}{\Gamma B}}{\Delta}$$

$B \vee C$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B}{B \vee C}}{B \vee C} \qquad \cfrac{[\Gamma B]}{\Pi} \qquad \cfrac{[\Gamma C]}{\Pi}}{\cfrac{\Pi}{\Delta}} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma' B}{\Gamma B}}{\Pi}}{\Delta} . \dashv$$

Za primjenu pravila ($e \vee$) kažemo da je suvišna
kom izvođenju, ako se neka od malih premisa ne nalazi ispod
postavke koja je zatvorena (tj. u zagradi).

Pod normalnim izvođenjem podrazumijevamo izvođenje
ne sadrži nijedan maksimalni segment, nijednu suvišnu pri-
u pravila ($e \vee$) i nijednu formulu koja se pojavljuje kao gla-
formula nekog u-pravila i kao glavna formula velike premise
g e-pravila.

T e o r e m a 4. (Teorema o normalizaciji izvođe-
) Ako postoji izvođenje $x \in Der(NC)$ prema kojem možemo

zaključiti da iz $A_1,\dots,A_n$ slijedi Δ u NC, onda postoji normalno izvođenje $x' \in Der(NC)$ prema kojem takođe iz $A_1,\dots,A_n$ slijedi Δ.

D o k a z. Dokaz izvodimo slično kao što je teorema o normalizaciji izvođenja dokazana za Heyting-ovu i minimalnu logiku (v. D. Prawitz (1965)), što je, u krajnjoj liniji i u jednom i u drugom slučaju, kopija dokaza teoreme o eliminaciji sječenja za gencenizaciju odgovarajućeg sistema (v. J. Zucker (1974), G. Pottinger (1977)), dvostrukom indukcijom po složenosti i dužini maksimalnih segmenata u datom izvođenju. Složenost segmenta je zbir složenosti svih formula skupa koji se pojavljuje u segmentu uvećan za $k-1$, gdje je k kardinalnost tog skupa, a dužina segmenta je broj skupova koji se pojavljuju u segmentu.

Neka je $a = \max\{/s_x/\}$, gdje je s_x proizvoljan maksimalni segment nekog izvođenja x, a $/s_x/$ njegova složenost ($a = 0$, ako nema maksimalnog segmenta) i b zbir dužina maksimalnih segmenata u x složenosti a. Neka je s maksimalni segment složenosti a u izvođenju x takav da u x iznad njega nema drugih maksimalnih segmenata i nema maksimalnih segmenata složenosti a koji su iznad ili sadrže neki skup formula nivoa na kojem se pojavljuje posljednji skup segmenta s. Ne umanjujući opštost, imajući u vidu princip inverzije, možemo pretpostaviti da u izvođenju x, sem u maksimalnim segmentima dužine veće od 1, nema formula koje se pojavljuju kao glavne formule nekog u-pravila i velike premise nekog e-pravila. Tako se, ako je Γ skup formula koji se pojavljuje s, a kako je $b > 1$, u opštem slučaju, izvođenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Delta\ A \vee B} \quad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma} \quad \dfrac{\Pi_3}{\Gamma}}{\Gamma} \quad \Pi_4}{\Lambda}$$

e transformisati u izvođenje:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Delta\ A \vee B} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi_2}{\Gamma} \quad \Pi_4}{\Lambda} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi_3}{\Gamma} \quad \Pi_4}{\Lambda}}{\Lambda}$$

e se, dalje, prema indukcijskoj hipotezi transformiše u
nalno izvođenje. ⊣

Primijetimo da nam ograničenje na izvođenja
jednočlanim skupovima (i eventualno praznim, kada
zan skup interpretiramo kao konstantu apsurda) daje normalna
ođenja u smislu definicije Prawitz-a normalnog izvođenja
eyting-ovoj logici iskaza, odnosno minimalnoj logici (v.
Prawitz (1965)).

Ne zadržavajući se na detaljima koji se tiču stru-
re normalnih dokaza u sistemu NC, a koji su analogni onima

koji se odnose na formulaciju Heyting-ovog računa (v. D. Prawitz (1965, 1971)), ukazaćemo još na neke neposredne posledice gornjih tvrđenja.

P o s l e d i c a. (Princip podformulnosti) Ako postoji izvođenje $x \in \mathrm{Der}(NC)$ prema kojem Γ slijedi iz $A_1, \ldots, A_n$, onda postoji izvođenje $x' \in \mathrm{Der}(NC)$ prema kojem, takođe, Γ slijedi iz $A_1, \ldots, A_n$ sa osobinom da je svaka formula koja se pojavljuje u izvođenju x' podformula neke formule iz Γ ili formula skupa $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

D o k a z. Za x' je dovoljno uzeti normalno izvođenje prema kojem iz $A_1, \ldots, A_n$ slijedi Γ. $\dashv$

P o s l e d i c a. Sistem NC je separabilan.

Ova činjenica sada neposredno slijedi iz principa podformulnosti, za razliku od njenog prvog navođenja, kada smo to mogli zaključiti dokazavši Peirce-ov zakon u sistemu NC i imajući u vidu poznatu Tarski-Bernays-ovu teoremu.

Kao posledica ovakve formulacije klasičnog računa iskaza, mogao bi se dobiti i jedan konstruktivan dokaz teorema interpolacije.

Iz navedenog sistema se izvjesnim ograničenjima koj se odnose na kardinalnost skupova koji se pojavljuju u pravil ma ili tip formula koje čine te skupove, kao što smo vidjeli i kao što ćemo tek vidjeti, dobijaju formulacije Heyting-ovog r a iskaza i logike slabog zakona isključenja trećeg, zadržaući sve bitne osobine sistema NC.

U skladu sa najšire prihvaćenom terminologijom (zanoevropski, američki, japanski, poljski autori), proširenja ting-ove logike ćemo nazivati <u>intermedijalnim logičkim sistea</u>, mada se sam epitet "intermedijalni" može odnositi na bilo i logički sistem koji se, u odnosu na dato uređenje, nalazi eđu neka dva logička sistema. (Uređenje koje ćemo u ovom sluu podrazumijevati je relacija inkluzije među skupovima tema posmatranih logičkih sistema, a granični sistemi su Heyg-ov račun iskaza H i klasičan račun iskaza C.) Epitet "sukonstruktivni" ili "superintuicionistički" (sovjetski autori) bi bio adekvatan zbog toga što bi, kako smo već pomenuli, balo praviti razliku između "konstruktivan", "intuicionički" i "hejtingovski", a ovdje se zapravo radi o <u>superhejtivskim</u> ili o dijelu <u>predklasičnih</u> logičkih sistema.

Intermedijalni logički sistem koji se dobija dodajem niza formula $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sistemu H u svojstvu shema aksioznačavaćemo sa $H + A_1 + \ldots + A_n$.

Prva pitanja i prvi rezultati u vezi sa intermealnim logikama potiču od Gödel-a (v. K. Gödel (1932)), a pirske pokušaje u ovoj oblasti čine svakako radovi Umezawa-e T. Umezawa (1959, 1959a)), Dummett-a (v. M. Dummett (1959)), oi-a (v. T. Hosoi (1967, 1969)), Jankova (v. V. A. Jankov 63)).

Ovom prilikom bi trebalo pomenuti i jedan sasvim gačiji tip proširenja sistema H, i uopšte logičkih sistema, i to dodavanjem infinitarnih veznika. Pošto takva proširenja nisu trivijalna, u smislu da se pri istim ne moraju očuvati sva bitna svojstva polaznog sistema (npr. uz prisustvo prebrojive konjunkcije se može definisati konstanta apsurda kao konjunkcija svih formula, pa preko nje i negacija), istraživanja infinitarnih intermedijalnih sistema ne bi bila neplodna.

Među najdetaljnije izučavane intermedijalne logike, pored sistema H i C, spadaju proširenja Heyting-ove logike aksiomama:

$\neg A \vee \neg\neg A$ (logika slabog zakona isključenja trećeg u oznaci KC, o kojoj ćemo više govoriti u trećoj glavi)

$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (Dummett-ov sistem LC, v. M. Dummett (19 T. Umezawa (1959), R. A. Bull (1962, 19 I. Thomas (1962), T. Hosoi (1966b, 1967 1967b), J. M. Dunn, R. K. Meyer (1971), V. I. Homič (1976, 1979), L. L. Maksimova (1972, 1977, 1979), S. Zachorowski (1978), E. G. K. López-Escobar (1982))

$A_1 = ((B_o \rightarrow A_o) \rightarrow B_o) \rightarrow B_o$

$A_{n+1} = ((B_n \rightarrow A_n) \rightarrow B_n) \rightarrow B_n$ $(n \geqslant 1)$ (v. S. Nagata (1966), V. I. Homič (1976), T. Hosoi (1967, 1967b))

$(\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$ (v. G. Kreisel, H. Putnam (19 D. M. Gabbay (1970, 1971), R. E. Kirk (1982))

$A \rightarrow (A \rightarrow B \vee \neg B)$ (v. L. L. Maksimova (1977, 1979), S. Zachorowski (1978), V. A. Jankov (1963))

$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
$A \vee (A \rightarrow B \vee \neg B)$ (v. L. L. Maksimova (1977, 1979), S. Zachorowski (1978))

$/((A \to B \vee \neg B)$ (v. L. L. Maksimova (1977,
$\to B) \vee (B \to A) \vee (A \leftrightarrow \neg B)$ 1979), S. Zachorovski
(1978))

1.5. <u>Elementi teorije Kripke-ovih modela</u>. Uobičaje-
semantička razmatranja koja se odnose na intermedijalne lo-
e su najčešće vezana za Kripke-ove modele ovih logika, ili,
lgebarskom kontekstu, za klase odgovarajućih Heyting-ovih
ebri. Elementi teorije modela, koje navodimo u onoj mjeri
ojoj nam je to potrebno za dokaze pojedinih tvrđenja iz na-
ne glave, te razumijevanje navoda o potpunosti pojedinih si-
na u odnosu na određene klase modela, dati su slično kao kod
erberg-a (1968), Fitting-a (1969), Gabbay-a (1981) ili
enburg-a (1982).

Ako je L intermedijalna logika, onda za teoriju
Δ) kažemo da je L-<u>zasićena</u> ako:

(1) ako $\Gamma \vdash_{L} A$, onda $A \in \Gamma$;

(2) (Γ, Δ) je $\vdash_{L}$-neprotivrječna teorija;

(3) <u>za proizvoljnu formulu</u> B, $\bigwedge\limits_{1 \leq i \leq n} (A_i \to B) \to B \in \Gamma$
. $A_1 \in \Gamma$ <u>ili</u> ... <u>ili</u> $A_n \in \Gamma$, za $n \geq 1$.

Uslov (3) je ekvivalentan uslovu:

$A \vee B \in \Gamma$ <u>akko</u> $A \in \Gamma$ <u>ili</u> $B \in \Gamma$,

se obično navodi u ovakvim definicijama, jer:

ako $A_1 \vee \ldots \vee A_n \in \Gamma$, onda $(A_1 \vee \ldots \vee A_n \to B) \to B \in \Gamma$, tj.

$\bigwedge_{1\leq i\leq n} (A_i \to B) \to B \in \Gamma$, za proizvoljnu formulu B;

ako $(A\to C)\to((B\to C)\to C)\in\Gamma$ (slučaj n=2 uslova (

onda $(A\to A\vee B)\to((B\to A\vee B)\to A\vee B)\in\Gamma$, tj. $A\vee B\in\Gamma$.

Iskazna Kripke-ova struktura je uređena četvorka $\Sigma = (S,R,o,D)$, gdje je

(1) (S,R,o) parcijalno uređen sistem sa najmanjim elementom o i parcijalnim uređenjem R, tzv. okvir Kripke-ove strukture (ili Kripke-ov okvir);

(2) $D : S\times(PL\cup PC)\to\{0,1\}$ tako da iz xRy i $D(x,P) = 1$ slijedi $D(y,P) = 1$.

Ako je S konačan skup, kažemo da su odgovarajuć Kripke-ova struktura i Kripke-ov okvir konačni.

Napomena: nije neophodno da okvir Kripke-ove strukture ima najmanji element.

Vrijednost formule A u tački $x\in S$, u oznaci $v_x(A)$, definišemo indukcijom po složenosti formule A:

(1) ako $A\in PL\cup PC$, onda $v_x(A) = D(x,A)$;

(2) $v_x(A\wedge B) = 1$ akko $v_x(A) = 1$ i $v_x(B) = 1$;

(3) $v_x(A\vee B) = 1$ akko $v_x(A) = 1$ ili $v_x(B) = 1$;

(4) $v_x(A\to B) = 1$ akko $(\forall y)(xRy \,\&\, v_y(A)=1 \Rightarrow v_y(B)=1)$

(5) $v_x(\neg A) = 1$ akko $(\forall y)(xRy\Rightarrow v_y(A)\neq 1)$.

Formula A je zadovoljena u iskaznoj Kripke-ovoj strukturi Σ ako je $v_o(A) = 1$.

L e m a 12. Ako $v_x(A) = 1$ i xRy, onda $v_y(A) = 1$.

D o k a z. Indukcijom po složenosti formule A. Ako $A=P$, onda iz $v_x(P)=D(x,P)=1$ i xRy, po definiciji slijedi $P)=D(y,P)=1$. Ako je $A=B\wedge C$ $(A=B\vee C)$, onda iz $v_x(A)=1$ i xRy definiciji imamo $v_x(B)=1$ i (ili) $v_x(C)=1$, odakle je po indujskoj hipotezi $v_y(B)=1$ i (ili) $v_y(C)=1$, tj. $v_y(A)=1$. Za $\rightarrow C$, odnosno $A=\neg B$, tvrđenje slijedi takođe neposredno preiefiniciji vrijednosti formule u tački.$\dashv$

P o s l e d i c a. Ako je $v_o(A)=1$, onda $(\forall x)(v_x(A)=1)$.

Iskazna Kripke-ova struktura Σ je model za logiku ko je svaka teorema logike L (tj. svaka formula dokaziva u L) ovoljena u Σ.

Za logiku L kažemo da je potpuna u odnosu na klasu Kripke-ovih okvira ako:

formula A je dokaziva u logici L akko A je zadovoia u svakoj iskaznoj Kripke-ovoj strukturi $\Sigma=(S,R,o,D)$ koju je okvir (S,R,o) iz klase $\mathfrak{M}$.

Neka je L intermedijalna logika i S_L klasa svih ısićenih teorija. Ako je

(1) $(\Gamma,\Delta)R_L(\Pi,\Lambda)$ akko(def.) $\Gamma\subseteq\Pi$;

(2) $D_L((\Gamma,\Delta),P)=1$ akko(def.) $P\in\Gamma$,

su (Γ,Δ) i (Π,Λ) teorije, onda (S_L,R_L,D_L) nazivamo nskom strukturom za logiku L.

L e m a 13. Ako je L intermedijalna logika, onda aksimalno $\vdash_L$-neprotivrječno proširenje (Γ,Δ) neke teori-zasićena teorija.

D o k a z. (1) Iz $\vdash_{L} A$, slijedi $A\in\Gamma$, jer inače (Γ,Δ) ne bi bilo maksimalno $\vdash_{L}$-neprotivrječno proširenje.

(2) (Γ,Δ) je po pretpostavci $\vdash_{L}$-neprotivrječna teorija.

(3) Ako $A_1\in\Gamma$ ili ... ili $A_n\in\Gamma$, onda je jasno da $\Gamma\ni\bigwedge(A_i\to B)\to B$, za svaku formulu B. Obrnuto: neka je $\bigwedge(A_i\to B)\to B\in\Gamma$, $A_1\notin\Gamma$, ... i $A_n\notin\Gamma$. Tada, pošto je (Γ,Δ) maksimalno $\vdash_{L}$-neprotivrječna teorija $\Gamma, A_i \vdash_{L} B$ $(1\leq i\leq n)$, odnosno, po teoremi dedukcije $\vdash_{L} A_i\to B$ $(1\leq i\leq n)$, tj. $\Gamma\vdash_{L}(\bigwedge(A_i\to B)\to B)\to B$, odakle je $\Gamma\vdash_{L} B$. Drugim riječima, $(\Gamma,$ ne bi mogla biti $\vdash_{L}$-neprotivrječna teorija, što je suprotno pretpostavci. Prema tome $A_1\in\Gamma$ ili ... ili $A_n\in\Gamma$. $\dashv$

Kako prema Lindenbaum-ovoj lemi za svaku $\vdash_{L}$-neprotivrječnu teoriju postoji maksimalno $\vdash_{L}$-neprotivrječno proširenje, to prema upravo dokazanoj lemi:

za svaku $\vdash_{L}$-neprotivrječnu teoriju postoji proširenje do L-zasićene teorije.

L e m a 14. Ako je (Γ,Δ) L-zasićena teorija i $\Gamma\nvdash_{L} B\to C$, onda postoji L-zasićena teorija (Γ',Δ') takva da je $\Gamma\cup\{B\}\subseteq\Gamma'$ i $C\in\Delta'$.

D o k a z. $(\Gamma\cup\{B\},\{C\})$ je $\vdash_{L}$-neprotivrječna teor. jer bi, inače, $\Gamma, B\vdash_{L} C$, tj., prema teoremi dedukcije, $\Gamma\vdash_{L} B$ što protivrječi pretpostavci. Prema gornjem tvrđenju, postoji proširenje teorije $(\Gamma\cup\{B\},\{C\})$ do L-zasićene teorije. $\dashv$

L e m a 15. Za svaku formulu A i svaku L-zasićen riju (Γ, Δ)

$v_{(\Gamma, \Delta)}(A) = 1$ u kanonskoj strukturi (S_L, R_L, D_L) za ermedijalnu logiku L akko $A \in \Gamma$.

D o k a z. Indukcijom po izgrađenosti formule A. Ako $A \in PL \cup PC$, onda $v_{(\Gamma, \Delta)}(A) = 1 = D_L((\Gamma, \Delta), A)$ akko (def.) Γ. Ako je $A = B \to C \in \Gamma$, onda iz $B \in \Gamma$, zbog zasićenosti, jedi $C \in \Gamma$, tj., po indukcijskoj hipotezi, iz $v_{(\Gamma, \Delta)}(B) = 1$ jedi $v_{(\Gamma, \Delta)}(C) = 1$. Odavde, za svako L-zasićeno proširenje $', \Delta')$ teorije (Γ, Δ), imamo da iz $v_{(\Gamma', \Delta')}(B) = 1$ slijedi $', \Delta')(C) = 1$, što, po definiciji, znači $v_{(\Gamma', \Delta')}(A) = 1$. uto: neka $A \notin \Gamma$, tj. $\Gamma \not\vdash_L A$. Tada postoji L-zasićena teori- (Γ', Δ') takva da je $\Gamma \cup \{B\} \subseteq \Gamma'$ i $C \in \Delta'$ ema prethodnoj lemi). Po indukcijskoj hipotezi je $', \Delta')(B) = 1$ i $v_{(\Gamma', \Delta')}(C) \neq 1$, pa je i $v_{(\Gamma', \Delta')}(A) \neq$. Slično se razmatra i slučaj $A = \neg B$. Ako je $A = B \wedge C$, onda

Γ akko (def.) $B \in \Gamma$ i $C \in \Gamma$

akko (ind.hip.) $v_{(\Gamma, \Delta)}(B) = v_{(\Gamma, \Delta)}(C) = 1$.

$A = B \vee C$, onda $A \in \Gamma$ akko za svaku formulu D, $D) \to ((C \to D) \to D) \in \Gamma$, tj. $B \in \Gamma$ ili $C \in \Gamma$, odnosno prema indu- jskoj hipotezi $v_{(\Gamma, \Delta)}(B) = 1$ ili $v_{(\Gamma, \Delta)}(C) = 1$. $\dashv$

Na metanivou ćemo pod uslovom za Kripke-ov okvir $l, o)$ podrazumijevati bilo koju rečenicu (tj. zatvorenu fo- u kvantifikatorskog računa) koja se odnosi na uređenje R g okvira.

Za uslov (u) kažemo da je apsolutan ako za svaki ijalno uređen sistem (S, R, o) koji zadovoljava uslov (u) oji konačan skup Q takav da za svaki skup S' za koji je

$Q \subseteq S' \subseteq S$, parcijalno uređen sistem $(S', R/_{S'}, o)$ takođe zadovoljava uslov (u). ($R/_{S'}$ je restrikcija relacije R na S'.)

T e o r e m a 5. (v. D. M. Gabbay (1981)) Neka je intermedijalna logika L potpuna u odnosu na klasu svih Kripke-ovih okvira koji zadovoljavaju neki apsolutan uslov (u). Tada je L potpuna i u odnosu na klasu svih konačnih Kripke-ovih okvira koji zadovoljavaju uslov (u).

D o k a z. Pretpostavimo da $\not\vdash_L A$. Konstruisaćemo konačnu Kripke-ovu strukturu (S,R,o,D) koja zadovoljava uslov (u) i u kojoj je $v_o(A) \neq 1$. Neka je (S',R',o',D') struktura koja zadovoljava uslov (u) u kojoj je $v_{o'}(A) \neq 1$. Skup S definišemo kao $\bigcup S_n$, gdje je familija S_n podskupova od S' definisana rekurzivno:

$$S_0 = S_0' \cup \{o'\}$$

gdje je $S_0' \subseteq S'$ skup koji osigurava apsolutnost uslova (u). Za svaki $x \in S_n$ i $B = C \rightarrow D \in sub(A)$, odnosno $B = \neg C \in sub(A)$, takav da je $v_x(C) = v_x(B) = 0$, postoji $y \in S'$ takav da xRy, $v_y(C) = 1$ i $v_y(D) = 0$. Tada S_{n+1} čine elementi y izabrani na opisani način. Ovako definisan skup S je konačan, jer za $x \in S_n$ i $y \in S_{n+1}$, u tački y jedna više podformula od A poprima vrijednost 1, a pošto je samo konačan broj takvih, to je za dovoljno veliki n, $S_n = \emptyset$. S druge strane, kako je (u) apsolutan i $S_0' \subseteq S$, to Kripke-ov okvir $(S, R'/_S, o')$ zadovoljava uslov (u). ⊣

Intermedijalna logika L ima <u>svojstvo konačnog mo-</u>

dela ako uvijek kada $\not\vdash_L A$ postoji konačna iskazna Kripke-ova struktura Σ takva da je Σ model za L i formula A nije zadovoljena u Σ.

Teorema koju ćemo navesti bez dokaza je rezultat Harrop-a (v. R. Harrop (1958), C. G. McKay (1968), D. M. Gabbay (1981)).

T e o r e m a 6. Ako intermedijalna logika L ima svojstvo konačnog modela, konačan broj shema aksioma i shema pravila, onda je L odlučiva.

Uz izvjesne argumente koji budu slijedili iz čisto sintaksnih razmatranja, dokazujući separabilnost i odlučivost pojedinih intermedijalnih logika, koristićemo i tvrđenja navedena u ovoj glavi.

D r u g a   g l a v a

2. LOGIKA $H + (A\to B)\vee(B\to C)\vee(C\to A)$

2.1. Uvod. Do intermedijalne logike $H +$
$A\to B)\vee(B\to C)\vee(C\to A)$, koju ćemo sada razmatrati, se dola-
prilikom rješavanja problema datog u radu E. G. K. López-
cobar-a (1982), a eksplicitno se pominje i u radu T. Ume-
a-e (1959). Naime, pomenuti problem se tiče pitanja sepa-
ilnosti izvjesnog niza NLC_n $(n \geqslant 1)$ intermedijalnih logika,
koji se ispostavlja da sadrži samo tri različite logike i
klasičan račun iskaza C, Dummett-ov sistem LC (v. M.
nett (1959)) i sistem $H+(A\to B)\vee(B\to C)\vee(C\to A)$. Tako se
i problem svodi samo na pitanje separabilnosti sistema
$A\to B)\vee(B\to C)\vee(C\to A)$ s obzirom na već poznate rezultate
eparabilnosti logika C i LC (v. H. B. Curry (1963), T.
oi (1966, 1966a, 1966b, 1966c), R. A. Bull (1962, 1964),
I. Homič (1976, 1979), E. G. K. López-Escobar (1982)).
ovom mjestu ćemo pored rješenja ovog problema dati i nje-
o uopštenje sa rješenjem.

2.2. Sistemi $NLIC_n$ i NLC_n. Neka je C_n $(n \geqslant 1)$ niz
jedećih sekvenata (radi bolje preglednosti, u ovoj glavi
o formule koje se pojavljuju u sekventu razdvajati zarezi-
:

C_1 $\quad (A_1\to A_2)\to C, A_1\to C \vdash C$

C_2 $\qquad (A_1 \to A_2) \to C, (A_2 \to A_1) \to C \vdash C$

C_3 $\qquad (A_1 \to A_2) \to C, (A_2 \to A_3) \to C, (A_3 \to A_1) \to C \vdash C$

. . .

C_n $\qquad (A_1 \to A_2) \to C, (A_2 \to A_3) \to C, \dots, (A_n \to A_1) \to C \vdash C$

. . .

Imajući u vidu da se račun sekvenata može shvatiti kao metaračun za relaciju izvodljivosti (dedukcije) odgovarajućeg sistema prirodne dedukcije (v. D. Prawitz (1965)), sisteme prirodne dedukcija NLC_n i $NLIC_n$ ($n \geqslant 1$), koji su uvedeni kod López-Escobar-a (1982), možemo identifikovati sa računima sekvenata koji se dobijaju dodavanjem sekvenata C_n kao aksioma gencenizacija Heyting-ovog računa iskaza H i njegovom implikativnom fragmentu iH, redom.

L e m a 1. Pravilo

$$\frac{\Gamma, (A \to B) \to C \vdash C}{\Gamma, (A \to D) \to C, (D \to B) \to C \vdash C}$$

je dopustivo u sistemu iH + C_2.

D o k a z. Dovoljno je pokazati da je

$$(A \to D) \to C, (D \to B) \to C \vdash (A \to B) \to C$$

u iH + C_2, tj.

$$(*) \qquad (A \to D) \to C, (D \to B) \to C, A \to B \vdash C.$$

Kako u iH + C_2 imamo

$$(A\to D)\to C,(D\to A)\to C\vdash C\ ,$$

da bi dokazali (*) dovoljno je pokazati da

$$(D\to B)\to C,A\to B\vdash (D\to A)\to C,$$

je ekvivalentno sa

$$(D\to B)\to C,A\to B,D\to A\vdash C,$$

to svakako važi jer

$$D\to A,A\to B\vdash D\to B.\dashv$$

L e m a 2. $iH + C_n \subseteq iH + C_2 \quad (n\geqslant 2).$

D o k a z. Indukcijom po n i korišćenjem leme 1.$\dashv$

L e m a 3. $iH + C_2 = iH + C_{2n} \quad (n\geqslant 1).$

D o k a z. Prema lemi 2 imamo $iH + C_{2n}\subseteq iH + C_2$.
uto: $C_{2n}(A_3/A_1, A_4/A_2,\ldots,A_{2n-1}/A_2)$ je ekvivalentno sa C_2.$\dashv$

P o s l e d i c a. $H+C_2 = H+C_{2n} \quad (n\geqslant 1).$

L e m a 4. Pravilo

$$\frac{\Gamma,(A\to B)\to C\vdash C}{\Gamma,(A\to D)\to C,(D\to E)\to C,(E\to B)\to C\vdash C}$$

opustivo u sistemu $iH + C_3$.

D o k a z. Dovoljno je pokazati da je

$$(A\to D)\to C,\ (D\to E)\to C,(E\to B)\to C\vdash (A\to B)\to C$$

u $iH + C_3$, tj.

$$(**) \qquad (A\to D)\to C,(D\to E)\to C,(E\to B)\to C,A\to B\vdash C.$$

Kako je

$$(A\to D)\to C,(D\to E)\to C,(E\to A)\to C\vdash C$$

aksioma za $iH + C_3$, da bi pokažali (**) dovoljno je pokazati da

$$(E\to B)\to C,A\to B\vdash (E\to A)\to C,$$

tj.

$$(E\to B)\to C,A\to B,E\to A\vdash C\ ,$$

što važi jer

$$A\to B,E\to A\vdash E\to B. \dashv$$

L e m a 5. $iH + C_{2n+1} \subseteq iH + C_3 \quad (n\geqslant 1)$.

D o k a z. Indukcijom po n i koristeći lemu 4. $\dashv$

L e m a 6. $iH + C_{2n+1} = iH + C_3 \quad (n\geqslant 1)$.

D o k a z. Prema lemi 5, $iH + C_{2n+1}\subseteq iH + C_3$. Obrnuto: sekvent C_3 je dokaziv u logici iH sa sekventom

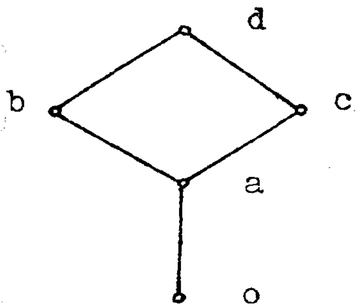
$$(A_1\to A_2)\to C,(A_2\to A_3)\to C,(A_3\to A_1)\to C,(A_2\to A_1)\to C\vdash C$$

kao dodatnom aksiomom. Međutim, posljenji sekvent je ekvivalentan sa $C_{2n+1}(A_4/A_2,A_5/A_1,\dots,A_{2n}/A_2,A_{2n+1}/A_1)$. Dakle, sekvent C_3 je dokaziv u svakom od sistema $iH + C_{2n+1}$. $\dashv$

P o s l e d i c a. $H+C_3 = H+C_{2n+1} \quad (n\geqslant 1)$.

L e m a 7. $iH + C_3 \subsetneqq iH + C_2$.

D o k a z. Neka je $\mathfrak{M} = (\{o,a,b,c,d\}, \leqslant)$ parcijalno uređen sistem sa uređenjem datim slikom 1. Neka je $\dot{\rightarrow}$ binarna operacija na $\{o,a,b,c,d\}$ definisana sa



Slika 1.

$$x \dot{\rightarrow} y = \begin{cases} o, & \text{ako } y \leqslant x \\ y, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako funkcija v uzima neke od vrijednosti o, a, b, c, d za svako iskazno slovo, i $v(A \rightarrow B) =$ A)$\dot{\rightarrow}$v(B), onda se može pokazati da ako je formula A dokaziva iH + C_3, onda je za svaku funkciju v, v(A) = o (indukcijom lužini dokaza za A u iH + C_3). Međutim, za v(A) = b, v(B) = i v(C) = a , imamo $v(((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C)) \rightarrow C) = a \neq o$.

2.3. Potpunost, separabilnost i odlučivost logike c_3.

Označimo sa c_3 formulu

$$((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow C) \rightarrow (((A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow C) \rightarrow (((A_3 \rightarrow A_1) \rightarrow C) \rightarrow C)).$$

T e o r e m a 1. Sistem $iH + c_3$ je potpun u odnosu sve Kripke-ove okvire (S,R) koji zadovoljavaju uslov

$$(*) \quad (\forall x,y,z,u \in S)(uRx \wedge uRy \wedge uRz \Rightarrow xRy \vee yRz \vee zRx).$$

D o k a z. Nije teško provjeriti, indukcijom po du-

žini dokaza za A u $iH + c_3$, da ako $\vdash_{iH + c_3} A$, onda je formu[la]
A zadovoljena u svakoj Kripke-ovoj strukturi koja zadovoljav[a]
uslov (*). Obrnuto: neka (Γ, Δ) jedna $iH + c_3$-zasićena teori-
ja. Dovoljno je pokazati da kanonska struktura za $iH + c_3$ za-
dovoljava uslov (*). Pretpostavimo da su (Γ_i, Δ_i) $iH + c_3$-za-
sićene teorije takve da $\Gamma \subseteq \Gamma_i$ $(i = 1,2,3)$. Ako nije $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$
niti $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_3$ niti $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_1$, onda postoje formule A_1, A_2 i
A_3 takve da $A_1 \in \Gamma_1 - \Gamma_2$, $A_2 \in \Gamma_2 - \Gamma_3$ i $A_3 \in \Gamma_3 - \Gamma_1$. Međutim,
kako $c_3(A_2/A_3, A_3/A_2) \in \Gamma$, to jedna od formula $A_1 \to A_3$, $A_3 \to A_2$
ili $A_2 \to A_1$ mora biti u Γ. Ako je $A_1 \to A_3 \in \Gamma$, onda $A_1 \to A_3 \in \Gamma_1$
i $A_3 \in \Gamma_1$, što je u suprotnosti sa činjenicom da $A_3 \in \Gamma_3 - \Gamma_1$.
Ako je $A_3 \to A_2 \in \Gamma$, onda je $A_3 \to A_2 \in \Gamma_3$ i $A_2 \in \Gamma_3$, što proti-
vrječi činjenici da je $A_2 \in \Gamma_2 - \Gamma_3$. Ako je $A_2 \to A_1 \in \Gamma$, onda je
$A_2 \to A_1 \in \Gamma_2$, pa i $A_1 \in \Gamma_2$, što je u suprotnosti sa činjenicom
da je $A_1 \in \Gamma_1 - \Gamma_2$. Dakle, kanonska struktura za logiku $iH + c_3$
zadovoljava uslov (*).$\dashv$

T e o r e m a 2. Sistem $H + c_3$ je potpun u odno-
su na sve Kripke-ove okvire (S,R) koji zadovoljavaju uslov (*).

D o k a z. Isti kao dokaz prethodne teoreme.$\dashv$

P o s l e d i c a. Sistem $H + c_3$ je separabilan.

P o s l e d i c a. $H + c_3 \subsetneq LC$.

Dakle, niz NLC_n $(n \geqslant 1)$ sadrži svega tri različite
intermedijalne logike: $NLC_1 = C$, $NLC_2 = LC$ i $NLC_3 = H + c_3$.

Imajući u vidu da je uslov (*) apsolutan, prema remi 5 prethodne glave, imamo

T e o r e m a 3. Sistem H + c_3 je potpun u odnosu sve konačne Kripke-ove okvire koji zadovoljavaju uslov (*).

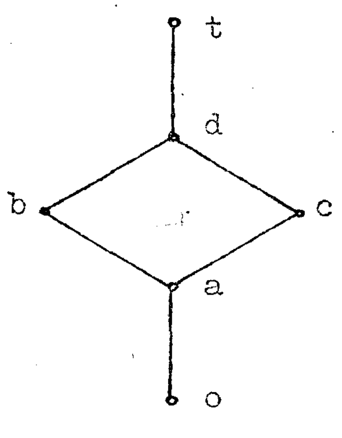
Drugim riječima, sistem H + c_3 ima svojstvo kona- g modela, pa je prema teoremi Harrop-a (1958) (v. teorema prethodna glava):

T e o r e m a 4. Sistem H + c_3 je odlučiv.

2.4. <u>Nezavisnost veznika logike</u> H + c_3. Kao što vidjeli H + $c_3 \subsetneq$ LC, a u Dummett-ovom sistemu LC svaki od ika $\rightarrow$, $\wedge$, $\neg$ je nezavisan od od ostala tri (v. T. Ume- . (1959)), pa je i u sistemu H + c_3 svaki od veznika $\rightarrow$, $\wedge$, nezavisan od ostala tri veznika.

L e m a 8. Veznik $\vee$ je nezavisan od ostala tri ika u sistemu H + c_3.

D o k a z. Neka je $\mathfrak{M} = (\{o,a,b,c,d,t\}, \leqslant)$ parcijalno uređen sistem sa uređenjem datim slikom 2 i neka su $\dot{\rightarrow}$, $\dot{\wedge}$, $\dot{\vee}$ i $\dot{\neg}$ operacije na $\{o,a,b,c,d,t\}$ definisane sa



Slika 2.

$$x \dot{\rightarrow} y = \begin{cases} t, & \text{ako } x \leqslant y \\ y, & \text{inače} \end{cases},$$

$x \dot{\wedge} y = \inf(x,y)$, $x \dot{\vee} y = \sup(x,y)$

$\dot{\neg} x = x \dot{\rightarrow} o$. Ako funkcija v uzima vrijednosti o,a,b,c,d,t za svako iskazno slovo, i ako je $v(A + B) = v(A) \dot{+} v(B)$ i $v(\neg A) = \dot{\neg} v(A)$, gdje je $+ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, onda se, indukcijom po dužini dokaza za A u $H + c_3$, može pokazati da ako je formula A dokaziva u $H + c_3$, onda je za svaku funkciju v, $v(A) = t$. Pretpostavimo da je formula $A \vee B$ ekvivalentna nekoj formuli C u kojoj se ne pojavljuje disjunkcija. Ako svakom iskaznom slovu koje se pojavljuje u formuli C pridružimo neki element mreže $\mathfrak{M}$ različit od d, onda se, indukcijom po složenosti /C/ formule C, može pokazati da je $v(C) \neq d$. Međutim, za $v(A) = b$ i $v(B) = c$, biće $v(A \vee B) = d$. Prema tome, ne može postojati formula ekvivalentna formuli $A \vee B$ u $H + c_3$, u kojoj se ne pojavljuje simbol za disjunkciju.⊣

2.5. Dva niza podsistema od LC. Neka su a_n i b_n $(n \geq 2)$, redom, formule

$$\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} ((A_i \rightarrow A_j) \rightarrow C) \rightarrow C$$

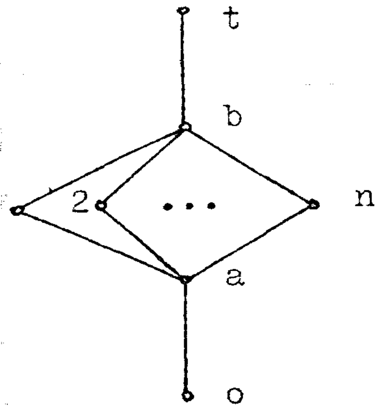
i

$$((A_n \rightarrow A_1) \rightarrow C) \rightarrow (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} ((A_i \rightarrow A_j) \rightarrow C) \rightarrow C).$$

Nije teško vidjeti da $H + a_2 = H + b_2 = LC$, $H + b_3 = H + c_3$, $H + a_{n+1} \subseteq H + a_n$ $(n \geq 2)$ i $H + b_{n+1} \subseteq H + b_n$ $(n \geq 2)$.

Lema 9. $H + a_{n+1} \subsetneq H + a_n$ i $H + b_{n+1} \subsetneq H + b_n$ $(n \geq 2)$.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M}_n$ $(n+4)$-elementna mreža sa parcijalnim uređenjem datim kao na slici 3. Ako je v proizvoljna funkcija koja svakom iskaznom slovu dodjeljuje neku od



Slika 3.

vrijednosti iz skupa $\{o,t,a,b,1,\dots,n\}$ definisana kao funkcija u dokazu prethodne leme, onda se, indukcijom po dužini dokaza za formulu A u logici $H + a_{n+1}$, odnosno $H + b_{n+1}$, može pokazati da ako je A teorema logike $H + a_{n+1}$, odnosno $H + b_{n+1}$, onda je $v(A) = t$. Dovoljno je pokazati da iz $\vdash_{H + b_{n+1}} A$, slijedi $v(A) = t$, imajući u vidu da je $H + a_{n+1} \subseteq H + b_{n+1}$.

Najprije ~~d~~okažimo da ako je $x_1,\dots,x_{n+1}$ niz elemenata mreže $\mathfrak{M}_n$:o nije $x_i \leqslant x_j$ ni za koje i,j $(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$, onda je $\leqslant x_1$.

Date pretpostavke nam pružaju slijedeće mogućnosti:

1. svi elementi datog niza su međusobno neuporedivi, je očigledno nemoguće;

2. postoje i_o i j_o $(1 \leqslant i_o < j_o \leqslant n+1)$ takvi da $< x_{i_o}$, odnosno: 2.1. $x_{j_o} = o$, 2.2. $x_{j_o} = a$, 2.3. $x_{i_o} = b$ ili $x_{i_o} = t$. Ako je 2.1., onda je $x_{j_o} \leqslant x_{n+1}$, što je suprotno pretpoci. Ako je 2.2., onda opet $x_{j_o} \leqslant x_{n+1}$ (što takođe moramo odba-) ili $x_{n+1} < x_{j_o}$, tj. $x_{n+1} \leqslant x_1$. Ako je 2.3., onda je $x_{i_o} < x_1$ le bi slijedilo i $x_{n+1} \leqslant x_1$) ili $x_1 \leqslant x_{i_o}$ (što protivrječi postavci). Ako je 2.4., onda je svakako $x_1 \leqslant x_{i_o}$, što je, , suprotno pretpostavci.

Dakle, svaki niz $x_1,\dots,x_{n+1}$ mreže $\mathfrak{M}_n$ mora zadovoljavati neki od uslova $x_i \leqslant x_j$ $(i < j)$, za neke i i j ili $x_{n+1} \leqslant x_1$.

Znajući da se sve teoreme Heyting-ovog računa iskaz pri proizvoljnom preslikavanju v preslikavaju u t i da prav (mp) čuva to svojstvo, za naše tvrđenje je dovoljno ustanovit je $v(b_{n+1}) = t$. Pretpostavimo suprotno: postoji funkcija v da je $v(A_i \rightarrow A_j) \neq t$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$ i $v(A_{n+1} \rightarrow A_1) \neq t$, tj. postoje elementi $x_1, \ldots, x_{n+1}$ mreže $\mathfrak{M}_n$ takvi da je $v(A_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ i ni za koja dva x_i i x_j $(i < j)$ nije $x_i \leqslant$ niti $x_{n+1} \leqslant x_1$, što je suprotno gore dokazanom tvrđenju.

S druge strane, za $v(A_i) = i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ i $v(C) =$ biće $v(a_n) = v(b_n) = b \neq t$. $\dashv$

Sada vidimo da bi problem postavljen u radu López--Escobar-a (1982) korektno definisan mogao izgledati ovako:

Da li su sistemi $H + a_n$ $(n \geqslant 3)$ i $H + b_n$ $(n \geqslant 4)$ separabilni?

U narednih nekoliko redova, daćemo odgovor i na ovo pitanje.

L e m a 10. Ako je a formula $\bigwedge\!\!\!\bigwedge (P_i \rightarrow Q) \rightarrow Q$, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge ((Q \rightarrow P_i) \rightarrow P) \rightarrow P$, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge ((P_i \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ ili $\bigwedge\!\!\!\bigwedge ((Q \rightarrow P_i) \rightarrow P) \rightarrow (\bigwedge\!\!\!\bigwedge ((P_j \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P)$, i R iskazno slovo koje se ne pojavljuje u formuli a, onda je formula $a \rightarrow (a(Q/R) \rightarrow a(Q/Q \wedge R))$ dokaziva u H.

D o k a z. (1) Neka je a formula $\bigwedge\!\!\!\bigwedge (P_i \rightarrow Q) \rightarrow Q$. Tada je dovoljno pokazati da je

$$a, a(Q/R), (P_i \rightarrow Q)_i, (P_i \rightarrow R)_i \vdash Q$$

$$a, a(Q/R), (P_i \to Q)_i, (P_i \to R)_i \vdash R$$

Međutim, jasno je da se u H može izvesti i

$$a, (P_i \to Q)_i \vdash Q \qquad i \qquad a(Q/R), (P_i \to R)_i \vdash R.$$

(2) Neka je a formula $\bigwedge((Q \to P_i) \to P) \to P$. Tada je ljno pokazati da je

$$a, a(Q/R), ((Q \to (R \to P_i)) \to P)_i \vdash P$$

tj.

$$a(Q/R), ((Q \to (R \to P_i)) \to P)_i \vdash P \;,$$

je izvodljivo, jer

$$R \to P_i, (Q \to (R \to P_i)) \to P \vdash P$$

$$(Q \to (R \to P_i)) \to P \vdash (R \to P_i) \to P$$

$$((Q \to (R \to P_i)) \to P)_i \vdash (R \to P_j) \to P$$

vaki j.

(3) Ako je a formula $\bigwedge((P_i \to Q) \to P) \to P$, onda ovoljno pokazati da

$$a, a(Q/R), ((P_i \to Q) \to ((P_i \to R) \to P))_i \vdash P$$

što je izvodljivo jer važi

$$((P_i \to Q) \to ((P_i \to R) \to P))_i, (P_j \to R)_j \vdash (P_k \to Q) \to P$$

vaki k, tj.

$$a, ((P_i \to Q) \to ((P_i \to R) \to P))_i \vdash (P_j \to R) \to P$$

za svaki j.

Četvrti slučaj se može razmotriti slično, ili se, jednostavnije, izvesti kao posledica nekog od prethodna dva slučaja. ⊣

T e o r e m a 5. Sistemi $H + a_n$ i $H + b_n$ $(n \geqslant 2)$ su separabilni.

D o k a z. Prema teoremi Homiča (v. V. I. Homič (19 1979)), dovoljno je pokazati da su formule

$$a_n \to (a_n(A_i/B) \to a_n(A_i/A_i \wedge B)) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$a_n \to (a_n(C/B) \to a_n(C/C \wedge B))$$

$$b_n \to (b_n(A_i/B) \to b_n(A_i/A_i \wedge B)) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

i

$$b_n \to (b_n(C/B) \to b_n(C/C \wedge B))$$

teoreme Heyting-ovog računa iskaza, što neposredno slijedi iz upravo dokazane leme. ⊣

N a p o m e n a. Kao neposredna posledica leme 10 može se zaključiti i više: svaka intermedijalna logika koja se dobija dodavanjem implikativne formule tipa

$$\bigwedge_{(i,j) \in R} ((A_i \to A_j) \to C) \to C,$$

gdje je R neka binarna relacija nad nekim skupom indeksa, računu H, je separabilna.

Primijetimo da sistemi $H + a_n$ i $H + b_n$ $(n \geqslant 2)$, redom, mogu biti aksiomatizovani dodavanjem formula $\bigvee_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} (A_i \rightarrow A_j)$

i $(A_n \rightarrow A_1) \vee (\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (A_i \rightarrow A_j))$ Heyting-ovom računu iskaza u u svojstvu shema aksioma, umjesto formula a_n i b_n.

2.6. Granične vrijednosti nizova $H + a_n$ i $H + b_n$.

U radu T. Hosoi-a (1967b) data je slijedeća definicija granične vrijednosti niza intermedijalnih logika:

$\lim_{n\to\infty}(H + d_n) = X$ akko (def.) (1) iz $\vdash_X A$ slijedi da je za svaki i, $\vdash_{H + d_i} A$ i

(2) ako $\nvdash_X A$, onda postoji i takav da $\nvdash_{H + d_i} A$.

T e o r e m a 6. $\lim_{n\to\infty}(H + a_n) = \lim_{n\to\infty}(H + b_n) = H$.

D o k a z. Prema definiciji sistema $H + a_n$ i $H + b_n$, jasno je da iz $\vdash_H A$ slijedi $\vdash_{H + a_n} A$ i $\vdash_{H + b_n} A$. Obrnuto: neka je E_n niz formula $\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ((A_i \rightarrow A_j) \wedge (A_j \rightarrow A_i))$. Prema radu C. G. McKay-a (1967), $\lim_{n\to\infty}(H + E_n) = H$. Nije teško vidjeti takođe da $H + a_n \subseteq H + b_n \subseteq H + E_n$ $(n \geqslant 3)$. Pretpostavimo da $\nvdash_H A$. Tada postoji sistem $H + E_n$, za neki $n \geqslant 3$, takav da $\nvdash_{H + E_n} A$. Odavde: $\nvdash_{H + a_n} A$ i $\nvdash_{H + b_n} A$. $\dashv$

T r e ć a   g l a v a

3. LOGIKA SLABOG ZAKONA ISKLJUČENJA TREĆEG

3.1. Uvod. Logika iskaza slabog zakona isključenja ćeg, u oznaci KC, kako smo već pomenuli na kraju prve glave, dobija dodavanjem formule $\neg A \vee \neg\neg A$ kao shema aksiome Heyti-vom računu iskaza. Među radovima koji se tiču ove logike značajniji su svakako radovi Umezawa-e (v. T. Umezawa (1959)), kova (v. V. A. Jankov (1963, 1968)), Maksimove (v. L. L. simova (1977, 1979, 1982)), Esakie (v. L. L. Esakia (1979)), horowskog (v. S. Zachorowski (1978)), Gabbay-a (v. D. M. bay (1971a, 1981)), Rodenburg-a (v. P. H. Rodenburg (1982)), i Segerberg-a (v. K. Segerberg (1968)).

3.2. Potpunost i odlučivost sistema KC. Potpunost ike KC se razmatra u gore pomenutim radovima Jankova (1963, 8) i Gabbay-a (1981). Izlažući rezultate u ovom dijelu, ićemo se uglavnom drugog izvora.

T e o r e m a 1. Sistem KC je potpun u odnosu sve Kripke-ove okvire (S,R) koji zadovoljavaju uslov

(kc) $$(\exists y)(\forall x)(xRy).$$

D o k a z. Dio: "ako je A teorema računa KC, onda je A zadovoljena u svakoj iskaznoj Kripke-ovoj strukturi čiji okvir zadovoljava uslov (kc)", dokazujemo indukcijom po dužini dokaza za A u KC. Imajući u vidu potpunost Heyting-ovog računa iskaza u odnosu na Kripke-ove strukture, na ovom mjestu je dovoljno pokazati da je $v_o(\neg A \vee \neg\neg A) = 1$ u proizvoljnoj Kripke-ovoj iskaznoj strukturi iz klase onih struktura čiji okviri zadovoljavaju uslov (kc). Pretpostavimo suprotno, tj. u nekoj strukturi iz date klase je $v_o(\neg A \vee \neg\neg A) \neq 1$, odnosno $v_o(\neg A) \neq 1$ i $v_o(\neg\neg A) \neq 1$, tj. postoje tačke x_1 i x_2 okvira posmatrane strukture za koje je $v_{x_1}(A) = 1$ i $v_{x_2}(\neg A) = 1$, odnosno, prema lemi 12, prve glave, $v_y(A) = v_y(\neg A) = 1$ pa i $v_y(A \wedge \neg A) = 1$, što je nemoguće. Dakle, zaista $v_o(\neg A \vee \neg\neg A) = 1$. Za obrat, dovoljno je pokazati da okvir ~~kanonske~~ strukture $(S_{KC}^{(\Gamma,\Delta)}, R_{KC}, D_{KC})$, gdje je $S_{KC}^{(\Gamma,\Delta)} = \{(\Gamma', \Delta') \in S_{KC} : \Gamma \subseteq \Gamma'\}$ za neku KC-zasićenu teoriju (Γ,Δ) za logiku KC zadovoljava dati uslov (kc), tj. da postoji KC-zasićena teorija (Γ_o, Δ_o) takva da je za svaku KC-zasićenu teoriju (Γ', Δ'), za koju je $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Gamma' \subseteq \Gamma_o$. Teorija $(\bigcup_{\Gamma \subseteq \Gamma'} \Gamma', \emptyset)$ je $\vdash_{KC}$-neprotivrječna, gdje $(\Gamma', \Delta') \in S_{KC}$, jer bi inače postojale teorije (Γ_i, Δ_i) $(i=1,2)$ takve da je $\Gamma \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $A \in \Gamma_1$, $B \in \Gamma_2$, $\vdash_{KC} \neg(A \wedge B)$, tj. $\vdash_{KC} A \to \neg B$, za neke formule A i B. Kako je $\vdash_{KC} (\neg B \to C) \to ((\neg\neg B \to C) \to C)$ za proizvoljnu formulu C, to je $\neg B \in \Gamma$ ili $\neg\neg B \in \Gamma$. Iz $\neg B \in \Gamma_1$ slijedi da $\neg B \in \Gamma$, pa je i $\neg B \in \Gamma_2$, što protivrječi činjenici da $B \in \Gamma_2$. Prema tome, teorija $(\bigcup \Gamma', \emptyset)$ je $\vdash_{KC}$-neprotivrječna, pa prema lemi 13 prve glave i Lindenbaum-ovoj lemi, postoji njeno KC-zasićeno proširenje (Γ_o, Δ_o) takvo da svaku teoriju $(\Gamma', \Delta') \in S_{KC}^{(\Gamma, \Delta)}$ bude $\Gamma' \subseteq \Gamma_o$.⊣

L e m a. 1. Uslov (kc) je apsolutan.

D o k a z. Za skup koji osigurava apsolutnost do-
jno je uzeti skup $\{y\}$.⊣

Neposredna posledica gornje leme i teoreme 5, prve
ve, je

T e o r e m a 2. Sistem KC je potpun u odnosu na konačne Kripke-ove okvire koji zadovoljavaju uslov (kc).

Prema tome, sistem KC ima svojstvo konačnog modela,
kle, prema teoremi Harrop-a (1958) (v. teorema 6, prva gla-
, imamo

T e o r e m a 3. Sistem KC je odlučiv.

Sa stanovišta algebarske teorije modela, sistem KC
potpun u odnosu na klasu svih Stone-ovih algebri, tj. Hey-
g-ovih algebri koje zadovoljavaju uslov $\neg x \vee \neg\neg x = 1$
L. L. Esakia (1979)). Drugim riječima, jednakosna prerada
ike KC (v. S. B. Prešić (1975)) je Stone-ova algebra
aznih formula $(For, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$.

Napomenimo još i to da logika KC, umjesto uslovom (kc),
e biti okarakterisana i uslovom

(kc') $(\forall x, y \in S)(\exists z \in S)(xRz \,\&\, yRz)$.

3.3. Gencenizacija logike KC.

Skup strogo negativnih formula SNFor definišemo induktivno uslovima:

(1) ako $A \in For$, onda $\neg A \in SNFor$;

(2) ako $A \in For$ i $B \in SNFor$, onda $A \to B \in SNFor$;

(3) ako $A, B \in SNFor$, onda $A \wedge B, A \vee B \in SNFor$.

L e m a 2. (a) $\vdash_{KC} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;

(b) ako $A \in SNFor$, onda postoji formula B takva da $\vdash_{KC} A \leftrightarrow \neg B$.

D o k a z. (a) Formula $(\neg A \vee \neg\neg A) \wedge \neg(A \wedge B) \to$ $\to \neg A \vee \neg B$ je dokaziva u Heyting-ovoj logici iskaza, pa je, prema tome, i $\vdash_{KC} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. Drugi smjer implikacije važi i u H.

(b) Indukcijom po $/A/$. ~~Na~~ primjer, ako je $A = C \wedge D$, onda, prema indukcijskoj hipotezi, postoje formule C' i D' takve da je $\vdash_{KC} C \leftrightarrow \neg C'$ i $\vdash_{KC} D \leftrightarrow \neg D'$. U tom slučaju je $\vdash_{KC} A \leftrightarrow \neg C' \vee \neg D'$, odnosno, prema dijelu (a) $\vdash_{KC} A \leftrightarrow \neg(C' \vee D')$, tj. za formulu B možemo uzeti $\neg(C' \vee D')$.$\dashv$

Sistem GKC je račun sekvenata $(Seq, \{(P,P) : P \in PC$ $\underline{R})$, gdje svi sekventi koji se pojavljuju u nekom izvođenju ovog računa moraju zadovoljavati slijedeći opšti uslov:

<u>konsekvent ne smije sadržati više od jedne formule koja nije strogo negativna</u>.

Skup pravila $\underline{R}$ se sastoji od istih strukturnih
rila kao i račun GH (v. prva glava, 1.4.), uz slijedeće
aničenje za pravilo sječenja:

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta A \qquad A \Pi \Vdash \Lambda}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda} \quad (C)$$

ako $\Delta \subseteq$ SNFor.

Logička pravila za uvođenje konjunkcije i disjunkci-
su nepromijenjena u odnosu na račun GH, a za uvođenje impli-
je i negacije imamo slijedeća pravila:

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta A \qquad B \Pi \Vdash \Lambda}{\Gamma A \to B \Pi \Vdash \Delta \Lambda} \quad (L\to), \qquad \frac{\Gamma A \Vdash B \Delta}{\Gamma \Vdash A \to B\ \Delta} \quad (R\to)$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A \Delta}{\Gamma \neg A \Vdash \Delta} \quad (L\neg) \qquad \frac{\Gamma A \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \neg A\ \Delta} \quad (R\neg)$$

aslov $\Delta \subseteq$ SNFor za sva četiri pravila.

L e m a 3. Za svaku formulu A, sekvent $A \Vdash A$
dokaziv u GKC.

D o k a z. Indukcijom po /A/. $\dashv$

Neka je $\hat{\Gamma}$ ($\check{\Delta}$) konjunkcija (disjunkcija)
mula koje se pojavljuju u Γ (Δ) (a ako je Γ = " "
. = " "), onda je $\hat{\Gamma} = P \to P$ ($\check{\Delta} = P \wedge \neg P$)).

T e o r e m a 4. $\vdash_{KC} \hat{\Gamma} \to \check{\Delta}$ akko $\vdash_{GKC} \Gamma \Vdash \Delta$

D o k a z. Dio "ako": dovoljno je pokazati da je sekvent $\Vdash \neg\neg A \neg A$ dokaziv u GKC, što imamo iz izvođenja

$$\frac{\neg A \Vdash \neg A}{\Vdash \neg\neg A \neg A} \quad \begin{array}{l}\text{(prema lemi 3)}\\ \text{(po pravilu } (R\neg)\text{)}.\end{array}$$

Dio "samo ako": znajući da su sva pravila, izuzimajući $(R\to)$ i $(R\neg)$, dopusiva u računu sekvenata GH, tj. gencenizaciji Heyting-ovog iskaznog računa, te imajući u vidu lemu 2 (b), dovoljno je pokazati da su formule

$$(A \to B \vee \neg C) \to (A \to B) \vee \neg C$$

i

$$(A \wedge B \to \neg C) \to (A \to \neg B \vee \neg C)$$

teoreme logike KC. Prema izvođenju:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \wedge B \to \neg C}{\neg(A \wedge B \wedge C)}\ \text{(u H)}}{\neg A \vee \neg B \vee \neg C}\ \text{(u KC, prema lemi 2 (a))}}{A \to \neg B \vee \neg C}\ \text{(u H)}$$

imamo $\vdash_{KC} (A \wedge B \to \neg C) \to (A \to \neg B \vee \neg C)$, a prema

$$\cfrac{\neg C \vee \neg\neg C \qquad \cfrac{\cfrac{A \to B \vee \neg C}{\neg\neg C \wedge A \to B}\ \text{(u H)}}{\neg\neg C \to (A \to B)}\ \text{(u H)}}{(A \to B) \vee \neg C}\ \text{(u H)}$$

$\vdash_{H} (\neg C \vee \neg\neg C) \wedge (A \to B \vee \neg C) \to (A \to B) \vee \neg C$, odnosno

$\vdash_{KC} (A \to B \vee \neg C) \to (A \to B) \vee \neg C$. $\dashv$

Dakle, sistem GKC je gencenizacija logike KC.

3.4. Teorema o eliminaciji pravila sječenja. Slije- . Gentzen-ov originalni dokaz (v. M. E. Szabo (ed.) (1969), akeuti (1975))teoreme o eliminaciji pravila sječenja za ičan i Heyting-ov račun, pokazaćemo:

T e o r e m a 5. Ako je sekvent $\Gamma \Vdash \Delta$ dokaziv u nu GKC, onda je on dokaziv u tom računu i bez upotrebe ila sječenja.

Najprije iskažimo jedno pomoćno tvrđenje.

L e m a 4. Ako je sekvent $\Gamma \Vdash \Delta$ dokaziv u raču- GKC i $A \vee B$ ($A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $\neg A$, redom) $\in \Delta \cap$ SNFor, onda ekvent $\Gamma \Vdash \Delta_{A \vee B}AB$ ($\Gamma \Vdash \Delta_{A \wedge B}A$ i $\Gamma \Vdash \Delta_{A \wedge B}B$, $\Vdash B\,\Delta_{A \rightarrow B}$, $\Gamma A \Vdash \Delta_{\neg A}$, redom) dokaziv u računu GKC, gdje Γ_A označavamo riječ dobijenu izostavljanjem svih pojavlji- ja formule A u Γ.

D o k a z. Indukcijom po dužini dokaza za sekvent Δ u GKC. Razmotrimo slučaj sa disjunkcijom, tj. kada $B \in \Delta \cap$ SNFor. Najkraći mogući dokaz sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$ sa oso- om $A \vee B \in \Delta \cap$ SNFor je slijedeći

$$\frac{P \Vdash P}{P \Vdash PA \vee B}\ (RW)$$

le je jasno da možemo izvesti i sekvent $P \Vdash PAB$. dokaz sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$, sa datom osobinom, ima veću dužinu, :

ako je u posljednjem koraku bilo primijenjeno neko od strukturnih pravila, onda, prema indukcijskoj hipotezi, gornji sekvent zadovoljava uslove naše leme, pa i donji. Posebno za pravilo sječenja

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta C \qquad C \Pi \Vdash \Lambda}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda}$$

ako $C \neq A \vee B$, imamo, prema indukcijskoj hipotezi,

$$\Gamma \Vdash \Delta_{A \vee B}^{ABC} \qquad \text{i} \qquad C \Pi \Vdash \Lambda_{A \vee B}^{AB}$$

odakle je

$$\Gamma \Pi \Vdash \Delta_{A \vee B}^{AB} \Lambda_{A \vee B}^{AB}\ , \text{ tj. } \qquad \Gamma \Pi \Vdash (\Delta \Lambda)_{A \vee B}^{AB}.$$

b) ako je u posljednjem koraku dokaza za sekvent $\Gamma \Vdash \Delta$ u GKC primijenjeno pravilo za uvođenje nekog veznika slijeva, onda, koristeći indukcijsku hipotezu na gornji sekvent (gornje sekvente), možemo zaključiti da i donji sekvent zadovoljava uslove leme.

c) ako je u posljednjem koraku dokaza sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$ u GKC bilo primijenjeno pravilo za uvođenje nekog veznika zdesna, onda za

cl) $$\frac{\Gamma \Vdash \Lambda C \qquad \Gamma \Vdash \Lambda D}{\Gamma \Vdash \Lambda\, C \wedge D} \ (R \wedge)$$

prema indukcijskoj hipotezi imamo

$$\Gamma \Vdash (\Lambda C)_{A \vee B}^{AB} \qquad \text{i} \qquad \Gamma \Vdash (\Lambda D)_{A \vee B}^{AB}$$

odakle možemo izvesti

$$\Gamma \Vdash \Lambda_{A \vee B}^{ABC} \qquad \text{i} \qquad \Gamma \Vdash \Lambda_{A \vee B}^{ABD}$$

pa i, prema $(R\wedge)$,

$$\Gamma \Vdash \Lambda_{A \vee B}{}^{ABC \wedge D} \;;$$

c2) $$\frac{\Gamma \Vdash \Lambda C}{\Gamma \Vdash \Lambda C \vee D} \,(R \vee_1) \quad \text{(slično } (R \vee_2))$$

na indukcijskoj hipotezi imamo

$$\Gamma \Vdash (\Lambda C)_{A \vee B}{}^{AB}$$

kle i

$$\Gamma \Vdash \Lambda_{A \vee B}{}^{ABC}$$

$$\Gamma \Vdash \Lambda_{A \vee B}{}^{ABC \vee D} \qquad \text{za } C \neq A \text{ ili } D \neq B,$$

za $C = A$ i $D = B$ iz

$$\Gamma \Vdash (\Lambda A)_{A \vee B}{}^{AB}$$

no

$$\Gamma \Vdash \Lambda_{A \vee B}{}^{AB} \;;$$

c3) $$\frac{\Gamma C \Vdash D \Lambda}{\Gamma \Vdash C \rightarrow D \Lambda} \,(R \rightarrow)$$

na idukcijskoj hipotezi je

$$\Gamma C \Vdash (D \Lambda)_{A \vee B}{}^{AB}$$

kle imamo

$\Gamma C \Vdash D \Lambda_{A \vee B}{}^{AB}$ tj. $\Gamma \Vdash C \rightarrow D \Lambda_{A \vee B}{}^{AB}$, po pra-

a $(R \rightarrow)$.

c4) $$\frac{\Gamma C \Vdash \Lambda}{\Gamma \Vdash \neg C \Lambda} \,(R \neg)$$

na indukcijskoj hipotezi je

$$\Gamma C \Vdash \Lambda_{A \vee B} AB$$

pa po pravilu $(R\neg)$ izvodimo i

$$\Gamma \Vdash \neg C \Lambda_{A \vee B} AB .$$

Slično se razmatraju i slučajevi sa ostalim veznicima.$\dashv$

D o k a z t e o r e m e o e l i m i n a c i j s j e č e n j a. Najprije uvedimo jedno uopšteno pravilo sječenja

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta \qquad \Pi \Vdash \Lambda}{\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta_A \Lambda} \quad (UC_A)$$

gdje je, naravno, $\Delta_A \subseteq$ SNFor. Nije teško pokazati da se prihvatanjem pravila (UC_A) umjesto pravila sječenja, skup dokazivih sekvenata sistema GKC ne proširuje na ovaj način. Stoga je za dokaz naše teoreme dovoljno pokazati da se svaki dokazivi sekvent može dokazati i bez upotrebe pravila (UC_A).

Neka je $\underline{T}$ drvo dokaza, odnosno izvođenje, sekventa $\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta_A \Lambda$ u kojem se pravilo (UC_A) samo jednom primjenjuje i to kao posljednje. Dvostrukom indukcijom po složenosti $/A/$ formule A i rangu r dokaza za sekvent $\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta_A \Lambda$, odnosno transfinitnom indukcijom do ω^2 po ordinalu $\omega \cdot /A/ +$ gdje je rang $r = r_L + r_R$; r_L i r_R definišemo ovako:

rng(Ln,$\underline{T}$,con) (rng(Ln,$\underline{T}$,ant)) je broj uzastopnih sekvenata lanca Ln drveta $\underline{T}$ kod kojih se formula A pojavljuje u antecedentu (konsekventu) i među kojim je posljednji takav sekvent $\Gamma \Vdash \Delta$ ($\Pi \Vdash \Lambda$).

$$r_L = (\text{def.}) \max_{Ln}(rng(Ln,\underline{T},con))$$

$$r_R = (\text{def.}) \max_{Ln}(rng(Ln,\underline{T},ant)).$$

Slučaj $/A/ = 0$ se provjerava direktno.

Indukcijska hipoteza glasi: svaki dokaz u kojem se mjenjuje pravilo (UC_A), za $/A/ \leqslant n$, je prevodiv u dokaz bez mjene tog pravila.

Ostatak dokaza dijelimo na dva glavna slučaja: 2 (baza indukcije) i $r > 2$ (indukcijski korak).

Konstrukcija algoritma za eliminisanje uopštenog vila sječenja iz datog dokaza može bazirati na jednoj nzitivnoj relaciji $>$ definisanoj na skupu svih izvoja Der(GKC) sistema GKC koja zadovoljava i uslov: ako y i u se dobija iz v zamjenom podizvođenja x sa y, a $v > u$.

U dijelu dokaza što slijedi navodimo osobine acije $>$ koje su karakteristične za sistem GKC, imajući idu slučajeve razmotrene kada se radi o računu GH (v. M. Szabo (1978) - Appendix C).

šaj: r = 2.

$$\frac{\dfrac{\Vdash C\Delta}{\to C\Delta} \qquad \dfrac{\Pi_1 \Vdash \Delta_1 B \quad C\Pi_2 \Vdash \Delta_2}{\Pi_1 B \to C \Pi_2 \Vdash \Delta_1\Delta_2}}{\Gamma\Pi_1\Pi_2 \Vdash \Delta\Delta_1\Delta_2} \quad > \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \Vdash \Delta_1 B \quad \Gamma B \Vdash C\Delta}{\Pi_1\Gamma_B \Vdash C\Delta_{1B}\Delta} \qquad C\Pi_2 \Vdash \Delta_2}{\Pi_1\Gamma_B\Pi_{2C} \Vdash (\Delta_{1B}\Delta)_C\Delta_2}}{\Gamma_1\Pi_1\Pi_2 \Vdash \Delta\Delta_1\Delta_2}$$

(gdje $\Delta, \Lambda_1 \subseteq$ SNFor)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \neg B \Delta} \qquad \dfrac{\Pi \Vdash B \Lambda}{\Pi \neg B \Vdash \Lambda}}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda} \quad > \quad \dfrac{\dfrac{\Pi \Vdash B \Lambda \qquad \Gamma B \Vdash \Delta}{\Pi \Gamma_B \Vdash \Lambda_B \Delta}}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda}$$

(gdje $\Delta, \Lambda \subseteq$ SNFor)

Slučaj: $r > 2$. Podslučaj: $r_R > 1$.

Ako je $A = B \rightarrow C$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash C \Delta}{\Gamma \Vdash A \Delta} \qquad \dfrac{\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B \qquad C \Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\Pi_1 A \Pi_2 \Vdash \Lambda_1 \Lambda_2}}{\Gamma \Pi_{1A} \Pi_{2A} \Vdash \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2} \quad >$$

(gdje je $\Delta, \Lambda_1 \subseteq$ SNFor

Ako $A \notin \Delta$:

$$> \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash C \Delta}{\Gamma \Vdash A \Delta} \qquad \Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B}{\Gamma \Pi_{1A} \Vdash \Delta \Lambda_1 B} \qquad \Gamma B \Vdash C \Delta}{\Gamma \Pi_{1A} \Gamma_B \Vdash (\Delta \Lambda_1)_B C \Delta}}{\Gamma \Pi_{1A} \Vdash \Delta \Lambda_1 C} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash C \Delta}{\Gamma \Vdash A \Delta} \qquad C \Pi_2 \Vdash}{\Gamma C \Pi_{2A} \Vdash \Delta \Lambda}}{\dfrac{\Gamma \Pi_{1A} (\Gamma \Pi_{2A})_C \Vdash (\Delta \Lambda_1)_C \Delta \Lambda_2}{\Gamma \Pi_{1A} \Pi_{2A} \Vdash \Delta \Lambda_1 \Lambda_2}}$$

$$\dfrac{\ldots\Delta \qquad \dfrac{\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B \qquad C\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\Pi_1 A \Pi_2 \Vdash \Lambda_1 \Lambda_2}}{\Gamma B(\Pi_1\Pi_2)_A \Vdash C\Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2 \ (*)}$$

$$\dfrac{\Gamma(\Pi_1\Pi_2)_A \Vdash A\Delta_A\Lambda_1\Lambda_2 \qquad \Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B}{\Gamma(\Pi_1\Pi_2)_A \Pi_{1A} \Vdash \Delta_A(\Lambda_1\Lambda_2)_A \Lambda_1 B}$$

$$\dfrac{\Gamma(\Pi_1\Pi_2)_A \Pi_{1A} \Vdash \Delta_A(\Lambda_1\Lambda_2)_A \Lambda_1 B \qquad \Gamma B(\Pi_1\Pi_2)_A \Vdash C\Delta_A\Lambda_1\Lambda_2 \ (*)}{\Gamma(\Pi_1\Pi_2)_A \Pi_{1A} \Gamma_B (\Pi_1\Pi_2)_{AB} \Vdash \Delta_{AB}(\Lambda_1\Lambda_2)_{AB} \Lambda_{1B} \Delta_{AB}(\Lambda_1\Lambda_2)_B C}$$

$A \in \Delta$: $\quad >$

$$\dfrac{\Gamma \Pi_{1A}\Pi_{2A} \Vdash \Delta_A \Lambda_1\Lambda_2 C \qquad \Gamma C \Pi_{2A} \Vdash \Delta_A \Lambda_2}{\Gamma \Pi_{1A}\Pi_{2A} \Gamma_C \Pi_{2AC} \Vdash \Delta_{AC}(\Lambda_1\Lambda_2)_C \Delta_A \Lambda_2}$$

$$\Gamma \Pi_{1A}\Pi_{2A} \Vdash \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2$$

je $A = \neg B$:

$$\dfrac{\dfrac{\ldots B \Vdash \Delta}{\ldots \Vdash A\Delta} \qquad \dfrac{\Pi \Vdash B\Lambda}{\Pi A \Vdash \Lambda}}{\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta_A \Lambda} \quad > \qquad \text{(gdje je } \Delta, \Lambda \subseteq \text{SNFor)}$$

svakom slučaju je $A \in \Pi$.

$A \notin \Delta$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash A\Delta} \qquad \Pi \Vdash B\Lambda}{\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta B \Lambda} \qquad \Gamma B \Vdash \Delta}{\Gamma \Pi_A \Gamma_B \Vdash \Delta_B \Lambda_B \Delta} \quad >$$

$$\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta \Lambda$$

$A \in \Delta$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash A\Delta} \qquad \Pi \Vdash B\Lambda}{\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta_A B \Lambda} \qquad \dfrac{\Gamma B \Vdash \Delta \qquad \dfrac{\Pi \Vdash B\Lambda}{\Pi A \Vdash \Lambda}}{\Gamma B \Pi_A \Vdash \Delta_A \Lambda}}{\Gamma \Pi_A \Gamma_B (\Pi_A)_B \Vdash (\Delta_A)_B \Lambda_B \Delta_A \Lambda} \quad >$$

$$\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta_A \Lambda$$

Ako $A \neq B \to C$:

$$\dfrac{\Gamma \Vdash A\Delta \qquad \dfrac{\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B \qquad C\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\Pi_1 B \to C \Pi_2 \Vdash \Lambda_1 \Lambda_2}}{\Gamma \Pi_{1A} B \to C \Pi_{2A} \Vdash \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2} \quad > \qquad (\text{gdje } \Delta, \Lambda_1 \subseteq \text{SN}$$

$$> \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Vdash A\Delta \qquad \Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B}{\Gamma \Pi_{1A} \Vdash \Delta_A \Lambda_1 B} \qquad \dfrac{\Gamma \Vdash A\Delta \qquad C\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{C\Gamma \Pi_{2A} \Vdash \Delta_A \Lambda_2}}{\Gamma \Pi_{1A} B \to C\, \Pi_{2A} \Gamma \Vdash \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2 \Delta_A}}{\Gamma \Pi_{1A} B \to C\, \Pi_{2A} \Vdash \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2}$$

Ako $A \neq \neg B$:

$$\dfrac{\Gamma \Vdash A\Delta \qquad \dfrac{\Pi \Vdash B\Lambda}{\Pi \neg B \Vdash \Lambda}}{\Gamma \Pi_A \neg B \Vdash \Delta_A \Lambda} \quad > \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Vdash A\Delta \qquad \Pi \Vdash B\Lambda}{\Gamma \Pi_A \Vdash \Delta_A B \Lambda}}{\Gamma \Pi_A \neg B \Vdash \Delta_A \Lambda}$$

(gdje $\Delta, \Lambda \in$ SNFor)

Podslučaj: $r_R = 1$ i $r_L > 1$.

Ako $A = B \to C$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash C\Delta}{\Gamma \Vdash A\Delta} \qquad \dfrac{\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B \qquad C\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\Pi_1 A \Pi_2 \Vdash \Lambda_1 \Lambda_2}}{\Gamma \Pi_1 \Pi_2 \Vdash \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2} \quad >$$

(gdje $\Delta, \Lambda_1 \subseteq$ SN
i $A \in \Delta$, jer bi
inače bilo $r_L = 1$)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma B \Vdash C\Delta \qquad \dfrac{\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 B \qquad C\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\Pi_1 A \Pi_2 \Vdash \Lambda_1 \Lambda_2}}{\Gamma B \Pi_1 \Pi_2 \Vdash C\Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2}}{\Pi_1 \Gamma_B \Pi_{1B} \Pi_{2B} \Vdash \Lambda_{1B} C \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2}$$

$$> \quad \dfrac{\dfrac{\Pi_1 \Gamma_B \Pi_{1B} \Pi_{2B} \Vdash \Lambda_{1B} C \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2 \qquad C\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\Pi_1 \Gamma_B \Pi_{1B} \Pi_{2B} \Pi_{2C} \Vdash (\Lambda_{1B} \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2)_C \Lambda_2}}{\Gamma \Pi_1 \Pi_2 \Vdash \Delta_A \Lambda_1 \Lambda_2}$$

ko $A \neq D_1 \to D_2$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma D_1 \Vdash D_2 \Delta}{\Gamma \Vdash D_1 \to D_2 \Delta} \qquad \dfrac{\cdots}{A\Pi \Vdash \Lambda}}{\Gamma \Pi \Vdash D_1 \to D_2 \Delta_A \Lambda} \quad >$$

ovom slučaju A mora biti strogo negativna formula, pa emo, u zavisnosti od glavnog veznika formule A, prema lemi , imati, na primjer (za $A = B \to C$):

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \Vdash B \Lambda_1 \qquad \Gamma B \Vdash C D_1 \to D_2 \Delta_A}{\Pi_1 \Gamma_B \Vdash C \Lambda_{1B} D_1 \to D_2 \Delta_A} \qquad C\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\Pi_1 \Gamma_B \Pi_{2C} \Vdash (\Lambda_{1B} D_1 \to D_2 \Delta_A)_C \Lambda_2}$$

$$> \quad \dfrac{\Pi_1 \Gamma_B \Pi_{2C} \Vdash (\Lambda_{1B} D_1 \to D_2 \Delta_A)_C \Lambda_2}{\Gamma \Pi \Vdash D_1 \to D_2 \Delta \Lambda}$$

dje je $\Pi_1 \cup \Pi_2 = \Pi$ i $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Lambda$.

lično:

$$\dfrac{\dfrac{\Vdash C \Delta \neg B}{\neg C \Vdash \Delta \neg B} \qquad \dfrac{\Pi \Vdash B \Lambda}{\Pi \neg B \Vdash \Lambda}}{\Gamma \neg C \Pi \Vdash \Delta_{\neg B} \Lambda} \quad > \quad \dfrac{\dfrac{\Pi \Vdash B \Lambda \qquad \Gamma \neg C B \Vdash \Delta_{\neg B}}{\Pi \Gamma \neg C \Vdash \Lambda \Delta_{\neg B}}}{\Gamma \neg C \Pi \Vdash \Delta_{\neg B} \Lambda}$$

Primijetimo da nam navedeni dokaz teoreme o eliminaciji pravila sječenja iz dokaza u sistemu GKC pruža mogućnost efektivne konstrukcije novog dokaza istog sekventa ali sada bez upotrebe pravila sječenja.

3.5. Neke posledice teoreme o eliminaciji pravila sječenja. Označimo sa GKC′ račun sekvenata koji se dobija iz računa GKC izostavljanjem pravila sječenja iz skupa pravila izvođenja. Teorema o eliminaciji sječenja iz računa GKC nam zapravo kaže da je GKC = GKC′.

Očigledno je da sistem GKC′ ima svojstvo podformulnosti, jer sada svako pravilo izvođenja ima osobinu da ako se neka formula pojavljuje u nekom od gornjih sekvenata, onda se ona svakako pojavljuje kao podformula neke formule donjeg sekventa. Odavde, svaki dokaz u sistemu GKC′ sadrži samo one formule koje su podformule formula završnog sekventa.

Kao neposredne posledice svojstva podformulnosti imamo

T e o r e m a 6. Sistem GKC je odlučiv.

T e o r e m a 7. Sistem GKC je separabilan.

Štaviše, sem činjenice da je i sistem KC odlučiv, sada imamo i jednu čisto sintaksnu proceduru odlučivosti za ovaj sistem.

Kao posledicu separabilnosti, imamo i vrlo značajn tvrđenje

T e o r e m a 8. icdH = icdKC.

Rad Jankova (v. V. A. Jankov (1968)), nakon čisto ıntičkih razmatranja, daje i više: KC je maksimalno proši- je Heyting-ovog računa iskaza sa osobinom da ima sa njim i implikativno-konjunktivno-disjunktivni fragment.

Navedeno tvrđenje nije nimalo trivijalno, naročito ı se ima u vidu činjenica da kada se Heyting-ovom računu ıza doda formula $A \vee \neg A$ kao aksioma, dakle zakon isklju- ja trećeg, koji je sintaksno vrlo sličan slabom zakonu ıjučenja trećeg, dobija se klasičan račun iskaza čiji je ıikativni fragment <u>pravo</u> proširenje računa iH.

3.6. <u>Teoreme interpolacije</u>.

Indukcijom po složenosti formule A definišemo njen <u>ıcedentni</u> (<u>konsekventni</u>) <u>dio</u> , u oznaci antA (conA):

ako je A atomična formula, onda je antA $= \emptyset$ i ı $= \{A\}$;

ako je $A = B \wedge C$ ili $A = B \vee C$, onda je antA = ıtB $\cup$ antC i conA $= \{A\} \cup$ conB $\cup$ conC;

ako je $A = B \rightarrow C$, onda je antA = antC $\cup$ conB i ı $= \{A\} \cup$ conC $\cup$ antB;

ako je $A = \neg B$, onda je antA = conB i conA = ı$\} \cup$ antB.

Sa atA označavamo skup svih atomičnih podformula formule A. Slično: at Γ = (def.) $\bigcup_{A\in\Gamma}$ at$A$, ant Γ = (def.) = (def.) $\bigcup_{A\in\Gamma}$ ant$A$, con Γ = (def.) $\bigcup_{A\in\Gamma}$ con$A$, atant = (def.) = (def.) at$\Gamma \cap$ antΓ i atcon Γ = (def.) at$\Gamma \cap$ conΓ .

Svaka dva para (Γ_1,Γ_2) i (Δ_1,Δ_2) za koje je $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ i $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$ nazivamo <u>razbijanjem</u> sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$.

L e m a 5. Ako je sekvent $\Gamma \Vdash \Delta A'$, odnosno $\Gamma \Vdash \Delta$, dokaziv u računu sekvenata GKC, gdje je $\Delta \subseteq$ SNFor, onda je za svako njegovo razbijanje (Γ_1,Γ_2) i $(\Delta_1,\Delta_2 A')$ odnosno (Γ_1,Γ_2) i (Δ_1,Δ_2), ispunjen neki od uslova:

(1) sekvent $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ je dokaziv u GKC ,

(2) sekvent $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, je dokaziv u GKC,

(3) (atant $\Gamma_1 \cup$ atcon Δ_1) $\cap$ (atcon $\Gamma_2 \cup$ atant $\Delta_2 A'$) = $X \neq \emptyset$ ili (atcon $\Gamma_1 \cup$ atant Δ_1) $\cap$ (atant $\Gamma_2 \cup$ atcon $\Delta_2 A'$) = $Y \neq \emptyset$ odnosno (atant $\Gamma_1 \cup$ atcon Δ_1) $\cap$ (atcon $\Gamma_2 \cup$ atant Δ_2) = $X' \neq \emptyset$ ili (atcon $\Gamma_1 \cup$ atant Δ_1) $\cap$ (atant Γ_2 atcon Δ_2) = $Y' \neq \emptyset$, i postoji formula C takva da su sekventi $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, dokazivi u GKC i atcon$C \subseteq Y$ i atant$C \subseteq X$, odnosno atcon$C \subseteq Y'$ i atant$C \subseteq X'$.

U slučaju (3) formulu C nazivamo <u>interpolantom</u> datog sekventa za dato razbijanje.

D o k a z. Indukcijom po dužini dokaza za sekvent

$\cdot\Delta A'$, odnosno $\Gamma \Vdash \Delta$, u GKC.

indukcije: moguća razbijanja sekventa $P \Vdash P$ su (a)) i (,P), (b) (P,) i (P,), (c) (,P) i (,P) i (d)) i (P,). Slučajevi (b) i (d) se ne odnose na gornje tvrđe- jer P SNFor. U slučaju (a) kao interpolirajuću formulu mo uzeti formulu P, a u slučaju (c) sekvent $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, $P \Vdash P$ je dokaziv u GKC.

kcijska hipoteza (IH) glasi: za svako razbijanje (Γ_1, Γ_2) $\Delta_1, \Delta_2 A')$, odnosno (Γ_1, Γ_2) i (Δ_1, Δ_2), sekventa $\Delta A'$, odnosno $\Gamma \Vdash \Delta$, koji je dokaziv u $n > 0$ koraka u mu sekvenata GKC', zadovoljen je neki od uslova (1), (2) (3) naše leme.

kcijski korak:

ako je posljednji korak u dokazu napravljen prema m od strukturnih pravila, jasno je da će za svako razbija- donjeg sekventa biti zadovoljen neki od uslova (1), (2) (3), jer je zadovoljen i za odgovarajuće razbijanje gornjeg enta, prema (IH). U slučaju kada se radi o uslovu (3), u jstvu interpolanta možemo uzeti istu formulu koja je interpo- gornjeg sekventa za odgovarajuće razbijanje.

$$(L\wedge_1): \quad \frac{A\Gamma \Vdash \Delta}{A\wedge B\Gamma \Vdash \Delta}$$

Moguća razbijanja jeg sekventa su

(i) $(A\wedge B\,\Gamma_1, \Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2)

(ii) $(\Gamma_1, A\wedge B\,\Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2).

(i) je prema (IH) (1) $A\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ u GKC, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ u ili (3) $A\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ u GKC, za neku formulu a datim svojstvima. Ako je (1), onda $A\wedge B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ u GKC;

ako (2), onda (2), takođe, i ako (3), onda $A \wedge B\, \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\, \Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ u GKC. Slično - (ii).

$(L\wedge_2)$: slično kao $(L\wedge_1)$.

$(R\wedge)$: $$\frac{\Gamma \Vdash \Delta A \qquad \Gamma \Vdash \Delta B}{\Gamma \Vdash \Delta A\wedge B}$$ Moguća razbijanja donjeg sekventa su

(i) (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, \Delta_2 A\wedge B)$

(ii) (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1 A\wedge B, \Delta_2)$.

Za (i) je prema (IH) (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ u GKC, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ i $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 B$ u GKC, (3.1) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ i $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 B$ u GKC za neku formulu C ili (3.2) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ i $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 D$ i $D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 B$ u GKC za neke formule C i D. Na ovaj način nisu iscrpljene sve mogućnosti, ali je razmotren opšti slučaj. Ako (1) ili (2), onda $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ ili $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A\wedge B$ (prema $(R\wedge)$), respektivno. Ako (3.1), onda prema izvođenju

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A}{C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A}\,(LW) \qquad C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 B}{C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A\wedge B}\,(R\wedge)$$

vidimo da u svojstvu interpolanta donjeg sekventa za dato razbijanje možemo opet uzeti formulu C. Ako (3.2), onda prema izvođenjima

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C \qquad \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 D}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C\wedge D}\,(R\wedge)$$

i

$$\cfrac{\cfrac{C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A}{C\wedge D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A}\,(L\wedge_1) \qquad \cfrac{D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 B}{C\wedge D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 B}\,(L\wedge_2)}{C\wedge D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A\wedge B}\,(R\wedge)$$

:nterpolirajuću formulu datog razbijanja donjeg sekventa
›mo uzeti formulu $C \wedge D$. Za (ii), prema (IH) je (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A$
$\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 B$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, (3.1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A$, $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 BC$ i
$\Vdash \Delta_2$ za neku formulu C ili (3.2) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 AC$, $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$,
$\vdash \Delta_1 BD$ i $D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ za neke formule C i D, u GKC. Iz
i (2), respektivno, slijedi da dato razbijanje donjeg
·enta zadovoljava uslov (1), odnosno (2), naše leme. Ako
3.1), onda, prema izvođenju

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 AC}\,(RW) \qquad \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 BC}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A \wedge BC}\,(R\wedge)$$

ıulu C možemo uzeti kao interpolirajuću za dato razbijanje
eg sekventa. Ako je (3.2), onda, prema izvođenjima

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 AC}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 AC \vee D}\,(R\vee_1) \qquad \dfrac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 BD}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 BC \vee D}\,(R\vee_2)}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A \wedge BC \vee D}\,(R\wedge)$$

$$\dfrac{C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 \qquad D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{C \vee D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\vee)$$

.ulu $C \vee D$ možemo uzeti u svojstvu interpolanta donjeg se-
.ta za dato razbijanje.

(L∨): $\dfrac{A\Gamma \Vdash \Delta \qquad B\Gamma \Vdash \Delta}{A \vee B\,\Gamma \Vdash \Delta}$ Moguća razbi-

a donjeg sekventa su

(i) $(A \vee B\,\Gamma_1, \Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2)

(ii) $(\Gamma_1, A \vee B\,\Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2).

Za (i) je, prema (IH), (1) $A\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ i $B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, (3.1) $A\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, $B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ za neku formulu C ili (3.2) $A\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$, $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, $B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 D$ i $D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ za neke formule C i D, u GKC. Ako je (1) ili (2), onda i razbijanje (i) donjeg sekventa zadovoljava, respektivno, uslove (1) i (2) leme. Ako je (3.1), onda istu formulu C možemo uzeti u svojstvu interpolanta, jer

$$\dfrac{\dfrac{A\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1}{A\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}\,(RW) \qquad B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}{A \vee B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}\,(L\vee).$$

Ako je (3.2), onda formulu $C \vee D$ možemo uzeti kao interpolant donjeg sekventa za razbijanje (i), jer

$$\dfrac{C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 \qquad D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{C \vee D\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\vee)$$

i

$$\dfrac{\dfrac{A\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}{A\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C \vee D}\,(R\vee_1) \qquad \dfrac{B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 D}{B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C \vee D}\,(R\vee_2)}{A \vee B\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C \vee D}\,(L\vee).$$

Za (ii) je, prema (IH), (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, (2) $A\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ i $B\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, (3.1) $A\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $CB\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ za neku formulu C ili (3.2) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$, $CA\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 D$ i $DB\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ za neke formule C i D, u GKC. Iz (1) i (2)

edi, redom, da je zadovoljen uslov (1), odnosno (2), leme.
je (3.1), onda formulu C možemo uzeti kao interpolant
eg sekventa za razbijanje (ii) jer

$$\dfrac{\dfrac{A\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{CA\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(LW) \qquad CB\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{C\,A \vee B\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\vee).$$

je (3.2), onda za interpolirajuću formulu donjeg sekventa
azbijanje (ii) možemo uzeti formulu $C \wedge D$, jer imamo

$$\dfrac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C \qquad \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 D}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C \wedge D}\,(R\wedge)$$

$$\dfrac{\dfrac{CA\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{C \wedge D A\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\wedge_1) \qquad \dfrac{DB\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{C \wedge D B\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\wedge_2)}{C \wedge D A \vee B\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\vee).$$

$(R\vee_1)$: $\dfrac{\Gamma \Vdash \Delta A}{\Gamma \Vdash \Delta A \vee B}$ Moguća razbijanja
jeg sekventa su

(i) (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, \Delta_2 A \vee B)$
(ii) (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1 A \vee B, \Delta_2)$.

(i) je, prema (IH), (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ ili
$\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ za neku formulu C, u GKC. Ako
, (2) ili (3), respektivno, imamo: $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A \vee B$
ema $(R\vee_1)$) ili $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A \vee B$ (prema $(R\vee_1)$).
čno se razmatra i (ii).

$(R\vee_2)$ - slično kao $(R\vee_1)$.

$(L\neg)$: $$\frac{\Gamma \Vdash A\Delta}{\Gamma\neg A \Vdash \Delta}$$ (za $\Delta \subseteq$ SNFor) Moguća donjeg sekventa su

(i) $(\Gamma_1, \Gamma_2\neg A)$ i (Δ_1, Δ_2)

(ii) $(\Gamma_1\neg A, \Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2).

Za (i), prema (IH), mora biti (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ ili (3) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash A\Delta_2$ za neku formulu C u GKC. Slučajevi (1) i (2) daju razbijanja donjeg sekventa za koja su zadovoljeni uslovi (1) i (2), respektivno, naše leme. Za (3), istu formulu C možemo uzeti kao interpolirajuću, jer imamo

$$\frac{C\,\Gamma_2 \Vdash A\Delta_2}{C\,\Gamma_2\neg A \Vdash \Delta_2}\,(L\neg).$$

Za (ii), prema (IH), je (1) $\Gamma_1 \Vdash A\Delta_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ ili (3) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 C$ i $C\,\Gamma_1 \Vdash A\Delta_1$ za neku formulu C, u GKC. Iz (1) i (2) imamo, redom, zadovoljenje uslova (1) i (2) naše leme. Ako (3), onda

$$\cfrac{\cfrac{C\,\Gamma_1 \Vdash A\Delta_1}{C\,\Gamma_1\neg A \Vdash \Delta_1}\,(L\neg)}{\Gamma_1\neg A \Vdash \Delta_1\neg C}\,(R\neg)$$

i

$$\frac{\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 C}{\neg C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\neg),$$

pa formulu $\neg C$ možemo uzeti kao interpolirajuću za razbijanje donjeg sekventa.

$$(R\neg): \quad \frac{\Gamma A \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \neg A \Delta}$$ Moguća razbijanja do-

g sekventa su

(i) (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, \Delta_2 \neg A)$

(ii) (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1 \neg A, \Delta_2)$.

i), prema (IH), mora biti (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, (2) $\Gamma_2 A \Vdash \Delta_2$ (3) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\, \Gamma_2 A \Vdash \Delta_2$ za neku formulu C, u GKC. 1) i (2) slijedi da razbijanje (i) zadovoljava uslov , odnosno uslov (2), naše leme. Ako je (3), onda istu formulu žemo uzeti za interpolirajuću, jer imamo

$$\frac{C\, \Gamma_2 A \Vdash \Delta_2}{C\, \Gamma_2 \Vdash \neg A \Delta_2} \; (R\neg).$$

(ii), prema (IH), je (1) $\Gamma_1 A \Vdash \Delta_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ ili (3) $A \Vdash \Delta_1 C$ i $C\, \Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, za neku formulu C, u GKC. Ako je ili (2), onda i razbijanje (ii) zadovoljava, redom, uslov ili (2) leme. Ako je (3), onda, prema izvođenjima

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 A \Vdash \Delta_1 C}{\Gamma_1 A \neg C \Vdash \Delta_1} \; (L\neg)}{\Gamma_1 A \Vdash \Delta_1 \neg\neg C} \; (R\neg)}{\Gamma_1 \Vdash \neg A \Delta_1 \neg\neg C} \; (R\neg)$$

$$\cfrac{\cfrac{C\, \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 \neg C} \; (R\neg)}{\neg\neg C\, \Gamma_2 \Vdash \Delta_2} \; (L\neg),$$

mulu $\neg\neg C$ možemo uzeti u svojsvu interpolanta donjeg sekventa za razbijanje (ii).

$$(L\rightarrow): \quad \frac{\Gamma \Vdash A\Delta \qquad B\Pi \Vdash \Lambda}{\Gamma A\rightarrow B\Pi \Vdash \Delta\Lambda} \quad (\text{za } \Delta \subseteq SNFor)$$

Moguća razbijanja donjeg sekventa su

(i) $(\Gamma_1\Pi_1, \Gamma_2 A\rightarrow B\Pi_2)$ i $(\Delta_1\Lambda_1, \Delta_2\Lambda_2)$

(ii) $(\Gamma_1 A\rightarrow B\Pi_1, \Gamma_2\Pi_2)$ i $(\Delta_1\Lambda_1, \Delta_2\Lambda_2)$.

Za (i), prema (IH), je (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ ili $\Pi_1 \Vdash \Lambda_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash A$ i $B\Pi_2 \Vdash \Lambda_2$, (3.1) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$, $\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D$ i $DB\Pi_2 \Vdash \Lambda_2$, za neku formulu D, (3.2) $B\Pi_2 \Vdash \Lambda_2$, $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ za neku formulu C ili (3.3) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$, $C\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$, $\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D$ i $DB\Pi_2 \Vdash \Lambda_2$, za neke formule C i D, u GKC. Ako je (1), onda primjenom pravila (RW) i (LW) izvodimo i $\Gamma_1\Pi_1 \Vdash \Delta_1\Lambda_1$. Ako je (2), onda prema pravilu $(L\rightarrow)$ imamo i $\Gamma_2 A\rightarrow B\Pi_2 \Vdash \Delta_2\Lambda_2$. Za (3.1), prema izvođenjima

$$\cfrac{\cfrac{\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D}{\cdots}\,(RW)}{\Gamma_1\Pi_1 \Vdash \Delta_1\Lambda_1 D}\,(LW)$$

i

$$\frac{\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A \qquad DB\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{D\Gamma_2 A\rightarrow B\Pi_2 \Vdash \Delta_2\Lambda_2}\,(L\rightarrow),$$

vidimo da formulu D možemo uzeti u svojsvu interpolanta donjeg sekventa za dato razbijanje. Za (3.2), prema izvođenjima

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}{\cdots}\,(RW)}{\Gamma_1\Pi_1 \Vdash \Delta_1\Lambda_1 C}\,(LW)$$

$$\frac{C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A \qquad B\,\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{C\,\Gamma_2 A \to B\,\Pi_2 \Vdash \Delta_2 \Lambda_2}\,(L\to),$$

mulu C možemo uzeti u svojstvu interpolanta. Za (3.3),

na izvođenjima

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}{\cdots}\,(RW)}{\Gamma_1 \Pi_1 \Vdash \Delta_1 \Lambda_1 C}\,(LW) \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D}{\cdots}\,(RW)}{\Gamma_1 \Pi_1 \Vdash \Delta_1 \Lambda_1 D}\,(LW)}{\Gamma_1 \Pi_1 \Vdash \Delta_1 \Lambda_1 C \wedge D}\,(R\wedge)$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A \qquad DB\,\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{CD\,\Gamma_2 A \to B\,\Pi_2 \Vdash \Delta_2 \Lambda_2}\,(L\to)}{\cdots}\,(L\wedge)}{C \wedge D\,\Gamma_2 A \to B\,\Pi_2 \Vdash \Delta_2 \Lambda_2}\,(LC),$$

nulu $C \wedge D$ možemo uzeti u svojstvu interpolanta donjeg se-
nta za razbijanje (i). U slučaju razbijanja (ii), prema
,je (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A$ i $B\,\Pi_1 \Vdash \Lambda_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ ili
$\vdash \Lambda_2$, (3.1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A$, $B\,\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D$ i $D\,\Pi_2 \Vdash \Lambda_2$, za neku
nulu D, (3.2) $B\,\Pi_1 \Vdash \Lambda_1$, $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 C$ i $C\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A$, za neku
ulu C, ili (3.3) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 C$, $C\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A$, $B\,\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D$ i
$\Vdash \Lambda_2$, za neke formule C i D , u GKC. Ako (1) , onda
$\to B\,\Pi_1 \Vdash \Delta_1 \Lambda_1$ (prema $(L\to)$). Ako je (2), onda $\Gamma_2 \Pi_2 \Vdash \Delta_2 \Lambda_2$
ma (LW) i (RW)). Ako je (3.1), onda, prema izvođenjima

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A \qquad B\,\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D}{\Gamma_1 A \to B\,\Pi_1 \Vdash \Delta_1 \Lambda_1 D}\,(L\to)$$

i

$$\dfrac{\dfrac{D\,\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{\cdots}\,(LW)}{D\,\Gamma_2\,\Pi_2 \Vdash \Delta_2\,\Lambda_2}\,(RW),$$

formulu D možemo uzeti kao interpolirajuću za donji sekvent pri razbijanju (ii). Ako je (3.2), onda, prema izvođenjima

$$\dfrac{\dfrac{C\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A \qquad B\,\Pi_1 \Vdash \Lambda_1}{C\,\Gamma_1\,A\to B\,\Pi_1 \Vdash \Delta_1\,\Lambda_1}\,(L\to)}{\Gamma_1\,A\to B\,\Pi_1 \Vdash \Delta_1\,\Lambda_1\,\neg C}\,(R\neg)$$

i

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 C}{\neg C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\,(L\neg)}{\cdots}\,(RW)}{\neg C\,\Gamma_2\,\Pi_2 \Vdash \Delta_2\,\Lambda_2}\,(LW)\ ,$$

formulu $\neg C$ možemo uzeti u svojstvu interpolirajuće za donji sekvent pri razbijanju (ii). Ako je (3.3), onda prema izvođenjima

$$\dfrac{\dfrac{C\,\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 A \qquad B\,\Pi_1 \Vdash \Lambda_1 D}{C\,\Gamma_1\,A\to B\,\Pi_1 \Vdash \Delta_1\,\Lambda_1 D}\,(L\to)}{\Gamma_1\,A\to B\,\Pi_1 \Vdash \Delta_1\,\Lambda_1\,C\to D}\,(R\to)$$

i

$$\dfrac{\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 C \qquad D\,\Pi_2 \Vdash \Lambda_2}{C\to D\,\Gamma_2\,\Pi_2 \Vdash \Delta_2\,\Lambda_2}\,(L\to)$$

vidimo da formulu $C\to D$ možemo uzeti u svojstvu interpolanta jeg sekventa za razbijanje (ii).

$$(R\to):\quad \frac{\Gamma A \Vdash B\ \Delta}{\Gamma \Vdash A\to B\ \Delta}\quad (\text{za}\quad \Delta\subseteq SNFor)$$

ića razbijanja donjeg sekventa su

(i) (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, A\to B\ \Delta_2)$

(ii) (Γ_1, Γ_2) i $(A\to B\ \Delta_1, \Delta_2)$.

a (IH), u slučaju (i) je (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$, (2) $\Gamma_2 A \Vdash B\ \Delta_2$
(3) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\ \Gamma_2 A \Vdash B\ \Delta_2$, za neku formulu C, u
Ako je (1), onda za razbijanje (i) donjeg sekventa ima-
adovoljenje uslova (1) naše leme. Ako je (2), onda prema

$$\frac{\Gamma_2 A \Vdash B\ \Delta_2}{\Gamma_2 \Vdash A\to B\ \Delta_2}\ (R\to),$$

mo da je zadovoljen uslov (2) leme. Ako je (3), onda prema

$$\frac{C\ \Gamma_2 A \Vdash B\ \Delta_2}{C\ \Gamma_2 \Vdash A\to B\ \Delta_2}\ (R\to),$$

formulu C možemo uzeti kao interpolant donjeg sekventa
azbijanje (i). Za razbijanje (ii), prema (IH), je svakako
$\Gamma_1 A \Vdash B\ \Delta_1$, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ ili (3) $\Gamma_1 A \Vdash B\ \Delta_1 C$ i
$\Vdash \Delta_2$, za neku formulu C, u GKC. U slučajevima (1) i
imamo, redom, zadovoljenje uslova (1) i (2) leme. Ako
(3), onda, prema izvođenjima

$$\cfrac{\cfrac{C\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 \neg C}\ (R\neg)}{\neg\neg C\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\ (L\neg)$$

i

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 A \Vdash B \Delta_1 C}{\neg C\ \Gamma_1 A \Vdash B \Delta_1}(L\neg)}{\Gamma_1 A \Vdash B \Delta_1 \neg\neg C}(R\neg)}{\Gamma_1 \Vdash A \to B\ \Delta_1 \neg\neg C}(R\to),$$

vidimo da formulu $\neg\neg C$ možemo uzeti u svojstvu interpolanta donjeg sekventa pri razbijanju (ii).⊣

L e m a 6. Ako je sekvent $\Gamma \Vdash \Delta A'$, odnosno sekvent $\Gamma \Vdash \Delta$, dokaziv u GKC, gdje je $\Delta \subseteq$ SNFor, onda, za svako njegovo razbijanje (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, \Delta_2 A')$, odnosno (Γ_1, Γ_2) i (Δ_1, Δ_2),

(1) ako $\mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Gamma_2\Delta_2 A' \neq \emptyset$, odnosno $\mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Delta_2\Gamma_2 \neq \emptyset$, onda postoji formula C takva da su sekventi $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, dokazivi u GKC i $\mathrm{at}C \subseteq \mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Gamma_2\Delta_2 A'$, odnosno $\mathrm{at}C \subseteq \mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Gamma_2\Delta_2$;

(2) ako $\mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Gamma_2\Delta_2 A' = \emptyset$, odnosno $\mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Gamma_2\Delta_2 = \emptyset$, onda je sekvent $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ ili sekvent $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ ili $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, dokaziv u GKC.

D o k a z. Prema prethodnoj lemi, svako razbijanje (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, \Delta_2 A')$, odnosno (Γ_1, Γ_2) i (Δ_1, Δ_2), sekventa $\Gamma \Vdash \Delta A'$, odnosno $\Gamma \Vdash \Delta$, za $\Delta \subseteq$ SNFor, dokazivog u GKC, zadovoljava neki od datih uslova (1), (2) ili (3). Ako je $\mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Gamma_2\Delta_2 A' \neq \emptyset$, odnosno $\mathrm{at}\,\Gamma_1\Delta_1 \cap \mathrm{at}\,\Gamma_2\Delta_2 \neq \emptyset$, i (1) ili (2), onda za formulu C možemo uzeti fo-

lu $\neg P \wedge \neg\neg P$ ili $P \rightarrow P$, respektivno. Ako je
$_1\Delta_1 \cap$ at $\Gamma_2\Delta_2 A' \neq \emptyset$, odnosno at $\Gamma_1\Delta_1 \cap$ at $\Gamma_2\Delta_2 \neq \emptyset$,
(3), onda je za formulu C dovoljno uzeti interpolirajuću
nulu datog sekventa za dato razbijanje, čija je konstrukci-
opisana u dokazu prethodne leme. Ako je at $\Gamma_1\Delta_1 \cap$ at $\Gamma_2\Delta_2 A' =$
, odnosno at $\Gamma_1\Delta_1 \cap$ at $\Gamma_2\Delta_2 = \emptyset$, onda je prema pretho-
j lemi svakako sekvent $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ ili $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno
$\vdash \Delta_1$ ili $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, dokaziv u GKC.$\dashv$

Za logiku L kažemo da zadovoljava <u>interpolacioni</u>
<u>ov Lyndon-a</u> (v. R. C. Lyndon (1959), L. L. Maksimova (1982))
iz $\vdash_L A \rightarrow B$ slijedi (1) $\vdash_L \neg A$, (2) $\vdash_L B$ ili (3)
antA $\cap$ atantB $\neq \emptyset$ ili atconA $\cap$ atconB $\neq \emptyset$] i postoji
nula C takva da $\vdash_L A \rightarrow C$, $\vdash_L C \rightarrow B$ i [atantC $\subseteq$
ntA $\cap$ atantB ili atconC $\subseteq$ atconA $\cap$ atconB] .

Za logiku L kažemo da zadovoljava <u>interpolacioni</u>
<u>ov Craig-a</u> (v. W. Craig (1957, 1957a), L. L. Maksimova
'9)) ako iz $\vdash_L A \rightarrow B$ slijedi (1) $\vdash_L \neg A$, (2) $\vdash_L B$ ili
atA $\cap$ atB $\neq \emptyset$ i postoji formula C takva da je $\vdash_L A \rightarrow C$,
$\rightarrow B$ i at C $\subseteq$ atA $\cap$ atB.

<u>Napomena</u>. Navedene definicije interpolacionih uslo-
Lyndon-a i Craig-a se odnose kako na iskazni, tako i na
likatski slučaj, pa ćemo iste podrazumijevati i u poslje-
m dijelu rada (v. Dodatak 1. - Logika predikata slabog
ona isključenja trećeg).

Jasno je da ako neka logika zadovoljava interpolacioni uslov Lyndon-a, onda mora zadovoljavati i interpolacioni uslov Craig-a.

T e o r e m a 9. Logika KC zadovoljava interpolacioni uslov Lyndon-a.

D o k a z. Imajući u vidu odnose među sistemima KC i GKC, dovoljno je ustanoviti da razbijanje (A,) i (,B) sekventa A⊩B zadovoljava neki od uslova (1), (2) ili (3) leme 5, što se samom lemom i tvrdi.⊣

P o s l e d i c a. Logika KC zadovoljava interpolacioni uslov Craig-a.

Metod koji smo koristili pri dokazu teorema interpolacije potiče od Maehara-e i prezentiran je kod Takeuti-a (1975) pri dokazu teoreme interpolacije za klasičan i Heyting-ov račun predikata. Što se tiče logike KC, interpolacionu teoremu Craig-a je dokazao Gabbay (v. D. M. Gabbay (1971a)), a ista se tretira i u radovima Maksimove (v. L. L. Maksimova (1977, 1979)) i Zachorowskog (v. S. Zachorowski (1978)). Interpolaciona teorema Lyndon-a je data u radu Maksimove (v. L. L. Maksimova (1982)) kao posledica odgovarajućih razmatranja koja se odnose na proširenja modalnog sistema S4.

3.7. Jedna KC-interpretacija klasične logike iskaza. Neka je t preslikavanje skupa iskaznih formula For u sebe definisano uslovima:

$$t(P) = \neg P$$

$t(A \wedge B) = t(A) \wedge t(B)$

$t(A \vee B) = t(A) \vee t(B)$

$t(A \rightarrow B) = t(A) \rightarrow t(B)$

$t(\neg A) = \neg t(A).$

L e m a 7. Za proizvoljnu iskaznu formulu A po-
i iskazna formula B takva da je $\vdash_{KC} t(A) \leftrightarrow \neg B$.

D o k a z. Indukcijom po složenosti $/A/$ formule A.
je $A = P$, onda je za B dovoljno uzeti iskazno slovo P.
je A neka od formula $C \wedge D$, $C \vee D$, $C \rightarrow D$ ili $\neg C$, prema
kcijskoj hipotezi, postoje formule C' i D' takve da je
$t(C) \leftrightarrow \neg C'$ i $\vdash_{KC} t(D) \leftrightarrow \neg D'$ pa je za formulu B dovo-
uzeti, redom, formulu $\neg(C' \vee D')$, $\neg(C' \wedge D')$, $\neg(\neg C' \wedge D')$
$\neg\neg C'$. $\dashv$

T e o r e m a 10. $\vdash_{C} A$ akko $\vdash_{KC} t(A)$.

D o k a z. Dio "ako": indukcijom po dužini dokaza
u klasičnom računu iskaza C. Pretpostavimo da je račun C
ulisan na uobičajeni način, recimo kao $H + A \vee \neg A$, sa
kao jedinim pravilom izvođenja. Nije teško vidjeti da
slikavanje t aksiome računa C preslikava u teoreme računa
na primjer, $t(A \vee \neg A) = t(A) \vee \neg t(A)$, a prema lemi 7, po-
ji formula B takva da je $\vdash_{KC} t(A) \leftrightarrow \neg B$, odnosno
$t(A) \vee \neg t(A) \leftrightarrow \neg B \vee \neg\neg B$, ili $\vdash_{KC} t(A) \vee \neg t(A)$. Pravilo
s ponens $\dfrac{B \qquad B \rightarrow A}{A}$ će biti preslikano opet u pra-

vilo modus ponens $\dfrac{t(B) \qquad t(B) \rightarrow t(A)}{t(A)}$. Dio "samo ako":

Ako $\not\vdash_C A$ i $\vdash_{KC} t(A)$, onda, prema dijelu "ako", imamo $\vdash_{KC} t(t(A))$, tj. $\vdash_C t(t(A))$. Međutim, indukcijom po složenosti /A/ formule A, može se pokazati da je $\vdash_C t(t(A)) \leftrightarrow A$, odakle je i $\vdash_C A$, što protivrječi pretpostavci.⊣

Kao neposrednu posledicu gornje teoreme, možemo izreći slijedeće tvrđenje, koje karakteriše logiku KC:

logika KC je minimalno proširenje Heyting-ovog računa iskaza u kojem se klasičan iskazni račun može interpretirati preslikavanjem t.

3.8. <u>Sistem prirodne dedukcije NKC</u>. Sistem prirodne dedukcije za iskaznu logiku slabog zakona isključenja trećeg, u oznaci NKC, dobijamo iz formulacije sistema NC (v. prvu glavu), kada se ograničimo na pravila kod kojih svi skupovi formula koji se pojavljuju u dokazima i izvođenjima zadovoljavaju uslov da ne sadrže više od jedne formule koja nije strogo negativna, a za pravila (u→) i (u¬) je specijalno $\Gamma \subsetneq$ SNFor.

T e o r e m a 11. (Princip inverzije) Ako se prema nekom izvođenju $x \in$ Der(NKC) može zaključiti da se u sistemu NKC iz $A_1,\dots,A_n$ može izvesti Δ, onda postoji izvođenje $x' \in$ Der(NKC) prema kojem se to isto može zaključiti, a u kojem izuzev u maksimalnim segmentima dužine veće od 1, ne postoji formula koja se pojavljuje kao glavna formula nekog u-pravila i kao glavna formula velike premise nekog e-pravila.

D o k a z. Slično kao za sistem NC.⊣

T e o r e m a 12. (Teorema o normalizaciji izvođenja) Ako postoji izvođenje $x \in \mathrm{Der(NKC)}$ prema kojem iz $A_1, \ldots, A_n$ slijedi Δ, onda postoji normalno izvođenje $x' \in \mathrm{Der(NKC)}$ prema kojem, takođe, iz $A_1, \ldots, A_n$ slijedi Δ.

D o k a z. Kao za sitem NC.⊣

Kao posledice gornjih dviju tvrdnji, mogu se izvesti princip podformulnosti, separabilnost, teoreme interpolacije i slično.

Četvrta glava

4. JEDNA SINTAKSNA PROCEDURA ODLUČIVOSTI ZA KONAČNO AKSIOMATIZIBILNE INTERMEDIJALNE LOGIKE BEZ DISJUNKCIJE

4.1. Uvod. Problem odlučivosti Heyting-ovog računa
za su razmatrali i riješili mnogi autori, među kojima,
a Church-u (1956), i Gentzen (v. M. E. Szabo (ed.) (1969)),
berg (v. M. Wajsberg (1938), B. Rosser (1938)), McKinsey
rski (v. J. C. C. McKinsey, A. Tarski (1941)), Rieger,
čak (v. B. J. Piljčak (1950)). Metod tabloa, koji se najpri-
ojavljuje u radovima Beth-a (v. E. W. Beth (1955)), Hinti-
e (v. J. Hintikka (1955)) i Schütte-a (v. K. Schütte (1956)),
lje razrađuje kod Smullyan-a (v. R. M. Smullyan (1968)),
štini dualan metodu Gentzen-a, predstavlja takođe zadovo-
ajuće rješenje ovog problema.

U ovom dijelu rada daćemo jednu sintaksnu proceduru
čivosti za implikativno-konjunktivno-negativni fragment
računa H, koja se, imajući u vidu rezultat Diego-a (v.
iego (1966), C. G. McKay (1968), A. Urquhart (1974)), mo-
rodužiti na sve konačno aksiomatizibilne intermedijalne
ke bez disjunkcije.

4.2. Sistem $h_{\rightarrow\neg}$. Pretpostavljamo da je skup implikativnih formula izgrađen nad prebrojivim skupom iskaznih slova PL = $\{p_1, p_2, \ldots\}$ i jednočlanim skupom iskaznih konstanti PC = $\{\perp\}$.

Radi kraćeg pisanja, poštovaćemo konvenciju prema kojoj umjesto $(A \to (B \to (\ldots \to (C \to D)\ldots)))$ pisati $A \to B \to \ldots \to C \to D$.

Skupove <u>prostih antecedentnih i konsekventnih djelova formule</u> A, u oznaci pantA, odnosno pconA, definišemo induktivno uslovima:

(i) $\text{pant}P = \emptyset$, $\text{pcon}P = \{P\}$;

(ii) $\text{pant}(A \to B) = \{A\} \cup \text{pant}B$

$\text{pcon}(A \to B) = \{A \to B\} \cup \text{pcon}B$.

Napomena. Navedena definicija se bitno razlikuje od definicije antecedentnih i konsekventnih djelova formule A date u prethodnoj glavi.

Shema aksiome sistema $h_{\to \neg}$ su

(A1) $P \to P$

i

(A2) $\perp \to P$.

Shema pravila izvođenja sistema $h_{\to \neg}$ su

$$\frac{A_1 \to \ldots \to A_n \to A}{A_{i_1} \to \ldots \to A_{i_n} \to A} \;(\mathrm{P})$$

, gdje je $(i_1, \ldots, i_n)$ proizvoljna permutacija n-torke $(1, \ldots, n)$

$$\frac{A \to A \to B}{A \to B}\ (C)$$

$$\frac{A}{B \to A}\ (W)$$

$$\frac{A \to B \qquad C \to D}{A \to (B \to C) \to D}\ (AL)$$

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}\ (TR)$$

L e m a 1. (1) $\vdash_{h_{\to\neg}} A \to A$;

(2) $\vdash_{h_{\to\neg}} A \to B \to A$;

(3) $\vdash_{h_{\to\neg}} (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$;

(4) $\vdash_{h_{\to\neg}} \bot \to A$.

D o k a z. (1) Indukcijom po složenosti /A/ formule

(2)
$$\frac{\dfrac{A \to A \quad (\text{prema } (1))}{B \to A \to A}\ (W)}{A \to B \to A}\ (P)$$

(3)
$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \ (\text{prema } (1)) \qquad \dfrac{(A \to B \to C) \to A \to B \to C \ (\text{prema } (1))}{B \to (A \to B \to C) \to A \to C}\ (P)}{A \to (A \to B) \to (A \to B \to C) \to A \to C}\ (AL)}{A \to A \to (A \to B \to C) \to (A \to B) \to C}\ (P)}{A \to (A \to B \to C) \to (A \to B) \to C}\ (C)$$
$$\frac{A \to (A \to B \to C) \to (A \to B) \to C}{(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C}\ (P)$$

(4) Indukcijom po složenosti /A/ formule A. $\dashv$

Lema 2. Slijedeća pravila su izvodljiva u sistemu $h_{\rightarrow\neg}$

(1) $$\frac{A \qquad A\rightarrow B\rightarrow C}{B\rightarrow C} \ (MP)$$

(2) $$\frac{A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow A \qquad A\rightarrow B}{A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow B} \ (GTR)$$

(3) $$\frac{A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow A \qquad B\rightarrow C}{A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow (A\rightarrow B)\rightarrow C} \ (GAL)$$

(4) $$\frac{A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow A \qquad B}{B(A\rightarrow/A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow)} \ (GGTR)$$

gdje je $B(A\rightarrow/A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow)$, formula koja se dobija iz formule B zamjenom "$A\rightarrow$" sa "$A_1\rightarrow \ldots \rightarrow A_n\rightarrow$" na svim mjestima gdje se formula A pojavljuje u B kao prost antecedentni dio od B.

Napomena. Pravilo (MP), dakle modus ponens uz ograničenje da složenost donje formule mora biti $\geqslant 1$, je dovoljno opšte da se pri uobičajenim aksiomatizacijama Heyting-ovog računa iskaza može uzeti umjesto pravila (mp), modus ponensa bez ograničenja.

Primijetimo i to da je pravilo (GGTR) generalizacija pravila (GTR) i (TR).

Dokaz. (1) $$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A}{B\rightarrow A}\ (W) \qquad A\rightarrow B\rightarrow C}{B\rightarrow B\rightarrow C}\ (TR)}{B\rightarrow C}\ (C)$$

(2) Indukcijom po n.

(3)

$$\dfrac{A_1 \to \ldots \to A_n \to A \qquad \dfrac{A \to A \qquad B \to C}{A \to (A \to B) \to C}\,(AL)}{A_1 \to \ldots \to A_n \to (A \to B) \to C}\,(GTR)$$

(4) Indukcijom po broju pojavljivanja formule A u
o prostog antecedentnog dijela. ⊣

Slijedeće tvrđenje je neposredna posledica gornjih
i dobro poznatih činjenica o računu H (v. D. M. Gabbay
1), M. E. Szabo (ed.) (1969), P. S. Novikov (1977)).

T e o r e m a 1. $h_{\to\neg}$ = inH.

Poznato je da se u ovom kontekstu negacija definiše
licitno kao:

A = (def.) $A \to \bot$.

4.3. <u>Teorema o eliminaciji pravila (TR)</u>. Slično kao
iginalnom Gentzen-ovom dokazu (v. M. E. Szabo (1969)) može
dvostrukom indukcijom po složenosti /A/ formule A i rangu
za, dokazati jedno opštije tvrđenje o sistemu $h_{\to\neg}$ - te-
a o eliminaciji pravila (GGTR), što za posledicu ima i
emu o eliminaciji pravila (TR) iz svih dokaza u sistemu
$\neg$.

T e o r e m a 2. Ako je formula A dokaziva u siste-
$h_{\to\neg}$, onda je ona dokaziva u tom sistemu i bez upotrebe
ila (TR).

4.4. Karakterizacija formula dokazivih u inH.

T e o r e m a 3. Neka je A formula oblika $A_1 \to \ldots \to A_n \to P$. Tada:

$\vdash_{inH} A$ akko zadovoljen je neki od slijedećih uslova

(i) $P \in \mathrm{pant}A$ ili $\perp \in \mathrm{pant}A$

(ii) postoji i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, takav da je $P \in \mathrm{pcon}A_{i_0}$ ili $\perp \in \mathrm{pcon}A_{i_0}$ i za svaku formulu $B \in \mathrm{pant}A_{i_0}$ je $\vdash_{inH} A_1 \to \ldots \to A_n \to B$.

D o k a z. Dio "ako": indukcijom po dužini dokaza za A u $h_{\to,\neg}$. Ako je A neka od aksioma, onda je uslov (i) zadovoljen. Sada je dovoljno razmotriti još slučajeve kada se u posljednjem koraku dokaza za A u $h_{\to,\neg}$ koristi neko od pravila (P), (C), (W) ili (AL). Nije teško vidjeti da su pravila (P), (C) i (W) zatvorena za uslove (i) i (ii), tj. da ako gornja formula zadovoljava uslov (i) ili (ii), onda i donja zadovoljava isti uslov. Ako posljednji korak dokaza izgleda ovako

$$\frac{A_1 \to C \qquad D \to A_3 \to \ldots \to A_n \to P}{A_1 \to (C \to D) \to A_3 \to \ldots \to A_n \to A} \ (AL),$$

gdje je $A_2 = C \to D$, onda, prema indukcijskoj hipotezi, formula $D \to A_3 \to \ldots \to A_n \to P$ zadovoljava uslov (i) ili (ii). Ako je $P \in \{A_3, \ldots, A_n\}$ ili $\perp \in \{A_3, \ldots, A_n\}$, onda izvedena formula A zadovoljava uslov (i). Ako $D \to A_3 \to \ldots \to A_n \to P$ zadovoljava uslov (ii) i $i_0 \in \{3, \ldots, n\}$, onda izvedena formula A ima osobinu (ii), jer: moguća su slijedeća dva podslučaja (1) D =

$D = \perp$; (2) $D = D_1 \to \ldots \to D_k \to Q$, gdje je $Q = P$ ili
$\perp$ i za svaki i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ $\vdash_{h_{\to\neg}} D \to A_3 \to \ldots \to A_n \to D_i$.
je (1), onda, kako je prema indukcijskoj hipotezi
$_{\to\neg}\ A_1 \to C$, pa i $\vdash_{h_{\to\neg}} A_1 \to \ldots \to A_n \to C$ (prema (P) i (W)),
izvedena formula zadovoljava uslov (ii) teoreme. Ako je
onda je $A_2 = C \to D_1 \to \ldots \to D_k \to Q$. Iz $\vdash_{h_{\to\neg}} A_1 \to C$, po (W)
') možemo izvesti $\vdash_{h_{\to\neg}} A_1 \to \ldots \to A_n \to C$, a iz $\vdash_{h_{\to\neg}} A_1 \to C$
$_{\to\neg}\ D \to A_3 \to \ldots \to A_n \to D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, po (AL), možemo izvesti
$_{\to\neg}\ A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n \to D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Dakle izvedena fo-
a zadovoljava uslov (ii) teoreme.
"samo ako": ako je zadovoljen uslov (i), jasno je da je
$\vdash A$. Slučaj (ii): ne umanjujući opštost, pretpostavimo da
$_0 = n$ i $A_n = B_1 \to \ldots \to B_k \to Q$, gdje je $Q = P$ ili $Q = \perp$. Tada
o slijedeći dokaz za A u $h_{\to\neg}$

$$\frac{A_1 \to \ldots \to A_n \to B_k \qquad Q \to P}{A_1 \to \ldots \to A_n \to (B_k \to Q) \to P}\ (GAL)$$

$$\frac{A_1 \to \ldots \to A_n \to (B_k \to Q) \to P}{(B_k \to Q) \to A_1 \to \ldots \to A_n \to P}\ (P)$$

$$\frac{A_1 \to \ldots \to A_n \to B_{k-1} \qquad (B_k \to Q) \to A_1 \to \ldots \to A_n \to P}{A_1 \to \ldots \to A_n \to (B_{k-1} \to B_k \to Q) \to A_1 \to \ldots \to A_n \to P}\ (GAL)$$

$$(P)\quad (C)\quad \cdots\quad (GAL)$$

$$\frac{\ldots \to A_n \to B_1 \qquad (B_2 \to \ldots \to B_k \to Q) \to A_1 \to \ldots \to A_n \to P}{A_1 \to \ldots \to A_n \to A_n \to A_1 \to \ldots \to A_n \to P}\ (GAL)$$

$$\frac{A_1 \to \ldots \to A_n \to A_n \to A_1 \to \ldots \to A_n \to P}{\cdots}\ (P)$$

$$\frac{\cdots}{A_1 \to \ldots \to A_n \to P}\ (C) \qquad \dashv$$

Iz navedenog dokaza se može vidjeti da ako izosta-
djelove uslova (i) i (ii) koji se odnose na iskaznu konsta-
$\perp$, dobijamo karakterizaciju implikativnog fragmenta iH
ing-ovog računa iskaza.

4.5. Procedura odlučivosti za inH.

Za formulu $A = A_1 \rightarrow \ldots \rightarrow A_n \rightarrow P$ kažemo da se može

(1) trivijalno dokazati ako je $A_i = P$ ili $A_i = \perp$, za neki i, $1 \leqslant i \leqslant n$

i

(2) trivijalno opovrgnuti ako ne postoji i, $1 \leqslant i \leqslant n$ takav da je $P \in \mathrm{pcon}A_i$ ili $\perp \in \mathrm{pcon}A_i$.

Iz karakterizacije date teoremom 3, vidi se da ako se neka formula može trivijalno dokazati, da je ona svakako teorema logike inH, kao i da ako se neka formula može trivijalno opovrgnuti, onda ona niukom slučaju ne može biti teorema logike inH.

Drvo odluke za formulu A, u oznaci DT_A, formiramo na slijedeći način:

(*) Formula A predstavlja početni čvor drveta DT_A.

(**) Ako formula $C = C_1 \rightarrow \ldots \rightarrow C_m \rightarrow P$ predstavlja neki čvor drveta DT_A, onda:

a) ako se formula C može trivijalno dokazati ili trivijalno opovrgnuti, onda je C maksimalni element drveta;

b) ako uslov a) nije zadovoljen, onda svakako postoji formula $B \in \mathrm{pant}C$ takva da je $P \in \mathrm{pcon}B$ ili $\perp \in \mathrm{pcon}B$. U ovom slučaju iz čvora C imamo grananje do čvorova $C_1 \rightarrow \ldots \rightarrow C_m \rightarrow D$, za svaku formulu $D \in \mathrm{pant}B$. Tada još i kažemo da je grananje iz čvora C učinjeno prema formuli B.

Dužina $d(DT_A)$ drveta odluke DT_A je $k-1$, gdje je roj čvorova najdužeg lanca drveta DT_A.

Očigledno da na opisani način svakoj formuli A ružujemo, u opštem slučaju, jednu kolekciju drveta odluke.

Drvo DT_A nazivamo drvetom pozitivne (negativne) ke za formulu A ako je dužina drveta DT_A konačna i svi ovi maksimalni elementi se mogu trivijalno dokazati (ako na drveta DT_A nije nonačna ili među njegovim maksimalnim entima postiji formula koja se može trivijalno opovrgnuti).

T e o r e m a 4. $\vdash_{\overline{inH}} A$ akko postoji drvo pozie odluke za A takvo da je $d(DT_A) \leqslant \sum_{B \in pantA} /B/$.

Najprije ćemo dokazati slijedeću lemu.

L e m a 3. Ako su $DT_{A\to B}$ i $DT_{C\to D}$, redom, drveozitivne odluke za $A\to B$ i $C\to D$, onda postoji drvo pozie odluke $DT_{A\to(B\to C)\to D}$ za $A\to(B\to C)\to D$ takvo da je $_{A\to(B\to C)\to D}) \leqslant d(DT_{A\to B}) + d(DT_{C\to D}) + 1$.

D o k a z. Konstruisaćemo drvo, u oznaci $DT_{A\to B}{\circ}DT_{C\to D}$, je drvo pozitivne odluke za $A\to(B\to C)\to D$ i $_{A\to B}{\circ}DT_{C\to D}) \leqslant d(DT_{A\to B}) + d(DT_{C\to D}) + 1$. Drvo $DT_{C\to D}$ poslužiti kao osnovica za konstrukciju. Pretpostavimo da $/C/ > 1$. Svaki čvor drveta $DT_{C\to D}$ je oblika $C\to D'$ i zaijujemo ga formulom oblika $A\to(B\to C)\to D'$, a svaki put a je grananje iz čvora $C\to D_1'\to\ldots\to D_k'\to P$ učinjeno prema nuli C, činićemo još jedno dodatno grananje iz odgovarajućeg ra $A\to(B\to C)\to D_1'\to\ldots\to D_k'\to P$ do čvora oblika

$A \to (B \to C) \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to B$, a odavde ćemo sva grananja imati kao kod drveta $DT_{A \to B}$, zamjenjujući svaki čvor oblika $A \to B'$ formulom $A \to (B \to C) \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to B'$. (Početni čvor drveta $DT_{A \to B}$ bi nakon opisane zamjene bio $A \to (B \to C) \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to B$.) Drvo formirano na ovaj način, u oznaci $DT_{A \to B} \circ DT_{C \to D}$, biće drvo pozitivne odluke za formulu $A \to (B \to C) \to D$. Maksimalna dužina drveta $DT_{A \to B} \circ DT_{C \to D}$ se dobija kada iz pretposljednjeg čvora najdužeg lanca drveta $DT_{C \to D}$ imamo grananje prema formuli C. Tada je $d(DT_{A \to B} \circ DT_{C \to D}) = d(DT_{A \to B}) + d(DT_{C \to D})$. Za $C = Q$ formiramo drvo $DT_{A \to B} \circ DT_{Q \to D}$ na isti način kao u gornjem slučaju, izuzev kada neki od maksimalnih elemenata drveta $DT_{Q \to D}$ ima oblik $Q \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to Q$. Tada pravimo još i grananje iz čvora $A \to (B \to Q) \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to Q$ (koji je došao na mjesto čvora $Q \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to Q$) prema formuli $(B \to Q)$ do čvora $A \to (B \to Q) \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to B$, a dalje, sva grananja vršimo na isti način kao kod drveta $DT_{A \to B}$, zamjenjujući čvorove $A \to B'$ čvorovima oblika $A \to (B \to Q) \to D_1' \to \ldots \to D_k' \to B'$. Drvo $DT_{A \to B} \circ DT_{Q \to D}$ će biti drvo pozitivne odluke za $A \to (B \to Q) \to D$, a njegova maksimalna dužina može biti $d(DT_{A \to B}) + d(DT_{Q \to D}) + 1$. Za $C = \perp$ $(d(DT_{\perp \to D}) = 0)$, odgovarajuće drvo pozitivne odluke za $A \to (B \to \perp) \to D$ može biti formirano na sličan način, a biće $d(DT_{A \to B} \circ DT_{\perp \to D}) = d(DT_{A \to B}) + 1$.

D o k a z t e r e m e 4. Dio "ako": indukcijom po dužini dokaza za A u $h_{\to \neg}$. Jedini interesantan slučaj je kada posljednji korak u dokazu za A izgleda ovako:

$$\frac{B \to B_1 \to \ldots \to B_m \to P \qquad C \to D_1 \to \ldots \to D_k \to Q}{B \to ((B_1 \to \ldots \to B_m \to P) \to C) \to D_1 \to \ldots \to D_k \to Q} \ (AL).$$

${}^{DT}B \to B_1 \to \ldots \to B_m \to P \,{}^{\circ DT}C \to D_1 \to \ldots \to D_k \to Q$ je drvo po-
vne odluke za A , prema lemi 3, štaviše

$d({}^{DT}B \to B_1 \to \ldots \to B_m \to P \,{}^{\circ DT}C \to D_1 \to \ldots \to D_k \to Q) \leq$

$/B/ + /B_1/ + \ldots + /B_m/ + /C/ + /D_1/ + \ldots + /D_k/ + 1$
(prema lemi 3)

$/B/ + /B_1/ + \ldots + /B_m/ + m + 1 + /C/ + /D_1/ + \ldots + /D_k/ =$

$\sum_{D \in \mathrm{pant}A} /D/$.

"samo ako" se u potpunosti opravdava teoremom 3. $\dashv$

Kao neposrednu posledicu teoreme 4 imamo da

$\not\vdash_{inH} A$ <u>akko</u> za svako drvo odluke DT_A formule A
biti zadovoljen neki od uslova : (1) $d(DT_A) > \sum_{B \in \mathrm{pant}A} /B/$;
postoji maksimalni element drveta koji se može trivijalno
rgnuti.

Drugim riječima, svako drvo odluke DT_A je, u tom
aju, drvo negativne odluke.

Na tvrđenju teoreme 3 se može zasnivati postupak
nam omogućuje pružanje odgovora na pitanje: da li je
formula A teorema računa inH ili nije? Evo nekoliko
jera:

(1) Formula $P \to Q \to P$ je trivijalno dokaziva, pa je
$\vdash P \to Q \to P$.

(2) Drvo odluke za formulu $((P \to Q) \to P) \to P$ izgleda
o

$$((P \to Q) \to P) \to P$$
$$|$$
$$((P \to Q) \to P) \to P \to Q \quad \text{(može se trivijalno opovrgnu}$$

pa $\nvdash_{inH} ((P \to Q) \to P) \to P.$

(3) Drvo odluke za formulu $(P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R$ je

$$\begin{array}{ccc}
 & (P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R & \\
\swarrow & & \searrow \\
(P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to P & & (P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to Q \\
\text{(trivijalno dokaziva)} & & | \\
 & & (P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to P \\
 & & \text{(trivijalno dokaziva)}
\end{array}$$

pa je $\vdash_{inH} (P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R.$

(4) Drvo odluke za formulu $\neg\neg P \to P = ((P \to \bot) \to \bot) \to$

$$((P \to \bot) \to \bot) \to P$$
$$|$$
$$((P \to \bot) \to \bot) \to P \to \bot$$
$$|$$
$$((P \to \bot) \to \bot) \to P \to P \to \bot$$
$$|$$
$$\vdots$$

je jedino moguće i beskonačne dužine, pa je $\nvdash_{inH} \neg\neg P \to P.$

4.6. <u>Uopštenje</u>. Neka je L intermedijalna logika sa veznicima $\neg, \to, \wedge$ i $\vee$. Pod formulom bez disjunkcije podrazumijevamo formulu u kojoj se znak $\vee$ ne pojavljuje, a <u>fragment bez disjunkcije</u> logike L je skup svih mula bez disjunkcije koje su dokazive u logici L. Za ermedijalnu logiku L kažemo da je <u>logika bez disjunkcije</u>, se veznik disjunkcije može definisati u njenom fragmentu disjunkcije, tj. ako postoji formula C(P,Q) bez disjunkci- takva da za proizvoljne dvije formule A i B bez disjunkci- važi $\vdash_L A \vee B \leftrightarrow C(P/A,Q/B)$, gdje su P i Q dva razli- a iskazna slova koja se pojavljuju u formuli C, a $A \leftrightarrow B =$ $\rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Znajući da je $\vdash_H (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$, $(A \rightarrow B \wedge C) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ i $\vdash_H A \wedge B$ akko $\vdash_H A$ i $\vdash_H B$, ıja procedura odlučivosti se može primjenjivati na gment Heyting-ovog računa iskaza bez disjunkcije.

Prema rezultatu Diego-a (v. A. Diego (1966), C. G. ıy (1968), A. Urquhart (1974), D. M. Gabbay (1981)) broj ısobno neekvivalentnih u H formula skupa $For_{\{P_1,\ldots,P_k\}\{\rightarrow,\neg,\wedge\}}$:onačan, pa je takva i konjunkcija svih slučajeva $/C_1,\ldots,Q_m/C_m)$ formule A, u oznaci $\underset{\{P_1,\ldots,P_k\}}{\bigwedge\!\!\bigwedge} A$, gdje $\{Q_1,\ldots,Q_m\} = atA \cap PL$, a $C_1,\ldots,C_m$ su elementi postoje- konačnog skupa neekvivalentnih u H formula nad $\{P_1,\ldots,P_k\}$ $\rightarrow, \neg, \wedge\}$. Štaviše, dokaz konačnosti ovog skupa pruža .ćnost efektivnog određivanja svih njegovih elemenata (v. ıiego (1966), A. Urquhart (1974)). Imajući sve ovo u vidu .zaćemo slijedeće tvrđenje.

T e o r e m a 5. Ako je L konačno aksiomatizibi- intermedijalna logika bez disjunkcije koja se dobija dodavanjem formula $A_1,\dots,A_n$ kao shema aksioma Heytng-ovom računu iskaza, onda

$$\vdash_L A \quad \underline{\text{akko}} \quad \vdash_H (\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\{P_1,\dots,P_k\}} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)) \to A,$$

gdje je $\{P_1,\dots,P_k\} = \mathrm{sub}A \cap PL$.

D o k a z. Jasno je da iz $\vdash_H (\bigwedge\!\!\!\bigwedge (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)) \to A$ slijedi da $\vdash_L A$. Obrat dokazujemo indukcijom po dužini dokaza x_A za A u L. Baza indukcije: A je neka aksioma logike L, pa je svakako $\vdash_H (\bigwedge\!\!\!\bigwedge (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)) \to A$. Indukcijski korak: pretpostavimo da posljednji korak u dokazu x_A za A izgleda ovako

$$\frac{B \qquad B \to A}{A}$$

i da su $Q_1,\dots,Q_j,P_1,\dots,P_k$ sva iskazna slova koja se pojavlju u dokazu x_A. Ako je $x_A(Q_1,\dots,Q_j,P_1,\dots,P_k)$ dokaz za A u L, nije teško vidjeti da je i $x_A(Q_1/P_1,\dots,Q_j/P_1,P_1,\dots,P_k)$ takođe dokaz za A u L, i da su ova dva dokaza iste dužine. Prema indukcijskoj hipotezi imamo

$$\vdash_H (\bigwedge\!\!\!\bigwedge (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)) \to B(Q_1/P_1,\dots,Q_j/P_1,P_1,\dots,P_k)$$

i

$$\vdash_H (\bigwedge\!\!\!\bigwedge (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)) \to B(Q_1/P_1,\dots,Q_j/P_1,P_1,\dots,P_k) \to A \;,$$

odakle je i

$$\vdash_H (\bigwedge\!\!\!\bigwedge (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)) \to A. \dashv$$

Primijetimo da nam opisana procedura odlučivosti, naravno u slučajevima kada se ustanovi da je ispitivana

formula i teorema date logike, pruža i mogućnost (re)konstrukcije dokaza ispitivane formule.

D o d a t a k 1.

LOGIKA PREDIKATA SLABOG ZAKONA ISKLJUČENJA TREĆEG

5.1. Uvod. Račun predikata prvog reda $KC_p = H_p + A \vee \neg\neg A$, gdje je H_p Heyting-ov račun predikata prvog reda pored navedenih iskaznih aksioma (i1) - (n10) i pravila sadrži još aksiome

(e11) $A(x) \rightarrow \exists y A(y)$

(u 12) $\forall y A(y) \rightarrow A(x)$

avila izvođenja

$$\frac{A(x) \rightarrow B}{\exists x A(x) \rightarrow B} \ (\exists)$$

$$\frac{B \rightarrow A(x)}{B \rightarrow \forall x A(x)} \ (\forall)$$

uslovom da promjenljiva x nije slobodna u formuli B (v. . Gabbay (1981)), razmatran je prvi put u radu T. Umezawa-e 9a), a Craig-ova teorema interpolacije za ovaj sistem do- na je kod Gabbay-a (1971a).

U ovom dijelu ćemo dati gencenizaciju GKC_p računa

KC_p, ukazati na mogućnosti konstrukcija dokaza bez upotrebe pravila sječenja i interpolanata koji zadovoljavaju interpolacione uslove Lyndon-a i Craig-a.

Napomena. Definicija skupa strogo negativnih formula SNFor formalno ostaje ista i za predikatski slučaj, tj. to je najmanji skup generisan skupom $\{\neg A : A \in For\}$, gdje je For skup predikatskih formula prvog reda, i zatvoren za pravila:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}, \qquad \frac{A \quad B}{A \vee B} \quad i \quad \frac{C \quad A}{C \to A},$$

gdje $A, B \in SNFor$ i $C \in For$.

Tako i dalje važi: ako $A \in SNFor$, onda postoji formula B takva da je $\vdash_{KC_p} A \leftrightarrow \neg B$.

5.2. <u>Gencenizacija računa</u> KC_p. Račun sekvenata GKC_p je proširenje sistema GKC na jeziku prvog reda pravilima izvođenja

$$\frac{A(t)\Gamma \Vdash \Delta}{\forall x A(x)\Gamma \Vdash \Delta}\ (L\forall) \qquad \frac{\Gamma \Vdash A(x)\Delta}{\Gamma \Vdash \forall x A(x)\Delta}\ (R\forall)$$

(za $\Delta \subseteq SNFor$)

$$\frac{A(x)\Gamma \Vdash \Delta}{\exists x A(x)\Gamma \Vdash \Delta}\ (L\exists) \qquad \frac{\Gamma \Vdash A(t)\Delta}{\Gamma \Vdash \exists x A(x)\Delta}\ (R\exists)$$

(za $\Delta \subseteq SNFor$)

gdje je t proizvoljan term, a zajedničko ograničenje za pravila $(R\forall)$ i $(L\exists)$ je da se x ne javlja u donjem sekventu slobodna promjenljiva.

Pojavljivanje slobodne promjenljive x u formuli gornjem sekventu nazivamo <u>karakterističnim</u> pojavljivanjem.

L e m a 1. Ako je X izvođenje sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$ čunu GKC_p i y promjenljiva koja se ne pojavljuje u tom đenju, onda je $X(x/y)$ izvođenje sekventa $\Gamma(x/y) \Vdash \Delta(x/y)$ KC_p.

D o k a z. Indukcijom po broju primijenjenih pravila vođenju X (v. G. Takeuti (1975)).$\dashv$

L e m a 2. Ako je X izvođenje sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$ čunu GKC_p, t proizvoljan term i nijedna od karakteristi- promjenljivih koje se pojavljuju u X nije jednaka x se pojavljuje u termu t, onda je $X(x/t)$ izvođenje se- ta $\Gamma(x/t) \Vdash \Delta(x/t)$ u GKC_p.

D o k a z. Indukcijom po broju primijenjenih pravila vođenju X (v. G. Takeuti (1975)).$\dashv$

L e m a 3. Neka je t proizvoljan term i X izvo- e sekventa $\Gamma \Vdash \Delta$ u računu GKC_p. Ako sa X' označimo đenje koje se dobija iz X preimenovanjem promjenljivih imaju karakteristična pojavljivanja u X i to tako da je a promjenljiva koja ima karakteristično pojavljivanje u različita od x i ne pojavljuje se u termu t, onda $X'(x/t)$ izvođenje sekventa $\Gamma(x/t) \Vdash \Delta(x/t)$ u GKC_p.

D o k a z. Indukcijom – primjenom prethodnih dviju lema. $\dashv$

Posljednje tri leme ćemo koristiti u dokazu teoreme o eliminaciji pravila sječenja za GKC_p.

L e m a 4. Sekvent $\Gamma \Vdash \Delta$ je dokaziv u računu GKC_p akko $\vdash_{KC_p} \hat{\Gamma} \rightarrow \check{\Delta}$.

D o k a z. Dovoljno je razmotriti samo pravila za uvođenje kvantifikatora. Znajući da su pravila $(L\forall)$, $(L\exists)$ i $(R\exists)$ dopustiva u Heyting-ovom računu predikata H_p (v. G. Takeuti (1975), M. E. Szabo (1978)), dovoljno je pokazati da je, uz pretpostavku da se x ne javlja kao slobodna promjenljiva u formuli B, formula $A(x) \vee \neg B \rightarrow \forall x A(x) \vee \neg B$ teorema računa KC_p. Kako je slijedeće izvođenje

$$\dfrac{\neg B \vee \neg\neg B \qquad \dfrac{\dfrac{A(x) \vee \neg B}{\neg\neg B \rightarrow A(x)}}{\neg\neg B \rightarrow \forall x A(x)}}{\forall x A(x) \vee \neg B}$$

dopustivo u H_p, to je $\vdash_{H_p} (\neg B \vee \neg\neg B) \wedge (A(x) \vee \neg B) \rightarrow \forall x A(x) \vee$

pa i $\vdash_{KC_p} A(x) \vee \neg B \rightarrow \forall x A(x) \vee \neg B$. $\dashv$

5.3. Teorema o eliminaciji pravila sječenja.

T e o r e m a 1. Ako je sekvent $\Gamma \Vdash \Delta$ dokaziv u računu GKC_p, onda je on dokaziv u tom računu i bez upotrebe ila sječenja.

D o k a z. Relaciju $>$ definisanu pri dokazu teoreme liminaciji pravila sječenja za račun GKC (v. glava treća; I. E. Szabo (1978)) dodefinisaćemo na $Der(GKC_p)$ slijedećim vima:

$r = 2$:

$$\dfrac{\dfrac{A(x)\Delta}{x A(x)\Delta} \qquad \dfrac{\Pi A(t) \Vdash \Lambda}{\Pi \forall x A(x) \Vdash \Lambda}}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda} \quad > \quad \dfrac{\Gamma \Vdash A(t)\Delta \qquad \Pi A(t) \Vdash \Lambda}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda}$$

$$\dfrac{\dfrac{A(t)\Delta}{\exists x A(x)\Delta} \qquad \dfrac{\Pi A(x) \Vdash \Lambda}{\Pi \exists x A(x) \Vdash \Lambda}}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda} \quad > \quad \dfrac{\Gamma \Vdash A(t)\Delta \qquad \Pi A(t) \Vdash \Lambda}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda}$$

$r > 2$ - za $r_R > 1$:

$$\dfrac{\forall x A(x)\Delta \qquad \dfrac{\Pi' \forall x A(x) \Vdash \Lambda'}{\Pi \forall x A(x) \Vdash \Lambda}(*)}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda} \quad > \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Vdash \forall x A(x)\Delta \qquad \Pi' \forall x A(x) \Vdash \Lambda'}{\Gamma\Pi' \Vdash \Delta\Lambda'}}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda}(*)$$

$$\dfrac{\exists x A(x)\Delta \qquad \dfrac{\Pi' \exists x A(x) \Vdash \Lambda'}{\Pi \exists x A(x) \Vdash \Lambda}(*)}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda} \quad > \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Vdash \exists x A(x)\Delta \qquad \Pi' \exists x A(x) \Vdash \Lambda'}{\Gamma\Pi' \Vdash \Delta\Lambda'}}{\Gamma\Pi \Vdash \Delta\Lambda}(*)$$

za $r_R = 1$ i $r_L > 1$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \Vdash \forall x A(x)\, \Delta'}{\Gamma \Vdash \forall x A(x)\, \Delta}(*) \qquad \dfrac{\Pi A(t) \Vdash \Lambda}{\Pi \forall x A(x) \Vdash \Lambda}}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda} \quad > \quad \dfrac{\Gamma' \Vdash \forall x A(x)\, \Delta' \qquad \dfrac{\Pi A(t) \Vdash \Lambda}{\Pi \forall x A(x) \Vdash \Lambda}}{\dfrac{\Gamma' \Pi \Vdash \Delta' \Lambda}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda .}(*)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \Vdash \exists x A(x)\, \Delta'}{\Gamma \Vdash \exists x A(x)\, \Delta}(*) \qquad \dfrac{\Pi A(x) \Vdash \Lambda}{\Pi \exists x A(x) \Vdash \Lambda}}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda} \quad > \quad \dfrac{\Gamma' \Vdash \exists x A(x)\, \Delta' \qquad \dfrac{\Pi A(x) \Vdash \Lambda}{\Pi \exists x A(x) \Vdash \Lambda}}{\dfrac{\Gamma' \Pi \Vdash \Delta' \Lambda}{\Gamma \Pi \Vdash \Delta \Lambda .}(*)}$$

Na ovaj način iz svakog izvođenja u kojem se primjenjuje pravilo sječenja možemo konstruisati jedno izvođenje u kojem se to pravilo ne pojavljuje. $\dashv$

P o s l e d i c a. Sistem GKC_p je separabilan.

P o s l e d i c a. Ako je A formula računa predikata prvog reda u kojoj se ne pojavljuje negacija, onda

$$\vdash_{KC_p} A \quad \underline{\text{akko}} \quad \vdash_{H_p} A .$$

Posljednja **tvrdnja** predstavlja dopunu rezultata Jankova (v. V. A. Jankov (1968)) koji se odnosi na iskazni slučaj (v. treću glavu).

5.4. <u>Teoreme interpolacije</u>. Definiciju antecedentnog i konsekventnog dijela formule A datu u trećoj glavi

.skazne formule, dopunimo uslovom

ako je $A = \forall xB(x)$ ili $A = \exists xB(x)$, onda je . $=$ antB(x) i con$A = \{A\} \cup$ conB(x).

L e m a 5. Ako je sekvent $\Gamma \Vdash \Delta A'$, odnosno $\Gamma \Vdash \Delta$, .ziv u GKC_p, gdje je $\Delta \subseteq$ SNFor, onda je za svako njegovo ra- anje (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, \Delta_2 A')$, odnosno (Γ_1, Γ_2) i $, \Delta_2)$, ispunjen neki od uslova

(1) sekvent $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ je dokaziv u GKC_p;

(2) sekvent $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, je ziv u GKC_p;

(3) (atant $\Gamma_1 \cup$ atcon $\Delta_1) \cap$ (atcon $\Gamma_2 \cup$ atant $\Delta_2 A') =$ $\neq \emptyset$ ili (atcon $\Gamma_1 \cup$ atant $\Delta_1) \cap$ (atant $\Gamma_2 \cup$ atcon $\Delta_2 A') =$ $\neq \emptyset$, odnosno (atant $\Gamma_1 \cup$ atcon $\Delta_1) \cap$ (atcon $\Gamma_2 \cup$ atant $\Delta_2) =$ $\neq \emptyset$ ili (atcon $\Gamma_1 \cup$ atant $\Delta_1) \cap$ (atant $\Gamma_2 \cup$ atcon $\Delta_2) = Y' \neq \emptyset$, stoji formula C takva da su sekventi $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $\Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, dokazivi u GKC_p :onC $\subseteq Y$ i atantC $\subseteq X$, odnosno atconC $\subseteq Y'$ i atantC $\subseteq X'$.

U slučaju (3) formulu C nazivamo <u>interpolantom</u> ; sekventa za dato razbijanje.

D o k a z. Indukcijom po dužini dokaza sekventa $\Delta A'$, odnosno $\Gamma \Vdash \Delta$, u GKC_p.

Imajući u vidu dokaz slične leme za račun GKC (treća glava, lema 5), dovoljno je razmotriti indukcijski korak kada su u pitanju pravila $(L\forall)$, $(R\forall)$, $(L\exists)$ i $(R\exists)$.

$$(L\forall): \quad \frac{A(t)\Gamma \Vdash \Delta}{\forall x A(x)\Gamma \Vdash \Delta}$$

Moguća razbijanja donjeg sekventa su

(i) $(\forall x A(x)\Gamma_1, \Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2)

(ii) $(\Gamma_1, \forall x A(x)\Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2).

Za (i) je, prema indukcijskoj hipotezi, (1) sekvent $A(t)\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ dokaziv u računu GKC_p; (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ je dokaziv u GKC_p ili (3) $A(t)\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ su dokazivi u GKC_p, za neku formulu C sa datim svojstvima. Iz (1), odnosno (2), slijedi da razbijanje (i) donjeg sekventa takođe zadovoljava uslov (1), odnosno (2), leme. Ako je (3), onda istu formulu C možemo uzeti u svojstvu interpolanta donjeg sekventa za razbijanje (i), jer $\forall x A(x)\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ u GKC_p.
Za (ii) - slično kao za (i).

$$(R\forall): \quad \frac{\Gamma \Vdash A(x)\Delta}{\Gamma \Vdash \forall x A(x)\Delta}$$

Moguće razbijanje donjeg sekventa, u opštem slučaju, je (Γ_1, Γ_2) i $(\Delta_1, \forall x A(x)\Delta_2)$ (razbijanje (Γ_1, Γ_2) i $(\forall x A(x)\Delta_1, \Delta_2)$ se ne odnosi na tvrđenje dato našom lemom jer je $\Delta \subseteq SNFor$, a $\forall x A(x) \notin SNFor$). Prema indukcijskoj hipotezi je (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ u GKC_p; (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A(x)$ u GKC_p ili (3) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A(x)$ u GKC_p, za neku formulu C sa datim svojstvima. Iz (1), odnosno (2), slijedi da i donji sekvent za posmatrano razbijanje zadovoljava uslov (1), odnosno (2), naše leme. U slučaju (3) istu

lu C možemo uzeti u svojstvu interpolanta donjeg sekve-
a posmatrano razbijanje, ukoliko se u formuli C promje-
a x ne javlja kao slobodna. Ako se x pojavljuje u C
slobodna promjenljiva, onda u svojstvu interpolanta donjeg
nta možemo uzeti formulu $\forall xC$, što opravdavaju slijedeća
enja

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 \forall xC} \ (R\forall)$$

$$\cfrac{\cfrac{C\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A(x)}{\forall xC\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A(x)} \ (L\forall)}{\forall xC\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2 \forall xA(x)} \ (R\forall).$$

$(L\exists)$: $$\frac{A(x)\Gamma \Vdash \Delta}{\exists xA(x)\Gamma \Vdash \Delta}$$ Moguća razbijanja

g sekventa su

(i) $(\exists xA(x)\ \Gamma_1, \Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2)

(ii) $(\Gamma_1, \exists xA(x)\ \Gamma_2)$ i (Δ_1, Δ_2).

) je, prema indukcijskoj hipotezi, (1) $A(x)\ \Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ u
(2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$ u GKC_p ili (3) $A(x)\ \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i
$\Vdash \Delta_2$ u GKC_p, za neku formulu C sa datim osobinama. Iz
odnosno (2), slijedi da je za razbijanje (i) donjeg se-
a zadovoljen uslov (1), odnosno (2), naše leme. Ako je (3)
se promjenljiva x ne pojavljuje kao slobodna, onda istu
lu C možemo uzeti u svojstvu interpolanta donjeg sekve-
a razbijanje (i), ali ako to nije slučaj, onda prema izvo-
ma

$$\frac{C\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{\exists xC\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2} \ (L\exists)$$

$$\cfrac{\cfrac{A(x)\ \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}{A(x)\ \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 \exists xC}\ (R\exists)}{\exists xA(x)\ \Gamma_1 \Vdash \Delta_1 \exists xC}\ (L\exists)$$

slijedi da u svojstvu interpolanta možemo uzeti formulu $\exists xC$. Za (ii) - slično kao za (i), s tim što u slučaju (3) kada se u formuli C promjenljiva x pojavljuje kao slobodna, prema izvođenjima

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C}{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 \forall xC}\ (R\forall)$$

i

$$\cfrac{\cfrac{CA(x)\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{\forall xCA(x)\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\ (L\forall)}{\forall xC\ \exists xA(x)\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}\ (L\exists)$$

formulu $\forall xC$ uzimamo u svojstvu interpolanta.

$(R\exists)$: $$\frac{\Gamma \Vdash A(t)\,\Delta}{\Gamma \Vdash \exists xA(x)\,\Delta}$$ Moguće razbijanje donjeg sekventa, u opštem slučaju je

$$(\Gamma_1, \Gamma_2) \quad i \quad (\Delta_1, \exists xA(x)\Delta_2).$$

Tada je, prema indukcijskoj hipotezi, (1) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ u GKC_p, (2) $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A(t)$ u GKC_p ili (3) $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A$ u GKC_p, za neku formulu C sa datim osobinama. Vidi se da zadovoljenje uslova (1), (2) ili (3), implicira zadovoljenje uslova (1), (2) ili (3) naše leme, redom, uz napomenu da u slučaju (3) u svojstvu interpolanta donjeg sekventa za posmatrano razbijanje možemo uzeti istu formulu C.$\dashv$

L e m a 6. Ako je sekvent $\Gamma \Vdash \Delta A'$, odnosno
ent $\Gamma \Vdash \Delta$, dokaziv u računu sekvenata GKC_p, gdje je
SNFor, onda za svako njegovo razbijanje (Γ_1, Γ_2) i
$, \Delta_2 A')$, odnosno (Γ_1, Γ_2) i (Δ_1, Δ_2), važi

(1) ako je $at\,\Gamma_1 \Delta_1 \cap at\,\Gamma_2 \Delta_2 A' \neq \emptyset$, odnosno
$_1 \Delta_1 \cap at\,\Gamma_2 \Delta_2 \neq \emptyset$, onda postoji formula C takva da
ekventi $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$ i $C\,\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 C$
$\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, dokazivi u GKC_p i $atC \subseteq at\,\Gamma_1 \Delta_1 \cap at\,\Gamma_2 \Delta_2 A'$,
sno $atC \subseteq at\,\Gamma_1 \Delta_1 \cap at\,\Gamma_2 \Delta_2$;

(2) ako je $at\,\Gamma_1 \Delta_1 \cap at\,\Gamma_2 \Delta_2 A' = \emptyset$, odnosno
$_1 \Delta_1 \cap at\,\Gamma_2 \Delta_2 = \emptyset$, onda je sekvent $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ ili
ent $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2 A'$, odnosno $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$ ili $\Gamma_2 \Vdash \Delta_2$, doka-
ı GKC_p.$\dashv$

D o k a z. Kao dokaz odgovarajuće leme za račun
(treća glava).$\dashv$

T e o r e m a 2. Logika KC_p zadovoljava interpo-
oni uslov Lyndon-a.

D o k a z. Kao dokaz odgovarajuće teoreme za
u KC (treća glava).$\dashv$

P o s l e d i c a. Logika KC_p zadovoljava inte-
acioni uslov Craig-a.

5.5. <u>Sistem prirodne dedukcije NKC_p</u>. Kada sistemu prirodne dedukcije NKC, razmatranom u trećoj glavi ovog rada, dodamo još i pravila za uvođenje i izbacivanje kvantifikatora

$$\frac{\Gamma A(x)}{\Gamma\ \forall x A(x)}\ (u\forall) \qquad \frac{\Gamma\ \forall x A(x)}{\Gamma\ A(t)}\ (e\forall)$$

$$\frac{\Gamma A(t)}{\Gamma\ \exists x A(x)}\ (u\exists) \qquad \frac{\Gamma\ \exists x A(x) \qquad \begin{matrix}[\Gamma A(x)]\\ \vdots \\ \Pi\end{matrix}}{\Pi}\ (e\exists)$$

gdje je $\Gamma \subsetneq SNFor$, $\Pi \setminus SNFor$ je najviše jednočlan skup, t proizvoljan term, a u pravilima $(u\forall)$ i $(e\exists)$ x se ne pojavljuje kao slobodna promjenljiva u nekoj formuli iz Γ ili Π, kao ni u nekim pretpostavkama od kojih zavise A, Γ i Π izuzev na naznačenom mjestu u formuli A(x), dobijamo sistem prirodne dedukcije NKC_p za logiku predikata slabog zakona isključenja trećeg.

Premisu Π u pravilu $(e\exists)$ nazivamo <u>malom premisom</u>, a sve ostale premise koje se pojavljuju u pravilima za uvođenje ili izbacivanje kvantifikatora su <u>velike premise</u>. Dogovore i definicije koje se odnose na iskazni slučaj, date u prvoj glavi podrazumijevamo i na ovom mjestu.

Formule $\forall x A(x)$ i $\exists x A(x)$ nazivamo <u>glavnim formulama</u> pravila $(u(e)\forall)$ i $(u(e)\exists)$, redom.

Definiciju segmenta ćemo dopuniti (v. prvu glavu),

:emo pod <u>segmentom izvođenja</u> $x \in Der(NKC_p)$ podrazumijevati
istih skupova $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ koji se uzastopno pojavljuju
ın ispod drugog u izvođenju x i zadovoljavaju slijedeće
›ve:

(i) Γ_1 nije zaključak pravila $(e\vee)$ ili $(e\exists)$;

(ii) Γ_i, za $i<n$, nije mala premisa nekog od pravi- $(e\vee)$ ili $(e\exists)$;

(iii) Γ_n nije mala premisa pravila $(e\vee)$ ili $(e\exists)$.

Segment je <u>maksimalan</u> ako počinje skupom koji je .jučak nekog u-pravila, a završava skupom koji je velika ıisa nekog e-pravila, sa istom glavnom formulom u oba slučaja, : smo sada skup u-pravila proširili dodajući mu još i pravila ıvođenje kvantifikatora $(u\forall)$ i $(u\exists)$, a skup e-pravila, ıjući pravila $(e\forall)$ i $(e\exists)$ za izbacivanje kvantifikatora.

T e o r e m a 3. (Princip inverzije) Ako se prema ›m izvođenju $x \in Der(NKC_p)$ može zaključiti da se u sistemu › iz $A_1, \ldots, A_n$ može izvesti Δ, onda postoji izvođenje $Der(NKC_p)$ prema kojem se to isto može zaključiti, a u kojem, ;ev u maksimalnim segmentima dužine veće od 1, ne postoji ıula koja se pojavljuje kao glavna formula nekog u-pravila ıo glavna formula velike premise nekog e-pravila.

D o k a z. Imajući u vidu dokaz koji se odnosi na ızni slučaj (prva glava), dovoljno je razmotriti još i :ajeve sa kvantifikatorima.

: $\forall xB(x)$ (pravilo (u)):

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \hline \Gamma\ \forall x B(x) \\ \hline \Gamma\ B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \hline \Gamma\ B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

A je $\exists x B(x)$ (pravilo (u)):

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\Gamma}{\Gamma\ \exists x B(x)} \qquad \dfrac{[\Gamma\ B(x)]}{\Pi}}{\Pi} \\ \hline\hline \Delta \end{array} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \hline \Gamma\ B(x) \\ \hline\hline \Pi \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

A je $\forall x B(x)$ (pravilo (u$\forall$)):

$$\begin{array}{c} \Gamma\ B(x) \\ \hline \Gamma\ \forall x B(x) \\ \hline \Gamma\ B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \begin{array}{c} (\Gamma\ B(x))(x/t) = \Gamma\ B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

A je $\exists x B(x)$ (pravilo (u$\exists$)):

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\Gamma\ B(t)}{\Gamma\ \exists x B(x)} \qquad \dfrac{[\Gamma\ B(x)]}{\Pi}}{\Pi} \\ \hline\hline \Delta \end{array} \qquad \text{zamjenjujemo sa} \qquad \begin{array}{c} \Gamma\ B(t) \\ \hline \Pi\ (= \Pi(x/t)) \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

Indukcijski korak:

A je $\forall x B(x)$ (pravilo (u)):

$$\begin{array}{c} \Gamma' \\ \hline \Gamma'\forall xB(x) \\ \hline\hline \Gamma\forall xB(x) \\ \hline \Gamma B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad \begin{array}{c} \Gamma' \\ \hline \Gamma' B(t) \\ \hline\hline \Gamma B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$\exists xB(x)$ (pravilo (u)):

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma' \\ \hline \exists xB(x) \\ \hline\hline \exists xB(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\Gamma B(x)] \\ \hline\hline \Pi \end{array}}{\begin{array}{c} \Pi \\ \hline\hline \Delta \end{array}} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad \begin{array}{c} \Gamma' \\ \hline \Gamma' B(x) \\ \hline\hline \Gamma B(x) \\ \hline\hline \Pi \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$\forall xB(x)$ (pravilo $(u\forall)$):

$$\begin{array}{c} \Gamma' B(x) \\ \hline \Gamma'\forall xB(x) \\ \hline\hline \Gamma B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad (\Gamma' B(x))(x/t) = \begin{array}{c} \Gamma' B(t) \\ \hline\hline \Gamma B(t) \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$\exists xB(x)$ (pravilo $(u\exists)$):

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma' B(t) \\ \hline \Gamma'\exists xB(x) \\ \hline\hline \Gamma\exists xB(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\Gamma B(x)] \\ \hline\hline \Pi \end{array}}{\begin{array}{c} \Pi \\ \hline\hline \Delta \end{array}} \quad \text{zamjenjujemo sa} \quad \begin{array}{c} \Gamma' B(t) \\ \hline\hline \Gamma B(t) \\ \hline\hline \Pi (= \Pi(x/t)) \\ \hline\hline \Delta \end{array}$$

$\dashv$

Za primjenu pravila $(e\forall)$ ili $(e\exists)$ kažemo da je <u>šna</u>, ako se neka od njegovih malih premisa ne nalazi ispod postavke koja je zatvorena.

Pod <u>normalnim izvođenjem</u> podrazumijevamo izvođenje koje ne sadrži nijedan maksimalni segment, nijednu suvišnu primjenu pravila (e$\bigvee$) i (e$\exists$) i nijednu formulu koja se pojavljuje kao glavna formula nekog u-pravila i kao glavna formula velike premise nekog e-pravila.

T e o r e m a 4. (Teorema o normalizaciji izvođenja) Ako postoji izvođenje $x \in Der(NKC_p)$ prema kojem možemo zaključiti da iz $A_1, \ldots, A_n$ slijedi Δ u NKC_p, onda postoji normalno izvođenje $x' \in Der(NKC_p)$ prema kojem takođe iz $A_1, \ldots, A_n$ slijedi Δ.

D o k a z. Dokaz se izvodi kao u iskaznom slučaju, dvostrukom indukcijom po složenosti i dužini maksimalnih segmenata, pa imajući to u vidu, dovoljno je ukazati na mogućnost da se izvođenje

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\neg\exists xB(x)}\qquad\dfrac{\Pi_2}{\Pi}}{\Pi}\qquad\Pi_3}{\Lambda}\\ \hline\hline \Delta\end{array}$$

zamijeni izvođenjem

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\neg\exists xB(x)}\qquad\dfrac{\dfrac{\Pi_2}{\Pi}\qquad\Pi_3}{\Lambda}}{\Lambda}\\ \hline\hline \Delta\end{array}\qquad\dashv$$

Kao posledice gornjih tvrđenja mogu se izvesti, izmeostalog, i princip podformulnosti, teorema separacije, teoreme interpolacije, te tvrđenje o jednakosti pozitivnih fragmenata logike predikata slabog zakona isključenja trećeg i Heyting-ove logike predikata.

D o d a t a k 2.

NEKE OD MOGUĆNOSTI DALJIH ISTRAŽIVANJA

6.1. Cilj nam je da u ovom dodatku ukažemo na
e od mogućih pravaca daljih istraživanja u oblastima teorije ermedijalnih logičkih sistema i strukturne teorije dokaza, odeći pri tom i niz konkretnih problema koji se tiču ovih asti.

6.2. Prije svega, veze između pravih gencenizacija eorema interpolacije ostaju nejasne i pored činjenice da a mnogim poznatim slučajevima kao posledica teoreme o eliaciji pravila sječenja mogu dobiti razne forme teoreme intelacije (v. G. Takeuti (1975), treću glavu i dodatak 1). U atranjima na opštijem nivou se izražava uvjerenje da bi an račun poput računa sekvenata mogao poslužiti kao osnoa za dokazivanje teoreme interpolacije (v. N. D. Belnap 32)). Uz sve to i vjera autora ovih redova da postoje pogonačini za prave gencenizacije preostalih iskaznih intermealnih logika za koje se može dokazati teorema interpolacije L. L. Maksimova (1977,1979), S. Zachorowski (1978)).

6.3. U radu Maksimove (1982) je dokazano da pored ting-ove i klasične logike, interpolacioni uslov Lyndon-a ovoljavaju i logike KC i KC + $A \vee (A \rightarrow (B \vee \neg B))$. **Navodi** se kao otvoreno pitanje: da li postoji intermedijalna logika koja zadovoljava interpolacioni uslov Craig-a, a ne zadovoljava interpolacioni uslov Lyndon-a?

6.4. Ostaje još nedovoljno istražena oblast proširenja računa H odgovarajućim aksiomama na jeziku sa prebrojivom konjunkcijom i disjunkcijom, tj. oblast infinitarnih intermedijalnih logika (v. M. E. Nadel (1978), M. E. Szabo (1978), M. Rašković (1980)).

6.5. Takođe bi se moglo postaviti pitanje analogije među proširenjima računa H i simetrične konstruktivne logike Zaslavskog (1978).

6.6. Ako bi se umjesto pravila (u→) i (u¬) sistema NC uzela pravila

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B_1 \ldots B_n \Gamma\end{array}}{A \to B_1 \ldots A \to B_n \Gamma}\ (u' \to) \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \Gamma\end{array}}{\neg A\, \Gamma}\ (u' \neg)$$

uz uslov $\Gamma \subseteq$ SNFor, dobija se formulacija NLC Dummett-ovog sistema LC kao sistema prirodnih dedukcija. Ostaje pitanje dorade ove formulacije do neke iz koje bi se eventualno kao posledice neke teoreme o normalizaciji izvođenja mogle dobiti teoreme separacije i interpolacije.

* * *

U vezi sa nekim globalnim svojstvima logičkih sistema, kao što su disjunktivno svojstvo, uslov Diego-a, esne osobine modela (posebno Kripke-ovih okvira) itd., se javiti niz problema, recimo u vezi sa karakterizacija- lasa intermedijalnih logika koje zadovoljavaju dati uslov. eže i značajne mogućnosti za klasifikacije intermedijalnih ka.

6.7. Za logiku L ćemo reći da zadovoljava uslov o-a ako u svakom skupu iskaznih formula generisanim ko- im brojem iskaznih slova postoji konačan broj L-neekviva- nih formula. Prema rezultatu Diego-a (v. A. Diego (1966), . McKay (1968), A. Urquhart (1974), D. M. Gabbay (1981)) uslov zadovoljavaju disjunktivno slobodna proširenja ema iH, npr. icnH, LC, C itd., međutim sam Heyting-ov n iskaza ne zadovoljava, sljedstveno radovima Gödel-a, nsey-a i Tarskog, Rieger-a i Nishimura-e (v. K. Gödel 3), J. C. C. McKinsey, A. Tarski (1946), I. Nishimura), L. Rieger (1957), V. B. Šehtman (1978), D. M. Gabbay 1)). U ovom kontekstu se prirodno nameće problem karakteri- je minimalnih (minimalne) intermedijalne logike koje zado- avaju uslov Diego-a. (Na ovaj problem je u jednom razgovoru nuo pažnju profesor J. Porte u toku Evropskog ljetnjeg anka Udruženja za simboličku logiku (ASL) u Aachen-u (Logic oquium '83).)

6.8. Logika L ima disjunktivno svojstvo ako je vake dvije formule A i B $\vdash_L A \vee B$ akko $\vdash_L A$ ili $\vdash_L B$. oitnu hipotezu Łukasiewicza (v. J. Łukasiewicz (1952)) e Heyting-ov račun iskaza jedina intermedijalna logika sa disjunktivnim svojstvom, opovrgnuli su Kreisel i Putnam (v. G. Kreisel, H. Putnam (1957)) pokazavši da i logika $H + (\neg A \to (B \vee C)) \to (\neg A \to B) \vee (\neg A \to C)$ ima disjunktivno svojstvo. Kasnije je pokazano da je takvih logika čak kontinuum mnogo (v. A. Wroński(1973)) i da među njma ne postoji najveća (v. R. E. Kirk (1982)). Ostaje problem karakterizacije maksimalnih intermedijalnih logika sa disjunktivnim svojstvom. (Iz razgovora sa prof. L. L. Maksimovom i prof. A. Wrońskim u toku Sedmog međunarodnog kongresa za logiku, metodologiju i filosofiju nauke (Salzburg, 1983) sam saznao da je jedna od takvih logika sistem Medvedeva (v. J. T. Medvedev (1962)), a da pitanj ostalih ostaje za sada bez odgovora.)

* * *

6.9. Izuzimajući pokušaj López-Escobar-a (1982), nij nam poznato da je bilo pokušaja formulisanja intermedijalnih logika kao sistema prirodne dedukcije, pa i to ostaje kao mogućnost za dalja istraživanja. S tim u vezi bi bilo interesantn vidjeti koliko bi imala smisla klasifikacija intermedijalnih logika u odnosu na rod dokaza (v. R. Statman (1974)). Nije se teško uvjeriti da se logike posmatrane u ovom radu (KC, $H + a_n$, $H + b_n$ $(n \geqslant 2)$) mogu formulisati na način predložen u pomenutom radu López-Escobar-a i da su u takvim formulacijama date logike roda 0, tj. da svaku teoremu možemo dokazati dokazom roda 0.

L i t e r a t u r a *)

Redoslijed autora dat je abecedno, prije naslova
la navedena je godina izdanja, a poslije naziv izdavača i
sto izdavanja. Ako se radi o članku objavljenom u nekom
opisu, poslije naslova naveden je naziv časopisa (tom) i
anice. Koristimo i slijedeće skraćenice za nazive časopisa

JSL	=	The Journal of Symbolic Logic
ZMLGM	=	Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik
NDJFL	=	Notre Dame Journal of Formal Logic
PIM	=	Publications de l'Institut Mathématique
PJA	=	Proceedings of the Japan Academy
ДАН СССР	=	Доклады Академии наук СССР

N. D. Belnap, Jr.

1982. Display Logic, Journal of Phil. Log. (11), 375-417.

E. W. Beth

1955. Semantic Entailment and Formal Derivability, Mededelingen Kon. Ned. Akad. van Wet., Afd. lett., N. R. 18 , 309-342.

1959. The Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam.(Drugo izdanje: 1965.)

---

jeti na kraju i dodatak spisku literature.

I. M. Bocheński

1961. *A History of Formal Logic*, Chelsea, New York.

B. R. Boričić

A Decision Procedure for Certain Disjunction-Free Intermediate Propositional Calculi, primljeno u PIM

A Note on Some Intermediate Propositional Calculi, primljeno u JSL

On Some Subsystems of Dummett's LC, primljeno u ZMLGM

M. Božić

1978. *Modeli formalnih teorija iskaznog tipa*, Magistarski rad, Univerzitet u Beogradu, Beograd.

L. E. J. Brouwer

1907. *Over de grondslagen der wiskunde*, Teza, Amsterdam.

1913. *Intuitionism and Formalism*, Bull. Amer. Math. Soc. (20), 81-96.

R. A. Bull

1962. *The Implicational Fragment of Dummett's LC*, JSL (27), 189-194. (v. prikaz: J. Bacon, JSL 1968 (33), 305.)

1964. *Some Results for Implicational Calculi*, JSL (29), 33-39. (v. prikaz: J. Bacon, JSL 1968 (33), 306.)

C. C. Chang, H. J. Keisler

1973. *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam.

:hurch

›. Introduction to Mathematical Logic, Princeton Univ. Press, Princeton.

:raig

7. Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand-Gentzen Theorem, JSL (22), 250-268.

7a. Three Uses of the Herbrand-Gentzen Theorem in Relating Model Theory and Proof Theory, JSL (22), 269-285.

I. Crossley, M. Dummett (eds.)

5. Formal Systems and Recursive Functions, North-Holland, Amsterdam.

3. Curry

). The Interpretation of Formalized Implication, Theoria (25), 1-26.

5. Foundations of Mathematical Logic, Dover Publ., New York.

)iego

5. Sur les algèbres de Hilbert, Gauthier-Villars, Paris.

)ošen

). Logical Constants, An Essay in Proof Theory, Dissertation, Univ. of Oxford, Oxford.

Драгалин

Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, Наука, Москва.

M. Dummett

1959. A Propositional Calculus with Denumerable Matrix, JSL (24), 97-106.

J. M. Dunn, R. K. Meyer

1971. Algebraic Completeness Results for Dummett's LC and its Extensions, ZMLGM (17), 225-230.

Л. Л. Эсакиа

1979. К теорий модальных и суперинтуиционистских систем, В, А. Смирнов (ред.), 147-172.

M. C. Fitting

1969. Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, North-Holland, Amsterdam.

E. Fried

1972. Absztrakt algebra - elemi úton, Müszaki Könyvkiadó, Budapest. (Prevod na ruski: 1979.)

D. M. Gabbay

1970. Decidability of the Kreisel-Putnam System, JSL (35), 431-437.

1971. Model Theory for Intuitionistic Logic, ZMLGM (18), 49-54.

1971a. Semantic Proof of the Craig Interpolation Theorem for Intuitionistic Logic and Extensions, I i II dio kod R. O. Gandy, C. M. E. Yates (eds.), 391-410, III dio - JSL 1977 (42), 269-271.

1981. Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht.

. O. Gandy, C. M. E. Yates (eds.)

971. Logic Colloquium '69, North-Holland, Amsterdam.

. I. Glivenko (В. И. Гливенко)

928. Sur la logique de M. Brouwer, Bull. Acad. Sci. de Belgique ((5)14), 225-228.

. Gödel

932. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, Akad. der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche, Anzeiger (69), 65-66.

. Görnemann

971. A Logic Stronger than Intuitionism, JSL (36), 249-261.

. Grätzer

968. Universal Algebra, Springer-Verlag, Heidelberg. (Drugo izdanje: 1979.)

. Harrop

958. On the Existence of Finite Models and Decision Procedures, Proc. of the Cambridge Philos. Soc. (54), 1-13.

. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski

971. Cylindric Algebras (Part I), North-Holland, Amsterdam.

. Heyting

930. Die Formalen Regeln der Intuitionistischen Logik, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse, 42-56.

956. Intuitionism (An Introduction), North-Holland, Amsterdam.

J. Hintikka

1955. Form and Content in Quantification Theory, Acta Phil. Fenn. (8), 11-55.

В. И. Хомич

1976. Теорема отделимости для суперинтуиционистских исчислений высказываний, ДАН СССР (229), 1327-1329.

1979. Отделимость суперинтуиционистских пропозициональных логик, А. А. Марков, В. И. Хомич (ред.), 98-115.

1980. О проблеме отделимости для суперинтуиционистских пропозициональных логик, ДАН СССР (254), 820-823.

T. Hosoi

1966. The Separation Theorem on the Classical System, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo (12), 223-230.

1966a. Algebraic Proof of the Separation Theorem on Classical Propositional Calculus, PJA (42),67-69.

1966b. Algebraic Proof of the Separation Theorem on Dummett's LC, PJA (42), 693-695.

1966c. On the Separation Theorem of Intermediate Propositional Calculi, PJA (42), 535-538.

1966d. The Separable Axiomatization of the Intermediate Propositional Systems S_n of Gödel, PJA (42), 1001-1006.

1967. On Intermediate Propositional Logics I, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo (14), 293-311.

1967a. A Criterion for the Separable Axiomatization of Gödel's S_n, PJA (43), 365-368.

1967b. On the Axiomatic Method and the Algebraic Method for Dealing with Propositional Logics, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo (14), 131-169.

69. On Intermediate Propositional Logics II, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo (16), 1-12.

A. Янков

963. О некоторых суперконструктивных исчислениях высказываний, ДАН СССР (151), 796-798.

968. Об исчислении слабого закона исключенного третьего, Известия Академии Наук СССР (32), 1044-1051.

Jaśkowski

34. On the Rules of Suppositions in Formal Logic, Studia Logica (1), 5-32.

36. Recherches sur le système de la logique intuitioniste, Internat. Congress Phil. Sci. (6), 58-61.

Johansson

37. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, Comp. math. (4), 119-136.

E. Kirk

82. A Result on Propositional Logics Having the Disjunction Property, NDJFL (23), 71-74.

C. Kleene

52. Introduction to Metamathematics, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen. (Sedmo izdanje: 1974.)

N. olmogorov (А. Н. Колмогоров)

32. Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Math. Zeitschr. (35), 58-65.

G. Kreisel

1977. On the Kind of Data Needed for a Theory of Proofs, Logic Colloquium '76, North-Holland, Amsterdam, 111-128. (Prevod na ruski: 1981.)

G. Kreisel, H. Putnam

1957. Unableitbarketsbeweismethode für den intuitionistischen Aussagenkalkül, Arch. f. math. Log. und Grundl. (3), 74-78.

S. Kripke

1965. Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I, J. N. Crossley, M. Dummett (eds.), 92-130.

А. Г. Курош

1974. Общая алгебра, Наука, Москва.

J. Łukasiewicz

1952. On the Intuitionistic Theory of Deduction, Indag. Math. (14), 202-212.

R. C. Lyndon

1959. An Interpolation Theorem in the Predicate Calculus, Pacific J. Math. (9), 155-164.

Л. Л. Максимова

1972. Предтабличные суперинтуиционистские логики, Алгебра и логика (11), 558-570.

1977. Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия, ДАН СССР (237), 1281-1284.

1979. Interpolation Properties of Superintuitionistic Logics, Studia Logica (38), 419-428.

982. Интерполяционная теорема Линдона в модальных логиках, С. Л. Соболев (ред.), 45-55.

А. Марков

50. Конструктивная логика, Успехи матем. наук (5), 187-188.

56. Об одном принципе конструктивной математической логики, Труды 6-ого Всесоюзного матем. съезда, 146-147.

62. О конструктивной математике, Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова (67), 8-14.

68. An Approach to Constructive Mathematical Logic, Proc. of the International Congress in Logic, Methodology and Philosophy of Sciense (B. van Rootselaar, J. F. Staal (eds.)), North-Holland, Amsterdam, 283-294.

70. О логике конструктивной математике, Вестник Моск. Гос. Унив. им. М. В. Ломоносова, Сер. 1, Мат. Мех. (2), 7-29.

72. О логике конструктивной математике, Знание, Москва.

А. Марков, В. И. Хомич (ред.)

979. Исследования по теории алгорифмов и математической логике, Акад. наук СССР, Наука, Москва.

G. McKay

67. On Finite Logics, Indag. Math. (70), 363-365.

68. The Decidability of Certain Intermediate Propositional Logics, JSL (33), 258-264.

J. C. C. McKinsey

1941. A Solution of the Decision Problem for the Lewis Systems S2 and S4, with an Application to Topology, JSL (6), 117-134.

J. C. C. McKinsey, A. Tarski

1946. On Closed Elements in Closure Algebra, Annals of Mathematics (47), 122-162.

1948. Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting, JSL (13), 1-15.

Ю. Т. Медведев

1962. Финитные задачи, ДАН СССР (142), 1035-1038.

E. Mendelson

1964. Introduction to Mathematical Logic, D. Van Nostr. Comp., New York.

M. E. Nadel

1978. Infinitary Intuitionistic Logic from a Classical Point of View, Annals of Math. Logic (14), 159-19

S. Nagata

1966. A Series of Successive Modifications of Peirce's Rule, PJA (41), 859-861.

D. Nelson

1949. Construtible Falsity, JSL (14), 16-26.

1959. Negation and Separation of Concepts in Constructi Systems. Constructivity in Mathematics, Proc. of the Coll. held at Amsterdam, (ed. A. Heyting), North-Holland, Amsterdam, 208-225.

149

). Новиков

7. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, Наука, Москва.

). Пильчак

). О проблеме разрешимости для исчисления задач, ДАН СССР (75), 773-776.

, A. Pogorzelski

)68. On the Scope of the Classical Deduction Theorem, JSL (33), 77-81.

, Porte

)82. Fifty Years of Deduction Theorem, J. Stern (ed.), 243-250.

, Prawitz

)65. Natural Deduction, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

, i S. Prešić

)79. Uvod u matematičku logiku, Matematički institut, Beograd.

, B. Prešić

)68. Elementi matematičke logike, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd.

)72. Ein Satz über reproduktive Lösungen, PIM (14(28)), 133-136.

)75. Equational Reformulation of Formal Theories, PIM (19(33)), 131-138.(v. prikaz: Math. Rev. 1977:4921.)

)79. A Completeness Theorem for One Class of Propositional Calculi, PIM (26(40)), 249-254.

M. Rašković

1980. *Stav potpunosti infinitarne intuicionističke logike za Kripke-ove modele,* Zbornik radova Prirodno-matem. fak. u Kragujevcu (1), 159-165.

L. Rieger

1957. *Zametka o tak nazywaemych svobodnych algebrach s zamykaniyami,* Czech. Math. J. (7), 117-134.

P. H. Rodenburg

1982. *Classical First Order Definability of Intuitionistic Formulas,* University of Amsterdam, Amsterdam (Preprint)

K. Schütte

1956. *Ein System des verknüpfenden Schliessens,* Arch. f. math. Log. und Grundl. (2), 55-67.

1977. *Proof Theory,* Springer-Verlag, Berlin.

K. Segerberg

1968. *Propositional Logics Related to Heyting's and Johansson's,* Theoria (34), 26-61.

1982. *Classical Propositional Operators,* Clarendon Press, Oxford.

D. J. Shoesmith, T. J. Smiley

1978. *Multiple-Conclusion Logic,* Cambridge Univ. Press, Cambridge. (Drugo izdanje: 1980.)

В. А. Смирнов (ред.)

1979. *Логический вывод,* Наука, Москва.

R. M. Smullyan

1968. *First-order Logic,* Springer-Verlag, Berlin.

Л. Соболев (ред.)

32. Математическая логика и теория алгорифмов, Акад. наук СССР – Сибирское отделение, Наука, Москва.

Statman

'4. Structural Complexity of Proofs, Dissertation, Stanford University, Stanford.

Stern (ed.)

32. Proceedings of the Herbrand Symposium, Logic Colloquium '81, North-Holland, Amsterdam.

E. Szabo (ed.)

9. The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North--Holland, Amsterdam.

E. Szabo

8. Algebra of Proofs, North-Holland, Amsterdam.

Б. Шехтман

78. Лестницы Ригера- Нишимуры, ДАН СССР (241), 1288-1291.

Takeuti

5. Proof Theory, North-Holland, Amsterdam.

Tarski

8. Der Aussagenkalkül und die Topologie, Fundam. Math. (31), 103-134.

Thomas

2. Finite Limitations on Dummett's LC, NDJFL (3), 170-174. (v. prikaz: J. Bacon, JSL 1968 (33), 305.)

T. Umezawa

1959. On Intermediate Propositional Logics, JSL (24), 20-36.

1959a. On Logics Intermediate Between Intuitionistic and Classical Predicate Logic, JSL (24), 141-153.

A. Urquhart

1974. Implicational Formulas in Intuitionistic Logic, JSL (39), 661-664.

Н. Н. Воробьев

1952. Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием, ДАН СССР (85), 465-468.

1952a. Проблема выводимости в конструктивном исчислении высказываний с сильным отрицанием, ДАН СССР (85), 689-692.

1964. Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием, Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова (57), 195-227.

M. Wajsberg

1938. Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting, Wiadomosci Matematyczne (46), 45-101. (v. prikaz: B. Rosser, JSL 1938 (3), 169.)

H. Wang

1970. Logic, Computers and Sets, Chelsea, New York.

A. Wroński

1973. Intermediate Logics and the Disjunction Property, Reports on Math. Logic (1), 39-51. (v. Corrections to my Paper "Intermediate Logics and ...", Reports on Math. Logic (2), 83.)

Zachorowski

'78. Remarks on Interpolation Property for Intermediate Logics, Reports on Math. Logic (10), 139-146.

. Д. Заславский

978. Симметрическая конструктивная логика, Акад. Наук Армянской ССР, Ереван.

D o d a t a k s p i s k u l i t e r a t u r e

J. G. Anderson

1972. Superconstructive Propositional Calculi with Extra Axiom Schemes Containing One Variable, ZMLGM (18), 113-130.

J. E. Fenstad

1971. Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, North-Holland, Amsterdam.

H. Leblanc

1982. Existence, Truth, and Provability, State University of New York, Albany.

E. G. K. López-Escobar

1982. Implicational Logic in Natural Deduction Systems, JSL (47), 184-186.

G. Pottinger

1977. Normalization as a Homomorphic Image of Cut-elimination, Annals of Math. Logic (12), 323-357.

D. Prawitz

1971. Ideas and Results in Proof Theory, J. E. Fenstad (ed.), 235-307.

J. Zucker

1974. The Correspondence between Cut-elimination and Normalization, Annals of Math. Logic (1),1-112.