Univerzitet u Beogradu

Prirodno-matematički fakultet

Endre Šili

LAGRANGE-GALERKINOVA METODA MEŠOVITIH KONAČNIH ELEMENATA ZA JEDNAČINE NAVIER-STOKESA

doktorska disertacija

Beograd, 1985

S A D R Ž A J

U V O D

Jednačine Navier-Stokesa opisuju kretanje Newtonovih fluida pod veoma opštim uslovima. One se pojavljuju prilikom izučavanja mnogih važnih pojava u aeronautici, fizici plazme, meteorologiji i naftnoj industriji, bilo samostalno ili u sprezi sa drugim jednačinama. Jednačine Navier-Stokesa su nelinearan sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina, čija se tačna rešenja mogu odrediti samo u nekim izuzetno specijalnim situacijama. Da bi se obezbedili podaci koji su potrebni inženjerima, neophodna je primena numeričkih metoda.

Do skora su se za numeričko rešavanje jednačina Navier-Stokesa s visokim Reynoldsovim brojem koristile uglavnom dve metode: metoda najmanjih kvadrata i metoda"nadvijanja" (upwinding). Nedavno, nekoliko autora je istovremeno predložilo novu metodu [Russell, 1980; Ewig, Russell, 1981; Benque, Labadie, Ronat, 1982; Bercovier, Pironneau, 1982; Douglas, Russell, 1982; Pironneu, 1982; Douglas, 1983; Douglas, Roberts, 1983; Hasbani, Livne, Bercovier, 1983; Russell, Wheeler, 1983]. Ona je kombinacija metoda karakteristika i konačnih elemenata (ili konačnih razlika), stoga je neki od pomenutih autora nazivaju i modifikovanom metodom karakteristika. No, jednačine Navier-Stokesa predstavljaju parabolički sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina, pa se ne može govoriti o karakteristikama. Zato se u ovom radu predlaže nova interpretacija metode: polazeći od Lagrangeove reprezentacije toka fluida, substancijalni izvod diskretizovaćemo po trajektorijama čestica fluida i ovakvu diskretizaciju kombinovaćemo metodom mešovitih konačnih elemenata (Mixed finite element method). Stoga će se ona nazivati Lagrange-Galerkinova metoda mešovitih konačnih elemenata.

Tema ovog rada je korektno matematičko zasnivanje Lagrange-Galerkinove metode i dokazivanje optimalnih ocena brzine konvergencije.

Sada sledi kratak pregled sadržaja rada.

U poglavlju I, koje sadrži odeljke 1.1 - 1.3, razmatra se egzistencija i jedinstvenost slabih i jakih rešenja jednačina Navier-Stokesa i mešovitog varijacionog zadatka paraboličkog tipa za jednačine Navier-Stokesa. U odeljku 1.1 definišu se osnovni funkcionalni prostori. U odeljku 1.2 daje se matematičko zasnivanje jednačina Navier-Stokesa. U odeljku 1.3 razmatra se pitanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja mešovitog varijacionog zadatka paraboličkog tipa.

U poglavlju II, koje sadrži odeljke 2.1 - 2.3, polazeći od Lagrangeove reprezentacije toka, uvodi se semidiskretizacija jednačina Navier-Stokesa po trajektorijama čestica fluida. U odeljku 2.1 dokazuje se egzistencija i jedinstvenost trajektorija. U odeljku 2.2 opisuje se postupak semidiskretizacije i dokazuje se da je metoda stabilna nezavisno od veličine koeficijenta kinematičke viskoznosti (a samim tim, i od veličine Reynoldsovog broja). U odeljku 2.3 dokazuje se konvergencija semidiskretne metode.

U poglavlju III, koje sadrži odeljke 3.1 - 3.4, opisuje se Lagrange-Galerkinova metoda mešovitih konačnih elemenata. U odeljku 3.1 uvodi se pojam mešovitog eliptičkog projektora. U odeljku 3.2 opisuju se stabilne familije konačnih elemenata u smislu Brezzija. U odeljku 3.3 ispituje se postupak aproksimacije trajektorija. U odeljku 3.4 formulišu se disk - retni zadaci i dokazuje se egzistencija i jedinstvenost njihovih rešenja.

Poglavlje IV, koje sadrži odeljke 4.1 - 4.4, posvećeno je analizi brzine konvergencije Lagrange-Galerkinove metode mešovitih konačnih elemenata i izvođenju optimalnih ocena brzine konvergencije u raznim funkcionalnim prostorima.

Ovaj rad je napisan 1983/84 godine, dok sam kao stipendista Britanskog Saveta boravio na univerzitetima u Readingu i Oxfordu. Najtoplije se zahvaljujem svima koji su mi pomogli i podržavali me, prvenstveno profesoru K. W.Mortonu sa Univerziteta u Oxfordu, kao i mojim kolegama i prijateljima Dr B.W. Scottneyu, Dr A. J. Wathenu i Dr M. F.Websteru iz Instituta za numeričku analizu dinamike fluida Univerziteta u Readingu .

Endre E. Šili

U Beogradu, januara 1985 g.

I

MATEMATIČKO ZASNIVANJE JEDNAČINA NAVIER-STOKESA

U ovom poglavlju, koje sadrži odeljke 1.1 - 1.3, razmatra se egzistencija i jedinstvenost slabih i jakih rešenja jednačina Navier-Stokesa i mešovitog varijacionog zadatka paraboličkog tipa za jednačine Navier-Stokesa .

U odeljku 1.1. definišu se osnovni funkcionalni prostori . U odeljku 1.2. daje se korektno matematičko zasnivanje jednačina Navier-Stokesa. U odeljku 1.3. razmatra se pitanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja mešovitog varijacionog zadatka paraboličkog tipa .

1.1. Osnovne oznake i definicije

Neka je Q otvoren podskup R^n sa granicom ∂Q. $D(Q)$ označavaće linearan prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u Q i

$$D(\overline{Q}) = \{ \varphi|_Q : \varphi \in D(R^n) \} .$$

Neka $D'(Q)$ označava dualan prostor prostora $D(Q)$ a $\langle \cdot,\cdot \rangle$ operaciju dualnosti između $D'(Q)$ i $D(Q)$. Prostor $D'(Q)$ naziva se prostor distribucija na skupu Q. Za $u \in D'(Q)$, multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N^n$ i $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ definišimo $\partial^\alpha u \in D'(Q)$ formulom

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle ,$$

gde je

$$\partial^\alpha \varphi = \partial^{|\alpha|} \varphi / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} .$$

Neka je Ω otvoren ograničen podskup R^n $(n \geq 2)$ sa Lipschitz-neprekidnom granicom $\partial\Omega$. Za ceo broj $m \geq 0$ i realan broj $p \in [1,\infty]$, $W^{m,p}(\Omega)$ označavaće prostor Soboljeva

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ v \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in N^n, |\alpha| \leq m \} ,$$

sa normom

$$\| v \|_{m,p;\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \partial^\alpha v \|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}$$

i polunormom

$$| v |_{m,p;\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| = m} \| \partial^\alpha v \|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}$$

za $1 \leq p < \infty$ i sa uobičajenom modifikacijom za $p = \infty$.

Definišimo $W_0^{m,p}(\Omega)$ kao $W^{m,p}(\Omega)$ - zatvorenje skupa $D(\Omega)$.

Za $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ i $W_0^{m,2}(\Omega)$ označavaćemo sa $H^m(\Omega)$ i $H_0^m(\Omega)$, respektivno, a norme i polunorme pisaćemo bez indeksa $p = 2$: $\| \cdot \|_{m,\Omega}$, $| \cdot |_{m,\Omega}$. $H^m(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \cdot \partial^\alpha v \, dx .$$

Skalarni proizvod prostora $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ pisaćemo bez indeksa : $(\cdot,\cdot)$.

$H^{-m}(\Omega)$ označavaće dualan prostor prostora $H_0^m(\Omega)$. Za proizvoljan realan broj m , prostor $H^m(\Omega)$ definiše se interpolacijom [Triebel, 1978] .

Neka $L_0^2(\Omega)$ označava potprostor prostora $L^2(\Omega)$ ortogonalan na konstante :

$$L_0^2(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega v\, dx = 0 \} .$$

Neka je $W^{m,p}(\Omega)^n$ Descartesov proizvod n prostora Soboljeva $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W^{m,p}(\Omega)^n = \{ v = (v_1, \ldots, v_n) : v_i \in W^{m,p}(\Omega), i=1,\ldots,n \}$$

sa normom

$$\| v \|_{m,p;\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} \| v_i \|_{m,p;\Omega}^{p} \right)^{1/p} , \qquad 1 \le p < \infty ,$$

$$\| v \|_{m,\infty;\Omega} = \max_{1 \le i \le n} \| v_i \|_{m,\infty;\Omega} , \qquad p = \infty .$$

Odgovarajuće polunorme definišu se analogno. $H^m(\Omega)^n$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{i=1}^{n} (u_i,v_i)_{m,\Omega} .$$

Normu i polunormu prostora $H^m(\Omega)^n$ pisaćemo bez indeksa $p = 2$: $\| \cdot \|_{m,\Omega}$, $| \cdot |_{m,\Omega}$.

Za $m = 0$ skalarni proizvod prostora $H^o(\Omega)^n = L^2(\Omega)^n$ pisaćemo bez indeksa : $(\cdot,\cdot)$.

Detaljan pregled teorije prostora Soboljeva može se naći u knjizi [Adams, 1975].

Neka je X realan Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|_X$, a i b realni brojevi, $0 \leq a < b < \infty$. Sa $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ označavaćemo skup svih funkcija $u : (a,b) \longrightarrow X$, merljivih u smislu Bochnera [Yosida, 1965] za koje je

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} , \quad 1 \leq p < \infty ,$$

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname*{ess.sup}_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X , \quad p = \infty .$$

$L^p(a,b;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ je Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|_{L^p(a,b;X)}$.

U daljem radu $C(a,b;X)$ će označavati skup svih neprekidnih funkcija iz $[a,b]$ u X . $C(a,b;X)$ je Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|_{C(a,b;X)}$ definisanom formulom

$$\|u\|_{C(a,b;X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X .$$

1.2. Matematičko zasnivanje jednačina Navier-Stokesa

Neka je $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 2)$ ograničen otvoren skup sa Lipschitz-neprekidnom granicom i $0 < T < \infty$. U cilindričnoj oblasti $\Omega \times (0,T)$ posmatraćemo (nelinearan) sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina Navier-Stokesa :

$$\partial u/\partial t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \,, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \,, \tag{1.2}$$

sa graničnim i početnim uslovom :

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \,, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \,. \tag{1.4}$$

$u(x,t) = (u_1(x,t), \dots , u_n(x,t))$ je brzina strujanja fluida unutar Ω , $p(x,t)$ je kinematički pritisak, ν kinematička viskoznost, $f(x,t)$ je gustina zapreminskih sila po jediničnoj masi (npr. gravitacija), u_0 je početna brzina strujanja u trenutku $t = 0$, $u \cdot \nabla u$ je vektor sa komponentama $u_1 \cdot \partial u_i/\partial x_1 + \dots + u_n \cdot \partial u_i/\partial x_n$, $1 \leq i \leq n$.

U daljem radu, jednostavnosti radi, pretpostavljaćemo da je $n = 2$.

Neka je $H(\mathrm{div};\Omega)$ specijalan Hilbertov prostor Duvault-Lionsa :

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega)^2 : \nabla \cdot v \in L^2(\Omega) \}$$

sa skalarnim proizvodom

$$(u,v)_{H(\mathrm{div};\Omega)} = (u,v) + (\nabla \cdot u, \nabla \cdot v)$$

i $H_0(\mathrm{div};\Omega)$ Hilbertov prostor, definisan kao $H(\mathrm{div};\Omega)$-zatvorenje prostora $D(\Omega)^2$.

TEOREMA 1.1. [Duvault,Lions, 1971]

1° Skup $D(\bar{\Omega})^2$ je svuda gust u prostoru $H(\mathrm{div};\Omega)$.

2° Neka μ označava spoljašnji jedinični vektor normale na $\partial\Omega$. Preslikavanje $\gamma_\mu : v \longrightarrow v \cdot \mu |_{\partial\Omega}$ definisano na $D(\bar{\Omega})^2$ može se neprekidno produžiti do linearnog i neprekidnog preslikavanja, koje ćemo i dalje označavati sa γ_μ, iz $H(\mathrm{div};\Omega)$ na $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

3° Jezgro $\mathrm{Ker}(\gamma_\mu)$ preslikavanja γ_μ jednako je $H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Uvedimo sledeće prostore

$$H = \{ v \in H_0(\mathrm{div};\Omega) : \nabla \cdot v = 0 \} ,$$

$$V = \{ v \in H_0^1(\Omega)^2 \;:\; \nabla \cdot v = 0 \} .$$

Pošto je Ω ograničen skup sa Lipschitz-neprekidnom granicom, H je jednak $L^2(\Omega)^2$ - zatvorenju, a V jednak $H_0^1(\Omega)^2$ - zatvorenju skupa

$$\{ v \in D(\Omega)^2 \;:\; \nabla \cdot v = 0 \}$$

[Ladiženskaja, Solonnikov, 1976].

NAPOMENA 1.1.

Za neograničene oblasti u opštem slučaju ovo nije tačno [Pileckas, 1983] .

Prostor H (odnosno V) snabdećemo strukturom Hilbertovog prostora indukovanom iz $L^2(\Omega)^2$ (odnosno $H_0^1(\Omega)^2$). Prostor V je sadržan i gust u H s neprekidnim potapanjem. Neka V' označava dualan prostor prostora V . Identifikujući H sa njegovim dualnim prostorom H' , imaćemo $V \subset H \subset V'$, pri čemu je svaki od prostora gust u narednom s neprekidnim potapanjem. Prema tome, operacija dualnosti $\langle .,. \rangle$ između prostora V i V' je ekstenzija skalarnog proizvoda $(.,.)$:

$$\langle u,v \rangle = (u,v) \qquad \forall u \in H \quad \forall v \in V .$$

Za $u,v,w \in H^1(\Omega)^2$ definišimo bilinearnu formu

$$a_o(u,v) = (\nabla u, \nabla v)$$

i trilinearnu formu

$$a_1(u,v;w) = ((u \cdot \nabla)v,w) .$$

Sledeća tzv. slaba formulacija problema (1.1)-(1.4) potiče od Leraya [Leray, 1933, 1934] .

PROBLEM S (slaba rešenja)

Za dato f i u_o ,

$$f \in L^2(0,T;V') , \quad u_o \in H ,$$

odrediti funkciju u koja zadovoljava

(1.5) $\quad u \in L^2(0,T;V)$,

(1.6) $\frac{d}{dt}(u,v) + \nu a_o(u,v) + a_1(u,u;v) = \langle f,v \rangle \quad \forall v \in V$,

(1.7) $u(0) = u_o$.

Ako u pripada samo prostoru $L^2(0,T;V)$, tada uslov (1.7) nema smisla. Međutim, ako u zadovoljava (1.5) i (1.6) tada, kao što ćemo kasnije videti, u je skoro svuda na $[0,T]$ jednak neprekidnoj funkciji, pa (1.7) ima smisla .

Za $u \in V$ definišimo $A_o u \in V'$ formulom

$$\langle A_o u, v\rangle = a_o(u,v) \quad \forall\, v \in V .$$

Kako je a_o bilinearna neprekidna forma na V, A_o je linearan neprekidan operator iz V u V' .

Prema teoremi o Helmholtz-Hodgeovoj dekompoziciji [Morrey, 1966 ; Bourguignon, Brezis, 1977 ; Fujiwara, Morimoto, 1977] , postoji ograničen operator P iz $L^2(\Omega)^2$ u H sa $P^2 = P$ (projektor) i za svako $u \in L^2(\Omega)^2$ dekompozicija oblika

$$u = Pu + \nabla p ,$$

gde p pripada $H^1(\Omega)$. Neka $D(A_o)$ označava oblast definisanosti operatora A_o . Tada je $D(A_o) = H^2(\Omega)^2 \cap V$ i za svako $u \in D(A_o)$

$$A_o u = - P\Delta u .$$

Služeći se Lax-Milgramovom teoremom [Lax, Milgram, 1954] lako dokazujemo da je A_o izomorfizam iz V na V'. Ako je $\partial\Omega$ klase C^2 tada je A_o izomorfizam iz $D(A_o)$ na H [Cattabriga, 1961 ; Solonnikov, 1960 ; Vorovič, Judovič, 1961]. Ovo je tačno i za konveksnu poligonalnu oblast [Kellogg, Osborn, 1976], pa i za konveksnu oblast sa Lipschitz-neprekidnom granicom [Grisvard, 1978].

Za $u,v \in V$ definišimo $A_1(u,v) \in V'$ i $A_1 u \in V'$ sa

$$\langle A_1(u,v),w\rangle = a_1(u,v;w) \qquad \forall w \in V$$

$$A_1 u = A_1(u,u) .$$

Kako je a_1 trilinearna neprekidna forma na V, A_1 je bilinearan neprekidan operator iz $V \times V$ u V'. Ako $u \in L^2(0,T;V)$ tada funkcija $t \longrightarrow A_1 u(t)$ pripada prostoru $L^1(0,T;V')$. Prema tome, (1.6) je ekvivalentan sa

$$\frac{d}{dt}\langle u,v\rangle = \langle f - \nu A_o u - A_1 u, v\rangle \qquad \forall v \in V ,$$

a kako funkcija $f - \nu A_o u - A_1 u$ pripada prostoru $L^1(0,T;V')$, to $u' = du/dt \in L^1(0,T;V')$ i

(1.8) $$\frac{du}{dt} + \nu A_o u + A_1 u = f \qquad \text{u prostoru } V' .$$

Dakle, [Temam, 1979] u je skoro svuda jednak neprekidnoj funkciji iz $[0,T]$ u V', tako da (1.7) ima smisla .

Naravno, slaba rešenja jednačina Navier-Stokesa mogu, ali ne moraju posedovati dalju regularnost . Zato je zgodno uvesti klasu regularnijih rešenja koja ćemo zvati jaka rešenja [Temam, 1983] .

PROBLEM J (jaka rešenja)

Za dato f i u_0 ,

$$f \in L^2(0,T;H), \quad u_0 \in V ,$$

naći funkciju u koja zadovoljava

$$u \in L^2(0,T;D(A_0)) \cap L^\infty(0,T;V) ,$$

jednačinu (1.8) i početni uslov (1.7) .

Sledeće dve teoreme rezimiraju neke osnovne rezultate o egzistenciji i jedinstvenosti slabih i jakih rešenja [Leray, 1933,1934; Hopf, 1954; Ladiženskaja, 1969; Temam, 1979] .

TEOREMA 1.2. (slaba rešenja)

Za dato f i u_o,

$$f \in L^2(0,T;V'), \quad u_o \in H$$

i ograničen otvoren skup $\Omega \subset R^2$ sa Lipschitz-neprekidnom granicom postoji jedinstveno slabo rešenje u jednačina Navier-Stokesa (Problem S) koje zadovoljava

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) ,$$

$$u \in C(0,T;H) , \qquad u' \in L^2(0,T;H) .$$

TEOREMA 1.3. (jaka rešenja)

Za dato f i u_o,

$$f \in L^2(0,T;H), \quad u_o \in V$$

i Ω ograničen podskup R^2 sa granicom klase C^2, postoji jedinstveno rešenje Problema J, pri čemu

$$u \in L^2(0,T;D(A_o)) \cap C(0,T;V)$$

$$u' \in L^2(0,T;H), \quad A_1 u \in L^2(0,T;H) .$$

NAPOMENA 1.2.

Dokaz teoreme 1.3. može se naći u knjizi Temama [Temam, 1979 - teorema 3.10] i zasniva se na pomoćnim rezultatima [ibid. - lema 3.7, lema 3.8] koji važe i u slučaju konveksne oblasti Ω sa Lipschitz-neprekidnom granicom. Prema tome, teorema 1.3. je tačna i za takvo Ω.

NAPOMENA 1.3.

Za $n \geq 3$ teorija egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačina Navier-Stokesa je nepotpuna. Nije poznato da li je slabo rešenje jedinstveno, niti da li jako rešenje postoji na proizvoljnom intervalu $[0,T]$ [Temam, 1983; Sohr, von Wahl, 1984].

1.3. Mešoviti varijacioni zadatak paraboličkog tipa za jednačine Navier-Stokesa

Posmatrajmo sledeći varijacioni zadatak .

Za dato f i u_o ,

$$f \in L^2(0,T;H) \ , \quad u_o \in V \ ,$$

naći

(P)

$$u \in L^2(0,T;V) \ ,$$

tako da je

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu a_o(u,v) + a_1(u,u;v) = (f,v) \qquad \forall v \in V$$

$$u(0) = u_o \ .$$

DEFINICIJA 1.1.

Neka je Ω ograničen otvoren povezan podskup R^2. Reći ćemo da je Ω klase $\mathcal{A}$ ako je $\partial\Omega$ klase C^2 ili ako je Ω konveksan sa Lipschitz-neprekid - nom granicom .

TEOREMA 1.4.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$. Tada problem (P) ima jedinstveno rešenje u, i pri tome,

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^2) \cap C(0,T;V) ,$$

$$u' \in L^2(0,T;H) , \qquad A_1 u \in L^2(0,T;H) .$$

DOKAZ

Ovo tvrđenje je posledica teoreme 1.3. i napomene 1.2..

Definišimo bilinearnu formu :

$$b : H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega) \longrightarrow R$$

$$b(v,q) = -(\nabla \cdot v, q) \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^2 \qquad \forall\, q \in L_0^2(\Omega) .$$

Pridružimo zadatku (P) sledeći mešoviti varijacioni zadatak paraboličkog tipa .

Neka su dati f i u_0 ,

$$f \in L^2(0,T;H) , \qquad u_0 \in V .$$

Naći uređen par funkcija (u,p) ,

$$(u,p) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)) ,$$

tako da je

(Q)

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu\, a_0(u,v) + a_1(u,u;v) + b(v,p) = (f,v)$$

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega)^2 ,$$

$$b(u,q) = 0 \qquad \forall\, q \in L_0^2(\Omega) ,$$

$$u(0) = u_0 .$$

Ako je (u,p) rešenje problema (Q) tada u pripada $L^2(0,T;V)$ i u je rešenje problema (P). Prema teoremi 1.4. problem (P) ima jedinstveno rešenje . Dakle, postoji najviše jedna funkcija $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)$, takva da je (u,p) rešenje problema (Q) . Kako bilinearna forma $b(.,.)$ zadovoljava Brezzijev uslov [Brezzi, 1974]:

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^2} \frac{b(v,q)}{|v|_{1,\Omega}} \geq c\, \| q \|_{0,\Omega} \qquad \forall\, q \in L_0^2(\Omega) ,$$

[Girault, Raviart, 1979] , sledi da je

$$b(v,q) = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^2 \iff q = 0 ,$$

i prema tome (Q) ima najviše jedno rešenje .

Preostaje da dokažemo egzistenciju rešenja problema (Q) .

TEOREMA 1.5.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$ i neka u označava jedinstveno rešenje problema (P) . Tada postoji jedinstvena funkcija p ,

$$p \in L^2(0,T;L_0^2(\Omega)) ,$$

tako da je uređen par (u,p) jedinstveno rešenje zadatka (Q) . Pri tome,

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^2) \cap C(0,T;V) ,$$

$$u' \in L^2(0,T;H) , \qquad A_1 u \in L^2(0,T;H), \qquad p \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) .$$

DOKAZ

Prema teoremi 1.4. ,

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^2) \cap C(0,T;V) ,$$
$$u' \in L^2(0,T;H) , \qquad A_1 u \in L^2(0,T;H) .$$

Posmatrajmo funkcional

$$L(u,t) : \; v \in H_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow (u_0,v) - (u(t),v) +$$

$$+ \int_0^t \left[(f(s),v) - \nu\, a_0(u(s),v) - a_1(u(s),u(s),v)\right] ds .$$

Za svako $t \in [0,T]$, $L(u,t)$ je linearan neprekidan funkcional na $H_0^1(\Omega)^2$ koji se anulira na V. Prema teoremi Tartara [Tartar, 1976], postoji jedinstvena funkcija

$$h(t) \in L_0^2(\Omega) ,$$

tako da je

$$L(u,t)v = \langle \nabla h(t), v \rangle \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^2 .$$

Neka je

$$g(t) = u_0 - u(t) + \int_0^t [f(s) - \nu A_0 u(s) - A_1 u(s)]\, ds.$$

Tada je $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$ i $\nabla h(t) = g(t)$. Prema nejednakosti Deny-Lionsa [Deny, Lions, 1954; Temam, 1979],

$$h \in L^2(0,T;H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) .$$

Međutim, $g' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$, te elementarnim transforma - cijama nad distribucijama i koristeći Fubinijevu teoremu [Rudin, 1966] , lako dokazujemo da je $g' = (\nabla h)' = \nabla h'$, i prema tome,

$$\nabla h' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2) .$$

Primenjujući ponovo nejednakost Deny-Lionsa,

$$h' \in L^2(0,T;H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) .$$

Konačno, definišimo funkciju p formulom $p(t) = h'(t)$ i time je dokaz završen .

NAPOMENA 1.4.

Iz teorema 1.4. i 1.5. sledi da su problemi (P) i (Q) ekvivalentni .

NAPOMENA 1.5.

Neka D_t označava tzv. substancijalni izvod Lagrangea, definisan formulom

$$D_t u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u .$$

Tada se izraz $\frac{d}{dt}(u,v) + a_1(u,u;v)$ u problemima (P) i (Q) može pisati i kao $(D_t u,v)$.

II

SEMIDISKRETIZACIJA JEDNAČINA NAVIER-STOKESA PO TRAJEKTORIJAMA

U ovom poglavlju, koje sadrži odeljke 2.1-2.3, polazeći od Lagrangeove reprezentacije toka, uvodi se semidiskretizacija jednačina Navier-Stokesa po trajektorijama čestica fluida .

U odeljku 2.1. dokazuje se egzistencija i jedinstvenost trajektorija. U odeljku 2.2. opisuje se postupak semidiskretizacije i dokazuje se da je metoda stabilna nezavisno od veličine koeficijenta kinematičke viskoznosti. U odeljku 2.3. dokazuje se konvergencija semidiskretne metode.

2.1. Egzistencija i jedinstvenost trajektorija

Pretpostavimo da je ograničena oblast $\Omega \subset R^2$ ispunjena fluidom čije je kretanje definisano jednačinama Navier-Stokesa . Lagrangeova reprezentacija toka fluida zasniva se na funkciji

$$X : (x,s;t) \in \Omega \times (0,T)^2 \longrightarrow X(x,s;t) ,$$

gde $X(x,s;t)$ predstavlja položaj one čestice fluida u trenutku t, koja se u trenutku s nalazi u tački x. To znači da je preslikavanje $t \longrightarrow X(x,s;t)$ parametarska reprezentacija trajektorije čestice koja se u trenutku s nalazi u tački x.

Neka je poznato rešenje u (brzina strujanja) jednačina Navier-Stokesa . Tada se trajektorije čestica fluida za odgovarajuće strujanje određuju na sledeći način: za svako $(x,s) \in \Omega \times (0,T)$, funkcija $t \longrightarrow X(x,s;t)$ je rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$(2.1) \qquad \frac{dX}{dt}(x,s;t) = u(X(x,s;t),t)$$

sa početnim uslovom

$$(2.2) \qquad X(x,s;s) = x .$$

LEMA 2.1.

Neka je $\Omega \subset R^2$ skup klase $\mathcal{A}$. Ako $f \in L^2(0,T;H)$ i $u_0 \in V$, tada je odgovarajuće rešenje zadatka (P) Carathéodoryjeva funkcija .

DOKAZ

Prema teoremi 1.4. (jedinstveno) rešenje zadatka (P) pripada prostoru $L^2(0,T;D(A_0))$. Pošto je $D(A_0)$ neprekidno potopljen u prostor $C(\bar{\Omega})^2$,

$$u \in L^2(0,T;C(\bar{\Omega})^2) .$$

Dakle, u je Carathéodoryjeva funkcija [Ekeland, Temam , 1976] .

TEOREMA 2.1.

Neka je $\Omega \subset R^2$ skup klase $\mathcal{A}$ i neka za f iz $L^2(0,T;H)$ i u_0 iz V, u označava odgovarajuće rešenje zadatka (P) .

Ako $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2)$, tada zadatak (2.1),(2.2) za svaki uređen par (x,s) iz $\Omega \times [0,T]$ ima jedinstveno rešenje X(x,s;.) koje pripada prostoru $(W^{1,\infty}(0,T))^2$.

DOKAZ

Prema teoremi 1.4. (jedinstveno) rešenje zadatka (P) pripada prostoru $L^2(0,T;D(A_0))$ i $u' \in L^2(0,T;H)$. Pošto $D(A_0) = H^2(\Omega)^2 \cap V \subset V \subset H$ s neprekidnim i gustim potapanjem, to je prostor

$$W(0,T) = \{ u : u \in L^2(0,T;D(A_0)) \ , \quad u' \in L^2(0,T;H) \}$$

neprekidno potopljen u prostor $C(0,T;V)$ [Lions, Magenes, 1972 - str. 19] i prema tome, $u \in C(0,T;V)$. Tako smo dokazali da

$$u \in L^2(0,T;C(\bar{\Omega})^2) \cap C(0,T;H_0^1(\Omega)^2) .$$

Na osnovu leme 2.1., u je Carathéodoryjeva funkcija. Osim toga,

$$|u(x,t)| \leq \| u(.,t) \|_{0,\infty;\Omega} = \theta(t) \quad \text{za s.s. } t \in [0,T]$$

i $\theta \in L^2(0,T)$. Na osnovu Carathéodoryjeve teoreme [Coddington, Levinson, 1955] postoje realni brojevi $T_1 = T_1(x,s)$ i $T_2 = T_2(x,s)$, $0 \leq T_1 \leq s \leq T_2 \leq T$, $T_1 \neq T_2$ i funkcija $X(x,s;.)$ iz $(W^{1,\infty}(T_1,T_2))^2$, tako da je $X(x,s;.)$ lokalno rešenje zadatka (2.1),(2.2) na intervalu (T_1,T_2).

Proširimo funkciju u nulom na $R^2 \times [0,T]$. Tada, $u \in L^2(0,T;C(R^2)^2) \cap C(0,T;H_0^1(R^2)^2)$ i jasno je da ni jedna trajektorija ne može napustiti Ω u trenutku > 0 ili $< T$. Dakle, $T_1 = 0$, $T_2 = T$ i $X(x,s;t)$ pripada $\bar{\Omega}$ za svaku uređenu trojku $(x,s;t)$ iz $\Omega \times [0,T]^2$.

Tako smo dokazali egzistenciju rešenja zadatka (2.1),(2.2). Jedinstvenost se lako dokazuje pomoću leme Gronwalla [Girault, Raviart, 1979] .

TEOREMA 2.2.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$ i neka za $f \in L^2(0,T;H)$ i $u_o \in V$, u označava odgovarajuće rešenje zadatka (P).

Ako $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2)$, tada je $X(\cdot,s;t)$ bijekcija skupa Ω na Ω.

DOKAZ

Prema dokazu prethodne teoreme, $X(x,s;t)$ pripada $\bar{\Omega}$ za svaku uređenu trojku $(x,s;t)$ iz $\Omega \times [0,T]^2$. Neka $x,y \in \Omega$ i neka je $X(x,s;t) = y$. Tada je $X(y,t;s) = x$. Preostaje da se dokaže da

$$x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad X(x,s;t) \in \Omega \qquad \forall (s,t) \in [0,T]^2 .$$

Neka $x \in \Omega$, $s \in [0,T)$ i pretpostavimo da postoji $t \in (s,T]$ za koje je $X(x,s;t) \in \partial\Omega$. Definišimo

$$t_1 = t_1(x,s) = \min \{ t : \ t \in (s,T] , \ X(x,s;t) \in \partial\Omega \} ,$$

$$t_o = t_o(x,s) = \max \{ s, \ t_1(x,s) - \frac{1}{2C} \} ,$$

$$C = \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \exp (T \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}) .$$

Neka je $X(x,s;t_o) = z$. Tada z pripada skupu Ω i

$X(z,t_o;t) = X(x,s;t)$ za svako $t \in [t_o,t_1]$. Izaberimo proizvoljno $t \in [t_o,t_1]$. Tada je

$$
(2.3)\quad \begin{aligned} &|X(x,s;t) - X(x,s;t_1)| = |X(z,t_o;t) - X(z,t_o;t_1)| \geq \\ &\geq \big||X(z,t_o;t_o) - X(z,t_o;t_1)| - |X(z,t_o;t) - X(z,t_o;t_o)|\big|. \end{aligned}
$$

Međutim,

$$
|X(z,t_o;t) - X(z,t_o;t_o)| \leq \int_{t_o}^{t} |u(X(z,t_o;\tau),\tau)|\,d\tau =
$$

$$
= \int_{t_o}^{t} |u(X(z,t_o;\tau),\tau) - u(X(z,t_o;t_1),\tau)|\,d\tau \leq
$$

$$
\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \int_{t_o}^{t} |X(z,t_o;\tau) - X(z,t_o;t_1)|\,d\tau
$$

$$
\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \int_{t_o}^{t} |X(z,t_o;\tau) - X(z,t_o;t_o)|\,d\tau +
$$

$$
(t-t_o)\,\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}\,|X(z,t_o;t_o) - X(z,t_o;t_1)|,
$$

te je prema lemi Gronwalla [Girault, Raviart, 1979],

$$
(2.4)\quad \begin{aligned} &|X(z,t_o;t) - X(z,t_o;t_o)| \leq \\ &C(t-t_o)\,|X(z,t_o,t_o) - X(z,t_o,t_1)|. \end{aligned}
$$

Iz (2.3) i (2.4) za svako $t \in [t_o, t_1]$ imamo,

$$(2.5) \qquad |X(x,s;t) - X(x,s;t_1)| \geq [1-C(t-t_o)]\,|z - X(x,s;t_1)| \;.$$

Specijalno, za $t = t_1$ iz (2.5) sledi da je $X(x,s;t_1) = z$, što je nemoguće jer $X(x,s;t_1) \in \partial\Omega$ a $z \in \Omega$. Tako smo dokazali da $x \in \Omega$ implicira $X(x,s;t) \in \Omega$, $0 \leq s < T$, $s < t \leq T$. Dokaz je analogan i za $0 < s \leq T$, $0 \leq t < s$. Konačno, $X(x,s;s) = x$, $0 \leq s \leq T$.

Time je dokaz teoreme završen.

TEOREMA 2.3.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$ i neka za $f \in L^2(0,T;H)$ i $u_o \in V$ u označava odgovarajuće rešenje zadatka (P).

Ako $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2)$, tada je jakobijan bijektivnog preslikavanja $X(.,s;t) : \Omega \longrightarrow \Omega$ identički jednak 1.

DOKAZ

Pošto $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2)$, lako se dokazuje da parcijalni izvodi vektor-funkcije $X(.,s;t)$ u smislu distribucija pripadaju prostoru $L^\infty(\Omega)^2$, te Jacobijeva matrica transformacije $x \longrightarrow X(x,s;t)$ pripada $L^\infty(\Omega)^8$. To znači da je jakobijan preslikavanja $X(.,s;t)$ dobro definisan - označimo ga sa $J(x,s;t)$. Tada je $J(x,s;s) = 1$. Kako je $\nabla \cdot u = 0$, prema identitetu

$$\frac{\partial J}{\partial t}(x,s;t) = J(x,s;t)\ (\nabla\cdot u)(X(x,s;t),t)\ ,$$

koji je u teorijskoj mehanici poznat kao teorema Liouvillea [Arnol'd, 1979], sledi da je $J(x,s;t) \equiv 1$ na skupu $\bar{\Omega} \times [0,T]^2$. Geometrijski govoreći, mes (Ω) je invarijanta preslikavanja $X(.,s;t)$.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 2.1.. Tada funkcija $t \longrightarrow (X(x,s;t),t)$ pripada prostoru $(W^{1,\infty}(0,T))^3$, te je ona i apsolutno neprekidna. Prema tome, u skoro svakoj tački $t \in [0,T]$ možemo povući tangentu na krivu $t \longrightarrow (X(x,s;t),t)$.

Neka $\alpha_t = \alpha_t(X(x,s;t),t)$ (respektivno α_1, α_2) označava ugao između tangente $\tau(X(x,s;t),t)$ u tački $(X(x,s;t),t)$ i ose Ot (respektivno Ox_1, Ox_2) . Tada je

$$\cos\alpha_t = 1/\Psi \qquad \text{i} \qquad \cos\alpha_j = u_j/\Psi\ , \qquad j = 1,2,$$

gde je

$$\text{(2.6)} \quad \Psi = (1 + |u_1|^2 + |u_2|^2)^{1/2}\ .$$

Sada se substancijalni izvod Lagrangea D_t može napisati kao izvod u pravcu vektora

$$\tau = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_t)$$

na sledeći način :

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} =$$

$$= \Psi \left(\cos \alpha_t \frac{\partial}{\partial t} + \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{2.7}$$

$$= \Psi \frac{\partial}{\partial \tau} \ .$$

Ova formula biće od fundamentalnog značaja u daljem radu.

2.2. Semidiskretizacija jednačina Navier-Stokesa po trajektorijama

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$. Pretpostavimo da (jedinstveno) rešenje zadatka (P) zadovoljava dodatni uslov:

$$u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2).$$

Neka je M pozitivan ceo broj i $\Delta t = T/M$. Definišimo ekvidistantnu mrežu na intervalu $[0,T]$:

$$\{t_m, \quad m = 0, \ldots, M: \quad t_m = m.\Delta t\}$$

i neka je $t_\theta = t_m + \theta.\Delta t$, $0 < \theta \leq 1$.

Prema teoremi 2.1., za svako $x \in \Omega$ i svako m, $0 \leq m \leq M-1$, Cauchyjev problem

$$(2.8) \quad \begin{aligned} &\frac{dX}{dt}(x,t_{m+1};t) = u(X(x,t_{m+1};t),t), \quad t_m \leq t < t_{m+1}, \\ &X(x,t_{m+1};t_{m+1}) = x \end{aligned}$$

ima jedinstveno rešenje koje preslikava interval $[t_m,t_{m+1}]$ u Ω. Pri tome, funkcija $t \longrightarrow X(x,t_{m+1};t)$ pripada prostoru $(W^{1,\infty}(t_m,t_{m+1}))^2$.

Dakle,

$$x - X(x,t_{m+1};t) = X(x,t_{m+1};t_{m+1}) - X(x,t_{m+1};t) =$$

(2.9) $$= \int_t^{t_{m+1}} u(X(x,t_{m+1};t),t)\,dt \cong$$

$$\cong \triangle t \cdot u(X(x,t_{m+1};t_\theta),t_\theta) = \triangle t \cdot u(y,t_\theta),$$

gde je $y = X(x,t_{m+1};t_\theta)$. Koristeći (2.9) imamo:

$$D_t u(y,t_\theta) = \Psi(y,t_\theta)\ \frac{\partial u(y,t_\theta)}{\partial\tau(y,t_\theta)} \cong$$

$$\cong \Psi(y,t_\theta)\ \frac{u(x,t_{m+1}) - u(X(x,t_{m+1};t_m),t_m)}{\{|x - X(x,t_{m+1};t_m)|^2 + |t_{m+1} - t_m|^2\}^{1/2}}$$

$$\cong \frac{u(x,t_{m+1}) - u(X(x,t_{m+1};t_m),t_m)}{\triangle t} .$$

Dalje,

$$-\nu\triangle u(y,t_\theta) \cong \theta\{-\nu\triangle u(x,t_{m+1})\} + (1-\theta)\{-\nu\triangle u(X(x,t_{m+1};t_m),t_m)\}.$$

Konačno,

$$f(y,t_\theta) \cong \theta\, f(x,t_{m+1}) + (1-\theta)\, f(X(x,t_{m+1};t_m),t_m) .$$

Prema tome, makar formalno, za $m = 0, \dots, M-1$ imamo

$$\frac{1}{\Delta t}(u(\cdot,t_{m+1}) - u(X(\cdot,t_{m+1};t_m),t_m) \quad , v) \quad +$$

$$(2.10) \qquad + \Theta \nu\, a_o(u(\cdot,t_{m+1}),v) + (1-\Theta)\nu\, a_o(u(X(\cdot,t_{m+1};t_m),t_m),v)$$

$$\cong \Theta\,(f(\cdot,t_{m+1}),v) + (1-\Theta)\,(f(X(\cdot,t_{m+1};t_m),t_m),v)$$

$$\forall v \in V ,$$

gde je $X(x,t_{m+1};\cdot)$ rešenje zadatka (2.8) .

Za $\Theta = 1$, (2.10) je implicitna dvoslojna shema, a za $\Theta = 1/2$ shema Cranck-Nicólsonovog tipa .

Da bi $u(\cdot,t_{m+1})$ bio izračunljiv, moramo da modifikujemo formulu (2.10), jer ona sadrži $X(\cdot,t_{m+1};t_m)$, a prema (2.8), da bismo izračunali $X(\cdot,t_{m+1};t_m)$ moramo poznavati $u(\cdot,t)$ za svako $t \in [t_m,t_{m+1})$.

Definišimo, radi toga, funkciju $X^m(x,t_{m+1};\cdot)$ kao rešenje Cauchyjevog problema za autonoman sistem diferencijalnih jednačina :

$$(2.11) \qquad \begin{aligned} &\frac{dX^m}{dt}(x,t_{m+1};t) = u(X^m(x,t_{m+1};t),t_m), \quad t_m \le t < t_{m+1}, \\ &X^m(x,t_{m+1};t_{m+1}) = x . \end{aligned}$$

Tako, umesto (2.8),(2.10), dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\left(u(\cdot,t_{m+1}) - u(X^m(\cdot,t_{m+1};t_m),t_m)\ ,\ v\right) + \\
&+ \theta\nu a_o(u(\cdot,t_{m+1}),v) + \\
(2.12)\qquad &+ (1-\theta)\nu a_o(u(X^m(\cdot,t_{m+1};t_m),t_m)\ ,\ v) = \\
&\cong \theta\ (f(\cdot,t_{m+1}),v) + (1-\theta)(f(X^m(\cdot,t_{m+1};t_m),t_m),v) \\
&\forall\ v \in V,
\end{aligned}
$$

gde je $X^m(x,t_{m+1};\cdot)$ rešenje zadatka (2.11) . Jednostavnosti radi pretpostavimo da je $\theta = 1$ i analizirajmo rigoroznije postupak diskretizacije . Definišimo

$$
(2.13)\qquad f^{m+1}(\cdot) = \begin{cases} f(\cdot,t_{m+1}), & \text{ako} \quad f \in C(0,T;H), \\[2ex] \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(\cdot,t)\,dt, & \\ & \text{ako} \quad f \in L^2(0,T;H) \end{cases}
$$

i posmatrajmo sledeću semidiskretnu metodu za rešavanje problema (P) :

Za $u^o = u_o \in V$ i $f^{m+1} \in H$, $m = 0, \dots, M-1$ dato, odrediti $u^{m+1} \in V$ tako da je

$$(d_t u^{m+1}, v) + \nu a_o(u^{m+1}, v) = (f^{m+1}, v) \qquad \forall v \in V,$$

(2.14) gde je

$$d_t u^{m+1}(x) = \frac{u^{m+1}(x) - u^{m+1}(X^m(x, t_{m+1}; t_m))}{\Delta t},$$

a $X^m(x, t_{m+1}; .)$ označava rešenje Cauchyjevog problema

(2.14′)

$$\frac{dX^m}{dt}(x, t_{m+1}; t) = u^m(X^m(x, t_{m+1}; t)), \qquad t_m \leq t < t_{m+1},$$

$$X^m(x, t_{m+1}; t_{m+1}) = x \quad .$$

TEOREMA 2.4.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$, $f \in L^2(0,T;H)$ i m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$. Ako u^m pripada prostoru $V \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2$ tada zadatak (2.14) ima jedinstveno rešenje u^{m+1} koje pripada prostoru $V \cap H^2(\Omega)^2$.

DOKAZ

Pretpostavimo da u^m pripada prostoru $V \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2$. Tada Cauchyjev problem (2.14′) ima jedinstveno rešenje $X^m(x, t_{m+1}; .) : [t_m, t_{m+1}] \longrightarrow \Omega$ i ono pripada prostoru $(W^{1,\infty}(t_m, t_{m+1}))^2$. Kako funkcija $x \longrightarrow X^m(x, t_{m+1}; t_m)$ pripada $C(\bar{\Omega})^2$, to

$$f^{m+1} + (\triangle t)^{-1} u^m \circ X^m \in L^2(\Omega)^2 .$$

Prema Lax-Milgramovoj teoremi [Lax, Milgram, 1954] zadatak (2.14') ima jedinstveno rešenje $u^{m+1} \in V$, a prema teoremi Grisvarda o regularnosti rešenja Stokesovog problema [Grisvard, 1978], $u^{m+1} \in H^2(\Omega)^2$.

TEOREMA 2.5.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$ i m ceo broj, $0 \le m \le M-1$. Ako u^m pripada prostoru $V \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2$, tada za svako $t \in [t_m, t_{m+1}]$, $x \longrightarrow X^m(x, t_{m+1}; t)$ je bijektivno preslikavanje skupa Ω na Ω čiji je jakobijan identički jednak 1.

DOKAZ

Analogan dokazu teorema 2.2. i 2.3..

Uvedimo sada normu $|||\,.\,|||$ formulom

$$|||v||| = (\|v\|^2_{0,\Omega} + \nu \triangle t \|\nabla v\|^2_{0,\Omega})^{1/2}$$

i dokažimo stabilnost semidiskretne metode (2.14) u normi $|||\,.\,|||$.

TEOREMA 2.6.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$, $f \in L^2(0,T;H)$ i m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$. Ako u^m pripada prostoru $V \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2$, tada je

$$|||u^{m+1}||| \leq |||u^m||| + \Delta t \, \|f^{m+1}\|_{0,\Omega} ,$$

gde u^{m+1} označava (jedinstveno) rešenje zadatka (2.14).

DOKAZ

Postavimo $v = u^{m+1}$ u (2.14). Tada, na osnovu prethodne teoreme imamo :

$$\|u^{m+1}\|^2_{0,\Omega} + \nu \Delta t \, \|\nabla u^{m+1}\|^2_{0,\Omega} \leq$$

$$\leq (\|u^m(X^m(\cdot,t_{m+1};t_m)\|_{0,\Omega} + \Delta t \, \|f^{m+1}\|_{0,\Omega}) \|u^{m+1}\|_{0,\Omega} \leq$$

$$\leq (\|u^m\|_{0,\Omega} + \Delta t \, \|f^{m+1}\|_{0,\Omega})(\|u^{m+1}\|^2_{0,\Omega} + \nu \Delta t \|\nabla u^{m+1}\|^2_{0,\Omega})^{1/2}.$$

Odatle sledi da je

$$|||u^{m+1}||| \leq \|u^m\|_{0,\Omega} + \Delta t \, \|f^{m+1}\|_{0,\Omega} .$$

Kako je $\|u^m\|_{0,\Omega} \leq |||u^m|||$, teorema je dokazana.

U knjizi Giraulta i Raviarta [Girault, Raviart, 1979- str. 176.] dokazana je diskretna verzija leme Gronwalla. Mi ćemo dokazati opštije tvrđenje .

LEMA 2.2.

Neka su $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n)$ četiri niza nenegativnih realnih brojeva pri čemu je niz (c_n) monotono rastući i

$$a_n + b_n \leq c_n + \sum_{i=o}^{n-1} d_i a_i \qquad \text{za} \quad n \geq 1,$$

$$a_o + b_o \leq c_o \; .$$

Tada je

$$a_n + b_n \leq c_n \exp\left(\sum_{i=o}^{n-1} d_i \right) \qquad \text{za} \quad n \geq 1 \; .$$

DOKAZ

Dokažimo najpre indukcijom da je

$$(\ast) \qquad a_n + b_n \leq c_n \prod_{i=o}^{n-1} (1 + d_i) \qquad \text{za} \quad n \geq 1.$$

Za $n = 1$ ovo je očigledno :

$$a_1 + b_1 \leq c_1 + d_o a_o \leq c_1(1 + d_o) \; .$$

Neka je $n_o \geq 1$ i pretpostavimo da smo $(\ast)$ dokazali za svako $n \leq n_o$. Prema induktivnoj hipotezi i monotonosti niza (c_n) imamo :

$$a_{n_o+1} + b_{n_o+1} \leq c_{n_o+1} + d_o a_o + \sum_{i=1}^{n_o} d_i a_i \leq$$

$$\leq c_{n_o+1} + d_o a_o + \sum_{i=1}^{n_o} d_i c_i \prod_{k=o}^{i-1} (1 + d_k) \leq$$

$$\leq c_{n_o+1} \left[1 + d_o + \sum_{i=1}^{n_o} d_i \prod_{k=o}^{i-1} (1 + d_k)\right] =$$

$$= c_{n_o+1} \prod_{i=o}^{n_o} (1 + d_i) .$$

Tako smo dokazali $(*)$ za $n = n_o + 1$, a samim tim i za svaki prirodan broj $n \geq 1$. Konačno, tvrđenje leme sledi iz nejednakosti

$$\prod_{i=o}^{n-1} (1 + d_i) \leq \exp\left(\sum_{i=o}^{n-1} d_i\right) .$$

TEOREMA 2.7.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$, $f \in L^2(O,T;H)$ i m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$. Ako u^ℓ pripada prostoru $V \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2$ za $\ell = 0,\dots,m$, tada je

$$\| u^{m+1} \|^2_{o,\Omega} + \nu \Delta t \sum_{\ell=o}^{m} \| \nabla u^{\ell+1} \|^2_{o,\Omega} \leq$$

$$\leq C(\| u_o \|^2_{o,\Omega} + \| f \|^2_{L^2(O,T;H)}), \text{ gde je } C = (1+T)\exp(T) .$$

DOKAZ

Postavljajući $v = u^{\ell+1}$ u (2.14) za $\ell = 0,\dots,M-1$ i koristeći teoremu 2.5, sledi da je

$$(\| u^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega} + \nu \Delta t \| \nabla u^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega})^{1/2}$$

$$\leq \| u^{\ell} \|_{0,\Omega} + \Delta t \| f^{\ell+1} \|_{0,\Omega} , \quad \ell = 0,\dots,m .$$

Koristeći nejednakost

$$(a+b)^2 \leq (1+\Delta t)a^2 + (1+\frac{1}{\Delta t})b^2$$

imamo

$$\| u^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega} + \nu \Delta t \| \nabla u^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega}$$

$$\leq (1+\Delta t) \| u^{\ell} \|^2_{0,\Omega} + (1+\Delta t)\Delta t \| f^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega} , \quad \ell=0,\dots,m.$$

Saberimo ove nejednakosti i primenimo lemu 2.2.. Tada je

$$\| u^{m+1} \|^2_{0,\Omega} + \nu \Delta t \sum_{\ell=0}^{m} \| \nabla u^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega}$$

$$\leq \exp(T)(\| u_0 \|^2_{0,\Omega} + (1+T)\Delta t \sum_{\ell=0}^{M-1} \| f^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega}) .$$

Međutim,

$$\Delta t \sum_{\ell=0}^{M-1} \| f^{\ell+1} \|^2_{0,\Omega} \leq \| f \|^2_{L^2(0,T;H)}$$, i dokaz je završen.

2.3. Konvergencija semidiskretne metode

Neka je $\Omega \subset R^2$ otvoren skup klase $\mathcal{A}$ i neka za

(2.15) $f \in C(0,T;H)$ i $u_o \in V$

u označava odgovarajuće rešenje zadatka (P). Na osnovu teoreme 1.4.,

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^2) \cap C(0,T;V),$$

(2.16)

$$u' \in L^2(0,T;H) .$$

Pretpostavimo da

(2.17) $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2)$,

(2.18) $u' \in L^2(0,T;H^1(\Omega)^2 \cap H)$,

(2.19) $u'' \in L^2(0,T;H)$. [1)]

Tada, prvi i drugi substancijalni izvod funkcije u pripada prostoru $L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$:

$$D_t u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$$

(2.20)

$$D_t^2 u = D_t(D_t u) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2) .$$

---

1) Na osnovu teoreme Gige o razlomljenim stepenima Stokesovog operatora [Giga, 1981; Sohr, 1984] i teoreme Lions-Magenesa o intermedijalnim izvodima [Lions, Magenes, 1972 - str. 15] neposredno sledi da (2.16) i (2.19) povlači (2.18). Prema tome, pretpostavka (2.18) nije neophodna.

Neka je m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$, i pretpostavimo da

(2.21)
$$u^{\ell} \in V \cap \dot{W}^{1,\infty}(\Omega)^2, \qquad \ell = 0,\ldots,m,$$
$$u^{o} = u_{o} \; .$$

Tada, na osnovu teoreme 2.4., zadatak (2.14) ima jedinstveno rešenje u^{m+1} koje pripada prostoru $V \cap H^2(\Omega)^2$.

Definišimo grešku e^{m+1} formulom :

$$e^{m+1} = u^{m+1} - u(t_{m+1}) ,$$

i neka je odstupanje $\varepsilon^{m+1} \in V'$ definisano formulom:

$$\langle \varepsilon^{m+1}, v \rangle = \langle f(t_{m+1}), v \rangle - \nu \, a_o(u(t_{m+1}), v) - (d_t u(t_{m+1}), v) \qquad \forall \, v \in V \; .$$

LEMA 2.3.

Pretpostavimo da važe uslovi (2.15) i (2.21). Tada je

$$\| e^{m+1} \|^2_{o,\Omega} + 4 \nu \Delta t \cdot \sum_{\ell=o}^{m} \| \nabla e^{\ell+1} \|^2_{o,\Omega}$$
$$\leq 4T\exp(1) \cdot \Delta t \sum_{\ell=o}^{m} \sup_{v \in V} \frac{|\langle \varepsilon^{\ell+1}, v \rangle|^2}{\| v \|^2_{o,\Omega}} \; .$$

(2.22)

DOKAZ

Lako se vidi da je

$$(e^{\ell+1} - e^{\ell}(X^{\ell}(\cdot,t_{\ell+1};t_{\ell})),v) + \nu\Delta t\, a_0(e^{\ell+1},v) = \Delta t\langle\varepsilon^{\ell+1},v\rangle$$

$$\forall v \in V .$$

Na osnovu teoreme 1.4. (2.15) povlači (2.16), i prema tome, $u(t_{\ell+1}) \in V$. Tako smo dokazali da $e^{\ell+1} \in V$. Uzimajući $v = e^{\ell+1}$ u prethodnom identitetu, koristeći ne - jednakost

$$(e^{\ell+1} - e^{\ell}(X^{\ell}(\cdot,t_{\ell+1};t_{\ell})),e^{\ell+1}) \geq$$

$$\geq (\| e^{\ell+1} \|^2_{0,\varphi} - \| e^{\ell}(X^{\ell}(\cdot,t_{\ell+1};t_{\ell}))\|^2_{0,\varphi})/2 ,$$

ε - nejednakost sa $\varepsilon = \frac{1}{2T}$, činjenicu da je $e^0 = 0$ i teoremu 2.5 imaćemo

$$\| e^{m+1} \|^2_{0,\varphi} + 4\nu(\Delta t \sum_{\ell=0}^{m} \| \nabla e^{\ell+1} \|^2_{0,\varphi}) \leq$$

$$\leq \frac{\Delta t}{T} \sum_{\ell=0}^{m-1} \| e^{\ell+1} \|^2_{0,\varphi} + 4T(\Delta t \sum_{\ell=0}^{m} \frac{|\langle\varepsilon^{\ell+1},e^{\ell+1}\rangle|^2}{\| e^{\ell+1}\|^2_{0,\varphi}}) .$$

Odatle, služeći se lemom 2.2., dobijamo

$$\| e^{m+1} \|^2_{o,\Omega} + 4\nu (\Delta t \sum_{\ell=o}^{m} \| \nabla e^{\ell+1} \|^2_{o,\Omega})$$

$$\leq 4T\exp(1) (\Delta t \sum_{\ell=o}^{m} \frac{|\langle \varepsilon^{\ell+1}, e^{\ell+1} \rangle|^2}{\| e^{\ell+1} \|^2_{o,\Omega}}) .$$

Dokaz je završen .

LEMA 2.4.

Pretpostavimo da važe uslovi (2.15),(2.17),(2.18), (2.19),(2.21) . Tada je

$$\| e^{m+1} \|^2_{o,\Omega} + 4\nu \Delta t \sum_{\ell=o}^{m} \| \nabla e^{\ell+1} \|^2_{o,\Omega}$$

$$\leq 8T\exp(1) \Delta t \sum_{\ell=o}^{m} \left\| D_t u(\cdot,t_{\ell+1}) - \frac{u(\cdot,t_{\ell+1}) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell)}{\Delta t} \right\|^2_{o,\Omega}$$

$$+ 8T\exp(1) \Delta t \sum_{\ell=o}^{m} \left\| \frac{u(X^\ell(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell)}{\Delta t} \right\|^2_{o,\Omega}$$

(2.23)

DOKAZ

Primenom nejednakosti Cauchy-Schwartza na identitet

$$\langle \varepsilon^{\ell+1}, v \rangle = (D_t u(\cdot,t_{\ell+1}) - \frac{u(\cdot,t_{\ell+1}) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell)}{\Delta t} , v) +$$

$$+(\frac{u(X^\ell(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell)}{\Delta t} , v) ,$$

deleći dobijenu nejednakost sa $\| v \|_{0,\Omega}$ i koristeći nejednakost :

$$(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2),$$

tvrđenje sledi iz prethodne leme .

LEMA 2.5.

Neka su a i b dva realna broja i $g \in H^2(a,b)$. Tada $g \in C^1[a,b]$ i

$$(2.24) \qquad g'(b) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b (t-a)\, g''(t)\, dt \, .$$

DOKAZ

Prvi deo tvrđenja je posledica teoreme potapanja [Adams, 1975], a (2.24) se lako dokazuje parcijalnom integracijom .

LEMA 2.6.

Pretpostavimo da važe uslovi (2.15),(2.17),(2.18), (2.19) i neka je funkcija g definisana formulom:

$$(2.25) \qquad g(\cdot,t) = u(X(\cdot,t_{\ell+1};t),t) \, .$$

Tada,

$$g'(\cdot,t) = D_t u(X(\cdot,t_{\ell+1},t),t) \, ,$$

$$g''(.,t) = D_t^2 u(X(.,t_{\ell+1};t),t)$$

i funkcije g, g', g'' pripadaju prostoru

$$L^2(t_\ell, t_{\ell+1}; L^2(\Omega)^2) .$$

DOKAZ

Pošto je

$$D_t u = \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u ,$$

$$D_t^2 u = D_t(D_t u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_i} + 2\, u_i \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i} \right) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + u_i\, u_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right) ,$$

na osnovu (2.15),(2.17),(2.18) i (2.19) sledi

$$D_t u,\ D_t^2 u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2) . \tag{2.20}$$

Prema lančanom pravilu, za $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$,

$$g'(.,t) = D_t u(X(.,t_{\ell+1};t),t)$$

$$g''(.,t) = D_t^2 u(X(.,t_{\ell+1};t),t) .$$

Odatle sledi g, g', $g'' \in L^2(t_\ell, t_{\ell+1}; L^2(\Omega)^2)$. Time je dokaz završen .

LEMA 2.7.

Neka važe pretpostavke (2.15),(2.17),(2.18),(2.19) i (2.21). Tada je

$$\left\| D_t u(\cdot,t_{\ell+1}) - \frac{u(\cdot,t_{\ell+1}) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell)}{\Delta t} \right\|^2_{0,\Omega}$$

(2.26)

$$\leq \frac{\Delta t}{3} \| D_t^2 u \|^2_{L^2(t_\ell,t_{\ell+1};L^2(\Omega)^2)} .$$

DOKAZ

Definišimo funkciju g formulom (2.25). Tada je

$$g(\cdot,t_{\ell+1}) = u(\cdot,t_{\ell+1}),$$

$$g(\cdot,t_\ell) = u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell),$$

$$g'(\cdot,t_{\ell+1}) = D_t u(\cdot,t_{\ell+1}) .$$

Na osnovu leme 2.6.,

$$g,\ g',\ g'' \in L^2(t_\ell,t_{\ell+1};L^2(\Omega)^2),$$

$$g''(\cdot,t) = D_t^2 u(X(\cdot,t_{\ell+1};t),t).$$

Tako, na osnovu leme 2.5. sa $a = t_\ell$ i $b = t_{\ell+1}$, imamo

$$\left\| D_t u(\cdot,t_{\ell+1}) - \frac{u(\cdot,t_{\ell+1}) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell)}{\Delta t} \right\|^2_{0,\Omega} =$$

$$= \int_\Omega \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t-t_\ell) D_t^2 u(X(x,t_{\ell+1};t),t)\, dt \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{\Delta t}{3} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \int_\Omega | D_t^2 u(X(x,t_{\ell+1};t),t) |^2 \, dx\, dt =$$

$$= \frac{\Delta t}{3} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \int_\Omega | D_t^2 u(x,t) |^2 \, dx\, dt ,$$

pri čemu poslednja jednakost sledi prema teoremi 2.5. . Time je dokaz završen .

LEMA 2.8.

Neka važe pretpostavke (2.15),(2.17),(2.18),(2.19) i (2.21). Tada je

$$\left\| \frac{u(X^\ell(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_\ell),t_\ell)}{\Delta t} \right\|^2_{0,\Omega} \leq$$

(2.27)

$$\leq C_1 \| e^\ell \|^2_{0,\Omega} + C_1 \frac{\Delta t}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(t_\ell,t_{\ell+1};L^2(\Omega)^2)} ,$$

gde je

$$C_1 = 3 \, \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \exp\{3T^2 \, \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}\} .$$

DOKAZ

Kako je

$$\| u(X^{\ell}(\cdot,t_{\ell+1};t_{\ell}),t_{\ell}) - u(X(\cdot,t_{\ell+1};t_{\ell}),t_{\ell}) \|^2_{0,\Omega} \leq$$

(2.28)

$$\leq \| \nabla u \|^2_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega)^2)} \int_{\Omega} | X^{\ell}(x,t_{\ell+1};t_{\ell}) - X(x,t_{\ell+1};t_{\ell}) |^2 dx,$$

preostaje da se oceni integral na desnoj strani nejednakosti (2.28). Primenjujući nejednakost $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ i lemu 2.5., imamo

$$\int_{\Omega} | X^{\ell}(x,t_{\ell+1};t_{\ell}) - X(x,t_{\ell+1};t_{\ell}) |^2 \, dx \leq$$

$$\leq 3\Delta t \int_{t}^{t_{\ell+1}} \int_{\Omega} | u^{\ell}(X^{\ell}(x,t_{\ell+1};s)) - u(X^{\ell}(x,t_{\ell+1};s),t_{\ell}) |^2 dx\, ds +$$

$$+ 3\Delta t \int_{t}^{t_{\ell+1}} \int_{\Omega} | u(X^{\ell}(x,t_{\ell+1};s),t_{\ell}) - u(X^{\ell}(x,t_{\ell+1};s),s) |^2 dx\, ds +$$

$$+ 3\Delta t \int_{t}^{t_{\ell+1}} \int_{\Omega} | u(X^{\ell}(x,t_{\ell+1};s),s) - u(X(x,t_{\ell+1};s),s) |^2 \, dx\, ds \leq$$

$$\leq 3\Delta t \int_{t_{\ell}}^{t_{\ell+1}} \int_{\Omega} | u^{\ell}(x) - u(x,t_{\ell}) |^2 \, dx\, ds +$$

$$+ 3\Delta t \int_{t_{\ell}}^{t_{\ell+1}} \int_{\Omega} | u(x,t_{\ell}) - u(x,s) |^2 \, dx\, ds +$$

$$+ 3\Delta t \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \int_t^{t_{\ell+1}} \int_\Omega |X^\ell(x,t_{\ell+1};s)-X(x,t_{\ell+1};s)|^2 dx ds.$$

Na osnovu leme Gronwalla [Girault, Raviart, 1979],

$$\int_\Omega |X^\ell(x,t_{\ell+1};t) - X(x,t_{\ell+1};t)|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \left\{3(\Delta t)^2 \|e^\ell\|^2_{0,\Omega} + 3\Delta t \int_t^{t_{\ell+1}} \int_\Omega \left| \int_{t_\ell}^s \frac{du}{dt}(x,t)dt \right|^2 dx \, ds \right\} *$$

$$* \exp\left\{3(\Delta t)^2 \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}\right\} \leq$$

$$\leq 3(\Delta t)^2 \exp\{3T^2 \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}\} *$$

(2.29)

$$*(\|e^\ell\|^2_{0,\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(t_\ell;t_{\ell+1};L^2(\Omega)^2)}),$$

za svako t iz intervala $[t_\ell, t_{\ell+1}]$. Specijalno, za $t = t_\ell$ iz (2.29) dobijamo ocenu koja zajedno sa (2.28) daje (2.27). Time je lema dokazana.

TEOREMA 2.8.

Neka je $\Omega \subset R^2$ klase $\mathcal{A}$ i neka važe pretpostavke (2.15),(2.17),(2.18),(2.19),(2.21) . Tada je

$$\| u(.,t_{m+1}) - u^{m+1}(.) \|^2_{0,\Omega} + \nu \Delta t \sum_{\ell=1}^{m+1} | u(.,t_\ell) - u^\ell(.) |^2_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq C_2 \, (\Delta t)^2 \quad ,$$

gde je

$$C_2 = 4T\exp(1)\, \exp(8T^2 C_1 \exp(1)) \,*$$

$$* \left\{ \frac{2}{3} \| D_t^2 u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} + C_1 \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \right\} ,$$

a C_1 je konstanta definisana u lemi 2.8..

DOKAZ

Prema (2.23),(2.26) i (2.27) imamo :

$$\| e^{m+1} \|^2_{0,\Omega} + \nu \Delta t \sum_{\ell=0}^{m} | e^{\ell+1} |^2_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq 4T\exp(1)\, (\Delta t)^2 \left\{ \frac{2}{3} \| D_t^2 u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \right.$$

$$\left. + C_1 \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \right\} + 8T\exp(1) C_1 \,\Delta t \sum_{\ell=0}^{m} \| e^\ell \|^2_{0,\Omega} \;.$$

Preostaje da se primeni lema 2.2. i dokaz je završen.

NAPOMENA 2.1.

Da smo izvod $\partial u/\partial t$ aproksimirali standardnom podeljenom razlikom prvog reda dobili bismo grešku oblika

$$\text{const } (\Delta t)^2 \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$$

u odgovarajućim normama. Međutim, rešenje zadatka strujanja fluida sa jakom konvekcijom znatno sporije se menja po trajektorijama nego u pravcu ose Ot. Zato, naša semidiskretna metoda se može koristiti sa većim vremenskim korakom, bez gubitka tačnosti .

Važno je primetiti da je metoda stabilna u normi $|||\cdot|||$ za svako $\nu \geq 0$.

NAPOMENA 2.2.

Konstanta u oceni greške za standardnu semidiskretnu metodu zavisi od kinematičke viskoznosti ν i ponaša se kao $1/\nu$, kada $\nu \to 0$ [Girault, Raviart, 1979]. S druge strane, naše konstante C_1 i C_2 ne zavise eksplicitno od ν .

III

DISKRETIZACIJA JEDNAČINA NAVIER-STOKESA LAGRANGE-GALERKINOVOM METODOM MEŠOVITIH KONAČNIH ELEMENATA

U ovom poglavlju, koje sadrži odeljke 3.1-3.4, opisuje se Lagrange-Galerkinova metoda mešovitih konačnih elemenata. Ona je kombinacija semidiskretne metode koja se zasniva na Lagrangeovoj reprezentaciji toka fluida (v. prethodno poglavlje) i i mešovite metode konačnih elemenata.

U odeljku 3.1. uvodi se pojam mešovitog eliptičkog projektora. U odeljku 3.2. opisuju se stabilne familije konačnih elemenata u smislu Brezzija. U odeljku 3.3. ispituje se postupak aproksimacije trajektorija. U odeljku 3.4. formulišu se diskretni zadaci i dokazuje se egzistencija i jedinstvenost rešenja.

3.1. Mešoviti eliptički projektor

Diskretizacija problema (P) i (Q) metodom mešovitih konačnih elemenata zasniva se na konačnodimenzionim prostorima

$$X_h \subset H^1_o(\Omega) \quad \text{i} \quad M_h \subset L^2_o(\Omega).$$

Definišimo prostore

$$W_h = (X_h)^2 , \quad V_h = \{ v_h \in W_h : (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h \}$$

i usvojimo sledeće hipoteze H1, H2 i H3.

Hipoteza H1

Postoji ceo broj $\ell_o \geq 1$, tako da je

$$(3.1) \qquad \inf_{v_h \in W_h} \| v - v_h \|_{1,\Omega} \leq C_1 h^r \| v \|_{r+1,\Omega}$$

$$\forall v \in H^{r+1}(\Omega)^2 \quad \forall r: 0 \leq r \leq \ell_o .$$

Hipoteza H2

$$(3.2) \qquad \inf_{q_h \in M_h} \| q - q_h \|_{o,\Omega} \leq C_2 h^r \| q \|_{r,\Omega}$$

$$q \in H^r(\Omega) \cap L^2_o(\Omega) \qquad \forall r: 0 \leq r \leq \ell_o \quad .$$

Hipoteza H3

Postoji pozitivna konstanta C_3, takva da je

$$\sup_{v_h \in W_h} \frac{(\nabla \cdot v_h, q_h)}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq C_3 \|q_h\|_{o,\Omega} \quad \forall q_h \in M_h . \tag{3.3}$$

Hipoteza H3 naziva se uslov Brezzija [Brezzi, 1974].

Definišimo sada mešovitu eliptičku projekciju (w_h, s_h) uređenog para (u,p), kao rešenje sledeće familije mešovitih eliptičkih varijacionih zadataka.

Za dat uređen par (u,p),

$$u \in L^\infty(0,T;V), \quad p \in L^\infty(0,T;L_o^2(\Omega)),$$

(R_h) odrediti $(w_h, s_h) : [0,T] \longrightarrow W_h \times M_h$, tako da je

$$\nu(\nabla(u(t)-w_h(t)), \nabla v_h) - (\nabla \cdot v_h, p(t)-s_h(t)) = 0 \quad \forall v_h \in W_h,$$

$$(\nabla \cdot (u(t)-w_h(t)), q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h .$$

Očigledno, ako je (w_h, s_h) rešenje problema (R_h), tada $w_h : [0,T] \rightarrow V_h$. Definišimo funkcije η i χ formulama

$$\eta = u - w_h , \qquad \chi = p - s_h .$$

Važi sledeća teorema.

TEOREMA 3.1.

Pretpostavimo da $u \in L^{\infty}(0,T;V)$, $p \in L^{\infty}(0,T;L_0^2(\Omega))$ i da važe hipoteze H1-H3. Tada (R_h) ima jedinstveno rešenje (do na skup mere nula) $w_h : [0,T] \rightarrow V_h$. Ako je $q \geq 1$ realan broj,

$$u \in L^{\infty}(0,T;H^{q+1}(\Omega)^2 \cap V) \quad \text{i}$$
$$p \in L^{\infty}(0,T;H^{q}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)),$$

tada je

$$\|\eta\|_{L^s(0,T;H^1(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu}\|\chi\|_{L^s(0,T;L^2(\Omega))}$$

(3.4)

$$\leq C_4 h^r (\|u\|_{L^s(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu}\|p\|_{L^s(0,T;H^r(\Omega))}),$$

za $\forall s \in [1,\infty]$ $\forall r$: $0 \leq r \leq \min(\ell_0, q)$.

Ako uz to

$$u' \in L^2(0,T;H^q(\Omega)^2 \cap H)$$
$$p' \in L^2(0,T;H^{q-1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)),$$

tada je

$$\| \dot{\eta}' \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| \chi' \|_{L^2(0,T;\dot{L}^2(\Omega))} \tag{3.5}$$
$$\leq C_5 h^r (\| u' \|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p' \|_{\dot{L}^2(0,T;H^r(\Omega))})$$

za $\forall r: 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q-1)$.

DOKAZ

Egzistencija i jedinstvenost rešenja dokazuje se standardnom tehnikom [Brezzi, 1974; Girault, Raviart, 1979].

Neka $v_h \in V_h$ i neka je $z_h = w_h - v_h$. Tada $z_h \in V_h$ i pri tome je

$$\nu | v_h |^2_{1,\Omega} = \nu (\nabla v_h, \nabla v_h) = \nu (\nabla w_h, \nabla v_h) - \nu (\nabla z_h, \nabla v_h) =$$

$$= \nu (\nabla (u - z_h), \nabla v_h) - (\nabla \cdot v_h, p) =$$

$$= \nu (\nabla (u - z_h), \nabla v_h) - (\nabla \cdot v_h, p - q_h) \qquad \forall q_h \in M_h .$$

Odatle, koristeći nejednakost Cauchy-Schwartza,

$$| v_h |_{1,\Omega} \leq | u - z_h |_{1,\Omega} + \frac{1}{\nu} \| p - q_h \|_{0,\Omega} \qquad \forall q_h \in M_h .$$

Međutim,

$$| \eta |_{1,\Omega} = | u - w_h |_{1,\Omega} \leq | u - z_h |_{1,\Omega} + | z_h - w_h |_{1,\Omega}$$

$$\leq 2\,|u - z_h|_{1,\Omega} + \frac{1}{\nu}\|p - q_h\|_{0,\Omega} \qquad \forall z_h \in V_h \quad \forall q_h \in M_h ,$$

te prema H1, H2 i nejednakosti

$$\inf_{z_h \in V_h} |u - z_h|_{1,\Omega} \leq (1+\frac{1}{C_3}) \inf_{v_h \in W_h} |u - v_h|_{1,\Omega} ,$$

koja se lako dokazuje pomoću H3, sledi da je

$$|\eta|_{1,\Omega} \leq C_6 h^r (\|u\|_{r+1,\Omega} + \frac{1}{\nu}\|p\|_{r,\Omega})$$

(3.6)

$$\forall r:\ 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q),\ C_6 = \max(2C_1 + \frac{2C_1}{C_3},\ C_2) .$$

Na osnovu nejednakosti Poincaré-Fridrichsa [Girault, Raviart, 1979],

$$\|\eta\|_{1,\Omega} \leq C_7 |\eta|_{1,\Omega}$$

te je,

$$\|\eta\|_{L^s(0,T;H^1(\Omega)^2)} \leq C_6 C_7 h^r (\|u\|_{L^s(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} +$$

(3.7)

$$+ \frac{1}{\nu}\|p\|_{L^s(0,T;H^r(\Omega))}) \quad \forall s \in [1,\infty] \quad \forall r: 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q).$$

Dalje, iz (R_h) sledi da je

$$-(\nabla\cdot v_h, s_h) = \nu(\nabla(u-w_h), \nabla v_h) - (\nabla\cdot v_h, p) \qquad \forall\, v_h \in W_h\,.$$

Prema tome,

$$-(\nabla\cdot v_h, s_h - q_h) = \nu(\nabla(u-w_h), \nabla v_h) - (\nabla\cdot v_h, p-q_h)$$
$$\forall\, v_h \in W_h \quad \forall\, q_h \in M_h\,.$$

Odatle, po H3,

$$\| q_h - s_h \|_{o,\Omega} \leq \frac{1}{C_3}\,(\nu|\eta|_{1,\Omega} + \| p-q_h \|_{o,\Omega}) \qquad \forall\, q_h \in M_h$$

i

$$\frac{1}{\nu}\|\chi\|_{o,\Omega} = \frac{1}{\nu}\| p-s_h \|_{o,\Omega} \leq \frac{1}{\nu}\| p-q_h \|_{o,\Omega} + \frac{1}{\nu}\| q_h-s_h \|_{o,\Omega}$$

$$\leq (1+\frac{1}{C_3})(|\eta|_{1,\Omega} + \frac{1}{\nu}\| p-q_h \|_{o,\Omega}) \qquad \forall\, q_h \in M_h\,.$$

Služeći se ocenom (3.6) i hipotezom H2, lako dokazujemo da je

$$\frac{1}{\nu}\|\chi\|_{L^s(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_8 h^r (\| u \|_{L^s(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} +$$

(3.8)

$$+ \frac{1}{\nu}\| p \|_{L^s(0,T;H^r(\Omega))})$$

$\forall s \in [1,\infty] \quad \forall r: 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q), \quad C_8 = (C_2+C_6)(1+\frac{1}{C_3})$.

Sada (3.4) sledi iz (3.7) i (3.8), pri čemu je $C_4 = C_6C_7 + C_8$. Ocena (3.5) dokazuje se analogno : dovoljno je diferencirati jednačine u zadatku (R_h) i primeniti isti postupak sa $s = 2$.

TEOREMA 3.2.

Pretpostavimo da je $\Omega \subset R^2$ konveksna ograničena oblast sa poligonalnom granicom, $q \geq 1$ realan broj i

$$u \in L^\infty(0,T;H^{q+1}(\Omega)^2 \cap V),$$
$$p \in L^\infty(0,T;H^q(\Omega) \cap L_o^2(\Omega)).$$

Ako važe hipoteze H1-H3, tada je

$$\|\eta\|_{L^s(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq C_9 h^{r+1}(\|u\|_{L^s(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu}\|p\|_{L^s(0,T;H^r(\Omega))}) \tag{3.9}$$

$$\forall s \in [1,\infty] \quad \forall r: 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q) .$$

Ako, pored toga,

$$u' \in L^2(0,T;H^q(\Omega)^2 \cap H),$$
$$p' \in L^2(0,T;H^{q-1}(\Omega) \cap L_o^2(\Omega)),$$

tada je

$$\|\eta'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq C_{10}\, h^{r+1}\big(\|u'\|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \tag{3.10}$$
$$+ \frac{1}{\nu}\|p'\|_{L^2(0,T;H^r(\Omega))}\big) \qquad \forall r:\ 0 \leq r \leq \min(\ell_0, q-1)\ .$$

DOKAZ

Služićemo se Aubin-Nitscheovom tehnikom dualnosti [Aubin, 1972; Nitsche, 1968], koja se bazira na formuli

$$\|\eta\|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)^2} \frac{|(g,\eta)|}{\|g\|_{0,\Omega}}\ . \tag{3.11}$$

Za svaku funkciju $g \in L^2(\Omega)^2$, posmatraćemo sledeći zadatak.

Odrediti $(z,r) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ tako da je

$$\nu(\nabla z, \nabla v) - (\nabla\cdot v, r) = (g,v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)^2 \tag{3.12}$$
$$(\nabla\cdot z, q) = 0 \qquad \forall q \in L_0^2(\Omega)\ .$$

Kako je Ω konveksna poligonalna oblast, na osnovu teoreme o regularnosti rešenja Stokesovog problema [Kellogg, Osborn, 1976; Grisvard, 1978] sledi da je

$$(3.13) \qquad \|z\|_{2,\Omega} + \frac{1}{\nu}\|r\|_{1,\Omega} \le \frac{C_{11}}{\nu}\|g\|_{0,\Omega} \quad {}^{1)}$$

Iz zadatka (3.12) sledi da je

$$(g,\eta) = \nu(\nabla z,\nabla\eta) - (\nabla\cdot\eta,r) = \nu(\nabla(u-w_h),\nabla z)-(\nabla\cdot(u-w_h),r).$$

Međutim,

$$\nu(\nabla(u-w_h),\nabla z_h) = (\nabla\cdot z_h,p) = (\nabla\cdot z_h,p-q_h) \quad \forall z_h\in V_h \ \forall q_h\in M_h,$$

$$(\nabla\cdot z,p-q_h) = 0 \qquad \forall q_h\in M_h ,$$

$$(\nabla\cdot(u-w_h),r_h) = 0 \qquad \forall r_h\in M_h ,$$

i prema tome,

$$(g,\eta) = \nu(\nabla\eta,\nabla(z-z_h))+(\nabla\cdot(z_h-z),\chi)+(\nabla\cdot\eta,r_h-r) \qquad \forall z_h\in V_h \quad \forall r_h\in M_h.$$

Odatle sledi da je

$$|(g,\eta)|\le\nu(|\eta|_{1,\Omega} + \frac{1}{\nu}\|\chi\|_{0,\Omega})(|z-z_h|_{1,\Omega} + \frac{1}{\nu}\|r-r_h\|_{0,\Omega}) \qquad \forall z_h\in V_h \quad \forall r_h\in M_h .$$

---

1) Za ograničenu oblast Ω sa granicom klase C^2 takođe važi apriorna ocena (3.13) [Cattabriga, 1961; Solonnikov, 1960; Vorovič, Judovič, 1961, von Wahl, 1980].

Koristeći nejednakost

$$\inf_{z_h \in V_h} | z - z_h |_{1,\varrho} \leq (1+ \frac{1}{C_3}) \inf_{v_h \in W_h} | z - v_h |_{1,\varrho} \quad ,$$

hipoteze H1, H2 i apriornu ocenu (3.13),

$$|(g,\eta)| \leq C_{12}(|\eta|_{1,\varrho} + \frac{1}{\nu} \| \chi \|_{o,\varrho}) \| g \|_{o,\varrho} \cdot h \ ,$$

gde je $C_{12} = C_{11} \max \left(C_1 + \frac{C_1}{C_3} , C_2\right)$. Koristeći (3.11) i (3.4) dobijamo željenu ocenu (3.9) sa $C_9 = C_4 C_{12}$. Dokaz nejednakosti (3.10) je analogan .

3.2. Konstrukcija prostora konačnih elemenata

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω [Ciarlet, 1978] , pri čemu je dijametar svakog od elemenata ograničen sa h $(h > 0)$.

Za ceo broj $k \geq 0$, neka $P_k(K)$ označava prostor svih polinoma stepena $\leq k$ nad elementom K, $K \in \mathcal{C}_h$.

Definišimo prostor W_h sa

(3.14) $$W_h = \{ v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega)^2 : v_{i|K} \in P_k(K), i=1,2; \forall K \in \mathcal{C}_h \},$$

a prostor M_h sa

(3.15a) $$M_h = \{ p \in L_0^2(\Omega) : p_{|K} \in P_\ell(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}_h \}$$

ili sa

(3.15b) $$M_h = \{ p \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : p_{|K} \in P_\ell(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}_h \}.$$

Prostori W_h i M_h imaju sledeće dobro poznate osobine [Ciarlet, Raviart, 1972; Ciarlet, 1978] .

LEMA 3.1.

Neka je $k \geq 1$ ceo broj. Tada je

$$\inf_{v_h \in W_h} \| u - v_h \|_{1,\Omega} \leq C_1 h^r \| u \|_{r+1,\Omega}$$

$$\forall u \in H^{r+1}(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 \qquad \forall r: 0 \leq r \leq k .$$

LEMA 3.2.

Neka je $\ell \geq 0$ ceo broj. Tada je

$$\inf_{q_h \in M_h} \| p - q_h \|_{o,\Omega} \leq C_2 h^r \| p \|_{r,\Omega} ,$$

$$\forall p \in H^r(\Omega) \cap L_o^2(\Omega) \qquad \forall r: 0 \leq r \leq \ell + 1.$$

Sa takvim izborom prostora W_h i M_h hipoteze H1 i H2 su zadovoljene sa $\ell_o = \min(k, \ell+1)$. U praksi se obično uzima $k = \ell + 1$, tako da je stepen elementa za brzinu za jedan viši od stepena elementa za pritisak.

Za familiju $\{W_h, M_h\}$ kaže se da je stabilna, ako zadovoljava hipotezu H3 (uslov Brezzija). U radu Mansfielda [Mansfield, 1982] konstruisane su stabilne familije sa optimalnim brzinama konvergencije, dok Boland i Nicolaides [Boland, Nicolaides, 1983] analiziraju jedan prost algoritam za ispitivanje stabilnosti. Brezzijev uslov H3 može se zameniti i uslovom stabilnosti u smislu makroelemenata, koji se u poređenju sa H3 relativno lako proverava [Stenberg, 1984]. Primeri stabilnih familija sa optimalnim brzinama konvergencije dati su i u radovima [Pitkäranta, Stenberg, 1984 ; Verfürth, 1984].

3.3. Aproksimacija trajektorija

U ovom odeljku ćemo sistem (2.8) aproksimirati autonomnim sistemom diferencijalnih jednačina.

Neka je $u_{oh} \in W_h$ aproksimacija funkcije $u_o \in V$ definisana sledećim zadatkom .

Za dato $u_o \in V$ odrediti uređen par $(u_{oh}, p_{oh}) \in W_h \times M_h$, tako da je

$$
(3.16)\qquad
\begin{aligned}
&(\nabla(u_{oh}-u_o), \nabla v_h) - (\nabla \cdot v_h, p_h) = 0 \qquad \forall\, v_h \in W_h \\
&(\nabla \cdot (u_{oh}-u_o), q_h) = 0 \qquad \forall\, q_h \in M_h .
\end{aligned}
$$

Ako $u_o \in H^{q+1}(\Omega)^2 \cap V$, $q \geq 1$ i ako važe hipoteze H1 - H3, na isti način kao u teoremama 3.1 i 3.2 dokazujemo da je

$$
(3.17)\qquad
\begin{aligned}
&\| u_o - u_{oh} \|_{0,\Omega} + h \| u_o - u_{oh} \|_{1,\Omega} \leq C_{13} h^{r+1} \| u_o \|_{r+1,\Omega} \\
&\forall\, r:\ 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q), \quad C_{13} = \max(C_4, C_9) .
\end{aligned}
$$

Neka je $u_h^o = u_{oh}$ i pretpostavimo da smo već odredili u_h^k za svako k, $0 \leq k \leq m$, gde je m ceo broj , $0 \leq m \leq M-1$. Pre nego što opišemo postupak određivanja u_h^{m+1} uvedimo neke oznake. Neka je M pozitivan ceo broj , $\Delta t = T/M$, $t_j = j.\Delta t$, $j = 0,\ldots,M$ i

$$d_t u_h^{m+1}(x) = \frac{u_h^{m+1}(x) - u_h^m(X_h^m(x,t_{m+1};t_m))}{\Delta t} \ ,$$

gde je $X_h^m(x,t_{m+1};\cdot)$ rešenje Cauchyjevog problema

$$\frac{dX_h^m}{dt}(x,t_{m+1};t) = u_h^m(X_h^m(x,t_{m+1};t)), \quad t_m \leq t < t_{m+1},$$

(3.18)

$$X_h^m(x,t_{m+1};t_{m+1}) = x \ .$$

Ne ograničavajući opštost možemo pretpostaviti da je $0 < h \leq h_o < 1$.

Neka je $\Delta t = \Delta t(h)$. Definišimo

$$\mathcal{E}(h) = \frac{\Delta t}{h}$$

i pretpostavimo da je

(3.19) $$\mathcal{E}(h) = o(1) \ , \quad h \rightarrow 0 \ .$$

Pretpostavimo, nadalje, da je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija [Ciarlet, 1978] konveksne poligonalne oblasti Ω . Tada važe sledeće tzv. inverzne osobine :

(3.20a) $$\| v_h \|_{1,\Omega} \leq C_{14} h^{-1} \| v_h \|_{o,\Omega} \qquad \forall v_h \in W_h,$$

(3.20b) $$\| \nabla v_h \|_{o,\infty;\Omega} \leq C_{15} h^{-1} \| v_h \|_{o,\infty;\Omega} \quad \forall v_h \in W_h,$$

(3.20c) $$\| v_h \|_{o,\infty;K} \leq C_{16} h^{-1} \| v_h \|_{o,K} \quad \forall K \in \mathcal{C}_h \ \forall v_h \in W_h,$$

(3.20d) $$\| v_h \|_{o,\infty;\Omega} \leq C_{17} \, |\ln h|^{1/2} \, \| v_h \|_{1,\Omega} \quad \forall v_h \in W_h$$

[(3.20a-c) Ciarlet, 1978 ; (3.20d) Schatz, 1984].

LEMA 3.3.

Neka je $\mathcal{T}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω , $u_o \in H^2(\Omega)^2 \cap V$ i pretpostavimo da važe hipoteze H1 - H3 i (3.19) .

Tada postoji $h_1 \in (0,h_o]$, tako da je

(3.21) $$\| u_h^o \|_{o,\infty;\Omega} < \left(\frac{h}{\Delta t}\right)^{1/2} \qquad \forall h \in (0,h_1] .$$

DOKAZ

Neka je K proizvoljan element trijangulacije $\mathcal{T}_h$. Tada je

(3.22)
$$\| u_o - u_{oh} \|_{o,K} \leq \| u_o - u_{oh} \|_{o,\Omega}$$
$$\| u_o \|_{o,K} \leq (\text{mes}(K))^{1/2} \, \| u_o \|_{o,\infty;\Omega} \leq h \, \| u_o \|_{o,\infty;\Omega}$$

Na osnovu (3.20c), (3.22) i (3.17) sa q = 1 imamo,

$$\| u_h^o \|_{o,\infty;\Omega} = \| u_{oh} \|_{o,\infty;\Omega} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \| u_{oh} \|_{o,\infty;K} \leq$$

$$\leq C_{16}\, h^{-1} \max_{K\in\mathcal{C}_h} \| u_{oh} \|_{o,K} \leq$$

$$\leq C_{16}\, h^{-1} \left(\max_{K\in\mathcal{C}_h} \| u_o - u_{oh} \|_{o,K} + \max_{K\in\mathcal{C}_h} \| u_o \|_{o,K} \right) \leq$$

$$\leq C_{16} \left(C_{13}\, h \| u_o \|_{2,\Omega} + \| u_o \|_{o,\infty;\Omega} \right) .$$

Prema teoremi potapanja [Adams, 1975] ,

$$\| u_o \|_{o,\infty;\Omega} \leq C_{18} \| u_o \|_{2,\Omega} ,$$

te je

$$\| u_h^o \|_{o,\infty;\Omega} \leq C_{16}(C_{13}h + C_{18}) \| u_o \|_{2,\Omega} .$$

Pošto postoji $h_1 \in (0,h_o]$, tako da je

$$C_{16}(C_{13}h + C_{18}) \| u_o \|_{2,\Omega} < [\varepsilon(h)]^{-1/2} \quad \forall h \in (0,h_1],$$

dokaz je završen .

Slično se dokazuje i sledeći rezultat .

LEMA 3.4.

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω, $u \in L^{\infty}(0,T;H^2(\Omega)^2 \cap V)$, k ceo broj, $0 \leq k \leq M$, $u_h^k \in W_h$,

$$(3.23) \qquad \| u(\cdot,t_k)-u_h^k \|_{o,\Omega} \leq C_{19}(h + \triangle t),$$

gde je C_{19} ($\geq C_{13}$) konstanta nezavisna od k, h i $\triangle t$ i neka važi (3.19).

Tada postoji $h_2 \in (0,h_1]$, nezavisan od k i $\triangle t$, tako da je

$$(3.24) \qquad \begin{aligned} &\| u_h^k \|_{o,\infty;\Omega} < \left(\frac{h}{\triangle t}\right)^{1/2} && \forall h \in (0,h_2], \\ &C_{19} < \min\left(\frac{1}{\sqrt{h}}, \frac{1}{\varepsilon(h)}\right) && \forall h \in (0,h_2]. \end{aligned}$$

DOKAZ

Analogan dokazu prethodne leme.

LEMA 3.5.

Neka je $\mathcal{T}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω. Neka je, dalje, k ceo broj, $0 \leq k \leq M-1$, $u_h^k \in W_h$,

$$(3.25) \qquad \| u_h^k \|_{o,\infty;\Omega} < \left(\frac{h}{\triangle t}\right)^{1/2} \qquad \forall h \in (0,h_2]$$

i neka važi (3.19).

Tada postoji $h_3 \in (0,h_2]$ nezavisan od k i Δt, takvo da je preslikavanje $x \longrightarrow X_h^k(x,t_{k+1};t)$ definisano sa (3.18) Lipschitz-neprekidna bijekcija skupa Ω na Ω za svako $h \in (0,h_3]$ i svako $t \in [t_k,t_{k+1}]$.

DOKAZ

Tvrđenje je očigledno za $t = t_{k+1}$. Pretpostavimo zato da $t \in [t_k,t_{k+1})$. Na osnovu definicije prostora W_h funkciju u_h^k možemo produžiti nulom na R^2 sačuvajući klasu $W^{1,\infty}(\Omega_1)^2 \cap C(\bar{\Omega}_1)$, za svaki otvoren nadskup Ω_1 skupa Ω. Pretpostavimo da je rastojanje komplementa skupa Ω_1 od skupa Ω veći od 2d, gde je

$$d = \sup_{h \in (0,h_2]} h.[\varepsilon(h)]^{1/2} .$$

Svaka tačka $x_o \in \Omega_1 \setminus \Omega$ je kritična tačka autonomnog sistema (3.18). Funkcija u_h^k zadovoljava uslove Cauchy-Lipschitzove teoreme na skupu Ω_1 i prema tome, ako x pripada skupu Ω tada $X_h^k(x,t_{k+1};t)$ pripada Ω za svako $t \in [t_k,t_{k+1}]$ jer integralne krive sistema (3.18) ne mogu sadržati kritične tačke [Lefschetz, 1977]. Tako smo dokazali da $x \longrightarrow X_h^k(x,t_{k+1};t)$ preslikava skup Ω u sebe za svako $t \in [t_k,t_{k+1}]$.

Prema inverznoj osobini (3.20b) i nejednakosti (3.25) imamo :

$$(3.26) \qquad \Delta t \, \| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega} \leq C_{15}(\Delta t/h)^{1/2} \qquad \forall\, h \in (0,h_2] .$$

Stoga, postoji $h_3 \in (0,h_2]$ takvo da je

$$(3.28)\quad \begin{aligned} &1 - \Delta t \,\| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega} \cdot \exp(\Delta t \,\| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega}) \geq \\ &\geq 1 - C_{15}\, \varepsilon(h)^{1/2} \exp(C_{15}\, \varepsilon(h)^{1/2}) > 0 \quad \forall h \in (0,h_3]. \end{aligned}$$

Koristeći lemu Gronwalla [Girault, Raviart, 1979] lako dokazujemo da je

$$(3.29)\quad \begin{aligned} &|X_h^k(x,t_{k+1};t) - X_h^k(y,t_{k+1};t)| \geq \\ &\geq |x-y|\,(1- \Delta t \,\| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega} \exp(\Delta t \,\| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega})) \\ &\forall h \in (0,h_3] \quad \forall t \in [t_k,t_{k+1}]\,. \end{aligned}$$

Prema (3.28), (3.29) implicira injektivnost preslikavanja $x \longrightarrow X_h^k(x,t_{k+1};t) \quad \forall t \in [t_k,t_{k+1}] \quad \forall h \in (0,h_3]$.

Na osnovu leme Gronwalla,

$$\begin{aligned} &|X_h^k(x,t_{k+1};t) - X_h^k(y,t_{k+1};t)| \leq \\ &\leq |x-y| \exp(\Delta t \,\| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega}) \leq \\ &\leq |x-y| \exp(C_{15}\, \varepsilon(h)^{1/2}) \\ &\forall h \in (0,h_3] \quad \forall t \in [t_k,t_{k+1}] \quad \forall x, y \in \Omega\,. \end{aligned}$$

Tako smo dokazali Lipschitz-neprekidnost preslikavanja $x \longrightarrow X_h^k(x,t_{k+1};t)$ $\forall\, h \in (0,h_3]$ $\forall\, t \in [t_k,t_{k+1}]$.

Surjektivnost preslikavanja $x \longrightarrow X_h^k(x,t_{k+1};t)$ na skupu Ω dokazaćemo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da ono nije surjektivno za neko $h \in (0,h_3]$ i neko $t \in [t_k,t_{k+1})$. Tada postoji $y_o \in \Omega$, tako da je $X_h^k(x,t_{k+1};t) \neq y_o$ $\forall\, x \in \Omega$. Okružimo tačku y_o zatvorenim krugom $B(y_o,2d)$ poluprečnika $2d$ i definišimo preslikavanje $\Phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$ formulom

$$\Phi(x) = \begin{cases} X_h^k(x,t_{k+1};t), & x \in \Omega \,, \\ x \,, & x \in \Omega_1 \setminus \Omega \,. \end{cases}$$

Tada je Φ neprekidno preslikavanje, pa je $\hat{B} = \{\Phi(x) : x \in B(y_o,2d)\}$ povezan skup. Integrirajući (3,18) i koristeći (3.25) imamo :

$$|x - \Phi(x)| \leq \Delta t \, \| u_h^k \|_{o,\infty;\Omega} < d \qquad \forall\, x \in \Omega_1 \,,$$

te granica skupa $\hat{B}$ okružuje tačku y_o. Zbog povezanosti skupa $\hat{B}$, $y_o \in \hat{B}$, pa postoji $x_o \in B(y_o,2d)$ tako da je $\Phi(x_o) = y_o$. Pošto $y_o \in \Omega$, to $x_o \in \Omega$ i $X_h^k(x_o,t_{k+1};t) = y_o$, što je kontradikcija. Time je dokaz završen.

Na osnovu prethodne leme vektor-funkcija $x \longrightarrow X_h^k(x,t_{k+1};t)$ je diferencijabilna u smislu teorije distribucija. Pored toga,

$$\partial X_{h,i}^k(x,t_{k+1};t)/\partial x_j \in L^\infty(\Omega) , \quad i, j = 1,2 ,$$

$$\nabla X_h^k(x,t_{k+1};t)=I- \int_t^{t_{k+1}} \nabla u_h^k(X_h^k(x,t_{k+1};s)) \nabla X_h^k(x,t_{k+1};s)ds$$

$$\forall t \in [t_k,t_{k+1}] ,$$

gde I označava jediničnu matricu : $I = [\delta_{ij}]_{1\le i,j\le 2}$.

Neka je M proizvoljna kvadratna matrica : $M = [m_{ij}]_{1\le i,j\le 2}$. Definišimo normu $\| . \|_*$ formulom

$$\| M \|_* = \max_{1\le j\le 2} \sum_{i=1}^{2} |m_{ij}| .$$

Tada je

$$\| \nabla X_h^k(x,t_{k+1};t)\|_* \le$$

$$\le 1 + \int_t^{t_{k+1}} \| \nabla u_h^k(X_h^k(x,t_{k+1};s)\|_* \| \nabla X_h^k(x,t_{k+1};s)\|_* ds \le$$

$$\le 1 + 2 \| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega} \int_t^{t_{k+1}} \| \nabla X_h^k(x,t_{k+1};s) \|_* ds \le$$

$$\le 1 + \frac{2}{\Delta t} c_{15} \varepsilon(h)^{1/2} \int_t^{t_{k+1}} \| \nabla X_h^k(x,t_{k+1};s) \|_* ds .$$

Na osnovu leme Gronwalla,

$$\| \nabla X_h^k(x,t_{k+1};t) \|_{*} \leq \exp(2\, C_{15}\, \varepsilon(h)^{1/2})$$

(3.30)

$$\forall\, h \in (0,h_3] \quad \forall t \in [t_k,t_{k+1}] .$$

Dalje, prema (3.30),

$$|\partial X_{h,i}^k(x,t_{k+1};t)/\partial x_j - \delta_{ij}| \leq$$

$$\leq \| \nabla u_h^k \|_{0,\infty;\Omega} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (|\partial X_{h,1}^k(x,t_{k+1};s)/\partial x_j| +$$

$$+ |\partial X_{h,2}^k(x,t_{k+1};s)/\partial x_j|)ds \leq$$

$$\leq C_{15}\, \varepsilon(h)^{1/2} \exp(2C_{15}\, \varepsilon(h)^{1/2})$$

$$\leq C_{20}\, \varepsilon(h)^{1/2} ,$$

gde je

$$C_{20} = C_{15} \exp(2C_{15} \sup_{h \in (0,h_3]} \varepsilon(h)^{1/2}) .$$

Prema (3.19) postoji $h_4 \in (0,h_3]$ tako da je

(3.31) $$C_{20}\, \varepsilon(h)^{1/2} \leq 1/4 \qquad \forall\, h \in (0,h_4] .$$

Sada se lako dokazuje sledeća lema.

LEMA 3.6.

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω. Neka je k ceo broj, $0 \leq k \leq M-1$, $u_h^k \in W_h$,

$$\| u_h^k \|_{0,\infty;\bar{\Omega}} < (h/\Delta t)^{1/2} \qquad \forall h \in (0, h_4]$$

i neka važi (3.19).

Tada je

$$1/2 \leq 1-2C_{20}\, \varepsilon(h)^{1/2} \leq \det(\partial X_{h,i}^k(x, t_{k+1}; t)/\partial x_j) \leq$$

$$\leq 1 + 5/2\, C_{20}\, \varepsilon(h)^{1/2} \leq 13/8 \qquad \forall h \in (0, h_4].$$

Posmatrajmo sada preslikavanje $G_\theta : \Omega \longrightarrow \Omega$ definisano formulom

$$G_\theta(x) = (1-\theta)x + \theta\, X(x, t_{k+1}; t_k), \qquad \theta \in [0,1],$$

gde je $t \longrightarrow X(x, t_{k+1}; t)$ rešenje zadatka (2.8) (sa $m = k$).

LEMA 3.7.

Neka je $\Omega \subset R^2$ konveksna poligonalna oblast i

$u \in L^{\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2 \cap V)$. Pretpostavimo da je

$$M \geq [5.68611974 4.T. \|\nabla u\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega)^2)}] + 1. \tag{3.32}$$

Tada je G_θ Lipschitz-neprekidna bijekcija skupa Ω na Ω $\forall\, \theta \in [0,1]$ čiji je jakobijan $\geq 1/2$.

DOKAZ

Za $\theta = 0$ tvrđenje je očigledno, a za $\theta = 1$ sledi iz teoreme 2.5. . Uslov (3.32) je izlišan u oba slučaja . Neka je $0 < \theta < 1$. Pošto (3.32) implicira nejednakost

$$\Delta t \|\nabla u\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega)^2)} \exp(2\Delta t \|\nabla u\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega)^2)}) \leq 1/4, \tag{3.33}$$

to je

$$|G_\theta(x) - G_\theta(y)| \geq |x - y| /4 \qquad \forall\, x,y \in \Omega \quad ,$$

i preslikavanje je injektivno. Lipschitz-neprekidnost je očigledna a surjektivnost se dokazuje na isti način kao u lemi 3.5. Dovoljno je uzeti da je

$$d = \Delta t \ \|u\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega)^2)} \qquad \text{i}$$

$$\Phi_\theta(x) = \begin{cases} G_\theta(x) , & x \in \Omega \\ x , & x \in \Omega_1 \setminus \Omega \end{cases} ,$$

gde je Ω_1 proizvoljan nadskup skupa Ω , takav da je rastojanje komplementa Ω_1 od Ω veći od 2d .

Konačno, iz (3.33) sledi da je jakobijan preslikavanja $x \longrightarrow G_\theta(x)$ veći ili jednak 1/2 $\forall\ \theta \in [0,1]$.

Za $\theta \in [0,1]$ posmatrajmo preslikavanje $H_\theta : \Omega \longrightarrow \Omega$ definisano formulom

$$H_\theta(x) = (1-\theta)\ X_h^k(x,t_{k+1};t_k) + \theta\ X(x,t_{k+1};t_k),$$

gde je $X_h^k(x,t_{k+1};\cdot)$ rešenje zadatka (3.18) (sa m=k) a $X(x,t_{k+1};\cdot)$ rešenje zadatka (2.8) (sa m=k) .

LEMA 3.8.

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti $\Omega \subset R^2$, k ceo broj , $0 \leq k \leq M-1$, $u_h^k \in W_h$ i neka važe uslovi (3.19), (3.25), (3.32). Pretpostavimo da $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2 \cap V)$.

Tada je H_θ Lipschitz-neprekidna bijekcija skupa Ω na Ω $\forall\ h \in (0,h_4]$ $\forall\ \theta \in [0,1]$ čiji je jakobijan $\geq$ 1/2 .

DOKAZ

Analogan dokazu prethodnih triju lema .

3.4. Formulacija diskretnih zadataka

Aproksimirajmo sada problem (Q) sledećim diskretnim zadatkom

Odrediti $(u_h, p_h) : \{t_1, \dots, t_M\} \longrightarrow W_h \times M_h$ tako da je

$$(Q_h) \quad \begin{aligned} & (d_t u_h^{k+1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{k+1}, \nabla v_h) - (\nabla \cdot v_h, p_h^{k+1}) = (f^{k+1}, v_h) \quad \forall v_h \in W_h \\ & (\nabla \cdot u_h^{k+1}, q_h) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h, \quad k = 0, \dots, M-1 ; \\ & u_h^0 = u_{oh} \; . \end{aligned}$$

Pridružimo problemu (Q_h) sledeći zadatak.

Odrediti $u_h : \{t_1, \dots, t_M\} \longrightarrow V_h$, tako da je

$$(P_h) \quad \begin{aligned} & (d_t u_h^{k+1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{k+1}, \nabla v_h) = (f^{k+1}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h , \\ & \qquad k = 0, \dots, M-1 ; \\ & u_h^0 = u_{oh} \; . \end{aligned}$$

Kako $V_h \not\subset V$, problem (P_h) je spoljašnja aproksimacija zadatka (P). Služeći se standardnom teorijom mešovitih eliptičkih varijacionih zadataka [Brezzi, 1974 ; Girault, Raviart, 1979] ,lako dokazujemo sledeći rezultat.

TEOREMA 3.3.

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω, k ceo broj, $0 \leq k \leq M-1$,

$$\| u_h^k \|_{0,\infty;\Omega} < (h/\Delta t)^{1/2} \qquad \forall h \in (0, h_3]$$

$$f \in C(0,T;H)$$

i neka važe hipoteze H1 - H3 i (3.19).

Tada

a) zadatak (P_h) ima jedinstveno rešenje $u_h^{k+1} \in V_h$,

b) postoji jedinstveno $p_h^{k+1} \in M_h$, tako da je (u_h^{k+1}, p_h^{k+1}) jedinstveno rešenje zadatka (Q_h).

IV

BRZINA KONVERGENCIJE LAGRANGE-GALERKINOVE METODE MEŠOVITIH KONAČNIH ELEMENATA

Ovo poglavlje, koje sadrži odeljke 4.1 - 4.4, posvećeno je analizi brzine konvergencije Lagrange - Galerkinove metode mešovitih konačnih elemenata u raznim funkcionalnim prostorima.

U odeljcima 4.1 - 4.3 dokazuje se konvergencija metode u prostorima $\ell^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)^2)$, $\ell^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)$, $\ell^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)^2)$ kao i optimalne ocene brzine konvergencije aproksimacije brzinskog polja fluida. U odeljku 4.4. dokazana je konvergencija aproksimacije pritiska fluida i optimalna ocena brzine konvergencije u prostoru $\ell^2(0,T;L_0^2(\Omega))$.

4.1. Konvergencija metode u prostoru $\ell^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)^2)$

Neka je X Banachov prostor sa normom $\| . \|_X$ i

$$\ell^p(0,T;X) = \Big\{ v: \{t_0=0,\dots,t_M=T\} \longrightarrow X : \| v \|_{\ell^p(0,T;X)} = \Big(\Delta t \sum_{i=0}^{M} \| v(t_i) \|_X^p \Big)^{1/p} < \infty \Big\}, \quad 1 \le p < \infty ,$$

$$\ell^{\infty}(0,T;X) = \Big\{ v: \{t_0=0,\dots,t_M=T\} \longrightarrow X : \| v \|_{\ell^{\infty}(0,T;X)} = \max_{0\le i\le M} \| v(t_i) \|_X < \infty \Big\} .$$

Neka je q realan broj, $q \ge 1$,

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{aligned} & f \in C(0,T;H) , \\ & u_0 \in H^{q+1}(\Omega)^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2 \cap V \end{aligned}$$

i pretpostavimo da odgovarajuće (jedinstveno) rešenje zadatka (Q) zadovoljava sledeće uslove regularnosti :

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{aligned} & u \in L^{\infty}(0,T;H^{q+1}(\Omega)^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2 \cap V) \\ & u' \in L^2(0,T;H^{q+1}(\Omega)^2 \cap H) \\ & u'' \in L^2(0,T;H) \\ & p \in L^{\infty}(0,T;H^q(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \\ & p' \in L^2(0,T;H^q(\Omega)) . \end{aligned}$$

Neka je

$$(4.3) \qquad M \geq [5.686119744\, T \, \| \nabla u \|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}] + 1 \quad \text{i}$$

$$(4.4) \qquad \varepsilon(h) = o(1), \qquad h \to 0 .$$

Definišimo konstante $C_{19}, C_{21}, C_{22}, \dots, C_{38}$ sledećim formulama :

$$C_{19} = \max (C_{13}, C_{21}) ,$$

$$C_{21} = \max_{0 \leq r \leq \min(\ell_o, q)} C_{38}^{1/2} \exp(C_{28} T) ,$$

$$C_{22} = 6 \exp(3T^2 \| \nabla u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}) ,$$

$$C_{23} = 2C_{22} \| \nabla u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} ,$$

$$C_{24} = 2 \| u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} ,$$

$$C_{25} = 2C_4^2 C_7^2 C_{17}^2 C_{22} \left(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \right)^2 ,$$

$$C_{26} = \exp(-1)\Big(C_{13}^2 \| u_o \|^2_{2,\Omega} + C_4^2 \big(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \big)^2 \Big) ,$$

$$C_{27} = \exp(12 C_{24} T) ,$$

$$C_{28} = \frac{12TC_{27}}{\nu}\,(C_7^2C_{23} + C_{25} + 4C_7^2C_{17}^2C_{22}C_{26}) \ ,$$

$$C_{29} = C_{28}/(2T) \ ,$$

$$C_{30} = 8C_7^2C_{27}/\nu \ ,$$

$$C_{31} = 12C_{27}C_{28}T/\nu \ ,$$

$$C_{32} = 12C_7^2C_{27}/\nu \ ,$$

$$C_{33} = 2C_{13}^2\, C_{27} \| u \|^2_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + $$

$$+ 2C_9^2C_{27}(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu}\, \| p \|_{L^\infty(0,T;H^r(\Omega))})^2,$$

$$C_{34} = C_{31}C_9^2(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu}\, \| p \|_{L^\infty(0,T;H^r(\Omega))})^2,$$

$$C_{35} = C_{32}C_{10}^2(\| du/dt \|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} +$$

$$+ \frac{1}{\nu}\, \| dp/dt \|_{L^2(0,T;H^r(\Omega))})^2 \ ,$$

$$C_{36} = C_{29}\, \| du/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \ ,$$

$$C_{37} = C_{30}\, \| D_t^2\, u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \ ,$$

$$C_{38} = 2\max(C_{33}+C_{34}+C_{35}+ \frac{C_{34}}{C_{31}} \ , C_{36}+C_{37}) \ ,$$

Pri tome, konstante $C_1,\dots,C_{18},C_{20}$ su definisane u prethodnoj glavi .

Neka su $h_1,\dots,h_4$ realni brojevi definisani u prethodnoj glavi . Ako važi pretpostavka (4.4), tada postoji $h_5 \in (0,h_4]$ tako da je za svako $h \in (0,h_5]$:

$$C_7^2 C_{17}^2 C_{22} \,|\ln h|\, h\left(4+ \frac{\varepsilon(h)}{2} \|du/dt\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}\right) \leq \frac{\nu^2}{96} .$$

U ovom odeljku ćemo dokazati sledeću teoremu .

TEOREMA 4.1.

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω i neka važe pretpostavke (4.1) - (4.4) i hipoteze H1 - H3 . Tada je

$$(4.5) \qquad \|u - u_h\|_{\ell^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq C_{19}(h^{r+1} + \triangle t)$$

$\forall r: \ 0 \leq r \leq \min(\ell_0, q)$ $\quad \forall h \in (0,h_5]$.

NAPOMENA 4.1.

Ocenu (4.5) dokazaćemo indukcijom po rednom broju vremenskog sloja . Prema (3.17) ,

$$\|u(.,t_0) - u_h^0\|_{0,\Omega} \leq C_{13}\, h^{r+1} \leq C_{19}(h^{r+1} + \triangle t)$$

$\forall h \in (0,h_0]$,

te važi ocena

$$\max_{0\le i\le k} \| u(\cdot,t_i) - u_h^i \|_{0,\Omega} \le C_{19}(h^{r+1} + \Delta t)$$

(4.5')

$$\forall h \in (0,h_5] \qquad \forall r:\ 0 \le r \le \min(\ell_0, q)$$

za $k = 0$. Neka je m ceo broj, $0 \le m \le M-1$, i pretpostavimo da smo gornju ocenu već dokazali za svako k, $0 \le k \le m$. Tada prema lemi 3.4 važi (3.24) za svako $h \in (0,h_5]$ i svako k, $0 \le k \le m$. Koristeći ovu činjenicu dokazaćemo da ocena važi i za $k = m+1$.

Da bismo dokazali teoremu 4.1. biće nam potrebni neki pomoćni rezultati. Definišimo najpre mešovitu eliptičku projekciju (w_h, s_h) rešenja (u,p) zadatka (Q) sa (R_h) (odeljak 3.1.) i neka je

$$\eta = u - w_h, \qquad \zeta = u - u_h, \qquad \xi = \eta - \zeta .$$

LEMA 4.1.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1. i neka je m ceo broj, $0 \le m \le M-1$.

Tada je

$$(d_t\xi^{k+1}, v_h) + \nu(\nabla\xi^{k+1}, \nabla v_h) =$$

(4.6) $$= (D_t u(t_{k+1}) - d_t u(t_{k+1}), v_h) + (d_t\eta(t_{k+1}), v_h)$$

$$\forall v_h \in V_h \qquad \forall k:\ 0 \le k \le m .$$

DOKAZ

Kako je $\xi = u_h + \eta - u$, to je

$$(d_t \xi^{k+1}, v_h) + \nu (\nabla \xi^{k+1}, \nabla v_h) =$$

$$= (d_t u_h^{k\ 1}, v_h) + (d_t \eta (t_{k+1}), v_h) - (d_t u(t_{k+1}), v_h) +$$

$$+ \nu (\nabla u_h^{k+1}, \nabla v_h) + \nu (\nabla \eta (t_{k+1}), \nabla v_h) - \nu (\nabla u(t_{k+1}), \nabla v_h) =$$

$$= (D_t u(t_{k+1}) - d_t u(t_{k+1}), v_h) + (d_t \eta (t_{k+1}), v_h)$$

$$+ \nu (\nabla \eta (t_{k+1}), \nabla v_h) - (\nabla . v_h, p(t_{k+1})) \qquad \forall v_h \in V_h .$$

Ali,

$$\nu (\nabla \eta (t_{k+1}), \nabla v_h) - (\nabla . v_h, p(t_{k+1})) =$$

$$= \nu (\nabla \eta (t_{k+1}), \nabla v_h) - (\nabla . v_h, p(t_{k+1}) - s_h(t_{k+1})) = 0$$

za svako $v_h \in V_h$. Time je lema dokazana.

Stavimo $v_h = \xi^{k+1}$ u (4.6) i primenimo identitet:

$$(a, a-b) = (\|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a-b\|^2)/2 .$$

Tako dobijamo:

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\xi^{k+1}\|^2_{0,\Omega} - \|\xi^k\|^2_{0,\Omega} + \|\xi^{k+1} - \xi^k\|^2_{0,\Omega}\right) +$$

$$+ \nu\|\nabla\xi^{k+1}\|^2_{0,\Omega} \leq$$

(4.7)

$$\leq |(D_t u(t_{k+1}) - d_t u(t_{k+1}), \xi^{k+1})| + |(d_t \eta(t_{k+1}), \xi^{k+1})| +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}|(\xi^k - \xi^k(X_h^k(\cdot, t_{k+1}; t_k), \xi^{k+1})| \qquad \forall k:\ 0 \leq k \leq m.$$

Ocenimo sabirke na desnoj strani nejednakosti (4.7).

LEMA 4.2.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1. i neka je m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$. Pretpostavimo da smo (4.5′) već dokazali za svako k, $0 \leq k \leq m$. Tada je

$$\|X_h^k(\cdot, t_{k+1}; t_k) - X(\cdot, t_{k+1}; t_k)\|^2_{0,\Omega} \leq$$

(4.8) $$\leq C_{22}(\Delta t)^2 \left(\|\zeta_h^k\|^2_{0,\Omega} + \frac{\Delta t}{2}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(t_k, t_{k+1}; L^2(\Omega)^2)}\right)$$

$$\forall h \in (0, h_5] \qquad \forall k:\ 0 \leq k \leq m\ .$$

DOKAZ

Pretpostavimo da smo (4.5′) već dokazali za svako k, $0 \leq k \leq m$. Na osnovu leme 3.4,

$$\|u_h^k\|_{0,\infty;\Omega} < (h/\Delta t)^{1/2} \qquad \forall k: 0 \leq k \leq m \qquad \forall h \in (0, h_5]\ ,$$

te na osnovu leme 3.5 i leme 3.6 jakobijan Lipschitzneprekidne bijekcije $x \longrightarrow X_h^k(x,t_{k+1};t)$ je $\geq 1/2$ za svako k, $0 \leq k \leq m$, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$ i svako $h \in (0,h_5]$.

Stoga,

$$\int_\Omega |X_h^k(x,t_{k+1};t) - X(x,t_{k+1};t)|^2 \, dx =$$

$$= \int_\Omega \left| \int_t^{t_{k+1}} [u_h^k(X_h^k(x,t_{k+1};s)-u(X(x,t_{k+1};s),s)] \, ds \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \triangle t \int_t^{t_{k+1}} \int_\Omega |u_h^k(X_h^k(x,t_{k+1};s))-u(X(x,t_{k+1};s),s)|^2 \, dx \, ds \leq$$

$$\leq 3\triangle t \int_t^{t_{k+1}} \int_\Omega | u_h^k(X_h^k(x,t_{k+1};s))-u(X_h^k(x,t_{k+1};s),t_k)|^2 \, dx \, ds +$$

$$+ 3\triangle t \int_t^{t_{k+1}} \int_\Omega | u(X_h^k(x,t_{k+1};s),t_k)-u(X_h^k(x,t_{k+1};s),s)|^2 \, dx \, ds +$$

$$+ 3\triangle t \int_t^{t_{k+1}} \int_\Omega | u(X_h^k(x,t_{k+1};s),s)-u(X(x,t_{k+1};s),s)|^2 \, dx \, ds \leq$$

$$\leq 6(\triangle t)^2 \, \| u_h^k - u(.,t_k) \|_{0,\Omega}^2 + \frac{6}{2}(\triangle t)^3 \, \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)}^2 +$$

$$+ 3\triangle t \, \| \nabla u \|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)}^2 \, *$$

$$* \int_t^{t_{k+1}} \left(\int_\Omega | X_h^k(x,t_{k+1};s)-X(x,t_{k+1};s)|^2 \, dx \right) ds \quad \forall t \in [t_k,t_{k+1}].$$

Stoga,

$$\| X_h^k(\cdot,t_{k+1};t) - X(\cdot,t_{k+1};t)\|^2_{0,\Omega} \leq$$

$$\leq 6(\triangle t)^2 \left[\| \eth_h^k \|^2_{0,\Omega} + \frac{\triangle t}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)} \right] +$$

$$+ 3 \triangle t \, \| \nabla u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \, *$$

$$* \int_t^{t_{k+1}} \| X_h^k(\cdot,t_{k+1};s) - X(\cdot,t_{k+1};s)\|^2_{0,\Omega} \, ds \quad \forall t \in [t_k,t_{k+1}].$$

Odatle, prema lemi Gronwalla sledi (4.8) .

LEMA 4.3.

Neka važe pretpostavke teoreme 4.1. i neka je m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$. Pretpostavimo da smo (4.5′) već dokazali za svako k, $0 \leq k \leq m$. Tada je

$$\| D_t u(t_{k+1}) - d_t u(t_{k+1}) \|^2_{0,\Omega} \leq$$

$$(4.9) \qquad \leq \frac{2}{3} \triangle t \, \| D_t^2 u \|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ C_{23} \| \eth_h^k \|^2_{0,\Omega} + C_{23} \frac{\triangle t}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)}$$

$$\forall k: 0 \leq k \leq m \qquad \forall h \in (0,h_5] .$$

DOKAZ

$$\| D_t u(t_{k+1}) - d_t u(t_{k+1}) \|^2_{0,\Omega} \leq$$

$$\leq 2 \left\| D_t u(\cdot,t_{k+1}) - \frac{u(\cdot,t_{k+1}) - u(X(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k)}{\triangle t} \right\|^2_{0,\Omega} +$$

$$+ 2 \left\| \frac{u(X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k) - u(X(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k)}{\triangle t} \right\|^2_{0,\Omega} \equiv$$

$$\equiv A_1 + A_2 .$$

Prema lemi 2.7.,

$$A_1 \leq \frac{2}{3} \triangle t \| D_t^2 u \|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)} ,$$

dok je

$$A_2 \leq 2 \| \nabla u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} (\triangle t)^{-2} \ast$$

$$\| X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k) - X(\cdot,t_{k+1};t_k) \|^2_{0,\Omega} .$$

Dovoljno je iskoristiti (4.8) i dokaz je završen.

Lema 4.3. poslužiće nam za ocenjivanje prvog sabirka na desnoj strani nejednakosti (4.7) . Ocenimo sada drugi sabirak .

$$|(d_t \eta(t_{k+1}), \xi^{k+1})| \leq |(\frac{\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)}{\triangle t}, \xi^{k+1})| +$$

(4.10)

$$+ |(\frac{\eta(\cdot,t_k) - \eta(X(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k)}{\triangle t}, \xi^{k+1})| +$$

$$+ \ |(\frac{\eta(X(\cdot,t_k;t_{k+1}),t_k) - \eta(X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k)}{\Delta t}, \xi^{k+1})|$$

$$\equiv A_3 + A_4 + A_5 .$$

LEMA 4.4.

Neka važe pretpostavke teoreme 4.1., neka je m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$ i $\varepsilon > 0$. Tada je

$$(4.11) \quad A_3 \leq \varepsilon \| \xi^{k+1} \|^2_{0,\Omega} + \frac{C_7^2}{4\varepsilon \Delta t} \| \frac{d\eta}{dt} \|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)} .$$

DOKAZ

Na osnovu ε-nejednakosti,

$$A_3 \leq \varepsilon \| \xi^{k+1} \|^2_{0,\Omega} + \frac{C_7^2}{4\varepsilon} \| \frac{\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)}{\Delta t} \|^2_{0,\Omega} \leq$$

$$\leq \varepsilon \| \xi^{k+1} \|^2_{0,\Omega} + \frac{C_7^2}{4\varepsilon \Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \| \frac{d\eta}{dt}(\cdot,t) \|^2_{0,\Omega} \, dt.$$

Time je dokaz završen .

LEMA 4.5.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1., neka je m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$ i $\varepsilon_1 > 0$. Tada je

$$(4.12) \quad A_4 \leq \varepsilon_1 \| \nabla \xi^{k+1} \|^2_{0,\Omega} + \frac{C_{24}}{4\varepsilon_1} \| \eta \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}$$

$$\forall \ k: 0 \leq k \leq m .$$

DOKAZ

Pošto je

$$A_4 \leq \| \xi^{k+1} \|_{1,\Omega} \quad \left\| \frac{\eta(\cdot,t_k) - \eta(X(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k)}{\Delta t} \right\|_{-1,\Omega} ,$$

dovoljno je oceniti drugi faktor .

$$\| \eta(\cdot,t_k) - \eta(X(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k) \|_{-1,\Omega} =$$

$$= \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)^2} \left\{ \| \varphi \|_{1,\Omega}^{-1} \int_\Omega [\eta(x,t_k) - \eta(X(x,t_{k+1};t_k),t_k)] \varphi(x) dx \right\} =$$

$$= \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)^2} \left\{ \| \varphi \|_{1,\Omega}^{-1} \int_\Omega \eta(x,t_k) [\varphi(x) - \varphi(X(x,t_k;t_{k+1}))] \, dx \right\} \leq$$

$$\leq \| \eta(t_k) \|_{0,\Omega} \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)^2} \left\{ \| \varphi \|_{1,\Omega}^{-1} \| \varphi(\cdot) - \varphi(X(\cdot,t_{k+1};t_k)) \|_{0,\Omega}^{2} \right\}$$

(4.13)

Neka μ označava jedinični vektor u pravcu $X(x, t_{k+1};t_k) - x$, tj. $\mu = (X(x,t_{k+1};t_k)-x)/|X(x,t_{k+1};t_k)-x|$. Tada je

$$\| \varphi(\cdot) - \varphi(X(\cdot,t_{k+1};t_k)) \|_{0,\Omega}^2 =$$

$$= \int_\Omega \left| \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}((1-\theta)x + \theta X(x,t_{k+1};t_k)) \, d\theta \right|^2 \cdot |X(x,t_{k+1};t_k)-x|^2 dx$$

$$\leq (\Delta t)^2 \| u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \int_\Omega \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} (G_\theta(x)) \right|^2 d\theta \, dx,$$

gde je G_θ funkcija definisana u prethodnoj glavi . Na osnovu leme 3.7.,

$$\| \varphi(.) - \varphi(X(.,t_{k+1};t_k)) \|^2_{0,\Omega} \le$$

$$(4.14) \quad \le 2(\Delta t)^2 \; \| u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \; \| \nabla\varphi \|^2_{0,\Omega} \le$$

$$\le 2(\Delta t)^2 \; \| u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \cdot \| \varphi \|^2_{1,\Omega}$$

Iz (4.13), (4.14) i ε-nejednakosti sledi (4.12). Time je dokaz završen .

LEMA 4.6.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1. i neka je m ceo broj, $0 \le k \le m$. Pretpostavimo da smo (4.5′) već dokazali za svako k, $0 \le k \le m$. Tada je

$$A_5 \le \varepsilon_1 \| \nabla \xi^{k+1} \|^2_{0,\Omega} +$$

$$(4.15)$$

$$+ \frac{C_{25}}{4\varepsilon_1} (\| \delta^k_h \|^2_{0,} + \frac{\Delta t}{2} \| \frac{du}{dt} \|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)})$$

$$\forall k: \; 0 \le k \le m \qquad \forall h \in (0,h_5] \; .$$

DOKAZ

Neka μ označava jedinični vektor u pravcu $X(x,t_{k+1};t_k)-X^k_h(x,t_{k+1};t_k)$. Tada je

$$A_5 \leq \| \zeta^{k+1} \|_{o,\infty,\Omega} \; \| \frac{X(\cdot,t_{k+1};t_k) - X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k)}{\Delta t} \|_{o,\Omega} \; *$$

$$\| \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial \mu} (H_\theta(\cdot),t_k) \; d\theta \|_{o,\Omega} \; ,$$

gde je H_θ funkcija definisana u prethodnoj glavi . Na osnovu leme 3.8., (3.20d) i nejednakosti Poincaré-Fridrichsa (sa konstantom C_7) [Girault, Raviart, 1979] imamo :

$$A_5 \leq 2C_7 C_{17} \; |\ln h|^{1/2} \; \| \nabla \zeta^{k+1} \|_{o,\Omega} \; *$$

$$* \; \| \frac{X(\cdot,t_{k+1};t_k) - X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k)}{\Delta t} \|_{o,\Omega} \| \nabla \eta(t_k) \|_{o,\Omega} \; .$$

Prema ε-nejednakosti i (4.8),

$$A_5 \leq \varepsilon_1 \| \nabla \zeta^{k+1} \|^2_{o,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon_1} \, C_7^2 C_{17}^2 \, |\ln h| \| \nabla \eta \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} *$$

(4.16)

$$C_{22} (\| \delta_h^k \|^2_{o,\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \| \frac{du}{dt} \|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)}) \; .$$

Međutim, prema (3.4),

$$|\ln h| \| \nabla \eta \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq$$

(4.17) $$\leq C_4^2 |\ln h| \; h^2 (\| u \|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))})^2$$

$$\leq \frac{C_4^2}{2} \exp(-1) (\| u \|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))})^2 ,$$

te (4.15) sledi iz (4.16) i (4.17). Time je dokaz završen .

Leme 4.4. - 4.6. poslužiće nam za ocenjivanje drugog sabirka u nejednakosti (4.7) . Ocenimo sada treći sabirak .

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{\xi^k - \xi^k(X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k))}{\Delta t}, \; \xi^{k+1}\right)\right| \le \\
&\le \left|\left(\frac{\xi^k - \xi^k(X(\cdot,t_{k+1};t_k))}{\Delta t}, \; \xi^{k+1}\right)\right| + \\
(4.18)\quad &+\left|\left(\frac{\xi^k(X(\cdot,t_{k+1};t_k)) - \xi^k(X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k))}{\Delta t}, \xi^{k+1}\right)\right| \\
&\equiv A_6 + A_7 \; .
\end{aligned}
$$

LEMA 4.7.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1., neka je m ceo broj, $0 \le m \le M-1$ i $\varepsilon_1 > 0$. Tada je

$$
(4.19) \quad A_6 \le \varepsilon_1 \|\nabla \xi^{k+1}\|^2_{0,\Omega} + \frac{C_{24}}{4\varepsilon_1} \|\xi^k\|^2_{0,\Omega}
$$

$$\forall k: \; 0 \le k \le m \; .$$

DOKAZ

Analogan dokazu leme 4.5..

Ocenimo sada A_7 .

LEMA 4.8.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1. i neka je m ceo broj, $1 \leq m \leq M-1$. Pretpostavimo da smo (4.5') već dokazali $\forall k: 0 \leq k \leq m$. Tada je

$$(4.20) \qquad A_7 \leq \varepsilon_1 \|\nabla \zeta^{k+1}\|^2_{0,\Omega} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \|\nabla \zeta^k\|^2_{0,\Omega}$$

$$\forall k: 1 \leq k \leq m \qquad \forall h \in (0, h_5] ,$$

gde je $\varepsilon_2 = \nu^2/96$.

DOKAZ

Na isti način kao u dokazu leme 4.6.,

$$A_7 \leq \varepsilon_1 \|\nabla \zeta^{k+1}\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon_1} C_7^2 C_{17}^2 \, |\ln h| \, \|\nabla \zeta^k\|^2_{0,\Omega} \, *$$

$$(4.21) \qquad C_{22}(\|\eth^k_h\|^2_{0,\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \|\frac{du}{dt}\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)}).$$

$$\forall k: 0 \leq k \leq m \qquad \forall h \in (0, h_4] .$$

Kako je $q \geq 1$, to je $\min(\ell_0, q) \geq 1$. Stoga, prema (4.5') i (3.24) imamo

$$\|\eth^k_h\|_{0,\Omega} \leq C_{19}(h + \Delta t)$$

(4.22)

$$C_{19} < \min \left(h^{-1/2}, \frac{1}{\varepsilon(h)} \right) \qquad \forall h \in (0, h_4] .$$

Tako, drugi sabirak na desnoj strani nejednakosti (4.21) možemo oceniti na sledeći način :

$$C_7^2 C_{17}^2 C_{22} \, |\ln h| \left(\| \zeta_h^k \|_{o,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(t_k, t_{k+1}; L^2(\Omega)^2)} \right)$$

$$\leq C_7^2 C_{17}^2 C_{22} |\ln h| \, h \left(4 + \frac{\varepsilon(h)}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \right) \leq \varepsilon_2 ,$$

pri čemu poslednja nejednakost važi za svako $h \in (0, h_5]$, na osnovu definicije konstante h_5 . Time je dokaz leme završen .

Za $k = 0$ modifikovaćemo (4.20) .

LEMA 4.9.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1.. Tada je za $k = 0$

$$A_7 \leq \varepsilon_1 \| \nabla \xi^1 \|_{o,\Omega}^2 + \frac{C_7^2 C_{17}^2 C_{22} C_{26}}{\varepsilon_1} \left(\| \zeta_h^o \|_{o,\Omega}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta t}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(t_o, t_1; L^2(\Omega)^2)} \right) .$$

DOKAZ

Iz (4.21) za $k=0$ i ocene

$$|\ln h| \, \| \nabla \xi^o \|_{o,\Omega}^2 \leq 2 \, |\ln h| \, (\| \nabla \zeta_h^o \|_{o,\Omega}^2 + \| \nabla \eta^o \|_{o,\Omega}^2) \leq$$

$$2 |\ln h| h^2 \left(C_{13}^2 \| u_o \|_{2,\Omega}^2 + C_4^2 \left(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \right)^2 \right)$$

$\leq C_{26}$, sledi željena ocena .

LEMA 4.10.

Neka važe sve pretpostavke teoreme 4.1. i neka je m ceo broj, $0 \leq m \leq M-1$. Pretpostavimo da smo (4.5′) već dokazali za svako k, $0 \leq k \leq m$. Tada je

$$\| \zeta_h^{m+1} \|_{o,\Omega} \leq C_{19}(h^{r+1} + \triangle t)$$

$$\forall h \in (0, h_5] \qquad \forall r: \ 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q) .$$

DOKAZ

Iz ocene (4.7) i lema 4.3. - 4.9. sledi da je

$$\frac{1}{2\triangle t}\left(\| \xi^{k+1} \|_{o,\Omega}^2 - \| \xi^k \|_{o,\Omega}^2 \right) + \nu \| \nabla \xi^{k+1} \|_{o,\Omega}^2 \leq$$

$$\leq 6\,\varepsilon_1 \| \nabla \xi^{k+1} \|_{o,\Omega}^2 + \frac{C_7^2 C_{23} + C_{25}}{4\,\varepsilon_1} \| \zeta_h^k \|_{o,\Omega}^2 +$$

$$+ \frac{C_7^2 C_{23} + C_{25}}{8\,\varepsilon_1} \triangle t \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(t_k, t_{k+1}; L^2(\Omega)^2)}^2 +$$

$$+ \frac{C_7^2}{4\,\varepsilon_1} \triangle t \| D_t^2 u \|_{L^2(t_k, t_{k+1}; L^2(\Omega)^2)}^2 +$$

$$+ \frac{C_{24}}{4\,\varepsilon_1} \| \eta \|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{C_7^2}{4\varepsilon_1 \triangle t} \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|_{L^2(t_k, t_{k+1}; L^2(\Omega)^2)}^2 +$$

$$+ \frac{C_{24}}{4\varepsilon_1} \| \xi^k \|_{o,\Omega}^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \| \nabla \xi^k \|_{o,\Omega}^2 \qquad \forall k: \ 1 \leq k \leq m .$$

$$\frac{1}{2\triangle t}\left(\| \xi^1 \|_{o,\Omega}^2 - \| \xi^o \|_{o,\Omega}^2 \right) + \nu \| \nabla \xi^1 \|_{o,\Omega}^2 \leq$$

$$\leq 6\,\varepsilon_1 \| \nabla \xi^1 \|_{o,\Omega}^2 + \left(\frac{C_7^2 C_{23} + C_{25}}{4\,\varepsilon_1} + \frac{4 C_7^2 C_{17}^2 C_{22} C_{26}}{4\,\varepsilon_1} \right) \| \zeta_h^o \|_{o,\Omega}^2 +$$

$$+ \left(\frac{C_7^2 C_{23}+C_{25}}{8\,\varepsilon_1} + \frac{4C_7^2 C_{17}^2 C_{22} C_{26}}{8\,\varepsilon_1}\right) \Delta t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(t_o,t_1;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ \frac{C_7^2}{4\,\varepsilon_1} \Delta t \, \| D_t^2 u \|^2_{L^2(t_o,t_1;L^2(\Omega)^2)} + \frac{C_{24}}{4\,\varepsilon_1} \| \xi^o \|^2_{o,\Omega} \text{ za } k=0.$$

Neka je $\varepsilon_1 = \nu/24$ i $\varepsilon_2 = \nu^2/96$. Sumirajući ove nejednakosti za $k = 0,\dots,m$, množeći sa $2\Delta t$ i primenjujući lemu 2.2. dobijamo

$$\| \xi^{m+1} \|^2_{o,\Omega} + \nu\left(\Delta t \sum_{k=1}^{m+1} \| \nabla \xi^k \|^2_{o,\Omega}\right) \leq$$

$$\leq C_{27} \| \xi^o \|^2_{o,\Omega} + C_{28} \Delta t \sum_{k=o}^{m} \| \zeta_h^k \|^2_{o,\Omega} +$$

$$+C_{29}(\Delta t)^2 \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \tag{4.23}$$

$$+C_{30}(\Delta t)^2 \| D_t^2 u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+C_{31} \| \eta \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} + C_{32} \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}.$$

Medutim,

$$\| \xi^o \|^2_{o,\Omega} \leq 2 \| \zeta^o \|^2_{o,\Omega} + 2 \| \eta^o \|^2_{o,\Omega} \leq \tag{4.24}$$

$$\leq h^{2r+2}(2C_{13}^2 \| u \|^2_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} +$$

$$+ 2C_9^2(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^r(\Omega))})^2 ,$$

$$\| \eta \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq h^{2r+2} C_9^2(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} +$$

$$+ \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^r(\Omega))})^2 ,$$

$$\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq h^{2r+2} C_{10}^2 (\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} +$$

$$+ \frac{1}{\nu} \left\| \frac{dp}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^r(\Omega))})^2 .$$

Tako sledi da je

$$\| \xi^{m+1} \|^2_{0,\Omega} + \nu (\Delta t \sum_{k=1}^{m+1} \| \nabla \xi^k \|^2_{0,\Omega}) \leq$$

$$\leq (C_{33}+C_{34}+C_{35}) h^{2r+2} + (C_{36}+C_{37})(\Delta t)^2 + C_{28} \Delta t \sum_{k=0}^{m} \| z_h^k \|^2_{0,\Omega} .$$

Dalje,

$$\| z^{m+1} \|^2_{0,\Omega} \leq 2 \| \eta^{m+1} \|^2_{0,\Omega} + 2 \| \xi^{m+1} \|^2_{0,\Omega} \leq$$

$$\leq h^{2r+2} 2C_9^2(\| u \|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^r(\Omega))})^2 +$$

$$+ h^{2r+2} 2(C_{33}+C_{34}+C_{35}) + 2(C_{36}+C_{37})(\Delta t)^2 +$$

$$+ 2C_{28} \Delta t \sum_{k=0}^{m} \| z_h^k \|^2_{0,\Omega} ,$$

$$\leq C_{38}(h^{2r+2} + (\triangle t)^2) + 2C_{28} \triangle t \sum_{k=o}^{m} \| \delta_h^k \|_{o,\Omega}^2 .$$

Konačno, na osnovu leme 2.2 imamo:

$$\| \delta^{m+1} \|_{o,\Omega} \leq C_{38}^{1/2} \exp(C_{28}T)(h^{r+1} + \triangle t)$$

$$\leq C_{21}(h^{r+1} + \triangle t)$$

$$\leq \max(C_{13}, C_{21})\ (h^{r+1} + \triangle t) .$$

Time je dokaz završen .

DOKAZ TEOREME 4.1.

Kao što smo to nagovestili u napomeni 4.1. dokaz teoreme 4.1. izvešćemo indukcijom po rednom broju k vremenskog sloja .

Prema (3.17),

$$\| u(.,t_o)-u_h^o \|_{o,\Omega} \leq C_{13}h^{r+1} \leq C_{19}(h^{r+1} + \triangle t)$$

za svako $h \in (0,h_5]$, te važi (4.5′) za k=0. Pretpostavimo da smo (4.5′) već dokazali za svako k, $0 \leq k \leq \leq m$. Tada je na osnovu leme 4.10.,

$$\| u(.,t_{k+1})-u_h^{k+1} \|_{o,\Omega} \leq C_{19}(h^{r+1} + \triangle t)$$

za svako $h \in (0,h_5]$. Tako smo dokazali (4.5′) za k = m + 1 . Time je dokaz teoreme završen .

Napomena 4.2.

Ako u pretpostavci (4.2) uslove

$$u' \in L^2(0,T;H^{q+1}(\Omega)^2 \cap H), \quad p' \in L^2(0,T;H^q(\Omega))$$

zamenimo uslovima

$$u' \in L^2(0,T;H^q(\Omega)^2 \cap H), \quad p' \in L^2(0,T;H^{q-1}(\Omega)),$$

tada važi sledeća ocena brzine konvergencije:

$$\| u-u_h \|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq \hat{C}_{19}(h^{r+1} + \Delta t)$$

$$\forall h \in (0,h_5] \qquad \forall r:\ 0 \leq r \leq \min(\ell_0, q-1)\ ,$$

gde je

$$\hat{C}_{19} = \max\,(C_{13}, \hat{C}_{21})\ ,$$

$$\hat{C}_{21} = \max_{0 \leq r \leq \min(\ell_0, q-1)} C_{38}^{1/2} \exp(C_{28}T)\ .$$

4.2. Konvergencija metode u prostoru $\ell^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)$

Neka je $q \geq 1$ realan broj ,

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} & f \in C(0,T;H), \\ & u_o \in H^{q+1}(\Omega)^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2 \cap V \end{aligned}$$

i pretpostavimo da odgovarajuće (jedinstveno) rešenje zadatka (Q) zadovoljava sledeće uslove regularnosti :

$$(4.2') \qquad \begin{aligned} & u \in L^\infty(0,T;H^{q+1}(\Omega)^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2 \cap V), \\ & u' \in L^2(0,T;H^q(\Omega)^2 \cap H), \\ & u'' \in L^2(0,T;H), \\ & p \in L^\infty(0,T;H^q(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \\ & p' \in L^2(0,T;H^{q-1}(\Omega)) . \end{aligned}$$

Dokazaćemo sledeći rezultat .

TEOREMA 4.2.

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω i neka važe pretpostavke (4.1),(4.2'),(4.3),(4.4) i hipoteze H1 → H3 .

Tada je

$$\| u-u_h \|_{\ell^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)} \leq C_{39}(h^r + \Delta t)$$

$$\forall r: 0 \leq r \leq \min(\ell_o, q) , \qquad \forall h \in (0,h_5] ,$$

gde je C_{39} pozitivna konstanta nezavisna od h i $\triangle t$.

DOKAZ

Iz (4.23) sa $m=M-1$ imamo :

$$\nu \| \xi \|^2_{\ell^2(0,T;H^1_o(\Omega)^2)} \leq C_{27} \| \xi^o \|^2_{o,\Omega} +$$

$$+ C_{28} \| \zeta h \|^2_{\ell^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$(4.25) \qquad + C_{29}(\triangle t)^2 \| du/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ C_{30}(\triangle t)^2 \| D^2_t u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ C_{31} \| \eta \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} + C_{32} \| d\eta/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}.$$

Međutim,

$$\| \xi^o \|^2_{o,\Omega} \leq h^{2r+2} C_{33}/C_{27} , \quad 0 \leq r \leq \min(\ell_o,q),$$

$$\| \eta \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq h^{2r+2} C_{34}/C_{31} ,$$
$$0 \leq r \leq \min(\ell_o,q),$$

$$\| d\eta/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq h^{2r+2} C^2_{10} *$$

$$*(\| du/dt \|_{L^2(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| dp/dt \|_{L^2(0,T;H^r(\Omega))})^2,$$
$$0 \leq r \leq \min(\ell_o,q-1),$$

a na osnovu teoreme 4.1.,

$$\| \zeta_h \|^2_{\ell^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq \hat{C}^2_{19}(h^{r+1} + \triangle t)^2,$$
$$0 \leq r \leq \min(\ell_o, q-1),$$

te iz (4.25) sledi da je

$$\| \xi \|_{\ell^2(0,T;H^1_o(\Omega)^2)} \leq C_{41}(h^{r+1} + \triangle t),$$
$$0 \leq r \leq \min(\ell_o, q-1),$$

gde je

$$C_{41} = \nu^{-1/2} \max(2\hat{C}^2_{19}C_{28}+C_{33}+C_{34}+C_{40}, 2\hat{C}^2_{19}C_{28}+C_{36}+C_{37})^{1/2}$$

$$C_{40} = C_{32}C^2_{10}(\|du/dt\|_{L^2(0,T;H^r(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu}\|\frac{dp}{dt}\|_{L^2(0,T;H^{r-1}(\Omega))})^2.$$

Tako, na osnovu teoreme 3.1., imamo:

$$\| u-u_h \|_{\ell^2(0,T;H^1_o(\Omega)^2)} = \| \zeta_h \|_{\ell^2(0,T;H^1_o(\Omega)^2)} \leq$$

$$\leq \| \eta \|_{\ell^2(0,T;H^1_o(\Omega)^2)} + \| \xi \|_{\ell^2(0,T;H^1_o(\Omega)^2)}$$

$$\leq T^{1/2} \| \eta \|_{L^\infty(0,T;H^1_o(\Omega)^2)} + C_{41}(h^{r+1} + \triangle t),$$
$$0 \leq r \leq \min(\ell_o, q-1),$$

$$\| u - u_h \|_{\ell^2(0,T;H^1_o(\Omega)^2)} \leq C_{39}(h^r + \triangle t),$$
$$0 \leq r \leq \min(\ell_o, q),$$

za svako $h \in (0, h_5]$, gde je

$$C_{39} = \max_{0 \leq r \leq \min(\ell_o, q)} C_{42},$$

$$C_{42} = T^{1/2} C_4 (\| u \|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega)^2)} + \frac{1}{\nu} \| p \|_{L^\infty(0,T;H^r(\Omega))}) + C_{41} .$$

Time je dokaz završen .

4.3. Konvergencija metode u prostoru $\ell^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^2)$

TEOREMA 4.3.

Neka je $\mathcal{C}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω i neka važe pretpostavke (4.1),(4.2'),(4.3),(4.4) i hipoteze H1-H3.

Tada je

$$\| u-u_h \|_{\ell^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^2)} \leq C_{43}(h^r + \Delta t)$$

$$\forall r:\ 0 \leq r \leq \min(\ell_0, q) \qquad \forall h \in (0,h_5] ,$$

gde je C_{43} pozitivna konstanta nezavisna od h i Δt.

DOKAZ

Uzimajući $v_h = (\xi^{k+1} - \xi^k)/\Delta t$ u formuli (4.6) i koristeći identitet

$$(a,a-b) = (\|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a-b\|^2)/2,$$

imamo :

$$\left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} \right\|^2_{0,\Omega} +$$

$$+ \frac{\nu}{2\Delta t} \left(\|\nabla \xi^{k+1}\|^2_{0,\Omega} - \|\nabla \xi^k\|^2_{0,\Omega} \right) +$$

$$+ \frac{\nu}{2} \left| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\sqrt{\Delta t}} \right|^2_{1,\Omega} =$$

$$= (D_t u(t_{k+1}) - d_t u(t_{k+1}), \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t}) +$$

$$+ (\frac{\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)}{\Delta t}, \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t}) +$$

$$+ (\frac{\eta(t_k) - \eta(X(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k)}{\Delta t}, \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t}) +$$

$$+ (\frac{\eta(X(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k) - \eta(X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k),t_k)}{\Delta t}, \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t}) -$$

$$- (\frac{\xi^k - \xi^k(X(\cdot,t_{k+1};t_k))}{\Delta t}, \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t}) -$$

$$- (\frac{\xi^k(X(\cdot,t_{k+1};t_k)) - \xi^k(X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k))}{\Delta t}, \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t})$$

$$\equiv A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12} + A_{13} .$$

Na osnovu leme 4.3.,

$$A_8 \le \varepsilon_1 \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} \right\|^2_{o,\Omega} + \frac{1}{4\varepsilon_1}(\frac{2}{3}\Delta t \, \|D_t^2 u\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ C_{23} \|\zeta_h^k\|^2_{o,\Omega} + C_{23} \frac{\Delta t}{2} \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)}),$$

$$A_9 \le \varepsilon_1 \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} \right\|^2_{o,\Omega} + \frac{1}{4\varepsilon_1 \Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|d\eta/dt\|^2_{o,\Omega} \, dt ,$$

$$A_{10} \le \varepsilon_1 \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} \right\|^2_{o,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon_1} \|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} *$$

$$* \|\eta\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} ,$$

$$A_{11} \leq \varepsilon_1 \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\triangle t} \right\|^2_{o,\Omega} + \frac{\alpha_k}{\varepsilon_1 \triangle t} \|\eta\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)},$$

$$A_{12} \leq \varepsilon_1 \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\triangle t} \right\|^2_{o,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon_1} \|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} *$$

$$* \ \|\nabla \xi^k\|^2_{o,\Omega} ,$$

$$A_{13} \leq \varepsilon_1 \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\triangle t} \right\|^2_{o,\Omega} + \frac{\alpha_k}{\varepsilon_1 \triangle t} \|\nabla \xi^k\|^2_{o,\Omega} ,$$

gde je

$$\alpha_k = \frac{C_{22}}{4} \left(\triangle t \hat{C}^2_{19}(1+ \varepsilon(h))^2 + \frac{\varepsilon(h)}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(t_k,t_{k+1};L^2(\Omega)^2)} \right).$$

Primetimo da je

$$\sum_{k=o}^{m} \alpha_k \leq \frac{C_{22}}{4} \left(T\hat{C}^2_{19}(1+ \hat{\varepsilon})^2 + \frac{\hat{\varepsilon}}{2} \|du/dt\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} \right) \equiv C_{44},$$

gde je $\hat{\varepsilon} = \sup\limits_{h \in (0,h_5]} \varepsilon(h)$. Tako, iz (4.26) sa $\varepsilon_1 = 1/12$ sledi:

$$\triangle t \sum_{k=o}^{m} \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\triangle t} \right\|^2_{o,\Omega} + \nu \|\nabla \xi^{m+1}\|^2_{o,\Omega} +$$

$$+ \triangle t \sum_{k=o}^{m} \left| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{(\triangle t)^{1/2}} \right|^2_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq 4(\Delta t)^2 \quad \| D_t^2 u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} + 6T\hat{C}_{19}^2 C_{23}(h^r + \Delta t)^2 +$$

$$+ 3C_{23}(\Delta t)^2 \, \| du/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ 6 \, \| d\eta/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ 24T \, \| u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \, \| \eta \|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} +$$

$$+ 24 \, \| u \|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \, \Delta t \sum_{k=0}^{m} \| \nabla \xi^k \|^2_{0,\Omega} +$$

$$+ 24C_{44} \, \| \eta \|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} +$$

$$+ 24 \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \, \| \nabla \xi^k \|^2_{0,\Omega} + \nu \, \| \nabla \xi^0 \|^2_{0,\Omega} \, .$$

Odavde, na osnovu leme 2.2.

$$\Delta t \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} \right\|^2_{0,\Omega} + \nu \, \| \nabla \xi^{m+1} \|^2_{0,\Omega} +$$

$$+ \Delta t \sum_{k=0}^{m} \left| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{(\Delta t)^{1/2}} \right|^2_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq (\nu \, \| \nabla \xi^0 \|^2_{0,\Omega} + 4(\Delta t)^2 \, \| D_t^2 u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ 6T\hat{C}_{19}^2 C_{23}(h^r + \Delta t)^2 + 3C_{23}(\Delta t)^2 \, \| du/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$$

$$+ 6 \, \| d\eta/dt \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)} +$$

$$+ \left(24T \|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} + 24C_{44}\right) \|\eta\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} \Big) *$$

$$* \exp\left(\frac{24}{\nu} T \|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} + \frac{24}{\nu} C_{44}\right)$$

$$\leq (C_{45}(h^r + \Delta t))^2 \qquad \forall r:\ 0 \leq r \leq \min(\ell_0, q)\ .$$

Pošto je $\zeta = \eta - \xi$, preostaje da se primeni nejednakost trougla i teorema 3.1. . Time je dokaz završen .

4.4. Konvergencija pritiska u prostoru $\ell^2(0,T;L_o^2(\Omega))$

TEOREMA 4.4.

Neka je $\mathcal{T}_h$ uniformno regularna trijangulacija konveksne poligonalne oblasti Ω i neka važe pretpostavke (4.1),(4.2'),(4.3),(4.4) i hipoteze H1 - H3 .

Tada je

$$\| p-p_h \|_{\ell^2(0,T;L_o^2(\Omega))} \leq C_{46}(h^r + \Delta t)$$

$$\forall r:\ 0\leq r\leq \min(\ell_o,q) \qquad \forall h\in(0,h_5] ,$$

gde je C_{46} pozitivna konstanta nezavisna od h i Δt.

DOKAZ

Neka je v_h proizvoljan element prostora W_h i q_h prizvoljan element prostora M_h . Tada je

$$(\nabla\cdot v_h, p_h^{k+1} - q_h) = (\nabla\cdot v_h, p_h^{k+1} - p(t_{k+1}))+(\nabla\cdot v_h, p(t_{k+1})-q_h)=$$

$$= \nu\ (\nabla(u_h^{k+1} - u(t_{k+1})), \nabla v_h) + (d_t u_h^{k+1} - D_t u(t_{k+1}), v_h) +$$

$$+ (\nabla\cdot v_h, p(t_{k+1}) - q_h) =$$

$$= \nu\ (\nabla(u_h^{k+1} - u(t_{k+1})), \nabla v_h) + (d_t u(t_{k+1}) - D_t u(t_{k+1}), v_h)+$$

$$+ (d_t \xi^{k+1}, v_h) - (d_t \eta(t_{k+1}), v_h) + (\nabla\cdot v_h, p(t_{k+1}) - q_h) =$$

$$= \nu\,(\nabla(u_h^{k+1} - u(t_{k+1})), \nabla v_h) + (\nabla . v_h, p(t_{k+1}) - q_h) +$$

$$+ (d_t u(t_{k+1}) - D_t u(t_{k+1}), v_h) + (\frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t}, v_h) +$$

$$+ (\frac{\xi^k - \xi^k(X(.,t_{k+1};t_k))}{\Delta t}, v_h) +$$

$$+ (\frac{\xi^k(X(.,t_{k+1};t_k)) - \xi^k(X_h^k(.,t_{k+1};t_k))}{\Delta t}, v_h) +$$

$$- (\frac{\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)}{\Delta t}, v_h) -$$

$$- (\frac{\eta(t_k) - \eta(X(.,t_{k+1};t_k),t_k)}{\Delta t}, v_h) -$$

$$- (\frac{\eta(X(.,t_{k+1};t_k),t_k) - \eta(X_h^k(.,t_{k+1};t_k),t_k)}{\Delta t}, v_h) \leq$$

$$\leq \nu\,|u(t_{k+1}) - u_h^{k+1}|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega} + \|p(t_{k+1}) - q_h\|_{o,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega}$$

$$+ \|d_t u(t_{k+1}) - D_t u(t_{k+1})\|_{o,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega} +$$

$$+ \left\|\frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t}\right\|_{o,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega} +$$

$$+ 2\,\|u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \|\nabla\xi^k\|_{o,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega} +$$

$$+ C_{17}\,|\ln h|^{1/2} \|v_h\|_{1,\Omega} \|\nabla\xi^k\|_{o,\Omega} \left\|\frac{X(.,t_{k+1};t_k) - X_h^k(.,t_{k+1};t_k)}{\Delta t}\right\|_{o,\Omega}$$

$$+ (\frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\|\frac{d\eta}{dt}\right\|^2_{o,\Omega} dt)^{1/2} \|v_h\|_{1,\Omega} +$$

$$+ 2\,\|u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \|\eta\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} \|v_h\|_{1,\Omega} +$$

$$+ C_{17} |\ln h|^{1/2} \| v_h \|_{1,\Omega} \| \eta \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} \ast$$

$$\ast \left\| \frac{X(\cdot,t_{k+1};t_k) - X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k)}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega} .$$

Koristeći uslov Brezzija (hipoteza H3) :

$$\| p(t_{k+1}) - p_h^{k+1} \|_{0,\Omega} \leq \| p(t_{k+1}) - q_h \|_{0,\Omega} + \| q_h - p_h^{k+1} \|_{0,\Omega}$$

$$\leq 2 \| p(t_{k+1}) - q_h \|_{0,\Omega} + \nu | u(t_{k+1}) - u_h^{k+1} |_{1,\Omega} +$$

$$+ \| d_t u(t_{k+1}) - D_t u(t_{k+1}) \|_{0,\Omega} + \left\| \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega} +$$

$$+ 2 \| u \|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \| \xi \|_{\ell^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^2)} +$$

$$+ C_{17} |\ln h|^{1/2} \| \xi \|_{\ell^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^2)} \ast$$

$$\ast \left\| \frac{X(\cdot,t_{k+1};t_k) - X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k)}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|_{0,\Omega}^2 dt \right)^{1/2} +$$

$$+ 2 \| u \|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)^2)} \| \eta \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} +$$

$$+ C_{17} |\ln h|^{1/2} \| \eta \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^2)} \ast$$

$$\ast \left\| \frac{X(\cdot,t_{k+1};t_k) - X_h^k(\cdot,t_{k+1};t_k)}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega} .$$

Preostaje da se ova nejednakost kvadrira, pomnoži sa Δt, sumira za $k = 0,\dots,M-1$ i da se primene ranije izvedene ocene, hipoteza H2 i teoreme 3.1. i 3.2. .

NAPOMENE I UOPŠTENJA

Osvrnimo se, konačno, na neke praktične aspekte Lagrange-Galerkinove metode mešovitih konačnih elemenata.

Primetimo, najpre, da se zadatak (Q_h) može napisati u sledećem ekvivalentnom obliku :

$$(1) \qquad \frac{1}{\Delta t}(u_h^{k+1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{k+1}, \nabla v_h) - (\nabla \cdot v_h, p_h^{k+1}) = (g^{k+1}, v_h) \qquad \forall v_h \in W_h ,$$

$$(2) \qquad (\nabla \cdot u_h^{k+1}, q_h) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h, \quad k=0,\dots,M-1,$$

$$(3) \qquad u_h^o = u_{oh},$$

$$(4) \qquad g^{k+1}(x) = f^{k+1}(x) + \frac{1}{\Delta t} u_h^k(X_h^k(x, t_{k+1}; t_k)),$$

gde je $X_h^k(x, t_{k+1}; \cdot)$ rešenje Cauchyjevog problema:

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} X_h^k(x, t_{k+1}; t) = u_h^k(X_h^k(x, t_{k+1}; t)), \quad t_k \le t < t_{k+1}, \\ &X_h^k(x, t_{k+1}; t_{k+1}) = x . \end{aligned}$$

1^o Prilikom rešavanja zadatka (1) - (5) na računaru, skalarni proizvod (g^{k+1}, v_h) računao bi se nekom od standardnih kvadraturnih formula (npr. Gaussovom kvadraturom). Zato je najpre potrebno odrediti $X_h^k(x_i, t_{k+1}; t_k)$ za $i = 1, N_o$, gde su x_i čvorovi kvadraturne formule, a N_o ukupan broj čvorova. Izbor kvadraturne formule kao i približne metode kojom bi se za $x = x_i$ rešio Cauchyjev problem (5) i odredio $X_h^k(x_i, t_{k+1}; t_k)$ nije trivijalan zadatak. Ovi problemi rešavaće se u budućim radovima.

2^o Primetimo, da se rešavanje zadatka (1),(2) na fiksiranom vremenskom sloju, svodi na rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina sa simetričnom i retkom matricom. Pri tome se matrica ne menja od sloja do sloja. Zato, ako dimenzija matrice nije "suviše velika", može se primeniti neka od direktnih metoda koja se zasniva na faktorizaciji matrice.

3^o U radu smo se ograničili na dvodimenzioni zadatak sa homogenim graničnim uslovom prve vrste. Pošto u praksi se veoma često javljaju kako trodimenzioni zadaci, tako i nehomogeni granični uslovi prve vrste i homogeni granični uslovi druge vrste, bilo bi zanimljivo da se metoda uopšti i na takve zadatke.

L I T E R A T U R A

1. Adams, R.A., Sobolev Spaces. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975 .

2. Arnol´d, V.I., Matematičeskie metodi klassičeskoi mehaniki. Nauka, Moskva, 1979 .

3. Aubin, J.P., Approximation of Elliptic Boundary Value Problems. Wiley Interscience, New York, 1972 .

4. Benqué, J.P., Labadie, G., Ronat, J., A new finite element method for Navier-Stokes equations coupled with a temperature equation. Finite Element Flow Analysis. Proc. of the fourth international symposium on finite element methods in flow problems, Kawai, T., ed., North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, 295-301, 1982 .

5. Bercovier, M., Pironneau, O., Characteristics and the finite element method. Finite Element Flow Analysis. Proc. of the fourth international symposium on finite element methods in flow problems, Kawai, T., ed., North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, 67-73, 1982 .

6. Boland, J.M., Nicolaides, R.A., Stability of elements under divergence constrains. SIAM J. Numer. Anal.,V.20, N°4, 722-731, 1983 .

7. Bourguignon, J.P., Brezis, H., Remarks on the Euler Equation. J. Funct. An.,15, 341-363, 1974 .

8. Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers . RAIRO Numer Anal., 8-R2, 129-151, 1974 .

9. Cattabriga, L., Su un problemà al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. Rend. Mat. Sem. Univ. Padova, 31, 308-340, 1961 .

10. Ciarlet, P.G., The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978 .

11. Ciarlet, P.G., Raviart, P.A., A mixed finite element method for the biharminic equation. Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations , Boor, C. de, ed., Academic Press, New York, San Francisco, London, 125-145, 1975 .

12. Coddington, E.A., Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

13. Deny, J., Lions, J.L., Les espaces du type de BEPPO LEVI. Ann. Inst. Fourier, 5, 305-370, 1954 .

14. Douglas, J. Jr., Finite difference methods for two-phase incompressible flow in porous media. SIAM J. Numer. Anal. V. 20, N°4, 681-696, 1983 .

15. Douglas, J. Jr., Roberts, J.E., Numerical methods for a model for compressible miscible displacement in porous media, Math. Comp., V.41, N°164, 441-459, 1983 .

16. Douglas, J. Jr., Russell, T.F., Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the methods of characteristics with finite element or finite difference procedures. SIAM J. Numer. Anal. , V. 19, N°5, 871-885, 1982.

17. Duvault, G., Lions, J.L., Les inéquations en mécanique et en phisique . Dunod, Paris, 1972.

18. Ekeland, I., Temam, R., Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland, Amsterdam Oxford, 1976.

19. Ewig, E.E., Russell, T.F., Multistep Galerkin methods along characteristics for convection diffusion problems. Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations - IV, Vichnevetsky,R., Stepleman,R.S., eds., IMACS, Rutgers Univ., New Brunswick, N.J., 28-36, 1981.

20. Fujiwara, D., Morimoto, H., An L_r - theorem of Helholtz decomposition of vector fields. J. Fac. Sci. Tokyo, 24, 685-700, 1977 .

21. Giga, Y., The Stokes operator in L_r spaces. Proc. Japan Acad., 57, 85-89, 1981 .

22. Girault,V., Raviart, P.A., Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979 .

23. Grisvard, P., Singularité des solutions du problème de Stokes dans un polygone. Séminaires d'Analyse Numérique, Paris, 1978 .

24. Hasbani, Y., Livne, E., Bercovier, M., Finite elements and characteristics applied to advection-diffusion equations. Computers and Fluids, V.11, N°2, 71-83, 1983 .

25. Hopf, E., Über die Aufgangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundleichungen. Math. Nachr., 4, 213-231 , 1951 .

26. Kellogg, R.B., Osborn, J.E., A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon. J. Funct. Anal., 21, 397-431, 1976 .

27. Ladiženskaja, O.A., Solonnikov, V.A., O nekotorih zadač vektornogo analiza i ob obobščennih postanovkah kraevih zadač dlja uravnenii Navje-Stoksa. Zap. Nauč. Seminarov. LOMI, T.59, 81-116, 1976 .

28. Ladyzhenskaya, O.A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach, New York, London, 1969 .

29. Lax, P.D., Milgram, A.N., Parabolic Equations. Contribution to the Theory of Partial Differential Equations, Princeton, 1954 .

30. Lefschetz , S., Differential Equations: Geometric Theory. Second Edition, Dover Publications, New York, 1977 .

31. Leray, J., Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures et Appl., 12, 1-82, 1933 .

32. Leray, J., Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. Math. Pures et Appl., 13, 331-418, 1934 .

33. Lions, J.L., Magenes, E., Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972 .

34. Mansfield, L., Finite element subspaces with optimal rates of convergence for the stationary Stokes problem . RAIRO Num. Anal., V.16, N°1, 49-66, 1982 .

35. Morrey, C.B. Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Grundlehren Vol. 130, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1966 .

36. Nitsche, J., Ein kriterium für die quasi-optimalitat des Ritzchen Verfahrens. Numer. Math., 11, 346-348, 1968 .

37. Pileckas, K.I., O prostranstvah solenoidalnih vektorov. Kraevi zad. mat. fiz., Tr. MIAN SSSR, T. 159, Nauka, Leningradskoe otdelenie, 137-149, 1983 .

38. Pironneau, O., On the transport-diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equations. Numer. Math., 38, 309-332, 1982 .

39. Pitkäranta, J., Stenberg, R., Error bounds for the approximation of the Stokes problem using bilinear/constant elements on irregular quadrilateral meshes. Helsinki University of Technology, Report-Mat-A222, 1984 .

40. Rudin, W., Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 1966 .

41. Russell, T.F., Time stepping along characteristics with incomplete iteration for a Galerkin approximation of miscible displacement in porous media. Ph. D. Thesis, Univ. of Chicago, 1980.

42. Russell, T.F., Wheeler, M.F., Finite element and finite difference methods for continuous flows in porous media. The Mathematics of Reservoir Simulation, Ewig, R.E., ed., SIAM, Philadelphia, 35-106, 1983 .

43. Schatz, A.H., An Introduction to the Analysis of the Error in the Finite Element Method for Second Order Elliptic Boundary Value Problems, Lecture Notes, Numerical Analysis Summer School, Lancaster, 1984 .

44. Sohr, H., Optimale lokale Existenzsätze für die Gleichungen von Navier-Stokes, Mathematische Annalen, Band 267, Heft 1, 107-123, 1984 .

45. Sohr, H., Wahl, W. von, On the Singular Set and the Uniqueness of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. Universität Bonn, Preprint N° 635, 1984 .

46. Solonnikov, V.A., Ob ocenkah tenzorov Grina dlja nekotorih kraevih zadač. DAN SSSR, 130, 988-991, 1960.

47. Stenberg, R., Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem : a unified approach. Math. Comp., V.42, N°165, 9-23, 1984 .

48. Tartar, L., Nonlinear Partial Differential Equations Using Compactness Method. M.R.C. Report 1584, Univ. of Wisconsin, 1976 .

49. Temam, R., Navier-Stokes Equations, Second Edition, North-Holland, Amsterdam, 1979 .

50. Temam, R., Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1983 .

51. Triebel, H., Interpolation Theory. Function Spaces, Differential Operators. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978 .

52. Verfürth, R., Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. RAIRO Num. Anal., V. 18, N°2, 175-182, 1984 .

53. Vorovič, I.I., Judovič, V.I., Stacionarnie tečenija vjazkoi neszimaemoi židkosti. Matem. sb., 53, 393-428, 1961 .

54. Wahl, W. von, Regularitätsfragen für die instationären Navier-Stokschen Gleichungen in höhere Dimensionen. J. Math. Soc. Japan, 32, 263-283, 1980 .

55. Yosida, K., Functional Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968 .

I N D E K S