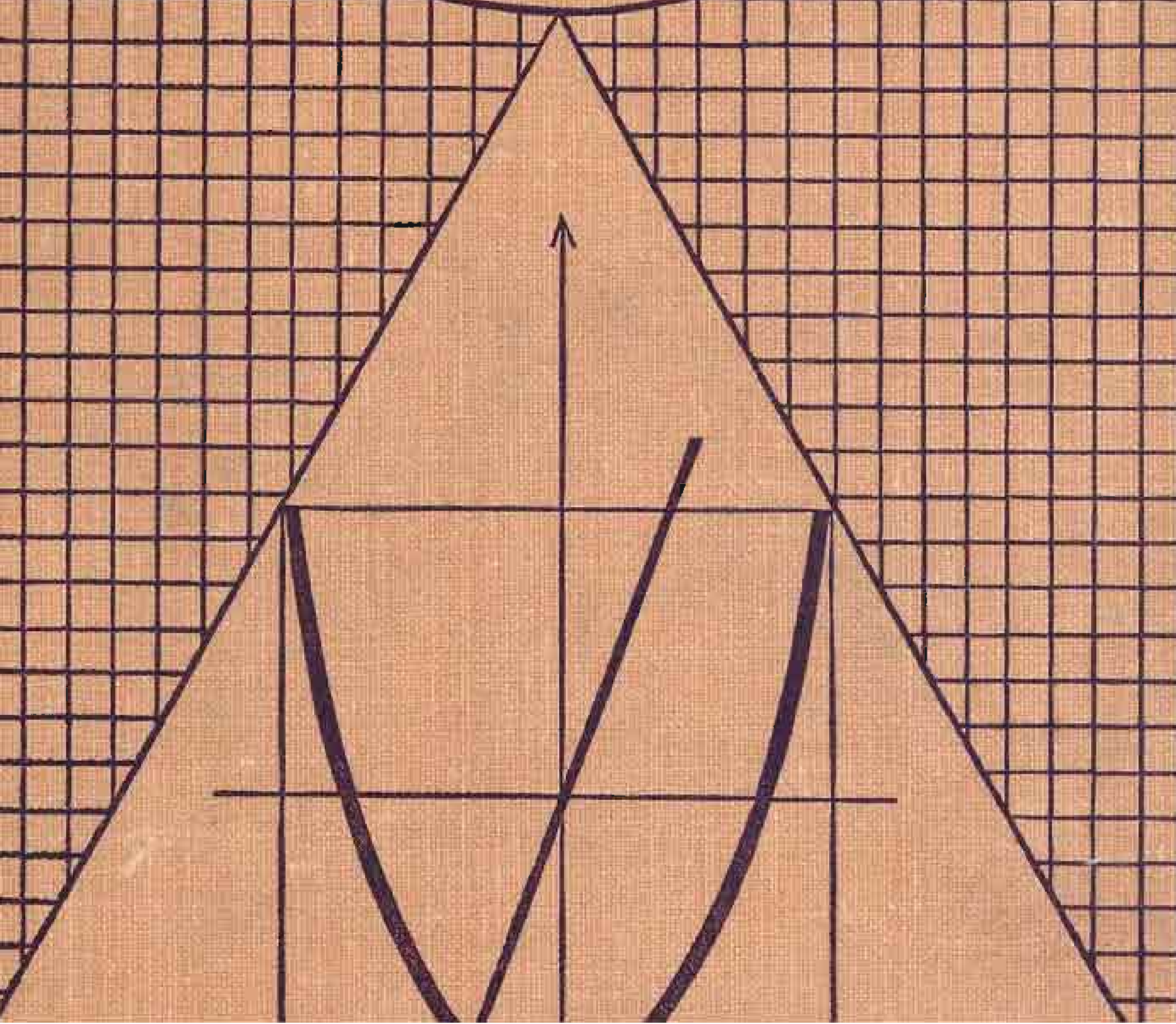
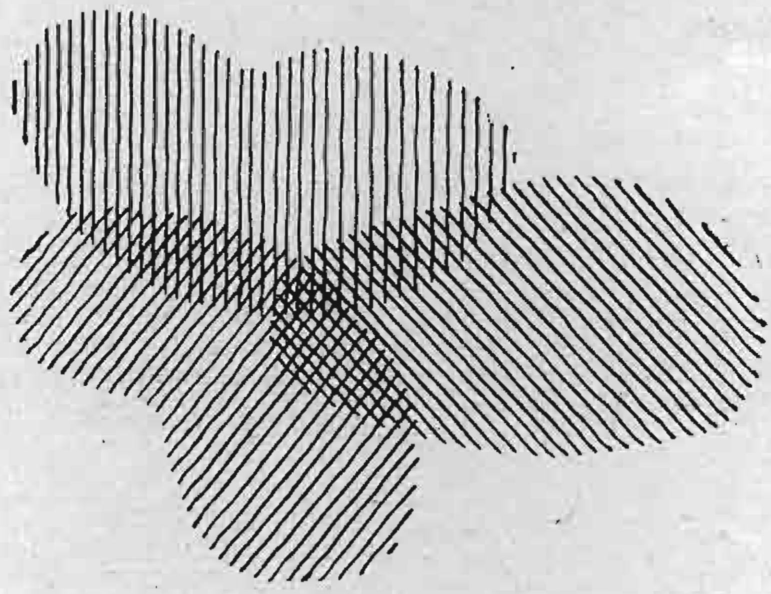
ВЕНГЕРСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

J. Kürschak

MATHEMATIKAI VERSENYTÉTELEK



Tankönyvkiadó
Bydapest
1965

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

Й. Кюршак, Д. Нейкомм,
Д. Хайош, Я. Шурани

ВЕНГЕРСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Перевод с венгерского
Ю. А. Данилова
Под редакцией и с предисловием
В. М. Алексеева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА

1976

512 513
В29

И. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани

В29 Венгерские математические олимпиады. Пер. с венг. Ю. А. Данилова. Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. М., «Мир», 1976.

543 с. с илл.

В книге собраны задачи, предлагавшиеся на знаменитых Венгерских математических олимпиадах с 1894 по 1974 г. К составлению задач привлекались лучшие математические силы страны. Задачи отличаются оригинальностью, неожиданностью постановки, глубиной и, как правило, допускают простые и ясные решения.

Книга рассчитана на учащихся старших классов, абитуриентов, студентов и всех тех, кто серьезно увлечен математикой.

$$\text{В}\ \frac{20202-201}{041(01)-76}\,201-76$$

512 513

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ИЗДАНИЯ

Сборником «Венгерские математические олимпиады» издательство «Мир» продолжает серию «Задачи и олимпиады», начатую в 1975 году [1]. С его изданием советский читатель получает уникальную возможность познакомиться с многолетним педагогическим опытом страны, математические традиции которой снискали всеобщее признание.

Как мне кажется, эта книга заинтересует самые разные категории читателей. Старшеклассник встретит здесь немало интересных задач и сможет, хотя и заочно, померяться силами со своими сверстниками прошлых лет, многие из которых стали известными учеными, — возможность, всегда соблазнительная. Ветеран олимпиад сравнит эти задачи с теми, которые были «в его время», и с удовольствием отметит неожиданные повороты в решениях или занимательное оформление условий. Преподаватель математики найдет разнообразный материал для классных и внеклассных занятий. Наконец, педагог-исследователь сможет проследить за эволюцией идей в задачах, отражающей сменяющиеся веяния как в самой математике, так и в ее преподавании.

В 1894 году Венгерское физико-математическое общество, президентом которого был знаменитый физик Лоран Этвёш, приняло решение о проведении математических олимпиад для выпускников гимназий. С тех пор с небольшими перерывами, вызванными двумя мировыми войнами, эти олимпиады проводились ежегодно, как правило, в октябре (для тех, кто окончил школу в июне того же года). География олимпиад постоянно расширялась, и теперь они проводятся одновременно почти в тридцати городах Венгрии. По традиции участникам предлагаются три задачи, на решение которых

---

[1] Ч. Тригг, Задачи с изюминкой, М., «Мир», 1975.

дается четыре часа, причем разрешается пользоваться любыми пособиями. Эти задачи нестандартны и требуют не столько формальных знаний, сколько сообразительности и остроумия; словом, это задачи «олимпиадного стиля». Имея перед собой коллекцию задач, собранную десятилетиями, убеждаемся в хорошем вкусе, мастерстве и изобретательности их составителей.

Лауреатами этих олимпиад были многие всемирно известные математики: 1897 год — Липот Фейер («ядро Фейера»), 1898 год — Теодор фон Карман («цепочки вихрей Кармана»), 1903 год — Альфред Хаар («мера Хаара»), 1904 год — Марсель Рисс (теорема о выпуклости; интегралы дробного порядка), 1912 год — Габор Сеге (теория ортогональных полиномов и знаменитый задачник Полиа — Сеге).

После второй мировой войны, с 1947 года, по инициативе венгерского Математического общества имени Яноша Бойяи олимпиады возобновились. В 1949 году им было присвоено имя Йожефа Кюршака (1864—1933), профессора Будапештского университета, математика и педагога, много сделавшего для организации олимпиад и издавшего в 1928 году первый сборник олимпиадных задач с решениями и комментариями. С 1949 года условия и решения задач олимпиад имени Й. Кюршака (а также и других: сейчас в Венгрии ежегодно проводится четыре олимпиады по математике) регулярно публикуются в журнале Középiskolai Matematikai Lapok (издание типа нашего «Кванта»).

В этой книге задачи, собранные и прокомментированные самим Й. Кюршаком, имеют номера 1—93. В дальнейшем работа была продолжена Д. Хайошем, Д. Нейкоммом и Я. Шурани, которые в 1956 и 1964 годах переиздали сборник Кюршака, дополнив его второй частью, написанной в том же ключе и содержащей материалы олимпиад позднейших лет (у нас это задачи 94—189). Наконец, при подготовке настоящего издания переводчик Ю. А. Данилов собрал задачи последних олимпиад (это номера 190—222) и их решения (написанные, как правило, также указанными выше авторами), так что наше изложение доведено до 1974 года и читатель, как я уже отметил, имеет редкую возможность познакомиться с интереснейшим восьмидесятилетним опытом, В настоящем издании произведена некоторая композиционная перестройка оригинала. Комментируя задачи, Й. Кюршак не ограничивался одним решением. Часто он приводил несколько вариантов решения; иногда варьировались условия задачи и обсуждались последствия, которые от этого возникают; задача обобщалась или рассматривалась под новым углом зрения; нередко решение сопровождалось «замечаниями по поводу». Тот же стиль был сохранен и преемниками Кюршака. Поскольку такие замечания, с одной стороны, отяжеляют изложение самих решений, а с другой, в большинстве своем представляют самостоятельный интерес (иногда это доказательства некоторых теорем элементарной математики или рассказ о фактах математики неэлементарной, иногда справочный материал, а иногда небольшое исследование), мы сочли целесообразным выделить их в особый раздел III, назвав его «Немного теории». Каждый пункт этого раздела (всего их 74) относится к какой-то своей задаче, но, как правило, его можно читать и независимо. Читателя отсылает к этой части книги специальный знак *. Если же в каком-то месте приходится ссылаться на тот пункт раздела III, который непосредственно не относится к рассматриваемой в данный момент задаче, то мы пишем, например III. 17, указывая этим, что следует смотреть в разделе III пункт 17. Для тех же, кто захочет читать раздел III независимо от решения задач, я привожу ниже своего рода «путеводитель».

Принцип математической индукции: 3.

Множества и комбинаторика: 4, 5, 37, 60, 61. *Принцип Дирихле*: 30.

Арифметика и теория чисел. Простые числа. Делимость: 1, 2, 7, 21, 22, 23, 28, 32, 39, 49, 62, 66. *Теория сравнений*: 12. *Малая теорема Ферма*: 19.

Проблема Варинга: 63. *Теорема Вильсона*: 69. *О дробях Фарея*: 72.

Геометрия: 48. *Геометрия треугольника*: 8, 13, 38. *Теорема Эйлера*: 11.

Правильные многоугольники: 14, 16, 36. *О векторах*: 51. *Теорема Хелли*: 70.

Неевклидова геометрия: 26, 27. *О целочисленных решетках*: 67.

Алгебра: 18. *Алгебра многочленов*: 15, 17, 24, 40, 41, 45, 46. *Алгебраические числа*: 20, 31.

Тригонометрия: 6, 9, 10, 35, 53.

Анализ. Ряды: 25, 58, 59, 64.

Неравенства: 29, 33, 42, 43, 55, 57, 65. *О выпуклых и вогнутых функциях*: 44.

Теория графов: 52, 54, 68, 71, 73, 74.

О номографии: 34.

О центре тяжести: 56.

Конь на шахматной доске: 50.

В оригинале каждая олимпиада имеет свой порядковый номер, от I до LXXV, который мы при переводе опустили. Впрочем, любознательный читатель легко восстановит его при помощи формулы

$$\text{Номер олимпиады} = \left[\frac{\text{Номер задачи}}{3}\right] + 1$$

(скобки обозначают здесь целую часть числа).

Кроме указанной композиционной перестройки, я позволил себе опустить в ряде мест мало существенные подробности и несколько переработать отдельные решения; решения задач 205—207, которых мы не нашли в венгерских журналах, так же как и некоторые пункты раздела III, написаны заново. Нестандартные обозначения приведены в соответствие с принятыми в нашей математической литературе.

Авторы любезно согласились на издание книги в ее нынешнем виде, однако просили отметить, что отбор материала и его редактирование отражают точку зрения редактора русского издания.

В. М. Алексеев

I. ЗАДАЧИ

Олимпиада 1894 г.

1. Доказать, что выражения

$$2x + 3y \quad \text{и} \quad 9x + 5y$$

делятся на 17 при одних и тех же целых числах x и y.

2. Дана окружность и точки P и Q внутри нее. Построить вписанный в эту окружность прямоугольный треугольник, у которого один катет проходит через точку P, а другой — через точку Q. При каком расположении точек P и Q задача становится неразрешимой?

3. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной d. Площадь треугольника равна S. Найти стороны и углы треугольника. Решить ту же задачу для частного случая, когда $d = 1$, а $S = 6$.

Олимпиада 1895 г.

4. Доказать, что из неограниченного запаса карточек двух сортов набор, состоящий из n упорядоченных карточек и содержащий по крайней мере по одной карточке каждого сорта, можно выбрать $2(2^{n-1} - 1)$ различными способами.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC. Найти внутри него точку N, для которой углы NBC, NCA и NAB равны.

6. В некотором треугольнике известны радиус описанной окружности R, одна из сторон c и отношение двух других сторон $a : b$. Найти стороны и углы α, β, γ этого треугольника.

Олимпиада 1896 г.

7. Доказать, что для любого целого положительного числа n справедливо неравенство

$$\lg n \geqslant k \lg 2,$$

где $\lg n$ — десятичный логарифм числа n, а k — число различных простых (положительных) делителей этого числа.

8. Доказать, что если какая-нибудь пара значений переменных x и y удовлетворяет уравнениям

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0$$

и

$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7x = 0,$$

то эта же пара удовлетворяет уравнению

$$xy - 12x + 15y = 0.$$

9. Даны точки A_1, B_1 и C_1, служащие основаниями высот некоторого треугольника ABC. Построить треугольник ABC.

Или: дан треугольник $A_1B_1C_1$, вершины которого совпадают с основаниями высот треугольника ABC. Найти стороны и углы треугольника ABC.

Олимпиада 1897 г.

10. Доказать, что если α, β и γ — углы прямоугольного треугольника, то

$$\sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha - \beta) + \sin\beta \sin\gamma \sin(\beta - \gamma) +$$
$$+ \sin\gamma \sin\alpha \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha) = 0.$$

11. Доказать, что если α, β и γ — углы произвольного треугольника, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{4}.$$

12. Известно, что продолжения параллельных сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N, а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q. Длина стороны AB равна p. Построить прямоугольник $ABCD$. В каких случаях задача допускает решение и сколькими способами?

Олимпиада 1898 г.

13. Найти все натуральные числа n, для которых число $2^n + 1$ делится на 3.

14. Доказать, что если два треугольника имеют один общий угол, то сумма синусов двух других углов больше у того треугольника, у которого разность этих углов меньше.

Опираясь на полученный результат, определить, у какого треугольника сумма синусов его углов достигает наибольшего значения.

15. Даны четыре точки (A, B, C и D), расположенные на одной прямой. Построить квадрат, у которого продолжения двух противоположных сторон пересекают эту прямую в точках A и B, а продолжения двух других сторон — в точках C и D.

Олимпиада 1899 г.

16. Окружность единичного радиуса разделена точками A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 на пять равных дуг. Доказать, что длины хорд A_0A_1 и A_0A_2 удовлетворяют равенству

$$(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = 5.$$

17. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0.$$

Доказать, что тогда x_1^3 и x_2^3 — корни уравнения

$$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0.$$

18. Доказать, что выражение

$$A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$$

при любых натуральных n делится на 1897.

Олимпиада 1900 г.

19 *Пусть* a, b, c, d и m — такие целые числа, что

$$am^3 + bm^2 + cm + d$$

делится на 5, причем число d на 5 не делится. Доказать, что всегда можно найти такое целое число n, для которого

$$dn^3 + cn^2 + bn + a$$

также будет делиться на 5.

20. Построить треугольник ABC, если известна сторона AB, радиус r вписанной окружности и радиус r_c вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон AC и BC.

21. С отвесной скалы высотой 300 м одна за другой упали две капли воды. Вторая капля начала падать, когда первая уже успела пройти 0,001 мм. На каком расстоянии друг от друга будут находиться капли в тот момент, когда первая капля достигнет подножия скалы?

(Ответ требуется вычислить с точностью до 0,1 мм; сопротивлением воздуха пренебречь.)

Олимпиада 1901 г.

22. Доказать, что сумма n-х степеней

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n,$$

где n — целое положительное число, делится на 5 в том и только в том случае, если показатель степени n не делится на 4.

23. Доказать, что число

$$u = \operatorname{ctg} 25{,}5^\circ$$

является корнем квадратного уравнения, а число

$$v = \frac{1}{\sin 22{,}5^\circ}$$

— корнем уравнения четвертой степени, причем коэффициенты обоих уравнений суть целые числа и коэффициенты при старших степенях равны 1.

24. Доказать, что если a и b — положительные целые числа, то число членов арифметической прогрессии

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ ba,$$

делящихся на b, равно наибольшему общему делителю чисел a и b.

Олимпиада 1902 г.

25. Доказать, что: а) всякий квадратный трехчлен

$$Ax^2 + Bx + C$$

с известными численными коэффициентами можно представить в виде

$$k\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+lx+m,$$

где коэффициенты k, l и m имеют вполне определенные численные значения;

б) квадратный трехчлен

$$Ax^2+Bx+C$$

принимает целочисленные значения при всех целых x в том и только в том случае, если при записи его в виде

$$k\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+lx+m$$

коэффициенты k, l и m — целые числа.

26. Пусть O — центр сферы K, P и Q — точки, лежащие вне K. Проведем вокруг точки P как вокруг центра сферу радиуса PO, а вокруг точки Q как вокруг центра сферу радиуса QO. Доказать, что площади тех частей этих сфер, которые окажутся внутри K, равны.

27. Известны площадь треугольника S и угол при вершине C. Какими должны быть стороны a и b, сходящиеся в вершине C, для того чтобы сторона c, противолежащая вершине C, имела наименьшую длину?

Олимпиада 1903 г.

28. Пусть $n=2^{p-1}(2^p-1)$, где 2^p-1 — простое число. Доказать, что сумма всех делителей числа n, отличных от самого n, в точности равна n.

29. Если значения

$$x=\sin\alpha,\qquad y=\sin\beta$$

заданы, то выражение

$$z=\sin(\alpha+\beta)$$

в общем случае может принимать четыре различных значения. Написать уравнение, которое бы связывало x, y и z и не содержало бы радикалов и тригонометрических функций. Найти также значения x и y, при которых $z=\sin(\alpha+\beta)$ принимает меньше четырех значений.

30. Пусть A, B, C и D — вершины ромба. Обозначим через

k_1 окружность, проходящую через вершины B, C, D;
k_2 окружность, проходящую через вершины A, C, D;
k_3 окружность, проходящую через вершины A, B, D;
k_4 окружность, проходящую через вершины A, B, C.

Доказать, что в вершине B окружности k_1 и k_3 пересекаются под таким же углом, под каким окружности k_2 и k_4 пересекаются в вершине A.

Олимпиада 1904 г.

31. Доказать, что если в какую-нибудь окружность вписан выпуклый пятиугольник, все углы которого равны, то его стороны также равны.

32. Доказать, что уравнение

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = a$$

не допускает решений в целых положительных числах тогда и только тогда, когда уравнение

$$y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n = a - \frac{n(n+1)}{2}$$

не допускает решений в неотрицательных целых числах (a — целое положительное число).

33. Пусть A_1A_2 и B_1B_2 — диагонали прямоугольника, O — точка их пересечения. Определить (и изобразить на геометрическом чертеже), где должна располагаться точка P для того, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$A_1P > OP, \quad A_2P > OP, \quad B_1P > OP, \quad B_2P > OP.$$

Олимпиада 1905 г.

34. Каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы система уравнений

$$x + py = n, \qquad x + y = p^z,$$

где n и p — заданные натуральные числа, допускала решения в целых положительных числах (x, y, z)? Доказать также, что число таких решений не может быть больше 1.

35. Единичный квадрат разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 равных частей, и средняя часть выброшена. Каждый из оставшихся восьми меньших квадратов в свою очередь разделен прямыми, параллельными его сторонам, на 9 равных частей, и его средняя часть также выброшена, после чего аналогичная операция проделана над каждым из оставшихся квадратов и т. д. Предположим, что операция повторена n раз.

а. Сколько квадратов со стороной $^1/_{3^n}$ осталось?

б. Чему равен предел, к которому стремится сумма площадей квадратов, выброшенных на n-м шаге, при неограниченном возрастании n?

36. На стороне AB треугольника ABC между вершинами A и B произвольно выбрана точка C_1, которая соединена отрезком прямой с вершиной C.

Через вершину A проведена прямая, параллельная отрезку CC_1, до пересечения с продолжением стороны BC в точке A_1, а через вершину B проведена прямая, параллельная отрезку CC_1, до пересечения с продолжением стороны AC в точке B_1.

Доказать, что

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}.$$

Олимпиада 1906 г.

37. Доказать, что синус и косинус любого угла выражаются рациональными числами в том и только в том случае, когда тангенс половинного угла либо рационален, либо не определен.

38. Пусть K, L, M и N — центры квадратов, построенных (вовне) на сторонах ромба. Доказать, что четырехугольник $KLMN$ — квадрат.

39. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Доказать, что произведение

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_2-3)\cdot\ldots\cdot(a_n-n)$$

равно четному числу, если n нечетно.

40. Пусть p и q — два целых нечетных числа. Доказать, что уравнение

$$x^2 + 2px + 2q = 0$$

не может иметь рациональных корней.

41. Доказать, что расстояние от точки P, произвольно выбранной внутри параллелограмма $ABCD$, до ближайшей вершины параллелограмма никогда не превосходит радиуса R описанной окружности треугольника ABC.

42. Пусть $\frac{r}{s}$ — рациональное число, представимое в виде десятичной дроби

$$\frac{r}{s} = 0,\ k_1k_2k_3 \ldots .$$

Доказать, что в последовательности чисел

$$\sigma_1 = 10\frac{r}{s} - k_1,\quad \sigma_2 = 10^2\frac{r}{s} - (10k_1 + k_2),$$

$$\sigma_3 = 10^3\frac{r}{s} - (10^2k_1 + 10k_2 + k_3),\ \ldots$$

по крайней мере два совпадают.

Олимпиада 1908 г.

43. Доказать, что если a и b — два целых нечетных числа, то $a^3 - b^3$ делится на 2^n тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на 2^n.

44. Доказать, что при $n > 2$ в любом прямоугольном треугольнике n-я степень гипотенузы больше суммы n-х степеней катетов.

45. В окружность вписаны два правильных десятиугольника различных типов. Один десятиугольник (правильный выпуклый) построен так: окружность разделили на десять равных частей, после чего соседние точки деления соединили отрезками прямых. Другой десятиугольник (правильный звездчатый) построен иначе: окружность сначала разделили на десять равных частей, после чего каждую точку деления соединили хордами с точками деления, отстоящими от нее на $^3/_{10}$ окружности.

Доказать, что разность сторон звездчатого и выпуклого правильных десятиугольников равна радиусу окружности.

Олимпиада 1909 г.

46. Доказать, что куб наибольшего из трех последовательных натуральных чисел не может быть равен сумме кубов двух других чисел.

47. Доказать, что дуга, стягивающая любой острый центральный угол, меньше среднего арифметического синуса и тангенса этого угла.

48. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания высот, опущенных на стороны BC, CA и AB треугольника ABC, а M — точка пересечения высот. Доказать, что если ABC — косоугольный треугольник, то центры окружностей, касающихся всех трех сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (или их продолжений), совпадают с точками A, B, C и M. Чем отличается случай, когда треугольник ABC тупоугольный, от того случая, когда треугольник ABC остроугольный?

Олимпиада 1910 г.

49. Доказать, что

$$-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1,$$

если

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

и a, b, c — вещественные числа.

50. Пусть a, b c и d — такие целые числа, что каждое из чисел

$$ac, \ bc + ad, \ bd$$

делится на некоторое целое число u. Доказать, что в этом случае каждое из чисел bc и ad также делится на u.

51. Угол γ при вершине C треугольника равен 120°, а стороны CB и CA, между которыми заключен этот угол, равны a и b. Найти биссектрису угла γ (выразить ее длину через стороны a и b).

Олимпиада 1911 г.

52. Доказать, что если a, b, c и A, B, C — вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$aC - 2bB + cA = 0 \quad \text{и} \quad ac - b^2 > 0,$$

то

$$AC - B^2 \leqslant 0.$$

53. На окружности, описанной вокруг правильного восьмиугольника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$, произвольно выбрана точка Q. Доказать, что сумма четвертых степеней расстояний от точки Q до диагоналей P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7, P_4P_8 восьмиугольника не зависит от расположения точки Q на окружности.

54. Доказать, что если p — целое число, большее 1, то $3^p + 1$ не может делиться на 2^p.

Олимпиада 1912 г.

55. Сколько существует n-значных чисел, состоящих лишь из цифр 1, 2, 3, в записи которых каждая из трех цифр встречается по крайней мере один раз?

56. Доказать, что при любом натуральном n число

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

делится на 8.

57. Доказать, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон четырехугольника.

Олимпиада 1913 г.

58. Доказать, что если n — любое натуральное число, большее 2, то

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^2 > n^n.$$

59. Пусть O и O' — две противоположные вершины куба. Соединим отрезками прямых середины шести ребер куба, не содержащих ни одну из вершин O и O'. Доказать, что все точки, делящие пополам указанные ребра куба, лежат в одной плоскости и служат вершинами правильного шестиугольника.

60. Пусть d — наибольший общий делитель целых положительных чисел a и b, а d' — наибольший общий делитель целых положительных чисел a' и b'. Доказать, что наибольший общий делитель чисел

$$aa',\ ab',\ ba',\ bb'$$

равен dd'.

Олимпиада 1914 г.

61. Точки A и B, лежащие на окружности k, соединены дугой другой окружности k', делящей площадь круга, заключенного внутри k, на две равные части. Доказать, что дуга окружности k', соединяющая точки A и B, больше диаметра окружности k.

62. Пусть при всех x, таких, что

$$-1 \leqslant x \leqslant +1,$$

выполняется неравенство

$$-1 \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant +1$$

(коэффициенты a, b и c — вещественные числа). Доказать, что при таких же x

$$-4 \leqslant 2ax + b \leqslant +4.$$

63. Окружность пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Доказать, что если перпендикуляры к сторонам BC, CA и AB, восстановленные из точек A_1, B_1, C_1, пересекаются в одной точке, то перпендикуляры к сторонам BC, CA и AB, восстановленные из точек A_2, B_2, C_2, также пересекаются в одной точке.

Олимпиада 1915 г.

64. Пусть A, B, C — заданные вещественные числа. Доказать следующее утверждение: всегда можно найти число ν, такое, что при любом $n > \nu$ будет выполняться неравенство

$$An^2 + Bn + C < n!$$

65. Треугольник целиком расположен внутри некоторого многоугольника. Доказать, что периметр треугольника не превосходит периметра многоугольника.

66. Доказать, что площадь треугольника, вписанного в параллелограмм, не может быть больше половины площади этого параллелограмма.

Олимпиада 1916 г.

67. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0,$$

где a и b — положительные числа, имеет два вещественных корня, причем один из корней заключен между $\frac{a}{3}$ и $\frac{2a}{3}$, а другой — между $-\frac{2b}{3}$ и $-\frac{b}{3}$.

68. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла при вершине C, D — точка пересечения биссектрисы со стороной AB. Доказать, что отрезок CD по длине меньше среднего геометрического сторон CA и CB.

69. Разобьем числа

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

любым способом на две группы. Доказать, что в одной из двух групп всегда можно найти два числа, разность которых будет совпадать с одним из чисел той же группы.

Олимпиада 1917 г.

70. Дана система уравнений

$$y-2x-a=0,$$
$$y^2-xy+x^2-b=0,$$

где a и b — целые числа, x и y — неизвестные. Доказать, что если этой системе удовлетворяют какие-то рациональные числа, то они должны быть целыми.

71. В десятичной записи квадрата некоторого числа, содержащей более одного знака, число десятков равно 7. Какой цифрой оканчивается квадрат этого числа?

72. Внутри окружности K заданы две точки, A и B. Доказать, что существует такая окружность (в действительности бесконечно много окружностей), которая проходит через точки A и B и целиком располагается внутри окружности K.

Олимпиада 1918 г.

73. Пусть AC — более длинная из диагоналей параллелограмма $ABCD$. Из вершины C на продолжения сторон AB и AD опущены перпендикуляры CE и CF. Доказать, что

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

74. Пусть x, y, z — три различных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания и таких, что сумма обратных им величин выражается целым числом. Найти x, y и z.

75. Пусть при всех вещественных значениях x

$$ax^2 + 2bx + c \geqslant 0,$$
$$px^2 + 2qx + r \geqslant 0,$$

где a, b, c; p, q, r — вещественные числа. Доказать, что тогда при всех вещественных значениях x

$$apx^2 + 2bqx + cr \geqslant 0.$$

Олимпиада 1922 г.

76. В пространстве заданы четыре точки: A, B, C и D. Требуется провести плоскость S так, чтобы точки A и C оказались по одну сторону от нее, а точки B и D — по другую и расстояния от всех четырех точек A, B, C и D до плоскости S были равны.

77. Доказать, что многочлен четвертой степени $x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ нельзя разложить в произведение двух квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ с целочисленными коэффициентами a, b, c и d.

78. Доказать, что если a, b, ..., n — попарно различные натуральные числа и ни одно из них не делится на простые числа, превышающие число 3, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{n} < 3.$$

Олимпиада 1923 г.

79. Три окружности одного и того же радиуса r пересекаются в точке O и, кроме того, попарно пересекаются в точках A, B и C. Доказать, что через точки A, B и C можно провести окружность того же радиуса r.

80. Доказать, что если

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

и

$$S_n = 1 + \frac{1+q}{2} + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+q}{2}\right)^n,$$

то

$$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 s_1 + C_{n+1}^3 s_2 + \ldots$$
$$\ldots + C_{n+1}^{n+1} s_n = 2^n S_n.$$

81. Доказать, что все члены арифметической прогрессии, образованной из целых положительных чисел, не могут быть простыми числами (за исключением вырожденного случая — арифметической прогрессии с нулевой разностью, все члены которой равны одному и тому же простому числу).

Олимпиада 1924 г.

82. Даны три целых положительных числа a, b и c. Доказать, что если при всех целых положительных n можно построить треугольники со сторонами длиной a^n, b^n и c^n, то все построенные треугольники будут равнобедренными.

83. Найти на плоскости геометрическое место точек P, сумма расстояний от которых до фиксированной точки O (r) и заданной прямой (ρ) равна заданному числу a (числа r и ρ строго положительны).

84. На плоскости заданы три точки: A, B и C. Построить три окружности k_1, k_2 и k_3 так, чтобы окружности k_2 и k_3 касались друг друга в точке A, окружности k_3 и k_1 — в точке B и окружности k_1 и k_2 — в точке C.

Олимпиада 1925 г.

85. Пусть a, b, c и d — четыре целых числа. Доказать, что произведение разностей

$$b-a,\ c-a,\ d-a,$$
$$d-c,\ d-b,\ c-b$$

делится на 12.

86. Сколькими нулями оканчивается число 1000!?

87. Доказать, что радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, меньше половины любого из катетов и четверти гипотенузы.

Олимпиада 1926 г.

88. Доказать, что при любых целых a и b система уравнений

$$x+y+2z+2t=a,$$
$$2x-2y+z-t=b$$

разрешима в целых числах.

89. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел нельзя представить в виде квадрата целого числа.

90. Окружность катится без проскальзывания по окружности вдвое большего радиуса, оставаясь внутри нее. Какую линию описывает при этом произвольная точка катящейся окружности?

Олимпиада 1927 г.

91. Пусть a, b, c, d — такие целые числа, которые взаимно просты с числом

$$m=ad-bc.$$

Доказать, что при тех целых значениях (x, y), при которых $ax+by$ делится на m, $cx+dy$ также делится на m.

92. Чему равна сумма всех четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1, 2, 3, 4, 5, причем каждая цифра встречается не более одного раза?

93. Из четырех окружностей, касающихся сторон треугольника ABC (одной вписанной и трех вневписанных), рассмотрим те две, которые касаются стороны AB (точки касания располагаются между вершинами A и B). Доказать, что среднее геометрическое радиусов этих окружностей не превосходит половины длины стороны AB.

Олимпиада 1928 г.

94. Пусть a — произвольное положительное число. Рассмотрим $n-1$ последовательных кратных этого числа: a, $2a$, $3a$, ..., $(n-1)a$. Доказать, что среди них найдется по крайней мере одно такое число, для которого абсолютная величина разности между ним и ближайшим целым числом не будет превышать $1/n$.

95. Выписать по кругу n первых натуральных чисел, расположив их так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами не превышала числа 2. Доказать также, что расположить числа по кругу можно лишь одним способом, причем для этого достаточно следить за ближайшими соседями каждого числа.

96. На плоскости заданы прямая и две точки: A и B. Как следует выбрать на этой прямой точку P для того, чтобы

$$\max(AP, BP)$$

принимал наименьшее значение?

[Если длины отрезков AP и BP различны, то $\max(AP, BP)$ означает длину большего из отрезков. Если $AP = BP$, то $\max(AP, BP)$ совпадает с длиной любого из отрезков.]

Олимпиада 1929 г.

97. Сколькими способами можно разменять один пенге[1]? (В одном пенге 100 филлеров. В обращении находятся монеты достоинством в 1, 2, 10, 20 и 50 филлеров.)

---

[1] В настоящее время эта денежная единица заменена *форинтом*. 1 форинт по-прежнему равен 100 филлерам. — *Прим. ред.*

98. Доказать, что при $0 \leqslant x \leqslant 1/n$ многочлен k-й степени

$$1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k x^k$$

принимает положительные значения.

(Здесь k — целое положительное число, не превышающее n; C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^k — биномиальные коэффициенты[1].)

99. На плоскости проведены три прямые p, q и r, пересекающиеся в одной точке и образующие попарно углы в 60°. Кроме того, заданы три отрезка с длинами a, b и c, причем $a \leqslant b \leqslant c$. Доказать, что точки, удаленные от прямой p менее чем на a, от прямой q менее чем на b и от прямой r менее чем на c, заполняют внутренность некоторого шестиугольника в том и только в том случае, если $a + b > c$.

Чему равен периметр шестиугольника, если условие $a + b > c$ выполнено?

Олимпиада 1930 г.

100. Сколько существует пятизначных чисел, заканчивающихся цифрой 6, которые делятся на 3?

101. На шахматной доске размером $8 \times 8 = 64$ клетки произвольно проведена прямая. Чему равно наибольшее число клеток, которые она может пересечь?

102. Пусть P — произвольно выбранная точка, лежащая внутри остроугольного треугольника ABC и не совпадающая с центром описанной окружности. Доказать, что длина одного из отрезков AP, BP и CP больше R, а длина другого — меньше R. (Здесь R — радиус описанной окружности треугольника ABC.)

---

[1] Биномиальный коэффициент C_n^l (число сочетаний из n по l) можно вычислить по следующей формуле:

$$C_n^l = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-l+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot l}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n).$$

Олимпиада 1931 г.

103. Пусть p — простое число больше 2. Доказать, что $2/p$ можно представить одним и только одним способом в виде

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

где x и y — различные целые положительные числа.

104. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и b — такие целые числа, что

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2.$$

Доказать, что все эти числа не могут быть нечетными.

105. На прямой заданы точки A и B. Найти на этой прямой точку P, в которой выражение

$$\frac{1}{1+AP}+\frac{1}{1+BP}$$

достигает наибольшего значения. Здесь AP и BP означают длины отрезков и, следовательно, не могут принимать отрицательных значений.

Олимпиада 1932 г.

106. Доказать, что если b — натуральное число, делящееся на a^n (a и n — также натуральные числа), то

$$(a+1)^b-1$$

делится на a^{n+1}.

107. Пусть в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны ($AB \neq AC$) и AP — биссектриса угла A (точка P лежит на стороне BC).

Доказать, что:

а) точка P лежит между основанием T высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, и серединой F стороны BC;

б) если треугольник ABC остроугольный, то

$$\angle FAP < \angle PAT.$$

108. Пусть α, β, γ — углы произвольного остроугольного треугольника. Доказать, что если $\alpha<\beta<\gamma$, то

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

Олимпиада 1933 г.

109. Вычислить, чему равно $ab+cd$, если

$$a^2+b^2=1,$$
$$c^2+d^2=1,$$
$$ac+bd=0.$$

110. На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток, причем так, что на каждой из 8 горизонталей и каждой из 8 вертикалей оказалось по 2 помеченных клетки. Доказать, что на помеченных клетках можно расставить 8 черных и белых фигур (по одной фигуре на каждой помеченной клетке) так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали стояло по 1 белой и 1 черной фигуре.

111. Окружности k_1 и k_2 касаются одна другой в точке P. Одна секущая, проходящая через точку P, пересекает окружность k_1 в точке A_1, а окружность k_2 в точке A_2. Другая секущая, также проходящая через точку P, пересекает окружность k_1 в точке B_1, а окружность k_2 в точке B_2. Доказать, что треугольники PA_1B_1 и PA_2B_2 подобны.

Олимпиада 1934 г.

112. Пусть

$$A=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n},$$

где n — целое положительное число. Доказать, что в последовательности

$$A,\ 2A,\ 4A,\ 8A,\ \ldots,\ 2^kA,\ \ldots$$

с некоторого места встречаются только целые числа.

113. У какого из вписанных в данную окружность многоугольников сумма квадратов сторон достигает наибольшего значения?

114. Предположим, что на плоскости задано бесконечно много прямоугольников, вершины которых располагаются в точках с прямоугольными координатами

$$(0,\ 0),\ (0,\ m),\ (n,\ 0),\ (n,\ m),$$

где m и n — целые положительные числа. Доказать, что среди указанных прямоугольников всегда можно выбрать два, один из которых будет располагаться внутри другого.

Олимпиада 1935 г.

115. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — некоторая перестановка положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доказать, что

$$\frac{a_1}{b_2}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

116. Точка O называется центром симметрии точечного множества H, если точка, симметричная относительно O любой точке множества H, также принадлежит множеству H. Доказать, что конечное точечное множество не может иметь двух различных центров симметрии.

117. Каждой из вершин треугольной призмы поставлено в соответствие по числу так, что число, соответствующее любой из вершин, равно среднему арифметическому чисел, которые стоят у противоположных концов ребер, сходящихся в данной вершине. Доказать, что все шесть чисел, соответствующих вершинам призмы, равны.

Олимпиада 1936 г.

118. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

119. Точка S выбрана внутри треугольника ABC так, что площади треугольников ABS, BCS, CAS равны. Доказать, что S — центр тяжести треугольника ABC.

120. Пусть a — произвольно заданное целое положительное число. Доказать, что всегда можно найти одну и только одну пару целых положительных чисел (x, y), для которых будет выполняться соотношение

$$x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}=a.$$

Олимпиада 1937 г.

121. Пусть сумма целых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n меньше некоторого целого положительного числа k. Доказать, что

$$a_1!\,a_2!\,a_3!\,\ldots\,a_n! < k!.$$

122. Три окружности в пространстве попарно касаются друг друга, причем все три точки касания различны. Доказать, что эти окружности лежат либо на одной сфере, либо в одной плоскости. (Мы говорим о касании двух окружностей в пространстве, если у них есть общая точка и общая касательная в этой точке.)

123. Точки A_1, A_2, ..., A_n не лежат на одной прямой. Пусть P и Q — две такие точки (отличные от A_1, A_2, ..., A_n и не совпадающие друг с другом), что

$$A_1P + A_2P + \ldots + A_nP = A_1Q + A_2Q + \ldots + A_nQ = s.$$

Доказать, что существует точка K, для которой

$$A_1K + A_2K + \ldots + A_nK < s.$$

Олимпиада 1938 г.

124. Доказать, что целое число представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда вдвое большее число обладает тем же свойством.

125. Доказать, что для всех целых чисел $n > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

126. Назовем трансверсалью треугольника любой отрезок прямой, соединяющий одну из вершин треугольника с произвольной точкой противолежащей стороны (или ее продолжения). Доказать, что для любого остроугольного треугольника в пространстве найдется такая точка, из которой любая трансверсаль видна под прямым углом.

Олимпиада 1939 г.

127. Пусть числа a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 удовлетворяют неравенствам

$$a_1a_2 > 0, \quad a_1c_1 \geqslant b_1^2, \quad a_2c_2 \geqslant b_2^2.$$

Доказать, что при этом

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2) \geqslant (b_1+b_2)^2.$$

128. Какова наибольшая степень числа 2, на которую делится $2^n!$?

129. На каждой из полуокружностей, построенных вовне остроугольного треугольника ABC на сторонах AB, BC, CA как на диаметре, найти по точке C_1, A_1 и B_1 так, чтобы

$$AB_1 = AC_1,\ BA_1 = BC_1,\ CA_1 = CB_1.$$

Олимпиада 1940 г.

130. Предположим, что имеется несколько предметов, каждый из которых окрашен в один из двух различных цветов (оба цвета встречаются) и имеет одну из двух форм (обе формы встречаются). Доказать, что в этом случае среди предметов можно выбрать два таких, которые отличаются и по цвету, и по форме.

131. Пусть m и n — два различных целых положительных числа. Доказать, что

$$2^{2^m}+1 \text{ и } 2^{2^n}+1$$

не имеют ни одного общего делителя, большего 1.

132. Доказать, что из медиан всякого треугольника можно построить новый треугольник. Доказать также, что если H_1 — исходный треугольник, H_2 — треугольник, построенный из медиан треугольника H_1, а H_3 — треугольник, построенный из медиан треугольника H_2, то треугольники H_1 и H_3 подобны.

Олимпиада 1941 г.

133. Доказать, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots\left(1+x^{2^{k-1}}\right) =$$
$$= 1+x+x^2+x^3+x^4+\ \ldots\ x^{2^k-1}.$$

134. Целочисленной решеткой называется множество точек (узлов), все координаты которых (относительно какой-либо прямоугольной системы отсчета) являются целыми числами. Доказать, что если вершины какого-нибудь параллелограмма совпадают с узлами целочисленной решетки и внутри параллелограмма или на его границе имеются другие узлы решетки, то площадь такого параллелограмма больше 1.

135. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$, стороны которого AB, CD и EF равны радиусу окружности. Доказать, что середины трех других сторон шестиугольника $ABCDEF$ служат вершинами равностороннего треугольника.

Олимпиада 1942 г.

136. Доказать, что в любом треугольнике найдется не более одной стороны, которая меньше опущенной на нее высоты.

137. Пусть a, b, c, d — такие целые числа, что система уравнений

$$ax + by = m, \quad cx + dy = n$$

при всех целых m и n имеет решение в целых числах. Доказать, что тогда

$$ad - bc = \pm 1.$$

138. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC точки A_1, B_1, C_1 расположены так, что

$$AC_1 = 2C_1B, \quad BA_1 = 2A_1C, \quad CB_1 = 2B_1A.$$

Доказать, что площадь треугольника, образованного при пересечении отрезков AA_1, BB_1, CC_1, составляет $^1/_7$ от площади треугольника ABC.

Олимпиада 1943 г.

139. Доказать, что в любой компании число тех, кто знаком с нечетным числом членов компании, четно.

140. Пусть P — произвольная точка внутри остроугольного треугольника ABC. Доказать, что наибольшее расстояние D от P до точек, лежащих на периметре треугольника ABC, по крайней мере вдвое больше наименьшего расстояния d. При каких условиях $D = 2d$?

141. Пусть $a < b < c < d$. Сколько различных значений может принимать выражение

$$n = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2,$$

если значения переменных x, y, z и t совпадают с некоторой перестановкой чисел a, b, c и d? При каком расположении этих чисел n принимает наибольшее и наименьшее значения?

Олимпиада 1947 г.

142. Доказать, что если n — нечетное число, то

$$46^n + 296 \cdot 13^n$$

делится на 1947.

143. Доказать, что в любой компании из шести человек всегда найдутся либо трое знакомых друг с другом, либо трое не знакомых друг с другом (Два члена A и B компании считаются знакомыми друг с другом, если A знаком с B, а B знаком с A.)

144. Круг радиуса r покрывают кругами радиуса $r/2$. Какое наименьшее число кругов требуется для этого?

Олимпиада 1948 г.

145. 23 октября 1948 г. приходится на субботу. Можно ли утверждать, что Новый год чаще приходится на воскресенье, чем на понедельник?

146. Доказать, что, кроме тетраэдра, не существует ни одного выпуклого многогранника[1], у которого любая вершина была бы соединена ребрами со всеми остальными.

147. Доказать, что из n заданных натуральных чисел всегда можно выбрать несколько таких (по крайней мере одно, но, быть может, и все), что их сумма будет делиться на n.

---

[1] Вырожденные тела, целиком лежащие в некоторой плоскости, к многогранникам не причисляются. Поэтому, в частности, у многогранника не меньше четырех вершин. — *Прим. ред.*

Олимпиада 1949 г.

148. Доказать, что для всех положительных углов $\alpha < 180^\circ$ выполняется неравенство

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha > 0.$$

149. Через точку P, лежащую на основании BC равнобедренного треугольника ABC, проведены прямые, параллельные его боковым сторонам; Q и R — точки пересечения этих прямых с боковыми сторонами. Доказать, что точка, симметричная точке P относительно прямой QR, лежит на окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC.

150. Какие натуральные числа не представимы в виде суммы последовательных натуральных чисел?

Олимпиада 1950 г.

151. В один из дней в библиотеке побывало несколько читателей, которые приходили порознь, но из любых трех читателей по крайней мере двое в тот день в библиотеке встретились. Доказать, что можно выбрать такие два момента, что любой из читателей, посетивших в тот день библиотеку, по крайней мере в один из этих моментов находился в ней.

152. Три окружности k_1, k_2 и k_3, лежащие в одной плоскости, попарно касаются друг друга в трех различных точках. Соединим точку касания окружностей k_1 и k_2 с двумя другими точками касания отрезками прямых. Доказать, что эти отрезки или их продолжения пересекают окружность k_3 в точках, служащих противоположными концами одного и того же диаметра.

153. Пусть a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — такие вещественные числа, что при любых целых x и y по крайней мере одно из чисел

$$a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2$$

целое четное. Доказать, что по крайней мере в одной из троек коэффициентов a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 все числа целые.

Олимпиада 1951 г.

154. На стороне BC квадрата $ABCD$ отложен отрезок BE длиной $a/3$, а на продолжении стороны DC — отрезок CF длиной $a/2$. Доказать, что точка пересечения прямых AE и BF лежит на окружности, описанной вокруг квадрата $ABCD$. Здесь a — сторона квадрата.

155. Для каких целых чисел m произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (m-1)$ делится на m?

156. Четыре полуплоскости, лежащие в одной и той же плоскости, расположены так, что полностью покрывают плоскость, то есть любая из точек плоскости совпадает с какой-нибудь внутренней точкой по крайней мере одной из плоскостей. Доказать, что из этих полуплоскостей можно выбрать три такие, которые также будут покрывать всю плоскость.

Олимпиада 1952 г.

157. Центры трех окружностей, не имеющих попарно общих внутренних точек, расположены на одной прямой. Доказать, что если четвертая окружность касается всех трех окружностей, то ее радиус не может быть меньше радиусов всех трех окружностей.

158. Из целых чисел от 1 до $3n$ выбрали $n+2$ каких-то чисел. Доказать, что при $n>1$ среди выбранных чисел непременно найдутся два таких, разность между которыми больше n, но меньше $2n$.

159. Пусть $\frac{1}{2}<\lambda<1$. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отложены отрезки

$$BA_1=\lambda\cdot BC,\quad CB_1=\lambda\cdot CA,\quad AC_1=\lambda\cdot AB.$$

Доказать, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не превосходит периметр треугольника ABC, умноженный на λ.

Олимпиада 1953 г.

160. Из различных натуральных чисел, каждое из которых меньше заданного натурального числа n, составлены два набора. Доказать, что если общее число членов в обоих наборах не меньше n, то из каждого набора можно выбрать по одному числу так, чтобы их сумма также была равна n.

161. Пусть n — натуральное число, а d — натуральный делитель числа $2n^2$. Доказать, что n^2+d не является квадратом.

162. В равностороннем выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ сумма углов при вершинах A, C, E равна сумме углов при вершинах B, D, F. Доказать, что углы при противоположных вершинах A и D, B и E, C и F равны.

Олимпиада 1954 г.

163. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$

$$AB+BD\leqslant AC+CD.$$

Доказать, что сторона AB в таком четырехугольнике меньше диагонали AC.

164. Доказать, что если все сечения некоторого тела плоскостями имеют форму кругов, то это тело — шар.

165. Каждый из участников турнира встретился по одному разу со всеми остальными участниками, причем ни одна встреча не закончилась вничью. Доказать, что среди спортсменов найдется такой, кто назовет всех остальных участников турнира, если станет перечислять тех, кого победил он сам, и тех, кого победили побежденные им соперники.

Олимпиада 1955 г.

166. Доказать, что если углы при основании трапеции не равны, то диагональ, исходящая из той вершины, при которой угол меньше, больше диагонали, исходящей из другой вершины.

167. Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на 3, в десятичной записи которых встречается цифра 6?

168. Целочисленной решеткой на плоскости называется множество точек (узлов), обе координаты которых выражаются целыми числами. Доказать, что если вершины треугольника совпадают с узлами целочисленной решетки, периметр треугольника не содержит других узлов, а внутри треугольника находится один-единственный узел решетки, то центр тяжести треугольника совпадает с этим «внутренним» узлом.

Олимпиада 1957 г.

169. На плоскости задан остроугольный треугольник ABC. Рассмотрим все пирамиды, в основании которых лежит данный треугольник, а боковыми гранями служат остроугольные треугольники. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из вершин этих пирамид на плоскость треугольника ABC.

170. Фабрика выпускает двухцветные ткани из пряжи шести различных цветов. В расцветках этих тканей каждый цвет сочетается по крайней мере с тремя другими. Доказать, что можно выбрать ткани трех различных расцветок, в которых будут представлены все шесть цветов.

171. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Найти наибольшее значение суммы

$$|a_1-1|+|a_2-2|+\ \ldots\ +|a_n-n|,$$

если рассматривать разрешается все перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$.

Олимпиада 1958 г.

172. На плоскости задано шесть точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что из шести заданных точек три можно выбрать так, чтобы один из углов треугольника с вершинами в выбранных точках был не меньше 120°.

173. Доказать, что если u и v — такие целые числа, для которых выражение u^2+uv+v^2 делится на 9, то каждое из чисел u и v в отдельности делится на 3.

174. Противоположные стороны AB и DE, BC и EF, CD и FA выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Доказать, что площади треугольников ACE и BDF равны.

Олимпиада 1959 г.

175. Доказать, что если x, y и z — различные целые числа, а n — неотрицательное целое число, то

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

— целое число.

176. На горизонтальной плоскости из трех точек, отстоящих от основания радиоантенны на расстояние 100, 200 и 300 м, измерили угол, под которым видна антенна. Измеренные углы в сумме составляют 90°. Чему равна высота антенны?

177. Трое братьев в один день навестили больного друга, и в тот же день ему нанесли визит жены всех братьев. Никто из посетителей не заходил более одного раза. Каждый из трех братьев встретился в доме больного друга с двумя своими невестками. Доказать, что кто-то из братьев встретился в доме больного друга также и со своей женой.

Олимпиада 1960 г.

178. Во время экскурсии выяснилось, что один из любых четырех ее участников встречался ранее с тремя остальными. Доказать, что среди любых четырех участников экскурсии всегда можно найти такого, который встречался ранее со всеми остальными экскурсантами.

179. Пусть $a_1=1$, a_2, a_3, ... — бесконечная последовательность натуральных чисел, члены которой при всех $k>1$ удовлетворяют неравенству

$$a_k \leqslant 1+a_1+a_2+\ \ldots\ +a_{k-1}.$$

Доказать, что все натуральные числа можно представить в виде суммы каких-то членов этой последовательности (в частном случае сумма может состоять из одного слагаемого, то есть натуральное число может совпадать с каким-то из членов последовательности).

180. Пусть E — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точки F и G выбраны на сторонах BC и CD так, что отрезки AG и EF параллельны. Доказать, что отрезок прямой FG касается окружности, вписанной в квадрат $ABCD$.

Олимпиада 1961 г.

181. Четыре точки на плоскости позволяют задать шесть отрезков. Доказать, что длина наибольшего отрезка превышает длину наименьшего отрезка не менее чем в $\sqrt{2}$ раз.

182. Доказать, что три произведения

$$(1-a)b, \quad (1-b)c, \quad (1-c)a,$$

составленные из положительных чисел $a<1$, $b<1$, $c<1$, не могут одновременно быть больше $^1/_4$.

183. К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведены одна внешняя и одна внутренняя касательные. Точки касания, принадлежащие каждой из двух окружностей, соединены хордами. Доказать, что точка пересечения прямых, на которых лежат построенные хорды, расположена на прямой, проходящей через центры двух окружностей.

Олимпиада 1962 г.

184. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим пары натуральных чисел (u, v), наименьшее общее кратное которых совпадает с числом n. [Если $u \neq v$, то пара (u, v) считается отличной от пары (v, u).] Доказать, что при заданном значении n таких пар существует столько же, сколько положительных делителей у числа n^2.

185. Доказать, что нельзя выбрать более чем n диагоналей выпуклого n-угольника так, чтобы любые две из них имели общую точку.

186. Внутри или на границе пирамиды $ABCD$ задана точка P, не совпадающая с вершиной D. Доказать, что среди отрезков PA, PB, PC найдется такой, длина которого меньше длины одного из отрезков DA, DB или DC.

Олимпиада 1963 г.

187. В зрительном зале кресла расставлены в p рядов и q «колонн» (условимся называть так кресла, выстроенные «в затылок» одно другому). Таким образом, всего зал вмещает pq зрителей ($p \geq 1$, $q \geq 1$).

В каждом кресле сидит один школьник, причем все ребята, находящиеся в этом зале, отличаются между собой по росту. Учитель выбирает в каждом ряду самого маленького школьника. Рост самого высокого из них оказывается равным a. Затем учитель выбирает самого высокого школьника в каждой «колонне». Рост самого маленького из них оказывается равным b.

Выяснить, каким из трех соотношений

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

могут быть связаны числа a и b, установить, можно ли изменить это соотношение, пересаживая ребят в зрительном зале.

188. Доказать, что если α — острый угол, то

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5.$$

189. Доказать, что если треугольник не тупоугольный, то сумма его медиан не меньше учетверенного радиуса описанной окружности.

Олимпиада 1964 г.

190. Основания двух конгруэнтных правильных треугольных пирамид склеены. У получившегося шестигранного тела все двугранные углы равны, а вершины подразделяются на два типа: в каждой вершине первого типа сходятся три ребра, в каждой вершине второго типа — четыре ребра.

Найти отношение длины отрезка, соединяющего две вершины первого типа, к длине отрезка, соединяющего две вершины второго типа.

191. На выпускном балу каждый юноша танцевал по крайней мере с одной девушкой, но никто из юношей не танцевал со всеми девушками, а каждая девушка танцевала по крайней мере с одним юношей, но никто из девушек не танцевал со всеми юношами.

Доказать, что среди присутствовавших на балу можно найти двух юношей и двух девушек так, что каждый из двух юношей танцевал лишь с одной из двух девушек, а каждая из этих двух девушек танцевала лишь с одним из этих двух юношей.

192. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

Олимпиада 1965 г.

193. Какие целые числа a, b, c удовлетворяют неравенству

$$a^2+b^2+c^2+3 < ab+3b+2c?$$

194. В круге выбрали 8 точек (точки граничной окружности считаются принадлежащими кругу).

Доказать, что среди 8 выбранных точек найдутся две такие, расстояние между которыми меньше радиуса круга.

195. Радиус окружности, описанной вокруг нижнего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды, меньше радиусов окружностей, описанных вокруг боковых граней.

Доказать, что кратчайший из путей, соединяющих противоположные концы пространственных диагоналей пирамиды и лежащих на ее поверхности, проходит по боковой поверхности усеченной пирамиды, минуя основания.

Олимпиада 1966 г.

196. Существует ли пространственный пятиугольник, все стороны которого равны, а углы между двумя любыми смежными сторонами прямые?

197. Доказать, что если n — произвольное натуральное число, то дробная часть десятичного разложения числа

$$(5+\sqrt{26})^n$$

начинается с n одинаковых цифр.

198. Существуют ли два таких бесконечных множества A и B неотрицательных целых чисел, что любое неотрицательное целое число можно представить в виде суммы двух слагаемых, из которых одно принадлежит множеству A, а другое — множеству B, причем единственным способом?

Олимпиада 1967 г.

199. Некоторое множество целых чисел, среди элементов которого есть как положительные, так и отрицательные, вместе с каждыми своими элементами a и b содержит $2a$ и $a+b$.

Доказать, что это множество содержит разность любых двух своих элементов.

200. Выпуклый многоугольник разделен на треугольники своими непересекающимися диагоналями. Все вершины многоугольника служат вершинами нечетного числа таких треугольников.

Доказать, что число сторон многоугольника делится на 3.

201. Доказать, что из всех выпуклых четырехугольников только у параллелограмма сумма расстояний от вершины до двух не сходящихся в ней сторон одинакова для всех четырех вершин.

Олимпиада 1968 г.

202. Доказать, что не существует такой последовательности натуральных чисел, в которой не все члены равны и каждый член, начиная со второго, равен среднему гармоническому предшествующего и последующего членов. (Средним гармоническим чисел a и b называется число $\frac{2ab}{a+b}$.)

203. На плоскости заданы прямая, окружность радиуса n см (n — целое число) и внутри окружности $4n$ отрезков длиной 1 см.

Доказать, что можно провести параллельную или перпендикулярную заданной прямой хорду заданной окружности, которая будет иметь общие точки по крайней мере с двумя заданными отрезками.

204. Расположим в ряд произвольным способом n черных и n белых шариков. Подсчитаем число перемен цвета в каждом таком расположении, то есть определим, сколько раз черные и белые шарики оказываются рядом.

Доказать, что расположений, в которых шарики различных цветов $n-k$ раз оказываются рядом, столько же, сколько расположений с $n+k$ парами разноцветных «соседей» ($0 \leq k \leq n$).

Олимпиада 1969 г.

205. Пусть n — целое число.

Доказать, что если

$$2+2\sqrt{28n^2+1}$$

— целое число, то оно является точным квадратом.

206. Доказать, что если a, b, c — длины сторон треугольника, α, β, γ — противолежащие им углы и

$$a(1-2\cos\alpha)+b(1-2\cos\beta)+c(1-2\cos\gamma)=0,$$

то треугольник равносторонний.

207. На всех клетках шахматной доски расставлены кубики. Грани кубиков и клетки шахматной доски конгруэнтны. У всех кубиков одна из граней выкрашена в черный цвет. Требуется повернуть кубики так, чтобы все четыре грани оказались сверху.

Доказать, что это можно сделать, если поворачивать разрешается не каждый кубик в отдельности, а лишь все кубики, стоящие на одной горизонтали или вертикали, вместе.

Олимпиада 1970 г.

208. Чему равно наибольшее число острых углов в плоском (несамопересекающемся) n-угольнике?

209. Какова вероятность того, что среди пяти вытянутых номеров лото имеются по крайней мере два последовательных (то есть отличающихся друг от друга на единицу) числа? [1]

210. Дано n точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой. Несколько прямолинейных отрезков с концами в заданных точках выкрашены в красный, а несколько других — в синий цвет так, что из любой точки в любую другую можно попасть, двигаясь лишь вдоль окрашенных отрезков, причем этот путь определен однозначно.

Доказать, что оставшиеся еще не окрашенными отрезки с концами в заданных n точках можно выкрасить

---

[1] «Бочонки» лото занумерованы от 1 до 90. — *Прим. ред.*

либо в красный, либо в синий цвет так, чтобы у любого треугольника с вершинами в заданных точках число красных сторон было нечетным.

Олимпиада 1971 г.

211. Прямая пересекает сторону AB треугольника ABC в точке C_1, сторону AC в точке B_1 и продолжение стороны BC в точке A_1. Пусть C_2 — точка, расположенная симметрично точке C_1 относительно середины стороны AB, B_2 — точка, расположенная симметрично точке B_1 относительно середины стороны AC, и A_2 — точка пересечения прямых B_2C_2 и BC.

Доказать, что

$$\sin(\angle B_1A_1C) : \sin(\angle C_2A_2B) = B_2C_2 : B_1C_1.$$

212. На плоскости заданы 22 точки, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой.

Доказать, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки прямых, соединяющие «парные» точки, пересекались по крайней мере в 5 точках.

213. Имеется 30 копилок. Каждую копилку можно открыть лишь одним ключом, который не подходит ко всем остальным копилкам. Перемешав ключи, их бросили в запертые копилки наугад по одному. Две копилки взломали.

Какова вероятность того, что после этого все остальные копилки удастся открыть, не взламывая замков? (Открыв или взломав какую-либо копилку, мы можем использовать брошенный в нее ключ для открывания копилки, к которой он подходит.)

Олимпиада 1972 г

214. Доказать, что длины сторон a, b, c произвольного треугольника удовлетворяют неравенству

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

215. В классе учится одинаковое число мальчиков и девочек (всего класс насчитывает не менее 4 человек). Их в различном порядке выстраивают в один ряд и смотрят, нельзя ли разделить ряд на две части так, чтобы в каждой части девочек и мальчиков было поровну.

Пусть a — число случаев, когда такое разбиение ряда невозможно, а b — число случаев, когда удается разбить ряд на две части с одинаковым числом девочек и мальчиков в каждой из них, но лишь одним способом.

Доказать, что $b = 2a$.

216. Вдоль параллельных границ некоторой территории, имеющей форму квадрата со стороной 10 км, проложены автострады. На территории размещены 4 наблюдательных поста. Требуется построить подъездные дороги из отрезков, параллельных сторонам квадрата, так, чтобы из каждого наблюдательного поста можно было добраться на велосипеде до каждой автострады (по автостраде ездить на велосипеде воспрещается).

Доказать, что независимо от того, где расположены наблюдательные посты, всегда можно построить подъездные пути общей протяженностью не более 25 км (при некоторых расположениях наблюдательных постов меньшая протяженность подъездных путей может оказаться недостаточной).

Олимпиада 1973 г.

217. При каких натуральных числах n и k биномиальные коэффициенты

$$C_n^{k-1},\ C_n^k,\ C_n^{k+1}$$

образуют арифметическую прогрессию?

218. На плоскости провели окружность радиуса r с центром в начале прямоугольной системы координат. Пусть $\delta(r)$ — расстояние от ближайшей точки с целочисленными координатами до проведенной окружности.

Доказать, что расстояние $\delta(r)$ будет сколь угодно мало, если радиус окружности r выбрать достаточно большим, то есть $\delta(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

(Расстояние между точкой плоскости и окружностью измеряют следующим образом: через данную точку и центр окружности проводят прямую и находят расстояние между заданной точкой и точкой пересечения проведенной прямой с окружностью.)

219. В пространстве задано n плоскостей ($n \geqslant 5$) так, что любые три из них имеют ровно одну общую точку и в пространстве нет точек, через которые проходили бы более трех плоскостей.

Доказать, что среди частей, на которые эти n плоскостей делят пространство, имеется не менее $\frac{2n-3}{4}$ тетраэдров.

Олимпиада 1974 г.

220. Для учета посещаемости при входе в библиотеку повесили две доски. Каждый посетитель библиотеки обязан записать на одной доске, сколько читателей он застал, войдя в читальный зал, а на другой доске — сколько читателей оставалось в зале, когда он уходил из библиотеки.

Доказать, что за день на обеих досках появятся одни и те же числа (быть может, в различном порядке).

221. Дана бесконечная последовательность квадратов со сторонами длиной 1, $^1/_2$, $^1/_3$, ..., $^1/_n$, ..., .

Доказать, что существует квадрат, в котором можно разместить все квадраты последовательности так, чтобы они не перекрывали друг друга, и определить, чему равна сторона наименьшего из квадратов, вмещающих все квадраты данной последовательности.

222. Доказать, что при всех целых $k \geqslant 1$ и вещественных x справедливо неравенство

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^j \frac{x^j}{j!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} \geqslant 0.$$

II. РЕШЕНИЯ

1. Первое решение. а. Прежде всего выясним, какие целые значения могут принимать x и y, если выражение $2x+3y$ равно некоторому произвольно заданному целому числу k. Пусть

$$2x+3y=k, \tag{1}$$

тогда

$$x=\frac{k-3y}{2}=-y+\frac{k-y}{2}. \tag{2}$$

Следовательно, x может быть целым лишь в том случае, если выражение $\frac{k-y}{2}$ равно какому-нибудь целому числу s.

Но тогда

$$y=k-2s,$$

и из равенства (2) мы получаем, что

$$x=-y+s=3s-k.$$

Таким образом, два целых числа x и y удовлетворяют равенству (1) лишь в том случае, если

$$x=-k+3s, \quad y=k-2s, \tag{3}$$

где s — произвольное целое число.

Наоборот, выбрав в качестве s любое целое число, мы сможем по формулам (3) получить такие целые значения x и y, которые (при подстановке) удовлетворяют равенству (1).

б. Аналогичным образом находим, какие целые значения могут принимать x и y, если

$$9x+5y=l, \tag{4}$$

где l — некоторое заданное целое число.

Разрешив равенство (4) относительно y, найдем

$$y = \frac{l - 9x}{5} = -2x + \frac{l + x}{5}. \qquad (5)$$

Следовательно, y может быть целым лишь в том случае, если выражение $\frac{l + x}{s}$ равно некоторому целому числу t. Но тогда

$$x = 5t - l,$$

и из равенства (5) мы находим

$$y = -2x + t = -9t + 2l.$$

Таким образом, два целых числа x и y удовлетворяют равенству (4) лишь в том случае, если

$$x = 5t - l, \quad y = -9t + 2l, \qquad (6)$$

где t — произвольное целое число.

Наоборот, выбрав в качестве t любое целое число, мы сможем по формулам (6) найти такие целые значения x и y, которые (при подстановке) удовлетворяют равенству (4).

в. Из доказанного в п. а следует, что выражение $2x + 3y$ принимает целые значения, кратные 17, то есть равно целому числу вида $17n$, где n — произвольное целое число, лишь в том случае, если x и y можно представить в виде

$$x = -17n + 3s, \quad y = 17n - 2s,$$

где s — произвольное целое число.
Но тогда

$$9x + 5y = 9(-17n + 3s) + 5(17n - 2s) = 17(-14n + s).$$

Таким образом, выражение $9x + 5y$ также принимает значение, кратное 17.

Аналогично из доказанного в п. б следует, что целые x и y, при которых выражение $9x + 5y$ принимает значения, кратные 17, можно представить в виде

$$x = 5t - 17m, \quad y = -9t + 34m,$$

и, таким образом,

$$2x + 3y = 17(-t + 4m)$$

также кратно 17*.

Второе решение. Если обозначить для краткости

$$u = 2x + 3y, \quad v = 9x + 5y,$$

то

$$3v - 5u = 17x.$$

Последнее соотношение можно представить в виде

$$3v = 5u + 17x, \qquad (1)$$

$$5u = 3v - 17x. \qquad (2)$$

Если x и y — такие целые числа, что u делится на 17, то в силу соотношения (1) $3v$ также делится на 17. Поскольку в произведении $3v$ первый сомножитель не делится на простое число 17, то все произведение может делиться на 17 лишь в том случае, если на 17 делится v.

Аналогично можно показать, что если x и y — такие целые числа, при которых v делится на 17, то в силу соотношения (2) u также делится на 17*.

2. Геометрическое место точек, из которых отрезок PQ виден под прямым углом, имеет вид окружности k', построенной на PQ как на диаметре (рис. 1).

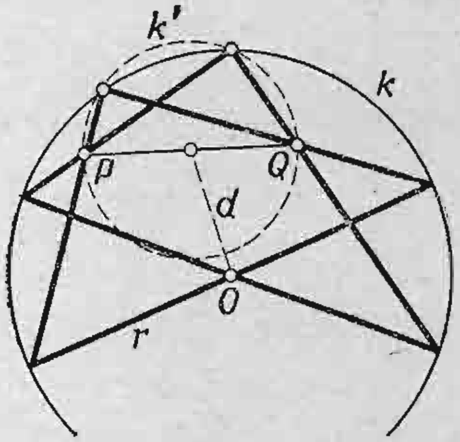


Рис. 1.

Точки пересечения окружности k' с заданной окружностью k служат вершинами прямоугольных треугольников, вписанных в окружность k, *катеты или продолжения катетов которых проходят через точки* P и Q. Для того чтобы через точки P и Q проходили сами катеты, а не их продолжения, обе точки должны лежать внутри окружности k.

Если точки P и Q расположены внутри окружности k, то задача имеет столько решений, сколько существует общих точек у окружностей k и k'. Следовательно, задача

1) имеет два решения,

если $\frac{1}{2}PQ > r - d$, где r — радиус окружности k, а d — расстояние между центром окружности k и серединой отрезка PQ;

2) допускает лишь одно решение, если $\frac{1}{2}PQ = r - d$;

3) не имеет решения, если $\frac{1}{2}PQ < r - d$, поскольку наименьшее расстояние между центрами окружностей k и k' равно $r - d$.

3. Обозначим стороны треугольника $a = b - d$, b, $c = b + d$, где $0 < d < b$.

Подставляя в формулу Герона

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

выражения

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}, \quad p - a = \frac{b}{2} + d, \quad p - b = \frac{b}{2},$$

$$p - c = \frac{b}{2} - d,$$

находим

$$S^2 = \frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right).$$

Решая квадратное (относительно b^2) уравнение, получаем

$$b^2 = 2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4S^2}{3}}\right).$$

Извлекая квадратный корень (оба радикала выбраны со знаком плюс, чтобы b — длина одной из сторон треугольника — была положительной величиной), приходим к выражению

$$b = \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4S^2}{3}}\right)}, \quad a = b - d, \quad c = b + d.$$

Углы α и β безусловно *острые* [1], и

$$S = \frac{bc}{2}\sin\alpha, \quad S = \frac{ac}{2}\sin\beta.$$

Наконец, $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

[1] Действительно, тупой угол в треугольнике может быть только один и тогда он лежит против большей из сторон, в нашем случае — против c. — *Прим. ред.*

Если $d = 1$, $S = 6$, то из приведенной выше формулы находим, что $b = 4$. Но тогда $a = 3$, $c = 5$ и

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\beta = \frac{4}{5} = \cos\alpha.$$

Следовательно, $\alpha = 36^\circ 52'$, $\beta = 90^\circ - \alpha = 53^\circ 08'$ и $\gamma = 90^\circ$.

4. Условимся считать карточки, входящие в набор, перенумерованными и рассмотрим все возможные способы составления наборов из n карточек, а оба «запретных» случая (когда весь набор состоит из карточек одного сорта) исключим позднее.

При $n = 2$ возможны следующие наборы карточек:

$$AA, \ AB, \ BA, \ BB. \tag{1}$$

Здесь BA означает набор, в котором первой идет карточка сорта B, а второй — карточка сорта A.

При $n = 3$ из карточек двух сортов можно составить $2 \cdot 4 = 8$ упорядоченных наборов. Чтобы получить их, необходимо приписать к каждой из перечисленных в (1) комбинаций двух букв третью букву (A или B). Полный список наборов из трех карточек выглядит так:

$$AAA, \ ABA, \ BAA, \ BBA,$$
$$AAB, \ ABB, \ BAB, \ BBB.$$

Комбинация букв BAB означает, например, такой набор, в котором первая карточка сорта B, вторая — A и третья — снова сорта B.

Каждый раз, когда число карточек в наборе возрастает на 1, число упорядоченных наборов из карточек двух сортов удваивается. Следовательно, существует 2^n различных упорядоченных наборов из n карточек двух сортов. Эти наборы соответствуют *размещениям с повторениями из двух букв A и B по n*.

Исключив из общего числа наборов два, которые запрещены условиями задачи (наборы, целиком состоящие из карточек одного сорта), мы получим, что общее число допустимых упорядоченных наборов из n карточек двух сортов равно $2^n - 2$. Два набора карточек, не удовлетворяющих условиям задачи, соответствуют n-кратно повторенным буквам A и B.

Если в допустимых размещениях с повторениями из двух букв A и B по n заменить букву A цифрой 1, а букву B цифрой 2, то утверждение задачи можно сформулировать следующим образом:

*существует $2^n - 2$ различных n-значных чисел, состоящих из цифр 1 и 2, в записи которых обе цифры встречаются по крайней мере по одному разу**.

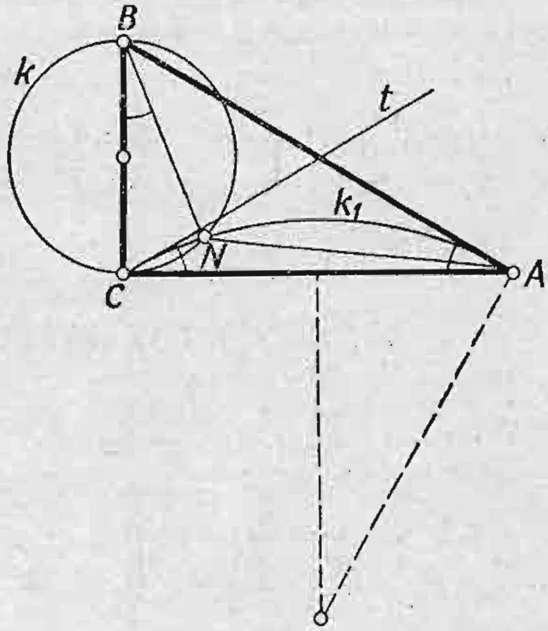


Рис. 2.

5. Первое решение. а. *Анализ.* Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC, $\gamma = 90°$ и N — точка внутри треугольника ABC, для которой (рис. 2)

$$\angle NCA = \angle NBC = \angle NAB.$$

Тогда

$$\angle BNC = 180° - (\angle BCN + \angle NBC) =$$
$$= 180° - (\angle BCN + \angle NCA) = 180° - \gamma.$$

Аналогично

$$\angle CNA = 180° - \alpha$$

и

$$\angle ANB = 180° - \beta.$$

б. *Синтез.* Поскольку в рассматриваемом случае $180° - \gamma = 90°$, то искомая точка N может лежать лишь на окружности k, построенной на BC как на диаметре. Эта окружность касается стороны AC в точке C. Следовательно, окружность k расположена по ту же сторону от прямой AC, что и вершина B. Таким образом, точкой N может быть лишь точка пересечения окружности k с дугой k_1 другой окружности, служащей геометрическим местом точек, из которых отрезок AC виден под углом $180° - \alpha$, и расположенной по ту же сторону от AC, что и вершина B. Таким образом, точку N мы найдем, построив точку пересечения окружности k и дуги k_1 второй окружности.

в. *Обоснование*. Вершина C принадлежит одновременно окружности k и дуге k_1 второй окружности. Обе окружности не касаются друг друга в точке C, поскольку AC служит касательной для окружности k, но секущей — для второй окружности. Таким образом, обе окружности пересекаются друг с другом еще в одной точке N, причем такой точке N, которая расположена по ту же сторону от прямой AC, что и окружность k, а следовательно, и дуга k_1 второй окружности.

Точка пересечения N окружности k и дуги k_1 второй окружности расположена внутри треугольника ABC, поскольку дуга k_1 целиком проходит внутри треугольника ABC. Действительно, касательная, проведенная к дуге k_1 в точке A, образует со стороной AC треугольника угол α. Это означает, что сторона AB касается дуги k_1 в точке A. Пусть t — касательная к дуге k_1 в точке C. Поскольку t образует со стороной CA треугольника угол α, то t проходит внутри угла ACB. Следовательно, дуга k_1, которая заключена внутри треугольника, образованного прямыми AB, AC и t, с необходимостью целиком расположена внутри треугольника ABC.

Поскольку по доказанному CA касается окружности k, а AB — дуги k_1, то по известным теоремам об угле между касательной и хордой и об угле, вписанном в окружность,

$$\angle NCA = \angle NBC \quad \text{и} \quad \angle NAB = \angle NCA.$$

Таким образом, построенная точка N действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

В т о р о е р е ш е н и е. Как было показано в первом решении, точка N должна лежать на окружности k, построенной на стороне BC, как на диаметре, причем на той части окружности k, которая заключена внутри треугольника ABC.

Чтобы полностью определить положение точки N, проведем прямую AN (рис. 3), выбрав ее направление из условия

$$\angle NBC = \angle NAB. \tag{1}$$

Если M — еще одна точка пересечения прямой AN с окружностью k, то углы NBC и AMC равны как вписанные в одну и ту же окружность k и опирающиеся на одну и ту же хорду CN. Кроме того, ясно, что $\angle NAB = \angle MAB$. Подставляя полученные значения углов NBC и NAB в (1), находим

$$\angle AMC = \angle MAB,$$

или, иначе говоря, отрезки AB и CM параллельны.

Таким образом, чтобы определить положение искомой точки N, необходимо построить на BC, как на диаметре, окружность k и через точку C провести прямую,

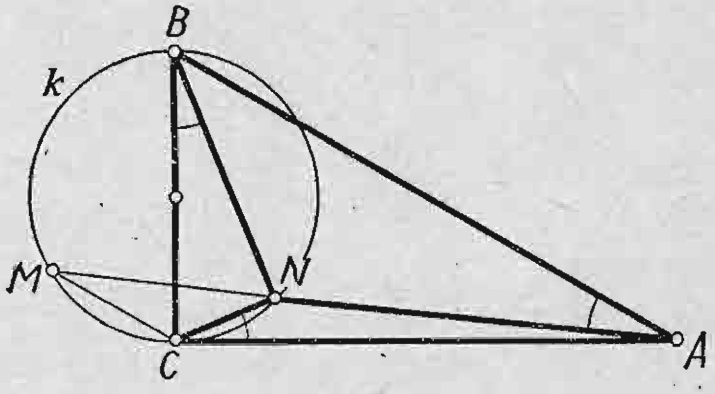


Рис. 3.

параллельную стороне AB. Вторая точка пересечения этой прямой с окружностью k дает нам точку M. Отрезок AM пересекает окружность k не только в точке M, но и во второй точке, которая и будет искомой точкой N. По построению точка M всегда лежит вне треугольника ABC, а точка N, как и требуется, — внутри треугольника.

Примечание. Аналогичным способом можно показать, что внутри *любого* треугольника существуют две точки N_1 и N_2, для которых

$$\angle N_1BC = \angle N_1CA = \angle N_1AB$$

и, соответственно,

$$\angle N_2CB = \angle N_2AC = \angle N_2BA.$$

Эти две точки называются *точками Брокара* [1] данного треугольника.

6. Первое решение. Величину угла γ, противолежащего стороне c, можно найти (рис. 4) по теореме

[1] Брокар (1845—1922) — французский математик и метеоролог.

синусов

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}.$$

При $c < 2R$ мы получили два значения γ, при $c = 2R$ — одно значение и при $c > 2R$ — ни одного значения.

Все остальные углы и стороны треугольника можно выразить через уже известный угол γ и отношение сторон $a : b$ следующим образом.

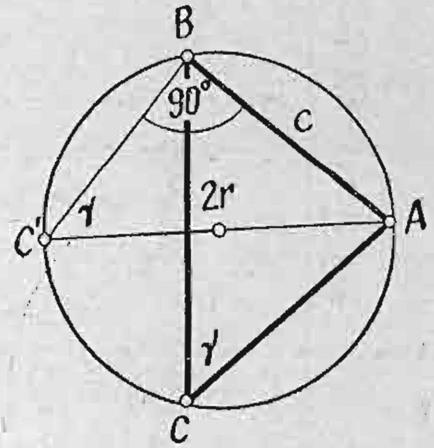


Рис. 4.

По теореме тангенсов* стороны a, b и величины противолежащих им углов α, β связаны между собой соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+b) : (a-b) = \left(\frac{a}{b}+1\right) : \left(\frac{a}{b}-1\right).$$

Поскольку полусумма

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ-\gamma}{2}$$

известна, то приведенное выше соотношение позволяет вычислить полуразность $\frac{\alpha-\beta}{2}$ как функцию величины $\frac{a}{b}$.

После того как мы определим указанным способом сумму и разность углов α и β, нетрудно найти величины самих углов α и β:

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Наконец, воспользовавшись теоремой синусов, получим

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Второе решение. Из центра O окружности, описанной вокруг треугольника ABC, опустим перпендикуляр OC_1 на сторону AB (рис. 5). В силу соотношения между вписанным и центральным углами, опирающимися на одну и ту же дугу окружности, угол BOC_1 равен углу треугольника, противолежащему стороне AB. Следовательно,

$$\sin\gamma = \frac{BC_1}{OB} = \frac{c/2}{R} = \frac{c}{2R}.$$

Таким образом, при $c < 2R$ мы получаем два угла γ (один острый и один тупой); при $c = 2R$ — один угол γ

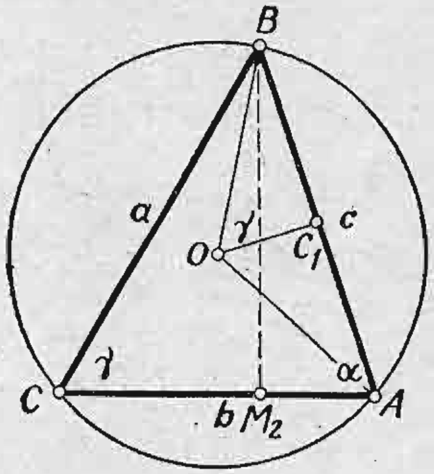


Рис. 5.

($\gamma = 90°$). При $c > 2R$ задача не имеет решений. Каждому найденному значению γ соответствует треугольник, все элементы которого можно определить следующим образом.

Опустим из вершины B перпендикуляр BM_2 на сторону AC. Тогда

$$BM_2 = a\sin\gamma\left(= a\frac{c}{2R}\right)$$

и

$$CM_2 = a\cos\gamma\left(= a\,\frac{\pm\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}\right).$$

Знак «плюс» перед радикалом соответствует острому углу γ, знак «минус» — тупому углу γ. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BM_2}{AM_2} = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma} = \frac{\frac{a}{b}\sin\gamma}{1 - \frac{a}{b}\cos\gamma}.$$

Полученное выражение остается в силе и в том случае, если угол α — тупой, поскольку при этом проекция

AM_2 стороны AB на сторону AC становится отрицательной и разность $b - a \cos \gamma$ также принимает отрицательное значение.

После того как углы γ и α известны, угол β нетрудно найти из соотношения $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Наконец, стороны треугольника мы получим, если воспользуемся теоремой синусов

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = 2R \sin \alpha, \quad b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = 2R \sin \beta.$$

7. Пусть n — целое число, большее 1, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — его простые делители и

$$p_1^\alpha, p_2^\beta, \ldots, p_k^\varkappa -$$

наибольшие степени простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, на которые делится число n.

Тогда*

$$n = p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_k^\varkappa.$$

Каждое из чисел p_i не меньше 2. Следовательно,

$$n \geqslant 2^{\alpha+\beta+\ldots+\varkappa} \geqslant 2^k.$$

Полученное неравенство верно и при $n = 1$, поскольку в этом случае

$$k = 0 \quad \text{и} \quad n = 1 = 2^0 = 2^k.$$

Логарифмируя неравенство по любому основанию $a > 1$, например по основанию $a = 10$, получаем неравенство того же смысла

$$\log_a n \geqslant k \log_a 2.$$

8. Первое решение. Первое из уравнений

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0$$

можно записать в виде

$$(x - y)(x - 2y + 1) = 0.$$

Следовательно, пары значений (x, y), удовлетворяющие исходной системе уравнений, подразделяются на два типа: те, которые удовлетворяют системе уравнений

$$x - y = 0,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0, \quad (1)$$

и те, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} x - 2y + 1 &= 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Из первого уравнения системы (1) получаем $x = y$. Подставляя это соотношение во второе уравнение той же системы, находим

$$2y = 0.$$

Следовательно, решением системы (1) может быть только пара

$$x = 0, \quad y = 0;$$

что она действительно является решением, очевидно.

Из первого уравнения системы (2) находим

$$x = 2y - 1.$$

Подставляя это соотношение во второе уравнение системы (2), получаем

$$(2y - 1)^2 + 2(2y - 1)y + y^2 - 5(2y - 1) + 7y = 0,$$

или (после приведения подобных членов)

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня: $y = 2$ и $y = 3$. Им соответствуют $x = 3$ и $x = 5$. Таким образом, решениями системы уравнений (2) могут быть только две пары: $x = 3$, $y = 2$ и $x = 5$, $y = 3$; обе они действительно удовлетворяют этой системе. Следовательно, исходная система уравнений допускает следующие три решения:

$$x = 0, \quad y = 0; \quad x = 3, \quad y = 2; \quad x = 5, \quad y = 3.$$

Подставляя их в уравнение

$$xy - 12x + 15y = 0,$$

убеждаемся в том, что все три решения ему удовлетворяют.

В т о р о е р е ш е н и е. Задача 8, очевидно, допускает и прямое решение. Каждую из левых частей исходных уравнений мы можем попытаться умножить на какое-то выражение так, чтобы, сложив произведения, получить многочлен, стоящий в левой части третьего уравнения или отличающийся от него ненулевым постоянным множителем. Нетрудно видеть, что числовых множителей для этого недостаточно, но, умножив левые части исходных уравнений на соответствующим образом подобранные выражения, линейные по x и y, мы вполне достигнем цели.

Рассмотрим следующее тождество:

$$(x^2-3xy+2y^2+x-y)(x-y-9)+$$
$$+(x^2-2xy+y^2-5x+7y)(-x+2y+3)=$$
$$=2(xy-12x+15y).$$

В справедливости его нетрудно убедиться, раскрыв скобки в левой части и приведя подобные члены.

Если какая-нибудь пара значений x и y удовлетворяет двум исходным уравнениям, то левая часть тождества обращается в нуль. Следовательно, правая часть тождества также обращается в нуль, а это означает, что x и y удовлетворяют третьему уравнению.

9. I. *Решение в предположении, что треугольник ABC остроугольный*[1].

а. *Теорема. Высоты остроугольного треугольника ABC служат биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.*

Если высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то отрезок MC виден из точек A_1 и B_1 под прямым углом (рис. 6). Следовательно, точки A_1 и B_1 расположены на окружности, описанной на отрезке MC как на диаметре. Отрезок MB_1 делит эту окружность на две дуги. Точка A_1 принадлежит той из двух дуг, которой принадлежит точка C. Таким образом,

$$\angle MA_1B_1=\angle MCB_1,$$

то есть

$$\angle AA_1B_1=90^\circ-\alpha.$$

Аналогично

$$\angle AA_1C_1=90^\circ-\alpha.$$

[1] Если $\triangle ABC$ прямоугольный и $\angle B=90^\circ$, то $A_1=C_1$. В этом случае, как легко видеть, задача в первой формулировке имеет бесконечно много решений. При второй формулировке этот случай не может встретиться, так как слова «дан треугольник $A_1B_1C_1$» предполагают, что все три точки различны. Решения для случая тупоугольных треугольников рассмотрен в п. II. — *Прим. ред.*

Следовательно, AA_1 действительно служит биссектрисой угла α_1 треугольника $A_1B_1C_1$. В качестве побочного результата получаем, что

$$\frac{\alpha_1}{2} = 90° - \alpha.$$

Из доказанной теоремы следует, что высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке и эта точка

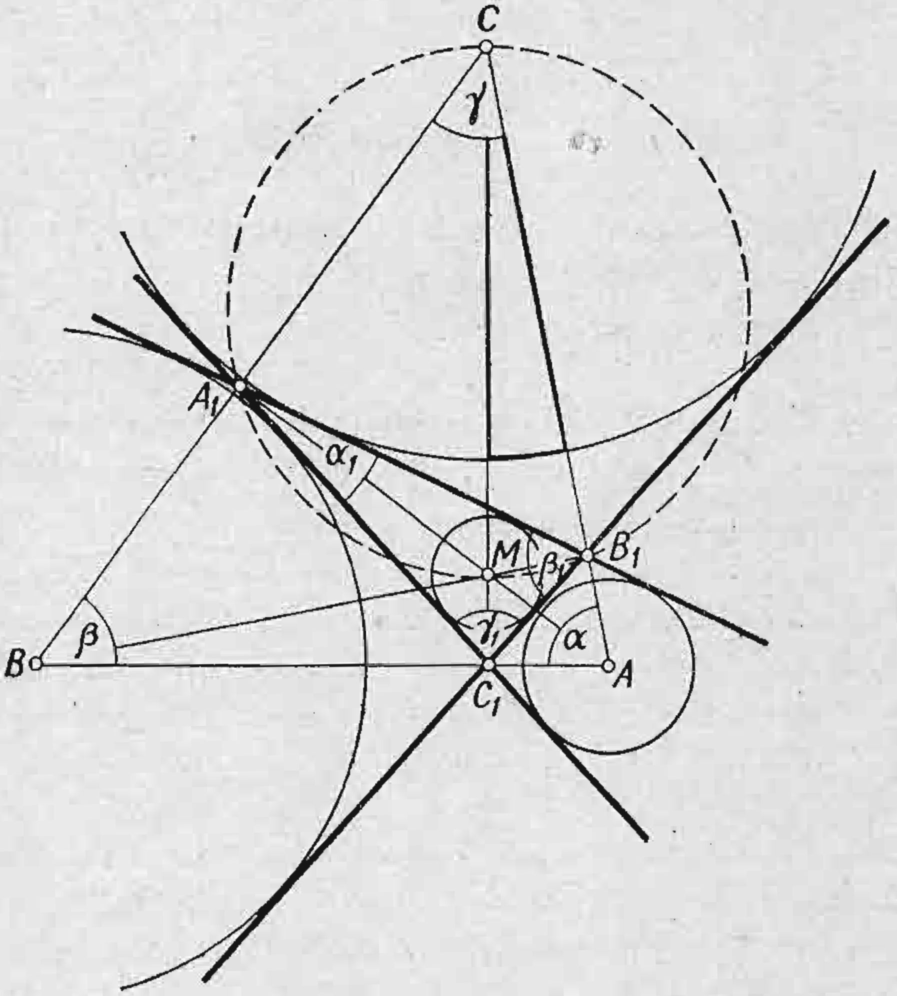


Рис. 6.

служит центром вписанной окружности для треугольника $A_1B_1C_1$.

б. *Анализ*. По доказанной в п. а теореме существует *единственный* треугольник ABC, стороны которого служат биссектрисами внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$. Иначе говоря, вершины A, B и C искомого треугольника представляют собой не что иное, как центры окружностей, каждая из которых касается одной из сторон треугольника $A_1B_1C_1$ и продолжений двух других сторон (рис. 6)[1].

[1] Действительно, $A_1C \perp A_1A$ и является биссектрисой угла, образованного стороной A_1B_1 и продолжением A_1C_1. Поэтому C равноудалена от A_1B_1 и продолжения A_1C_1. Аналогично доказывается,

в. *Синтез.* Проведем биссектрисы внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$. Ясно, что любые две биссектрисы внешних углов пересекаются в одной точке с биссектрисой третьего внутреннего угла. С другой стороны, биссектриса любого внутреннего угла перпендикулярна биссектрисе примыкающего к той же вершине внешнего угла. Следовательно, $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp CA$ и $CC_1 \perp AB$. Это и доказывает, что точки A_1, B_1 и C_1 совпадают с основаниями высот треугольника ABC.

г. *Вычисления.* Как доказано в п. а,

$$\frac{\alpha_1}{2} = 90^\circ - \alpha,$$

поэтому угол α острый и [см. формулу (12) в комментарии к этой задаче]

$$\cos\alpha = \sin\frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)}{b_1c_1}},$$

где p_1 — полупериметр, а a_1, b_1 и c_1 — длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$.

Далее, треугольники C_1AB_1 и CAB подобны, поскольку угол A у них общий, и

$$\angle C_1B_1A = 90^\circ - \frac{\beta_1}{2} = \beta.$$

Следовательно,

$$B_1C_1 : BC = C_1A : CA,$$

то есть

$$a_1 : a = \cos\alpha.$$

Отсюда, пользуясь упомянутой выше формулой (12), получаем

$$a = \frac{a_1}{\cos\alpha} = a_1\sqrt{\frac{b_1c_1}{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)}}.$$

II. *О треугольнике, вершины которого совпадают с основаниями высот тупоугольного треугольника.* Высота, опущенная из вершины тупого угла треугольника ABC (так же как и высота, опущенная из любой вершины остроугольного треугольника), служит биссектрисой

что C равноудалена от A_1B_1 и продолжения B_1C_1 и, следовательно, является центром вневписанной окружности. Отсюда сразу вытекает сказанное в тексте (см. также п. в). — *Прим. ред.*

внутреннего угла треугольника $A_1B_1C_1$, вершины которого совпадают с основаниями высот треугольника ABC. Что же касается высот, опущенных из вершин острых углов тупоугольного треугольника ABC, то они (в отличие от высот, опущенных из вершин остроугольного треугольника) служат биссектрисами соответствующих *внешних* углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Если считать допустимым, что искомый треугольник тупоугольный, то, помимо треугольника ABC, условиям задачи будут удовлетворять треугольники BCM, CAM, ABM. Точками пересечения высот этих треугольников служат соответственно точки A, B и C.

Все четыре решения обладают тем общим свойством, что вершины и точка пересечения высот любого из них служат центрами четырех окружностей, касающихся всех трех сторон треугольника $A_1B_1C_1$, вершины которого совпадают с основаниями высот искомого треугольника.

Если треугольник ABC остроугольный, то точка пересечения его высот совпадает с центром окружности, касающейся сторон треугольника $A_1B_1C_1$ *изнутри*.

Если тупоугольным является какой-нибудь из треугольников BCM, CAM или ABM, то вершина тупого угла совпадает с центром окружности, касающейся всех трех сторон треугольника $A_1B_1C_1$ *изнутри* *.

10. Пусть $\alpha = 90° = \beta + \gamma$. Тогда

$$\sin\alpha = 1, \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\gamma,$$

$$\sin(\gamma - \alpha) = -\sin(\alpha - \gamma) = -\sin\beta.$$

Следовательно,

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha - \beta) = \sin\beta\sin\gamma,$$

$$\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta - \gamma) = \sin\beta\sin\gamma\sin(\beta - \gamma),$$

$$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma - \alpha) = -\sin\gamma\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\gamma - \alpha) = -\sin\gamma\sin(\beta - \gamma)\sin\beta$$

и сумма четырех произведений синусов равна нулю, что и требовалось доказать *.

11. Первое решение. Поскольку

$$\frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta + \gamma}{2} < 90° - \frac{\beta}{2} < 90°$$

(и поскольку, чем больше острый угол, тем больше его синус), то

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} < \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} < \frac{1}{2}\sin\beta \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Если обозначения выбраны так, что γ — наименьший угол, то

$$\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) получаем

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{4}. \tag{3}$$

Второе решение[1]. а. Известно*, что

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R},$$

где r — радиус вписанной, а R — радиус описанной окружности.

Поскольку $r < R$, то произведение синусов в левой части равенства меньше $^1/_4$.

б. Произведение трех синусов половинных углов удовлетворяет даже более сильному неравенству

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8},$$

поскольку $r \leqslant \frac{R}{2}$.

Действительно, по известной теореме Эйлера*

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. Следовательно,

$$2Rr \leqslant R^2,$$

---

[1] Это решение, предложенное одним из победителей олимпиады, в большей степени опирается на знание элементарной геометрии, но зато позволяет глубже проникнуть в существо задачи, чем приведенные выше простые выкладки.

и, таким образом,

$$r \leqslant \frac{R}{2}.$$

Если треугольник равносторонний, то $d = 0$, и произведение синусов половинных углов равно $^1/_8$.

12. На отрезке PQ построим прямоугольный треугольник PSQ с гипотенузой PQ и катетом $PS = p$ (рис. 7). Через точки M и N проведем прямые, параллельные отрезку PS. Пересекаясь с перпендикулярами,

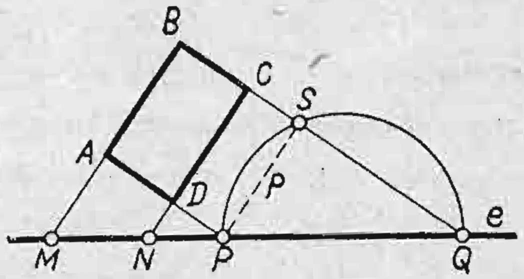


Рис. 7.

опущенными из точек P и Q, эти прямые образуют искомый прямоугольник $ABCD$.

Задача имеет решение лишь в том случае, если можно построить прямоугольный треугольник PSQ, то есть если $p < PQ$.

Если это условие выполнено, то треугольник PSQ можно построить в обе стороны относительно заданной прямой e. Следовательно, при $p < PQ$ задача допускает два решения, зеркально симметричных относительно прямой e.

13. Нетрудно проверить, что

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Подставляя в это тождество $a = 2$, $b = -1$, получаем

$$2^n - (-1)^n = 3 \cdot A,$$

где A — значение, которое принимает при $a = 2$, $b = -1$ второй сомножитель в правой части тождества. Поскольку числа a и b целые, то A также целое число.

Таким образом,

$$2^n + 1 = 2^n - (-1)^n + 1 + (-1)^n = 3A + 1 + (-1)^n.$$

При нечетном n левая часть равенства делится на 3. Если n четно, то $2^n + 1$ при делении на 3 дает остаток 2*.

14. а. Пусть α, β, γ и α', β', γ' — углы двух треугольников и $\alpha=\alpha'$. Если у второго треугольника сумма синусов двух других углов больше, чем у первого, то

$$\sin\beta+\sin\gamma<\sin\beta'+\sin\gamma', \tag{1}$$

откуда

$$2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}. \tag{2}$$

Поскольку $\alpha=\alpha'$, то $\beta+\gamma=\beta'+\gamma'$ и

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}.$$

Синусы, стоящие в правой и в левой частях последнего равенства, *положительны*, поэтому неравенство (2) может выполняться в том и только в том случае, если

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2},$$

то есть если абсолютная величина разности $\beta'-\gamma'$ меньше, чем абсолютная величина разности $\beta-\gamma$.

б. Если среди углов какого-нибудь треугольника имеются по крайней мере два различных угла, например β и γ, то всегда можно построить такой новый треугольник, у которого сумма синусов углов будет больше, чем сумма синусов углов исходного треугольника. По доказанному в п. а для этого достаточно выбрать угол α' нового треугольника равным углу α исходного, а каждый из углов β' и γ' — ближе к их среднему арифметическому, чем углы β и γ.

Следовательно, сумма синусов достигает наибольшего значения в том случае, если треугольник равносторонний*.

15. Пусть $PQRS$ — квадрат, удовлетворяющий условиям задачи (рис. 8). Если повернуть его на 90° вокруг центра, то отрезок CD перейдет в отрезок $C'D'$. При этом, разумеется, $C'D'\perp CD$ и $C'D'=CD$. Отсюда следует, что если из точки B восставить перпендикуляр к прямой, на которой лежат точки A, B, C и D, и отложить на нем отрезок $BB'=CD$, то полученная точка B' вместе с заданной точкой A определит прямую, на которой лежит сторона PS искомого квадрата.

Отсюда ясен ход построения квадрата $PQRS$. Из точки B восставим перпендикуляр к CD и отложим на нем отрезок $BB' = CD$. Пересечение построенной прямой AB' и параллельной ей прямой, проведенной через точку B, с перпендикулярами, опущенными на них из точек C и D, порождает квадрат $PQRS$.

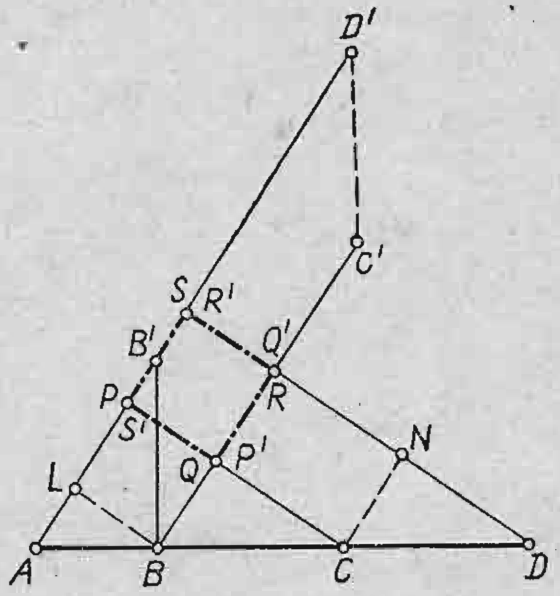


Рис. 8.

Поскольку в точке B перпендикуляр к прямой CD можно восставить в двух направлениях, то существуют два квадрата, удовлетворяющие условиям задачи. Оба квадрата расположены симметрично относительно прямой, на которой лежат точки A, B, C и D. На рис. 8 показан лишь один из квадратов.

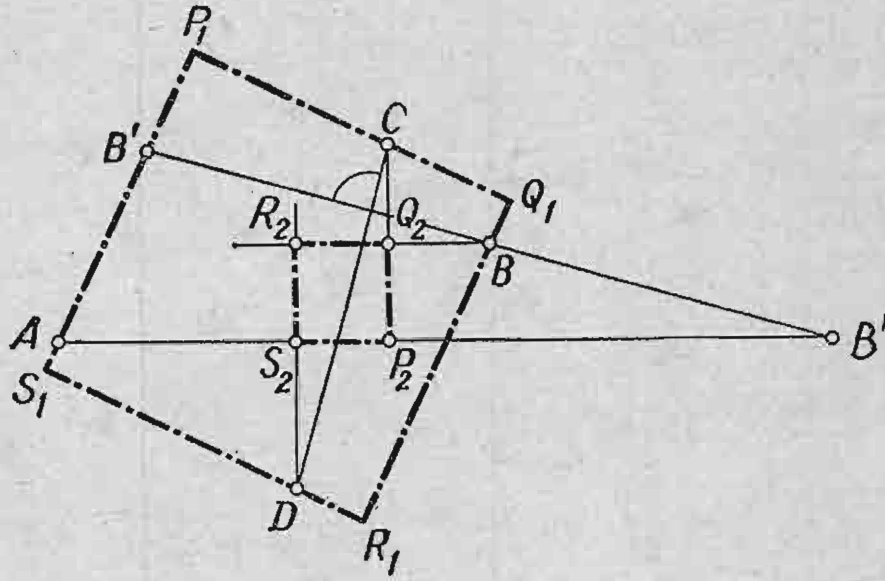


Рис. 9.

Обоснование. Из точки B опустим на AB' перпендикуляр BL, а из точки C опустим на DS перпендикуляр CN. В прямоугольных треугольниках BLB' и CND по построению $BB' = CD$, а $\angle LBB' = \angle NCD$ как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Следовательно, треугольники BLB' и CND равны, поэтому $BL = CN$ и стороны построенного четырехугольника равны и попарно перпендикулярны.

Примечание. Искомый квадрат можно построить при произвольном расположении четырех заданных точек (рис. 9).

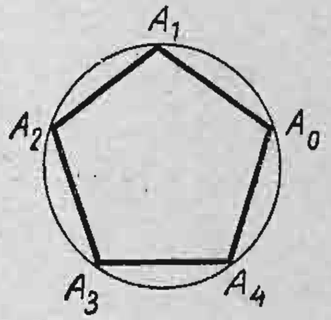


Рис. 10.

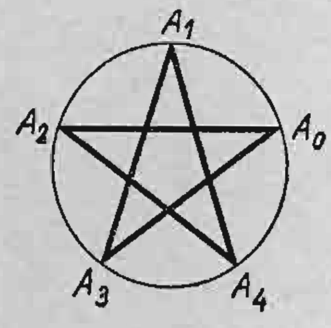


Рис. 11.

16. Первое решение. Длина хорды единичной окружности равна удвоенному синусу половины стягиваемого ею угла. Следовательно (рис. 10 и 11),

$$A_0A_1 = 2\sin 36° = 4\sin 18° \cos 18°,$$

$$A_0A_2 = 2\sin 72° = 2\cos 18°$$

и

$$A_0A_1 \cdot A_0A_2 = 8\sin 18° \cdot \cos^2 18°.$$

Но удвоенный синус угла 18° совпадает с длиной стороны вписанного в единичную окружность правильного десятиугольника, которая, как известно, равна

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

и

$$\cos^2 18° = 1 - \sin^2 18° =$$

$$= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \sqrt{5}\,\frac{\sqrt{5}+1}{8}.$$

Отсюда находим, что

$$8\sin 18° \cos^2 18° = \sqrt{5} \cdot \frac{5-1}{4} = \sqrt{5}.$$

Таким образом,

$$(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5,$$

что и требовалось доказать*.

Поскольку $\sin(\pi - 2\beta)$ и $\sin(2\beta)$ равны, а синус любого из углов, заключенных между $\pi - 2\beta$ и 2β, имеет большее значение, то

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta.$$

В интервале от $\frac{\pi}{2}$ до π синус монотонно убывает, поэтому в силу неравенства (2)

$$\sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

Пятое решение. Воспользуемся тем, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, и сравним значения $\sin 2\alpha$ и $\sin 2\beta$:

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = 2\cos\gamma\sin(\beta - \alpha).$$

Правая часть последнего равенства положительна, поскольку γ и $\beta - \alpha$ — положительные острые углы. Следовательно,

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta.$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

109. Первое решение. Рассмотрим исходные соотношения

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (1)$$

$$c^2 + d^2 = 1, \quad (2)$$

$$ac + bd = 0. \quad (3)$$

Из соотношения (1) следует, что a и b не могут быть равными 0 одновременно. Не ограничивая общности, предположим, что $a \neq 0$ (в противном случае числа в каждой паре a, b и c, d можно переставить). Разрешив равенство (3) относительно c и подставив полученное выражение

$$c = -\frac{bd}{a} \quad (4)$$

в соотношение (2), мы придем к новому соотношению

$$\frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = \frac{(a^2 + b^2)\, d^2}{a^2} = 1,$$

откуда в силу соотношения (1) следует, что

$$d^2 = a^2.$$

статочно убедиться в том, что $BD > AD$ (то есть что точка D должна быть расположена по ту же сторону от перпендикуляра, проходящего через середину отрезка AB, что и вершина A).

Центр описанной окружности O лежит на прямой CO и разделяет точки C и D. В то же время центр описанной окружности O лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка AB. Поскольку $\alpha < \beta$ и, следовательно, $CB < CA$, вершина C расположена по ту же сторону перпендикуляра, что и вершина B, а вершина A и точка D — по другую.

Третье решение. Если α, β, γ — углы остроугольного треугольника, то

$$\pi - 2\alpha,\ \pi - 2\beta,\ \pi - 2\gamma \tag{1}$$

также углы некоторого треугольника, поскольку их сумма равна $3\pi - 2\pi = \pi$.

Обозначим a', b', c' стороны этого треугольника, противолежащие углам (1) и взятые в том же порядке. По условиям задачи $\alpha < \beta < \gamma$, поэтому

$$\pi - 2\alpha > \pi - 2\beta > \pi - 2\gamma$$

и, следовательно,

$$a' > b' > c'. \tag{2}$$

Но

$$\sin(\pi - 2\alpha) : \sin(\pi - 2\beta) : \sin(\pi - 2\gamma) = a' : b' : c'.$$

Отсюда, учитывая неравенства (2), получаем

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

Четвертое решение. Прежде всего заметим, что поскольку $\gamma = \pi - \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$. Но по условиям задачи $\alpha < \beta$. Следовательно, $2\beta > \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, можно утверждать, что углы α и β удовлетворяют неравенствам

$$\pi - 2\beta < 2\alpha < 2\beta, \tag{1}$$

$$\frac{\pi}{2} < 2\beta < 2\gamma < \pi. \tag{2}$$

Поэтому

$$\frac{AB^2}{2}\sin 2\alpha = S_{\triangle BAB_1} =$$
$$= 2S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCB_1} > 2S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACA_1} =$$
$$= S_{\triangle ABA_1} = \frac{AB^2}{2}\sin 2\beta,$$

откуда

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

Второе решение. Достаточно доказать, что если углы в остроугольном треугольнике ABC удовлетворяют неравенству $\alpha < \beta$, то $\sin 2\alpha > \sin 2\beta$.

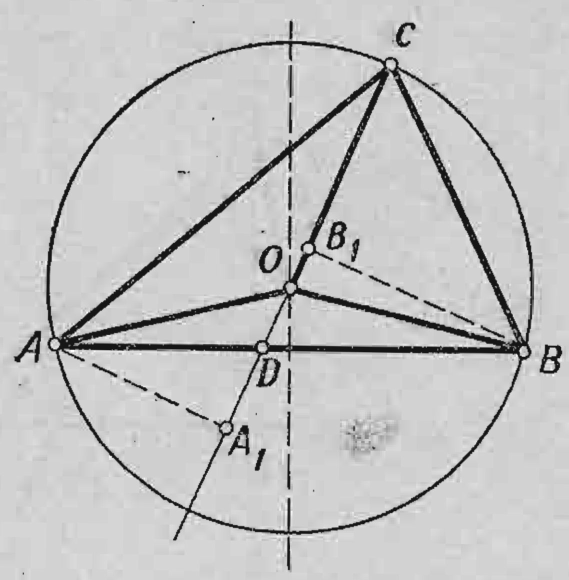


Рис. 74.

Пусть O — центр описанной окружности, а R — ее радиус (рис. 74).

Пользуясь соотношением между центральным и вписанным углами, опирающимися на одну и ту же дугу, получаем

$$\angle BOC = 2\alpha, \quad \angle AOC = 2\beta.$$

Следовательно, высоты AA_1, BB_1, опущенные из вершин A и B треугольников AOC и BOC на их общую сторону CO, соответственно равны

$$AA_1 = R\sin 2\beta, \quad BB_1 = R\sin 2\alpha.$$

Итак, осталось доказать, что $BB_1 > AA_1$.

Пусть D — точка пересечения стороны AB и прямой CO. Поскольку треугольники AA_1D и BB_1D подобны, до-и если треугольник ABC остроугольный, то F — внутренняя точка отрезка OD. Следовательно,

$$\angle FAP < \angle OAD.$$

С другой стороны, поскольку AOD — равнобедренный треугольник и, кроме того, отрезки FD и AT параллельны, то

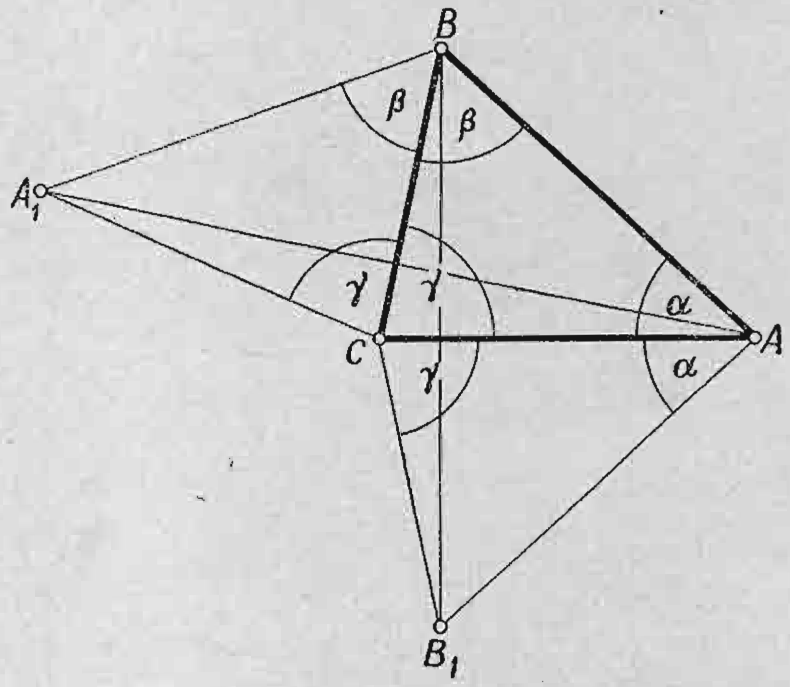
$$\angle OAD = \angle ODA = \angle PAT.$$

Сравнивая полученные соотношения, получаем неравенство

$$\angle FAP < \angle PAT,$$

что и требовалось доказать.

108. Первое решение. Отразим треугольник ABC от сторон, противолежащих вершинам A и B. Пусть A_1 — точка, симметричная вершине A относительно стороны



Рис, 73.

BC, а B_1 — точка, симметричная вершине B относительно стороны AC (рис 73). Поскольку треугольник ABC остроугольный, то его вершина C лежит вне треугольников ABA_1 и BAB_1, а поскольку $\alpha < \beta$, то $BC < AC$. Кроме того,

$$\angle ACA_1 = 2\gamma = \angle BCB_1,$$

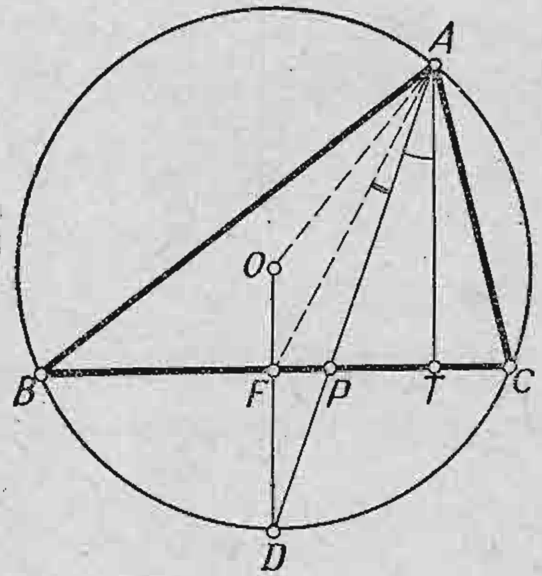
и, следовательно,

$$S_{\triangle BCB_1} = \frac{1}{2} BC^2 \cdot \sin 2\gamma < \frac{1}{2} AC^2 \sin 2\gamma = S_{\triangle ACA_1}.$$

Пусть p — простое число, входящее в разложение числа a со степенью $\alpha \geqslant 1$. Так как $a^n | b$, то p входит в разложение b со степенью $\geqslant n\alpha$, а в разложение $\frac{b}{d}$ — со степенью $\geqslant n\alpha - (k-1) \geqslant (n-k+1)\alpha$. Следовательно, $a^{n-k+1} \left| \frac{b}{d} \right.$.

Использованное при доказательстве неравенство $k < p^k$ очевидно при $k = 1$ и остается верным всякий раз, когда k возрастает на 1, поскольку его левая часть при этом увеличивается лишь на 1, а правая — в p раз, где $p > 1$.

107. а. Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Ясно, что биссектриса внутреннего угла треугольника при вершине A пересекает описанную окружность во второй точке D, которая расположена на дуге, заключенной



Рис, 72.

между вершинами B и C и не содержащей вершину A и делит эту дугу пополам (рис. 72). В той же точке D описанную окружность пересекает перпендикуляр, восставленный из середины F стороны BC. Если треугольник ABC не равнобедренный, то биссектриса угла при вершине A не совпадает с высотой, опущенной из этой вершины на противолежащую сторону, в силу чего точки F, P и T попарно различны. Поскольку точка P лежит на биссектрисе AD угла BAC и разделяет точки A и D, то на стороне BC точка P разделяет основания перпендикуляров, опущенных на эту сторону из точек A и D.

б. Центр O описанной окружности лежит на перпендикуляре FD, восставленном из середины F стороны BC.

то есть утверждение задачи верно и при $n = k + 1$. Тем самым оно доказано для всех n.

Второе решение. Из свойств бинома Ньютона (см. III.25) известно, что

$$(a+1)^b - 1 = C_b^1 a + C_b^2 a^2 + \ldots + C_b^{b-1} a^{b-1} + C_b^b a^b.$$

Величины C_b^k $(k = 1, 2, \ldots, b)$ — биномиальные коэффициенты, или числа сочетаний из b по k, — определяются формулами

$$C_b^k = \frac{b(b-1)\ldots(b-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} \qquad (1)$$

и принимают целочисленные значения.

Покажем, что

$$a^{n+1} \mid a^k C_b^k \quad (k = 1, \ldots, b). \qquad (2)$$

Для этого необходимо выяснить, на какую степень числа a делится биномиальный коэффициент C_b^k. Из соотношения (1) следует, что

$$bC_{b-1}^{k-1} = kC_b^k.$$

Пусть d — наибольший общий делитель чисел b и k. Тогда $\frac{b}{d}$ и $\frac{k}{d}$ — взаимно простые числа (см. III.23). Разделив обе части последнего равенства на d, получим

$$\frac{b}{d} \Bigm| \frac{k}{d} C_b^k.$$

Поскольку $\frac{b}{d}$ и $\frac{k}{d}$ взаимно просты, то

$$\frac{b}{d} \Bigm| C_b^k.$$

Итак, для доказательства соотношения (2) нам достаточно убедиться в том, что

$$a^{n+1} \Bigm| \frac{a^k b}{d}.$$

Это действительно так, поскольку $d \leqslant k$ и, следовательно, d меньше k-й степени любого простого числа, в силу чего любой простой множитель, входящий в разложение числа a, содержится в знаменателе в степени, которая меньше или равна $k-1$.

$CF+FP$, а отрезок DP — в виде $CF-FP$, где F — середина отрезка CD, мы получим

$$CP \cdot DP = CF^2 - FP^2.$$

Следовательно, знаменатель тем меньше, чем дальше отстоит точка P от F. Поэтому знаменатель правой части последнего равенства достигает наименьшего значения в том случае, если точка P совпадает с одним из концов отрезка AB.

106. Первое решение. Введем для краткости следующее обозначение: пусть $d|n$ означает, что d является делителем числа n (n делится на d).

Докажем утверждение задачи методом полной математической индукции по n. При $n=0$ утверждение задачи очевидно: если b — любое положительное целое число, то

$$(a+1)^b - 1 = [(a+1)-1]\,[(a+1)^{b-1} + (a+1)^{b-2} + \ldots + (a+1) + 1]$$

делится на a.

Предположим теперь, что утверждение задачи выполняется при некотором $n=k$. Иначе говоря, если $a^k|b$, то $a^{k+1}|(a+1)^b-1$. Пусть b' — число, делящееся на a^{k+1}. Отношение $\frac{b'}{a}$ обозначим через b. Тогда $a^k\,|\,b$ и

$$(a+1)^{b'} - 1 = (a+1)^{ab} - 1 = [(a+1)^b]^a - 1 =$$
$$= [(a+1)^b - 1]\,[(a+1)^{(a-1)b} + (a+1)^{(a-2)b} + \ldots + (a+1)^b + 1].$$

Выражение, стоящее в первых квадратных скобках правой части, по предположению индукции делится на a^{k+1}. Число слагаемых, заключенных во вторых квадратных скобках, равно a, поэтому второй сомножитель можно представить в виде

$$[(a+1)^{(a-1)b} - 1] + [(a+1)^{(a-2)b} - 1] + \ldots + [(a+1)^b - 1] + a.$$

Из основания индукции (утверждения задачи, доказанного при $n=0$) следует, что выражения, стоящие в квадратных скобках, и последний член делятся на a. Следовательно,

$$a^{k+2}\,|\,(a+1)^{b'} - 1,$$

Действительно, нечетным называется число вида $2k+1$, где k — целое число. Возведем его в квадрат:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

Поскольку одно из чисел k, $k+1$ заведомо четно, то первое слагаемое в правой части делится на 8.

б. Утверждение задачи следует непосредственно из приведенного выше замечания. Действительно, если бы все числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 были нечетными, то остаток от деления на 8 левой части соотношения

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$$

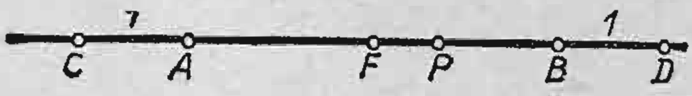
был бы равен $1+1+1+1+1=5$, в то время как правая часть при делении на 8 давала бы остаток 1. Полученное противоречие доказывает, что все числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b не могут быть нечетными.

105. Докажем, что величина

$$S(P) = \frac{1}{1+AP} + \frac{1}{1+BP}$$

достигает своего наибольшего значения, если точка P совпадает с одной из точек A или B.

Если точка P лежит на продолжении отрезка, то очевидно, $S(P) < S(A) = S(B)$, поскольку знаменатель обеих дробей при этом больше, чем в том случае, когда точка P совпадает с одним из концов отрезка AB.



Рис, 71.

Предположим теперь, что точка P лежит на отрезке AB. От точки B вправо и от точки A влево отложим единичные отрезки. Их концы обозначим C и D (рис. 71).

Величину $S(P)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{CP} + \frac{1}{DP} = \frac{CD}{CP \cdot DP}.$$

Она тем больше, чем меньше выражение, стоящее в знаменателе правой части, поскольку ее числитель постоянен. Заметив, что отрезок CP можно представить в виде

Число x' взаимно просто с первым из сомножителей, стоящих в левой части этого уравнения. Следовательно, второй сомножитель y должен делиться на x': $y = x'z$, откуда

$$(2x' - 1)z = p.$$

Последнее уравнение допускает следующие решения:

$$z = p, \quad 2x' - 1 = 1,$$

то есть

$$x' = 1, \quad x = y = p,$$

либо

$$z = 1, \quad 2x' - 1 = p,$$

то есть

$$x' = \frac{p+1}{2}, \quad x = p\frac{p+1}{2}, \quad y = \frac{p+1}{2}.$$

В первом случае числа x и y не были бы различными. Следовательно, единственным решением исходной задачи служат значения x и y, полученные во втором случае.

Второе решение. Умножив обе части уравнения

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

на $2xyp$, перенеся $2xp$ и $2yp$ из правой части в левую и прибавив к обеим частям p^2, преобразуем его к виду

$$(2x - p)(2y - p) = p^2.$$

Поскольку x и y — различные числа, оба сомножителя в левой части последнего уравнения различны. Следовательно, их произведение может быть равно p^2 лишь в том случае, если один из сомножителей равен 1, а другой p^2. Пусть

$$2x - p = 1, \quad 2y - 1 = p^2.$$

Тогда

$$x = \frac{p+1}{2}, \quad y = p\frac{p+1}{2}.$$

Второй случай отличается от рассмотренного лишь тем, что x и y поменялись местами.

104. а. Решение задачи основано на следующем замечании:

остаток от деления квадрата нечетного числа на 8 *всегда равен* 1.

Расстояния между точками B, D, E удовлетворяют неравенству треугольника:

$$DB \leqslant DE + EB.$$

Знак равенства соответствует тому случаю, когда треугольник BDE вырождается в отрезок прямой, то есть точка D лежит либо на стороне AB, либо на стороне BC треугольника.

Длины отрезков, соединяющих точки A, C, E, удовлетворяют аналогичному неравенству

$$AD + DE \leqslant AC + CE.$$

Знак равенства соответствует тому случаю, когда треугольник ACE вырождается в отрезок прямой, то есть точка D лежит на стороне AC.

Складывая почленно полученные неравенства и исключая из правой и левой частей отрезок DE, получаем неравенство

$$AD + DB \leqslant AC + CB.$$

Знак равенства соответствует тому случаю, когда оба предыдущих неравенства становятся равенствами. Поскольку точка D не совпадает с вершиной A, то это возможно лишь в том случае, если D совпадает с вершиной C.

103. Первое решение. Освободившись от знаменателей, запишем соотношение

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

которое требуется доказать, в виде уравнения

$$2xy = p(x + y).$$

Поскольку правая часть уравнения делится на простое число p, то (см. III.2) один из сомножителей, стоящих в левой части уравнения, также должен делиться на p. Коэффициент 2 не может делиться на p. Поскольку x и y входят в уравнение симметрично, то, не ограничивая общности, можно утверждать, что x делится на p, то есть $x = px'$. Подставляя это выражение в уравнение, преобразуем последнее к виду

$$(2x' - 1)\,y = px'.$$

ков AOB, BOC, COA. Пусть, например, точка P лежит внутри треугольника AOB (рис. 69).

По лемме

$$AP + PB < AO + OB = 2R,$$

и, следовательно, меньший из отрезков AP и BP заведомо меньше радиуса описанной окружности R.

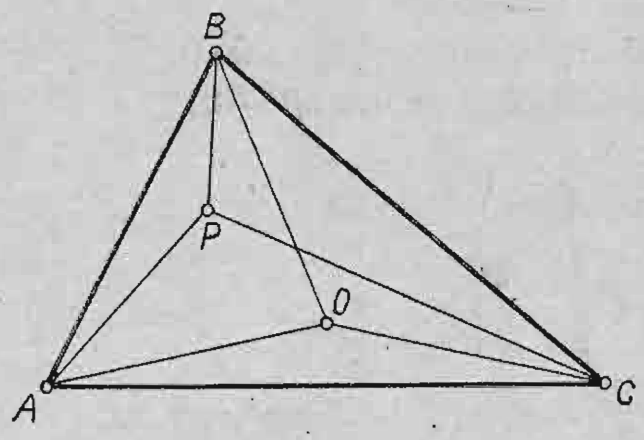


Рис. 69.

Соединим теперь с вершинами треугольника точку P. Поскольку треугольник ABC остроугольный, то центр описанной окружности O лежит внутри него, находится внутри или на границе одного из треугольников APB,

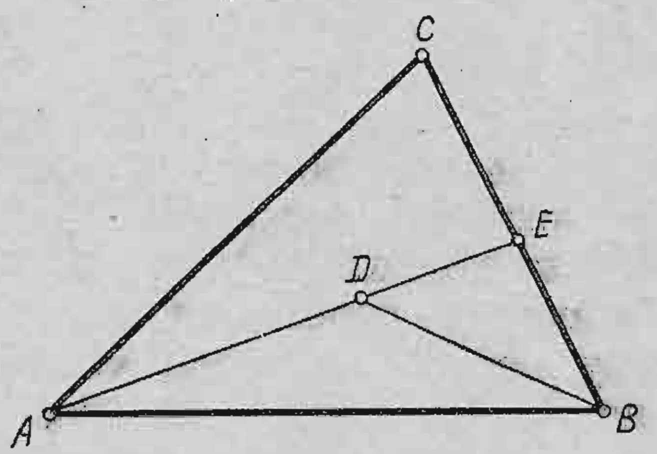


Рис. 70.

BPC, CPA и не совпадает с точкой P. Предположим, что O находится внутри треугольника CPA. Тогда по лемме

$$AP + PC > AO + OC = 2R,$$

и, следовательно, наибольший из отрезков AP и PC заведомо больше радиуса описанной окружности R.

в. *Доказательство леммы*. Пусть ABC — произвольный треугольник и D — его точка, отличная от вершины C. Обозначения двух остальных вершин треугольника выберем так, чтобы вершина A не совпадала с точкой D. Пусть E — точка пересечения прямой AD и стороны BC (рис. 70).

и точка P, расположены к точке P ближе, чем к точке O. Необходимо лишь доказать, что по обе стороны от проведенной прямой имеется хотя бы одна вершина треугольника ABC.

Поскольку треугольник ABC остроугольный, то центр описанной окружности O лежит внутри него (рис. 68). Следовательно, середина отрезка OP также находится внутри треугольника, поэтому перпендикуляр, восставленный из середины отрезка OP, проходит внутри треугольника ABC и пересекает его периметр в двух точках.

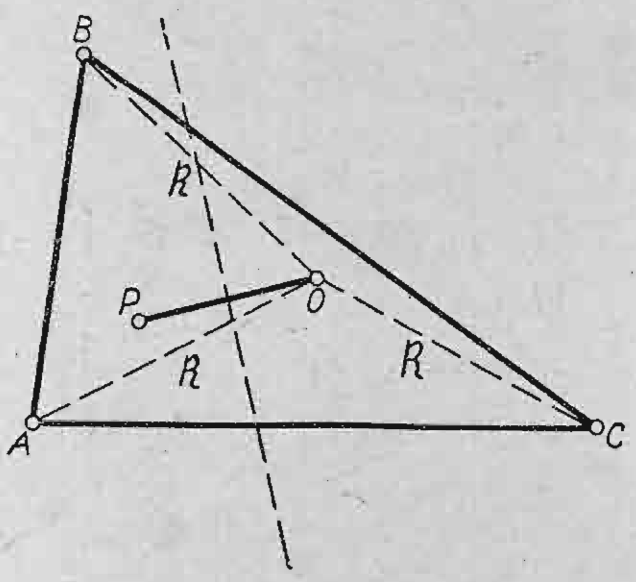


Рис. 68.

Одна из этих точек, но не обе, может совпадать с вершиной треугольника. Следовательно, перпендикуляр, восставленный из середины отрезка OP, по крайней мере одну сторону треугольника пересекает во внутренней точке. Вершины треугольника, которые соединяет эта сторона, находятся по разные стороны от прямой, проходящей через середину отрезка OP, перпендикулярно ему, что и требовалось доказать.

Второе решение. а. Воспользуемся следующей леммой:

для любой точки, находящейся внутри треугольника или на его границе, но не совпадающей ни с одной из вершин треугольника, сумма расстояний до двух вершин меньше, чем сумма сторон треугольника, сходящихся в третьей вершине.

(Доказательство леммы приведено в конце решения.)

б. Соединим центр описанной окружности O с вершинами треугольника. Любая точка P, не совпадающая с O, лежит внутри или на границе одного из треугольни-

С каждой из них проведенная прямая может пересекаться лишь в одной точке, но из четырех прямолинейных отрезков, служащих краями доски, она пересекается лишь с двумя. Следовательно, на проведенной прямой может быть самое большее 16 отмеченных точек, которые разбивают ее не более чем на 15 отрезков. Таким образом, любая прямая, проведенная на шахматной доске, может пересекать не более чем 15 клеток. Проведя прямую, параллельную любой из диагоналей на

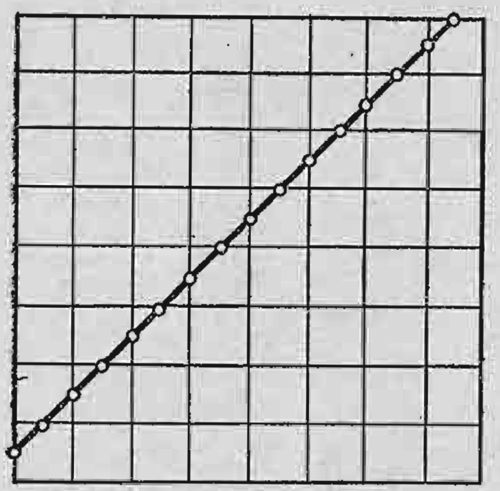


Рис. 67.

шахматной доске, так, чтобы она проходила через середины сторон двух угловых клеток, мы получим прямую, которая действительно пересекает 15 клеток (рис. 67).

Таким образом, любая прямая, проведенная на шахматной доске, может пересекать 15 клеток, но не больше.

102[1]. Первое решение. Пусть O — центр описанной окружности. Поскольку точка O отстоит от всех трех вершин треугольника на расстояние R, то утверждение задачи сводится к следующему: среди вершин треугольника есть такая, которая расположена ближе к точке P, чем к точке O, и такая, которая расположена ближе к точке O, чем к точке P.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек P и O, служит прямая, проходящая через середину отрезка OP перпендикулярно ему. Точки плоскости, находящиеся по ту же сторону от этой прямой, что и точка O, расположены к точке O ближе, чем к точке P. Точки плоскости, находящиеся по ту же сторону от прямой, что

[1] Вторая часть утверждения задачи по существу совпадает с задачей 41.

стки границ двух полос равны (на рис. 66 равные участки отмечены одинаковым числом штрихов). Таким образом, приведенное выше утверждение остается в силе и в этом случае.

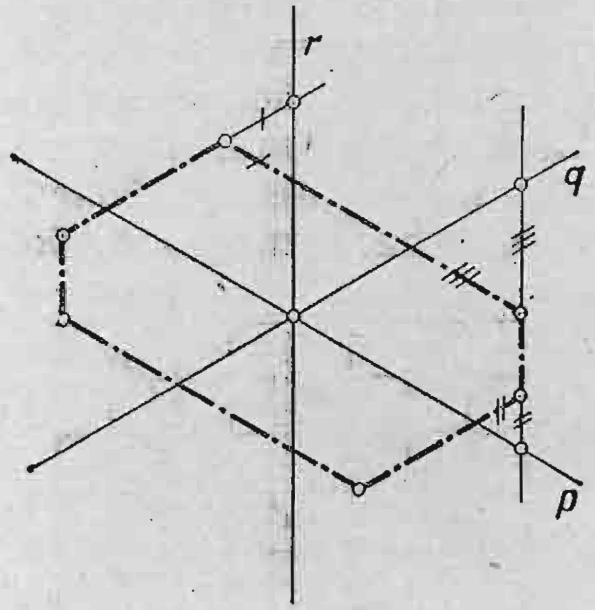


Рис. 66.

Отсюда следует, что периметр шестиугольника равен сумме удвоенных сторон равносторонних треугольников с высотами a, b и c, то есть

$$2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a+\frac{2}{\sqrt{3}}b+\frac{2}{\sqrt{3}}c\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}(a+b+c).$$

100. Пятизначные числа, оканчивающиеся цифрой 6, делятся на 3 в том и только в том случае, если четырехзначное число, полученное при отбрасывании последней цифры, делится на 3. Всего существует $9999-999=9000$ четырехзначных чисел. Каждое третье из них делится на 3. Следовательно, существует 3000 четырехзначных чисел, делящихся на 3, и ровно столько же пятизначных чисел, которые оканчиваются цифрой 6 и делятся на 3.

101. Отметим все точки пересечения проведенной прямой с границами клеток шахматной доски. Отмеченные точки разбивают проведенную прямую на несколько конечных отрезков (полупрямые, исходящие из первой и последней из отмеченных точек, мы рассматривать не будем). Каждый отрезок проходит по одной и только одной клетке шахматной доски. Следовательно, сосчитав конечные отрезки, мы узнаем, сколько клеток пересекает проведенная прямая.

Шахматная доска разделена на клетки 18 прямолинейными отрезками; 9 вертикалями и 9 горизонталями.

можно попасть, совершив сначала перемещение вдоль прямой, параллельной p, а затем — вдоль прямой, параллельной q. Рассмотрим второе перемещение. Как показывают аналогичные рассуждения, его составляющая, перпендикулярная прямой r, всегда меньше a, причем независимо от того, в какую из двух сторон вдоль выбранного направления происходит перемещение.

Поскольку, перемещаясь из точки O по направлениям, параллельным прямым p и q, можно достичь любой точки, расположенной внутри рассматриваемого параллелограмма, то мы вправе утверждать, что все внутренние точки этого параллелограмма удалены от прямой r на расстояние, которое меньше $a+b$.

Отсюда следует, что параллелограмм, полученный при пересечении полос шириной $2a$ и $2b$, симметричных относительно прямых p и q, содержит точки, не принадлежащие пересечению всех трех полос, лишь в том случае, если $a+b>c$.

Рассмотрим параллелограммы, полученные при пересечении двух других пар полос. Как показывают рассуждения, аналогичные приведенным выше, эти параллелограммы содержат точки, не принадлежащие пересечению всех трех полос, лишь в том случае, если $b+c>a$ и $a+c>b$. Однако в силу того, что по условиям задачи $a \leqslant b \leqslant c$, последние два неравенства выполняются всегда. Следовательно, условие $a+b>c$ необходимо (и достаточно) для того, чтобы геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям задачи, имело вид шестиугольника.

Прямые p, q, r разбивают всю плоскость на углы в $60°$ с общей вершиной в точке O. Периметр шестиугольника состоит из участков, равных по длине отрезкам, отсекаемым границами полос на сторонах этих углов.

Выбрав любые две из трех прямых p, q, r, рассмотрим образуемый ими угол в $60°$ и ту часть полосы с границами, параллельными третьей стороне, которая попадает в этот угол (рис. 66). Если эта часть полосы полностью принадлежит шестиугольнику, то высказанное выше утверждение очевидно. Если же какая-то часть полосы, попавшей внутрь рассматриваемого угла, лежит вне какой-то из двух других полос, то она имеет вид равностороннего треугольника, поэтому соответствующие учабыло равно 4, то есть чтобы пересечение всех трех полос не совпадало с пересечением двух из них?

Рассмотрим сначала пересечение полос, симметричных относительно прямых p и q. Оно является параллелограммом. Оценим, на каком расстоянии от прямой r находятся точки этого параллелограмма. Для этого из

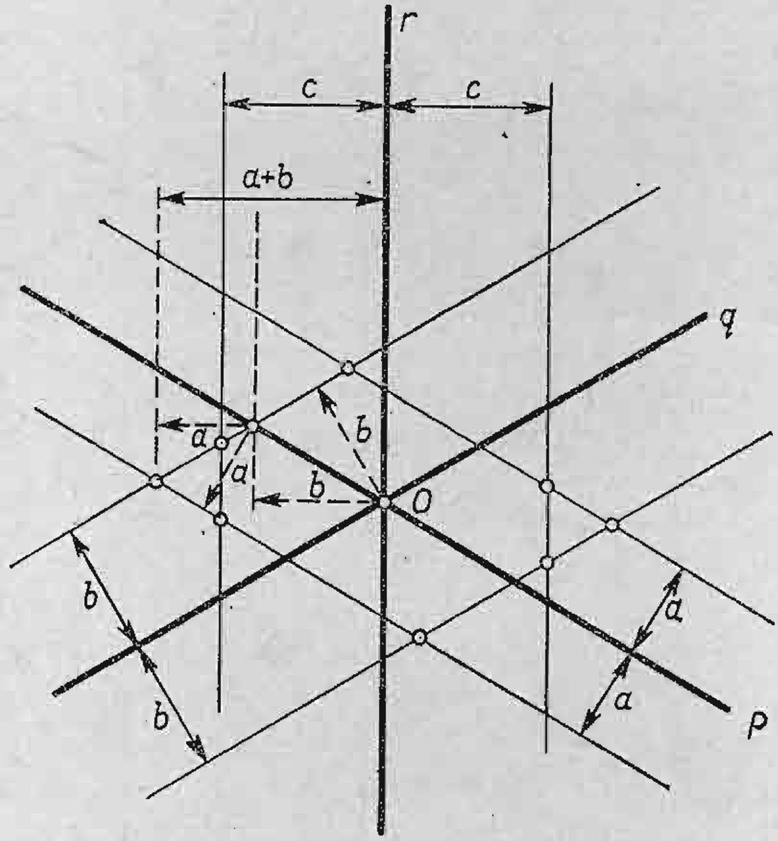


Рис. 65.

точки O до любой точки, лежащей внутри параллелограмма, будем добираться, двигаясь сначала параллельно прямой p, а затем — параллельно прямой q. Произведем перемещение в направлении, параллельном прямой p. Составляющая этого перемещения, перпендикулярная прямой q, меньше b. В какую бы сторону («положительную» или «отрицательную») ни происходило перемещение, конечная точка всегда будет отстоять от прямой q на расстояние, которое меньше b. Поскольку угол между любыми двумя из прямых p, q, r составляет 60°, то прямые q и r расположены симметрично относительно прямой p. Следовательно, перемещение вдоль прямой, параллельной p, имеет в направлении, перпендикулярном прямой r, такую же составляющую, как и в направлении, перпендикулярном прямой q. Эта составляющая меньше b, причем независимо от того, в какую сторону — «положительную» или «отрицательную» — происходило смещение. Из точки O в любую точку внутри параллелограмма

Сумму в 50 филлеров можно разменять монетами в 1 и 2 филлера 26 способами. Остальные 50 филлеров можно разменять либо 1 монетой в 50 филлеров, либо 5 монетами в 10 филлеров, либо 3 монетами по 10 филлеров и 1 монетой в 20 филлеров, либо 1 монетой в 10 филлеров и 2 монетами по 20 филлеров. Число способов размена в этой группе равно . . . . $26 \cdot 4 = 104$

Аналогично, если разменивать монетами в 1 и 2 филлера 40, 30, 20, 10 филлеров или вообще не использовать их при размене, то число возможных способов соответственно равно . . . .

$$21 \cdot 5 = 105$$
$$16 \cdot 6 = 96$$
$$11 \cdot 7 = 77$$
$$6 \cdot 8 = 48$$
$$10 = 10$$

Таким образом общее число способов размена равно 784

98. Разобьем все члены многочлена

$$1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k x^k$$

на пары, начиная со свободного члена, по возрастающим степеням x. Если старший член останется без пары, то его степень четна и, следовательно, он положителен при любых значениях x. Рассмотрим два последовательных члена многочлена, образующих пару:

$$C_n^l x^l - C_n^{l+1} x^{l+1} = \left(1 - \frac{n-l}{l+1} x\right) C_n^l x^l =$$
$$= \frac{l(1+x) + (1-nx)}{l+1} C_n^l x^l.$$

Последнее выражение положительно при $0 \leqslant l \leqslant n-1$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$, что и требовалось доказать.

99. Точки, удаленные от прямой p менее чем на a, заполняют внутренность полосы шириной $2a$, симметричной относительно прямой p (рис. 65). Следовательно, геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям задачи, представляет собой внутренность пересечения полос шириной $2a$, $2b$, $2c$, симметричных относительно прямых p, q, r. Каждая из полос симметрична относительно точки O пересечения прямых p, q, r. Следовательно, пересечение полос является центрально-симметричным многоугольником и поэтому имеет четное число сторон. Какому условию должны удовлетворять ширины a, b, c полос для того, чтобы число сторон многоугольника не скости, ограниченной прямой f, что и точка A. Аналогичное утверждение справедливо и относительно другой полуплоскости, которая содержит точку B. Поскольку $AA_1 < A_1B$ и $BB_1 \leqslant AA_1 < AB_1$, то точки A_1 и B_1 принадлежат различным полуплоскостям, на которые делит плоскость прямая f. Следовательно, отрезок A_1B_1 пересекается с прямой f в некоторой точке C.

Покажем, что точка C является искомой в рассматриваемом случае: в этой точке $\max(AC, BC) = AC = BC$, а для любой другой точки P прямой e $\max(AP, BP) > \max(AC, BC)$. Действительно, если бы вместо точки C мы выбрали какую-нибудь точку D на прямой e по ту же сторону от C, что и B_1, то $AD > AC$, поскольку треугольник ACD тупоугольный и AD — его наибольшая сторона. Следовательно, $\max(AD, BD) > \max(AC, BC)$. Аналогичное утверждение справедливо и относительно точки D_1, выбранной на другой полупрямой, на которую разбивает прямую e точка C.

97. Решение задачи по существу не вызывает никаких трудностей. Необходимо лишь перечислить все возможные способы размена одного пенге и подсчитать, сколько их. Однако для облегчения подсчета различные варианты размена удобно разбить на группы. Условимся отличать одну группу от другой по тому, какая доля 1 пенге подлежит размену монетами в 1 и 2 филлера.

Если все 100 филлеров разменять монетами в 1 и 2 филлера, то сделать это можно, взяв 0, 1, 2, 3, ..., 50 монет в 2 филлера, а недостающую до 100 филлеров сумму разменять монетами в 1 филлер. Таких способов размена	51
Если 90 филлеров разменять монетами в 1 и 2 филлера, то сделать это можно 46 способами. Остальные 10 филлеров можно «разменять» лишь одной монетой в 10 филлеров. Таких способов размена	46
Сумму в 80 филлеров можно разменять монетами в 1 и 2 филлера 41 способом. Остальные 20 филлеров можно разменять либо 2 монетами по 10 филлеров, либо 1 монетой в 20 филлеров. Поскольку каждый из способов размена 80 филлеров не зависит от того, как производится размен 20 оставшихся филлеров, то число способов в этой группе равно	$41 \cdot 2 = 82$
Число способов, при которых сначала размениваются 70 или 60 филлеров, соответственно равно . .	$36 \cdot 2 = 72$ $31 \cdot 3 = 93$

ные числа 2, 4, ..., а по другую — нечетные числа 3, 5, ... Обе арифметические прогрессии обрываются, дойдя до одного из чисел $n-2$ и $n-1$. Между этими

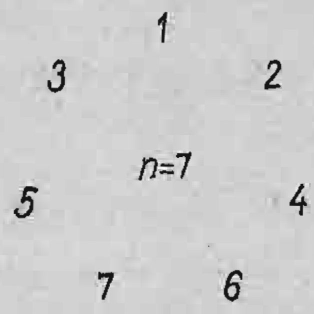


Рис. 61.

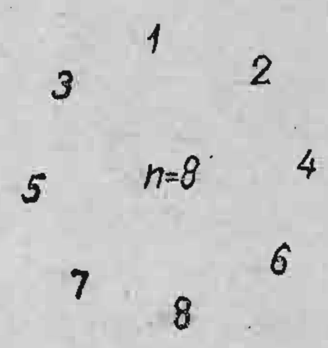


Рис. 62.

числами следует вписать число n. Лишь такое размещение n чисел по кругу может удовлетворять и действительно удовлетворяет условиям задачи.

96. Выберем обозначения так, чтобы точка A была расположена от прямой e не ближе, чем точка B. Пусть A_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую e (рис. 63).

1. Если $AA_1 \geqslant A_1B$, то A_1 — искомая точка. Действительно, если точка P прямой e совпадает с A_1, то $\max(AP, BP) = AA_1$. Для любой другой точки P, лежа-

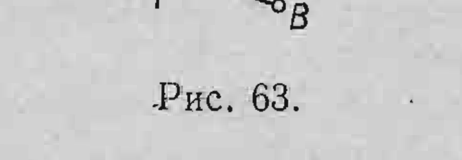


Рис. 63.

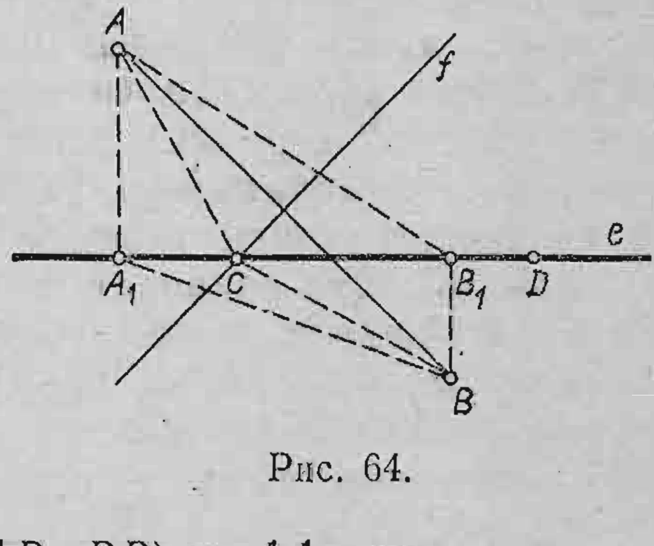


Рис. 64.

щей на прямой e, $\max(AP, BP) > AA_1$, поскольку эта точка расположена от точки A на большем расстоянии, чем точка A_1.

2. Если $AA_1 < A_1B$, то через середину отрезка AB проведем прямую f, перпендикулярную ему, а из точки B опустим перпендикуляр BB_1 на прямую e (рис. 64).

Если какая-нибудь точка расположена ближе к точке A, чем к точке B, то она принадлежит той же полуплонят за единицу длины). Числа нам удобнее откладывать не на прямой, а на окружности, поскольку нас интересует лишь дробная часть числа. Мы не различаем, например, числа $e = 2{,}718\ldots$ и $0{,}718\ldots$, с нашей точки зрения, они равны. Через концы отложенных дуг проведем радиальные засечки и пометим их соответствующими числами O, a, $2a$, $\ldots$.

Кроме того, начиная с точки O, разделим окружность на n равных частей. Точку, отделяющую одну часть от другой, условимся считать принадлежащей лишь той части, которая в ней *«заканчивается»* (иными словами, дуги, полученные при разбиении окружности на n частей, полуоткрыты). Тогда ни одна из «пограничных» точек не будет принадлежать двум частям одновременно.

Может случиться, что в каждой из n дуг окажется по засечке. Тогда засечка, пришедшаяся на ближайшую к точке O дугу длиной в $^1/_n$, заведомо соответствует числу, удовлетворяющему условиям задачи.

Если же в одной из дуг не окажется ни одной засечки, то по принципу Дирихле по крайней мере в одну из остальных $n-1$ дуг попадет более одной засечки (поскольку полное число засечек равно n). (Например, на рис. 60 засечки, соответствующие числам $3a$ и $10a$, попадают в одну и ту же дугу.) Таким образом, расстояние между этими засечками меньше $1/n$. Но расстояние между двумя засечками (измеряемое вдоль окружности против часовой стрелки) зависит лишь от разности их «номеров». Следовательно, расстояние между O и засечкой, соответствующей числу $10a - 3a = 7a$, также меньше $1/n = {}^1/_{12}$. Это означает, что разность между числом $7a$ и ближайшим к нему целым числом (по абсолютной величине) меньше $1/n = {}^1/_{12}$. Именно это и утверждалось в условиях задачи.

[Приведенное выше рассуждение целиком переносится на общий случай. Необходимо лишь заменить числа $11a$, $3a$, $10a$ и $7a$ числами $(n-1)a$, $i \cdot a$, $k \cdot a$ и $(k-i)a$.]

95. Рядом с 1 могут располагаться лишь числа 2 и 3 (рис. 61 и 62). По другую сторону от числа 2 не может располагаться никакое другое число, кроме 4, по другую сторону от 3 — лишь число 5 и так далее. Следовательно, по одну сторону от 1 должны выстраиваться чет-

среднее геометрическое длин перпендикуляров, опущенных из точек C и D на хорду AB, не больше половины хорды AB.

Наибольшей длины перпендикуляры, опущенные из точек C и D на хорду AB, достигают в том случае, если C и D совпадают с концами диаметра $C'D'$, перпен-

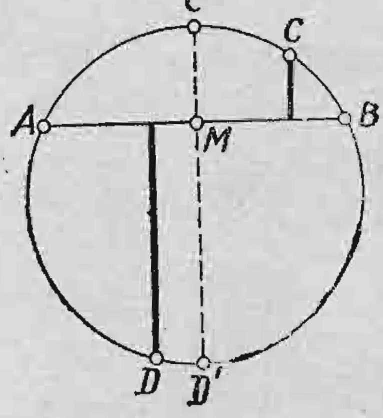


Рис. 59.

дикулярного хорде AB. Среднее геометрическое отрезков $C'M$, $D'M$ равно половине отрезка AB.

94. Сущность утверждения задачи 94, грубо говоря, сводится к тому, что среди чисел, кратных любому числу

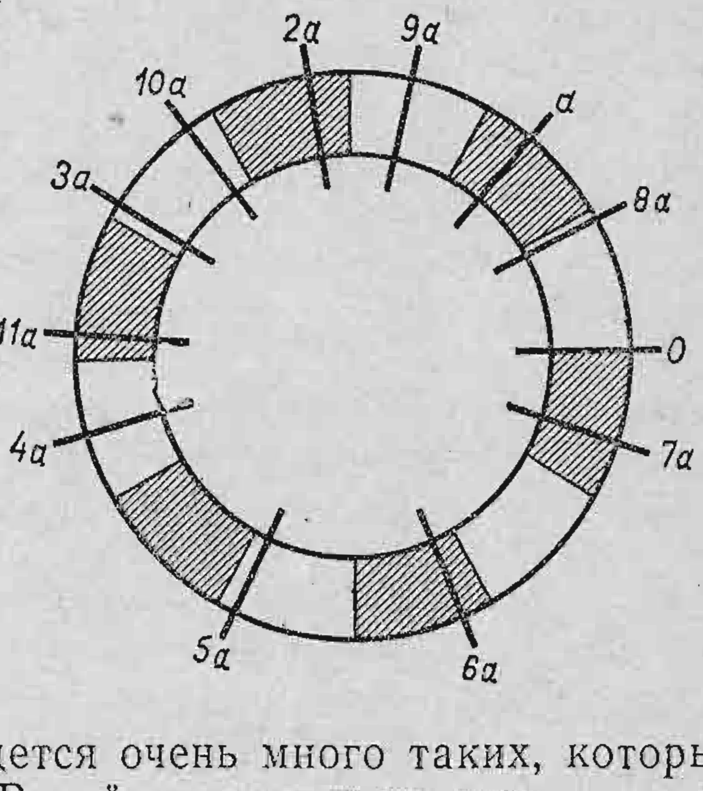


Рис. 60.

a, найдется очень много таких, которые будут почти целыми. В действительности условия задачи содержат более точное утверждение, поскольку объясняют, что следует понимать под «почти целым» числом.

На рис. 60 условия показаны для случая $n = 12$. С точки O окружности против часовой стрелки отложены дуги длиной a, $2a$, ..., $11a$ (периметр окружности пр вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжения двух других сторон треугольника ABC, S — площадь треугольника ABC, p — его полупериметр.

Воспользуемся соотношениями (4) и (7) из III.8:

$$S = rp = r_c(p - c).$$

Тогда

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

и

$$rr_c = \frac{S^2}{p(p-c)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)} = (p-a)(p-b),$$

следовательно,

$$\sqrt{rr_c} = \sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

Поскольку среднее геометрическое двух положительных чисел никогда не превышает их среднего арифметического (см. III.42),

то

$$\sqrt{rr_c} = \sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2},$$

что и требовалось доказать.

Третье решение. Из рис. 12 (см. решение задачи 20) ясно, что отрезок OO' виден из точек A и B под прямым углом (поскольку AO и AO' — биссектрисы двух смежных углов, дополняющих друг друга до 180°, то A и B принадлежат геометрическому месту точек, из которых отрезок OO' виден под прямым углом, то есть окружности, описанной на OO' как на диаметре). Точки A и B не лежат на прямой OO', поэтому мы можем утверждать следующее:

вершины A, B треугольника ABC и центры O и O' вписанной и вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжений двух других сторон, лежат на одной окружности (причем точки O и O' разделяют точки A и B).

Таким образом, утверждение задачи является частным случаем следующего, более общего утверждения (рис. 59):

если четыре точки A, B, C, D расположены на окружности так, что точки A и B разделяют точки C и D, то

Тогда

$$du - bv = mx,$$

то есть

$$bv = du - mx. \quad (1)$$

Если x, y — такие целые числа, что u делится на m, то bv в силу соотношения (1) также делится на m. Поскольку b и m — взаимно простые числа, то на m должно делиться число v.

Аналогично можно доказать и обратное утверждение: если v делится на m, то u также делится на m.

Частный случай, когда $m = 17$,

$$u = 2x + 3y, \quad v = 9x + 5y$$

рассмотрен во втором решении задачи 1.

92. По условию задачи любая из цифр 1, 2, 3, 4, 5 встречается в любом разряде (например, означает число десятков) столько раз, сколькими способами можно распределить остальные четыре цифры по оставшимся трем разрядам. Число способов, как нетрудно подсчитать, равно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Следовательно, сумма цифр, стоящих в каждом из четырех разрядов, взятая по всем четырехзначным числам, удовлетворяющим условиям задачи, равна

$$24(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360,$$

а сумма самих четырехзначных чисел

$$360 \cdot (10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 360 \cdot 1\,111 = 399\,960.$$

93. Первое решение. Как было показано в решении задачи 20, неравенство

$$rr_c \leqslant \frac{c^2}{4}$$

можно рассматривать как *необходимое* условие того, что задача 20 имеет решение. Именно это и утверждает задача 93.

Достаточность условия также была доказана в решении задачи 20.

Второе решение. Пусть c — длина стороны AB треугольника ABC, r — радиус вписанной, r_c — радиус

Если движение продолжается, то точка M, дойдя до конца A диаметра AA_2 окружности k, вновь начинает перемещаться к точке A_2.

91. Первое решение. Пусть x и y — такие целые числа, при которых $ax+by=mk$, где k — любое целое число. Поскольку $m=ad-bc$, то

$$ax+by=k(ad-bc),$$

откуда

$$a(x-kd)=-b(y+kc). \qquad (1)$$

Если бы числа a и b имели общий делитель $l>1$, то число $m=ad-bc$ также делилось бы на l и тогда вопреки условиям задачи m не было бы взаимно просто с a и b. Следовательно, a и b — взаимно простые числа.

Из соотношения (1) следует, что произведение чисел b и $y+kc$ делится на a. Поскольку сомножитель b взаимно прост с числом a, то на a должен делиться второй сомножитель $y+kc$ (см. III. 21—23).

Итак,

$$y+kc=la,$$

где l — некоторое целое число.

Подставляя $y+kc=la$ в соотношение (1), получаем

$$x-kd=-lb,$$

в силу чего

$$x=kd-lb, \quad y=-kc+la. \qquad (2)$$

Но тогда

$$cx+dy=l(ad-bc)=lm,$$

то есть $cx+dy$ делится на m.

Следовательно, *при тех целых значениях* (x, y), *при которых* $ax+by$ *делится на* m, $cx+dy$ *также делится на* m.

Верно и обратное утверждение: *при тех значениях* (x, y), *при которых* $cx+dy$ *делится на* m, $ax+by$ *также делится на* m.

Второе решение. Введем для краткости следующие обозначения:

$$u=ax+by, \quad v=cx+dy.$$

Рассмотрим сначала, что происходит, когда k', катясь по неподвижной окружности k, преодолевает дугу AA_1 в четверть окружности — от A до A_1.

Окружность k' все время касается неподвижной окружности k. Пусть B — точка касания. Диаметрально противоположная ей точка окружности k' совпадает с центром O окружности k.

Поскольку окружность k' катится по k без проскальзывания, то дуга BM окружности k' в любой момент времени равна дуге AB окружности k'. Стягиваемые дугами AB и BM центральные углы относятся обратно радиусам. Следовательно, дуга AB окружности k

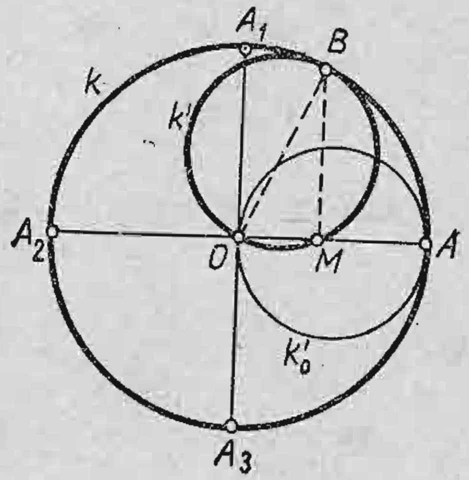


Рис. 58.

стягивает вдвое меньший угол, чем дуга BM окружности k'. Иначе говоря, *вписанный* (в окружность k') *угол* BOM равен *центральному углу* BOA (в окружности k). Таким образом, точка M находится на радиусе OA окружности k.

Более того, угол OMB заведомо прямой как вписанный в окружность k' угол, опирающийся на диаметр OB. *Следовательно, точка M совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из точки B на радиус OA.*

Итак, когда окружность k' проходит дугу AA_1, равную четверти окружности k, точка M описывает радиус OA окружности k от A до O.

Затем, когда окружность k', катясь по неподвижной окружности k, проходит дугу A_1A_2, то вся картина движения зеркально симметрична с рассмотренной выше относительно прямой OA_1. Следовательно, точка M описывает при этом радиус OA_2 окружности k.

Когда окружность k' катится по нижней половине окружности k — дуге A_2A_3A, то точка M проходит диаметр AA_2 в обратном направлении: от A_2 к A.

Второе решение. Разрешив систему уравнений, приведенную в условиях задачи, относительно x и z, получим

$$x=\frac{1}{3}(-a+2b+5y+4t)=b+2y+t-\frac{1}{3}(a+b+y-t),$$

$$z=\frac{1}{3}(2a-b-4y-5t)=a-y-2t-\frac{1}{3}(a+b+y-t).$$

Если y и t подобраны так, что число

$$\frac{1}{3}(a+b+y-t)=u$$

целое, то x и z также будут целыми.

Пусть t и u — любые целые числа. Подставив их в последнее соотношение и разрешив его относительно y, получим

$$y=-a-b+t+3u.$$

Если y и t выбрать, как указано, то x и z также целые числа. Следовательно, исходная система уравнений допускает решение в целых числах при любых целых a и b. Положив $t=a$, $u=0$, мы придем к частному решению, рассмотренному выше*.

89. Произведение четырех последовательных натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ можно представить следующим образом:

$$[n(n+1)(n+2)(n+3)]=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)=(n^2+3n+1)^2-1.$$

Следовательно, рассматриваемое произведение заключено между квадратами двух последовательных целых чисел

$$n^2+3n \quad \text{и} \quad n^2+3n+1,$$

и поэтому его нельзя представить в виде квадрата целого числа.

90. Начнем с такого положения k_0' меньшей окружности k', в котором точка M, путь которой мы намереваемся рассмотреть, лежит на неподвижной внешней окружности k (рис. 58). Начальное положение точки M обозначим A.

88. Первое решение. а. Прежде всего докажем, что если $a=1$, $b=0$, то система уравнений

$$x+y+2z+2t=1,$$
$$2x-2y+z-t=0 \tag{1}$$

допускает *по крайней мере одно* решение в целых числах.

Из первого уравнения следует, что сумма $x+y$ заведомо нечетна. Полагая $x=1$, $y=0$, найдем, что система уравнений (1) допускает решение в целых числах, а именно:

$$x=1, \quad y=0, \quad z=-1, \quad t=1.$$

б. Если $a=0$, $b=1$, то одно из решений системы уравнений

$$x+y+2z+2t=0,$$
$$2x-2y+z-t=1 \tag{2}$$

в целых числах мы получим, заметив, что разность $z-t$ нечетна. Оно имеет вид

$$x=-1, \quad y=-1, \quad z=1, \quad t=0.$$

в. Если x_1, y_1, z_1, t_1 — *любое* решение системы уравнений (1), а x_2, y_2, z_2, t_2 — *любое* решение системы уравнений (2), то числа

$$x=ax_1+bx_2, \quad y=ay_1+by_2,$$
$$z=az_1+bz_2, \quad t=at_1+bt_2$$

удовлетворяют исходной системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z+2t&=a,\\ 2x-2y+z-t&=b.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Выбирая в качестве x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 полученные выше частные решения уравнений (1) и (2), получаем следующее решение исходной системы уравнений (3):

$$x=a-b, \quad y=-b, \quad z=-a+b, \quad t=a.$$

Поскольку a и b — целые числа, то система уравнений (3) допускает по крайней мере одно решение в целых числах при любых целых a и b, что и требовалось доказать.

87. Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C прямого угла на гипотенузу AB. Обозначим E, F и G точки касания вписанной окружностью катетов $a = BC$, $b = CA$ и гипотенузы $c = AB$, а диаметрально противоположные им точки вписанной окружности — E', F' и G' (рис. 57).

Из всех точек, находящихся внутри любого треугольника или на его периметре, *в наибольшем удалении* от

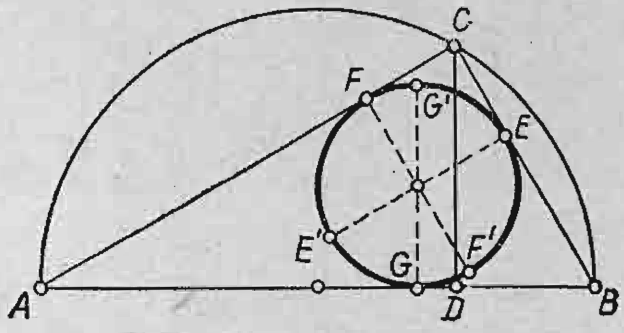


Рис. 57.

каждой из его сторон находится противолежащая ей вершина треугольника. Следовательно,

$$E'E < AC, \quad F'F < BC \tag{1}$$

и

$$G'G < CD.$$

Если в последнем неравенстве CD заменить на $\frac{1}{2} AB$, то оно только усилится, поскольку радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, не меньше половины любой ее хорды. Таким образом, $CD \leqslant \frac{1}{2} AB$ и

$$G'G < \frac{1}{2} AB. \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) можно записать в виде

$$2r < b, \quad 2r < a, \quad 2r < \frac{1}{2} c.$$

Следовательно, радиус r вписанной окружности меньше каждого из отрезков

$$\frac{1}{2} a, \quad \frac{1}{2} b, \quad \frac{1}{4} c$$

в отдельности, что и требовалось доказать.

86. Определим, в какой степени входят 2 и 5 в разложение факториала числа 1000, то есть числа

$$1000! = 1000 \cdot 999 \cdot 998 \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

в произведение степеней простых чисел (см. III.7 и III.21—23). Наименьший из показателей степени чисел 2 и 5, содержащихся в разложении факториала 1000!, совпадает с наибольшим показателем степени k числа $10 = 2 \cdot 5$, при котором 1000! делится на 10^k. Следовательно, число 1000! оканчивается k нулями.

Среди чисел 1, 2, 3, ..., 1000 каждое пятое делится на 5. Поскольку

$$1000 = 5 \cdot 200 + 0,$$

то между 1 и 1000 заключено ровно 200 чисел, делящихся на 5. Среди этих чисел каждое пятое делится по крайней мере на 5^2. Поскольку

$$200 = 5 \cdot 40 + 0,$$

то среди 200 чисел, делящихся на 5, имеется 40 таких, которые делятся на 5^2.

Продолжая делить на 5, получаем

$$40 = 5 \cdot 8 + 0,$$
$$8 = 5 \cdot 1 + 3,$$
$$1 = 5 \cdot 0 + 1.$$

Следовательно, среди целых чисел от 1 до 1000 имеются 8 таких, которые делятся по крайней мере на 5^3, одно число, делящееся на 5^4, и ни одного числа, которое бы делилось на пятую или более высокие степени числа 5.

Таким образом, в разложение числа 1000! по степеням простых чисел пятерка входит с показателем степени, равным

$$200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Показатель степени, с которым входит в разложение числа 1000! двойка, заведомо больше, поскольку на 2 делится каждое второе число, и одних лишь четных чисел от 1 до 1000 имеется 500. Следовательно, число 1000! оканчивается 249 нулями*.

Если треугольник *ABC прямоугольный*, то задача не имеет решения. Можно сказать, что в этом случае одна из трех окружностей вырождается в прямую. Две остальные окружности расположены по одну сторону от «бывшей окружности» и касаются друг друга извне (рис. 56).

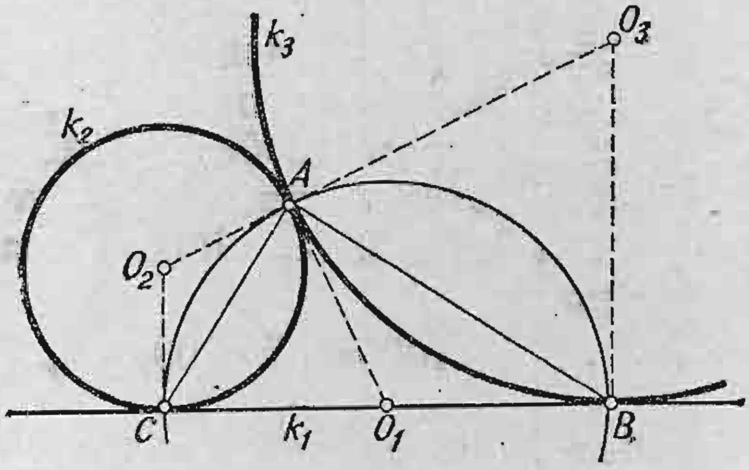


Рис. 56.

85. Задача будет решена, если мы докажем, что произведение разностей

$$b-a,\quad c-a,\quad d-a,$$
$$d-c,\quad d-b,\quad c-b$$

(которое для краткости обозначим P) делится на $4=2^2$ и 3. Действительно, если в разложение P по степеням простых чисел двойка входит не ниже чем во второй, а тройка — не ниже чем в первой степени, то (см. III.7 и III.21—23) P делится на $12=2^2\cdot 3$.

а. Разобьем все целые числа на четыре класса в зависимости от того, какой остаток они дают при делении на 4: 0, 1, 2 или 3. Если среди чисел a, b, c и d имеются два таких, которые принадлежат одному и тому же классу, то их разность, а вместе с ней и число P делится на 4. Если же никакие два из чисел a, b, c, d не принадлежат одному и тому же классу, то среди них имеются два четных и два нечетных числа. Разность двух четных, так же как и разность двух нечетных чисел, делится на 2, поэтому P и в этом случае делится на 4.

б. Среди любых четырех целых чисел a, b, c, d всегда найдутся два таких, которые при делении на 3 дают одинаковые остатки (*принцип Дирихле*, см. III.30). Их разность, а вместе с ней и произведение P делятся на 3.

являются *радикальными осями** тех окружностей, которые попарно касаются в этих точках, и поэтому пересекаются в одной точке O. Все три отрезка OA, OB и OC равны, поскольку квадрат любого из них равен *степени** точки O относительно одной из трех окружностей. Иначе говоря, точка O пересечения касательных,

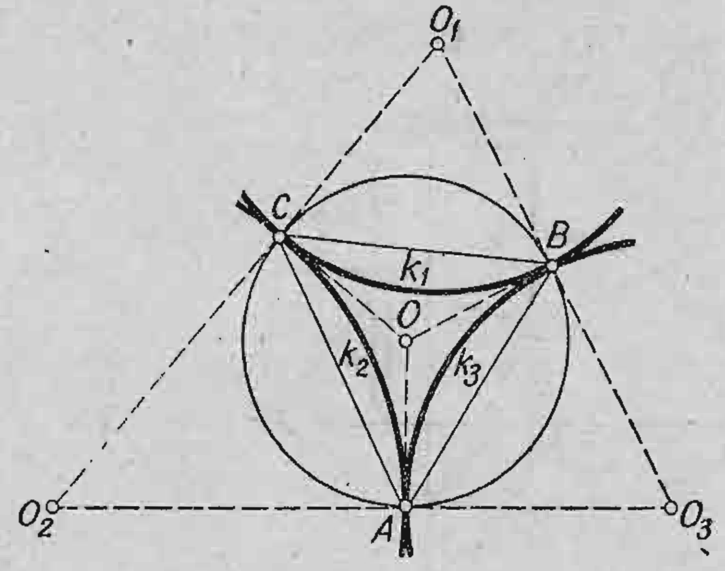


Рис. 54.

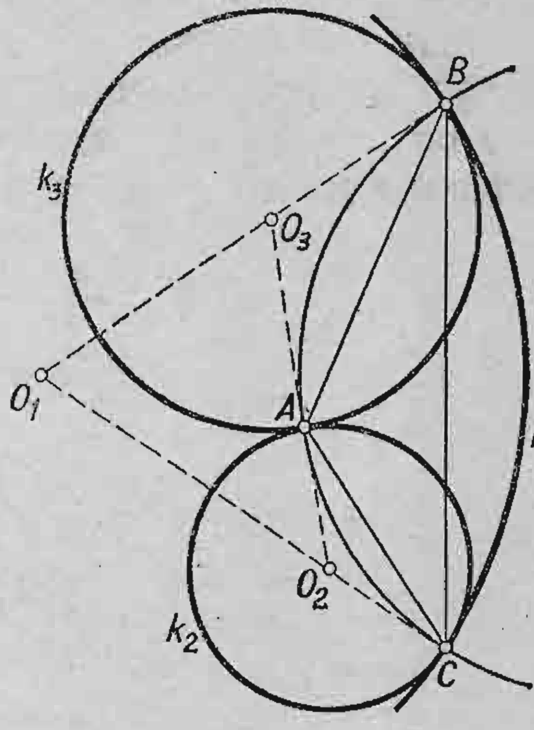


Рис. 55.

проведенных к окружностям в точках A, B и C, совпадает с центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ясно, что стороны треугольника $O_1O_2O_3$ (или, быть может, их продолжения) проходят через точки A, B, C и перпендикулярны отрезкам OA, OB и OC.

Таким образом, условиям задачи могут удовлетворять *лишь такие* окружности, центры которых O_1, O_2 и O_3 мы получим, построив к окружности, описанной вокруг треугольника ABC, касательные в точках A, B, C и найдя их точки пересечения. Нетрудно показать, что построенные таким образом окружности действительно удовлетворяют условиям задачи.

Если треугольник ABC *остроугольный*, то окружности k_1, k_2, k_3 попарно касаются друг друга извне (рис. 54).

Если треугольник ABC *тупоугольный*, то две окружности касаются друг друга извне, а третьей окружности — изнутри (рис. 55).

83. Соотношение $r+\rho=a$ может выполняться лишь в том случае, если расстояние от заданной точки O до заданной прямой e не больше a.

Если расстояние от точки O до прямой e равно a, то искомое геометрическое место точек представляет собой отрезок прямой, соединяющий точку O с основанием перпендикуляра, опущенного из O на e.

Если расстояние от точки O до прямой e меньше a, то проведем прямые d_1 и d_2, параллельные e и отстоящие от нее на расстояние a (рис. 53). Искомое геометрическое место точек в этом случае состоит из дуг двух

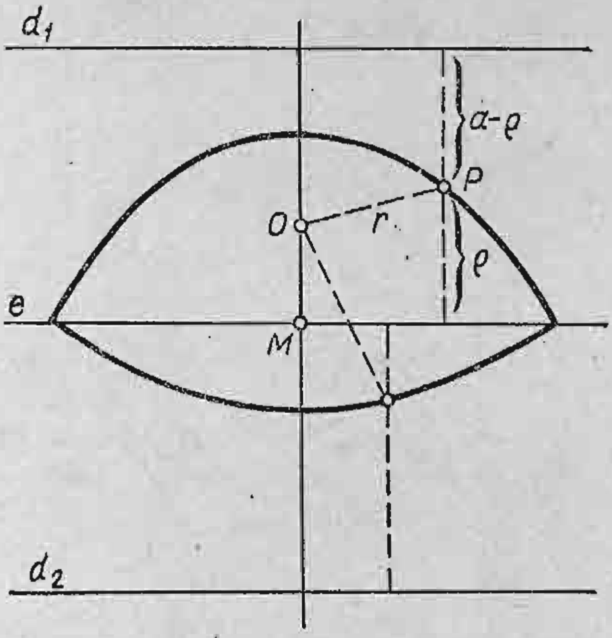


Рис. 53

парабол, лежащих в полосе, заключенной между прямыми d_1 и d_2.

Действительно, в полосе, заключенной между прямыми e и d_1, условиям задачи удовлетворяют точки, отстоящие от O на расстояние r и от d_1 — на расстояние $a-\rho=r$. Фокус O и директриса d_1 определяют дугу параболы, лежащую в полосе между прямыми e и d_1.

Аналогично в полосе, заключенной между прямыми e и d_2, условиям задачи удовлетворяют точки, расположенные на дуге параболы с фокусом в заданной точке O и директрисой d_2. Эта дуга находится в полосе, ограниченной прямыми e и d_2.

Концы обеих параболических дуг лежат на прямой e.

84. Пусть O_1, O_2 и O_3 (рис. 54) — центры трех окружностей, удовлетворяющих условиям задачи. Касательные, проведенные к окружностям в точках A, B и C,

Это соотношение верно, поскольку по свойствам бинома Ньютона (см. III. 25)

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1},$$

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 q + C_{n+1}^2 q^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} q^{n+1} = (1+q)^{n+1}.$$

Итак, соотношение (*) доказано*.

81. Если разность арифметической прогрессии $d>0$ и a_r — ее общий член, то

$$a_{r+s} = a_r + sd.$$

По условию задачи разность прогрессии d — целое положительное число, первый член прогрессии не меньше 1, а все последующие члены больше 1.

Если $a_r > 1$ и $s = a_r$, то

$$a_{r+s} = a_r + a_r d = a_r (1+d)$$

— составное число, что и требовалось доказать.

82. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$. Числа a^n, b^n, c^n могут быть длинами сторон треугольника лишь в том случае, если

$$a^n < b^n + c^n,$$

или в иной записи

$$a^n - b^n < c^n,$$

то есть

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) < c^n. \qquad (1)$$

Поскольку каждое из чисел a и b не меньше c, то второй сомножитель в левой части неравенства (1) не меньше nc^{n-1}. Следовательно, для того чтобы выполнялось неравенство (1), числа a, b и c должны удовлетворять *необходимому* условию — неравенству

$$(a-b)\,nc^{n-1} < c^n,$$

которое можно записать в виде

$$(a-b) < \frac{c}{n}. \qquad (2)$$

Последнее неравенство выполняется при любых целых положительных n лишь в том случае, если $a = b$, что и требовалось доказать.

и верхних индексов не превосходит $n-(k+1)<n-k$, поэтому, применив к ним предположение индукции, мы можем преобразовать левую часть соотношения (1) к виду

$$C_n^k+2\left(2^{n-k-1}C_k^k+2^{n-k-2}+C_{k+1}^k+\ldots+C_{n-1}^k\right).$$

Но именно это выражение и стоит в правой части соотношения (1). Тем самым соотношение (1) доказано.

Второе решение. Докажем соотношение

$$C_{n+1}^1+C_{n+1}^2 s_1+C_{n+1}^3 s_2+\ldots+C_{n+1}^{n+1} s_n=2^n S_n \qquad (*)$$

сначала для $q=1$, а затем для остальных значений q.

а. Если $q=1$, то $s_n=n+1$ и $S_n=n+1$, в силу чего соотношение $(*)$ принимает следующий вид:

$$C_{n+1}^1+2C_{n+1}^2+\ldots+(n+1)\,C_{n+1}^{n+1}=2^n(n+1). \qquad (1)$$

Воспользуемся непосредственно проверяемым тождеством для биномиальных коэффициентов

$$kC_{n+1}^k=(n+1)\,C_n^{k-1} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$$

(см. формулу (3) в III.5). Применив его к левой части соотношения $(*)$, получим

$$(n+1)\left(C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n\right)=2^n(n+1)$$

(сумма биномиальных коэффициентов вычислена в III.25, в).

б. Пусть теперь $q\neq 1$. Умножим правую и левую части соотношения $(*)$ соответственно на правую и левую части тождества

$$1-q=2\left(1-\frac{1+q}{2}\right).$$

Воспользовавшись формулой суммы геометрической прогрессии, получим

$$(1-q)\,s_n=1-q^{n+1}, \quad \left(1-\frac{1+q}{2}\right)S_n=1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}.$$

Таким образом, соотношение $(*)$, которое требуется доказать, преобразуется к виду

$$C_{n+1}^1(1-q)+C_{n+1}^2\left(1-q^2\right)+\ldots+C_{n+1}^{n+1}\left(1-q^{n+1}\right)=$$
$$=2^{n+1}\left[1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}\right]=2^{n+1}-(1+q)^{n+1}.$$

Отсюда следует, что отрезки O_3B и O_2C параллельны и равны отрезку OO_1, то есть $O_3B \parallel O_2C$ и $O_3B = O_2C$. Но это означает, что четырехугольник BCO_2O_3 — параллелограмм и $BC = O_2O_3$. Аналогично

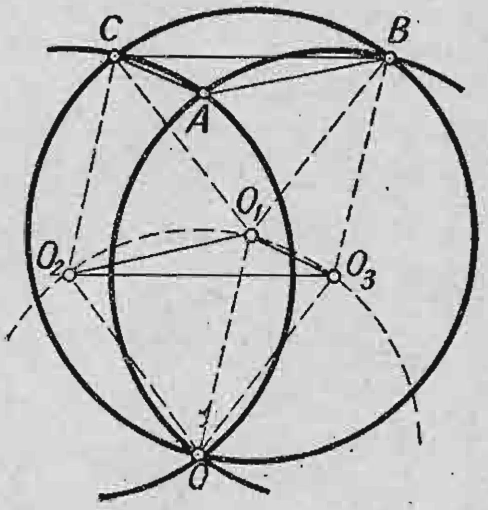


Рис. 52.

доказываются равенства $CA = O_3A_1$ и $AB = O_1O_2$. Таким образом, треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ конгруэнтны, что и требовалось доказать.

80. Первое решение. Достаточно доказать, что коэффициенты при q^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ в правой и левой частях предполагаемого тождества равны, то есть

$$C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2} + \ldots + C_{n+1}^{n+1} =$$
$$= 2^{n-k}C_k^k + 2^{n-k-1}C_{k+1}^k + \ldots + C_n^k. \quad (1)$$

Докажем соотношение (1) методом полной математической индукции по $n - k$.

При $n - k = 0$ соотношение (1) очевидно. Предположим, что оно выполняется во всех случаях, когда разность между верхними и нижними индексами в первом и последнем члене равна $N - 1$. Докажем, что тогда соотношение (1) выполняется и при разности индексов $n - k$, равной N.

Левую часть соотношения (1) можно преобразовать к следующему виду (см. III. 5, г):

$$(C_n^k + C_n^{k+1}) + (C_n^{k+1} + C_n^{k+2}) + \ldots + (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_n^n =$$
$$= C_n^k + 2(C_n^{k+1} + C_n^{k+2} + \ldots + C_n^n).$$

У биномиальных коэффициентов, стоящих в скобках в правой части последнего равенства, разность нижних

78. По условию задачи величина

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

содержит слагаемые вида $\frac{1}{2^r 3^s}$, где показатели степени r и s — неотрицательные целые числа (см. III.7). Если t — наибольшее из значений, принимаемых r и s, то члены S можно представить в виде произведения соответствующих членов геометрических прогрессий:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots,\ \frac{1}{2^t},$$

имеющей суммой число U, и

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ \ldots,\ \frac{1}{3^t},$$

имеющей суммой число V. Иначе говоря, все члены S содержатся среди членов произведения

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^t}\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^t}\right) = UV,$$

а поскольку в UV могут входить и другие члены, не принадлежащие S, то $S \leqslant UV$. Но $U < 2$, $V < 3/2$, поэтому $S < 3$.

Неравенства $U < 2$, $V < 3/2$ можно доказать следующим образом:

$$U = \left(1 - \frac{1}{2^{t+1}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2}\right) < 1 : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$V = \left(1 - \frac{1}{3^{t+1}}\right) : \left(1 - \frac{1}{3}\right) < 1 : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

79. Центры O_1, O_2 и O_3 окружностей OBC, OCA и OAB отстоят от точки O на расстояние r (рис. 52). Таким образом, центр окружности, описанной вокруг треугольника $O_1O_2O_3$ находится в точке O, а радиус окружности равен r. Следовательно, чтобы решить задачу, достаточно доказать, что треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ конгруэнтны.

Прежде всего заметим, что оба четырехугольника BO_3OO_1 и CO_2OO_1 — ромбы, поскольку все их стороны равны r.

первых пар точек, то они выполняются и для четвертой пары точек.

Расстояния от двух точек, расположенных по разные стороны от плоскости, до плоскости одинаковы в том и только в том случае, если плоскость проходит через середину отрезка, соединяющего эти точки. Таким образом, условия задачи будут выполнены для трех первых пар точек, если плоскость S пройдет через середины отрезков AB, BC и CD. Следовательно, условиям задачи удовлетворяет плоскость, проходящая через три известные точки. Если эти точки, делящие отрезки AB, BC и CD, не лежат на одной прямой, то решение задачи единственно. Если же эти точки расположены на одной прямой, то задача допускает бесконечно много решений (любая плоскость, проходящая через прямую, на которой лежат середины отрезков, удовлетворяет всем условиям задачи).

77. Произведение квадратных трехчленов x^2+ax+ $+b$ и x^2+cx+d можно представить в виде

$$x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd.$$

Полученный многочлен четвертой степени тождественно равен многочлену x^4+2x^2+2x+2, если

$$a+c=0, \tag{1}$$

$$b+ac+d=2, \tag{2}$$

$$bc+ad=2, \tag{3}$$

$$bd=2. \tag{4}$$

По условию задачи коэффициенты a, b, c и d — целые числа. Следовательно, соотношение (4) может выполняться лишь в том случае, если в произведении bd один из сомножителей нечетен (равен ± 1), а другой четен (равен ± 2). Пусть, например, коэффициент b нечетен, а коэффициент d четен.

Тогда из соотношения (3) следует, что произведение bc четно. Поскольку первый сомножитель b нечетен, то второй сомножитель c должен быть четным, что невозможно. Действительно, поскольку b нечетно, а c и d четны, то левая часть соотношения (2) нечетна и не может быть равной 2*.

и, кроме того,

$$ac - b^2 \geqslant 0, \quad pr - q^2 \geqslant 0,$$

то есть

$$ac \geqslant b^2, \quad pr \geqslant q^2.$$

Но тогда должны выполняться неравенства

$$ap \geqslant 0, \quad cr \geqslant 0$$

и

$$ac \cdot pr \geqslant b^2q^2,$$

то есть

$$ap \cdot cr - (bq)^2 \geqslant 0.$$

По обратной лемме это возможно лишь в том случае, если при всех значениях x

$$apx^2 + 2bqx + cr \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

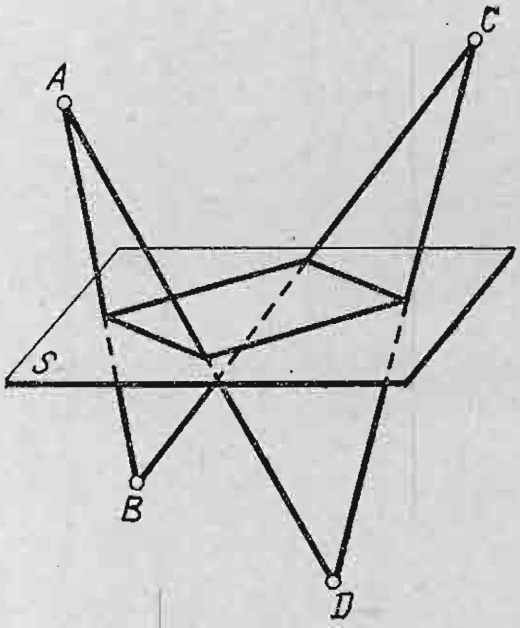


Рис. 51.

76. Плоскость S требуется провести так (рис. 51), чтобы расстояния от нее до точек

$$A \text{ и } B,$$

$$B \text{ и } C,$$

$$C \text{ и } D,$$

а также

$$D \text{ и } A$$

были равны, а точки в каждой паре располагались по разные стороны плоскости S. Если плоскость S проведена так, что условия задачи выполняются для трех

Если $a > 0$ и x удовлетворяет уравнению $ax + b = 0$, то в силу тождества (2)

$$af(x) = ac - b^2.$$

Поскольку $a > 0$ и $f(x) \geqslant 0$, то

$$ac - b^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

При $a = 0$ квадратный трехчлен вырождается в

$$f(x) = 2bx + c,$$

причем коэффициент b должен быть равен нулю. Действительно, если бы коэффициент b был отличен от нуля, то функция $f(x) = 2bx + c$ принимала бы все значения, как положительные, так и отрицательные. Но если $a = 0$ и $b = 0$, то $ac - b^2 = 0$.

Следовательно, число $ac - b^2$ неотрицательно и в этом случае.

б. *Обратная лемма. Если*

$$a \geqslant 0, \quad c \geqslant 0 \quad \textit{и} \quad ac - b^2 \geqslant 0,$$

то квадратный трехчлен

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c \geqslant 0$$

при всех вещественных значениях x.

Из тождества (2) следует, что при всех значениях x

$$af(x) \geqslant ac - b^2,$$

а поскольку $ac - b^2 \geqslant 0$, то

$$af(x) \geqslant 0.$$

При $a > 0$ последнее неравенство может выполняться лишь в том случае, если $f(x) \geqslant 0$. При $a = 0$ и $ac - b^2 \geqslant 0$ коэффициент b также равен 0. Но тогда $f(x) = c$ при всех значениях x, а по условию коэффициент c неотрицателен.

в. Применим леммы к решению задачи 75.

Если при всех значениях x

$$ax^2 + 2bx + c \geqslant 0 \quad \text{и} \quad px^2 + 2qx + r \geqslant 0,$$

то по доказанной (прямой) лемме

$$a \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad p \geqslant 0, \quad r \geqslant 0$$

откуда

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{2} < \frac{2}{y}.$$

Следовательно, $2 < y < 4$, то есть $y = 3$.
Наконец, из уравнения

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{z} = 1$$

находим, что $z = 6$.

Таким образом, задача допускает единственное решение $a = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$.

75. а. *Лемма. Если при всех вещественных значениях x квадратный трехчлен*

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c \geqslant 0, \tag{1}$$

то ни одно из чисел a, c и $ac - b^2$ не отрицательно.

Воспользуемся для доказательства леммы следующим легко проверяемым тождеством:

$$af(x) = (ax + b)^2 + ac - b^2 = (ax + b)^2 - (b^2 - ac). \tag{2}$$

1. Неотрицательность коэффициента a можно доказать, рассуждая от противного.

Пусть $a < 0$. Тогда из неравенства (1) следовало бы, что $af(x) \leqslant 0$ при всех значениях x. Если учесть тождество (2), то полученное неравенство означало бы, что

$$(ax + b)^2 \leqslant b^2 - ac.$$

Но это невозможно. Действительно, всегда можно найти такое число $M > 1$, которое одновременно было бы больше числа $b^2 - ac$. Если x удовлетворяет уравнению $ax + b = M$, то

$$(ax + b)^2 = M^2 > M > b^2 - ac.$$

2. Коэффициент c не может быть отрицательным, поскольку в силу неравенства (1)

$$c = f(0) \geqslant 0.$$

3. Неотрицательность последнего числа $ac - b^2$ докажем двумя различными способами для случаев, когда $a > 0$ и $a = 0$ (о том, что a не может быть меньше нуля, уже известно).

Прямоугольные треугольники AFC и CGB также подобны, поскольку углы при вершинах A и C у них равны.

Пользуясь пропорциональностью сходственных сторон в подобных треугольниках, получаем

$$AC : AE = AB : AG, \quad AC : AF = BC : GC,$$

откуда

$$AB \cdot AE = AC \cdot AG, \quad BC \cdot AF = AC \cdot GC$$

и, наконец,

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC \cdot (AG + GC).$$

Но

$$BC = AD \quad \text{и} \quad AG + GC = AC,$$

поэтому

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2,$$

что и требовалось доказать.

Из выведенного соотношения в качестве частного случая следует теорема Пифагора: если параллелограмм переходит в прямоугольник, то соотношение принимает вид

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

(См. также III. 51.)

74. Итак, требуется найти такие положительные целые числа x, y, z и a, что

$$x < y < z \quad \text{и} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a.$$

Прежде всего заметим, что при любых x, y и z

$$a = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Следовательно, $a = 1$.

Но тогда

$$\frac{1}{x} < a = 1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

Таким образом, $1 < x < 3$, откуда $x = 2$.

Исходное уравнение для величин, обратных x, y и z, преобразуем к виду

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2},$$

следняя цифра и в том, и в другом случае равна 6. Следовательно, число десятков в записи квадрата любого числа a^2 нечетно лишь тогда, когда a оканчивается цифрой 4 или 6. Но при этом последняя цифра числа a^2 равна 6.

Числа, о которых говорится в условиях задачи, существуют. Таковы, например, $24^2 = 576$, $26^2 = 676$.

72. Если из *любой* точки C отрезка OA, соединяющего центр O окружности k с точкой A, как из центра провести окружность радиусом CA (рис. 49), то она целиком расположится внутри окружности k.

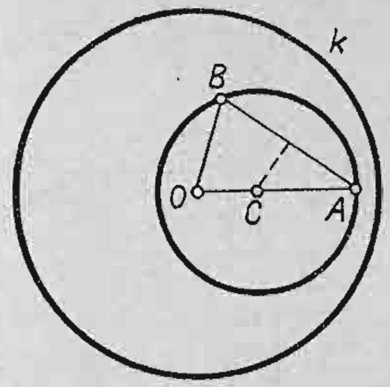


Рис. 49.

Если теперь из середины отрезка AB восставить перпендикуляр, то он пересечется либо с отрезком OA, либо с отрезком OB. Окружность, проведенная из точки пересечения C как из центра, радиусом $CA = CB$ проходит через обе заданные точки A и B и (по доказанному выше) целиком расположится внутри окружности k.

73. Пусть G — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на диагональ AC (рис. 50). Бо́льшая

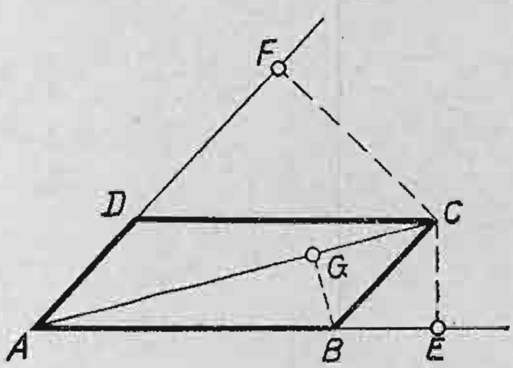


Рис. 50.

из диагоналей AC делит параллелограмм на два тупоугольных треугольника ADC и ABC, поэтому точка G лежит на AC между вершинами A и C.

Прямоугольные треугольники AEC и AGB подобны, поскольку имеют общий угол при вершине A.

Из уравнения (1) следует, что

$$x = \frac{y-a}{2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получаем

$$y^2 - y\frac{y-a}{2} + \left(\frac{y-a}{2}\right)^2 - b = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, преобразуем новое уравнение к виду

$$3y^2 = 4b - a^2,$$

или

$$(3y)^2 = 3(4b - a^2). \qquad (3)$$

Предположим теперь, что x и y — рациональные числа, удовлетворяющие уравнениям (1) и (2) и, следовательно, уравнению (3).

Поскольку a и b — целые числа, то в правой части уравнения (3) стоит *целое* число. Оно может быть равно квадрату рационального числа $3y$ лишь в том случае, если $3y$ не дробное, а целое число (см. решение задачи 40 и III.31).

Кроме того, число, стоящее в правой части уравнения (3), делится на 3. Это возможно лишь в том случае (см. III.2), если число $3y$ делится на 3, то есть если y — целое число.

Из уравнения (3) также следует, что числа a и y либо оба четные, либо оба нечетные, поэтому

$$x = \frac{y-a}{2}$$

— целое число.

71. Докажем, что если число десятков в десятичной записи квадрата некоторого числа нечетно, то последняя цифра квадрата равна 6.

Пусть c — последняя цифра в десятичной записи числа a. Тогда $a+c$ — четное число, а $a-c$ делится на 10. Следовательно, $a^2 - c^2 = (a+c)(a-c)$ делится на 20, поэтому последние цифры чисел a^2 и c^2 совпадают, а предпоследние цифры (число десятков) либо обе четны, либо обе нечетны.

Число десятков в десятичной записи квадратов однозначных чисел нечетно лишь у $4^2 = 16$ и $6^2 = 36$. По-б. Если в правой части неравенства (2) среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ заменить их средним геометрическим, то неравенство лишь усилится*. Следовательно, во всяком треугольнике

$$\frac{1}{l} > \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}},$$

то есть

$$l < \sqrt{ab}. \qquad (3)$$

Неравенство (2) *необходимо и достаточно* для того, чтобы по трем заданным числам a, b и l можно было построить треугольник, у которого длины двух сторон были бы равны a и b, а биссектриса заключенного между ними угла — l. Неравенство (3) лишь *необходимо, но не достаточно*. Например, если $a=3$, $b=13$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{3 \cdot 13} > 6$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{13}\right) = \frac{8}{39} > \frac{1}{6}.$$

Следовательно, $l = 6$ не удовлетворяет неравенству (2), хотя и удовлетворяет неравенству (3).

69. Попытаемся разделить числа 1, 2, 3, 4, 5 на две группы так, чтобы ни в одной из них разность двух чисел не совпадала с одним из чисел, входящих в ту же группу.

Числа 2 и 4 не могут входить в одну группу, поскольку $4-2=2$.

Число 1 не может входить в одну группу с 2, поскольку $2-1=1$. Следовательно, число 1 заведомо должно входить в ту же группу, что и 4.

Число $4-1=3$ должно входить в одну группу с 2.

Итак, мы установили, что числа 1 и 4 должны входить в одну группу, а числа 2 и 3 — в другую.

Однако оставшееся число 5 не может принадлежать ни к одной из двух групп, поскольку $5-1=4$, а $5-2=3$.

70. Рассмотрим систему уравнений

$$y - 2x - a = 0, \qquad (1)$$

$$y^2 - xy + x^2 - b = 0. \qquad (2)$$

68. Первое решение. Пусть E — такая точка на стороне AC, для которой

$$\angle EDC = \angle ABC.$$

Такая точка (рис. 48) действительно существует, поскольку $\angle ABC < \angle ADC$ ($\angle ADC$ — внешний угол треугольника BCD, а $\angle ABC$ — один из внутренних углов того же треугольника, с ним не смежных).

Треугольники BCD и CDE подобны, поскольку у них, кроме того, равны углы при вершине C (напомним, что

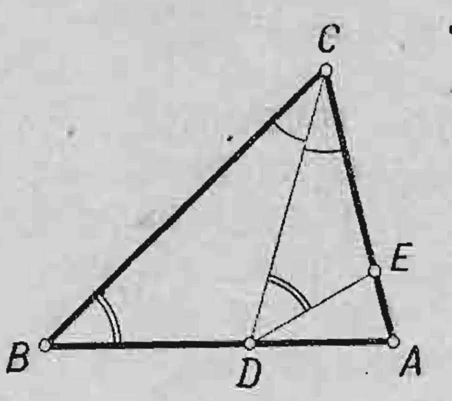


Рис. 48.

CD — биссектриса угла ACB в треугольнике ABC). Выписывая отношения сходственных сторон, получаем

$$CB : CD = CD : CE,$$

или

$$CD^2 = CE \cdot CB < CA \cdot CB,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. а. Во всяком треугольнике длины сторон a и b, между которыми заключен угол γ, и длина его биссектрисы l связаны соотношением

$$\frac{1}{l}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad (1)$$

(см. первое решение задачи 51).

Предположим, что заданы три положительных числа: a, b и l. Треугольник, в котором длины двух сторон были бы равны a и b, а l — биссектриса заключенного между ними угла, можно построить в том и только в том случае, если косинус угла $\frac{\gamma}{2}$, вычисленный по формуле (1), меньше 1, то есть если

$$\frac{1}{l} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \qquad (2)$$

67. Прежде всего докажем, что уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

имеет два корня. Освободившись от знаменателей, мы получим уравнение

$$f(x)=3x^2-2(a-b)x-ab=0.$$

Отрицательный корень этого уравнения больше числа $-b$, а положительный — больше числа a, поскольку значения

$$f(-b)=b(a+b), \quad f(0)=-ab, \quad f(a)=a(a+b),$$

принимаемые квадратным трехчленом $f(x)$ при x, равном $-b$, 0 и a, имеют чередующиеся знаки. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению, поскольку новые корни, которые могли бы появиться при освобождении от знаменателей, были бы равны $-b$, 0 и a.

Подставив положительный корень x_1 в исходное уравнение, получим

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+b}=\frac{1}{a-x_1}.$$

Все члены его в правой и левой частях положительны. Поскольку

$$\frac{1}{x_1}<\frac{1}{a-x_1},$$

то $x_1>\frac{a}{2}$, а значит, подавно $x_1>\frac{a}{3}$.

С другой стороны, поскольку $x_1<x_1+b$, то $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_1+b}$, и из уравнения

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+b}=\frac{1}{a-x_1}$$

получаем неравенство

$$\frac{2}{x_1}>\frac{1}{a-x_1},$$

откуда $x_1<\frac{2a}{3}$.

Неравенства для отрицательного корня x_2 нетрудно доказать при помощи аналогичных рассуждений*.

а поскольку

$$m \leqslant n \text{ и } AB \leqslant KL,$$

то

$$S \leqslant \frac{1}{2} S'.$$

Второй случай. Предположим, что вершины треугольника принадлежат различным сторонам параллелограмма (рис. 47). Тогда среди вершин треугольника

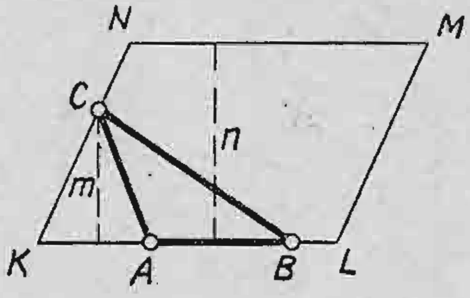


Рис. 45.

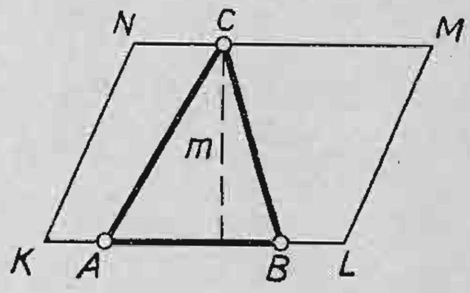


Рис. 46.

заведомо найдутся две такие, которые находятся на противоположных сторонах параллелограмма. Пусть вершина A лежит на стороне KL, вершина B — на противоположной стороне MN и вершина C — на стороне KN.

Проведем через вершину C прямую, параллельную сторонам KL и MN. Пусть D — точка пересечения этой

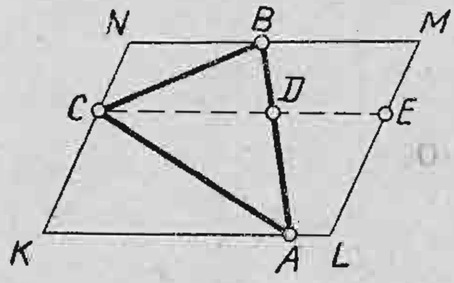


Рис. 47.

прямой со стороной треугольника AB, а E — точка ее пересечения со стороной параллелограмма LM.

По доказанному выше (при рассмотрении первого случая) площадь треугольника ACD не больше половины площади параллелограмма $KLEC$, а площадь треугольника CDB не превосходит половины площади параллелограмма $CEMN$. Но отсюда следует, что площадь всего треугольника ABC не превосходит половины площади параллелограмма $KLMN$.

Если положительное число ν выбрано так, что оно больше любого из коэффициентов R, S и T, то

$$Rn^2 + Sn + T < \nu(n^2 + n + 1).$$

Отсюда (поскольку $n^3 > n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$) получаем неравенство

$$D > (n-1)(n^2+n+1) - \nu(n^2+n+1) = \\ = (n-1-\nu)(n^2+n+1).$$

Таким образом, неравенство $D > 0$ выполняется при любом целом $n > \nu$.

65. Продолжим стороны AB, BC и CA треугольника соответственно за вершины A, B и C до пересечения

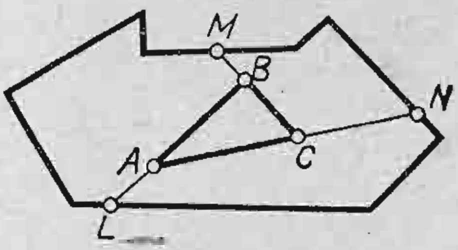


Рис. 44.

с периметром многоугольника (рис. 44). Точки пересечения L, M, N разбивают периметр многоугольника на части (LM), (MN), (NL).

Как известно, всякая ломаная длиннее отрезка прямой, имеющего с ней общие концы, поэтому

$$(LM) + MB > LA + AB,$$
$$(MN) + NC > MB + BC,$$
$$(NL) + LA > NC + CA.$$

Сложив почленно неравенства и исключив отрезки, входящие в правую и левую части, получим неравенство

$$(LM) + (MN) + (NL) > AB + BC + CA.$$

66. Первый случай. Предположим, что две вершины треугольника A и B лежат на одной и той же стороне KL параллелограмма (рис. 45 и 46).

Если S — площадь треугольника ABC, m — его высота, опущенная на сторону AB, S' — площадь параллелограмма и n — высота параллелограмма, опущенная на сторону KL, то

$$S = \frac{1}{2} m \cdot AB, \quad S' = n \cdot KL,$$

Поскольку центр O окружности k лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка C_1C_2, то точка N пересечения перпендикуляра, восставленного из точки C_2 к стороне AB, с продолжением отрезка OM расположена так, что $NO = OM$. Аналогичные утверждения справедливы и относительно перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника из точек A_2 и B_2.

Следовательно, все три перпендикуляра, восставленных к сторонам треугольника в точках A_2, B_2, C_2, пе-

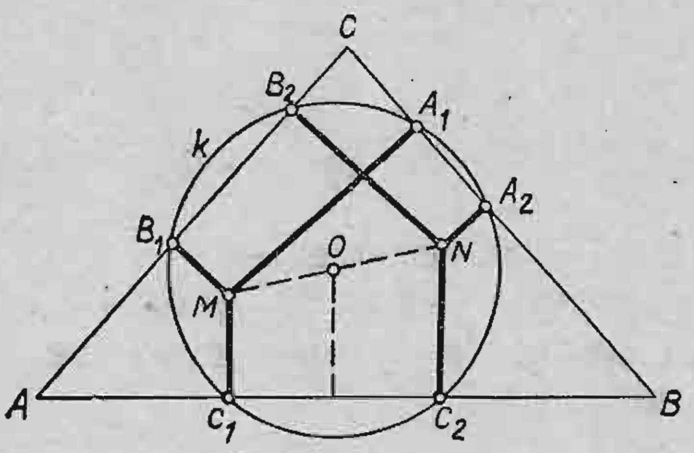


Рис. 43.

ресекаются в одной точке N, симметричной точке M относительно O, что и требовалось доказать.

64. Прежде всего докажем, что неравенство

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1 \geqslant n(n-1)(n-2)$$

выполняется для любого положительного целого числа n.

Действительно, если $n \geqslant 4$, то $n!$ можно представить в виде произведения двух положительных чисел: $n(n-1)(n-2)$ и $(n-3)!$, где $(n-3)! \geqslant 1$. Кроме того, неравенство $n! \geqslant n(n-1)(n-2)$ выполняется и при n, равном 1, 2 и 3, поскольку его левая часть принимает значения 1, 2 и 6, а правая — 0, 0 и 6.

Таким образом, достаточно доказать, что существует такое положительное целое число ν, для которого при любом $n > \nu$ разность

$$D = n(n-1)(n-2) - (An^2 + Bn + C)$$

положительна.

Раскрыв скобки и приведя подобные члены в правой части, можно преобразовать D к виду

$$D = n^3 - (Rn^2 + Sn + T),$$

где R, S и T — коэффициенты, не зависящие от n.

62. Производная

$$f'(x) = 2ax + b$$

квадратного трехчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

представляет собой линейную функцию, и график ее — прямая линия. Следовательно, наибольшее и наименьшее из значений, принимаемых функцией $f'(x)$ на замкнутом отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, она достигает *на концах* этого отрезка. Таким образом, осталось лишь доказать, что ни одно из значений

$$f'(1) = 2a + b, \quad f'(-1) = -2a + b$$

не может быть больше 4 и меньше —4.

По условию задачи $-1 \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant 1$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Подставляя в неравенство значения x, равные 1, —1 и 0, получаем

$$-1 \leqslant a \pm b + c \leqslant 1 \tag{1}$$

и $-1 \leqslant c \leqslant 1$, откуда также

$$-1 \leqslant -c \leqslant 1. \tag{2}$$

Складывая почленно неравенства (1) и (2), получаем

$$-2 \leqslant a \pm b \leqslant 2. \tag{3}$$

Складывая в свою очередь почленно неравенства (3) для $a + b$ и $a - b$, находим

$$-4 \leqslant (a + b) + (a - b) \leqslant 4,$$

то есть

$$-2 \leqslant a \leqslant 2. \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) получаем $-4 \leqslant 2a \pm b \leqslant 4$, то есть

$$-4 \leqslant 2a + b \leqslant 4 \quad \text{и} \quad -4 \leqslant -2a + b \leqslant 4, \tag{5}$$

что и требовалось доказать*.

63. Предположим, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника ABC из точек A_1, B_1, C_1 пересекаются в одной точке M (рис. 43).

Но (см. соотношение (2) в III.39)

$$(aa', ab') = a(a', b') = ad' \quad \text{и} \quad (ba', bb') = b(a', b') = bd'.$$

Следовательно,

$$((aa', ab'), (ba', bb')) = (ad', bd') = (a, b)\,d',$$

то есть

$$(aa', ab', ba', bb') = dd',$$

что и требовалось доказать*.

61. Все диаметры окружности k пересекают дугу AB окружности k', ибо в противном случае дуга AB не делила бы площадь круга, заключенного внутри k, на две

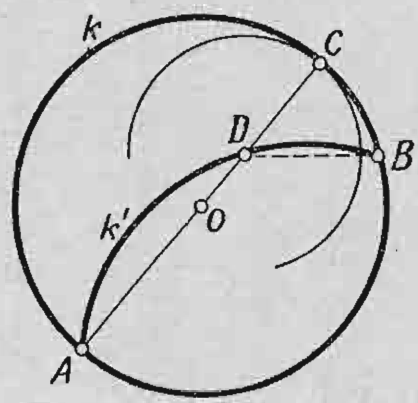


Рис. 42.

равные части (рис. 42). Следовательно, центр O окружности k лежит внутри круга, ограниченного окружностью k' (если бы точка O лежала вне круга, ограниченного окружностью k', то через нее можно было бы провести прямую, не пересекающую дугу AB, то есть нашелся бы диаметр окружности k, не пересекающий дугу AB, что невозможно).

Итак, отрезок AO проходит внутри окружности k', и поэтому диаметр AC окружности k пересекает дугу AB в некоторой точке D, принадлежащей радиусу OC.

Поскольку длина дуги AB больше суммы длин отрезков AD и DB, достаточно убедиться в том, что $DB > DC$. Но это неравенство следует из того, что окружность радиуса DC, описанная вокруг точки D, как вокруг центра, расположена внутри окружности k[1].

[1] Можно заметить также, что дуги AD и DB окружности k' больше стягиваемых ими хорд AD и DB, и потому

$$\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DB} > AD + DB = AO + OD + DB > AO + OB = AC.$$

— *Прим. ред.*

Нам осталось показать, что стороны этого шестиугольника равны. Это следует из того, что, например, отрезок MN' служит средней линией в треугольнике $B'AC'$ и поэтому равен половине диагонали грани $AC'O'B'$. Аналогичное утверждение справедливо и относительно других сторон шестиугольника.

60. Первое решение. Пусть

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad a' = a_1' d', \quad b' = b_1' d'. \qquad (1)$$

Тогда a_1 и b_1, так же как и a_1' и b_1', — взаимно простые числа (см. III.23).

Из соотношения (1) следует, что

$$aa' = dd'a_1a_1', \quad ab' = dd'a_1b_1',$$
$$ba' = dd'b_1a_1', \quad bb' = dd'b_1b_1',$$

поэтому dd' — общий делитель чисел aa', ab', ba', bb'. Наибольший общий делитель мог бы превосходить число dd' лишь в том случае (см. III.22), если у чисел

$$a_1a_1', \quad a_1b_1', \quad b_1a_1', \quad b_1b_1' \qquad (2)$$

был бы общий простой делитель. Предположим, что такой делитель существует, и обозначим его p. Поскольку a_1 и b_1 — взаимно простые числа, то на p может делиться не более, чем одно из них. Предположим, что a_1 не делится на p. Поскольку произведение a_1a_1' делится на p, то один из его сомножителей заведомо делится на это простое число (см. теорему, доказанную в III.2, а). Следовательно, число a_1' должно делиться на p. Аналогичные рассуждения применимы и к числу a_1b_1': оно делится на p лишь в том случае, если b_1' делится на p. Но числа a_1' и b_1' не могут одновременно делиться на p, поскольку они взаимно просты. Таким образом, у чисел (2) наибольший общий делитель не может быть больше 1.

Второе решение. Если $(l, m, \ldots)$ — наибольший общий делитель положительных целых чисел l, m, ..., то (см. соотношение (1) в III.39)

$$(aa', ab', ba', bb') = ((aa', ab'), (ba', bb')).$$

58. Рассмотрим произведения

$$1 \cdot n,\quad 2 \cdot (n-1),\quad 3 \cdot (n-2),\quad \ldots,\quad (n-1) \cdot 2,\quad n \cdot 1.$$

Любое из произведений, начиная со второго и кончая предпоследним, больше первого (и последнего) произведения: если $n-k>1$, то

$$(k+1)(n-k) = k(n-k) + (n-k) > k \cdot 1 + (n-k) = n.$$

Отсюда следует, что произведение всех выписанных выше произведений при $n>2$ больше n^n, что и требовалось доказать.

59. Пусть O и O' — противоположные концы диагонали куба; A, B и C — концы ребер, исходящих из вершины O, A', B' и C' — концы ребер, исходящих из вершины O', так что $OA \parallel O'A'$ и т. д.; L, M', N, L', M

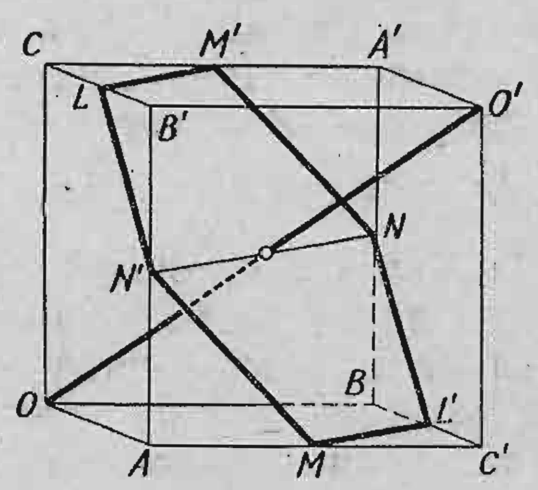


Рис. 41.

и N' — середины ребер $B'C$, CA', $A'B$, BC', $C'A$ и AB' (рис. 41).

Отрезки

$$O'M,\quad O'N',\quad O'L,\quad O'M',\quad O'N,\quad O'L',$$
$$OM,\quad ON',\quad OL,\quad OM',\quad ON,\quad OL'$$

равны, поскольку все грани куба представляют собой конгруэнтные квадраты, а эти отрезки соединяют в каждой грани одну из вершин с серединами двух сторон, исходящих из противоположной вершины.

Таким образом, точки M, N', L, M', N, L' лежат на поверхности двух сфер одного и того же радиуса с центрами в вершинах куба O и O' и, следовательно, располагаются в одной плоскости, перпендикулярной отрезку OO', образуя в ней вершины шестиугольника, вписанного в окружность, по которой пересекаются обе сферы.

прямой DD', поскольку в силу симметрии $DD' \perp AC$. Следовательно, диагональ BD' четырехугольника $ABCD'$ перпендикулярна диагонали AC в том и только в том случае, если диагональ BD исходного четырехугольника $ABCD$ перпендикулярна AC. Таким образом, при отражении от диагонали длины сторон четырехугольника остаются неизменными и сохраняется перпендикулярность (или неперпендикулярность) его диагоналей.

Учитывая это, достаточно убедиться в том, что за конечное число отражений от диагоналей всякий невыпуклый четырехугольник можно преобразовать в выпуклый, относительно которого требуемое утверждение уже доказано (см. п. а), и отсюда заключить, что оно выполняется и для исходного четырехугольника $ABCD$.

Рассмотрим выпуклые (то есть меньше 180°) углы четырехугольника $ABCD'$. По крайней мере один из углов, заключенных между отрезками AC и сторонами AB и CB, должен быть острым. Предположим, например, что острым является угол BAC. Тогда

$$\angle BAD' = 2 \angle BAC$$

— выпуклый угол. Поскольку по условию задачи $\delta > 180°$, то угол ADC, примыкающий извне к вершине D исходного четырехугольника и равный углу $AD'C$, выпуклый. Он дополняет угол δ до 360° так же, как и сумма трех других внутренних углов четырехугольника $ABCD$, а потому равен этой сумме. Следовательно, выпуклые углы нового четырехугольника $ABCD'$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\angle D'AB > \alpha, \quad \angle ABC = \beta, \quad \angle CD'A = \alpha + \beta + \gamma > \gamma$$

и

$$\angle D'AB + \angle ABC + \angle CD'A > \alpha + \beta + (\alpha + \beta + \gamma).$$

Таким образом, при отражении от диагонали сумма выпуклых углов возрастает на величину, которая больше суммы двух наименьших углов исходного четырехугольника, причем ни один из выпуклых углов не убывает. Следовательно, угол, равный сумме выпуклых углов четырехугольника, после конечного числа отражений от диагоналей перестает быть выпуклым. Это и означает, что исходный (невыпуклый) четырехугольник $ABCD$ переходит в выпуклый (см. также III. 51)*.

имно перпендикулярны, то выберем обозначения так, чтобы угол, заключенный между отрезками p и r, был тупым. Тогда в силу неравенства между квадратами сторон треугольника

$$a^2 > p^2 + r^2, \qquad b^2 < r^2 + q^2,$$
$$c^2 > q^2 + s^2, \qquad d^2 < s^2 + p^2.$$

Следовательно,

$$a^2 + c^2 > p^2 + q^2 + r^2 + s^2 > b^2 + d^2.$$

Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то в силу теоремы Пифагора все неравенства перейдут в равенства. Таким образом, диагонали

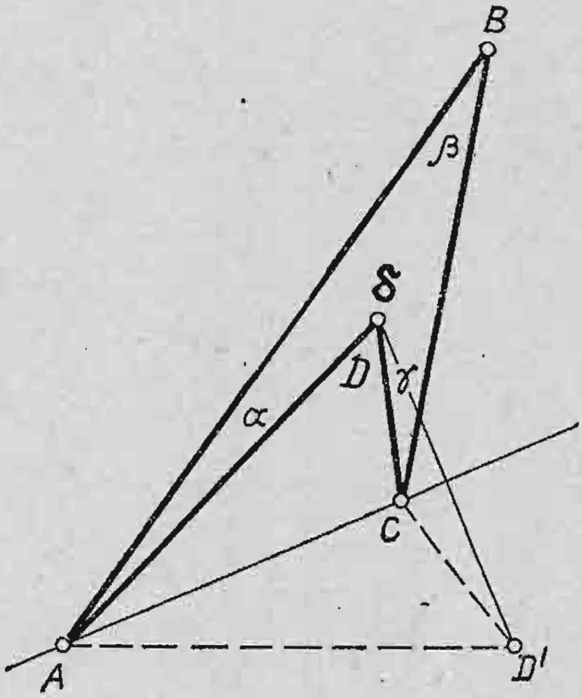


Рис. 40.

четырехугольника взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, если длины его сторон удовлетворяют соотношению

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

6. Пусть теперь $ABCD$ — заданный *невыпуклый* четырехугольник. Обозначим через α, β, γ и δ внутренние углы при его вершинах и предположим, что $\delta > 180°$ (рис. 40).

Пусть D' — точка, симметричная вершине D относительно диагонали AC. Стороны четырехугольника $ABCD'$ равны сторонам исходного четырехугольника $ABCD$. Диагональ BD' перпендикулярна диагонали AC в том и только в том случае, если вершина B лежит на поскольку $BF = AF$. Если учесть, что длина отрезка $AF = \frac{1}{2} AB$ не зависит от положения точки T, то тем самым лемма доказана.

Исходное утверждение задачи без труда следует из леммы. Стороны четырехугольника удовлетворяют соотношению $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ в том и только в том случае, если (рис. 38)

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2.$$

По доказанной лемме это означает, что вершины B и D должны лежать на одной и той же прямой, перпендикулярной отрезку AC. Иначе говоря, диагонали BD

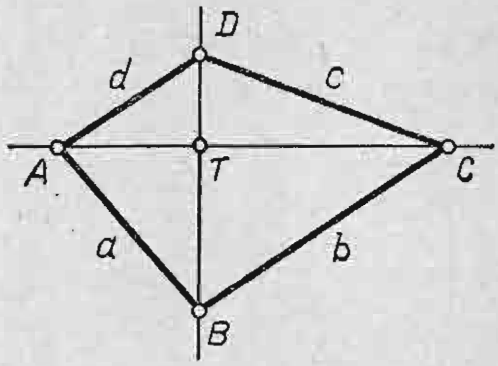


Рис. 38.

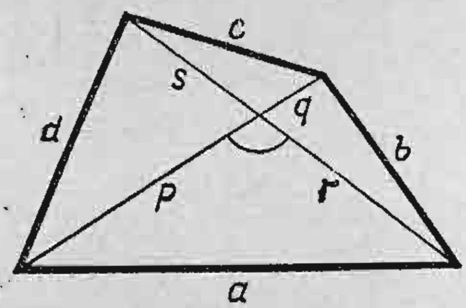


Рис. 39.

и AC четырехугольника $ABCD$ должны быть взаимно перпендикулярны.

Отсюда следует, что если угол между диагоналями шарнирного четырехугольника при каком-то *одном* положении звеньев оказывается прямым, то он остается прямым и при *всех* остальных положениях звеньев.

Второе решение. а. Докажем сначала утверждение задачи лишь для *выпуклых* четырехугольников. Воспользуемся для этого следующим соотношением между длинами сторон треугольника: *в любом треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, меньше, а квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других сторон.* (Эти неравенства следуют из теоремы косинусов, но доказать их можно и из чисто геометрических соображений, не прибегая к тригонометрии. Именно так и сделано в III.38.)

Пусть a, b, c и d — стороны четырехугольника, а p, q, r и s — длины отрезков, на которые делит диагонали точка их пересечения (рис. 39). Если диагонали не взато есть, если

$$AB^2 - CB^2 = AD^2 - CD^2.$$

Пусть A, B, C — три фиксированные точки плоскости. Рассмотрим геометрическое место точек D, удовлетворяющих выписанным выше соотношениям. Ясно, что сама точка B принадлежит этому геометрическому месту. Таким образом, исходная задача (в измененных обозначениях) сводится к доказательству следующей леммы.

Пусть на плоскости даны две точки A и B. Геометрическое место точек, для которых величина $PA^2 - PB^2$ постоянна, есть перпендикуляр к отрезку AB.

Докажем, что разность $PA^2 - PB^2$ зависит лишь от положения точки T — основания перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок AB, и изменяется, если

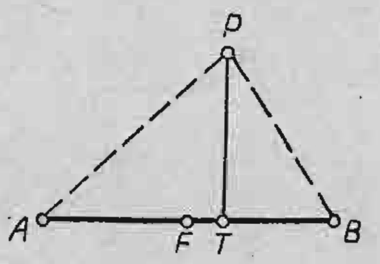


Рис. 37.

точка T перемещается к любому из концов отрезка[1]. Действительно, по теореме Пифагора (рис. 37):

$$PA^2 - PB^2 = (TA^2 + PT^2) - (TB^2 + PT^2) = TA^2 - TB^2.$$

Значение разности $TA^2 - TB^2$ не может быть одним и тем же для двух различных положений точки T на отрезке AB. Действительно, абсолютная величина разности $TA^2 - TB^2$ совпадает для точек T, равноудаленных от F — середины отрезка AB, но для точек T, расположенных по разные стороны от F, эта разность имеет различные знаки и обращается в нуль в самой точке F. Например, для точки T, лежащей на ближней к концу B половине отрезка AB (рис. 37),

$$TA^2 - TB^2 = (AF + FT)^2 - (AF - FT)^2 = 4AF \cdot FT,$$

[1] Утверждение леммы означает, что:

1) для всех точек P на перпендикуляре, восставленном к AB в точке T, величина $c = PA^2 - PB^2$ одна и та же;

2) для всех точек Q, не лежащих на этом перпендикуляре, $QA^2 - PB^2 \neq c$.

Второе доказывается тем, что $PA^2 - PB^2 = TA^2 - TB^2 = 2AB \cdot FT$ меняется с изменением T. — *Прим. ред.*

Следовательно, всего существует

$$3^n-3(2^n-2)-3=3^n-3\cdot 2^n+3$$

n-значных чисел, удовлетворяющих всем условиям задачи*.

56. Первое решение. При $n=1$ утверждение задачи верно, поскольку

$$A_1=5+2+1=8.$$

Следовательно, остается доказать, что если A_n делится на 8, то A_{n+1} также делится на 8 (то есть воспользоваться методом математической индукции).

Поскольку

$$A_n=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1,\quad A_{n+1}=5^{n+1}+2\cdot 3^n+1=$$
$$=5\cdot 5^n+6\cdot 3^{n-1}+1,$$

то

$$A_{n+1}-A_n=4\left(5^n+3^{n-1}\right).$$

Число 5^n+3^{n-1} равно сумме двух нечетных чисел и поэтому само четно. Следовательно, произведение $4\cdot(5^n+3^{n-1})$ делится на 8. Поскольку по предположению индукции A_n делится на 8, то A_{n+1} также делится на 8, что и требовалось доказать.

Второе решение. Число A_n можно представить в следующих двух видах:

$$A_n=\left(5^n+3^n\right)-\left(3^{n-1}-1\right), \qquad (1)$$

$$A_n=5\left(5^{n-1}+3^{n-1}\right)-\left(3^n-1\right). \qquad (2)$$

При нечетном n воспользуемся соотношением (1), при четном — соотношением (2). Первый из двух членов в обоих соотношениях кратен числу $5+3=8$, второй — числу $3^2-1=8$, поскольку при нечетном k сумма a^k+b^k делится на $a+b$, а при четном k разность $c^{2k}-1$ делится на c^2-1. Следовательно, A_n при любом n делится на 8.

57. Первое решение. В условиях задачи утверждается, что диагональ BD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярна другой его диагонали AC в том и только в том случае, если

$$AB^2+CD^2=AD^2+CB^2,$$

$\cos(x+180°) = -\cos x$ косинусы в каждой сумме попарно взаимно уничтожаются. Следовательно, $f(\varphi) = \frac{3}{2}$ и не зависит от φ, то есть от положения точки Q на окружности, что и требовалось доказать*.

54. Докажем несколько более сильное утверждение: *число* $3^n + 1$ *при четном* n *делится на* 2, *при нечетном* n *делится на* 2^2, *но в обоих случаях не делится ни на какую более высокую степень числа* 2.

Чтобы доказать его, достаточно заметить следующее: *при делении на* 8 *квадрат любого нечетного числа дает остаток* 1. Действительно, пусть $n = 2k + 1$. Тогда $a^2 = 4k(k+1) + 1$. Первое слагаемое в правой части последнего равенства делится на 8, поскольку одно из двух последовательных натуральных чисел k и $k+1$ заведомо четно.

Применим эту лемму к решению задачи. Если n четно $(n = 2m)$, то

$$3^n = 3^{2m} = (3^m)^2 = 8a + 1$$

и, следовательно,

$$3^n + 1 = 2(4a + 1).$$

Если же n нечетно $(n = 2m + 1)$, то

$$3^n + 1 = 3^{2m+1} + 1 = 3(8a + 1) + 1 = 4(6a + 1).$$

Поскольку $4a+1$ и $6a+1$ — нечетные числа, то (обобщенное) утверждение задачи доказано.

55. Если бы не было ограничения, состоящего в том, что каждая из цифр 1, 2, 3 должна встречаться в записи числа по крайней мере один раз, то ответ задачи был бы равен числу размещений с повторениями из 3 элементов по n (см. III.4), то есть 3^n.

Однако условия задачи требуют, чтобы из множества всех n-значных чисел, десятичная запись которых содержит лишь три цифры 1, 2, 3, мы исключили:

а) числа, записанные при помощи ровно двух из трех цифр 1, 2, 3; таких чисел $3(2^n - 2)$ (см. решение задачи 4);

б) числа, записанные при помощи лишь одной из трех цифр 1, 2, 3; таких чисел 3.

Второе решение. Не ограничивая общности, предположим, что радиус описанной окружности равен 1. Обозначим через O центр окружности, а через φ, α_1, α_2, α_3 и α_4 — углы между радиусами OQ, OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 и радиусом OP_1 (рис. 36). Тогда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 90^\circ$, $\alpha_4 = 135^\circ$. Расстояние от точки Q до прямой, проходящей через центр окружности и образующей с радиусом OP_1 угол α, равно

$$d = |\sin(\varphi - \alpha)|.$$

Поэтому сумму четвертых степеней тех расстояний, о которых говорится в условиях задачи, можно представить в виде

$$f(\varphi) = \sin^4(\varphi - \alpha_1) + \sin^4(\varphi - \alpha_2) + \\ + \sin^4(\varphi - \alpha_3) + \sin^4(\varphi - \alpha_4).$$

Четвертые степени синусов выразим через тригонометрические функции кратных углов (см. III.9):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \sin^4 x = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \\ = \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right].$$

Таким образом,

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

В полученное выражение вместо x следует подставить

$$\varphi - 0^\circ, \quad \varphi - 45^\circ, \quad \varphi - 90^\circ, \quad \varphi - 135^\circ, \tag{1}$$

а вместо $2x$ и $4x$ — соответственно

$$2\varphi, \quad 2\varphi - 90^\circ, \quad 2\varphi - 180^\circ, \quad 2\varphi - 270^\circ,$$
$$4\varphi, \quad 4\varphi - 180^\circ, \quad 4\varphi - 360^\circ, \quad 4\varphi - 540^\circ.$$

В $f(\varphi)$ косинусы углов, стоящих в первой строке, входят с коэффициентом $-\frac{1}{2}$, а косинусы углов, стоящих во второй строке, — с коэффициентом $+\frac{1}{8}$. Однако сумма косинусов углов, стоящих в первой строке, так же как и сумма косинусов углов, стоящих во второй строке, равна нулю, поскольку в силу соотношения

Итак, для доказательства исходного утверждения достаточно убедиться в том, что *сумма четвертых степеней расстояний от точки Q окружности, описанной вокруг квадрата, до его вершин не зависит от положения точки Q на окружности.*

Действительно, пусть S — сумма четвертых степеней расстояний от точки Q до вершин A, B, C и D квадрата. Тогда

$$S = QA^4 + QB^4 + QC^4 + QD^4 = (QA^2 + QC^2)^2 + \\ + (QB^2 + QD^2)^2 - 2\left[(QA \cdot QC)^2 + (QB \cdot QD)^2\right].$$

По теореме Пифагора $QA^2 + QC^2 = AC^2$, $QB^2 + QD^2 = BD^2$, а поскольку $AC^2 = d^2$ и $BD^2 = d^2$, то сумма двух первых скобок (равная $2d^4$) не зависит от выбора

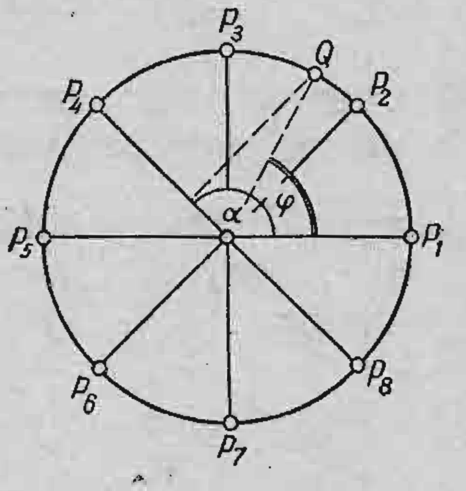


Рис. 36.

точки Q на окружности, описанной вокруг квадрата $ABCD$. Члены, заключенные в квадратных скобках, равны квадратам удвоенных площадей прямоугольных треугольников AQC и BQD. Пусть m и n — высоты этих треугольников, опущенные из вершины Q. Основания этих высот лежат на сторонах AC и BD, каждая из которых служит диагональю квадрата $ABCD$. Следовательно, длина отрезков AC и BD равна диаметру d окружности, описанной вокруг квадрата $ABCD$. Таким образом, члены, заключенные в квадратных скобках, можно представить следующим образом:

$$(AC \cdot m)^2 + (BD \cdot n)^2 = d^2 (m^2 + n^2) = d^2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Отсюда видно, что

$$S = 2d^4 - 2\frac{d^4}{4} = \frac{3}{2} d^4$$

не зависит от положения точки Q.

52. Докажем, что равенство

$$aC + cA = 2bB \tag{1}$$

и неравенства

$$ac > b^2, \quad AC > B^2 \tag{2}$$

не могут выполняться одновременно.

Действительно, из неравенств (2) следует, что

$$acAC > b^2B^2.$$

Соотношение (1) позволяет преобразовать полученное неравенство к виду

$$4acAC > (aC + cA)^2,$$

или, что то же,

$$0 > (aC - cA)^2.$$

Но последнее неравенство невозможно, поскольку квадрат вещественного числа всегда неотрицателен.

53. Первое решение. Предположим, что точка Q лежит на дуге P_2P_3 окружности, в которую вписан правильный восьмиугольник (рис. 35). Пусть O — центр

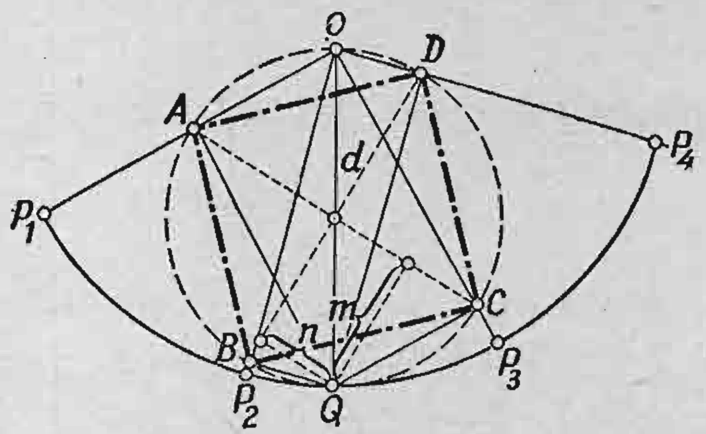


Рис. 35.

восьмиугольника, а точки A, B, C и D — основания перпендикуляров, опущенных из Q на диагонали P_1P_5, P_2P_6. P_3P_7, P_4P_8. Четырехугольник $ABCD$ является квадратом, поскольку его вершины располагаются на окружности, построенной на отрезке OQ как на диаметре, а его стороны AB, BC, CD видны из точки O под углом 45°. Размеры квадрата не зависят от положения точки Q на окружности, поскольку диаметр d его описанной окружности равен радиусу описанной окружности правильного восьмиугольника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$.

то есть

$$2ab \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \beta_C(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Поскольку $\gamma \neq 0$, то

$$\frac{1}{\beta_C}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

При $\gamma = 120^\circ$ получаем

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{1}{\beta_C} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

то есть

$$\beta_C = \frac{ab}{a+b}.$$

Второе решение. Пусть D — любая точка, лежащая на стороне AB произвольного треугольника ABC (рис. 34). Через вершину A проведем прямую, параллельную отрезку CD, до пересечения с продолжением стороны BC в точке A_1, а через вершину B — прямую, параллельную отрезку CD, до пересечения с продолжением стороны AC в точке B_1. Тогда (см. задачу 36).

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}. \tag{1}$$

Если угол γ при вершине C равен 120° и CD — биссектриса этого угла (рис. 34), то

$$\angle B_1BC = \angle BCD = 60^\circ,$$
$$\angle BB_1C = \angle DCA = 60^\circ.$$

Следовательно, треугольник BCB_1 равносторонний и $BB_1 = BC$. Аналогично можно доказать, что $AA_1 = AC$. Полученные равенства позволяют преобразовать соотношение (1) к следующему виду:

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}, \tag{2}$$

или

$$\frac{1}{\beta_c} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}^{*}.$$

Второе решение. Разделив правую и левую части тождества

$$(bc - ad)^2 = (bc + ad)^2 - 4abcd$$

на u^2, получим

$$\left(\frac{bc - ad}{u}\right)^2 = \left(\frac{bc + ad}{u}\right)^2 - 4\,\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}. \qquad (1)$$

Из условий задачи следует, что в правой части преобразованного тождества (1) стоит *целое* число. Квадрат *рационального* числа, стоящего в левой части, может быть целым числом лишь в том случае, если само число

$$\frac{bc - ad}{u}$$

целое. (См. решение задачи 40 и III. 31.)

Кроме того, в силу соотношения (1) разность квадратов целых чисел

$$s = \frac{bc + ad}{u}, \quad t = \frac{bc - ad}{u}$$

равна четному числу. Следовательно, числа s и t либо оба четные, либо оба нечетные. Это означает, что

$$\frac{bc}{u} = \frac{s + t}{2} \quad \text{и} \quad \frac{ad}{u} = \frac{s - t}{2}$$

— целые числа. Таким образом, каждое из чисел bc и ad делится на u, что и требовалось доказать.

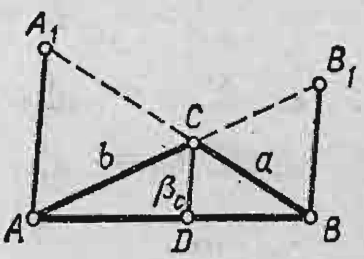


Рис. 34.

51. Первое решение. Пусть β_c — длина биссектрисы CD угла γ, лежащего при вершине C произвольного треугольника ABC (рис. 34). Площадь треугольника ABC равна сумме площадей составляющих его треугольников ACD и DCB, поэтому

$$ab\sin\gamma = a\beta_C\sin\frac{\gamma}{2} + b\beta_C\sin\frac{\gamma}{2},$$

выполняются для любых вещественных чисел a, b, c. Утверждение задачи мы получим, подставив в (1) соотношение $a^2+b^2+c^2=1$ и разделив коэффициенты перед всеми тремя скобками на 2.

Неравенства (1) нетрудно вывести из следующих очевидных неравенств:

$$2(ab+bc+ac)+(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2 \geqslant 0,$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)=$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

50. Первое решение. Условимся считать, что каждое положительное целое число разложено в произведение степеней простых чисел. Как известно, всякое положительное целое число допускает одно и только одно (с точностью до перестановки сомножителей) такое разложение. Простое число p входит в разложение данного числа в наибольшей степени, которая является делителем данного числа (см. III.7).

Если учесть это замечание и принять во внимание то, что говорилось в III.21, то утверждение задачи 50 можно сформулировать следующим образом:

если в разложение любого общего делителя и чисел

$$ac, \quad bc+ad, \quad bd \tag{1}$$

по степеням простых чисел некоторое простое число p входит в степени r, то в разложения чисел bc и ad число p входит в степени, которая не меньше r.

Поскольку каждое из чисел (1) делится на u, а u делится на p^r, то

$$ac=p^rA, \quad bc+ad=p^rB, \quad bd=p^rC, \tag{2}$$

где A, B и C — целые числа. Следовательно,

$$(bc)(ad)=(ac)(bd)=p^{2r}AC.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, если в разложение по крайней мере одного из чисел bc и ad простое число p входит в степени, которая не меньше r.

Но тогда согласно среднему из соотношений (2) это означает, что *каждое* из чисел bc и ad делится на p^r, то есть в разложение каждого из чисел bc и ad простое число p входит в степени, которая не меньше r.

Но последнее неравенство верно потому, что в прямоугольном треугольнике CDB гипотенуза CD больше катета CB, а $CB = AC$.

Из приведенного нами решения нетрудно получить доказательство следующей более общей (по сравнению с утверждением задачи) теоремы: *дуга, заключенная между сторонами любого острого угла, меньше среднего гармонического синуса и тангенса этого угла.* Это утверждение сильнее доказанного, поскольку среднее арифметическое двух положительных чисел больше их среднего гармонического*.

Поскольку среднее гармоническое $\sin\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi$ можно преобразовать к виду

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin\varphi}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}} = \frac{2\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{4\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

то необходимо доказать, что

$$\varphi < 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Однако именно это неравенство следует из неравенства

$$S_{\text{сектор } OAB} < S_{OACB},$$

доказанного в приведенном выше решении, поскольку площадь сектора OAB равна $\frac{1}{2}\varphi$, а площадь четырехугольника $OACB$ равна $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Половина площади четырехугольника $OACB$ равна $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, то есть площади треугольника ACO.

48. Если треугольник ABC прямоугольный, то основания двух его высот совпадают с вершиной прямого угла и для треугольника $A_1B_1C_1$ утверждение задачи неверно.

Если же треугольник ABC остроугольный или тупоугольный, то доказательство утверждения подробно разобрано в решении задачи 9 (пп. а и б) и в III. 8.

49. Докажем, что неравенства

$$-(a^2+b^2+c^2) \leqslant 2(ab+bc+ac) \leqslant 2(a^2+b^2+c^2) \quad (1)$$

47. Пусть φ — величина дуги AB окружности единичного радиуса. Проведем касательную к дуге AB в точке A. Обозначим через D точку пересечения этой касательной с продолжением радиуса OB и через C — точку ее пересечения с касательной, проведенной к дуге AB в

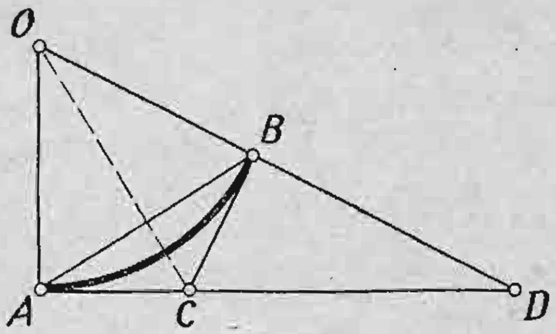


Рис. 33.

точке B (рис. 33). Поскольку площади сектора единичного круга OAB и треугольников OAB, OAD соответственно равны

$$\frac{1}{2}\varphi, \quad \frac{1}{2}\sin\varphi, \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi,$$

то необходимо доказать, что

$$S_{\text{сектор } OAB} < \frac{1}{2}(S_{\triangle\, OAB} + S_{\triangle\, OAD}).$$

Четырехугольник $OACB$ содержит сектор OAB как составную часть. Следовательно, утверждение задачи заведомо будет верно, если нам удастся показать, что

$$S_{OACB} < \frac{1}{2}(S_{\triangle\, OAB} + S_{\triangle\, OAD}).$$

Умножая обе части неравенства на 2 и перенося S_{OACB} в правую, а $S_{\triangle OAB}$ в левую часть, преобразуем неравенство к виду

$$S_{OACB} - S_{\triangle\, OAB} < S_{\triangle\, OAD} - S_{OACB},$$

или, что то же,

$$S_{\triangle\, ACB} < S_{\triangle\, CDB}. \qquad (*)$$

Треугольники ACB и CDB имеют общую вершину B и основания AC и CD, расположенные на одной прямой. Следовательно, высоты этих треугольников, опущенные из вершины, равны. Таким образом, для доказательства неравенства (*) (а следовательно, и исходного неравенства) необходимо лишь убедиться в том, что $AC < CD$.

43. а. Как известно, $a^3 - b^3$ можно представить в виде произведения чисел $A = a^2 + ab + b^2$ и $B = a - b$. Если B делится на 2^n, то произведение AB также делится на 2^n.

б. Поскольку a и b — нечетные числа, то $A = a^2 + ab + b^2$ — нечетное число. Следовательно, A и 2^n — взаимно простые числа (см. III.23). Но тогда произведение AB может делиться на 2^n лишь в том случае, если B делится на 2^n.

44. Гипотенуза c больше любого из катетов a и b. Следовательно,

$$c^n = (a^2 + b^2)\, c^{n-2} = a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > a^n + b^n.$$

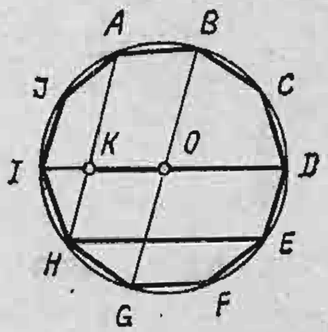


Рис. 32.

45. В четырехугольниках $ABOK$ и $DEHK$ (рис. 32) противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно,

$$AB = KO, \quad HE = KD,$$

откуда

$$HE - AB = KD - KO = OD.$$

46*. Пусть $n - 1$, n, $n + 1$ — три последовательных натуральных числа. Если бы куб наибольшего из них был равен сумме кубов двух предыдущих чисел, то

$$(n + 1)^3 = n^3 + (n - 1)^3,$$

или, что то же,

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1,$$

откуда

$$2 = n^2 (n - 6).$$

Число, стоящее в правой части равенства, положительно лишь при $n > 6$, но тогда оно не может быть равным 2, поскольку

$$n^2 (n - 6) > 36 > 2.$$

мере одна из вершин треугольника ABC расположены по одну сторону от прямой, проходящей через середину отрезка PO перпендикулярно к нему. Расстояние от этой

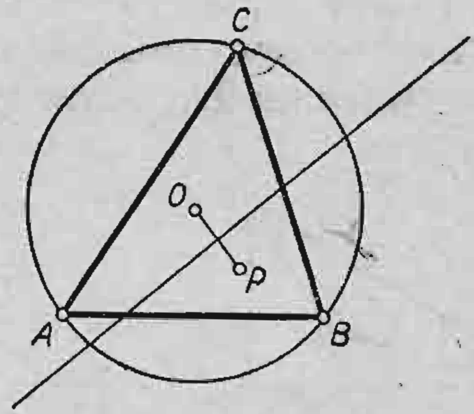


Рис. 30.

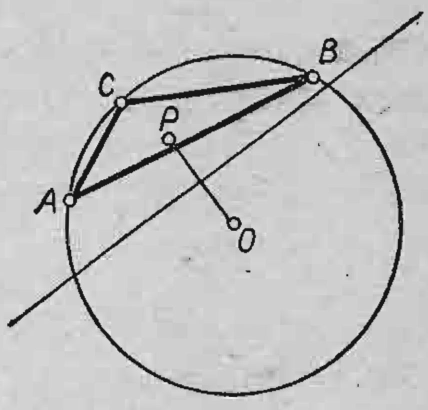


Рис. 31.

вершины до точки P меньше, чем расстояние от этой же вершины до центра O описанной окружности, что и требовалось доказать.

42. Оборвем бесконечную десятичную дробь $0,k_1k_2k_3\ \ldots$, представляющую рациональное число r/s, на m-м знаке, так что число

$$0,\ k_1k_2\ldots k_m=\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\ \ldots\ +\frac{k_m}{10^m}$$

будет не больше r/s, а то же число, увеличенное на $1/10^m$, заведомо превосходит r/s, то есть

$$0\leqslant\frac{r}{s}-\left(\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\ \ldots\ \frac{k_m}{10^m}\right)<\frac{1}{10^m}.$$

Умножив неравенства на 10^m, получим неотрицательное число

$$\sigma_m=\frac{10^m r-s\left(10^{m-1}k_1+10^{m-2}k_2+\ \ldots\ +k_m\right)}{s},$$

которое меньше 1. Следовательно, в числителе σ^m может стоять лишь одно из чисел $0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$. Иначе говоря, члены последовательности $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots$ можно разбить на s классов в зависимости от того, какое из целых чисел $0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$ стоит в числителе того или иного члена. Но тогда среди первых $s+1$ членов непременно должны найтись два равных [1].

---

[1] Последнее утверждение следует из принципа Дирихле (см. III. 30).

Воспользуемся леммой для доказательства сформулированного выше более общего утверждения относительно произвольного треугольника ABC.

Пусть A, B, C — вершины рассматриваемого треугольника (рис. 28 и 29), A', B', C' — середины противолежащих сторон и O — центр описанной окружности.

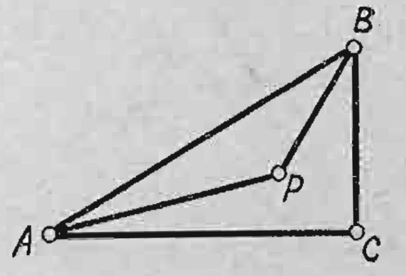


Рис. 27.

Точка P, находящаяся внутри треугольника ABC или на одной из его сторон, расположена внутри одного из прямоугольных треугольников AOB', $B'OC$, COA', $A'OB$, BOC', $C'OA$ или на стороне одного из этих треугольников. Предположим, например, что точка P лежит внутри

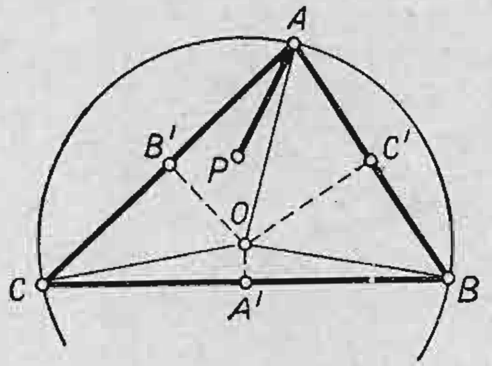


Рис. 28.

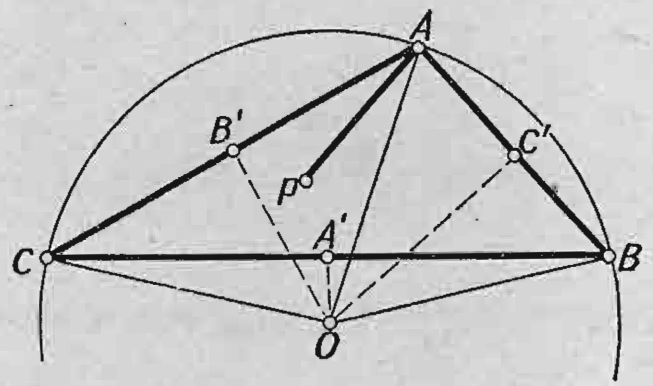


Рис. 29.

прямоугольного треугольника AOB'. Тогда по доказанной нами лемме

$$AP \leqslant AO = R.$$

В т о р о е р е ш е н и е. Достаточно доказать теорему, сформулированную в предыдущем решении.

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Если точка P совпадает с O, то утверждение теоремы очевидно. Если точка P отлична от O, то через середину отрезка PO проведем перпендикулярную к нему прямую. Эта прямая либо делит треугольник на две части (рис. 30), либо служит границей двух полуплоскостей, одной из которых целиком принадлежит треугольник (рис. 31). В обоих случаях точка P и по крайней дает остаток 2. Следовательно, $x^2+2px+2q$ при делении на 4 также дает остаток 2 и поэтому не может обращаться в нуль.

в. *Корни квадратного уравнения*

$$x^2+2px+2q=0$$

не могут быть дробными рациональными числами.

Действительно, данное уравнение нетрудно преобразовать к виду

$$(x+p)^2=p^2-2q.$$

Если x — дробное рациональное число, то $x+p$ также дробное рациональное число и его квадрат не может быть равен целому числу p^2-2q*.

41. Первое решение. Поскольку параллелограмм симметричен относительно своего центра, то, не ограничивая общности, можно считать, что точка P расположена либо внутри треугольника ABC, либо на его стороне AC (диагонали параллелограмма). Если бы нам удалось установить, что длина наименьшего из отрезков PA, PB, PC не превосходит радиуса R окружности, описанной вокруг треугольника ABC, то тем самым исходное утверждение было бы доказано. Итак, задача будет решена, если мы докажем следующую теорему:

расстояние от любой точки P, находящейся внутри треугольника или на одной из его сторон, до ближайшей вершины никогда не превосходит радиуса R описанной окружности.

Начнем с доказательства леммы:

расстояние от любой точки P, находящейся внутри прямоугольного треугольника или на одной из его сторон, до любой из вершин, расположенных на концах гипотенузы, не превосходит длины гипотенузы.

Если точка P принадлежит гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, то утверждение леммы очевидно.

Если же точка P расположена внутри прямоугольного треугольника ABC (рис. 27) или на одном из катетов, то в треугольнике ABP сумма углов при вершинах A и B не больше 90°. Следовательно, наибольший из углов треугольника ABP расположен при вершине P, а противолежащая ему сторона AB больше любой из сторон AP и BP.

39. Первое решение. Пусть $n=2k+1$ (где k — некоторое целое число) означает число сомножителей в произведении

$$(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n).$$

Каждый сомножитель содержит по два числа: *уменьшаемое* и *вычитаемое*. Сколько среди этих чисел нечетных?

Как среди уменьшаемых, так и среди вычитаемых имеется по $(k+1)$ нечетных чисел, а именно:

$$1=2\cdot1-1,\quad 3=2\cdot2-1,\ \ldots,\ n=2(k+1)-1.$$

Таким образом, всего в рассматриваемое выражение входят $2(k+1)=n+1$ нечетных чисел. Но поскольку имеется лишь n сомножителей, то по крайней мере один из них содержит *два нечетных* числа: нечетное уменьшаемое и нечетное вычитаемое. Такой сомножитель четен, поэтому и все произведение четно, что и требовалось доказать*.

Второе решение. Число всех сомножителей нечетно, а их сумма равна нулю, то есть четна. Если бы все сомножители были нечетны, то их сумма также была бы нечетна. Следовательно, по крайней мере один из сомножителей четен, и, таким образом, произведение сомножителей четно.

40. а. *Корни уравнения*

$$x^2+2px+2q=0,$$

где p и q — нечетные числа, не могут быть нечетными целыми числами.

Действительно, при нечетном x старший член x^2 квадратного трехчлена $x^2+2px+2q$ принимает нечетное значение, а его линейная часть $2px+2q$ четна. Следовательно, при нечетном x квадратный трехлен x^2+ $+2px+2q$ принимает нечетные значения и поэтому не может обращаться в нуль.

б. *Корни квадратного уравнения*

$$x^2+2px+2q=0$$

не могут быть четными целыми числами.

Действительно, если x четен, то x^2+2px делится на 4, в то время как свободный член $2q$ при делении на 4

Для завершения доказательства достаточно убедиться в том, что отрезок прямой, соединяющий центр симметрии O прямоугольника $KLMN$ с вершиной K, составляет с любой из диагоналей ромба угол в 45° (рис. 25). Это действительно так: поскольку четырехугольник $AKBO$ вписан в окружность и его противоположные углы BOA и BKA прямые, следовательно $\angle BOK = \angle BAK = 45°$.

Второе решение. Докажем более общее утверждение. Рассмотрим вместо ромба произвольный параллелограмм $ABCD$. На одной из его сторон, например

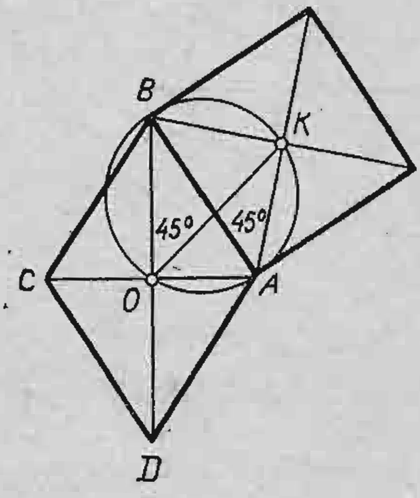


Рис. 25.

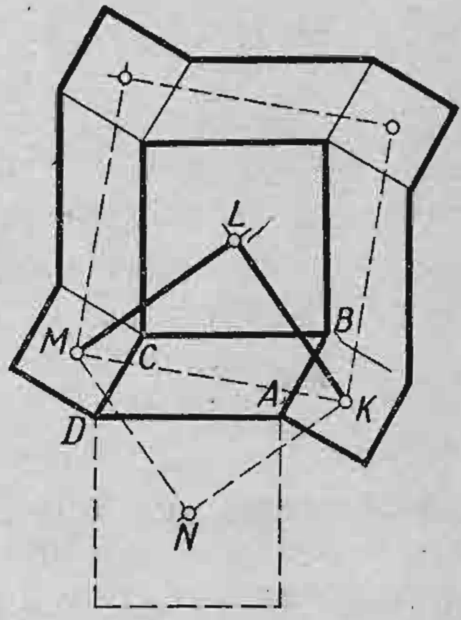


Рис. 26.

на BC, построим квадрат, а на каждой стороне квадрата — параллелограмм, конгруэнтный параллелограмму $ABCD$, так, как показано на рис. 26. Стороны параллелограммов, сходящиеся в вершинах квадрата, но не совпадающие с его сторонами, равны и взаимно перпендикулярны. Каждую пару таких сторон, сходящихся в одной вершине, достроим до квадрата. При повороте на 90° вокруг центра фигура, получившаяся из построенного на стороне BC квадрата, переходит в себя, а центр K квадрата, построенного на стороне AB параллелограмма $ABCD$, переходит в центр M квадрата, построенного на стороне CD. Таким образом, треугольник KLM прямоугольный и равнобедренный. При повороте на 180° вокруг центра параллелограмма треугольник KLM совпадает с треугольником MNK. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — квадрат, что и требовалось доказать.

Второе решение. Определим тригонометрические функции угла при помощи единичной окружности. Тогда $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$, где x и y — координаты точки P, лежащей на единичной окружности (рис. 24).

В силу известного соотношения между центральным и вписанным углом угол между положительным направлением оси x и прямой AP вдвое меньше угла, образуемого радиусом OP с положительным направлением оси x. Таким образом, $\angle PAO = \frac{\alpha}{2}$. Если тангенс угла

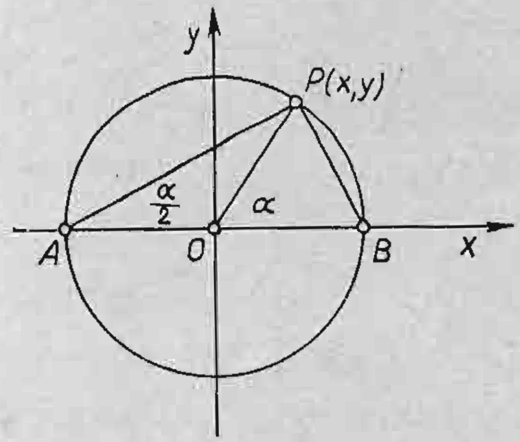


Рис. 24.

наклона прямой AP равен m $\left(\text{то есть если } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m\right)$, то тангенс угла наклона прямой BP равен $-\frac{1}{m}$. Если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ рациональны, то тангенс угла наклона прямой AP $\left(\text{то есть } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$ также рационален. Наоборот, если m — рациональное число, то, записав уравнения прямых AP и BP

$$y = m(x+1) \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{m}(x-1),$$

нетрудно найти, что координаты их точки пересечения P рациональны. Следовательно, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ рациональны.

38. Первое решение. Ромб вместе с построенными на его сторонах вовне квадратами образует фигуру, симметричную относительно диагоналей ромба, то есть относительно двух взаимно перпендикулярных осей. Четырехугольник $KLMN$ также симметричен относительно этих осей. Поскольку его вершины не принадлежат осям симметрии, то четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник и его центр совпадает с точкой пересечения O осей симметрии (диагоналей ромба).

Если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ определен и, следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2}$ отличен от нуля, то числитель и знаменатель выражений, стоящих в правых частях, можно разделить на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, в этом случае справедливы соотношения

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{4}$$

Если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ принимает рациональное значение, то есть его можно представить в виде отношения двух целых чисел m/n, то

$$\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}, \quad \cos\alpha = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}.$$

Итак, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ рационален, то $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ также рациональны.

Если же $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ не определен, то $\cos\frac{\alpha}{2}=0$ и, следовательно, $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm 1$. Подставляя эти значения $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ в соотношения (1) и (2), получаем $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=-1$. Таким образом, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в этом случае, так же как и в предыдущем, принимают рациональные значения.

Докажем теперь обратное утверждение. Из соотношений (1)—(3) следует, что

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

и

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают рациональные значения и величина $1+\cos\alpha$ отлична от нуля, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ также принимает рациональное значение.

Если же $1+\cos\alpha=0$, то в силу соотношения (5) $\cos\frac{\alpha}{2}=0$, и, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ не определен.

мать сколь угодно большие значения, обратная же ей величина при достаточно большом n принимает сколь угодно малые значения*.

Таким образом, при неограниченном возрастании n суммарная площадь выброшенных частей исходного квадрата стремится к 1.

36. Поскольку отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны (рис. 23), то треугольник CAC_1 подобен треугольнику B_1AB, а треугольник CBC_1 — треугольнику A_1BA.

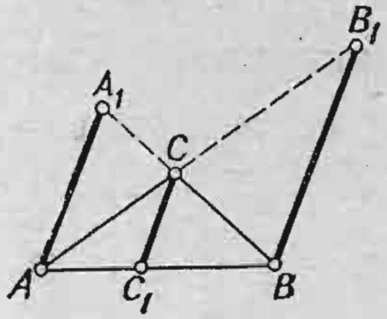


Рис. 23.

Из отношений сходственных сторон

$$CC_1 : B_1B = AC_1 : AB,$$

$$CC_1 : A_1A = C_1B : AB$$

получаем

$$\frac{CC_1}{A_1A} + \frac{CC_1}{B_1B} = \frac{AC_1 + C_1B}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{A_1A} + \frac{1}{B_1B} = \frac{1}{CC_1},$$

что и требовалось доказать.

37. Первое решение. Из соотношений

$$\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

получаем

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

в) n не равно числу p или целой степени этого числа.

Если все три условия выполнены, то исходная система уравнений допускает одно и только одно решение. Чтобы получить это единственное решение, необходимо выбрать z указанным выше образом, а x и y вычислить из соотношений (1) и (2).

35. а. После первого разбиения и отбрасывания одного из 9 получившихся квадратов осталось 8 квадратов

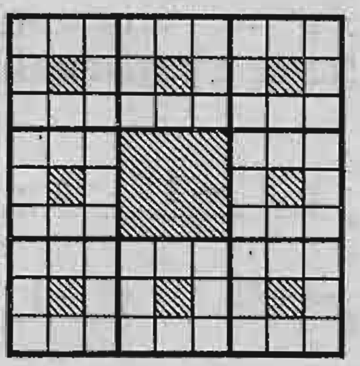


Рис. 22.

(рис. 22). После второго разбиения получилось $8\cdot 9$ квадратов, а после выбрасывания 8 из них осталось 8^2 квадратов (рис. 22). Если операцию повторить n раз, то останется 8^n квадратов. Сторона каждого из них имеет длину, равную $1/3^n$.

б. Сумма площадей, оставшихся после n-го шага квадратов, составляет

$$8^n\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)^2=\left(\frac{8}{9}\right)^n,$$

а суммарная площадь выброшенных квадратов —

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

При достаточно большом n величина $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ становится сколь угодно малой. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим величину, обратную $\frac{8}{9}$. Число $\frac{9}{8}$ больше 1. Любая степень числа $\frac{9}{8}$ составляет $\left(1+\frac{1}{8}\right)$ от предыдущей, то есть при увеличении показателя степени n на 1 величина $\left(\frac{9}{8}\right)^n$ возрастает на $\frac{1}{8}$ своего предыдущего значения. Поэтому величина $\left(\frac{9}{8}\right)^n$ может принисвоих диагоналей, служащих осями симметрии прямоугольника $A_1B_1A_2B_2$. Таким образом, искомое геометрическое место точек P представляет собой внутренность ромба.

34. Второе из заданных уравнений

$$x+py=n, \quad x+y=p^z$$

разрешимо в положительных целых числах (x, y, z) лишь в том случае, если $p>1$.

Итак, предположим, что $p>1$. Значения x и y, удовлетворяющие исходной системе уравнений, можно тогда представить в виде

$$x=\frac{p^{z+1}-n}{p-1}=\frac{p^{z+1}-1}{p-1}-\frac{n-1}{p-1}, \tag{1}$$

$$y=\frac{n-p^z}{p-1}=\frac{n-1}{p-1}-\frac{p^z-1}{p-1}. \tag{2}$$

При всех положительных целых z величины

$$\frac{p^{z+1}-1}{p-1}=p^z+p^{z-1}+\ldots+1,$$

$$\frac{p^z-1}{p-1}=p^{z-1}+\ldots+1$$

принимают целые значения. Отсюда в силу соотношений (1) и (2) следует, что x и y принимают целочисленные значения в том и только в том случае, если число $n-1$ кратно $p-1$.

Полученные из соотношений (1) и (2) x и y будут *положительными* в том и только в том случае, если

$$p^{z+1}>n>p^z. \tag{3}$$

Иначе говоря, число n должно быть заключено между двумя последовательными степенями числа p, а z следует выбирать равным наименьшему из двух показателей степени числа p.

Итак, исходная система уравнений допускает решения в положительных целых числах в том и только в том случае, если выполнено каждое из следующих трех условий:

а) $p>1$;

б) $(n-1)$ кратно $(p-1)$ (следовательно, n не может быть меньше p);

Таким образом, любому набору значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих уравнению (1), соответствует некоторый набор значений $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, удовлетворяющих уравнению (2). Более того, никакие наборы значений $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, кроме тех, которые соответствуют наборам значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих уравнению (1), не являются решениями уравнения (2). Следовательно, уравнения (1) и (2) обладают одинаковым числом решений.

33. Неравенство $A_1P > OP$ выполняется в том и только в том случае, если P — внутренняя точка той полуплоскости, которая ограничена прямой, проходящей

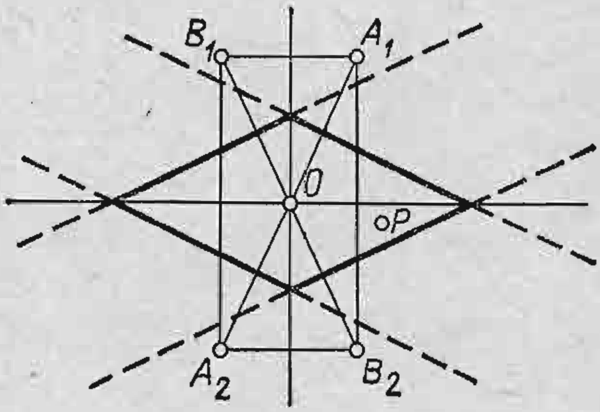


Рис. 21.

через середину отрезка A_1O перпендикулярно к нему, и содержит точку O (рис. 21).

Следовательно, геометрическое место точек P, удовлетворяющих всем неравенствам, перечисленным в условиях задачи, представляет собой внутреннюю часть пересечения полуплоскостей, ограниченных прямыми, которые проходят через середины отрезков OA_1, OB_1, OA_2, OB_2 перпендикулярно к ним, и содержащих точку O. Пересечение полуплоскостей, ограниченных прямыми, которые проходят через середины отрезков OA_1, OA_2 перпендикулярно к ним, представляет собой полосу, ограниченную этими прямыми. Пересечение полуплоскостей, ограниченных прямыми, которые проходят через середины отрезков OB_1, OB_2 перпендикулярно к ним, также представляет собой полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми. Следовательно, точки P, удовлетворяющие всем перечисленным в условиях задачи неравенствам, заполняют внутренность параллелограмма, образованного пересечением двух полос. По построению этот параллелограмм симметричен относительно кроме того, по условию задачи

$$\angle A_0A_1A_2 = \angle A_3A_2A_1$$

и, наконец,

$$\angle A_1A_0A_2 = \angle A_2A_3A_1$$

как углы, вписанные в одну и ту же дугу окружности. Из конгруэнтности треугольников $A_0A_1A_2$ и $A_3A_2A_1$ следует, что

$$A_0A_1 = A_2A_3.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем окончательно

$$A_0A_1 = A_2A_3 = A_4A_0 = A_1A_2 = A_3A_4.$$

Приведенное доказательство остается в силе для любого многоугольника с нечетным числом сторон. Для

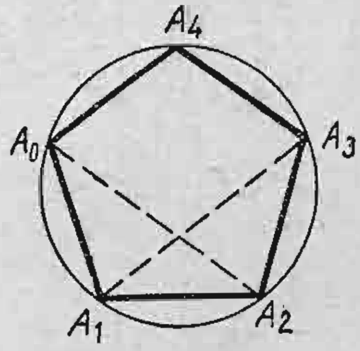


Рис. 20.

многоугольника с четным числом сторон, как показывает пример прямоугольника, утверждение задачи неверно.

32. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнению

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = a \tag{1}$$

в том и только в том случае, если числа $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 1, \ldots, y_n = x_n - 1$ удовлетворяют уравнению

$$(y_1 + 1) + 2(y_2 + 1) + \ldots + n(y_n + 1) = a,$$

которое, как нетрудно видеть, преобразуется к виду

$$y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n = a - \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2}$$

Следовательно, x_i будут положительными целыми числами в том и только в том случае, если y_j — неотрицательные числа.

Раскрывая скобки в левой части равенства, находим

$$2(x-y)=0,$$

откуда $x=y$, что и требовалось доказать.

Все рассуждения остаются в силе и для рис. 19.

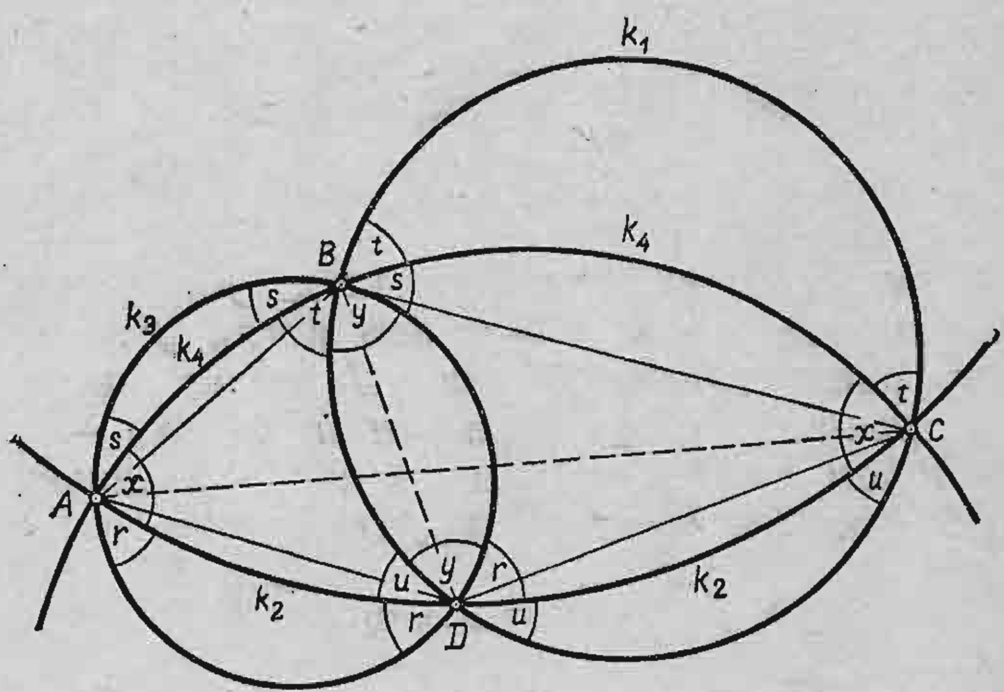


Рис. 18.

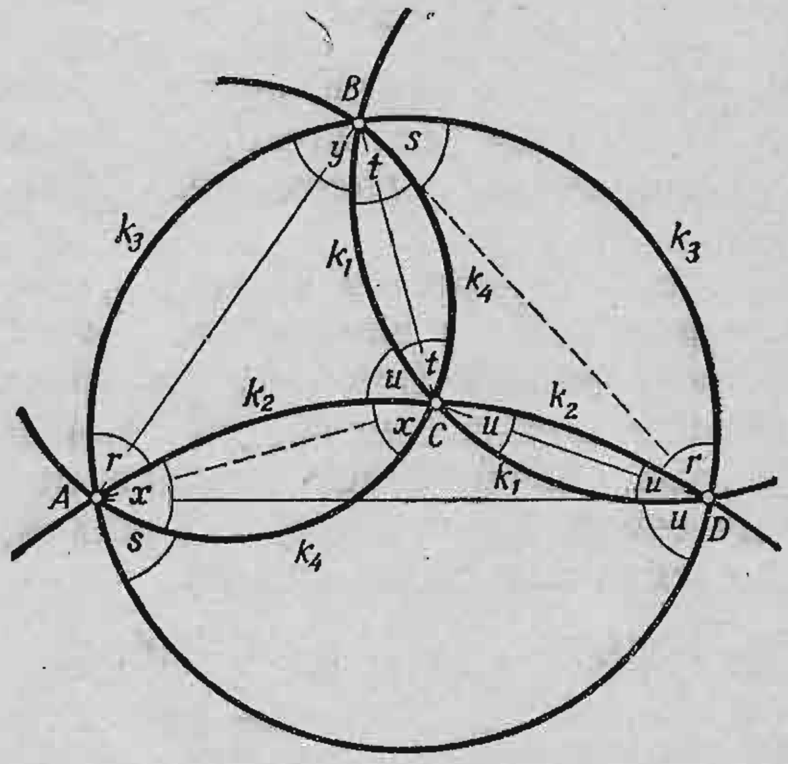


Рис. 19.

31. Докажем, что треугольники, вершины которых совпадают с вершинами A_0, A_1, A_2 и A_3, A_2, A_1 пятиугольника $A_0A_1A_2A_3A_4$, конгруэнтны (рис. 20).

Действительно,

$$A_1A_2 = A_2A_1,$$

Уравнение (3) имеет менее четырех различных корней, если:

1) $z_1 = \pm z_2$,

2) $z_1 = -z_1$ или $z_2 = -z_2$.

В первом случае понижение числа различных корней уравнения (3) обусловлено тем, что

$$\text{либо}\quad y\sqrt{1-x^2}=0,\quad \text{либо}\quad x\sqrt{1-y^2}=0.$$

Первое равенство выполняется, когда $y=0$ или когда $x^2=1$, второе — когда $x=0$ или когда $y^2=1$. Таким образом, рассматриваемый случай имеет место, когда x или y принимает одно из значений: 0,1 или —1.

Во втором случае понижение числа различных корней уравнения (3) вызвано тем, что

$$x\sqrt{1-y^2}=\pm y\sqrt{1-x^2},$$

то есть

$$x^2(1-y^2)=y^2(1-x^2).$$

Следовательно, $x^2=y^2$, или $y=\pm x$.

30. Напомним, что углом между двумя кривыми в точке пересечения называется *угол между касательными к этим кривым, проведенными в рассматриваемой точке пересечения*.

Утверждение, которое требуется доказать, справедливо не только для ромба, но и для любого *выпуклого*[1] (рис. 18) и даже *невыпуклого* (рис. 19) четырехугольника. Убедиться в этом можно следующим образом.

На рис. 18 все углы, обозначенные одинаковыми буквами, равны между собой. Кроме того, в точках A, B, C и D выполняются следующие соотношения:

$$r+x+s=180^\circ,\quad s+y+t=180^\circ,$$
$$t+x+u=180^\circ,\quad u+y+r=180^\circ.$$

Следовательно,

$$(r+x+s)-(s+y+t)+(t+x+u)-(u+y+r)=0.$$

---

[1] Многоугольник называется *выпуклым*, если он целиком содержит отрезок, соединяющий любые две его точки.

принимает следующие четыре значения:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},\\
-z_1 &= -x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2},\\
z_2 &= x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2},\\
-z_2 &= -x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Раскрыв скобки и расположив члены уравнения

$$(z-z_1)(z+z_1)(z-z_2)(z+z_2)=0,$$

корни которого совпадают с z_1, $-z_1$, z_2 и $-z_2$, по убывающим степеням z, получим

$$z^4-(z_1^2+z_2^2)\,z^2+z_1^2z_2^2=0, \tag{2}$$

где

$$z_1^2+z_2^2=2\left[\left(x\sqrt{1-y^2}\right)^2+\left(y\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]=$$

$$=2\,(x^2-2x^2y^2+y^2)$$

$$z_1z_2=\left(x\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(y\sqrt{1-x^2}\right)^2=x^2-y^2.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), мы придем к уравнению

$$z^4-2\,(x^2-2x^2y^2+y^2)\,z^2+(x^2-y^2)^2=0, \tag{3}$$

связывающему x, y и z и не содержащему ни радикалов, ни тригонометрических функций.

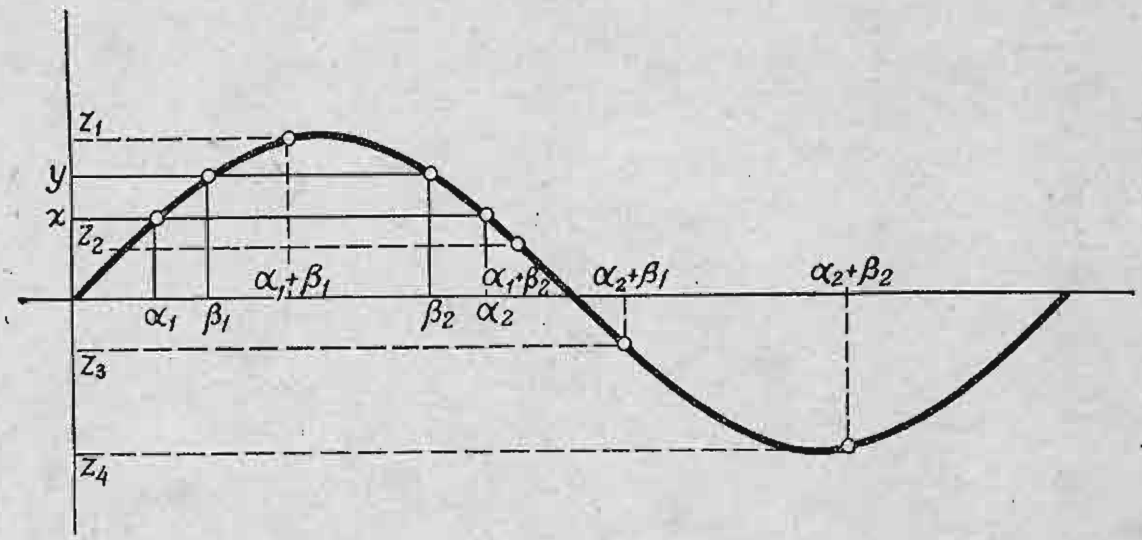


Рис. 17.

6. Уравнение (3) имеет четыре различных корня, определяемых формулами (1). Наглядно эти корни представлены на рис. 17.

Таким образом, наша первоначальная задача свелась к следующей: среди всех треугольников, имеющих общую сторону и противолежащий ей угол, равный заданному углу γ, найти треугольник с наибольшей площадью.

Геометрическим местом вершин C таких треугольников служит дуга окружности, вмещающая угол γ и опирающаяся на отрезок, равный общей стороне всех треугольников. *Наибольшей площадью* среди рассматриваемых треугольников обладает треугольник с наиболее удаленной от общей стороны вершиной C, то есть треугольник, у которого вершина C совпадает с точкой пересечения дуги окружности, вмещающей угол γ, и перпендикуляра, восставленного из середины общей стороны. Ясно, что такой треугольник равнобедренный.

Итак, среди всех треугольников, имеющих заданную площадь S и один и тот же угол γ при вершине C, у равнобедренного треугольника *сторона, противолежащая углу* γ, *имеет наименьшую длину*.

28. Выпишем все делители числа $n = 2^{p-1}q$ (где $q = 2^p - 1$ — простое число), которые меньше его самого (см. III.21):

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{p-2},\ 2^{p-1},$$
$$q,\ 2q,\ 2^2q,\ \ldots,\ 2^{p-2}q.$$

Числа, стоящие как в первой, так и во второй строке, образуют геометрическую прогрессию. Вычисляя суммы этих прогрессий, находим

$$2^p - 1 = q \quad \text{и} \quad q\left(2^{p-1} - 1\right) = n - q.$$

Таким образом, сумма всех делителей числа n, отличных от него самого, равна n, что и требовалось доказать*.

29. а. Если $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = y$, то

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - x^2} \quad \text{и} \quad \cos\beta = \pm\sqrt{1 - y^2},$$

поэтому величина

$$z = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Площади треугольников $A_0A_1B_1$ и $A_0B_0B_1$ равны, а сторона A_0B_1 общая. Следовательно, точки A_1 и B_0 равноудалены от отрезка A_0B_1, то есть четырехугольник $A_0B_1B_0A_1$ — трапеция. Кроме того, $\angle B_1B_0A_1 > > \angle B_1B_0A_0 = \angle B_0A_0C > \angle B_0A_1A_0$ (внешний угол больше внутреннего с ним не смежного).

Итак, наша задача свелась к доказательству следующей леммы.

Лемма. Если углы неравнобочной трапеции разделены на две пары в зависимости от того, к какому из оснований, верхнему или нижнему, они примыкают, то

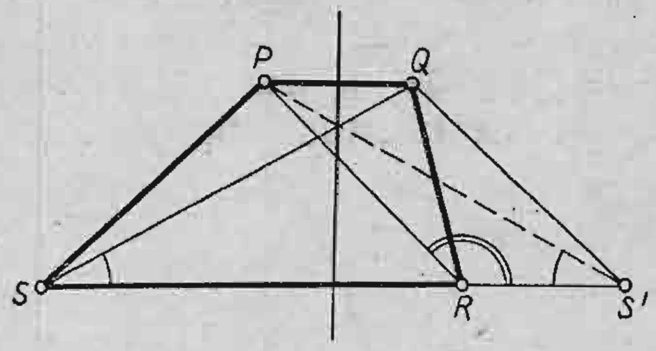


Рис. 16.

вершины меньших углов в каждой паре служат концами большей из двух диагоналей трапеции.

Пусть $PQRS$ — неравнобочная трапеция, $PQ \parallel SR$ (рис. 16) и $\angle SPQ > \angle PQR$.

Предположим, что S' — точка, симметричная вершине S относительно прямой, проходящей через середину основания PQ перпендикулярно к нему. Точка S' лежит на продолжении основания SR за вершину R. Угол $S'RP$ как внешний угол треугольника SRP удовлетворяет неравенству $\angle S'RP > \angle S'SP > \angle S'SQ$, а по симметрии $\angle S'SQ = \angle SS'P$, вследствие чего в треугольнике PRS' угол $S'RP$ больше угла $RS'P$ и поэтому $S'P > RP$. Поскольку по симметрии $S'P = SQ$, то из последнего неравенства получаем, что $SQ > RP$.

Третье решение. Рассмотрим все треугольники с площадью S, один из углов которых равен заданному углу γ. Если среди них найдется такой, что сторона c, противолежащая углу γ, у него короче соответствующих сторон других треугольников, то уменьшим все треугольники так, чтобы длина стороны, противолежащей углу γ, у всех треугольников стала равной c. Ясно, что площади треугольников, подвергшихся «сжатию», меньше площади исходных треугольников, равной S.

круг центра. Действительно, если точка P находится внутри этой сферы (то есть если $PO < r/2$), то сферы K и K' не имеют общих точек*.

27. Первое решение. По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos\gamma).$$

Но

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = S,$$

поэтому

$$c^2 = (a-b)^2 + 4S\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства постоянно. Первое слагаемое обращается в нуль

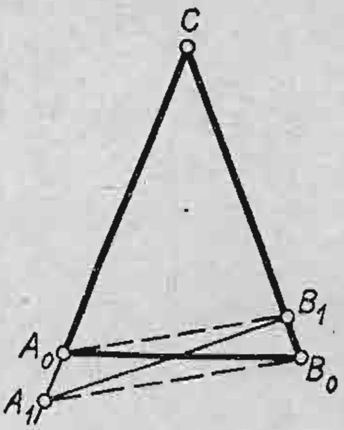


Рис. 15.

лишь при $a = b$, а во всех остальных случаях положительно. Следовательно, c^2, а значит, и c достигают наименьшего значения, если треугольник равнобедренный.

В этом случае

$$a = b = \sqrt{\frac{2S}{\sin\gamma}}.$$

Второе решение. Докажем, что сторона c имеет наименьшую длину, если треугольник равнобедренный ($a = b$). Пусть $A_0B_0C_0$ — равнобедренный треугольник, соответствующий условиям задачи. Построим произвольный треугольник с той же площадью так, чтобы угол γ был общим для двух треугольников, а сторона CA_1 нового треугольника оказалась длиннее стороны CA_0 треугольника A_0B_0C. Мы получим треугольник A_1B_1C (рис. 15). Поскольку точка A_1 лежит на продолжении стороны CA_0 за вершину A_0, то точка B_1 должна располагаться на стороне B_0C треугольника A_0B_0C между вершинами B_0 и C.

которые должны быть целыми. Но тогда числа

$$m = r, \quad l = s - r, \quad k = t - 2s + r$$

также целые.

Наоборот, если k, l, m — целые числа, то квадратный трехчлен Q при любых целых x принимает лишь целочисленные значения.

Действительно, если x — целое число, то одно из двух последовательных целых чисел x и $x - 1$ четное и, следовательно, $\frac{x(x-1)}{2}$ — целое число. Если коэффициенты k, l и m также целые числа, то все три члена в Q, а следовательно, и сам квадратный трехчлен Q принимают целочисленные значения *.

26. Проведем плоскость через диаметр OT сферы K' радиуса PO с центром в точке P. Окружности k и k', по которым пересекаются с проведенной плоскостью

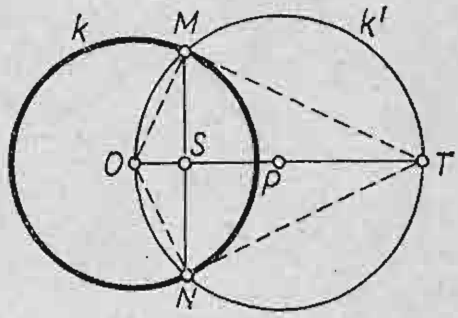


Рис. 14.

сферы K и K', в свою очередь пересекаются в точках M и N (рис. 14). Обозначим S точку пересечения хорды MN и диаметра OT.

Площадь F той части сферы K', которая находится внутри сферы K, равна произведению длины окружности k' на высоту шарового сегмента OS, то есть

$$F = \pi OT \cdot OS.$$

Но $OT \cdot OS = OM^2 = r^2$, где r — радиус окружности k. Следовательно,

$$F = \pi r^2.$$

Таким образом, площадь той части сферы K', которая расположена внутри сферы K, не зависит от расположения точки P.

Точка P не обязательно должна лежать вне заданной сферы K. Достаточно, если она будет находиться вне сферы радиусом $r/2$, описанной вокруг точки O как во-

Раскрывая скобки и располагая получившиеся выражения по убывающим степеням u и v, находим уравнения

$$u^2 - 2u - 1 = 0, \quad v^4 - 8v^2 + 8 = 0^*.$$

24. Пусть d — наибольший общий делитель* чисел a и b. Тогда

$$a = dr, \quad b = ds,$$

где r и s — два взаимно простых числа*.

Если все числа

$$a, \ 2a, \ 3a, \ \ldots, \ ba$$

разделить на b, то частные можно записать в виде

$$\frac{r}{s}, \ \frac{2r}{s}, \ \frac{3r}{s}, \ \ldots, \ \frac{(ds)\,r}{s}.$$

Но r и s — взаимно простые числа. Следовательно*, среди частных *целыми* числами могут быть лишь те, у которых в числителе коэффициент при r, равный

$$1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ ds,$$

делится на s, а число таких коэффициентов равно d.

25. а. Поскольку

$$x^2 = 2\frac{x(x-1)}{2} + x,$$

то квадратный трехчлен

$$Q = Ax^2 + Bx + C$$

можно преобразовать к виду

$$Q = 2A\frac{x(x-1)}{2} + (A + B)x + C.$$

Следовательно,

$$Q = k\frac{x(x-1)}{2} + lx + m,$$

где $k = 2A$, $l = A + B$, $m = C$.

б. Если квадратный трехчлен Q при всех целых x принимает целочисленные значения, то, полагая x равным 0, 1 и 2, получаем соответствующие значения трехчлена

$$r = m, \quad s = l + m, \quad t = k + 2l + m,$$

Отсюда следует, что

$$S_n \equiv 4 \equiv 4 \pmod 5) \quad \text{при} \quad r = 0,$$
$$S_n \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5) \quad \text{при} \quad r = 1,$$
$$S_n \equiv 30 \equiv 0 \pmod 5) \quad \text{при} \quad r = 2,$$
$$S_n \equiv 100 \equiv 0 \pmod 5) \quad \text{при} \quad r = 3.$$

Следовательно, S_n делится на 5 в том и только в том случае, если n не делится на 4, что и требовалось доказать*.

23. Угол 22,5°, составляющий четверть прямого угла, построим следующим образом (рис. 13). На продолжении катета AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC за вершину A отложим отрезок $AD = AB$

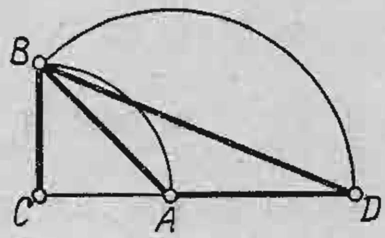


Рис. 13.

и соединим точки D и B отрезком прямой. В равнобедренном треугольнике DAB угол при вершине D равен половине внешнего угла при вершине A, то есть действительно составляет четверть прямого угла.

Если длину любого из катетов треугольника ABC принять за единицу, то

$$DA = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2},$$
$$DC = DA + AC = \sqrt{2} + 1$$

и

$$DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Отсюда находим

$$u = \operatorname{ctg} 22{,}5° = \frac{DC}{BC} = \sqrt{2} + 1,$$
$$v = \frac{1}{\sin 22{,}5°} = \frac{DB}{BC} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$(u-1)^2 = 2$$

и

$$v^2 = 4 + 2\sqrt{2}, \quad \text{то есть} \quad (v^2 - 4)^2 = 8.$$

дачи 13, мы заключаем, что $A^{4l}-1$ делится на A^4-1, а последнее число, как было показано выше, в свою очередь делится на 5.

Всякое положительное целое число n можно представить в виде $4l+r$, где l — положительное целое число или нуль, а r — одно из чисел 0, 1, 2 или 3. Следовательно, сумму n-х степеней

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

можно представить в следующем виде:

$$S_n = 1 + 2^{4l}\cdot 2^r + 3^{4l}\cdot 3^r + 4^{4l}\cdot 4^r =$$
$$= 1 + (5k_1+1)2^r + (5k_2+1)\cdot 3^r + (5k_3+1)4^r = 5m + R,$$

где m означает целое число, а

$$R = 1 + 2^r + 3^r + 4^r.$$

Таким образом, S_n делится на 5 в том и только в том случае, если R делится на 5.

Если n делится на 4, то $r=0$ и $R=4$. Следовательно, в этом случае S_n не делится на 5. Если же n не делится на 4, то остаток r совпадает с одним из чисел 1, 2 или 3. При этом число R равно 10, 30 или 100, и сумма n-х степеней S_n делится на 5.

Второе решение. Прежде всего нетрудно проверить (см. III. 12), что

$$\begin{aligned} 1^4 &= 1 \equiv 1 \pmod 5,\\ 2^4 &= 16 \equiv 1 \pmod 5,\\ 3^4 &= 81 \equiv 1 \pmod 5,\\ 4^4 &= 256 \equiv 1 \pmod 5)^*. \end{aligned}$$

Пусть $n=4k+r$, где k — некоторое целое число, а $r=0$, 1, 2 или 3. Если a означает любое из чисел 1, 2, 3, 4, то из выписанных выше сравнений следует, что $a^4 \equiv 1 \pmod 5$, а значит, и $a^{4k} \equiv 1 \pmod 5$. Таким образом,

$$a^n = a^{4k}\cdot a^r \equiv a^r \pmod 5.$$

Применяя полученное соотношение к сумме n-х степеней четырех первых натуральных чисел, получаем

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^r + 2^r + 3^r + 4^r \pmod 5.$$

Окружности k и k' не пересекаются, поскольку из неравенства (1) следует, что [1]

$$OO' = c^2 + (r_c - r)^2 = (r_c + r)^2 + c^2 - 4rr_c \geqslant (r_c + r)^2.$$

Проведем внутреннюю касательную к окружностям k и k'. Она пересечет две внешние касательные к тем же окружностям, проходящие через точку C, в точках A и B. Построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи, поскольку по доказанному в п. а

$$AB = DD' = c.$$

21. Пусть σ — расстояние между каплями в тот момент, когда вторая капля начала падать, s и s' — расстояния, пройденные первой и второй каплями к тому моменту, когда первая капля достигла подножия скалы (напомним, что обе капли падают с самой вершины скалы). Если расстояния σ, s и s' капли «проходят» за время τ, t и $t - \tau$, то

$$\sigma = \frac{g\tau^2}{2}, \quad s = \frac{gt^2}{2}, \quad s' = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$s' = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - \sqrt{\frac{2\sigma}{g}}\right)^2 = s - 2\sqrt{s\sigma} + \sigma$$

и

$$s - s' = 2\sqrt{s\sigma} - \sigma.$$

В рассматриваемом нами случае $\sigma = 1/1000$ мм, а $s = 300\,000$ мм, поэтому

$$s - s' = 34{,}6 \text{ мм}.$$

22. Первое решение. Каждое из чисел

$$1^4 = 1,\ 2^4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1,\ 3^4 = 81 = 16 \cdot 5 + 1,$$
$$4^4 = 256 = 51 \cdot 5 + 1$$

можно представить в виде $5k + 1$. Поэтому, если A — любое из чисел 1, 2, 3, 4, то A^{4l} также будет числом вида $5k + 1$, то есть $A^{4l} - 1$ делится на 5. Действительно, из тождества, использованного нами при решении за-

[1] Нетрудно заметить, что условие $r_c > r$ также необходимо для разрешимости задачи. Обе точки O и O' лежат на биссектрисе угла C (рис. 12), но O' — дальше от C, откуда $r_c \geqslant r$. — *Прим. ред.*

стороны BC (окружность k' касается стороны AB и продолжений двух других сторон треугольника ABC) (рис. 12).

Известно [см. соотношения (1) и (2) в III. 8], что если стороны рассматриваемого треугольника обозначить a, b, c, а полупериметр p, то

$$CD = p - c, \quad CD' = p$$

и, таким образом,

$$DD' = p - (p - c) = c.$$

б. Окружности k и k' не пересекаются. Это позволяет установить соотношение между r, r_c и c. Действительно, рассмотрим прямоугольный треугольник OPO'.

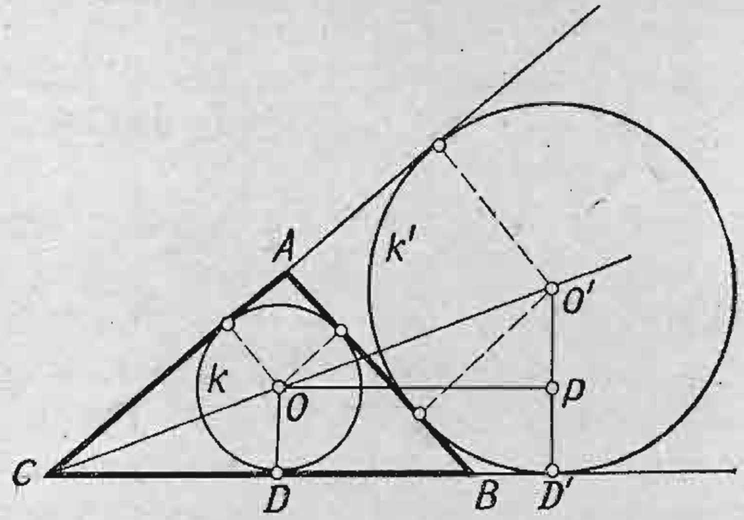


Рис. 12.

Его катеты $OP = DD' = c$, $O'P = r_c - r$, а гипотенуза $OO' \geqslant r_c + r$. Следовательно, по теореме Пифагора

$$(r_c + r)^2 \leqslant c^2 + (r_c - r)^2,$$

то есть[1]

$$rr_c \leqslant \left(\frac{c}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

в. Если условие (1) выполнено и, кроме того, $r_c > r$, то отложим отрезок DD' длиной c и из его концов восставим перпендикуляры $OD = r$ и $O'D = r_c$. Проведем окружность k радиусом r с центром в точке O и окружность k' радиусом r_c с центром в точке O'. Поскольку $r_c > r$, то прямая OO' пересекает прямую DD'. Точка пересечения служит вершиной C искомого треугольника.

[1] См. также решение задачи 93.

откуда видно, что A делится на 7, поскольку

$$2903^n - 803^n \text{ делится на } 2903 - 803 = 2100 = 7 \cdot 300,$$

$$464^n - 261^n \text{ делится на } 464 - 261 = 203 = 7 \cdot 29.$$

Поскольку число 271 не делится на простое число 7, то $A = 271 \cdot B$ может делиться на 7 лишь в том случае, если B делится на 7 (см. III.2). Таким образом, $B = 7 \cdot C$, где C — некоторое целое число. Но тогда $A = 271 \cdot 7\,C = 1897\,C$. Следовательно, A делится на 1897, что и требовалось доказать.

19. Число m не может делиться на 5. Действительно, если бы m делилось на 5, то из равенства

$$am^3 + bm^2 + cm + d = m(am^2 + bm + c) + d$$

мы бы усмотрели, что и число d должно было бы делиться на 5 вопреки условию задачи (известно, что d не делится на 5).

Следовательно, число m можно представить в виде $5k + r$, где k — некоторое целое число, а остаток r — положительное целое число, меньшее пяти. В зависимости от того, чему равен остаток r — 1, 2, 3 или 4, выберем число n равным 1, 2, 3 или 4. Тогда произведение mn при делении на 5 всегда будет давать остаток 1.

Введем для краткости новые обозначения. Пусть

$$A = am^3 + bm^2 + cm + d,$$
$$B = a + bn + cn^2 + dn^3.$$

Исключив из правых частей d, получим

$$An^3 - B = a(m^3n^3 - 1) + bn(m^2n^2 - 1) + cn^2(mn - 1) =$$
$$= (mn - 1)[a(m^2n^2 + mn + 1) + bn(mn + 1) + cn^2].$$

Таким образом, при указанном выборе числа n разность $An^3 - B$ делится на 5, поскольку $mn - 1$ делится на 5. Так как по условию задачи A делится на 5, то $An^3 - B$ может делиться на 5 лишь в том случае, если B делится на 5, что и требовалось доказать.

20. а. Пусть D — точка касания окружности k, вписанной в треугольник ABC со стороной BC, а D' — точка касания вневписанной окружности k' с продолжением

17. Воспользуемся известными соотношениями между корнями и коэффициентами квадратного уравнения и применим их к уравнению

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0. \qquad (1)$$

Тогда

$$a+d=x_1+x_2, \quad ad-bc=x_1x_2$$

и, следовательно,

$$a^3+d^3+3abc+3bcd=a^3+d^3+3(a+d)bc=$$
$$=(a+d)^3-3(a+d)(ad-bc)=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2=$$
$$=x_1^3+x_2^3, \quad (ad-bc)^3=x_1^3x_2^3.$$

Таким образом, уравнение

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0 \qquad (2)$$

можно представить в виде

$$y^2-\left(x_1^3+x_2^3\right)y+x_1^3x_2^3=0,$$

или, разложив на множители,

$$\left(y-x_1^3\right)\left(y-x_2^3\right)=0.$$

Итак, корни уравнения (2) равны x_1^3 и x_2^3, что и требовалось доказать*.

18. Как следует из тождества, которым мы воспользовались при решении задачи 13, разность n-х степеней любых двух целых чисел всегда делится на разность первых степеней.

Учитывая это, запишем число A в следующем виде:

$$A=(2903^n-464^n)-(803^n-261^n).$$

Отсюда видно, что

$$2903^n-464^n \text{ делится на } 2903-464=2439=9\cdot 271,$$
$$803^n-261^n \text{ делится на } 803-261=542=2\cdot 271.$$

Следовательно, A также делится на 271, то есть $A=271\cdot B$, где B означает некоторое целое число.

Но то же число A можно представить и в виде

$$A=(2903^n-803^n)-(464^n-261^n),$$

Чтобы продолжить выкладки, воспользуемся формулой

$$\cos(n+1)\varphi = \cos\varphi\cos n\varphi - \sin\varphi\sin n\varphi = \\ = \cos\varphi\cos n\varphi - (1-\cos^2\varphi)\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi},$$

то есть

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_{n-1}(x), \qquad (1)$$

и аналогичным выражением

$$\frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}[\sin\varphi\cos(n+1)\varphi + \cos\varphi\sin(n+1)\varphi],$$

то есть

$$U_{n+1}(x) = T_{n+1}(x) + xU_n(x). \qquad (2)$$

Чередуя формулы (1) и (2), находим

$$T_2(x) = xT_1(x) - (1-x^2)U_0(x) = x\cdot x - (1-x^2) = 2x^2 - 1,$$
$$U_2(x) = T_2(x) + xU_1(x) = (2x^2-1) + 2x^2 = 4x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = x(2x^2-1) - (1-x^2)2x = 4x^3 - 3x,$$
$$U_3(x) = 4x^3 - 3x + x(4x^2-1) = 8x^3 - 4x,$$
$$T_4(x) = x(4x^3-3x) - (1-x^2)(4x^2-1) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$U_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 + x(8x^3-4x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

и

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x = x[(2x)^4 - 5(2x)^2 + 5].$$

Корнями уравнения $T_5(x) = 0$ служат числа

$$0, \quad \pm\frac{1}{2}A_0A_1, \quad \pm\frac{1}{2}A_0A_2.$$

Отбросив в левой части уравнения множитель x, соответствующий *нулевому* корню, и обозначив $2x$ через u, получим уравнение

$$u^2 - 5u + 5 = 0,$$

корни которого равны $(A_0A_1)^2$ и $(A_0A_2)^2$.

Произведение корней равно свободному члену. Следовательно,

$$(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2 = 5,$$

что и требовалось доказать*.

Второе решение. В приводимом ниже решении *не требуется заранее знать, чему равна длина стороны правильного выпуклого десятиугольника.*

Длина отрезков A_0A_1 и A_0A_2 довольно просто выражается через косинусы таких углов φ, для которых 5φ равно $90°\cdot k$, где k — целое нечетное число, то есть $\cos 5\varphi = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что рассмотрению подлежат лишь углы, заключенные в интервале от 0 до 180°. Действительно, для любого угла, превышающего 180°, всегда можно найти другой угол, содержащийся в указанном выше интервале так, что косинусы обоих углов будут равны.

Итак, рассмотрим лишь следующие углы:

$$\cos\frac{1}{5}90° = \cos 18° = \sin 72° = \frac{1}{2}A_0A_2,$$

$$\cos\frac{3}{5}90° = \cos 54° = \sin 36° = \frac{1}{2}A_0A_1,$$

$$\cos\frac{5}{5}90° = \cos 90° = 0,$$

$$\cos\frac{7}{5}90° = \cos 126° = -\sin 36° = -\frac{1}{2}A_0A_1,$$

$$\cos\frac{9}{5}90° = \cos 162° = -\sin 18° = -\frac{1}{2}A_0A_2.$$

Уравнение, позволяющее найти значения всех этих косинусов, мы получим, сделав замену $x = \cos\varphi$ в левой части тригонометрического уравнения $\cos 5\varphi = 0$. Воспользуемся для этого *рекуррентными соотношениями*, позволяющими выразить

$$\cos n\varphi \quad \text{и} \quad \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

через $x = \cos\varphi$ при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. (Отношение $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ выбрано вместо $\sin(n+1)\varphi$ для того, чтобы избежать квадратных корней.) Соответствующие выражения обозначим $T_n(x)$ и $U_n(x)$*.

При $n = 0$ и $n = 1$ получим

$$\cos 0 = T_0(x) = 1, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} = U_0(x) = 1,$$

$$\cos\varphi = T_1(x) = x, \quad \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos x = U_1(x) = 2x.$$

образом, вершины A и B квадрата $ABCD$ принадлежат геометрическому месту точек, из которых отрезок MC виден под углом, равным $\angle MBC = \angle MAC$. Но тогда точка M расположена на окружности, проходящей через точки A, B и C, то есть на описанной окружности квадрата $ABCD$, что и требовалось доказать.

Третье решение. Как видно из рис. 126, AUG — равнобедренный прямоугольный треугольник, поэтому $\angle UAG = 45°$, а поскольку $BV \parallel AU$ и $\angle UAG = \angle AMB$ как внутренние накрест лежащие, то $\angle AMB = 45°$. Следовательно, точка M принадлежит окружности, описанной вокруг квадрата $ABCD$, так как из центра этой окружности любая из сторон квадрата видна под углом $90°$.

155. Прежде всего ясно, что если $m = p$ — простое число, то произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1)$ не может делиться на p. Следовательно, речь идет лишь о составных числах m.

Если m можно разложить в произведение двух различных целых чисел, то есть представить в виде $m = ab$, где $a \neq b$, то произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1)$ делится на m, поскольку числа a и b совпадают с какими-то из его сомножителей.

Остается рассмотреть еще случай, когда число m разлагается лишь в произведение двух равных сомножителей, то есть представимо в виде квадрата простого числа p ($m = p^2$). Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p^2 - 1)$ делится на p^2 лишь в том случае, если два из входящих в него сомножителей делятся на p, то есть если в число сомножителей входит $2p$. Поскольку все сомножители меньше p^2, то для этого должно выполняться неравенство $2p < p^2$. Ему удовлетворяют любые целые числа, которые больше 2, и в частности все простые числа, за исключением 2.

Итак, утверждение задачи верно для любых составных чисел m, кроме $m = 4$, и только для этих чисел*.

156. Первое решение. Если бы утверждение задачи было неверно, то, исключая по одной из четырех полуплоскостей, мы каждый раз обнаружили бы по крайней мере по одной точке плоскости, оставшейся непокрытой. Это означало бы, что на плоскости имеются четыре точки P_1, P_2, P_3, P_4, каждая из которых покрыта

откуда

$$BH = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}.$$

Тем самым доказано, что при повороте треугольника ABE на $90°$ вокруг вершины B он совмещается с треугольником CBH. Таким образом, прямые AE и CH перпендикулярны, и точка M принадлежит геометрическому месту точек, из которых диагональ квадрата AC видна

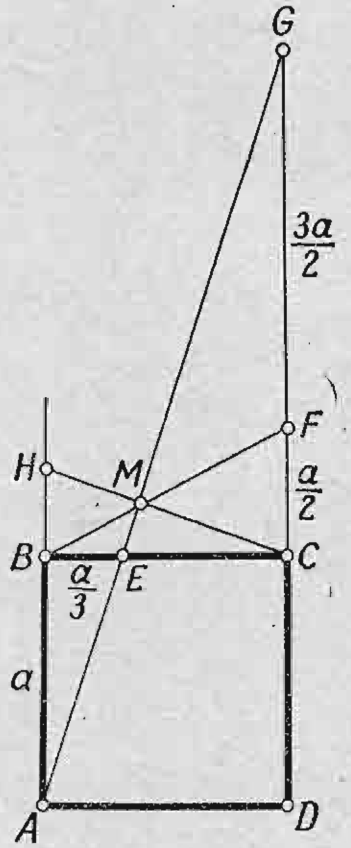


Рис. 125.

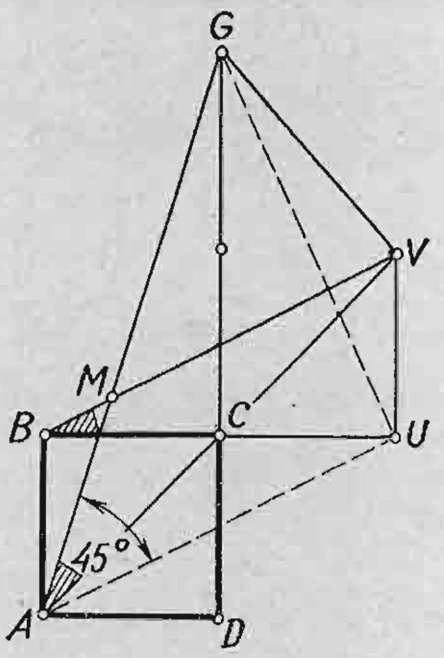


Рис. 126.

под прямым углом. Следовательно, точка M принадлежит описанной окружности квадрата $ABCD$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Наложим на рис. 125 квадратную решетку (относительно решеток на плоскости см. решение задачи 134 и III. 67), ячейка которой по размерам совпадает с квадратом $ABCD$. Пусть U — ближайший к вершине C узел решетки, лежащий на продолжении стороны BC, а V — ближайший к вершине C узел решетки, лежащий на продолжении диагонали AC (рис. 126). Прямоугольные треугольники BUV и AVG подобны, поскольку их катеты относятся как $2:1$. Следовательно, угол при вершине B треугольника BUV равен углу при вершине A треугольника AVG. Таким бы целым четным, что противоречит условиям задачи. Таким образом, среди значений

$$a+c, \quad c, \quad -a+c,$$

принимаемых одним из выражений (индексы опущены) при (x, y), равных $(1, 0)$, $(0, 0)$ и $(-1, 0)$, заведомо имеются по крайней мере два четных целых числа. Следовательно, разность по крайней мере двух из трех чисел $a+c$, c, $-a+c$ четна. Но разность любых двух из этих чисел равна либо a, либо $2a$, поэтому коэффициент a в рассматриваемом выражении — заведомо целое число. Коэффициент c в том же выражении также должен быть целым числом, поскольку в противном случае ни одно из трех значений этого выражения не было бы целым числом. Итак, коэффициенты a и c одного из двух выражений — целые числа.

Пользуясь аналогичными рассуждениями (подставляя вместо (x, y) пары чисел $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$), можно показать, что коэффициенты b и c одного из двух выражений — также целые числа. Если в обоих случаях коэффициенты принадлежат одному и тому же выражению, то утверждение задачи доказано: одна из троек коэффициентов a, b, c содержит только целые числа. В противном случае из доказанного выше следует лишь, что в одном выражении целочисленными являются коэффициенты a и c, а в другом — b и c.

Подставляя вместо (x, y) пару чисел $(1, 1)$, получаем в обоих случаях целое значение $a+b+c$. Следовательно, если любые два из трех чисел a, b, c (либо a и c, либо b и c) — целые, то и третье число также должно быть целым, что и требовалось доказать.

154. Первое решение. Обозначим M точку пересечения прямых AE и BF. Пусть G — точка пересечения прямой AE с продолжением стороны квадрата CD, а H — точка пересечения прямой CM с продолжением стороны квадрата AB (рис. 125). Поскольку треугольники ABE и GDA подобны, то $GD:AD=3$ и $GD=3a$. По теореме о пропорциональных отрезках, которые отсекает на двух параллельных прямых пучок прямых, проходящих через одну точку,

$$BH:BA=FC:FG=\frac{a}{2}:\frac{3a}{2}=1:3,$$

O_3A и O_3B окружности k_3 параллельны радиусам окружностей k_1 и k_2, проведенным в их общую точку касания

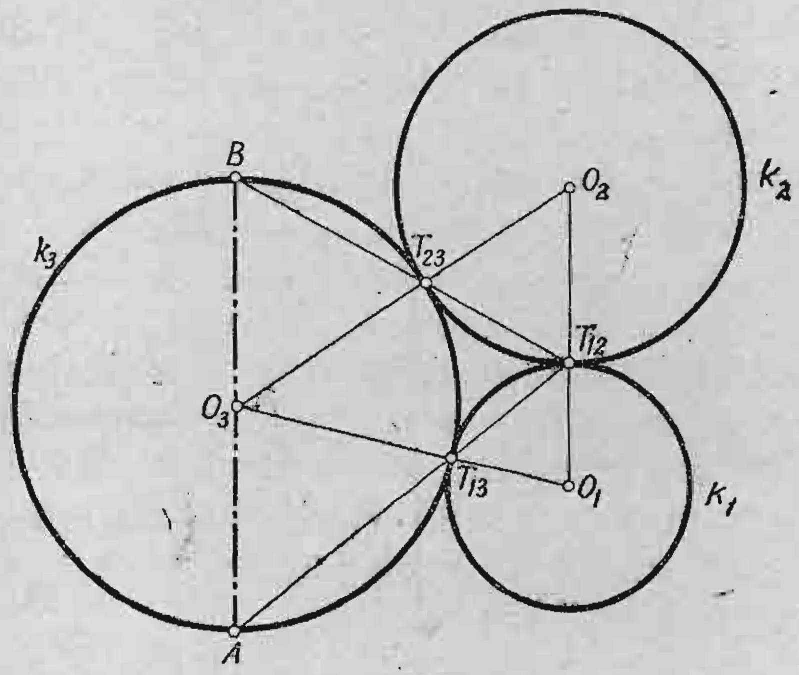


Рис. 122.

(рис. 122—124). Следовательно, радиусы O_3A и O_3B лежат на одной прямой. Поскольку точки A и B не совпадают, то они служат концами диаметра окружности k_3.

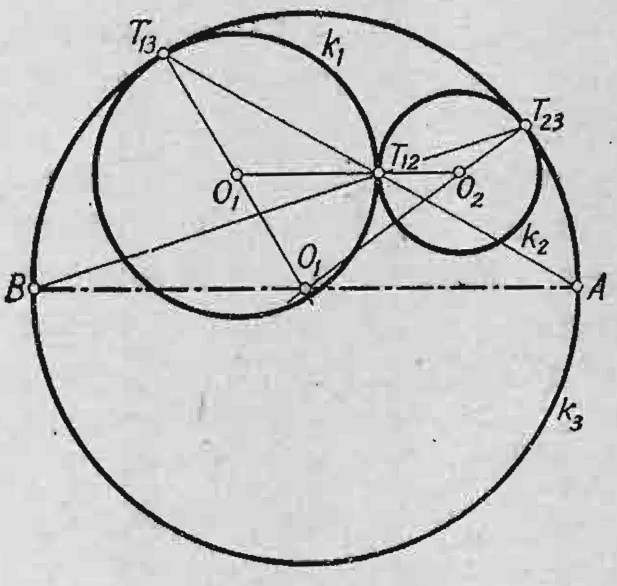


Рис. 123.

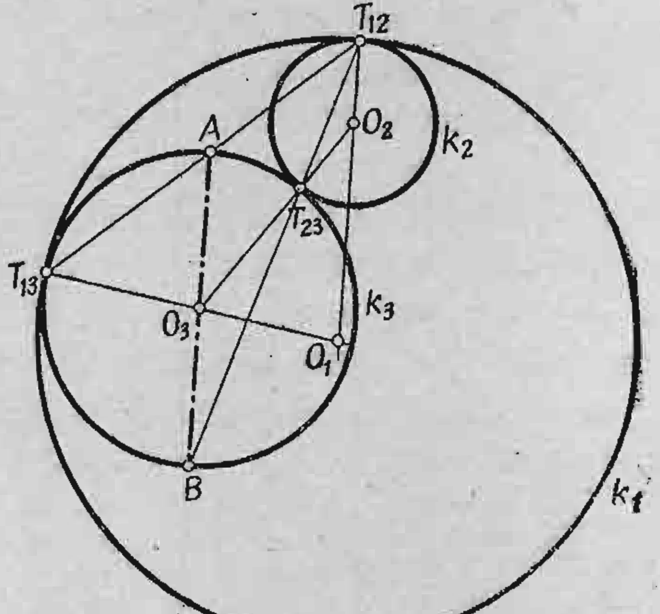


Рис. 124.

153. Подставим в рассматриваемые выражения вместо (x, y) следующие три пары чисел: $(1, 0)$, $(0, 0)$ и $(-1, 0)$. Одно из выражений $a_1x + b_1y + c_1$ и $a_2x + b_2y + c_2$ должно при этом принимать целые четные значения по крайней мере два раза, поскольку в противном случае не при всех целых x и y какое-то из них было условиям задачи образуют тройку, в которой никакие двое не могли бы встретиться в библиотеке.

Второе решение может служить готовым доказательством более общего утверждения. Пусть n — любое натуральное число. Предположим, что из любых n (вместо 3) читателей по крайней мере двое встретились в библиотеке. Тогда в течение дня было $n-1$ моментов таких, что все читатели, посетившие в тот день библиотеку, в один из этих моментов находились в ней.

152. Докажем прежде всего следующую лемму:

если T — точка касания окружностей k_1 и k_2, A_1 *и* A_2 — *точки, выбранные на* k_1 и k_2 *так, что они отличны от точки T и лежат с ней на одной прямой, то радиусы,*

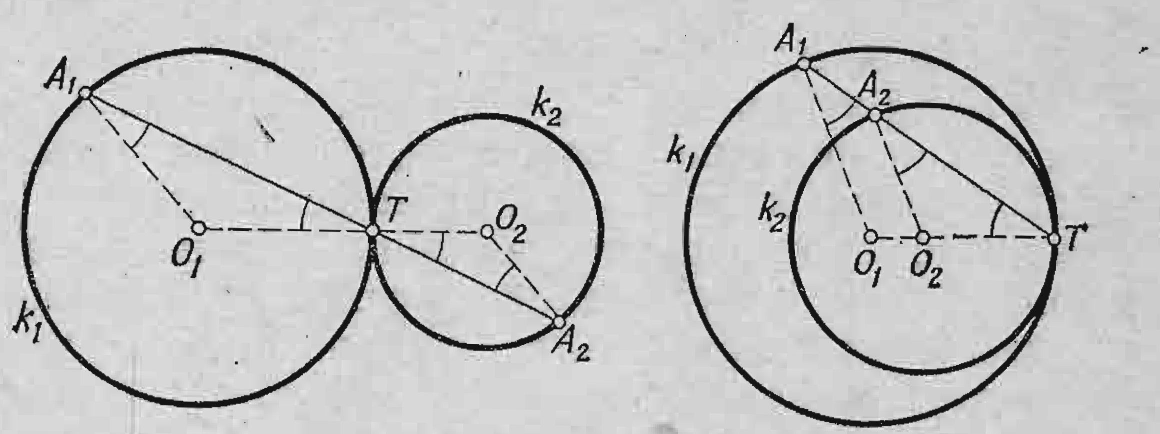


Рис. 121.

проведенные из центров окружностей k_1 *и* k_2 *в точки* A_1 и A_2, *параллельны.*

Для доказательства леммы рассмотрим равнобедренные треугольники TO_1A_1 и TO_2A_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей k_1 и k_2 (рис. 121). Углы при вершинах T в обоих треугольниках равны как вертикальные (если окружности касаются извне) или как соответственные (если окружности касаются изнутри). Поэтому углы при вершинах A_1 и A_2 также равны. Следовательно, по теореме о двух прямых, пересеченных третьей, радиусы O_1A_1 и O_2A_2 параллельны, поскольку либо внутренние накрест лежащие, либо соответственные углы, образованные при пересечении их с прямой A_1A_2, равны.

Теперь уже нетрудно доказать утверждение задачи. Пусть T_{ij} означает точку пересечения окружностей k_i и k_j. Если прямые $T_{12}T_{13}$ и $T_{12}T_{23}$ пересекают окружность k_3 в точках A и B, то по доказанной лемме радиусы натуральные числа $n > 1$, которые имеют нечетные делители. Натуральные числа, не представимые в виде суммы последовательных натуральных чисел, имеют лишь четные делители; и, разлагая их в произведение простых чисел, убеждаемся, что это могут быть лишь степени числа 2.

151. Первое решение. Предположим, что кто-то из посетителей отсутствовал в библиотеке как в тот момент, когда библиотеку покинул первый читатель, так и в тот момент, когда в нее пришел последний. Так могло произойти лишь в том случае, если отсутствовавший читатель пришел в библиотеку после того, как ее покинул первый читатель (поскольку никто не ушел из библиотеки раньше), и ушел до того, как пришел последний читатель (поскольку никто не пришел в библиотеку позже). Но тогда этот читатель, читатель, ушедший первым, и читатель, пришедший последним, образуют тройку, в которой никакие двое не могли бы встретиться в библиотеке, что противоречит условиям задачи. Следовательно, каждый из читателей, посетивших библиотеку в тот день, будет находиться в ней по крайней мере в один из двух моментов: когда из библиотеки соберется уходить первый и когда в библиотеку придет последний читатель.

Второе решение. Предположим, что сотруднику библиотеки поручено дважды довести до сведения читателей важное объявление так, чтобы его слышало как можно больше читателей. Когда следует сделать объявление в первый раз? Ясно, что в тот момент, когда соберется уходить первый читатель. Когда следует сделать объявление во второй раз? Ясно, что тогда, когда соберется уходить кто-нибудь из читателей, не слышавших его в первый раз (такие читатели пришли в библиотеку после того, как ушел первый читатель). Из условий задачи следует, что среди читателей нет ни одного, кто бы не слышал объявления. Действительно, если бы такой читатель нашелся, то это означало бы, что он пришел в библиотеку после того, как сотрудник повторил объявление во второй раз. Такой читатель, читатель, ушедший из библиотеки самым первым, и читатель, ушедший из библиотеки первым из тех, кто пришел после того, как ушел самый первый читатель, вопреки ны, ввиду чего радиус описанной окружности k треугольника ABC равен радиусу описанной окружности k' треугольника $A'B'C'$. Прямая QR совпадает с радикальной осью (см. III.48) окружностей k и k', поскольку точки Q и R имеют одинаковую степень относительно обеих окружностей: $QA \cdot QC = QC' \cdot QA'$ (в силу равенств $QA = QC'$, $QC = QA'$) и $RA \cdot RB = RB' \cdot RA'$. Отсюда следует, что окружности k и k' расположены симметрично относительно прямой QR, ибо ось симметрии двух окружностей равных радиусов совпадает с их радикальной осью. Таким образом, точка A'', симметричная точке A' окружности k' относительно прямой QR, принадлежит окружности k.

150. Докажем, что в виде суммы последовательных натуральных чисел можно представить лишь такие натуральные числа $n > 1$, которые либо сами нечетны, либо имеют нечетный делитель.

Число $(2k+1)m$, имеющее нечетный делитель, можно представить в виде суммы последовательных целых чисел от $m-k$ до $m+k$. Если $k > m$, то сумма начинается с отрицательных слагаемых, которые взаимно уничтожаются с равными им по абсолютной величине положительными слагаемыми. Остальные слагаемые представляют собой натуральные числа, сумма которых равна $(2k+1)m$. Число таких слагаемых не меньше двух, поскольку в противном случае выполнялось бы неравенство $-(m-k) > m+k-2$, то есть $m < 1$, что невозможно.

Осталось еще доказать, что сумма последовательных натуральных чисел всегда делится на нечетное число. Это утверждение следует из того, что в арифметической прогрессии

$$a+(a+1)+\ \dots\ +(a+n)$$

сумма первого и последнего членов равна $2a+n$, число членов — $(n+1)$, и эти числа не могут быть одновременно четными или нечетными, поскольку их разность $2a-1$ нечетна. Но тогда произведение чисел $2a+n$ и $n+1$, а следовательно, и его половина, равная сумме членов выписанной выше арифметической прогрессии, делится на нечетное число.

Итак, мы доказали, что в виде суммы последовательных натуральных чисел представимы те и только те

Если треугольник ABC равнобедренный, то новая формулировка задачи совпадает с исходной.

Докажем новое утверждение. Пусть $A' \equiv P$ — выбранная нами точка на стороне BC треугольника ABC.

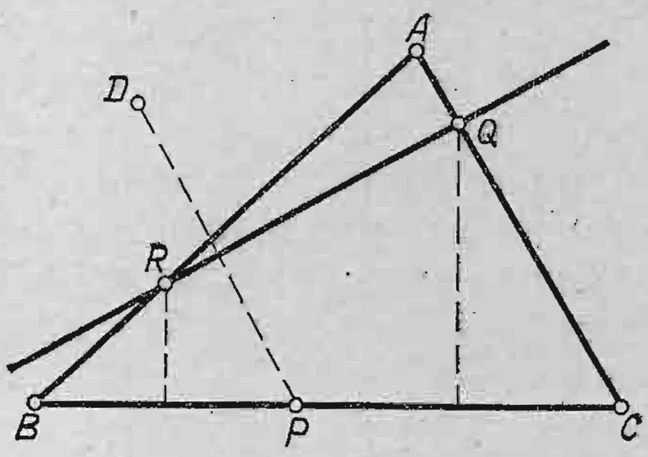


Рис. 119.

Продолжим отрезки $A'R$ и $A'Q$ до пересечения с прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC, в точках B' и C' (рис. 120). По построению треугольники $A'RB$ и $A'QC$ равнобедренные, поэтому треугольники ARB' и AQC' также равнобедренные. Следовательно, $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ углы при вершинах A и A' равны, поскольку углы при вершинах B и C треугольника ABC соответственно равны углам при вершинах B' и C' треугольника $A'B'C'$. Таким образом, треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнт-

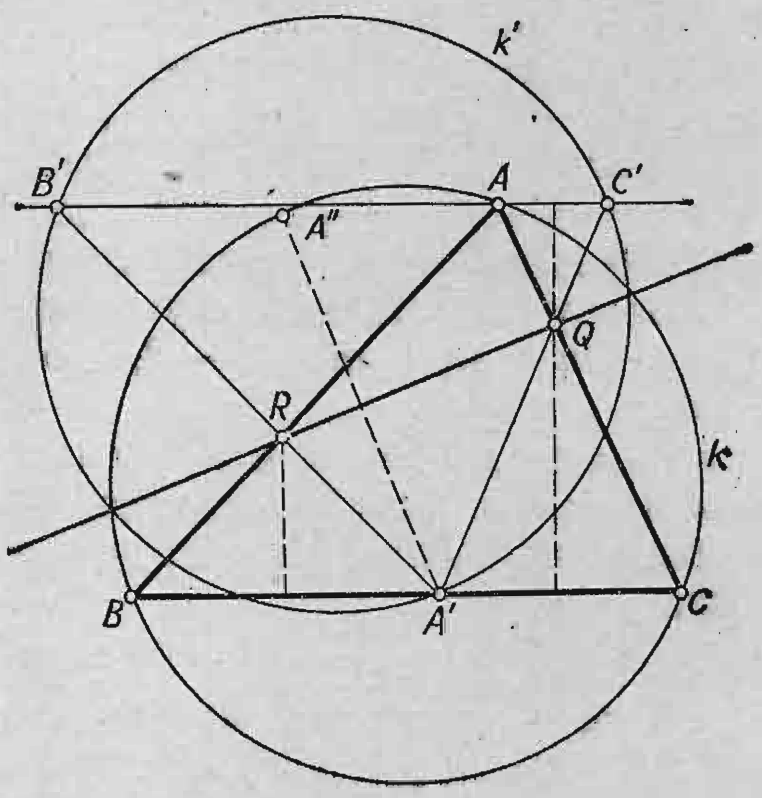


Рис. 120.

середины отрезка QR, проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

Перпендикуляр, восставленный из середины отрезка, проходит через центр некоторой окружности, если концы отрезка равноудалены от центра этой окружности. Таким образом, необходимо доказать, что точки Q и R равноудалены от центра описанной окружности треугольника ABC.

Повернем хорду BA вокруг центра O описанной окружности треугольника ABC так, чтобы она совместилась с хордой AC. Точка R при этом перейдет в точку

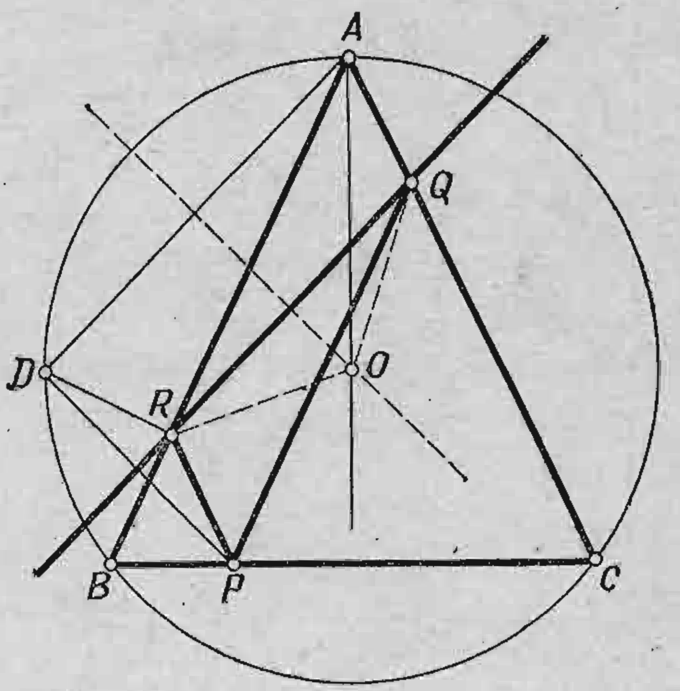


Рис. 118.

Q, поскольку $BR = AQ$ (оба отрезка равны одному и тому же отрезку PR). Точки, переходящие друг в друга при повороте вокруг центра окружности, равноудалены от него. Следовательно, точки Q и R равноудалены от центра O описанной окружности треугольника ABC, что и требовалось доказать.

Четвертое решение. По существу, утверждение задачи останется в силе, если вместо равнобедренного рассматривать произвольный треугольник. Необходимо лишь иначе сформулировать задачу.

Пусть P — точка, лежащая на стороне BC произвольного треугольника ABC, а Q и R — точки пересечения перпендикуляров, восставленных из середин отрезков PC и BP со сторонами треугольника AC и AB (рис. 119). Тогда точка D, симметричная точке P относительно прямой QR, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Второе решение. Как показано в предыдущем решении, $RB = RP = RD$. Аналогичным образом можно доказать, что $QC = QP = QD$. Следовательно, центр окружности, проходящей через точки C, P, D, совпадает с точкой Q, а центр окружности, проходящей через

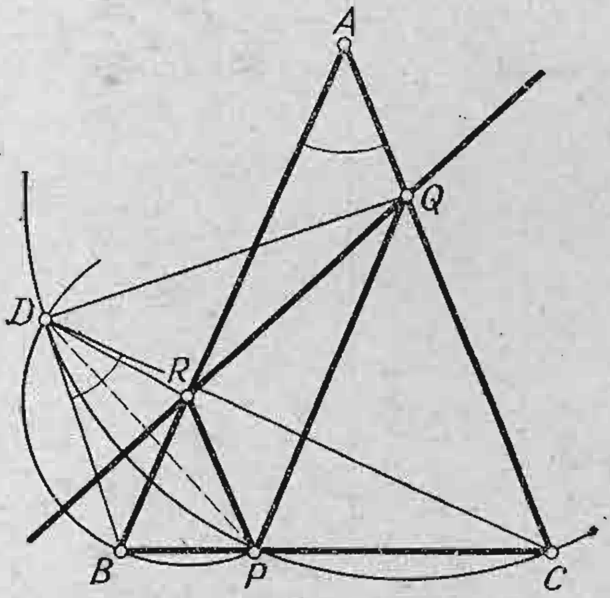


Рис. 117.

точки B, P, D, — с точкой R (рис. 117). Поскольку вписанный угол вдвое меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу, то

$$\angle CDP = \frac{1}{2} \angle CQP,$$

$$\angle PDB = \frac{1}{2} \angle PRB.$$

Каждый из углов, стоящих в правых частях обоих равенств, равен углу CAB, поскольку стороны этих углов параллельны и направлены в одну сторону. Сумма углов, стоящих в левых частях обоих равенств, равна углу CDB. Следовательно,

$$\angle CDB = \angle CAB.$$

Таким образом, точки A и D, B и C лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Третье решение. Выше уже было доказано, что $AQRD$ — равнобочная трапеция, поэтому точка D симметрична точке A относительно перпендикуляра, проходящего через середину отрезка QR (рис. 118). Точка, симметричная точке окружности относительно некоторой прямой, принадлежит той же окружности, если прямая проходит через центр окружности. Итак, необходимо доказать, что перпендикуляр, восставленный из

Действительно, сумма всех внутренних углов четырехугольника $ACBD$ составляет $360°$, поэтому, если суммы противоположных углов равны, то каждая из них составляет $180°$ и, следовательно, четырехугольник $ACBD$ можно вписать в окружность.

Углы ABC и ACB равны как углы при основании равнобедренного треугольника ABC (на рис. 116 они отмечены одной дугой). Треугольник RBD — равнобедренный. Действительно, точка D симметрична точке P

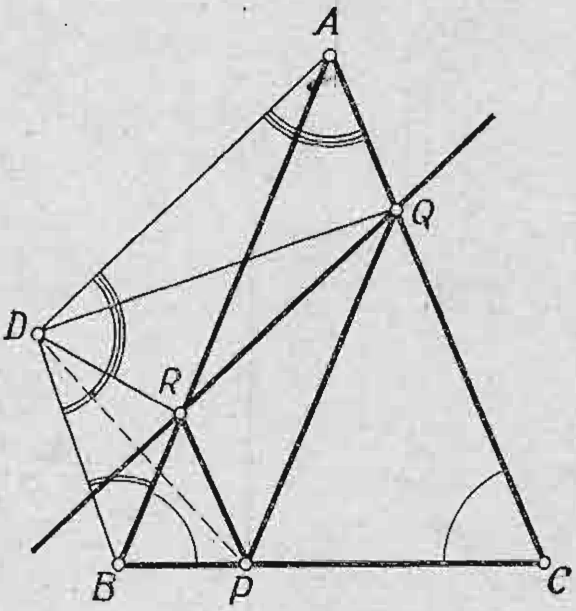


Рис. 116.

относительно прямой QR (в силу чего $DR = RP$), а треугольник BRP подобен равнобедренному треугольнику ABC (в силу чего $RP = RB$). Следовательно, углы RDB и RBD при основании равнобедренного треугольника RBD также равны (на рис. 116 они отмечены двумя дугами). Четырехугольник $AQRD$ представляет собой равнобочную трапецию. Действительно, его диагонали AR и QD равны (обе диагонали равны одному и тому же отрезку QP: диагональ AR — как противоположная сторона параллелограмма $AQPR$, а диагональ QD — как отрезок, симметричный QP относительно прямой QR), а, кроме того, $AQ = DR$ (как показано выше, каждый из этих отрезков равен отрезку RP). Следовательно, углы, прилежащие к стороне AD, также равны (на рис. 116 эти углы отмечены тремя дугами).

Каждая из сумм противоположных углов четырехугольника $ACBD$ содержит по одному углу, отмеченному одной, двумя и тремя дугами, поэтому $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$, что и требовалось доказать.

крытом интервале $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, поскольку третье слагаемое отрицательно лишь в этом интервале. Для любого x из этого интервала $\sin x > \sin\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2}\sin 2x > -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}$ и $\frac{1}{3}\sin 3x > -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} > 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ дуга $\sin x$ обращена выпуклостью вверх и поэтому проходит выше хорды, соединяющей любые две ее точки, в силу чего $\sin\frac{\pi}{3} > \frac{2}{3}$.

В приведенном решении использованы лишь следующие свойства функции $\sin x$: во-первых, симметричность кривой $y = \sin x$ относительно точек $x = \pi$ и $x = 2\pi$ оси x и, кроме того, относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$; во-вторых, выпуклость функции $y = \sin x$ в интервале $(0, \pi)$. Это означает, что наше решение останется в силе и в том случае, если вместо $\sin x$ мы возьмем любую другую функцию, обладающую теми же двумя свойствами.

Утверждение задачи представляет собой частный случай следующей теоремы, доказанной Липотом Фейером:

для любого положительного целого n и x, принадлежащего открытому интервалу $(0, \pi)$, справедливо неравенство

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx > 0.$$

При доказательстве этого неравенства используются некоторые весьма глубокие свойства тригонометрических функций.

149. Первое решение. Задача будет решена, если мы покажем, что четырехугольник $ACBD$ можно вписать в окружность (рис. 116). Для этого достаточно убедиться в том, что суммы противоположных углов четырехугольника $ACBD$ равны:

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$$

лишь в этом интервале. Но для любой точки x этого интервала $\sin x > \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и, кроме того, при любом u выполняется неравенство $\sin u \geqslant -1$, поэтому

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} > 0. \qquad (2)$$

Последнее неравенство можно представить в виде $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{6}$ или после возведения правой и левой частей в квадрат — в виде $\frac{3}{4} > \frac{25}{36}$.

Третье решение. Повторим еще раз ход рассуждений предыдущего решения. Воспользуемся тем, что

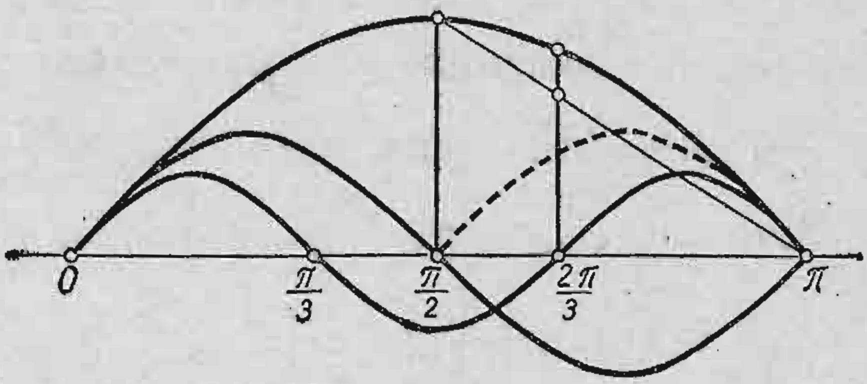


Рис. 115.

на открытом интервале $(0, \pi)$ дуга функции $\sin x$ обращена выпуклостью вверх, то есть любая хорда проходит под отрезком дуги, соединяющей ее концы (см. III.44).

Для доказательства неравенства (1) достаточно рассмотреть его лишь там, где второе слагаемое левой части отрицательно, и убедиться, что в открытом интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ дуга функции $\sin x$ проходит выше дуги функции $-\frac{1}{2}\sin 2x$. Дугу $-\frac{1}{2}\sin 2x$ в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ мы получим, сжав ось x в 2 раза к точке $x = \pi$, а дугу функции $\sin x$ — в 2 раза к оси x. Каждая точка дуги $-\frac{1}{2}\sin 2x$ совпадает с серединой одной из хорд дуги $\sin x$, а поскольку в интервале $(0, \pi)$ эта дуга обращена выпуклостью вверх, то любая хорда проходит ниже ее (рис. 115).

При включении в левую часть слагаемого $\frac{1}{3}\sin 3x$ доказываемое неравенство достаточно рассмотреть в от-

Если все суммы при делении на n дают различные остатки, то одна из них при делении на n дает остаток 0, поскольку существует всего n различных остатков, равных $0, 1, \ldots, n-1$. Следовательно, в этом случае утверждение задачи выполнено.

Если среди n сумм имеются две, принадлежащие одному и тому же классу (дающие одинаковые остатки при делении на n), то в одной из них число слагаемых больше, чем в другой. В этом случае сумма слагаемых, входящих в одну из сумм, но не входящих в другую, делится на n. Таким образом, утверждение задачи выполняется и в этом случае.

148. Первое решение. Пользуясь соотношениями

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha,$$

преобразуем левую часть доказываемого равенства:

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3a = \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} = \frac{\sin\alpha}{3}(3 + 3\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$
$$= \frac{\sin\alpha}{3}(2 + 3\cos\alpha + 4\cos^2\alpha) =$$
$$= \frac{\sin\alpha}{3}\left[(1+\cos\alpha)^2 + (1+\cos\alpha) + 3\cos^2\alpha\right].$$

Все члены правой части последнего равенства положительны, поскольку $0 < \alpha < 180°$ функции $\sin\alpha$, $1 + \cos\alpha$ и $\cos^2\alpha$ принимают положительные значения. Следовательно, исходное неравенство доказано.

Второе решение. Прежде всего докажем, что для любой точки x открытого интервала $(0, \pi)$

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x > 0. \qquad (1)$$

Это неравенство следует из того, что его левую часть можно представить в виде $\sin x(1 + \cos x)$, а для любого x, лежащего в открытом интервале $(0, \pi)$, функции $\sin x$ и $1 + \cos x$ принимают положительные значения.

Если левую часть неравенства (1) дополнить слагаемым $\frac{1}{3}\sin 3x$, то доказывать новое неравенство необходимо лишь для x, лежащих в открытом интервале $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, поскольку слагаемое $\frac{1}{3}\sin 3x$ отрицательно жит границе двух граней, а каждая грань ограничена по крайней мере тремя ребрами, то число граней многогранника не больше $\frac{2}{3}C_n^2$. Пользуясь тем, что для выпуклых многогранников выполняется теорема Эйлера, получаем неравенство

$$n+\frac{2}{3}C_n^2 \geqslant C_n^2+2.$$

Умножая обе части его на 6 и сокращая общие множители, находим

$$6n+2n(n-1) \geqslant 3n(n-1)+12,$$

$$n^2-7n+12 \leqslant 0,$$

или, что то же,

$$(n-3)(n-4) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что из всех целых значений n допустимыми являются лишь $n=3$ и $n=4$. Поскольку многогранник должен иметь по крайней мере 4 вершины, то $n=3$ отпадает. Остается единственное допустимое значение $n=4$. Следовательно, многогранник, у которого любая вершина соединена ребрами со всеми остальными, может быть лишь тетраэдром.

Заметим, что не использованное нами в полном виде условие выпуклости многогранника тем не менее нельзя отбросить. Как доказал Акош Часар, утверждение задачи не выполняется для произвольных многогранников. Он построил пример невыпуклого многогранника с семью вершинами, попарно соединенными ребрами.

147. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные n чисел. Рассмотрим суммы

$$\begin{aligned}
&a_1,\\
&a_1+a_2,\\
&a_1+a_2+a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_1+a_2+\ldots+a_n.
\end{aligned}$$

Разобьем суммы на n классов, отнеся к одному классу все суммы, дающие один и тот же остаток при делении на n.

задачи также утвердителен: 1 января чаще приходится на воскресенье, чем на понедельник.

Нетрудно показать, что за 400 лет 1 января 56 раз приходится на понедельник и субботу, 57 раз на среду и четверг, 58 раз на воскресенье, вторник и пятницу.

146. Первое решение. Предположим, что у некоторого выпуклого многогранника P имеется более четырех вершин, причем каждая из них соединена ребрами со всеми остальными, и покажем, что подобная гипотеза приводит к противоречию.

Все грани многогранника P имеют форму треугольников, поскольку у любого многоугольника с бо́льшим числом сторон всегда можно найти 2 вершины, не соединенные между собой стороной. Ребро AB многогранника P служит общей стороной двух треугольников — граней, пересекающихся по ребру AB. Поскольку число вершин многогранника P больше 4, то существует вершина C этого многогранника, не совпадающая ни с одной из вершин треугольных граней, которые пересекаются по ребру AB. Следовательно, треугольник ABC не является гранью многогранника P.

Стороны треугольника ABC служат ребрами многогранника P. Проведем разрезы вдоль этих ребер. Тогда поверхность многогранника P распадется на два куска, поскольку P — выпуклый многогранник. (Выпуклость поверхности многогранника используется лишь в этом месте решения. Поверхность невыпуклого многогранника после разрезания вдоль ребер AB, BC и CA могла бы не распасться на отдельные куски.) Внутри каждого из кусков содержится по крайней мере одна вершина многогранника P, поскольку ни один из кусков не совпадает с треугольником ABC. Пусть D — вершина многогранника P, лежащая внутри одного, а E — внутри другого куска. По условию задачи отрезок прямой, соединяющий вершины D и E, должен быть ребром многогранника P и, следовательно, где-то пересечь границу двух кусков — периметр треугольника ABC. Но это невозможно, поскольку ребро DE не имеет общих вершин и не пересекается ни с одним из ребер AB, BC и CA.

Второе решение. Если n вершин многогранника попарно соединены ребрами, то всего у многогранника имеется C_n^2 ребер. Поскольку каждое ребро принадлеобычных годах при делении на 7 дает остаток 5, то есть второе 31 декабря «опережает» первое на 5 дней недели, или, что то же, «отстает» от него на 2 дня недели. Если же от одного 31 декабря до следующего в нашем списке прошло 16 лет (таковы, например, 31 декабря 1896 года и 31 декабря 1912 года), то 3 года из этих 16 лет високосные (1904, 1908 и 1912). Следовательно, при делении на 7 число дней, прошедших от одного 31 декабря до другого, в этом случае дает такой же остаток, как число $16+3=19$, то есть 5.

Из доказанного следует, что в нашем списке, состоящем из 91 тридцать первого декабря, каждый день недели встречается столько же раз, сколько и любой другой (а именно 13 раз). Таким образом, исходная задача свелась к ответу на вопрос: можно ли утверждать, что 31 декабря 1704, 1708, 1804, 1808, 1904 и 1908 годов приходится на воскресенье реже, чем на понедельник?

г. Поскольку 23 октября отделено от 31 декабря того же года промежутком времени в $8+30+31=69$ дней, а при делении на 7 число 69 дает остаток 6, то 31 декабря 1948 года приходится на *пятницу*. Число дней, отделяющих 31 декабря 1908 года от 31 декабря 1948 года, при делении на 7 дает такой же остаток, как число $40+10=50$, то есть 1. Следовательно, 31 декабря 1908 года приходится на *четверг*.

Число дней, отделяющих 31 декабря 1808 года от 31 декабря 1908 года и 31 декабря 1708 года от 31 декабря 1808 года, при делении на 7 дает такой же остаток, как $100+24=124$, то есть 5. Следовательно, 31 декабря 1808 года приходится на *субботу*, а 31 декабря 1708 года — на *понедельник*.

Отсюда мы заключаем, что 31 декабря 1904, 1804 и 1704 годов приходятся соответственно на *субботу*, *понедельник* и *среду*, поскольку, как показано в п. в, если промежуток между двумя «соседними» високосными годами составляет 4 года, то 31 декабря более позднего из них «отстает» от 31 декабря другого года на 2 дня недели.

Итак, на вопрос: «Верно ли, что среди последних дней 1704, 1708, 1804, 1808, 1904 и 1908 годов воскресенья встречаются реже, чем понедельники», — следует отвечать утвердительно. Таким образом, ответ исходной скольку число 497 делится на 7 без остатка, то можно утверждать, что календарь каждые 400 лет повторяется и по прошествии 400 лет первое января снова приходится на тот же день недели, как и 400 лет назад. Но число 400 не делится на 7, поэтому первое января не может приходиться на все дни недели с одинаковой частотой.

Итак, исходная задача сводится к следующей: можно ли утверждать, что за четыре столетия первое января чаще будет приходиться на воскресенье, чем на понедельник?

б. По прошествии обычного (невисокосного) года первое января сдвигается на один день недели: если первое января предыдущего года приходилось, например, на воскресенье, то первое января следующего года придется на понедельник. По прошествии високосного года первое января сдвигается на два дня недели (то есть вместо воскресенья придется на вторник). Выбрав четыре столетия, идущих одно за другим, выпишем подряд дни недели, на которые приходится 1 января всех 400 лет, а после 1 января каждого високосного года (всего за 400 лет набирается 97 високосных лет) поместим в наш список день недели, на который пришлось 31 декабря того же года. В полученном списке дни недели следуют один за другим в правильной последовательности и каждый день недели встречается столько же раз, сколько и любой другой (а именно 71 раз).

Таким образом, если мы покажем, что последние дни 97 високосных лет реже приходятся на воскресенье, чем на понедельник, то тем самым будет показано, что 1 января чаще приходится на воскресенье, чем на понедельник.

в. Выпишем дни недели, на которые приходятся 31 декабря каждого високосного года от 1600 до 1996, и вычеркнем из получившегося перечня те дни недели, на которые пришлось 31 декабря 1704, 1708, 1804, 1808, 1904 и 1908 годов. В нашем списке останется 91 день недели. Дни следуют один за другим с «опозданием» на 2 дня (например, после воскресенья идет пятница, после четверга — вторник и так далее). Докажем это утверждение. Если от одного 31 декабря в нашем списке до следующего прошло 4 года, то сумма числа дней в разделяющем обе даты одном високосном и трех

Итак, требуется доказать, что если точка P лежит внутри или на границе угла BOC и $r/2 < OP \leqslant r$, то $CP \leqslant r/2$. Повернем отрезок OP вокруг точки O так, чтобы он наложился на радиус OB. Точка P перейдет при этом в некоторую точку Q отрезка BD, где D — середина радиуса OB. Поскольку в треугольниках COP и COQ две стороны равны, а угол, заключенный между ними, у треугольника COQ не меньше, чем у треугольника COP, то $CP \leqslant CQ$. Следовательно, достаточно убедиться в том, что $CQ \leqslant r/2$. Последнее неравенство действительно выполняется, поскольку BCD — равносторонний треугольник со стороной, равной $r/2$, и отрезок, соединяющий его вершину с любой из точек противолежащей стороны, неможет быть больше $r/2$.

б. Круг радиуса r нельзя покрыть менее чем семью кругами радиуса $r/2$. Докажем это утверждение следующим образом. Круг половинного радиуса покрывает лишь часть границы большого круга, причем эта часть не превышает $^1/_6$ всей границы, поскольку наибольшее расстояние между точками круга радиуса $r/2$ составляет r. Именно такое расстояние (по прямой) разделяет концы дуги в $^1/_6$ окружности, ограничивающей круг радиуса r. Следовательно, для того чтобы накрыть границу круга радиуса r, необходимо взять по крайней мере 6 кругов половинного радиуса. Седьмой круг радиуса $r/2$ необходим для того, чтобы накрыть центр большого круга, поскольку круг радиуса $r/2$, содержащий центр O большого круга, может иметь с граничной окружностью самое большее одну общую точку.

145. а. Как известно, год называется високосным, если его порядковый номер делится на 4 (исключение составляют лишь годы, приходящиеся на начало каждого века: год, порядковый номер которого оканчивается двумя нулями, считается високосным лишь в том случае, если его порядковый номер делится на 400). Таким образом, начало века бывает високосным чрезвычайно редко: один раз в 400 лет. При делении на 7 число дней в обычном году дает остаток 1, а число дней в високосном — остаток 2. Следовательно, число дней, содержащихся в четырех столетиях, при делении на 7 дает такой остаток, как число 497, поскольку на каждые четыре столетия приходится 97 високосных лет. Понезнакомых членов компании. Если любые два из трех членов компании, не знакомых с A, знают друг друга, то они также образуют тройку, удовлетворяющую условиям задачи.

Случай, когда в компании не найдется ни трех членов, знакомых с A, ни трех членов, не знакомых с A, представиться не может, ибо тогда число членов компании, знакомых с A, было бы не больше 2 и число членов компании, не знакомых с A, также было бы не больше 2, то есть вся компания (включая A) состояла бы не более, чем из 5 членов. Таким образом, утверждение задачи выполняется во всех случаях*.

144. а. Исходный круг радиуса r можно покрыть семью кругами вдвое меньшего радиуса. Расположение

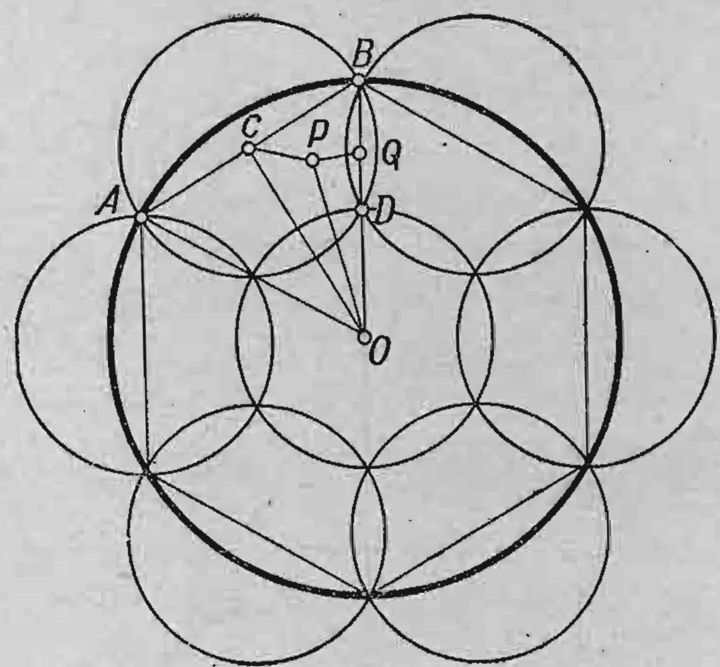


Рис. 114.

кругов показано на рис. 114: центры шести малых кругов совпадают с серединами сторон правильного шестиугольника, вписанного в окружность, которая ограничивает большой круг, а центр седьмого малого круга совпадает с центром большого круга.

Докажем, что семь малых кругов при таком расположении действительно накрывают большой круг. Пусть AB — одна из сторон правильного шестиугольника, вписанного в границу большого круга, а C — ее середина. Ясно, что можно ограничиться рассмотрением той части большого круга, которая заключена внутри угла BOC и лежит вне круга радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в точке O.

Следовательно, выражение n принимает максимальное значение, если, например, $x = a$, $y = c$, $z = b$, $t = d$, и минимальное, если, например, $x = a$, $y = b$, $z = d$, $t = c$.

142. Первое решение. Поскольку $1947 = 33 \cdot 59$, а 33 и 59 — взаимно простые числа, достаточно показать (см. III.23), что $46^n + 296 \cdot 13^n$ делится на каждое из чисел 33 и 59 в отдельности. Как известно, $a^n - b^n$ делится на $a - b$, и если n — нечетное число, то $a^n + b^n$ делится на $a + b$. Следовательно, $46^n + 296 \cdot 13^n = (46^n - 13^n) + 9 \cdot 33 \cdot 13^n$ делится на $46 - 13 = 33$, а если n — нечетное число, то $46^n + 296 \cdot 13^n = (46^n + 13^n) + 5 \cdot 59 \cdot 13^n$ делится на $46 + 13 = 59$. Тем самым утверждение задачи доказано.

Второе решение. Задачу 142 можно решить, не разлагая число 1947 на взаимно простые множители, если приведенное в условиях задачи выражение преобразовать, например, следующим образом:

$$46^n + 296 \cdot 13^n = 46\left(46^{n-1} - 13^{n-1}\right) + (46 + 296 \cdot 13) \cdot 13^{n-1}.$$

Поскольку число n нечетно, то число $n - 1$ четно, поэтому первое слагаемое в правой части содержит сомножитель $46^{n-1} - 13^{n-1}$, который делится на $46^2 - 13^2 = (46 - 13)(46 + 13) = 1947$. Второе слагаемое в правой части содержит сомножитель $46 + 296 \cdot 13 = 2 \cdot 1947$. Следовательно, и все выражение $46^n + 296 \cdot 13^n$ также делится на 1947.

143. Пусть A — один из членов компании. Предположим сначала, что A и трое членов компании знакомы между собой. Если двое из этих трех членов знают друг друга, то «трио», состоящее из них и A, удовлетворяет всем условиям задачи, поскольку любые два из его членов знакомы друг с другом. Если же трое членов компании, знакомых с A, не знают друг друга, то они образуют тройку членов компании, также удовлетворяющую всем условиям задачи.

Предположим теперь, что в компании есть трое членов, не знакомых с A. Если двое из них не знакомы друг с другом, то A и эти двое удовлетворяют всем условиям задачи, поскольку образуют тройку попарно так как по условиям задачи сомножители $b-a$ и $d-c$ положительны, а с другой стороны, как показывают аналогичные соображения,

$$n(a, c, b, d)-n(a, b, c, d)=$$
$$=(a-c)^2+(b-d)^2-(a-b)^2-(c-d)^2=$$
$$=2(ab+cd-ac-bd)=2(c-b)(d-a)>0.$$

Таким образом, значения, принимаемые выражением n, можно расположить по величине следующим образом:

$$n(a, c, b, d)>n(a, b, c, d)>n(a, b, d, c).$$

Второе решение. Ясно, что выражение

$$n(x, y, z, t)+(x-z)^2+(y-t)^2=$$
$$=n(x, y, z, t)+(x^2+y^2+z^2+t^2)-2(xz+yt)$$

не зависит от того, какую перестановку чисел a, b, c, d мы выберем в качестве значений независимых переменных, поскольку оно представляет собой сумму квадратов шести попарных разностей независимых переменных. Выражение $x^2+y^2+z^2+t^2$ также принимает одно и то же значение при любой перестановке значений a, b, c, d независимых переменных. Следовательно, значение n зависит лишь от того, какое значение принимает выражение $xz+yt$, и достигает вместе с ним наибольшего и наименьшего значения.

Значение выражения $v=xz+yt$ зависит от того, каким образом разбиты на пары числа a, b, c, d, поскольку v представляет собой не что иное, как сумму произведений чисел, образующих каждую пару. Числа a, b, c, d можно разбить на пары тремя различными способами (например, к одной паре отнести числа a и b, а к другой — числа c и d), поэтому v принимает три значения:

$$v_1=ab+cd, \quad v_2=ac+bd, \quad v_3=ad+bc.$$

Эти значения различны и удовлетворяют неравенствам

$$v_1>v_2>v_3,$$

поскольку

$$v_1-v_2=(d-a)(c-b)>0,$$
$$v_3-v_2=(b-a)(d-c)>0.$$

логичные рассуждения для прямых, проведенных через центр тяжести S треугольника ABC параллельно его сторонам AC и BC, получим, что утверждение задачи выполняется для любой точки, принадлежащей треугольникам SBC и SCA. Поскольку треугольники SAB, SBC и SCA составляют треугольник ABC, то тем самым доказано, что утверждение задачи выполняется для любой точки треугольника ABC.

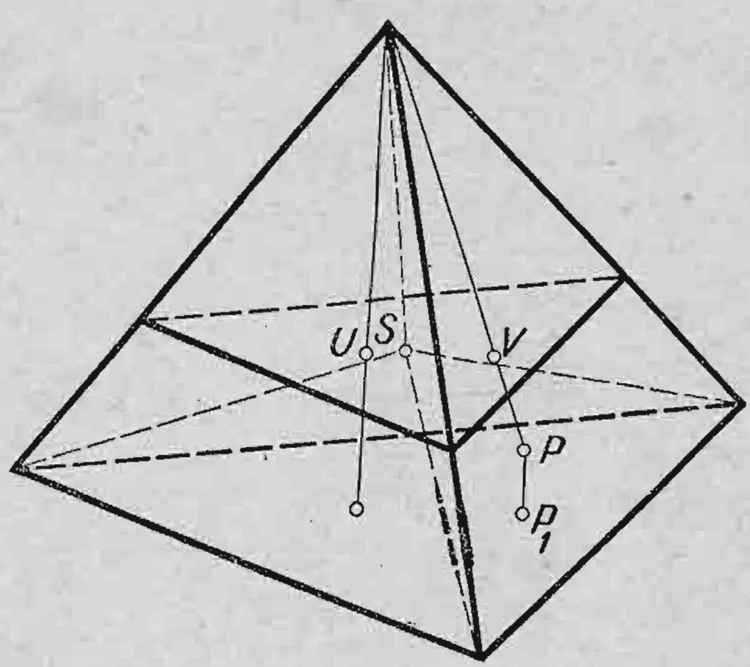


Рис. 113.

Доказательство останется по существу неизменным, если от плоскости перейти к пространству и вместо треугольника рассматривать тетраэдр (рис. 113).

141. Первое решение. Из явного вида функции n следует, что она не изменяется при циклической перестановке переменных. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $x = a$. Подставив вместо значений переменных a, i_1, i_2, i_3 набор значений a, i_3, i_2, i_1, мы лишь изменим знаки всех разностей, но поскольку в n входят квадраты разностей, то значение n при такой подстановке останется неизменным. Таким образом, из шести перестановок чисел b, c, d лишь три могут привести к различным значениям n. Эти три перестановки чисел b, c, d действительно приводят к различным значениям n, поскольку, с одной стороны,

$$n(a, b, c, d) - n(a, b, d, c) =$$
$$= (b-c)^2 + (d-a)^2 - (b-d)^2 - (c-a)^2 =$$
$$= 2(bd + ac - bc - ad) = 2(b-a)(d-c) > 0,$$

жести граней тетраэдра, те же рассуждения, которые в плоском случае мы проводили для точки F, получим неравенство $r \leqslant \frac{R}{3}$. Наконец, используя утверждение задачи 186, можно доказать неравенство $D \geqslant R$. Таким образом, если тетраэдр содержит центр описанной сферы, то $d \leqslant \frac{1}{3} D$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда тетраэдр правильный,

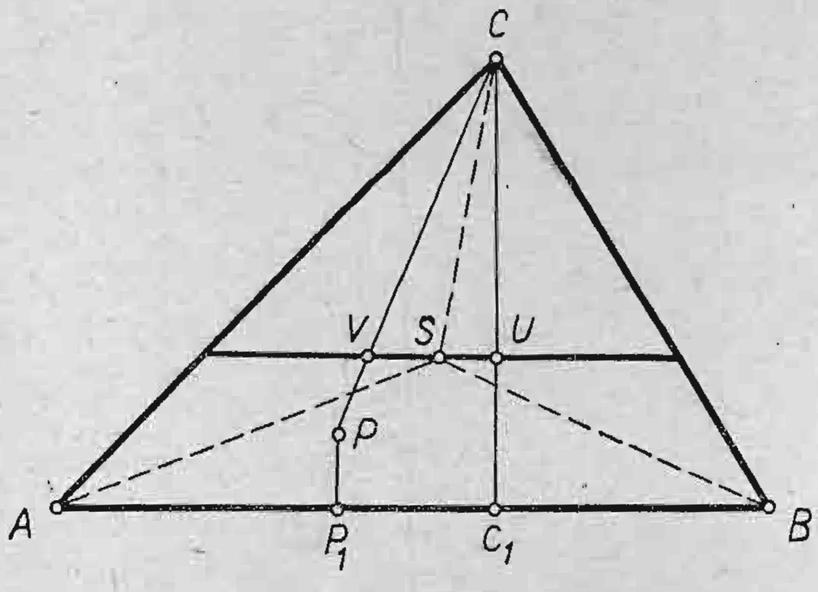


Рис. 112.

а точка P совпадает с общим центром вписанной и описанной сфер.

Как видно из следующего решения, утверждение задачи остается в силе для любого треугольника (и любого тетраэдра).

Третье решение. Через центр тяжести треугольника ABC проведем прямую, параллельную стороне AB (рис. 112). Проведенная прямая отсекает от треугольника ABC трапецию, а от высоты CC_1 отрезок UC_1, равный по длине трети высоты. Если V — точка пересечения отрезка PC и проведенной прямой, то расстояние от любой точки трапеции P до ее основания AB, то есть длина отрезка PP_1, удовлетворяет неравенствам

$$PP_1 \leqslant UC_1 = \frac{1}{2} UC \leqslant \frac{1}{2} VC \leqslant \frac{1}{2} PC.$$

Следовательно, расстояние от точки P до вершины треугольника C по крайней мере вдвое больше расстояния от P до стороны AB, то есть для любой точки трапеции утверждение задачи выполнено.

Следовательно, оно верно и для любой точки содержащегося в трапеции треугольника SAB. Повторяя анав равенства. Первые два неравенства могут превратиться в равенства лишь в том случае, если точка P равноудалена от сторон и равноудалена от вершин треугольника ABC. Предположим, что это условие выполнено. Соединив точку P отрезками прямых с вершинами треугольника ABC и опустив из нее перпендикуляры на его стороны, мы разобьем треугольник ABC на 6 конгруэнтных прямоугольных треугольников, поскольку

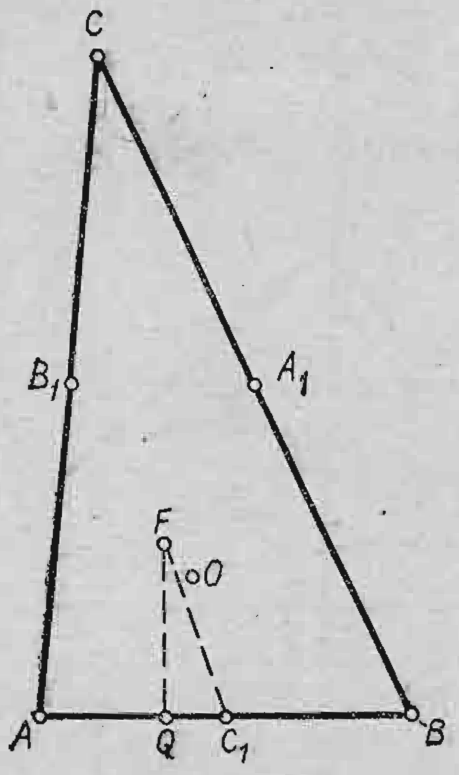


Рис. 111.

все прямоугольные треугольники имеют по равной гипотенузе и равному катету. Но тогда угол при вершине P каждого прямоугольного треугольника равен 60°, а угол при вершине, совпадающей с одной из вершин исходного треугольника, равен 30°. Следовательно, треугольник ABC равносторонний и точка P совпадает с общим центром вписанной и описанной окружностей, в силу чего $r=\frac{R}{2}$ и выполняется соотношение $d=\frac{1}{2}D$.

Второе решение задачи 140 без труда можно обобщить на случай трехмерного пространства, когда вместо треугольника взят тетраэдр. Пусть d и D — длины наименьшего и наибольшего отрезков, соединяющих точку P с вершинами тетраэдра, R — радиус описанной, а r — вписанной сферы. Аналог доказанной нами леммы и неравенство $d \leqslant r$ остаются в силе и для тетраэдра. Если центр описанной сферы принадлежит тетраэдру, то, проведя для центра сферы, проходящей через центры тя-

одно из расстояний ее до сторон треугольника меньше, а другое больше радиуса вписанной окружности r.

Пусть P — точка, расположенная внутри треугольника ABC и не совпадающая с центром вписанной окружности O. Точка P принадлежит одному из треугольников AOB, BOC, COA (двум треугольникам точка P принадлежит лишь в том случае, если она расположена на их общей стороне, то есть принадлежит одному из отрезков OA, OB, OC). Предположим, например, что точка P принадлежит треугольнику AOB (рис. 110). Тогда расстояние от точки P до стороны AB меньше, чем расстояние от точки O до той же стороны, то есть

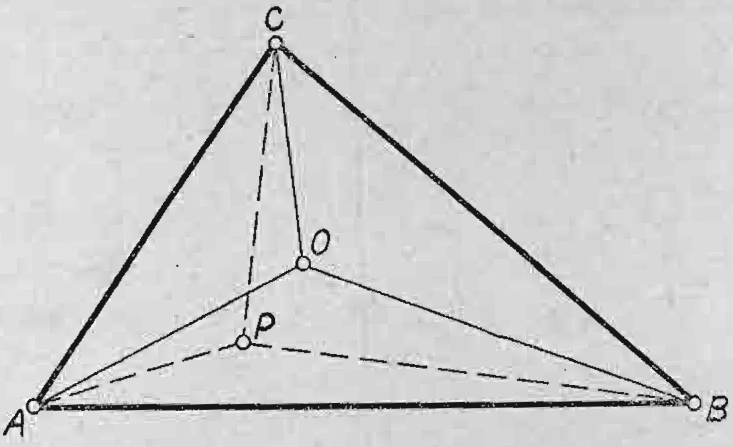


Рис. 110.

меньше r. С другой стороны, центр вписанной окружности O принадлежит одному из треугольников ABP, BCP, CAP, например треугольнику BCP, и, следовательно, расстояние от точки P до стороны BC больше радиуса вписанной окружности r.

Неравенство $d \leqslant r$ следует из первой половины доказанной леммы. Третье неравенство можно доказать следующим образом. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB, а F — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 111). Радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ равен $R/2$. По доказанной лемме, расстояние от точки F до одной из сторон треугольника ABC (пусть это будет AB) не меньше r. Пусть FQ — перпендикуляр, опущенный из точки F на AB. Тогда

$$r \leqslant FQ \leqslant FC_1 = \frac{R}{2},$$

откуда и следует третье неравенство.

Равенство $d = \frac{1}{2} D$ достигается в том случае, когда все три доказанных нами неравенства вырождаются на стороны, лежат на самих сторонах, а не на их продолжениях. Следовательно, отрезки PA, PB, PC и перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 разбивают исходный треугольник ABC на 6 треугольников. Сумма внутренних углов этих треугольников при вершине P равна 360°.

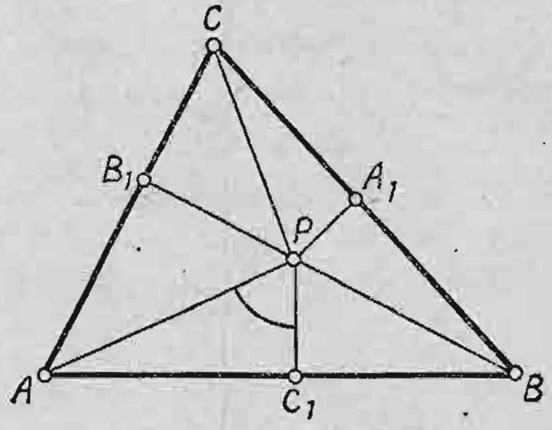


Рис. 109.

Следовательно, по крайней мере один из этих углов не меньше 60°. Предположим, например, что $\angle APC_1 \geqslant 60°$. Тогда

$$d \leqslant PC_1 \leqslant \frac{1}{2} AP \leqslant \frac{1}{2} D.$$

Равенство

$$d = \frac{1}{2} D$$

достигается лишь в том случае, если каждый из 6 углов при вершине P равен 60°. Но тогда углы, образуемые отрезками PA, PB и PC со сторонами треугольника, равны 30°. Следовательно, треугольник ABC в этом случае равносторонний, а точка P совпадает с точкой пересечения биссектрис его внутренних углов, то есть с центром треугольника.

Второе решение. Пусть r — радиус вписанной, а R — радиус описанной окружности. Утверждение задачи следует из неравенств

$$d \leqslant r, \quad D \geqslant R, \quad r \leqslant \frac{R}{2}.$$

Докажем эти неравенства. Второе из них совпадает с первой половиной утверждения задачи 102, поэтому неравенство $D \geqslant R$ можно считать доказанным. Остальные два неравенства можно вывести из следующей леммы.

Пусть точка P расположена внутри треугольника и не совпадает с центром вписанной окружности. Тогда поскольку каждое знакомство означает, что два человека знают друг друга. Следовательно, сумма нечетных чисел, названных при опросе членами компании, четна, ибо в противном случае общая сумма не могла бы быть четной. Но из четности суммы нечетных чисел следует, что число нечетных слагаемых четно. Следовательно, число членов компании, имеющих нечетное число знакомых, четно, что и требовалось доказать.

Задача 139 встречается и во многих других формулировках. Приведем лишь некоторые из них.

Доказать, что число всех когда-либо живших на Земле людей, которые обменялись нечетным числом рукопожатий, четно.

Доказать, что у любого многогранника число граней с нечетным числом ребер четно.

Доказать, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

По существу все эти задачи сводятся к одной и той же задаче из теории графов (см. III. 52).

В любом конечном графе число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

В случае последней задачи вершинами графа являются вершины многогранника, а ребрами графа — ребра многогранника.

В случае исходной олимпиадной задачи и задачи о числе людей, обменявшихся нечетным числом рукопожатий, вершины графа обозначают людей, о которых идет речь, а ребра соединяют те вершины, которые соответствуют знакомым или обменявшимся между собой рукопожатиями. В задаче о числе граней произвольного многогранника, обладающих нечетным числом ребер, каждой грани многогранника сопоставим по одной вершине графа и соединим ребрами те вершины, которые соответствуют граням, имеющим общее ребро.

Решения задачи 139 по существу содержат доказательство приведенной выше теоремы из теории графов.

140. Первое решение. Соединим точку P, расположенную внутри треугольника ABC, отрезками прямых с вершинами A, B и C и опустим из нее перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на стороны BC, CA, AB (рис. 109). Если треугольник остроугольный, то основания перпендикуляров, опущенных из любой его внутренней точки вающие исходный треугольник ABC. Один из этих треугольников целиком расположен внутри треугольника ABC. Именно его площадь и составляет $^1/_7$ от площади треугольника ABC. Докажем это. Кроме малого треугольника, целиком расположенного внутри исходного треугольника, треугольник ABC покрывают еще 12 малых треугольников. Объединяя их по 4, можно составить 3 параллелограмма. Одна из диагоналей каждого параллелограмма совпадает с соответствующей стороной треугольника ABC, а площадь каждого из параллелограммов равна учетверенной площади малого треугольника.

Таким образом, исходный треугольник ABC составлен из одного малого треугольника и трех треугольников вдвое большей площади (каждый треугольник представляет собой половину одного из параллелограммов). Следовательно, площадь малого треугольника составляет $^1/_7$ от площади треугольника ABC, что и требовалось доказать.

139. Первое решение. Для доказательства утверждения задачи воспользуемся методом полной математической индукции по числу знакомств (пар людей, знакомых друг с другом).

Если в компании имеется лишь двое людей, знакомых друг с другом (то есть если число знакомств равно 1), то утверждение задачи очевидно. Предположим, что оно выполняется в том случае, если число знакомств равно k. Что произойдет, если число знакомств увеличится на 1, то есть если двое людей, не знавших друг друга ранее, познакомятся? Если один из них был до этого знаком с нечетным, а другой — с четным числом членов компании, то число тех членов компании, кто имел нечетное число знакомых, не изменилось (изменился лишь состав этой группы). Если же до того, как состоялось знакомство, оба имели либо четное, либо нечетное число знакомых, то число членов компании, имеющих нечетное число знакомых, либо увеличилось на 2, либо уменьшилось на 2 и, следовательно, осталось четным, что и требовалось доказать.

Второе решение. Спросим у каждого члена компании, сколько у него знакомых, а все названные в ответ числа сложим. Полученная сумма заведомо четна, выполняется для построенного треугольника ABC и тем самым для всех равносторонних треугольников.

Третье решение. Докажем, что утверждение задачи остается верным и в том случае, если ABC не равносторонний, а произвольный треугольник. Разделим стороны AC и CB треугольника ABC на 3 равные части (рис. 108). Ближайший к вершине A конец среднего отрезка, лежащего на стороне AC, соединим отрезком прямой с вершиной B, а через другой конец того же

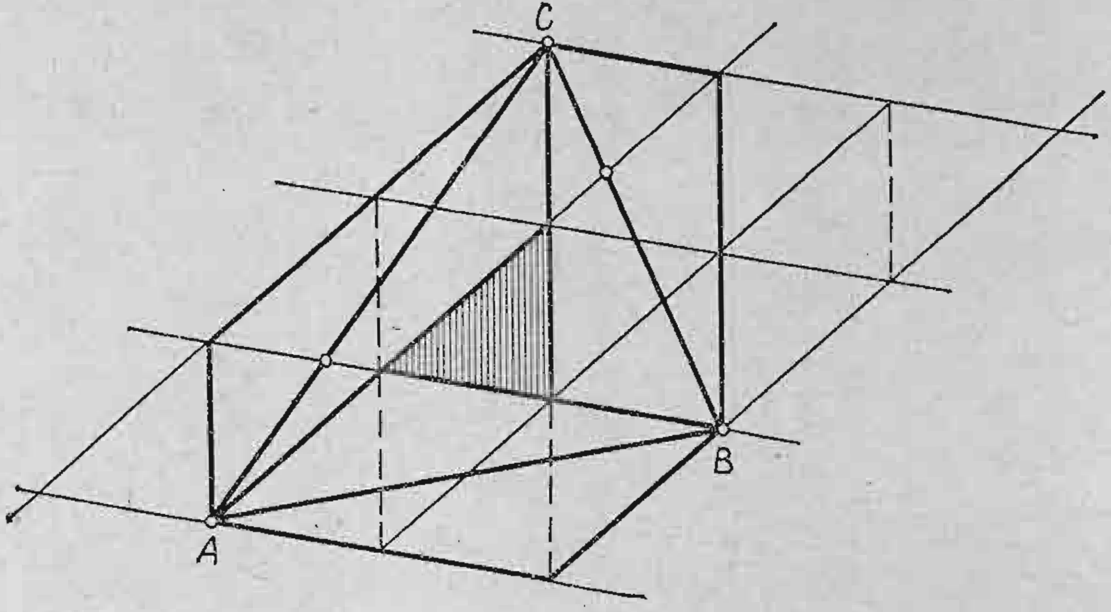


Рис. 108.

отрезка и вершины A и C проведем прямые, параллельные полученной прямой. Повторим аналогичное построение, начав его с ближайшего к вершине C конца среднего отрезка стороны BC. В результате мы получим один большой параллелограмм, описанный вокруг треугольника ABC и состоящий из 3×3 малых параллелограммов.

Проведя диагональ большого параллелограмма, проходящую через вершину C, и параллельные ей диагонали малых параллелограммов, мы получим 5 параллельных и равноотстоящих прямых. Две из них проходят через вершины A и B треугольника ABC, а две другие пересекаются со стороной AB, деля ее на три равные части.

Ближайшая к вершине B из двух последних прямых проходит через вершину C. Проведенные прямые разбивают малые параллелограммы на конгруэнтные треугольники, образующие треугольную решетку и покры-

Второе решение. Утверждение задачи достаточно доказать для какого-нибудь одного равностороннего треугольника, поскольку все равносторонние треугольники подобны, а растяжение или сжатие сторон не изменяет отношения площадей треугольников ABC и $A_2B_2C_2$. Проще всего утверждение задачи можно доказать, если взять равносторонний треугольник $A_2B_2C_2$ и на продолжениях его сторон A_2B_2, B_2C_2 и C_2A_2 за вершины B_2, C_2 и A_2 отложить отрезки, равные по длине любой из его сторон (рис. 107). Концы этих отрезков

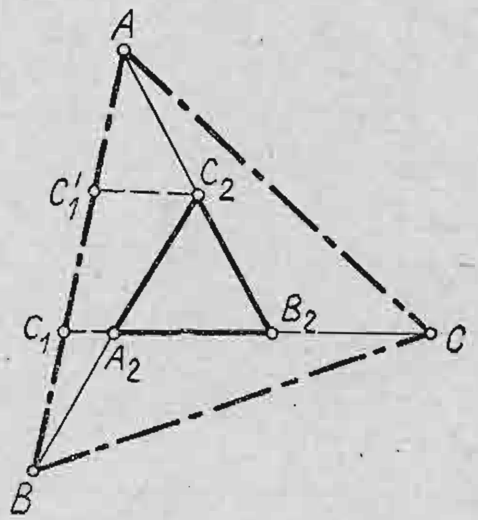


Рис. 107.

обозначим A, B и C. Если исходный треугольник $A_2B_2C_2$ равносторонний, то и треугольник с вершинами в точках A, B, C заведомо равносторонний. Из рассуждений, приведенных в первых двух абзацах предыдущего решения, следует, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ составляет $^1/_7$ площади треугольника ABC. Покажем, что продолжения сторон малого треугольника $A_2B_2C_2$ отсекают от сторон большого треугольника ABC отрезки, равные $^1/_3$ их длины. Например, пусть C_1 — точка пересечения продолжения стороны A_2B_2 малого треугольника со стороной AB большого треугольника. Проведем через вершину C_2 прямую, параллельную отрезку A_2C_1. Пусть C_1' — точка пересечения этой прямой со стороной AB. Поскольку $AC_2 = C_2B_2$, то $AC_1' = C_1'C_1$. Кроме того, из $C_2A_2 = A_2B$ следует, что $C_1'C_1 = C_1B$. Итак,

$$BC_1 = C_1C_1' = C_1'A = \frac{1}{3}AB.$$

Аналогичное утверждение доказывается и относительно двух других сторон. Следовательно, утверждение задачи

Соотношение между площадями будет установлено, если мы докажем, что точки A_2, B_2, C_2 делят пополам отрезки BC_2, CA_2, AB_2. Например, для треугольников ABC_2 и $A_2B_2C_2$ отсюда будет следовать, что $AC_2 = C_2B_2$ и высота, опущенная из вершины B на AC_2, вдвое больше высоты, опущенной из вершины A_2 на C_2B_2, в силу чего площадь треугольника ABC_2 вдвое больше площади треугольника $A_2B_2C_2$.

По условиям задачи треугольник ABC равносторонний, поэтому треугольник $A_2B_2C_2$ — также равносторонний и отрезки AC_2, BA_2, CB_2 равны. При повороте

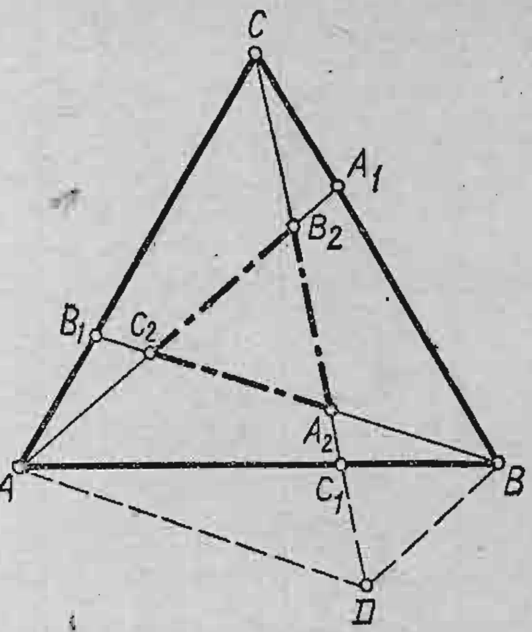


Рис. 106.

на 120° вокруг своего центра треугольник ABC переходит в себя, а отрезки AC_2, BA_2 и CB_2 — друг в друга. Следовательно, достаточно доказать, что точка A_2 делит пополам отрезок BC_2.

Пусть D — точка пересечения прямой, проведенной через вершину B параллельно отрезку AA_1, с продолжением отрезка CC_1. Треугольник A_2BD равносторонний, поскольку его стороны параллельны сторонам правильного треугольника $A_2B_2C_2$. Поэтому $BD = BA_2$, а так как $BA_2 = AC_2$, то $BD = AC_2$ и четырехугольник AC_2BD — параллелограмм.

Отрезки BC_2 и DA равны как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, необходимо доказать, что $BA_2 = {}^1/_2 DA$. Рассмотрим треугольники A_2BC_1 и DAC_1. Поскольку их стороны параллельны, то эти треугольники подобны, а их сходственные стороны относятся между собой, как $BC_1 : AC_1 = {}^1/_2$. Следовательно, $BA_2 : DA = {}^1/_2$, что и требовалось доказать.

внутренних углов треугольников, вершины которых совпадают с вершинами прямоугольника, равна $4 \cdot 90°$. Сумма внутренних углов, вершина которых совпадает с узлом решетки, расположенным на стороне прямоугольника, равна $180°$ для каждого узла. Сумма внутренних углов треугольников, вершина которых совпадает с узлом решетки, расположенным внутри прямоугольника, равна $360°$ для каждого узла. Следовательно, сумма всех внутренних углов основных решеточных треугольников, образующих прямоугольник, определяется узлами решетки, принадлежащими прямоугольнику. С другой стороны, сумму внутренних углов треугольников можно представить в виде произведения $180° \cdot k$, где k — число треугольников. Следовательно, и число треугольников определяется лишь узлами решетки, принадлежащими прямоугольнику.

Разобьем прямоугольник на единичные квадраты и в каждом квадрате проведем диагональ. Число получившихся при этом половинок квадрата совпадает с числом основных решеточных треугольников в данном разбиении прямоугольника, а площадь каждой из них равна $1/2$. Таким образом, площадь прямоугольника равна половине содержащихся в нем основных решеточных треугольников. Отсюда следует, что и при любом разбиении прямоугольника на основные решеточные треугольники площадь каждого из них должна быть равна $1/2$, поскольку площадь любого решеточного треугольника не меньше $1/2$ (площадь решеточного треугольника равна произведению $1/2$ и некоторого целого числа) [1]. Следовательно, площадь основного решеточного треугольника равна $1/2$, что и требовалось доказать.

138. Первое решение. Пусть C_2, A_2 и B_2 — точки пересечения отрезков AA_1 и BB_1, BB_1 и CC_1, CC_1 и AA_1. Задача будет решена, если мы докажем, что площадь каждого из треугольников ABC_2, BCA_2 и CAB_2 вдвое больше площади треугольника $A_2B_2C_2$, поскольку эти четыре треугольника вместе составляют треугольник ABC (рис. 106).

[1] Как показано в решении задачи 134, площадь решеточного треугольника достигает своего наименьшего значения лишь для основных решеточных треугольников.

квадратной решетки с выбранным квадратом, а интересующая нас точка окажется накрытой той частью параллелограмма $ABCD$, которая находилась в этой ячейке.

Поскольку площадь выбранного квадрата равна 1, то и площадь параллелограмма $ABCD$ также равна 1.

Четвертое решение. Утверждение задачи эквивалентно тому, что площадь всякого основного решеточного треугольника равна $1/2$. Действительно, проведя

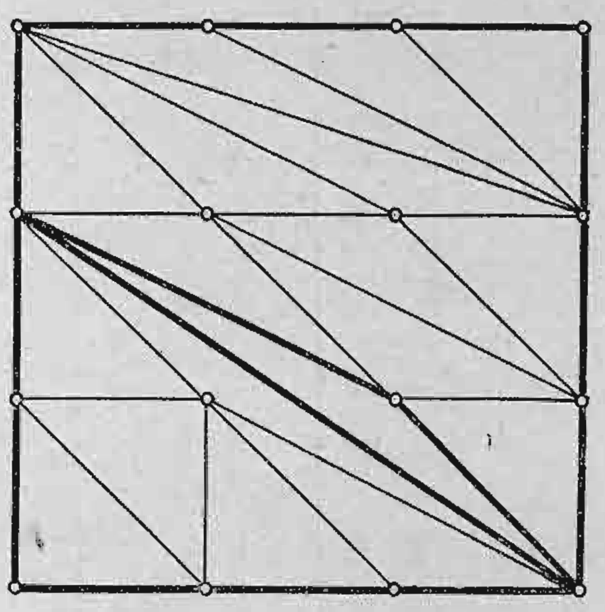


Рис. 105.

диагональ, мы всегда можем разложить любой основной решеточный параллелограмм на два равных по площади основных решеточных треугольника и, наоборот, построив треугольник, симметричный основному решеточному треугольнику относительно любой из его сторон, получить основной решеточный параллелограмм, площадь которого вдвое больше площади треугольника.

Рассмотрим основной решеточный треугольник. Он содержится в некотором решеточном прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат. Разобьем этот прямоугольник на основные решеточные треугольники так, чтобы одним из них был выбранный нами треугольник (рис. 105).

Покажем, что число основных решеточных треугольников, содержащихся в решеточном прямоугольнике, не зависит от способа разбиения данного прямоугольника на такие треугольники.

Вычислим сумму внутренних углов всех треугольников. Их вершинами служат узлы решетки, расположенные внутри прямоугольника и на его сторонах. Сумма

Выбрав какой-нибудь квадрат, сдвинем в него при помощи параллельного переноса части, на которые рассекает параллелограмм $ABCD$ квадратная решетка. (На рис. 104 выбран квадрат с диагональю AB.) Оказавшиеся в квадрате части параллелограмма не имеют общих внутренних точек. Действительно, если при параллельном переносе, совмещающем выбранный нами

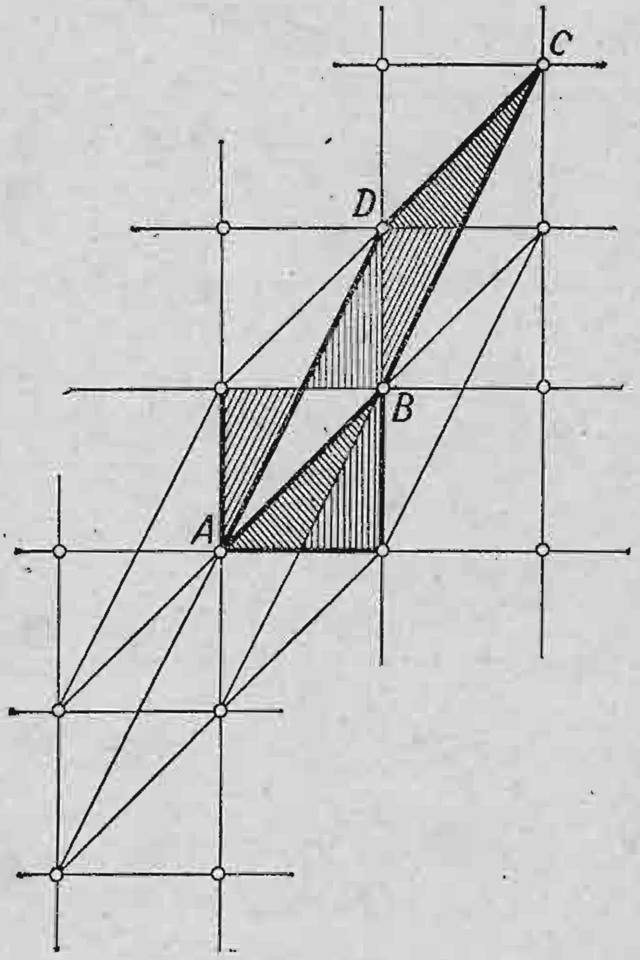


Рис. 104.

квадрат с любой другой ячейкой квадратной решетки, мы будем передвигать и весь параллелограмм $ABCD$, то он перейдет в какую-то другую ячейку решетки параллелограммов, причем при различных параллельных переносах параллелограмм $ABCD$ будет совмещаться с различными ячейками, которые заполняют всю плоскость, не перекрываясь друг с другом. С другой стороны, каждая точка выбранного нами квадрата принадлежит какой-то ячейке решетки параллелограммов, поскольку эти ячейки заполняют всю плоскость без пробелов. Рассмотрим любую точку выбранного нами квадрата. Совместив при помощи параллельного переноса параллелограмм $ABCD$ с содержащим ее параллелограммом, мы тем самым совместим одну из ячеек

AB. Пусть E — третья вершина треугольника, в который перешел треугольник BCD. Точка E симметрична вершине параллелограмма D относительно середины стороны AB. Треугольник ABE не содержит других узлов решетки, кроме тех, которые совпадают с его вершинами. Действительно, если бы треугольник ABE содержал хотя бы один узел решетки, отличный от вершин A, B, E, то узел, симметричный этому узлу относительно середины отрезка AB, находился бы в треугольнике ABD и, следовательно, принадлежал бы параллелограмму $ABCD$, что невозможно, поскольку $ABCD$ — основной параллелограмм.

Итак, исходя из параллелограмма $ABCD$, мы построили равновеликий ему основной решеточный параллелограмм $ADBE$. Новый параллелограмм проектируется на ось x в отрезок $A'B'$, поскольку вместе с точкой D на отрезок $A'B'$ должна проектироваться и симметричная ей относительно середины отрезка AB точка E; при этом $A'B' < A'C'$. То же построение можно повторять до тех пор, пока сторона последнего из полученных параллелограммов не расположится перпендикулярно оси x. Это произойдет после конечного числа шагов, поскольку длины отрезков, в которые проектируются параллелограммы, выражаются положительными целыми числами, а убывающая последовательность положительных целых чисел, не превышающих данного, может содержать лишь конечное число членов. В отрезок наименьшей длины проектируется на ось x параллелограмм, сторона которого перпендикулярна этой оси. По доказанному в п. а площадь такого параллелограмма равна 1. Следовательно, площадь равновеликого ему параллелограмма $ABCD$ также равна 1.

Третье решение. Пусть $ABCD$ — основной решеточный параллелограмм. Приняв его за исходный, построим решетку параллелограммов. С другой стороны, проведя через узлы решетки прямые, параллельные осям x и y, получим решетку квадратов со стороной, равной 1. Каждая из решеток заполняет всю плоскость без пробелов и кратных покрытий (рис. 104). На рисунке обе решетки показаны лишь частично: изображены лишь те квадраты, которые частично перекрываются с параллелограммом $ABCD$, и параллелограммы, имеющие общие части с этими квадратами.

отрезок, параллельный стороне AB, который бы проектировался на ось x в ближайший (то есть отстоящий на единичное расстояние) к проекции стороны AB узел решетки (рис. 102). Концы или одна из внутренних точек такого отрезка непременно совпали бы с узлами

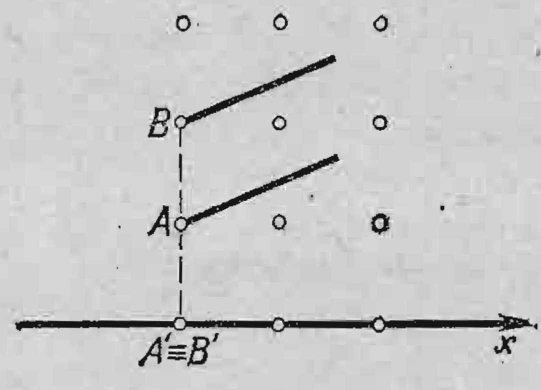


Рис. 102.

решетки, и решеточный параллелограмм не был бы основным. Следовательно, площадь основного решеточного параллелограмма со стороной, перпендикулярной оси x, равна 1, что и требовалось доказать.

б. Предположим, что стороны основного решеточного параллелограмма $ABCD$ не перпендикулярны оси

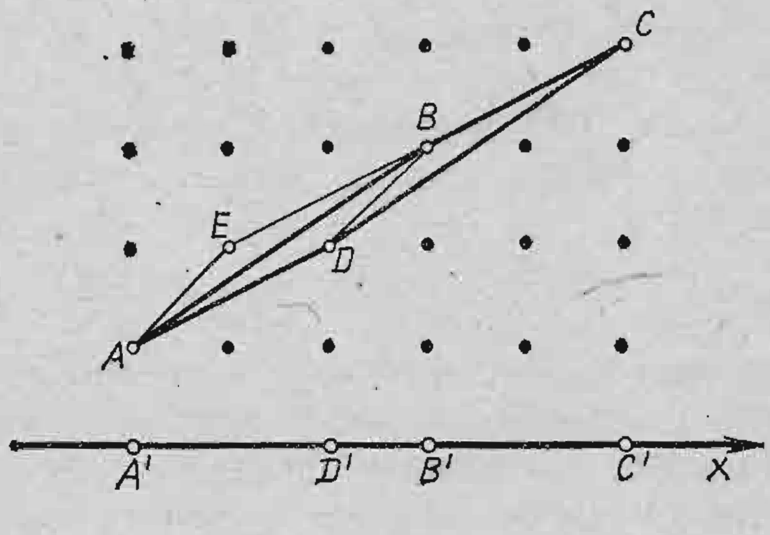


Рис. 103.

x. Тогда параллелограмм $ABCD$ можно заменить равновеликим ему основным решеточным параллелограммом с меньшей проекцией на ось x. Пусть A', B', C', D' — проекции на ось x вершин параллелограмма $ABCD$. Обозначения вершин выберем так, чтобы точки B' и D' были расположены на оси x между точками A' и C', и если точки B' и D' не совпадают, то B' лежала между D' и C' (рис. 103). Сдвинем треугольник BCD так, чтобы его сторона CD совпала со стороной параллелограмма

137. Первое решение. Пусть $D = ad - bc$. Ясно, что все числа a, b, c, d не могут быть равными 0. Пусть, например, $a \neq 0$.

Если $D = 0$, то, полагая $\lambda = c/a$, получаем

$$c = \lambda a, \quad d = \lambda b,$$

откуда следует, что исходная система уравнений допускает решение в целых числах лишь при $n = \lambda m$, что противоречит условию задачи.

Таким образом, $D \neq 0$.

При заданных m и n исходная система уравнений имеет решение

$$x = \frac{md - nb}{D}, \quad y = \frac{na - mc}{D},$$

которое при всех парах целых чисел (m, n) должно быть лишь целочисленным. Выбирая $m = 1$, $n = 0$ и $m = 0$, $n = 1$, находим

$$x_1 = \frac{d}{D}, \quad y_1 = -\frac{c}{D}, \quad x_2 = -\frac{b}{D}, \quad y_2 = \frac{a}{D}.$$

Следовательно,

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{1}{D}$$

— целое число. Но D и $1/D$ могут быть целыми одновременно лишь в том случае, если

$$D = \pm 1,$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем перейти к последующим решениям, следует прочесть III.67.

Второе решение. Докажем сначала, что площадь основных решеточных параллелограммов частного вида, у которых две противоположные стороны перпендикулярны оси x, равна 1, а затем убедимся в том, что любой из основных решеточных параллелограммов равновелик одному из таких параллелограммов.

а. Если сторона AB основного решеточного параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна оси x, то она имеет единичную длину и высота, опущенная на нее, также равна 1. Действительно, если бы высота параллелограмма, опущенная на сторону AB, была больше 1, то решеточный параллелограмм содержал бы единичный

В приведенном выше решении мы воспользовались тем, что если **a**, **b**, **c** — радиусы-векторы вершин треугольника, то радиус-вектор его центра тяжести можно представить в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

В самом деле, из рис. 101

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{OF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OF} + \frac{1}{3}(\mathbf{c} - \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OF} + \mathbf{c}),$$

но поскольку

$$\overrightarrow{OF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

то

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Полученный результат можно сформулировать так: центр тяжести однородной треугольной пластинки совпа-

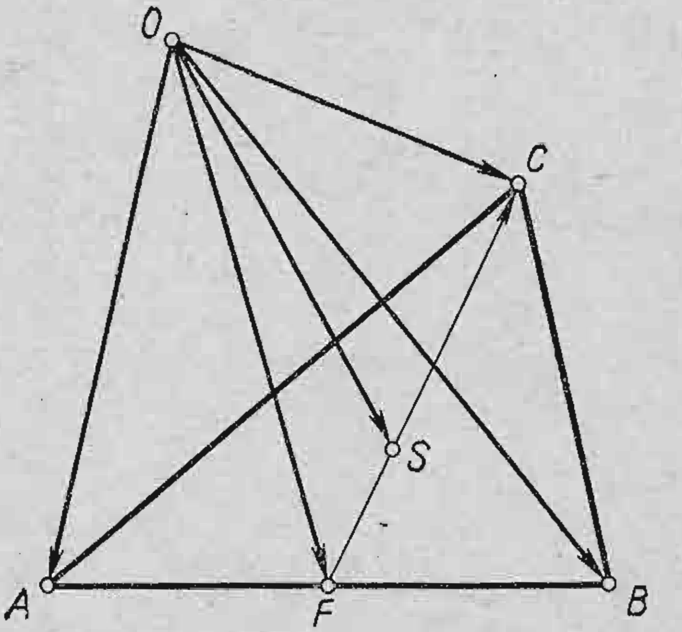


Рис. 101.

дает с центром тяжести трех ее вершин (относительно центра тяжести см. III. 56).

136. Любая из высот треугольника не может быть больше сторон, выходящих из той же вершины.

Если бы две стороны треугольника оказались меньше опущенных на них высот, например, если бы $a < h_a$ и $b < h_b$, то выполнялось бы неравенство

$$a < h_a \leqslant b < h_b \leqslant a,$$

что невозможно.

Общую теорему о подобии треугольников $S_1S_2S_3$ и $A_1A_2A_3$ можно легко доказать при помощи векторов. Проведем векторы из точки O в точки A_i, B_i, C_i, S_i ($i = 1$, 2, 3) и обозначим их $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{s}_i$. Тогда

$$\mathbf{s}_i = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

По условию, повернув стороны треугольников A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 на один и тот же угол (равный $\angle A_2A_1A_3$) и растянув или сжав в одном и том же отношении (равном $A_1A_3 : A_1A_2$), мы получим стороны A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3.

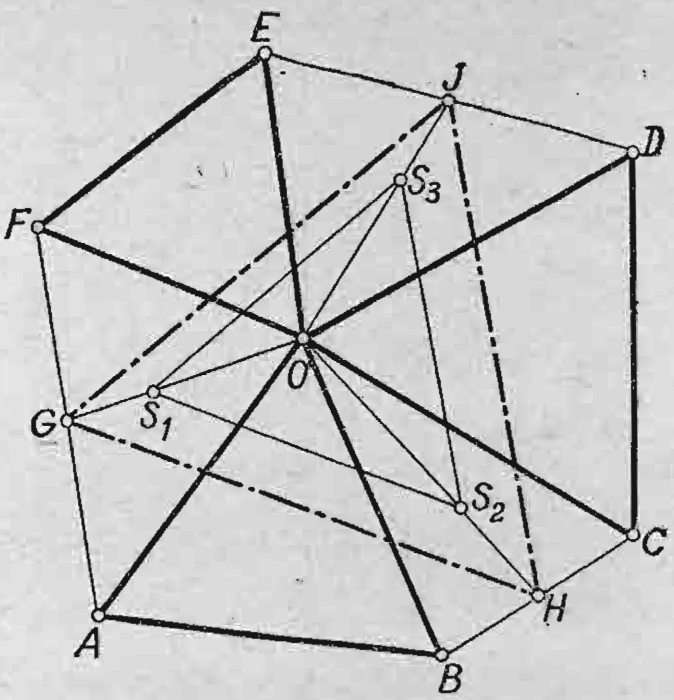


Рис. 100.

Направление и величина стороны S_1S_2 треугольника с вершинами, совпадающими с центрами тяжести треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$, определяются направлением и длиной вектора

$$\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1 = \frac{1}{3}[(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) + (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1)].$$

Если все векторы в правой части этого равенства повернуть на угол $A_2A_1A_3$ и растянуть или сжать в отношении $A_1A_3 : A_1A_2$, то тем же преобразованиям подвергнется и вектор, стоящий в левой части равенства. По условиям задачи правая часть после поворота и растяжения (или сжатия) перейдет в вектор

$$\frac{1}{3}[(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) + (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_1) + (\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_1)],$$

равный $\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1 = \overrightarrow{S_1S_3}$. Но это и означает, что треугольник $S_1S_2S_3$ подобен треугольнику $A_1A_2A_3$.

$(\overrightarrow{G_1H_1})' = \overrightarrow{H_1J_1}$. Итак, в треугольнике $G_1H_1J_1$ две стороны равны, а внешний угол между ними составляет $120°$. Следовательно, треугольник $G_1H_1J_1$ равносторонний, что и требовалось доказать.

Пятое решение. Сформулированное в третьем решении утверждение, содержащее в качестве частного

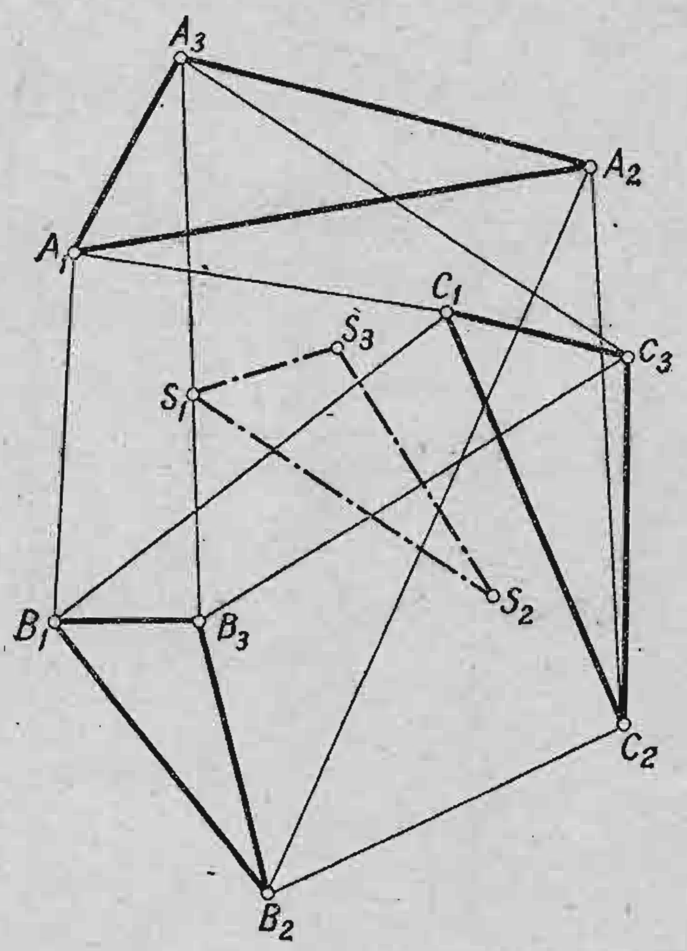


Рис. 99.

случая исходное утверждение задачи, допускает дальнейшее обобщение.

Если на плоскости заданы подобные треугольники $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ *и* $C_1C_2C_3$ *(вершины с одинаковыми значениями индексов соответствуют друг другу) и направления обхода треугольников согласованы, то треугольник* $S_1S_2S_3$, *вершины которого совпадают с центрами тяжести треугольников* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, *подобен треугольнику с вершинами в точках* A_1, A_2, A_3 (рис. 99).

Применив сформулированную теорему к равносторонним треугольникам ABO, OCD, FOE, получим, что треугольник $S_1S_2S_3$ равносторонний (рис. 100). Поскольку этот треугольник гомотетичен треугольнику GHJ относительно O с коэффициентом подобия $^2/_3$, то треугольник GHJ также равносторонний.

Вектор, в который переходит при повороте на 120° вектор $\mathbf{r}$, условимся обозначать $\mathbf{r}'$. Ясно, что

$$\mathbf{r}''' = \mathbf{r}. \qquad (1)$$

Пусть $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$ (рис. 98). Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}', \quad \overrightarrow{BO} = \mathbf{a}'', \quad \overrightarrow{CD} = \mathbf{c}', \quad \overrightarrow{DO} = \mathbf{c}'', \quad \overrightarrow{EF} = \mathbf{e}',$$
$$\overrightarrow{FO} = \mathbf{e}''.$$

Поскольку четырехугольники OFG_1A, OBH_1C, ODJ_1E — параллелограммы, то

$$\overrightarrow{G_1H_1} = \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH_1} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{e}'' + \mathbf{a}' + \mathbf{c}$$

и

$$\overrightarrow{H_1J_1} = \overrightarrow{H_1C} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OE} = \mathbf{a}'' + \mathbf{c}' + \mathbf{e}.$$

Повернув на 120° все векторы, входящие в первое равенство, мы снова получим верное равенство, но при

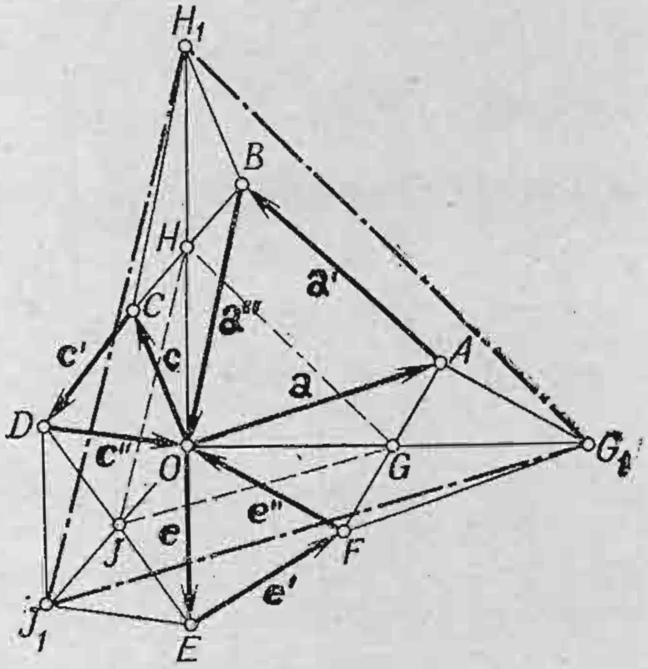


Рис. 98.

этом каждый из векторов «приобретет» по одному штриху:

$$(\overrightarrow{G_1H_1})' = \mathbf{e}''' + \mathbf{a}'' + \mathbf{c}'.$$

Поскольку сумма векторов не изменяется при перестановке слагаемых и троекратный поворот любого вектора на 120° возвращает его в исходное положение, то ствительно, нетрудно видеть, что если OAB и OCD — равносторонние треугольники с согласованным направлением обхода, а K, H, L — середины сторон AB, BC, CD, то отрезки HK и HL равны и угол, заключенный между ними, составляет $120°$ (рис. 97). В самом

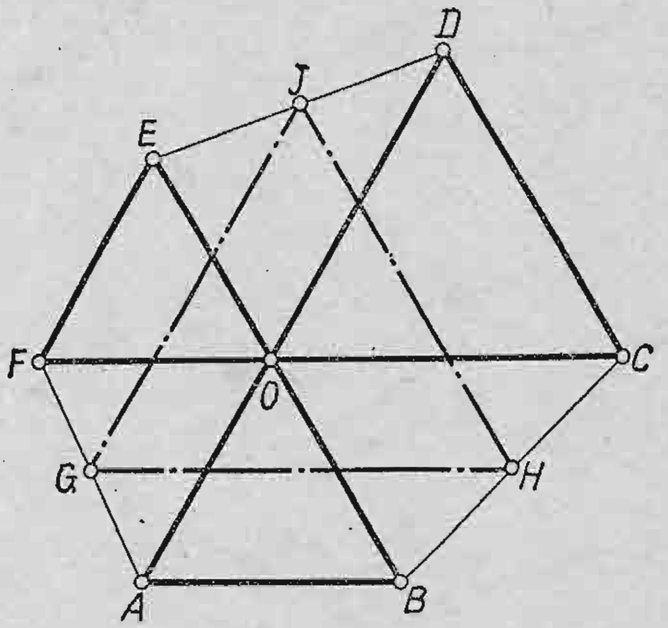


Рис. 96.

деле, легко видеть, что треугольник BOD представляет собой повернутый на $60°$ треугольник AOC.

Четвертое решение. Приведем еще одно доказательство обобщенного утверждения исходной задачи, сформулированного в начале предыдущего решения.

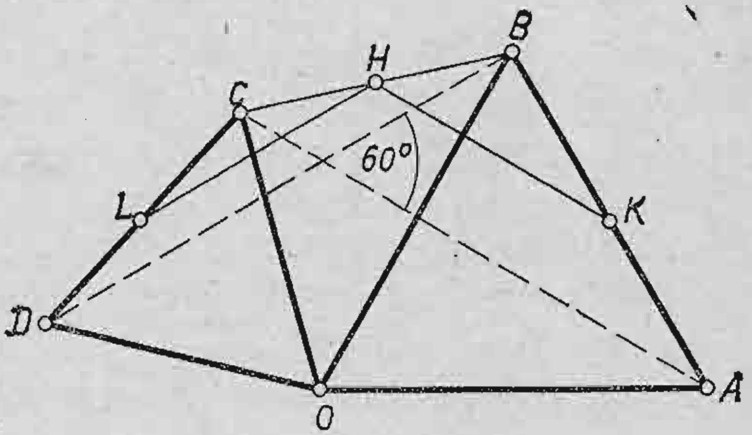


Рис. 97.

Пусть $G_1H_1J_1$ — треугольник, гомотетичный треугольнику GHJ относительно точки O с коэффициентом подобия 2. Ясно, что достаточно доказать равносторонность треугольника $G_1H_1J_1$.

Стороны заданных равносторонних треугольников OAB, OCD и OEF будем рассматривать как векторы, направление которых согласуется с выбранным в предыдущем решении направлением обхода этих треугольников.

H'. Отрезок GG' как средняя линия треугольника FAA' параллелен отрезку AA' и по длине вдвое меньше его. Аналогично $HH' \parallel BB'$ и $HH' = \frac{1}{2} BB'$. Но отрезок BB' равен отрезку AA' и совпадает с ним при повороте на $60°$. Поскольку по предположению треугольник GHJ равносторонний, то отрезок JH равен отрезку JG и совмещается с ним при повороте на $60°$, причем в ту же сторону. Следовательно, треугольники JGG' и JHH' конгруэнтны и при повороте на $60°$ совмещаются друг с другом. Это означает, что отрезки JG' и JH' равны, а

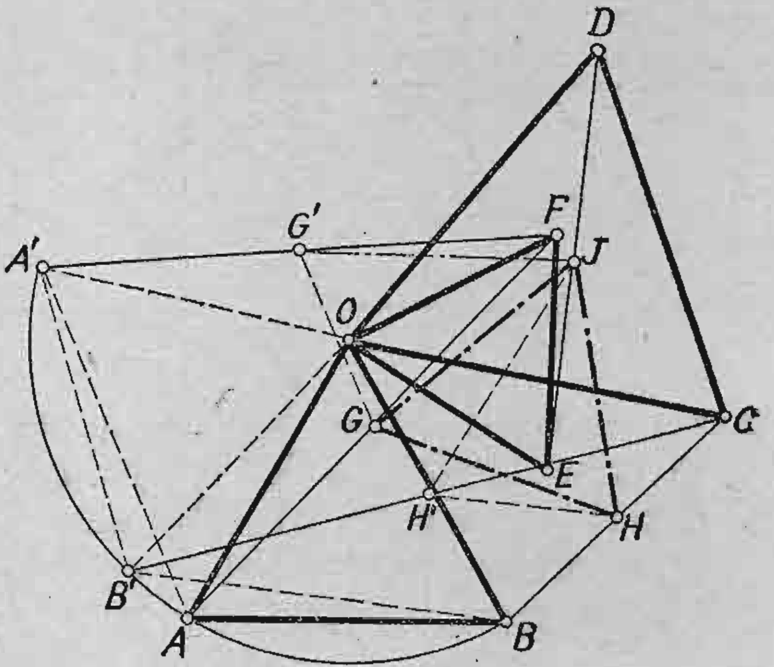


Рис. 95.

угол, заключенный между ними, равен $60°$, в силу чего треугольник $G'H'J$ равносторонний.

Итак, для доказательства обобщенного утверждения задачи 135 достаточно найти такое расположение треугольников, в котором существование равностороннего треугольника GHJ очевидно. Расположим треугольники OAB, OCD, OEF так, чтобы угол, заключенный между сторонами двух соседних треугольников, был равен $60°$ (рис. 96). Тогда сторонами треугольника GHJ будут служить средние линии трапеций $FABC$, $BCDE$ и $DEFA$. Поскольку они параллельны отрезкам FC, BE и DE, попарно образующими углы в $60°$, то угол, заключенный между любыми двумя сторонами треугольника GHJ, равен $60°$. Следовательно, треугольник GHJ равносторонний, что и требовалось доказать.

Обобщение исходного утверждения задачи можно было бы получить и методами второго решения. Дей-

120°, поскольку каждый из углов MNL и KNL, дополняющих его до полного, равен 120°. Следовательно, точка N лежит на дуге MK окружности радиуса GM, описанной вокруг точки G. Отрезки, соединяющие попарно центры G, H, J всех окружностей, перпендикулярны их общим хордам, поэтому стороны треугольника GHJ перпендикулярны отрезкам NK, NL и NM. Любые два из этих отрезков ограничивают угол в 120° (с вершиной в точке N), в силу чего все углы треугольника GHJ равны 60°, то есть треугольник GHJ равносторонний, что и требовалось доказать.

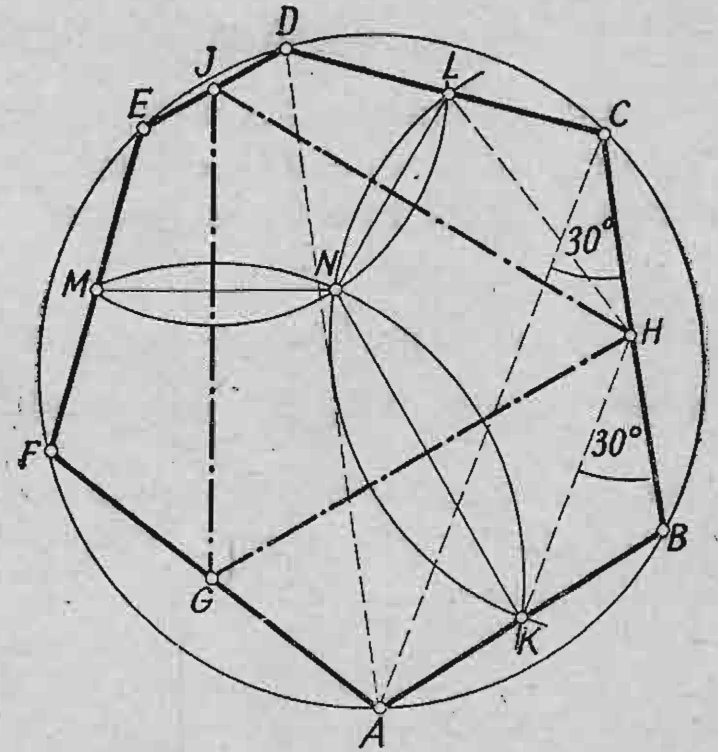


Рис. 94.

Третье решение. Докажем утверждение задачи в следующем обобщенном виде.

Если OAB, OCD и OEF — равносторонние треугольники и обозначения выбраны так, что направления обходов всех трех треугольников совпадают (вершины каждого треугольника надлежит обходить в том порядке, в каком они входят в обозначение треугольника), то треугольник, вершины которого совпадают с серединами отрезков FA, BC и DE, равносторонний.

Пусть G, H и J — середины сторон FA, BC и DE.

Предположим, что при некотором расположении треугольников утверждение задачи верно. Повернув затем треугольник OAB вокруг точки O, переведем его в какое-нибудь новое положение, например в положение $OA'B'$ (рис. 95). Середины отрезков FA' и $B'C$ обозначим G' и

Применив к треугольнику GHO теорему косинусов, получим

$$GH^2 = GO^2 + HO^2 - 2GO \cdot HO \cdot \cos(\alpha + 60^\circ + \beta).$$

Но

$$GO = r\cos\alpha, \quad HO = r\cos\beta, \quad \alpha + 60^\circ + \beta = 150^\circ - \gamma,$$

поэтому

$$GH^2 = r^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(150^\circ - \gamma)] =$$
$$= r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma -$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos 150^\circ - \cos^2\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma).$$

Ясно, что первые четыре члена выражения, стоящего в круглых скобках, не меняются при перестановках углов α, β и γ. Два последних члена преобразуем следующим образом:

$$\cos^2\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma = 1 - \sin\gamma(\sin\gamma - \cos\alpha\cos\beta) =$$
$$= 1 - \sin\gamma[\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha\cos\beta] = 1 + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Ясно, что правая часть последнего равенства также не изменяется при перестановках углов α, β, γ. Тем самым утверждение задачи доказано.

Второе решение. Пусть G, H, J, K, L, M — середины сторон FA, BC, DE, AB, CD, EF шестиугольника. Отрезок HK как средняя линия треугольника ABC параллелен хорде AC и вдвое меньше ее по длине (рис. 94). Следовательно, углы BHK и BCA равны как соответственные, а поскольку угол BCA вписанный и опирается на хорду AB, равную по условиям задачи радиусу описанной окружности r, то $\angle BHK = 30^\circ$. Аналогичным образом можно доказать, что $\angle CHL = 30^\circ$. Отрезки HK и HL совпадают по длине, поскольку каждый из них равен половине диагонали равнобочной трапеции $ABCD$ $\left(HK = \frac{1}{2}AC, HL = \frac{1}{2}BD\right)$. Проведем окружность с центром в точке H и радиусом $HL = HK$. Отрезок KL отсечет на этой окружности дугу KL в 120°, поскольку центральный угол KHL равен 120°. Проведя окружность с центром в точке J и радиусом $JL = JM$, мы также получим дугу LM в 120°. Угол MNK, под которым отрезок MK виден из точки пересечения обеих дуг N, равен ней мере на три невырожденных решеточных треугольника. Поскольку площадь каждого из них не меньше $^1/_2$, то площадь параллелограмма не меньше $^3/_2$, то есть заведомо больше 1, что и требовалось доказать.

Поскольку все решеточные параллелограммы можно разбить на два решеточных треугольника, то площадь любого решеточного параллелограмма не меньше 1. Справедливо и обратное утверждение: *если решеточный параллелограмм не содержит других узлов решетки, кроме тех, которые совпадают с его вершинами, то его площадь равна* 1. Доказательство этого утверждения см. в III. 67.

135. Первое решение. Пусть O — центр описанной окружности, r — ее радиус, G, H и J — середины

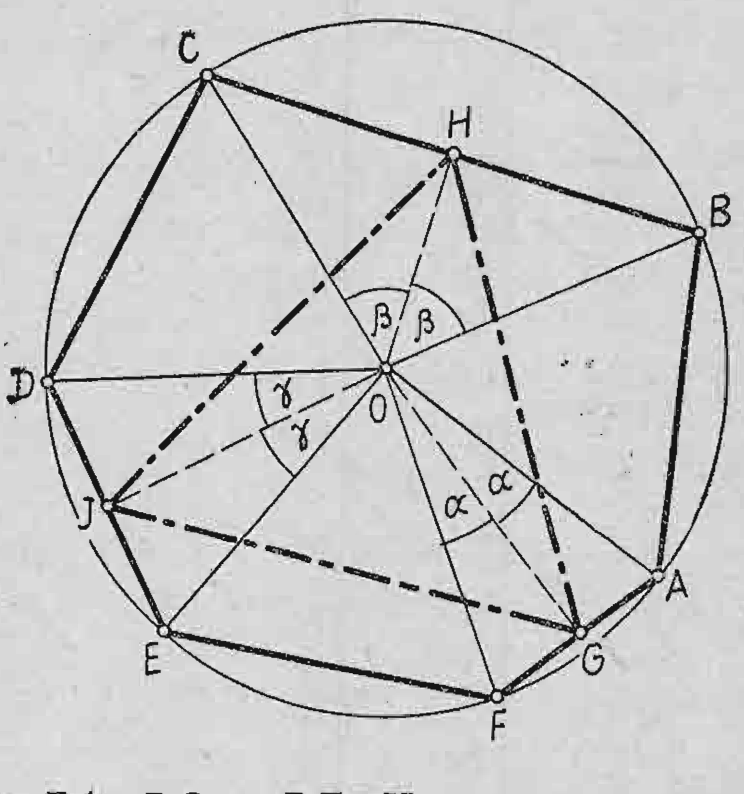


Рис. 93.

сторон FA, BC и DE. Кроме того, пусть $\alpha = \angle GOF = \angle GOA$, $\beta = \angle HOB = \angle HOC$, $\gamma = \angle JOD = \angle JOE$ (рис. 93). Тогда

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Выразим какую-нибудь из сторон треугольника GHJ, например GH, через r, α, β, γ. Выражения для сторон HJ и JG будут отличаться лишь тем, что вместо углов α, β, γ в них будут входить углы β, γ, α и γ, α, β. Если выяснить, что выражение для GH не зависит от перестановок углов α, β, γ, то тем самым будет доказано, что треугольник GHJ равносторонний.

стоявшим членам прибавятся члены, полученные при умножении 1, x, x^2, ..., x^{2^k-1} на x^{2^k}, то есть x будет входить во всех степенях от 0 до $2^{k+1}-1$. От тождества, выполнявшегося по предположению индукции, полученное тождество отличается лишь тем, что число k заменено числом $k+1$. Следовательно, доказываемое тождество выполняется при всех натуральных k.

Умножив правую и левую части тождества на $x-1$, получим

$$(x-1)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots\left(1+x^{2^{k-1}}\right)=\\=x^{2^k}-1.$$

Новое тождество позволяет предложить еще одно решение задачи 131. Пусть $F_k=2^{2^{k-1}}+1$. Полагая в тождестве $x=2$ и прибавляя к правой и левой частям по 2, приходим к соотношению

$$F_1F_2\ldots F_k+2=F_{k+1}.$$

При $l<k$ число F_l входит сомножителем в произведение, стоящее в левой части. Следовательно, наибольший общий делитель чисел F_l и F_k должен быть делителем числа 2, но поскольку оба числа F_l и F_k нечетны, то их наибольший общий делитель может быть равен лишь 1*.

134. Назовем многоугольник, вершины которого совпадают с узлами решетки, *решеточным многоугольником*.

Рассмотрим вершины решеточного треугольника

$$P_i(x_i,\ y_i),\qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

Если такой треугольник не вырожденный, то его площадь удовлетворяет неравенству

$$S=\frac{1}{2}|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|\geqslant\frac{1}{2},$$

поскольку $^1/_2$ умножается на целое число, и $S\neq 0$.

Предположим, что внутри или на границе решеточного параллелограмма, помимо вершин, содержится по крайней мере один узел решетки. Соединив этот узел отрезками прямых со всеми вершинами параллелограмма, мы разобьем решеточный параллелограмм по край-

Выбрав аналогичным образом направления двух остальных медиан, получим векторы

$$\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2},\quad \mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2},\quad \mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2}.$$

Поскольку сумма векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в силу соотношения (1) равна 0, то, отложив векторы $\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}$, $\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}$, $\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2}$ один за другим так, чтобы начало последующего вектора совпадало с концом предыдущего, мы построим

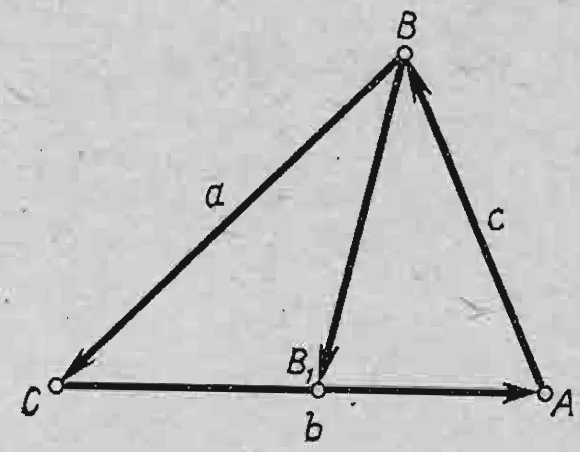


Рис. 92.

замкнутый треугольник. Итак, доказано, что можно построить треугольник H_2, стороны которого равны медианам исходного треугольника H_1 и даже параллельны им.

б. Выберем направления медиан в треугольнике H_2 по тому же принципу, как в треугольнике H_1. Тогда, используя соотношение (1), одну из медиан треугольника H_2 можно представить в виде

$$\left(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}\right)=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{4}=-\frac{3}{4}\mathbf{c}.$$

Выписывая аналогичные выражения для двух других медиан треугольника H_2, получаем векторы

$$-\frac{3}{4}\mathbf{a},\quad -\frac{3}{4}\mathbf{b},\quad -\frac{3}{4}\mathbf{c}.$$

Они образуют треугольник H_3. Нетрудно видеть, что стороны его относятся к соответствующим сторонам исходного треугольника H_1, как $^3/_4:1$. Следовательно, треугольники H_1 и H_3 подобны.

133. При $k=1$ утверждение задачи очевидно. Предположим, что оно верно при каком-то $k>1$. Умножим обе части тождества на $1+x^{2^k}$. В правой части к ранее

$a_n + 1$ является делителем числа 2. Следовательно, наибольший общий делитель чисел $a_m + 1$ и $a_n + 1$ может быть равен лишь 1.

Еще одно решение задачи можно получить, если воспользоваться приведенным далее решением задачи 133.

132. Первое решение. а. Пусть A, B, C — вершины треугольника H_1, а A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB. Дополним треугольник H_1 до параллелограмма $ABCD$. Пусть A_1E и C_1F — линии, соединяющие середины противоположных сторон параллелограмма (рис. 91).

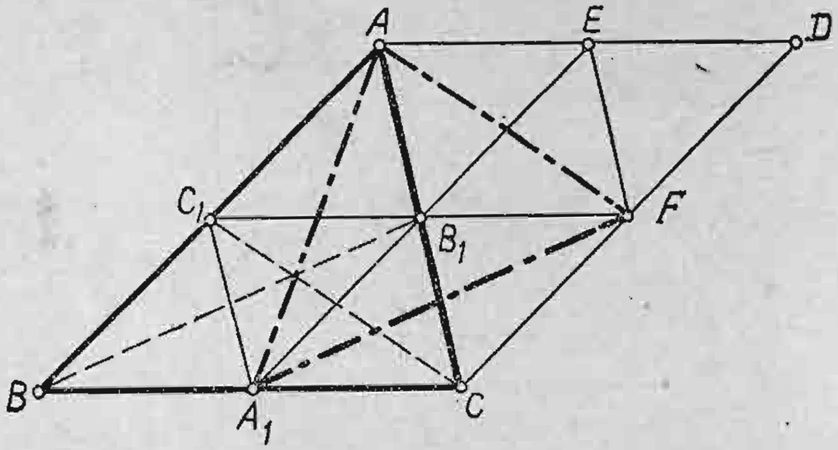


Рис. 91.

Покажем, что стороны треугольника AA_1F равны медианам треугольника H_1. Относительно стороны AA_1 это утверждение очевидно, а относительно других сторон справедливость его следует из того, что четырехугольники AC_1CF и A_1BB_1F — параллелограммы.

б. Из рис. 91 видно, что медианы треугольника AA_1F относятся к соответствующим сторонам исходного треугольника ABC, как $^3/_4 : 1$, поскольку диагонали параллелограммов A_1B_1FC, AB_1FE, $AB_1A_1C_1$ в точке пересечения делятся пополам и B_1 — центр тяжести треугольника AA_1F. Таким образом, треугольник H_3 подобен треугольнику H_1, причем отношение соответственных сторон треугольников H_3 и H_1 равно $^3/_4$.

Второе решение. а. Выберем ориентацию сторон треугольника H_1 так, чтобы начало одного вектора совпадало с концом другого (относительно векторов см. III. 51). Тогда

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0. \qquad (1)$$

Направление медианы BB_1 выберем так, чтобы ее можно было представить в виде суммы векторов $\mathbf{a}$ и $\frac{\mathbf{b}}{2}$ (рис. 92).

Повернем полуокружности, построенные на сторонах AB и AC, вокруг их диаметров так, чтобы точки C_1 и B_1 совпали с некоторой точкой пространства O. Поскольку треугольники BOC и BA_1C конгруэнтны, то все стороны треугольника ABC видны из точки O под прямыми углами. Следовательно, точка O удовлетворяет условиям задачи 126. Наоборот, если известна точка O, служащая решением задачи 126, то, повернув треугольники AOB, BOC, COA вокруг сторон AB, BC, CA так, чтобы они расположились в плоскости треугольника ABC, мы получим решение задачи 129.

Следовательно, решив любую из этих двух задач, мы одновременно находим решение другой.

130. Рассмотрим все предметы, окрашенные в какой-нибудь один цвет. Если среди них имеются предметы двух различных форм, то, выбрав тот из них, который по форме отличается от какого-нибудь из предметов, окрашенных в другой цвет, мы получим два предмета, имеющих различную форму и окрашенных в различные цвета. В противном случае все предметы, окрашенные в выбранный нами цвет, имеют одинаковую форму. Следовательно, выбрав любой из них и присоединив к нему предмет другой формы, мы снова получим два предмета, отличающиеся и по цвету, и по форме.

131. Пусть $a_k = 2^{2^k}$. Прежде всего убедимся в том, что каждый из членов последовательности

$$a_1 - 1, \quad a_2 - 1, \quad a_3 - 1, \ldots,$$

начиная со второго, делится на предыдущий и, следовательно, все предшествующие ему члены. Действительно, поскольку

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 1 = (a_n + 1)(a_n - 1),$$

то $a_{n+1} - 1$ делится на $a_n - 1$. Нетрудно видеть также, что $a_n + 1$ является делителем числа $a_{n+1} - 1$, а значит, и числа $a_m - 1$, если $m > n$.

Отсюда следует, что при $m > n$

$$a_m + 1 = q(a_n + 1) + 2,$$

где q — целое число. В свою очередь это означает, что наибольший общий делитель нечетных чисел $a_m + 1$ и ром в вершине C, проходящую через точки A_1 и B_1 (рис. 90). Поскольку

$$\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°, \qquad (1)$$

то отрезки AC_1 и AB_1 касаются проведенных окружностей. По условиям задачи $AB_1 = AC_1$, поэтому точка A лежит на радикальной оси этих окружностей (см. III. 48). Но радикальная ось проходит через точку A_1 пересечения окружностей и перпендикулярна линии их

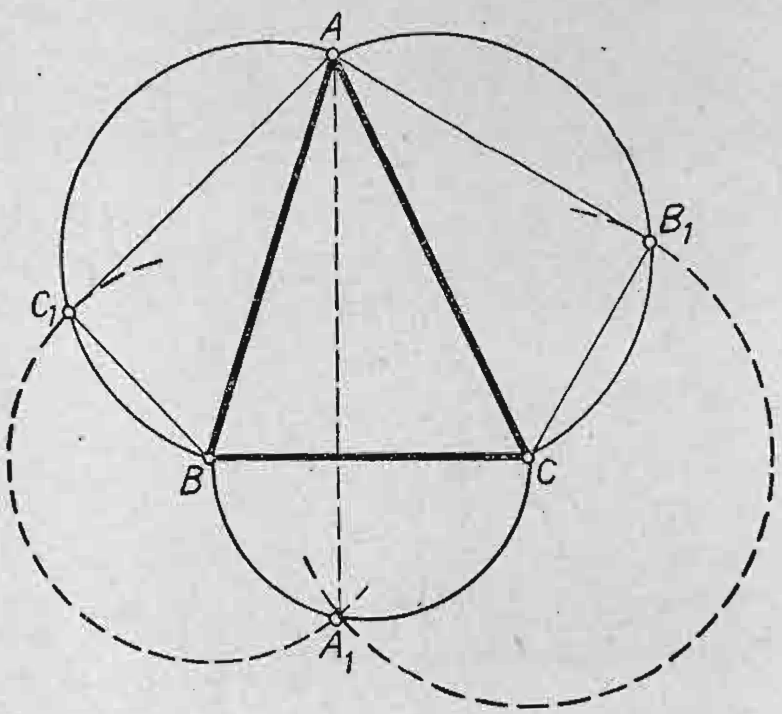


Рис. 90.

центров BC. Следовательно, точка A_1 совпадает с точкой пересечения полуокружности, построенной на BC как на диаметре, и высоты, опущенной на BC из вершины A.

б. Пусть A_1 — точка пересечения высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, и полуокружности, построенной на BC как на диаметре. Радиусами BA_1 и CA_1 опишем по окружности вокруг вершин B и C. Эти окружности пересекают полуокружности, построенные на сторонах треугольника AB и AC как на диаметрах, в точках C_1 и B_1. Поскольку $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°$, то AC_1 и AB_1 — касательные, проведенные к вспомогательным окружностям. Но точка A принадлежит радикальной оси вспомогательных окружностей, поэтому $AC_1 = AB_1$. Аналогичным образом можно доказать, что два других равенства, указанных в условиях задачи, также выполняются. Следовательно, точки A_1, B_1 и C_1 служат решением задачи.

свойствами. Например, из точек B_2 и C_2, служащих основаниями высот, которые опущены из вершин B и C, сторона BC треугольника видна под прямым углом. Таким образом, точки B, C_2, B_2 и C лежат на одной окружности и для них выполняется соотношение (2), но тогда для прямоугольных треугольников BC_1A и AB_1C должны выполняться равенства (1), то есть $AC_1 = AB_1$.

Аналогичные рассуждения позволяют доказать и остальные равенства.

Докажем теперь теорему, обратную известной теореме о секущих, проведенных из одной точки к окружности

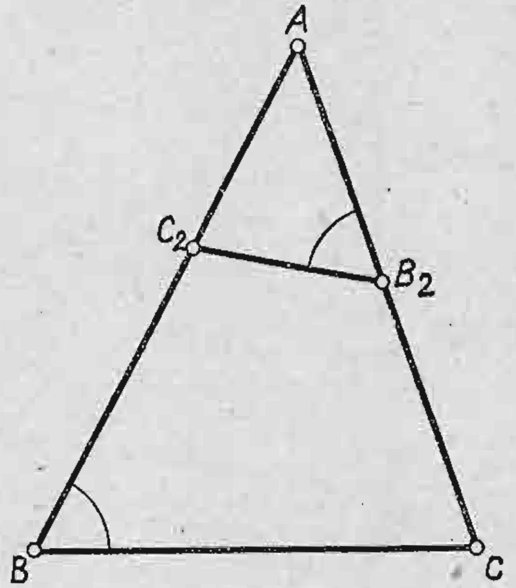


Рис. 89.

(эту теорему мы использовали в решении задачи); *если точка C_2 лежит на отрезке AB, а точка B — на отрезке AC и выполняется соотношение* (2), *то точки B, C_2, B_2 и C лежат на одной окружности* (рис. 89).

Нетрудно видеть, что из соотношения (2) следует равенство

$$AB : AC = AB_2 : AC_2.$$

Треугольники ABC и AB_2C_2 имеют общий угол при вершине A. Следовательно, они подобны и, в частности,

$$\angle ABC = \angle AB_2C_2 \quad \text{и} \quad \angle C_2BC + \angle C_2B_2C = 180°,$$

но это означает, что вокруг четырехугольника BC_2B_2C можно описать окружность.

Второе решение. а. Предположим, что мы построили точки A_1, B_1, C_1, удовлетворяющие условиям задачи. Опишем окружность с центром в вершине B, проходящую через точки A_1 и C_1, а также окружность с цент-

A, B_2, A_2, B. По теореме о вписанных углах отсюда следует, что любая сторона треугольника ABC видна из оснований перпендикуляров, опущенных нами ранее на две другие стороны, под равными углами. Это возможно лишь в том случае, если все эти углы прямые. Действительно, рассмотрим, например, точку A_2. Углы, под которыми из нее видны стороны AB и AC, соответственно равны углам, дополняющим до развернутого угла, под

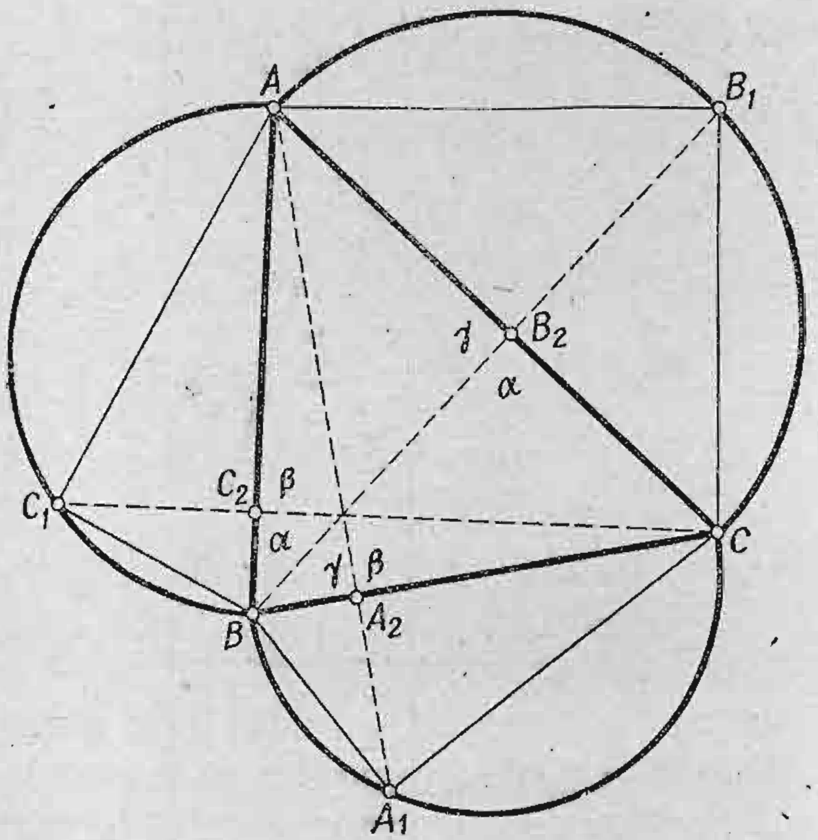


Рис. 88.

которыми сторона BC видна из точек C_2 и B_2. Но последние два угла равны, следовательно, равны и углы, дополняющие их до развернутого. Так как два равных угла, под которыми из A_2 видны AB и AC, в сумме составляют развернутый угол, то каждый из них равен прямому.

Итак, искомыми точками могут быть лишь точки пересечения высот треугольника с полуокружностями, построенных вовне на его сторонах как на диаметрах.

б. Такие точки пересечения действительно существуют, поскольку высоты остроугольного треугольника пересекают сами стороны, противолежащие вершинам, из которых они опущены (а не продолжения сторон), и, следовательно, построенные на этих сторонах полуокружности. Точки пересечения высот с полуокружностями обладают всеми требуемыми по условиям задачи арифметическим и средним геометрическим:

$$a_1c_2+a_2c_1\geqslant 2\sqrt{a_1c_2a_2c_1}\geqslant 2|b_1||b_2|$$

(последнее неравенство следует из условий задачи).

Подставив полученное неравенство в правую часть соотношения (1), приходим к неравенству

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqslant b_1^2+b_2^2+2|b_1||b_2|=$$
$$=(|b_1|+|b_2|)^2\geqslant(b_1+b_2)^2,$$

которое и требовалось доказать*.

128. Решение этой задачи полностью аналогично решению задачи 86. Каждый второй сомножитель в разложении числа

$$(2^n)!=2^n(2^n-1)(2^n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

четен. Следовательно, всего имеется 2^{n-1} четных сомножителей, из них 2^{n-2} делятся на 4, 2^{n-3} — на 8 и так далее. Наконец, 2 сомножителя делятся на 2^{n-1} и один — на 2^n. Таким образом, наибольшая степень, в которой число 2 содержится в $(2^n)!$, равна

$$2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1=2^n-1.$$

129. Первое решение. а. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 удовлетворяют условиям задачи. Пусть A_2, B_2 и C_2 — основания перпендикуляров, опущенных из них на стороны треугольника ABC (рис. 88). Поскольку углы при вершинах C_1 и B_1 треугольников BC_1A и AB_1C прямые, то по теореме о соответствующих средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике

$$AC_1^2=AC_2\cdot AB,\quad AB_1^2=AB_2\cdot AC, \qquad (1)$$

а поскольку по условиям задачи $AB_1=AC_1$, то

$$AC_2\cdot AB=AB_2\cdot AC. \qquad (2)$$

По теореме, обратной теореме о секущих, проведенных из одной точки к окружности (доказательство обратной теоремы приведено ниже), точки B, C_2, B_2 и C лежат на одной окружности. Как показывают аналогичные рассуждения, точки C, A_2, C_2, A также лежат на одной окружности, и тем же свойством обладают точки сительно плоскости треугольника ABC, то окружность, по которой они пересекаются, также симметрична относительно этой плоскости. Следовательно, эта окружность расположена в плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника ABC, и имеет отрезок BB_1 своим диаметром. Из аналогичных рассуждений следует, что сферы с диаметрами AC и BC пересекаются по окружности, расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника ABC и имеющей отрезок CC_1 своим диаметром. Таким образом, сферы, построенные на сторонах треугольника ABC как на диаметрах, имеют общую точку, если ее имеют две окружности с диаметрами BB_1 и CC_1. Точки пересечения этих двух окружностей, если они существуют, могут лежать лишь на перпендикуляре, восставленном к плоскости треугольника ABC из точки M пересечения двух его высот BB_1 и CC_1. Две точки пересечения действительно существуют, поскольку каждая из окружностей получена как след пересечения сферы с диаметром BC и сферы с диаметром, совпадающим с одной из двух других сторон треугольника, а потому искомые две точки являются точками пересечения перпендикуляра l с первой из сфер.

При построении искомых точек мы воспользовались тем, что точка M пересечения высот треугольника ABC (называемая также его *ортоцентром*) лежит внутри треугольника. Это утверждение верно, если треугольник ABC остроугольный. Если же треугольник ABC не остроугольный, то точки O, из которой все его стороны видны под прямым углом, не существует, поскольку точка пересечения высот треугольника лежит вне его.

Задача 126 тесно связана с задачей 129. Эта связь рассматривается во втором решении задачи 129.

127. Из условий задачи следует, что числа a_1, a_2, c_1, c_2 не могут иметь различных знаков.

Пользуясь неравенствами, приведенными в условиях задачи, получим

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)=a_1c_1+a_2c_2+$$
$$+a_1c_2+a_2c_1 \geqslant b_1^2+b_2^2+a_1c_2+a_2c_1. \qquad (1)$$

Два последних члена не могут быть отрицательными, поэтому к ним применимо неравенство между средним

откуда

$$2x^2 = b^2 + c^2 - a^2, \quad 2y^2 = c^2 + a^2 - b^2,$$
$$2z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Поскольку в остроугольном треугольнике квадрат любой из сторон меньше суммы квадратов двух других сторон (см. п. а из второго решения задачи 57 и III. 38), то точка O, удовлетворяющая условиям задачи, существует.

Второе решение. Как показано в п. а первого решения, задача будет решена, если мы убедимся в том,

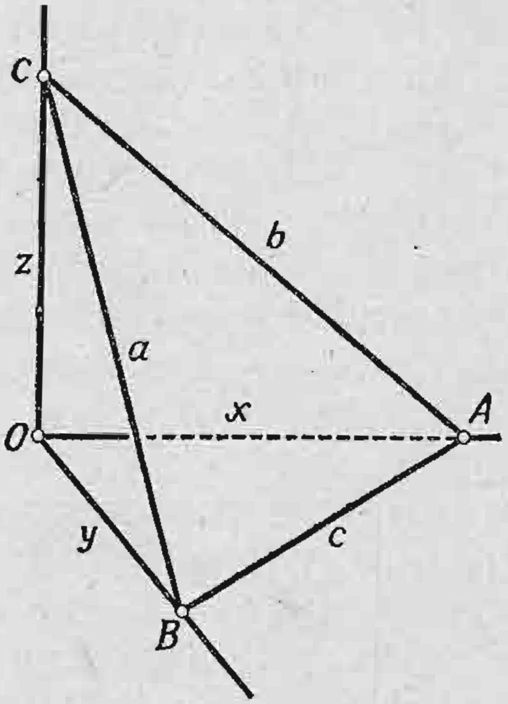


Рис. 86.

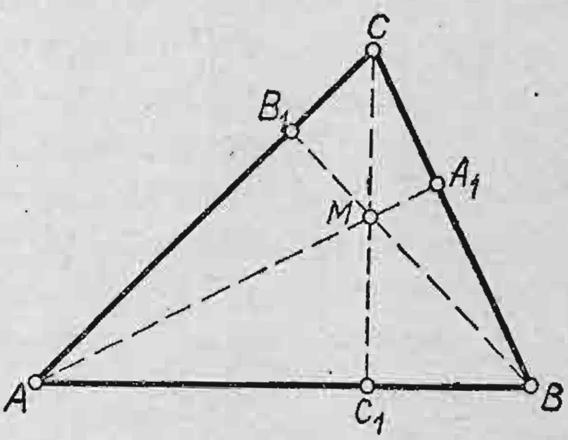


Рис. 87.

что существует точка, из которой стороны треугольника видны под прямым углом. Геометрическим местом точек пространства, из которых одна сторона треугольника видна под прямым углом, служит поверхность сферы, построенной на этой стороне как на диаметре. Следовательно, необходимо показать, что три сферы, построенные на сторонах треугольника как на диаметрах, имеют общую точку.

Прежде всего рассмотрим общие точки двух таких сфер. Например, сферам с диаметрами AB и BC принадлежит вершина B и основание B_1 перпендикуляра, опущенного из B на противолежащую сторону (рис. 87). Поскольку любые две сферы пересекаются по окружности, а сферы с диаметрами AB и BC симметричны отно-

125. Заменив все члены выражения

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2},$$

кроме первого (то есть всего n^2-n членов), наименьшим из них, равным $\frac{1}{n^2}$, получим неравенство

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1,$$

что и требовалось доказать*.

126. Первое решение. а. Если точка, удовлетворяющая условиям задачи, существует, то каждая из сторон треугольника видна из нее под прямым углом. Наоборот, если из некоторой точки пространства O стороны треугольника видны под прямым углом, то отрезок, соединяющий точку O с любой из вершин треугольника, перпендикулярен каждому из отрезков, соединяющих точку O с двумя другими вершинами треугольника. Следовательно, отрезок, соединяющий точку O с выбранной вершиной треугольника, перпендикулярен плоскости, в которой лежат отрезки, соединяющие точку O с двумя другими вершинами треугольника, а значит, и любой прямой, лежащей в этой плоскости. Таким образом, любая трансверсаль, проходящая через выбранную вершину, видна из точки O под прямым углом, и точка удовлетворяет условиям задачи.

Итак, чтобы решить задачу, достаточно построить точку, из которой стороны треугольника видны под прямым углом, то есть отрезки, соединяющие ее с вершинами треугольника, образуют друг с другом прямые углы.

б. Исходную задачу можно теперь сформулировать следующим образом. Из точки O пространства выходят три взаимно перпендикулярных луча. Доказать, что на этих лучах можно выбрать три точки — A, B и C (по одной на каждом луче), для которых треугольник ABC будет конгруэнтен заданному остроугольному треугольнику.

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а x, y, z — длины отрезков OA, OB, OC, соединяющих точку O с его вершинами (рис. 86). Тогда

$$x^2+y^2=c^2,\quad y^2+z^2=a^2,\quad z^2+x^2=b^2,$$

Продолжим отрезок A_iK за точку K и проведем через P прямую, параллельную A_iQ (рис. 85, *б*). По построению треугольник B_iPK подобен треугольнику A_iQK и отношение двух любых сходственных сторон равно λ. Следовательно,

$$B_iK = \lambda A_iK \quad \text{и} \quad B_iP = \lambda A_iQ.$$

Пользуясь этими соотношениями, получаем из треугольника A_iB_iP неравенство

$$A_iB_i = (1+\lambda)\, A_iK \leqslant A_iP + PB_i = A_iP + \lambda A_iQ.$$

Складывая почленно подобные неравенства, находим

$$(1+\lambda)(A_1K + A_2K + \ldots + A_nK) <$$
$$< (A_1P + A_2P + \ldots + A_nP) +$$
$$+ \lambda (A_1Q + A_2Q + \ldots + A_nQ) = (1+\lambda)\, s$$

(знак равенства мы опять отбросили, потому что по условию задачи точки A_i не лежат на одной прямой), что и требовалось доказать [1].

124. Пусть x — целое число, представимое в виде суммы квадратов двух целых чисел:

$$x = a^2 + b^2.$$

Тогда

$$2x = (a+b)^2 + (a-b)^2.$$

Наоборот, если целое число x таково, что

$$2x = a^2 + b^2,$$

то числа a и b должны быть либо оба четные, либо оба нечетные. И в том, и в другом случае x можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел*:

$$x = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

---

[1] Положим $f(P) = A_1P + \ldots + A_nP$. Те же рассуждения, что и в тексте, показывают, что $f(K) < \frac{1}{1+\lambda} f(P) + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(Q)$ для *любых* различных P и Q (а не только для таких, у которых $f(P) = f(Q)$), то есть что функция $f(P)$ *строго выпукла* (см. III. 44). Это утверждение уже не будет верным, если точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на одной прямой (убедитесь в этом самостоятельно). — *Прим. ред.*

G_2 не может быть других общих точек, кроме тех, которые принадлежат окружности k_3. Но это заведомо неверно, так как G_1 и G_2 содержат точку касания окружностей k_1 и k_2, а поскольку по условию задачи все три точки касания различны, то эта точка не принадлежит окружности k_3. Полученное противоречие показывает, что G_1 и G_2 совпадают.

123. Покажем, что в качестве точки K можно выбрать середину отрезка PQ. Пусть B_i — точка, симметричная

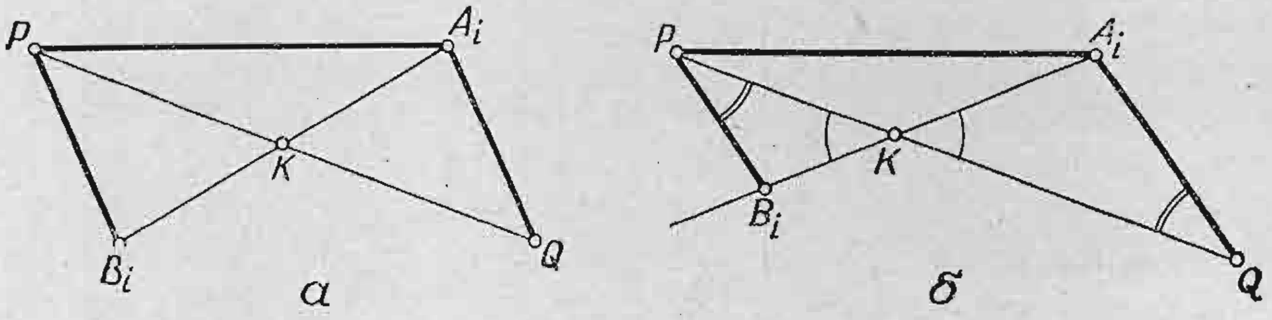


Рис. 85.

точке A_i относительно K (рис. 85, a). Тогда

$$A_iK = KB_i \quad \text{и} \quad A_iQ = B_iP.$$

Из треугольника A_iB_iP (который вырождается в прямолинейный отрезок, если точка A_i оказывается на прямой PQ) получаем

$$A_iB_i = 2A_iK \leqslant A_iP + B_iP = A_iP + A_iQ.$$

Поскольку из условий задачи известно, что точки A_i не лежат на одной прямой, то все точки A_i не могут располагаться на прямой PQ и при некотором i левая часть неравенства меньше правой.

Складывая почленно неравенства для всех i, находим

$$2(A_1K + A_2K + \ldots + A_nK) <$$
$$< (A_1P + A_2P + \ldots + A_nP) + (A_1Q + A_2Q + \ldots$$
$$\ldots + A_nQ) = 2s,$$

что и требовалось доказать.

Покажем, что в действительности мы могли бы выбрать в качестве K не середину, а любую точку отрезка PQ.

Пусть

$$\frac{PK}{QK} = \lambda.$$

мы обойдем все точки в той же последовательности, в какой расположены пары чисел (x, y)*.

121. Выделив в факториале $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ первые a_1 членов, получим $a_1!$. Если $n > 1$, то при $1 < i \leqslant n$ в разложении факториала $k!$ вслед за первыми $a_1 + a_2 + \ldots \ldots + a_{i-1}$ сомножителями идут подряд еще a_i сомножителей, которые больше чисел $1, 2, \ldots, a_i$. Следовательно, произведение этих a_i сомножителей больше $a_i!$. Таким образом, произведение $a_1! a_2! \ldots a_n!$ не превышает числа $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!$, которое заведомо меньше $k!$.

122. а. Прежде всего покажем, что две касающиеся друг друга окружности лежат либо на поверхности одной сферы, либо в одной плоскости. Назовем осью окружности прямую, проходящую через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Каждая точка, принадлежащая оси, равноудалена от всех точек окружности. Рассмотрим оси двух касающихся друг друга окружностей. Обе оси расположены в плоскости, проходящей через точку касания окружностей и перпендикулярной их общей касательной. Таким образом, если две касающиеся друг друга окружности не лежат в одной плоскости, то их оси не параллельны и, следовательно (поскольку оси расположены в одной плоскости), должны пересекаться. Опишем сферу с центром в точке пересечения осей, проходящую через точку касания двух окружностей. Обе окружности лежат на проведенной сфере, поскольку все точки каждой из них равноудалены от точки пересечения осей на расстояние, равное радиусу сферы (длина отрезка, соединяющего точки пересечения осей с точкой касания окружностей).

б. По доказанному в п. а каждая из пар окружностей k_1, k_2, k_3, о которых говорится в условии задачи, определяет либо сферу, либо плоскость. Необходимо доказать, что все три пары окружностей определяют либо одну и ту же сферу, либо одну и ту же плоскость.

Предположим, что сфера (или плоскость) G_1, определяемая окружностями k_1 и k_3, не совпадает со сферой (или с плоскостью) G_2, определяемой окружностями k_2 и k_3. Если две сферы (или сфера с плоскостью) не совпадают друг с другом, но содержат общую окружность, то у них нет других общих точек, кроме тех, которые расположены на этой окружности. Следовательно, у G_1 и

$x + y$ первой шла пара с меньшим значением x. При таком упорядочении первые несколько пар будут иметь следующий вид:

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1),$$
$$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), \ldots .$$

Число пар (x, y), у которых сумма $x + y$ принимает одно и то же заданное значение m, равно $m - 1$. Следовательно, число пар, сумма которых равна $2, 3, \ldots$

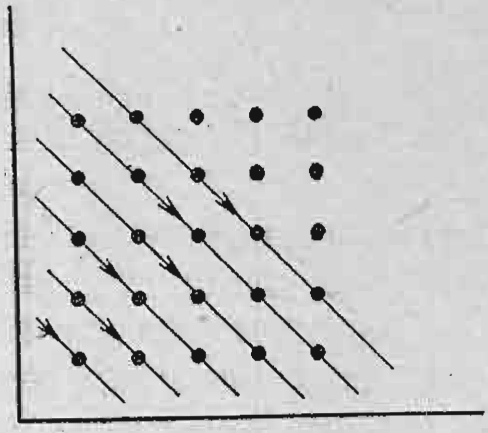


Рис. 84.

$\ldots, x + y - 1$ и которые поэтому предшествуют паре (x, y), равно

$$1 + 2 + \ldots + (x + y - 2) = \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2}.$$

Затем идут пары

$$(1, x + y - 1), (2, x + y - 2), \ldots, (x, y).$$

Таким образом, порядковый номер пары чисел (x, y) в установленном нами расположении равен

$$x + \frac{(x + y - 1)(x + y - 2)}{2}.$$

Полученное выражение принимает все целые положительные значения, и различные пары (x, y) имеют различные порядковые номера. Тем самым утверждение задачи доказано.

Пару (x, y) можно изобразить на плоскости в виде точки с координатами x и y. Все такие точки образуют целочисленную решетку, заполняющую первый квадрант (рис. 84), точки с одинаковым значением суммы $x + y$ располагаются на одной прямой. Начав с точки, расположенной в левом нижнем углу, и двигаясь по каждой прямой сверху вниз в направлении, указанном стрелкой, угольника ASB. В этом случае треугольник $AS'B$ составляет лишь часть треугольника ASB и его площадь меньше площади треугольника ASB, то есть меньше трети площади треугольника ABC. Следовательно, S' не обладает требуемым свойством: три треугольника — $AS'B$, $BS'C$, $CS'A$, — образующие треугольник ABC, не равновелики.

120. Первое решение. Пусть

$$x+y-1=k,$$

тогда

$$\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}=\frac{k(k-1)}{2}, \quad 0<x\leqslant k.$$

Рассмотрим последовательность чисел

$$\frac{k(k-1)}{2} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Заданному числу a может соответствовать лишь такое значение k, при котором

$$\frac{k(k-1)}{2}<a\leqslant\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{(k+1)k}{2}.$$

Этими неравенствами значение k определяется однозначно, поскольку слева и справа стоят два члена последовательности (1) с номерами, отличающимися на 1. Зная k, находим x и y:

$$x=a-\frac{k(k-1)}{2}, \quad y=k+1-x.$$

Значения x и y однозначно определяются числами a, k и являются целыми положительными числами.

Второе решение. Покажем, что упорядоченные пары целых положительных чисел можно занумеровать так, чтобы пара $(x,\ y)$ имела номер

$$x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}.$$

Прежде всего заметим, что при такой нумерации пары с одинаковым значением $x+y$ должны идти подряд одна за другой.

Расположим пары так, чтобы пары с меньшим значением суммы $x+y$ шли перед парами с большим значением $x+y$, а из двух пар с одинаковым значением его центр тяжести. Тогда стороны BA_1 и A_1C треугольников AA_1B и AA_1C равны, а высоты, опущенные на эти стороны, совпадают с высотой, опущенной из вершины A

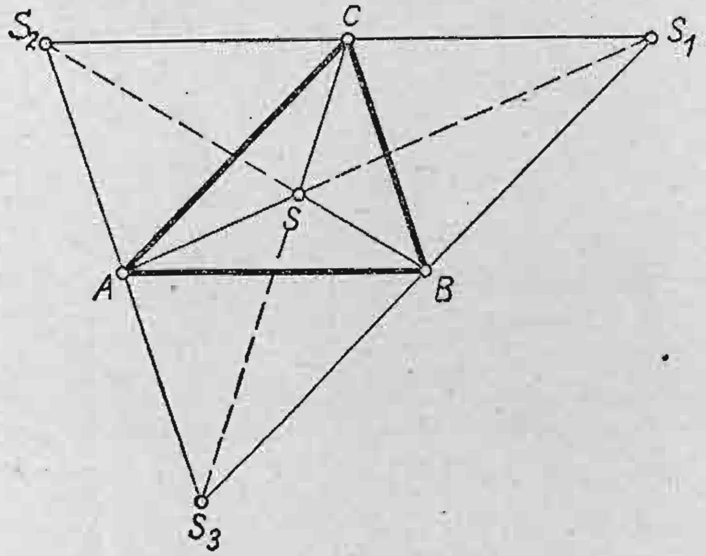


Рис. 82.

треугольника ABC на сторону BC (рис. 83). Следовательно, площади треугольников AA_1B и AA_1C равны. Аналогичным образом можно показать, что площади треугольников BA_1S и CA_1S равны, в силу чего площади

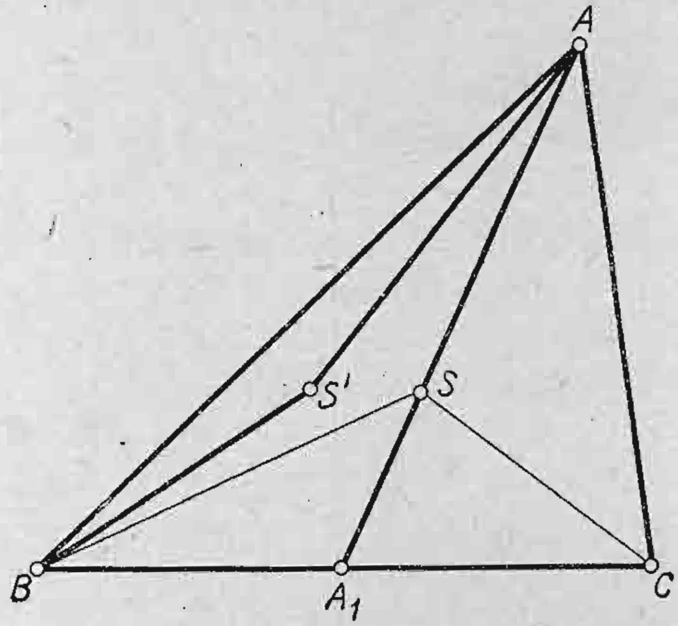


Рис. 83.

треугольников ABS и ACS также равны. По тем же причинам треугольник BCS равновелик (по площади) любому из них.

Необходимо еще показать, что любая другая точка S' не обладает этим свойствам. Пусть S' — произвольная точка, расположенная внутри треугольника ABC и отличная от точки S. Точка S' лежит внутри или на границе одного из треугольников ASB, BSC, CSA. Предположим, например, что точка S' находится внутри треиз вершины C к стороне AB), прямая e делит в отношении $2:1$ (считая от вершины C). Следовательно, прямая e проходит через центр тяжести треугольника ABC. Прямая f, проведенная через точку S параллельно стороне BC, также проходит через центр тяжести треугольника ABC. Поскольку прямые e и f не совпадают, то они имеют лишь одну общую точку S. Следовательно, S совпадает с центром тяжести треугольника ABC.

Итак, мы доказали, что если S служит вершиной трех равновеликих треугольников ABS, BCS и CAS, то S — центр тяжести треугольника ABC.

Второе решение. а. Из геометрии известно, что две точки, A и B, могут быть равноудалены от прямой e, лишь если прямая e параллельна отрезку AB (A и B лежат по одну сторону от e) или если прямая e проходит через середину отрезка AB (A и B лежат по разные стороны от e). Во всех остальных случаях расстояния от точек A и B до прямой e различны.

Следовательно, можно утверждать, что, выбрав в плоскости треугольника ABC точку D (не совпадающую с вершиной C), мы получим равные по площади треугольники ACD и BCD в том и только в том случае, если D либо лежит на медиане треугольника ABC, проходящей через вершину C, либо на прямой, параллельной стороне AB и проходящей через вершину C. Равенство площадей треугольников ACD и BCD означает, что точки A и B равноудалены от прямой CD.

б. Из доказанного следует, что S лежит на каждой из трех медиан треугольника ABC и точка пересечения медиан — центр тяжести треугольника — удовлетворяет условиям задачи. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что точка S, находящаяся внутри треугольника ABC, не может лежать ни на одной из прямых, проходящих вне треугольника.

в. Из доказанного в п. а следует, что из точек, лежащих вне треугольника ABC, вершиной S равновеликих треугольников ABS, BCS и CAS могут служить лишь точки S_1, S_2, S_3, каждая из которых симметрична соответствующей вершине треугольника относительно середины противолежащей стороны (рис. 82).

Третье решение. Прежде всего покажем, что центр тяжести треугольника удовлетворяет условиям задачи. Пусть AA_1 — одна из медиан треугольника, S —

Второе решение. Требуемое равенство мы получим, просуммировав левые и правые части соотношений

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1},$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2n-1)\,2n}=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n},$$

поскольку правую часть полученного равенства можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}^{*}.$$

119. Первое решение. Проведем через точку S прямую e, параллельную стороне AB (рис. 81). По условиям задачи площадь треугольника ABS составляет

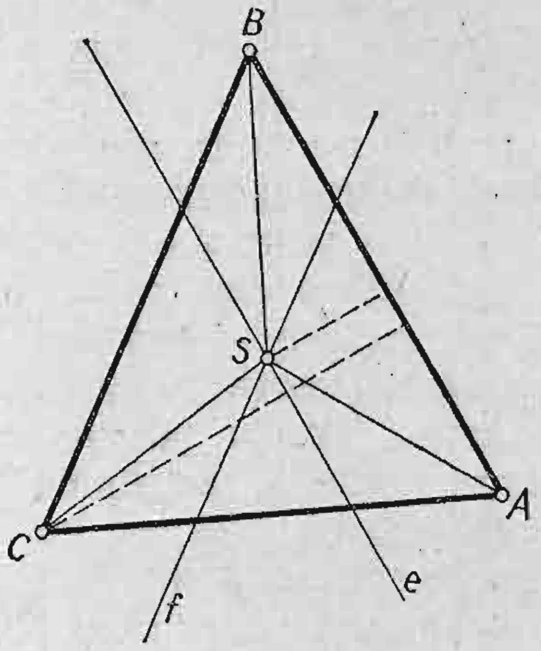


Рис. 81.

треть площади треугольника ABC. Следовательно, высота треугольника ABS, опущенная из вершины S на сторону AB, составляет $^1/_3$ высоты, опущенной на ту же сторону из вершины C. Поскольку прямая e по построению параллельна стороне AB и проходит через точку S, то любой отрезок, соединяющий вершину C с одной из точек стороны AB (в том числе и медиану, проведенную

Второе решение. Выберем среди чисел, сопоставленных вершинам призмы, наименьшее (или, если их несколько, одно из наименьших) и обозначим его a_1. Известно *, что среднее арифметическое нескольких чисел больше наименьшего из них, если только все числа не равны. Среднее арифметическое равных чисел совпадает с их общим значением.

Поскольку по условиям задачи число a_1 равно среднему арифметическому чисел a_2, a_3 и b_1, а (в соответствии с нашим выбором) оно не больше любого из них, то все эти четыре числа равны, и поэтому b_1 совпадает с a_1 — наименьшим из чисел, приписанных вершинам призмы. С другой стороны, число b_1 равно среднему арифметическому чисел b_2, b_3 и a_1, поэтому (в силу приведенных только что рассуждений) все эти четыре числа также равны. Следовательно, все шесть чисел, приписанных вершинам треугольной призмы, равны.

118. Первое решение. Введем следующие обозначения:

$$S(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,2n},$$

$$T(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Воспользуемся для доказательства утверждения задачи методом полной математической индукции. При $n=1$

$$S(1)=\frac{1}{1\cdot 2}=T(1).$$

Предположим, что при некотором $k \geqslant 2$

$$S(k-1)=T(k-1). \tag{1}$$

Поскольку

$$T(k)-T(k-1)=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{1}{(2k-1)\,2k}=S(k)-S(k-1),$$

то из предположения индукции следует, что

$$T(k)=S(k).$$

Тем самым утверждение задачи доказано при $n=k$, а значит, и при всех n.

Прибавив к обеим частям первого равенства $a_1 - b_1$, а к обеим частям второго (по горизонтали) $b_1 - a_1$, получим

$$4a_1 - b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \tag{1}$$

$$4b_1 - a_1 = b_1 + b_2 + b_3. \tag{2}$$

С другой стороны, сложив отдельно правые и левые части трех равенств, стоящих в левом столбце, найдем

$$3(a_1 + a_2 + a_3) = 2(a_1 + a_2 + a_3) + b_1 + b_2 + b_3,$$

откуда

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3. \tag{3}$$

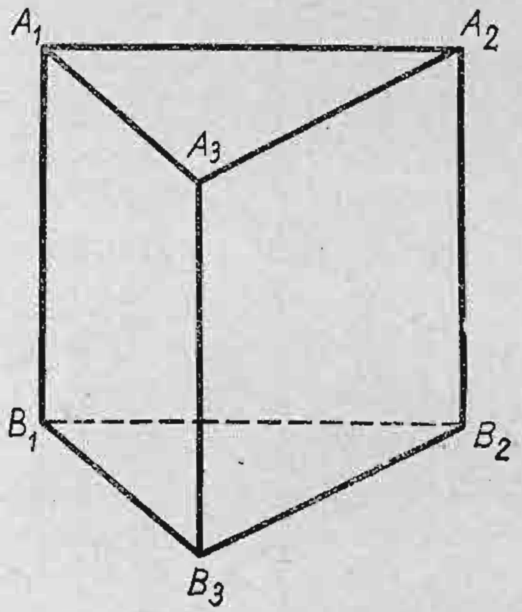


Рис. 80

Поскольку в силу соотношения (3) правые части равенств (1) и (2) равны между собой, то их левые части также равны:

$$4a_1 - b_1 = 4b_1 - a_1, \text{ то есть } b_1 = a_1. \tag{4}$$

Аналогично получаем и два других равенства:

$$b_2 = a_2, \quad b_3 = a_3. \tag{5}$$

Подставляя полученные соотношения в левые из исходных равенств, находим

$$3a_1 = a_2 + a_3 + a_1 = 3a_2 = 3a_3.$$

Сравнивая последние равенства с соотношениями (4) и (5), получаем

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3,$$

что и требовалось доказать.

Это утверждение остается в силе и тогда, когда треугольник $P_1P_1'P_2$ вырождается в отрезок прямой. Аналогично, поскольку тот же отрезок O_1O_2 можно рассматривать как среднюю линию треугольника $P_2P_2'P_3$, отрезки P_2P_3 и O_1O_2 параллельны, причем $P_2P_3 = 2O_1O_2$. Следовательно, отрезок P_2P_3 составляет продолжение отрезка P_1P_2.

Если начать теперь с точки P_3 и построить точку, симметричную ей относительно O_1, затем точку, симметричную найденной относительно O_2, и так далее, то, неограниченно повторяя построения, мы получим бесконечно много отрезков, лежащих на той же прямой, что и отрезок P_1P_2, имеющих равную с ним длину и составляющих продолжение один другого. Концы этих отрезков должны были бы принадлежать точечному множеству H, если бы оно обладало двумя центрами симметрии. Но это невозможно, поскольку по условиям задачи множество H содержит лишь конечное число точек.

В действительности мы доказали не только утверждение задачи, но и более общее утверждение. Из приведенных выше рассуждений следует, что точечное множество, имеющее более одного центра симметрии, не может быть ограниченным (то есть для такого множества нельзя построить окружность, которая содержала бы все его точки). Таким образом, если точечное множество H ограничено, то оно может иметь не более одного центра симметрии.

Нетрудно доказать, что если точечное множество обладает двумя различными центрами симметрии, то оно имеет бесконечно много центров симметрии: все точки, расположенные на прямой O_1O_2 и отстоящие от концов отрезка O_1O_2 на расстояния, равные целым кратным его длины, служат центрами симметрии множества H^*.

117. Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины, принадлежащие верхнему основанию призмы, B_1, B_2, B_3 — вершины, принадлежащие ее нижнему основанию, а a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — числа, приписанные этим вершинам (рис. 80).

П е р в о е р е ш е н и е. По условиям задачи числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 удовлетворяют уравнениям

$$3a_1 = a_2 + a_3 + b_1, \quad 3b_1 = b_2 + b_3 + a_1,$$
$$3a_2 = a_3 + a_1 + b_2, \quad 3b_2 = b_3 + b_1 + a_2,$$
$$3a_3 = a_1 + a_2 + b_3, \quad 3b_3 = b_1 + b_2 + a_3.$$

а потому по крайней мере один из отрезков AO' или $O'B$ (пусть, например, это будет отрезок AO') заведомо больше половины отрезка AB[1].

Пусть C — точка, симметричная точке A относительно O'. Тогда

$$AC = AO' + O'C = 2AO' > AB.$$

Это означает, что точка C отстоит от точки A на расстояние, превышающее длину диаметра окружности G,

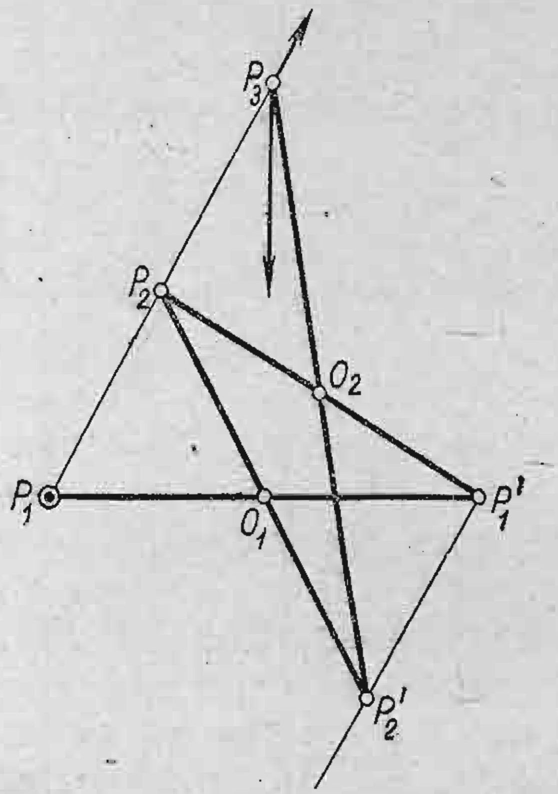


Рис. 79.

и поэтому не принадлежит множеству H. Следовательно, точка O' не может быть центром симметрии конечного точечного множества H.

В т о р о е р е ш е н и е. Покажем, что если какое-нибудь точечное множество обладает двумя центрами симметрии, то оно бесконечно.

Пусть O_1 и O_2 — центры симметрии рассматриваемого множества H, P_1 — одна из его точек, P_1' — точка, симметричная P_1 относительно O_1, P_2 — точка, симметричная P_1' относительно O_2, P_2' — точка, симметричная P_2 относительно O_1, и, наконец, P_3 — точка, симметричная P_2' относительно O_2 (рис. 79).

Поскольку O_1O_2 — средняя линия треугольника $P_1P_1'P_2$, то отрезки O_1O_2 и P_1P_2 параллельны, причем $P_1P_2 = 2O_1O_2$.

---

[1] Если $AO' = O'B = \frac{AB}{2}$, то $O' = O$. — *Прим. ред.*

б. Предположим, что неравенство верно для любых $n = k$ положительных чисел. Докажем, что тогда оно выполняется и для любых $k+1$ чисел. Если при некотором i числа a_i и b_i совпадают, то остальные числа b представляют собой перестановку чисел a с индексами, отличными от i. Таких чисел k, и по предположению индукции сумма k дробей вида $\frac{a_j}{b_j}$, где $j \neq i$, больше или равна k. Прибавив к правой и левой частям неравенства по 1, получим требуемое неравенство. В левой его части будут стоять $k+1$ слагаемых, а в правой — число $k+1$.

в. Если значения всех дробей $\frac{a_i}{b_i}$ отличны от 1, то обозначим a_i наибольшее из чисел a (или, если их несколько, то одно из таких чисел). Предположим, что $b_j = a_i$. Переставив числа b_i и b_j, сравним новую сумму S отношений $\frac{a_k}{b_k}$ со старой S. По предположению $b_i < a_i$ и $a_j < b_j = a_i$, поэтому

$$S - S' = \frac{a_i}{b_i} + \frac{a_j}{b_j} - \frac{a_i}{b_j} - \frac{a_j}{b_i} =$$

$$= (a_i - a_j)\left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b_j}\right) = (b_j - a_j)\left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{a_i}\right) > 0.$$

Поскольку в новой сумме S' числитель и знаменатель i-го слагаемого равны, то по доказанному в п. б $S' \geqslant k+1$. Следовательно,

$$S > S' \geqslant k+1,$$

что и завершает доказательство по индукции*.

116. Первое решение. Пусть O — центр симметрии точечного множества H. Поскольку рассматриваемое множество содержит конечное число точек, то среди них найдется такая точка A, расстояние которой до точки O не меньше, чем у всех других точек, принадлежащих множеству H. Иначе говоря, ни одна точка, принадлежащая множеству H, не лежит вне окружности G радиуса OA с центром в точке O. На самой окружности G множеству H принадлежит точка B, симметричная точке A относительно центра O.

Если O' — точка, отличная от O, то

$$AO' + O'B \geqslant AB,$$

а. Если любой прямоугольник расположен внутри какого-нибудь другого прямоугольника, то доказываемое утверждение очевидно.

б. Если среди прямоугольников найдется такой, который не содержится внутри никакого другого прямоугольника, то это означает, что все остальные прямоугольники либо у́же, либо ниже его. Но заданных прямоугольников бесконечно много. Следовательно, более узких или более низких прямоугольников также бесконечно много. Не ограничивая общности, предположим, что имеется бесконечно много более узких прямоугольников (в противном случае достаточно вместо ширины говорить о высоте прямоугольников). Ширина таких прямоугольников может принимать лишь конечное число различных значений. Следовательно, среди них должно быть бесконечно много прямоугольников равной ширины. Ясно, что их можно расположить в последовательность, для который верно доказываемое утверждение*.

115. П е р в о е р е ш е н и е. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим чисел

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n}$$

(см. III. 42). Поскольку числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ представляют собой не что иное, как расположенные в другом порядке числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}}{n} \geqslant \sqrt{\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{b_1b_2b_3\ldots b_n}}=1.$$

Итак, требуемое неравенство доказано. Знак равенства соответствует тому случаю, когда

$$\frac{a_i}{b_i}=1,$$

то есть когда переставлялись только равные из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В т о р о е р е ш е н и е. а. Воспользуемся для доказательства неравенства методом полной математической индукции (см. III. 3). При $n = 1$ неравенство вырождается в равенство, которое заведомо выполняется.

Приняв полученный треугольник за исходный, мы сможем применить к нему приведенные выше рассуждения, если обозначения выбраны так, что сторона AB стягивает дугу, равную трети окружности.

Итак, мы доказали, что сумма квадратов сторон правильного (равностороннего) треугольника больше суммы квадратов сторон любого другого треугольника, вписанного в ту же окружность.

114. Назовем n шириной, а m — высотой прямоугольников, о которых говорится в условиях задачи.

Первое решение. Поскольку ширина n прямоугольников выражается положительными целыми числами, то среди них есть наименьшая (см. III. 2, в и III. 3). Выберем любой прямоугольник наименьшей ширины n_1. Пусть m_1 — его высота. Присоединим к нему еще m_1 произвольно выбранных прямоугольников. Может случиться так, что у одного из них высота окажется больше m_1. Такой прямоугольник содержит внутри себя первый из выбранных нами прямоугольников, поскольку тот обладает наименьшей шириной n_1. В противном случае высоты m_1+1 выбранных прямоугольников принимают какие-то из значений $1, 2, \ldots, m_1$, и, следовательно, высоты всех m_1+1 прямоугольников не могут быть различными (принцип Дирихле, см. III. 30). Таким образом, среди выбранных m_1+1 прямоугольников имеются по крайней мере два прямоугольника с равными высотами, один из которых содержит внутри себя другой.

Второе решение. а. Если высота или ширина одного прямоугольника равна высоте или ширине другого, то один из таких прямоугольников содержит внутри себя другой.

б. Если любые два прямоугольника имеют различную высоту и различную ширину, то, выбрав любой из них, например прямоугольник с шириной n и высотой m, мы обнаружим лишь конечное число (не более чем $n-1$) более узких и лишь конечное число (не более $m-1$) более низких прямоугольников. Все остальные прямоугольники содержат выбранный нами внутри себя.

Третье решение. Покажем, что в условиях задачи *существует целая бесконечная последовательность прямоугольников, в которой каждый предыдущий прямоугольник содержится в последующем.*

многоугольник, у которого сумма квадратов сторон больше (если $\angle APB$ тупой) или равна (если $\angle APB$ прямой) сумме квадратов сторон исходного многоугольника.

Повторив «срезание» тупых и прямых углов достаточно большое число раз, мы всегда можем свести любой вписанный многоугольник к вписанному в ту же окружность треугольнику с большей или равной суммой квадратов сторон, причем равенство сумм квадратов сторон достигается лишь в том случае, если одна из сторон полученного треугольника совпадает с диаметром описанной окружности. Таким образом, если мы покажем, что среди всех вписанных в данную окружность треугольников наибольшей суммой квадратов сторон обладает правильный треугольник, то тем самым будет доказано, что правильный треугольник служит ответом на вопрос задачи.

г. Рассмотрим сумму квадратов сторон треугольника APB, вписанного в данную окружность. Если треугольник не равносторонний, то выберем обозначения так, чтобы сторона AP стягивала наибольшую, а сторона PB — наименьшую из дуг описанной окружности. Дуга, стягиваемая стороной AB, меньше половины окружности, ибо в противном случае AB была бы стороной, стягивающей наибольшую из дуг описанной окружности. Поскольку треугольник APB не равносторонний, то дуга, стягиваемая стороной AP, больше, а дуга, стягиваемая стороной PB, меньше трети окружности. Начнем двигать вершину P к точке N. По доказанному в п. б сумма квадратов сторон треугольника APB при этом будет монотонно возрастать. Двигаясь по дуге окружности, точка P достигает такого положения, когда либо дуга AP, либо дуга PB, либо обе дуги AP и PB одновременно становятся равными трети окружности. Последнее происходит в том случае, если каждая из дуг AN и NB равна трети окружности. Если же эти дуги меньше (или больше) трети окружности, то в одном из положений точки P дуга AP (или PB) должна стать равной трети окружности. Следовательно, для любого вписанного в данную окружность неравностороннего треугольника можно указать вписанный в ту же окружность треугольник, у которого сумма квадратов сторон больше, причем одна из сторон стягивает дугу, равную трети окружности.

Пусть k — проекция медианы на сторону c, а h — высота, опущенная на c (рис. 77). Стороны a и b проектируются на сторону c в отрезки длиной $\frac{c}{2}+k$ и $\left|\frac{c}{2}-k\right|$. Рассмотрим три прямоугольных треугольника с общим катетом h и гипотенузами a, b и m. По теореме Пифагора

$$a^2+b^2=2h^2+\left(\frac{c}{2}+k\right)^2+\left(\frac{c}{2}-k\right)^2=$$
$$=\frac{c^2}{2}+2(h^2+k^2)=\frac{c^2}{2}+2m^2.$$

б. *Если AB — хорда (меньшая, чем диаметр), M и N — середины меньшей и большей из двух дуг, на которую она делит окружность, и точка P движется по окружности от точки M к точке N, то сумма квадратов PA^2+PB^2 монотонно возрастает* (рис. 78).

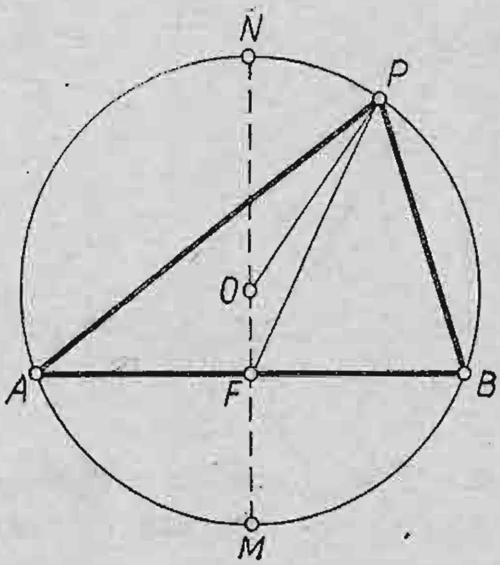


Рис. 78.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся уже доказанным предыдущим утверждением. Необходимо лишь убедиться в том, что при движении точки P по окружности от M к N длина отрезка PF, соединяющего P с серединой хорды AB, монотонно возрастает. Это следует из того, что при движении точки P в треугольнике POF длины сторон OF и OP не изменяются, а угол при вершине O монотонно возрастает. Но тогда и противолежащая ему сторона PF также монотонно возрастает (см. III. 38).

в. Из доказанной в п. б теоремы следует, что если угол APB при вершине P вписанного в окружность многоугольника тупой или прямой, то, заменив смежные стороны AP и PB хордой, мы получим новый вписанный

Наибольшее значение последнего выражения равно $^9/_4$ и достигается при

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos(\beta - \gamma), \ \cos(\beta - \gamma) = 1.$$

Из последнего равенства (поскольку речь идет об углах треугольника) следует, что $\beta = \gamma$, а из первого — что

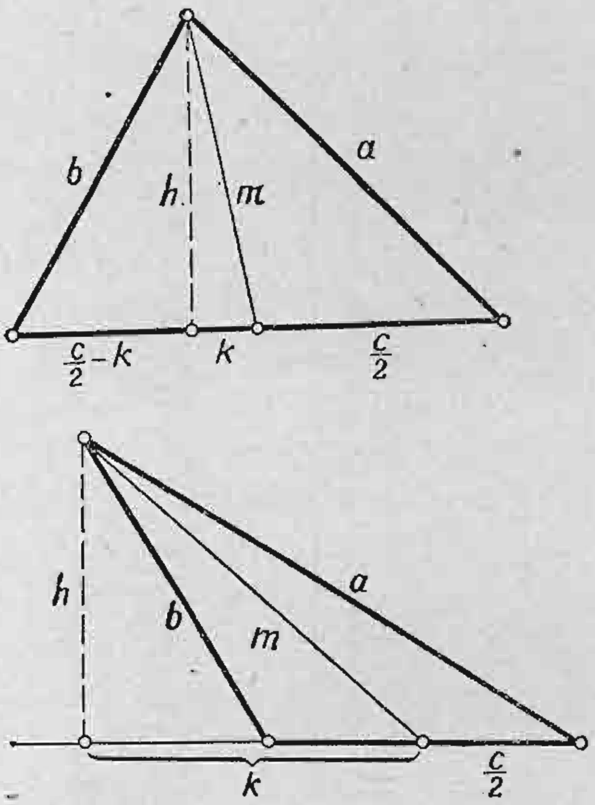


Рис. 77.

$\alpha = 60°$ и, следовательно, $\beta = \gamma = 60°$. Итак, в силу соотношения (1) сумма квадратов сторон правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса r, равна $9r^2$, а сумма квадратов сторон любого другого треугольника меньше $9r^2$.

в. Сумма квадратов сторон прямоугольника, вписанного в ту же окружность, составляет $8r^2$ и, следовательно, меньше, чем сумма квадратов сторон правильного треугольника.

Итак, из всех вписанных в окружность, несамопересекающихся многоугольников наибольшей суммой квадратов сторон обладает правильный треугольник*.

Второе решение. а. *Если a, b, c — стороны треугольника, а m — медиана, проведенная к стороне c, то*

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m^2.$$

числу сочетаний из $2n-1$ элементов по $n-1$). Следовательно,

$$2^{2n-1}A$$

также целое число, что и требовалось доказать.

В справедливости утверждения задачи можно также убедиться, если воспользоваться теоремой Лежандра о наибольшем показателе степени, с которым данное простое число входит в разложение факториала на простые множители (см. III. 49).

113. Первое решение. а. Если у вписанного в окружность многоугольника один из углов тупой, то, отбросив вершину тупого угла, мы получим вписанный многоугольник, у которого сумма квадратов сторон больше, чем у исходного многоугольника: как известно, в тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других сторон (см. второе решение задачи 57 и III. 38).

Поскольку сумма внутренних углов n-угольника равна

$$(n-2)\,180^\circ=[n+(n-4)]\,90^\circ,$$

то во всяком вписанном пятиугольнике и четырехугольнике (за исключением прямоугольника) имеется по крайней мере один тупой угол. Итак, вписанный в данную окружность многоугольник с наибольшей суммой квадратов сторон следует искать среди треугольников и прямоугольников.

б. Пусть α, β, γ — углы вписанного в данную окружность треугольника, а r — радиус окружности. Сумму квадратов сторон треугольника можно представить (см. первое решение задачи 6) в следующем виде:

$$4r^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma). \qquad (1)$$

Пользуясь формулами из III. 53 и III. 9а, преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)+$$
$$+\frac{1}{2}(1-\cos 2\gamma)=2-\cos^2\alpha-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)=$$
$$=2-\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)=2-\Big[\cos\alpha-$$
$$-\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\Big]^2+\frac{1}{4}\cos^2(\beta-\gamma).$$

как вертикальные (при внешнем касании окружностей k_1 и k_2), а сами треугольники равнобедренные. Аналогичным образом доказывается подобие треугольников PO_1B_1 и PO_2B_2. Из равенства отношений сходственных сторон подобных треугольников находим

$$PA_1 : PA_2 = r_1 : r_2 \quad \text{и} \quad PB_1 : PB_2 = r_1 : r_2,$$

откуда

$$PA_1 : PA_2 = PB_1 : PB_2.$$

Итак, в треугольниках PA_1B_1 и PA_2B_2 отношения двух пар сходственных сторон равны, а углы при вершине P

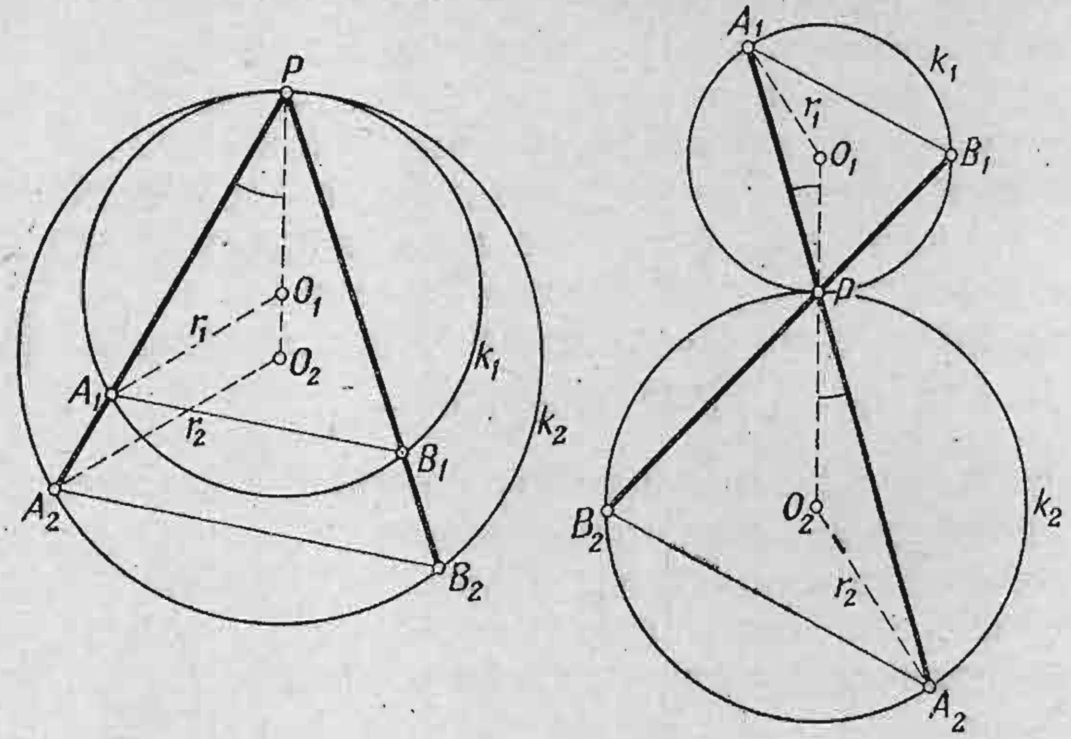


Рис. 76.

либо совпадают, либо равны как вертикальные. Следовательно, треугольники PA_1B_1 и PA_2B_2 подобны, что и требовалось доказать.

112. Умножив числитель и знаменатель дроби A на $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n-2)$, получим

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{[(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2)]^2 \cdot 2n} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2\, n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} = \frac{1}{2^{2n-1}}\, C_{2n-1}^{n-1}.$$

Биномиальный коэффициент C_{2n-1}^{n-1}, стоящий в правой части последнего равенства, — целое число (равное и MB, один из которых заканчивается, а другой начинается на клетке M. Во второй раз мы оказываемся на клетке M, пройдя отрезок маршрута CM. Помеченные клетки A, B и C различны, и каждая из них находится либо на одной вертикали, либо на одной горизонтали с клеткой M, что невозможно, поскольку по условиям задачи на каждой вертикали и горизонтали (в том числе и на тех, на пересечении которых стоит клетка M) находятся лишь по две помеченных клетки. Таким образом, пройденный нами маршрут замкнут, он содержит четное число помеченных клеток, поскольку отдельные прямолинейные участки проходят попеременно то по горизонталям, то по вертикалям шахматной доски. Следуя по маршруту, мы можем расставить на каждой второй из помеченных клеток черные фигуры, а на оставшихся клетках — белые фигуры так, что на всех горизонталях и вертикалях, по которым проходит маршрут, окажется по одной белой и одной черной фигуре.

Если, проделав замкнутый маршрут, мы обнаружим, что он проходит не по всем горизонталям и вертикалям шахматной доски и часть помеченных клеток осталась в стороне от него, то, начав с любой из них, можно построить второй замкнутый маршрут и на его угловых клетках расставить в чередующемся порядке черные и белые фигуры так, что на каждой вертикали и горизонтали, по которым проходит новый маршрут, также окажется по одной черной и одной белой фигуре. Новый маршрут не может иметь общих помеченных («угловых») клеток со старым, поскольку по каждой горизонтали и вертикали проходит отрезок лишь одного из двух маршрутов, а горизонталь и вертикаль, на пересечении которых стояла бы общая клетка, уже были бы «заняты» первым маршрутом.

Построение замкнутых маршрутов необходимо продолжать до тех пор, пока на каждой из 8 горизонталей и каждой из 8 вертикалей шахматной доски не окажется по одной черной и одной белой фигуре*.

111. Пусть r_1 — радиус окружности k_1 с центром в точке O_1, а r_2 — радиус окружности k_2 с центром в точке O_2 (рис. 76). Треугольники PO_1A_1 и PO_2A_2 подобны, поскольку углы при вершине P у них либо совпадают (при внутреннем касании окружностей k_1 и k_2), либо равны

Воспользуемся соотношением (4) и преобразуем выражение $ab+cd$, величину которого требуется определить:

$$ab+cd=ab-\frac{bd^2}{a}=\frac{b(a^2-d^2)}{a}.$$

Подставляя в числитель последнего выражения равенство (5), находим

$$ab+cd=0.$$

Второе решение. Умножив правую и левую части равенства (3) на $ad+bc$, получим

$$(ac+bd)(ad+bc)=a^2cd+d^2ab+c^2ab+$$
$$+b^2cd=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)=0,$$

а поскольку в условиях задачи содержатся равенства (1) и (2), то

$$ab+cd=0^*.$$

110. Начнем с любой помеченной клетки. Перейдем с нее на вторую помеченную клетку, стоящую на той же

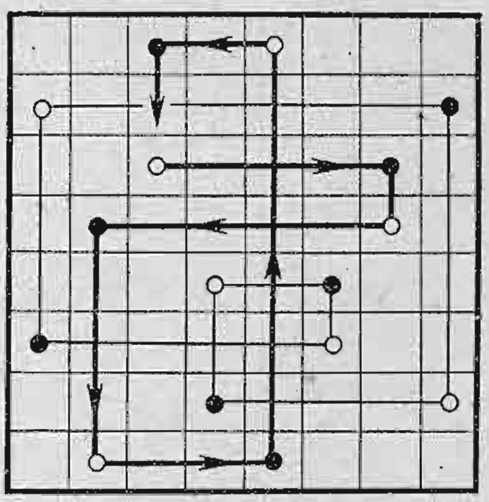


Рис. 75.

горизонтали, а со второй клетки — на третью помеченную клетку, находящуюся на той же вертикали, что и вторая. Попеременно двигаясь по вертикалям и горизонталям с одной помеченной клетки на другую, мы рано или поздно встретим помеченную клетку, на которой уже успели побывать раньше (рис. 75). Такой клеткой может быть лишь исходная клетка. Действительно, предположим, что мы вышли на какую-нибудь другую клетку M, причем в первый раз мы побывали на ней, двигаясь по двум прямолинейным отрезкам нашего маршрута AM

лишь одной полуплоскостью, и каждая из четырех полуплоскостей покрывает лишь одну из точек P_1, P_2, P_3, P_4. Докажем, что это невозможно, то есть среди любых четырех полуплоскостей, покрывающих всю плоскость, всегда найдется такая, которая покрывает две из четырех заданных точек.

Прежде всего заметим, что если три точки лежат на одной прямой, то полуплоскость, покрывающая среднюю точку, должна покрывать по крайней мере одну из двух крайних точек. Следовательно, никакие три из четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4 не могут лежать на одной прямой.

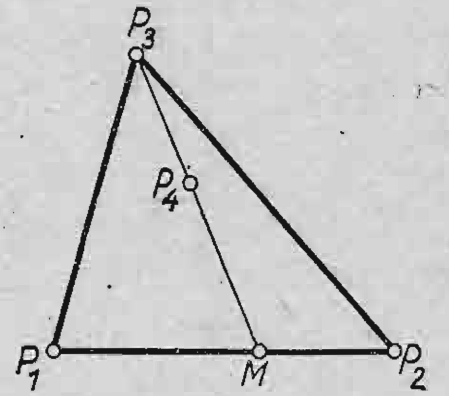


Рис. 127.

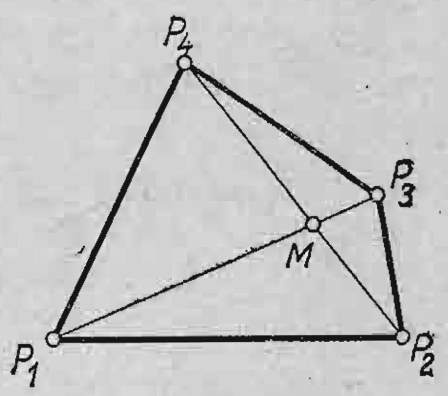


Рис. 128.

Остается рассмотреть следующие два возможных расположения точек P_1, P_2, P_3, P_4 на плоскости:

а) одна точка лежит внутри треугольника с вершинами в трех других точках;

б) четыре точки образуют вершины выпуклого четырехугольника.

Рассмотрим случай а. Пусть P_4 — точка, лежащая внутри треугольника с вершинами в трех остальных точках, а M — точка пересечения прямой P_3P_4 со стороной P_1P_2 (рис. 127). В силу сделанного выше замечания полуплоскость, покрывающая точку P_4, должна также покрывать либо точку P_3, либо точку M. Из того же замечания следует, что если эта полуплоскость покрывает точку M, то она покрывает по крайней мере одну из точек P_1 и P_2.

Рассмотрим случай б. Проведем диагонали четырехугольника и обозначим буквой M точку их пересечения (рис. 128). В силу сделанного замечания полуплоскость, покрывающая точку M, должна покрывать по крайней мере один из концов диагонали P_1P_3 и один из концов диагонали P_2P_4, то есть по крайней мере две из четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4.

Таким образом, и в случае а, и в случае б одна из четырех полуплоскостей покрывает две из четырех заданных точек. Тем самым утверждение задачи доказано.

Второе решение. Докажем следующую лемму: *если три луча покрывают прямую, то среди них можно выбрать два таких, которые будут покрывать всю прямую.*

Для доказательства леммы достаточно заметить, что два из трех лучей, покрывающих прямую, должны быть направлены в одну сторону, а если два луча направлены в одну сторону, то один из них целиком содержится в другом. Если отбросить тот из лучей, который целиком содержится в другом, то два оставшихся луча будут покрывать всю прямую. Итак, лемма доказана.

Рассмотрим теперь прямую, которая служит границей одной из полуплоскостей (выбранную полуплоскость назовем первой). Граница первой полуплоскости покрыта тремя остальными полуплоскостями. Если одна из них покрывает всю границу, то она содержит внутри себя целиком всю первую полуплоскость. Следовательно, отбросив первую полуплоскость, мы получим три полуплоскости, покрывающие всю плоскость. Итак, в этом случае утверждение задачи доказано.

Если же каждая из трех полуплоскостей покрывает лишь один из двух лучей, на которые ее граница делит границу первой полуплоскости, то, пользуясь леммой, можно утверждать, что два из трех лучей (и, следовательно, две из трех полуплоскостей) покрывают всю границу первой полуплоскости. Утверждение остается в силе и в том случае, если одна из трех полуплоскостей не имеет ни одной общей точки с границей первой полуплоскости.

Рассмотрим границы двух полуплоскостей, покрывающих границу первой полуплоскости. Если эти прямые параллельны, то ограничиваемые ими полуплоскости «вдвоем» покрывают всю плоскость. Предположим теперь, что границы двух полуплоскостей пересекаются в точке M. Если точка M лежит внутри первой полуплоскости (рис. 129, a), то эти две полуплоскости вместе с первой полуплоскостью покрывают всю плоскость. Если же точка M расположена вне первой полуплоскости (рис. 129, *б*), то первую полуплоскость можно исключить, а три остальные полуплоскости будут покрывать всю плоскость, поскольку в этом случае две полуплоскости, границы которых пересекаются в точке M, целиком покрывают первую полуплоскость. Итак, утверждение задачи полностью доказано.

Третье решение. Обозначим полуплоскости f_1, f_2, f_3 и f_4. Если бы утверждение задачи было неверным, то нашлась бы такая точка P_1, которую из четырех

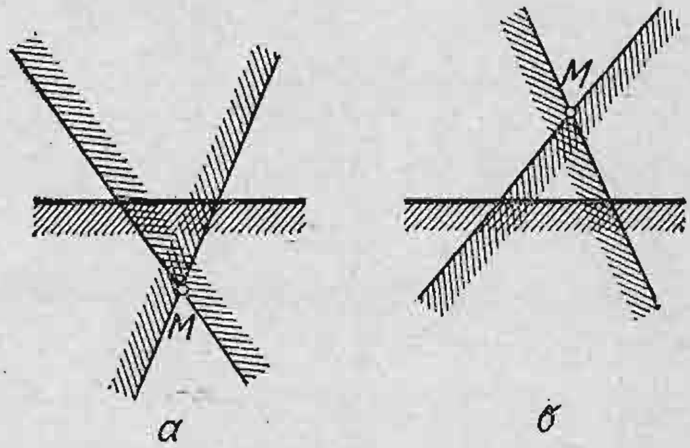


Рис. 129.

полуплоскостей f_1, f_2, f_3, f_4 покрывала бы лишь полуплоскость f_1. Кроме того, нашлись бы точки P_2, P_3, P_4, каждую из которых покрывала бы лишь одна из полуплоскостей f_2, f_3, f_4. Отрезок прямой, соединяющий точки P_1 и P_4, должен иметь общую точку Q_1 с границей полуплоскости f_4, поскольку f_4 покрывает точку P_4, но не покрывает точку P_1. Полуплоскости f_2 и f_3 не покрывают точку Q_1, поскольку ни f_2, ни f_3 не покрывают концов и, следовательно, внутренних точек отрезка P_1P_4. Следовательно, из четырех полуплоскостей покрывать точку Q_1 может и действительно покрывает (поскольку в противном случае точка Q_1 вообще не была бы покрыта) лишь полуплоскость f_1. Аналогично граница полуплоскости f_4 содержит такие точки Q_2 и Q_3, одна из которых покрыта лишь полуплоскостью f_2, а другая — лишь полуплоскостью f_3. Но это невозможно, поскольку Q_1, Q_2 и Q_3 — три попарно различные точки, лежащие на одной прямой (границе полуплоскости f_4), и полуплоскость, покрывающая среднюю из них, покрывает одну из двух крайних.

Полученное противоречие доказывает правильность утверждения задачи.

Задача 156 допускает следующую алгебраическую формулировку:

если система неравенств

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &> 0,\\ a_2x + b_2y + c_2 &> 0,\\ a_3x + b_3y + c_3 &> 0,\\ a_4x + b_4y + c_4 &> 0 \end{aligned}$$

обладает тем свойством, что любая пара значений x, y удовлетворяет по крайней мере одному из неравенств, то одно из неравенств, входящих в систему, можно отбросить, не нарушив при этом ее свойства.

Непосредственное доказательство этого утверждения, не использующее приведенных выше геометрических соображений, было бы довольно затруднительно*.

157. Первое решение. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры трех заданных окружностей, и пусть точка O_2 лежит между точками O_1 и O_3. Обозначим радиусы окружностей r_1, r_2 и r_3. Если бы четвертая окружность лежала

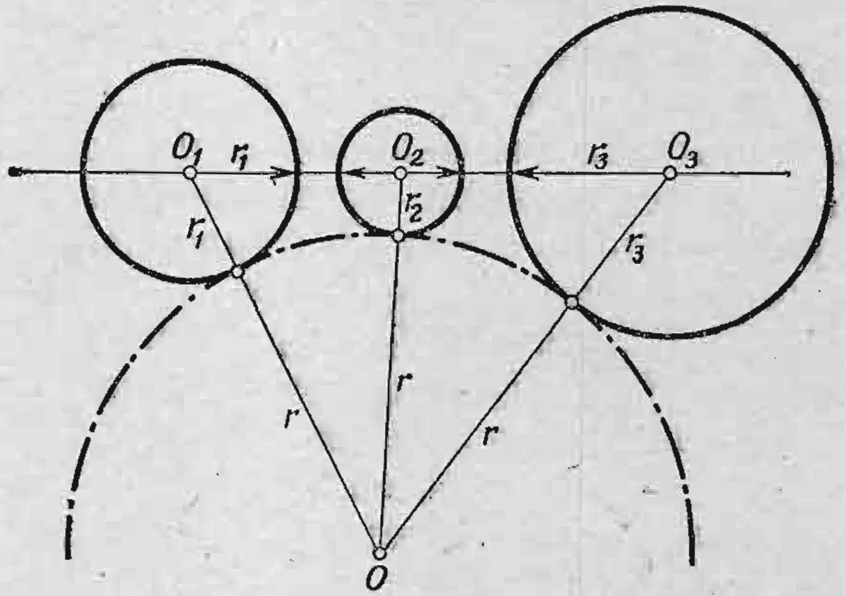


Рис. 130.

внутри одной из трех данных окружностей, то она не могла бы касаться двух других окружностей. Случай, когда одна из трех данных окружностей касается четвертой окружности изнутри, также можно исключить из рассмотрения, поскольку при таком расположении окружностей радиус четвертой окружности больше радиуса окружности, касающейся ее изнутри, и, следовательно, ее радиус не может быть наименьшим из радиусов четырех окружностей. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда четвертая окружность касается трех данных окружностей извне (рис. 130). Пусть O — центр четвертой окружности, а r — ее радиус.

Стороны треугольника OO_1O_3 удовлетворяют неравенству

$$OO_1 + OO_3 \geqslant O_1O_3.$$

Поскольку окружности касаются друг друга извне, то $OO_1 = r + r_1$, $OO_3 = r + r_3$. По условиям задачи никакие две из трех данных окружностей не имеют общих внутренних точек, а отрезок O_1O_3 содержит диаметр средней и радиусы двух крайних окружностей, причем диаметр и радиусы не перекрываются. Следовательно, $O_1O_3 \geqslant r_1 + 2r_2 + r_3$. Это соотношение выполняется и в том случае, если средняя окружность касается одной

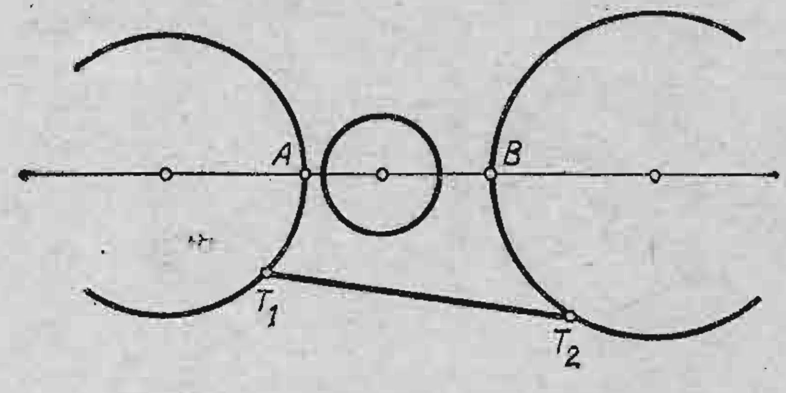


Рис. 131.

или обеих крайних окружностей. В последнем случае неравенство переходит в строгое равенство.

Из полученных соотношений получаем неравенство

$$r_1 + 2r + r_3 \geqslant r_1 + 2r_2 + r_3,$$

откуда $r \geqslant r_2$. Таким образом, радиус r четвертой окружности не может быть меньше любого из радиусов r_1, r_2, r_3.

Второе решение. Пусть A и B — концы кратчайшего из отрезков, соединяющих точки одной из крайних окружностей с точками другой крайней окружности. Ясно, что A и B совпадают с точками пересечения крайних окружностей с их линией центров (рис. 131). Поскольку диаметр средней окружности лежит на отрезке AB, то

$$AB \geqslant 2r_2.$$

Пусть T_1 и T_2 — общие точки четвертой и двух крайних окружностей. Поскольку отрезок T_1T_2 можно рассматривать как хорду четвертой окружности, то

$$2r \geqslant T_1T_2.$$

Точки A и B выбраны так, что

$$T_1T_2 \geqslant AB.$$

Сравнивая неравенства, получаем $2r \geqslant 2r_2$, или $r \geqslant r_2$. Тем самым утверждение задачи доказано.

Третье решение. Восставим перпендикуляры к линии центров трех заданных окружностей из точек ее пересечения со средней окружностью (рис. 132). Две крайние окружности расположатся по разные стороны от полосы, ограниченной перпендикулярами. Поскольку четвертая окружность имеет общие точки с каждой из

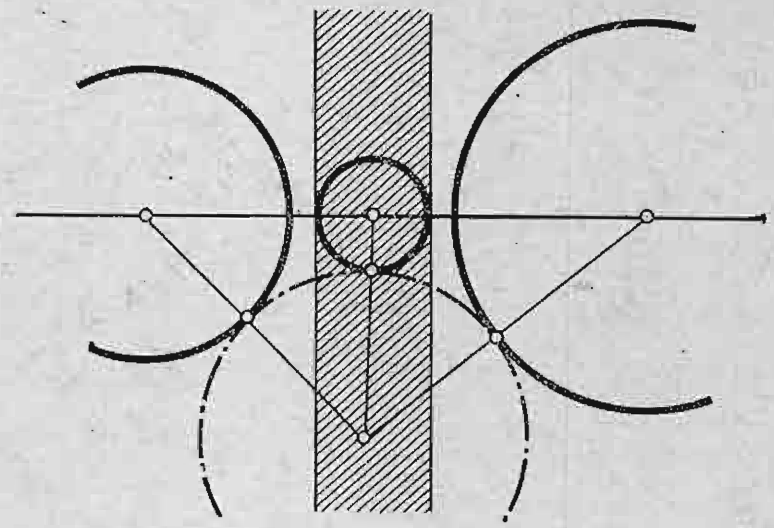


Рис. 132.

крайних окружностей, то четвертая окружность выходит за каждую из прямых, ограничивающих полосу. Следовательно, диаметр четвертой окружности не может быть меньше ширины полосы, или, что то же, радиус четвертой окружности не меньше радиуса средней окружности.

Четвертое решение. Предположим, что радиус четвертой окружности, имеющей по одной общей точке с двумя крайними окружностями, меньше радиуса средней окружности. Попытаемся найти центр четвертой окружности.

Увеличив радиус каждой из крайних окружностей на r_2, проведем новые окружности из тех же центров. Центр четвертой окружности, радиус которой меньше r_2, должен лежать внутри каждой из «расширенных» окружностей, поскольку в противном случае четвертая окружность не могла бы касаться одной из крайних окружностей (рис. 133).

Из центра средней окружности восставим перпендикуляр к линии центров заданных окружностей. Поскольку радиус каждой из «расширенных» окружностей отличается от радиуса исходной окружности на радиус средней окружности, то «расширенные» окружности лежат по разные стороны от проведенного перпендикуляра. Следовательно, расширенные окружности не могут

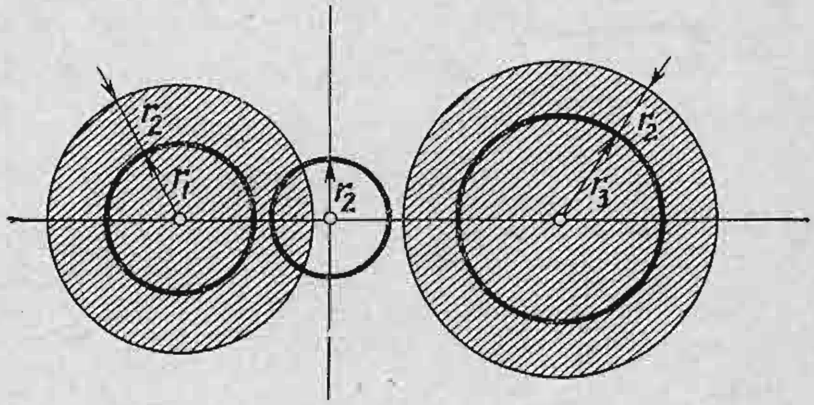


Рис. 133.

иметь общих внутренних точек и четвертой окружности, радиус которой был бы меньше r_2, не существует.

П я т о е   р е ш е н и е. Соединим отрезком прямой центр O четвертой окружности с центром O_2 средней окружности. Сумма углов OO_2O_1 и OO_2O_3 равна 180°.

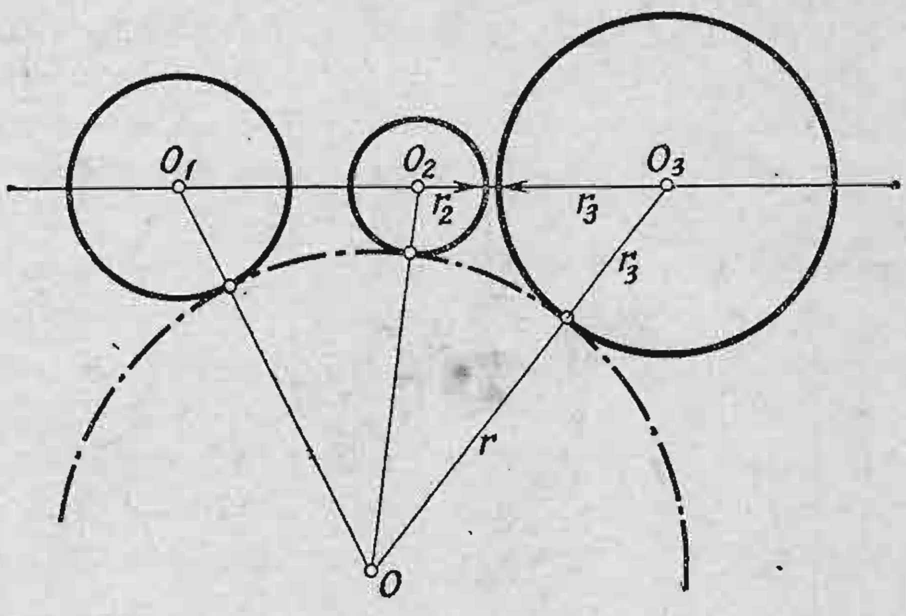


Рис. 134.

Следовательно, оба угла не могут быть меньше 90° (рис. 134).

Пусть, например, $\angle OO_2O_3 \geqslant 90°$. Тогда $\angle OO_2O_3$ — наибольший из углов треугольника OO_2O_3, а OO_3 — наибольшая из сторон того же треугольника, в силу чего

$$OO_3 > O_2O_3.$$

Поскольку окружности с центрами O и O_3 имеют общую точку, то $OO_3 \leqslant r + r_3$. Окружности с центрами O_2

и O_3 не имеют общих внутренних точек, поэтому $O_2O_3 \geqslant \geqslant r_2 + r_3$. Таким образом,

$$r + r_3 > r_2 + r_3,$$

откуда $r > r_2$. Следовательно, r не может быть меньше любого из радиусов r_1, r_2, r_3.

Утверждение задачи допускает следующее обобщение.

Пусть центры трех окружностей, не имеющих попарно общих внутренних точек, расположены на одной прямой. Если четвертая окружность имеет общие точки с каждой из двух крайних окружностей, то радиус четвертой окружности не может быть меньше радиуса средней окружности, причем равенство достигается лишь тогда, когда средняя окружность касается двух крайних, а четвертая окружность совпадает со средней окружностью.

158. Первое решение. Если среди выбранных чисел нет числа $3n$, то каждое из них можно увеличить на одно и то же число так, чтобы наибольшее число стало равным $3n$. Поскольку разность между любыми двумя числами остается неизменной, то достаточно рассмотреть лишь случай, когда одно из выбранных чисел равно $3n$. Приняв это предположение, будем рассуждать следующим образом.

Если среди выбранных чисел встречается одно из чисел $n+1$, $n+2$, ..., $2n-1$, то разность между $3n$ и этим числом больше n, но меньше $2n$ и утверждение задачи выполнено.

Если же среди выбранных чисел нет ни одного из чисел $n+1$, $n+2$, ..., $2n-1$, то это означает, что $n+1$ чисел, отличных от $3n$, выбраны среди элементов пар

$$(1,\ 2n),\quad (2,\ 2n+1),\quad (3,\ 2n+2),\ \ldots,\ (n,\ 3n-1).$$

Поскольку пар всего n, а чисел $n+1$, то из какой-то пары выбраны оба элемента. Следовательно, и в этом случае среди выбранных $n+2$ чисел имеются два таких, разность между которыми равна $2n-1$, то есть больше n, но меньше $2n$, поскольку при $n > 1$ справедливо неравенство $2n-1 > n$.

Второе решение. Расположим $3n$ первых натуральных чисел по кругу в порядке возрастания (при

$n=4$ числа расположатся так же, как на циферблате обычных часов).

Утверждение задачи справедливо для двух чисел, если дуга, идущая от меньшего числа к большему, превышает $^1/_3$, но меньше $^2/_3$ окружности. Но если какая-то дуга больше $^1/_3$, но меньше $^2/_3$ окружности, то дуга, дополняющая ее до полной окружности, также больше $^1/_3$, но меньше $^2/_3$ окружности. Следовательно, утверждение задачи справедливо для двух чисел, если каждая из двух заключенных между ними дуг больше $^1/_3$ окружности.

Приведенные выше соображения позволяют сформулировать задачу следующим образом. Из $3n$ точек, расставленных по окружности на равных расстояниях друг от друга, выбрали $n+2$ точек. Доказать, что среди выбранных точек всегда найдутся две такие, что обе соединяющие их дуги больше трети окружности.

Рассмотрим, каким образом из заданных $3n$ точек можно выбрать подмножество так, чтобы любые две его точки не разбивали окружность на дуги, каждая из которых больше трети окружности. Недопустимые расположения точек исключаются следующим запретом: очередную точку подмножества нельзя выбирать внутри той трети окружности, против которой находится выбранная ранее точка.

Назовем дугу окружности свободной, если она не содержит точек подмножества, отличных от тех, которые совпадают с ее концами. Согласно сформулированному выше запрету, одна из свободных дуг должна быть не меньше $^1/_3$ окружности. Из того же запрета следует, что свободная дуга не может быть одновременно больше $^1/_3$ и меньше $^2/_3$ окружности (в противном случае расположение концов дуги противоречило бы запрету). Таким образом, выбор точек подмножества разрешен в двух случаях: если наибольшая свободная дуга либо равна $^1/_3$ окружности, либо не меньше $^2/_3$ окружности.

Если наибольшая свободная дуга равна $^1/_3$ окружности, то подмножество содержит лишь три выбранные точки (рис. 135), две из которых являются концами этой дуги. Внутри дуги длиной в $^2/_3$ окружности, дополняющей свободную $^1/_3$, не может быть выбранной точки, отличной от середины дуги, поскольку концами дуги служат выбранные точки — концы свободной $^1/_3$ окружности. Точка же, находящаяся в середине дуги в $^2/_3$ окружности, дополняющей свободную $^1/_3$, заведомо должна быть выбрана, поскольку в противном случае $^1/_3$ окружности не была бы наибольшей свободной дугой.

Если же наибольшая свободная дуга не меньше $^2/_3$ окружности, то выбранные точки располагаются на одной и той же трети окружности, включая ее концы. Поскольку дуга в $^1/_3$ окружности содержит всего $n+1$

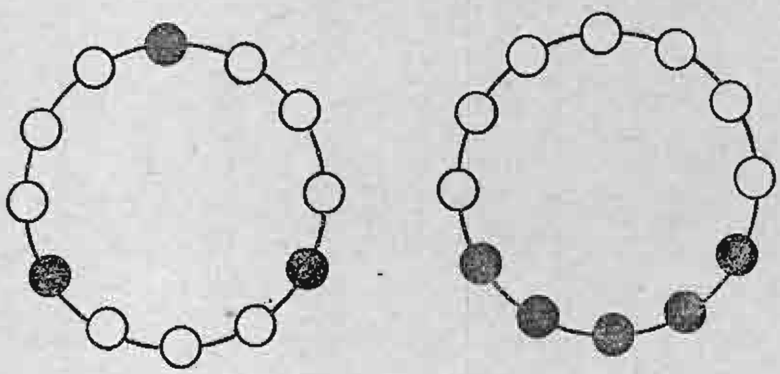


Рис. 135.

точек, то число выбранных точек в этом случае не превосходит $n+1$. Запрет не будет нарушен, даже если мы выберем все $n+1$ точек, заполняющих треть окружности.

Поскольку $n+2>n+1$ и при $n>1$ число $n+2$ больше 3, нельзя выбрать $n+2$ точек, не нарушив при этом запрета, что и доказывает утверждение задачи.

Третье решение. При $n=60$ задаче можно придать следующую шутливую форму.

Библиотека открывается в 12 часов дня и закрывается в 15 часов. Входить в библиотеку разрешается с интервалом в 1 минуту. Первый читатель может войти в библиотеку ровно в 12 часов, последний — в 14 часов 59 минут. Входить в библиотеку читателям разрешается лишь по одному. Через час после прихода в библиотеку читатель засыпает над книгами и спит ровно 1 час, если только закрытие библиотеки не прервет его сон. Входить в библиотеку, когда кто-нибудь из читателей спит, воспрещается. Доказать, что при столь странных правилах 62 человека не смогут побывать за день в библиотеке.

Отбросив излишние подробности, мы без труда обнаружим, что перед нами все та же задача 158.

Если при появлении первого читателя библиотекарь переведет стрелки часов назад и поставит их снова на 12 часов, то сделает он это, очевидно, лишь для того, чтобы за день в библиотеке побывало как можно больше читателей. Чтобы избавить библиотекаря от лишних хлопот, предположим с самого начала, что первый читатель появился в библиотеке ровно в 12 часов дня. Необходимо различать следующие три случая.

Рассмотрим первый случай. Предположим, что ровно в 13 часов и ровно в 14 часов в библиотеку пришло еще по одному читателю. Ясно, что в такой день все остальные читатели не смогли попасть в библиотеку. Действительно, с 12 до 13 часов в библиотеку не мог прийти никто, поскольку читатель, появившийся в библиотеке в это время, в 14 часов заведомо спал бы и в библиотеку никого не пускали бы, чтобы не потревожить его сон. С 13 до 14 часов спал тот, кто пришел в 12 часов, а с 14 до 15 — тот, кто пришел в 13 часов. Следовательно, всего за день в библиотеке успело побывать 3 человека.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что еще один читатель пришел ровно в 13 часов, но в 14 часов не пришел никто. Заведомо ясно, что ни один читатель не пришел в библиотеку после 13 часов: с 13 до 14 часов спал тот из читателей, кто пришел в 12 часов, а с 14 до 15 часов — тот, кто пришел в 13 часов. Следовательно, в этом случае все читатели, посетившие за день библиотеку, могли прийти лишь с 12 до 13 часов, то есть в библиотеке за день побывало не более 61 человека.

Рассмотрим, наконец, третий случай. Предположим, что никто из читателей не пришел в библиотеку ровно в 13 часов. Выберем последнего из тех читателей, кто пришел в библиотеку до 13 часов (возможно, что выбранным окажется первый читатель, пришедший в библиотеку в 12 часов дня). В течение двух часов после прихода выбранного нами читателя в библиотеку никто не приходил, поскольку он был последним из тех, кто пришел до 13 часов, ровно в 13 не пришел никто, а с 13 часов и до истечения двух часов с момента его прихода кто-нибудь спал (с 13 до 14 часов — читатель, пришедший в библиотеку в 12 часов, а потом — выбранный нами читатель, если только им не оказался самый первый из посетителей библиотеки). Таким образом, из 180 возможностей 119 оказываются упущенными. Следовательно, в этом случае за день в библиотеке могло побывать не более 61 читателя.

Итак, можно утверждать, что во всех случаях в библиотеке со столь странными порядками за день успевает побывать не более 61 человека. Ясно, что приведенные выше рассуждения остались бы в силе и в том случае, если бы час делился не на 60, а на n минут. Единственное, на что следует обратить внимание: число $n+1$, заменяющее число 61, не должно быть меньше 3, то есть должно выполняться неравенство $n > 1^*$.

159. Через точки A_1, B_1, C_1 проведем прямые, параллельные сторонам AB, BC, CA, а точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника обозначим (в том же порядке) B_2, C_2, A_2 (рис. 136). Поскольку $\lambda > {}^1/_2$, то точки B_2, C_2 и A_2 принадлежат отрезкам CB_1, AC_1, BA_1.

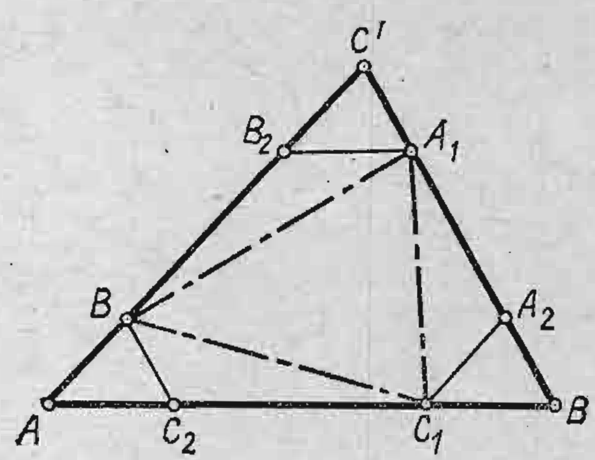


Рис. 136.

Каждая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ меньше суммы двух сторон шестиугольника $A_1B_2B_1C_2C_1A_2$. Следовательно, периметр треугольника $A_1B_1C_1$ меньше периметра шестиугольника $A_1B_2B_1C_2C_1A_2$, и поэтому достаточно доказать, что периметр этого шестиугольника в λ раз меньше периметра исходного треугольника.

Поскольку $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$, $C_1A_2 \parallel AC$, то треугольники AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C подобны треугольнику ABC.

Из равенств

$$A_1C = (1-\lambda)BC, \quad B_1A = (1-\lambda)CA, \quad C_1B = (1-\lambda)AB$$

заключаем, что треугольники AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C конгруэнтны. Но тогда $A_1B_2 = C_2A$, $B_1C_2 = A_2B$, $C_1A_2 = B_2C$, откуда и следует утверждение задачи, поскольку периметр шестиугольника $A_1B_2B_1C_2C_1A_2$ оказывается равным сумме отрезков AC_1, BA_1, CB_1, то есть периметру исходного треугольника ABC, уменьшенному в λ раз.

160. Составим еще один набор из чисел, дополняющих элементы второго набора до n. Какое-то из чисел, входящих в первый набор, непременно должно встретиться среди чисел, образующих новый набор, поскольку общее число членов в обоих наборах не меньше n, а из натуральных чисел $1, 2, \ldots, n-1$ нельзя выбрать n различных. Элемент первого набора, встречающийся среди чисел нового набора, дополняет соответствующий элемент второго набора до n, что и требовалось доказать.

161. Первое решение. Пусть $2n^2 = kd$, где k — целое положительное число (поскольку по условиям задачи d — натуральное число, на которое делится $2n^2$). Если бы число $n^2 + d$ было квадратом целого числа x, то

$$x^2 = n^2 + d = n^2 + \frac{2n^2}{k},$$

и, таким образом,

$$k^2x^2 = n^2(k^2 + 2k).$$

Но последнее равенство невозможно. Действительно, в левой его части стоит квадрат целого числа, а в правой квадратом является лишь первый сомножитель, а второй сомножитель не может быть квадратом целого числа, поскольку удовлетворяет неравенству

$$k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$$

и, следовательно, заключен между квадратами двух последовательных целых чисел.

При решении задачи мы воспользовались тем, что если a, b, c — натуральные числа и $a^2 = b^2c$, то c должно быть квадратом некоторого целого числа. Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, воспользуемся разложением натуральных чисел в произведения степеней простых чисел (см. III.7). В разложение чисел a^2 и b^2 все простые числа входят в четных степенях, поскольку при возведении в квадрат показатели степени удваиваются. Разделив a^2 на b^2, мы получим число, в разложение которого все простые числа также входят в четных степенях. Следовательно, c — квадрат некоторого числа, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть снова $2n^2 = kd$. Если утверждение задачи неверно, то существует такое целое число x, что

$$\frac{k+2}{k}=\frac{n^2+d}{n^2}=\frac{x^2}{n^2}.$$

Числитель и знаменатель левой дроби отличаются между собой на 2, и при сокращении общих множителей числителя и знаменателя эта разность может лишь уменьшиться. Дробь, стоящую справа, после сокращения общих множителей числителя и знаменателя можно привести к виду p^2/q^2, где p и q — натуральные числа, причем $p \neq q$, поскольку $n^2+d \neq n^2$. Разность числителя и знаменателя дроби p^2/q^2 не меньше 3. Действительно, ее можно представить в виде $p^2-q^2=(p+q)(p-q)$, а поскольку $p \neq q$, то $p+q \geqslant 3$, а $p-q \geqslant 1$. Следовательно, выписанное выше равенство не может выполняться.

162. Первое решение. Начнем с доказательства следующей леммы:

если α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 — *положительные углы*, $\alpha+\beta+\gamma=180°$, $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$ *и, кроме того,*

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin\gamma_1,$$

то

$$\alpha=\alpha_1, \quad \beta=\beta_1, \quad \gamma=\gamma_1.$$

Построим два треугольника: один с углами α, β, γ, другой — с углами α_1, β_1, γ_1. По теореме синусов отношение синусов любого треугольника равно отношению его сторон. Поскольку по условиям задачи отношения синусов углов α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 равны, то построенные треугольники подобны, а их соответственные углы равны. Итак, лемма доказана.

Пусть $2\alpha_1$, $2\beta_1$, $2\gamma_1$ — углы при вершинах A, C, E заданного шестиугольника (рис. 137). Сумма внутренних углов шестиугольника равна 720°, а поскольку по условиям задачи сумма углов при вершинах A, C, E равна сумме углов при вершинах B, D, F то $2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1=360°$, или $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$. Если a — длина любой из сторон шестиугольника, то стороны треугольника BDF равны $2a\sin\alpha_1$, $2a\sin\beta_1$, $2a\sin\gamma_1$. Если углы треугольника BDF обозначить α, β, γ, то по теореме синусов

$$BF : BD : DF = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

откуда

$$\sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin\gamma_1 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Пользуясь леммой, заключаем, что $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$. Следовательно, противоположные углы шестиугольника равны, поскольку, например, угол при вершине D равен сумме угла α и углов, дополнительных к β_1 и

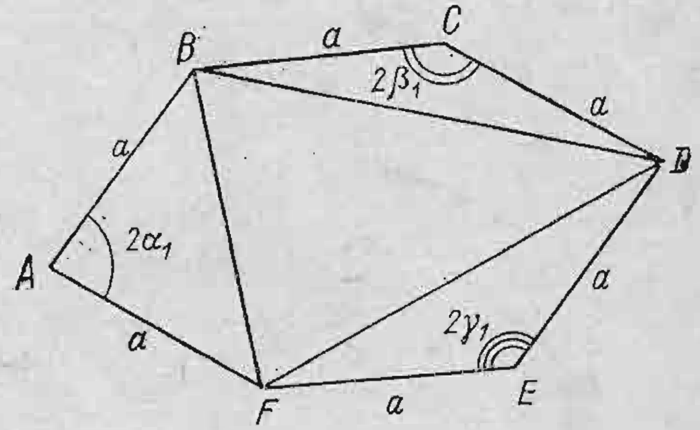


Рис. 137.

γ_1, то есть $\alpha + (90° - \beta_1) + (90° - \gamma_1) = 2\alpha_1$, а угол при вершине A также равен $2\alpha_1$.

Второе решение. Проведя три диагонали, отсечем от шестиугольника три равнобедренных треугольника (рис. 138). По условиям задачи сумма углов при их вершинах, противолежащих основаниям, равна 360°. Следовательно, из этих трех равнобедренных треугольников можно составить один новый треугольник. Поскольку стороны его совпадают с основаниями равнобедренных треугольников, то новый треугольник конгруэнтен тому, который остался от шестиугольника после того,

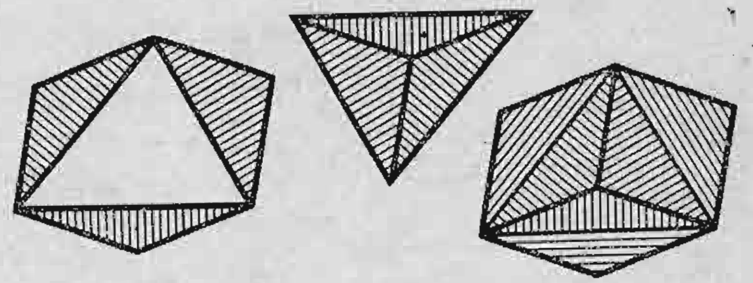


Рис. 138.

как мы провели диагонали и отсекли равнобедренные треугольники. Таким образом, равнобедренными треугольниками можно заполнить без пробелов и наложений внутренний треугольник, оставшийся от исходного шестиугольника. Следовательно, шестиугольник $ABCDEF$ допускает разложение на три ромба (каждый из которых состоит из двух равнобедренных треугольников, симметричных относительно сторон внутреннего треугольника). Это означает, что противоположные стороны шестиугольника параллельны, а противоположные углы равны.

Как видно из рис. 139, второе решение позволяет доказать следующее обобщение задачи 162:

если противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и, кроме того, сумма трех уг-

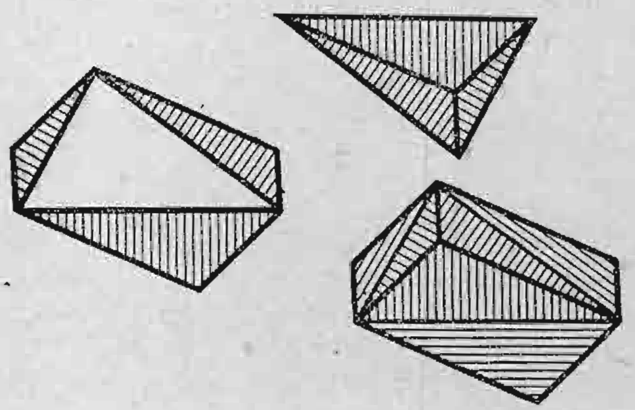


Рис. 139.

лов шестиугольника, из которых любые два не примыкают к одной и той же стороне, равна сумме трех других углов шестиугольника, то противоположные углы треугольника попарно равны.

Доказательство этого утверждения можно получить, если воспользоваться ходом рассуждений второго решения. Никаких трудностей при этом не возникает.

Третье решение. Пусть задан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, противоположные стороны которого попарно равны, а углы удовлетворяют условиям задачи.

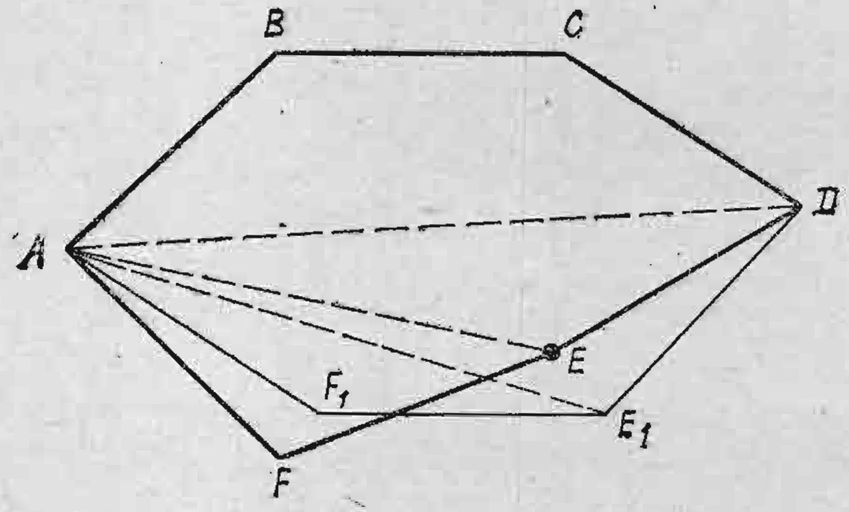


Рис. 140.

Построив четырехугольник DE_1F_1A, симметричный четырехугольнику $ABCD$ относительно середины диагонали AD (рис. 140), мы получим шестиугольник, обладающий центром симметрии. Поскольку противоположные углы этого шестиугольника равны в силу симметрии, то он удовлетворяет как условию задачи, так и ее заключению.

Покажем, что построенный шестиугольник совпадает с заданным шестиугольником. Если это не так и, скажем, $\angle CDE < \angle CDE_1$, то по теореме из III.38 $AE < AE_1$. Применяя ту же теорему к треугольникам AFE и AF_1E_1, находим, что $\angle EFA < \angle E_1F_1A$. Но тогда обе суммы

$$\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA$$

и

$$\angle ABC + \angle CDE_1 + \angle E_1F_1A$$

не могут одновременно равняться 360°.

Четвертое решение. Противоположные стороны заданного шестиугольника равны, а сумма любых трех углов, попарно не примыкающих к одной стороне шестиугольника, составляет 360°. Совместив вершины этих углов у трех шестиугольников, конгруэнтных заданному,

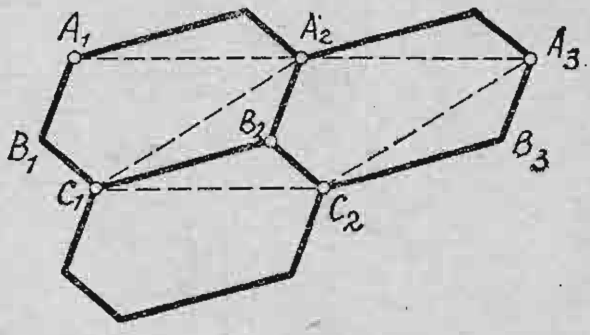


Рис. 141.

мы сможем расположить их так, чтобы они составили полный угол. Пользуясь обозначениями, приведенными на рис. 141, можно утверждать, что четырехугольники $A_1A_2C_2C_1$ и $A_2A_3C_2C_1$ — параллелограммы, поскольку их противоположные стороны в силу конгруэнтности шестиугольников равны. Таким образом, вершины A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой. Из конгруэнтности шестиугольников следует также, что $\angle B_1A_1A_2 = \angle B_2A_2A_3$. Но тогда $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Тем самым доказано, что противоположные стороны шестиугольников параллельны и, значит, противоположные углы равны.

Пятое решение. Утверждение задачи допускает следующее обобщение:

если противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны, а один из углов меньше противоположного угла, то из двух сумм $\angle A + \angle C + \angle E$ и $\angle B + \angle D + \angle F$ та меньше, которая содержит меньший из двух противоположных углов.

Пусть в шестиугольнике $ABCDEF$, удовлетворяющем условиям задачи, $\angle A < \angle D$ (рис. 142). Поскольку в треугольниках FAB и CDE эти углы заключены между попарно равными сторонами, то $FB < EC$, и в треугольнике FAB сумма двух других углов больше, чем в треугольнике CDE. В треугольниках BEF и EBC две стороны попарно равны, а третья сторона у треугольника BEF меньше, чем у треугольника EBC, поэтому $\angle BEF < \angle EBC$ и сумма двух других углов в треугольнике BEF больше, чем в треугольнике EBC. Складывая почленно полученные неравенства, находим, что сумма углов при вершинах A, C, E меньше суммы трех других углов шестиугольника.

Шестое решение. Выясним, как соотносятся между собой величины противоположных углов шестиугольника, если его противоположные стороны равны.

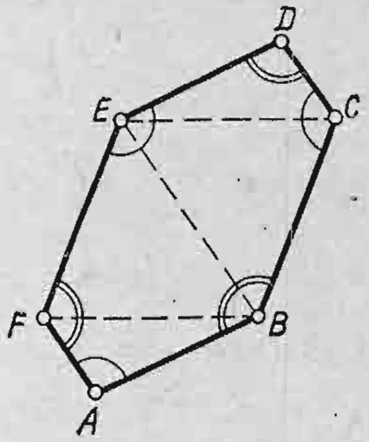


Рис. 142.

Если в шестиугольнике один из противоположных углов равен другому, то и все остальные противоположные углы попарно равны. Действительно, если, например, $\angle A = \angle D$, то треугольники FAB и CDE конгруэнтны, в силу чего $FB = EC$. Таким образом, треугольники BEF и EBC конгруэнтны, и шестиугольник $ABCDEF$ обладает центром симметрии.

Из доказанного следует, что противоположные углы шестиугольника либо все попарно равны, либо все попарно не равны. Таким образом, если хотя бы один из углов шестиугольника не равен противоположному углу, то в одной из троек углов $\angle A$, $\angle C$, $\angle E$ и $\angle B$, $\angle D$, $\angle F$ по крайней мере два угла меньше противоположных углов. Докажем, что и третий угол также меньше противоположного угла.

Воспользуемся тем, что если соответственные стороны двух выпуклых четырехугольников попарно равны и два соответственных угла удовлетворяют неравенству $\alpha < \alpha_1$, то два противоположных угла также удовлетворяют неравенству $\beta < \beta_1$. Утверждение становится очевидным, если провести диагональ и разбить четырехугольник на два треугольника (рис. 143). Действительно, поскольку $\alpha < \alpha_1$, то проведенная диагональ больше у того четырехугольника, которому принадлежит угол α_1. В свою очередь это позволяет утверждать, что $\beta_1 > \beta$ (в частном случае это рассуждение уже было проведено в третьем решении; см. также III. 38).

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для доказательства утверждения исходной задачи: если $\angle A < \angle D$ и $\angle C < \angle F$, то, применяя к четырехугольникам $ABEF$ и $BCDE$ доказанное ранее утверждение,

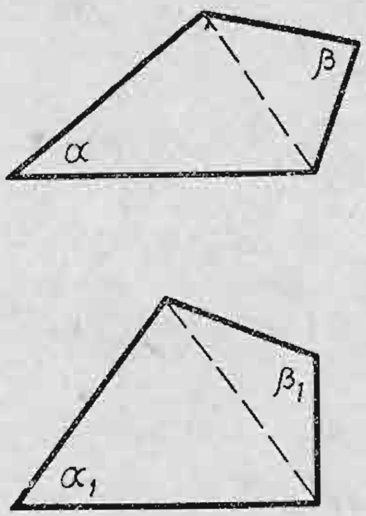


Рис. 143.

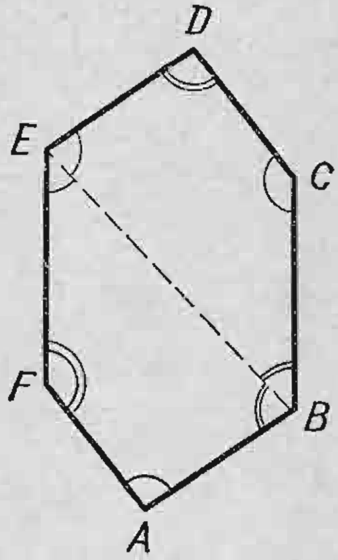


Рис. 144.

получаем, что углы этих четырехугольников, составляющие угол E, меньше углов, составляющих угол B (рис. 144). Следовательно, $\angle E < \angle B$.

Таким образом, *если противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ попарно равны, то углы при вершинах A, C, E либо попарно равны противоположным углам при вершинах B, D, F, либо каждый угол, входящий в одну из троек, меньше противоположного угла, входящего в другую тройку углов.*

Тем самым мы доказали более общую теорему, чем исходное утверждение задачи.

В последнем решении мы использовали лишь такие теоремы евклидовой геометрии, которые не зависят от аксиомы о параллельных. Тем самым доказано, что утверждение задачи и сформулированная в конце решения более общая теорема выполняются и в неевклидовой геометрии Лобачевского — Бойяи (см. III. 26).

163. П е р в о е р е ш е н и е. Предположим, что вопреки утверждению задачи $AB \geqslant AC$ и, следовательно, точка A либо принадлежит перпендикуляру, восставленному из середины отрезка BC, либо расположена от него по одну сторону с точкой C (рис. 144). Поскольку четырехугольник $ABCD$ выпуклый, то вершина D лежит по ту же сторону от прямой AB, что и вершина C, по ту же сторону от прямой BC, что и вершина A, и, наконец, по другую сторону от прямой AC, нежели вершина B. Следовательно, точка D лежит внутри области, которая получится, если от угла ABC отсечь треугольник ABC (на рис. 145 область, содержащая точку D, заштрихована).

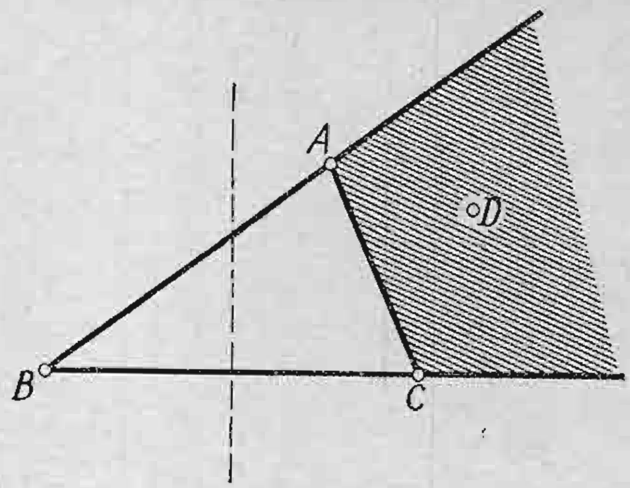


Рис. 145.

Эта область целиком расположена по ту же сторону от перпендикуляра, восставленного из середины отрезка BC, что и вершина C, поскольку из всех точек, принадлежащих границе области, лишь точка A может лежать на самом перпендикуляре. Таким образом, точка D принадлежит той же полуплоскости, что и точка C, и, следовательно, $BD > CD$. Складывая почленно полученное неравенство с неравенством $AB \geqslant AC$, из которого мы исходили в начале решения, получаем неравенство $AB + BD > AC + CD$, противоречащее условиям задачи. Тем самым утверждение задачи доказано.

В т о р о е р е ш е н и е. Известно (если неизвестно, то можно вывести из неравенства треугольника), что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы его диагоналей. Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$

$$AB + CD < AC + BD.$$

По условиям задачи

$$AB + BD \leqslant AC + CD.$$

Складывая почленно оба неравенства, получаем $2AB < 2AC$, что и требовалось доказать.

164. Прежде чем приступить к решению задачи, сделаем несколько замечаний:

1. Наиболее краткое доказательство утверждения задачи состоит в следующем. Рассмотрим наибольшую хорду данного тела. Сечение его любой плоскостью, проходящей через эту хорду, имеет форму круга, диаметр которого совпадает с выбранной нами хордой, поскольку в противном случае у круга и, следовательно, у самого тела нашлась бы более длинная хорда. Таким образом, данное тело имеет форму шара, один из диаметров которого совпадает с выбранной нами хордой.

Проведенное рассуждение неполно, поскольку не доказано, что наибольшая хорда существует. Строгое доказательство потребовало бы использования средств высшей математики.

2. Необходимо уточнить, как следует понимать выражение «некоторое тело», встречающееся в условиях задачи.

Назовем точечным множеством (или просто множеством) любую совокупность точек пространства. Пользуясь понятием множества, сформулируем условия задачи более строго.

Пусть задано множество, содержащее более одной точки пространства. Предположим, что оно обладает следующим свойством: если какой-нибудь плоскости принадлежит более чем одна точка множества, то эти точки заполняют на плоскости круг (то есть часть плоскости, лежащую внутри окружности, и самое граничную окружность). Доказать, что данное точечное множество представляет собой шар (то есть заполняет часть пространства, лежащую внутри сферы, и самое сферу).

Если исходить из этого более строгого варианта условий задачи, то приведенные ниже решения полны.

Первое решение. Пусть C — центр круга k, по которому тело пересекается с одной из плоскостей (рис. 146). Из точки C восставим перпендикуляр к плоскости круга k и проведем через него какую-нибудь плоскость. Пусть эта плоскость пересекает границу круга k в точках P и Q, а само тело — по кругу k_1. Поскольку PQ — хорда круга k_1, то перпендикуляр, восставленный из ее середины, то есть восставленный нами ранее перпендикуляр к плоскости круга k, содержит диаметр AB круга k_1. Поскольку секущая плоскость выбрана нами

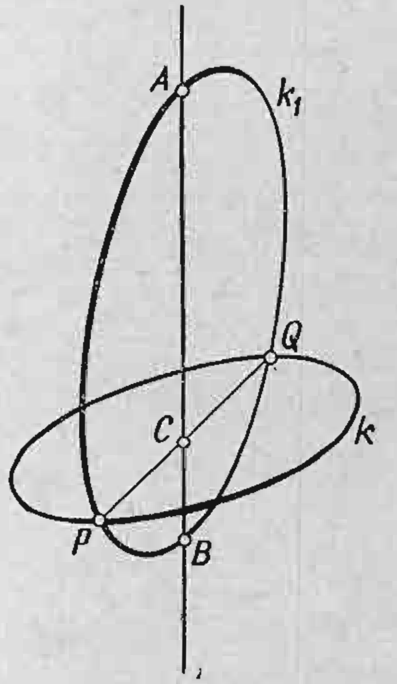


Рис. 146.

произвольно, а точки A и B ограничивают принадлежащий этой плоскости отрезок AB и, следовательно, расположены на границе тела, то можно утверждать, что сечение тела любой плоскостью, проходящей через прямую AB, имеет вид круга с диаметром AB. Таким образом, тело представляет собой шар с диаметром AB.

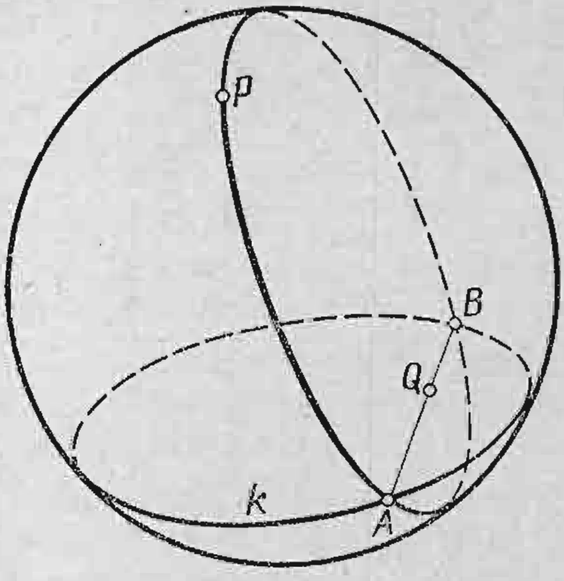


Рис. 147.

Второе решение. Пусть k — одно из сечений тела, имеющее форму круга (рис. 147), Q — одна из его внутренних точек, P — точка, в которой луч, исходящий из точки Q, но не лежащий в плоскости сечения k, пересекает поверхность тела, и, наконец, G — проходящая через точку P сфера, которой принадлежит граница круга k. Плоскость, проходящая через прямую PQ, пересекает границу круга k в точках A и B (поскольку эта плоскость содержит внутреннюю точку Q этого круга) и, кроме того, пересекает сферу G по некоторой окружности. Эта окружность и окружность, ограничивающая сечение тела плоскостью, которая проходит через прямую PQ, совпадают, поскольку они имеют три общие точки P, A и B. Следовательно, любое плоское сечение тела и сферы G также совпадают.

165. Первое решение. Пусть A — участник турнира, выигравший наибольшее число встреч. Если бы утверждение задачи не выполнялось для A, то нашелся бы такой участник турнира B, над которым не удалось одержать победу ни самому A, ни побежденным им участникам турнира. Следовательно, B одержал бы больше побед, чем A, что невозможно, поскольку A по условию одержал наибольшее число побед. Таким образом, утверждение задачи выполняется для A.

Второе решение. Докажем утверждение задачи методом полной математической индукции. Если в турнире участвовали лишь два спортсмена, то утверждение задачи заведомо выполняется. Предположим, что оно верно в том случае, если число участников турнира равно n. Если число участников возрастет до $n+1$, то по предположению индукции среди первых n участников найдется такой спортсмен A, который, перечисляя всех, кого победил он сам и кого победили побежденные им соперники, назовет n первых участников. Пусть B последний из $n+1$ участников турнира. Если спортсмен A, перечисляя тех участников турнира, кого победил он сам или побежденные им соперники, назовет спортсмена B, то для A будет выполняться утверждение задачи. Если же A не назовет B, то это будет означать, что B одержал победу над A и всеми, кого назвал A. В этом случае утверждение задачи выполняется для B.

Третье решение. Предложим всем участникам турнира собраться в зале. Пусть один из спортсменов выведет из зала тех, над кем ему удалось одержать победу (возможно, что выбранному нами спортсмену выводить из зала будет некого). Если после этого в зале еще останутся участники турнира, то попросим одного из них вывести из зала тех, кого ему удалось победить. Так будем продолжать до тех пор, пока кто-нибудь не выведет из зала последних участников турнира. Тот, кто это сделает, победил всех спортсменов, которых он сам вывел из зала, и всех участников турнира, которые выводили из зала других спортсменов, но сами могли оставаться в зале. Оставшиеся в зале были победителями выведенных из зала спортсменов, поэтому участник турнира, который вывел из зала последних спортсменов, назвал всех участников турнира (кроме себя).

По поводу приведенных выше решений следует сделать несколько замечаний:

1. В первом решении показано, что для победителя турнира (или любого из победителей, если их оказалось несколько) утверждение задачи выполнено. Однако не следует думать, будто утверждение задачи выполняется лишь для победителей. Как показывает приводимая таблица, оно может выполняться даже для спортсмена, занявшего последнее место в турнире:

	A	B	C	D	E
A	—	1	1	1	0
B	0	—	1	0	1
C	0	0	—	1	1
D	0	1	0	—	1
E	1	0	0	0	—

Более того, возможно, что утверждение задачи будет выполняться и для всех участников турнира. Примером может служить та же турнирная таблица.

2. Утверждение задачи можно сформулировать на языке теории графов. Сопоставим каждому участнику турнира по одной и только одной вершине графа. Вершины, соответствующие участникам каждой встречи, соединим ребром, направленным от одержавшего победу к проигравшему встречу. Исход турнира можно представить тогда в виде полного ориентированного графа, а утверждение задачи сформулировать так:

в любом конечном ориентированном полном графе найдется такая вершина, из которой, двигаясь по направлению, согласующемуся с ориентацией ребер, можно достичь любой другой вершины, если пройти одно или два смежных ребра.

Для бесконечных графов утверждение задачи неверно. Пусть, например, P_1, P_2, P_3, ... — вершины бесконечного графа, а ребро P_iP_k ориентировано от вершины с бо́льшим индексом к вершине с меньшим индексом. Тогда из любой вершины, двигаясь по направлению, указанному ориентацией ребер, можно достичь лишь вершин с меньшими значениями индексов, то есть попасть лишь в конечное число вершин.

166. Первое решение. Увеличив меньший из углов ($\angle DAB$) при основании трапеции так, чтобы он стал равным большему углу ($\angle CBA$), получим равнобочную

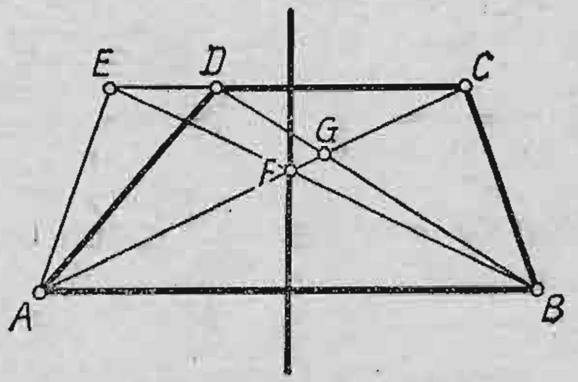


Рис. 148.

трапецию $ABCE$ (рис. 148). Точка F пересечения диагоналей трапеции $ABCE$ в силу симметрии лежит на перпендикуляре, восставленном из середины основания AB. Отрезок FC находится по ту же сторону от этого перпендикуляра, что и боковая сторона, которой принадлежит вершина B. По ту же сторону от перпендикуляра расположена и точка G пересечения диагоналей исходной трапеции, поскольку D — внутренняя точка отрезка EC, а из рассмотрения треугольника BCE следует, что отрезок BD пересекается с отрезком FC. Перпендикуляр, восставленный из середины основания AB, делит плоскость на две полуплоскости. Все точки той полуплоскости, которая содержит вершину B, расположены от B на меньшем расстоянии, чем от A. Следовательно, и для точки G выполняется неравенство

$$GA > GB.$$

Треугольники ABG и CDG подобны, поскольку углы при вершине G равны как вертикальные, а два других угла — как внутренние накрест лежащие, в силу чего из доказанного неравенства получаем новое неравенство

$$GC > GD.$$

Складывая почленно оба неравенства, находим $AC >$ $> BD$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Увеличив меньший из углов при основании AB трапеции $ABCD$ так, чтобы он стал равен большему, получим равнобочную трапецию $ABCE$ (рис. 149). Ось симметрии трапеции $ABCE$ совпадает с перпендикуляром, восставленным из середины отрезка

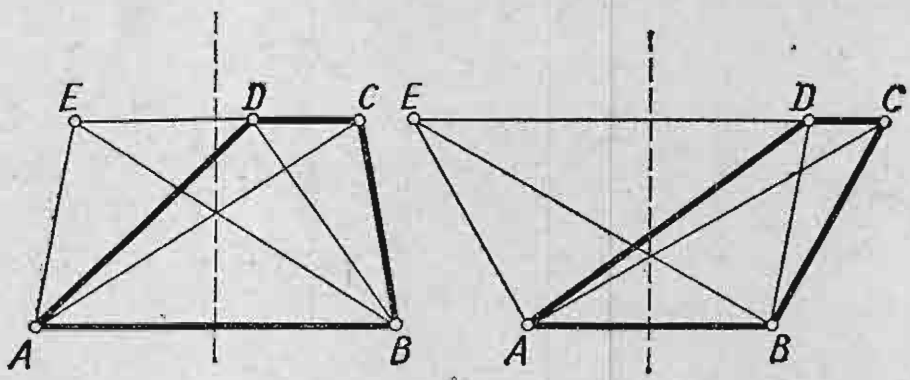


Рис. 149.

EC. Поскольку вершина B расположена по ту же сторону от оси симметрии, что и ближайшая к вершине C половина отрезка EC, то $BC < BE$.

В силу симметрии равнобочной трапеции $AC = BE$. Углы при вершине D в треугольниках BCD и BDE дополняют друг друга до 180°, поэтому один из углов либо прямой, либо тупой. И в том, и в другом случае этот угол является наибольшим из углов треугольника и против него лежит наибольшая из сторон. В зависимости от того, у какого из двух треугольников (BCD или BDE) угол при вершине D больше, отрезок BD меньше либо отрезка BE, либо отрезка BC и, следовательно, заведомо меньше наибольшего из этих отрезков — отрезка BE, равного диагонали AC.

Третье решение. Увеличив меньший из углов при основании AB трапеции $ABCD$ так, чтобы он стал равным большему из углов, получим равнобочную трапецию $ABCE$ (рис. 149). Внешний угол EDB больше любого из внутренних углов DCB и DBC треугольника DBC, поэтому

$$\angle EDB > \angle DCB,$$

а поскольку равнобочная трапеция $ABCD$ симметрична относительно оси, проходящей через середины оснований, то

$$\angle DCB = \angle AED.$$

Следовательно, в треугольнике BDE угол при вершине D больше угла при вершине E, так как угол BED составляет лишь часть угла AED, относительно которого мы доказали, что он меньше угла EDB. Поскольку во всяком треугольнике против большего из углов лежит большая из сторон, то $BE > BD$. Поскольку в силу симметрии $AC = BE$, то утверждение задачи доказано. (Оно уже встречалось нам ранее во втором решении задачи 27.)

167. Первое решение. Разобьем все делящиеся на 3 пятизначные числа, в десятичной записи которых встречается цифра 6, на группы в зависимости от того, где находится последняя цифра 6 («места» нумеруются от единиц к старшим разрядам).

В первую группу попадут числа, оканчивающиеся цифрой 6. Три средние цифры таких чисел могут быть любыми, а первую цифру надлежит выбирать лишь из цифр 1, 2, ..., 9 (поскольку пятизначное число не может начинаться с нуля) так, чтобы сумма всех цифр делилась на 3. Каждую из трех средних цифр можно выбрать 10 способами, а первую цифру — лишь 3 способами. Действительно, сумма всех цифр, кроме первой, при делении на 3 дает один из трех остатков: 0, 1 или 2. Если остаток равен 0, то первой может быть любая из цифр, образующих тройку 3, 6, 9. Если остаток равен 1, то первой может быть любая из цифр, образующих тройку 2, 5, 8, а если остаток равен 2, то любая из цифр 1, 4, 7. Таким образом, первая группа содержит $3 \cdot 10^3 = 3000$ чисел.

Во вторую, третью и четвертую группы входят числа, у которых последняя цифра 6 стоит соответственно на втором (десятки), третьем (сотни) и четвертом (тысячи) месте и нет ни одной шестерки правее. Каждый из разрядов, расположенных справа от последней шестерки, можно заполнить 9 способами, поскольку среди цифр не должна встречаться шестерка. Все остальные разряды, кроме старшего, можно заполнять произвольно: в каждом из них может стоять любая из десяти цифр. Первую цифру мы выбираем так же, как и в предыдущем случае, то есть всякий раз — одну из трех допустимых цифр. Таким образом вторая группа содержит $3\cdot10^2\cdot9 = 2700$, третья — $3\cdot10\cdot9^2 = 2430$ и четвертая — $3\cdot9^3 = 2187$ чисел.

Пятую группу образуют числа, у которых шестерка стоит лишь в старшем, пятом разряде (десятки тысяч), а во всех остальных разрядах нет ни одной шестерки. Каждую из трех средних цифр можно выбрать здесь 9 способами, поскольку этими цифрами могут быть любые цифры, кроме 6. Последнюю цифру следует выбирать из тех же 9 цифр, но так, чтобы сумма цифр делилась на 3. Последнюю цифру можно выбрать лишь 3 способами (если сумма четырех первых цифр делится на 3, то последней цифрой может быть любая из цифр 0, 3, 9; если сумма четырех первых цифр при делении на 3 дает остаток 1, то любая из цифр 2, 5, 8, а если остаток 2, то любая из цифр 1, 4, 7). Таким образом, пятая группа содержит 2187 чисел.

Итак, существует $3000 + 2700 + 2430 + 2187 + 2187 = 12\,504$ пятизначных чисел, удовлетворяющих всем условиям задачи.

Второе решение. Разобьем решение задачи на две части: сначала подсчитаем, сколько существует пятизначных чисел, не содержащих ни одной шестерки, а затем докажем, что ровно треть из остальных делится на 3.

1. Всего имеется 90 000 пятизначных чисел. Определим, сколько из них не содержат цифры 6. Первую цифру таких чисел можно выбрать 8 способами (годится любая цифра, кроме 0 и 6), а цифры, стоящие в четырех остальных разрядах, — 9 способами (запретной для них является лишь цифра 6). Следовательно, всего имеется $8\cdot9^4 = 52\,488$ пятизначных чисел, не содержащих цифры 6, а пятизначных чисел, содержащих по крайней мере одну шестерку, $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$. Это число делится на 3.

2. Расположим все пятизначные числа в порядке возрастания и разобьем образовавшуюся последовательность на отрезки «длиной» в 10 чисел каждый, начиная с первого числа. Числа, принадлежащие одному и тому же отрезку, отличаются друг от друга лишь последними цифрами. В каждом из отрезков отметим числа, содержащие цифру 6. В некоторых отрезках отмеченными

окажутся все числа. Так будет со всеми отрезками, у которых шестерка встречается среди первых четырех цифр, остающихся неизменными при переходе от одного числа к любому другому в пределах того же отрезка. В других отрезках отмеченным окажется лишь одно число — то, которое оканчивается цифрой 6.

Определим, чему может быть равна разность двух ближайших отмеченных чисел. (На рис. 150 числа для наглядности изображены в виде кружков: черные кружки соответствуют отмеченным числам, белые — неотмеченным.) Если два отмеченных числа принадлежат одному и тому же отрезку, то весь отрезок содержит только отмеченные числа и разность между ближайшими

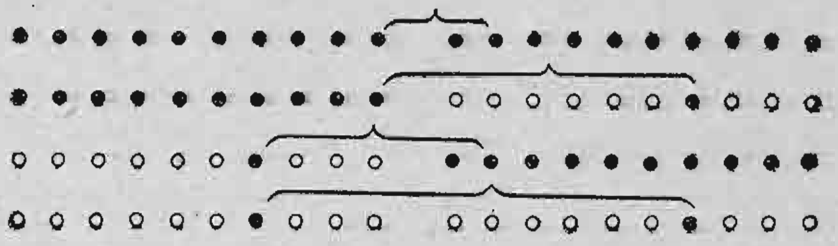


Рис. 150.

числами равна 1. Разность оказывается равной 1 и в том случае, если два ближайших друг к другу отмеченных числа принадлежат двум соседним отрезкам, сплошь заполненным отмеченными числами. Если из двух рассматриваемых чисел меньшее принадлежит отрезку, содержащему лишь отмеченные числа, а большее — отрезку, содержащему лишь одно отмеченное число, то разность равна 7. Если большее из двух чисел принадлежит отрезку, заполненному отмеченными числами, а меньшее — отрезку, содержащему лишь одно отмеченное число, то разность равна 4. Наконец, если оба числа принадлежат отрезкам, не содержащим других отмеченных чисел, то разность равна 10. Итак, разность двух ближайших отмеченных чисел может принимать лишь значения 1, 4, 7 и 10.

Поскольку каждое из этих четырех чисел при делении на 3 дает остаток 1, то можно утверждать, что каждое третье из расположенных в порядке возрастания отмеченных чисел делится на 3, поскольку ближайшее к отмеченному числу, делящемуся на 3 без остатка, при делении на 3 дает остаток 1; следующее за ним отмеченное число при делении на 3 дает остаток 2; ближайшее к нему отмеченное число снова нацело делится на 3 и так далее. Поскольку всех отмеченных чисел 37 512 и это число делится на 3, то треть всех отмеченных чисел ($37\,512 : 3 = 12\,504$) делится на 3.

Третье решение. Каждое третье из 90 000 пятизначных чисел делится на 3, то есть всего существует 30 000 пятизначных чисел, делящихся на 3. Определим, сколько из них не содержат цифры 6.

Первую цифру таких чисел можно выбрать восемью способами, поскольку на первом месте не могут стоять лишь цифры 0 и 6. Вторую, третью и четвертую цифры можно выбрать девятью способами (каждую), поскольку запрещено использовать лишь цифру 6. Последнюю цифру следует выбирать так, чтобы сумма всех пяти цифр числа делилась на 3. В зависимости от того, чему равен остаток от деления на 3 суммы первых четырех цифр, последней цифрой может быть либо любая из цифр 1, 4, 7, либо любая из цифр 2, 5, 8, либо любая из цифр 0, 3, 9. Таким образом, последнюю цифру можно выбрать тремя способами.

Следовательно, среди пятизначных чисел, делящихся на 3, $8 \cdot 9^3 \cdot 3 = 17\,496$ не содержат цифры 6, а $30\,000 - 17\,496 = 12\,504$ содержат по крайней мере одну цифру 6.

168. Первое решение. Нетрудно видеть, что точка, симметричная узлу решетки относительно либо другого узла решетки, либо середины отрезка прямой, соединяющего два узла решетки, совпадает с узлом решетки (см. III. 67).

Рассмотрим решеточный треугольник ABC, о котором говорится в условиях задачи. Пусть S — узел решетки, лежащий внутри треугольника ABC. Построим точки, симметричные узлу S, относительно середин всех сторон треугольника ABC (рис. 151). Все эти точки также совпадают с узлами решетки. Обозначим эти узлы S_a, S_b, S_c. Они расположены внутри треугольников A_1BC, AB_1C, ABC_1, симметричных исходному треугольнику ABC. Других узлов решетки внутри треугольников A_1BC, AB_1C, ABC_1 нет, поскольку, если бы, например, треугольник A_1BC содержал хотя бы один узел решетки, помимо узла S_a, то точка, симметричная дополнительному узлу относительно середины стороны BC, оказалась бы внутри исходного треугольника ABC. Следовательно, внутри треугольника ABC находилось бы два узла решетки, что невозможно.

Построим точку, симметричную вершине A_1 относительно узла S_a. Эта точка должна лежать внутри треугольника $A_1B_1C_1$ и совпадать с одним из узлов решетки, поскольку треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику A_1BC с центром гомотетии в точке A_1 и коэффициентом подобия, равным 2, а в точке S_a находится узел решетки. Таким образом, построенная точка должна совпадать с одним из узлов S, S_a, S_b, S_c: по доказанному выше

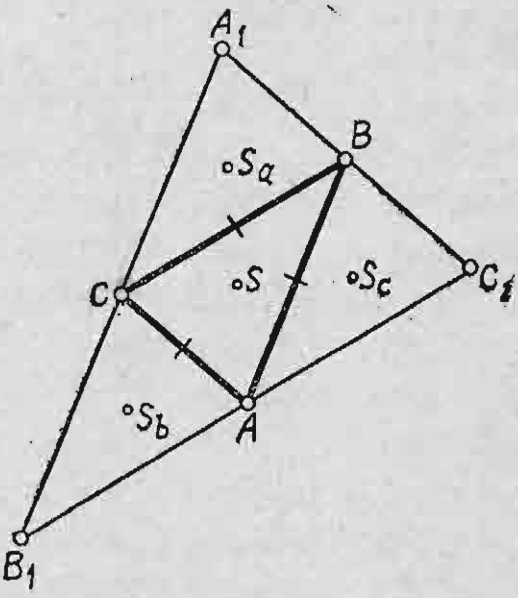


Рис. 151.

внутри треугольника $A_1B_1C_1$ нет других узлов решетки. Поскольку новая точка симметрична вершине A_1 относительно узла решетки S_a, то она не может совпадать с самим узлом S_a. Докажем, что построенная точка не может также совпадать с узлами S_b и S_c. Достаточно доказать, что она не совпадает с одним из этих узлов, например с S_c. Отрезки A_1S_a и BS_c симметричны отрезку AS относительно середин отрезков BC и AB. Следовательно, отрезки A_1S_a и BS_c параллельны и равны отрезку AS, в силу чего четырехугольник $A_1S_aS_cB$ — параллелограмм и узел S_c никак не может быть симметричным вершине A_1 относительно узла S_a.

Итак, мы доказали, что узлом, симметричным вершине A_1 относительно узла S_a, может быть лишь узел S. Отсюда следует, что точки A_1, S_a, S расположены на одной прямой. Эта прямая проходит через точку, служащую серединой отрезков SS_a и BC, и поэтому содержит точку, симметричную вершине A_1 относительно этой общей середины двух отрезков, то есть точку A. Итак, узел решетки S лежит на медиане треугольника ABC, проведенной из вершины A. Поскольку все вершины треугольника ABC эквивалентны (ни одна вершина ничем не выделена по отношению к любой другой), то узел решетки S принадлежит двум другим медианам треугольника ABC. Следовательно, узел решетки S совпадает с центром тяжести треугольника ABC.

Второе решение. Задача 168 решается совсем просто, если воспользоваться уже известными свойствами решеточных треугольников. Пусть ABC — решеточный треугольник, о котором говорится в условиях задачи, а S — узел решетки, находящийся внутри него. Площади решеточных треугольников SAB, SAC, SCA равны, поскольку ни внутри, ни на границе этих треугольников нет других узлов решетки, кроме тех, которые совпадают с их вершинами, а, как показано в четвертом решении задачи 137, площадь любого такого треугольника равна $^1/_2$. Но тогда из утверждения задачи 119 следует, что узел решетки S совпадает с центром тяжести треугольника ABC.

Третье решение. Построив треугольник, симметричный исходному относительно середины любой из его сторон, получим параллелограмм. Как было доказано в первом решении, внутри параллелограмма нет других узлов решетки, кроме узла, находившегося внутри исходного треугольника, и узла, симметричного ему (относительно середины выбранной стороны треугольника), поэтому достаточно доказать лишь следующее утверждение:

если на границе параллелограмма нет других узлов решетки, кроме тех, которые совпадают с его вершинами, а внутри находятся два узла решетки, то эти узлы лежат на диагонали параллелограмма и делят ее на три равные части.

Начнем с доказательства леммы:

для любой внутренней точки параллелограмма всегда можно найти такую вершину параллелограмма, что гомотетическое преобразование с центром в этой вершине и коэффициентом подобия, равным 2, переводит выбранную точку в другую, также принадлежащую параллелограмму.

Справедливость утверждения леммы следует из того, что прямые, проходящие через середины противоположных сторон параллелограмма, делят его на четыре параллелограмма, каждый из которых, если его подвергнуть гомотетическому преобразованию с центром в вершине, совпадающей с вершиной исходного параллелограмма, и коэффициентом подобия, равным 2, совпадает с исходным параллелограммом.

Применим эту лемму к построенному нами параллелограмму и узлам решетки S и T, находящимся внутри него (рис. 152). Узлы S и T не совпадают с центром параллелограмма, поскольку в противном случае внутри

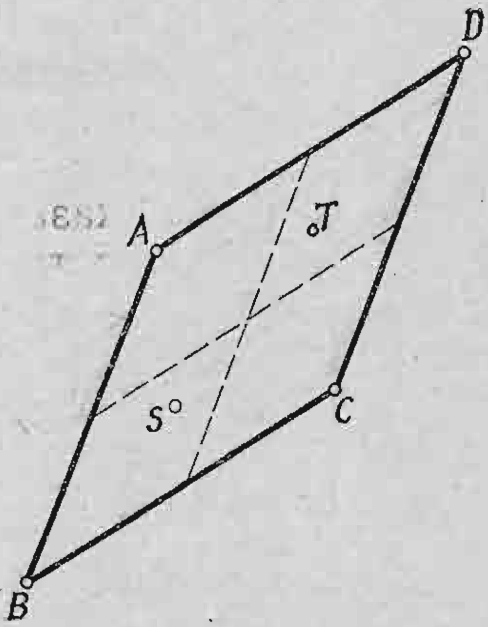


Рис. 152.

параллелограмма находился бы и третий узел, симметричный другому узлу решетки относительно центра параллелограмма.

Как доказано в первом решении, точка, симметричная вершине B относительно узла решетки S, принадлежит параллелограмму. Эта точка совпадает с одним из узлов решетки и не может быть вершиной параллелограмма, поскольку узел решетки S не лежит на периметре параллелограмма и не совпадает с центром параллелограмма. Следовательно, точка, симметричная вершине B относительно узла решетки S, должна совпадать с узлом решетки T.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, можно показать, что точка, симметричная вершине D относительно узла решетки T, совпадает с узлом решетки S. Таким образом, точки S и T лежат на отрезке BD и делят его на три равные части. Отрезок BD может быть лишь диагональю параллелограмма, поскольку узлы решетки S и T не лежат на периметре паралелограмма. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Четвертое решение. Повторим те рассуждения, которыми мы воспользовались в начале первого решения.

Три медианы делят решеточный треугольник ABC, о котором говорится в условиях задачи, на шесть треугольников (рис. 153). Единственный узел решетки, находящийся внутри треугольника ABC, принадлежит по крайней мере одному из этих треугольников, например,

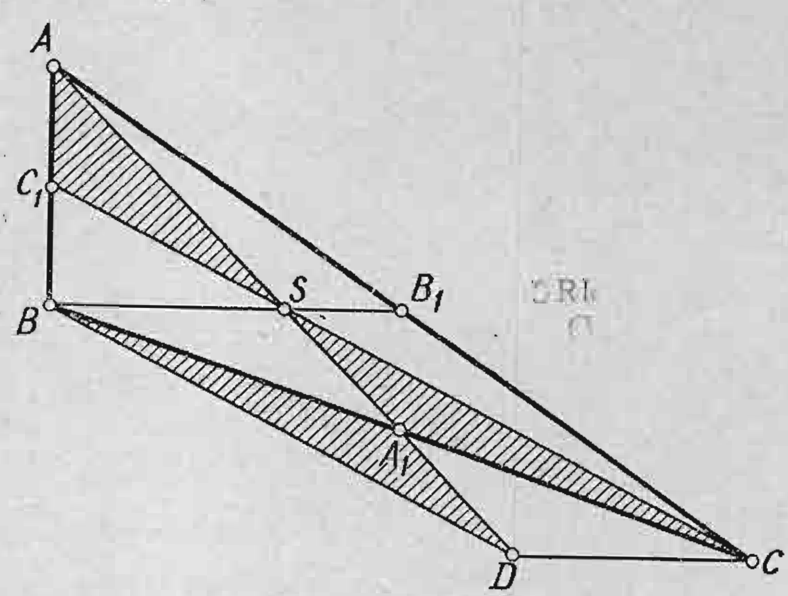


Рис. 153.

расположен внутри треугольника AC_1S или на его периметре, но не на отрезке AC_1. При гомотетическом преобразовании с центром в вершине A и коэффициентом подобия, равным 2, этот узел решетки перейдет в новый узел решетки, находящийся внутри треугольника ABD (образа треугольника AC_1S) или на его периметре, но не на отрезке AB. Поскольку внутри треугольника ABC находится лишь один узел решетки, то новый узел решетки находится либо внутри треугольника A_1BD, либо на его периметре, но не совпадает с вершиной B. Если построить треугольник A_1CS, симметричный треугольнику A_1BD относительно точки A_1, то внутри треугольника A_1CS или на его периметре (но не в вершине C) будет находиться узел решетки, симметричный узлу, который принадлежит треугольнику A_1BD. Но по условиям задачи внутри треугольника ABC находится лишь один узел решетки. Следовательно, только он и может принадлежать треугольнику A_1CS, составляющему часть треугольника ABC. Поскольку треугольники AC_1S и A_1CS не имеют других общих точек, кроме центра тяжести S треугольника ABC, то единственный узел решетки, находящийся внутри треугольника ABC, совпадает с точкой S, что и требовалось доказать.

Пространственный аналог утверждения задачи 168 неверен: существуют такие тетраэдры, у которых вершины совпадают с узлами кубической решетки, граница не содержит других узлов, а внутри находится лишь один узел решетки, но центр тяжести не совпадает с единственным внутренним узлом. Примером может служить тетраэдр с вершинами в точках $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(2, 2, 5)$, содержащий внутри себя лишь узел решетки $R(1, 1, 2)$. Точка $R(1, 1, 2)$ не совпадает с центром тяжести такого тетраэдра*.

169. Из точки P, лежащей в плоскости треугольника ABC, восставим перпендикуляр к этой плоскости и выберем на нем точку D. Выясним, от чего зависит, чтобы выбранная нами точка D удовлетворяла условиям задачи, то есть чтобы каждый из треугольников ABD, BCD, CAD был остроугольным.

Начнем с рассмотрения углов треугольников ABD, BCD, CAD, примыкающих к сторонам AB, BC и CA, общим с треугольником ABC, например, выберем угол BAD. Этот угол острый в том и только в том случае, если вершина D находится по ту же сторону от плоскости, проведенной через вершину A перпендикулярно стороне AB, что и вершина B. Это условие выполнено либо для всех точек перпендикуляра, восставленного в точке P к плоскости треугольника ABC, либо не выполнено ни для одной из них, поскольку перпендикуляр к плоскости треугольника ABC и плоскость, перпендикулярная стороне AB, параллельны. Следовательно, лишь от выбора точки P зависит, будут ли острыми все шесть углов, примыкающих к сторонам треугольника ABC. Это условие будет выполнено для любой точки D перпендикуляра, восставленного к плоскости треугольника ABC в точке P, если оно выполнено для самой точки P, то есть если каждый из углов

$$\angle BAP, \quad \angle ABP, \quad \angle CBP, \quad \angle BCP, \quad \angle ACP, \quad \angle CAP \qquad (1)$$

острый.

Рассмотрим далее углы треугольников ABD, BCD, CAD при вершине D. Ясно, что отрезок виден из точки плоскости под острым углом, если эта точка принадлежит дуге окружности, вмещающей острый угол, в которой данный отрезок служит хордой. Следовательно, углы при вершине D треугольников ABD, BCD, CAD могут быть острыми лишь в том случае, если вершина D отстоит от середины каждой из сторон треугольника ABC на расстояние, превышающее половину длины соответствующей стороны. Такую точку D всегда можно выбрать на перпендикуляре, восставленном к плоскости треугольника ABC из точки P, поскольку для этого достаточно, чтобы точка D отстояла от плоскости треугольника ABC на расстояние, превышающее половину наибольшей из его сторон.

Итак, мы найдем геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям задачи, если построим геометрическое место точек P, для которых все шесть углов (1) острые.

Каждый из углов BAP и ABP острый в том и только в том случае, если точка P лежит в плоскости треугольника ABC внутри полосы, которая ограничена перпендикулярами, восставленными к стороне AB из вершин A и B. Действительно, угол BAP — острый, если точка P расположена по ту же сторону от перпендикуляра, восставленного из вершины A к стороне AB, что и вершина B. Аналогичное утверждение справедливо и относительно угла ABP. Таким образом, геометрическое место точек P, для которых все шесть углов (1) острые, представляет собой пересечение трех полос, которые ограничены перпендикулярами, проведенными к сторонам треугольника ABC через его вершины.

Если треугольник ABC, лежащий в основании пирамиды с переменной вершиной D, остроугольный, то пересечение трех полос образует шестиугольник (рис. 154), внутренность которого представляет собой геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям задачи.

Сделаем несколько замечаний по поводу приведенного решения.

1. В том, что геометрическое место точек, для которых все углы (1) острые, представляет собой внутренность шестиугольника, можно убедиться, даже если мы не будем использовать для наглядности в своих рассуждениях рис. 154.

Достаточно проверить, что каждая из полос симметрична относительно центра O описанной окружности треугольника ABC. Действительно, точка O лежит на средней линии каждой полосы, совпадающей с перпендикуляром, восставленным из середины соответствующей стороны треугольника ABC. Следовательно, пересечение всех трех полос также симметрично относительно точки O.

Вершина C треугольника ABC принадлежит пересечению полос шириной BC и CA (полосы пересекаются, поскольку их границы непараллельны). Поскольку треугольник ABC остроугольный, то вершина C находится

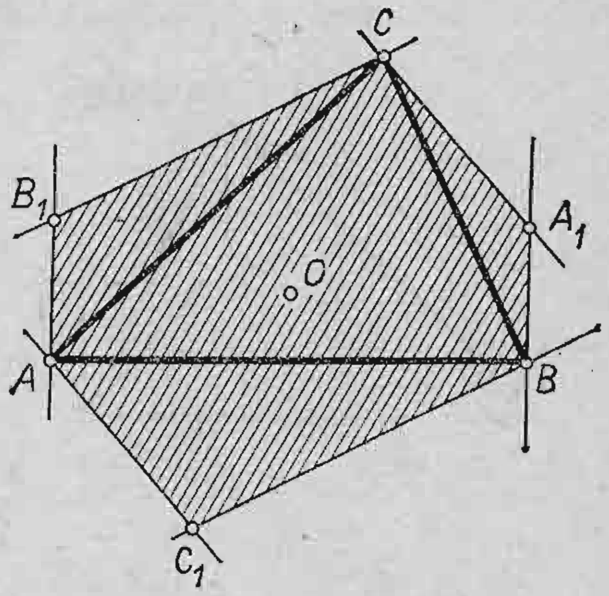


Рис. 154.

внутри третьей полосы шириной AB и поэтому принадлежит пересечению всех трех полос. Аналогичные утверждения справедливы и относительно вершин A и B.

Из симметрии пересечения трех полос относительно точки O следует, что пересечению принадлежат не только вершины треугольника ABC, но и точки A_1, B_1, C_1, симметричные им относительно O. Точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 попарно различны, поскольку центр описанной окружности O не совпадает ни с серединой любой из сторон треугольника ABC, ни с его вершинами. Других вершин у пересечения трех полос быть не может, поскольку три полосы ограничены шестью прямыми, и поэтому их пересечение имеет вид многоугольника с числом сторон, не превосходящим 6. Следовательно, пересечение трех полос шириной AB, BC и CA действительно представляет собой шестиугольник.

2. Точки A_1, B_1, C_1 можно построить не только как точки, симметричные вершинам треугольника ABC относительно центра O описанной окружности, но и как точ-

ки, симметричные ортоцентру треугольника (точке пересечения высот треугольника) относительно середин его сторон (рис. 155). В самом деле, если M — точка, симметричная точке C_1 относительно середины стороны AB, то AC_1BM — параллелограмм. Но тогда отрезки AM и BM перпендикулярны соответственно сторонам треугольника BC и AC. Таким образом, точка M совпадает с пересечением двух высот треугольника, а значит и с его ортоцентром.

Из доказанного следует, что площадь шестиугольника $AC_1BA_1CB_1$ вдвое больше площади треугольника ABC,

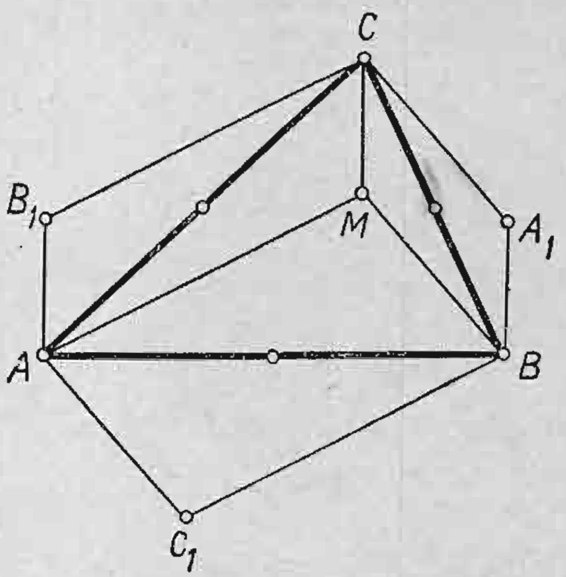


Рис. 155.

поскольку треугольники C_1AB, A_1CB, B_1AC, построенные вовне на сторонах треугольника ABC, конгруэнтны треугольникам AMB, BMC, CMA, составляющим треугольник ABC.

3. Решение задачи показывает, каким образом можно построить 4 точки, из которых любые 3 служат вершинами остроугольного треугольника. Заметим, что до сих пор неизвестен ответ на вопрос: какое наибольшее число точек можно задать так, чтобы любые 3 из них служили вершинами остроугольного треугольника?.

170. Первое решение. Перенумеруем шесть цветов однозначными числами от 1 до 6, а расцветки тканей условимся обозначать двузначными числами, цифры которых соответствуют номерам цветов пряжи.

Выберем одну из тканей, выпускаемых фабрикой, например ткань расцветки 56. Если фабрика выпускает также ткани расцветок 12 и 34 или 13 и 24, то утверждение задачи уже выполняется (в расцветках трех тканей 56, 12, 34 или 56, 13, 24 представлены все шесть цветов). В противном случае фабрика не выпускает ткани одной из расцветок в каждой паре (12, 34) и (13, 24). Предположим, что фабрика не выпускает ткани расцветок 12 и 13. (Заметим, что любой вариант расцветок тканей мы всегда можем свести к рассматриваемому, выбрав надлежащим образом нумерацию цветов.)

Поскольку в расцветках тканей, выпускаемых фабрикой, каждый цвет сочетается по крайней мере с тремя другими цветами, то для каждого цвета существует не более двух сочетаний с другими цветами, не представленных в продукции фабрики. Для цвета 1 известны два таких сочетания: 12 и 13. Следовательно, фабрика заведомо выпускает ткань расцветки 14. Предположим, что фабрика не выпускает ткань расцветки 23, ибо в противном случае утверждение задачи выполнялось бы для тканей трех расцветок: 14, 23, 56.

Но если фабрика не выпускает ткани расцветок 12 и 23, то из доказанного выше следует, что она заведомо выпускает ткань расцветки 25, а поскольку среди выпускаемых тканей не представлены расцветки 13 и 23, то фабрика должна выпускать ткань расцветки 36. Таким образом, утверждение задачи оказывается выполненным и в этом случае, поскольку все шесть цветов встречаются в расцветках 14, 25 и 36.

Задачу 170 можно «перевести» на язык теории графов. Сопоставим каждому цвету вершину графа и соединим ребрами те пары вершин, которые соответствуют расцветкам выпускаемых фабрикой тканей. Полученный граф содержит 6 вершин. Любые 2 вершины соединены не более чем 1 ребром. По условиям задачи из каждой вершины должно выходить по крайней мере 3 ребра, то есть степень каждой вершины больше или равна 3. Утверждение задачи означает, что среди ребер графа можно найти 3 ребра, не имеющих общих концов.

Соединим пунктирной линией вершины, не связанные ребрами. Тогда ход рассуждений, использованный в первом решении, можно наглядно представить в виде графа, изображенного на рис. 156. На нем сплошными линиями показаны лишь те ребра, о которых упоминалось в решении.

В приводимом ниже решении мы также сформулируем задачу на языке теории графов.

Второе решение. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_6$ — вершины графа. Не ограничивая общности, предположим, что граф содержит ребро P_1P_2. Поскольку из вершины P_3 выходят по крайней мере 3 ребра, то рассмотрим то из них, которое заканчивается не в P_1 и не в P_2. Обозначения всегда можно выбрать так, чтобы это ребро заканчивалось в вершине P_4. Таким образом, рассматриваемый граф содержит ребро P_3P_4. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда граф не содержит ребра P_5P_6, поскольку если граф содержит ребра

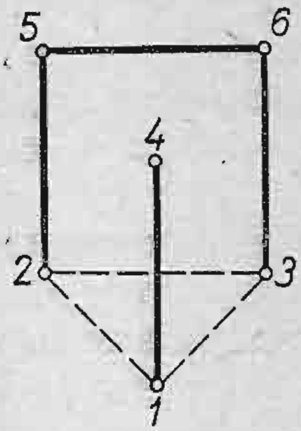


Рис. 156.

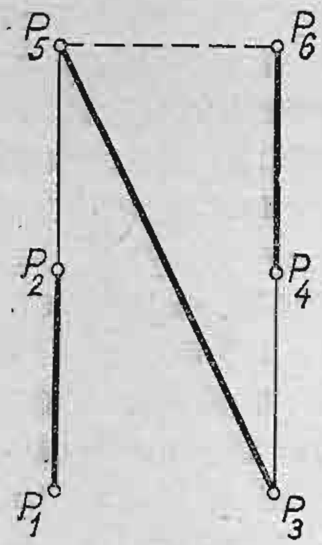


Рис. 157.

P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6, то утверждение задачи выполнено. (Ход рассуждений второго решения, аналогичный использованному в предыдущем решении, наглядно изображен на рис. 157.)

Поскольку из вершины P_5 выходят по крайней мере 3 ребра, то среди ребер P_1P_5, P_2P_5, P_3P_5, P_4P_5 не менее трех ребер принадлежат графу и не более одного ребра не принадлежит графу. Следовательно, вершина P_5 соединена ребрами по крайней мере с одним из концов каждого ребра P_1P_2 и P_3P_4. Не ограничивая общности, можно предположить, что рассматриваемый граф содержит ребра P_2P_5 и P_3P_5.

Аналогичные рассуждения, проведенные для вершины P_6, показывают, что не более чем одно из ребер P_1P_6, P_2P_6, P_3P_6, P_4P_6 не принадлежит графу. Следовательно, по крайней мере одно из ребер P_1P_6, P_4P_6 (например, последнее) принадлежит графу. Но тогда утверждение задачи выполнено для ребер P_1P_2, P_3P_5, P_4P_6, что и требовалось доказать.

По поводу самой задачи нам хотелось бы сделать сейчас несколько замечаний:

1. Утверждение задачи допускает следующее обобщение (его и все приводимые далее замечания мы формулируем на языке теории графов): *если граф содержит по крайней мере 6 вершин и любые две из его вершин соединены не более чем одним ребром, а степень каждой вершины не меньше 3, то из ребер графа можно выбрать три таких, концы которых различны.*

Доказательство этого утверждения мы получим, заменив во втором решении предположение о том, что граф не содержит ребро P_5P_6, другим предположением, согласно которому граф не содержит одно из ребер, соединяющих две вершины с индексами $i > 4$, $j > 4$.

2. Приведенное выше утверждение останется в силе, если вместо чисел 3 и 6 говорить о числах n и $2n$:

если граф содержит по крайней мере $2n$ вершин и любые две из его вершин соединены не более чем одним ребром, а степень каждой вершины не меньше n, то из ребер графа можно выбрать n таких, концы которых различны.

Здесь n означает любое натуральное число. Доказывается это утверждение при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы во втором решении.

Будем отбирать одно за другим ребра графа до тех пор, пока не дойдем до ребра, один из концов которого совпадает с концом ранее отобранного ребра. Предположим, что нам удалось отобрать k ребер. Если $k \geqslant n$, то утверждение доказано. Предположим, что $k < n$ и что после того, как мы отобрали ребра P_1P_2, P_3P_4, ..., $P_{2k-1}P_{2k}$, по крайней мере один из концов остальных ребер совпадает с какой-то из точек P_1, P_2, ..., P_{2k}. Тогда каждая из вершин P_{2k+1} и P_{2k+2} соединена по крайней мере с n вершинами из P_1, P_2, ..., P_{2k} (следовательно, неравенство $2k \geqslant n$ выполняется во всех случаях).

Если мы покажем, что среди отобранных ребер имеется такое, у которого один из концов соединен с вершиной P_{2k+1}, а другой — с вершиной P_{2k+2} (во втором решении таким ребром было P_3P_4), то теорема будет доказана, поскольку, исключив ребро, концы которого соединены с вершинами P_{2k+1} и P_{2k+2}, из числа отобранных ребер и пополнив их запас двумя новыми ребрами, соединяющими один конец отброшенного ребра с вершиной P_{2k+1}, а другой — с вершиной P_{2k+2}, мы увеличим число отобранных ребер на единицу и можем делать то же самое до тех пор, пока оно не станет равным n.

Упомянутое выше утверждение может быть доказано так. Среди вершин $P_1, P_2, \ldots, P_{2k}$, служащих концами отобранных ребер, отметим те, парные к которым соединены с вершиной P_{2k+1}. Их не меньше n. Следовательно, неотмеченными остались не более $2k-n<n$ концов отобранных ребер. Вершина P_{2k+2} соединена по крайней мере с n концами отобранных ребер, а значит, по крайней мере с одним отмеченным концом. Итак, среди отобранных ребер имеется такое, что один его конец соединен с вершиной P_{2k+1}, а другой — с вершиной P_{2k}. Существование именно такого ребра и требовалось доказать.

Третье решение. Если среди ребер графа найдется такое, что, исключив его, мы получим новый граф, также удовлетворяющий условиям задачи, то такое ребро можно назвать лишним и стереть. Стерев одно за другим все лишние ребра графа (их конечное число, поскольку граф конечен), мы получим новый граф, в котором после исключения любого ребра степень по крайней мере двух вершин (то есть число выходящих из них ребер) будет меньше 3. Утверждение задачи достаточно доказать для такого графа, поскольку стирание лишних ребер не нарушало условий задачи (степень каждой вершины оставалась больше или равной 3).

Рассмотрим граф, вершины которого совпадают с вершинами исходного графа, а ребра соединяют лишь пары вершин, не связанные в исходном графе (такие графы называются *дополнительными*; см. III.68). Поскольку из каждой вершины исходного графа выходят не менее 3 ребер, то из каждой вершины дополнительного графа выходят не более 2 ребер. Удаление ребра из исходного нарушило бы это свойство, поскольку степень по крайней мере двух вершин стала бы меньше 3. Поэтому присоединение ребра к дополнительному графу также лишает его названного выше свойства.

Выясним, каким должен быть граф для того, чтобы его можно было считать дополнительным по отношению к исходному графу.

Две вершины, степень которых меньше 2, могут принадлежать дополнительному графу лишь в том случае, если они связаны ребром, поскольку в противном случае от присоединения к графу ребра, идущего от одной из этих вершин к другой, степень ни одной из вершин графа не стала бы больше 2. Отсюда следует, что допустимы лишь такие разновидности графов, у которых: 1) все вершины имеют степень 2; 2) степень лишь одной вершины меньше 2, а степень всех остальных равна 2; 3) две вершины степени 1 соединены между собой ребром, а степень всех остальных вершин равна 2. Действительно, если бы граф содержал 3 вершины, степень которых меньше 2, то они были бы попарно связаны ребрами и, следовательно, из каждой из них выходило бы по 2 ребра, что невозможно, поскольку по предположению их степень меньше 2.

Поскольку у каждого ребра имеется 2 конца (каждое ребро соединяет две вершины графа), то при любом числе ребер число соединенных ими вершин графа четно. Это означает, что сумма степеней всех вершин графа всегда четна. Отсюда следует, что если граф содержит лишь одну вершину, степень которой меньше 2, то из нее не выходит ни одного ребра (степень такой изолированной вершины равна 0). Тем самым мы доказали еще одно важное свойство графа, дополнительного к исходному: если ребро такого графа выходит из вершины степени 2, то вершина на другом конце ребра также имеет степень 2.

Таким образом, относительно вершин степени 2 можно утверждать, что соединяющие их ребра образуют цикл, «многоугольник», поскольку, выйдя из одной вершины степени 2, мы попадем в другую, из нее — в третью и так далее до тех пор, пока не возвратимся в исходную вершину. Как было показано выше, граф, дополнительный к исходному, может содержать 6, 5 или 4 вершины степени 2. Если число вершин степени 2 равно 6, то соединяющие их ребра образуют либо шестиугольник, либо два треугольника. Если число вершин степени 2 равно 5 или 4, то соединяющие их ребра образуют пятиугольник или четырехугольник. Таким образом, число сторон у всех многоугольников не меньше 3.

Итак, мы установили, что существуют следующие разновидности графов, дополнительных к исходному (рис. 158): *а* — шестиугольник; *б* — два треугольника, не имеющие общих вершин; *в* — граф, состоящий из пятиугольника и одной отдельной вершины; *г* — граф, состоящий из четырехугольника и двух вершин, соединенных ребром.

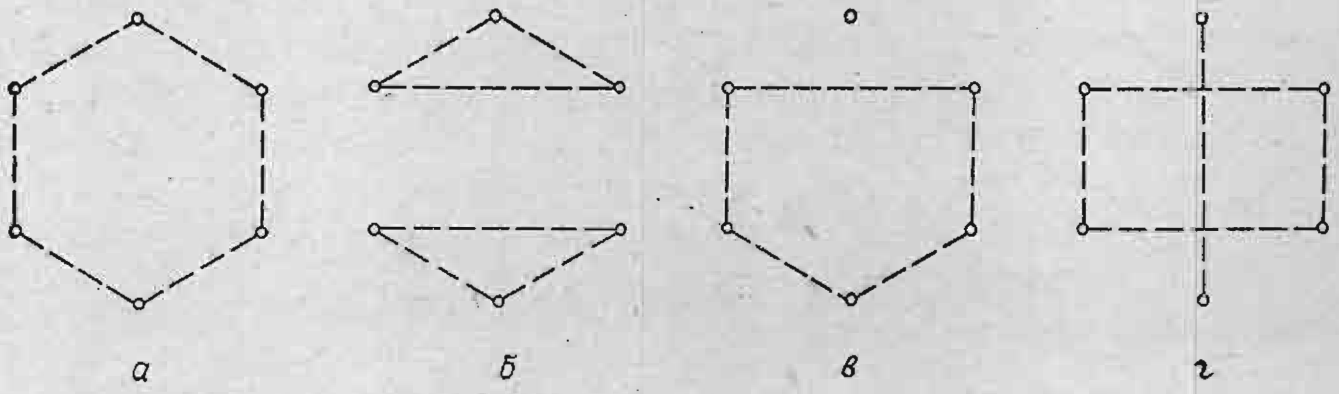


Рис. 158.

Все четыре графа нетрудно дополнить тремя ребрами так, чтобы эти ребра попарно соединяли все 6 вершин и не имели общих концов. (На рис. 159 изображены два графа, каждый из которых соответствует любому из четырех графов, представленных на рис. 158.) Это означает, что среди тканей, выпускаемых фабрикой, всегда

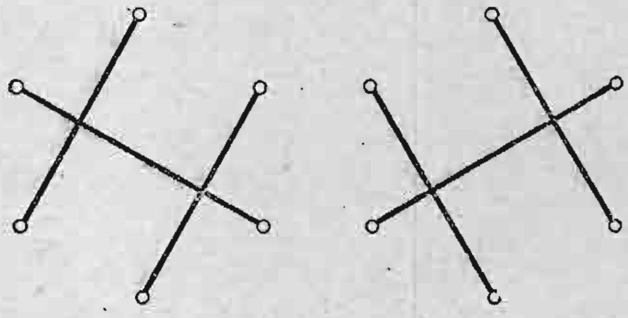


Рис. 159.

можно выбрать ткани трех различных расцветок, изготовленные из пряжи всех 6 цветов*.

171. От знаков абсолютной величины в сумме можно избавиться, если изменить знаки чисел a_k и k на противоположные всюду, где $a_k - k < 0$. Таким образом, исходную сумму мы представим в виде суммы $2n$ слагаемых (с различными знаками), среди которых каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается дважды, причем n слагаемых отрицательны. Значение исходной суммы мы получим, вычислив сумму чисел $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ и вычтя из нее удвоенную сумму тех слагаемых, которые были отрицательны. Следовательно, исходная сумма достигает наибольшего значения, если сумма отрицательных слагаемых минимальна. Поскольку отрицательны n слагаемых, то их сумма не может быть меньше суммы первых n членов последовательности $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$. Выбрав подходящую перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$, можно добиться, чтобы в исходную сумму со знаком минус входили именно эти первые n членов. Такой перестановкой служит, например, перестановка $n, n-1, \ldots, 1$, приводящая к сумме

$$|n-1|+|(n-1)-2|+\ldots+|1-n|.$$

Итак, остается лишь вычислить наибольшую сумму. Заметим, что с какого конца (правого или левого) мы ни двигались бы к середине суммы, каждое следующее слагаемое убывает по сравнению с предыдущим на 2. Крайние члены суммы равны $n-1$. При продвижении к середине суммы ее члены убывают до тех пор, пока мы не достигнем середины. Возможны два случая: либо два средних члена равны 1, либо один средний член равен 0.

Следовательно, если число n четно, то наибольшее значение исходной суммы мы найдем, вычислив удвоенную сумму арифметической прогрессии $1, 3, \ldots, n-1$ с разностью 2 и числом членов $n/2$. Таким образом, при четном n наибольшее значение исходной суммы равно $n^2/2$. Если n нечетно, то наибольшее значение исходной суммы мы найдем, вычислив удвоенную сумму арифметической прогрессии $2, 4, \ldots, n-1$ с разностью 2 и числом членов $(n-1)/2$. Таким образом, при нечетном n наибольшее значение исходной суммы равно $\frac{n-1}{2}\cdot(n+1)=$ $=\frac{n^2-1}{2}$.

Наибольшее значение исходной суммы можно было бы вычислить, не прибегая к формуле суммы арифметической прогрессии, если особым образом выбрать перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$.

При $n=2k$ удобно выбрать перестановку $k+1$, $k+2, \ldots, 2k, 1, 2, \ldots, k$. После того как мы избавимся в исходной сумме от знаков абсолютной величины, меньшими числами в каждой разности a_l-l окажутся числа $1, 2, \ldots, k$, причем каждое из чисел $1, 2, \ldots, k$ будет встречаться среди меньших чисел дважды. По доказанному ранее можно утверждать, что при перестановке

$k+1$, $k+2$, ..., $2k$, 1, 2, ..., k исходная сумма достигает наибольшего значения. Абсолютная величина каждой разности равна k. Следовательно, сумма всех абсолютных значений равна $2k^2$.

При $n=2k+1$ разумно выбрать перестановку $k+2$, $k+3$, ..., $2k+1$, $k+1$, 1, 2, ..., k. Меньшими в каждой разности снова окажутся числа 1, 2, ..., k, но в средней разности и уменьшаемое, и вычитаемое будут равны $k+1$. Отсюда можно заключить, что исходная сумма достигает при перестановке $k+2$, $k+3$, ..., $2k+1$, $k+1$, 1, 2, ..., k наибольшего значения. Абсолютная величина средней разности равна 0, абсолютная величина всех остальных разностей равна $k+1$. Следовательно, сумма абсолютных величин равна $2k(k+1)$.

Оба результата можно объединить, сказав, что наибольшее значение исходной суммы равно целой части числа $n^2/2$, то есть наибольшему целому числу, не превосходящему $n^2/2$.

172. Утверждение задачи равносильно следующему утверждению: из 6 точек, заданных на плоскости, всегда можно выбрать 3 такие, что угол между лучами, проведенными из одной точки через две другие, будет не меньше 120°. Именно в этой форме мы и докажем утверждение задачи.

Заданные точки располагаются либо в вершинах выпуклого шестиугольника, либо среди них имеются 3, 4 или 5 точек, расположенных соответственно в вершинах треугольника, выпуклого четырехугольника или выпуклого пятиугольника, внутри которого находятся остальные точки. В последнем случае треугольник, четырехугольник или пятиугольник называют *выпуклой оболочкой* заданных точек[1].

Если выпуклая оболочка имеет форму шестиугольника, то по крайней мере один из углов не меньше 120°, поскольку сумма шести углов равна 720°.

Если выпуклая оболочка имеет форму четырехугольника или пятиугольника, то, проведя одну из диагоналей (в четырехугольнике) или все диагонали, сходящиеся в

[1] Воткнув в заданные точки плоскости булавки (каждая булавка должна быть перпендикулярна плоскости) и набросив на булавки петли из нити, мы получим выпуклую оболочку заданных точек, если стянем петлю как можно туже.

любой из вершин (в пятиугольнике), мы разобьем ее на треугольники. Какой-то из получившихся треугольников непременно содержит заданную точку. Следовательно, всегда можно выбрать треугольник с вершинами в заданных точках, содержащий заданную точку, которая не совпадает ни с одной из вершин. Соединим эту точку отрезками прямых с остальными заданными точками. Среди углов, заключенных между отрезками, по крайней мере один не меньше 120°, поскольку сумма всех углов равна 360°. Тем самым утверждение задачи доказано.

Относительно условий задачи и ее утверждения заметим следующее.

1. То, что никакие 3 из 6 заданных точек не лежат на одной прямой, в действительности несущественно. Если бы какие-то 3 точки лежали на одной прямой, то угол между лучами, проведенными из средней точки через две крайние, составлял бы 180° (то есть был бы больше 120°).

2. Соединим каждую из 6 заданных точек отрезками прямых с пятью остальными точками. Может ли наибольший из углов, заключенных между проведенными отрезками, для каждой точки быть не больше 120° и, если может, то в каких случаях?

Если выпуклая оболочка 6 заданных точек имеет форму шестиугольника, то для каждой точки наибольший угол между отрезками, попарно соединяющими заданные точки, не превосходит 120° лишь тогда, когда все эти углы равны 120° и стороны шестиугольника параллельны сторонам некоторого правильного шестиугольника (сама выпуклая оболочка не обязательно должна иметь форму правильного шестиугольника).

Если выпуклая оболочка 6 заданных точек не имеет формы шестиугольника, то, как следует из решения задачи 172, среди заданных точек можно выбрать 3 такие, что треугольник с вершинами в выбранных точках будет содержать по крайней мере еще одну заданную точку P, причем стороны треугольника должны быть видны из точки P под углом 120°, поскольку в противном случае одна из сторон была бы видна под углом, превышающим 120°.

Если это условие выполнено, стоит лишь взять еще одну заданную точку Q, как мы получим наибольший угол между отрезками, попарно соединяющими 6 заданных точек, который заведомо больше 120° (рис. 160). Действительно, если точка Q лежит на луче, проведенном из точки P через одну из вершин треугольника, то три заданные точки лежат на одной прямой и угол между отрезками, соединяющими среднюю точку с двумя крайними, равен 180°, иными словами, он больше 120°. Если же точка Q лежит внутри одного из углов в 120°, на которые разбивают плоскость лучи, проведенные из точки P через вершины треугольника, то луч, проведенный из точки P через точку Q, образует с тем из лучей,

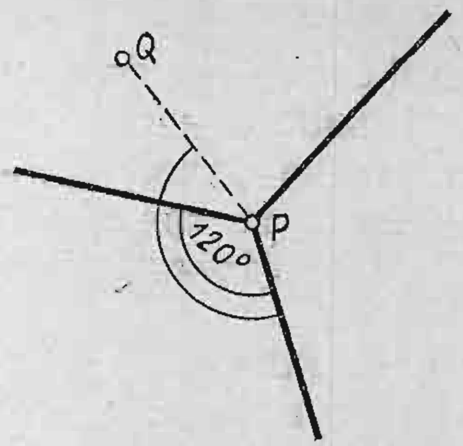


Рис. 160.

который проходит вне содержащего Q угла в 120°, угол, превосходящий 120°. Итак, мы доказали следующее утверждение. *Пусть на плоскости задано 6 точек. Наибольший из 6-ти углов между лучами, проведенными из каждой точки через 5 остальных, всегда не меньше угла при вершине правильного шестиугольника и равен ему лишь в том случае, если 6 заданных точек располагаются в вершинах шестиугольника, стороны которого параллельны сторонам правильного шестиугольника.*

3. Доказанное утверждение остается верным, если вместо 6 на плоскости задано 3, 4 или 5 точек. Действительно, если заданные точки находятся в вершинах многоугольника, служащего их выпуклой оболочкой, то, проведя из каждой из них по лучу через остальные вершины многоугольника, мы обнаружим, что наибольший из углов, заключенных между лучами, не меньше соответственно внутреннего угла равностороннего треугольника, квадрата или правильного пятиугольника и равен ему лишь в том случае, если все углы многоугольника с соответствующим числом сторон равны, то есть если его стороны параллельны сторонам правильного

многоугольника с тем же числом сторон. Если же среди заданных точек (если их 4 или 5) найдется такая, которая не совпадает с вершиной многоугольника, служащего их выпуклой оболочкой, то наибольший из углов между лучами, проведенными из этой точки в вершины многоугольника, превосходит 120°, в то время как внутренние углы равностороннего треугольника, квадрата и правильного пятиугольника меньше 120°.

Нетрудно убедиться в том, что замеченная нами закономерность перестает действовать, если на плоскости задано 7 точек. Докажем следующее утверждение: *если*

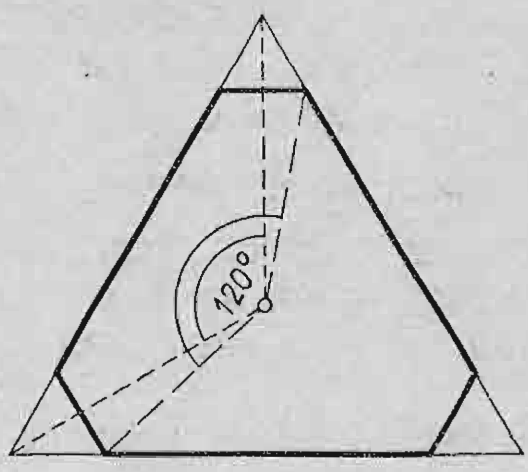


Рис. 161.

на плоскости задано 7 точек, то среди углов между лучами, проведенными из какой-то одной точки через две другие, найдется такой, который больше 120°; с другой стороны, для любого угла $\alpha > 120°$ можно указать такое расположение 7 точек на плоскости, что угол между лучами, проведенными из любой точки через две другие, всегда будет меньше α. К этому следует добавить, что 7 точек в таком расположении в общем случае не находятся в вершинах выпуклого семиугольника.

Если выпуклая оболочка 7 заданных точек имеет форму многоугольника, число сторон которого меньше 7, то наше утверждение следует из доказанного в п. 2. Если же 7 заданных точек расположены в вершинах выпуклого семиугольника, то наибольший из углов между лучами, проведенными из каждой вершины через все остальные, не меньше внутреннего угла правильного семиугольника, который больше 120°.

Для доказательства второго утверждения отсечем каждую вершину равностороннего треугольника отрезком прямой, параллельной противолежащей стороне, и рассмотрим точку, совпадающую с центром получившегося шестиугольника (рис. 161). Отсекая «уголки» соответствующего размера, можно добиться, что наибольший из углов между лучами, проведенными из центра шестиугольника через его вершины, сколь угодно мало отличался от угла 120°.

Этот результат принадлежит американскому математику Л. М. Блюменталю.

173. Каждое из чисел u и v при делении на 3 может давать лишь конечное число остатков (0, 1, 2). Перебрав все возможные комбинации остатков (их всего 9), мы получим решение задачи. Однако существует и более быстрый способ решения задачи, не сводящийся к перебору всех комбинаций. Рассмотрим его.

Преобразуем исходное выражение к виду

$$u^2+uv+v^2=(u-v)^2+3uv.$$

По условиям задачи, исходное выражение делится на 9 и, следовательно, на 3, а поскольку второе слагаемое в правой части делится на 3, то первое также делится на 3.

Квадрат целого числа делится на 3 лишь в том случае, если само число делится на 3, но тогда его квадрат делится на 9.

Поскольку исходное выражение делится на 9, то второе слагаемое в правой части ($3uv$) делится на 9. Следовательно, uv делится на 3. Это возможно лишь в том случае, если один из сомножителей делится на 3. Но выше мы доказали, что разность $u-v$ делится на 3. Таким образом, второй сомножитель также делится на 3. Итак, оба числа u и v делятся на 3, что и требовалось доказать. (Ясно, что если числа u и v делятся на 3, то исходное выражение делится на 9.)

174. Первое решение. Проведем диагонали AD, BE и CF. Пусть R, P, Q — точки их пересечения (эти три точки могут совпадать). Эти точки разбивают треугольники ACE и BDF на треугольники

$$\begin{matrix} ACQ, & CEP, & EAR, & PQR & (ACE), \\ DFQ, & FBP, & BDR, & PQR & (BDF). \end{matrix} \qquad (1)$$

Утверждение задачи будет доказано, если мы убедимся в том, что площадь каждого треугольника в верхней строке равна площади треугольника, стоящего под ним в нижней строке. Для последней пары треугольников равенство их площадей очевидно. Докажем, что площади треугольников, образующих первую пару, равны. Это следует из того, что равны площади треугольников ACF и ADF, поскольку сторона AF у них общая, а высоты, опущенные на нее из вершин C и D, равны, поскольку противоположные стороны DC и AF шестиугольника параллельны. Исключив из треугольников ACF и ADF их общую часть (треугольник AQF), получим треугольники ACQ и DFQ, площади которых также равны. Аналогичным образом доказывается равенство площадей треугольников, образующих остальные пары. Тем самым утверждение задачи доказано.

При решении задачи мы исходили из наглядного представления о том, что треугольники (1) заполняют без просветов и наложений треугольники ACE и BDF. Покажем, что задачу можно решить и без помощи таких нестрогих соображений.

Проведенные диагонали AD, BE и CF пересекают треугольники ACE и BDF. Действительно, по условиям задачи шестиугольник $ABCDEF$ выпуклый, в силу чего, например, вершины B, C лежат по другую сторону от прямой AD, чем вершины E, F, и прямая AD пересекает отрезки CE и FB, а значит, и треугольники ACE и BDF. Точки пересечения диагоналей AD, BE и CF принадлежат треугольникам ACE и BDF, поскольку каждая из диагоналей проходит через одну из вершин этих треугольников и пересекает противолежащую ей сторону во внутренней точке, тем самым разделяя концы двух других диагоналей.

Если все три диагонали пересекаются в одной точке, то доказывать более нечего. Предположим, что диагонали AD, BE и CF не пересекаются в одной точке. Вершины A, C, E лежат на продолжениях сторон QR, PQ, RP треугольника PQR. Вершина A не может лежать на продолжении стороны QR за точку Q, если вершина E лежит на продолжении стороны RP за точку P, поскольку в противном случае треугольник PQR располагался бы по другую сторону от прямой PQ, чем треугольник ACE, и, следовательно, не мог бы находиться внутри треугольника ACE. Таким образом, либо вершина A лежит на продолжении стороны QR за точку R, вершина C — на продолжении стороны PQ за точку Q

и вершина E — на продолжении стороны RP за точку P, либо вершины A, C, E лежат на продолжении соответствующих сторон треугольника PQR в противоположную сторону (рис. 162). Тем самым утверждение доказано. Аналогичное утверждение справедливо и относительно треугольника BDF.

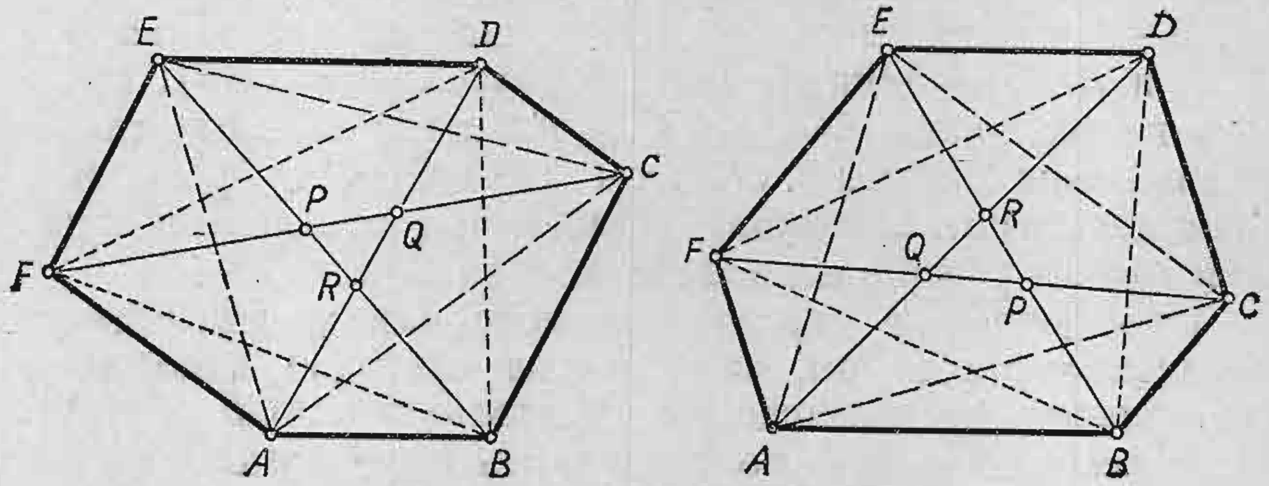


Рис. 162.

Доказанное утверждение можно сформулировать следующим образом.

Проведем через вершины треугольника прямые, пересекающие противоположные стороны, и рассмотрим образованный ими треугольник (если только эти прямые

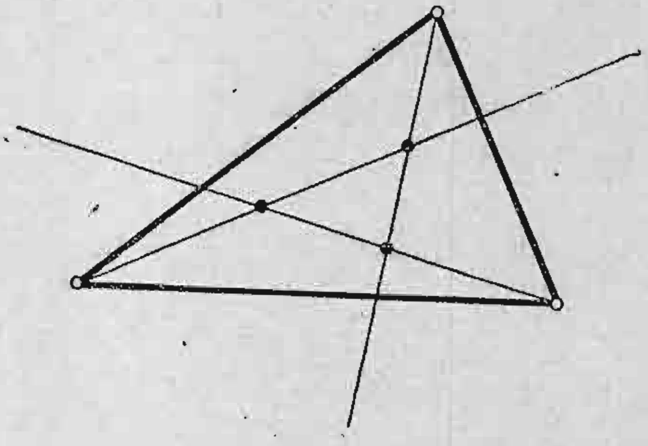


Рис. 163.

не пересекаются в одной точке). Тогда вершины исходного треугольника лежат на продолжениях сторон внутреннего треугольника за три его различные вершины. (На рис. 163 вершины исходного треугольника обозначены светлыми, а вершины внутреннего треугольника — черными кружками.)

Второе решение. Дополним до параллелограммов один раз пары сторон шестиугольника AB и BC,

CD и DE, EF и FA, а другой раз — пары сторон BC и CD, DE и EF, FA и AB. Четвертые (не совпадающие с вершинами шестиугольника $ABCDEF$) вершины параллелограммов обозначим P, Q, R и U, S, T (точки P, Q, R так же, как и точки U, S, T, в частном случае могут совпадать). Соединив диагоналями противоположные вершины каждого параллелограмма, совпадающие с вершинами шестиугольника $ABCDEF$, получим треугольники ACE и BDF (рис. 164).

При обоих способах разбиения шестиугольника $ABCDEF$ на параллелограммы стороны любых двух параллелограммов, выходящие из общей вершины шес-

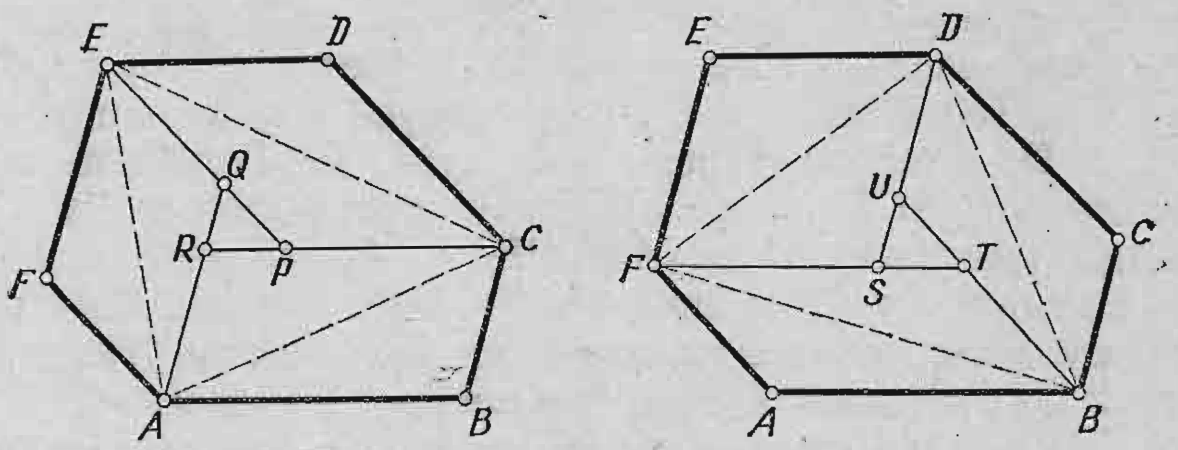


Рис. 164.

тиугольника, совпадают (лежат на одной и той же прямой), поскольку каждая из них параллельна противоположной стороне соответствующего параллелограмма, а эти стороны совпадают с двумя противоположными и (по условиям задачи) параллельными сторонами шестиугольника. Следовательно, стороны треугольников PQR и STU (если только треугольники не стягиваются в точку) параллельны одной из пар противоположных сторон шестиугольника и равны их разности. Но тогда треугольники PQR и STU конгруэнтны и сумма площадей трех параллелограммов $ABCR$, $CDEP$, $EFAQ$ равна сумме площадей трех параллелограммов $FABT$, $BCDU$, $DEFS$. Отсюда следует, что площади треугольников ACE и BDF, составленных из «половин» соответствующей тройки параллелограммов и одного из двух конгруэнтных треугольников, равны. Тем самым утверждение задачи доказано.

Относительно второго решения также необходимо сделать несколько замечаний:

1. Решение станет более строгим, если доказать (не прибегая к помощи чертежа), что половины параллелограммов и внутренние треугольники, образованные пересечением их сторон, заполняют без пробелов и наложений треугольники ACE и BDF. Рассмотрим, например, треугольник ACE. Его делят на части прямые AQ, CR и EP. Эти прямые, пересекаясь, образуют треугольник PQR, поскольку, например, прямая AQ параллельна сторонам шестиугольника BC и EF, причем в силу выпуклости шестиугольника $ABCDEF$ отрезки BC и EF расположены по разные ее стороны. Аналогичные рассуждения применимы к прямым CR, EP и к треугольнику BDF. Расположение прямых в каждом из треугольников ACE и BDF получается таким же, как на рис. 163, откуда и следует требуемое утверждение.

2. Из второго решения следует, что площадь треугольника ACE равна среднему арифметическому площади шестиугольника $ABCDEF$ и треугольника PQR, а площадь треугольника BDF — среднему арифметическому площади шестиугольника $ABCDEF$ и треугольника STU. Таким образом, *площадь треугольника ACE* (и BDF) *не меньше половины площади шестиугольника $ABCDEF$*. В свою очередь это позволяет утверждать, что *площадь по крайней мере одного из треугольников, образованных двумя смежными сторонами шестиугольника $ABCDEF$, не больше $^1/_6$ площади шестиугольника.* (Более того, площадь по крайней мере одного из трех треугольников ABC, CDE, EFA, так же как и площадь по крайней мере одного из трех треугольников BCD, DEF, FAB, не больше $^1/_6$ площади шестиугольника.)

Если отказаться от параллельности противоположных сторон шестиугольника и рассмотреть произвольный выпуклый шестиугольник, то нетрудно построить пример, в котором площадь каждого из треугольников ACE и BDF меньше половины площади шестиугольника, или пример, в котором площадь каждого из треугольников ABC, CDE, EFA больше $^1/_6$ площади шестиугольника. Не приводя доказательства, упомянем о том, что площадь каждого из шести треугольников, образованных парами смежных сторон шестиугольника, не может быть больше $^1/_6$ его площади и даже среднее геометрическое площадей этих шести треугольников не может быть больше $^1/_6$.

Третье решение. Условимся считать площадь треугольника ABC положительной или отрицательной в зависимости от того, в каком направлении совершается обход его вершин от A к B, далее к C и снова к A: против или по часовой стрелке.

Нетрудно видеть, что тогда для любой точки O, лежащей в плоскости треугольника ABC (рис. 165), будет

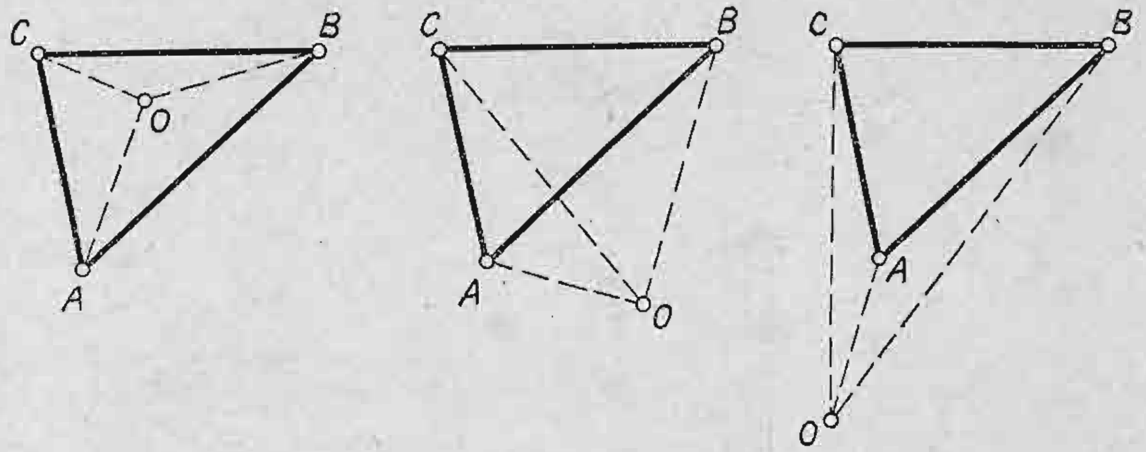


Рис. 165.

выполняться равенство (площади треугольников обозначены так же, как и сами треугольники)

$$ABC = OAB + OBC + OCA. \tag{2}$$

Если какие-нибудь три точки расположены на одной прямой, то площадь соответствующего «треугольника», выродившегося в отрезок, считается здесь равной нулю.

Выберем в плоскости шестиугольника $ABCDEF$ точку O и рассмотрим все треугольники, одна из вершин которых совпадает с точкой O. Для ориентированных треугольников (то есть для треугольников, площадь которых считается положительной или отрицательной) остается справедливым утверждение обычной планиметрии: если вершины C и D треугольников ABC и ABD лежат на прямой, параллельной их общему основанию AB, то площади треугольников ABC и ABD равны. Действительно, абсолютная величина площади треугольника ABC равна абсолютной величине площади треугольника ABD, а направление обхода периметра не изменяется, если вершину сдвинуть вдоль прямой, параллельной основанию треугольника.

Следовательно, если $ABCDEF$ — такой шестиугольник, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CF \parallel FA$, то площади ориентированных треугольников ABE и ABD, CDA и CDF,

EFC и EFB попарно равны (рис. 166). Отсюда, пользуясь соотношением (2), получаем

$$OAB + OBE + OEA = OAB + OBD + ODA,$$
$$OCD + ODA + OAC = OCD + ODF + OFC,$$
$$OEF + OFC + OCE = OEF + OFB + OBE.$$

В первом и в четвертом столбцах стоят одни и те же треугольники. Во втором столбце стоят те же треугольники, что и в последнем (шестом) столбце, только в другом порядке. Следовательно, сложив отдельно правые

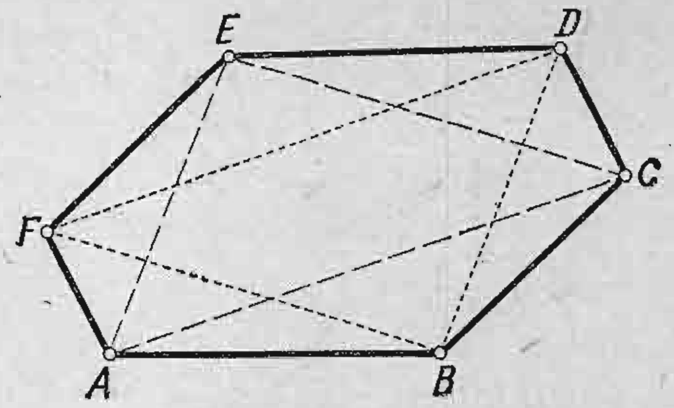


Рис. 166.

и отдельно левые части трех равенств, мы придем к равенству

$$OEA + OAC + OCE = OBD + ODF + OFB,$$

откуда, пользуясь соотношением (2), получим

$$ACE = BDF,$$

что и требовалось доказать.

Следует иметь в виду, что в третьем решении мы использовали лишь то условие задачи, где говорится о параллельности противоположных сторон шестиугольника,

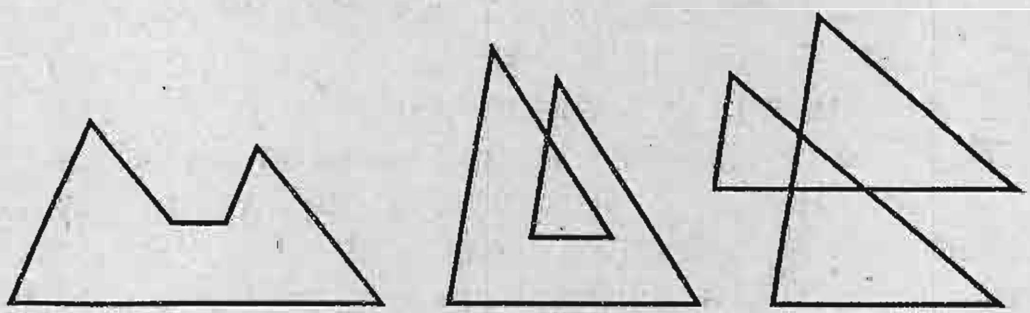


Рис. 167.

поэтому утверждение задачи остается верным и в том случае, если исходный шестиугольник невыпуклый, то есть его стороны пересекаются в точках, отличных от его вершин. (Несколько таких шестиугольников изображены на рис. 167.) С другой стороны, поскольку все выкладки проводились с ориентированными треугольниками, то из третьего решения задачи 174 следует, что треугольники ACE и BDF имеют площади, не только равные по абсолютной величине, но и одного знака.

175. Первое решение. Покажем, что если все три слагаемых исходного выражения привести к общему знаменателю, то числитель будет делиться (как многочлен) на знаменатель. Их частное также будет многочленом от трех переменных x, y, z с целочисленными коэффициентами. Таким образом, если x, y, z — целые числа, то исходное выражение принимает лишь целые значения.

После приведения к общему знаменателю исходное выражение примет следующий вид:

$$\frac{x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}. \tag{1}$$

При $n=0$ числитель обращается в 0:

$$(y-z)+(z-x)+(x-y)=0. \tag{*}$$

Следовательно, при $n=0$ значение исходного выражения равно 0. Далее, пользуясь равенством

$$x-y=-(y-z)-(z-x),$$

преобразуем числитель при произвольном n к виду

$$(x^n-z^n)(y-z)+(y^n-z^n)(z-x).$$

При $n=1$ числитель обращается в нуль. При $n \geqslant 2$ множитель $(x-z)(y-z)$ можно вынести, после чего числитель примет следующий вид:

$$\begin{aligned}(x-z)(y-z)[x^{n-1}+x^{n-2}z+\ldots+xz^{n-2}+z^{n-1}-\\ -y^{n-1}-y^{n-2}z-\ldots-yz^{n-2}-z^{n-1}]=\\ =(x-y)(x-z)(y-z)[(x^{n-2}+x^{n-3}y+\ldots+xy^{n-3}+y^{n-2})+\\ +z(x^{n-3}+\ldots+y^{n-3})+\ldots+z^{n-}].\end{aligned}$$

Многочлен от x, y, z, стоящий в квадратных скобках, имеет целочисленные коэффициенты и при любых целых x, y, z принимает только целые значения, что и требовалось доказать. (При $n=2$ в квадратных скобках остается лишь последний член, при $n=3$ — лишь выражение, стоящее в первых круглых скобках, и последний член.)

По поводу приведенного выше решения необходимо заметить следующее:

1. При $n \geqslant 2$ структура многочлена, стоящего в квадратных скобках, проста: он представляет собой сумму всех возможных произведений степеней x, y, z, сумма показателей которых равна $n-2$.

2. Для доказательства утверждения задачи недостаточно убедиться в том, что при любых заданных значениях x, y, z соответствующее значение числителя выражения (1) делится на каждое из целых *чисел* $x-y$, $x-z$, $y-z$ в отдельности. Делать из этого вывод о том, что (1) делится на произведение $(x-y)\cdot(x-z)(y-z)$, можно было бы лишь в том случае, если любые две из трех разностей $x-y$, $x-z$, $y-z$ были взаимно простыми числами. В общем случае это условие не выполняется.

Будем теперь числитель и знаменатель выражения (1) рассматривать как многочлены от трех переменных x, y, z. Многочлены $x-y$, $x-z$, $y-z$ не имеют общих делителей ненулевой степени, то есть общих делителей, содержащих переменные x, y, z: как многочлены они взаимно просты. Отсюда следует, что в классе многочленов с целыми коэффициентами из числителя выражения (1) можно вынести произведение $(x-y)$ $(x-z)(y-z)$. Однако, делая такой вывод, мы используем, не приводя никаких доказательств, гораздо более глубокую теорему, чем доказываемое нами утверждение.

В правильности наших рассуждений можно убедиться, если воспользоваться теоремой о разложении многочленов на множители, придав ей следующую форму: *если число t — нуль многочлена $f(x)$, то $f(x)$ можно разложить в произведение множителя $(x-t)$ и некоторого многочлена, степень которого на 1 меньше степени многочлена $f(x)$; если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и t — целое число, то $f(x)$ можно разложить в произведение множителя $(x-t)$ и некоторого многочлена с целыми коэффициентами, степень которого на 1 меньше степени многочлена $f(x)$.* Это утверждение непосредственно следует из теоремы, доказанной в III. 17, а.

Приводимое ниже решение по существу использует эту теорему.

Второе решение. Числитель выражения (1) обращается в 0, если $n=0$ или $n=1$. При $n \geqslant 2$ расположим члены числителя по убывающим степеням x и сгруппируем их следующим образом:

$$x^n(y-z)-x(y^n-z^n)+yz(y^{n-1}-z^{n-1})=$$
$$=(y-z)[x^n-x(y^{n-1}+y^{n-2}z+\ldots+z^{n-1})+$$
$$+yz(y^{n-2}+\ldots+z^{n-2})]. \qquad (2)$$

(При $n=2$ последний член в последних круглых скобках обращается в 1.) Рассмотрим полученное выражение как многочлен f от x, а y и z будем считать целочисленными *параметрами* ($y \neq z$). При $x=y$ левая часть равенства (2) обращается в нуль. Поскольку $y \neq z$, то второй сомножитель в правой части, заключенный в квадратные скобки, также обращается в нуль. Этот сомножитель представляет собой многочлен относительно x с целыми коэффициентами, а y — целое число. Следовательно, f можно представить в виде $(x-y)f_1(x; y, z)$, где $f_1(x; y, z)$ — некоторый многочлен от x с целыми коэффициентами, зависящими от y, z, степень которого на 1 меньше степени многочлена, стоящего в квадратных скобках.

При $x=z$ этот многочлен обращается в нуль, поскольку левая часть равенства (2) обращается в нуль, а стоящее перед ним произведение $(y-z)(x-y)$ в нуль не обращается, так как $y \neq z$. Поскольку $f_1(x; y, z)$ — многочлен относительно x с целыми коэффициентами, зависящими от y, z, и z — целое число, то f_1 можно разложить в произведение $(x-z)f_2(x; y, z)$, где $f_2(x; y, z)$ — многочлен относительно x с целыми коэффициентами, зависящими от y, z, степень которого на 1 меньше степени многочлена $f_1(x; y, z)$. Таким образом, подставив в преобразованный числитель выражения (1) любое целое значение x_1, мы получим произведение $(y-z)\cdot(x_1-y)(x_1-z)$ с целым коэффициентом $f_2(x_1; y, z)$. Следовательно, выражение (2) при целых x, y, z принимает лишь целочисленные значения, что и требовалось доказать.

Третье решение. Пусть $P_n(x, y, z)$ — выражение (1). Докажем методом полной математической индукции по n, что $P_n(x, y, z)$ — многочлен от трех переменных x, y, z с целыми коэффициентами.

При $n=0$ утверждение верно, поскольку выражение $P_0(x, y, z)$ тождественно равно нулю.

Предположим, что $P_n(x, y, z)$ — многочлен от x, y, z с целыми коэффициентами при некотором значении $n=k$. Сократив одинаковые члены, получим тождество

$$P_{k+1}(x, y, z) - zP_k(x, y, z) = \frac{x^{k+1} - zx^k}{(x-y)(x-z)} + \\ + \frac{y^{k+1} - zy^k}{(y-x)(y-z)} = \frac{x^k - y^k}{x-y},$$

то есть

$$P_{k+1}(x, y, z) = zP_k(x, y, z) + (x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + y^{k-1}),$$

где при $k=0$ вместо суммы, стоящей в круглых скобках, следует брать 0. Поскольку по предположению индукции $P_k(x, y, z)$ — многочлен от x, y, z с целыми коэффициентами, то аналогичное утверждение справедливо и относительно $P_{k+1}(x, y, z)$. Следовательно, утверждение доказано для всех неотрицательных целых n.

Четвертое решение. Выражение

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + \\ + (xy + xz + yz)t - xyz,$$

рассматриваемое как многочлен от t, обращается в нуль при $t=x$, $t=y$, $t=z$. То же самое можно сказать и о выражении

$$t^n(t-x)(t-y)(t-z),$$

где n — любое целое неотрицательное число. Таким образом, независимо от того, какую из переменных x, y, z означает t, выполняется тождество

$$t^{n+3} = t^{n+2}(x+y+z) - t^{n+1}(xy + xz + yz) + t^n xyz \\ (t=x, \ t=y \ \text{ или } \ t=z) \qquad (3)$$

(в правильности его нетрудно убедиться и непосредственно проверкой).

Так же как в третьем решении, обозначим выражение (1) $P_n(x, y, z)$. Тогда, преобразуя числитель выражения $P_{n+3}(x,y,z)$ при помощи тождества (3), получаем новое тождество

$$P_{n+3}(x, y, z) = (x+y+z)\,P_{n+2}(x, y, z) - \\ - (xy+xz+yz)\,P_{n+1}(x, y, z) + xyzP_n(x, y, z).$$

Отсюда видно, что если при трех последовательных целых значениях n выражения $P_n(x,y,z)$ представляют собой многочлены от x, y, z с целыми коэффициентами, то и при всех бо́льших значениях n выражения $P_n(x,y,z)$ будут многочленами от x, y, z с целочисленными коэффициентами. Но $P_0(x,y,z) = P_1(x,y,z) = 0$, $P_2(x,y,z) = 1$. Следовательно, $P_n(x,y,z)$ при всех неотрицательных целых n представляет собой многочлен от x, y, z с целыми коэффициентами.

176. Первое решение. Пусть x — высота антенны в метрах, а α, β, γ — углы, под которыми она видна из точек, отстоящих на 100, 200 и 300 м от ее основания. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{100}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{200}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{300}.$$

По условию задачи $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$, поэтому

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{300} = \operatorname{tg}[90^\circ - (\alpha+\beta)] = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \\ = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = \frac{1-\dfrac{x}{100}\cdot\dfrac{x}{200}}{\dfrac{x}{100}+\dfrac{x}{200}} = \frac{100\cdot 200 - x^2}{300x}.$$

Следовательно,

$$2x^2 = 100\cdot 200,$$

а поскольку высота антенны x может выражаться лишь положительным числом, то $x = 100$ м.

Второе решение. Пусть CT — высота антенны. Отложим под прямым углом к CT, но в разные стороны отрезки $TA = 100$ м и $TB = 200$ м. Тогда $AB = 300$ м. Следовательно, угол γ наглядно можно представить как угол, под которым из точки A виден отрезок $BD = CT$ перпендикуляра, восставленного из точки B к отрезку AB по другую сторону от отрезка CT (рис. 168).

Четырехугольник $BCTD$ — параллелограмм, поскольку две его противоположные стороны CT и BD равны и параллельны. Следовательно, диагонали CD и TB, пересекаясь в точке E, делятся пополам. Но тогда $ET = 100$ м, $\angle TEC = \alpha$ и треугольник ACE — равнобедренный. Определим величину угла при вершине C. По-

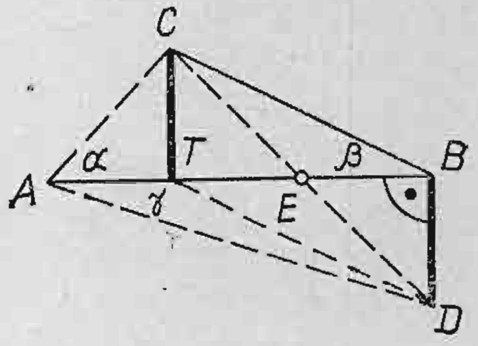


Рис. 168.

скольку в четырехугольнике $ADBC$ сумма противоположных углов при вершинах A и B равна $\alpha + \beta + \gamma + 90°$, а по условиям задачи $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, то сумма углов при вершинах A и B равна $180°$. Следовательно, вокруг четырехугольника $ADBC$ можно описать окружность, причем сторона AD совпадает с диаметром окружности, поскольку видна из вершины B под углом $90°$. Но тогда и $\angle ACD = \angle ACE = 90°$. Таким образом, ACE — равнобедренный прямоугольный треугольник и угол α равен $45°$. В свою очередь это означает, что ATC — равнобедренный прямоугольный треугольник, в силу чего высота антенны равна 100 м.

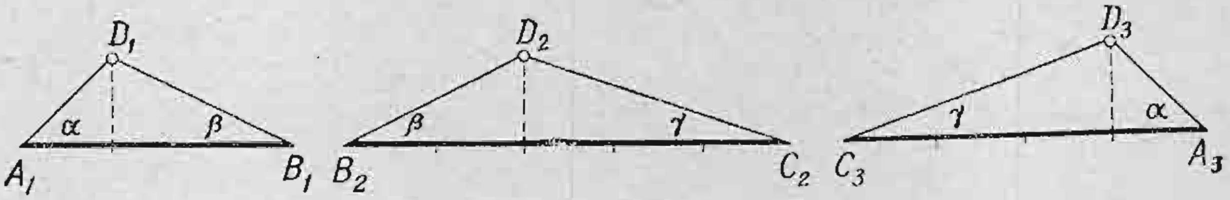


Рис. 169.

Третье решение. Нарисуем антенну в трех видах: отложим по обе стороны от основания антенны на одной прямой отрезки, из концов которых антенна видна под углами α и β, β и γ, γ и α (рис. 169). Сумма углов, примыкающих к сторонам A_1B_1, B_2C_2, C_3A_3 треугольников $A_1D_1B_1$, $B_2D_2C_2$, $C_3D_3A_3$, по условиям задачи равна $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \cdot 90° = 180°$. Следовательно, сумма углов при вершинах D_1, D_2, D_3 равна $360°$. Поскольку

$B_1D_1 = B_2D_2$, $C_2D_2 = C_3D_3$, $A_3D_3 = A_1D_1$, то из треугольников $A_1D_1B_1$, $B_2D_2C_2$, $C_3D_3A_3$ можно составить треугольник ABC (рис. 170). Стороны его $AB = 300$ м, $BC = 500$ м, $CA = 400$ м удовлетворяют соотношению

$$BC^2 = CA^2 + AB^2,$$

из чего (по теореме, обратной теореме Пифагора) следует, что треугольник ABC прямоугольный, причем прямой угол находится при вершине A. Таким образом, $2\alpha = 90°$, и высота антенны равна 100 м.

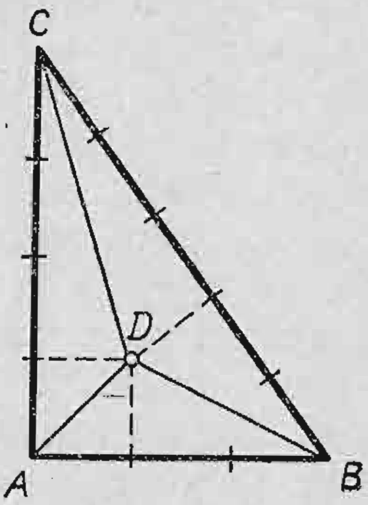


Рис. 170.

177. Первое решение. Предположим, например, что брат A не встретился в доме заболевшего друга со своей женой. Тогда жена брата A либо успела уйти до прихода своего мужа (в этом случае она ушла от больного раньше, чем жены двух других братьев, поскольку A, пришедший после ее ухода, встретился у постели больного с двумя своими невестками), либо пришла к больному после ухода своего мужа (в этом случае она пришла к больному позже, чем жены двух других братьев, поскольку те встретились в доме заболевшего друга с ее мужем A, успевшим уйти до ее прихода). Таким образом, любая из жен могла не встретиться у заболевшего друга со своим мужем лишь в том случае, если она либо ушла от больного раньше, чем жены двух других братьев, либо пришла к нему позже, чем они.

Однако из жен трех братьев по крайней мере одна не пришла позже, чем две другие, и не ушла раньше их. Следовательно, по крайней мере одна из трех жен встретилась в доме заболевшего друга со своим мужем.

Второе решение. Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, что ни одна из супружеских пар не встретилась в доме своего заболевшего друга.

Если брат A пришел к другу раньше своей жены, то он должен уйти от друга до прихода своей жены. По условиям задачи A встретил у друга жену брата B. Следовательно, жена брата B пришла навестить заболевшего друга раньше, чем жена брата A. Брат B должен был бы прийти к больному после ухода своей жены (чтобы не встретиться с ней) и мог бы застать у него лишь жену брата A.

Если брат A пришел к другу позже своей жены, то, как следует из приведенных выше рассуждений, брат B должен был бы прийти к больному другу раньше своей жены, то есть две супружеские пары A и B навещают своего друга в обратной последовательности.

Повторив те же рассуждения для супружеских пар A и C, B и C, мы придем к следующему заключению: чтобы не встретиться друг с другом, супруги C должны навестить больного друга в обратной последовательности по отношению к обеим супружеским парам A и B, что невозможно, поскольку по доказанному выше супружеские пары A и B навещают заболевшего друга в обратной последовательности. Следовательно, по крайней мере один из братьев встретился со своей женой в доме заболевшего друга.

Те же рассуждения позволяют доказать более общую теорему. Чтобы смысл ее был нам понятнее, сформулируем несколько иначе исходную задачу.

Три супружеские пары можно рассадить за столом, например, в таком порядке: брат A, жена брата B, брат C, жена брата A, брат B, жена брата C (по другую сторону от нее сидит брат A). Предположим, что на следующий день все шестеро сидевших за столом людей навестили заболевшего друга, причем каждый побывал у больного лишь по одному разу и встретил там двух людей, сидевших накануне рядом с ним за столом (справа и слева). Утверждается, что так может произойти лишь в том случае, если в доме у заболевшего друга встретились по крайней мере одна из супружеских пар (за столом супруги сидят напротив друг друга).

Сформулированную в таком виде задачу 177 можно рассматривать как частный случай следующего более общего утверждения.

За столом рассажено n супружеских пар таким образом, что супруги оказались сидящими напротив друг друга. Вся компания условилась навестить на следующий день своего заболевшего приятеля. Назавтра, побывав у больного, каждый встретил там двух своих ближайших соседей по столу. Известно, что каждый посетил больного лишь один раз. Доказать, что по крайней мере одна супружеская пара встретилась у заболевшего.

Предположим, что справедливо обратное утверждение: ни одна супружеская пара не встретилась в доме у заболевшего друга (все остальные условия будем считать выполненными). Обозначим сидевших за столом по порядку $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, тогда A_1 и A_{n+1}, A_2 и A_{n+2}, $\ldots$, A_n и A_{2n} — супружеские пары. Выберем обозначения так, чтобы «псевдоним» A_1 достался тому из супругов, который пришел к заболевшему другу раньше другого, то есть раньше, чем A_{n+1} (по условиям задачи это означает, что A_1 ушел от друга до прихода A_{n+1}). Тогда A_2, встретившийся у больного с A_1, должен был бы прийти к другу раньше, чем A_{n+1}. Его (или ее) «половина» A_{n+2}, встретившаяся у заболевшего друга с A_{n+1}, но не встретившаяся по условиям задачи с A_2, могла прийти к больному другу лишь после ухода A_2. Аналогично A_{n+3} мог (или могла) прийти к больному лишь после ухода A_3, и так далее. Повторив это рассуждение n раз, мы придем к заключению, что A_{2n}, встретившийся в доме заболевшего друга с A_1, мог прийти к больному лишь после того, как ушла его половина A_n, встретившаяся с A_{n+1}, хотя мы исходили из предположения, что A_1 пришел к заболевшему другу раньше, чем A_{n+1}.

Следовательно, по крайней мере одна супружеская пара встретилась в доме у заболевшего друга, что и требовалось доказать.

178. Задача относится лишь к тому случаю, когда число экскурсантов не меньше 4. Если число экскурсантов меньше 4, то условия задачи и ее утверждение утрачивают смысл.

Пусть A и B — два не встречавшихся ранее экскурсанта. Такое предположение допустимо, поскольку в противном случае каждый экскурсант встречался бы ранее со всеми остальными участниками экскурсии и утверждение задачи выполнялось бы для любого экскурсанта. Предположим также, что еще два экскурсанта, образующие пару, отличную от AB, впервые встречаются во время экскурсии, поскольку в противном случае среди любых четырех экскурсантов нашелся бы такой (и даже два таких), который встречался ранее со всеми остальными экскурсантами.

В состав пары экскурсантов, отличной от пары AB, но также не встречавшейся ранее, непременно должны входить либо A, либо B. Действительно, предположим, что в состав этой пары (обозначим ее CD) не входят ни A, ни B. Тогда среди четырех экскурсантов A, B, C, D нельзя было бы найти ни одного, встречавшегося ранее с тремя остальными экскурсантами, а это противоречит условиям задачи. Итак, предположим, что пару не встречавшихся ранее экскурсантов, отличную от пары AB, образуют экскурсанты AC (подходящим выбором обозначений мы всегда можем добиться этого).

Выясним теперь, можно ли найти среди пар экскурсантов, отличных от пар AB и AC, такие, что входящие в них экскурсанты не встречались ранее. По доказанному выше в каждую такую пару должен входить либо A, либо B, но точно такие же рассуждения применимы и к паре AC. Следовательно, среди любых двух не встречавшихся ранее экскурсантов должны быть либо A, либо C. Таким образом, «новой» парой не встречавшихся ранее экскурсантов могут быть лишь BC или AD, где D — не упоминавшийся ранее экскурсант.

Но последний случай невозможен, поскольку четыре экскурсанта A, B, C и D не удовлетворяли бы условиям задачи. Следовательно, если не считать пар AB, AC, то впервые встретиться могли лишь экскурсанты, образующие пару BC. Следовательно, если не считать экскурсантов A, B и C, то любой из остальных экскурсантов встречался ранее со всеми участниками экскурсии. Поскольку среди любых четырех экскурсантов всегда найдется один экскурсант, отличный от A, B и C, то утверждение задачи доказано.

Задача 178 допускает «перевод» на язык теории графов (см. III.52). Каждому экскурсанту поставим в соответствие одну и только одну вершину графа и соединим ребром те вершины, «владельцы» которых не встречались ранее. По условиям задачи мы получим конечный граф, все ребра которого соединяют по две различных вершины и каждая пара вершин соединена не более чем одним ребром. В этом решении, говоря о графах, мы всегда будем иметь в виду лишь такие графы.

Задачу, эквивалентную исходной, можно сформулировать следующим образом. *Пусть среди вершин графа, число которых* $\geqslant 4$, *нельзя найти такие четыре, каждая из которых была бы соединена ребром по крайней мере с одной из трех остальных вершин. Тогда среди любых четырех вершин графа найдется такая, которая не соединена ребром ни с одной из остальных вершин.*

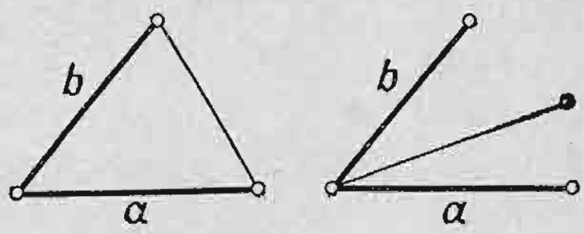


Рис. 171.

На языке теории графов решение задачи получается короче и нагляднее. Приведенное выше первое решение выглядит так.

Не ограничивая общности, предположим, что у графа имеются по крайней мере два ребра a и b, поскольку в противном случае из всех вершин, за исключением, быть может, двух, не выходило бы ни одного ребра и среди любых четырех вершин графа нашлась бы такая вершина, из которой не выходило бы ни одного ребра. Ребра a и b имеют один общий конец, поскольку в противном случае их концы образовали бы четверку точек, не удовлетворяющую условиям задачи. Рассуждая аналогично, установим, что, не считая самих ребер a, b, в графе может быть лишь одно ребро, притом имеющее по крайней мере один общий конец с ребрами a и b. Это ребро либо соединяет свободные концы ребер a и b, либо выходит из их общей вершины (рис. 171). Последний случай отпадает, поскольку существование вершины, из которой выходят 3 ребра, противоречит условиям задачи. Таким образом, ребрами могут быть соединены лишь три вершины графа, совпадающие с концами ребер a и b. Тем самым доказано, что какие бы четыре вершины мы ни выбрали, среди них непременно найдется по крайней мере одна, не соединенная ребрами ни с какой другой вершиной графа.

179. Первое решение. Докажем несколько больше того, что требуется, а именно следующее утверждение: если $0 < n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, то натуральное число n можно представить в виде суммы чисел, выбранных среди членов конечной последовательности a_1, a_2, ..., a_k. Воспользуемся методом полной математической индукции по k.

Если $k = 1$, то утверждение выполнено, поскольку по условиям задачи $a_1 = 1$: в этом случае натуральное число n может быть равным лишь 1.

Пусть $k > 1$. Предположим, что утверждение выполняется, если вместо числа k в приведенном выше неравенстве стоит число $k - 1$.

Если $0 < n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$, то по предположению индукции число n можно представить в требуемом виде, то есть в виде суммы чисел, выбранных среди членов конечной последовательности a_1, a_2, ..., a_{k-1}.

Пусть

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \leqslant n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Поскольку по условиям задачи левая часть неравенства не меньше a_k, то из последнего неравенства следует, что

$$0 \leqslant n - a_k \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}.$$

Таким образом, число $n - a_k$ либо равно 0, либо по предположению индукции представимо в виде суммы чисел, выбранных среди членов конечной последовательности a_1, a_2, ..., a_{k-1}. Итак, либо $n = a_k$, либо натуральное число n можно получить, прибавив a_k к сумме чисел, выбранных среди членов конечной последовательности a_1, a_2, ..., a_{k-1}, то есть в виде суммы чисел, выбранных среди членов конечной последовательности a_1, a_2, ..., a_k.

Второе решение. Как и в предыдущем решении, докажем, что если $0 < n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, то натуральное число n можно представить в виде суммы чисел, выбранных среди членов конечной последовательности a_1, a_2, ..., a_k, но на этот раз воспользуемся методом полной математической индукции по n.

Если $n = 1$, то утверждение выполняется при любых значениях k, поскольку по условиям задачи $a_1 = 1$, Пусть $n > 1$. Предположим, что утверждение выполнено при всех значениях n, меньших некоторого числа m.

При фиксированном $n > 1$ следует рассматривать такие значения k, при которых выполняется неравенство $n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Достаточно рассмотреть лишь наименьшее из таких значений k, для которого выполняется неравенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} < n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

поскольку при возрастании k лишь увеличивается число способов, которыми натуральное число n можно представить в виде суммы чисел, выбранных среди членов конечной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Из последнего неравенства получаем неравенство $0 \leqslant m < a_k$ для $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_k - n$. Используя неравенство, приведенное в условиях задачи, находим

$$0 \leqslant m \leqslant a_k - 1 \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} < n.$$

Следовательно, если исключить случай, когда $m = 0$ (то есть $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$), то

$$0 < m < n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

По предположению индукции это означает, что число m представимо в виде суммы чисел, выбранных среди $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Исключив их, получим, что натуральное число n представимо в виде суммы оставшихся членов последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

180. Первое решение. Если CFG — вписанный в квадрат треугольник и некоторая окружность касается извне его стороны FG в точке H, а продолжений сторон CF, CG в точках J, K (рис. 172), то

$$CJ = CK \quad \text{и} \quad FJ + GK = FG, \tag{1}$$

поскольку касательные, проведенные из одной точки к одной и той же окружности, равны, в силу чего $FJ = FH$ и $GK = GH$. Более того, из всех пар точек, одна из которых принадлежит продолжению стороны CF, а другая — продолжению стороны CG, соотношение (1) выполняется лишь для этих точек касания с вневписанной окружностью. Действительно, если сдвинуть точки J и K, то длина отрезка $CJ = CK$ либо возрастет, либо уменьшится. Следовательно, величина суммы $FJ + GK$ также либо возрастет, либо уменьшится и уже не будет равной длине отрезка FG.

Если мы теперь докажем, что середины J, K сторон квадрата BC, CD удовлетворяют соотношению (1), то J, K будут точками касания сторон квадрата BC, CD со вневписанной окружностью, а тогда эта окружность совпадает с окружностью, вписанной в квадрат $ABCD$,

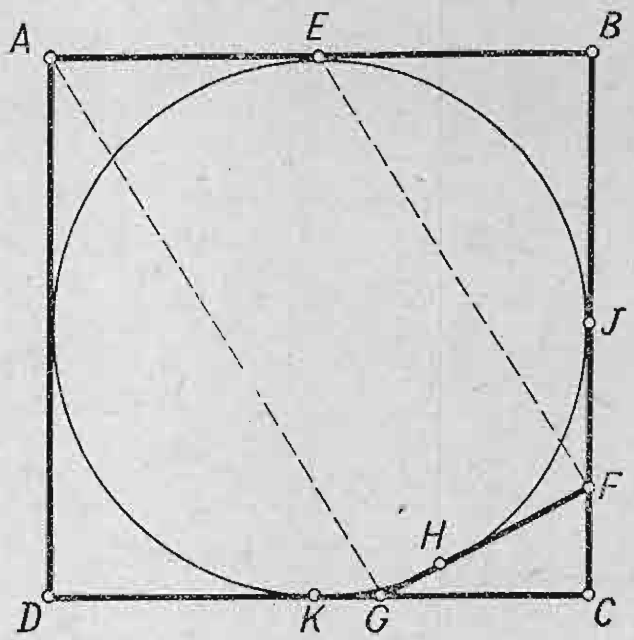


Рис. 172.

и отрезок FG касается этой последней. Заметим, что точки J и K лежат на продолжениях отрезков CF и CG Действительно, $AG \parallel EF$ и $AK \parallel EC$, в силу чего точки K, G, C расположены в том же порядке, как точки C, F, J.

Пусть длина стороны квадрата равна 2 (иначе говоря, примем за единицу длины отрезок, равный половине стороны квадрата). Тогда, если $DG = x$, то

$$CG = 2 - x, \quad GK = x - 1.$$

Треугольники ADG, FBE подобны (поскольку их стороны параллельны), поэтому $2 : x = FB : 1$, то есть $FB = 2/x$ и, следовательно,

$$CF = 2 - \frac{2}{x}, \quad FJ = \frac{2}{x} - 1.$$

Соотношение $(FJ + GK)^2 = FG^2$, которое нам необходимо доказать, мы можем, пользуясь теоремой Пифагора, заменить эквивалентным:

$$\left[\left(\frac{2}{x}-1\right)+(x-1)\right]^2=\left(2-\frac{2}{x}\right)^2+(2-x)^2.$$

Последнее действительно выполняется, поскольку выражение, стоящее в его левой части, можно представить в виде

$$\left(\frac{2}{x}-2+x\right)^2=\left(\frac{2}{x}-2\right)^2+2x\left(\frac{2}{x}-2\right)+x^2,$$

а

$$2x\left(\frac{2}{x}-2\right)+x^2=4-4x+x^2=(2-x)^2.$$

Второе решение. Если O — центр вневписанной окружности, касающейся гипотенузы FG прямоугольного треугольника CFG и продолжений его катетов (рис. 173), то

$$\angle FOG=45^\circ, \tag{2}$$

поскольку OF и OG — биссектрисы углов JFH и HGK, дополняющих углы треугольника до развернутых. (H,

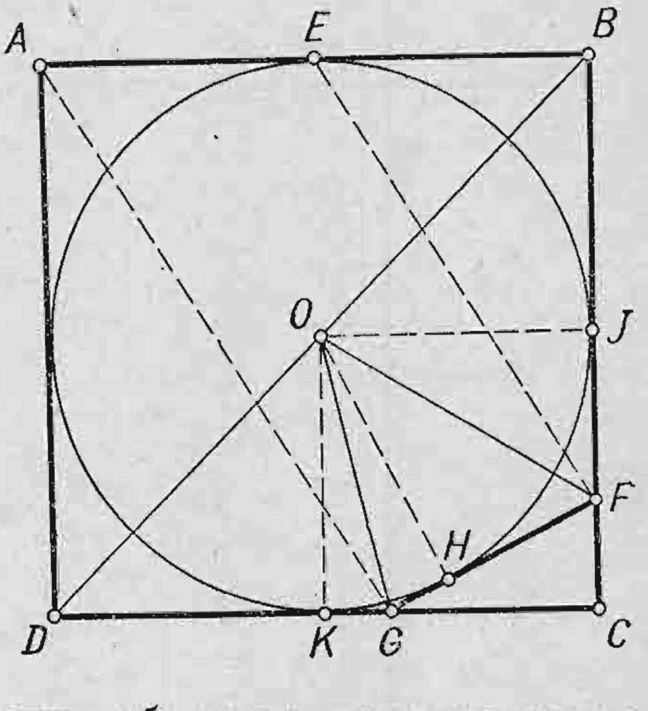


Рис. 173.

J, K — точки касания; обозначения совпадают с обозначениями, введенными в первом решении.)

Мы утверждаем, что из всех точек O, лежащих на биссектрисе прямого угла прямоугольного треугольника CFG, угол $FOG=45^\circ$ лишь для центра вневписанной окружности. Действительно, если точку O перемещать по любой из биссектрис от точки их пересечения к отрезку FG или от него, то угол FOG, под которым этот отрезок виден из точки O, будет либо возрастать, либо убывать.

Следовательно, достаточно доказать, что равенство (2) выполняется для центра квадрата, то есть что

$$\angle FOG = \angle GDO. \qquad (3)$$

Первый из углов дополняет до 180° сумму углов GOD, FOB, второй — сумму углов GOD, OGD, поэтому равенство (3) будет выполняться, если мы докажем, что

$$\angle FOB = \angle OGD. \qquad (4)$$

Прежде всего заметим, что, поскольку $AG \parallel EF$, треугольники ADG и FBE подобны, а потому $DG : 2a = a : BF$, где $2a$ — длина стороны квадрата, и, следовательно, $DG \cdot BF = 2a^2$, а поскольку $DO = BO = a\sqrt{2}$, то $DG : DO = BO : BF$. Из последнего равенства отношений заключаем, что треугольники GDO и OBF подобны, поскольку у этих треугольников $\angle GDO = \angle OBF = 45°$. Из подобия этих треугольников следует равенство соответственных углов, то есть равенство (4).

Третье решение. Если точка F известна, то условие $AG \parallel EF$ однозначно определяет точку G. Если из точки F провести вторую касательную (первая совпадает со стороной квадрата, проходящей через точку F) к вписанной в квадрат окружности, то она пересекается со стороной квадрата CD в точке, также однозначно определенной точкой F. Задача 180 утверждает, что обе точки, однозначно определяемые заданием точки F, совпадают. Докажем поэтому, что если отрезок FG касается вписанной в квадрат окружности, то $AG \parallel EF$.

Вместе с окружностью, вписанной в квадрат, рассмотрим вневписанную окружность треугольника CFG, касающуюся стороны CF и продолжения двух других сторон (рис. 174). Пусть R — точка касания этой окружности с продолжением стороны CG (и, следовательно, стороны квадрата CD). Точку F можно рассматривать как внутренний центр подобия двух окружностей, поскольку она совпадает с точкой пересечения внутренних касательных к этим окружностям. Отсюда следует, что окружности расположены по разные стороны от общих внутренних касательных и в силу подобия точки E и R касания этих окружностей с параллельными прямыми

AB и DC расположены на одной прямой с точкой F по разные стороны от нее.

Итак, требуется доказать, что $AG \parallel EF$ (а значит, и ER), то есть, что четырехугольник $AERG$ — параллелограмм. Для этого достаточно доказать, что $GR = AE$. Но это равенство следует из того, что, во-первых, $AE = KC$, где K — середина стороны CD, и, во-вторых, $CR = KG$, поскольку точки касания вневписанных

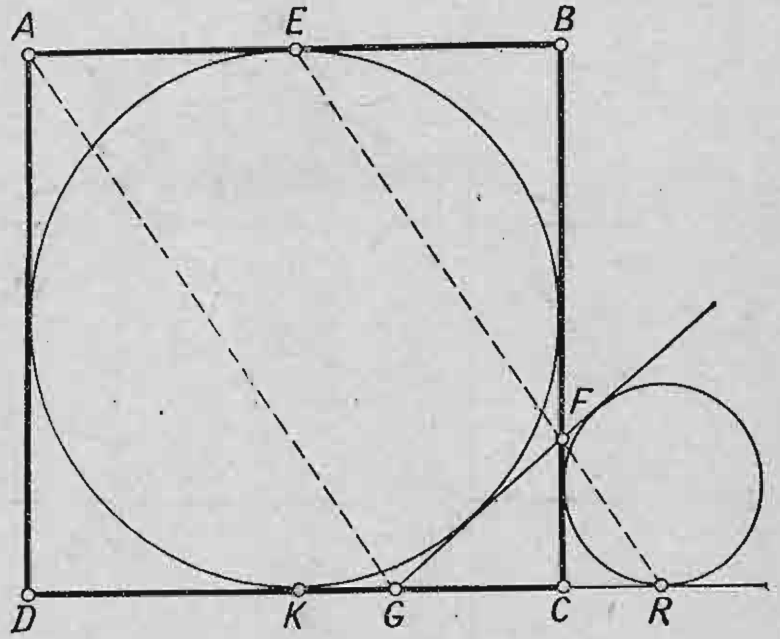


Рис. 174.

окружностей с продолжениями стороны треугольника за обе вершины расположены симметрично относительно середины этой стороны.

Сделаем несколько замечаний по поводу задачи 180 и приведенных выше ее решений:

1. Утверждение, доказанное в третьем решении, останется в силе, если говорить о точках, принадлежащих не сторонам квадрата BC, CD, а о прямых BC, CD и не об отрезке FG, а о прямой FG, касающейся вписанной в квадрат окружности. Доказательство нового утверждения лишь незначительно отличается от доказательства, приведенного в третьем решении, и мы предоставляем его читателям.

2. Утверждение задачи останется в силе, если рассматривать не квадрат, а ромб и считать E не серединой стороны AB, а точкой касания стороны AB и вписанной в ромб окружности. Третье решение непосредственно переносится и на этот случай.

Утверждение задачи останется в силе, если заменить не только квадрат ромбом, а середину E стороны AB —

точкой касания этой стороны со вписанной в ромб окружностью, но и отрезки BC, CD и FG — прямыми, на которых они лежат. Доказательство этого утверждения также лишь незначительно отличается от третьего решения, и мы предоставляем его читателю.

181. Первое решение. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 — четыре заданные точки плоскости. Выберем за единицу

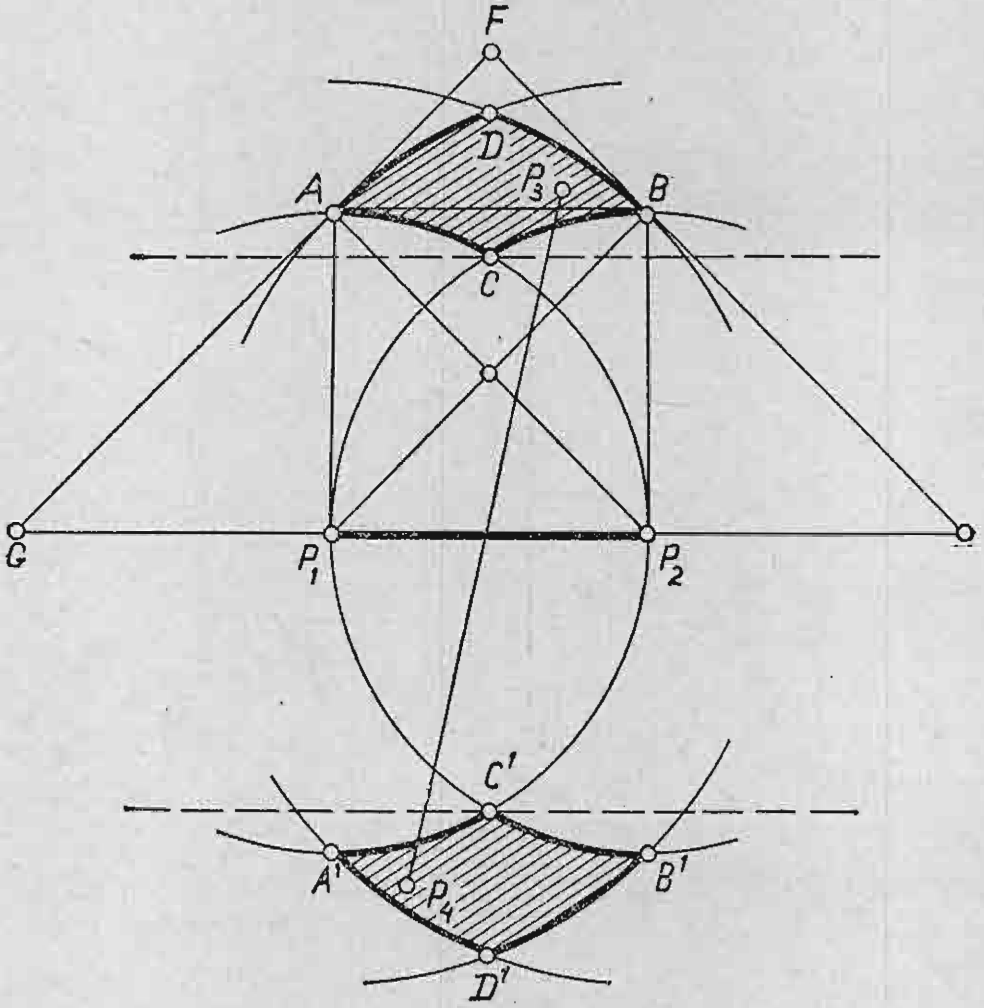


Рис. 175.

длины наименьший из отрезков, определяемых этими точками. Требуется доказать, что из 6 отрезков найдется по крайней мере один, длина которого не меньше $\sqrt{2}$.

Пусть P_1P_2 — наименьший из отрезков, определяемых четырьмя заданными точками, то есть отрезок единичной длины. Проведем две окружности единичного радиуса с центрами в точках P_1 и P_2 (рис. 175). Ни одна из точек P_3, P_4 не может лежать внутри любой из этих окружностей, поскольку в противном случае отрезок P_1P_2 не был бы наименьшим из отрезков, определяемых точками P_1, P_2, P_3, P_4. Проведем теперь две окружности радиусом $\sqrt{2}$ с центрами в точках P_1 и P_2. Эти окружности проходят через вершины A и B квадрата P_1P_2BA: окружность с центром в точке P_2 — через вершину A, окружность с центром в точке P_1 — через вершину B. Если какая-нибудь из точек P_3, P_4 не лежит внутри окружностей радиусом $\sqrt{2}$ с центрами в точках P_1, P_2, то расстояние между ней и центрами окружностей не меньше $\sqrt{2}$.

Таким образом, необходимо рассмотреть лишь случай, когда точки P_3 и P_4 лежат внутри каждой из окружностей радиусом $\sqrt{2}$, но вне (или на границе) окружностей единичного радиуса с центрами в точках P_1, P_2. Это означает, что точки P_3 и P_4 принадлежат криволинейным многоугольникам $ADBC$ и $A'D'B'C'$, из которых удалены точки, образующие дуги AD, BD и $A'D'$, $D'B'$.

Из рис. 175 видно, что криволинейный четырехугольник $ACBD$ лежит в квадрате с диагональю AB и что из всех вершин четырехугольника периметру квадрата принадлежат лишь вершины A и B (ниже мы докажем это строго). Отсюда (в силу симметрии криволинейных четырехугольников $ACBD$ и $A'C'B'D'$) следует, что расстояние между любыми двумя точками криволинейного четырехугольника не больше 1, поскольку любой отрезок, находящийся в квадрате, не больше диагонали квадрата (быть может, последнее утверждение станет еще яснее, если учесть, что диаметр окружности, описанной вокруг квадрата, равен диагонали квадрата, а любой отрезок, находящийся внутри окружности, короче ее диаметра).

Итак, достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда точка P_3 принадлежит одному криволинейному четырехугольнику, а точка P_4 — другому. Проведем через точки C и C' прямые, параллельные отрезку P_1P_2. Эти прямые ограничивают полосу, разделяющую криволинейные четырехугольники $ACBD$ и $A'C'B'D'$. Ширина полосы больше $\sqrt{2}$, поскольку угол между единичными отрезками CP_1 и P_1C' равен $120°$, то есть больше $90°$. Отрезок P_3P_4 пересекает полосу. Следовательно, его длина не меньше ширины полосы, то есть не меньше $\sqrt{2}$, что и требовалось доказать.

Выше мы, ссылаясь на рис. 175, воспользовались тем, что криволинейный четырехугольник $ACBD$ заключен в квадрат с диагональю AB, причем периметру квадрата принадлежат лишь вершины A и B криволинейного четырехугольника. Докажем теперь это утверждение более строго.

Вершины A и B четырехугольника, ограниченного дугами окружностей, заведомо принадлежат периметру квадрата. Достаточно поэтому показать, что другие точки криволинейного четырехугольника $ACBD$ не принадлежат периметру квадрата. Отрезки AF и BF не содержат других точек четырехугольника, кроме его вершин A и B, поскольку эти отрезки расположены на касательных к дугам граничных окружностей, проведенных в точках A и B. Отсюда следует, что криволинейный четырехугольник $ACBD$ лежит в треугольнике FGH. Дуга AP_2 окружности единичного радиуса с центром в точке P_1 пересекает периметр треугольника FGH дважды (в точке A и в точке P_2) и отделяет криволинейный четырехугольник $ACBD$ от хорды AP_2. Общими точками четырехугольника $ACBD$ и хорды AP_2 могут быть лишь концы хорды. Следовательно, за исключением точки A, ни одна другая точка отрезка AE не принадлежит криволинейному четырехугольнику $ACBD$. Аналогичные рассуждения применимы и к отрезку BP_1 (ни одна точка которого, кроме точки B, не принадлежит четырехугольнику $ACBD$).

Второе решение. Отношение гипотенузы к меньшему (точнее: к не большему) из катетов не меньше $\sqrt{2}$. Действительно, если $a \leqslant b$, то $c^2 = a^2 + b^2 \geqslant 2a^2$, откуда $c/a \geqslant \sqrt{2}$.

Если две стороны треугольника остаются неизменными, а угол, заключенный между ними, возрастает, то третья сторона также увеличивается (см. III.38), поэтому в тупоугольном и даже в вырожденном (состоящем из примыкающих друг к другу отрезков) треугольнике отношение наибольшей из сторон к наименьшей больше или равно $\sqrt{2}$.

Итак, достаточно доказать, что из любых четырех точек плоскости всегда можно выбрать три такие, которые совпадают с вершинами прямоугольного, тупоугольного или вырожденного треугольника. Выберем на плоскости любые четыре точки. Не ограничивая общности, предположим, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Рассмотрим выпуклую оболочку четырех выбранных точек, то есть многоугольник, граница которого совпадает с нитью, натянутой на воткнутые в точки булавки. Поскольку никакие три из четырех точек не лежат на одной прямой, их выпуклая оболочка имеет вид либо треугольника, либо четырехугольника.

Если выпуклая оболочка имеет форму треугольника $P_1P_2P_3$ (рис. 176), то точка P_4 лежит внутри треугольника, поскольку никакие три точки не лежат на одной

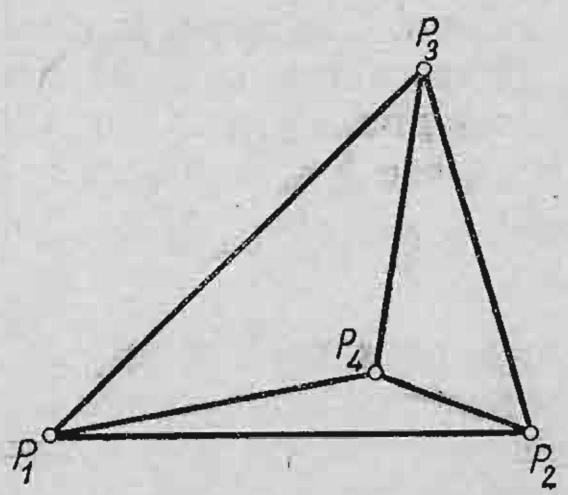


Рис. 176.

прямой. Отрезки P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3 разбивают треугольник $P_1P_2P_3$ на три малых треугольника. Сумма углов этих треугольников при вершине P_4 равна 360°. Следовательно, один из треугольников тупоугольный (более того, среди малых треугольников имеются по крайней мере два тупоугольных треугольника).

Если выпуклая оболочка имеет форму четырехугольника, то заведомо можно утверждать, что не все его внутренние углы острые, поскольку их сумма равна 360°. Следовательно, наибольший из углов — прямой или тупой, а образующие его стороны служат сторонами прямоугольного или тупоугольного треугольников.

182. Первое решение. Начнем с того, что если $0 < a < 1$, то

$$a(1-a) \leqslant \frac{1}{4},$$

поскольку, перенеся все члены в одну сторону, мы получим очевидное неравенство $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Аналогичные неравенства справедливы и для чисел b и c. Отсюда следует, что произведение чисел $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ удовлетворяет неравенству

$$[(1-a)b][(1-b)c][(1-c)a] = \\ = a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Каждый из сомножителей в квадратных скобках не может быть больше $^1/_4$, поскольку в противном случае произведение было бы больше $(^1/_4)^3$.

Второе решение. Тройка произведений $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ не изменится, если числа a, b, c подвергнуть циклической перестановке (то есть вместо чисел a, b, c взять числа c, a, b). Не ограничивая общности, можно предположить, что a — наибольшее из трех чисел, то есть, что $b \leqslant a$. Тогда

$$(1-a)b \leqslant (1-a)a \leqslant \frac{1}{4}.$$

При переходе к последнему неравенству мы использовали неравенство, доказанное в предыдущем решении.

Оба решения позволяют доказать следующее обобщение утверждения задачи: *если* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *положительные числа, меньшие* 1, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — *некоторая перестановка этих чисел, то все числа* $(1-a_1)b_1$, $(1-a_2)b_2$, $\ldots$, $(1-a_n)b_n$ *не могут быть больше* $^1/_4$.

183. Первое решение. Пусть C — точка пересечения внешней (A_1A_2) и внутренней (B_1B_2) касательных к окружностям с центрами в точках O_1 и O_2 (рис. 177). Четырехугольники $O_1A_1CB_1$ и $CA_2O_2B_2$ (называемые иногда *дельтоидами*) с прямыми углами при вершинах A_1, B_1 и A_2, B_2 подобны, поскольку углы при вершинах C в сумме составляют 180°, и поэтому непрямые углы четырехугольников попарно равны. Диагонали CO_1 и CO_2 четырехугольников взаимно перпендикулярны, поскольку служат биссектрисами углов при вершинах C, составляющих в сумме 180°. Поскольку диагональ A_1B_1 перпендикулярна диагонали CO_1, а диагональ A_2B_2 — диагонали CO_2 (как диагонали дельтоида), то $A_1B_1 \parallel CO_2$, $A_2B_2 \parallel CO_1$.

Пусть P_1 и P_2 — точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 с линией центров O_1O_2. Докажем, что эти две точки совпадают, то есть точка пересечения прямых

A_1B_1 и A_2B_2 лежит на линии центров O_1O_2. Рис. 177 умышленно сделан неправильно, чтобы легче было следить за рассуждениями. Об этом не следует забывать в дальнейшем.

Из подобия четырехугольников $O_1A_1CB_1$ и $CA_2O_2B_2$ следует что отношения, в которых точки D_1 и D_2 пере-

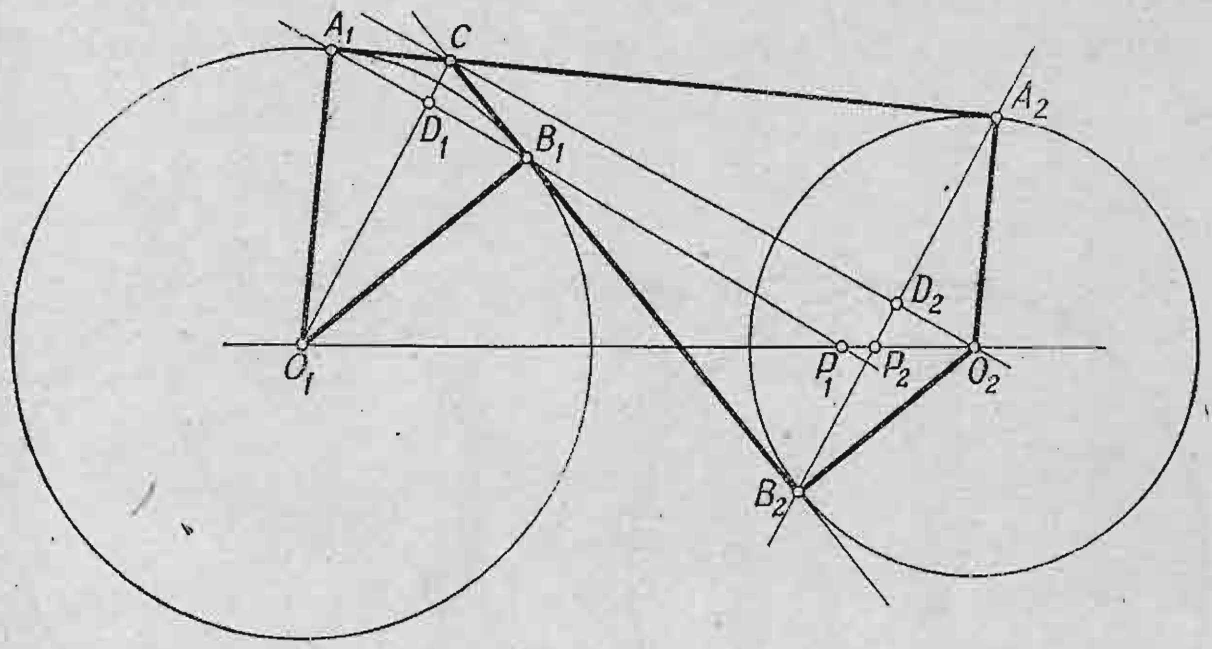


Рис. 177.

сечения диагоналей делят диагонали O_1C и O_2C, равны, то есть

$$O_1D_1 : O_1C = CD_2 : CO_2.$$

По теореме о секущих, пересекаемых параллельными прямыми, параллельные диагонали A_1B_1, CO_2 делят стороны угла CO_1O_2 так, что

$$O_1D_1 : O_1C = O_1P_1 : O_1O_2,$$

а параллельные диагонали A_2B_2 и CO_1 — стороны угла CO_2O_1 так, что

$$CD_2 : CO_2 = O_1P_2 : O_1O_2.$$

Сравнивая полученные отношения, получаем

$$O_1P_1 : O_1O_2 = O_1P_2 : O_1O_2,$$

то есть $O_1P_1 = O_1P_2$. Таким образом, точки P_1 и P_2 совпадают.

В т о р о е р е ш е н и е. Помимо двух касательных к окружностям, о которых говорится в условиях задачи, проведем еще одну внутреннюю касательную $B_1'B_2'$.

Пусть D — точка ее пересечения с внешней касательной A_1A_2, а M — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на линию центров O_1O_2 (рис. 178). Докажем, что точка M принадлежит каждой из прямых A_1B_1, A_2B_2 (тем самым утверждение задачи будет доказано).

Окружность диаметра O_2D проходит через точки A_2, B_2', M, поскольку отрезок O_2D виден из этих точек под прямым углом. Так как $DA_2 = DB_2'$, то $\angle A_2O_2D = \angle DO_2B_2'$

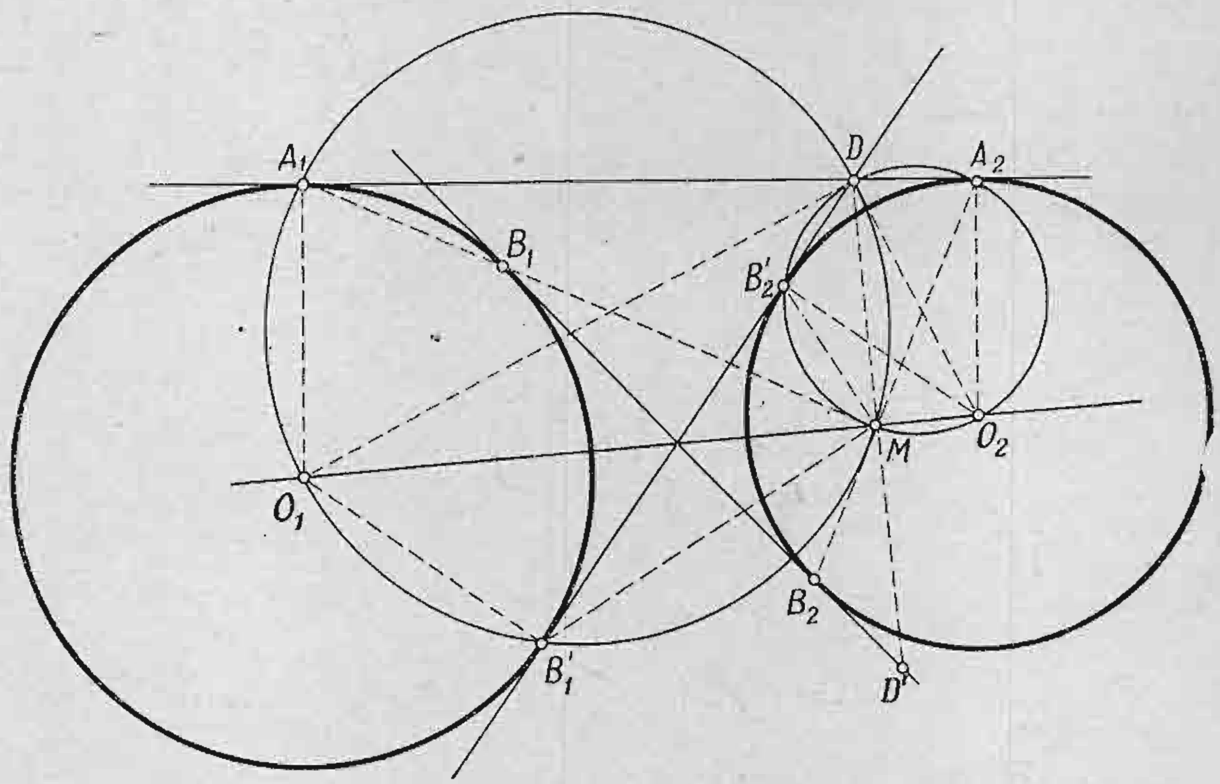


Рис. 178.

Но тогда $\angle A_2MD = \angle DMB_2'$ ($\angle A_2O_2D = \angle A_2MD$ и $\angle DO_2B_2' = \angle DMB_2'$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), откуда в силу симметрии следует, что $\angle A_2MD = \angle D'MB_2$, то есть точки A_2, M, B_2 лежат на одной прямой.

Аналогичные рассуждения применимы и ко второму случаю. Окружность диаметра O_1D проходит через точки A_1, B_1', M, поскольку отрезок O_1D виден из точек A_1, B_1', M под прямым углом. Поскольку $\angle A_1DO_1 = \angle O_1DB_1'$, то $\angle A_1MO_1 = \angle O_1MB_1'$ (поскольку $\angle A_1DO_1 = \angle A_1MO_1$ и $\angle O_1DB_1' = \angle O_1MB_1'$ как вписанные углы, опирающиеся на одни и те же дуги). Отсюда в силу симметрии следует, что $\angle A_1MO_1 = \angle B_1MO_1$, то есть точки A_1, B_1, M расположены на одной прямой.

Третье решение. Воспользуемся следующим свойством радикальной оси двух окружностей: все точки, для которых отрезки касательных, проведенных к двум пересекающимся окружностям, равны, лежат на прямой, проходящей через точки пересечения окружностей (см. III.48).

Как и в первом решении, докажем прежде всего, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке M под прямым углом. Окружности диаметром A_1A_2 и B_1B_2 проходят через точку M, поскольку отрезки A_1A_2 и B_1B_2 видны из точки M под прямым углом (рис. 179).

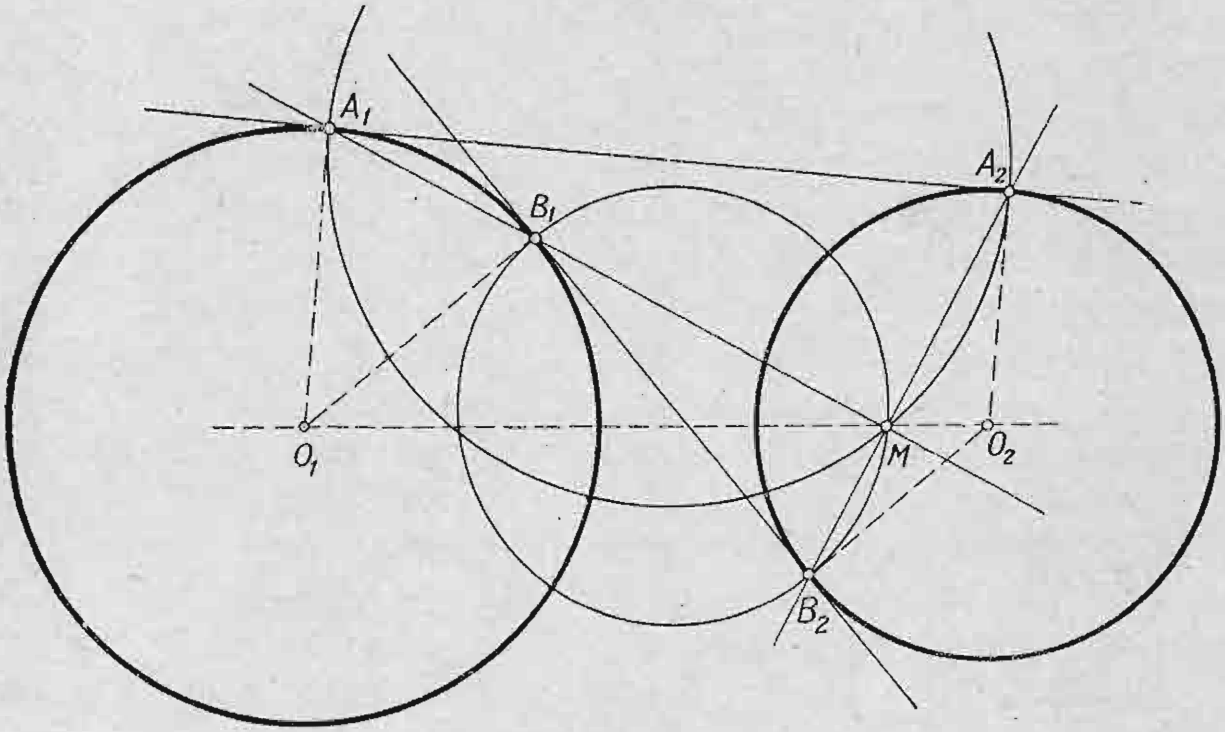


Рис. 179.

Касательные O_1A_1 и O_1B_1, проведенные к обеим окружностям из точки O_1, равны между собой (и равны радиусу окружности с центром в O_1) так же, как и касательные O_2A_2 и O_2B_2, проведенные из точки O_2, равны между собой. Из предыдущего следует, что точки O_1 и O_2 лежат на прямой (радикальной оси), которой принадлежит общая точка M окружностей диаметрами A_1A_2 и B_1B_2. Тем самым доказано, что точки O_1, O_2 и M лежат на одной прямой.

184. Первое решение. Разложим натуральное число n в произведение степеней простых чисел (см. III.7):

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s},$$

где p_1, p_2, ..., p_s — различные простые числа, а a_1, a_2, ..., a_s — положительные целые числа. Поскольку мы рассматриваем лишь такие пары натуральных чисел (u, v), для которых $[u, v]=n$ (символ $[u, v]$ означает наименьшее общее кратное чисел u и v; см. III. 22), то разложение чисел u и v в произведения степеней простых чисел могут содержать лишь простые числа p_1, $p_2, \ldots, p_s$.

Определим, в какой степени входит любое из этих простых чисел, например p_1, в числа u и v. Поскольку p_1 входит в разложение числа $[u, v]=n$ в степени a_1, то в разложение каждого из чисел p_1 входит в степени, которая не больше a_1. Все мыслимые случаи распределения степеней простого числа p_1 между числами u и v допускают разбиение на 3 группы: 1) в разложения чисел u и v простое число p_1 входит в степени a_1 (1 возможный случай); 2) в разложение числа u простое число p_1 входит в степени a_1, а в разложение числа v — в меньшей степени, то есть в одной из степеней 0, 1, 2, ..., a_1-1 (a_1 возможных случаев); 3) в разложение числа v простое число p_1 входит в степени a_1, а в разложение числа u — в меньшей степени (снова a_1 возможных случаев). Таким образом, всего возможно $2a_1+1$ различных вариантов распределения степеней простого числа p_1 между разложениями чисел u и v.

Аналогичные рассуждения применимы и к остальным простым числам, входящим в разложения натуральных чисел u и v. Поскольку, фиксировав любое из возможных распределений степеней одного простого числа, мы можем комбинировать его с любым допустимым распределением степеней любого другого простого числа, то общее число возможных распределений степеней простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ между разложениями чисел u и v равно

$$(2a_1+1)(2a_2+1) \ldots (2a_s+1).$$

Итак, нам осталось доказать, что n^2 имеет столько же делителей. Воспользуемся тем, что разложение числа n^2 в произведение степеней простых чисел имеет вид

$$n^2=p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \ldots p_s^{2a_s}.$$

Следовательно, делители числа n^2 могут содержать простое число p_1 в степени 0, 1, 2, ..., $2a_1$ (см. III. 21), то есть простое p_1 может входить в различные делители числа n^2 всего $2a_1+1$ способами. Поскольку каждое простое число $p_1, p_2, \ldots, p_s$ можно выбирать независимо от другого, то общее число делителей числа n^2 равно

$$(2a_1+1)(2a_2+1)\ldots(2a_s+1),$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Утверждение задачи будет доказано, если мы убедимся в том, что между упорядоченными парами u, v, наименьшее общее кратное которых равно n, и делителями числа n^2 существует взаимно однозначное соответствие.

Сопоставим каждой паре чисел u, v число d, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{u}{v}=\frac{d}{n}. \qquad (1)$$

Число d целое, поскольку его можно представить в виде $d=u\cdot\frac{n}{v}$, а $n=[u,v]$ делится на v. Более того, число d является делителем числа n^2, поскольку частное от деления n^2 на d равно целому числу $\frac{n}{u}\cdot v$.

Воспользуемся тем, что если $u_1:v_1=u_2:v_2$, то

$$u_1:u_2=v_1:v_2=[u_1,v_1]:[u_2,v_2]. \qquad (2)$$

Действительно, для того чтобы найти наименьшее общее кратное двух заданных чисел, необходимо найти два как можно меньших числа, обладающих тем свойством, что, умножив одно из них на одно заданное число, а другое — на другое заданное число, мы получим одно и то же произведение. Следовательно, в силу самого выбора этих чисел они зависят лишь от отношения двух заданных чисел. Таким образом, если мы перейдем от одной пары чисел u_1, v_1 к другой паре чисел u_2, v_2 с тем же отношением $(u_1:v_1=u_2:v_2)$, то наименьшее общее кратное изменится пропорционально. Именно это мы и утверждали, написав соотношение (2).

Поскольку $[u,v]=n$, то из соотношений (1) и (2) получаем ряд равных отношений

$$u:d=v:n=n:[d,n]. \qquad (3)$$

Таким образом, зная число d, числа u и v можно найти из соотношений

$$u=\frac{dn}{[d,n]},\quad v=\frac{n^2}{[d,n]}. \qquad (4)$$

Таким образом, каждому делителю d числа n^2 соответствует не более одной пары чисел u, v.

Но и наоборот, если d — делитель числа n^2, то числа u и v, определяемые соотношениями (4), целые, поскольку и dn, и n^2 — общие кратные чисел d, n и поэтому делятся на наименьшее общее кратное этих чисел $[d, n]$. Таким образом, выбрав любой делитель d числа n^2, мы получим из соотношений (4) целые числа u и v, которые удовлетворяют и соотношениям (3), что может быть лишь в том случае, если $[u, v] = n$. Итак, каждому делителю числа n^2 соответствует одна и только одна упорядоченная пара чисел u, v, что и требовалось доказать.

185. Первое решение. Выберем d диагоналей выпуклого n-угольника так, чтобы любые две из них имели общую точку (рис. 180). Условимся называть соседними (или просто соседями) две вершины n-угольника, если они соединены одной из d выбранных нами

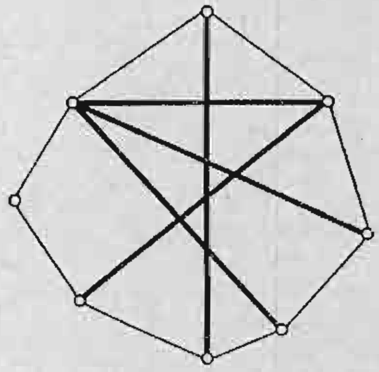


Рис. 180.

диагоналей. Назовем вершину n-угольника вершиной степени i, если у нее имеется i соседей. Пусть a_i — число вершин степени i. Тогда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \leqslant n,$$

поскольку сумма, стоящая в левой части, была бы равна n, если в нее включить еще одно слагаемое — число a_0 вершин, не имеющих ни одного соседа, то есть вершин n-угольника, из которых не выходит ни одна из d выбранных диагоналей.

Если степень какой-нибудь вершины равна $i > 2$, то среди выходящих из нее выбранных диагоналей имеются две «крайние», между которыми заключены одна или несколько «внутренних» выбранных диагоналей. Противоположные концы внутренних диагоналей не могут соединяться с какой-либо еще вершиной одной из выбранных диагоналей, поскольку такая диагональ не имела бы общих точек с одной из граничных диагоналей. Следовательно, при $i > 2$ каждая вершина степени i имеет не меньше $i-2$ соседей степени 1. Разумеется, у вершин степени 1 может быть не более одного соседа более высокой степени. Поэтому число a_1 вершин степени 1 удовлетворяет неравенству

$$a_1 \geqslant a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \ldots$$

(у вершин степени 3 не менее одного соседа степени 1, а у вершин степени 4 — не менее двух таких соседей и так далее).

Всего у d выбранных диагоналей имеется $2d$ концов. Эти концы расположены в вершинах n-угольника, и каждая вершина степени i соединена выбранными диагоналями с i соседями. Следовательно,

$$2d = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots .$$

Преобразуя это равенство и используя неравенство для a_1, получаем

$$\begin{aligned} 2d = (a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \ldots) + \\ + (a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \ldots) \leqslant (a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \ldots) + \\ + a_1 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \leqslant 2n. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что $d \leqslant n$.

По поводу приведенного решения заметим следующее.

А. Из всех свойств диагоналей в нем использовано лишь то, что диагональ представляет собой отрезок прямой, соединяющий вершины, поэтому решение не изменится и останется в силе, если рассматривать не только диагонали, но и стороны n-угольника, то есть доказывать следующее утверждение: *среди отрезков прямых, соединяющих вершины выпуклого n-угольника, нельзя выбрать больше чем n отрезков так, чтобы любые два из них имели общую точку.*

Б. Выпуклость n-угольника мы использовали лишь в том месте решения, где речь шла о противоположных концах «внутренних» диагоналей, исходящих из вершины степени $i > 2$, имеющих степень 1. Нигде более выпуклость n-угольника не используется.

Можно доказать следующее утверждение: *если никакие три из n заданных на плоскости точек не лежат на одной прямой, то среди попарно соединяющих их отрезков можно выбрать не более n таких, что любые два из них будут иметь общие точки.*

Условие, согласно которому никакие три из n точек не лежат на одной прямой, необходимо. Если отказаться от этого условия, то утверждение перестает быть верным, например, для точек A, B, C, D, расположенных на одной прямой друг за другом: ему противоречат отрезки AB, AC, AD, BC и BD.

Второе решение. Если среди вершин n-угольника имеются вершины степени 1 (из которых выходит

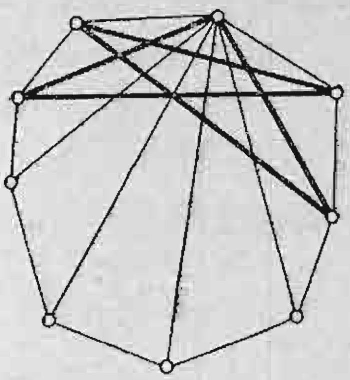


Рис. 181.

лишь один выбранный отрезок), то исключим выходящий из них отрезок (рис. 181). Предположим, что сначала число выбранных отрезков было равно d, а число выбранных вершин, совпадающих с концами выбранных отрезков, было равно $m \leqslant n$. После исключения одного отрезка осталось лишь $d_1 = d - 1$ выбранных отрезков, а число выбранных вершин уменьшилось на 1, то есть стало равным числу $m_1 \leqslant n - 1$.

Если среди вершин n-угольника остались вершины степени 1, то, стерев еще один отрезок, выходящий из такой вершины, получим $d_2 = d - 2$ выбранных отрезков и $m_2 \leqslant n - 2$ выбранных вершин. Продолжим стирание отрезков, выходящих из вершин степени 1, до тех пор, пока это возможно. После того как будет стерт последний отрезок, останется $d_k = d - k$ выбранных отрезков и всего $m_k \leqslant n - k$ различных вершин, совпадающих с их концами.

В нашем n-угольнике не останется не только вершин степени 1, но и вершин, степень которых больше 2, поскольку, если из вершины выходят по крайней мере 3 выбранных отрезка, то, как показано в предыдущем решении, «внутренние» отрезки, заключенные между двумя крайними, соединяют эту вершину с вершинами степени 1 и, следовательно, были стерты нами. Итак, в n-угольнике остались лишь вершины степени 2. Это означает, что $2d_k$ концов оставшихся отрезков соединены последовательно друг с другом d_k отрезками, то есть $m_k = d_k$.

Полученный результат (равенство $m_k = d_k$) верен и в том случае, если после стирания отрезков, выходящих из вершин степени 1, не остается ни одного выбранного отрезка, поскольку это означает, что $d_k = 0$ и $m_k = 0$.

Из равенства $d_k = m_k$, учитывая выведенные выше неравенства, получаем $d - k \leqslant n - k$, то есть $d \leqslant n$, что и требовалось доказать.

Третье решение. Безразлично, для какого именно выпуклого n-угольника мы будем проводить рассуждения, пытаясь выбрать наибольшее число диагоналей, попарно имеющих общие точки, поскольку существование общей точки двух диагоналей зависит от того, как расположены их концы на периметре n-угольника: разделяют ли концы одной диагонали вершины, совпадающие с концами другой, и нет ли среди концов диагоналей совпадающих.

Разобьем диагонали правильного n-угольника на группы так, чтобы диагонали, принадлежащие к одной и той же группе, были параллельны. Утверждение задачи будет доказано, если мы убедимся в том, что число групп не превышает n, поскольку тогда нельзя будет выбрать более чем n диагоналей, принадлежащих различным группам, а диагонали, принадлежащие одной и той же группе, параллельны и не имеют попарно общих точек.

Итак, докажем, что число групп не превышает n. Действительно, выберем любую диагональ и из середины ее восставим перпендикуляр. В зависимости от того, какое число вершин — нечетное или четное — расположено внутри отрезков, на которые концы выбранной диагонали разбивают периметр n-угольника, перпендикуляр пройдет либо через какую-то вершину, либо через середину одной из сторон n-угольника (рис. 182). Поскольку n-угольник имеет n вершин и n середин сторон и, кроме того, каждый перпендикуляр из этих $2n$

точек «выбирает» лишь «свою» пару, то различных перпендикуляров может быть лишь n, а поскольку все диагонали, принадлежащие к одной группе, перпендикулярны к одной и той же прямой, то число групп не может быть больше n.

По поводу этого решения необходимо заметить следующее.

Мы доказали утверждение задачи, согласно которому нельзя выбрать больше чем n диагоналей выпуклого n-угольника так, чтобы любые две из них имели

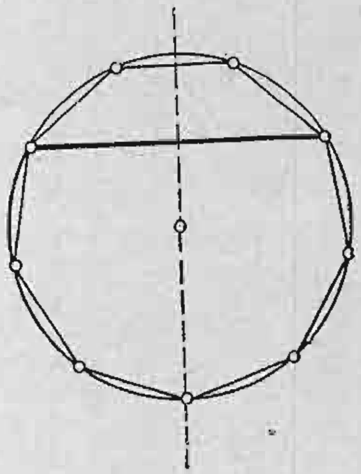


Рис. 182.

общую точку. Возникает вопрос, можно ли выбрать ровно n таких диагоналей.

Ясно, что если $n = 3$ или $n = 4$, то выбрать ровно n диагоналей нельзя, поскольку в треугольнике вообще нельзя провести ни одной диагонали, а в квадрате существуют лишь две диагонали. Если же $n \geqslant 5$, всегда можно выбрать n диагоналей, имеющих попарно общие точки, если воспользоваться способом, сущность которого нетрудно понять из рис. 182. Тем же способом можно воспользоваться и в том случае, если выбирать разрешается не только диагонали, но и стороны n-угольника. Разумеется, при этом уже отпадает необходимость исключать из рассмотрения треугольники и квадраты.

В общем случае невозможно выбрать n отрезков, имеющих попарно общие точки, если концы их совпадают с n произвольными точками плоскости, не образующими вершины выпуклого n-угольника, хотя $n-1$ таких отрезков мы получим, соединив отрезками прямых одну из точек со всеми остальными. Увеличить число отрезков нам не удастся, например, если три точки лежат в вершинах треугольника ABC, а остальные $n-3>0$ — на дуге BC, проходящей внутри треугольника (рис. 183). Доказать это можно следующим образом.

Из точки A можно провести лишь $n-1$ отрезков. Из отрезков, попарно соединяющих $n-1$ точек, которые расположены на дуге BC, нужным образом можно выбрать не более $n-1$ отрезков, поскольку эти точки образуют вершины выпуклого $(n-1)$-угольника. Если мы выберем отрезок, выходящий из точки A, и любой из отрезков, попарно соединяющих точки на дуге BC, то их общей точкой может быть лишь другой конец отрезка, выходящего из точки A. Следовательно, если из

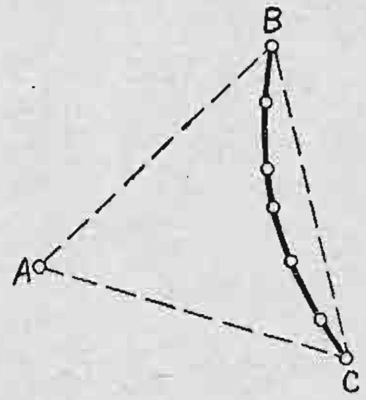


Рис. 183.

точки A выходит лишь один из выбранных отрезков, то его другой конец должен принадлежать всем остальным выбранным отрезкам и мы получим всего $n-1$ выбранных отрезков. Если же мы выберем два отрезка, выходящих из точки A и какую-нибудь хорду дуги BC, то хорда и эти два отрезка с необходимостью должны образовать треугольник и больше нельзя будет выбрать ни одного отрезка, не нарушив при этом условия задачи.

186. Первое решение. Не ограничивая общности, предположим, что точка P не принадлежит ребрам пирамиды DA, DB и DC, поскольку, если бы точка P принадлежала бы, например, ребру DA и не совпадала с вершиной D, то $PA<DA$ и утверждение задачи было бы выполнено.

Достаточно доказать, что для любой точки P один из треугольников APD, BPD, CPD имеет при вершине P либо прямой, либо тупой угол. Действительно, если таковым является, например, треугольник APD, то DA — наибольшая из его сторон и, следовательно, $PA<DA$ (рис. 184).

Проведем через точку P плоскость, перпендикулярную отрезку PD, и луч, образующий с отрезком PD острый угол. Луч лежит в том же полупространстве (относительно проведенной плоскости, что и вершина D). Следовательно, если бы у всех треугольников APB, BPD, CPD угол при вершине P был острым, то все вершины пирамиды (а значит, и сама пирамида) $ABCD$ были бы расположены внутри того же полупространства, хотя по построению точка P принадлежит границе

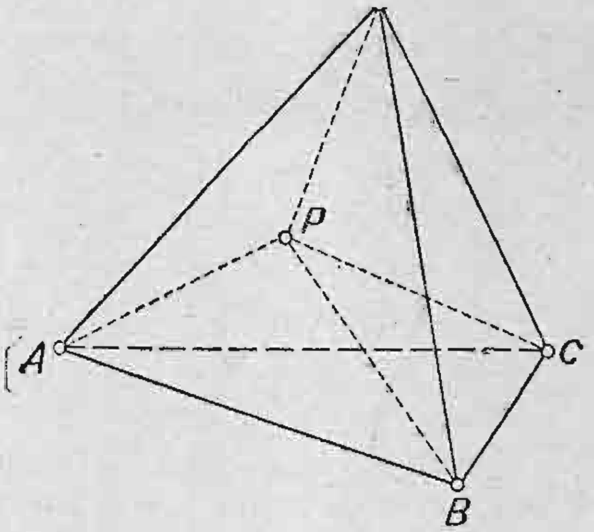


Рис. 184.

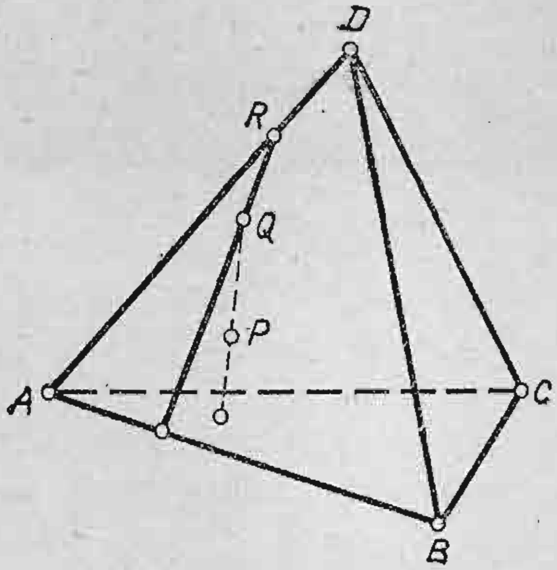


Рис. 185.

полупространства. Полученное противоречие доказывает, что у одного из треугольников APD, BPD, CPD угол при вершине P не должен быть острым.

Второе решение. Опустим из точки P перпендикуляр на плоскость ABC (рис. 185). Пусть Q — точка пирамиды $ABCD$, лежащая на этом перпендикуляре и наиболее удаленная от плоскости ABC. Ясно, что точка P принадлежит одной из граней ABD, ACD, BCD. Предположим для определенности, что P принадлежит грани ABD. В плоскости ABD проведем через точку Q прямую, перпендикулярную ребру AB. Пусть R — точка этого перпендикуляра, наиболее удаленная от ребра AB, но еще принадлежащая треугольнику ABD. Точка R принадлежит одному из ребер, AD или BD. Пусть, например, точка R принадлежит ребру AD.

Если точка, двигаясь по перпендикуляру к плоскости или прямой, удаляется от них, то расстояния между этой точкой и любой точкой плоскости или прямой возрастают. Следовательно,

$$PA \leqslant QA \leqslant RA \leqslant DA.$$

Каждое из неравенств в отдельности может переходить в строгое равенство, поскольку допустимы попарные совпадения точек $P \equiv Q$, $Q \equiv R$, $R \equiv D$. Однако все неравенства не могут переходить в строгие равенства одновременно, поскольку по условиям задачи точка P не совпадает с вершиной D. Следовательно, по крайней мере одно неравенство сохранится даже в том случае, когда все остальные заменятся равенствами, и поэтому $PA < DA$.

Третье решение. Плоскость, перпендикулярная отрезку PD и проходящая через его середину, делит пирамиду $ABCD$ на две части, поскольку точки P и D расположены по разные стороны от нее. Отсюда следует, что внутри каждого из двух полупространств, на которые эта плоскость разделяет все пространство, лежит вершина пирамиды. (В противном случае, если бы в одном из полупространств не оказалось бы ни одной вершины пирамиды, то все вершины и вместе с ними сама пирамида оказались бы внутри другого полупространства. Но тогда проведенная плоскость не могла бы делить пирамиду на две части.) Пусть, например, вершина A принадлежит тому же полупространству, что и точка P. Тогда $PA < DA$, поскольку A — как внутренняя точка полупространства, содержащего точку P, — расположена к P ближе, чем к любой внутренней точке другого полупространства.

По поводу задачи 186 и трех приведенных выше решений можно сделать несколько замечаний:

А. Все три решения доказывают не только утверждение задачи, но и нечто большее: один из отрезков PA, PB, PC меньше того из отрезков DA, DB, DC, который имеет с ним общий конец.

Б. Второе решение без изменения переносится на более общий случай, когда пирамида имеет не три, а любое число боковых граней и таким образом позволяет доказать следующее утверждение: *любая точка пирамиды, не совпадающая с ее вершиной S (либо внутренняя, либо принадлежащая боковым граням), расположена ближе к одной из вершин, лежащих в основании пирамиды, чем к вершине S.*

В. Относительно третьего решения можно высказать более сильное утверждение. Это решение без каких бы то ни было изменений переносится на тот случай, когда вместо пирамиды взят произвольный многогранник. Тем самым оно позволяет доказать следующую теорему: *любая точка многогранника, не совпадающая с вершиной D, расположена к одной из вершин многогранника, отличных от D, ближе, чем эта последняя к D*. Эту теорему нетрудно также доказать, если воспользоваться рассуждениями, приведенными в первом решении.

Г. Пусть $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3$ — длины ребер трехгранной пирамиды, не лежащих в ее основании, а $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \leqslant p_3$ — длины отрезков, соединяющих произвольную (но не совпадающую с вершиной, не лежащей в основании) точку пирамиды с вершинами, лежащими в основании пирамиды. Индексы выбраны лишь так, что в каждой серии при переходе от меньшего значения индекса к большему длины отрезков не убывают. Совпадение индексов отнюдь не означает, что соответствующие отрезки имеют общий конец.

Пусть заданы шесть отрезков длиной d_1, d_2, d_3, p_1, p_2, p_3. Можно ли найти такую трехгранную пирамиду и такую точку в ней, что длины ребер и отрезков, соединяющих выбранную точку с лежащими в основании пирамиды вершинами, будут совпадать с длинами заданных отрезков?

Задача 186 утверждает, что если такая пирамида и точка существует, то

$$p_1 < d_3.$$

Из второго решения нетрудно вывести еще одно необходимое условие — неравенство

$$p_1 + p_2 < d_2 + d_3$$

(поскольку $PA + PB \leqslant QA + QB \leqslant DA + DB$ и оба неравенства не могут одновременно переходить в равенство).

Следует заметить, что в отличие от предыдущих неравенств выполнение таких неравенств, как, например, $p_2 < d_3$ или $p_1 + p_2 + p_3 < d_1 + d_2 + d_3$, отнюдь не обязательно. (Подтверждающий пример изображен на рис. 186, где рядом с каждым отрезком указана его длина.) Это заставляет с осторожностью подходить к выбору необходимых условий.

Тем не менее дополнительные необходимые условия нужны, поскольку приведенных выше двух неравенств недостаточно для того, чтобы мы могли построить трехгранную пирамиду с ребрами d_1, d_2, d_3 и указать точку внутри нее или на ее боковых гранях, отстоящую от

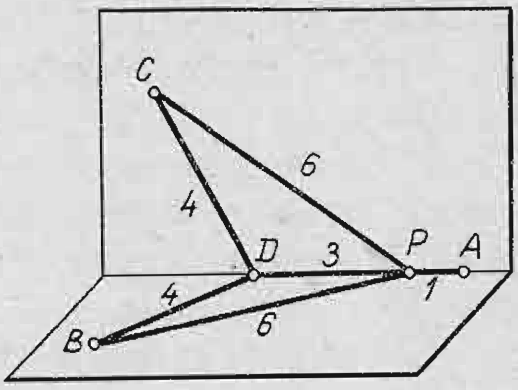


Рис. 186.

лежащих в основании пирамиды вершин на расстояниях p_1, p_2, p_3. Условия, которые были бы одновременно необходимыми и достаточными для этого, не известны.

187. Условимся обозначать одной и той же буквой и самого ученика, и его рост (то есть ученика ростом a обозначим a, ученика ростом b обозначим b и так далее). Рассмотрим ряд, в котором сидит ученик a (ряд a), и «колонну», в которой сидит ученик b (колонну b). Пусть c — ученик, сидящий в кресле, находящемся на пересечении ряда a с колонной b.

Следует иметь в виду, что ученики a, b и c не обязательно должны быть тремя различными ребятами. Действительно, если a и b сидят в одном ряду, то c и b — два обозначения одного и того же ученика. Если же a и b сидят в одной колонне, то c и a означают одного и того же ученика. Если же a и b — одно и то же лицо, то и c — то же самое лицо.

Поскольку a и c сидят в одном ряду и a — самый маленький по росту из учеников, сидящих в ряду, то a не может быть выше c, то есть $a \leqslant c$. Кроме того, $c \leqslant b$ (c и b сидят в одной колонне, и b — самый высокий из ребят, сидящих в этой колонне). Следовательно, $a \leqslant c \leqslant b$, то есть неравенство $a > b$ исключается. Покажем, что оба случая, $a = b$ и $a < b$, реализуются при соответствующей рассадке учеников.

Случай $a = b$ будет иметь место, например, если в каждой колонне самый высокий ученик сидит в последнем ряду. Тогда самый маленький из учеников, сидящих в последнем ряду, в одинаковой мере имеет право называться и a, и b, поскольку, с одной стороны, в последнем ряду нет ученика, который был бы меньшего роста (может быть, среди учеников и есть такой, но он сидит в другом ряду), а с другой стороны, в его колонне нет более высокого ученика (может быть, такой ученик есть в другой колонне), а потому самый маленький в каждом ряду, кроме последнего, подавно будет меньше. Пересаживая учеников во всех рядах, кроме последнего, мы, не нарушая равенства $a = b$, можем добиться, чтобы самые маленькие ученики в каждом ряду сидели не в той колонне, где сидит в последнем ряду a (он же b).

Случай $a < b$ мы будем иметь, если, например, ребята сидели сначала так же, как только что было сказано, а потом самый маленький из тех, кто сидел в последнем ряду (то есть b), поменялся местами с кем-нибудь из сидевших в одной колонне с ним. Пересевший вперед ученик b сохранит это «звание»: в колонне, где он сидит, нет ни одного ученика, который был бы выше (хотя такие ученики могут быть в других колоннах), а в остальных колоннах самые высокие ученики по-прежнему сидят в последнем ряду. С другой стороны, при выборе самого маленького школьника учитель выберет в каждом ряду, кроме последнего, тех же самых ребят, а в последнем ряду — ученика, занявшего место b. Каждый из этих ребят меньше b, а потому теперь и $a < b$.

Условие $p > 1$, $q > 1$ мы использовали в тех местах решения, где говорили о «других» школьниках, сидящих в одном ряду или в одной колонне с выбранным нами школьником. Это условие необходимо потому, что если бы в зале зрительные места располагались в один ряд или в одну колонну, то могло бы выполняться лишь равенство $a = b$.

188. Первое решение. Левую часть доказываемого тригонометрического неравенства можно представить в виде

$$1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2}{\sin 2\alpha}, \qquad (*)$$

так как $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Если α — острый угол, то все знаменатели положительны. Поскольку синус и косинус любого угла не могут быть больше 1, второе и третье слагаемые не меньше 1, а последнее слагаемое не меньше 2. Следовательно, вся сумма не меньше 5. Но выражение (*) не может быть и равным 5, поскольку два средних члена не могут быть равными одновременно (равенства $\sin\alpha=1$ и $\cos\alpha=1$ выполняются для различных углов). Следовательно, сумма (*) строго больше 5.

Второе решение. Построим прямоугольный треугольник единичной высоты, один из острых углов которого равен α (рис. 187). Пользуясь тригонометрическими функциями угла α, катеты и гипотенузы такого треугольника можно представить в следующем виде:

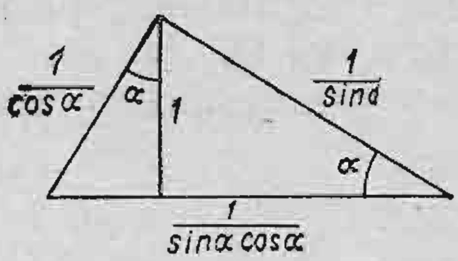


Рис. 187.

$$a=\frac{1}{\cos\alpha},\quad b=\frac{1}{\sin\alpha},\quad c=\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}.$$

Утверждение задачи мы получим из неравенства $a+b+c>4$. В свою очередь это неравенство следует из того, что $a+b>c$, а $c\geqslant 2$, поскольку высота прямоугольного треугольника не больше радиуса окружности, построенной на гипотенузе как на диаметре.

Третье решение. Докажем более сильное утверждение, а именно: если α — острый угол, то

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}=5{,}828\ \ldots,$$

причем равенство достигается при $\alpha=45°$. Учитывая первое решение, для этого достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geqslant 2\sqrt{2},$$

причем равенство достигается при $\alpha=45°$ (действительно, наименьшее значение четвертого слагаемого в выражении (*) достигается при $\alpha=45°$ и равно 2). Последнее неравенство можно доказать тремя способами:

а. В обозначениях второго решения доказываемое неравенство можно представить в виде $a+b \geqslant 2\sqrt{2}$. Оно следует из неравенства

$$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab = c^2 + 2ch_c \geqslant 8.$$

(При выводе последнего неравенства мы воспользовались теоремой Пифагора ($a^2+b^2=c^2$), тем, что площадь прямоугольного треугольника можно записать двояким образом $\left(\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c\right)$, равенством $h_c = 1$ и неравенством $c \geqslant 2$.) Равенство достигается лишь в том случае, если $c = 2h_c$, то есть если прямоугольный треугольник равнобедренный.

б. Повернув треугольник, расположенный на рис. 187 слева от высоты, на 90° по часовой стрелке вокруг вершины прямого угла исходного треугольника, мы получим

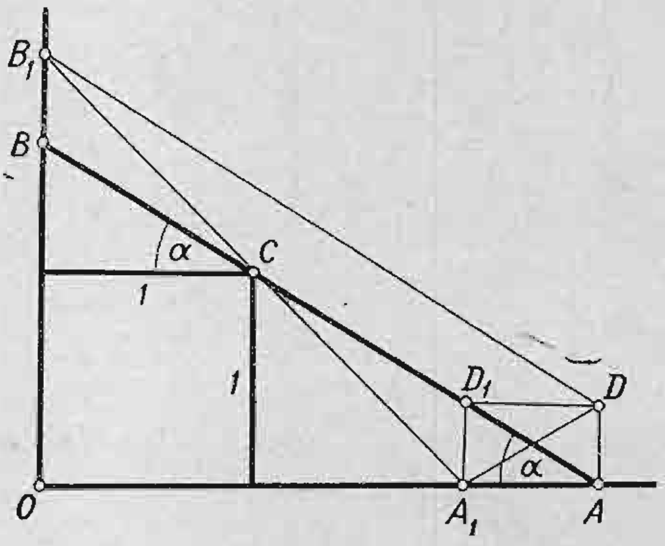


Рис. 188.

фигуру, изображенную на рис. 188. Если доказываемое утверждение верно, то длина отрезка AB больше длины проходящего под углом 45° отрезка A_1B_1, поскольку последняя равна $2\sqrt{2}$. Таким образом, необходимо доказать, что из всех отрезков, проходящих через точку C, концы которых лежат на сторонах прямого угла AOB, кратчайшим является симметричный относительно точки C отрезок A_1B_1.

Поскольку оба катета OA и OB прямоугольного треугольника AOB «равноправны», то, не ограничивая общности, можно предположить, что $\alpha < 45°$. Пусть D_1 — точка, симметричная точке B относительно точки C. В силу симметрии относительно точки C отрезки BB_1 и A_1D_1 параллельны и равны. Построив равный и парал-

...льный им отрезок AD, получим параллелограмм $BADB_1$ и прямоугольник A_1ADD_1.

Из прямоугольника A_1ADD_1 находим: $\angle AA_1D = \angle A_1AD = \alpha$. Следовательно, $\angle B_1A_1D = 135° - \alpha > 90°$. Таким образом, DB_1 — наибольшая сторона в треугольнике B_1A_1D, в силу чего $A_1B_1 < DB_1 = AB$.

в. Воспользуемся тем, что для любых положительных чисел x, y их среднее арифметическое $a(x, y)$, среднее геометрическое $g(x, y)$ и среднее квадратичное $q(x, y)$ связаны между собой неравенствами

$$g(x, y) \leqslant a(x, y) \leqslant q(x, y),$$

причем оба неравенства переходят в равенство лишь при $x = y$ (см. III. 55, б и г).

Полагая $x = \frac{1}{\sin\alpha}$, $y = \frac{1}{\cos\alpha}$, получаем

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = 2a\left(\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\cos\alpha}\right) \geqslant 2g\left(\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \\ = \frac{2}{g(\sin\alpha, \cos\alpha)} \geqslant \frac{2}{q(\sin\alpha, \cos\alpha)} = 2\sqrt{2}.$$

Равенство достигается лишь в том случае, если $\sin\alpha = \cos\alpha$, то есть при $\alpha = 45°$.

189. Если треугольник ABC не тупоугольный, то центр описанной окружности O находится либо внутри его,

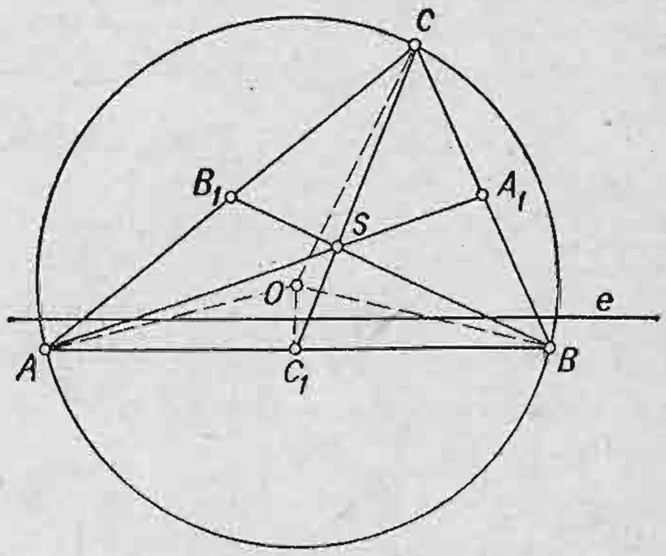


Рис. 189.

либо на его периметре и, следовательно, принадлежит по крайней мере одному из трех треугольников SAB, SBC, SCA (где S — центр тяжести треугольника ABC). Предположим для определенности, что центр описанной окружности O принадлежит треугольнику SAB (рис. 189).

Поскольку треугольник SAB содержит треугольник OAB, то

$$SA+SB \geqslant OA+OB,$$

причем равенство достигается лишь в том случае, если точки O и S совпадают. Следовательно, медианы $m_a = AA_1$ и $m_b = BB_1$ треугольника ABC и радиус R описанной окружности удовлетворяют неравенству

$$\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b \geqslant 2R,$$

или

$$m_a + m_b \geqslant 3R.$$

Если точка O совпадает с точкой C_1, то, очевидно, $CO = CC_1$. Если же центр описанной окружности O не совпадает с точкой C_1, то прямая e, проходящая через середину отрезка OC_1 перпендикулярно ему, пересекает треугольник ABC и отделяет параллельную ей сторону AB от вершины C. Точки C и O принадлежат одной и той же полуплоскости, ограниченной прямой e, поэтому точка C расположена ближе к точке O, чем к точке C_1, симметричной O относительно прямой e. Поскольку $CC_1 = m_c$, $CO = R$, то и

$$m_c \geqslant R,$$

причем равенство достигается лишь в том случае, если точки O и C_1 совпадают.

Складывая найденные неравенства, получаем

$$m_a + m_b + m_c \geqslant 4R.$$

В действительности равенство никогда не достигается, поскольку для этого оба неравенства-слагаемые должны были бы одновременно обращаться в равенство, что невозможно, поскольку центр описанной окружности O не может одновременно совпадать с каждой из двух различных точек S и C_1.

По поводу условий и утверждения задачи, а также ее решения заметим следующее:

1. Условие задачи, согласно которому треугольник не должен быть тупоугольным, нельзя отбросить. Стоит лишь одному из углов хотя бы немного превзойти 90°, как утверждение задачи перестает выполняться. Докажем это.

Начнем с произвольно заданного тупого $\angle ABC > 90°$. Пусть O_1 — точка пересечения перпендикуляров, восставленных из середины C_1 отрезка AB и точки B стороны BC (рис. 190). На стороне BC точку C выберем

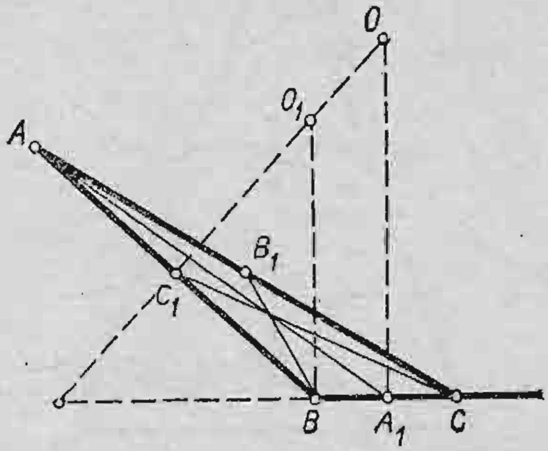


Рис. 190.

так, чтобы длина отрезка $BC = a$ удовлетворяла неравенству

$$a + c > 2 \cdot BO_1.$$

Если R — радиус описанной окружности треугольника ABC, то

$$R = BO > A_1O > BO_1,$$

поскольку BO_1 и A_1O — отрезки параллельных прямых, заключенных между сторонами одного и того же угла, причем отрезок BO_1 расположен ближе к вершине угла, чем отрезок A_1O (по предположению треугольник ABC тупоугольный).

Из неравенств треугольника

$$m_a < \frac{a}{2} + c, \quad m_b < \frac{a}{2} + \frac{c}{2}, \quad m_c < a + \frac{c}{2},$$

выписанных для треугольников ABA_1, BC_1B_1, CBC_1, на которые медианы разбивают треугольник ABC, находим

$$m_a + m_b + m_c < 2(a + c) < 4BO_1 < 4R.$$

2. Докажем, что неравенство $m_a + m_b + m_c \geqslant 4R$ перестает выполняться, если вместо коэффициента 4 выбрать любое большее число, сколь бы мало оно ни отличалось от 4.

Пусть $2d$ — длина основания, h — высота равнобедренного треугольника ACB (рис. 191). Из треугольника

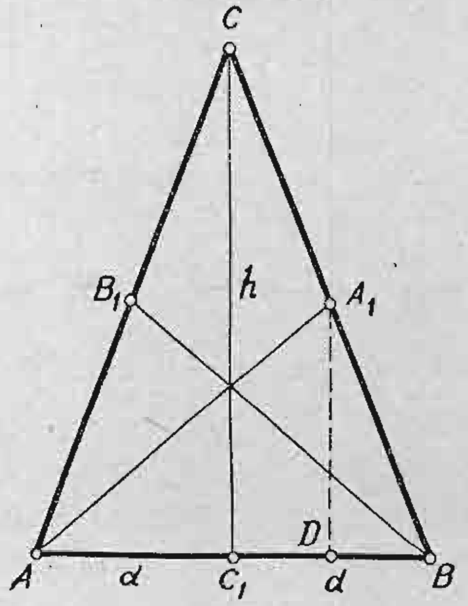


Рис. 191.

AA_1D (AA_1 — медиана треугольника ABC) находим

$$m_a = m_b < \frac{h}{2} + \frac{3}{2} d, \quad m_c = h,$$

$$m_a + m_b + m_c < 2h + 3d.$$

Радиус R описанной окружности треугольника ABC удовлетворяет неравенству

$$R > \frac{h}{2},$$

поскольку высота h меньше диаметра описанной окружности. Таким образом,

$$m_a + m_b + m_c < \left(4 + 6\frac{d}{h}\right) R.$$

Пусть λ — произвольное положительное число больше 4. Фиксируем высоту h и выберем d так, чтобы

$$4 + 6\frac{d}{h} < \lambda.$$

Подставляя это неравенство в правую часть полученного выше неравенства для суммы медиан треугольника ABC, получаем

$$m_a + m_b + m_c < \lambda R.$$

3. В задаче 189 речь шла о том, что сумма медиан не меньше радиуса описанной окружности, умноженного на 4. Докажем теперь, что сумма медиан треугольника не больше радиуса описанной окружности, умноженного на

4,5, причем без каких бы то ни было предположений относительно формы треугольника. В случае равностороннего треугольника неравенство переходит в строгое равенство: сумма его медиан в точности равна радиусу описанной окружности, умноженному на 4,5. Удивительнее всего, что для нетупоугольных треугольников сумма медиан заключена в довольно узких пределах:

$$4R \leqslant m_a + m_b + m_c \leqslant 4{,}5R.$$

Пусть P — произвольная точка, лежащая в плоскости треугольника ABC. Рассмотрим длины отрезков, соединяющих точку P с вершинами треугольника ABC. Обозначим $a(P)$ их среднее арифметическое, а $q(P)$ их среднее квадратичное. Известно, что $a(P) \leqslant q(P)$ (см. III.55, г).

Нам понадобится неравенство $q(P) \geqslant q(S)$. Если в вершинах треугольника ABC поместить единичные массы, то величина $3\,[q(P)]^2$ будет равна моменту инерции, создаваемому этой системой материальных точек, относительно оси, проходящей через точку P перпендикулярно плоскости треугольника ABC. Неравенство $q(P) \geqslant q(S)$ следует из того, что для параллельной оси, проходящей через центр тяжести S треугольника, момент инерции наименьший.

Неравенство $q(P) \geqslant q(S)$ можно доказать и без ссылок на его физический смысл.

Введем векторы (см. III.51)

$$\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{SB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{SC} = \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{SP} = \mathbf{p}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Выразим через векторы величины $q(S)$ и $q(P)$:

$$3\,[q(S)]^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2,$$

$$\begin{aligned} 3\,[q(P)]^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{p})^2 = \\ &= (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - 2\mathbf{p}\,(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + 3\mathbf{p}^2 = \\ &= 3\,[q(S)]^2 + 3\mathbf{p}^2 \geqslant 3\,[q(S)]^2. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства $q(P) \geqslant q(S)$ находим требуемое неравенство

$$m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}\,a(S) \leqslant \frac{9}{2}\,q(S) \leqslant \frac{9}{2}\,q(O) = \frac{9}{2}\,R.$$

4. Не вдаваясь в подробности, упомянем о том, что сумма медиан тетраэдра не больше радиуса описанной сферы, умноженного на $^{16}/_{3}$. Это утверждение доказывается тем же способом, которым мы только что доказали соответствующее утверждение для случая плоскости.

При рассмотрении плоской задачи мы выяснили, что сумма медиан не меньше учетверенного радиуса описанной окружности лишь для нетупоугольных треугольников. Во сколько раз сумма медиан тетраэдра, соответствующего нетупоугольному треугольнику, может превосходить радиус описанной сферы?

Нетупоугольный треугольник содержит (внутри или на периметре) центр описанной окружности. Следовательно, пространственным аналогом надлежит считать тетраэдр, содержащий (внутри или на поверхности) центр описанной сферы. Не приводя доказательства, упомянем о том, что сумма медиан такого тетраэдра больше учетверенного радиуса описанной окружности и что утверждение перестает быть верным, если вместо 4 взять любое большее число, сколь бы мало оно ни отличалось от 4.

190. Первое решение. Если конгруэнтные пирамиды $ABCD$ и $ABCE$ (рис. 192) склеены основаниями, имеющими вид равностороннего треугольника ABC, то

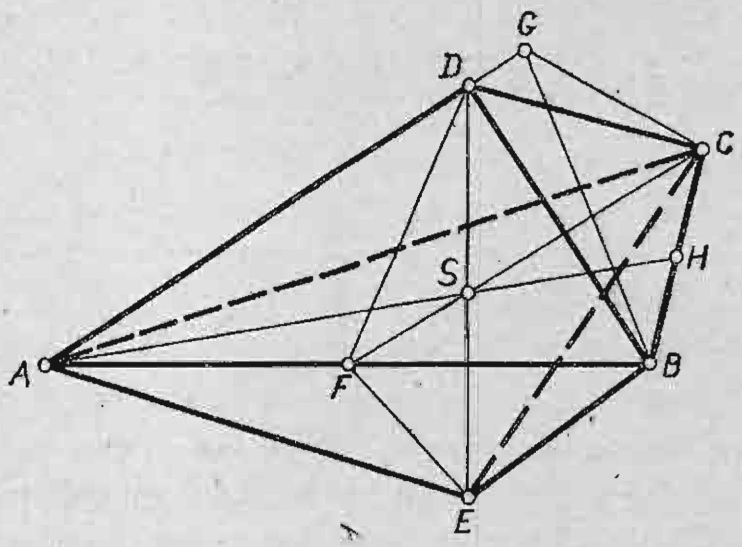


Рис. 192.

вершины D и E получившегося шестигранника лежат на прямой, перпендикулярной плоскости треугольника ABC и проходящей через его центр тяжести S. Таким образом, полученный шестигранник симметричен не только относительно плоскости ABC, но и относительно плоскости ADE. Из симметрии следует, что перпендикуляры, опущенные из вершин D, E на ребро AB, равны так же, как и перпендикуляры, опущенные из вершин B, C на ребро AD. Пусть F — общее основание двух первых, а G — двух последних перпендикуляров. Тогда $\angle DFE$ — линейный угол двугранного угла, образованного гранями ADB и ABE (с ребром AB), а $\angle BGC$ — линейный угол двугранного угла, образованного гранями ADB и ACD (с ребром AD). Поскольку по условиям задачи эти углы равны, то треугольники DFE и BGC подобны как равнобедренные треугольники, имеющие равные углы при вершинах.

Пользуясь тем, что в подобных треугольниках отношения сходственных сторон равны, получаем

$$DE : BC = DF : BG.$$

Отрезки, стоящие в правой части, служат высотами, опущенными из вершин D и B треугольника ABD на стороны AB и AD, поэтому их отношение равно обратному отношению этих сторон, то есть

$$DF : BG = AD : AB.$$

Поскольку $BC = AB$, то из равенства отношений следует, что $DE = AD$, то есть, что треугольник ADE, как и ABC, равносторонний. Отношение их сторон равно отношению их высот:

$$DE : BC = AS : AH.$$

Поскольку центр тяжести S треугольника ABC делит медиану AH в отношении $2:1$, то $AS : AH = 2:3$. Следовательно, искомое отношение DE к BC также равно $^2/_3$.

В приведенном выше решении мы допустили, что тело, удовлетворяющее условиям задачи, то есть шестигранник с равными двугранными углами, существует. Покажем теперь, что это действительно так. Выберем отношение $DE : BC$ равным $^2/_3$ (значению, полученному в решении), то есть рассмотрим шестигранник, который получится, если из центра тяжести S равностороннего треугольника ABC восставить прямую, перпендикулярную плоскости треугольника, и отложить на ней отрезки SD и SE, равные $^1/_3$ любой из сторон треугольника ABC. В существовании шестигранника, все двугранные углы которого равны, мы убедимся, повторяя в обратном порядке весь использованный ранее ход рассуждений.

По построению шестигранника $DABCE$

$$DE : BC = AS : AH.$$

Следовательно, треугольники ADE и ABC подобны, а поскольку треугольник ABC равносторонний, то подобный ему треугольник ADE также равносторонний и $AD = DE$. Но тогда правая, а следовательно и левая, часть равенства

$$DF : BG = AD : AB$$

равна $^2/_3$, и то же можно сказать о правой и левой частях равенства

$$DE : BC = DF : BG.$$

Отсюда мы заключаем, что равнобедренные треугольники DFE и BGC подобны, а поскольку их соответственные углы равны, то все двугранные углы построенного шестигранника также равны.

Один из простейших способов построения шестигранника, все двугранные углы которого равны, состоит в следующем. Нужно взять равносторонний треугольник ADE, повернуть его на $120°$ вокруг стороны DE сначала в одну, а затем в другую сторону, и рассмотреть тело, натянутое на все три треугольника. Правильность построения ясна из предыдущего.

Второе решение. Воспользуемся обозначениями, приведенными на рис. 192. Прежде всего заметим, что шестигранник $DABCE$ симметричен относительно плоскостей ABC и ADE. Следовательно, эти плоскости делят пополам двугранные углы с ребрами AB и AD, а поскольку по условиям задачи все двугранные углы равны, то каждая из плоскостей симметрии ABC и ADE образует один и тот же угол с плоскостью ABD.

Через биссектрису угла BAD проведем плоскость, перпендикулярную грани BAD. При отражении в этой плоскости стороны AB и AD угла BAD переходят друг в друга, а поскольку равенство двугранных углов с ребрами AB и AD сохраняется, то плоскость ABC переходит в плоскость ADE, и наоборот. Следовательно, прямая AS как линия их пересечения остается на месте, и симметричные углы BAS и DAS равны. Если отрезок DE повернуть на $90°$ вокруг оси AS, то точка D попадет на ребро AB, а точка E — на ребро AC. Таким образом, диагональ DE шестигранника $DABCE$ равна отрезку B_1SC_1 секущей треугольника ABC, перпендикулярной AS (рис. 193). Поскольку S — центр тяжести треугольника ABC, то длина отрезка AS составляет $^2/_3$ расстояния от вершины A до середины стороны BC. Следовательно, искомое отношение

$$DE : BC = B_1C_1 : BC = {}^2/_3.$$

Третье решение. Рассмотрим четырехгранный угол при вершине A тела, получившегося при склеивании двух треугольных пирамид $DABC$ и $EABC$. Он образован четырьмя равными плоскими углами, которые,

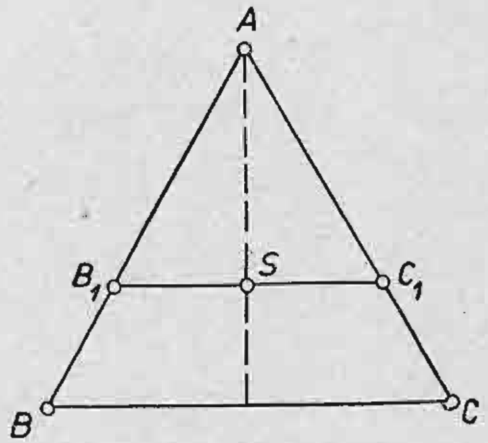


Рис. 193.

примыкая один к другому, образуют (по условию задачи) равные двугранные углы. Следовательно, четырехгранный угол при вершине A шестигранника $DABCE$ — правильный, то есть такой, как пространственный угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, переходящей в себя при повороте вокруг вертикальной оси на 90°.

Следовательно, если диагональ DE шестигранника повернуть на 90° вокруг оси AS четырехгранного угла при вершине A, то DE совпадает с отрезком B_1C_1, рассмотренным в предыдущем решении. Таким образом, искомое соотношение $DE : BC$ оказывается равным $^2/_3$.

191. Первое решение. Разобьем всех юношей на группы в зависимости от того, со сколькими девушками успел протанцевать каждый из них на выпускном балу (все юноши, входящие в одну группу, танцевали с одним и тем же числом партнерш). Пусть[1] F_1 — один из тех

[1] Fiú — мальчик, парень; léany — девушка (*венг.*).

юношей, который протанцевал с наибольшим числом девушек. Поскольку F_1 танцевал не со всеми девушками, то найдется по крайней мере одна девушка L_1, с которой F_1 не танцевал. Но поскольку с каждой девушкой танцевал по крайней мере один юноша, то заведомо найдется юноша F_2, танцевавший с L_1.

Юноша F_1 выбран так, что число девушек, с которыми не танцевал F_2, не меньше числа девушек, с которыми танцевал F_1. Отсюда следует, что F_2 танцевал не со всеми девушками, с которыми танцевал F_1: в противном случае, число партнерш у F_2 было бы больше, чем у F_1, поскольку F_2 танцевал с L_1, а F_1 не танцевал с ней. Итак, существует девушка L_2, с которой F_1 танцевал, а F_2 не танцевал.

Юноши F_1, F_2 и девушки L_1, L_2 образуют четверку участников бала, удовлетворяющих всем условиям задачи, поскольку F_1, L_1, так же как и F_2, L_2, не танцевали друг с другом, хотя F_1 танцевал с L_2, а F_2 — с L_1.

В приведенном решении использована лишь та часть условий задачи, в которой говорится о том, что ни один юноша не танцевал со всеми девушками и с каждой девушкой танцевал по крайней мере один юноша. Отсюда тотчас же следует другое решение, использующее ту часть условий, где говорится о том, что ни одна девушка не танцевала со всеми юношами и с каждым юношей танцевала по крайней мере одна девушка, поскольку юноши и девушки входят в условия задачи симметрично (они «взаимозаменяемы»). Таким образом, каждое из таких решений использует лишь половину условий задачи.

Хотя решения, полностью использующие условия задачи, отнюдь не проще и не короче приведенного выше, мы все же приведем три таких решения, поскольку они позволяют показать обобщения задачи 191 и ее связь с другими задачами. Об одном из таких обобщений рассказано в III. 74.

В т о р о е р е ш е н и е. Выберем среди участников выпускного бала какого-нибудь юношу F_1 и девушку L_1, с которой F_1 не танцевал. Пусть F_2 — юноша, танцевавший с L_1, а L_2 — девушка, с которой F_2 не танцевал. Условимся и далее поступать аналогичным образом: выбрав юношу F_i ($i = 2, 3, \ldots$), искать девушку L_i, с которой он не танцевал, а затем — юношу F_{i+1}, танцевавшего с L_i. Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не дойдем до юноши, на которого наш выбор уже пал раньше. Поскольку число участников выпускного бала конечно, такой момент рано или поздно непременно наступит.

Итак, из числа присутствовавших на балу всегда можно выбрать k юношей и k девушек и выстроить их по кругу так, чтобы каждый юноша оказался в окружении двух девушек: с соседкой слева он танцевал на балу, а с соседкой справа не танцевал. Осталось еще доказать, что такой кружок можно выстроить всего лишь из двух юношей и двух девушек.

Предположим, что k юношей и k девушек выстроены в круг в следующем порядке:

$$F_1,\ L_1,\ F_2,\ L_2,\ \ldots,\ F_k,\ L_k$$

(поскольку при такой записи круг «разорван», следует иметь в виду, что L_k находится слева от F_1, то есть F_1 танцевал с L_1 на балу). Покажем, что если $k > 2$, то такой круг можно выстроить из меньшего числа юношей и девушек.

Действительно, если F_1 танцевал с L_2, то достаточно взять

$$F_1,\ L_1,\ F_2,\ L_2.$$

Если же F_1 не танцевал с L_2, то цепочка

$$F_1,\ L_2,\ \ldots,\ F_k,\ L_k$$

удовлетворяет требуемому условию. Таким образом, число выстроенных по кругу юношей и девушек всегда можно уменьшать до тех пор, пока в круге не останутся двое юношей и две девушки*.

Третье решение. Предположим, что среди присутствовавших на выпускном балу юношей и девушек нельзя выбрать четверку, удовлетворяющую условиям задачи. Покажем, что такое предположение приводит к противоречию, а именно к тому, что число участников выпускного бала становится неограниченно большим. Правильность утверждения задачи будет следовать из полученного противоречия.

Пусть L_1 — одна из девушек, F_1 — танцевавший с ней юноша, L_2 — девушка, с которой не танцевал F_1, и F_2 — юноша, танцевавший с L_2. Относительно F_2 можно утверждать, что он танцевал с L_1, ибо в противном случае четверка L_1, F_1, L_2, F_2 вопреки предположению обладала бы всеми требуемыми свойствами. Итак, среди двух отобранных юношей и девушек лишь L_2 и F_1 не танцевали друг с другом.

Предположим, что мы уже отобрали среди участников выпускного бала группу

$$L_1,\ F_1,\ L_2,\ F_2,\ \ldots,\ L_k,\ F_k,$$

в которой юноша F_i и девушка L_j танцевали друг с другом (или нет), если $j \leqslant i$ (или $j > i$). При $k = 2$ существование такой группы уже было доказано. Убедимся теперь в том, что к группе отобранных участников бала всегда можно присоединить еще одну пару L_{k+1}, F_{k+1} так, чтобы расширенная группа обладала свойствами исходной группы. Поскольку такой процесс можно повторить неограниченно, то отсюда и следует, что число участников бала бесконечно.

Поскольку F_k танцевал с каждой из девушек $L_1, \ldots, L_k$, то существует по крайней мере еще одна девушка L_{k+1}, с которой он не танцевал. Девушка L_{k+1} не танцевала ни с одним из юношей $F_1, \ldots, F_{k-1}$, ибо, если предположить, что она танцевала, например, с юношей F_i, то четверка L_k, F_k, L_{k+1}, F_i вопреки предположению обладала бы всеми необходимыми свойствами. Поскольку L_{k+1} не танцевала ни с одним из юношей $F_1, \ldots, F_k$, то среди участников бала найдется по крайней мере один юноша F_{k+1}, танцевавший с L_{k+1}. Нетрудно видеть, что F_{k+1} танцевал с $L_1, \ldots, L_k$: если бы он не танцевал, например, с L_i, то четверка L_i, F_i, L_{k+1}, F_{k+1} вопреки предположению обладала бы требуемыми свойствами.

Итак, мы построили расширенную последовательность

$$L_1,\ F_1,\ L_2,\ F_2,\ \ldots,\ L_k,\ F_k,\ L_{k+1},\ F_{k+1},$$

обладающую тем свойством, что любой из юношей F_i и любая девушка L_j $(1 \leqslant i \leqslant k+1,\ 1 \leqslant j \leqslant k+1)$ не танцевали друг с другом, если $j > i$, и танцевали, если $j \leqslant i$.

Полученное противоречие доказывает правильность утверждения задачи.

Из приведенного решения следует, что утверждение задачи перестает быть верным, если множество участников бала бесконечно (точнее говоря, если бесконечны множества юношей и девушек в отдельности).

Четвертое решение. Из условий задачи известно, что для каждого юноши можно указать девушку, с которой он не танцевал. Возможно, что для любых двух юношей найдется девушка, с которой ни один из них не танцевал. Не исключено также, что для любых трех и даже большего числа юношей можно указать девушку, с которой ни один из них не танцевал. Во всяком случае существует наибольшее число k, такое, что для любых k юношей можно найти девушку, с которой ни один из них не танцевал. Поскольку с каждой девушкой танцевал по крайней мере один юноша, то k заведомо меньше числа юношей, присутствовавших на выпускном балу.

Поскольку число $k+1$ уже не обладает указанным свойством числа k, то можно выбрать $k+1$ юношей

$$F_1, F_2, \ldots, F_{k+1},$$

с которыми танцевали все девушки (каждая девушка танцевала с какими-то из $F_1, F_2, \ldots, F_{k+1}$, но, разумеется, не со всеми). Если какого-нибудь одного юношу, например F_1, исключить, то для оставшихся k юношей (по определению числа k) найдется такая девушка L_1, с которой ни один из них не танцевал. Следовательно, из отобранных $k+1$ юношей с L_1 танцевал лишь F_1. Исключая по порядку $F_2, F_3, \ldots, F_{k+1}$ и проводя аналогичные рассуждения, мы получим упорядоченный набор девушек

$$L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}.$$

Каждая из них танцевала лишь с одним из выбранных нами $k+1$ юношей, а именно с юношей, имеющим тот же индекс, что и у нее самой.

Поскольку $k \geqslant 1$, то всегда можно выбрать юношей F_1, F_2 и девушек L_1, L_2, для которых это утверждение верно, что и требовалось доказать.

Решение задачи можно было бы несколько сократить, ограничившись лишь самым необходимым: доказательством существования L_1 и L_2. Приведенное выше решение по существу служит доказательством более общего утверждения: если на выпускном балу каждая девушка танцевала по крайней мере с одним юношей и для любых $k-1$ (но не больше) из юношей найдется девушка, с которой не танцевал ни один из них, то среди участников бала можно выбрать k юношей и k девушек так, что каждый из юношей танцевал с одной и только одной из этих девушек.

192. Докажем, что выражение, стоящее под кубическим корнем справа, не больше куба выражения, стоящего слева. Воспользуемся известным соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел (произведение двух чисел не может быть больше квадрата их среднего арифметического). Применяя это соотношение дважды, получаем

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}=\frac{1}{2}\left[ab\frac{c+d}{2}+cd\frac{a+b}{2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{c+d}{2}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\frac{a+b}{2}\right]=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\times$$

$$\times\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\frac{a+b+c+d}{4}=$$

$$=\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.$$

Осталось еще проверить, что

$$\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

Это неравенство мы докажем, вычислив разность квадратов правой и левой сторон (см. также III. 55, г):

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{16}[3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)]=$$

$$=\frac{1}{16}[(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+$$

$$+(c-d)^2]\geqslant 0.$$

Итак, задача решена.

В условиях задачи говорится о том, что a, b, c, d — положительные числа, в приведенном выше решении это условие в явном виде не используется. Может показаться, что оно вообще излишне. В действительности же именно положительность чисел a, b, c, d позволила нам воспользоваться соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим: без предположения о положительности чисел утверждение о том, что произведение двух чисел не больше квадрата их среднего арифметического, перестает быть верным.

193. Поскольку в правой и в левой частях неравенства стоят целые числа, то оно выполняется в том и только в том случае, если левая часть по крайней мере на 1 меньше левой, то есть если

$$a^2+b^2+c^2+4\leqslant ab+3b+2c.$$

Последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0.$$

Отсюда видно, что оно выполняется лишь в том случае, если каждый из квадратов в левой части равен 0 (в противном случае сумма квадратов была бы положительна). Следовательно,

$$a-\frac{b}{2}=0,\quad \frac{b}{2}-1=0,\quad c-1=0.$$

Таким образом, исходное неравенство возможно лишь при единственном наборе значений:

$$a=1,\quad b=2,\quad c=1.$$

194. Из 8 выбранных точек по крайней мере 7 не совпадают с центром круга. Каждая из этих 7 точек определяет радиус круга. Если не все радиусы различны, то какие-то две точки, не совпадающие с центром круга, лежат на одном и том же радиусе. Следовательно, расстояние между ними меньше радиуса круга.

Предположим, что все 7 точек, не совпадающих с центром круга, лежат на 7 различных радиусах. Эти радиусы образуют по крайней мере 7 центральных углов, поэтому среди них заведомо найдутся два таких радиуса, что заключенный между ними угол меньше $^1/_6$ полного угла, то есть меньше 60°. Обозначим A и B те две из 8 заданных точек, которые определяют радиусы, служащие сторонами угла меньше 60° (рис. 194).

Поскольку $\angle AOB<60°$, то в треугольнике AOB есть больший угол. Но во всяком треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона. Следовательно, в треугольнике AOB есть сторона, которая больше стороны AB. Таким образом, сторона AB меньше какой-то из сторон AO, OB, а поскольку длина наибольшей из них не превышает радиуса круга, то AB меньше радиуса круга.

Итак, среди 8 выбранных точек всегда найдутся две такие, что расстояние между ними меньше радиуса круга.

Второе решение. Впишем в граничную окружность правильный шестиугольник. Радиусы, проведенные в его вершины, и отрезки прямых, соединяющие середины этих радиусов, разбивают круг на 7 областей

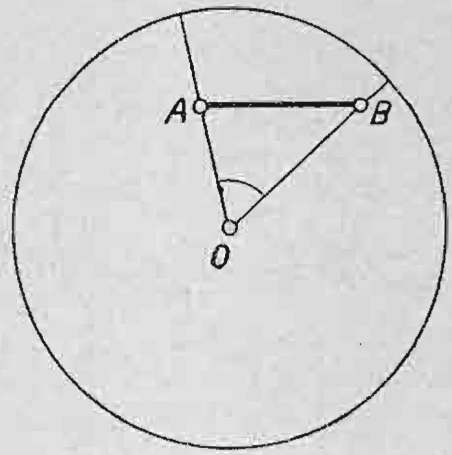


Рис. 194.

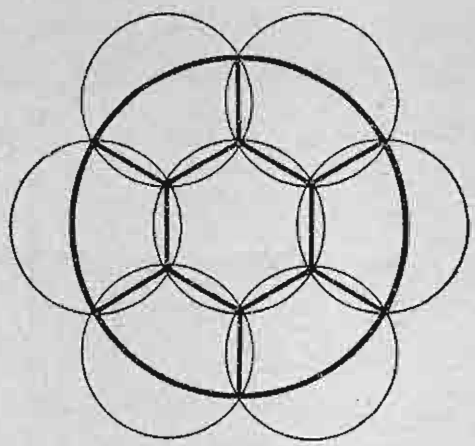


Рис. 195.

(рис. 195). Каждая область вписана в окружность, диаметр которой равен радиусу исходного круга. Действительно, центральная область вписана в окружность, концентрическую граничной окружности исходного круга и имеющую вдвое меньший радиус, а вершины остальных областей лежат на окружностях, построенных на сторонах правильного шестиугольника, который вписан в граничную окружность исходного круга.

Рассмотрим теперь 8 заданных точек. Повернем границы 7 областей, на которые разделен исходный круг, вокруг его центра так, чтобы одна из заданных точек оказалась на границе какой-то области. Тогда в одной из 7 областей окажутся по крайней мере 2 заданные точки. Поскольку по крайней мере одна из них находится внутри окружности, в которую вписана содержащая их область, расстояние между этими двумя точками меньше диаметра окружности, проходящей через вершины области, то есть меньше радиуса исходного круга.

По поводу задачи 194 и двух ее решений можно сделать 2 замечания:

1. Нетрудно видеть, что вместо 8 точек нельзя задавать 7 точек, поскольку центр круга и вершины вписанного в граничную окружность правильного шестиугольника служат примером 7 точек, обладающих тем свойством, что расстояние между любыми двумя из них равно радиусу круга. Из первого решения видно, что других расположений, противоречащих утверждению задачи (при числе заданных точек, равном 7), не существует.

2. Пусть a_n — сторона вписанного в граничную окружность правильного n-угольника. По доказанному утверждению задачи среди заданных в круге 8 точек найдутся 2 такие, что расстояние между ними меньше a_6. Докажем, что из 8 заданных точек всегда можно выбрать две точки, расстояние между которыми не больше a_7. Как показывает пример системы из 8 заданных точек, одна из которых совпадает с центром круга, а остальные располагаются в вершинах правильного семиугольника, утверждение задачи не допускает дальнейших обобщений в этом направлении.

Ход рассуждений во многом аналогичен рассуждениям, приведенным во втором решении, но в некоторых пунктах прямо противоположен им.

Разобьем круг на 8 областей: центральный семиугольник, образованный пересечением наибольших диагоналей вписанного в граничную окружность «большого» правильного семиугольника, и области, заключенные между отрезками радиусов, соединяющих вершины малого и большого правильных семиугольников, стороной малого семиугольника и дугой граничной окружности, соединяющей две смежные вершины большого семиугольника (рис. 196).

Мы утверждаем, что в какой-то из 8 областей содержатся 2 из 8 заданных точек (эти точки могут лежать на границе области), расстояние между которыми не больше a_7. Для точек, принадлежащих малому семиугольнику, утверждение очевидно, поскольку наиболее удалены друг от друга две точки, служащие концами наибольшей диагонали малого семиугольника, а такая диагональ меньше стороны большого семиугольника (чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть в треугольнике $A_1A_2A_5$ на рис. 196 диагональ B_7B_3 малого семиугольника и сторону $A_1A_2 = a_7$ большого семиугольника).

Рассмотрим теперь точки, принадлежащие «усеченному сектору» $A_1A_2B_2B_1$. Прежде всего заметим, что $A_1A_2 = A_2B_1$ (и $A_1A_2 = A_1B_2$). Это следует из того, что четырехугольник $A_1A_2B_1A_7$ — ромб, поскольку его противоположные стороны параллельны, и $A_7A_1 = A_1A_2 = a_7$. Диагональ A_1B_1 делит ромб $A_1A_2B_1A_7$ на два равнобедренных треугольника $A_1A_2B_1$ и $A_1A_7B_1$. Углы при вершинах A_2 и A_7 этих треугольников вписаны в граничную окружность и опираются на дуги, каждая из которых

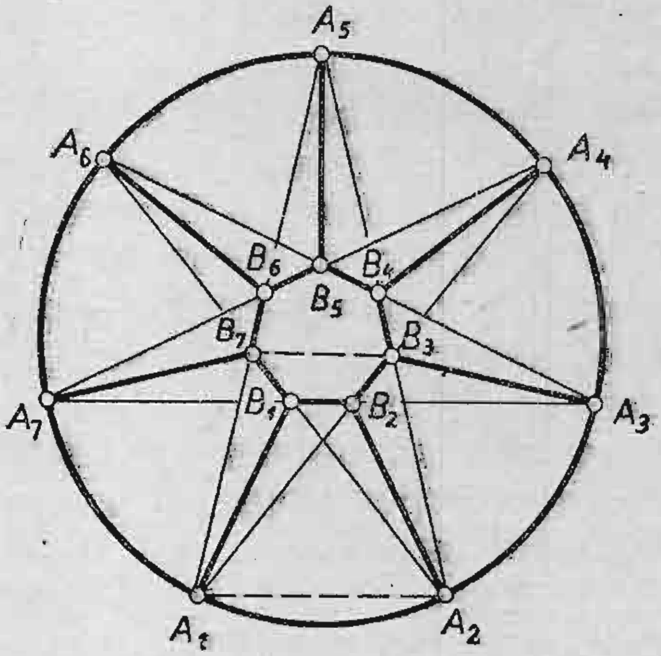


Рис. 196.

меньше трети окружности (равна $^2/_7$ окружности), в силу чего углы при вершинах A_2 и A_7 меньше 60°. Следовательно, основание A_1B_1 равнобедренных треугольников $A_1A_2B_1$ и $A_1A_7B_1$ меньше их боковых сторон $A_1A_2 = a_7$.

Две наиболее удаленные друг от друга точки «усеченного сектора», очевидно, должны лежать на его границе (для определенности мы будем проводить все рассуждения для четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$). Концы наиболее длинного отрезка не могут совпадать с внутренними точками прямолинейных участков границы четырехугольника (то есть с внутренними точками отрезков A_2B_2, B_2B_1, B_1A_1), поскольку любая точка прямолинейного участка границы лежит ближе к другой данной точке, чем по крайней мере один из концов того же участка. Конец наибольшего отрезка, соединяющего две точки «усеченного сектора» не может совпадать и с внутренней точкой дуги A_1A_2, поскольку наибольшее расстояние от любой точки круга (отличной от его центра) до точки дуги достигается в том случае, если мы выберем один из концов дуги. Итак, концами наибольшего отрезка, соединяющего точки «усеченного сектора» $A_1A_2B_2B_1$, могут быть лишь какие-то две из четырех точек A_1, A_2, B_2, B_1, а, как мы уже видели, длина наибольшего из отрезков, концы которых совпадают с этими точками, равна a_7.

Рассмотрим теперь 8 заданных точек, расположенных в круге. Если они принадлежат малому семиугольнику, то расстояние между любыми двумя из них меньше a_7. В противном случае повернем всю «сеть», образованную границами 8 областей, вокруг центра круга так, чтобы какая-то из 8 заданных точек оказалась на линии, разделяющей две смежные области. Тогда внутри и на границе каждой из областей окажутся по нескольку точек (быть может, ни одной) из 8 заданных. Сумма числа точек, принадлежащих каждой области (не только внутренних, но и принадлежащих границе), взятая по всем 8 областям, не меньше 9, поскольку точки, лежащие на границе, засчитываются по крайней мере дважды. Следовательно, среди 8 областей непременно должна найтись такая, которая содержит не менее 2 точек из 8 заданных. По доказанному выше расстояние между этими двумя точками не больше a_7. Тем самым утверждение задачи доказано.

195. Рассмотрим правильную четырехугольную усеченную пирамиду с нижним основанием $ABCD$ и верхним основанием $EFGH$ (рис. 197). Поскольку такая пи-

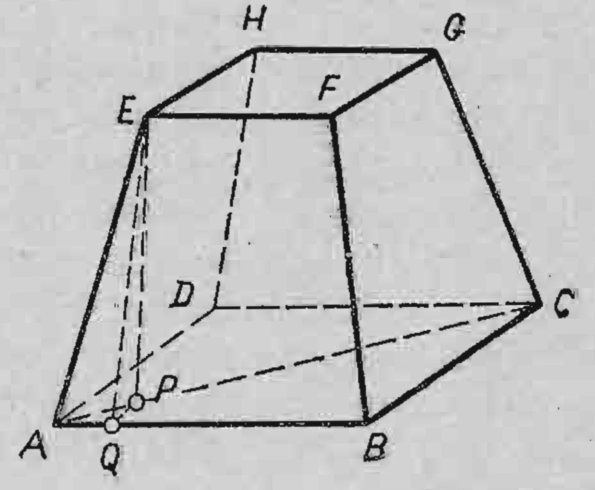


Рис. 197.

рамида симметрична относительно оси, проходящей через центры оснований (при повороте на угол, кратный 90°, усеченная пирамида $ABCDEFGH$ переходит в себя), то безразлично, какую из пространственных диагоналей мы будем рассматривать. Если выбрать пространственную диагональ AG, то можно утверждать, что всякий путь, ведущий из вершины A в вершину G по поверхности усеченной пирамиды, должен пересекать пространственный шестиугольник $BCDHEF$. Поскольку любую точку шестиугольника $BCDHEF$ можно соединить с вершинами A и G отрезками прямых, лежащими на поверхности усеченной пирамиды, и отрезок прямой, соединяющий любые две точки, короче ломаной, концы которой совпадают с этими двумя точками, то кратчайший путь, ведущий из вершины A в вершину G по поверхности усеченной пирамиды может быть лишь ломаной, состоящей из двух прямолинейных отрезков. Эти отрезки могут проходить либо по боковой грани и верхнему основанию, либо по нижнему основанию и боковой грани, либо, наконец, по двум боковым граням. Поскольку правильная усеченная четырехугольная пирамида симметрична относительно плоскости $AEGC$, то, говоря о боковой грани, можно не уточнять, о какой именно боковой грани идет речь.

Во всех трех случаях кратчайший путь проходит по двум смежным граням усеченной пирамиды: либо по боковой грани и одному из оснований, либо по двум смежным боковым граням. Если смежные грани повернуть вокруг общего ребра так, чтобы они оказались в одной плоскости, то путь, ведущий из вершины A в вершину G, перейдет в плоскую ломаную, а кратчайший путь — в отрезок прямой, соединяющей на развертке точки A и G. Выясним, в каком из трех перечисленных выше случаев прямолинейный отрезок, соединяющий на развертке вершины A и G, оказывается наиболее коротким.

Боковая грань $ABEF$ усеченной пирамиды имеет вид равнобочной трапеции с углом при нижнем основании AB больше $45°$ (и углом при верхнем основании EF меньше $135°$). Действительно, если P и Q — проекции вершины E на плоскость нижнего основания и ребро AB, то APQ — равнобедренный прямоугольный треугольник, а поскольку $EQ > PQ = AQ$, то в треугольнике AEQ угол EAQ, лежащий против большего катета, превышает $45°$.

Из условий задачи следует, что $\alpha = \angle AFB < 45°$. Действительно, в окружности, описанной вокруг нижнего основания, хорда AB стягивает дугу в $90°$. Следовательно, опирающиеся на нее вписанные углы равны 45° (и 135°). Поскольку по условиям задачи радиус окружности, описанной вокруг боковой грани усеченной пирамиды $ABCDEFGH$, больше радиуса окружности, описанной вокруг нижнего основания, то углы, вписанные в окружность, которая описана вокруг трапеции $ABEF$, и опирающиеся на хорду AB, меньше 45°. Следовательно, угол AFB меньше 45°.

Нарисуем развертки двух смежных граней усеченной пирамиды, соответствующие всем трем перечисленным

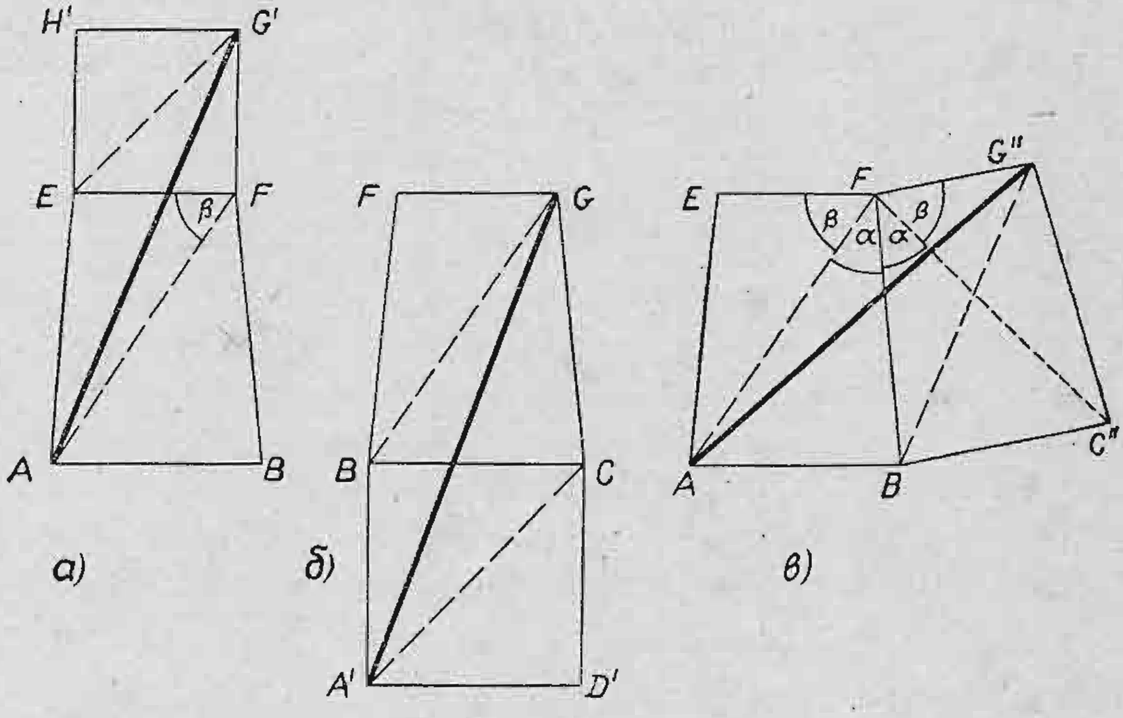


Рис. 198.

выше случаям (рис. 198). Отрезок, соединяющий концы пространственной диагонали, во всех трех случаях пересекает общее ребро двух смежных граней (на рис. 198 этот отрезок показан сплошной линией). Действительно, во всех трех случаях на развертке можно найти выпуклый четырехугольник, одной из диагоналей которого служит общее ребро двух смежных граней, а другой — отрезок прямой, соединяющий концы пространственной диагонали. Две противоположные стороны такого четырехугольника показаны пунктирными линиями. Выпуклость четырехугольников необходимо обосновать лишь для случаев *а* и *в*. Действительно, в четырехугольнике $AFG'E$, изображенном на рис. 198, *а*, $\angle AEF < 135°$, а $\angle FEG' = 45°$. На рис. 198, *в* $\angle AFB < 45°$, а $\angle BFG'' < 135°$.

Осталось лишь доказать, что кратчайшим из всех путей, проходящих по поверхности усеченной пирамиды и соединяющих концы пространственной диагонали, является путь AG'', изображенный на рис. 198, *в*. Действительно, отрезок $A'G$, изображенный на рис. 198, *б*, длиннее отрезка AG', изображенного на рис. 198, *а*, поскольку проекции обоих отрезков на горизонтальную прямую (прямую, которой принадлежит общее ребро двух смежных граней) равны, а проекция на вертикальную прямую у отрезка $A'G$ больше (сторона нижнего основания больше стороны верхнего основания). Итак, осталось доказать, что $AG' > AG''$ (рис. 198, *а* и *в*). Оба отрезка служат сторонами треугольников AFG' и AFG'' с двумя попарно равными сторонами. Следовательно, бо́льшая из сторон должна лежать против большего из углов. Таким образом, необходимо лишь доказать, что

$$\angle AFG' > \angle AFG''.$$

Пусть $\beta = \angle AFE$. Тогда доказываемое неравенство примет вид

$$90^\circ + \beta > 2\alpha + \beta.$$

Оно действительно выполняется, поскольку по доказанному ранее $\alpha < 45^\circ$.

196. Существование пространственного пятиугольника $ABCDE$, удовлетворяющего условиям задачи, не зависит от того, какой длины отрезок мы выберем за его сторону, поэтому удобнее всего начать с единичного квадрата $ABCO$ и выяснить, где могут располагаться вершины D и E пятиугольника (рис. 199).

Поскольку $\angle BCD = 90^\circ$ и $CD = 1$, то вершина D принадлежит плоскости γ, перпендикулярной отрезку BC и проходящей через точку C, и расположена на лежащей в плоскости γ единичной окружности с центром в точке C. Все диагонали пятиугольника $ABCDE$ (если он существует) равны, поскольку любая из них служит гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника с единичными катетами (таким образом, длина каждой диагонали равна $\sqrt{2}$). Таким образом, $AD = AC$, и через точку D проходит окружность единичного радиуса с центром в точке O, лежащая в плоскости γ, поскольку эта окружность является геометрическим местом тех точек плоскости γ, которые удалены от точки A на расстояние, равное длине отрезка AC. Следовательно, точка D может быть лишь одной из двух точек пересечения обеих единичных окружностей (с центрами в точках C и O). Пусть D — любая из этих точек (они расположены симметрично относительно плоскости ABC, в силу чего пространственный пятиугольник, если он существует, на

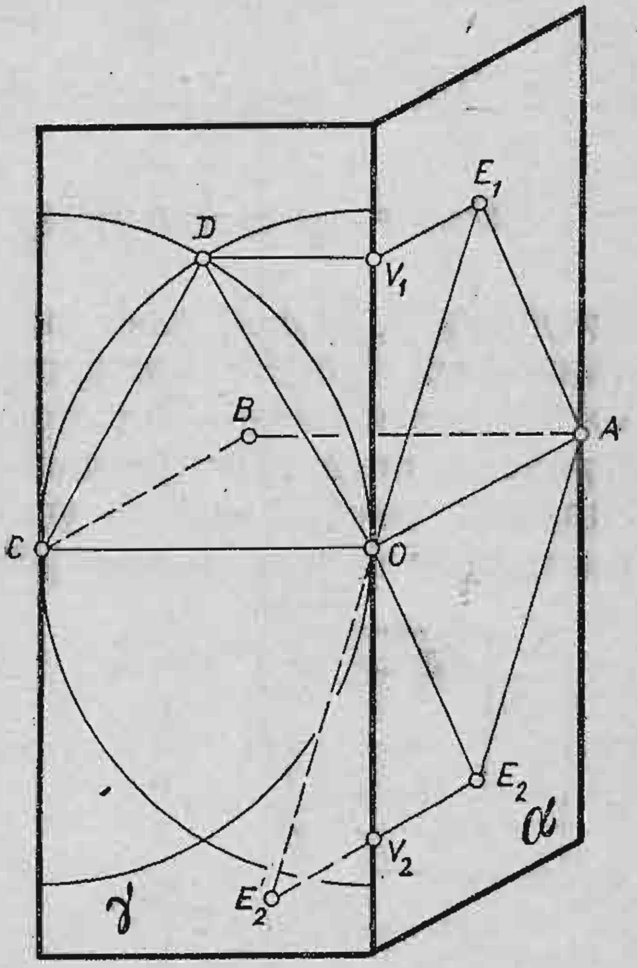


Рис. 199.

этом этапе построения также можно выбрать в одной из двух форм, симметричных относительно плоскости ABC). Положение точки D проще всего найти, построив в плоскости γ по любую сторону от отрезка CO равносторонний треугольник: точка D совпадает с его третьей вершиной, отличной от вершин C и O.

Аналогичные рассуждения позволяют найти и положение точки E. Проведем через точку A плоскость α, перпендикулярную отрезку BA, и по обе стороны от отрезка AO построим равносторонние треугольники OE_1A и OE_2A. Точкой E может быть лишь какая-то из вершин E_1 и E_2. Здесь нам приходится учитывать обе возможности, поскольку после того, как положение точки D выбрано, пространственный пятиугольник утрачивает симметрию относительно плоскости ABC.

Покажем, что построенный пятиугольник не обладает требуемыми свойствами, поскольку ни один из отрезков DE_1 и DE_2 не имеет единичной длины. В этом нетрудно убедиться при помощи несложных выкладок. Пусть V_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки E_1 на плоскость γ. Катеты DV_1 и V_1E_1 прямоугольных треугольников DV_1E_1 и DE_1E_2 равны $1/2$, а $E_1E_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, по теореме Пифагора

$$DE_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

$$DE_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + 3} = \sqrt{\frac{7}{2}} > 1.$$

Таким образом, нельзя построить пространственный пятиугольник, все стороны которого равны, а углы между любыми двумя смежными сторонами прямые.

Пространственный пятиугольник можно построить, если, например, отказаться от условия, согласно которому все стороны пятиугольника должны быть равны, и

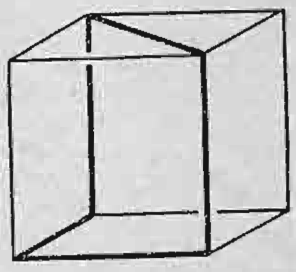


Рис. 200.

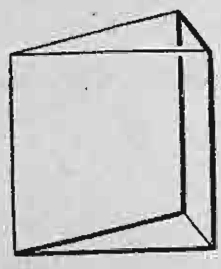


Рис. 201.

потребовать, чтобы равными были лишь четыре стороны (угол между любыми двумя смежными сторонами по-прежнему должен оставаться прямым). На рис. 200 показано, как следует выбрать вершины такого пятиугольника среди вершин куба.

Пространственный пятиугольник можно построить и в том случае, если потребовать, чтобы лишь четыре угла между смежными сторонами были прямыми. На рис. 201 изображен такой пятиугольник, образованный ребрами правильной трехгранной призмы.

На вопрос исходной задачи следует отвечать утвердительно, если в условиях ее речь идет не о пространственном пятиугольнике, а о пространственном многоугольнике с бо́льшим числом сторон. Пространственные шестиугольник и восьмиугольник с равными сторонами и прямым углом между любыми двумя смежными сторонами нетрудно построить из ребер куба. Пространственный семиугольник с требуемыми свойствами можно построить следующим образом. Возьмем равнобочную трапецию, длина верхнего основания и боковых сторон которой равна 1, а длина нижнего основания $\sqrt{2}$. Пристроив к верхнему основанию единичный квадрат, а к нижнему — равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы сторона квадрата совместилась с верхним, а гипотенуза — с нижним основанием трапеции, сотрем оба ее основания и расположим плоскость квадрата под прямым углом к плоскости трапеции, а плоскость прямоугольного треугольника наклоним под таким углом к плоскости трапеции, чтобы угол между катетами и примыкающими к ним боковыми сторонами трапеции был прямым. Нетрудно проверить, что полученный семиугольник удовлетворяет всем условиям задачи. Построение аналогичных пространственных многоугольников с числом сторон больше 8 не встречает каких-либо трудностей.

Непосредственное отношение к задаче 196 имеет и другой вопрос: существует ли пространственный пятиугольник, все стороны которого равны, а углы, заключенные между двумя любыми смежными сторонами также равны (но не обязательно 90°)? Нетрудно доказать, что существуют лишь два таких пятиугольника (оба — плоские): правильный выпуклый пятиугольник и звездчатый пятиугольник, образованный его диагоналями. Допустимые значения углов между смежными сторонами равны 108° и 36°.

197. Докажем, что первые n знаков после запятой в десятичном разложении числа $(5+\sqrt{26})^n$ либо все суть 0, либо 9, то есть рассматриваемое число отличается от целого меньше чем на 10^{-n}. Для этого достаточно доказать, что

$$(5+\sqrt{26})^n+(5-\sqrt{26})^n$$

— целое число и

$$\left|5-\sqrt{26}\right|<\frac{1}{10}.$$

Последнее неравенство нетрудно проверить прямыми выкладками: $5{,}1^2 = 26{,}01 > 26$, поэтому

$$5 < \sqrt{26} < 5{,}1.$$

Пусть $p(x) = (5 + x)^n$. Тогда подлежащее доказательству утверждение можно сформулировать так: $p(\sqrt{26}) + p(-\sqrt{26})$ — целое число. Оно верно потому, что в сумме $p(x) + p(-x)$ члены с нечетными степенями x взаимно уничтожаются и остаются лишь члены с четными степенями x. Следовательно, значение, принимаемое при $x = \sqrt{26}$ многочленом $p(x) + p(-x)$ с целочисленными коэффициентами, выражается целым числом.

Поскольку число $5 - \sqrt{26}$ отрицательно, то из приведенного выше решения следует, что при нечетных n первые n знаков после запятой являются нулями, а при четных n — девятками.

Из приведенного решения нетрудно вывести также следующее утверждение: если n достаточно велико, то в десятичном разложении числа $(5 + \sqrt{26})^n$ совпадает не менее $n + 1$ знаков после запятой. Заметим, что первым n, при котором это произойдет, будет $n = 234$.

198. Докажем, что множества A и B неотрицательных целых чисел с требуемыми свойствами существуют. Для этого достаточно построить хотя бы один пример таких множеств.

Условимся нумеровать разряды всех неотрицательных целых чисел от младших к старшим, начиная с единиц. Отнесем к множеству A все положительные целые числа, у которых отличные от нуля цифры сто́ят в нечетных разрядах, а к множеству B — все положительные целые числа, у которых отличные от нуля цифры стоят в четных разрядах. Число 0 по определению принадлежит одновременно множеству A и множеству B, поскольку у него нет отличных от нуля цифр ни в одном разряде.

Сумма двух чисел, из которых одно принадлежит множеству A, а другое — множеству B, выражается числом, все цифры которого совпадают либо с цифрами слагаемого, принадлежащего множеству A, либо с цифрами слагаемого, принадлежащего множеству B, поскольку в нечетном разряде отличной от нуля может быть лишь цифра у слагаемого из множества A, а в четных разрядах — лишь у слагаемого из множества B. Следовательно, взяв любое неотрицательное целое число и заменив нулями все цифры, стоящие в четных разрядах, мы получим его «составляющую», принадлежащую множеству A, а заменив нулями все цифры в нечетных разрядах, — его «составляющую», принадлежащую множеству B. Сумма обеих составляющих равна исходному числу. Сумма двух других элементов множеств A и B не может быть равной этому числу, поскольку эти элементы хотя бы одной цифрой должны отличаться от составляющих рассматриваемого числа, и поэтому их сумма равна другому числу.

Например, если взять число 1967, то его составляющая, принадлежащая множеству A, равна 907, а составляющая, принадлежащая множеству B, равна 1060. Сумма составляющих равна исходному числу: $907 + 1060 = 1967$.

Множества A и B бесконечны, поскольку имеется бесконечно много как четных, так и нечетных разрядов.

199. Прежде всего нам следует доказать, что если число c — элемент рассматриваемого множества, а n — натуральное число, то nc также принадлежит множеству. Для доказательства воспользуемся методом полной математической индукции по n. Само число c и по условиям задачи число $2c$ принадлежат множеству, поэтому достаточно доказать, что если $n > 1$ и nc принадлежит множеству, то $(n+1)c$ также принадлежит множеству. Но $(n+1)c = nc + c$, а по условиям задачи сумма двух элементов множества принадлежит множеству. Следовательно, для любого элемента c и произвольного натурального числа n произведение nc принадлежит рассматриваемому множеству.

Пусть $a > 0$ — наименьший положительный, а $b < 0$ — наибольший отрицательный (то есть наименьший по абсолютной величине) элементы множества (по поводу существования таковых см. III.3). Поскольку, с одной стороны, их сумма $a + b$ принадлежит множеству и удовлетворяет неравенству

$$b < a + b < a,$$

а, с другой стороны, множество не содержит положительных чисел, которые были бы меньше a, и отрицательных чисел, которые были бы больше b, то сумма $a+b$ может быть равна лишь 0. Следовательно, число 0 принадлежит рассматриваемому множеству, и $b=-a$. Отсюда следует, что множество содержит все целые кратные любого своего элемента a, поскольку при любом натуральном n числа na, 0, nb принадлежат множеству.

Мы утверждаем, что, кроме целых кратных элемента a, рассматриваемое множество не содержит других элементов. Предположим, что это утверждение неверно. Пусть множеству принадлежит элемент x, заключенный между двумя последовательными целыми кратными числа a: qa и $(q+1)a$. Такой элемент x можно представить в виде

$$x=qa+r \quad (0<r<a).$$

Но тогда число

$$r=x+(-q)a$$

также принадлежит множеству, поскольку равно сумме двух элементов множества. Это число удовлетворяет неравенству $0<r<a$, что противоречит выбору элемента a (напомним, что a — наименьший из положительных элементов множества).

Утверждение задачи следует из того, что все элементы множества — целые кратные элемента a, поэтому разность любых двух элементов равна целому кратному элемента a и принадлежит рассматриваемому множеству.

200. В условиях задачи говорится лишь о выпуклом многоугольнике. В действительности это требование несущественно и в приводимом ниже доказательстве использовано не будет. Мы включили выпуклость многоугольника в условия задачи лишь для того, чтобы избавить участников олимпиады от необходимости искать ответ на довольно сложный вопрос: всякий ли многоугольник можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями? Это действительно так, но доказать приведенное утверждение отнюдь не просто.

Задача по существу останется неизменной, если вместо разбиения n-угольника непересекающимися диагоналями рассмотреть разбиение n-угольника на неперекрывающиеся треугольники, вершины которых совпадают с вершинами n-угольника. Единственное изменение, которое при этом требуется внести в формулировку задачи, состоит в том, что включается случай $n = 3$, причем при $n = 3$ множество треугольников, покрывающих данный n-угольник, состоит из одного элемента — самого треугольника. Ясно, что при $n = 3$ утверждение задачи выполняется.

Итак, приступим к решению задачи 200.

Каждая из непересекающихся диагоналей делит исходный многоугольник на два многоугольника. Определим, чему равно наименьшее число сторон у таких «подмногоугольников». Мы утверждаем, что наименьшее число сторон равно 3, то есть что среди проведенных диагоналей есть такая, которая отсекает от многоугольника треугольник. Действительно, если бы наименьшее число сторон «подмногоугольников» было равно $k > 3$ и достигалось бы при проведении диагонали A_1A_k, отсекающей подмногоугольник $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$, то, поскольку в условиях задачи говорится о разбиении исходного n-угольника на треугольники, нашлась бы диагональ A_iA_j, соединяющая какие-то две вершины k-угольника $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_{k-1}A_k$ и отсекающая от него многоугольник с меньшим числом сторон. Следовательно, $k > 3$ не может быть наименьшим числом сторон «подмногоугольников».

Среди рассматриваемых нами подмногоугольников есть и такие многоугольники, у которых число сторон больше 3, поскольку в противном случае диагональ делила бы многоугольник на 2 треугольника и концы ее служили бы вершинами четного числа треугольников, что противоречит условиям задачи.

Среди подмногоугольников, на которые проведенные диагонали рассекают исходный многоугольник, нет четырехугольников, поскольку одна из диагоналей должна была бы разбивать его на два треугольника и концы ее служили бы вершинами двух треугольников, что опять-таки противоречит условиям задачи.

Таким образом, среди подмногоугольников имеются многоугольники с числом сторон больше 3, но не меньше 5. Пусть, например, подмногоугольник $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$, отсекаемый диагональю A_1A_k, имеет наименьшее число сторон среди подмногоугольников, отличных от треугольников. Из приведенных выше рассуждений известно, что $k \geqslant 5$.

Поскольку при разбиении исходного многоугольника на треугольники подмногоугольник $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$ также оказывается разделенным на треугольники, среди которых содержится треугольник $A_1A_iA_k$, и поскольку k — наименьшее число сторон подмногоугольника, то ни диагональ A_1A_i, ни диагональ A_iA_k не могут отсекать подмногоугольники с числом сторон, которое было бы больше 3 (но меньше k). Следовательно, $i \leqslant 3$ и $k-i+1 \leqslant 3$. Учитывая, что $k \geqslant 5$, последние неравенства можно преобразовать к виду

$$0 \leqslant k-5 \leqslant i-3 \leqslant 0,$$

откуда $k=5$, $i=3$.

Итак, в разбиении исходного многоугольника на треугольники всегда найдется диагональ, отсекающая от него пятиугольник, который разделен двумя другими

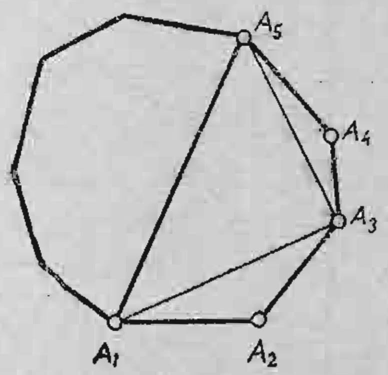


Рис. 202.

диагоналями на три треугольника так, что любые два из них имеют общую вершину с диагональю, служащей границей между пятиугольником и остальной частью многоугольника (рис. 202). Отрезав пятиугольник от исходного многоугольника, мы уменьшим число его сторон на 3. Разбиение оставшейся части многоугольника диагоналями по-прежнему будет удовлетворять всем условиям задачи. Действительно, все вершины исходного многоугольника служили вершинами нечетного числа треугольников. После отсечения пятиугольника число треугольников, примыкающих к данной вершине, изменилось (уменьшилось на 2) лишь для тех двух вершин, которые служат концами диагонали, по которой проведен разрез. Следовательно, все вершины оставшейся части многоугольника служат вершинами нечетного числа треугольников.

Продолжая отсекать от многоугольника пятиугольники, мы будем каждый раз уменьшать число сторон на 3. Процесс оборвется, когда мы не дойдем до многоугольника, в котором нельзя провести ни одной диагонали, то есть до треугольника.

Следовательно, число сторон исходного многоугольника делится на 3, что и требовалось доказать.

Из приведенного решения видно, что если n делится на 3, то выпуклый n-угольник действительно можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы к каждой вершине исходного многоугольника примыкало нечетное число треугольников.

201. Первое решение. Докажем сначала следующую лемму.

Пусть внутри угла, который не больше развернутого, заданы две точки. Сумма расстояний от каждой точки до сторон угла оказывается одной и той же в том и

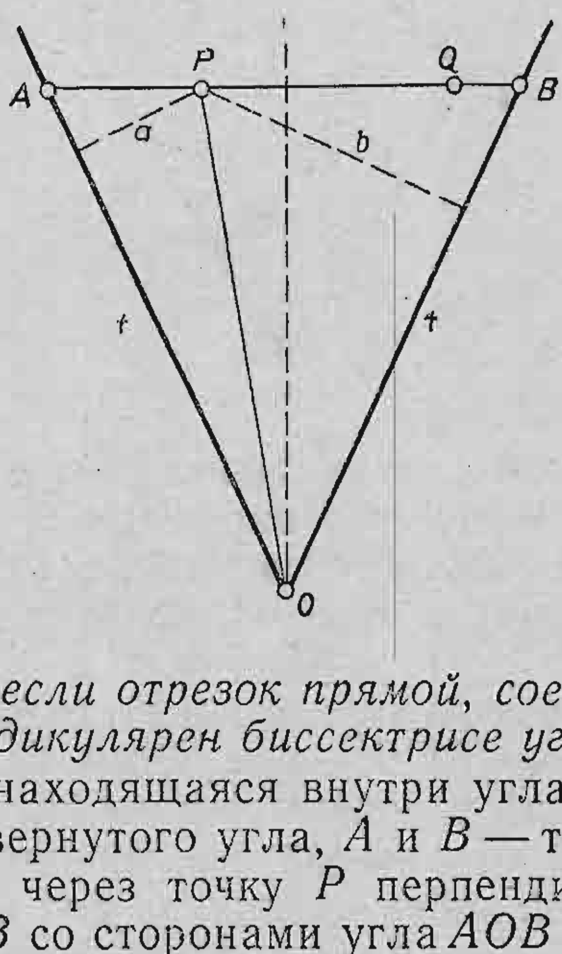


Рис. 203.

только в том случае, если отрезок прямой, соединяющий эти две точки, перпендикулярен биссектрисе угла.

Пусть P — точка, находящаяся внутри угла AOB, который не больше развернутого угла, A и B — точки пересечения проходящего через точку P перпендикуляра к биссектрисе угла AOB со сторонами угла AOB (рис. 203). Обозначим t длину отрезков OA и OB, а a и b — расстояния от точки P до прямых OA и OB. Поскольку площадь треугольника AOB равна сумме площадей треугольников AOP и BOP, то удвоенную площадь треугольника AOB можно представить в виде $at + bt = (a + b)t$. Тогда сумма расстояний

$$(P, \angle AOB) = a + b$$

от любой точки P отрезка AB до сторон угла AOB будет иметь одно и то же значение, равное расстоянию от точки A до стороны OB. Но все точки, принадлежащие лучу OA, находятся на различных расстояниях от стороны угла OB. Следовательно, сумма расстояний от точки P до сторон угла AOB может совпадать с суммой расстояний от точки Q до сторон угла AOB в том и

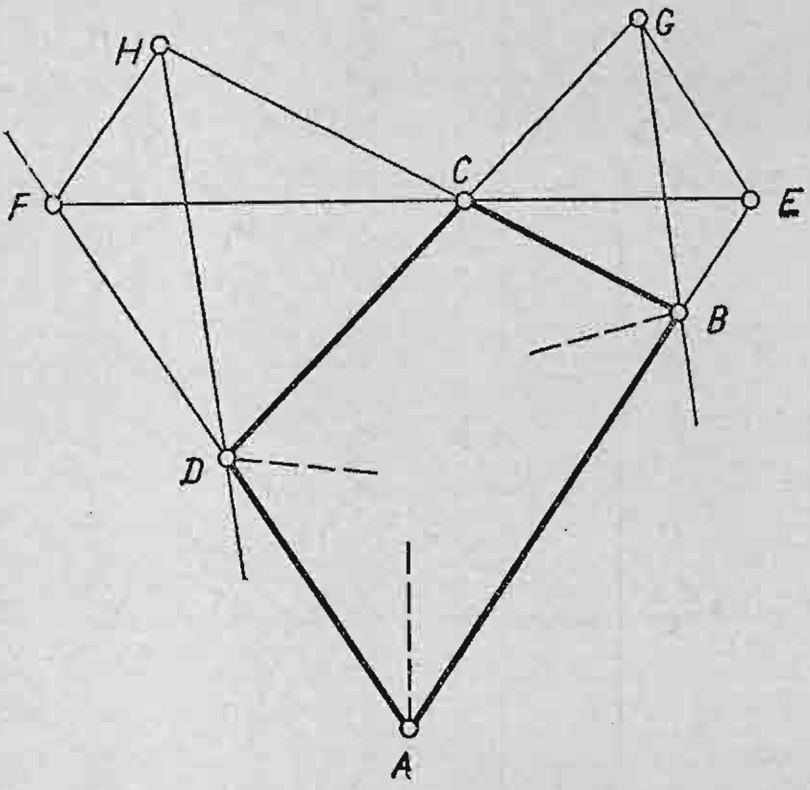


Рис. 204.

только в том случае, если проходящие через точки P и Q перпендикуляры к биссектрисе угла AOB пересекают луч OA в одной и той же точке, то есть если отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла AOB. Итак, лемма доказана.

Обратимся теперь к доказательству утверждения задачи. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, удовлетворяющий условиям задачи (то есть такой, что сумма расстояний от каждой его вершины до двух не сходящихся в ней ребер одинакова для всех четырех вершин). Сопровождающий доказательство рис. 204 умышленно искажен, поскольку лишь после того, как утверждение задачи будет доказано, мы сможем говорить, что $ABCD$ — параллелограмм.

Проведем через вершину C прямую, перпендикулярную биссектрисе угла BAD. Пусть E и F — точки пересечения этой прямой с прямыми AB и AD, G — точка пересечения прямой, проведенной через точку E параллельно стороне AD, с прямой DC, а H — точка пересечения прямой, проведенной через точку F параллельно стороне AB, с прямой BC. Треугольники CBE и CHF (так же как и треугольники CGE и CDF) подобны, поскольку стороны CB и CH, так же как и стороны CE и CF, лежат на одной прямой, а $BE \parallel FH$ (стороны CG и CD, так же как и стороны CE и CF, лежат на одной прямой, а $EG \parallel FD$). Отсюда следует, что четырехугольники $CBEG$ и $CHFD$ подобны, в силу чего $\angle CBG = \angle CHD$ и прямые BG и DH параллельны.

По доказанной ранее лемме $(C, \angle DAB) = (E, \angle DAB)$; поскольку $EG \parallel AD$, то $(E, \angle DAB) = (G, \angle ADC)$, а по условиям задачи $(C, \angle DAB) = (B, \angle ADC)$. Следовательно, $(G, \angle ADC) = (B, \angle ADC)$. По лемме это означает, что отрезок GB перпендикулярен биссектрисе угла ADC. Аналогичные рассуждения показывают, что отрезок HD перпендикулярен биссектрисе угла ABC. Но поскольку $GB \parallel HD$, то биссектрисы углов ABC и ADC параллельны. Следовательно, стороны угла, симметричного углу DCB относительной прямой, параллельной биссектрисам углов ABC и ADC, параллельны сторонам угла DAB, в силу чего $\angle DCB = \angle DAB$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине A равен углу при вершине C. Равенство углов при двух других вершинах четырехугольника $ABCD$ доказывается аналогично. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Нетрудно видеть, что сумма расстояний от любой вершины параллелограмма до двух сходящихся в ней сторон совпадает с аналогичной суммой для любой другой вершины.

Второе решение. Утверждение задачи не изменится, если вместо суммы расстояний от вершины четырехугольника до двух не сходящихся в ней сторон мы будем рассматривать сумму расстояний от вершины до всех четырех сторон четырехугольника, поскольку сумма расстояний от вершины до двух сходящихся в ней сторон равна нулю.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой, ограничивающей полуплоскость (вектор $\mathbf{n}$ направлен внутрь полуплоскости), A и B — две точки, принадлежащие полуплоскости, a и b — расстояния от точек A и B до граничной прямой (рис. 205). Разность

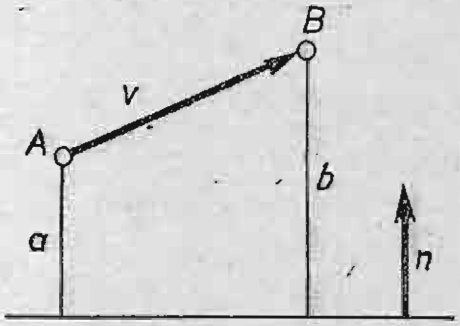


Рис. 205.

длин отрезков a и b можно представить в виде скалярного произведения (см. III. 51):

$$b - a = \mathbf{vn},$$

где $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.

Пусть $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_4$ — единичные векторы, перпендикулярные сторонам четырехугольника, удовлетворяющего условиям задачи (все векторы направлены внутрь четырехугольника), а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, совпадающие с двумя смежными сторонами четырехугольника (рис. 206). Поскольку сумма расстояний от начала вектора $\mathbf{a}$ до сторон четырехугольника равна сумме расстояний от конца

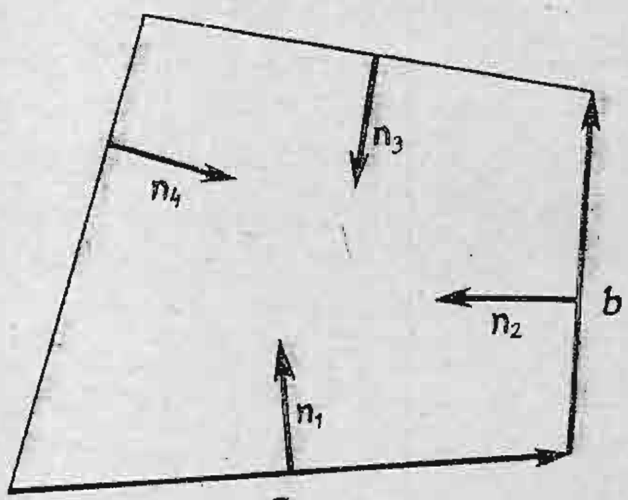


Рис. 206.

вектора $\mathbf{a}$ до сторон четырехугольника, то разность двух сумм, то есть сумма разностей расстояний от начала и конца вектора $\mathbf{a}$ до сторон четырехугольника, равна 0. Как показано выше, в векторных обозначениях это можно записать следующим образом:

$$\mathbf{an}_1 + \mathbf{an}_2 + \mathbf{an}_3 + \mathbf{an}_4 = \mathbf{a}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4) = \mathbf{0}.$$

Аналогичное равенство справедливо и для вектора $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4) = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4$ перпендикулярен двум непараллельным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, что возможно лишь в том случае, если

$$\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4=0.$$

Последнее равенство означает, что, отложив векторы $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_4$ один за другим, мы получим замкнутый четырехугольник. Поскольку длины всех его сторон равны 1, то получившийся четырехугольник — ромб и противоположные стороны его параллельны. Следовательно, стороны исходного четырехугольника, перпендикулярные векторам $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_4$, также попарно параллельны.

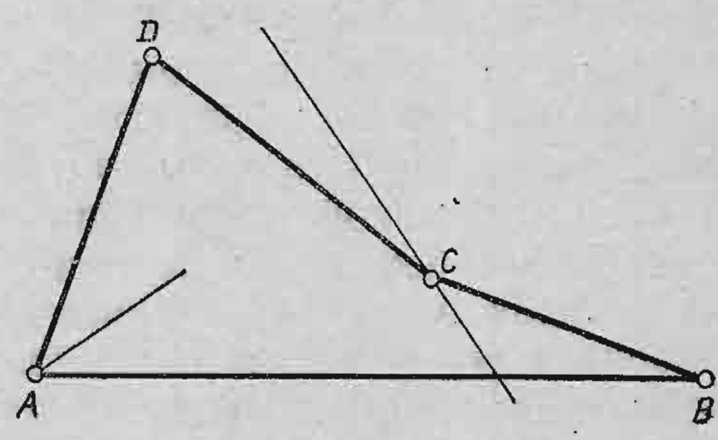


Рис. 207.

Таким образом, исходный четырехугольник — параллелограмм, что и требовалось доказать.

В задаче 201 говорилось о выпуклых четырехугольниках. Покажем, что требование выпуклости излишне, поскольку для невыпуклых четырехугольников условия задачи не могут выполняться. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, у которого угол при вершине C больше развернутого. Проведем через вершину C прямую, перпендикулярную биссектрисе угла DAB. Эта прямая отделяет по крайней мере одну вершину четырехугольника (например, вершину B, как показано на рис. 207) от вершины A, поскольку угол DCB не выпуклый и все вершины четырехугольника не могут лежать по одну сторону от проведенной прямой. Пользуясь обозначениями, приведенными в лемме из первого решения, можно записать неравенство $(C, \angle DAB) < (B, \angle DAB)$. Поскольку в его правую часть входит расстояние от вершины B до стороны AD угла DAB (расстояние от вершины B до стороны AB равно 0) и оно меньше, чем сумма расстояний от вершины B до сторон AD, CD, то вершины B и C не удовлетворяют условиям задачи 201.

202. Прежде всего заметим, что если h — среднее гармоническое чисел a, b, то $1/h$ — среднее арифметическое чисел $1/a$, $1/b$. Действительно, поскольку $h=2ab/(a+b)$, то $1/h = 1/2(1/a + 1/b)$. Это позволяет сформулировать исходное утверждение задачи следующим образом: доказать, что не существует такой бесконечной последовательности чисел вида $1/n$, где n — натуральные числа, в которой не все члены равны и каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

Иначе говоря, утверждается, что из чисел, обратных натуральным, нельзя составить бесконечную арифметическую прогрессию, если только все числа не равны друг другу. Справедливость последнего утверждения следует из того, что все числа, обратные натуральным, заключены в интервале [0, 1] и не могут быть членами бесконечной арифметической прогрессии с ненулевой разностью, поскольку абсолютная величина членов такой прогрессии, должна была бы неограниченно возрастать.

Оговорка в условиях задачи о том, что не все члены бесконечной последовательности равны, существенна. Стоит лишь отказаться от нее, как бесконечная последовательность $1, 1, \ldots, 1, \ldots$ может служить примером, противоречащим утверждению задачи.

Утверждение задачи останется в силе, если вместо натуральных чисел рассмотреть целые числа. При этом в приведенное выше доказательство придется внести лишь одно изменение: вместо интервала [0, 1] взять интервал [—1, 1].

Утверждение задачи перестает быть верным, если говорить о бесконечной последовательности рациональных чисел или о конечной (хотя и сколь угодно длинной) последовательности натуральных чисел. В первом случае контрпримером может служить бесконечная последовательность рациональных чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, во втором — конечная последовательность натуральных чисел

$$n!, \frac{n!}{2}, \frac{n!}{3}, \ldots, \frac{n!}{n}$$

203. Спроектируем каждый из $4n$ отрезков на заданную прямую (условимся в дальнейшем называть ее горизонталью) и на перпендикулярную ей прямую (вертикаль). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{4n}$ — длины проекций $4n$ отрезков на горизонталь, а $b_1, b_2, \ldots, b_{4n}$ — длины проекций тех же отрезков на вертикаль. Первоначальное утверждение задачи равносильно следующему: *среди проекций заданных отрезков либо на горизонталь, либо на вертикаль по крайней мере две проекции имеют общую точку.*

Рассмотрим i-й отрезок. Его можно представить в виде гипотенузы прямоугольного треугольника с горизонтальным катетом a_i и вертикальным катетом b_i (рис. 208) (в частном случае один из катетов может быть стянутым в точку). Поскольку в невырожденном

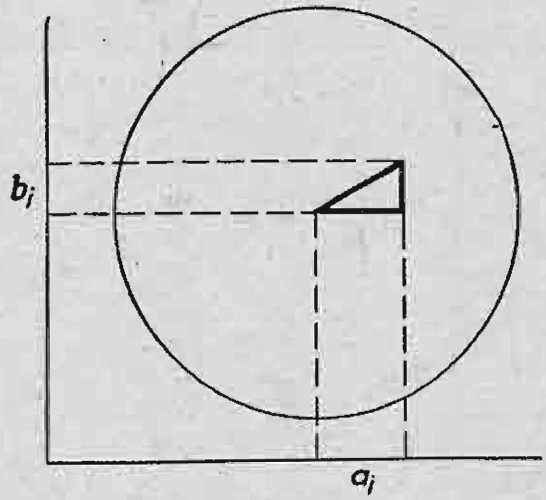


Рис. 208.

треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны, то $a_i + b_i > 1$. Кроме того, необходимо учесть, что когда проектируемый отрезок сам расположен на горизонтали или на вертикали, то либо $a_i = 1$, либо $b_i = 1$. Следовательно, для любого отрезка должно выполняться неравенство

$$a_i + b_i \geqslant 1.$$

Суммируя такие неравенства по всем отрезкам (от 1 до $4n$), получаем

$$\sum a_i + \sum b_i \geqslant 4n.$$

Если никакие две из проекций отрезков на горизонталь не имеют общей точки, то взятые вместе проекции всех отрезков не покрывают проекции на горизонталь заданной окружности радиусом n (эта проекция имеет длину $2n$). Следовательно, принятое нами предположение приводит к неравенству

$$\sum a_i < 2n.$$

Если никакие две из проекций отрезков на вертикаль не имеют общей точки, то взятые вместе проекции всех отрезков не покрывают проекции заданной окружности радиусом n на вертикаль (эта проекция также имеет длину $2n$). Следовательно,

$$\sum b_i < 2n.$$

Таким образом, если утверждение задачи не выполняется, то

$$\sum a_i + \sum b_i < 4n,$$

что невозможно, поскольку, как показано выше, полученное неравенство противоречит условиям задачи.

204. Подсчитаем, сколькими способами можно разложить черные и белые шарики так, чтобы число разноцветных «соседей» (черно-белых или бело-черных пар) было равно v. Необходимо различать два случая: когда число v нечетно и когда оно четно.

Первый случай. Пусть число перемен цвета (разноцветных пар, образуемых двумя соседними шариками) в ряду равно нечетному числу $v = 2a + 1$. Назовем отрезком (белым или черным) одноцветные шарики, заключенные между ближайшими друг к другу парами разноцветных соседей. Поскольку число таких пар равно $2a + 1$, то число отрезков равно $2a + 2$. Следовательно, весь ряд состоит из $a + 1$ белых и такого же числа черных отрезков. Если сдвинуть все белые отрезки вместе, то получится ряд из n белых шариков, разделенных a «пограничными столбами». Их мы получим, отметив a шариков из $n - 1$. Аналогичное утверждение справедливо и относительно черных шариков: сдвинув вместе $a+1$ черных отрезков, мы получим ряд из n черных шариков, разделенных a отмеченными шариками, которые выбраны из $n - 1$ шариков (на рис. 209, a два верхних ряда соответствуют $n = 6$, $v = 7$ и, следовательно, $a = 3$).

Итак, любой ряд, выстроенный из n белых и n черных шариков, порождает два сочетания из $n - 1$ элементов по a. Но не все пары сочетаний, порождаемые различными рядами, различны: два расположения шариков могут порождать одну и ту же пару сочетаний, если белые и черные отрезки, соответствующие друг другу в обоих расположениях, имеют одинаковую длину, но один из рядов начинается с белого, а другой с черного отрезка.

Наоборот, любая пара сочетаний из $n-1$ элементов по a порождает разбиения n белых и n черных шариков на $a+1$ отрезков. Расположив их в чередующемся порядке, мы получим ряд из n белых и n черных шариков, содержащий $v=2a+1$ пар разноцветных соседей. Существуют две разновидности ряда: одна начинается с черного, другая — с белого отрезка.

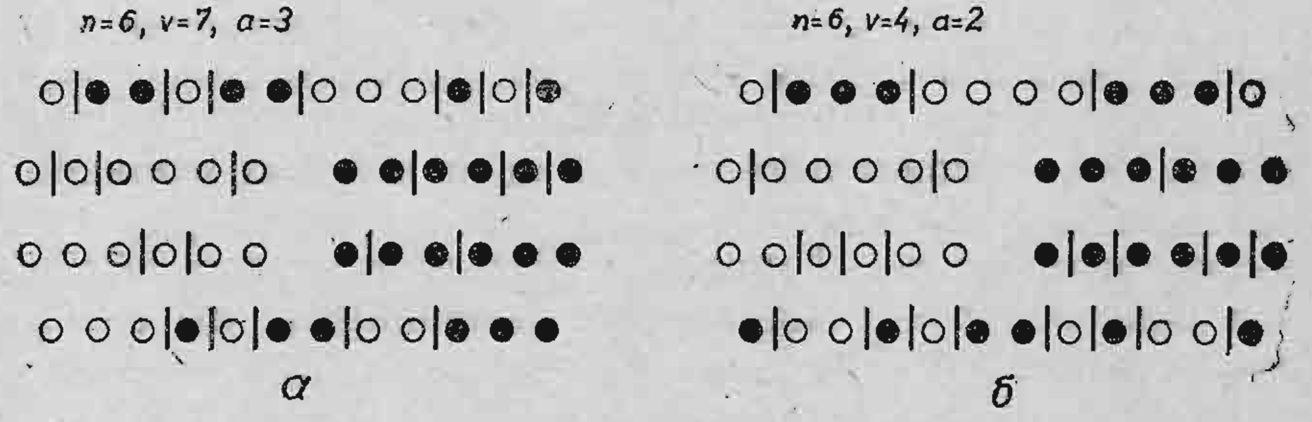


Рис. 209.

Таким образом, число рядов, содержащих v пар разноцветных соседей (черно-белых и бело-черных пар), вдвое больше числа пар сочетаний из $n-1$ элементов по a, то есть равно

$$2\left(C_{n-1}^{a}\right)^{2}.$$

Если число $n-k$, о котором говорится в условии задачи, нечетно, то число $n+k$ также нечетно, поскольку разность чисел $n-k$ и $n+k$ (равная $2k$) четна. Следовательно, приведенные выше рассуждения применимы к рядам из n белых и n черных шариков, содержащих как $n-k$, так и $n+k$ пар разноцветных соседей. Если $v=n+k$, то число рядов с v переменами цвета равно

$$2\left(C_{n-1}^{b}\right)^{2},$$

где число b определяется из соотношения $n+k=2b+1$ (так же, как число a — из соотношения $n-k=2a+1$). Поскольку $a+b=n-1$ и по хорошо известному свойству биномиальных коэффициентов (см. III. 5) $C_m^k = C_m^{m-k}$, то

$$C_{n-1}^{a}=C_{n-1}^{b},$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Итак, для нечетного v утверждение задачи доказано.

Второй случай. Пусть v — четное число ($v=2a$). Так же, как в предыдущем случае, рассмотрим одноцветные отрезки, на которые разбивают ряд из n белых и n черных шариков пары разноцветных соседей. На этот раз число отрезков равно $2a+1$. Если ряд начинается с белого отрезка, то он состоит из $a+1$ белых и a черных отрезков. Случай, когда ряд начинается с черного отрезка, можно исключить из рассмотрения, поскольку его всегда можно свести к предыдущему случаю (ряд начинается с белого отрезка), перекрасив все белые шарики в черные и наоборот. Сдвинем вместе все $a+1$ белых и отдельно все a черных отрезков. Мы получим два «половинных» ряда. Ряд из n белых шариков разделен a «пограничными столбами» — a шариками, выбранными из $n-1$ шариков. Ряд из n черных шариков разделен $a-1$ шариками, выбранными из $n-1$ шариков (на рис. 209, *б* два верхних ряда шариков соответствуют случаю, когда $n=6$, $v=4$ и, следовательно, $a=2$).

Так же как и в случае четного v, можно утверждать, что число рядов из n белых и n черных шариков с заданным числом v пар разноцветных соседей равно числу пар сочетаний, одно из которых берется из $n-1$ элементов по a, а другое — из $n-1$ элементов по $a-1$. На этот раз между разбиениями ряда из n белых и n черных шариков на отрезки и парами сочетаний существует взаимно однозначное соответствие, поскольку цвет первого отрезка нельзя выбирать двумя способами: если, например, число белых отрезков на 1 больше числа черных отрезков, то ряд должен начинаться с белого отрезка.

Итак, число рядов из n белых и n черных шариков с v парами разноцветных соседей равно

$$2C_{n-1}^{a}C_{n-1}^{a-1},$$

где коэффициент 2 введен для того, чтобы учесть «равноправие» множества белых и множества черных шариков (безразлично, из какого множества мы будем выбирать a, а из какого $a-1$ элементов).

Если $n-k=2a$, то число $n+k$ четно: $n+k=2b$. Следовательно, число рядов с $n+k$ переменами цвета равно

$$2C_{n-1}^{b}C_{n-1}^{b-1}.$$

Поскольку $a+b=n$, то по уже упоминавшемуся свойству биномиальных коэффициентов

$$C_{n-1}^{a}=C_{n-1}^{b-1}, \quad C_{n-1}^{a-1}=C_{n-1}^{b}.$$

Тем самым утверждение задачи доказано и в случае, когда v четно.

205. Пусть $m=2+2\sqrt{28n^2+1}$ — целое число. Тогда

$$4(28n^2+1)=(m-2)^2=m^2-4m+4,$$

откуда видно, что m^2, а следовательно, и m четны. Полагая $m=2m_1$, находим

$$28n^2=m_1^2-2m_1,$$

а потому снова m_1 четно, $m=2m_1=4k$ и

$$7n^2=k^2-k. \tag{1}$$

Разложим k и $k-1$ в произведения степеней простых чисел (III. 7)

$$\begin{aligned} k&=7^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r},\\ k-1&=7^{\beta_0}q_1^{\beta_1}\ldots q_s^{\beta_s}. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку k и $k-1$ взаимно просты (III.23), то либо α_0, либо β_0 равно 0 и ни одно из p_j не совпадает ни с одним q_i. Из (1) заключаем, что простыми делителями числа n, отличными от 7, могут быть только p_j или q_i:

$$n=7^{\gamma_0}p_1^{\gamma_1}\ldots p_r^{\gamma_r}q_1^{\delta_1}\ldots q_s^{\delta_s}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$7^{2\gamma_0+1}p_1^{2\gamma_1}\ldots p_r^{2\gamma_r}q_1^{2\delta_1}\ldots q_s^{2\delta_s}=7^{\alpha_0+\beta_0}p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}\ldots q_s^{\beta_s}$$

и в силу единственности разложения в произведение степеней простых (III. 7)

$$\alpha_0+\beta_0=2\gamma_0+1; \quad \alpha_i=2\gamma_i, \quad i\geqslant 1; \quad \beta_j=2\delta_j, \quad j\geqslant 1.$$

Таким образом, простые множители, кроме 7, входят в разложение чисел k и $k-1$ в четных степенях и либо $\alpha_0=2\gamma_0+1$, $\beta_0=0$, либо $\alpha_0=0$, $\beta_0=2\gamma_0+1$. В первом случае $k-1$ является точным квадратом, а k равно произведению 7 на точный квадрат, во втором — наоборот:

$$\text{а)}\ \begin{aligned} k &= 7A^2, \\ k-1 &= B^2, \end{aligned} \qquad \text{б)}\ \begin{aligned} k &= A^2, \\ k-1 &= 7B^2, \end{aligned}$$

где A и B — некоторые целые числа.

Случай «б» приводит к тому, что $m = 4k = (2A)^2$, так что утверждение задачи верно. Покажем, что случай «а» невозможен. Пусть $B = 7B_1 + r$, где $r = 0, 1, \ldots,$ или 6. Тогда

$$7A^2 - 1 = k - 1 = (7B_1 + r)^2 = 49B_1^2 + 14B_1 r + r^2,$$

откуда видно, что $r^2 = 7 \cdot C - 1$, где C — целое число, а это не так, ибо $r^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25$ или 36 и не одно из этих чисел не имеет такого вида.

Естественно задать вопрос, а существуют ли $n \neq 0$, для которых $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ целое? Ответ утвердителен. В разложении бинома $(127 + 24\sqrt{28})^k$ соберем члены, стоящие на четных и нечетных местах:

$$(127 + 24\sqrt{28})^k = a_k + n_k\sqrt{28}.$$

Нетрудно заметить, что

$$(127 - 24\sqrt{28})^k = a_k - n_k\sqrt{28}.$$

Перемножая, получаем

$$a_k^2 - 28n_k^2 = (127^2 - 24^2 \cdot 28)^k = (16\,129 - 16\,128)^k = 1.$$

Отсюда

$$m = 2 + 2\sqrt{28n_k^2 + 1} = 2 + 2a_k$$

— целое число. Таким образом, мы получили бесконечную серию чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Можно еще заметить, что уравнение

$$x^2 - 28y^2 = 1.$$

называется *уравнением Пелля*. Положительные целочисленные решения этого уравнения суть именно пары (a_k, n_k), найденные по указанному выше рецепту. Ключом к решению нашей задачи служит равенство $127 + 24\sqrt{28} = (8 + 3\sqrt{7})^2$. (Подробности можно найти в учебнике теории чисел.)

206. Пусть R — радиус описанной окружности. Тогда по теореме синусов $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$ и равенство, приведенное в условии задачи, преобразуется к виду

$$\sin\alpha(1-2\cos\alpha)+\sin\beta(1-2\cos\beta)+\sin\gamma(1-2\cos\gamma)=0,$$

или, что то же,

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma. \qquad (1)$$

Поскольку α, β, γ — углы треугольника, то $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $2\alpha+2\beta+2\gamma=2\pi$. Пользуясь этими соотношениями и формулами приведения, преобразуем в отдельности левую и правую части равенства (1):

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=$$
$$=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+\sin 2\gamma=$$
$$=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin 2\gamma=$$
$$=2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)+\sin 2\gamma=$$
$$=2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma=$$
$$=2\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]=$$
$$=2\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Представив каждый из углов α, β, γ в виде удвоенного половинного угла, получим

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=4\cdot 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Поскольку $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ — острые углы, то $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\times\cos\frac{\gamma}{2}\neq 0$ и равенство (1) преобразуется к виду

$$\frac{1}{8}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Рассмотрим соотношение (2) как уравнение относительно синуса любого из половинных углов, например относительно $\sin\frac{\gamma}{2}$. Для этого преобразуем правую часть соотношения (2) следующим образом:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Мы видим, что выбранный нами синус половинного угла удовлетворяет квадратному уравнению

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}=0. \qquad (3)$$

Корни этого уравнения должны быть вещественными, поэтому его дискриминант

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1$$

неотрицателен, а поскольку абсолютная величина косинуса не превосходит единицы, то дискриминант уравнения (3) может быть равен только нулю:

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1,$$

откуда $\alpha=\beta$. Это означает, что уравнение (3) имеет кратный корень

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2},$$

соответствующий $\gamma=\pi/3$, в силу чего $\alpha=\beta=\pi/3$. Таким образом, рассматриваемый треугольник равноугольный и, следовательно, равносторонний, что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что для произвольного треугольника произведение синусов половинных углов удовлетворяет неравенству

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Действительно, если

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=p,$$

то $\sin\frac{\gamma}{2}$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 2p = 0,$$

дискриминант которого

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 8p$$

должен быть неотрицателен. Следовательно,

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \geqslant 8p,$$

откуда $p \leqslant \frac{1}{8}$ (ср. также второе решение задачи 11 и III. 43, б).

Таким образом, произведение синусов половинных углов достигает наименьшего значения в том случае, если треугольник равносторонний.

207. Воспользуемся обычной шахматной нотацией и будем обозначать вертикали a, b, c, ..., h, а горизонтали 1, 2, ..., 8. Например, кубик $a1$ стоит в первой горизонтали на крайнем месте слева и так далее.

Черная грань любого из кубиков может занимать одно из шести положений: «слева», «справа», «впереди», «сзади», «вверху» и «внизу». Например, для кубика $b2$ черная грань в положении «слева» соприкасается с кубиком $a2$, в положении «справа» — с кубиком $c2$, в положении «впереди» — с кубиком $b3$ и в положении «сзади» — с кубиком $b1$.

Наша цель — перевести грани всех кубиков в положение «вверху».

Займемся сначала кубиком $a1$. Поворачивая вертикаль a и горизонталь 1, переведем его черную грань в положение «впереди». *При любых поворотах вертикали a положение этой грани остается теперь неизменным.* Следовательно, поворачивая вертикаль a и горизонталь 2, мы можем перевести черную грань кубика $a2$ в положение «впереди». Поворачивая затем вертикаль a (черные грани кубиков $a1$ и $a2$ сохраняют при этом положение «впереди»!) и горизонталь 3, переведем в положение «впереди» черную грань кубика $a3$ и так далее.

Когда черные грани кубиков $a1$ — $a8$ займут положение «впереди», мы поворотом горизонталей 1—8 переведем их в положение «вверху», а затем поворотом вертикали a — в положение «слева». После этого вертикаль a мы больше трогать не будем, а при повороте остальных вертикалей и горизонталей положение черных граней всех кубиков вертикали a меняться не будет.

Аналогично поступим с кубиками, стоящими на вертикалях $b, c, \ldots, h$.

Когда черные грани всех кубиков будут находиться в положении «слева», повернем все вертикали от a до h на 90° и тем самым переведем все черные грани в положение «вверху».

208. Пусть k — число острых углов в n-угольнике. Поскольку любой острый угол меньше 90°, то сумма острых углов n-угольника меньше $k \cdot 90°$. Относительно остальных углов n-угольника известно лишь, что каждый из них меньше 360°. Следовательно, их сумма меньше $(n-k) \cdot 360°$. Таким образом, сумма всех внутренних углов n-угольника меньше, чем

$$k \cdot 90° + (n-k) \cdot 360° = n \cdot 360° - k \cdot 270°.$$

С другой стороны, известно, что сумма внутренних углов n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, поэтому

$$(n-2) \cdot 180° < n \cdot 360° - k \cdot 270°,$$

откуда

$$3k < 2n + 4.$$

Поскольку в правой и в левой частях полученного неравенства стоят целые числа, то

$$3k \leqslant 2n + 3,$$

откуда

$$k \leqslant \frac{2n}{3} + 1.$$

Итак, мы получили, что плоский n-угольник может содержать не более

$$\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$$

острых внутренних углов (символ [ ] означает целую часть, то есть наибольшее из целых чисел, не превосходящих данное).

Покажем, что полученная оценка для числа острых углов точна: можно построить на плоскости n-угольник, у которого число острых внутренних углов будет равно $\left[\frac{2n}{3}\right]+1$.

Рассмотрим прежде всего случай, когда n делится на 3 ($n=3r$). Тогда $\left[\frac{2n}{3}\right]+1=2r+1$.

Рассмотрим сектор круга с углом раствора 60°. Пусть P — его вершина, A и B — концы дуги окружности. Разделим дугу AB точками $C_1, C_2, \ldots, C_{2r-2}$ на $2r-1$ равных частей. Обозначим S_i центр тяжести треугольника $C_{2i-1}PC_{2i}$ ($i=1, 2, \ldots, r-1$). Через точку S_i проведем прямую, параллельную отрезку PC_{2i-1} (рис. 210).

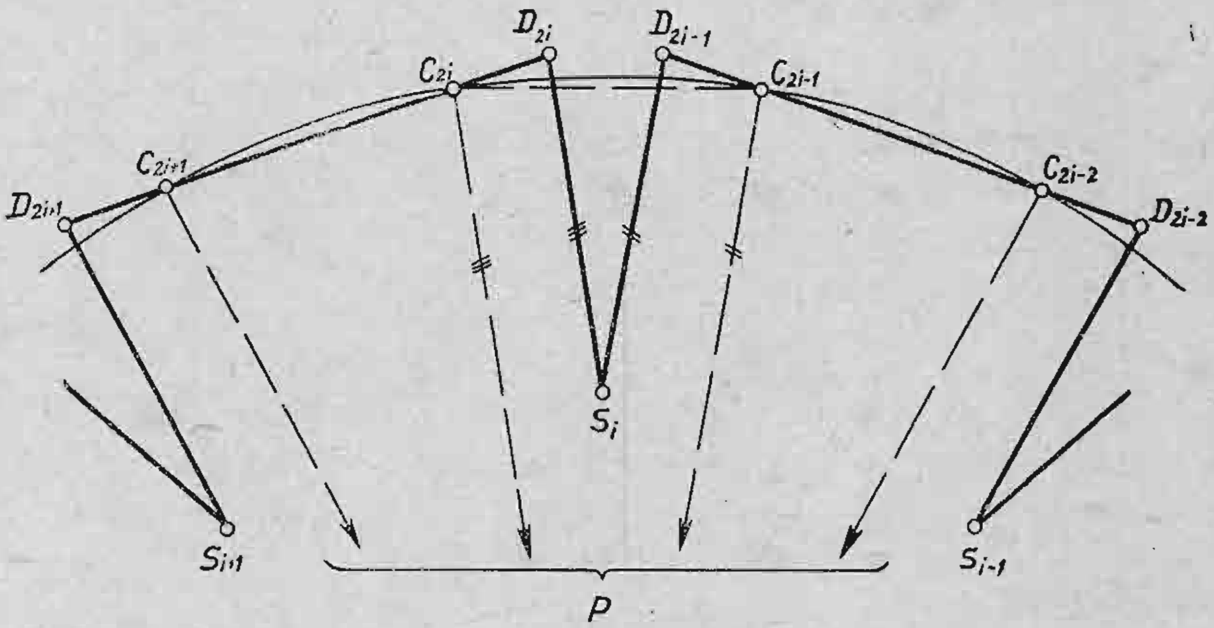


Рис. 210.

Пусть D_{2i-1} — точка пересечения проведенной прямой с продолжением отрезка $C_{2i-2}C_{2i-1}$ (точка C_0 совпадает с A). Обозначим D_{2i} точку пересечения прямой, проходящей через S_i и параллельной отрезку PC_{2i} с продолжением отрезка $C_{2i}C_{2i+1}$ (точка C_{2r-1} совпадает с B). Рассмотрим теперь следующий многоугольник:

$$\Sigma = PAD_1S_1D_2D_3S_2D_4 \ldots D_{2i-1}S_iD_{2i}D_{2i+1}S_{i+1} \ldots \ldots D_{2r-3}S_{r-1}D_{2r-2}B$$

(рис. 211). У него $3r$ вершин и $2r+1$ острых углов при вершинах $P, A, D_1, D_2, \ldots, D_{2r-2}, B$. Действительно, $\angle APB=60°$, угол PAD_1 острый как один из углов при основании равнобедренного треугольника, $\angle AD_1S_1 = \angle PAD_1 = \angle PAC_1$, поскольку AD_1S_1 и AC_1P — углы с параллельными сторонами. Аналогично доказывается, что и остальные углы многоугольника Σ острые.

Рассмотрим теперь случай, когда n при делении на 3 дает остаток 1, то есть $n = 3r + 1$. Тогда $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1 = 2r + 1$. Способ построения $3r$-угольника, содержащего $2r + 1$ острых углов, ясен из предыдущего. Рассмотрим построенный ранее многоугольник Σ и на перпендикуляре, восставленном из середины стороны AP, выбе-

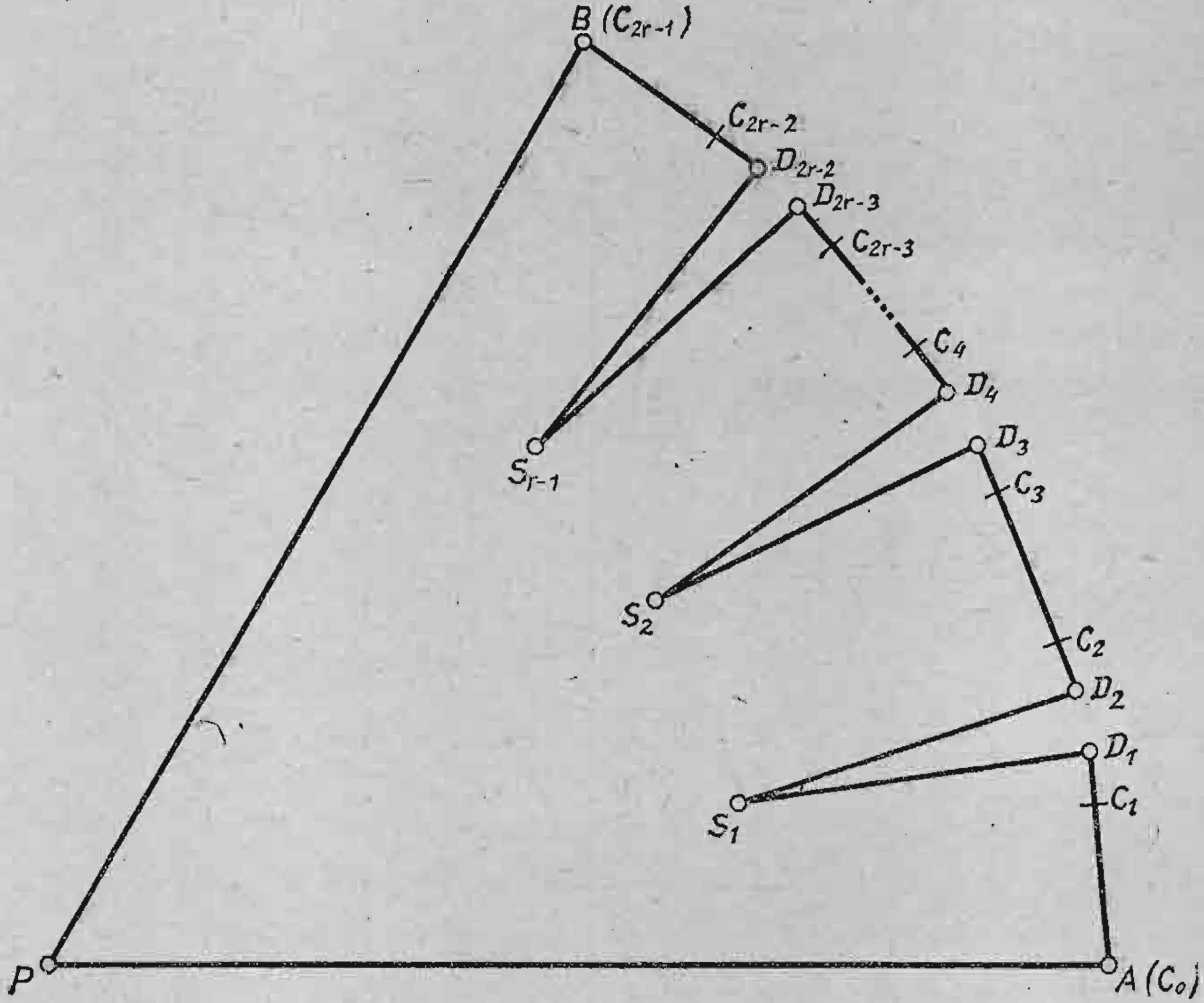


Рис. 211.

рем точку Q так, чтобы она лежала внутри треугольника PAC_1. Тогда $\angle QAC_1 < \angle PAC_1$ и $\angle QPB < \angle APB$. Поскольку углы PAC_1 и APB острые, то углы BAC_1 и QPB также острые. Следовательно, многоугольник Σ', получающийся при замене стороны AP многоугольника Σ ломаной AQP, имеет $3r + 1$ вершин и $2r + 1$ острых внутренних углов (рис. 212).

Наконец, рассмотрим случай, когда n при делении на 3 дает остаток 2, то есть $n = 3r + 2$. Обратимся снова к $3r$-угольнику Σ. Разделим стороны PA и PB на три равные части. Пусть Q_1 и Q_2 — ближайшие к вершине P

точки деления, расположенные на сторонах AP и PB, а P_1 — точка, симметричная вершине P относительно прямой Q_1Q_2. Тогда, заменив стороны AP, PB многоугольника Σ ломаной $AQ_1P_1Q_2B$, мы получим многоугольник Σ'', имеющий $3r+2$ вершин и $2r+2=\left[\frac{2n}{3}\right]+1$

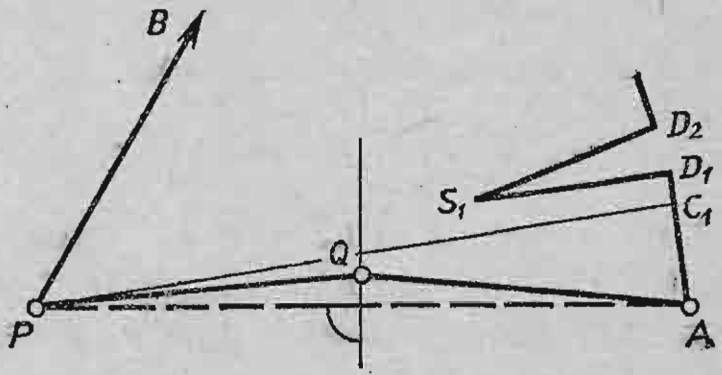


Рис. 212.

острых углов, поскольку $\angle BQ_2P_1 = \angle P_1Q_1A = 60°$, то есть острые (рис. 213).

Предоставляем читателям самостоятельно доказать, что построенные нами многоугольники Σ, Σ', Σ'' несамопересекающиеся.

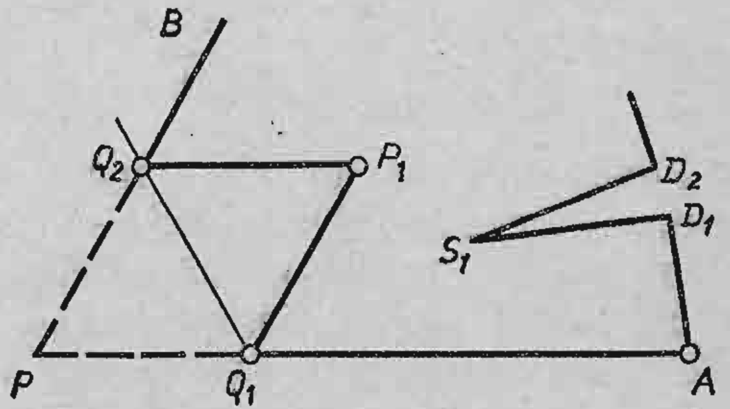


Рис. 213.

209. Пусть p — вероятность, которую требуется найти, а k — число способов, которыми из первых 90 натуральных чисел можно выбрать 5 таких, что любые два из них будут отличаться между собой больше, чем на 1. Поскольку из 90 чисел 5 можно выбрать C_{90}^5 способами, то

$$p = 1 - \frac{k}{C_{90}^5}.$$

Итак, исходная задача будет решена, если мы найдем число k.

Рассмотрим 5 номеров, среди которых нет двух последовательных:

$$1 \leqslant a < b < c < d < e \leqslant 90.$$

Тогда все числа

$$a,\ b-1,\ c-2,\ d-3,\ e-4$$

различны и могут принимать любые значения от 1 до 86. Наоборот, каждому набору чисел

$$1 \leqslant a' < b' < c' < d' < e' \leqslant 86$$

можно сопоставить пять номеров

$$a',\ b'+1,\ c'+2,\ d'+3,\ e'+4,$$

каждый из которых совпадает с одним из чисел от 1 до 90, причем среди чисел a', $b'+1$, $c'+2$, $d'+3$, $e'+4$ нет двух последовательных натуральных чисел. Следовательно, число k равно числу способов, которыми можно выбрать 5 различных чисел из первых 86 натуральных чисел, то есть

$$k = C_{86}^{5}.$$

Таким образом,

$$p = 1 - \frac{C_{86}^{5}}{C_{90}^{5}} = 1 - \frac{86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = 0{,}2\ldots.$$

210. Условимся не перекрашивать в другой цвет уже окрашенные отрезки. Пусть AB — отрезок, концы которого совпадают с двумя из заданных n точек, который еще не окрашен. По условиям задачи существует одна и только одна ломаная с раскрашенными звеньями, ведущая из A в B. Обозначим эту ломаную V_{AB}. Выкрасим отрезок AB в

синий цвет, если ломаная V_{AB} содержит нечетное число синих звеньев, и в

красный цвет, если ломаная V_{AB} содержит четное число синих звеньев.

(Заметим, что «правило выбора цвета» остается в силе и в том случае, когда отрезок AB уже окрашен.)

Покажем, что правило выбора цвета удовлетворяет условиям задачи. Пусть ABC — произвольный треугольник, вершины которого совпадают с тремя заданными точками.

Прежде всего к вершинам A, B, C можно добавить такую точку D, что *ломаные с окрашенными звеньями* V_{DA}, V_{DB}, V_{DC}, *ведущие из нее в точки* A, B *и* C, *не имеют других общих точек, кроме D.* (Возможно, что точка D совпадает с одной из вершин треугольника ABC, например с вершиной A. В этом случае ломаная V_{DA} состоит из одной-единственной точки.) Действительно, рассмотрим ломаную с окрашенными звеньями V_{AB}, ведущую из A в B. Выйдя из вершины C по направлению к вершине A вдоль ломаной V_{CA}, мы рано или поздно дойдем до некоторой точки D ломаной V_{AB}. (Если вершина C принадлежит ломаной V_{AB}, то $D = C$. Разумеется, не исключено, что точка D совпадает либо с вершиной A, либо с вершиной B.) Нетрудно видеть, что

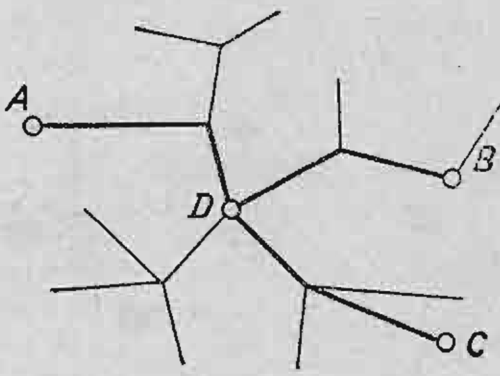


Рис. 214.

полученная точка D обладает указанным выше свойством (рис. 214).

Пусть x — число синих звеньев у ломаных V_{DA} и V_{DB}, y — число синих звеньев у ломаных V_{DB} и V_{DC} и z — число синих звеньев у ломаных V_{DC} и V_{DA}. Тогда по правилу выбора цвета среди вновь выкрашенных отрезков AB, BC, AC имеется столько синих, сколько нечетных чисел среди тройки x, y, z.

Поскольку сумма $x + y + z$ четна (все синие звенья ломаных V_{DA}, V_{DB}, V_{DC} при вычислении суммы учитываются дважды), то число сторон треугольника ABC, окрашенных в синий цвет, четно. Тем самым утверждение задачи доказано.

211. Пусть B'_1, B'_2, C'_1, C'_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точек B_1, B_2, C_1, C_2 на высоту треугольника, проходящую через вершину A. Перпендикуляры, опущенные на ту же высоту из середины сторон AB и AC, имеют общее основание F', поскольку соединяющий их отрезок прямой, как средняя линия треугольника ABC, параллелен стороне BC и, следовательно, перпендикулярен высоте, опущенной на BC из вершины A (рис. 215). Отрезки $B'_1C'_1$ и $B'_2C'_2$ симметричны относительно точки F' и поэтому равны (и противоположно направлены).

Стороны углов $B_1'B_1C_1$ и B_1A_1C, а также $C_2'C_2B_2$ и C_2A_2B параллельны, в силу чего синусы углов равны:

$$\sin(\angle B_1A_1C) = \sin(\angle B_1'B_1C_1) = \frac{B_1'C_1'}{B_1C_1},$$

$$\sin(\angle C_2A_2B) = \sin(\angle C_2'C_2B_2) = \frac{C_2'B_2'}{B_2C_2}.$$

Числители дробей, стоящих в правых частях полученных соотношений, равны. Следовательно, отношение левых частей равно отношению знаменателей:

$$\sin(\angle B_1A_1C) : \sin(\angle C_2A_2B) = B_2C_2 : B_1C_1,$$

что и требовалось доказать.

В приведенном доказательстве нигде не использовалось, что точки B_1 и C_1 принадлежат соответствующим

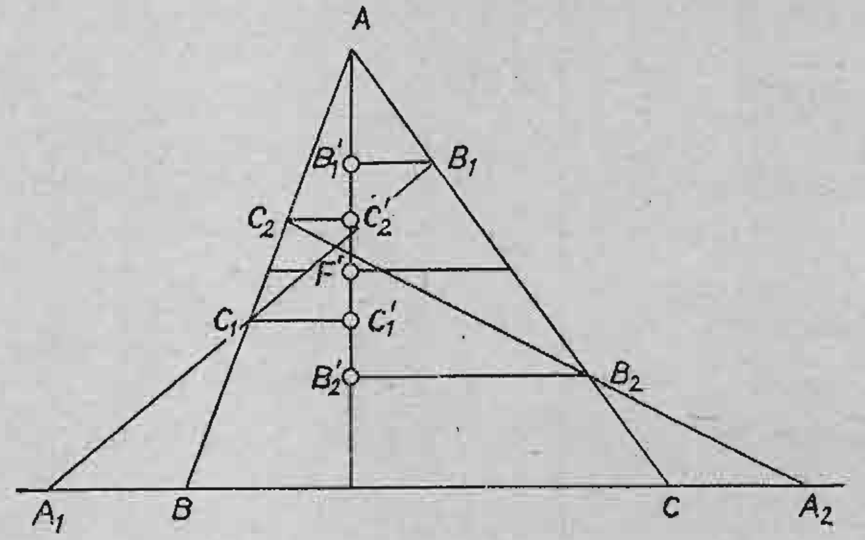


Рис. 215.

сторонам треугольника ABC, нужно лишь, чтобы их проекции на высоту располагались симметрично относительно точки F.

Кроме того, можно отбросить ту часть условия, где говорится о том, что прямые B_2C_2 и BC пересекаются, поскольку это следует из пересечения прямых B_1C_1 и BC. Действительно, в приведенном выше решении пересечение прямых B_1C_1 и BC означает, что точка B_1' не совпадает с точкой C_1', но тогда точка B_2' не совпадает с точкой C_2' и, таким образом, прямые B_2C_2 и BC не параллельны.

212. Воспользуемся тем, что если никакие три из пяти заданных на плоскости точек не лежат на одной прямой, то среди них всегда можно выбрать четыре точки так, чтобы они совпадали с вершинами выпуклого четырехугольника.

Действительно, если выпуклая оболочка пяти заданных точек имеет форму пятиугольника, то любые четыре из заданных точек могут служить вершинами выпуклого четырехугольника.

Если выпуклая оболочка пяти заданных точек имеет форму четырехугольника (внутри которого лежит еще одна заданная точка), то выбрав четыре «наружные»

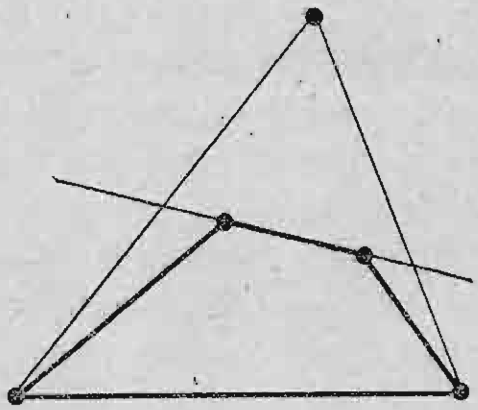


Рис. 216.

точки, мы, очевидно, получим выпуклый четырехугольник, совпадающий с выпуклой оболочкой заданных точек.

Если выпуклая оболочка пяти заданных точек имеет форму треугольника, то проведем прямую через две заданные точки, лежащие внутри треугольника (рис. 216). Эта прямая пересекает две стороны треугольника во внутренних точках, поскольку если бы она проходила через любую вершину треугольника, то три заданные точки оказались бы расположенными на одной прямой, что противоречит условиям задачи. Соединив отрезками прямых две точки, лежащие внутри треугольника, с концами третьей стороны и между собой, получим выпуклый четырехугольник (рис. 216).

Обратимся теперь непосредственно к решению задачи 212.

Прежде всего заметим, что если четыре точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, то диагонали этого четырехугольника суть два пересекающихся отрезка с концами в данных точках.

Далее, проведем прямую e, не параллельную ни одной из прямых, определяемых парами заданных точек. Такая прямая существует, поскольку из конечного множества точек можно выбрать лишь конечное множество пар точек и, следовательно, задать лишь конечное число прямых. Прямую e (или параллельную ей прямую) сначала расположим так, чтобы все 22 заданные точки находились по одну сторону от нее, а затем, сдвигая прямую параллельно самой себе в направлении заданных точек, отметим четыре положения: в первом положении по другую сторону от остального множества находятся 5 заданных точек, в каждом из трех остальных к ним прибавляется по 4 новые точки. Таким образом, когда прямая, параллельная прямой e, находится в «четвертой позиции» по ту сторону от нее, по которую первоначально находились все заданные точки, остаются еще 5 точек.

Среди первых 5 точек (оказавшихся по другую сторону прямой в ее первом отмеченном положении) можно выбрать четыре такие, которые образуют выпуклый четырехугольник, а потому служат концами двух пересекающихся отрезков, и еще одна точка останется «свободной». Присоединив ее к четырем точкам, заключенным между прямой e в первом и во втором отмеченном положении, мы снова сможем выбрать из 5 точек четыре конца двух пересекающихся отрезков. Присоединяя каждый раз оставшуюся точку к последующим, будем строить пересекающиеся отрезки до тех пор, пока не исчерпаем все заданные точки.

Всего мы построим 5 пар отрезков. По построению отрезки, образующие каждую пару, пересекаются, и никакие два отрезка не имеют общих концов. Все точки пересечения различны, поскольку из четырех точек, служащих концами двух пересекающихся отрезков, по крайней мере три лежат между двумя отмеченными положениями прямой, параллельной e. Следовательно, оба конца, а значит, и все внутренние точки (в том числе и точка пересечения) одного из отрезков заключены между этими же положениями прямой, параллельной e. Таким образом, все точки пересечения пар отрезков отделены друг от друга четырьмя отмеченными положениями прямой, параллельной e.

Тем самым утверждение задачи доказано.

Исходная задача допускает обобщение.

Пусть на плоскости заданы $4n + 1$ *точек, из которых никакие* 3 *не лежат на одной прямой.*

Доказать, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки прямых, соединяющих «парные» точки, пересекались по крайней мере в n различных точках.

213. Докажем, что если в n копилок наугад бросили по ключу (каждую копилку можно открыть одним и только одним ключом) и две копилки взломали, то с вероятностью $2/n$ остальные копилки удалось открыть вставленными ключами.

Пусть p_n — искомая вероятность для случая, когда число копилок равно n. Ясно, что $p_2 = 1$. Докажем, что если $n \geqslant 2$, то

$$p_{n+1} = \frac{n}{n+1} p_n. \tag{1}$$

Отсюда будет следовать, что

$$p_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} p_2 = \frac{2}{n},$$

и, таким образом, вероятность, которую требуется найти в задаче, $p_{30} = {}^1/_{15}$.

Расставим $n+1$ копилок в ряд и в каждую бросим наугад по ключу. Получившуюся *перестановку* ключей (номера копилок остаются неизменными) обозначим E. Пусть r — номер копилки, в которую брошен ключ от $(n+1)$-й копилки, а s — номер копилки, ключ от которой брошен в $(n+1)$-ю копилку. Ясно, что может произойти одно из двух: либо оба числа r и s равны $n+1$ (ключ от последней копилки брошен в последнюю копилку), либо оба числа r и s меньше $n+1$.

В первом случае $(r = s = n+1)$, исключив из рассмотрения последнюю копилку, мы получим некоторую перестановку E_1 ключей от первых n копилок среди первых n копилок. Во втором случае сопоставим перестановке $n+1$ ключей E перестановку E_1, отличающуюся от E лишь тем, что в r-ю копилку брошен ключ от s-й копилки [а ключ от $(n+1)$-й копилки, бывший там раньше, находится теперь в «своей» $(n+1)$-й копилке].

Итак, всякой перестановке E соответствует вполне определенная перестановка E_1. Наоборот, если перестановка E_1 известна, то она могла возникнуть либо после того, как, вынув ключи из r-й и $(n+1)$-й копилок $(1 \leqslant r \leqslant n)$, мы поменяли их местами, либо после того, как была исключена из рассмотрения $(n+1)$-я копилка, в которую брошен ее же «собственный» ключ. Следовательно, одной перестановке E_1 ключей от первых n копилок соответствуют $n+1$ различных перестановок ключей от $n+1$ копилок.

Без ограничения общности мы можем считать, что взламываются две первые копилки. После этого мы сможем открывать и при перестановке E, и при перестановке E_1 одни и те же копилки до тех пор, пока не дойдем до r-й копилки. Дойдя до этой копилки, мы при перестановке ключей E сможем открыть $(n+1)$-ю копилку, а затем копилку с номером s. При перестановке E_1 ключ, лежащий в r-й копилке, подходит к s-й копилке. Следовательно, дальше мы снова в обеих перестановках открываем одни и те же копилки.

Таким образом, при перестановке E все $n+1$ копилок можно открыть в том и только в том случае, если при соответствующей ей перестановке E_1 можно открыть первые n копилок и в $(n+1)$-ю копилку брошен ключ, который не подходит к ее замку. [В противном случае $(n+1)$-ю копилку открыть не удастся.]

Следовательно, каждая перестановка n ключей соответствует $n+1$ перестановкам $n+1$ ключей, а перестановки, при которых можно открыть все копилки, соответствуют только n перестановкам $n+1$ ключей. Именно это и утверждает соотношение (1).

214. Первое решение. Третье и четвертое слагаемое в левой части доказываемого неравенства можно преобразовать к следующему виду:

$$c(a-b)^2+4abc=c(a+b)^2.$$

Вычитая затем из каждого члена левой части соответствующее слагаемое правой части, получаем

$$\begin{aligned}&a[(b-c)^2-a^2]+b[(c-a)^2-b^2]+c[(a+b)^2-c^2]=\\&=a(b-c-a)(b-c+a)+b(c-a-b)(c-a+b)+\\&+c(a+b-c)(a+b+c)=(a+b-c)(ab-ac-a^2-\\&-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2)=\\&=(a+b-c)[-(a-b)^2+c^2]=\\&=(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).\end{aligned}$$

Все три сомножителя, стоящие в правой части последнего равенства, положительны, поскольку сумма любых двух сторон невырожденного треугольника всегда больше третьей стороны. Тем самым утверждение задачи доказано.

Относительно самой задачи и приведенного выше решения нам бы хотелось сделать два замечания:

1. Утверждение задачи можно было бы сформулировать следующим образом: выполнение неравенства

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$$

необходимо для того, чтобы из отрезков длиной a, b, c можно было построить треугольник.

Нетрудно видеть, что для положительных чисел a, b, c это условие является не только необходимым, но и достаточным. Действительно, если исходное неравенство выполняется, то

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)>0.$$

Следовательно, либо все три сомножителя положительны, либо два сомножителя отрицательны, а третий положителен. Если все три сомножителя положительны, то существует треугольник с длинами сторон a, b, c. Пусть два сомножителя отрицательны, а третий сомножитель положителен. Например, предположим, что отрицательны первые два сомножителя. Тогда их сумма, равная $2a$, также была бы отрицательна, откуда $a<0$, что невозможно.

2. Если треугольник вырождается в два отрезка, расположенные на одной прямой так, что начало одного совпадает с концом другого, то доказываемое неравенство переходит в равенство.

В т о р о е р е ш е н и е. Разность левой и правой частей доказываемого неравенства после несложных преобразований можно представить в виде

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+\\ +c(a^2+b^2-c^2)-2abc. \quad (1)$$

Если углы, противолежащие сторонам a, b, c треугольника, обозначить α, β, γ и воспользоваться теоремой косинусов, то полученное выражение можно записать так:

$$2abc(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1).$$

Воспользовавшись соотношением $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, преобразуем содержимое круглых скобок дальше:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$$
$$-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=$$
$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Полученное выражение положительно, поскольку $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$ — острые углы и синусы их положительны. Тем самым утверждение задачи доказано.

215. Будем говорить, что класс построен в ряд типа A, если его нельзя разделить на две части так, чтобы в каждой из них девочек и мальчиков было поровну, и в ряд типа B, если такое разбиение возможно, но лишь одним способом.

Пусть X — ученик, стоящий первым. Если X — девочка, то обозначим всех девочек X, а всех мальчиков Y. Если X — мальчик, то обозначим всех мальчиков X, а всех девочек Y. Поскольку в классе учатся n мальчиков и n девочек, то любое построение класса можно записать в виде последовательности букв X и Y, начинающейся с X и содержащей n букв X и n букв Y. (В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие последовательности. Назовем их для краткости словами.) Каждому слову соответствуют два построения класса: при одном построении X означает мальчика, при другом — девочку.

Если слово принадлежит к типу A, то на какой бы букве (кроме последней) его ни оборвать, в укороченном слове букв X окажется по крайней мере на 1 больше, чем букв Y. Действительно, поскольку укороченное слово начинается с X и при увеличении длины слова число иксов и игреков меняется на единицу, то «перевес» игреков над иксами может быть достигнут лишь после того, как число иксов и игреков в каком-то укороченном слове станет одинаковым. Но поскольку рассматриваемое слово принадлежит типу A, то это невозможно.

Слово принадлежит типу B тогда и только тогда, когда его можно разбить на два более коротких слова типа A. Первое из этих «подслов» начинается с буквы X, второе может начинаться и с X, и с Y. Если второе подслово типа A начинается с Y, то, заменив в нем X на Y, а Y на X, мы получим снова слово типа A. Поэтому все слова типа B разбиваются на пары, в каждой из которых первые подслова одинаковы, а вторые получаются указанной заменой букв. Таким образом, утверждение задачи будет доказано, если мы убедимся в том, что каждому слову типа A взаимнс однозначно соответствует слово типа B, у которого обе части типа A начинаются с буквы X.

Требуемое соответствие можно получить, переставив букву X, с которой начинается вторая часть слова типа B (сама вторая часть представляет собой укороченное слово типа A), на первое место перед всем словом.

Докажем, что полученное слово принадлежит типу A. Действительно, как было показано выше, оборвав первую часть (укороченное слово типа A) исходного слова типа B на любой букве, кроме последней, мы получим новое (укороченное) слово, содержащее иксов по крайней мере на один больше, чем игреков. Обрывая слово, которое возникло после того, как перед первой буквой X поставили букву X, с которой начиналась вторая часть типа A исходного слова, на любой букве, начиная со второй, мы будем получать укороченные слова, содержащие иксов по крайней мере на два больше, чем игреков, до тех пор, пока не дойдем до последней буквы первой части. Эта буква в новом слове стоит на том месте, где в исходном слове типа B стояла первая буква второй части типа A. Оборвав новое слово на последней букве первой части типа A исходного слова, мы получим укороченное слово, которое содержит иксов по крайней мере на один больше, чем игреков. Обрывая новое слово на любой букве, начиная со второй буквы второй части типа A исходного слова, мы будем получать укороченные слова, в которых соотношение иксов и игреков будет таким же, как в укороченном слове, полученном при обрыве на той же букве исходного слова типа B. Следовательно, в любом из укороченных слов иксов будет больше, чем игреков. «Равновесие» наступит, лишь когда мы дойдем до самой последней буквы.

Наоборот, в любом слове типа A должна быть еще одна буква, кроме первой, такая, что, оборвав на ней исходное слово, мы получим укороченное слово, в котором иксов на одну букву больше, чем игреков (миновав первую букву, мы, очевидно, получаем «перевес» в одну букву для иксов). Впишем X после этой буквы, а самую первую букву X исходного слова зачеркнем. Новое слово начинается с буквы X, поскольку если бы второй буквой исходного слова была буква Y, то, оборвав его на второй букве, мы получили бы разбиение слова типа A на две части, каждая из которых содержит одинаковое число иксов и игреков (по условиям задачи исходное слово содержит не менее четырех букв), что невозможно. Зачеркнув первую букву X, мы уменьшили разность между числом букв X и Y во всех укороченных словах, правый конец которых находится не дальше вписанной буквы X, на 1. Для укороченного слова, кончающегося на букве, стоящей перед вписанной буквой X, эта разность до зачеркивания первой буквы X была равна 1. Следовательно, после зачеркивания разность между числом иксов и игреков для этого слова стала равной нулю. Следовательно, оборвав получившееся слово на этой букве, но не раньше, мы разобьем его на две части, в каждой из которых букв X и Y будет поровну. Любое укороченное слово, конец которого находится не левее вписанной буквы X, будет содержать больше иксов, чем игреков, поскольку в этом слове соотношение иксов и игреков будет таким, как в укороченном слове той же длины, получающемся из исходного слова.

Итак, взаимно однозначное соответствие между словами типа A и словами типа B, обе части типа A которых начинаются с буквы X, установлено.

Тем самым утверждение задачи доказано.

216. Предположим, что автострады проложены по северной и южной границам территории. Обозначим наблюдательные посты в том порядке, в каком мы встретили бы их, двигаясь с запада на восток, A_1, A_2, A_3, A_4. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — расстояния от соответствующих наблюдательных постов до западной границы территории.

Среди чисел a_1, a_2, a_3, a_4 могут быть равные. В общем случае они удовлетворяют неравенству $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$.

Если $a_3 - a_2 \leqslant 5$ км, то проведем одну подъездную дорогу от северной автострады до южной так, чтобы она проходила между наблюдательными постами A_2 и A_3, или, если $a_2 = a_3$, по меридиану, на котором лежат оба наблюдательных поста. Затем соединим все посты с построенной дорогой подъездными путями, идущими с запада на восток или с востока на запад (рис. 217, *a*).

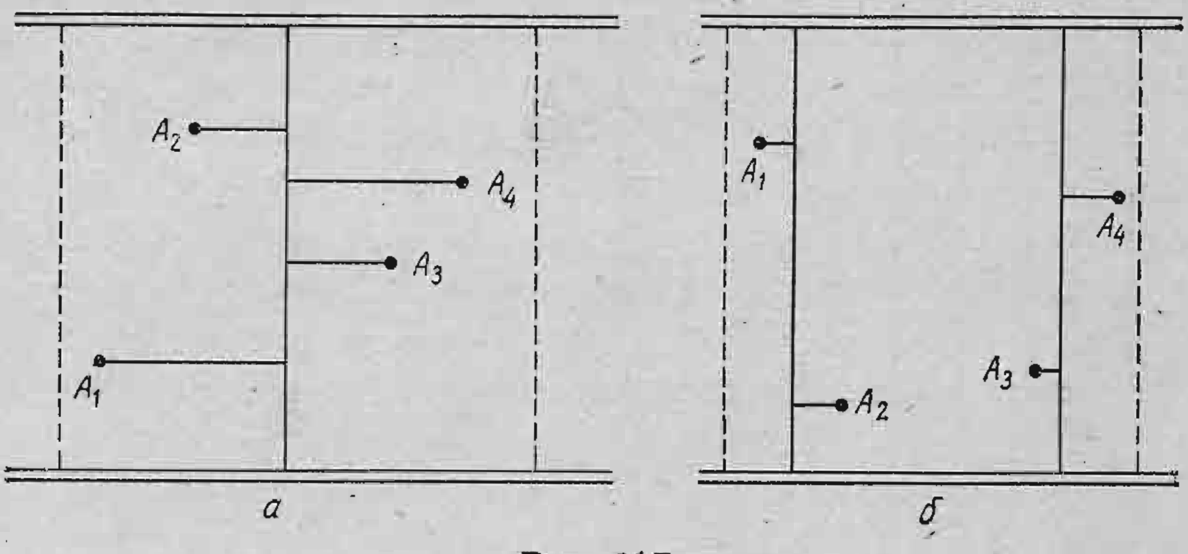


Рис. 217.

Длина дороги, соединяющей северную автостраду с южной, равна 10 км. Общая длина подъездных путей, ведущих к дороге от наблюдательных постов A_1 и A_4, не превышает 10 км, поскольку $a_4 - a_1 \leqslant 10$ км. По предположению длина подъездных путей, ведущих к дороге от наблюдательных постов A_2 и A_3, не превышает 5 км. Таким образом, общая протяженность всех подъездных дорог в рассматриваемом случае не превышает 25 км.

Если $a_3 - a_2 \geqslant 5$ км, то проведем по одной дороге, идущей с севера на юг между наблюдательными постами A_1, A_2 и A_3, A_4. Если $a_1 = a_2$ или $a_3 = a_4$, то соответствующую дорогу проведем по меридиану, на котором лежат оба поста. Если же хотя бы одно из равенств нарушено, то соединим посты с проходящей между ними дорогой подъездными путями, идущими с запада на восток или с востока на запад (рис. 217, *б*). Общая протяженность подъездных дорог в этом случае составляет

$$20 + a_2 - a_1 + a_4 - a_3 = 20 + (a_4 - a_1) - (a_3 - a_2) \leqslant$$
$$\leqslant 20 + 10 - 5 = 25 \text{ км}.$$

Таким образом, и при $a_3 - a_2 \geqslant 5$ км общая протяженность подъездных путей не превышает 25 км.

Покажем, что меньшая протяженность подъездных дорог оказывается недостаточной при некотором расположении наблюдательных постов, например, в том случае, если посты размещены на границах территории и отстоят от юго-западного, северо-западного, северо-восточного и юго-восточного углов к северу, востоку, югу

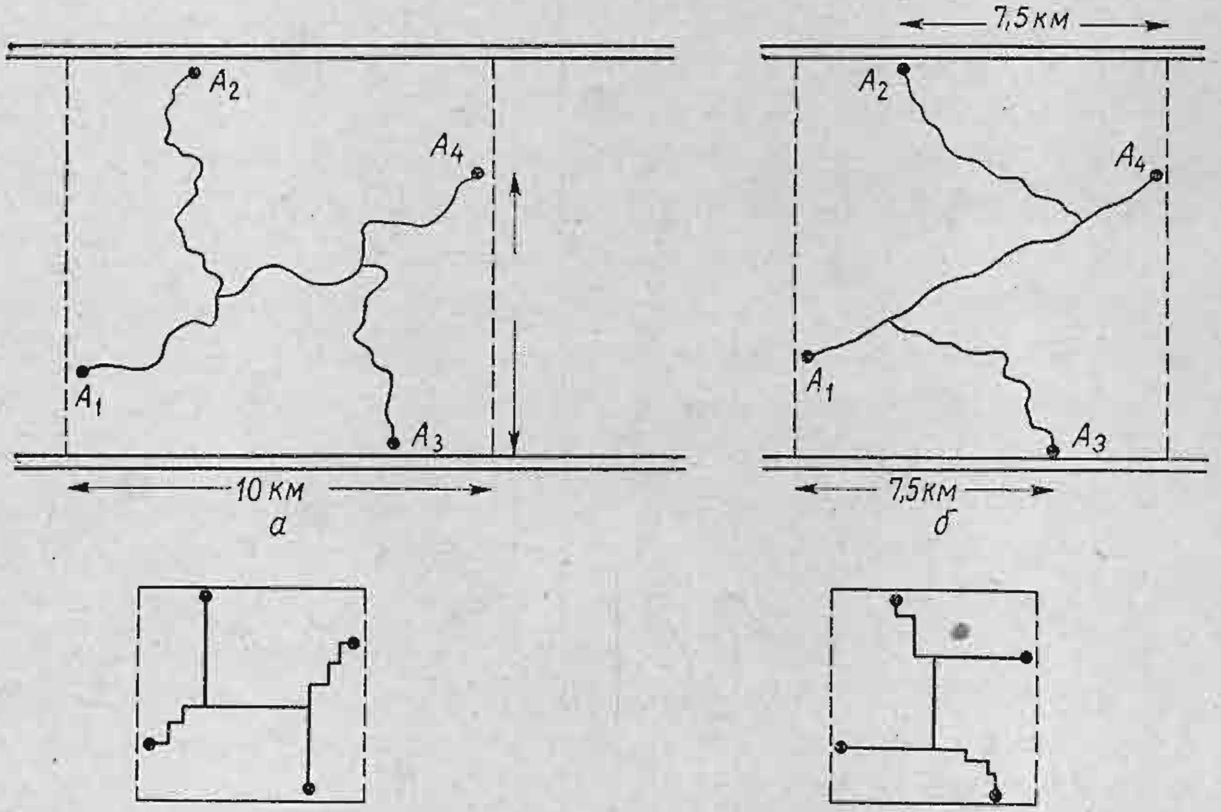


Рис. 218.

и западу соответственно на 2,5 км. Обозначим посты в указанной последовательности A_1, A_2, A_4, A_3.

Кратчайшая схема подъездных путей может состоять не более чем из двух несвязанных (то есть отдельных) частей, поскольку если бы она содержала не менее трех несвязанных частей, то общая протяженность дорог, идущих с севера на юг, составила бы не менее 30 км.

Если схема подъездных дорог состоит из двух несвязанных частей, то общая протяженность дорог, идущих с севера на юг, составляет 20 км. Каждая из связанных частей на схеме подъездных дорог содержит не менее двух наблюдательных постов. Если из поста A_1, следуя по подъездным дорогам, можно попасть на пост A_3 или A_4, то сумма участков дорог, идущих с запада на восток (или с востока на запад), не меньше чем 7,5 км. Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, если из поста A_4 можно попасть на пост A_2. Если же из поста A_1 по подъездным дорогам можно добраться лишь до поста A_2, а из поста A_3 — лишь до поста A_4, то схема подъездных путей должна содержать не менее двух участков, идущих с запада на восток, протяженностью до 2,5 км.

Наконец, предположим, что схема подъездных путей связна и позволяет из любого наблюдательного поста попасть на любой другой пост. Рассмотрим путь, ведущий из A_1 в A_4. Нас будет интересовать та точка, откуда можно впервые свернуть на пост A_2 или A_3. Если, двигаясь от A_1, мы сначала можем свернуть на A_2 (рис. 218, *а*), то «вертикальные» отрезки путей, ведущих из A_1 в A_2 и из A_4 в A_3, не имеют общих точек. Протяженность каждого из них составляет не менее 7,5 км. Протяженность той части подъездных путей, которые позволяют попасть из A_1 в A_4, по горизонтали не меньше 10 км. Следовательно, общая протяженность подъездных путей не меньше 25 км.

Если же, следуя из A_1 в A_4, мы можем сначала свернуть на наблюдательный пост A_3 (рис. 218, *б*), то «горизонтальные» участки путей, ведущие из A_1 в A_3 и из A_4 в A_2, не имеют общих точек, а их общая протяженность не меньше 15 км. Поскольку с северной автострады на южную нельзя попасть, если протяженность дороги меньше 10 км, то общая длина подъездных путей и в этом случае не меньше, чем 25 км.

Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

217. По условиям задачи разности двух соседних биномиальных коэффициентов $C_n^{k-1} - C_n^k$ и $C_n^k - C_n^{k+1}$ равны. Следовательно, разность разностей равна нулю:

$$C_n^{k-1} - 2C_n^k + C_n^{k+1} = 0. \qquad (1)$$

Мы предполагаем, что $k - 1 \geqslant 0$ и $k + 1 \leqslant n$, то есть что

$$1 \leqslant k \leqslant n - 1. \qquad (2)$$

Если равенство (1) (и только в этом случае!) выполнено, то три биномиальных коэффициента C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1} образуют арифметическую прогрессию.

Умножив обе части равенства (1) на число $(k+1)!(n-k+1)!/n!$ (поскольку мы предполагаем, что выполняются неравенства (2), то это число существует и положительно), получим

$$k(k+1)-2(k+1)(n-k+1)+(n-k)(n-k+1)=0.$$

Таким образом, равенство (1) выполняется в том и только в том случае, если

$$n^2-4nk+4k^2-n-2=0. \tag{3}$$

Поскольку при этом

$$n=(n-2k)^2-2$$

— целое число, на 2 меньшее квадрата некоторого другого целого числа, то n можно представить в виде

$$n=u^2-2,$$

где u — натуральное число, удовлетворяющее соотношение $u=n-2k$ (или $u=2k-n$), откуда

$$k=k_1=\frac{n-u}{2}=\frac{u^2-u}{2}-1=C_u^2-1$$

или

$$k=k_2=\frac{n+u}{2}=C_{u+1}^2-1.$$

Из последних соотношений видно, что k принимает целые значения.

Для того чтобы число n принимало положительные значения, u должно удовлетворять неравенству $u \geqslant 2$. Но при $u=2$ значения k_1 и k_2 не удовлетворяют неравенству (2).

Если $u \geqslant 3$, то

$$k_1=C_u^2-1 \geqslant 1 \quad \text{и} \quad k_1=\frac{n-u}{2}<n,$$

а поскольку $k_1+k_2=n$ и $k_1<k_2$, то оба значения k удовлетворяют неравенству (2).

Итак, начав с необходимого и достаточного условия того, что три биномиальных коэффициента C_n^{k-1}, C_n^k C_n^{k+1} образуют арифметическую прогрессию, мы пришли к утверждению, равносильному первоначальному утверждению задачи: соотношению (3) удовлетворяют пары чисел n, k, определяемых при $u>2$ выражениями $n=u^2-2$ и $k=C_u^2-1$ или $k=C_{u+1}^2-1$.

По поводу приведенного выше решения необходимо заметить следующее:

1. Получаемые при $u = 2$ значения $k = 0$ и $k = 2$ можно считать допустимыми, если условиться, что при $k < 0$ или $k > n$ биномиальный коэффициент C_u^k обращается в нуль. Тогда биномиальные коэффициенты, о которых говорится в условиях задачи, образуют либо арифметическую прогрессию 0, 1, 2, либо арифметическую прогрессию 2, 1, 0.

2. В связи с задачей 217 естественно возникает вопрос: могут ли четыре и более последовательных биномиальных коэффициента образовать арифметическую прогрессию? Нетрудно видеть, что ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, в такой арифметической прогрессии первый, второй и третий биномиальные коэффициенты так же, как и второй, третий и четвертый биномиальные коэффициенты, образовывали бы арифметическую прогрессию, состоящую из трех членов. Однако, как следует из решения задачи, два значения k, соответствующие заданному значению n, порождают тройки биномиальных коэффициентов, расположенных симметрично относительно середины разложения $(1+x)^n$. Следовательно, одна из арифметических прогрессий, состоящих из трех биномиальных коэффициентов, должна была бы быть возрастающей, а другая — убывающей. Таким образом, четыре последовательных биномиальных коэффициента не могут быть последовательными членами одной и той же арифметической прогрессии.

3. Арифметическую прогрессию можно определить, как последовательность, у которой разности между соседними членами образуют последовательность, состоящую из повторений одного и того же числа. Аналогично можно было бы определить последовательность (назовем ее арифметической прогрессией второго порядка), у которой разности между соседними членами образовывали обычную арифметическую прогрессию («первого порядка»). В общем случае назовем последовательность арифметической прогрессией k-го порядка ($k > 1$), если разности между соседними членами образуют арифметическую прогрессию $(k-1)$-го порядка.

Могут ли четыре последовательных биномиальных коэффициента образовывать арифметическую прогрессию второго порядка? Эта задача аналогична исходной и сводится к решению уравнения третьего порядка, связывающего допустимые значения n и k. Однако следующие простые рассуждения позволяют получить бесконечно много решений новой задачи без помощи диофантовых уравнений третьего порядка. Если число n нечетно, то есть представимо в виде $2u+1$, то два средних биномиальных коэффициента равны и биномиальный коэффициент, предшествующий первому из них, равен биномиальному коэффициенту, следующему за вторым. Следовательно, разности биномиальных коэффициентов

$$C_{2u+1}^{u-1},\ C_{2u+1}^{u},\ C_{2u+1}^{u+1},\ C_{2u+1}^{u+2}$$

равны a, 0, $-a$ и образуют арифметическую прогрессию. Это замечание позволяет без труда решать уравнение третьего порядка, связывающее допустимые значения n и k: многочлен, стоящий в левой части этого уравнения, разлагается в произведение линейного множителя и многочлена второго порядка, после чего решение легко доводится до конца.

218. Напомним, что точки с целочисленными координатами образуют на плоскости целочисленную решетку (см. III. 67); сами точки называются при этом точками или узлами решетки.

Первое решение. Утверждение задачи состоит в том, что для любого положительного числа p можно указать такое число R, что при всех $r > R$ найдется узел решетки, отстоящий от окружности радиуса r с центром в начале координат на расстояние $\delta(r) < p$.

Выберем ту из прямых, параллельных оси y, которая имеет общие точки с проведенной окружностью радиусом r и отстоит от начала координат O на наибольшее расстояние, выражаемое целым числом (рис. 219). Если u — расстояние от прямой до оси y, то

$$u \leqslant r < u+1 \quad (u \text{ — целое число}). \qquad (1)$$

Точка пересечения прямой с окружностью заключена между узлами (u, v) и $(u, v+1)$, принадлежащими прямой и удовлетворяющими неравенству

$$u^2+v^2 \leqslant r^2 < u^2+(v+1)^2 \quad (v \text{ — целое число}). \qquad (2)$$

Соединим ближайший к окружности узел A, лежащий на прямой вне окружности, отрезком прямой с началом координат O. Пусть A_1 — точка пересечения отрезка OA с окружностью. Тогда

$$\delta(r) \leqslant AA_1 = OA - r = \sqrt{u^2 + (v+1)^2} - r =$$
$$= \frac{u^2 + (v+1)^2 - r^2}{\sqrt{u^2 + (v+1)^2} + r} = \frac{2v + 1 - (r^2 - u^2 - v^2)}{\sqrt{u^2 + (v+1)^2} + r} < \frac{2v+1}{2r}, \quad (3)$$

поскольку в силу первой половины неравенства (2) отброшенный в числителе член неотрицателен, а в силу второй половины неравенства (3) величина, стоящая в знаменателе под знаком квадратного корня, больше r^2.

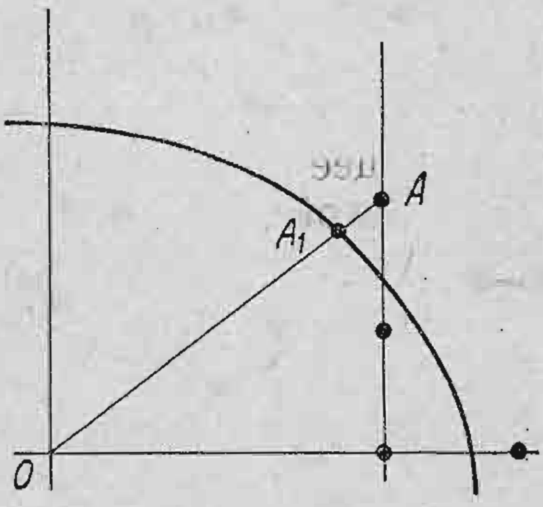


Рис. 219.

Соотношение между v и r мы находим из неравенств (1) и (2):

$$v \leqslant \sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{(r-u)(r+u)} < \sqrt{1 \cdot (r + r)} = \sqrt{2r}.$$

Следовательно, если, например, $r > 1$, то

$$\delta(r) < \frac{2\sqrt{2r} + 1}{2r} < \frac{3\sqrt{r} + \sqrt{r}}{2r} = \frac{2}{\sqrt{r}}.$$

Таким образом, если

$$\frac{2}{\sqrt{r}} < p, \quad \text{то есть} \quad r > \frac{4}{p^2} \quad \text{и} \quad r > 1,$$

то $\delta(r)$ заведомо меньше p, что и требовалось доказать.

Второе решение. Расстояние от точек A или B (рис. 220) до окружности можно вычислить различными способами. Пусть C — точка пересечения отрезка AB с окружностью, а D — точка пересечения касательной к окружности, проведенной через точку C, и проходящей через точку B прямой, параллельной оси x. Расстояние от точки B до окружности меньше, чем длина отрезка BD, поэтому из подобия треугольников BCD и A_0OC получаем

$$\delta(r) < BD = \frac{BD}{1} = \frac{BD}{AB} < \frac{BD}{BC} = \frac{A_0C}{A_0O} =$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{u} < \frac{\sqrt{2r}}{u} < \frac{\sqrt{2r}}{r-1} < \frac{\sqrt{2r}}{r - \frac{r}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}},$$

если $r > 2$. Следовательно, если одновременно выполняются неравенства $r > 2$ и $r > 8/p^2$, то $\delta(r) < p$.

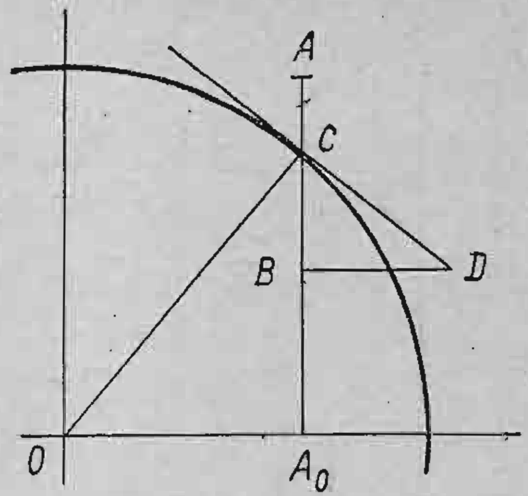


Рис. 220.

Третье решение. Поскольку на прямой $x = u$ (u — положительное целое число) узлы решетки отстоят друг от друга на расстоянии, равном 1, то достаточно доказать, что для любого $p > 0$ и достаточно большого

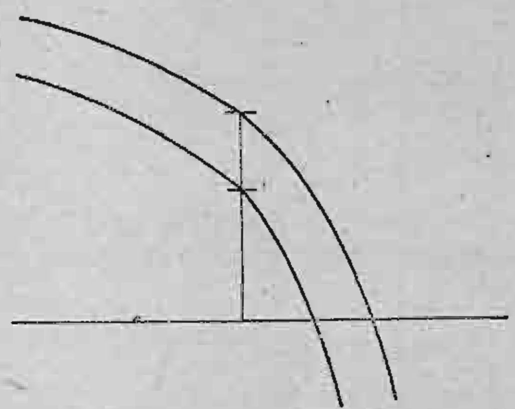


Рис. 221.

числа r длина отрезка прямой $x = u$, заключенного между окружностями радиусов r и $r + p$ с центром в начале координат (рис. 221) (и находящегося, например, в первом квадранте), при подходящем u не меньше 1. Действительно, если длина этого отрезка больше или равна 1, то он содержит по крайней мере один узел решетки, отстоящий от окружности радиусом r с центром в начале координат на расстояние, которое меньше p.

Выберем число u так, чтобы выполнялись неравенства

$$u \leqslant r < u+1.$$

Если $u+1 \leqslant r+p$, то точка $(u+1, 0)$ лежит внутри или на самой окружности радиусом $r+p$ с центром в начале координат. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда

$$u \leqslant r < r+p < u+1. \tag{3}$$

Неравенства (3) могут выполняться, если $p < 1$.

Длину h отрезка прямой $x = u$, заключенного между окружностями радиусом r и $r+p$ с центрами в начале координат, запишем в виде

$$h = \sqrt{(r+p)^2 - u^2} - \sqrt{r^2 - u^2} = \frac{(r+p)^2 - r^2}{\sqrt{(r+p)^2 - u^2} + \sqrt{r^2 - u^2}}.$$

Числитель правой части последнего неравенства больше $2rp$. Если $r > 1$, то стоящие в знаменателе квадратные корни можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{(r+p)^2 - u^2} =$$
$$= \sqrt{(r+p-u)(r+p+u)} < \sqrt{1(r+1+r)} < \sqrt{3r},$$
$$\sqrt{r^2-u^2} = \sqrt{(r-u)(r+u)} < \sqrt{1 \cdot 2r} = \sqrt{2r}.$$

Итак,

$$h > \frac{2rp}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{r}} = \frac{2p}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\sqrt{r}.$$

Таким образом, $h > 1$, если

$$r > \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{4p^2} = \frac{5+\sqrt{24}}{4} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Тем самым утверждение задачи доказано.

Непосредственное отношение к задаче 218 имеет следующий вопрос: для любого натурального числа N найти такое число $M(N)$, чтобы целое число, заключенное между N и $N+M(N)$, можно было представить в виде суммы квадратов двух чисел.

Следуя первому решению, выберем радиус окружности r равным $\sqrt{N}$ (то есть положим $r^2 = N$). Пусть $n = u^2 + (v+1)^2$ — ближайшее к N целое число, представимое в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Тогда

$$n-N=u^2+(v+1)^2-r^2<2v+1,$$

а поскольку $n-N$ — целое число, то

$$n-N\leqslant 2v<2\sqrt{2r}=\sqrt{8}\sqrt[4]{N}.$$

Таким образом, между числами N и $N+\sqrt{8}\sqrt[4]{N}$ всегда заключено целое число, представимое в виде суммы квадратов двух целых чисел.

219. Назовем для краткости *вершиной* точку, принадлежащую одновременно трем плоскостям. По условиям задачи любые три из n заданных плоскостей определяют вершину и притом только одну.

Заметим также, что любые четыре из n заданных плоскостей определяют один (и только один) тетраэдр. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателям. Разумеется, тетраэдр, определяемый какими-то четырьмя плоскостями, могут рассекать другие плоскости, поэтому не каждый такой тетраэдр будет входить в число тех частей, на которые делят пространство n заданных плоскостей.

Пусть S — любая из заданных плоскостей. Она делит все пространство на два полупространства. Пусть P — ближайшая к S из вершин, расположенных в одном и том же полупространстве и не принадлежащих плоскости S, а S_1, S_2, S_3 — плоскости, определяющие вершину P. Тогда плоскости S, S_1, S_2, S_3 высекают в пространстве тетраэдр T. Мы утверждаем, что *ни одна из остальных $n-4$ заданных плоскостей не пересекает тетраэдр T, то есть T — одна из частей, на которые n заданных плоскостей делят пространство.*

Предположим, что одна из заданных плоскостей S' пересекает тетраэдр T. Пусть A, B, C — вершины тетраэдра T, отличные от вершины P. Вершины A, B и C принадлежат плоскости S. Ясно, что плоскость S' пересекает какой-то из отрезков AP, BP, CP. Предположим, например, что плоскость S' пересекает отрезок AP в точке Q. Тогда Q — вершина, поскольку AP — линия пересечения двух заданных плоскостей, отличных от плоскости S', в силу чего точка Q принадлежит одновременно трем заданным плоскостям. Но точка Q расположена к плоскости S ближе, чем точка P, что противоречит выбору точки P. Тем самым утверждение доказано.

Наши рассуждения применимы к любой из заданных плоскостей. Следовательно, любая из них определяет тетраэдр, входящий в число тех частей, на которые n заданных плоскостей делят пространство. Более того, если вершины имеются не по одну, а по обе стороны от плоскости S, то такая плоскость определяет не один, а два тетраэдра, входящих в число частей, на которые заданные плоскости делят пространство.

Мы утверждаем, что *среди заданных плоскостей имеется не более трех таких, что все не принадлежащие*

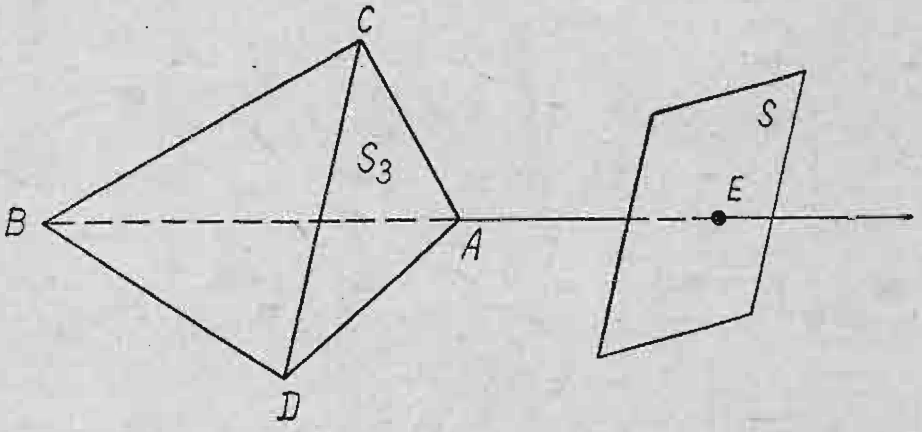


Рис. 222.

им вершины расположены от них по одну и ту же сторону. Предположим, что имеются четыре такие плоскости: S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, образованный плоскостями S_1, S_2, S_3, S_4. (Плоскость S_1 совпадает с плоскостью ABC, плоскость S_2 — с плоскостью ABD, плоскость S_3 — с плоскостью ACD и плоскость S_4 — с плоскостью BCD.) Поскольку $n \geqslant 5$, то среди заданных плоскостей имеется по крайней мере еще одна плоскость S, отличная от S_1, S_2, S_3, S_4. Ясно, что плоскость S не может пересекать все шесть ребер тетраэдра $ABCD$ одновременно, поэтому, например, с прямой, на которой лежит ребро AB, плоскость S пересекается в точке E, расположенной вне отрезка AB. Предположим, что точка E лежит на продолжении ребра AB за вершину A. Тогда вершины E и B будут находиться по разные стороны от плоскости S_3 (совпадающей с плоскостью ACD), что противоречит принятому ранее предположению (рис. 222).

Подсчитаем теперь, сколько тетраэдров могут содержаться среди частей, на которые n заданных плоскостей делят пространство. Для этого подсчитаем число тетраэдров, опирающихся на каждую заданную плоскость. Как было показано выше, на любую заданную плоскость, за исключением не более трех плоскостей, опираются не менее двух тетраэдров. На каждую «исключительную» плоскость опирается не менее одного тетраэдра. Следовательно, число тетраэдров, опирающихся на все заданные плоскости, не менее $2n-3$. Однако поскольку при таком подсчете каждый тетраэдр входит 4 раза (по одному разу на каждую грань), то общее число тетраэдров не меньше $(2n-3)/4$, что и требовалось доказать.

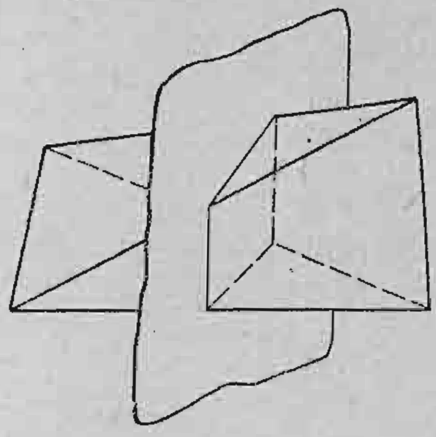


Рис. 223.

По поводу задачи 219 и ее возможных решений необходимо заметить следующее:

1. Плоскость, пересекающая тетраэдр, не обязательно делит его на две части, каждая из которых является тетраэдром. Если провести через тетраэдр плоскость, которая разделяет два ребра, не сходящихся в одной вершине, но не пересекает их, то получатся две «крыши» — два пятигранника (рис. 223).

2. Аналог утверждения задачи на плоскости гораздо более прост: *если на плоскости задано n прямых, расположенных так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не проходят через одну и ту же точку, то среди частей, на которые эти прямые делят плоскость, имеются не менее $(2n-2)/3$ треугольников.*

220. После того как кто-нибудь из читателей входит в библиотеку, дальнейшая судьба его может сложиться по-разному, причем это различие существенно с точки зрения условий задачи. Во-первых, он может обнаружить, что оставил дома свой читательский билет и тотчас же покинуть библиотеку. Ясно, что в этом случае число сидящих в читальном зале не изменится и на обеих досках забывчивый читатель запишет одно и то же число. Во-вторых, придя в библиотеку, читатель может остаться в ней на некоторое время. В этом случае после прихода нового читателя число находящихся в читальном зале людей возрастает.

Рассмотрим второй случай более подробно.

Читатели, безропотно подчинившиеся столь странным порядкам в библиотеке, вряд ли станут возражать, если мы выскажем одно замечание, ничего не меняющее с точки зрения условий задачи, но позволяющее несколько упростить рассуждения. Можно отвлечься от индивидуальных особенностей читателей, поскольку совершенно безразлично, кто из них в данный момент входит в читальный зал и кто покидает его. В частности, мы вправе считать, что из зала всегда выходит тот, кто пришел последним.

Рассмотрим пример. Предположим, что на спине у одного из многотерпеливых читателей мы нарисовали красной краской большую букву A. Придя в библиотеку, читатель A записал на «доске для входящих», что в момент его появления в зале находилось n читателей. Затем читатель A садится и приступает к работе, а остальные читатели продолжают ходить то туда, то сюда. Предположим, что по прошествии некоторого времени в зале прибавилось k читателей. Читатель A приподнялся было со своего места и направился к двери, но заместитель заведующего библиотекой преградил ему путь и настоятельно попросил остаться. Вместо A заместитель заведующего предложил покинуть библиотеку последнему из пришедших читателей, который в самом низу «доски для входящих» поставил число $n+k$. С точки зрения задачи несущественно, что читатель A вынужден был весь день торчать в читальном зале. К тому же заведующий библиотекой, узнав о самоуправстве своего заместителя, уволил его.

В силу сделанного нами замечания о неразличимости читателей и предположения о том, что уходит всегда тот, кто пришел последним, все, кто уходит из библиотеки, пишут на «доске для уходящих» те же числа, которые они писали на «доске для приходящих». Если начиная с некоторого момента времени поток посетителей библиотеки иссякает, то очередь на выход устанавливается в порядке, обратном тому, в котором читатели пришли в библиотеку. Дождется своей очереди и изрядно отощавший читатель A, ставший невольно жертвой самоуправства (не столько заместителя заведующего библиотекой, сколько нашего). Так один за другим библиотеку покинут все читатели. Следовательно, каждому читателю можно поставить во взаимно однозначное соответствие пару чисел. Поскольку внесенные нами изменения были несущественными с точки зрения условий задачи, то мы пришли бы к тому же результату и в том случае, если бы вовсе не вносили их. Таким образом, на обоих досках (для «входящих» и «выходящих» читателей) за день появятся одни и те же числа, хотя и в различном порядке.

221. Разобьем решение задачи на две части: сначала докажем, что все квадраты со сторонами 1, $^1/_2$, $^1/_3$, ..., $^1/_n$, ... можно разместить в квадрате со стороной 1,5

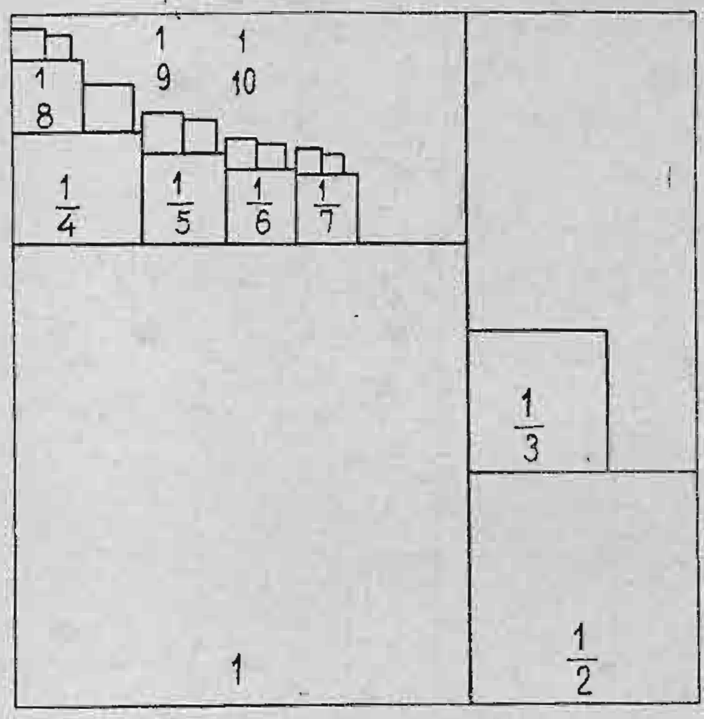


Рис. 224.

так, чтобы никакие два квадрата не налегали друг на друга, а затем убедимся в том, что члены заданной бесконечной последовательности нельзя разместить в квадрате с меньшей длиной сторон так, чтобы квадраты со сторонами 1 и $^1/_2$ не налегали друг на друга.

Итак, докажем, что все квадраты, образующие заданную бесконечную последовательность, можно разместить в квадрате со стороной 1,5 так, чтобы никакие два из них не налегали друг на друга.

«Пристроим» к квадрату со стороной 1 квадрат со стороной $^1/_2$, а в образовавшийся уголок поместим квадрат со стороной $^1/_3$ (рис. 224). На верхнем основании единичного квадрата расположим квадраты со сторонами $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$ и $^1/_7$. На квадрате со стороной $^1/_k$ ($k =$ 4, 5, 6, 7) построим квадрат с вдвое меньшей стороной и рядом с ним — квадрат со стороной $1/(2k+1)$. Тем самым будут размещены квадраты со сторонами $^1/_8, \ldots, ^1/_{15}$. Действуя точно так же (строя квадраты со сторонами $1/2k$ и $1/(2k+1)$ на квадрате со стороной $1/k$), в следующем ряду разместим квадраты со сторонами $^1/_{16}, \ldots$ $\ldots, ^1/_{31}$ и т. д.

Квадраты со сторонами $1/2k$ и $1/(2k+1)$ «умещаются» на верхнем основании квадрата со стороной $1/k$, поскольку

$$\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}<2\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}.$$

Квадраты со сторонами $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$ не выходят за «ширину» единичного квадрата, поскольку

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<4\cdot\frac{1}{4}=1.$$

Суммарная «высота» квадратов, построенных на верхнем основании единичного квадрата, не превосходит $^1/_2$:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{8k}+\ldots=\frac{2}{k}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Следовательно, все квадраты, образующие заданную бесконечную последовательность, умещаются в квадрате со стороной 1,5, причем так, что никакие два квадрата не налегают друг на друга. Итак, первая часть утверждения задачи доказана.

Для доказательства второй части утверждения задачи расположим квадрат N_1 со стороной 1 и квадрат N_2 со стороной $^1/_2$ внутри некоторого квадрата N так, чтобы квадраты N_1 и N_2 не имели общих точек (рис. 225). Тогда существует прямая e, разделяющая квадраты N_1 и N_2. Если прямая e параллельна одной из сторон квадрата N, то она разбивает его на два прямоугольника. Стороны этих прямоугольников, перпендикулярные прямой e, не меньше длин сторон, содержащихся в прямоугольниках квадратов. Следовательно, в этом случае сторона квадрата N не меньше суммы сторон квадратов N_1 и N_2.

Если прямая e не параллельна сторонам квадрата N (то есть пересекает либо стороны квадрата N, либо их

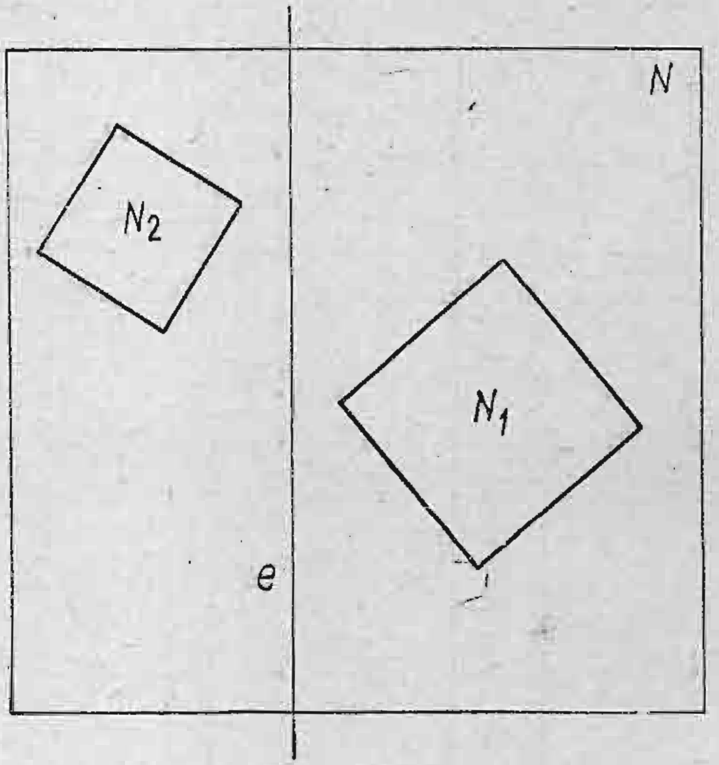


Рис. 225.

продолжения), то по обе стороны от e найдется по одной наиболее удаленной вершине C_1 и C_2 (рис. 226). Выходящие из вершин C_1 и C_2 лучи, которым принадлежат

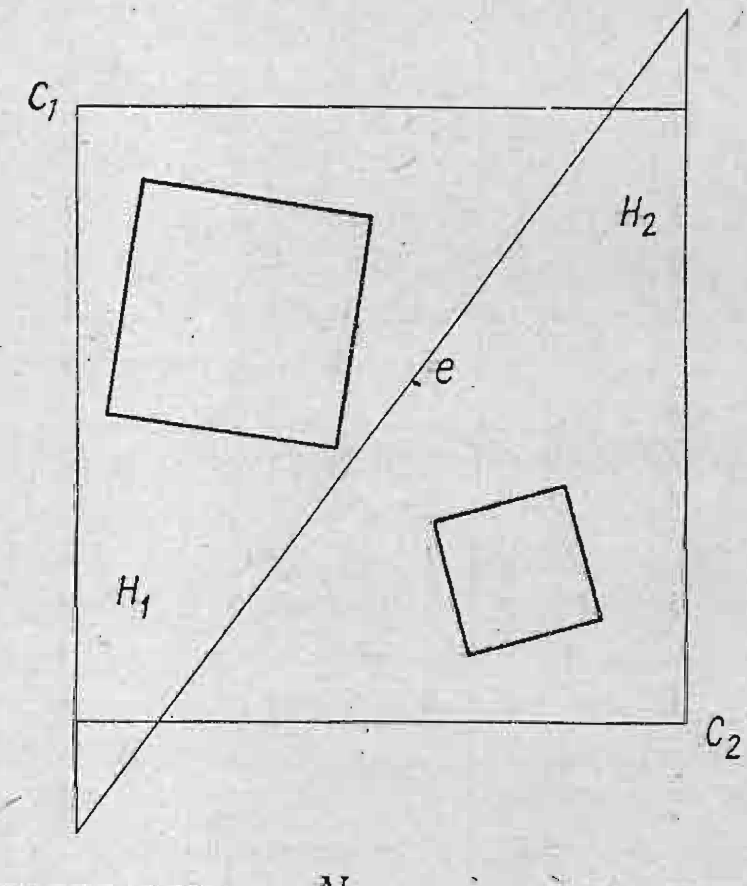


Рис. 226.

стороны квадрата N, пересекаясь с прямой e, образуют два прямоугольных треугольника H_1 и H_2, содержащих квадраты N_1 и N_2. Утверждение задачи будет доказано, если мы убедимся в том, что *среди всех квадратов, содержащихся в данном прямоугольном треугольнике, наибольшим является такой квадрат, у которого две стороны совпадают с катетами, а одна вершина лежит на гипотенузе.*

Действительно, если эта лемма верна, то диагонали наибольших квадратов N_1 и N_2, содержащихся в прямоугольных треугольниках H_1 и H_2, располагаются на диагонали C_1C_2 квадрата N, а поскольку квадраты N_1 и N_2

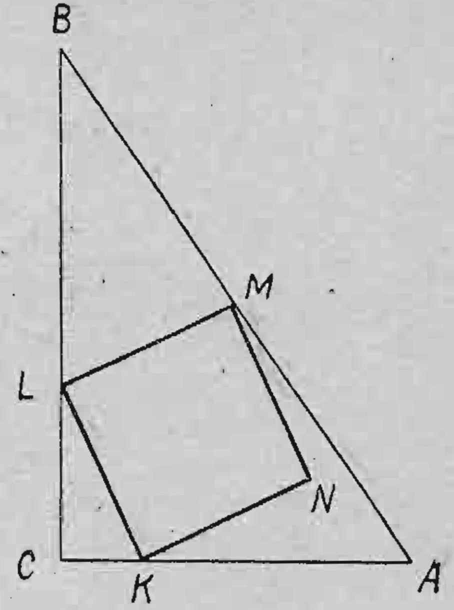


Рис. 227.

не перекрываются, то сумма их диагоналей равна диагонали квадрата N, а сумма сторон — стороне квадрата H, откуда и следует вторая часть утверждения задачи.

Итак, докажем лемму о наибольшем квадрате, содержащемся в прямоугольном треугольнике.

Квадрат $KLMN$, содержащийся в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 227), можно передвинуть так, чтобы вершины квадрата K и L оказались на катетах AC и BC, а вершина M — на гипотенузе BA (в случае необходимости исходный квадрат $KLMN$ можно подвергнуть гомотетии относительно вершины C прямоугольного треугольника с коэффициентом подобия больше 1). Если квадрат $KLMN$ расположен в прямоугольном треугольнике ABC указанным образом, то центр квадрата лежит на биссектрисе прямого угла. Действительно, повернув квадрат на 90° вокруг центра, мы совместим вершину L, принадлежавшую стороне BC, с вершиной K, принадлежавшей стороне AC. Поскольку при этом сторона BC перейдет в AC, то центр квадрата находится на равном расстоянии от AC и BC и, следовательно, лежит на биссектрисе прямого угла ACB.

У тех квадратов, у которых одна из вершин совпадает с вершиной прямого угла C, противоположная вершина отстоит от C на расстояние, не меньшее (равное) длине отрезка CP, где P — точка пересечения биссектрисы прямого угла со стороной MN. Следовательно, достаточно доказать, что в том случае, когда вершины квадрата K и L не совпадают с вершиной прямого угла C, выполняется неравенство $CP > KM$.

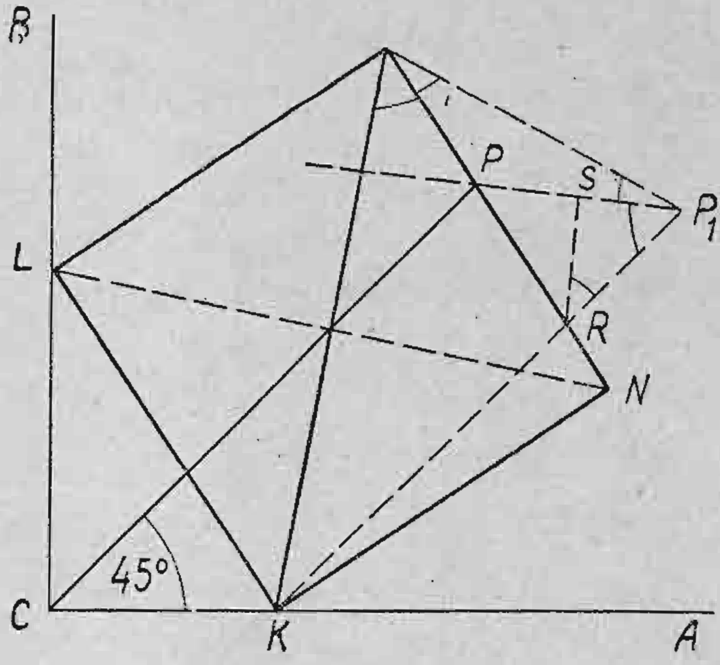


Рис. 228.

Подвергнем отрезок CP параллельному переносу так, чтобы он занял положение KP_1 (рис. 228). Задача сводится к сравнению сторон треугольника KP_1M. Рассмотрим углы этого треугольника. Угол KP_1M, противолежащий стороне KM, и угол KMP_1, противолежащий стороне KP_1, больше 45°.

Пусть R — точка пересечения отрезков KP_1 и MN, а S — основание перпендикуляра, опущенного из точки R на отрезок PP_1. Треугольник P_1RS — равнобедренный и прямоугольный. Кроме того, точка S лежит на прямой PP_1 между точками P и P_1. Следовательно,

$$\angle PRP_1 > \angle SRP_1 = \angle PP_1R,$$

откуда

$$PP_1 > PR.$$

Поскольку $KR \parallel CP$, то CP делит пополам отрезок KM, а значит, и отрезок MR, в силу чего

$$MP = PR < PP_1 \quad \text{и} \quad \angle MP_1P < \angle PMP_1.$$

Но одновременно мы получаем и неравенства

$$\angle MP_1K = \angle MP_1P + 45° < \angle PMP_1 + 45° = \angle KMP_1,$$

откуда и следует доказываемое неравенство

$$KM < KP_1 = CP.$$

222. Первое решение. Обозначим $P_{2k}(x)$ многочлен, стоящий в левой части доказываемого неравенства. Докажем несколько более сильное неравенство, а именно что при всех вещественных значениях x выполняется неравенство

$$P_{2k}(x) > 0.$$

Если x принимает отрицательные значения или обращается в нуль, то ни один из членов $P_{2k}(x)$ не отрицателен, а свободный член равен 1. Следовательно, при $x \leqslant 0$ многочлен $P_{2k}(x)$ удовлетворяет неравенству $P_{2k}(x) \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что тому же неравенству $P_{2k}(x)$ удовлетворяет и при $x \geqslant 2k$. Действительно, при $x \geqslant 2k$ члены $P_{2k}(x)$ можно сгруппировать так, что все слагаемые получившейся суммы будут неотрицательны:

$$P_{2k}(x) = 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \\ + \frac{x^3}{4!}(x-4) + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(x-2k) \geqslant 1.$$

На замкнутом интервале $[0, 2k]$ многочлен $P_{2k}(x)$ — непрерывная функция и, следовательно, достигает своего наименьшего значения.

Если $P_{2k}(x)$ достигает наименьшего значения на одном из концов интервала $[0, 2k]$, то по доказанному ранее это значение положительно. Следовательно, многочлен $P_{2k}(x)$ принимает положительные значения и при всех остальных x из интервала $[0, 2k]$.

Если же $P_{2k}(x)$ принимает наименьшее значение в некоторой внутренней точке x_0 интервала $[0, 2k]$, то при любом x из некоторой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $P_{2k}(x) > P_{2k}(x_0)$. Следовательно, в точке x_0 производная многочлена $P_{2k}(x)$ обращается в нуль:

$$P'_{2k}(x_0) = -1 + x_0 - \frac{x_0^2}{2!} + \ldots + \frac{x_0^{2k-1}}{(2k-1)!} = \\ = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x_0) = 0.$$

Но, поскольку

$$P_{2k}(x_0)=\frac{x_0^{2k}}{(2k)!}>0,$$

многочлен $P_{2k}(x)$ положителен на всей оси x, что и требовалось доказать.

Второе решение. Умножим $P_{2k}(x)$ на

$$P_{2k}(-x)=1-x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

При $j\leqslant 2k$ коэффициент при x^j в произведении $P_{2k}(x)\cdot P_{2k}(-x)$ равен

$$1\cdot\frac{1}{j!}-1\cdot\frac{1}{(j-1)!}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(j-2)!}+\ldots+(-1)^j\frac{1}{j!}\cdot 1=$$
$$=\frac{1}{j}\left(C_j^0-C_j^1+C_j^2-\ldots+(-1)^j C_j^j\right)=0,$$

а при $2k+1\leqslant j\leqslant 4k$ равен

$$(-1)^{j-2k}\frac{1}{(j-2k)!}\cdot\frac{1}{(2k)!}+$$
$$+(-1)^{j+2k+1}\frac{1}{(j-2k+1)!}\cdot\frac{1}{(2k-1)!}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{2k}\frac{1}{(2k)!}\frac{1}{(j-2k)!}=$$
$$=\frac{1}{j!}\left[(-1)^{j-2k}C_j^{j-2k}+(-1)^{j-2k+1}C_j^{j-2k+1}+\ldots+(-1)^{2k}C_j^{2k}\right].$$

Рассмотрим выражение, стоящее в квадратных скобках. Члены, равноудаленные от концов, равны по абсолютной величине. Следовательно, при нечетном j все выражение обращается в нуль. Таким образом, при нечетных значениях j, удовлетворяющих неравенству $2k+1\leqslant j\leqslant 4k$, коэффициент при x^j равен нулю. При четном значении j выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой сумму биномиальных коэффициентов с чередующимися знаками, которая получится, если из суммы всех биномиальных коэффициентов степени j с чередующимися знаками отбросить сумму первых членов

$$C_j^0-C_j^1+C_j^2-C_j^3+\ldots+(-1)^{j-2k-1}C_j^{j-2k-1}$$

и равную ей сумму членов последних $2k$ членов. Сумма отброшенных членов отрицательна, поскольку общее число членов четно и меньше $j/2$, а биномиальные коэффициенты с увеличением верхнего индекса возрастают и знаки их чередуются. Следовательно, выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно, поскольку оно дополняет до нуля удвоенную сумму отброшенных членов, которая отрицательна.

Таким образом, произведение многочленов $P_{2k}(x) \times P_{2k}(-x)$ содержит лишь четные степени x с положительными коэффициентами и поэтому принимает положительные значения на всей числовой оси. Если $x \geqslant 0$, то сомножитель $P_{2k}(-x) > 0$. Поскольку $P_{2k}(x) P_{2k}(-x) > 0$ при всех x, то $P_{2k}(x) > 0$ при $x \geqslant 0$. При $x < 0$ неравенство $P_{2k}(x) > 0$ очевидно (поскольку четные степени x входят в $P_{2k}(x)$ с положительными коэффициентами, а нечетные — с отрицательными). Следовательно, $P_{2k}(x)$ и $P_{2k}(-x)$ принимают на всей числовой оси лишь положительные значения, что и требовалось доказать.

Нетрудно доказать, что

$$C_j^0 - C_j^1 + C_j^2 + \ldots + (-1)^l C_j^l = (-1)^l C_{j-1}^l.$$

Следовательно,

$$P_{2k}(x) P_{2k}(-x) = 1 + \frac{x^{2k+2}}{(2k)!\,(k+1)} + \frac{x^{2k+4}}{(2k)!\,3!\,(k+2)} + \\ + \frac{x^{2k+6}}{(2k)!\,5!\,(k+3)} + \ldots + \frac{x^{4k}}{[(2k)!]^2}.$$

III. НЕМНОГО ТЕОРИИ

К задаче 1.

1. *О делимости чисел. Классификация целых чисел.* Если для некоторого целого числа a и отличного от нуля целого числа b можно найти целое k так, чтобы выполнялось равенство $a = bk$, то говорят, что a делится на b. В этом случае число a называют *кратным* числа b, а число b — *делителем* числа a.

Целые числа a, b и k не обязательно должны быть положительными. Любое из них может быть отрицательным, а числа a и k могут даже обращаться в нуль.

Если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c.

Если a и a' делятся на b, то $a + a'$ и $a - a'$ также делятся на b.

Если b — делитель отличного от нуля целого числа a, то *абсолютная величина* b не может превосходить *абсолютную величину* числа a[1]. Следовательно, всякое отличное от нуля целое число имеет лишь конечное число различных делителей. Например, делителями числа 12 будут ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12.

Обычно при отыскании делителей целого числа ограничиваются тем, что находят лишь его *положительные* делители, поскольку все отрицательные делители можно получить простым изменением знака у положительных делителей.

Положительная и отрицательная единицы (то есть числа $+1$ и -1) не имеют других положительных делителей, кроме 1. Все целые числа, абсолютная величина которых больше 1, имеют по крайней мере два положительных делителя: свою абсолютную величину и 1.

Если целое число p, абсолютная величина которого больше 1, не имеет других положительных делителей, кроме $|p|$ и 1, то p называется *простым числом.*

Если какое-нибудь целое число a, абсолютная величина которого больше 1, имеет по крайней мере один положительный делитель, отличный от $|a|$ и 1 (обозначим этот делитель b), то a можно представить в виде $a = kb$, где не только b, но и k означает целое число, удовлетворяющее неравенству $1 < |k| < |a|$. Таким образом, число a в этом случае представимо в виде произведения двух

---

[1] *Абсолютная величина числа*, которое положительно или равно нулю, совпадает с самим числом. *Абсолютной величиной* отрицательного числа называется положительное число, отличающееся от исходного лишь знаком. Абсолютную величину числа a принято обозначать $|a|$. Например $|5| = |-5| = 5$.

целых чисел, абсолютные величины которых больше 1, но меньше $|a|$. Такое число a называется *составным*.

Нуль делится на любое целое число.

Таким образом, целые числа подразделяются на четыре класса:

положительная и отрицательная единицы,

простые числа,

составные числа и, наконец,

нуль (образующий отдельный класс).

Делимость чисел и многие близкие ей вопросы изучает *теория чисел*. Основы ее были заложены еще в VII—IX книгах «Элементов» Евклида.

2. *Об одном важном свойстве простых чисел.* Второе решение задачи 1 использует следующее свойство простых чисел.

а. *Если ни одно из двух целых чисел не делится на какое-то заданное простое число p, то и произведение их также не делится на p.*

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть натуральные числа[1], потому что, с одной стороны, любое число N имеет те же делители, что и число $-N$, а с другой стороны, отрицательный делитель любого числа при умножении на (-1) переходит в положительный делитель того же числа.

Итак, докажем сформулированное выше утверждение, придав ему следующий вид:

если некоторое натуральное число a не делится на простое число p, то произведение ab делится на p лишь в том случае, если на p делится второй сомножитель b.

Итак, пусть заданы простое натуральное число p и некоторое не делящееся на p число a. Пусть B — множество таких натуральных чисел b, при которых произведение ab делится на p (ясно, что множество B содержит само число p и кратные ему числа). Найдем наименьшее из чисел, содержащихся в B. Такое число существует. Действительно, достаточно среди чисел

$$a\cdot 1,\quad a\cdot 2, \ldots, a\cdot(p-1),\quad a\cdot p \tag{1}$$

найти то, которое делится на p. Ясно, что $a\cdot p$ заведомо делится на p. Если в последовательности (1) $a\cdot m$ — первое число, делящееся на p, то m — наименьшее из чисел принадлежащих множеству B.

Покажем, что, с одной стороны, *все содержащиеся в B числа делятся на m*, а, с другой стороны, числом *m может быть лишь простое число p*.

Действительно, предположим, что какое-то число b, принадлежащее множеству B, не делится на m. Пусть mq — наибольшее из чисел, кратных m, но меньших b, то есть

$$b = mq + r,$$

где r означает одно из чисел $1, 2, \ldots, m-1$. Покажем, что в этом случае число r, меньшее m, должно было бы содержаться в множестве B вопреки определению числа m. Действительно, умножив

---

[1] Обычно натуральными называются целые положительные числа. Небезызвестный Н. Бурбаки причисляет к натуральным числам еще и 0. В нашем случае ни одно из чисел нулем не является, так как они *не* делятся на p, а 0 делится на любое число. — *Прим. ред.*

обе части равенства на a, получим

$$ab = amq + ar,$$

откуда

$$ar = ab - (am) \cdot q.$$

Первый член в правой части делится на p. Второй член также делится на p, поскольку произведение, заключенное в скобки, делится на p. Следовательно, ar также делится на p, но это невозможно, поскольку $0 < r < m$, а m — наименьшее из целых положительных чисел, дающих при умножении на a произведение, кратное p.

Полученное противоречие доказывает, что любое число b, принадлежащее B, должно делиться на m.

Поскольку само число p принадлежит множеству B, то по доказанному выше p делится на m. Но p имеет лишь два положительных делителя: 1 и p, а $m \neq 1$, поскольку по предположению число $a \cdot 1 = a$ не делится на p. Таким образом, должно выполняться равенство $m = p$. Тем самым доказано второе утверждение, а следовательно, и сформулированная выше теорема.

Приведенная в п. а теорема допускает следующее обобщение.

б. *Если ни одно из чисел*

$$a, b, c, d, \ldots$$

не делится на простое число p, то ни одно из произведений

$$ab, \ abc = (ab)\, c, \quad abcd = (abc)\, d, \ldots$$

также не делится на p.

в. По аналогии с тем, как мы выбирали число m, можно доказать следующее простое утверждение, которое неоднократно понадобится нам в дальнейшем.

Если A — непустое множество, элементы которого суть некоторые натуральные числа, то среди содержащихся в A чисел есть наименьшее.

Действительно, если a — любое из натуральных чисел, принадлежащих множеству A, то, рассматривая по порядку числа

$$1, 2, \ldots, a-1, a,$$

мы дойдем (не позже чем на a-м шаге) до первого числа, принадлежащего множеству A. Это число и будет наименьшим среди всех чисел, образующих множество A.

Следует особо подчеркнуть, что мы искали наименьшее число в множестве A, состоящем из натуральных чисел. Если бы, например, речь шла об отыскании наименьшего числа среди всех (не обязательно положительных) четных чисел или среди всех (не обязательно целых) чисел, обратных натуральным, то найти наименьшее число было бы невозможно.

3. *Принцип математической индукции*[1]. а. Существенное место в III. 2 занимает следующее утверждение, которое получило название *принципа наименьшего числа*.

---

[1] Добавлено редактором перевода.

Если A — непустое множество, элементы которого суть некоторые натуральные числа, то среди содержащихся в A чисел есть наименьшее.

Напомним, как доказывалось это утверждение. Поскольку множество A непусто, существует принадлежащее ему натуральное число a. Переберем поочередно натуральные числа $1, 2, \ldots, a$. Первое среди них, которое принадлежит A, будет в этом множестве наименьшим.

Безукоризненность этого рассуждения легко подвергнуть сомнению. А почему, собственно говоря, начав с единицы, мы обязательно доберемся до любого заданного натурального числа a? Естественный ответ «потому что существует лишь конечное число натуральных чисел, меньших a» не достигает цели: а что значит «конечное число»? Ссылка на «обобщение опыта практики» также почти не помогает. В обиходе мы никогда не имеем дела не только с «любыми заданными» натуральными числами, но даже и просто с большими. (Кто, например, пересчитывал 9^{9^9} предметов? Я думаю, что никому не приходилось перебирать поочередно натуральные числа даже в пределах миллиарда.) Поэтому в таких безобидных на первый взгляд словах, как «любое натуральное число a», предполагается неявно уже нечто большее, чем грубый чувственный опыт. Налицо огромный качественный скачок: абстрагируясь от не слишком большого запаса конкретных, индивидуальных конечных множеств (одна лошадь, два сапога, три дерева), мы приходим к понятию бесконечного натурального ряда, члены которого дают нам возможность говорить о числе элементов любого конечного множества [1]. «Исчисление песчинок» Архимеда, который показал, что мы можем представить себе и назвать сколь угодно большое натуральное число, — замечательное произведение. И недаром нумерация, то есть учение о наименовании натуральных чисел, долгое время выделялось в качестве отдельного действия арифметики (так было, например, еще в «Арифметике». Л. Магницкого, по которой учился М. В. Ломоносов).

Наши сомнения могут показаться надуманными: ведь все и так ясно или почти ясно, стоит ли тратить время на схоластические рассуждения и задавать нелепые вопросы? Однако на самом деле речь идет о весьма существенном — об основных принципах математических рассуждений. Натуральные числа вместе со всеми их свойствами используются во всех разделах математики, причем мы даже не всегда осознаем это явно.

б. Принятые математиками правила проведения доказательств требуют, чтобы были четко фиксированы исходные утверждения — аксиомы, из которых все остальное должно выводиться по правилам логики. В аксиомах указывается все, что нужно знать об *объектах* какой-либо математической теории и об *отношениях*, которым эти объекты удовлетворяют. Наиболее употребительный набор аксиом натурального ряда был сформулирован итальянским математиком Дж. Пеано (1852—1932). Ему удалось показать, что можно определить все арифметические действия и можно доказать все

---

[1] Чтобы получить ответ на вопрос, что такое «конечное множество», следует обратиться к более глубокому изучению основ математики (см. также III.60).

свойства натуральных чисел, исходя из простейшего отношения следования: a следует за b, или b предшествует a (было бы преждевременно здесь сказать «$a = b + 1$», поскольку сложение еще не определено). Вот аксиомы Пеано:

1) *среди натуральных чисел существует такое, обозначаемое 1, которое не имеет предшествующего;*

2) *для любого натурального числа существует и притом ровно одно натуральное число, которое за ним следует;*

3) *любое натуральное число имеет не более одного предшествующего;*

4) *(Аксиома индукции.) Любое множество A натуральных чисел — такое, что*

а) *1 принадлежит A;*

б) *если некоторое натуральное число принадлежит A, то и следующее за ним натуральное число принадлежит A, — совпадает со всем множеством натуральных чисел.*

Как уже было сказано, этих четырех аксиом достаточно для построения всей арифметики (см. «Энциклопедия элементарной математики», том 1, Гостехиздат, М., 1951). Поэтому дальше вместо «натуральное число, следующее за n», мы будем писать просто $n + 1$.

в. Аксиома индукции выражает в логически четких терминах то свойство натурального ряда, которое на интуитивном уровне выражается словами «до любого натурального числа можно добраться, перебирая их по одному, начиная с единицы». Она является удобным формальным средством, позволяющим вводить в рассуждение сразу все бесконечное множество натуральных чисел. Чаще всего это делается при помощи принципа математической индукции (он же метод математической индукции или метод полной индукции).

Принцип математической индукции. Пусть $P(n)$ — утверждение, зависящее от натурального числа n как от параметра. Если $P(1)$ верно и из того, что $P(n)$ верно, вытекает, что верно $P(n+1)$, то $P(n)$ верно для всех натуральных n.

Чтобы вывести принцип математической индукции из аксиомы индукции, обозначим через A множество тех натуральных n, для которых $P(n)$ верно. Тогда А содержит 1, так как $P(1)$ верно, и если A содержит n, то верно $P(n)$, а тогда верно $P(n+1)$, и, значит, A содержит следующее за n натуральное число $n + 1$. Согласно аксиоме индукции, A содержит все натуральные числа, то есть $P(n)$ верно для всех n.

Утверждение $P(1)$, если оно верно, называется *базой*, или *основанием*, индукции. Предположение о том, что верно $P(n)$, — *индукционной гипотезой*.

В качестве примера докажем следующее утверждение.

$P(n)$: *натуральное число n либо является единицей, либо является последующим для некоторого натурального числа.*

База индукции: $P(1)$ очевидно верно. Пусть верно $P(n)$ (индукционная гипотеза). Тогда n — некоторое натуральное число, а $n + 1$ — следующее за ним. Значит, $P(n+1)$ верно. В силу принципа индукции $P(n)$ верно для всех n.

Многочисленные примеры применения принципа индукции мы встретим в этой книге далее. Сейчас нам интересно следующее. Сформулированный выше принцип наименьшего числа эквивалентен аксиоме индукции и может ее заменить.

г. *Из аксиомы индукции следует принцип наименьшего числа.* Пусть A — некоторое подмножество натурального ряда. Предположим, что в нем нет наименьшего числа. Образуем множество M, зачислив в него такие натуральные m, что все натуральные $n \leqslant m$ не принадлежат A[1]. Тогда:

1 принадлежит M; в противном случае 1 должна была бы принадлежать A и была бы в нем наименьшим числом.

Если натуральное m принадлежит M, то все натуральные $n \leqslant m$ не принадлежат A. Не может принадлежать A и число $m+1$, так как в противном случае оно было бы наименьшим в A. Следовательно, $m+1$ принадлежит M.

Согласно аксиоме индукции, M совпадает со всем множеством натуральных чисел, что невозможно, если A непусто.

д. *Из принципа наименьшего числа следует аксиома индукции.* Пусть M — то множество, о котором говорится в аксиоме индукции. Возьмем дополнительное множество A, состоящее из всех тех натуральных чисел, которые не принадлежат M. Если M не совпадает со всем натуральным рядом, то A непусто. Согласно принципу наименьшего числа, в A есть наименьшее число a. Так как 1 принадлежит M, то $a \neq 1$. По доказанному выше a следует за некоторым натуральным n. Так как a — наименьшее в A, то n не принадлежит A и, следовательно, принадлежит M. Итак, n принадлежит M, а следующее за ним натуральное число a не принадлежит M, что противоречит определению множества M. Противоречие означает, что A пусто, а M совпадает со всем множеством натуральных чисел.

К задаче 4.

4. *О размещениях с повторениями.* Нетрудно видеть, что результат, полученный выше при подсчете числа размещений с повторениями из двух букв A и B по n, представляет собой частный случай следующего более общего утверждения:

число размещений с повторениями из m элементов по n равно m^n.

Возможно, что более подробные сведения о размещениях с повторениями, хотя они и не имеют непосредственного отношения к задаче, окажутся небезынтересными.

Размещения с повторениями из m заданных элементов по n мы получаем, расставляя всеми возможными способами по n перенумерованным местам элементы, выбранные из m заданных. В размещениях *с повторениями* каждый элемент может встречаться несколько раз.

Места, по которым мы расставляем элементы, как правило, располагаются *в ряд* (вытянутый по горизонтали), но такое расположение свободных мест отнюдь не обязательно: их можно расположить, например, *по кругу в вершинах правильного вписанного n-угольника*, перенумерованных тем или иным способом.

Разместим указанным способом на окружности n элементов, а затем повернем их вокруг центра окружности на угол $360°/n$ (будем считать, что поворачиваются лишь расставленные по окружно-

[1] Напомню, что мы считаем все арифметические действия уже построенными. В частности, мы умеем сравнивать натуральные числа по величине. Единица — наименьшее из всех натуральных чисел.

сти элементы, а вписанный в нее правильный n-угольник остается на месте). Новое размещение элементов возникает из исходного в результате *циклической перестановки.*

Например, размещение букв A, B и C на рис. 230 получено при помощи циклической перестановки из размещения тех же букв, изображенного на рис. 229, а размещение на рис. 231 — из размещения, изображенного на рис. 230. Произведя еще одну циклическую перестановку, мы получили бы из размещения, представленного на рис. 231, исходное размещение, изображенное на рис. 229 [1].

Циклическая перестановка характеризуется тем, что при ней каждый элемент переходит с того места, которое он занимал до перестановки, на соседнее, а элемент, занимавший первое место, после перестановки оказывается на последнем.

Если от одного размещения U к другому размещению V можно перейти, произведя одну или несколько циклических перестановок,

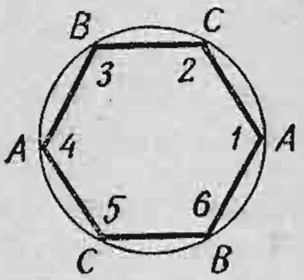


Рис. 229.

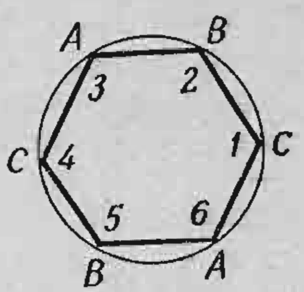


Рис. 230.

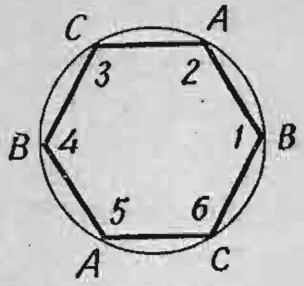


Рис. 231.

то и обратный переход от V к U также можно осуществить, проделав соответствующие циклические перестановки. Таким образом, циклические перестановки позволяют переводить любое из размещений U и V в другое.

Предположим, что от размещения U к размещению V можно перейти, проделав k циклических перестановок, а от размещения V к размещению W можно перейти, проделав l циклических перестановок. Тогда размещение W также можно получить из размещения U, выполнив $k+l$ циклических перестановок.

Оба утверждения непосредственно очевидны, если циклические перестановки представлять как повороты окружности.

Разобьем размещения на классы так, чтобы к одному классу принадлежали *те и только те размещения, которые переходят друг в друга под действием одной или нескольких циклических перестановок.*

Число размещений, принадлежащих любому классу, равно одному из делителей числа n.

Действительно, рассмотрим какой-нибудь класс и предположим, что U_0 — одно из принадлежащих ему размещений. Все размещения, образующие данный класс, совпадают с одним из размещений

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_r,\ \ldots,\ U_s,\ \ldots, \tag{1}$$

где U_r означает размещение, получающееся из U_0 в результате r-кратного применения циклической перестановки. С другой стороны,

[1] При обычной записи соответствующие размещения из трех букв A, B, C по 6 имели бы следующий вид: $ACBACB$, $CBACBA$, $BACBAC$.

все размещения, перечисленные в (1), принадлежат рассматриваемому нами классу. Следовательно, для того чтобы подсчитать число размещений, содержащихся в этом классе, необходимо лишь определить, сколько различных размещений содержится в последовательности (1).

Если размещения U_r и U_s совпадают, то U_{r+1} и U_{s+1} также будут одним и тем же размещением. Наоборот, если U_r и U_s — различные размещения, то U_{r+1} и U_{s+1} также не совпадают.

Пусть U_s — *первое* из размещений, совпадающее с одним из предыдущих. Ясно, что индекс r предыдущего размещения равен *нулю*, ибо в противном случае размещение U_{s-1} совпадало бы с размещением U_{r-1}.

Таким образом, все члены последовательности (1) совпадают с одним из размещений

$$U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{s-1}, \tag{2}$$

которые в свою очередь различны между собой. Следовательно, рассматриваемый класс содержит s размещений.

С размещением U_0 совпадают следующие члены последовательности (1):

$$U_0, U_s, U_{2s}, \ldots .$$

Поскольку U_n совпадает с U_0, то индекс n равен одному из чисел s, $2s$, $3s$, ... Следовательно, s — делитель числа n, что и требовалось доказать.

5. *О сочетаниях.* а. Задачу 4 можно было бы попытаться решить следующим образом: расставить всеми возможными способами буквы A на $1, 2, 3, \ldots, n-2$ или $n-1$ местах, а на оставшиеся места вписать буквы B. Если буква A занимает k мест ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$), то не существенно, в каком порядке заполнялись эти места (все буквы A одинаковы). Однако два набора, состоящие из букв A и B, считаются различными, если то место, где в одном из них стоит буква A, в другом наборе занято буквой B.

Таким образом, ответ на вопрос задачи мы получим, подсчитав, *сколькими способами можно выбрать k из n различных элементов* (*карточек*), *если порядок следования выбранных элементов несуществен.* Выбранные элементы называются *сочетанием из n элементов по k, а число таких сочетаний принято обозначать* C_n^k. Числа C_n^k называют также *биномиальными коэффициентами.* (Относительно биномиальных коэффициентов см. III. 25.)

При помощи биномиальных коэффициентов число допустимых по условиям задач размещений из букв A и B по n можно представить в виде

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1}. \tag{1}$$

Разумеется, полученное выражение представляет ценность лишь при условии, что существует простой способ, позволяющий вычислять биномиальные коэффициенты.

б. Чтобы определить число сочетаний из n по k, выясним, сколько сочетаний из n по k получается из одного сочетания из n по

$k-1$ при $k>1$. К каждому сочетанию, состоящему из $k-1$ элементов, можно присоединить любой из еще не входящих в него $n-k+1$ элементов. Перебрав все сочетания из n по $k-1$ элементов, мы получим все сочетания из n по k элементов, причем каждое из них ровно k раз, поскольку «последним присоединившимся» может быть любой из k элементов, входящих в данное сочетание из n по k.

Следовательно, мы можем утверждать, что

$$(n-k+1)\,C_n^{k-1}=kC_n^k,$$

или

$$C_n^k=\frac{n-k+1}{k}\,C_n^{k-1}. \tag{2}$$

Кроме того, ясно, что

$$C_n^1=n.$$

Полагая в формуле (2) $k=2, 3, \ldots$, находим

$$C_n^2=\frac{n-1}{2}\,C_n^1=\frac{n(n-1)}{2},\quad C_n^3=\frac{n-2}{3}\,C_n^2=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$C_n^4=\frac{n-3}{4}\,C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ \text{и т. д.}$$

Продолжая придавать k значения, увеличивающиеся каждый раз на 1, получаем окончательно, что

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k}. \tag{3}$$

в. Произведение натуральных чисел $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k$ принято обозначать $k!$ и называть k-факториалом. Если числитель и знаменатель правой части в формуле (3) умножить на

$$(n-k)!=(n-k)(n-k-1)\cdot\ \ldots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$

то биномиальный коэффициент можно преобразовать к новому виду:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdot\ \ldots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1}{k!\,(n-k)!}=$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{4}$$

Из этого выражения видно, что

$$C_n^k=C_n^{n-k},$$

то есть что биномиальные коэффициенты обладают свойством симметрии.

Из формулы (3) при $k=n$ или непосредственно по смыслу биномиального коэффициента ясно, что

$$C_n^n=1.$$

Хотя говорить о «сочетаниях из n элементов по 0» и о числе таких сочетаний не имеет смысла, принято считать, что

$$C_n^0 = 1.$$

Это предположение согласуется с установленным ранее свойством симметрии биномиальных коэффициентов. Формула (4) остается в силе и при $k = 0$, если условиться дополнительно к данному выше определению, что $0! = 1$.

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для второго решения задачи. Пользуясь свойствами биномиальных коэффициентов, которые будут доказаны дальше (см. III. 25), нетрудно убедиться в том, что

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

г. Биномиальные коэффициенты обладают одним довольно часто используемым свойством, позволяющим вычислять сумму двух соседних биномиальных коэффициентов, а именно

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Убедиться в этом можно прямыми выкладками, приведя к общему знаменателю два выражения, стоящие в левой части:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1) + n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)[(k+1)+(n-k)]}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

К задаче 6.

6. *Теорема тангенсов.* Использованную при решении задачи теорему можно доказать следующим образом.

Запишем теорему синусов в виде

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Обозначим общее значение двух отношений λ (в действительности λ равно диаметру описанной окружности). Тогда

$$a = \lambda\sin\alpha, \quad b = \lambda\sin\beta,$$

в силу чего

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\lambda(\sin\alpha + \sin\beta)}{\lambda(\sin\alpha - \sin\beta)} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}.$$

Разложив каждый из углов α и β в сумму и разность углов $\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\frac{\alpha-\beta}{2}$ и воспользовавшись формулами для синуса суммы и разности двух углов, получим

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{a+b}{a-b}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

К задаче 7.

7. *О разложении целых чисел в произведение степеней простых чисел.* а. *Всякое положительное целое составное число можно представить в виде произведения двух или большего числа простых сомножителей* [1].

Наименьшее положительное составное число 4 можно представить в виде $4=2\cdot 2$.

Следовательно, достаточно доказать, что если сформулированное выше утверждение выполняется для всех положительных целых составных чисел, не превосходящих некоторого положительного составного числа a, то оно выполняется и для a (то есть воспользоваться методом *полной математической индукции*; см. III. 3).

Действительно, по определению составного числа a можно представить в виде произведения двух чисел k и b, каждое из которых совпадает с одним из чисел

$$2, 3, \ldots, a-1.$$

По предположению доказываемое утверждение выполняется для всех положительных целых составных чисел, не превосходящих числа a. Таким образом, каждое из чисел k и b либо простое, либо представимо в виде произведения простых чисел. Следовательно, число $a=kb$ также можно представить в виде произведения простых чисел.

б. *Всякое положительное целое можно представить в виде произведения степеней различных простых чисел с целыми или нулевыми показателями.*

Всякое положительное составное число a по доказанному можно представить в виде произведения простых чисел, затем объединить одинаковые простые сомножители, заменив их соответствующей степенью простого числа, и, наконец, если угодно, приписать степень других простых чисел с *нулевыми* показателями.

---

[1] Говоря здесь о простых числах, мы всегда будем иметь в виду *положительные* простые числа.

Последняя операция не изменяет произведения, поскольку нулевая степень любого положительного (или отрицательного) числа равна 1.

Например, число

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

можно представить не только в виде

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1,$$

но и, если необходимо, в виде

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^0 \cdot 23^0 \text{ и т. д.}$$

Любое простое число p также можно представить в виде произведения степеней различных простых чисел: одно из простых чисел будет при этом входить в произведение с показателем степени, равным 1 (само число p), а все остальные сомножители будут нулевыми степенями других простых чисел.

Наконец, единицу можно представить в виде произведения *нулевых* степеней различных простых чисел.

в. Представляя любое положительное целое число в виде произведения степеней простых чисел, условимся выписывать лишь те простые числа, которые входят в разложение данного числа с ненулевым показателем степени (отсутствующие в разложении простые числа «входят» в него с *нулевым* показателем степени).

Если принять такое соглашение, то разложение положительных целых чисел в произведение степеней различных простых чисел становится *единственным* (с точностью до перестановки сомножителей), а именно:

всякое положительное целое число можно представить в виде произведения степеней различных простых чисел так, что каждое простое число p будет входить в разложение в наибольшей степени, которая является делителем данного числа.

Это часто применяемое, но *отнюдь, не очевидное утверждение* можно доказать, если воспользоваться теоремой, приведенной в III. 2, б.

Итак, необходимо доказать, что любое целое число a нельзя представить в виде произведения простых чисел двумя существенно различными способами, то есть не может быть двух разложений одного и того же числа, в одном из которых некоторое простое число p входило бы в иной степени, чем в другое. Предположим противное: пусть два такие разложения числа a существуют и пусть некоторое простое число p входит в одно из них в степени α, а в другое — в степени β, причем $\alpha < \beta$ (показатель степени α может быть равным 0):

$$a = p^{\alpha} \cdot u = p^{\beta} v.$$

Множитель u (и v) означает здесь произведение всех простых чисел, входящих в разложение a, но отличных от p. Сократив обе части второго равенства на p^{α}, получим

$$p^{\beta - \alpha} v = u.$$

Однако такое равенство невозможно, поскольку по теореме, доказанной в III, 2, б, число u не делится на p.

К задаче 9.

8. *Кое-что о треугольниках.* а. *Об окружностях, касающихся сторон треугольника.* Пусть O — центр окружности k радиуса r, касающейся изнутри сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках D, E, F (рис. 232); O_a — центр окружности k_a радиуса r_a, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB, AC в точках D',

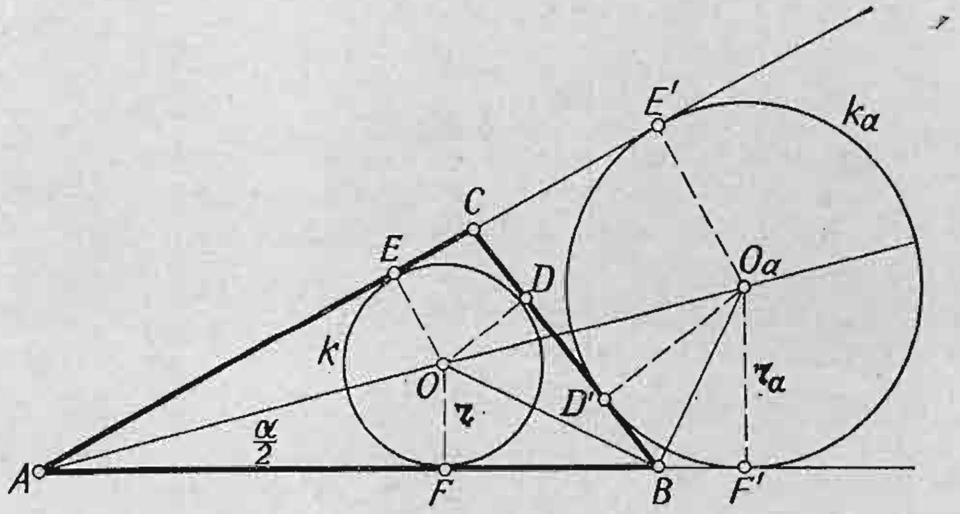


Рис. 232.

E', F'. Введем следующие обозначения: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $a + b + c = 2p$.

Поскольку касательные, проведенные из одной точки к одной и той же окружности, равны, то $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$, вследствие чего $2p = AB + BC + CA = 2(AE + BF + CD)$.

Из последнего равенства находим

$$CD = p - (AE + BF) = p - (AF + BF) = p - c. \tag{1}$$

Аналогично

$$AE = p - a \quad \text{и} \quad BF = p - b.$$

Рассматривая касательные AE' и AF', проведенные из точки A к окружности k_a, получаем

$$2AE' = AE' + AF' = AC + CE' + AB + BF' =$$
$$= AB + AC + BD' + CD' = AB + AC + BC = 2p,$$

откуда

$$AE' = AF' = p \tag{2}$$

и

$$CE' = AE' - AC = p - b, \quad BF' = p - c. \tag{3}$$

Площадь треугольника ABC мы вычислим, разбив его на три части: треугольники AOB, BOC и COA (условимся обозначать площади треугольников так же, как сами треугольники). Тогда

$$S = \triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA =$$
$$= \frac{1}{2}(r \cdot AB + r \cdot BC + r \cdot CA) = r \cdot \frac{a + b + c}{2},$$

то есть

$$s = r \cdot p. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$S = \triangle ABC = \triangle AO_aB + \triangle AO_aC - \triangle BO_aC =$$
$$= \frac{1}{2}(r_a \cdot AB + r_a \cdot AC - r_a \cdot BC) = r_a \cdot \frac{b+c-a}{2} = r_a(p-a). \quad (5)$$

Аналогично

$$S = r_b(p-b), \quad (6)$$
$$S = r_c(p-c). \quad (7)$$

Величина r_b означает радиус окружности, касающейся стороны b треугольника ABC и продолжений двух других сторон, а r_c — радиус окружности, касающейся стороны c и продолжений двух других сторон того же треугольника.

б. *Соотношения между углами и сторонами треугольника.* Ясно, что центр вписанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой пересечения биссектрис внутренних углов этого треугольника, поэтому, например, $\angle OAF = \frac{\alpha}{2}$. Из соотношения (4) и формулы Герона для площади треугольника находим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OF}{AF} = \frac{r}{p-a} = \frac{S}{p(p-a)} =$$
$$= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \quad (8)$$

Аналогично

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \quad (9)$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \quad (10)$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = bc\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, соотношение (8) и формула Герона приводят к соотношению

$$bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{S}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = p(p-a).$$

Отсюда и из аналогичных формул для двух других углов получаем

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}},$$
$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}. \quad (11)$$

Сравнивая полученные выражения для косинусов половинных углов с соотношениями (8)—(10), находим

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ca}},$$
$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}. \tag{12}$$

К задаче 10.

9. *О преобразовании суммы произведений тригонометрических функций.*

Соотношение

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)+$$
$$+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0 \tag{1}$$

выполняется не только для углов прямоугольного треугольника, но и для углов произвольного треугольника и *даже для любых трех углов.*

Рассмотрим преобразование суммы произведений тригонометрических функций в сумму.

а. Разложив $\sin(x+y)$ и $\cos(x+y)$ по известным формулам, получим соотношения

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y,$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y,$$
$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y,$$

откуда

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)].$$

В частности, при $x=y$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$
$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Полученные соотношения позволяют преобразовывать в сумму произведение любого числа синусов и косинусов.

Все члены тригонометрического тождества, которое требуется доказать в задаче 10, представляют собой произведения трех синусов:

$$\sin x \sin y \sin z = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \sin z =$$
$$= \frac{1}{2}[\sin z \cos(x-y) - \sin z \cos(x+y)] =$$
$$= \frac{1}{4}[\sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z) -$$
$$- \sin(x+y+z) - \sin(-x-y+z)] =$$
$$= \frac{1}{4}[\sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) +$$
$$+ \sin(x+y-z) - \sin(x+y+z)]. \qquad (2)$$

б. Положим $x = \alpha - \beta$, $y = \beta - \gamma$, $z = \gamma - \alpha$. Тогда

$$x+y+z=0, \quad -x+y+z=-2(\alpha-\beta),$$
$$x-y+z=-2(\beta-\gamma), \quad x+y-z=-2(\gamma-\alpha).$$

Подставляя в (2), находим

$$4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha) =$$
$$= -\sin 2(\alpha-\beta) - \sin 2(\beta-\gamma) - \sin 2(\gamma-\alpha). \qquad (3)$$

Если один из углов γ, α или β равен нулю, то из (3) получаем

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta) = \sin 2(\alpha-\beta) + \sin 2\beta - \sin 2\alpha, \qquad (4)$$
$$4\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma) = \sin 2(\beta-\gamma) + \sin 2\gamma - \sin 2\beta, \qquad (5)$$
$$4\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha) = \sin 2(\gamma-\alpha) + \sin 2\alpha - \sin 2\gamma. \qquad (6)$$

Тождество (1) мы получим, сложив в отдельности правые и левые части соотношений (3)—(6).

К задаче 11.

10. *Некоторые соотношения для произведений тригонометрических функций углов треугольника.* Если p — полупериметр треугольника со сторонами a, b, c; S — его площадь, R — радиус описанной окружности, а r — радиус вписанной окружности, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{S}{p^2}, \qquad (I)$$

или, если представить в другом виде,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p}. \qquad (II)$$

Кроме того,

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{p}{4R} \qquad (III)$$

и

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}. \qquad (IV)$$

Действительно, из формул (8)—(10), приведенных в III. 8, находим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}.$$

Если воспользоваться формулой Герона и соотношением (4) из III. 8, то мы придем к выражениям (I) и (II).

Из соотношения (11) (там же) получаем

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{pS}{abc}.$$

Чтобы получить отсюда соотношение (III), достаточно заметить (см. III. 8), что

$$\sin\gamma=\frac{c}{2R},\quad \text{откуда}\quad R=\frac{c}{2\sin\gamma}=\frac{abc}{4S}.$$

Соотношение (IV) следует из соотношений (II) и (III).

11. *О треугольнике, вписанном в одну заданную окружность и одновременно описанном вокруг другой заданной окружности. Теорема Эйлера.*

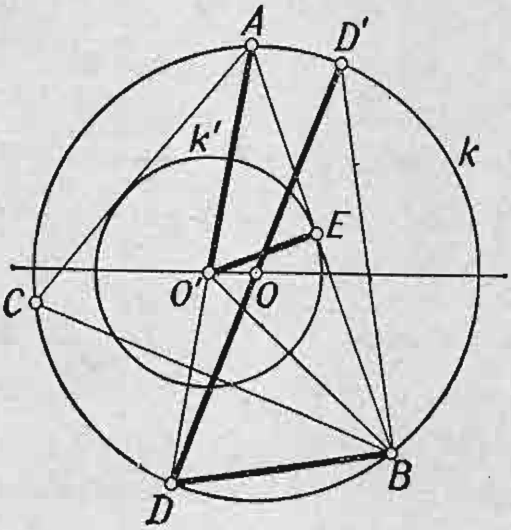


Рис. 233.

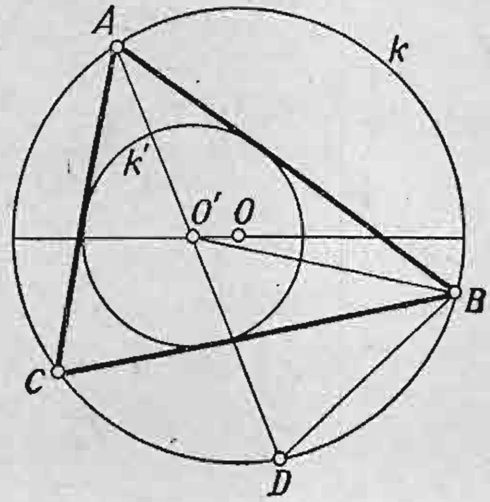


Рис. 234.

Пусть заданы две окружности (рис. 233 и 234): k и расположенная внутри нее k'. Обозначим центры окружностей O и O', а их радиусы — R и r. Пусть d — расстояние между центрами окружностей.

Во втором решении (см. п. б) мы сослались на теорему Эйлера, которую (вместе с обратной теоремой) можно сформулировать следующим образом:

треугольник, описанный вокруг окружности k', можно вписать в окружность k в том и только в том случае, если

$$d^2=R^2-2Rr. \tag{1}$$

Выведем это соотношение.

а. Пусть A — точка на окружности k (рис. 233). Соединим ее с двумя другими точками B и C окружности k, выбрав их так, чтобы окружность k' оказалась вписанной в треугольник ABC, вокруг которого описана окружность k.

Найти такие точки B и C можно не всегда. Для этого недостаточно взять две точки пересечения с окружностью k касательных, проведенных из точки A к окружности k': отрезок BC должен касаться окружности k'. *Необходимым и достаточным условием* касания является равенство углов

$$\angle ABO' = \angle O'BC \tag{2}$$

(на рис. 233 это условие не выполнено).

Следующие соображения позволяют преобразовать (2) в другое, также необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

Соединим точки A и O' отрезком прямой и продолжим его до пересечения с окружностью k в точке D. Нетрудно видеть, что AO' — биссектриса угла BAC, то есть $\angle O'AB = \angle CAO'$. Кроме того, $\angle CAO' = \angle CBD$, поскольку оба угла опираются на одну и ту же дугу CD окружности k. Следовательно,

$$\angle O'AB = \angle CBD. \tag{3}$$

Но угол $O'AB$ как внутренний угол треугольника $O'AB$ равен разности углов

$$\angle BO'D - \angle ABO'.$$

Кроме того, ясно, что

$$\angle CBD = \angle O'BD - \angle O'BC.$$

Подставляя найденные выражения для углов $O'AB$ и CBD в равенство (3), получаем

$$\angle BO'D - \angle ABO' = \angle O'BD - \angle O'BC. \tag{4}$$

Таким образом, равенство (2) выполняется в том и только в том случае, если

$$\angle BO'D = \angle O'BD. \tag{5}$$

В треугольнике $BO'D$ против этих углов лежат стороны BD и $O'D$, что позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие разрешимости задачи в следующем виде:

треугольник ABC описан вокруг окружности k' в том и только в том случае, если

$$BD = O'D$$

(так, как показано на рис. 234).

б. Продолжим наш вывод соотношения (1): определим отношение длин отрезков BD и $O'D$ (рис. 233).

Если E — точка касания отрезка AB и окружности k', а D и D' — противоположные концы одного и того же диаметра окружности k, то треугольники $AO'E$ и $D'DB$ прямоугольные (вершины прямых углов располагаются соответственно в точках E и B). Кроме того, угол при вершине A первого треугольника равен углу при вершине D' второго треугольника, поскольку каждый из этих углов опирается на дугу BD окружности k. Следовательно, треугольники $AO'E$ и $D'DB$ подобны, а поэтому

$$AO' : EO' = D'D : BD,$$

или

$$AO' : r = 2R : BD.$$

Последнее соотношение можно представить также в виде

$$AO' \cdot BD = 2Rr.$$

Точка O' делит все проходящие через нее хорды окружности на два таких отрезка, что произведение их длин постоянно. Если в качестве одной хорды мы выберем AD, а в качестве другой — *диаметр* окружности k, проходящий через точку O', то

$$AO' \cdot O'D = (R + d)(R - d).$$

Разделив $AO' \cdot BD$ на $AO' \cdot O'D$, получим

$$BD : O'D = 2Rr : (R + d)(R - d). \qquad (6)$$

Из полученного соотношения видно, что отрезки BD и $O'D$ равны в том и только в том случае, если

$$2Rr = (R + d)(R - d). \qquad (7)$$

в. Результаты, полученные в пп. а и б, можно сформулировать в виде следующего утверждения:

для любой точки A окружности k две другие точки B и C той же окружности, образующие вместе с A вершины описанного вокруг окружности k' треугольника ABC, можно найти в том и только в том случае, если R, r и d связаны соотношением (7).

Тем самым теорема Эйлера и обратное ей утверждение доказаны, поскольку равенство (7) отличается от соотношения (1) лишь формой записи.

Выведенное нами соотношение не зависит от выбора точки A на окружности k. Следовательно, *если, приняв за A какую-нибудь одну из точек окружности k, нам удастся построить треугольник ABC, для которого окружность k будет описанной, а окружность k' — вписанной, то аналогичное построение можно будет повторить, приняв за A любую точку окружности k.*

Как показал Понселе[1], тот же принцип *aut semper, aut nunquam* (или всегда, или никогда) относится и к более общему случаю, когда вместо двух окружностей рассматриваются два произвольных конических сечения, а вместо треугольника — n-угольник.

*

К задаче 13.

12. *Основные понятия теории сравнений.* «Внутренний механизм» решения задачи 13 становится особенно прозрачным, если воспользоваться понятием сравнения.

По определению *сравнение*

$$a \equiv b \pmod{m}$$

[1] Ж. К. Понселе (1788—1867) — французский генерал и математик, автор «Трактата о проективных свойствах фигур» (1822).

(читается: a сравнимо с b по модулю m) означает, что целые числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки, то есть их разность кратна целому числу m:

$$a - b = km,$$

где k — целое число.

Целые числа a, b, m и k не обязательно должны быть положительными. Однако в качестве модуля, как правило, выбирают положительное целое число, поскольку для того, чтобы решить, делится ли какое-нибудь число на m или не делится, нам вовсе не требуется знак числа m.

Например, сравнения

$$2^2 \equiv 1, \quad 2^4 \equiv 1, \quad 2^6 \equiv 1, \ldots \pmod 3$$

означают, что числа $2^2 - 1 = 3$, $2^4 - 1 = 15$, $2^6 - 1 = 63$, ... делятся на 3.

Сравнение $a \equiv 0 \pmod m$, в правой части которого стоит нуль, представляет собой не что иное, как иной способ записи утверждения «a делится на m».

Например, если $m = 3$, то, записав множество целых чисел по столбцам (по три числа в каждом столбце), мы получим таблицу

$$\begin{array}{l} \ldots, -9, -6, -3, \mathbf{0}, 3, 6, 9, \ldots, \\ \ldots, -8, -5, -2, \mathbf{1}, 4, 7, 10, \ldots, \\ \ldots, -7, -4, -1, \mathbf{2}, 5, 8, 11, \ldots, \end{array}$$

в которой все числа, находящиеся в одной и той же строке, сравнимы друг с другом по модулю 3, а числа, находящиеся в различных строках, несравнимы.

К аналогичному результату мы придем, выбрав любой положительный целый модуль сравнения m и расположив множество целых чисел в m строк. Из такой таблицы видно, что для произвольного целого числа a среди чисел

$$0, 1, 2, \ldots, m - 1$$

найдется одно и только одно число r, сравнимое с a по модулю m. Это число r называется *вычетом* числа a по модулю m (остатком от деления a на m).

Как показывают приводимые ниже теоремы, сравнения, введенные в теорию чисел Гауссом, во многом аналогичны обычным равенствам.

Всякое целое число сравнимо с самим собой по любому модулю m (рефлексивность).

Если $a \equiv b \pmod m$, *то* $b \equiv a \pmod m$ (симметричность).

Если $a \equiv b \pmod m$ *и* $b \equiv c \pmod m$, *то* $a \equiv c \pmod m$ (транзитивность).

Если $a \equiv a' \pmod m$ *и* $b \equiv b' \pmod m$, *то* $a + b \equiv a' + b' \pmod m$, $a - b \equiv a' - b' \pmod m$, $ab \equiv a'b' \pmod m$.

Например, последнее свойство сравнений можно доказать следующим образом. Если

$$a \equiv a' \pmod m, \quad b \equiv b' \pmod m,$$

то

$$a = a' + km, \quad b = b' + lm,$$

где k и l — целые числа. Таким образом,

$$ab = a'b' + a'lm + b'km + klm^2$$

и, следовательно,

$$ab - a'b' = m(a'l + b'm + klm).$$

Полученное равенство означает, что разность $ab - a'b'$ делится на m, то есть $ab \equiv a'b' \pmod{m}$.

Приведем следствие из только что доказанной теоремы.

Если $a \equiv b \pmod{m}$, *то* $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Пользуясь последним соотношением, решение задачи 13 можно сформулировать следующим образом. Поскольку

$$2 \equiv -1 \pmod{3},$$

то

$$2^n \equiv (-1)^n \pmod{3} \text{ и } 2^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{3}.$$

Таким образом, при нечетном n

$$2^n + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

то есть $2^n + 1$ делится на 3, а при чётном n

$$2^n + 1 \equiv 2 \pmod{3},$$

то есть $2^n + 1$ не делится на 3.

К задаче 14.

13. *О существовании максимума.* В приведенном решении доказано лишь, что если среди значений, которые принимает сумма синусов углов треугольника, *существует наибольшее*, то оно достигается только в том случае, если треугольник равносторонний.

Однако *существование* максимума отнюдь не очевидно. Интересующая нас сумма синусов принимает бесконечно много значений, а среди чисел, образующих бесконечное множество, не обязательно должно быть наибольшее.

Убедиться в *существовании* максимума, то есть в том, что значение, принимаемое суммой синусов в случае равностороннего треугольника u, *действительно* больше значения суммы синусов для треугольника v любого другого вида, можно, например, следующим образом:

1) Если в треугольнике v один из углов равен 60°, то в треугольниках u и v имеется по одному равному углу (а именно по углу 60°). Разность двух остальных углов в треугольнике u равна нулю и, следовательно, меньше, чем в треугольнике v. По доказанному в II. 14 отсюда следует, что значение суммы синусов этих углов в треугольнике v меньше, чем в треугольнике u.

2) Если ни один из углов треугольника v не равен 60° и углы обозначены так, что $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, то, очевидно, $\alpha < 60° < \gamma$, то есть

$$60° - \alpha \quad \text{и} \quad \gamma - 60°$$

— *положительные* числа.

Построим еще один треугольник v' так, чтобы $\alpha' = 60°$, $\beta' = \beta$ и, следовательно, $\gamma' = \alpha + \gamma - 60°$. Тогда

$$\gamma' - \alpha' = (\alpha + \gamma - 60°) - 60° = (\gamma - 60°) - (60° - \alpha)$$

и абсолютная величина разности $\gamma' - \alpha'$ равна либо

$$(\gamma - 60°) - (60° - \alpha),$$

либо

$$(60° - \alpha) - (\gamma - 60°)$$

в зависимости от того, какое из этих двух выражений *положительно*. Следовательно,

$$|\gamma' - \alpha'| < (\gamma - 60°) + (60° - \alpha) = \gamma - \alpha = |\gamma - \alpha|.$$

Относительно треугольника v' (поскольку $\alpha' = 60°$) известно, что сумма синусов двух других его углов меньше, чем сумма синусов соответствующих углов треугольника u, а по доказанному в II. 14 сумма синусов двух углов треугольника v меньше, чем сумма синусов двух углов треугольника v', поскольку $\beta = \beta'$ и (как мы только что видели) разность двух других углов треугольника v' по абсолютной величине меньше разности двух углов треугольника v.

К задаче 16.

14. *О правильных звездчатых многоугольниках.* Хорда A_0A_1 совпадает со стороной вписанного в единичную окружность правильного выпуклого пятиугольника (рис. 10), а хорда A_0A_2 — со стороной вписанного в ту же окружность правильного *звездчатого пятиугольника* (рис. 11).

В более широком смысле правильным вписанным n-угольником называется всякая фигура, которая получается, если, начав с произвольной точки A_0 окружности, можно провести n хорд равной длины так, что конец n-й хорды совпадет с точкой A_0, а концы всех остальных хорд отличны друг от друга и от точки A_0.

При заданном n все вписанные правильные n-угольники (различного вида) мы получим, если будем выбирать хорды, стягивающие углы

$$\frac{k}{n} 360°,$$

где k — любое положительное целое число, меньшее $n/2$ и взаимно простое с n. Если число k не взаимно просто с числом n, то в исходную точку A_0 мы вернемся еще до того, как проведем n хорд. Например, если $n = 10$ и $k = 4$, то получится правильная пятиугольная звезда, а все остальные точки деления останутся свободными.

При $k = 1$ мы получим правильный выпуклый n-угольник. При $k > 1$ правильный вписанный n-угольник называется *звездчатым*.

Если $n = p$ — нечетное простое число, то k может принимать все значения от 1 до $p - 1$. Следовательно, в этом случае существует $\frac{p-1}{2}$ различных правильных p-угольников.

В общем случае число различных правильных n-угольников меньше, чем $\frac{n-1}{2}$. Например, при $n = 24$ существует лишь 4 различных правильных 24-угольника.

15. *Многочлены Чебышева.* Утверждение задачи 16 является частным случаем следующей более общей теоремы:

если n равно любому простому числу p или степени простого числа, то квадрат произведения длин сторон различных правильных n-угольников, вписанных в единичную окружность, равен p.

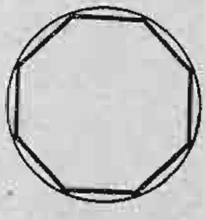


Рис. 235.

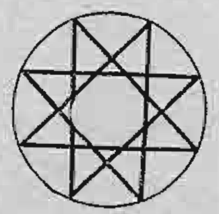


Рис. 236.

Например, длины сторон правильных восьмиугольников, вписанных в единичную окружность (рис. 235 и 236), соответственно равны

$$2 \sin \frac{45^\circ}{2} \quad \text{и} \quad 2 \sin \frac{135^\circ}{2} = 2 \cos \frac{45^\circ}{2},$$

а их произведение —

$$4 \sin \frac{45^\circ}{2} \cos \frac{45^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

Для доказательства обобщенной теоремы достаточно рассмотреть более подробно коэффициенты соответствующих уравнений

$$T_1(x) = 0, \quad U_1(x) = 0, \quad T_2(x) = 0, \quad U_2(x) = 0, \ldots .$$

Выражения $T_n(x)$ и $U_n(x)$, которые получаются из

$$\cos n\varphi \quad \text{и} \quad \frac{\sin (n+1)\varphi}{\sin \varphi}$$

при замене переменной $x = \cos \varphi$, называются *многочленами Чебышева*[1] *первого и второго рода.*

16. *Об одном геометрическом применении комплексных чисел.* При решении задачи 16 мы могли бы воспользоваться следующим соотношением между длинами сторон, диагоналей и числом сторон многоугольника.

Пусть $A_0A_1, \ldots, A_{n-1}$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность.

Тогда

$$A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}A_0 = n.$$

---

[1] П. Л. Чебышев (1821—1894) — выдающийся русский математик. Ему принадлежит доказательство следующей довольно часто упоминаемой теоремы теории чисел, известной под названием постулата Бертрана:

если $x > 1$, то всегда можно найти такое простое число p, что $x < p < 2x$. Например, если $x = 1{,}1$, то $1{,}1 < 2 < 2{,}2$, а если $x = 10$, то $10 < 11, 13, 17, 19 < 20$.

Приводимое ниже простое доказательство этого утверждения предполагает знакомство с комплексными числами.

Условимся изображать комплексные числа в виде точек на плоскости, или векторов. Вместо точки мы будем говорить о соответствующем ей комплексном числе, или о векторе, соединяющем начало координат с данной точкой (так же как и о векторе, идущем из одной заданной точки в другую). Проведем окружность единичного радиуса с центром в начале координат O и впишем в нее правильный n-угольник так, чтобы одна из вершин совпала с точкой 1 на вещественной оси (рис. 237). Обозначим ε ближайшую к 1 вершину n-угольника. Тогда остальные вершины будут располагаться в точках ε^2, ε^3, ..., ε^{n-1}. Поскольку абсолютная величина,

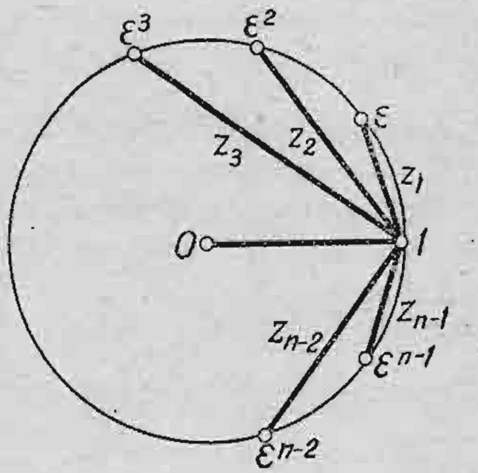


Рис. 237.

или модуль, комплексного числа ε равна 1, то абсолютная величина любой степени ε также равна 1. Угол между вещественной осью и направлением из начала координат 0 на точку ε составляет $1/n$ полного угла. Следовательно, направления на ε^2, ε^3, ..., ε^{n-1} составляют с вещественной осью углы, равные $2/n$, $3/n$, ..., $(n-1)/n$ полного угла. Вектор, проведенный из точки ε^k в 1, соответствует комплексному числу $\varepsilon^k - 1$ (то есть такому числу, которое, если сложить его с 1, дает ε^k). Учитывая это, мы без труда запишем все диагонали и стороны, которые фигурируют в приведенном выше утверждении. Записанное при помощи комплексных чисел утверждение подлежащей доказательству теоремы выглядит следующим образом:

$$|(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\ldots(1-\varepsilon^{n-1})| = n. \qquad (1)$$

Чтобы доказать это соотношение, заметим прежде всего, что

$$\varepsilon^n = 1,$$

в силу чего при любом целом

$$(\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1.$$

Следовательно, числа 1, ε, ε^2, ..., ε^{n-1} обращают в нуль многочлен

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1).$$

Поскольку первый сомножитель в правой части обращается в нуль лишь при $z = 1$, то комплексные числа $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ служат корнями многочлена

$$f(z) = z^{n-1} + \ldots + z + 1.$$

Это позволяет представить $f(z)$ в виде произведения

$$f(z) = (z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2) \ldots (z-\varepsilon^{n-1}).$$

(см. далее III. 17). Подставляя $z = 1$, находим

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) \ldots (1-\varepsilon^{n-1}) = f(1) = n. \tag{2}$$

Таким образом, выполняется не только соотношение (1), но и более общее соотношение (2): числу n равна не только абсолютная величина произведения, но и само произведение.

17. *О разложении многочленов на множители.*

а. *Пусть $f(z)$ — произвольно выбранный многочлен и α — его корень. Тогда $f(z)$ можно представить в виде произведения многочлена, степень которого на единицу меньше степени $f(z)$, и линейного множителя $z - \alpha$* [1].

Доказательство. Пусть

$$f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z + a_k,$$

где $a_0 \neq 0$. Тогда

$$f(\alpha) = a_0 \alpha^k + a_1 \alpha^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\alpha + a_k$$

и

$$f(z) - f(\alpha) = a_0 (z^k - \alpha^k) + a_1 (z^{k-1} - \alpha^{k-1}) + \ldots + a_{k-1}(z - \alpha).$$

Воспользуемся тождеством

$$z^l - \alpha^l = (z-\alpha)(z^{l-1} + z^{l-2}\alpha + \ldots + z\alpha^{l-2} + \alpha^{l-1})$$

и разложим все разности, заключенные в скобки, на два сомножителя: $z - \alpha$ и многочлен, степень которого на единицу меньше степени исходной разности. После вынесения множителя $z - \alpha$ единственный член степени $(k-1)$ возникнет из первой разности и будет входить с коэффициентом a_0. Таким образом,

$$f(z) - f(\alpha) = (z-\alpha) f_1(z),$$

где $f_1(z)$ — многочлен, степень которого на единицу меньше степени $f(z)$, а коэффициенты при старших членах $f(z)$ и $f_1(z)$ равны.

Итак, мы показали, что если $f(\alpha) = 0$, то

$$f(z) = (z-\alpha) f_1(z).$$

б. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — различные корни многочлена $f(z)$, то по доказанному $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = (z-\alpha_1) f_1(z).$$

---

[1] В наших школах это утверждение обычно называют *теоремой Безу*. — *Прим. ред.*

Поскольку α_2 также обращает в нуль многочлен $f(z)$, то

$$0 = f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) f_1(\alpha_2).$$

По условию $\alpha_2 \neq \alpha_1$. Следовательно, произведение, стоящее в правой части равенства, может обращаться в нуль лишь в том случае, если второй сомножитель равен нулю. Таким образом,

$$f_1(z) = (z - \alpha_2) f_2(z) \quad \text{и} \quad f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) f_2(z).$$

Если $r > 2$, то, как нетрудно видеть, из $f_2(z)$ можно выделить множитель $(z - \alpha_3)$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы в конце концов запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_r) g(z). \tag{1}$$

Выделение каждого множителя $(z - \alpha)$ приводит к понижению степени оставшегося многочлена на единицу, поэтому степень многочлена $g(z)$ равна $k - r$. Ясно, что вынесение множителей вида $(z - \alpha)$ не изменяет коэффициента при старшем члене, в силу чего коэффициент при старшем члене многочлена $g(z)$ равен a_0.

Из предыдущего замечания следует, что если число различных корней многочлена $f(z)$ совпадает с его степенью, то его можно представить в виде произведения множителей $z - \alpha_i$, где $\alpha_i (i = 1, \ldots, k)$ — корни многочлена, и некоего постоянного числа (многочлена $g(z)$ нулевой степени). Поскольку коэффициент при старшем (и единственном) члене многочлена $g(z)$ совпадает с коэффициентом при старшем члене многочлена $f(z)$, то в этом случае $g(z) = a_0$. Таким образом, в этом случае

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_k) a_0.$$

в. В приведенной выше формуле (1) $r \leqslant k$, поскольку выделять линейные множители, соответствующие корням многочлена $f(z)$, мы можем лишь до тех пор, пока степень оставшегося многочлена $g(z)$ не станет равной нулю. Таким образом, число различных корней любого многочлена не может быть больше его степени.

Возможен и такой случай: $r < k$ и $g(z)$ имеет корни, но лишь такие, которые совпадают с уже выделенными корнями многочлена $f(z)$. Это означает, что в разложение многочлена $f(z)$ некоторые множители $(z - \alpha_i)$ входят не в первой, а в более высокой степени. Повторно выносить одинаковые сомножители самое большее можно лишь до тех пор, пока степень оставшегося многочлена не станет равной нулю. Следовательно, в разложении

$$f(z) = (z - \alpha_1)^{l_1} (z - \alpha_2)^{l_2} \ldots (z - \alpha_r)^{l_r} g(z)$$

сумма целых положительных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_r$ не больше k (k — степень многочлена $f(z)$). При $l_1 + l_2 + \ldots + l_r = k$ многочлен $g(z)$ снова сводится к a_0.

Если, например, $l_1 > 1$, то α_1 называется *кратным* (или l_1 — кратным) *корнем* многочлена $f(z)$, а показатель степени l_1 — *кратностью* корня α_1. Пользуясь этим понятием, мы можем сформулировать полученные сведения о числе корней многочлена следующим образом:

число корней многочлена не может быть больше его степени, даже если каждый корень мы будем считать столько раз, какова его кратность.

Если мы ограничимся рассмотрением лишь вещественных чисел, то число корней многочлена может оказаться меньше его степени. Например, у многочлена x^2+1 нет ни одного вещественного корня. Иначе обстоит дело, если от вещественных чисел мы перейдем к комлексным. Гаусс доказал, что *в области комплексных чисел все многочлены степени от 1 и выше имеют по крайней мере один корень*. Отсюда следует, что в области комплексных чисел всякий многочлен имеет столько корней, какова его степень, если при подсчете корней мы будем учитывать их кратность. Эту теорему, существенно обобщающую все сказанное нами ранее о числе корней многочлена, обычно принято называть *основной теоремой алгебры.*

К задаче 17.

18. *Об исключении радикалов из иррациональных уравнений.* Введем новые обозначения: пусть $p=-(a+d)$, $q=(ad-bc)$. Задачу 17 можно переформулировать следующим образом.

Пусть y — число, кубический корень из которого удовлетворяет уравнению

$$x^2+px+q=0.$$

Можно ли написать для y (рациональное) алгебраическое уравнение, и если можно, то как коэффициенты этого уравнения связаны с коэффициентами исходного уравнения? Более кратко та же задача формулируется так: можно ли избавиться от кубических корней в уравнении

$$\sqrt[3]{y^2}+p\sqrt[3]{y}+q=0, \tag{1}$$

и если да, то каким образом?

Ответ содержится в условиях задачи 17, необходимо лишь проверить его правильность. Однако теперь мы не воспользуемся готовым ответом, а постараемся получить решение так, чтобы читателю стал ясен общий способ, позволяющий избавляться от радикалов в иррациональных уравнениях.

Умножим уравнение (1) на $\sqrt[3]{y}$, а полученное уравнение — снова на $\sqrt[3]{y}$:

$$p\sqrt[3]{y^2}+q\sqrt[3]{y}+y=0, \tag{2}$$

$$q\sqrt[3]{y^2}+y\sqrt[3]{y}+py=0. \tag{3}$$

Исключим $\sqrt[3]{y^2}$ сначала из уравнений (1) и (2), а затем из уравнений (1) и (3):

$$(q-p^2)\sqrt[3]{y}+y-pq=0,$$

$$(y-pq)\sqrt[3]{y}+py-q^2=0.$$

Наконец, исключая из двух последних уравнений $\sqrt[3]{y}$, получаем уравнение

$$(py-q^2)(q-p^2)-(y-pq)^2=0,$$

или, если расположить по убывающим степеням y,

$$y^2 - (p^3 - 3pq)\, y + q^3 = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение $p = -(a + d)$, $q = (ad - bc)$, мы снова приходим ко второму из уравнений, приведенных в условиях задачи.

В рассмотренном нами случае под знаком радикала стояла лишь сама неизвестная y, но исключить иррациональность из уравнения можно и в гораздо более общем случае, когда под радикалами стоят произвольные выражения, составленные из постоянных коэффициентов и неизвестной при помощи четырех арифметических действий и операции извлечения корня. Степени корней не обязательно должны равняться трем, как в предыдущей задаче. Если интересующее нас уравнение содержит, например, некоторое выражение $\sqrt[n]{P}$, то мы умножаем уравнение на $\sqrt[n]{P}$ столько раз, сколько нужно для того, чтобы получить достаточное число уравнений, позволяющее исключить степени $\left(\sqrt[n]{P}\right)^k$. Достичь нужного числа уравнений мы можем потому, что все эти степени рационально выражаются всего лишь через $(n - 1)$ различных степеней. Исключая из полученных уравнений одно за другим выражения $\left(\sqrt[n]{P}\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, мы в конце концов придем к уравнению, не содержащему исходной иррациональности.

Если это уравнение содержит какие-нибудь другие корни или их степени, то, повторяя весь процесс исключения иррациональности, мы сможем избавиться и от них и после конечного числа шагов получим уравнение, в котором неизвестное под знаком радикала уже не встречается.

Итак, мы видим, что *всякое иррациональное уравнение можно преобразовать к рациональному виду независимо от того, сколько радикалов и какой степени оно содержит.* Мы не будем приводить подробное доказательство этого утверждения.

Хотя предложенный выше способ и позволяет исключить из уравнения любое число иррациональностей любой степени и привести его к рациональному виду, тем не менее следует заметить, что с увеличением числа радикалов и ростом их степеней вычислительные трудности возрастают необычайно быстро.

К задаче 22.

19. *Малая теорема Ферма.* Оба решения задачи 22 основаны на том, что

$$1^4 \equiv 2^4 \equiv 3^4 \equiv 4^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

Эта цепочка сравнений представляет собой не что иное, как частный случай следующей (так называемой *малой*) теоремы Ферма[1].

---

[1] П. Ферма (1601—1665) — французский математик. Обогатил теорию чисел многими замечательными теоремами, которые, как и приводимую ниже, по обычаю того времени опубликовал без доказательств. Сформулированные Ферма теоремы были доказаны впо-

Если a — целое число, не делящееся на простое число p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Для доказательства рассмотрим размещения с повторениями из m произвольных элементов по p. Разобьем все m^p размещений на классы так, чтобы к одному классу принадлежали те и только те размещения, которые переходят друг в друга при циклических перестановках (см. III. 4). Число размещений, образующих любой из классов, совпадает с одним из делителей числа p, то есть равно либо 1, либо p.

Таким образом, некоторые размещения с повторениями *сами по себе* образуют отдельный класс, состоящий из одного-единственного элемента. Всего существует m таких размещений[1]. Остальные $m^p - m$ размещений подразделяются на классы, каждый из которых содержит по p размещений. Следовательно, число $m^p - m$ равно произведению простого числа p и числа таких классов, то есть

$$m^p \equiv m \pmod{p}.$$

Пусть теперь a — произвольное целое число, а m — такое *положительное* целое число, что

$$a \equiv m \pmod{p}.$$

Тогда по доказанному ранее

$$a^p \equiv m^p \equiv m \equiv a \pmod{p},$$

то есть

$$a\left(a^{p-1} - 1\right) \equiv a^p - a \equiv 0 \pmod{p}.$$

Но произведение двух целых чисел делится на простое число p лишь в том случае, если на p делится один из сомножителей (см. III. 2, a). Следовательно, если a не делится на p, то полученное сравнение справедливо лишь при условии, что $a^{p-1} - 1$ делится на p, то есть

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Именно это и утверждает теорема Ферма.

следствии другими математиками, что в значительной мере способствовало развитию теории чисел.

Известно несколько доказательств теоремы Ферма. В настоящее время наибольшей известностью пользуются два доказательства, предложенные Эйлером. Еще раньше теорему Ферма доказал Лейбниц, однако его доказательство было опубликовано лишь в 1863 г. в собрании трудов Лейбница. Аналогичное доказательство независимо от Лейбница предложил Гаусс.

Приведенное здесь доказательство по существу представляет собой упрощенный вариант доказательств Лейбница и Гаусса.

[1] В самом деле, если некоторое размещение не меняется при циклической перестановке, то в нем на каждом из p мест стоит один и тот же элемент. Значит, таких размещений столько же, сколько исходных элементов, из которых эти размещения образуются. — *Прим. ред.*

К задаче 23.

20. *Алгебраические и трансцендентные числа. Алгебраические целые числа.* Если α — произвольное число, удовлетворяющее алгебраическому уравнению

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

с *рациональными* коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то α называется *алгебраическим числом.*

Всякое рациональное число a является алгебраическим, поскольку удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$x - a = 0$$

с рациональными коэффициентами, но множество алгебраических чисел не исчерпывается рациональными числами. Например, число $\sqrt{2}$ — алгебраическое, поскольку оно удовлетворяет алгебраическому уравнению $x^2 - 2 = 0$ с рациональными коэффициентами, но оно иррационально.

Не все числа являются алгебраическими. Вещественное или комплексное число, не являющееся алгебраическим, называется *трансцендентным.* Таковы, например, самые «знаменитые» числа e (основание натуральных логарифмов) и π. Трансцендентность числа e была впервые доказана Эрмитом (1873), трансцендентность числа π — Линдеманом (1882). (В частности, из трансцендентности числа π вытекает, что, зная лишь радиус окружности и пользуясь только средствами *элементарной геометрии,* то есть *циркулем* и *линейкой,* нельзя выполнить *квадратуру круга,* иными словами, построить отрезок прямой, равный по длине периметру окружности, или квадрат, равновеликий кругу, ограниченному данной окружностью.)

Среди алгебраических чисел принято выделять *целые.* Алгебраическое число α называется *целым,* если все коэффициенты алгебраического уравнения, которому оно удовлетворяет, — *целые* рациональные числа, а коэффициент при старшем члене равен 1. Например,

$$\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

принадлежат множеству целых алгебраических чисел, поскольку они являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - x + 1 = 0$$

с целыми рациональными коэффициентами, и коэффициент при x^2 равен 1.

Нетрудно показать, что сумма, разность, произведение и частное (если делитель отличен от нуля) двух алгебраических чисел также являются алгебраическими числами. Сумма, разность и произведение двух целых алгебраических чисел также являются целыми алгебраическими числами.

Решив задачу 23, мы убедились в том, что *котангенс и величина, обратная синусу (косеканс) угла, равного четверти прямого, суть целые алгебраические числа.*

К задаче 24.

21. *Об отыскании делителей любого целого положительного числа.* Как известно (см. III. 7), всякое целое положительное число можно разложить в произведение степеней простых чисел. Зная разложение, делители числа можно найти следующим образом.

Если простое число p входит в разложения целых положительных чисел k и b в степени $\varkappa$ и β, то в разложение произведения kb это простое число входит в степени $\varkappa + \beta$.

Следовательно, любое положительное число a делится на некоторое число b в том и только в том случае, если в разложении числа b любое простое число p содержится не в более высокой степени, чем в разложении числа a.

Например, положительные делители числа $a = 2^m p$, где p — нечетное простое число, имеют следующий вид:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{m-1},\ 2^m,$$
$$p,\ 2p,\ 2^2 p,\ \ldots,\ 2^{m-1} p,\ 2^m p.$$

22. *О наибольшем общем делителе и наименьшем общем кратном.* Пусть по крайней мере одно из чисел $a, b, \ldots, m$ отлично от нуля. Множество общих делителей чисел $a, b, \ldots, m$ конечно. Следовательно, среди них существует *наибольший*, который заведомо *положителен*. Его называют *наибольшим общим делителем* данных чисел и обозначают $(a, b, \ldots, m)$.

Поскольку нуль делится на *любое* целое число, то при нахождении наибольшего общего делителя из данного набора чисел можно вычеркнуть все числа, равные нулю. Кроме того, отрицательные числа следует заменить их абсолютными величинами. Таким образом, задача об отыскании наибольшего общего делителя *любых* целых чисел сводится к нахождению наибольшего общего делителя *положительных* целых чисел.

Из предыдущего примечания ясно, что *любое простое число p, входящее в разложения положительных целых чисел $a, b, \ldots, m$ в степени $\alpha, \beta, \ldots, \mu$, входит в разложение их наибольшего общего делителя в степени, показатель которой совпадает с наименьшим из показателей $\alpha, \beta, \ldots, \mu$.*

Например,

$$(2^5 \cdot 3^{24} \cdot 7^9 \cdot 11^{15},\ 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 13^8) = 2^5 \cdot 3^{10}.$$

Вместе с тем нетрудно видеть, что *любое число является общим делителем чисел $a, b, \ldots, m$ в том и только в том случае, если на него делится наибольший общий делитель этих чисел.* Обычно чаще всего используют именно это свойство наибольшего общего делителя, поскольку с точки зрения делимости оно является наиболее существенным.

Аналогично, *если $a, b, \ldots, m$ — отличные от нуля целые числа, то их наименьшим общим кратным называется положительное целое число, которое, во-первых, делится на каждое из чисел $a, b, \ldots, m$ и, во-вторых, является делителем любого из чисел, делящихся на все числа $a, b, \ldots, m$.* Из предыдущего примечания ясно, что в разложение наименьшего общего кратного в произведение степеней простых чисел всякое простое число p входит с показателем степени, равным наибольшему из показателей степеней $\alpha, \beta, \ldots, \mu$, с которыми оно входит в разложения чисел $a, b, \ldots, m$.

Таким образом, для любого набора отличных от нуля целых чисел $a, b, \ldots, m$ наименьшее общее кратное существует, и притом только одно. Из определения наименьшего общего кратного следует, что оно действительно является наименьшим из положительных чисел, кратных данным (наибольшего среди положительных чисел, делящихся на данные числа, не существует).

23. *О взаимно простых числах.* Если наибольший общий делитель двух или нескольких целых чисел равен 1, то есть если данные числа не делятся одновременно ни на одно другое положительное целое число, кроме 1, то такие числа называются *взаимно простыми.*

Например, *если p и q — два взаимно простых числа, то p^r и q^s — также взаимно простые числа при любых целых положительных r и s.*

Решая задачу 24, мы по существу использовали следующую теорему:

если $a, b, \ldots, m$ — целые числа, отличные от нуля, и d — их наибольший общий делитель, то

$$a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}, \ldots, m' = \frac{m}{d}$$

— целые взаимно простые числа.

Действительно, если наибольший общий делитель d' чисел a', $b', \ldots, m'$ был бы больше 1, то числа

$$a = a'd, \; b = b'd, \ldots, \; m = m'd$$

делились бы на число dd', которое больше d. Следовательно, число d вопреки предположению не было бы *наибольшим* общим делителем чисел $a, b, \ldots, m$.

При решении задачи 24 мы сослались также на теорему:

если b — целое число, отличное от нуля, a и b — взаимно простые числа и произведение a и некоторого целого числа k делится на b, то k делится на b.

Действительно, предположим, что k не делится на b. Тогда существует по крайней мере одно простое число p, входящее в разложение числа b с *положительным* показателем степени β, а в разложение числа k — лишь с показателем степени $\varkappa$, который меньше β ($\varkappa$ может быть, в частности, равен нулю). Поскольку a и b — взаимно простые числа, то a не может делиться на p. Но тогда в разложение $|ka|$ простое число p входит в степени, показатель которой $\varkappa < \beta$. Следовательно, вопреки предположению ka не делится на b. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

(Если a — произвольное простое число, то сформулированная выше теорема совпадает с теоремой, доказанной в III. 2, а.)

Полезно также иметь в виду следующую теорему:

если некоторое целое число A делится на каждое из взаимно простых чисел a и b, то оно делится и на произведение этих чисел ab.

Действительно, по условию $A = ak$, где k — некоторое целое число. Поскольку a и b — взаимно простые числа, то (по доказанной выше теореме) ak может делиться на b лишь в том случае, если $k = bk'$, где k' означает некоторое целое число. Но тогда $A = (ab)k'$, то есть A делится на ab, что и требовалось доказать.

24. *О многочленах, принимающих целочисленные значения.* Рассуждая по индукции (от n к $n+1$), нетрудно доказать следующее обобщение утверждения, сформулированного в п. а задачи 25:

всякий многочлен n-й степени

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

можно представить в виде

$$F = b_0 + b_1\binom{x}{1} + b_2\binom{x}{2} + \ldots + b_n\binom{x}{n}, \qquad (1)$$

где

$$\binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}, \;\ldots.$$

Утверждение же п. б той же задачи допускает следующее обобщение:

многочлен F принимает целочисленные значения при всех целых x в том и только в том случае, если в представлении (1) все его коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — целые числа.

Доказательство этого утверждения для $n = k$ мы получим, если нам удастся показать, что величина

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+2)(x-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)k}$$

при всех целых x принимает лишь целочисленные значения. Убедиться в этом можно следующим образом.

Если x — положительное целое число или нуль, то $\binom{x}{k}$ можно рассматривать как число сочетаний (без повторений) из x элементов по k. Следовательно, при положительных целых x и при $x = 0$ величина $\binom{x}{k}$ принимает целочисленные значения [при $x < k$ значение $\binom{x}{k}$ равно нулю].

Если же x равен некоторому отрицательному целому числу $-y$ $(y > 0)$, то

$$\binom{-y}{k} = \frac{(-y)(-y+1)\ldots(-y-k+2)(-y-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)k} =$$

$$= (-1)^k\frac{(y+k-1)(y+k-2)\ldots(y+1)y}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)k} = (-1)^k\binom{y+k-1}{k}.$$

Здесь $y+k-1$ — положительное целое число, следовательно, $\binom{y+k-1}{k}$ — целое число, а оно отличается от $\binom{-y}{k}$ не более чем знаком (при нечетных k).

25. *О биномиальном ряде.* Величины $\binom{x}{k}$ обычно принято называть *биномиальными коэффициентами*. Если z — произвольное

число, заключенное в интервале от -1 до $+1$, а t — *произвольный* показатель степени (который не обязательно должен быть равен положительному целому числу), то бином $1+z$ в степени t допускает разложение в следующий бесконечный ряд:

$$(1+z)^t = 1 + \binom{t}{1} z + \binom{t}{2} z^2 + \ldots + \binom{t}{k} z^k + \ldots,$$

который вслед за Ньютоном по традиции называется *биномиальным рядом.* Например, при $t = -1$ биномиальный ряд переходит в бесконечную геометрическую прогрессию.

$$1 - z + z^2 - z^3 + \ldots,$$

сумма которой при $-1 < z < +1$ равна

$$\frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1}.$$

Если t — положительное целое число, то бесконечный биномиальный ряд вырождается в конечную сумму, поскольку коэффициенты при всех степенях z, начиная с $(t+1)$-й, равны нулю. Если в возникающем при $t = n$ тождестве мы произведем подстановку $z = b/a$, а затем умножим обе его стороны на a^n, то получим тождество

$$(a+c)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \qquad (1)$$

которое называется биномом Ньютона. (Оно было известно еще Ньютону.)

Относительно тождества (1) можно заметить следующее.

Правую его часть мы получим, если выпишем многочлен, представляющий произведение n членов $(a+b)$, и приведем подобные члены, объединив те произведения, в которые a и b входят с одинаковыми показателями. Поскольку, раскрывая произведение n членов вида $(a+b)$, мы из каждого члена выбираем либо a, либо b, то все члены в правой части имеют вид $a^{n-k}b^k$, где $0 \leqslant k \leqslant n$.

При фиксированном k число членов вида $a^{n-k}b^k$ совпадает с числом способов, которыми можно выбрать k из n биномов $(a+b)$ (эти k биномов и служат «поставщиками» буквы b). Поскольку порядок, в котором идут выбранные k биномов, несуществен, интересующее нас число равно числу сочетаний из n элементов по k (см. III.5). При $k \geqslant 1$ оно равно C_n^k. Поскольку член a^n получается лишь один раз [если из всех биномов $(a+b)$ мы выберем по букве a], то тождество (1) тем самым доказано.

Положив в нем $a = b = 1$, получим

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Это тождество мы упоминали в III.5, в.

26. *О геометрии Бойяи.* Доказанное в задаче 26 утверждение играет важную роль в геометрии Яноша Бойяи, не зависящей от евклидовой аксиомы о параллельных. О неевклидовой геометрии и Я. Бойяи мы хотим рассказать несколько подробнее.

а. *Аксиома о параллельных.* Проблема параллельных восходит еще к «Началам» Евклида. Помимо определений основных понятий и нескольких аксиом общематематического характера, Евклид в своем труде приводит пять постулатов, лежащих в основе всей геометрии и не сводимых к более элементарным утверждениям. Нас будет интересовать лишь последний (V) постулат, играющий в евклидовых «Началах» роль одиннадцатой аксиомы. Этот постулат гласит:

Всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, эти две прямые пересекаются, и притом с той стороны, с которой сумма двух внутренних односторонних углов меньше двух прямых углов.

Обычно V постулат называют *аксиомой* (или *постулатом*) *о параллельных*, поскольку именно он лежит в основе всей теории параллельных.

Две прямые Евклид называет *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Не используя V постулат, Евклид доказал, что если на плоскости две прямые пересекаются с третьей прямой и при этом сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым углам, то две такие прямые параллельны (в указанном выше смысле). Отсюда следует, что через точку A, лежащую вне произвольно взятой прямой e, можно провести по крайней мере одну прямую, параллельную e.

Евклид доказал также, что через точку A, лежащую вне прямой e, можно провести лишь одну прямую, параллельную e. Предложенное Евклидом доказательство этой теоремы опиралось на V постулат, который по существу и был введен для того, чтобы оно стало возможным.

Все прочие аксиомы евклидовой геометрии просты и самоочевидны. Трудности возникают лишь при рассмотрении постулата о параллельных, искусственно введенного для того, чтобы заполнить пробел в принятой Евклидом системе аксиом. Еще древние греки пытались вывести постулат о параллельных из остальных аксиом евклидовой геометрии.

б. *Два Бойяи: отец и сын.* На протяжении двадцати двух веков постулат о параллельных привлекал внимание самых блестящих умов, но никто из них не отдавался решению проблемы параллельных с таким рвением, как Фаркаш Бойяи (отец Яноша Бойяи).

Фаркаш Бойяи родился в 1775 г. в Бойя, умер в 1856 г. в Марошвашархее. Среднее образование получил в Надь-Эньеде и Колошваре. Вместе с бароном Шимоном Кемень, к которому Ф. Бойяи был приглашен для совместных занятий, учился в Иенском и Геттингенском университетах (1796—1799). Во время пребывания в Геттингене Ф. Бойяи познакомился с учившимся там в ту пору Гауссом, который был лишь немного младше его. Знакомство вскоре перешло в тесную дружбу. Завязавшаяся между друзьями переписка продолжалась до самой смерти Ф. Бойяи (правда, с большим перерывом, длившимся с 1816 по 1831 г.). По возвращении в Колошвар Бойяи в течение некоторого времени работал воспитателем, а затем поселился в своем родовом поместье Домальд. В 1804 г. он переехал в Марошвашархей, где возглавил кафедру математики, физики и химии в местной коллегии. На этом посту Ф. Бойяи проработал до 1853 г. Обладая разносторонними дарованиями, он не только писал драмы, интересовался различными проблемами языкознания, рисовал и музицировал, но и успешно занимался решением практических проблем. Например, в Эрдейи широкое распространение получили экономичные печи конструкции Ф. Бойяи. Но больше всего Ф. Бойяи интересовала математика, в особенности теория параллельных. Основной его труд вышел в свет (на латинском языке) под названием «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики» (Марошвашархей, том I, 1832; том II, 1833). Гаусс высоко оценил глубину и оригинальность мышления автора «Опыта». Среди прочего Ф. Бойяи затрагивал в своем труде и проблему параллельных. Он испробовал все возможные подходы, позволявшие питать хотя бы слабую надежду на то, что, пользуясь ими, удастся доказать V постулат Евклида. Но, как и его предшественники, Ф. Бойяи всякий раз исходил из какого-нибудь постулата, который отнюдь не был проще доказываемого. Исследования Яноша Бойяи позволили установить поистине удивительную причину, по которой все эти попытки *не могли* увенчаться успехом.

Янош Бойяи родился в 1802 г. в Колошваре, умер в 1860 г. в Марошвашархее. К великой радости его отца необычайные способности Яноша проявились рано. В 1818 г. он был зачислен на четвертое отделение Венской военно-инженерной академии, которую с отличием окончил в 1822 г. В течение еще одного года Янош стажировался в качестве юнкера при академии. В сентябре 1823 г. был произведен в младшие лейтенанты, а в 1833 г. вышел в отставку в звании капитана и с тех пор безвыездно жил в Марошвашархее и расположенном поблизости от него небольшом имении Бойяи — Домальде.

Еще ребенком Янош Бойяи услышал от отца, что над доказательством постулата о параллельных безуспешно бились выдающиеся математики. Многочисленные попытки доказать постулат Евклида о параллельных носили косвенный характер. Их авторы стремились доказать, что всякое предположение, противоречащее постулату о параллельных, рано или поздно приводит к логическому противоречию. Такой подход соответствовал первым исследованиям в этой области: авторы работ по теории параллельных шли торным путем, проложенным еще их предшественниками.

На новую высоту теория параллельных поднялась лишь после того, как юный офицер Я. Бойяи предложил совершенно иной подход к решению проблемы параллельных. Необычайно сложное явление начало постепенно проясняться и обогащаться все новыми и новыми деталями. Я. Бойяи не стремился доказать V постулат, а, наоборот, исходил из предположения о том, что такое доказательство невозможно, то есть, иначе говоря, постулат Евклида о параллельных нельзя вывести из других аксиом и постулатов, сформулированных в «Началах». Ему удалось построить геометрию, которая удовлетворяла всем аксиомам Евклида, кроме постулата о параллельных. Эта геометрия, которую Я. Бойяи назвал S-геометрией, значительно отличалась от общеизвестной евклидовой геометрии (которую Я. Бойяи обозначил Σ-геометрией). S-геометрия Бойяи была логически непротиворечивой, хотя и представляла интерес лишь с чисто математической точки зрения [1].

в. *Геометрия Яноша Бойяи.* Для того чтобы подчеркнуть различие между Σ- и S-геометрией, мы начнем с рассмотрения следующего вопроса, имеющего первостепенное значение: сколько прямых, не пересекающих прямую e и проходящих через лежащую вне ее точку A, можно провести в плоскости $[e, A]$, определяемой прямой e и точкой A?

В обеих геометриях (S и Σ) всегда можно провести по крайней мере *одну* такую прямую. Действительно, если перпендикуляр AB, опущенный из точки A на e, повернуть вокруг точки A на прямой угол, то прямая AF не будет пересекать прямую e (рис. 238).

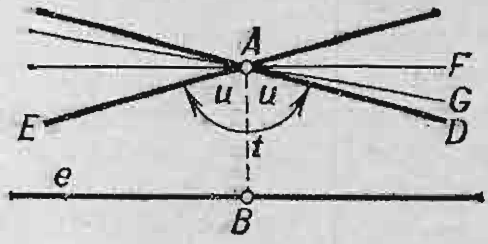


Рис. 238.

В евклидовой геометрии Σ из V постулата следует, что в плоскости $[e, A]$ всякая другая прямая, проходящая через точку A, пересекает прямую e.

Поскольку S-геометрия Бойяи не удовлетворяет постулату о параллельных, то, согласно ей, заведомо найдется *по крайней мере одна* такая прямая e и точка A вне ее, что в плоскости $[e, A]$ через точку A, помимо AF, можно провести еще одну прямую AG, которая также не пересекает прямую e. Как показывает подробное рассмотрение, справедливо даже более сильное утверждение (известное еще до Ф. и Я. Бойяи): *aut semper, aut nunquam* (или все, или ничего). Иначе говоря, если существует одна прямая e и точка A вне ее, через которую можно провести прямую AG, отличную от AF и непересекающую e, то этим же свойством обладает и любая другая прямая e и точка A вне ее.

Рассмотрим более подробно, как обстоит дело в S-геометрии с произвольно выбранной прямой e и точкой A вне ее (рис. 238). Будем вращать прямую, проходящую через конец A отрезка AB, перпендикулярного прямой e, вокруг точки A до тех пор, пока она не расположится под прямым углом к отрезку AB. В какую бы сторону мы ни вращали прямую — по часовой стрелке или против нее, эта прямая перестанет пересекать прямую e («оторвется» от e) еще до того, как она расположится под прямым углом к e: «отрыв» произойдет, начиная с того момента, когда вращаемая прямая совпадет с прямой AD (или AE). В S-геометрии среди прямых, проходящих через точку A, существуют лишь две такие *прямые отрыва*: AD и AE. Они называются *параллельными* прямой e, а угол u, образуемый прямой AD (или AE) с перпендикуляром AB, — *углом па-*

[1] См. далее III. 27. — *Прим. ред.*

раллельности. Величина угла u зависит от длины перпендикуляра AB: чем длиннее AB, тем меньше u.

Некоторые простые и важные задачи, решением которых в Σ-геометрии служили *прямые* или *плоскости*, в S-геометрии приводят к некоторым *кривым линиям* или *поверхностям.* Например, в Σ окружность и сфера при неограниченном увеличении радиуса переходят соответственно в прямую и плоскость. В S соответствующий предельный переход приводит к некоторой предельной кривой (*парациклу*) или поверхности (*парасфере*) [1]. Любые два парацикла конгруэнтны так же, как конгруэнтны любые две парасферы.

Если на плоскости из каждой точки прямой по одну сторону от нее мы восставим перпендикуляры и отложим на них отрезки одинаковой длины d или из каждой точки плоскости по одну сторону от нее восставим перпендикуляры, то в Σ геометрическое место свободных концов построенных нами отрезков будет иметь вид прямой, параллельной данной прямой, или плоскости. В S геометрическое место концов построенных нами перпендикуляров имеет вид некоторой кривой (*гиперцикл*) или искривленной поверхности (*гиперсфера*) [2]. Две такие кривые или поверхности конгруэнтны в том и только в том случае, если длины соответствующих им отрезков d равны.

В S-геометрии сумма углов плоского треугольника меньше двух прямых углов. Если в S-геометрии у двух треугольников соответственные углы равны, то и противолежащие углам стороны равны. Иначе говоря, в S-геометрии два треугольника с соответственно равными углами *конгруэнтны.* Таким образом, в S-геометрии нельзя говорить о подобии плоских фигур и тригонометрические функции необходимо определять без ссылок на отношение сторон прямоугольного треугольника.

Тем не менее и в S-геометрии существует такая поверхность, для которой сумма углов треугольника равна двум прямым углам, и имеет смысл говорить о подобных треугольниках: мы имеем в виду *парасферу,* на которой начерчены треугольники с *параціклическими* сторонами. Прямоугольный треугольник, построенный на такой поверхности в S-геометрии, позволяет определить тригонометрические функции углов точно так же, как прямоугольный треугольник на плоскости в обычной Σ-геометрии. Значения тригонометрических функций угла α, вычисленные таким способом, совпадают со значениями, вычисленными по правилам евклидовой геометрии. Например, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ и в Σ-геометрии, и в S-геометрии.

Доказанная в решении задачи 26 теорема о величине поверхности сферы, оказавшейся внутри другой сферы, представляет немалый интерес и имеет важное значение не только в Σ-геометрии, но и в S-геометрии. Доказательство, приведенное выше для случая Σ-геометрии, целиком переносится на случай S-геометрии, если заменить плоскость, проходящую через точки O и T, *парасферой,* а проведенные прямые — *парациклами.*

---

[1] В отечественной литературе приняты термины *орицикл* и *орисфера. — Прим. ред.*

[2] В отечественной литературе приняты термины *эквидистанта* и *эквидистантная поверхность. — Прим. ред.*

Янош Бойяи считал самым важным своим открытием следующую формулу, устанавливающую зависимость между величиной угла параллельности u и длиной t перпендикуляра AB:

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2}=e^{\frac{t}{k}},$$

где $e=2{,}71828\ldots$ — основание натуральных логарифмов, а k — *абсолютная* (то есть не зависящая от t) *длина*, называемая *параметром* S-геометрии.

Параметр k может изменяться неограниченно. Иначе говоря, параметру k можно придавать произвольные значения. В зависимости от выбора k мы будем получать соответствующую S-геометрию (всякий раз другую). Поскольку k может возрастать до бесконечности, то существует не одна, а бесконечно много S-геометрий, отличающихся величиной параметра k (так же как существует бесконечно много сфер, отличающихся по величине радиуса).

Σ-геометрия представляет собой предельный случай S-геометрии, возникающий, когда параметр k стремится к бесконечности. В этом случае $\frac{t}{k}$ стремится к нулю, и из приведенной выше формулы следует, что

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2}=e^0=1.$$

Таким образом, в Σ-геометрии угол параллельности u перестает зависеть от длины перпендикуляра AB и обращается в постоянную, а именно становится равным прямому углу.

г. *Окончание*. В 1823 г. Янош Бойяи совершил свое величайшее открытие. В письме, отправленном отцу 3 ноября 1823 г. из Темешвара, Янош мог сказать: «Из ничего я построил новый, иной мир». Возможно, что уже тогда он вывел свою формулу, устанавливающую зависимость между величиной угла параллельности и длиной перпендикуляра (достоверно известно, что Я. Бойяи вывел ее в 1823 г.). В 1832 г. в качестве приложения к первому тому «Опыта» Ф. Бойяи вышло небольшое сочинение Я. Бойяи на латинском языке, которое называлось «Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что *a priori* никогда решено быть не может, с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга». В виде отдельных оттисков «Приложение» было опубликовано еще в июне 1831 г.

По просьбе сына Ф. Бойяи срочно послал 28-страничное «Приложение» Гауссу. Ответное письмо Гаусса от 3 марта 1832 г. принесло Я. Бойяи неприятное известие: Гаусс сообщал, что пришел к тем же результатам еще раньше, но не опубликовал их, поскольку не придал им особого значения. Для молодого венгерского ученого, жаждавшего признания и славы, было большим ударом узнать, что почти одновременно с ним независимо от Гаусса неевклидову геометрию разработал русский математик Н. И. Лобачевский.

Казалось, сбылись слова Ф. Бойяи, еще в 1825 г. торопившего сына с публикацией открытий: «Некоторые идеи дожидаются, если можно так выразить, своего часа, и тогда их открывают сразу в нескольких местах». Но прав оказался Гаусс, считавший распространение идей новой, неевклидовой геометрии преждевременным. Даже труды Лобачевского, написанные на одном из живых языков, остались непрочитанными так же, как «Приложение» Я. Бойяи, написанное на латыни. Однако со временем самые смелые идеи завоевывают признание, и ныне геометрия Лобачевского — Бойяи справедливо считается одним из блестящих достижений человеческого гения.

За время, отделяющее нас от эпохи, в которую жили создатели геометрии Лобачевского — Бойяи, математики выяснили, что другие, столь же логически непротиворечивые геометрии мы получим, если, помимо постулата о параллельных, откажемся от других привычных аксиом.

Возникает вопрос: какая из многочисленных геометрий соответствует действительности? Ответить на него, не выходя за рамки чистой математики, невозможно, поскольку единственное требование, предъявляемое ею к теории, заключается в том, что теория должна быть последовательной, то есть не должна приводить к *логическим противоречиям.* Изучение свойств реального пространства (и времени) — интересная и трудная задача *физики.* Каждый полученный результат приводит к все новым и новым поискам. Неоспоримая заслуга Яноша Бойяи и других создателей неевклидовой геометрии состоит в том, что именно они впервые поставили перед наукой задачу о том, какая геометрия описывает свойства реального пространства. До них никто даже не помышлял о том, что может существовать какая-то иная геометрия, отличная от евклидовой, и сама проблема установления геометрии реального пространства не возникала.

27. *Еще о неевклидовой геометрии*[1]. Последний абзац предыдущего пункта нуждается в некотором разъяснении, тем более что он несколько противоречит сказанному на стр. 456 («представляет интерес лишь с чисто математической точки зрения»).

Для Я. Бойяи решающим обстоятельством была, в первую очередь, логическая непротиворечивость неевклидовой геометрии, в которую он твердо верил. В то же время Гаусс и особенно Лобачевский отчетливо сознавали, что геометрия физического пространства может быть неевклидовой и что этот вопрос нельзя разрешить чисто логически. Они предпринимали попытки получить ответ путем эксперимента и с этой целью измеряли сумму углов больших треугольников (Лобачевский путем астрономических наблюдений, Гаусс средствами геодезии), но попытки их были безуспешны: в пределах точности измерений установить, равна ли сумма углов двум прямым или отличается от нее, оказалось невозможным. Тем не менее автор совершенно прав, заявляя, что сама возможность существования геометрии, отличной от евклидовой, была тем ферментом, который вызвал «брожение физических умов» и в конце концов привел к созданию общей теории относительности Эйнштейна (кстати, один из краеугольных камней теории относительности — совпадение массы тяжелой и массы инертной — был экспериментально проверен Л. Этвёшем, основателем венгерских математических олимпиад).

В соответствии с общей теорией относительности Эйнштейна мы знаем теперь, что геометрия пространства определяется распределе-

[1] Добавлено редактором перевода.

нием материи в нем. Вдали от тяготеющих масс пространство «плоское», и его геометрия с достаточной точностью является евклидовой. Наличие тяжелых тел, например звезд, «искривляет» пространство, причем эта кривизна является, вообще говоря, неравномерной. Математическая модель такого пространства была создана Б. Риманом и носит название *римановой геометрии*. Неевклидова плоскость Лобачевского — Бойяи имеет всюду постоянную отрицательную кривизну (этим и определяется тот факт, что на ней имеет место S-геометрия в смысле III. 26), тогда как на евклидовой плоскости и на «парасфере» кривизна всюду равна нулю (и этим определяется наличие Σ-геометрии). Возможна также геометрия постоянной положительной кривизны, она называется *геометрией Римана* (не путать с римановой геометрией, в которой кривизна может быть переменной и какой угодно).

Ни Гаусс, ни Бойяи не разработали неевклидовой геометрии столь обстоятельно, как это сделал Лобачевский (Гаусс сознательно избегал всяких публичных или печатных заявлений на этот счет). Основы новой геометрии были изложены Лобачевским на заседании Ученого совета Казанского университета 11 февраля 1826 г. и опубликованы в 1829 г. в «Казанском вестнике». Затем последовали «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838), «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (1840) и «Пангеометрия» (1855). Тем не менее великий геометр умер в 1856 г., так и не дождавшись признания своих открытий.

И Бойяи и Лобачевский были убеждены в том, что открытая ими геометрия логически непротиворечива, то есть что, выводя ее теоремы одну за другой и выстраивая из них сколь угодно длинную цепочку, мы никогда не встретимся с логическим противоречием (последнее как раз и означало бы, что евклидовский постулат о параллельных доказуем и только геометрия Евклида может иметь место), но ни тот, ни другой не доказали этого строго (собственно говоря, это и привело Лобачевского к попытке решить вопрос экспериментально). К концу XIX века усилиями целого ряда математиков, в первую очередь Бельтрами, Клейна, Пуанкаре и Гильберта, было доказано, что обе геометрии — Евклида и Лобачевского — Бойяи — непротиворечивы в равной мере: существование логического противоречия в одной из них неизбежно влечет существование противоречия в другой. Более того, было доказано, что обе геометрии непротиворечивы, если непротиворечива арифметика, то есть если, отправляясь от системы аксиом Пеано (см. III. 3), мы никогда не сможем прийти к логическому противоречию. Последний вопрос остается открытым и по сей день, но «это совсем другая история»... .

К задаче 28.

28. *О совершенных числах.* Если, вычислив сумму положительных делителей целого положительного числа n, которые меньше его самого, мы вновь получим n, то число n называется *совершенным*. Такие числа рассматривал еще Евклид (в IX книге своих «Начал»). Наименьшее совершенное число равно $2(2^2-1)=6=1+2+3$.

Формула $n=2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа, позволяет получать лишь *четные* совершенные числа. Более того, можно показать, что эта формула позволяет получить *все четные* совершенные числа. До сих пор остались нерешенными следующие вопросы:

а) Конечно или бесконечно множество *четных* совершенных чисел?

б) Существуют ли *нечетные* совершенные числа?

К задаче 35.

29. *Неравенство Бернулли*[1]. В решении задачи 35 доказываемое утверждение $\left(\frac{8}{9}\right)^n \to 0$ заменено не более очевидным утверждением $\left(\frac{9}{8}\right)^n \to \infty$ по существу без доказательства и этого последнего. Аккуратное рассуждение можно провести здесь при помощи следующего элементарного неравенства.

Если $\alpha > -1$ *и* $n \geqslant 1$, *то*

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$$

(*неравенство Бернулли*).

Для доказательства воспользуемся методом полной математической индукции. Для $n = 1$ неравенство верно (база индукции). Предположим, что оно верно для $n - 1$ (индукционная гипотеза), то есть

$$(1+\alpha)^{n-1} \geqslant 1 + (n-1)\alpha.$$

Умножая обе части этого неравенства на положительное число $1 + \alpha$, получаем

$$(1+\alpha)^n = (1+\alpha)(1+\alpha)^{n-1} \geqslant (1+\alpha)(1+(n-1)\alpha) = \\ = 1 + \alpha n + \alpha^2(n-1) \geqslant 1 + \alpha n,$$

то есть доказываемое неравенство верно и для n. Согласно принципу математической индукции (III.3), неравенство Бернулли верно для всех натуральных n.

Теперь имеем

$$\left(\frac{9}{8}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{8}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{8} \to \infty$$

при $n \to \infty$.

К задаче 39.

30. *Принцип Дирихле.* При решении задач часто используют принцип, сущность которого наглядно можно сформулировать так: если спичек больше трех, то, как бы мы ни раскладывали их по трем коробкам, по крайней мере в одном коробке окажется более одной спички. Более абстрактно этот принцип (называемый *принципом Дирихле*) формируется следующим образом: если требуется разложить более чем n предметов по n местам, то по крайней мере на одно место придется более чем один предмет.

[1] Добавлено редактором перевода.

К задаче 40.

31. *Об алгебраических уравнениях с целочисленными коэффициентами.* Последняя часть доказательства была основана на том, что квадрат дробного рационального числа не может быть целым числом. Это утверждение является простейшим частным случаем следующего:

если все коэффициенты алгебраического уравнения вида

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

— целые числа, то все его рациональные корни также целые числа.

Приводимое ниже доказательство применимо к уравнениям всех степеней. Для простоты мы рассмотрим его лишь для случая квадратных уравнений.

Предположим, что уравнение

$$x^2 + ax + b = 0$$

с целочисленными коэффициентами a и b имеет рациональный корень, который (по определению) можно представить в виде $x = r/s$, где r и s — целые числа, причем s отлично от нуля. Условимся считать, что r и s — взаимно простые числа, то есть не имеют других положительных общих делителей, кроме 1 (в противном случае числа r и s всегда можно сократить на общие делители, отличные от 1).

Подставляя $x = r/s$ в заданное квадратное уравнение и умножая его на s^2, получаем

$$r^2 + ars + bs^2 = 0, \tag{1}$$

откуда

$$r^2 = -(ar + bs)s. \tag{2}$$

Если бы абсолютная величина s превышала 1, то мы заведомо могли бы указать такое простое число p, на которое делилось бы число s. Но тогда в силу соотношения (2) — число r^2 также делилось бы на p. Как показано в III. 2, это возможно в том и только в том случае, если r делится на p. Таким образом, простое число p оказалось бы общим делителем чисел r и s, что противоречит сделанному выше предположению, согласно которому r и s — взаимно простые числа.

Итак, абсолютная величина s не может быть больше 1 и, следовательно, равна 1. Таким образом, r/s — целое число.

К задаче 46.

32. *О великой теореме Ферма.* Утверждение задачи представляет собой частный случай следующей теоремы, сформулированной (без доказательства) П. Ферма:

при любом натуральном $n > 2$ уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет решений в целых положительных числах.

Доказано, что эта теорема (известная под названием *великой теоремы Ферма*) верна при всех $n \leqslant 4002$, однако все попытки доказать теорему Ферма в общем случае до сих пор неизменно оказывались безуспешными.

Тем не менее теорему Ферма без труда удается доказать для некоторых частных случаев. К числу таких легко разрешимых «сужений» теоремы Ферма относится и следующее обобщение задачи 46:

никакие три целых числа x, y, z, образующие арифметическую прогрессию, не удовлетворяют уравнению

$$x^n + y^n = z^n$$

при нечетном целом показателе $n > 1$.

Пусть $x = y - d$, $z = y + d$, где y и d — некоторые целые числа. Разделив все члены уравнения

$$(y-d)^n + y^n = (y+d)^n \tag{1}$$

на d^n и обозначив рациональное число y/d через t, преобразуем уравнение (1) к виду

$$(t-1)^n + t^n = (t+1)^n,$$

или, если раскрыть скобки и привести подобные члены,

$$t^n - 2C_n^1 t^{n-1} - 2C_n^3 t^{n-3} - \ldots - 2 = 0. \tag{2}$$

Поскольку коэффициент при старшем члене этого уравнения равен 1, а все остальные коэффициенты — целые числа, то все рациональные корни уравнения (2) могут быть лишь целыми числами (см. III. 31).

Однако уравнению (2) (так же как и уравнению, рассмотренному в задаче 40) не удовлетворяют ни нечетные, ни четные целые числа t. Следовательно, уравнение (2) не имеет решений в рациональных числах, а уравнению (1) не может удовлетворять никакое целое число y.

К задаче 47.

33. *О среднем гармоническом двух чисел.* Средним гармоническим h двух чисел a, b называется величина, обратная среднему арифметическому чисел $1/a$, $1/b$. Таким образом, по определению

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

то есть

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Доказывая приведенную в конце решения задачи 47 теорему, мы воспользовались тем, что *среднее арифметическое двух различных положительных чисел меньше их среднего гармонического.*

Справедливость этого утверждения следует из того, что разность

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

в силу принятых предположений положительна, поскольку $a \neq b$ и $a + b > 0$.

К задаче 51.

34. *О номографии.*

а. *Номограмма для вычисления фокусного расстояния линзы.* Соотношение

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\beta_c}$$

имеет такой же вид, как и формула линзы, устанавливающая зависимость между расстоянием r_1 от линзы до предмета, расстоянием r_2 от линзы до изображения и фокусным расстоянием линзы f:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{f}.$$

Аналогия между найденным в задаче 51 соотношением и формулой линзы позволяет изобразить зависимость между r_1, r_2 и f наглядно, причем весьма простым способом.

На сторонах угла в 120° и его биссектрисе построим шкалы (то есть нанесем деления), позволяющие откладывать различные значения r_1, r_2 и f (рис. 239). Такой чертеж позволяет по значениям любых двух величин без труда находить значение третьей, например,

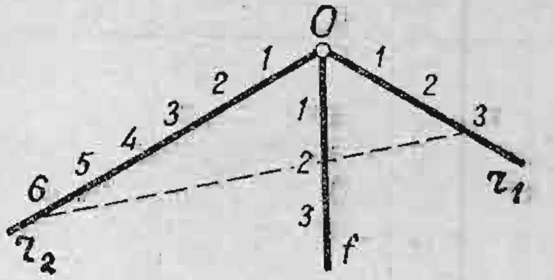


Рис. 239.

найти r_2, зная r_1 и f. Действительно, для этого достаточно отложить на шкалах r_1 и f отрезки, соответствующие выбранному расстоянию до предмета и фокусному расстоянию линзы, и, проведя через концы отрезков прямую, прочитать значение r_2, стоящее у точки ее пересечения со шкалой r_2. Например, как видно на рис. 239, если $f=2$, $r_1=3$, то $r_2=6$.

Для большей точности отсчетов вместо линейки можно воспользоваться прямой, начерченной на листе какого-нибудь прозрачного материала.

Подобные чертежи, изображающие различные зависимости и позволяющие по значениям одних величин легко находить значения других, называются *номограммами* (от греч. νόμοσ — закон и γράμμχ — все начерченное или написанное). Изучением номограмм занимается специальный раздел математики — *номография.*

Среди номограмм, изображающих зависимость между тремя величинами, особенно удобно пользоваться теми, у которых деления на прямолинейных или криволинейных шкалах расположены так, что соответствующие друг другу значения всех трех величин всегда расположены на одной прямой. Именно такая номограмма и представлена на рис. 239.

б. *Номограмма для вычисления корней квадратного уравнения.* Номограмма, изображенная на рис. 240, позволяет по заданным значениям коэффициентов p и q вычислять вещественные корни квадратного уравнения

$$z^2 + pz + q = 0. \tag{1}$$

Чтобы понять, как устроена эта номограмма, начнем со следующих замечаний.

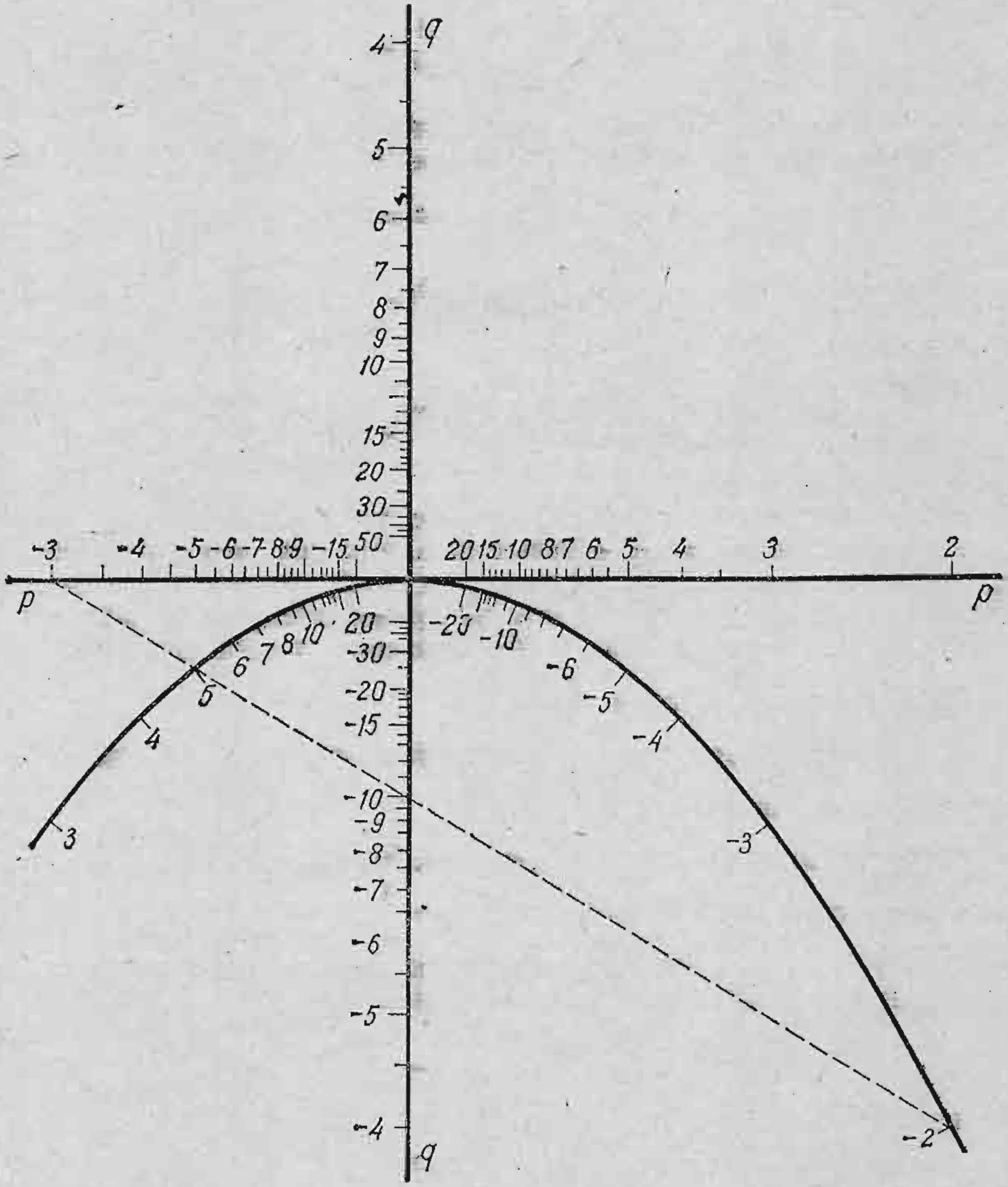


Рис. 240.

Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки a и b, имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2}$$

Иначе говоря, точки $(a, 0)$, $(0, b)$ и (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению (2), лежат *на одной прямой*.

Уравнение (1) после несложных преобразований можно записать так:

$$-p\frac{1}{z}-q\frac{1}{z^2}=1$$

или представить в более общем виде

$$-\frac{p}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{z}-\frac{q}{\beta}\cdot\frac{\beta}{z^2}=1,$$

где α и β — произвольно выбранные *постоянные.*

Записанное в таком виде уравнение (1) отличается от уравнения (2) лишь тем, что a, b, x и y заменены величинами $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{q}$, $-\frac{\alpha}{z}$, $-\frac{\beta}{z^2}$. Иначе говоря, *номографируемое уравнение устроено так, что точки*

$$\left(\frac{\alpha}{p}, 0\right),\ \left(0, \frac{\beta}{q}\right),\ \left(-\frac{\alpha}{z}, -\frac{\beta}{z^2}\right)$$

лежат на одной прямой.

Это позволяет построить для вычисления вещественных корней уравнения (1) номограмму с тремя шкалами так, что соответствующие значения переменных на них всегда будут располагаться на одной прямой. Построить эти шкалы можно следующим образом.

Шкалу p разметим так, чтобы значение p стояло у точки на оси абсцисс с координатами $\left(\frac{\alpha}{p}, 0\right)$.

Шкалу q разметим так, чтобы значение q стояло у точки на оси ординат с координатами $\left(0, \frac{\beta}{q}\right)$.

Шкалу z начертим и разметим так, чтобы значение z стояло у точки плоскости с координатами $\left(-\frac{\alpha}{z}, -\frac{\beta}{z^2}\right)$. Придавая z различные значения, получим некоторую кривую. Уравнение ее мы найдем, исключив переменную z из соотношений

$$x=-\frac{\alpha}{z},\quad y=-\frac{\beta}{z^2}.$$

Оно имеет вид

$$y=-\frac{\beta}{\alpha^2}x^2$$

(уравнение параболы).

Все три шкалы представлены на рис. 240 ($\alpha=12$, $\beta=24$, в качестве единицы длины выбран 1 см).

Предположим, что требуется найти корни уравнения

$$z^2-3z-10=0.$$

При помощи номограммы это делается так. Соединим отрезком прямой точки, стоящие на шкалах p и q у отметок $p=-3$, $q=-10$, и посмотрим, какие значения стоят у точек пересечения проведенного отрезка со шкалой z: они-то и будут корнями интересующего нас уравнения. (В рассматриваемом случае $z_1 = 5$, $z_2 = -2$.)

Если коэффициенты квадратного уравнения имеют (точные или приближенные) значения

$$p = -6{,}4 \quad \text{и} \quad q = 4{,}9,$$

то, пользуясь номограммой, мы получили бы приближенное значение одного из корней $z_1 = 5{,}5$. Поскольку сумма корней этого уравнения равна 6,4, то приближенное значение второго корня составляет $z_2 = 0{,}9$. Оно не уместилось на той части номограммы, которая изображена на рис. 240, поэтому найти z_2 непосредственно по номограмме невозможно.

Построенная номограмма позволяет умножать числа. Например, произведение чисел $z_1 = -2$ и $z_2 = 5$ при помощи ее можно найти следующим образом. Соединим отрезком прямой точки шкалы z с отметками $z_1 = -2$ и $z_2 = 5$ и определим, какому делению шкалы q соответствует точка пересечения этого отрезка со шкалой q: стоящее у этого деления число и будет произведением $z_1 z_2$. (В рассмотренном примере $q = z_1 z_2 = -10$.)

Основателем *номографии* как самостоятельной науки стал французский математик д'Окань (1862—1938).

К задаче 53.

35. *Об одном свойстве тригонометрических многочленов.* Функция

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + \ldots + a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi$$

угла φ называется *тригонометрическим многочленом степени k*. Доказанное в решении задачи утверждение относительно тригонометрических многочленов четвертой степени представляет собой частный случай следующей теоремы:

если $f(\varphi)$ — тригонометрический многочлен степени k, a_0 — свободный член $f(\varphi)$, $\theta = 2\pi/n$ и $n > k$, то

$$f(\varphi + \vartheta) + f(\varphi + 2\vartheta) + \ldots + f(\varphi + n\vartheta) = na_0.$$

Теорема заведомо верна, если $f(\varphi) = a_0$. Кроме того, если теорема выполняется для тригонометрических многочленов f_1, f_2 и c_1, c_2 — любые постоянные, то она также выполняется и для тригонометрического многочлена $c_1 f_1 + c_2 f_2$. Отсюда следует, что рассматриваемую теорему достаточно проверить для того случая, когда $f(\varphi)$ — любая из тригонометрических функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, ..., $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$. Таким образом, нам остается лишь доказать, что если $\vartheta = 2\pi/n$ и $0 < l < n$, то

$$\cos l(\varphi + \vartheta) + \cos l(\varphi + 2\vartheta) + \ldots + \cos l(\varphi + n\vartheta) = 0,$$
$$\sin l(\varphi + \vartheta) + \sin l(\varphi + 2\vartheta) + \ldots + \sin l(\varphi + n\vartheta) = 0.$$

Убедимся в том, что эти равенства выполняются, если l — произвольное целое число, не являющееся кратным числа n. Обозначив для краткости $l\varphi = \alpha$, $l\vartheta = \beta$, сформулируем приведенное выше утверждение следующим образом:

если α — произвольный угол, а β — угол, отличный от целого кратного 2π, но угол $n\beta$ кратен 2π, то

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta)=0, \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)=0. \qquad (2)$$

Для доказательства введем на плоскости прямоугольную систему координат и от некоторой точки P_0 отложим единичный отрезок P_0P_1 вдоль прямой с углом наклона, равным $\alpha+\beta$ (рис. 241).

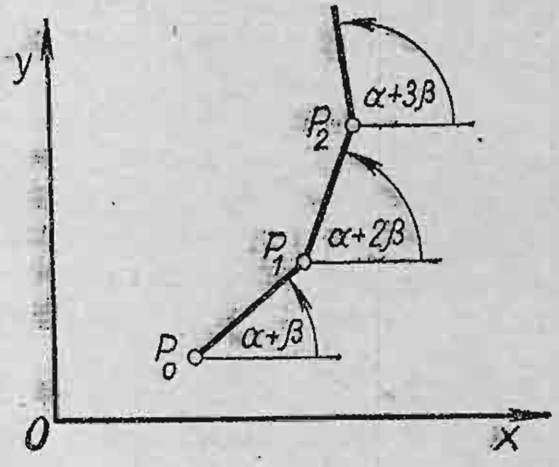


Рис. 241.

Из конца отрезка P_0P_1 в свою очередь отложим единичный отрезок P_1P_2 вдоль прямой с углом наклона $\alpha+2\beta$, затем единичный отрезок P_2P_3 вдоль прямой с углом наклона $\alpha+3\beta$ и так далее до тех пор, пока не отложим единичный отрезок $P_{n-1}P_n$ вдоль прямой с углом наклона $\alpha+n\beta$. Разность абсцисс точек P_{k-1} и P_k при $k=1, 2, \ldots, n$ по построению равна $\cos(\alpha+k\beta)$, а разность ординат — $\sin(\alpha+k\beta)$. Таким образом, разность абсцисс точек P_0 и P_n совпадает с выражением, стоящим в левой части соотношения (1),

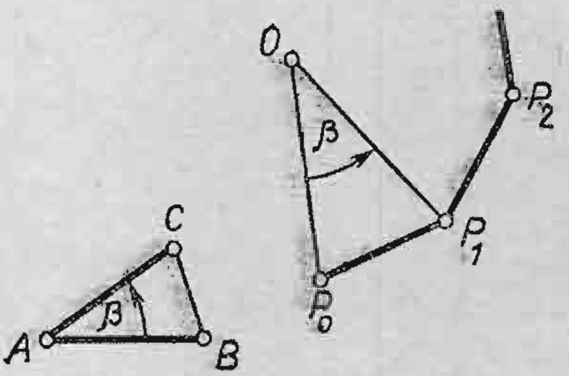


Рис. 242.

а разность ординат тех же точек — с выражением, стоящим в левой части соотношения (2). Необходимо доказать, что точки P_0 и P_n совпадают.

Рассмотрим произвольный отрезок AB. Если его повернуть в положительном направлении на угол β вокруг точки A, то он совпадет с отрезком AC (рис. 242). Поскольку угол β отличен от целого кратного 2π, то точка B не совпадает с точкой C. Следовательно, растянув (или сжав) стороны угла BAC, мы можем сдвинуть его по плоскости так, что точка B совпадет с точкой P_0, а точка C — с точкой P_1 (рис. 242). Точка A при этом перейдет в такую точку O, при повороте вокруг которой на угол β точка P_0 совмещается с точкой P_1, а сам отрезок P_0P_1 переходит в отрезок P_1P_2.

Каждый поворот на угол β вокруг точки O увеличивает угол наклона единичного отрезка на β. Совершив повороты на углы β, $2\beta, \ldots, n\beta$ вокруг точки O, мы переведем точку P_0 в точки P_1, $P_2, \ldots, P_n$. Но поскольку угол $n\beta$ равен целому кратному 2π, то точка P_n совпадает с P_0, что и требовалось доказать.

36. *О правильных многоугольниках и их центре тяжести*[1]. Доказанные в III. 35 равенства (1) и (2) имеют следующее геометрическое истолкование. Как и в III. 16, мы воспользуемся комплексными числами. Числа

$$z_k = \cos(\alpha + k\beta) + i \sin(\alpha + k\beta)$$

расположены на единичной окружности с центром в O $[\cos^2(\alpha + k\beta) + \sin^2(\alpha + k\beta) = 1]$, и хорды, идущие из z_k в z_{k+1}, стягивают дуги одинаковой длины β. Поэтому $z_1, \ldots, z_n$ являются вершинами правильного n-угольника, вообще говоря, звездчатого (III. 14). Легко убедиться в том, что прямая, проходящая через O и z_k, является осью симметрии этого n-угольника. Если мы произведем зеркальное отражение относительно этой оси, то n-угольник перейдет в себя, а потому его центр тяжести останется на месте (о центре тяжести см. III. 56). Следовательно, центр тяжести лежит на каждой из осей симметрии и потому совпадает с O. Поскольку центр тяжести определяется формулой

$$z_c = \frac{z_1 + z_2 + \ldots z_n}{n}$$

[в других обозначениях это формула (1) из III. 56], имеем

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0,$$

что после подстановки значения z_k и отделения действительной и мнимой частей дает (1) и (2) из III. 35.

К задаче 55.

37. *Формула включений и исключений.*

а. *О разбиении предметов на классы по нескольким признакам.* Основная идея решения задачи 55 станет яснее, если мы начнем с рассмотрения следующего более общего вопроса, имеющего фундаментальное значение.

Предположим, что имеется N предметов. Обозначим a, b и c каждый из признаков, которыми обладают какие-то из этих предметов. Пусть N_a — число предметов, обладающих *по крайней мере* признаком a (независимо от того, обладают ли они признаками b и c или не обладают). Далее обозначим через N_{ab} число тех предметов, которые из признаков a, b, c обладают по крайней мере признаками a и b, а через N_{abc} — число предметов, обладающих каждым из признаков a, b и c. Аналогичный смысл придадим обозначениям N_b, N_c, N_{ac}, N_{bc}. Вопрос, на который мы хотим ответить, состоит в следующем: *как по числам* N, N_a, N_b, N_c, N_{ab}, N_{ac}, N_{bc}, N_{abc} *можно узнать, сколько из заданных* N *предметов не обладают ни одним из признаков* a, b *и* c?

---

[1] Добавлено редактором перевода.

Этот вопрос допускает наглядное геометрическое истолкование (рис. 243). Предположим, что предметы, о которых идет речь, — это точки плоскости. Признак a означает, что «точка лежит *внутри* кривой A» (точка a может лежать и на самой кривой A). Аналогично признак b означает, что точка лежит внутри кривой B, а признак c — что точка находится внутри кривой C. На геометрическом языке интересующий нас вопрос можно сформулировать так: *сколько из данных N точек лежат вне кривых A, B и C, если известно, сколько*

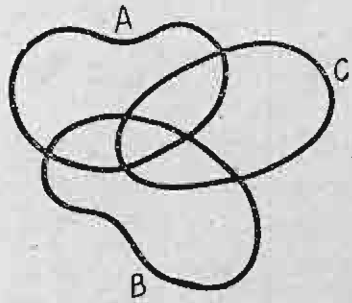


Рис. 243.

точек находится внутри кривой A, кривой B, кривой C, сколько точек находится одновременно внутри кривых A и B, A и C, B и C и, наконец, сколько точек находится одновременно внутри всех трех кривых?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, удобно разбить его на несколько частей:

1) Сколько из заданных N предметов не обладают признаком a?

Ответ ясен:

$$N - N_a \tag{1}$$

(на рис. 243 этим предметам соответствуют точки плоскости, лежащие вне кривой A).

2) Сколько из N_b предметов, обладающих признаком b, не обладают признаком a?

Этот вопрос отличается от предыдущего лишь тем, что число N заменено числов N_b, а числу N_a соответствует N_{ab}. Следовательно, из N_b предметов признаком a не обладают

$$N_b - N_{ab}. \tag{2}$$

(В какой части плоскости (рис. 243) лежат точки, соответствующие предметам, обладающим признаком b, но не обладающим признаком a?)

3) Сколько из N заданных предметов не обладают ни признаком a, ни признаком b?

После того как мы исключим предметы, не обладающие признаком a, останется $N - N_a$ предметов. Из них необходимо еще исключить такие предметы, которые обладают признаком b, но не обладают признаком a (число таких предметов мы нашли, ответив на вопрос 2). Останется

$$N - N_a - (N_b - N_{ab}) = N - N_a - N_b + N_{ab} \tag{3}$$

предметов. (Где располагаются соответствующие точки на рис. 243?)

4) Сколько из N_c предметов, обладающих признаком c, не обладают ни признаком a, ни признаком b?

Из соотношения (3) (заменив N на N_c) получим

$$N_c - N_{ac} - N_{bc} + N_{abc}. \tag{4}$$

(Где располагаются соответствующие точки на рис. 243?)

5) Таким образом, из данных N предметов

$$N - N_a - N_b + N_{ab} - (N_c - N_{ac} - N_{bc} + N_{abc}).$$

то есть

$$N - N_a - N_b - N_c + N_{ab} + N_{ac} + N_{bc} - N_{abc} \tag{5}$$

предметов не обладают ни одним из признаков a, b, c.

б. *Применение полученного результата к решению задачи 55.* В качестве заданных «предметов» выберем n-значные числа, в записи которых встречаются лишь цифры 1, 2, 3. Пусть признак a означает, что среди цифр нет единицы, признак b означает отсутствие двойки, а признак c — отсутствие тройки. Тогда

$$N = 3^n, \quad N_a = N_b = N_c = 2^n,$$
$$N_{ab} = N_{bc} = N_{ac} = 1, \quad N_{abc} = 0.$$

Пользуясь соотношением (5), находим ответ задачи:

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

в. *Обобщение.* Формулу (5) нетрудно обобщить на случай любого числа признаков.

Из обобщенной формулы непосредственно вытекает следующее утверждение:

множество n-значных чисел, в записи которых встречаются лишь цифры 1, 2, 3, ..., k, причем каждая цифра — по крайней мере один раз, содержит

$$k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}$$

элементов.

Утверждение остается верным и при $k > 9$, если числа записывать не в десятичной системе, а в системе счисления с основанием, бо́льшим k.

Интересное тождество получается при $n = k$. В этом случае каждая из цифр 1, 2, ..., $k (= n)$ входит в запись числа один и только один раз, а все n-значные числа отличаются лишь порядком, в котором располагаются цифры 1, 2, ..., n. Таким образом, при $n = k$ множество n-значных чисел, все цифры которых различны, содержит $n!$ элементов. Следовательно,

$$n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} = n!$$

К задаче 57.

38. *Об одном соотношении между сторонами и углами треугольника.* Необходимое и достаточное условие взаимной перпендикулярности диагоналей четырехугольника, о котором говорится в задаче

57, можно вывести из следующей часто используемой теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника:

если два треугольника имеют по две соответственно равные стороны, то третья сторона больше у того треугольника, у которого больше противолежащий ей угол.

Расположим два треугольника, о которых говорится в теореме, так, чтобы две равные стороны совпали, а две другие исходили из общей вершины. Пусть ABC и ABC' — такие треугольники и $AC = AC'$ (рис. 244).

Предположим, что $\angle BAC > \angle BAC'$. Тогда сторона AC' проходит внутри угла BAC, и биссектриса угла CAC' пересекает отрезок

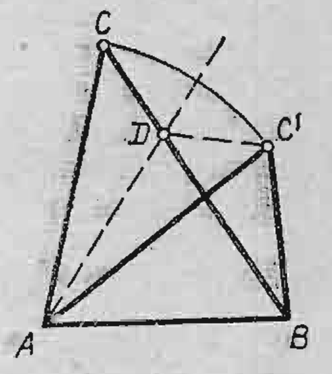


Рис. 244.

BC в некоторой точке D. Отрезки CD и $C'D$ симметричны относительно биссектрисы угла CAC' и поэтому $CD = C'D$. Таким образом,

$$BC = BD + DC = BD + DC' > BC',$$

что и требовалось доказать.

Это означает, что в треугольнике со сторонами a, b, c сторона c больше или меньше гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами a и b в зависимости от того, тупой или острый угол лежит против нее. Равенство, о котором говорится в задаче 57, следует из теоремы Пифагора.

К задаче 60.

39. *Две теоремы о наибольшем общем делителе.* Решая задачу 60, мы использовали два следующих свойства наибольшего общего делителя:

$$(l, m, \ldots; l', m', \ldots) = ((l, m, \ldots), (l', m', \ldots)) \qquad (1)$$

и

$$(kl, km, \ldots) = k(l, m, \ldots). \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) становятся очевидными, если учесть, что в разложение *наибольшего общего делителя* положительных целых чисел l, m, ... по степеням простых чисел каждое простое число p входит в наименьшей из степеней λ, μ, ..., в которых оно входит в разложение чисел l, m, ...

Соотношение (1) означает, что наименьшее из чисел

$$\lambda, \mu, \ldots; \lambda', \mu', \ldots$$

можно найти, если определить наименьшее из чисел в каждом из двух наборов λ, μ, ... и λ', μ', ... в отдельности, а затем выбрать из двух полученных чисел то, которое меньше.

Соотношение (2) означает, что наименьшее из чисел

$$\varkappa+\lambda, \quad \varkappa+\mu, \ldots$$

можно определить, выбрав наименьшее из чисел λ, μ, ... и прибавив к нему $\varkappa$.

К задаче 62.

40. *Теорема Маркова о многочленах Чебышева.* Применим доказанное нами утверждение к многочлену Чебышева

$$T_2(x)=2x^2-1$$

и его производной

$$T_2'(x)=4x.$$

Графики обеих функций изображены на рис. 245.

Многочлены $T_2(x)$ и $-T_2(x)$ по своим свойствам отличаются от всех остальных многочленов $f(x)$ *второй степени*, удовлетворяющих при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ неравенству $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

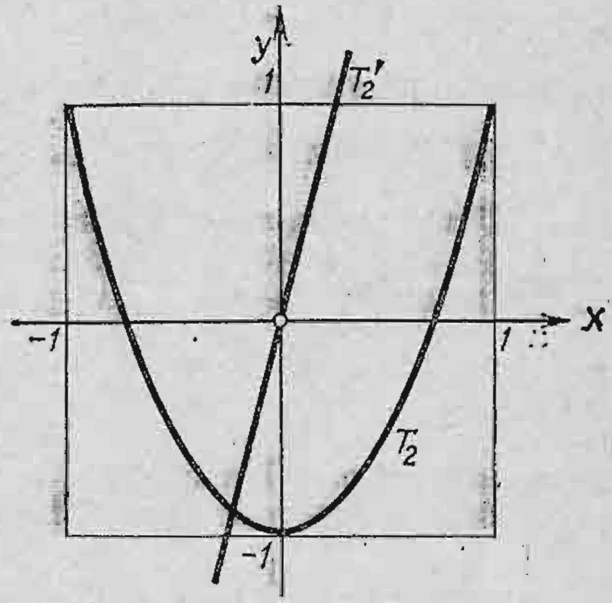


Рис. 245.

В отличие от производных других $f(x)$, удовлетворяющих лишь неравенству

$$-4<f'(1)<4,$$

производная многочлена Чебышева $T_2(x)$ на концах интервала удовлетворяет равенствам

$$T_2'(1)=-T_2'(-1)=4.$$

Действительно, в силу неравенств (3) и (4), приведенных в решении задачи 62, равенство

$$f'(1)=2a+b=4$$

возможно лишь в том случае, если $a \pm b = a = 2$, то есть если

$$a=2, \quad b=0.$$

Но тогда из неравенства (1) мы получим, что $2+c \leqslant 1$, то есть

$$c \leqslant -1.$$

Поскольку известно, что $c \geqslant -1$, то $c=-1$. Таким образом, отправляясь от равенства $f'(1)=4$, мы приходим к многочлену Чебышева $T_2(x)=2x^2-1$.

Аналогично, взяв за исходные равенства

$$f'(-1)=4, \quad f'(1)=-4, \quad f'(-1)=-4,$$

мы соответственно пришли бы к многочленам $-T_2(x)$, $-T_2(x)$ и $T_2(x)$.

Упомянем о том, что доказанное нами утверждение представляет собой лишь частный случай следующей теоремы А. А. Маркова (1856—1922):

если многочлен n-й степени

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

с вещественными коэффициентами при всех $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *удовлетворяет неравенству*

$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

то его производная удовлетворяет неравенству

$$-n^2 \leqslant f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1} \leqslant n^2.$$

Величина $|f'(x)|$ *может достигать своих предельных значений лишь при* $x=+1$ *и* $x=-1$ *и только в том случае, если* $f(x)$ *совпадает с многочленом Чебышева* $T_n(x)$ *или отличается от него лишь знаком.*

К задаче 67.

41. *Теорема Лагерра.* Приведенное в условиях задачи уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots+\frac{1}{x-a_n}=0, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные вещественные числа.

Сравнительно нетрудно показать, что уравнение (1) имеет $n-1$ вещественных корней. Если обозначения выбраны так, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, то между любой парой чисел

$$(a_1, a_2), \quad (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$$

заключен один и только один корень уравнения (1).

Французскому математику Лагерру (1834—1886) удалось найти ответ на более глубокий вопрос: что можно сказать о расположении корня α_i уравнения (1) внутри интервала (a_i, a_{i+1})? Может ли корень находиться сколь угодно близко от концов интервала или нет?

Ответ на эти вопросы дает следующая теорема:

если интервал (a_i, a_{i+1}) *разделить на n равных частей, то корень* α_i, *заключенный между* a_i *и* a_{i+1}, *никогда не попадет ни в одну из двух частей, примыкающих к концам интервала.*

Если $n = 3$ и

$$a_1 = -b, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = a,$$

то теорема Лагерра приводит к тому же заключению, что и решение задачи 67.

График функции

$$f(x) = \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a}$$

и корни уравнения $f(x) = 0$ показаны на рис. 246.

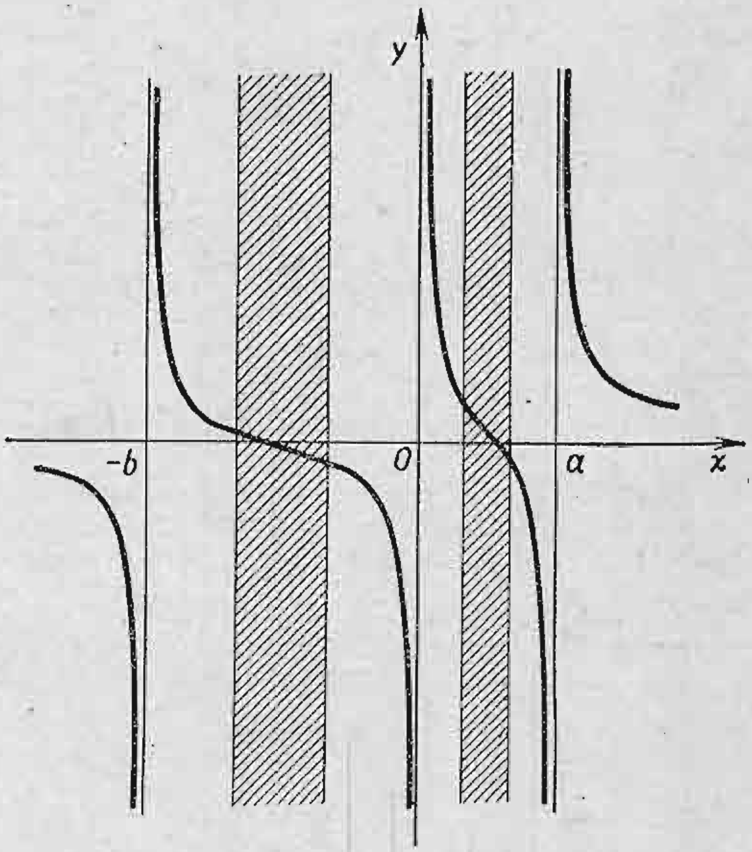


Рис. 246.

Метод, использованный нами при решении задачи 67, позволяет без труда доказать теорему Лагерра.

К задаче 68.

42. *Теорема о среднем геометрическом и среднем арифметическом n чисел (неравенство Коши). Для любых положительных чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *среднее геометрическое*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

не превосходит среднего арифметического

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

то есть имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \tag{1}$$

или, что то же,

$$x_1x_2\ \dots\ x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\ \dots\ +x_n}{n}\right)^n, \tag{2}$$

причем равенство достигается лишь в том случае, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Воспользуемся методом полной математической индукции и докажем теорему сначала для случая, когда $n = 2^m$, где m — любое положительное целое число.

Начнем с $n = 2$. Поскольку x_1 и x_2 — положительные числа, неравенство

$$\sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2} \tag{3}$$

равносильно неравенству

$$x_1x_2 \leqslant \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2. \tag{4}$$

Вычитая x_1x_2 из $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$, находим

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - x_1x_2 = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

причем равенство достигается лишь при $x_1 = x_2$.

Воспользуемся неравенством (4) и применим его к *четырем* ($n = 2^2 = 4$) числам:

$$(x_1x_2)\,(x_3x_4) \leqslant \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2.$$

Подставив в неравенство (4) вместо x_1 и x_2 полусуммы $\frac{x_1+x_2}{2}$ и $\frac{x_3+x_4}{2}$, получим

$$\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2} \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^2.$$

Таким образом, предыдущее неравенство можно преобразовать к виду

$$x_1x_2x_3x_4 \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4.$$

И в этом случае равенство достигается лишь при условии, если $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Отсюда для случая $n = 8$ получаем неравенство

$$(x_1x_2x_3x_4)\,(x_5x_6x_7x_8) \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4\left(\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\right)^4.$$

Подставляя в неравенство (4) вместо x_1 и x_2 средние арифметические чисел x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5, x_6, x_7, x_8, приходим к неравенству

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}\right)^2.$$

Следовательно, для *восьми* положительных чисел выполняется неравенство

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}\right)^8.$$

Продолжая каждый раз удваивать n, мы докажем теорему для $4, 8, 16, \ldots, 2^m, \ldots$ чисел.

Для произвольного n теорему можно доказать следующим образом. Пусть, например, $n=5$. К заданным числам припишем еще $8-5=3$ числа, каждое из которых равно среднему арифметическому k пяти заданных чисел. По доказанному выше,

$$x_1x_2x_3x_4x_5k^3\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3k}{8}\right)^8=k^8.$$

Следовательно,

$$x_1x_2x_3x_4x_5\leqslant k^5.$$

Теорему о среднем геометрическом и среднем арифметическом впервые сформулировал и доказал Коши (1789—1857).

Если положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ изменяются, но так, что либо их сумма, либо их произведение остается постоянным, то к доказанному неравенству добавляются еще две следующие теоремы:

произведение любого числа положительных сомножителей, изменяющихся так, что их сумма остается постоянной (а в остальном — произвольно), достигает своего наибольшего значения, когда все сомножители равны;

сумма любого числа положительных слагаемых, изменяющихся так, что их произведение остается постоянным (а в остальном — произвольно), достигают своего наибольшего значения, когда все слагаемые равны.

43. *Неравенство Иенсена.* Датский математик Иенсен (1859—1925), повторяя шаг за шагом все рассуждения Коши, доказал следующую более общую теорему.

Пусть $f(x)$ — такая функция, что

$$f(x_1)+f(x_2)\leqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \qquad (1)$$

всякий раз, когда x_1 и x_2 принадлежат данному (быть может, бесконечному) отрезку числовой оси. Тогда для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из того же отрезка выполняется неравенство

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\leqslant nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n}\right). \qquad (2)$$

[Если в (1) равенство достигается лишь при $x_1 = x_2$, то и в (2) равенство имеет место при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.]

Из неравенства Иенсена как частный случай следует доказанное в предыдущем примечании неравенство Коши. Кроме того, неравенство Иенсена позволяет дать новые решения двух ранее рассмотренных задач.

а. Действительно, для любых положительных чисел x_1 и x_2 выполняется неравенство

$$x_1 x_2 \leqslant \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2.$$

Логарифмируя его по любому основанию, большему 1, получаем

$$\log x_1 + \log x_2 \leqslant 2 \log \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Следовательно, мы можем воспользоваться неравенством Иенсена и утверждать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n \leqslant n \log \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}.$$

Это не что иное, как прологарифмированное неравенство (2) из III. 42.

б. Пусть x_1 и x_2 — два положительных острых угла. Тогда (см. III. 9)

$$\sin x_1 \sin x_2 = \frac{1}{2} [\cos (x_1 - x_2) - \cos (x_1 + x_2)],$$

$$\sin^2 \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} [1 - \cos (x_1 + x_2)]$$

и, следовательно,

$$\sin^2 \frac{x_1 + x_2}{2} - \sin x_1 \sin x_2 = \frac{1 - \cos (x_1 - x_2)}{2} = \sin^2 \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Таким образом,

$$\sin x_1 \sin x_2 \leqslant \sin^2 \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Логарифмируя это неравенство по произвольному основанию, большему 1, получаем

$$\log \sin x_1 + \log \sin x_2 \leqslant 2 \log \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Таким образом, и в этом случае мы можем воспользоваться неравенством Иенсена и получить для произвольного числа положительных острых углов неравенство

$$\log \sin x_1 + \log \sin x_2 + \ldots + \log \sin x_n \leqslant$$
$$\leqslant n \log \sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

то есть

$$\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n \leqslant \sin^n \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

причем равенство достигается лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Если $n = 3$ и $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{2}$, то есть если x_1, x_2, x_3 — половины углов треугольника, то

$$\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \leqslant \sin^3 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

Это неравенство было доказано (с использованием теоремы Эйлера) во втором решении (п. б) задачи 11.

в. Неравенство Иенсена позволяет решить и задачу 14.

Действительно, если x_1 и x_2 два угла, заключенные между 0° и 180°, то

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} \leqslant 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Таким образом, мы можем воспользоваться неравенством Иенсена и утверждать, что для любого числа углов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заключенных в указанных пределах, выполняется неравенство

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n \leqslant n \sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

причем равенство имеет место лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Если $n = 3$ и $x_1 + x_2 + x_3 = \pi$, то мы приходим ко второй части решения задачи 14.

г. Неравенство Иенсена позволяет легко доказать и обобщить утверждение о гармоническом среднем, доказанное в III. 33.

Пусть $f(x) = -\frac{1}{x}$. В области положительных чисел эта функция удовлетворяет условиям теоремы Иенсена, поскольку

$$-\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \leqslant 2\left(\frac{1}{\frac{-a-b}{2}}\right) = -\frac{4}{a+b},$$

причем равенство достигается лишь при $a = b$. В самом деле, разность между правой и левой частями неравенства

$$-\frac{4}{a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{-4ab + b(a+b) + a(a+b)}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}$$

положительна, если $a \neq b$, и обращается в 0 при $a = b$.

Напомним, что средним гармоническим положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число h, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{n}{h} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n},$$

и средним арифметическим — число a, для которого

$$na = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Применив неравенство Иенсена к числам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и функции $f(x) = -\frac{1}{x}$, получим

$$-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \ldots - \frac{1}{x_n} \leqslant n\left(-\frac{1}{a}\right),$$

то есть

$$-\frac{n}{h} \leqslant -\frac{n}{a},$$

откуда

$$h \leqslant a.$$

Итак, мы доказали, что *среднее гармоническое положительных чисел не может быть больше их среднего арифметического, причем равенство достигается лишь в том случае, если все положительные числа равны.*

44.[1] *О выпуклых и вогнутых функциях.* Во многих разделах современной математики важную роль играют выпуклые и вогнутые функции.

Дадим сначала геометрическое определение.

Функция $y = f(x)$, определенная в некотором интервале, называется выпуклой, если любая дуга ее графика лежит не выше стягивающей ее хорды (рис. 247, *а*).

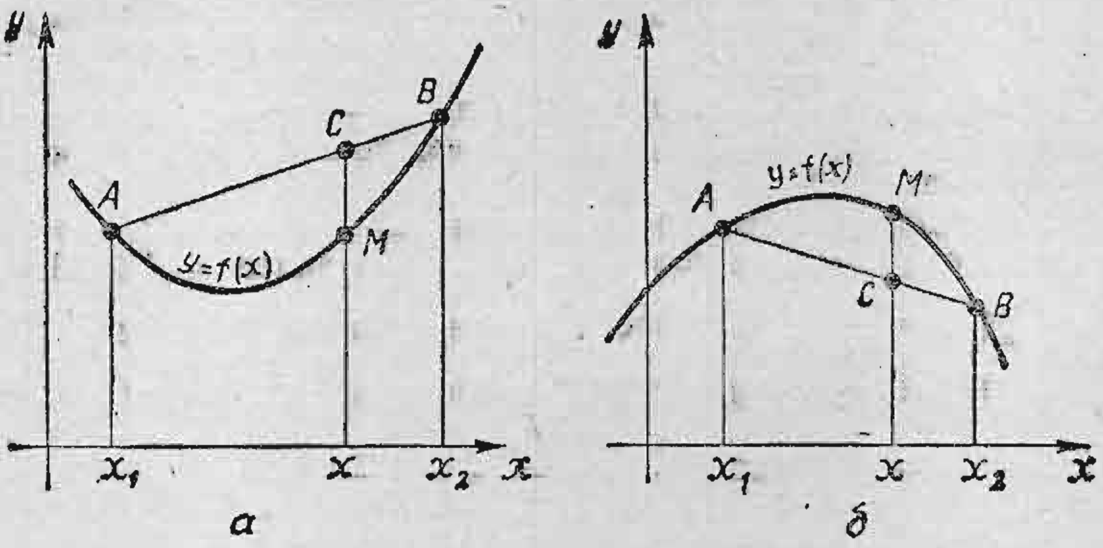


Рис. 247.

Функция $y = f(x)$, определенная в некотором интервале, называется вогнутой, если любая дуга ее графика лежит не ниже стягивающей ее хорды (рис. 247, б).

Например, функции $y = x^2$, $y = x^4$, $y = a^x\,(a > 0)$ выпуклые, а функции $y = -x^2$, $y = -x^4$, $y = \lg x$ вогнутые. Функция $y = \sin x$ вогнута в интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и выпукла в интервале $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. Линейные функции $y = ax + b$ и только они одновременно и выпуклы и вогнуты.

Теперь переведем данное выше определение на аналитический язык.

Функция $y = f(x)$, определенная в некотором интервале, называется выпуклой, если для любых x_1, x_2 из области ее определения

---

[1] Добавлено редактором перевода

и любых α, β, таких, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \qquad (1)$$

Определение вогнутой функции получается заменой неравенства (1) неравенством

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \qquad (2)$$

Покажем, что это определение эквивалентно геометрическому, данному выше. В самом деле, пусть $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ — точки графика нашей функции (рис. 247, *а* и *б*). Точка C хорды AB, делящая ее в отношении $AC : CB = \beta : \alpha$, имеет при $\alpha + \beta = 1$ кординаты $(\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha f(x_1) + \beta f(x_2))$. Когда α пробегает отрезок $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ в одном направлении, а $\beta = 1 - \alpha$ — в противоположном, точка C пробегает всю хорду AB.

Возьмем на графике точку M с абсциссой $x = \alpha x_1 + \beta x_2$. Ее ордината равна $f(\alpha x_1 + \beta x_2)$. Функция выпукла тогда и только тогда, когда точка M лежит не выше C (рис. 247, *а*; обе точки имеют одну и ту же абсциссу), а это как раз и означает, что выполняется неравенство (1). Точно так же вогнутость функции означает, что точка M лежит не ниже C (рис. 247, *б*), то есть имеет место (2).

Ясно, что неравенство (1) из III. 43 есть частный случай нашего неравенства (2), относящийся к $\alpha = \beta = 1/2$. Более того, если $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет для всех x_1 и x_2 неравенству (1) из III. 43, то она будет вогнутой и в смысле нашего определения. Поэтому для вогнутых функций справедливо неравенство, доказанное в III. 43, а для выпуклых функций справедливо аналогичное неравенство с заменой знака $\leqslant$ на $\geqslant$. Кроме того, эти неравенства могут быть обобщены.

Пусть $y = f(x)$ — выпуклая или вогнутая функция. Тогда для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из области ее определения и любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, таких, что $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n), \qquad (3)$$

если $f(x)$ выпукла, и неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n), \qquad (4)$$

если она вогнута.

Оба эти неравенства также называются *неравенствами Иенсена* [неравенство (2) из III. 43 получается из (4) при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$]. Мы ограничимся доказательством неравенства (3), применив метод математической индукции.

При $n = 1$ (3) очевидно. Предположим, что оно верно для некоторого n и даны x_i, α_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, так, что $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Положим

$$\bar{x}_1 = \bar{\alpha}_1 x_1 + \ldots + \bar{\alpha}_n x_n, \quad \bar{x}_2 = x_{n+1},$$

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\alpha}, \quad \alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \beta = \alpha_{n+1}$$

(если $\alpha_i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то доказывать нечего). Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = f(\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2) \leqslant \alpha f(\bar{x}_1) + \beta f(\bar{x}_2) =$$
$$= \alpha f(\bar{\alpha}_1 x_1 + \ldots + \bar{\alpha}_n x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha [\bar{\alpha}_1 f(x_1) + \ldots + \bar{\alpha}_n f(x_n)] + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) =$$
$$= \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

[мы воспользовались здесь неравенством (3) для n и определением выпуклости (1)]. Таким образом, (3) справедливо для $n+1$ и в силу принципа математической индукции доказано для всех натуральных n.

Проверка определений (1) и (2) может представить некоторые затруднения, если делать ее непосредственно, но сильно облегчается, если мы воспользуемся дифференциальным исчислением:

Если в некотором интервале вторая производная $f''(x) \geqslant 0$ (соответственно $\leqslant 0$), то в этом интервале функция $f(x)$ выпукла (соответственно вогнута).

В самом деле, воспользовавшись формулой конечных приращений, находим

$$\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha [f(x_1) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)] +$$
$$+ \beta [f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)] = \alpha f'(c_1)(x_1 - \alpha x_1 - \beta x_2) +$$
$$+ \beta f'(c_2)(x_2 - \alpha x_1 - \beta x_2) = \alpha\beta (f'(c_2) - f'(c_1))(x_2 - x_1) =$$
$$= \alpha\beta f''(c)(c_2 - c_1)(x_2 - x_1),$$

где $x_1 < c_1 < \alpha x_1 + \beta x_2 < c_2 < x_2$ и $c_1 < c < c_2$. Поэтому знак левой части совпадает со знаком f'', что дает (1) при $f'' \geqslant 0$ и (2) при $f'' \leqslant 0$.

Например, функция $y = \ln x$ вогнута, так как $y'' = -1/x^2 < 0$. Поэтому

$$\ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n =$$
$$= \ln\left(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\right).$$

Отсюда

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$
$$\left(x_i > 0, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right),$$

что является обобщением неравенства Коши (III. 42).

Все проделанные выше рассуждения без труда переносятся на функции многих независимых переменных (см. также III. 65).

К задаче 77.

45. *Теорема Эйзенштейна.* Доказанное утверждение представляет собой частный случай следующего:

пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

— многочлен с целочисленными коэффициентами. Если существует простое число p, такое, что коэффициент при старшем члене a_0 не

делится на p, все остальные коэффициенты делятся на p, а свободный член a_n не делится на p^2, то $f(x)$ нельзя разложить в произведение двух многочленов меньшей степени с целочисленными коэффициентами.

Эта теорема была доказана Шёнеманом (1846) и Эйзенштейном (1850) и обычно называется теоремой Эйзенштейна, хотя первое доказательство теоремы принадлежит не ему.

К задаче 80.

46. *О тождественно равных многочленах.* а. Воспользовавшись следующей теоремой, мы смогли бы опустить ту часть второго решения задачи 80, в которой рассмотрен случай $q = 1$:

если значения двух многочленов степени не выше n совпадают более чем при n значениях неизвестного, то они совпадают при всех значениях неизвестного и коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного в обоих многочленах равны.

Действительно, эта теорема позволяет утверждать, что рассмотренный в первой части (второго) решения задачи 80 случай $q = 1$ следует из второй части того же решения. Действительно, в правой и левой частях тождества (*) стоят многочлены относительно q. Как доказано во второй части решения, они совпадают при *всех* значениях $q \neq 1$, то есть при числе значений q, заведомо большем степени многочленов, и, таким образом, должны совпадать при всех значениях q, в том числе и при $q = 1$.

Сформулированную выше теорему нетрудно доказать, если воспользоваться теоремой из примечания III. 17, в. Действительно, если бы коэффициенты при одинаковых степенях рассматриваемых многочленов не были бы равны, то разность между правой и левой частью была бы многочленом степени не выше n и вопреки условиям задачи не могла бы обращаться в нуль более чем при n значениях неизвестного.

б. Сформулированная в п. а. теорема позволяет установить соотношения между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения (формулы Виета).

Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни уравнения

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0), \tag{1}$$

то

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0}$$

и вообще

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k + \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2} \ldots \alpha_n = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

(В левой части соотношений стоят суммы всех возможных произведений из корней уравнения (1) по k.)

В 111. 17, б доказано, что $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

(корни α_i не обязательно должны быть различными). Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим при x^{n-k} коэффициент, равный умноженной на $(-1)^k a_0$ левой части соотношения (2), то есть коэффициенту a_k многочлена $f(x)$. Таким образом, формулы Виета (2) следуют из сформулированной в п. а теоремы о тождественно равных многочленах.

К задаче 83.

47. *О параболе*[1]. Используемое в решении задачи 83 определение параболы известно каждому, кто проштудировал любой курс аналитической геометрии, но в средней школе не очень популярно, а потому мы вкратце его напомним.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (называемой фокусом параболы) и данной прямой (называемой ее директрисой).

Опустив из фокуса перпендикуляр на директрису, поместим начало координат в его середине, ось x направим параллельно директрисе, а ось y — через фокус. Тогда директриса будет иметь уравнение $y = -p/2$, фокус — координаты $(0, p/2)$, где p — расстояние между фокусом и директрисой.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка на нашей кривой. Тогда из определения имеем

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|,$$

откуда

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

и

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

Мы пришли к обычному уравнению параболы.

К задаче 84.

48. а. *Степень точки относительно окружности. Радикальная ось двух окружностей.* Как известно, для всех секущих, проведенных через точку P к данной окружности, произведение отрезков PM и PN от точки P до точек пересечения с окружностью одинаково. Это произведение, не зависящее от направления секущей, называется *степенью точки P относительно окружности k.*

Отрезкам секущей PM и PN обычно приписывают знаки. Отрезки, направленные в одну сторону, считаются имеющими одинаковые знаки. Отрезки, направленные в противоположные стороны, имеют различные знаки. Если точка P лежит *вне* окружности k (рис. 248, *а*), то отрезки секущей имеют одинаковые знаки и степень точки P относительно окружности k *положительна*. Наоборот,

[1] Добавлено редактором перевода.

степень точки P, расположенной *внутри* окружности k, относительно k *отрицательна* (рис. 248,б). Если точка P расположена *на окружности* k, то один из отрезков проходящей через нее секущей стягивается в точку, поэтому степень такой точки относительно окружности k *равна нулю*.

Степень любой точки P, расположенной вне окружности k, относительно k равна *квадрату касательной*, проведенной из P к k.

Если секущая проходит через центр C окружности k, то длина двух ее отрезков от точки P до точек пересечения с окружностью

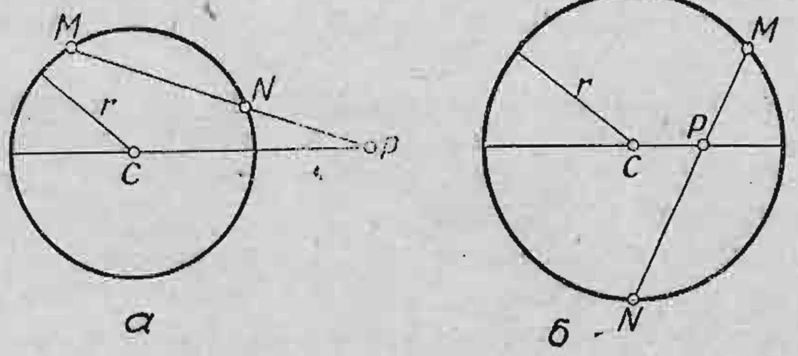


Рис. 248.

равна $d+r$ и $d-r$, где $d=PC$, а r — радиус окружности k. Следовательно, степень точки P относительно окружности k равна

$$(d+r)(d-r)=d^2-r^2.$$

б. *Геометрическое место точек плоскости, имеющих одну и ту же степень относительно двух неконцентрических окружностей представляет собой прямую, перпендикулярную линии центров окружностей.* Эта прямая называется *радикальной осью двух окружностей.*

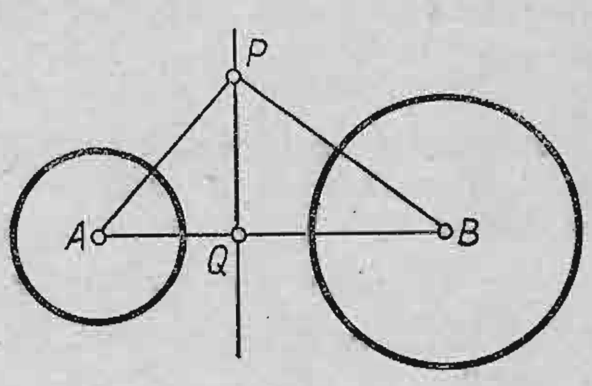


Рис. 249.

Пусть A и B — центры двух окружностей, a и b — их радиусы, P — произвольная точка плоскости и Q — ее проекция на отрезок AB (рис. 249).

Как было показано выше, степень точки P относительно окружностей равна PA^2-a^2 и PB^2-b^2. Следовательно, точка P принадлежит радикальной оси двух данных окружностей, если

$$PA^2-a^2=PB^2-b^2.$$

По теореме Пифагора

$$b^2-a^2=PB^2-PA^2=(QB^2+PQ^2)-(AQ^2+PQ^2)=QB^2-AQ^2.$$

Как показано в первом решении задачи 57, разность $QB^2 - AQ^2$ однозначно определяется положением точки Q на отрезке AB. Следовательно, искомое геометрическое место точек, имеющих степень $PA^2 - a^2 = PB^2 - b^2$ относительно двух данных окружностей, представляет собой прямую, перпендикулярную линии их центров AB и проходящую через точку Q.

Если две окружности пересекаются, то их радикальной осью служит прямая, соединяющая точки пересечения.

Действительно, точки пересечения принадлежат геометрическому месту точек, имеющих одинаковые степени относительно обеих окружностей, поскольку их степень относительно каждой окружности равна нулю.

Если две окружности касаются друг друга, то их радикальной осью служит общая касательная, поскольку в данном случае радикальная ось проходит через точку касания окружностей и перпендикулярна их линии центров.

Радикальные оси трех окружностей k_1, k_2, k_3, взятых попарно, либо параллельны, либо пересекаются в одной точке в зависимости от того, расположены ли центры окружностей k_1, k_2 и k_3 на одной прямой или нет.

Действительно, если центры окружностей расположены на одной прямой, то все три радикальные оси перпендикулярны этой прямой и, следовательно, параллельны. Если же центры окружностей не лежат на одной прямой, то радикальные оси всех трех пар окружностей непараллельны. Точка пересечения радикальных осей окружностей k_1, k_3 и k_2, k_3 имеет одинаковую степень относительно всех трех окружностей и, следовательно, принадлежит радикальной оси окружностей k_1, k_2. (Точка пересечения радикальных попарно взятых окружностей k_1, k_2 и k_3 называется их *радикальным центром*.)

К задаче 86.

49. *О наибольших степенях простых чисел, встречающихся в разложении факториалов на множители.* В задаче 86 мы, начав с чисел $m = 1000$ и $p = 5$, получили следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} m &= pq_1 + r_1 \ (0 \leqslant r_1 < p), \\ q_1 &= pq_2 + r_2 \ (0 \leqslant r_2 < p), \\ q_2 &= pq_3 + r_3 \ (0 \leqslant r_3 < p), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{k-1} &= p \cdot 0 + r_k \ (0 \leqslant r_k < p), \end{aligned} \tag{1}$$

оборвав ее на q_{k-1}, предшествующем $q_k = 0$. Мы установили, что простое число p входит в разложение числа $m!$ по степеням простых чисел с показателем

$$\alpha = q_1 + q_2 + \dots + q_{k-1}. \tag{2}$$

Из приведенного решения видно, что те же рассуждения остаются в силе для любого натурального числа m и любого простого числа p.

Если бы мы стали записывать число m в системе счисления с основанием p, то остатки от деления m, q_1, q_2, ..., q_{k-1} на p, равные r_1, r_2, ..., r_k, были бы p-ичными «цифрами». Это означает, что, исключая последовательно из соотношений (1), $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$, мы могли бы представить число m в виде

$$m = p(pq_2 + r_2) + r_1 = \ldots = p^{k-1}r_k + p^{k-2}r_{k-1} + \ldots + pr_2 + r_1.$$

Пусть

$$s = r_1 + r_2 + \ldots + r_k. \qquad (3)$$

Складывая соотношения (1) и используя соотношения (2) и (3), получаем

$$m + \alpha = p\alpha + s,$$

где α — наибольший показатель степени простого числа p, встречающийся в разложении факториала $m!$ в произведение степеней простых чисел. Таким образом, мы доказали следующую теорему Лежандра:

пусть m — любое натуральное число, а p — любое простое число. Показатель степени, с которым p входит в разложение числа $m!$ в произведение степеней простых чисел, равен

$$\frac{m-s}{p-1},$$

где величина s означает сумму цифр, полученных при записи числа m в системе счисления с основанием p.

К задаче 88.

50. *Об обходе конем клеток бесконечной шахматной доски.* Утверждение задачи 88 можно сформулировать так: *из любой клетки*

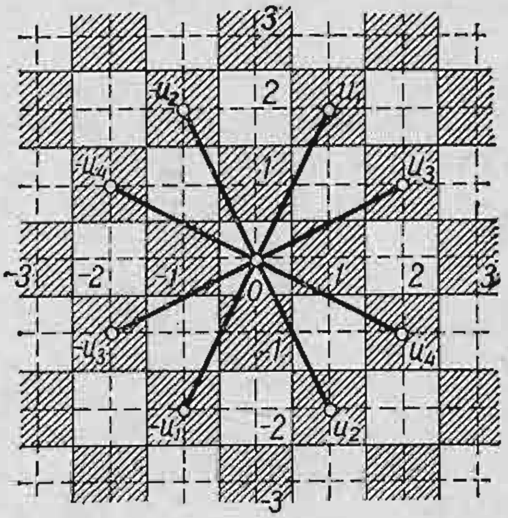


Рис. 250.

бесконечной шахматной доски на любую другую можно попасть ходом коня.

Бесконечная шахматная доска отличается от обычной (размером 8×8 клеток) тем, что содержит бесконечно много клеток, заполняющих всю плоскость. В дальнейших рассуждениях нам удобнее рассматривать вместо клеток их центры. Выберем за начало прямоугольной системы координат центр любой из клеток, а оси направим так, чтобы они были параллельны горизонтальным и вертикальным краям клеток (рис. 250). Если длину стороны любой из клеток принять за единицу длины, то центры клеток бесконечной шахматной доски образуют на плоскости целочисленную решетку — множество точек с целочисленными координатами.

Ход конем (или серию нескольких ходов) мы можем описывать, задавая пары чисел — координаты центров клеток, на которых находился конь до и после хода. Например, восемь возможных ходов коня на рис. 250 соответствуют следующим парам чисел:

$$u_1=(1,\,2),\qquad u_2=(1,\,-2),\qquad u_3=(2,\,1),\qquad u_4=(2,\,-1)$$
$$-u_1=(-1,-2),\quad -u_2=(-1,2),\quad -u_3=(-2,-1),\quad -u_4=(-2,1).$$

Ходы, выписанные один под другим, *противоположны*, то есть действие одного из них уничтожает действие другого. Например, совершив подряд 7 ходов u_1, а затем 5 ходов $-u_1$, конь окажется на той же клетке, на которой он оказался бы после 2 ходов u_1. Если после 8-кратного повторения хода u_1 конь 12 раз подряд повторит противоположный ход $-u_1$, то результат окажется таким же,

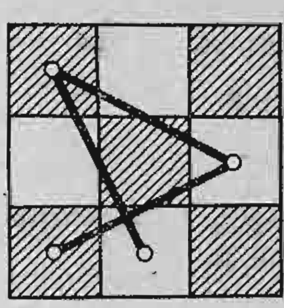


Рис. 251.

как если бы конь совершил 4-кратный ход $-u_1$. Если конь, выйдя из начала координат, совершит x ходов u_1, то после x-го хода он окажется на клетке с координатами $(x, 2x)$.

Итак, x ходов u_1 переводят коня из начала координат на клетку $(x, 2x)$, y ходов u_2 — на клетку $(y, -2y)$, z ходов u_3 — на клетку $(2z, z)$ и t ходов u_4 — на клетку $(2t, -t)$. Совершив эти ходы последовательно, один за другим, конь из начала координат перейдет на клетку с координатами центра

$$(x+y+2z+2t,\ 2x-2y+z-t). \tag{1}$$

Поскольку абсцисса $x+y+2z+2t$ и ордината $2x-2y+z-t$ должны иметь заранее заданные значения a и b, то числа ходов x, y, z и t необходимо подобрать так, чтобы они удовлетворяли системе уравнений (3) из решения задачи 88.

Таким образом, доказанное в решении задачи утверждение о том, что система уравнений (3) допускает решение в целых числах при любых целых a и b, можно истолковать иначе: из любой клетки бесконечной шахматной доски в любую другую можно перейти ходом коня.

Последнее утверждение допускает и прямое доказательство, не требующее введения координат и решения уравнений.

Как показано на рис. 251, конь тремя ходами может перейти с любой клетки на соседнюю справа. Производя ходы в обратном порядке, конь за 3 хода переместится на одну клетку влево. Нетрудно указать последовательность ходов, позволяющих коню перемещаться на одну клетку вверх или вниз.

Чтобы сдвинуться на любое число клеток по горизонтали и вертикали, достаточно разложить путь в последовательность элементарных перемещений на одну клетку по горизонтали и одну клетку по вертикали. Таким образом, ходом коня действительно можно перейти с любой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую.

К задаче 109.

51. *О векторах.* а. Векторные величины находят широкое применение в физике и в математике. Вектором называется направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B. Обозначают вектор так: $\overrightarrow{AB}$. Два вектора считаются равными, если они параллельны

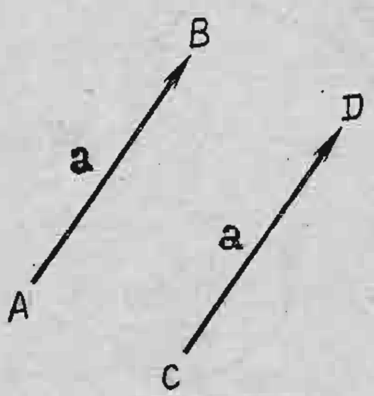


Рис. 252.

(коллинеарны), направлены в одну и ту же сторону и равны по длине. Таким образом, мы не различаем двух векторов, если один из них получен из другого параллельным переносом. Например, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, изображенные на рис. 252, равны, и их можно обозначить одинаково: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

б. Над векторами можно производить различные действия. *Суммой* двух векторов называется вектор, который получится, если от конца одного из векторов-слагаемых отложить другой вектор-слагаемое, а затем построить вектор, идущий из начала первого слагаемого в конец второго. Такое определение суммы двух векторов

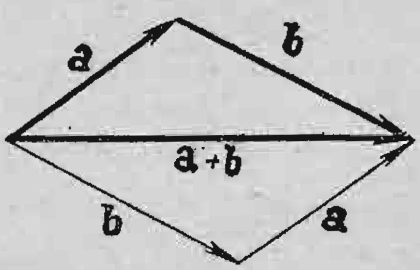


Рис. 253.

согласуется с принятым в физике способом сложения скоростей, известным под названием *правила параллелограмма.* Как видно из параллелограмма, изображенного на рис. 253, сумма двух векторов не изменяется от перестановки слагаемых: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Непосредственно видно, что сложение векторов обладает свойством ассоциативности, то есть

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

поэтому любые скобки, расставленные в сумме трех или большего числа векторов, оказываются излишними.

Из правила сложения векторов ясно, что следует понимать под *разностью* двух векторов. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ исходят из одной и той же точки, то разностью $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ называется вектор, идущий из конца вектора $\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$ (рис. 254), поскольку

$$\mathbf{b}+(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}.$$

Если из любого вектора вычесть равный ему вектор, то начало и

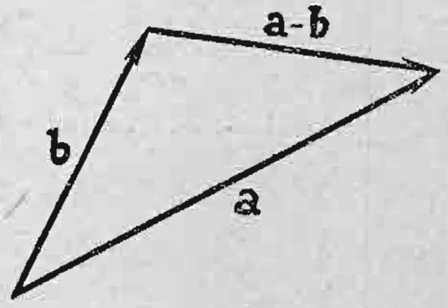


Рис. 254.

конец вектора-разности будут совпадать. Полученный вектор называется *нулевым*:

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

в. Векторы можно умножать на числа. Если m — положительное число, то вектор $m\mathbf{a}$ мы получим, построив новый вектор, параллельный вектору $\mathbf{a}$ и направленный с ним в одну сторону, длина которого относится к длине вектора $\mathbf{a}$, как $m:1$. Вектор $(-m)\mathbf{a}$ параллелен вектору $m\mathbf{a}$ и равен ему по длине, но противоположен по направлению, поэтому $m\mathbf{a}+(-m)\mathbf{a}=0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

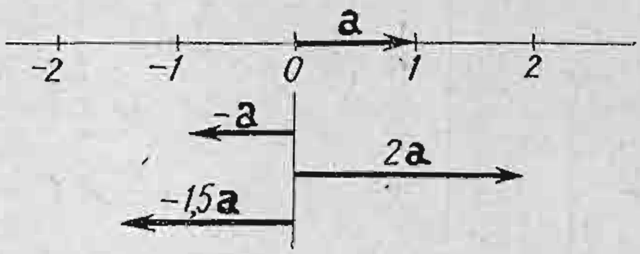


Рис. 255.

На рис. 255 показаны векторы, равные произведению вектора $\mathbf{a}$ и некоторых чисел. Вектор $(-1)\mathbf{a}$ для краткости принято обозначать $-\mathbf{a}$. Такое обозначение согласуется с принятыми выше определениями, поскольку

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}-\mathbf{b}.$$

Умножение векторов на числа определено так, что

$$0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0},\quad 1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}.$$

Нетрудно видеть, что для любых двух чисел m и n

$$(m+n)\,\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a},\quad m\,(n\mathbf{a})=(mn)\,\mathbf{a},$$

а для любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$m\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}.$$

Итак, сложение и умножение векторов на числа обладают теми же свойствами, что и обычные операции сложения и умножения чисел. Это необычайно облегчает действия, производимые над векторами, поскольку обе определенные выше операции подчиняются не новым, а старым, хорошо известным правилам.

г. Предположим, что на плоскости заданы два взаимно перпендикулярных *единичных* вектора $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Каждому вектору $\mathbf{v}$ на плоскости можно сопоставить такой прямоугольный треугольник, у которого $\mathbf{v}$ будет служить гипотенузой, а два вектора, параллельные выбранным единичным векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, — катетами (рис. 256). Если

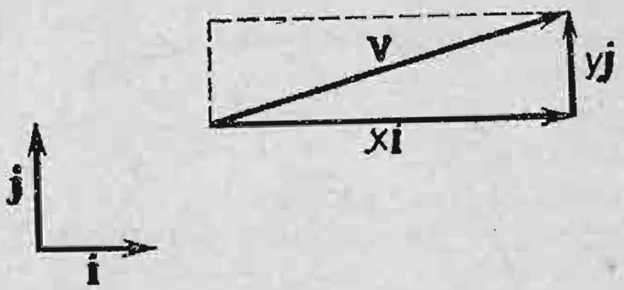


Рис. 256.

сам вектор $\mathbf{v}$ параллелен одному из векторов $\mathbf{i}$ или $\mathbf{j}$, то соответствующий ему прямоугольный треугольник вырождается в отрезок прямой, а один из катетов стягивается в точку. Поскольку векторы получаемые при умножении единичных векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ на числа, параллельны $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, то возможность построения прямоугольного треугольника с катетами, параллельными векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, и гипотенузой,

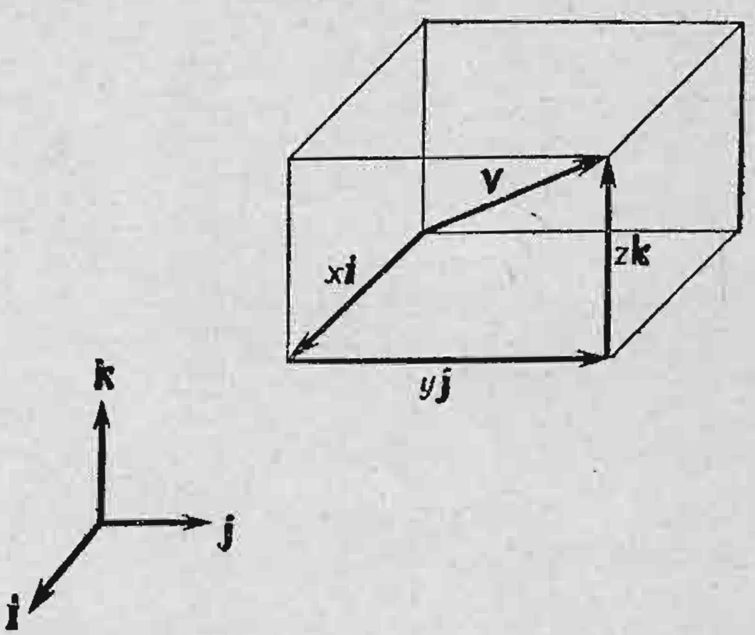


Рис. 257.

равной вектору $\mathbf{v}$, означает, что для любого вектора $\mathbf{v}$ на плоскости можно найти такие два числа x и y, для которых

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

причем для каждого вектора $\mathbf{v}$ числа x и y определяются однозначно.

Числа x и y называются *координатами* вектора $\mathbf{v}$ (относительно выбранных единичных векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$). Если необходимо указать не только сам вектор $\mathbf{v}$, но и его координаты x, y, то обычно для этого используют обозначение $\mathbf{v}\{x, y\}$. Аналогично при описании вектора, лежащего не на плоскости, а в пространстве, вводят три попарно перпендикулярных единичных вектора $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, имеющих общее начало, и любой вектор задают тремя его координатами (рис. 257)

$$\mathbf{v}\{x, y, z\} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Никаких трудностей при переходе от рассмотрения векторов на плоскости к рассмотрению векторов в пространстве не возникает. Векторы $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ называются взаимно перпендикулярными *составляющими* (компонентами) вектора $\mathbf{v}$.

Положение точки P на плоскости или в пространстве можно задать, выбрав начальную точку O и построив вектор $\overrightarrow{OP}$. Такой вектор называется *радиусом-вектором* точки P. Координаты радиуса-вектора служат координатами точки P. Так мы приходим к известной прямоугольной, или декартовой, системе координат на плоскости и в пространстве.

д. Покажем, каким образом можно использовать векторы при построении теории *тригонометрических функций*. Никаких предварительных сведений относительно тригонометрических функций при

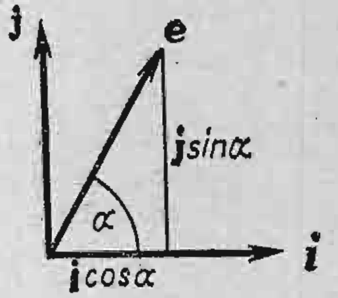


Рис. 258.

этом не требуется. Векторы позволяют не только построить всю теорию тригонометрических функций, но и дать определение самих функций.

Выберем единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ так, чтобы $\mathbf{i}$ при повороте на $90°$ в положительном направлении переходил в $\mathbf{j}$. Поворачивая вектор $\mathbf{i}$ на угол α в положительном или отрицательном направлении, будем считать угол α между новым и старым положением вектора $\mathbf{i}$ соответственно положительным или отрицательным. Предположим, например, что, повернув единичный вектор $\mathbf{i}$ на положительный угол α, мы совместили его с единичным вектором $\mathbf{e}$ (рис. 258). Координаты вектора $\mathbf{e}$ зависят от угла α. Они называются косинусом и синусом угла α:

$$\mathbf{e}\,\{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}.$$

Такое определение тригонометрических функций позволяет вычислять косинус и синус угла $\alpha+\beta$ по известным значениям косинуса и синуса углов α и β. Следует иметь в виду, что при этом на углы α, β и $\alpha+\beta$ мы не налагаем никаких ограничений: они могут быть острыми, тупыми, превышающими развернутый угол, положительными и отрицательными.

Начнем с уже встречавшихся нам единичных векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Повернув оба вектора на один и тот же угол α (рис. 259), получим векторы $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{j}'$. По определению косинуса и синуса,

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha. \tag{1}$$

Это равенство не нарушится, если все входящие в него векторы повернуть в положительном направлении на угол $90°$. Поскольку при таком повороте $\mathbf{i}$ переходит в $\mathbf{j}$, а $\mathbf{j}$ в $-\mathbf{i}$, то новое равенство будет иметь вид

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha. \tag{2}$$

Повернем теперь вектор $\mathbf{i}'$ на угол β. По определению тригонометрических функций вектор $\mathbf{e}$, в который перейдет $\mathbf{i}'$, можно представить и в виде

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}' \cos \beta + \mathbf{j}' \sin \beta, \tag{3}$$

и в виде

$$\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos (\alpha + \beta) + \mathbf{j} \sin (\alpha + \beta), \tag{4}$$

поскольку при повороте на угол $\alpha + \beta$ вектор $\mathbf{i}$ переходит в вектор $\mathbf{e}$.

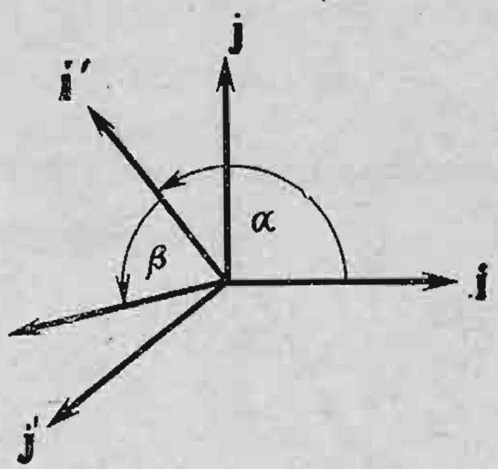


Рис. 259.

Подставляя в равенство (3) выражения (1) и (2) для единичных векторов $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{j}'$, получаем

$$\mathbf{e} = (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) \cos \beta + (- \mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha) \sin \beta =$$
$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)\, \mathbf{i} + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)\, \mathbf{j}.$$

Сравнивая координаты вектора $\mathbf{e}$ с его координатами в (4), находим формулы для косинуса и синуса суммы двух углов:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$
$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

е. Векторы можно умножать друг на друга, причем операцию умножения можно определять по-разному. Рассмотрим сначала случай, когда произведением двух векторов служит не вектор, а число. В тех случаях, когда требуется подчеркнуть различие между векторами и числами, последние принято называть *скалярами*, потому что любое число можно изобразить в виде точки на *шкале* — числовой оси. Если, перемножая два вектора, мы получаем число, то такое произведение двух векторов называется *скалярным*. К сожалению, недостаток места не позволит нам рассказать о других типах произведений векторов. Скалярное произведение двух векторов определено по образу и подобию формулы, по которой вычисляют *работу*. Как известно из физики, работа равна произведению силы на составляющую перемещения в направлении силы. Разложив перемещение на две составляющие: одну в направлении силы, а другую — в перпендикулярном направлении, — мы сможем представить работу в виде произведения трех сомножителей: полного перемещения, величины силы и косинуса угла между направлением силы и перемещением. Именно эти физические соображения и послужили прототипом определения скалярного произведения двух векторов.

В общем случае скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется произведение их длин и косинуса угла между ними:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Здесь $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$ означает длину (модуль) векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — угол между ними (рис. 260). Из определения скалярного произведения следует, что

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba},$$

$$m(\mathbf{ab}) = (m\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,(m\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2.$$

Нетрудно видеть, что *скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно* 0. Из равенства нулю скалярного

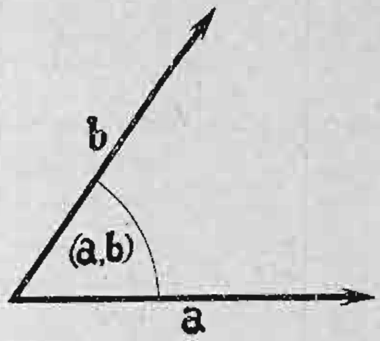


Рис. 260.

произведения двух векторов отнюдь не следует, что один из векторов-сомножителей равен 0: оба вектора-сомножителя могут быть отличными от нуля взаимно перпендикулярными векторами.

Скалярное произведение двух единичных векторов равно косинусу угла между ними. Например, проекция изображенного на рис. 258 единичного вектора $\mathbf{e}$ на единичный вектор $\mathbf{i}$ равна $(\mathbf{ie})\mathbf{i}$,

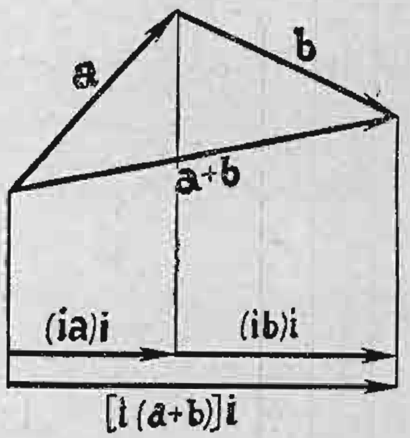


Рис. 261.

поскольку $\mathbf{ie} = \cos\alpha$. Подставив вместо $\mathbf{e}$ вектор $\mathbf{a} = m\mathbf{e}$, мы получим проекцию, которая отличается от $(\mathbf{ie})\mathbf{i}$ множителем m, то есть проекцию вектора $\mathbf{a}$:

$$m(\mathbf{ie})\,\mathbf{i} = [\mathbf{i}\,(m\mathbf{e})]\,\mathbf{i} = (\mathbf{ia})\,\mathbf{i}.$$

Найдем теперь проекции на единичный вектор $\mathbf{i}$ трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, изображенных на рис. 261. Поскольку сумма проекций векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна проекции их суммы $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, то

$$[\mathbf{i}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})]\,\mathbf{i} = (\mathbf{ia})\,\mathbf{i} + (\mathbf{ib})\,\mathbf{i}.$$

Заметив, что все векторы, стоящие в правой и в левой частях этого равенства, имеют вид $k\mathbf{i}$, где k — некоторое число, получим

$$\mathbf{i}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{ia}+\mathbf{ib}.$$

Наконец, если вместо единичного вектора $\mathbf{i}$ подставить произвольный вектор $\mathbf{c}=n\mathbf{i}$, то все члены последнего равенства умножатся на n, в силу чего его можно будет представить в виде

$$\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{ca}+\mathbf{cb}.$$

Итак, мы показали, что скалярное произведение обладает свойством дистрибутивности. Это важное свойство мы могли бы доказать и иным путем, выбрав единичный вектор $\mathbf{i}$ так, чтобы он был параллелен заданному вектору $\mathbf{c}$, и воспользовавшись тем, что проекция суммы двух векторов на любое направление (в частности, на направление вектора $\mathbf{c}$) равна сумме проекций векторов-слагаемых.

Из доказанного свойства скалярного произведения следует, что при умножении любого вектора на сумму двух или большего числа векторов достаточно вычислить попарные произведения этого вектора и каждого из векторов-слагаемых, а затем найти сумму всех таких произведений и что скалярное произведение сумм векторов равно сумме скалярных произведений каждого из слагаемых одной суммы на все слагаемые второй суммы.

Итак, мы убедились в том, что принятое выше определение скалярного произведения двух векторов позволяет сохранить для векторов многие хорошо известные свойства произведения чисел. Единственное отличие состоит в том, что для векторов перестает выполняться правило «произведение двух сомножителей равно нулю лишь тогда, когда один из сомножителей равен нулю».

Вычислим скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, координаты которых (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) известны. По определению координат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно представить в виде

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}.$$

Вычисляя попарные произведения составляющих векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и учитывая, что скалярные произведения любых двух из векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ равны 0, а скалярные произведения каждого из них на себя равны 1, получаем

$$\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Разумеется, если векторы лежат на плоскости, то необходимость во введении третьей координаты отпадает и скалярное произведение представляет сумму произведений лишь двух, а не трех пар координат.

Если вектор $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ скалярно умножить на векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, то мы получим

$$x=\mathbf{iv},\quad y=\mathbf{jv},\quad z=\mathbf{kv},$$

откуда

$$\mathbf{v}=(\mathbf{iv})\,\mathbf{i}+(\mathbf{jv})\,\mathbf{j}+(\mathbf{kv})\,\mathbf{k}.$$

ж. Скалярное произведение позволяет без труда вывести *теорему косинусов*. Выберем направления сторон $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ треугольника так, чтобы (рис. 262)

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Умножая каждую из сторон этого равенства скалярно на себя, получим

$$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab},$$

то есть

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

з. Наконец, покажем, что скалярное произведение позволяет решать некоторые задачи, даже если в их условиях говорится лишь о числах. Начнем с задачи 109.

Из соотношений (1) и (2) следует, что $\mathbf{u}\{a, b\}$ и $\mathbf{v}\{c, d\}$ — единичные векторы (рис. 263), а соотношение (3) означает, что $\mathbf{uv} = 0$

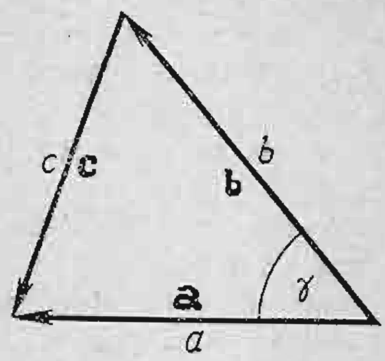


Рис. 262.

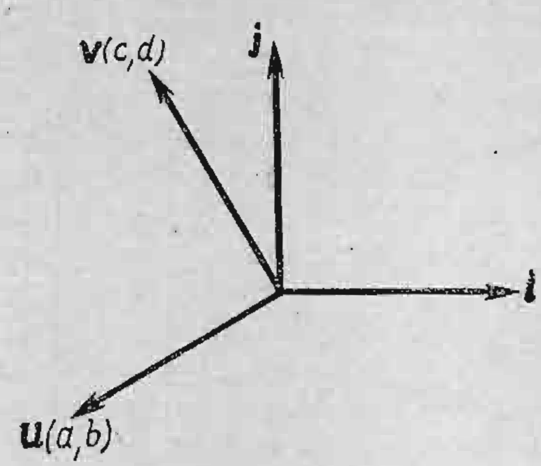


Рис. 263.

(векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ взаимно перпендикулярны). Как показано в п. д, координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ можно представить в виде

$$a = \mathbf{iu}, \quad b = \mathbf{ju}, \quad c = \mathbf{iv}, \quad d = \mathbf{jv}.$$

Воспользуемся последним из приведенных в п. д соотношений и подставим в него вместо $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а вместо вектора $\mathbf{v}$ один раз вектор $\mathbf{i}$, а другой — вектор $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{i} = (\mathbf{ui})\,\mathbf{u} + (\mathbf{vi})\,\mathbf{v},$$

$$\mathbf{j} = (\mathbf{uj})\,\mathbf{u} + (\mathbf{vj})\,\mathbf{v}.$$

Заменяя скалярные произведения координатами векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, получаем

$$\mathbf{i} = a\mathbf{u} + c\mathbf{v},$$

$$\mathbf{j} = b\mathbf{u} + d\mathbf{v}.$$

Вычислив скалярное произведение векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, находим

$$0 = ab + cd$$

(скалярное произведение $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ равно нулю, поскольку эти векторы взаимно перпендикулярны, отсюда — нуль в левой части равенства;

при вычислении правой части мы воспользовались тем, что $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1$ и $\mathbf{uv} = 0$). Вычислив скалярное произведение каждого из векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ на себя, нетрудно убедиться в том, что $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$.

Задача 109 допускает и другое решение. Расположим числа a, b, c, d в виде таблицы, состоящей из двух строк и двух столбцов:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Такие таблицы из четырех чисел называются матрицами второго порядка. Скалярным произведением двух (не обязательно различных) строк матрицы называется сумма попарных произведений элементов этих строк, стоящих в одних и тех же столбцах. Такое определение

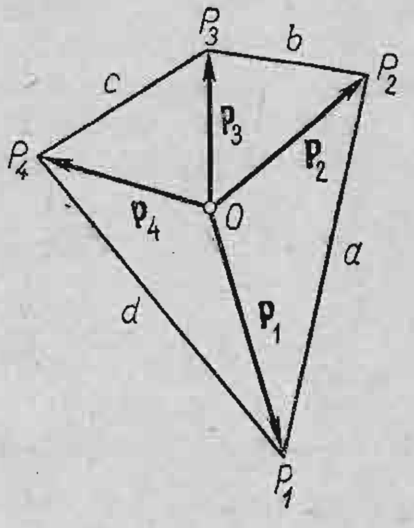


Рис. 264.

согласуется с принятым ранее определением скалярного произведениях двух векторов. Аналогичным образом определяется скалярное произведение двух столбцов матрицы. На «матричном языке» условия задачи 109 можно сформулировать так: *если скалярное произведение любых различных строк матрицы второго порядка равно* 0, *а скалярное произведение каждой строки на себя равно* 1, *то теми же свойствами обладают и столбцы матрицы.*

Более того, аналогичное утверждение справедливо и для матриц третьего порядка, то есть матриц, состоящих из трех строк и трех столбцов[1]. Доказательство его в точности воспроизводит приведенное выше, и мы предоставляем его читателю.

и. Воспользуемся скалярным произведением векторов для решения некоторых других задач.

В задаче 57 речь шла о необходимом и достаточном условии перпендикулярности диагоналей четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$. Пусть $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ — радиусы-векторы вершин четырехугольника относительно некоторой произвольно выбранной точки O (рис. 264). Квадраты сторон четырехугольника равны скалярным квадратам разностей радиусов-векторов (то есть скалярным произведениям радиусов-векторов на себя) соответствующих вершин. Например, если $a = P_1P_2$, то $a^2 = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2$.

---

[1] И даже для матриц произвольного порядка. — *Прим. ред.*

Пользуясь перечисленными выше свойствами скалярного произведения, преобразуем разность сумм квадратов противоположных сторон четырехугольника следующим образом:

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2+(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)^2-$$
$$-(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)^2-(\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1)^2=-2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2-2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4+$$
$$+2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3+2\mathbf{p}_4\mathbf{p}_1=2(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)(\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_2)$$

Из полученного выражения следует, что разность сумм квадратов противоположных сторон четырехугольника (вершины которого P_1, P_2, P_3, P_4 попарно различны) может обращаться в нуль в том и только в том случае, если векторы $\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3=\overrightarrow{P_3P_1}$ и $\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_2=\overrightarrow{P_2P_4}$ взаимно перпендикулярны, то есть если его диагонали образуют между собой прямой угол. Именно это утверждалось в задаче 57.

к. Поскольку скалярное произведение векторов, имеющих одинаковое направление, равно произведению их длин, а скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно 0, слагаемые, стоящие в левой части равенства, которое требуется доказать в задаче 73, можно представить следующим образом:

$$AB\cdot AE=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

и аналогично

$$AD\cdot AF=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

Поскольку по правилу параллелограмма сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равна $\overrightarrow{AC}$, то отсюда следует, что

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2=AC^2.$$

К задаче 110.

52. *Некоторые сведения из теории графов.* Сравним задачу 110 со следующей. Журнал опубликовал 8 задач. Отобрав из присланных читателями решений по 2 решения каждой задачи, пригодных для того, чтобы поместить их в следующем номере журнала, редактор заметил, что авторами всех 16 отобранных решений являются 8 читателей, причем каждому из них принадлежат ровно 2 отобранных решения.

Доказать, что редактор может опубликовать по одному решению каждой задачи так, чтобы среди опубликованных каждому из 8 читателей принадлежало по одному решению.

Явное сходство обеих задач заметно с первого взгляда. Чтобы еще более подчеркнуть его, изобразим условия задач в виде «картинки». Воспользуемся шахматной нотацией: цифрами, нумерующими горизонтали шахматной доски, и малыми латинскими буквами, обозначающими ее вертикали. Поставим на плоскости 16 точек и 8 из них перенумеруем числами от 1 до 8, а остальные 8 обозначим буквами от a до h. Изобразим на нашем чертеже каждую из помеченных клеток, соединив линией точки с номером и буквой той горизонтали и вертикали, на пересечении которых она находится.

На рис. 265 показан один из вариантов размещения помеченных клеток, удовлетворяющий условиям задачи 110. В то же время, если числа рассматривать как номера задач, опубликованных в журнале, буквы — как «псевдонимы» читателей, приславших их решения, а линии, соединяющие точки, — как указание на авторство (линия, соединяет «псевдоним» читателя с номером решенной им задачи), то рис. 265 можно считать наглядным изображением задачи, которую мы сформулировали выше.

Нетрудно видеть, что при любом истолковании рис. 265 из 16 проведенных на нем линий можно выбрать 8 таких, концы которых будут совпадать со всеми 16 точками. Следовательно, обе задачи — олимпиадная (№ 110) и задача о решениях, присланных читателями журнала, — с точки зрения математики одинаковы (эквивалентны).

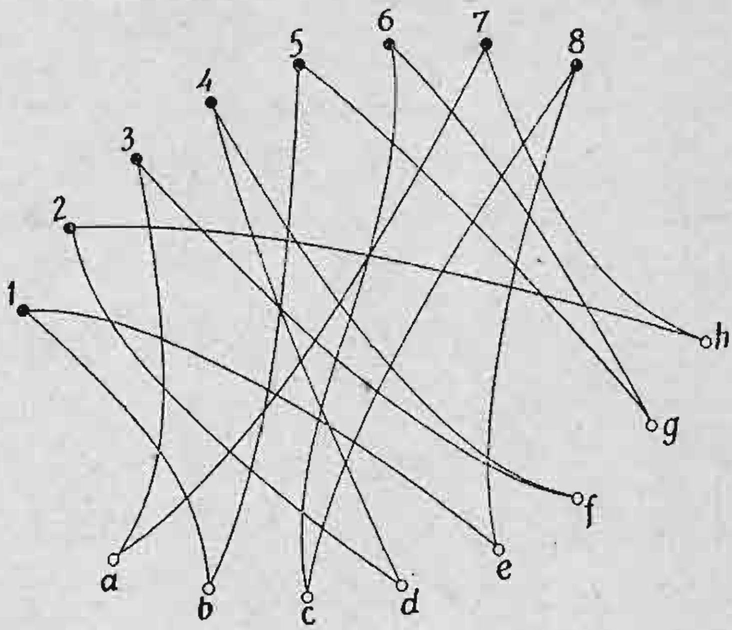


Рис. 265.

К той же математической задаче приводят и множество других задач, например следующая (если n заменить числом 8).

На танцы пришли n девушек и n юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Доказать, что всех собравшихся можно разбить на n смешанных пар так, чтобы в каждой паре танцующих юноша и девушка были знакомы друг с другом.

Сопоставим каждому юноше точку с числом (номером), а каждой девушке — точку с буквой и соединим линиями те точки, «владельцы» которых знакомы между собой. Утверждается, что из проведенных линий можно выбрать n таких, концы которых совпадают со всеми $2n$ точками.

Рассмотрим некоторые общие свойства таких схем, состоящих из точек и соединяющих их линий.

Множество точек (*вершин*) и линий (*ребер*), попарно соединяющих некоторые из них, называется *графом*.

Подчеркнем, что ребра графа не обязательно должны быть прямолинейными. Условимся считать, что два различных ребра могут иметь общими лишь конечные точки (одну или обе). Если же ребра графа пересекаются во внутренней точке, то она не считается общей. Расположив вершины графа в *трехмерном пространстве*, мы всегда можем соединить их попарно одной или несколькими линиями так, что никакие два ребра получившегося графа не будут пересекаться, но *двумерной плоскости* для этого недостаточно. Например, любые 5 точек на плоскости невозможно соединить попарно линиями (всего для этого потребуется 10 линий) так, чтобы ребра получившегося графа, сколь бы сложную форму мы им ни придавали, не пересекались во внутренних точках. Аналогичное утверждение справедливо и относительно любого плоского графа с шестью вершинами A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 и ребрами A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_3.

Доказательство обоих утверждений мы предоставляем читателю. (Второе утверждение представляет собой не что иное, как «перевод» на язык графов старинной задачи о домиках и колодцах: на плоскости даны три домика и три колодца; можно ли провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу так, чтобы никакие две тропинки не пересекались?)

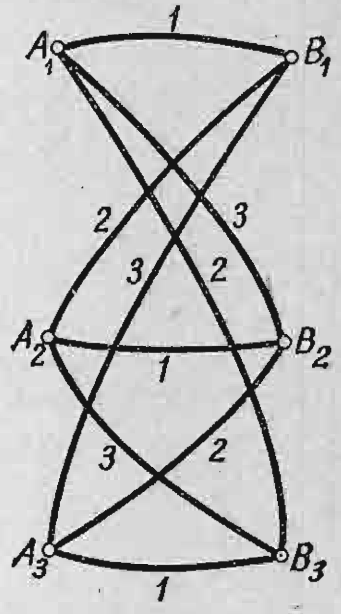


Рис. 266.

Как видно из приведенных выше примеров, построить на плоскости граф с любым числом вершин, попарно соединенных между собой ребрами по произвольно заданной схеме, можно лишь в том случае, если внутренние (не совпадающие с вершинами) точки пересечения ребер считать «фиктивными», то есть условиться, что во внутренних точках пересечения ребра как бы проходят одно под другим. Так, граф, изображенный на рис. 265, имеет лишь 16 вершин (одни из них перенумерованы числами от 1 до 8, другие обозначены буквами от a до h). Граф, изображенный на рис. 266, имеет 6 вершин: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Все остальные точки пересечения ребер следует считать двумя различными точками, одна из которых принадлежит ребру, проходящему «сверху», а другая — ребру, проходящему «снизу».

Каждый плоский граф можно подвергать преобразованиям, «перерисовывать».

Теория графов занимается изучением лишь таких свойств графов, которые зависят от числа вершин и того, какие вершины попарно соединены между собой ребрами (и сколько ребер связывают две данные вершины). Доказываемые в теории графов утверждения не зависят от таких свойств графа, как *форма* или *длина* его ребер.

Особенно важную роль в теории графов играют два частных типа графа.

Граф называется *регулярным* или *однородным*, если каждая его вершина принадлежит (инцидентна) одному и тому же числу ребер. Это число, общее для всех вершин регулярного графа, называется его *степенью*. Например, ребра и вершины любого правильного многогранника образуют регулярный граф. Для куба такой граф изображен на рис. 266. Если граф не регулярен, то степень разумно определять для каждой из его вершин в отдельности. *Степенью* вершины называется число ребер, которым она принадлежит.

Регулярный граф *степени 1* состоит из отдельных ребер. Гораздо интереснее устроены регулярные графы *степени 2*. Каждый такой граф состоит из одной или нескольких *замкнутых линий — циклов*. Например, два четырехугольника и один треугольник образуют регулярный граф степени 2, содержащий 11 вершин и 11 ребер.

Граф называется *четным контуром*, если все входящие в него циклы состоят из четного числа ребер. Примером четного контура может служить граф, соответствующий вершинам и ребрам куба (рис. 266). Нетрудно убедиться в том, что из его ребер нельзя выбрать ни 3, ни 5, ни любое другое нечетное число таких, которые бы образовывали цикл (то есть нельзя построить ни «треугольники», ни «пятиугольники», ни любые другие «многоугольники» с нечетным числом сторон). Графы, соответствующие трем сформулированным выше задачам, также могут служить примерами четных контуров: все они содержат четное число вершин и, следовательно, четное число ребер, поскольку ребра соединяют вершины, обозначенные числами, с вершинами, обозначенными буквами, в чередующемся порядке.

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы определить *произведение графов*. Пусть графы G_1, G_2, G_3, ... имеют одни и те же вершины, но никакие два из них не содержат общих ребер. Тогда граф G с теми же вершинами и ребрами, совпадающими с ребрами всех графов G_1, G_2, G_3, ..., называется *произведением графов* G_1, G_2, G_3, ... и обозначается

$$G = G_1 G_2 G_3 \dots .$$

Итак, число вершин графа-произведения равно числу вершин любого из графов-сомножителей. Ясно, что произведение регулярных графов регулярно, а его степень равна сумме степеней графов-сомножителей. Например, произведение четырех регулярных графов степени 1 представляет собой регулярный граф степени 4.

Естественно возникает и обратная задача: можно ли данный регулярный граф разложить в произведение сомножителей, или, как еще говорят, «факторизовать» его?

Начнем с рассмотрения регулярных графов степени 2. (Если речь идет о графе степени k, то его отличительную особенность «регулярный» можно опустить, поскольку степень графа определена лишь для регулярных графов.) Простейшим из таких графов является «треугольник»: три вершины, соединенные попарно тремя ребрами. Ясно, что треугольник нельзя разложить в произведение двух графов степени 1. Иначе говоря, заведомо невозможно выбрать две из трех сторон треугольника так, чтобы каждая из трех его вершин принадлежала одной и только одной из выбранных сторон.

В отличие от треугольника четырехугольник допускает разложение в произведение двух графов степени 1: один из них содержит две противоположные стороны, второй — две другие противоположные стороны четырехугольника. Пятиугольник не допускает разложения в произведение двух графов степени 1, шестиугольник допускает такое разложение и так далее. Относительно графов степени 2 с бо́льшим числом ребер можно утверждать, что они заведомо допускают разложение в произведение двух графов степени 1, если и исходный граф, и все входящие в его состав циклы содержат четное число ребер. Если число ребер хотя бы одного из циклов нечетно, то разложение заведомо невозможно. В первом случае граф является четным контуром, во втором принадлежит к другому типу графов.

Итак, мы доказали теорему:

А) *все четные контуры степени 2 можно разложить в произведение двух графов степени 1.*

Она представляет собой частный случай следующей теоремы Д. Кёнига: *все четные контуры степени n можно представить в виде произведения n графов степени 1.* (Заметим, что при $n = 2$ принадлежность графа к четным контурам необходима для его разложимости в произведение двух графов степени 1. При произвольном n принадлежность графа к четным контурам перестает быть необходимой и остается лишь достаточным признаком разложимости графа в произведение n графов степени 1. В правильности этого замечания читатель сможет без труда убедиться сам.) Например, граф степени 3, изображенный на рис. 266, можно представить в виде произведения 3 графов первого порядка. Ребра каждого из них обозначены соответственно числами 1, 2 и 3. Доказательство общей теоремы Кёнига (уже при $n = 3$) довольно сложно, поэтому мы ограничимся здесь лишь ее формулировкой. Простейшим после $n = 2$ является случай $n = 4$. Рекомендуем читателям испробовать свои силы и попытаться доказать теорему Кёнига при $n = 4$.

Но вернемся к $n = 2$ и попытаемся ответить на следующий вопрос: *сколько множителей степени* 1 *содержит четный контур степени* 2?

Ясно, что если граф состоит из одного-единственного многоугольника (с четным числом сторон), то число множителей степени 1 равно 2: каждую вторую сторону можно выбрать двумя различными способами, одна последовательность сторон образует первый множитель, другая — второй. В более общем случае, когда граф состоит из v многоугольников (с четным числом сторон), то все множители степени 1 мы получим, объединяя по одному из двух множителей степени 1, соответствующих каждому многоугольнику. Следовательно, чисел множителей степени 1 у всего графа столько же, сколько существует различных способов выбора по одному из двух множителей степени 1, соответствующих первому, второму, ..., v-му многоугольнику, то есть 2^v.

Б) *Если четный контур степени* 2 *состоит из v связных кусков (многоугольников с четным числом сторон), то число содержащихся в нем множителей степени* 1 *равно* 2^v.

Попытки решить задачу о числе множителей степени 1, содержащихся в графах степени больше 2, наталкиваются на весьма серьезные трудности, которые до сих пор еще не удалось полностью преодолеть. При $n > 2$ число множителей степени 1, содержащихся в четном контуре степени n, определяется не только числом связных компонент (кусков) v. В этом читатель может убедиться сам, рассмотрев какой-нибудь четный контур при не слишком больших n.

Как показывают приведенные выше примеры, теоремы А и Б позволяют решать некоторые комбинаторные задачи. Необходимо лишь предварительно «перевести» эти задачи на язык теории графов. Так, теория графов позволяет решить задачу 110 и даже более общую задачу о расстановке черных и белых фигур на шахматной доске $m \times n$ и соответственно задачу об опубликованных в журнале задачах и присланных решениях (при этом число задач может быть равным m, а число решений n). Задачу о парах танцующих можно решить при помощи теоремы А. Теорема Б позволяет утверждать, что сколько бы решений ни допускала любая из задач, общее число решений будет равно некоторой целой положительной степени числа 2.

Следует заметить, что и задачу о знакомых парах, и задачу о задачах и присланных решениях можно было бы решить при помощи теории графов, даже если вместо 2 взять произвольное натуральное число k. Для этого достаточно воспользоваться приведенной выше без доказательства теоремой Кёнига, согласно которой четный контур любой натуральной степени n допускает разложение в произведение графов степени 1.

К задаче 113.

53. *О преобразовании суммы тригонометрических функций в произведение.* В приведенных выше преобразованиях мы использовали соотношение

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Кроме него, полезно также иметь в виду соотношения

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Их можно вывести из формул для косинуса и синуса суммы двух углов, если в левую часть каждого соотношения подставить

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

К задаче 114.

54 *Об ориентированных и бесконечных графах.* а. В п. б третьего решения мы получили бесконечную последовательность прямоугольников, каждый из которых содержал предыдущий. Ясно, что и в п. а можно было бы выделить бесконечную последовательность прямоугольников, обладающую тем же свойством. Покажем, что та-

кое усиление первоначального утверждения задачи справедливо относительно любой бесконечной последовательности прямоугольников, такой, что в каждой ее бесконечной подпоследовательности хотя бы один прямоугольник содержит какой-то другой член той же подпоследовательности. [Для прямоугольников с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,m)$, $(n,0)$, (n,m) это утверждение заведомо выполняется, поскольку для любого бесконечного подмножества таких прямоугольников справедливо утверждение исходной задачи.] Докажем теперь сформулированное выше более сильное утверждение, предварительно переведя его на язык теории графов.

Относительно того, что такое граф и чем занимается теория графов, мы уже говорили ранее (см. III. 52). Хотя там речь шла лишь о графах с конечным числом вершин, само определение графа отнюдь не исключает и такой случай, когда граф содержит бесконечно много вершин. Кроме того, при решении некоторых задач теории графов удобно указывать направление ребер, то есть указывать, какая из двух вершин, соединяемых данным ребром, считается его началом, а какая — концом. Ребра с заданным направлением называются *ориентированными ребрами*. Если все ребра графа, ориентированы, то сам граф называется *ориентированным*. Если направление определено не для всех, а лишь для некоторых ребер графа, то такой граф называется *частично ориентированным*. (Следует иметь в виду, что любой граф можно считать ориентированным, если каждое неориентированное ребро заменить двумя ребрами с противоположной ориентацией.) Транзитивно ориентированным называется такой ориентированный граф, в котором для любых трех вершин, таких, что существуют ребра, ведущие из первой вершины во вторую и из второй в третью, существуют также ребра, ведущие из первой в третью.

Необходимо ввести еще два понятия, относящихся к любым (не обязательно ориентированным) графам. *Полным* называется граф, который вместе с любыми двумя вершинами содержит и соединяющее их ребро. *Подграфом* данного графа G называется граф, содержащий часть вершин и соединяющие их ребра графа G. Говорят, что подграф *натянут* на подмножество вершин данного графа G, если он содержит все ребра, концы которых совпадают с любой парой вершин, принадлежащих выбранному подмножеству.

б. Обратимся теперь к задаче 114 и представим ее условия в виде бесконечного ориентированного графа. Каждому прямоугольнику сопоставим по одной вершине графа. Если какой-нибудь прямоугольник содержит другой прямоугольник, то соответствующие вершины графа соединим ориентированным ребром, начальная вершина которого «соответствует» прямоугольнику, содержащемуся в другом прямоугольнике. Разумеется, такой граф не говорит ни о том, что длины сторон прямоугольников выражаются целыми числами, ни о том, как расположены вершины прямоугольников. Эти данные наряду с другими надлежит использовать лишь при доказательстве существования ребра в графе. Как уже говорилось в п. а, любой бесконечный подграф построенного графа содержит ребро. Кроме того, ясно, что построенный граф транзитивно ориентирован, поскольку если один прямоугольник содержит некоторый другой прямоугольник, а тот в свою очередь содержит еще один прямоугольник, то первый прямоугольник содержит третий прямоугольник.

Как уже упоминалось в п. а, из условий задачи следует, что из прямоугольников можно выбрать бесконечную последовательность вложенных друг в друга прямоугольников. Это означает, что граф задачи содержит бесконечный транзитивно ориентированный полный подграф. Возникает вопрос о том, нельзя ли существование такого подграфа вывести лишь из того свойства подграфа, о котором мы только что говорили. Покажем, что такое заключение верно, даже если не предполагать транзитивную ориентированность исходного графа, то есть докажем следующую теорему:

если любое бесконечное подмножество вершин бесконечного ориентированного графа содержит две вершины, соединенные между собой ребром, то такой граф содержит бесконечный транзитивно ориентированный полный подграф.

Докажем прежде всего, что наш граф содержит такую вершину, из которой выходят бесконечно много ребер или в которую входят бесконечно много ребер. Выберем произвольную вершину графа, затем — любую вершину, не связанную с ней ребром (если такая существует), затем еще одну вершину, не связанную ребром ни с одной предыдущей вершиной, если такая существует, и так далее. После конечного числа шагов этот процесс оборвется, поскольку любое бесконечное подмножество вершин нашего графа содержит две вершины, соединенные между собой ребром. Следовательно, каждая из оставшихся вершин графа соединена ребром не менее чем с одной из выбранных вершин. Таким образом, по крайней мере одна из выбранных вершин (обозначим ее A_1) соединена ребрами с бесконечным множеством вершин. Среди ребер, соединяющих вершину A_1 с другими вершинами графа, имеется либо бесконечно много выходящих из A_1 (в этом случае мы будем называть A_1 вершиной 1-го рода), либо бесконечно много входящих в нее (вершина 2-го рода).

Пусть G_1 бесконечный подграф, образованный концами ребер, выходящими из вершины A_1, если она 1-го рода, и соответственно началами ребер, входящих в A_1, если она 2-го рода. Этот подграф удовлетворяет условиям теоремы, поэтому среди его вершин найдется такая вершина A_2, из которой выходят или в которую входят бесконечно много ребер. Продолжая рассуждения, мы построим бесконечную последовательность вершин $A_1, A_2, \ldots$, причем в этой последовательности либо из A_i выходят ребра, соединяющие ее со всеми последующими вершинами (A_i — 1-го рода), либо в A_i входят ребра, начинающиеся в каждой последующей вершине (A_i — 2-го рода). Рассмотрим в нашей последовательности два подмножества, состоящие из вершин одного и того же рода. По крайней мере одно из них бесконечно. Беря вершины, принадлежащие этому подмножеству, получаем бесконечный транзитивно ориентированный полный подграф.

К задаче 115.

55. *Об одном общем источнике некоторых известных неравенств.* а. Утверждение задачи 115 и некоторые другие известные неравенства можно без труда доказать, если воспользоваться решением следующей задачи.

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

— положительные вещественные числа, а

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

— произвольная перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Какая из сумм

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$$

наибольшая и какая наименьшая?

В некоторых конкретных случаях правильно ответить на этот вопрос сумеет, пожалуй, каждый. Например, предположим, что в одном ящике лежат банкноты достоинством в 10 форинтов, во втором — банкноты достоинством в 20 форинтов, в третьем — банкноты достоинством в 50 форинтов, в четвертом — банкноты достоинством в 100 форинтов и нам разрешается взять из ящиков 3, 4, 5 и 6 банкнот, но не сказано, к какому ящику относится каждое из этих чисел. Вероятно, каждый сочтет наиболее выгодным для себя взять наибольшее число (6) банкнот из ящика, где лежат банкноты наибольшего достоинства (по 100 форинтов каждая), затем следующее по величине число (5) банкнот из ящика с банкнотами достоинством в 50 форинтов и так далее. Вероятно, все согласятся и с тем, что наименее выгодно взять 6 банкнот из ящика с банкнотами достоинством в 10 форинтов, 5 банкнот — из ящика в банкнотами достоинством в 20 форинтов и так далее. Таким образом, если обозначить c_1, c_2, c_3, c_4 произвольную перестановку чисел 3, 4, 5, 6, то

$$10 \cdot 6 + 20 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 100 \cdot 3 \leqslant 10c_1 + 20c_2 + 50c_3 + \\ + 100c_4 \leqslant 10 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 6.$$

В общем случае можно утверждать следующее. *Среди сумм S наибольшая соответствует тому случаю, когда числа b упорядочены так же, как числа a (то есть наибольшему из чисел b сответствует наибольшее из чисел a, второму по величине из чисел b — второе по величине из чисел a и так далее)* [1] *и наименьшая — тому случаю, когда обе последовательности расположены в обратном порядке (наибольшему из чисел a соответствует наименьшее из чисел b и так далее).*

Если все числа a равны, то при любом расположении чисел b сумма S принимает одно и то же значение (так же как и в случае, когда равны все числа b). Предположим, что среди чисел a имеются различные. Например, пусть $a_r > a_s$. Сравним две суммы

$$S = a_1c_1 + \ldots + a_rc_r + \ldots + a_sc_s + \ldots + a_nc_n$$

и

$$S' = a_1c_1 + \ldots + a_rc_s + \ldots + a_sc_r + \ldots + a_nc_n,$$

отличающиеся лишь тем, что во второй числа c_s и c_r переставлены. Поскольку

$$S' - S = a_rc_s + a_sc_r - a_rc_r - a_sc_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r),$$

то $S' > S$, если $c_r < c_s$, и $S' < S$, если $c_r > c_s$.

---

[1] Среди чисел a и b могут быть равные. Разумеется, перестановка равных чисел не меняет упорядочения.

Из данных чисел a и b можно составить лишь конечное число различных сумм S. Среди них всегда есть наибольшая и наименьшая. Именно они и соответствуют приведенному выше утверждению, поскольку при перестановке некоторых из чисел c всякая другая сумма как возрастает, так и убывает.

Утверждение задачи 115 содержится как частный случай в доказанном утверждении. Действительно расположим числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в порядке возрастания и выберем

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = \frac{1}{a_2}, \ \ldots, \quad b_n = \frac{1}{a_n}.$$

Тогда числа b расположатся в порядке убывания, и сумма S примет наименьшее значение, равное

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = n.$$

6. Из доказанного утверждения следуют многие известные неравенства. Например, из него можно вывести, что *среднее геометрическое любых положительных чисел*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

не больше их среднего арифметического (см. III. 42).

Пусть

$$c = \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$$

— среднее геометрическое чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Образуем две последовательности чисел:

$$a_1 = \frac{x_1}{c}, \quad a_2 = \frac{x_1x_2}{c^2},$$

$$a_3 = \frac{x_1x_2x_3}{c^3}, \ \ldots, \quad a_n = \frac{x_1x_2 \ldots x_n}{c^n} = 1;$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = \frac{1}{a_2}, \quad b_3 = \frac{1}{a_3}, \ \ldots, \quad b_n = \frac{1}{a_n} = 1.$$

Поскольку числа в обоих последовательностях взаимно обратны, то сумма

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

не больше, чем, например,

$$a_1b_n + \ldots + a_nb_{n-1},$$

то есть

$$1 + 1 + \ldots + 1 \leqslant \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \ldots + \frac{x_n}{c},$$

$$n \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{c}$$

и

$$c \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Равенство возможно лишь в том случае, если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n,$$

или

$$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \frac{x_3}{c} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \frac{x_3}{c} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{c} = 1,$$

то есть если

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c.$$

в. Приведенное в п. а утверждение позволяет доказывать неравенство Чебышева гораздо проще, чем при обычном прямом подходе.

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

— две *одинаково* упорядоченные последовательности (то есть обе расположены либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания членов). Тогда по нашей основной теореме

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,\\
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &\geqslant a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1,\\
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &\geqslant a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_nb_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &\geqslant a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Складывая почленно полученные соотношения, получаем

$$n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n),$$

то есть

$$\frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}. \qquad (1)$$

Аналогично можно показать, что если a и b — две *противоположно* упорядоченные последовательности, то

$$\frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}. \qquad (2)$$

г. Например, если $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа и, кроме того, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то последовательности a_i^α и a_i^β $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ упорядочены одинаково и поэтому согласно (1)

$$a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \ldots + a_n^{\alpha+\beta} \geqslant \frac{1}{n}\left(a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha\right)\left(a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta\right).$$

Если же $\alpha > 0$, $\beta < 0$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ по-прежнему положительные числа), то последовательности a_i^α, a_i^β упорядочены противоположно, и в силу (2)

$$a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \ldots + a_n^{\alpha+\beta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha\right)\left(a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta\right).$$

В частном случае при $\alpha = \beta = 1$ получаем

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2,$$

или

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}, \tag{3}$$

то есть *среднее арифметическое не больше среднего квадратичного.*

Если $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — противоположно упорядоченные последовательности положительных чисел, то из неравенств (2) и (3) получаем неравенства

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \tag{4}$$

и

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant \sqrt{n\left(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + \ldots + a_n^2 b_n^2\right)}, \tag{5}$$

более сильные, чем неравенства Коши (см. III. 65)

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)}$$

Действительно,

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots b_n) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\sqrt{n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)}\sqrt{n\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)}$$

и

$$\sqrt{n\left(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + \ldots + a_n^2 b_n^2\right)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{n \cdot \frac{1}{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)}.$$

Какое из неравенств (4) и (5) сильнее, в общем случае сказать невозможно, поскольку при одном выборе чисел a и b правая часть неравенства (4) оказывается больше правой части неравенства (5), при другом — меньше.

К задаче 116.

56. *О центре тяжести конечного точечного множества.* а. Центр тяжести множества точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ можно определить следующим образом. Выбрав произвольно начальную точку O, построим радиусы-векторы всех точек множества $\overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{p}_1$, $\overrightarrow{OP_2} = \boldsymbol{p}_2, \ldots$ $\ldots, \overrightarrow{OP_n} = \boldsymbol{p}_n$. Центром тяжести называется точка S, радиус-вектор которой $\overrightarrow{OS} = \boldsymbol{s}$ удовлетворяет соотношению

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n}{n}. \qquad (1)$$

Покажем, что S не зависит от выбора начальной точки O. Запишем для этого соотношение (1) в виде

$$(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{s}) + (\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{s}) + \ldots + (\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{0}, \qquad (2)$$

или по правилам вычитания векторов — в виде

$$\overrightarrow{SP_1} + \overrightarrow{SP_2} + \ldots + \overrightarrow{SP_n} = \boldsymbol{0}. \qquad (3)$$

Последнее равенство выполняется или нет для точки S независимо от выбора начальной точки O. Следовательно, равенства (1) и (2), эквивалентные равенству (3), также не зависят от выбора точки O.

б. Если множество H, состоящее из конечного числа точек, обладает центром симметрии O, то O совпадает с центром тяжести множества S (ср. аналогичное утверждение в III. 36). Для доказательства достаточно заметить, что для любых точек A и B, симметричных относительно начальной точки O, сумма радиусов-векторов равна нулю: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{0}$. Следовательно, разбив все точки множества H на пары симметричных относительно центра O точек, мы для каждой пары получим нулевую сумму радиусов-векторов. Таким образом, для центра симметрии O выполняется соотношение (3), а это и означает, что O совпадает с центром тяжести множества S.

Кратко смысл этого примечания можно было бы сформулировать так: у конечного точечного множества H не может быть несколько центров симметрии, поскольку центр симметрии всегда совпадает с центром тяжести, а у множества H есть лишь один центр тяжести.

К задаче 117.

57. *Об одном свойстве среднего арифметического.* Если среди вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет чисел, которые были бы меньше a_1 и больше a_n, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \frac{na_1}{n} = a_1$$

и

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \frac{na_n}{n} = a_n.$$

Равенство в обоих случаях достигается лишь при условии, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Таким образом, *среднее арифметическое n чисел всегда заключено между наименьшим и наибольшим из них, за исключением того случая, когда все n чисел равны* (*при этом среднее арифметическое совпадает с любым из них*).

К задаче 118.

58. *О суммировании бесконечных рядов.* а. Такие выражения, как, например,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots,$$

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \ldots + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \ldots,$$

$$1 - 0{,}9 + 0{,}81 - 0{,}729 + \ldots + (-0{,}9)^{n-1} + \ldots,$$

$$0{,}23 + 0{,}0023 + 0{,}000023 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots,$$

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \ldots,$$

содержащие бесконечно много членов, называются *бесконечными рядами*. Пока все эти выражения лишены смысла, но нам хотелось бы дать какое-нибудь простое определение того, что следует понимать под суммой бесконечного числа членов. Такое желание тем более обоснованно, что четвертый ряд представляет собой не что иное, как бесконечную периодическую десятичную дробь

$$0{,}232323\ldots,$$

лишь записанную в несколько непривычном виде. Производить действия над бесконечными десятичными дробями научились только после того, как выяснили, что́ следует понимать под бесконечной десятичной дробью. Производя вычисления, такие дроби обрывают на каком-то знаке. Где следует оборвать дробь, зависит от того, с какой точностью требуется произвести вычисления. Самое главное из того, что мы знаем о бесконечных десятичных дробях, состоит в следующем: в случае необходимости такую дробь можно приближенно заменить конечной со сколь угодно большим числом знаков. Разумеется, при этом мы получим лишь приближенное значение бесконечной десятичной дроби, но ошибка может быть сделана сколь угодно малой.

Попробуем суммировать член за членом и остальные бесконечные ряды. Сумма n первых членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда*. Первые четыре ряда представляют собой геометрические прогрессии. Формула суммы любого числа членов геометрической прогрессии хорошо известна. Применяя ее к n первым членам

Это не что иное, как $2n$-я частичная сумма бесконечного ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots \tag{2}$$

Покажем, что ряд (2) сходится.

Из каждого члена, стоящего в правой части доказываемого в задаче 118 тождества, вынесем множитель $\frac{1}{n}$. Получившееся выражение

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{n}} \tag{3}$$

обладает следующим замечательным свойством. Построим график функции $y=\frac{1}{1+x}$. Разделим отрезок $[0, 1]$ оси x на n равных

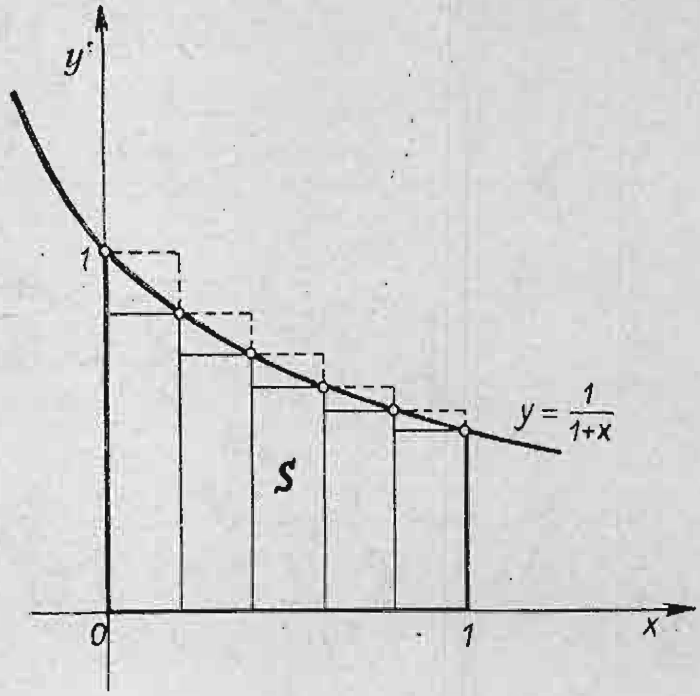


Рис. 267.

частей и из каждой точки деления проведем ординаты этой функции (рис. 267). Каждый член выражения (3) равен площади наибольшего прямоугольника, вписанного в полоску шириной $\frac{1}{n}$, ограниченную ординатами функции $y=\frac{1}{1+x}$ (прямоугольник построен на ординате, ограничивающей полоску справа). Сумма площадей таких прямоугольников и, следовательно, значение, принимаемое выражением (1), меньше площади S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\frac{1}{1+x}$, отрезком $[0, 1]$ оси x и ординатами на концах отрезка. Если мы возьмем наименьшие прямоугольники, содержащие полоски криволинейной трапеции шириной $\frac{1}{n}$ (то есть прямоугольники, построенные на ординатах, ограничивающих полоски слева), сумма их площадей будет отличаться от выражения (3) лишь тем, что перед первым членом появится новый член $\frac{1}{n}$, а последний член, равный $\frac{1}{2n}$, исчезнет. Следовательно, сумма площадей таких многоугольников больше суммы (3) на $\frac{1}{2n}$ и совпадает с $(2n-1)$-й частичной суммой ряда (2). Ясно, что эта сумма больше площади S криволинейной трапеции. Итак, $2n$-я и $(2n-1)$-я частичные суммы ряда (2) отличаются от площади S криволинейной трапеции меньше, чем на $\frac{1}{2n}$. Следовательно, при достаточно большом n частичные суммы ряда (2) сколь угодно мало отличаются от S и площадь S криволинейной трапеции совпадает с суммой ряда (2) [1].

б. Покажем, что бесконечные ряды, хотя их и можно рассматривать как естественное обобщение конечных сумм, наследуют не все свойства конечных сумм. Например, сумма бесконечного ряда может изменяться при перестановке его членов (для конечных сумм перестановка слагаемых всегда является допустимой операцией).

Разделим все члены ряда (2) на 2 и все положительные члены ряда представим в виде $\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k}$. Тогда

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots=$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots.$$

Нетрудно видеть, что последний ряд сходится и сумма его равна $\frac{1}{2}S$. Поскольку $S\neq 0$, то это значение суммы отличается от ее прежнего значения, равного S, хотя новый ряд состоит из тех же членов, что и ряд (2): он содержит положительные члены, обратные всем нечетным числам, и отрицательные члены, обратные всем четным числам.

Сумма ряда изменилась при перестановке членов потому, что ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (2) (так называемый *гармонический ряд*; см. III. 64), расходится. Если ряд, составленный из абсолютных величин некоторого ряда, сходится, то сходимость исходного ряда не нарушается и его сумма остается неизменной при любых перестановках его членов.

---

[1] Тот, кто знаком с интегральным исчислением, сообразит, что $S=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$. — *Прим. ред.*

К задаче 120.

60. *О сравнении мощностей бесконечных множеств. Счетные множества.* а. Во втором решении задачи 120 мы воспользовались тем, что пары, составленные из натуральных чисел, можно расположить в виде бесконечной последовательности. Заменим каждую пару чисел (m, n) дробью $\frac{m}{n}$ и исключим из последовательности сократимые дроби. Получившаяся последовательность содержит все положительные рациональные числа. Если перед первым членом последовательности поставить 0, после каждого члена вписать такой же член, но с обратным знаком и избавиться от знаменателей, равных 1, то все рациональные числа окажутся расположенными в последовательность

$$0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ -2,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ 3,\ -3,$$
$$\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ 4,\ -4,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}\ \ldots.$$

Таким образом, каждому рациональному числу мы сопоставим целое положительное число — его номер в последовательности, причем у разных рациональных чисел номера будут различными.

Если элементы двух конечных множеств можно разбить на пары так, что в каждую пару будет входить по одному элементу от каждого множества и ни один элемент не останется без «партнера», то любое из двух конечных множеств содержит столько же элементов, сколько и другое. Тем же приемом можно воспользоваться и при сравнении двух бесконечных множеств. Следовательно, поскольку каждому рациональному числу мы сопоставили одно и только одно целое положительное число, «рациональных чисел столько же, сколько натуральных». Это утверждение звучит странно, поскольку среди рациональных чисел содержатся не только натуральные числа, но и бесконечно много дробных чисел. Отсюда можно сделать вывод, что к сравнению бесконечных множеств следует подходить с большей осторожностью, чем к сравнению конечных множеств.

В общем случае соответствие между элементами двух бесконечных множеств можно установить несколькими способами: при этом может оказаться, что при одном соответствии некоторые элементы одного из множеств останутся без «партнера», а при другом все элементы обоих множеств окажутся разбитыми на пары, содержащие по одному элементу от каждого множества, причем ни в одном из двух множеств не останется «лишних» элементов (такое соответствие называется *взаимно однозначным*; заметим, что соответствие между элементами двух конечных множеств можно установить лишь одним из двух способов). По аналогии с конечными множествами было предложено считать «равными» любые два множества (как конечные, так и бесконечные), если их можно хотя бы одним способом разбить на пары, содержащие по одному элементу от каждого множества.

Два множества называются *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, то есть разбить на пары, содержащие по одному элементу от каждого множества, так, чтобы каждому элементу любого из двух множеств соответствовал один и только один элемент второго множества [1]. Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются *счетными*. Элементы любого счетного множества можно перенумеровать натуральными числами. Верно и обратное утверждение: если элементы какого-нибудь множества можно перенумеровать натуральными числами, то оно счетно.

Итак, *множество рациональных чисел счетно.*

б. Из второго решения задачи 120 можно извлечь также следующую теорему.

Пусть H_1, H_2, H_3, ... — счетная последовательность счетных множеств, не имеющих общих элементов. Тогда множество H, содержащее элементы всех множеств H_1, H_2, H_3, ..., счетно.

(Множество H принято называть *объединением* множеств H_i.)

Докажем эту теорему.

Расположим элементы каждого множества в виде последовательности. Элементу множества H_i, стоящему на k-м месте, сопоставим натуральное число, совпадающее с номером пары чисел (i, k) во втором решении задачи 120. Тем самым каждому элементу множества H будет соответствовать некоторое натуральное число, причем различным элементам будут соответствовать различные натуральные числа. Следовательно, H — счетное множество.

Покажем, что *множество многочленов от одной переменной с целочисленными коэффициентами счетно.*

Любой многочлен определен, если известны его степень и все коэффициенты. Сопоставим каждому многочлену число m, равное сумме его степени и абсолютных величин его коэффициентов. Число многочленов, соответствующих одному и тому же значению m, конечно. Например, при $m = 4$ достаточно перечислить лишь многочлен степени 0, 1, 2 и 3[2]. Среди многочленов степени 0 (постоянных) значению $m = 4$ соответствуют лишь $+4$, -4, а среди многочленов степени 1 — многочлены $x+2$, $x-2$, $-x+2$, $-x-2$, $2x+1$, $2x-1$, $-2x+1$, $-2x-1$, $3x$, $-3x$. Среди многочленов степени 2 значению $m = 4$ соответствуют x^2+1, x^2-1, $-x^2+1$, $-x^2-1$, x^2+x, x^2-x, $-x^2+x$, $-x^2-x$, $2x^2$, $-2x^2$, а среди многочленов степени 3 — лишь x^3 и $-x^3$.

Аналогичным образом можно перечислить и все многочлены с целочисленными коэффициентами и при любых значениях m.

Итак, выписав один за другим все многочлены с целочисленными коэффициентами с $m = 0$, 1, 2 и так далее, мы получим бесконечную последовательность

$$\begin{gathered} 0;\ 1, -1;\ 2, -2, x, -x;\ 3, -3, x+1, \\ x-1, -x+1, -x-1, 2x, -2x, x^2, -x^2; \\ 4, -4, x+2, x-2, -x+2, -x-2, 2x+1, \\ 2x-1, -2x+1, -2x-1, 3x, -3x, x^2+1, \\ x^2-1, -x^2+1, -x^2-1, x^2+x, x^2-x, -x^2+x, \\ -x^2-x, 2x^2, -2x^2, x^3, -x^3, \ldots, \end{gathered}$$

---

[1] Рассмотренный выше пример показывает, что целое (множество рациональных чисел) может быть равномощно своей части (множеству натуральных чисел). — *Прим. ред.*

[2] При $m = 4$ все коэффициенты многочлена степени 4 равны 0. — *Прим. ред.*

которая содержит любой многочлен с целочисленными коэффициентами, причем лишь один раз. Тем самым утверждение доказано.

Корни многочленов, образующих выписанную выше последовательность, называются *алгебраическими числами* (см. III. 20) [1]. Известно, что число корней многочлена не больше его степени. Перебирая один за другим многочлены с целочисленными коэффициентами, будем составлять список их различных корней, занося в него корень очередного многочлена лишь в том случае, если этот корень не совпадает с корнем одного из предыдущих членов последовательности. Образовавшаяся последовательность корней содержит все алгебраические числа. Итак, *множество всех алгебраических чисел счетно.*

в. Перечисленные примеры счетных множеств и доказательства счетности некоторых бесконечных множеств естественно порождают вопрос, о каких различиях между бесконечными множествами можно говорить. Существует ли бесконечное, но не счетное множество? Докажем, что

множество положительных чисел, меньших 1, *несчетно.*

Запишем все такие числа в виде бесконечных десятичных дробей. Нетрудно видеть, что конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной двумя способами. Например, дроби

$$0{,}7352000000\ \ldots$$

и

$$0{,}7351999999\ \ldots$$

при записи в виде обыкновенных (недесятичных) дробей приводят к равным числам

$$\frac{7352}{10\,000}=\frac{919}{1250}.$$

Условимся выбирать из этих двух способов первый. Все остальные положительные числа, меньше 1, представимы в виде бесконечных десятичных дробей однозначно.

Сформулированное выше утверждение мы докажем, если убедимся, что любая бесконечная последовательность чисел, заключенных между 0 и 1, не содержит по крайней мере одного числа, также заключенного между 0 и 1.

Рассмотрим последовательность чисел, заключенных между 0 и 1. Каждый ее элемент запишем в виде бесконечной десятичной дроби, и пусть a_{ik} — k-я цифра после запятой в i-м элементе. Тогда нашу последовательность можно записать в виде таблицы

$$\begin{array}{l} 0,\ a_{11}a_{12}a_{13}\ \ldots, \\ 0,\ a_{21}a_{22}a_{23}\ \ldots, \\ 0,\ a_{31}a_{32}a_{33}\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

---

[1] Если число α является корнем многочлена $P(x)$ с рациональными коэффициентами, то оно является также корнем многочлена с целыми коэффициентами, который мы получим, умножив $P(x)$ на наименьшее общее кратное знаменателей всех его коэффициентов. — *Прим. ред.*

Составим новое число $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ по следующему правилу. Пусть его первый знак после запятой отличен от первого знака первой дроби. (Например, $b_1 = 5$, если a_{11} — любая цифра, отличная от 5, и $b_1 = 6$, если $a_{11} = 5$.) Аналогично пусть второй знак числа b_2 равен 6, если $a_{22} = 5$, и 5 во всех остальных случаях. Вообще пусть i-й знак числа b_i равен 6, если $a_{ii} = 5$, и 5, если $a_{ii} \neq 5$.

Ни один из членов последовательности не равен числу b, поскольку i-й знак i-й дроби отличен от i-го знака числа b. Случай, когда число b, записанное по-иному, все же может входить в рассматриваемую последовательность бесконечных десятичных дробей, исключается, поскольку для этого в десятичном разложении числа b, начиная с некоторого места, должны были бы стоять только цифры 9, а среди цифр, использованных при записи числа b, нет ни одной девятки. Тем самым утверждение доказано.

Рассмотрим последовательность всех алгебраических чисел, упорядоченную так, как сказано в конце п. б. Записав элементы этой

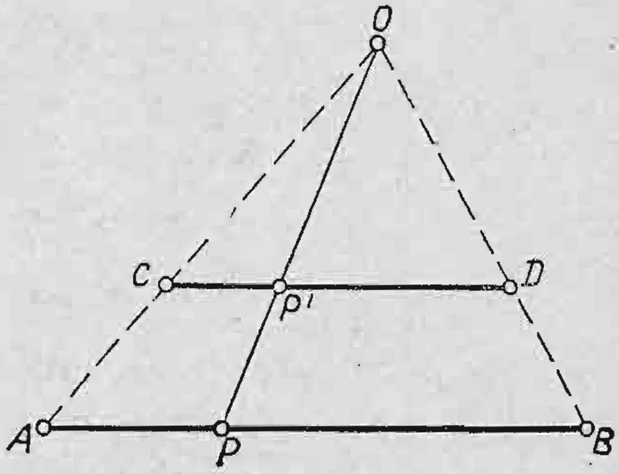


Рис. 268.

последовательности в виде бесконечных десятичных дробей (выбрав лишь алгебраические числа между 0 и 1) и построив число b, мы получили бы трансцендентное число. Тем самым доказано существование трансцендентных чисел. *Множество трансцендентных чисел несчетно.* Действительно, если бы оно было счетно, то, расположив алгебраические и трансцендентные числа в виде двух последовательностей, мы могли бы составить новую последовательность, поочередно выбирая из них по одному элементу. Построенная последовательность содержала бы все вещественные числа, хотя ранее мы уже видели, что множество всех вещественных чисел не может быть счетным.

Использованный нами метод доказательства несчетности множества всех вещественных чисел, заключенных между 0 и 1, основан на том, что бесконечные десятичные дроби записывают в виде таблицы и находят число, знаки которого отличны от знаков, стоящих на диагонали. Поэтому этот метод называют *канторовским диагональным методом* (в честь создателя теории множеств Георга Кантора).

г. То, что мы рассматривали лишь числа, заключенные между 0 и 1, в действительности несущественно, множества чисел, лежащих на любых двух отрезках числовой оси, всегда равномощны. Изобразим два отрезка числовой оси в виде двух параллельных отрезков AB и CD. Пусть O — точка пересечения прямых AC и BD.

Установим соответствие между числами, «сидящими» в точке P и P', если P' — точка пересечения отрезка CD с прямой OP, а точка P принадлежит отрезку AB (рис. 268). Ясно, что это соответствие взаимно однозначно.

Аналогично можно показать, что множество чисел, заключенных между 0 и 1, равномощно множеству всех положительных чисел. Спроектируем интервал $0 < y < 1$ оси y из точки с координа-

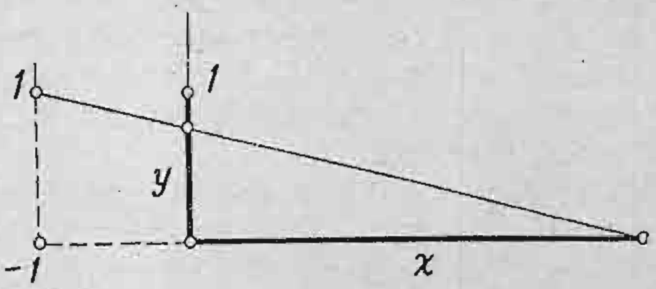


Рис. 269.

тами (—1, 1) на положительную полуось x (рис. 269). Нетрудно вычислить, что положительному числу x будет соответствовать число

$$y = \frac{x}{1+x}, \tag{1}$$

заключенное между 0 и 1, и что это соответствие взаимно однозначно. Из рис. 270 видно, что множество чисел, принадлежащих любому конечному интервалу числовой оси, равномощно множеству всех вещественных чисел.

Некоторые трудности могут возникнуть, если вместо интервала $0 < y < 1$ рассмотреть отрезок $0 \leqslant y \leqslant 1$ или полуинтервалы $0 < y \leqslant 1$, $0 \leqslant y < 1$. Для того чтобы доказать равномощность любого из этих множеств множеству всех положительных чисел, поступим следующим образом.

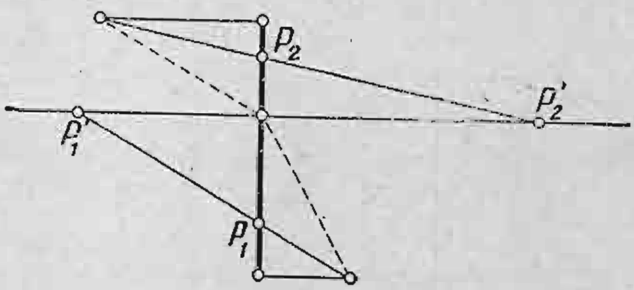


Рис. 270.

Если соответствие между точками интервала $0 < y < 1$ и положительной полуосью x установлено по формуле (1), то соответствующие друг другу числа либо оба рациональны, либо оба иррациональны. Будем считать, что соответствие между иррациональными числами отрезка $0 \leqslant y \leqslant 1$ и положительной осью установлено по формуле (1). Множество рациональных чисел, принадлежащих отрезку, счетно. Действительно, все его элементы содержатся среди элементов множества всех рациональных чисел. Вычеркнув в рассмотренной в п. а бесконечной последовательности всех рациональных чисел лишние элементы, получим бесконечную последовательность, содержащую лишь рациональные числа из рассматриваемого отрезка. Установив соответствие между элементами двух равномощных (счетных) множеств — множества всех положительных рациональных чисел и множества рациональных чисел, принадлежащих отрезку [0, 1], — получим требуемое соответствие двух числовых множеств. Аналогично поступаем и для полуинтервалов.

61. *О гипотезе континуума.* Мощность множества вещественных чисел, заключенных между двумя различными числами, мощность множества всех положительных чисел, мощность множества всех вещественных чисел называется *мощностью континуума.* Можно считать, что мощность континуума больше мощности счетного множества, поскольку любое множество мощности континуума содержит счетное подмножество так же, как, например, множество вещественных чисел содержит счетное подмножество рациональных чисел, хотя все множество вещественных чисел несчетно.

Можно показать, что существуют множества, мощность которых больше мощности континуума, и можно строить множества, мощности которых будут неограниченно возрастать.

Возникает вопрос, существует ли мощность, промежуточная между мощностью счетного множества и мощностью континуума? Г. Кантор высказал гипотезу, что такой мощности не существует (*гипотеза континуума*). В настоящее время известно, что можно построить две непротиворечивые теории множеств. В одной из них гипотеза континуума будет выполняться, в другой — нет.

К задаче 124.

62. *О представлении натуральных чисел в виде суммы квадратов двух целых чисел,* а. В связи с решением задачи 124 возникает вопрос о том, какие натуральные числа представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел и какие непредставимы. Из утверждения задачи следует, что число вида $2^a m$, где m — нечетное число, можно разложить в сумму квадратов двух целых чисел, если число m представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. Таким образом, для ответа на интересующий нас вопрос необходимо выяснить, какие нечетные числа допускают разложение в сумму квадратов двух целых чисел.

Задача существенно упрощается, если учесть, что

произведение двух чисел, представимых в виде суммы квадратов двух целых чисел, также допускает разложение в сумму квадратов двух целых чисел.

Справедливость этого утверждения следует из тождества

$$(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = (au + bv)^2 + (av - bu)^2.$$

Докажем две теоремы:

1) *если остаток от деления простого числа p на 4 равен 3, а само число p является делителем суммы квадратов двух целых чисел, то каждое из этих чисел в отдельности делится на p;*

2) *все простые числа, дающие при делении на 4 остаток 1, представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел.*

Простое число p, о котором говорится в первой теореме, можно записать в виде $4k + 3$; простое число, о котором говорится во второй теореме, — в виде $4k + 1$. Ясно, что все нечетные простые числа имеют один из этих двух видов.

Из этих теорем следует, что

натуральное число представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел в том и только в том случае, если его разложение в *произведение степеней простых чисел не содержит нечетных степеней простых чисел вида* $4k+3$.

В самом деле, поскольку $2=1^2+1^2$, то произведение любой степени числа 2 и (по теореме 2) любых степеней простых чисел вида $4l+1$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Если сумму квадратов двух целых чисел умножить на квадрат какого-нибудь целого числа (например, на число, которое разлагается в произведение четных степеней простых чисел вида $4k+3$), то, умножая на него каждый из первых двух квадратов в отдельности, произведение снова можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Таким образом, натуральные числа, удовлетворяющие сформулированным выше условиям, допускают разложение в сумму квадратов двух целых чисел.

С другой стороны, пусть сумма квадратов двух целых чисел делится на простое число p вида $4k+3$. Тогда по теореме 1 каждое из этих чисел в отдельности делится на p. Следовательно, вынеся из суммы квадратов множитель p^2, мы снова получим сумму квадратов двух других целых чисел. Если новая сумма квадратов делится на p, то она делится и на p^2, и вынесение множителя p^2 можно повторить. Таким образом, наивысшая степень, в которой простое число p вида $4k+3$ входит в разложение натурального числа, представимого в виде суммы квадратов двух целых чисел, по степеням простых чисел, четна. Тем самым утверждение доказано (в предположении, что доказаны теоремы 1 и 2).

б. Для доказательства первой теоремы воспользуемся малой теоремой Ферма (см. III. 19). Пусть a^2+b^2 делится на простое число p вида $4k+3$. Пользуясь обозначениями, принятыми в теории сравнений (см. III. 12), это можно записать так:

$$a^2+b^2\equiv 0 \pmod p), \quad \text{или} \quad a^2\equiv -b^2 \pmod p.$$

Возведем обе части последнего сравнения в степень $\frac{p-1}{2}=$ $=2k+1$. Это число нечетное, и поэтому мы получаем сравнение

$$a^{p-1}\equiv -b^{p-1} \pmod p. \qquad (1)$$

Обе части сравнения либо сравнимы с 0 по модулю p (то есть делятся на p), либо ни одна из них не сравнима с нулем. Первое возможно лишь в том случае, если каждое из чисел a и b в отдельности делятся на p. Покажем, что случай, когда обе части сравнения (1) не сравнимы с 0 по модулю p, представиться не может. Действительно, если бы $a^{p-1}\not\equiv 0 \pmod p$ и $b^{p-1}\not\equiv 0 \pmod p$, то ни a, ни b не могли бы делиться на p. Но тогда по малой теореме Ферма

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p, \quad b^{p-1}\equiv 1 \pmod p,$$

и из сравнения (1) мы получили бы, что

$$1\equiv -1 \pmod p, \quad \text{то есть} \quad 2\equiv 0 \pmod p.$$

Но последнее сравнение означало бы, что нечетное простое число p является делителем числа 2, что невозможно.

в. Для доказательства второй теоремы воспользуемся следующим утверждением (см. III, 69, б):

для любого простого числа p вида $4l+1$ найдется такое целое число n, для которого n^2+1 делится на p, то есть выполняется сравнение

$$n^2+1\equiv 0 \pmod{p}. \qquad (2)$$

Рассмотрим все возможные числа вида $nx-y$, где x и y принимают неотрицательные целые значения, меньшие $\sqrt{p}$. Пусть k — наибольшее из допустимых значений x и y, то есть, поскольку $\sqrt{p}$ — нецелое число, такое целое число, для которого выполняется неравенство

$$k<\sqrt{p}<k+1.$$

Всего чисел вида $nx-y$ получится

$$(k+1)^2>(\sqrt{p})^2=p,$$

поскольку каждое из чисел x и y в отдельности принимает по $k+1$ значений. При делении x и y на p остаток может принимать p различных значений $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Поскольку сами числа x и y принимают больше значений, то найдутся две различные пары чисел (x, y), для которых числа вида $nx-y$ при делении на p дают один и тот же остаток. Обозначим эти числа nx_1-y_1 и nx_2-y_2. Тогда

$$nx_1-y_1\equiv nx_2-y_2 \pmod{p}$$

и, следовательно,

$$(x_1-x_2)\,n\equiv y_1-y_2 \pmod{p}.$$

Числа x_1 и x_2 не могут быть равными, поскольку тогда выполнялось бы сравнение

$$y_1-y_2\equiv 0 \pmod{p}.$$

Но разность y_1-y_2 меньше p, поэтому она может быть сравнима с 0 по модулю p, то есть делиться на p, лишь при условии, если числа y_1 и y_2 совпадают. Но тогда пары чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) не были бы различными. Следовательно, $x_1\neq x_2$.

Выберем значения индексов так, чтобы $x_1>x_2$. Пусть $u=x_1-x_2$ и $v=y_1-y_2$. Числа u и v удовлетворяют неравенствам

$$0<u<\sqrt{p} \quad \text{и} \quad |v|<\sqrt{p}, \qquad (3)$$

поскольку уменьшаемые x_1, y_1 и вычитаемые x_2, y_2 положительны, а каждое из чисел x_1, x_2, y_1, y_2 меньше $\sqrt{p}$. Числа x_1, x_2, y_1, y_2 выбраны так, что

$$un\equiv v \pmod{p}. \qquad (4)$$

Умножив сравнение (2) на u^2, получим

$$u^2n^2+u^2\equiv 0 \pmod{p}.$$

Пользуясь сравнением (4), подставим вместо первого слагаемого левой части последнего сравнения v^2. Тогда

$$v^2+u^2\equiv 0 \pmod{p},$$

то есть v^2+u^2 делится на p. Поскольку u и v удовлетворяют неравенствам (3), то

$$0<u^2+v^2<2p.$$

Но сумма квадратов u^2+v^2 кратна p, поэтому

$$u^2+v^2=p.$$

Итак, теорема 2 доказана.

63. *О проблеме Варинга.* Как мы убедились, не все натуральные числа представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел. Немногим труднее было бы доказать, что натуральные числа вида $4^a(8k+7)$, где a и k — положительные целые числа или нули, нельзя представить в виде суммы квадратов трех целых чисел. Варинг в 1770 г. привел без доказательства в одной из своих работ утверждение о том, что все положительные целые числа можно представить в виде суммы 4 квадратов, 9 кубов, 19 четвертых степеней целых чисел «и так далее» (некоторые слагаемые могут быть равны 0). Слова «и так далее» надлежит понимать в следующем смысле: для любого показателя степени k существует такое число S_k, зависящее лишь от k, что всякое натуральное число можно представить в виде суммы k-х степеней S_k целых чисел.

При $k=2$ проблему Варинга решил в том же веке Лагранж. В общем виде проблему удалось решить более чем через 100 лет Гильберту. Пусть g_k число, при котором любое натуральное число представимо в виде суммы k-х степеней g_k целых чисел, но непредставимо в виде суммы меньшего числа k-х степеней. Например, как нетрудно проверить, число $23=2\cdot 2^3+7\cdot 1^3$ нельзя представить в виде суммы менее 9 кубов, а число $79=4\cdot 2^4+15\cdot 1^4$ — в виде суммы менее 19 четвертых степеней целых чисел. Следовательно, $g_3\geqslant 9$, $g_4\geqslant 19$. Перебрав множество чисел, удалось обнаружить лишь одно число, кроме 23, а именно число $239=2\cdot 4^3+4\cdot 3^3+$ $+3\cdot 1^3$, допускающее разложение в сумму кубов не менее 9 чисел и всего 15 чисел, помимо двух названных, не допускающих разложения в сумму кубов менее чем 8 целых чисел, хотя проверке подверглись многие числа, превосходящие наибольшее из них (равное 8042). Весьма вероятно, что лишь числа, стоящие в начале ряда натуральных чисел, допускают разложение в сумму кубов со сравнительно большим числом слагаемых, поскольку выбирать слагаемые приходится среди небольшого набора чисел. Когда же набор возможных «кандидатов» в слагаемые при разложении числа в сумму кубов возрастает, число самих слагаемых становится меньше. Следовательно, для разложения натуральных чисел в сумму кубов целых чисел более характерным является не число g_3, а другое число G_3, показывающее, в сумму кубов скольких целых чисел можно разложить любое натуральное число, превосходящее некоторый предел (но не числа, меньшие этого предела). Аналогично определяется число G_k при любом k.

Гильберт исследовал весь круг вопросов, связанных с проблемой Варинга, получил много изящных результатов и создал новые методы, нашедшие впоследствии широкое применение в теории чисел. Точные значения g_k ему удалось установить лишь в нескольких исключительных случаях. С другой стороны, значения G_k, заменяющие g_k при больших k, как правило, поддавались точному определению и лишь в исключительных случаях пришлось довольствоваться приближенными значениями G_k. Так произошло потому, что g_k характеризуют поведение лишь нескольких «малых» чисел, в то время как G_k характеризуют поведение всего ряда натуральных чисел. Например, выяснилось, что при $k=4$ можно найти точное значение G_4 (оно равно 16). Относительно значения g_4 известно лишь, что оно заключено между 19 и 35.

К задаче 125.

64. *О гармоническом ряде.* а. Бесконечный ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

называется *гармоническим.* Название это связано с тем, что последовательные члены ряда относятся между собой так же, как частоты гармонически звучащих созвучий.

Покажем, что при $k>1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2}.$$

Действительно, заменив каждый член выражения, стоящего в левой части, наименьшим (последним) членом, мы лишь уменьшим левую часть и получим

$$k\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}.$$

Обозначив k-ю сумму гармонического ряда s_k, перепишем полученное неравенство в виде

$$s_{2k}-s_k>\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Следовательно, гармонический ряд расходится (см. III. 58). Действительно, если бы гармонический ряд сходился, то, задав любое положительное число, например $^1/_4$, мы могли бы найти такой индекс ν, что при $k>\nu$ все частичные суммы ряда s_k отличались бы от его суммы меньше, чем на $^1/_4$. Но при таких значениях k частичные суммы гармонического ряда s_k и s_{2k} должны были бы отличаться друг от друга меньше, чем на $^1/_2$, поскольку каждая из них отличалась бы от суммы ряда меньше чем на $^1/_4$. Мы пришли к противоречию, поскольку при всех $k>1$ выполняется неравенство (1). Итак, гармонический ряд расходится.

Относительно гармонического ряда можно доказать не только то, что последовательность его частичных сумм не сходится к определенному пределу, но и что его частичные суммы неограниченно возрастают. Более точно, это утверждение формулируется следующим образом: для любого (сколь угодно большого) числа ω найдется такое число ν, что при $k>\nu$ будет выполняться неравенство

$$s_k>\omega.$$

Запишем для этого гармонический ряд, разбив его на отрезки так, чтобы сумма членов каждого отрезка была больше $1/2$:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots.$$

Выберем число ν так, чтобы первые ν членов гармонического ряда были разбиты более чем на 2ω отрезков (в приведенной выше записи гармонического ряда члены, принадлежащие одному отрезку, заключены в круглые скобки). Тогда при $k > \nu$ все частичные суммы гармонического ряда s_k будут больше $\frac{1}{2}\cdot 2\omega$, то есть больше ω. Тем самым утверждение доказано: частичные суммы гармонического ряда не только не сходятся к определенному пределу, но и неограниченно возрастают.

б. Из неравенства (1) непосредственно следует, что при всех $k > 1$

$$s_{4k}-s_k=(s_{4k}-s_{2k})+(s_{2k}-s_k)>1. \tag{2}$$

Неравенство (2) выполняется и при $k=1$, поскольку сумма членов, стоящих в первых скобках, больше $1/2$. Итак,

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{4k}>1,$$

откуда при $m > 4k$ получаем неравенство

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{m}>1.$$

Из последнего неравенства следует утверждение задачи 125, поскольку при $k=n-1$ и $m=n^2$ условие $m > 4k$ перейдет в неравенство

$$n^2 \geqslant 4(n-1),$$

эквивалентное неравенству $(n-2)^2 \geqslant 0$, которое выполняется при всех n.

в. Покажем, что сумма

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2},$$

стоящая в левой части доказанного в задаче 125 неравенства, при возрастании n неограниченно возрастает.

Это утверждение следует из неравенств

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}>\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2n+1}+\ldots+\frac{1}{3n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)>n\cdot\frac{1}{2n}+$$
$$+n\cdot\frac{1}{3n}+\ldots+n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

поскольку, как доказано в п. а, частичные суммы гармонического ряда неограниченно возрастают с возрастанием n.

К задаче 127.

65. *О неравенстве Иенсена для функций нескольких переменных.* В частном случае, когда все числа a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 положительны и $b_1=\sqrt{a_1c_1}$, $b_2=\sqrt{a_2c_2}$, доказанное в задаче 127 неравенство (после извлечения квадратного корня из его обеих частей) можно представить в виде

$$\sqrt{a_1c_1}+\sqrt{a_2c_2}\leqslant\sqrt{(a_1+a_2)(c_1+c_2)}=$$
$$=2\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{c_1+c_2}{2}}. \qquad (1)$$

Из доказанного следует, что строгое равенство выполняется лишь в том случае, если

$$a_1c_2+a_2c_1=2\sqrt{a_1c_1a_2c_2},$$

то есть если

$$\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}, \quad \text{или} \quad c_1=\lambda a_1, \quad c_2=\lambda a_2.$$

Неравенство (1) означает, что для функции $F(x, y)=\sqrt{xy}$ выполняется неравенство

$$F(x_1, y_1)+F(x_2, y_2)\leqslant 2F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right). \qquad (2)$$

Если неравенство (2) выполняется при любых x_1, x_2, принадлежащих одному заданному (конечному или бесконечному) интервалу и любых y_1, y_2, принадлежащих другому заданному интервалу, то неравенство

$$F(x_1, y_1)+F(x_2, y_2)+\ldots+F(x_n, y_n)\leqslant$$
$$\leqslant nF\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)$$

выполняется при всех x_1, x_2, ..., x_n и y_1, y_2, ..., y_n, принадлежащих этим же заданным интервалам.

Это неравенство представляет собой не что иное, как неравенство Иенсена для функций двух переменных, доказанное в III. 43 для функций одной переменной. Доказать неравенство Иенсена для функций двух переменных можно тем же способом, каким в III. 42 доказано неравенство Коши.

Следовательно, пользуясь неравенством (1), мы можем для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, c_1, c_2, ..., c_n вывести неравенство

$$\sqrt{a_1c_1}+\sqrt{a_2c_2}+\ldots+\sqrt{a_nc_n}\leqslant$$
$$\leqslant n\sqrt{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}}=$$
$$=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)(c_1+c_2+\ldots+c_n)}.$$

Полагая $\sqrt{a_1}=x_1$, $\sqrt{a_2}=x_2$, ..., $\sqrt{a_n}=x_n$, $\sqrt{c_1}=y_1$, $\sqrt{c_2}=y_2$, ... $\sqrt{c_n}=y_n$, преобразуем его к виду

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)}$$

Прослеживая шаг за шагом доказательство неравенства Иенсена, нетрудно убедиться в том, что строгое равенство достигается лишь в том случае, если $y_1=\lambda x_1$, $y_2=\lambda x_2$, ..., $y_n=\lambda x_n$, где λ — произвольное число.

Неравенство (4) известно под названием неравенства Коши[1]. В частном случае при $n=3$ оно имеет следующий геометрический смысл. Левая часть неравенства совпадает со скалярным произведением векторов (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) (см. III.51), а правая — с произведением длин этих векторов. Справедливость неравенства Коши при $n=3$ следует из того, что скалярное произведение двух векторов содержит косинус угла между их направлениями, а косинус любого угла не больше 1.

К задаче 133.

66. *О числах Ферма.* П. Ферма высказал гипотезу о том, что все числа F_k простые. При $k=0, 1, 2, 3, 4$ гипотеза Ферма подтвердилась. Но уже число F_5 оказалось составным: как показал Эйлер, $2^{2^5}+1=641\cdot 6700417$. С тех пор были разработаны методы теории чисел и изобретены быстродействующие вычислительные машины, позволяющие отвечать на вопрос, является ли каждое отдельно взятое число Ферма простым или составным. Ни одного нового простого числа среди чисел Ферма обнаружить не удалось. До сих пор остается нерешенным вопрос о том, существуют ли другие простые числа Ферма, кроме тех, которые уже известны, и если существуют, то сколько: бесконечно много или лишь конечное число?

Хотя о том, встречаются ли простые числа Ферма при $k>5$, ничего неизвестно, мы все же можем, используя последовательность чисел Ферма, доказать, что *среди натуральных чисел имеется бесконечно много простых чисел.* Действительно, любые два числа Ферма с различными индексами не могут иметь общих делителей. Следовательно, их разложения в произведение степеней простых чисел содержит различные простые числа. Но тогда простые делители всех последовательных чисел Ферма различны и, следовательно, различных простых бесконечно много.

Существует много других последовательностей, любые два члена которых являются взаимно простыми целыми числами. Например, нетрудно показать, что если a и b — взаимно простые числа и последовательность составлена по закону

$$a_0=1,\quad a_k=a+b\cdot a_0a_1\ldots a_{k-1}\quad (k\geqslant 1),$$

то любые два члена последовательности взаимно просты. Если $a=2$, $b=1$, то, положив по определению $F_0=1$, мы получим последовательность чисел Ферма F_k.

---

[1] Употребительны названия «неравенство Шварца» и «неравенство Коши — Буняковского». — *Прим. ред.*

К задаче 137.

67. *О целочисленных решетках.* Чтобы разобраться в геометрическом смысле задачи 137, введем на плоскости целочисленную решетку.

а. Пусть O, P, Q — любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой. На прямой, проходящей через точки O и P, в обе стороны от точки O отложим отрезки, равные отрезку OP, а через концы построенных отрезков проведем прямые, параллельные OQ. Аналогично на прямой OQ в обе стороны от точки O отложим отрезки, равные отрезку OQ, а через концы построенных отрезков проведем прямые, параллельные OP. В результате вся плоскость

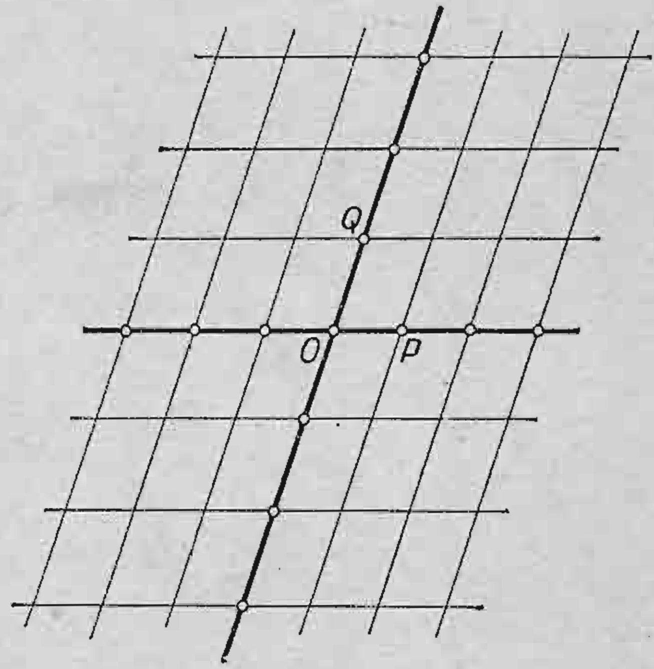


Рис. 271.

окажется покрытой решеткой конгруэнтных параллелограммов с попарно параллельными сторонами. Вершины этих параллелограммов (точки пересечения проведенных прямых) образуют так называемую *точечную решетку* (рис. 271).

Решетка параллелограммов однозначно определяет точечную решетку, но не наоборот. Например, если оставить точки O и P, а вместо точки Q взять четвертую вершину параллелограмма со сторонами OP, OQ, то, исходя из этих трех точек, можно построить новую решетку параллелограммов, отличную от старой, но точечная решетка будет той же самой.

Пусть $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — радиусы-векторы точек P и Q, проведенные из точки O. Тогда радиус-вектор любой точки (узла) решетки можно представить в виде

$$x\mathbf{p} + y\mathbf{q}, \tag{1}$$

где x и y — целые числа, а все точки, радиус-вектор которых представим в виде (1), совпадают с одним из узлов решетки. Иначе говоря, если x и y независимо друг от друга принимают все целые значения, то множество точек с радиусами-векторами вида (1) совпадает с точечной решеткой, образованной вершинами параллелограммов со сторонами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

Особенно важное значение имеет точечная решетка, образованная двумя взаимно перпендикулярными осями и параллельными им прямыми, отстоящими друг от друга на целочисленные расстояния.

Такая решетка называется *основной* или *базисной*. Базисная решетка — это решетка единичных квадратов, стороны которых параллельны осям координат. Порожденная ею точечная решетка содержит те и только те точки, обе координаты которых выражаются целыми числами. (Такая решетка встречается в задаче 134.) Сейчас нас будут интересовать свойства лишь такой решетки, хотя читатель сможет без труда обобщить приводимые ниже утверждения на случай точечных решеток, порожденных любой решеткой параллелограммов. В дальнейшем выражение *точечная решетка* (без указания на решетку параллелограммов) будет означать *точечная решетка, порожденная базисной решеткой.*

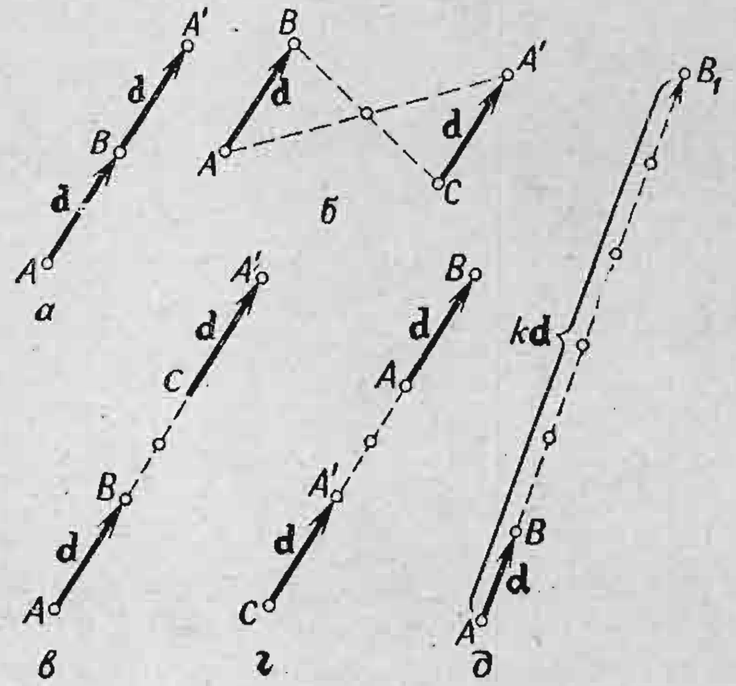


Рис. 272.

6. Векторы, координаты которых выражаются целыми числами называются *векторами решетки*. Все векторы, начало и конец которых совпадают с узлами решетки, являются векторами решетки, и, наоборот, если один из концов вектора решетки совпадает с узлом решетки, то другой конец также совпадает с узлом решетки. Сумма векторов решетки и вектор, полученный при умножении вектора решетки на целое число, также являются векторами решетки. Отсюда следует, что, *построив точку, симметричную узлу решетки относительно любого другого узла решетки или середины отрезка прямой, соединяющего два узла решетки, мы вновь получим узел решетки. Кроме того, мы получим узел решетки, построив точку, гомотетичную узлу решетки, с центром гомотетии в любом другом узле решетки и коэффициентом подобия, выражающимся любым целым числом.* Действительно, пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — радиусы-векторы узлов решетки A, B, C, а $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$. Тогда радиус-вектор точки A', симметричной точке A относительно точки B, равен $\mathbf{b} + \mathbf{d}$ (рис. 272, *а*), радиус-вектор точки A', симметричной точке A относительно середины отрезка BC, равен $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ (рис. 272, *б*, *в*, *г*), радиус-вектор точки, совпадающей с концом вектора, который получен при умножении вектора $\overrightarrow{AB}$ на целое число k, равен $\mathbf{a} + k\mathbf{d}$ (рис. 272, *д*). Все три вектора $\mathbf{b} + \mathbf{d}$, $\mathbf{c} + \mathbf{d}$, $\mathbf{a} + k\mathbf{d}$ являются векторами решетки (последний — потому, что k — целое число) и, следовательно, радиусами-векторами узлов решетки.

в. Обратимся теперь к задаче 137. Пусть $\mathbf{p} = (a, c)$, $\mathbf{q} = (b, d)$ — векторы решетки. Левые части уравнений

$$ax + by = m, \quad cx + dy = n$$

можно рассматривать как координаты вектора

$$x\mathbf{p} + y\mathbf{q}.$$

По условиям задачи a, b, c и d выбраны так, что, придавая x и y все целые значения, мы получим радиусы-векторы всех узлов точечной решетки.

Это означает, что точечная решетка, порожденная решеткой параллелограммов со сторонами $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, совпадает с базисной точечной решеткой. Другими словами, все узлы последней расположены в вершинах параллелограммов и ни один узел не лежит на периметре или внутри параллелограмма. Параллелограмм с вершинами в узлах точечной решетки, не содержащий ни одного узла ни внутри себя, ни на периметре (кроме тех, которые совпадают с его вершинами), будем называть *основным* решеточным параллелограммом.

Если площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, выразить через координаты этих векторов, то получится выражение $|ad - bc|$. Таким образом, утверждение задачи мы получим, если будет доказано, что площадь всякого основного решеточного параллелограмма равна 1.

К задаче 143.

68. *О некоторых задачах, относящихся к полным графам.* а. «Переведем» условия задачи на язык теории графов (см. III. 52). Чтобы облегчить перевод, воспользуемся некоторыми новыми понятиями. О том, что такое полный граф и подграф, уже говорилось в III. 54.

Граф G называется *дополнительным* к графу $\bar{G}$, если он содержит те же вершины, что и граф $\bar{G}$, но любые две из них соединены в G ребром в том и только в том случае, если они не соединены ребром в $\bar{G}$, причем в G любые две вершины соединены не более чем одним ребром.

Возвращаясь к компании, о которой говорится в условиях задачи 143, сопоставим каждому из ее членов вершину графа и соединим две вершины ребром, если соответствующие члены компании знакомы между собой. Утверждение задачи можно сформулировать следующим образом.

Пусть G — любой граф с 6 вершинами. Тогда либо граф G, либо дополнительный к нему граф содержит полный подграф с 3 вершинами.

В менее симметричном виде то же самое утверждение можно сформулировать так:

если в графе с 6 вершинами среди любых 3 вершин найдутся 2, соединенные между собой ребром, то такой граф содержит полный подграф с 3 вершинами.

б. В связи с последней задачей возникает следующая, более общая задача: при всяком ли натуральном числе k можно найти такое число $n(k)$, что если в графе, содержащем по крайней мере $n(k)$ вершин, две из любых трех вершин соединены между собой ребром, то такой граф содержит полный подграф с k вершинами. Если такие числа $n(k)$ существуют, то каково наименьшее из них?

Докажем методом полной математической индукции, что число $n(k)$ с указанными выше свойствами существует для любого натурального k. Из утверждения задачи следует, что $k=3$ соответствует $n(3)=6$ ($k=2$, очевидно, соответствует $n(2)=3$).

Предположим, что при некотором k существует соответствующее ему значение $n(k)$. Пусть G — граф, обладающий тем свойством, что две из любых трех его вершин соединены ребром, и не содержащий полного подграфа с $k+1$ вершинами. Подсчитаем, сколько вершин может быть у графа G. Выберем любую из его *вершин* P. Вершины графа G, не соединенные ребрами с P, служат вершинами полного подграфа графа G, поскольку если Q и R — две такие вершины, то из трех вершин P, Q, R лишь они могут быть соединены ребрами. Следовательно, все вершины графа G, не соединенные ребрами с выбранной нами вершиной P, попарно соединены ребрами между собой, то есть принадлежат полному подграфу графа G. Поскольку граф G не содержит полных подграфов с $k+1$ вершинами, то с выбранной нами вершиной P не соединено ребрами не более k вершин графа G.

Рассмотрим теперь подграф графа G, вершины которого соединены ребрами с выбранной нами вершиной P. Число вершин какого-либо содержащегося в нем полного подграфа меньше k, поскольку в противном случае, присоединив к полному подграфу с k вершинами вершину P, мы получили бы полный подграф с $k+1$ вершинами, что невозможно. Поскольку условия, наложенные на граф G, выполняются и для любого подграфа графа G, то подграф, натянутый на те вершины графа G, которые соединены ребрами с выбранной вершиной P, по предположению индукции содержит не более $n(k)-1$ вершин. Следовательно, граф G содержит не более

$$1+k+n(k)-1=n(k)+k$$

вершин. Таким образом, если две из любых трех вершин графа с

$$n(k)+k+1=n(k+1)$$

вершинами соединены между собой ребром, то такой граф содержит полный подграф с $k+1$ вершинами. Тем самым доказано, что сформулированное утверждение верно для $k+1$. Следовательно, оно верно при любых значениях k.

Из приведенного выше доказательства видно, что одно из возможных значений $n(k)$ дается формулой

$$n(k)=1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

При $k=2$ и $k=3$ значения $n(k)$, вычисленные по этой формуле, совпадают с наименьшими: $n(2)=3$, $n(3)=6$. В общем случае наименьшие значения $n(k)$ не известны.

Используя утверждение задачи 158 (см. III. 71), можно показать, что наименьшее значение $n(k)$ не может быть меньше $3k-3$. Известен гораздо более сильный результат: как показал Пал Эрдёш, при произвольной постоянной c и $k>k(c)$ существует граф с $ck^2/\ln k$ вершинами, обладающий тем свойством, что среди любых

3 вершин по крайней мере 2 соединены между собой ребром, и не содержащий полного подграфа с k вершинами.

в. В связи с приведенной выше задачей из теории графов, эквивалентной исходной задаче 143, возникает вопрос: при всех ли натуральных k найдется такое число $m(k)$, что любой граф с $m(k)$ вершинами или дополнительный граф содержит полный подграф с k вершинами. Как показывают рассуждения, аналогичные приведенным выше, такие числа $m(k)$ существуют для всех натуральных k, например,

$$m(k) = C_{2k-2}^{k-1}.$$

Наименьшие значения $m(k)$ неизвестны. Пал Эрдёш доказал, что

$$m(k) > 2^{\frac{k}{2}}.$$

Необходимо заметить, что из предложенных Эрдёшем доказательств в обоих случаях следует лишь существование графа с требуемыми свойствами, но не способ построения такого графа. Было бы весьма интересно научиться строить соответствующие графы.

Как показано в III. 54, если граф бесконечный, то либо он сам, либо дополнительный граф содержит бесконечный полный подграф.

К задаче 155.

69. *Теорема Вильсона.* а. В решении задачи 155 доказано, что если p — простое число, то $(p-1)!$ не делится на p. Гораздо более сильное утверждение содержится в теореме Вильсона:

если p — простое число, то $(p-1)!+1$ делится на p.

Докажем эту известную теорему из теории чисел при помощи наглядных геометрических соображений. Предположим, что $p>2$, поскольку при $p=2$ утверждение теоремы допускает прямую проверку.

Рассмотрим вписанный в окружность правильный p-угольник с вершинами в точках $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{p-1}$. Число всех возможных перестановок из чисел $1, 2, \ldots, p-1$ равно $(p-1)!$. Каждую перестановку изобразим наглядно в виде ориентированного «многоугольника»: перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_{p-1})$ сопоставим замкнутую ориентированную ломаную $P_0P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_{p-1}}$ (рис. 273). Ориентированная ломаная, изображенная на рис. 273, соответствует перестановке (2, 1, 6, 4, 3, 5) при $p=7$. Ясно, что различным перестановкам соответствуют различные замкнутые ориентированные ломаные и среди ломаных, соответствующих перестановкам, встречаются все ломаные с p вершинами, расположенными на окружности. Таким образом, число всех ориентированных ломаных равно $(p-1)!$. Необходимо доказать, что при делении на p число $(p-1)!$ дает остаток $p-1$. Мы убедимся в этом, если окажется, что, исключив $p-1$ ломаных из общего числа, остальные ломаные можно разбить на классы, каждый из которых содержит p ломаных.

Разбиение ломаных на классы произведем следующим образом. Отнесем к одному классу те и только те ломаные, которые переходят друг в друга при повороте вокруг центра окружности. В общем случае каждый такой класс содержит по p ломаных, поскольку, поворачивая окружность вокруг центра, любую ее точку можно совместить с p различными вершинами вписанного в окружность правильного p-угольника. Меньшее число ломаных класс содержит лишь в том случае, если не при всех p поворотах, совмещающих точку с вершинами p-угольника, получаются различные ломаные, то есть если при повороте на угол $r\alpha$, где $\alpha = \frac{360°}{p}$, $r < p$, ломаная переходит в себя. Но если какая-нибудь ломаная переходит в себя при повороте на угол $r\alpha$ вокруг центра окружности, то она переходит в себя и при поворотах на угол

$$0,\ r\alpha,\ 2r\alpha,\ \ldots,\ (p-1)\,r\alpha$$

вокруг центра окружности. Все эти повороты существенно различны, то есть никакие два из них не отличаются друг от друга на угол,

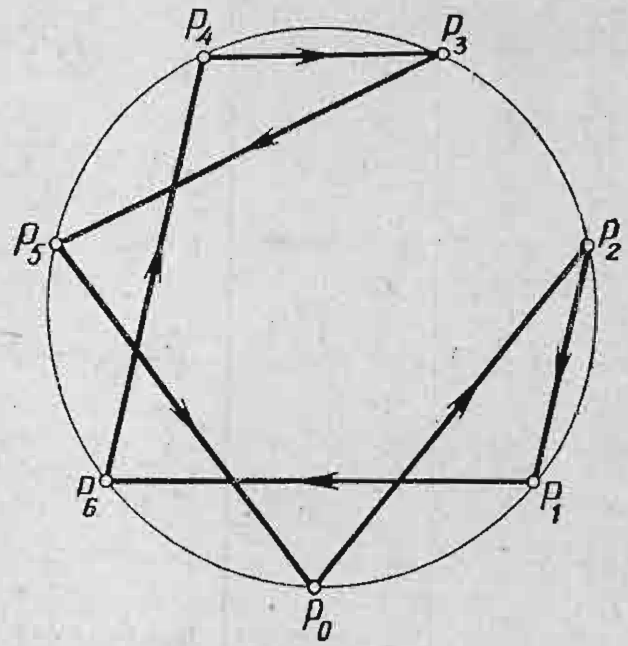


Рис. 273.

равный или кратный 360°. Действительно, разность углов $kr\alpha$ и $lr\alpha$ может быть кратна углу $360° = p\alpha$ лишь в том случае, если $(k-l)r$ делится на p, что невозможно, поскольку $r < p$, $k < p$, $l < p$ и p — простое число (см. III.2). Следовательно, среди углов

$$0,\ r\alpha,\ 2r\alpha,\ \ldots,\ (p-1)\,r\alpha$$

содержатся все различные кратные угла α (два угла считаются здесь одинаковыми, если один из них отличается от другого на угол, кратный 360°), поскольку существует лишь p таких углов. Итак, мы доказали, что если какая-нибудь ломаная принадлежит к классу, не содержащему p ломаных, то такой класс состоит лишь из одной ломаной.

Каждому классу, содержащему лишь одну ломаную, принадлежит один из правильных (выпуклых или звездчатых) p-угольников. Как показано в III.14, число правильных p-угольников равно $p-1$. Тем самым утверждение доказано, поскольку, за исключением правильных p-угольников, все остальные замкнутые ориентированные ломаные разделяются на классы, каждый из которых содержит по p ломаных.

б. Из доказанного в п. а утверждения следует, что *если p — простое число вида $4k+1$, то существует такое положительное це-*

лое число n, для которого n^2+1 делится на p. Это утверждение понадобилось нам в III. 62.

Выделим в $(p-1)!$ те сомножители, которые больше $\sim p/2$, следующим образом:

$$(p-1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot \frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\times$$

$$\times\left(p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p-\frac{p-3}{2}\right)\ldots(p-4)(p-3)(p-2)(p-1).$$

Если раскрыть скобки, то все члены, кроме одного, будут содержать множитель p. Сумму этих членов запишем в виде pQ. Единственный член, не содержащий множителя p, получится, если из разности, стоящей в каждом члене второй строки, мы выберем вычитаемое. Таким образом, $(p-1)!$ можно представить в виде

$$(p-1)! = pQ + \left(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right)^2\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}} =$$

$$= pQ + \left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right\}^2.$$

По доказанному в п. а это число, если его увеличить на 1, делится на p. Поскольку стоящий в правой части член pQ делится на p, то это означает, что $\left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right\}^2+1$ делится на p. Следовательно, число $n=\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ является тем числом, существование которого требовалось доказать.

К задаче 156.

70. *О теореме Хелли.* а. Плоская фигура называется *выпуклой*, если она вместе с любыми двумя точками содержит весь соединяющий их отрезок прямой. Примерами выпуклых фигур могут служить круг, треугольник, полуплоскость, бесконечная полоса, часть плоскости, заключенная между сторонами угла, прямая, луч или отрезок прямой. Непосредственно из определения плоской фигуры следует, что если две плоские фигуры имеют общую часть, то она выпукла. Относительно общей части выпуклых фигур известна следующая теорема Хелли.

Пусть на плоскости задано конечное число выпуклых фигур. Если любые три из них содержат общую точку, то существует такая точка, которая принадлежит всем фигурам одновременно.

Рассмотрим сначала случай, когда на плоскости заданы четыре выпуклые фигуры. Обозначим их F_1, F_2, F_3, F_4. По условию теоремы фигуры F_2, F_3, F_4 имеют общую точку P_1. Предположим, что точка P_1 не принадлежит фигуре F_1, поскольку в противном случае нам нечего было бы доказывать. Аналогичным образом выберем точки P_2, P_3, P_4 (точка P_2 не принадлежит фигуре F_2, но принадлежит трем остальным фигурам, точка P_3 не принадлежит фигуре F_3, а а точка P_4 — фигуре F_4). Поскольку фигура F_1 содержит каждую из точек P_2, P_3, P_4, то вместе с любыми двумя из них она содержит и все точки соединяющего их отрезка прямой и треугольник $P_2P_3P_4$ (который может вырождаться в отрезок прямой), ограниченный этими отрезками. Фигуры F_2, F_3, F_4 целиком содержат треугольники $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$ и $P_1P_2P_3$. Но для четырех треугольников $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_2P_3$ всегда найдется такая точка K, которая принадлежит каждому из них (и расположена внутри или на периметре треугольников). Это утверждение верно и в том случае, если точки P_1, P_2, P_3, P_4 расположены в вершинах выпуклого четырехугольника (в качестве точки можно выбрать точку пересечения диагоналей четырехугольника), и в том случае, если три точки расположены в вершинах некоторого треугольника, содержащего четвертую точку (в качестве точки K можно выбрать четвертую точку), и в том случае, если все четыре точки расположатся на одной прямой (в качестве точки K можно выбрать любую из двух средних точек или любую точку соединяющего их отрезка прямой). Итак, мы доказали, что всегда существует точка K, принадлежащая каждому из четырех треугольников $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_2P_3$ и, следовательно, каждой из четырех выпуклых фигур F_1, F_2, F_3, F_4, которые содержат эти треугольники. Тем самым теорема Хелли доказана для случая, когда имеются четыре выпуклые фигуры.

Для случая, когда число выпуклых фигур больше четырех, докажем теорему Хелли методом полной математической индукции. Предположим, что теорема верна для n выпуклых фигур. Пусть любые три из выпуклых фигур F_1, F_2, $\ldots$, F_n, F_{n+1} содержат общую точку. Обозначим через F общую часть фигур F_n и F_{n+1}. Все n фигур F_1, F_2, $\ldots$, F_{n-1}, F — выпуклые, и любые три из них содержат общую точку. Действительно, если одной из трех фигур мы выберем F, то фигуры F_i, F_j, F содержат общую точку, поскольку по уже доказанной для случая четырех выпуклых фигур теореме Хелли фигуры F_i, F_j, F_n, F_{n+1} содержат общую точку. Следовательно, предположение индукции применимо к n выпуклым фигурам F_1, F_2, $\ldots$ $\ldots$, F_{n-1}, F, и, таким образом, эти n фигур содержат общую точку K. Но тогда точку K содержит каждая из выпуклых фигур F_1, F_2, $\ldots$, F_{n-1}, F_n, F_{n+1}. Итак, мы доказали, что если теорема Хелли верна для n фигур, то она верна и для $n+1$ фигур. Следовательно, теорема Хелли верна для любого числа n выпуклых фигур.

б. Утверждение задачи 156 непосредственно следует из теоремы Хелли. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть полуплоскости, дополняющие каждую из четырех полуплоскостей, о которых говорится в задаче, до полной плоскости, присоединив к ним граничные прямые. Ясно, четыре дополнительные полуплоскости не содержат ни одной общей точки, поскольку такая точка не могла бы быть внутренней точкой ни одной из четырех исходных полуплоскостей. По теореме Хелли четыре дополнительные полуплоскости могут не иметь общей точки лишь в том случае, если среди них найдутся три такие, которые не содержат общих точек. Но это и означает, что три исходные полуплоскости, которые они дополняют, покрывают всю плоскость.

К задаче 158.

71. *О полных подграфах конечных графов.* Из утверждения задачи следует, что

для любого натурального числа $n > 1$ существует граф с $3n$ вершинами, у которого две из трех любых вершин соединены ребром, не содержащий полного подграфа с $n+2$ вершинами.

Этот факт был упомянут в III. 68. Граф, обладающий требуемыми свойствами, можно построить так. Расположим по окружности на равных расстояниях друг от друга $3n$ точек — вершин графа (перенумеровав их последовательными натуральными числами от 1 до $3n$) и каждую из вершин соединим ребрами с n предыдущими и n последующими вершинами. Две вершины останутся не связанными между собой ребром лишь в том случае, если их номера отличаются больше, чем на n, но меньше, чем на $2n$. Из утверждения задачи 158 следует, что среди любых $n+2$ вершин всегда найдутся 2 вершины, не соединенные между собой ребром. С другой стороны, среди любых трех точек всегда найдутся две, соединенные между собой ребром, поскольку, если номера точек a, b, c расположены в порядке возрастания (то есть $a < b < c$) и $c - a < 2n$, то одна из разностей $b - a$ и $c - b$ заведомо меньше n.

К задаче 168.

72. *О дробях Фарея.* Точечные решетки позволяют наглядно изображать дроби.

Зададим произвольное натуральное число n и рассмотрим все правильные несократимые дроби, знаменатель которых меньше или равен n. Если такие дроби расположить в порядке возрастания, приписать перед первой дробью число $\frac{0}{1}$, а после последней — число $\frac{1}{1}$, то мы получим набор чисел, известный под названием *n-й последовательности Фарея и обозначаемый* $\mathfrak{F}_n$. Например, $\mathfrak{F}_8$ выглядит следующим образом:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8},$$

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}.$$

Если эти числа нанести на числовую ось, то заметить какую-либо закономерность в распределении точек невозможно; они то сгущаются, то становятся реже, и все же дроби, образующие n-ю последовательность Фарея $\mathfrak{F}_n$, подчиняются весьма простым закономерностям.

Прежде чем приступать к их изучению, введем одно новое определение. *Медианой* дробей h/k и h'/k' ($k > 0$, $k' > 0$) называется дробь $(h + h')/(k + k')$. Докажем следующие утверждения:

а) *медиана двух соседних членов n-й последовательности Фарея $\mathfrak{F}_n$ несократима, и знаменатель ее больше n;*

б) *разность двух соседних членов n-й последовательности Фарея $\mathfrak{F}_n$ обратна произведению их знаменателей;*

в) *средний из трех последовательных членов $\mathfrak{F}_n$ равен медиане соседних с ним членов.*

Утверждение «в» тесно связано с задачей 168.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат и каждой дроби h/k ($0 < h \leqslant k \leqslant n$) поставим в соответствие точку целочисленной решетки с координатами (k, h). Несократимость дроби h/k означает, что на отрезке, соединяющем точку (k, h) с началом координат, нет других узлов решетки, кроме конца отрезка, совпадающего с точкой (k, h). О такой точке можно сказать, что ее видно из начала координат, или для краткости просто назвать *видимой точкой*. Чем больше дробь k/h, тем больше угол, образуемый отрезком, который соединяет точку (k, h) с началом координат, с положительной полуосью x. Все точки, соответствующие членам n-й последовательности Фарея, за исключением точки, изображающей дробь 0/1, располагаются выше оси x. Точка (1, 0) лежит на оси x. С другой стороны, все эти точки, за исключением точки (1, 1), которая соответствует дроби 1/1, расположены ниже биссектрисы угла между осями координат. Наконец, наибольшее расстояние от

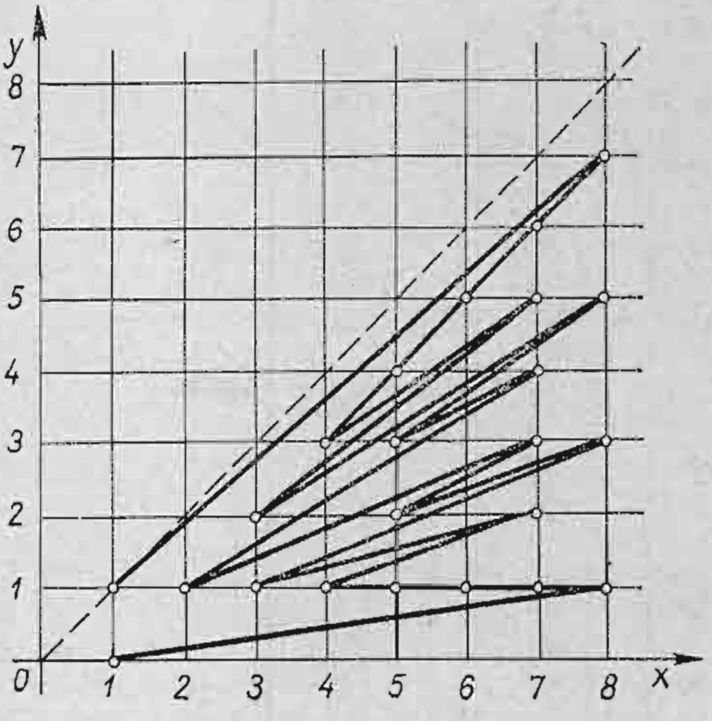


Рис. 274.

точек, соответствующих членам n-й последовательности Фарея, до оси x равно n (рис. 274). Эти три условия определяют равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными n. Любой видимый узел решетки, лежащий внутри или на периметре треугольника, соответствует некоторому члену $\mathfrak{F}_n$. Обозначим этот треугольник H_n: Пусть P и P' — два узла решетки, соответствующие двум дробям Фарея, 0 — начало координат, Q — точка, соответствующая медиане дробей, которые сопоставлены узлам решетки P и P'. Тогда четырехугольник $OPQP'$ — параллелограмм.

Если дроби h/k поставить в соответствие узел решетки с координатами $(k - h, h)$, то станет отчетливо заметно, что члены n-й последовательности Фарея $\mathfrak{F}_n$ расположены симметрично относительно середины отрезка [0, 1] — точки $x = 1/2$ (рис. 275)[1]. И в этом случае точки, соответствующие членам $\mathfrak{F}_n$, расположатся внутри равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны n, и все остальные свойства узлов решетки, «занятых» дробями Фарея, также сохранятся. Следовательно, при доказательстве сформулированных выше теорем можно использовать любой из способов наглядного представления членов n-й последовательности Фарея.

---

[1] Симметричным членам будут отвечать точки, симметричные относительно биссектрисы координатного угла. — *Прим. ред.*

а. Пусть P и P' — две точки, изображающие соседние члены h/k, h'/k' последовательности Фарея. На точку Q, соответствующую медиане дробей h/k и h'/k', из начала координат O указывает диагональ параллелограмма $OPQP'$. Следовательно, из начала координат

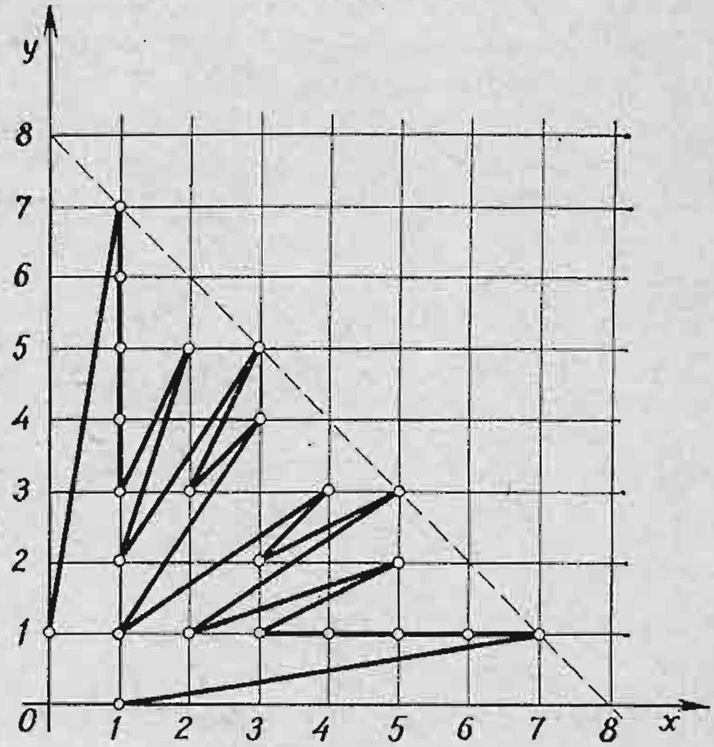


Рис. 275.

точка Q видна между точками P и P', соответствующими двум соседним членам n-й последовательности Фарея $\mathfrak{F}_n$, и узел решетки, с которым совпадает точка Q, лежит вне треугольника H_n, поскольку $\mathfrak{F}_n$ не содержит дробей, соответствующих точкам, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат O внутри

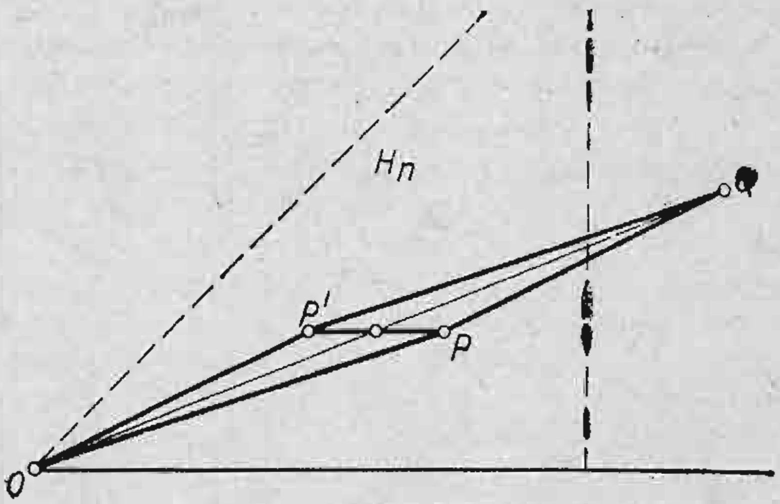


Рис. 276.

угла POP' (рис. 276). На диагонали OQ нет узлов решетки, которые были бы расположены ближе к началу координат, чем точка Q, ибо в противном случае один из узлов решетки располагался внутри отрезка OQ и отрезок OQ был бы разделен узлами решетки на равные части. Но тогда видимый из начала координат O узел решетки, лежащий на диагонали OQ, не мог бы находиться от O дальше, чем точка, делящая отрезок OQ (и одновременно отрезок PP') пополам, и этот узел находился бы внутри треугольника H_n, что невозможно.

Итак, видимая точка соответствует несократимой дроби $(h+h')/(k+k')$ и находится вне треугольника H_n и внутри угла POP', что возможно только в том случае, если

$$k+k'>n. \qquad (1)$$

б. Из доказанного в п. а следует, что OPP' — основной решеточный треугольник, поскольку P и P' — видимые точки и поэтому стороны OP и OP' треугольника не содержат других узлов решетки. Кроме того, точки P и P' соответствуют соседним членам n-й последовательности Фарея, и треугольник OPP' расположен внутри H_n, поэтому внутри треугольника OPP' и на стороне PP' также нет узлов решетки. Как доказано из геометрических соображений в решении задачи 137, площадь основного решеточного треугольника

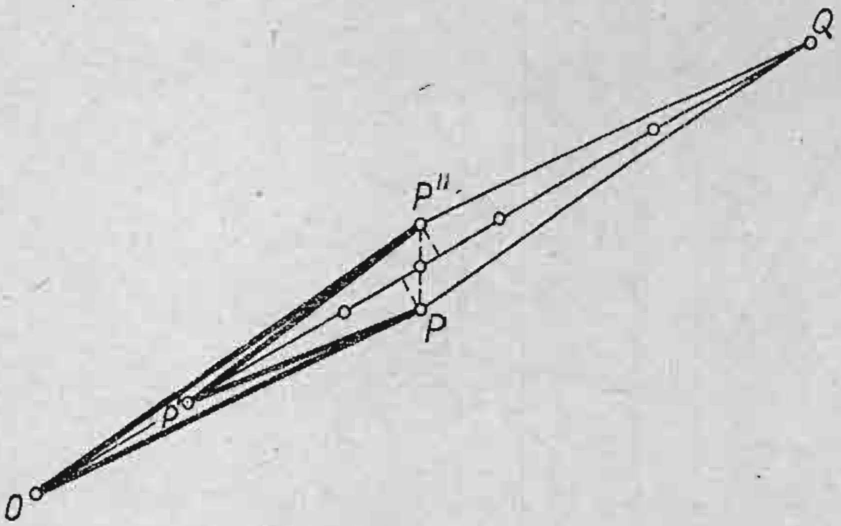


Рис. 277.

равна $^1/_2$, поэтому, выразив удвоенную площадь треугольника OPP' через координаты точек P и P', получим

$$h'k-hk'=\pm 1, \qquad (2)$$

откуда

$$\frac{h'}{k'}-\frac{h}{k}=\frac{h'k-hk'}{kk'}=\pm\frac{1}{kk'}.$$

Итак, теорема «б» доказана.

в. Пусть P, P' и P'' — точки, соответствующие трем последовательным членам $\mathfrak{F}_n$. Тогда $OP'P$ и $OP'P''$ — основные решеточные треугольники. Их площади равны, и поэтому точки P и P'' лежат по разные стороны от прямой OP' на одинаковом расстоянии от нее (рис. 277). Это означает, что прямая OP' делит пополам отрезок PP'' и, следовательно, проходит через точку Q — четвертую вершину параллелограмма $OPQP''$. Но точка Q соответствует медиане дробей, сопоставленных точкам P и P', поэтому число, соответствующее точке P', также равно медиане дробей, сопоставленных точкам P и P'', что и требовалось доказать.

Доказанная теорема «в» имеет следующий геометрический смысл: *если решеточный треугольник содержит узлы решетки, отличные от его вершин, и они расположены на прямой, проходящей через одну из вершин треугольника, то эта прямая совпадает с медианой треугольника.*

Если периметр треугольника не содержит других узлов решетки, кроме тех, которые совпадают с его вершинами, а внутри треугольника находится один-единственный узел решетки, то условиям геометрического варианта теоремы «в» удовлетворяют все три вершины треугольника, и внутренний узел решетки совпадает с центром тяжести треугольника. Следовательно, задачу 168 можно рассматривать как частный случай теоремы «в».

К задаче 170.

73. *О гамильтоновых графах.* Наложив один на другой два графа, изображенных на рис .159, мы получим шестиугольник, который изображен на рис. 278. Все вершины такого шестиугольного графа можно обойти, побывав в каждой из них лишь один раз. Если из ребер графа можно построить цикл, содержащий все вершины графа, соединенные последовательно одна за другой ребрами графа так, что каждая вершина при обходе цикла встречается лишь один

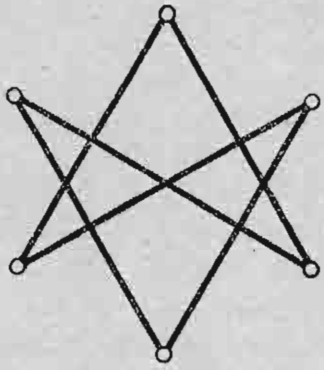


Рис. 278.

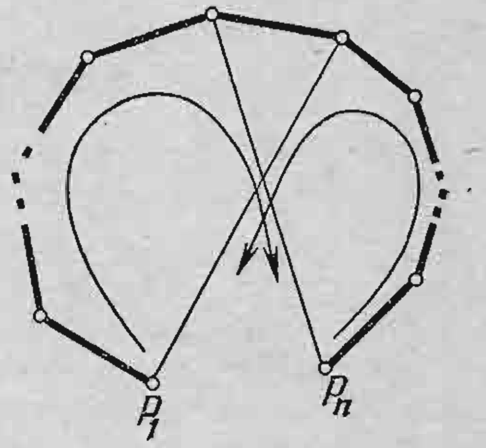


Рис. 279.

раз, то такой цикл называется *гамильтоновым циклом*, а сам граф — *гамильтоновым графом.* Утверждение задачи 170 можно сформулировать следующим образом: *граф с шестью вершинами, степень которых не меньше 3, является гамильтоновым графом.* Разумеется, мы имеем в виду лишь такие графы, в которых любые две вершины соединены не более чем одним ребром.

Утверждение задачи допускает обобщение. Оно остается верным, если вместо 6 взять n вершин, а вместо наименьшей степени, равной 3, установить наименьшую степень вершин, равную $n/2$ (натуральное число n должно быть больше 2, а в остальном произвольно).

Докажем, что *если граф содержит n вершин ($n \geqslant 3$) и степень каждой из них не меньше $n/2$, то такой граф гамильтонов.* Эту теорему доказал в 1951 г. Габор Дирак. Приводимое ниже доказательство принадлежит Лайошу Поша (придумавшему его еще во время учебы в средней школе).

Докажем равносильное утверждение: *если граф G содержит n ($n \geqslant 3$) вершин и не является гамильтоновым, то степень некоторой из его вершин меньше $n/2$.*

Граф G содержит по крайней мере две вершины, не соединенные ребром, поскольку полный граф (у которого любая пара вершин связана между собой ребром) гамильтонов. Соединим эти вершины ребром. Так будем повторять до тех пор, пока после присоединения очередного ребра граф не станет гамильтоновым. После конечного числа шагов построение гамильтонова графа завершится, поскольку число ребер, соединяющих попарно вершины конечного графа, конечно. Сотрем последнее проведенное нами ребро, пусть это будет P_1P_n.

У полученного графа G_1 столько же вершин, сколько их было у исходного графа G, причем при переходе от графа G к графу G_1 степень любой из них не понизилась. Следовательно, достаточно доказать, что в графе G_1 найдется вершина, степень которой меньше $n/2$. В графе G_1 существует путь, ведущий из P_1 в P_n и проходящий через все вершины этого графа, причем через каждую вершину лишь один раз, поскольку, присоединив к G_1 ребро P_1P_n, мы получили бы гамильтонов граф (рис. 279). Обозначим вершины графа G_1 в том порядке, в каком они встречаются по пути из P_1 в P_n: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, так что граф G_1 содержит ребра P_iP_{i+1} при всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть P_1 — вершина степени k, P_n — вершина степени l. Обозначим $P_{i_1}, P_{i_2} \ldots P_{i_k}$, где $i_1 = 2 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant \leqslant n-1$, соединенные ребрами с вершиной P_1. Тогда вершины P_{i_j-1} при $j = 2, 3, \ldots, k$ не могут быть связаны ребрами с вершиной P_n, поскольку в противном случае граф G_1 содержал бы гамильтонов цикл $P_1P_2 \ldots P_{i_j-1}P_nP_{n-1} \ldots P_{i_j}P_1$. Следовательно, вершина P_n не соединена ребрами по крайней мере с k вершинами из $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, в силу чего $l \leqslant n-1-k$, $l+k \leqslant n-1$. Таким образом, по крайней мере одно из двух чисел k и l меньше чем $n/2$. Тем самым теорема доказана.

Пользуясь аналогичным методом, Поша доказал следующую более общую теорему:

пусть граф G имеет $n \geqslant 3$ вершин. Если для всякого $k < (n - -1)/2$ число вершин со степенями, не превосходящими k, меньше чем k и для нечетного n число вершин степени $(n-1)/2$ не превосходит $(n-1)/2$, то G — гамильтонов граф.

К задаче 191.

74. *О полных четных графах.* Обозначим каждого из участников выпускного бала точкой и условимся соединять линиями точки, соответствующие тем юношам и девушкам, которые танцевали друг с другом.

Граф, соответствующий условиям задачи 191, называется *четным*, поскольку все его вершины можно разделить на две группы (а именно на вершины, изображающие девушек и юношей) так, что все ребра будут соединять лишь вершины, принадлежащие различным группам. Граф можно дополнить так, чтобы любая пара точек, принадлежащих различным группам, была соединена ребром. Таким образом, ребра графа также можно разделить на две группы: ребра, принадлежавшие исходному графу, и ребра, добавленные впоследствии. Для того чтобы нам было удобнее различать ребра этих двух типов, раскрасим их в два цвета.

Итак, можно утверждать, что задача 191 сводится к рассмотрению *полного четного графа*, ребра которого окрашены в два цвета, причем какую бы вершину мы ни выбрали, из условий задачи следует, что выходящие из нее ребра не могут быть окрашены в один и тот же цвет. Утверждение задачи сводится к тому, что в дополненном графе непременно найдутся ребра, образующие замкнутый «четырехугольник» со сторонами чередующейся окраски (иначе говоря, любые две смежные стороны такого четырехугольника окрашены в различные цвета).

Более того, полный четный граф, соответствующий условиям задачи, можно было бы использовать для наглядного доказательства ее утверждения. Подробное проведение такого доказательства мы предоставляем читателю. Следует иметь в виду, что условия задачи не изменятся, если слова «танцевал (танцевала) с...» заменить словами «не танцевал (не танцевала) с...» и наоборот. Если мы попрежнему будем соединять ребрами те вершины, которые соответствуют юношам и девушкам, танцевавшим друг с другом на выпускном балу, то те вершины, которые не были соединены в первом случае, окажутся соединенными во втором, и наоборот. Новый граф, двойственный по отношению к первому графу, также удовлетворяет всем условиям задачи.

Те же рассуждения, которые мы использовали для решения задачи, применимы и в том случае, когда речь идет не о полном четном графе, а о *полном графе* (напомним, что полным называется граф, любые два ребра которого соединены ребром). Мы предоставляем читателю самостоятельно убедиться в правильности этого утверждения, а сами ограничимся лишь тем, что для большей наглядности сформулируем его следующим образом.

Предположим, что собралась группа людей, часть которых знакома между собой, а часть видит друг друга впервые. Никто не знаком со всеми остальными присутствующими, но у каждого среди собравшихся есть по крайней мере один знакомый.

Тогда из этой группы можно выделить четырех людей и построить их по кругу так, что каждый будет знаком лишь с одним из двух своих соседей. Нетрудно доказать это утверждение, если воспользоваться первым решением задачи 191. Остается в силе также и рассуждение, приведенное в четвертом решении той же задачи.

Читатель может самостоятельно убедиться в правильности следующего утверждения: если в некоторой компании у каждого из присутствующих имеется по крайней мере один знакомый, а для любых k (но не большего числа) членов компании всегда можно указать человека, с которым не знаком ни один из них, то среди членов компании можно выбрать $2k$ человек и расставить их в два ряда так, что знакомыми между собой окажутся лишь пары, стоящие друг против друга.

Выясним теперь, как обстоит дело с соответствующей задачей из теории бесконечных полных графов. Сформулировать ее можно следующим образом.

Ребра полного графа с бесконечным числом вершин раскрашены в два цвета так, что нет вершины, из которой выходят лишь ребра одного цвета. Верно ли утверждение о том, что в таком графе всегда найдется четырехугольник, любые две смежные стороны которого окрашены в различные цвета? Приведем пример, показывающий, что такой четырехугольник существует не всегда. Пусть вершины графа занумерованы всевозможными натуральными числами. Ребро, идущее из вершины с номером a в вершину с номером b, окрасим в красный цвет, если большее из чисел a и b четно, и в синий цвет, если оно нечетно. Нетрудно убедиться в том, что получившийся сине-красный граф не содержит четырехугольника, любые две смежные стороны которого были бы окрашены в различные цвета.

СОДЕРЖАНИЕ

И. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани

ВЕНГЕРСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Редактор А. Г. Белевцева. Художник Н. Н. Дронова
Художественный редактор Ю. С. Урманчеев
Технический редактор Н. Д. Толстякова
Корректор Е. В. Кочегарова
Сдано в набор 3/XI 1975 г. Подписано к печати 16/VI 1976 г.
Бумага № 3 $84\times108^1/_{32}$=8,50 бум. л. Усл. печ. л. 28,56. Уч.-изд. л. 27,43.
Изд. № 12/8426. Цена 1 р. 50 к. Зак. 910

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.