

PD 12108

9

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MEHANIKU

Smilja Milanović-Lazarević

UTICAJ NAPONSKIH SPREGOVA NA RASPODELU NAPONA
U BESKONAČNOJ OBLASTI SA ELIPTIČNIM OTVOROM

-doktorska disertacija-

Beograd, 1987

Predgovor

Delovi ovog rada, kao i rezultati do kojih sam dolazila, saopštavani su na redovnom seminaru Grupe za reologiju. Čini mi zadovoljstvo da se zahvalim članovima ove grupe na korisnim diskusijama.

Posebno se zahvaljujem mentoru ove disertacije Prof.dr Jovi Jariću na sugestijama i pdsticaju koje mi je pružio.

	U V O D	1
I	OSNOVE TEORIJE ELSTIČNIH MATERIJALA	
	REDA DVA	12
	1.1. Kretanje i deformacija	12
	1.2. Lokalni oblici zakona balansa. Jedna- čine kretanja. Granični uslovi	16
	1.3. Linearne konstitutivne jednačine	17
II	RAVNA DEFORMACIJA	20
	2.1. Osnovne jednačine	20
	2.2. Naponske funkcije	24
III	ELIPTIČNI SISTEM KOORDINATA. OBLIK DIFEREN- CIJALNIH JEDNAČINA. KOORDINATE TENZORA NA- PONA I TENZORA NAPONSKIH SPREGOVA	27
	3.1. Eliptični sistem koordinata	27
	3.2. Oblik diferencijalnih jednačina u eliptičnom sistemu koordinata	30
	3.3. Koordinate tenzora napona i naponskih spregova u eliptičnom sistemu koordinata	31
IV	RAVNOMERNO ZATEZANJE BESKONAČNE OBLASTI SA ELIPTIČNIM OTVOROM	34
	4.1. Granični uslovi	34
	4.2. Oblik naponskih funkcija	39
	4.3. Koordinate tenzora napona i naponskih spregova	50
	4.4. Aproksimativno rešenje	54
	4.5. Aproksimativno rešenje $s = 3$	61

V	RAVNOMERNO ZATEZANJE BESKONAČNE OBLASTI SA ELIPTIČNIM OTVOROM U PRAVCU KRAĆE OSE ELIPSE	70
	5.1. Oblik naponskih funkcija. Koordinate tenzora napona i naponskih spregova	70
	5.2. Oblik konstanti integracije za dovoljno male vrednosti parametra q	73
	5.3. Faktor koncentracije napona	78
VI	ZAKLJUČNA RAZMATRANJA	83
	L I T E R A T U R A	87

U V O D

Teorija elastičnosti, kao deo mehanike kontinuuma, polazi od iste pretpostavke o neprekidnosti materije u nekoj oblasti prostora.

Fizička činjenica je da materija nije neprekidna, već da poseduje diskretnu strukturu, pa se može postaviti pitanje u kojim slučajevima ima smisla pretpostaviti da je materija neprekidna, tj. u kojim slučajevima možemo zanemariti rastojanje između diskretno raspoređenih osnovnih čestica. Odgovor na to pitanje daje posmatranje prenosa poremećaja kroz diskretnu strukturu, izazvanog nekim spoljnjim efektom. Poremećaj se prenosi u vidu talasnog kretanja, pri čemu se javljaju talasi različitih talasnih dužina. Samo u slučajevima kada su poremećaji takvi da dovode do talasnih kretanja sa velikim talasnim dužinama, tako da jedna talasna dužina obuhvata veliki broj osnovnih čestica diskretne strukture, mogu se zanemariti rastojanja između tih čestica, tj. može se pretpostaviti da je materija neprekidna. U tom smislu mehanika kontinuuma predstavlja određenu aproksimaciju realnosti.

Predmat izučavanja teorije elastičnosti je elastično telo

koje definišemo kao neprekidnu materijalnu sredinu u kojoj su dopušteni samo elastični procesi. Osnovna karakteristika elastičnih procesa je reverzibilnost deformacija, odnosno, osnovna osobina elastičnog tela je da se posle prestanka dejstva spoljašnjeg opterećenja vrati u stanje u kome je bilo pre početka dejstva opterećenja.

U klasičnoj teoriji elastičnosti naponsko stanje opisuje se simetričnim tenzorom napona. Simetrija tenzora napona je posledica pretpostavke da se uticaj jednog dela tela na drugi može izraziti kao dejstvo neke površinske sile $\vec{t}(\vec{n})$ definisane po jedinici granične površine ova dva dela tela, pri čemu je \vec{n} jedinični vektor spoljašnje normale granične površine.

Uočeno je odavno da klasična teorija elastičnosti, za neke klase materijala (polikristalni materijali, granularni materijali, i slično) ne daje rezultate koji su u skladu sa eksperimentom, kao i da ne može da objasni neke pojave (rasprostiranje kratkih akustičnih talasa u polikristalnim metalima i visokim polimerima, naprimer). Zbog toga je unutrašnja struktura materijala postala predmet intenzivnog izučavanja i rezultat toga su nove teorije koje adekvatnije opisuju određene klase materijala.

Postoje različiti modeli kontinuuma koji predstavljaju generalizaciju klasičnog modela, ali je za sve njih zajedničko da se naponsko stanje, pored drugih veličina, opisuje nesimetričnim tenzorom napona. Takvi modeli kontinuuma nazivaju se zajedničkim imenom polarni kontinuumi.

Istorijski gledano, jedan od prvih generalisanih modela klasičnog kontinuuma, koji ćemo i mi koristiti u našem radu, je kontinuum reda dva, razmatran u radovima više autora. Kako navode Trusdel i Tupin (C. Truesdell, R.A. Toupin), [5], prva ra-

zmatranja ovog modela kontinuuma data su u radovima Maksvela (J.C.Maxwell),1873,Fojgta (W.Voigt),1887,Diema (P.Duhem),1904, braće Koseira (E.,F.Cosserat),1909,...

Uticaj mikrostrukture materijala izražen je u ovom modelu kontinuuma antisimetrijom tenzora napona i tenzorom naponskog sprega.Naime,ako posmatramo neko telo \mathcal{B}_1 ,ograničeno zatvorenom površinom \mathcal{S}_1 ,i ako iz tela \mathcal{B}_1 uklonimo njegov zamišljeni deo \mathcal{B}_2 ,ograničen zatvorenom površinom \mathcal{S}_2 ,pri čemu je \mathcal{S}_2 granična površina delova tela $(\mathcal{B}_1-\mathcal{B}_2)$ i \mathcal{B}_2 sa jediničnim vektorom spoljašnje normale \vec{n} ,onda je,prema generalisanom principu napona Ojler-Košija (L.Euler,A.Cauchy),uticaj dela tela $(\mathcal{B}_1-\mathcal{B}_2)$ na deo \mathcal{B}_2 ,ekvivalentan nekom vektoru napona $\vec{t}(\vec{n})$ i vektoru naponskog sprega $\vec{m}(\vec{n})$,definisanih po jedinici granične površine \mathcal{S}_2 .

Ovim je,za razliku od klasične teorije elastičnosti,uveden naponski spreg čiji se uticaj ne može apriori zanemariti.Takođe,u ovom modelu kontinuuma se pretpostavlja da na telo deluju zapreminska sila, \vec{f} ,kao i zapreminski spreg, $\vec{\ell}$,definisani po jedinici zapremine tela.

Savremen pristup u razmatranju ovog modela,a posebno u izvodjenju Koseira jednačina,dat je u radu Tupina,[6],gde su određene konstitutivne jednačine za elastične materijale reda dva u slučaju konačnih deformacija.Konstitutivnim relacijama se određuje veza između napona i deformacija.U ovom slučaju konstitutivnim relacijama određena je veza između simetričnog dela tenzora napona i tenzora naponskog sprega sa odgovarajućim tenzorima deformacije u kojima je eksplicitno izražen uticaj gradijenata deformacije drugog reda.Antisimetrični deo tenzora napona određuje se posredno,što se može videti iz osnovnih jednačina ove teorije.Deformacija kontinuuma u potpunosti je određena pomeranjima neprekidno ras-

poredjenih čestica kontinuuma, pa, prema tome, ovaj generalisani model kontinuuma ima tri lokalna stepena slobode.

Mindlin i Tiersten (R.D.Mindlin, H.F.Tiersten) su, [2], linearizovali konstitutivne relacije dobijene u [6], da bi kasnije Mindlin primenjujući ovu linearnu teoriju elastičnosti sa naponskim spregovima razmatrao neke probleme oscilacija, talasnog kretanja i koncentracije napona, u cilju dobijanja rezultata čija je saglasnost sa eksperimentom veća.

Zbog Mindlinovog velikog doprinosa u dobijanju novih rezultata za određenu klasu problema primenom linearne teorije elastičnih materijala reda dva, kao i u dobijanju linearnih konstitutivnih relacija ove teorije, često se linearna teorija elastičnih materijala reda dva naziva Mindlinova linearna teorija elastičnosti sa naponskim spregovima.

Problem određivanja raspodele napona u okolini otvora je jedan od značajnijih problema ravne teorije elastičnosti, kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog stanovišta. Naime, nije poznat opšti oblik rešenja ovakvih problema iz koga se može, u nekom određenom slučaju, dobiti rešenje tog slučaja kao specijalni slučaj opšteg rešenja. Rešenja posebnih slučajeva zavise od oblika otvora kao i od vrste naprezanja, tako da svaki od njih zahteva posebna razmatranja. U tom smislu svaki poseban slučaj ima svoj teorijski značaj. Dalje, u praksi (u konstrukcijama, naprimer) kao i u samoj fizičkoj realnosti (s obzirom da su neke osobine materijala, kao homogenost i slično, samo aproksimacije realnih osobina), često se susrećemo sa različitim naprezanjima materijalnih sredina koje sadrže otvore, odnosno, kako se to drugim rečima kaže, sa oblastima koje sadrže otvore, tako da je poznavanje raspodele napona u takvim oblastima, pri različitim vrstama naprezanja, neophodno.

Pokazano je, naprimer, da pri ravnomernom naprezanju neke o-

blasti koja sadrži otvor, u okolini otvora dolazi do poremećaja ravnomernog naponskog stanja koje se manifestuje, između ostalog, vrlo velikim vrednostima napona tangencijalnih na konturu otvora, takozvanih cirkularnih napona. Ovaj efekat povećanja napona naziva se koncentracija napona, a broj koji predstavlja količnik najveće vrednosti cirkularnog napona na konturi i intenzitete sile kojom je izazvano ravnomerno naprezanje u tačkama dovoljno udaljenim od konture, naziva se faktor koncentracije napona. Odredjivanje faktora koncentracije napona u zavisnosti od oblika otvora jeste krajnji cilj svake teorije koja se bavi problemima naprezanja oblasti sa otvorima, ili, kako te probleme neki autori nazivaju, ploča sa otvorima. Nama se čini boljim naziv oblast sa otvorom, jer sam izraz ploča navodi na pomisao da se problem razmatra sa stanovišta teorije ploča, što nije tačno. Pojam ravnomerno naprezanje beskonačne oblasti sa otvorom podrazumeva ravnomerno naprezanje oblasti silom konstantnog intenziteta koja deluje u tačkama dovoljno udaljenim od konture, ili kako se to drugačije kaže, u beskonačno udaljenim tačkama. Pri tome se pretpostavlja da su dimenzije oblasti mnogo veće od dimenzija otvora.

Ovaj problem detaljno je razmatran u klasičnoj teoriji elastičnosti i određen je faktor koncentracije napona u više različitih slučajeva naprezanja za različite oblike otvora. Međutim, dobijeni teorijski rezultati nisu bili, za neke klase materijala, u skladu sa eksperimentalnim rezultatima. Zbog toga je bilo neophodno razmatrati ovaj problem, za tu klasu materijala, sa stanovišta adekvatnijih teorija koje uzimaju u obzir unutrašnju strukturu materijala.

Moguće je razmatrati problem raspodele napona u okolini otvora sa stanovišta polarnih teorija elastičnih materijala. Mi ćemo, kao najpogodniju od njih za problem koji ćemo kasnije

formulisati, izdvojiti Mindlinovu linearnu teoriju elastičnosti sa naponskim spregovima. Razlog, pre svega, leži u tome što se u ovoj teoriji, za razliku od drugih, pojavljuju samo dve nove materijalne konstante, od kojih je jedna u problemu ravne deformacije jednaka nuli, tako da je moguće odrediti neke granice vrednosti druge konstante u zavisnosti od poznatih veličina.

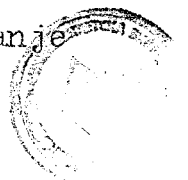
Kao potvrdu naših izlaganja navodimo rad Mindlina, [1], gde je pokazano da, za klasu materijala kod kojih se uticaj mikrostrukture ne može zanemariti, u slučaju ravnomernog zatezanja beskonačne oblasti sa kružnim otvorom, faktor koncentracije napona može imati vrednost od 2,39-2,64, dok je vrednost ovog faktora u klasičnoj teoriji elastičnosti 3.

Uticaj antisimetrije tenzora napona na raspodelu napona u okolini krivolinijskih otvora razmatran je u monografiji Savina (G.N.Savin), [7]. Pri rešavanju problema korišćen je posredan metod, takozvani metod izmene granica, koji se može primeniti samo u slučajevima kada je odstupanje oblika krivolinijskog otvora od oblika kruga vrlo malo. Ovo ograničenje znatno smanjuje broj problema koji ovim metodom mogu biti rešavani. Dobijeni rezultati ukazuju da je, u slučaju zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom u pravcu kraće ose elipse, vrednost faktora koncentracije napona manja nego u klasičnoj teoriji elastičnosti. Ovde je, takodje, određena raspodela napona u slučaju kada sila ravnomernog zatezanja deluje u pravcu duže ose elipse, dok opštiji slučaj ravnomernog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom silom proizvoljnog pravca nije razmatran.

I u [1] i u [7], rešenje problema je traženo uvodjenjem naponskih funkcija od kojih se jedna od njih, u slučaju kada se zanemari uticaj naponskih spregova, svodi na Erijevu (G.B.Airy) naponsku funkciju, a druga je funkcija naponskih spregova.

Ovaj metod rešavanja problema ravne deformacije, razmatranih sa stanovišta Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima, vrlo je pogodan i korišćen je u radovima mnogih autora, a kako je pokazano u radu Mindlina, [3], može se primeniti u bilo kojoj generalisanoj teoriji Kosera kontinuuma. Njegovom primenom rešavanje problema se svodi na rešavanje dve diferencijalne jednačine, između kojih postoji određena veza, u skladu sa zadatim graničnim uslovima.

Imajući u vidu prethodno izložena istraživanja i rezultate tih istraživanja, kao i pri tome primenjene metode, mi smo, u svome radu, [19], razmatrali problem ravnomernog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom u slučaju kada sila zatezanja deluje u pravcu kraće ose elipse. Za razliku od [7], problem smo rešavali direktnim putem, kako je dato u [4], pri čemu smo sve potrebne relacije izrazili u eliptičnom sistemu koordinata. Erijevu naponsku funkciju smo uzeli u istom obliku, kao u klasičnoj teoriji elastičnosti, dok smo funkciju naponskih spregova izrazili preko odgovarajućih Matjeovih (E. Mathieu) funkcija, kao rešenje diferencijalne jednačine koju ova funkcija mora zadovoljavati u problemu ravne deformacije Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima. Na kraju ovog rada formirali smo sistem algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih konstanti integracije u skladu sa zadatim graničnim uslovima. Međutim, oblik rešenja funkcije naponskih spregova uslovio je preodredjen sistem jednačina, koji se može rešiti nekom aproksimativnom metodom, ali na taj način dobijena rešenja problema ne daju odgovor na pitanje da li problem ima jedinstveno rešenje. (Mi smo, van okvira navedenog rada, primenili metodu najmanjeg kvadrata kao aproksimativnu metodu za rešavanje dobijenog preodredjenog sistema jednačina i dobili zadovoljavajuće rezultate, ali je pitanje



saglasnosti sistema jednačina, odnosno pitanje jedinstvenosti rešenja problema, ostalo otvoreno.)

Otvoreno pitanje jedinstvenosti rešenja navelo nas je na razmišljanje o drugim mogućim rešenjima ovog problema, koja bi, zbog oblika Matjeovih funkcija koje moraju figurisati u izrazu funkciju naponskih spregova, morala biti aproksimativna, ali iz kojih bi se odmah mogla sagledati jedinstvenost rešenja.

Rezultat takvih razmišljanja, kao i razmišljanja o prevazi-
laženju ograničenja koja nameće metod izložen u [7], je naša te-
za. Prvi zadatak u njoj nam je da, direktnim metodom, izloženim
u [4], odredimo raspodelu napona u beskonačnoj oblasti sa elip-
tičnim otvorom u slučaju ravnomernog zatezanja oblasti silom
konstantnog intenziteta koja sa dužom osom elipse zaklapa pro-
izvoljni ugao, pri čemu ćemo problem razmatrati sa stanovišta
Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim sprego-
vima. Ovaj problem se često naziva i problem jednoosnog zate-
zanja silom u beskonačnosti, pa ćemo i mi ponekad koristiti
taj naziv. Sledeći zadatak koji ćemo rešavati je određivanje
raspodele napona i naponskih spregova u beskonačnoj oblasti
sa eliptičnim otvorom u slučaju kada sila ravnomernog zateza-
nja deluje u pravcu kraće ose elipse. Rešenje ovog problema je
specijalni slučaj prvog rešenja ali je značajnije od opšteg
rešenja sa praktičnog stanovišta. Naime, pri ovakvom jednoosnom
zatezanju, javljaju se u krajnjim tačkama veće ose elipse (ko-
ja je upravna na pravac zatezanja) najveće vrednosti cirkula-
rnih napona, i njihovo određivanje je od posebnog interesa za
praksu. Znajući ove vrednosti cirkularnih napona, znamo maksi-
malne vrednosti napona u opštem problemu ravnomernog jednoos-
nog zatezanja, jer su, za bilo koji drugi pravac zatezanja, vre-
dnosti cirkularnog napona manje, kao i vrednosti radijalnih i
smičućih napona. U vezi sa tim, kao treći zadatak i krajnji cilj

naše teze, odredićemo aproksimativni oblik izraza za određivanje faktora koncentracije napona, i u slučaju dve eliptične konture, od kojih će jedna biti istog oblika kao u [7], odrediti njegove brojne vrednosti.

U cilju celovitog sagledavanja samog modela elastičnih materijala reda dva, odnosno jasnijeg sagledavanja Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima, sa čijeg ćemo stanovišta razmatrati problem, u prvoj glavi ove teze daćemo poznate osnovne postavke ove teorije, odnosno osnovne kinematičke i dinamičke pojmove, kao i osnovne jednačine. Način dobijanja ovih jednačina, kao i način uvođenja osnovnih veličina, detaljno je izložen u radu Tupina, [6], Mindlina i Ešela, [4], kao i monografiji M. Plavšića, [8].

Pošto je problem koji razmatramo problem ravne deformacije, u drugoj glavi ćemo definisati stanje ravne deformacije i dati sve osnovne jednačine izražene u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata, izvedene u [1]. Zatim ćemo ukratko izložiti način uvođenja naponskih funkcija, kao i diferencijalne jednačine koje one moraju zadovoljavati. Ravan problem teorije elastičnosti i stanje ravne deformacije, kao njegov deo, su poseban deo teorije elastičnosti koji je celina sam za sebe, pa ćemo ga i ovog puta, kako je to u literaturi uglavnom uobičajeno, izdvojiti kao zasebnu celinu.

S obzirom da je problem koji ćemo razmatrati vezan za eliptičnu konturu, u trećoj glavi ćemo uvesti eliptični sistem koordinata i izraziti u odnosu na njega sve potrebne relacije. Ove relacije ćemo dobiti polazeći od njihovog oblika u Dekartovom sistemu koordinata korišćenjem veze između Dekartovih koordinata i eliptičnih koordinata izražene preko funkcije kompleksne promenljive. Na prvi pogled, pošto ćemo koristiti zakone transformacije tenzorskih veličina pri transformaciji ko-

ordinata, čini se neumesnim uvođenje funkcije kompleksne promenljive. Međutim, uvođenjem ovih veličina znatno se olakšava postupak dobijanja potrebnih relacija izraženih u odnosu na eliptični sistem koordinata, što će se lako uočiti iz oblika koordinatnih transformacija koje ćemo dati u ovoj glavi. Ove relacije smo prvi put izveli i koristili u našem radu [19].

U četvrtoj glavi ćemo najpre definisati granične uslove problema jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom silom proizvoljnog pravca i izraziti ih u eliptičnom sistemu koordinata. Zatim ćemo, u skladu sa graničnim uslovima u beskonačnosti, dati opšti oblik rešenja diferencijalnih jednačina koje moraju zadovoljavati naponske funkcije u našem problemu. U ovom delu rada u celosti se ogleda i novi pristup u rešavanju problema. Naime, rešenje prve diferencijalne jednačine, biharmonijske, koju zadovoljava naponska funkcija koju ćemo zvati Enijeva, jer se u slučaju zanemarenja naponskih spregova svodi na nju, tražićemo kao opšte rešenje ove jednačine u eliptičnom sistemu koordinata. (Oblici ovih rešenja mogu se naći u literaturi, a mi smo pri dobijanju naših rešenja koristili metod naveden u [9].) Rešenje diferencijalne jednačine koju zadovoljava druga naponska funkcija, funkcija naponskih spregova, izrazićemo preko odgovarajućih Matjeovih funkcija, pri čemu ćemo koristiti oblik ovih funkcija dat u knjizi [12]. Rešenja diferencijalnih jednačina, odnosno naponske funkcije, biće u obliku konvergentnih beskonačnih redova, pa će i koordinate tenzora napona i naponskih spregova, koje se izražavaju preko naponskih funkcija, biti takvog oblika.

S obzirom na definisane granične uslove na konturi, kontur-
ne uslove, koji moraju biti zadovoljeni, formiraćemo na uobičajeni način sisteme algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih konstanti integracije. Dobićemo beskonačno mnogo jedna-

čina sa beskonačno mnogo nepoznatih veličina. Stoga ćemo uvesti aproksimaciju koja nam se čini sasvim očiglednom iz dobijenih izraza za koordinate tenzora napona i naponskih spregova, i u tom slučaju dobiti konačan broj jednačina sa konačnim brojem nepoznatih veličina. U slučaju jedne konkretne aproksimacije, iz ovih sistema jednačina odredićemo nepoznate konstante, pri čemu očekujemo da se može pokazati da su dobijeni sistemi jednačina saglasni. Dobijene rezultate ćemo uporediti sa poznatim rezultatima klasične teorije elastičnosti, na koju se Mindlinova linearna teorija elastičnosti sa naponskim spregovima svodi kada se zanemari uticaj naponskih spregova. Pri tome očekujemo potpunu saglasnost rezultata.

U petoj glavi ćemo dati rešenje problema jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom u pravcu kraće ose elipse, pri čemu ćemo ovo rešenje naći kao specijalni slučaj opšteg rešenja. Zbog posebnog interesa u praksi, ovaj slučaj ćemo izdvojiti i detaljnije proučiti u cilju određivanja faktora koncentracije napona, i, u nekom konkretnom slučaju, odredićemo njegovu brojnu vrednost. Očekujemo rezultate koji će potvrditi našu pretpostavku da, za određene klase materijala, faktor koncentracije napona realno ima manju vrednost od vrednosti dobijene u klasičnoj teoriji. U ovoj glavi ćemo izvršiti poredjenja dobijenih rezultata sa rezultatima klasične teorije elastičnosti, sa poznatim rezultatima dobijenim pri razmatranju jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa kružnim otvorom sa stanovišta ove teorije, [1], kao i rezultatima datim u [7]. Poredjenja ćemo vršiti na osnovu oblika izraza za određivanje faktora koncentracije napona, jer su takva poredjenja vrlo jednostavna.

Poslednja glava posvećena je zaključnim razmatranjima.



I OSNOVE TEORIJE ELASTIČNIH MATERIJALA

REDA DVA

1.1. Kretanje i deformacija

Posmatrajmo telo \mathcal{B} , zapremine V , ograničeno zatvorenom površinom S , koje se u trenutku vremena t_0 nalazi u nedeformisanoj konfiguraciji K_0 . U trenutku vremena $t > t_0$ telo će se nalaziti u konfiguraciji K koja odgovara tom trenutku vremena i imaće zapreminu V , ograničenu zatvorenom površinom \mathcal{J} .

Neka je u početnoj konfiguraciji K_0 položaj čestice tela određen krivolinijskim materijalnim koordinatama X^K , a u konfiguraciji K krivolinijskim prostornim koordinatama x^k .

Kretanje kontinuuma u potpunosti je određeno konačnim jednačinama kretanja

$$(1.1.1) \quad x^k = x^k(X^K, t)$$

odnosno, određeno je funkcijama preslikavanja oblasti V nedeformisane konfiguracije K_0 na oblast V deformisane konfiguracije K .

Funkcije (1.1.1) su neprekidne i diferencijabilne, i određuju jednoznačno preslikavanje, tako da im odgovara inverzno preslikavanje

$$(1.1.2) \quad X^K = X^K(x^k, t)$$

pri čemu je potreban i dovoljan uslov za egzistenciju inverznog preslikavanja

$$(1.1.3) \quad \det \left(\frac{\partial x^k}{\partial X^k} \right) \neq 0.$$

Vektor pomeranja neke čestice tela \vec{u} , definisan je razlikom vektora položaja čestice u trenutnoj i početnoj konfiguraciji

$$(1.1.4) \quad u^k = z^k - g^k R^k, \quad u^k = g^k z^k - R^k$$

zavisno od toga da li vektor pomeranja posmatramo kao funkciju prostornih ili materijalnih koordinata. Veličine g^k i g^k su operatori paralelnog pomeranja, a z^k i R^k su prostorne, odnosno materijalne koordinate vektora položaja čestice u trenutnoj konfiguraciji K , odnosno u referentnoj konfiguraciji

K_0 , [18]. U zavisnosti od toga koje koordinate uzimamo kao nezavisno promenljive imamo Lagranževu (J.L. Lagrange), odnosno Ojlerovu (L. Euler) interpretaciju kretanja. Ukoliko su nezavisno promenljive materijalne koordinate, onda imamo Lagranževu interpretaciju, a ako su nezavisno promenljive prostorne koordinate, onda imamo Ojlerovu interpretaciju kretanja.

Kvadrati elementa luka u početnoj i trenutnoj konfiguraciji su, respektivno

$$(1.1.5) \quad dS^2 = G_{kl} dX^k dX^l, \quad ds^2 = g_{kl} dx^k dx^l$$

gde su dX^k i dx^l orijentisani elementi luka u početnoj i trenutnoj konfiguraciji, a G_{kl} i g_{kl} metrički tenzori materijalnog, odnosno prostornog sistema koordinata.

Razlika kvadrata elementa luka u trenutnoj i početnoj konfiguraciji je

$$(1.1.6) \quad ds^2 - dS^2 = (g_{kl} - G_{kl}) dx^k dx^l = z^k dx^k dx^l$$

$$(1.1.7) \quad ds^2 - dS^2 = (G_{kl} - C_{kl}) dX^k dX^l = 2E_{kl} dX^k dX^l,$$

gde je $C_{kl} = G_{kl} X^k_{;K} X^l_{;L}$ Košijev ili prostorni tenzor deformacije, $C_{kl} = g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L}$ Grinov (Green) ili materijalni tenzor deformacije, a e_{kl} i E_{kl} su prostorni, odnosno materijalni tenzor relativne deformacije.

Može se pokazati da je u sistemu krivolinijskih koordinata veza između gradijenata deformacije i gradijenata vektora pomeranja oblika

$$(1.1.8) \quad x^k_{;L} = g^k_L + u^k_{;L}, \quad X^k_{;l} = g^k_l + u^k_{;l}$$

pa se tenzori relativne deformacije mogu izraziti u obliku

$$(1.1.9) \quad 2e_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} + g_{ij} u^i_{;k} u^j_{;l}$$

$$(1.1.10) \quad 2E_{kl} = u_{k,L} + u_{L,k} + G_{IJ} u^I_{;k} u^J_{;L}$$

Između ova dva tenzora se može uspostaviti veza oblika

$$(1.1.11) \quad e_{kl} = E_{kl} X^k_{;K} X^l_{;L}, \quad E_{kl} = e_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L}$$

Tenzori relativne deformacije e_{kl} i E_{kl} su mere deformacije kojima je izražena promena dužine kvadrata elementa luka pri deformaciji. Iz relacija (1.1.9) i (1.1.10) vidimo da su ovi tenzori deformacije funkcije prvih gradijenata deformacije, odnosno prvih gradijenata vektora pomeranja, pa zaključujemo da su ovim merama deformacije obuhvaćeni samo uticaji gradijenata vektora pomeranja prvog reda pri deformaciji.

U teoriji kontinuuma reda dva i, u skladu sa tim, u teoriji elastičnih materijala reda dva, se pretpostavlja da u ukupnoj deformaciji figurišu i članovi koji predstavljaju uticaje gradijenata deformacije, odnosno gradijenata vektora pomeranja, drugog reda. Mere deformacije kojima su izraženi ovi uticaji su tenzori deformacije oblika

$$(1.1.12) \quad D_{klm} = -D_{lkm} = C_{m[kl]} = \frac{1}{2} (u_{k,lm} - u_{l,km} + u_{r,ml} u^r_{;k} - u_{r,mk} u^r_{;l})$$

$$(1.1.13) \quad d_{\kappa em} = -d_{e\kappa m} = C_m[\kappa e] = \frac{1}{2} (u_{\kappa,em} - u_{e,\kappa m} + u_{r,me} u_{,\kappa}^r - u_{r,m\kappa} u_{,e}^r),$$

pri čemu je prvi od njih izražen u odnosu na materijalni sistem krivolinijskih koordinata, a drugi u odnosu na prostorni sistem krivolinijskih koordinata.

U slučaju kada su gradijenti vektora pomeranja infinitezimalne veličine, tenzori deformacije (1.1.9), (1.1.10), (1.1.12) i (1.1.13) su oblika

$$(1.1.14) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_{\kappa L} = \frac{1}{2} (u_{\kappa,L} + u_{L,\kappa}),$$

$$(1.1.15) \quad d_{ij\kappa} = \frac{1}{2} (u_{j,i\kappa} - u_{i,j\kappa}), \quad D_{\kappa LM} = \frac{1}{2} (u_{\kappa,LM} - u_{L, \kappa M}),$$

i može se lako pokazati da su $e_{\kappa e}$ i $E_{\kappa L}$, odnosno $d_{\kappa em}$ i $D_{\kappa LM}$ koordinate istog tenzora samo paralelno pomerenog iz tačke trenutne konfiguracije u tačku referentne konfiguracije.

Merama deformacije (1.1.15) izražene su promene lokalne elementarne krute rotacije pri deformaciji, [1].

S obzirom da ćemo ubuduće koristiti, zbog pogodnosti, Ojlerovu interpretaciju kretanja, navedimo sada još neke osobine tenzora $d_{ij\kappa}$. Navedimo, najpre, da je ovaj tenzor antisimetričan po prva dva indeksa. Zbog te njegove osobine možemo ga prikazati pomoću tenzora drugog reda \mathcal{A}_{κ}^l na sledeći način, [14],

$$(1.1.16) \quad d_{ij\kappa} = \epsilon_{ije} \mathcal{A}_{\kappa}^e,$$

odnosno tenzoru drugog reda \mathcal{A}_{κ}^l možemo korespondirati antisimetrični tenzor $d_{ij\kappa}$ trećeg reda jednoznačnom relacijom

$$(1.1.17) \quad \mathcal{A}_{\kappa}^l = \frac{1}{2} \epsilon^{lje} d_{ij\kappa},$$

pri čemu smo zagradom ovog oblika naznačili da je tenzor antisimetričan po prva dva indeksa. Veličine ϵ_{ije} i ϵ^{lje} su kovarijantni, odnosno kontravarijantni Ričijevi tenzori.

Koristeći sada izraz (1.1.15)₁ dobijamo

$$(1.1.18) \quad \omega_{\alpha}^{\ell} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\ell ij} u_{j,i\alpha} = \omega_{,\alpha}^{\ell}$$

gde je

$$(1.1.19) \quad \omega^{\ell} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\ell ij} u_{j,i} \quad \text{odnosno,} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u},$$

vektor infinitezimalne krute rotacije.

1.2. Lokalni oblici zakona balansa. Jednačine kretanja.

Granični uslovi.

Pretpostavljajući da na telo B deluju površinske sile T^i i M^j , definisane po jedinici površine δ , kao i zapreminske sile f^i i ℓ^j , definisane po jedinici zapremine V , iz poznatih globalnih oblika zakona balansa mase, količine kretanja, momenta količine kretanja i ukupne energije sistema, dobijaju se lokalni oblici zakona balansa, koje ćemo ovde samo navesti ne upuštajući se u detaljnija razmatranja, koja su dobro poznata i data u [6], kao i u [8].

Lokalni oblici ovih zakona su

$$(1.2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \quad (\text{balans mase})$$

$$(1.2.2) \quad t^{ji}_{,j} + \rho f^i = \rho \ddot{u}^i \quad (\text{balans količine kretanja})$$

$$(1.2.3) \quad t^{[ij]}_{,j} + \mu^{\alpha ij}_{,\alpha} + \rho \ell^j = 0 \quad (\text{balans momenta količine kretanja})$$

$$(1.2.4) \quad \rho \dot{\sigma} = t^{(ij)}_{,j} + \mu^{ij\alpha}_{,\alpha} + \rho w_{ij,\alpha} \quad (\text{balans energije})$$

gde je ρ gustina, $v^{\alpha} = \dot{x}^{\alpha}$ su kontravarijantne koordinate vektora brzine, t^{ij} tenzor napona, $t^{[ij]}$ antisimetrični deo tenzora napona, $\mu^{ij\alpha}$ tenzor naponskih spregova, f^i zapreminska sila, ℓ^j zapreminski spreg. Sa

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) = U_{(i,j)} \quad , \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i}) = U_{[i,j]}$$

smo označili tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti, respektivno, dok je sa $\bar{\sigma}$ označena specifična energija deformacije.

Lokalni oblik zakona balansa količine kretanja, (1.2.2), predstavlja prvi Košijev zakon kretanja, a lokalni oblik zakona balansa momenta količine kretanja, (1.2.3), predstavlja drugi Košijev zakon kretanja elastičnih materijala reda dva.

Lokalni oblik zakona balansa ukupne energije sistema, (1.2.4), predstavlja izraz za brzinu promene specifične energije deformacije elastičnih materijala reda dva, iz koga možemo odmah uočiti da samo simetrični deo tenzora napona i devijatorski deo tenzora naponskih spregova daju doprinos promeni specifične unutrašnje energije.

Primenom pravila elementarnog tetraedra u globalnim oblicima zakona balansa količine kretanja i momenta količine kretanja, dobijaju se granični uslovi u obliku

$$(1.2.5) \quad T^i = t^{ri} n_r \quad , \quad M^{ij} = M^{rij} n_r .$$

Veličina T^i je površinska sila ili napon, M^{ij} je površinski ili naponski spreg, a n_r je jedinični vektor spoljašnje normale granične površine \mathcal{S} .

1.3. Linearne konstitutivne jednačine

Iz jednačine balansa specifične energije deformacije za elastične materijale reda dva, oblika (1.2.4), dobijaju se, uobičajenim postupkom, [8], najpre, nelinearne konstitutivne jednačine za ovu klasu materijala. Njihovom linearizacijom u slučaju izotropnih elastičnih materijala reda dva, pri infinite-

zimalnim deformacijama, dobijaju se linearne konstitutivne jednačine oblika

$$(1.3.1) \quad t^{(ij)} = \lambda I_e g^{ij} + 2\mu e^{ij}, \quad I_e = g^{ke} e_{ke}$$

$$(1.3.2) \quad m^{ij} = \eta_1 \mathcal{E}^{ij} + \eta_2 \mathcal{H}^{ij},$$

pri čemu su tenzori deformacije e_{ij} i \mathcal{H}_{ij} oblika (1.1.14) i (1.1.17). Pod pojmom infinitezimalne deformacije podrazumevamo da su gradijenti deformacije, odnosno gradijenti vektora pomeranja male veličine.

Relacije (1.3.1) i (1.3.2) su konstitutivne relacije Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima, [2]. Njima je određena veza između simetričnog dela tenzora napona $t^{(ij)}$ i devijatorskog dela tenzora naponskih spregova m^{ij} i tenzora deformacije e_{ij} i \mathcal{H}_{ij} . Pri tome je

$$(1.3.3) \quad m^{ij} = \mu^{ij} - \frac{1}{3} I_\mu g^{ij}, \quad I_\mu = g^{ke} \mu_{ke},$$

gde je

$$(1.3.4) \quad \mu_e^k = \varepsilon_{ije} \mu^{ij^k},$$

tj. gde je antisimetričnom tenzoru trećeg reda μ^{ij^k} korespondiran tenzor drugog reda μ_e^k .

Neodređenost naponskih spregova nema uticaja u jednačinama kretanja (1.2.3), ali se o tome mora voditi računa pri formulaciji graničnih uslova.

Materijalne konstante λ i μ koje figurišu u jednačinama (1.3.1) su Laméove konstante (Lamé), dok su konstante η_1 i η_2 , koje figurišu u jednačinama (1.3.2), nove materijalne konstante kojima je izražen uticaj radijalne, odnosno transverzalne, krivine, kako je to pokazano u [2].

Pošto je specifična energija deformacije pozitivno definitna kvadratna forma, materijalne konstante koje figurišu u linearnim konstitutivnim jednačinama (1.3.1) i (1.3.2), moraju

zadovoljavati uslove oblika, [2],

$$(1.3.5) \quad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \eta_1 > 0, \quad -1 < \frac{\eta_2}{\eta_1} < 1.$$

II RAVNA DEFORMACIJA

Stanju ravne deformacije odgovara model veoma dugog cilindarskog tela koje je po svom omotaču opterećeno spoljašnjim površinskim silama i zapreminskim silama upravnim na osu štapa, pri čemu su ove sile nepromenljive u pravcu ose štapa. Na taj način se svi poprečni preseki nalaze u ravnopravnom položaju i njihova deformacija vezana je za ravan kojoj pripadaju. Pomeranja tačaka u pravcu ose štapa ne postoje, dok su pomeranja tačaka u ravni poprečnog preseka istovetna u svakom poprečnom preseku.

2.1. Osnovne jednačine

U stanju ravne deformacije koje je istovetno u svim tačkama tela koje leže na pravoj paralelnoj osi štapa, polje pomeranja određeno je, u odnosu na Dekartov sistem koordinata čija se koordinatna osa x^3 poklapa sa osom cilindra, koordinatama vektora pomeranja oblika

$$(2.1.1) \quad u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0$$

gde su $u_1 = u_x$, $u_2 = u_y$ i $u_3 = u_z$ koordinate vektora pomeranja u pravcu koordinatnih osa $x^1 = x$, $x^2 = y$ i $x^3 = z$.

U linearnoj teoriji, u problemu ravne deformacije, tenzori deformacije (1.1.14) i (1.1.18), izraženi preko gradijenata vektora pomeranja (2.1.1), su oblika, [1],

$$(2.1.2) \quad \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$(2.1.3) \quad \chi_{xz} = \frac{\partial w_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \chi_{yz} = \frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

Linearne konstitutivne jednačine za izotropne elastične materijale reda dva, odnosno, konstitutivne jednačine Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima (1.3.1) i (1.3.2), svode se na oblik

$$(2.1.4) \quad t_{xx} = \lambda I_e + 2\mu e_{xx}, \quad t_{yy} = \lambda I_e + 2\mu e_{yy}, \quad t_{xy} = t_{yx} = 2\mu e_{xy}$$

$$(2.1.5) \quad m_{xz} = \eta_1 \mathcal{K}_{xz}, \quad m_{yz} = \eta_1 \mathcal{K}_{yz}$$

iz koga vidimo da se u linearnim konstitutivnim jednačinama, u ovom slučaju, pojavljuje samo materijalna konstanta η_1 , koja karakteriše uticaj radijalne krivine. Ovaj rezultat je posledica geometrije prostora, pošto je u ravni, kao što je poznato, transverzalna krivina jednaka nuli, pa se i ne može očekivati da u konstitutivnim relacijama figuriše konstanta η_2 koja karakteriše uticaj transverzalne krivine.

Veličine \mathcal{K}_{xz} i \mathcal{K}_{yz} nazivaju se krivinama elementa krive δx , odnosno δy , [1], i obrnuto su proporcionalne intenzitetima komponentata poluprečnika krivine u pravcu ose x , odnosno ose y .

Iz jednačina (2.1.5) vidimo da su komponente naponskih spregova u ravni sa normalom \hat{z} u pravcu ose x , odnosno u pravcu ose y , proporcionalne odgovarajućim komponentama krivine. Uobičajeno je da se umesto konstante η_1 piše $4B$, gde je B moduo krivine ili savijanja, a faktor 4 je uveden zbog konvencije. U tom slučaju pišemo

$$(2.1.6) \quad m_{xz} = 4B \mathcal{K}_{xz}, \quad m_{yz} = 4B \mathcal{K}_{yz}.$$

Naponski spreg ima dimenziju momenta sprega po jedinici površine, odnosno dimenziju sile po jediničnoj dužini, a krivina je obrnuto proporcionalna dužini. Otuda sledi da materijalna konstanta B ima dimenziju sile.

Ako sada koordinate tenzora deformacije izrazimo preko koordinata tenzora napona, dobijamo linearne konstitutivne jednačine (2.1.4) i (2.1.5) u obliku

$$(2.1.7) \quad \epsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [t_{xx} - \nu(t_{xx} + t_{yy})], \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1+\nu}{E} (t_{xy} + t_{yx})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [t_{yy} - \nu(t_{xx} + t_{yy})],$$

$$(2.1.8) \quad \chi_{xz} = \frac{1}{4B} m_{xz}, \quad \chi_{yz} = \frac{1}{4B} m_{yz},$$

gde je E Jangov moduo, a ν Poasonov broj.

Problem koji ćemo razmatrati u našem radu je statički problem Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima, u odsustvu zapreminskih sila i zapreminskih spregova. U tom slučaju iz prvog i drugog Košijevog zakona kretanja, (1.2.2) i (1.2.3), dobijamo diferencijalne jednačine ravnoteže oblika

$$(2.1.9) \quad t_{,j}^i = 0 \quad (2.1.10) \quad t_{,j}^{[ij]} + \epsilon^{jil} m_{e,m}^k = 0,$$

pri čemu smo jednačinu (2.1.10) dobili iz (1.2.3), korišćenjem relacija (1.3.3) i (1.3.4).

Izražene u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata jednačine ravnoteže su

$$(2.1.11) \quad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$(2.1.12) \quad \frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} + t_{xy} - t_{yx} = 0.$$

Uslovi kompatibilnosti deformacija, odnosno, uslovi integriteta sistema diferencijalnih jednačina (2.1.2) i (2.1.3), izraženi u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata preko koordinata tenzora deformacije ϵ_{ij} i χ_{ij} ($i, j = 1, 2$), su oblika, [4],

$$(2.1.13) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$(2.1.14) \quad \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial x}$$

$$(2.1.15) \quad \chi_{xz} = \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \quad (2.1.16) \quad \chi_{yz} = \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y}.$$

Može se lako pokazati da su od ove četiri jednačine kompati-

bilnosti samo tri međusobno nezavisne.

U našem radu problem ćemo rešavati uvođenjem naponskih funkcija, pa je iz tog razloga potrebno izraziti uslove kompatibilnosti deformacija preko koordinata tenzora napona. S obzirom na (2.1.7), iz (2.1.13)–(2.1.16) dobijaju se uslovi kompatibilnosti deformacija izraženi preko koordinata tenzora napona i naponskih spregova u obliku

$$(2.1.17) \quad \frac{\partial^2 t_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_{yy}}{\partial x^2} - \nu \Delta (t_{xx} + t_{yy}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (t_{xy} + t_{yx}),$$

$$(2.1.18) \quad \frac{\partial m_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial m_{yz}}{\partial x},$$

$$(2.1.19) \quad m_{xz} = \mathcal{L}^2 \frac{\partial}{\partial x} (t_{xy} + t_{yx}) - 2\mathcal{L}^2 \frac{\partial}{\partial y} [t_{xx} - \nu (t_{xx} + t_{yy})],$$

$$(2.1.20) \quad m_{yz} = -\mathcal{L}^2 \frac{\partial}{\partial y} (t_{xy} + t_{yx}) + 2\mathcal{L}^2 \frac{\partial}{\partial x} [t_{yy} - \nu (t_{xx} + t_{yy})],$$

gde je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplasov diferencijalni operator, a

$$(2.1.21) \quad \mathcal{L}^2 = \frac{2(1+\nu)}{E} \mathcal{B}.$$

Materijalna konstanta \mathcal{L} ima dimenziju dužine i naziva se karakteristična dužina, [1]. Iz relacija (2.1.19) i (2.1.20) možemo videti da, u slučaju kada je $\mathcal{L} \neq 0$, velike promene napona mogu izazvati velike naponske spregove.

Ako pretpostavimo da je $\mathcal{L} = 0$, tj. ako pretpostavimo da se uticaj naponskih spregova, odnosno drugih gradijenata deformacije, može zanemariti, dobijamo osnovne jednačine istog oblika kao i u klasičnoj teoriji elastičnosti.

Jednačine ravnoteže (2.1.11) i (2.1.12), i uslovi kompatibilnosti deformacija (2.1.17)–(2.1.20), uz zadate granične us-

love, čine kompletan sistem jednačina za određivanje naponskog stanja u nekoj tački tela, odnosno za određivanje stanja deformacije i, saglasno tome, polja pomeranja.

2.2. Naponske funkcije

Mindlin u svome radu [4] pokazuje da jednačine ravnoteže (2.1.11) impliciraju egzistenciju dve funkcije u_1 i u_2 promenljivih x i y , tako da je

$$(2.2.1) \quad t_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad t_{yx} = -\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

$$(2.2.2) \quad t_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad t_{xy} = -\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

a da jednačina (2.1.18) implicira egzistenciju treće funkcije Ψ promenljivih x i y , tako da je

$$(2.2.3) \quad m_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad m_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Zamenom relacija (2.2.1), (2.2.2) i (2.2.3) u jednačinu ravnoteže (2.1.12) dobija se relacija

$$(2.2.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - u_2 \right) = 0,$$

koja opet implicira egzistenciju neke funkcije u promenljivih x i y , tako da je

$$(2.2.5) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} + u_1 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} - u_2 = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Iz relacija (2.2.1)-(2.2.5) sledi da se koordinate tenzora napona i naponskih spregova mogu izraziti u zavisnosti od dve funkcije U i Ψ promenljivih x i y , koje se nazivaju naponskim funkcijama, na sledeći način

$$(2.2.6) \quad \begin{aligned} t_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, & t_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \\ t_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, & t_{yx} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \\ m_{xz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}, & m_{yz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Iz uslova kompatibilnosti (2.1.17), s obzirom na (2.2.1) i (2.2.2), sledi da naponska funkcija U mora zadovoljavati diferencijalnu jednačinu oblika

$$(2.2.7) \quad \Delta \Delta U = 0,$$

odakle vidimo da naponska funkcija U zadovoljava istu diferencijalnu jednačinu kao i Erijeva funkcija napona u klasičnoj teoriji elastičnosti. Iz tog razloga se naponska funkcija $U(x,y)$ i u Mindlinovoj linearnoj teoriji elastičnosti sa naponskim spregovima često naziva Erijeva naponska funkcija.

Dalje, zamenom relacija (2.2.1), (2.2.2) i (2.2.3) u uslove kompatibilnosti (2.1.19) i (2.1.10) dobija se

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi) &= -2(1-\nu) \kappa^2 \frac{\partial}{\partial y} (\Delta U) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi) &= 2(1-\nu) \kappa^2 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta U), \end{aligned}$$

pa otuda sledi da funkcije $\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi$ i $2(1-\nu) \kappa^2 \Delta U$ moraju biti harmonijski konjugovane funkcije. Iz tog razloga relacije (2.2.8) nazivaju se Koši-Rimanove jednačine.

Iz uslova kompatibilnosti (2.1.18) sledi da naponska funkcija Ψ , funkcija naponskih spregova, mora zadovoljavati di-

ferencijalnu jednačinu oblika

$$(2.2.9) \quad \Delta(\Psi - c^2 \Delta \Psi) = 0.$$

Znači, u stanju ravne deformacije, u odsustvu zapreminskih sila i zapreminskih spregova, naponske funkcije $U(x, y)$ i $\Psi(x, y)$ moraju biti rešenja diferencijalnih jednačina (2.2.7) i (2.2.9) i moraju zadovoljavati Koši-Rimanove jednačine oblika (2.2.8)

III ELIPTIČNI SISTEM KOORDINATA. OBLIK DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. KOORDINATE TENZORA NAPONA I TENZORA NAPONSKIH SPREGOVA.

3.1. Eliptični sistem koordinata

Pošto je naš problem, problem ravne deformacije vezan za eliptičnu konturu, onda je pogodno razmatrati ga u eliptičnom sistemu koordinata.

Pogodno je, takodje, pri dobijanju izraza za oblik diferencijalnih jednačina i izraza za koordinate tenzora napona i naponskih spregova, koristiti koordinatne transformacije Dekartovih pravougljih koordinata u eliptične izražene preko funkcije kompleksne promenljive.

U kompleksnoj ravni $z = x + iy$, uvek je moguće uvesti eliptični sistem koordinata definisan relacijom

$$(3.1.1) \quad z = lch \zeta$$

gde je

$$(3.1.2) \quad \zeta = \mu + i\nu,$$

odnosno, u ravni xOy moguće je uvesti eliptični sistem koordinata definisan relacijama

$$(3.1.3) \quad x = lch\mu \cos \nu, \quad y = lsh\mu \sin \nu$$

gde je l međufokusno rastojanje.

Prva od relacija (3.1.3) je realni, a druga imaginarni deo relacije (3.1.1). Promenljive μ i ν nazivaju se eliptične koordinate, pri čemu jednačina

$$(3.1.4) \quad \mu = \text{const.}$$

predstavlja familiju konfokalnih elipsi, a jednačina

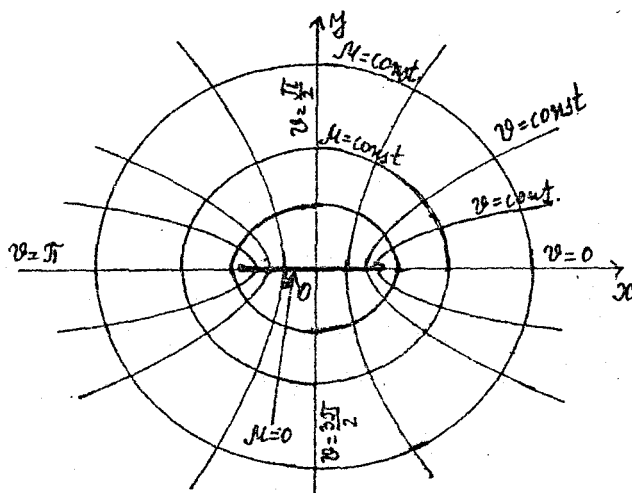
$$(3.1.5) \quad v = \text{const.}$$

familiju konfokalnih hiperbola.

Relacije inverzne relacijama (3.1.3) su oblika

$$(3.1.6) \quad \text{tgh} \mu \cdot \text{tgv} = \frac{y}{x}, \quad l^2 (\text{ch}^2 \mu \cos^2 v + \text{sh}^2 \mu \sin^2 v) = x^2 + y^2,$$

i zbog njihove složenosti nećemo ih koristiti u cilju dobijanja izraza za oblik diferencijalnih jednačina (2.2.7), (2.2.8) i (2.2.9), kao ni u cilju dobijanja odgovarajućih izraza za koordinate tenzora napona i tenzora naponskih spregova u eliptičnom sistemu koordinata.



sl. 1

Familije krivih $\mu = \text{const.}$ i $v = \text{const.}$ su međusobno ortogonalne. U slučaju eliptične konture $\mu = \text{const.}$ ugao v je promenljiv i varira od 0 do 2π . Za vrednosti $v = 0, \pi$ na konturi $\mu = \mu_0$ dobijamo

$$(3.1.7) \quad a = l \text{ch} \mu_0, \quad b = 0,$$

a za vrednosti $v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ na istoj konturi, dobijamo

$$(3.1.8) \quad a = 0, \quad b = l \text{sh} \mu_0,$$

gde su a i b veća, odnosno manja poluosa elipse.

Kada je $l = \text{const.}$, a $\mu \rightarrow 0$, tada eliptični cilindar degeneriše u ploču iste dužine, širine $2l$, tako da je

$$(3.1.9) \quad x = \pm l, \quad y = 0.$$

Kada $l \rightarrow 0$, a $\mu \rightarrow \infty$, konfokalne eliptične konture prelaze u koncentrične kružne konture, tako da

$$(3.1.10) \quad l \operatorname{ch} \mu \rightarrow l \operatorname{sh} \mu \rightarrow R,$$

gde je R poluprečnik kruga.

Kvadrat elementa luka u eliptičnom sistemu koordinata je

$$(3.1.11) \quad ds^2 = \frac{l^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu) d\mu^2 + \frac{l^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu) d\nu^2,$$

i nije teško videti da je ovaj sistem koordinata ortogonalan.

Ako uzmemo da je $\mu = x^1$, $\nu = x^2$, onda, s obzirom na izraz za kvadrat elementa luka u odnosu na neki krivolinijski sistem koordinata

$$(3.1.12) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

gde je g_{ij} metrički tenzor tog koordinatnog sistema, dobijamo, poredjenjem sa (3.1.11), koordinate metričkog tenzora eliptičnog sistema koordinata

$$(3.1.13) \quad g_{11} = g_{22} = \frac{l^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu), \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Promena elementa luka duž krive $\mu = \text{const.}$, s obzirom na izraz (3.1.11), je

$$(3.1.14) \quad ds_\nu = \frac{l\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu)} d\nu.$$

Rastojanje neke tačke $M(x, y)$ od koordinatnog početka Dekartovog pravouglog sistema koordinata O , označimo ga sa s , izraženo u odnosu na eliptični sistem koordinata je

$$(3.1.15) \quad s = \frac{l\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\operatorname{ch} 2\mu + \cos 2\nu)}.$$

Za dovoljno velike vrednosti μ , $\operatorname{ch} \mu \sim \operatorname{sh} \mu \sim \frac{1}{2} e^\mu$, tako da za konstantnu vrednost l , imamo, s obzirom na (3.1.15)

$$(3.1.16) \quad ds_\nu = s d\nu.$$

3.2. Oblik diferencijalnih jednačina u eliptičnom sistemu koordinata

Oblik diferencijalnih jednačina (2.2.7) i (2.2.9), koje moraju zadovoljavati naponske funkcije, zavisi od oblika Laplasovog operatora, odnosno, od oblika dvostrukog Laplasovog operatora, u sistemu koordinata u odnosu na koji izražavamo naponske funkcije.

Ako naponske funkcije izrazimo kao funkcije kompleksnih promenljivih ζ i $\bar{\zeta}$, gde je ζ definisano relacijom (3.1.1), a $\bar{\zeta}$ definisano relacijom

$$(3.2.1) \quad \bar{\zeta} = lch\bar{y}, \quad (\bar{\zeta} = x - iy)$$

pri čemu je

$$(3.2.2) \quad \bar{\zeta} = \mu - i\nu,$$

onda je Laplasov operator u eliptičnom sistemu koordinata oblika

$$(3.2.3) \quad \Delta = \frac{4}{l^2 sh\zeta sh\bar{\zeta}} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}.$$

Ako naponske funkcije izrazimo kao funkcije promenljivih μ i ν , onda one zadovoljavaju diferencijalne jednačine

$$(3.2.4) \quad \Delta \Delta U = 0 \quad \text{i} \quad (3.2.5) \quad \Delta(\Psi - c^2 \Delta \Psi) = 0,$$

u kojima je Laplasov operator oblika

$$(3.2.6) \quad \Delta = \frac{1}{\frac{l^2}{2}(ch 2\mu - \cos 2\nu)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \right).$$

Polazeći od Koši-Rimanovih jednačina (2.2.8), i izražavajući ih preko funkcije kompleksne promenljive ζ i $\bar{\zeta}$, dobijamo

$$(3.2.7)_1 \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (\Psi - c^2 \Delta \Psi) = -2(1-\nu)c^2 i \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Delta U), \quad \left(\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \right)$$

$$(3.2.7)_2 \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi) = 2(1-\nu)\kappa^2 i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\Delta U);$$

odakle, s obzirom na (3.1.1) i (3.2.1), i pretpostavljajući da je $U=U(\zeta, \bar{\zeta})$ i $\Psi=\Psi(\zeta, \bar{\zeta})$, dobijamo Koši-Rimanove jednačine u eliptičnom sistemu koordinata, oblika

$$(3.2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi) &= -2(1-\nu)\kappa^2 i \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Delta U) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi) &= 2(1-\nu)\kappa^2 i \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (\Delta U). \end{aligned}$$

Izražavajući, sada, naponske funkcije u obliku $U=U(\mu, \nu)$ i $\Psi=\Psi(\mu, \nu)$, i koristeći relacije (3.1.2) i (3.2.2), dobijamo relacije

$$(3.2.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} (\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi) &= -2(1-\nu)\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta U) \\ \frac{\partial}{\partial \nu} (\Psi - \kappa^2 \Delta \Psi) &= 2(1-\nu)\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \mu} (\Delta U), \end{aligned}$$

koje predstavljaju Koši-Rimanove jednačine izražene, također, u odnosu na eliptični sistem koordinata.

Diferencijalna jednačina (3.2.4) ima isti oblik i u klasičnoj teoriji elastičnosti. Diferencijalna jednačina (3.2.5), kao i Koši-Rimanove jednačine (3.2.8) i (3.2.9) dobijene su, u ovom obliku prvi put u našem radu, [19].

3.3. Koordinate tenzora napona i tenzora naponskih spre-gova u eliptičnom sistemu koordinata

Polazeći od dobro poznatih zakona transformacije kovari-

jantnih tenzora pri transformaciji koordinata, [14], dobijamo, u našem slučaju

$$(3.3.1) \quad t_{ij} = t_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}, \quad m_{iz} = m_{\alpha z} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}, \quad (i, \alpha = 1, 2)$$

gde su $y^1 = x$ i $y^2 = y$ Dekartove pravouglo koordinata, a $x^1 = \mu$ i $x^2 = \nu$ eliptične koordinate.

Dekartove koordinate tenzora napona i tenzora naponskih spregova možemo, koristeći relacije (2.2.6), s obzirom na (3.1.1 i (3.2.1), izraziti preko parcijalnih izvoda naponskih funkcija $U(\zeta, \bar{\zeta})$ i $\Psi(\zeta, \bar{\zeta})$ po promenljivim ζ i $\bar{\zeta}$, tako da zamenom u (3.3.1) dobijamo kovarijantne koordinate tenzora napona i naponskih spregova u obliku

$$(3.3.2) \quad \begin{aligned} t_{\mu\mu} &= -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}}\right) + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - \\ &\quad - i \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right) + i \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\zeta}}\right), \\ t_{\nu\nu} &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}}\right) + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + \\ &\quad + i \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right) - i \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\zeta}}\right), \\ t_{\mu\nu} &= -i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) + i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\zeta}}\right) - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}, \\ t_{\nu\mu} &= -i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) + i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{ch\zeta}{sh\zeta} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\zeta}}\right) + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}, \\ m_{\mu z} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\zeta}}, \quad m_{\nu z} = i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\zeta}}\right). \end{aligned}$$

Dalje, koristeći (3.1.2) i (3.2.2), dobijamo

$$\begin{aligned}
 t_{\mu\mu} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} + \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu \partial \nu} + \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}, \\
 t_{\nu\nu} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} - \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu \partial \nu} - \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} - \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}, \\
 t_{\mu\nu} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial \mu \partial \nu} + \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \nu^2} - \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}, \\
 t_{\nu\mu} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial \mu \partial \nu} + \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2} - \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \frac{\operatorname{sin} 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{cosh} 2\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}, \\
 m_{\mu z} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mu}, \quad m_{\nu z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.3}$$

Relacije (3.3.3) predstavljaju izraze za kovarijantne koordinate tenzora napona i tenzora naponskih spregova u eliptičnom sistemu koordinata, izražene preko parcijalnih izvoda naponskih funkcija $U(\mu, \nu)$ i $\Psi(\mu, \nu)$.

Fizičke koordinate tenzora napona i tenzora naponskih spregova, izražene u odnosu na eliptični sistem koordinata, dobijamo iz poznate veze između fizičkih koordinata nekog tenzora i njegovih kovarijantnih koordinata u nekom ortogonalnom krivolinijskom sistemu koordinata, [14]. U našem slučaju te veze su oblika

$$\begin{aligned}
 t_{\langle \mu \mu \rangle} &= \frac{t_{\mu\mu}}{g_{\mu\mu}}, \quad t_{\langle \nu \nu \rangle} = \frac{t_{\nu\nu}}{g_{\nu\nu}}, \quad t_{\langle \mu \nu \rangle} = \frac{t_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}}}, \quad t_{\langle \nu \mu \rangle} = \frac{t_{\nu\mu}}{\sqrt{g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}}}, \\
 m_{\langle \mu z \rangle} &= \frac{m_{\mu z}}{\sqrt{g_{\mu\mu}}}, \quad m_{\langle \nu z \rangle} = \frac{m_{\nu z}}{\sqrt{g_{\nu\nu}}},
 \end{aligned}
 \tag{3.3.4}$$

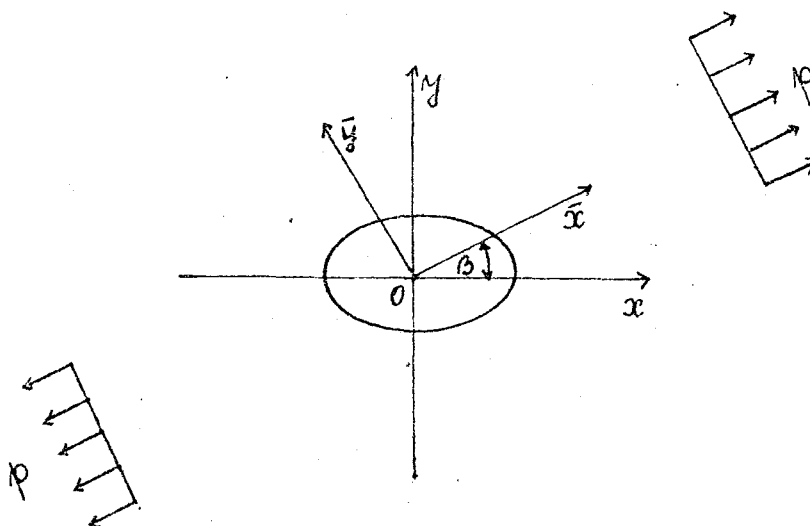
gde su $g_{\mu\mu}$ i $g_{\nu\nu}$ dati relacijama (3.1.13). Uglastom zagradom je naglašeno da se radi o fizičkim koordinatama.

Izrazi (3.3.4) su, u slučaju kada je $\mathcal{L} = 0$, odnosno u slučaju kada zanemarimo uticaj naponskih spregova, identični su sa odgovarajućim izrazima u klasičnoj teoriji elastičnosti.

IV RAVNOMERNO ZATEZANJE BESKONAČNE OBLASTI SA ELIPTIČNIM OTVOROM

4.1. Granični uslovi

Posmatramo beskonačnu oblast oslabljenu eliptičnim otvorom sa većom osom duž ose x Dekartovog sistema koordinata, ravnomerno zategnutu silom intenziteta p , pri čemu sila zatezanja zaklapa sa osom x ugao β .



sl. 2

Ovde smo uveli pojam beskonačne oblasti oslabljene otvorom. Ovaj pojam vezan je za fizičku činjenicu da se u tačkama dovoljno blizu otvora, pri nekom naprezanju oblasti, javljaju veliki cirkularni naponi, pa samim tim umanjuju gornju granicu intenziteta sile naprezanja, u našem slučaju sile ravnomernog zatezanja, u odnosu na tu istu granicu u slučaju kada u beskonačnoj oblasti nema otvora. Drugim rečima, ako u beskonačnoj oblasti postoji krivolinijski otvor, onda se uticaj otvora ogleda u slabljenju mogućnosti materijala u pogledu vrednosti dozvoljenog opterećenja.

Pošto smo pretpostavili da u beskonačno udaljenim tačkama, tj. u tačkama čije je rastojanje od otvora mnogo veće od dimenzija otvora, deluje samo sila zatezanja p , onda se u tim tačkama ne može očekivati uticaj naponskih spregova na raspodelu napona, tj. u tim tačkama je naponsko stanje karakterisano simetričnim tenzorom napona. Iz tog razloga, granične uslove u beskonačno udaljenim tačkama, formulisaćemo na sledeći način: U beskonačno udaljenim tačkama naponsko stanje, izraženo u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata $\bar{x}O\bar{y}$, određeno je koordinatama tenzora napona i koordinatama tenzora naponskih spregova oblika

$$(4.1.1) \quad \bar{t}_{\bar{x}\bar{x}} = p, \quad \bar{t}_{\bar{y}\bar{y}} = 0, \quad \bar{t}_{\bar{x}\bar{y}} = \bar{t}_{\bar{y}\bar{x}} = 0,$$

$$(4.1.2) \quad \bar{m}_{\bar{x}z} = 0, \quad \bar{m}_{\bar{y}z} = 0,$$

pri čemu koordinatna osa \bar{x} ima pravac sile zatezanja.

U odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata xOy , čija osa x zaklapa ugao β sa osom \bar{x} Dekartovog pravouglog sistema koordinata $\bar{x}O\bar{y}$, naponsko stanje u beskonačno udaljenim tačkama određeno je koordinatama tenzora napona i naponskih spregova oblika

$$(4.1.3) \quad t_{xx} = p \cos^2 \beta, \quad t_{yy} = p \sin^2 \beta, \quad t_{xy} = t_{yx} = p \sin \beta \cos \beta,$$

$$(4.1.4) \quad m_{xz} = 0, \quad m_{yz} = 0,$$

koji je dobijen korišćenjem poznatih izraza za transformaciju koordinata pri rotaciji koordinatnog sistema, oblika

$$(4.1.5) \quad \begin{aligned} x &= \bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta \\ y &= \bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta \end{aligned}$$

i relacije (3.3.1).

Iz relacija (4.1.3) i (4.1.4) možemo uočiti odmah sledeće veze

$$(4.1.6)_1 \quad t_{xx} + t_{yy} = \bar{t}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{t}_{\bar{y}\bar{y}} = p, \quad t_{yy} - t_{xx} = -p \cos 2\beta, \quad 2t_{xy} = p \sin 2\beta,$$

$$(4.1.6)_2 \quad M_{xz} = 0, \quad M_{yz} = 0,$$

koje predstavljaju sistem od pet jednačina za određivanje pet nepoznatih veličina t_{xx} , t_{yy} , t_{xy} , M_{xz} i M_{yz} . Jasno je da su koordinate tenzora napona i naponskih spregova oblika (4.1.3) i (4.1.4) rešenja sistema jednačina (4.1.6). Prve tri relacije (4.1.6) se dobijaju u ovom obliku u klasičnoj teoriji elastičnosti pri razmatranju ovog problema u kompleksnoj ravni $z = x + iy$. U radu [15] granični uslovi (4.1.6) formulisani su u opštijem obliku, za bilo koju koordinatnu transformaciju nekog krivolinijskog sistema koordinata, pri čemu je problem takodje razmatran u kompleksnoj ravni. Lako je pokazati da se u slučaju koordinatne transformacije (4.1.5), tako formulisani granični uslovi svode na oblik (4.1.6), odnosno koordinate tenzora napona i naponskih spregova su oblika (4.1.3) i (4.1.4).

Mi smo ovde odstupili od uobičajenog postupka pri dobijanju oblika relacija (4.1.3), (4.1.4), odnosno (4.1.6), koje predstavljaju granične uslove u beskonačnosti izražene preko Dekartovih koordinata tenzora napona i naponskih spregova, jer nam se činilo pogodnijim da koristimo već date relacije (3.3.1).

U eliptičnom sistemu koordinata, definisanom relacijama (3.1.3), dobijamo, korišćenjem relacija (3.3.1) i s obzirom na (4.1.3), kovarijantne koordinate tenzora napona i naponskih spregova u obliku

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} t_{\mu\mu} &= \frac{\rho l^2}{4} \left[(ch_2\mu - \cos 2\nu) + \cos 2\beta (ch_2\mu \cos 2\nu - 1) + \sin 2\beta sh_2\mu \sin 2\nu \right], \\ t_{\nu\nu} &= \frac{\rho l^2}{4} \left[(ch_2\mu - \cos 2\nu) - \cos 2\beta (ch_2\mu \cos 2\nu - 1) - \sin 2\beta sh_2\mu \sin 2\nu \right], \end{aligned}$$

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} &= -\frac{\rho l^2}{4} \left[\cos 2\beta sh_2\mu \sin 2\nu - \sin 2\beta (ch_2\mu \cos 2\nu - 1) \right], \\ M_{\mu z} &= 0, \quad M_{\nu z} = 0. \end{aligned}$$

Fizičke koordinate tenzora napona i naponskih spregova, s

obzirom na (3.3.4), su

$$\begin{aligned}
 t_{\langle \mu \mu \rangle} &= \frac{p}{2(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu)} \left[(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu) + \cos 2\beta (\operatorname{ch} 2\mu \cos 2\nu - 1) + \sin 2\beta \operatorname{sh} 2\mu \sin 2\nu \right], \\
 t_{\langle \nu \nu \rangle} &= \frac{p}{2(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu)} \left[(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu) - \cos 2\beta (\operatorname{ch} 2\mu \cos 2\nu - 1) - \sin 2\beta \operatorname{sh} 2\mu \sin 2\nu \right], \\
 t_{\langle \mu \nu \rangle} &= t_{\langle \nu \mu \rangle} = -\frac{p}{2(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu)} \left[\cos 2\beta \operatorname{sh} 2\mu \sin 2\nu - \sin 2\beta (\operatorname{ch} 2\mu \cos 2\nu - 1) \right], \\
 m_{\langle \mu z \rangle} &= 0, \quad m_{\langle \nu z \rangle} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.9}$$

Koristeći navedene osobine eliptičnih koordinata date u (3.1), dobijamo da u beskonačno udaljenim tačkama, tj. u graničnom procesu kada $\mu \rightarrow \infty$, koordinate tenzora napona i naponskih spregova (4.1.9) teže konačnim vrednostima

$$\begin{aligned}
 t_{\langle \mu \mu \rangle} &\rightarrow \frac{p}{2} (1 + \cos 2\beta + \sin 2\beta), & m_{\langle \mu z \rangle} &\rightarrow 0, \\
 t_{\langle \nu \nu \rangle} &\rightarrow \frac{p}{2} (1 - \cos 2\beta - \sin 2\beta), & m_{\langle \nu z \rangle} &\rightarrow 0, \\
 t_{\langle \mu \nu \rangle}, t_{\langle \nu \mu \rangle} &\rightarrow -\frac{p}{2} (\cos 2\beta - \sin 2\beta),
 \end{aligned}
 \tag{4.1.10}$$

Iz tog razloga granične uslove u beskonačno udaljenim tačkama, izražene preko eliptičnih koordinata tenzora napona i tenzora naponskih spregova formulišemo na sledeći način: Kada $\mu \rightarrow \infty$, naponsko stanje u beskonačnoj oblasti sa eliptičnim otvorom pri proizvoljnom jednoosnom zatezanju konstantnom silom p , određeno je koordinatama tenzora napona i naponskih spregova oblika

$$\begin{aligned}
 t_{\langle \mu \mu \rangle} &= \frac{p}{2} (1 + \cos 2\beta + \sin 2\beta), & m_{\langle \mu z \rangle} &= 0, \\
 t_{\langle \nu \nu \rangle} &= \frac{p}{2} (1 - \cos 2\beta - \sin 2\beta), & m_{\langle \nu z \rangle} &= 0, \\
 t_{\langle \mu \nu \rangle} &= t_{\langle \nu \mu \rangle} = -\frac{p}{2} (\cos 2\beta - \sin 2\beta),
 \end{aligned}
 \tag{4.1.11}$$

pri čemu su $t_{\langle \mu \mu \rangle}$, $t_{\langle \nu \nu \rangle}$, $t_{\langle \mu \nu \rangle}$, $t_{\langle \nu \mu \rangle}$, $m_{\langle \mu z \rangle}$ i $m_{\langle \nu z \rangle}$ fizičke koordinate ovih tenzora u eliptičnom sistemu koordinata.

Granične uslove (4.1.11) možemo napisati i u ekvivalentnom obliku, tj. možemo ih formulirati na sledeći način: Kada $\mu \rightarrow \infty$, koordinate tenzora napona i naponskih spregova (4.1.11), moraju biti rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned}
 (4.1.12) \quad & t_{\langle \mu \mu \rangle} + t_{\langle \nu \nu \rangle} = p, \\
 & t_{\langle \nu \nu \rangle} - t_{\langle \mu \mu \rangle} = -p (\cos 2\beta + 8 \sin 2\beta), \\
 & 2 t_{\langle \mu \nu \rangle}^s = -p (\cos 2\beta - 8 \sin 2\beta), \\
 & 2 t_{\langle \mu \nu \rangle}^a = 0, \\
 & m_{\langle \mu \mu \rangle} = 0, \quad m_{\langle \nu \nu \rangle} = 0,
 \end{aligned}$$

gde smo sa $t_{\langle \mu \nu \rangle}^s$ označili simetrični, a sa $t_{\langle \mu \nu \rangle}^a$ antisimetrični deo tenzora napona $t_{\langle \mu \nu \rangle}$. Prve tri relacije (4.1.12) su uobičajene relacije koje se dobijaju u klasičnoj teoriji elastičnosti pri razmatranju ovog problema. Može se, takodje, pokazati da se odgovarajuće relacije izvedene u [15] svode, u specijalnom slučaju, na relacije (4.1.12).

U cilju dobijanja graničnih uslova na konturi, poći ćemo od pretpostavke da je kontura otvora neopterećena spoljnjim silama. U tom slučaju iz graničnih uslova (1.2.5)₁ i graničnih uslova (1.2.5)₂, pri čemu uslove (1.2.5)₂ možemo napisati u obliku

$$(4.1.13) \quad m^{kl} n_k = M^l$$

gde smo u skladu sa (1.3.3) i (1.3.4) antisimetričnom tenzoru naponskog sprega M^{ij} jednoznačno korespondirali vektor M^l relacijom

$$M^l = \frac{1}{2} \epsilon^{lij} M_{ij},$$

dobijamo da za $\mu = \mu_0$ moraju biti zadovoljene sledeće relacije

$$\begin{aligned}
 (4.1.14) \quad & t_{\mu \mu} n^\mu + t_{\nu \mu} n^\nu = 0, \\
 & t_{\mu \nu} n^\mu + t_{\nu \nu} n^\nu = 0, \\
 & m_{\mu z} n^\mu + m_{\nu z} n^\nu = 0.
 \end{aligned}$$

U ovim relacijama smo sa n^u i n^v označili kontravarijantne koordinate jediničnog vektora spoljašnje normale eliptične konture $\mu = \mu_0$, izražene u odnosu na eliptični sistem koordinata. S obzirom da je samo koordinata n^u različita od nule, iz (4.1.14) sledi da onda mora biti

$$(4.1.15) \quad t_{\mu\mu} n^u = 0, \quad t_{\mu\nu} n^u = 0, \quad m_{\mu z} n^u = 0,$$

a odavde, s obzirom na to da je n^u različito od nule, sledi da su granični uslovi na konturi zadovoljeni ako je

$$t_{\mu\mu} = 0, \quad t_{\mu\nu} = 0, \quad m_{\mu z} = 0,$$

odnosno, ako je

$$(4.1.16) \quad t_{\langle\mu\mu\rangle} = 0, \quad t_{\langle\mu\nu\rangle} = 0, \quad m_{\langle\mu z\rangle} = 0.$$

Dakle, u slučaju kada je eliptična kontura neopterećena spoljašnjim silama, granične uslove na konturi formulišemo na sledeći način: Za $\mu = \mu_0$, mora biti

$$(4.1.17) \quad t_{\langle\mu\mu\rangle} = 0, \quad t_{\langle\mu\nu\rangle} = 0, \quad m_{\langle\mu z\rangle} = 0.$$

Jednačine (4.1.12) i (4.1.17) predstavljaju granične uslove našeg problema, koji uz diferencijalne jednačine (3.2.4) i (3.2.5), i Koši-Rimanove jednačine (3.2.9), predstavljaju kompletan sistem jednačina za određivanje naponskih funkcija $U(\mu, \nu)$ i $\Psi(\mu, \nu)$.

4.2. Oblik naponskih funkcija

U našem slučaju komponentalni naponi i naponski spregovi moraju biti jednoznačne funkcije položaja i, s obzirom na simetriju problema, periodične po promenljivoj ν sa periodom Π . Otuda sledi da i naponske funkcije moraju biti jednoznačne.

funkcije položaja, kao i da moraju biti periodične funkcije po promenljivoj ϑ sa periodom π .

Naponska funkcija $U(\mu, \vartheta)$ koja zadovoljava biharmonijsku diferencijalnu jednačinu (3.2.4) mora biti biharmonijska funkcija, pa sledi da njen laplasijan mora biti harmonijska funkcija.

Dalje, iz relacija (3.3.3), (3.3.4)_{1,2} i (3.2.6) sledi da je

$$(4.2.1) \quad t_{(\mu, \vartheta)} + t_{(\vartheta, \vartheta)} = \Delta U.$$

Iz ove relacije i graničnog uslova (4.1.12)₁ sledi da je, kada

$$(4.2.2) \quad \Delta U = p.$$

Označimo sada, formalno, $\Delta U = \Psi$. Iz (3.2.4) sledi da je harmonijska funkcija, tj. da zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu

$$(4.2.3) \quad \Delta^2 \Psi = 0.$$

S obzirom na (4.2.2), kada $\mu \rightarrow \infty$, dobijamo

$$(4.2.4) \quad \Psi = p.$$

Granični uslov (4.2.4) ograničava skup harmonijskih funkcija jednoznačnih i periodičnih po promenljivoj ϑ sa periodom π , koje mogu biti rešenja diferencijalne jednačine (4.2.3). Nije teško pokazati da, s obzirom na uvedena ograničenja, opšte rešenje diferencijalne jednačine (4.2.3), mora biti oblika

$$(4.2.5) \quad \Psi(\mu, \vartheta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\vartheta$$

Sada možemo, imajući u vidu formalnu zamenu koju smo uveli, pisati

$$(4.2.6) \quad \Delta U(\mu, \vartheta) = A + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\vartheta.$$

Diferencijalna jednačina (4.2.6) je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda. Njeno opšte rešenje ćemo potražiti u obliku zbira partikularnog rešenja U_p i rešenja homogenog dela ove jednačine, U_h , koje je rešenje Laplasove diferencijalne jednačine

$$(4.2.7) \quad \Delta U_h = 0,$$

tako da je opšte rešenje ove jednačine oblika

$$(4.2.8) \quad U(\mu, \nu) = U_p(\mu, \nu) + U_h(\mu, \nu).$$

Iz (4.2.6), imajući u vidu (3.2.6), dobijamo

$$(4.2.9) \quad \frac{\partial^2 U_p}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu^2} = \frac{A\ell^2}{2} (ch_2\mu - \cos 2\nu) + \frac{\ell^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} e^{-2n\mu} (ch_2\mu - \cos 2\nu) \cos 2n\nu + \\ + \frac{\ell^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e^{-2n\mu} (ch_2\mu - \cos 2\nu) \sin 2n\nu,$$

odnosno, dobijamo

$$(4.2.10) \quad \frac{\partial^2 U_p}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 U_p}{\partial \nu^2} = \frac{A\ell^2}{2} (ch_2\mu - \cos 2\nu) + \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left\{ e^{-2n\mu} \cos(2n-2)\nu + \left[e^{\frac{(2n-2)\mu}{2}} + e^{\frac{-(2n+2)\mu}{2}} \right] \cos 2n\nu + \right. \\ \left. + e^{-2n\mu} \cos(2n+2)\nu \right\} + \\ + \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left\{ -e^{-2n\mu} \sin(2n-2)\nu + \left[e^{\frac{-(2n-2)\mu}{2}} - e^{\frac{-(2n+2)\mu}{2}} \right] \sin 2n\nu + e^{-2n\mu} \sin(2n+2)\nu \right\},$$

odakle, primenjujući postupak parcijalne integracije, dobijamo partikularni integral diferencijalne jednačine (4.2.6), U_p , u obliku

$$(4.2.11) \quad U_p(\mu, \nu) = \frac{A\ell^2}{8} (ch_2\mu + \cos 2\nu) + \\ + \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left\{ \frac{e^{-2n\mu}}{2n-1} \cos(2n-2)\nu + \left[\frac{-e^{-(2n-2)\mu}}{2n-1} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{2n+1} \right] \cos 2n\nu + \frac{e^{-2n\mu}}{2n+1} \cos(2n+2)\nu \right\} + \\ + \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left\{ \frac{-e^{-2n\mu}}{2n-1} \sin(2n-2)\nu + \left[\frac{-e^{-(2n-2)\mu}}{2n-1} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{2n+1} \right] \sin 2n\nu + \frac{e^{-2n\mu}}{2n+1} \sin(2n+2)\nu \right\}.$$

Rešenje diferencijalne jednačine (4.2.7) u eliptičnom sistemu koordinata uzimamo, s obzirom na uslov periodičnosti po

promenljivoj ϑ , kao i na veličinu perioda, i imajući u vidu granične uslove (4.1.11), u obliku

$$(4.2.12) \quad U_R(\mu, \vartheta) = \frac{C\ell^2}{4}\mu + \frac{\ell^2}{4}e^{2\mu}(d_0 \cos 2\vartheta + e_0 \sin 2\vartheta) + \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\mu} (d_{2n} \cos 2n\vartheta + e_{2n} \sin 2n\vartheta) + \text{const.}$$

Iz (4.2.8), (4.2.11) i (4.2.12) sledi da je opšte rešenje diferencijalne jednačine (4.2.6)

$$(4.2.13) \quad \begin{aligned} U(\mu, \vartheta) = & \frac{A\ell^2}{8}(\cosh 2\mu + \cos 2\vartheta) + \frac{C\ell^2}{4}\mu + \frac{\ell^2}{4} [d_0 e^{2\mu} \cos 2\vartheta + e_0 e^{2\mu} \sin 2\vartheta] + \\ & + \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [d_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\vartheta + e_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\vartheta] + \\ & + \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left\{ \frac{-e^{-2n\mu}}{2n-1} \cos(2n-2)\vartheta + \left[\frac{-e^{-(2n-2)\mu}}{2n-1} + \frac{e^{-(2n-2)\mu}}{2n+1} \right] \cos 2n\vartheta + \frac{e^{-2n\mu}}{2n+1} \cos(2n+2)\vartheta \right\} + \\ & + a_{2n} \left\{ \frac{-e^{-2n\mu}}{2n-1} \sin(2n-2)\vartheta + \left[\frac{-e^{-(2n-2)\mu}}{2n-1} + \frac{e^{-(2n-2)\mu}}{2n+1} \right] \sin 2n\vartheta + \frac{e^{-2n\mu}}{2n+1} \sin(2n+2)\vartheta \right\}. \end{aligned}$$

Naponska funkcija $\Psi(\mu, \vartheta)$, ili funkcija naponskih spregova, koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (3.2.5), mora, takođe, biti jednoznačna funkcija položaja i mora zadovoljavati isti uslov periodičnosti po promenljivoj ϑ kao i naponska funkcija $U(\mu, \vartheta)$.

Dalje, iz graničnih uslova (4.1.11)_{3,4,5}, odnosno (4.1.12)_{4,5} i (4.1.12)₆, sledi da funkcija $\Psi(\mu, \vartheta)$, kao i njeni izvodi, mora težiti nuli kada $\mu \rightarrow \infty$.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (3.2.5) tražićemo u obliku zbira partikularnog rešenja Ψ_p i rešenja modifikovane Helmholtcove jednačine

$$(4.2.14) \quad \Psi_1 - \mathcal{L}^2 \Delta \Psi_1 = 0,$$

pri čemu je partikularno rešenje harmonijska funkcija koja, kako smo već ranije naglasili, zadovoljava Koši-Rimanove uslove (3.2.9), tako da je

$$(4.2.15) \quad \Psi(\mu, \vartheta) = \Psi_p(\mu, \vartheta) + \Psi_1(\mu, \vartheta).$$

Polazeći od jednačina (3.2.9), i uzimajući u obzir (4.2.6), dobijamo partikularno rešenje funkcije naponskih spregova u obliku

$$(4.2.16) \quad \Psi_p(\mu, \nu) = -\theta \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\nu + \theta \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\nu + \text{const.}$$

gde je

$$(4.2.17) \quad \theta = 2(1-\nu)c^2;$$

iz koga vidimo da je partikularno rešenje jednoznačna funkcija položaja, periodična po promenljivoj ν , sa periodom π , koja, kao i njeni prvi izvodi, teži nuli kada $\mu \rightarrow \infty$.

Diferencijalnu jednačinu (4.2.14) možemo, s obzirom na (3.2.6), napisati u obliku

$$(4.2.18) \quad \frac{\partial^2 \Psi_1(\mu, \nu)}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1(\mu, \nu)}{\partial \nu^2} - \frac{\ell^2}{c^2} (\text{ch}^2 \mu - \cos^2 \nu) \Psi_1(\mu, \nu) = 0,$$

iz koga, pretpostavljajući da se funkcija $\Psi_1(\mu, \nu)$ može napisati kao proizvod dve funkcije

$$(4.2.19) \quad \Psi_1(\mu, \nu) = M(\mu) T(\nu),$$

dobijamo, razdvajanjem promenljivih, dve diferencijalne jednačine oblika

$$(4.2.20) \quad \frac{d^2 T(\nu)}{d\nu^2} + (a + 2q \cos 2\nu) T(\nu) = 0,$$

$$(4.2.21) \quad \frac{d^2 M(\mu)}{d\mu^2} - (a + 2q \text{ch}^2 \mu) M(\mu) = 0,$$

gde je

$$(4.2.22) \quad q = \frac{\ell^2}{4c^2}.$$

Jednačina (4.2.20) je Matjeova diferencijalna jednačina sa q negativno, a jednačina (4.2.21) je modifikovana Matjeova

jednačina za q negativno.

Rešenja diferencijalne jednačine (4.2.20) su Matjeove peri-
odične funkcije za q negativno. U našem slučaju one moraju
imati period π , pa iz skupa Matjeovih periodičnih funkcija
izdvajamo one koje imaju tu osobinu. To su Matjeove funkcije
oblika, [12],

$$(4.2.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{2k}(v, q) &= (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n}^{(2k)} \cos 2n v, & k=0, 1, 2, \dots \\ \mathcal{S}_{2k}(v, q) &= (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_{2n}^{(2k)} \sin 2n v, & k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

koje, u slučaju kada je $q=0$, prelaze u trigonometrijske funkci-
je $\cos 2kv$, $\sin 2kv$.

Svako od ovih funkcija odgovara njen karakteristični broj,
ili konstanta razdvajanja, pri čemu je uobičajeno da se karak-
teristični broj Matjeovih funkcija tipa \mathcal{L}_{2k} označava sa \bar{a}_{2k} ,
a karakteristični broj Matjeovih funkcija tipa \mathcal{S}_{2k} sa \bar{b}_{2k} .

U cilju jasnijeg sagledavanja mogućnosti primene Matjeovih
funkcija kao rešenja diferencijalnih jednačina problema, naveš-
ćemo neke osobine karakterističnih brojeva, koeficijenata $A_{2n}^{(2k)}$
i $B_{2n}^{(2k)}$, kao i neke osobine ovih funkcija.

Karakteristični brojevi \bar{a}_{2k} i \bar{b}_{2k} su funkcije odgovaraju-
ćeg prirodnog broja k i parametra q , i oblik ove funkcionalne
zavisnosti određen je vrednostima q .

Tako su, za male vrednosti q , karakteristični brojevi fun-
kcije oblika, [12],

$$(4.2.24) \quad \begin{aligned} \bar{a}_0 &= -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2364}q^6 + \dots \\ \bar{a}_2 &= 4 + \frac{5}{12}q^2 - \frac{763}{13824}q^4 + \frac{1002401}{79626240}q^6 + \dots \\ \bar{a}_4 &= 16 + \frac{1}{30}q^2 + \frac{433}{864000}q^4 - \frac{5701}{1728000}q^6 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(4.2.24) \quad \bar{b}_2 = 4 - \frac{1}{12}q^2 + \frac{5}{13824}q^4 - \frac{289}{79626240}q^6 + \dots$$

$$\bar{b}_4 = 16 + \frac{1}{30}q^2 - \frac{317}{864000}q^4 + \frac{10049}{1728000}q^6 + \dots$$

i slično, sve do vrednosti $m \gg 7$, kada se može uzeti, korektno sve do člana q^8 ,

$$(4.2.25) \quad \bar{a}_m, \bar{b}_m = m^2 + \frac{1}{2(m^2-1)}q^2 + \frac{5m^2+7}{32(m^2-1)^3(m^2-4)}q^4 + \frac{9m^4+58m^2+29}{64(m^2-1)^5(m^2-4)(m^2-9)}q^6 + \dots, m=2k.$$

Za dovoljno velike vrednosti q , karakteristični brojevi su dati aproksimativnim funkcijama oblika

$$(4.2.22) \quad \bar{a}_{2k} = -2q + (8k+2)\sqrt{q},$$

$$\bar{b}_{2k} = -2q + (8k-2)\sqrt{q}.$$

Napomenimo da je pojam q malo ili q veliko relativan, tj. zavisi od toga koji karakteristični broj posmatramo. Tako je, naprimer, $q=4$ dovoljno veliko za a_0 , pa za izračunavanje vrednosti ovog karakterističnog broja moramo koristiti (4.2.26)₁, dok za tu istu vrednost q , koristimo relacije (4.2.24) za izračunavanje ostalih karakterističnih brojeva.

Za velike vrednosti k imamo, [12],

$$(4.2.27) \quad \bar{a}_{2k} = (2k)^2, \quad \bar{b}_{2k} = (2k)^2.$$

Koeficijenti $A_{2n}^{(2k)}$ i $B_{2n}^{(2k)}$ su, takodje, funkcije od q , i njihovo ponašanje zavisi od vrednosti q , [12].

Za male vrednosti q ponašanje ovih koeficijenata dato je opštom formulom

$$(4.2.28) \quad A_{m+2r}^{(m)}, B_{m+2r}^{(m)} \approx \frac{m!}{r!(m+r)!} \left(\frac{q}{4}\right)^r, \quad r \gg 0, m \gg 0$$

$$A_{m-2r}^{(m)}, B_{m-2r}^{(m)} \approx \frac{(m-r-1)!}{r!(m-1)!} \left(\frac{q}{4}\right)^r, \quad r \gg 0, m \gg 0.$$

Za dovoljno male vrednosti q , oblik funkcionalne zavisnosti koeficijenata $A_{2n}^{(2k)}$ i $B_{2n}^{(2k)}$ od q , odredjuje se iz rekurenčnih formula koje moraju zadovoljavati ovi koeficijenti, [12]. Za funkcije tipa \mathcal{L}_{e_2} i \mathcal{J}_{o_2} , naprimer, koeficijenti $A_{2n}^{(2k)}$ i $B_{2n}^{(2k)}$ su oblika

$$A_0^{(2)} = \left[\frac{q}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{q}{4} \right)^3 + \frac{1363}{216} \left(\frac{q}{4} \right)^5 + \dots \right] A_2^{(2)}$$

$$A_{2\tau+2}^{(2)} = \left[\frac{2}{\tau!(\tau+2)!} \left(\frac{q}{4} \right)^\tau + \frac{\tau(47\tau^2+222\tau+247)}{18(\tau+2)!(\tau+3)!} \left(\frac{q}{4} \right)^{\tau+2} + \dots \right] A_2^{(2)}, \quad \tau \geq 0$$

(4.2.29)

$$B_{2\tau+2}^{(2)} = \left[\frac{2}{\tau!(\tau+2)!} \left(\frac{q}{4} \right)^\tau - \frac{\tau(\tau+1)(\tau+23)}{18(\tau+2)!(\tau+3)!} \left(\frac{q}{4} \right)^{\tau+2} + \dots \right] B_2^{(2)}, \quad \tau \geq 0,$$

a koeficijente $A_{2k}^{(2k)}$ i $B_{2k}^{(2k)}$ odredjujemo iz uslova normalizacije funkcija $\mathcal{L}_{e_{2k}}$ i $\mathcal{J}_{o_{2k}}$, koje ćemo kasnije navesti.

Za velike vrednosti q je, [12],

$$A_{2\tau}^{(2k)} \rightarrow (-1)^\tau \cdot 2 A_0^{(2k)}, \quad \tau \geq 0$$

(4.2.30)

$$B_{2\tau+2}^{(2k)} \rightarrow (-1)^\tau (\tau+1) B_2^{(2k)}, \quad \tau \geq 0,$$

i može se pokazati da svi ovi koeficijenti teže nuli kada $q \rightarrow \infty$.

Kada $k \rightarrow \infty$, svi koeficijenti $A_{2n}^{(2k)}$ i $B_{2n}^{(2k)}$ teže nuli, izuzev $A_{2n}^{(2k)}$ i $B_{2n}^{(2k)}$, koji teže jedinici.

Treba naglasiti da su redovi Matjeovih funkcija konvergentni za bilo koji oblik ponašanja koeficijenata $A_{2n}^{(2k)}$ i $B_{2n}^{(2k)}$.

Usvojićemo sledeću normalizaciju funkcija $\mathcal{L}_{e_{2k}}$ i $\mathcal{J}_{o_{2k}}$:

$$(4.2.31) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}_{e_{2k}}^2(\vartheta, q) d\vartheta = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{J}_{o_{2k}}^2(\vartheta, q) d\vartheta = 1,$$

odakle sledi

$$(4.2.32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n}^{(2k)}]^2 + 2[A_0^{(2k)}]^2 = 1,$$

$$(4.2.32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [B_{2n}^{(2k)}]^2 = 1.$$

Uslovi ortogonalnosti Matjeovih funkcija \mathcal{L}_{2k} i \mathcal{S}_{2k} su:

$$(4.2.33) \quad \int_0^{2\pi} \mathcal{L}_{2k}(v, -q) \mathcal{L}_{2l}(v, -q) dv = 0, \quad k \neq l$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{S}_{2k}(v, -q) \mathcal{S}_{2l}(v, -q) dv = 0, \quad k \neq l$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{S}_{2k}(v, -q) \mathcal{L}_{2l}(v, -q) dv = 0,$$

odakle sledi

$$(4.2.34) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{(2k)} A_{2n}^{(2l)} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n}^{(2k)} B_{2n}^{(2l)} = 0, \quad k \neq l.$$

Dalje, pokazano je, [12], da važe sledeće relacije:

$$(4.2.35) \quad \cos 2nv = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(2n)} \mathcal{L}_{2k}(v, -q)$$

i

$$(4.2.36) \quad \sin 2nv = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}^{(2n)} \mathcal{S}_{2k}(v, -q),$$

pa iz uslova normalizacije trigonometrijskih funkcija sledi

$$(4.2.37) \quad \sum_{k=0}^{\infty} [A_{2k}^{(2n)}]^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} [B_{2k}^{(2n)}]^2 = 1,$$

a iz uslova ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija sledi

$$(4.2.38) \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(2n)} A_{2j}^{(2n)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}^{(2n)} B_{2j}^{(2n)} = 0, \quad n \neq j.$$

Rešenja diferencijalne jednačine (4.2.21) su modifikovane radijalne Matjeove funkcije za q negativno. Rešenje našeg problema mogu biti samo radijalne Matjeove funkcije za q negativ-

no koje, kao i njihovi izvodi, imaju osobnu da, kada $\mu \rightarrow \infty$ teže nuli, što je posledica graničnih uslova (4.1.11)_{3,4,5}, odnosno ekvivalentnih uslova (4.1.12)_{4,5,6}.

S obzirom na uslove koji moraju biti zadovoljeni, rešenje našeg problema mogu biti samo modifikovane radijalne Matjeove funkcije za q negativno oblika, [12],

$$F_{e_{2\kappa}}(\mu, -q) = (-1)^\kappa \frac{\mathcal{L}_{e_{2\kappa}}(\frac{\pi}{2}, q)}{\pi A_{\circ}^{(2\kappa)}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{(2\kappa)} K_{2n}(2hch\mu), \quad \kappa \geq 0$$

(4.2.39)

$$G_{o_{2\kappa}}(\mu, -q) = (-1)^\kappa \frac{J'_{o_{2\kappa}}(0, q)}{\pi h^2 B_2^{(2\kappa)}} \operatorname{tgh} \mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n) B_{2n}^{(2\kappa)} K_{2n}(2hch\mu) \quad (\kappa \geq 1)$$

gde je $h^2 = q = \frac{\ell^2}{4\kappa^2}$, a K_{2n} su modifikovane Beselove funkcije druge vrste reda n , [16].

Može se pokazati, [12], da su izrazima (4.2.39), u kojima su radijalne Matjeove funkcije tipa $F_{e_{2\kappa}}(\mu, -q)$ i $G_{o_{2\kappa}}(\mu, -q)$ predstavljene u obliku beskonačnih redova modifikovanih Beselovih funkcija, ekvivalentni izrazi u kojima su funkcije ovog tipa date u obliku beskonačnih redova čiji su članovi proizvodi modifikovanih Beselovih funkcija prve i druge vrste reda n , I_{2n} i K_{2n} , [16], odnosno da se funkcije tipa $F_{e_{2\kappa}}(\mu, -q)$ i $G_{o_{2\kappa}}(\mu, -q)$ mogu predstaviti u obliku

$$F_{e_{2\kappa}}(\mu, -q) = \bar{e}_{2\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{(2\kappa)} I_n(u_1) K_n(u_2), \quad \kappa \geq 0$$

(4.2.40)

$$G_{o_{2\kappa}}(\mu, -q) = \bar{o}_{2\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n}^{(2\kappa)} [I_n(u_1) K_{n+2}(u_2) - I_{n+2}(u_1) K_n(u_2)], \quad (\kappa \geq 1)$$

gde je

$$\bar{e}_{2\kappa} = \frac{(-1)^\kappa \mathcal{L}_{e_{2\kappa}}(0, q) \mathcal{L}_{e_{2\kappa}}(\frac{\pi}{2}, q)}{A_{\circ}^{(2\kappa)}} \frac{1}{\pi A_{\circ}^{(2\kappa)}}, \quad \kappa \geq 0$$

(4.2.41)

$$(4.2.41) \quad \bar{\sigma}_{2\kappa} = \frac{(-1)^{\kappa+1} J_{0,2\kappa}'(0, q) J_{0,2\kappa}'\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\kappa^2 B_2^{(2\kappa)}} \frac{1}{\pi B_2^{(2\kappa)}}, \quad \kappa \geq 1,$$

i

$$(4.2.42) \quad U_1 = h e^{-\mu} = \frac{l}{2c} e^{-\mu}, \quad U_2 = h e^{\mu} = \frac{l}{2c} e^{\mu}.$$

Modifikovane radijalne Matjeove funkcije za q negativno, oblika (4.2.39), odnosno oblika (4.2.40), imaju iste karakteristične brojeve $\bar{a}_{2\kappa}$ i $\bar{b}_{2\kappa}$ kao i odgovarajuće periodične Matjeove funkcije, i iste koeficijente $A_{2\kappa}^{(2\kappa)}$ i $B_{2\kappa}^{(2\kappa)}$, [12].

Redovi (4.2.39) su apsolutno i uniformno konvergentni za vrednosti $\mu > 0$, mada je njihova konvergencija vrlo spora kada $\mu \rightarrow 1$. Za vrednosti $\mu = 0$, konvergencija ovih redova je neuniformna. Izvodi ovih funkcija u okolini $\mu = 0$ ne mogu biti dobijeni diferenciranjem reda član po član.

Redovi (4.2.40) su uniformno konvergentni u celoj oblasti, uključujući i $\mu = 0$. Diferenciranje reda član po član je dozvoljeno i u tačkama bliskim okolini $\mu = 0$.

Imajući u vidu da Matjeovim periodičnim funkcijama $\mathcal{L}_{2\kappa}(v, q)$ odgovaraju radijalne modifikovane Matjeove funkcije $F_{2\kappa}(\mu, q)$, kao i da Matjeovim periodičnim funkcijama $\mathcal{J}_{0,2\kappa}(v, q)$ odgovaraju radijalne modifikovane Matjeove funkcije $G_{0,2\kappa}(\mu, q)$, rešenje modifikovane Helmholtcove jednačine (4.2.14), za naš problem, je funkcija oblika

$$(4.2.43) \quad \Psi_1(\mu, v) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} f_{2\kappa} F_{2\kappa}(\mu, q) \mathcal{L}_{2\kappa}(v, q) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} g_{2\kappa} G_{0,2\kappa}(\mu, q) \mathcal{J}_{0,2\kappa}(v, q) + \text{const.}$$

gde su $f_{2\kappa}$ i $g_{2\kappa}$ konstante integracije.

S obzirom na (4.2.15), (4.2.16) i (4.2.43), opšte rešenje diferencijalne jednačine (3.2.5) je funkcija oblika

$$\Psi(\mu, \nu) = -\theta \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\nu + \theta \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\nu +$$

$$(4.2.44) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k} G_{02k}(\mu, -q) S_{02k}(\nu, -q) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} F_{e2k}(\mu, -q) \mathcal{L}_{e2k}(\nu, -q) + \text{const.}$$

Relacijama (4.2.13) i (4.2.44) određen je oblik naponskih funkcija $U(\mu, \nu)$ i $\Psi(\mu, \nu)$ u eliptičnom sistemu koordinata, kao rešenja diferencijalnih jednačina (3.2.4) i (3.2.5), u skladu sa uslovima (3.2.9) i graničnim uslovima u beskonačnosti, u problemu jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom, razmatranog sa stanovišta Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima.

Nepoznate konstante integracije koje se pojavljuju u izrazima za naponske funkcije odredićemo iz zadatih graničnih uslova (4.1.11) i (4.1.17), formiranjem odgovarajućih sistema algebarskih jednačina. Međutim, iz oblika naponskih funkcija, možemo odmah uočiti da se pre formiranja sistema algebarskih jednačina mora naći neki aproksimativni oblik naponskih funkcija, jer bi se u suprotnom dobili sistemi od beskonačno mnogo jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih veličina.

Nije nam poznato, iz literature koja nam je bila dostupna, da su oblici naponskih funkcija (4.2.13) i (4.2.44) negde ranije određeni. Ovim putem određeni su oblici naponskih funkcija u problemu jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa kružnim otvorom, izraženi u odnosu na polarni sistem koordinata.

4.3. Koordinate tenzora napona i naponskih spregova

Odgovarajuće izraze za koordinate tenzora napona i naponskih spregova dobijamo polazeći od relacija (3.3.3) i uzima-

jući u obzir (4.2.13) i (4.2.44), u obliku

(4.3.1)

$$\begin{aligned}
 \frac{\ell^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu)^2 t_{2\mu\nu} &= \frac{A\ell^2}{8} [(2\operatorname{ch}^2 \mu + 1) - 4\operatorname{ch} 2\mu \cos 2\nu + \cos 4\nu] + \frac{C\ell^2}{4} \operatorname{sh} 2\mu + \\
 &+ \frac{\ell^2}{4} \left\{ d_0 [3e^{2\mu} + (e^{4\mu} + 3)\cos 2\nu + e^{2\mu} \cos 4\nu] - e_0 [(e^{4\mu} + 3)\sin 2\nu + e^{2\mu} \sin 4\nu] \right\} + \\
 &+ \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_{2n} \left\{ n(2n+1)e^{-2n\mu} \cos(2n-2)\nu - n \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{(2n+1)} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{(2n-1)} \right] \cos 2n\nu + n(2n-1)e^{-2n\mu} \cos(2n+2)\nu \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + e_{2n} \left\{ n(2n+1)e^{-2n\mu} \sin(2n-2)\nu - n \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{(2n+1)} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{(2n-1)} \right] \sin 2n\nu + n(2n-1)e^{-2n\mu} \sin(2n+2)\nu \right\} \right\} + \\
 &+ \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_{2n} \left\{ -(n-1)e^{-2n\mu} \cos(2n-4)\nu + \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{2(n-1)} - \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{2(n-1)} \right] \cos(2n-2)\nu + \left[\frac{e^{-(2n-4)\mu}}{4e} - \frac{e^{-(2n+4)\mu}}{(n-1)e} \right] \cos 2n\nu + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[-2(n+1)e^{-2n\mu} - 2e^{-(2n+2)\mu} \right] \cos(2n+2)\nu + (n+1)e^{-2n\mu} \cos(2n+4)\nu \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + a_{2n} \left\{ -(n-1)e^{-2n\mu} \sin(2n-4)\nu + \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{2(n-1)} - \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{2(n-1)} \right] \sin(2n-2)\nu + \left[\frac{e^{-(2n-4)\mu}}{4e} - \frac{e^{-(2n+4)\mu}}{(n-1)e} \right] \sin 2n\nu + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[-2(n+1)e^{-2n\mu} - 2e^{-(2n+2)\mu} \right] \sin(2n+2)\nu + (n+1)e^{-2n\mu} \sin(2n+4)\nu \right\} \right\} + \\
 &+ \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_{2n} \left\{ n(2n+1)e^{-2n\mu} \cos(2n-2)\nu - n \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{(2n+1)} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{(2n-1)} \right] \cos 2n\nu + n(2n-1)e^{-2n\mu} \cos(2n+2)\nu \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + a_{2n} \left\{ n(2n+1)e^{-2n\mu} \sin(2n-2)\nu - n \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{(2n+1)} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{(2n-1)} \right] \sin 2n\nu + n(2n-1)e^{-2n\mu} \sin(2n+2)\nu \right\} \right\} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{2k} \left\{ B_{2n}^{(2k)} \frac{\partial G_{02k}(\mu, -q)}{\partial \mu} \left[\frac{1}{2} (2n+1) \cos(2n-2)\nu - 2n \operatorname{ch} 2\mu \cos 2n\nu + \frac{1}{2} (2n-1) \cos(2n+2)\nu \right] + \right. \\
 &\quad \left. + B_{2n}^{(2k)} G_{02k}(\mu, -q) \cdot 2n \operatorname{sh} 2\mu \cos 2n\nu \right\} - \\
 &- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{2k} \left\{ A_{2n}^{(2k)} \frac{\partial F_{e2k}(\mu, -q)}{\partial \mu} \left[\frac{1}{2} (2n+1) \sin(2n-2)\nu - 2n \operatorname{ch} 2\mu \sin 2n\nu + \frac{1}{2} (2n-1) \sin(2n+2)\nu \right] + \right. \\
 &\quad \left. + A_{2n}^{(2k)} F_{e2k}(\mu, -q) \cdot 2n \operatorname{sh} 2\mu \sin 2n\nu \right\} ,
 \end{aligned}$$

(4.3.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{\ell^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu)^2 t_{2\mu\nu} &= \frac{C\ell^2}{4} \sin 2\nu + \frac{\ell^2}{4} \left\{ d_0 [(e^{4\mu} + 3)\sin 2\nu + e^{2\mu} \sin 4\nu] + e_0 [3e^{2\mu} - (e^{4\mu} + 3)\cos 2\nu + e^{2\mu} \cos 4\nu] \right\} + \\
 &+ \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_{2n} \left\{ n(2n+1)e^{-2n\mu} \sin(2n-2)\nu - n \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{(2n+1)} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{(2n-1)} \right] \sin 2n\nu + n(2n-1)e^{-2n\mu} \sin(2n+2)\nu \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - e_{2n} \left\{ n(2n+1)e^{-2n\mu} \cos(2n-2)\nu - n \left[\frac{e^{-(2n-2)\mu}}{(2n+1)} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{(2n-1)} \right] \cos 2n\nu + n(2n-1)e^{-2n\mu} \cos(2n+2)\nu \right\} \right\} + \\
 &+ \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_{2n} \left\{ -n(e^{-2n\mu} \sin(n-4)\nu + 2ne^{-(2n+2)\mu} \sin(2n-2)\nu + n[e^{-(2n-4)\mu} - e^{-(2n+4)\mu}]) \sin 2n\nu - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2ne^{-(2n-2)\mu} \sin(2n+2)\nu + ne^{-2n\mu} \sin(2n+4)\nu \right\} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{2n} \left\{ n \bar{e}^{2n\mu} \cos(2n-4)\vartheta - 2n \bar{e}^{(2n+2)\mu} \cos(2n-2)\vartheta - n \left[\bar{e}^{-(2n-4)\mu} - \bar{e}^{-(2n+4)\mu} \right] \cos 2n\vartheta + \right. \\
& \quad \left. + 2n \bar{e}^{(2n-2)\mu} \cos(2n+2)\vartheta - n \bar{e}^{2n\mu} \cos(2n+4)\vartheta \right\} \Bigg\} + \\
& + \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_{2n} \left\{ n(2n+1) \bar{e}^{-2n\mu} \sin(2n-2)\vartheta - n \left[(2n+1) \bar{e}^{-(2n-2)\mu} + (2n-1) \bar{e}^{-(2n+2)\mu} \right] \sin 2n\vartheta + n(2n-1) \bar{e}^{-2n\mu} \sin(2n+2)\vartheta \right\} \right. \\
& \quad \left. - a_{2n} \left\{ n(2n+1) \bar{e}^{-2n\mu} \cos(2n-2)\vartheta - n \left[(2n+1) \bar{e}^{-(2n-2)\mu} + (2n-1) \bar{e}^{-(2n+2)\mu} \right] \cos 2n\vartheta + n(2n-1) \bar{e}^{-2n\mu} \cos(2n+2)\vartheta \right\} \right\} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2k} \left\{ B_{2n}^{(2k)} G_{02k}(\mu, -g) \left[n(2n+1) \sin(2n-2)\vartheta - (2n)^2 \operatorname{ch} 2\mu \sin 2n\vartheta + n(2n-1) \sin(2n+2)\vartheta + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B_{2n}^{(2k)} \frac{\partial G_{02k}(\mu, -g)}{\partial \mu} \operatorname{sh} 2\mu \sin 2n\vartheta \right\} - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{2k} \left\{ A_{2n}^{(2k)} F_{e2k}(\mu, -g) \left[n(2n+1) \cos(2n-2)\vartheta - (2n)^2 \operatorname{ch} 2\mu \cos 2n\vartheta + n(2n-1) \cos(2n+2)\vartheta \right] \right. \\
& \quad \left. + A_{2n}^{(2k)} \frac{\partial F_{e2k}(\mu, -g)}{\partial \mu} \operatorname{sh} 2\mu \cos 2n\vartheta \right\} ,
\end{aligned}$$

(4.3.3)

$$\begin{aligned}
m_{\langle \mu \pm \vartheta \rangle} &= \frac{1}{\left[\frac{\rho^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\vartheta) \right]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \theta \sum_{n=1}^{\infty} 2n \bar{e}^{-2n\mu} (b_{2n} \sin 2n\vartheta - a_{2n} \cos 2n\vartheta) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k} \frac{\partial G_{02k}(\mu, -g)}{\partial \mu} J_{02k}(\vartheta, -g) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} \frac{\partial F_{e2k}(\mu, -g)}{\partial \mu} \mathcal{L}_{e2k}(\vartheta, -g) \right\} ,
\end{aligned}$$

(4.3.4)

$$\begin{aligned}
m_{\langle \vartheta \pm \mu \rangle} &= \frac{1}{\left[\frac{\rho^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\vartheta) \right]^{\frac{1}{2}}} \left\{ -\theta \sum_{n=1}^{\infty} 2n \bar{e}^{2n\mu} (b_{2n} \cos 2n\vartheta - a_{2n} \sin 2n\vartheta) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k} G_{02k}(\mu, -g) \frac{\partial J_{02k}(\vartheta, -g)}{\partial \vartheta} + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} F_{e2k}(\mu, -g) \frac{\partial \mathcal{L}_{e2k}(\vartheta, -g)}{\partial \vartheta} \right\} ,
\end{aligned}$$

$$(4.3.5) \quad t_{\langle \vartheta \vartheta \rangle} = \Delta U - t_{\langle \mu \mu \rangle} ,$$

$$(4.3.6) \quad t_{\langle \vartheta \mu \rangle} = \Delta \Psi_1 + t_{\langle \mu \vartheta \rangle} ,$$

gde smo za dobijanje relacije (4.3.6) koristili izraze (3.3.3)₃ i (3.3.3)₄, imajući u vidu (3.2.6).

Iz uslova (4.1.12)₁, s obzirom na (4.2.1) i (4.2.6), dobijamo neposredno

$$(4.3.7) \quad A = p,$$

a iz uslova (4.1.11)_{2,3}, odnosno (4.1.12)_{3,4}, s obzirom na (4.3.2) i (4.3.6), dobijamo

$$(4.3.8) \quad d_0 = -\frac{p}{4} \cos 2\beta \quad (4.3.9) \quad e_0 = -\frac{p}{4} \sin 2\beta,$$

dok su uslovi (4.1.11)_{3,4,5}, odnosno (4.1.12)_{4,5,6}, identički zadovoljeni oblikom naponskih funkcija.

Na konturi $\mu = \mu_0$ moraju biti zadovoljeni konturni uslovi (4.1.17) pa otuda dobijamo šest sistema algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih konstanti C , b_{2n} , a_{2n} , d_{2n} , e_{2n} , g_{2n} i f_{2n} .

Korišćenjem uslova ortogonalnosti Matjeovih funkcija (4.2.33), kao i relacija (4.2.31) i (4.2.34), iz uslova (4.1.17)₃ dobijamo

$$(4.3.10) \quad g_{2n} \bar{G}_{2n}^{\circ} = -\theta \sum_{n=1}^{\infty} 2n b_{2n} e^{-2n\mu_0} B_{2n}^{(2n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(4.3.11) \quad f_{2n} \bar{F}_{2n}^{\circ} = \theta \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_{2n} e^{-2n\mu_0} A_{2n}^{(2n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

gde smo uveli sledeće oznake

$$(4.3.12) \quad \begin{aligned} \bar{G}_{2n}^{\circ} &= \frac{\partial G_{02n}(\mu, -2)}{\partial \mu} \Big|_{\mu = \mu_0}, & G_{2n}^{\circ} &= G_{02n}(\mu_0, -2), \\ \bar{F}_{2n}^{\circ} &= \frac{\partial F_{e2n}(\mu, -2)}{\partial \mu} \Big|_{\mu = \mu_0}, & F_{2n}^{\circ} &= F_{e2n}(\mu_0, -2). \end{aligned}$$

Relacije (4.3.10) i (4.3.11) nam pokazuju da su konstante g_{2n} , odnosno f_{2n} , u potpunosti određene konstantama b_{2n} , odnosno a_{2n} , tako da se šest sistema algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih konstanti svodi na četiri sistema jednačina za o-

određivanje nepoznatih konstanti C , b_{2n} , a_{2n} , d_{2n} i e_{2n} . Napomenimo da ćemo u daljem radu koristiti izraz sistem jednačina umesto sistem algebarskih jednačina, kada govorimo o sistemima jednačina u kojima su nepoznate veličine konstante integracije.

Uslov (4.1.17)₁ daje dva nezavisna beskonačna sistema jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih. Prvi sistem jednačina, sa nepoznatim C , b_{2n} i d_{2n} dobijamo kada izjednačimo sa nulom koeficijente uz nezavisno promenljive $\cos 2\gamma\vartheta$, $\gamma=0,1,2,\dots$, a drugi sistem jednačina sa nepoznatim a_{2n} i e_{2n} dobijamo kada izjednačimo sa nulom koeficijente uz nezavisno promenljive $\sin 2l\vartheta$, $l=1,2,\dots$.

Uslov (4.1.17)₂ daje, takodje, dva nezavisna sistema jednačina koje dobijamo na poznati način, pri čemu je jedan od njih sa nepoznatim C , b_{2n} i d_{2n} , a drugi sa nepoznatim a_{2n} i e_{2n} .

Analiza dobijenih sistema jednačina pokazuje da se ne mogu naći takva rešenja jednačina, kao što je to slučaj u klasičnoj teoriji elastičnosti, koja bi dala pravilnost u ponašanju članova redova koji figurišu u izrazima za naponske funkcije i time omogućila nalaženja konačne sume redova, a samim tim i određivanje naponskih funkcija u konačnom obliku. Zbog toga je neophodno da pri rešavanju ovog problema koristimo neku od aproksimativnih metoda.

4.4. Aproksimativno rešenje

Iz izraza za fizičke koordinate tenzora napona i tenzora naponskih spregova (4.3.1)-(4.3.6), s obzirom na (4.3.10) i (4.3.11), sledi da su za dovoljno velike vrednosti n odgovarajući članovi u redovima koji figurišu u ovim izrazima zanemarljivo male veličine, odnosno, njihovi uticaji pri određi-

vanju vrednosti napona i naponskih spregova mogu se zanemariti.

Neka su za neko $n > 3$ odgovarajući članovi redova u (4.3.1)–(4.3.6) dovoljno male veličine tako da ih možemo zanemariti. U tom slučaju, aproksimativno rešenje koje ćemo mi uzeti je direktna posledica prethodnih razmatranja, i izraženo preko naponskih funkcija ima oblik

$$(4.4.1) \quad U(\mu, \nu) = \frac{Ae^2}{8} (ch_{2\mu} + \cos 2\nu) + \frac{Ce^2}{4} \mu + \frac{f^2}{4} (d_0 e^{2\mu} \cos 2\nu + e_0 e^{2\mu} \sin 2\nu) + \frac{e^2}{4} \sum_{n=1}^3 d_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\nu + \\ + \frac{e^2}{4} \sum_{n=1}^3 e_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\nu + \frac{e^2}{4} \sum_{n=1}^3 \left\{ \left[b_{2n} \left(-\frac{e^{-2n\mu}}{2n-1} \cos(2n-2)\nu + \left[\frac{-e^{-(2n-2)\mu}}{2n-1} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{2n+1} \right] \cos 2n\nu + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{e^{-2n\mu}}{2n+1} \cos(2n+2)\nu \right) + a_{2n} \left(-\frac{e^{-2n\mu}}{2n-1} \sin(2n-2)\nu + \left[\frac{-e^{-(2n-2)\mu}}{2n-1} + \frac{e^{-(2n+2)\mu}}{2n+1} \right] \sin 2n\nu + \frac{e^{-2n\mu}}{2n+1} \sin(2n+2)\nu \right) \right\}$$

$$(4.4.2) \quad \Psi(\mu, \nu) = -\theta \sum_{n=1}^3 e^{-2n\mu} (b_{2n} \sin 2n\nu - a_{2n} \cos 2n\nu) + \sum_{k=1}^3 g_{2k} G_{02k}(\mu, \nu) S_{02k}(\nu, \nu) + \\ + \sum_{k=0}^3 f_{2k} F_{e2k}(\mu, \nu) L_{e2k}(\nu, \nu),$$

odnosno, aproksimativni oblik relacije (4.2.6) je

$$(4.4.3) \quad \Delta U(\mu, \nu) = A + \sum_{n=1}^3 b_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\nu + \sum_{n=1}^3 a_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\nu.$$

U izrazu za naponsku funkciju $\Psi(\mu, \nu)$, (4.4.2), redovi u kojima je indeks po kome se sumira k , su formalno beskonačni redovi. Međutim, može se lako pokazati da u slučaju kada je $k > 3$, odgovarajući članovi reda su male istog reda kao i one koje zanemarujemo, pa smo iz tog razloga odmah uzeli ove redove u konačnom obliku.

Odgovarajuće aproksimativne izraze za koordinate tenzora napona i naponskih spregova dobijamo neposredno iz (4.3.1)–(4.3.6), vodeći računa da n uzima vrednosti od 1 do 3, pri čemu imamo u vidu da su tako određene vrednosti koordinata tenzora napona i naponskih spregova tačnosti $e^{-(2n+2)\mu}$.

Kako smo već napomenuli, konstante integracije C , b_{2n} , d_{2n} , a_{2n} , e_{2n} , g_{2k} i f_{2k} određujemo iz sistema jednačina koji se na poznati način dobijaju iz konturnih uslova (4.1.17), pri

čemu vodimo računa o redu veličina koje zanemarujemo.

Iz konturnog uslova (4.1.17)₃, odnosno, iz jednačina (4.3.10) i (4.3.11), dobijamo 3 konstanti g_{2k} i 3+1 konstantu f_{2k} u obliku

$$(4.4.4) \quad g_{2k} = -\frac{\theta}{G_{2k}^0} \sum_{n=1}^3 2n b_{2n} e^{-2n\mu_0} B_{2n}^{(2k)}, \quad k=1, 2, \dots, 3$$

$$(4.4.5) \quad f_{2k} = \frac{\theta}{F_{2k}} \sum_{n=1}^3 2n a_{2n} e^{-2n\mu_0} A_{2n}^{(2k)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, 3$$

tj. konturnim uslovom (4.1.17)₃ određene su konstante g_{2k} i f_{2k} kao funkcije konstanti b_{2n} , odnosno a_{2n} .

Konturni uslovi (4.1.17)_{1,2} daju nam, s obzirom na (4.4.4) i (4.4.5), dva nezavisna sistema jednačina za određivanje konstanti C , b_{2n} , d_{2n} , a_{2n} i e_{2n} .

Prvi sistem jednačina u kome su nepoznate veličine C , b_{2n} i d_{2n} , formiramo na poznati način, vodeći računa o redu veličina koje zanemarujemo. Dobijamo određjen sistem jednačina od 23+1 jednačine sa 23+1 nepoznatom veličinom.

Na analogan način dobijamo drugi sistem jednačina za određivanje nepoznatih konstanti a_{2n} i e_{2n} , pri čemu se pokazuje da dobijeni sistem jednačina ima 23+1 za određivanje 23 nepoznatih veličina. Mi ovde nećemo diskutovati pitanje saglasnosti ovog sistema jednačina, jer smatramo da će ovo pitanje biti u potpunosti razjašnjeno u slučaju neke konkretne aproksimacije.

U cilju jasnijeg sagledavanja postupka kojim rešavamo ove sisteme jednačina, odnosno, kojim ove sisteme jednačina sa nepoznatim C , b_{2n} , d_{2n} i a_{2n} , e_{2n} , svodimo na sistem od 3 jednačina za određivanje 3 nepoznatih veličina b_{2n} i na sistem od 3+1 jednačine za određivanje 3 nepoznatih a_{2n} , detaljnije ćemo ga objasniti na primeru prvog sistema jednačina sa nepoznatim C , b_{2n} i d_{2n} .

(4.4.6)

$$1. \frac{Al^2}{8} (2ch^2\mu_0 + 1) + \frac{Cl^2}{4} sh^2\mu_0 + \frac{3d_0l^2}{4} e^{2\mu_0} + \frac{3d_2l^2}{4} e^{-2\mu_0} + \frac{l^2}{16} (-2b_2 + b_4 e^{-4\mu_0}) + 3\theta b_2 e^{-2\mu_0} + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \frac{3}{2} B_2^{(2k)} = 0$$

$$2. -\frac{Al^2}{2} ch^2\mu_0 - \frac{d_0l^2}{4} (e^{4\mu_0} + 3) - \frac{l^2}{4} [d_2(3 + e^{-4\mu_0}) - 10d_4 e^{-4\mu_0}] + \frac{l^2}{16} [2b_2 e^{2\mu_0} - 2b_4 e^{-2\mu_0} + (2b_4 - 2b_6) e^{-6\mu_0}] + \theta [-b_2(3 + e^{-4\mu_0}) + 10b_4 e^{-4\mu_0}] + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \{ \bar{G}_{2k}^0 [-2ch^2\mu_0 B_2^{(2k)} + \frac{5}{2} B_4^{(2k)}] + G_{2k}^0 2sh^2\mu_0 B_2^{(2k)} \} = 0$$

$$3. \frac{Al^2}{8} + \frac{d_0l^2}{4} e^{2\mu_0} + \frac{l^2}{4} [d_2 e^{-2\mu_0} - d_4(10e^{-2\mu_0} + 6e^{-6\mu_0}) + 21d_6 e^{-6\mu_0}] + \frac{l^2}{16} [-4b_2 + 3b_4 - 2(b_2 - 2b_4 + b_6) e^{-4\mu_0} - (b_4 - 4b_6 + 3b_8) e^{-8\mu_0}] + \theta [b_2 e^{-2\mu_0} - b_4(10e^{-2\mu_0} + 6e^{-6\mu_0}) + 21b_6 e^{-6\mu_0}] + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \{ \bar{G}_{2k}^0 [\frac{1}{2} B_2^{(2k)} - 4ch^2\mu_0 B_4^{(2k)} + \frac{7}{2} B_6^{(2k)}] + G_{2k}^0 4sh^2\mu_0 B_4^{(2k)} \} = 0$$

⋮

$$(s-1). \frac{l^2}{4} \{ d_{2s-6} (s-3)(s-7) e^{-(2s-6)\mu_0} - d_{2s-4} (s-2) [(2s-3) e^{-(2s-6)\mu_0} + (2s-5) e^{-(2s-2)\mu_0}] + d_{2s-2} (s-1)(2s+1) e^{-(2s-2)\mu_0} \} + \frac{l^2}{16} \{ [(s-3)b_{2s-8} - 2(s-2)b_{2s-6} + (s-1)b_{2s-4}] e^{-(2s-8)\mu_0} - 2 [b_{2s-6} - 2b_{2s-4} + b_{2s-2}] e^{-(2s-4)\mu_0} - [(s-3)b_{2s-4} - 2(s-2)b_{2s-2} + (s-1)b_{2s}] e^{-2s\mu_0} \} + \theta \{ b_{2s-6} (s-3)(s-7) e^{-(2s-6)\mu_0} - b_{2s-4} (s-2) [(2s-3) e^{-(2s-6)\mu_0} + (2s-5) e^{-(2s-2)\mu_0}] + b_{2s-2} (s-1)(2s+1) e^{-(2s-2)\mu_0} \} + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \{ \bar{G}_{2k}^0 [\frac{1}{2} (2s-7) B_{2s-6}^{(2k)} - 2(s-2) ch^2\mu_0 B_{2s-4}^{(2k)} + \frac{1}{2} (2s-1) B_{2s-2}^{(2k)}] + G_{2k}^0 2(s-2) sh^2\mu_0 B_{2s-4}^{(2k)} \} = 0$$

$$s. \frac{l^2}{4} \{ d_{2s-4} (s-2)(2s-5) e^{-(2s-4)\mu_0} - d_{2s-2} (s-1) [(2s-1) e^{-(2s-4)\mu_0} + (2s-3) e^{-2s\mu_0}] + d_{2s-1} (2s+1) e^{-2s\mu_0} \} + \frac{l^2}{16} \{ [(s-2)b_{2s-6} - 2(s-1)b_{2s-4} + 3b_{2s-2}] e^{-(2s-6)\mu_0} - 2 [b_{2s-4} - 2b_{2s-2} + b_{2s}] e^{-(2s-2)\mu_0} \} + \theta \{ b_{2s-4} (s-2)(2s-5) e^{-(2s-4)\mu_0} - b_{2s-2} (s-1) [(2s-1) e^{-(2s-4)\mu_0} + (2s-3) e^{-2s\mu_0}] + b_{2s-1} (2s+1) e^{-2s\mu_0} \} + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \{ \bar{G}_{2k}^0 [\frac{1}{2} (2s-5) B_{2s-4}^{(2k)} - 2(s-1) ch^2\mu_0 B_{2s-2}^{(2k)} + \frac{1}{2} (2s+1) B_{2s}^{(2k)}] + G_{2k}^0 2(s-1) sh^2\mu_0 B_{2s-2}^{(2k)} \} = 0$$

$$(s+1). \frac{l^2}{4} [d_{2s-2} (s-1)(2s-3) - d_{2s-1} (2s+1) e^{-2s\mu_0}] e^{-(2s-2)\mu_0} + \frac{l^2}{16} [(s-1)b_{2s-4} - 2s b_{2s-2} + (s+1)b_{2s}] e^{-(2s-4)\mu_0} + \theta [b_{2s-2} (s-1)(2s-3) - b_{2s-1} (2s+1) e^{-2s\mu_0}] e^{-(2s-2)\mu_0} + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \{ \bar{G}_{2k}^0 [\frac{1}{2} B_{2s-2}^{(2k)} - 3e^{2\mu_0} B_{2s}^{(2k)}] + G_{2k}^0 3e^{2\mu_0} B_{2s}^{(2k)} \} = 0$$

$$1. \frac{c\ell^2}{4} + \frac{d_2\ell^2}{4}(e^{4M_0} + 3) - \frac{\ell^2}{4}[d_2(3 + \bar{e}^{4M_0}) - 10d_4\bar{e}^{4M_0}] + \frac{\ell^2}{16}[b_2(e^{2M_0} + \bar{e}^{2M_0}) - (b_2 - 4b_4 + 3b_6)\bar{e}^{6M_0}] +$$

$$+ \theta[-b_2(3 + 4\bar{e}^{4M_0}) + 10b_4\bar{e}^{4M_0}] - \sum_{\kappa=1}^3 g_{2\kappa} \{ \bar{G}_{2\kappa}^0 \text{sh} 2M_0 B_{2\kappa}^{(2\kappa)} - G_{2\kappa}^0 [4\text{ch} 2M_0 B_{2\kappa}^{(2\kappa)} - 10B_{2\kappa}^{(2\kappa)}] \} = 0$$

$$2. -\frac{d_0\ell^2}{4}e^{2M_0} + \frac{\ell^2}{4}[d_2\bar{e}^{2M_0} - d_4(10\bar{e}^{2M_0} + 6\bar{e}^{6M_0}) + 21d_6\bar{e}^{6M_0}] + \frac{\ell^2}{16}[-2(b_2 - b_4) - 2(b_4 - 3b_6 + 3b_8)\bar{e}^{8M_0}] +$$

$$+ \theta[b_2\bar{e}^{2M_0} - b_4(10\bar{e}^{2M_0} + 6\bar{e}^{6M_0}) + 21b_6\bar{e}^{6M_0}] - \sum_{\kappa=1}^3 g_{2\kappa} \{ \bar{G}_{2\kappa}^0 \text{sh} 2M_0 B_{2\kappa}^{(2\kappa)} - G_{2\kappa}^0 [-B_{2\kappa}^{(2\kappa)} + 16\text{ch} 2M_0 B_{2\kappa}^{(2\kappa)} - 21B_{2\kappa}^{(2\kappa)}] \} = 0$$

$$(3-2). \frac{\ell^2}{4} \{ d_{2s-6}(s-3)(2s-7)\bar{e}^{(2s-6)M_0} - d_{2s-4}(s-2)[(2s-3)\bar{e}^{(2s-6)M_0} + (2s-5)\bar{e}^{(2s-2)M_0}] + d_{2s-2}(s-1)(2s-1)\bar{e}^{(2s-2)M_0} \} +$$

$$+ \frac{\ell^2}{16} \{ [(s-4)b_{2s-8} - (2s-6)b_{2s-6} + (s-2)b_{2s-4}]\bar{e}^{(2s-8)M_0} - [(s-2)b_{2s-4} - 2(s-1)b_{2s-2} + 3b_{2s}]\bar{e}^{2sM_0} \} +$$

$$+ \theta \{ b_{2s-6}(s-3)(2s-7)\bar{e}^{(2s-6)M_0} - b_{2s-4}(s-2)[(2s-3)\bar{e}^{(2s-6)M_0} + (2s-5)\bar{e}^{(2s-2)M_0}] + b_{2s-2}(s-1)(2s-1)\bar{e}^{(2s-2)M_0} \} -$$

$$- \sum_{\kappa=1}^3 g_{2\kappa} \{ \bar{G}_{2\kappa}^0 \text{sh} 2M_0 B_{2s-4}^{(2\kappa)} - G_{2\kappa}^0 [-B_{2s-6}^{(2\kappa)}(s-3)(2s-7) + (2s-4)^2 \text{ch} 2M_0 B_{2s-4}^{(2\kappa)} - (s-1)(2s-1)B_{2s-2}^{(2\kappa)}] \} = 0$$

$$(3-1). \frac{\ell^2}{4} \{ d_{2s-4}(s-2)(2s-5)\bar{e}^{(2s-4)M_0} - d_{2s-2}(s-1)[(2s-1)\bar{e}^{(2s-4)M_0} + (2s-3)\bar{e}^{2sM_0}] + d_{2s-1}(2s+1)\bar{e}^{2sM_0} \} +$$

$$+ \frac{\ell^2}{16} [(s-3)b_{2s-6} - 2(s-2)b_{2s-4} + (s-1)b_{2s-2}]\bar{e}^{(2s-6)M_0} +$$

$$+ \theta \{ b_{2s-4}(s-2)(2s-5)\bar{e}^{(2s-4)M_0} - b_{2s-2}(s-1)[(2s-1)\bar{e}^{(2s-4)M_0} + (2s-3)\bar{e}^{2sM_0}] + b_{2s-1}(2s+1)\bar{e}^{2sM_0} \} -$$

$$- \sum_{\kappa=1}^3 g_{2\kappa} \{ \bar{G}_{2\kappa}^0 \text{sh} 2M_0 B_{2s-2}^{(2\kappa)} - G_{2\kappa}^0 [-B_{2s-4}^{(2\kappa)} + (2s-2)^2 \text{ch} 2M_0 B_{2s-2}^{(2\kappa)} - 1(2s+1)B_{2s}^{(2\kappa)}] \} = 0$$

$$3. \frac{\ell^2}{4} [d_{2s+2}(s-1)(2s-3) - d_{2s-1}(2s+1)]\bar{e}^{(2s-2)M_0} + \frac{\ell^2}{16} [(s-2)b_{2s-4} - 2(s-1)b_{2s-2} + 3b_{2s}]\bar{e}^{(2s-4)M_0} +$$

$$+ \theta [b_{2s-2}(s-1)(2s-3) - b_{2s-1}(2s+1)]\bar{e}^{(2s-2)M_0} - \sum_{\kappa=1}^3 g_{2\kappa} \{ \bar{G}_{2\kappa}^0 \frac{1}{2} e^{2M_0} B_{2s}^{(2\kappa)} - G_{2\kappa}^0 [-(s-1)(2s+3)B_{2s+2}^{(2\kappa)} + \frac{1}{2}(2s)^2 e^{2M_0} B_{2s}^{(2\kappa)}] \} = 0$$

Iz prvog dela sistema jednačina (4.4.6) izražavamo konstante C , d_2 i d_{2n} ($n > 1$) preko konstanti b_{2n} i $g_{2\kappa}$, odnosno, s obzirom na (4.4.4), izražavamo konstante C , d_2 i d_{2n} preko konstanti b_{2n} . Oblik ove zavisnosti dat je sledećim relacijama

(4.4.7)

$$\frac{\ell^2}{4} [(s-2)(2s-5)d_{2s-4} - (s-1)(2s-1)d_{2s-2}]\bar{e}^{(2s-4)M_0} + \theta [(s-2)(2s-5)b_{2s-4} - (s-1)(2s-1)b_{2s-2}]\bar{e}^{(2s-4)M_0} +$$

$$+ \frac{\ell^2}{16} \{ [(s-2)b_{2s-6} - 2(s-1)b_{2s-4} + 3b_{2s-2}]\bar{e}^{(2s-6)M_0} + [(s-3)b_{2s-4} - 2(s-2)b_{2s-2} + (s-1)b_{2s}]\bar{e}^{(2s-2)M_0} \} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \left\{ \frac{1}{2}(2+5) B_{2+4}^{(2k)} - [(1-1)e^{2\mu_0} + \frac{1}{2}e^{-2\mu_0}] B_{2+2}^{(2k)} + e^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 B_{2+3}^{(2k)} \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 [2(1-1) B_{2+2}^{(2k)} + 25 e^{-2\mu_0} B_{2+3}^{(2k)}] \operatorname{sh} 2\mu_0 = 0,
\end{aligned}$$

(4.4.8)

$$\begin{aligned}
\frac{3d_2 \ell^2}{4} = & -\frac{\rho \ell^2}{4} (e^{2\mu_0} + \frac{1}{2}e^{-2\mu_0}) + \frac{\rho \ell^2}{16} \cos 2\beta (e^{4\mu_0} + 2) + \frac{\ell^2}{16} (2b_2 e^{2\mu_0} + b_4 e^{-2\mu_0}) - 3\theta b_2 + \\
& + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \left[-e^{2\mu_0} B_2^{(2k)} - \frac{1}{2}e^{-2\mu_0} B_2^{(2k)} + e^{-2\mu_0} B_4^{(2k)} \operatorname{sh} 2\mu_0 + \dots + e^{-2\mu_0} B_{2+3}^{(2k)} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \operatorname{sh} 2\mu_0 [2B_2^{(2k)} + 4B_4^{(2k)} + \dots + 25 e^{-2(1-2)\mu_0} B_{2+3}^{(2k)}],
\end{aligned}$$

(4.4.9)

$$\frac{c \ell^2}{4} = -\frac{\rho \ell^2}{4} (\operatorname{ch} 2\mu_0 - \cos 2\beta) - \sum_{k=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 g_{2k} \left[e^{-2\nu\mu_0} \bar{G}_{2k}^0 B_{2\nu}^{(2k)} + 2\nu e^{-2\nu\mu_0} \bar{G}_{2k}^0 B_{2\nu}^{(2k)} \right],$$

pri čemu smo konstante A i d_0 zamenili njihovim vrednostima (4.3.7) i (4.3.8).

Dalje, zamenom ovih relacija u drugi deo jednačina sistema (4.4.6) dobijamo sistem od 3 jednačina za određivanje 3 nepoznatih veličina b_{2n} oblika

(4.4.10)

$$\begin{aligned}
1. & b_2 (e^{2\mu_0} + e^{-2\mu_0}) - b_4 e^{-2\mu_0} - \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \left[\frac{1}{2} e^{2\mu_0} B_2^{(2k)} - B_4^{(2k)} - e^{-2\mu_0} B_6^{(2k)} - \dots - e^{-(2+4)\mu_0} B_{2+3}^{(2k)} \right] - \\
& - \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 [e^{2\mu_0} B_2^{(2k)} - 4B_4^{(2k)} - 6B_6^{(2k)} - \dots - 25 e^{-(2+4)\mu_0} B_{2+3}^{(2k)}] = 2\rho e^{2\mu_0} (1 - e^{2\mu_0} \cos 2\beta), \\
2. & -b_2 (2 + e^{-4\mu_0}) + b_4 (1 + 2e^{-4\mu_0}) - b_6 e^{-4\mu_0} + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \left[\frac{1}{2} B_2^{(2k)} - \left(\frac{3}{2} e^{2\mu_0} + e^{-2\mu_0} \right) B_4^{(2k)} + e^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 B_6^{(2k)} + \dots - e^{-(2+4)\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 B_{2+3}^{(2k)} \right] + \\
& + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 [B_2^{(2k)} - (6e^{2\mu_0} - 4e^{-2\mu_0}) B_4^{(2k)} + 6e^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 + \dots + 25 e^{-(2+4)\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 B_{2+3}^{(2k)}] = -2\rho (1 - e^{2\mu_0} \cos 2\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta. [b_{2s-4} - 2b_{2s-2} + b_{2s}] \bar{e}^{(4s-4)\mu_0} + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \left\{ \frac{1}{2} (2s-3) B_{2s-2}^{(2k)} - \frac{1}{2} [(2s-1)e^{2\mu_0} - (2s-3)e^{-2\mu_0}] B_{2s}^{(2k)} \right\} + \\ + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=1}^3 g_{2k} \bar{G}_{2k}^0 \left\{ (s-1)(2s-3) B_{2s-2}^{(2k)} - [s(2s-1)e^{2\mu_0} - s(2s-3)e^{-2\mu_0}] B_{2s}^{(2k)} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Primenjujući isti postupak kao u navedenom primeru na sistemu jednačina sa nepoznatim a_{2n} i e_{2n} , imajući u vidu da su konstante f_{2k} izražene preko konstanti a_{2k} relacijom (4.4.5), dobijamo najpre veze između konstanti e_{2n} i a_{2n} pa zatim formiramo sistem od $s+1$ jednačine za određivanje s nepoznatih veličina a_{2n} .

Veze između konstanti e_{2n} i a_{2n} date su relacijama

$$(4.4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{4} [(s-2)(2s-5)e_{2s-4} - (s-1)(2s-1)e_{2s-2}] \bar{e}^{(2s-4)\mu_0} + \theta [(s-2)(2s-5)a_{2s-4} - (s-1)(2s-1)a_{2s-2}] \bar{e}^{(2s-4)\mu_0} + \\ + \frac{\ell^2}{16} \left\{ [(s-2)a_{2s-6} - 2(s-1)a_{2s-4} + 3a_{2s-2}] \bar{e}^{(2s-6)\mu_0} + [(s-3)a_{2s-4} - 2(s-2)a_{2s-2} + (s-1)a_{2s}] \bar{e}^{(2s-2)\mu_0} \right\} - \\ - \sum_{k=0}^3 f_{2k} \bar{F}_{2k}^0 \left\{ \frac{1}{2} (2s-5) A_{2s-4}^{(2k)} - [(s-1)e^{2\mu_0} + \frac{1}{2} e^{-2\mu_0}] A_{2s-2}^{(2k)} - e^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_{2s}^{(2k)} \right\} - \\ - \sum_{k=0}^3 f_{2k} F_{2k}^0 [2(s-1) A_{2s-2}^{(2k)} + 2s e^{2\mu_0} A_{2s}^{(2k)} \operatorname{sh} 2\mu_0] = 0, \\ \vdots \\ \frac{\ell^2}{4} [-e_0(e^{4\mu_0} + 2) - 3e_2] + \frac{\ell^2}{16} (2a_2 e^{2\mu_0} + a_4 e^{-2\mu_0}) - 3\theta a_2 + \sum_{k=0}^3 f_{2k} \bar{F}_{2k}^0 \left[\frac{1}{2} A_0^{(2k)} + A_2^{(2k)} (e^{2\mu_0} + \frac{1}{2} e^{-2\mu_0}) - \dots - e^{-(2s-2)\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_{2s}^{(2k)} \right] - \\ - \sum_{k=0}^3 f_{2k} F_{2k}^0 [2A_2^{(2k)} + 4e^{-2\mu_0} A_4^{(2k)} + \dots + 2s e^{-(2s-2)\mu_0} A_{2s}^{(2k)}] \operatorname{sh} 2\mu_0 = 0, \end{aligned}$$

a sistem od $(s+1)$ jednačine sa s nepoznatih a_{2n} je

$$(4.4.12)$$

$$\begin{aligned} 1. a_2 (e^{2\mu_0} + 3e^{-2\mu_0}) - a_4 e^{-2\mu_0} + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=0}^3 f_{2k} \bar{F}_{2k}^0 \left[\frac{1}{2} A_0^{(2k)} + A_2^{(2k)} (e^{2\mu_0} + \frac{1}{2} e^{-2\mu_0}) - 2e^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_4^{(2k)} - \dots - 2e^{-(2s-2)\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_{2s}^{(2k)} \right] + \\ + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=0}^3 f_{2k} F_{2k}^0 [A_2^{(2k)} (e^{2\mu_0} + 2e^{-2\mu_0}) - 8e^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_4^{(2k)} - \dots - 4s e^{-(2s-2)\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_{2s}^{(2k)}] = -2p (e^{4\mu_0} + 2) \operatorname{sh} 2\mu_0, \\ 2. -a_2 (2 + e^{-4\mu_0}) + a_4 (1 + 2e^{-4\mu_0}) + a_6 e^{-4\mu_0} + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=0}^3 f_{2k} \bar{F}_{2k}^0 \left[-\frac{1}{2} A_2^{(2k)} + A_4^{(2k)} (e^{2\mu_0} + \frac{3}{2} e^{-2\mu_0}) - \dots - 2e^{-(2s-4)\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_{2s}^{(2k)} \right] + \\ + \frac{16}{\ell^2} \sum_{k=0}^3 f_{2k} F_{2k}^0 [-A_2^{(2k)} + (6e^{2\mu_0} + 4e^{-2\mu_0}) A_4^{(2k)} - \dots - 4s e^{-(2s-4)\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 A_{2s}^{(2k)}] = 4p e^{2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0, \\ \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{J}. [a_{2\mathfrak{J}-4} - 2a_{2\mathfrak{J}-2} + a_{2\mathfrak{J}}] \bar{e}^{(2\mathfrak{J}-4)M_0} + \frac{16}{\rho^2} \sum_{\kappa=0}^{\mathfrak{J}} \rho_{2\kappa} \bar{F}_{2\kappa}^0 \left\{ -\frac{1}{2} (2\mathfrak{J}-3) A_{2\mathfrak{J}-2}^{(2\kappa)} + \frac{1}{2} [(2\mathfrak{J}-1)e^{2M_0} - (2\mathfrak{J}-3)\bar{e}^{-2M_0}] A_{2\mathfrak{J}}^{(2\kappa)} \right\} + \\ & + \frac{16}{\rho^2} \sum_{\kappa=0}^{\mathfrak{J}} \rho_{2\kappa} F_{2\kappa}^0 \left\{ -(2\mathfrak{J}-1)(2\mathfrak{J}-3) A_{2\mathfrak{J}-2}^{(2\kappa)} + \frac{1}{2} [3(2\mathfrak{J}-1)e^{2M_0} - 3(2\mathfrak{J}-3)\bar{e}^{-2M_0}] A_{2\mathfrak{J}}^{(2\kappa)} \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$(\mathfrak{J}+1). a_2 \bar{e}^{-2M_0} + \frac{8}{\rho^2} \sum_{\kappa=0}^{\mathfrak{J}} \sum_{\nu=0}^{\mathfrak{J}} \rho_{2\kappa} A_{2\nu}^{(2\kappa)} (\bar{e}^{-2\nu M_0} \bar{F}_{2\kappa}^0 + 2\nu \bar{e}^{-2\nu M_0} F_{2\kappa}^0) = -2p \sin 2\beta, \quad ,$$

pri čemu je i ovde konstanta ρ_0 zamenjena svojom vrednošću (4.3.9).

Iz (4.4.12) ne može se odmah uočiti ni jednostavno pokazati saglasnost ovog sistema jednačina. Medjutim, smatramo da to u ovom trenutku nije neophodno, zato što mi moramo, u cilju dobijanja konkretnih rezultata, izabrati određenu vrednost za \mathfrak{J} . Polazeći od ovih opštih jednačina za bilo koju vrednost \mathfrak{J} , pokazaćemo da je za određenu vrednost \mathfrak{J} sistem jednačina saglasan, odnosno da za našu izabranu aproksimaciju problem ima jedinstveno rešenje.

4.5. Aproksimativno rešenje $\mathfrak{J}=3$

Pod ovim nazivom podrazumevamo aproksimaciju pri kojoj se u relaciji (4.2.6) zadržavamo na prva tri člana u redovima koji figurišu u ovim izrazima, odnosno, kada n uzima vrednosti od 1 do 3 u relacijama (4.2.13) i (4.2.44), kao i u odgovarajućim izrazima za koordinate tenzora napona i naponskih spre-gova (4.3.1)-(4.3.6).

Za $\mathfrak{J}=3$ sistemi jednačina (4.4.10) i (4.4.12), s obzirom na (4.4.4) i (4.4.5), svode se na oblik

(4.5.1)

$$1. b_2 \left\{ e^{2M_0} + \bar{e}^{-2M_0} + \frac{16\theta}{\rho^2} [(1+2\alpha_0) - 8\bar{e}^{-2M_0} \alpha_1 - 12\bar{e}^{-4M_0} \alpha_2] \right\} - b_4 \left\{ \bar{e}^{2M_0} + \frac{16\theta}{\rho^2} [4\bar{e}^{-4M_0} (1+4\beta_0) - 4\bar{e}^{-2M_0} \beta_1 + 24\bar{e}^{-6M_0} \beta_2] \right\} -$$

$$-b_6 \frac{16\theta}{\rho^2} [6\bar{e}^{8\mu_0}(1+6\delta_0) + 24\bar{e}^{6\mu_0}\delta_1 - 6\bar{e}^{4\mu_0}\delta_2] = 2pe^{2\mu_0}(1-e^{2\mu_0}\cos 2\beta),$$

$$\begin{aligned} 2. -b_2 \left\{ 2 + \frac{16\theta}{\rho^2} [\bar{e}^{2\mu_0}(1+2\delta_0) - (12-4\bar{e}^{4\mu_0})\delta_1 - (18\bar{e}^{2\mu_0} - 6\bar{e}^{6\mu_0})\delta_2] \right\} + \\ + b_4 \left\{ 1 + \frac{16\theta}{\rho^2} [(6\bar{e}^{2\mu_0} - 2\bar{e}^{6\mu_0})(1+4\beta_0) - 4\bar{e}^{4\mu_0}\beta_1 + (36\bar{e}^{4\mu_0} - 12\bar{e}^{8\mu_0})\beta_2] \right\} + \\ + b_6 \frac{16\theta}{\rho^2} [(9\bar{e}^{6\mu_0} - 3\bar{e}^{10\mu_0})(1+6\delta_0) + (36\bar{e}^{4\mu_0} - 12\bar{e}^{8\mu_0})\delta_1 - 6\bar{e}^{6\mu_0}\delta_2] = -2p(1-e^{2\mu_0}\cos 2\beta), \end{aligned}$$

$$3. b_2 \left\{ 1 + \frac{16\theta}{\rho^2} [-12\delta_1 + 30\bar{e}^{2\mu_0}\delta_2 - 18\bar{e}^{2\mu_0}\delta_2] \right\} - b_4 \left\{ 2 + \frac{16\theta}{\rho^2} [6\bar{e}^{2\mu_0}(1+4\beta_0) - (60-36\bar{e}^{4\mu_0})\beta_2] \right\} + \\ + b_6 \left\{ 1 + \frac{16\theta}{\rho^2} [(15\bar{e}^{2\mu_0} - 9\bar{e}^{6\mu_0})(1+6\delta_0) - 36\bar{e}^{4\mu_0}\delta_1] \right\} = 0,$$

(4.5.2)

$$\begin{aligned} 1. a_2 \left\{ (e^{2\mu_0} + 3\bar{e}^{2\mu_0}) + \frac{16\theta}{\rho^2} [(1+2\bar{e}^{4\mu_0})(1+2\delta_0) - 8(\bar{e}^{2\mu_0} - \bar{e}^{6\mu_0})\delta_1 - 12(\bar{e}^{4\mu_0} - \bar{e}^{8\mu_0})\delta_2] \right\} - \\ - a_4 \left\{ \bar{e}^{2\mu_0} + \frac{16\theta}{\rho^2} [4(\bar{e}^{4\mu_0} - \bar{e}^{8\mu_0})(1+4\nu_0) + (4\bar{e}^{2\mu_0} + 8\bar{e}^{6\mu_0})\nu_1 + (24\bar{e}^{6\mu_0} - 24\bar{e}^{10\mu_0})\nu_2] \right\} - \\ - a_6 \frac{16\theta}{\rho^2} [6(\bar{e}^{8\mu_0} - \bar{e}^{12\mu_0})(1+6\delta_0) + (24\bar{e}^{6\mu_0} - 24\bar{e}^{10\mu_0})\delta_1 - (6\bar{e}^{4\mu_0} + 12\bar{e}^{8\mu_0})\delta_2] = 2p(e^{4\mu_0} + 2)\sin 2\beta, \\ 2. -a_2 \left\{ 2 + \frac{16\theta}{\rho^2} [\bar{e}^{2\mu_0}(1+2\delta_0) - (12-4\bar{e}^{4\mu_0})\delta_1 - (18\bar{e}^{2\mu_0} - 6\bar{e}^{6\mu_0})\delta_2] \right\} + \\ + a_4 \left\{ 1 + \frac{16\theta}{\rho^2} [(6\bar{e}^{2\mu_0} - 2\bar{e}^{6\mu_0})(1+4\nu_0) - 4\bar{e}^{4\mu_0}\nu_1 + (36\bar{e}^{4\mu_0} - 12\bar{e}^{8\mu_0})\nu_2] \right\} + \\ + a_6 \frac{16\theta}{\rho^2} [(9\bar{e}^{6\mu_0} - 3\bar{e}^{10\mu_0})(1+6\delta_0) + (36\bar{e}^{4\mu_0} - 12\bar{e}^{8\mu_0})\delta_1 - 6\bar{e}^{6\mu_0}\delta_2] = -2pe^{2\mu_0}\sin 2\beta \\ 3. a_2 \left\{ \bar{e}^{2\mu_0} + \frac{16\theta}{\rho^2} [\bar{e}^{4\mu_0}(1+2\delta_0) + 4\bar{e}^{6\mu_0}\delta_1 + 6\bar{e}^{8\mu_0}\delta_2] \right\} + a_4 \frac{32\theta}{\rho^2} [\bar{e}^{8\mu_0}(1+4\nu_0) + 2\bar{e}^{6\mu_0}\nu_1 + 6\bar{e}^{10\mu_0}\nu_2] + \\ + a_6 \frac{48\theta}{\rho^2} [\bar{e}^{12\mu_0}(1+6\delta_0) + 4\bar{e}^{10\mu_0}\delta_1 + 2\bar{e}^{8\mu_0}\delta_2] = 2p\sin 2\beta \\ 4. a_2 \left\{ 1 + \frac{16\theta}{\rho^2} [-12\delta_1 + (30\bar{e}^{2\mu_0} - 18\bar{e}^{2\mu_0})\delta_2] \right\} - a_4 \left\{ 2 + \frac{16\theta}{\rho^2} [6\bar{e}^{2\mu_0}(1+4\nu_0) - (60-36\bar{e}^{4\mu_0})\nu_2] \right\} + \\ + a_6 \left\{ 1 + \frac{16\theta}{\rho^2} [(15\bar{e}^{2\mu_0} - 9\bar{e}^{6\mu_0})(1+6\delta_0) - 36\bar{e}^{4\mu_0}\delta_1] \right\} = 0 \end{aligned}$$

pri čemu smo uveli sledeće oznake

$$(4.5.3) \quad k_{2\pi}^o = \frac{G_{2\pi}^o}{G_{2\pi}^o}, \quad k_{2\pi}^e = \frac{F_{2\pi}^o}{F_{2\pi}^o}$$

i

$$\alpha_0 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_2^{(2k)} B_2^{(2k)}, \quad \alpha_1 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_2^{(2k)} B_4^{(2k)}, \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_2^{(2k)} B_6^{(2k)},$$

$$(4.5.4) \quad \beta_0 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_4^{(2k)} B_4^{(2k)}, \quad \beta_1 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_2^{(2k)} B_4^{(2k)}, \quad \beta_2 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_4^{(2k)} B_6^{(2k)},$$

$$\delta_0 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_6^{(2k)} B_6^{(2k)}, \quad \delta_1 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_4^{(2k)} B_6^{(2k)}, \quad \delta_2 = \sum_{k=1}^3 k_{2k}^0 B_2^{(2k)} B_6^{(2k)}$$

$$\bar{\delta}_0 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_2^{(2k)} A_2^{(2k)}, \quad \bar{\delta}_1 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_2^{(2k)} A_4^{(2k)}, \quad \bar{\delta}_2 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_2^{(2k)} A_6^{(2k)},$$

$$(4.5.5) \quad \nu_0 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_4^{(2k)} A_4^{(2k)}, \quad \nu_1 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_2^{(2k)} A_4^{(2k)}, \quad \nu_2 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_4^{(2k)} A_6^{(2k)},$$

$$s_0 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_6^{(2k)} A_6^{(2k)}, \quad s_1 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_4^{(2k)} A_6^{(2k)}, \quad s_2 = \sum_{k=0}^3 k_{2k}^e A_2^{(2k)} A_6^{(2k)}$$

pa vidimo da je

$$(4.5.6) \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \delta_1 = \beta_2, \quad \bar{\delta}_2 = \alpha_2, \quad \bar{\delta}_1 = \nu_1, \quad s_1 = \nu_2, \quad s_2 = \bar{\delta}_2$$

Rešenja jednačina (4.5.1) i (4.5.2) su

$$b_2 = \frac{2p(1-e^{2M_0} \cos 2\beta)}{\Delta_b} \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15e^{-2M_0} (1+6\delta_0) \right] \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 6e^{-2M_0} (1+4\beta_0) \right] + \frac{16\theta}{\rho^2} 9e^{-6M_0} (1+6\delta_0) + \frac{16\theta}{\rho^2} 72e^{-4M_0} \beta_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 30\beta_2 \right) \right\},$$

$$(4.5.7) \quad b_4 = \frac{2p(1-e^{2M_0} \cos 2\beta)}{\Delta_b} \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15e^{-2M_0} (1+6\delta_0) \right] \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 12\alpha_1 \right) - \frac{16\theta}{\rho^2} 18e^{-2M_0} \alpha_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 60\beta_2 \right) \right\},$$

$$b_6 = \frac{2p(1-e^{2M_0} \cos 2\beta)}{\Delta_b} \left\{ 1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 30e^{2M_0} \alpha_2 \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 6e^{-2M_0} (1+4\beta_0) \right] - \frac{16\theta}{\rho^2} 60\beta_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 12\alpha_1 \right) \right\},$$

$$(4.5.8) \quad a_2 = \frac{-2pe^{2M_0} \sin 2\beta}{\Delta_a} \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15e^{2M_0} (1+6\delta_0) \right] \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 6e^{2M_0} (1+4\nu_0) \right] + \frac{16\theta}{\rho^2} 9e^{6M_0} (1+6\delta_0) + \frac{16\theta}{\rho^2} 72e^{-4M_0} \nu_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 30\nu_2 \right) \right\},$$

$$(4.5.8) \quad a_4 = \frac{-2\mu e^{2\mu_0} \sin 2\beta}{\Delta a} \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+6\beta_0) \right] \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 12 \bar{\delta}_1 \right) - \frac{16\theta}{\rho^2} 18 \bar{e}^{-2\mu_0} \bar{\delta}_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 60 \nu_2 \right) \right\},$$

$$a_6 = \frac{-2\mu e^{2\mu_0} \sin 2\beta}{\Delta a} \left\{ 1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 30 \bar{e}^{2\mu_0} \bar{\delta}_2 \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 6 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+4\nu_0) \right] - \frac{16\theta}{\rho^2} 60 \nu_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 12 \bar{\delta}_1 \right) \right\},$$

gde je

$$(4.5.9) \quad \Delta b = \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} \bar{e}^{-2\mu_0} (1+2\alpha_0) \right] \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+6\gamma_0) \right] \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 6 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+4\beta_0) \right] + \frac{16\theta}{\rho^2} 9 \bar{e}^{-6\mu_0} (1+6\gamma_0) + \right. \\ \left. + \frac{16\theta}{\rho^2} 72 \bar{e}^{-4\mu_0} \beta_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 30 \beta_2 \right) \right\} + \\ + \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+6\gamma_0) \right] \left[\frac{16\theta}{\rho^2} 2 \bar{e}^{6\mu_0} (1+4\beta_0) + \frac{16\theta}{\rho^2} 8 \bar{e}^{-4\mu_0} \alpha_1 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 6 \alpha_1 \right) \right] + \\ + \frac{16\theta}{\rho^2} \left[3 \bar{e}^{-10\mu_0} (1+6\gamma_0) + 24 \bar{e}^{8\mu_0} \beta_2 + 12 \bar{e}^{6\mu_0} \alpha_2 \right] - \\ - \left(\frac{16\theta}{\rho^2} \right)^2 \left[144 \bar{e}^{6\mu_0} \alpha_1 \alpha_2 + 12 \cdot 60 \bar{e}^{6\mu_0} \beta_2 (\alpha_2 + \bar{e}^{-2\mu_0} \beta_2) + (6 \cdot 30 \bar{e}^{-4\mu_0} + 108 \bar{e}^{-8\mu_0}) \alpha_2^2 \right] - \\ - \left(\frac{16\theta}{\rho^2} \right)^3 \left[30 \cdot 36 \bar{e}^{6\mu_0} (1+4\beta_0) \alpha_2^2 - 60 \cdot 144 \bar{e}^{6\mu_0} \alpha_2 \alpha_2 \beta_2 \right],$$

$$(4.5.10) \quad \Delta a = \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} \bar{e}^{-2\mu_0} (1+2\delta_0) \right] \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 6 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+4\nu_0) \right] \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+6\beta_0) \right] + \frac{16\theta}{\rho^2} 9 \bar{e}^{-6\mu_0} (1+6\beta_0) + \right. \\ \left. + \frac{16\theta}{\rho^2} 72 \bar{e}^{-4\mu_0} \nu_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 30 \nu_2 \right) \right\} + \\ + \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 15 \bar{e}^{-2\mu_0} (1+6\beta_0) \right] \left[\frac{16\theta}{\rho^2} 2 \bar{e}^{6\mu_0} (1+4\nu_0) + \frac{16\theta}{\rho^2} 8 \bar{e}^{-4\mu_0} \delta_1 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 6 \delta_1 \right) \right] + \\ + \frac{16\theta}{\rho^2} \left[3 \bar{e}^{-10\mu_0} (1+6\beta_0) + 24 \bar{e}^{8\mu_0} \nu_2 + 12 \bar{e}^{6\mu_0} \delta_2 \right] - \\ - \left(\frac{16\theta}{\rho^2} \right)^2 \left[144 \bar{e}^{6\mu_0} \delta_1 \delta_2 + 12 \cdot 60 \bar{e}^{6\mu_0} \nu_2 (\delta_2 + \bar{e}^{-2\mu_0} \nu_2) + (6 \cdot 30 \bar{e}^{-4\mu_0} + 108 \bar{e}^{-8\mu_0}) \delta_2^2 \right] - \\ - \left(\frac{16\theta}{\rho^2} \right)^3 \left[30 \cdot 36 \bar{e}^{6\mu_0} (1+4\nu_0) \delta_2^2 - 60 \cdot 144 \bar{e}^{6\mu_0} \delta_1 \delta_2 \nu_2 \right].$$

Za određivanje tri nepoznate veličine a_2 , a_4 i a_6 dobili smo sistem od četiri jednačine, (4.5.2). Može se proveriti direktnom zamenom rešenja (4.5.8) u jednačine (4.5.2), da je sistem od četiri jednačine sa tri nepoznate veličine saglasan. Stoga zaključujemo da, za našu izabranu aproksimaciju, problem jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom, razmatran sa stanovišta Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa na-

ponskim spregovima, ima jedinstveno rešenje. (Na osnovu dobijenih rezultata nije teško pokazati da i u slučaju aproksimacije $\lambda=2$ problem ima jedinstveno rešenje.)

Relacijama (4.4.4), (4.4.5), (4.4.7)-(4.4.9) i (4.4.11) određene su konstante g_{2k} , f_{2k} , C , d_{2n} i e_{2n} ($n=1,2,3$) u zavisnosti od konstanti b_2 , b_4 , b_6 , a_2 , a_4 i a_6 . U slučaju aproksimacije $\lambda=3$ napisaćemo samo eksplicitni oblik te zavisnosti koji nam je potreban za uporedjivanje dobijenih rezultata sa rezultatima klasične teorije elastičnosti. Zamenom vrednosti konstanti b_2 , b_4 , b_6 , a_2 , a_4 i a_6 u ove izraze i njihovim sredjivanjem ne dobijaju se jednostavniji izrazi, pa ih iz tog razloga nećemo ovde iznositi. Za određivanje brojnih vrednosti ovih konstanti u nekom konkretnom slučaju dovoljno je imati eksplicitno napisan oblik njihove zavisnosti od poznatih vrednosti.

Dakle, konstante g_{2k} , f_{2k} , C , d_{2n} i e_{2n} date su relacijama

$$(4.5.11) \quad \begin{aligned} g_2 \bar{G}_2^0 &= -\theta [2b_2 \bar{e}^{2\mu_0} B_2^{(2)} + 4b_4 \bar{e}^{4\mu_0} B_4^{(2)} + 6b_6 \bar{e}^{6\mu_0} B_6^{(2)}] \\ g_4 \bar{G}_4^0 &= -\theta [2b_2 \bar{e}^{2\mu_0} B_2^{(4)} + 4b_4 \bar{e}^{4\mu_0} B_4^{(4)} + 6b_6 \bar{e}^{6\mu_0} B_6^{(4)}] \\ g_6 \bar{G}_6^0 &= -\theta [2b_2 \bar{e}^{2\mu_0} B_2^{(6)} + 4b_4 \bar{e}^{4\mu_0} B_4^{(6)} + 6b_6 \bar{e}^{6\mu_0} B_6^{(6)}] \end{aligned}$$

$$(4.5.12) \quad \begin{aligned} f_0 \bar{F}_0^0 &= \theta [2a_2 \bar{e}^{2\mu_0} A_2^{(0)} + 4a_4 \bar{e}^{4\mu_0} A_4^{(0)} + 6a_6 \bar{e}^{6\mu_0} A_6^{(0)}] \\ f_2 \bar{F}_2^0 &= \theta [2a_2 \bar{e}^{2\mu_0} A_2^{(2)} + 4a_4 \bar{e}^{4\mu_0} A_4^{(2)} + 6a_6 \bar{e}^{6\mu_0} A_6^{(2)}] \\ f_4 \bar{F}_4^0 &= \theta [2a_2 \bar{e}^{2\mu_0} A_2^{(4)} + 4a_4 \bar{e}^{4\mu_0} A_4^{(4)} + 6a_6 \bar{e}^{6\mu_0} A_6^{(4)}] \\ f_6 \bar{F}_6^0 &= \theta [2a_2 \bar{e}^{2\mu_0} A_2^{(6)} + 4a_4 \bar{e}^{4\mu_0} A_4^{(6)} + 6a_6 \bar{e}^{6\mu_0} A_6^{(6)}] \end{aligned}$$

$$(4.5.13) \quad \begin{aligned} C &= -p (d_2 \mu_0 - \cos 2\beta) + \frac{8\theta}{\rho^2} b_2 \bar{e}^{-4\mu_0} (1 + 2d_0 + 4\bar{e}^{-2\mu_0} d_1 + 6\bar{e}^{-4\mu_0} d_2) + \\ &+ \frac{16\theta}{\rho^2} b_4 \bar{e}^{-8\mu_0} (1 + 4b_0 + 2\bar{e}^{2\mu_0} b_1 + 6\bar{e}^{2\mu_0} b_2) + \frac{24\theta}{\rho^2} b_6 \bar{e}^{-12\mu_0} (1 + 6\gamma_0 + 4\bar{e}^{2\mu_0} \gamma_1 + 2\bar{e}^{4\mu_0} \gamma_2) \end{aligned}$$

$$(4.5.14) \quad 12d_2 = -4pe^{2\mu_0} - 2p\bar{e}^{-2\mu_0} + p\cos 2\beta (e^{4\mu_0} + 2) + b_2 \left[2e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} \operatorname{sh} 2\mu_0 2e^{2\mu_0} (1 + 2\delta_0 + 4\bar{e}^{-2\mu_0} \delta_1 + 6\bar{e}^{-4\mu_0} \delta_2) \right] \\ + b_4 \left[\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} \operatorname{sh} 2\mu_0 4\bar{e}^{-6\mu_0} (1 + 4\beta_0 + 2e^{2\mu_0} \beta_1 + 6\bar{e}^{-2\mu_0} \beta_2) \right] - \\ - b_6 \frac{16\theta}{\rho^2} \operatorname{sh} 2\mu_0 6\bar{e}^{-10\mu_0} (1 + 6\gamma_0 + 2e^{4\mu_0} \gamma_1 + 4e^{2\mu_0} \gamma_2)$$

$$(4.5.15) \quad 40d_4 = 2pe^{2\mu_0} - pe^{4\mu_0} \cos 2\beta + 4d_2 - b_2 \left[4e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 2\operatorname{sh} 2\mu_0 (4\delta_1 + 6\bar{e}^{-2\mu_0} \delta_2) \right] + \\ + b_4 \left[3e^{2\mu_0} - 2\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 4\bar{e}^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 4\beta_0 + 6\bar{e}^{-2\mu_0} \beta_2) \right] + \\ + b_6 \left[2\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 6\bar{e}^{-6\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 6\gamma_0 + 4\bar{e}^{-2\mu_0} \gamma_1) \right]$$

$$(4.5.16) \quad 82d_6 = 24d_4 + b_2 \left[2e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 12e^{2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 \delta_2 \right] - b_4 \left[6e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 24\operatorname{sh} 2\mu_0 \beta_2 \right] + \\ + b_6 \left[4e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 6\bar{e}^{-6\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 6\gamma_0) \right]$$

$$(4.5.17) \quad 12e_2 = p(e^{4\mu_0} + 2) \sin 2\beta + a_2 \left[2e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 2\bar{e}^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 2\delta_0 + 4\bar{e}^{-2\mu_0} \delta_1 + 6\bar{e}^{-4\mu_0} \delta_2) \right] + \\ + a_4 \left[\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 4\bar{e}^{-6\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 4\nu_0 + 2\bar{e}^{-2\mu_0} \nu_1 + 6\bar{e}^{-2\mu_0} \nu_2) \right] - \\ - a_6 \frac{16\theta}{\rho^2} 6\bar{e}^{-10\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 6\zeta_0 + 4e^{2\mu_0} \zeta_1 + 2e^{4\mu_0} \zeta_2)$$

$$(4.5.18) \quad 40e_4 = -pe^{4\mu_0} \sin 2\beta + 4e_2 - a_2 \left[4e^{2\mu_0} + \frac{16\theta}{\rho^2} 2\operatorname{sh} 2\mu_0 (4\delta_1 + 6\bar{e}^{-2\mu_0} \delta_2) \right] + \\ + a_4 \left[3e^{2\mu_0} - 2\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 4\bar{e}^{-2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 4\nu_0 + 6\bar{e}^{-2\mu_0} \nu_1) \right] + \\ + a_6 \left[2\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 6\bar{e}^{-6\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 6\zeta_0 + 4e^{2\mu_0} \zeta_1) \right]$$

$$(4.5.19) \quad 82e_6 = 24e_4 + a_2 \left[2e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 12e^{2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 \delta_2 \right] - a_4 \left[6e^{2\mu_0} + \frac{16\theta}{\rho^2} 24\operatorname{sh} 2\mu_0 \nu_2 \right] + \\ + a_6 \left[4e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 6\bar{e}^{-6\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 (1 + 6\zeta_0) \right]$$

Odredjivanjem konstanti integracije u skladu sa graničnim uslovima u potpunosti je aproksimativno rešen problem raspodele napona i naponskih spregova u slučaju jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom, razmatran sa stanovišta Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima.

U ovom delu rada nećemo se zadržavati na odredjivanju broj-

nih vrednosti napona u karakterističnim tačkama elipse (u krajnjim tačkama osa elipse) jer ćemo u sledećoj glavi, u kojoj ćemo razmatrati jedan specijalan slučaj jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom, dati neke brojne vrednosti.

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da je uticaj naponskih spregova najizraženiji u okolini otvora, dok je u tačkama dovoljno udaljenim od otvora taj uticaj zanemarljiv. Stoga možemo zaključiti da su dobijeni rezultati u skladu sa našom pretpostavkom da je tenzor napona simetričan u tačkama dovoljno udaljenim od otvora.

Mindlinova linearna teorija elastičnosti sa naponskim spregovima obuhvata, kao svoj specijalni slučaj, klasičnu teoriju elastičnosti, tj. kada se zanemari uticaj naponskih spregova ova teorija se svodi na klasičnu teoriju elastičnosti. Iz tog razloga, sa ciljem da proverimo tačnost dobijenih rezultata, upoređićemo naše rezultate u slučaju kada je $\mathcal{L}=0$, tj. kada je $\theta=0$, sa poznatim rezultatima klasične teorije.

Iz (4.5.8)-(4.5.10) i (4.5.11)-(4.5.19) dobijamo

$$(4.5.20) \quad \begin{aligned} b_2 = b_4 = b_6 = 2p(1 - e^{2\mu_0} \cos 2\beta), & \quad d_2 = -\frac{p}{4} e^{4\mu_0} \cos 2\beta, & \quad e_2 = -\frac{p}{4} e^{4\mu_0} \sin 2\beta \\ a_2 = a_4 = a_6 = -2pe^{2\mu_0} \sin 2\beta, & \quad d_4 = d_6 = 0, & \quad e_4 = e_6 = 0, \end{aligned}$$

odnosno, iz (4.4.6) i (4.4.10) dobija se, što nije teško pokazati,

$$(4.5.21) \quad \begin{aligned} b_2 = b_4 = b_6 = \dots = b_{2s} = 2p(1 - e^{2\mu_0} \cos 2\beta), \\ d_2 = -\frac{p}{4} e^{4\mu_0} \cos 2\beta, \quad d_4 = d_6 = \dots = d_{2s} = 0, \end{aligned}$$

a iz odgovarajućeg sistema jednačina za određivanje konstanti a_{2n} i e_{2n} dobija se

$$(4.5.22) \quad \begin{aligned} a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2s} = -2pe^{2\mu_0} \sin 2\beta, \\ e_2 = -\frac{p}{4} e^{4\mu_0} \sin 2\beta, \quad e_4 = e_6 = \dots = e_{2s} = 0, \end{aligned}$$

za bilo koje vrednosti s . U slučaju kada $s \rightarrow \infty$, izrazima (4.5.21) i (4.5.22) određena su rešenja beskonačnih sistema jednačina

koji se na poznati način formiraju iz konturnih uslova polazeći od relacija (4.3.1), (4.3.2) i (4.3.3).

Za vrednosti konstanti b_{23} odredjenih izrazima (4.5.21), odnosno, za vrednosti konstanti a_{23} odredjenih izrazima (4.5.22), u slučaju kada $\lambda \rightarrow \infty$, relacija (4.2.6) se svodi na oblik, [9],

$$(4.5.23) \quad \Delta U(\mu, \nu) = A - \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{2} b_2 \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu} + \frac{1}{2} a_2 \frac{\sin 2\nu}{\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu},$$

koji je identičan odgovarajućem obliku laplasijana Erijeve naponske funkcije u klasičnoj teoriji elastičnosti.

Dalje, s obzirom na vrednosti konstanti odredjenih izrazima (4.5.21) i (4.5.22) u slučaju kada $\lambda \rightarrow \infty$, relacija (4.2.13) svodi se na oblik

$$(4.5.24) \quad U(\mu, \nu) = \frac{A\ell^2}{8} (\operatorname{ch} 2\mu + \cos 2\nu) + \frac{C\ell^2}{4} \mu - \frac{\ell^2}{16} b_2 (\bar{e}^{2\mu} + \cos 2\nu) - \frac{\ell^2}{16} a_2 \sin 2\nu + \\ + \frac{d_0 \ell^2}{4} e^{2\mu} \cos 2\nu + \frac{d_2 \ell^2}{4} e^{-2\mu} \cos 2\nu + \frac{e_0 \ell^2}{4} e^{2\mu} \sin 2\nu + \frac{e_2 \ell^2}{4} e^{-2\mu} \sin 2\nu,$$

odakle, pregrupisavanjem konstanti, dobijamo

$$(4.5.25) \quad U(\mu, \nu) = \frac{A_1 \ell^2}{8} (\operatorname{ch} 2\mu + \cos 2\nu) + \frac{C\ell^2}{4} \mu + \frac{B_1 \ell^2}{8} \operatorname{sh} 2\mu - \frac{B_2 \ell^2}{8} \sin 2\nu + \\ + \frac{D_1 \ell^2}{4} \operatorname{ch} 2\mu \cos 2\nu - \frac{D_2 \ell^2}{4} \operatorname{sh} 2\mu \sin 2\nu + \frac{E_1 \ell^2}{4} \operatorname{sh} 2\mu \cos 2\nu - \frac{E_2 \ell^2}{4} \operatorname{ch} 2\mu \sin 2\nu,$$

gde je

$$(4.5.26) \quad \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{1}{2} b_2 = e^{2\mu_0} \cos 2\beta & D_1 &= d_0 + d_2 = -\frac{p\ell^2}{2} e^{2\mu_0} \operatorname{ch} 2\mu_0 \cos 2\beta \\ C &= -p (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\beta) & D_2 &= -(e_0 - e_2) = -\frac{p\ell^2}{2} e^{2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 \sin 2\beta \\ B_1 &= \frac{1}{2} b_2 = p (1 - e^{2\mu_0} \cos 2\beta) & E_1 &= d_0 - d_2 = \frac{p\ell^2}{2} e^{2\mu_0} \operatorname{sh} 2\mu_0 \cos 2\beta \\ B_2 &= \frac{1}{2} a_2 = -p e^{2\mu_0} \sin 2\beta & E_2 &= -(e_0 + e_2) = \frac{p\ell^2}{2} e^{2\mu_0} \operatorname{ch} 2\mu_0 \sin 2\beta \end{aligned}$$

Oblik Erijeve naponske funkcije (4.5.25) sa konstantama (4.5.26), identičan je sa oblikom ove funkcije datim u [11] koji se navodi kao rešenje Stivensona (A.C. Stevenson). Nažalost, rad ovog autora nije nam bio dostupan, ali iz literature u kojoj se ovo rešenje navodi, može se zaključiti da je problem rešavan

metodom Kolosova. Rešenje ovog problema u klasičnoj teoriji dato je i u [10], pri čemu je, takodje, korišćena metoda Kolosova, ali za razliku od rešenja koje je dao Stivenson, ovde problem nije rešavan u eliptičnom sistemu koordinata direktnim postupkom, nego su pri rešavanju korišćene neke osobine analitičkih funkcija, kompleksnih potencijala Kolosova, pri konformnom preslikavanju oblasti sa kružnom konturom na oblast sa eliptičnom konturom.

Za razliku od rešenja datih u [10] i [11], mi nismo koristili metodu Kolosova, nego smo Erijevu naponsku funkciju odredili kao rešenje biharmonijske diferencijalne jednačine u eliptičnom sistemu koordinata u skladu sa zadatim graničnim uslovima. Koliko smo upoznati sa literaturom iz ove oblasti, ovaj postupak u rešavanju problema jednoosnog zatezanja oblasti sa eliptičnim otvorom nije do sada korišćen. U tom slučaju on je nov i u okviru klasične teorije elastičnosti.

Poredjenja dobijenih rezultata sa rezultatima dobijenim u [4] i [7], nisu jednostavna pa ih iz tih razloga nećemo iznositi u ovom delu rada. Takva poredjenja izvršićemo kasnije kada dobijemo rezultate jednostavne za poredjenja.

V RAVNOMERNO ZATEZANJE BESKONAČNE OBLASTI SA ELIPTIČ-
NIM OTVOROM U PRAVCU KRAĆE OSE ELIPSE

5.1. Oblik naponskih funkcija, koordinate tenzora napona
i naponskih spregova

Ravnomerno zatezanje beskonačne oblasti sa eliptičnim otv-
rom u pravcu kraće ose elipse posmatraćemo kao specijalni slu-
čaj zatezanja ove oblasti silom proizvoljnog pravca. Pravac sile
zatezanja određen je uglom β koji ova sila zaklapa sa pozi-
tivnim pravcem ose x . U slučaju kada sila zatezanja deluje u
pravcu kraće ose elipse ugao β je $\frac{\pi}{2}$.

Tada je, s obzirom na (4.5.8) i (4.5.17)-(4.5.19),

$$(5.1.1) \quad a_{2n} = c_{2n} = 0, \quad f_{2n} = 0,$$

pa se, u skladu sa tim, izrazi za koordinate tenzora napona i
naponskih spregova, kao i izrazi kojima su dati oblici napon-
skih funkcija, znatno pojednostavljaju. Isto tako, iz (5.1.1)
zaključujemo da se u ovom specijalnom slučaju ne pojavljuje
sistem jednačina čiju saglasnost treba ispitivati.

Pošto smo u prethodnom razmatranju odredili odgovarajuća
aproksimativna rešenja problema, i ovde ćemo se zadržati na i-
stoj aproksimaciji. Koristeći prethodne rezultate, dobijamo iz
(4.5.7), za $\beta = \frac{\pi}{2}$, sledeće izraze

$$(5.1.2) \quad b_2 = \frac{2p(1+e^{2\mu_0})}{\Delta b} \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} 6e^{-2\mu_0}(1+4\beta_0) \right] \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} 15e^{-2\mu_0}(1+6\beta_0) \right] + \frac{16\theta}{\ell^2} 9e^{-6\mu_0}(1+6\beta_0) + \right. \\ \left. + \frac{16\theta}{\ell^2} 72e^{-4\mu_0}\beta_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\ell^2} 30\beta_2 \right) \right\}$$

$$b_4 = \frac{2p(1+e^{2\mu_0})}{\Delta b} \left\{ \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} 15e^{-2\mu_0}(1+6\beta_0) \right] \left(1 - \frac{16\theta}{\ell^2} 12\alpha_1 \right) - \frac{16\theta}{\ell^2} 18e^{-2\mu_0}\alpha_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\ell^2} 60\beta_2 \right) \right\}$$

$$b_6 = \frac{2p(1+e^{2\mu_0})}{\Delta b} \left\{ 1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 30e^{2\mu_0} \alpha_2 \left[1 + \frac{16\theta}{\rho^2} 6e^{-2\mu_0} (1+4\beta_0) \right] - \frac{16\theta}{\rho^2} 60\beta_2 \left(1 - \frac{16\theta}{\rho^2} 12\alpha_1 \right) \right\},$$

gde je Δb dato izrazom (4.5.9).

Na isti način iz (4.5.11), (4.5.13)-(4.5.16) dobijamo

$$(5.1.3) \quad \begin{aligned} g_2 \bar{G}_2^0 &= -\theta [2b_2 \bar{e}^{2\mu_0} B_2^{(2)} + 4b_4 \bar{e}^{4\mu_0} B_4^{(2)} + 6b_6 \bar{e}^{6\mu_0} B_6^{(2)}] \\ g_4 \bar{G}_4^0 &= -\theta [2b_2 \bar{e}^{2\mu_0} B_2^{(4)} + 4b_4 \bar{e}^{4\mu_0} B_4^{(4)} + 6b_6 \bar{e}^{6\mu_0} B_6^{(4)}] \\ g_6 \bar{G}_6^0 &= -\theta [2b_2 \bar{e}^{2\mu_0} B_2^{(6)} + 4b_4 \bar{e}^{4\mu_0} B_4^{(6)} + 6b_6 \bar{e}^{6\mu_0} B_6^{(6)}] \end{aligned}$$

$$(5.1.4) \quad \begin{aligned} C &= -p(ch_2\mu_0+1) + \frac{8\theta}{\rho^2} b_2 \bar{e}^{4\mu_0} [1+2\alpha_0+4\bar{e}^{2\mu_0}\alpha_1+6\bar{e}^{4\mu_0}\alpha_2] + \\ &+ \frac{16\theta}{\rho^2} b_4 \bar{e}^{8\mu_0} (1+4\beta_0+2e^{2\mu_0}\beta_1+6e^{-2\mu_0}\beta_2) + \frac{24\theta}{\rho^2} b_6 \bar{e}^{12\mu_0} (1+6\gamma_0+4e^{2\mu_0}\gamma_1+2e^{4\mu_0}\gamma_2) \end{aligned}$$

$$(5.1.5) \quad \begin{aligned} 12d_2 &= -4pe^{2\mu_0} - 2p\bar{e}^{-2\mu_0} - p(e^{4\mu_0}+2) + b_2 \left[2e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} sh_2\mu_0 2\bar{e}^{2\mu_0} (1+2\alpha_0+4\bar{e}^{2\mu_0}\alpha_1+6\bar{e}^{4\mu_0}\alpha_2) \right] + \\ &+ b_4 \left[\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} sh_2\mu_0 4\bar{e}^{6\mu_0} (1+4\beta_0+2e^{2\mu_0}\beta_1+6e^{-2\mu_0}\beta_2) \right] - \\ &- b_6 \left[\frac{16\theta}{\rho^2} sh_2\mu_0 6\bar{e}^{10\mu_0} (1+6\gamma_0+2e^{4\mu_0}\gamma_2+4e^{2\mu_0}\gamma_1) \right] \end{aligned}$$

$$(5.1.6) \quad \begin{aligned} 40d_4 &= 2pe^{2\mu_0} + pe^{4\mu_0} + 4d_2 - b_2 \left[4e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 2sh_2\mu_0 (4\alpha_1+6\bar{e}^{2\mu_0}\alpha_2) \right] + \\ &+ b_4 \left[3e^{2\mu_0} - 2\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} sh_2\mu_0 4\bar{e}^{2\mu_0} (1+4\beta_0+6e^{-2\mu_0}\beta_2) \right] + \\ &+ b_6 \left[2\bar{e}^{-2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} sh_2\mu_0 6\bar{e}^{6\mu_0} (1+6\gamma_0+4e^{2\mu_0}\gamma_1) \right] \end{aligned}$$

$$(5.1.7) \quad \begin{aligned} 82d_6 &= 24d_4 + b_2 \left[2e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 12e^{2\mu_0} sh_2\mu_0 \alpha_2 \right] - b_4 \left[6e^{2\mu_0} + \frac{16\theta}{\rho^2} 24sh_2\mu_0 \beta_2 \right] + \\ &+ b_6 \left[4e^{2\mu_0} - \frac{16\theta}{\rho^2} 6\bar{e}^{6\mu_0} sh_2\mu_0 (1+6\gamma_0) \right] \end{aligned}$$

pri čemu imamo u vidu da su b_2 , b_4 i b_6 oblika (5.1.2).

Dalje, polazeći od (4.2.13) i (4.2.44), i imajući u vidu (5.1.1) kao i uzetu aproksimaciju, dobijamo naponske funkcije

$U(\mu, \nu)$ i $\Psi(\mu, \nu)$ u obliku

$$(5.1.8) \quad \begin{aligned} U(\mu, \nu) &= \frac{A\ell^2}{8} (ch_2\mu + \cos 2\nu) + \frac{C\ell^2}{4} \mu + \frac{\ell^2}{4} \left[d_0 e^{2\mu} \cos 2\nu + \sum_{n=1}^3 d_{2n} \bar{e}^{-2n\mu} \cos 2n\nu \right] + \\ &+ \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^3 b_{2n} \left\{ \frac{\bar{e}^{-2n\mu}}{2n-1} \cos(2n-2)\nu + \left[\frac{\bar{e}^{-(2n-2)\mu}}{2n-1} + \frac{\bar{e}^{-(2n+2)\mu}}{2n+1} \right] \cos 2n\nu + \frac{\bar{e}^{-2n\mu}}{2n+1} \cos(2n+2)\nu \right\}, \end{aligned}$$

$$(5.1.9) \quad \Psi(\mu, \nu) = -\theta \sum_{n=1}^3 b_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\nu + \sum_{k=1}^3 g_{2k} G_{02k}(\mu, -q) S_{02k}(\nu, -q),$$

a koordinate tenzora napona i naponskih spregova se svode na oblik

$$(5.1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{2} (\text{ch} 2\mu - \cos 2\nu)^2 \mathcal{L}_{\mu\nu} &= \frac{A\ell^2}{8} [(2\text{ch}^2 \mu + 1) - 4\text{ch} 2\mu \cos 2\nu + \cos 4\nu] + \frac{C\ell^2}{4} \text{sh} 2\mu + \frac{d_0 \ell^2}{4} [3e^{-2\mu} (e^{4\mu} + 3) \cos 2\nu + e^{2\mu} \cos 4\nu] \\ &+ \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^3 d_{2n} \{ n(2n+1) e^{-2n\mu} \cos(2n-2)\nu - n[(2n+1) e^{-\frac{(2n-2)\mu}{4}} + (2n-1) e^{-\frac{(2n+2)\mu}{4}}] \cos 2n\nu + n(2n-1) e^{-2n\mu} \cos(2n+2)\nu \} + \\ &+ \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^3 b_{2n} \{ -(n-1) e^{-2n\mu} \cos(2n-4)\nu + [2e^{-\frac{(2n-2)\mu}{4}} + 2(n-1) e^{-\frac{(2n+2)\mu}{4}}] \cos(2n-2)\nu + \\ &+ [(n+1) e^{-\frac{(2n-4)\mu}{4}} + 4e^{-2n\mu} - (n-1) e^{-\frac{(2n+4)\mu}{4}}] \cos 2n\nu + [2(n+1) e^{-\frac{(2n-2)\mu}{4}} - 2e^{-\frac{(2n+2)\mu}{4}}] \cos(2n+2)\nu + \\ &+ (n+1) e^{-2n\mu} \cos(2n+4)\nu \} + \\ &+ \theta \sum_{n=1}^3 b_{2n} \{ n(2n+1) e^{-2n\mu} \cos(2n-2)\nu - n[(2n+1) e^{-\frac{(2n-2)\mu}{4}} + (2n-1) e^{-\frac{(2n+2)\mu}{4}}] \cos 2n\nu + n(2n-1) e^{-2n\mu} \cos(2n+2)\nu \} + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 g_{2k} \left\{ \frac{\partial G_{02k}(\mu, -q)}{\partial \mu} B_{2n}^{(2k)} \left[\frac{1}{2} (2n+1) \cos(2n-2)\nu - 2n \text{ch} 2\mu \cos 2n\nu + \frac{1}{2} (2n-1) \cos(2n+2)\nu \right] + \right. \\ &\quad \left. + G_{02k}(\mu, -q) B_{2n}^{(2k)} \cdot 2n \text{sh} 2\mu \cos 2n\nu \right\}, \end{aligned}$$

$$(5.1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{2} (\text{ch} 2\mu - \cos 2\nu)^2 \mathcal{L}_{\mu\nu} &= \frac{C\ell^2}{4} \sin 2\nu + \frac{\ell^2}{4} [d_0 (e^{4\mu} + 3) \sin 2\nu - d_0 e^{2\mu} \sin 4\nu] + \\ &+ \frac{\ell^2}{4} \sum_{n=1}^3 d_{2n} \{ n(2n+1) e^{-2n\mu} \sin(2n-2)\nu - n[(2n+1) e^{-\frac{(2n-2)\mu}{4}} + (2n-1) e^{-\frac{(2n+2)\mu}{4}}] \sin 2n\nu + n(2n-1) e^{-2n\mu} \sin(2n+2)\nu \} + \\ &+ \frac{\ell^2}{16} \sum_{n=1}^3 b_{2n} \{ -n e^{-2n\mu} \sin(2n-4)\nu + 2n e^{-\frac{(2n+2)\mu}{4}} \sin(2n-2)\nu + n [e^{-\frac{(2n-4)\mu}{4}} - e^{-\frac{(2n+4)\mu}{4}}] \sin 2n\nu - \\ &\quad - 2n e^{-\frac{(2n-2)\mu}{4}} \sin(2n+2)\nu + n e^{-2n\mu} \sin(2n+4)\nu \} + \\ &+ \theta \sum_{n=1}^3 b_{2n} \{ n(2n+1) e^{-2n\mu} \sin(2n-2)\nu - n[(2n+1) e^{-\frac{(2n-2)\mu}{4}} + (2n-1) e^{-\frac{(2n+2)\mu}{4}}] \sin 2n\nu + n(2n-1) e^{-2n\mu} \sin(2n+2)\nu \} \\ &- \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 g_{2k} \left\{ G_{02k}(\mu, -q) B_{2n}^{(2k)} [n(2n+1) \sin(2n-2)\nu - (2n)^2 \text{ch} 2\mu \sin 2n\nu + n(2n-1) \sin(2n+2)\nu] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_{02k}(\mu, -q)}{\partial \mu} B_{2n}^{(2k)} \text{sh} 2\mu \sin 2n\nu \right\}, \end{aligned}$$

$$(5.1.12)$$

$$\left[\frac{\ell^2}{2} (\text{ch} 2\mu - \cos 2\nu) \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_{\mu\nu} = \theta \sum_{n=1}^3 2n b_{2n} e^{-2n\mu} \sin 2n\nu + \sum_{k=1}^3 g_{2k} \frac{\partial G_{02k}(\mu, -q)}{\partial \mu} S_{02k}(\nu, -q),$$

$$(5.1.13) \quad \left[\frac{\ell^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu) \right]^{\frac{1}{2}} m_{\langle \nu \nu \rangle} = -\theta \sum_{n=1}^3 2n b_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\nu + \sum_{k=1}^3 g_{2k} G_{2k}(\mu, q) \frac{\partial S_{2k}(\nu, q)}{\partial \nu},$$

$$(5.1.14)$$

$$t_{\langle \nu \nu \rangle} = A + \sum_{n=1}^3 b_{2n} e^{-2n\mu} \cos 2n\nu - t_{\langle \mu \mu \rangle},$$

$$(5.1.15)$$

$$t_{\langle \nu \mu \rangle} = t_{\langle \mu \nu \rangle} + \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 g_{2k} \left[\frac{\partial^2 G_{2k}(\mu, q)}{\partial \mu^2} - (2n)^2 G_{2k}(\mu, q) \right] B_{2n}^{(2k)} \sin 2n\nu.$$

Iz relacija (5.1.13)–(5.1.15) lako je uočiti da su na konturi $\mu = \mu_0$ koordinate tenzora napona i naponskih spregova određene relacijama

$$(5.1.16) \quad t_{\langle \nu \nu \rangle} = A + \sum_{n=1}^3 b_{2n} e^{-2n\mu_0} \cos 2n\nu,$$

$$(5.1.17) \quad t_{\langle \nu \mu \rangle} = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 g_{2k} \left[\frac{\partial^2 G_{2k}(\mu, q)}{\partial \mu^2} \Big|_{\mu=\mu_0} - (2n)^2 G_{2k}^0 \right] B_{2n}^{(2k)} \sin 2n\nu$$

$$(5.1.18) \quad m_{\langle \nu \nu \rangle} = \frac{1}{\left[\frac{\ell^2}{2} (\operatorname{ch} 2\mu_0 - \cos 2\nu) \right]^{\frac{1}{2}}} \left\{ -\theta \sum_{n=1}^3 2n b_{2n} e^{-2n\mu_0} \cos 2n\nu + \sum_{k=1}^3 g_{2k} G_{2k}^0 \frac{\partial S_{2k}(\nu, q)}{\partial \nu} \right\}.$$

5.2. Oblik konstanti integracije za dovoljno male vrednosti parametra q

Relacijama (5.1.2)–(5.1.7) nije eksplicitno dat oblik funkcionalne zavisnosti konstanti od parametra q . Jasno je da zavisno od vrednosti parametra q (malo, dovoljno malo i dovoljno veliko) imamo različite oblike zavisnosti.

Mi ćemo u ovom radu uzeti da q ima dovoljno male vrednosti,

i u tom slučaju eksplicitno odrediti neke konstante kao funkcije parametra q . Razlog za to je što će se u našem daljem radu, pod pretpostavkama koje uvodimo pokazati da q ima zaista dovoljno male vrednosti. Napomenimo da dovoljno mala vrednost q , za sve funkcije tipa $J_{0,2k}(v, q)$, odnosno $G_{0,2k}(\mu, q)$, podrazumeva vrednosti q do 7,5, što se može lako videti iz oblika karakterističnih brojeva ovih funkcija.

Za dovoljno male vrednosti q , koeficijenti $B_{2n}^{(2k)}$ se izražavaju u obliku stepenih polinoma po q , [12]. Zadržavajući se u ovim polinomima na kvadratnoj aproksimaciji, dobijamo da su koeficijenti koji figurišu u našim izrazima oblika

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} B_2^{(2)} &= 1 - \frac{q^2}{288}, & B_4^{(2)} &= \frac{q}{12}, & B_6^{(2)} &= \frac{q^2}{384} \\ B_2^{(4)} &= -\frac{q}{12}, & B_4^{(4)} &= 1 - \frac{17q^2}{3600}, & B_6^{(4)} &= \frac{q}{20}, & B_8^{(4)} &= \frac{q^2}{960} \\ B_2^{(6)} &= \frac{q^2}{640}, & B_4^{(6)} &= -\frac{q}{20}, & B_6^{(6)} &= 1 - \frac{37q^2}{19600}, & B_8^{(6)} &= \frac{q}{28}, & B_{10}^{(6)} &= \frac{q^2}{1792} \end{aligned}$$

Poredjenjem ovako odredjenih vrednosti koeficijenata sa njihovim vrednostima datim u tablicama, [13], može se videti da je aproksimacija (5.2.1), za vrednosti q koje ćemo uzimati u našem radu, sasvim dobra, tako da nema potrebe odredjivati sve koeficijente kao polinome višeg stepena.

Odredimo, najpre, veličine definisane relacijama (4.5.4) u obliku kvadratnih polinoma po q . Modifikovane radijalne Matjeove funkcije za q negativno na konturi $\mu = \mu_0$, (4.3.12)₂, možemo, s obzirom na (4.2.20)₂, predstaviti u obliku

$$(5.2.2) \quad G_{2k}^0 = \sigma_{2k} \sum_{s=1}^3 \sum_{j=0}^4 B_{2s+2}^{(2k)} p_s$$

gde smo uveli sledeće oznake

$$(5.2.3) \quad p_s = I_s(v_1^0) K_{s+2}(v_2^0) - I_{s+2}(v_1^0) K_s(v_2^0), \quad v_1^0 = \frac{\ell}{2\kappa} \bar{e}^{\mu_0}, \quad v_2^0 = \frac{\ell}{2\kappa} e^{\mu_0}.$$

Parcijalne izvode modifikovanih radijalnih Matjeovih fun-

kcija za q negativno po promenljivoj μ , na konturi $\mu = \mu_0$,
(4.3.12)₁, možemo predstaviti u obliku

$$(5.2.4) \quad \bar{G}_{2m}^0 = \sigma_{2m} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=0}^4 B_{2j+2}^{(2m)} t_j.$$

Pri tome smo ovde uveli sledeće oznake

$$(5.2.5) \quad t_j = U_2^0 [I_j(U_1^0) K_{j+2}'(U_2^0) - I_{j+2}(U_1^0) K_j'(U_2^0)] - U_1^0 [I_j'(U_1^0) K_{j+2}(U_2^0) - I_{j+2}'(U_1^0) K_j(U_2^0)],$$

$$(5.2.6) \quad K_m'(U_2) = \frac{dK_m(U_2)}{dU_2}, \quad I_m'(U_1) = \frac{dI_m(U_1)}{dU_1},$$

i iskoristili sledeće relacije, [16],

$$(5.2.7) \quad \frac{\partial K_m(U_2)}{\partial \mu} = U_2 \frac{dK_m(U_2)}{dU_2}, \quad \frac{\partial I_m(U_1)}{\partial \mu} = -U_1 \frac{dI_m(U_1)}{dU_1}.$$

Za dovoljno male vrednosti q , svaki od članova reda (4.5.4) može se predstaviti kao stepeni polinom po q . Razvijanjem u stepeni red ovih članova i sredjivanjem dobijamo

$$(5.2.8) \quad =$$

$$\alpha_0 = \frac{p_0}{t_0} + \frac{1}{12t_0^2} (p_1 t_0 - t_1 p_0) q + \left[\frac{1}{384t_0^2} (p_2 t_0 - t_2 p_0) + \frac{1}{144t_0^3} (p_0 t_1^2 - p_1 t_0 t_1 - p_0 t_0^2) + \frac{1}{144} \frac{p_1}{t_1} \right] q^2 + \dots$$

$$(5.2.9)$$

$$\beta_0 = \frac{p_1}{t_1} + \left[\frac{1}{12t_1^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{1}{20t_1^2} (p_2 t_1 - p_1 t_2) \right] q + \left\{ \frac{p_0}{144t_0} + \frac{p_2}{400t_2} - \frac{17p_1}{3600t_1} + \frac{1}{960t_1^2} (p_3 t_1 - p_1 t_3) + \left[\frac{1}{12t_1^3} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{1}{20t_1^3} (p_2 t_1 - p_1 t_2) \right] \left(\frac{t_0}{12} - \frac{t_2}{20} \right) \right\} q^2 + \dots$$

$$(5.2.10)$$

$$\beta_0 = \frac{p_2}{t_2} + \left[\frac{1}{20t_2^2} (p_2 t_1 - p_1 t_2) + \frac{1}{28t_2^2} (p_3 t_2 - p_2 t_3) \right] q + \left\{ \frac{p_0}{640t_2} - \frac{p_4}{1792t_2} - \frac{37p_2}{19600t_2} - \frac{p_2}{t_2^2} \left(\frac{p_0}{640} + \frac{p_4}{1792} \right) + \left[\frac{1}{20t_2^3} (p_2 t_1 - p_1 t_2) + \frac{1}{28t_2^3} (p_3 t_2 - p_2 t_3) \right] \left(\frac{t_3}{28} - \frac{t_1}{20} \right) \right\} q^2 + \dots$$

$$(5.2.11)$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{12} \left(\frac{p_0}{t_0} - \frac{p_1}{t_1} \right) q + \left[\frac{1}{144t_0^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{1}{144t_1^2} (p_0 t_1 - p_1 t_0) + \frac{1}{240t_1^2} (p_1 t_2 - p_2 t_1) \right] q^2 + \dots$$

(5.2.12)

$$\beta_2 = \gamma_1 = \frac{p_1}{20t_1} q + \left[\frac{1}{240t_1^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{1}{400t_1^2} (p_2 t_1 - p_1 t_2) + \frac{1}{400t_2^2} (p_1 t_2 - p_2 t_1) + \frac{1}{560t_2^2} (p_2 t_3 - p_3 t_2) \right] q^2 + \dots$$

(5.2.13)

$$d_2 = \gamma_2 = \left(\frac{p_0}{384t_0} - \frac{p_1}{240t_1} + \frac{p_2}{640t_2} \right) q^2 + \dots$$

Zamenom dobijenih izraza u (5.1.2), uzimajući u obzir (4.5.9), i pretpostavljajući konstante b_{2n} u obliku

$$(5.2.14) \quad b_{2n} = b_{2n}^0 + b_{2n}^1 q + b_{2n}^2 q^2 + \dots, \quad n=1,2,3$$

dobijamo, izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene q , koeficijente b_{2n}^0 , b_{2n}^1 i b_{2n}^2 .

Izrazi koji se dobijaju su veoma dugi, pa ćemo ovde, radi preglednosti, izložiti ovaj postupak u slučaju aproksimacije $\lambda=2$, koja za sobom povlači pretpostavku da je μ_0 dovoljno veliko, tako da ima smisla izraziti konstante b_2 i b_4 kao linearne funkcije parametra q , tj.

$$(5.2.15) \quad b_2 = b_2^0 + b_2^1 q, \quad b_4 = b_4^0 + b_4^1 q.$$

Izrazi (5.2.8)-(5.2.13) se svode na oblik

$$(5.2.16) \quad \begin{aligned} d_0 &= \frac{p_0}{t_0} + \frac{1}{12t_0^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) q \\ \beta_0 &= \frac{p_1}{t_1} + \left[\frac{1}{12t_1^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{1}{20t_1^2} (p_2 t_1 - p_1 t_2) \right] q \\ d_1 = \beta_1 &= \frac{1}{12} \left(\frac{p_0}{t_0} - \frac{p_1}{t_1} \right) q, \end{aligned}$$

a iz (4.5.9) i (5.1.2) dobijamo

$$(5.2.17) \quad \Delta_b = \left[1 + \frac{16\theta}{\varrho^2} e^{-2\mu_0} (1+2d_0) \right] \left[1 + \frac{16\theta}{\varrho^2} e^{-2\mu_0} (1+4\beta_0) \right] + \frac{16\theta}{\varrho^2} 2e^{-6\mu_0} (1+4\beta_0) + \frac{16\theta}{\varrho^2} 8e^{-4\mu_0} d_1 \left(1 - \frac{16\theta}{\varrho^2} 6d_1 \right)$$

i

$$(5.2.18) \quad b_2 = \frac{2p(1+e^{2\mu_0})}{\Delta_b} \left[1 + \frac{16\theta}{\varrho^2} e^{-2\mu_0} (1+4\beta_0) \right], \quad b_4 = \frac{2p(1+e^{2\mu_0})}{\Delta_b} \left(1 - \frac{16\theta}{\varrho^2} 12d_1 \right).$$

Doslednim sprovođenjem navedenog postupka, u ovom slučaju

dobijamo

$$(5.2.19) \quad b_2^0 = \frac{2p(1+e^{2\mu_0})}{D_0} \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} 6e^{-2\mu_0} \left(1 + 4 \frac{p_1}{t_1} \right) \right], \quad b_4^0 = \frac{2p(1+e^{2\mu_0})}{D_0}$$

$$b_2^1 = \frac{-2p(1+e^{2\mu_0})}{D_0^2} \cdot \frac{16\theta}{\ell^2} D_2, \quad b_4^1 = \frac{-2p(1+e^{2\mu_0})}{D_0^2} \cdot \frac{16\theta}{\ell^2} \left[D_1 + \frac{16\theta}{\ell^2} \left(\frac{p_0}{t_0} - \frac{p_1}{t_1} \right) \right],$$

gde je

$$(5.2.20) \quad D_0 = \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} e^{-2\mu_0} \left(1 + 2 \frac{p_0}{t_0} \right) \right] \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} 6e^{-2\mu_0} \left(1 + 4 \frac{p_1}{t_1} \right) \right] + \frac{16\theta}{\ell^2} 2e^{-6\mu_0} \left(1 + 4 \frac{p_1}{t_1} \right),$$

$$D_1 = \left\{ 8e^{-6\mu_0} + 24e^{-2\mu_0} \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} e^{-2\mu_0} \left(1 + 2 \frac{p_0}{t_0} \right) \right] \right\} \left[\frac{1}{12t_1^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{1}{20t_1^2} (p_2 t_1 - p_1 t_2) \right] +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{12t_0^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} 6e^{-2\mu_0} \left(1 + 4 \frac{p_1}{t_1} \right) \right] + 8e^{-4\mu_0} \frac{1}{12} \left(\frac{p_0}{t_0} - \frac{p_1}{t_1} \right) \right\},$$

$$D_2 = 8e^{-6\mu_0} \left[\frac{1}{12t_1^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{1}{20t_1^2} (p_2 t_1 - p_1 t_2) \right] +$$

$$+ \left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} 6e^{-2\mu_0} \left(1 + 4 \frac{p_1}{t_1} \right) \right] \left[\frac{8}{12} e^{-4\mu_0} \left(\frac{p_0}{t_0} - \frac{p_1}{t_1} \right) + 2e^{-2\mu_0} \frac{1}{12t_0^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) + \frac{16\theta}{\ell^2} e^{-4\mu_0} \frac{1}{t_0^2} (p_1 t_0 - p_0 t_1) \left(1 + 4 \frac{p_1}{t_1} \right) \right].$$

Relacijama (5.2.15), s obzirom na (5.2.19), sada su potpuno određeni koeficijenti b_2 i b_4 kao linearne funkcije parametra q . Može se uočiti da su za dovoljno velike vrednosti μ_0 , odnosno za infinitezimalno male vrednosti q , uticaji linearnih članova infinitezimale višeg reda, tako da ih možemo zanemariti. Za dovoljno male vrednosti q , uticaji linearnih članova nisu zanemarljivo male veličine, za razliku od članova drugog i višeg reda, što se pokazuje detaljnijom analizom.

Iz relacija (5.1.3)-(5.1.7), s obzirom na (5.2.15), (5.2.19) i (5.2.16), možemo eksplicitno odrediti oblik ostalih konstanti u zavisnosti od parametra q . Tako, naprimer, za konstante g_2 i g_4 dobijamo, uzimajući u obzir (5.2.4) kao i (5.2.1),

$$(5.2.21) \quad g_2 = -2\theta b_2^0 e^{-2\mu_0} \frac{1}{t_0} + \left[-2\theta b_2^1 e^{-2\mu_0} \frac{1}{t_0} + 2\theta b_2^0 e^{-2\mu_0} \frac{t_1}{12t_0^2} - 4\theta b_4^0 e^{-4\mu_0} \frac{1}{12t_0} \right] q + \dots$$

$$g_4 = -4\theta b_4^0 e^{-4\mu_0} \frac{1}{t_1} + \left[2\theta b_2^0 e^{-2\mu_0} \frac{1}{12t_1} - 4\theta b_4^1 e^{-4\mu_0} \frac{1}{t_1} - 4\theta b_4^0 e^{-4\mu_0} \frac{1}{t_1} \left(\frac{t_0}{12} - \frac{t_2}{20} \right) \right] q + \dots$$

Iz eksplicitno izraženog oblika zavisnosti konstanti od parametra q , može se, u nekom konkretnom slučaju, odmah odrediti red veličine linearnih, odnosno kvadratnih, i u nekoj boljoj

aproksimaciji, članova višeg stepena q , i u skladu sa tim, odmah uzeti odgovarajuća aproksimacija. Iz tog razloga smo ovde izložili postupak kojim se konstante izražavaju eksplicitno u zavisnosti od q , pri čemu smo već naglasili da pretpostavljamo da je q dovoljno malo.

5.3. Faktor koncentracije napona

Faktor koncentracije napona predstavlja odnos vrednosti cirkularnog napona, $t_{\langle vv \rangle}$, u krajnjim tačkama veće ose elipse i intenziteta sile ravnomernog zatezanja koja deluje u pravcu kraće ose elipse, tj.

$$(5.3.1) \quad K = \frac{t_{\langle vv \rangle}^{\circ}}{p}, \quad t_{\langle vv \rangle}^{\circ} = t_{\langle vv \rangle}(\mu_0, 0) = t_{\langle vv \rangle}(\mu_0, \pi).$$

U našem slučaju, polazeći od (5.1.16), pri čemu je A dato svojom vrednošću (4.3.7), a konstante b_2 , b_4 i b_6 date relacijama (5.1.2), aproksimativna vrednost faktora koncentracije napona određena je izrazom oblika

$$(5.3.2) \quad K = 1 + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^3 b_{2n} e^{-2n\mu_0}.$$

Pre nego što odredimo brojne vrednosti faktora koncentracije za neku zadatu eliptičnu konturu, uporedimo dobijeni rezultat sa odgovarajućim izrazom u klasičnoj teoriji elastičnosti, kao i sa odgovarajućim izrazom dobijenim u [1], pri razmatranju ravnomernog zatezanja beskonačne oblasti sa kružnim otvorom sa stanovišta Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima. Poredjenja sa rezultatima datim u [7], u ovom delu bi iziskivala veoma dugu matematičku proceduru uslovljenu oblikom izraza za određivanje faktora koncentracije u tom radu, tako da ih ovde nećemo upoređivati. Ta po-

redjenja ćemo izvršiti kasnije, kada odredimo brojnu vrednost faktora koncentracije napona za eliptičnu konturu istog oblika za koju je u [7] ovaj faktor određen.

U klasičnoj teoriji elastičnosti uticaj naponskih spregova se zanemaruje, odnosno pretpostavlja se da je $\ell=0$, tj. $\theta=0$. U tom slučaju, iz (5.1.2), dobijamo

$$(5.3.3) \quad K = 1 + 2(1 + e^{2\mu_0}) \sum_{n=1}^3 \bar{e}^{-2n\mu_0},$$

odnosno, s obzirom na (4.5.21)₁, za $\beta = \frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$(5.3.4) \quad K = 1 + 2(1 + e^{2\mu_0}) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{e}^{-2n\mu_0}.$$

Koristeći sada izraz za određivanje sume beskonačnog reda oblika, [17],

$$z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{z}{1-z}, \quad z < 1$$

dobijamo, za $z = \bar{e}^{-2\mu_0}$,

$$(5.3.5) \quad K = 1 + 2 \frac{a}{b},$$

a ovo je dobro poznati izraz za određivanje faktora koncentracije napona u klasičnoj teoriji elastičnosti, u slučaju ravnomernog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom u pravcu kraće ose elipse, [11].

U radu [1], vrednost faktora koncentracije napona određena je relacijom oblika

$$(5.3.6) \quad K = 1 + \frac{2}{1+\lambda\ell}, \quad \text{gde je} \quad (5.3.7) \quad \lambda\ell = \frac{4\theta}{R^2} + \frac{8\theta c}{R^3} \frac{K_2(\frac{R}{c})}{K_2'(\frac{R}{c})}.$$

R je poluprečnik kruga, a $K_2'(\frac{R}{c}) = \frac{dK_2(\frac{R}{c})}{d\tau}$ za $\tau=R$.

U slučaju kada elipsa prelazi u krug, tj. kada $a \rightarrow b$, odnosno, kada $\mu_0 \rightarrow \infty$ a $\ell \rightarrow 0$, imamo, (3.1.10),

$$(5.3.8) \quad \ell \operatorname{ch} \mu_0 = \ell \operatorname{sh} \mu_0 = \frac{1}{2} \ell e^{2\mu_0} = \frac{1}{2} (a+b) = R,$$

tako da iz (5.3.2), s obzirom na (5.1.2), (4.5.9) i (5.2.8), dobijamo

$$(5.3.9) \quad K = 1 + \frac{2}{\left[1 + \frac{16\theta}{\ell^2} \bar{e}^{-2\mu_0} \left(1 + 2 \frac{b_0}{\ell_0}\right)\right]}$$

Kako je

$$\frac{p_0}{t_0} = \frac{1}{U_2^0} \frac{K_2(U_2^0)}{K_2'(U_2^0)} = \frac{c}{\frac{l}{2} e^{2N}} \frac{K_2\left(\frac{l}{2c} e^{2N}\right)}{K_2'\left(\frac{l}{2c} e^{2N}\right)} = \frac{c}{R} \frac{K_2\left(\frac{R}{c}\right)}{K_2'\left(\frac{R}{c}\right)}$$

i

$$\frac{16\theta}{l^2} e^{-2N} = \frac{4\theta}{R^2}$$

sledi da je

$$(5.3.10) \quad K = 1 + \frac{2}{1 + 2\mathcal{L}}$$

što je i trebalo pokazati.

Dakle, rezultat koji smo dobili, svodi se u prvom slučaju, kada je $\mathcal{L} = 0$, na poznati rezultat klasične teorije elastičnosti, a u drugom slučaju, kada elipsa prelazi u krug, na poznati rezultat dobijen u [1].

Odredimo sada brojne vrednosti faktora koncentracije napona za dve eliptične konture.

U oba slučaja uvešćemo pretpostavku da je

$$(5.3.11) \quad \frac{a+b}{2c} \geq 3, \quad \text{tj. da je (5.3.12) } \frac{l}{2c} e^{2N} \geq 3,$$

analogno uslovu uvedenom za kružnu konturu, [1], $\frac{R}{c} \geq 3$. Ovakva pretpostavka, odnosno ovakvo ograničenje, u slučaju kontura koje ćemo razmatrati, u saglasnosti je sa pretpostavkom da je deo energije deformacije koji potiče od efekata lokalne krute rotacije, energija krivine, [1], ograničen do reda veličine energije deformacije klasične teorije. U slučaju kružne konture, najmanja moguća vrednost odnosa $\frac{R}{c}$, gde je R poluprečnik kruga, je jedan.

Cilj nam je da odredimo vrednost faktora koncentracije pri najvećim mogućim vrednostima konstante \mathcal{L} , pa ćemo zato uzeti da je $\frac{l}{2c} e^{2N} = 3$. Dalje, veličina θ , definisana relacijom (4.2.17), ima različite vrednosti u zavisnosti od vrednosti Poasonovog broja ν , tako da ćemo, da bi odredili granice vrednosti faktora koncentracije, izračunati njegove vrednosti u slučajevima $\nu = 0$ i $\nu = \frac{1}{2}$. Ostale vrednosti ovog faktora moraju biti izme-

dju tih granica.

Neka je prva eliptična kontura za koju odredjujemo vrednost faktora koncentracije zadata odnosom poluosa elipse $a = \frac{3}{2}b$, odnosno $\mu_0 = 0,80472$, a druga odnosom poluosa $a = 3b$, odnosno $\mu_0 = 0,34657$.

U klasičnoj teoriji elastičnosti tačna vrednost faktora koncentracije u prvom slučaju iznosi 4, a u drugom 7. Medjutim, pošto su vrednosti koje ćemo mi odrediti aproksimativne, dobijene aproksimacijom $\nu = 3$, onda ćemo poredjenja dobijenih vrednosti vršiti sa aproksimativnim vrednostima klasične teorije elastičnosti, odredjenim istom aproksimacijom.

Ako sa K_c označimo tačnu vrednost faktora koncentracije napona odredjenu u klasičnoj teoriji elastičnosti, sa K_c^a njegovu aproksimativnu vrednost u slučaju aproksimacije $\nu = 3$, sa K_1 vrednost koju smo mi dobili u slučaju $\nu = 0$, sa K_2 vrednost u slučaju $\nu = \frac{1}{2}$, i ako sa K_3 označimo dobijenu vrednost faktora koncentracije u slučaju $\nu = \frac{1}{4}$, onda se odnos ovih vrednosti može videti iz sledeće tabele

$a = \frac{3}{2}b$	$K_c = 4$	$\nu = 0$	$K_1 = 2,81$	27,6%
	$K_c^a = 3,88$	$\nu = 1/2$	$K_2 = 3,18$	18,13%
		$\nu = 1/4$	$K_3 = 2,99$	22,6%
$a = 3b$	$K_c = 7$	$\nu = 0$	$K_1 = 3,20$	48,76%
	$K_c^a = 6,25$	$\nu = 1/2$	$K_2 = 4,08$	34,8%
		$\nu = 1/4$	$K_3 = 3,68$	41%

u kojoj smo u procentima izrazili razliku vrednosti faktora koncentracije napona odredjenih u klasičnoj teoriji elastičnosti i u Mindlinovoj linearnoj teoriji elastičnosti sa naponskim spregovima. Ovi procenti se nazivaju procenti umanjenja, jer je njima procentualno izraženo umanjenje vrednosti faktora koncentracije odredjenog u klasičnoj teoriji.

Iz dobijenih rezultata se vidi da je uticaj naponskih spregova izraženiji ukoliko je elipsa uža. Ovakvi rezultati su se mogli očekivati. Naime, konstitutivnim relacijama (2.1.6) izra-

žena je obrnuta proporcionalnost naponskih spregova i intenziteta poluprečnika krivine krive, pa, što je poluprečnik krivine manji, uticaj naponskih spregova je veći.

Poređenja radi, navedimo da u slučaju kružne konture procenat umanjenja iznosi 20,3% za vrednost $\nu=0$, a za vrednost $\nu=1/2$ njegova vrednost je 12%.

Vrednost parametra q u prvom slučaju iznosi 1,8, a u drugom 4,5, odnosno vrednosti parametra q pripadaju intervalu vrednosti za koje se smatra da su dovoljno male, tako da se za određivanje vrednosti konstanti mogu koristiti relacije date u odeljku (5.2).

U radu [7] određena je vrednost faktora koncentracije napona u slučaju eliptične konture oblika $a = \frac{3b}{2}$ za $\nu = \frac{1}{4}$. Dobijena vrednost je približno jednaka 3, pa zaključujemo da je naš rezultat (2,99) saglasan sa rezultatom rada [7]. Medjutim, treba istaći da se metodom primenjenom u tom radu ne mogu odrediti vrednosti faktora koncentracije za neko veće odstupanje eliptične konture od kružne, kao što je to slučaj u našem radu.

U slučaju kada je $l = \text{const.}$, a $c \rightarrow 0$, može se pokazati da je uticaj naponskih spregova zanemarljiv, odnosno, može se pokazati da vrednosti konstanti b_{2n} teže ka $2p(1+e^{2n})$, tako da se relacija za određivanje faktora koncentracije napona svodi na oblik dobijen u klasičnoj teoriji elastičnosti.

VI ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Prvi naš zadatak u ovoj tezi bio je da odredimo raspodelu napona i naponskih spregova u slučaju jednoosnog zatezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom u proizvoljnom pravcu, pri razmatranju problema sa stanovišta Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima. Rešili smo ga direktno, uvođenjem naponskih funkcija, kako je to uobičajeno u rešavanju ove vrste problema. Na taj način problem smo sveli na problem odredjivanja rešenja dve diferencijalne jednačine između kojih postoji jedna diferencijalna veza, u skladu sa zadatim graničnim uslovima, pri čemu smo sve potrebne relacije izrazili u odnosu na eliptični sistem koordinata. Napominjemo da korišćeni direktni metod ne nameće apriori, za razliku od [7], nikakva ograničenja u pogledu oblika eliptične konture.

Međutim, kasnije se pokazuje, da je aproksimacija pri rešavanju ovog problema neophodna zbog oblika rešenja diferencijalne jednačine koju zadovoljava funkcija naponskih spregova. Ova rešenja su izražena u obliku beskonačnih konvergentnih redova. Iz tog razloga smo i Erijevu naponsku funkciju ovog problema odredili u obliku beskonačnih konvergentnih redova.

Uvođenjem neophodne aproksimacije ograničava se broj problema koji mogu biti rešavani ovim metodom, ali je taj broj veći od broja problema koji mogu biti rešavani metodom izloženim u [7]. Analizom dobijenih rezultata zaključujemo da je broj problema koji mogu biti rešavani ovim metodom približno jednak broju problema za koje klasična teorija elastičnosti daje prihvatljiva rešenja u smislu geometrijskih karakteristika eliptične konture. Naime, poznato je da se rešenje klasične teorije elastičnosti ne može primeniti kod uskih eliptičnih

kontura, odnosno da u takvim slučajevima ovo rešenje gubi smisao.

Mi smo u četvrtoj glavi, zadržavajući se na određenoj aproksimaciji, $\lambda=3$ kako smo je nazvali, odredili nepoznate konstante integracije u skladu sa zadatim graničnim uslovima. Konstante A , d_0 i e_0 odredili smo iz zadatih graničnih uslova u beskonačnosti i videli da njihov oblik ne zavisi od korišćene aproksimacije, dok oblik ostalih konstanti, koje se određuju iz konturnih uslova, zavisi od nje. Pri tome smo pokazali da su dobijeni sistemi jednačina za određivanje nepoznatih konstanti integracije saglasni. Naš postupak u rešavanju zadatog problema je nov i u okviru klasične teorije elastičnosti, ili je, možda, bolje reći, za nas nov, s obzirom na literaturu koja nam je bila dostupna.

U slučaju aproksimacije $\lambda=3$ dati su izrazi za koordinate tenzora napona i naponskih spregova kao i oblik naponskih funkcija i određene konstante integracije. Izrazi za koordinate tenzora napona i naponskih spregova i oblik naponskih funkcija dobijeni su iz odgovarajućih opštih izraza koji su prethodno dati. Iz dobijenih relacija, daljom analizom, može se pokazati da su uticaji naponskih spregova najizraženiji u okolini otvora, dok se u dovoljno udaljenim tačkama njihov uticaj gubi, što je u skladu sa našom pretpostavkom da je tenzor napona u tim tačkama simetričan. Dalje, pokazuje se, zavisno od pravca sile zatezanja, da je u jednom delu oblasti koja je bliska konturi otvora, uticaj naponskih spregova izražen povećanjem ukupnog napona, dok je u drugom delu te oblasti ovaj uticaj izražen smanjenjem ukupnog napona, u odnosu na odgovarajuće vrednosti u klasičnoj teoriji elastičnosti. U slučaju kada je sila zatezanja upravna na dužu osu elipse, ukupni napon u tačkama bliskim krajevima duže ose je manji, dok je u tačkama bliskim kra-

jevima kraće ose veći.

Dobijeno aproksimativno rešenje omogućava da se dosta jednostavno reše i neki drugi problemi ravne deformacije sa stanovišta Mindlinove linearne teorije elastičnosti sa naponskim spregovima. Tako, naprimer, u slučajevima kada je $\beta = \frac{\pi}{2}$, odnosno $\beta = 0$, iz ovog opšteg rešavanja dobijamo aproksimativna rešenja zatezanja u pravcu kraće ose (što je uradjeno u petoj glavi), odnosno u pravcu duže ose elipse. Superpozicijom ovih rešenja može se dobiti rešenje takozvanog ravnomernog naprezanja beskonačne oblasti sa eliptičnim otvorom. Takođe, iz ovog rešenja se može lako odrediti i rešenje u slučaju čistog smicanja, superpozicijom dva slučaja jednoosnog zatezanja: u pravcu $\beta = \frac{\pi}{4}$ i u pravcu $\beta = \frac{3\pi}{4}$. Bilo bi interesantno odrediti vrednost cirkularnog napona u ovom slučaju u tačkama $\text{tg } \nu = \text{tg } \mu_0 = \frac{b}{a}$, jer u njima ima najveću vrednost.

Naš drugi zadatak u okviru ove teze, čiji smo poseban interes istakli, bio je određivanje raspodele napona i naponskih spregova u slučaju kada sila deluje u pravcu kraće ose elipse. Rešenje ovog problema jednoosnog zatezanja dobili smo iz opšteg rešenja, uzimajući da je $\beta = \frac{\pi}{2}$. U prethodnoj analizi uticaja naponskih spregova na raspodelu napona u oblasti sa eliptičnim otvorom obuhvaćen je i ovaj slučaj. Ono što ga čini posebno značajnim je to, što se u njemu, u krajnjim tačkama duže ose elipse pojavljuju maksimalne vrednosti napona koji se može pojaviti u ovoj vrsti problema. S tim u vezi, odredili smo i aproksimativni izraz za određivanje faktora koncentracije napona, što je bilo postavljeno kao treći, poslednji, zadatak ove teze.

Uticaj naponskih spregova na koncentraciju napona odražava se u manjoj vrednosti faktora koncentracije napona nego što je njegova vrednost dobijena u klasičnoj teoriji elastičnosti.

Mi smo ovo umanjenje izrazili procentualno, računato u odnosu na aproksimativnu vrednost u klasičnoj teoriji, u dva konkretna slučaja. Na osnovu dobijenih rezultata zaključujemo da je uticaj naponskih spregova veći ukoliko je elipsa uža. Smatramo da bi u našem daljem radu bilo interesantno ispitati promenu procentualnog umanjenja faktora koncentracije napona u zavisnosti od promene oblika elipse.

Pitanje koje i dalje ostaje otvoreno je određivanje uticaja naponskih spregova u slučaju vrlo uskih elipsi. U cilju rešavanja takvih problema bilo bi potrebno odrediti rešenje biharmonijske diferencijalne jednačine u nekom drugom obliku, tako da Erijeva naponska funkcija bude definisana i u singularnim tačkama elipse, $\mu = a$, $\nu = 0, \pi$. Funkcija naponskih spregova, kao i njeni izvodi, definisana je u ovim tačkama, jer su modifikovane radijalne Matjeove funkcije za q negativno, kao i njihovi izvodi, oblika zbira proizvoda modifikovanih Beselovih funkcija prve i druge vrste reda n , definisane u singularnim tačkama.

Ovo pitanje, kao i drugi problemi koji se mogu sagledati na osnovu rezultata ove teze, biće ubuduće cilj naših istraživanja.

L I T E R A T U R A

1. R.D.Mindlin : Effects of Couple-Stresses on Stress Concentrations, Experimental Mechanics, January, 1963.
2. R.D.Mindlin : Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity, Arch.Rat.Mech.Anal., 11, 415-448 (1962).
3. R.D.Mindlin : Stress Functions for a Cosserat Continuum, Int.J.Solid and Struct., 1965, vol.1, 265-271.
4. R.D.Mindlin and N.N.Eshel : On First Strain-Gradient Theories in Linear Elasticity, Int. J.Solid and Struct., 1968, vol.4, 109-124.
5. C.Truesdell and R.A.Toupin : The Classical Field Theories, Encyclopaedia of Physics, vol. III, part 1, ed.S.Flüge, Berlin, Springer-Verlag, 1960.
6. R.A.Toupin : Elastic Materials with Couple-Stresses, Arch. Rat.Mech.Anal., 11, 385-414, (1962).
7. G.N.Savin : Raspredelenie naprjashenija okolo otverstii, Kiev, 1968.
8. M.Plavšić : Mehanika prostih polarnih kontinuuma, matematički institut, Beograd, 1975.
9. Ph.M.Morse, H.Feshbach : Methods of Theoretical Physics, 1953.

10. N.I.Muskhelishvili : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity,1953.
11. S.Timošenko, J.N.Gudier : Teorija elastičnosti,Gradjevin-ska knjiga,Beograd,1962.
12. N.W.Mc Lachlan : Theory and Application of Mathieu Functions,Oxford,1947.
13. Tables Relating to Mathieu Functions,National Bureau of Standards,Applied Mathematics Series,1967.
14. T.P.Andjelić : Tenzorski račun,Naučna knjiga,Beograd,1967.
15. V.K.Stokes, D.C.Leigh : On Complex Potentials in Two-dimensional Linearized Elasticity with Couple-Stresses,Acta Mechanica,8, 304-322,(1969).
16. G.N.Watson : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press,1966.
17. E.T.Whittaker and G.N.Watson : A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1946.
18. N.Naerlović-Veljković,M.Plavšić : Teorija elastičnosti,Nau-čna knjiga,Beograd,1960.

19. S.Milanović-Lazarević : Influence of Couple-Stresses on Stress Distribution in an Infinite Plate with an Elliptic Hole, Teorij-ska i primenjena mehanika, 12, 89-106, 1986.

