UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

PAVLE N. MLADENOVIĆ

OCENJIVANJE SPEKTRA STACIONARNOG NIZA

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 1985.

S A D R Ž A J

Mojim roditeljima

P R E D G O V O R

Metod spektralne analize vremenskih serija (stacionarnih slučajnih procesa) primenjuje se sve više u raznim oblastima nauke: fizici, geofizici, astronomiji, ekonomiji, biologiji, psihologiji, medicini, računarstvu, a takođe i u tehnici. U poslednjih nekoliko desetina godina, u naučnoj literaturi posvećena je izuzetno velika pažnja spektralnoj analizi stacionarnih slučajnih procesa. Pojavio se veliki broj radova i monografija, a takođe mnogo različitih procedura spektralne analize. Opširna bibliografija data je u monografijama [2], [9], [13], [38].

Pokušaji strogog zasnivanja različitih metoda spektralne analize, koji se primenjuju u rešavanju mnogih praktičnih zadataka, nailazili su na ozbiljne teorijske teškoće, pa je i do danas ostalo mnogo nerešenih problema u toj oblasti.

Spektralnoj analizi stacionarnih procesa (ili tačnije, ocenjivanju spektralne gustine) posvećena je i ova disertacija, koja se sastoji iz četiri glave.

Prva glava ima uvodni karakter i u njoj je izloženo savremeno stanje tačkastih ocena spektra stacionarnog slučajnog niza.

Druga glava je posvećena asimptotskoj normalnosti periodogramnih ocena spektralne gustine Gausovih procesa i brzini konvergencije tih ocena. Originalni rezultati druge glave su teoreme 2.3.1. 2.3.2. i 2.4.1.

U trećoj glavi razmatra se periodogramna ocena spektralne gustine sa nove tačke gledišta: tačnije, kao slučajna funkcija na intervalu frekvencija $[-\pi,\pi]$. Izučava se problem ravnomerne konvergencije periodogramnih ocena. Originalni su svi rezultati koji su dokazivani u trećoj glavi disertacije. (Poznata tvrđenja, koja su korišćena, formulisana su bez dokaza i navedena je literatura.)

U četvrtoj glavi je pokazano kako se rezultati treće glave prenose na slučaj višedimenzionalnih stacionarnih slučajnih nizova.

Disertacija je napisana u toku školske 1983/84. i 1984/85. god. koje sam proveo na Moskovskom državnom univerzitetu "M.V. Lomonosov" (MGU). Rezultati su više puta bili izlagani na naučnim seminarima MGU, konferencijama mladih naučnika MGU, a takođe na Četvrtoj međunarodnoj viljnjuskoj konferenciji iz teorije verovatnoća i matematičke statistike ([31-32]).

Spektralnu analizu vremenskih serija izučavao sam kod I.G. Žurbenka, kome ovom prilikom izražavam zahvalnost za pomoć i podršku.

Oraovica (kod Grdelice),
28. avgust 1985. godine.

P.N. Mladenović

GLAVA I

OCENA SPEKTRALNE GUSTINE STACIONARNOG NIZA U FIKSIRANOJ TAČKI

UVODNI DEO

Neka je $T \neq \emptyset$ proizvoljan skup i $(\Omega,\mathcal{M},P)$ prostor verovatnoća. Realna slučajna funkcija, definisana na parametarskom prostoru T, je funkcija $X : T\times\Omega \longrightarrow R$ sa svojstvom da je za svako fiksirano $t \in T$ $X(t) = X(t,\omega)$ merljiva funkcija argumenta $\omega \in \Omega$, tj. slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{M},P)$. Slučajnu funkciju zapisivaćemo i u obliku familije slučajnih veličina $\{X(t),\ t \in T\}$, a ako je jasno o kom parametarskom prostoru je reč, pisaćemo prosto: slučajna funkcija X.

Ako je $T = Z$, gde je Z skup celih brojeva, slučajnu funkciju $\{X(t),\ t \in Z\}$ zovemo slučajnim procesom sa diskretnim parametrom ili slučajnim nizom. Ako je $T = R$, gde je R skup realnih brojeva, slučajnu funkciju $\{X(t),\ t \in R\}$ zovemo slučajnim procesom sa neprekidnim parametrom. U daljem je uvek $T \subset R$ beskonačan skup i X slučajni proces na T.

Neka je $n \geq 1$ i $\{t_1,\ldots,t_n\} \subset T$. Raspodelu slučajnog vektora $(X(t_1),\ldots,X(t_n))$ u n-dimenzionalnom Euklidovom prostoru R^n zovemo konačnodimenzionalnom raspodelom slučajnog procesa X, a odgovarajuću funkciju raspodele označavamo sa

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = P\{X(t_1) < x_1,\ldots,X(t_n) < x_n\}$$

Fiksiranom $\omega \in \Omega$ odgovara realna funkcija $X(t,\omega)$, $t \in T$, koju zovemo trajektorijom ili realizacijom slučajnog procesa X. Trajektorije pripadaju nekom prostoru funkcija, u opštem slučaju prostoru R^T svih realnih funkcija definisanih na T. Za $t_1,\dots,t_n \in T$, neka je $\pi_{t_1,\dots,t_n} : R^T \longrightarrow R^n$ funkcija određena sa:

$$\pi_{t_1,\dots,t_n}(x) = (x(t_1),\dots,x(t_n)),\ x \in R^T.$$

Skup $A \subset R^T$ zovemo cilindrom, ako se može predstaviti u obliku:

$$A = \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B),\quad B \subset R^n,$$

za neke $t_1,\dots,t_n \in T$. Ako je B Borelov skup u prostoru R^n, onda A zovemo Borelovim cilindrom u R^T. Neka je $\mathfrak{B}$ minimalna σ-algebra podskupova R^T, koja sadrži sve Borelove cilindre. Familiju $\mathfrak{B}$ zovemo Borelovom σ-algebrom, a njene elemente Borelovim skupovima u prostoru R^T. Sledeće tvrđenje dokazao je Kolmogorov [24]:

a) Familija konačnodimenzionalnih raspodela proizvoljnog slučajnog procesa jednoznačno definiše raspodelu verovatnoća u prostoru R^T za sve skupove σ-algebre $\mathfrak{B}$, tj. za sve Borelove skupove prostora R^T.

b) Neka je a priori data familija funkcija raspodela $F_{t_1,\dots,t_n}$ gde $t_1,\dots,t_n \in T$. Tada postoji slučajni proces $\{X(t),\ t \in T\}$ sa istim funkcijama konačnodimenzionalnih raspodela, ako i samo ako data familija funkcija zadovoljava uslove simetrije i saglasnosti:

$$F_{t_{j_1},\dots,t_{j_n}}(x_{j_1},\dots,x_{j_n}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$$

$$F_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_k,+\infty,\dots,+\infty)$$

gde je $k < n$, a $(j_1,\dots,j_n)$ je proizvoljna permutacija skupa $\{1,\dots,n\}$.

Za slučajni proces $\{X(t),\ t \in T\}$, gde je $T = Z$ ili $T = R$, kažemo da je strogo stacionaran, ako za proizvoljne $t_1,\dots,t_n \in T$, raspodela slučajnog vektora $(X(t_1+\tau),\ldots,X(t_n+\tau))$ne zavisi od $\tau \in T$. Ako za svako $t \in T$ važi nejednakost $EX^2(t) < +\infty$, onda iz stroge stacionarnosti slede jednakosti:

$$EX(t) = \text{const},\ t \in T, \tag{1.0.1}$$

$$EX(t)X(s) = K(t-s),\ t,s \in T. \tag{1.0.2}$$

Slučajni proces sa konačnim drugim momentima za koji važe jednakosti (1.0.1) i (1.0.2), zovemo stacionarnim u širem smislu procesom, stacionarnim drugog reda procesom ili prosto - stacionarnim procesom. Prema tome, klasa strogo stacionarnih procesa sa konačnim drugim momentima, predstavlja potklasu u klasi svih stacionarnih procesa.

Često je zgodno razmatrati kompleksne slučajne veličine (samim tim i kompleksne slučajne peocese). Kompleksna slučajna veličina ima oblik $Y=Y_1+iY_2$, gde su Y_1 i Y_2 realne slučajne veličine i važi jednakost $i^2=-1$. Kompleksna slučajna veličina $Y=Y_1+iY_2$ prima vrednosti u kompleksnoj ravni i predstavlja na drugi način slučajni vektor (Y_1,Y_2), a njeno matematičko očekivanje je $EY=EY_1+iEY_2$.

§ 1.1. SPEKTRALNA GUSTINA I SPEKTRALNA FUNKCIJA STACIONARNOG NIZA

Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ stacionaran u širem smislu slučajni proces sa očekivanjem $EX(t)=0$ i nizom kovarijacija $\{K(t),\ t\in Z\}$. Furijeova transformacija niza kovarijacija data je sa:

$$\frac{K(0)}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{t=1}^{\infty}K(t)\cos\lambda t=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}K(t)\cos\lambda t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}K(t)e^{i\lambda t},\quad -\pi\le\lambda\le\pi. \tag{1.1.1}$$

Ako je ispunjen uslov

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty}|K(t)|<+\infty \tag{1.1.2}$$

onda red (1.1.1) konvergira ravnomerno na intervalu $[-\pi,\pi]$ i definiše funkciju

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}K(t)e^{i\lambda t},\quad -\pi\le\lambda\le\pi. \tag{1.1.3}$$

Iz jednakosti (1.1.3) dobijamo da za svako $t\in Z$ važi jednakost

$$K(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda t\cdot f(\lambda)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda t}f(\lambda)\,d\lambda \tag{1.1.4}$$

tj. $K(t)$, $t\in Z$, su Furijeovi koeficijenti funkcije $f(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$.

Funkcija $f(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, ako postoji, zove se spektralna gustina stacionarnog niza $\{X(t),\ t\in Z\}$.

Prema tome, niz kovarijacija definiše pri uslovu (1.1.2) spektralnu gustinu i obrnuto, spektralna gustina određuje kovarijacioni niz. Ako je definisana spektralna gustina $f(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, onda definišemo funkciju F na sledeći način:

$$F(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}f(x)\,dx,\quad -\pi\le\lambda\le\pi. \tag{1.1.5}$$

Integracijom član po član jednakosti (1.1.3) dobijamo:

$$F(\lambda)=\frac{K(0)}{2\pi}(\lambda+\pi)+\frac{1}{\pi}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t}K(t)\sin\lambda t. \tag{1.1.6}$$

a jednakost (1.1.4) možemo zapisati u obliku:

$$K(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda t \, dF(\lambda) \tag{1.1.7}$$

Jednakost (1.1.7) ima opštiji karakter. Tačnije, važi sledeća

TEOREMA 1.1.1. ([2], str. 418)

Za svaki kovarijacioni niz $\{K(t),\ t \in Z\}$ postoji jedna i samo jedna monotono neopadajuća funkcija $F : [-\pi, \pi] \longrightarrow R$, sa simetričnim u odnosu na nulu priraštajima, neprekidna sa desne strane na intervalu $(-\pi, \pi)$, $F(-\pi) = 0$ i takva da za svako celo t važi jednakost (1.1.7).

Funkciju F, o čijoj egzistenciji govori teorema 1.1.1., zovemo spektralna funkcija stacionarnog procesa čiji je kovarijacioni niz $\{K(t),\ t \in Z\}$. Jasno je da spektralna funkcija, pomnožena sa $(K(0))^{-1}$, predstavlja funkciju raspodele verovatnoća na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Spektralna funkcija $F(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi$, može se (jednoznačno) predstaviti u obliku $F = F_1 + F_2 + F_3$, gde su funkcije F_1, F_2, F_3 određene na sledeći način:

$$F_1(\lambda) = \sum_{k \in A} \delta_{c_k}(\lambda) \{ F(c_k) - F(c_k - 0) \}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

gde je $\{c_k,\ k \in A\}$ skup svih tačaka prekida funkcije F (uvek najviše prebrojiv zbog monotonosti F) i

$$\delta_a(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < a \\ 1 & \lambda \geq a \end{cases}, \quad a \in R,$$

$$F_2(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} (F(x) - F_1(x))' \, dx, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

$$F_3(\lambda) = F(\lambda) - F_1(\lambda) - F_2(\lambda), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

Funkcija F_1 je monotono neopadajuća, neprekidna sa desne strane i u tački c_k ima skok $F(c_k) - F(c_k - 0)$. Zovemo je diskretnim delom funkcije F. Funkcija F_2 je apsolutno neprekidna i monotono neopadajuća. Funkcija F_3 je neprekidna, monotono neopadajuća i singularna, tj. skoro svuda (u smislu Lebegove mere) na intervalu $[-\pi,\pi]$ važi $F_3'(\lambda)=0$. U slučaju kada je F apsolutno neprekidna funkcija, važi jednakost $F=F_2$. Tada definišemo spektralnu gustinu $f(\lambda)$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$, kao izvod spektralne funkcije F. Ako je potrebno razmatrati spektralnu gustinu kao funkciju definisanu na čitavoj realnoj pravoj, dodefinisaćemo periodično sa periodom 2π. Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov egzistencije spektralne gustine:

TEOREMA 1.1.2. ([22], str. 379)

Spektralna funkcija $F(\lambda), -\pi\leq\lambda\leq\pi$, stacionarnog u širem smislu slučajnog niza $\{X(t),\ t\in Z\}$ je apsolutno neprekidna, ako i samo ako niz $\{X(t),\ t\in Z\}$ ima sledeću reprezentaciju:

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \xi_{t-k}\ ,\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2<+\infty\ ,$$

gde je $\{\xi_t,\ t\in Z\}$ niz ortogonalnih (nekoreliranih) slučajnih veličina i $E|\xi_t|^2=1$.

Navešćemo neke osobine spektralne gustine f.

1) f je nenegativna funkcija (sledi iz činjenice da je F monotono neopadajuća funkcija).

2) f je parna funkcija (sledi iz činjenice da spektralna funkcija ima simetrične u odnosu na nulu priraštaje ili iz (1.1.3)).

3) Ako važi (1.1.2), onda red (1.1.1) konvergira apsolutno i ravnomerno, pa je f neprekidna funkcija. Dovoljan uslov da važi (1.1.2), tj. da suma apsolutnih vrednosti Furijeovih koeficijenata funkcije f konvergira, jeste da za neke $K>0$ i $\frac{1}{2}<\alpha<1$ i sve $x,y\in[-\pi,\pi]$ važi nejednakost ([2], str. 423):

$$|f(x)-f(y)|\leq K\,|x-y|^{\alpha}\ .$$

Jedno od svojstava spektralne funkcije daje sledeća teorema o spektralnoj reprezentaciji stacionarnog procesa:

TEOREMA 1.1.3. ([47] , str. 481)

Stacionaran u širem smislu slučajni niz $\{X(t),\ t\in Z\}$, sa spektralnom funkcijom $F(\lambda), -\pi\le\lambda\le\pi$, ima sledeću spektralnu reprezentaciju

$$X(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,dY(\lambda) \qquad (1.1.8)$$

gde je $Y(\lambda), -\pi\le\lambda\le\pi$, slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima za koji važi $E|dY(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$. Ako je $\{X(t),\ t\in Z\}$ realan slučajni niz, onda se jednakost (1.1.8) može zapisati u obliku

$$X(t) = \int_0^{\pi}\left(\cos t\lambda\, dU(\lambda) + \sin t\lambda\, dV(\lambda)\right)$$

gde su $U(\lambda)$ i $V(\lambda)$, $0\le\lambda\le\pi$, realni slučajni procesi sa ortogonalnim priraštajima za koje važe sledeće jednakosti

$$E(dU(\lambda))^2 = E(dV(\lambda))^2 = dG(\lambda), \qquad \lambda\in(0,\pi]$$

$$E(dU(\lambda))^2 = dG(\lambda), \qquad \lambda\in[0,\pi]$$

$$E(dU(\lambda)dV(\mu)) = 0, \qquad \lambda,\mu\in[0,\pi]$$

gde je funkcija G definisana sa

$$G(\lambda) = 2(F(\lambda)-F(0+))+(F(0+)-F(0-)), \qquad \lambda\in(0,\pi]$$

Navešćemo sada neke primere stacionarnih procesa sa izrazima za spektralnu gustinu i spektralnu funkciju:

Primer 1.1.1. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa kovarijacionim nizom $K(0)=DX(t)=\sigma^2>0$ i $K(t)=0$, pri $t\ne 0$. Tada je

$$F(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(\lambda+\pi)\ , \quad f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\ , \quad -\pi\le\lambda\le\pi .$$

Primer 1.1.2. Neka je $X(t)=X$ za svako $t\in Z$, $DX=\sigma^2>0$. Tada je $K(t)=\sigma^2$ pri $t\in Z$ i

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & -\pi\le\lambda<0 \\ \sigma^2 & 0\le\lambda\le\pi . \end{cases}$$

Primer 1.1.3. Neka je

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(A_j \cos\lambda_j t + B_j \sin\lambda_j t\right), \quad t \in Z, \tag{1.1.9}$$

gde su A_j i B_j slučajne veličine za koje važi

$$EA_j = EB_j = 0, \quad EA_j^2 = EB_j^2 = \sigma_j^2, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$EA_i A_j = EB_i B_j = 0, \quad i \neq j, \quad i,j=1,2,\ldots,n,$$

$$EA_i B_j = 0, \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Pretpostavimo da važi $0 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_n \leq \pi$. Tada je

$$K(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \cos\lambda_j t, \quad t \in Z.$$

$F(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi$, je stepenasta funkcija sa skokovima $\frac{1}{2}\sigma_j^2$ u svakoj od tačaka $\pm\lambda_j$. Ako je $\lambda_1 = 0$ onda funkcija F ima skok σ^2 u tački $\lambda = 0$. Pri tome važi

$$K(0) = F(\pi) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

Jasno je da za svaki stacionaran proces postoji proces koji ima oblik (1.1.9) i čija spektralna funkcija aproksimira (u uniformnoj metrici) sa unapred datom tačnošću spektralnu funkciju polaznog procesa. Iz teoreme 1.1.3. sledi da se realan stacionaran proces može predstaviti u obliku zbira dva integrala i, pri tome je jasna analogija između integralnih suma koje odgovaraju tim integralima i procesa oblika (1.1.9).

Ako su A_j i B_j normalno raspodeljene slučajne veličine, onda se proces (1.1.9) može predstaviti u obliku

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j U_j^{1/2} \cos(\lambda_j t - \theta_j), \quad t \in Z,$$

gde su $U_1, \ldots, U_n$ nezavisne slučajne veličine koje imaju χ^2-raspodelu sa dva stepena slobode, a $\theta_1, \ldots, \theta_n$ su nezavisne slučajne veličine sa ravnomernom raspodelom na intervalu $[0, 2\pi]$.

Primer 1.1.4. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ niz slučajnih veličina,

$EX(t)=0,\quad EX^2(t)=\sigma^2,\quad EX(t)X(s)=0$ za $t\neq s$ i

$$Y(t)=\sum_K \alpha_K X(t-K),\quad \sum_K \alpha_K^2<+\infty.$$

Slučajni niz $\{Y(t),\ t\in Z\}$ naziva se procesom pokretnih sredina, a njegova spektralna gustina je

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left|\sum_K \alpha_K e^{i\lambda K}\right|^2.$$

Primer 1.1.5. Autoregresioni proces reda p $\{Y(t),t\in Z\}$ definisan je jednakošću

$$\sum_{K=0}^{p}\beta_K Y(t-K)=X(t),\quad \beta_0=1,$$

gde je $\{X(t)\}$ slučajni niz iz primera 1.1.4. Ako su sva rešenja $x_1,\dots,x_p$ jednačine $x^p+\beta_1 x^{p-1}+\dots+\beta_p=0$, manja od 1 po apsolutnoj vrednosti, onda se proces $Y(t)$ može predstaviti u obliku

$$Y(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta_K X(t-K)$$

Ako je $f(\lambda),-\pi\leq\lambda\leq\pi$, spektralna gustina slučajnog procesa $\{Y(t)\}$, onda važi

$$\left|\sum_{K=0}^{p}\beta_K e^{i\lambda K}\right|^2 f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}$$

pa dobijamo

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{K=0}^{p}\beta_K e^{i\lambda K}\right|^{-2}.$$

Primer 1.1.6. Neka je $\{X(t)\}$ niz slučajnih veličina iz primera 1.1.4. i $\{Y(t)\}$ slučajni niz definisan jednakošću

$$\sum_{K=0}^{p}\beta_K Y(t-K)=\sum_{\ell=0}^{q}\alpha_\ell X(t-\ell),\quad \alpha_0=\beta_0=1.$$

Spektralna gustina slučajnog procesa $\{Y(t)\}$ data je sa

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{\ell=0}^{q}\alpha_\ell e^{i\lambda(q-\ell)}\right|^2\left|\sum_{K=0}^{p}\beta_K e^{i\lambda(p-K)}\right|^{-2}.$$

Označimo sa H Hilbertov prostor realnih slučajnih veličina koje imaju konačan drugi momenat, pri čemu je skalarni proizvod sl. veličina X i Y određen kao EXY. Neka je $\{Y(t),\ t\in Z\}$ stacionaran u širem smislu slučajni niz i, neka je $\hat{Y}(t)$ projekcija slučajne veličine Y(t) na potprostor H_{t-1} generisan sledećim slučajnim veličinama: Y(t-1), Y(t-2),... Ako je $E(Y(t)-\hat{Y}(t))^2 = \sigma^2 = 0$, slučajni proces $\{Y(t)\}$ zovemo determinisanim. Ako je $E(Y(t)-\hat{Y}(t))^2 = \sigma^2 > 0$, proces $\{Y(t)\}$ zovemo regularnim.

Primer 1.1.7. (Voljdova reprezentacija regularnog stacionarnog procesa,[2], str. 456) Neka je $\{Y(t),\ t\in Z\}$ regularan stacionaran slučajni proces sa matematičkim očekivanjem $EY(t)=0$. Tada proces $\{Y(t)\}$ možemo predstaviti u obliku $Y(t)=W(t)+Z(t)$, $t\in Z$, gde je

$$W(t) = X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X(t-k),\quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < +\infty,$$

$$EX(t)=EZ(t)=0,\quad EX^2(t)=\sigma^2,$$

$$EX(t)X(s)=0,\ \text{ako je } s\neq t,$$

$$EX(s)Z(t)=0,\ \text{ako } X(s)\in H_s,$$

$$Z(t)\in H_{-\infty} = \bigcap_{s=0}^{\infty} H_{t-s}.$$

Nizovi $\{\alpha_k\}$ i $\{X(s)\}$ jednoznačno su određeni. Spektralna gustina slučajnog procesa $\{W(t)\}$ određena je sa

$$\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s e^{i\lambda s}\right|^2.$$

Spektralna funkcija slučajnog procesa $\{Z(t)\}$ ne sadrži apsolutno neprekidnu komponentu, već se sastoji samo iz singularne i diskretne komponente.

Primenjujući Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji neprekidne funkcije trigonometrijskim polinomom, lako dokazujemo sledeću teoremu:

TEOREMA 1.1.4. ([2], str. 446)

Ako je spektralna gustina $f(\lambda)$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$, neprekidna funkcija, onda za svako $\varepsilon>0$ postoji spektralna gustina oblika

$$h_m(\lambda) = \sum_{j=-m}^{m} c_j e^{i\lambda j} = \sum_{j=-m}^{m} c_j \cos \lambda j$$

gde je $c_j = c_{-j} \in R$, $h_m(\lambda) > \frac{\varepsilon}{2}$ za $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, takva da važi

$$\sup_{|\lambda| \leq \pi} |f(\lambda) - h_m(\lambda)| < \varepsilon .$$

Navodimo i sledeće posledice teoreme 1.1.4.

Posledica 1.1.1. Ako je spektralna gustina $f(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, neprekidna, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan proces pokretnih sredina sa pozitivnom spektralnom gustinom $h_q(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, za koju važi nejednakost

$$\sup_{|\lambda| \leq \pi} |f(\lambda) - h_q(\lambda)| < \varepsilon .$$

Posledica 1.1.2. Ako je $f(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, neprekidna spektralna gustina, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji autoregresioni proces reda p sa spektralnom gustinom $g_p(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, za koju važi nejednakost

$$\sup_{|\lambda| \leq \pi} |f(\lambda) - g_p(\lambda)| < \varepsilon .$$

Posledica 1.1.3. Neka je $f(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, neprekidna spektralna gustina. Tada, za svako $\varepsilon > 0$, postoji proces pokretnih sredina (autoregresioni proces) konačnog reda sa spektralnom gustinom $f_m(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, takav da za odgovarajuće kovarijacione nizove $\{K(t)\}$ i $\{K_m(t)\}$, važi nejednakost

$$\sup_{t \in Z} |K(t) - K_m(t)| < \varepsilon .$$

Dokazi posledica 1.1.1. i 1.1.2. dati su u [2], str. 446.

Dokaz posledice 1.1.3. Koristeći posledicu 1.1.1. (ili 1.1.2.), dobijamo da za svako $\varepsilon > 0$, spektralnu gustinu f_m možemo izabrati tako da važi

$$\sup_{|\lambda| \leq \pi} |f(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} .$$

Koristeći jednakost (1.1.4) dalje dobijamo

$$|K(t) - K_m(t)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda t \left(f(\lambda) - f_m(\lambda)\right) d\lambda \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_m(\lambda)| \, d\lambda \leq \varepsilon .$$

Pretpostavimo da na osnovu uzorka $(X(1),X(2),\dots,X(N))$ treba oceniti vrednost nepoznate spektralne gustine f stacionarnog niza $\{X(t),\ t\in Z\}$ u fiksiranoj tački $\lambda\in[-\pi,\pi]$. Teorema 1.1.4. i posledice 1.1.1.-1.1.3. pokazuju da se neprekidna spektralna gustina može proizvoljno dobro (u uniformnoj metrici) aproksimirati spektralnom gustinom procesa pokretnih sredina ili autoregresionog procesa. Ta činjenica daje mogućnost da (pod pretpostavkom da je spektralna gustina razmatranog procesa neprekidna) vrednost $f(\lambda)$ ocenjujemo ocenom oblika

$$\hat{f}_m^{(N)}(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}\alpha_k e^{i\lambda k}\right|^2$$

ili

$$\hat{f}_m^{(N)}(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}\beta_k e^{i\lambda k}\right|^{-2}$$

pri čemu je m nepoznat parametar, a (nepoznati) koeficijenti α_k ili β_k zavise od uzorka $(X(1),X(2),\dots,X(N))$. Takav postupak je dovoljno glomazan zbog potrebe određivanja velikog (ne unapred fiksiranog) broja nepoznatih koeficijenata (funkcija uzorka) tako da ocena ima željena svojstva. Mi ćemo, kasnije, razmatrati ocene koje ne zavise od nepoznatih parametara.

Napomenimo da ćemo u daljem izlaganju razmatrati samo stacionarne u širem smislu slučajne procese sa apsolutno neprekidnom spektralnom funkcijom, tj. stacionarne procese za koje je definisana spektralna gustina.

§ 1.2. SEMIINVARIJANTE SLUČAJNOG PROCESA. SPEKTRI VIŠEG REDA

Neka je $X = (X_1,\dots,X_k)$ slučajni vektor sa karakterističnom funkcijom

$$\varphi_X(\alpha) = Ee^{i(\alpha,X)}, \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k) \in R^k,$$

gde je $(\alpha,X) = \alpha_1 X_1+\dots+\alpha_k X_k$. Pretpostavimo da za neko $n \geqslant 1$ važi $E|X_i|^n < +\infty$, $i=1,2,\dots,k$. Ako su $\nu_1,\dots,\nu_k$ nenegativni celi brojevi takvi da je $\nu_1+\dots+\nu_k \leqslant n$, onda se (lako) dokazuje da postoje mešoviti momenti $EX_1^{\nu_1}\dots X_k^{\nu_k}$ i neprekidni parcijalni izvodi

$$\frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_k}}{\partial\alpha_1^{\nu_1}\dots\partial\alpha_k^{\nu_k}}\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$$

Koristeći Tejlorovu formulu možemo funkciju $\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ u okolini nule predstaviti na sledeći način

$$\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_k \leq n} \frac{i^{\nu_1+\dots+\nu_k}}{\nu_1!\dots\nu_k!} M_X^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} \alpha_1^{\nu_1}\dots\alpha_k^{\nu_k} + o(|\alpha|^n)$$

gde je $|\alpha| = |\alpha_1|+\dots+|\alpha_k|$ i

$$M_X^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} = EX_1^{\nu_1}\dots X_k^{\nu_k} = \frac{1}{i^{\nu_1+\dots+\nu_k}}\frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_k}}{\partial\alpha_1^{\nu_1}\dots\partial\alpha_k^{\nu_k}}\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\Big|_{\alpha_1=\dots=\alpha_k=0}.$$

Koeficijent $M_X^{(\nu_1,\dots,\nu_k)}$ zovemo mešoviti momenat reda $(\nu_1,\dots,\nu_k)$ slučajnog vektora $(X_1,\dots,X_k)$.

Kako je $\varphi_X(0,\dots,0)=1$ i $\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, $\alpha_j \in R$, je neprekidna funkcija, to postoji $\varepsilon>0$ tako da pri $|\alpha|<\varepsilon$ važi $\varphi_X(t)\neq 0$. Tada, pri $|\alpha|<\varepsilon$, postoje i neprekidni su parcijalni izvodi

$$\frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_k}}{\partial\alpha_1^{\nu_1}\dots\partial\alpha_k^{\nu_k}}\ln\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k),$$

gde je $\ln z$ glavna vrednost logaritma, tj. $\ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta$.

Funkciju $\ln\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ u okolini nule predstavljamo u obliku:

$$\ln\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_k\le n} \frac{i^{\nu_1+\dots+\nu_k}}{\nu_1!\cdots\nu_k!} S_X^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} \alpha_1^{\nu_1}\cdots\alpha_k^{\nu_k} + \sigma(|\alpha|^n)$$

gde je

$$S_X^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} = \frac{1}{i^{\nu_1+\dots+\nu_k}} \frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_k}}{\partial\alpha_1^{\nu_1}\dots\partial\alpha_k^{\nu_k}} \ln\varphi_X(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\Big|_{\alpha_1=\dots=\alpha_k=0}.$$

Koeficijent $S_X^{(\nu_1,\dots,\nu_k)}$ naziva se semiinvarijanta reda $(\nu_1,\dots,\nu_k)$ slučajnog vektora $X=(X_1,\dots,X_k)$.

Neka je $\{X(t),\ t\in T\}$ slučajni proces, gde je T skup celih ili skup realnih brojeva i $EX(t)=0$. Uvedimo oznake (kao u [17]):

$\mathbf{C}$ - skup kompleksnih brojeva,

$\mathbf{C}^{\omega}$ - prostor funkcija $\alpha: T\to\mathbf{C}$ koje se razlikuju od nule samo na konačnom skupu tačaka iz T,

$\mathbf{N}^{\omega}$ - prostor funkcija $\mu: T\to\{0,1,2,\dots\}$ koje se razlikuju od nule na konačnom skupu tačaka iz T.

Za funkciju $\mu\in\mathbf{N}^{\omega}$ određenu sa

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_j & t=t_j,\ j=1,\dots,k, \\ 0 & t\notin\{t_1,\dots,t_k\} \end{cases}$$

označimo: $|\mu| = \mu_1+\dots+\mu_k$, $\mu! = \mu_1!\cdots\mu_k!$,

$X^{\mu} = X_{t_1}^{\mu_1}\cdots X_{t_k}^{\mu_k}$, $EX^{\mu} = E\mu$, gde je $X_t = X(t)$,

$$S\mu = \frac{1}{i^{|\mu|}} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\alpha_1^{\mu_1}\dots\partial\alpha_k^{\mu_k}} \ln E\exp\{i(\alpha_1X_{t_1}+\dots+\alpha_kX_{t_k})\}\Big|_{\alpha_1=\dots=\alpha_k=0}$$

pri čemu pretpostavljamo da je $E|X_t|^{|\mu|}<+\infty$. Koeficijente $S\mu$ zovemo semiinvarijantama slučajnog procesa $\{X(t),\ t\in T\}$, a koeficijente $E\mu$ - mešovitim momentima istog procesa. Poznate su sledeće formule veza između mešovitih momenata i semiinvarijanata [28]:

$$E\mu = \sum_{\mu=\nu_1+\dots+\nu_q} \frac{1}{q!}\frac{\mu!}{\nu_1!\cdots\nu_q!} S\nu_1\cdots S\nu_q \tag{1.2.1}$$

$$S\mu = \sum_{\mu=\nu_1+\dots+\nu_q} \frac{(-1)^{q-1}}{q}\frac{\mu!}{\nu_1!\cdots\nu_q!} E\nu_1\cdots E\nu_q \tag{1.2.2}$$

gde se sabiranje vrši po svim uređenim razbijanjima

$$\mu = \nu_1 + \cdots + \nu_q, \quad \nu_j \in N^{\omega}, \quad |\nu_j| \geq 1, \quad q = 1, 2, \ldots, |\mu|.$$

Neka je $T = Z$, $\varphi \in C^{\omega}$, $\psi \in C^{\omega}$, $t \in Z$. Označimo

$$\varphi^{\psi} = \prod_{t \in Z} (\varphi(t))^{\psi(t)}, \quad \psi! = \prod_{t \in Z} (\psi(t))! \quad \text{gde je } 0^0 = 1 \text{ i } 0! = 1,$$

$$|\psi| = \sum_{t \in Z} \psi(t), \quad (\varphi, \psi) = \sum_{t \in Z} \varphi(t)\psi(t).$$

Na prostoru funkcija C^{ω} definišemo karakteristični funkcional procesa $\{X(t)\}$ na sledeći način

$$H(\alpha) = E e^{i(\alpha, X)} = E \exp\Big\{ i \sum_{t \in Z} \alpha(t) X(t) \Big\}, \quad \alpha \in C^{\omega}.$$

Semiinvarijante $S_n(t_1, \ldots, t_n)$ procesa $\{X(t)\}$ određujemo kao koeficijente formalnog razlaganja

$$\ln H(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{(t_1, \ldots, t_n) \in Z^n} S_n(t_1, \ldots, t_n)\, \alpha(t_1) \cdots \alpha(t_n) \tag{1.2.3}$$

a mešovite momente $M_n(t_1, \ldots, t_n)$ kao koeficijente formalnog reda

$$H(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{(t_1, \ldots, t_n) \in Z^n} M_n(t_1, \ldots, t_n)\, \alpha(t_1) \cdots \alpha(t_n) \tag{1.2.4}$$

Za funkcije $M_n(t_1, \ldots, t_n)$ i $S_n(t_1, \ldots, t_n)$ pretpostavljamo da su simetrične po argumentima $t_1, \ldots, t_n$. Sabiranje u formulama (1.2.3) i (1.2.4) vrši se po svim vektorima $(t_1, \ldots, t_n) \in Z^n$. Jasno je da neke od komponenata vektora $(t_1, \ldots, t_n)$ mogu biti međusobno jednake. Pri navedenim oznakama važe jednakosti

$$M_n(t_1, \ldots, t_n) = E\mu, \quad S_n(t_1, \ldots, t_n) = S\mu,$$

gde je $\mu \in N^{\omega}$ funkcija koja u tački t uzima vrednost jednaku broju pojavljivanja t u nizu $t_1, \ldots, t_n$, a $M\mu$ i $S\mu$ koeficijenti sledećih (formalnih) redova

$$H(\lambda) = 1 + \sum_{\mu \in N^{\omega}} E\mu \frac{\alpha^{\mu}}{\mu!} i^{|\mu|}, \tag{1.2.5}$$

$$\ln H(\lambda) = \sum_{\mu \in N^{\omega}} S\mu \frac{\alpha^{\mu}}{\mu!} i^{|\mu|}. \tag{1.2.6}$$

Izjednačavajući koeficijente uz jednake stepene α u redovima (1.2.5) i (1.2.6), jednostavno dobijamo formule (1.2.1) i (1.2.2).

Ako želimo da naglasimo o kom slučajnom procesu je reč, onda ćemo semiinvarijantu $S_n(t_1,\dots,t_n)$ označiti sa $S_n(X(t_1),\dots,X(t_n))$.

TEOREMA 1.2.1. ([13], str. 13)

Neka je: $\mu=\mu_1+\mu_2$, $\mu_1,\mu_2\in N^{\omega}$, $|\mu_1|>0$, $|\mu_2|>0$, $\mu_1\cdot\mu_2=0$,

$$T_1=\{t:\ \mu_1(t)>0\},\quad T_2=\{t:\ \mu_2(t)>0\}.$$

Neka su slučajne veličine iz skupa $\{X(t),\ t\in T_1\}$ nezavisne u potpunosti od slučajnih veličina iz skupa $\{X(t),\ t\in T_2\}$ i neka postoji semiinvarijanta $S\mu$. Tada važi jednakost: $S\mu=0$.

Semiinvarijante predstavljaju meru statističke zavisnosti slučajnih veličina, a takođe pogodan aparat za dokazivanje teorema i određivanje parametara koji nas interesuju. Primetimo još da važe jednakosti $S_1(t)=EX(t)$ i $S_2(t_1,t_2)=\operatorname{cov}(X(t_1),X(t_2))$, pri čemu pretpostavljamo da je slučajni proces X realan.

Teoriju mešovitih momenata i semiinvarijanata detaljno su razvili Leonov i Širjaev [27]-[29].

Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ stacionaran slučajni niz sa matematičkim očekivanjem $EX(t)=0$ i spektralnom reprezentacijom $X(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}dZ(\lambda)$, gde je $Z(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima. U tom slučaju definišemo karakteristični funkcional $\tilde{H}$ slučajnog procesa X na sledeći način:

$$\tilde{H}(\tilde{\alpha})=E\exp\left\{i\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\alpha}(\lambda)dZ(\lambda)\right\}$$

gde je $\tilde{\alpha}(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, realna funkcija. Pri tome, ako za funkcije α i $\tilde{\alpha}$ važi $\tilde{\alpha}(\lambda)=\sum_t\alpha(t)e^{it\lambda}$, onda važi jednakost $\tilde{H}(\tilde{\alpha})=H(\alpha)$.

Spektralnu meru F_n (koju još zovemo spektralnom semiinvarijantom) na višedimenzionalnoj kocki $\Pi^n=[-\pi,\pi]^n$, ako postoji, definišemo Furijeovim koeficijentima

$$S_n(t_1,\dots,t_n)=\int_{\Pi^n} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} t_k \lambda_k\right\} F_n(d\lambda) \qquad (1.2.7)$$

Ako je $\{X(t)\}$ strogo stacionaran niz, onda za sve $t_1,\dots,t_n,\tau\in Z$ važi jednakost $S_n(t_1+\tau,\dots,t_n+\tau)=S_n(t_1,\dots,t_n)$, a spektralna mera F_n koncentrisana je na mnogostrukosti $\lambda_1+\dots+\lambda_n=0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, pa je možemo predstaviti u obliku

$$F_n(A)=\int_A f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\delta^*(\lambda_1+\dots+\lambda_n)d\lambda_1\dots d\lambda_n \qquad (1.2.8)$$

gde je $A\subset\Pi^n$ i $\delta^*(x)=\sum_t \delta(x+2\pi t)$, $\delta(\cdot)$ - Dirakova delta funkcija. Iz jednakosti (1.2.7) i (1.2.8) sledi

$$f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\sum_{\substack{t_1,\dots,t_n\\ \min t_i=0}} S_n(t_1,\dots,t_n)\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} it_k\lambda_k\right\} \qquad (1.2.9)$$

Funkciju $f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $-\infty<\lambda_j<+\infty$, $j=1,2,\dots,n$, smatramo definisanom, ako red na desnoj strani jednakosti (1.2.9) apsolutno konvergira i zovemo je spektralnom gustinom n-tog reda slučajnog niza $\{X(t)\}$. Spektralna gustina drugog reda $f_2(\lambda,-\lambda)=f(\lambda)$, $\lambda\in R$, predstavlja običnu spektralnu gustinu stacionarnog niza.

Ako je $\{X(t)\}$ strogo stacionaran (realan) slučajni niz, za koji postoje svi momenti i za svako $n\geqslant 2$ važi

$$\sum_{t_1,\dots,t_{n-1}=-\infty}^{+\infty} |S_n(t_1,\dots,t_n,0)|<+\infty,$$

onda za svako n postoji spektralna gustina n-tog reda tog niza. Ako je, osim toga, ispunjen uslov

$$\sum_{t_1,\dots,t_{n-1}=-\infty}^{+\infty} (1+|t_j|^{\ell})|S_n(t_1,\dots,t_{n-1},0)|<+\infty, \quad j=1,2,\dots,n-1,$$

za neko $\ell>0$, onda postoje svi izvodi reda, ne većeg od ℓ, funkcije $f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda\in R$. Pri tome su ti izvodi ograničeni i ravnomerno neprekidni.

Primer 1.2.1. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom i, pretpostavimo da postoji semiinvarijanta $S_n = S_n(X(t),\dots,X(t))$. Tada važi jednakost:

$$f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{S_n}{(2\pi)^{n-1}}.$$

Primer 1.2.2. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ stacionaran slučajni niz i

$$Y(t) = \sum_{k} a(t-k)X(k), \quad \sum_{k} |a(k)| < +\infty.$$

Neka su $f^{(X)}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ i $f^{(Y)}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_j \in R$, spektralne gustine reda n, slučajnih nizova $\{X(t)\}$ i $\{Y(t)\}$. Označimo:

$$A(\lambda) = \sum_{k} a(k)e^{-i\lambda k}, \quad \lambda\in R.$$

Tada važi jednakost:

$$f^{(Y)}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = A(\lambda_1)\cdots A(\lambda_n)\, f^{(X)}(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

Spektralnu teoriju višeg reda izučavali su: Leonov i Širjaev [29], [39], Brilindžer i Rozenblat [45].

§ 1.3. UZORAČKA SPEKTRALNA GUSTINA (PERIODOGRAM) I PERIODOGRAMNE OCENE

Od interesa je ocena spektralne gustine $f(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi$, stacionarnog procesa $\{X(t),\ t \in Z\}$ na osnovu uzorka $(X(1),\dots,X(N))$. Uzoračku spektralnu gustinu ili periodogram definišemo na sledeći način:

$$I_N(\lambda) = \frac{N}{8\pi}\left\{\left(\frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} X(t)\cos\lambda t\right)^2 + \left(\frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} X(t)\sin\lambda t\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{t=1}^{N} X(t)e^{-it\lambda}\right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \qquad (1.3.1)$$

Pri tome, periodogram I_N ima osobine parnosti, nenegativnosti i 2π periodičnosti (ako smatramo da je definisan za sve $\lambda \in R$) kao i spektralna gustina f. Sledeće tri teoreme opisuju nam svojstva statistike $I_N(\lambda)$ kao ocene vrednosti spektralne gustine f u fiksiranoj tački λ. ([2] , [9])

TEOREMA 1.3.1. a) Ako red $\sum_{t=-\infty}^{+\infty} K(t)\cos\lambda t$ konvergira, onda važi:

$$\lim_{N\to\infty} E I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{+\infty} K(t)\cos\lambda t.$$

b) Ako je spektralna gustina f neprekidna u tački λ, onda važi jednakost: $\lim_{N\to\infty} EI_N(\lambda) = f(\lambda)$.

c) Ako važi $\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |tK(t)| < +\infty$, onda je

$$\lim_{N\to\infty} N\{E I_N(\lambda) - f(\lambda)\} = -\frac{1}{\pi}\sum_{t=-\infty}^{+\infty} tK(t)\cos\lambda t.$$

TEOREMA 1.3.1. Neka je $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \xi(t-k)$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty$, $t \in Z$,

gde je $\{\xi(t)\}$ niz nezavisnih slučajnih veličina za koje važi

$$E\xi(t) = 0, \quad E\xi^2(t) = \sigma^2, \quad E\xi^4(t) < +\infty,$$

i neka je f spektralna gustina slučajnog procesa $\{X(t)\}$. Tada važi

a) Ako je f neprekidna funkcija u tačkama 0 i π, onda važi:

$$\lim_{N\to\infty} DI_N(0) = 2f^2(0), \quad \lim_{N\to\infty} DI_N(\pi) = 2f^2(\pi).$$

b) Ako je funkcija f neprekidna u tački $\lambda \in (0,\pi)$, onda važi:

$$\lim_{N\to\infty} DI_N(\lambda) = f^2(\lambda).$$

c) Ako je funkcija f ograničena na intervalima $(\lambda-\delta,\lambda+\delta)$ i $(\mu-\delta,\mu+\delta)$ pri nekom $\delta>0$ i ako je $\lambda \neq \pm\mu$, $\lambda,\mu\in[-\pi,\pi]$, onda važi:

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}(I_N(\lambda),I_N(\mu)) = 0.$$

TEOREMA 1.3.3. Ako je $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \xi(t-k)$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty$, gde je $\{\xi(t),\ t\in Z\}$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa očekivanjem 0, disperzijom $\sigma^2>0$ i funkcijama raspodele $F_t(x)$, $x\in R$, za koje važi

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{t\in Z} \int_{|x|>c} x^2 dF_t(x) = 0,$$

onda slučajni vektor

$$\left(\frac{2I_N(\lambda_1)}{f(\lambda_1)}, \ldots, \frac{2I_N(\lambda_n)}{f(\lambda_n)}\right)$$

gde je $0<\lambda_i<\pi$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ za $i\neq j$, $i,j=1,\ldots,n$, ima graničnu raspodelu u kojoj su svih n komponenti nezavisne slučajne veličine i, svaka od njih ima χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode.

Iz teoreme 1.3.1. sledi da je $I_N(\lambda)$ asimptotski centrirana ocena vrednosti spektralne gustine u tački λ. Teoreme 1.3.2. i 1.3.3. pokazuju da $I_N(\lambda)$ nije konsistentna u srednjekvadratnom smislu ocena veličine $f(\lambda)$, jer disperzija te ocene ne teži nuli pri $N\to\infty$. Zbog toga periodogram ne možemo smatrati dobrom ocenom spektralne gustine. Činjenica da su vrednosti statistike $I_N(\lambda)$ za različite vrednosti λ asimptotski nezavisne, daje mogućnost da usrednjivanjem periodograma I_N po vrednostima argumenta λ u nekom intervalu, dobijemo ocenu odgovarajućeg usrednjenja spektralne gustine koja ima malu disperziju. Periodogram je prvi uveo Šuster [56] u cilju otkrivanja skrivenih periodičnosti procesa. Konačnu Furijeovu transformaciju $\sum_{t=1}^{N} e^{it\lambda} X(t)$ prvi je razmatrao Štoks [57]. Izrazi za prva dva momenta periodograma i njihovo asimptotsko ponašanje određeni su u radovima Bartleta [41, 42]. Asimptotska svojstva momenata periodograma izučavali su još Brilindžer [44], Bentkus [3], Ibragimov [21], Žurbenko [13] i drugi.

Jednakost (1.1.3) daje reprezentaciju spektralne gustine stacionarnog procesa u obliku linearne kombinacije kovarijacija razmatranog procesa. Važi jednakost

$$K(t) = E\,\frac{1}{N-t} \sum_{s=1}^{N-t} X(s)X(s+t)\,, \quad t=0,1,\dots,N-1,$$

tj. za naznačene vrednosti argumenta t, K(t) je matematičko očekivanje neke kvadratne forme slučajnih veličina X(1),...,X(N). Zato je prirodno kao klasu dopustivih statistika (ocena) spektralne gustine razmotriti klasu $\mathcal{K}$ svih kvadratnih formi oblika

$$\hat{\alpha}_N = \frac{1}{2\pi N} \sum_{s,t=1}^{N} b_{st}^{(N)} X(s)X(t)\,, \quad b_{st} = b_{ts}\,. \tag{1.3.2}$$

Zajedno sa tom klasom, Grenander i Rozenblat [49] izučavali su užu klasu $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ statistika koje se mogu predstaviti u obliku

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{s,t=1}^{N} b^{(N)}(t-s)\, e^{i(t-s)\lambda} X(t)X(s)\,. \tag{1.3.3}$$

Statistiku $\hat{f}_N(\lambda)$ možemo predstaviti u obliku

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-N+1}^{N-1} e^{it\lambda}\, b^{(N)}(t)\, K_N(t) \tag{1.3.4}$$

gde je $K_N(t)$ uzoračka kovarijacija

$$K_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-|t|} X(s)X(s+|t|) \tag{1.3.5}$$

a takođe i u obliku $\hat{f}_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x) I_N(x+\lambda)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x-\lambda) I_N(x)\,dx$ (1.3.6) gde je $I_N(x)$ periodogram, a φ_N neprekidna na $[-\pi,\pi]$ (i periodično produžena sa periodom 2π) funkcija koja je određena svojim Furije-ovim koeficijentima

$$b^{(N)}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x) e^{itx} dx\,, \quad t = -N+1, \dots, N-1. \tag{1.3.7}$$

U smislu asimptotike prva dva momenta, ocene iz uže klase $\mathcal{K}_0$ nisu gore od ocena čitave klase $\mathcal{K}$. Tačnije, važi sledeće tvrđenje koje su dokazali Grenander i Rozenblat [49]:

TEOREMA 1.3.4. Neka je $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{t-k}\xi(k)$ stacionaran slučajni proces za koji važe sledeći uslovi:

a) $\{\xi(k),\ k\in Z\}$ je niz nezavisnih slučajnih veličina i

$$E\xi(k)=0, \quad E\xi_k^2=1, \quad E\xi_k^4<+\infty.$$

b) Postoji broj $\delta>0$, takav da pri $k\to\infty$ važi $c_k=0\left(|k|^{-2-\delta}\right)$.

c) Spektralna gustina f procesa $\{X(t)\}$ je strogo pozitivna.

Neka je dalje

$$\alpha_N^* = \frac{1}{2\pi N}\sum_{s,t=1}^{N} b_{st}^{(N)} X(s)X(t)$$

asimptotski centrirana ocena vrednosti spektralne gustine u tački λ, tj. $E\alpha_N^* \to f(\lambda)$, pri $N\to\infty$. Tada postoji statistika oblika (1.3.3) za koju važi: 1) $Ef_N(\lambda)=E\alpha_N^*$ za svako N i

$$2)\ \lim_{N\to\infty} Df_N(\lambda) \leqslant \lim_{N\to\infty} D\alpha_N^*.$$

Statistika oblika (1.3.6) zove se periodogramna statistika ili Grenander-Rozenblatova ocena spektralne gustine. Statistike oblika (1.3.4) i (1.3.6) razlikuju se samo formom zapisa. Ocenu (1.3.4) izučavali su: Heming, Tjuki [50], Bartlet [41], Grenander, Rozenblat [49], a ocenu (1.3.6): Brilindžer [44], Bentkus [3], Ibragimov [21], Žurbenko [13-15]. Pojava algoritma brzih Furijeovih transformacija (Kuli, Tjuki [46], Džentlemen, Sande [48], Bingam, Godfri, Tjuki [43]) uticala je na davanje prednosti izučavanju statistika oblika (1.3.6). Taj algoritam omogućuje da se periodogram izračunava sa manjim brojem računskih operacija nego uzoračka kovarijaciona funkcija koja figuriše u statistici oblika (1.3.4).

Funkcija $\varphi_N(x)$, $-\pi \le x \le \pi$, pomoću koje se definiše ocena oblika (1.3.6) zove se spektralno okno, a funkcija $\sigma^{(N)}(t)$, $t \in Z$, pomoću koje se definiše ocena (1.3.4) zove se korelaciono okno. Pretpostavljamo da je niz funkcija $\{\varphi_N\}$ jezgro na intervalu $\Pi = [-\pi, \pi]$, tj. da važe sledeći uslovi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x)\,dx = 1, \quad \sup_N \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(x)|\,dx < +\infty,$$

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{N\to\infty} \int_{\Pi \setminus \{|x|<\delta\}} |\varphi_N(x)|\,dx = 0.$$

Ponekad se koriste spektralna okna koja nisu jezgra. Integral oblika $\int_{\Pi} \varphi_N(x-\lambda) g(x)\,dx$, gde je $\{\varphi_N\}$ jezgro i $g \in L_1(\Pi)$ zovemo singularnim integralom. Uvek ćemo pretpostavljati da su funkcije φ_N, $N \ge 1$, definisane na čitavoj realnoj pravoj i periodične sa periodom 2π. Važi sledeće tvrđenje ([4], str. 43):

TEOREMA 1.3.5. Neka je funkcija $g: \Pi \to R$ ograničena i neprekidna u tački $\lambda \in \Pi$, a $\{\varphi_N\}$ jezgro na $\Pi = [-\pi, \pi]$. Tada važi:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x-\lambda) g(x)\,dx = g(\lambda).$$

Navodimo neke primere jezgra, poznatih iz teorije sumiranja Furijeovih redova:

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad \text{Fejerovo jezgro,}$$

$$\Phi_{N',N}(x) = \frac{1}{2\pi(N-N')} \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2} - \sin^2 \frac{N'x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad N' < N, \ \frac{N'}{N} \to \alpha \in [0,1),$$

Vale-Pusen-ovo jezgro,

$$J_N(x) = \frac{1}{2\pi N(2N^2+1)} \frac{\sin^4 \frac{Nx}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}}, \quad \text{Džeksonovo jezgro.}$$

§ 1.4. SREDNJEKVADRATNO ODSTUPANJE. KONSISTENTNE I OPTIMALNE OCENE.

Za statistiku $\hat{f}_N(\lambda)$ kažemo da je konsistentna u srednjekvadratnom smislu ocena veličine $f(\lambda)$, ako srednjekvadratno odstupanje $E(\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda))^2$ teži nuli pri $N\to\infty$. Konsistentne ocene vrednosti spektralne gustine u fiksiranoj tački dobijene su u radovima Grenander, Rozenblat [49] i Parzen [52]. U radu [52] razmatra se klasa $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_0$ statistika koje se mogu predstaviti u obliku

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=B_N^{-1}}^{B_N^{-1}} h(tB_N)\cos\lambda t\, K_N(t)$$

gde je $h: R \to R$ funkcija za koju važi

$$h(x) = h(-x), \quad h(0) = 1, \quad \sup_{|x|\le 1} |h(x)| < +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-h(x)}{|x|^q} = k_q, \quad q>0,$$

pri čemu biramo maksimalno q za koje važi $k_q<\infty$, $\{B_N^{-1}\}$ je niz celih brojeva takav da $B_N^{-1}\to\infty$ pri $N\to\infty$, a $K_N(t)$ određeno je formulom (1.3.5). Važe sledeća tvrđenja [2], [52]:

TEOREMA 1.4.1. Neka $\hat{f}_N(\lambda) \in \mathcal{K}_1$ i $\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |t|^p |K(t)| < +\infty$.

a) Neka je $p \geq q$. Ako pri $N\to\infty$ važi $NB_N^{q+1-p}\to\infty$ za $p\le 1$ ili, $NB_N^{q}\to\infty$ za $p\ge 1$, onda važi jednakost

$$\lim_{N\to\infty} B_N^{-q}\{E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)\} = -\frac{k_q}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |t|^q \cos\lambda t\, K(t)$$

b) Neka je $p<q$. Ako pri $N\to\infty$ važi $NB_N^{p}\to\infty$ za $p\ge 1$ ili, $NB_N\to\infty$ za $p<1$, onda važi jednakost

$$\lim_{N\to\infty} B_N^{-q}\left\{E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)\right\} = 0.$$

TEOREMA 1.4.2. Neka $\hat{f}_N(\lambda) \in \mathcal{K}_1$, gde još zahtevamo da je funkcija h neprekidna na intervalu $[-1,1]$ i, neka su ispunjeni uslovi

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |K(t)| < +\infty , \sum_{t_1,t_2,t_3=-\infty}^{+\infty} |S(t_1,t_2,t_3,0)| < +\infty .$$

Ako je $\{B_N^{-1}\}$ niz celih brojeva takav da važi $B_N \to 0$ i $NB_N \to \infty$ pri $N \to \infty$, onda važe sledeće jednakosti

$$\lim_{N\to\infty} NB_N D\hat{f}_N(0) = 2f^2(0)\int_{-1}^{1} h^2(x)dx ,$$

$$\lim_{N\to\infty} NB_N D\hat{f}_N(\pm\pi) = 2f^2(\pi)\int_{-1}^{1} h^2(x)dx ,$$

$$\lim_{N\to\infty} NB_N D\hat{f}_N(\lambda) = f^2(\lambda)\int_{-1}^{1} h^2(x)dx , \quad \lambda \notin \{-\pi,0,\pi\},$$

$$\lim_{N\to\infty} NB_N \operatorname{cov}(\hat{f}_N(\lambda), \hat{f}_N(\mu)) = 0 , \quad \lambda \neq \pm\mu.$$

Ako su ispunjeni uslovi teorema 1.4.1. i 1.4.2., onda je pri $\lambda \notin \{0,-\pi,\pi\}$ i $N \to \infty$ veličina

$$E(\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda))^2 = D\hat{f}_N(\lambda) + (Ef_N(\lambda)-f(\lambda))^2$$

ekvivalentna veličini

$$\frac{1}{NB_N} f^2(\lambda)\int_{-1}^{1} h^2(x)dx + B_N^{2q} K_q^2 (f^{[q]}(\lambda))^2$$

gde je $$f^{[q]}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |t|^q \cos\lambda t \, K(t).$$

Jasno je da, što B_N brže teži nuli, to je disperzija ocene $\hat{f}_N(\lambda)$ veća, a veličina $(E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda))^2$ manja. Najmanji poredak srednjekvadratnog odstupanja dostiže se ako su te veličine istog reda pri $N \to \infty$, a to se postiže ako B_N^{-2q-1} ima poredak N. Na osnovu toga dobija se sledeći rezultat ([2] , str. 580):

TEOREMA 1.4.3. Neka su ispunjeni uslovi teorema 1.4.1. i 1.4.2. i neka je $\lim_{N\to\infty} N^{\frac{1}{1+2\alpha}} B_N = \gamma > 0$. Tada važi

$$\lim_{N\to\infty} N^{\frac{2q}{2q+1}} E(\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda))^2 = \gamma f^2(\lambda)\int_{-1}^{1} h(x)dx + \gamma^{-2q} K_q^2 (f^{[q]}(\lambda))^2 .$$

Prema tome, najmanji mogući poredak srednjekvadratnog odstupanja ocene (iz klase $\mathcal{K}_1$) spektralne gustine u fiksiranoj tački λ, od vrdnosti spektralne gustine u toj tački, jednak je $N^{-\frac{2\rho}{2\rho+1}}$. Teoreme 1.4.1.-1.4.3. pokazuju da srednjekvadratna greška zavisi od stepena glatkosti funkcije h, a takođe i od stepena glatkosti same spektralne gustine. Zato se prirodno postavlja zadatak određivanja optimalne u smislu srednjekvadratnog odstupanja statistike spektralne gustine, pri zadatoj glatkosti spektralne gustine. Taj zadatak rešava Žurbenko [13]. U njegovom radu razmatra se statistika (1.3.6) pri nekim prirodnim pretpostavkama o glatkosti funkcije φ_N, kao i pretpostavci o glatkosti spektralne gustine u fiksiranoj tački λ. Pretpostavlja se da spektralna gustina pripada Helderovoj klasi u tački λ. Za optimalnu statistiku određuje se i asimptotika srednjekvadratnog odstupanja. Pre formulacije rezultata uvode se sledeće definicije [13]:

1. Stacionarni slučajni niz $\{X(t),\ t\in Z\}$ pripada skupu $\mathfrak{X}$, ako postoje njegove spektralne gustine drugog i četvrtog reda i ako je $EX(t) = 0$.

2. Kažemo da $\{X(t)\} \in \mathfrak{X}(\lambda, f, f_1, \ldots, f_{[\alpha]}, \alpha, C, C_1) \subset \mathfrak{X}$ ako za svako μ i date λ, $f_0 \geq 0$, $f_1, \ldots, f_{[\alpha]} \in R$, $\alpha > 0$, $C \geq 0$, $C_1 \geq 0$, spektralna gustina f procesa $\{X(t)\}$ zadovoljava uslov

$$\left| f(\lambda+\mu) - f_0 - f_1\mu - f_2\frac{\mu^2}{2!} - \cdots - f_{[\alpha]}\frac{\mu^{[\alpha]}}{[\alpha]!} \right| \leq C|\mu|^{\alpha}, \tag{1.4.1}$$

a spektralna gustina četvrtog reda je ograničena: $|f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)| \leq C_1$. Iz (1.4.1) sledi: $f(\lambda) = f_0$, $f^{(k)}(\lambda) = f_k$, pri $k<[\alpha]$, gde je $[\alpha]$ celi deo broja α.

3. Niz funkcija $\{\varphi_N\}$ pripada klasi $\mathcal{F}$, ako su ispunjeni uslovi:

A) Za svako celo pozitivno N, $\varphi_N : R \to R$ je neprekidna, parna, 2π-periodična funkcija, $\varphi_N(x) \to 0$ ravnomerno u oblasti $\varepsilon \leq |x| \leq \pi$ (za svako $\varepsilon > 0$) i $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)dx = 1$, $\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_N(x)|dx = \|\varphi_N\|$, $\sup_N \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_N(x)|dx < +\infty$.

B) Ravnomerno po klasi $\mathcal{F}$ ispunjeni su uslovi:

B') Za svaku integrabilnu funkciju $f: R \to R$, $|f(x)| \le C|x|^{\alpha}$, važi:

$$\iint f(x)\Phi_N(x)\{\varphi_N(x+z)-\varphi_N(x)\}\,dx\,dz = o\left(\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{\alpha}|\varphi_N(x)|\,dx\right)$$

gde je $\Pi=[-\pi,\pi]$ i $\{\Phi_N(x)\}$ - Fejerovo jezgro.

B'') Postoji niz brojeva $A=A(N)\to\infty$ pri $N\to\infty$, takav da za sve $|z| < AN^{-1}$, ravnomerno po y, važi jednakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)\varphi_N(x+y+z)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)\varphi_N(x+y)\,dx + o\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)$$

4. Niz funkcija $\{\varphi_N\}$ pripada klasi $\mathcal{F}(\varphi)\subset\mathcal{F}$, ako se može predstaviti u obliku

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{B_N}\varphi\left(\frac{x}{B_N}\right)\left(\int_{-\pi B_N^{-1}}^{\pi B_N^{-1}}\varphi(t)\,dt\right)^{-1}, \quad -\pi\le x\le\pi,$$

gde je $\{B_N\}$ niz brojeva takav da $B_N\to 0$ i $NB_N\to\infty$, pri $N\to\infty$, a $\varphi: R\to R$ - parna, deo po deo diferencijabilna funkcija za koju važi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{\alpha_0}|\varphi(x)|\,dx < +\infty, \quad \alpha_0>0.$$

U radu [13] dokazano je da važi $\mathcal{F}(\varphi)\subset\mathcal{F}$.

Sledeće dve teoreme govore o asimptotskom ponašanju pri $N\to\infty$ veličina $|E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)|$ i $D\hat{f}_N(\lambda)$, gde je $\hat{f}_N(\lambda)$ periodogramna statistika zadata formulom (1.3.6). ([13], str. 59-74.)

TEOREMA 1.4.4. Neka $\{\varphi_N\}\in\mathcal{F}$. Tada za fiksirane λ, $f_0\ge 0$, f_1, $\alpha>0$, $C\ge 0$, $C_1\ge 0$, pri $N\to\infty$ važi jednakost

$$\sup_{X(t)\in\mathfrak{X}(\lambda,f,f_1,\dots,\alpha,C,C_1)}|E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)| = C\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{\alpha}|\varphi_N(x)|\,dx + o\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right).$$

TEOREMA 1.4.5. Neka $X(t)\in\mathfrak{X}(\lambda,f,\dots,\alpha,C,C_1)$ i $\{\varphi_N\}\in\mathcal{F}$. Za fiksirane λ, $f\ge 0,\dots,\alpha>0$, $C\ge 0$, $C_1\ge 0$, pri $N\to\infty$ važi jednakost:

$$D\hat{f}_N(\lambda) = \frac{2\pi f^2(\lambda)}{N}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x+\lambda)dx\right\} \tag{1.4.2}$$

$$+\, o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right) + O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{2\alpha_1}\varphi_N^2(x)dx\,\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)^{1/2}$$

gde je $\alpha_1 = \begin{cases} \alpha & 0<\alpha<1 \\ 1 & \alpha \geq 1. \end{cases}$

Ako za spektralnu gustinu f procesa $\{X(t)\}$, uslov glatkosti (1.4.1) za neke α, C i C_1 važi ravnomerno po $\lambda \in \Lambda$, onda su na skupu Λ, $o(\cdot)$ i $O(\cdot)$ u jednakosti (1.4.2) ravnomerni.

Iz teoreme 1.4.5. sledi da je glavni član disperzije $D\hat{f}_N(\lambda)$ za $\lambda \neq 0$ jednak $\frac{1}{N}4\pi f^2(\lambda)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx$ što je dva puta veće od glavnog člana disperzije u slučaju fiksiranog $\lambda \neq 0$. Međutim, ostatak u formuli (1.4.2) dovoljno je tačan, tako da se pri uniformnom važenju uslova glatkosti (1.4.1) u okolini nule, disperzija može ravnomerno ocenjivati u toj okolini.

Navodimo sada teoreme u kojima se pri formulisanim uslovima određuju optimalne statistike i njihovo srednjekvadratno odstupanje, [13], str. 74-79.

TEOREMA 1.4.6. Za fiksirane λ, $f_0 \geq 0$, f_1, $0<\alpha\leq 2$, $C>0$, $C_1 \geq 0$, pri $N\to\infty$ važi relacija:

$$\inf_{\{\varphi_N\}\in\mathcal{F}}\ \sup_{X(t)\in\mathcal{X}(\lambda,f,f_1,\alpha,C,C_1)} E|f_N(\lambda)-f(\lambda)|^2 \sim$$

$$\sim O(\alpha)f^2(\lambda)\left(\frac{C^2}{f^2(\lambda)}\right)^{\frac{1}{1+2\alpha}} N^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}\left(1+\eta(\lambda)\right)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}, \tag{1.4.3}$$

$$O(\alpha) = (1+2\alpha)^{-\frac{1}{1+2\alpha}}\left(\frac{\pi(\alpha+1)}{\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} \tag{1.4.4}$$

$$\eta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \\ 0 & \lambda \not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Minimum u formuli (1.4.3) postiže se za

$$\varphi_N(x) = B_N^{-1}\varphi(xB_N^{-1})$$

gde je
$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha+1}{2\alpha}|x|^{\alpha} + \frac{\alpha+1}{2\alpha} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$B_N = \left(\frac{\alpha N C^2}{\pi f^2(\lambda)(1+\alpha)(1+2\alpha)}\right)^{-\frac{1}{1+2\alpha}}$$

TEOREMA 1.4.7. Za fiksirane $\lambda, f_0 \geq 0, f_1, \alpha > 0, C > 0, C_1 \geq 0$, pri $N \to \infty$ važi relacija

$$\inf_{\substack{\{\varphi_N\} \in \mathcal{F} \\ f_2, f_3, \ldots, f_{[\alpha]} \in R}} \sup_{X(t) \in \mathcal{X}(\lambda, f_0, f_1, \ldots, f_{[\alpha]}, \alpha, C, C_1)} E|\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)|^2$$
$$\sim O(\alpha) f^2(\lambda) \left(\frac{C^2}{f^2(\lambda)}\right)^{\frac{1}{1+2\alpha}} N^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} (1+\eta(\lambda))^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}},$$

gde su $O(\alpha)$ i $\eta(\lambda)$ dati formulama (1.4.4) i (1.4.5).

TEOREMA 1.4.8. Neka je $\{\varphi_N\} \in \mathcal{F}(\varphi)$. Za fiksirane $\lambda, f_0, f_1, 0 < \alpha < \alpha_0$, $C > 0$, $C_1 \geq 0$ pri $N \to \infty$ važi:

$$\inf_{\substack{\{\varphi_N\} \in \mathcal{F}(\varphi) \\ f_2, f_3, \ldots, f_{[\alpha]} \in R}} \sup_{X(t) \in \mathcal{X}(\lambda, f, f_1, \ldots, f_{[\alpha]}; \alpha, C, C_1)} E|\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)|^2$$
$$\sim g(\alpha) f^2(\lambda) \left(\frac{C^2}{f^2(\lambda)}\right)^{\frac{1}{1+2\alpha}} N^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} (1+\eta(\lambda))^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}},$$

gde je $\eta(\lambda)$ dato formulom (1.4.5),

$$g(\alpha) = \frac{1+2\alpha}{2\alpha} (2\alpha V_1)^{-\frac{1}{1+2\alpha}} (2\pi V_2)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}$$

$$V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} |\varphi(x)| \, dx, \quad V_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) \, dx.$$

Asimptotski minimum dostiže se pri

$$B_N = \left(\frac{\alpha V_1 N C^2}{\pi V_2 f^2(\lambda)}\right)^{-\frac{1}{1+2\alpha}}.$$

§ 1.5. SEMIINVARIJANTE PERIODOGRAMNIH OCENA SPEKTRALNE GUSTINE

Periodogramna ocena spektralne gustine predstavlja polinom po elementima uzorka X(1),...,X(N). Zato ćemo najpre navesti formule za mešovite momente i semiinvarijante slučajnih veličina datih u obliku polinoma. Te formule dokazali su Leonov i Širjaev [28].

Neka je $Y_j = \sum\limits_{\nu_j} a_j(\nu_j) X_j^{\nu_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$

gde je $\nu_j = (\nu_{j1}, \ldots, \nu_{jm_j}), \quad \nu_{jk} \in \{0, 1\}, \quad m_j \in \{1, 2, \ldots\}$

$a_j(\nu_j)$ su realni koeficijenti,

$X_j^{\nu_j} = X_{j1}^{\nu_{j1}} \cdots X_{jm_j}^{\nu_{jm_j}}, \quad X_{jk}$ su realne slučajne veličine,

$\sum\limits_{\nu_j}$ označava sumu po svim mogućim ν_j.

Neka je dalje D skup svih elemenata sledeće tablice

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,m_1) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,m_2) \\ \vdots & & & \\ (n,1) & (n,2) & \ldots & (n,m_n) \end{matrix} \tag{1.5.1}$$

Neuređenu familiju $\{D_1, \ldots, D_q\}$, $1 \leq q \leq m_1 + \ldots + m_n$, gde su D_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, (neuređeni) podskupovi skupa D, zovemo razbijanjem skupa D, ako su ispunjeni uslovi:

$$\bigcup_{j=1}^{q} D_j = D, \quad D_j \neq \emptyset, \quad D_j \cap D_k = \emptyset, \quad \text{ako je } j \neq k.$$

U tom slučaju pisaćemo $D = D_1 + \ldots + D_q$. Za razbijanje $D_1 + D_2$ kažemo da razvrstava elemente skupa D, ako za svaku vrstu tablice (1.5.1) važi da svi njeni elementi pripadaju tačno jednom od skupova D_1 i D_2. Razbijanje $D_1 + \ldots + D_q$ zovemo nerazloživim, ako ne postoji razbijanje $D' + D''$ koje razvrstava elemente skupa D tako, da za svako j važi ili $D_j \subset D'$ ili $D_j \subset D''$. Skupovi D_p i D_r su međusobno zakačeni, ako postoje takvi elementi (j,k) i (j,ℓ) za koje važi $(j,k)\in D_p$ i $(j,\ell)\in D_r$. Skupovi $D_{p'}$ i $D_{p''}$ iz razbijanja $D_1+\ldots+D_q$ međusobno komuniciraju, ako u tom razbijanju postoje skupovi $D_{p_1}=D_{p'}$, $D_{p_2},\ldots,D_{p_r}=D_{p''}$ takvi da su D_{p_j} i $D_{p_{j+1}}$ međusobno zakačeni. Razbijanje $D=D_1+\ldots+D_q$ je nerazloživo, ako i samo ako svaka dva skupa tog razbijanja međusobno komuniciraju. Neka je

$$\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\,,\quad a(\nu)=a_1(\nu_1)\cdots a_n(\nu_n)\,,\quad \sum_{\nu}=\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)}$$

Tada važe sledeće formule [28]:

$$M_n(Y_1,\ldots,Y_n)=\sum_{\nu}a(\nu)\sum_{D(\nu)=D_1+\cdots+D_q}S(X_{D_1})\cdots S(X_{D_q}) \tag{1.5.2}$$

$$S_n(Y_1,\ldots,Y_n)=\sum_{\nu}a(\nu)\sum^{*}_{D(\nu)=D_1+\cdots+D_q}S(X_{D_1})\cdots S(X_{D_q}) \tag{1.5.3}$$

$$D(\nu)=\{(i,j)\in D,\ \nu_{ij}=1\}\,,\quad D_p=(D_{p1},\ldots,D_{p\mu_p})\,,\quad D_{pr}\in D,$$

$$X_{D_p}=(X_{D_{p1}},\ldots,X_{D_{p\mu_p}})\,,\quad X_{D_{pr}}=X_{jk}\ \text{ako je}\quad D_{pr}=(j,k).$$

$\sum\limits_{D(\nu)=D_1+\cdots+D_q}$ označava zbir po svim razbijanjima skupa $D(\nu)$,

$\sum\limits^{*}_{D(\nu)=D_1+\cdots+D_q}$ označava zbir po svim nerazloživim razbijanjima.

U svakoj od navedenih suma, broj q nije fiksiran, a sabiranje se vrši po svim mogućim $q\geq 1$.

Razmotrimo posebno slučaj kada je

$$Y_j=\sum_{t_{j1},t_{j2}=1}^{N}a_j(t_{j1},t_{j2})X_{j1}(t_{j1})X_{j2}(t_{j2})=\sum_{t_j}a_j(t_j)X_j(t_j)\,,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

$a_j(t_j)=a_j(t_{j1},t_{j2})$ su realni koeficijenti, $t_j=(t_{j1},t_{j2})$,

$X_j(t_j)=X_{j1}(t_{j1})X_{j2}(t_{j2})$, $X_{jk}(t_{jk})$ su realne slučajne veličine. U slučaju jednodimenzionalnog niza $X(t)$, $t\in Z$, i ako za Y_j uzimamo ocenu spektralne gustine u tački λ_j, biće $X_{jk}(t_{jk})=X(t_{jk})$. Označimo

$$t=(t_1,\ldots,t_n)\,,\quad a(t)=a_1(t_1)\cdots a_n(t_n)\,,\quad \sum_{t}=\sum_{(t_1,\ldots,t_n)}.$$

Formule (1.5.2) i (1.5.3) u ovom slučaju primaju oblik:

$$M_n(Y_1,\dots,Y_n) = \sum_{D=D_1+\dots+D_q} \sum_t a(t)\, S_{D_1}(t_{D_1})\cdots S_{D_q}(t_{D_q}) \tag{1.5.4}$$

$$S_n(Y_1,\dots,Y_n) = \sum^{*}_{D=D_1+\dots+D_q} \sum_t a(t)\, S_{D_1}(t_{D_1})\cdots S_{D_q}(t_{D_q}) \tag{1.5.5}$$

gde je $D = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\dots,(n,1),(n,2)\}$

$$S_{D_p}(t_{D_p}) = S(X_{D_{p1}}(t_{D_{p1}}),\dots,X_{D_{p\mu_p}}(t_{D_{p\mu_p}}))$$

$$X_{D_{pr}}(t_{D_{pr}}) = X_{jk}(t_{jk}) \text{ za } D_{pr} = (j,k).$$

Zbir u formuli (1.5.4) sadrži $(2n-1)!!$ sabiraka, a u formuli (1.5.5) — $2^{n-1}(n-1)!$ sabiraka.

Semiinvarijante spektralnih ocena izučavali su Brilindžer [44], Parzen [52], Bentkus [4]. U radu [4] dobijena je formula za semiinvarijante periodogramnih ocena spektra reda $m \geq 2$, pri čemu je razmatran slučaj višedimenzionalnih stacionarnih nizova. Mi ćemo u ovom paragrafu izložiti rezultate iz [4] u slučaju m=2 i jednodimenzionalnog realnog niza $\{X(t),\ t\in Z\}$, $EX(t)=0$. Neka su

$$\hat{f}_j = \hat{f}_N(\lambda_j) = \hat{f}_N(\lambda_j,\varphi_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x_{11}-\lambda_j)\frac{1}{2\pi N}\sum_{t_{j1},t_{j2}=1}^{N} e^{i(t_{j1}-t_{j2})x_{11}} X(t_{j1})X(t_{j2})\,dx_{11} \tag{1.5.6}$$

$j=1,2,\dots,n.$

ocene vrednosti spektralne gustine f procesa $\{X(t),\ t\in Z\}$ u tačkama $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in [-\pi,\pi]$, gde jezgro $\{\varphi_N\}$ zadovoljava uslove:

W_1) Postoji niz brojeva $\{B_N\}$, $0\leq B_N\leq 1$ takav da važi: $B_N\to 0$, $NB_N\to\infty$ pri $N\to\infty$ i $\sup_{x,N} B_N|\varphi_N(x)| < +\infty$.

W_2) Za svako $\delta>0$ važi jednakost

$$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{|\lambda|\leq\delta N^{-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(x+\lambda)-\varphi_N(x)|\,dx = 0$$

Uslovi W_1) i W_2) predstavljaju ograničenja na brzinu koncentracije jezgra $\{\varphi_N\}$ oko nule. Zahteva se da ta brzina ima poredak manji od N^{-1}. Neka je dalje

$$x_j=(x_{j1},x_{j2}),\quad x_{j1}+x_{j2}=0,\quad j=1,2,\dots,n,$$

$$D=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\dots,(n,1),(n,2)\},$$

$D = D_1 + \ldots + D_q$ - nerazloživo razbijanje skupa D, $D_p = (D_{p1}, \ldots, D_{p\mu_p})$, $D_{pr} \in D$, $\mu_p \geqslant 2$, $p=1,2,\ldots,q$. Definišemo realne vektore

$$u = (u_1, \ldots, u_{2n}) \in R^{2n}, \quad u_1 + \ldots + u_{2n} = 0,$$

$$v = (v_1, \ldots, v_{n-q+1}) \in R^{n-q+1},$$

$$y_p = (y_{p1}, \ldots, y_{p\mu_p}), \quad y_{p1} + \ldots + y_{p\mu_p} = 0, \; p=1,2,\ldots,q,$$

i linearnu jednačinu

$$(u,v)^T = \theta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_q)^T \tag{1.5.7}$$

gde T označava transponovanu matricu, na sledeći način:

Vektor u zadajemo sistemom

$$\begin{cases} u_1 = y_{11} - \tilde{x}_{11} \\ \vdots \\ u_{\mu_1} = y_{1\mu_1} - \tilde{x}_{1\mu_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{\mu_1+1} = y_{21} - \tilde{x}_{21} \\ \vdots \\ u_{\mu_1+\mu_2} = y_{2\mu_2} - \tilde{x}_{2\mu_2} \end{cases} \tag{1.5.8}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} u_{2n-\mu_2+1} = y_{21} - \tilde{x}_{21} \\ \vdots \\ u_{2n} = y_{2\mu_2} - \tilde{x}_{2\mu_2} \end{cases}$$

gde je $\tilde{x}_p = (\tilde{x}_{p1}, \ldots, \tilde{x}_{p\mu_p})$, $\tilde{x}_{pr} = x_{jk}$, ako je $D_{pr} = (j,k)$. Vektor v dobijamo iz vektora $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$ isključivanjem iz njega q-1 koordinate. Odredimo te koordinate. Zamenimo u (1.5.8)

$$x_{j2} = -x_{j1}, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$y_{p\mu_p} = -y_{p1} - \ldots - y_{p,\mu_p-1}, \quad p=1,2,\ldots,q.$$

Svaki od brojeva x_{j1}, $j=1,2,\ldots,n$, y_{pr}, $1 \leq r \leq \mu_p - 1$, $p=1,2,\ldots,q$, sreće se u jednačinama (1.5.8) dva puta: jednom sa znakom "plus", a drugi put sa znakom "minus". Razmotrimo zbir:

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} u_j = \sum_{j=1}^{\mu_1} y_{1j} - \sum_{j=1}^{\mu_1} \tilde{x}_{1j} = - \sum_{j=1}^{\mu_1} \tilde{x}_{1j} \tag{1.5.9}$$

Izaberimo jedan x_{jk} koji se pojavljuje na desnoj strani jednakosti (1.5.9) i označimo sa z_1. U zbiru $\tilde{x}_{11}+\tilde{x}_{12}+\ldots+\tilde{x}_{1\mu_1}$, ne mogu skratiti se svi x_{jk}-ovi, zbog nerazloživosti razbijanja $D=D_1+\ldots+D_q$. Izaberimo zatim u (1.5.8) grupu jednačina gde se z_1 pojavljuje drugi put (sa suprotnim znakom). Skup $D_1,\ldots,D_q$ nije uređen, pa možemo smatrati da je to druga grupa. Razmotrimo dalje zbir

$$\sum_{j=1}^{\mu_1+\mu_2} u_j = - \sum_{j=1}^{\mu_1} \tilde{x}_{1j} - \sum_{j=1}^{\mu_2} \tilde{x}_{2j} \tag{1.5.10}$$

Na desnoj strani jednakosti (1.5.10) više ne figuriše z_1, ali zbog nerazloživosti razbijanja $D=D_1+\ldots+D_q$, postoji neskraćeni z_2, jednak nekom od x_{jk}-ova. Produžujući postutak, možemo izabrati

$$z_1,\ldots,z_{q-1} \in \{x_{11},x_{12},\ldots,x_{n1},x_{n2}\}$$

i usput urediti razbijanje $D=D_1+\ldots+D_q$. Isključujući promenljive $z_1,\ldots,z_{q-1}$ iz vektora $(x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1})$, dobijamo vektor koji ima $n-q+1$ koordinatu i koji označavamo sa v. U opštem slučaju taj vektor nije jednoznačno određen. Kako je $\mu_p \geqslant 2$, to je $n-(q-1)\geqslant 1$. Definišimo sada funkciju G na sledeći način:

$$G(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum_{D=D_1+\cdots+D_q}^{**} \int_{\Pi^{n-q+1}} \varphi_N(x_{11}-\lambda_1)\cdots\varphi_N(x_{n1}-\lambda_n) f(y_1)\cdots f(y_q)\, dv$$

$$u = (u_1,\ldots,u_{2n}) \in R^{2n}, \quad u_1+\ldots+u_{2n} = 0, \tag{1.5.11}$$

gde je $f(y_p)$ spektralna gustina reda μ_p,

$\sum\limits_{D=D_1+\cdots+D_q}^{**}$ označava zbir po svim nerazloživim razbijanjima $D = D_1+\ldots+D_q$, $q=1,2,\ldots$, $\mu_p \geqslant 2$, svaki skup $\{D_1,\ldots,D_q\}$ uređen je (pri određivanju vektora v), a $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_q)$ je rešenje jednačine (1.5.7).

Pri navedenim oznakama i definicijama i uz pretpostavku da postoje i ograničene su sve spektralne gustine koje figurišu u definiciji funkcije G, važi sledeća teorema ([4], str. 50):

TEOREMA 1.5.1. Za svako $n\in\{1,2,\ldots\}$ važi jednakost

$$S_n(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n) = \frac{1}{N^{n-1}} \int_{\Pi^{2n-1}} G(u)\,\Phi_N^{(2n)}(u)\,du', \quad u'=(u_1,\ldots,u_{2n-1}), \qquad (1.5.12)$$

gde je $\{\Phi_N^{(2n)}\}$ jezgro na $\Pi^{2n}=[-\pi,\pi]^{2n}$ dato sa

$$\Phi_N^{(2n)}(u) = \frac{2}{(2\pi)^{2n-1}N}\,\frac{\sin\frac{Nu_1}{2}}{\sin\frac{u_1}{2}}\cdots\frac{\sin\frac{Nu_{2n-1}}{2}}{\sin\frac{u_{2n-1}}{2}}\,\frac{\sin\frac{N}{2}(u_1+\cdots+u_{2n-1})}{\sin\frac{1}{2}(u_1+\cdots+u_{2n-1})} \qquad (1.5.13)$$

$$u=(u_1,\ldots,u_{2n}),\quad du'=du_1\cdots du_{2n-1},$$

a G funkcija data sa (1.5.11). Pri tome funkcija G postoji, merljiva je, 2π-periodična po svakom argumentu i integrabilna na Π^{2n-1}.

Dokaz teoreme 1.5.1. Neka je $a_j(t_j)$ koeficijent uz $X(t_j)=X(t_{j1})X(t_{j2})$ u formuli (1.5.6). Koristeći jednakosti (1.5.5) i (1.2.7) dobijamo

$$S_n(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n) = \sum_{D=D_1+\cdots+D_q}^{*} \sum_t a(t)\,S_{D_1}(t_{D_1})\cdots S_{D_q}(t_{D_q})$$

$$= \frac{1}{(2\pi N)^n}\int_{\Pi^n} \varphi_N(x_{11}-\lambda_1)\cdots\varphi_N(x_{n1}-\lambda_n)\,dx_{11}\cdots dx_{n1}\ \times$$

$$\times \sum_{D=D_1+\cdots+D_q}\int_{\Pi^{2n-q}} f(y_1)\cdots f(y_q)\sum_t \exp\{-i(t_1,x_1)-\cdots-i(t_n,x_n)$$

$$+\,i(\tau_{D_1},y_1)+\cdots+i(\tau_{D_q},y_q)\}\,dy_1'\cdots dy_q' \qquad (1.5.14)$$

gde je $\tau_{D_p}=(\tau_{D_{p1}},\ldots,\tau_{D_{p\mu_p}})$, $\tau_{D_{pr}}=t_{jk}$, ako je $D_{pr}=(j,k)$, $d(y_{11},\ldots,y_{1k})'=dy_{11}'\cdots dy_{1k-1}$. Možemo smatrati da je svako razbijanje $D_1+\cdots+D_q$ uređeno na način koji je opisan prilikom definisanja funkcije G. Kako je $EX(t_{jk})=0$, to je $\mu_p\geq 2$, $p=1,2,\ldots,q$, pa u jednakosti (1.5.14) možemo zbir Σ^* zameniti sa Σ^{**}. Dalje, koristeći formulu (1.5.13), dobijamo:

$$S_n(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n) = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{n-1}\int_{\Pi^n}\varphi_N(x_{11}-\lambda_1)\cdots\varphi_N(x_{n1}-\lambda_n)\,dx_{11}\cdots dx_{n1}\ \times$$

$$\times \sum_{D=D_1+\cdots+D_q}^{**}\int_{\Pi^{2n-q}} f(y_1)\cdots f(y_q)\,\Phi_N^{(2n)}(y-\tilde{x})\,dy_1'\cdots dy_q'$$

gde je $y=(y_1,\ldots,y_q)$, $y_p=(y_{p1},\ldots,y_{p\mu_p})$, $y_{p1}+\cdots+y_{p\mu_p}=0$,
$\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_q)$, $\tilde{x}_p=(\tilde{x}_{p1},\ldots,\tilde{x}_{p\mu_p})$, $\tilde{x}_{pr}=x_{jk}$, ako je $D_{pr}=(j,k)$.

Uvodeći smenu promenljivih $u_{2n} = -u_1 - \dots - u_{2n-1}$, $y_{p\mu_p} = -y_1 - \dots - y_{p,\mu_p-1}$, $x_{j2} = -x_{j1}$, jednačinu (1.5.7) možemo zapisati u obliku:

$$(u';v)^T = H(x_{11},\dots,x_{n1},y_1',\dots,y_q')^T$$

Iz nerazloživosti razbijanja $D = D_1 + \dots + D_q$ sledi $|\det H| = 1$, pa je jakobijan transformacije promenljivih jednak

$$\frac{dx_{11}\cdots dx_{n1}\,dy_1'\cdots dy_q'}{du'dv} = |\det H^{-1}| = 1.$$

Dalje važi

$$S_n(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_n) = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{n-1} \sum_{D=D_1+\dots+D_q}^{**} \int_{\Pi^{n-q+1}} dv \int_{\Pi^{2n-1}} \varphi_N(x_{11}-\lambda_1)\cdots\varphi_N(x_{n1}-\lambda_n)\times$$

$$\times f(y_1)\cdots f(y_q)\,\Phi_N^{(2n)}(u)\,du'$$

gde je $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ rešenje jednačine (1.5.7). Primenjujući Fubinijevu teoremu, iz (1.5.15) dobijamo (1.5.12), pri čemu G postoji, merljiva je i integrabilna funkcija. Iz periodičnosti funkcije f sledi periodičnost funkcije G.■

U slučaju n=2, formula (1.5.12) prima oblik:

$$\mathrm{Cov}\left(f_N(\lambda_1), f_N(\lambda_2)\right) = \frac{1}{N}\int_{\Pi^3} G(u)\,\Phi_N^{(4)}(u)\,du'$$

gde je funkcija G data sa

$$G(u) = 2\pi\left\{\int_{\Pi^2}\varphi_N(v_1-\lambda_1)\varphi_N(-v_2-\lambda_2)\,f(u_1+v_1,u_2-v_1,u_3+v_2,u_4-v_2)\,dv_1dv_2\right.$$

$$+\int_{\Pi}\varphi_N(v-\lambda_1)\varphi_N(v+u_1+u_2-\lambda_2)\,f(u_1+v)\,f(u_3-v)\,dv$$

$$\left.+\int_{\Pi}\varphi_N(v-\lambda_1)\varphi_N(-v-u_1-u_2-\lambda_2)\,f(u_1+v)\,f(u_3-v)\,dv\right\}$$

gde je $u = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ i $u' = (u_1,u_2,u_3)$. Pri tome pretpostavljamo da postoje spektralne gustine drugog i četvrtog reda.

Važi sledeća teorema ([4], str. 53):

TEOREMA 1.5.2. Neka su spektralne gustine drugog i četvrtog reda ograničene i neka jezgro $\{\varphi_N\}$ zadovoljava uslov W_1). Tada važi:

a)
$$\left|\operatorname{cov}\left(f_N(\lambda_1), f_N(\lambda_2)\right)\right| \leq \frac{C}{NB_N}, \quad N=1,2,\ldots$$

b) Ako je $\lambda_1+\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, onda važi:

$$L=\lim_{N\to\infty} NB_N \operatorname{cov}(f_N(\lambda_1), f_N(\lambda_2))=0.$$

c) Ako je $\lambda_2=\lambda_1(\mathrm{mod}\,2\pi)$, $\lambda_1+\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, spektralna gustina drugog reda neprekidna u tačkama λ_1 i $-\lambda_1$, jezgro $\{\varphi_N\}$ zadovoljava uslov W_2) i postoji granična vrednost

$$\Delta_1 = 2\pi \lim_{N\to\infty} B_N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx,$$

onda važi $L=\Delta_1 f^2(\lambda_1)$.

d) Ako je $\lambda_1-\lambda_2 \;\; 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, $\lambda_2=-\lambda_1(\mathrm{mod}\,2\pi)$, spektralna gustina drugog reda neprekidna u tački λ_1, jezgro $\{\varphi_N\}$ zadovoljava uslov W_2) i postoji granična vrednost

$$\Delta_2 = 2\pi \lim_{N\to\infty} B_N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx,$$

onda važi jednakost $L=\Delta_2 f^2(\lambda)$.

e) Ako je $\lambda_1-\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, $\lambda_1+\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, spektralna gustina i jezgro zadovoljavaju uslove navedene pod c) i d), onda važi jednakost $L=(\Delta_1+\Delta_2)f^2(\lambda_1)$.

Kao posledicu teoreme 1.5.1. navodimo još sledeće tvrđenje, koje je od značaja za dokazivanje asimptotske normalnosti periodogramnih ocena spektralne gustine.

Posledica 1.5.1. Za svaki vektor $(\hat{f}_N(\lambda_1),\ldots,\hat{f}_N(\lambda_n))$ važi

$$\left|S_n\left(\hat{f}_N(\lambda_1),\ldots,\hat{f}_N(\lambda_n)\right)\right| \leq \frac{C}{NB_N}, \quad N=1,2,\ldots$$

Konstanta C zavisi od n, ali pri fiksiranom n ne zavisi od izbora tačaka $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

§ 1.6. ASIMPTOTSKA NORMALNOST PERIODOGRAMNIH OCENA

Asimptotska normalnost niza slučajnih veličina često se dokazuje metodom momenata (ili semiinvarijanata). Opisaćemo u čemu se sastoji taj metod. Neka su $X_n=(X_1^{(n)},\dots,X_m^{(n)})$, $n\geq 1$, i $Y=(Y_1,\dots,Y_m)$ slučajni vektori sa (u opštem slučaju) kompleksnim komponentama i, neka slučajni vektor $(Y_1,\dots,Y_m)$ ima normalnu raspodelu sa vektorom matematičkog očekivanja $(a_1,\dots,a_m)$ i matricama semiinvarijanata drugog reda

$$(\rho_{jk})_{m\times m},\quad \rho_{jk}=S(Y_j,Y_k),\quad j,k=1,2,\dots,m,$$
$$(\sigma_{jk})_{m\times m},\quad \sigma_{jk}=S(Y_j,\overline{Y}_k),\quad j,k=1,2,\dots,m.$$

Ako važe jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} S(X_j^{(n)})=a_j,\quad j=1,2,\dots,m,$$
$$\lim_{n\to\infty} S(X_j^{(n)},X_k^{(n)})=\rho_{jk},\quad j,k=1,2,\dots,m,$$
$$\lim_{n\to\infty} S(X_j^{(n)},\overline{X_k^{(n)}})=\sigma_{jk},\quad j,k=1,2,\dots,m.$$

i za svaki vektor $(V_1^{(n)},\dots,V_k^{(n)})$, $V_j^{(n)}\in\{X_j^{(n)},\overline{X_j^{(n)}}\}$, $j=1,2,\dots,k$, $k\geq 3$, važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} S(V_1^{(n)},\dots,V_k^{(n)})=0.$$

onda pri $n\to\infty$ niz slučajnih vektora $\{X_n\}$ konvergira u raspodeli ka slučajnom vektoru Y. U tom slučaju koristimo oznaku $X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}Y$.

Asimptotsku normalnost periodogramnih ocena spektralne gustine stacionarnog niza dokazivali su, pri različitim početnim uslovima sledeći autori: Rozenblat [55], Brilindžer [44], Marujama [51], Bentkus [4], Bentkus i Žurbenko [5]. Ibragimov [21], razmatrao je slučaj Gausovih procesa, a Henan [38] i Anderson [2] slučaj linearnih procesa. Navešćemo ovde rezultat u Bentkusovoj formulaciji [4].

Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ stacionaran slučajni proces za koji postoje i ograničene su sve spektralne gustine višeg reda. Neka je f spektralna gustina drugog reda procesa $\{X(t)\}$, $\hat{f}_N(\lambda)$ - periodogramna ocena veličine $f(\lambda)$, sa jezgrom $\{\varphi_N\}$ koje zadovoljava uslove W_1) i W_2) iz paragrafa 1.5., pri čemu je $\{\varphi_N\}$ niz realnih i parnih funkcija takvih da postoji granična vrednost

$$\Delta = 2\pi \lim_{N\to\infty} B_N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)dx$$

Možemo, na primer, uzeti

$$\varphi_N(x) = \frac{A_N}{B_N}\varphi\left(\frac{x}{B_N}\right), \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

gde je $\varphi: R \to R$ parna, ograničena i integrabilna funkcija, $\int_R \varphi(x)dx = 1$, a $\{A_N\}$ i $\{B_N\}$ nizovi brojeva, takvi da važi $B_N \to 0$, $NB_N \to +\infty$ pri $N\to\infty$ i

$$A_N = \left(\int_{-\pi B_N^{-1}}^{\pi B_N^{-1}} \varphi(x)dx\right)^{-1}$$

Neka je $\eta: R \to R$ funkcija određena jednakošću (1.4.5) i $\zeta(\lambda)$, $|\lambda| \leq \pi$, Gausov slučajni proces sa očekivanjem 0 i drugim momentima

$$E\zeta(\lambda)\zeta(\mu) = \Delta(\eta(\lambda-\mu)+\eta(\lambda+\mu))f^2(\lambda).$$

Tada važi sledeća

TEOREMA 1.6.1. ([4], str. 56)

Ako je spektralna gustina drugog reda f neprekidna na intervalu $[-\pi,\pi]$, onda konačnodimenzionalne raspodele slučajnog procesa $\sqrt{NB_N}(\hat{f}_N(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda))$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, konvergiraju u raspodeli ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog slučajnog procesa $\zeta(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$.

Ako je spektralna gustina f, k puta neprekidno-diferencijabilna na intervalu $[-\pi,\pi]$, $k\in\{1,2,\ldots\}$, $f^{(k)} \in Lip_\alpha$, $0<\alpha\leq 1$ i

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{NB_N}\int_{-\pi}^{\pi} |x|^{k+\alpha}|\varphi_N(x)|dx = 0, \quad \lim_{N\to\infty} B_N N^{1-2(k+\alpha)} = 0,$$

onda konačnodimenzionalne raspodele procesa $\sqrt{NB_N}(\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda))$, $|\lambda|\leq\pi$, takođe konvergiraju ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog slučajnog procesa $\zeta(\lambda)$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$.

G L A V A II

O BRZINI KONVERGENCIJE PERIODOGRAMNIH OCENA SPEKTRALNE GUSTINE GAUSOVOG NIZA

§ 2.1. O NORMALNOJ RASPODELI I GAUSOVIM PROCESIMA

Raspodela verovatnoća P određena slučajnim vektorom $(X_1,\dots,X_n)$ u n-dimenzionalnom Euklidovom prostoru R^n, naziva se normalnom ili Gausovom raspodelom, ako odgovarajuća karakteristična funkcija

$$\varphi(u)=\int_{R^n} e^{i(u,x)}P(dx)\ ,\quad u\in R^n,$$

gde je $(u,x)=u_1x_1+\dots+u_nx_n$ skalarni proizvod vektora $u=(u_1,\dots,u_n)$ i $x=(x_1,\dots,x_n)$, ima oblik

$$\varphi(u)=\exp\left\{i(u,a)-\tfrac{1}{2}(Bu,u)\right\},\quad u\in R^n,$$

gde je $a=(a_1,\dots,a_n)\in R^n$ i $B:R^n\to R^n$ linearan, pozitivno definisan operator, određen matricom $[K_{j\ell}]_{j,\ell=1,2,\dots,n}$. Pri tome važe jednakosti

$$a_k=EX_k,\quad k=1,2,\dots,n,$$

$$K_{j\ell}=EX_kX_\ell,\quad k,\ell=1,2,\dots,n.$$

Vektor $a=(a_1,\dots,a_n)$ naziva se srednja vrednost slučajnog vektora $(X_1,\dots,X_n)$, a operator (matrica) B naziva se kovarijacionim operatorom (matricom). Sam vektor $(X_1,\dots,X_n)$ zovemo normalnim (Gausovim) slučajnim vektorom.

Neka je m rang matrice B, a $L=a+BR^n=\{a+Bx : x\in R^n\}$ m-dimenzionalna hiper-ravan. Tada važi $P(R^n\setminus L)=0$. Raspodela verovatnoća P apsolutno je neprekidna u odnosu na Lebegovu meru dy u L, tj.

$$P(A) = \int_{A\cap L} p(y)\,dy$$

gde je A Borelov skup u R^n, a gustina raspodele $p(y)$, $y \in L$, ima oblik

$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\det B}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^{-1}(y-a),(y-a)\right)\right\}$$

gde je $\det B$ determinanta matrice koja određuje operator B u potprostoru $R^m = BR^n$, a B^{-1} operator u tom potprostoru, koji je inverzan operatoru B.

Navešćemo samo neke osobine Gausovih vektora koje će kasnije biti korišćene (Bentkus [3], Ibragimov [21])

TEOREMA 2.1.1. Neka je $(X_1,\dots,X_{2n})$ Gausov slučajni vektor, za koji važi $EX_j = 0$, $j=1,2,\dots,2n$. Tada važi jednakost:

$$E(X_1\dots X_{2n}) = \sum E(X_{j_1}X_{j_2})\dots E(X_{j_{2n-1}}X_{j_{2n}})$$

gde se sabiranje vrši po svim neuređenim razbijanjima skupa $\{1,\dots,2n\}$ na podskupove koji sadrže po dva elementa i, pri tome zbir sadrži $(2n-1)!!$ sabiraka.

TEOREMA 2.1.2. Neka je $X = (X_1,\dots,X_n)$ Gausov slučajni vektor sa karakterističnom funkcijom

$$\varphi(u) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Bu,u)\right\}, \quad u \in R^n,$$

i A - proizvoljna simetrična matrica reda n. Tada važi tvrđenje:

Kvadratna forma (AX,X) ima raspodelu verovatnoća kao i zbir $\mu_1\xi_1^2+\dots+\mu_n\xi_n^2$, gde su ξ_i nezavisne normalne slučajne veličine sa očekivanjem 0 i disperzijom 1, a μ_i su karakteristične vrednosti matrice BA.

Slučajni proces $\{X(t),\ t\in T\}$ zovemo Gausovim, ako za svako $n \geq 1$ i sve $t_1,\dots,t_n \in T$, slučajni vektor $(X(t_1),\dots,X(t_n))$ ima normalnu raspodelu, tj. ako su konačnodimenzionalne raspodele procesa normalne. U tom slučaju, za verovatnosnu meru P definisanu tim procesom na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}$, podskupova prostora funkcija R^T, takođe kažemo da je Gausova. Neka su

$$a(t) = EX(t), \quad t \in T,$$

$$K(t,s) = E(X(t)-a(t))(X(s)-a(s)), \quad t,s \in T,$$

funkcija matematičkog očekivanja i kovarijaciona funkcija Gausovog slučajnog procesa X. Te dve funkcije jednoznačno određuju sve konačnodimenzionalne raspodele tog procesa, a takođe jednoznačno određuju verovatnosnu meru P na σ-algebri $\mathcal{B}$ Borelovih podskupova u prostoru R^T. Zato su, u slučaju Gausovog procesa, stroga stacionarnost i stacionarnost u širem smislu ekvivalentni pojmovi.

Stacionaran Gausov niz $\{X(t),\ t \in Z\}$ određen je jednoznačno matematičkim očekivanjem $EX(t)=a$, $t \in Z$, i kovarijacionom funkcijom $K(t-s) = E(X(t)-a)(X(s)-a)$ ili, matematičkim očekivanjem i spektralnom funkcijom ili, matematičkim očekivanjem i spektralnom gustinom, ako poslednja postoji. Ako proces nije Gausov, onda pomenute funkcije ne opisuju taj proces (odgovarajuće raspodele verovatnoća) jednoznačno, ali daju o tom procesu mnogo informacija.

Važi sledeće tvrđenje ([9], str. 47):

TEOREMA 2.1.3. Neka je $\{X(t),\ t \in Z\}$ stacionaran Gausov niz sa semiinvarijantama $S_n(t_1,\dots,t_n)$, $t_j \in Z$, i spektralnom gustinom f_n reda n. Tada, za $n > 2$ važi

$$S_n(t_1,\dots,t_n) = 0, \quad f_n \equiv 0.$$

Kako su spektralne gustine reda većeg od dva, u slučaju Gausovog procesa identički jednake nuli, možemo reći da spektralne gustine višeg reda predstavljaju meru odstupanja stacionarnog slučajnog procesa od Gausovog procesa.

§ 2.2. EKSPONENCIJALNE NEJEDNAKOSTI ZA OCENE SPEKTRALNE GUSTINE STACIONARNOG GAUSOVOG NIZA

U ovom i sledećem paragrafu pretpostavljaćemo da je $\{X(t),\ t\in Z\}$ realan stacionaran Gausov niz sa očekivanjem 0 i spektralnom gustinom $f(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$. Razmatraćemo periodogramnu ocenu (1.3.6) gde jezgro $\{\varphi_N\}$ definišemo na sledeći način:

$$\varphi_N(x)=\begin{cases}\frac{1}{B_N}\varphi\left(\frac{x}{B_N}\right) & -\pi B_N\le x\le \pi B_N\\ 0 & x\in(-\pi,\pi]\setminus(-\pi B_N,\pi B_N]\end{cases}\tag{2.2.1}$$

gde je $\varphi:[-\pi,\pi]\to R$ težinska funkcija,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1,\qquad \sup_{-\pi\le x\le\pi}|\varphi(x)|<+\infty$$

a $\{B_N\}$, $0\le B_N\le 1$, niz realnih brojeva, $B_N\to 0$, $NB_N\to\infty$ pri $N\to\infty$.

U radu [7] date su eksponencijalne ocene verovatnoća

$$P\{|f_N(\lambda)-Ef_N(\lambda)|\ge x\}$$

$$P\{|f_N(\lambda)-f(\lambda)|\ge x+G_N(\lambda)\}$$

gde je $x\ge 0$, $\lambda\in(-\pi,\pi]$, $G_N(\lambda)=|Ef_N(\lambda)-f(\lambda)|$ i ocena brzine kojom niz $\{G_N(\lambda)\}$ teži ka nuli pri $N\to\infty$. U radu [35] data je eksponencijalna ocena verovatnoće

$$P\left\{\sup_{\lambda}|\hat f_N(\lambda)-E\hat f_N(\lambda)|\ge x\right\},\quad x\ge 0.$$

Formulisaćemo te rezultate, jer će kasnije biti korišćeni. Navodimo najpre oznake koje će biti korišćene:

$$\varkappa(t,g)=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-itx}dx,\quad t\in R,$$

$$C_{h,N}(g)=\sum_{k=-N+1}^{N-1}|\varkappa(kh,g)|\cdot h$$

$$\gamma_{h,N}(g)=\sup_{-N+1\le k\le N-1}|\varkappa(kh,g)|,\quad h>0,$$

$$C_N(g) = C_{1,N}(g)\ ,\quad \gamma_N(g) = \gamma_{1,N}(g)$$

$$\|g\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^p d\lambda\right)^{1/p}\ ,\quad p \in [1, +\infty)$$

$$\|g\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda} |g(\lambda)|$$

$$g_x = g(\cdot + x)\ ,\quad x \in R$$

gde je $g: R \to R$ 2π-periodična funkcija, $Lip_H(\alpha, q)$ je prostor svih funkcija koje zadovoljavaju integralni Lipšiciv uslov sa koeficijentima $\alpha \in (0,1]$, $q \in [1, \infty]$ i konstantom H, tj.

$$\forall x \in (-\pi, \pi]\quad \|g_x - g\|_{L_q} \leq H|x|^\alpha$$

$$B_N = (\|\varphi_N\|_{L_\infty})^{-1}\ ,\quad C_N = \|\varphi_N\|_{L_1}.$$

Ako $\varphi_N \in Lip_{H_N}(1, \infty)$, označimo $K_N = H_N B_N$.

TEOREMA 2.2.1. ([7], str. 27)

Za svako $\lambda \in (-\pi, +\pi)$, $x \geq 0$ i celo $N \geq 1$, važi nejednakost

$$P\{|\hat{f}_N(\lambda) - E\hat{f}_N(\lambda)| \geq x\}$$

$$\leq 2\exp\left\{C_1 C_2 N B_N \left[-\ln\left(1 - \frac{x}{C_2 + x}\right) - \frac{x}{C_2 + x}\right] - \frac{C_1 x^2 N B_N}{C_2 + x}\right\}$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{C_1 x^2 N B_N}{2(C_2 + x)}\right\}$$

gde je
$$C_1 = \frac{1}{C_{B_N,N}(\varphi)\, C_N(f)}\ ,\quad C_2 = \frac{1}{2\pi}\gamma_{B_N,N}(\varphi)\, C_N(f).$$

TEOREMA 2.2.2. ([7], str. 29)

Ako periodično produžena spektralna gustina f jeste r puta neprekidno-diferencijabilna u svakoj tački realne prave, $r \in \{1, 2, \ldots\}$, a težinska funkcija φ zadovoljava uslov

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^k \varphi(x)\, dx = 0\ ,\quad k = 1, 2, \ldots, r-1, \tag{2.2.2}$$

onda za svako $\lambda \in (-\pi, \pi]$ i $N = 1, 2, \ldots$ važi nejednakost

$$|f(\lambda) - Ef_N(\lambda)| \leq \frac{1}{r!}\|f^{(r)}\|_{L_\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^r |\varphi(x)|\, dx \cdot B_N^r$$

$$+ \begin{cases} \|f'\|_{L_\infty} \|\varphi\|_{L_1} \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\pi}{2} + \ln N\right)\frac{\pi}{N} & r = 1 \\ \|f''\|_{L_\infty} \|\varphi\|_{L_1} \frac{\pi^2}{4N} & r \geq 2. \end{cases}$$

Ako je spektralna gustina r puta diferencijabilna, $r\in\{0,1,\dots\}$, $f^{(r)}\in \mathrm{Lip}_H(\alpha,\infty)$ i ako težinska funkcija φ zadovoljava uslov

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{k}\varphi(x)\,dx = 0\ ,\quad k=1,2,\dots,r, \tag{2.2.3}$$

onda za svako $\lambda\in(-\pi,\pi]$ i $N=1,2,\dots$ važi nejednakost

$$|f(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda)| \le \frac{H}{r!}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{r+\alpha}|\varphi(x)|\,dx\cdot B_N^{r+\alpha}$$

$$+\ \pi\|\varphi\|_{L_1}\cdot\begin{cases} H\left(1-\dfrac{1+\alpha}{(N\pi)^{1-\alpha}\,2^{\alpha}}\right)\dfrac{2^{\alpha}}{N^{\alpha}(1-\alpha^2)}, & r=0,\ \alpha\in(0,1),\\[2mm] H\left(\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{\pi}{2}+\ln N\right)\dfrac{1}{N}, & r=0,\ \alpha=1,\\[2mm] H\left(1-\dfrac{2^{1+\alpha}}{(N\pi)^{\alpha}(2+\alpha)}\right)\dfrac{\pi^{\alpha}}{\alpha N}, & r=1,\ \alpha\in(0,1)\\[2mm] H\,\dfrac{\pi}{2N}, & r=1,\ \alpha=1,\\[2mm] \|f'\|_{L_\infty}\dfrac{\pi}{4N}, & r\ge 2\end{cases}$$

TEOREMA 2.2.3. ([35], str. 166)

Neka $f\in L_\infty$ i $\varphi_N\in \mathrm{Lip}_{H_N}(1,\infty)$. Tada za svako $x\ge 0$ i celo $N\ge 1$, važi nejednakost:

$$P\left\{\sup_{0\le\lambda\le\pi}|\hat{f}_N(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda)|\ge x\right\}$$

$$\le\left\{190\,\pi K_N\left(x^2C(x)NB_N\right)^2+45\right\}\exp\left\{-x^2C(x)NB_N\right\}$$

gde je
$$C(x)=\frac{1}{8\pi\|f\|_\infty\,(C_N\|f\|_\infty+x)}.$$

§ 2.3. DISPERZIJA MAKSIMALNOG ODSTUPANJA OCENE SPEKTRALNE GUSTINE

U ovom paragrafu dokazaćemo da disperzija slučajne veličine

$$Y_N = \sup_{0 \le \lambda \le \pi} |\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)|$$

teži nuli pri $N \to \infty$, ako spektralna gustina f zadovoljava određeni uslov glatkosti. Ocenićemo takođe brzinu te konvergencije. Formulisaćemo najpre nekoliko pomoćnih tvrđenja [31]:

LEMA 2.3.1. ([12], str. 15)

Neka je
$$F(t) = \int_0^a g(x) e^{-itx} dx, \quad a > 0,$$

gde je g analitička funkcija, regularna u tačkama intervala $(0,a]$, a u okolini tačke x=0 može se predstaviti u obliku

$$g(x) = x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \alpha > -1.$$

Tada važi
$$F(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(\alpha+n) a_{n-1} t^{-\alpha-n}, \quad t \to +\infty$$

$$F(t) \sim a_0 \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha-1}, \quad t \to +\infty,$$

gde je $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ - gama funkcija.

LEMA 2.3.2. Neka je $\alpha > 0, \beta > 0$. Tada, pri $t \to +\infty$ važe formule:

$$F_1(t) \equiv \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{tx^2}{\alpha+\beta x}\right) dx \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.3.1}$$

$$F_2(t) \equiv \int_0^{+\infty} x \exp\left(-\frac{tx^2}{\alpha+\beta x}\right) dx \sim \frac{\alpha}{2} t^{-1}, \tag{2.3.2}$$

$$F_3(t) \equiv \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{\alpha+\beta x}\right)^2 \exp\left(-\frac{tx^2}{\alpha+\beta x}\right) dx \sim \frac{3\sqrt{\alpha}}{8} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{5}{2}}, \tag{2.3.3}$$

$$F_4(t) \equiv \int_0^{+\infty} x \left(\frac{x^2}{\alpha+\beta x}\right)^2 \exp\left(-\frac{tx^2}{\alpha+\beta x}\right) dx \sim \alpha t^{-3}. \tag{2.3.4}$$

Dokaz leme 2.3.2. Uvedimo smenu $u = x^2(\alpha+\beta x)^{-1}$. Tada važi

$$x = \frac{1}{2}\left(\beta u + \sqrt{\beta^2 u^2 + 4\alpha u}\right) \equiv g(u)$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\beta^2 u + 2\alpha}{\sqrt{\beta^2 u^2 + 4\alpha u}}\right) = g'(u)\,du$$

Dalje je

$$F_1(t) = \int_0^{+\infty} g'(u)e^{-tu}du\,, \quad F_2(t) = \int_0^{+\infty} g(u)g'(u)e^{-tu}du\,,$$

$$F_3(t) = \int_0^{+\infty} u^2 g'(u)e^{-tu}du\,, \quad F_4(t) = \int_0^{+\infty} u^2 g(u)g'(u)e^{-tu}du\,,$$

$$\sqrt{\beta^2u^2+4\alpha u} = \sqrt{4\alpha u}\left(1+\frac{\beta^2}{4\alpha}u\right)^{1/2} = \sqrt{4\alpha u}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K-1}}{2K-1}\frac{1}{4^K}\binom{2K}{K}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^K u^K$$

$$= \sqrt{4\alpha u}\left\{1 - \frac{\beta^2}{8\alpha}u + \frac{3}{8}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^2u^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^3u^3 + \cdots\right\}, \qquad |u| < \frac{4\alpha}{\beta^2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^2u^2+4\alpha u}} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha u}}\left(1+\frac{\beta^2}{4\alpha}u\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha u}}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^K}{4^K}\binom{2K}{K}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^K u^K$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\alpha u}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{4\alpha}u - \frac{1}{8}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^2u^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^3u^3 - \cdots\right\}, \qquad |u| < \frac{4\alpha}{\beta^2}.$$

$$g'(u) = \frac{\beta}{2} + u^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\sqrt{\alpha}}{2} + \frac{5\beta^2}{16\sqrt{\alpha}}u + \cdots\right\}$$

$$g(u)g'(u) = \frac{\alpha}{2} + \frac{3\beta\sqrt{\alpha}}{4}u^{1/2} + \frac{7\beta^2}{16}u + \frac{\beta^3}{32\sqrt{\alpha}}u^{3/2} + \cdots$$

Razmotrimo detaljno, na primer, integral $F_3(t)$. Imamo

$$F_3(t) = \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty}\right)\left(\frac{x^2}{\alpha+\beta x}\right)^2\exp\left(-\frac{tx^2}{\alpha+\beta x}\right)dx = F_3^{(1)}(t) + F_3^{(2)}(t).$$

Za $x \geq 1$ važe nejednakosti $\frac{x}{\alpha+\beta} \leq \frac{x^2}{\alpha+\beta x} \leq \frac{x}{\beta}$

$$F_3^{(2)}(t) \leq \int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2\exp\left(-\frac{tx}{\alpha+\beta}\right)dx = \frac{(\alpha+\beta)^3}{\beta^2t^3}\int_{t(\alpha+\beta)^{-1}}^{+\infty} s^2e^{-s}ds = O(t^{-3}),\ t\to\infty.$$

Koristeći lemu 2.3.1. dobijamo

$$F_3^{(1)}(t) = \int_0^{(\alpha+\beta)^{-1}} u^2\,g'(u)e^{-tu}du \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)t^{-\frac{5}{2}}\,, \ t\to+\infty,$$

pa primenjujući formulu $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, dobijamo formulu (2.3.3). Analogno se dokazuju i formule (2.3.1), (2.3.2) i (2.3.4).∎

LEMA 2.3.3. Ako je F funkcija raspodele verovatnoća i $F(0)=0$, onda važi

$$\int_0^{+\infty}(1-F(x))dx = \int_0^{+\infty} x dF(x) \leq +\infty . \tag{2.3.5}$$

Dokaz leme 2.3.3. Neka je $A>0$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^A x dF(x) = AF(A) - \int_0^A F(x)dx = \int_0^A (1-F(x))dx - A(1-F(A)) \tag{2.3.6}$$

Ako je $\int_0^\infty x dF(x) < +\infty$, onda važi $A(1-F(A)) \leq \int_A^\infty x dF(x) \to 0$ pri $A\to+\infty$, pa jednakost (2.3.5) sledi iz jednakosti (2.3.6) pri $A\to+\infty$. Ako je $\int_0^{+\infty} x dF(x) = +\infty$, onda zbog nejednakosti $\int_0^A x dF(x) \leq \int_0^A (1-F(x))dx$, opet pri $A\to+\infty$ dobijamo jednakost (2.3.5).■

Primetimo da tvrđenje leme 2.3.3. može biti formulisano i na sledeći način: Ako je X slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele F i, ako je $F(0)=0$, onda važi jednakost $EX=\int_0^\infty P\{X\geq x\}dx$.

LEMA 2.3.4. Neka spektralna gustina $f\in L_\infty$, $\varphi_N \in Lip_{H_N}(1,\infty)$, C_N ne zavisi od N i, za svako $\lambda\in[0,\pi]$ važi nejednakost $|f(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda)|\leq T_N$, gde T_N ne zavisi od λ. Tada važi

$$\begin{aligned} DY_N &= D\left(\sup_{0\leq\lambda\leq\pi}|\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)|\right) \leq T_N^2 + 2\int_0^{+\infty}(x+T_N)P_N(x)dx \\ &\sim T_N^2 + 380\pi\alpha K_N(NB_N)^{-1} + \frac{285}{2}\pi\sqrt{\alpha}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)K_N T_N (NB_N)^{-\frac{1}{2}},\ N\to\infty \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

gde je

$$P_N(x) = \left\{190\pi K_N\left(\frac{x^2NB_N}{\alpha+\beta x}\right)^2 + 45\right\}\exp\left(-\frac{x^2NB_N}{\alpha+\beta x}\right)$$

$$\alpha = 8\pi C_N\|f\|_\infty^2, \quad \beta = 8\pi\|f\|_\infty .$$

Dokaz leme 2.3.4. Za svako $x\geq0$ važi:

$$\begin{aligned} P\{Y_N\geq x\} &\leq P\left\{\sup_\lambda|\hat{f}_N(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda)| \geq x - \sup_\lambda|f(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda)|\right\} \\ &\leq P\left\{\sup_\lambda|\hat{f}_N(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda)| \geq x - T_N\right\} \end{aligned}$$

Koristeći lemu 2.3.3. i teoremu 2.2.3. dobijamo:

$$DY_N \leqslant EY_N^2 = \int_0^{+\infty} P\{Y_N^2 \geqslant x\}dx = \int_0^{+\infty} P\{Y_N \geqslant \sqrt{x}\}dx$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} P_N(\sqrt{x}-T_N)dx = \int_0^{T_N^2} P_N(\sqrt{x}-T_N)dx + \int_{T_N^2}^{+\infty} P_N(\sqrt{x}-T_N)dx$$

$$= \int_0^{T_N^2} dx + \int_0^{\infty} P_N(t)2(t+T_N)dt = T_N^2 + 2\int_0^{+\infty}(x+T_N)P_N(x)dx \qquad (2.3.8)$$

Koristeći lemu 2.3.2. dobijamo:

$$\int_0^{+\infty} P_N(x)dx = 190\pi K_N \int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2NB_N}{\alpha+\beta x}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2NB_N}{\alpha+\beta x}\right)dx$$

$$+ 45\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2NB_N}{\alpha+\beta x}\right)dx$$

$$\sim 190\pi K_N(NB_N)^2 \frac{3\sqrt{\alpha}}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(NB_N)^{-\frac{5}{2}} + 45\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(NB_N)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sim \frac{285}{4}\pi\sqrt{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)K_N(NB_N)^{-\frac{1}{2}}, \quad N\to+\infty, \qquad (2.3.9)$$

$$\int_0^{+\infty} xP_N(x)dx \sim 190\pi\alpha K_N(NB_N)^{-1}, \quad N\to+\infty, \qquad (2.3.10)$$

jer $K_N \to +\infty$ pri $N\to+\infty$, zato što je $\{\varphi_N\}$ - jezgro. Iz relacija (2.3.8), (2.3.9) i (2.3.10) sledi (2.3.7).■

LEMA 2.3.5. Neka je $r\in\{1,2,\dots\}$. Tada važi

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \min\left\{2\varepsilon r, 1-2\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon r-\frac{3\varepsilon}{2}\right\} = \begin{cases} \frac{2}{5} & r=1 \\ \frac{2r-1}{2r+1} & r\geqslant 2. \end{cases}$$

Ako je r=1, supremum se dostiže za $\varepsilon=\frac{1}{5}$, a ako je $r\geqslant 2$, onda se supremum dostiže za $\varepsilon=\frac{1}{2r+1}$.

LEMA 2.3.6. Neka je

$$L(r,\alpha) = \sup_{0<\varepsilon<1} \min\left\{2\varepsilon(r+\alpha),\ 1-2\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\frac{3\varepsilon}{2}+\varepsilon(r+\alpha)\right\}$$

gde $\alpha\in(0,1]$, $r\in\{0,1,2,\dots\}$. Tada važe tvrđenja:

a) Ako je $r+\alpha-\frac{3}{2}\geqslant 0$, onda je $L(r,\alpha)=\dfrac{2(r+\alpha)-1}{2(r+\alpha)+1}$ i supremum se dostiže za $\varepsilon=\dfrac{1}{2(r+\alpha)+1}$.

b) Ako je $r+\alpha-\frac{3}{2}<0$, onda je $L(r,\alpha)=\frac{2(r+\alpha)}{2(r+\alpha)+3}$ i supremum se dostiže za $\varepsilon=\frac{1}{2(r+\alpha)+3}$.

Dokazi lema 2.3.5. i 2.3.6. su jednostavni, pa ih izostavljamo.

TEOREMA 2.3.1. Neka je periodično produžena spektralna gustina f r-puta diferencijabilna u svakoj tački $\lambda\in R$, $r\in\{1,2,\dots\}$ i neka je $\hat{f}_N(\lambda)$ periodogramna ocena vrednosti $f(\lambda)$, data formulama (1.3.6) i (2.2.1), gde $\varphi\in \mathrm{Lip}_H(1,\infty)$, važi uslov (2.2.2) i $B_N=N^{-\varepsilon}$ gde je

$$\varepsilon=\begin{cases}\frac{1}{5} & r=1\\ \frac{1}{2r+1} & r\geq 2.\end{cases}$$

Tada pri $N\to+\infty$ važi jednakost

$$D\left(\sup_{\lambda}|\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)|\right)=\begin{cases}O(N^{-\frac{2}{5}}) & r=1\\ O(N^{-\frac{2r-1}{2r+1}}) & r\geq 2.\end{cases}$$

Dokaz teoreme 2.3.1. Imamo

$$C_N=\|\varphi_N\|_{L_1}=\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_N(x)|\,dx=\int_{-\pi B_N}^{\pi B_N}\left|\frac{1}{B_N}\varphi\left(\frac{x}{B_N}\right)\right|dx=\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)|\,dx=\|\varphi\|_{L_1}$$

$$|\varphi_N(x)-\varphi_N(y)|=\frac{1}{B_N}\left|\varphi\left(\frac{x}{B_N}\right)-\varphi\left(\frac{y}{B_N}\right)\right|\leq\frac{H}{B_N^2}|x-y|$$

$$H_N=\frac{H}{B_N^2},\quad K_N=H_NB_N=HN^{\varepsilon}.$$

Neka je $\varepsilon<\frac{1}{r}$. Ispunjeni su uslovi za primenu teorema 2.2.2. i 2.2.3. i leme 2.3.4., pa dobijamo

$$T_N=O(N^{-\varepsilon r}),\quad N\to+\infty,$$

$$DY_N=O\left(N^{-2\varepsilon r}+N^{2\varepsilon-1}+N^{\frac{1}{2}+\frac{3\varepsilon}{2}-\varepsilon r}\right),\quad N\to+\infty.$$

Koristeći lemu 2.3.5. dobijamo: Ako je $r=1$, najmanji poredak izraza na desnoj strani jednakosti (2.3.11) jednak je $N^{-\frac{2}{5}}$ i dostiže se za $\varepsilon=\frac{1}{5}$. Ako je $r\geq 2$, najmanji poredak je $N^{-\frac{2r-1}{2r+1}}$ i dostiže se za $\varepsilon=\frac{1}{2r+1}$. ∎

Analogno se dokazuje i sledeća

TEOREMA 2.3.2. Neka je periodično produžena spektralna gustina f r-puta diferencijabilna u svakoj tački $\lambda \in R$, $r \in \{0,1,2,\dots\}$, $f^{(r)} \in Lip_H(\alpha, \infty)$, $0 < \alpha \le 1$, periodogramna ocena $\hat{f}_N(\lambda)$ definisana jednakostima (1.3.6) i (2.2.1), gde $\varphi \in Lip_{H_1}(1,\infty)$, važi uslov (2.2.3) i $B_N = N^{-\varepsilon}$, gde je

$$\varepsilon = \begin{cases} (2r+2\alpha+3)^{-1} & r+\alpha-\frac{3}{2} < 0 \\ (2r+2\alpha+1)^{-1} & r+\alpha-\frac{3}{2} \ge 0 \end{cases}$$

Tada pri $N \to +\infty$ važi jednakost

$$D\left(\sup_{\lambda} |\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)|\right) = \begin{cases} O\left(N^{-\frac{2r+2\alpha-1}{2r+2\alpha+1}}\right) & r+\alpha-\frac{3}{2} \ge 0 \\ O\left(N^{-\frac{2r+2\alpha}{2r+2\alpha+3}}\right) & r+\alpha-\frac{3}{2} < 0. \end{cases}$$

§ 2.4. NEKE OCENE SPEKTRALNE GUSTINE

U ovom paragrafu navešćemo primere periodogramnih ocena spektralne gustine koje se često koriste u praksi (sa oblikom spektralnog i kovarijacionog okna) i vrednosti parametara B_N, C_N, K_N i $\Delta = 2\pi \lim_{N\to\infty} B_N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)dx$. Spektralno okno ćemo, kao i ranije, označavati sa $\varphi_N(\cdot)$, a korelaciono okno sa $\sigma^{(N)}(\cdot)$. Navešćemo i koji od rezultata paragrafa 2.3. važe za te ocene. Sve ocene koje ćemo navesti zavise od parametra $M = M(N)$, za koji važi: $M \to +\infty$ i $MN^{-1} \to 0$ pri $N \to +\infty$.

1. Danijelova ocena (pravougaono spektralno okno):

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} \frac{M}{2} & |x| \le \frac{1}{M} \\ 0 & \frac{1}{M} < x \le \pi. \end{cases}$$

$$\sigma^{(N)}(t) = \frac{M}{t} \sin\frac{t}{M}, \quad B_N = \frac{2}{M}, \quad C_N = 1, \quad \Delta = \pi.$$

Konstanta K_N nije definisana jer funkcija φ_M ne zadovoljava Lipšicov uslov.

2. Usečena ocena (pravougaono kovarijaciono okno):

$$\varphi_N(x) = D_M(x) = \frac{\sin\frac{2M+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad \sigma^{(N)}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq M \\ 0 & |t| > M. \end{cases}$$

$$B_N = \frac{2\pi}{2M+1}, \quad C_N = \frac{4}{\pi^2}\ln M + O(1), \quad K_N \leq \frac{M(M+1)}{2M+1}, \quad \Delta = 2.$$

3. Bartletova ocena (trougaono kovarijaciono okno):

$$\varphi_N(x) = \Phi_M(x) = \frac{1}{2\pi M}\frac{\sin^2\frac{Mx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}, \quad \sigma^{(N)}(t) = \begin{cases} 1-\frac{|t|}{M} & |t| \leq M \\ 0 & |t| > M. \end{cases}$$

$$B_N = \frac{2\pi}{M}, \quad C_N = 1, \quad K_N \leq \frac{M}{3}, \quad \Delta = \frac{2}{3}.$$

4. Kovarijaciono okno oblika trapeza (Vale-Pusenovo jezgro):

$$\varphi_N(x) = \Phi_{M'M}(x) = \frac{1}{2\pi(M-M')}\frac{\sin^2\frac{Mx}{2} - \sin^2\frac{M'x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\sigma^{(N)}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq M' \\ \frac{M-|t|}{M-M'} & M' \leq |t| \leq M \\ 0 & |t| \geq M \end{cases}$$

gde pretpostavljamo: $M' \in \{0,1,2,\dots\}$, $M' = M'(N) < M$, $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{M'}{M} = \rho \in [0,1)$.

$$B_N = 2\pi\left(\frac{2}{M} + \frac{1}{M^3}\right), \quad C_N = 1, \quad K_N < M, \quad \Delta = \frac{2}{3}(2\rho+1).$$

5. Parzenova ocena (Džeksonovo jezgro):

$$\varphi_N(x) = J_M(x) = \frac{3}{2\pi M(2M^2+1)}\frac{\sin^4\frac{Mx}{2}}{\sin^4\frac{x}{2}}$$

$$\sigma^{(N)}(t) = \frac{3}{M(2M^2+1)}\sum_{\substack{k,\ell=-M \\ k-\ell=t}}^{M} (M-|k|)(M-|\ell|)$$

$$B_N = 2\pi\left(\frac{2}{M} + \frac{1}{M^3}\right), \quad C_N = 1, \quad K_N < M, \quad \Delta = \frac{151}{140}.$$

6. Normalno spektralno okno:

$$\varphi_N(x) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{M^2x^2}{2}\right), \quad \sigma^{(N)}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2M^2}\right),$$

$$B_N = \frac{\pi}{M}, \quad C_N \uparrow 1; \quad K_N \leq Me^{-\frac{1}{2}}, \quad \Delta = \frac{3}{4}.$$

7. $$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{M}{2\pi}(1+\cos Mx) & |x| \le \frac{\pi}{M} \\ 0 & \frac{\pi}{M} \le |x| \le \pi, \end{cases}$$

$$b^{(N)}(t) = \frac{M}{\pi t} \sin\frac{\pi t}{M} + \frac{\sin(M-t)}{2(M-t)} + \frac{\sin(M+t)}{2(M+t)},$$

$$B_N = \frac{\pi}{M}, \quad C_N = 1, \quad K_N \le \frac{M}{2}, \quad \Delta = 3.$$

8. Tjukijeva ocena

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{2} D_M(x) + \frac{1}{4} D_M\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} D_M\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b^{(N)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi t}{M}\right) & |t| \le M \\ 0 & |t| > M \end{cases}$$

$$B_N = \frac{\pi}{M}, \quad C_N = \frac{4}{\pi^2}\ln M + O(1), \quad K_N \le \frac{\pi^2-4}{2\pi^2} M, \quad \Delta = \frac{3}{4}.$$

9. Žurbenkova ocena

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha+1}{2\alpha} M^{1+\alpha}|x|^{\alpha} + \frac{\alpha+1}{2\alpha} M & |x| \le \frac{1}{M} \\ 0 & \frac{1}{M} < x \le \pi. \end{cases} \qquad \alpha \in (0,2],$$

$$B_N = \frac{1}{M}, \quad C_N = 1, \quad K_N \le \frac{\alpha+1}{2} M \qquad \alpha \in [1,2], \quad \Delta = \frac{2(\alpha+1)\pi}{2\alpha+1}.$$

Za svaku od navedenih ocena, uslov (2.2.2) ispunjen je ako važi r=1 ili r=2, a uslov (2.2.3), ako $r \in \{0,1\}$. Uslov da je niz C_N konstantan (jedan od uslova pri kojima je dokazana lema 2.3.4., pa prema tome i teoreme 2.3.1. i 2.3.2.) važi u slučaju ocena 3., 5., 7. i 9. Koristeći teoremu 2.3.1. zaključujemo da važi sledeća

TEOREMA 2.4.1. Neka je spektralna gustina f r-puta diferencijabilna, $r \in \{1,2\}$, a $\hat{f}_N(\lambda)$ periodogramna ocena data pod rednim brojem 3., 5., 7. ili 9., gde je $M = N^{\frac{1}{5}}$. Tada pri $N \to +\infty$ važi

$$D\left(\sup_{\lambda} |\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)|\right) = \begin{cases} O(N^{-\frac{2}{5}}) & r=1 \\ O(N^{-\frac{3}{5}}) & r=2. \end{cases}$$

GLAVA III

PERIODOGRAMNA OCENA KAO SLUČAJNA FUNKCIJA

UVODNI DEO

Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ realan stacionaran slučajni niz sa matematičkim očekivanjem $EX(t)=0$ i spektralnom gustinom $f(\lambda), -\pi<\lambda\leq\pi$. U ovoj glavi razmatraćemo periodogramnu ocenu spektralne gustine

$$\hat{f}_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\left|\sum_{t=1}^{N}X(t)e^{-itx}\right|^2dx \tag{3.0.1}$$

definisanu na osnovu uzorka $(X(1),\ldots,X(N))$ pomoću jezgra

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{B_N}\varphi\left(\frac{x}{B_N}\right),\quad -\pi\leq x\leq\pi, \tag{3.0.2}$$

gde je $\varphi:R\to R$ parna i deo po deo diferencijabilna funkcija za koju važi

$$\varphi\in Lip_H(1,\infty),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1,\quad \varphi(x)=0 \text{ za } |x|\geq\pi, \tag{3.0.3}$$

a $\{B_N\}$ je niz realnih brojeva određen sa

$$B_N=N^{-\varepsilon},\quad \frac{1}{3}<\varepsilon<\frac{1}{2}. \tag{3.0.4}$$

Za funkcije f i φ_N pretpostavljaćemo da su definisane na celoj realnoj pravoj i da su periodične sa periodom 2π. Primetimo da iz uslova $\varphi\in Lip_H(1,\infty)$ sledi $\varphi_N\in Lip_{H_N}(1,\infty)$, gde je $H_N=HB_N^{-2}$.

Ispitivanju svojstava statistike $\hat{f}_N(\lambda)$ za fiksiranu vrednost argumenta posvećeni su mnogi radovi, a osnovni rezultati, sa citiranom literaturom, dati su u prvoj glavi. U ovoj glavi, mi ćemo razmatrati periodogramnu ocenu $\hat{f}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq\pi$, kao slučajni proces definisan na intervalu $[0,\pi]$. Uzimajući u obzir rezultat teoreme 1.6.1., prirodno je razmatrati sledeće procese:

$$\xi_N(\lambda) = \sqrt{NB_N}\left(\hat{f}_N(\lambda) - E\hat{f}_N(\lambda)\right), \quad 0 \le \lambda \le \pi, \tag{3.0.5}$$

$$Z(\lambda) = \sqrt{NB_N}\left(\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)\right), \quad 0 \le \lambda \le \pi. \tag{3.0.6}$$

Teorema 1.6.1. tvrdi da konačnodimenzionalne raspodele slučajnih procesa $\xi_N(\lambda)$ i $Z_N(\lambda)$, $0 \le \lambda \le \pi$, slabo konvergiraju ka konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog belog šuma. Pogodnom zamenom jedinice na λ-osi ("rastezanjem" intervala $[0,\pi]$) dobićemo nove procese $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ (§3.1.). Dokazaćemo da konačnodimenzionalne raspodele tih procesa slabo konvergiraju ka konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog procesa (§3.2.), pri čemu granični proces ima neprekidne trajektorije (§3.3.).

§3.4. posvećen je opštim pitanjima slabe konvergencije verovatnosnih mera u metričkom prostoru (posebno u prostoru neprekidnih funkcija na konačnom intervalu) i u njemu su samo formulisani poznati rezultati. U §3.5. ispitana je slaba konvergencija niza mera generisanih slučajnim procesima $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ u prostoru neprekidnih funkcija na konačnom intervalu, u slučaju kada je polazni proces (čiju spektralnu gustinu ocenjujemo) - Gausov. U §3.6., neki od dobijenih rezultata formulisani su u slučaju procesa koji zadovoljavaju Rozenblatov uslov jake promešanosti.

Neki od rezultata ove glave objavljeni su u radu autora [32].

§ 3.1. ASIMPTOTSKO PONAŠANJE PRVA DVA MOMENTA PERIODOGRAMNE OCENE SPEKTRALNE GUSTINE. PERIODOGRAMNA OCENA KAO SLUČAJNI PROCES SA NORMIRANIM VREMENOM.

TEOREMA 3.1.1. Neka je izvod spektralne gustine ograničen, tj. $\|f'\|_\infty = C < +\infty$, a periodogramna ocena definisana u uvodnom delu relacijama (3.0.1)-(3.0.4). Tada važi

$$\sup_{0\le\lambda\le\pi} |f(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda)| \le C\int_{-\pi}^{\pi}|x||\varphi_N(x)|dx + o\left(\int_{-\pi}^{\pi}|x||\varphi_N(x)|dx\right) \tag{3.1.1}$$

Dokaz teoreme 3.1.1. Tvrđenje teoreme 3.1.1. može se dobiti kao posledica teoreme 2.2.2. Međutim, mi ćemo ovde navesti dokaz čiji će detalji kasnije biti korišćeni.

Koristeći definiciju periodogramne ocene dobijamo:

$$E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda) = E\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)I_N(x+\lambda)dx - f(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)\, E\left\{\sum_{t_1=1}^{N}X(t_1)e^{-it_1(x+\lambda)}\sum_{t_2=1}^{N}X(t_2)e^{it_2(x+\lambda)}\right\}dx - f(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)\sum_{t_1,t_2=1}^{N}EX(t_1)X(t_2)e^{i(x+\lambda)(t_2-t_1)}dx - f(\lambda)$$

Kako je (po pretpostavci u uvodnom delu) $EX(t)=0$ i

$$EX(t_1)X(t_2)=\mathrm{cov}(X(t_1),X(t_2))=K(t_1-t_2)$$

to koristeći formulu 1.1.4. dobijamo

$$E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)\sum_{t_1,t_2=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)e^{iu(t_1-t_2)}e^{i(x+\lambda)(t_2-t_1)}du\,dx - f(\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)f(u)\frac{1}{2\pi N}\sum_{t_1,t_2=1}^{N}e^{i(u-x-\lambda)(t_1-t_2)}du\,dx - f(\lambda)$$

Koristeći jednakost

$$\sum_{t=1}^{N}e^{itx} = \frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}e^{i\frac{N+1}{2}x} \tag{3.1.2}$$

dobijamo

$$\frac{1}{2\pi N}\sum_{t_1,t_2=1}^{N} e^{ix(t_1-t_2)} = \frac{1}{2\pi N}\,\frac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \Phi_N(x)$$

gde je Φ_N - Fejerovo jezgro, pa dalje sledi

$$E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)\,\Phi_N(x+\lambda-u)\,f(u)\,du\,dx-f(\lambda)$$

Koristeći periodičnost funkcija φ_N, Φ_N i f i parnost funkcija φ_N i Φ_N, dobijamo:

$$\begin{aligned}E\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda)&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-u)\,\Phi_N(x)\,f(\lambda+u)\,du\,dx-f(\lambda)\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(-x-u)\,\Phi_N(-x)\,f(\lambda+u)\,du\,dx-f(\lambda)\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x+u)\,\Phi_N(x)\big(f(\lambda+u)-f(\lambda)\big)\,du\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(\lambda+u)-f(\lambda)\big)\,\varphi_N(u)\Phi_N(x)\,du\,dx\\&+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(\lambda+u)-f(\lambda)\big)\big(\varphi_N(x+u)-\varphi_N(u)\big)\,\Phi_N(x)\,du\,dx\\&\equiv J_1+J_2\end{aligned}\qquad(3.1.3)$$

Kako je $|f(\lambda+u)-f(\lambda)|\le C|u|$, dobijamo

$$|J_1|\le C\int_{-\pi}^{\pi}|u|\,|\varphi_N(u)|\,du$$

Jezgro $\{\varphi_N\}$ pripada klasi $\mathcal{F}(\varphi)$, definisanoj u §1.4., pa koristeći osobinu B′) (vidi str. 32), dobijamo:

$$|J_2| = o\left(\int_{-\pi}^{\pi}|x\,\varphi_N(x)|\,dx\right)$$

Iz (3.1.3), (3.1.4) i (3.1.5) sledi nejednakost (3.1.1).∎

Iz teoreme 1.5.2. sledi da za kovarijacionu funkciju slučajnog procesa $\hat{f}_N(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, važi jednakost

$$\operatorname{cov}\big(\hat{f}_N(\lambda),\hat{f}_N(\mu)\big)=O\big((NB_N)^{-1}\big),\quad N\to\infty.$$

Tačniji rezultat daje sledeća

TEOREMA 3.1.2. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ stacionaran slučajni proces sa očekivanom vrednošću $EX(t)=0$, spektralnom gustinom drugog reda f za koju važi $\|f'\|_\infty = C < +\infty$ i spektralnom gustinom četvrtog reda za koju važi

$$\sup_{u_1,u_2,u_3,u_4} |f_4(u_1,u_2,u_3,u_4)| = C_1 < +\infty .$$

Neka je $\hat{f}_N(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$, periodogramna ocena definisana jednakostima (3.0.1)-(3.0.4). Tada za $\lambda,\mu\in[-\pi,\pi]$, pri $N\to\infty$ važi jednakost:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\hat{f}_N(\lambda),\hat{f}_N(\mu)) &= \frac{2\pi}{N} f(\lambda) f(\mu)\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-\mu)dx+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x+\mu)dx\right\}\\ &+|\lambda-\mu|\, O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)\\ &+O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)dx\ \frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)^{1/2}\\ &+o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right) \qquad (3.1.6)\end{aligned}$$

pri čemu $o(\cdot)$ i $O(\cdot)$ u formuli (3.1.6) važe ravnomerno po λ i μ.

Dokaz ćemo provesti metodom kojim je u radu Žurbenko [13] dokazano analogno tvrđenje u slučaju $\lambda=\mu$. Najpre ćemo formulisati nekoliko pomoćnih tvrđenja koja će biti korišćena u dokazu teoreme.

LEMA 3.1.1. ([13], str. 61)

Za svako $N\geqslant 1$ i $n>1$ važi nejednakost

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}N}\int_{\Pi^n}\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{\sin\frac{Nx_i}{2}}{\sin\frac{x_i}{2}}\right|\delta^*(x_1+\cdots+x_n)\,dx_1\cdots dx_n \leq \frac{e\pi n\, n!}{2}$$

gde je

$$\delta^*(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2k\pi)$$

$\delta(\cdot)$ - Dirakova delta funkcija,

$\Pi=[-\pi,\pi]$.

LEMA 3.1.2. ([13], str. 62)

Ako za spektralnu gustinu f važi $\|f'\|_\infty = C$, onda za sve λ_1, λ_2 i $\varepsilon>0$ važi nejednakost

$$\left| \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda+x)\frac{\sin N\frac{-x+\lambda_1}{2}\sin N\frac{x+\lambda_2}{2}}{\sin\frac{-x+\lambda_1}{2}\sin\frac{x+\lambda_2}{2}}dx - f(\lambda)\frac{\sin N\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}{\sin\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}} \right|$$

$$\leq C\ln 2N\varepsilon(|\lambda_1|+|\lambda_2|+2\varepsilon)\max_{|\theta|<\varepsilon}\left|\frac{\sin N\frac{\lambda_1+\lambda_2+\theta}{2}}{\sin\frac{\lambda_1+\lambda_2+\theta}{2}}\right| + \frac{C\pi^2}{8N\varepsilon^2}.$$

LEMA 3.1.3. ([13], str. 65)

Neka je $\{\varphi_N\}$ jezgro definisano sa (3.0.2)-(3.0.4). Tada pri $N\to\infty$ važe sledeće jednakosti

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\frac{\sin^2 N\frac{x-y}{2}}{N^2\sin^2\frac{x-y}{2}}dxdy = \frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\,(1+o(1))$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x+\alpha)\varphi_N(y)\frac{\sin^2 N\frac{x-y}{2}}{N^2\sin^2\frac{x-y}{2}}dxdy = \frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x+\alpha)\varphi_N(x)dx + o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x+\alpha)\varphi_N(y+\beta)\frac{\sin^2 N\frac{x-y}{2}}{N^2\sin^2\frac{x-y}{2}}dxdy = \frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x+\alpha)\varphi_N(x+\beta)dx + o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)$$

Dokaz teoreme 3.1.2. Koristeći definiciju periodogramne ocene dobijamo

$$\operatorname{cov}(\hat{f}_N(\lambda),\hat{f}_N(\mu)) = \int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\operatorname{cov}(I_N(x+\lambda), I_N(y+\mu))dxdy$$

$$= \frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=1}^{N}\left(EX(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4) - EX(t_1)X(t_2)\cdot EX(t_3)X(t_4)\right)$$

$$\cdot\exp\{-it_1(x+\lambda)+it_2(x+\lambda)+it_3(y+\mu)-it_4(y+\mu)\}dxdy$$

Koristeći formulu (1.2.1), dobijamo:

$$EX(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4) = S(t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$+ S(t_1,t_2)S(t_3,t_4) + S(t_1,t_3)S(t_2,t_4) + S(t_1,t_4)S(t_2,t_3)$$

$$EX(t_i)X(t_j) = S(t_i,t_j)$$

pa dalje, uz primenu formule o vezi semiinvarijanata i spektralnih gustina i formule (3.1.2), dobijamo:

$$\operatorname{cov}(\hat{f}_N(\lambda), \hat{f}_N(\mu)) = \frac{1}{4\pi^2 N^2} \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=1}^{N} \{S(t_1,t_2,t_3,t_4) + S(t_1,t_3)S(t_2,t_4)$$

$$+ S(t_1,t_4)S(t_2,t_3)\} \exp\{-it_1(x+\lambda) + it_2(x+\lambda) + it_3(y+\mu) - it_4(y+\mu)\}\, dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 N^2} \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=1}^{N} \exp\{-it_1(x+\lambda) + it_2(x+\lambda) + it_3(y+\mu) - it_4(y+\mu)\}$$

$$\cdot \Big\{ \int_{\Pi^4} f_4(u_1,u_2,u_3,u_4) e^{i(t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3+t_4u_4)} \delta^*(u_1+u_2+u_3+u_4)\, du_1du_2du_3du_4$$

$$+ \int_{\Pi} f(u)e^{i(t_1-t_3)u}du \int_{\Pi} f(v)e^{i(t_2-t_4)v}dv + \int_{\Pi} f(u)e^{i(t_1-t_4)u}du \int_{\Pi} f(v)e^{i(t_2-t_3)v}dv \Big\} dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 N^2} \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \int_{\Pi^4} f_4(u_1,u_2,u_3,u_4)\delta^*(u_1+u_2+u_3+u_4) \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin N\frac{u_1-x-\lambda}{2} \sin N\frac{u_2+x+\lambda}{2} \sin N\frac{u_3+y+\mu}{2} \sin N\frac{u_4-y-\mu}{2}}{\sin\frac{u_1-x-\lambda}{2} \sin\frac{u_2+x+\lambda}{2} \sin\frac{u_3+y+\mu}{2} \sin\frac{u_4-y-\mu}{2}}\, du_1du_2du_3du_4dx\,dy$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 N^2} \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \int_{\Pi^2} f(u)f(v) \frac{\sin N\frac{u-x-\lambda}{2} \sin N\frac{v+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{u-x-\lambda}{2} \sin\frac{v+x+\lambda}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin N\frac{-u+y+\mu}{2} \sin N\frac{-v-y-\mu}{2}}{\sin\frac{-u+y+\mu}{2} \sin\frac{-v-y-\mu}{2}}\, du\,dv\,dx\,dy$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 N^2} \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \int_{\Pi^2} f(u)f(v) \frac{\sin N\frac{u-x-\lambda}{2} \sin N\frac{v+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{u-x-\lambda}{2} \sin\frac{v+x+\lambda}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin N\frac{-v+y+\mu}{2} \sin N\frac{-u-y-\mu}{2}}{\sin\frac{-v+y+\mu}{2} \sin\frac{-u-y-\mu}{2}}\, du\,dv\,dx\,dy \tag{3.1.7}$$

Označimo sabirke na desnoj strani jednakosti (3.1.7) redom sa A_1, A_2 i A_3 i ocenimo svaki od tih sabiraka.

Ocena sabirka A_1. Koristeći uslov ograničenosti spektralne gustine četvrtog reda, lemu 3.1.1. i periodičnost podintegralnih funkcija, dobijamo:

$$|A_1| \leq \frac{1}{4\pi^2 N^2} \int_{\Pi^2} |\varphi_N(x)\varphi_N(y)| \int_{\Pi^4} C_1 \left| \frac{\sin N\frac{x_1}{2} \sin N\frac{x_2}{2} \sin N\frac{x_3}{2} \sin N\frac{x_4}{2}}{\sin\frac{x_1}{2} \sin\frac{x_2}{2} \sin\frac{x_3}{2} \sin\frac{x_4}{2}} \right|$$

$$\cdot \delta^*(x_1+x_2+x_3+x_4)\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2 N^2} \frac{(2\pi)^3 N}{2} 4\pi e\, 4! \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(x)|\,dx\right)^2 = o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx\right) \qquad (3.1.8)$$

jer je $\sup\limits_N \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(x)|\,dx < +\infty$ i $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx \to \infty$ pri $N \to \infty$.

Ocena sabirka A_2. Uvodeći smenu promenljivih $u-\lambda=\tilde{u}$ i $v+\mu=-\tilde{v}$ i koristeći činjenicu da su podintegralne funkcije parne i periodične, sabirak A_2 možemo zapisati u obliku:

$$A_2 = \frac{1}{4\pi^2 N^2} \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \int_{\Pi^2} f(\tilde{u}+\lambda) f(\tilde{v}-\mu) \frac{\sin N\frac{\tilde{u}-x}{2} \sin N\frac{-\tilde{v}-\mu+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{\tilde{u}-x}{2} \sin\frac{-\tilde{v}-\mu+x+\lambda}{2}}$$

$$\cdot \frac{\sin N\frac{-\lambda-\tilde{u}+y+\mu}{2} \sin N\frac{\tilde{v}-y}{2}}{\sin\frac{-\lambda-\tilde{u}+y+\mu}{2} \sin\frac{\tilde{v}-y}{2}} \, d\tilde{u}\, d\tilde{v}\, dx\, dy$$

$$= \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin N\frac{u-x}{2} \sin N\frac{-u+y-\lambda+\mu}{2}}{\sin\frac{u-x}{2} \sin\frac{-u+y-\lambda+\mu}{2}} f(u+\lambda)\,du$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin N\frac{v-y}{2} \sin N\frac{-v-\mu+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{v-y}{2} \sin\frac{-v-\mu+x+\lambda}{2}} f(v-\mu)\,dv\,dx\,dy.$$

Koristeći lemu 3.1.2., dobijamo:

$$\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+\lambda) \frac{\sin N\frac{u-x}{2} \sin N\frac{-u+y-\lambda+\mu}{2}}{\sin\frac{u-x}{2} \sin\frac{-u+y-\lambda+\mu}{2}}\,du = a_1+a_2+a_3$$

$$\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(v-\mu) \frac{\sin N\frac{v-y}{2} \sin N\frac{-v-\mu+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{v-y}{2} \sin\frac{-v-\mu+x+\lambda}{2}}\,dv = b_1+b_2+b_3$$

gde je

$$a_1 = f(\lambda) \frac{\sin N\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}}{N \sin\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}}, \quad b_1 = f(\mu) \frac{\sin N\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}}{N \sin\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}},$$

$$a_2 = C\theta_1(|x|+|y-\lambda+\mu|+2\varepsilon)\left|\frac{\sin N\frac{x-y+\lambda-\mu-\theta}{2}}{N\sin\frac{x-y+\lambda-\mu-\theta}{2}}\right|\cdot \ln 2N\varepsilon,$$

$$b_2 = C\theta_3(|x|+|x+\lambda-\mu|+2\varepsilon)\left|\frac{\sin N\frac{x-y+\lambda-\mu-\theta}{2}}{N\sin\frac{x-y+\lambda-\mu-\theta}{2}}\right| \ln 2N\varepsilon,$$

$$a_3 = \theta_2\frac{C\pi^2}{8N\varepsilon^2}, \quad b_3 = \theta_4\frac{C\pi^2}{8N\varepsilon^2},$$

za neke $|\theta_1|\leq 1$, $|\theta_2|\leq 1$, $|\theta_3|\leq 1$, $|\theta_4|\leq 1$; $|\theta|\leq\varepsilon$, gde je $\varepsilon>0$ proizvoljno. Označimo dalje

$$A_2^{ij} = \int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\,a_i b_j\,dx\,dy, \quad i,j\in\{1,2,3\},$$

i ocenimo svaki od tih sabiraka.

1) Koristeći lemu 3.1.3., dobijamo

$$A_2^{11} = f(\lambda)f(\mu)\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\frac{\sin^2 N\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}}{N^2\sin^2\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}}\,dx\,dy$$

$$= f(\lambda)f(\mu)\int_{\Pi^2}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(y-\mu)\frac{\sin^2 N\frac{x-y}{2}}{N^2\sin^2\frac{x-y}{2}}\,dx\,dy$$

$$\doteq \frac{2\pi}{N}f(\lambda)f(\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-\mu)\,dx + o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)$$

2) Neka je $\varepsilon = \ln^{-\beta}N$, gde je $\beta>2$. Tada važi

$$|A_2^{12}| \leq C\,f(\lambda)\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x)\varphi_N(y)|\,(|y|+|x+\lambda-\mu|+2\varepsilon)\ln N$$

$$\cdot\left|\frac{\sin N\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}\;\sin N\frac{x-y+\lambda-\mu-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{x-y+\lambda-\mu}{2}\;\sin\frac{x-y+\lambda-\mu-\theta}{2}}\right|dx\,dy$$

$$= C\,f(\lambda)\int_{G_1}|\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(y-\mu)|\,(|y-\mu|+|x-\mu|+2\ln^{-\beta}N)\ln N\cdot\left|\frac{\sin N\frac{x-y}{2}\sin N\frac{x-y-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x-y-\theta}{2}}\right|dx\,dy$$

$$= C\,f(\lambda)\int_{G}|\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-z-\mu)|\,(|x-z-\mu|+|x-\mu|+2\ln^{-\beta}N)\ln N\cdot\left|\frac{\sin N\frac{z}{2}\sin N\frac{z-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z-\theta}{2}}\right|dx\,dz$$

$$= {}_1A_2^{12} + {}_2A_2^{12} + {}_3A_2^{12}.$$

$$ {}_1A_2^{12} = Cf(\lambda)\int_G |\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-z-\mu)||x-z-\mu|\ln N \cdot \left|\frac{\sin N\frac{z}{2}\sin N\frac{z-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z-\theta}{2}}\right| dx\,dz $$

$$ \leq C\ln N f(\lambda)\int_{-2\pi}^{2\pi}\left\{\left|\frac{\sin\frac{Nz}{2}\sin N\frac{z-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z-\theta}{2}}\right|\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-z-\mu)||x-z-\mu|dx\right\}dz $$

$$ \leq C\ln N f(\lambda)\left(\frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)dx\ \frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)^{1/2}\frac{1}{2\pi N}\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 N\frac{z}{2}}{\sin^2\frac{z}{2}}dz $$

$$ = O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)dx\ \frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)^{1/2} $$

$$ {}_2A_2^{12} = Cf(\lambda)\int_G |\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-z-\mu)||x-\mu|\ln N\left|\frac{\sin N\frac{z}{2}\sin N\frac{z-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z-\theta}{2}}\right| dx\,dz $$

$$ \leq Cf(\lambda)\int_G |\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-z-\mu)|(|x-\lambda|+|\lambda-\mu|)\left|\frac{\sin N\frac{z}{2}\sin N\frac{z-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z-\theta}{2}}\right|\ln N\,dx\,dz $$

$$ = O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)dx\ \frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)^{1/2} + |\lambda-\mu|\,O\left(\frac{\ln N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right) $$

$$ {}_3A_2^{12} = Cf(\lambda)\int_G |\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-z-\mu)|\,2\ln^{1-\beta}N\cdot\left|\frac{\sin N\frac{z}{2}\sin N\frac{z-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z-\theta}{2}}\right| dx\,dz $$

$$ = o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right),\ N\to\infty, $$

gde je $G_1 = \{(x,y)|\ -\pi+\lambda\leq x\leq \pi+\lambda,\ -\pi+\mu\leq y\leq\pi+\mu\}$

$G = \{(x,z)|\ -\pi+\lambda\leq x\leq\pi+\lambda,\ -\pi+\mu\leq x-z\leq\pi+\mu\}$.

3) Veličinu A_2^{21} ocenjujemo analogno kao A_2^{12}.

4)
$$ A_2^{13} \leq \frac{1}{8}C\pi^2 f(\lambda)\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x)\varphi_N(y)|\left|\frac{\sin N\frac{x+\lambda-y-\mu}{2}}{N\sin\frac{x+\lambda-y-\mu}{2}}\right|\frac{\ln^{2\beta}N}{N}dx\,dy $$

$$ = o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right) $$

5)
$$ A_2^{22} \leq C^2\ln^2 N\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x)\varphi_N(y)|(|x|+|y-\lambda+\mu|+2\varepsilon)(|y|+|x+\lambda-\mu|+2\varepsilon)\cdot $$

$$ \cdot\left|\frac{\sin N\frac{x+\lambda-y-\mu}{2}\ \sin N\frac{x+\lambda-y-\mu-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{x+\lambda-y-\mu}{2}\ \sin\frac{x+\lambda-y-\mu-\theta}{2}}\right|dx\,dy $$

$$= c^2\ln^2 N \int_{G_1} |\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(y-\mu)|\,(|x-\lambda|+|y-\lambda|+2\varepsilon)(|x-\mu|+|y-\mu|+2\varepsilon)$$

$$\left|\frac{\sin N\frac{x-y}{2}\,\sin N\frac{x-y-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{x-y}{2}\,\sin\frac{x-y-\theta}{2}}\right| dx\,dy$$

$$\leq c^2\ln^2 N\int_{G_1}|\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(y-\mu)|\,(|x-\lambda|+|y-\mu|+|\lambda-\mu|+2\varepsilon)^2\left|\frac{\sin N\frac{x-y}{2}\,\sin N\frac{x-y-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{x-y}{2}\,\sin\frac{x-y-\theta}{2}}\right| dx\,dy$$

$$= O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)\,dx\,\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

$$+\ |\lambda-\mu|\cdot O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)+\ o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)$$

6) Sada lako dobijamo

$$A_2^{23}=o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right);\quad A_3^{3j}=o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right),\ j=1,2,3.$$

Prema tome, pri $N\to\infty$ važi jednakost:

$$A_2=\frac{2\pi}{N}f(\lambda)f(\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-\mu)\,dx+|\lambda-\mu|\,O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)$$

$$+\ O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)\,dx\,\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)^{1/2}+o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)\qquad(3.1.9)$$

Ocena sabirka A_3. Uvodeći nove promenljive $\tilde{x}=x+\lambda$, $\tilde{y}=y+\mu$, dobijamo:

$$A_3=\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\int_{\Pi^2}f(u)f(v)\,\frac{\sin N\frac{u-x-\lambda}{2}\,\sin N\frac{v+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{u-x-\lambda}{2}\,\sin\frac{v+x+\lambda}{2}}$$

$$\cdot\frac{\sin N\frac{-v+y+\mu}{2}\,\sin N\frac{-u-y-\mu}{2}}{\sin\frac{-v+y+\mu}{2}\,\sin\frac{-u-y-\mu}{2}}\,du\,dv\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(\tilde{x}-\lambda)\varphi_N(\tilde{y}-\mu)\int_{\Pi^2}f(u)f(v)\,\frac{\sin N\frac{u-\tilde{x}}{2}\,\sin N\frac{v+\tilde{x}}{2}}{\sin\frac{u-\tilde{x}}{2}\,\sin\frac{v+\tilde{x}}{2}}\cdot$$

$$\frac{\sin N\frac{-v+\tilde{y}}{2}\,\sin N\frac{-u-\tilde{y}}{2}}{\sin\frac{-v+\tilde{y}}{2}\,\sin\frac{-u-\tilde{y}}{2}}\,du\,dv\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}$$

$$= \int_{\Pi^2} \varphi_N(x-\lambda)\, \varphi_N(y-\mu) \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin N \frac{u-x}{2} \sin N \frac{u+y}{2}}{\sin \frac{u-x}{2} \sin \frac{u+y}{2}} du$$

$$\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \frac{\sin N \frac{v-x}{2} \sin N \frac{v+y}{2}}{\sin \frac{v-x}{2} \sin \frac{v+y}{2}} dv dx dy.$$

Koristeći lemu 3.1.2., analogno kao u slučaju ocenjivanja sabirka A_2, dobijamo:

$$\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin N \frac{u-x}{2} \sin N \frac{u+y}{2}}{\sin \frac{u-x}{2} \sin \frac{u+y}{2}} du = a_1' + a_2' + a_3'$$

$$\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \frac{\sin N \frac{v-x}{2} \sin N \frac{v+y}{2}}{\sin \frac{v-x}{2} \sin \frac{v+y}{2}} dv = b_1' + b_2' + b_3'$$

gde je

$$a_1' = f(\lambda) \frac{\sin N \frac{x+y}{2}}{N \sin \frac{x+y}{2}}, \quad b_1' = f(\mu) \frac{\sin N \frac{x+y}{2}}{N \sin \frac{x+y}{2}},$$

$$a_2' = c \ln 2N\varepsilon (|x-\lambda| + |y-\lambda| + 2\varepsilon)\, \theta_1 \left| \frac{\sin N \frac{x+y+\theta}{2}}{N \sin \frac{x+y+\theta}{2}} \right|,$$

$$b_2' = c\,\theta_3 \ln 2N\varepsilon (|x-\mu| + |y-\mu| + 2\varepsilon) \cdot \left| \frac{\sin N \frac{x+y+\theta}{2}}{N \sin \frac{x+y+\theta}{2}} \right|,$$

$$a_3' = \frac{c\pi^2}{8N\varepsilon^2}, \quad b_3' = \frac{c\pi^2}{8N\varepsilon^2},$$

za neke $|\theta_1| \le 1$, $|\theta_2| \le 1$, $|\theta_3| \le 1$, $|\theta_4| \le 1$, $|\theta| \le \varepsilon$, gde je ε proizvoljan pozitivan broj. Označimo

$$A_3^{ij} = \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\, \varphi_N(y)\, a_i' b_j' dx dy, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

i opet ocenimo svaki od tih sabiraka.

Koristeći lemu 3.1.3. i parnost i periodičnost funkcije φ_N, dobijamo:

$$A_3^{11} = \int_{\Pi^2} \varphi_N(x-\lambda)\, \varphi_N(y-\mu)\, f(\lambda) f(\mu) \frac{\sin^2 N \frac{x+y}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{x+y}{2}} dx dy$$

$$= \int_{\Pi^2} \varphi_N(x-\lambda)\, \varphi_N(y+\mu)\, f(\lambda) f(\mu) \frac{\sin^2 N \frac{x-y}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{x-y}{2}} dx dy$$

$$=\frac{2\pi}{N}f(\lambda)f(\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x+\mu)dx+\sigma\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)$$

Neka je, opet, $\varepsilon=\ln^{-\beta}N$, $\beta>2$. Dobijamo:

$$A_3^{12}\leqslant Cf(\lambda)\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(y-\mu)|\ln N(|x-\mu|+|y-\mu|+2\varepsilon)\cdot$$

$$\cdot\left|\frac{\sin N\frac{x+y}{2}\sin N\frac{x+y+\theta}{2}}{N^2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+y+\theta}{2}}\right|dxdy$$

$$=Cf(\lambda)\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(y+\mu)|\ln N(|x-\mu|+|y+\mu|+2\varepsilon)$$

$$\cdot\left|\frac{\sin N\frac{x-y}{2}\sin N\frac{x-y+\theta}{2}}{N^2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x-y+\theta}{2}}\right|dxdy$$

$$=Cf(\lambda)\int_G|\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-z+\mu)|\ln N(|x-z|+|x-z+\mu|+2\varepsilon)\left|\frac{\sin N\frac{z}{2}\sin N\frac{z-\theta}{2}}{N^2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{z-\theta}{2}}\right|dxdz$$

$$=|\lambda-\mu|\,O\left(\frac{\ln N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)+\sigma\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)$$

$$+O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)dx\,\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)^{1/2}$$

Ostale sabirke ocenjujemo analogno kao u prethodnim slučajevima. Konačno dobijamo:

$$A_3=\frac{2\pi}{N}f(\lambda)f(\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x+\mu)dx+|\lambda-\mu|\,O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)$$

$$+O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)dx\,\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)^{1/2}+\sigma\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx\right)\qquad(3.1.10)$$

Jednakost (3.1.6) sledi iz (3.1.7),(3.1.8),(3.1.9) i (3.1.10).∎

Korišćenjem jednakosti (3.1.6) i definicije jezgra $\{\varphi_N\}$ jednostavno se dokazuje (vidi niže dokaz teoreme 3.2.1.) sledeća posledica teoreme 3.1.2.

Posledica 3.1.1. Pri uslovima teoreme 3.1.2., za svako $\alpha\in R$ važi jednakost:

$$\lim_{N\to\infty} NB_N \operatorname{cov}(\hat f_N(\lambda), \hat f_N(\lambda+\alpha B_N)) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}(\xi_N(\lambda), \xi_N(\lambda+\alpha B_N))$$

$$= \begin{cases} 2\pi f^2(\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(x+\alpha)\,dx & \lambda \neq 0 \pmod{2\pi} \\ 4\pi f^2(\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(x+\alpha)\,dx & \lambda = 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

U uvodnom delu glave III rečeno je da će osnovni objekat našeg istraživanja biti slučajni procesi $\xi_N(\lambda)$ i $Z_N(\lambda)$, $0\le\lambda\le\pi$, određeni jednakostima (3.0.5) i (3.0.6). Da bi se dobila "razumna" granična kovarijaciona funkcija, "normiraćemo" parametar λ (promeniti jedinicu vremena na λ-osi, saglasno posledici 3.1.1.) i definisati nove procese $\tilde\xi_N(\lambda)$ i $\tilde Z_N(\lambda)$, $0\le\lambda<\infty$, na sledeći način:

$$\tilde\xi_N(\lambda) = \begin{cases} \xi_N(\lambda B_N) & 0\le\lambda\le\pi B_N^{-1} \\ \xi_N(\pi) & \lambda > \pi B_N^{-1} \end{cases} \tag{3.1.11}$$

$$\tilde Z_N(\lambda) = \begin{cases} Z_N(\lambda B_N) & 0\le\lambda\le\pi B_N^{-1} \\ Z_N(\pi) & \lambda > \pi B_N^{-1} \end{cases} \tag{3.1.12}$$

§3.2. ASIMPTOTSKA NORMALNOST KONAČNODIMENZIONALNIH RASPODELA NORMIRANIH PROCESA

Ispitaćemo asimptotsko ponašanje kovarijacionih funkcija slučajnih procesa $\tilde\xi_N(\lambda)$ i $\tilde Z_N(\lambda)$, $0\le\lambda<+\infty$, a zatim formulisati teoremu o asimptotskom ponašanju njihovih konačnodimenzionalnih raspodela.

TEOREMA 3.2.1. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 3.1.2. i neka su $\tilde\xi_N$ i $\tilde Z_N$ procesi definisani jednakostima (3.1.11) i (3.1.12). Tada za sve $\lambda\ge0$ i $\mu\ge0$ važe jednakosti

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}(\tilde\xi_N(\lambda), \tilde\xi_N(\mu)) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}(\tilde Z_N(\lambda), \tilde Z_N(\mu)) = r(\lambda,\mu), \tag{3.2.1}$$

gde je

$$r(\lambda,\mu) = 2\pi f^2(0)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\lambda)\varphi(x+\lambda)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\lambda)\varphi(x+\lambda)\,dx\right\}. \tag{3.2.2}$$

Dokaz teoreme 3.2.1. Koristeći jednakost 3.1.6. i definiciju slučajnog procesa $\tilde{\xi}_N$, dobijamo

$$\operatorname{cov}(\tilde{\xi}_N(\lambda), \tilde{\xi}_N(\mu)) = 2\pi B_N f(\lambda B_N) f(\mu B_N) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(x-\mu B_N)\,dx$$
$$+ 2\pi B_N f(\lambda B_N) f(\mu B_N) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(x+\mu B_N)\,dx$$
$$+ |\lambda-\mu|\, B_N^2\, O\Big(\ln^2 N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx\Big)$$
$$+ B_N\, O\Big(\ln^4 N \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \varphi_N^2(x)\,dx \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx\Big)^{1/2} + o\Big(B_N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx\Big)$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{5} J_N^{(j)}(\lambda,\mu) \qquad (3.2.3)$$

Kako je f neprekidna funkcija dobijamo

$$f(\lambda B_N) \to f(0) \quad \text{i} \quad f(\mu B_N) \to f(0) \quad \text{pri } N \to +\infty.$$

Označimo $M = \max(\lambda,\mu)$. Tada važi

$$\lim_{N\to\infty} B_N \int_{-\pi+MB_N}^{\pi} \varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(x-\mu B_N)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi+MB_N}^{\pi} \varphi\Big(\frac{x}{B_N}-\lambda\Big)\varphi\Big(\frac{x}{B_N}-\mu\Big)\frac{dx}{B_N}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_{M-\pi/B_N}^{\pi/B_N} \varphi(t-\lambda)\varphi(t-\mu)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\lambda)\varphi(x-\mu)\,dx$$

Koristeći definiciju i osobine jezgra $\{\varphi_N\}$, lako dokazujemo

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{-\pi+MB_N} \varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(x-\mu B_N)\,dx = 0$$

Prema tome, dobili smo

$$\lim_{N\to\infty} J_N^{(1)}(\lambda,\mu) = 2\pi f^2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\lambda)\varphi(x-\mu)\,dx. \qquad (3.2.4)$$

Analogno:
$$\lim_{N\to\infty} J_N^{(2)}(\lambda,\mu) = 2\pi f^2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\lambda)\varphi(x+\mu)\,dx. \qquad (3.2.5)$$

Dalje dobijamo:

$$J_N^{(3)}(\lambda,\mu) = O\Big(|\lambda-\mu|\, B_N^2 \ln^2 N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx\Big) = O(B_N \ln^2 N) = o(1),\ N\to\infty, \qquad (3.2.6)$$

$$J_N^{(4)}(\lambda,\mu) = O\Big(B_N^2 \ln^4 \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \varphi_N^2(x)\,dx \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)\,dx\Big)^{1/2}$$
$$= O\Big(B_N^2 \ln^4 N \int B_N t^2 \varphi^2(t)\,dt \int \frac{1}{B_N}\varphi^2(t)\,dt\Big)^{1/2} = O(B_N \ln^2 N) = o(1),\ N\to\infty, \qquad (3.2.7)$$

$$J_N^{(5)}(\lambda,\mu) = o\left(B_N \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^2(x)dx\right) = o(1), \quad N \to \infty \tag{3.2.8}$$

Iz jednakosti (3.2.3)-(3.2.8) sledi

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}(\tilde{\xi}_N(\lambda), \tilde{\xi}_N(\mu)) = r(\lambda,\mu).$$

Kako je $B_N = N^{-\varepsilon}$ i $\frac{1}{3} < \varepsilon < \frac{1}{2}$, to koristeći nejednakost (3.1.1), dobijamo:

$$\sup_{0\le\lambda\le\pi} \sqrt{NB_N}\,|E\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)| = O\left(\sqrt{NB_N}\int_{-\pi}^{\pi} |x\varphi_N(x)|dx\right)$$

$$= O\left(\sqrt{NB_N}\int_{-\pi/B_N}^{\pi/B_N} B_N|t\,\varphi(t)|dt\right) = O(N^{\frac{1}{2}} B_N^{\frac{3}{2}}) = o(1), \quad N\to\infty$$

$$\sup_{0\le\lambda\le\pi} |\tilde{\xi}_N(\lambda) - \tilde{Z}_N(\lambda)| = \sup_{0\le\lambda\le\pi} \sqrt{NB_N}\,|E\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)| = o(1), \quad N\to\infty,$$

pa zato važi i sledeća jednakost:

$$\lim_{N\to\infty} (\tilde{Z}_N(\lambda), \tilde{Z}_N(\mu)) = r(\lambda,\mu). \blacksquare$$

TEOREMA 3.2.2. Neka je $\{X(t), t\in Z\}$ stacionaran slučajni proces za koji postoje i ograničene su sve spektralne gustine višeg reda, a spektralna gustina drugog reda f je neprekidno-diferencijabilna. Neka je $\hat{f}_N(\lambda)$, $0\le\lambda\le\pi$, periodogramna ocena definisana jednakostima (3.0.1)-(3.0.4), $\tilde{\xi}_N(\lambda)$ i $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $0\le\lambda<+\infty$, slučajni procesi definisani jednakostima (3.1.11) i (3.1.12), a $Z(\lambda)$, $0\le\lambda<+\infty$, Gausov slučajni proces sa matematičkim očekivanjem $EZ(t)=0$ i drugim momentima $EZ(\lambda)Z(\mu) = r(\lambda,\mu)$, gde je $r(\cdot,\cdot)$ funkcija data jednakošću (3.2.2).

Tada, konačnodimenzionalne raspodele slučajnih procesa $\tilde{\xi}_N(\lambda)$ i $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $0\le\lambda<+\infty$, slabo konvergiraju (konvergiraju u raspodeli) ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog slučajnog procesa $Z(\lambda)$, $0\le\lambda<+\infty$.

Dokaz teoreme 3.2.2. Koristeći teoreme 3.1.1. i 3.2.1. i posledicu 1.5.1. lako dobijamo da sve semiinvarijante slučajnih procesa $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$, konvergiraju ka odgovarajućim semiinvarijantama slučajnog procesa Z. $\blacksquare$

§ 3.3. OCENA MOMENATA $E|\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)|^{\alpha}$ I NEPREKIDNOST TRAJEKTORIJA GRANIČNOG PROCESA U GAUSOVOM SLUČAJU

U ovom paragrafu pretpostavljaćemo da je polazni slučajni proces $\{X(t),\ t\in Z\}$ - Gausov; $\tilde{\xi}_N(\cdot)$ je proces dat jednakošću (3.1.11).

LEMA 3.3.1. Za sve $\lambda,\mu\in[0,\pi B_N^{-1}]$ važi jednakost

$$E\,\tilde{\xi}_N(\lambda)\tilde{\xi}_N(\mu) = NB_N\int_{\Pi^2}\varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(x-\mu B_N)\,G_N(x,y)\,dx\,dy \tag{3.3.1}$$

gde je $G_N:\Pi^2\to R$ funkcija određena sa

$$G_N(x,y) = \left\{\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin N\frac{\alpha-x}{2}\,\sin N\frac{\alpha+y}{2}}{\sin\frac{\alpha-x}{2}\,\sin\frac{\alpha+y}{2}}\,f(\alpha)\,d\alpha\right\}^2$$

$$+\left\{\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin N\frac{\alpha-x}{2}\,\sin N\frac{\alpha-y}{2}}{\sin\frac{\alpha-x}{2}\,\sin\frac{\alpha-y}{2}}\,f(\alpha)\,d\alpha\right\}^2 \tag{3.3.2}$$

Dokaz leme 3.1.1. Iz teoreme 2.1.1. sledi da za svaki Gausov vektor (X_1,X_2,X_3,X_4) važi jednakost

$$E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3)$$

pa korišćenjem poslednje i jednakosti 1.1.4. lako dobijamo:

$$E\,I_N(x)I_N(y) = \frac{1}{4\pi^2N^2}\,E\left|\sum_{t=1}^{N}X(t)e^{itx}\right|^2\left|\sum_{\ell=1}^{N}X(\ell)e^{i\ell y}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4\pi^2N^2}\sum_{K_1,K_2,K_3,K_4=1}^{N}E\,X(K_1)X(K_2)X(K_3)X(K_4)\exp\{iK_1x-iK_2x+iK_3y-iK_4y\}$$

$$= \frac{1}{4\pi N^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\left|\sum_{t=1}^{N}e^{i(\alpha-x)t}\right|^2d\alpha\int_{-\pi}^{\pi}f(\beta)\left|\sum_{t=1}^{N}e^{i(\beta-y)t}\right|^2d\beta$$

$$+\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{iN(\alpha-x)}-1}{e^{i(\alpha-x)}-1}\cdot\frac{e^{iN(\alpha+y)}-1}{e^{i(\alpha+y)}-1}\,f(\alpha)\,d\alpha\right|^2$$

$$+\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{iN(\alpha-x)}-1}{e^{i(\alpha-x)}-1}\,\frac{e^{iN(\alpha-y)}-1}{e^{i(\alpha-y)}-1}\,f(\alpha)\,d\alpha\right|^2$$

Osim toga važe jednakosti

$$EI_N(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{t=1}^{N} e^{it(\alpha - x)}\right|^2 f(\alpha)\,d\alpha$$

$$\frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1} = e^{i\frac{N-1}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

pa korišćenjem očigledne jednakosti

$$E\,\tilde{\xi}_N(\lambda)\tilde{\xi}_N(\mu) = NB_N\left\{E\hat{f}_N(\lambda B_N)\hat{f}_N(\mu B_N) - E\hat{f}_N(\lambda B_N)\,E\hat{f}_N(\mu B_N)\right\}$$

$$= NB_N\int_{\Pi^2}\varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(y-\mu B_N)\left\{EI_N(x)I_N(y) - EI_N(x)\,EI_N(y)\right\}dx\,dy$$

lako dobijamo jednakost (3.3.1).

LEMA 3.3.2. Neka je $\|f\|_\infty < +\infty$. Tada, za sve $\lambda, \mu \in [0, \pi B_N^{-1}]$ važi nejednakost

$$E\left|\tilde{\xi}_N(\lambda) - \tilde{\xi}_N(\mu)\right|^2 \leq K|\lambda - \mu|,$$

gde konstanta $K < +\infty$ ne zavisi od N, λ i μ.

Dokaz leme 3.3.2. Koristeći lemu 3.3.1. i činjenicu da jezgro $\{\varphi_N\}$ zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom HB_N^{-2}, dobijamo

$$E\left|\tilde{\xi}_N(\lambda) - \tilde{\xi}_N(\mu)\right|^2 = E\,\tilde{\xi}_N^2(\lambda) + E\,\tilde{\xi}_N^2(\mu) - 2E\,\tilde{\xi}_N(\lambda)\tilde{\xi}_N(\mu)$$

$$= NB_N\int_{\Pi^2}\left\{\varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(y-\lambda B_N) + \varphi_N(x-\mu B_N)\varphi_N(y-\mu B_N)\right.$$

$$\left. - 2\varphi_N(x-\lambda B_N)\varphi_N(y-\mu B_N)\right\} G_N(x,y)\,dx\,dy$$

$$= NB_N\int_{\Pi^2}\varphi_N(x-\lambda B_N)\left\{\varphi_N(y-\lambda B_N) - \varphi_N(y-\mu B_N)\right\} G_N(x,y)\,dx\,dy$$

$$+ NB_N\int_{\Pi^2}\varphi_N(y-\mu B_N)\left\{\varphi_N(x-\lambda B_N) - \varphi_N(x-\mu B_N)\right\} G_N(x,y)\,dx\,dy$$

$$\leq NH|\lambda-\mu|\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x-\lambda B_N)|\,G_N(x,y)\,dx\,dy$$

$$+ NH|\lambda-\mu|\int_{\Pi^2}|\varphi_N(y-\mu B_N)|\,G_N(x,y)\,dx\,dy$$

Koristeći formulu (3.3.2), dobijamo sledeću nejednakost:

$$E(\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu))^2 \leq NH|\lambda-\mu|(J_1+J_2+J_3+J_4)$$

gde je

$$J_1=\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x-\lambda B_N)|\left(\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin N\frac{\alpha-x}{2}\sin N\frac{\alpha+y}{2}}{\sin\frac{\alpha-x}{2}\sin\frac{\alpha+y}{2}}f(\alpha)d\alpha\right)^2 dx\,dy$$

$$J_2=\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x-\lambda B_N)|\left(\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin N\frac{\alpha-x}{2}\sin N\frac{\alpha-y}{2}}{\sin\frac{\alpha-x}{2}\sin\frac{\alpha-y}{2}}f(\alpha)d\alpha\right)^2 dx\,dy$$

a J_3 i J_4 se dobijaju kada u formulama za J_1 i J_2 zamenimo $\varphi_N(x-\lambda B_N)$ sa $\varphi_N(y-\mu B_N)$. Dalje, koristeći jednakost

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin N\frac{x-t}{2}\sin N\frac{y-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}\sin\frac{y-t}{2}}dt = 2\pi\frac{\sin N\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}}$$

i ograničenost spektralne gustine, dobijamo

$$NJ_1 \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x-\lambda B_N)|\frac{1}{2\pi N}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin N\frac{\alpha-x}{2}\sin N\frac{\alpha+y}{2}}{\sin\frac{\alpha-x}{2}\sin\frac{\alpha+y}{2}}d\alpha\right)^2 dx\,dy$$

$$\leq 2\pi\|f\|_\infty\int_{\Pi^2}|\varphi_N(x-\lambda B_N)|\frac{1}{2\pi N}\frac{\sin^2 N\frac{x+y}{2}}{\sin^2\frac{x+y}{2}}dx\,dy$$

$$\leq 2\pi\|f\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_N(x-\lambda B_N)|\left(\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 N\frac{z}{2}}{\sin^2\frac{z}{2}}dz\right)dx \leq K_1<+\infty$$

gde konstanta K_1 ne zavisi od N, λ i μ. Analogno ocenjujemo sabirke J_2, J_3 i J_4, pa sledi tvrđenje leme.∎

Označimo sa χ_k k-tu semiinvarijantu slučajne veličine $\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)$. Očevidno važi jednakost $\chi_1=E(\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu))=0$.

LEMA 3.3.3. Neka je $\|f\|_\infty<+\infty$. Za $k\geq 2$ važi nejednakost

$$|\chi_k|\leq C_k|\lambda-\mu|^{k-1}$$

gde konstanta C_k ne zavisi od N, λ i μ.

Dokaz leme 3.3.3. Kako je $\chi_2=E(\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu))^2$, to u slučaju k=2, tvrđenje leme sledi neposredno iz leme 3.3.2. Dokažimo da nejednakost (3.3.3) važi i pri $k>2$. Primetimo da slučajnu veličinu

$\tilde{\xi}_N(\lambda)$ možemo predstaviti u obliku

$$\tilde{\xi}_N(\lambda)=\frac{\sqrt{NB_N}}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda B_N)\left(\left|\sum_{t=1}^{N}X(t)e^{itx}\right|^2-E\left|\sum_{t=1}^{N}X(t)e^{itx}\right|^2\right)dx$$

$$=\sum_{t_1=1}^{N}\sum_{t_2=1}^{N}\left(X(t_1)X(t_2)-EX(t_1)X(t_2)\right)\frac{\sqrt{NB_N}}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda B_N)\cos(t_1-t_2)x\,dx$$

$$=(\tilde{A}X,X)-E(\tilde{A}X,X)$$

gde je

$$X=(X(1),\dots,X(N))$$

$$\tilde{A}=\left[\frac{\sqrt{NB_N}}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda B_N)\cos(t_1-t_2)x\right]_{t_1,t_2=1,\dots,N}$$

Prema tome, slučajnu veličinu $\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)$ možemo zapisati na sledeći način:
$$\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)=(\mathbf{A}X,X)-E(\mathbf{A}X,X)$$

gde je matrica **A** određena sa

$$A=\left[\frac{\sqrt{B_N}}{2\pi\sqrt{N}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi_N(x-\lambda B_N)-\varphi_N(x-\mu B_N)\right)\cos(t_1-t_2)x\,dx\right]_{t_1,t_2=1,\dots,N}\qquad(3.3.4)$$

Koristeći činjenicu da je $X=(X(1),\dots,X(N))$ - Gausov vektor i teoremu 2.1.2., dobijamo da karakteristična funkcija $\tilde{\varphi}_N(t,\lambda,\mu)$ slučajne veličine $\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)$ ima oblik

$$\tilde{\varphi}_N(t,\lambda,\mu)=\tilde{\varphi}_N(t)=\exp\left\{-it\sum_{j=1}^{N}\mu_j^{(N)}\right\}\prod_{j=1}^{N}\left(1-2it\mu_j^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}}\qquad(3.3.5)$$

gde su μ_j - karakteristične vrednosti matrice **KA**, **A** je matrica data sa (3.3.4), a $K=\left[K(t_1-t_2)\right]_{t_1,t_2=1,\dots,N}$ - kovarijaciona matrica vektora $(X(1),\dots,X(N))$.

Iz jednakosti (3.3.5) dobijamo

$$\chi_k=2^{k-1}k!\sum_{j=1}^{N}(\mu_j^{(N)})^k,$$

pa za $k>2$ važi

$$|\chi_k|\le\tilde{C}_k\max_{1\le j\le N}|\mu_j^{(N)}|^{k-2}\cdot 2\sum_{j=1}^{N}(\mu_j^{(N)})^2=\tilde{C}_k\chi_2\max_{1\le j\le N}|\mu_j^{(N)}|^{k-2}\qquad(3.3.6)$$

Karakteristične vrednosti matrice ocenjujemo normom matrice

$$\max |\mu_j^{(N)}| \leq \|KA\| \leq \|K\| \cdot \|A\| \tag{3.3.7}$$

Ocenimo norme matrica K i A. Neka je $y=(y_1,\ldots,y_N)$ - jedinični vektor u prostoru R^N. Tada je

$$\|K\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ky,y)| = \sup_{\|y\|=1} \sum_{t,s=1}^{N} y_t y_s K(t-s)$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \sum_{t,s=1}^{N} y_t y_s \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} f(\lambda)d\lambda = \sup_{\|y\|=1} \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{t=1}^{N} y_t e^{i\lambda t}\Big|^2 f(\lambda)d\lambda \tag{3.3.8}$$

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ay,y)| = \sup_{\|y\|=1} \sum_{t,s=1}^{N} y_t y_s \frac{\sqrt{B_N}}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_N(x-\lambda B_N)-\varphi_N(x-\mu B_N))\cdot$$

$$\cdot \cos(t-s)x\, dx$$

$$\leq \sup_{\|y\|=1} \frac{\sqrt{B_N}}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(x-\lambda B_N)-\varphi_N(x-\mu B_N)| \Big|\sum_{t=1}^{N} y_t e^{-itx}\Big|^2 dx \tag{3.3.9}$$

Primetimo da važi jednakost

$$\sup_{\|y\|=1} \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{t=1}^{N} y_t e^{-itx}\Big|^2 dx = \sup_{\|y\|=1} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{t=1}^{N} y_t^2 + \sum_{t\neq s} y_t y_s \cos(t-s)\Big)dx = 2\pi \tag{3.3.10}$$

pa koristeći (3.3.8) i (3.3.9), dobijamo sledeće ocene

$$\|K\| \leq 2\pi\|f\|_\infty \tag{3.3.11}$$

$$\|A\| \leq \frac{\sqrt{B_N}}{2\pi\sqrt{N}} \frac{H}{B_N} |\lambda-\mu|\, 2\pi = \frac{H|\lambda-\mu|}{\sqrt{NB_N}} \tag{3.3.12}$$

Nejednakost (3.3.3) sledi iz (3.3.6),(3.3.7),(3.3.11)-(3.3.12).

TEOREMA 3.3.1. Neka je $\|f\|_\infty < +\infty$. Tada postoje konstante $0<\alpha<\infty$, $K>0$, $\varepsilon>0$ koje ne zavise od N, λ i μ, takve da važi nejednakost:

$$E|\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)|^\alpha \leq K|\lambda-\mu|^{1+\varepsilon} \tag{3.3.13}$$

Dokaz teoreme 3.3.1. Koristeći formulu (1.2.1), dobijamo

$$E|\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)|^{2k} = \sum c_{j_1}\cdots c_{j_{2k}} \chi_1^{j_1}\cdots\chi_{2k}^{j_{2k}} \tag{3.3.14}$$

gde se sabiranje vrši po svim $(j_1,\ldots,j_{2k})$ za koje važi $\sum_{s=1}^{2k} s j_s = 2k$.

Kako je $\chi_1 = 0$, to su svi sabirci na desnoj strani jednakosti (3.3.14), a koji sadrže χ_1, jednaki nuli. Za ostale sabirke, korišćenjem leme 3.3.3., dobijamo nejednakost oblika

$$|\chi_2^{j_2} \cdots \chi_{2k}^{j_{2k}}| \leq C_k'' |\lambda-\mu|^{\sum_{s=2}^{2k}(s-1)j_s}$$

gde konstanta C_k'' ne zavisi od N, λ i μ. Za $k \geq 3$ važi $\sum_{s=2}^{2k}(s-1)j_s \geq 2$, pa stavljajući, na primer, $\alpha=6$, $\varepsilon=1$, lako dobijamo tvrđenje teoreme 3.3.1.■

Sledeći rezultat formulisao je Kolmogorov (vidi [26]):

LEMA 3.3.4. Neka za slučajni proces $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$, važi nejednakost

$$E|\xi(t)-\xi(s)|^{\alpha} \leq K|t-s|^{1+\varepsilon}$$

gde konstante $\alpha > 0$, $K > 0$ i $\varepsilon > 0$ ne zavise od t i s. Tada su trajektorije slučajnog procesa $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$, neprekidne sa verovatnoćom 1.

Za svaki od procesa $\tilde{\xi}_N(\lambda)$, $0 \leq \lambda < +\infty$, N=1,2,..., važe uslovi leme 3.3.4. Slučajni proces $\tilde{\xi}_N(\lambda)$, $0 \leq \lambda < +\infty$, predstavlja na intervalu $[0, \pi B_N^{-1}]$ trigonometrijski polinom sa slučajnim koeficijentima, a za $\lambda > \pi B_N^{-1}$ je neprekidno dodefinisan, pa iz same definicije sledi da su njegove trajektorije neprekidne. Međutim, kako u nejednakosti (3.3.13) konstante α, K i ε ne zavise od N, λ i μ, a (pri uslovima teoreme 3.2.2.) niz slučajnih veličina $\tilde{\xi}_N(\lambda)-\tilde{\xi}_N(\mu)$ konvergira ka slučajnoj veličini $Z(\lambda)-Z(\mu)$, to i za slučajni proces $Z(\lambda)$, $0 \leq \lambda < +\infty$, važi nejednakost $E|Z(\lambda)-Z(\mu)|^{\alpha} \leq K|\lambda-\mu|^{1+\varepsilon}$ sa konstantama K, α i ε, istim kao u nejednakosti (3.3.13).

Prema tome, primenjujući lemu 3.3.4., zaključujemo da važi

TEOREMA 3.3.2. Trajektorije slučajnog procesa $Z(\lambda)$, $0 \leq \lambda < +\infty$, koji je definisan u teoremi 3.2.2., neprekidne su sa verovatnoćom 1.

§3.4. SLABA KONVERGENCIJA VEROVATNOSNIH MERA U PROSTORU C[a,b]

U ovom paragrafu navešćemo osnovne definicije i tvrđenja o slaboj konvergenciji verovatnosnih mera u metričkom prostoru i, posebno u prostoru neprekidnih funkcija na zatvorenom intervalu. Biće formulisana samo tvrđenja potrebna za razumevanje daljeg izlaganja. Slaba konvergencija verovatnosnih mera je mlada teorija koja se razvijala poslednjih nekoliko desetina godina, pre svega zahvaljujući radovima Kolmogorova, Duba, Donskera, Skorohoda, Le Kama, Varadarajna i dr. Šire izlaganje i bibliografija dati su u [8].

Neka je S metrički prostor, a $\mathcal{S}$ klasa Borelovih skupova prostora S, tj. minimalno σ-polje podskupova skupa S, koje sadrži sve otvorene skupove. Verovatnosna mera na merljivom prostoru $(S,\mathcal{S})$ je funkcija $P:\mathcal{S}\rightarrow[0,1]$, koja je σ-aditivna i za koju važi $P(S)=1$.

Neka je $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz verovatnosnih mera na $(S,\mathcal{S})$. Kažemo da P_n slabo konvergira ka P_o i pišemo $P_n \Rightarrow P_o$, ako važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f\,dP_n = \int_S f\,dP \qquad (3.4.1)$$

za svaku ograničenu i neprekidnu funkciju $f:S\rightarrow R$.

Skup $A\in\mathcal{S}$, za čiju granicu važi $P(\partial A)=0$, zovemo P-neprekidnim skupom. Ima smisla govoriti o verovatnoći skupa ∂A, jer on kao zatvoren skup pripada klasi $\mathcal{S}$.

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove slabe konvergencije mera na $(S,\mathcal{S})$.

TEOREMA 3.4.1. ([8], str. 21)

Neka su P_n i P verovatnosne mere na $(S,\mathcal{S})$. Sledeći uslovi su međusobno ekvivalentni:

U1) $P_n \Rightarrow P$.

U2) Za svaku ograničenu ravnomerno neprekidnu funkciju $f:S \to R$ važi jednakost (3.4.1).

U3) Za svaki zatvoren skup $F \in \mathcal{S}$ važi nejednakost

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leqslant P(F).$$

U4) Za svaki otvoren skup $F \in \mathcal{S}$ važi nejednakost

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geqslant P(G).$$

U5) Za svaki P-neprekidan skup A važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

Neka je $\mathcal{P}$ familija verovatnosnih mera na $(S,\mathcal{S})$.

Kažemo da je familija $\mathcal{P}$ relativno kompaktna, ako svaki niz elemenata iz $\mathcal{P}$ sadrži slabo konvergentan podniz (ka verovatnosnoj meri na $(S,\mathcal{S})$ koja u opštem slučaju ne mora pripadati familiji $\mathcal{P}$).

Kažemo da je familija $\mathcal{P}$ gusta, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \in \mathcal{S}$ takav da za svako $P \in \mathcal{P}$ važi $P(K) > 1-\varepsilon$.

Sledeću važnu teoremu dokazao je Prohorov [33]:

TEOREMA 3.4.2. Neka je S separabilan i kompletan metrički prostor i $\mathcal{P}$ familija verovatnosnih mera na $(S,\mathcal{S})$. Tada važi tvrđenje: Familija $\mathcal{P}$ je relativno kompaktna, ako i samo ako je gusta.

Uvedimo još sledeće pojmove: Za potklasu $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ kažemo da je klasa koja određuje meru, ako iz jednakosti (proizvoljnih) verovatnosnih mera P i Q na skupovima klase $\mathcal{V}$, sledi njihova jednakost i na skupovima klase $\mathcal{S}$. Za potklasu $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ kažemo da je klasa skupova koja određuje slabu konvergenciju, ako iz uslova

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \text{ za sve P-neprekidne skupove } A \in \mathcal{V},$$

sledi tvrđenje $P_n \Rightarrow P$.

Primer 3.4.1. Neka je R^k k-dimenzionalan Euklidov prostor, a $\mathcal{B}^k$ familija Borelovih skupova u R^k. Verovatnosna mera u prostoru $(R^k,\mathcal{B}^k)$ obično se zadaje funkcijom raspodele. Neka je $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz funkcija raspodele verovatnoća u prostoru $(R^k,\mathcal{B}^k)$, a $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz odgovarajućih verovatnosnih mera. Kažemo da F_n slabo konvergira ka F i pišemo $F_n \Rightarrow F$, ako važi jednakost $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_o(x)$ u tačkama x neprekidnosti funkcije F. Jednostavno se dokazuje ([8], str. 31) da je uslov $P_n \Rightarrow P_o$ ekvivalentan uslovu $F_n \Rightarrow F_o$, tj. da se slaba konvergencija verovatnosnih mera u prostoru $(R^k,\mathcal{B}^k)$ svodi na slabu konvergenciju odgovarajućih funkcija raspodele.

Primer 3.4.2. Neka je $C = C[a,b]$ prostor neprekidnih funkcija na intervalu $[a,b]$ sa ravnomernom metrikom

$$\rho(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-y(t)|, \quad x,y \in C,$$

a $\mathcal{C}$ klasa Borelovih skupova u C, u topologiji koja je određena metrikom ρ. Za fiksirane $t_1,\dots,t_k \in [a,b]$, neka je $\pi_{t_1,\dots,t_k} : C \to R^k$ funkcija određena sa

$$\pi_{t_1,\dots,t_k}(x) = (x(t_1),\dots,x(t_k))$$

i neka je, kao i ranije, $\mathcal{B}^k$ klasa Borelovih skupova u R^k. Skupove oblika $\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} B$, gde $B \in \mathcal{B}^k$ zovemo konačnodimenzionalnim skupovima u C. Važi sledeća ([8], str. 33)

TEOREMA 3.4.3. Klasa svih konačnodimenzionalnih skupova u C jeste klasa koja definiše meru, ali nije klasa koja određuje slabu konvergenciju.

Drugi deo teoreme sledi iz sledećeg primera:

Primer 3.4.3. Neka je $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz verovatnosnih mera na $(C,\mathcal{C})$, pri čemu P_n dodeljuje jediničnu verovatnoću funkciji $x_n \in C$, gde je

$$x_o(t) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

$$x_n(t) = \begin{cases} n(t-a) & a \leq t \leq a+\frac{1}{n} \\ -nt+2+na & a+\frac{1}{n} \leq t \leq a+\frac{2}{n} \\ 0 & a+\frac{2}{n} \leq t \leq b \end{cases}, \quad n \geq \frac{2}{b-a}$$

(Za $1 \leq n < \frac{2}{b-a}$ funkciju $x_n \in C$ možemo izabrati proizvoljno.)

Niz $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ konvergira ka $x_o(t)$ za svako $t\in[a,b]$, ali konvergencija nije ravnomerna po t. Ako je $A = S(x_o, \frac{1}{2})$ kugla sa centrom x_o i poluprečnikom $\frac{1}{2}$, onda je $P_n(A) = 0$ i $P_o(A) = 1$, pa P_n ne može slabo konvergirati ka P_o. S druge strane, ako je

$$A = \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} H, \quad H \in \mathcal{B}^k$$

i ako važi $\frac{2}{n} < \min\{t_j - a,\ t_j - a \neq 0 \text{ i } 1 \leq j \leq k\}$, onda je $P_n(A) = P_o(A)$.

Prema tome, jednakost $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P_o(A)$ važi za konačnodimenzionalne P-neprekidne skupove A.

Konačnodimenzionalnim raspodelama verovatnosne mere P na $(C,\mathcal{C})$ nazivamo sve mere oblika $P\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}$ koje su definisane u prostoru $(R^k, \mathcal{B}^k)$, $k \geq 1$. Kako su projekcije $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ neprekidne funkcije, to iz slabe konvergencije verovatnosnih mera na $(C,\mathcal{C})$ sledi slaba konvergencija odgovarajućih konačnodimenzionalnih raspodela. Iz teoreme 3.4.3. sledi da konačnodimenzionalne raspodele jednoznačno određuju verovatnosnu meru na $(C,\mathcal{C})$, ali da iz slabe konvergencije konačnodimenzionalnih raspodela ne sledi slaba konvergencija odgovarajućih verovatnosnih mera. Međutim, važi sledeća teorema:

TEOREMA 3.4.4. ([8], str. 56)

Neka je $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz verovatnosnih mera na $(C,\mathcal{C})$. Ako konačnodimenzionalne raspodele mera P_n slabo konvergiraju ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama mere P_o i, ako je familija P_n gusta (relativno kompaktna), onda važi $P_n \Rightarrow P_o$.

Potreban i dovoljan uslov da je familija raspodela na $(C,\mathcal{C})$ gusta, a samim tim i relativno kompaktna (jer je $C[a,b]$ sa ravnomernom metrikom kompaktan i separabilan metrički prostor) formulisao je Prohorov ([33], str. 202):

TEOREMA 3.4.5. Familija $\mathcal{P}$ verovatnosnih mera na $(C,\mathcal{C})$ je gusta (relativno kompaktna), ako i samo ako za svako $\varepsilon>0$, postoji broj $M=M(\varepsilon)$ i funkcija $\omega(\delta)=\omega(\delta,\varepsilon)\downarrow 0$ pri $\delta\downarrow 0$, tako da važi:

V1) $$P\{x:\ |x(a)|<M\}>1-\frac{\varepsilon}{2},$$

V2) $$P\{x:\ \sup_{|\lambda-\mu|<\delta}|x(\lambda)-x(\mu)|\leqslant\omega(\delta)\}>1-\frac{\varepsilon}{2},$$

za sve mere P familije .

Dovoljan uslov da važi V2), jeste da za svaku meru $P\in\mathcal{P}$ važi nejednakost

V3) $$E|x(\lambda)-x(\mu)|^{\alpha}\leqslant K|\lambda-\mu|^{1+\varepsilon},$$

gde konstante $\alpha>0$, $K>0$ i $\varepsilon>0$ ne zavise od λ, μ i P.

Neka je $(\Omega,\mathcal{M},P)$ prostor verovatnoće i $X:\Omega\to C[a,b]$ proizvoljna funkcija. Za fiksirano $\omega\in\Omega$, označimo sa X_ω vrednost te funkcije u tački ω. X_ω je neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$, a njenu vrednost u tački $t\in[a,b]$ označimo sa $X(t,\omega)$. Za fiksirano $t\in[a,b]$, označimo sa $X(t)$ realnu funkciju na Ω, koja u tački $\omega\in\Omega$ uzima vrednost $X(t,\omega)$. Analogno, označimo sa $(X(t_1),\dots,X(t_k))$ funkciju iz Ω u R^k koja u tački ω uzima vrednost $(X(t_1,\omega),\dots,X(t_k,\omega))$. Tada, očigledno važi

$$(X(t_1),\dots,X(t_k))=\pi_{t_1,\dots,t_k}\circ X$$

Jednostavno se dokazuje ([8], str. 86) da su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) Funkcija $X:(\Omega,\mathcal{M})\to(C,\mathcal{C})$ je merljiva, tj. $X^{-1}\mathcal{C}\subset\mathcal{M}$.

b) Za svako t, funkcija $X(t):\Omega\to R$ je merljiva, tj. $(X(t))^{-1}\mathcal{B}^1\subset\mathcal{M}$.

Ako je $X:(\Omega,\mathcal{M})\to(C,\mathcal{C})$ merljiva funkcija, kažemo da je X slučajna funkcija ili slučajni elemenat u prostoru $C[a,b]$. Prema tome X je slučajna funkcija, ako i samo ako je za svako t funkcija $X(t)$ slučajna veličina. Svaka slučajna funkcija X u prostoru $C[a,b]$ definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{M},P)$, definiše verovatnosnu meru $\tilde{P}$ u $(C,\mathcal{C})$ na sledeći način: $\tilde{P}(A)=P(X^{-1}(A))$, $A\in\mathcal{C}$. Meru P zovemo raspodelom slučajne funkcije X.

Neka je $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz slučajnih funkcija u prostoru $C[a,b]$. Kažemo da je niz $\{X_n\}$ gust (relativno kompaktan, slabo konvergentan), ako je niz odgovarajućih mera gust (relativno kompaktan, slabo konvergentan).

Teoremu 3.4.5. možemo u slučaju niza slučajnih funkcija preformulisati na sledeći način:

TEOREMA 3.4.5'. Neka je $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz slučajnih funkcija u prostoru $(C[a,b],\mathcal{C})$, a definisan na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Niz $\{X_n\}$ je gust (relativno kompaktan), ako i samo ako za svako $\varepsilon>0$, postoji broj $M=M(\varepsilon)$ i funkcija $\omega(\delta)=\omega(\delta,\varepsilon)\downarrow 0$, $\delta\downarrow 0$, tako da za svako n važi:

V1') $\quad P\{|X_n(a)|<M\}>1-\frac{\varepsilon}{2}$,

V2') $\quad P\Big\{\sup\limits_{|\lambda-\mu|<\delta}|X_n(\lambda)-X_n(\mu)|\leq\omega(\delta)\Big\}>1-\frac{\varepsilon}{2}$.

Uslov V2') je ispunjen, ako važi

V3') $\quad E|X_n(\lambda)-X_n(\mu)|^{\alpha}\leq K|\lambda-\mu|^{1+\varepsilon}$

gde konstante $\alpha>0$, $K>0$ i $\varepsilon>0$ ne zavise od n, λ i μ.

§3.5. SLABA KONVERGENCIJA MERA GENERISANIH NORMIRANIM PROCESIMA U PROSTORU C[0,T] U GAUSOVOM SLUČAJU

Neka je $T>0$ fiksiran broj. U ovom paragrafu razmatraćemo slučajne procese $\tilde{\xi}_N(\lambda)$ i $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, koji su definisani jednakostima (3.1.11) i (3.1.12). U teoremi 3.2.2. dokazano je da konačnodimenzionalne raspodele tih procesa slabo konvergiraju (konvergiraju u raspodeli) ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog slučajnog procesa $Z(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, definisanog u istoj teoremi 3.2.2.

Koristeći teoremu 3.3.1. zaključujemo da je uslov V2′) u teoremi 3.4.5.′ ispunjen za niz slučajnih procesa $\tilde{\xi}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, u slučaju kada je polazni stacionaran proces (slučajni proces čiju spektralnu gustinu ocenjujemo) - Gausov. Uslov V1′) važi zbog konvergencije u raspodeli niza slučajnih veličina $\{X_n(0)\}$ ka normalnoj slučajnoj veličini $Z(0)$. Prema tome, niz $\tilde{\xi}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, $N=1,2,\ldots$ je slabo (relativno) kompaktan. Uzimajući u obzir teoreme 3.4.4. i 3.2.2. i činjenicu da su sve spektralne gustine višeg reda Gausovog slučajnog niza identički jednake nuli, možemo formulisati sledeći rezultat:

TEOREMA 3.5.1. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ realan stacionaran Gausov proces čija je spektralna gustina f neprekidno-diferencijabilna i, neka je $\tilde{\xi}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, slučajni proces definisan pomoću jednakosti (3.1.11). Tada niz mera $\{P_N\}$, generisan slučajnim procesima $\tilde{\xi}_N$ u prostoru $C[0,T]$ slabo konvergira ka meri P, generisanoj slučajnim procesom $Z(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$.

Da bismo formulisali i dokazali analogno tvrđenje u slučaju procesa $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, dokazaćemo neka pomoćna tvrđenja.

LEMA 3.5.1. Neka je $f:R \to R$ neprekidno-diferencijabilna funkcija i $f' \in \mathrm{Lip}_H(1,\infty)$. Tada za proizvoljne λ, μ i u važi nejednakost

$$\Delta_f(\lambda,\mu,u) \equiv |f(\lambda+u)-f(\lambda)-f(\mu+u)+f(\mu)| \leq 2H|u||\lambda-\mu|$$

Dokaz leme 3.5.1. Zbog diferencijabilnosti funkcije f važe jednakosti:

$$f(\lambda+u)-f(\lambda) = uf'(\lambda+\theta_1 u), \quad 0\leq\theta_1\leq 1, \tag{3.5.1}$$

$$f(\mu+u)-f(\mu) = uf'(\mu+\theta_2 u), \quad 0\leq\theta_2\leq 1, \tag{3.5.2}$$

$$f(\lambda)-f(\mu) = (\lambda-\mu)f'(\mu+\theta_3(\lambda-\mu)), \quad 0\leq\theta_3\leq 1, \tag{3.5.3}$$

$$f(\lambda+u)-f(\mu+u) = (\lambda-\mu)f'(\mu+u+\theta_4(\lambda-\mu)), \quad 0\leq\theta_4\leq 1. \tag{3.5.4}$$

Koristeći činjenicu da funkcija f' zadovoljava Lipšicov uslov jednakosti (3.5.1) i (3.5.2), dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta_f(\lambda,\mu,u) &= |u||f'(\lambda+\theta_1 u)-f'(\mu+\theta_2 u)| \\ &\leq H|u||\lambda-\mu+(\theta_1-\theta_2)u| \leq H|u||\lambda-\mu| + H|u|^2\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Analogno, iz jednakosti (3.5.3) i (3.5.4), dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta_f(\lambda,\mu,u) &= |\lambda-\mu||f'(\mu+\theta_3(\lambda-\mu))-f'(\mu+u+\theta_4(\lambda-\mu))| \\ &\leq H|\lambda-\mu||u+(\theta_4-\theta_3)(\lambda-\mu)| \leq H|u||\lambda-\mu| + H|\lambda-\mu|^2\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Koristeći nejednakosti (3.5.6) i (3.5.5), dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta_f(\lambda,\mu,u) &\leq H|u||\lambda-\mu| + \min\{Hu^2, H|\lambda-\mu|^2\} \\ &\leq H|u||\lambda-\mu| + H|u||\lambda-\mu| \leq 2H|u||\lambda-\mu|. \blacksquare\end{aligned}$$

Označimo sa $\omega_\xi(\delta)$ modul neprekidnosti slučajnog procesa $\xi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda \subset R$, tj.

$$\omega_\xi(\delta) = \sup_{\substack{|\lambda-\mu|<\delta \\ \lambda,\mu\in\Lambda}} |\xi(\lambda)-\xi(\mu)|$$

Tada možemo formulisati sledeće tvrđenje:

LEMA 3.5.2. Neka su $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ slučajni procesi definisani jednakostima (3.1.11) i (3.1.12), a za spektralnu gustinu f važi uslov: $f' \in \mathrm{Lip}_H(1, \infty)$. Tada važi nejednakost

$$\omega_{\tilde{Z}_N}(\delta) \leq \omega_{\tilde{\xi}_N}(\delta) + \omega(\delta) \tag{3.5.7}$$

gde $\omega(\delta) \downarrow 0$ pri $\delta \downarrow 0$ i funkcija $\omega(\cdot)$ ne zavisi od N.

Dokaz leme 3.5.2. Očevidno važi nejednakost

$$\sup_{|\lambda-\mu|<\delta} |\tilde{Z}_N(\lambda) - \tilde{Z}_N(\mu)| \leq \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} |\tilde{\xi}_N(\lambda) - \tilde{\xi}_N(\mu)|$$

$$+ \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} |\tilde{Z}_N(\lambda) - \tilde{\xi}_N(\lambda) - (\tilde{Z}_N(\mu) - \tilde{\xi}_N(\mu))|$$

$$\omega_{\tilde{Z}_N}(\delta) \leq \omega_{\tilde{\xi}_N}(\delta) + \omega_{\tilde{Z}_N - \tilde{\xi}_N}(\delta)$$

Ocenimo sabirak $\omega_{\tilde{Z}_N - \tilde{\xi}_N}(\delta)$. Imamo

$$\omega_{\tilde{Z}_N - \tilde{\xi}_N}(\delta) = \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sqrt{NB_N}\, \left| f(\lambda) - E\hat{f}_N(\lambda) - f(\mu) + E\hat{f}_N(\mu) \right|$$

Postupajući kao pri dokazu teoreme 3.1.1., dobijamo

$$\omega_{\tilde{Z}_N - \tilde{\xi}_N}(\delta) = \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sqrt{NB_N} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\lambda+u) - f(\lambda) - f(\mu+u) + f(\mu)\big)\varphi_N(u)\,du \right.$$

$$\left. + \int_{\Pi^2} \big(f(\lambda+u) - f(\lambda) - f(\mu+u) + f(\mu)\big)\big(\varphi_N(u+x) - \varphi_N(u)\big)\,\Phi_N(x)\,du\,dx \right|$$

Koristeći lemu 3.5.1., pri uslovu $|\lambda-\mu|<\delta$ dobijamo

$$\sqrt{NB_N} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\lambda+u) - f(\lambda) - f(\mu+u) + f(\mu)\big)\varphi_N(u)\,du \right|$$

$$\leq 2H|\lambda-\mu|\sqrt{NB_N} \int_{-\pi}^{\pi} |u\,\varphi_N(u)|\,du$$

$$\leq 2H\delta N^{\frac{1}{2}} B_N^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x\varphi(x)|\,dx = C_N'\delta \downarrow 0 \qquad \delta \downarrow 0.$$

Pri tome je niz $C_N' = 2HN^{\frac{1}{2}} B_N^{\frac{3}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x\varphi(x)|\,dx$, N=1,2,... ograničen. Dalje, koristeći činjenicu da jezgro $\{\varphi_N\}$ pripada klasi $\mathcal{F}(\varphi) \subset \mathcal{F}$ (vidi § 1.4) i lemu 3.5.1., dobijamo pri uslovu $|\lambda-\mu|<\delta$:

$$\sqrt{NB_N}\left|\int_{\Pi^2}\left(f(\lambda+u)-f(\lambda)-f(\mu+u)+f(\mu)\right)\left(\varphi_N(u+x)-\varphi_N(u)\right)\Phi_N(x)\,du\,dx\right| \leq C_N''\delta$$

gde je

$$C_N''=\sqrt{NB_N}\,\sigma\left(\int_{-\pi}^{\pi}|x\varphi_N(x)|dx\right)=\sigma(1)$$

Nizovi brojeva $\{C_N'\}$ i $\{C_N''\}$ su ograničeni, pa za $\omega(\delta)=\delta\cdot\sup_N(C_N'+C_N'')$ važi nejednakost (3.5.7).∎

TEOREMA 3.5.2. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$ realan stacionaran Gausov proces za koji postoji spektralna gustina drugog reda f i važi uslov $f'\in Lip_H(1,\infty)$. Neka je dalje $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, slučajni proces definisan pomoću jednakosti (3.1.12), $Z(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, Gausov proces definisan u teoremi 3.2.2., a Q_N i P verovatnosne mere generisane tim procesima u prostoru $C[0,T]$. Tada važi $Q_N\Rightarrow P$.

Dokaz teoreme 3.5.2. Iz teoreme 3.3.1. i leme 3.5.2. sledi da za niz slučajnih procesa $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq T$, N=1,2,... važi uslov V2') u teoremi 3.4.5. Uslov V1') važi zbog konvergencije u raspodeli niza slučajnih veličina $\{Z_N(0)\}$ ka normalnoj slučajnoj veličini. Rezultat teoreme sada sledi iz teorema 3.4.4. i 3.2.2.∎

§ 3.6. JAKO PROMEŠANI PROCESI

Za slučajni proces X(t) gde $t\in Z$ ili $t\in R$ kažemo da je jako promešan, ako je ispunjen uslov

$$\alpha(\tau)=\sup_{\substack{t,\ B_1\in\mathcal{M}_{-\infty}^{t}\\ B_2\in\mathcal{M}_{t+\tau}^{+\infty}}}|P(B_1B_2)-P(B_1)P(B_2)|\longrightarrow 0,\ \tau\to\infty,$$

gde je $\mathcal{M}_a^b$ σ-algebra generisana slučajnim veličinama $X(t), a\leq t\leq b$. Funkciju $\alpha(\tau), \tau\in R$, zovemo funkcijom promešanosti razmatranog slučajnog procesa. Pojam jake promešanosti slučajnog procesa uveo je Rozenblat [53].

Rezultati paragrafa 3.1.-3.4. i 3.5. formulisani su pri uslovima ograničenosti i glatkosti spektralnih gustina razmatranog stacionarnog niza $\{X(t),\ t \in Z\}$. Te osobine spektralnih gustina slede iz jake promešanosti niza $\{X(t),\ t \in Z\}$ pri određenoj brzini opadanja funkcije promešanosti, ako postoje momenti tog niza. Obično se pretpostavlja konačnost svih momenata višeg reda. Taj uslov nije previše ograničavajući, jer svi razmatrani u praksi stacionarni nizovi imaju konačne momente. Sledeće dve teoreme o oceni spektralne gustine i njenih izvoda pri uslovu jake promešanosti razmatranog stacionarnog slučajnog procesa dokazane su u radu Žurbenko, Zuev [15]:

TEOREMA 3.6.1. Neka je $\{X(t),\ t \in Z\}$ stacionaran slučajni proces sa funkcijom jake promešanosti $\alpha(\tau),\ \tau \in R$, za koju važi

$$\alpha(\tau) \leq K e^{-6\tau}, \quad K > 0,\ 6 > 0,$$

i neka je $K_1 = \max\limits_{p \leq kn} |E\, X(t)|^p$ za neko $k > 2$. Tada u oblasti

$$|\operatorname{Im} \omega_i| \leq \frac{1}{2}\, 6\left(1 - \frac{2}{k}\right)\frac{1}{n^2}$$

promenljivih $\omega_1, \ldots, \omega_n$ važi jednakost

$$f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum_{\substack{t_1, \ldots, t_n \\ \min\{t_i\} = 0}} S_n(t_1, \ldots, t_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} t_k \omega_k\right)$$

Funkcija $f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ analitička je u toj oblasti i važi

$|f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)| \leq K_2^n \cdot n^{3n}$ gde je $K_2^n \geq \frac{n}{(2\pi)^{n-1}} K_1^n (4 + 6K_1) K^{1-\frac{2}{k}} \left(\frac{2k}{6(k-2)}\right)^n \left(\frac{2k}{6(k-2)} + 1\right).$

TEOREMA 3.6.2. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 3.6.1. Tada, za izvod spektralne gustine $\dfrac{\partial^2 f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial^{k_1} \omega_1 \cdots \partial^{k_n} \omega_n}$ važi ocena

$$\frac{\partial^2 f_n(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial^{k_1} \omega_1 \cdots \partial^{k_n} \omega_n} \leq K_3^n K^{1-\frac{2}{k}} n^{2\varrho + 3n}$$

gde je $\quad K_3^n \geq \frac{n}{(2\pi)^{n-1}} K^n (4 + 6K) \left(\frac{k\left(1 + \frac{\varrho}{n}\right)}{6(k-2)}\right)^{n+\varrho} \left(\frac{k}{6(k-2)} + 1\right).$

Koristeći teoreme 3.2.2., 3.5.1., 3.5.2., 3.6.1. i 3.6.2. kao i činjenicu da su svi momenti Gausovog slučajnog niza konačni, lako zaključujemo da važe sledeće dve teoreme:

TEOREMA 3.6.3. Neka je $\{X(t),\ t\in Z\}$, $EX(t)=0$, realan stacionaran slučajni proces sa konačnim momentima proizvoljnog reda i funkcijom promešanosti $\alpha(\tau)$, $\tau\in R$, za koju važi

$$\alpha(\tau)\leq Ke^{-6\tau},\quad K>0,\ 6>0.$$

Neka su dalje $\tilde{\xi}_N(\lambda)$ i $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq+\infty$, slučajni procesi definisani jednakostima (3.1.11) i (3.1.12), a $Z(\lambda)$, $0\leq\lambda\leq+\infty$, slučajni proces definisan u teoremi 3.2.2.

Tada, konačnodimenzionalne raspodele slučajnih procesa $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ slabo konvergiraju ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog slučajnog procesa Z.

TEOREMA 3.6.4. Neka je $\{X(t), t\in Z\}$, $EX(t)=0$, realan stacionaran Gausov slučajni proces sa funkcijom promešanosti $\alpha(\tau)$, $\tau\in R$, za koju važi

$$\alpha(\tau)\leq Ke^{-6\tau},\quad K>0,\ 6>0.$$

Neka su P_N, Q_N i P verovatnosne mere u prostoru $C[0,T]$ definisane slučajnim procesima $\tilde{\xi}_N$, $\tilde{Z}_N$ i Z.

Tada važe tvrđenja: $P_N\Rightarrow P$ i $Q_N\Rightarrow P$.

G L A V A IV

OCENA SPEKTRALNE GUSTINE VIŠEDIMENZIONALNOG STACIONAROG NIZA

U V O D N I D E O

Neka je $X(t)=(X_1(t),\dots,X_r(t))$, $t\in Z$, $r\geqslant 2$, - r-dimenzionalan stacionaran u širem smislu slučajni niz sa realnim komponentama i, neka je $EX_j(t)=0$, $j=1,2,\dots,r$. Neka su dalje

$$K(\nu)=\left[K_{jk}(\nu)\right]_{r\times r},\quad \nu\in Z,$$

$$F(\lambda)=\left[F_{jk}(\lambda)\right]_{r\times r},\quad \lambda\in R,$$

kovarijaciona matrica i spektralna funkcija niza $\{X(t),\ t\in Z\}$. Pretpostavićemo da važi

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}|K_{jk}(\nu)|<+\infty,\quad j,k=1,\dots,r$$

Tada za sve $j,k\in\{1,2,\dots,r\}$ važi jednakost

$$K_{jk}(\nu)=EX_j(t+\nu)X_k(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\nu\lambda}dF_{jk}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\nu\lambda}f_{jk}(\lambda)d\lambda$$

Jasno je da za j=k funkcija $f_{jj}(\lambda)$, $\lambda\in R$, predstavlja spektralnu gustinu stacionarnog niza $\{X_j(t),\ t\in Z\}$ a za $j\neq k$ funkcija $f_{jk}(\lambda)$, $\lambda\in R$, (sa vrednostima u skupu kompleksnih brojeva) je uzajamna spektralna gustina nizova $\{X_j(t),\ t\in Z\}$ i $\{X_k(t),\ t\in Z\}$. Matričnu funkciju

$$f(\lambda)=\left[f_{jk}(\lambda)\right]_{j,k=1,2,\dots,r},\quad \lambda\in R,$$

zovemo spektralnom gustinom niza $\{X(t),\ t\in Z\}$. Kako su komponente niza realne slučane veličine, za sve $j,k\in\{1,2,\dots,r\}$ važi

$$f_{jk}(\lambda)=f_{kj}(-\lambda)=\overline{f_{kj}(\lambda)}$$

Momente i semiinvarijante slučajnog procesa $\{X(t),\ t\in Z\}$ označimo na sledeći način

$$E(X_{k_1}(t_1)\cdots X_{k_n}(t_n)) = M_{k_1\cdots k_n}(t_1,\dots,t_n)$$

$$S_n(X_{k_1}(t_1),\dots,X_{k_n}(t_n)) = S_{k_1\cdots k_n}(t_1,\dots,t_n)$$

gde $k_j\in\{1,2,\dots,r\}$, $t_j\in Z$, $j=1,2,\dots,n$.

Uslov da postoji spektralna gustina n-tog reda $f_{k_1\cdots k_n}$, gde je $n\geq 2$, $k_1,\dots,k_n\in\{1,2,\dots,r\}$, označava sledeće:

1) $\forall k_j\in\{k_1,\dots,k_n\}\quad \forall t_j\in Z\quad E|X_{k_j}(t_j)|^n<+\infty$,

2) $\forall t_1,\dots,t_n,\tau\in Z\quad S_{k_1\cdots k_n}(t_1+\tau,\dots,t_n+\tau)=S_{k_1\cdots k_n}(t_1,\dots,t_n)$

3) Postoji (u opštem slučaju sa vrednostima u skupu kompleksnih brojeva) integrabilna funkcija $f_{k_1\cdots k_n}$, takva da za svako $t\in Z^n$ i $t=(t_1,\dots,t_n)$ važi jednakost

$$S_{k_1\cdots k_n}(t_1,\dots,t_n) = \int_{\Pi^{n-1}} f_{k_1\cdots k_n}(\lambda)e^{i(t,\lambda)}d\lambda'$$

$$= \int_{\Pi^n} f_{k_1\cdots k_n}(\lambda)e^{i(t,\lambda)}\delta^*(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)d\lambda$$

gde je: $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$,

$d\lambda=d\lambda_1\cdots d\lambda_n$, $\lambda'=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$, $d\lambda'=d\lambda_1\cdots d\lambda_{n-1}$,

$(t,\lambda)=t_1\lambda_1+\cdots+t_n\lambda_n$.

Mi ćemo u ovoj glavi često pretpostavljati da za svako $n\geq 2$ i sve $k_1,\dots,k_n\in\{1,2,\dots,r\}$, postoji i ograničena je spektralna gustina $f_{k_1\cdots k_n}$.

§ 4.1. PERIODOGRAMNA OCENA SPEKTRALNE GUSTINE VIŠEDIMENZIONALNOG STACIONARNOG NIZA

Pretpostavimo da na osnovu uzorka $(X(1),\dots,X(N))$ koji sadrži N uzastopnih vrednosti niza $\{X(t),\ t\in Z\}$ treba oceniti spektralnu gustinu $f(\lambda)$, $\lambda\in R$. Definišemo periodogram drugog reda

$$I_N(x)=\left[I_{k\ell}^{(N)}(x)\right]_{r\times r}$$

$$I_{k\ell}^{(N)}(x)=\frac{1}{2\pi N}\sum_{s=1}^{N}X_k(s)e^{-isx}\sum_{t=1}^{N}X_\ell(t)e^{itx}$$

$$k,\ell=1,2,\dots,r,$$

a zatim i periodogramnu ocenu

$$\hat{f}_N(\lambda)=\left[\hat{f}_{jk}^{(N)}(\lambda)\right]_{r\times r}$$

$$\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)=\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\lambda,\varphi_N)=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)I_{k\ell}^{(N)}(\lambda)d\lambda$$

$$k,\ell=1,2,\dots,r,$$

gde je $\{\varphi_N\}$ jezgro na $[-\pi,\pi]$. Mi ćemo radi jednostavnosti pretpostavljati da jezgro $\{\varphi_N\}$ ne zavisi od indeksa k i j, a u daljem izlaganju uvek ćemo smatrati da je jezgro definisano jednakostima (3.0.2)-(3.0.4).

Sve osobine periodogramnnih ocena spektralne gustine jednodimenzionalnog stacionarnog procesa koje su navedene u glavi I, prenose se na višedimenzionalan slučaj. Periodogramne ocene spektralne gustine u višedimenzionalnom slučaju izučavali su: Brilindžer [9, 44], Henan[38], Bentkus[4], Umirbekov[36]. Mi ćemo ovde navesti samo neke rezultate, a zatim pokazati kako se i rezultati glave III prenose na višedimenzionalan slučaj.

Neka je $\hat{f}_j=\hat{f}_{k_j\ell_j}^{(N)}(\lambda_j)$, $k_j,\ell_j\in\{1,2,\dots,r\}$, $\lambda_j\in[-\pi,\pi]$, $j=1,2,\dots,n$.

Za semiinvarijantu $S(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_n)$ važi formula (1.5.12), sa jedinom razlikom što u definiciji funkcije G, umesto spektralnih gustina $f(y_1),\ldots,f(y_q)$ jednodimenzionalnog procesa, sada figurišu spektralne gustine $f_{D_1}(y_1),\ldots,f_{D_2}(y_2)$, pri čemu je spektralna gustina $f_{D_p}(y_p)$, $y_p=(y_{p_1},\ldots,y_{p\mu_p})\in R^{\mu_p}$, određena uslovom ([4]):

$$S(X_{D_{p1}}(t_{D_{p1}}),\ldots,X_{D_{p\mu_p}}(t_{D_{p\mu_p}}))=\int_{\Pi^{\mu_p-1}} f_{D_p}(y_p)\exp\Big(i\sum_{j=1}^{\mu_p} t_{D_{pj}}\lambda_j\Big)d\lambda'$$

gde je $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\mu_p})$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_{\mu_p}=0$.

Formula (1.5.12) je i inače dokazana u višedimenzionalnom slučaju u radu [4]. Analogno kao u § 1.5., možemo formulisati sledeću neposrednu posledicu te formule:

LEMA 4.1.1. Za svaki vektor $(\hat{f}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda_1),\ldots,\hat{f}^{(N)}_{k_n\ell_n}(\lambda_n))$, gde $\lambda_j\in[-\pi,\pi]$, $k_j,\ell_j\in\{1,2,\ldots,r\}$, j=1,2,...,n, važi nejednakost

$$\left|S(\hat{f}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda_1),\ldots,\hat{f}^{(N)}_{k_n\ell_n}(\lambda_n))\right|\leq\frac{C}{(NB_N)^{n-1}},$$

gde konstanta C zavisi od n, ali pri fiksiranom n ne zavisi od izbora tačaka $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Navedimo rezultat o asimptotskoj normalnosti periodogramne ocene. Neka je

$$\Delta=2\pi\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)dx,\quad \eta(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda=0(\mathrm{mod}\,2\pi)\\ 0 & \lambda\neq0(\mathrm{mod}\,2\pi)\end{cases}$$

i $\zeta(\lambda)=[\zeta_{k\ell}(\lambda)]_{k,\ell=1,\ldots,r}$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$ Gausov slučajni proces određen prvim i drugim momentima:

$$E\zeta_{k\ell}(\lambda)=0$$

$$E\zeta_{k_1\ell_1}(\lambda)\overline{\zeta_{k_2\ell_2}(\mu)}=\Delta\left[\eta(\lambda-\mu)f_{k_1k_2}(\lambda)f_{\ell_1\ell_2}(-\mu)+\eta(\lambda+\mu)f_{k_1\ell_2}(\lambda)f_{\ell_1k_2}(\mu)\right]$$

$$E\zeta_{k_1\ell_1}(\lambda)\zeta_{k_2\ell_2}(\mu)=\Delta\left[\eta(\lambda-\mu)f_{k_1k_2}(\lambda)f_{\ell_1\ell_2}(\mu)+\eta(\lambda+\mu)f_{k_1\ell_2}(\lambda)f_{\ell_1k_2}(-\mu)\right]$$

$k,\ell=1,2,\ldots,r$.

Pri navedenim oznakama važi sledeća teorema:

TEOREMA 4.1.1. ([4], str. 56)

Neka je $X(t)=(X_1(t),\dots,X_r(t))$, $t\in Z$, $r\geq 2$, stacionaran slučajni niz za koji postoje i ograničene su sve spektralne gustine višeg reda, a svaka od funkcija $f_{k\ell}(\lambda)$, $\lambda\in R$, $k,\ell=1,2,\dots,r$ je neprekidno-diferencijabilna. Tada, konačnodimenzionalne raspodele slučajnih procesa $\sqrt{NB_N^{-}}\,(\hat{f}_N(\lambda)-E\hat{f}_N(\lambda))$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$, i $\sqrt{NB_N}\,(\hat{f}_N(\lambda)-f(\lambda))$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$, slabo konvergiraju ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama slučajnog procesa $\zeta(\lambda)$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$.

§ 4.2. ASIMPTOTSKO PONAŠANJE PRVA DVA MOMENTA PERIODOGRAMNE OCENE

TEOREMA 4.2.1. Neka za $k,\ell\in\{1,2,\dots,r\}$ važi $\sup_{\lambda}|f'_{k\ell}(\lambda)|=C_{k\ell}<\infty$. Tada pri $N\to+\infty$ važi nejednakost

$$\sup_{-\pi\leq\lambda\leq\pi}|f_{k\ell}(\lambda)-E\hat{f}^{(N)}_{k\ell}|\leq(C_{k\ell}+o(1))\int_{-\pi}^{\pi}|x\varphi_N(x)|\,dx$$

Dokaz teoreme 4.2.1. analogan je dokazu teoreme 3.1.1.

TEOREMA 4.2.2. Neka je $X(t)=(X_1(t),\dots,X_r(t))$, $t\in Z$, $r\geq 2$, stacionaran slučajni niz sa realnim komponentama za koji važi:

$$\sup_{\lambda}|f'_{k\ell}(\lambda)|=C_{k\ell}<+\infty\,,\quad k,\ell=1,2,\dots,r$$

$$\sup_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}|f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)|=C_{k_1k_2k_3k_4}<+\infty,\quad k_i=1,2,\dots,r.$$

Tada za $\lambda,\mu\in[-\pi,\pi]$, pri $N\to\infty$ važe jednakosti:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\Big(\hat{f}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda),\overline{\hat{f}^{(N)}_{k_2\ell_2}(\mu)}\Big)&=\frac{2\pi}{N}f_{k_1\ell_2}(\lambda)f_{\ell_1k_2}(-\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-\lambda)\,dx\\&+\frac{2\pi}{N}f_{k_1k_2}(\lambda)f_{\ell_1\ell_2}(\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x+\lambda)\,dx\\&+|\lambda-\mu|\,O\Big(\frac{\ln^2N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\Big)+o\Big(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\Big)\\&+O\Big(\frac{\ln^4N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\varphi_N^2(x)\,dx\,\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}\left(\hat{f}^{(N)}_{k_1 l_1}(\lambda), \hat{f}^{(N)}_{k_2 l_2}(\mu)\right) = \frac{2\pi}{N} f_{k_1 l_2}(\lambda) f_{l_1 k_2}(\mu) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x+\mu)\,dx$$

$$+ \frac{2\pi}{N} f_{k_1 k_2}(\lambda) f_{l_1 k_2}(-\mu) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(x-\lambda)\varphi_N(x-\mu)\,dx$$

$$+ |\lambda-\mu|\, O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right) + o\left(\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)$$

$$+ O\left(\frac{\ln^4 N}{N}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\varphi_N^2(x)\,dx \, \frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Dokaz teoreme 4.2.2. Postupajući kao pri dokazu teoreme 3.1.2., dobijamo:

$$\operatorname{cov}\left(\hat{f}^{(N)}_{k_1 l_1}(\lambda), \overline{\hat{f}^{(N)}_{k_2 l_2}(\mu)}\right) = \int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y) \operatorname{cov}\left(I^{(N)}_{k_1 l_1}(x+\lambda), \overline{I^{(N)}_{k_2 l_2}(y+\mu)}\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 N^2}\int_{\Pi^2} \varphi_N(x)\varphi_N(y)\,\cdot$$

$$\cdot \operatorname{cov}\left(\sum_{s_1=1}^{N} X_{k_1}(s_1) e^{-is_1(x+\lambda)} \sum_{t_1=1}^{N} X_{l_1}(t_1) e^{it_1(x+\lambda)}, \sum_{s_2=1}^{N} X_{k_2}(s_2) e^{is_2(y+\mu)} \sum_{t_2=1}^{N} X_{l_2}(t_2) e^{-it_2(y+\mu)}\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y) \sum_{s_1,t_1,s_2,t_2=1}^{N} \Big(E X_{k_1}(s_1) X_{l_1}(t_1) X_{k_2}(s_2) X_{l_2}(t_2) - E X_{k_1}(s_1) X_{l_1}(t_1)\cdot E X_{k_2}(s_2) X_{l_2}(t_2)\Big)\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-is_1(x+\lambda) + it_1(x+\lambda) - is_2(y+\mu) + it_2(y+\mu)\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y) \sum_{s_1,t_1,s_2,t_2=1}^{N} \Big(S_{k_1 l_1 k_2 l_2}(s_1,t_1,s_2,t_2) + S_{k_1 l_2}(s_1,t_2) S_{k_2 l_2}(s_2,t_2)$$

$$+ S_{k_1 k_2}(s_1,s_2) S_{l_1 l_2}(t_1,t_2)\Big) \exp\left\{-is_1(x+\lambda) + it_1(x+\lambda) - is_2(y+\mu) + it_2(y+\mu)\right\} dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y) \int_{\Pi^4} f_{k_1 l_1 k_2 l_2}(u_1,u_2,u_3,u_4) \frac{\sin N\frac{u_1-x-\lambda}{2}\,\sin N\frac{u_2+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{u_1-x-\lambda}{2}\,\sin\frac{u_2+x+\lambda}{2}}\cdot$$

$$\cdot \frac{\sin N\frac{u_3-y-\mu}{2}\,\sin N\frac{u_4+y+\mu}{2}}{\sin\frac{u_3-y-\mu}{2}\,\sin\frac{u_4+y+\mu}{2}}\,\delta^*(u_1+u_2+u_3+u_4)\,du_1\,du_2\,du_3\,du_4\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y) \sum_{s_1,s_2,t_1,t_2=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f_{k_1 l_2}(u) e^{i(s_1-t_2)u}\,du \int_{-\pi}^{\pi} f_{l_1 k_2}(v) e^{i(t_1-s_2)v}\,dv$$

$$\cdot \exp\left\{(-is_1+it_1)(x+\lambda) + (-is_2+it_2)(y+\mu)\right\} dx\,dy$$

$$+\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\sum_{s_1,t_1,s_2,t_2=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f_{k_1k_2}(u)e^{i(s_1-s_2)u}du\int_{-\pi}^{\pi}f_{\ell_1\ell_2}(v)e^{i(t_1-t_2)v}dv$$

$$\exp\{(-is_1+it_1)(x+\lambda)+(-is_2+it_2)(y+\mu)\}dxdy$$

$$=\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\int_{\Pi^4}f_{k_1k_2k_3k_4}(u_1,u_2,u_3,u_4)\frac{\sin N\frac{u_1-x-\lambda}{2}\sin N\frac{u_2+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{u_1+x+\lambda}{2}\sin\frac{u_2+x+\lambda}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin N\frac{u_3-y-\mu}{2}\sin N\frac{u_4+y+\mu}{2}}{\sin\frac{u_3-y-\mu}{2}\sin\frac{u_4+y+\mu}{2}}\delta^*(u_1+u_2+u_3+u_4)du_1du_2du_3du_4dxdy$$

$$+\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\int_{\Pi^2}f_{k_1\ell_2}(u)f_{\ell_1k_2}(v)\frac{\sin N\frac{u-x-\lambda}{2}\sin N\frac{v+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{u-x-\lambda}{2}\sin\frac{v+x+\lambda}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin N\frac{-u+y+\mu}{2}\sin N\frac{-v-y-\mu}{2}}{\sin\frac{-u+y+\mu}{2}\sin\frac{-v-y-\mu}{2}}dudvdxdy$$

$$+\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{\Pi^2}\varphi_N(x)\varphi_N(y)\int_{\Pi^2}f_{k_1k_2}(u)f_{\ell_1\ell_2}(v)\frac{\sin N\frac{u-x-\lambda}{2}\sin N\frac{v+x+\lambda}{2}}{\sin\frac{u-x-\lambda}{2}\sin\frac{v+x+\lambda}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin N\frac{-v+y+\mu}{2}\sin N\frac{-u-y-\mu}{2}}{\sin\frac{-v+y+\mu}{2}\sin\frac{-u-y-\mu}{2}}dudvdxdy$$

Na sličan način možemo zapisati kovarijaciju slučajnih veličina $\hat{f}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda)$ i $\hat{f}^{(N)}_{k_2\ell_2}(\mu)$, a dokaz je dalje potpuno analogan dokazu teoreme 3.1.2.■

§ 4.3. NORMIRANJE VREMENA I ASIMPTOTSKA NORMALNOST KONAČNODIMENZIONALNIH RASPODELA NORMIRANIH PROCESA

Za $k,\ell \in \{1,2,\ldots,r\}$ označimo:

$$\xi_{k\ell}^{(N)}(\lambda) = \sqrt{NB_N}\left(\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - E\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)\right),\ -\pi \leq \lambda \leq \pi, \tag{4.3.1}$$

$$Z_{k\ell}^{(N)}(\lambda) = \sqrt{NB_N}\left(\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - f_{k\ell}(\lambda)\right),\ -\pi \leq \lambda \leq \pi, \tag{4.3.2}$$

$$\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) = \begin{cases} \xi_{k\ell}^{(N)}(\lambda B_N^{-1}) & |\lambda| \leq \pi B_N^{-1} \\ \xi_{k\ell}^{(N)}(\pi B_N^{-1}\operatorname{sgn}\lambda) & |\lambda| > \pi B_N^{-1} \end{cases} \tag{4.3.3}$$

$$\tilde{Z}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) = \begin{cases} Z_{k\ell}^{(N)}(\lambda B_N^{-1}) & |\lambda| \leq \pi B_N^{-1} \\ Z_{k\ell}^{(N)}(\pi B_N^{-1}\operatorname{sgn}\lambda) & |\lambda| > \pi B_N^{-1} \end{cases} \tag{4.3.4}$$

$$\tilde{\xi}_N(\lambda) = \left[\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)\right]_{k,\ell=1,2,\ldots,r},\ -\infty < \lambda < +\infty, \tag{4.3.5}$$

$$\tilde{Z}_N(\lambda) = \left[\tilde{Z}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)\right]_{k,\ell=1,2,\ldots,r},\ -\infty < \lambda < +\infty. \tag{4.3.6}$$

Za sve $k,\ell \in \{1,2,\ldots,r\}$ važi $(\forall\lambda)\ E\xi_{k\ell}^{(N)}(\lambda) = 0$ i (na osnovu teoreme 4.1.1.):
$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\lambda} EZ_{k\ell}^{(N)}(\lambda) = 0.$$

TEOREMA 4.3.1. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 4.2.2. i neka su funkcije $\tau_{k_1\ell_1k_2\ell_2}^{(j)} : R^2 \to \mathbb{C}$ gde $k_1,\ell_1;k_2,\ell_2 \in \{1,2,\ldots,r\}$, $j=1,2$, određene jednakostima:

$$\tau_{k_1\ell_1k_2\ell_2}^{(1)}(\lambda,\mu) = 2\pi f_{k_1\ell_2}(0) f_{\ell_1k_2}(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\lambda)\varphi(x-\mu)\,dx$$
$$+\ 2\pi f_{k_1k_2}(0) f_{\ell_1\ell_2}(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\lambda)\varphi(x+\mu)\,dx$$

$$\tau_{k_1\ell_1k_2\ell_2}^{(2)}(\lambda,\mu) = 2\pi f_{k_1\ell_2}(0) f_{\ell_1k_2}(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\lambda)\varphi(x+\mu)\,dx$$
$$+\ 2\pi f_{k_1k_2}(0) f_{\ell_1\ell_2}(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\lambda)\varphi(x-\mu)\,dx$$

Tada, za sve realne brojeve λ i μ, važe jednakosti:

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}\left(\tilde{\xi}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda), \overline{\tilde{\xi}^{(N)}_{k_2\ell_2}(\mu)}\right) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}\left(\tilde{Z}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda), \overline{\tilde{Z}^{(N)}_{k_2\ell_2}(\mu)}\right) = r^{(1)}_{k_1\ell_1 k_2\ell_2}(\lambda,\mu),$$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}\left(\tilde{\xi}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda), \tilde{\xi}^{(N)}_{k_2\ell_2}(\mu)\right) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}\left(\tilde{Z}^{(N)}_{k_1\ell_1}(\lambda), \tilde{Z}^{(N)}_{k_2\ell_2}(\mu)\right) = r^{(2)}_{k_1\ell_1 k_2\ell_2}(\lambda,\mu).$$

Tvrđenje teoreme sledi jednostavno iz teorema 4.2.1. i 4.2.2.

TEOREMA 4.3.2. Neka su ispunjeni uslovi teorema 4.2.2. i 4.3.1. Neka je $Z(\lambda)=[Z_{k\ell}(\lambda)]_{k,\ell=1,2,\dots,r}$, $-\infty<\lambda<+\infty$, Gausov slučajni proces čije (kompleksne) komponente imaju matematičko očekivanje jednako nuli, a drugi momenti dati su jednakostima

$$E Z_{k_1\ell_1}(\lambda) Z_{k_2\ell_2}(\mu) = r^{(1)}_{k_1\ell_1 k_2\ell_2}(\lambda,\mu)$$

$$E Z_{k_1\ell_1}(\lambda) \overline{Z_{k_2\ell_2}(\mu)} = r^{(2)}_{k_1\ell_1 k_2\ell_2}(\lambda,\mu)$$

a $\tilde{\xi}_N(\lambda)$ i $\tilde{Z}_N(\lambda)$, $-\infty<\lambda<+\infty$, su slučajni procesi definisani jednakostima (4.3.1)-(4.3.6) i, ograničene su sve spektralne gustine.

Konačnodimenzionalne raspodele slučajnih procesa $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ slabo konvergiraju (konvergiraju u raspodeli) ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama Gausovog slučajnog procesa Z.

Dokaz teoreme 4.3.2. Iz teorema 4.2.1. i 4.3.1. i leme 4.2.1. sledi da sve semiinvarijante slučajnih procesa $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ konvergiraju ka odgovarajućim semiinvarijantama Gausovog slučajnog procesa Z i to je dovoljno za slabu konvergenciju konačnodimenzionalnih raspodela.∎

§ 4.4. SLABA KONVERGENCIJA MERA GENERISANIH NORMIRANIM PROCESIMA U PROSTORU NEPREKIDNIH FUNKCIJA NA KONAČNOM INTERVALU U GAUSOVOM SLUČAJU

Neka su $a_{k\ell}$, $b_{k\ell}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq \ell \leq m$, realni brojevi i $a_{k\ell} < b_{k\ell}$. Neka je $C_{k\ell} = C[a_{k\ell}, b_{k\ell}]$ prostor realnih neprekidnih funkcija na intervalu $[a_{k\ell}, b_{k\ell}]$ sa topologijom ravnomerne konvergencije. Označimo sa C Dekartov proizvod skupova $C_{k\ell}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq \ell \leq m$. Ako u skupu C definišemo metriku sa

$$d(x,y) = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq \ell \leq m} \sup_{a_{k\ell} \leq t \leq b_{k\ell}} |x_{k\ell}(t) - y_{k\ell}(t)|$$

onda C postaje kompletan i separabilan metrički prostor.

Neka su dalje $\eta_N(\lambda) = [\eta_{k\ell}(\lambda_{k\ell})]_{k=1,\dots,n}^{\ell=1,\dots,m}$, $a_{k\ell} \leq \lambda_{k\ell} \leq b_{k\ell}$, $N = 0, 1, \dots$ slučajni procesi čije realizacije sa verovatnoćom 1 pripadaju prostoru C. Konačnodimenzionalne raspodele procesa η_N generišu na Borelovoj σ-algebri prostora C verovatnosnu meru P_N. Prema tome, slučajni proces η_N možemo razmatrati i kao slučajni elemenat sa vrednostima u prostoru C. Kažemo da niz slučajnih elemenata $\{\eta_N\}$ konvergira u raspodeli (slabo konvergira) ka slučajnom elementu η_0, i označavamo sa $\eta_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta_0$, ako niz odgovarajućih mera $\{P_N\}$ slabo konvergira ka meri P_0.

Važe sledeća dva tvrđenja (vidi [3], str. 746):

LEMA 4.4.1. Tvrđenje $\eta_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta_0$ važi, ako i samo ako su ispunjena sledeća dva uslova:

1) Konačnodimenzionalne raspodele procesa η_N slabo konvergiraju ka odgovarajućim konačnodimenzionalnim raspodelama procesa η_0.

2) Niz $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ je relativno kompaktan.

LEMA 4.4.2. Neka je C Dekartov proizvod kompletnih separabilnih metričkih prostora $C_{k\ell}$, $1\leq k\leq n$, $1\leq \ell\leq m$ i $\{P_\alpha, \alpha\in L\}$ familija verovatnosnih mera na Borelovoj σ-algebri prostora C. Tada važi tvrđenje: Familija $\{P_\alpha, \alpha\in L\}$ je relativno kompaktna, ako i samo ako su relativno kompaktne marginalne familije $\{P_\alpha^{k\ell}, \alpha\in L\}$, $1\leq k\leq n$, $1\leq \ell\leq m$, koje su definisane na sledeći način:

$$P_\alpha^{k\ell}(A) = P_\alpha\left(h_{k\ell}^{-1}(A)\right), \quad A\in \mathcal{B}_{k\ell},$$

gde je $\mathcal{B}_{k\ell}$ - Borelova σ-algebra u prostoru $C_{k\ell}$, a $h_{k\ell}$ - operator projektovanja prostora C na prostor $C_{k\ell}$.

Vratimo se sada (kompleksnim) procesima $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ definisanih pomoću jednakosti (4.3.1)-(4.3.6). Neka je $T>0$ i $C=\times_{2n^2} C[-T,T]$ Dekartov proizvod $2n^2$ prostora $C[-T,T]$. Kako su trajektorije slučajnih procesa $\operatorname{Re}\tilde{\xi}_{k\ell}$ i $\operatorname{Im}\tilde{\xi}_{k\ell}$ neprekidne sa verovatnoćom 1, to trajektorije slučajnog procesa

$$\tilde{\xi}_N(\lambda) = \left[\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)\right]_{k=1,2,\dots,r}^{\ell=1,2,\dots,r} \qquad -T\leq\lambda\leq T,$$

sa verovatnoćom 1 pripadaju prostoru C. Ako pretpostavimo da je spektralna gustina (drugog reda) polaznog procesa $\{X(t),\ t\in Z\}$ neprekidna, onda i trajektorije slučajnog procesa

$$\tilde{Z}_N(\lambda) = \left[\tilde{Z}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)\right]_{k=1,2,\dots,r}^{\ell=1,2,\dots,r} \qquad -T\leq\lambda\leq T,$$

takođe sa verovatnoćom 1 pripadaju prostoru C.

U ovom paragrafu formulisaćemo dovoljne uslove za slabu konvergenciju nizova mera generisanih slučajnim procesima $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ u prostoru C, u slučaju kada je polazni stacionaran proces - Gausov.

Najpre ćemo formulisati nekoliko pomoćnih lema:

LEMA 4.4.3. ([3], str. 757)

Ako za stacionaran Gausov niz $X(t)=(X_1(t),\dots,X_r(t))$, $t\in Z$, važi uslov

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}^2(\lambda)d\lambda < +\infty, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_{\ell\ell}^2(\lambda)d\lambda < +\infty,$$

onda važi sledeća nejednakost:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} E\left(\sum_{s=1}^{N} X_k(s)e^{is\alpha}\sum_{t=1}^{N} X_k(t)e^{it\beta}\right)E\left(\sum_{s=1}^{N} X_k(s)e^{is\gamma}\sum_{t=1}^{N} X_\ell(t)e^{-it\beta}\right)\right|$$

$$\leq 4\pi^2\left\{\int_{-\pi}^{\pi} h(\beta)\left|\sum_{s=1}^{N} e^{is(\alpha+\beta)}\right|^2 d\beta\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} h(\beta)\left|\sum_{s=1}^{N} e^{is(\gamma+\beta)}\right|^2 d\beta\right\}^{1/2}$$

gde je
$$h(\beta)=f_{kk}^2(\beta)+|f_{k\ell}(\beta)|^2+f_{\ell\ell}^2(\beta).$$

Primetimo da, ako je funkcija $h(\beta)$, $-\pi\leq\beta\leq\pi$, ograničena, onda važi nejednakost

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(\beta)\left|\sum_{s=1}^{N} e^{is(\alpha+\beta)}\right|^2 d\beta \leq 2\pi\|h\|_\infty N. \tag{4.4.1}$$

LEMA 4.4.4. Neka je $X(t)=(X_1(t),\dots,X_r(t))$, $t\in Z$, stacionaran Gausov niz sa ograničenom spektralnom gustinom drugog reda, a $\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)$, $-\infty<\lambda<+\infty$, $k,\ell\in\{1,2,\dots,r\}$ slučajni proces definisan jednakostima (4.3.1)-(4.3.3). Tada postoji konstanta $K>0$, koja ne zavisi od λ, μ i N, takva da važi nejednakost:

$$E\left|\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)-\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)\right|^4 \leq K|\lambda-\mu|^4.$$

Dokaz leme 4.4.4. Neka je $\lambda>\mu$. Koristeći definiciju slučajnog procesa $\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}$, za dovoljno veliko N dobijamo

$$\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)-\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)=\sqrt{NB_N}\left\{\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\lambda B_N)-\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\mu B_N)-E\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\lambda B_N)+E\hat{f}_{k\ell}^{(N)}(\mu B_N)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{NB_N}}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\varphi_N(x-\lambda B_N)-\varphi_N(x-\mu B_N)\right)\left\{S_N(-x,k)S_N(x,\ell)-ES_N(-x,k)S_N(x,\ell)\right\}dx$$

gde smo koristili oznaku

$$S_N(\alpha,k)=\sum_{t=1}^{N} e^{it\alpha}X_k(t).$$

Dalje dobijamo

$$E\left|\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)-\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)\right|^4=\frac{B_N^2}{16\pi^4N^2}\int_{\Pi^4}\psi_N(x_1,x_2,y_1,y_2,\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot\, S_{k\ell}^{(N)}(x_1,x_2,y_1,y_2)\,dx_1dx_2dy_1dy_2 \qquad (4.4.2)$$

gde je

$$\psi_N(x_1,x_2,y_1,y_2,\lambda,\mu)=\prod_{j=1}^{2}\left(\varphi_N(x_j-\lambda B_N)-\varphi_N(x_j-\mu B_N)\right)\left(\varphi_N(y_j-\lambda B_N)-\varphi_N(y_j-\mu B_N)\right)$$

$$(4.4.3)$$

$$S_{k\ell}^{(N)}(x_1,x_2,y_1,y_2)=E\prod_{j=1}^{2}\Big\{S_N(x_j,k)S_N(-x_j,\ell)S_N(-y_j,k)S_N(y_j,\ell)$$

$$-\,S_N(x_j,k)S_N(-x_j,\ell)\,E\left(S_N(-y_j,k)S_N(y_j,\ell)\right)$$

$$-\,E\left(S_N(x_j,k)S_N(-x_j,\ell)\right)\,S_N(-y_j,k)S_N(y_j,\ell)$$

$$+\,E\left(S_N(x_j,k)S_N(-x_j,\ell)\right)E\left(S_N(-y_j,k)S_N(y_j,\ell)\right)\Big\} \qquad (4.4.4)$$

Koristeći teoremu 2.1.1., posle transformacije izraza na desnoj strani jednakosti (4.4.4) i skraćivanja sličnih članova, dobijamo:

$$S_{k\ell}^{(N)}(x_1,x_2,y_1,y_2)=\sum\prod_{j=1}^{4}E\left(S_N(\alpha_j,\tilde{k})S_N(\beta_j,\tilde{\ell})\right) \qquad (4.4.5)$$

gde se sabiranje vrši po svim neuređenim razbijanjima skupa

$$\left\{(x_1,k),(-x_1,\ell),(-y_1,k),(y_1,\ell),(x_2,k),(-x_2,\ell),(-y_2,k),(y_2,\ell)\right\}$$

na podskupove koji sadrže po dva elementa, pri čemu se kao elementi razbijanja ne javljaju podskupovi oblika $\{(\alpha_j,\tilde{k}),(\beta_j,\tilde{\ell})\}$ gde je $\alpha_j=-\beta_j$. Zamenjujući $S_{k\ell}^{(N)}(x_1,x_2,y_1,y_2)$ u formuli (4.4.2) izrazom koji stoji na desnoj strani jednakosti (4.4.5), promenom redosleda operacijama sabiranja i integracije i primenom Helderove nejednakosti, dobijamo

$$E\left|\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda)-\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)\right|^4\leq\frac{B_N^2}{16\pi^4N^2}\sum\left\{\int_{\Pi^4}\psi_N^2(x_1,x_2,y_1,y_2,\lambda,\mu)dx_1dx_2dy_1dy_2\right\}^{1/2}$$

$$\left\{\int_{\Pi^4}\left[\prod_{j=1}^{4}E\left(S_N(\alpha_j,\tilde{k})S_N(\beta_j,\tilde{\ell})\right)\right]^2dx_1dx_2dy_1dy_2\right\}^{1/2} \qquad (4.4.6)$$

Dalje, nalazimo:

$$\left\{ \int_{\Pi^4} \psi_N^2(x_1,x_2,y_1,y_2,\lambda,\mu)\,dx_1dx_2dy_1dy_2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_N(x-\lambda B_N) - \varphi_N(x-\mu B_N))^2 dx \right\}^2$$

$$\leq \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{H}{B_N^2} |\lambda B_N - \mu B_N| \right)^2 dx \right\}^2 = \frac{4\pi^2 H^2}{B_N^2} |\lambda-\mu|^4. \qquad (4.4.7)$$

Koristeći nejednakost (4.4.1) i lemu 4.4.4. dobijamo

$$\left\{ \int_{\Pi^4} \left[\prod_{j=1}^{4} E(S_N(\alpha_j,\bar{k})\, S_N(\beta_j,\bar{\ell})) \right]^2 dx_1dx_2dy_1dy_2 \right\}^{1/2} \leq DN^2 \qquad (4.4.8)$$

gde konstanta D ne zavisi od λ, μ i N. Tvrđenje leme sada sledi iz (4.4.6), (4.4.7) i (4.4.8).■

Posledica 4.4.1. Pri uslovima leme 4.4.4. važi tvrđenje: Nizovi slučajnih procesa

$$Re\ \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda_{k\ell}),\quad Im\ \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda_{k\ell}),\quad a_{k\ell} \leq \lambda_{k\ell} \leq b_{k\ell},\quad N=1,2,\ldots$$

posmatrani kao nizovi slučajnih elemenata u prostoru $C[a_{k\ell}, b_{k\ell}]$ su slabo (relativno)kompaktni.

Dokaz posledice 4.4.1. sledi iz teoreme 3.4.5., leme 4.4.5. i nejednakosti

$$E|Re\ \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - Re\ \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)|^4 \leq E|\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)|^4$$

$$E|Im\ \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - Im\ \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)|^4 \leq E|\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)|^4.$$

LEMA 4.4.5. Neka $f'_{k\ell} \in Lip_{H_{k\ell}}(1,\infty)$ i neka za svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_N P\left\{ \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} |\tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - \tilde{\xi}_{k\ell}^{(N)}(\mu)| > \varepsilon \right\} = 0. \qquad (4.4.9)$$

Tada, za svako $\varepsilon > 0$ važi i jednakost:

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_N P\left\{ \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} |\tilde{Z}_{k\ell}^{(N)}(\lambda) - \tilde{Z}_{k\ell}^{(N)}(\mu)| > \varepsilon \right\} = 0. \qquad (4.4.10)$$

Dokaz leme 4.4.5. Analogno kao pri dokazu leme 3.5.1. dokazujemo nejednakost

$$\omega_{\tilde{Z}^{(N)}_{k\ell}}(\delta) \le \omega_{\tilde{\xi}^{(N)}_{k\ell}}(\delta) + \omega(\delta)\ , \ \delta > 0, \tag{4.4.11}$$

gde je $\omega_{\xi}(\cdot)$ modul neprekidnosti slučajnog procesa ξ, funkcija $\omega(\cdot)$ ne zavisi od N i $\omega(\delta) \downarrow 0$ pri $\delta \to 0$, pa tvrđenje leme sledi iz (4.4.9) i (4.4.11).∎

Na osnovu prethodnih rezultata glave IV, analogno kao u jednodimenzionalnom slučaju, možemo formulisati sledeći rezultat:

TEOREMA 4.4.1. Neka je $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_r(t))$, $t \in Z$, $r \ge 2$, stacionaran Gausov slučajni niz sa realnim komponentama i spektralnom gustinom (drugog reda) $f(\lambda) = [f_{k\ell}(\lambda)]_{k=1,2,\ldots,r}^{\ell=1,2,\ldots,r}$, $-\pi \le \lambda \le \pi$, i ograničenim svim spektralnim gustinama višeg reda.
Neka su $\tilde{\xi}_N$ i $\tilde{Z}_N$ slučajni procesi definisani jednakostima (4.3.1)-(4.3.6), Z - Gausov slučajni proces definisan u teoremi 4.3.2., a P_N, Q_N i P - verovatnosne mere generisane slučajnim procesima $\tilde{\xi}_N$, $\tilde{Z}_N$ i Z u prostoru

$$C = X_{2r^2} C[-T,T]$$

a) Ako su sve funkcije $f_{k\ell}$, $k,\ell = 1,2,\ldots,r$ neprekidno-diferencijabilne, onda važi tvrđenje: $P_N \Rightarrow P$.

b) Ako $f'_{k\ell} \in Lip_H(1,\infty)$, $k,\ell = 1,2,\ldots,r$, onda važi i $Q_N \Rightarrow P$.

LITERATURA

1. Алексеев В.Г. О Выборе спектрального окна при оценке спектра гауссовского стационарного случайного процесса.- Проблемы передачи информации, 1971, 7, №4, 46-54.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.- М.: Мир, 1976.
3. Бенткус Р. Об асимптотическом поведении оценки спектральной функции многомерной стационарной гауссовской последовательности.- Литовский математический сборник, 1971, XI, №4, 745-760.
4. Бенткус Р. О семиинвариантах оценок спектра стационарной последовательности.- Литовский математический сборник, 1976, XVI, №4, 37-61.
5. Бенткус Р.Ю., Журбенко И.Г. Асимптотическая нормальность спектральных оценок.- ДАН СССР, 1976, 229, №1, 11-14.
6. Бенткус Р.Ю., Рудзкис Р.А. О распределений некоторых статистических оценок спектральной плотности.- Теория вероятностей и её применения, 1982, XXVII, №4, 739-756.
7. Бенткус Р., Рудзкис Р., Статулявичус В. Экспоненциальные неравенства для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности.- Литовский математический сборник, 1975, XV, №3, 25-39.
8. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.- М.: Наука, 1977.
9. Ериллинджер Д. Временные ряды, обработка данных и теория.- М.: Мир, 1980.
10. Гельфанд И.М., Шилов Г.К. Обобщенные функции и действия над ними.- М.: Физматгиз, 1959.
11. Де Брейн Н.Г. Асимптотические методы в анализе.- М.: ИЛ, 1961.
12. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции.- М.: Физматгиз, 1962.
13. Журбенко И.Г. Спектральный анализ временных рядов.- МГУ, 1982.
14. Журбенко И.Г. Об оценке спектральной функции стационарного процесса.- ДАН СССР, 1974, 214, №5, 1005-1008.
15. Журбенко И.Г. Об оптимальных свойствах некоторых статистик спектральной плотности.- Литовский математический сборник, 1980, XX, №1, 39-50.

16. Журбенко И.Г., Зуев Н.М. Оценки старших спектральных плотностей стационарных процессов с перемешиванием, удовлетворяющих условию Крамера.- Литовский математический сборник, 1975, XV, №1, 111-124.

17. Журбенко И.Г., Зуев Н.М. О старших спектральных плотностях стационарного процесса с перемешиванием.- Украинский математический журнал, 1975, 27, №4, 452-463.

18. Журбенко И.Г.,Труш Н.Н. Об оценке спектральной плотности стационарных процессов.- Литовский математический сборник, 1979, XIX, №1, 65-82.

19. Зигмунд А. Тригонометрические ряды.- М.: Мир, 1965, Т.1,2.

20. Ибрагимов И.А. О стационарных гауссовских процессах, обладающих условиями сильного перемешивания.- ДАН СССР, 1962, 147, №6, 1282-1284.

21. Ибрагимов И.А. Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса.- Теория вероятностей и ее применения, 1963, VIII, №4, 391-430.

22. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины.- М.: Наука, 1965.

23. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1965.

24. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей.-М.: Наука, 1974.

25. Колмогоров А.Н., Розанов Ю.А. Об условиях сильного перемешивания стационарного гауссовского процесса.- Теория вероятностей и ее применения, 1960, V, №2, 222-227.

26. Крамер Г., Лидбетер М. Стационарные случайные процессы.- М.: Мир, 1969.

27. Леонов В.П. Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов.- М.: Наука, 1964.

28. Леонов В.П.,Ширяев А.Н. К технике вычисления семиинвариантов. - Теория вероятностей и ее применения, 1959, IV, №3, 342-355.

29. Леонов В.П., Ширяев А.Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов.- Теория вероятностей и ее применения, 1960, V, №4, 460-464.

30. Малевич Т.П. Об асимптотическом поведении оценки спектральной функции стационарного гауссовского процесса.- Теория вероятностей и ее применения, 1964, IX, №3, 386-390.

31. Младенович П.Н. О скорости сходимости оценки спектральной плотности.- В кн.: Теория вероятностей, теория случайных процессов и функциональный анализ.- М.: Изд-во МГУ, 1985, 40-43.

32. Младенович П.Н. Об оценке спектральной плотности стационарной последовательности.- В кн.: Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике, тезисы докладов, т. II, Вильнюс, 1985, 202-204.

33. Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.- Теория вероятностей и ее применения, 1956, I, №2, 177-238.

34. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы.- М.: Физматгиз, 1963.

35. Рудзкис Р. Экспоненциальные неравенства для максимального отклонения оценки спектральной плотности стационарной гауссовской последовательности.- Литовский математический сборник, 1977, XVII, №1, 165-170.

36. Умирбеков Г.А. О статистиках коспектров многомерного случайного процесса, оптимальных с точки зрения среднеквадратического отклонения.-В кн.: Теория вероятностей, теория случайных процессов и функциональный анализ.- М.: Изд-во МГУ, 1985, 62-64.

37. Хеннан Э. Анализ временных рядов.- М.: Наука, 1964.

38. Хеннан Э. Многомерные временные ряды.- М.: Мир, 1974.

39. Ширяев А.Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов.- Теория вероятностей и ее применения, 1960, V, №3, 342-355.

40. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций.- Ленинград, Гидрометеоиздат, 1981.

41. Bartlett M.S. Periodogram analysis and continuous spectra. Biometrika, 195o, 37, 1-16.

42. Bartlett M.S. An Introduction to Stochastic Processes.- Cambridge Univ. Press, 1966.

43. BinghamC., Godfrey M.P., Tukey J.W. Modern techniques in power spectrum estimation.- IEEE Trans. Electr., 1967, AU 19, 56-66.

44. Brillinger D.B. Asymptotic properties of spectral estimates of second order.- Biometrika, 1969, 56, 375-39o.

45. Brillinger D.B., Rosenblatt M. Asymptotic theory of K-th order spectra.- In.: Spectral analysis of Time Series.- Wiley, 1967, 153-188.

46. Cooley J.W., Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.- Mathematics of Computation, 1965, 19, 297-3o1.

47. Doob J.L. Stohastic processes.- New York: Wiley, 1953.

48. Gentleman W.M., Sande G. Fast Fourier Transforms- for fun and profit.- ARIPS, Fall Joint Computer Conference, 1966, 28, 563-578.

49. Grenander U., Rosenblatt M. Statistical Analysis of Stationary Time Series.- New York: Wiley, 1957.

5o. Hamming R.W., Tukey J.W. Measuring noise color.- Bell Telephone Lab. Memorandum, 1949.

51. Maruyama G. Analysis on nonlinear functionals of stationary Gaussian processes.- In.: III USSR-Japan Symposium on probability theory, II, 1975, 163-166.

52. Parzen E. On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series.- Ann. Math. Stat., 1957, 28, 329-348.

53. Rosenblatt M. A central limit theorem and a strong mixing condition.- Proc. Nat. Academy of Sci. USA, 1956, 42, N1, 43-47.

54. Rosenblatt M. Curve estimates.- Ann. Math. Stat., 1971, 42, N6, 1815-1842.

55. Rosenblatt M. Statistical analysis of stohastic processes with stationary residuals.- In.: Probability and Statistics.- New York: Wiley, Ed. Grenander, 1959, 246-275.

56. Shuster A. On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena.- Terr. Magn., 1898, 13-41.

57. Stokes G.C. Note of searching for periodicities.- Proc. Roy. Soc., 1879, 29, p.122.

58. Woodroofe M.B., Van Ness J.W. The maximum deviation of sample spectral densities.- Ann. Math. Stat., 1967, 38, 1558- 157o.

59. Xu Chong-guang. The invariance principle for estimation of spectral functions of one class of stationary stochastic sequences.- Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1984, 7, No.3, 257-279.

6o. Zurbenko I.G. On the efficiency of estimates of spectral density.- Scandinavian Journal of Statistics, 1979, 6, N2, 49-56.