UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

DIPLOMSKE AKADEMSKE STUDIJE-MASTER

SIMETRIČNI POLINOMI I PRIMENA

MASTER RAD

Mentor:
Prof. dr Gojko Kalajdžić

Student:
Milica Maksimović

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu ćemo se upoznati sa složenijim načinom zadavanja funkcija, upoznaćemo neke nove elementarne funkcije. Među svim elementarnim funkcijama najjednostavniji su polinomi, čija se vrednost može izračunati pomoću konačno mnogo elementarnih operacija sabiranja i množenja. Zbog toga su polinomi naročito važni, jer ponašanje mnogih drugih funkcija istražujemo dovodeći ih u vezu sa polinomima.

Rad je organizaciono podeljen na pet delova.

Prvi deo sadrži definiciju polinoma sa *n* neodređenih, definiciju monoma polinoma, kao i objašnjenje šta je stepen polinoma, odnosno šta je stepen homogenosti polinoma. Takođe je ukazano i na vezu između termina polinoma i polinomske funkcije.

U drugom delu su objašnjeni pojam simetričnih funkcija (polinoma) i podela simetričnih funkcija.

Treći deo definiše i dokazuje vezu između funkcija s_k i σ_k pomoću Njutnove formule.

Četvrti deo sadrži definiciju i dokaz osnovne teoreme o simetričnim polinomima, kao i primedbe o vrstama zavisnosti, stepenu, izobaričnosti polinoma.

Peti deo definiše i dokazuje osnovnu teoremu algebre.

Ovom prilikom zahvaljujem se svom mentoru prof. dr Gojku Kalajdžiću na podršci, poverenju, savetima i lepim rečima.

Beograd, novembra 2012. Milica Maksimović

Uvod

Polinom je toliko često korišten pojam u matematici da se čak i osnovci vrlo brzo upoznaju sa njegovim najosnovnijim definicijama i tvrđenjima koje zadovoljava.

Polinomi su matematički alat kojim se predstavljaju mnogobrojni problemi u matematici i nauci uopšte, od vrlo jednostavnih jednačina sa jednom nepoznatom do veoma komplikovanih problema, kao što su numerička aproksimacija različitih funkcija, konstrukcija prstena polinoma i mnogih drugih korištenih pojmova u algebri i algebarskoj geometriji.

Najprirodniji put da dokažemo da realni polinom $f(x) \in R[x]$ u polju C ima bar jednu nulu, to jest da realna algebarska jednačina $f(x) = 0$ ima bar jedan koren, je direktna konstrukcija te nule, odnosno tog korena. Za linearni i kvadratni polinom ta konstrukcija je jednostavna i dobro poznata. Taj put odabrao je Cardano za slučaj kubne jednačine, a na taj način (Ferrari-evom metodom) je rešena i bikvadratna jednačina. Pokušaji da se na sličan način "pomoću radikala" reše i algoritamske jednačine višeg stepena, zapeli su već kod jednačina petog stepena. To nije nimalo slučajno, jer je N.H.Abel 1826.godine dokazao da se na taj način ne može rešiti opšta algoritamska jednačina stepena $\geq 5.$ Taj neočekivani rezultat Abel-a dobiće malo kasnije i E.Galois u okviru nove teorije koja se danas zove njegovim imenom.

Kada bi se svaka (realna) algebarska jednačina mogla rešiti "pomoću radikala", onda bi se lako moglo zaključiti da njena rešenja leže u polju C kompleksnih brojeva, što bi smo mi danas rekli, u nekom proširenju polja C, a ne kako se to verovalo sve do Gauss-a, negde u "ničijoj zemlji". To nas dovodi do prve mistične pojave Osnovne teoreme algebre i praćenja te teoreme od samog početka, pa sve do njenog današnjeg shvatanja, kao nečega prirodnog i samo po sebi jasnog.

Polinom, pojam i osobine

Definišimo polinom po n neodređenih $x_1, x_2, \dots, x_n$ nad poljem K.

Definicija (polinom sa n neodređenih):

Neka su $k_1, k_2, \dots, k_n$ nenegativni celi brojevi i

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n), |k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n \text{ i } x^k = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}.$$

Polinom po n neodređenih $x_1, x_2, \dots, x_n$ nad poljem K je izraz oblika

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|k| \le n} a_k x^k ,$$

gde su $a_k \in K$ njegovi koeficijenti.

Skup takvih polinoma, u oznaci $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sa uvedenim odgovarajućim operacijama sabiranja i množenja polinoma, čini komutativni prsten sa jedinicom.

Definicija (monom):

Proizvod

$$x^k = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$$

se naziva primitivni monom stepena

$|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$

Polinom

$$a x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} \quad (a \in K)$$

se naziva monom.

Stepen polinoma

Ako je $p(x)$ polinom iz prstena $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ definisan sa

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|k| \le n} a_k x^k \quad \text{i } p(x) \ne 0,$$

tada se kao stepen polinoma $p(x)$ uzima maksimum stepena monoma koji se pojavljuju u polinomu (njihovi koeficijenti $a_k \ne 0$). Stepen polinoma $p(x)$ je nula akko je

$$p(x) = a x_1^0 \dots x_n^0 = a \quad (a \ne 0).$$

Polinom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po n neodređenih može se razmatrati kao polinom po jednoj neodređenoj, recimo x_1, sa koeficijentima u $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Stepen d_1 takvog polinoma se naziva stepen od $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po x_1.

Jasno je da je d_1 najveći ceo broj koji se pojavljuje kao eksponent od x_1 u monomima $a_k x^k$ sa $a_k \ne 0$. Slično se definiše stepen polinoma po bilo kojoj neodređenoj x_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Ovi stepeni d_k su različiti od stepena polinoma $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, koji se ponekad naziva totalni stepen.

Primer 1. Polinom

$$p(x, y, z) = x^3 y^2 z + 2x^4 y$$

ima totalni stepen 6, dok x, y, z imaju stepene redom 4,2,1.

Definicija (homogeni polinom):

Za polinom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kažemo da je homogen polinom akko su njegovi nenula monomi istog stepena. Stepen homogenog polinoma se naziva stepen homogenosti polinoma.

Ako je $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ homogeni polinom stepena homogenosti *d*, tada je

$$p(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^d p(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Primer 2. Polinom

$$p(x, y, z) = 2xy^2 - 5xyz + z^3$$

je homogen stepena 3.

Primer 3. Ako je

$$p(x, y, z) = (x - y)^2 \cdot (x - z)^2 \cdot (y - z)^2 \ ,$$

tada je

$$p(tx, ty, tz) = t^6 p(x, y, z) \ ,$$

pa je polinom homogen, stepena homogenosti 6.

Polinomska funkcija

Takođe trebamo ukazati i na to da se polinom može tretirati i kao funkcija. Naime, na osnovu

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (x \in K, a_k \in K, k = 0,1, \dots n)$$

(algebarski polinom po x nad poljem K) možemo definisati preslikavanje $f: K \to K,$ pomoću

$$t \to p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

i uočiti homomorfizam

$$p(x) \to p(t).$$

Preslikavanje p nazivamo polinomskom funkcijom.

Teorema (izomorfizam homomorfizma):

Homomorfizam $p(x) \to p(t)$ je izomorfizam akko je polje K beskonačno.

Dakle, za beskonačna polja jednostavno nećemo praviti razliku između polinoma i polinomske funkcije, a za neodređenu x koristićemo i termin promenljiva. Takva beskonačna polja su npr. R i C. Međutim, u konačnim poljima iz jednakosti polinomskih funkcija ne sleduje jednakost polinoma. Kako ne bi došlo do zabune, umesto termina polinomska funkcija $t \to p(t)$ koristićemo jednostavno termin polinom p. Skup svih polinomskih funkcija (polinoma) ne višeg stepena od n označavamo sa P_n . Proizvoljni polinom iz P_n ima oblik:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in K.$$

Slično se može definisati i polinomska funkcija sa više promenljivih.

Pojam i primeri simetričnih funkcija

Posmatrajmo funkciju sa proizvoljno mnogo promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$, gde je $n \in N$ -broj različitih promenljivih.

Definicija (simetrični polinom):

Funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ od n promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ se naziva **simetrični** polinom po $x_1, x_2, \dots, x_n$ ako je invarijantna za svaku permutaciju izvršenu nad $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. ako je

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n})$$

za svaku permutaciju p skupa $\{1, 2, \dots n\}$,

Primer 4. Primer jednog takvog polinoma: $p(x_1) = x_{p_1}$

Da bi uopštili ovu definiciju, posmatraćemo "punu grupu permutacija sa n elemenata". Kako se svaka permutacija može dobiti pomoću transpozicija, sledi da je funkcija simetrična ako pri transpoziciji njenih varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$ funkcija ostaje ista. Naime, bijekcija nepraznog skupa A na A zove se permutacija skupa A,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & n \\ f(1) & f(2) & . & . & f(n) \end{pmatrix}$$

Skup svih permutacija nepraznog skupa A je grupa u odnosu na kompoziciju funkcija kao binarna operacija na tom skupu, u oznaci S(A). Za permutaciju $r \in S(A)$, kažemo da je transpozicija ako postoje elementi $p, q \in A, p \neq q,$ takvi da je

$$r(p) = q, r(q) = p, r(x) = x, \forall x \in A, x \neq p, x \neq q \Rightarrow r \text{ je transpozicija elemenata } p \text{ i } q$$

i često se označava sa (pq) .Očigledno je $r \circ r = e$.

Definicija (simetrična grupa):

Grupu S(A) zovemo simetrična grupa ili grupa permutacija skupa A

$$S(A)=A_n=\{ k \in N : k \leq n \}$$

simetrična grupa stepena n, u oznaci $S_{n.}$

Svaka permutacija $\delta \in S_n, n > 1$ je produkt, proizvod transpozicija tj. svaka permutacija se može dobiti iz transpozicija. Grupa S_n ima n! elemenata.

Neka je K polje i neka je $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in$ K[$x_1, x_2, \dots, x_n$].

Za bilo koju permutaciju

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & n \\ p_1 & p_2 & . & . & p_n \end{pmatrix} \in S_n$$

vrednost funkcije f na $(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n})$ je polinom $f(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n})$ u prstenu polinoma sa n neodređenih nad poljem K tj. u K[$x_1, x_2, \dots x_n$]=F.

Primer 5. f(x,y,z)=x^2+y^2-xz na Z[x,y,z], f(z,x,y) =z^2+x^2-zy

g(x,y)=x^2-xy+y^3 na R [x,y], g(y,x)=y^2-xy+x^3

Uopšte, $f(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n})$ se polinomski razlikuje od $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definicija (simetrične funkcije):

Neka je K polje i neka je zadat polinom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na K[$x_1, x_2, \dots x_n$].

Ako je $f(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ za sve permutacije

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & n \\ p_1 & p_2 & . & . & p_n \end{pmatrix} \in S_n,$$

onda $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zovemo simetričnim polinomom na $K[x_1, x_2, \dots x_n]$.

Kažemo i da je $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simetričan nad neodređenim $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Primer 6. Polinomi

$$x + y, \qquad xy, x^2 + y^2, x^3 + y^3$$

su simetrični polinomi na K[x,y], kao i

$$x^2 + y^2 + z^2, \qquad xy + zy + zx$$

na K[x,y,z].

Primer 7. Polinomi

$$P_1 \equiv P_1(a.b.c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$
$$P_2 \equiv P_2(a.b.c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

su simetrični polinomi ili simetrične funkcije neodređenih a,b,c.

Sabiranje, oduzimanje i proizvod simetričnih polinoma je simetričan polinom. Ako su

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ i } g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dva simetrična polinoma i ako je

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

njihov zbir, onda za bilo koju permutaciju

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & n \\ p_1 & p_2 & . & . & p_n \end{pmatrix} \in S_n$$

imamo

$$h(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n}) = f(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n}) + g(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots x_{p_n}) =$$
$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= h(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pa je i $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simetričan polinom.

Analogno se pokaže da su i $h=f-g$, $h=f\cdot g$ simetrični polinomi.

Primenom prethodnog, ako je K polje, simetrični polinom u K[$x_1, x_2, \dots x_n$] obrazuje potprsten nad K[$x_1, x_2, \dots x_n$].

Osnovne simetrične funkcije

Uzimajući sumu svih različitih članova (monoma) dobijenih iz tipičnog člana oblika

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

gde su $k_1, k_2, \dots k_m$ ($m \leq n$) prirodni brojevi i zamenom indeksa 1,2,...*m* sa svim permutacijama od *m* brojeva uzetih od 1,2,...*n* , dobija se simetrična funkcija promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$, koju označavamo sa

$\sum$ EMBED Equation.3 = [$k_1, k_2, \dots k_m$].

U opštem slučaju, ako je *t* proizvod stepena od $x_1, x_2, \dots, x_n$, čiji su eksponenti pozitivni celi brojevi, tada $\sum t$ označava sumu ovog člana *t* i svih različitih članova dobijenih iz *t* permutacijom promenljivih. Takvi simetrični polinomi nazivaju se $\sum polinomi$.

Primer 8. $\sum a^2b^2c=[2,2,1]=a^2b^2c+ b^2c^2a+ c^2a^2b$

Dva standardna slučaja $\sum polinoma$ od *n* promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ su:

Centralne simetrične funkcije (polinomi) s_k

Centralne simetične funkcije su oblika:

s$_k$=$\sum x_1^k = [k] = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k \geq 0)$

s$_k$= s$_k$($x_1, x_2, \dots x_n$)= $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ =$\sum x_1^k = [k] \quad (k \geq 0)$.

Od važnosti su sledeće simetrične funkcije:

$s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

.

..

$s_k = s_k(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \forall k \in Z$.

Posebno se stavlja da je $s_0 = n$.

Osnovne (elementarne) simetrične funkcije σ_k

Elementarne simetrične funkcije su oblika:

$$\sigma_k = \sum x_1 x_2 \dots x_k = \underbrace{[1,1,\dots 1]}_{k\ puta} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Za $k = 0$ imamo $s_0 = n, \sigma_0 = 1.$ Takođe za $k > n$ uzimamo da je $\sigma_k = 0.$

Uvođenjem nove neodređene *t* i posmatranjem polinoma

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)\dots(t - x_n) \quad \text{na} \quad K[x_1, x_2, \dots x_n][t],$$

uočavamo da su $x_1, x_2, \dots x_n \in K[x_1, x_2, \dots x_n]$ koreni polinoma $f(t)$ i da je

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)\dots(t - x_n) = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$$

simetričan polinom veličine $x_1, x_2, \dots x_n$.

Ako ovaj polinom napišemo kao polinom s obzirom na t

$$\prod_{i=1}^{n}(t - x_i) = \sigma_0 t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \dots + \sigma_{n-1} t^1 + \sigma_n \overbrace{t^0}^{1}$$

koeficijenti $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ zavise od $x_1, x_2, \dots x_n$.

Definicija (elementarne simetrične funkcije):

Funkcije $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ definisane pomoću:

$\sigma_0 = 1$

$\sigma_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \sum_{i_1 < i_2} x_{i_1} x_{i_2}$

(i_1, i_2 prolaze svim podnizovima niza $\{1,2, \dots n\}$)

$\sigma_3 = -\sum x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$

....

$\sigma_k = (-1)^k \sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$

($i_1, i_2, \dots i_k$ prolaze svim podnizovima niza $\{1,2, \dots n\}$)

....

$\sigma_n = (-1)^n \sum x_1 x_2 \dots x_n$

zovu se osnovne ili elementarne simetrične funkcije promenljivih $x_1, x_2, \dots x_n$.

Svi izrazi σ_k su simetrične funkcije x-ova, pa kako se te funkcije pojavljuju kao koeficijenti jednačina sa zadanim rešenjima $x_1, x_2, \dots x_k$, sledi da funkcije σ_k imaju osnovnu ulogu.

Za sledeće osnovne simetrične funkcije važi

$\sigma_0(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$

$\sigma_k(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ za $k = n + 1, n + 2, \dots \quad tj. k > n$

Primer 9. Veličinama x,y,z pripadaju ove osnovne simetrične funkcije

$\sigma_1 = -(x + y + z)$

$\sigma_2 = xy + xz + yz$

$\sigma_3 = -xyz$

Primer 10. Neka su zadati polinomi kao u primeru 7. U $\sum$ notaciji ti polinomi se mogu izraziti kao:

$$P_1 \equiv P_1(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \sum a^3 - 3\sum abc = [3] - 3[1,1,1] = s_3 - 3\sigma_3$$

$$P_2 \equiv P_2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \sum a^2 - \sum ab = [2] - [1,1] = s_2 - \sigma_2$$

Veza između funkcija s_k i σ_k

Već smo definisali centralne i osnovne funkcije sa

$s_k = s_k(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \sum x_1^k = [k]$ i

$\sigma_k = \sum x_1 x_2 \dots x_k$

Osnovne simetrične funkcije sa dve promenljive su

$\sigma_1 = -(x_1 + x_2)$

$\sigma_2 = x_1 x_2$

Dokažimo indukcijom da se svako

$s_1 k = x_1 1 \uparrow k + x_1 2 \uparrow k \quad , (\forall k > 0, \quad$ "k je ceo broj) "

može izraziti pomoću σ_1, σ_2.

Za $k = 1$, važi $\quad s_1 = x_1^1 + x_2^1 = x_1 + x_2 = -\sigma_1$.

Pretpostavimo da je tačno za proizvoljno k

$$s_k = x_1^k + x_2^k.$$

Dokažimo da je formula tačna i za $k+1$

$$s_{k+1} = x_1^{k+1} + x_2^{k+1}.$$

$s_{k+1} = x_1^{k+1} + x_2^{k+1} =$

$\qquad = x_1^k \cdot x_1 + x_2^k \cdot x_2 =$

$$=x_1^k \cdot (x_1 + x_2 - x_2) + x_2^k \cdot (x_2 + x_1 - x_1) \;=$$

$$=\underbrace{x_1^k(x_1 + x_2)} - x_1^k \cdot x_2 + \underbrace{x_2^k(x_1 + x_2)} - x_2^k \cdot x_1 \;=$$

$$=(x_1 + x_2) \cdot (x_1^k + x_2^k) - (x_1^k \cdot x_2 + x_2^k \cdot x_1) \;=$$

$$=\underbrace{(x_1^k + x_2^k)} \cdot \underbrace{(x_1 + x_2)} - \underbrace{x_1 \cdot x_2} \cdot \underbrace{(x_1^{k-1} + x_2^{k-1})} =$$

$$= \quad s_k \quad \cdot \quad s_1 \quad - \quad \sigma_2 \quad \cdot \quad s_{k-1} \quad =$$

$$s_{k+1} = s_k \cdot \overset{-\sigma_1}{\widehat{s_1}} - \sigma_2 \cdot s_{k-1} = -s_k \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \cdot s_{k-1}.$$

Kako je svaki član u poslednjem binomu polinom s obzirom na σ_1, σ_2 sledi da je binom celobrojni polinom u odnosu na σ_1, σ_2.

Primer 11. Naći sumu kuba korena kvadratne jednačine $x^2 - 5x + 2 = 0$.

Ako su koreni x_1, x_2 moramo da nađemo $s_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ bez samog određivanja korena x_1, x_2. Korištenjem

$\sigma_0 = 1,$

$\sigma_1 = -5,$

$$\sigma_2 = 2,$$

$$s_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$$

$$s_1 = -\sigma_1 = 5$$

i formule $s_{k+1} = \; s_k\, s_1 - \sigma_2 s_{k-1}$, sledi da je

$s_3 = s_2 s_1 - s_1\sigma_2 =$

$= (s_1 s_1 - s_0\sigma_2)s_1 - s_1\sigma_2 =$

$= s_1^3 - s_0 s_1 \sigma_2 - s_1\sigma_2 =$

$= -\sigma_1^3 - 2 \cdot (-\sigma_1)\sigma_2 + (-\sigma_1)\sigma_2 =$

$= -\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 =$

$= -\sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 =$

$= +125 + 3 \cdot (-5) \cdot 2 =$

$= 125 - 30 = 95$

Teorema (Njutnova formula)

Neka su $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k$ osnovni simetrični polinomi iz $K[x_1, x_2, \dots x_n]$ stepena *k*.
Ako za $k > n$ stavimo da je $\sigma_k = 0$, tada za svako *k* iz skupa *N* i

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

važi

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0 \,.$$

Dokaz:

Osnovne simetrične funkcije $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ od $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ($\sigma_k = \sum x_1 x_2 \cdots x_k$) koristili smo u cilju dobijanja Vietovih formula za korene algebarskih jednačina stepena n. Tada smo imali polinom po promenljivoj t u obliku:

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2) \dots (t - x_n) = \prod_{i=1}^{n} (t - x_i) =$$

$$= \underbrace{\sigma_0}_{1} t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \square + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \underbrace{t^1}_{t} + (-1)^n \sigma_n \underbrace{t^0}_{1} =$$

$$= t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i t^{n-i}$$

Pošto su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ su koreni $f(t) \in K[\ x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $f(x_i) = 0$, pa sledi da je

$$0 = x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \sigma_2 x_i^{n-2} - \square + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x_i^1 + (-1)^n \sigma_n, \qquad \forall i = 1,2,3, \dots$$

Pomnožimo obe strane izrazom x_i^j gde je $j = 0,1,2,3 \dots$ dobijamo sledeće:

$$0 = x_i^{n+j} - \sigma_1 x_i^{n+j-1} + \sigma_2 x_i^{n+j-2} - \square + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} x_i^{j+1} + (-1)^n \sigma_n x_i^j \quad \forall i = 1,2, \dots n$$

Sumirajući ove izraze po $i = 1,2, \dots n$, dobijamo:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+j} - \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+j-1} + \sigma_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+j-2} - \square + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+1} +$$

$$+(-1)^n \sigma_n \sum_{i=1}^{n} x_i^j .$$

Po uslovu teoreme, zadali smo

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \;,$$

pa je

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+j} = s_{n+j}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+j-1} = s_{n+j-1}$$

$$\dots$$

$$0 = s_{n+j} - \sigma_1 s_{n+j-1} + \sigma_2 s_{n+j-2} - \square + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} s_{j+1} + (-1)^n \sigma_n s_j .$$

Ovaj izraz zadovoljava sve jednakosti osim za prvih $(n-1)$ tj.

$$j = 0 \qquad 0 = s_n - \sigma_1 s_{n-1} + \sigma_2 s_{n-2} - \square + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} s_1 + (-1)^n \sigma_n \overset{n}{\widehat{s_0}}$$

$$(s_1 0\ (x_1 1, \dots x_1 n) = x_1 1^{\uparrow}0 + \cdots x_1 n^{\uparrow}0 = 1 + \cdots + 1 = n)$$

$$j = 1 \qquad 0 = s_{n+1} - \sigma_1 s_n + \sigma_2 s_{n-1} - \square + (-1)^n \sigma_n s_1$$

...

Da bi dokazali formulu i za prvih $(n-1)$ izraza, koristićemo diferenciranje funkcije $f(t)$.

Uočimo

$f(t)=(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)$

$f'(t)=$

$=\underbrace{(t-x_2)(t-x_3)\dots(t-x_n)}+\underbrace{(t-x_1)(t-x_3)\dots(t-x_n)}+\dots+\underbrace{(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_{n-1})}=$

$=$

$\frac{f(t)}{t-x_1}\qquad+\qquad\frac{f(t)}{t-x_2}\qquad+\dots+\qquad\frac{f(t)}{t-x_n}\qquad=$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(t)}{t-x_i}$.

Za $i=1,2,\dots,n,\quad f'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(t)}{t-x_i}$. Posmatrajmo $\frac{f(t)}{t-x_i}$:

$\frac{f(t)}{t-x_i}=(t-x_1)\dots(t-x_{i-1})(t-x_{i+1})\dots(t-x_n)=$

$=q_{n-1}^{(i)}t^{n-1}+q_{n-2}^{(i)}t^{n-2}+\dots+q_2^{(i)}t^2+q_1^{(i)}t^1+q_0^{(i)}t^0=\sum_{k=0}^{n-1}q_k^{(i)}t^k$,

pa ako prethodni izraz zamenimo u sumu

(1) $\quad f'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(t)}{t-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(q_{n-1}^{(i)}t^{n-1}+q_{n-2}^{(i)}t^{n-2}+\dots+q_2^{(i)}t^2+q_1^{(i)}t+q_0^{(i)}\right)=$

$=\left(\sum_{i=1}^{n}q_{n-1}^{(i)}\right)\cdot t^{n-1}+\left(\sum_{i=1}^{n}q_{n-2}^{(i)}\right)\cdot t^{n-2}+\dots+\left(\sum_{i=1}^{n}q_1^{(i)}\right)\cdot t^1+\sum_{i=1}^{n}\left(q_0^{(i)}\right)$.

Difrerencirajmo $f(t)=(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)=$

$=\underbrace{\sigma_0}_{1}t^n-\sigma_1t^{n-1}+\sigma_2t^{n-2}-\dots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\underbrace{t^1}_{t}+(-1)^n\sigma_n\underbrace{t^0}_{1}$,

dobiće se

$f'(t)=n\sigma_0t^{n-1}-(n-1)\sigma_1t^{n-2}+(n-2)\sigma_2t^{n-3}-\dots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\cdot 1+(-1)^n\sigma_n\cdot 0$

(2) $\quad f'(t)=nt^{n-1}-(n-1)\sigma_1t^{n-2}+(n-2)\sigma_2t^{n-3}-\dots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}$.

Izjednačavajući strane (1) i (2) dobiće se izrazi koje ćemo označiti sa (*):

$$n = \sum_{i=1}^{n} q_{n-1}^{(i)}$$

$$-(n-1)\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} q_{n-2}^{(i)}$$

...

$$(-1)^{n-2}\sigma_{n-2} = \sum_{i=1}^{n} q_1^{(i)}$$

$$(-1)^{n-1}\sigma_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} q_0^{(i)}$$

Sa druge strane,

$$f(t) = (t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n) =$$

$$= (t-x_i)\left(\underbrace{(t-x_1)\dots(t-x_{i-1})(t-x_{i+1})(t-x_n)}_{q_{n-1}^{(i)}t^{n-1}+q_{n-2}^{(i)}t^{n-2}+\dots+q_2^{(i)}t^2+q_1^{(i)}t+q_0^{(i)}}\right) =$$

$$= q_{n-1}^{(i)}t^n + q_{n-2}^{(i)}t^{n-1} + \dots + q_2^{(i)}t^3 + q_1^{(i)}t^2 + q_0^{(i)}t - q_{n-1}^{(i)}t^{n-1}x_i - q_{n-2}^{(i)}t^{n-2}x_i - \dots - q_2^{(i)}t^2x_i - q_1^{(i)}tx_i - q_0^{(i)}x$$

$$f(t) = (t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n) =$$

$$= \underbrace{\sigma_0}_{1} t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \square + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\underbrace{t^1}_{t} + (-1)^n \sigma_n \underbrace{t^0}_{1}$$

Upoređujući dve strane jednakosti u prethodnoj formuli, dobijamo:

$$\sigma_0 = q_{n-1}^{(i)}$$

$$-\sigma_1 = q_{n-2}^{(i)} - q_{n-1}^{(i)}x_i$$

$$\sigma_2 = q_{n-3}^{(i)} - q_{n-2}^{(i)}x_i$$

$$-\sigma_3 = q_{n-4}^{(i)} - q_{n-3}^{(i)}x_i$$

...

$$(-1)^{n-1}\sigma_{n-1} = q_0^{(i)} - q_1^{(i)}x_i$$

$(-1)^n \sigma_n = -q_0^{(i)} x_i$,

Što se može napisati i na sledeći način

$q_{n-1}^{(i)} = 1$

$q_{n-2}^{(i)} = -\sigma_1 + q_{n-1}^{(i)} x_i$

$q_{n-3}^{(i)} = +\sigma_2 + q_{n-2}^{(i)} x_i$

$q_{n-4}^{(i)} = -\sigma_3 + q_{n-3}^{(i)} x_i$

...

$q_0^{(i)} = (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} + q_1^{(i)} x_i$

$0 = (-1)^n \sigma_n + q_0^{(i)} x_i$.

Odnosno

$q_{n-1}^{(i)} = 1$ (1)

$q_{n-2}^{(i)} = -\sigma_1 + x_i$ (2)

$q_{n-3}^{(i)} = +\sigma_2 + (-\sigma_1 + x_i) x_i = \sigma_2 - \sigma_1 x_i + x_i^2$ (3)

$q_{n-4}^{(i)} = -\sigma_3 + \left(\sigma_2 - \sigma_1 x_i + x_i^2\right) x_i = -\sigma_3 + \sigma_2 x_i - \sigma_1 x_i^2 + x_i^3$ (4)

...

$q_0^{(i)} == (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} + \left((-1)^{n-2} \sigma_{n-2} + (-1)^{n-3} \sigma_{n-3} x_i + (-1)^{n-4} \sigma_{n-4} x_i^2 + \cdots + (-1)^1 \sigma_1 x_i^{n-3} + (-1)^0 \sigma_0 x_i^{n-2}\right) x_i$
$=$

$= (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} + (-1)^{n-2} \sigma_{n-2} x_i + (-1)^{n-3} \sigma_{n-3} x_i^2 + \cdots + (-1)^1 \sigma_1 x_i^{n-2} + (-1)^0 \sigma_0 x_i^{n-1}$ (n-1)

Ako uporedimo izraze (*) i (1),(2),...,(n-1), uočavamo da je

$$n = \sum_{i=1}^{n} q_{n-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} 1 = 1$$

$$-(n-1)\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} [q_{n-2}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} (-\sigma_1 + x_i]\Big) = -\sigma_1 + x_1 - \sigma_1 + x_2 - \square - \sigma_1 + x_n =$$

$$= -n\sigma_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{s_1} ,$$

$$+(n-2)\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} q_{n-3}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_2 - \sigma_1 x_i + x_i^2\right) = n\sigma_2 - \sigma_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{s_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{s_2} =$$

$$= n\sigma_2 - \sigma_1 s_1 + s_2 ,$$

$$-(n-3)\sigma_3 = \sum_{i=1}^{n} q_{n-4}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\sigma_3 + \sigma_2 x_i - \sigma_1 x_i^2 + x_i^3\right) = -n\sigma_3 + \sigma_2 s_1 - \sigma_1 s_2 + s_3$$

...

$$(-1)^{n-1}\sigma_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} q_0^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{n-1}\sigma_{n-1} + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}x_i + (-1)^{n-3}\sigma_{n-3}x_i^2 + \cdots + (-1)^1\sigma_1 x_i^{n-2} + (-1)^0\sigma_0 x_i^{n-1}\right),$$

tj.

$n = 1$

$-(n-1)\sigma_1 = -n\sigma_1 + s_1$

$+(n-2)\sigma_2 = n\sigma_2 - \sigma_1 s_1 + s_2$

$-(n-3)\sigma_3 = -n\sigma_3 + \sigma_2 s_1 - \sigma_1 s_2 + s_3$

...

$$(-1)^{n-1}\sigma_{n-1} = (-1)^{n-1}n\sigma_{n-1} + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}s_1 + \cdots + (-1)^1\sigma_1 s_{n-2} + \underbrace{(-1)^0\sigma_0 s_{n-1}}_{s_{n-1}},$$

što je ekvivalentno sa

$-n\sigma_1 + s_1 + n\sigma_1 - \sigma_1 = 0$

$n\sigma_2 - \sigma_1 s_1 + s_2 - n\sigma_2 + 2\sigma_2 = 0$

$-n\sigma_3 + \sigma_2 s_1 - \sigma_1 s_2 + s_3 + n\sigma_3 - 3\sigma_3 = 0$

...

$$(-1)^{n-1}n\sigma_{n-1} + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}s_1 + \cdots + (-1)^1\sigma_1 s_{n-2} + \underbrace{(-1)^0\sigma_0 s_{n-1}}_{s_{n-1}} - (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} = 0.$$

Odnosno

$s_1 - \sigma_1 = 0$

$s_2 - \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0$

$s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 - 3\sigma_3 = 0$

....

$$s_{n-1} + (-1)^1\sigma_1 s_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-3}\sigma_{n-3}s_2 + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}s_1 + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(n-1) = 0$$

što je i trebalo dokazati.

Iz Njutnovih formula dobijamo trougaoni sistem linearnih jednačina

$$
\begin{array}{llllr}
s_1 & & & & = 1\sigma_1 \\
\sigma_1 s_1 & - s_2 & & & = 2\sigma_2 \\
\sigma_2 s_1 & - \sigma_1 s_2 & + s_3 & & = 3\sigma_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & & \\
\sigma_{k-1} s_1 & - \sigma_{k-2} s_2 & + \sigma_{k-3} s_3 - \square + (-1)^{k-1} s_k & & = k\sigma_k \ ,
\end{array}
$$

Odakle nalazimo sledeću eksplicitnu formulu (po Kramerovom pravilu)

$$
s_k = (-1)^{k-1} \text{ EMBED Equation.3 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\sigma_1 \\ \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 2\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 3\sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \cdots & (k-1)\sigma_{k-1} \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & k\sigma_k \end{vmatrix}.
$$

Iz prethodnog sledi:

$s_1 = \sigma_1$

$s_2 = (-1)^{2-1} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 2\sigma_2 \end{vmatrix} = -(2\sigma_2 - \sigma_1^2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

$s_3 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 1 & 2\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 3\sigma_3 \end{vmatrix} = 3\sigma_3 + \sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

....

Njutnove formule izražavaju s_k rekurzivno u zavisnosti od $s_1, s_2, \ldots s_{k-1}$ i $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$. Možemo, eliminišući $s_1, s_2, \ldots s_{k-1}$, s_k napisati preko $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, na sledeći način:

$s_1 = \sigma_1$

$s_2 = \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1\sigma_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

$$
\begin{aligned}
s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4 &= \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1 - 4\sigma_4 \\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.
\end{aligned}
$$

Takođe važi i obrnuta formula, tj. da izrazimo σ_k preko s_k

σ↓k = 〖(−1)〗^(k − 1)/k! |■(1&0&0&⋯& s↓1@s↓1&2&0&⋯& s↓2@s↓2&s↓1&3&⋯& s↓3@⋮&
,

Odakle sledi:

$\sigma_1 = s_1$

$\sigma_2 = \frac{1}{2(s_1^2 - s_2)}$

$\sigma_3 = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3)$

....

Osnovna teorema o simetričnim polinomima

Teorema:

Svaki simetričan polinom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ može se izraziti na tačno jedan način kao polinom od elementarnih simetričnih funkcija $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$, tj.

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n).$$

Dokaz teoreme (Waringova metoda)

Posmatrajmo simetrični polinom p koji leksikografski treba da uredimo. Uočili smo dva različita člana A i B polinoma *p*

$$A = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$B = b x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

gde su

$$\alpha_i, \beta_i \in Z, \alpha_i, \beta_i \geq 0 .$$

Pošto smo odabrali takve članove A i B, za koje je $\alpha_i \neq \beta_i$ (i=1,2,...n), tada postoji određen broj k, $k \leq n$ za koji je $\alpha_k \neq \beta_k$, dok je $\alpha_i = \beta_i$ za $\forall i < k$.

Član A stavićemo ispred člana B akko je $\alpha_k > \beta_k$. Na taj način svakom polinomu p pripada određen početni član koji označavamo sa $R_0 p$.

Pretpostavimo da je A= $R_0\, p$, tada je niz eksponenata $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots$ opadajući ($\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$) (u obrnutom slučaju niz bi bio rastući, to jest $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$).

Kako je polinom p simetričan, pored člana A postojao bi i član A', koji se dobija iz člana A permutacijom njegovih promenljivih x_i, x_{i+1}. Tada bi član A' bio ispred A u gornjem uređenju, a to je suprotno sa pretpostavkom da je A početni član.

Dakle,

(1) A=$R_0 p = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$

je početni član u simetričnom polinomu, gde je $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ tj.$\alpha_i - \alpha_{i+1} > 0 \quad i = 1,2,\dots,n-1$.
Posmatrajmo simetričan polinom s obzirom na $x_1, x_2, \dots, x_n$

(2) $a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdot \sigma_n^{\alpha_n}$

i neka mu je početni član jednak A ili –A.

Početni član proizvoda dva polinoma jednak je proizvodu početnih polinoma tih polinoma

$$(ap(..) \cdot bq(..) = abp(..)q(..)),$$

pa iz polinoma

$$a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdot \sigma_n^{\alpha_n},$$

početni članovi u faktorima su

(3) $a, (-x_1)^{\alpha_1-\alpha_2}, \quad (x_1 x_2)^{\alpha_2-\alpha_3}, \dots, ((-1)^{n-1} x_1 \dots x_{n-1})^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}, \ ((-1)^n x_1 \dots x_n)^{\alpha_n}$.

Proizvod ovog izraza je $(-1)^{\alpha} \cdot A,$ gde je

(4) $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \cdots + n\alpha_n$.

(Npr. eksponent od x_1 u tom proizvodu je
$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n = \alpha_1$)

Drugim rečima, polinom

(5) $p - (-1)^{\alpha} \cdot a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdot \sigma_n^{\alpha_n}$

koji nastaje kao razlika dva simetrična polinoma, polinoma p i polinoma
$(-1)^{\alpha} \cdot a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdot \sigma_n^{\alpha_n}$
je i sam simetričan, a njegov početni član

$$R_0(p - (-1)^{\alpha} \cdot a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdot \sigma_n^{\alpha_n})$$

je mlađi od $R_0 p$.

Ako posmatramo sada početni član polinoma $p - (-1)^{\alpha} \cdot a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdot \sigma_n^{\alpha_n}$, analogno se dolazi do novog simetričnog polinoma sa još mlađim članom.
Proces će se završiti onda kada se dođe do najmlađeg člana tj. do konstante. To znači da je zadani polinom prikazan pomoću osnovnih funkcija $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$, što je i trebalo dokazati.

Posledica teoreme:

Svaki simetrični polinom *p* nule nekog algebarskog normiranog polinoma *q*, može se izraziti i kao polinom P koeficijenata toga polinoma *q*. Ako *p* ima celobrojne koeficijente, onda i P ima celobrojne koeficijente.

Teorema i posledica su istinite i onda ako su koeficijenti polinoma *p* elementi bilo kojeg komutativnog prstena sa jediničnim elementom.

Rekurzivni postupak u dokazivanju prethodne teoreme bi se sastojao iz nekoliko koraka:

Prvi korak: naći i napisati vodeći član $R_0 p$ preko (1)

Drugi korak: naći (2) i (4)

Treći korak: naći polinom (5).

Primer 12. Polinom $p(x, y) = x^2 + y^2 + 3x^2y + 3xy^2$ prikažimo pomoću σ_1, σ_2.

$p(x, y) = x^2 + y^2 + 3x^2y + 3xy^2 = 3x^2y + x^2 + 3xy^2 + y^2$

$\sigma_1 = -(x + y)$, $\sigma_2 = xy$

A $\overset{(1)}{\widehat{=}}$ $R_0 p = 3x^2y = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$

$n = 2$(jer su x_1, x_2tj. x, y)

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$a = 3$

$\alpha_1 = 2$

$\alpha_2 = 1$

$\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_4) + \cdots + n\alpha_n$ (4)

$\alpha = (2-1) + 2 \cdot 1 = 3$

$(-1)^{\alpha} = (-1)^{3} = -1$

Monom (2) glasi

$(-1)^{\alpha} \cdot A = (-1)^{\alpha} \cdot a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdots \sigma_n^{\alpha_n} = (-1) \cdot 3 \cdot \sigma_1^{2-1} \cdot \sigma_2^{\alpha_2} = (-1) \cdot 3 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2^{1} = -3\sigma_1\sigma_2$

pa (5) daje polinom

$$
\begin{aligned}
p - (-1)^{\alpha} \cdot a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} \cdots \sigma_n^{\alpha_n} &= p - (-3\sigma_1\sigma_2) = p(x,y) + 3\sigma_1\sigma_2 = \\
&= x^2 + y^2 + 3x^2y + 3xy^2 + 3(-(x+y) \cdot xy) = \\
&= x^2 + y^2 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2y - 3xy^2 = \\
&= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

$x^2 + y^2 = p(x,y) + 3\sigma_1\sigma_2$ EMBED Equation.3 $p(x,y) = x^2 + y^2 - 3\sigma_1\sigma_2 =$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - 3\sigma_1\sigma_2 = \\
&= (x+y)^2 - 2xy - 3\sigma_1\sigma_2 = \\
&= (-\sigma_1)^2 - 2\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2 = \\
&= \sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2
\end{aligned}
$$

Primedbe o vrstama zavisnosti

Za funkcije $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ koje zavise od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ znamo da su racionalne, pa su i linearno nezavisne. Dokazaćemo da su funkcije $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ nezavisne u tom smislu da ne postoji nikakva neprekidna funkcija sa derivacijama prvog reda za koji bi bilo $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 0 \;\; \forall x_1, \ldots, x_n$.
Za ovaj dokaz, dovoljno je pokazati da funkcionalna determinanta σ-ova po x-ovima nije $\equiv 0$.
Ta funkcionalna determinanta je jednaka

$$det\left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k}\right] = (-1)^{n} \sum_{1<k\leq n} (x_i - x_n) \neq 0 \; .$$

Primedba o stepenu dobijenog polinoma, o izobaričnosti polinoma kada je krajnji simetrični polinom homogen.

Teorema (Cayley):

Stepen polinoma P($\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$) što pripada simetričnom polinomu $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jednak je najvišem eksponentu u kojem se promenljiva x_1 pojavljuje u tom polinomu p .

Dokaz*:*

Uočimo jednu od promenljivih x_1 .

Posmatrajmo osnovne simetrične funkcije $\sigma_1', \sigma_2', \cdots, \sigma_{n-1}'$ preostalih promenljivih

$$\left(\sigma_i' = \sigma_i(x_2, \dots, x_n)\right).$$

Ove funkcije su linearno vezane sa osnovnim simetričnim funkcijama $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ promenljivih $x_2, \dots, x_n$, jer je

$\sigma_1 = -x_1 + \sigma_1'$

$\sigma_2 = -x_1\sigma_1' + \sigma_2'$

......

$\sigma_{n-1} = -x_1\sigma_{n-2}' + \sigma_{n-1}'$

$\sigma_n = -x_1\sigma_{n-1}'$,

pa iz osnovne teoreme

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$$

sledi

$$p(x_1 1, x_1 2, \dots, x_\downarrow n) \equiv P(-x_1 1 + \sigma_1 1^{\uparrow\prime}, -x_1 1\, \sigma_\downarrow 1^{\uparrow\prime} + \sigma_1 2^{\uparrow\prime}, \dots, -x_\downarrow 1\, \sigma_1(n-1)^{\uparrow\prime}).$$

To znači da najviši stepen od x_1 mora biti isti na obe strane jednakosti. Ali, najviši stepen od x_1 na desnoj strani je i najviši stepen od x_1 u polinomu

$$P(-x_1, -x_1\sigma_1', \dots, -x_1\sigma_{n-1}'),$$

a taj stepen je jednak stepenu polinoma P.

Primedba o težini monoma

Dodelimo promenljivim $x_1, x_2, \dots, x_n$ broj 1 kao težinu, tada se elementarnim simetričnim funkcijama $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ kao težine dodeljuju njihovi indeksi 1,2,...,*n* tj. kako je σ_k homogen polinom stepena k, dodelićemo funkciji σ_k kao težinu promenljive σ_k , njen stepen.

Prema tome, težinu monoma $a\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \sigma_n^{\alpha_n}$ definišemo kao sumu $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n$.
Tada se težina polinoma definiše kao najveća težina njegovih članova.Ako svaki član polinoma ima istu težinu, tada kažemo da je polinom izobaričan.

Teorema (Brioschi):

Ako je polinom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ homogen simetričan polinom stepena *d* , tada je polinom

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n),$$

za koji je

(1) $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$

izobaričan polinom stepena (težine) *d*.

Dokaz:

Polinom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je homogen simetričan polinom stepena *d*.
Homogenost stepena polinoma *p* izražavamo identitetom, u odnosu na λ, kao

(2) $p(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d\, p(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Ako u $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ sa x_i zamenimo λx_i tada dobijamo

(3) $p(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d\, p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\lambda\sigma_1}, \boldsymbol{\lambda^2\sigma_2}, \dots, \boldsymbol{\lambda^n\sigma_n})$,

jer je svaka elementarna simetrična funkcija σ_k homogen polinom stepena *k*.

Pošto je i $a\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \sigma_n^{\alpha_n}$ bilo koji član polinoma $P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$, onda odgovarajući član u tom polinomu glasi:

$$a \cdot (\lambda\sigma_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda^2\sigma_2)^{\alpha_2} \cdot \square \cdot (\lambda^n\boldsymbol{\sigma_n})^{\alpha_n} = a \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\alpha_1+2\alpha_2+\dots+n\alpha_n} \cdot \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \cdot \square \cdot \sigma_n^{\alpha_n} =$$

$$=\lambda^{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n}\cdot a\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\cdot\square\cdot\sigma_n^{\alpha_n}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\lambda}^2\boldsymbol{\sigma}_2,\ldots,\boldsymbol{\lambda}^n\boldsymbol{\sigma}_n)=\lambda^d\,p(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Pa sledi da je $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=d.$

Osnovna teorema algebre

Da bi dokazali osnovnu teoremu klasične algebre, koristićemo prethodno navedenu teoremu o simetričnim polinomima i sledeće leme:

Lema 1. Polinom *p* je delitelj realnog polinoma P u prstenu *C[x]*, ako i samo ako je to i njegov konjugat $\bar{p}$.

Ako je kompleksan broj *z* nula realnog polinoma P, onda je to i njegov konjugat $\bar{z}$, i te nula su iste višestrukosti.

Lema 2. Ako za realan polinom *p* i neki par realnih brojeva *α* i *β* važi $p(\alpha)p(\beta) < 0$, a time i $p(u) = 0$ za bar jedno $u \in R$ između *α* i *β*. Posebno, realan polinom neparnog stepena ima bar jednu nulu u *R.*

Lema 3. Svaki kompleksan polinom $p = ax^2 + bx + c$ stepena 2 ima bar jednu nulu u polju *C*. Pri tom, ako je $a, b, c \in R$, taj polinom ima 0 i u polju *R*, ako i samo ako je $b^2 - 4ac \geq 0$.

Teorema:

Polje kompleksih brojeva C je algebarski zatvoreno, to jest svaki pravi polinom *p* nad C ima bar jednu nulu u C.

Dokaz:

Kao što je već rečeno, sam dokaz se bazira na osnovnoj teoremi o simetričnim polinomima i prethodno navedenim lemama prema kojima svaki realan polinom neparnog stepena ima i bar jednu nulu u R, svaki kvadratni polinom nad poljem C ima nule u C, i kompleksan broj z je nula realnog polinoma *p* ako i samo ako je to i njegov konjugat $\bar{z}$.

Kako je polinom $p\bar{p}$ realan, ako je *z* neka njegova nula u C, biće to i $\bar{z}$, pa je tada i $p(z) = 0$ ili $p(\bar{z}) = 0$. Otuda je dovoljno dokazati da svaki realan polinom *p* stepena $n > 1$ ima nulu i u C. Sam dokaz izvodimo indukcijom po najvećem celom broju $k = \theta(p) \geq 0$ za koji je $n = d^\circ p$ deljivo sa 2^k to jest $n = 2^k m$ za neki neparan ceo broj *m*.

Ako je $k = 0$, polinom *p* je neparnog stepena, pa ima bar jednu nulu u R, a time i u C. Neka je sada $k > 0$ **i** $\theta(p) = k$ i pretpostavimo da je polinom *p* moničan.Tada postoji bar jedno natpolje F polja C nad kojim on ima i linearnu faktorizaciju

$$p = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2)\cdots(x + \alpha_n),$$

to jest u kome *p* ima sve nule. Pri tome, ako je λ bilo koji realan broj i S skup svih parova (*r*, *s*) za koje je $r, s \in \{1,2, \dots n\}$ **i** $r \leq s,$ to polje sadrži i $\alpha_{rs} = \alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s$, pa je tako i

$$q = \prod_{r\leq s}(x + \alpha_{rs}) = \prod_{r\leq s}(x + \alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s)$$

jedan polinom iz F. Stepen tog polinoma je upravo broj elemenata skupa S, to jest $\frac{n(n+1)}{2}$. Kako je $n = 2^k m, k \geq 1$ i *m* neparno,tu je $d^\circ q = 2^{k-1}m(n+1)$, a time je i $\theta(q) = k - 1.$ Štaviše, zajedno sa *p* i taj polinom *q* je realan. Zaista, ako je σ_k elementarni simetrični polinom stepena *k* iz $R[x_1, \cdots x_n]$, na osnovu Vietovih formula, prvo iz

$$p = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2)\cdots(x + \alpha_n)$$

sledi da je

$$\alpha_{n-k} = \sigma_k(\alpha_1, \dots \alpha_n)$$

upravo *k*-ti koeficijent samog polinoma *p*. Takođe, ako je $q = \sum c_k x^k,$ iz

$$q = \prod_{r\leq s}(x + \alpha_{rs}) = \prod_{r\leq s}(x + \alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s)$$

sledi da je i c_k oblika

$$c_k = P_k(\alpha_1, \dots \alpha_n),$$

gde je P_k neki polinom iz K=R$[x_1, \dots x_n]$ čiji koeficijenti ne zavise od $\alpha_r - \mathbf{ova}$. Uz to, kako

$$\prod_{r\leq s}(x + \alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s)$$

ne zavisi od redosleda tih $\alpha_r - \mathbf{ova}$, prema

$$c_k = P_k(\alpha_1, \dots \alpha_n)$$

mora biti i $P_k(\alpha_1, \dots \alpha_n) = P_k(\alpha_{\pi 1}, \dots \alpha_{\pi n}), \forall\pi \in \mathbf{S}_n$. I slično, ako se tu $\alpha_r - \mathbf{ovi}$ zamene $x_r - \mathbf{ovima}$, uz napomenu da su tada *p* i *q* polinomi iz K$[x]$. Otuda su polinomi P_k i simetrični, a samim tim i

$$P_k = \tilde{P}_k(\sigma_1, \dots \sigma_n), \qquad 0 \leq k < d^\circ q.$$

za neke polinome $\tilde{P}_k$ iz K. Zajedno sa

$\alpha_{n-k} = \sigma_k(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ **i** $c_k = P_k(\alpha_1, \dots \alpha_n)$

to upravo znači da je $c_k = \tilde{P}_k(a_{n-1}, \dots a_0)$, pa kako su koeficijenti polinoma $\tilde{P}_k$ i $\alpha_r -$ **ovi** u polju R, biće to i koeficijenti c_k samog polinoma *q*.

Prema tome, kako je polinom *q* realan i $\theta(q) < k$, prema induktivnoj pretpostavci, on ima bar jednu nulu i u C. Pri tome su $\alpha_{rs} -$ **ovi** njegove jedine nule u natpolju F polja C, pa za bar jedan od parova (*r*,*s*) mora biti i $\alpha_{rs} \in \mathbf{C}$.

Time postoji i bar jedno preslikavanje $f: R \to S$, sa osobinom da

$\forall\lambda \in R$ **i** $f(\lambda) = (r,s)$ **važi** $\alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s \in C$.

Uz to, kako je skup *S* konačan, to preslikavanje nije i injektivno, pa postoje bar dva različita realna broja λ,φ na kojima *f* ima istu vrednost, na primer (*r*,*s*), a time i kompleksni brojevi *u* i *v* za koje je

$\alpha_r + \alpha_s + \lambda\alpha_r\alpha_s = u,$ $\alpha_r + \alpha_s + \varphi\alpha_r\alpha_s = v.$

Određujući $\alpha_r + \alpha_s = b$ i $\alpha_r\alpha_s = c$, odatle sledi da je i $b, c \in C$, pa su α_r **i** α_s nule i kompleksnog polinoma $x^2 - bx + c$ stepena 2. Kako taj polinom ima nule i u samom polju C EMBED Equation.3 F , tu mora biti i $\alpha_r, \alpha_s \in C$. Odatle sledi i samo tvrđenje, jer su α_r **i** α_s nule i uočenog polinoma *p*.

Zaključak

Svaki simetrični polinom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ može se napisati na jedan i samo jedan način kao polinom $P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ elementarnih simetričnih funkcija tih promenljivih.

Stepen dobijenog polinoma je jednak stepenu datog polinoma u odnosu na jednu promenljivu x_i.

Neka je $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simetričan polinom. Totalni stepen polinoma $P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ za koji je

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n),$$

jednak je stepenu polinoma $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ako je polinom $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ homogen i stepena *d* , tada je polinom $P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ izobaričan i težine *d*.

Primer 12. (koji pokazuje kako se za zadano p određuje polinom P, pomoću prethodne dve teoreme):

Jednostavan simetrični polinom

$$p = [2,1,1] = \sum x_1^2 x_2 x_3$$

izrazi pomoću elementarnih simetričnih funkcija $\sigma_1, \sigma_2, \dots$

Polinom p je stepena 2 $\overset{Cayley}{\Rightarrow}$ polinom je kvadratan

Polinom p je homogen $\overset{Brioschi}{\Rightarrow}$ polinom P je izobaričan težine 4(2+1+1=4).

Pa će odgovarajući polinom $P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ imati oblik

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n) = A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_2^2 + C\sigma_4 \quad \text{A,B,C su konstante}$$

$$\sum x_1^2 x_2 x_3 = A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_2^2 + C\sigma_4$$

Odredimo A,B,C.

Za n=3

$\sigma_4 = 0$ pa za $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ $\Rightarrow \sigma_1 = -2,$ $\sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$,

pa iz

$\sum x_1^2 x_2 x_3 =$ $A\sigma_1\sigma_3$ $+B\sigma_2^2$ $+C\sigma_4$

0 = 0 $+B\cdot 1$ + 0 $\Rightarrow$ B=0.

Za $x_1 = -1, x_2 = x_3 = 1$ dobijamo $\sigma_1 = -1,$ $\sigma_2 = -1, \sigma_3 = 1 = A\cdot(-1)\cdot 1$,

a $p = x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2 =$ $A\cdot(-1)\cdot 1$

-1 = -A

A=1

Za n=4 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ dobijamo $\sigma_1 = -4,$ $\sigma_2 = 6, \sigma_3 = -4, \sigma_4 = 1$

$\sum x_1^2 x_2 x_3$ $= x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_2^2 x_1 x_3 + x_2^2 x_1 x_4 + x_3^2 x_1 x_2$

12=16+C $\Rightarrow$ C= -4.

Dakle , za svako n $\sum x_1^2 x_2 x_3 =$ $P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ $=\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$.

Primer 13: Neka je $n > 4,\ p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum x_1^2 x_2^2 x_3$.

Tada je $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n) = \sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$.

Primer14: Polinom $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$ izrazi pomoću elementarnih simetričnih funkcija $\sigma_1, \sigma_2, \dots$

Ovo je simetrični homogeni polinom trećeg stepena.

Njegov stepen po promenljivoj x_1 je $d_1 = 2$.

Njegov stepen po promenljivoj x_2 je $d_2 = 2$

Njegov stepen po promenljivoj x_3 je $d_3 = 2$

Polinom $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ je izobaričan polinom težine 3 i totalnog stepena 2.

$p(x_1, x_2, x_3) = P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \mathrm{A}\sigma_1\sigma_2 + \mathrm{B}\sigma_3$ pri čemu su A,B-konstante.

Za $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ dobijamo $\sigma_1 = 2,\quad \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$, $p = 2$

$2 = A \cdot 2 \cdot 1 + B \cdot 0$ **EMBED Equation.3** A=1

Za $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ na sličan način se dobije $\sigma_1 = 3,\quad \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$, $p = 8$, pa sledi da je

B= -1.

$p(x_1, x_2, x_3) = P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$

Literatura

1. G.Kalajdžić, Algebra, Beograd,1998.
2. Đ.Kurepa,Viša algebra, 1-2, Beograd, 1969.
3. B.L. van der Varden, Algebra, Moskva, 1979.
4. S.Kurepa, Uvod u linearnu algebru, Zagreb, 1975.
5. A.G.Kuroš Kurs više algebre, Moskva , 1971.
6. www.wikipedia.org
7. www.ni.ac.rs.
8. S. Leng, Algebra, Moskva,1968.