k - uniformne teselacije euklidske ravni

Tamara Brankovan

25. septembar 2012

Uvod

Ovaj rad predstavlja moj završni rad na master studijama na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Radeći u školi napravila sam nekoliko, za đake zanimljivih, časova kada smo slagali različite oblike i učili razlomke, Pitagorinu teoremu, površine pravilnih mnogouglova i mnoge druge apstraktne pojmove koristeći konkretne, opipljive oblike. Tako sam se zainteresovala za teselacije euklidske ravni i izabrala ovu temu. Iznenadilo me je koliko teselacije nisu zastupljene u literaturi i koliko se u današnje vreme geometrija sve više zanemaruje u nastavi i prednost daje drugim oblastima matematike kao i to da nastavnici ne posvećuju pažnju praktičnoj nastavi. Proučavajući različite vrste teselacija obradovalo me je u koliko društvenih igara i igara na kompjuteru može da se nađe neki princip teselacije. Pored primene u nastavi i igrama, teselacije su prisutne i u umetnosti, građevinarstvu, u kompjuterskoj grafici, optici i mnogim drugim naukama, kao na primer kristalografiji.

Rad je podeljen u četiri poglavlja. Prvo poglavlje se odnosi na istoriju teselacije i poreklo reči. U drugom poglavlju su navedeni osnovni pojmovi, definicije i teoreme. Podeljeno je na sedam celina. Treće poglavlje se odnosi na različite vrste uniformnih teselacija. U ovom poglavlju ima četiri celine. To su 1-uniformne teselacije koje su ivica na ivicu, k-uniformne teselacije koje su ivica na ivicu, zatim teselacije koje nisu ivica na ivicu i uniformne teselacije poligonima u obliku zvezde. Poslednje poglavlje opisuju neke primene teselacija, u nastavi u školama i umetnosti.

Ovom prilikom bih se zahvalila mom mentoru, profesoru Zoranu Lučiću, što je uvek imao vremena da pogleda materijal koji sam pripremila i da me posavetuje. Takođe bih se zahvalila nastavnici Zvezdici Marković koja mi je dala ideju kako da napravim interesantne časove matematike i što me je podržavala u svakom trenutku planiranja i realizacije tih časova i kasnije pisanja ovog rada.

Svesna sam da, i pored svog uloženog truda, u radu postoji par propusta. Svakom ko ima bilo kakvu sugestiju, ili mi ukaže na greške, biću veoma zahvalna.

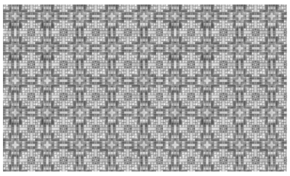
Glava 1

Poreklo reči teselacija i istorijski pregled

Govoreći jezikom koji nije strogo matematički, teselacija je prekrivanje (popločavanje) različitih površi oblicima koji se ponavljaju bez međusobnog preklapanja i šupljina između njih. Kasnije ćemo uvesti preciznu definiciju.

Geometrijski oblici koji se slažu zajedno i stvaraju raznovrsne šare i tako prekrivaju neke površi mogu se naći u svim zemljama sveta. Skoro da ne postoji narod koji nije koristio metode teselacije iz estetskih ili spiritualnih razloga. U različitim epohama korišćeni su različiti principi teselacije, različiti oblici i boje.

Reč *teselacija* potiče od jonske verzije grčke reči *tesseres* što bi se prevelo kao četiri. Ako pogledamo i u nekim rečnicima, videćemo da *tessellate* znači popločati kvadratima kao kad se pravi mozaik. Stvarno, prva popločavanja različitih površi jesu bila sa kvadratnim pločicama.



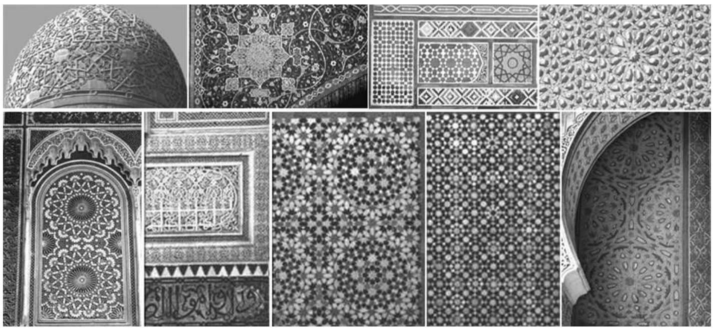
Slika 1.1: Primer jednog antičkog popločavanja.

Tako su, na primer, stari Kinezi prekrivali krovove svojih palata i hramova četvorougaonim pločicama različitih boja. Žuta se smatrala kraljevskom bojom, simbolizovala je sunce i pločice te boje su bile rezervisane za krovove kraljevskih palata a plave su simbolizovale nebo i koristile se za prekrivanje krovova hramova.

Oko 3.5 hiljada godina pre n.e, u preislamskom periodu, ljudi na području današnjeg Irana su počeli da koriste pločice od uglančanog kamena i gline za pravljenje najrazličitijih šara i ornamenata. Odatle se umetnost ređanja pločica širila na zapad, preko Egipta, Grčke, Rima do Španije i današnje Britanije.

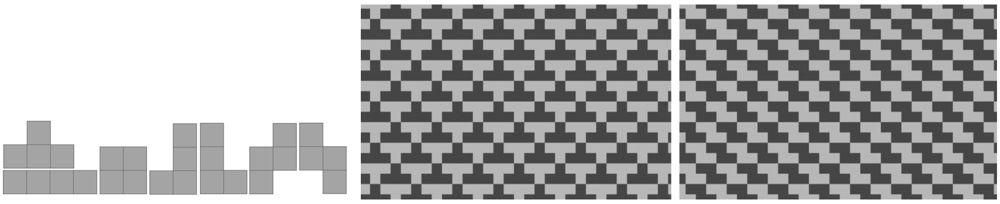
Dok su stari Grci i Rimljani dekorisali pločice koje su koristili za teselacije slikajući ljudske likove u elementima mozaika, Arapi su pravili vrlo složene geometrijske oblike i figure koristeći jednostavne pločice i malo različitih boja. Posmatrajući spoljašnje zidove vizantijskih crkvi vidimo da si pravili mnoge šare i ornamente od opeke koje jako podsećaju na ukrase koji su pravljeni u Persiji.

Danas se princip teselacije koristi u mnogim industrijama (na primer tekstilnoj), u umetnosti, građevinarstvu, izradi optičkih instrumenata, u kristalografiji kod atoma koji čine kristale, u kompjuterskoj grafici itd. Prekrivanja ravni sa kojima se rado zabavljaju generacije dece iz celog sveta su slagalice i kineska igra tangram kao i neke igre na kompjuteru. Jedna od takvih igara na kompjuteru je *tetris* u kojoj se slažu pločice nastale



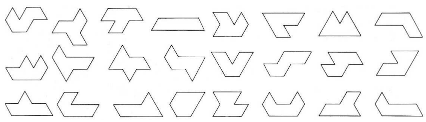
Slika 1.2: Nekoliko složenih arapskih ornamenata sastavljenih od jednostavnih geometrijskih oblika.

spajanjem četiri kvadrata. Svih sedam načina spajanja kvadrata u pločice mogu sami za sebe da čine teselaciju ravni.



Slika 1.3: Sedam kombinacija četiri kvadrata koje čine figure u kompjuterskoj igri tetris i dva primera teselacija ravni pomoću tih figura.

Pored pravljenja novih pločica pomoću kvadrata, možemo kombinovati i druge oblike i praviti interesantne pločice. Tako možemo spajati jednakostranične trouglove[1], pravilne šestouglove. Postoje skupovi pločica za koje se još ne zna da li sami mogu činiti popločavanje ravni.

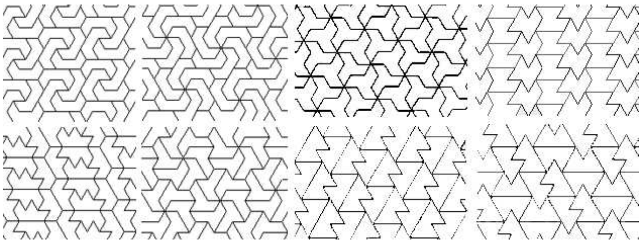


Slika 1.4: Pločice sastavljene od sedam pravilnih trouglova nazivamo heptiamonds. Na slici su prikazane svih 24 mogućnosti sklapanja heptiamonds-a. Samo kombinacija koja je prikazana peta u drugom redu ne može sama da čini teselaciju ravni.

Možda jedni od najimpresivnijih primera popločavanja su kameni zidovi koje su koristili Inke praveći terase obradive zemlje na strmim padinama na kojima su živeli. Oni su bili pravi umetnici kad je reč o klesanju kamena i građenju pomoću tih blokova. Bez ikakvih vezivnih materijala koji se danas koriste u građevinarstvu, oni su podizali kamene strukture koje nas impresioniraju i danas.

Očigledno je da praveći te zidove Inke nisu koristili princip simetrije pa zato ovo nije primer teselacije ali jeste jedan od lepih i funkcionalnih načina prekrivanja ravni. Ono što je zanimljivo je da nijedna dva kamena nisu ista i da su oni tako dobro uklopljeni da između nikoja dva kamena ne postoji ni najmanja šupljina. Čak su tako blizu postavljeni da ne može da se provuče ni oštrica žileta. Ove konstrukcije su tako jake da se pri

[1]Spajanjem npr. pet pravilnih trouglova dobijamo figure koje zovemo *pentiamonds*, odnosno spajanjem sedam pravilnih trouglova tzv. *heptiamonds*.



Slika 1.5: Neke teselacije euklidske ravni pomoću kombinacija sedam jednakostraničnih trouglova.

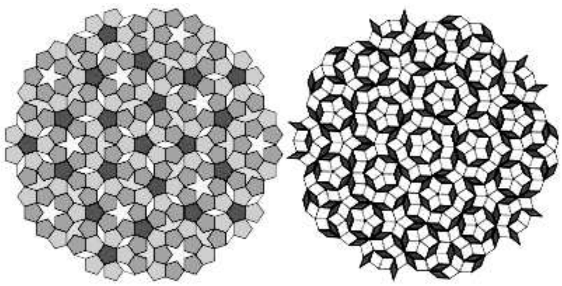
Slika 1.6: Levo: terase obradive zemlje koje su pravile Inke; Desno: deo zida koga su konstruisali Inke koristeći kamenje različitih veličina i oblika.

zemljotresima male i srednje jačine građevine uopšte ne pomeraju a pri jačim zemljotresima se blokovi pomeraju i onda, po prestanku pomeranja tla, legnu na isto mesto i uklope se kako su i ranije stajali.

Iako njegovi spisi nisu sačuvani (postoje samo zabeležena njegova dopisivanja sa aleksandrijskim matematičarima), Arhimed (287 - 212 p.n.e) se smatra prvim matematičarem koji je razmatrao slaganje poligona bez šupljina i preklapanja i tako postavio osnove za razvijanje ideja i principa teselacije. Po njemu se trinaest polupravilnih poliedara, koja se mogu posmatrati kao teselacija sfere, zovu Arhimedovim telima. Arhimedova tela se sastoje od podudarnih rogljeva koji su sastavljeni od dve ili više vrste pravilnih poligona. Pravilni poliedri (Platonova tela), koji se takođe mogu posmatrati kao teselacije sfere, se sastoje od podudarnih rogljeva u kojima se dodiruju poligoni samo jedne vrste.

Jedan od prvih sačuvanih matematičkih radova iz oblasti teselacije je rad nemačkog astronoma i matematičara Johannesa Keplera. Kepler je 1619. izvršio potpunu enumeraciju uniformnih teselacija euklidske ravni koja se smatra i danas savremenom. Neverovatno je da je Keplerov rad bio zaboravljen skoro tri veka i da je na njegov značaj tek 1905. godine ukazao Sommerville, dokazavši Keplerovo tvrđenje da postoji tačno 11 uniformnih teselacija u euklidskoj ravni.

Nekim matematičarima, npr. Davidu Hilbertu (1862 - 1943.), se problem teselacije ravni u početku uopšte nije činio interesantnim, čak mu je možda izgledao trivijalnim. U svom delu iz 1900. godine, o nerešenim problemima uopšte nije razmatrao problem teselacije u dvodimenzionim prostorima, nego se fokusirao na popločavanja u prostorima od tri i više dimenzija. Kasnije je jedan od Hilbertovih učenika, K. Reinhardt dublje istraživao problem teselacija u ravni i zainteresovao i Hilberta za problem traženja algoritma sa konačnim brojem koraka ili pokušaja koji određuje da li određena grupa pločica može biti model koji se može koristiti za popločavanje cele ravni. Tad je Hilbert uvideo da je problem daleko od trivijalnog. Postoji osnovana sumnja da je algoritam moguće napišati ali on do danas još nije napravljen. Isti problem je pre oko dve decenije zainteresovao i Hao Wanga koji je došao do nekih zaključaka koji uslovi treba da budu zadovoljeni da bi neka pločica bila model za popločavanje ravni. Međutim, njegova pretpostavka da pločice ne mogu biti neperiodične je u kontadikciji sa otkričem iz 1966. kad je Robert Berger pronašao prvi set aperiodičnih pločica[2]. Taj set sadrži 20,426 Wangovih pločica. Možda nam se taj broj čini velikim, čak je i sam Berger naznačio da je verovatno broj pločica u setu prevelik i da postoji neki podset koji je takođe aperiodičan. Tako je upravo Berger prvi uspeo da smanji set na 104 pločice. Kasnije je Donald Knuth, profesor na Stanford univerzitetu, napisao algoritam baziran na tzv. *širećim kvadratima* i našao set od 92 aperiodične pločice. Branko Grunbaum i G. C. Shepard u svojoj knjizi *Tilings and patterns* smatraju da je najmanji broj pločica sa kojima može da se napravi aperiodično popločavanje 16.



Slika 1.7: Dva aperiodična popločavanja koja je konstruisao Penrose; Levo: aperiodično popločavanje sa 6 vrsta pločica; Desno: aperiodično popločavanje sa dve vrste pločica koje se po svom tvorcu zove Penrose tiling. Navešćemo neke karakteristike Penrose-ovog prekrivanja ravni: ne postoji nijedna grupa simetrija popločavanja, popločavanje je slično samom sebi, tj. povećavajući površ koju prekrivamo način ređanja pločica ostaje isti samo se širi i Penrose-ovo popločavanje ima primenu u izučavanju prelamanja X zraka.

Osamdesetih godina prošlog veka se došlo do novih otkrića. Naime, posmatrajući arapske građevine iz XII veka može se zaključiti da postoje aperiodična popločavanja sa samo dve vrste pločica. Tako su mnogi naučnici shvatili da jako malo znamo o staroj arapskoj matematici. Među tim naučnicima je bio i britanski fizičar Roger Penrose koji je počeo da se zanima za aperiodičan prekrivanja ravni. Polazeći od Keplerovih crteža u kojima je koristio petouglove i poligone u obliku petokrakih zvezda, Penrose je prvo konstruisao aperiodično popločavanje koristeći šest vrsta pločica da bi kasnije (1984. godine) smanjio broj pločica koje učestvuju u teselaciji na 2.

[2]Aperiodične pločice prekrivaju ravan tako da se nijednom, nigde ne ponovi ista šara. Kod aperiodičnog popločavanja se ponavljaju iste pločice ali nikad na isti način. Primer aperiodičnog popločavanja je prekrivanje ravni u obliku spirala.

Glava 2

Osnovni pojmovi

2.1 Popločavanja ravni i teselacije

Pod *popločavanjem ravni* ćemo podrazumevati prekrivanje ravni oblicima koji se po nekom pravilu ponavljaju tako da između njih nema šupljina i da se ti oblici ne preklapaju. Sada možemo uvesti i preciznu definiciju teselacije i još nekih osnovnih pojmova.

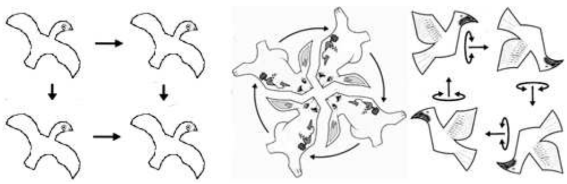
Teselacija je prebrojiva familija zatvorenih, povezanih topoloških diskova $\tau = \{T_i : i \in I\}$ koja prekriva celu ravan i to tako da svaka tačka ravni pripada tačno jednom setu T_i i da je mera preseka bilo kojih T_i nula.

Topološke diskove koji prave teselaciju ćemo nazivati *pločicama*. Dve pločice ćemo zvati *susednim* ako imaju zajedničku ivicu. Krajeve ivica ćemo zvati *zajedničkim temenima teselacije* ili kraće *temenima*.

U ovom radu ćemo se uglavnom baviti teselacijama euklidske ravni gde je svaka ivica teselacije ujedno i cela ivica poligona te teselacije. Te teselacije ćemo nazivati *teselacije ivica na ivicu*.

Naveli smo da je teselacija prebrojiva familija skupova što znači da iako pločica može biti beskonačno mnogo, možemo ih prebrojati, što ne bismo bili u stanju bez uslova da je mera preseka bilo kojih T_i nula (duži i tačke imaju meru nula).

Svakoj teselaciji τ euklidske ravni pridružićemo grupu $S(\tau)$ njenih simetrija koja predstavlja sve izometrijske transformacije ravni τ koje tu teselaciju ostavljaju invarijatnom. Te transformacije mogu biti translacija, rotacija, refleksija i klizajuća refleksija.

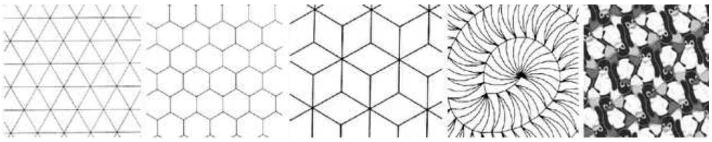


Slika 2.1: Primeri uklapanja pločica u teselacije korišćenjem translacije, rotacije i refleksije.

Možemo zaključiti i da je skup indeksa I kod popločavanja u euklidskoj i hiperboličkoj ravni beskonačan dok je kod teselacije sfere taj broj konačan. U ovom radu ćemo razmatrati samo teselacije euklidske ravni pa će set pločica biti beskonačan.

Teselacije euklidske ravni kod kojih su sve pločice podudarne nekom modelu (prototipu) T nazivamo *monoedarskim teselacijama*.

Očigledno je da su kod monoedarske teselacije sve pločice istog oblika i iste veličine. Kažemo da τ dozvo-



Slika 2.2: Neki primeri monoedarskih teselacija. Prva dva primera su dva pravilna popločavanja, treći primer predstavlja popločavanje dualno jednom diedarskom popločavanju, četvrti primer je jedno spiralno monoedarsko popločavanje i peti primer ilustruje teselaciju pločicama nepravilnih oblika.

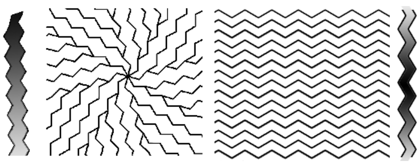
ljava model T.

Teselacije euklidske ravni kod kojih su sve pločice podudarne sa dva modela pločica T_1 i T_2 nazivamo *diedarskim teselacijama*.

Ako je τ teselacija euklidske ravni pravilnim, konveksnim poligonima i ako je $S(\tau)$ grupa simetrija te teselacije koja je tranzitivna, tj. ako za bilo koja dva temena te teselacije postoji transformacija iz $S(\tau)$ koja preslikava jedno teme u drugo, teselaciju τ zvaćemo *uniformnom teselacijom.* Ako su sve pločice (poligoni) uniformne teselacije međusobno jednake, tj. poligoni podudarni, tu teselaciju ćemo zvati *pravilnom teselacijom.*

Kod pravilnih teselacija su poligoni oko jednog temena uvek poređani na isti način, prvo pišemo broj stranica poligona sa najmanjim brojem stranica, neka je to a, pa broj stranica poligona sa brojem stranica b, itd. Tako dobijamo ciklični niz koji određuje to teme $a.b.c...x.y.z$ i tu teselaciju, u oznaci $(a.b.c.d...x.y.z)$. Tako ćemo pravilnu teselaciju kod koje se poligon p pojavljuje k puta pisati $(p.p.p...p.p)$, odnosno, kraće (p^k).

U specijalnim slučajevima ćemo još dozvoliti da pločice ne budu zatvorene, tj. cele uokvirene svojom granicom. Pločice mogu biti otvorene sa jedne strane (topološki ekvivalentne tzv. *polutraci*) ili otvorene na dva suprotna kraja (topološki ekvivalentne tzv. *beskonačnoj traci*). Tada ne postoji disk ma koliko velikog poluprečnika koji obuhvata celu pločicu.

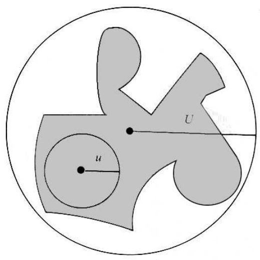


Slika 2.3: Dva primera beskonačnih pločica i teselacija koje se mogu napraviti pomoću njih. Prvi primer prikazuje tzv. *polutraku*, koja ne mora imati prave ivice a drugi primer ilustruje primer tzv. *beskonačne trake*, pločice koja je otvorena na dva svoja kraja.

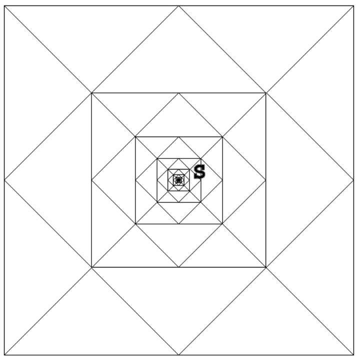
2.2 Normalna popločavanja

Za popločavanje ravni kažemo da je *normalno* ako su ispunjena sledeća tri uslova:

1) svaka pločica je topološki disk,
tj. granica svake pločice je neka zatvorena linija.
2) presek svake dve pločice je povezan skup,
tj. nijedna pločica se ne sastoji od nekoliko odvojenih, nepovezanih delova.
Drugim rečima, presek dve pločice je
ili prazan skup, ili teme teselacije, ili neka linija.
3) pločice su uniformno ograničene,
tj. postoje u i U tako da svaka pločica sadrži disk poluprečnika u
i u isto vreme je sadržana u disku poluprečnika U.
Brojeve u i U zovemo parametrima popločavanja.



Slika 2.4: Da bi neka pločica mogla da čini normalno popločavanje ravni treba da je sadržana u nekom disku poluprečnika U i da u isto vreme sadrži disk poluprečnika u.



Slika 2.5: Jedan primer popločavanja koje ima singularnu tačku.

Za neko popločavanje ravni kažemo da je *lokalno konačno* ako nema singularnih tački. Za neko popločavanje ćemo reći da *ima singlularnu tačku* S ako svaki disk sa centrom u S, ma koliko on bio malog prečnika, seče (obuhvata) beskonačno mnogo pločica.

Lema 1 *Svako normalno popločavanje je lokalno konačno.*

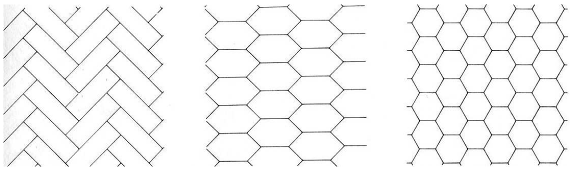
Dokaz: Pođimo od nekog prekrivanja euklidske ravni normalnim pločicama sa parametrima u i U i proizvoljne tačke S u toj ravni. Uzmimo sada neki disk $D(S, r)$ koji pripada toj ravni i ima centar u tački S. Svaka pločica tog popločavanja koju seče uočeni disk sigurno cela mora biti sadržana u disku sa centrom u S i poluprečnika $2U + r$. Možemo naći najveći mogući broj pločica koje imaju zajedničkih tačaka se datim diskom znajući da je površina svake pločice bar $(u^2)\pi$ i površina diska unutar kog se treba naći pločica $((2U + r)^2)\pi$:

$$N(r) = \frac{((2U + r)^2)\pi}{u^2\pi}.$$

Dobijamo da je taj broj konačan pa dato popločavanje nema singularnih tačaka. $\diamond$

Sa topološkog stanovišta krug, kvadrat, trougao ili bilo koji drugi zatvoreni poligon su homeomorfne figure jer postoji neprekidna bijekcija koja jedan oblik može da preslika u bilo koji od pomenutih.

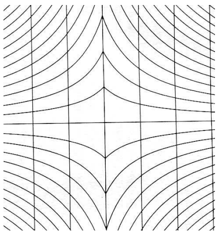
Tako na primer teselacija riblja kost (mnogima poznata kao tehnika ređanja parketa) je topološki ekvivalentna sa teselacijom pravilnim šestouglovima. Ako prvo pomeramo vertikalne cik-cak linije kod parketa tako



Slika 2.6: Tri topološki ekvivalentna popločavanja. Prva slika predstavlja tehniku ređanja parketa, tzv. riblja kost, druga slika prikazuje prelaznu fazu i na kraju je prikazana pravilna teselacija šestouglovima.

da dobijemo prekrivanje ravni šestouglovima koje smo prikazali na drugoj slici onda je jasno da sa još malo *nameštanja* možemo dobiti pravilnu, uniformnu teselaciju šestouglovima. Sva *pomeranja* i *nameštanja* koja smo koristili možemo predstaviti kao neki homeomorfizam i kako je kompozicija homeomorfizama takođe homeomorfizam, zaključujemo da su popločavanja koja smo razmatrali topološki ekvivalentna.

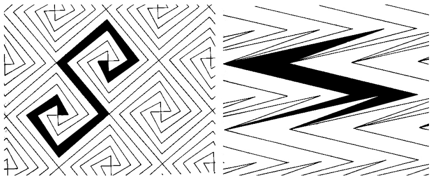
U prethodnom primeru smo razmatrali monoedarsko, normalno popločavanje euklidske ravni koje je topološki ekvivalentno sa još jednim normalnim prekrivanjem ravni. Postoje i primeri kada je jedno monoedarsko popločavanje ekvivalentno normalnom prekrivanju ravni a ono samo ne mora biti normalno. To ćemo ilustrovati jednim primerom. Pođimo od regularnog popločavanje (4^4) i vertikalnim sabijanjem ivica teselacije tako što ih pomeramo levo i desno dobijamo popločavanje kao na slici. Dobijeno prekrivanje ravni nije normalno jer iako



Slika 2.7: Primer teselacije koja je topološki ekvivalentna teselaciji (4^4) i koja nije normalna.

zadovoljava prva dva uslova iz definicije normalnog popločavanja, ono ne zadovoljava treći uslov, tj. za ma koliko veliko U postoji beskonačan broj pločica koje se ne mogu prekriti diskom radijusa U i za ma koliko malo u postoji beskonačan broj pločica koji ne može da sadrži nijedan disk poluprečnika u.

Očigledno da ako neko popločavanje ima singularitet u beskonačnosti onda može da postoji neko topološki ekvivalentno prekrivanje koje nema singularitet. Ako pak, razmatramo neko popločavanje koje nema singularnih tačaka onda svako njemu topološki ekvivalentno prekrivanje ravni neće imati singularnih tačaka.

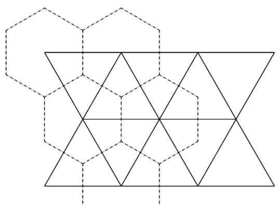


Slika 2.8: Još jedan primer dva topološki ekvivalentna popločavanja euklidske ravni.

2.3 Dualne teselacije

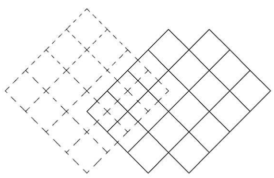
Za dva popločavanja kažemo da su *međusobno dualna* ako postoji bijekcija koja preslikava težista, ivice i temena pločica jednog popločavanja u redom, temena, ivice i težista pločica drugog popločavanja. Tako, ako se u jednom popločavanju u temenu sastaje p poligona, u njemu dualnom popločavanju će pločica biti poligon sa p stranica.

Svako uniformno popločavanje ima svoje dualno popločavanje. Pravilna prekrivanja ravni (3^6) i (6^3) su međusobno dualna.

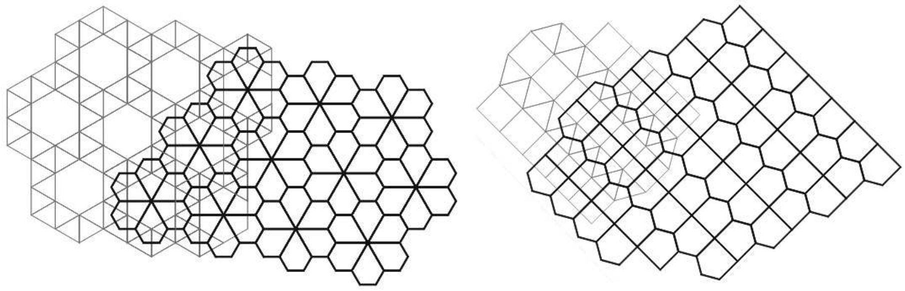


Slika 2.9: Dva pravilna prekrivanja ravni (3^6) i (6^3), koja su međusobno dualna.

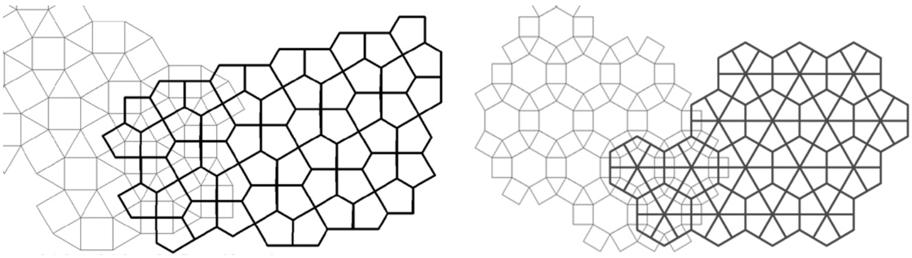
Jedina uniformna teselacija koja je dualna sama sa sobom je teselacija (4^4). Za ovu teselaciju kažemo da je *samodualna.*



Slika 2.10: Teselacija (4^4) je dualna sama sebi.

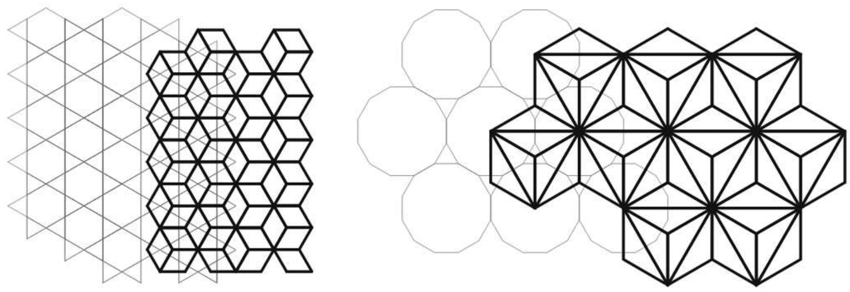


Slika 2.11: Teselacije $(3^4.6)$ i $(3^3.4^2)$ i njihove dualne teselacije.



Slika 2.12: Teselacije $(3^2.4.3.4)$ i $(3.4.6.4)$ i njihove dualne teselacije.

Dualna teselacija teselaciji $(3,3,4,3,4)$ jeste tzv. *Kairo teselacija.* Ova teselacija je dobila ime po tome što je najčešći način teselacije na ulicama Kaira baš ovo popločavanje. Kako svaka teselacija može da se posmatra kao teselacija koja je analagona nekoj sfernoj teselaciji, tj. projekcija velikih lukova sfere na euklidsku ravan, to Kairo teselacija predstavlja projekciju dodekaedra. Svaka uniformna teselacija ima svoje du-

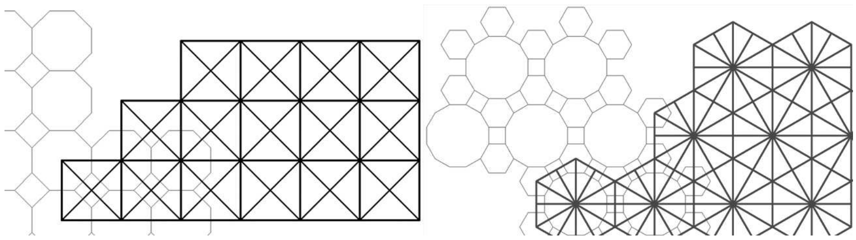


Slika 2.13: Teselacije $(3.6.3.6)$ i (3.12^2) i njihove dualne teselacije.

alno popločavanje. Jedanaest popločavanja koja su dualna 1-uniformnim teselacijama se zajedno zovu *Lavesove teselacije.* One su dobile ime po kristolografu Fritz Laves-u.

Takođe, bilo koje normalno popločavanje ima svoje dualno popločavanje.

Teorema 1 *Ako su dve teselacije τ_1 i τ_2 obe dualne nekoj teselaciji τ_0 onda su τ_1 i τ_2 topološki ekvivalentne.*



Slika 2.14: Teselacije (4.8^2) i $(4.6.12)$ i njihove dualne teselacije.

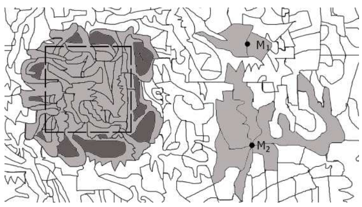
Dokaz ovog tvrđenja nećemo izvoditi jer se direktno izvodi kao posledica definicije dualnog popločavanja. $\diamond$

2.4 Zakrpe

Konačan broj pločica iz popločavanja τ euklidske ravni nazivamo *zakrpama* ako važi da unija tih pločica čini topološki disk, tj. da su pločice u tom skupu povezane ili prostopovezane u smislu da se zakrpa ne može *pocepati* (postati nepovezana) brisanjem jedne tačke.

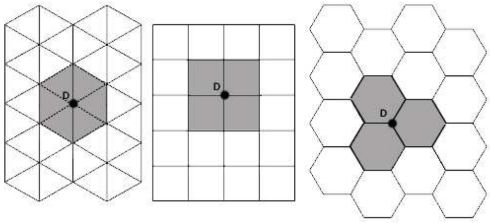
Zakrpe pravimo tako što izdvojimo neki skup koga ćemo označavati sa D, to može da bude bilo tačka, bilo neki deo ravni, duž, izlomljena linija, neki luk itd. Nakon toga uočavamo sve pločice koje su zahvaćene skupom D. Tako dobijena zakrpa koja je generisana tim skupom D, u oznaci $Z(D, \tau)$ (kraće samo $Z(D)$) može da bude prosto povezana ali i ne mora. Moguće je da neka pločica nije zahvaćena setom ali pripada zakrpi jer je povezuje. To ćemo ilustrovati na primeru. Za skup D ćemo uzeti proizvoljan kvadrat. U narednom koraku ćemo svetlo obojiti pločice koje su zahvaćene setom D. Dobijeni, osenčeni deo ravni je sigurno povezan, ali može da se desi da dobijemo neke "rupe" koje nisu osenčene. Njih ćemo obojiti tamnije i one će povezati pločice da zakrpa bude prosto povezana. Deo ravni koje osenčen zajedno čini zakrpu generisanu kvadratnom linijom D.

Ako uočimo neku tačku M_1 koja pripada zajedničkoj ivici dve pločice, ona generiše zakrpu koja se sastoji

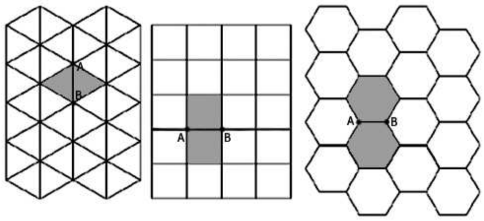


Slika 2.15: Konstrukcija zakrpe generisane kvadratnom linijom i konstrukcija zakrpi generisanih proizvoljnim tačkama M_1 i M_2.

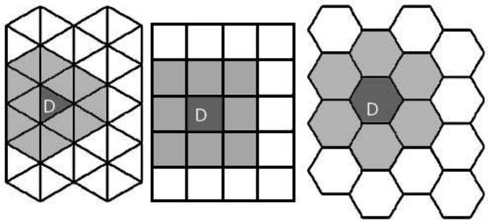
od te dve pločice ili možemo posmatrati neku tačku M_2 koja je zajedničko teme više pločica i generiše zakrpu od nekoliko pločica koje se sastaju u tom temenu.



Slika 2.16: Tri pravilna popločavanja euklidske ravni i zakrpe koje su generisane skupom D gde je skup D jedno teme teselacije.



Slika 2.17: Zakrpe generisane skupom D, koji je duž $\overline{AB}$ i predstavlja jednu ivicu teselacije.



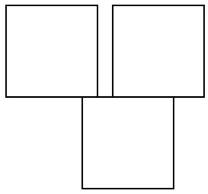
Slika 2.18: Zakrpe generisane skupom D koji je jedna pločica teselacije.

Prilagodićemo sad prethodnu definiciju tako da pod pojmom zakrpe možemo da analiziramo i neke druge nezatvorene skupove pločica. Naime, uvodimo sledeću definiciju:
Neka je ϑ set pločica prototipova, onda za skup $Z = T_1, T_2, T_3, ...T_n$ kažemo da je *pločica zakrpa sa prototipom* ϑ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. svaka pločica T_i iz skupa Z je podudarna nekoj pločici prototipu iz ϑ,
2. svake dve pločice iz skupa Z ili su susedne ili nemaju zajedničkih tačaka,
3. unija svih pločica T_i iz Z je topološki disk.

Pored konstruisanja zakrpi pomoću konveksnih pravilnih poligona moguće je praviti zakrpe pomoću nepravilnih poligona ili poligona u obliku zvezda. Mnoge zanimljive teselacije nastaju sklapanjem zakrpi koje se sastoje od kombinacija pravilnih i nepravilnih poligona i poligona u obliku zvezda. Najpoznatije takve teselacije su nastale uklapanjem zakrpi koje su dobijene od Keplerovog crteža Aa.

Zakrpe su našle široku primenu u kompjuterskoj grafici i crtanju trodimenzionih figura pomoću različitih komjuterskih softvera.



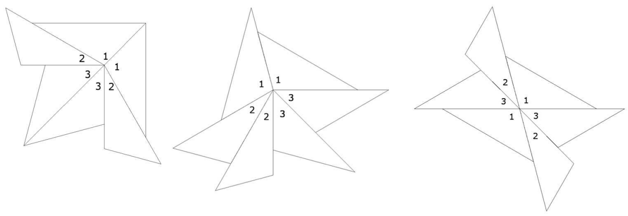
Slika 2.19: Zahvaljujući proširenoj definiciji i sledeći set pločica možemo smatrati zakrpama, što nismo mogli ranije, jer je jasno da se ovaj skup pločica ne može proširiti do nekog monoedarskog popločavanja ravni.

Slika 2.20: I pored proširene definicije postoje zakrpe koje se ne mogu proširiti u popločavanje ravni koristeći samo jednu vrstu temena.

2.5 Teselacije nepravilnim poligonima

Proučimo sada prekrivanja ravni različitim mnogouglovima (trouglovima, četvorouglovima, petouglovima, šestouglovima, itd.) koji nisu regularni. Ovde ćemo dozvoliti i da teselacije ne budu ivica na ivicu. Krenimo od mnogougla sa najmanjem brojem stranica, to je trougao. Kako je zbir unutrašnjih uglova trougla π to oko jednog temena možemo na više načina poređati šest podudarnih trouglova.

Jasno je da u svakom slučaju oko jednog temena mora biti po dva ugla svake vrste uglova trougla. Tro-

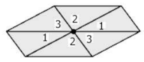


Slika 2.21: Neki od načina ređanja šest podudarnih trouglova oko jednog temena teselacije.

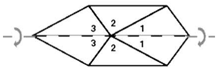
uglovi leže u ravni oko temena ali da li se takva temena mogu proširiti u teselaciju cele ravni? Sobzirom da možemo uočiti da u većini primera trouglovi nisu *poravnani* možemo zaključuti da nijedno od takvih temena se ne mogu proširiti u teselaciju ravni. Ako bismo, pak, oko jednog temena ređali trouglove tako što ih rotiramo za opružen ugao oko centra stranice tada bismo dobili teme koje možemo da ponavljanjem proširimo u teselaciju euklidske ravni.

Možemo i da kombinujemo prethodni metod sa refleksijom. Naime, ako na prethodni način poređamo oko temena tri trougla tako da njihovi unutrašnji uglovi čine opružen ugao i onda ako preslikamo tako poređane trouglove tsko što kraci tog opruženog ugla čine osu simetrije, dobijamo novu vrstu temena koje može da se proširi u teselaciju ravni.

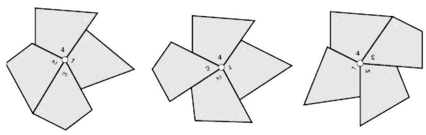
Do sličnih zaključaka dolazimo i ako se koncentrišemo na četvorouglove. Ako bismo uzeli proizvoljni četvorougao i pokušali da napravimo teselacije suočili bismo se činjenicom da bismo rotacijom oko jedne tačke mogli da postavimo četiri takva četvorougla u ravan oko te tačke ali da većina takvih temena ne bi mogla da se proširi u teselaciju ravni.



Slika 2.22: Rotacijom oko centra stranice trougla dobijamo teme koje se ponavljanjem može proširiti u teselaciju ravni.



Slika 2.23: Kombinovanjem tri uzastopne rotacije trougla oko središta svake stranice i refleksije dobijamo još jedan primer temena koje se ponavljanjem može da proširiti u teselaciju ravni.



Slika 2.24: Primer temena u kojima se sastaju nepravilni četvorouglovi koja ne možemo proširiti u teselaciju ravni.

Očigledno je da kako je zbir uglova u bilo kom četvorouglu 2π to u svakom ovom primeru su oko potencijalnog temena teselacije sva četiri unutrašnja ugla četvorougla koji želimo da vrši teselaciju.

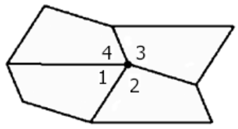
Kao i kod trouglova, rotacijom četvorougla oko središta svake njegove ivice mogli bismo da dobijemo temena koja se koristeći neku grupu simetrija mogu proširiti u teselacije ravni.

Dalje, ako bismo želeli da napravimo monoedarske teselacije petouglovima postavlja se pitanje kakve osobine treba da imaju ti petouglovi da bi vršili teselaciju ravni jer kako ćemo kasnije zaključiti, pravilni petouglovi sami ne mogu da čine teselaciju euklidske ravni. Postoji tačno četrnaest vrsta teselacija nepravilnim petouglovima, ovde ćemo razmatrati par primera.

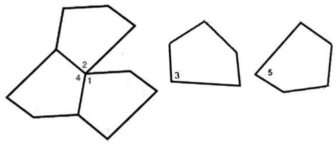
Znamo da je zbir unutrašnjih uglova svakog petougla je 3π tako da je odmah jasno da za razliku od prethodnih razmatranja gde se svaki unutrašnji ugao u slaganju oko temena pojavio bar jednom ovde to ne možemo postići. Dakle, rotacijom petougla oko jednog temena ne dobijamo ni potencijalno teme teselacije pošto se uvek javlja ili šupljina ili preklapanje poligona.

Zaključujemo da ne postoji kombinacija unutrašnjih uglova nepravilnog petougla koja bi oko jednog temena mogla da čini pun ugao.

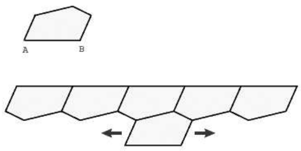
Ako bismo malo suzili skup nepravilnih petouglova kojima želimo da vršimo teselaciju tako što bismo razmatrali petouglove kod kojih su dva susedna ugla suplementna, primenjujući princip translacije, rotacije ili refleksije mogli bismo da vršimo teselacije euklidske ravni.



Slika 2.25: Primer temena u kome se dodiruje četiri nepravilna, podudarna četvorougla. Teme nastaje uzastopnim rotacijama četvorouglova oko središta stranica i to teme se može proširiti u teselaciju ravni.

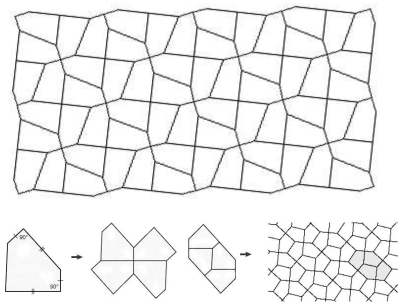


Slika 2.26: Koristeći podudarne, proizvoljne, nepravilne petouglove ne možemo konstruisati teme koje bismo mogli da proširimo u teselaciju ravni.

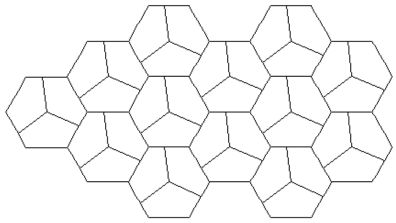


Slika 2.27: Primer temena u kome se dodiruju nepravilni petouglovi, koje možemo proširiti u teselaciju ravni jer petouglovi ispunjavaju uslov da su neka dva susedna unutrašnja ugla tih petouglova suplementna.

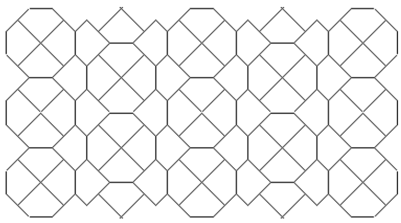
Slika 2.28: Još jedan primer temena u kojima se dodiruju nepravilni petouglovi, koja su proširena u teselacije euklidske ravni jer petouglovi ispunjavaju uslov $B + C = 2\pi$.



Slika 2.29: Još jedan primer temena u kome se dodiruju nepravilni petouglovi, koje možemo proširiti u teselaciju ravni jer petouglovi ispunjavaju uslov $A = C = \frac{\pi}{2}$ i $a = b$ i $c = d$.



Slika 2.30: Još jedan primer temena u kome se dodiruju nepravilni petouglovi, koje možemo proširiti u teselaciju ravni jer petouglovi ispunjavaju uslov da je $A = C = D = \frac{2}{3}\pi$ i da su dve susedne stranice tih petouglova međusobno jednake, tj. $a = b$ kao i da je $d = c + e$.

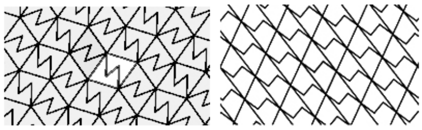


Slika 2.31: Još jedan primer temena u kome se dodiruju nepravilni petouglovi, koje možemo proširiti u teselaciju ravni jer petouglovi ispunjavaju uslov da je $A = \frac{\pi}{2}$, $B + E = \pi$, $2C - E = \pi$, $2D + E = 2\pi$ i $d = e = a + c$.

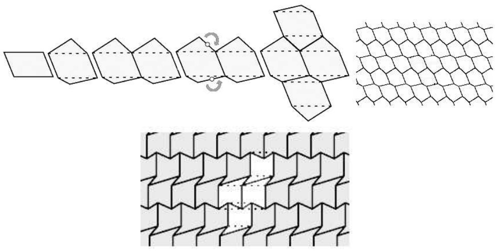
Takođe teselacija petouglovima je moguća ako su pločice u obliku petouglova koji imaju dva para jednakih stranica i dva nesusedna prava ugla.

Sada kada smo ispitali mogućnosti teselacije mnogouglovima sa 3, 4, i 5 stranica možemo ovu priču završiti analizirajći teselacije šestouglovima.

Kako je zbir uglova u šestouglu 4π to je jasno da se oko potencijalnog temena teselacije neće pojaviti svi unutrašnji uglovi šestougla.



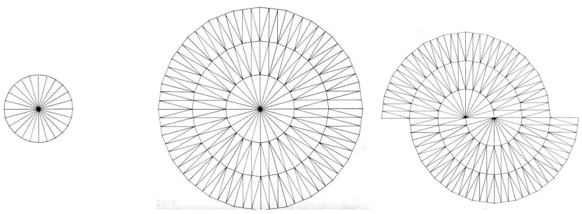
Slika 2.32: Još jedan od načina kako možemo da napravimo petougao koji ponavljanjem može da prekrije ravan je *lomljenjem* jedne stranice proizvoljnog trougla tako da se nastane petougao koji može da se slaže ivica na ivicu i to tako što se polomljene ivice trougla slažu jedna na drugu.



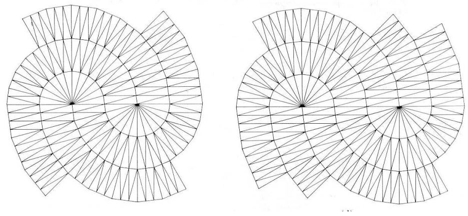
Slika 2.33: Po jedan primer teselacije nepravilnim šestouglovima koja je ivica na ivicu i koja nije ivica na ivicu.

2.6 Teselacije u kružnom obliku i u obliku spirala

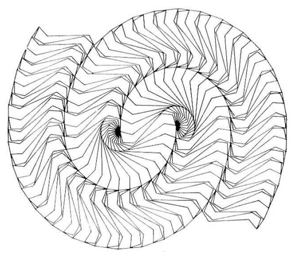
Neki od najzanimljivijih načina ređanja pločica u euklidskoj ravni je u kružnom obliku ili u obliku "jednorukih", "dvorukih" ili "višerukih" spirala. Jasno je da ne može svaki oblik pločica da se ređa tako da čini spiralu. Najjednostavniji oblik koji može da čini monoedarsko, spiralno popločavanje je jednakokraki trougao sa oštrim uglom, čija je mera delilac punog ugla, između krakova.



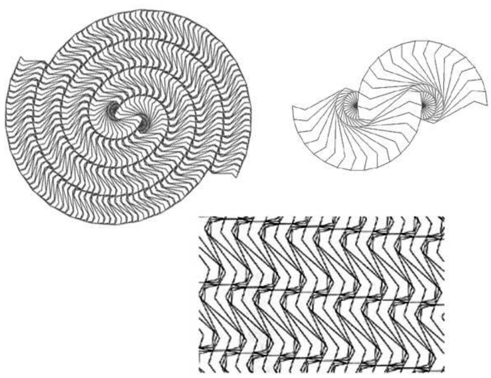
Slika 2.34: Jedan od načina pravljenja spiralnog popločavanja je ređanje oštrouglih jednakokrakih trouglova u ravni, bez preklapanja i šupljina, u krug tako što će teme između krakova biti zajedničko svim trouglovima. Proces se nastavlja pravljenjem koncentričnih krugova od istih trouglova oko tog kruga. Dalje, se ravan jednom pravom koja sadrži centar tih krugova i jedan krak trougla podeli na dva dela i translira jedan od ta dva dela po toj pravoj za vektor čiji intenzitet je jednak dužini kraka trougla. Dobija se prekrivanje ravni u obliku spirale.



Slika 2.35: Dve spiralne teselacije jednokrakim trouglovima sa dva kraka, nastale su iz kružnog popločavanja, translacijom dela ravni za neki vektor.



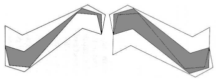
Slika 2.36: Prvo spiralno popločavanje ravni. Konstruisao ga je H. Voderberg 1936. godine.



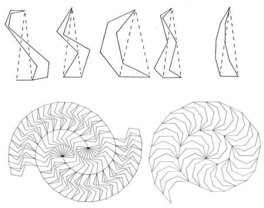
Slika 2.37: Pločica koju je napravio Voderberg može da čini još različitih monoedarskih spiralnih i nespiralnih popločavanja ravni.

Mnoga spiralna popločavanja mogu se načiniti *lomljenjem* jednakokrakog trougla kod koga je ugao pri vrhu $\pi/12$. Tako je na primer nastalo i prvo spiralno popločavanje koje je napravio Hans Voderberg 1936. godine.

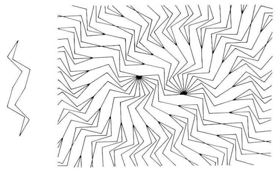
Relativno je jednostavno napraviti spiralna popločavanja ravni koje se prostiru u paran broj pravaca. Izazovnije je napraviti monoedarska spiralna popločavanja spiralama koje se prostiru u neparnom broju pravaca.



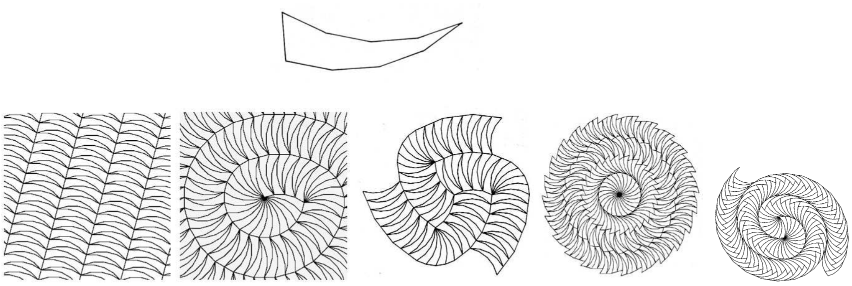
Slika 2.38: Jedno od interesantnih svojstava koje ima Voderbergova pločica je da dve takve pločice mogu da uokvire više istih pločica.



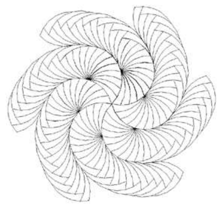
Slika 2.39: Postoji mnogo načina na koje neki jednakokraki trougao može da se transformiše u pločicu koja čini monoedarska spiralna i nespiralna popločavanja, neki su prikazani na slici. Princip pravljenja novih pločica od polaznog trougla je predstavio Goldeberg.



Slika 2.40: Jedno zanimljivo dvosmerno, spiralno popločavanje ravni.



Slika 2.41: Model pločice koja pored toga što može činiti monoedarsko nespiralno popločavanje ravni pravi i više spiralnih koja imaju neparan broj krakova i paran broj krakova.



Slika 2.42: Primer spirale sa šest krakova.

2.7 Kvadrirani kvadrati i kvadrirani pravougaonici

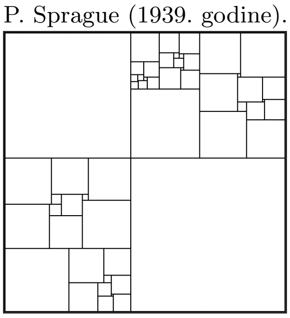
Interesantno bi bilo da odemo korak dalje u izučavanju temena koja mogu da čine teselaciju ravni i razmotramo prekrivanja ravni koja nisu ivica na ivicu i koja se sastoje iz pravilnih poligona istog oblika od kojih svaki ima različitu dužinu ivice. Proučavaćemo teselacije kvadratima čije su ivice različitih dužina. U tu svrhu ćemo uvesti jednu definiciju.

Za neki pravougaonik ili kvadrat kažemo da je *kvadrirani pravougaonik (na k kvadrata)* ili *kvadrirani kvadrat (na k kvadrata)*[1] ako taj pravougaonik ili kvadrat možemo da rasparčamo na k kvadrata, gde svaki od njih ima različitu dužinu stranice od svih ostalih kvadrata koji učestvuju u pravljenu tog pravougaonika[2] ili kvadrata[3].

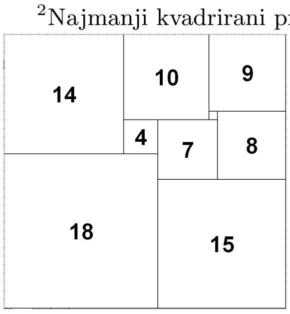
Najmanji kvadrirani kvadrat zovemo *prosto savršen kvadrirani kvadrat*, skraćeniceno SPSS (od engleske složenice Simple Perfect Squared Square). *Prost* je jer u sebi sadrži najmanji mogući broj kvadrata ivica različitih dužina i *savršen* je jer su sve ivice međusobno različitih dužina.

Naredna vrsta kvadriranog kvadrata je *prosto nesavršeni kvadrirani kvadrat*, u oznaci SISS (engleska skraćenica složenice Simple Imperfect Squared Square). Kao i u prethodnom slučaju, ovaj kvadrirani kvadrat

[1] Mnogi matematičari su se bavili kvadriranim kvadratima i kvadriranim pravugaonicima. Prvi kvadrirani kvadrat je napravio R. P. Sprague (1939. godine).

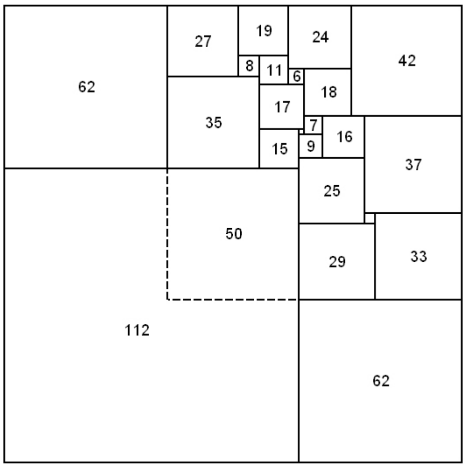


[2] Najmanji kvadrirani pravougaonik je napravio Willcocks (1951. godine).



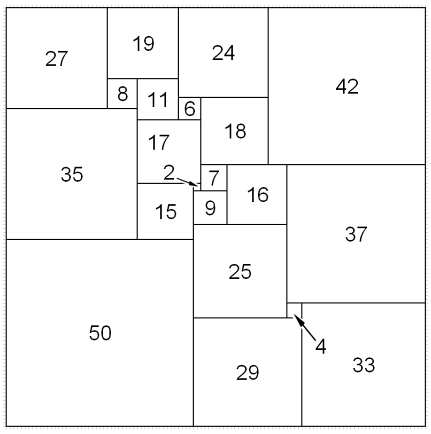
[3] Kvadrirani kvadrat sa najmanjim brojem kvadrata je konstuisao (1962. godine) A. J. W. Duijvestin i dokazao da ne postoji kvadrirani kvadrat sa manjim brojem kvadrata različitih stranica (kvadrirani kvadrat sa dvadesetjednom dužinom stranice kvadrata).

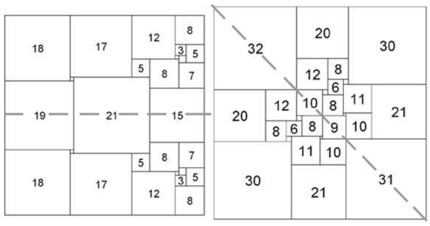
ima najmanji mogući broj kvadrata u sebi, zato ga zovemo *prostim*, ali kako se dužine nekih stranica ponavljaju, ne možemo reći da je savršen, pa u tom smislu kažemo da je *nesavršen.* Jedan od primera nesavršenog kvadrata se dobija kada najmanjem kvadriranom kvadratu zamenimo pločicu dužine ivice 50 jedinica mere sa pločicom dužine ivice 112 jedinica mere (što je dužina ivice najmanjeg kvadriranog kvadrata) i dodamo dve pločice dužine ivice 62 jedinice mere.



Slika 2.43: Primer prostog nesavršenog kvadriranog kvadrata koji se dobija tako što se kod najmanjeg kvadriranog kvadrata, kvadrat ivice 50 jedinica mere (označen isprekidanim linijama) zameni sa kvadratom ivice 112 jedinica mere i iznad i sa strane dodaju dva kvadrata ivice 62 jedinice mere.

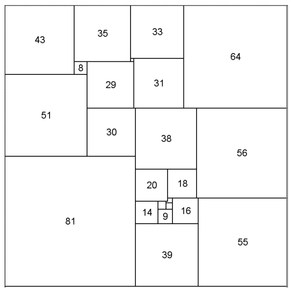
Nesavršene kvadrate možemo praviti i tako što ređamo pločice po nekom principu simetrije, tako da su kvadrati ili osno simetrični ili centralno simetrični. Postoji još jedna vrsta kvadriranih kvadrata koji ne samo da





Slika 2.44: Dva nesavršena kvadrata kojima su pločice poređane simetrično u odnosu na horizontalnu osu i simetrično u odnosu na dijagonalu kadrata.

su sastavljeni od kvadrata čije su sve ivice međusobno različitih duzina, pa je takav kvadrirani kvadrat *savršen*, nego je i *složen*, što znači da u okviru njega možemo naći neki kvadrirani pravougaonik ili kvadrat. Ovu vrstu kvadriranih kvadrata označavamo sa CPSS, prva dva slova potiču od reči Compound i Perfect iz engleskog jezika, druga dva označavaju da je reč o kvadriranom kvadratu.

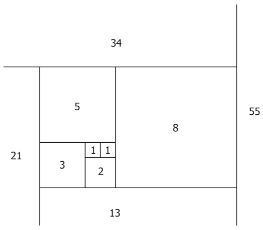


Slika 2.45: Primer složenog savrsenog kvadriranog kvadrata.

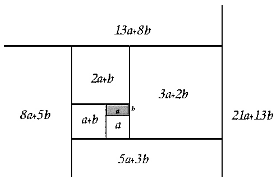
Napomenuli smo da polazeći od bilo kog kvadriranog kvadrata možemo napraviti translacijom tog kvadrata uniformnu teselaciju ravni. Sada ćemo razmatrati mogućnost teselacije ravni kvadratima od kojih svaki ima drugu dužinu stranice od svih ostalih. Algoritam za pravljenje takvih teselacija bi bio sledeći: Za polaznu tačku uzimamo bilo koji kvadrirani kvadrat. Na primer, krenućemo od SPSS. Dužina njegove stranice je 112 nekih mernih jedinica. Najmanji kvadrat unutar ovog kvadriranog kvadrata ima dužinu dve te jedinice. Ako bismo njega uvećali na veličinu polaznog kvadrata, tj. stranicu tog najmanjeg kvadrata kao i svih ostalih kvadrata unutar polaznog kvadrata uvećali $\frac{112}{2} = 56$ puta i taj novi najmanji kvadrat isparčali kao polazni onda bismo dobili novi savršen kvadrirani kvadrat, tj. sve stranice unutrašnjih kvadrata u različite dužine. Postupak možemo da ponavljamo tako što svaku novu sliku uvećavamo 56 puta i parčamo najmanji kvadrat dok ne prekrijemo celu ravan.

Zapazimo da dužine stranica možemo poređati u niz brojeva koji eksponencijalno raste. To je još bolje vidljivo ako dopustimo da samo prve dve pločice imaju istu dužinu, neka to bude neka jedinična dužina, označićemo je sa 1, a svaka naredna pločica da je kvadrat čija je dužina ivice zbir dužina prethodne dve dužine ivica. Prepoznajemo da tako dobijamo Fibonačijev niz brojeva koji stvarno može da bude niz dužina stranica kvadrata koji čine teselaciju.

Do sada smo formirali teselacije ravni kvadratima nejednakih ivica tako što smo po nekom pravilu određivali dužine ivica kvadrata. Nije nam poznato da li sa svakim skupom kvadrata, odnosno za svaki niz ivica kvadrata možemo napraviti popločavanje ravni. Tako bi bilo zanimljivo proveriti da li pločicama čije dužine stranica formiraju niz prirodnih brojeva možemo prekriti celu ravan. Sigurno je da možemo napraviti velike zakrpe



Slika 2.46: Teselacija pomoću pločica čije dužine stranica čine Fibonačijev niz brojeva.



Slika 2.47: Ako dozvolimo da prva pločica u teselaciji bude bilo koji kvadrirani pravougaonik možemo prekriti ravan tako da su sve ostale pločice oblika kvadrata i da imaju ivice različitih dužina. Na ovaj način Fibonačijevi brojevi dobijaju geometrijsku interpretaciju i lakše ih je predstaviti i opisati. Ako su stranice tog polaznog kvadriranog pravogaonika a i b, onda dobijamo sledeći beskonačni niz dužina stranica pločica: a, $a+b$, $2a+b$, $3a+2b$, $5a+3b$, $8a+5b$, $13a+8b$, $21a+13b$,...

pločicama čije stranice imaju dužine 1, 2, 3... ali nije poznato da li možemo prekriti tako celu ravan[4].

Na žalost i pored ovoliko raznovrsnih prekrivanja ravni poligonima čije su ivice različitih dužina, samo nekoliko je našlo širu primenu.

[4]William Tutte je 1948. godine dokazao da ako razmatramo jednakostranični trougao podeljen na jednakostranične trouglove među trouglovima koji vrše deobu mora postojati bar dva koji imaju istu dužinu stranice. Ovakvim trouglovima može da se prekrije cela ravan i time se rešavaju neki problemi iz algebarske geometrije ali time se ovde nećemo baviti.

Glava 3

Uniformne teselacije euklidske ravni

3.1 1-uniformne teselacije euklidske ravni

Sada ćemo analizirati koji mnogouglovi mogu da se poređaju bez preklapanja i šupljina oko nekog zajedničkog temena i koja od tih temena mogu da čine iniformne teselacije euklidske ravni.

Teorema 2 *Postoji tačno tri uniformna, pravilna popločavanja ravni i to sa šest pravilnih trouglova, četiri pravilna četvorougla i tri pravilna šestougla.*

Dokaz: Pretpostavimo da se k pravilnih mnogouglova sastaje u jednom temenu teselacije τ. Da bi ti mnogouglovi ležali u ravni bez preklapanja i bez šupljina zbir unutrašnjih uglova tih k mnogouglova mora biti 2π. Poznato nam je da se vrednost unutrašnjeg ugla svakog tog pravilnog mnogougla računa po formuli:

$$\varphi = \frac{n-2}{n}\,\pi.$$

Tada dobijamo jednačinu:

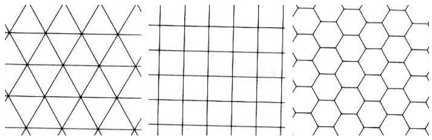
$$2\pi = \frac{n-2}{n}\,\pi,$$

Množenjem jednačine sa n i deljenjem sa π svodimo je na oblik $k(n-2) = 2n$. Dalje, ako jednačinu podelimo sa $(n-2)$ i malo sredimo dobijamo:

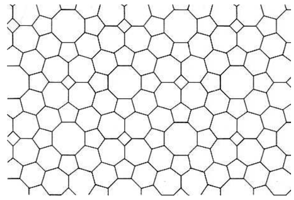
$$k = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Znamo da k i n predstavljaju broj pravilnih mnogouglova koji se sastaje u jednom temenu i broj stranica tih pravilnih mnogouglova te oni moraju biti prirodni brojevi. Tako dolazimo do zaključka da $(n-2)$ mora biti delitelj broja 4. Tražimo prirodne brojeve n koji zadovoljavaju dati uslov. Takođe, broj stranica pravilnog mnogougla ne može biti manji od 3 pa su rešenja date Diofantske jednačine: Dalje možemo proučavati popločavanja u ravni gde se u jednom temenu sastaje više različitih pravilnih mnogouglova. Postavlja se pitanje koliko pravilnih mnogouglova može da se sastaje u jednom temenu teselacije euklidske ravni. Može nam se učiniti da je

$$n_1 = 3 \text{ i } k_1 = 6,$$
$$n_2 = 4 \text{ i } k_2 = 4,$$
$$n_3 = 6 \text{ i } k_3 = 3. \diamond$$



Slika 3.1: Jedine tri pravilne teselacije.



Slika 3.2: Slika koja je uzeta iz jedne dečije bojanke, iako na prvi pogled deluje da su svi mnogouglovi pravilni vidimo da to nije slučaj i da su samo četvorouglovi pravilni.

moguće da se sastane mnogo različitih pravilnih mnogouglova u jednom temenu, ali to nije slučaj. Pokažimo da se u jednom temenu teselacije u euklidskoj ravni može dodirivati najviše 3 različita pravilna poligona. Naime, ako pretpostavimo suprotno, tj. da se u svakom temenu prekrivanja euklidske ravni bez šupljina i preklapanja može sastajati više od tri različita mnogougla dolazimo do kontradikcije. Ako pokušamo četiri različita pravilna mnogo-ugla i to sa najmanjim unutrašnjim uglovima (jednakostranični trougao sa unutrašnjim uglom $\pi/3$, kvadrat sa unutrašnjim uglom $\pi/2$, pravilni petougao čiji je unutrašnji ugao $3\pi/5$ i pravilni šestougao sa unutrašnjim uglom $2\pi/3$) da postavimo u jedno teme teselacije euklidske ravni videćemo da to ne možemo da uradimo bez preklapanja poligona. Stvarno, zbir uglova tih poligona iznosi $21\pi/10$ što je veće od 2π. Ispitivali smo pravilne mnogouglove sa najmanjim brojem stranica i samim tim i najmanjim unutrašnjim uglovima, ako bismo zamenili neki od razmatranih mnogouglova mnogouglom sa većim brojem stranica samo bismo dobili veću sumu uglova, tj. više preklapanja tako da zaključujemo da je najveći broj pravilnih mnogouglova koji se može sastajati u jednom temenu teselacije euklidske ravni tri.

Teorema 3 *Postoji tačno jedanaest 1-uniformnih teselacija euklidske ravni. To su tri Platonove teselacije:* (3^6), (4^4), (6^3) *i osam Aristotelovih teselacija* $(3^4.6)$, $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, $(3.4.6.4)$, $(3.6.3.6)$, (3.12^2), $(4.6.12)$ *i* (4.8^2)

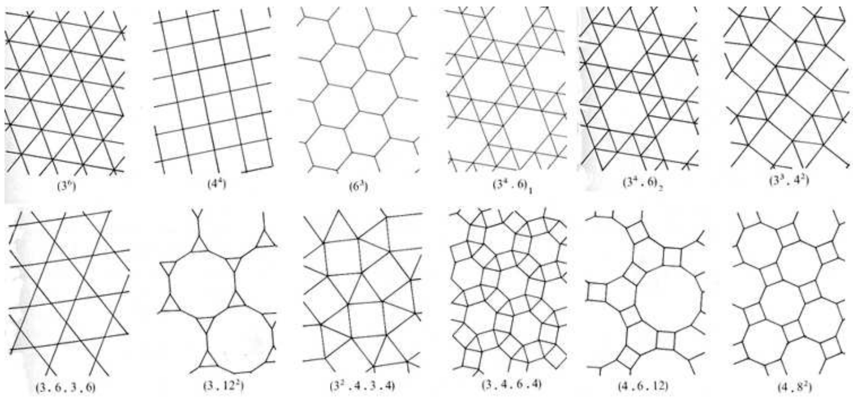
Dokaz: Teoremu ćemo dokazati iz dva koraka.

Prvo ćemo analizirati koji sve pravilni mnogouglovi mogu da se dodiruju u jednom temenu bez međusobnih preklapanja i bez šupljina između njih.

Pretpostavimo da se u jednom temenu teselacije euklidske ravni dodiruje p_1 pravilnih poligona čiji je broj stranica n_1, p_2 pravilnih poligona čiji je broj stranica n_2 i p_3 pravilnih poligona čiji je broj stranica n_3. Opet ćemo postaviti uslov da je zbir unutrašnjih uglova mnogouglova oko tog temena 2π:

$$2\pi = p_1 \frac{n_1 - 2}{n_1}\pi + p_2 \frac{n_2 - 2}{n_2}\pi + p_3 \frac{n_3 - 2}{n_3}\pi.$$

Skratićemo jednačinu sa π i postaviti još neke dodatne uslove. Naime, znamo da broj stranica pravilnog mnogougla ne može biti manji od 3 pa važi da su n_1,n_2,$n_3 \geq 3$. Takođe, broj pravilnih mnogouglova koji se sastaju u jednom temenu je najviše 6 (pravilni mnogougao sa najmanjim unutrašnjim uglom je trougao, sa uglom od



Slika 3.3: Postoji tačno jedanaest 1-uniformnih teselacija ravni. Teselacija $3^4.6$ ima dva emorfna oblika, otuda i dva indeksa pored tih teselacija.

$\pi/3$ i zaključili smo da najviše 6 pravilnih trouglova može da se dodiruje u jednom temenu. Takođe, unutrašnji ugao bilo kog pravilnog mnogougla je manji od π tako da se u jednom temenu teselacije euklidske ravni može dodirivati najmanje 3 pravilna mnogougla. Tako da imamo još jedan uslov: $3 \leq p_1 + p_2 + p_3 \leq 6$.

Pokušajmo sad da rešimo prethodnu jednačinu. Već smo razmatrali slučaj da se oko temena teselacije euklidske ravni sastaje samo jedna vrsta mnogougla (Platonove teselacije euklidske ravni), tad su p_2 i p_3 bili jednaki nuli. Sada ćemo pretpostaviti da je $p_3 = 0$, tj. da se u jednom temenu teselacije euklidske ravni dodiruje dve vrste pravilnih mnogouglova. Tada početna jednačina postaje:

$$2 = p_1 \frac{n_1 - 2}{n_1} + p_2 \frac{n_2 - 2}{n_2},$$

tj.

$$p_1 \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + p_2 \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) = 2.$$

Imajući na umu prethodno postavljene uslove ($3 \leq p_1 + p_2 \leq 6$) dolazimo do zaključka da p_1 i p_2 mogu imati sledeće vrednosti:

1) $p_1 = 1$ i $p_2 = 2$ ili $p_1 = 2$ i $p_2 = 1$,
2) $p_1 = 1$ i $p_2 = 3$ ili $p_1 = 3$ i $p_2 = 1$,
3) $p_1 = 1$ i $p_2 = 4$ ili $p_1 = 4$ i $p_2 = 1$,
4) $p_1 = 2$ i $p_2 = 2$,
5) $p_1 = 2$ i $p_2 = 3$ ili $p_1 = 3$ i $p_2 = 2$,

Razmatrajmo prvi slučaj kad se u jednom temenu sastaju jedan pravilan mnogougao jedne vrste i 2 pravilna mnogougla neke druge vrste. Tad polazna jednačina dobija oblik:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + 2\frac{n_2 - 2}{n_2} = 2.$$

Posle malo sređivanja jednačina možemo predstaviti na sledeći način:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n_2} = \frac{1}{n_1}.$$

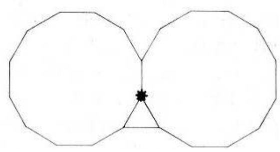
Odnosno, ako izrazimo n_1 preko n_2 dobijamo:

$$n_1 = 2 + \frac{8}{n_2 - 4}.$$

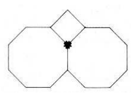
Odatle, imajući na umu da su n_1 i n_2 broj stranica mnogouglova koji moraju biti celi brojevi, sledi da 8 mora biti deljivo sa $(n_2 - 4)$ te dobijamo skup moguíh rešenja za n_2, $n_2 \in \{-4, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 12\}$. Znamo da broj stranica mnogougla ne može biti negativan, niti manji od tri pa su prihvatljiva rešenja jednačine:

1. $n_2 = 12$ i $n_1 = 3$,
2. $n_2 = 8$ i $n_1 = 4$,
3. $n_2 = 6$ i $n_1 = 6$,
4. $n_2 = 5$ i $n_1 = 10$.

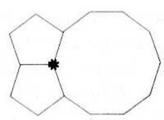
Slučaj kada je $n_2 = 3$ ne možemo da prihvatimo jer tada je $n_1 = -6$ što ne predstavlja broj stranica nijednog mnogougla. Slučaj pod rednim brojem 3. smo već analizirali. To je prekrivanje euklidske ravni pravilnim šestouglovima. Zaključujemo da smo potencijalno dobili tri nova tipa temena teselacije euklidske ravni pravilnim mnogouglovima. To su rešenja jednačine pod rednim brojevima 1, 2. i 4, tj. kada se u jednom temenu sastaju dva pravilna dvanaestougla i jedan jednakostranični trougao, odnosno dva pravilna osmougla i jedan kvadrat i na kraju dva pravilna petougla i jedan desetougao. Proučimo sad slučaj 2) kad se u jednom temenu



Slika 3.4: Teme u kome se dodiruju dva pravilna dvanaestougla i jedan trougao, u oznaci 3.12.12.



Slika 3.5: Teme u kome se dodiruju dva pravilna osmougla i jedan kvadrat, u oznaci 4.8.8.



Slika 3.6: Teme u kome se dodiruju dva pravilna petougla i jedan desetougao, u oznaci 5.5.10.

dodiruju jedan pravilan mnogougao jedna vrste i tri pravilna mnogougla druge vrste. Želimo da pronađemo koje su to moguće vrste mnogouglova. Ponovo ćemo krenuti od uslova da je zbir unutrašnjih uglova mnogougla oko tog temena 2π, tj. imamo sledeću Diofantsku jednačinu:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + 3\frac{n_2 - 2}{n_2} = 2.$$

Odnosno, ako izrazimo odatle n_1 preko n_2 dobijamo:

$$n_1 = 1 + \frac{3}{n_2 - 3}.$$

Kao i u slučaju 1) rešenja za n_1 i n_2 moraju biti prirodni brojevi veći od tri pa zaključujemo da $(n_2 - 3)|3$. Odnosno, $n_2 \in 4, 6$. Ako je $n_2 = 6$ onda je $n_1 = 2$ što ne možemo da prihvatimo jer broj stranica mnogougla ne može biti 2. Ako je $n_2 = 4$ onda je i $n_1 = 4$ i taj smo slučaj već razmatrali (prekrivanje ravni kvadratima).

Ako razmatramo sad slučaj 3) kad se u jednom temenu dodiruju jedan pravilan mnogougao jedna vrste i četiri pravilna mnogougla neke druge vrste iz uslova da je zbir unutrašnjih uglova pravilnih mnogouglova koji se dodiruju u jednom temenu 2π dobijamo jednačinu:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + 4\frac{n_2 - 2}{n_2} = 2.$$

Ako dobijenu jednačinu sredimo i zrazimo n_1 preko n_2 dobijamo:

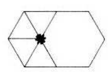
$$n_1 = \frac{2n_2}{3n_2 - 8}.$$

Znamo da važi $n_1 \geq 3$ pa dalje imamo:

$$3 \leq \frac{2n_2}{3n_2 - 8},$$

Odnosno: uslov $7n_2 \leq 24$, tj. $n_2 \leq \frac{24}{7} \approx 3$ odakle zaključujemo da je jedino rešenje ove jednačine u skupu prirodnih brojeva

$$n_1 = 6 \text{ i } n_2 = 3.$$



Slika 3.7: Teme u kome se dodiruju četiri pravilna trougla i jedan pravilan šestougao, u oznaci 3.3.3.3.6.

Analizirajmo sad slučaj 4) kada se u jednom temenu sastaju dva pravilna mnogougla stranice n_1 i dva pravilna mnogougla stranice n_2. Polazeći od uslova da je zbir unutrašnjih uglova tih mnogougla oko zajedničkog temena 2π dobijamo sledeću jednačinu:

$$2\frac{n_1 - 2}{n_1} + 2\frac{n_2 - 2}{n_2} = 2,$$

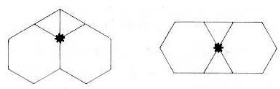
posle množenja sa $\frac{1}{2}$ i malo sređivanja dobijamo jednačinu:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2}.$$

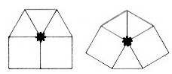
Ako odatle izrazimo n_2 preko n_1 dobijamo:

$$n_2 = \frac{4}{n_1 - 2}.$$

Rešenja tražimo u skupu prirodnih brojeva pa dobijamo da $n_1 - 2$ treba da deli 4. Odatle dobijamo dva moguća rešenja polazne jednačine, to su:



Slika 3.8: Teme u kome se dodiruju dva pravilna trougla i dva pravilna šestougla, u oznaci 3.3.6.6 i 3.6.3.6.



Slika 3.9: Teme u kome se dodiruju tri pravilna trougla i dva kvadrata, u oznaci 3.3.3.4.4 i 3.3.4.3.4.

1. $n_1 = 4$ i $n_2 = 4$,
2. $n_1 = 6$ i $n_2 = 3$.

Prvi slučaj smo već razmotrili (prekrivanje ravni kvadratima), tako da ćemo razmatrati slučaj 2. kada se u jednom temenu dodiruju dva pravilna trougla i dva pravilna šestougla. U ovom slučaju imamo dve mogućnosti raspodele ovih mnogouglova: 3.3.6.6 i 3.6.3.6. Proučimo sad još slučaj kad je broj mnogouglova jedne vrste dva a druge tri. Tada dobijamo jednačinu:

$$2\frac{n_1 - 2}{n_1} + 3\frac{n_2 - 2}{n_2} = 2,$$

Opet ćemo izraziti broj stranica jednog mnogougla preko broja stranica drugog mnogougla:

$$n_1 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3(n_2 - 2)}.$$

Odatle, zato što n_1 mora biti ceo broj zaključujemo da $(n_2 - 2)$ mora deliti 8. U skupu celih brojeva n_2 može imati sledeće vrednosti: $n_2 \in \{-6, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 10\}$. Naravno, neka rešenja nećemo razmatrati pošto broj stranica mnogougla ne može biti negativan, niti manji od tri. Jedino rešenje ove Diofantske jednačine dobijamo za $n_2 = 3$ i tada je $n_1 = 4$, u ostalim slučajevima dobijamo da n_1 nije ceo broj što je nemoguće. Dakle, i ovde možemo poređati poligone na dva načina.

Sada ćemo još razmotriti slučaj prekrivanja ravni sa tri vrste pravilnih mnogouglova koji se dodiruju u jednom temenu. Postavimo uslov da je zbir unutrašnjih uglova oko jednog temena 2π:

$$2\pi = p_1\frac{n_1 - 2}{n_1}\pi + p_2\frac{n_2 - 2}{n_2}\pi + p_3\frac{n_3 - 2}{n_3}\pi,$$

da je broj stranica svakog mnogougla ceo broj veći ili jednak tri i da je broj mnogouglova koji se sastaju u jednom temenu manji od šest ali veći od dva, tada za p_i imamo sledeće kombinacije:

1) $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ i $p_3 = 1$,
2) $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ i $p_3 = 1$ ili
$p_1 = 2$, $p_2 = 1$ i $p_3 = 1$
ili $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ i $p_3 = 2$
3) $p_1 = 1$, $p_2 = 3$ i $p_3 = 1$ ili
$p_1 = 3$, $p_2 = 1$ i $p_3 = 1$
ili $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ i $p_3 = 3$

U slučaju 1) kad se u jednom temenu dodiruje po jedan mnogougao svake vrste dobijamo jednačinu:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}.$$

Tražimo rešenja ove jednačine u skupu prirodnih brojeva. Pretpostavićemo da važi $n_1 < n_2 < n_3$, analogno bismo razmatrali i druge slučajeve. Dalje, znamo da su n_1,n_2, $n_3 \geq 3$. Krenimo redom, pretpostavimo da je $n_1 = 3$. Tada dobijamo da je

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6},$$

odnosno

$$n_3 = \frac{6n_2}{n_2 - 6}.$$

Kako n_3 mora biti pozitivno odatle možemo izvući uslov da $\frac{6n_2}{n_2-6} > 0$, tj. kako je n_2 sigurno veće od nule to imamo uslov da je n_2 6 Prvi ceo broj veći od 6 je 7 pa ćemo razmatrati koje vrednosti može imati n_3 kada je $n_1 = 3$ i $n_2 \geq 7$:
1. $n_1 = 3$, $n_2 = 7$ i $n_3 = 42$,
2. $n_1 = 3$, $n_2 = 8$ i $n_3 = 24$,
3. $n_1 = 3$, $n_2 = 9$ i $n_3 = 18$,
4. $n_1 = 3$, $n_2 = 10$ i $n_3 = 15$,
Dalje, kad je $n_1 = 3$ i $n_2 = 11$, rešavanjem polazne jednačine za n_3 ne bismo dobili ceo broj koji bi predstavljao broj stranica mnogougla. Takođe, ako bismo analizirali slučaj $n_1 = 3$ i $n_2 = 12$ tada bi bilo $n_3 = 12$, što ne zadovoljava uslov da su svi mnogouglovi koji se sastaju u ovom temenu sa različitim brojem stranica. Tu ćemo stati jer ako bismo povećavali dalje n_2, n_3 bi se smanjivao i ne bi bila zadovoljena početna pretpostavka $n_1 < n_2 < n_3$.
Sledeće što ćemo razmatrati je kad je $n_1 > 3$. Tada za $n_1 = 4$ iz polazne jednačine dobijamo:

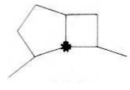
$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4},$$

odatle možemo izraziti n_3 preko n_2 i dobijamo opadajuću funkciju:

$$n_3 = \frac{4n_2}{n_2 - 4}.$$

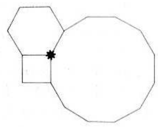
Analogno razmatranju za $n_1 = 3$ znajući da n_3 mora biti pozitivno, dobijamo uslov da je $n_2 \geq 4$. Kako je $n_2 > n_1$ to postoje dva rešenja ove jednačine ako pretpostavimo da je $n_1 = 4$ 1. $n_1 = 4$, $n_2 = 5$ i $n_3 = 20$,
2. $n_1 = 4$, $n_2 = 6$ i $n_3 = 12$,

Drugih rešenja nema jer za $n_1 = 4$ i $n_2 = 7$, n_3 nije iz skupa prirodnih brojeva. Ako bismo stavili

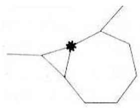


Slika 3.10: Teme u kome se dodiruju jedan pravilan dvadesetougao, jedan pravilni petougao i jedan kvadrat, u oznaci 4.5.20.

da su $n_1 = 4$ i $n_2 = 8$ onda dobijamo i da je $n_3 = 8$ što se ne slaže sa početnom pretpostavkom da su svi



Slika 3.11: Teme u kome se dodiruju jedan pravilan dvanaestougao, jedan pravilan šestougao i jedan kvadrat, u oznaci 4.6.12.



Slika 3.12: Teme u kome se dodiruju pravilan trougao, pravilan sedmougao i pravilan četrdesetdvougao, u oznaci 3.7.42.

mnogouglovi koji se sastaju u ovom temenu različiti. Dalja rešenja nećemo razmatrati pošto smo rekli da je jednačina $n_3 = \frac{4n_2}{n_2-4}$ opadajuća i ne bismo mogli da dobijemo nijedno rešenje koje već nismo dobili. Šest rešenja koja smo dobili su sledeća:

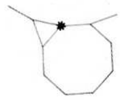
1. $n_1 = 3$, $n_2 = 7$ i $n_3 = 42$,
2. $n_1 = 3$, $n_2 = 8$ i $n_3 = 24$,
3. $n_1 = 3$, $n_2 = 9$ i $n_3 = 18$,
4. $n_1 = 3$, $n_2 = 10$ i $n_3 = 15$,
5. $n_1 = 4$, $n_2 = 5$ i $n_3 = 20$,
6. $n_1 = 4$, $n_2 = 6$ i $n_3 = 12$,

i to su jedina rešenja jer kada bismo za n_1 uzimali veće vrednosti i predstavljali n_3 kao funkciju od n_2 ta funkcija bi bila ponovo opadajuća sa horizontalnom aimptotom $n_3 = 3$ i za bilo koje $n_2 > n_1$ n_3 ili ne bi bio prirodan broj ili bi bilo manje od n_1 i n_2 što ne bismo mogli da prihvatimo kao rešenje.

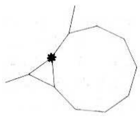
Kada se u jednom temenu dodiruje dva mnogougla jedne vrste (broj stranica n_1) i po jedan neke druge dve vrste (n_2 i n_3) onda iz uslova da je zbir unutrašnjih uglova oko tog temena 2π dobijamo dve moguće kombinacije pravilnih poligona:

1. $n_1 = 3$, $n_2 = 12$ i $n_3 = 4$,
2. $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ i $n_3 = 6$.

Da li još možemo da podelimo ravan pomoću 3 pravilna mnogougla čiji je broj stranica n_1 i po jednog pravilnog mnogougla sa brojem stranica n_2 i n_3? Pretpostavimo da je moguće i da su u pitanju pravilni trougao, četvorougao i petougao. Da bi ova kombinacija mnogouglova mogla da čini teme teselacije euklidske ravni zbir unutrašnjih uglova tih mnogouglova oko zajedničkog temena treba da bude 2π. Međutim, zbir je $\frac{21}{10}\pi$. To znači da postoji preklapanje poligona što je u kontradikciji sa definicijom teselacije i ovo rešenje ne možemo prihvatiti. Nijedno drugo rešenje nećemo moći da prihvatimo jer smo u prethodnom slučaju izabrali pravilan trougao, četvorougao i petougao koji imaju najmanji unutrašnji ugao i kad bismo neki od njih zamenili sa nekim drugim poligonom dobili bismo samo veća preklapanja poligona.



Slika 3.13: Teme u kome se dodiruju pravilan trougao, pravilan osmougao i pravilan dvadesetčetvorougao, u oznaci 3.8.24.



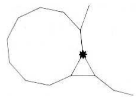
Slika 3.14: Teme u kome se dodiruju pravilan trougao, pravilan devetougao i pravilan osamnaestougao, u oznaci 3.9.18.

Tabelarni prikaz svih temena

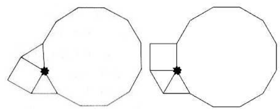
Redni broj vrste temena	Redni broj tipa temena	Tip temena
1	1	3.3.3.3.3.3
2	2	4.4.4.4
3	3	6.6.6
4	4	4.8.8
5	5	3.12.12
6	6	5.5.10
7	7	3.3.3.3.6
8	8	3.3.6.6
8	9	3.6.3.6
9	10	3.3.3.4.4
9	11	3.3.4.3.4
10	12	3.3.4.12
10	13	3.4.3.12
11	14	3.4.6.4
11	15	3.4.4.6
12	16	4.6.12
13	17	3.7.42
14	18	3.8.24
15	19	3.9.18
16	20	3.10.15
17	21	4.5.20

Očigledno je da ima 17 kombinacija pravilnih poligona koji mogu da se dodiruju u jednom temenu. Te kombinacije ćemo zvati *vrstama temena*. U tabeli smo naveli da neke vrste temena imaju po dve kombinacije. Te kombinacije ćemo nazivati *tipovima temena*.

U drugom koraku dokaza teoreme 2. ćemo istražiti koju od dvadesetjedne vrste temena možemo proširiti na uniformne teselaciju euklidske ravni. Dokazaćemo postojanje pravilnih, uniformnih teselacija (3^6) i (4^4) direktno, razmatrajući dve familije (za svaku teselaciju po jednu familiju) paralelnih pravih koje čine ivice beskonačnih



Slika 3.15: Teme u kome se dodiruju pravilan trougao, pravilan desetougao i pravilan petnaestougao, u oznaci 3.10.15.

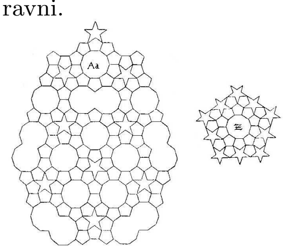


Slika 3.16: Teme u kome se dodiruju dva pravilna trougla, kvadrat i pravilan dvanaestougao, u oznaci 3.4.3.12 i 3.3.4.12.

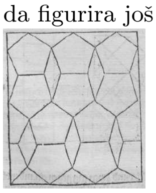
pločica. Pravilnu teselaciju pomoću pravilnih šestouglova možemo *izostavljanjem* određenih temena te teselacije svesti na teselaciju pravilnim trouglovima koja kako smo u prethodnom razmatranju zaključili da sigurno postoji. Isto tako možemo pokazati da se temena 4.8.8, 3.12.12, mogu *proširiti* u uniformne teselacije euklidske ravni.

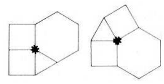
Međutim, teme 5.5.10 se ne može proširiti u uniformnu teselaciju euklidske ravni bez šupljina ili preklapanja[1]. Stvarno, ako skiciramo jedno teme 5.5.10 i označimo ga sa T_1 i onda pokušamo da *nastavimo* teselaciju tako što kod temena A_2 "dodamo" još jedan petougao, kod temena A_3 jedan desetougao i kod temena A_4 još jedan petougao dobijamo da kod temena A_5 imamo šupljinu, odnosno nema dovoljno mesta da stane još jedan petougao[2]. Dalje ako analiziramo teme 3.3.3.3.6 shvatićemo da možemo ponavljajući istu kombinaciju mnogouglova da prekrijemo celu ravan. Kao i kod temena 3.12.12 možemo svesti na teselaciju pravilnim trouglovima tako što ćemo "izbaciti" neka temena teselacije.

[1]Kepler je ilustracijom u knjizi *Harmonija sveta* (*Harmonices Mundi*) pokazao da teme 5.5.10 ne može da se proširi u teselaciju ravni.

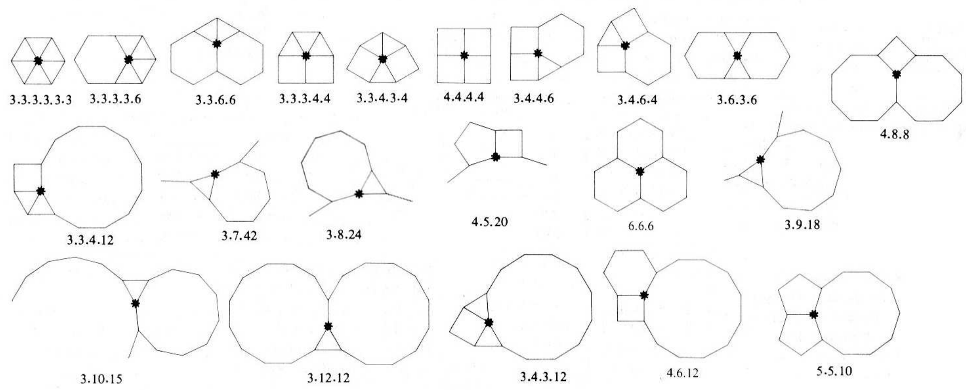


[2]Godine 1525. Albert Direr je u svom delu *Priručnik za slikare* pokazao da uz pravilne pentagone u teselaciji euklidske ravni mora da figurira još neki poligon.

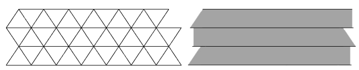




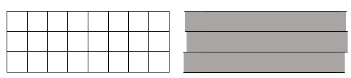
Slika 3.17: Teme u kome se dodiruju pravilan trougao, dva kvadrata i jedan pravilan šestougao, u oznaci 3.4.4.6 i 3.4.6.4.



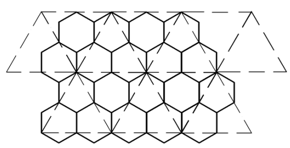
Slika 3.18: Pregled svih vrsta temena, neka mogu da čine teselacije ravni, neka ne mogu.



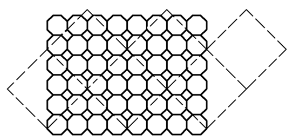
Slika 3.19: Pravljenje teselacija pomoću beskonačnih traka koje su nastale brisanjem odgovarajućih temena teselacije 3^6 tako da ostanu familije paralelnih pravih koje su granice tih beskonačnih traka.



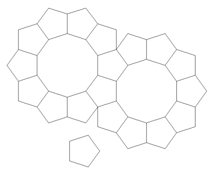
Slika 3.20: Pravljenje teselacija pomoću beskonačnih traka koje su nastale brisanjem odgovarajućih temena teselacije 4^4 tako da ostanu familije paralelnih pravih koje su granice tih beskonačnih traka.



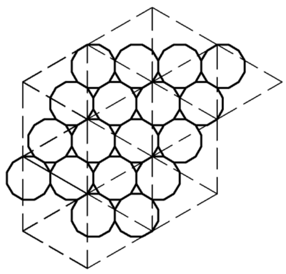
Slika 3.21: Svođenje teselacije 6^3 na 3^6 izostavljanjem nekih temena teselacije. Naravno, moguće je dokazati postojanje teselacije 6^3 kao dualnog popločavanja teselacije 3^6.



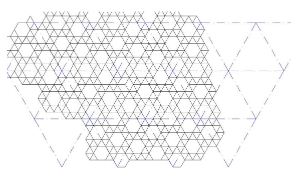
Slika 3.22: Izostavljanjem nekih temena teselacije 4.8^2 može se napraviti teselacija 4^4 i tako pokazati da teselacija 4.8^2 postoji.



Slika 3.23: Teme 5.5.10 ne može se proširiti u teselaciju euklidske ravni.

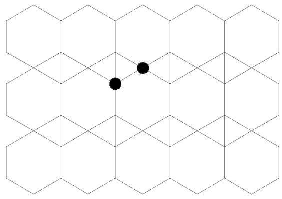


Slika 3.24: Izostavljanjem nekih temena teselacije 3.12^2 može se napraviti teselacija 3^6 i tako pokazati da teselacija 3.12^2 postoji.

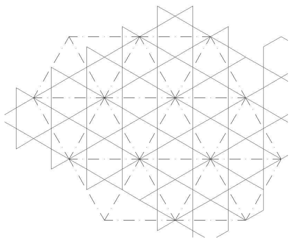


Slika 3.25: Izostavljanjem nekih temena teselacije $3^4.6$ može se napraviti teselacija 3^6 i tako pokazati da teselacija $3^4.6$ postoji.

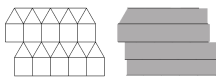
Ako razmotrimo teme 3.3.6.6 ne možemo koristeći samo tu vrstu temena prekrijemo celu ravan. Odnosno, teselacija nije uniformna. Teme 3.6.3.6 možemo proširiti u uniformnu teselaciju euklidske ravni i to potvrđujemo time što izostavljanjem nekih temena te teselacije dobijamo teselaciju (3^6) za koju smo već dokazali da se može proširiti u teselaciju ravni. Teme 3.3.3.4.4 takođe može biti teme uniformne teselacije ravni. To se može pokazati deljenjem ravni na otvorene topološke diskove (beskonačne trake). Kao i u slučaju kad smo analizirali teme 4.8.8, tako i teme 3.3.4.3.4 jeste teme uniformne teselacije euklidske ravni jer izbacivanjem nekih temena te teselacije možemo konstruisati teselaciju (4^4), za koju smo pokazali da je teselacija euklidske ravni. Ispitaćemo sad teme u kome se sastaju dva pravilna trougla, jedan kvadrat i jedan pravilni dvanaestougao. Možemo uočiti da postoje dve vrste ovog temena, 3.3.4.12 i 3.4.3.12. Sobzirom da uniformna teselacija "traži" da su sva temena iste vrste, obe ove vrste temena se ne mogu proširiti u uniformnu teselaciju euklidske ravni. Ako uočimo u ravni teme u kome se sastaje jedan pravilan trougao, dva kvadrata i jedan pravilan šestougao opet je očigledno da postoje dve vrste ovog temena, 3.4.6.4 i 3.4.4.6. Postavlja se pitanje da li se ova temena mogu proširiti na uniformnu teselaciju euklidske ravni. Zaključujemo da se oba temena mogu proširiti u teselaciju euklidske ravni samo nisu obe uniformnene. Teselacija (3.4.6.4) jeste uniformna jer možemo koristiti samo tu jednu vrstu temena za prekrivanje euklidske ravni što ne možemo da uradimo samo koristeći teme 3.4.4.6. Na kraju, teme 4.6.12 je poslednje koje možemo proširiti u uniformnu teselaciju euklidske ravni. Ostaje nam još da dokažemo da tipove temena u kojima se dodiruju tri mnogougla različitih vrsta (a to su sledećih pet vrsta temena: 3.7.42,



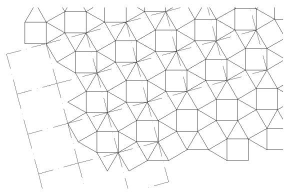
Slika 3.26: Ne možemo koristeći samo vrstu temena 3.3.6.6 da prekrijemo celu ravan jer se ne dobija uniformna teselacija.



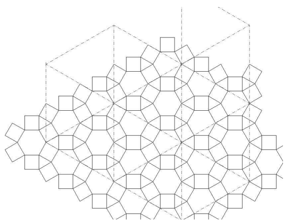
Slika 3.27: Izostavljanjem nekih temena teselacije 3.6.3.6 može se napraviti teselacija 3^6 i tako pokazati da teselacija 3.6.3.6 postoji.



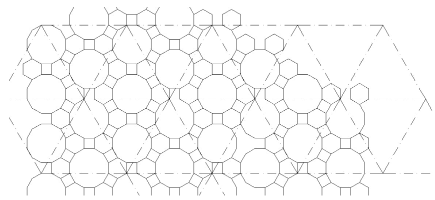
Slika 3.28: Pravljenje teselacija pomoću beskonačnih traka koje su nastale brisanjem odgovarajućih temena teselacije $3^3.4^2$ tako da ostanu familije paralelnih pravih koje su granice tih beskonačnih traka.



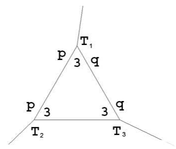
Slika 3.29: Izostavljanjem nekih temena teselacije $3^2.4.3.4$ može se napraviti teselacija 4^4 i tako pokazati da teselacija $3^2.4.3.4$ zaista postoji.



Slika 3.30: Izostavljanjem nekih temena teselacije 3.4.6.4 može se napraviti teselacija 3^6 i tako pokazati da teselacija 3.4.6.4 postoji.



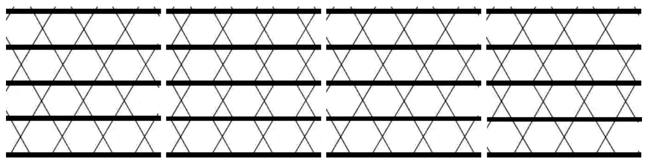
Slika 3.31: Izostavljanjem nekih temena teselacije 4.6.12 može se napraviti teselacija 3^6 i tako pokazati da teselacija 4.6.12 postoji.



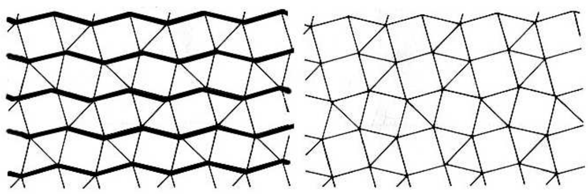
Slika 3.32: Skica dokaza činjenice da ako se u jednom temenu teselacije sastaju tri različite vrste pravilnih mnogouglova, od kojih je jedan sa neparnim brojem stranica (u ovom slučaju trougao), to teme se ne može prosiriti u teselaciju ravni. p i q predstavljaju broj stranica druga dva mnogougla koji se u posmatranom temenu dodiruju sa trouglom.

3.8.24, 3.9.18, 3.10.15 i 4.5.20) ne možemo proširiti u uniformnu teselaciju ravni. Očigledno, svaki od navedenih tipova temena sadrži bar jedan mnogougao sa neparnim brojem stranica. Prvo ćemo odatle izdvojiti one tipove temena koja sadrže pravilni trougao i za njih koristiti zajedničku oznaku $3.p.q$, gde p i q predstavljaju broj stranica odgovarajućih mnogouglova.Označimo temena trougla sa T_1, T_2 i T_3. Želimo da proverimo da li polazeí od temena $3.p.q$ možemo da dobijemo uniformnu teselaciju euklidske ravni. To znači da bi sva tri temena trougla morala da budu isti tip temena, odnosno, da u svakom temenu treba da se dodiruju sva tri mnogougla. Pretpostavimo da je stranica T_1T_2 zajednička stranica trougla i mnogougla sa brojem stranica p i da je stranica T_1T_3 zajednička stranica trougla i mnogougla sa brojem stranica q. Pretpostavimo da je T_2 teme uniformne teselacije (3.p.q). Stranica T_1T_2 je stranica pravilnog mnogougla sa brojem stranica p i onda je i ugao kod temena T_2 podudaran sa uglom kod temena T_1. Dalje, kako smo pretpostavili da je T_2 teme uniformne teselacije, tako je treći poligon koji sadži teme T_2 mnogougao sa brojem stranica q. To su jedina tri mnogougla koja se sastaju u tom temenu pa je T_2T_3 stranica mnogougla sa brojem stranica q i unutrašnji ugao tog mnogougla u temenu T_3 jednak je onom kod temena T_2. Sa druge strane, stranica T_1T_3 je zajednička stranica trougla i mnogougla sa brojem stranica q pa je unutrašnji ugao tog mnogougla kod temena T_3 podudaran unutrašnjem uglu kod temena T_2. Tako smo dobili da su mnogouglovi koji se sastaju u temenu T_3 jednakostranični trougao i dva pravilna mnogougla stranice q što je u kontradikciji sa pretpostavkom da se u temenu teselacije sastaju tri različita mnogougla. Zaključujemo da temena 3.7.42, 3.8.24, 3.9.18, 3.10.15 ne mogu biti temena nijedne uniformne teselacije euklidske ravni. Analogno zaključujemo da ni teme 4.5.20 ne može biti teme uniformne teselacije euklidske ravni. Kao i u slučaju kod trougla dobili bismo kontradikciju ređajući poligone oko petougla. Time smo dokazali teoremu 2.$\diamond$

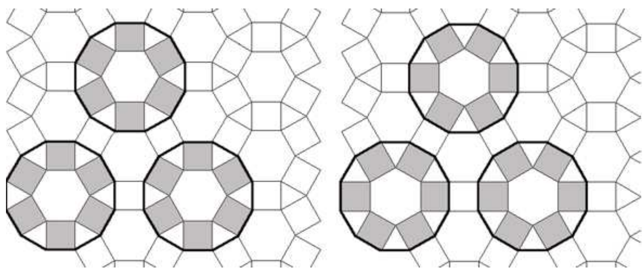
U dokazu teoreme smo strogo vodili računa da su teselacije uniformne, tj. da su temena teselacije iste vrste. Možemo analizirati koje teselacije možemo napraviti ako popustimo uslov da su sva temena iste vrste i dopustimo da su temena teselacije istog tipa. Prvo ćemo razmatrati tip pod rednim brojem 8, kada se u jednom temenu dodiruju dva pravilna trougla i dva pravilna šestougla. Jasno je da je moguće na jednakim rastojanjima postaviti paralelne linije i tako podeliti ravan na beskonačne trake koje se mogu nezavisno pomerati. Tako dobijamo dve neekvivalentne pozicije poligona. Kako traka ima beskonačno mnogo tako imamo i beskonačno mnogo teselacija.



Slika 3.33: Na prvoj slici je prikazana uniformna teselacija 3.6.3.6 sa podebljanim granicama traka koje se nezavisno mogu pomerati i tako činiti teselacije prikazane na ostalim slikama.



Slika 3.34: Moguće je napraviti beskonačno mnogo teselacija koristeći samo tip temena pod rednim brojem 9 (3.3.3.4.4 i 3.3.4.3.4).



Slika 3.35: Moguće je praviti beskonačno mnogo teselacija u kojima figuriraju samo dve vrste temena, 3.3.4.6 i 3.4.3.6.

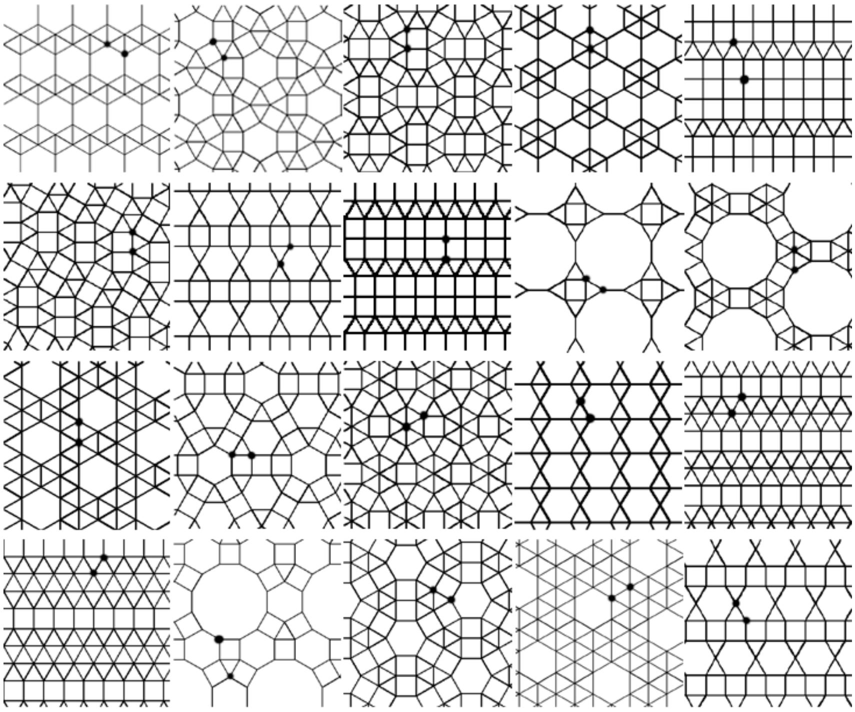
Analogno, ramotrićemo prekrivanja ravni kvadratima i pravilnim trouglovima, odnosno tip temena pod rednim brojem 9:
Ponovo možemo primetiti da cik - cak linijama, koje su postavljene na jednakim rastojanjima, možemo podeliti ravan na beskonačne trake koje se mogu nezavisno pomerati. Možemo pomerati bilo koju traku ili je menjati njenom slikom u ogledalu i opet dobijamo beskonačno mnogo popločavanja ravni.

Razmatrajmo sad slučaj kada se u jednom temenu sastaju dva jedakostranična trougla, jedan kvadrat i jedan pravilan šestougao, tj. tip temena 3.3.4.6 koji smo naveli pod rednim brojem 10.

Možemo da proučimo i *diskove* koji nastaju tako što skup od jednog šestougla i kvadrata i trouglova oko njega tretiramo kao jednu pločicu. Ako rotiramo bilo koji disk za $\pi/6$ dobijamo nove teselacije ravni. Kako u ravni možemo uočiti beskonačno mnogo ovakvih diskova, to zaključujemo da imamo beskonačno mnogo različitih teselacija pomoću temena tipa 3.3.4.6.

3.2 k - uniformne teselacije euklidske ravni

Sada ćemo uvesti jedno uopštenje 1-uniformnih teselacija euklidske ravni:
Teselaciju euklidske ravni kod koje su sve ivice teselacije ivice pravilnih poligona zovemo *k-uniformnim* ako temena te teselacije, čine tačno k različitih klasa te ravni. Jasno je da teselacije euklidske ravni koje smo do sad



Slika 3.36: Dvadeset 2-uniformnih teselacija.

analizirali su 1-uniformne teselacije. Oznaka koju ćemo koristiti za k-uniformne teselacije je $(T_1; T_2; ...; T_k)$, gde su T_i tipovi temena koji mogu činiti teselacije euklidske ravni.

Teorema 4 *Postoji tačno dvadeset različitih tipova 2-uniformnih teselacija euklidske ravni pravilnim mnogouglovima i to su:*
$(3^6; 3^4.6)_1$, $(3^6; 3^4.6)_2$, $(3^6; 3^3.4^2)_1$, $(3^6; 3^3.4^2)_2$, $(3^6; 3^2.4.3.4)$, $(3^6; 3^2.4.12)$, $(3^6; 3^2.6^2)$, $(3^4.6; 3^2.6^2)$, $(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_1$, $(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_2$, $(3^3.4^2; 3.4.6.4)$, $(3^3.4^2; 4^4)_1$, $(3^3.4^2; 4^4)_2$, $(3^2.4.3.4; 3.4.6.4)$, $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$, $(3.4.3.12; 3.12^2)$, $(3.4^2.6; 3.4.6.4)$, $(3.4.6.4; 4.6.12)$, $(3.4^2.6; 3.6.3.6)_1$ *i* $(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2$.

Dokaz ove teoreme izvodi se analogno dokazu teoreme 2 iz dva koraka, ali njima se nećemo baviti. Kompletan dokaz teoreme je objavio Krotenheerdt (1969. godine).$\diamond$

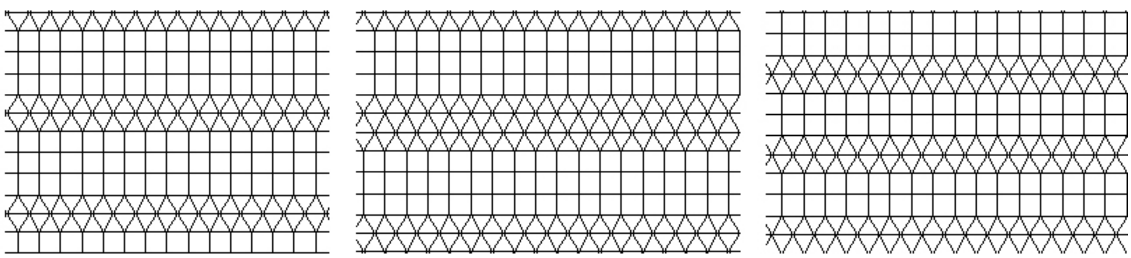
Zadržimo se malo na analiziranju temena 2-uniformnih teselacija. Možemo da prvo da uočimo da se teme koje je oblika 4.8.8 ne pojavljuje ni u jednoj 2-uniformnoj teselaciji, niti može da se pojavi u nekoj k-uniformnoj teselaciji za $k > 2$. Takođe, neki tipovi temena ne mogu da čine sami uniformne teselacije ali u kombinaciji sa drugim vrstama temena mogu da čine k-uniformne teselacije. Još jedna iteresantna činjenica je da u svakoj k-uniformnoj teselaciji koja sadrži bar dva različita temena ($k \geq 2$) bar jedno od temena mora da bude nekog tipa kod koga u teselaciji učestvuje trougao. Drugim rečima, važi teorema:

Teorema 5 *Sve ivica na ivicu k - uniformne teselacije ($k \geq 2$) euklidske ravni pravilnim poligonima sadrže jednakostranične trouglove.*

Dokaz: Teoremu ćemo dokazati tako što ćemo ispitati tipove temena koja ne sadrže pravilan trougao i proveriti da li ona uopšte mogu da formiraju teselaciju ravni ili da li kad formiraju uniformne teselacije da li je obavezno dodati i neki tip temena gde figurira pravilan trougao ili je ta teselacija jednouniformna. Potsetimo se prvo tipova temena koja ne sadrže pravilan trougao i koja se ne mogu proširiti u teselaciju euklidske ravni. To su temena 4.5.20 i 5^2.10. Ostaje nam još da proverimo da li pomoću temena 4^4, 6^3, 4.8^2 i 4.6.12, bez korišćena temena u kojima se sastaju trouglovi možemo napraviti k-uniformne teselacije, gde je $k > 1$. Ako tako pođemo od tipa temena 4^4 da bismo dobili k-uniformnu teselaciju gde je $k \geq 2$ susedno teme treba da bude nekog drugog tipa od polaznog i da sadrži dva kvadrata koji imaju zajedničku stranicu. Tada to susedno teme jedino može biti tipa $3^3.4^2$ ili $3.4^2.6$. U oba slučaja u teselaciji učestvuju jednakostranični trouglovi. Dalje, ako počnemo da pravimo teselaciju od temena u kome se sastaje tri šestougla (tip temena 6^3), susedno teme treba da bude nekog drugog tipa i da sadrži dva šestougla koji imaju zajedničku ivicu. Pomoću tabele mogućih tipova temena zaključujemo da taj drugi tip temena može biti samo 3.3.6.6 i opet u teselaciji mora da učestvuje i poligon u obliku trougla. Ako pođemo od temena tipa 4.6.12 i želimo da napravimo k-uniformnu teselaciju, gde je $k > 1$, sledeće teme mora sadržati trougao jer nijedan drugi tip temena, sem $3.4^2.6$, 3.4.6.4 i 3.4.3.12 ne sadrži tačno dva ista poligona kao i polazno teme. Ranije smo napomenuli da za $k \geq 2$ ne može se konstruisati k-uniformna teselacija ivica na ivicu koja sadrži teme tipa 4.8^2. jer sledeće teme teselacije mora sadržati tačno dva poligona prethodnog temena a teme drugog tipa sa tom osobinom nema. Time smo dokazali teoremu 5. $\diamond$

Ako bismo razmatrali 3 - uniformne teselacije ravni, uočili bismo da se može konstruisati 61 vrsta 3-uniformnih prekrivanja ravni, koje nećemo navoditi. Njih je prvi klasifikovao Chavey (1984.) u svom doktorskom radu. Međutim, za svako $k > 3$ ne znamo broj mogućih teselacija euklidske ravni, niti možemo pretpostaviti kom broju približno teži, tako da za $k = 4$, $k = 5$, itd. ovaj problem ostaje otvoren.

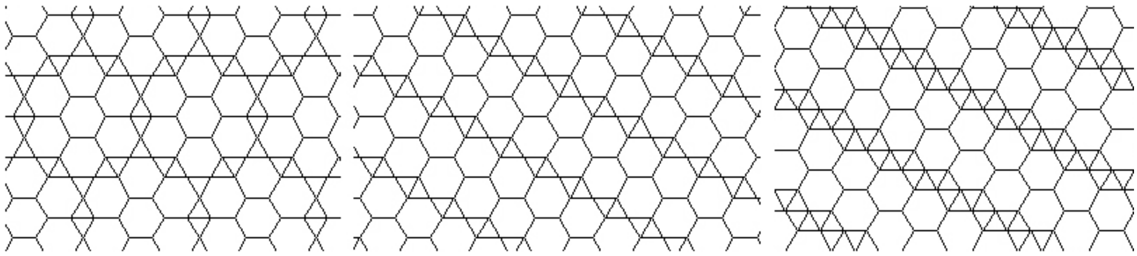
Krotenheerdt nije rešio ovaj problem ali je u nekoliko radova razmatrao sličan problem kojim ćemo se i mi ovde malo pozabaviti. Naime, on je proučavao k-uniformne teselacije kod kojih su sve vrste temena različite, tj. da postoji k različitih tranzitivnih klasa temena teselacije. Jasno je da se za $k = 1$ i $k = 2$ skup Krotenheerdtovih teselacija se poklapa sa skupom svih 1-uniformnih i 2-uniformnih teselacija. Označicemo broj različitih Krotenheerdtovih teselacija sa $K(k)$, gde k predstavlja red uniformne teselacije. Za svako $k > 2$ možemo da odredimo $K(k)$. Tako smo iz skupa 3-uniformnih teselacija izdvojili 39 Krotenheerdtovih uniformnih teselacija. Može se dokazati da npr. postoji bar dve Krotenheerdtove 3-uniformne teselacije koje imaju dva temena tipa 3^6 i tipa $3^3.4^2$.



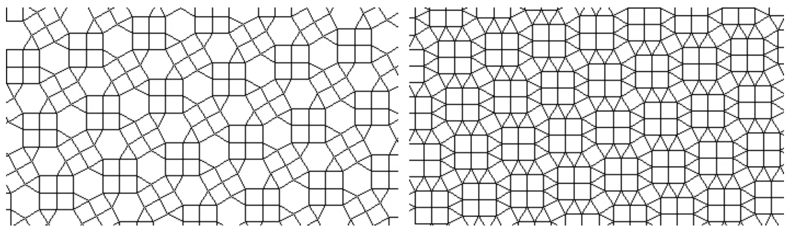
Slika 3.37: Tri 3-uniformne teselacije koje imaju vrste temena 3^6 i $3^3.4^2$ i još jednu vrstu temena.

Za $3 < k < 8$ dobijamo da je broj Krotenheerdtovih teselacija sledeći: $K(4) = 33$, $K(5) = 15$, $K(6) = 10$, $K(7) = 7$. Ako je $k \geq 8$ onda ne možemo napraviti Krotenheerdtove uniformne teselacije, tj. za svako $k \geq 8$ $K(k) = 0$.

Sada kada smo definisali k-uniformne teselacije, definisaćemo još *demi-regularne teselacije* kao k-uniformna



Slika 3.38: Tri 3-uniformne teselacije koje imaju vrste temena 6^3,3.6.3.6 i $3^2.6^2$.



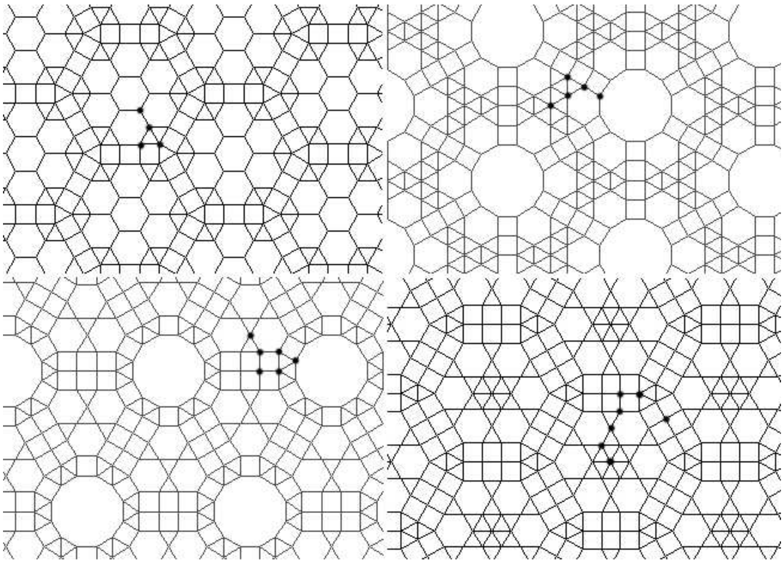
Slika 3.39: Dve 3-uniformne teselacije koje imaju dva temena tipa 4^4 i tipa $3^3.4^2$ i još neko teme.

prekrivanja ravni za $k \geq 2$. Kod ovih teselacija imamo dve ili više tranzitivnih klasa[3].

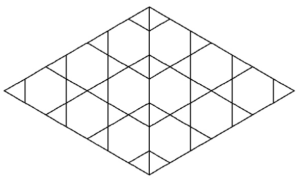
Sada ćemo razmatrati uniformne teselacije ivica na ivicu i zakrpe koje mogu da se naprave kod različitih tipova temena, s'tim što nam ovde neće biti interesantna monoedarska 1-uniformna prekrivanja ravni. Zato u tabeli sa vrstama temena preskačemo razmatranje prve tri vrste temena i analiziraćemo koje najveće konveksne zakrpe mogu da se naprave koristeći samo vrste temena pod rednim brojevima 8, 9, 10, 11 i 12 i koje od njih mogu da se prošire u teselaciju ravni.

U tabeli vrsta temena se pod rednim brojem 8 nalaze dva tipa temena, to su $3^2.6^2$ i 3.6.3.6. Svaka konveksna zakrpa koja se sastoji od temena vrste 8 može da se proširi u teselaciju ravni. Uvek postoji zakrpa koja je može potpuno okružiti i samim tim možemo tako da prekrijemo celu ravan. Isto tako i koristeći samo vrstu temena pod rednim brojem 9 (temena tipa $3^3.4^2$ i $3^2.4.3.4$) možemo svaku konveksnu zakrpu, koja je sastavljena od temena te vrste, proširiti u još vecu zakrpu (ne nužno konveksnu), koja je obuhvata i ponavljajući proces prekriti celu ravan.

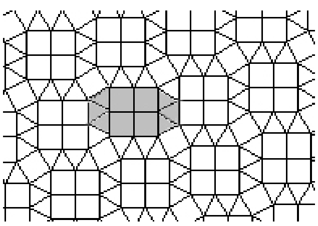
[3]Iako po definiciji demi - regularnih teselacija možemo doći do zaključka da ih ima beskonačno mnogo, mnogi autori, prvi među njima Matila Ghyka (1962) tvrdi da postoji samo 14 takvih teselacija. Ranije smo zapazili da samo za $n = 2$ demi - regularnih teselacija ima 20 tako da se ne zna zašto se na nekoliko mesta u literaturi ponavlja broj 14. Zanimljivo je da se u različitoj literaturi pominje različitih 14 demi - regularnih teselacija.



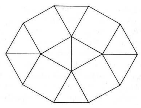
Slika 3.40: Po jedna k-uniformna teselacija za $k = 4$,$k = 5$,$k = 6$ i $k = 7$.



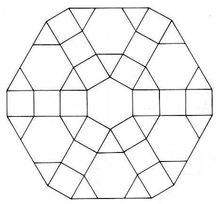
Slika 3.41: Jedna konveksna zakrpa gde se u svakom temenu sastaje dva pravilna trougla i dva pravilna šestougla.



Slika 3.42: Zakrpa koja se sastoji od temena u kojima se sastaju tri jednakostranična trougla i dva kvadrata, koja može da se proširi u teselaciju cele ravni.



Slika 3.43: Najveća konveksna zakrpa u 1-uniformnoj teselaciji euklidske ravni ($3^2.4.3.4$).



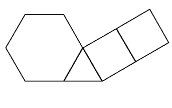
Slika 3.44: Najveća konveksna zakrpa ravni sastavljena od temena tipa $3.4^2.6$ i $3.4.6.4$.

Međutim, zakrpu koja se sastoji samo od temena tipa $3^2.4.12$ i $3.4.3.12$ ne možemo proširiti u teselaciju ravni jer ne postoji polazna konveksna zakrpa. Isto tako ne postoji konveksna zakrpa koja se sastoji samo od vrste temena pod rednim brojem 12 (vrsta temena 4.6.12) pa nećemo razmatrati te teselacije. Na kraju, ako analiziramo zakrpe koje se sastoje samo od vrste temena koje smo u tabeli naveli pod rednim brojem 11 (tipovi temena $3.4^2.6$ i $3.4.6.4$) videćemo da je najveća konveksna zakrpa koja se može napraviti sastavljena od velikog broja pločica (43 pločice) i da ju je moguće proširiti u teselaciju ravni.

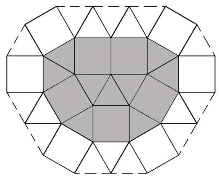
Naravno, postoje i nekonveksne zakrpe koje se mogu proširiti u teselaciju ravni koristeći samo jednu vrstu temena, ali i one koje ne mogu.

Nije nam poznato da li svaka konveksna zakrpa koja može da se proširi u teselaciju ravni može da se proširi i u veću konveksnu zakrpu.
Za zakrpu kažemo da je *glatka* ako je svako teme zakrpe teme u kome se dodiruju bar dva poligona koji čine tu zakrpu. Pokazaćemo kako jednu glatku zakrpu koja se sastoji samo od temena tipa $3^3.4^2$ i $3^2.4.3.4$ može da se proširi u veću konveksnu zakrpu.

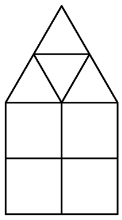
Osenčimo polaznu zakrpu i označimo je sa A. Ako želimo da je proširimo, to možemo učiniti tako što prvo sa spoljašnje strane zakrpe svuda gde je granica zakrpe ivica kvadrata dodamo pravilan trougao a tamo gde je granica ivica trougla docrtamo kvadrat. Da bismo dobili konveksnu zakrpu spojimo novodobijena temena (nacrtano isprekidanom linijom) i novodobijena zakrpa okružuje staru. Kao što smo ranije napomenuli, ponavljajući taj proces polaznu zakrpu možemo proširiti u teselaciju ravni.



Slika 3.45: Najmanja nekonveksna zakrpa koja je sastavljena od temena vrste $3.4^2.6$ i koja se ne može proširiti u teselaciju ravni.



Slika 3.46: Jedan primer glatke zakrpe koja se sastoji samo od temena tipa $3^3.4^2$ i $3^2.4.3.4$ i koja može da se proširi u veću konveksnu zakrpu.



Slika 3.47: Jedna konveksna zakrpa koja nije glatka zato što postoji teme zakrpe koje je teme samo jednog trougla i nijednog drugog poligona. Ona ne može da se proširi u veću konveksnu zakrpu tako što se tamo gde je ivica zakrpe stranica trougla doda kvadrat a tamo gde je ivica zakrpe stranica kvadrata docrta trougao.

3.3 Uniformne teselacije euklidske ravni koje nisu ivica na ivicu

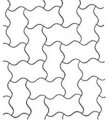
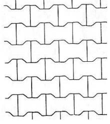
Proširićemo sada priču o prekrivanjima ravni popločavanjima koja nisu ivica na ivicu[4].

Ako bismo pokušali da nabrojimo sve teselacije koje nisu ivica na ivicu, shvatili bismo da je to nemoguće, čak ako bismo pokušali da navedemo sve monoedarske teselacije zaključili bismo da ih ima neprebrojivo mnogo.

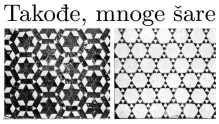
Jasno je da ako bismo proizvoljno ređali pločice parketa dobijamo beskonačno mnogo teselacija koje nisu ivica na ivicu. Zato, treba da uvedemo neka pravila i ograničenja. Pod uniformnom teselacijom ravni koja nije ivica na ivicu smatraémo svaku teselaciju u kojoj postoji simetrija popločavanja koja se prenosi tranzitivno sa jednog temena na drugo teme teselacije. Uvešćemo i pojmove ekvitranzitivna teselacija i jednostrana teselacija.

Teorema 6 *U zavisnosti od realnog paramtra α, teselacije euklidske ravni pravilnim mnogouglovima koje nisu ivica na ivicu podeljene su u 8 familija.*

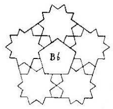
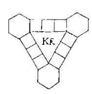
[4]U Beogradu ima par zanimiljivih teselacija koje nisu ivica na ivicu.

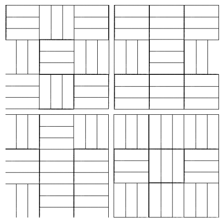
 

Takođe, mnoge šare u rimskim crkvama i arapski ornamenti u sebi imaju teselacije koje nisu ivica na ivicu.

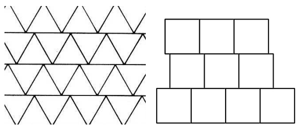


Posmatrajući Keplerove crteže, vidimo da su i njega zanimale teselacije koje nisu ivica na ivicu, ali čini se da posle njega dugo godina niko nije uzimao u obzir tu vrstu teselacija.



Slika 3.48: Neke jednostavne teselacije koje nisu ivica na ivicu.



Slika 3.49: Teselacije koje nisu ivica na ivicu koje nastaju nezavisnim pomeranjem traka sačinjenih od trouglova ili kvadrata.

Za teselaciju euklidske ravni kažemo da je *ekvitranzitivna* ako za svaku pločicu te teselacije postoji neka izometrijska transformacija popločavanja, koja tu pločicu slika u bilo koju podudarnu pločicu.

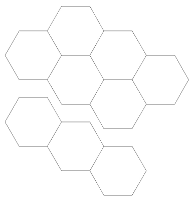
Za teselaciju euklidske ravni kažemo da je *jednostrana* ako je svaka ivica teselacije ivica najviše jednog poligona te teselacije, tj. svaka ivica jednostrane teselacije je neki deo jedne ivice nekog poligona.

Razmatrajmo sada prekrivanja ravni pravilnim mnogouglovima (trouglovima, četvorouglovima, petouglovima, šestouglovima, itd.) koji ne leže ivica na ivicu. Za početak neka to budu monoedarska popločavanja pravilnim trouglovima, četvorouglovima i šestouglovima. Da li možemo tako da prekrijemo celu ravan da se poligoni ne slažu ivica na ivicu? Krenimo redom, analiziraćemo pravilan poligon sa najmanjim brojem stranica. Znamo da je to jednakostranični trougao i već smo zaključili da postoji monoedarska uniformna teselacija gde je pomoću ovog trougla. Kako smo već uveli i pojam topoloških traka to ovu teselaciju možemo da podelimo na nezavisne trake. Svaku traku nezavisno od ostalih možemo da transliramo po pravcu paralelnom osi trake i za svaku vrednost vektora translacije dobijamo teselaciju euklidske ravni.

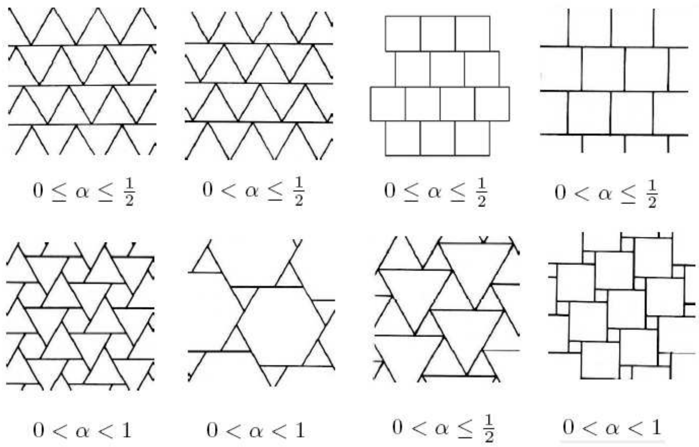
U primerima gde teselacije vrše pravilni trouglovi ili kvadrati, možemo da dobijemo beskonačno mnogo teselacija koje nisu ivica na ivicu, ali mogu u zavisnosti od nekog realnog parametra (α) da se svrstaju u nekoliko familija. Parametar α kod monoedarskih teselacija predstavlja deo susednih stranica poligona koji se preklapa pri teselaciji, u slučaju diedarskih teselacija euklidske ravni, parametar α predstavlja odnos stranica ta dva poligona koji čine teselaciju i u slučaju da ima tri ili više veličina poligona, parametar α predstavlja odnos stranica poligona koji ima najkraću stranicu i poligona koji ima najdužu stranicu.

Dakle, nisu sve teselacije sastavljene od poligona ekvivalentnih samo jednom obliku (monoedarske teselacije). To je razumnjivo sobzirom na veliki broj teselacija koje nisu ivica na ivicu ali su nam zanimljive iz nekog drugog razloga. Da se ne bismo rasplinuli u priči, ograničavaćemo se na teselacije koje ako nisu monoedarske, onda su ekvitranzitivne, ili jednostrane, ili interesantne po nekom drugom svojstvu. Zadržimo se malo na poslednjoj familiji i to slučaju kada je $\alpha = \frac{1}{2}$. Tada se ova teselacija sastoji od trouglova dve veličine umesto tri. Takođe, ovoj familiji pripadaju i popločavanja sa više od tri veličine trouglova.

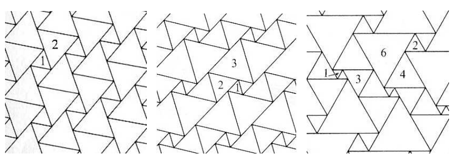
Kao što smo napravili uopštenje uniformnih teselacija koje su ivica na ivicu i uveli pojam k - uniformnih teselacija, tako možemo razmatrati i k-uniformne teselacije koje nisu ivica na ivicu.



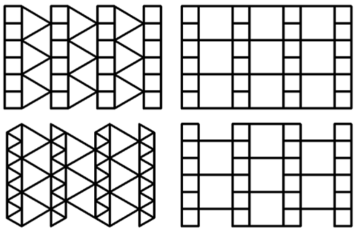
Slika 3.50: Možemo da napravimo i trake od šestouglova, koje su (topološki gledano) ekvivalentne sa trakama načinjenim od kvadrata, ali iako je tako, njih ne možemo nezavisno da pomeramo tako da u bilo kom položaju i dalje čine teselaciju ravni (prekrivanje ravni bez šupljina i preklapanja).



Slika 3.51: Osam familija teselacija koje nisu ivica na ivicu.

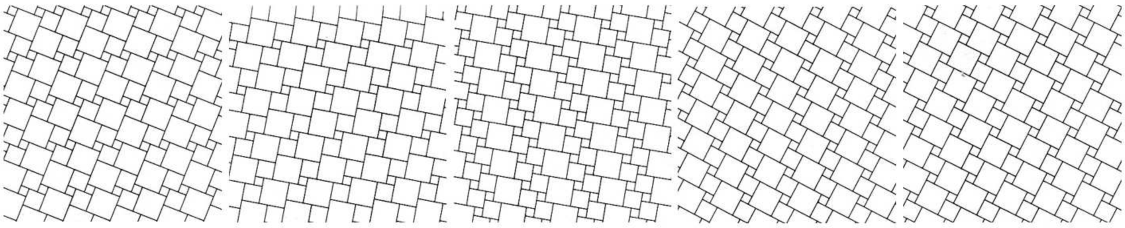


Slika 3.52: Teselacija trouglovima, koje nisu ivica na ivicu, koju čine jednakostranični trouglovi sa dve različite dužine ivica, sa tri različite dužine ivica i sa pet različitih dužina ivica.



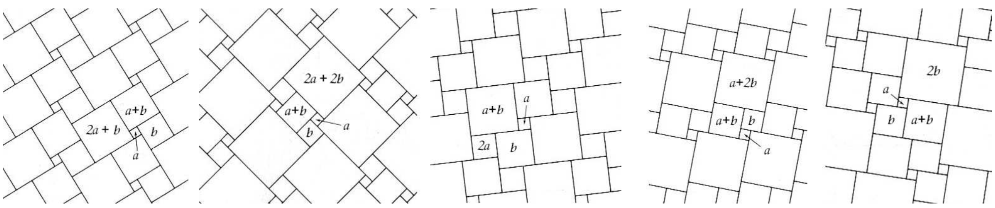
Slika 3.53: Primer četiri 2-uniformne teselacije koje nisu ivica na ivicu.

Mogućnosti da napravimo k-uniformne teselacije euklidske ravni koje nisu ivica na ivicu ima jako mnogo. Ako postoji grupa simetrija koje slika jedno teme teselacije u drugo te teselacije su uniformne. Izdvojićemo i teselacije euklidske ravni koje nisu ivica na ivicu, sastoje se samo od kvadrata različitih dužina stranica i analiziraćemo neke osobine takvih teselacija. Za m datih različitih ivica kvadrata postoje algoritmi za konstrukcije popločavanja tim kvadratima. Naravno, to je moguće ako između tih m ivica da važe neke relacije. Tako, ako je $m = 3$ ravan možemo prekriti sa kvadratima tri dužina ivica ako i samo ako je dužina jedne ivice jednaka zbiru dužina druge dve ivice i tada postoji tačno pet različitih jednostranih i ekvitranzitivnih prekrivanja ravni takvim kvadratima.

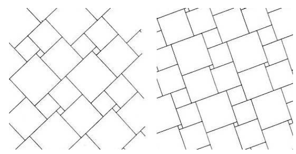


Slika 3.54: Popločavanje ravni sa tri vrste kvadrata čije ivice zadovoljavaju uslov da je dužina jedne ivice jednaka zbiru dužina druge dve ivice.

Ako je $m = 4$, tj. imamo 4 kvadrata ivica različitih dužina, za te stranice može da važi nekoliko relacija. Ako želimo da teselacije budu jednostrane i ekvitranzitivne, moguće je konstruisati nekoliko teselacija. Fiksiraćemo tri stranice da budu dužina a, b i $a + b$. Četvrta stranica tada može imati pet različitih vrednosti i to su: $2a$, $2b$, $2(a + b)$, $2a + b$ i $a + 2b$.



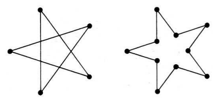
Slika 3.55: Primer teselacije euklidske ravni sa četiri vrste kvadrata, ako tri stranice kvadrata koji čine teselaciju u svih pet teselacija imaju fiksne dužine, a, b i $a + b$, četvrta stranica može imati sledeće dužine: $2a$, $2b$, $2(a + b)$, $2a + b$ i $a + 2b$.



Slika 3.56: Jednostrane, ekvitranzitivne teselacije za $m = 5$ i $m = 6$.

3.4 Pločice u obliku zvezda

Sada ćemo razmatrati popločavanja pločicama koje imaju oblik nekonveksnih poligona, tj. razmatraćemo pločice koje su pravilni mnogouglovi u obliku zvezde. Ova vrsta teselacija se još zove *stelacija*. Pod pravilnim poligonom u obliku zvezde podrazumevaćemo nekonveksne poligone dobijene tako što je svaka stranica konveksnog poligona produžena do preseka sa produžetcima drugih stranica. Tako na primer ako krenemo da pravimo poligon u obliku zvezde od petougla tako što svaku njegovu stranicu produžimo na obe strane "preko" svakog temena, dobijamo pravilni poligon u obliku zvezde poznat kao petokraka.



Slika 3.57: Primer pravljenja poligona u obliku zvezde. Ako želimo samo da označimo temena koja su vrhovi krakova, za ovaj poligon koristimo oznaku $\{5/2\}$, ako želimo da označimo svih deset temena (i temena krakova i temena polaznog poligona) onda koristimo oznaku $|5/2|$.

Koristićemo dve oznake za ovakve poligone. U prvoj, koju je koristio i Kepler, se označavaju samo temena dobijenog poligona, ne i temena polaznog. Tako poligon na prvoj slici ima 5 temena i 5 stranica, u oznaci $\{5/2\}$. Ako želimo da označimo sva temena, oznaka za takvo označavanje temena je $|5/2|$. Ovaj poligon ima 10 jednakih stranica i deset jednakih uglova.

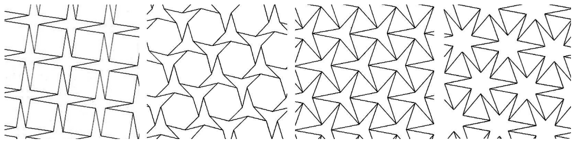
Uopšteno, ako imamo jedan pravilan mnogougao sa n stranica i proizvoljni prirodni broj m koji je veći od 1 i manji od n onda u zavisnosti da li označavamo sva temena poligona u obliku zvezde ili samo vrhove "krakova"imamo dve notacije n/m i $|n/m|$. Takav poligon u obliku zvezde dobijamo na sledeći način: Obeležimo temena pravilnog poligona sa A_1, A_2,..., A_n i svaku stranicu tog poligona produžimo u pravu. Tako tačke preseka prave određene stranicom A_iA_j i prave određene stranicom $A_(i+m)A_(j+m)$, za $i = 1, 2, ..., n-1$ i $j = 2, 3, ..., n$ određuju temena novog poligona u obliku zvezde.

Lema 2 *U zavisnosti od realnog parametra α postoji tačno četiri familije uniformnih teselacija koje sadrže pravilne poligone i poligone u obliku zvezde tako da je svako teme teselacije ujedno i teme nekog poligona. Te familije su:* $(3.3_{\alpha*}.3.3_{\alpha**})$, $(4.4_{\alpha*}.4_{\alpha**})$, $(3.6_{\alpha*}.6_{\alpha**})$ *i* $(3_{\alpha*}.3_{\alpha**}.6)$.

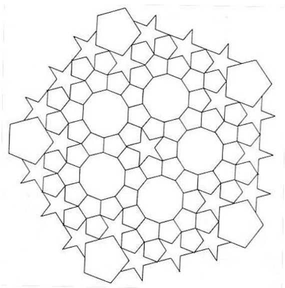
Dakle, jasno je da u svakoj od ovih uniformnih teselacija figurira bar jedan konveksan pravilan mnogougao. Zvezdice uz parametar α označavaju dve različite vrste temena poligona u obliku zvezde. Poslednje tri familije imaju dva emorfna oblika u kojima se pojavljuju.

Skiciraćemo dokaz leme: Primećujemo da se u svakom temenu teselacije sastaju dva poligona u obliku zvezde, jedan poligon temenom pri vrhu kraka a drugi temenom na ivici poligona i da u svakoj teselaciji učestvuje samo jedna vrsta poligona u obliku zvezde. U zbiru dva susedna ugla poligona u obliku zvezde daju sumu $2\frac{n-1}{n};\pi$ tako za $n = 3$, $n = 4$ i $n = 6$ dobijamo navedene familije teselacija.

U lemi smo naveli da je svako teme teselacije ujedno i teme nekog poligona. Ako bismo pretpostavili da nije svako teme poligona i teme teselacije dobili bismo mnogo različitih 1 - uniformnih teselacija. Takođe u teselaciji



Slika 3.58: Postoji četiri familije stelacija.



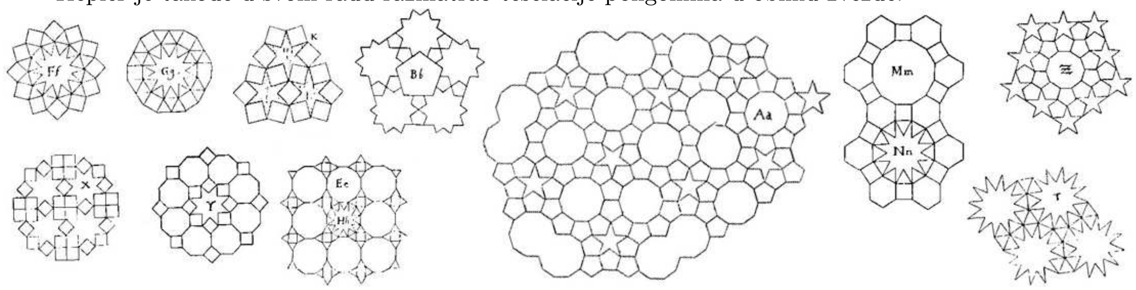
Slika 3.59: Jedna zakrpa u kojoj figuriraju pravilni petouglovi, desetouglovi i poligoni |5/2|.

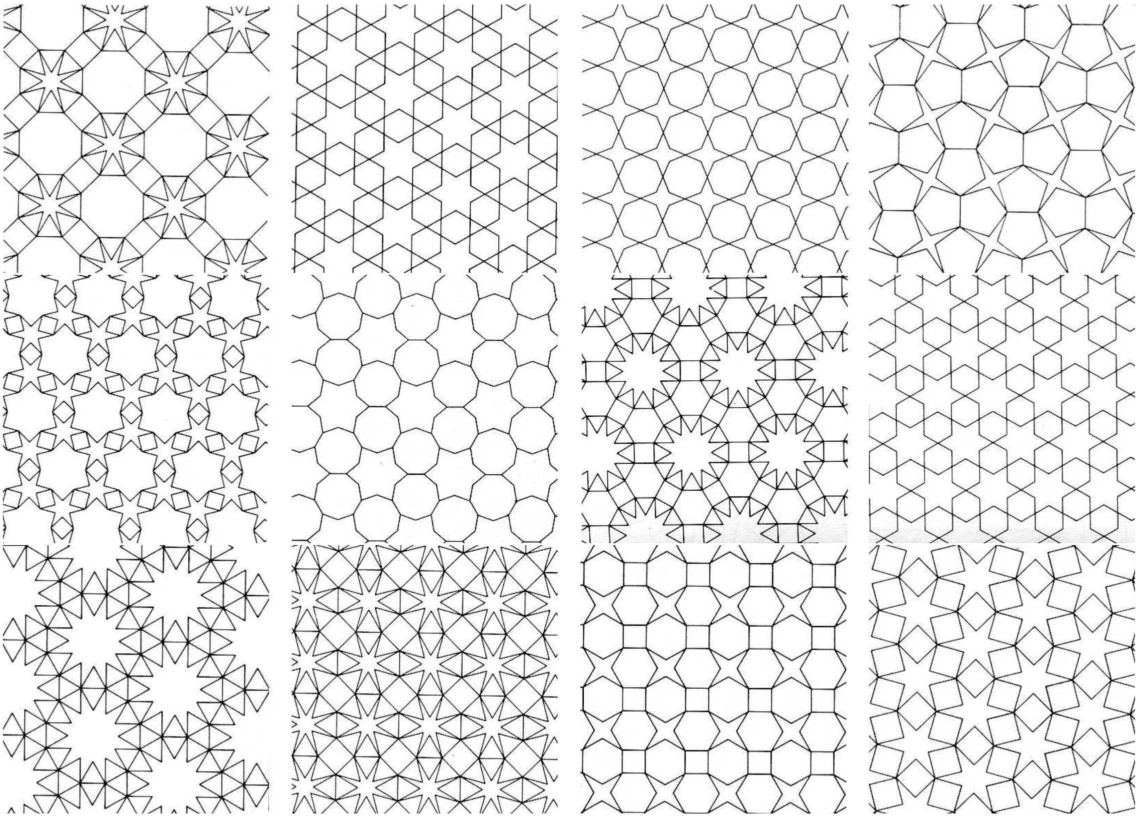
bi u tom slučaju moglo da učestvuje više vrsta poligona u obliku zvezde. Joseph Myers je 2009. godine naveo da postoji 38 2-uniformnih teselacija i 5 beskonačnih familija 2-uniformnih stelacija u zavisnosti od uglova poligona koji čine teselaciju, međutim on ne navodi dokaz svojih tvrdnji.

Kao što je i Kepler[5] uvideo, shvatamo da ne možemo napraviti teselacije koristeći samo pravilne petouglove i još više, zaključujemo da ako u teselaciji koristimo pravilni petougao jedini pravilni poligon koji može da se kombinuje sa njim je neki poligon u obliku zvezde.

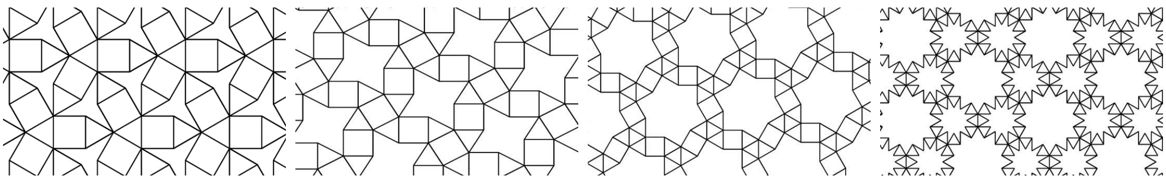
Ako pogledamo Keplerov crtež u kome koristi nekonveksne petouglove u obliku zvezde i konveksne petouglove i desetouglove možemo da konstruišemo zakrpe u obliku romba, koje su sastavljene od delova Keplerovih crteža, i koje možemo da proširimo u teselaciju ravni. Ove zakrpe možemo da slažemo bilo teme na teme, bilo da nisu ivica na ivicu nego da se dodiruju tako da su ivice u odnosu zlatnog preseka.

[5] Kepler je takođe u svom radu razmatrao teselacije poligonima u obliku zvezde.

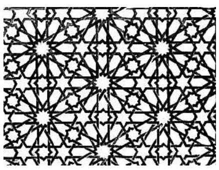




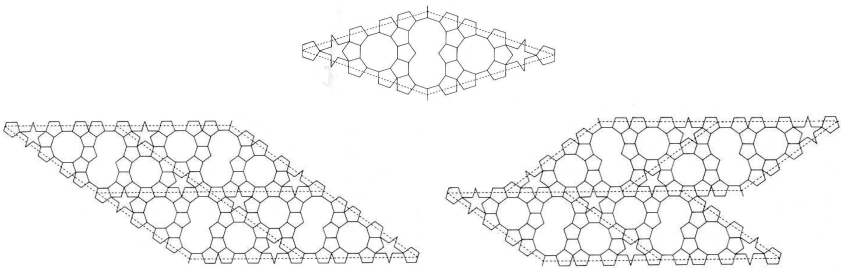
Slika 3.60: Neki primeri stelacija koje su ivica na ivicu.



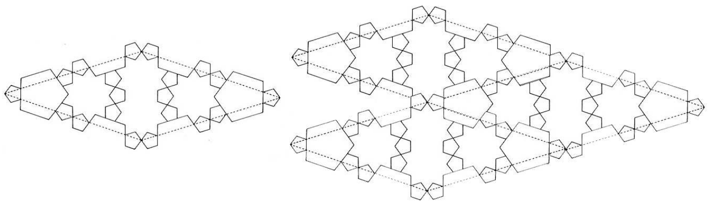
Slika 3.61: Neki primeri 2-uniformnih stelacija.



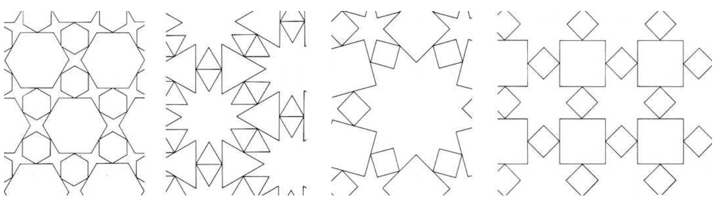
Slika 3.62: Arabeska u kojoj figuriraju poligoni u obliku zvezde, |8/2|, |4/2|, |12/5|. Jasno je da su pored pravilnih poligona u obliku zvezde korišćeni i razni nepravilni osmouglovi i šestouglovi da popune arabesku. Ovo prekrivanje ravni iako je dekorativno, nije pravilno.



Slika 3.63: Zakrpa u obliku romba, koja je sastavljena od delova Keplerovih crteža. Takve zakrpe mogu da se slažu na različite načine čineći tako teselacije euklidske ravni.



Slika 3.64: Još jedan primer zakrpe u obliku romba koja je nastala na osnovu Keplerovog crteža i jedan od načina slaganja tih zakrpi.



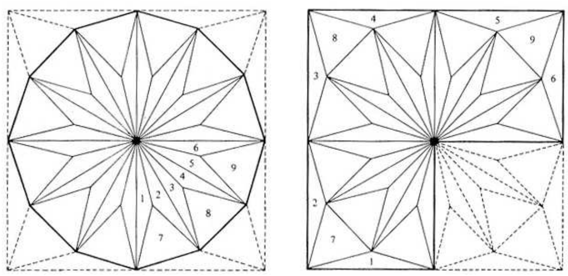
Slika 3.65: Pored stelacija koje su zanimale Keplera i nisu ivica na ivicu, postoji još mnogo takvih stelacija, na slici je prikazano samo par primera.

Glava 4

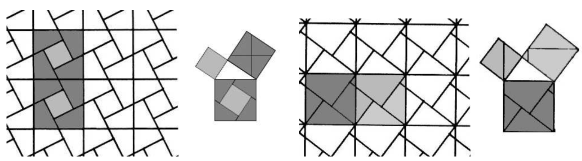
Neke interesantne primene teselacija

4.1 Disekcije pločica

Praveći arapske šare nekad je potrebno *lomiti* pločice. Sada ćemo se malo pozabaviti teselacijama koje mogu nastati lomljenjem pravilnih konveksnih i nekonveksnih poligona.



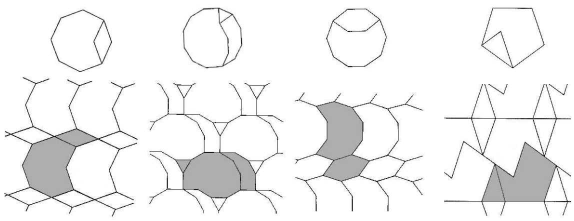
Slika 4.1: Primer disekcije pločice u obliku pravilnog dvanaestougla i predlog kako izračunati njenu površinu ako je dat R, poluprečnik opisanog kruga tog dvanaestougla.



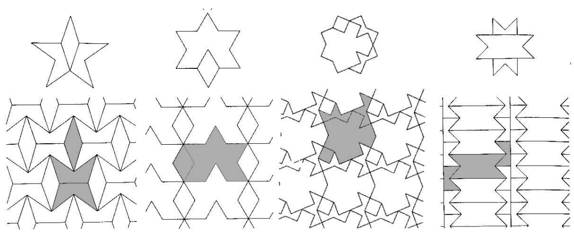
Slika 4.2: Dva načina disekcija pločica teselacije (4^4) pri dokazu Pitagorine teoreme.

Pod *lomljenjem* pravilnih poligona podrazumevaćemo da svaki poligon P može da se podeli na konačan broj delova (taj broj ćemo označavati sa r) koji mogu sa se preslože i čine pločicu monoedarskog prekrivanja ravni. Tako nastale pločice ćemo zvati *r-disekcijama* polaznog poligona.

Tehnika disekcije nam je korisna u nastavi matematike kada na praktičnom primeru možemo da pokažemo neka svojstva poligona kao što su računanje površine ili dokaz Pitagorine teoreme.



Slika 4.3: Još neka zanimljiva monoedarska popločavanja i disekcije pločica koje čine te teselacije.



Slika 4.4: Još neka zanimljiva monoedarska popločavanja i disekcije pločica koje čine te stelacije.

4.2 M. C. Escher i H. S. M. Coxeter

Jedan od najistaknutijih umetnika koji je u svojim radovima koristio princip teselacije je sigurno M. C. Escher. Ovaj holandski umetnik je poznat po svojoj neobičnoj skici *Relativity* gde se igrao sa perspektivom i prikazao nemoguće stepenice ali ništa manje nisu privlačni njegovi crteži u kojima je koristio ideje teselacije euklidske i hiperboličke ravni. Zanimljivo je da je na nekim svojim crtežima radio zajedno sa jednim matematičarem. Naime, modele za njegove crteže koji koriste principe hiperboličke geometrije i Poenkareovog disk modela pravio je jedan od najvećih stručnjaka iz oblasti geometrije tog vremena, H. S. M. Coxeter. Ta saradnja je opisana u njegovom radu *Anđeli i đavoli*. Escher vešto pravi monoedarske teselacije, odnosno pravi kompozicije koristeći samo jedan oblik ali i kombinuje oblike i lako prelazi iz jednog oblika u drugi. Tako upotrebljavajući jednu vrstu pločica u obliku guštera Escher nam daje odličan primer monoedarske teselacije pomoću translacije. Takođe, u Escherovim radovima možemo primetiti i primere translacije i rotacije.

Slika 4.5: Neki Escherovi radovi u kojima je povezao euklidsku i hiperboličku geometriju i umetnost.

Bibliografija

[1] Branko Grunbaum i G. C. Shepard, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman and company, New York, 1987.

[2] H. S. .M. Coxeter, *Introduction to geometry Second edition*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1969.

[3] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija 2. izdanje*, Total Design i Matematički fakultet, Beograd, 1997.

[4] Matila Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, Dover Publications, New York, 1977.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation, 16.4.2012.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_tiling, 16.4.2012.

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_tessellation, 16.4.2012.

[8] Brian Galebach, http://probabilitysports.com/tilings.html, 18.4.2012.

[9] http://www.tessellations.org, 8.5.2012.

[10] E.W. Weisstein, *Isohedral Tiling*, http://mathworld.wolfram.com/IsohedralTiling.html, 9.5.2012.

[11] E.W. Weisstein, *Regular Tessellation*, http://mathworld.wolfram.com/RegularTessellation.html, 12.5.2012.

[12] E.W. Weisstein, *Tessellation*, http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html, 12.5.2012.

[13] http://www.squaring.net/sq/ss/ss.html, 24.5.2012.

[14] Steven Dutch, Natural and Applied Sciences, http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/uniftil.htm, 11.6.2012.

[15] wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling, 27.6.2012.

[16] wikipedia.org/wiki/Archimedes, 30.6.2012.

[17] Joseph Myers, *Tiling with Regular Star Polygons*, http://www.polyomino.org.uk/publications/2009/star-polygon-tiling-2-uniform.pdf, 17.7.2012.

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Islamic_art, 21.7.2012.

[19] Projects by Students for Students, http://library.thinkquest.org/16661/, 5.8.2012.

[20] http://library.thinkquest.org/16661/index2.html, 11.8.2012.