

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Master rad

Primena dvosmerno implicitne lambda iteracije u
rešavanju problema prenosa zračenja u pokretnim
sredinama

Irena Pirković

Beograd, 2012

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Osnovni pojmovi o prenosu zračenja	4
3	Numeričke metode u rešavanju problema prenosa zračenja	7
3.1	Metoda diskretnih ordinata	7
3.2	Direktne metode	7
3.3	Λ iteracija	8
3.4	ALI metode	8
3.5	Metode iteracionih faktora	9
3.6	Lokalne implicitne metode	9
3.6.1	Dvosmerno implicitna Lambda iteracija (FBILI- <i>forth and back implicit Λ iteration</i>)	10
4	Primena FBILI metode u rešavanju problema prenosa zračenja	12
5	Prenos zračenja u pokretnim sredinama	15
5.1	Prenos zračenja u laboratorijskom sistemu	16
5.2	Prenos zračenja u sistemu fluida	19
6	Primena FBILI metode na rešavanje problema prenosa zračenja u pokretnim sredinama (u sistemu posmatrača)	19
6.1	Konačan sloj u plan-paralelnoj geometriji	19
6.2	Sferna atmosfera	23
7	Zaključak	29

1 Uvod

Problem prenosa zračenja je jedan od fundamentalnih problema u astrofizici, jer je zračenje koje primamo osnovni izvor informacija o udaljenim vasionkim objektima.

Astronomskim posmatranjima detektujemo zračenje koje je emitovano sa površine zvezda i drugih nebeskih tela. Da bismo odredili strukturu nebeskih tela i stekli sliku o fizičkim karakteristikama sredine koja emituje, neophodno je da rešimo jednačinu prenosa zračenja kroz pretpostavljeni model te sredine i uporedimo izračunati spektar sa posmatranim. Model popravljamo dok se ne postigne slaganje ova dva spektra. Tako, numeričko rešenje problema prenosa zračenja predstavlja preduslov za modeliranje oblasti koje emituju registrovano zračenje. U slučaju zvezda, oblasti u kojima nastaje posmatrani spektar su zvezdane atmosfere.

Spektar zračenja se formira u tzv. slobodno-slobodnim i slobodno-vezanim prelazima (kontinuum) kao i vezano-vezanim prelazima (linije) u atomima i jonima raznih hemijskih elemenata. Tokom prostiranja, zračenje interaguje sa česticama okolne sredine, menjajući stanje gasa, ali i sopstvene karakteristike (apsorpcija, rasejanje).

Koliko će problem prenosa zračenja kroz neku sredinu biti komplikovan zavisi od osobina te sredine, a samim tim od aproksimacija koje se mogu koristiti pri njegovom rešavanju.

Intenzitet zračenja zavisi od ekscitacionog i jonizacionog stanja gasa, tj. od naseljenosti energetskih nivoa između kojih se vrše prelazi. U slučaju kada sudarni procesi dominiraju nad radijativnim i kada su gas i zračenje u lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži (LTR), naseljenosti nivoa su funkcije samo *lokalne* temperature i elektronske koncentracije i mogu se izračunati pomoću Bolcmanove i Sahine formule.

U opštem slučaju, naseljenosti energetskih nivoa kroz radijativne prelaze zavise i od polja zračenja. To komplikuje rešavanje problema prenosa (izračunavanje intenziteta) zračenja koji je u ovom slučaju jako nelokalan, jer stanje gasa u jednoj tački sredine, posredstvom polja zračenja, zavisi od stanja gasa u svim tačkama te sredine (ne-LTR).

Pošto u opštem slučaju naseljenost jednog energetskog nivoa u nekom atomu zavisi (kroz radijativne i sudarne prelaze) od naseljenosti ostalih energetskih nivoa, za izračunavanje zračenja u spektralnim linijama često se koristi pojednostavljeni model atoma sa samo dva energetska nivoa. Ovim modelom se dobro opisuje formiranje rezonantnih linija. U ovoj aproksimaciji dobija se linearna i eksplicitna zavisnost naseljenosti nivoa od polja zračenja u liniji, pa se ovako postavljen problem može rešiti bilo nekim direktnim ili iterativnim metodom. Za rešavanje problema formiranja linija atomima sa više nivoa (eng. *multi-level* problem), potrebno je koristiti neku iterativnu metodu, pošto nije moguće dobiti eksplicitan izraz za funkciju izvora.

Postoje mnogi objekti kod kojih je neophodno rešiti jednačinu prenosa zračenja uzimajući u obzir kretanje sredine. To su npr. atmosfere zvezda u širenju (Wolf-Rayet i druge vrele zvezde sa snažnim zvezdanim vetrovima, nove, supernove), magline u širenju, akrecioni diskovi u tesno dvojnim sistemima ili aktivnim gala-

kličkim jezgrima, Sunčeve protuberance i dr. U tim slučajevima je problem prenosa zračenja znatno složeniji nego u slučaju statičnih sredina jer koeficijenti apsorpcije i emisije zavise i od pravca prostiranja zračenja. Osim toga, pri modeliranju ovih sredina prenos zračenja se mora rešavati istovremeno sa hidrodinamičkim jednačinama. Rešavanje ovog problema zahteva efikasne, tačne i brzo-konvergentne numeričke metode.

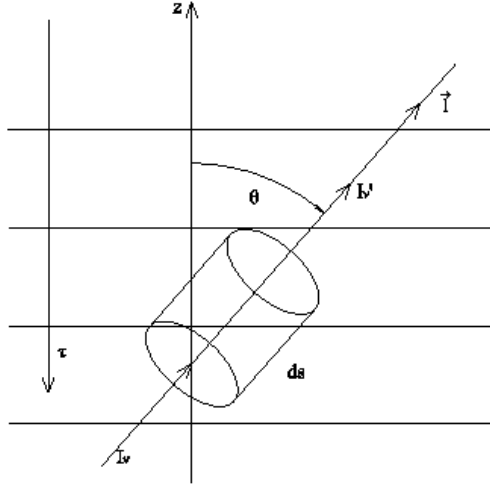
Osnovni cilj ovog master rada je primena dvosmerno implicitne lambda iteracije, efikasne i brzo-konvergentne metode, na rešavanje problema prenosa zračenja u pokretnim sredinama. U poglavlju 2 su predstavljeni osnovni pojmovi i veličine u teoriji prenosa zračenja (jednačini prenosa zračenja), dok su u poglavlju 3 predstavljene numeričke metode za rešavanje jednačine prenosa sa posebnim naglaskom na metodu dvosmerno implicitne lambda iteracije, koja se koristi i uopštava u ovom radu. U poglavlju 4 ukratko je izložena osnovna ideja ove metode. Prenos zračenja u pokretnim sredinama, u sistemu posmatrača i sistemu vezanom za fluid (eng. *comoving frame*) razmatran je u poglavlju 5, dok su u poglavlju 6 prikazani i diskutovani rezultati primene ove metode na dva astrofizički značajna slučaja: (a) pokretnog plan-paralelnog sloja konačne debljine i (b) sferne atmosfere u širenju. U Zaključku je dat osvrt na izložene rezultate i pobrojane su ideje za buduća istraživanja.

2 Osnovni pojmovi o prenosu zračenja

Jednačina prenosa zračenja¹ opisuje vremensku i prostornu promenu specifičnog intenziteta zračenja $I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$ frekvencije ν , u tački vektora položaja \vec{r} , koji se prostire u pravcu \vec{l} i u trenutku t kroz neku sredinu (vidi sliku 1). U opštem slučaju jednačina prenosa ima sledeći oblik (Mihalas 1978):

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right] I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) = \eta_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) - \chi_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t). \quad (1)$$

Ovde je c je brzina svetlosti (fotona), a $\eta_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$ i $\chi_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$ su koeficijenti emisije i ekstinkcije, respektivno (vidi sliku 1). U ovim koeficijentima su sadržani detaljni interakcije zračenja i materije.



Slika 1: Prostiranje zračenja kroz element zapremine gasa cilindričnog oblika u pravcu \vec{l} duž ose cilindra koji sa normalom na sloj zaklapa ugao θ .

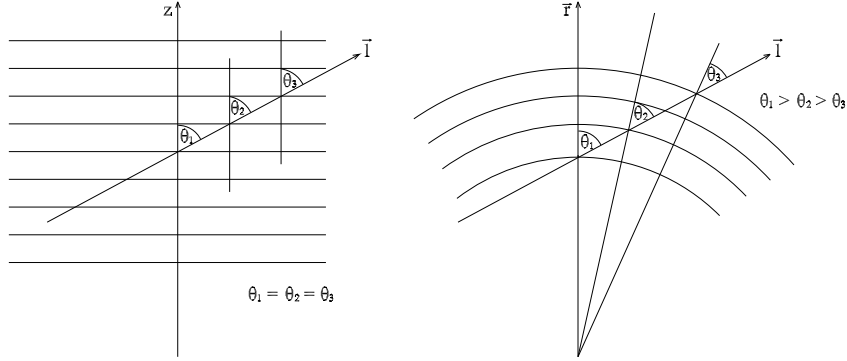
U plan-paralelnoj geometriji (slika 2, levo), sa z osom u pravcu normale na slojeve, uz pretpostavku stacionarnosti ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) i statičnosti (koeficijent ekstinkcije ne zavisi od pravca) i u slučaju izotropnog rasejanja (koeficijent emisije ne zavisi od pravca), jednačina prenosa zračenja ima oblik:

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \mu)}{dz} = \eta_\nu(z) - \chi_\nu(z) I_\nu(z, \mu). \quad (2)$$

Ovde je uvedena sledeća notacija za pravac prostiranja zračenja: $l_z = \vec{l} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta \equiv \mu$, $\mu \in [-1, 1]$. Uvođenjem skale geometrijske dubine $dh = -dz$ možemo pisati:

$$\mu \frac{dI_\nu(h, \mu)}{dh} = \chi_\nu(h) I_\nu(h, \mu) - \eta_\nu(h). \quad (3)$$

¹Kinetička jednačina za fotone.



Slika 2: Uz definiciju jednačine prenosa u plan-paralelnoj (levo) i sfernoj geometriji (desno).

Ako uvedemo skalu optičke dubine $d\tau_\nu = -\chi_\nu(z)dz$ i funkciju izvora $S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}$, jednačina (2) postaje:

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - \frac{\eta_\nu(\tau_\nu)}{\chi_\nu(\tau_\nu)} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu). \quad (4)$$

U sfernoj geometriji (vidi sliku 2, desno) jednačina prenosa je oblika:

$$\mu \frac{\partial I_\nu(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu(r, \mu)}{\partial \mu} = -\chi_\nu(r) [I_\nu(r, \mu) - S_\nu(r)], \quad (5)$$

gde se sada javlja član koji uzima u obzir zakrivljenost slojeva, tj. promenu ugla θ duž srednje slobodne putanje fotona λ ($d\theta/\lambda = -\sin\theta/r = -(1 - \mu^2)^{1/2}/r$).

U teoriji prenosa zračenja često se koriste prva tri momenta specifičnog intenziteta zračenja:

- srednji intenzitet: $J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu$

- astrofizički fluks: $F_\nu(\tau_\nu) = 2 \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu d\mu$

- K - integral: $K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu^2 d\mu$.

Ako je funkcija izvora poznata, koristeći sledeće operatore:

$$\Lambda_\tau\{\dots\} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{\dots\} E_1|t - \tau| dt, \quad (6a)$$

$$\Phi_\tau\{\dots\} = 2 \int_\tau^\infty \{\dots\} E_2(t - \tau) dt - 2 \int_0^\tau \{\dots\} E_2(\tau - t) dt, \quad (6b)$$

$$X_\tau\{\dots\} = 2 \int_0^\infty \{\dots\} E_3|t - \tau| dt, \quad (6c)$$

gde je $E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xy} y^{-n} dy$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tzv. integro-eksponencijalna funkcija, dobijamo:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad (7a)$$

$$F_\nu(\tau_\nu) = \Phi_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}, \quad (7b)$$

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{4} X_\tau\{S_\nu(t_\nu)\}. \quad (7c)$$

U zavisnosti od oblika finkcije izvora S može se razmatrati nekoliko karakterističnih slučajeva:

1. Termodinamička ravnoteža (TDR): $S_\nu = B_\nu(T) = I_\nu$, gde je B_ν Plankova funkcija.
2. Lokalna termodinamička ravnoteža (LTR): $S_\nu = B_\nu(T^*)$, na lokalnoj temperaturi T^* ; $I_\nu \neq B_\nu(T^*)$ i dobija se rešavanjem jednačine prenosa, koja je u ovom slučaju obična diferencijalna jednačina prvog reda.
3. Sva izračena energija potiče od fotona rasejanih u razmatranom pravcu (slučaj čistog rasejanja). Za izotropno rasejanje: $S_\nu = J_\nu$. Jednačina prenosa zračenja je integro-diferencijalna.
4. Funkcija izvora je težinska srednja vrednost termalnih procesa (B_ν) i rasejanja (integral rasejanja). Tada je specifični intenzitet zračenja rešenje jednačine prenosa koja je integro-diferencijalna. Ako je rasejanje koherentno i izotropno važi: $S_\nu = L_\nu B_\nu + (1 - L_\nu) J_\nu$. Ovde je $L_\nu = \frac{\chi_\nu^t}{\chi_\nu^t + \chi_\nu^r}$, gde su χ_ν^t i χ_ν^r koeficijenti termalne apsorpcije odnosno rasejanja.

Da bismo jednoznačno rešili jednačinu prenosa (kao i bilo koju diferencijalnu jednačinu), potrebno je da zadamo odgovarajuće granične uslove. Postoje dva astrofizički značajna problema:

1. Sloj (u plan-paralelnoj) ili ljuska (u sfernoj geometriji) konačne debljine T_ν :

$$\begin{aligned} \tau_\nu = 0 &\Rightarrow I_\nu^-(0, \mu) = I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu < 0) \\ \tau_\nu = T_\nu &\Rightarrow I_\nu^+(T_\nu, \mu) = I_\nu(\tau_\nu = T_\nu, \mu > 0) \end{aligned}$$

2. Polu-beskonačna atmosfera:

$$\tau_\nu = 0 \Rightarrow I_\nu^-(0, \mu) = 0,$$

ako u blizini nema nekog intenzivnog izvora zračenja, kao što je, na primer, slučaj u tesno dvojnim sistemima.

$$\tau_\nu \rightarrow \infty \Rightarrow I_\nu(\tau_\nu, \mu) e^{-\tau_\nu/\mu} = 0,$$

odnosno intenzitet na velikim optičkim dubinama teži konačnoj vrednosti. Pri numeričkom rešavanju donji granični uslov možemo pisati u tzv. difuznoj aproksimaciji:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = S_\nu(\tau_\nu) + \mu dS_\nu/d\tau_\nu.$$

Osnovna razlika u proučavanju zračenja u linijama i u kontinuumu leži u frekventnoj zavisnosti koeficijenta ekstinkcije (jača zavisnost od frekvencije za slučaj linija).

3 Numeričke metode u rešavanju problema prenosa zračenja

3.1 Metoda diskretnih ordinata

Ova metoda je od velikog je značaja jer leži u osnovi svih modernih tehnika. U osnovi je analitička, ali zahteva numeričke tehnike za svoju praktičnu realizaciju. Ovu metodu je razvio Čandrasekar (*Chandrasekhar*) 1950. godine za slučaj koherentnog rasejanja, a kasnije je uopštena i za nekoherentno rasejanje. Sastoji se u tome da se kontinualne vrednosti svih relevantnih veličina problema zamene diskretnim vrednostima na svakoj frekvenciji, u svakom pravcu i na svakoj optičkoj dubini. Tada se integrali pomoću kvadrature formula zamenjuju sumama, pa integro-diferencijalna jednačina postaje sistem linearnih diferencijalnih jednačina.

Generalno se metode u rešavanju prenosa zračenja dele na direktne i iterativne.

3.2 Direktne metode

Jedna od najpoznatijih direktnih metoda matrične diskretizacije je Fotrijeova metoda (Feautrier 1964a). Ona koristi diferencijalni oblik jednačine prenosa i izvode zamenjuje konačnim razlikama. Mana ove metode je u vremenu koje je potrebno za invertovanje matrica², čije su dimenzije jednake broju diskretnih ordinata potrebnih za opis zavisnosti intenziteta zračenja od pravca i frekvencije (vreme invertovanja matrice je proporcionalno trećem stepenu dimenzije matrice).

Pored ove, koristi se i metoda Rajbikija (*Rybicki*). U svom radu iz 1971. on je ukazao na činjenicu da je u slučaju kompletne redistribucije većina informacija koje se odnose na frekvencije suvišna, kako nam za računanje funkcije izvora treba samo \bar{J} . Na taj način smanjujemo vreme koje je potrebno za računanje.

Za rešavanje globalnog problema konstrukcije zvezdanih atmosfera (jednačine prenosa zračenja sa nelinearnim uslovima statističke, radijativne i hidrostatičke ravnoteže), Auer i Mihalas su u svom radu iz 1969. godine razvili metodu kompletne linearizacije (višedimenzioni Njutn-Rapsonov metod). Uzajamna povezanost svih fizičkih veličina je uzeta u obzir kompletnom linearizacijom jednačina (razvoj do prvog reda oko početne procene) po svim relevantnim promenljivama problema i njihovim istovremenim rešavanjem. Da bi se jednačine svele na algebarski oblik, diskretizuju se sve nezavisne promenljive (pravci, frekvencije, optičke dubine), izvodi se zamene konačnim razlikama, a integrali kvadrature sumama. Potrebno je uzeti neke početne vrednosti za sve nepoznate veličine, pa se sistem rešava po korekcijama tekućeg rešenja. Konvergencija je brza ako se za početne vrednosti uzmu vrednosti bliske tačnim. U radu iz 1969. godine, za rešavanje dobijenih linearizovanih jednačina korišćena je Fotrijeova šema, dok su u radu iz 1976. godine Auer i Hesli (Heasley) koristili šemu Rajbikija, koja se pokazala boljom što se tiče računarskog vremena u problemima koji zahtevaju veliki broj frekventnih tačaka.

²Ako je funkcija izvora poznata, invertovanje matrica se svodi na deljenje i u tom slučaju se sistem rešava znatno brže.

3.3 Λ iteracija

Prva ideja u rešavanju nelokalnog problema prenosa zračenja je tzv. Lambda iteracija, u kojoj se naizmenično rešavaju jednačine prenosa zračenja i statističke ravnoteže, do zadovoljavajuće tačnosti. Prednost ove metode je što je jednostavna, a mana je što za sredine sa velikim optičkim dubinama, gde rasejanje dominira, jako sporo konvergira. Pored toga, problem Λ iteracije je i taj što čak i kada je relativna razlika između rešenja u dve uzastopne iteracije jako mala, rešenje još uvek može da bude daleko od tačnog.

3.4 ALI metode

Pored direktnih metoda, koje koriste tačan opis prenosa zračenja, postoje i metode koje se zasnivaju na korišćenju neke aproksimacije da bi se pojednostavio opis problema. Te aproksimacije mogu da slede iz fizike problema prenosa, ili da budu aproksimacije pri numeričkom rešavanju problema. Da bi se na ovaj način dobilo tačno rešenje (do unapred zadate tačnosti), potrebno je problem rešavati iterativno. Prednost ovih iterativnih metoda nad direktnim je u njihovoj jednostavnosti, pa samim tim i lakšoj kontroli algoritma i većoj tačnosti zbog manjeg broja neophodnih numeričkih operacija.

Prva aproksimacija koja se zasnivala na izučavanju fizike problema je saturacija u jezgru (Rybicki 1972). Ona pretpostavlja da je na frekvencijama u jezgru linije monohromatski srednji intenzitet polja zračenja jednak lokalnoj funkciji izvora. Ovom pretpostavkom se eliminiše rasejanje u jezgru linije, koje ne doprinosi mnogo procesu prenosa zračenja. U radu je pretpostavka saturacije u jezgru korišćena u jednačinama statističke ravnoteže. Ovako izmenjena Λ iteracija konvergira brže od obične. Mana ove metode je što je potrebno uvesti parametar pomoću koga određujemo region jezgra linije. Što je vrednost tog parametra dalja od optimalne, to je konvergencija sporija, pa čak rešenje može i da divergira.

Kenon (Cannon 1973a,b) je prvi u rešavanje problema prenosa zračenja uveo ideju (koja je već postojala u matematici) da se Λ operator podeli na dva dela, jedan - aproksimativni Λ operator - koji je jednostavan za invertovanje i drugi, koji predstavlja perturbaciju. Umesto tačnog operatora se onda koristi aproksimativni i mala greška koja se pri tom pravi se računa koristeći perturbacionu tehniku.

Operatori koji mogu da se na ovaj način koriste umesto tačnog su donekle proizvoljni; bitno je da operator bude jednostavniji za inverziju od Λ operatora, ali i da bude što bliži tačnom Λ operatoru zbog stabilnije i brže konvergencije ka tačnom rešenju.

U mnogim radovima (Scharmer 1981; Scharmer & Carlsson 1985; Werner 1986; Hamman 1985; Olson et al. 1986) kombinovane su ideje saturacije jezgra i perturbaciona tehnika (u primeni na razne probleme: ne-LTR sa poljima brzina, problem atoma sa više nivoa, sferna geometrija,...) i u njima su korišćeni razni aproksimativni operatori: Λ operator sa manje uglovnih i frekventnih kvadraturnih tačaka, dijagonala Λ matrice, tridijagonalni ili pentadijagonalni deo tačnog Λ operatora... Ove metode se zbog korišćenja aproksimativnog Λ operatora nazivaju ALI metode (metode aproksimativne Lambda iteracije).

Iako je upotreba ALI metoda omogućila da se rešavaju i komplikovaniji problemi, ove metode imaju izvesne mane. Na primer, ako uzmemo za aproksimativni operator dijagonalni operator koji se lako invertuje, konvergencija je spora. Sa druge strane, konvergencija se ubrzava ako koristimo npr. tridijagonalni operator, ali se onda jednačine komplikuju i rešenja postaju manje stabilna. Skoro sve ALI metode u primeni zahtevaju neke dodatne matematičke tehnike ubrzavanja konvergencije.

3.5 Metode iteracionih faktora

Pored nabrojanih iterativnih metoda, postoje još i metode gde se iterativno računaju tzv. iteracioni faktori. Da bi se postigla brza konvergencija, ti faktori treba da budu dobre kvazi-invarijantne funkcije, tj. da se veoma malo menjaju iz jedne iteracije u drugu. To se postiže tako što se definišu kao odnosi homolognih (sličnih) fizičkih veličina.

Ova ideja se prvi put javlja u radu Fotrijea (Feautrier 1964b). On je predložio da se koristi odnos dva momenta intenziteta zračenja, kako bi se ubrzalo računanje modela zvezdanih atmosfera. Prvi su tu ideju realizovali Auer i Mihalas u radu iz 1970. godine za plan-paralelnu, i Hamer (*Hummer*) i Rajbiki 1971. godine za sfernu geometriju. U oba rada se koristi tehnika promenljivih Edingtonovih (*Eddington*) faktora (VEF), koji predstavljaju odnos K-integrala i srednjeg intenziteta zračenja. Korišćenjem ove tehnike, jako se brzo dolazi do tačnog rešenja, bez glomaznog računa sa invertovanjem matrica. Još jedna prednost je to što nije puno komplikovanija od Λ iteracije. Ovom metodom, kao i njenom generalizacijom gde se za iteracione faktore uzimaju odnosi nekih drugih fizičkih veličina, rešavani su razni problemi prenosa zračenja (Borsenberger, Oxenius, & Simonneau 1987; Simonneau & Crivellari 1988; Crivellari & Simonneau 1991; Fieldus et al. 1990; Simonneau & Atanacković-Vukmanović 1991; Atanacković-Vukmanović 1991; Atanacković-Vukmanović & Simonneau 1994, Kuzmanovska-Barandovska & Atanacković 2010). Definicija iteracionih faktora zavisi od problema na koji se ova metoda primenjuje, odnosno, iteracioni faktori se biraju u zavisnosti od fizike problema.

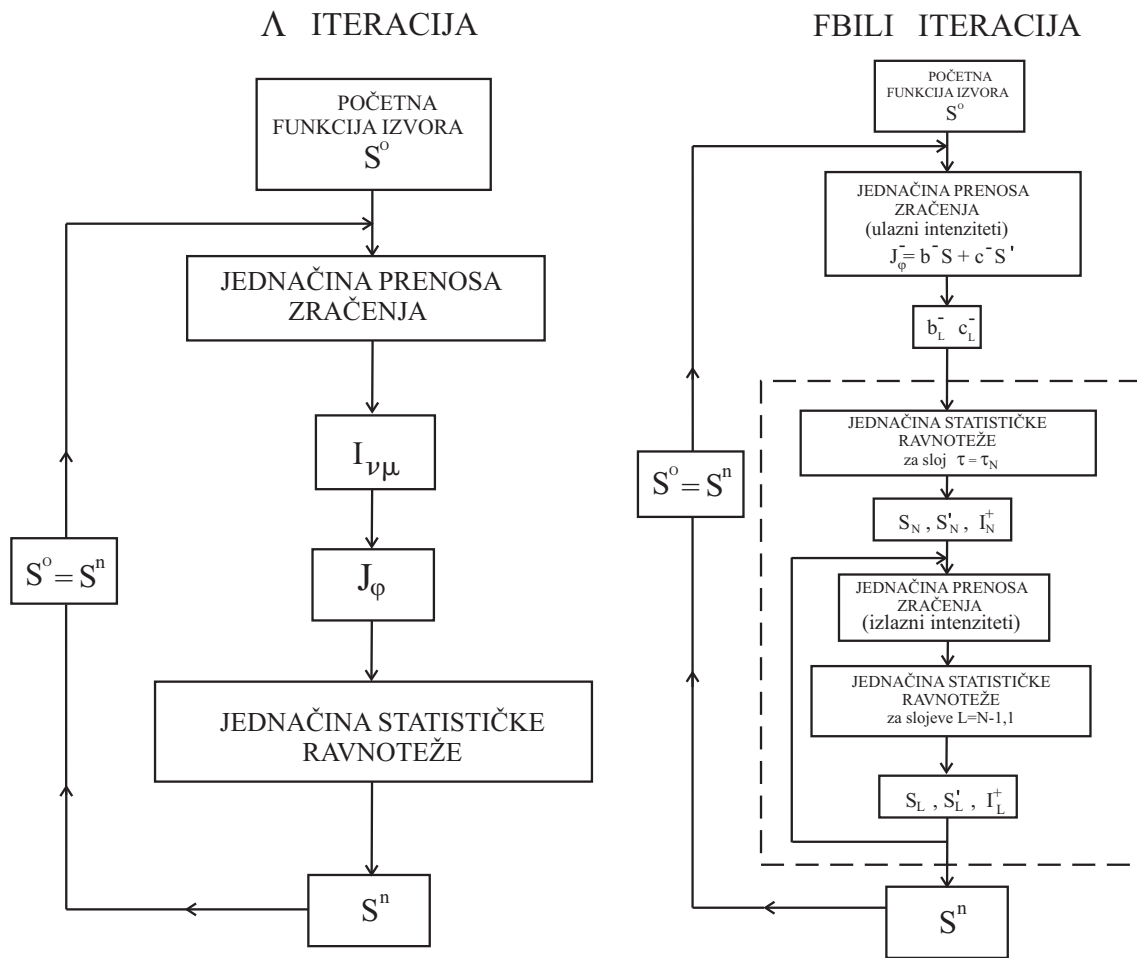
3.6 Lokalne implicitne metode

Drugačiji pristup rešavanju problema prenosa zračenja koji je jednostavan za korišćenje i vrlo efikasan, razvijen je među direktnim (IIM - eng. *Implicit integral method*) i među iterativnim metodama (FBILI - eng. *Forth and back implicit Lambda iteration*). U ovim metodama se koristi činjenica da, iako nam nisu poznate vrednosti intenziteta zračenja, lako možemo da predstavimo njegovu promenu iz sloja u sloj. Slično diferencijalnim metodama (Fotrijea ili Rajbikija), ove metode koriste linearnu relaciju između nepoznatih intenziteta zračenja na dve uzastopne optičke dubine. Sa druge strane, koristi se (lokalni) implicitni tretman problema prenosa zračenja, koji se zasniva na funkcionalnoj reprezentaciji funkcije izvora između dve susedne optičke dubine, što je slično globalnom integralnom formalizmu. Matrični formalizam je potpuno izbegnut, što znači da je za ovakve proračune potrebno manje vremena i računarske memorije.

3.6.1 Dvosmerno implicitna Lambda iteracija (FBILI - *forth and back implicit Λ iteration*)

Efikasan metod koji je razvijen da ubrza konvergenciju klasične Λ iteracije, zadržavajući pri tom njenu jednostavnost je dvosmerno implicitna lambda iteracija (eng. *Forth and Back Implicit Lambda Iteration*). U ovoj metodi se za računanje ulaznog i izlaznog zračenja (koji se tretiraju odvojeno - model dva fluida) koristi implicitni oblik funkcije izvora. Uz pretpostavku da je S polinom i koristeći integralni oblik jednačine prenosa zračenja, možemo pisati linearne relacije za specifični intenzitet zračenja u funkciji nepoznatih vrednosti funkcije izvora i njenog izvoda (po τ). Da bi se postigla brza konvergencija, umesto samih nepoznatih funkcija iterativno računamo koeficijente ovih implicitnih (S je nepoznata) relacija. Na početku iteracije, polazimo od gornjeg graničnog uslova (uglavnom je ulazni specifični intenzitet jednak nuli) i koristimo početnu ili iz prethodne iteracije izračunatu funkciju izvora. Dalje računamo i čuvamo koeficijente linearne relacije između ulaznog srednjeg intenziteta i funkcije izvora. Za dobijanje nove, popravljene vrednosti funkcije izvora, potrebno je dobiti koeficijente linearne relacije između ukupnog srednjeg intenziteta i funkcije izvora i zameniti ih u jednačine statističke ravnoteže. Da bismo dobili ove koeficijente, trebaju nam još koeficijenti implicitne relacije za izlazni srednji intenzitet zračenja. Njih dobijamo tako što krenemo od donjeg graničnog uslova, pa ih za svaki sledeći sloj ka površini računamo istovremeno sa novom funkcijom izvora. Proceduru ponavljamo do konvergencije (vidi sliku 3).

U poređenju sa klasičnom Λ iteracijom, ovaj metod zahteva jako mali dodatni napor, a konvergencija ka tačnom rešenju je jako brza (mnogo brža od konvergencije Λ iteracije). Metod je razvijen za ne-LTR problem formiranja linija u radovima Atanacković-Vukmanović (1991) i Atanacković-Vukmanović, Crivellari & Simonneau (1997). Efikasnost i tačnost je testirana na raznim problemima: atom sa 2 nivoa u aproksimaciji kompletne redistribucije, generalizacija na parcijalnu redistribuciju, kao i na problem atoma sa više nivoa (eng. *multi-level*) sa kompletnom redistribucijom zračenja. Generalizacija na sferno-simetrične sredine je rađena u radu Atanacković-Vukmanović (2003). Konvergencija se u svim test problemima postiže izuzetno brzo, čak i u slučajevima velikog odstupanja od LTR.



Slika 3: Šeme klasične Λ iteracije i FBILI metode.

4 Primena FBILI metode u rešavanju problema prenosa zračenja

Podsetimo se najpre ukratko rešenja problema prenosa zračenja u liniji metodom dvosmerno implicitne Λ iteracije na primeru plan-paralelne, statične i stacionarne sredine. Radi jednostavnosti u prikazu metode, zanemarujemo neprozračnost u kontinuumu i pretpostavljamo da se linija formira atomima sa dva nivoa. U plan-paralelnoj geometriji, uz pretpostavke statičnosti, stacionarnosti i izotropnog rasejanja, potrebno je rešiti jednačinu:

$$\mu \frac{dI_{x\mu}(\tau)}{d\tau} = \phi_x(\tau)[I_{x\mu}(\tau) - S(\tau)]. \quad (8)$$

Ovde je $\phi_x(\tau)$ normalizovani apsorpcioni profil linije koji može biti Gausov, Lorensov ili, u opštem slučaju, Fojtov³). Umesto frekvencije ν uvodi se bezdimenziona frekvencija $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$, koja predstavlja frekventno rastojanje od centra linije u jedinicama Doplerove širine. Takođe, frekventno zavisna optička dubina data je kao proizvod srednje optičke dubine u liniji i apsorpcionog profila.

Da bismo jednačinu (8) numerički rešili, umesto kontinualnih vrednosti promenljivih uzećemo tri niza diskretnih vrednosti za nezavisne promenljive (NP pravaca, NF frekvencija i N optičkih dubina), a vrednosti ostalih promenljivih ćemo onda računati za sve vrednosti promenljivih od kojih zavise.

Kako ćemo razmatrati atom sa dva nivoa, funkcija izvora se može izraziti eksplicitno kao linearna funkcija polja zračenja u liniji. Ako uvedemo ne-LTR parametar, koji predstavlja verovatnoću destrukcije fotona u procesima sudarne deekscitacije, $\varepsilon = C_{ul}/(A_{ul} + C_{ul})$, možemo da pišemo funkciju izvora u liniji kao:

$$S(\tau) = \varepsilon B(\tau) + (1 - \varepsilon)J_\phi(\tau) \quad (9)$$

gde je $J_\phi(\tau)$ integral rasejanja:

$$J_\phi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_x \int_{-1}^1 d\mu I_{x\mu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_x J_x(\tau) \quad (10)$$

Sistem jednačina (8)-(10) se rešava na sledeći način.

U iteraciju ulazimo sa nekom pretpostavljenom početnom funkcijom izvora, ili sa dobijenom iz prethodne iteracije. Obično se za početnu vrednost uzima Plankova funkcija B .

Krećemo od gornjeg graničnog uslova (na površini zvezde ili na strani konačnog sloja koja je bliža posmatraču, odnosno na $\tau = 0$). Kako nećemo razmatrati tesno dvojne sisteme, pretpostavljamo da je ulazni intenzitet zračenja na gornjoj granici nula ($I_{x\mu}^-(\tau_1 = 0) = 0$). Dalje, koristeći integralni oblik jednačine prenosa, računamo ulazni intenzitet na svim ostalim optičkim dubinama τ_l , $l = 2, \dots, N$ kao:

$$I_{x\mu}^-(\tau_l) = I_{x\mu}^-(\tau_{l-1})e^{-\Delta\tau_l\phi_x/\mu} + \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} S(t)e^{-(\tau_l-t)\phi_x/\mu} \frac{\phi_x}{\mu} d\mu, \quad (11)$$

³Fojtov (*Voigt*) profil predstavlja konvoluciju Gausovog i Lorencovog profila.

gde je $\Delta\tau_l = \tau_l - \tau_{l-1}$.

Ako funkciju izvora pod integralom aproksimiramo kubnom funkcijom između tačaka τ_l i τ_{l-1} , korišćenjem parcijalne integracije i eliminacijom izvoda višeg reda po S , dobija se jednačina:

$$I_{x\mu}^-(\tau_l) = I_{x\mu}^-(\tau_{l-1})e^{-\Delta\tau_l\phi_x/\mu} + a_1S(\tau_l) + a_2S(\tau_{l-1}) + a_3S'(\tau_l) + a_4S'(\tau_{l-1}), \quad (12)$$

gde se za koeficijente a_1 do a_4 dobijaju sledeći izrazi:

$$a_1 = 1 - \frac{6}{\Delta^2} + \frac{12}{\Delta^3} - e^{-\Delta} \left(\frac{6}{\Delta^2} + \frac{12}{\Delta^3} \right) \quad (13a)$$

$$a_2 = \frac{6}{\Delta^2} - \frac{12}{\Delta^3} - e^{-\Delta} \left(1 - \frac{6}{\Delta^2} - \frac{12}{\Delta^3} \right) \quad (13b)$$

$$a_3 = \frac{\mu}{\phi_x} \left[-1 + \frac{4}{\Delta} - \frac{6}{\Delta^2} + e^{-\Delta} \left(\frac{2}{\Delta} + \frac{6}{\Delta^2} \right) \right] \quad (13c)$$

$$a_4 = \frac{\mu}{\phi_x} \left[\frac{2}{\Delta} - \frac{6}{\Delta^2} + e^{-\Delta} \left(1 + \frac{4}{\Delta} + \frac{6}{\Delta^2} \right) \right] \quad (13d)$$

pri čemu je uvedena oznaka $\Delta = \frac{\Delta\tau_l\phi_x}{\mu}$.

Ako eliminišemo $S'(\tau_{l-1})$ korišćenjem $S'(\tau_{l-1}) = 2\frac{S(\tau_l)-S(\tau_{l-1})}{\Delta\tau_l} - S'(\tau_l)$, dobijamo:

$$I_{x\mu}^-(\tau_l) = a_{x\mu}^- + b_{x\mu}^-S(\tau_l) + c_{c\mu}^-S'(\tau_l), \quad (14)$$

gde su:

$$a_{x\mu}^- = I_{x\mu}^-(\tau_{l-1})e^{-\Delta\tau_l\phi_x/\mu} + (a_2 - 2a_4/\Delta\tau_l)S(\tau_{l-1}), \quad (14a)$$

$$b_{x\mu}^- = a_1 + 2a_4/\Delta\tau_l, \quad (14b)$$

$$c_{c\mu}^- = a_3 - a_4. \quad (14c)$$

Iz uslova na gornjoj granici, da je ulazni intenzitet jednak nuli, sledi da tu i koeficijenti $a_{x,\mu}^-$, $b_{x,\mu}^-$ i $c_{x,\mu}^-$ takođe moraju biti jednaki nuli.

Posle numeričke integracije relacije (14) po pravcima i frekvencijama dobijamo relaciju:

$$J_\phi^-(\tau_l) = b_l^-S(\tau_l) + c_l^-S'(\tau_l), \quad (15)$$

gde su:

$$b_l^- = \sum_{i=1}^{NF} \sum_{j=1}^{NP} \omega_x \omega_\mu (a_{x\mu}^-/S(\tau_l) + b_{x\mu}^-), \quad (16a)$$

$$c_l^- = \sum_{i=1}^{NF} \sum_{j=1}^{NP} \omega_x \omega_\mu c_{x\mu}^- . \quad (16b)$$

U ovom delu iteracije (eng. *forward elimination*) stara vrednost funkcije izvora se ne koristi za računanje J_ϕ^- već koeficijenta implicitne linearne relacije između J_ϕ^- i S (b_l^- i c_l^-). Iterativno određivanje ovih koeficijenata znatno doprinosi ubrzanju konvergencije. Primitimo da i sam koeficijent b_l^- sadrži odnos nelokalnog dela prenosa zračenja $a_{x\mu}^-$ i funkcije izvora S , što predstavlja iteracioni faktor.

Sada polazimo od datog donjeg graničnog uslova za $I_{x\mu}^+(\tau_N)$ koji zavisi od konkretnog problema. U polu-beskonačnoj atmosferi se može pretpostaviti da važi difuzna aproksimacija $I_{x\mu}^+(\tau_N) = S(\tau_N) + \frac{\mu}{\phi_x} S'(\tau_N)$. Posle numeričke integracije dobijamo:

$$J_\phi^+(\tau_N) = a_N^+ + b_N^+ S(\tau_N), \quad (17)$$

i koeficijente a_N^+ i b_N^+ . Znajući a_N^- , b_N^- , a_N^+ i b_N^+ nalazimo koeficijente:

$$a_N = \frac{1}{2} (a_N^+ + a_N^-), \quad (18a)$$

$$b_N = \frac{1}{2} (b_N^+ + b_N^-), \quad (18b)$$

linearne relacije

$$J_\phi(\tau_N) = a_N + b_N S(\tau_N) \quad (18c)$$

za ukupni srednji intenzitet zračenja. Kada zamenimo ovu relaciju, tj. ove koeficijente u jednačinu statističke ravnoteže (9) na poslednjoj dubini dobijamo novu vrednost funkcije izvora na toj dubini.

Sa poznatim vrednostima za $S(\tau_N)$ i $I_{x\mu}^+(\tau_N)$ kao i $S'(\tau_N)$ (iz graničnog uslova) računamo intenzitet izlaznog zračenja (slično kao i u prvom delu iteracije, za računanje ulaznog zračenja) u sledećoj višoj tački atmosfere τ_l , $l = N - 1, 1$:

$$I_{x\mu}^+(\tau_l) = a_{x\mu}^+ + b_{x\mu}^+ S(\tau_l), \quad (19)$$

gde je:

$$a_{x\mu}^+ = I_{x\mu}^+(\tau_{l+1}) e^{-\Delta\tau_l \phi_x / \mu} + (a_2 - 2a_3 / \Delta\tau_l) S(\tau_{l+1}) + (a_3 - a_4) S'(\tau_{l+1}) \quad (20a)$$

$$b_{x\mu}^+ = a_1 + 2a_3 / \Delta\tau_l \quad (20b)$$

Posle integracije po svim pravcima i frekvencijama dobija se:

$$J_\phi^+(\tau_l) = a_l^+ + b_l^+ S(\tau_l), \quad (21)$$

gde su:

$$a_l^+ = \sum_{i=1}^{NF} \sum_{j=1}^{NP} \omega_x \omega_\mu a_{x\mu}^+, \quad (22a)$$

$$b_l^+ = \sum_{i=1}^{NF} \sum_{j=1}^{NP} \omega_x \omega_\mu b_{x\mu}^+ \quad (22b)$$

Da bismo dobili koeficijente linearne relacije između ukupnog srednjeg intenziteta i funkcije izvora potrebno nam je još da znamo a_l^- i b_l^- . Njih dobijamo kada u jednačinu:

$$J_\phi^-(\tau_l) = b_l^- S(\tau_l) + c_l^- S'(\tau_l), \quad (23)$$

uvrstimo izraz:

$$S'(\tau_l) = 2 \frac{S(\tau_{l+1}) - S(\tau_l)}{\Delta\tau_l} - S'(\tau_{l+1}). \quad (24)$$

Konačno se dobija:

$$a_l^- = c_l^- \left[\frac{2S(\tau_{l+1})}{\Delta\tau_l} - S'(\tau_{l+1}) \right] \quad (25a)$$

$$b_l^- = b_l^- - 2c_l^- / \Delta\tau_l . \quad (25b)$$

Konačno se dobijaju koeficijenti a_l^- i b_l^- u kojima figurišu nove vrednosti $S(\tau_{l+1})$ i $S'(\tau_{l+1})$. Novu vrednost funkcije izvora na dubini τ_l dobijamo kada u jednačinu statističke ravnoteže (9) uvrstimo relaciju:

$$J_\phi(\tau_l) = a_l + b_l S(\tau_l), \quad (26)$$

odakle se dobija:

$$S(\tau_l) = \frac{\varepsilon B(\tau_l) + (1 - \varepsilon)a_l}{1 - (1 - \varepsilon)b_l}. \quad (27)$$

Sada sa novom, popraavljenom funkcijom izvora pomoću (19) računamo $I_{x\mu}^+$ na dubini τ_l i novu vrednost $S'(\tau_l)$ korišćenjem relacije (24).

Sa poznatim vrednostima $I_{x\mu}^+$, S i S' ide se u sledeći, viši sloj.

5 Prenos zračenja u pokretnim sredinama

Na osnovu velikog broja posmatranja utvrđeno je postojanje različitih oblika makroskopskog kretanja u zvezdanim atmosferama. Kretanje je prisutno na različitim prostornim skalama, od vrtloga (eng. *eddies*), čija je veličina manja od srednje slobodne putanje fotona, pa sve do širenja atmosfere kao celine.

Dok brzinska polja malo utiču na prenos zračenja u kontinuumu, jako utiču na formiranje linija jer čak i mali (Doplerov) frekventni pomak u liniji dovodi do velike promene u njenoj apsorpciji kako je vidi posmatrač.

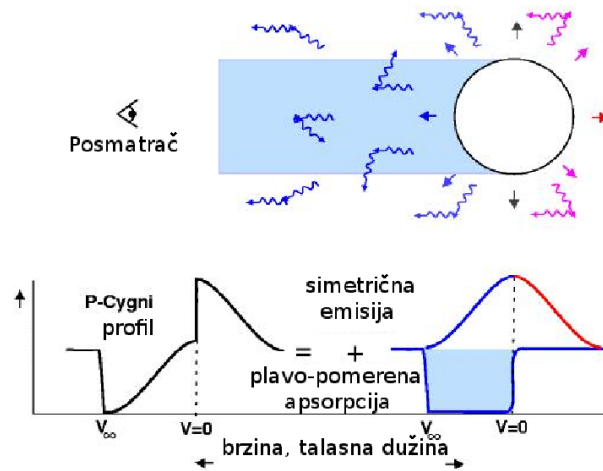
U analizi spektara superdžinova, Struve i Elvey (1934) su otkrili da je Doplerova širina izvedena iz položaja ravnog dela krive rasta daleko prevazilazila termalnu vrednost. Oni su ovo širenje pridružili netermalnim turbulentnim brzinama, za koje je pretpostavljeno da imaju Gausovu raspodelu. Pretpostavljeno je da je geometrijska skala ovih kretanja (nazvanih "mikroturbulencijom") tako mala da ona deluju kao dodatni mehanizam širenja linije i pojačavaju jačinu linije. Izvedene brzine su često bliske ili prevazilaze brzinu zvuka u sredini.

Kretanja velikih razmera ("makroturbulenciju") je posmatrao Struve (1946). Širine profila linija nekih zvezda prevazilaze Doplerove širine dobijene iz krivih rasta. Dalje, periodični Doplerovi pomaci linija u nekim zvezdanim spektrima otkrivaju da one potiču od pulsirajućih zvezda. Osim ovoga, objekti kao što su WR zvezde, zvezde tipa P Cygni i superdžinovi ranih spektralnih klasa pokazuju karakteristične profile linija sa apsorpcionom komponentom pomerenom ka plavom delu spektra (zvezdani materijal se kreće ka posmatraču) i emisionom komponentom pomerenom ka crvenom (kretanje se vrši od posmatrača), što ukazuje na širenje velikih razmera.

Najpoznatiji primeri brzog makroskopskog kretanja su slučajevi posmatrani kod novih i supernovih. U njihovim spektrima, nakon naglog porasta luminoznosti, mogu se posmatrati apsorpcione linije koje su izrazito pomerene ka plavom delu spektra i koje su praćene izrazitom emisionom linijom što im konačno daje karakterističan, P

Cygni profil. U slučaju novih, emisija je posledica burnog odbacivanja spoljašnjih slojeva zvezde i nije neprestano prisutna u spektru. Kod drugih objekata (npr. klasičnih zvezda tipa P Cygni) emisija je, iako promenljivog intenziteta, u principu stalno prisutna u spektru zvezde i ukazuje na konstantni odliv zvezdanog materijala.

Da bi se procenio uticaj polja brzina na funkciju izvora, mora se dobiti samo-usaglašeno rešenje jednačine prenosa zračenja. Potpuno konzistentna teorija zvezdanih atmosfera zahteva dinamičku teoriju interakcije brzina, termodinamičkog stanja materije i polja zračenja.



Slika 4: Atmosfera u širenju i formiranje P-Cygni profila

Ovde ćemo se fokusirati na kinematiku prenosa zračenja u pokretnim sredinama, tj. da za dato polje brzina i model atmosfere izračunamo izlazni spektar. Postoji niz tehnika kojima se može rešiti ovaj problem. Metode koje rešavaju jednačinu prenosa zračenja u sistemu posmatrača koji miruje mogu da tretiraju komplikovana brzinska polja i višedimenzione strukture, ali su ograničene na brzine reda nekoliko Doplerovih širina, pa nisu pogodne za brze atmosferske ekspanzije (nove, supernove...). Metod Soboleva, s druge strane, daje aproksimativno rešenje u slučaju brzih tokova sa velikim gradijentima brzina. Metode koje koriste pokretni sistem vezan za fluid (eng. *comoving-frame methods*) povezuju ova dva ekstrema i daju rešenje koje je primenljivo u oba slučaja. Mana ovih metoda je nemogućnost tretiranja nemonotonih brzinskih polja. Posebne tehnike su razvijene za slučajna ili stohastička polja brzina.

5.1 Prenos zračenja u laboratorijskom sistemu

Kada se gas u atmosferi kreće brzinom $v(\vec{r})$ u odnosu na spoljašnjeg posmatrača koji je u miru, postoji Doplerov pomak u frekvenciji fotona između sistema posmatrača i sistema atoma koji čine atmosferski gas.

Frekvencija ν' emitovanog ili apsorbovanog fotona u sistemu atoma koji se kreće brzinom v povezana je sa frekvencijom ν koju vidi posmatrač koji miruje, do tačnosti prvog reda v/c , preko:

$$\nu' = \nu - \frac{\nu_0}{c} \vec{n} \cdot \vec{v} \quad (28),$$

gde je \vec{n} pravac prostiranja fotona, a ν_0 centralna frekvencija u laboratorijskom sistemu.

Tako, neprozračnost i emisivnost materijala, iz koordinatnog sistema posmatrača u miru, postaju zavisni od ugla (pravca). Vremenski nezavisna jednačina prenosa za pokretnu sredinu u plan-paralelnoj geometriji je onda:

$$\mu \frac{\partial I(z, \mu, \nu)}{\partial z} = \eta(z, \mu, \nu) - \chi(z, \mu, \nu) I(z, \mu, \nu) \quad . \quad (29)$$

Obično se frekventni pomak od centra linije izražava u jedinicama standardne Doplerove širine $\Delta\nu_D^* = \nu_0 v_{th}^*/c$, gde je v_{th}^* temelna brzina na temperaturi T^* . Brzine se izražavaju u istim jedinicama, $V = v/v_{th}^*$, pa je transformacija između frekvencija u sistemu posmatrača i sistemu atoma onda data sa:

$$x' = x - \mu V,$$

gde su $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D^*$ i x' slično definisani.

Koeficijenti η_ν i χ_ν se, u opštem slučaju sastoje od odgovarajućih doprinosa u liniji i kontinuumu. Doplerovi pomaci nemaju uticaja na članove koji se odnose na kontinuum, kako je u kontinuumu frekventna zavisnost u opsegu koji je prouzrokovan pomacima u brzini slaba. Zato uzimamo u obzir samo promene u članovima koji se odnose na liniju i pišemo:

$$\chi(z, \mu, x) = \chi^c(z) + \chi^l(z)\phi(z, \mu, x) \quad (30a)$$

i

$$\eta(z, \mu, x) = \eta^c(z) + \eta^l(z)\phi(z, \mu, x) \quad , \quad (30b)$$

gde je normalizovani profil linije definisan sa

$$\phi(z, \mu, x) = \phi(z; x - \mu V) \quad . \quad (31)$$

Na primer, Gausov profil je:

$$\phi(x, \mu, z) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu V(z))^2/\delta^2}, \quad (32)$$

gde je $\delta(z) = \Delta\nu_D(z)/\Delta\nu_D^*$ odnos Doplerove širine na $T(z)$ i Doplerove širine na standardnoj T^* . Sada definišemo funkciju izvora u liniji $S^l(z) = \eta^l(z)/\chi^l(z)$ i u kontinuumu $S^c(z) = \eta^c(z)/\chi^c(z)$. Ukupna funkcija izvora je

$$S(z, \mu, x) = [\phi(z, \mu, x)S^l(z) + r(z)S^c(z)]/[\phi(z, \mu, x) + r(z)] \quad (33),$$

gde je $r(z) = \chi^c(z)/\chi^l(z)$ odnos koeficijenta apsorpcije u kontinuumu i u liniji.

Ako uvedemo optičku dubinu duž zraka μ

$$\tau(z, \mu, x) = \frac{1}{\mu} \int_z^{z_{max}} \chi(z, \mu, x) dz, \quad (34)$$

gde z_{max} označava gornju granicu atmosfere ili granicu konačnog sloja koja je bliža posmatraču, jednačina prenosa (29) postaje

$$\frac{\partial I(z, \mu, x)}{\partial \tau(z, \mu, x)} = I(z, \mu, x) - S(z, \mu, x). \quad (35)$$

Formalno rešenje gornje jednačine se može napisati kao

$$I(z_{max}, \mu, x) = I(0, \mu, x)e^{-\tau(0, \mu, x)} + \int_0^{\tau(0, \mu, x)} S(z, \mu, x)e^{-\tau(z, \mu, x)} d\tau(z, \mu, x),$$

odnosno,

$$I(z_{max}, \mu, x) = I(0, \mu, x)e^{-\tau(0, \mu, x)} + \int_0^{z_{max}} \mu^{-1} [\phi(z, \mu, x) S_l(z) + r(z) S_c(z)] e^{-\tau(z, \mu, x)} \chi_l(z) dz \quad (36)$$

odakle možemo da izračunamo izlazni intenzitet zračenja za datu funkciju izvora. (Npr. u LTE, $S_l = S_c = B$; ili možemo koristiti vrednosti S_l nađene za liniju u statičnoj atmosferi). U jednačini (36) smo pretpostavili sloj konačne debljine sa intenzitetom koji ulazi na $z = 0$. Za polu-beskonačnu atmosferu stavljamo $\tau(0, \mu, x) = \infty$ i izostavljamo član $I(0, \mu, x)$. Formalno rešenje omogućava da se direktno izračunaju efekti polja brzina na profile uračunavanjem brzinom indukovanih pomaka u neprozračnosti i emisivnosti materijala.

Funkcija izvora u liniji u opštem slučaju sadrži član rasejanja i na taj način zavisi od polja zračenja što znači da će na nju uticati kretanja gasa. Na primer, ekspanzija na gornjoj granici atmosfere može pomeriti liniju od tamne apsorpcione karakteristike, u mirnom položaju, u sjajan okolni kontinuum, povećavajući tako srednji intenzitet i funkciju izvora. Uz pretpostavku kompletne redistribucije zračenja funkcija izvora u liniji za atom sa dva nivoa je

$$S^l(z) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d\mu I(z, \mu, x) \phi(z, \mu, x) + \varepsilon B(z). \quad (37)$$

Sada u integralu rasejanja ne možemo više zameniti I sa J kao u jednačini (10), jer ϕ zavisi od ugla. Takođe, intenzitet više neće biti simetričan u odnosu na centar linije, pa se mora razmatrati ukupan profil.

Rešavanje integrala rasejanja u (37) sa kvadraturnom sumom predstavlja veliki problem u sistemu posmatrača iz dva razloga:

- (1) Profil linije $\phi(x - \mu V)$ je pomeren za iznos $2V$ u frekvenciji kako μ varira od -1 do 1 . Otuda, u kvadraturi po frekvenciji veličina jednaka dvostruko maksimalnoj makroskopskoj brzini mora se dodati opsegu frekvencija koji je potreban da se opiše statičan profil linije. Ovaj zahtev je nedopustiv za atmosfere sa supersoničnom ekspanzijom gde je $v/c \approx 0.01$.

- (2) Kvadratura po uglovima mora sadržavati veliki broj uglova. Pošto je argument u funkciji profila $(x - \mu V)$, postoji povezanost između ugaone i frekventne zavisnosti intenziteta. Ove teškoće se izbegavaju transformacijom u sistemu koji se kreće zajedno sa fluidom.

Pri rešavanju jednačine prenosa u sistemu posmatrača možemo koristiti iste diskretne vrednosti za pravce i dubine kao i u statičnom slučaju, ali za frekvencije moramo uzeti dovoljno veliki opseg da bi se u njemu sadržale obe polovine profila linije i da se omogući Doplerov pomak $\pm 2V_{max}$.

5.2 Prenos zračenja u sistemu fluida

Osnovna prednost rešavanja jednačine prenosa u sistemu fluida (pokretnom sistemu) je što su neprozračnost i emisivnost izotropni. U izračunavanju integrala rasejanja potreban nam je frekventni opseg koji će sadržavati samo puni profil linije, nezavisan od brzine fluida. Kvadratura po uglovima se može izabrati samo na osnovu ugaone raspodele polja zračenja. Dalje, dinamička izračunavanja u sfernim tokovima (npr. pulsacije, širenje) se tačno mogu tretirati u Lagranževom (*Lagrange*) sistemu koordinata (pokretnom sistemu).

S druge strane, mana formulacije u pokretnom sistemu je što metodi rešavanja rade uglavnom samo za relativno jednostavna brzinska polja i monotone raspodele brzina, jer je inače vrlo komplikovano postaviti granične uslove problema. Za razliku od ovih metoda, metode u sistemu posmatrača se mogu koristiti za proizvoljne varijacije brzina.

6 Primena FBILI metode na rešavanje problema prenosa zračenja u pokretnim sredinama (u sistemu posmatrača)

6.1 Konačan sloj u plan-paralelnoj geometriji

Kao test primer za korišćenje dvosmerno implicitne Lambda iteracije u plan-paralelnoj geometriji za sredine u pokretu korišćen je problem definisan u radu Hummer & Rybicki (1968). U njemu se posmatra sloj konačne debljine $T = 20$, bez upadnog zračenja na granične površine. To znači da su oba granična uslova: $I^\pm = 0$, odnosno da su svi koeficijenti a_l^- i b_l^- na $\tau = 0$, kao i a_l^+ i b_l^+ na $\tau = T$ jednaki nuli. Sloj se kreće u pravcu normalnom na površinu, brzinom $u(\tau)$, tako da se centar sloja u odnosu na posmatrača ne kreće, dok se deo sloja bliži posmatraču kreće ka njemu (tu se brzina smatra pozitivnom), a dalji od njega (tu se brzina smatra negativnom). Sredina je optički tanka i simulira emisiju maglinu u širenju. Veza

između frekvencije $\nu'(u)$ fotona u sistemu fluida i frekvencije ν u sistemu posmatrača koji miruje data je u jednačini (28):

$$\nu' = \nu - \frac{\nu_0}{c} \vec{n} \cdot \vec{u},$$

Uz uvođenje bezdimenzione frekvencije $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D^*}$ i optičke dubine τ (relacija (34)), jednačina prenosa zračenja u liniji formiranoj atomima sa dva nivoa ima oblik

$$\mu \frac{dI(x, \mu, \tau)}{d\tau} = \phi(x, \mu, \tau)[I(x, \mu, \tau) - S(\tau)], \quad (38)$$

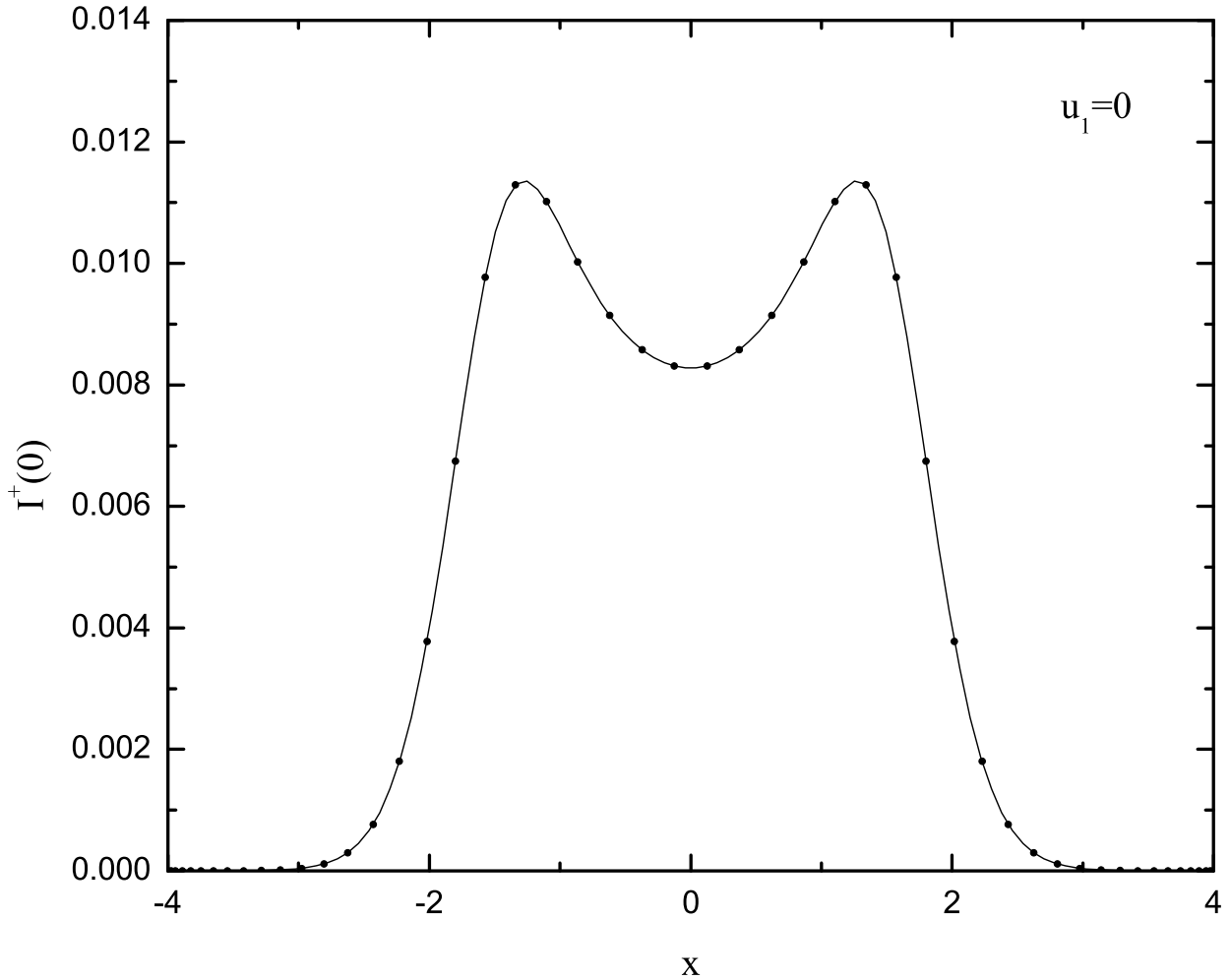
gde je ϕ Gausov profil (jednačina (32)):

$$\phi(x, \mu, \tau) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} e^{-(x - \mu u(\tau))^2 / \delta^2}. \quad (39)$$

Takođe, koristi se aproksimacija kompletne redistribucije, iako se, usled postojanja polja brzine, smanjuje opravdanost ove aproksimacije. Raspodela brzine sa optičkom dubinom je u radu Hummer & Rybicki (1968) data kao:

$$u(\tau) = u_0 + \tau u_1.$$

Za parametre ε , B i δ uzete su redom vrednosti: 10^{-3} , 1, 1. Razmatrane su dve vrednosti gradijenta brzine (u_1): -0.1 i -0.2 . Za rešavanje jednačine prenosa (38) korišćeno je 50 frekventnih tačaka u profilu linije, 4 pravca i 83 optičke dubine. Kao uslov za izlazak iz iteracione procedure uzeto je da relativna promena funkcije izvora u dve uzastopne iteracije bude $< 1\%$. Ovaj uslov je postignut posle 17 iteracija i dobijeni rezultati su u skladu sa rezultatima iz gore pomenutog rada.

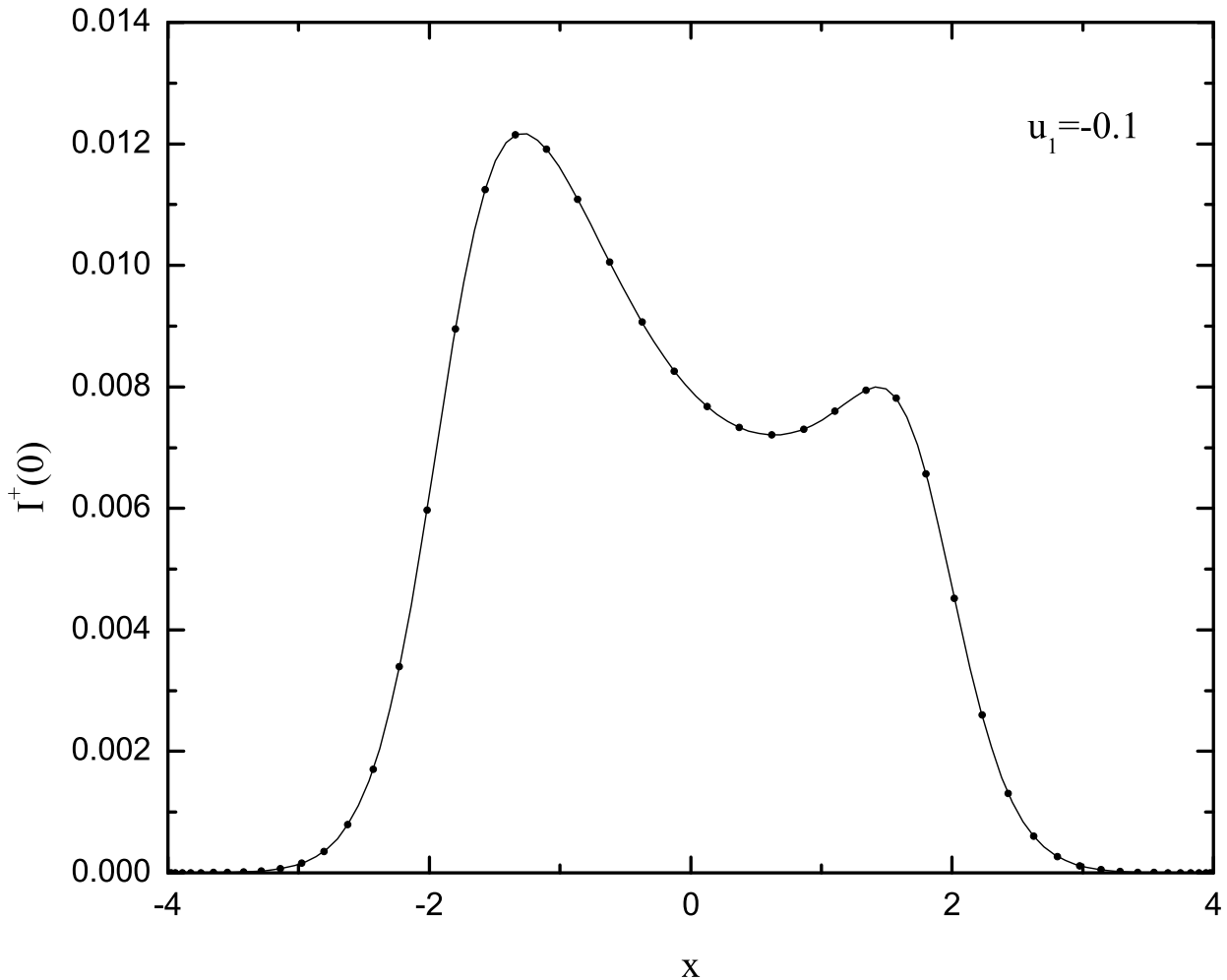


Slika 5: Zavisnost izlaznog intenziteta zračenja u liniji od frekvencije za plan-paralelni statični sloj.

Kao što se vidi na slikama 6 i 7, linija postaje šira što je gradijent veći, a emisijski pik se pomera ka crvenom. Pomeraj pika u crveno raste sa smanjenjem μ . Emisioni pik se pomera u crveno zato što fotoni koji se kreću ka posmatraču nailaze na veću neprozračnost u plavom nego u crvenom delu linije. Ovo se lakše može razumeti upotrebom Edington-Barbije relacije $I(x, \mu, 0) \approx S(\tau^*(x, \mu))$, gde je $\tau^*(x, \mu)$ vrednost optičke dubine za koju je monohromatska optička dubina, za zračenje frekvencije x , u pravcu μ , jednaka jedinici. Drugim rečima, $\tau = \tau^*(x, \mu)$ je rešenje jednačine:

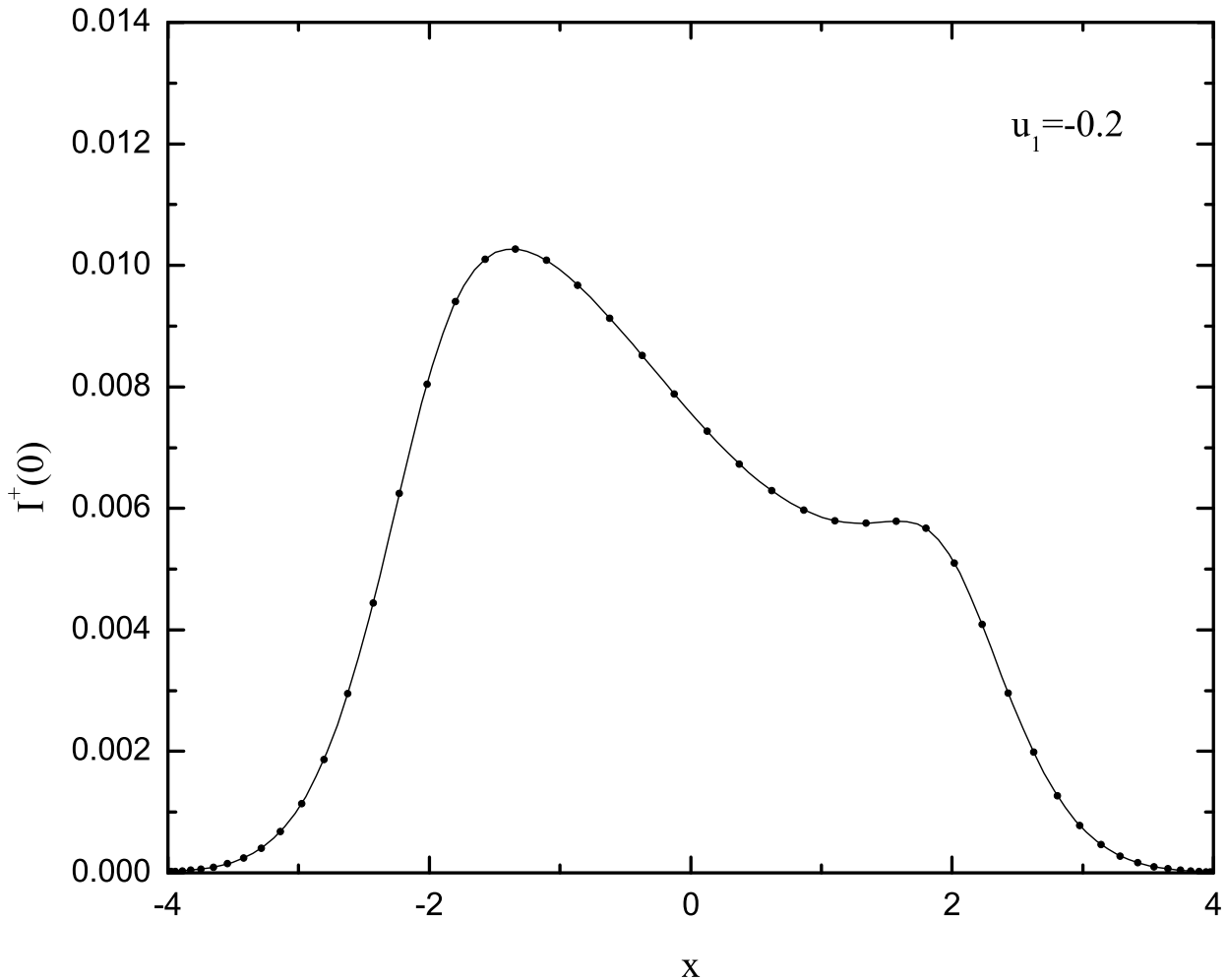
$$\tau_{x\mu} = \frac{1}{\mu} \int_0^\tau \phi(x, \mu, u(\tau')) d\tau' = 1.$$

Pošto će maksimum intenziteta zračenja koje izlazi u pravcu μ biti približno na



Slika 6: Zavisnost izlaznog intenziteta zračenja u liniji od frekvencije za plan-paralelni sloj sa gradijentom brzine -0.1.

frekvenciji gde $S(\tau^*(x, \mu))$ ima maksimum, $S(\tau)$ mora da opada ka $\tau = 0$ da bi se pomeranje ka crvenom dogodilo u atmosferi koja se širi. To može da se desi u slučaju opadanja temperature ili zbog odstupanja od LTR. U izotermnoj atmosferi kakva se ovde razmatra ($B = 1$), funkcija izvora opada i profil je pomeren ka crvenom kao posledica ne-LTR efekata i gradijenta brzine. Dakle, cela linija izgleda pomerenka ka crvenom iako je srednja brzina sredine nula. Prema tome, ne može se a priori pretpostaviti da se mali crveni pomaci odnose obavezno na emiter koji se udaljava.



Slika 7: Zavisnost izlaznog intenziteta zračenja u liniji od frekvencije za plan-paralelni sloj sa gradijentom brzine -0.2 .

6.2 Sferna atmosfera

Kao test problem za sfernu atmosferu u širenju korišćen je problem definisan u radu Avrett & Loeser (1984).

Razmatra se zvezdana atmosfera koja se sastoji od homogenih sfernih slojeva (fizičke karakteristike se menjaju samo sa radijalnim rastojanjem). Za numerički opis prenosa zračenja kroz takvu sredinu potrebne su nam diskretne vrednosti za radijuse tih slojeva $\{r(L)\}$, $L = 1, N$. Uzećemo da je radijus prvog sloja $r(1) = 30$ (u jedinicama radijusa zvezde), a poslednji radijus ćemo izabrati tako da na tom mestu polje zračenja bude izotropno. Skala optičke dubine τ je definisana kao

$$\tau(r, \mu, x) = \int_r^{r(L)} \chi(r', \mu, \nu) dr', \quad (39)$$

gde je $\chi(r', \mu, x)$ ukupna neprozračnost u kontinuumu i liniji. U radu je uzeto da je $\chi^c(r) = C_1/r^2$ i $\chi^l(r) = C_2/r^2$. Takođe, uzeto je da je ukupna optička dubina u kontinuumu 4, a srednja optička dubina u liniji 1000.

Uz te pretpostavke, imamo da je

$$\chi(r, \mu, x) = \left[\frac{120}{29} + \frac{30000}{29} \phi(r, \mu, x) \right] \frac{1}{r^2},$$

gde je profil dat sa

$$\phi(r, \mu, x) = \frac{1}{\delta \sqrt{\pi}} e^{-(x - \mu V(r))^2 / \delta^2}. \quad (40)$$

Jednačina prenosa koju rešavamo u sfernoj geometriji je data jednačinom (5):

$$\mu \frac{\partial I_x(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_x(r, \mu)}{\partial \mu} = -\chi_x(r, \mu) [I_x(r, \mu) - S_x(r, \mu)], \quad (42)$$

gde je $S_x(r, \mu)$ - ukupna funkcija izvora (u kontinuumu i liniji) data sa:

$$S_x(r, \mu) = \rho_x(r, \mu) S^c(r) + (1 - \rho_x(r, \mu)) S^l(r), \quad (41)$$

a $\rho_x(r, \mu) = \frac{\chi^c(r)}{\chi^c(r) + \chi^l(r) \phi_x(r, \mu)}$ - odnos neprozračnosti u kontinuumu i ukupne neprozračnosti.

Potrebno je rešiti prvo frekventno nezavisan problem i tako dobiti funkciju izvora u kontinuumu, a onda tražiti rešenje za funkciju izvora u liniji S^l , tj. za ukupnu funkciju izvora $S_x(r, \mu)$.

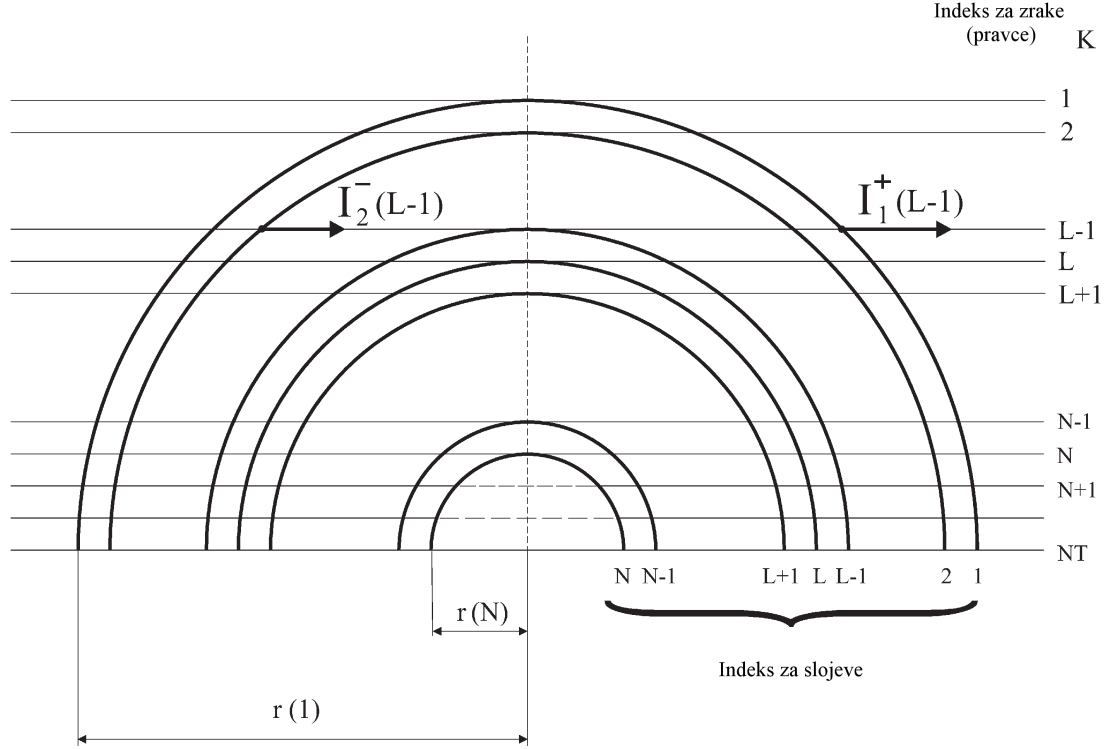
Za rešavanje ovog problema, korišćemo samo zrake koji su tangentni na sferne slojeve $r(L)$ i nekoliko zraka koji presecaju unutrašnju graničnu površinu da bi unutrašnji granični uslov bio bolje definisan (dovoljan je i jedan) i duž njih ćemo računati intenzitete zračenja (slika 8). Kako je u tom slučaju $\frac{\partial}{\partial \mu} = 0$, dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu

$$\pm \frac{dI_{x\mu}^\pm}{d\tau_{x\mu}} = I_{x\mu}^\pm - S_{x\mu}. \quad (43)$$

Ovde je $\tau_{x\mu}$ optička dubina duž zraka K , odnosno $d\tau_{x\mu}(K) = \chi[z(K)] dz(K)$, a $I_{x\mu}^\pm$ su ulazni i izlazni intenzitet zračenja duž zraka⁴. Njih računamo u tačkama gde zrak preseca sferne slojeve radijusa $r(L)$, $L < K$. Kosinus ugla koji zrak u ovim tačkama formira sa normalom na sloj je dat izrazom:

$$\mu_K^L = \sqrt{1 - \frac{r(K)^2}{r(L)^2}}. \quad (44)$$

⁴ I^- je intenzitet zračenja koje se kreće u smeru u kome raste optička dubina, a I^+ u smeru u kome opada.



Slika 8: Diskretizacija po dubinama i pravcima u slučaju prenosa zračenja u sfernoj geometriji.

Gornji granični uslov od koga polazimo i u ovom test primeru je $I^-(r(1)) = 0$. Dalje, na sličan način onom koji je opisan u poglavlju 4 (sa tom razlikom što zbog dodavanja kontinuuma i kretanja funkcija izvora sada postaje zavisna i od pravca i frekvencije) sa pretpostavljenim početnim vrednostima za funkciju izvora i njen izvod, idemo u sledeći sloj.

Tako dobijamo da je intenzitet zračenja u svakom sledećem $L+1$ - om sloju duž pravca K i na frekvenciji i :

$$I_{L+1}^-(K, i) = a_{L+1}^-(K, i) + b_{L+1}^-(K, i)S_{L+1}(K, i) + c_{L+1}^-(K, i)S'_{L+1}(K, i), \quad (45)$$

gde su koeficijenti dati sa:

$$a_{L+1}^-(K, i) = I_L^-(K, i)e^{-\Delta_{L,L+1}(K,i)} + \left(a_2^{L+1}(K, i) - \frac{2\mu_K^L a_4^{L+1}(K, i)}{\Delta\tau_{L,L+1}} \right) S_L(K, i) \quad (46a)$$

$$b_{L+1}^-(K, i) = a_1^{L+1}(K, i) + \frac{2\mu_K^L a_4^{L+1}(K, i)}{\Delta\tau_{L,L+1}} \quad (46b)$$

$$c_{L+1}^-(K, i) = \mu_K^{L+1} a_3^{L+1}(K, i) - \mu_K^L a_4^{L+1}(K, i) . \quad (46c)$$

Posle numeričke integracije dobijamo $J_L^- = b_L^- S_L^l + c_L^- S_L'^l$, gde su S^l i S'^l funkcija izvora u liniji i njen izvod. Sada su koeficijenti b_L^- i c_L^- dati kao

$$b_L^- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NF} \sum_{K=L}^{NT} \omega_x(K, L, i) \omega_\mu(K, L) \left[(a_L^-(K, i) + b_L^-(K, i) \rho(K, L, i) S^c(L) + c_L^-(K, i) \rho(K, L, i) S'^c(L)) / S^l(L) + b_L^-(K, i) (1 - \rho(K, L, i)) \right]$$

$$c_L^- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NF} \sum_{K=L}^{NT} \omega_x(K, L, i) \omega_\mu(K, L) c_L^-(K, i) (1 - \rho(K, L, i)),$$

gde je

$$\omega_\mu(K, L) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\mu_2^L - \mu_1^L), & K = 1 \\ \frac{1}{2}(\mu_{K+1}^L - \mu_{K-1}^L), & K = 2, NT - 1 \\ \frac{1}{2}(\mu_{NT}^L - \mu_{NT-1}^L), & K = NT. \end{cases}$$

težine za integraciju po pravcima, a $\omega_x(K, L, i)$ težine za integraciju po frekvencijama i profilu linije (korišćena je Gausova kvadratura).

Za donji granični uslov (za zrak $K = NT$, $\mu = 1$) iskorišćena je difuzna aproksimacija $I^+ = S + S'$. Tako dobijamo da je

$$a^+(N) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{NF} (I^+(NT, N, i) + \rho(NT, N, i) S^c(N)) \mu(NT, N) \omega_x(NT, N, i)$$

$$b^+(N) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{NF} \mu(NT, N) (1 - \rho(NT, N, i)) \omega_x(NT, N, i).$$

Izlazne veličine se računaju slično ulaznim. Koeficijenti linearne relacije između I^+ i S dati su kao

$$a_L^+(K, i) = I_{L+1}^+(K, i) e^{-\Delta_{L, L+1}(K, i)} + \left(a_2^L(K, i) - \frac{2\mu_K^L a_3^{L+1}(K, i)}{\Delta\tau_{L, L+1}} \right) S_{L+1}(K, i) + (-\mu_K^{L+1} a_4^L(K, i) + \mu_K^L a_3^L(K, i)) S'_{L+1}(K, i)$$

$$b_L^+(K, i) = a_2^L(K, i) + \frac{2\mu_K^L a_3^L(K, i)}{\Delta\tau_{L, L+1}}$$

Posle integracije dobijamo koeficijente relacije između J^+ i S^l

$$a_L^+ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NF} \sum_{K=L}^{NT} \omega_x(K, L, i) \omega_\mu(K, L) (a_L^+(K, i) + b_L^+(K, i) \rho(K, L, i) S^c(L)) \quad (47a)$$

$$b_L^+ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NF} \sum_{K=L}^{NT} \omega_x(K, L, i) \omega_\mu(K, L) b_L^+(K, i) (1 - \rho(K, L, i)) \quad (47b)$$

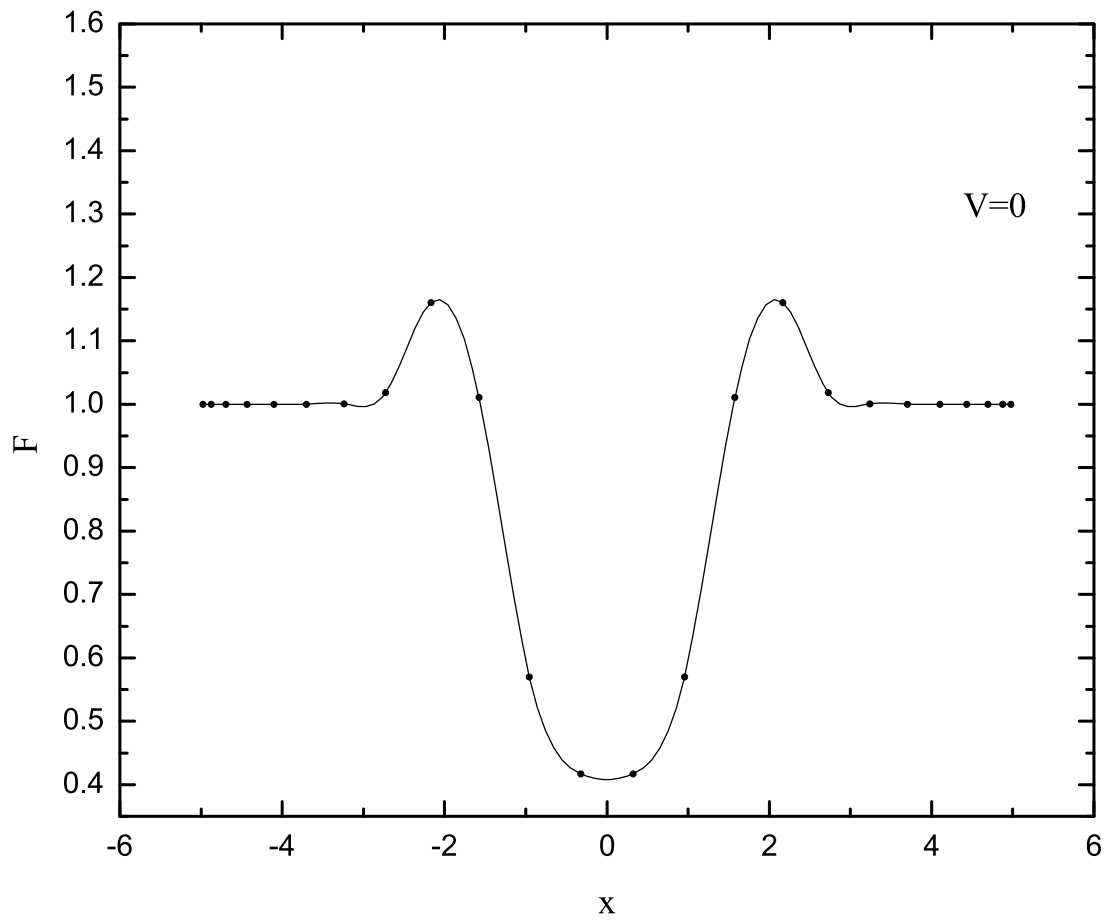
Po proceduri opisanoj u poglavlju 4, sa ukupnim koeficijentima a_L i b_L dobijamo nove vrednosti za S^l . Na kraju, ukupnu funkciju izvora dobijamo kao:

$$S_L(K, i) = \rho(K, L, i)S_L^c + (1 - \rho(K, L, i))S_L^l.$$

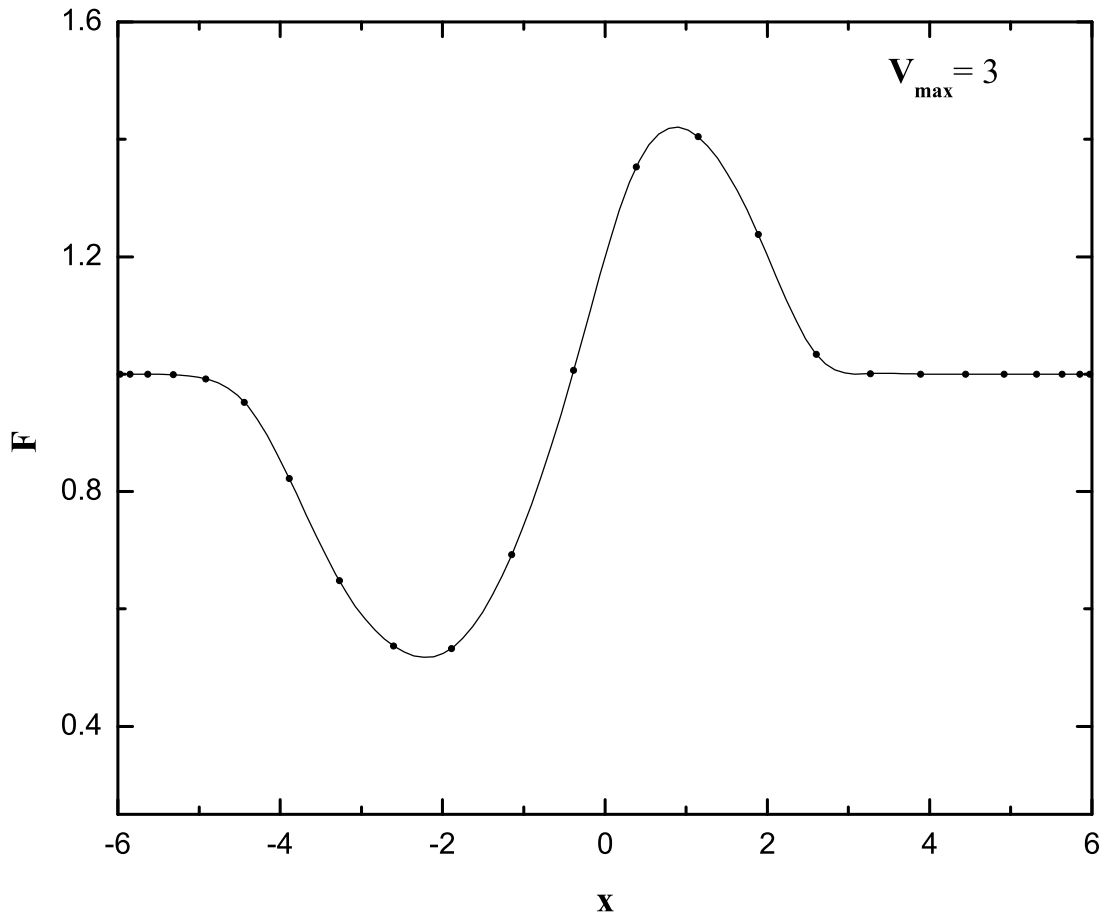
Za vrednosti parametara ε i B uzete su vrednosti $2 \cdot 10^{-3}$ i 1, respektivno. Raspodela brzine duž radijusa data je sa $V(r) = \frac{6}{\pi} \left[\arctg\left(\frac{2r-31}{29}\right) + \frac{\pi}{4} \right]$, tako da je brzina na donjoj granici atmosfere 0, a na gornjoj $V_{\max} = 3$.

Uslov da je relativna razlika vrednosti funkcija izvora na svim dubinama u dve uzastopne iteracije manja od 1% dostiže se posle 17 iteracija. U programu su uzete 24 frekventne tačke, 72 zraka i 71 optička dubina (odnosno 71 sloj).

Dobijeni rezultati za statični slučaj, kao i u slučaju atmosfere u širenju prikazani su na slikama 9, 10 i 11. Rešenje pokazuje da su male vrednosti brzina (reda nekoliko Doplerovih širina) od neznatnog uticaja na funkciju izvora u liniji, jer su efekti pojačanog besktva fotona u crvenom krilu linije i oslabljenog u plavom uzajamno gotovo poništeni. Ipak, atmosfersko širenje povećava verovatnoću bekstva fotona, pa funkcija izvora leži malo ispod odgovarajuće statične vrednosti (sl. 11). Nasuprot tome, profil linije pokazuje drastične promene (sl. 9 i 10).



Slika 9: Fluks zračenja u liniji za statičnu sferno-simetričnu atmosferu.



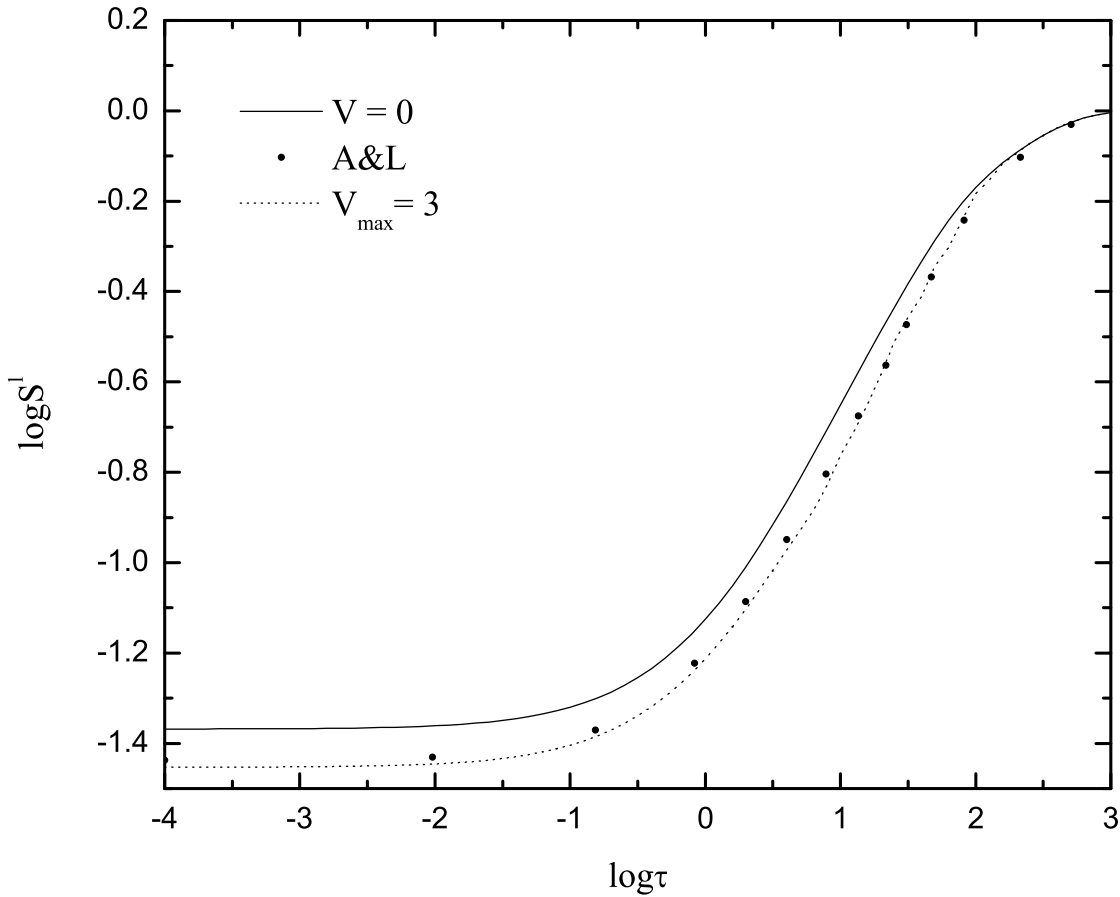
Slika 10: Fluks zračenja u liniji za sferno-simetričnu atmosferu sa $V_{max} = 3$.

7 Zaključak

FBILI metod je razvijen za ne-LTR problem formiranja linija i do sada je testiran na rešavanju nekoliko različitih problema: prenosa zračenja atomima sa 2 nivoa u aproksimaciji kompletne redistribucije, generalizaciji na slučaj parcijalne redistribucije, problemu prenosa zračenja atomima sa više nivoa (*multi-level problem*) sa kompletnom redistribucijom zračenja i generalizaciji na sferno-simetrične sredine.

Prednost ovog metoda se ogleda u njegovoj jednostavnosti, kao i u ekstremno brzom konvergenciji ka tačnom rešenju (u svim do sada razmatranim test problemima).

U ovom master radu je FBILI metod prvi put primenjen i uopšten na problem formiranja linija u pokretnim sredinama. Cilj rada je bio da se dobije rešenje ovog problema u sistemu posmatrača (laboratorijskom sistemu) za dva astrofizički značajna slučaja: plan-paralelnog sloja konačnih dimenzija i sferno-simetrične atmosfere u širenju. Rešenje u sistemu posmatrača je primenljivo i korisno u slučaju



Slika 11: Zavisnost fluksa od frekvencije za sfernu atmosferu sa $V_{max} = 3$.

malih brzinskih polja, a pogodnije od rešenja u pokretnom sistemu jer se može koristiti za proizvoljne raspodele brzina. Rešenja su dobijena pretpostavljajući kompletnu redistribuciju zračenja. Osim što je dobijeno rešenje značajno samo po sebi, jer se može primeniti na niz problema koji se sreću u astrofizici, služi i za poređenje sa rešenjem problema u sistemu pokretne sredine. Konačno, ovaj rad omogućava da se testiraju osobine FBILI metode u primeni na kompleksnije fizičke i geometrijske probleme.

Za budući rad planira se rešavanje problema prenosa zračenja u spektralnim linijama u pokretnom sistemu, u sfernoj geometriji i sa uzimanjem u obzir efekata parcijalne redistribucije zračenja.

Literatura

- [1] Atanacković-Vukmanović, O.: 1991, doktorska teza, Univerzitet u Beogradu
- [2] Atanacković-Vukmanović, O.: 2003, *Serb. Astron J.*, 167, 27
- [3] Atanacković-Vukmanović, O.: 2004, *Serb. Astron J.*, 169, 1
- [4] Atanacković-Vukmanović, O., Crivellari, L., & Simonneau, E.: 1997, *Astrophys. J.*, 487, 735
- [5] Atanacković-Vukmanović, O., & Simonneau, E.: 1994, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 51, 3
- [6] Auer, L. H., & Mihalas, D.: 1969, *Astrophys. J.*, 158, 641
- [7] Avrett, E. H., & Hummer, D. G.: 1965, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 130, 295
- [8] Avrett, E. H. & Loeser, R.: 1984, *Methods in Radiative Transfer*, ed. W. Kalkofen, Cambridge Univ. Press, 341
- [9] Borsenberger, J., Oxenius, J., & Simonneau, E.: 1987, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 37, 331
- [10] Cannon, C.J.: 1973a, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 13, 627
- [11] Cannon, C.J.: 1973b, *Astrophys. J.*, 185, 621
- [12] Carlsson, B. G.: 1986, A Computer Program for Solving Multi-level Non-LTE Radiative Transfer Problems in Moving or Static Atmospheres, Uppsala Astron Observatory Report No. 33
- [13] Crivellari, L., & Simonneau, E.: 1991, *Astrophys. J.*, 367, 612
- [14] Crivellari, L., & Simonneau, E.: 1995, *Astrophys. J.*, 451, 328
- [15] Feautrier, P.: 1964a, *C.R.Acad.Sci., Paris*, 258, 3189
- [16] Feautrier, P.: 1964b, *Proceedings of the First Harvard-Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres*, SAO Spec. Rep. No. 167, Cambridge
- [17] Fieldus, M. S., Lester, J. B., & Rogers, C.: 1990, *Astron. Astrophys.*, 230, 371
- [18] Hamman, W.-R.: 1985, *Astron. Astrophys.*, 148, 364
- [19] Hamman, W.-R., & Weselowsky, U.: 1990, *Astron. Astrophys.*, 227, 171
- [20] Hummer, D. G., & Rybicki, G. B.: 1968, *Astrophys. J.*, 153, 107
- [21] Hummer, D. G., & Rybicki, G. B.: 1971, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 152, 1
- [22] Jefferies, J. T., & Thomas, R. N.: 1958, *Astrophys. J.*, 127, 667
- [23] Jefferies & Thomas 1959, *Astrophys. J.*, 129, 401

- [24] King, J. I. F.: 1955, *Astrophys. J.*, 121, 711
- [25] King, J. I. F.: 1956, *Astrophys. J.*, 124, 272
- [26] Kuzmanovska-Barandovska, O., Atanacković, O.: 2010, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 111, 708
- [27] Mihalas, D.: 1978, *Stellar Atmospheres*, W. H. Freeman and Company
- [28] Mihalas, D., Kunasz, P.B. & Hummer, D.G.: 1975, *Astrophys. J.* 202, 465
- [29] Olson, G. L., Auer, L. H., & Buchler, J.R.: 1986, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 35, 431
- [30] Olson, G. L., & Kunasz, P.: 1987, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 38325
- [31] Rybicki, G. B.: 1972, *u Line Formation in the Presence of Magnetic Fields* High Altitude Observatory, Boulder, p. 145
- [32] Scharmer, G. B.: 1981, *Astrophys. J.*, 249, 720
- [33] Scharmer, G. B., & Nordlund, A.: 1982, *Stocholm Obs. Rep.*, 19
- [34] Scharmer, G. B., & Carlsson, M.: 1985, *J. Comput. Phys.*, 59, 56
- [35] Simonneau, E., & Atanackovi -Vukmanovi, O.: 1991, *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, Proc. of the Advanced Research Workshop, Trieste, Dordrecht, D. Reidel Publ. Comp., 105
- [36] Simonneau, E., & Crivellari, L.: 1988, *Astrophys. J.*, 330, 415
- [37] Werner, K., & Husfeld, D.: 1985, *Astron. Astrophys.*, 148, 417
- [38] Werner, K.: 1986, *Astron. Astrophys.*, 161, 177