MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITET U BEOGRADU

MASTER RAD

MATEMATIČKE METODE ZA ODREĐIVANJE OPTIMALNOG REOSIGURANJA

Mentor

dr Slobodanka Janković

Kandidat

Tamara Srbulović

Beograd, decembar 2012.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu biće razmatrano rešenje problema nalaženja optimalnog programa reosiguranja sa stanovišta osiguravača. Bilo da su u pitanju proporcionalni ili neproporcionalni ugovori reosiguranja, cilj je isti, da se pronađe optimalna raspodela rizika kako bi se smanjila verovatnoća razaranja osiguravajuće kompanije.

U poglavlju 1. biće uvedeni osnovni pojmovi vezani za proces reosiguranja i tipovi ugovora o reosiguranju, kao i razlozi za uvođenje ovakvih ugovora i prednosti njihove primene. Kroz poglavlje 2. biće definisan Kramer-Lundbergov model kao osnovni model za opisivanje procesa rizika u poslovima neživotnih osiguranja. Poglavlje 3. sadrži definicije pojma razaranja i njegove verovatnoće i definiciju uslova čistog profita.

Nakon uvođenja pojmova neophodih za razumevanje postavke problema optimizacije reosiguranja u poglavlju 4. razmatraju se osnovni tipovi ugovora o reosiguranju pomoću kojih osiguravajuća kompanija može da optimizuje svoj proces rizika. U istom poglavlju definisani su i procesi rizika nakon primene proporcionalnih ugovora o reosiguranju i neproporcionalnih ugovora o reosiguranju sa i bez limita pokrića. Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina kojom se definiše problem pronalaženja optimalnog reosiguranja biće uvedena u poglavlju 5. zajedno sa definicijom pojma infinitezimalnog generatora i njegovim primerima.

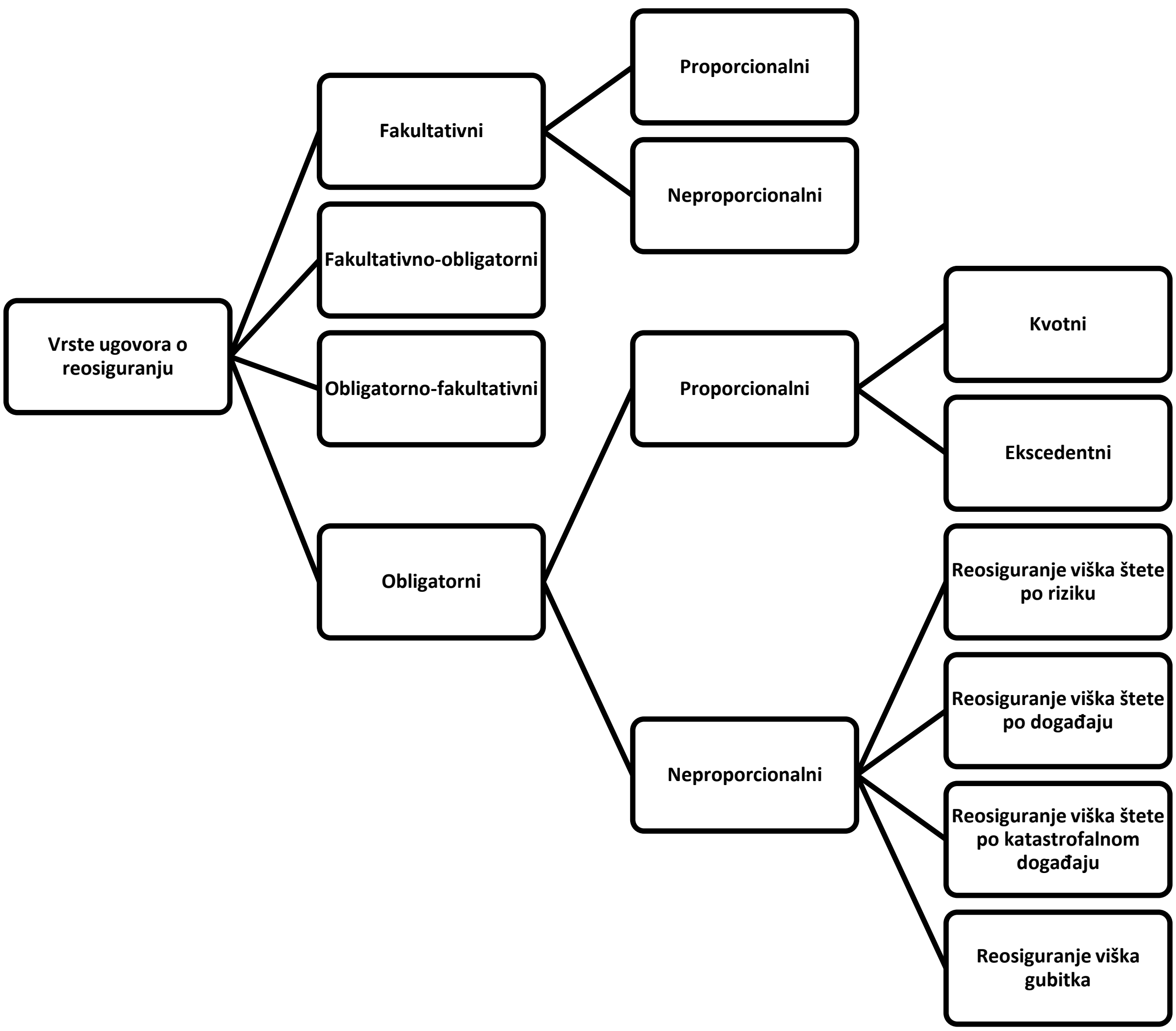
Poglavlje 6. sadrži formulaciju problema pronalaženja optimalnog reosiguranja kroz ugovore o reosiguranju viška štete bez limita pokrića, dokaze egzistencije i jedinstvenosti rešenja ovakvog problema i primer rešenja dobijenog pomoću simulacije u programu *R* za slučaj kada veličine šteta imaju eksponencijalnu raspodelu. Analogno je u poglavlju 7. postavljen problem pronalaženja optimalnog reosiguranja putem proporcionalnih ugovora o reosiguranju, zatim su za tako postavljen problem dokazani egzistencija i jedinstvenost rešenja i dat je primer rešenja putem simulacije u programu *R* za slučaj kada veličine šteta imaju eksponencijalnu raspodelu.

U poglavlju 8. postavljen je problem pronalaženja optimalnog reosiguranja kroz ugovore o reosiguranju viška štete sa limitom pokrića, određena je optimalna strategija za slučaj kada osiguravajuća kompanija nema početni kapital i utvrđen značaj mogućnosti kontrole limita u odnosu na neke osobine raspodele veličina šteta. Kao ilustracija ove teorije u istom poglavlju dokazano je da ugovori o reosiguranju viška štete sa limitom pokrića za slučaj kada veličine šteta imaju eksponencijalnu raspodelu ne mogu biti optimalni.

Na kraju rada, u Rečniku pojmova, date su definicije osnovnih pojmova koji se sreću u svakodnevnom radu na poslovima reosiguranja.

1. Pojam reosiguranja

Reosiguranje je prenos rizika sa direktnog osiguravača (cedenta) na drugog nosioca rizika (reosiguravača). Za objašnjenje ovog pojma koristi se i izraz osiguranje osiguranja[1]. U osnovi gledano, ako je neki individualni rizik previše velik za osiguravajuću kompaniju, ili su potencijalne štete za ceo portfelj velike, osiguravač se odlučuje za kupovinu reosiguravajućeg pokrića. Pojam rizik u osiguranju upotrebljava se da označi predmet osiguranja, ali i neizvesnost. Da ne bi došlo do zabune u ovom poglavlju se pojam rizik odnosi na predmet osiguranja, dok će u narednim poglavljima imati svoje osnovno značenje.



Slika 1

[1] Videti u [6] i [9]

Priroda i svrha reosiguranja je pre svega da smanji finansijske obaveze osiguravajućih društava koje proističu iz potencijalnih pojava određenih potraživanja po ostvarenim štetama na osiguranim rizicima. Ono dodatno utiče i na poboljšanje inovacije, konkurencije i efikasnosti na tržištu jer se na ovaj način rizik dalje deli kroz veći sistem osiguranja nego što je jedna osiguravajuća kompanija te i veliki rizici mogu biti osigurani. Takođe, iz razloga što se rizik raspoređuje na veći broj subjekata, ponekad na veoma širokom geografskom prostoru, heterogeni rizici, koje osiguravač ne bi mogao izravnati, putem reosiguranja postaju homogeni. Dakle, reosiguranje utiče na smanjenje rizika i njegovu homogenizaciju, ali i povećava limit (veličinu) mogućeg preuzetog rizika u portfelju cedenta.

Mogućnosti zaštite rizika putem reosiguranja su izuzetno velike i svakodnevno se pojavljuju novi oblici reosiguravajućeg pokrića. Ovo je razlog postojanja velikog broja različitih vrsta ugovora o reosiguranju. U literaturi i praksi najčešće se sreću podele ugovora o reosiguranju sa stanovišta masovnosti ugovora (pojedinačni ili fakultativni ugovori i okvirni, obligatorni ili automatski ugovori) i sa stanovišta preuzetih obaveza reosiguravača (proporcionalni i neproporcionalni). Na Slici 1 prikazan je grafik najčešće podele ugovora o reosiguranju i svaki prikazani tip ugovora ukratko je objašnjen u Rečniku pojmova na strani 43. Više informacija o mehanizmu funkcionisanja ugovora o reosiguranju može se pronaći u knjizi [7], glava 10. Metode reosiguranja i glava 11. Ugovor o reosiguranju.

Da bi pružio reosiguravajuće pokriće, reosiguravač od cedenta dobija određeni iznos premije reosiguranja, a za uzvrat se obavezuje da isplati dogovoreni iznos nastalih šteta. Suštinski, reosiguravač i cedent dele premiju, rizik i štete na proporcionalnoj osnovi, u slučaju proporcionalnih ugovora o reosiguranju, ili reosiguravač plaća samo višak štete iznad prethodno definisanog nivoa, u slučaju neproporcionalnih ugovora o reosiguranju. Kao što se osiguranje zasniva na zaštiti osiguranika, te za postojanje osiguranja mora postojati rizik, tako je osnov za postojanje reosiguranja zaključen ugovor o osiguranju.

2. Kramer-Lundbergov model

Kramer-Lundbergov (Cramér-Lundberg) model[2] je standardni model koji se koristi za opisivanje procesa rizika poslovanja osiguravajuće kompanije koja se bavi prodajom neživotnih osiguranja. Proces rizika predstavlja vrednost kompanije kroz vreme, pri čemu se kapital društva uvećava uplatama premije od ugovarača osiguranja, a smanjuje se isplatama nastalih šteta koje su pokrivene osiguranjem. Kramer-Lundbergov model baziran je na sledećim pretpostavkama:

[2] Za više informacija o ovom modelu videti u [2] i [8]

- Veličine odšteta su nezavisne slučajne veličine sa istom funkcijom raspodele
- Zahtevi za odštete pristižu u skladu sa Puasonovim (Poisson) procesom $\{N(t): t \geq 0\}$ koji predstavlja broj odštetnih zahteva podnetih do trenutka $t \geq 0$
- Veličine odšteta su nezavisne u odnosu na $N(t)$
- Premija dospeva linearno u toku vremena

Da bismo formalno definisali Kramer-Lundbergov model prethodno ćemo definisati nekoliko važnih pojmova.

Definicija 2.1 *Veličine odšteta* predstavljaju niz $\{X_n: n \in \boldsymbol{N}\}$ pozitivnih nezavisnih slučajnih veličina sa zajedničkom raspodelom $Q(x) = P\{X_1 \leq x\}$, pri čemu je $Q(0) = 0$, $EX_1 = \mu < +\infty$ i $DX_1 = \sigma^2 \leq +\infty$.

Definicija 2.2 Neka je $\{Y_n: n \in \boldsymbol{N}\}$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom eksponencijalnom raspodelom i važi $EY_1 = \frac{1}{\lambda} \in (0, +\infty)$. Slučajna veličina Y_n predstavlja *vreme čekanja* između $(n-1)$-og i n-tog odštetnog zahteva. Definišimo niz trenutaka u kojima dospevaju zahtevi za odštetom $\{T_n: n \in \boldsymbol{N_0}\}$ kao

$$T_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} Y_k, n \in \boldsymbol{N_0}.$$

Tako definisan proces $\{T_n: n \in \boldsymbol{N_0}\}$ predstavlja proces obnavljanja[3]. Broj odštetnih zahteva pristiglih do određenog trenutka t je homogeni Puasonov proces $\{N(t): t \geq 0\}$, pri čemu je

$$N(t) \coloneqq \sup\{n \in \boldsymbol{N}: T_n \leq t\}.$$

Sledeća definicija je formalna definicija Kramer-Lundbergovog modela.

Definicija 2.3 Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoća na kom su definisani procesi $\{X_n: n \in \boldsymbol{N}\}$, $\{Y_n: n \in \boldsymbol{N}\}$, $\{T_n: n \in \boldsymbol{N_0}\}$ i $\{N(t): t \geq 0\}$ kao u Definiciji 2.1 i Definiciji 2.2. Dalje, neka je veličina odštete X_n nezavisna u odnosu na vremena čekanja između dva uzastopna odštetna zahteva Y_n. Model sa ovim pretpostavkama naziva se *Kramer-Lundbergov model*.

Procesom rizika modeliraju se promena finansijskih rezervi, odnosno kapitala, osiguravajućeg društva.

Definicija 2.4 U Kramer-Lundbergovom modelu definišemo *proces rizika* $\{R(t): t \geq 0\}$ na sledeći način

$$R(t) = s + ct - S(t), t \geq 0.$$

Pri tom važi

- $s \geq 0$ je početni kapital osiguravajuće kompanije

[3]Više o procesima obnavljanja u [10] poglavlje 6 ili u [8] poglavlje 2.2

- $c > 0$ je konstantna stopa premije određena u skladu sa aktuarskim obračunima i aktima osiguravajuće kompanije prema jednoj od mnogih metoda (neke od ovih metoda opisane su u [1] poglavlje 1.2; u ovom radu biće primenjen neto obračun premije koji podrazumeva da je očekivana premija u periodu jednaka očekivanim ukupnim štetama u istom periodu, tj. u ovom slučaju $ct = ES(t)$)
- proces[4] $\{S(t): t \geq 0\}$ predstavlja sumu svih isplata odštetnih zahteva do određenog trenutka t, odnosno $S(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$, $t \geq 0$.

3. Razaranje, verovatnoća razaranja i uslov čistog profita

U prethodnom poglavlju uveli smo osnovne pojmove i definisali Kramer-Lundbergov model. Pretpostavke ovog modela koristićemo i za određivanje verovatnoće razaranja u ovom specijalnom slučaju.

Neka je suma isplata odštetnih zahteva do trenutka t jednaka $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$, $t \geq 0$, a proces $\{S(t): t \geq 0\}$ je proces obnavljanja. Ovo znači da je niz veličina odšteta (X_n) niz pozitivnih nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih veličina sa zajedničkom raspodelom Q i da je nezavisan u odnosu na niz vremena pristizanja zahteva za odštetom (T_n) dat sa $T_0 = 0$, $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n, n \geq 1$, gde su vremena čekanja između dva uzastopna odštetna zahteva Y_n pozitivne nezavisne jednako raspodeljene slučajne veličine. Takođe je i brojač šteta-proces $\{N(t): t \geq 0\}$ proces nezavisan od niza veličina odšteta (X_n).

Osim prethodnog pretpostavljamo i da je premija prikupljena do trenutka t jednaka $p(t) = ct$, a c je konstantna premijska stopa.

Proces rizika definisan je sa $R(t) = s + p(t) - S(t)$, $t \geq 0$, što predstavlja kapital osiguravača u datom trenutku t, a proces $\{R(t): t \geq 0\}$ opisuje tok novca tokom vremena u portfelju osiguravača. Ako je $R(t) > 0$ znači da kompanija poseduje kapital, dok u suprotnom znači da je kompanija izgubila sav kapital.

Definicija 3.1 Događaj da vrednost $R(t)$ u nekom trenutku bude manja od nule naziva se *razaranje*.

$$Razaranje = \{R(t) < 0 \; za \; neko \; t > 0\}.$$

Vreme τ kada proces rizika prvi put dostigne vrednost manju od nula naziva se *vreme razaranja*.

$$\tau = \inf\{t > 0: R(t) < 0\}.$$

Verovatnoća razaranja data je sa $\psi(s) = P\{Razaranje | R(0) = s\} = P\{\tau < \infty | R(0) = s\}$, $s > 0$.

[4]Više o ovom procesu u [8] poglavlje 3.3

Verovatnoća opstanka je onda $\delta(s) = 1 - \psi(s)$.

U ovoj definiciji koristili smo činjenicu da je

$$Razaranje = \bigcup_{t\geq 0}\{R(t) < 0\} = \{\inf_{t\geq 0} R(t) < 0\} = \{\tau < \infty\}.$$

Na osnovu konstrukcije procesa rizika $\{R(t): t \geq 0\}$, do razaranja može doći samo u tačkama $t = T_n$ za neko $n \geq 1$, jer vrednost procesa $\{R(t): t \geq 0\}$ linearno raste na intervalima $[T_n, T_{n+1})$. Niz $(R(T_n))$ nazivamo skelet proces procesa rizika $\{R(t): t \geq 0\}$. Korišćenjem skelet procesa verovatnoću razaranja možemo da iskažemo i u terminima vremena čekanja između dva uzastopna odštetna zahteva Y_n, veličina odšteta X_n i premijske stope c.

$$Razaranje = \left\{\inf_{t\geq 0} R(t) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1} R(T_n) < 0\right\}$$

$$= \left\{\inf_{n\geq 1}[s + p(T_n) - S(T_n)] < 0\right\}$$

$$= \left\{\inf_{n\geq 1}[s + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i] < 0\right\}.$$

Ovde smo koristili da je $N(T_n) = \sup\{i \in \boldsymbol{N}: T_i \leq T_n\} = n$.

Označimo sa $Z_n = X_n - cY_n,\ S_n = Z_1 + \cdots + Z_n,\ n \geq 1,\ S_0 = 0$.

Korišćenjem prethodnog dobijamo novi izraz za verovatnoću razaranja $\psi(s)$ pri početnom kapitalu s:

$$\psi(s) = P\left\{\inf_{n\geq 1}(-S_n) < -s\right\} = P\left\{\sup_{n\geq 1}(S_n) > s\right\}.$$

Kako su i (Y_n) i (X_n) nizovi nezavisnih slučajnih veličina, koji su i međusobno nezavisni, verovatnoća razaranja $\psi(s)$ nije ništa drugo do verovatnoća repa supremum funkcije slučajnog lutanja (S_n). Na osnovu konstrukcije jasno je da ovu verovatnoću nije jednostavno odrediti jer se svodi na veoma kompleksno izučavanje slučajnih procesa.

Vrednost verovatnoće razaranja $\psi(s)$ je važan pokazatelj promene kapitala jedne osiguravajuće kompanije kroz vreme. Za određivanje parametara koji utiču na proces rizika najvažnije je izbeći razaranje sa verovatnoćom 1, ali i verovatnoća da će slučajno lutanje (S_n) preći tačku s treba da bude toliko mala da se događaj razaranja može isključiti iz razmatranja pitanja da li je početni kapital s dovoljno veliki.

Pretpostavićemo da su matematička očekivanja EY_n i EX_n konačna. Ova pretpostavka o konačnoj očekivanoj dužini intervala vremena između dva uzastopna odštetna zahteva i konačnom očekivanju veličine odštetnih zahteva je svakako iskustvena i sreće se u praksi. Odatle takođe znamo i da je i matematičko očekivanje $EZ_n = EX_n - cEY_n$ dobro definisano i konačno. S toga slučajno lutanje (S_n) zadovoljava jaki zakon velikih brojeva, tj. važi: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{s.s.} EZ_1$ kada $n \to \infty$, što implicira da $S_n \xrightarrow{s.s.} +\infty$ ako je EZ_1 pozitivno ili $S_n \xrightarrow{s.s.} -\infty$ ako je EZ_1 negativno. Dakle, u smislu zahteva za malom verovatnoćom razaranja slučaj $EZ_1 > 0$ je neprihvatljiv. Takođe, može se pokazati da je i u slučaju $EZ_1 = 0$ verovatnoća razaranja[5] jednaka 1.

Zaključujemo sledeće:

Ako su vrednosti EY_n i EX_n konačne i važi uslov $EZ_n = EX_n - cEY_n \geq 0$ onda je, za svako fiksirano $s > 0$ verovatnoća razaranja jednaka 1.

Iz ovog zaključka proizilazi da svaka osiguravajuća kompanija treba da odredi stopu premije c tako da važi da je $EZ_n < 0$. To je jedini način da izbegne razaranje sa verovatnoćom 1.

Definicija 3.2 Kažemo da proces obnavljanja zadovoljava *uslov čistog profita* ako važi

$$EZ_1 = EX_1 - cEY_1 < 0.$$

Interpretacija uslova čistog profita ujedno je i vrlo intuitivna jer predstavlja uslov da u datom vremenskom intervalu očekivana veličina odštete EX_1 treba da bude manja od premije zarađene u tom period, predstavljene kao očekivana premija cEY_1.

Ako pretpostavimo Kramer-Ludbergov model i neto obračun premije dobijamo da je $ct = ES(t) = EN(t)EX_1 = \lambda tEX_1$. Međutim, u slučaju neto obračuna premije, kada je $c = \lambda EX_1$, dobijamo da je $EZ_1 = 0$ i da je verovatnoća razaranja jednaka 1. Dakle, da bismo izbegli razaranje sa verovatnoćom 1, neophodno je da primenimo drugi princip obračuna premije za koji je zadovoljen uslov čistog profita $c > \lambda EX_1$. Da bismo dobili zadovoljavajuću stopu premije dovoljno je na premiju obračunatu neto metodom primeniti koeficijent $\rho > 1$, što ćemo nadalje i činiti.

4. Mogućnost kontrole rizika primenom reosiguranja

Razmotrimo slučaj osiguravajuće kompanije kod koje je proces rizika modeliran Kramer-Lundbergovim modelom sa parametrima c i λ i funkcijom raspodele Q. Postoji više mogućnosti i načina na koje takva kompanija može da kontroliše proces rizika: putem reosiguranja, investicija, kontrolom premije, redukcijom portfelja otklanjanjem velikih

[5]Videti u [8] poglavlje 4.1

rizika u smislu verovatnoće ostvarivanja štetnog događaja ili u smislu potencijalnih velikih odšteta, kao i kombinacijom nekih od ovih mogućnosti. Specijalno, ovde ćemo razmatrati slučaj upravljanja procesom rizika putem različitih vidova reosiguranja.

4.1 Proporcionalno reosiguranje

Kao što i samo ime kaže, obaveze ugovornih strana se, u slučaju proporcionalni ugovori o reosiguranju, određuju u proporciji u odnosu na rizike koje je osiguravač preuzeo od osiguranika. Faktor proporcije, kojim je definisan ovakav ugovor, određuje udeo cedenta u riziku. Ovaj faktor uzima vrednosti iz segmenta $[0,1]$ i obeležavaćemo ga sa a.

Na primer, ako je predmet osiguranja stan koji vredi 50.000 dolara, a za isti rizik je zaključen proporcionalni ugovor o reosiguranju sa faktorom proporcije $a = 0.4$, to znači da je cedent izložen riziku od ukupno 20.000 dolara, dok je maksimalna obaveza reosiguravača 30.000 dolara.

U proporcionalnim ugovorima o reosiguranju svaka pojedinačna šteta X je raspodeljena između cedenta i reosiguravača na osnovu utvrđenog faktora proporcije a: cedent plaća aX, a reosiguravač $(1-a)X$. Da bi omogućio ovakvo pokriće cedent reosiguravaču plaća premiju reosiguranja po stopi $h(a)$. Pretpostavićemo da je dozvoljena promena faktora proporcije $a(t)$ neprekidno u toku trajanja ugovora. U tom slučaju promenu faktora proporcije kroz vreme nazivaćemo strategijom, pri čemu $a(t)$ označava faktor proporcije u trenutku t. Primenom strategije $a(t)$ originalni proces rizika cedenta postaje

$$R(t) = s + ct - \int_0^t h\big(a(v)\big)dv - \sum_{i=1}^{N(t)} a(T_i)X_i\,, t \geq 0.$$

Uobičajeno pravilo određivanja premije reosiguranja je princip očekivane vrednosti: $h(a) = (1-a)\rho\lambda EX$, gde je $\rho > 1$. Ako je $c \geq \rho\lambda EX$ (reosiguranje je jeftinije od osiguranja) i cedent želi da minimizuje svoj rizik, onda za sve rizike treba da odabere faktor proporcije $a(t)$=0, odnosno da sve rizike preda u reosiguranje. Međutim, ovo ne bi trebalo da bude slučaj u praksi, tako da ćemo nadalje smatrati da je $c < \rho\lambda EX$. U opštem slučaju reosiguranje je skuplje od osiguranja ako je $c < h(0)$, tj. ako je stopa premija osiguranja manja od stope premije reosiguranja.

4.2 Neproporcionalni ugovori reosiguranja viška štete bez limita pokrića

Za razliku od proporcionalnih ugovora kod kojih je faktor proporcije utvrđen na osnovu veličine rizika, kod neproporcionalnih ugovora o reosiguranju osnovu za utvrđivanje obaveza ugovornih strana predstavlja veličina štete. Prilikom zaključivanja ovakvih ugovora utvrđuje se nivo zadržavanja štete od strane cedenta koji se naziva prioritet i ovde ćemo ga obeležavati sa b.

Neka osiguravajuća kompanija ima ugovor o reosiguranju viška šteta sa prioritetom $b = 10.000$ dolara. Neka su se u portfelju koji je reosiguran ovim ugovorom dogodile sledeće štete: $X_1 = 12.000$, $X_2 = 7.000$ i $X_3 = 20.000$ dolara. Tada cedent u ovim štetama učestvuje, redom, sa po 10.000, 7.000 i 10.000 dolara, dok je reosiguravač u obavezi da po ovim štetama isplati, redom iznose, 2.000, 0 i 10.000 dolara.

U neproporcionalnim ugovorima o reosiguranju zaštite viška štete svaka pojedinačna šteta X raspodeljena je između cedenta i reosiguravača na osnovu prioriteta $0 \leq b \leq \infty$ na sledeći način:

cedent plaća $\min\{X, b\}$, a reosiguravač plaća $(X - b)^+ = \max\{X - b, 0\}$.

Da bi obezbedio ovakvo pokriće cedent reosiguravaču plaća premiju reosiguranja po stopi $h(b)$. Kao i u slučaju faktora proporcije i ovde dozvoljavamo da prioritet bude promenljiv u toku vremena, odnosno da je tokom vremena iskazana zavisnost $b(t)$. Primenom strategije $b(t)$ originalni proces rizika cedenta postaje

$$R(t) = s + ct - \int_0^t h\big(b(v)\big)dv - \sum_{i=1}^{N(t)} \min\{b(T_i), X_i\}, t \geq 0.$$

Jedno od mogućih metoda određivanja premije reosiguranja je, kao i u slučaju proporcionalnih ugovora, pravilo očekivane vrednosti $h(b) = \rho\lambda E(X - b)^+$, za $\rho > 1$. Ovde ćemo takođe pretpostaviti da je $c < h(0) = \rho\lambda EX$.

4.3 Neproporcionalni ugovori reosiguranja viška štete sa limitom pokrića

U praksi je pokriće ugovorima o reosiguranju zaštite viška štete ograničeno konstantnim limitom pokrića $0 \leq C \leq \infty$. To znači da reosiguravač neće plaćati celokupne udele šteta preko prioriteta, već samo iznose štete preko prioriteta do nivoa C. Ovo utiče na raspodelu štete X na sledeći način: reosiguravač plaća $\min\{(X - b)^+, C\}$, dok ostatak $g(X, b, C) = \min\{X, b\} + (X - b - C)^+$ plaća cedent. Za ovakvo pokriće cedent plaća premiju po stopi $h(b, C)$. Ako dozvolimo da se i prioritet i limit pokrića menjaju u toku vremena prema dinamici $(b(t), C(t))$ onda originalni proces rizika cedenta postaje:

$$R(t) = s + ct - \int_0^t h(b(v), C(v))dv - \sum_{i=1}^{N(t)} \mathrm{g}(X_i, b(T_i), C(T_i)), t \geq 0.$$

U slučaju limitiranih ugovora reosiguranje je skuplje od osiguranja ako je $c < h(0, \infty)$. Premiju reosiguranja ćemo odrediti prema formuli

$$h(b, C) = \rho\lambda E[\min\{(X - b)^+, C\}].$$

Da bi minimizirao svoj rizik cedent će odabrati $C(t) = \infty$ ako to može da priušti.

5. Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina

U ovom poglavlju biće definisani osnovni pojmovi potrebni za uvođenje Hamilton-Jakobi-Belmanove (Hamilton-Jacobi-Bellman) jednačine, kao i sama jednačina, koju ćemo koristiti za pronalaženje optimalnog reosiguranja.

Definicija 5.1 *Infinitezimalni generator* L za proces Markova $R(t)$ i (skoro svuda) glatku funkciju $f(s)$ je $L_t f(s) = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} E[f(R(t + h)) - f(s) | R(t) = s]$, gde je funkcija $f(s)$ restrikcija operatora L na domen D na kom limes postoji.

Izračunajmo infinitezimalne generatore za procese rizika definisane u prethodnom poglavlju.

Posmatrajmo najpre proces rizika u Kramer-Lundbergovom modelu. U intervalu vremena dužine $h \to 0$ imamo dva moguća događaja:

1. nije bilo šteta, što se dešava sa verovatnoćom $1 - \lambda h + o(h)$ i tada je

$$R(t + h) = s + c(t + h) - S(t),$$

2. bila je jedna šteta veličine X, što se dešava sa verovatnoćom $\lambda h + o(h)$ i tada je

$$R(t + h) = s + c(t + h) - S(t) - X.$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
&E\big[f\big(R(t+h)\big)-f(s)\big|R(t)=s\big] \\
&\qquad\qquad = E\left[\begin{matrix}\big(1-\lambda h+o(h)\big)\Big(f\big(s+c(t+h)-S(t)\big)-f(s)\Big)+ \\ +\big(\lambda h+o(h)\big)\big(f(s+c(t+h)-S(t)-X)-f(s)\big)\end{matrix}\middle|R(t)=s\right] \\
&\qquad\qquad = E\big[\big(1-\lambda h+o(h)\big)f(s+ch)+\big(\lambda h+o(h)\big)f(s-X+ch)-f(s)\big|R(t)=s\big] \\
&\qquad\qquad = E\big[\lambda h\big(f(s-X+ch)-f(s+ch)\big)+f(s+ch)-f(s)+o(h)\big].
\end{aligned}
$$

Dalje dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
L_t f(s) &= \lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}E[\lambda h\big(f(s-X+ch)-f(s+ch)\big)+f(s+ch)-f(s)+o(h)] \\
&= \lambda E[f(s-X)-f(s)]+cf'(s)
\end{aligned}
$$

Analogno ovome, koristeći premije reosiguranja i učešća osiguravača u štetama definisane u prethodnom poglavlju dobijamo sledeće infinitezimalne generatore:

- Za proces rizika kod proporcionalnog reosiguranja sa konstantnim faktorom proporcije a
$$L_t f(s)=\lambda E[f(s-aX)-f(s)]+\big(c-h(a)\big)f'(s).$$
- Za proces rizika kod reosiguranja viška štete bez limita pokrića sa konstantnim prioritetom b
$$L_t f(s)=\lambda E[f(s-\min\{X,b\})-f(s)]+\big(c-h(b)\big)f'(s).$$
- Za proces rizika kod reosiguranja viška štete sa limitom pokrića C i konstantnim prioritetom b
$$L_t f(s)=\lambda E\big[f\big(s-g(X,b,C)\big)-f(s)\big]+\big(c-h(b,C)\big)f'(s).$$

Da bi pravilno definisao problem optimizacije cedent najpre treba da definiše interval vremena u kom želi da pronađe optimalno rešenje, kao i odgovarajuću, ciljnu funkciju za koju želi da pronađe optimalno rešenje tražeći njen minimum ili maksimum u zavisnosti od cilja koji treba da se postigne. Ciljnu funkciju nazivamo još i *funkcija troška*, ukoliko je optimalno rešenje ono za koje se ostvaruje njen minimum, a ukoliko je optimalno rešenje ono koje maksimizuje ciljnu funkciju onda se ona naziva još i *funkcija koristi*. Međutim, nalaženje optimalnog rešenja ciljne funkcije najčešće nije jednostavno jer je broj mogućnosti za izbor optimalnog rešenja veliki. Stoga ćemo za nalaženje optimalnog rešenja primeniti drugu metodu.

Definicija 5.2 Neka je A fiksirana akcija iz prostora mogućih akcija, pri čemu pod akcijom smatramo konstantnu strategiju $a(t)\equiv A$, i neka je proces rizika $R^a(t)$ homogeni proces Markova sa infinitezimalnim generatorom L^A. Za problem pronalaženja optimalnog reosiguranja sa funkcijom vrednosti $V(s)$ oblika

$$V(s) = \max_{a(.)} E[U(\, R^a(\tau), a(\tau), \tau)]$$

gde je τ vreme razaranja, a U funkcija koristi (dobiti), *Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina* data je sa

$$\max_{A} L^A V(s) = 0, s \geq 0.$$

Maksimizator $A = A(s)$ iz prethodne jednačine definiše *optimalnu strategiju* – ako je proces rizika u stanju s, onda je optimalna akcija $A(s)$.

Problemom pronalaženja optimalne strategije kod proporcionalnih i neproporcionalnih ugovora o reosiguranju, između ostalih, bavili su se nemački matematičari Šmidli (Schmidli), Hip (Hipp), Plum (Plum) i Fogt (Vogt). Na osnovu njihovih radova [3], [4], [5], [12], [13], [14] i [15] u sledećim poglavljima biće formulisani i rešeni neki problemi pronalaženja optimalnog reosiguranja sa stanovišta cedenta u smislu smanjenja njegovog rizika.

6. Problem pronalaženja optimalnog reosiguranja viška štete bez limita pokrića

Pretpostavimo da osiguravajuća kompanija ima mogućnost da odabere i kupi reosiguravajuće pokriće viška štete bez limita pokrića sa promenljivim prioritetom tokom vremena trajanja ugovora. Proces rizika cedenta modeliran je Kramer-Lundbergovim modelom, a premija reosiguranja izračunata principom očekivane vrednosti

$$h\big(b(v)\big) = \rho\lambda E(X - b_v)^+.$$

Pod ovim pretpostavkama želimo da pronađemo optimalnu strategiju koja minimizira verovatnoću razaranja. Drugim rečima, ako je $\delta_b(s)$ verovatnoća opstanka pri strategiji b, a $\delta(s) = \sup_b\{\delta_b(s)\}$, potrebno je u svakom trenutku t pronaći optimalan prioritet b_t^*, takav da važi $\delta(s) = \delta_{b^*}(s)$. Strategija b definisana je vrednostima prioriteta $b_t = b(t)$ u trenutku t.

Proces rizika cedenta pod posmatranim uslovima je

$$R^b(t) = s + ct - \rho\lambda \int_0^t E(X - b_v)^+ dv - \sum_{i=1}^{N(t)} \min\{b(T_i), X_i\}\,, t \geq 0.$$

Za ovako definisani proces rizika $R^b(t)$ i funkciju verovatnoće opstanka $\delta(s)$ dobijamo infinitezimalni generator

$$L_t\delta(s) = \lambda E[\delta(s - \min\{X, b\}) - \delta(s)] + (c - \rho\lambda E(X - b)^+)\delta'(s)$$

odakle, maksimiziranjem po svim mogućim b dobijamo Hamilton-Jakobi-Belmanovu jednačinu

$$0 = \sup_{b>0}\{\lambda E[\delta(s - \min\{X, b\}) - \delta(s)] + (c - \rho\lambda E(X - b)^+)\delta'(s)\}. \tag{1}$$

Da bi cedent zadržao neki deo premije mora da važi $c \geq \rho\lambda E(X - b)^+$. Označimo sa $\underline{b}$ onu vrednost za koju važi jednakost $c = \rho\lambda E(X - \underline{b})^+$, tako da ćemo zahtevati da je $b > \underline{b}$.

Kako nam je cilj da povećamo verovatnoću opstanka, odnosno da nađemo neopadajuće rešenje jednačine (1), treba da važi $\delta'(s) \geq 0$. U tom slučaju jednačinu (1) možemo zapisati u obliku

$$\delta'(s) = \inf_{b>\underline{b}}\left\{\lambda\frac{\delta(s) - E[\delta(s - \min\{X, b\})]}{c - \rho\lambda E(X - b)^+}\right\}. \tag{2}$$

6.1 Postojanje optimalne strategije kod ugovora o reosiguranju viška štete

Teorema 6.1 *(Teorema o egzistenciji rešenja) Pretpostavimo da je raspodela veličina odšteta Q apsolutno neprekidna. Tada postoji neopadajuće rešenje $V(s)$ Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine (1) koje je neprekidno na intervalu [0, ∞), neprekidno diferencijabilno na intervalu (0, ∞), $V(s) = 0$ za $s < 0$ i $V(s) \to 1$ kad $s \to \infty$.*

Dokaz. Definišimo niz $V_n(s)$ preko $V_0(s) = \delta_0(s)$, tj. verovatnoće opstanka bez reosiguranja (što znači da je $b = \infty$ ili $b = M$ ako je $P(X \geq M) = 0$) i rekurzivne veze

$$V'_{n+1}(s) = \inf_{b>0}\left\{\lambda\frac{V_n(s) - E[V_n(s - \min\{X, b\})]}{c - \rho\lambda E(X - b)^+}\right\}, n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3}$$

Indukcijom ćemo pokazati da je niz $V'_n(s)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ opadajući. Za $n = 0$, odnosno kada nema reosiguranja, infinitezimalni generator je

$$L_tV_0(s) = \lambda E[V_0(s - X) - V_0(s)] + cV_0{}'(s)$$

dok je Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina

$$0 = \lambda E[V_0(s - X) - V_0(s)] + cV_0{}'(s)$$

odnosno

$$V'_0(s) = \lambda\frac{V_0(s) - E[V_0(s - \mathrm{X})]}{c}$$

a iz formule (3) za $n = 0$ imamo

$$V_1'(s) = \inf_{b>0}\left\{\lambda \frac{V_0(s) - E[V_0(s - \min\{X, b\})]}{c - \rho\lambda E(X - b)^+}\right\}.$$

Kako je

$$\inf_{b>0}\left\{\lambda \frac{V_0(s) - E[V_0(s - \min\{X, b\})]}{c - \rho\lambda E(X - b)^+}\right\} \leq \lambda \frac{V_0(s) - E[V_0(s - \min\{X, \infty\})]}{c - \rho\lambda E(X - \infty)^+} = V_0'(s)$$

sledi da je $V_1'(s) \leq V_0'(s)$ za sve $s \geq 0$.

Dalje, neka je $n \geq 1$ i važi $V_n'(s) \leq V_{n-1}'(s)$ za sve $s \geq 0$ i neka je s fiksirano.

Iz formule (3) za bilo koje b sledi da važi nejednakost

$$\begin{aligned}
V_{n+1}'(s)(c - \rho\lambda E(X - b)^+) &\leq \lambda V_n(s) - \lambda E[V_n(s - \min\{X, b\})] \\
&= \lambda E\left[\int_{s-\min\{X,b\}}^{s} V_n'(u)\, du\right] \\
&\leq \lambda E\left[\int_{s-\min\{X,b\}}^{s} V_{n-1}'(u)\, du\right] \\
&= \lambda V_{n-1}(s) - \lambda E[V_{n-1}(s - \min\{X, b\})].
\end{aligned}$$

Kako je b bilo proizvoljno, prelaskom na infimum dobijamo traženu nejednakost $V_{n+1}'(s) \leq V_n'(s)$ za svako $s \geq 0$. Dakle, $V_n'(s)$ je opadajući niz neprekidnih funkcija za koji važi $V_n'(s) > 0$. Iz prethodnog sledi da niz $V_n'(s)$ konvergira ka nekoj funkciji $g(s)$. Možemo napisati da je

$$V(s) = 1 - \int_s^\infty g(u)du,$$

gde je $V(s)$ neprekidna funkcija takva da važi

$$g(s) = \inf_{b \geq \underline{b}}\left\{\lambda \frac{V(s) - E[V(s - \min\{X, b\})]}{c - \rho\lambda E(X - b)^+}\right\}.$$

Ono što ostaje da pokažemo jeste neprekidnost funkcije $g(s)$ iz čega sledi da je i $V'(s)$ neprekidna, jer je $V'(s) = g(s)$ i da $V(s)$ zadovoljava jednakost (1) kada se umesto δ uvrsti V.

Prvo ćemo pokazati da je $g(s) > 0$ za svako $s \geq 0$. Funkcija $g(s)$ je granična vrednost niza funkcija $V_n'(s)$. Ako se infimum u (3) ne postiže na segment $[\underline{b}, s]$ onda se postiže u tački $b = \infty$, jer za sve druge vrednosti prioriteta b ili je premija koja ostaje u samopridržaju osiguravača negativna ili su očekivane štete veće od premije u istom periodu.

Za $0 \leq s \leq \underline{b}$ infimum u (3) se postiže u tački $b = \infty$, pa je

$$g(s) = V'(s) = \lambda \frac{V(s)}{c} = \lambda \frac{V_0(s)}{c} > 0.$$

Neka je $s_0 = \inf\{s: g(s) = 0\} < \infty$. Tada je $s_0 \geq \underline{b}$ i postoji $s_0 \leq s < s_0 + \underline{b}$ za koje je $g(s) = 0$ ili, drugim rečima,

$$0 = \inf_{b \geq \underline{b}} \{V(s) - E[V(s - \min\{X, b\})]\} = V(s) - E\left[V\left(s - \min\{X, \underline{b}\}\right)\right],$$

odakle dobijamo $V(s) = V\left(s - \underline{b}\right)$ $(P(X > \underline{b}) > 0$ jer je $c = \rho\lambda E(X - \underline{b})^+)$. Tada je

$$0 = \int_{s-\underline{b}}^{s} g(u)du \geq \int_{s-\underline{b}}^{s_0} g(u)du$$

što je u suprotnosti sa definicijom s_0 jer je $s - \underline{b} < s_0$, a funkcija $g(u)$ je strogo pozitivna na intervalu $[s - \underline{b}, s_0]$.

Pokažimo sada da se u definiciji funkcija $V_n(s)$, $s \leq K$, infimum može suziti na segment $[b_1, \infty]$, gde je $b_1 > \underline{b}$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji niz $0 \leq s_n \leq K$ i $b_n \to \underline{b}$ tako da je

$$V_{n+1}'(s_n) \geq \lambda \frac{V_n(s_n) - E[V_n(s_n - \min\{X, b_n\})]}{c - \rho\lambda E(X - b_n)^+} - \frac{1}{n} \geq V_{n+1}'(s_n) - \frac{1}{n}.$$

Kako je $0 \leq V_n'(s) \leq V_0'(s)$ i $c - \rho\lambda E(X - b_n)^+ \to 0$ dobijamo da

$$V_n(s_n) - E[V_n(s_n - \min\{X, b_n\})] \to 0,$$

te stoga za svaku tačku nagomilavanja s_0 niza s_n važi

$$V_n(s_0) - E\left[V_n\left(s_0 - \min\{X, \underline{b}\}\right)\right] = 0 = g(s_0),$$

što je u kontradikciji sa prethodno dokazanom činjenicom da je funkcija $g(u)$ strogo pozitivna. Ovim smo dokazali da funkcija $V(s)$ zadovoljava jednakost (1) kada se umesto δ uvrsti V, dok iz njene definicije direktno sledi konvergencija ka 1 kad $s \to \infty$.

Kako je

$$|g(x) - g(y)| \leq \sup_{b \geq b_1} \left| \lambda \frac{V(x) - E[V(x - \min\{X, b\})]}{c - \rho\lambda E(X - b)^+} - \lambda \frac{V(y) - E[V(y - \min\{X, b\})]}{c - \rho\lambda E(X - b)^+} \right|$$

neprekidnost funkcije $g(u)$ sledi iz neprekidnosti funkcije $V(s)$, tj. dokazali smo da je funkcija $V(s)$ neprekidna na intervalu $[0, \infty)$ i neprekidno diferencijabilna na intervalu $(0, \infty)$. ■

6.2 Jedinstvenost optimalne strategije kod ugovora o reosiguranju viška štete

Definicija 6.1 Neka je $\{R(t): t \geq 0\}$ slučajan proces i $\tau = \inf\{t > 0: R(t) < 0\} < +\infty$ vreme razaranja. Tada se proces $\{R(\min\{t, \tau\}): t \geq 0\}$ naziva *zaustavni proces*.

Teorema 6.2 *Strategija b_t^* dobijena kao rešenje jednačine (1), kada se umesto δ uvrsti V, maksimizuje verovatnoću opstanka kod primene ugovora o reosiguranju viška štete: Za svako $s \geq 0$ i proizvoljnu strategiju b_t sa verovatnoćom opstanka $\delta(s)$ imamo*

$$V(s) \geq \delta(s),$$

pri čemu jednakost važi za $b_t = b_t^*$.

Dokaz. Neka je $V(s)$ glatka funkcija koja je rešenje jednačine (2) kada se umesto δ uvrsti V konstruisano u dokazu prethodne teoreme za koje važi $0 \leq V(s) \leq 1$ i $\lim_{s \to \infty} V(s) = 1$. Označimo sa $R(t)$ i $R^*(t)$ procese rizika osiguravajuće kompanije pri strategijama reosiguranja b_t i b_t^* i početnim kapitalom s. Neka su τ i τ^* odgovarajuća vremena razaranja, $Z_t = R(\min\{t, \tau\})$ i $Z_t^* = R^*(\min\{t, \tau^*\})$ zaustavni procesi i W_t i W_t^* zaustavni procesi dobijeni transformacijom pomoću $V(s)$, tj.

$$W_t = V(Z_t) = V\big(R(\min\{t, \tau\})\big)$$

$$W_t^* = V(Z_t^*) = V\big(R^*(\min\{t, \tau^*\})\big).$$

U [11] dokazano je da važi

$$EW_t = V(s) + E[\int_0^t V'(Z_s)\,(c - \rho\lambda E(X - b_s)^+)ds + \lambda \int_0^t E[V(Z_s - \min\{X, b_s\}) - V(Z_s)]ds]$$

$$EW_t^* = V(s) + E[\int_0^t V'(Z_s^*)\,(c - \rho\lambda E(X - b_s^*)^+)ds + \lambda \int_0^t E[V(Z_s^* - \min\{X, b_s^*\}) - V(Z_s^*)]ds].$$

Iz Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine (1) kada se umesto δ uvrsti V vidimo da za sve $t > 0$ važi $EW_t^* = V(s)$, jer za b^*, kao optimalno rešenje, važi

$$V'(Z_s^*)(c - \rho\lambda E(X - b_s^*)^+) + \lambda E[V(Z_s^* - \min\{X, b_s^*\}) - V(Z_s^*)] = 0, s \geq 0.$$

Kako se u b^* postiže supremum prethodnog izraza sledi da je

$$V'(Z_s)(c - \rho\lambda E(X - b_s)^+) + \lambda E[V(Z_s - \min\{X, b_s\}) - V(Z_s)] \leq 0, s \geq 0, b_s \geq 0.$$

Iz prethodnog sledi da je

$$EW_t^* = V(s) \geq EW_t. \tag{4}$$

Pretpostavimo najpre da strategija b_t zadovoljava $b_t \geq B > 0$ za sve $t \geq 0$, gde B zadovoljava uslov $P\{X > B\} > 0$. Pokazaćemo da u ovom slučaju proces $R(t)$ nije ograničen na $\{\tau = \infty\}$. Odnosno, dokazaćemo da je

$$P\{R(t) \leq M \; za \; sve \; t \geq 0 \; i \; \tau = \infty\} = 0 \tag{5}$$

za sve $M > 0$. Neka je $n > \frac{M+c}{B}$ proizvoljno. Verovatnoća da se dogodi više od n šteta većih od B na intervalu dužine 1 je pozitivna, odnosno sa verovatnoćom 1 će se realizovati događaj da se u intervalu $[t, t+1]$ dogodilo više od n takvih šteta. Tada, ako je $R(t) \leq M$ imamo

$$R(t+1) \leq R(t) + c - nB \leq M + c - nB < 0,$$

odnosno dobijamo da je $\tau < \infty$. Dakle, ako je $R(t) \leq M$ sledi da je $\tau < \infty$, što dokazuje tvrđenje (5).

Za proizvoljno ε konstruišimo strategiju b_t^+ sa procesom rizika $R^+(t)$ i vremenom razaranja τ^+ takvim da je $P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ < \infty\} < \varepsilon$ i $R^+(t) \to \infty$ na $\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ = \infty\}$. Neka je $M > s$ dovoljno veliko tako da je $1 - \delta_0(M) < \varepsilon$, neka je $T = \inf\{t: R(t) = M\}$ koje je ograničeno skoro svuda na $\{\tau = \infty\}$ i definišimo

$$b_t^+ = \begin{cases} b_t \; ako \; je \; t \leq T \\ \infty \; ako \; je \; t > T. \end{cases}$$

Tada je $P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ < \infty\} \leq P\{\tau = \infty\} P\{\tau^+ < \infty\} \leq 1 - \delta_0(M) < \varepsilon$. Dalje, $T < \infty$ implicira $R^+(t) \to \infty$ jer je ε proizvoljno malo, a $1 - \delta_0(M) < \varepsilon$.

Ako ponovo iskoristimo nejednakost (4) za $R^+(t)$ umesto $R(t)$ dobijamo

$$E\big[V\big(R^*(\min\{t, \tau^*\})\big)\big] = V(s) \geq E\big[V\big(R^+(\min\{t, \tau^+\})\big)\big].$$

Kako su τ^*i τ^+ vremena zaustavljanja važi $R^*(\tau^*) < 0$ i $R^+(\tau^+) < 0$, odakle sledi da je $V\big(R^*(\tau^*)\big) = 0$ i $V\big(R^+(\tau^+)\big) = 0$. Kada $t \to \infty$ važi

$$P\{\tau^* = \infty\} \geq E\big[V\big(R^*(\min\{t, \tau^*\})\big)\big] = V(s) \geq E\big[V\big(R^+(\min\{t, \tau^+\})\big)\big] \geq$$

$$\geq P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ = \infty\} = P\{\tau = \infty\} - P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ < \infty\} \geq P\{\tau = \infty\} - \varepsilon.$$

Kako je ε bilo proizvoljno, a svaka strategija b_t za $V(s)$ koje je rešenje jednačine (2) u smislu Teoreme 6.1 zadovoljava nejednakost $b_t \geq B > 0$ za sve $t \geq 0$, sledi jedinstvenost rešenja i važi $P\{\tau^* = \infty\} = V(s)$.

Za određivanje nejednakosti $E\big[V\big(R^+(\min\{t,\tau^+\})\big)\big] \geq P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ = \infty\}$ smo koristili činjenice da $R^+(t) \to \infty$ na $\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ = \infty\}$ i da je $\lim_{s\to\infty} V(s) = 1$. ■

6.3 Optimalna strategija kod ugovora o reosiguranju viška štete za slučaj eksponencijalno raspodeljenih visina šteta

Pretpostavimo da važe sve osobine za Kramer-Lundbergov model u modeliranju rizika jedne osiguravajuće kompanije i da cedent može da kupi reosiguravajuće pokriće viška šteta bez limita pokrića na način kako je ranije opisano. Pretpostavićemo da je raspodela veličina šteta eksponencijalna sa funkcijom gustine $f(x) = me^{-mx}, x \geq 0$ i funkcijom raspodele $F(x) = 1 - e^{-mx}, x \geq 0$.

Osim navedenog pretpostavićemo i da je stopa premije c određena kao $c = (1+\eta)\lambda EX, \eta > 0$ i da je $\rho = 1+\theta, \theta > 0$. Zahtevaćemo i da je zadovoljen uslov da je neto premija u samopridržaju cedenta pozitivna, odnosno da važi uslov $c > \rho\lambda E(X-b)^+$, tj. $(1+\eta)\lambda EX = (1+\eta)\lambda\frac{1}{m} > (1+\theta)\lambda\frac{1}{m}e^{-mb}$, što daje uslov $(1+\eta) > (1+\theta)e^{-mb}$.

Ovde smo koristili, uz smenu $z = x - b$,

$$E(X-b)^+ = \int_b^\infty (x-b)me^{-mx}dx = e^{-mb}\int_0^\infty zme^{-mz}dz = \frac{1}{m}e^{-mb}.$$

U dokazu Teoreme 6.1 videli smo da se infimum u jednačini (2) postiže na segmentu $[\underline{b}, s]$ ili u tački $b = \infty$, pa će nam to biti dodatno ograničenje za pronalaženje optimalnog prioriteta. Dakle, tražimo ono b koje zadovoljava jednačinu

$$V'(s) = \inf_{\{s>b>\underline{b}\}\cup\{b=\infty\}}\left\{\lambda\frac{V(s) - E[V(s-\min\{X,b\})]}{c - \rho\lambda E(X-b)^+}\right\}.$$

Zapišimo ovu jednačinu u malo drugačijem obliku kako bi bila jednostavnija za rešavanje.

Po definiciji je

$$E[V(s-\min\{X,b\})] = \int_0^b V(s-x)f(x)dx + V(s-b)\big(1-F(b)\big).$$

Označimo sa

$$w(s) = \int_0^s V(s-x)f(x)dx = \int_0^s V(s-x)me^{-mx}dx.$$

Tada je

$$w'(s) = V(s-s)me^{-ms} + \int_0^s V'(s-x)me^{-mx}dx = mV(s) - m\int_0^s V(s-x)me^{-mx}dx, \text{ tj.}$$

$$w'(s) = mV(s) - mw(s).$$

Takođe je

$$\int_0^b V(s-x)f(x)dx = w(s) - \int_b^s V(s-x)f(x)dx.$$

Dalje, uvođenjem smene $z = x - b$, dobijamo

$$\int_b^s V(s-x)f(x)dx =$$

$$= \int_0^{s-b} V(s-b-z)me^{-m(z+b)}dx$$

$$= e^{-mb}\int_0^{s-b} V(s-b-z)me^{-mz}dx = e^{-mb}\, w(s-b).$$

Dakle, dobijamo da je

$$E[V(s-\min\{X,b\})] = w(s) - e^{-mb}w(s-b) + V(s-b)e^{-mb}.$$

Uz prethodne pretpostavke i oznake, problem se svodi na pronalaženje rešenja jednačine

$$V'(s) = \inf_{\{s>b>\underline{b}\}U\{b=\infty\}}\left\{m\frac{V(s) - w(s) + (w(s-b) - V(s-b))e^{-mb}}{(1+\eta) - (1+\theta)e^{-mb}}\right\}.$$

Čak je i u ovako pojednostavljenom primeru teško naći eksplicitno rešenje jednačine (1), pa ćemo rešenje potražiti uz pomoć simulacije, ali uz dodatne pretpostavke.

Rešavanjem diferencijalne jednačine $0 = \lambda\big(E[\delta(s-X)] - \delta(s)\big) + c\delta'(s), s \geq 0$ dobijamo da je verovatnoća opstanka u slučaju kada nema reosiguravajućeg pokrića, odnosno kada je $b_t = \infty$ za svako t, jednaka[6]

$$\delta(s) = 1 - \frac{\lambda}{mc} e^{-\left(m-\frac{\lambda}{c}\right)s}.$$

Kako je c=$(1+\eta)\lambda\frac{1}{m}$ dobijamo da je $\delta(0) = \frac{\eta}{1+\eta}$, a kao početni uslov postavićemo da je $V(0) = \delta(0)$.

Takođe, iz $c = \rho\lambda E(X - \underline{b})^+$ dobijamo da je $\underline{b} = -\frac{1}{m}\ln(\frac{1+\eta}{1+\theta})$.

U programu R definisana je funkcija XL koja za zadate vrednosti argumenata eta= η, teta= θ, lambda=λ i m= m daje grafik promene optimalne strategije b^* u zavisnosti od kapitala s u slučaju ugovora o reosiguranju viška štete. U nastavku je dat kod i rezultat za vrednosti η=0.5, θ=0.7, m=1 i λ=1.

Algoritam koji prati ovaj kod sastoji se u sledećem: za sve vrednosti kapitala s od 0 do 5 sa korakom $\frac{1}{1000}$ određujemo optimalan prioritet $b^*(s)$ tako što za sve vrednosti $b \in (\underline{b}, s) \cup \{\infty\}$ određujemo onu u kojoj se postiže minimum funkcije $m\frac{V(s)-w(s)+(w(s-b)-V(s-b))e^{-mb}}{(1+\eta)-(1+\theta)e^{-mb}}$. Tu minimalnu vrednost dodeljujemo promenljivoj $V'(s)$, a za određivanje vrednosti $V(s)$, $w(s)$ i $w'(s)$ koristimo formule

$$V(s) = V\left(s - \frac{1}{1000}\right) + V'\left(s - \frac{1}{1000}\right)\frac{1}{1000},$$

$$w(s) = w\left(s - \frac{1}{1000}\right) + w'\left(s - \frac{1}{1000}\right)\frac{1}{1000}$$

i

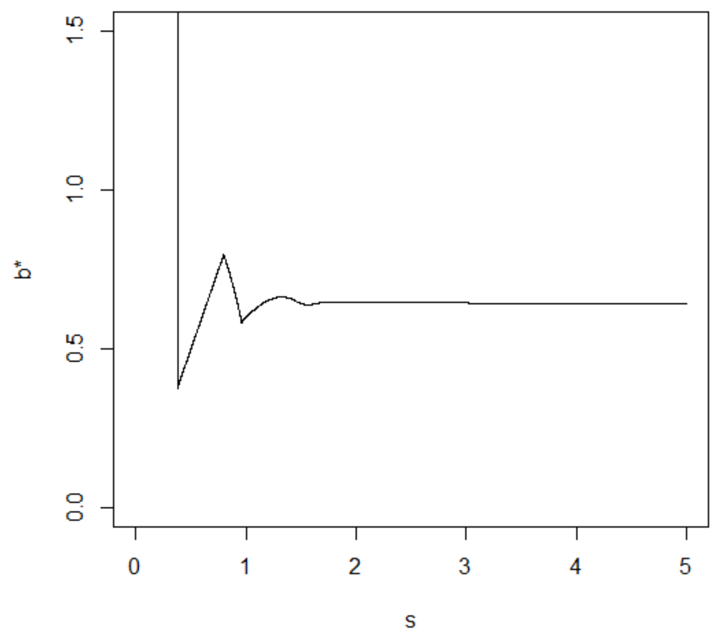
$$w'(s) = mV(s) - mw(s).$$

```
#Ugovor reosiguranja viska stete
XL<-function(eta=0.5,teta=0.7,lambda=1,m=1)
{
#odredjujemo najnizu mogucu vrednost prioriteta
b_<-(-log((1+eta)/(1+teta))/m)
V<-c()
V[1]<-eta/(1+eta)
```

[6]Detalji rešavanja ovog problema nalaze se u [10] u primeru na strani 163

```
w<-c()
opt_b<-c()
r<-c()
#s predtavlja vrednost kapitala uvecenu 1000 puta
#wp i Vp su redom izvodi funkcija w i V
for (s in 1:5000)
	{
	if(s==1)
		{
		w[s]<-0
		wp<-m*(V[s]-w[s])
		}
	if(s>=2)
		{
		w[s]<-w[s-1]+wp/1000
		wp<-m*(V[s]-w[s])
		}
	Vp<-100000
	d<-b_+1
	g<-s-1
	#b je promenljiv prioritet na osnovu koga odredjujemo minimun funkcije Vp
	for(b in d:g)
		{
		if((1+eta)-(1+teta)*exp(-b/1000)<0)
			{
			Vp<-m*(V[s]-w[s])/(1+eta)
			bopt<-10
			}
		else
			{
			pom<-m*(V[s]-w[s]+(w[s-b]-V[s-b])*exp(-b/1000))
			pom<-pom/((1+eta)-(1+teta)*exp(-b/1000))
			if(pom<=Vp)
				{
				Vp<-pom
				bopt<-b/1000
				}
			}
		if((m*(V[s]-w[s])/(1+eta))<=Vp)
			{
```

```
                    Vp<-m*(V[s]-w[s])/(1+eta)
                    bopt<-10
                    }
                }
        V[s+1]<-V[s]+Vp/1000
        r[s]<-(s-1)/1000
        opt_b[s]<-bopt
        }
#crtamo grafik zavisnosti optimalnog prioriteta od kapitala
plot(r,opt_b,type='l',xlab='s',ylab='b*',ylim=c(0,1.5))
}
```



Slika 2

Na Slici 2 prikazan je grafik zavisnosti optimalne strategije od kapitala koji se dobija pozivanjem funkcije XL(). Vidimo da opimalna strategija $b^*(s)$ u slučaju eksponencijalno raspodeljenih veličina šteta za male vrednosti kapitala s zadovoljava $b^*(s) = \infty$, zatim $b^*(s) = s$ što znači da pod ovim uslovima sledeća šteta neće izazvati razaranje i na kraju $b^*(s) < s$ pri čemu $b^*(s)$ dalje konvergira.

7. Problem pronalaženja optimalnog proporcionalnog reosiguranja

Pretpostavimo da osiguravajuća kompanija ima mogućnost da odabere i kupi proporcionalno reosiguravajuće pokriće sa promenljivim faktorom proporcije tokom vremena trajanja ugovora. Proces rizika cedenta modeliran je Kramer-Lundbergovim modelom, a premija reosiguranja izračunata principom očekivane vrednosti

$$h\big(a(v)\big) = (1 - a(v))\rho\lambda EX.$$

Pod ovim pretpostavkama želimo da pronađemo optimalnu strategiju koja minimizira verovatnoću razaranja. Drugim rečima, ako je $\delta_a(s)$ verovatnoća opstanka pri strategiji a, a $\delta(s) = \sup_a\{\delta_a(s)\}$, potrebno je u svakom trenutku t pronaći optimalan faktor proporcije a_t^*, takav da važi $\delta(s) = \delta_{a^*}(s)$. Strategija a definisana je vrednostima faktora proporcije $a_t = a(t)$ u trenutku t.

Proces rizika cedenta pod posmatranim uslovima je

$$R^a(t) = s + ct - \int_0^t h\big(a(v)\big)dv - \sum_{i=1}^{N(t)} a(T_i)X_i\,, t \geq 0.$$

Za ovako definisani proces rizika $R^a(t)$ i funkciju verovatnoće opstanka $\delta(s)$ dobijamo infinitezimalni generator

$$L_t\delta(s) = \lambda E[\delta(s - aX) - \delta(s)] + (c - (1 - a)\rho\lambda EX)\delta'(s),$$

odakle, maksimiziranjem po svim mogućim a dobijamo Hamilton-Jakobi-Belmanovu jednačinu

$$0 = \sup_{0\leq a\leq 1}\{\lambda E[\delta(s - aX) - \delta(s)] + (c - (1 - a)\rho\lambda EX)\delta'(s)\}. \tag{6}$$

Uslov da bi cedent zadržao neki deo premije u slučaju proporcionalnog reosiguranja dat je nejednakošću $c \geq (1 - a)\rho\lambda EX$. Označimo sa $\underline{a}$ onu vrednost za koju važi jednakost $c = (1 - \underline{a})\rho\lambda EX$, tako da ćemo zahtevati da je $a > \underline{a}$.

Analogno kao za neproporcionalne ugovore jednačinu (6) možemo zapisati u obliku

$$\delta'(s) = \inf_{\underline{a}<a\leq 1}\left\{\lambda\frac{\delta(s) - E[\delta(s - aX)]}{c - (1 - a)\rho\lambda EX}\right\}. \tag{7}$$

7.1 Postojanje optimalne strategije kod proporcionalnih ugovora o reosiguranju

Teorema 7.1 *(Teorema o egzistenciji rešenja) Pretpostavimo da je raspodela veličina odšteta* Q *apsolutno neprekidna. Tada postoji neopadajuće rešenje* $V(s)$ *Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine (6) koje je neprekidno na intervalu [0, ∞), neprekidno diferencijabilno na intervalu (0, ∞),* $V(s) = 0$ *za* $s < 0$ *i* $V(s) \to 1$ *kad* $s \to \infty$.

Dokaz. Definišimo niz $V_n(s)$ preko $V_0(s) = \delta_0(s)$, tj. verovatnoće opstanka bez reosiguranja $(a = 1)$ i rekurzivne veze

$$V'_{n+1}(s) = \inf_{0 \le a \le 1} \left\{ \lambda \frac{V_n(s) - E[V_n(s - a\mathrm{X})]}{c - (1-a)\rho\lambda EX} \right\}, n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (8)$$

Indukcijom ćemo pokazati da je niz $V'_n(s)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ opadajući. Za $n = 0$, odnosno kada nema reosiguranja, važi

$$V'_0(s) = \lambda \frac{V_0(s) - E[V_0(s - \mathrm{X})]}{c},$$

a iz formule (8) za $n = 0$ imamo

$$V'_1(s) = \inf_{0 \le a \le 1} \left\{ \lambda \frac{V_0(s) - E[V_0(s - a\mathrm{X})]}{c - (1-a)\rho\lambda EX} \right\}.$$

Kako je

$$\inf_{0 \le a \le 1} \left\{ \lambda \frac{V_0(s) - E[V_0(s - a\mathrm{X})]}{c - (1-a)\rho\lambda EX} \right\} \le \lambda \frac{V_0(s) - E[V_0(s - \mathrm{X})]}{c - (1-1)\rho\lambda EX} = V'_0(s)$$

sledi da je $V'_1(s) \le V'_0(s)$ za sve $s \ge 0$.

Dalje, neka je $n \ge 1$ i važi $V'_n(s) \le V'_{n-1}(s)$ za sve $s \ge 0$ i neka je s fiksirano.

Iz formule (8) za bilo koje a sledi da važi nejednakost

$$V'_{n+1}(s)(c - (1-a)\rho\lambda EX) \le \lambda V_n(s) - \lambda E[V_n(s - a\mathrm{X})]$$

$$= \lambda E\left[\int_{s-a\mathrm{X}}^{s} V'_n(u)\, du \right]$$

$$\le \lambda E\left[\int_{s-a\mathrm{X}}^{s} V'_{n-1}(u)\, du \right]$$

$$= \lambda V_{n-1}(s) - \lambda E[V_{n-1}(s - a\mathrm{X})].$$

Kako je a bilo proizvoljno, prelaskom na infimum dobijamo traženu nejednakost $V'_{n+1}(s) \leq V'_n(s)$ za svako $s \geq 0$. Dakle, $V'_n(s)$ je opadajući niz neprekidnih funkcija za koji važi $V'_n(s) > 0$. Iz prethodnog sledi da niz $V'_n(s)$ konvergira ka nekoj funkciji $g(s)$. Možemo napisati da je

$$V(s) = 1 - \int_s^\infty g(u)du,$$

gde je $V(s)$ neprekidna funkcija takva da važi

$$g(s) = \inf_{\underline{a}<a\leq 1}\left\{\lambda \frac{V(s) - E[V(s - a\mathrm{X})]}{c - (1-a)\rho\lambda EX}\right\}.$$

Ono što ostaje da pokažemo jeste neprekidnost funkcije $g(s)$ iz čega sledi da je i $V'(s)$ neprekidna, jer je $V'(s) = g(s)$ i da $V(s)$ zadovoljava jednakost (6). Prvo ćemo pokazati da je $g(s) > 0$ za svako $s \geq 0$. Funkcija $g(s)$ je granična vrednost niza funkcija $V'_n(s)$. Infimum u (8) se postiže na segmentu $[\underline{a}, 1]$, jer za sve druge vrednosti faktora proporcije a premija koja ostaje u samopridržaju osiguravača je negativna. Tako da se u definiciji funkcija $V_n(s)$ infimum može ograničiti na segment $[\underline{a}, 1]$.

Neka je ε takvo da je $E(\underline{a}\mathrm{X}) = \varepsilon$. Tada je $E(a\mathrm{X}) > \varepsilon > 0$ za $\underline{a} < a \leq 1$. Iz definicije ε sledi da je $V(s) - E[V(s - a\mathrm{X})] > 0$ za $0 \leq s \leq \varepsilon$, $\underline{a} < a \leq 1$.

Neka je $s_0 = \inf\{s: g(s) = 0\} < \infty$. Tada je $s_0 \geq \varepsilon$ i postoji $s_0 \leq s < s_0 + \varepsilon$ za koje je $g(s) = 0$ ili, drugim rečima,

$$0 = \inf_{\underline{a}<a\leq 1}\{V(s) - E[V(s - a\mathrm{X})]\} = V(s) - E\big[V\big(s - \underline{a}\mathrm{X}\big)\big],$$

odakle dobijamo $V(s) = V(s - \varepsilon)$. Tada je

$$0 = \int_{s-\varepsilon}^{s} g(u)du \geq \int_{s-\varepsilon}^{s_0} g(u)du,$$

što je u suprotnosti sa definicijom s_0 jer je $s - \varepsilon < s_0$, a funkcija $g(u)$ je strogo pozitivna na intervalu $[s - \varepsilon, s_0]$.

Ostalo je još da pokažemo da se u definiciji funkcija $V_n(s)$, $s \leq K$, infimum može suziti na segment $[a_1, 1]$, gde je $a_1 > \underline{a}$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji niz $0 \leq s_n \leq K$ i $a_n \to \underline{a}$ tako da je

$$V_{n+1}'(s_n) \geq \lambda \frac{V_n(s_n) - E[V_n(s_n - a_n X)]}{c - (1 - a_n)\rho\lambda EX} - \frac{1}{n} \geq V_{n+1}'(s_n) - \frac{1}{n}.$$

Kako je $0 \leq V_n'(s) \leq V_0'(s)$ i $c - (1 - a_n)\rho\lambda EX \to 0$ dobijamo da

$$V_n(s_n) - E[V_n(s_n - a_n X)] \to 0,$$

te stoga za svaku tačku nagomilavanja s_0 niza s_n važi

$$V_n(s_0) - E\big[V_n\big(s_0 - \underline{a}X\big)\big] = 0 = g(s_0),$$

što je u kontradikciji sa prethodno dokazanom činjenicom da je funkcija $g(u)$ strogo pozitivna. Ovim smo dokazali da funkcija $V(s)$ zadovoljava jednakost (6), dok iz njene definicije direktno sledi konvergencija ka 1 kad $s \to \infty$.

Kako je

$$|g(x) - g(y)| \leq \sup_{\underline{a} < a \leq 1} \left| \lambda \frac{V(x) - E[V(x - a\mathrm{X})]}{c - (1 - a)\rho\lambda EX} - \lambda \frac{V(y) - E[V(y - a\mathrm{X})]}{c - (1 - a)\rho\lambda EX} \right|$$

neprekidnost funkcije $g(u)$ sledi iz neprekidnosti funkcije $V(s)$, tj. dokazali smo da je funkcija $V(s)$ neprekidna na intervalu $[0, \infty)$ i neprekidno diferencijabilna na intervalu $(0, \infty)$. ■

7.2 Jedinstvenost optimalne strategije kod proporcionalnih ugovora o reosiguranju

Analogno dokazu Teoreme 6.2 može se pokazati sledeće tvrđenje.

Teorema 7.2 *Strategija a_t^* dobijena kao rešenje jednačine (6), kada se umesto δ uvrsti V, maksimizuje verovatnoću opstanka kod primene proporcionalnih ugovora o reosiguranju: Za svako $s \geq 0$ i proizvoljnu strategiju a_t sa verovatnoćom opstanka $\delta(s)$ imamo*

$$V(s) \geq \delta(s),$$

pri čemu jednakost važi za $a_t = a_t^*$.

Dokaz. Neka je $V(s)$ glatka funkcija koja je rešenje jednačine (7) kada se umesto δ uvrsti V konstruisano u dokazu prethodne teoreme za koje važi $0 \leq V(s) \leq 1$ i $\lim_{s\to\infty} V(s) = 1$. Označimo sa $R(t)$ i $R^*(t)$ procese rizika osiguravajuće kompanije pri strategijama reosiguranja a_t i a_t^* i početnim kapitalom s. Neka su τ i τ^* odgovarajuća vremena razaranja, $Z_t = R(\min\{t, \tau\})$ i $Z_t^* = R^*(\min\{t, \tau^*\})$ zaustavni procesi i W_t i W_t^* zaustavni procesi dobijeni transformacijom pomoću $V(s)$, tj.

$$W_t = V(Z_t) = V\big(R(\min\{t,\tau\})\big)$$

$$W_t^* = V(Z_t^*) = V\big(R^*(\min\{t,\tau^*\})\big).$$

Dalje, primenom istog rešenja kao u dokazu Teoreme 6.2 dobijamo

$$EW_t = V(s) + E[\int_0^t V'(Z_s)\,(c-(1-a_s)\rho\lambda EX)ds + \lambda\int_0^t E[V(Z_s - a_s X) - V(Z_s)]ds]$$

$$EW_t^* = V(s) + E[\int_0^t V'(Z_s^*)\,(c-(1-a_s^*)\rho\lambda EX)ds + \lambda\int_0^t E[V(Z_s^* - a_s^* X) - V(Z_s^*)]ds].$$

Iz Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine (6) kada se umesto δ uvrsti V vidimo da za sve $t > 0$ važi $EW_t^* = V(s)$, i analogno kao u dokazu Teoreme 6.2 sledi da je

$$EW_t^* = V(s) \geq \; EW_t. \tag{9}$$

Pretpostavimo najpre da strategija a_t zadovoljava $E(a_t X) \geq B > 0$ za sve $t \geq 0$, gde B zadovoljava uslov $P\{a_t X > B\} > 0$. Pokazaćemo da u ovom slučaju proces $R(t)$ nije ograničen na $\{\tau = \infty\}$. Odnosno, dokazaćemo da je

$$P\{R(t) \leq M \; za \; sve \; t \geq 0 \; i \; \tau = \infty\} = 0 \tag{10}$$

za sve $M > 0$. Neka je $n > \frac{M+c}{B}$ proizvoljno. Verovatnoća da se dogodi više od n šteta većih od B na intervalu dužine 1 je pozitivna, odnosno sa verovatnoćom 1 će se realizovati događaj da se u intervalu $[t, t+1]$ dogodilo više od n takvih šteta. Tada, ako je $R(t) \leq M$ imamo

$$R(t+1) \leq R(t) + c - nB \leq M + c - nB < 0,$$

odnosno dobijamo da je $\tau < \infty$. Dakle, ako je $R(t) \leq M$ sledi da je $\tau < \infty$, što dokazuje tvrđenje (10).

Za proizvoljno ε konstruišimo strategiju a_t^+ sa procesom rizika $R^+(t)$ i vremenom razaranja τ^+ takvim da je $P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ < \infty\} < \varepsilon$ i $R^+(t) \to \infty$ na $\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ = \infty\}$. Neka je $M > s$ dovoljno veliko tako da je $1 - \delta_0(M) < \varepsilon$, neka je $T = \inf\{t: R(t) = M\}$ koje je ograničeno skoro svuda na $\{\tau = \infty\}$ i definišimo

$$a_t^+ = \begin{cases} a_t \; ako \; je \; t \leq T \\ 1 \; ako \; je \; t > T. \end{cases}$$

Tada je $P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ < \infty\} \leq 1 - \delta_0(M) < \varepsilon$. Dalje, $T < \infty$ implicira $R^+(t) \to \infty$ jer je ε proizvoljno malo, a $1 - \delta_0(M) < \varepsilon$.

Ako ponovo iskoristimo princip (9) za $R^+(t)$ umesto $R(t)$ dobijamo

$$E\left[V\left(R^*(\min\{t,\tau^*\})\right)\right] = V(s) \geq E\left[V\left(R^+(\min\{t,\tau^+\})\right)\right].$$

Kako su τ^*i τ^+ vremena zaustavljanja važi $R^*(\tau^*) < 0$ i $R^+(\tau^+) < 0$, odakle sledi da je $V\left(R^*(\tau^*)\right) = 0$ i $V\left(R^+(\tau^+)\right) = 0$. Kada $t \to \infty$ važi

$$P\{\tau^* = \infty\} \geq V(s) \geq P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ = \infty\} = P\{\tau = \infty\} - P\{\tau = \infty \; i \; \tau^+ < \infty\} \geq P\{\tau = \infty\} - \varepsilon.$$

Kako je ε bilo proizvoljno, a svaka strategija b_t za $V(s)$ koje je rešenje jednačine (7) u smislu Teoreme 7.1 zadovoljava nejednakost $E(a_t X) \geq B > 0$ za sve $t \geq 0$, sledi jedinstvenost rešenja i važi $P\{\tau^* = \infty\} = V(s)$. ■

7.3 Optimalna strategija kod proporcionalnih ugovora o reosiguranju za slučaj eksponencijalno raspodeljenih visina šteta

Analogno kao u slučaju ugovora o reosiguranju viška štete odredićemo algoritam za određivanje optimalnog faktora proporcije u slučaju proporcionalnog ugovora o reosiguranju.

Pretpostavimo da važe sve osobine za Kramer-Lundbergov model u modeliranju rizika jedne osiguravajuće kompanije i da cedent može da kupi proporcionalno reosiguravajuće pokriće na način kako je ranije opisano. Pretpostavićemo da je raspodela veličina šteta eksponencijalna sa funkcijom gustine $f(x) = me^{-mx}, x \geq 0$ i funkcijom raspodele $F(x) = 1 - e^{-mx}, x \geq 0$.

Osim navedenog pretpostavićemo i da je stopa premije c određena kao $c = (1+\eta)\lambda EX, \eta > 0$ i da je $\rho = 1 + \theta, \theta > 0$. Zahtevaćemo i da je zadovoljen uslov da je neto premija u samopridržaju cedenta pozitivna, odnosno da važi uslov $c > (1-a)\rho\lambda EX$, tj. $(1+\eta)\lambda EX = (1+\eta)\lambda\frac{1}{m} > (1-a)(1+\theta)\lambda\frac{1}{m}$, što daje uslov $(1+\eta) > (1-a)(1+\theta)$.

U dokazu Teoreme 7.1 videli smo da se infimum u jednačini (7) postiže na segmentu $[\underline{a}, 1]$, te je to dodatno ograničenje za pronalaženje optimalnog faktora proporcije. Dakle, tražimo ono a koje zadovoljava jednačinu

$$V'(s) = \inf_{\underline{a}<a\leq 1}\left\{\lambda\frac{V(s) - E[V(s-aX)]}{c-(1-a)\rho\lambda EX}\right\}.$$

Zapišimo ovu jednačinu u malo drugačijem obliku.

Po definiciji važi

$$E[V(s-aX)] = \int_0^{s/a} V(s-ax)f(x)dx.$$

Označimo sa

$$w(s,a) = \int_0^{s/a} V(s-ax)f(x)dx.$$

Tada je

$$w'(s,a) = me^{-m\frac{s}{a}}V(s-s)\frac{1}{a} + \int_0^{\frac{s}{a}} V'(s-ax)me^{-mx}dx$$

$$= \frac{m}{a}V(s) - \frac{m}{a}\int_0^{\frac{s}{a}} V(s-ax)me^{-mx}dx = \frac{m}{a}\big(V(s) - w(s,a)\big).$$

Uz prethodne pretpostavke i oznake, problem se svodi na pronalaženje rešenja jednačine

$$V'(s) = \inf_{\underline{a}<a\leq 1}\left\{m\frac{V(s)-w(s,a)}{(1+\eta)-(1+\theta)(1-a)}\right\}.$$

U poglavlju 6.3 smo utvrdili da je verovatnoća opsanka u slučaju kada nema reosiguravajućeg pokrića, odnosno kada je $a_t = 1$ za svako t, jednaka

$$\delta(s) = 1 - \frac{\lambda}{mc}e^{-\left(m-\frac{\lambda}{c}\right)s}.$$

Kako je c=$(1+\eta)\lambda\frac{1}{m}$ dobijamo da je $\delta(0) = \frac{\eta}{1+\eta}$, a kao početni uslov postavićemo da je $V(0) = \delta(0)$. Takođe, iz $c = (1-\underline{a})\rho\lambda EX$ dobijamo da je $\underline{a} = \frac{\theta-\eta}{1+\theta}$.

U programu R definisana je funkcija Prop koja za zadate vrednosti argumenata eta= η, teta= θ, lambda=λ i m= m daje grafik promene optimalne strategije a^* u zavisnosti od kapitala s u slučaju proporcionalnog ugovora o reosiguranju. U nastavku je dat kod i rezultat za vrednosti η=0.5, θ=0.7, m=1 i λ=1.

Algoritam koji prati ovaj kod sastoji se u sledećem: za sve vrednosti kapitala s od 0 do 5 sa korakom $\frac{1}{1000}$ određujemo optimalan faktor proporcije $a^*(s)$ tako što za sve vrednosti $a \in (\underline{a}, 1]$ određujemo onu u kojoj se postiže minimum funkcije $m\frac{V(s)-w(s,a)}{(1+\eta)-(1+\theta)(1-a)}$. Tu minimalnu vrednost dodeljujemo promenljivoj $V'(s)$, a za određivanje vrdnosti $V(s)$, $w(s)$ i $w'(s)$ koristimo formule

$$V(s) = V\left(s - \frac{1}{1000}\right) + V'\left(s - \frac{1}{1000}\right)\frac{1}{1000},$$

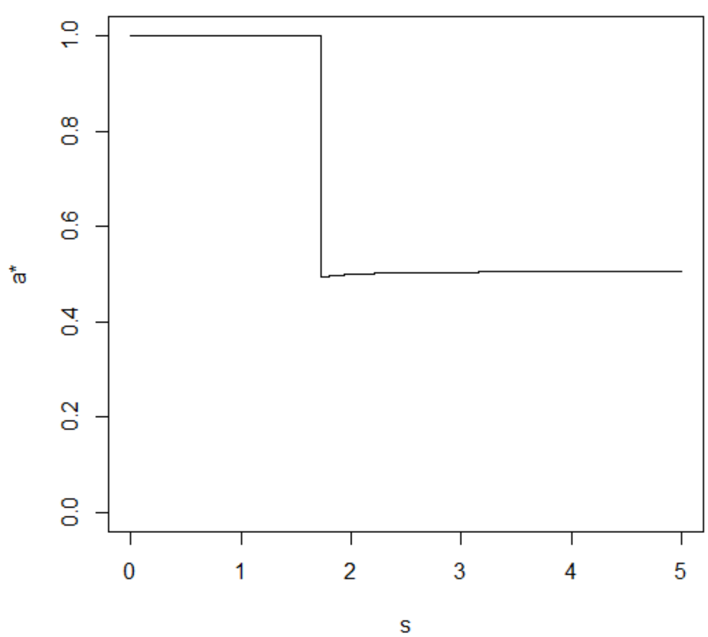
$$w(s,a) = w\left(s - \frac{1}{1000}, a\right) + w'\left(s - \frac{1}{1000}, a\right)\frac{1}{1000}$$

i

$$w'(s,a) = \frac{m}{a}\big(V(s) - w(s,a)\big).$$

```
#Proporcionalni ugovor
Prop<-function(eta=0.5,teta=0.7,lambda=1,m=1)
{
a_<-(teta-eta)/(1+teta)*1000
V<-c()
V[1]<-eta/(1+eta)
w<-matrix(nrow=5000,ncol=1000)
for(a in 1:1000)
	{
	wp<-m*V[1]/(a/1000)
	w[1,a]<-wp/1000
	}
opt_a<-c()
r<-c()
for (s in 1:5000)
	{
	Vp<-100000
	d<-a_
	g<-1000
	for(a in d:g)
	{
		if(s>1)
		{
		wp<-m*(V[s-1]-w[s-1,a])/(a/1000)
		w[s,a]<-w[s-1,a]+wp/1000
		}
		else{}
		#ukoliko je premija u samopridrzaju negativna, optimalna strategija je a=1
		if(((1+eta)-(1+teta)*(1-a/1000))<0)
			{
			Vp<-(V[2]-V[1])/(1/1000)
```

```
                    aopt<-1
                    }
            else
                    {
                    pom<-m*(V[s]-w[s,a])
                    pom<-pom/((1+eta)-(1+teta)*(1-a/1000))
                    if(pom<=Vp)
                            {
                            Vp<-pom
                            aopt<-a/1000
                            }
                    }
        }
V[s+1]<-V[s]+Vp/1000
r[s]<-(s-1)/1000
opt_a[s]<-aopt
}
#crtamo grafik zavisnosti optimalne strategije od kapitala
plot(r,opt_a,type='l',xlab='s',ylab='a*',ylim=c(0,1))
}
```



Slika 3

Na Slici 3 prikazan je grafik zavisnosti optimalne strategije od kapitala koji se dobija pozivanjem funkcije Prop(). Vidimo da opimalna strategija $a^*(s)$ u slučaju eksponencijalno raspodeljenih veličina šteta za male vrednosti kapitala s zadovoljava $a^*(s) = 1$, što podrazumeva slučaj bez reosiguranja, zatim naglo opada i dalje nastavlja da konvergira.

8. Problem pronalaženja optimalnog reosiguranja viška štete sa limitom pokrića

U poglavlju 4.3 uveli smo pojam neproporcionalnog ugovora viška štete sa limitom pokrića i tom prilikom ovaj limit označili sa C. U praksi je ugovor viška štete sa limitom pokrića češće definisan (apsolutnim) limitom L koji predstavlja maksimalan limit štete koja je pokrivena ovakvim ugovorom, odnosno $L \coloneqq b + C$, gde je b prioritet, a C limit pokrića.

Pretpostavimo da osiguravajuća kompanija ima mogućnost da odabere i kupi reosiguravajuće pokriće viška štete sa promenljivim i prioritetom i limitom tokom vremena trajanja ugovora. Proces rizika cedenta modeliran je Kramer-Lundbergovim modelom, a premija reosiguranja izračunata principom očekivane vrednosti

$$h\big(b(v), L(v)\big) = \rho\lambda E[\min\{(X - b(v))^+, C(v)\}] = \rho\lambda E[\min\{(X - b(v))^+, L(v) - b(v)\}].$$

Pod ovim pretpostavkama želimo da pronađemo optimalnu strategiju koja minimizira verovatnoću razaranja, tj. ako je $\delta_{b,L}(s)$ verovatnoća opstanka pri strategiji (b, L), a $\delta(s) = \sup_{b,L}\{\delta_{b,L}(s)\}$, potrebno je pronaći optimalnu strategiju (b_t^*, L_t^*), takvu da važi $\delta(s) = \delta_{b^*,L^*}(s)$.

Proces rizika cedenta pod posmatranim uslovima je

$$\begin{aligned} R^{b,L}(t) &= s + ct - \rho\lambda \int_0^t E[\min\{(X - b(v))^+, C(v)\}]dv - \sum_{i=1}^{N(t)} [\min\{X, b\} + (X - b - C)^+] \\ &= s + ct - \rho\lambda \int_0^t E[\min\{(X - b(v))^+, L(v) - b(v)\}]dv \\ &- \sum_{i=1}^{N(t)} [\min\{X, b\} + (X - L)^+] \,, t \geq 0. \end{aligned}$$

Za ovako definisani proces rizika $R^{b,L}(t)$ i funkciju verovatnoće opstanka $\delta(s)$ dobijamo infinitezimalni generator

$$\begin{aligned} L_t f(s) = &\lambda E[\delta(s - [\min\{X, b\} + (X - b - C)^+]) - \delta(s)] \\ &+ (c - \rho\lambda E[\min\{(X - b)^+, C\}])\delta'(s) \\ = &\lambda E[\delta(s - [\min\{X, b\} + (X - L)^+]) - \delta(s)] \\ &+ (c - \rho\lambda E[\min\{(X - b)^+, L - b\}])\delta'(s), \end{aligned}$$

odakle, maksimiziranjem po svim mogućim b i L, dobijamo Hamilton-Jakobi-Belmanovu jednačinu

$$0 = \sup_{L \geq b > 0} \{\lambda E[\delta(s - \min\{X, b\} - (X - L)^+) - \delta(s)] \\ + (c - \rho\lambda E[\min\{(X - b)^+, L - b\}])\delta'(s)\} \tag{11}$$

Kako nam je cilj da povećamo verovatnoću opstanka, odnosno da nađemo neopadajuće rešenje jednačine (11), treba da važi $\delta'(s) \geq 0$. U tom slučaju jednačinu (11) možemo zapisati u obliku

$$\delta'(s) = \inf_{L \geq b > 0} \left\{\lambda \frac{\delta(s) - E[\delta(s - \min\{X, b\} - (X - L)^+)]}{c - \rho\lambda E[\min\{(X - b)^+, L - b\}]}\right\}. \tag{12}$$

Da bi cedent zadržao neki deo premije mora da važi $c \geq \rho\lambda E[\min\{(X - b)^+, L - b\}]$, ili ekvivalentno $c \geq \rho\lambda(E[\min\{X, L\}] - E[\min\{X, b\}])$. Primetimo da tada gornja granica $\bar{L}$ za limit L zavisi od b, kao i da donja granica $\underline{b}$ za prioritet b zavisi od L.

8.1 Određivanje limita u tački $s = 0$

Kada osiguravajuće društvo nema početni kapital, odnosno kada je $s = 0$, ono svakako treba da odabere kao optimalni prioritet $b^* = 0$. Tada, sa $L = b = 0$ možemo predstaviti slučaj bez reosiguranja. Na osnovu (11) optimalni limit $L^* \geq 0$ za $s = 0$ i $b = 0$ može da se izračuna iz jednakosti

$$0 = \sup_{\bar{L} > L \geq 0} \{\lambda E[\delta(0 - \min\{X, 0\} - (X - L)^+) - \delta(0)] \\ + (c - \rho\lambda E[\min\{(X - 0)^+, L - 0\}])\delta'(0)\},$$

iz koje, ako sa $f(x), x \geq 0$ označimo gustinu raspodele veličina šteta, dobijamo

$$0 = \sup_{\bar{L} > L \geq 0} \{\lambda\delta(0)P\{X \leq L\} - \lambda\delta(0) + c\delta'(0) - \rho\lambda E[\min\{X, L\}]\delta'(0)\}, \text{ tj.}$$

$$0 = \sup_{\bar{L} > L \geq 0} \{\lambda\delta(0) \int_0^L f(x)dx - \lambda\delta(0) + c\delta'(0) - \rho\lambda\delta'(0)(\int_0^L xf(x)dx + \int_L^\infty Lf(x)dx)\}. \tag{13}$$

Ako postoji optimalna strategija $L^* > 0$ onda se diferenciranjem argumenta funkcije sup u jednakosti (13) po L i izjednačavanjem sa 0 u tački $L = L^*$ dobija

$$0 = \lambda\delta(0)f(L^*) - \rho\lambda\delta'(0) \int_{L^*}^{\infty} f(x)dx,$$

odakle dobijamo da je

$$\delta'(0) = \lambda \frac{\delta(0)f(L^*)}{\rho\lambda \int_{L^*}^\infty f(x)dx}.$$

Kada izraz za $\delta'(0)$ uvstimo u (13) za $L = L^*$ posle skraćivanja sa $\lambda\delta(0)$ dobijamo jednačinu

$$0 = \int_0^{L^*} f(x)dx - 1 + \frac{cf(L^*)}{\rho\lambda \int_{L^*}^{\infty} f(x)dx} - \frac{f(L^*) \int_{L^*}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{L^*}^{\infty} f(x)dx} - L^* f(L^*). \qquad (14)$$

Pretpostavimo da je raspodela veličina šteta eksponencijalna sa gustinom respodele $f(x) = me^{-mx}, x \geq 0$ i funkcijom raspodele $F(x) = 1 - e^{-mx}, x \geq 0$. Osim navedenog pretpostavićemo i da je stopa premije c određena kao $c = (1+\eta)\lambda EX, \eta > 0$ i da je $\rho = 1 + \theta, \theta > 0$, pri tom, da bi reosiguranje bilo skuplje od osiguranja treba da važi $\theta > \eta$. Pod navedenim pretpostavkama jednačina (14) postaje

$$0 = \int_0^{L^*} f(x)dx - 1 + \frac{f(L^*)}{\int_{L^*}^{\infty} f(x)dx} (\frac{c}{\rho\lambda} - \int_{L^*}^{\infty} xf(x)dx) - L^* f(L^*)$$

$$= 1 - e^{-mL^*} - 1 + \frac{me^{-mL^*}}{e^{-mL^*}} \left[\frac{(1+\eta)\lambda}{m(1+\theta)\lambda} - \frac{1}{m} \left(L^* me^{-mL^*} - 1 + e^{-mL^*} \right) \right] - L^* me^{-mL^*}$$

$$= \frac{1+\eta}{1+\theta} - e^{-mL^*} + L^* me^{-mL^*} - 1 + e^{-mL^*} - L^* me^{-mL^*} = \frac{1+\eta}{1+\theta} - 1.$$

Dakle, dobijamo da treba da važi $\eta = \theta$, što je u kontradikciji sa zahtevom $\theta > \eta$, te ne postoji $L^* > 0$ koje zadovoljava jednačinu (14). Stoga se optimalna strategija za slučaj $s = 0$ i eksponencijalnu raspodelu visina šteta svodi na izbor $(b^*, L^*) = (0,0)$, tj. slučaj bez reosiguranja.

8.2 Značaj kontrole limita

U ovom poglavlju se ispituje u kojoj meri mogućnost kontrole (određivanja promene) limita L donosi koristi osiguravajućoj kompaniji.

Označimo brojilac u jednačini (12) sa Z,

$$Z := \lambda(\delta(s) - E[\delta(s - \min\{X, b\} - (X - L)^+)])$$

$$= \lambda \left(\delta(s) - \int_0^b \delta(s-x) f(x)dx - \int_b^L \delta(s-b) f(x)dx - \int_L^{s-b+L} \delta(s - b + L - x) f(x)dx \right)$$

i, analogno, neka je N imenilac u jednačini (12),

$$N := c - \rho\lambda E[\min\{X, L\}] + \rho\lambda E[\min\{X, b\}]$$

$$= c - \rho\lambda \int_0^L x f(x)dx - \rho\lambda \int_L^\infty L f(x)dx + \rho\lambda \int_0^b x f(x)dx + \rho\lambda \int_b^\infty b f(x)dx.$$

Diferenciranjem Z i N po L dobijamo

$$Z_L = \lambda\Bigg(-\delta(s-b)f(L) - \delta(s-b+L-s+b-L)f(s-b+L) + \delta(s-b)f(L)$$

$$- \int_L^{s-b+L} \delta'(s-b+L-x)f(x)dx \Bigg)$$

$$= -\lambda(\int_b^s \delta'(s-x)f(x-b+L)dx + \delta(0)f(s-b+L))$$

$$= -\lambda(\delta(s-b)f(L) + \int_0^{s-b} \delta(s-b-x)f'(x+L)dx)$$

i

$$N_L = -\rho\lambda L f(L) + \rho\lambda L f(L) - \rho\lambda \int_L^\infty f(x)dx = -\rho\lambda \int_L^\infty f(x)dx.$$

Kako je $\delta(s) > 0$ i $\delta'(s) > 0$ za sve $s \geq 0$ iz izraza za Z_L sledi da je $Z_L < 0$, dok iz osobina funkcije gustine sledi da je i $N_L < 0$.

Teorema 8.1 *Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina za problem optimizacije ugovora viška štete sa kontrolom limita data je jednačinom* (12)*. Ako važi*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{f(L)}{\int_L^\infty f(x)dx} = 0 \qquad (15)$$

onda za prioritet $b < \infty$ strategija $L = \infty$ ne može biti optimalna.

Dokaz. Ako se (12) izrazi preko Z i N onda je

$$\delta'(s) = \inf_{L\geq b>0} \left\{\frac{Z}{N}\right\}.$$

Diferenciranjem izraza sa desne strane jedačine sa L dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{Z_L N - Z N_L}{N^2}.$$

Prema pretpostavci je $N > 0, N^2 > 0, Z > 0$, kao i $Z_L < 0$ i $N_L < 0$. Ako za raspodelu visina šteta Q sa svojstvom (15) važi ponašanje granične vrednosti

$$\lim_{L\to\infty} \frac{Z_L N - Z N_L}{N^2} = \omega > 0,$$

onda je $\delta(s)$ monotono rastuće za $L \to \infty$ i $L = \infty$ bi bilo optimalno rešenje. Da bismo dokazali da ovo ne važi dovoljno je dokazati da je

$$\lim_{L\to\infty} \frac{Z_L}{N_L} = 0,$$

jer je tada $\omega = 0$.

Važi da je

$$\frac{Z_L}{N_L} = \frac{\delta(s-b)f(L) + \int_0^{s-b} \delta(s-b-x)f'(x+L)dx}{(1+\theta)\int_L^{\infty} f(x)dx}.$$

Zbog $\delta(s) \in [0,1]$ za sve $s \geq 0$ važi

$$\delta(s-b)f(L) \leq f(L).$$

U slučaju monotono opadajuće gustine $f(x)$ izraz $\int_0^{s-b} \delta(s-b-x)f'(x+L)dx$ je negativan, te odatle sledi da je $Z_L = \delta(s-b)f(L) + \int_0^{s-b} \delta(s-b-x)f'(x+L)dx \leq f(L)$.

U slučaju da gustina nije monotono opadajuća neka je $f'(x) > 0$ za $x \in [0, s-b+L]$ (za ostale intervale važi raniji odgovarajući rezultat). Tada važi procena

$$\int_0^{s-b} \delta(s-b-x)f'(x+L)dx \leq \int_0^{s-b} f'(x+L)dx = f(s-b+L) - f(L).$$

Dakle, sveukupno

$$\begin{aligned} Z_L = \delta(s-b)f(L) + \int_0^{s-b} \delta(s-b-x)f'(x+L)dx &\leq f(L) + f(s-b+L) - f(L) \\ &\leq f(s-b+L), \end{aligned}$$

a kada $L \to \infty$ onda i $f(s-b+L) \to f(L)$. Iz prethodna dva slučaja dobijamo da važi

$$\lim_{L\to\infty}\left(\delta(s-b)f(L) + \int_0^{s-b} \delta(s-b-x)f'(x+L)dx\right) \leq f(L),$$

pa dobijamo da je

$$\lim_{L\to\infty}\frac{Z_L}{N_L}\leq \lim_{L\to\infty}\frac{f(L)}{\int_L^\infty f(x)dx}=0,$$

ukoliko je ispunjen uslov (15) iz formulacije teoreme. Dakle, $L=\infty$ može da se isključi kao optimalno rešenje. ■

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je postojanje mogućnosti kontrole limita izuzetno važno za raspodele veličina šteta koje imaju osobinu (15).

8.3 Kontrola limita kod eksponencijalno raspodeljenih veličina šteta

Teorema 8.2 *Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina kod problema pronalaženja optimalnog rešenja data je jednačinom* (11). *U slučaju eksponencijalno raspodeljenih veličina šteta rešenje jednačine* (11) *se poklapa sa rešenjem Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine za problem određivanja optimalnog reosiguranja viška štete bez limita pokrića. Dakle, optimalna strategija se sastoji u tome da za sve* $s\geq 0$ *važi* $L(s)=\infty$.

Dokaz. Dokaz je dat u tri koraka. Kao prvo, određuje se da je optimalna strategija za $s=0$ slučaj bez reosiguranja. Kao drugo, pokazuje se da se prva vrednost kapitala s_0 za koju je optimalno koristiti reosiguranje poklapa sa onom u slučaju ugovora bez limita pokrića. Na kraju se dokazuje da se kod izbora jedne strategije $b\in[0,s]$ ne može naći konačan limit L koji maksimizuje desnu stranu Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine (11).

1. Kontrola limita u $s=0$

Ako postoji optimalna strategija $L^*(0)>0$ onda ona, prema poglavlju 8.1, zadovoljava jednačinu (14). U poglavlju 8.2 pokazano je da, u slučaju eksponencijalno raspodeljenih visina šteta, takav izbor $L^*(0)$ ne postoji, tj. da je u $s=0$ strategije $L^*=b^*$ optimalna.

2. Određivanje tačke s_0 i kontrola limita u s_0

Kod eksponencijalno raspodeljenih visina šteta kada je $c=(1+\eta)\lambda EX,\eta>0$, verovatnoća opstanka data je izrazom

$$\delta_0(s)=1-\frac{\lambda}{mc}e^{-\left(m-\frac{\lambda}{c}\right)s}=1-\frac{1}{1+\eta}e^{-\frac{m\eta}{1+\eta}s},$$

te je stoga

$$\delta_0'(s) = \frac{m\eta}{(1+\eta)^2} e^{-\frac{m\eta}{1+\eta}s}.$$

Posmatrajmo jednačinu

$$V'(s) = \inf_{\bar{L}>L\geq b\geq \underline{b}\geq 0} \left\{ \lambda \frac{V(s) - E[V(s - \min\{X,b\} - (X-L)^+)]}{c - \rho\lambda(E[\min\{X,L\}] - E[\min\{X,b\}])} \right\}$$

i uslov $V(0) = \delta_0(0)$.

Neka je s_0 tačka u kojoj je strategija $b^* < L^* \leq \infty$ optimalna. Tada važi

$$\delta_0'(s_0) > V'(s_0).$$

Na osnovu povezanosti

$$\delta_0'(s) = V'(s) = \frac{m\eta}{(1+\eta)^2} e^{-\frac{m\eta}{1+\eta}s}$$

za $0 \leq s < s_0$, i činjenica da je u slučaju eksponencijalno raspodeljenih veličina šteta

$$Z = \frac{\lambda\eta}{1+\eta} e^{-\frac{m\eta}{1+\eta}s} (1 - e^{-\frac{m}{1+\eta}b} + e^{\frac{m\eta}{1+\eta}b} e^{-mL})$$

i

$$N = \frac{(1+\eta)\lambda}{m} [1 - \frac{1+\theta}{1+\eta} (e^{-mb} - e^{-mL})]$$

sledi ekvivalencija

$$\delta_0'(s_0) > V_{b^*,L^*}'(s_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\theta}{1+\eta} \left(e^{-mb^*} - e^{-mL^*}\right) < e^{-\frac{mb^*}{1+\eta}} - e^{\frac{m\eta}{1+\eta}b^*} e^{-mL^*}$$

$$\Leftrightarrow \theta < (1+\eta) e^{\frac{m\eta}{1+\eta}b^*} - 1.$$

Poslednji izraz ne zavisi od s_0 i L^*, tako da je optimalna strategija b^* u s_0 data sa

$$b^* = \frac{\ln\left(\frac{1+\theta}{1+\eta}\right)(1+\eta)}{m\eta}.$$

Za vrednosti kapitala $s \in [0, b^*)$ strategija b^* ne može biti optimalna, tako da je prva vrednost kapitala za koju je ova strategija optimalna upravo b^*. Dakle, dobijamo da je

$s_0 = b^*$, što se podudara sa tačkom s_0 dobijenom za ugovore bez limita pokrića. Objašnjenje da u tački s_0 pri strategiji b^* važi $L^*(s_0) = \infty$ slediće direktno iz trećeg dela ovog dokaza.

3. Kontrola limita za $b \leq s$

Za kapital $s > s_0$ i proizvoljnu dopustivu strategiju $b \leq s$ optimalan limit L^* se dobija kao rešenje jednačine

$$0 = \sup_{L \geq b > 0} \{\lambda E[\delta(s - \min\{X, b\} - (X - L)^+) - \delta(s)] \\ + (c - \rho\lambda E[\min\{X, L\}] + \rho\lambda E[\min\{X, b\}])\delta'(s)\} = \sup_{L \geq b > 0} (-Z + \delta'(s)N).$$

Neka je sa $f(x), x \geq 0$ opet označena gustina raspodele visina šteta. Diferenciranjem po L, nakon skraćivanja sa λ, dobijamo uslov za supremum

$$0 = \delta(s - b)f(L) + \int_b^s \delta(s - x)\, f'(x - b + L)dx - (1 + \theta)\delta'(s) \int_L^\infty f(x)dx.$$

Kod eksponencijalne raspodele sa parametrom m to je ekvivalentno sa

$$\delta'(s) = \frac{m\delta(s - b) - \int_b^s \delta(s - x)\, m^2 e^{-m(x-b)}dx}{1 + \theta}.$$

Desna strana izraza je nezavisna od L. Dakle, ne može se naći niti jedan $L \in (b, \infty)$ za koji se dostiže supremum, što znači da se supremum postiže u nekoj od graničnih tačaka $L = b$ ili $L = \infty$. Prema pretpostavci posmatraju se takvi $s \geq s_0$ za koje, prema koraku 2 ovog dokaza, optimalna strategija podrazumeva reosiguranje, te se, stoga, rešenje $L = b$ ne prihvata. Dakle, optimalna strategija za sve $s \geq s_0$ data je sa $L^* = \infty$. Kako je $b \leq s$ bilo proizvoljno, specijalno, prethodno važi i za optimalni prioritet b^* kod kapitala s i to b^* se za sve $s \geq 0$ podudara sa rešenjem Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine u slučaju ugovora bez limita. Specijalno važi da je i u slučaju $b^* = s$ optimalno rešenje $L^* = \infty$, što dokazuje deo tačke 2 koji je ostao otvoren. ■

Zaključak

Tehnike i metode prikazane u ovom radu predstavljaju teorijski pogled na problem pronalaženja optimalnog reosiguranja za različite tipove ugovora o reosiguranju. Implementacija ovde opisanih metoda u praksi dodatno zahteva određivanje parametara η, θ, m i λ. Međutim, čak i uz ovaj dodatni rad tržište osiguranja i reosiguranja imaju svoja zakonska ograničenja, te nije sigurno da bi primena optimalnog programa bila moguća. Takođe, ugovori o reosiguranju nikada nisu bazirani na neprekidnoj promeni strategije, već je za određeni period trajanja ugovora strategija konstantna, a premija fiksna i određena ne samo prema ovde opisanim metodama, već i prema različitim pokazateljima na lokalnom tržištu osiguranja i reosiguranja.

Metodi određivanja potrebnog reosiguravajućeg pokrića za jednu osiguravajuću kompaniju danas su bazirani na proceni njene izloženosti riziku. Ali kako osiguravajuća kompanija treba da pronađe optimalan program reosiguranja, po kom će smanjiti verovatnoću razaranja koliko je to moguće, isto tako i reosiguravač mora da vodi računa o svojoj izloženosti riziku i svom raspoloživom kapitalu, te nije uvek lako pronaći reosiguravajuće pokriće.

Kao primer zašto metode opisane u ovom radu mogu biti korisne, možemo upotrebiti poređenje sa određivanjem cene osiguranja, koja je zaposlenima u oblasti osiguranja mnogo bliža. Naime, aktuarske metode za određivanje premije osiguranja vrlo su jasne i dobro definisane, međutim, tako određena premija mora naknadno biti korigovana u skladu sa lokalnim tržištem iz razloga konkurentnosti, ali je ona dobar pokazatelj kojoj ceni tržište treba da teži.

Rečnik pojmova

CEDENT - je osiguravajuće društvo koje putem reosiguranja jedan deo rizika iz zaključenih ugovora o osiguranju cedira (prenosi) na reosiguravajuće društvo.

EKSCEDENTNO REOSIGURANJE - proporcionalni ugovori o reosiguranju kod kojih se proporcija podele rizika, koja predstavlja osnovu za podelu premija i učešća u štetama, određuje u različitim procentima u zavisnosti od veličine pojedinh rizika u portfelju. Osiguravač ima mogućnost da odredi koji deo pojedinih rizika iz portfelja rizika će preneti u reosiguranje, a koji zadržati u portfelju.

FAKULTATIVNO ROSIGURANJE – je najstarija vrsta reosiguranja. Osnovna svrha fakultativnih ugovora o reosiguranju jeste obezbeđenje reosiguravajućeg pokrića za pojedinačne rizike. Osiguravač i reosiguravač u svakom pojedinačnom slučaju pregovaraju o uslovima reosiguravajućeg pokrića za svaki pojedinačni rizik ili polisu osiguranja za koju reosiguravač želi da obezbedi reosiguravajuće pokriće. Koristi se za pojedinačne rizike koji su po pravilu velike vrednosti i kompleksnosti.

FRANŠIZA – učešće osiguranika u šteti.

KAPACITET – obim osiguranja ili reosiguranja koji osiguravač ili reosiguravač, ili čitavo tržište osiguranja ili reosiguranja može pripisati.

KVOTNO REOSIGURANJE – proporcionalni ugovori o reosiguranju kod kojih se proporcija utvrđuje kao fiksni procenat učešća osiguravača i reosiguravača u svim rizicima određenog portfelja osiguranja, a posledično, u tom istom, fiksnom odnosu osiguravač i reosiguravač učestvuju u podeli premije i nadoknadi šteta koje nastanu po osnovu određenog portfelja osiguranja koji je predmet ugovora o reosiguranju.

MODEL – uprošćena slika stvarnosti.

MODELIRANJE – predstavlja proces kreiranja statističkog modela budućeg ponašanja, odnosno predviđanja verovatnoća, trendova i međuzakonitosti. Nastaju kao produkt kombinovanja aktuarske nauke, inženjeringa, statistike i mnogih drugih.

NEPROPORCIONALNO REOSIGURANJE – grupacija ugovora o reosiguranju kod koje osnovu za utvrđivanje međusobnih prava i obaveza predstavlja veličina štete. Nazivaju se još i ugovori o reosiguranju viška šteta. Prilikom zaključivanja neproporcionalnih ugovora o reosiguranju osiguravač i reosiguravač utvrđuju nivo zadržavanja štete koji se naziva prioritet, kao i limit odgovornosti reosiguravača. Koriste se u cilju obeštećenja osiguravača za štete čiji iznosi prevazilaze nivo zadržane veličine štete, a do određenog limita, specificiranog ugovorom o reosiguranju. Neproporcionalni ugovori o reosiguranju dele se na: ugovore o reosiguranju viška štete po riziku, ugovore o reosiguranju viška štete po događaju i ugovore o reosiguranju viška gubitka.

NEŽIVOTNO OSIGURANJE – svaka vrsta osiguranja koja ne spada u životna osiguranja. Uobičajeno u neživotna osiguranja spadaju imovinska osiguranja i osiguranja od odgovornosti.

OKVIRNO, OBLIGATORNO ILI AUTOMATSKO REOSIGURANJE – ovim ugovorima o reosiguranju obezbeđuje se reosiguravajuće pokriće za sve rizike određene vrste osiguranja, odnosno portfelja osiguranja, a u skladu sa uslovima ugovora o reosiguranju. Osiguravajuće društvo je u obavezi da cedira na reosiguravača sve rizike, bez prethodne selekcije, a reosiguravač je u obavezi da sve ponuđene rizike određene vrste osiguranja prihvati u reosiguravajuće pokriće, bez prethodnog analiziranja pojedinih rizika.

OSIGURANA OPASNOST (RIZIK) – rizik pokriven osiguranjem, čije nastupanje u vidu osiguranog slučaja stvara osiguravačevu obavezu za isplatu odštete.

OSIGURANIK – fizičko ili pravno lice koje zaključuje ugovor o osiguranju u svoje ime ili za svoj račun, obezbeđujući se od neželjenog dejstva pokrivenih rizika.

OSIGURANJE – predstavlja jednu od tehnika transfera rizika. Bazira se na udruživanju pojedinaca ili privrednih subjekata koji su izloženi istoj vrsti opasnosti, a koji udružuju svoja finansijska sredstva u zajednice rizika u cilju obeštećenja onih članova koji pretrpe štetu. Osiguravajuća društva kao institucionalizovane zajednice rizika na bazi udruživanja velikog broja osiguranika izloženih istoj vrsti rizika mogu sa razumnom verovatnoćom da predvide ostvarenje štetnih događaja, pri čemu važi pravilo da što je veći broja osiguranika u zajednici rizika to je i veća verovatnoća da će stvarna šteta biti približnija očekivanoj. Osiguranjem se suštinski zamenjuje siguran trošak relativno malog iznosa u visini premije osiguranja za neizvestan ali moguć znatno veći trošak koji može nastati ostvarenjem štetnog događaja. Sa pravnog aspekta predstavlja ugovorni odnos kojim se jedna ugovorna strana, osiguravač, obavezuje da obešteti drugu ugovornu stranu, osiguranika, u slučaju ostvarenja osiguranjem obuhvaćene štete dok se osiguranik obavezuje da osiguravaču plati premiju osiguranja.

OSIGURAVAČ – osiguravajuće društvo. Društvo koje se profesionalno bavi poslovima osiguranja.

POLISA OSIGURANJA – osnovna pisana isprava koja prati posao osiguranja, određujući dužnosti i obaveze učesnika. U nekim slučajevima polisa predstavlja oblik ugovora o osiguranju. Kada to nije, ona je, u prvom redu, dokazno sredstvo o sklopljenom osiguranju pošto sadrži sve najvažnije elemente zaključenog ugovora. Kod nekih vrsta osiguranja polisi se daje i jače dejstvo, pa može predstavljati ispravu o dugu, ukoliko je ugovoreno da će osiguravač platiti naknadu štete samo uz njenu predaju. Dalje, ona može biti legitimacijska hartija kojom se pokazuje pravo na potraživanje iz osiguranja. Polisa se pojavljuje i kao hartija od vrednosti, a nekada služi i za ostvarivanje prava iz nekog drugog posla, zatim kao dokaz izvršene ugovorne obaveze (recimo, kod kupoprodaje koja obuhvata i obavezu osiguranja) i tako dalje.

PORTFELJ RIZIKA (OSIGURANJA) – je pojam koji označava sve vrste osiguranja kojima se jedno osiguravajuće društvo bavi, odnosno, sve vrste rizika koje je primilo u osiguravajuće pokriće. Suštinski je reč o ukupnom poslu osiguravajućeg društva u smislu grupa poslova preuzetih od osiguranika i uobičajeno se deli na portfelj životnih i portfelj neživotnih osiguranja. Osiguravajuća društva prihvataju rizike koje druga strana (osiguranici) ne želi da nosi samostalno i gde osiguravači imaju prednost u upravljanju. Prednost u upravljanju rizicima koju imaju osiguravači proizilazi upravo iz mnoštva rizika koji čine portfelj rizika.

PRIORITET – samopridržaj kod neproporcionalnih ugovora o reosiguranju.

PROPORCIONALNO REOSIGURANJE – ugovori putem kojih se prava i obaveze ugovornih strana određuju u određenoj proporciji u odnosu na rizike koje je osiguravač prihvatio od osiguranika. Ovim ugovorima reosiguravač prihvata u reosiguravajuće pokriće određeni procenat rizika od osiguravača i u tom istom procentu učestvuje u raspodeli premije i troškova naknade nastalih šteta. Proporcija učešća osiguravača i reosiguravača može biti jednaka za sve rizike ili može varirati u zavisnosti od vrste i veličine rizika, prema čemu se razlikuju kvotno i ekscedentno reosiguranje kao podvrste proporcionalnih ugovora o reosiguranju.

REOSIGURANJE – u najkraćem predstavlja osiguranje osiguranja. Predstavlja proces putem koga osiguravajuća društva kupuju osiguravajuće pokriće od drugih osiguravaju-ćih društava ili profesionalnih reosiguravača. Može se definisati kao ugovor između osiguravača (cedenta, primarnog osiguravača) i reosiguravača putem koga reosiguravač prihvata obavezu obeštećenja cedenta u potpunom ili delimičnom iznosu štete koja može nastati po osnovu ugovora o osiguranju koje je osiguravač zaključio a za uzvrat cedent je u obavezi plaćanja premije reosiguranja i obelodanjivanja informacija neophodnih reosiguravaču. Suštinski, reosiguravač i cedent dele premiju, rizik i štete na proporcionalnoj osnovi, u slučaju proporcionalnih ugovora o reosiguranju, ili raosiguravač plaća samo višak štete iznad prethodno definisanog nivoa, u slučaju neproporcionalnih ugovora o reosiguranju. Osnov za postojanje reosiguranja je zaključen ugovor o osiguranju. Korišćenje prefiksa „re“ implicira da se nešto ponovo događa, u ovom slučaju javlja se osiguranje rizika već prihvaćenog u osiguravajuće pokriće.

REOSIGURANJE VIŠKA GUBITKA – vrsta neproporcionalnih ugovora o reosiguranju koji određuju zaštitu od ukupnog viška štete koji osiguravač može ostvariti po portfelju tokom godine. Ovim ugovorom reosiguravajuće društvo preuzima obavezu da osiguravača obešteti za ukupne štete koje mogu nastati iznad određenog procenta u određenoj vrsti osiguranja koja je pokrivena ugovorom o reosiguranju.

REOSIGURANJE VIŠKA ŠTETE PO DOGAĐAJU - vrsta neproporcionalnih ugovora o reosiguranju koje osiguravajuća društva koriste u cilju limitiranja štete koja može nastati ostvarenjem određenog, ugovorom definisanog događaja. Reosiguravajuće društvo obezbeđuje pokriće osiguravaču za štete nezavisno od broja rizika kod kojih su štete nastale.

REOSIGURANJE VIŠKA ŠTETE PO RIZIKU – neproporcionalni ugovori o reosiguranju koji su namenjeni pokriću šteta koje po riziku prelaze veličinu utvrđenog prioriteta osiguravača, a do utvrđenog limita obaveze reosiguravača.

REOSIGURANJE VIŠKA ŠTETE ZA KATASTROFALNE DOGAĐAJE – ovim ugovorima se osiguravajuće društvo štiti od mogućnosti da dođe do ostvarenja većeg broja šteta usled jednog katastrofalnog događaja. Ovim reosiguranjem nisu pokrivene štete po riziku, odnosno pojedinačno velike štete, što uzrokuje čestu pojavu posebne klauzule poznate kao garancija dva rizika.

REOSIGURAVAČ – društvo koje se bavi poslovima reosiguranja.

RETROCEDENT - reosiguravač koji trensferiše rizik na druge reosiguravače postupkom retrocesije.

RETROCESIJA – postupak putem koga reosiguravači zaključuju reosiguranje, odnosno transfer dela rizika prihvaćenih od osiguravača transferišu na druga reosiguravajuća društva.

RETROCESIONAR – reosiguravači koji rizik prihvataju u postupku retrocesije.

RIZIK – 1) Rizik predstavlja kombinaciju verovatnoće događaja i njegovih posledica. 2) Rizik predstavlja neizvesnost u pogledu ostvarenja šteta. 3) Rizik u osiguranju može da predstavlja i predmet osiguranja.

SAMOPRIDRŽAJ – obim osiguranja koji primarni osiguravač zadržava u svom portfelju prilikom zaključivanja ugovora o reosigurnju. Reč je o najvećem iznosu pojedinačnih rizika ili čitavog portfelja rizika koji osiguravač može da pokrije sopstvenim sredstvima, a da ne zapadne u probleme sa obezbeđenjem solventnosti. Visina samopridržaja određuje se u svakom pojedinačnom ugovoru o reosiguranju. Veličina premije reosiguranja varira u zavisnosti od, između ostalog, i visine samopridržaja pri čemu važi relacija – veći samopridržaj niža premija reosiguranja. Određivanje visine samopridržaja jedno je od ključnih pitanja prilikom transfera rizika u reosiguranje s obzirom da od veličine utvrđenog samopridržaja zavisi solventnost, ali i profitabilnost osiguravajućeg društva.

SAMOPRIDRŽAJ PO RIZIKU – veličina samopridržaja po jednom riziku.

SUMA OSIGURANJA – maksimalni novčani iznos koje se isplaćuje osiguraniku ukoliko nastupi osigurani događaj i predstavlja gornju veličinu osiguravačeve obaveze. Ona, ipak, može u nekim slučajevima biti prekoračena zbog troškova nastalih povodom otklanjanja i smanjivanja štete preduzetih po osiguravačevom nalogu. Unosi se u polisu osiguranja ili se ugovorom o osiguranju, odnosno zakonom, predviđa način njenog utvrđivanja kada događaj nastupi.

Literatura

[1] Charpentier, A. (2008) Optimal reinsurance with ruin probability target. Université Rennes.

[2] Günther, R. (2008) Ruin theory in the Cramér-Lundberg model: When and how ruin occurs, Master Thesis. Berlin University of Technology.

[3] Hipp, C. (2004) Stochastic control with application in insurance. Springer.

[4] Hipp, C. ,Plum M. (2000) Optimal investment for insurers. Insurance: Mathematics and Economics 27, 215–228.

[5] Hipp, C., Vogt, M. (2003) Optimal dynamic XL reinsurance. ASTIN Bulletin 33/2, 193-207.

[6] Marović, B. (1997) Osiguranje. FINANCING Centar Novi Sad.

[7] Marović, B., Purić, R., Njegomir, V. (2012) Reosiguranje. PRECISION d.o.o. Čačak.

[8] Mikosch, T. (2004) Non-life insurance mathematics: An introduction with stochastic processes. Springer.

[9] Patrik, G. (2001) The Fourth Edition of Foundations of Casualty Actuarial Science, Chapter 7.

[10] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999) Stochastic processes for insurance and finance. Wiley.

[11] Schäl, M. (1998) On piecewise deterministic Markov control processes: Control of jumps and of risk processes in insurance. Insurance: Mathematics and Economics 22, 75-91.

[12] Schmidli, H. (2002) On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. The Annals of Applied Probability, Vol. 12, No. 3, 890–907.

[13] Schmidli, H. (1999) Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. Research Report 403, Deptartment of theoreticalstatistics, Arhus University.

[14] Vogt, M. (2004) Optimal dynamic reinsurance. Blätter der DGVFM Volume 26, Number 3, 407-420.

[15] Vogt, M. (2004) Optimale dynamische rückversicherung: Ein kontrolltheoretischer Ansatz. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH, Karlsruhe.