PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Univerzitet u Beogradu

Vesković Miroslav

PRILOG STABILNOSTI KRETANJA NEHOLONOMNIH SISTEMA

doktorska disertacija

Beograd, 1987.

S A D R Ž A J

U V O D

Neholonomnost je takva osobina mehaničkih sistema da "pomeranje izmedju susednih beskonačno bliskih mogućih položaja može biti nemoguće" (H.Hertz[13]). Mehanički sistemi sa tom osobinom nazivaju se neholonomni sistemi. Kretanje bez proklizavanja jednog krutog tela po površini drugog je primer oblika realizacije neholonomnog mehaničkog sistema.

Matematički opis neholonomnih veza su diferencijalne neintegrabilne jednakosti, koje nazivamo neholonomne veze. Neintegrabilnost diferencijalnih veza uslovljava da se kretanje ne može opisati diferencijalnim jednačinama oblika Lagranževih jednačina druge vrste, kojih bi bilo koliko i stepena slobode kretanja. U tome se sastoji i osnovna razlika izmedju holonomnih i neholonomnih sistema, koja uslovljava niz specifičnosti, u odnosu na holonomne sisteme, u postavci i rešavanju dinamičkih problema.

U novije vreme metodi neholonomne mehanike sve više se primenjuju u raznim oblastima tehnike: kod drumskih i šinskih vozila, kontinualnih prenosnika snage, frikcionih mehanizama, itd. Najnovija otkrića koja se odnose na analogije izmedju fizičkih sistema, koji po svojoj suštini nisu mehanički sistemi, i neholonomnih mehaničkih sistema, još u većoj meri ističu značaj metoda neholonomne mehanike. Sve to predstavlja podsticaj za dublja teorijska istraživanja neholonomnih mehaničkih sistema. Problem od centralnog značaja, za svaki fizički sistem pa i mehanički, je stabilnost kretanja.

Istorijski gledano, razmatranju stabilnosti kretanja neholonomnih sistema prethodili su značajni rezultati o stabilnosti pojedinih vidova kretanja, i to, pre svega, ravnotežnog stanja i stacionarnog kretanja, skleronomnih holonomnih sistema. Zbog toga su se početna razmatranja stabilnosti kretanja neholonomnih sistema uglavnom odnosila na skleronomne sisteme i iznalaženje analogija sa odgovarajućim rezultatima za holonomne sisteme. Istorijski pregled tih radova i njihovih rezultata sadržan je u [38], [33], [52].

U početku, zaključivanje o stabilnosti vršilo se na osnovu osobina rešenja linearizovanih jednačina kretanja. Medjutim, i pored obimne literature i brojnih radova, rezultati su bili relativno skromni. Razlog je u tome što metod linearne aproksimacije podrazumeva linearizaciju neholonomnih veza, posle čega, kod skleronomnih sistema, veze postaju integrabilne, a samim tim u jednačinama kretanja gube se članovi koji su isključivo svojstveni neholonomnim sistemima.

Važno mesto u teoriji stabilnosti kretanja neholonomnih sistema zauzimaju radovi [48], [51] V.V.Rumjanceva u kojima se prvi put primenjuje direktan Ljapunovljev metod za razmatranje stabilnosti ravnoteže konzervativnih i disipativnih neholonomnih sistema. Kasnije, direktan Ljapunovljev metod korišćen je i u radovima naših autora [33], [32], [38], [37], [36]. Osnovna prednost ovog metoda je u tome što se ne zahteva aproksimacija jednačina kretanja. U slučaju neholonomnih sistema to znači da se u potpunosti održava svojstvo neholonomnosti. Na taj način dobijeni su potpuniji rezultati. Najkompletniji rezultati dobijeni su u razmatranjima koja se odnose na stabilnost ravnoteže i stacionarnog kretanja skleronomnih, i to pre svega, konzervativnih i disipativnih sistema. Ipak, ostala su otvorena mnoga pitanja, a kao najinteresantnije, obrnuti problem Lagranž-Dirihleovoj teoremi (za neholonomne sisteme). Primenom metoda asimptotskog rešenja taj problem donekle je rasvetljen u [44]. Identičan rezultat dobijen je i u [63].

Problem stabilnosti u slučaju reonomnih, i to ne samo neholonomnih sistema, malo je obradjivana tema. Razlog je u tome što zavisnost diferencijalnih jednačina kretanja od vremena čini problem stabilnosti daleko kompleksnijim.

Na sastancima seminara za teoriju upravljanja kretanjem na Prirodno-matematičkom fakultetu, kojim rukovodi profesor Aleksandar Bakša i seminara za analitičku mehaniku i dinamiku objekata na Mašinskom fakultetu, kojim rukovodi prof. Vukman Čović - koji rade u okviru Matematičkog instituta, Beograd - u novije vreme pojavilo se niz interesantnih ideja u vezi problema reonomnih sistema. V.Vujičić, A.Bakša i V.Čović su svojim radovima [32],[37],[60],[59] iz ove oblasti izvršili presudan uticaj da se opredelim za istraživanja,koja bi se posebno odnosila na probleme stabilnosti reonomnih neholonomnih sistema.

Prva glava rada odnosi se na pojam neholonomnog mehaničkog sistema, pri čemu se pretpostavlja da je on u opštem slučaju reonomoman. Ukratko su izvedene diferencijalne jednačine kretanja pri delovanju neintegrabilnih veza, koje su oblika linearnih funkcija u odnosu na brzine. Prvi integrali kretanja imaju veliki značaj u kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina. U tom smislu definisani su potrebni i dovoljni uslovi egzistencije linearnih i kvadratnih integrala specijalnog oblika, a koji su od značaja za naša kasnija razmatrnaja. Osim toga, izvedeni su uslovi egzistencije ravnotežnog stanja i stacionarnog kretanja. Pokazano je da reaonomnost neholonomnih mehaničkih sistema ima kao posledicu čitav niz specifičnosti, u poredjenju sa skleronomnim sistemima, u pogledu uslova pod kojima može da egzistiraju pomenuti vidovi kretanja.

Drugi deo rada predstavlja i njegov glavni deo. U njemu je definisan niz stavova koji se odnose na različite tipove stabilnosti, nestabilnosti i asimptotske stabilnosti ravnoteže i stacionarnog kretnaja neholonomnog mehaničkog sistema. U središtu tih razmatranja nalazi se reonomni neholonomni sistem. Ovi stavovi, u suštini pripadaju direktnom Ljapunovljevom metodu. Ljapunovljeve funkcije konstruisane su u obliku zbira kvadratne forme brzina i funkcije položaja i vremena, slično kao i u [58],[32],[33]. Na taj način se na osnovu svojstva dosta jedonostavnih funkcija zaključuje o stabilnosti.

Pored klasičnih stavova direktnog Ljapunovljevog metoda, koristi se ideja da se definitnost izvoda u II i III Ljapunovljevoj teoremi zameni kombinacijom svojstava rešenja sa uslovom da je izvod Ljapunovljeve funkcije - u principu relativno jednostavnih - stalnog znaka. Ta ideja, za autonomne diferencijalne jednačine i diferencijalne jednačine, koje periodično zavise od vremena, realizovana je u [11]. Medjutim, pod uslovima stavova iz [14] ona je neprimenljiva za diferencijalne jednačine koje na proizvoljan način zavise od vremena. Iz tog razloga pomenuta ideja se dogradjuje i to na različite načine [23], [30]. U [30] uvodi se pojam graničnog sistema jednačina, iz kojih se izvode svojstva rešenja tih graničnih jednačina, koja sa stalnošću znaka izvoda Ljapunovljeve funkcije zamenjuju definitnost.

Po našem mišljenju, u ovom delu rada definisan je niz novih uslova stabilnosti, nestabilnosti i asimptotske stabilnosti ravnoteže i stacionarnog kretanja neholonomnog sistema. Osim toga, definisan je tip asimptotske stabilnosti ravnotežne mnogostrukosti i u slučaju kada to nije tip mnogostrukosti izolovane po delu promenljivih [30], [51].

Svi pomenuti rezultati saopšteni su na sastancima seminara za teoriju upravljanja kretanjem na Prirodno-matematičkom fakultetu i seminara za analitičku mehaniku i dinamiku objekata na Mašinskom fakultetu. Članovi tih seminara svojim sugestijama i primedbama doprineli su razjašnjavanju niza problema, i ja sam im na tome zahvalan.

Posebnu zahvalnost dugujem profesoru Vukmanu Čoviću, koji je rukovodio mojim radom.

G L A V A I

KRETANJE NEHOLONOMNOG MEHANIČKOG SISTEMA

1. Diferencijalne jednačine kretanja neholonomnog mehaničkog sistema

1. Razmotrićemo neholonomni mehanički sistem. Za opis kretanja tog sistema mogu se koristiti diferencijalne jednačine kretanja različitog oblika. Uglavnom ćemo koristiti Lagranževe diferencijalne jednačine sa množiteljima veza koje opisuju kretanje u konfiguracionoj mnogostrukosti M_n i diferencijalne jednačine Vorončevog oblika. Izbor ovih diferencijalnih jednačina kretanja uslovljen je njihovom pogodnošću u razmatranjima o kojima će kasnije biti reči.

Radi razumevanja suštine neholonomnih mehaničkih sistema i strukture predloženih diferencijalnih jednačina kretanja, najcelishodnije je prvo razmotriti, Lagranževom metodom, holonomne mehaničke sisteme.

Stanje holonomnog mehaničkog sistema u datom trenutku vremena jednoznačno je odredjeno Lagranževim koordinatama q^i i generalisanim brzinama $\dot{q}^i = dq^i/dt$ $(i=1,...,n)$, tj. Lagranževim promenljivim. Po definiciji, Lagranževe promenljive su nezavisne, tj. njihov proizvoljan izbor ne protivureči holonomnim vezama (ukoliko takve veze postoje).

U Lagranževom pristupu holonomni mehanički sistem potpuno je okarakterisan poznavanjem kinetičke energije i generalisanih sila.[1] Za sistem sa n-stepeni slobode to je n+1 funkcija Lagranževih promenljivih q, $\dot{q}$ [2] i vremena t:

1. kinetička energija je funkcija

$$T = T(q,\dot{q},t)$$

---

1) Nas interesuje II problem dinamike

2) Radi sažetosti - u pisanju ćemo često podrazumevati sledeće $q = (q^1...q^n)$, $\dot{q} = (\dot{q}^1...\dot{q}^n)$.

2. generalisane sile su oblika

$$F_i = F_i\ (q,\ \dot{q},\ t) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{2}$$

Kinetička energija u najopštijem slučaju je kvadratni nehomogeni polinom u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}$, tj.

$$T = \frac{1}{2}\ a_{ij}(q,t)\dot{q}^i\dot{q}^j + a_i(q,t)\dot{q}^i + a_o(q,t) \tag{3}$$

Radi sažetosti u pisanju, često ćemo koristiti sledeći način označavanja pojedinih članova izraza za kinetičku energiju:

$$T_2 = \frac{1}{2}\ a_{ij}(q,t)\dot{q}^i\dot{q}^j \qquad T_1 = a_i(q,t)\ \dot{q}^i$$

$$T_o = a_o(q,t) \tag{4}$$

Za mehanički sistem kažemo daje skleronoman ako su holonomne veze stacionarne [12] . Ako to nije ispunjeno za mehanički sistem kažemo da je reonoman. U slučaju skleronomnog mehaničkog sistema postoje takve Lagranževe koordinate q da je

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\ a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

Kinetička energija reonomnog sistema u opštem slučaju je oblika (3). Medjutim, kinetička energija može imati linearni i kvadratni član i u slučaju ako je sistem skleronoman ali su dopuštene nestacionarne koordinatne transformacije, tj. u slučaju kada je

$$q = q(\bar{q},t), \tag{5}$$

gde su $\bar{q}$ nove Lagranževe koordinate. Kod skleronomnih sistema koordinatne transformacije oblika (5) dopuštene su na primer u slučaju kada razmatramo kretanje sistema u odnosu na pokretan sistem referencije (relativno kretanje) [16]. U tom smislu istaknimo da pri formiranju diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja u principu kinetička energija T ima oblik (3). Naime, tada je veza izmedju Lagranževih koordinata i poremećaja oblika (5).

Jedno od najvažnijih svojstava Lagranževog pristupa je regularnost matrice koeficijenta $a_{jk}(q,t)$, kvadratne forme T_2 [12],

$$\det \left\{a_{jk}\right\}_{j,k=1}^{n} \neq 0 \quad ^{1)} \tag{6}$$

Radi kasnijih razmatranja značajno je ovde istaći i to da je kvadratna forma T_2 strogo nenegativna funkcija u odnosu na $\dot{q}$ [12], tj.

$$T_2(q,\dot{q},t) \geqslant 0, \qquad T_2 = 0 \Longleftrightarrow \dot{q} = 0 \tag{7}$$

Ako T_2 eksplicitno zavisi od vremena t, relacije (7) ne podrazumevaju da je T_2 pozitivno - definitna funkcija u odnosu na $\dot{q}$. Tačnije, relacije (7) su potrebni, ali ne i dovoljni uslovi definitnosti kvadratnog člana T_2 u odnosu na $\dot{q}$. U skladu sa definicijom definitnosti, potrebni i dovoljni uslovi odredjeni su na sledeći način:

$$T_2(q,\dot{q},t) \geqslant a(\dot{q})$$

$$a \geqslant 0, \qquad a = 0 \Longleftrightarrow \dot{q} = 0 \tag{8}$$

Specijalno, ako T_2 ne zavisi eksplicitno od vremena t - na primer, ako su holonomne veze stacionarne, a izbor koordinata takav da nije dopuštena transformacija oblika (5) - uslov (8) je ispunjen.

Generalisane sile, pod čijim se dejstvom kreće sistem, u opštem slučaju mogu se prikazati u obliku zbira potencijalnih silâ čija je funkcija sile

$$U = U(q,t) \tag{9}$$

i nepotencijalnih

1) Detaljnije o tome videti u [12]

$$Q_i = Q_i(q,\dot{q},t), \tag{10}$$

tj. rezultujuća generalisana sila je:

$$F_i = Q_i + \frac{\partial U}{\partial q^i} \tag{11}$$

Smatraćemo da je $F_i\ (q,\dot{q},t)$ neprekidna funkcija promenljivih $q,\dot{q}$ i t.

Ako su holonomne veze idealne, reakcije vezâ ne učestvuju u formiranju generalisanih sila F_i, već samo aktivne (zadate) sile. U tom smislu generalisane sile F_i su poznate funkcije oblika (2). Specijalno, ako je $Q_i = 0$ holonomni mehanički sistem je okarakterisan (u konfiguracionoj mnogostrukosti) ako je poznata samo jedna funkcija oblika

$$L(q,\dot{q},t) = T-U,$$

tzv. Lagranževa funkcija.

Neka su poznate funkcije oblika

$$q^i = q^i(t) \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{12}$$

pri čemu te funkcije imaju neprekidne izvode najmanje drugog reda, tada je odredjeno kretanje u odnosu na konfiguracionu mnogostrukost M_n. Kada funkcijama (12) pridružimo i jednačine holonomnih veza (ako te veze postoje) jednoznačno je odredjeno kretanje sistema. U slučaju kada je sistem slobodan kretanje u M_n se poklapa sa kretanjem sistema. U svim kasnijim problemima predmet razmatranja biće kretanje u M_n.

U polju zadatih sila $F_i(q,\dot{q},t)$ i pri zadatoj kinetičkoj energiji $T(q,q,t)$ od svih-vezama dopustenih - kretanja, "stvarno" je ono kretanje koje je saglasno diferencijalnim jednačinama oblika Lagranževih jednačina II vrste[12],

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{\partial U}{\partial q^i} + Q_i \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{13}$$

Dakle, dinamički problem holonomnog mehaničkog sistema potpuno su odredjeni diferencijalnim jednačinama drugog reda, kojih ima koliko i stepeni slobode sistema.

Diferencijalne jednačine (13) možemo napisati i u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T_2}{\partial q^i} = \frac{\partial U_o}{\partial q^i} + G_i + P_i + Q_i \ , \qquad (14)$$

gde je

$$U_o = T_o + U; \quad P_i = -\frac{\partial a_i}{\partial t}; \quad G_i = g_{ij}(q,t)\dot{q}^j$$

$$g_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j}{\partial q^i}, \qquad g_{ij} = -g_{ji} \qquad (15)$$

Prema tome, umesto razmatranja na način kao u (13), kretanje holonomnog mehaničkog sistema možemo interpretirati kao kretanje sa kinetičkom energijom T_2 u polju sila

$$F_i = \frac{\partial U_o}{\partial q^i} + G_i + P_i + Q_i$$

Sile G_i su giroskopske, a sile P_i su u opštem slučaju, iako zavise samo od q i t, nepotencijalne i nazivaju se nepotencijalne pozicione sile[1].

Na osnovu svojstva (6) sledi da jednačine kretanja (14) možemo rešiti u odnosu na generalisana ubrzanja $\ddot{q}$, tj.

$$\ddot{q}^i = -\Gamma^i_{kr}\dot{q}^k\dot{q}^r + a^{ij}\left(\frac{\partial U_o}{\partial q^j} + G_j + P_j + Q_j - \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}\dot{q}^k\right), \qquad (16)$$

gde su:

$$\Gamma^i_{kr} = a^{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^r} + \frac{\partial a_{ir}}{\partial a^k} - \frac{\partial a_{rk}}{\partial q^j}\right)$$

tzv. Kristofelovi simboli II vrste, a a^{ij} su elementi matrice koja je inverzna matrici a_{ij}, tj.

---

1) O silama biće detaljnije reči, kasnije.

$$a^{ij}a_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Oblik jednačina (16) je ekvivalentan sistemu jednačina (13) i pogodan je za razmatranja sa stanovišta teorije diferencijalnih jednačina. Naime, pogodan je (kao što su i jednačine u formi Njutna) za primenu stavova o egzistenciji i jedinosti rešenja. Ako su uslovi nekih od tih stavova ispunjeni, onda za proizvoljne početne vrednosti Lagranževih koordinata q_o i generalisanih brzina $\dot{q}_o$ (početno stanje) u proizvoljnom trenutku $t_o \geqslant 0$, jednoznačno je odredjeno kretanje

$$q = q(q_o, \dot{q}_o, t_o, t), \tag{17}$$

a samim tim, i brzine

$$\dot{q} = \dot{q}(q_o, \dot{q}_o, t_o, t) \tag{17'}$$

To znači da se u Lagranževom pristupu održava princip determinisanosti kretanja[1)].

2. Neholonomni mehanički sistem, pored funkcija (1) i (2), karakterišu i neintegrabilne diferencijalne veze izmedju promenljivih stanja, tzv. neholonomne veze. U ovom radu pretpostavljaćemo da su te veze linearne funkcije generalisanih brzina, u najopštijem slučaju oblika

$$B^{\nu}_i(q,t)\dot{q}^i + B^{\nu}(q,t) = 0 \qquad (\nu = m+1, \ldots, n), \tag{18}$$

gde je $m \in N$, $1 \leq m < n$. Specijalni slučajevi ovih veza su sledeći:

1. neholonomne veze su homogene

$$B^{\nu}_i(q,t)\dot{q}^i = 0 \ ; \tag{18'}$$

1) Ovu determinisanost nazivamo strogom, za razliku od slabe determinisanosti kod koje je trenutak t_o fiksiran. [45]

2. neholonomne veze su stacionarne

$$B^{\nu}_{i}(q)\dot{q}^{i}+B^{\nu}(q) = 0 \qquad (18'')$$

Smatraćemo da je sistem jednačina veza (18) linearno nezavisan, tj.

$$\text{rang}\left\{B^{\nu}_{i}(q,t)\right\} = n-m \qquad (19)$$

za svako $t \geqslant 0$. Ne gubeći u opštosti pretpostavimo da je baš

$$\det\left\{B^{\nu}_{\theta}\right\}^{n}_{\nu,\theta=m+1} \neq 0 \,. \qquad (20)$$

Tada veze (18) možemo rešiti u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\nu}$,

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}(q,t)\dot{q}^{\alpha}+b^{\nu}(q,t) \qquad (21)$$

Oblik veza (21) je ekvivalentan vezama (18). Uslovno ćemo $\dot{q}^{\alpha}$($=1,\ldots,m$) nazivati nezavisnim, a $\dot{q}^{\nu}$ zavisnim generalisanim brzinama.

Kretanje neholonomnog mehaničkog sistema odredjeno je sistemom diferencijalnih jednačina oblika[10].

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{i}} - \frac{\partial T}{\partial q^{i}} = F_{i} + R_{i} \qquad (i=1,\ldots,n), \qquad (22)$$

gde su R_i tzv. reakcije neholonomnih veza i one podležu odredjivanju tako da rešenje jednačina (22) bude u saglasnosti sa jednačinama veza (21) ili (18). Prema tome, dinamički problem sastoji se u tome da se odredi kretanje

$$q^{i} = q^{i}(t)$$

i reakcije veza R_i 1), što znači da treba odrediti 2n nepoznatih, a samo 2n-m jednačina (22), (21). Problem je rešiv, ali

1) Dinamički problem je kombinovan iz I i II dinamičkog zadatka.

ne jednoznačno. Radi dinamičke odredjenosti pretpostavićemo da su veze idealne, tj.

$$R_i \delta q^i = 0,^{1)}$$

gde je δq^i beskonačno malo pomeranje. Za opisani neholonomni sistem δq^i je odredjeno jednakostima oblika

$$B^{\nu}_i(q,t)\delta q^i = 0 \tag{24}$$

odnosno, s obzirom na (21), u obliku

$$\delta q^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}(q,t)\delta q^{\alpha} \; ^{2)} \tag{25}$$

Jednačinama (22), vezama (18) (ili (21)) i kriterijumima (23) i (24) ekvivalentan je sistem diferencijalnih jednačina oblika [10]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{\partial U}{\partial q^i} + Q_i + \lambda_{\nu} B^{\nu}_i$$

$$B^{\nu}_i \dot{q}^i + B^{\nu} = 0, \tag{26}$$

gde su λ_{ν} tzv. množitelji veza. Jednačine (26) su opšteg karaktera. Uvodeći specijalna svojstva za holonomne i neholonomne veze iz (26) mogu se dobiti jednačine kretanja odgovarajućih mehaničkih sistema.

Kasnija dinamička razmatranja sastoje se u kvalitativnoj analizi jednačina kretanja. U tom smislu pogodnije je da se koriste oblici diferencijalnih jednačina kretanja u kojima su eliminisani množitelji veza.

Jednostavnim transformacijama iz sistema (26) mogu se eliminisati množitelji veza i dobiti m+(n-m)=n jednačina oblika

---

1) Veze (21) možemo shvatiti i kao unapred zadat delimični (nepotpuni) program po kome treba da se odvija kretanje, a reakcije veza kao upravljanja kojima se ostvaruje taj program.

2) Indeksi će uzimati sledeće vrednosti:
$i,j,k,l=1,\ldots,n$; $\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,\ldots,m<n$; $\nu,\rho,\theta,\psi=m+1,\ldots,n$.

$$a)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} = Q_{\alpha} + b^{\nu}_{\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\nu}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\nu}} - \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}} - Q_{\nu}\right)$$

$$b)\quad \dot q^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}\dot q^{\alpha} + b^{\nu} \tag{27}$$

Primetimo da je deo jednačina ovog sistema, kao i prethodnog, čine jednačine veza. Pored ovih jednačina, bez multiplikatora veza su i tzv. Vorončeve jednačine. One se dobijaju iz sistema jednačina kretanja (27) eliminacijom u podsistemu (27a) zavisnih generalisanih brzina $\dot q^{\nu}$, a uz pomoć jednačina veza (27b). Za reonomne neholonomne mehaničke sisteme, u opštem slučaju veza (27b), Vorončeve jednačine su oblika [11]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde T}{\partial \dot q^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde T}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\partial \tilde T}{\partial q^{\nu}}\, b^{\nu}_{\alpha} + \left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\nu}}}\right)\left(\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\dot q^{\beta} + \gamma^{\nu}_{\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}}\, b^{\nu}_{\alpha} + \tilde Q_{\alpha}, \tag{28}$$

gde su:

$$\tilde T(q, \dot q^{\alpha}, t) = T(q, \dot q^{\alpha}, \dot q^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}\dot q^{\alpha} + b^{\nu}, t) \tag{29}$$

$$\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial b^{\nu}_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\theta}}\, b^{\theta}_{\beta} - \frac{\partial b^{\nu}_{\beta}}{\partial q^{\theta}}\, b^{\theta}_{\alpha}$$

$$\gamma^{\nu}_{\alpha} = \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\theta}}\, b^{\theta} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\theta}}\, b^{\theta}_{\alpha}$$

$$\tilde Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(q, \dot q^{\alpha}, \dot q^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}\dot q^{\alpha} + b^{\nu}, t) + Q_{\theta}(q, \dot q^{\alpha}, \dot q^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}\dot q^{\alpha} + b^{\nu}, t)\, b^{\theta}_{\alpha}$$

$$\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\nu}}}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\nu}}\right)_{\dot q^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}\dot q^{\alpha} + b^{\nu}} \tag{30}$$

Koeficijenti $\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(q,t)$ imaju osobinu antisimetrije u odnosu na donje indekse

$$\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = -\gamma^{\nu}_{\beta\alpha} \qquad , \tag{31}$$

što se može neposredno videti iz (30). Saglasno prethodnoj osobini sledi da član

$$\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right) \gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\, \dot{q}^{\beta} \tag{32}$$

ima giroskopski karakter, tj.

$$\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right) \gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\, \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \equiv 0 \tag{33}$$

Vorončeve jednačine za reonomne neholonomne sisteme razlikuju se po formi od odgovarajućih jednačina skleronomnih sistema za član

$$\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right) \gamma^{\nu}_{\alpha}$$

Za slučaj neintegrabilnih veza ovaj član je jednak nuli ako su te veze homogene i stacionarne. Medjutim, taj uslov je samo dovoljan. Naime za specijalan izbor koeficijentata b^{ν}_{α} i b^{ν} možemo, u slučaju veza (21) učiniti da pomenuti član bude jednak nuli.

Sistem diferencijalnih jednačina (28) i jednačine veza (21) čine potpun sistem za rešavanje dinamike opisanog neholonomnog sistema. One su opšteg karaktera, u smislu da opisuju kretanje proizvoljnog neholonomnog sistema. Uvodeći specijalna svojstva (homogenost veza, stacionarnost, reonomnost, ...) iz jednačina (28), (21) dobijaju se jednačine za svaku odgovarajući klasu mehaničkih sistema.

Izraz $\widetilde{T}$ - uobičajeno je $\widetilde{T}$ nazvati transformisana kinetička energija - je, slično kinetičkoj energiji T, u opštem slučaju kvadratni nehomogeni polinom u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\alpha}$,

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}_2 + \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_o = \frac{1}{2}\, \widetilde{a}_{\alpha\beta}(q,t)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} + \widetilde{a}_{\alpha}(q,t)\dot{q}^{\alpha} + \widetilde{a}_o(q,t) \tag{34}$$

U desnoj strnai ove jednakosti znak $\sim$ nema prethodni smisao, već samo ukazuje na razliku odgovarajućih koeficijenata u (34) i (3). Veza izmedju koeficijenta formi T i $\widetilde{T}$ je sledeća:

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}+2a_{\alpha\nu}\, b^{\nu}_{\beta}+a_{\nu\varrho}\, b^{\nu}_{\alpha}\, b^{\varrho}_{\beta}$$

$$\tilde{a}_{\alpha} = a_{\alpha}+a_{\nu}\, b^{\nu}_{\alpha}+a_{\nu\alpha}\, b^{\nu}+a_{\nu\theta}\, b^{\nu}_{\alpha}\, b^{\theta}$$

$$\tilde{a}_{o} = a_{o}+2a_{\nu}\, b^{\nu}+\frac{1}{2}a_{\nu\theta}\, b^{\nu}\, b^{\theta}, \qquad (35)$$

a što se jednostavno dokazuje na osnovu (28). Ako je polazni holonomni sistem skleronoman, tada je $a_i=0$, $a_o=0$ pa je

$$\tilde{a}_{\alpha} = a_{\nu\alpha}\, b^{\nu}+a_{\nu\theta}\, b^{\nu}\, b^{\theta}, \qquad \tilde{a}_{o}=a_{\nu\theta}\, b^{\nu}\, b^{\theta} \qquad (36)$$

Usvojićemo sledeću definiciju skleronomnosti neholonomnog sistema: neholonomni sistem je skleronoman ako je

$$T = T_2(q,\dot{q}); \quad \tilde{T} = \tilde{T}_2(q,\dot{q}); \quad \gamma^{\nu}_{\alpha} = 0 \qquad (37)$$

Na osnovu (37) sledi da je

$$\tilde{a}_{\alpha} = a_{\nu\alpha}\, b^{\nu}+a_{\nu\theta}\, b^{\nu}_{\alpha}\, b^{\theta}=0$$

$$\tilde{a}_{o} = a_{\nu\theta}\, b^{\nu}\, b^{\theta}=0 \quad , \qquad (38)$$

a odatle, uzimajući u obzir svojstvo (7), je

$$a_{\nu\theta}\, b^{\nu}\, b^{\theta} \geqslant 0; \quad a_{\nu\theta}\, b^{\nu}\, b^{\theta}=0 \Longleftrightarrow b^{\nu}=0$$

Prema tome, (37) se svodi na sledeći sistem jednakosti

$$T = T_2; \quad b^{\nu} = 0, \quad b^{\nu}_{\alpha}=b^{\nu}_{\alpha}(q) \qquad (39)$$

Drugim rečima, saglasno definiciji (37), neholonomni sistem je skleronoman ako je polazni holonomni sistem skleronoman, a neholonomne veze stacionarne i homogene.

Kvadratni deo $\tilde{T}_2$ transformisane kinetičke energije, s obzirom na (7), je strogo nenegativna funkcija u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\alpha}$,

$$\tilde{T}_2 \geqslant 0, \quad \tilde{T}_2 = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^{\alpha} = 0 \tag{40}$$

Naime, važe, što nije teško proveriti, sledeće relacije

$$\tilde{T}_2 = \frac{1}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} = (a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j)_{\dot{q}^{\nu}=b^{\nu}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha}} \tag{41}$$

i

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}\,\dot{q}^{\alpha} \Rightarrow (\dot{q}^1 \ldots \dot{q}^n) = 0 \Leftrightarrow (\dot{q}^1 \ldots \dot{q}^m) = 0 \tag{42}$$

Time je tvrdjenje (40) dokazano. Ako T_2 eksplicitno zavisi od vremena t, tada (40) ne podrazumeva pozitivnu definitnost u odnosu na $\dot{q}^{\alpha}$. Po definiciji, potreban i dovoljan uslov da bi $\tilde{T}_2$ bilo pozitivno-definitna funkcija, u prethodnom smislu, glasi

$$\tilde{T}_2 \geqslant a(\dot{q}^{\alpha}) \; ; \quad a \geqslant 0 \, , \quad a = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^{\alpha} = 0 \tag{43}$$

Specijalno, ako T_2 ne zavisi eksplicitno od vremena t, onda su relacije (40) ekvivalentne sa (43), tj. $\tilde{T}_2\,(q,\dot{q}^{\alpha})$ je tada pozitivno-definitna funkcija promenljivih $\dot{q}^{\alpha}$.

Ako sistem jednačina (30) ne zavisi eksplicitno od koordinata q^{ν}, onda je on potpun u tom smislu što se može rešiti bez učešća veza (21). Rešavanjem diferencijalnih jednačina (28) mogu se odrediti koordinate q^{α} kao funkcije vremena t,

$$q^{\alpha} = q^{\alpha}(t), \tag{44}$$

a potom ostale koordinate q^{ν} kao funkcije vremena, a iz jednačina veza (21). One su, po unošenju funkcija (44), oblika

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}(q^{\alpha}(t),q^{\nu},t)\dot{q}^{\alpha}+b^{\nu}(q^{\alpha}(t),q^{\nu},t) \tag{45}$$

Jednačine (45) čine potpun sistem diferencijalnih jednačina prvog reda po $q^{\nu}(t)$, kao nepoznatim funkcijama. Sistem jednačina (28) ne zavisi eksplicitno od koordinata q^{ν}, na primer, u slučaju kada kinetička energija T, generalisane sile Q_i i koeficijenti b^{ν}_{α} ne zavise od tih koordinata. Jednačine tada dobijaju oblik [11]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\alpha} + \tilde{Q}_{\alpha} + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right)\left(\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\beta} + \gamma^{\nu}_{\alpha}\right), \quad (46)$$

a koeficijenti $\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ i γ^{ν}_{α} su,u poredjenju sa slučajem kada veze zavise od q^{ν}, nešto jednostavniji izrazi [11]

$$\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial b^{\nu}_{\beta}}{\partial q^{\alpha}}, \quad \gamma^{\nu}_{\alpha} = \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \quad (47)$$

Mehanički sistem kome odgovaraju diferencijalne jednačine (28), nezavisne od q^{ν}, je sistem tzv. Čapljiginovog tipa [11].

Pod pretpostavkom da su veze (21) (ili oblika (18)) integrabilne onda je

$$\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{i} \quad \gamma^{\nu}_{\alpha} = 0 \quad (48)$$

Vorončeve diferencijalne jednačine u ovom slučaju predstavljaju jednačine kretanja u prekobrojnim koordinatama holonomnog sistema sa m-stepeni slobde. Tada se, u principu, integracijom veza, n-m Lagranževih koordinata može eliminisati. Uzimajući u obzir tu činjenicu, sistem Vorončevih jednačina transformiše se u potpun sistem od m Lagranževih jednačina II vrste. Odgovarajuća kinetička energija, generalisana nepotencijalna sila i funkcija sile U dobijaju se iz (28) eliminacijom zavisnih Lagranževih korodinata - pomoću n-m prvih integrala

$$F^{\nu}(q^1 \ldots q^n, t) = c^{\nu} = \text{const}, \quad (49)$$

gde je

$$\frac{\partial F^{\nu}}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F^{\nu}}{\partial t} = 0 \Longleftrightarrow B^{\nu}_i \dot{q}^i + B^{\nu} = 0 \quad (50)$$

Dakle, holonomni sistem potpuno je opisan sa onoliko jednačina drugog reda koliko ima stepeni slobode kretanja. Medjutim, u slučaju neholonomnih sistema od m-stepeni slobode, potpun sistem sastoji se iz dve grupe jednačina: diferencijalnih jednačina drugog reda, kojih ima koliko i stepeni slobode sistema i jednačina prvog reda, kojih ima koliko i diferencijalnih neintegrabilnih veza. I to predstavlja minimalni broj jednačina za potpun opis dinamike neholonomnog sistema.

Na osnovu (40) sledi da je za svako $t \geqslant 0$

$$\det\left\{a_{\alpha\beta}(q,t)\right\}^{m}_{\alpha,\beta=1} \neq 0 \tag{51}$$

Prema tome, Vorončeve jednačine mogu se napisati u obliku rešenom po ubrzanjima $\ddot{q}^{\alpha}$ [11]

$$\ddot{q}^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\gamma}(q,t)\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} + R^{\alpha}_{\gamma}(q,t)\dot{q}^{\gamma} + R^{\alpha} \tag{52}$$

gde su $R^{\alpha}_{\beta\gamma}$, R^{α}_{γ}, R^{α} poznate funkcije Lagranževih koordinata q, generalisanih brzina $\dot{q}^{\alpha}$ i vremena t. Jednačine (52) i jednačine veza (21) čine potpun sistem pogodan za razmatranja sa stanovišta stavova teorije diferencijalnih jednačina o egzistenciji i jedinosti rešenja. Ako su uslovi tih stavova ispunjeni, onda za proizvoljno izabrane koordinate q_o i brzine $\dot{q}^{\alpha}_{o}$ u trenutku t_o jednoznačno je odredjeno kretanje

$$q = q(q_o, \dot{q}^{\alpha}_{o}, t_o, t),$$

tj. Vorončev metod održava princip determinisanosti kretanja.

2. Disipativne, giroskopske i pozicione sile

U Lagranževom pristupu dinamika holonomnog mehaničkog sistema odredjena je ako su efektivno zadati kinetička energija i generalisane sile kao funkcije Lagranževih koordinata q, generalisanih brzina $\dot{q}$ i vremena t. U slučaju neholonomnog mehaničkog sistema, pored pomenutih funkcija, treba znati i diferencijalne neintegrabilne jednakosti. Medjutim, kvalitativna razmatranja dinamičkih problema obično su opšteg karaktera. Tada se ne zahteva konkretan izraz za kinetičku energiju, generalisane sile i jednačine veza, već njihovo razlikovanje prema nekim opštim svojstvima.

U ovom delu rada izvršiće se jedna, za kasnija razmatranja važna klasifikacija generalisanih sila a prema nekim opštim osobinama. Već u početku prethodnog poglavlja generalisane sile su razvrstane u dve osnovne grupe:

- potencijalne sile
- nepotencijalne sile

Time se nećemo detalnije baviti, smatrajući da su to opšte poznati pojmovi .

Važna klasa nepotencijalnih sila su - disipativne sile. Pod pojmom disipativnih sila podrazumevaju se generalisane sile koje su neprekidne funkcije promenljivih q, $\dot{q}$ i t i čija je snaga nepozitivna,

$$Q_i^w(q,\dot{q},t)\dot{q}^i \leqslant 0, \tag{53}$$

pri čemu je isključena mogućnost da je jednakost identički zadovoljena. U slučaju kada je

$$Q_i^w\dot{q}^i \leqslant - a(\dot{q}) ,$$

$$a \leqslant 0, \quad a = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \tag{54}$$

kažemo da su disipativne sile- sile potpune disipacije. Ako nije ispunjen uslov (54), onda disipativne sile nazivamo silama nepotpune disipacije. U specijalnom slučaju, kada su disipativne sile oblika linearnih funkcija generalisanih brzina, tj.

$$Q_i^W = b_{ij}(q,t)\dot{q}^j \,, \tag{55}$$

nazivamo ih silama viskoznog trenja. Za sile viskoznog trenja karakteristično je da se mogu izraziti na sledeći način

$$Q_i^W = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^i}\,, \qquad \Phi = \frac{1}{2}\, b_{ij}(q,t)\dot{q}^i\dot{q}^j \tag{56}$$

gde je Φ tzv. Relejeva funkcija.

Medjutim, kao parcijalni izvod oblika (56), mogu se prikazati i klase disipativnih sila koje nisu sile viskoznog trenja, već su nelinearne funkcije u odnosu na generalisane brzine [16].

Giroskopske sile su one sile čija je snaga identički jednaka nuli,

$$Q_i(q,\dot{q},t)\dot{q}^i \equiv 0 \tag{57}$$

Prethodna razmatranja o disipativnih i giroskopskim silama zasnovana su na analizama i definicijama iz [23].

Uobičajeno je da se disipativne sile definišu relacijama (56). Medjutim, uopštenje (53) nije formalno, već ima i svoje fizičko opravdanje. Naime, u skladu s tom definicijom, ako je sistem u mirovanju sile Q_i^W ne deluju, tj.

$$Q_i^W(q,0,t) \equiv 0 \tag{58}$$

Dokaz za ovo tvrdjenje sadržan je u [23]. Isti zaključak važi i za giroskopske sile.

U dinamičkim razmatrnajima veoma često se sreće i oblik sila koje su funkcije položaja mehaničkog sistema i vremena t, ali nisu potencijalne,

$$Q_i = Q_i(q,t) \tag{59}$$

Te sile, nazivaćemo pozicione nepotencijalne sile [18], pa ćemo ih tako i po nazivu razlikovati od potencijalnih.

3. Prvi integrali kretanja

Uloga prvih integrala kretanja je od velikog značaja - kako u procesu integracije, tako i u kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina kretanja odgovarajućih mehaničkih sistema. Za kasnija razmatranja biće najznačajniji prvi integrali kretanja koji su oblika kvadratne funkcije generalisanih brzina - kvadratni integrali, i prvi integrali kretanja koji su linearne funkcije generalisanih brzina - linearni integrali.

Razmotrimo egzistenciju pomenutih prvih integrala kod neholonomnih mehaničkih sistema. U načelu, analiza egzistencije prvih integrala je veoma složena, posebno ako se ima u vidu da se razmatraju i reonomni neholonomni sistemi kod kojih je taj problem, zbog zavisnosti diferencijalnih jednačina kretanja od vremena, daleko kompleksniji nego kod skleronomnih sistema [53], [21], [26]

1. Prvo, razmotrimo egzistenciju kvadratnog integrala. Ograničićemo se na analizu uslova pod kojima se održava funkcija koja predstavlja zbir kvadratne forme T_2, transformisane kinetičke energije $\tilde{T}$ i funkcije koja zavisi od položaja i vremena t, i to oblika

$$\tilde{U}_o = -\tilde{T}_o - U, \tag{60}$$

gde je $U(q,t)$ funkcija sile, a $\tilde{T}_o$ slobodan član u izrazu za transformisanu kinetičku energiju. Pretpostavimo da pored potencijalnih sila deluju i nepotencijalne pozicione sile, tj. sile oblika

$$Q_i = Q_i(q,t) \tag{61}$$

Pod tim uslovima problem egzistencije kvadratnog integrala je relativno jednostavniji nego u opštem slučaju. Važi sledeći

S t a v 3.1. Da bi neholonomni mehanički sistem, čija je dinamika opisana diferencijalnim jednačinama kretanja (28), (21), u polju potencijalnih i pozicionih nepotencijalnih sila imao kvadratni integral kretanja oblika

$$\tilde{T}_2 - \tilde{T}_o - U = h = \text{const} \tag{62}$$

potrebno je i dovoljno da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$1.\ (a_{\nu\alpha} + a_{\nu\theta} b^{\theta}_{\alpha})\gamma^{\nu}_{\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{a}_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha\beta}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}\right) +$$

$$+ (a_{\nu\beta} + a_{\nu\theta} b^{\theta}_{\beta})\gamma^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{a}_{\beta\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{a}_{\beta\alpha}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}\right) = 0$$

$$2.\ (a_{\nu\theta} b^{\theta} + a_{\nu})\gamma^{\nu}_{\alpha} + \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu} + \tilde{Q}_{\alpha}(q,t) = 0$$

$$3.\ -\frac{\partial \tilde{a}_o}{\partial t} - \left(\frac{\partial a_o}{\partial q^{\nu}} + \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}}\right) b^{\nu} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Ovaj stav predstavlja uopštenje uslova egzistencije kvadratnog integrala oblika (62) iz rada[36]. Tamo je $T = T_2(q,\dot{q})$ i $Q_i = 0$.

D o k a z. Pre svega, važi da je

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\alpha}}\right)\dot{q}^{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\ddot{q}^{\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\ddot{q}^{\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha} + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu}}\dot{q}^{\nu} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu}}\dot{q}^{\nu}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\dot{q}^{\alpha} - \tilde{T}\right) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial q^{\nu}}(b^{\nu}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + b^{\nu}) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\tilde{T}_2 - \tilde{T}_o) + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\gamma}} b^{\nu}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu} \tag{63}$$

Na osnovu prethodnog dobijamo izvod funkcije $\widetilde{T}_2-\widetilde{T}_o-U$ u smislu diferencijalnih jednačina (28), (21),

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{T}_2-\widetilde{T}_o-U) = \left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}^\nu}\right)\gamma^\nu_\alpha \dot{q}^\alpha - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} b^\nu - \frac{\partial U}{\partial q^\nu} b^\nu + \widetilde{Q}_\alpha \dot{q}^\alpha \quad (64)$$

S obzirom na strukturu izraza $\widetilde{T}$ i γ^ν_α jednakost (64) može se izraziti u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{T}_2-\widetilde{T}_o-U) = \left[(a_{\nu\alpha}+a_{\nu\theta} b^\theta_\alpha)\gamma^\nu_\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{a}_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{a}_{\alpha\beta}}{\partial q^\nu} b^\nu\right)\right]\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta +$$
$$+ \left[(a_{\nu\theta} b^\theta + a_\nu)\gamma^\nu_\alpha + \frac{\partial \widetilde{a}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{a}_\alpha}{\partial q^\nu} b^\nu + \widetilde{Q}_\alpha\right]\dot{q}^\alpha -$$
$$- \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{a}_o+U) - \left[\frac{\partial}{\partial q^\nu}(\widetilde{a}_o+U)\right] b^\nu \quad (65)$$

Prema tome, izvod izraza T_2-T_o-U, u smislu diferencijalnih jednačina kretanja (28), (21) je kvadratna funkcija u odnosu na generalisane brzine. Da bi takva funkcija bila identički jednaka nuli, odnosno da bi egzistirao kvadratni integral kretanja oblika

$$\widetilde{T}_2-\widetilde{T}_o-U = h = \text{const}, \quad (66)$$

potrebni su i dovoljni uslovi 1., 2. i 3. stava 3.1. Time je stav dokazan. Kvadratni integral oblika (66) često nazivamo "generalisani" integral energije.

Neka su veze (21) integrabilne, tj. oblika

$$F^\nu(q,t) = c^\nu \ , \quad (67)$$

odnosno, na osnovu stava o egzistenciji implicitne funkcije, oblika

$$q^\nu = f^\nu(q^\alpha, t) \ , \quad (68)$$

pri čemu je

$$(b^{\nu}_{\alpha})_{q^{\nu}=f^{\nu}(q^{\alpha},t)} = \frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \; ; \quad (b^{\nu})_{q^{\nu}=f^{\nu}(q^{\alpha},t)} = \frac{\partial f^{\nu}}{\partial t} \; , \qquad (68')$$

tada je

$$\gamma^{\nu}_{\alpha} = 0$$

Uslovi egzistencije generalisanog integrala energije sada dobijaju dobro poznati oblik [10], [12]

$$-\frac{\partial T^{*}}{\partial t} - \frac{\partial U^{*}}{\partial t} + \tilde{Q}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} = 0 \; ,$$

gde je

$$T^{*} = (\tilde{T})_{q^{\nu}=f^{\nu}(q^{\alpha},t)} \; ; \qquad U^{*} = (U)_{q^{\nu}=f^{\nu}(q^{\alpha},t)}$$

Ako je polje sila potencijalno, $Q_i=0$, prethodni uslov ima sledeći oblik

$$\frac{\partial(T^{*}+U^{*})}{\partial t} = 0 \; ,$$

a što je poznati uslov egzistencije takozvanog Jakobijevog integrala energije za holonomne sisteme.

Neka su sada veze neintegrabilne, oblika

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}(q)\dot{q}^{\alpha} \qquad (69)$$

tada je takodje

$$\gamma^{\nu}_{\alpha} = 0$$

Prividno izgleda, da je u slučaju, da su veze (21) integrabilne i u slučaju da su neintegrabilne, ali oblika (69), izvod (65) iste forme. Medjutim, suštinska je razlika u tome što se pomoću (68) i (68') eliminišu, ne samo zavisne brzine $\dot{q}^{\nu}$, već i zavisne koordinate q^{ν}.

Uslovi 1., 2. i 3. su potrebni i dovoljni za egzistenciju kvadratnog integrala (66), u slučaju da su nepotencijalne sile pozicione, za proizvoljan neholonomni sistem sa linearnim vezama. Specijalno, ako je neholonomni sistem skleronoman (ispunjeni uslovi (37)), ti uslovi se svode na jednostavnije jednakosti.

$$Q_\alpha(q,t)\dot{q}^\alpha = 0 \Leftrightarrow Q_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow U = U(q) \tag{70}$$

Drugim rečima, ako je neholonomni sistem skleronoman i polje sila konzervativno - postoji kvadratni integral oblika (66). Sada on poprima oblik

$$\widetilde{T} - U = h = \mathrm{const} \tag{71}$$

Uobičajeno je da se tada za mehanički sistem kaže da je konzervativan, a za integral kretanja (71) da je integral energije.

<u>N a p o m e n a</u> 3.1. Uslov stava 3.1, koji se odnosi na oblik nepotencijalne sile, može se zameniti opštijom pretpostavkom - da je nepotencijalna sila zbir nepotencijalne pozicione komponente i komponente koja je linearna funkcija brzina, tj.[1)]

$$F_i = Q_i(q,t) + \gamma_{ij}(q,t)\dot{q}^j \tag{72}$$

Tada uslovi 1, 2. i 3. ostaju isti po formi, s tom razlikom što generalisana nepotencijalna sila $Q_i(q,t)$ učestvuje, ne samo u uslovu 2., nego i u uslovu 1.

Ako je holonomni sistem sa n-stepeni slobode skleronoman i polje sila konzervativno - konzervativni sistem, postoji integral energije

$$T - U = h = \mathrm{const} \tag{73}$$

Kretanje takvog skleronomnog holonomnog sistema ograničimo i neholonomnim vezama, koje su linearne homogene funk-

1) Sile $\gamma_{ij}\dot{q}^j$ mogu biti, na primer disipativne ili giroskopske.

cije brzina i stacionarne, tj.

$$B_i^{\nu}(q)\dot{q}^i = 0 \quad (\nu=m+1,\dots,n;\quad i=1,\dots,n;\quad 1\leq m\leq n) \tag{74}$$

odnosno, ako su rešene u odnosu na zavisne generalisane brzine $\dot{q}^{\nu}$, oblika

$$\dot{q}^{\nu} = b_{\alpha}^{\nu}(q)\dot{q}^{\alpha} \tag{75}$$

Za ovakav mehanički sistem, na osnovu teoreme o promeni energije, dobija se:

$$\frac{d}{dt}(T-U) = \lambda_{\nu} B_i^{\nu}\, \dot{q}^i\ , \tag{76}$$

a odatle, pošto je na kretanju $B_i^{\nu}\,\dot{q}^i = 0$, integral kretanja

$$T - U = h = \text{const} \tag{77}$$

tj. integral energije. Drugim rečima, ako skleronomnom holonomnom konzervativnom sistemu pridodamo neholonomne veze oblika (75) tada one ne utiču na održanje energije. Pošto je za posmatrani slučaj

$$\tilde{T} = \tilde{T}_2 = T_2\ (q,\ \dot{q}^{\alpha},\ \dot{q}^{\nu} = b_{\alpha}^{\nu}(q)\dot{q}^{\alpha})$$

očigledno je da je (77) ekvivalentno sa (71). Razlika je jedino u tome što smo u levoj strani jednakosti (77), pomoću jednačina neholonomnih veza, eliminisali brzine $\dot{q}^{\nu}$.

Ako je holonomni sistem sa n-stepeni slobde sada reonoman, postavlja se pitanje: da li se, analogno kao i za skleronomne holonomne konzervativne sisteme, može zaključiti, pri odredjenim uslovima, da pridodate neholonomne veze u opštem slučaju oblika (21), ne utiču na održanje "generalisanog" integrala energije, tj.

$$T_2 - T_o - U = h = \text{const} \tag{78}$$

koji postoji za polazni holonomni sistem. Odgovor na postavljeno pitanje za proizvoljan izbor veza (21) je negativan. Medjutim, za specijalan slučaj, kada pored integrala (78), holonomni sistem ima i linearni integral oblika

$$a_{\nu i}\, b^{\nu} \dot{q}^{i} = h_1 = \text{const}^{\,1)} \tag{79}$$

može se izvesti, u poredjenju sa skleronomnim sistemima, unekoliko modifikovan zaključak [36].

<u>S t a v</u> 3.2. Ako reonomni holonomni sistem ima kvadratni integral oblika (78) i linearni integral (79), tada holonomni sistem, opisan jednačinama (13), ima integral kretanja oblika

$$T_2 - T_o - U - a_{i\nu}\, b^{\nu} \dot{q}^{i} = \text{const} \tag{80'}$$

Osim toga, pridodate neholonomne veze, koje su u najopštijem slučaju oblika (21), ne remete taj integral kretanja, tj. (80'), pri uslovima (78) i (79), jeste integral neholonomnog sistema. Specijalno, ako su neholonomne veze homogene, tada se ovaj stav može ovako iskazati: pridodate neholonomne veze holonomnom sistemu ne remete generalisani integral energije, ako je on postojao za holonomni sistem.

<u>D o k a z:</u> Pre svega, pokažimo da holonomni sistem ima integral kretanja oblika

$$V_1 = T_2 - T_o - U - a_{\nu i}\, b^{\nu} \dot{q}^{i} = \text{const} \tag{80}$$

Na osnovu egzistencije prvih integrala (78) , (79) dokaz je očigledan. Dokažimo sada da pridodate veze oblika (21) ne remete taj integral kretanja. Izvod $\dot{V}_1$ funkcije V_1, s obzirom na teoremu o promeni energije, a u smislu diferencijalnih jednačina holonomnog sistema (13), dat je sledećim izrazom:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{d}{dt}\,(T_2 - T_o - U) - \frac{d}{dt}(a_{\nu i}\, b^{\nu} \dot{q}^{i}) =$$

---

1) Za slučaj homogenih veza integral (79) je trivijalan.

$$-\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial t}+Q_i\dot q^i-\frac{d}{dt}(a_{\nu i}b^\nu)\dot q^i-a_{\nu i}b^\nu\Big[-\Gamma^i_{kr}\,\dot q^k\dot q^r+$$

$$+a^{ij}\Big(\frac{\partial U_o}{\partial q^i}+G_i+P_i+Q_i\Big)\Big]$$

odnosno, u smislu diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnog sistema, uzetih u obliku sa množiteljima veza, izrazom:

$$\frac{dV_1}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial t}+Q_i\dot q^i+\lambda_\nu B^\nu_i\dot q^i-\frac{d}{dt}(a_{\nu i}b^\nu)\dot q^i-$$

$$-a_{\nu i}b^\nu\Big[-\Gamma^i_{kr}\,\dot q^k\dot q^r+a^{ij}\Big(\frac{\partial U_o}{\partial q^j}+G_j+P_j+Q_j\Big)\Big]-a_{\nu i}b^\nu a^{ij}\lambda_\theta B^\theta_j \quad (81)$$

Uzimajući u obzir (80), tada izraz (81) ima sledeći oblik

$$\frac{dV_1}{dt}=\lambda_\nu B^\nu_j\dot q^j-a_{\nu i}b^\nu a^{ij}\lambda_\theta B^\theta_j \qquad (82)$$

Daljim transformacijama desne strane relacije (82) dobijamo

$$\frac{dV_1}{dt}=\lambda_\theta B^\theta_j(\dot q^j-a_{\nu i}b^\nu a^{ij})=\lambda_\theta B^\theta_j(\dot q^j-\delta^j_\nu b^\nu)=$$

$$=\lambda_\theta B^\theta\dot q^\alpha+\lambda_\theta B^\theta_\psi(\dot q^\psi-b^\psi)$$

odnosno, s obzirom na ekvivalentnost (21) i (18),

$$\frac{dV_1}{dt}=\lambda_\theta(b^\theta_\alpha\dot q^\alpha+b^\theta-\dot q^\theta)$$

Time je stav dokazan, jer je na osnovu (21) $b^\theta_\alpha\dot q^\alpha+b^\theta-\dot q^\theta=0$. Dakle (80') je integral kretanja i neholonomnog sistema.

Integrali kretanja neholonomnog mehaničkog sistema oblika (80') i oblika (66) su ekvivalentni. Razlika je jedino u tome što su u levoj strani jednakosti (80'),pomoću jednačina veza (21), eliminisane generalisane brzine $\dot{q}^{\nu}$. Analiza uslova egzistencije integrala kretanja (78) i (79) holonomnog sistema, predstavlja u odredjenom smislu reči kreiterijum za ustanovljavanje egzistencije generalisanog integrala energije (66) za neholonomni sitem. Naime, (78) i (79) predstavljaju dovoljne (a ne i potrebne) uslove egzistencije tog integrala.

2. Egzistenciju linearnog integrala razmotrićemo za slučaj kada je taj integral specijalnog oblika

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu}} = c_{\nu'} = \text{const} \qquad (1 < m' < \nu' < m) \tag{83}$$

I u ovom slučaju pretpostavimo da su nepotencijalne sile pozicione, tj.

$$Q_i = Q_i(q,t), \tag{84}$$

Sada važi sledeći

S t a v 3.3. Da bi neholonomni sistem, u polju potencijalnih i pozicionih sila imao linearni integral oblika (83), potrebno je i dovoljno da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$1. \quad A_{\nu'\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{a}_{\alpha\beta}}{\partial q^{\nu'}} + \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha\beta}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\nu'}\right) + (a_{\nu\alpha} + a_{\nu\theta} b^{\theta}_{\alpha}) \gamma^{\nu}_{\nu'\beta} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{a}_{\beta\alpha}}{\partial q^{\nu'}} + \frac{\partial \tilde{a}_{\beta\alpha}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\nu'}\right) + (a_{\nu\beta} + a_{\nu\theta} b^{\theta}_{\beta}) \gamma^{\nu}_{\nu'\alpha} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha}}{\partial q^{\nu'}} + \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\nu'} + (a_{\nu\theta} b^{\theta} + a_{\nu}) \gamma^{\nu}_{\nu'\beta} + (a_{\nu\alpha} + a_{\nu\theta} b^{\theta}_{\alpha}) \gamma^{\nu}_{\nu'} = 0$$

$$3. \quad \frac{\partial (U + \tilde{a}_0)}{\partial q_{\nu'}} + \frac{\partial (U + \tilde{a}_0)}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\nu'} + \tilde{Q}_{\nu'}(q,t) + \gamma^{\nu}_{\nu'}(a_{\nu\theta} b^{\theta} + a_{\nu}) = 0$$

Uslovi ovog stava su u odredjenom smislu reči uopštenje rezultata dobijenih u radu [36].

D o k a z: Iz diferencijalnih jednačina (28), uzimajući u obzir (3) i (34), sledi da je:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu'}} = \frac{\partial}{\partial q^{\nu'}}\left(\frac{1}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}+\tilde{a}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha}+\tilde{a}_{o}\right)+\left[\frac{\partial}{\partial q^{\nu}}\left(\frac{1}{2}\tilde{a}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}+\tilde{a}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tilde{a}_{o}\right)\right]b^{\nu}_{\nu'}+\left[(a_{\nu\alpha}+a_{\nu\theta}b^{\theta}_{\alpha})\dot{q}^{\alpha}+(a_{\nu\theta}b^{\theta}+a_{\nu})\right](\gamma^{\nu}_{\nu'\beta}\dot{q}^{\beta}+\gamma^{\nu}_{\nu'})+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial q^{\nu'}}+\frac{\partial U}{\partial q^{\nu}}b^{\nu}_{\nu'}+\tilde{Q}_{\nu'}(q,t), \tag{85}$$

a odatle uslovi 1., 2. i 3. stava 3.3. Ako je neholonomni sistem skleronoman (relacije (37)), onda uslovi 1., 2. i 3. imaju jednostavniji oblik:

$$1.\quad A_{\nu'\alpha\beta} = 0$$

$$2.\quad \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha}}{\partial q^{\nu'}} + \frac{\partial \tilde{a}_{\alpha}}{\partial q^{\nu}}b^{\nu}_{\nu'} = 0$$

$$3.\quad \frac{\partial U}{\partial q^{\nu'}} + \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}}b^{\nu}_{\nu'} + \tilde{Q}_{\nu'}(q,t) = 0 \tag{86}$$

U slučaju konezrvativnog neholonomnog sistema uslovi (86) svode se na uslove u [52] i [53] koji su, saglasno definicijama datim u tim radovima, uslovi "cikličnosti koordinate $q^{\nu'}$".[1)]

Neka su veze (21) integrabilne, tj. oblika (49), onda je

$$\gamma^{\nu}_{\alpha} = 0 , \qquad \gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = 0 \tag{87}$$

Na osnovu stava o egizstenciji implicitne funkcije, sledi da postoji funkcija oblika

$$q^{\nu} = f^{\nu}(q^{\alpha},t) \tag{88}$$

Ako pomoću te funkcije i (21) eliminišemo zavisne brzine $\dot{q}^{\nu}$

1) Pojam cikličnosti koordinate za neholonomni sistem biće definisan u kasnijim poglavljima.

i zavisne koordinate q^{ν}, uslovi stava 3.3 dobijaju sledeći oblik

$$1.\ \frac{\partial \tilde{a}^*_{\alpha\beta}}{\partial q^{\nu'}} =$$

$$2.\ \frac{\partial \tilde{a}^*_{\alpha}}{\partial q^{\nu'}} = 0$$

$$2.\ \frac{\partial}{\partial q^{\nu'}}(\tilde{a}^*_o + U^*) + \tilde{Q}^*_{\nu'} = 0, \tag{89}$$

gde su

$$\tilde{a}^*_{\alpha\beta} = \tilde{a}_{\alpha\beta}(q^{\alpha}, q^{\nu} = f^{\nu}(q^{\alpha}, t), t)$$

$$\tilde{a}^*_{\alpha} = \tilde{a}_{\alpha}(q^{\alpha}, q^{\nu} = f^{\nu}(q^{\alpha}, t), t)$$

$$\tilde{a}^*_o = \tilde{a}_o(q^{\alpha}, q^{\nu} = f^{\nu}(q^{\alpha}, t), t)$$

$$\tilde{Q}^*_{\nu'} = \tilde{Q}_{\nu'}(q^{\alpha}, q^{\nu} = f^{\nu}(q^{\alpha}, t), t) + Q_{\nu}(q^{\alpha}, q^{\nu} = f^{\nu}(q^{\alpha}, t), t)\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\nu'}} \tag{90}$$

Specijalno, ako su sile potencijalne, tj. $Q_i = 0$, uslovi (89) su uslovi cikličnosti [23] u odnosu na koordinatu (koordinate) $q^{\nu'}$.

U skladu sa izloženim, specifičnost neholonomnih sistema u odnosu na holonomne sastoji se u tome što se veza izmedju egzistencije linearnog integrala i cikličnosti, kakva postoji kod holonomnih sistema, ne može uspostaviti na istovetan način kod neholonomnih sistema. O ovom problemu biće detaljnije izloženo u kasnijim poglavljima.

Napomena 3.2. Uslov stava 3.3, koji se odnosi na oblik nepotencijalnih sila, može se zameniti opštijom pretpostavkom da je nepotencijalna sila jednaka zbiru pozicione komponente i komponente koja je, u opštem slučaju, kvadratna funkcija generalisanih brzina. Tada su uslovi 1., 2. i 3. po formi slični, s tom razlikom što generalisane sile učestvuju ne samo u uslovu 3., nego i u uslovima 2. i 1. Specijalan slučaj nepotencijalnih sila prethodnog oblika su sile viskoznog trenja i giroskopske sile. One su linearne funkcije u odnosu na generalisane brzine.

4. Ravnotežno stanje i stacionarno kretanje neholonomnog mehaničkog sistema

4.1. Ravnotežno stanje

Neka je položaj[1] neholonomnog mehaničkog sistema odredjen Lagranževim koordinatama q. Kretanje oblika,

$$q(t) = q_o = \text{const} \tag{91}$$

za svako $t \geqslant t_o, t_o \geqslant 0$, nazivamo ravnoteža. Položaj q_o, koji odgovara ravnoteži, naziva se ravnotežni položaj (ravnotežna konfiguracija). Za razliku od skleronomnih sistema, saglasno prethodnoj definiciji ranvoteže, treba naglasiti da, u opštem slučaju, možemo govoriti o ravnoteži, ali u odnosu na konkretno izabrane Lagranževe koordinate q. Drugim rečima, (91) definiše položaj relativne ravnoteže, u odnosu na konfiguracioni prostor.

Za najopštiji slučaj opisanog neholonomnog mehaničkog sistema, razmotrimo uslove pod kojima egzistira kretanje oblika (91). Drugim rečima, odredimo ravnotežni položaj mehaničkog sistema, čije je kretanje potpuno opisano sistemom diferencijalnih jednačina (21), (28). Pretpostavimo da je sistem jednačina kretanja takav da Košijev zadatak ima jedinstveno rešenje. Tada, da bi neki položaj q_o bio ravnotežni, tj. da bi kretanje oblika (91) bilo rešenje jednačina (21), (28), potrebno je i dovoljno da, za svako $t \geqslant 0, q = q_o$ bude rešenje sistema algebarskih jednačina

$$\mathcal{G}_\alpha(q,t) = 0 \tag{92}$$

$$b^\nu(q,t) = 0, \tag{93}$$

gde je

$$\mathcal{G}_\alpha(q,t) = \frac{\partial(\tilde{T}_o+U)}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial(\tilde{T}_o+U)}{\partial q^\nu} b^\nu_\alpha + \tilde{Q}_\alpha(q,\dot{q}^\alpha=0,t) - \frac{\partial \tilde{a}_\alpha}{\partial t} + \gamma^\nu_\alpha a_\nu \tag{94}$$

1) Misli se na položaj reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru.

odnosno, s obzirom na strukturu izraza $\tilde{T}$, oblika

$$\sigma_\alpha(q,t) = \frac{\partial(T_o+U)}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha(q,\dot{q}=0,t) - \frac{\partial a_\alpha}{\partial t} +$$

$$+\left[\frac{\partial(T_o+U)}{\partial q^\nu} + Q_\nu(q,\dot{q}=0,t) - \frac{\partial a_\nu}{\partial t}\right] b^\nu_\alpha +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(2a_\theta b^\theta + \frac{1}{2} a_{\theta\psi} b^\theta b^\psi) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial q^\nu}(2a_\theta b^\theta + \frac{1}{2} a_{\psi\theta} b^\psi b^\theta) b^\nu_\alpha - a_\nu \frac{\partial b^\nu_\alpha}{\partial t} +$$

$$+ a_\nu \gamma^\nu_\alpha - \frac{\partial}{\partial t}(a_{\nu\alpha} b^\nu + a_{\nu\theta} b^\nu_\alpha b^\theta) \qquad (95)$$

Ako su veze (21) nehomogene, sistem (92) i (93) ima n - algebarskih jednačina. Dakle, broj jednačina jednak je broju nepoznatih Lagranževih koordinata $q^1 \ldots q^n$. Ravnoteži odgovara rešenje oblika (91).

Neka su veze homogene, tj.

$$b^\nu(q,t) = 0$$

Tada je

$$\tilde{T}_o = T_o \qquad \gamma^\nu_\alpha = \frac{\partial b^\nu_\alpha}{\partial t} \qquad (96)$$

U tom slučaju potrebni i dovoljni uslovi ravnoteže neholnomnog mehaničkog sistema svodi se na sistem oe m jednačina (m<n, gde je m broj stepeni slobode kretanja neholonomnog sistema), oblika

$$\sigma_\alpha(q,t) = \frac{\partial(T_o+U)}{q} + \frac{\partial(T_o+U)}{q} b^\nu_\alpha + \left[Q_\alpha + Q_\nu b^\nu_\alpha\right]_{\dot{q}=0} -$$

$$- \frac{\partial \tilde{a}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial b^\nu_\alpha}{\partial t} a_\nu = 0 \qquad (97)$$

Uočimo holonomni, u opštem slučaju reonomni sistem. Kretanje takvog sistema potpuno je odredjeno sistemom jednačina (14) (ili (13)). Da bi takav mehanički sistem imao kretanje oblika $\dot{q}(t) = 0$, tj. da bi postojalo ravnotežno stanje, potrebno je i dovoljno da sistem algebarskih jednačina

$$\frac{\partial(T_o+U)}{\partial q^i} + Q_i(q,\dot{q} = 0,t) - \frac{\partial a_i}{\partial t} = 0 \qquad (98)$$

ima rešenje q = const. Neka je q_o ravnotežni položaj opisanog holonomnog sistema. Tada je na osnovu (95),

$$\begin{aligned} G_\alpha(q_o,t) = \Big[& \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(2a_\theta b^\theta + \frac{1}{2} a_{\psi\theta} b^\psi b^\theta\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial q^\nu}\left(2a_\theta b^\theta + \frac{1}{2} a_{\psi\theta} b^\psi b^\theta\right) b^\nu_\alpha - a_\nu \frac{\partial b^\nu_\alpha}{\partial t} + \\ & + a_\nu \gamma^\nu_\alpha \Big]_{q=q_o} \end{aligned} \qquad (99)$$

Pošto u opštem slučaju ne mora da važi identitet

$$G_\alpha(q_o,t) \equiv 0$$

tada zaključujemo: ako je neki položaj holonomnog sistema ravnotežni, u opštem slučaju, on nije ravnotežni i pri dodatim neholonomnim vezama oblika (21).Drugim rečima, pridodate neholonomne veze, koje su nehomogene linearne funkcije brzina, u opštem slučaju, remete ravnotežu holonomnog sistema. Za poseban izbor koeficijenata b^ν_α i b^ν , ako je tačka q_o bila ravnotežni položaj holonomnog sistema ona može ostati ravnotežni položaj iako su pridodate neholonomne veze oblika (21).

Neka su neholonomne veze homogene linearne funkcije brzina oblika

$$\dot{q}^\nu = b^\nu_\alpha(q,t)\dot{q}^\alpha, \qquad (100)$$

tada je

$$G_\alpha(q_o,t) = -\left[\frac{\partial b^\nu_\alpha}{\partial t} a_\nu\right]_{q=q_o} + \left[\frac{\partial b^\nu_\alpha}{\partial t} a_\nu\right]_{q=q_o} \equiv 0 \qquad (101)$$

Dakle, ako je neki položaj holonomnog sistema ravnotežni, on će biti ravnotežni i pri dodatim neholonomnim vezama - ako su te veze linearne homogene funkcije brzina[1]. Medjutim, obrnuto ne važi: neholonomni sistem može imati ravnotežni položaj i u onim tačkama u kojima ga bez delovanja tih veza nema, tj. i u tačkama u kojima je

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(T_o+U) + Q_i(q,\dot q = 0,t) - \frac{\partial a_i}{\partial t} \not\equiv 0$$

U slučaju da je neholonomni mehanički sistem skleronoman (ispunjeni uslovi (37)), uslovi ravnoteže znatno se pojednostavljuju i imaju sledeći oblik [48], [33]

$$\frac{\partial U}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial U}{\partial q^\nu} b^\nu_\alpha + \tilde Q_\alpha(q,\dot q^\alpha=0) = 0 \qquad (102)$$

Istaknimo, da iz definicije skleronomnosti sledi da su neholonomne veze homogene linearne funkcije brzina i da kao takve ne remete ravnotežu holonomnog sistema.

Sistem jednačina (92), (93) u opštem slučaju zavisi i od parametra t. Jasno je da ranvoteži odgovaraju samo ona rešenja koja su oblika

$$q(t) = \text{const} \qquad (103)$$

Drugim rečima, ravnoteži odgovara nepokretna tačka konfiguracionog prostora. Ako su veze (21) nehomogene, $(b^{m+1}\dots b^n)\neq 0$, broj jednačina ravnoteže je n. Znači da ih ima koliko i nepoznatih $q^1\dots q^n$, i u tom smislu problem je analogan kao i kod holonomnog sistema sa n - stepeni slobode kretanja.

---

1) Taj zaključak je trebalo i očekivati, jer rešenje oblika $\dot q=0$ holonomnog sistema trivijalno zadovoljava veze $\dot q^\nu = b^\nu_\alpha(q,t)\dot q^\alpha$

Neka su neholonomne veze homogene. Uslovi ravnoteže tada se sastoje od m jednačina oblika (97), tj.

$$G_\alpha(q^1 \ldots q^n, t) = 0 \tag{1o4}$$

Uzmimo da je q_o ravnotežni položaj, tj. za svako $t \geqslant 0$

$$G_\alpha(q_o, t) \equiv 0 \,, \tag{1o5}$$

pri čemu je u tački q_o

$$\operatorname{rang}\left\{\frac{\partial G_\alpha}{\partial q^i}\right\}_{\substack{\alpha=1\\ i=1}}^{\substack{\alpha=m\\ i=n}} \leqslant m \tag{1o6}$$

Pretpostavimo da su, u okolini tačke q_o za $\forall t \geqslant 0$, $\frac{\partial G_\alpha}{\partial q^i}$ neprekidne funkcije promenljivih q i t. Tada postoji takva okolina tačke q_o, promenljivih q da za svako $t \geqslant 0$ relacije (1o4), u toj okolini, odredjuju glatku mnogostrukost O_r koja zavisi od t, dimenzije ne manje od n - m. U opštem slučaju sistem jednačina (1o4), a samim tim i mnogostrukost O_r, zavise od parametara t. Pod tim uslovima O_r nije ravnotežna mnogostrukost. Tada za specijalan izbor veza (21), generalisanih sila i kinetičke energije q_o može biti izolovana ravnotežna konfiguracija.

Ako se sistem jednačina (1o4) može izraziti u obliku koji ne zavisi eksplicitno od vremena t, tj.

$$G_\alpha(q) = 0, \tag{106'}$$

tada svaka tačka mnogostrukosti O_r predstavlja ravnotežni položaj mehaničkog sistema. U tom slučaju kažemo da je O_r ravnotežna mnogostrukost. Ravnotežna mnogostrukost pod navedenim uslovima može da postoji ako je na primer mehanički sistem skleronoman, a generalisane sile ne zavise od vremena t.

Slučajeve kada nisu ispunjeni uslovi glatkosti funkcija $G_\alpha(q,t)$ i relacija (1o6) nećemo detaljno razmatrati. Istaknimo samo to da u tom slučaju (1o6) može da ima izolovano rešenje [38].

4.2. Stacionarno kretanje

Uočimo holonomni sistem za koji u opštem slučaju pretpostavljamo da je reonoman. Kažemo da je koordinata $q^{\nu'}$ ciklična ako je

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial q^{\nu'}} = 0 \quad , \qquad Q_{\nu'} = 0 \qquad (1o7)$$

Ako nije ispunjen drugi uslov kaže se da je koordinata $q^{\nu'}$ kvaziciklična. Tako definisan pojam ciklične koordinate ima kao posledicu linearni integral oblika

$$p_{\nu'} = \frac{\partial T}{\partial q^{\nu'}} = \text{const}, \qquad (1o8)$$

tzv. ciklični integral . Osim toga, uslovi (1o7) u principu dopuštaju stacionarno kretanje mehaničkog sistema opisanog diferencijalnim jednačinama (13)[23]. Ako je polje sila potencijalno, $Q_i = 0$, uslovi (1o7), tj. cikličnost koordinate $q^{\nu'}$, jesu potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju linearnog integrala (1o8).

Pretpostavimo da kretanje holonomnog sistema sa n - - stepeni slobode ograničava i n - m neintegrabilnih veza oblika (21). Kretanje takvog mehaničkog sistema potpuno je opisano diferencijalnim jednačinama (21), (28). S obzirom na osobine neholonomnih mehaničkih sistema, ne može se, u opštem slučaju, definisati cikličnost koordinate na način kao kod holonomnih sistema, koja bi neposredno obezbedjivala dovoljne uslove za egzistenciju integrala oblika

$$\tilde{p}_{\nu'} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu'}} = \text{const} \qquad (1<\nu'<m) \qquad (1o9)$$

i potreban broj uslova iz kojih bi se odredile početne vrednosti pozicionih koordinata i cikličnih impulsa (ili cikličnih brzina) u datom trenutku $t_o \geqslant 0$, za koje je odgovarajuće Košijevo rešenje stacionarno kretanje. Medjutim, neke analogije ipak postoje.

D e f i n i c i j a 4.1. Kordinata $q^{\nu'}$ $(1<\nu'<m'<m)$ je ciklična ako je [34]

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu'}} = 0 \, ; \quad \frac{\partial U}{\partial q^{\nu'}} = 0 \, ; \quad \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\nu'}} = 0 \, ;$$

$$\frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\nu'}} = 0 \qquad \frac{\partial \tilde{Q}_{\alpha}}{\partial q^{\nu'}} = 0$$

Mi ćemo u kasnijim razmatranjima pretpostavljati da postoji $m - m'$ cikličnih koordinata. Ne gubeći u opštosti, pretpostavićemo da su to baš koordinate.

$$q^{m'+1} \dots q^{m}$$

Ostale koordinate

$$q^{1} \dots q^{m'} \, ; \qquad q^{\nu} \, (\nu = m+1, \dots, n)$$

nazivaćemo pozicione koordinate.

D e f i n i c i j a 4.2. Kretanje neholonomnog, u opštem slučaju reonomnog, mehaničkog sistema je stacionarno ako pri tom kretanju generalisani impulsi $\tilde{p}_{\nu'}$, koji odgovaraju cikličnoj koordinati, i pozicione koordinate zadržavaju stalne vrednosti, tj.

$$q^{\alpha'} = \text{const}; \quad \tilde{p}_{\nu'} = \text{const}; \quad q^{\nu} = \text{const}.$$

Definicija 4.1 obezbedjuje da diferencijalne jednačine kretanja ne zavise od cikličnih koordinata. Medjutim u opštem slučaju definicija 4.1 ne obezbedjuje, za razliku od od holonomnog sistema, egzistenciju linearnog integrala oblika (1o9). Za analizu kasnijih problema biće od posebnog značaja da svakoj cikličnoj korodinati $q^{\nu'}$ odgovara linearni integral oblika (1o9). Dakle, pretpostavimo da egzistira $m - m'$ sledećih linearnih integrala:

$$\tilde{p}_{\nu'} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu'}} = c_{\nu'} = const \qquad (\nu' = m'+1,\ldots,m) \qquad (110)$$

odnosno, s obzirom na strukturu transformisane kinetičke energije $\tilde{T}$, u obliku

$$a_{\nu'\alpha'}\dot{q}^{\alpha'} + a_{\nu'} = c_{\nu'} = const \qquad (\alpha'=1,\ldots,m'\,;\,\nu'=m'+1,\ldots,m) \qquad (111)$$

Istaknimo, pošto su $q^{\nu'}$ u smislu definicije 4.1 ciklične koordinate, da prvi integrali (110) ne zavise od tih koordinata.

Ako je polje generalisanih sila takvo da su nepotencijalne sile jednake zbiru pozicione nepotencijalne komponente i komponente koja je kvadratna funkcija u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\alpha}$, potreban i dovoljan uslov za egzistenciju sistema od $m - m'$ linearnih integrala oblika (110) obezbedjuje stav 3.3 i napomena 3.2 , pri čemu je $\nu' = m'+1,\ldots,m$. Ove integrale kretanja možemo napisati i u obliku rešenom po $\dot{q}^{\nu'}$

$$\dot{q}^{\nu'} = g^{\nu'}_{\alpha'}(q^{\alpha'},q^{\nu},t)\dot{q}^{\alpha'} + g^{\nu'}(q^{\alpha'},q^{\nu},c_{\nu'},t); \qquad c_{\nu'} = const \qquad (112)$$

U specijalnom slučaju kada su koordinate generalisanih sila $Q_{\nu'}$, koje odgovaraju cikličnoj koordinati $q^{\nu'}$, jednake nuli, tj.

$$\tilde{Q}_{\nu'} = 0 \qquad (113)$$

i neka je

$$b^{\nu}_{\nu'} = 0 \qquad (113')$$

tada cikličnoj koordinati $q^{\nu'}$ odgovara linearni integral oblika (109). Dokaz ovog tvrdjenja neposredno sledi iz uslova stava 3.3, pri čemu treba uzeti da je

$$\delta^{\nu}_{\nu'} = 0 , \qquad \delta^{\nu}_{\nu'\beta'} = 0 ,$$

gde je ν' - indeks ciklične koordinate. Uslovi (113) i (113') su dovoljni (a ne i potrebni) za egzistenciju pomenutih linearnih integrala.

Kretanje neholonomnog mehaničkog sistema, koji dopušta linearne integrale oblika (112), potpuno je opisano sledećim sistemom jednačina:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}^{\alpha'}}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q^{\alpha'}}=b^{\nu}_{\alpha'}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}^{\nu}}+\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\nu}}}\right)(\gamma^{\nu}_{\alpha'\beta'}\dot{q}^{\beta'}+\gamma^{\nu}_{\alpha'})+\tilde{Q}_{\alpha'}+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial q^{\alpha'}}+\frac{\partial U}{\partial q^{\nu}}b^{\nu}_{\alpha'}$$

$$\dot{q}^{\nu}=b^{\nu}_{\alpha}(q^{\alpha'},q^{\nu},t)\dot{q}^{\alpha}+b^{\nu}(q^{\alpha'},q^{\nu},t)$$

$$\dot{q}^{\nu'}=g^{\nu'}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'}+g^{\nu'}$$

$$\dot{c}_{\nu'}=0 \tag{114}$$

Sistem se sastoji od m' jednačina drugog reda i $n+m-2m'$ jednačina prvog reda. U jednačinama drugog reda eliminišimo brzine $\dot{q}^{\nu'}$ pomoću (112). Postupak je analogan kao i pri dobijanju Vorončevih jednačina (28) iz jednačina (27), a shvatajući (112) kao diferencijalne veze.

Pretpostavimo, jednostavnosti radi, da su ispunjeni uslovi (113) i (113'). Diferencijalne jednačine (113), posle pomenutih transformacija, imaju sledeći oblik:

$$\text{(a)}\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}^{\alpha'}}-\frac{\partial T^*}{\partial q^{\alpha'}}=b^{\nu}_{\alpha'}\frac{\partial T^*}{\partial q^{\nu}}+c_{\nu'}h^{\nu'}_{\alpha'\beta'}\dot{q}^{\beta'}+$$

$$\left[\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\nu}}}\right)\right]^*(\gamma^{\nu}_{\alpha'\beta'}\dot{q}^{\beta'}+\gamma^{\nu}_{\alpha'})+\frac{\partial U^*}{\partial q^{\alpha'}}+\frac{\partial U^*}{\partial q^{\nu}}b^{\nu}_{\alpha'}+Q^*_{\alpha'}$$

$$\text{(b)}\quad \dot{q}^{\nu}=b^{\nu}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'}+b^{\nu}$$

$$\text{(c)}\quad \dot{c}_{\nu'}=0$$

$$\text{(d)}\quad \dot{q}^{\nu'}=g^{\nu'}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'}+g^{\nu'}, \tag{115}$$

gde je

$$T^* = \tilde{T}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, \dot{q}^{\alpha'}, \dot{q}^{\nu'} = g^{\nu'}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'} + g^{\nu'}, t)$$

$$h^{\nu'}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial g^{\nu'}_{\alpha'}}{\partial q^{\beta'}} - \frac{\partial g^{\nu}_{\beta'}}{\partial q^{\alpha'}} + \frac{\partial g^{\nu'}_{\alpha'}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\beta'} - \frac{\partial g^{\nu'}_{\beta'}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\alpha'} \; ; \quad h^{\nu'}_{\alpha'\beta'} = -h^{\nu'}_{\beta'\alpha'}$$

$$U^* = U - c_{\nu'} g^{\nu'}$$

$$Q^*_{\alpha'} = \left[\tilde{Q}_{\alpha}\right]^* + \frac{\partial(c_{\nu'} g^{\nu'}_{\alpha'})}{\partial t} + \frac{\partial(g^{\nu'}_{\alpha'} c_{\nu'})}{\partial q^{\nu}} b^{\nu} \qquad (116)$$

Osim toga, uzeto je u obzir da je

$$\gamma^{\nu}_{\alpha'\nu'} = 0$$

Sa * je označeno da su, posredstvom jednačina (112) iz odgovarajućih izraza u zagradi, isključene brzine $\dot{q}^{\nu'}$. Izraz T^* je u opštem slučaju kvadratni nehomogeni polinom u odnosu na promenljive $\dot{q}^{\alpha}$, tj.

$$T^* = \frac{1}{2} a^*_{\alpha\beta}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, t)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} + a^*_{\alpha}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, c_{\nu'})\dot{q}^{\alpha} +$$

$$+ a^*_{o}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, c_{\nu'}, t) \qquad (117)$$

Veza koeficijenata formi $\tilde{T}$ i T^* je analogna sa (35), s tom razlikom što umesto b^{ν}_{α} i b^{ν} u (35) stoji $g^{\nu'}_{\alpha'}$ i $g^{\nu'}$, a umesto a_{ij}, a_{i}, a_o stoji $\tilde{a}_{\alpha\beta}$, $\tilde{a}_{\alpha}$, $\tilde{a}_o$.

<u>N a p o m e n a</u> 4.1. Podsistem (115a,b,c) je autonoman u odnosu na $q^{\alpha'}(t)$, $q^{\nu}(t)$, $c_{\nu'}(t)$ kao nepoznatim funkcijama.

Kretanje neholonomnog sistema, koji ima ciklične koordinate i dopušta prve integrale oblika (110), pogodno je, za analizu egzistencije stacionarnog kretanja, opisati jednačinama (115). Prema definiciji 4.2, kretanje je stacionarno ako je

$$q^{\alpha'}(t) = q^{\alpha'}_o \quad \tilde{p}_{\nu'} = c_{\nu'}, \quad q^{\nu}(t) = q^{\nu}_o \qquad (118)$$

Na osnovu (112) sledi da je na stacionarnom kretanju

$$\dot{q}^{\nu'} = g^{\nu'}(q_o^{\alpha'}, q_o^{\nu'}, c_{\nu'}, t) \tag{119}$$

Ako (119) ne zavisi od vremena t, na primer ako integrali kretanja (11o) ne zavise eksplicitno od t, u toku stacionarnog kretanja je i

$$\dot{q}^{\nu'}(t) = q_o = \text{const}, \tag{12o}$$

Kažemo da je tada kretanje (118) stacionarno u užem smislu (merostatičko) [23].

Rezimirajmo: U skladu sa definicijom 4.2 kretanje je, stacionarno ako je

$$q^{\alpha'} = q_o^{\alpha'}, \quad q^{\nu} = q_o^{\nu}, \quad \dot{q}^{\alpha'} = 0, \quad \dot{q}^{\nu} = 0, \quad \dot{q}^{\nu'} = g(q_o^{\alpha'}, q_o^{\nu}, c_{\nu'}, t)$$

Da bi ovo kretanje bilo rešenje sistema diferencijalnih jednačina (115) potrebno je i dovoljno da za svako $t \geqslant 0$, važi

$$S_{\alpha'}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, t, c_{\nu'}) = 0$$

$$b^{\nu}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, t) = 0\,, \tag{121}$$

gde je

$$S_{\alpha'} = \frac{\partial(T_o^* + U^*)}{\partial q^{\alpha'}} + \frac{\partial(T_o^* + U^*)}{\partial q^{\nu}} b_{\alpha'}^{\nu} + Q_{\alpha'}^*(q^{\alpha'}, q^{\nu}, \dot{q}^{\alpha'} = 0, t) -$$
$$- \frac{\partial a_{\alpha'}^{\nu}}{\partial t} + \gamma_{\alpha'}^{\nu} a_{\nu}$$

Izraz $S_{\alpha'}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, t, c_{\nu'})$ dobijen je tako što smo prethodno u jednačinama kretanja (115) smenili $\dot{q}^{\alpha'} = 0$, $\dot{q}^{\nu} = 0$.

Sistem algebarskih jednačina (121) u opštem slučaju zavisi od vremena t. Stacionarnom kretanju, s obzirom na (118), odgovara samo ono rešenje koje je oblika

$$q^{\alpha'}(t) = \text{const}, \qquad q^{\nu}(t) = \text{const}. \tag{122}$$

Neka je $q_o^{\alpha'}$, $q_o^{\nu'}$ i $c_{\nu'}^o$ rešenje sistema (121) tj.

$$S_{\alpha'}(q_o^{\alpha}, q_o^{\nu}, c_{\nu'}^o, t) \equiv 0$$

$$b^{\nu}(q_o^{\alpha'}, q_o^{\nu}, t) \equiv 0$$

i neka je

$$\text{rang}\left\{\frac{\partial S_{\alpha'}}{\partial q^i}, \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^i}\right\} \leq n-(m-m') \tag{122'}$$

Osim toga, pretpostavimo da su u okolini tačke $q_o^{\alpha'}$, q_o^{ν} $\frac{\partial S_{\alpha'}}{\partial q^{\beta'}}$, $\frac{\partial S_{\alpha'}}{\partial q^{\nu}}$, $\frac{\partial S_{\alpha'}}{\partial c_{\nu'}}$ za svako $t \geqslant 0$ neprekidne funkcije. Tada postoji okolina tačke $q_o^{\alpha'}$, q_o^{ν}, $c_{\nu'}^o$ promenljivih $q^{\alpha'}$, q^{ν}, $c_{\nu'}$ takva da je u toj okolini sistem algebarskih jednačina (121) odredjuje glatku mnogostrukost Σ_r, dimenzije ne manje od m - m', koja u opštem slučaju zavisi od t. Ako se sistem jednačina (121) može, ekvivalentnim transformacijama, dovesti na oblik koji ne zavisi od vremena t tada svakoj tački mnogostrukosti odgovara stacionarno kretanje. U tom slučaju kažemo da je Σ_r mnogostrukost stacionarnih kretanja. Eksplicitno izražena mnogostrukost Σ_r u tom slučaju ima sledeći oblik

$$q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(c_{\nu'}) \tag{123}$$

Ako $S_{\alpha'}$, zavisi od t tada u eksplicitnom obliku Σ_r možemo izraziti na sledeći način

$$q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(c_{\nu'}, t) \tag{124}$$

U tom slučaju svaka tačka mnogostrukosti Σ_r ne mora odgovarati stacionarnom kretanju. U principu $q_o^{\alpha'}$, q_o^{ν} može biti i izolovano rešenje sistema jednačina (121).

Slučaj kada nije ispunjen uslov (122') nećemo razmatrati. Istaknimo da tada sistem jednačina (121) može da ima izolovano rešenje i u slučaju kada u jednačinama eksplicitno ne figuriše vreme t.

N a p o m e n a 4.2. Radi kasnijih razmatranja, a u smislu napomene 4.1 značajno je istaći da (121) možemo interpretirati kao uslove ravnoteže sistema jednačina (115,a, b,c). U slučaju kada se (121) svodi na sistem jednačina koji ne zavisi od t i ispunjeni uslovi (122') rešenje jednačina (121) možemo interpretirati kao ravnotežnu mnogostrukost.

Ako su neholonomne veze homogene, tj.

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha'}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, t)\dot{q}^{\alpha'}$$

tada se uslovi (121) svode na m' uslova oblika

$$S_{\alpha'}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, c_{\nu'}, t) = 0 \qquad (125)$$

Ako se sistem algebarskih jednačina (125) može svesti na ekvivalentan sistem eksplicitno nezavisan od t i ako je

$$\operatorname{rang}\left\{\frac{\partial S_{\alpha'}}{\partial q^{i}}\right\} \leqslant m'$$

tada je mnogostrukost Σ_r oblika

$$q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(q^{\nu}, c_{\nu'}) \qquad (126)$$

Dakle, u pitanju je mnogostrukost dimenzije ne manje od n-m'.

Ako sistem diferencijalnih jednačina kretanja ne zavisi od q^{ν} kažimo da je Čapljiginovog tipa. To je slučaj, na primer, ako je

$$\frac{\partial T}{\partial q^{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\nu}} = 0 \qquad (127)$$

Mnogostrukost Σ_r stacionarnih kretanja tada se može izraziti u sledećem obliku

$$q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(c_{\nu'}) \qquad (128)$$

Pošto je sistem jednačina (115a) autonoman, očigledno je da se Σ_r može interpretirati kao mnogostrukost ravnotežnih položaja podsistema (115a). Treba napomenuti da taj podsistem u principu zavisi i od konstanti $c_{\gamma'}$.

Svako stacionarno kretanje je rešenje Košijevog zadatka sistema jednačina (115). U tom smislu (121) predstavljaju potrebne uslove za početne vrednosti položaja i brzina kojima odgovara Košijevo rešenje koje predstavlja stacionarno kretanje. Potrebni dovoljni uslovi definisani su relacijama (121), (118) i (119).

G L A V A II

STABILNOST KRETANJA

Razmatra se stabilnost ravnoteže i stacionarnog kretanja neholonomnog mehaničkog sistema. Svi razmatrani tipovi stabilnosti su u skladu sa definicijama stabilnosti u Ljapunovljevom smislu. Pojmove i definicije prihvatamo iz [23][17]. Za definisanje uslova stabilnosti koristiće se isključivo direktan Ljapunovljev metod.

1. Stabilnost ravnoteže

Uočimo neholonomni, u opštem slučaju reonomni, mehanički sistem. Za osnovne promenljive stanja usvajamo Lagranževe promenljive q^i i $\dot{q}^i$. Neka su neholonomne veze linearne funkcije brzina $\dot{q}^i$, u najopštijem slučaju oblika (21), ili - pošto su ekvivalentni - oblika (18). Mehanički sistem se kreće u polju nepotencijalnih sila

$$Q_i = Q_i\ (q,\ \dot{q}\ ,t)$$

i potencijalnih, čija je funkcija sile

$$U = U(q,t)$$

Dinamika opisanog neholonomnog mehaničkog sistema potpuno je odredjena sistemom diferencijalnih jednačina - na primer (21), (28).

Pretpostavimo da sistem algebarskih jednačina (121) dopušta rešenje oblika (91). Drugim rečima, postoji ravnotežni položaj q_o. Bez umanjenja opštosti, možemo uzeti da je to tačka

$$q = q_o = 0 \tag{129}$$

U opštem slučaju, ako to ne zahtevamo drukčije, pretpostavićemo da $q = 0$ nije izolovano rešenje sistema jednačina (121). Kao neporemećeno kretanje uzmimo ravnotežno stanje koje odgovara ravnotežnom položaju (129),

$$q = 0, \quad \dot{q} = 0 \tag{13o}$$

Diferencijalne jednačine poremećenog kretanja, s obzirom na izabrane promenljive stanja i pretpostavku (13o), ekvivalentne su sistemu jednačina (21), (28) ili, na primer, sistemu (26). Početne poremećaje (početne uslove) označavaćemo na sledeći način

$$q_o = q(t_o), \quad \dot{q}_o = \dot{q}(t_o), \tag{131}$$

odgovaerajuće poremećeno kretanje sa:

$$q(t) = q(q_o, \dot{q}_o, t_o, t), \tag{132}$$

i brzinu u toku vremena sa:

$$\dot{q}(t) = \dot{q}(q_o, \dot{q}_o, t_o, t) \tag{133}$$

Pretpostavljamo da su ispunjeni uslovi koji garantuju egzistenciju i jedinost rešenja, kao i njegovu neprekidnu zavisnost od početnih poremećaja (131). Za analizu ispunjenosti tih uslova najpogodniji je oblik jednačina kretanja (52), koji sa jednačinama veza (21) čini potpun sistem za opis kretanja neholonomnog sistema i koji je ekvivalentan sistemu jednačina (28), (21). Pogodnost je u tome što se ispitivanje tih uslova svodi na ispitivanje glatkosti desnih strana sistema (52), (21). U tom smislu pretpostavljaćemo da su te desne strane dovoljno glatke, da garantuju egzistenciju, jedinost i neprekidnu zavisnost rešenja od početnih uslova.

Direktan Ljapunovljev metod zasniva se na pojmu tzv. Ljapunovljeve funkcije. Za naše potrebe Ljapunovljevu funkciju uzećemo u obliku

$$V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi}, \tag{134}$$

gde je

$$\tilde{\Pi} = -\tilde{T}_o - U + F(t)$$

$$F(t) = \tilde{T}_o(0,t) + U(0,t) \tag{135}$$

Funkcije $\tilde{T}_2$, $\tilde{T}_o$ i U odredjene su sa (34) i (9). U okolini tačke (130) smatraćemo da su $\tilde{T}_2$, $\tilde{T}_o$ i U glatke funkcije od promenljivih q, $\dot{q}^{\alpha}$ i t, reda glatkosti koliko je to potrebno.

Izvod $\dot{V}$ funkcije V, u smislu diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja koje su oblika (28), (21), a uzimajući u obzir (64), odredjen je jednakošću

$$\dot{V} = \widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)} \gamma^{\nu}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu}} b^{\nu}_{\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}} b^{\nu} +$$

$$+ \tilde{Q}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} + \dot{F} \tag{136}$$

Napomenimo da su funkcija V i njen izvod $\dot{V}$ u tački (130) jednaki nuli, tj.

$$V(0,0,t) = 0 \quad ; \quad \dot{V}(0,0,t) = 0 \tag{137}$$

S t a v 1.1. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi:

1) u okolini tačke (129) funkcija $\tilde{\Pi}$ je pozitivno-definitna u odnosu na $q^1 \ldots q^d$, odnosno

$$\tilde{\Pi}(q,t) \geqslant a(q^1 \ldots q^d)$$

$$a \geqslant 0 , \quad a = 0 \Leftrightarrow (q^1 \ldots q^d) = 0,$$

pri čemu je $d \leqslant n$;

2) kvadratni član $\tilde{T}_2$ je pozitivno-definitna funkcija u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\alpha}$,

$$\tilde{T}_2(q,\dot{q}^{\alpha},t) \geqslant b(\dot{q}^{\alpha})$$

$$b \geqslant 0, \quad b = 0 \Longleftrightarrow \dot{q}^{\alpha} = 0 ;$$

$$3) \quad \left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}}}\right)\gamma^{\nu}_{\beta}\dot{q}^{\beta} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu}} + \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}}\right)b^{\nu}_{\alpha} + Q_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \dot{F} \leqslant 0$$

a) Tada je ravnotežno stanje (130), opisanog neholonomnog sistema, stabilno u odnosu na promenljive stanja $\dot{q}^{\alpha}$, $q^1 \ldots q^d$, $d \leqslant n$. Specijalno, ako je $d = n$ onda je ravnotežno stanje stabilno u odnosu na q i $\dot{q}^{\alpha}$.

Pretpostavimo strože i to sledeće uslove:

4) u oblasti $G = \left\{(q,t):\ |q^1| \leqslant H, \ldots, |q^d| \leqslant H = const, t \geqslant 0\right\}$

neka je

$$|b^{\nu}_{\alpha}(q^1 \ldots q^d,\ q^{d+1} \ldots q^n,\ t)| \leqslant M \ ; \quad M = const$$

ravnomerno u odnosu na promenljive $q^{d+1} \ldots q^n$ i t;

5) postoji takva skalarna funkcija c da je

$$|b^{\nu}(q,t)| \leqslant c(q^1 \ldots q^d)$$

$$c \geqslant 0, \quad c = 0 \Longleftrightarrow (q^1 \ldots q^d) = 0 ,$$

pri čemu je $d \leqslant n$.

b) Tada je ravnotežno stanje (130) stabilno u odnosu na $q^1 \ldots q^d$, $\dot{q}^{\alpha}$ i $\dot{q}^{\nu}$. Istaknimo da je uslov 5) trivijalno ispunjen ako su veze (21) homogene.

6) Ako funkcija $V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi}$ u okolini tačke (130) ima beskonačno malu gornju granicu,

$$\tilde{T}_2 + \tilde{\Pi} \leq f(q, \dot{q}^{\alpha})$$

$$f \geq 0, \quad f = 0 \Longleftrightarrow q = 0, \quad \dot{q}^{\alpha} = 0$$

tada je

c) stabilnost ravnotežnog stanja $q = 0$, $\dot{q} = 0$ u slučaju a) i b) ravnomerna po t_o.

N a p o m e n a 1.1. Ako je ravnotežno stanje stabilno po delu promenljivih stanja onda u odnosu na ostale promenljive poremećeno kretanje ne mora biti čak ni ograničeno. U tom smislu je u c) naglašeno da je ravnomernost po t_o, što inače ne naglašavamo kada je stabilno po svim promenljivim stanja[1].

P o s l e d i c a 1.1. Pretpostavimo da egzistira kvadratni integral oblika (63) i da $\tilde{\Pi}$ u tački $q = 0$ ima izolovan minimum, ravnotežno stanje je stabilno u odnosu na q i $\dot{q}^{\alpha}$ [37]. Ako su neholonomne veze homogene tada je ravnotežno stanje stabilno u odnosu na sve Lagranževe promenljive stanja q i $\dot{q}$. Specijalno, ako je sistem skleronoman i sile konzervativne, prethodni uslov svode se na uslove Lagranž-Dirihleove teoreme [48].

D o k a z. Kao pomoćnu funkciju, za dokaz koristićemo funkciju oblika

$$V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi} \tag{138}$$

Na osnovu uslova 1) i 2) stava 1.1. sledi da je funkcija V pozitivno-definitna u odnosu na promenljive $q^1 \ldots q^d$ i $\dot{q}^{\alpha}$, tj.

$$V \geq e(q^1 \ldots q^d, \dot{q}^{\alpha})$$

$$e \geq 0, \quad e = 0 \Leftrightarrow (q^1 \ldots q^d) = 0, \quad \dot{q}^{\alpha} = 0 \tag{139}$$

1) Ističemo da je ravnomerno u odnosu na t_o jer bi se moglo govoriti i o ravnomernosti u odnosu na "nestabilne" promenljive stanja.

pri čemu je $0<d\leq n$. Osim toga, s obzirom na relaciju 3), izvod $\dot{V}$, funkcije V, je nepozitivan, tj.

$$\dot{V} \leq 0 \tag{140}$$

Dakle, funkcija V je pozitivno-definitna u odnosu na $q^1 \ldots q^d$ i $\dot{q}^\alpha (d\leq n)$, a njen izvod $\dot{V}$ je nepozitivan, pa na osnovu stava o stabilnosti po delu promenljivih [23], [49] zaključujemo da je ravnotežno stanje $q = 0$, $\dot{q} = 0$ stabilno u odnosu na $q^1 \ldots q^d$ i $\dot{q}^\alpha (d\leq n)$, tj. sledi stabilnost pod a).

Pretpostavimo sada da važe uslovi 4), 5) i dokažimo da tada sledi zaključak b). Pre svega, pošto važi deo stava pod a), tada sledi za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta<\varepsilon$ tako da u svakom trenutku t_o za sve početne poremećaje q_o, $\dot{q}_o^\alpha$ iz δ - okoline tačke (130) odgovarajuća poremećana kretanja

$$q^1 = q^1(q_o,\dot{q}_o^\alpha,t_o,t),\ldots,q^d = q^d(q_o,\dot{q}_o^\alpha,t_o,t)$$

$$\dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(q_o,\dot{q}_o^\alpha,t_o,t),$$

ostaju u ε - okolini tačke (130), tj.

$$|q^1(t)|<\varepsilon,\ldots,|q^d(t)|<\varepsilon$$

$$|\dot{q}^\alpha(t)|<\varepsilon \tag{141}$$

Tada, s obzirom na oblik jednačina veza, iz uslova 4), 5) ovog stava i relacije (141) dobijamo

$$|\dot{q}^\nu| = |b_\alpha^\nu \dot{q}^\alpha + b^\nu| \leq |b_\alpha^\nu|\,|\dot{q}^\alpha| + |b^\nu| \leq M\cdot\varepsilon + A\cdot\varepsilon = (M+A)\cdot\varepsilon,$$

gde je $A = \max c(q^1\ldots q^d)$ na skupu $|q^1|\leq\varepsilon,\ldots,|q^d|\leq\varepsilon$. Time je deo stava, pod b) dokazan.

Dokaz da je ravnotežno stanje (130) ravnomerno stabilno zasniva se na opštem stavu direktnog metoda o ravnomernoj stabilnosti za deo promenljivih [23][51]. Dokaz je, sličan kao i za stabilnost po svim promenljivim stanja [24].

Pretpostavimo da jednačine ravnoteže (97) dopuštaju izolovan ravnotežni položaj. Ne gubeći u opštosti, uzmimo da je odredjen sa

$$q = 0 \tag{142}$$

Ravnotežni položaj može biti izolovan i za sisteme sa homogenim vezama ($\overset{\nu}{b} = 0$). To znači da jednačine ravnoteže (97) imaju izolovano rešenje oblika (142). Ako je ravnotežni položaj izolovan mogu se definisati dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti[1].

S t a v 1.2. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi:

1) u okolini tačke (129) funkcija je pozitivno-definitna i dozvoljava beskonačno malu gornju granicu,

$$a(q) \leq \Pi \leq b(q)$$

$$a,b \leq 0, \quad a,b = 0, \quad q = 0$$

2) funkcija T_2 je pozitivno-definitna i dozvoljava beskonačno malu gornju granicu u odnosu na $\dot{q}^{\alpha}$,

$$d(\dot{q}^{\alpha}) \leq T_2 \leq c(\dot{q}^{\alpha})$$

$$c,d \geq 0, \quad c,d = 0, \quad \dot{q}^{\alpha} = 0$$

3) funkcija definisana izrazom

$$\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}}}\right)\gamma^{\nu}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu}} + \frac{\partial U}{\partial q^{\nu}}\right) b^{\nu} + \tilde{Q}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \dot{F}$$

je pozitivno-definitna u odnosu na q i $\dot{q}^{\alpha}$.

a) Ravnotežno stanje (13o) je uniformno asimptotski stabilno u odnosu na q, $\dot{q}^{\alpha}$.

---

1) Zahtev da je ravnotežni položaj izolovan je potreban da bi se mogao primeniti Ljapuncvljev stav o asimptotskoj stabilnosti (direktnog metoda).

Osim toga, neka je

4) u oblasti $G = \{(q, t);\ |q| < H = \mathrm{const},\ t \geq 0\}$

$$|b^{\nu}_{\alpha}(q,t)| \leq M$$

ravnomerno u odnosu na t,

$5^{\circ}\ |b^{\nu}(q,t)| \leq e(q)$

$e \geq 0, \quad e = 0 \Leftrightarrow q = 0$

b) Ravnotežno stanje (130) je asimptotski stabilno u odnosu na q, $\dot{q}$.

Uslovi ovog stava javljaju se kao stroža ograničenja u odnosu na uslove stava 1.1.

D o k a z. Koristeći za Ljapunovljevu funkciju izraz

$$V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi} \quad ,$$

dokaz da je ravnotežno stanje $q = 0$, $\dot{q} = 0$ uniformno asimptotski stabilno-sledi, na osnovu Ljapunovljevog stava o asimptotskoj stabilnosti [23]. Dakle, uslovi 1), 2) i 3) obezbedjuju sledeće

$$\lim_{t\to\infty} q(q_0, \dot{q}^{\alpha}_0, t_0, t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \dot{q}^{\alpha}(q_0, \dot{q}^{\alpha}_0, t_0, t) = 0 \tag{143}$$

Asimptotska stabilnost u odnosu na $\dot{q}^{\nu}$ je očigledna ako se uzme u obzir (143) i uslovi 4 i 5 . Time je stav dokazan.

Razmotrimo uticaj disipativnih sila na stabilnost ravnoteže pod uslovima stava 1.1 i stava 1.2. Dakle, neka su nepotencijalnim silama Q_i iz stava 1.1 i stava 1.2 pridodate i nepotencijalne sile koje imaju svojstvo (53). Disipativne sile obeležimo sa Q^{w}_i a giroskopske sa Q^{r}_i.

Na osnovu (53) i (58) i jednačina veza (21), za koje ćemo u opštem slučaju pretpostaviti da su nehomogene, važi:

$$Q^W_\alpha \dot q^\alpha = \left[Q^W_\alpha(q,\dot q^\alpha,\dot q^\nu = b^\nu_\alpha \dot q^\alpha + b^\nu, t) + Q^W_\nu(q,\dot q^\alpha,\dot q^\nu = b^\nu_\alpha \dot q^\alpha + b^\nu, t) b^\nu_\alpha \right] \dot q^\alpha$$

$$= Q^W_i(q,\dot q^\alpha,\dot q^\nu = b^\nu_\alpha \dot q^\alpha + b^\nu, t) \left[\dot q^i\right]_{\dot q^\nu = b^\nu_\alpha \dot q^\alpha} \tag{145}$$

$$\tilde Q^\Gamma_\alpha \dot q^\alpha = Q^\Gamma_i(q,\dot q^\alpha,\dot q^\nu = b^\nu_\alpha \dot q^\alpha + b^\nu, t) \left[\dot q^i\right]_{\dot q^\nu = b^\nu_\alpha \dot q^\alpha} \tag{146}$$

Iz jednakosti (145) i (146) zaključujemo da u opštem slučaju

$$\tilde Q^W_\alpha \dot q^\alpha \quad \text{i} \quad Q^\Gamma_\alpha \dot q^\alpha \tag{147}$$

nisu nepozitivne funkcije, ali da se pri specijalnom izboru sila i veza taj uslov može postići.

Medjutim, ako su neholonomne veze homogene, bez obzira na oblik veza, snaga giroskopskih i disipativnih sila, uvek je nepozitivna funkcija, i to

$$Q^W_\alpha \dot q^\alpha \leq 0 \qquad\qquad Q^\Gamma_\alpha \dot q^\alpha \equiv 0 \tag{148}$$

Važe sledeći:

<u>S t a v</u> 1.3. Disipativne i giroskopske sile u slučaju homogenih neholonomnih veza ne remete stabilnost pod uslovima stava 1.1 i stava 1.2.

<u>S t a v</u> 1.4. U slučaju kada su veze (21) nehomogene problem uticaja disipativnih i giroskopskih sila na stabilnost ravnotežnog stanja pod uslovima stavova 1.1. i 1.2. je otvoren.

Ljapunovljevu funkciju izaberimo kao i u stavu 1.1 i stavu 1.2,

$$V = \tilde T_2 + \tilde \Pi \tag{149}$$

Sada je dokaz jednostavan, jer je očigledno da pridodate disipativne i giroskopske sile mogu da promene uslov 3) stava 1.1 i stava 1.2 pod uslovima stava 1.4, a, s obzirom na

(148) one ne utiču na uslov 3) pomenutih stavova.

U dokazu stava 1.2 zahtevano je da ravnotežno stanje, kao neporemećeno kretanje, bude izolovano. Tamo je to opravdano time što je osnov dokaza bio Ljapunovljev stav o asimptotskoj stabilnosti. Sada ćemo dokazati da je izolovanost ravnotežnog stanja zaista potreban uslov za njegovu asimptotsku stabilnost. U tom smislu važi

S t a v 1.5. Ako je ravnotežno stanje (13o) neizolovano tada ono nije asimptotski stabilno.

D o k a z. Pretpostavimo suprotno od zaključka stava da je

$$\lim q(t) = 0 \quad , \qquad \lim \dot{q}^{\alpha}(t) = 0 \tag{15o}$$

To istovremeno znači da su za sve početne poremećaje iz neke okoline tačke (13o) odgovarajuća poremećena kretanja oblika

$$\dot{q}^{\alpha}(t) \not\equiv 0 \tag{151}$$

Prethodni zaključak sledi iz Ljapunovljevog stava o asimptotskoj stabilnosti (direktnog metoda). S druge strane, pošto je, po pretpostavci stava, ravnotežno stanje neizolovano, onda u proizvoljno maloj okolini tačke (13o) postoji početni poremećaj takav da je odgovarajuće poremećeno kretanje oblika

$$\dot{q}^{\alpha}(t) = 0 \quad , \quad q(t) = q_o = \mathrm{const} \neq 0 \tag{152}$$

Dakle, postoji kontradikcija izmedju (151) i (152). Time je stav dokazan.

Polazeći od prethodnog stava, razjasnićemo uslove pod kojima može da se primeni Ljapunovljev stav o asimptotskoj stabilnosti.

S t a v 1.6. Ako je ravnotežno stanje (13o) neizolovano, tada izvod $\dot{W}(q,q^{\alpha},t)$ neke funkcije $W(q, \dot{q}^{\alpha},t)$, koja je definitna i dozvoljava beskonačno malu gornju granicu, ne može da bude definitna funkcija promenljivih q i $\dot{q}^{\alpha}$.

D o k a z. Pretpostavimo da je $W(q,\dot{q}^{\alpha},t)$ definitna funkcija. Tada, na osnovu Ljapunovljevog stava o asimptotskoj stabilnoksti i nestabilnosti direktnog metoda i uslova ovih stavova, za sva poremećena kretanja koja odgovaraju počtnim poremećajima iz neke okoline tačke (13o) važi da je

$$\dot{q}^{\alpha}(t) \not\equiv 0 \tag{153}$$

Dalje-dokaz tače kao i u stavu 1.5.

<u>P o s l e d i c a</u> 1.1. Ako pretpostavimo da je ravnotežno stanje, čiju stabilnost razmatramo, neizolovano tada se Ljapunovljev stav o asimptotskoj stabilnosti ne može primeniti. Naime, na osnovu stava 1.5 sledi da u slučaju neizolovanog ravnotežnog stanja ne možemo ni govoriti o tipu asimptotske stabilnosti iz stava 1.2. Prema tome, kada kažemo da se ne može primeniti Ljapunovljev stav o asimptotskoj stabilnosti misli se na tip asimptotske stabilnosti iz stava 1.2.

<u>N a p o m e n a</u> 1.1. U našim razmatranjima kada se govori o neizolovanosti ravnotežnog stanja misli se na egzistenciju ravnotežne mnogostrukosti kojoj pripada posmatrano ravnotežno stanje. Ubuduće, ako se ne naglasi drukčije, smatraćemo da je neizolovanost ravnoteže tog tipa.

Postoje i drugi tipovi asimptotske stabilnosti, od onog koji podrazumeva stav 1.2. Predmet našeg razmatranja biće asimptotska stabilnost po delu promenljivih i asimptotska stabilnost mnogostrukosti.

Uočimo neholonomni sistem čije je kretanje, ako ne naglasimo drukčije, ograničeno homogenim vezama oblika

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}(q,t)\dot{q}^{\alpha} \tag{154}$$

Pretpostavimo da pored potencijalnih i nepotencijalnih sila iz stava 1.1. deluju i disipativne sile Q^{W}_{i}, tj. sile čija je snaga nepozitivna

$$Q^{W}_{i}\ (q,q,t)\dot{q}^{i} \leq 0 \tag{155}$$

Pošto su veze homogene, tada na osnovu (148) važi da je izraz $\tilde{Q}^{w}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha}$ nepozitivan,

$$\tilde{Q}^{w}_{\alpha}(q,\ \dot{q}^{\alpha},t)\dot{q}^{\alpha}\leq 0 \tag{156}$$

Pretpostavimo da postoji ravnotežna mnogostrukost O_r kojoj pripada i tačka

$$q = 0 \tag{157}$$

Neporemećenim kretanjem smatraćemo ravnotežno stanje

$$q = 0\ , \qquad \dot{q} = 0 \tag{158}$$

Jednačine kretanja neholonomnog mehaničkog sistema rešene u odnosu na generalisana ubrzanja $\ddot{q}^{\alpha}$ date su sistemom jednačina (52), (21). Označimo desne strane jednačina (52) sa $G^{\alpha}(q,\ \dot{q}^{\alpha},t)$. Sistem jednačina (52), (21) možemo sada izraziti u obliku sistema jednačina prvog reda,

$$\frac{d\dot{q}^{\alpha}}{dt} = G^{\alpha}(q,\dot{q}^{\alpha},t)$$

$$\frac{dq^{\alpha}}{dt} = \dot{q}^{\alpha}$$

$$\frac{dq^{\nu}}{dt} = b^{\nu}_{\alpha}(q,t)\dot{q}^{\alpha} \tag{159}$$

Napomenimo, s obzirom na prethodne pretpostavke, da sistem jednačina (159) dopušta mnogostrukost rešenja oblika

$$R_r = \left\{(q,\dot{q}^{\alpha}):\quad q\in\Sigma_r,\ \dot{q}^{\alpha}= 0\right\} \tag{16o}$$

<u>L e m a</u> 1.1. Neka su $G^{\alpha}(q,\dot{q}^{\alpha},t)$ i $b^{\nu}_{\alpha}(q,\ t)$ u nekoj okolini Ω tačke (158) i za svako $t\geq 0$ neprekidne i ograničene sa svojim prvim parcijalnim izvodima po q, $\dot{q}^{\alpha}$, t, tada postoji bar jedan takav niz

$$a_{n_r} = (n_r-1)T\ ;\quad n_r\in N\ ;\quad n_r\to\infty \text{ kada } r\to\infty\ ,\ T = \text{const.}$$

da u okolini Ω

$$G^{\alpha}(q,\dot q^{\alpha},t+(n_r-1)T)\rightrightarrows G_o(q,\dot q^{\alpha},t)$$

$$, \quad b^{\nu}_{\alpha}(q,t+(n_r-1)T)\rightrightarrows b^{\nu}_{\alpha o}(q,t) \qquad (161)$$

za svako $t\in[0,T]$. Funkcije G^{α}_o, $b^{\nu}_{\alpha o}$ nazvaćemo graničnim funkcijama u odnosu na G^{α} , b^{ν}_{α}. Skup svih funkcija G^{α}_o, $b^{\nu}_{\alpha o}$ označimo sa Γ

L e m a 1.2. Neka sistem jednačina (159) ima osobine iz leme 1.1. Tada, za svako Košijevo rešenje

$$q = q(q_o,\dot q^{\alpha}_o,t_o,t), \quad \dot q^{\alpha} = \dot q^{\alpha}(q_o,\dot q^{\alpha}_o,t_o,t)$$

koje je ograničeno u okolini za svako $t\geqslant t_o$, postoji niz $a_{n_r} = (n_r-1)T\geqslant t_o$; $n_r\in N$; $n_r\to\infty$ kada $r\to\infty$, takav da za svako $t\in[0,T]$

$$q(q_o,\dot q^{\alpha}_o,t_o,t+(n_r-1)T)\rightrightarrows q_*(t)$$

$$\dot q^{\alpha}(q_o,\dot q^{\alpha}_o, t_o,t+(n_r-1)T)\rightrightarrows \dot q^{\alpha}_*(t)$$

i pri tome je $q_*(t)$, $\dot q^{\alpha}_*(t)$, $t\in[0,T]$ rešenje sistema jednačina

$$\frac{d\dot q^{\alpha}}{dt} = G^{\alpha}_o(q,\dot q^{\alpha},t)$$

$$\frac{dq^{\alpha}}{dt} = \dot q^{\alpha}$$

$$\frac{dq^{\nu}}{dt} = b^{\nu}_{\alpha o}(q,t)\dot q^{\alpha} , \qquad (G^{\alpha}_o,b^{\nu}_{\alpha o})\in\Gamma \qquad (162)$$

Dokaz leme 1.1 i leme 1.2 sadrži se u [30]. Tamo je dokaz izveden za sistem običnih diferencijalnih jednačina opšteg tipa i sa slabijim uslovima u odnosu na desne strane. Medjutim, to oslabljenje nije od suštinskog značaja.

N a p o m e n a 1.3. Ako je sistem jednačina kretanja stacionaran tada se granične funcije G_o i $b^{\nu}_{\alpha o}$ poklapaju sa G^{α} i b^{ν}_{α} . Osim toga, vremenski interval T može biti proizvoljan [30].

Za reonomni neholonomni mehanički sistem koji se kreće u polju sila oblika

$$F_i = Q_i + Q_i^W + \frac{\partial U}{\partial q^i} \tag{163}$$

važi sledeći

S t a v 1.7. Pretpostavimo da je neholonomni mehanički sistem i polje sila u kome se taj sistem kreće takvih osobina da su, pored uslova leme 1.1 i leme 1.2, ispunjeni sledeći uslovi:

1) postoje funkcije $a_o(q)$, $b_o(q)$, pri čemu je

$$a_o,\ b_o \geqslant 0\ , \qquad a_o, b_o = 0 \Leftrightarrow q \in \Sigma_r$$

tako da je u okolini tačke $q = 0$

$$b_o(q) \leqslant \widetilde{\Pi}(q,t) \leqslant a_o(q)$$

(Drugim rečima, funkcija $\widetilde{\Pi}$ je nenegativna i ograničena funkcijom a_o)

2) kvadratna forma $\widetilde{T}_2(q, \dot{q}^\alpha, t)$ je pozitivno-definitna i dozvoljava beskonačno malu gornju granicu u odnosu na $\dot{q}^\alpha$, tj.

$$b(\dot{q}^\alpha) \leqslant \widetilde{T}_2 \leqslant a(\dot{q}^\alpha)$$

$$a, b \geqslant 0, \qquad a, b = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^\alpha = 0$$

3) disipacija je potpuna, tj.

$$\widetilde{Q}_\alpha^W \dot{q}^\alpha \leqslant - c(\dot{q}^\alpha)$$

$$c \geqslant 0, \quad c = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^\alpha = 0$$

4) $$\widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu}\right)} \gamma_\alpha^\nu \dot{q}^\alpha - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} - b^\nu \left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial U}{\partial q^\nu}\right) + \widetilde{Q}_\alpha \dot{q}^\alpha + \dot{F} \leqslant 0$$

5) poremećeno kretanje $q(q_o,\dot{q}_o^{\alpha},t_o,t)$ je ograničeno za proizvoljne početne poremećaje iz neke okoline tačke (158), uzetih u proizvoljnom trenutku vremena t_o [1].

6) u okolini tačke $q = 0$ koeficijenti $b_{\alpha}^{\nu}(q,t)$ su ograničeni, t.j.

$$|b_{\alpha}^{\nu}(q,t)| \leq M \quad \text{za} \quad \forall t \geq 0$$ [2]

7) ravnotežna mnogostrukost O_r je nedegenerativna,

$$\sum G_{\alpha}^{2}(q,t) \geq d(q)$$

$$d \geq 0 \ , \quad d = 0 \Leftrightarrow q \in O_r$$

Tada je mnogostrukost ravnotežnog stanja R_r asimptotski stabilna, t.j.

$$\lim \dot{q}^{\alpha}(t) = 0, \ \lim \dot{q}^{\nu}(t) = 0 \ , \ q(t) \to O_r \quad \text{kada } t \to \infty$$

<u>D o k a z</u>. Na osnovu uslova 1), 2) zaključujemo da je funkcija

$$V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi}$$

pozitivno-definitna u odnosu na $\dot{q}^{\alpha}$. Zaista,

$$V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi} \geq b(\dot{q}^{\alpha}) + b_o(q) \ , \tag{164}$$

a odatle

$$V \geq b(\dot{q}^{\alpha}) \tag{165}$$

Izvod $\dot{V}$ funkcije V u smislu diferencijalnih jednačina kretanja je oblika

---

1) Ovo je tip tzv. ravnomerne ograničenosti u odnosu na $\dot{q}_o^{\alpha}$, q_o i t_o, jer gornja granica ne zavisi od izbora početnih uslova.

2) Ovaj uslov je ispunjen zahtevom da važi lema 1.1. Medjutim, ističemo ga jer je od značaja za zaključak stava.

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right)\gamma^{\nu}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q}\right)b^{\nu} + \tilde{Q}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + Q^{W}_{\alpha}q^{\alpha} + \check{F} \quad (166)$$

Izvod $\dot{V}$ je negativno-definitna funkcija promenljivih $\dot{q}^{\alpha}$,

$$V \leq -c(\dot{q}^{\alpha}), \quad (167)$$

Osim toga, uslovi 1) i 2) obezbedjuju da V ima beskonačnu malu gornju granicu u odnosu na q i $\dot{q}^{\alpha}$, tj.

$$V = \hat{T}_2 + \tilde{\Pi} \leq a(\dot{q}^{\alpha}) + a_o(q) \quad (168)$$

a odatle, s obzirom na to da postoji funkcija $c(q,\dot{q}^{\alpha}) \geq a(\dot{q}^{\alpha}) + a_o(q)$ i $c \geq 0$, $c = 0 \Leftrightarrow q = 0$, $\dot{q}^{\alpha} = 0$,

$$V \leq c(q,\dot{q}^{\alpha}) \quad (169)$$

Prema tome, na osnovu stava 1.1. i uslova 6) sledi da je ravnotežno stanje $q = 0$, $\dot{q} = 0$ stabilno, i to ravnomerno u odnosu na $\dot{q}^{\nu}$ i $\dot{q}^{\alpha}$.

Pokazaćemo da uslovi stava obezbedjuju još stroži tip stabilnosti: asimptotsku stabilnost mnogostrukosti R_r. Da bi smo to dokazali uočimo, na osnovu dokazane stabilnosti po $\dot{q}^{\nu}$, $\dot{q}^{\alpha}$ i uslova 5) da postoji takva okolina tačke $q = 0$, $\dot{q}^{\alpha} = 0$ početnih poremećaja q_o, $\dot{q}^{\alpha}_o$ da su sva poremećena kretanja

$$q = q(q_o,\dot{q}^{\alpha}_o,t_o,t),$$

$$\dot{q}^{\alpha} = q^{\alpha}(q_o,\ \dot{q}^{\alpha}_o,\ t_o,t) \quad (17o)$$

ograničena[1)] za proizvoljan izbor početnih poremećaja iz te okoline, a u proizvoljnom trenutku vremena $t_o \geq 0$. Ograničenost rešenja (17o) i uslovi stava dovode do zaključka leme 1.2. Osim toga, za funkciju V važi da je

$$b(\dot{q}^{\alpha}) + b_o(q) \leq V \leq a(\dot{q}^{\alpha}) + a_o(q) \quad (171)$$

---

1) Pa samim tim i beskonačno produživo

a odatle da je V nenegativna funkcija i to

$$\dot{V} \geq 0 , \qquad V = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^{\alpha} = 0, \ q \in \mathcal{X}_r \tag{172}$$

Pošto je V nepozitivno tada je $V(q(t), \dot{q}^{\alpha}(t),t)$ nerastuća funkcija a što uslovljava da je

$$\lim V(q(t), \dot{q}^{\alpha}(t),t) = V^{*} \tag{173}$$

Ako je $V^{*}= 0$, na osnovu (172), sledi da je za izabrano poremećeno kretanje

$$\lim \dot{q}^{\alpha}(t) = 0$$

Pretpostavimo da je $V^{*} \neq 0$. Pošto je funkcija V, u smislu poremećenog kretanja, nerastuća i ima donju granicu V važi da je

$$V(q(t), \dot{q}^{\alpha}(t),t) \geq V^{*} \tag{174}$$

Uzimajući u obzir (171) sledi da se kretanje vrši u oblasti

$$K = \left\{(q,\dot{q}^{\alpha}):\ a(q)+a_{o}(\dot{q}^{\alpha}) \geq V^{*}\right\} \tag{175}$$

S obzirom na 7^{o} u oblasti $a(q) > 0$ je

$$\sum_{=1}^{m} (\mathcal{G}_{\alpha}^{o})^{2} \geq d(q) \ ; \quad d \geq 0, \ d = 0 \Leftrightarrow q \in O_{r} \ , \tag{176}$$

gde je, saglasno lemi 1.1,

$$\mathcal{G}_{\alpha}(q,t + (n_{r}-1)T) \rightrightarrows \mathcal{G}_{\alpha}^{o}(q,t); \quad 0 \leq t \leq T$$

$$n_{r} \in N, \quad r \to \infty \Rightarrow n_{r} \to \infty \tag{177}$$

Prema tome, na osnovu (176) sledi da je u oblasti: $a(q)>0$ rešenje sistema jednačina (162) je oblika

$$\dot{q}_{*}^{\alpha}(t) \not\equiv 0 \tag{178}$$

Za niz $q(q_o,\dot q_o^{\alpha},t_o,t+(n_r-1)T) = q(t+(n_r-1)T)$; $\dot q^{\alpha}(q_o,\dot q_o^{\alpha},t_o,t + +(n_r-1)T) = \dot q^{\alpha}(t+(n_r-1)T)$ može se izvršiti sledeća procena:

$$V(q(n_rT),\ \dot q^{\alpha}(n_rT),\ n_rT)-V(q(n_r-1)T),\ \dot q^{\alpha}(n_r-1)T),(n_r-1)T)=$$

$$\int_{(n_r-1)T}^{n_rT}\dot V dt \leq \int_{(n_r-1)T}^{n_rT} -c(q\ )dt = -\int_0^T c((n_r-1)T+t)dt \leq 0 \qquad (179)$$

Ako pustimo da $n_r \to \infty$ dobijamo

$$0 = V^* - V^* = -\int_0^T c(\dot q_*^{\alpha}(t))dt \leq 0, \qquad (18o)$$

a odatle

$$c\ (\dot q_*^{\alpha}(t)) = 0 \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (181)$$

Pošto je $c(\dot q^{\alpha})$ pozitivno-definitna funkcija po $\dot q^{\alpha}$ sledi

$$\dot q_*^{\alpha}(t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (182)$$

Postoji kontradikcija izmedju (178) i (182). Dakle, $V^* = 0$, a odatle, s obzirom na (172) i uslov 6) ovog stava sledi da je:

$$\lim_{t\to\infty} \dot q^{\alpha}(t) = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \dot q^{\nu}(t) = 0\ ;\ q(t) \to 0_r \qquad (183)$$

Time je stav dokazan.

N a p o m e n a 1.4. Stav 1.7 definiše dovoljne uslove asimptotske stabilnosti mnogostrukosti R_r za slučaj da su neholonomne veze homogene. Medjutim ovaj stav važi i za slučaj da je kretanje mehaničkog sistema ograničeno nehomogenim vezama, pod uslovom da je

$$|b^{\nu}(q,t)| \leq e(q); \quad e \geq 0, \quad e = 0 \Leftrightarrow q \in 0_r\ ,$$

i da su disipativne sile i koeficijenti b_{α}^{ν} takvih osobina da je snaga dilsipativnih sila strogo nepozitivna u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\nu}$.

P o s l e d i c a 1.2. U stavu 1.7 su implicitno sadržani neki, u literaturi poznati, oblici asimptotske stabilnosti. Navedimo slučaj asimptotske stabilnosti po delu promenljivih [18][30]. Ako je $O_r = \{q : q^1 = \ldots = q^d = 0,\ d<n\}$ tada je, na osnovu stava 1.1, ravnotežno stanje stabilno u odnosu na $\dot{q}^{\alpha}$, $\dot{q}^{\nu}$ i $q^1 \ldots q^d$ $(d<n)$. U skladu sa tim sledi da uslov 5) možemo oslabiti do na ograničenost po $q^{d+1}(t), \ldots, q^n(t)$ za proizvoljne početne poremećaje q_o, $\dot{q}_o^{\alpha}$ uzetih u proizvoljnom trenutku $t_o \geq 0$ iz neke okoline ravnotežnog stanja. Tada je ravnotežno stanje uniformno asimptotski stabilno u odnosu na promenljive $\dot{q}^{\alpha}, \dot{q}^{\nu}$ i $q^1, \ldots, q^d$. Dokaz uniformnosti (nije sadržan u stavu 1.7.) može se sprovesti, sa neznatnim korekcijama, kao i u [24]. Tamo se on odnosi na slučaj asimptotske stabilnosti sa osobinama kao i u Ljapunovljevom stavu o asimptotskoj stabilnosti (direktan metod).

Ako je mehanički sistem Čapljiginovog tipa, ravnotežna mnogostrukost je oblika

$$O_r = \{q : S_{\alpha}(q^{\alpha}) = 0\} \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

Diferencijalne jednačine kretanja Čapljiginovog tipa (46) ne zavise eksplicitno od koordinata q^{ν}. Tada se može izvesti zaključak stava 1.7 i bez uslova 5).

N a p o m e n a 1.5. Neka je mehanički sistem skleronoman, a ravnotežna mnogostrukost oblika $(q^1, \ldots, q^d) = 0$ $(d<n)$, očigledno da važi stav 1.7. U tom smislu ovaj dokaz je uopštenje ideje Krasovskog [videti 30]

2. Stabilnost pri postojanju prvih integrala kretanja

U ovom delu rada koristiće se prvi integrali kretanja u rešavanju problema stabilnosti. Značaj prvih integrala je višestruka. U mnogim slučajevima, i kada ne rešavaju pitanje stabilnosti do kraja, mogu dati veoma korisne informacije o osobinama kretanja koje veoma često pojednostavljuju razmatranje problema stabilnosti. Osim toga, značajni su za dobijanje Ljapunovljeve funkcije ili za eliminaciju dela promenljivih iz diferencijalnih jednačina kretanja čime se smanjuje broj diferencijalnih jednačina koje ulaze u razmatranje.

Stav 1.1 i stav 1.7 definišu dovoljne uslove različitih tipova asimptotske stabilnosti ravnotežnog stanja. Medjutim, nisu bez značaja ni oni stavovi u kojima se razmatra obrnuti problem: da ravnotežno stanje nema asimptotsku stabilnost nekog oblika. Takvi stavovi mogu se zasnovati na osobinama prvih integrala kretanja. U skladu sa tim važi sledeći

S t a v 2.1. Pretpostavimo da za sistem jednačina kretanja neholonomnog mehaničkog sistema, u opštem slučaju reonomnog, postoji netrivijalan prvi integral kretanja, tj. da postoji takva skalarna funkcija $F(q,\dot{q}^{\alpha},t)$ da je u smislu rešenja jednačina kretanja za svako $t \geq t_o$

$$F(q,\dot{q}^{\alpha},t) = h = \text{const}$$

i neka je

1) $|F(q,\dot{q}^{\alpha},t)| \leq a(q,\dot{q}^{\alpha})$

$$a \geq 0, \quad a = 0 \Leftrightarrow q = 0, \quad \dot{q}^{\alpha} = 0$$

2) $F(q,\dot{q}^{\alpha},t)$ je neprekidna funkcija promenljivih q, $\dot{q}^{\alpha}$ i t.

Tada ravnotežno stanje $q = 0$, $\dot{q} = 0$ nije asimptotski stabilno u odnosu na q i $\dot{q}^{\alpha}$.

D o k a z. Pošto se funkcija $F(q, \dot{q}^{\alpha}, t)$ održava na ma kom kretanju tada i za kretanje $q(t) = 0$, $\dot{q}^{\alpha}(t) = 0$ važi da je

$$F(0,0,t) = \text{const} \tag{184}$$

Ne gubeći u opštosti može se uzeti da je

$$F(0,0,t) = 0 \tag{185}$$

Pre svega dokažimo da važi

L e m a. U proizvoljno maloj okolini ravnotežnog stanja postoji početni poremećaj q_0, $\dot{q}_0^{\alpha}$ koji ne pripada ravnotežnoj mnogostrukosti i trenutak t_0 tako da je za odgovarajuće poremećeno kretanje $q(q_0, \dot{q}_0^{\alpha}, t_0, t)$, $\dot{q}^{\alpha}(q_0, \dot{q}_0^{\alpha}, t_0, t)$

$$F(q(t), \dot{q}^{\alpha}(t), t) = h, \quad h = \text{const} \neq 0, \; t \geq t_0 \tag{186}$$

D o k a z. Pretpostavimo obrnuto - da postoji okolina tačke $q = 0$, $\dot{q}^{\alpha} = 0$, tako da za ma koji početni poremećaj q_0, $\dot{q}_0^{\alpha}$, u ma kom trenutku $t_0 \geqslant 0$, za odgovarajuća poremećena kretanja važi

$$F(q(t), \dot{q}^{\alpha}(t), t) = 0 \tag{187}$$

To znači, istovremeno, i da je

$$F(q_0, \dot{q}_0^{\alpha}, t_0) \equiv 0 \tag{188}$$

za proizvoljno q_0, $\dot{q}_0^{\alpha}$ i t_0, a odatle

$$F(q, \dot{q}^{\alpha}, t) \equiv 0 \tag{189}$$

Drugim rečima, za neku okolinu tačke $q = 0$, $\dot{q}^{\alpha} = 0$ postoji trivijalni integral kretanja, a to je u kontradikciji sa uslovima stava. Time je lema dokazana.

Predjimo na dokaz stava. Pretpostavimo, suprotno zaključku stava, da je ravnotežno stanje $q = 0$, $\dot{q}^{\alpha} = 0$ asimptotski stabilno u odnosu na q i $\dot{q}^{\alpha}$, tj.

$$\lim_{t \to \infty} q(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \dot{q}^{\alpha}(t) = 0 \tag{190}$$

Na osnovu (185), (190) i uslova 1), 2) sledi da je

$$\lim_{t \to \infty} F(q(t), \dot{q}^{\alpha}(t), t) = 0 \tag{191}$$

Izmedju (191) i (186) postoji kontradikcija. Time je stav dokazan.

Možemo definisati dovoljne uslove, analogne stavu 2.1, i za obrnuti problem asimptotskoj stabilnosti po delu promenljivih.

S t a v 2.2. U stavu 2.1 uslov 1) zamenimo na sledeći način

$$F(q, \dot{q}^{\alpha}, t) \leq a(q^1 \ldots q^d, \dot{q}^1 \ldots \dot{q}^c)$$

pri čemu je $d \leq n$, $c \leq m$.

Tada ravnotežno stanje $q = 0$, $\dot{q}^{\alpha} = 0$ nije asimptotski stabilno u odnosu na $q^1 \ldots q^b$, $\dot{q}^1 \ldots \dot{q}^c$.

D o k a z. Tok dokaza ovog stava je sličan kao i u stavu 2.1. Razlika je u tome što se ovde umesto (190) uvodi pretpostavka da je

$$\lim q^B(t) = 0, \quad \lim \dot{q}^C(t) = 0$$

$$(B = 1, \ldots, b; \quad C = 1, \ldots, c)$$

koja dovodi do kontradikcije sa uslovima stava.

2.1. Stabilnost stacionarnog kretanja

U odeljku 4, glava I, pokazano je da neholonomni sistemi mogu pod odredjenim uslovima da vrše stacionarno kretanje - u skladu sa definicijom 4.1. i 4.2. tog odeljka. Uočimo neholonomni sistem koji ima m - m' cikličnih koordinata, tj. neka je

$$b^{\nu}_{\nu'}=0,\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^{\nu'}} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial q^{\nu'}} = 0,\ \frac{\partial b^{\nu}}{\partial q^{\nu'}} = 0,\ \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha'}}{\partial q^{\nu'}} = 0,\ \frac{\partial \tilde{Q}_{\alpha}}{\partial q^{\nu'}} = 0 \qquad (192)$$

Osim toga, neka sistem difernecijalnih jednačina kretanja (28) dopušta m - m' linearnih integrala oblika

$$\frac{\partial T}{\partial q^{\nu'}} = c_{\nu'} = \text{const} \Leftrightarrow a_{\nu'\alpha}\dot{q}^{\alpha}+a_{\nu'} = c_{\nu'} \Leftrightarrow \dot{q}^{\nu'} = g^{\nu'}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'}+g^{\nu'} \qquad (193)$$

Za sistem algebarskih jednačina

$$S_{\alpha'}(q^{\alpha'},q^{\nu},c_{\nu'},t) = 0$$

$$b^{\nu}(q^{\alpha'},q^{\nu},t) = 0$$

[1]

pretpostavimo da ima rešenje oblika

$$q^{\alpha'}(t) = \text{const}\ ,\quad q^{\nu}(t) = \text{const}$$

Tada, kako je to već pokazano, egzistira

$$q^{\alpha'} = \text{const},\quad q^{\nu} = \text{const}\ ,$$

$$\dot{q}^{\alpha'} = 0\ ,\quad \dot{q}^{\nu} = 0,\quad \dot{q}^{\nu'} = g^{\nu'}(q^{\alpha'},\ q^{\nu},\ c_{\nu'},t)$$

Ovo kretanje se, u skladu sa definicijom 4.2. (glava II) naziva stacionarno kretanje.

1) Veze biti i homogene ($b^{\nu}\equiv 0$)

Bez umanjenja opštosti uzmimo da je to stacionarno kretanje oblika

$$q^{\alpha'} = 0\ , \quad q^{\nu} = 0, \quad \dot{q}^{\alpha'} = 0, \quad \dot{q}^{\nu} = 0$$

$$c_{\nu'} = c^{o}_{\nu'}, \quad \dot{q}^{\nu'} = g^{\nu'}(0,0,c^{o}_{\nu'},t) \tag{194}$$

Ako ne naglasimo drukčije, smatraćemo da postoji mnogostrukost stacionarnih kretanja Σ_r oblika (123) - ili za $\overset{*}{b}{}^{\nu} = 0$ oblika (126), kojoj pripada i kretanje (194).

Uzmimo stacionarno kretanje (194) za neporemećeno i razmotrimo njegovu stabilnost. Poremećeno kretanje obeležimo na sledeći način:

$$q^{\alpha'} = q^{\alpha'}, \quad q^{\nu} = q^{\nu}, \quad \dot{q}^{\alpha'} = \dot{q}^{\alpha'}, \quad \dot{q}^{\nu'} = \dot{q}^{\nu'}, \quad \eta_{\nu'} = \gamma_{\nu'} - c^{o}_{\nu'} \tag{195}$$

Diferencijalne jednačine poremećenog kretanja dobijaju sledeći oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{q}^{\alpha'}} - \frac{\partial T^{*}}{\partial q^{\alpha'}} = b^{\nu}_{\alpha'}\frac{\partial T}{\partial q^{\nu}} + \eta_{\nu'} h^{\nu'}_{\alpha'\beta'}\dot{q}^{\beta'} + \left[\left(\frac{\widetilde{\partial T}}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right)\right]^{*}\left(\gamma^{\nu}_{\nu'\beta'}\dot{q}^{\beta'} + \gamma^{\nu}_{\alpha'}\right) + Q^{*}_{\alpha'} +$$

$$+ \frac{\partial U^{*}}{\partial q^{\alpha'}} + \frac{\partial U^{*}}{\partial q^{\nu}}\, b^{\nu}_{\alpha'}$$

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \overset{*}{b}{}^{\nu}$$

$$\dot{\eta}_{\nu'} = 0\ , \tag{196}$$

Ove jednačine dobili smo iz jednačina (115) tako što smo u svim članovima gde je stajalo $c_{\nu'}$ stavili $c^{o}_{\nu'} + \eta_{\nu'}$. Primetimo da stacionarnom kretanju (194) odgovara ravnotežno stanje jednačina (196), oblika

$$q^{\alpha'} = 0, \quad \dot{q}^{\alpha'} = 0\ , \quad q^{\nu} = 0, \quad \dot{q}^{\nu} = 0\ , \quad \eta_{\nu'} = 0 \tag{197}$$

U skladu sa napomenom 4.2 (glava I) mnogostrukost Σ_r stacionarnih kretanja može se interpretirati kao mnogostrukost ravnotežnih stanja sistema jednačina (196).

Uočimo funkciju oblika

$$V = T_2^* + \Pi^*, \qquad \Pi^* = -T_0^* - U^* + F(t)$$

$$F(t) = -T_0^*(0,t) - U^*(0,t)$$

Primetimo da je $V(0,t) = 0$. Izvod $\dot{V}$ funkcije V u smislu diferencijalnih jednačina (196) odredjen je jednakošću

$$\dot{V} = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right)\right]^* \gamma^{\nu}_{\alpha'} \dot{q}^{\alpha'} - \frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{\partial U^*}{\partial t} + Q^*_{\alpha'} \dot{q}^{\alpha'} + \dot{F}$$

Uporedjujući diferencijalne jednačine (196) sa jednačinama (21), (28) vidimo da su u pitanju jednačine istog tipa. Stoga je dokaz za jednakost (198) je istovetan kao i za (136).

<u>S t a v</u> 2.3. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi:

1) postoji okolina tačke $q^{\alpha'} = 0$, $q^{\nu} = 0$, $\eta_{\nu'} = 0$ u kojoj je funkcija Π^* pozitivno-definitna u odnosu na $q^{\alpha'}$, q^{ν},

$$\Pi^*(q^{\alpha'}, q^{\nu}, \eta_{\nu'}, t) \geq a(q^{\alpha'}, q^{\nu})$$

$$a \geq 0, \quad a = 0 \Leftrightarrow q^{\alpha'} = 0, \quad q^{\nu} = 0$$

2) T_2 je pozitivno-definitna funkcija u odnosu na generalisane brzine,

$$T_2^*(q^{\alpha'}, q^{\nu}, \dot{q}^{\alpha'}, t) \geq b(\dot{q}^{\alpha'})$$

$$b \geq 0, \quad b = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^{\alpha'} = 0$$

3) postoji okolina tačke $q^{\alpha'} = 0$, $q^{\nu} = 0$, $\eta_{\nu'} = 0$ promenljivih $q^{\alpha'}$, q^{ν}, $\eta_{\nu'}$, pri čemu je u toj okolini

$$\left[\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial q}}\right)\right]^{*}\gamma^{\nu}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'} - \frac{\partial T^{*}}{\partial t} - \frac{\partial U^{*}}{\partial t} + Q^{+}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'} + \dot{F} \leq 0$$

a) Tada je ravnotežno stanje (197) jednačina (196) stabilno u odnosu na $q^{\alpha'}$, $\dot{q}^{\alpha'}$, q^{ν}, $\eta_{\nu'}$, a kao posledica toga odgovarajuće stacionarno kretanje (194) je stabilno u odnosu na $q^{\alpha'}$, $\dot{q}^{\alpha'}$, q^{ν}.

Neka su ispunjeni i ovi uslovi:

4) u okolini tačke $q^{\alpha'} = 0$, $q^{\nu} = 0$, koeficijenti b^{ν}_{α} su ograničene funkcije,

$$|b^{\nu}_{\alpha}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, t)| \leq M \quad , \quad M = \text{const}$$

5) $|b^{\nu}| \leq e(q^{\alpha'}, q^{\nu})$; $e \geq 0$, $e = 0 \Longleftrightarrow q^{\alpha'} = 0, q^{\nu} = 0$

b) Tada je ravnotežno stanje (197) stabilno u odnosu na $q^{\alpha'}$, $\dot{q}^{\alpha'}$, q^{ν}, $\dot{q}^{\nu}$ i $\eta_{\nu'}$, a kao posledica toga stacionarno kretanje (194) je stabilno u odnosu na $q^{\alpha'}$, $\dot{q}^{\alpha'}$, q^{ν}, $\dot{q}^{\nu}$.

6) ako $V = T_2^{*} + \Pi^{*}$ u okolini tačke (197) dozvoljava beskonačno malu gornju granicu,

$$V \leq c(q^{\alpha'}, q^{\nu}, \dot{q}^{\alpha'}, \eta_{\nu'})$$

$$c \geq 0 \quad , \quad c = 0 \Longleftrightarrow q^{\alpha'}, q^{\nu}, \dot{q}, \eta_{\nu} = 0$$

c) Tada je (197) ravnomerno stabilno u odnosu na $q^{\alpha'}$, q^{ν}, $\dot{q}^{\alpha'}$, $\dot{q}^{\nu}$, $\eta_{\nu'}$.

<u>D o k a z</u>. Prema pretpostavkama 1), 2) i 3), stava, postoji funkcija

$$V = T_2^{*} + \Pi^{*}$$

koja je pozitivno-definitna u odnosu na $\dot{q}^{\alpha'}$, $q^{\alpha'}$ i q^{ν}, čiji je izvod $\dot{V}$ u smislu jednačina poremećenog kretanja (196) nepozitivan. Već je naglašeno da su diferencijalne jednačine poremećenog kretanja (196), gde je stacionarno kretanje neporemećeno, i jednačine poremećenog kretanja (21), (28), gde je ravnotežno stanje neporemećeno, po formi iste. Osim toga, uslovi ovog stava su analogni uslovima stava 1.1. U tom smislu dokaz stava 2.3 je sličan dokazu stava 1.1. Razlika je u tome što umesto funkcije $V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi}$ kao Ljapunovljevu funkciju sada koristimo $V = T_2^* + \Pi^*$.

U specijalnom slučaju, ako je sistem (196) Čapljiginovog tipa, tj. jednačine (196) ne zavise od koordinate q^ν, uslov 2) i 5) možemo zameniti uslovima

$$\Pi^*(q^{\alpha'}, \eta_{\nu'}, t) \geqslant a(q^{\alpha'})$$

$$V \leqslant c(q^{\alpha'}, \dot{q}^{\alpha'}, \eta_{\nu'}) \qquad (198)$$

Tada svi zaključci prethodnog stava važe ali u odnosu na $q^{\alpha'}$, $\dot{q}^{\alpha'}$, $\eta_{\nu'}$. Usput napomenimo da sistem jednakosti

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^\nu} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q^\nu} = 0, \quad \frac{\partial b_\alpha^\nu}{\partial q^\nu} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial q^\nu} = 0 \qquad (199)$$

predstavlja dovoljne uslove da jednačine (196) budu Čapljiginovog tipa.

Pretpostavimo da je (194) izolovano stacionarno kretanje, tj. da diferencijalne jednačine poremećenog kretanja (196) imaju izolovano ravnotežno stanje. Sada možemo formulisati sledeći

<u>S t a v</u> 2.4. Neka su ispunjeni uslovi 1), 2), 4) i 5), stava 2.3, a uslove 3) i 6) zamenimo na sledeći način:

$$3)\quad \left[\widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu}\right)}\right]^* \gamma_{\alpha'}^\nu \dot{q}^{\alpha'} - \frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{\partial U^*}{\partial t} + Q_\alpha^* \dot{q}^\alpha + \dot{F} \leqslant -e(q^{\alpha'}, q^\nu, \dot{q}^{\alpha'})$$

$$e \geqslant 0, \ e = 0 \Longleftrightarrow q^{\alpha'}, \ q^\nu, \ \dot{q}^{\alpha'} = 0$$

$$6)\quad T_2^* + \Pi^* \leqslant c(q^{\alpha'}, q^\nu, \dot{q}^{\alpha'})$$

$$c \geqslant 0, \ c = 0 \Longleftrightarrow q^{\alpha'}, q^\nu, \dot{q}^{\alpha'} = 0$$

Tada je ravnotežno stanje (197) ravnomerno asimptotski stabilno u odnosu na $q^{\alpha'}, q^{\nu}, \dot{q}^{\alpha'}, \dot{q}^{\nu}$. Odatle sledi da je odgovarajuće stacionarno kretanje (194) asimptotski stabilno u odnosu na iste promenljive stanja.

D o k a z. Razmotrimo Ljapunovljevu funkciju oblika

$$V = T_2^* + \Pi^*$$

Odgovarajući izvod, u smislu jednačina (196), ima sledeći oblik

$$\dot{V} = \left[\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial q^{\nu}}} \right) \right]^* \gamma^{\nu}_{\alpha'} \dot{q}^{\alpha'} - \frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{\partial U^*}{\partial t} + Q^*_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} + \dot{F} \tag{200}$$

Prema pretpostavkama 1), 2), 4) i 5), stava 2.3 i s obzirom na uslove 3) i 6) stava 2.4 sledi da je funkcija V pozitivno-definitna i da dozvoljava beskonačno malu gornju granicu u odnosu na $q^{\alpha'}, q^{\nu}$ i $\dot{q}^{\alpha'}$, a njen je izvod negativno-definitan u odnosu na iste promenljive. Time su ispunjeni svi uslovi stava o asimptotskoj stabilnosti po delu promenljivih[23][49].

Ako je sistem (196) Čapljiginovog tipa, tada se uslovi 2), 3) i 5) ovog stava zamenjuju sledećim ograničenjima u odnosu na Π^* i T_2

$$\Pi^*(q^{\alpha'}, \eta_{\nu'}, t) \leq a(q^{\alpha'})$$

$$\dot{V} \leq -c(q^{\alpha'}, \dot{q}^{\alpha'}) \tag{201}$$

Tada svi zaključci stava 2.4 važe ali u odnosu na promenljive $q^{\alpha'}, \dot{q}^{\alpha'}, \dot{q}^{\nu}$.

Egzistencija mnogostrukosti stacionarnog kretanja, što je ekvivalentno egzistenciji mnogostrukosti ravnotežnog stanja jednačina poremećenog kretanja (196), ne dozvoljava tip asimptotske stabilnosti iz stava 2.4. U tom smislu može se formulisati sledeći

S t a v 2.5. Pretpostavimo da je sistem diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja (196)[1] takvih osobina da su, pored uslova leme 1 i leme 2, ispunjeni sledeći uslovi:

1) Za $b^{\nu} = 0$

1) mnogostrukost stacionarnih kretanje je oblika $q^{\nu'} = 0$.

2) funkcija Π^* je pozitivno-definitna i dozvoljava beskonačno malu gornju granicu u odnosu na $q^{\alpha'}$

$$b_o(q^{\alpha'}) \leq \Pi^*(q^{\alpha'}, q^{\nu}, \eta_{\nu'}, t) \leq a_o(q^{\alpha'})$$

$$a_o, b_o \geq 0 \; ; \quad a_o, b_o = 0 \Leftrightarrow q^{\alpha'} = 0$$

3) funkcija T_2 je pozitivno-definitna i dozvoljava beskonačno malu gornju granicu po $\dot{q}^{\alpha}$,

4) u okolini tačke (197) $T_2^* + \Pi^*$ ima beskonačno malu gornju granicu u odnosu na q

5) svako rešenje diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja (196) je ograničeno u odnosu na q^{ν} za proizvoljne početne poremećaje iz neke okoline tačke (197) uzetih u proizvoljnom trenutku t_o

6) u okolini tačke (197), promenljivih $q^{\alpha'}, q^{\nu}$, je

$$|b_{\alpha}^{\nu}(q^{\alpha'}, q^{\nu}, t)| < M \; ; \qquad \forall t \geq 0$$

7) ravnotežna mnogostrukost sistema (196) je nedegenerativna i to

$$\sum G_{\alpha}^2 (q^{\alpha'}, q^{\nu}, \eta_{\nu'}, t) \geq d(q^{\alpha'})$$

$$d \geq 0 \; , \quad d = 0 \Leftrightarrow q^{\alpha'} = 0$$

Tada je ravnotežno stanje sistema jednačina (196) asimptotski stabilno u odnosu na promenljive $q^{\alpha'}, \dot{q}^{\alpha'}, \dot{q}^{\nu}$. Samim tim i odgovarajuće stacionarno kretanje (194) je asimptotski stabilno u odnosu na iste promenljive.

D o k a z. Sistem jednačina (196) po formi je isti kao i sistem (21), (28). Osim toga uslovi stava 2.5 su slični uslovima stava 1.7. U tom smislu dokaz ovog stava se razlikuje u odnosu na dokaz stava 1.7 samo u izboru Ljapunovljeve funkcije. Ljapunovljevu funkciju u ovom stavu biramo u obliku

$$V = T_2^* + \Pi^*$$

Na kraju treba istaći da su svi navedeni stavovi formulisani tako da su u važnosti i kada variramo $\eta_{\nu'}$, tj. početne poremećaje remetimo tako da variramo i vrednost impulsa $\tilde{p}_{\nu'}$. Napomenimo da su impuls $\tilde{p}_{\nu'}$, s obzirom na definiciju pojma stacionarnog kretanja, održava na svim a ne samo na stacionarnom kretanju. Medjutim, što je očigledno, formulisani stavovi o stabilnosti stacionarnog kretanja ostaju u važnosti i ako pretpostavimo da je $\eta_{\nu'} = 0$, odnosno ako početne poremećaje biramo tako da impulse $\tilde{p}_{\nu'}$ ne remetimo ($p_{\nu'} = \dot{c}^{o}_{\nu'}$). Tako posmatrana stabilnost je tip tzv. uslovne stabilnosti (početni poremećaji zadovoljavaju odredjene uslove). U slučaju kada ne remetimo impuls $\tilde{p}_{\nu'}$, $\eta_{\nu'}$, nisu nezavisno promenljive u funkcijama koje se pojavljuju u stavu 2.5. Naime, u svim funkcijama stavlja se da je $\eta_{\nu'} = 0$

3. Nestabilnost ravnoteže

U odeljku 2.i 1. formulisani su stavovi o asimptotskoj stabilnosti ravnoteže i stacionarnog kretanja sa primenom ideje da se oslabe uslovi koje propisuju Ljapunovljevi stavovi o asimptotskoj stabilnosti za Ljapunovljevu funkciju. Pri tom se osobine Ljapunovljeve funkcije kombinuju sa osobinama koje imaju rešenja diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja [14][20]. U ovom delu rada primenićemo ideju na problem nestabilnosti ravnotežnog stanja.

Neka je mehanički sistem u opštem slučaju reonoman, a neholonomne veze su homogene, oblika

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha}(q,t)\dot{q}^{\alpha} \tag{2o2}$$

Pored nepotencijalnih sila

$$Q_i = Q_i(q,\dot{q},t) \tag{2o3}$$

deluju i potencijalne, čija je funkcija sile

$$U = U(q,t) \tag{2o4}$$

Pretpostavljamo, u opštem slučaju, da može da postoji, za sistem jednačina (21), (28), ravnotežna mnogostrukost O_r kojoj pripada i tačka

$$q = 0 \tag{2o5}$$

Ravnotežno stanje

$$q = 0 \quad , \qquad \dot{q} = 0 \tag{2o6}$$

uzmimo za neporemećeno kretanje i razmotrimo njegovu nestabilnost. Posle toga, razmotrićemo uticaj disipativnih sila na uslove kojima definišemo nestabilnost.

S t a v 3.1. Neholonomni mehanički sistem i polje sila u kome se taj sistem kreće takvih je osobina da su ispunjeni uslovi leme 1 i leme 2. Osim toga, pretpostavimo da

1) postoji okolina tačke (2o5) u kojoj funkcija $\tilde{\Pi}(q,t)$ dopušta beskonačno malu gornju granicu,

$$\tilde{\Pi}(q,t) \leq a(q) \; ; \qquad a \geq 0, \; a = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

i u bilo kojoj, po volji maloj okolini ima negativne vrednosti,

2) u okolini tačke (2o8)

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^{\nu}}\right) \overset{\nu}{\ell}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{Q}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \dot{F} \leq 0$$

3) disipacija je potpuna,

$$\tilde{Q}^{W}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} \leq - b(\dot{q}^{\alpha}) \quad ; \qquad b \geq 0, \quad b = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^{\alpha} = 0$$

4) funkcija $\tilde{T}_2(q,\dot{q}^{\alpha},t)$ je pozitivno-definitno i dozvoljava beskonačno malu gornju granicu

$$q(\dot{q}^{\alpha}) \leq \tilde{T}_2 \leq c(\dot{q}^{\alpha}) \; ; \quad c,d \geq 0, \quad c,d = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^{\alpha} = 0$$

5) ravnotežna mnogostrukost je nedegenerativna

$$\Sigma\, \mathfrak{S}^2_{\alpha}(q,t) \geq e(q) \; ; \quad e \geq 0, \; e = 0 \Leftrightarrow q \in \Sigma_r$$

6) ravnotežna mnogostrukost ne leži u oblasti

$$\tilde{\Pi} < 0$$

Tada je ravnotežno stanje (2o6) nestabilno.

N a p o m e n a 3.1. Specijalno, ako je mehanički sistem bez disipativnih sila, takvih osobina da dopušta kvadratni integral oblika

$$\tilde{T}_2-\tilde{T}_o-U = \mathrm{const} ,$$

uslov 2) je identički zadovoljen, tj.

$$(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu}})\delta^\nu_\alpha \dot{q}^\alpha - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{Q}_\alpha \dot{q}^\alpha + \dot{F} \equiv 0$$

D o k a z. Pretpostavke stava dozvoljavaju egzistenciju funkcije

$$V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi}$$

koja u okolini G tačke (2o6) dozvoljava beskonačno malu gornju granicu

$$|V(q,\dot{q}^\alpha,t)| = |\tilde{T}_2+\tilde{\Pi}| \leq a(q)+c(\dot{q}^\alpha), \tag{2o7}$$

pri čemu funkcija V u proizvoljno maloj okolini ima negativne vrednosti. Izvod $\dot{V}$ funkcije V je negativno-definitna funkcija promenljivih $\dot{q}^\alpha$,

$$\dot{V} \leq -b(\dot{q}^\alpha) \tag{2o8}$$

Specijalno, ako važi integral kretanja $\tilde{T}_2-\tilde{T}_o-U = h = \mathrm{const}$ tada je

$$\dot{V} = Q^W_\alpha \dot{q}^\alpha \leq b(\dot{q}^\alpha) \tag{2o9}$$

U proizvoljno maloj okolini tačke (2o6) izaberimo početni poremećaj $q_o, \dot{q}^\alpha_o$, tako da je u nekom trenutku $t_o \geq 0$

$$V(q_o,\dot{q}^\alpha_o,t_o) = V_o < 0 \tag{21o}$$

Ako bi smo znali da poremećeno kretanje

$$q = q(q_o, \dot{q}_o^{\alpha}, t_o, t), \qquad \dot{q}^{\alpha} = \dot{q}^{\alpha}(q_o, \dot{q}_o^{\alpha}, t_o, t) \tag{211}$$

nije ograničeno okolinom $G_1 \subset G$ stav bi bio dokazan. Pretpostavimo suprotno - da je za $\forall t \geqslant t_o$ ograničeno okolinom G_1. Tada je

$$V(t) = V(q(q_o, \dot{q}_o^{\alpha}, t_o, t), \dot{q}^{\alpha}(q_o, \dot{q}_o^{\alpha}, t_o, t), t) \tag{212}$$

ograničena, a zbog osobina $\dot{V}$, je i nerastuća funkcija. Stoga je

$$\lim V(t) = V^* = 0 , \tag{213}$$

pri čemu je

$$|V_o| \leqslant |V(t)| \leqslant |V^*|$$

Znači, kretanje se vrši u oblasti

$$K = \left\{(q, \dot{q}):\ a(q) + c(\dot{q}^{\alpha}) \geqslant V_o, (q, \dot{q}^{\alpha}) \in G_1\right\} \tag{214}$$

Dokaz dalje teče istovetno kao i u stavu 1.7.

Ako na sistem ne deluju disipativne sile, prethodni stav važi ako umesto 2) stoji da je

$$\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial q^{\nu}}}\right) \gamma_{\alpha}^{\nu} \dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{Q}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} + \dot{F} \leqslant -g(\dot{q}^{\alpha})$$

$$g \geqslant 0 , \quad g = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^{\alpha} = 0 \tag{215}$$

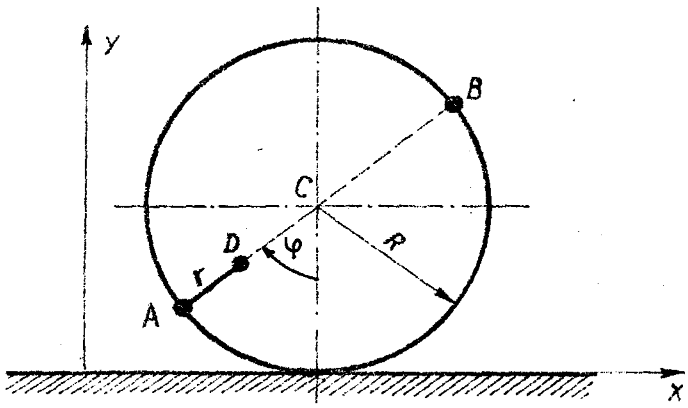
Izvod $\dot{V}$, funkcije V zadovoljava relaciji

$$\dot{V} \leqslant -g(\dot{q}^{\alpha}) \qquad (216)$$

Dakle, pridodate disipativne sile ne utiču na nestabilnost pod uslovima prethodnog stava.

N a p o m e n a 3.2. U slučaju skleronomnog neholonomnog sistema koji se kreće u polju konzervativnih sila i dispitativnih sila potpune disipacije, uslovi 1), 2), 3), 4) i 6) su trivijalno zadovoljeni.

P r i m e r 1. Obruč zanemarljive mase može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi ostajući u stalnoj vertikalnoj ravni. Poluprečnik obruča se menja u funkciji od vremena po poznatom zakonu $R = R(t)$. Za obruč, na krajevima prečnika AB, fiksirane su dve materijalne tačke, istih masa m. Na konstantnom odstojanju od tačke A spojena je sa obručom materijalna tačka, mase M, tako da leži stalno u ravni obruča. Ako za Lagranževe koordinate usvojimo ugao obrtanja obruča i horizontalno pomeranje centra obruča C, odrediti ravnotežni položaj opisanog mehaničkog sistema i ispitati stabilnost odgovarajućeg ravnotežnog stanja.



Prema zadatku, Lagranževe koordinate su φ i x_c. Uslov da obruč ne proklizava odredjen je jednačinom

$$\dot{x}_c = R(t)\dot{\varphi} \ ,$$

koja očigledno, predstavlja linearnu neintegrabilnu diferencijalnu jednakost. Kinetička energija sistema odredjena je sledećim izrazom

$$T = \frac{1}{2} Mv_D^2 + \frac{1}{2} m(v_A^2 + v_B^2)$$

Odgovarajuću transformisanu kinetičku energiju T dobijamo eliminacijom zavisnih brzina x_c.

$$\tilde{T} = (T)_{\dot{x}_c = R\dot{\varphi}} = \Big\{\frac{1}{2} M\left[2(R^2 - Rr)(1-\cos\varphi) + r^2\right]\dot{\varphi}^2 + 2mR^2\dot{\varphi}^2 +$$

$$+ (-M\dot{R}r\sin\varphi) + M\dot{R}^2(1-\cos\varphi) + 2m\dot{R}^2$$

Kvadratni član izraza T je

$$T_2 = \frac{1}{2} M\left[2(R^2 - Rr)(1-\cos\varphi) + r\right]\dot{\varphi}^2 + 2mR^2\dot{\varphi}^2$$

Funkcija sile je sledećeg oblika

$$U = -Mg(R-r)(1-\cos\varphi)$$

i očigledno je, za slučaj kada je

$$R(t) \geqslant r \quad , \qquad \forall t \geqslant 0$$

da je u okolini tačke $\varphi = 0$, $x_c = x_{co}$, negativno-definitna u odnosu na φ.

Uslovi ravnoteže odredjeni su jednačinom

$$\sin\varphi = 0$$

Dakle, mehanički sistem je reonoman, ali jednačine ravnoteže ne zavise od vremena t. U dvodimenzionom prostoru promenljivih φ i x_c ova jednačina odredjuje jednodimenzionalne ravnotežne mnogostrukosti

$$1^\circ \quad \varphi = 0 \quad , \qquad\qquad 2^\circ \quad \varphi = \pi$$

Mnogostrukosti 1° i 2° su izolovane, pri čemu 1° odredjuje slučaj kada je masa M u donjem, a 2° u gornjem položaju.

Razmotrimo stabilnost ravnotežnog stanja

$$\varphi = x_c = 0 \quad , \qquad \dot\varphi = 0 \quad , \qquad x_c = 0$$

Ljapunovljevu funkciju izaberimo u obliku

$$V = \tilde{T}_2 + \tilde{\Pi} \quad , \qquad \tilde{\Pi} = -\tilde{T}_o - U + 2R^2 m$$

Izvod $\dot V$ funkcije V u smislu diferencijalnih jednačina kretanja odredjen je izrazom

$$V = \dot R \left\{ M\left[R-(R-r)\cos\varphi-(2R-r)(1-\cos\varphi\right]-2mR\right\}\dot\varphi^2 +$$

$$+ M\left\{(r\ddot R-\dot R^2)\sin\varphi\right\} + M(\dot R g - 2\dot R\ddot R)(1-\cos\varphi)$$

Pretpostavimo da je

$$R(t) = R_o + e^{-t} \quad , \qquad R_o > r$$

Pod ovom pretpostavkom funkcija V je pozitivno-definitna u odnosu na φ. Za dalja razmatranja od značaja je sledeća

<u>L e m a</u>. Neka je data funkcija V(x,t) oblika

$$V = V_2(x,t) + v(x,t) \ ; \quad x = (x_1,\dots,x_n); \quad V(0,t) \equiv 0,$$

pri čemu je

(a) $V_2(x,t) \geq a(x) \quad ; \quad a(x) = x_1^2+\dots+x_n^2$

(b) $|v(x,t)| \leq b(x) \quad ; \quad b(x) = \left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)^{2+\alpha}$

Tada je $V(x,t)$ pozitivno-definitna funkcija promenljivih $x_1,\dots,x_n$, tj.

$$V(x,t) \geqslant c(x) \quad , \quad c(x) = A\cdot\sqrt{x_1^2+\dots+x_m^2}; \quad A = \text{const.}$$

Dokaz ove Leme sličan je dokazu Leme 2 na strani 30 u [17].Prethodna Lema omogućuje da se izvede sledeći zaključak: ako su ispunjeni uslovi uopštenog kriterijuma Silvestra [18] i uslovi (b) ove Leme, tada je V pozitivno-definitna funkcija.

Ispitajmo znak izvoda $\dot V$ LJapunovljeve funcije V. Pre svega u okolini tačke $\varphi = 0$, $\dot\varphi = 0$ razvijmo V u red, i sve to prikažimo na sledeći način:

$$e^t\dot V = -\left[Mr-2m(R_o+e^{-t})\right]\dot\varphi^2 - M(g-2e^{-t})\,\frac{\varphi^2}{2} + M(r-e^{-t})\dot\varphi\varphi +$$

$$+v(\varphi,\dot\varphi,t) \;,$$

pri čemu je $v(\varphi,\dot\varphi,t)$ reda malosti većeg od 2 i, što se može lako proveriti, dozvoljava beskonačno malu gornju granicu (uslov b)). Primenjujući uošteni kriterijum Silvestra dovoljni uslovi definitnosti kvadratnog dela funcije $\dot V e^t$ su odredjeni sledećim relacijama

$$(c)\quad \frac{m}{M} < \frac{r}{2R_o} \;, \qquad (d)\quad 2\left[r-2\,\frac{m}{M}\,R_o\right]g - Mr^2 > 0 \;, \qquad t>\tau = \text{const}$$

Specijalno, ako je $m = 0$ tada je relacija (c) zadovoljena za proizvoljan odnos izmedju r i R_o. Relacija (d) tada poprima sledeći oblik

$$2g > Mr$$

U smislu prethodno dokazane leme sledi da je $e^t\dot V \leqslant 0$, a samim tim $\dot V \leqslant 0$. Dakle, funkcija V je pozitivno definitna u odnosu na $\varphi,\dot\varphi$ a njen izvod $\dot V$ nepozitivan. Time su ispunjeni svi uslovi stava 1.1 (glava II), tj. ravnotežno stanje $x_c = 0, \varphi = 0$ $\dot x_c = 0$, $\dot\varphi = 0$ je stabilno u odnosu na φ i $\dot\varphi$, a s obzirom na oblik veze i od $\dot x_c$.

Pridodajmo potencijalnim silama disipativne čija je funkcija disipacije oblika

$$\Phi = B(t,\varphi,x_c)\dot{\varphi}^2 \geqslant D\dot{\varphi}^2 \quad , \quad D = \mathrm{const}$$

Tada je ravnotežno stanje $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $x_c = 0$, $\dot{x}_c = 0$ asimptotski stabilno u odnosu na φ i $\dot{\varphi}$. [1] Prethodni zaključak sledi na osnovu stava 1.7 (glava II). S obzirom na oblik jednačina veza

$$\dot{x}_c = R(t)\dot{\varphi} \quad , \quad R = R_o + e^{-t}$$

zaključujemo da je ravnotežno stanje asimptotski stabilno i u odnosu na $\dot{x}_c$. Pitanje stabilnosti u odnosu na promenljivu x_c ostaje otvoreno.

Primer 2. Teško homogeno telo oblika polukugle poluprečnika R, nalazi se na savršeno hrapavoj horizontalnoj nepokretnoj ravni sa oblim delom okretnim na dole. Na ravnom delu prve polukugle postavljena je druga polukugla, poluprečnika R_2, tako da tačka dodira pada u centar prve. Naći uslove pod kojim je ravnoteža sistema nestabilna ako se polukugla kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni a druga po ravnom delu prave (Zadatak je preuzet iz [19], [34]).

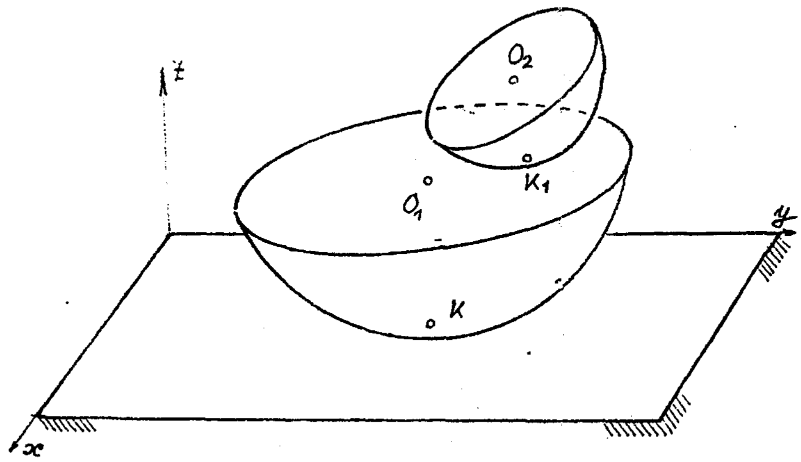
Za ravan po kojoj se prva polukugla kotrlja bez klizanja fiksirajmo Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxyz tako da je z = 0 ravan kotrljanja.

Za geometrijski centar O_1 donje polukugle, kao koordinatni početak vežimo Dekartov pravougli koordinatni sistem $O_1x_1y_1z_1$, pri čemu je O_1z_1 upravo na ravan deo donje polukugle. Osa O_1x_1 je stalno u ravni paralelnoj ravni Oxz. Analogno sistemu $O_1x_1y_1z_1$ uvedimo koordinatni sistem $O_2x_2y_2z_2$, gde je O_2 geometrijski centar gornje polukugle (vid sl. 2).

Kao nezavisne Lagranževe koordinate (x,y) tačka K dodira donje polukugle sa ravni z = 0, ugao φ obrtanja donje polukugle oko ose O_1z_1, $\psi = \sphericalangle(Ox, O_1x_1)$, $\theta = \sphericalangle(Oy, O_1y_1)$, koordi-

1) Na osnovu stava o stabilnosti po delu promenljivih može se zaključiti samo o asimptotskoj stabilnosti u odnosu na $\dot{\varphi}$.

nate (x_1, y_1) tačke K_1 dodira gornje polukuge sa donjom, ugao φ_1 obrtanja gornje polukugle oko ose O_2z_2, $\Psi_1 = \sphericalangle(Ox, O_2x_2)$ i $\theta_1 = \sphericalangle(O_y, O_2y_2)$. Znači ukupno deset nezavisnih Lagranževih koordinata odredjuju geometrijsku konfiguraciju sistema.



Uslovi da se donja polukugla kotrlja bez klizanja po ravni z = 0 mogu se izraziti jednačinama

$$x = R_1\dot{\Psi} - R_1\sin\theta\dot{\varphi}$$

$$y = -R_1\cos\Psi\dot{\theta} - R_1\cos\theta\sin\Psi\dot{\varphi} \qquad (1)$$

a da se gornja kotrlja bez klizanja po donjoj

$$\dot{x}_1 = y_1\dot{\varphi} - R_2\cos\theta\dot{\Psi} - R_2\sin\theta\sin(\Psi_1-\Psi)\dot{\theta}_1 + R_2\cos\theta\dot{\Psi}_1 +$$
$$+R_2\left[\sin\theta\cos\theta_1\cos(\Psi_1-\Psi) - \cos\theta\sin\theta_1\right]\dot{\varphi}_1$$

$$y_1 = x_1\dot{\varphi} + R_2\dot{\theta} - R_2\cos(\Psi_1-\Psi)\dot{\theta}_1 - R_2\cos\theta_1\sin(\Psi_1-\Psi)\dot{\varphi}_1 \qquad (1')$$

Funkcija sile je u obliku

$$U = M_1 l_1 g\cos\theta\cos\Psi + M_2 g\left[x_1\sin\Psi - y_1\sin\theta\cos\Psi - R_2\cos\theta\cos\Psi +\right.$$
$$\left. + l_2\cos\theta_1\cos\Psi_1\right]$$

Bez posebnog proveravanja jasno je da je

$$x = y = x_1 = y_1 = \Psi = \Psi_1 = \theta = \theta_1 = \Psi = \Psi_1 = 0$$

ravnotežna konfiguracija.

Ispitajmo nestabilnost odgovarajućeg ravnotežnog stanja. Za ovaj zadatak taj problem je rešavan u [48], [49], ali ćemo ga ovde rešiti na jedan, smatramo orginalan način. Pre svega (vidi sl.2) može se, za specijalan izbor početnih veličina stanja vršiti takvo kretanje pri kome polukugle ostaju u stalnoj vertikalnoj ravni. Neka je to baš ravan $y = 0$. Takvom kretanju u prostoru stanja odgovara integralna mnogostrukost[1)] oblika

$$(a)\quad \varphi = 0,\quad \theta = 0,\quad y = 0,\quad \varphi_1 = 0,\quad \theta_1 = 0,\quad y_1 = 0$$

$$(b)\quad \dot{\varphi} = 0,\quad \dot{\theta} = 0,\quad \dot{y} = 0,\quad \dot{\varphi}_1 = 0,\quad \dot{\theta}_1 = 0,\quad \dot{y}_1 = 0$$

$$(c)\quad \dot{x} = R_1\dot{\Psi},\qquad \dot{x}_1 = -R_2\dot{\Psi}+R_2\dot{\Psi}_1 \qquad (2)$$

Relacije (c) dobijamo po unošenju relacija (a) i (b) u jednačine veza (1). Očigledno je da se jednačine (c) mogu integraliti

$$(d)\quad x = R_1\Psi,\qquad x_1 = -R_2\Psi+R_2\Psi_1$$

Shvatimo sada (c) i (d) kao veze (one se spontano realizuju ali za poseban izbor promenljivih stanja). Funkcija sile sada ima oblik

$$U^* = (U)_o = M_1 l_1 g\cos\Psi + M_2 g\left[-R_2(\Psi-\Psi_1)\sin\Psi - R_2\cos\Psi + l_2\cos\Psi_1\right],$$

sa $(U)_o$ je označena vrednost funkcije na mnogostrukosti (a), (d). Odgovarajući kvadratni član funkcije U pri razvoju u okolini ravnotežnog položaja je oblika

$$U_2^* = -(M_1 l_1 g + M_2 g R_2)\frac{\Psi^2}{2} - M_2 g l_2 \frac{\Psi_1^2}{2} + M_2 g R_2 \Psi_1 \Psi$$

Ispitajmo uslove pod kojima je U_2 pozitivno definitna kvadratna forma, tj. kada je ravnotežno stanje nestabilno. U tom smislu primenimo kriterijum Silvestra

1) Ta mnogostrukost sastoji se od integralnih krivih. Često se za integralne mnogostrukosti upotrebljava naziv partikularno rešenje.

$$\begin{vmatrix} -M_1gl_1+M_2gR_2 & M_2gR_2 \\ M_2gR_2 & -M_2gl_2 \end{vmatrix} < 0$$

Uzimajući u obzir da je $l_1 = 3/8\ R_1$, $l_2 = 3/8\ R_2$ dobijamo da je U_2^* negativno-definitna forma ako je ispunjena sledeća nejednakost [48]

$$9M_1gR_1 < 40M_2gR_2$$

Prethodna nejednakost predstavlja samo dovoljne uslove nestabilnosti.

Razmotrimo sada uticaj disipativnih sila i to specijalno sila viskoznog trenja. Pretpostavićemo da je Relejeva funkcija pozitivno definitna u odnosu na generalisane brzine,

$$\Phi(q,\dot{q}^i) \geq a(\dot{q}^i); \quad a \geq 0\ , \quad a = 0 \Leftrightarrow \dot{q}^i = 0 \tag{3}$$

gde su q^i, $\dot{q}^i$ [1] Lagranževe promenljive. Prema stavu 3.1 (glava II) dovoljno je ispitati da li ravnotežna mnogostrukost O_r leži u oblasti $U > 0$ (Ostali uslovi tog stava su trivijalno zadovoljeni). Ravnotežnu mnogostrukost O_r možemo napisati u obliku rešenom u odnosu na y_1, x_1, θ_1, Ψ_1,

$$y_1 = \frac{M_1l_1}{M_2}\, tg\theta$$

$$x_1 = \frac{M_1l_1}{M_2}\,(\cos\theta tg\Psi + tg\theta\sin\theta tg\Psi)$$

$$\sin\theta_1 = \frac{R_2}{l_2}\sin\theta$$

$$\sin\Psi_1 = \frac{R_2\cos\theta\sin\Psi}{l_1\cos\theta_1} \tag{4}$$

---

1) Radi sažetosti u pisanju umesto konkretnog označavanja iz ovog zadatka za Lagranževe promenljive smo uveli uopštene oznake.

Da bi smo odgovorili na pitanje da li mnogostrukost O_r leži u oblasti $U > 0$, ili ne, treba sračunati U na toj mnogostrukosti, tj.

$$(U)_{O_r} = f(\theta,\Psi) = U(\theta,\Psi,y_1 = y_1(\theta),\ x_1 = x_1(\theta,\Psi),$$
$$\theta_1 = \theta_1(\theta),\ \Psi_1 = \Psi_1(\theta,\Psi)),$$

a zatim ispitati znak. U tom smislu dovoljno je (a ne i potrebno) odrediti U_2 na O_r pa ispitati definitnost. Da bismo to postigli, pre svega izvršimo aproksimaciju jednačina (4) do na linearni član,

$$y_1 \approx -\frac{M_1 l_1}{M_2}\theta$$

$$x_1 \approx \frac{M_1 l_1}{M_2}\Psi$$

$$\theta_1 = \frac{R_2}{I_2}\Psi$$

$$\Psi_1 = \frac{R_2}{I_2}\Psi$$

pa ih smenimo u U_2. Tada dobijamo

$$(U_2)_{O_r} = \frac{\theta^2}{2}\left(M_1 g l_1 + m_2 g R_2 - M_2 g \frac{R_2^2}{I_2}\right) +$$
$$+ \frac{\Psi^2}{2}\left(M_1 g l_1 + M_2 g R_2 - M_2 g \frac{R_2^2}{I_2}\right)$$

Dovoljan uslov da ravnotežna mnogostrukost O_r ne leži u oblasti $U > 0$ su relacije

$$(U_2)_{O_r} \leq 0\ ,\quad (U_2)_{O_r} = 0 \Leftrightarrow \theta = \Psi = 0$$

a što je ispunjeno ako je

$$M_1gl_1^2+M_2gR_2l_2-M_2gR_2^2< 0$$

Pošto je $l_1 = 3/8\ R_1$, $l_2 = 3/8\ R_2$ konačno dobijamo

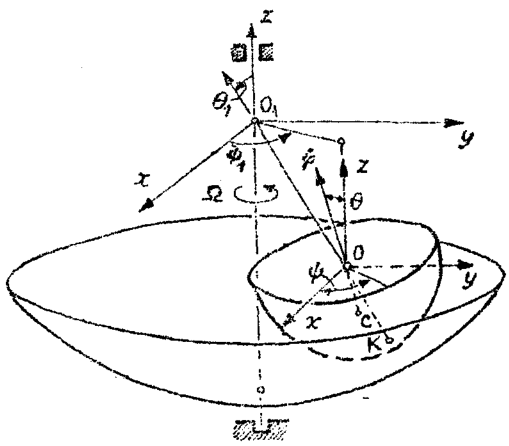
$$9M_1R_1 < 40M_2R_2$$

Prema tome, pridodate disopativne sile potpune disipacije ne remete nestabilnost pod uslovima definisanim u početku zadatka. Ovaj zaključak u skladu sa posledicom 1.2 stava 1.7 može se proširiti i na slučaj kada je Relejeva funkcija zavisna od vremena,

$$\Phi=\Phi(q,\dot{q},t),$$

a pri čemu su ispunjeni i uslovi Leme 1.1 i Leme 1.2 (glava II). Ostala uopštenja moguać su i za proizvoljne disipativne sile a u skladu sa uslovom 3) stava 3.1.

P r i m e r 3. Osnosimetrično telo, ograničeno sa donje strane sfernom površinom poluprečnika R, može da se kotrlja bez klizanja po unutrašnjosti sfere poluprečnika R_1. Sfera rotira oko vertikalne nepokretne ose, konstantnom ugaonom brzinom Ω. Ispitati stabilnost relativne ravnoteže sfernog tela (Sličan mehanički sistem nalazi se u [19] . Tamo je $\Omega = 0$).



U skladu sa oznakama na slici za Lagranževe koordinate usvojimo uglove $\theta,\psi,\varphi,\theta_1,\psi_1$ [1]. Odstojanje centra masa C od geometrjjskog centra O je l. Kinetička energija opisanog sistema je sledećeg oblika

1) $\theta,\psi,\varphi,\theta_1,\psi_1$ su relativne koordinate. Naime Oxyz, se obrće, zajedno sa sferom, ugaonom brzinom .

$$T = T_2(q,\dot{q})+T_1(q,\dot{q})+T_o(q)$$

Za nas je od značaja slobodan član T_o,

$$T_o = \frac{m}{2}(R_1-R)^2\Omega^2\sin^2\theta_1 + ml(R_1-R)\Omega^2\sin\theta\sin\theta_1\cos(\psi-\psi_1)+$$

$$+\frac{1}{2}C\Omega^2\cos^2\theta,$$

gde je m-masa tela, C - moment inercije u odnosu na osu simetrije OC, A - centralni polarni moment inercije i g - ubrzanje Zemljine teže.

Funkcija sile je oblika ,

$$U = -mg\left[R_1-(R_1-R)\cos\theta_1-l\cos\theta\right]$$

Pošto je polje sila konzervativno, a kinetička energija T ne zavisi od vremena, u slučaju kada ne deluju veze koje sprečavaju proklizavanje (u slučaju ako je sfera glatka) važi Jakobljev integral

$$T_2-T_o-U = h = \mathrm{const}$$

Pridodajmo vezu koja predstavlja uslov da nema proklizavanja. Te veze imaju u ovom slučaju sledeći oblik .

$$(R_1-R)\dot{\psi}_1\sin\theta_1+R\dot{\theta}\cos\theta_1\sin(\psi-\psi_1)+R\dot{\psi}\sin\theta_1 +$$

$$+ R\dot{\varphi}\cos\theta\sin\theta_1-\sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi-\psi_1) = 0$$

$$(R_1-R)\dot{\theta}_1+R\cos(\psi-\psi_1)\dot{\theta}+R\dot{\varphi}\sin\theta\sin(\psi-\psi_1) = 0.$$

Dakle, veze su homogene i stacionarne. U skladu sa stavom 3.2 (glava I) pridodate veze ne remete Jakobljev integral, tj. i dalje važi

$$T_2-T_o-U = h = \mathrm{const}$$

Eliminacijom zavisnih brzina on dobija sledeći oblik

$$\tilde{T}_2-\tilde{T}_o-U = h = \text{const}$$

pri čemu je, s obzirom da su veze homogene,

$$\tilde{T}_o = T_o$$

Bez posebne analize može se ustanoviti da je $\theta = \Psi = \varphi = \theta_1 = \psi_1 = 0$ ravnotežni položaj. Za odgovarajuće ravnotežno stanje razmotrimo stabilnost. U skladu sa stavom 1.1 (glava II) i posledicom 1.1 istog stava u ovom slučaju dovoljno je ispitati pod kojim uslovima

$$\tilde{\Pi} = -T_o-U$$

ima minimum. U tom smislu razvijmo $\tilde{\Pi}$ u Maklorenov red u okolini ravnotežnog položaja. Tada dobijamo

$$\tilde{\Pi} = -\Omega^2(a\theta_1^2+b\theta\theta_1+c\theta^2)+d\theta_1^2+c\theta^2+(*)e(\Psi,\Psi_1)+(**),$$

$$a,b,c = \text{const} = 0,\ d = \text{const}\ \ 0,\ c = \text{const} = 0$$

gde su $(*)$ i $(**)$ označene sve forme reda malosti većeg od dva, a po θ i θ_1, sa $e(\Psi,\Psi_1)$ označene su forme reda malosti višeg od dva po θ, θ_1. Očigledno je, da za dovoljno malo Ω, $\tilde{\Pi}_2$ u ravnotežnom položaju može biti pozitivno definitno. Time su ispunjeni svi uslovi stava 1.1.

Istaknimo da u skladu sa stavom 2.1 i 2.2 (glava II) da ravnotežno stanje, zbog egzistencije integrala kretanja, ne može biti asimptotski stabilno.

Ako pridodamo disipativne sile potpune disipacije u skladu sa posledicom 1.2 stava 1.7 (glava II) je asimptotski stabilno, ako se pretpostavi da su rešenja diferencijalnih jednačina kretanja ograničena po φ, Ψ i Ψ_1.

L I T E R A T U R A

1. S. Aljančić, Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Beograd, 1968.

2. T.P. Andjelić, Tenzorski račun, Beograd, 1967.

3. T. Andjelić i R. Stojanović, Racionalna mehanika, Beograd, 1966.

4. В.И.Арнольд, Математические методы классической механики, Москва, 1979.

5. В.И.Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, 1984.

6. A. Bilimović, Racionalna mehanika II, Beograd, 1951.

7. M. Bertolino, Diferencijalne jednačine, Beograd.

8. Н.Г.Четаев, Устойчивость движения, Москва, 1962.

9. Б.П.Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, Москва, 1967.

10. В.В.Добронравов, Основы механики неголономных систем, Москва, 1970.

11. В.В.Добронравов, Основы аналитической механики, Москва, 1976.

12. Ф.Р.Гантмахер, Лекции по аналитической механике, (prevod na srpskohrvatski, Beograd, 1965.)

13. H. Hertz, Die Prinzipen der Mechanik, Gesammelte Werke, t.3, 1894.

14. Н.Н.Красовский, Некаторые задачи теории устойчивости движения, Москва, 1959.

15. Л.Д.Кудрявцев, Курс математического анализа, Москва, 1981.

16. А.И.Лурье, Аналитическая механика, Москва, 1961.

17. И.Г.Малкин, Теория устойчивости движения, Москва, 1966.

18. Д.Р.Меркин, Введение в теорию устойчивости движения, Москва, 1976.

19. Н .И.Неймарк и Н.А.Фуфаев, Динамика неголономных систем, Москва, 1967.

20. Л.С.Понтрягин, Обыкновеные дифференциальные уравнения, Москва, 1970.

21. Л.Парс, Аналитическая динамика, Москва, 1971.

22. B.Rašajski, Teorija običnih diferencijalnih jednačina, Beograd, 1971.

23. N.Rouche, P.Hanbets, M.Laloy, Stability theory by Liapunov's direct method, Springer - Verlag, 1977.

24. D.Šiljak, Stabilnost sistema upravljanja, Beograd, 1974.

25. Б.Шутц, Геометрические методы математической физики, Москва, 1984.

26. V.A.Vujičić, Kovarjantna dinamika, Beograd, 1981.

27. V.A.Vujačić, Teorija oscilacija, Beograd.

28. В. И.Зубов, Теория колебаний, Москва, 1979.

---

29. А.С.Андреев, Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решени неавтономнои систем , Устоичивост движени . - Новосибирск: Наука, 1985.

30. А.С.Андреев, Об асимтотической устойчивости и неустойчивости неавтономны систем.- ПММ, 1979, Т.43, В П. 5.

31. Z.Arstein, Uniform asymptotic stability via the limiting equations - J. Diff. Equat., 1978, v. 17, N 2.

32. A.Bakša, O stabilnosti stacionarnog kretanja reonomnog sistema , XVII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zadar, 1986.

33. A.Bakša, Stabilnost kretanja neholonomnih sistema. Doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1976.

34. A.Bakša, O optimalnoj stabilizaciji neholonomnog sistema, PMF, Beograd, 1973.

35. R.Bulatović, Prilog konzervativnoj dinamici, doktorski rad, Beograd.

36. V.Čović, O prvim integralima diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnih sistema, Portorož, 1978.

37. V.Čović, O stabilnosti kretanja neholonomnih sistema, XIV Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Portorož, 1978.

38. V.Čović, Diferencijalne jednačine i stabilnost kretanja neholonomnih sistema sa primenama na dinamiku objekata, doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1976.

39. А.В.Карапетян, Об устойчивости равновесия неголономных систем, ПММ, Т.39, В П. 6, 1975.

40. А.В.Караметян, В.Н.Рубановский, Об устойчивости стационарных движений неконсервативных механических систем (ПММ), Т.50, ВЫП.1.

41. M.Kašić, Stabilnost ravnoteže reonomnih neholonomnih sistema, magistarski rad, Beograd, 198o.

42. M.Kašić, Stability of Equilibrium of Nonholonomic Rheonomous Systems, " T.P. Mehanika", 1982.

43. M.Kašić, O kretanju reonomnog sistema, doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1981.

44. В.В.Козлов, Об устойчивости равновесий неголономных систем, доклады академии наук СССР, 1986. том 288 Но 2.

45. В.В.Козлов, Динамика систем с неинтегрируемьми связями, вести, Москва, ун - та. сер. 1 математика, механика, 1982 Но 4.

46. Г.К.Пожарицкий, Об устойчивости диссимативных систем, ПММ, Т. 21, 1957.

47. В.В.Румянцев, О различных формах теоремы о кинетичкой энергии, Teorijska i primenjena mehanika, Beograd, 1985.

48. В.В.Румянцев, Об устойчивости движения неголономных систем, ПММ, Т. 31, В П. 2. 1967.

49. В.В.Румянцев, Об устойчивости движения по отношению к части переменных, Вестник МУ Н. 4. 1957.

5o. В.В.Румянцев, О различных формах теоремы о кинетичкой энергии, Teorijska i primenjena mehanika, Beograd, 1985.

51. В.В.Румянцев, Асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных, ПММ.том 35, 1971.

52. В.В.Румянцев, А.В.Карапетян, Устойчивость движений неголономных систем, Итоги науки и техники, Обшая механика, том 3, Москва, 1976.

53. А.С.Сумбатов, Интегралы, линейные относительно скоростей. Обобщени теоремы Якоби, Итоги науки и техники, Обшая механика том 4, Москва, 1979.

54. В.А.Вуйичич, Общее следствие прямого метода Ляпунова об устойчивости, Publ. Inst. math. t. 9 (23) 1969.

55. В.А.Вуйичич, Общее следствие об устойчивости движения и состояния равновесия механических систем, Publ. Inst. math. t. 11 (25) 1971.

56. В.А.Вуйичич, Критерий об устойчивости состояния равновесия системы динамических точек, Publ. Inst. math. t. 8 (22) 1968. pp 69 - 72.

57. В.А.Вуйичич, Об инвариатности принципов в механике, Teorijska i primenjena mehanika, Beograd, 1985.

58. V.A.Vujičić, The analytic criterion for stability of motion of rheonomic systems, Glas CCCI de L'Academie serbe des Sci. et des Arts, Classe des Sci. math. et mat. 41. 1977.

59. V.Vujičić, O ravnotežnom stanju reonomnih sistema, Tehnika, 1986.

6o. V.A.Vujičić, On the stability of stationary motions of systems with generalized potential, Extrait du GLAS CCCXLVI de l'Academic SERBE des Sciences et des Arts, Classe des Sciences mathe'matiques et naturelles, No 5o.

61. M.Vesković, Stabilnost ravnoteže reonomnih neholonomnih sistema, Tehnika, Beograd, 1987.

62. M.Vesković, Nestabilnost neholonomnih sistema, magistarski rad, PMF, Beograd, 1984.

63. M.Vesković, O nestabilnosti ravnotežnog stanja konzervativnih neholonomnih sistema, XVI. Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Bečići, 1984.

64. M.Vesković, Jedan stav o nestabilnosti ravnotežnog stanja neholonomnih sistema, nelinearni problemi dinamike, Arandjelovac, 1983.