P212116

Institut za matematiku
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Lazar Pevac

ČEBIŠEVLJEVI CENTRI SKUPA U NORMIRANOM PROSTORU

doktorska disertacija

Beograd, septembar 1987.

S A D R Ž A J

Uvodne napomene

U radu će biti reči o postojanju i načinu nalaženja rešenja nekih ekstremalnih problema aproksimativnog karaktera koji su povezani sa različitim metodama aproksimacije elemenata datog skupa iz normiranog prostora pomoću nekog konačnog skupa elemenata tog prostora ili, nekog njegovog dela.

Istorijski gledano, problem je počeo od A. N. Kolmogorova koji je došao na ideju da dati ograničeni skup M aproksimira konačnim sistemom tačaka - mrežom. U tom smislu potražio je najmanji mogući prirodan broj tačaka $N=N_M(\varepsilon)$ koji može da ima neka mreža a da se pri tom nijedan element iz M ne "udaljava" od mreže više od ε ($\varepsilon>0$). Broj

$$H_M(\varepsilon) = \log_2 N_M(\varepsilon)$$

nazvao je ε-entropijom skupa M (v. [23]).

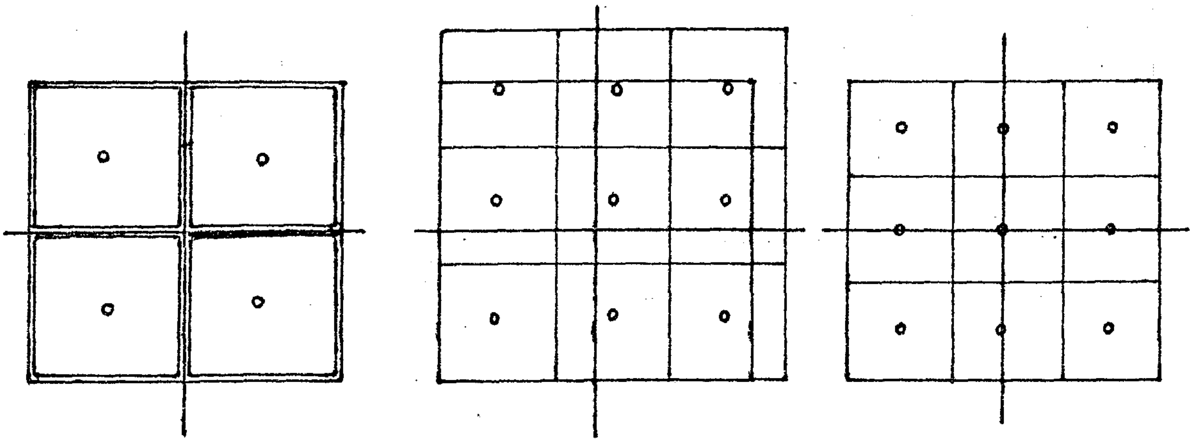
Na primer, ako posmatramo R_2 snabdeven normom

$$\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$$

i jediničnu kuglu K u tom prostoru, tada se lako pokazuje da je (v. sl. 1)

$$H_K(\varepsilon) = \log_2[-1/\varepsilon]^2.$$

Uzevši kao polaznu činjenicu broj tačaka u mreži, A. L. Garkavi je postavio zadatak da se odredi skup od n tačaka koji sa najmanjom pogreškom "aproksimira" dati ograničeni skup. Dakle, on je u neku ruku obrnuo prvobitno postavljen zadatak A. N. Kolmogorova. Odredjena rešenja tako postavljenog problema dao je u radu [18] i taj rad se smatra temeljnim sa istorijske tačke gledišta.



$N_M(1/2)=2$ $N_M(2/5)=9$ $N_M(1/3)=9$

slika 1.

U [18] su date osnovne definicije i formulacija problema čega su se svi koji su se sledećih dvadesetak godina bavili ovom problematikom u suštini držali. Pored toga rad je obilovao sa dosta instruktivnih primera za eventualno dalje istraživanje, obzirom da potreban i dovoljan uslov za egzistenciju najboljih mreža nije nadjen (nadjen je samo u jednom specijalnom slučaju). Osnovni doprinios rada je u tome što su u njemu razvijene dve osnovne metode za utvrdjivanje egzistencije elemenata najbolje aproksimacije.

Prvu bih uslovno nazvao "metoda slabe konvergencije". Naime, kao što će se to videti u prvom poglavlju (u njemu se inače nalaze osnovne definicije i teoreme koje se odnose na osnovne osobine objekata koji se uvode), pokazuje se da slaba konvergencija dozvoljava da granični element zadrži odredjena "optimalna" svojstva.

Drugu metodu bih nazvao "metoda projekcije". Ona se zasniva na činjenici da projekcija čuva najbolje mreže odnosno centre. Oblast primene ove metode je dosta sužena, medjutim, pokazano je da može da reši neke slučajeve koje druge metode ne mogu.

Kao istorijski važan izdvojio bih rad [33] od J. D. Warda. Početni cilj njegovog istraživanja je bilo dokazivane postojanja Čebiševlevog centra za bilo koji ograničeni skup u prostoru neprekidnih funkcija na zatvorenom intervalu. Medjutim, dobio je mnogo više. Pravi doprinos rada je u tome što je data jedna nova metoda.

--- Tu metodu bih nazvao metoda "sukcesivnih aproksimacija". Za razliku od prethodnih "egzistencijalnih" ova metoda je više "konstruktivna" i više zadire u "geometriju" normiranih prostora. Medjutim, pomenuti autor je rad objavio a pri tom nije sagledao sve njegove implikacije. Tako se desilo da je njegovu ideju razradila šira grupa autora medju kojima se najviše istakao Dan Amir (v. [2],[3],[4],[5],[6], i [7]).

Ovo bi bio kratak istorijski osvrt na probleme koji će biti obradjeni u ovom radu.

Sam rad je podeljen u četiri poglavlja, a na kraju rada su prilozi i literatura.

Prvo poglavlje sadrži ekspoziciju problema sa potrebnim definicijama. Takodje su date teoreme koje se odnose na osnovne osobine objekata koji se uvode. One su neophodne za potpuno razumevanje problema, a i kasnije, kao leme pri dokazivanju glavnih rezultata.

U drugom poglavlju se posmatra jedna posebna vrsta normiranih prostora sa stanovišta geometrije samog prostora. Pokazalo se da je metoda "sukcesivnih aproksimacija" primenjiva, te su dobijeni rezultati koji se odnose na postojanje Čebiševljevih centara i najboljih kompaktnih aproksimanata.

Korištenjem tehnike "slabe konvergencije" dobijeni su rezultati u trećem poglavlju. Oni se odnose na postojanje najboljih mreža i centara u odnosu na polunormu ili sistem polunormi odredjenih osobina. Takodje je nadjena veza izmedju najboljih mreža i konačnodimenzionih sekanta skupa.

Četvrto poglavlje je posvećeno najboljim mrežama u Hilbertovim prostorima. Sa tačke gledišta egzistencije najboljih mreža situacija je sasvim jasna. Medjutim, ispostavilo se da je moguće dati karakterizaciju Hilbertovih prostora upravo korištenjem pojma najbolje mreže.

Zatim slede prilozi u kojima su tretirani neki praktični problemi koji se tiču nalaženja najboljih mreža.

Prvi prilog predstavlja osvrt na jedno poglavlje iz monografije [9] i tu se govori o vezi izmedju optimalnosti numeričkih tablica i ε-entropije kompaktnog skupa.

U drugom prilogu je dato rešenje jednog konkretnog problema iz prakse koji se odnosi na izbor optimalne lokacije, a usko je povezan problematikom ovog rada. Ovaj zadatak je radjen u okviru makro projekta "Stanovanje" koji finansira Republička zajednica nauke.

Literatura sadrži samo one knjige i članke koji su u najužoj vezi sa materijom koja se izlaže.

§1. OSNOVNE DEFINICIJE I OSOBINE

Neka je X normiran prostor i A i B podskupovi od X, x element iz X i r≥0. Uvedimo sledeće oznake:

(1) $$d(x,A) = \inf_{y\in A}\|x - y\|$$

(2) $$\delta(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B)$$

(3) $$K(A,r) = \{x\in X \mid d(x,A) \le r\}$$

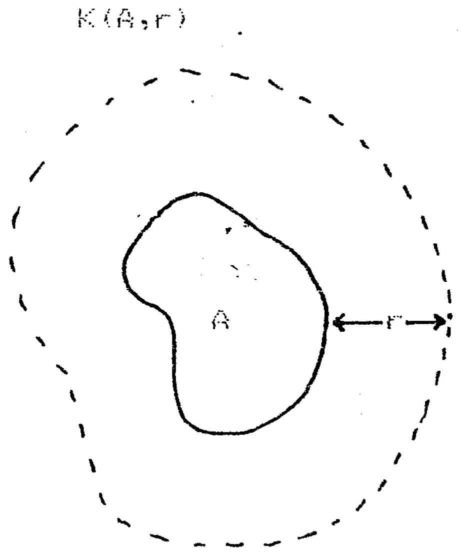
Skup $K(A,r)$ predstavlja neku vrstu r-okoline skupa A (v. sl. 2). Kad je A jednočlan skup tada imamo zatvorenu kuglu.

Da bismo dobili geometrijsku interpretaciju funkcije uvedene sa (2), posmatrajmo veličinu:

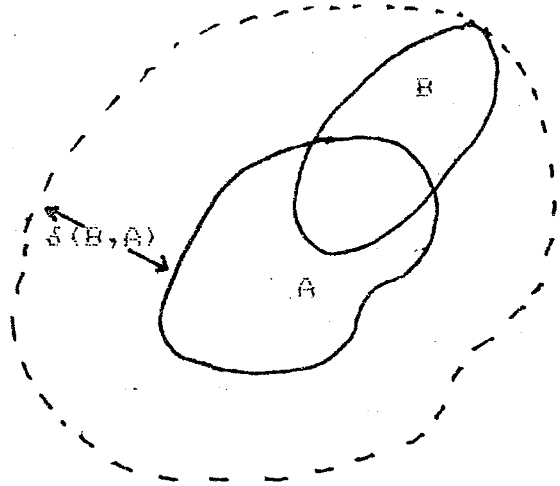
$$\inf \{r \mid B \subset K(A,r)\}$$

Ovaj broj predstavlja poluprečnik eventualne najmanje r-okoline skupa A koja sadrži skup B (v. sl. 3). Lako se pokazuje da ona uvek postoji, te da je posmatrani broj jednak $\delta(B,A)$.

Primetimo da $\delta(A,B)$ nije simetrična funkcija svojih argumenata, no ipak može da posluži za uvodjenje takozvane Hausdorfove metrike (koje se u ovom radu nećemo diticati).



slika 2.



slika 3.

Neka je skup B fiksiran a skup A neka pripada nekoj familiji $\mathcal{A}$. Tada se definiše:

(5) $$R_{\mathcal{A}}(B) = \inf_{A\in\mathcal{A}} \delta(B,A)$$

Ovaj broj se često naziva **radijusom pokrivanja** skupa B pomoću familije $\mathcal{A}$.

Prirodno je pitanje da li postoji $A^{*}\in\mathcal{A}$ tako da bude:

$$\delta(B,A^{*}) = R_{\mathcal{A}}(B)$$

Skup takvih A^{*} obeležimo sa $C_{\mathcal{A}}$, tj.:

(6) $$C_{\mathcal{A}}(B) = \{A^{*}\in\mathcal{A} \mid \delta(B,A^{*}) = R_{\mathcal{A}}(B)\}$$

Osnovni cilj istraživanja u ovoj oblasti je da se odrede uslovi pod kojima je skup $C_{\mathcal{A}}(B)$ neprazan, a kad je egzistencija obezbedjena, da se odrede njegove bliže karakteristike.

U daljem tekstu će se pretpostavljati da je B ograničen skup. Familija $\mathcal{A}$ će varirati od slučaja do slučaja. Ograničićemo se sledećim mogućnostima:

$$(7) \quad \mathcal{A} = \begin{array}{ll} \mathcal{C}_n & \text{- skup n-točlanih podskupova iz } X; \\ \mathcal{P}_n & \text{- skup svih n-dimenzionih podprostora iz } X; \\ \mathcal{P}'_n & \text{- skup svih n-dimenzionih mnogostrukosti iz } X; \\ \mathcal{K} & \text{- skup svih kompaktnih skupova iz } X; \\ \mathcal{K}_n & \text{- skup kompaktnih n-dimenzionih skupova iz } X. \end{array}$$

Prvi slučaj je izuzetno važan, jer se od njega počelo, i svi ostali slučajevi su na neki način sledili iz njegovog upoštenja. Kad je $n=1$ on ima jasnu geometrijsku interpretaciju. Naime, treba naći kuglu najmanjeg poluprečnika koja sadrži dati ograničeni skup. Centar te kugle se naziva Čebiševljev centar datog skupa.

Ako je $n>1$ tada se zahteva da se dati skup prekrije skupom od n kugli tako da njihov maksimalni poluprečnik bude što je moguće manji. Centre kugli koje udovoljavaju ovom zahtevu nazivamo Čebiševljevom mrežom skupa.

U drugom i trećem slučaju skup koji se aproksimira ne mora biti nužno ograničen već mora imati konačan n-dimenzioni dijametar ($R_{\mathcal{P}_n}(B) < \infty$). Ovde se nastoji naći n-dimenziona ravan, odnosno, n-dimenziona mnogostrukost od koje se dati skup najmanje udaljava (u smislu prethodnih definicija). Takva ravan, odnosno mnogostrukost, se naziva najbolji n-dimenzioni sekant, odnosno, V-sekant skupa.

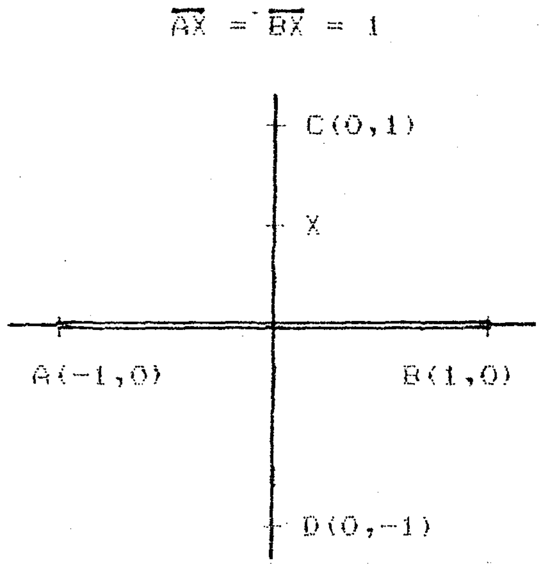
Za razliku od prethodnih slučajeva, koji imaju odredjenu praktičnu primenu, četvrti slučaj je više teorijskog karaktera. On je, naime, nastao kao prirodno uopštenje Čebiševljeve mreže. Elemneti skupa $C_{\mathcal{K}}(B)$ se nazivaju najboljim kompaktnim aproksimantima.

Poslednji slučaj je u vrlo uskoj vezi sa najboljim n-dimenzionim sekantima skupa (v. [30]).

U svim nabrojanim slučajevima moguće je pretpostaviti da traženi objekti pripadaju odredjenom podprostoru od X. Tada govorimo o uslovljenim centrima, mrežama, sekantima i kompaktnim aproksimantima.

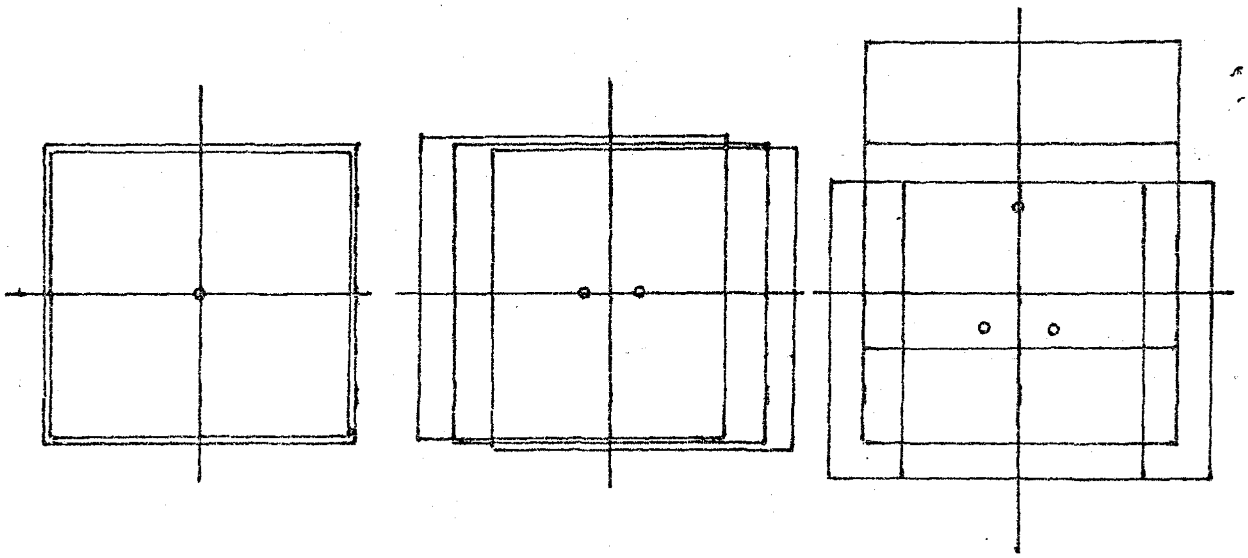
Pored normе $\|.\|$, pretpostavićemo da je na X definisana i polunorma **p** sa odredjenim osobinama o kojima će kasnije biti reči. Ako u izrazima od (1) do (6) zamenimo $\|.\|$ sa **p** dobićemo $d_p(x,A)$, $\delta_p(A,B)$, $K_p(A,r)$, $R_{pA}(B)$ i $C_{pA}(B)$.

Pre nego predjemo na utvrdjivanje nekih osnovnih osobina koje slede neposredno iz ekspozicije problema, posmatrajmo prostor R_2 iz uvodnog dela i u njemu odsečak od (-1,0) do (1,0). Na osnovu slike 4. vidimo da je Čebiševljev centar bilo koja tačka sa odsečka (0,-1) do (0,1). S druge strane Čebiševljev centar jedinične kugle u istom prostoru je jedinstven i nalazi su u koordinatnom početku.



slika 4.

Vidimo da u vrlo jednostavnim slučajevima Čebiševljev centar ne samo da nije jedinstven nego ne mora da pripada ni konveksnom omotaču skupa.



slika 5.

Posmatrajmo u istom prostoru jediničnu kuglu i njenu najbolju 1, 2, 3-mrežu (v. sl. 5). Dakle, o jedinstvenosti kod najboljih n-mreža još manje može biti govora. Osim toga, primer nam sugeriše da u prostoru m ograničenih nizova, radijus pokrivanja jedinične kugle najboljom n-mrežom ne zavisi od n, odnosno uvek je jednak 1.

Pre nego predjemo na rešavanje glavnog problema utvrdimo neke osnovne osobine uvedenih pojmova sa (5) i (6). Pošto će se u ovom radu tematika većinom doticati Čebiševljevih centara, odnosno mreža, pretpostavimo da je $A=\mathscr{C}_n$. Odgovarajuće pojmove (5) i (6) obeležavaćemo sa $R_n(.)$ i $C_n(.)$.

Teorema 1.1 Ako je X normiran prostor i B ograničen skup iz X tada važi sledeće:

(a) $0 \le R_n(B) < \infty$;

(b) $B_1 \subset B \Longrightarrow R_n(B_1) \le R_n(B)$;

(c) $k>n \Longrightarrow R_k(B) \le R_n(B)$;

(d) $R_n(B) = R_n(cl(B))$ gde je $cl(B)$ zatvorenje skupa B;

(e) $R_1(B) = R_1(co(B))$ gde je $co(B)$ zatvoreni konveksni omotač skupa B;

(f) $R_n(kB) = |k|R_n(B)$ gde je k skalar;

(g) $R_n(x+B) = R_n(B)$ gde je $x\in X$;

(h) $R_1(B_1) \le R_1(B) + \delta(B_1,B)$ gde je $B_1\subset X$ i ograničen;

(i) Ako je Y podprostor od X i $B\subset Y$ tada važe nejednakosti
$(R_n(B)|_Y)/2 \le R_n(B)|_X \le R_n(B)|_Y$
gde $R_n(B)|_Y$ označava da se radijus pokrivanja uzima

u odnosu na mreže koje pripadaju podprostoru Y;

(j) $\lim_{n\to\infty} R_n(B) = R_\chi(B)$.

Dokaz: Zbog očiglednosti, dokaze nekih delova ćemo ispustiti dajući samo odredjene komentare.

Što se tiče tačke (a) jasno da važi i sledeće:

$$R_n(B) = \infty \implies B \text{ nije ograničen},$$

$$R_n(B) = 0 \implies \mathrm{card}(B) \leq n.$$

Tačke (b) i (d) važe za proizvoljnu familiju $\mathcal{A}$, dok bi se tačka (c) mogla uopštiti na sledeći način

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A} \implies R_{\mathcal{A}_1}(B) \geq R_{\mathcal{A}}(B).$$

Tačka (e) važi za svaku familiju $\mathcal{A}$ koja je sastavljena od konveksnih skupova, dok tačke (f) i (g) važe za sve familije invarijantne u odnosu na sabiranje i množenje skalarom.

Da bismo dokazali (h) pretpostavimo da je $R_1(B)=r$ a $R_1(B_1)=r_1$. Primetimo, da za svako $\varepsilon>0$ postoji $b\in X$ tako da je $B \subset K(b,r+\varepsilon)$. Tada je i $K(B,\delta(B_1,B)) \subset K(b,r+\varepsilon+\delta(B_1,B))$. Odavde sledi da je $B_1 \subset K(b,r+\varepsilon+\delta(B_1,B))$, odnosno

$$r_1 \leq r + \varepsilon + \delta(B_1,B),$$

odakle se dobija tražena nejednakost kad $\varepsilon \to 0$.

U tački (i) druga nejednakost je očevidna. Dokažimo prvu. Neka je $R_n(B)|_X=r$ i $R_n(B)|_Y=r_1$. Tada za svako $\varepsilon>0$ postoji $S_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, tako da je $\delta(B,S_n)\leq r+\varepsilon$. Tada su skupovi

$$E_j = M \cap K(x_j,r+\varepsilon) \qquad (1 \leq j \leq n)$$

neprazni, pa možemo izabrati $y_j\in E_j$. Očevidno je

$$r_1 \leq \delta(B,\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}) \leq 2(r+\varepsilon)$$

odakle sledi tvrdjenje kad $\varepsilon \to 0$.

Da bi se dokazalo tvrdjenje pod (h) uočimo da za $s_n \in C_n(B)$ i $K \in C_\infty(B)$ važi:

(8) $$\delta(s_n,B) \geq \delta(K,B).$$

S druge strane, zbog kompaktnosti skupa K, za svako $\varepsilon>0$ postoji broj $N(\varepsilon)$ i mreža $M=\{t_1,t_2,\ldots,t_N\}$ sa osobinom $\delta(M,K) < \varepsilon$, odakle neposredno sledi

(9) $$\delta(s_N,B) \leq \delta(M,B) \leq \delta(K,B) + \varepsilon.$$

Iz nejednakosti (8) i (9) sledi traženi rezultat. Primetimo, da se takodje može dokazati

$$\lim_{n\to\infty} d_n(B) = R_\infty(B),$$

gde je $d_n(b)$ n-dimenzini dijametar skupa B (v. [29]). ∎

Slično prethodnoj teoremi koja se odnosila na Čebiševljev radijus, imamo sledeću teoremu koja se odnosi na Čebiševljeve centre, odnosno mreže. Odgovarajući skup (6) Čebiševljevih n-mreža datog skupa B obeležavaćemo sa $C_n(B)$.

Teorema 1.2 Ako je X normiran prostor i B ograničen skup u X tada važi

(a) $C_n(kB) = kC_n(B)$ gde je k skalar;

(b) $C_n(x+B) = x + C_n(B)$ gde je $x \in X$;

(c) $co(C_1(B)) = C_1(B)$;

(d) $C_1(co(B)) = C_1(B)$;

(e) Ako je $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\} \in C_n(B)$ tada je

$$\max_{1\leq i\leq n}\|y_i\| \leq \sup_{x\in B}\|x\| + R_n(B);$$

(f) $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\} \in C_n(B) \wedge n>1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y_1 \in C_1(B_1) \vee y_2 \in C_1(B_2) \vee \ldots \vee y_n \in C_1(B_n)$

gde je $B_j = B \cap K(y_j,R_n(B))$, $1\leq j\leq n$,

(g) Ako je Y podprostor od X, takav da postoji projekcija P iz X u Y (P je lineran, $\|P\|=1$ i $P(Y)=Y$), tada za svaki ograničeni skup B iz Y važi

$$\{y_1,y_2,\ldots,y_n\} \in C_n(B)|_X \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{P(y_1),P(y_2),\ldots,P(y_n)\} \in C_n(B)|_Y$$

gde $C_n(B)|_X$ označava Čebiševljevu mrežu skupa u odnosu na prostor X.

(h) Ako je X spregnut prostor i

$\{y_{1,k},y_{2,k},\ldots,y_{n,k}\} \in C_n(B)$ gde je $k\in N$,

$y_{j,k} \longrightarrow^* y_j$ kad $k \longrightarrow \infty$ za $1\leq j\leq n$,

tada $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\} \in C_n(B)$,

pri čemu $\longrightarrow^*$ označava *slabu konvergenciju,

Dokaz: Dokazi tvrdjenja (a)-(g) se jednostavno izvode. Što se tiče tačaka (c) i (d), primetimo da se lako mogu napraviti primeri koji opovrgavaju slične iskaze za najbolje n-mreže. Osim toga tačka (d) nam sugeriše da se u proučavanju Čebiševljevih centara možemo ograničiti na ograničene, zatvorene i konveksne skupove. Tačka (e) pokazuje da je skup najboljih n-mreža datog skupa ograničen. Geometrijsko tumačenje tačke (f) je sledeće. Ako je skup $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ najbolja mreža skupa B, tada je bar jedan član tog skupa Čebiševljev centar jednog dela skupa B. Tvrdjenje pod (g) daje jednostavne uslove pod kojima Čebiševljeve mreže mogu da se prenesu iz prostora u prostor. Postoje nešto "finiji" uslovi sa istim krajnjim efektom, ali o tome opširnije u [7].

Da bismo dokazali tvrdjenje pod (h) uzmimo da je $R_n(B)=r$. Ako je $b\in B$ tada, na osnovu polazne pretpostavke, za svako $k\in N$ postoji j $(1\leq j\leq n)$ tako da je

$$\|b - y_{j,k}\| \leq r.$$

Prema tome, za svaki element b iz B postoji niz

$$C_b = (y_{j(k),k}),$$

pri čemu je

$$\|b - y_{j(k),k}\| \leq r, \ k\in N, \ 1\leq j(k)\leq n\}.$$

Obzirom da je $j(k)$ prirodan broj koji se kreće izmedju 1 i n, moguće je iz gornjeg niza izvući bar jedan njegov podniz gde je prvi index i_o neki fiksan broj izmedju 1 i n. Neka to bude niz $(y_{jo,km})$. Na osnovu pretpostavke tvrdjenja koje dokazujemo

$$y_{jo,km} \longrightarrow^{*} y_{jo} \text{ kad } k_m \longrightarrow \infty.$$

Medjutim, na osnovu leme 3.1. tačan je sledeći stav.

Lema 1.1 Ako je X spregnut Banahov prostor i (x_n) niz iz X koji *slabo teži ka x tada $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|x_n\| \geq \|x\|$.

Odavde imamo

$$\|b - y_{jo}\| \leq r.$$

Tako smo dokazali da za svako $b\in B$ postoji neko y_{jo} udaljeno od b ne više od r, čime je dokaz tvrdjenja pod (f) završen.

Primetimo samo da iz ovog stava sledi da je skup najboljih n-mreža u spregnutom prostoru sekvencijalno *slabo zatvoren. ∎

Posmatrajmo sledeću teoremu koja sa bavi jednim vrlo posebnim i naizgled jednostavnim slučajem. Krajnji rezultat je pomalo neočekivan.

Teorema 1.3 Ako je X normiran prostor tada za svaki skup koji se sastoji od n+1 tačke postoji najbolja Čebševljeva n-mreža. Postoje takvi prostori u kojima za skup od n+2 tačke ne postoji najbolja Čebiševljeva n-mreža (Garkavi v. [17]).

Dokaz: Neka je $M=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ i $R_n(M)=r$. Tada se lako uvidja da je

$$\max_{k\neq j}\|x_k - x_j\| = 2r.$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti

$$\|x_0 - x_1\| = 2r.$$

Uzimajući

$$y_1 = (x_0 + x_1)/2,$$

$$y_j = x_j \quad \text{za } j=2,3,\dots,n$$

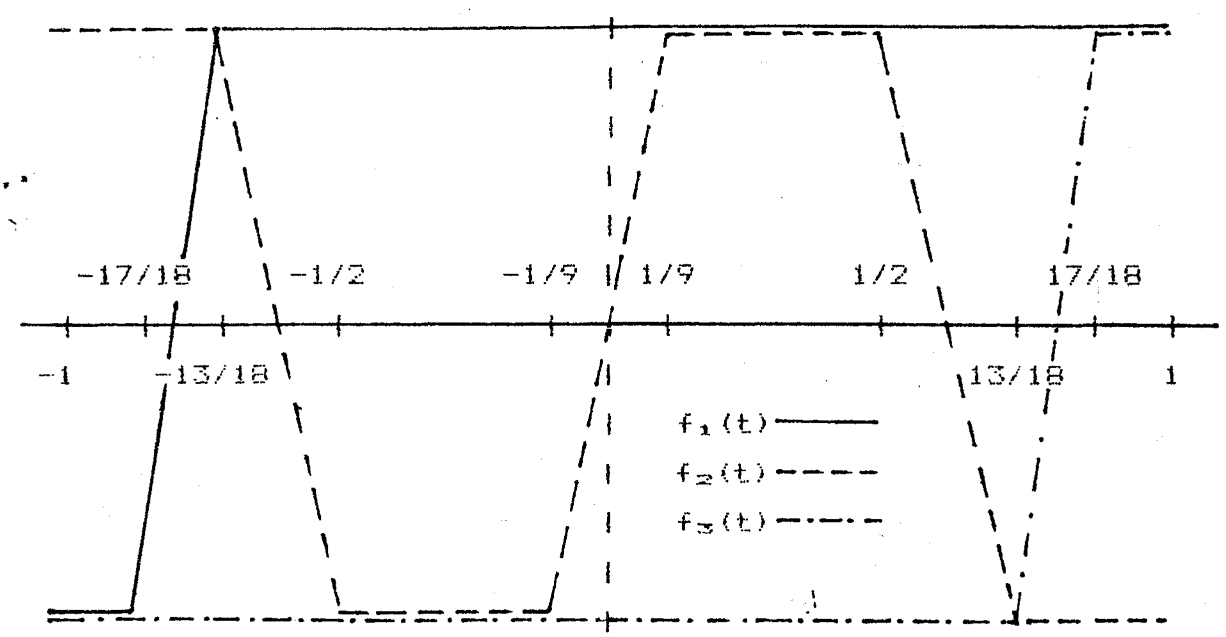
zaključujemo da skup $\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ čini najbolju n-mrežu skupa M.

Dokažimo drugi deo teoreme za n=1. U tom smislu posmatrajmo prostor C[0,1] sa uobičajenom uniformnom metrikom i skup

$$H = \{ f \in C[0,1] \mid \int_{-1}^{1} f(t)d|t| = 1/3 \}$$

Posmatrajmo funkcije sa slike 6. Neposredno se proverava da one pripadaju H kao i da je

$$\alpha(t) = \sup_{1\le j\le 3} f_j(t) = 1, \quad \beta(t) = \inf_{1\le j\le 3} f_j(t) = 1.$$



slika 6.

Prema tome, Čebiševljev centar skupa $M = \{f_1,f_2,f_3\}$ ujedno je Čebiševljev centar skupa $\{\alpha,\beta\}$ koji pripada H. Dakle, treba naći $h\in H$ takav da je izraz

$$\max\{\|1 - h\|, \|-1 - h\|\} = 1 + \|h\|$$

što manji, odakle se neposredno vidi da je to ekvivalentno sa postojanjem elementa u H koji je najbliži nuli.
Odmah primećujemo sledeće

$$h\in H \Rightarrow 1/3 = \int_{-1}^{1} h(t)d|t| \le \|h\| \int_{-1}^{1} d|t| = 2\|h\| \Rightarrow \|h\| \ge 1/6,$$

odnosno, ako postoji $h_0\in H$ koji je najbliži nuli tada je $\|h_0\|=1/6$. Obzirom da je

$$\int_{-1}^{1} h_o(t)d|t| = -\int_{-1}^{0} h_o(t)dt + \int_{0}^{1} h_o(t)dt = 1/3,$$

to bar jedan od integrala u zbiru mora biti veći ili jednak 1/6. Bez gubitka opštosti pretpostavimo da je

$$\int_{0}^{1} h_o(t)dt \geq 1/6.$$

Medjutim, kako važi

$$\int_{0}^{1} h_o(t)dt \leq \|h_o\| \int_{0}^{1} dt = 1/6,$$

imamo

$$\int_{0}^{1} h_o(t)dt = 1/6,$$

što ima za posledicu

$$\int_{0}^{1} (\|h_o\| - h_o)dt = 0.$$

Odavde, zbog $\|h_o\| - h_o \geq 0$ sledi

$$h_o(t) = 1 \text{ za } t\in[0,1].$$

Na potpuno isti način zaključujemo

$$h_o(t) = -1 \text{ za } t\in[-1,0].$$

Ovde dolazimo do kontradikcije zbog neprekidnosti funkcije $h_o(t)$ u nuli.

Posmatrajmo sada skup

$$B = \{F(t) \mid F(t) = f(t) - f_1(t) \wedge f(t)\in H\}.$$

Jasno je da je B Banahov prostor i da u njemu za tačke $F_1=0$, $F_2=f_2-f_1$ i $F_3=f_3-f_1$ ne postoji Čebiševljev centar.

Tako je drugi deo teoreme dokazan za n=1. Primer za n>1 se može jednostavno konstruisati.■

Prethodni primer je ilustrativan jer pokazuje da postoje prostori u kojima za **dve** tačke ($\alpha(t)$ i $\beta(t)$) ne postoji **uslovljeni** Čebiševljev centar (centar koji pripada H). Takodje je neophodno primetiti da je prethodni prostor bio Banahov i da je srž "igre" bio u tome što neki funkcionali u C[0,1] nemaju maksimalni elemenat; odnosno da u C[0,1] postoje "neproksimalni" Banahovi podprostori.

Za nekompletane normirane prostore slični primeri se još lakše prave koristeći "nedostajuće tačke". Stoga ćemo ubuduće pažnju obratiti isključivo na Banahove prostore.

Pošto smo u ovoj glavi dali ekspoziciju problema sa nekoliko osnovnih osobina koje slede iz definicije, u narednoj prelazimo na preciziranje geometrije prostora u cilju obezbedjivanja egzistencije definisanih objekata.

§ 2. Čebiševljevi centri

Posmatrajmo normiran prostor X čija je geometrija okarakterisana sledećom definicijom.

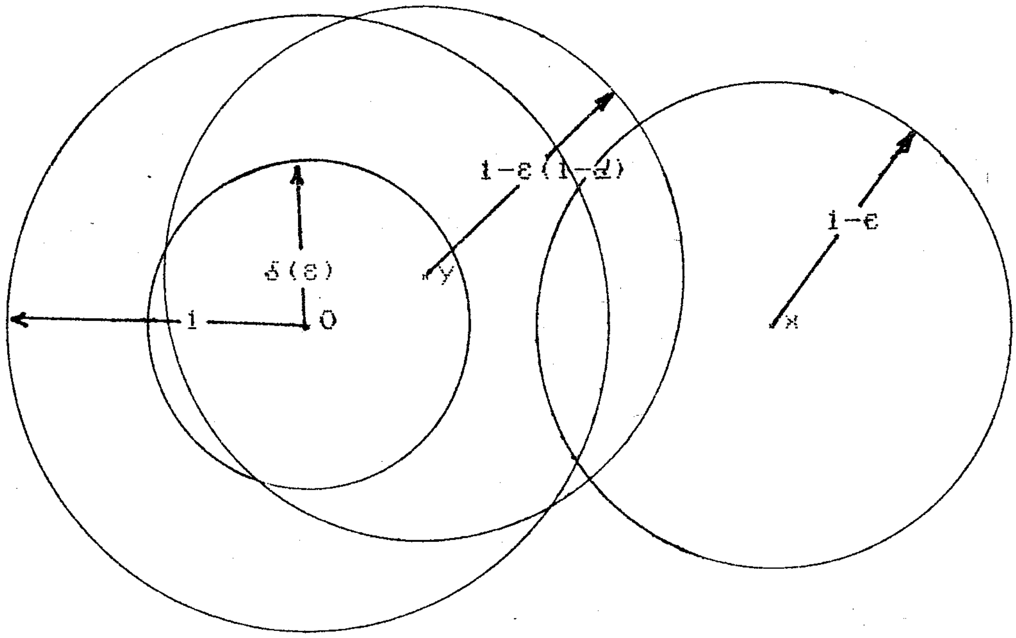
Definicija 2.1. Kazaćemo da je jedinična kugla u prostoru X ***d*-aproksimativna** ako i samo ako za svako ε, $0<\varepsilon<1$, postoji $\delta(\varepsilon)$, $0<\delta(\varepsilon)<1$, tako da za svaki element x iz X postoji y koje pripada $K(0,\delta(\varepsilon))$ i da tada za svako z iz X važi

$$\|z\| \leq 1 \wedge \|z - x\| \leq 1 - \varepsilon \implies \|z - y\| \leq 1 - \varepsilon(1 - d)$$

pri čemu je $0\leq d<1$ i $\delta(\varepsilon)$ teži nuli kad ε teži nuli.

Ova definicija ima sledeće geometrijsko tumačenje. Za svaku kuglu poluprečnika $1-\varepsilon$ koja sa jediničnom kuglom ima neprazan presek postoji kugla poluprečnika $1-\varepsilon(1-d)$ čiji se centar nalazi u $\delta(\varepsilon)$ okolini centra jedinične kugle i koja sadrži presek jedinične kugle i prethodno pomenute kugle pluprečnika $1-\varepsilon$. Drugim rečima svaki deo jedinične kugle može dovoljno dobro da se aproksimira tačkom koja je dovoljno blizu njenom centru. Prostore koji poseduju ovu osobinu, kratkoće radi, nazivaćemo *d*-aproksimativnim prostorima (v. sl. 7.).

Neposredno iz gornje definicije, dolazimo do sledećih činjenica, neophodnih za dalji rad.



slika 7.

Teorema 2.1. Ako je X d-aproksimativan prostor tada važi sledeće:

(a) uvek se može pretpostaviti da je $\delta(\varepsilon)$ monotono opadajuća;

(b) $\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon(1-d)$;

(c) ako je $r>0$ tada za svako ε, $0<\varepsilon<r$, postoji $\delta'(\varepsilon)$ tako da za svako $x\in X$ postoji $y\in K(0,\delta'(\varepsilon))$ i da tada za svako $z\in X$ važi

$$\|z\| \leq r \wedge \|z - x\| \leq r - \varepsilon \implies \|z - y\| \leq r - \varepsilon(1 - d),$$

gde je $\delta'(\varepsilon) = r\delta(\varepsilon/r)$;

(d) ako je dato r, $R_1<r\leq R_2$, tada za svako ε, $0<\varepsilon<R_1$, postoji $\underline{\delta}(\varepsilon)$ tako da za svako $x\in X$ postoji $y\in K(0,\underline{\delta}(\varepsilon))$ i da tada za svako $z\in X$ važi

$$\|z\| \leq r \wedge \|z - x\| \leq r - \varepsilon \implies \|z - y\| \leq r - \varepsilon(1 - d),$$

gde je $\underline{\delta}(\varepsilon) = R_2\delta(\varepsilon/R_1)$.

Dokaz. Da bismo dokazali deo pod (a) uočimo da ako imamo funkciju $\delta_1(\varepsilon)$ takvu da je

$$\delta_1(\varepsilon) \geq \delta(\varepsilon) \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon \to 0}\delta_1(\varepsilon) = 0,$$

tada, prema definiciji 2.1., prostor X ostaje d-aproximativan i onda kad umesto $\delta(\varepsilon)$ uzmemo $\delta_1(\varepsilon)$. Prema tome, ako $\delta(\varepsilon)$ nije monotono opadajuća uvek je možemo zameniti nekom njenom monotonom majorantom.

Tačka pod (b) se lako proverava ako uzmemo da je element z iz definicije 2.1. po normi baš jednak 1. Primenom relacije trougla na tačke 0,y i z nalazimo

$$\|z\| \leq \|y\| + \|z - y\|,$$

odakle neposredno sledi

$$1 \leq \delta(\varepsilon) + 1 - \varepsilon(1 - d),$$

odnosno

$$\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon(1-d),$$

što je i trebalo dokazati.

Da bi se dokazao deo (c) zamislimo da su nam zadane kugle $K(0,r)$ i $K(x,r-\varepsilon)$. Ako želimo da na njih direktno primenimo definiciju 2.1. moramo ih prethodno primenom homotetičnog preslikavanja smanjiti (povećati), dok radijus prve kugle ne postane 1. Tada će radijus druge iznositi $1-\varepsilon/r$. Sada je moguće primeniti definiciju i dobiti $y \in K(0,\delta(\varepsilon/r))$. Preostaje nam da inverznim preslikavanjem stvari vratimo u prvobitno stanje. U tom slučaju ry će pripasti kugli čiji će poluprečnik iznositi $r\delta(\varepsilon/r)$.

Tvrdjenje (d) sledi iz (c) kad se ovo primeni na celu skalu kugli čiji radijus varira izmedju R_1 i R_2. ∎

Od interesa za dalji rad je tvrdjenje pod (d) na koje ćemo se oslanjati kad se nalazimo u d-aproksimativnim prostorima.

Teorema 2.2. Ako je X uniformno konveksan prostor tada je X 0-aproksimativan.

Dokaz. Podsetimo se da je X uniformno konveksan ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X)$$
$$\|x\| = \|y\| = 1 \quad \wedge \quad \|x - y\| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Iz ove definicije može se izvući i nešto više. Naime tačan je sledeći stav.

Lema 2.1. Ako je prostor uniformno konveksan tada važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X)$$
$$\|x\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|y\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|x - y\| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Dokaz: Konstatujmo da navedena lema ima jednostavno geometrijsko tumačenje. Do njega dolazimo kad u poslednjoj relaciji zamenimo x i y sa x−z i y−z respektivno, gde je z proizvoljan element iz X. Tada imamo

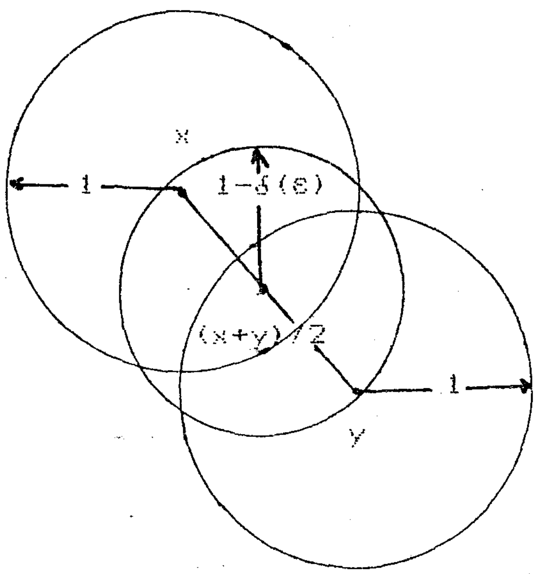
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x, y, z \in X)$$
$$\|x - z\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|y - z\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|x - y\| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|(x + y)/2 - z\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Odavde zaključujemo, ako su x i y centri kugli poluprečnika jednakog jedan i rastojanje medju njima veće ili jednako ε, tada se njihov presek sadrži u kugli čiji je centar sredina duži koja spaja x i y a poluprečnika jednak $1-\delta(\varepsilon)$ (v. sl. 8.).

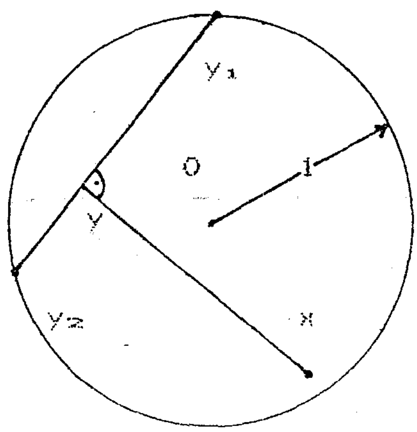
Pre nego započnemo dokaz uvedimo neke pretpostavke koje će ga olakšati, a neće smanjiti opštost. Pre svega ako je $\|x\| = \|y\| \leq 1$, tada se homotetičnim preslikavanjem može dobiti slučaj $\|x\|=\|y\|=1$ koji figuriše u definiciji uniformne konveksnosti. Ako je pak $1\geq\|x\|>\|y\|$ tada se homotetijom dolazi do situacije $\|x\|=1$ i $\|y\|<1$. Dakle, samo je ova poslednja mogućnost od interesa za dokaz.

Povucimo kroz y hiperravan čiji je maksimalni element x-y (ovo je moguće na osnovu uniformne konveksnosti). Uočimo pravu p nastalu kao presek date hiperravni i ravni odredjene sa koordinatnim početkom i tačkama x i y (v. sl. 9.). Na osnovu pretpostavki postoje tačke y_1 i y_2 takve da je

$$y=my_1+(1-m)y_2 \quad \wedge \quad \|y_1\|=\|y_2\|=1 \quad \wedge \quad \|x-y_1\|\geq\varepsilon \wedge \|x-y_2\|\geq\varepsilon.$$



slika 8.



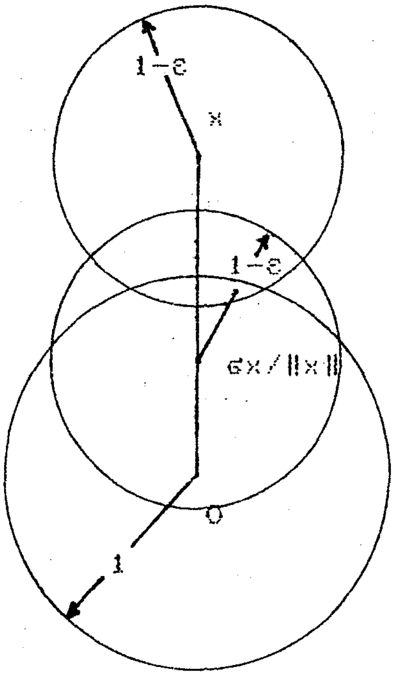
slika 9.

Ako na parove tačaka (x,y_1) i (x,y_2) primenimo definiciju uniformne konveksnosti tada koristeći te činjenice imamo

$$\|(x+y)/2\| \leq \|m(x+y_1)/2\|+\|(1-m)(x+y_2)/2\| \leq m\delta+(1-m)\delta = \delta.$$

Time je dokaz pomoćnog stava završen.

Predjimo sada na dokaz osnovnog stava. Neka su date kugle $K(0,1)$ i $K(x,1-\varepsilon)$. Posmatrajmo skup tačaka na otsečku



slika 10.

$[0,x]$ koje imaju osobinu da kugla sa centrom u njoj i poluprečnikom $1-\varepsilon$ sadrži presek $K(0,1) \cap K(x,1-\varepsilon)$ (v.sl. 10.). Taj skup je očito neprazan jer x zadovoljava taj uslov. Jasno je, takodje, da se iz tog skupa, kao markantna, može izvući tačka najbliža koordinatnom početku. Na taj način za svako $\varepsilon>0$ možemo izabrati $\underline{\delta}$ po formuli (1). Jasno je da je pomenuta funkcija monotona, te samo treba dokazati da teži u 0 kad ε teži u 0.

(1) $\quad \underline{\delta}(\varepsilon) = \min \{ \sigma \mid K(0,1) \cap K(x,1-\varepsilon) \subset K(\sigma x/\|x\|,1-\varepsilon) \}$

Pretpostavimo da to nije tako, odnosno, $\underline{\delta}(\varepsilon) \to \delta_o > 0$ kad $\varepsilon \to 0$. Posmatrajmo jedno odredjeno ε za koje je

$$1 - \varepsilon > 1 - \delta(\delta_o),$$

što je uvek moguće zbog $\delta_o>0$. Primetimo, da je u prethodnom redu, funkcija $\delta()$ ona iz definicije uniformne konveksnosti.

Očevidno je da na osnovu izbora funkcije $\underline{\delta}$ važi

(2) $\quad K(0,1) \cup K(x,1-\varepsilon) \subset K(\underline{\delta}(\varepsilon)x/\|x\|,1-\varepsilon),$

a isto tako i

$$K(\underline{\delta}(\varepsilon)x/\|x\|,1-\varepsilon) \subset K(\underline{\delta}(\varepsilon)x/\|x\|,1) \cup K(0,1).$$

Ako na poslednji deo inkluzije primenimo lemu 2.1. dobijamo

$$K(0,1) \cup K(x,1-\varepsilon) \subset K(0.5\underline{\delta}(\varepsilon)x/\|x\|,1-\delta(\underline{\delta}(\varepsilon))).$$

Obzirom da je $\underset{\sim}{\delta}(\varepsilon)>\delta_o$ i da smo izabrali ε tako da bude $1-\delta(\delta_o)<1-\varepsilon$, imamo

$$K(0,1) \cup K(x,1-\varepsilon) \subset K(0.5\underset{\sim}{\delta}(\varepsilon)x/\|x\|,1-\varepsilon).$$

Ako ovo uporedimo sa (2), na osnovu definicije funkcije $\underset{\sim}{\delta}$ dolazimo do protivrečnosti

$$0.5\underset{\sim}{\delta}(\varepsilon) > \underset{\sim}{\delta}(\varepsilon).\blacksquare$$

Primer 2.1. Posmatrajmo skup $\mathscr{C}[0,1]$ neprekidnih funkcija na intervalu $[0,1]$. Pokazaćemo da je to jedan O-aproksimativan prostor sa $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$.

Neka je f centar neke kugle poluprečnika $1-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$ koja sa jediničnom kuglom ima neprazan presek. Definišimo funkciju

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) \text{ ako je } |f(x)| \leq \varepsilon \\ \varepsilon\operatorname{sgn}(f(x)) \text{ ako je } |f(x)| > \varepsilon \end{cases}$$

Očevidno je data funkcija neprekidna. Osim toga za proizvoljno $x\in[0,1]$ i $g\in K(f,1-\varepsilon)\cap K(0,1)$ važi

$$|f_\varepsilon(x)-g(x)| \leq |f(x)-g(x)| \leq 1-\varepsilon,$$

ako je $|f(x)|\leq\varepsilon$. Ako je $|f(x)|>\varepsilon$ tada imamo dva slučaja,

$$|f_\varepsilon(x)-g(x)| = |\varepsilon\operatorname{sgn}(f(x))-g(x)| = |\varepsilon-|g(x)|| \leq 1-\varepsilon$$

za $\operatorname{sgn}(f(x))=\operatorname{sgn}(g(x))$ i

$$|f_\varepsilon(x)-g(x)| = |\varepsilon\operatorname{sgn}(f(x))-g(x)| \leq |f(x)-g(x)| \leq 1-\varepsilon$$

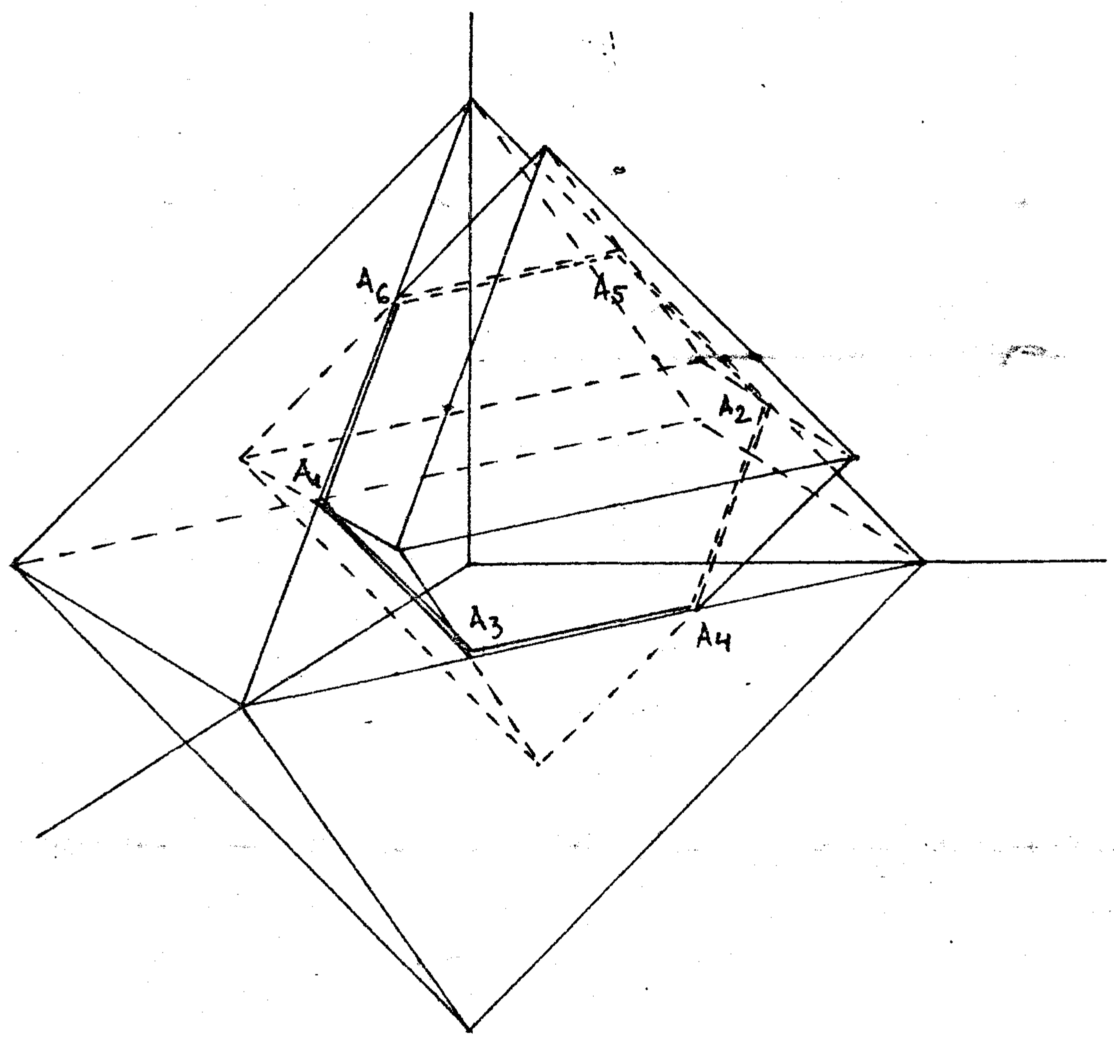
kad je $\operatorname{sgn}(f(x))=-\operatorname{sgn}(g(x))$. Odavde slede osobine primera koje smo želeli pokazati. $\blacksquare$

Primer 2.2. Posmatrajmo Euklidov trodimenzioni prostor sa normom

$$\|(x,y,z)\|=|x|+|y|+|z|.$$

Pokazaćemo da u ovom prostoru postoji kugla poluprečnika $1-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$, takva da njen presek sa jediničnom kuglom ne može da stane ni u jednu kuglu čiji je centar strogo unutar jedinične kugle, a poluprečnik jednak $1-\varepsilon$.

Uočimo kuglu $K((1/3,1/3,1/3),2/3)$. Njen centar pripada jediničnoj sferi koja seče ovu po pravilnom šestouglu čija su temena $A_1(2/3,0,1/3)$, $A_2(1/3,2/3,0)$, $A_3(2/3,1/3,0)$, $A_4(0,2/3,1/3)$, $A_5(0,1/3,2/3)$, $A_6(1/3,0,2/3)$ (v.sl. 11.).



slika 11.

Čebiševljev radijus ovog skupa je 2/3, a Čebiševljev centar mu je jedinstven. To se lako proveri kad se uoči da je presek geometrijskih mesta tačaka koje su od naspramnih tačaka šestougla udaljene 2/3 jednočlan skup koji sadrži tačku (1/3,1/3,1/3), a ova pripada jediničnoj sferi.

Lako se pokazuje da je ovo ipak 0.5-aproksimativan prostor sa $\delta(\varepsilon)=2\varepsilon$.

Ako bismo ovaj prostor snabdeli uobičajenom metrikom tada bi d bilo jednako 0, a $\delta(\varepsilon)=(2\varepsilon)^{1/2}$. ∎

***Primer* 2.3.** Ne postoji d za koje bi $\mathbf{l}_1$ bio d-aproksimativan prostor. U tom smislu posmatrajmo nizove (x_{nk}) i (z_{nk}) tačaka iz $\mathbf{l}_1$ definisanih na sledeći način

$$x_{nk} = \begin{cases} 1/(2n+1) & \text{za } k\leq 2n+1 \\ 0 & \text{za } k>2n+1 \end{cases}, \qquad z_{nk} = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{za } k\leq n+1 \\ 0 & \text{za } k>n+1 \end{cases}.$$

Odavde imamo

$$\|(z_{nk})\| = 1, \quad \|(x_{nk})-(z_{nk})\| = 1-1/(2n+1)$$

za proizvoljno $n\in\mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon_n=1/(2n+1)$. Pretpostavimo da postoji d za koje je $\mathbf{l}_1$ d-aproksimativan prostor i na ovako odabrane parametre primenimo definiciju 2.1.. Znači postoji (y_{nk}) tako da je

$$\|(y_{nk})\| \leq \delta(\varepsilon_n) = \delta_n \quad \text{i} \quad \|(y_{nk})-(z_{nk})\| \leq 1-\varepsilon_n(1-d).$$

Bez gubitka opštosti može se pretpostaviti da su koordinate niza (y_{nk}) monotono opadajuće i jednake 0 počev od $k=2n+2$. Tada imamo

$$1-\varepsilon_n(1-d) \geq \|(y_{nk})-(z_{nk})\| =$$

$$= \Sigma_{1\leq k\leq n}|y_{nk}| + \Sigma_{n+1\leq k\leq 2n+1}|y_{nk}-1/(n+1)| \geq$$

$$\geq 1 + 2\Sigma_{1\leq k\leq n}|y_{nk}| + \Sigma_{1\leq k\leq 2n+1}|y_{nk}| \geq 1-\delta_n/(2n+1).$$

Iz prvog i poslednjeg člana u nizu nejednakosti dobijamo $\delta_n \geq (1-d)$ što dovodi u kontradikciju pretpostavku da je l_1 eventualno δ-aproksimativan prostor. ■

Sada prelazimo na centarlnu teoremu u ovom delu koja rešava postojanje Čebiševljevog centra i postojanje najboljeg kompaktnog aproksimanta u d-aproksimativnim prostorima.

Teorema 2.3. Neka je X Banahov d-aproksimativan prostor sa odgovarajućom funkcijom $\delta()$ i M ograničen skup u X. Ako red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta(d^n)$$

konvergira, tada

i) dati skup ima Čebiševljev centar,

ii) dati skup ima najbolji kompaktni aproksimant.

Podrazumeva se pri tom da je $\delta(0)=0$, te da je u slučaju $d=0$ uslov da gornji red konvergira suvišan.

Dokaz: Neka je $R_1(M)=r_o$ i $K(x_n,r_n)$ niz kugli koje sadrže M tako da r_n opadajući teži r_o kad $n \longrightarrow \infty$. Obzirom da je slučaj $r_o=0$ trivijalan i da su svi članovi niza (r_n) veći ili jednaki r_o a manji ili jednaki dijametru skupa M koji je zbog ograničenost M konačan, to su ispunjeni svi uslovi za primenu definicije koja sledi iz teoreme 2.1. (d).

Konstruisaćemo niz kugli $K(y_n;\rho_n)$ induktivno na sledeći način.

Kao prvo neka je $K(y_1,\rho_1) = K(x_1,r_1)$.

Pretpostavimo da smo već (za $n\geq 2$) konstruisali kuglu $K(y_{n-1};\rho_{n-1})$. Primenom teoreme 2.1. (d) na $K(y_{n-1};\rho_{n-1})$ i na $K(x_n,r_n)$ dobijamo $K(y_n,\rho_n)$ pri čemu je

$$(3) \qquad \rho_n = r_n + d(\rho_{n-1} - r_n) = d\rho_{n-1} + (1 - d)r_n,$$

(4) $$d(y_n,y_{n-1}) \leq \delta(\rho_{n-1} - r_n).$$

Rešavajući sistem diferencnih jednačina (3) za $n>1$ dobijamo

(5) $$\rho_n = r_n + \alpha\varepsilon_{n-1} + \alpha^2\varepsilon_{n-2} + \ldots + \alpha^{n-1}\varepsilon_1,$$

(6) $$d(y_{n+1},y_n) \leq \delta(\varepsilon_n + \alpha\varepsilon_{n-1} + \alpha^2\varepsilon_{n-2} + \ldots + \alpha^{n-1}\varepsilon_1),$$

gde je iz praktičnih razloga uvedeno $\varepsilon_n = r_{n-1} - r_n$.

Ako je $\alpha = 0$ tada je $\rho_n = r_n$ i $d(y_{n+1},y_n) = \delta(\varepsilon_n)$, te da bi niz (y_n) bio Košijev potrebno je izabrati početni niz kugli tako da je, npr. $\delta(\varepsilon_n)<1/2^n$, što je uvek moguće.

Ako je $0<\alpha<1$ situacija je nešto složenija. Pre svega se treba uveriti da $\rho_n \longrightarrow 0$ kad $n \longrightarrow \infty$. To se neposredno proverava jer izraz

$$\alpha\varepsilon_{n-1} + \alpha^2\varepsilon_{n-2} + \ldots + \alpha^{n-1}\varepsilon_1$$

u formuli (5) na osnovu jedne varijante Teplicovog stava (ili direktno primenom Banah-Štajnhausovog stava) teži ka 0 kad n teži ka ∞. Pri tom odlučujuću ulogu igraju činjenice da je $|\alpha|<1$ i $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ kad $n \longrightarrow \infty$.

Odaberimo početni niz kugli tako da je

(7) $$\varepsilon_n < \alpha^{2n},$$

što je lako izvodljivo. Naime, neka je dat niz kugli pomenut na početku dokaza i neka (7) nije ispunjeno. Tada konstruišimo niz (q_n) tako da q_n opadajući teži r_0 kad n teži beskonačnosi i povrh toga da bude

$$q_{n-1}-q_n < \alpha^{2n}.$$

Sada uzmimo iz niza (r_n) podniz (r_{nk}) tako da bude $r_{nk} \leq q_k$. Tada niz kugli $K(x_{nk},q_k)$ zadovoljava relaciju (7).

Prema tome, nećemo izgubiti ništa od opštosti ako pretpostavimo odmah da početni niz kugli zadovoljava (7), te formula (6) tada poprima oblik

$$d(y_{n+1},y_n) \leq \delta(d^{n+1}(d^n - 1)/(d - 1)) \leq \delta(d^{n+1}/(1 - d)).$$

Obzirom da je $|d|<1$ postoji prirodan broj k takav da je

$$d^k/(1 - d) < 1.$$

Tako konačno imamo

$$d(y_{n+1},y_n) < \delta(d^{n+1-k}),$$

odakle zaključujemo da je niz (y_n) Košijev i da konvergira tački koja je Čebiševljev centar posmatranog skupa

Time je slučaj pod i) dokazan. Predjimo na dokaz slučaja pod ii).

Neka je $R_x(M)=r_o$. Tada postoji niz (r_n) i niz mreža $(\{x_{n,k}|1\leq k\leq m_n\})$ sa osobinom

$$M \subset \cup_k K(x_{n,k},r_n) \quad \text{i} \quad r_n \longrightarrow r_o \text{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

Ako je $r_o=0$ tada je cl(M) najbolji kompaktni aproksimant od M, a ako to nije slučaj postupićemo analogno prethodnom slučaju i formirati novi niz mreža induktivno.

Kao prvo neka je $\rho_1=r_1$, $y_{1,k}=x_{1,k}$ za $1\leq k\leq m_1$ i $\underline{m}_1=m_1$.

Pretopstavimo da su mreže koje imaju prvi index manji od n već formirane. Posmatrajmo u mrežama $\{x_{n,k}|1\leq k\leq m_n\}$ i $\{y_{n-1,k}|1\leq k\leq \underline{m}_{n-1}\}$ one parove za koje je

$$K(x_{n,s}) \cap K(y_{n-1,t}) \cap M \neq \emptyset,$$

gde je $1\leq t\leq \underline{m}_{n-1}$ i $1\leq s\leq m_n$. Primenom pomenute teoreme na ovakve parove kugli dobijamo mrežu $\{yn,k|1\leq k\leq \underline{m}_n\}$ sa sledećim osobinama

(8) $$M \subset \bigcup_k K(y_{n,k}, \rho_n),$$

pri čemu je

$$\rho_n = r_n + d(\rho_{n-1} - r_n) = d\rho_{n-1} + (1 - d)r_n$$

i osim toga

$$\delta(\{y_{n-1,k}\},\{y_{n,k}\}) \leq \delta(\rho_{n-1} - r_n).$$

Da ne bude zabune u poslednjoj nejednakosti, funkcija δ sa leve strane je skupovna funkcija uvedena formulom (2) u prvoj glavi dok sa desne strane figuriše numerička funkcija δ uvedena prilikom definicije d-aproksimativnih prostora. Pošto su njihove domeni sasvim različiti dopustimo da imaju istu oznaku.

Uočimo da je m_n jednako broju slučajeva kad je ispunjena relacija (8), odnosno $m_n \leq m_n m_{n-1}$.

Kao i u prethodnoj tački dokaza imamo

$$\rho_n = r_n + d\varepsilon_{n-1} + d^2\varepsilon_{n-2} + \ldots + d^{n-1}\varepsilon_1,$$

$$\delta(\{y_{n-1,k}\},\{y_{n,k}\}) \leq \delta(\varepsilon_n + d\varepsilon_{n-1} + d^2\varepsilon_{n-2} + \ldots + d^{n-1}\varepsilon_1),$$

sa istim značenjem za ε_n. Odaberemo li početni niz mreža tako da je $\delta(\varepsilon_n) \leq d^{2n}$ nalazimo

(8) $$\rho_n \longrightarrow r_0 \quad \text{kad} \quad n \longrightarrow \infty,$$

(9) $$\delta(\{y_{n-1,k}\},\{y_{n,k}\}) \leq \delta(d^{n+1-k}).$$

Posmatrajmo sada skup

$$K = \bigcup_n \{y_{n,k} | 1 \leq k \leq m_n\}.$$

Na osnovu (9) i pretpostavke o konvergenciji reda iz postavke teoreme, posmatrani skup je totalno ograničen te je njegovo zatvorenje kompaktan skup. Na osnovu (8) je

$$\delta(M, cl(K)) = r_o$$

pa je prema tome cl(K) najbolji kompaktni aproksimant skupa M. Time je teorema u celosti dokazana.■

Kad se govori o Čebiševljevim centrima prirodno se može postaviti pitanje njegove jedinstvenosti (primeri iz glave 1. pokazuju da je to pitanje besmisleno kad je reč o mrežama).

Što se tiče Čebiševljevih centara odmah pada u oči da uniformna konveksnost ne samo da obezbedjuje egzistenciju nego i jedinstvenost. Zaista, ako bi neki ograničeni skup M imao dva različita Čebiševljeva centra, na osnovu teoreme 1.2.(c) i sve tačke na odsečku koji spaja ta dva centra bi bile Čebiševljevi centri skupa M. Tada bi postojala sfera sa centrom u nekoj tački m iz M, poluprečnika $R_1(M)$, koja sadrži gore pomenuti odsečak. Ova poslednja činjenica bi bila u kontradikciji sa uniformnom konveksnošću prostora.

Medjutim, moguće je oslabiti uslov uniformne konveksnosti pa da se dodje čak do potrebnog i dovoljnog uslova za jedinstvenost (istini za volju izgubićemo tom prilikom uslov postojanja centra). O tome govori sledeća teorema (za dokaz pogledati [18]).

Teorema 2.4. Da bi svaki ograničeni skup datog normiranog prostora $\mathfrak{X}$ imao najviše jedan Čebiševljev centar potrebno je i dovoljno da je X uniformno konveksan u svakom pravcu.

Pri tome X je **uniformno konveksan u svakom pravcu** znači

$$(\forall \varepsilon>0)(\forall z\in X)(\exists \delta(z,\varepsilon)>0)(\forall x,y)$$

$$(10) \qquad \|x\|=\|y\|=1 \wedge x-y=dz \wedge |d| \geq \varepsilon \implies \|x+y\| \leq 2-\delta.$$

Odmah se vidi da je ovaj uslov slabiji od obične uniformne konveksnosti jer relaciju (10) moraju da zadovolje samo parovi tačaka x i y koje leže na paralelnim pravama. U pomenutom članku dat je primer iz kojeg se vidi da je gornji uslov sa druge strane jači od striktne konveksnosti.

Pošto Čebiševljev centar, sa geometrijske tačke gledišta, predstavlja opisanu loptu oko datog skupa prirodno se nameće pitanje mogućnosti definisanja problema nalaženja centra upisane sfere. U [16] je pokazano da se taj problem može korektno postaviti i pitanje egzistencije i jedinstvenosti je potpuno rešeno.

Na kraju ove glave, primetimo, da se još uvek ne zna da li u opštem slučaju egzistencija Čebiševljevog centra za svaki ograničeni skup datog prostora povlači i egzistenciju Čebiševljeve mreže. Tako je u teoremi 2.3. ostala velika praznina izmedju Čebiševljevog centra i najboljeg kompaktnog aproksimanta. Da bi se to popunilo treba problemu prići sa druge strane. O tome ćemo govoriti u sledećoj glavi.

§ 3. Čebiševljeve mreže

Kao što je to u uvodu rečeno, pri rešavanju problema u ovom poglavlju koristićemo, uslovno nazvano, metodu slabe konvergencije. Stoga će se polazne pretpostavke unekoliko razlikovati od prethodnog poglavlja.

Pre svega, osnovni prostor na kojem radimo će biti spregnut, a to znači da postoji normirani prostor čiji je dual (u odnosu na topologiju indukovanu normom) kongruentan sa našim polaznim prostorom. Osim toga, pored norme, pretpostavićemo postojanje jedne ili više polunormi odredjenih osobina i sva nastojanja će biti usmerena da se u tom prostoru nadju uslovi za egzistenciju najboljih mreža u odnosu na uvedenu polunormu, odnosno polunorme. Krenimo odmah sa jednim stavom (v. [28]).

Teorema 3.1. Neka je X spregnut prostor i p polunorma na X sa sledećim osobinama

(a) $K_p = \{ x \in X \mid p(x) \leq 1 \}$ je *slabo zatvoren,

(b) postoji $k > 0$ tako da je

$$k p_1(\dot{x}) \geq \|\dot{x}\|_1,$$

gde je

$$\dot{x} = x + p^{-1}(0),$$

$$p_1(\dot{x}) = p(x),$$

$$\|\dot{x}\|_1 = \inf_{y \in p^{-1}(0)} \|x + y\|.$$

Tada je skup $C_{pm}(M) \neq \emptyset$ za svako $m \in N$ i za svaki p-ograničeni skup M iz X ($\sup_{x\in M}\|x\| < \infty$).

Pre nego damo dokaz navedene tereme, poslužićemo se jednim pomoćnim stavom.

Lema 3.1. Neka je p polunorma na spregnutom prostoru X koja ima osobinu (a) iz teoreme 3.1.. Tačna su sledeća tvrdjenja

$$(i) \quad x_n \longrightarrow^* x \quad \Longrightarrow \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} p(x_n) \geq p(x),$$

$$(ii) \quad x_{nk} \longrightarrow^* x_k \quad \text{za } 1 \leq k \leq m \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \delta_p(M,\{x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nm}\}) \geq \delta_p(M,\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}),$$

gde je M p-ograničen u X.

Dokaz: Pretpostavimo da (i) nije tačno, tj. da postoji $d>0$ tako da je

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} p(x_n) = p(x) - d,$$

odnosno postoji podniz (x_{nj}) niza (x_n) tako da je

$$\lim_{nj\to\infty} p(x_{nj}) = p(x) - d.$$

To znači da postoji n_0 takav da

$$n_j > n_0 \quad \Longrightarrow \quad x_{nj} \in \{y \in X \mid p(y) \leq p(x) - d/2\}.$$

Na osnovu osobine (a) gornji skup je *slabo zatvoren, pa njemu pripada i x, što znači

$$p(x) \leq p(x) - d/2,$$

a to je kontradikcija sa izborom broja d. Time je (i) dokazano. Tačka (ii) se dokazuje slično stavu (h) u teoremi 1.2.. Naime, uzmimo proizvoljno $y \in M$ i za fiksno $n \in N$ izdvojimo iz skupa $\{x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nm}\}$ član $x_{nk(n)}$ koji ima osobinu

$$p(y - x_{nk(n)}) \leq \delta_p(M,\{x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nm}\}).$$

Iz niza $(x_{nk(n)})$ može da se izdvoji podniz (x_{jc}) koji ima drugi indeks konstantan. Na osnovu (i) je

$$\underline{\lim}_{j\to\infty} p(y - x_{jc}) \geq p(y - x_c),$$

pa je prema tome za svako $y \in M$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \delta_p(y,\{x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nm}\}) \geq \delta_p(y,\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}),$$

odakle neposredno sledi tražena relacija. ■

Sada možemo preći na dokaz same teoreme. Pre svega, na osnovu (a) $p^{-1}(0)$ je *slabo zatvoren podprostor u X. Stoga u prostoru F, čiji je dual kongruentan sa X, postoji podprostor Y takav da je $Y^{\perp} \equiv p^{-1}(0)$ i

$$X/p^{-1}(0) \equiv Y'.$$

Dakle, $X/p^{-1}(0)$ je takodje spregnut. Na njemu osim norme $\|.\|_1$ postoji i norma p_1. Trebalo bi najpre otkloniti sumnju u korektnost njene definicije date u (b). Zaista ako je $x - y \in p^{-1}(0)$ tada imamo

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = 0,$$

odakle sledi $p(x) = p(y)$, te su tako eventualne dileme oko korektnosti definicije $p_1(.)$ rešene.

Dokažimo da je skup $\hat{K}_p$ *slabo zatvoren. Zbog ukazane kongruencije dovoljno je naći $f \in Y$ koji separira tačku w koja nije u K_p i skup K_p. Na osnovu Han-Banahovog stava postoji $g \in F$, takvo da je $g(w)>1$ i $g(K_p) \leq 1$. Dokažimo da je $g(p^{-1}(O)) = \Theta$. Ako to ne bi bilo tačno tada bi postojao $x \in p^{-1}(O)$ takav da je $g(x)=d$. Medjutim, tada postoji broj k takav da je $g(kx)=dk>1$ što je u suprotnosti sa izborom g. Dakle, g mora pripadati Y pa na p_1 možemo primeniti rezultate prethodne leme.

Pretpostavimo da je M p-ograničen skup u X, odnosno $\sup_{x \in M} p(x) \leq K$ i da je $R_{p1m}(\hat{M}) = r$. Tada postoji niz skupova $(\hat{s}_{nm}) = (\{\hat{y}_{n1}, \hat{y}_{n2}, \ldots, \hat{y}_{nm}\})$ takav da je

$$\delta_{p1}(\hat{M}, \hat{s}_{nm}) \leq r + 1/n.$$

Na osnovu teoreme 1.2. (e) imamo

$$\max_{1 \leq k \leq m} p_1(\hat{y}_{kn}) \leq K + r + 1 \quad \text{za } n \in N.$$

Ova relacija i uslov (b) obezbedjuju da je niz skupova $(\hat{s}_{nk})$ ograničen, preciznije, nalazi se unutar kugle poluprečnika $k(K+r+1)$ sa centrom u $\hat{o}$. Zbog *slabe kompaktnosti te kugle možemo pretpostaviti da

$$\hat{y}_{nk} \longrightarrow^{*} \hat{y}_k \quad \text{za} \quad 1 \leq k \leq m \quad \text{kad} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Primenom leme 3.1. dobijamo

$$\delta_{p1}(\hat{M}, \{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m\}) \leq r$$

odakle sledi da je $\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m\}$ najbolja m-mreža skupa $\hat{M}$ u odnosu na p_1. Treba još dokazati da je $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ najbolja n-mreža skupa M u odnosu na p. Ako to ne bi bilo postojao bi skup $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ koji bolje aproksimira M

nego uočeni. Medjutim, kako je $p_1(\dot{x}) = p(x)$ lako se vidi da bi tada $\{\dot{z}_1,\dot{z}_2,\ldots,\dot{z}_m\}$ bolje aproksimirao $\dot{M}$ nego $\{\dot{y}_1,\dot{y}_2,\ldots,\dot{y}_m\}$ što je kontradikcija.

Time je teorema dokazana. ■

Jedna moguća geometrijska interpretacija ove teoreme je sledeće. Neka je

$$p(x) = \inf_{y\in H}\|x - y\|$$

gde je H podprostor od X i m=1.

Posledica 3.1. Ako je X spregnut prostor tada za svaki ograničeni skup postoji "najbolja" ravan paralelna sa sa datim podprostorom H ako je on *slabo zatvoren.

Bilo bi od interesa da se uslov "paralelnosti" malo oslabi. Ako bismo posmatrali, naprimer, sve ravni dimenzije m približili bismo se problemu najboljih n-dimenzionih sekanata skupa. To zahteva da se na X ne posmatra samo jedna polunorma već cela familija. Tako imamo sledleći stav.

Teorema 3.2. Neka je X spregnut prostor i neka je

$$L = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X^n \mid \max_{1\le j\le n}\|x_j\| \le 1\}.$$

Posmatrajmo familiju polunormi $\{p_\lambda\}_{\lambda\in L}$ sa sledećim osobinama

1° $(\exists k>0)(\forall\lambda)(\forall y)(\exists y_0)\ \|y_0\|\le k p_\lambda(y) \wedge p_\lambda(y_0-y)=0,$

2° $\lambda_n \longrightarrow^* \lambda \wedge x_n \longrightarrow^* x \Longrightarrow \underline{\lim} p_{\lambda_n}(x_n) \ge p_\lambda(x),$

Pri tome $\lambda_n \longrightarrow^* \lambda$ označava da λ_n *slabo po koordinatama teži ka λ. Tada su tačne sledeća tvrdjenja.

(i) Ako je skup M p_λ-ograničen, odnosno

$\sup_{m\in M} p_\lambda(m) = D_\lambda < \infty$,

tada postoji p_λ-centar tog skupa.

(ii) Ako je M u odnosu na celu familiju polunormi uniformno ograničen, odnosno

$\sup_{\lambda\in L} D_\lambda = D < \infty$,

tada medju svim p_λ-centrima posmatranog skupa postoji "najbolji", tj. postoji $\lambda_0 \in L$ i $y_0 \in X$ tako da je

$\delta_{p\lambda_0}(M,y_0) = R_{p\lambda_0}(M) = \inf_{\lambda\in L} R_{p\lambda}(M)$.

Dokaz: Dokazaćemo deo pod (ii) obzirom da se slučaj (i) dokazuje sasvim analogno. Neka je

$$\inf_\lambda R_{p\lambda}(M) = R.$$

Tada postoje nizovi (y_n) i (λ_n) takvi da je

$$\delta_{p\lambda_n}(M,y_n) \leq R + 1/n,$$

te za proizvoljno $m \in M$ imamo

$$p_{\lambda_n}(y_n - m) \leq R + 1/n.$$

Koristeći se uslovom 1° konstruisaćemo niz (y_{0n}). Pri tom će biti ispunjene sledeće relacije

(1) $\|y_{0n}\| \leq k p_{\lambda_n}(y_n) \leq k(p_{\lambda_n}(m - y_n) + p_{\lambda_n}(m)) \leq k(R+1+D)$,

(2) $$p_{\lambda_n}(y_n - m) = p_{\lambda_n}(y_{0n} - m),$$

gde m ima isto značenje kao i gore. Niz (λ_n) je po definiciji ograničen, a na osnovu (2) i niz (y_{0n}). Stoga, možemo pretpostaviti

$$\lambda_n \longrightarrow^* \lambda \quad \text{i} \quad y_{on} \longrightarrow^* y_o \quad \text{kad} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Preciznije, gornja relacija je tačna kad n ide kroz neki podniz prirodnih brojeva, ali ta činjenica nije bitna za tehniku dokaza.

Korištenjem relacije (2) i uslova 2° nalazimo

$$R \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} p_{\lambda n}(y_n - m) = \underline{\lim}_{n\to\infty} p_{\lambda n}(y_{on} - m) \geq p_\lambda(y_o - m).$$

Pošto smo m birali proizvoljno iz M iz poslednje relacije sledi da su y_o i λ zaista objekti traženih osobina.

Što se tiče (i) dokaz je sasvim isti s tim da je tada niz (λ_n) konstantan. ■

Pokušajmo da učinimo slično kao kad smo dobili posledicu 3.1.. Naime, neka je

$$p_\lambda(x) = \inf_{y\in H} \|x - y\|,$$

gde je $H=\mathcal{L}(\lambda)$. Pri tom $\mathcal{L}(\lambda)$ označava lineal nad $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ ako je $\lambda = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$.

Proverimo da li su ispunjeni uslovi prethodne teoreme.

Da bi se ispunio prvi uslov potrebno je za y_o uzeti element iz ravni $y+H$ koji je najbliži koordinatnom početku.

Drugi uslov se već teže proverava. Prethodno treba dokazati jedan pomoćni stav.

Lema 3.2. Neka

$$x_{nk} \longrightarrow^* x_k \quad \text{kad } n \longrightarrow \infty \quad \text{za } 1 \leq k \leq m,$$
$$y_n \longrightarrow^* y \quad \text{kad } n \longrightarrow \infty,$$
$$y_n \in \mathcal{L}(x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nm}),$$

tada

$$y \in \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Dokaz: Uzmimo da je

$$y_n = \Sigma_{1 \le k \le m} d_{nk} x_{nk}.$$

Na osnovu pretpostavke o slaboj konvergenciji niza (y_n) sledi da je on ograničen, pa se može pretpostaviti da

$$d_{nk} \longrightarrow d_k \quad \text{kad } n \longrightarrow \infty \quad \text{za } 1 \le k \le m.$$

Tada za svako $f \in F$ $(F' \equiv X)$ važi

$$f(\Sigma_{1 \le k \le m} d_k x_k) = \lim_{n \to \infty} f(\Sigma_{1 \le k \le m} d_{nk} x_{nk})$$

odakle neposredno sledi traženo tvrdjenje. ∎

Uzmimo sada da imamo niz (y_n), ravan $H = \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ i niz ravni $H_n = \mathcal{L}(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$ tako da bude

$$x_{nk} \longrightarrow^* x_k \quad \text{kad } n \longrightarrow \infty \quad \text{za } 1 \le k \le m,$$

$$y_n \longrightarrow^* y \quad \text{kad } n \longrightarrow \infty.$$

Za svako y_n postoji u ravni H_n element z_n koji je najbliži y_n. Na osnovu prethodne leme z_n *slabo konvergira z koji pripada H. Primenom leme 3.1. (kad polunormu p zamenimo sa normom) na niz $y_n - z_n$ dobijamo

$$\underline{\lim}\, p_{H_n}(y_n) = \underline{\lim} \|y_n - z_n\| \ge \|y - z\| = p_H(y).$$

Konačno, možemo formulisati posledicu ovih razmatranja. Ona pokazuje da teorema 3.2. utvrdjuje ne samo egzistenciju Čebiševljevih centara već i najboljih n-dimenzionih V-sekanata i pokazuje, da sa teoretske tačke gledišta, medju ovim objektima ne postoji principijelna razlika.

Posledica 3.2. Ako je X spregnut prostor tada za svaki skup konačnog n-dimenzionog dijametra postoji najbolji n-dimenzioni V-sekant.

§ 4. Čebiševljeve mreže u Hilbertovim prostorima

U prethodnom odeljku smo posmatrali najbolje mreže skupa u Banahovom prostoru. U Hilbbertovom prostoru ovaj pojam ima neka specijalna svojstva koja su takve prirode da karakterišu Hilbertove prostore.

Na osnovu izlaganja u prethodnim paragrafima jasno je da u Hilbertovom prostoru najbolja mreža postoji za svaki ograničeni skup (teorema 3.1.), a što se tiče Čebiševljevog ✎-centra, on je povrh toga jedinstven (teorema 2.4.).

Medjutim, postoji još jedna vrlo važna osobina Čebišev-ljevg centra skupa, odnosno najbolje mreže, o kojoj govori sledeća teorema.

Teorema 4.1. Ako je H Hilbertov prostor tada važi:

(a) Čebiševljev centar skupa pripada zatvorenom konveksnom omotaču tog skupa;

(b) Najbolja mreža skupa ima osobinu da joj bar jedna tačka pripada zatvorenom konveksnom omotaču tog skupa;

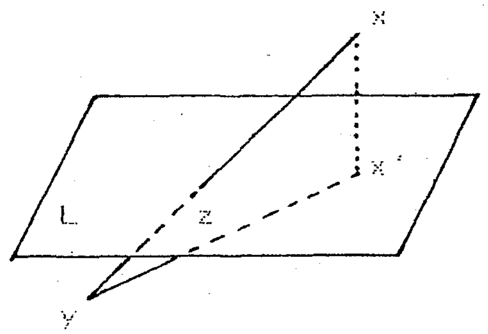
(c) Postoji najbolja mreža koja cela pripada zatvorenom konveksnom omotaču dotičnog skupa.

Pre nego predjemo na dokaz, utvrdimo jedan pomoćni stav sa očiglednim geometrijskim tumačenjem.

Lema 4.1. Ako je L hiper-ravan u Hilbertovom prostoru H i $x, y \in H$ i nalaze se sa raznih strana L tada je ispunjeno

$$\|x - y\| \geq \|x' - y\|$$

gde smo sa x' obeležili projekciju x na L.



slika 12.

Dokaz: Ako sa P označimo operator projektovanja tada je prema [1] P linearan i $\|P\|=1$. Neka je z presek duži $[x,y]$ sa L. Takav presek uvek postoji jer je L hiper-ravan, a x i y su sa raznih strana L. Očigledno važi nejednakost:

$$\|z - x'\| = \|P(z - x)\| \leq \|P\|\|z - x\| = \|z - x\|,$$

odakle neposredno sledi

$$\|x' - y\| \leq \|x' - z\| + \|z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|,$$

što je i trebalo dokazati (v. sl. 12.). ∎

Sada možemo preći na dokaz glavne teoreme. Pretpostavimo da (a) nije tačno, odnosno da postoji skup M čiji Čebiševljev centar x ne pripada $co(M)$. Tada postoji hiper-ravan L koja strogo separira $co(M)$ i x (u smislu da x ne pripada L). Za proizvoljno $m \in M$ na osnovu leme 4.1. vredi

$$\|m - x\| \geq \|m - x'\|$$

gde je sa x' obeležena projekcija x na L. Medjutim, prethodna relacija pokazuje da je x' takodje Čebiševljev centar skupa M što je u suprotnosti sa njegovom jedinstvenošću, čime je (a) dokazano.

Neka je $S_n=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ najbolja n-mreža skupa M i neka je $R_n(M)=r$. Posmatrajmo skupove

$$E_j = M \cap K(y_j,r) \qquad 1\leq j\leq n.$$

Ako je z_j Čebiševljev centar E_j tada na osnovu (a) imamo

$$z_j \in co(E_j) \subset co(M) \qquad 1\leq j\leq n.$$

Tako smo dobili najbolju n-mrežu koja je cela sadržana u co(M) i to dokazuje tvrdnju pod (c).

Pretpostavimo da (b) nije tačno, odnosno

$$S_n \cap \{z_1,z_2,\ldots,z_n\} = \emptyset.$$

Na osnovu činjenice da je Čebiševljev centar u Hilbertovom prostoru jedinstven, imali bismo

$$\delta(e_j,z_j) < \delta(e_j,y_j) \qquad 1\leq j\leq n,$$

a odavde

$$\delta(M,\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}) < R_n(M),$$

što je u suprotnosti sa definicijom broja $R_n(M)$. Time je dokaz teoreme kompletiran. ∎

U slučaju da je prostor dvodimenzionalan u prethodnoj teoremi je moguće izostaviti pretpostavku da je prostor Hilbertov.

Teorema 4.2. Ako je X dvodimenzionalan prostor tada:

(a) Za svaki ograničeni skup postoji bar jedan Čebišev-ljev centar koji pripada zatvorenom konveksnom omotaču tog skupa;

(b) Postoji najbolja mreža koja cela pripada zatvorenom konveksnom omotaču dotičnog skupa.

Primetimo da je bitna razlika ovog i prethodnog stava u tome što u Hilbertovm prostoru Čebiševljev centar obavezno pripada zatvorenom konveksnom omotaču dotičnog skupa dok u dvodimenzionom prostoru samo postoji (medju ostalima) najmanje jedan sa istom osobinom. Stav pod (a) je dokazan u [20] , dok se (b) dokazuje isto kao u teoremi 4.1..

Osnovni razlog da se prethodna teorema ne može preneti na prostore dimenzije veće od 2 leži u tome da n-dimenzioni prostor ($n\geq 3$), osim ako nije Hilbertov, nema tu osobinu da za svaki njegov podprostor dimenzje n-1 postoji projekcija P koja preslikava ceo prostor na taj podprostor. O ovome govore sledeći stavovi.

Teorema 4.3.

(a) Trodimenzioni prostor X je Hilbertov tada i samo tada kad za svaki njegov dvodimenzioni podprostor postoji operator jedinične norme koji projektuje X na taj podprostor. (v. [22])

(b) Banahov prostor dimenzije ne manje od tri je Hilbertov tada i samo tada kada je svaki njegov trodimenzioni podprostor Hilbertov. (v. [11])

Pomoću ove teoreme može da se dokaže sledeći stav koji rešava konačno vezu Čebiševljevih centara sa Hilbertovim prostorima.

Teorema 4.4. Ako je X Banahov prostor dimenzije veće ili jednake tri, i ako za proizvoljne tri tačke postoji Čebiševljev centar koji pripada najmanjoj ravni koja sadrži te tri tačke, tada je posmatrani prostor Hilbertov (Garkavi v. [20]).

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme pod (b) dovoljno je posmatrati slučaj kad je X trodimenzionalan. Neka je L dvodimenzioni podprostor od X i z_o tačka van L. Uzmimo n_o dovoljno veliko tako da za $n\geq n_o$ skupovi

$$D_n = \{ x \in L \mid \|z_0 - x\| \leq n\} \quad \text{i} \quad G_n = \{ x \in L \mid \|z_0 - x\| = n\}$$

budu neprazni. Uzmimo proizvoljno y_1, y_2 i y_3, ali tako da pripadaju G_n. Po pretpostavci postoji Čebiševljev centar tog skupa x^* koji pripada L i tada važi

$$\|y_j - x^*\| \leq \|y_j - z_0\| = n \quad \text{za} \quad j=1,2,3.$$

Ako je $S(y_j) = \{ x \in L \mid \|y_j - x\| \leq n \}$ tada je i skup $\cap_j S(y_j)$ takodje neprazan na osnovu prethodne relacije. Na osnovu Helijeve teoreme imamo

$$S_n = \bigcap_{y \in G_n} S(y) \neq \emptyset.$$

Za svako $x_n \in S_n$ važi

(1) $$y \in G_n \implies \|y - x_n\| \leq \|y - z_0\|.$$

Dokažimo da važi

(2) $$x \in D_n - G_n \implies \|x - x_n\| \leq \|x - z_0\|.$$

Ovaj skup je konveksan u L i njegova granica je G_n. Odatle, za bilo koju tačku $x \in D_n - G_n$, koja je različita od x_n, stoji da produžetak duži $[x, x_n]$ seče G_n u tački y, tako da je x unutrašnja tačka duži $[y, x_n]$. Odnosno, $x_n - x = k(x_n - y)$, gde je $k>0$. Tada se nejdnakost iz (2) može napisati u obliku

$$\|(z_0 - x_n) + k(x_n - y)\| \geq k\|x_n - y\|.$$

Dopustimo da to nije tačno, odnosno

$$\|(z_0 - x_n) + k(x_n - y)\| < k\|x_n - y\|.$$

Medjutim, tada bi važilo

$$\|z_0 - y\| = \|(z_0 - x_n) + k(x_n - y) + (1 - k)(x_n - y)\| \leq$$

$$\leq \|(z_0 - x_n) + k(x_n - y)\| + (1 - k)\|x_n - y\| \leq$$

$$< k\|x_n - y\| + (1 - k)\|x_n - y\| = \|x_n - y\|,$$

što je kontradikcija sa (1).

Posmatrajmo sada niz skupova (D_n) pri čemu je $n \geq n_0$. Za svaki član tog niza postoji $x_n \in L$ tako da važi

$$x \in D_n \implies \|x - x_n\| \leq \|x - z_0\|.$$

Niz (x_n) je ograničen, pa ima tačku nagomilavanja x' koja takodje pripada L. Pritom, zbog $\bigcup_n D_n = L$ imamo

(3) $$x \in L \implies \|x - x'\| \leq \|x - z_0\|.$$

Obzirom da se svaki element z iz X može pisati u obliku

$$z = az_0 + x$$

pri čemu je $x \in L$, operator definisan sa $P(z) = ax' + x$ je linearan i prelikava X na L. Osim toga, na osnovu (3) imamo

$$\|P(z)\| = \|ax' + x\| = |a|\|x' + x/a\| \leq |a|\|z_0 + x/a\| = \|z\|.$$

Dakle $\|P\| = 1$ te na osnovu teoreme 4.3. pod (a) zaključujemo da je prostor X Hilbertov. ■

Primetimo, da je na osnovu teoreme 4.2. uslov da postoji Čebiševljev centar triju tačaka koji pripada najmanjoj ravni koja sadrži te tačke, ekvivalentan sa uslovom da postoji Čebiševljev centar koji pripada njihovom konveksnom omotaču.

Posmatrajući najbolje mreže prethodna teorema se može ovako formulisati.

Teorema 4.5. Neka je X Banahov prostor dimenzije ne manje od tri. Ako postoji broj n takav da svaki skup od n+2 tačke ima najbolju n-mrežu kojoj bar jedna tačka pripada konveksnom omotaču tog skupa tačaka, tada je X Hilbertov prostor.

Dokaz: Neka je $M = \{x, y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ skup koji se sastoji od n+2 tačke koje stoje u sledećem odnosu:

$$R_1(\{x, y_0, y_1\}) = r,$$
$$\|y_i - y_j\| \geq 4r \quad \text{za} \quad 2 \leq i < j \leq n,$$
$$\delta(\{x, y_0, y_1\}, y_j) \geq 4r \quad \text{za} \quad 2 \leq j \leq n,$$
$$\text{skup } \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \text{ pripada jednoj pravoj.}$$

Tada je i $R_n(M) = r$. Ako je $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ najbolja n-mreža skupa M, na osnovu pretpostavljenih odnosa možemo uzeti da je z_1 Čebiševljev centar skupa $\{x, y_0, y_1\}$, a da ostale tačke mreže leže van ravni koja sadrži skup M. Tada, kao jedina mogućnost ostaje da z_1 pripada pomenutoj ravni. Obzirom da tačke x, y_0 i y_1 možemo da biramo proizvoljno, konstatujemo da u datom prostoru za svake tri tačke postoji Čebiševljev centar koji pripada najmanjoj ravni koja te tri tačke sadrži. Na osnovu teoreme 4.4. zaključujemo da je posmatrani prostor Hilbertov. ■

Na osnovu prethodno izrečenih stavova možemo dati sledeći koji je integralnog karaktera (v. [29]).

Teorema 4.6. Potreban i dovoljan uslov da za dati Banahov prostor X postoji broj $n \in N$ tako da za svaki ograničeni skup M postoji najbolja n-mreža kojoj bar jedna tačka pripada co(M), jeste da je taj prostor Hilbertov ili dimenzije manje ili jednake dva.

PRILOG 1.

Kao što je to u uvodu rečeno, ovde će biti reči o ocenjivanju optimalnosti numeričkih tablica. Sadržaj ovog priloga inspirisan je monografijom [9], te se svi rezultati mogu naći u pomenutom radu. Cilj izlaganja je da se ukaže na neke praktične aspekte problema nalaženja najboljih mreža.

Učinimo na početku neke istorijske paralele. Pogledajmo, dobro nam znane, tablice prirodnih vrednosti trigonometrijskih funkcija koje smo ne tako davno koristili. One garantuju tačnost do pete decimale i zauzimaju desetak strana gusto kucanog teksta. Date su sa korakom od 10′, s tim da se interpolacijom može naći vrednost funkcije kad korak iznosi najmanje 1′. Da bi se našla vrednost trigonometrijske funkcije nekog ugla bilo je potrebno dve operacije izvlačenja vrednosti iz tablice (odnosno samo jedna ukoliko se vrednost ugla može izraziti kao ceo broj desetica minuta) i nakon jedne operacije množenja i sabiranja došlo bi se do rešenja. Dakle, u celom poslu pažnja je obraćana na jednostavnost rada pri čemu se složenost posla ocenjivala brojem aritmetičkih operacija koje su se morale izvršiti da bi se došlo do rezultata. Naravno, pretraživanje i čitanje vrednosti iz tablice se nije smatralo kritičnim jer je računanje oduzimalo značajno više vremena.

Posmatrajmo problem sa druge tačke gledišta. Ako funkciju **sin** razvijemo u Maklorenov red na intervalu $[0,\pi/4]$ do sedmog stepena imaćemo tačnost na šestoj decimali. Da bi se izračunala vrednost sinusa nekog ugla potrebno je izračunati vrednost odgovarajućeg polinoma za vrednost tog ugla. Za to je potrebno jedanaest operacija množenja i sabiranja, ako koeficijente polinoma imamo negde unapred spremljene. Dakle, došli smo u drugu krajnost, gde traženje po tablicama ne postoji, ali je postupak izračunavanja izuzetno komplikovan.

Jasno je da je prva metoda primerena čoveku, a druga savremenoj računskoj mašini, ali kako ovo poslednje uzima sve više maha, osvetlićemo problem sa ove druge tačke gledišta.

Postavimo stvar sasvim opšte. Neka se problem ne rešava samo za jednu funkciju, nego za jedan kompaktan skup funkcija iz nekog funkcionalnog prostora. Odnosno, neka je dat normiran prostor X i kompaktan skup $K \subset X$. Pokušajmo da napravimo sada tablicu pomoću koje bi se računale vrednosti funkcija iz K. Pošto se tablica sastoji isključivo od cifarskih informacija, pri njenom sastavljanju ćemo se koristiti alfabetom $A_0 = \{0,1\}$. Tablica proizvoljnog elementa $f \in K$ sastojaće se iz dva dela: reči T_f izražene alfabetom A_0 (u našem slučaju to su koeficijenti Maklorenovog polinoma) i postupka za izračunavanje A (u našem slučaju to je Hornerova šema za izračunavanje vrednosti polinoma). Naravno i postupak računanja A se mora izraziti nekim alfabetom A_1. Može se smatrati da je A_1 alfabet nekog konkretnog programskog jezika višeg nivoa.

Dužinu reči T_f nazivamo **dužinom tablice** i obeležavamo je sa $l(T_f)$. Primetimo da je T_f različito od funkcije do funkcije dok je postupak računanja A jednak za sve funkcije iz K.

Dakle, za datu funkciju f iz K pomoću reči T_f i algoritma A možemo konstruisati funkciju g_f (u našem slučaju to je polinom sedmog stepena). **Tačnost tablice** T_f je veličina

$$\varepsilon_f = \|f - g_f\|.$$

Postupak računanja A omogućava da se uspostavi preslikavanje

(1) $$\Psi_N : \{T_f \mid f \in K \wedge l(T_f) \leq N\} \longrightarrow X.$$

Neka je sa

(2) $$\varepsilon_N = \sup_{f\in K} \varepsilon_f$$

okarakterisana tačnost metoda tabeliranja elemenata kompakta K pomoću tablica dužine manje ili jednake N. Pošto je skup tablica dužine manje ili jednake N konačan (alfabet A_0 je konačan), tada preslikavanje (1) odredjuje na X konačan skup – ε_N-mrežu kompaktnog skupa K.

Sada možemo da postavimo nekoliko pitanja. Da li postoji neka eksplicitna veza izmedju ε_N i N ? Ako je zadana tačnost koju tablica treba da zadovoljava, kako naći algoritam koji daje minimalnu dužinu tablice? Kako odrediti tablicu, tako da pri zadanoj dužini N, veličina ε_N bude minimalna?

Podjimo sa odgovorima redom.

Teorema D1.1. Da bi neki postupak tabulacije nekog kompaktnog skupa K iz normiranog prostora X imao tačnost ε, dužina tablice N mora zadovoljavati nejenakost

(3) $$N \geq H_K(\varepsilon),$$

gde je $H_K(\varepsilon)$ ε-entropija skupa K (definicija je data u uvodnom poglavlju).

Dokaz: Posmatrajmo skup $\{T_f \mid f \in K \wedge l(T_f) \leq N\}$. Svaki član tog skupa odredjuje jedan član iz $g_f \in K$ čija je udaljenost od f manja ili jednaka tačnosti postupka tabulacije. Znači, skup $\{g_f | f \in K\}$ je jedna ε-mreža skupa K. Kako je kardinalni broj skupa tablica dužine manje ili jednake N jednak 2^N (alfabet tablice se sastoji od dva slova 0 i 1), tada je $2^N \geq N_K(\varepsilon)$ (definicija $N_K(\varepsilon)$ je takodje data u uvodnom poglavlju), te odavde posle logaritmovanja dobijamo (3). ■

Neke preciznije informacije o odnosu tačnosti tablice i njene dužine se na ovako opštem nivou ne mogu dobiti. Doduše moguće je dati procenu brzine stremljenja u ∞ veličina $H_K(\varepsilon)$ i $\log_2(1/\varepsilon)$, što može biti od koristi.

Teorema D1.2. Ako je K beskonačnodimenzionalan, konveksan i kompaktan podskup normiranog prostora X, tada je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_K(\varepsilon)/\log_2(1/\varepsilon) = \infty.$$

Teorema D1.3. Ako je K kompaktan u odnosu na metriku $\mathcal{M}$ i ako je konačne dimenzije k, tada je

$$\inf \lim_{\varepsilon \to 0} H_K(\varepsilon)/\log_2(1/\varepsilon) = K,$$

gde se infimum uzima preko svih metrika $\mathcal{M}$.

Odgovor na drugo pitanje je problem obrnut u odnosu na problem traženja najboljih mreža. Kako izgleda rešavanje ovog problema najbolje ćemo videti kroz primer dat u [9].

Tamo se posmatra oblast G_r koju ograničava elipsa sa fokusima u -1 i 1 i zbirom poluosa $r \geq 1$. Zatim se uočava odsečak $I=[-1,1]$ i lako proverava da je $G_r - I$ konformna slika prstena omedjenog krugovima poluprečnika 1 i r, odnosno da je konformni radijus oblasti G_r upravo jednak r. Dalje, se na toj oblasti posmatra skup funkcija $A(G_r,M)$ koje su regularne unutar G_r i ograničene po modulu konstantom M. Ako se na tom skupu funkcija uvede funkcija rastojanja sa

$$d(f,g) = \max_{z \in I} |f(z) - g(z)|,$$

pokazuje se da je to metrika i da je posmatrani skup u toj metrici kompaktan. Ako se posmatra restrikcija posmatranog kompakta na odsečku I, dolazimo do jednog podskupa skupa neprekidnih funkcija sa uobičajenom uniformnom metrikom. Autor već pomenute monografije je rešio problem nalaženja minimalne dužine tablice za zadatu tačnost za ovaj kompaktan podskup u okviru skupa neprekidnih funkcija na I.

Prvi korak se sastojao u tome da se nadje postupak za aproksimaciju datog skupa. U [9] se autor opredelio za razvoj funkcije na polinome Čebiševa. Pokazao je da u tom slučaju za dužinu tablice važi asimtotska formula

$$(4)\quad l(T_f) = (1/\log r)\log^2(M/\varepsilon) + O(\log^2(M/\varepsilon)\log\log^2(M/\varepsilon)),$$

te je na osnovu (3)

$$(5)\quad H_A(\varepsilon) \leq (1/\log r)\log^2(M/\varepsilon) + O(\log^2(M/\varepsilon)\log\log^2(M/\varepsilon)).$$

Sledeći zadatak je bio malo teži jer je trebalo dobiti nejednakost obrnutu prethodnoj, odnosno pokazati da je izbor za razvoj funkcije po Čebiševljevim polinomima bio pravi. U tim nastojanjima je i uspeo dokazavši

$$(6)\quad H_A(\varepsilon) = (1/\log r)\log^2(M/\varepsilon) - C\log^2(M/\varepsilon)\log\log^2(M/\varepsilon),$$

odnosno uzevši u obzir (5)

$$(7)\quad H_A(\varepsilon) = (1/\log r)\log^2(M/\varepsilon) + O(\log^2(M/\varepsilon)\log\log^2(M/\varepsilon)).$$

Na taj način zadatak je u potpunosti bio rešen. Primetimo, na kraju, da gornja klasa sadrži većinu specijalnih funkcija, pa prema tome gornje rešenje ima veliki praktičan značaj.

Što se tiče postupka rešavanja poslednjeg pitanja, on se ne bi mnogo razlikovao od prethodnog, s tim što treba reći da je njegovo rešavanje bez veće praktične osnove.

Prilog 2.

Ovde će biti reči o rešavanju jednog konkretnog problema iz urbanističko-arhitektonske prakse koji je u vezi sa nalaženjem Čebiševljevih mreža skupa u dvodimenzionom prostoru. Predjemo na samu postavku problema.

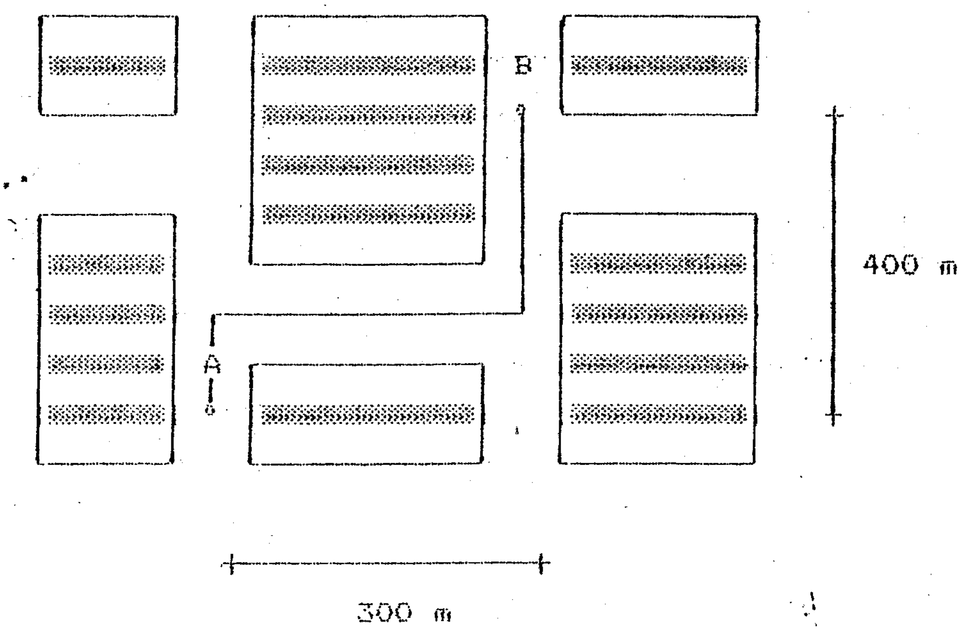
Sa praktične strane gledišta ona bi mogla ovako da glasi. U datom gradskom području treba postaviti odredjen (konačan) broj centara (recimo, za snabdevanje) tako da oni "optimalno" pokrivaju površinu grada.

Da bi se prešlo na postavljanje matematičkog modela potrebno je prethodno uvesti neku metriku pomoću koje bi se ocenjivala optimalnost razmeštaja centara.

Ako pogledamo sliku 13. vidimo da je euklidsko rastojanje tačaka A i B jednako 500 metra. Medjutim, kako se kretanje kroz grad obavlja ulicama, to je rastojanje izmedju A i B 700 metara. To znači, da ako uzmemo da će pravci koordinatnih osa poklapaju sa pravcima ulica na slici, rastojanje izmedju A i B treba uzimati po formuli

$$(*) \qquad d(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

gde su (x_1,y_1) i (x_2,y_2) koordinate tačaka A i B respektivno. Ako se ulice ne seku pod pravim uglom treba sve posmatrati u kosouglom koordinatnom sistemu.



slika 13.

Sada se već može dati i matematička formulacija problema. Neka je data ravan čija je metrika definisana relacijom (*) pri čemu su koordinate tačaka u opštem slučaju uzete u odnosu na neki kosougli koordinatni sistem. Za dati skup tačaka u ravni omedjen zatvorenom poligonalnom linijom i dati broj **k** naći najbolju k-mrežu u datoj ravni.

Metoda rešavanja ovog problema pripada tehnici diskretne matematike i pripada klasi približnih metoda rešavanja.

Prvi korak se sastoji u aproksomaciji datog skupa konačnom mrežom tako da poluprečnik pokrivanja te mreže bude jednak tačnosti koju želimo da dobijemo. Neka broj tačaka u toj mreži bude **n**.

Sledeći korak se sastoji u parčanju date mreže na **k** delova. Da bi se to učinilo treba prethodno generisati jedno nenegativno celobrojno rešenje jednačine

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Takvih rešenja ima

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Sada se pristupa deobi datog skupa od **n** tačaka na **k** delova tako da prvi deo sadrži k_1 elemenata, drugi k_2 elemenata i tako dalje. Ako je $n_j > 0$ $(1 \leq j \leq k)$ tada broj podela skupa po datom ključu iznosi

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$$

uz pretpostavku da su n_i medjusobno različiti. U slučaju da je $n_1 = n_2 = \ldots = n_t$ dati broj bi trebalo podeliti sa t! i tako dalje redom za sve slučajeve ponavljanja.

Zatim se nalazi Čebiševljev centar i radijus svakog dela posebno. Rezultat se uporedjuje sa onim iz prethodnog koraka i pamti se ukoliko je od njega bolji, a zatim se ide na sledeće parčanje sve dok se ne iscrpu sva moguća parčanja.

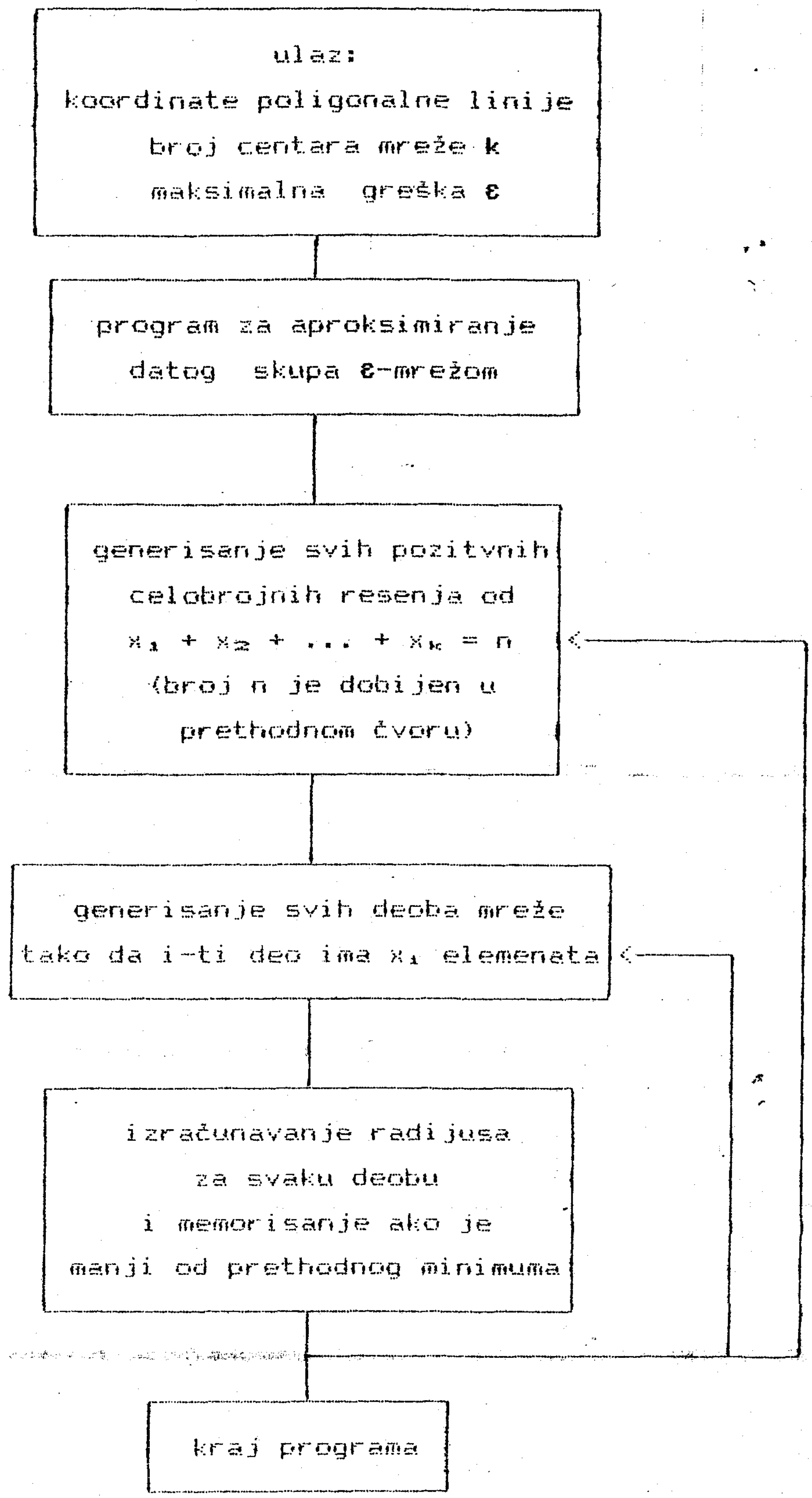
Ceo postupak se može predstaviti grubom algoritamskom šemom koju prikazuje slika 14.

Kao što se iz prethodnog vidi, broj ciklusa u algoritmu je veoma veliki. Stoga se u svakom segmentu vrše skraćenja koliko je to moguće.

U delu za generisanje celobrojnih rešenja jednačine kao prvo vodi se računa da se rešenja ne ponavljaju, odnosno ne generišu se rešenja koja se permutacijom mogu dovesti do poklapanja. Drugim rečima vodi se računa da je

$$(M \geq) \; x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \; (\geq m).$$

Uslove u zagradama bira korisnik, a on označava minimalan broj članova u grupi. Ako se ništa ne kaže, m je jednako 1, a M broju **n**.


ulaz:
koordinate poligonalne linije
broj centara mreže k
maksimalna greška ε
program za aproksimiranje
datog skupa ε-mrežom
generisanje svih pozitvnih
celobrojnih resenja od
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$
(broj n je dobijen u
prethodnom čvoru)
generisanje svih deoba mreže
tako da i-ti deo ima x_i elemenata
izračunavanje radijusa
za svaku deobu
i memorisanje ako je
manji od prethodnog minimuma
kraj programa

slika 14.

U delu za deobu mreže po datom ključu postupak je skraćen u tom pogledu što se optimalnost proverava pre nego što je podela do kraja formirana. Naime, da bi se utvrdilo da je "novo" rešenje bolje od "starog" potrebno je novo rešenje generisati do kraja. Medjutim, ako je ono kojim slučajem "lošije" to se može videti i pre nego je do kraja odredjeno. Postupak se može ubrzati ukoliko korisnik sam odredi broj od kojeg optimalni radijus mora biti manji. Ukoliko on to ne učini aktivira se program koji sam vrši tu procenu.

Program je pisan na PASCAL-u i implementiran je na IBM PC-XT i AT i njima kompatibilnim računarima. Medjutim, nema principijelnih problema da se ugradi i na veće sisteme.

Osnovni razlog što je program pisan na PASCAL-u leži u tome što pomenuti jezik dobro podržava rekurzivne strukture, a ovde se to široko koristi za generisanje svih mogućih deoba datog skupa po zadanoj shemi. Istini za volju, taj deo algoritma je moguće realizovati i bez rekurzije (eksplicitne), te program realizovati u nekom drugom jeziku, ali uz malo više programerske veštine i malo većom verovatnoćom sistemske greške u toku kreiranja programa.

L I T E R A T U R A

[1] Ahiezer N. I., Glazman I. M.: Teorija linejnjh operatorov v Gilbertovom prostranstve, Moskva-Lenjingrad, Gostehi-izdat, 1950.

[2] Amir D.: Chebyshev Cenres and Uniform Convexity, Pacifc Journal of Mathematic, vol. 72, no. 1, 1-6, 1978.

[3] Amir D.: Uniquenes of Best Simultaneous Approximation and Strictly Interpolating Subspaces, Journal of Approximation Theory 40, 196-201, 1984.

[4] Amir D., Mach J.: Chebyshev Centers in Normed Spaces, Jornal of Approximation Theory 40, 364-374, 1984.

[5] Amir D., Mach J.: Best n-Nets in Normed Spaces, Canadian Mathematical Society, Conference proceedings, vol. 3, 1-4, 1983.

[6] Amir D., Mach J., Saatkamp K., Existence of Chebyshev centers, Best n-Nets and Best Compact Approximants, Transaction of the American Mathematical Society, vol. 271, no. 2, 513-524, 1982.

[7] Amir D., Deutch F., Approximation by Certain Subspace in the Banach Space of Continuous Vector-Valued Functions, Journal of Approximation theory 27,254-270 (1979)

[8] Aljančić S., Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968.

[9] Babenko K. I., Osnovy chislenogo analiza, Nauka, Moskva, 1986.

[10] Borwein J., Keener L.: The Hausdorf Metric and Chebyshev Centers, Journal of Approximation Theory 28, 366-376, 1980

[11] Day M. M.: Normed Linear Spaces, Springer-Verlag, 1962.

[12] Deutch F.: Existence of Best Approximation, Journal of Approximation Theory 28, 366-376, 1980.

[13] Dugundji J.: Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[14] Dunford N., Schwartz J.: Linear operators, Intersciense publishers, New York, 1958.

[15] Fakhoury H.: Approximation des bornes d un espace Banach par des compact et applications a l approximation des operaturs bornes, Journal Approximation Theory 26, 79100, 1979.

[16] Garkavi A. L.: Approksimativnye centri i sety množestva v linejnom normirovannom prostranstve, Trudy Meždunarodnoj konferencii po teorii približenij, Kaluga 1977.

[17] Garkavi A. L.: Teorema ob očistke dlja maksmina i zadača o vpisannom šare, Matematičeskie zametki, t. 30, no. 1, 1981.

[18] Garkavi A. L.: O nailučšej seti i nailučšem sečenii množestv v normirovannom prostranstve, Izv. A. N. ser. mat., 26(1962), 87-106.

[19] Garkavi A. L.: O točke Lame i jejo obobšćenijah v normirovannyh prostranstvah, Mat, sbornik, t. 95(137), 271-292, 1972.

[20] Garkavi A. L.: O Čebišovskom centre i vypukloj oboločke množestva, Uspehi mat. nauk, t. 19, vyp. 6(120), 139-145, 1964.

[21] Kac A. S., O nailučšem približeniju elementa Banahova prostranstva po sisteme polunorm, Matematičeskie zametki, t. 26, no. 3, 377-389, 1979.

[22] Kakutani S., Some caracterisation of Euklidian spaces, Japan Jorn. Math. 16, 93-97, 1939.

[23] Kolmogorov A. N., Tihomirov V. M., ε-entropija i ε-emkost množestva v funkcionalnyx prostranstvah, Uspehi mat. nauk, XIV, vyp. 2 (86), 3-86.

[24] Keener L.L., Best possible nets in a normed linear space, Canadian Math. Bull., 18 (1975), 45-48.

[25] Mach J., Ward J. D., Approximation by Compact Operators on Certain Banach Spaces, Journal approximation theory 23, 274-286, 1978.

[26] Olech C., Approximation of set-valued functins by continuous function, Coloquium Mathematicum, vol 19, 287-293, 1968.

[27] Pevac L., Najbolje n-mreže, n-dimenzioni dijametri i najbolji n-dimenzioni sekanti skupa u normiranom prostoru, PMF Beograd 1976., magistarski rad.

[28] Pevac L., Some results about approximatin of sets by finite sets in normed spaces, Publications de l institut mathematique, tome 25, (39), 1979, pp 138-142.

[29] Pevac L., Karakterizacija Hilbertovih prostora preko najboljih n-mreža, Matematički vesnik, 4(17)(32), 1980., pp 73-76.

[30] Pevac L., On approximation in normed spaces, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, ser. mat.-fiz., no. 735 - no. 762, 1982., 96-98.

[31] Ruston A. F., Conjugate Banach spaces, Proc. Cambridge Philos. Society 53, 576-580, 1957.

[32] Singer I., Best Approximation in Normed Linear Spaces, Springer-Verlag, 1971.

[33] Ward J.D., Chebyshev centers in Spaces of Continuous Functions, P.J.M., vol. 52, no. 1, 283-287, 1974.

```
program glavni_program;
type cniz = array[0..255] of char;
var l,bc,br,xbr,ibr : integer; ep,am:real;
x1,x2: array[0..255] of real;
xm: array[1..10] of integer;
bm: cniz;
procedure ulaz1; forward;

procedure ulaz;

begin
  clrscr;
  write('broj centara                             ? ');
  readln(bc);
  write('gornja granica minimuma                  ? ');
  readln(am);
  write('maksikmalan broj clanova u grupi         ? ');
  readln(xbr);
  write('minimalan broj clanova u grupi           ? ');
  readln(ibr);writeln;
  writeln('oblast se zadaje poligonom              1');
  writeln('oblast se zadaje mrezom                 2');
  write('izaberi broj                             ? ');
  readln(l);writeln;
  if l=2 then
    begin
      write('broj clanova mreze                       ? ');
      readln(br);
      for l:=1 to br do
        begin
          write('                              x[',l,'] = ');
          readln(x1[l]);
          write('                              y[',l,'] = ');
          readln(x2[l]);
        end;
    end else ulaz1;
end;

procedure izlaz;
var j,ind:integer;

begin
  clrscr;
  writeln('optimalno re'enje');writeln;
  ind:=0;
  for j:=1 to bc do
    begin
      ind:=ind+xm[j-1];
      for l:=1 to xm[j] do write(x1[ord(bm[ind+l])]:6:2,' -');
      writeln(chr(8),chr(8),'  ');
      for l:=1 to xm[j] do write(x2[ord(bm[ind+l])]:6:2,' -');
      writeln(chr(8),chr(8),'  ');writeln;
    end;
  writeln('minimalni radijus = ',am:6:2);
  writeln('dopustena greska  = ',ep:6:2);
end;

function mmx(a,b:real): real;

begin
  if a>b then mmx:=a else mmx:=b;
end;
```

```
function mmn(a,b:real): real;

begin
  if a>b then mmn:=b else mmn:=a;
end;
procedure ulaz1;
type ni=array[1..20] of real;
var bpr,bp,bv,i:integer; var gg,dg: real;
var x: array[1..2,1..20] of integer;
xp1,xp2,xl,xd:ni;

function izm(a,c,b: real): boolean;

begin
  if (c>=mmn(a,b)) and (c<=mmx(a,b)) then
    izm:=true
  else
    izm:=false;
end;

function d1(a,b,c: real): real;

begin
  if izm(a,c,b) then d1:=0 else d1:=mmn(abs(a-c),abs(b-c));
end;

function d(a,b,c,e: real): real;

begin
  d:=mmn(mmn(d1(a,b,c),d1(a,b,e)),mmn(d1(c,e,a),d1(c,e,b)));
end;

procedure mreza;
var xp,in1,in2: array[1..20] of real;
var bi,jj,i,bxn,j,bxp: integer; tm: real;
inp: array[1..20] of integer;

begin
  bxp:=0; bxn:=0;
  for j:=1 to bpr do
    begin
      if (xp1[j]>=0) and (xp2[j]>=0) then
        begin
          bxp:=bxp+1;
          xp[bxp]:=xp1[j];
          inp[bxp]:=j;
        end
      else
        begin
          bxn:=bxn+1;
          in1[bxn]:=mmn(abs(xp1[j]),abs(xp2[j]));
          in2[bxn]:=mmx(abs(xp1[j]),abs(xp2[j]));
        end;
    end;
  for j:=1 to bxp-1 do
    begin
      for i:=1 to bxp-j do
        begin
          if xp[i]>xp[i+1] then
            begin
              tm:=xp[i];
              xp[i]:=xp[i+1];
```

```
                xp[i+1]:=tm;
                jj:=inp[i];
                inp[i]:=inp[i+1];
                inp[i+1]:=jj;
              end;
          end;
      end;
    i:=bxn;
    for j:=1 to bxp div 2 do
      begin
        i:=i+1;
        in1[i]:=mmn(xl[inp[2*j-1]],xl[inp[2*j]]);
        in2[i]:=mmx(xd[inp[2*j-1]],xd[inp[2*j]]);
      end;
    bi:=i;
    for j:=1 to bi-1 do
      begin
        i:=j+1;
        while i<=bi do
          begin
            if d(in1[j],in2[j],in1[i],in2[i])<=ep then
              begin
                in1[i]:=mmn(in1[j],in1[i]);
                in2[i]:=mmx(in2[j],in2[i]);
                in1[j]:=-1;
                i:=bi+1;
              end
            else i:=i+1;
          end;
      end;
    i:=br;
    for j:=1 to bi do
      begin
        if in1[j]>=0 then
          begin
            if (in2[j]-in1[j])<=ep then
              begin
                i:=i+1;
                x1[i]:=(in2[j]+in1[j])/2;
                x2[i]:=dg+ep/2;
              end
            else
              begin
                jj:=0;
                repeat
                  i:=i+1;
                  x2[i]:=dg+ep/2;
                  x1[i]:=in1[j]+jj*ep+ep/2;
                  jj:=jj+1;
                until (x1[i]>=(in2[j]-ep/2));
              end;
          end;
      end;
    br:=i;
  end;

  procedure presek(y1,y2: real; var xp1,xp2,xl,xd: ni);
  var j,i,kk,k: integer;
  var x1,x2: real;
    function st(y1,y2: real): integer;
    var i: integer;
    label 1;
```

```
begin
     i:=0;
   1: i:=i+1;
     if (x[2,i]>y2) or (x[2,i]<y1) then st:=i else goto 1;
end;

procedure pre(y1,y2: real; i:integer; var x1,x2: real);
var k1:boolean;
procedure pr(x1,y1,x2,y2,y: real; var xp: real; var k1: boolean);

  begin
    k1:=true;xp:=-1;
    if (y>mmn(y1,y2)) and (y<mmx(y1,y2)) then
      xp:=(y-y1)*(x2-x1)/(y2-y1)+x1
    else
      k1:=false;
  end;
 begin
  pr(x[1,i],x[2,i],x[1,i+1],x[2,i+1],y1,x1,k1);
  if not(k1) then x1:=-1;
  pr(x[1,i],x[2,i],x[1,i+1],x[2,i+1],y2,x2,k1);
  if not(k1) then x2:=-1;
 end;
begin
 for i:=1 to 20 do
   begin
     xp1[i]:=0; xp2[i]:=0;
     x1[i]:=10000; xd[i]:=0;
   end;
 k:=1;
 kk:=st(y1,y2)-1;
 for i:=bv to 2*bv-1 do
    begin
      j:=((i+kk) mod bv)+1;
      pre(y1,y2,j,x1,x2);
        if (x1>0) and (x2>0) then
          begin
            x1[k]:=mmn(x1,x2); xp1[k]:=x1;
            xd[k]:=mmx(x1,x2); xp2[k]:=x2;
          end
        else
          begin
            if x1>0 then
              begin
                if xp2[k]=0 then
                  begin
                    if xp1[k]>0 then
                      begin
                        xp2[k]:=-x1;
                        x1[k]:=mmn(x1[k],x1);
                        xd[k]:=mmx(xd[k],x1);
                      end
                    else
                      begin
                        x1[k]:=mmn(x[1,j+1],x1);
                        xd[k]:=mmx(x[1,j+1],x1);
                        xp1[k]:=x1;
                      end;
                  end
                else
                  begin
                    xp1[k]:=x1;
```

```
                    xl[k]:=mmn(xl[k],x1);
                    xd[k]:=mmx(xd[k],x1);
                  end;
              end
            else
              begin
               if x2>0 then
                begin
                if xp1[k]=0 then
                  begin
                    if xp2[k]>0 then
                      begin
                        xp1[k]:=-x2;
                        xl[k]:=mmn(xl[k],x2);
                        xd[k]:=mmx(xd[k],x2);
                      end
                    else
                      begin
                        xl[k]:=mmn(x[1,j+1],x2);
                        xd[k]:=mmx(x[1,j+1],x2);
                        xp2[k]:=x2;
                      end;
                  end
                else
                  begin
                    xp2[k]:=x2;
                    xl[k]:=mmn(xl[k],x2);
                    xd[k]:=mmx(xd[k],x2);
                  end;
                end;
              end;
          end;
        if xp1[k]*xp2[k]<>0 then k:=k+1;
    end;
  bpr:=k-1
end;

begin
  write('broj vrhova poligona                ? ');readln(bv);
  for i:=1 to bv do
    begin
      write('apscisa  ',i,'. tacke                ? ');readln(x[1,i
      write('ordinata ',i,'. tacke                ? ');readln(x[2,i
   end;
   x[1,bv+1]:=x[1,1];
   x[2,bv+1]:=x[2,1];
   write('dopustena greska                   ? ');readln(ep);
   dg:=10000; gg:=0;
   for i:=1 to bv do
     begin
       gg:=mmx(gg,x[2,i]);
       dg:=mmn(dg,x[2,i]);
     end;
  dg:=dg+ep/100;br:=0;
  while dg<=gg do
    begin
      presek(dg,dg+ep,xp1,xp2,xl,xd);
      mreza;
      dg:=dg+ep;
    end;
end;
```

```
procedure jednacina;
var j,i,bp,bmb,bbr,r:integer; amp:real;
var ko:boolean;
x:array[0..11] of integer;

procedure kombinacije_rekurzivno;
var jj,da,i: integer; mmp:real;
a,b: cniz;
  procedure kom(i:integer; mmp:real);
  var j,po,k,ka,kb,n,m:integer; km,ko:boolean;
  com: array[0..99] of integer;
  tem: cniz;

    function dd:real;
    var mx1,mn1,mx2,mn2: real;

    begin
      mx1:=0; mn1:=10000;mx2:=0; mn2:=10000;
      for k:=1 to m do
        begin
          mn1:=mmn(mn1,x1[ord(b[br-n+k])]);
          mx1:=mmx(mx1,x1[ord(b[br-n+k])]);
          mn2:=mmn(mn2,x2[ord(b[br-n+k])]);
          mx2:=mmx(mx2,x2[ord(b[br-n+k])]);
        end;
      dd:=mmx(mx1-mn1,mx2-mn2);
    end;

  begin
    n:=br; i:=i+1; jj:=0;
    for k:=1 to i-1 do n:=n-x[k];
    m:=x[i];
    for k:=0 to n do com[k]:=4*n;
    while com[1]<>(n-m+1) do
      begin
        k:=1;
        while (com[m-k+1]>=(n-k+1)) and (k<=m+1) do k:=k+1;
        if k<m+2 then
          begin
            ka:=m-k+1;
            kb:=com[ka];
            for k:=ka to m do
              begin
                kb:=kb+1;
                com[k]:=kb
              end;
          end
        else for k:=1 to m do com[k]:=k;
        for k:=1 to m do b[br-n+k]:=a[com[k]];
        if mmx(dd,mmp)<am then
          begin
            if x[i+1]>0 then
              begin
                po:=0;
                for j:=1 to n do
                  begin
                    ko:=false; tem[j]:=a[j];
                    for k:=1 to m do ko:=ko or (a[j]=a[com[k]]);
                    if ko then po:=po+1 else a[j-po]:=a[j];
                  end;
                  kom(i,mmx(dd,mmp));
                for j:=1 to n do a[j]:=tem[j];
```

```
                     end
                   else
                     begin
                       po:=0;
                       for j:=1 to bc do
                         begin
                           po:=po+x[j-1];
                           for k:=1 to x[j] do
                         end;
                       for k:=1 to br do bm[k]:=b[k];
                       am:=mmp;
                     end;
                 end;
               jj:=jj+1; write(jj,' ',i,' ',x[1],'-'); write(chr(13));
             end;
           writeln;
         end;
       begin
         for i:=1 to br do a[i]:=chr(i);
         mmp:=0;
         i:=0;
         x[bc+1]:=0;
         x[0]:=0;
         kom(i,mmp);
       end;

       begin
         ko:=true; amp:=am;
         for i:=2 to bc do x[i]:=0;
         x[1]:=br;
            repeat
            if ((x[bc]>=ibr) and (x[1]<=xbr)) then
              begin
                kombinacije_rekurzivno;
                if amp>am then
                  begin
                    amp:=am;
                    for i:=1 to bc do xm[i]:=x[i];
                  end;
              end;
            j:=0;
            while j<bc do
              begin
              j:=j+1;
              if (x[bc-j]-1)<=0 then ko:=false else
                begin
                  r:=br+1;
                  for i:=1 to bc-j do r:=r-x[i];
                  bp:=r div (x[bc-j]-1);
                  bbr:=r mod (x[bc-j]-1);
                  bmb:=bp;
                  if bbr>0 then bmb:=bp+1;
                  if bmb>j then ko:=false else
                    begin
                      x[bc-j]:=x[bc-j]-1;
                      for i:=1 to bp do x[bc-j+i]:=x[bc-j];
                      x[bc-j+bp+1]:=bbr;
                      for i:=bc-j+bp+2 to bc do x[i]:=0;
                      ko:=true;
                      j:=31;
                    end;
                end;
```

```
          end;
        until ko=false;
   end;

   begin
   ulaz;
     for l:=1 to br do
       begin
         write('x[',l,'] = ');
         write(x1[l]:6:2);
         write('    y[',l,'] = ');
         writeln(x2[l]:6:2);
       end;
   jednacina;
   izlaz;
   end.
```