UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

Ivan Šestak

OPTIMALNO UPRAVLJANJE DINAMIKOM AEROZAGADJIVANJA

- doktorska disertacija -

BEOGRAD

1987

SADRŽAJ

UVOD

U tehnološkom procesu proizvodnje i prerade,oslobadja se čitav niz hemijskih elemenata i njihovih jedinjenja koja su štetna za živi svet, pa je radi toga, ako ne postoje druge mere zaštite životne sredine, potrebno vršiti kontrolu izvora aerozagadjenja.

U ovom radu se posmatra kontrola izvora pasivnog aerozagadjenja, tj. takvog aerozagadjenja koje tokom disperzije u vazduhu ne prelazi u druge, možda još toksičnije elemente, sve dok nepadne na površinu zemlje ([1]).

Neka je oblast Ω ,u kojoj se posmatra disperzija aerozagadjenja, cilindar donje osnove Γ_o , bočne površi Γ_B i gornje osnove Γ_H , tako da je oblast Ω konveksna.

Pretpostavljamo da su izvori aerozagadjenja male mere u poredjenju sa merom oblasti Ω . Takodje, pretpostavljamo da se izvori aerozagadjenja nalaze unutar oblasti Ω .

Aerozagadjenje se iz izvora, unutar oblasti Ω , raznosi strujom vetra i turbulentnim pulsacijama vazduha.

Posmatraćemo deterministički model disperzije aerozagadjenja u vazduhu. Pošto su brzina vetra i maseni udeo aerozagadjenja u vazduhu statističke prirode, onda ćemo, da bi dobili deterministički model, izvršiti usrednjavanje statističkih veličina po vremenu ([1] , [2]).

Granični uslovi su takvog tipa, da iznošenje aerozagadjenja strujom vetra postoji samo na donjoj osnovi cilindra. Pretpostavlja se da ne postoji unošenje aerozagadjenja strujom vetra u oblast Ω , tj. pretpostavlja se da je udeo aerozagadjenja jednak nuli na granici cilindra.

Ekološka zona, koju štitimo od aerozagadjenja, nalazi se ispod osnove cilindra Ω .

Kontrolna površ G, na donjoj osnovi cilindra Ω je tolika, da ako pogledamo iz ma koje tačke ekološke zone, koju štitimo od aerozagadjenja, tada "ne vidimo" ni jedan izvor aerozagadjenja.

Zadatak ovog rada je da se pokaže da je moguće upravljati intenzitetom izvora aerozagadjenja, tako da maseni udeo aerozagadjenja na kontrolnoj površi u ma kom trenutku vremena bude jednak dopuštenoj vrednosti i da se, ukoliko postavljeni zadatak nije moguće rešiti analitički, pokaže da ga je moguće rešiti numerički.

Sadržaj prve glave je sledeći: u P1. je postavljena jednačina stanja u usrednjenom obliku kao u [1] i [2] ; u P2. je definisano slabo rešenje ([3]) i data prva apriorna ocena ([3] , [5]); u P3. je definisano rešenje s.s. ([3]) i data druga apriorna ocena ([5]) kojom je pokazano da rešenje zadatka pripada užem skupu od $H^{1,0}(Q)$, tj. da pripada skupu $H^{2,1}(Q)$.

Sadržaj druge glave je sledeći: u P1. su date osnovne oznake i definicije vezane za postavku zadatka optimalnog upravljanja; u P2. je pokazano da je skup optimalnih upravljanja neprazan ([7]); u P3. je pokazano da je postavljeni zadatak optimalnog upravljanja nekorektan ([7]); u P4. je izvršena regularizacija postavljenog zadatka optimalnog upravljanja metodom Tihonova ([7]); u P5. je odredjena konjugovana jednačina ([7]), definisano slabo rešenje ([4]) i odredjena prva apriorna ocena ([3] , [5]); u P6. su date neke osobine regularizovanog kriterijuma optimizacije (funkcionala Tihonova) kao npr. stroga konveksnost; u P7. je odredjen minimizirajući niz zadatka optimalnog upravljanja metodom projekcije gradijenta ([7] , [10] , [11]) i pokazano je da minimizirajući niz konvergira ka optimalnoj vrednosti u smislu prostora $L^2(I)^m$ ([7]).

Sadržaj treće glave je sledeći: u P1. je data aproksimacija jednačine stanja i konjugovane jednačine, metodom konačnih elemenata ([2] , [12]), kao i aproksimacija, tako dobijenih običnih diferencijalnih jednačina, eksplicitnom shemom ([12]); u P2. je pokazano da približno rešenje konvergira ka tačnom u smislu prostora $H^{1,0}(Q)$.

Sadržaj četvrte glave je sledeći: u P1. je postavljen približan zadatak optimalnog upravljanja; u P2. je data regularizacija aproksimacije zadatka optimalnog upravljanja, tj. odredjen je minimizirajući niz pomoću niza približnih zadataka optimalnog upravljanja, tako da taj niz konvergira ka skupu optimalnih vrednosti neprekidnog zadatka optimalnog upravljanja u smislu prostora $L^2(I)^m$.

Pri pozivanju u drugoj glavi, na npr. formulu (3.1) iz prve glave, koristi se oznaka (3.1/I).

Osnovne oznake i definicije, koje se koriste u odredjenoj glavi, date su na početku te glave.

GLAVA I

U ovoj glavi je postavljena jednačina kretanja aerozagadjenja u atmosferi i odredjen prostor funkcija u kojem je dobijena jednačina rešiva.

P1. JEDNAČINA KRETANJA AEROZAGADJENJA U ATMOSFERI

Osnovne oznake i definicije

Ω - cilindar poluprečnika R, donje osnove Γ_0 (površ proizvoljnog oblika klase C^2, takva da je cilindar Ω konveksan), gornje osnove Γ_H i omotača Γ_B ;

ε_k - izvor aerozagadjenja : $\text{mes}\,\varepsilon_k \ll \text{mes}\,\Omega$, $k=\overline{1,m}$;

x_i - pravougla Dekartova koordinata, $i=\overline{1,3}$;

$x=(x_1,x_2,x_3)$ - tačka oblasti Ω ;

T - vreme, konačno i fiksirano ;

$I=[0,T]$ - interval vremena za koji se može dobiti prognoza o usrednjenoj vrednosti vektora brzine vetra po vremenu ;

$\vec{n}_I$ -jedinični vektor spoljne normale na površ Γ_I , I=O,B,H ;

$\vec{v}(x,t)=(v_1, v_2, v_3)$ - vektor brzine vetra ;

$v_{n_I}=\vec{v}\cdot\vec{n}_I$, I=O,B,H ;

$Q=\Omega \times (0,T)$;

$\Sigma=\Gamma\times I$, $\Gamma=\Gamma_O \cup \Gamma_B \cup \Gamma_H$;

$\Sigma_J^- = \Gamma_J^- \times I$, $\Gamma_J^- = \{x\in\Gamma_J \mid v_{n_J} < 0\}$, $J=O,B$;

$\Sigma_J^+ = \Gamma_J^+ \times I$, $\Gamma_J^+ = \{x\in\Gamma_J \mid v_{n_J} \geqslant 0\}$, $J=O,B$;

$\Sigma_H = \Gamma_H \times I$;

$\rho_1(x,t)$- masena koncentracija aerozagadjenja (M/L^3) ;

ρ_2- masena koncentracija vazduha (M/L^3), ρ_2=const ;

$\rho(x,t)=\rho_1+\rho_2$ - masena koncentracija smeše ; pretpostavlja se da je ρ=const ;

$\varphi(x,t)=\rho_1/\rho$ - maseni udeo aerozagadjenja (-) ;

$D_{ii}(x)$ - koeficijent turbulentne difuzije, $i=\overline{1,3}$,

$D_{11}=D_{22}$ (L^2/T) ;

$\hat{D}(x)=\mathrm{diag}\,[D_{11}, D_{22}, D_{33}]$ - diagonalna matrica ;

$\chi_K = \chi(\mathcal{E}_K)$ - karakteristična funkcija skupa $\mathcal{E}_K$, $k=\overline{1,m}$,

$\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_m)$;

$u_K(t)$ - brzina promene količine aerozagadjenja na izvoru,

$k=\overline{1,m}$ $(ML^{-3}T^{-1})$, $\vec{u}=(u_1,\dots,u_m)$;

$\alpha(x)$ - koeficijent prenosa mase $(ML^{-2}T^{-1})$;

$\frac{\partial}{\partial \nu_I}(\cdot) = \varsigma\, \vec{n}_I \hat{D} \vec{\nabla}(\cdot)$ - konormalni izvod ;

s.s. - skoro svuda ;

$L^2(Q)$ - prostor merljivih funkcija čiji je kvadrat modula

integrabilan na Q, sa normom $\|f\|^2_{L^2(Q)} = \int_Q |f|^2 dx\,dt$ ([3]) ;

$H^{2s,s}(Q)$ $(s \geqslant 1)$ - prostor funkcija f koje pripadaju prostoru $L^2(Q)$ sa svim svojim generalisanim izvodima $\frac{\partial^{\alpha_1+\dots\alpha_m+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}\partial t^{\beta}}$

za sve cele i nenegativne brojeve $\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta$ takve, da

je $\alpha_1+\dots+\alpha_m+2\beta \leqslant 2s$. Norma prostora $H^{2s,s}$ je odredjena

sa $\|f\|^2_{H^{2s,s}(Q)} = \sum_{2\beta+\alpha_1+\dots+\alpha_m \leqslant 2s} \int_Q \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\dots\alpha_m+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}\partial t^{\beta}}\right)^2 dx\,dt$ ([3]) ;

$C^1(\Omega)$ - prostor neprekidnih funkcija na Ω koje imaju neprekidan izvod na Ω . Norma u $C^1(\Omega)$ je odredjena sa

$$\|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} = \sum_{\alpha_1+\cdots\alpha_m=1} \max \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots\alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\cdots\partial x_m^{\alpha_m}} \right| \qquad ([3]).$$

$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ - prostor funkcija koje pripadaju sa svim svojim prvim generalisanim izvodima skupu $L^2(\Omega)$ i jednake su nuli na granici oblasti Ω. Norma u $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ je data sa

$$\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \qquad ([3]);$$

$L^\infty(Q)$ - prostor merljivih i bitno ograničenih funkcija sa normom $\|f\|_{L^\infty(Q)} = \underset{(x,t)}{\mathrm{vrai}\max} |f|$ ([3]);

$L^2(I)^m$ - prostor merljivih vektor-funkcija $\vec{u}(t)=\{u_1(t),\ldots,u_m(t)\}$, $t\in I$, sa normom $\|\vec{u}\|^2_{L^2(I)^m} = \sum_{K=1}^{m} \int_I |u_K|^2 dt$ ([7]).

Jednačina kretanja aerozagadjenja u atmosferi

Posmatrajmo u intervalu $[t,t+\Delta t] = I_\Delta \subset I$ proizvoljnu nepokretnu oblast ω ($\subset \Omega$) koja obuhvata izvore aerozagadjenja. Promena količine aerozagadjenja $\iint_{Q_\Delta} \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} dx dt$, u oblasti $\omega \times I_\Delta = Q_\Delta$, ostvaruje se prenosom aerozagadjenj strujom vazduha kroz granicu $\partial\omega$ oblasti ω i predajom aerozagadjenja oblasti ω iz izvora. Na osnovu zakona o održanju količine materije, dobijamo integralnu jednačinu prenosa aerozagadjenja (jednačinu bilansa)

$$(1.1)\qquad \int_{Q_\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho \, dx\, dt = - \int_{\Sigma_\Delta} \rho \varphi (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dx\, dt + \int_{Q_\Delta} \vec{\chi} \vec{u}\, dx\, dt$$

Na osnovu teoreme Gausa-Ostrogradskog, (1.1) postaje

$$(1.2)\qquad \int_{Q_\Delta} \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \, div(\vec{v}\varphi) - \vec{\chi}\vec{u} \right] dx\, dt = 0$$

Pošto je cilindar Q_Δ proizvoljan, onda iz (1.2) sledi

$$(1.3)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + div(\vec{v}\varphi) = \frac{1}{\rho} \vec{\chi}\vec{u} \;, \quad Q$$

Sa dovoljno tačnosti može se uzeti da za donje delove atmosfere važi jednačina neprekidnosti ([1])

$$(1.4)\qquad div(\vec{v}) = 0 \;, \quad Q \,.$$

Jednačina (1.3) opisuje suštinu kretanja aerozagadjenja u vazduhu. Medjutim, kretanje aerozagadjenja u vazduhu je po svojoj prirodi složenije nego što je to obuhvaćeno jednačinom (1.3), pošto u njoj nisu uključene lokalne fluktuacije vazduha. Kretanje aerozagadjenja usled molekularne difuzije se zenemaruje. Lokalne fluktuacije vazduha su statističke prirode.

Da bi dobili deterministički model kretanja aerozagadjenja u vazduhu, izvršićemo usrednjavanje brzine vetra i masenog udela aerozagadjenja po vremenu, tj. uzimamo da je

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}\,'' \\ \varphi = \varphi' + \varphi'' \end{cases}$$

gde su

$\vec{v}\,'$, φ' - srednje vrednosti, a

$\vec{v}\,''$, φ'' - pulsacije vektora brzine vetra i masenog udela aerozagadjenja.

Srednje vrednosti su definisane sa

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \varphi'(t) = \langle \varphi(t) \rangle = \dfrac{1}{T_1} \displaystyle\int_t^{t+T_1} \varphi \, d\tau \,, \\ \vec{v}\,'(t) = \langle \vec{v}(t) \rangle = \dfrac{1}{T_1} \displaystyle\int_t^{t+T_1} \vec{v} \, d\tau \,, \qquad t, t+T_1 \in I \end{cases}$$

Iz (1.5) i (1.6) sledi

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \langle \vec{v}\,''(t) \rangle = 0 \,, \quad \langle \vec{v}\,'(t) \rangle = \vec{v}\,'(t) \\ \langle \varphi''(t) \rangle = 0 \,, \quad \langle \varphi'(t) \rangle = \varphi'(t) \\ \langle \varphi'(t)\, \vec{v}\,''(t) \rangle = \varphi'(t) \langle \vec{v}\,''(t) \rangle = 0 \end{cases}$$

Ako (1.5) uvrstimo u (1.3), izvršimo integraciju u intervalu $[t, t+T_1]$ i uzmemo u obzir (1.7), dobijamo

(1.8) $$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + div(\vec{v}'\varphi') + div\langle \vec{v}''\varphi''\rangle = \frac{1}{\rho}\vec{\chi}\vec{u}' \ , \quad Q$$

Pulsacioni član $\langle \vec{v}''\varphi''\rangle$ se prikazuje na sledeći način ([1] ,[2, str. 228])

(1.9) $$\langle \vec{v}''\varphi''\rangle = -\hat{D}\,\vec{\nabla}\varphi'$$

Na osnovu (1.9), (1.8) postaje

(1.10) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div(\vec{v}\varphi) - div(\hat{D}\vec{\nabla}\varphi) = \frac{1}{\rho}\vec{\chi}\vec{u} \ , \quad Q$$

gde su, radi kraćeg zapisa, izostavljene crtice; nadalje će φ, $\vec{v}$ i $\vec{u}$ prestavljati srednje vrednosti masenog udela aerozagadjenja, vektora brzine vetra i brzine promene količine aerozagadjenja iz izvora.

Neka su u početnom trenutku vremena, u oblasti Ω, registruje početni maseni udeo aerozagadjenja $\varphi_0(x)$, tj.

(1.11) $$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \ , \quad \Omega$$

Možemo pretpostaviti da je pravac vektora brzine vetra na visini H, upravan na osu cilindra, tj. da je

(1.12) $$v_{n_H} = 0, \quad \Sigma_H$$

Granične uslove uzimamo u obliku

(1.13) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu_0} = -\alpha \varphi, & \Sigma_0^+ \\ \varphi = 0, & \Sigma_0^- \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu_B} = 0, & \Sigma_B^+ \\ \varphi = 0, & \Sigma_B^- \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu_H} = 0, & \Sigma_H \end{cases}$$

Iz (1.13) sledi da postoji iznošenje aerozagadjenja samo na donjoj osnovi cilindra Ω, kada je $v > 0$, i da je udeo aerozagadjenja jednak nuli, kada je $v \leq 0$, tj. kada vetar duva iz spoljne sredine u oblast Ω.

Prema tome, kretanje aerozagadjenja, tj. promenu usrednjene koncentracije u vazduhu, opisujemo sledećim sistemom

(1.14) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + div(\vec{v}\varphi) - div(\hat{D}\vec{\nabla}\varphi) = \dfrac{1}{\rho}\vec{\chi}\vec{u}, & Q \\ div(\vec{v}) = 0, & Q \\ \varphi(0) = \varphi_0, & \Omega \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu_0} = -\alpha\varphi, & \Sigma_0^+ \\ \varphi = 0, & \Sigma_0^- \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu_B} = 0, & \Sigma_B^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 0, & \Sigma_B^- \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu_H} = 0, & \Sigma_H \\ v_{m_H} = 0, & \Sigma_H \end{cases}$$

P2. PRVA APRIORNA OCENA

Možemo uzeti da koeficijenti zadatka (1.14) pripadaju sledećim prostorima

$$(2.1) \qquad \begin{cases} v_i \in L^\infty(\bar{Q}), & i = \overline{1,3} \\ D_{ii} \in C^1(\bar{\Omega}), & i = \overline{1,3} \\ \alpha \in L^\infty(\bar{\Omega}) \\ \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \end{cases}$$

$$(2.2) \qquad \vec{u} \in U = U_1 \times \cdots \times U_m$$

$$U_k = \{ u_k \in L^2(I) \mid 0 \le u_k \le \beta_k \ \text{ za s.s. } t \in I \}, \quad k = \overline{1,m}$$

Uvedimo pozitivne konstante $\underline{D}$, $\overline{D}$, $\underline{D}_x$, $\overline{D}_x$, $\overline{v}$, $\underline{\alpha}$ i $\overline{\alpha}$, tako da važi

$$(2.3) \qquad \underline{D} \sum_{i=1}^{3} \nu_i^2 \le \sum_{i=1}^{3} D_{ii}(x)\, \nu_i^2 \le \overline{D} \sum_{i=1}^{3} \nu_i^2 ,$$

$$(2.4) \qquad \underline{D}_x \sum_{i=1}^{3} \nu_i^2 \le \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial D_{ii}}{\partial x_i}\, \nu_i^2 \le \overline{D}_x \sum_{i=1}^{3} \nu_i^2 ,$$

(2.5) $$|\vec{v}|^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i^2 \leqslant \bar{v}^2$$

(2.6) $$0 < \underline{\alpha} \leq \alpha(x) \leq \bar{\alpha}$$

Rešenje zadatka (1.14) posmatramo u slabom (generalisanom) smislu.

Neka je $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $0<\tau\leq T$.

<u>Definicija 1</u>. Rećićemo da je za svako $\vec{u}$ funkcija φ slabo (generalisano) rešenje graničnog zadatka (1.14) ako :

1) $\varphi \in H^{1,0}(Q)$,

2) za svako $\tau \in I$ važi

(2.7) $$-\int_{Q_\tau} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega} \varphi(\tau)\psi(\tau) dx - \int_{\Omega} \varphi_0 \psi(0) dx +$$
$$+ \int_{Q_\tau} \psi \vec{v}\, \vec{\nabla}\varphi dx dt + \int_{Q_\tau} \vec{\nabla}\psi \hat{D}\, \vec{\nabla}\varphi dx dt + \int_{\Sigma_0^+} \alpha \varphi \psi' dx dt -$$
$$- \int_{\Sigma_0^-} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_0} dx dt - \int_{\Sigma_B^-} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_B} dx dt = \frac{1}{\rho} \int_{Q_\tau} \vec{\chi}\, \vec{u}\, \psi dx dt ,$$

za svako $\psi \in H^{1,1}(Q)$, $\psi(T)=0$ ([3]), ([4]) .

<u>Prva apriorna ocena</u>

Neka je $Q_t = \Omega \times (0,t)$ i $I_t = [0,t]$, $0<t\leqslant T$.

Ako u (2.7) stavimo $\psi=\varphi$ i $t=\tau$, i uzmemo u obzir (1.13), dobijamo

(2.8) $$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi^2(t)\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi_0^2\,dx+\int_{Q_t}\varphi\vec{v}\,\vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt+$$
$$\int_{Q_t}\vec{\nabla}\varphi\,\hat{D}\,\vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt+\int_{\Sigma_{0t}^{+}}\alpha\varphi^2\,dx\,dt=\frac{1}{\varrho}\int_{Q_t}\vec{\chi}\,\vec{u}\,\varphi\,dx\,dt$$

Na osnovu nejednačine Bunjakovskog-Švarca, ocene (2.5) i Košijeve ε- nejednakosti, imamo

(2.9) $$\int_{Q_t}|\varphi\vec{v}\,\vec{\nabla}\varphi|\,dx\,dt\leq\frac{\varepsilon_1'}{2}\int_{Q_t}\varphi^2\,dx\,dt+\frac{\bar{v}^2}{2\varepsilon_1'}\int_{Q_t}|\vec{\nabla}\varphi|^2\,dx\,dt\,,$$

(2.10) $$\frac{1}{\varrho}\int_{Q_t}|\vec{\chi}\,\vec{u}\,\varphi|\,dx\,dt\leq\frac{C_\varepsilon\varepsilon_2'}{2\varrho}\int_{I_t}u_K^2\,dt+\frac{1}{2\varrho\varepsilon_2'}\int_{Q_t}\varphi^2\,dx\,dt\,,$$

gde je

$$C_\varepsilon=m\cdot\max_{1\leq K\leq m}\operatorname{mes}\mathcal{E}_K\,,\quad\varepsilon_1',\varepsilon_2'>0\,.$$

Na osnovu (2.9) i (2.10), (2.8) postaje

(2.11) $$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi^2(t)\,dx+a(\varphi,\varphi)\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi_0^2\,dx+$$
$$\frac{C_\varepsilon\varepsilon_2'}{2\varrho}\sum_{K=1}^{m}\int_{I_t}u_K^2\,dt+\frac{\varepsilon_1'}{2}\int_{Q_t}\varphi^2\,dx\,dt+$$
$$\frac{1}{2\varrho\varepsilon_2'}\int_{Q_t}\varphi^2\,dx\,dt+\frac{\bar{v}^2}{2\varepsilon_1'}\int_{Q_t}|\vec{\nabla}\varphi|^2\,dx\,dt\,,$$

gde je

$$a(\varphi,\varphi) = \int_{Q_t} \vec{\nabla}\varphi \hat{D} \vec{\nabla}\varphi \, dx\, dt + \int_{\Sigma^+_{ot}} \alpha \varphi^2 \, dx\, dt$$

<u>Lema 1</u>. Bilinearna forma

$$(2.12) \qquad a(\varphi,\psi) = \int_{Q_t} \vec{\nabla}\psi \hat{D} \vec{\nabla}\varphi \, dx\, dt + \int_{\Sigma^+_{ot}} \alpha \varphi \psi \, dx\, dt$$

za $\varphi=\psi$ je ekvivalentna normi prostora $H^{1,0}(Q)$.

Zaista, na osnovu (2.3) i (2.6)

$$(2.13) \qquad a(\varphi,\varphi) = \int_{Q_t} \vec{\nabla}\varphi \hat{D} \vec{\nabla}\varphi \, dx\, dt + \int_{\Sigma_t} \alpha \varphi^2 \, dx\, dt \leq$$

$$\leq \bar{D} \, \| \, |\vec{\nabla}\varphi| \, \|^2_{L^2(Q_t)} + \bar{\alpha} \, \|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma_t)}$$

Na osnovu ocene

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma_t)} \leq C_1 \|\varphi\|^2_{H^{1,0}(Q_t)} ,$$

(2.13) postaje

$$(2.14) \qquad a(\varphi,\varphi) \leq (\bar{D} + \bar{\alpha} C_1) \| \, |\vec{\nabla}\varphi| \, \|^2_{L^2(Q_t)} + \bar{\alpha} C_1 \|\varphi\|^2_{L^2(Q_t)} \leq$$

$$\leq \tilde{C}_2 \|\varphi\|^2_{H^{1,0}(Q_t)}$$

gde je

$\tilde{C}_2 = \bar{D} + \bar{\alpha} C_1$

S druge strane, na osnovu nejednačine

(2.15) $$\|\varphi\|^2_{L^2(Q_t)} \leq c\,(\,\||\vec{\nabla}\varphi|\|^2_{L^2(Q_t)} + \|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma^+_{ot})}\,)$$ ([15,str.173])

$$\|\varphi\|^2_{H^{1,0}(Q_t)} \leq (1+c)\||\vec{\nabla}\varphi|\|^2_{L^2(Q_t)} + c\|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma^+_{ot})} \leq max\,\{(1+c)/\underline{D}\,,\,c/\underline{\alpha}\}\,a(\varphi,\varphi)$$

tj.

(2.16) $$\tilde{C}_1\,\|\varphi\|^2_{H^{1,0}(Q_t)} \leq a(\varphi,\varphi) \leq \tilde{C}_2\,\|\varphi\|^2_{H^{1,0}(Q_t)}$$

gde je

$$\tilde{C}_1 = 1/\,max\,\{\,(1+c)/\underline{D}\;,\;c/\underline{\alpha}\,\}\,.$$

Time je lema 1. dokazana.

Na osnovu (2.16), (2.11) postaje

(2.17) $$\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\,\tilde{C}_1^2 - \frac{\bar{V}^2}{2\varepsilon_1'}\,)\,\||\vec{\nabla}\varphi|\|^2_{L^2(Q_t)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_\varepsilon\varepsilon_2'}{2\rho}\sum_{K=1}^{m}\|u_K\|^2_{L^2(I_t)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(\,2\tilde{C}_1^2 + \varepsilon_1' + \frac{1}{\rho\varepsilon_2'}\,)\,\|\varphi\|^2_{L^2(Q_t)}$$

Uvodjenjem oznake $\ell = \ell_1/\ell_2$ gde je

$$\ell_1 = \max\{1,\ c_\varepsilon \varepsilon_2'/\rho\ ,\ 2\tilde{c}_1^2 + \varepsilon_1' + 1/\rho\varepsilon_2'\ \},$$

$$\ell_2 = \min\{\ 1,\ 2\tilde{c}_1^2 - \bar{v}^2/\varepsilon_1'\ \},$$

(2.17) postaje

(2.18) $$\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\,|\vec{\nabla}\varphi|\,\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant \ell\,\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \ell\sum_{K=1}^{m}\|u_K\|^2_{L^2(I_t)} + \ell\,\|\varphi\|^2_{L^2(Q_t)}$$

Primenom leme Gronuloa ([5]) na (2.18), dobijamo

(2.19) $$\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\,|\vec{\nabla}\varphi|\,\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant \\ \ell e^{\ell T}\left(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{K=1}^{m}\|u_K\|^2_{L^2(I_t)}\right)$$

Integraljenjem (2.19) u intervalu I, dobijamo

(2.20) $$\|\varphi\|^2_{H^{1,0}(Q)} \leqslant C\left(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{K=1}^{m}\|u_K\|^2_{L^2(I)}\right)$$

gde je

$$C = \ell e^{\ell T}\max\{1, T\}.$$

Prema tome važi sledeća

Lema 2. Postoji samo jedno slabo (generalisano) rešenje zadatka (1.14) u $H^{1,0}(Q)$ i pri tome važi ocena (2.20).

P3. DRUGA APRIORNA OCENA

Pored slabog (generalisanog) rešenja zadatka (1.14) možemo posmatrati i njegovo rešenje s.s..

Definicija 2. Funkcija φ je rešenje s.s. zadatka (1.14) ako pripada prostoru $H^{2,1}(Q)$, zadovoljava za s.s. $(x,t) \in Q$ jednačinu (1.10) i zadovoljava uslove (1.11)-(1.13) ([3]).

Druga apriorna ocena

Ako uvedemo oznake

$$L(\varphi) = div(\hat{D}\vec{\nabla}\varphi) - \vec{v}\vec{\nabla}\varphi ,$$

$$M(\vec{u}) = \frac{1}{\rho}\vec{\chi}\vec{u}$$

onda jednačina (1.10) posle dizanja na kvadrat i integraljenja u oblasti Q_τ ($0 < \tau < T$) postaje

(3.1) $$\int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - L(\varphi)\right]^2 dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} M^2(\vec{u})\,dx\,dt$$

Uzimajući u obzir da je $\chi_k \chi_\ell = 0$ za $k \neq \ell$, $k,\ell = \overline{1,m}$,

(3.1) postaje

(3.2) $$\int\limits_{Q_\tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau} L^2(\varphi)\,dx\,dt - 2\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, div\,(\hat{D}\vec{\nabla}\varphi)\,dx\,dt +$$

$$2\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, \vec{v}\, \vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\rho^2}\, mes\, \mathcal{E}_k \int_0^\tau u_k^2\,dt$$

Primenjujući nejednakost Bunjakovskog-Švarca i Košije-vu ε- nejednakost na drugi integral sa leve strane u (3.2), dobijamo

(3.3) $$\int\limits_{Q_\tau} L^2(\varphi)\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \vec{\nabla}\varphi\, \nabla\hat{D}\, \nabla\hat{D}\, \vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt +$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \vec{\nabla}\varphi\, \nabla\hat{D}\, \hat{D}\, \Delta\varphi\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \hat{D}\hat{D}\,\Delta\varphi\,dx\,dt -$$

$$-\int\limits_{Q_\tau} \vec{\nabla}\varphi\, \vec{v}\, \vec{v}\, \vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt$$

Na osnovu jednakosti

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, div\,(\hat{D}\vec{\nabla}\varphi) = div\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\hat{D}\vec{\nabla}\varphi\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\varphi\,\hat{D}\,\vec{\nabla}\varphi\right),$$

treći član sa leve strane u (3.2) postaje

$$(3.4)\qquad -2\int_{Q_\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{div}\,(\hat{D}\vec{\nabla}\varphi)\,dx\,dt=\int_{\Omega}\vec{\nabla}\varphi(\tau)\hat{D}\vec{\nabla}\varphi(\tau)\,dx-$$

$$-\int_{\Omega}\vec{\nabla}\varphi_0\hat{D}\vec{\nabla}\varphi_0\,dx+2\int_{\Sigma^+_{0\tau}}\alpha\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt\,.$$

Primenjujući nejednakost Bunjakovskog-Švarca, Košijevu ε- nejednakost i uslov (2.5) na četvrti član sa leve strane u (3.2), dobijamo

$$(3.5)\qquad 2\int_{Q_\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{v}\vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt\le\frac{1}{4}\int_{Q_\tau}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2dx\,dt+$$

$$(2\bar{v})^2\int_{Q_\tau}|\vec{\nabla}\varphi|^2dx\,dt$$

Uzimajući u obzir (3.3), (3.4) i (3.5), (3.2) postaje

$$(3.6)\qquad \int_{Q_\tau}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2dx\,dt+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\vec{\nabla}\varphi\,\nabla\hat{D}\,\nabla\hat{D}\,\vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q_\tau}\vec{\nabla}\varphi\,\nabla\hat{D}\hat{D}\,\Delta\varphi\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\hat{D}\hat{D}\,(\Delta\varphi)^2dx\,dt-$$

$$-\int_{Q_\tau}\vec{\nabla}\varphi\,\vec{v}\,\vec{v}\,\vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt+\int_{\Omega}\vec{\nabla}\varphi(\tau)\,\hat{D}\,\vec{\nabla}\varphi(\tau)\,dx-$$

$$-\int_{\Omega}\vec{\nabla}\varphi_0\,\hat{D}\,\vec{\nabla}\varphi_0\,dx+2\int_{\Sigma^+_{0\tau}}\alpha\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{k=1}^{m}{}'\,\mathrm{mes}\,\varepsilon_k\int_0^\tau u_k^2\,dt+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2dx\,dt+(2\bar{v})^2\int_{Q_\tau}|\vec{\nabla}\varphi|^2dx\,dt$$

Primenjujući nejednakost Bunjakovskog-Švarca i Košijevu ε- nejednakost na (3.6), onda, uzimajući u obzir jednakost

$$2\int_{\Sigma_0^\tau} \alpha(x)\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt = \int_{G^+} \alpha(x)\varphi^2(\tau)\,dx - \int_{G^+} \alpha(x)\varphi_0^2\,dx ,$$

ocenu

$$\|\varphi\|^2_{L^2(G)} \leq \tilde{C}\,\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad ([3])$$

i (2.1)-(2.6), dobijamo

$$(3.7) \qquad \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q_\tau)} + (\underline{D}^2 - \bar{D}/2\varepsilon_1')\,\|\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q_\tau)} +$$

$$+ 2\underline{D}\,\|\vec{\nabla}\varphi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\,\frac{1}{\rho^2} \max_{1\leq k\leq m} \operatorname{mes} \varepsilon_k \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{m} \|u_k\|^2_{L^2(I_\tau)} + 2\bar{\alpha}\,\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ 2(\bar{D}+\bar{\alpha})\,\||\vec{\nabla}\varphi_0|\|^2_{L^2(\Omega)} + (\bar{D}_x^2 + \varepsilon_1'\bar{D}_x + 9\bar{v}^2)\,\||\vec{\nabla}\varphi|\|^2_{L^2(Q_\tau)} +$$

$$+ 2\bar{\alpha}\,\|\varphi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\bar{\alpha}\,\||\vec{\nabla}\varphi(\tau)|\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Integraljenjem nejednakosti (3.7) po τ u intervalu I i uzimajući u obzir ocenu (2.20), dobijamo

$$(3.8)\qquad \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)} + (\underline{D}^2 - \bar{D}/2\varepsilon_1')\|\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)} + 2\underline{D}\,\||\vec{\nabla}\varphi|\|^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$\leq (2\bar{\alpha}T + c/(\bar{D}_x^2 + \varepsilon_1'\bar{D}_x + 9\bar{v}^2) + c/\bar{\alpha})\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ 2(\bar{D}+\bar{\alpha})T\,\||\vec{\nabla}\varphi_0|\|^2_{L^2(\Omega)} + \Big(\frac{2}{\varrho^2}m\cdot\max_{1\leq k\leq m}\operatorname{mes}\mathcal{E}_k +$$

$$+ c/(\bar{D}_x^2 + \varepsilon_1'\bar{D}_x + 9\bar{v}^2) + c/\bar{\alpha}\Big)\sum_{k=1}^{m}\|\mu_k\|^2_{L^2(I)}$$

Ako levoj i desnoj strani u (3.8) dodamo normu $\|\varphi\|^2_{L^2(Q)}$ $(<\infty)$ i izvršimo ocenu te norme sa desne strane pomoću (2.20) i uvedemo oznaku $\ell = \ell_1/\ell_2$, gde je

$$\ell_1 = \max\{2\bar{\alpha}T + c(\bar{D}_x^2 + \varepsilon_1'\bar{D}_x + 9\bar{v}^2) + c(1+\bar{\alpha}^{-1}),$$

$$2(\bar{D}+\bar{\alpha})T,\quad 2c + \frac{2}{\varrho^2}m\cdot\max_{1\leq k\leq m}\operatorname{mes}\mathcal{E}_k + c/\bar{\alpha} +$$

$$+ c(\bar{D}_x^2 + \varepsilon_1'\bar{D}_x + 9\bar{v}^2)\},$$

$$\ell_2 = \min\{1,\ \underline{D}^2 - \bar{D}/2\varepsilon_1',\ 2\underline{D}\},$$

onda (3.8) postaje

$$(3.9)\qquad \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^2(Q)} + \||\vec{\nabla}\varphi|\|^2_{L^2(Q)} + \|\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$\leq \ell\|\varphi_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \ell\sum_{k=1}^{m}\|\mu_k\|^2_{L^2(I)}$$

Leva strana u (3.9) je ekvivalentna normi prostora $H^{2,1}(Q)$ ([6, str. 312]), pa imamo

(3.10) $$\|\varphi\|^2_{H^{2,1}(Q)} \leq C_1 \left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{\circ}{H}_1(\Omega)} + \sum_{k=1}^{m} \|u_k\|^2_{L^2(I)} \right)$$

Prema tome važi sledeća

<u>Lema 2.</u> Zadatak (1.14) ima jedno rešenje s.s. u $H^{2,1}(Q)$. Pri tome važi ocena (3.10).

GLAVA II

U ovoj glavi je zadatak kontrole aerozagadjenja postavljen kao zadatak optimalnog upravljanja. Pokazano je da optimalno upravljanje postoji (P2.) u obliku granične vrednosti minimizirajućeg niza (P7.).

P1. POSTAVKA ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Osnovne oznake i definicije

G - kontrolna površ aerozagadjenja klase C^2, $G \subset \Gamma_0$;

E_K^+ - površ preseka oblaka aerozagadjenja sa osnovom cilindra Ω ;

$g_K^+ = G \cap E_K^+$;

$\bar{\varphi}$ - dopušteni maseni udeo aerozagadjenja na kontrolnoj površi G, $\bar{\varphi} = \text{const}$;

$\vec{u}(t)$ - dopušteno upravljanje (brzina promene količine aerozagadjenja na izvoru) - vektor-funkcija iz $L^2(I)^m$;

$\vec{u}_*(t)$ - optimalno upravljanje - vektor-funkcija iz $L^2(I)^m$;

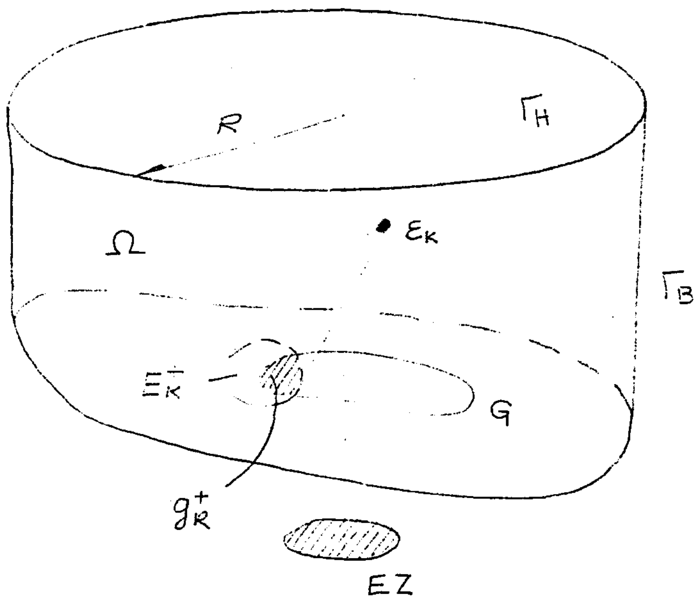
$U = U_1 \times \ldots \times U_m$ - dopušteni skup upravljanja ;

U_k - dopušteni skup upravljanja, definisan sa (2.2/I), $k=\overline{1,m}$;

$J(\vec{u})$ - kriterijum optimizacije ;

$J_* = J(\vec{u}^*)$ - optimalna vrednost kriterijuma optimizacije ;

$U_* = \{ \vec{u} \in U \mid J(\vec{u}) = J(\vec{u}^*)$ - skup optimalnih upravljanja ;



Sl.1 - EZ- ekološka zona (nalazi se ispod osnove cilindra Ω) ; G- kontrolna površ (ni jedan izvor ε_k, $k=\overline{1,m}$, se " ne vidi " iz ekološke zone) ; izvori ε_k, $k=\overline{1,m}$, su koncentrisani oko ose cilindra.

Zadatak optimalnog upravljanja

Zahtevamo da brzine promena količine aerozagadjenja na izvorima budu takve da maseni udeo aerozagadjenja na cilindru Σ_G^+ bude jednak dopuštenoj (sanitarnoj) vrednosti $\bar{\varphi}$.

Razliku izmedju trenutnog masenog udela φ i dopuštenog $\bar{\varphi}$ na Σ_G^+ , odredjivaćemo u smislu prostora L^2, tj. kriterijum optimizacije zadajemo u obliku

$$(1.1) \qquad J(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Sigma_G^+} \chi_k^+ |\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi}|^2 \, dx dt$$

gde je

$\chi_k^+ = \chi(g_k^+)$ - karakteristična funkcija površi g_k^+, $k=\overline{1,m}$.

Prema tome, zadatak optimalnog upravljanja se sastoji u tome da se odredi takvo upravljanje $\vec{u}^*$ da

$$(1.2) \qquad \inf_{U} J(\vec{u}) = J(\vec{u}^*)$$

gde je $\varphi(\vec{u})$ odredjeno graničnim zadatkom (1.14/I).

P2. EGZISTENCIJA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Da je skup optimalnih upravljanja U_* neprazan tvrdi sledeća

Lema 1. Neka je U slabo kompaktan skup iz Banahovog prostora B, funkcijonal J(u) definisan, konačan i slabo polunepreki-dan odozdo na U. Onda je $J_* = \inf_{U} J(u) > -\infty$, U_* - neprazan, slabo kompaktan i svaki minimizirajući niz $\{u_k\}$ slabo konvergira ka U_* ([7]).

(A) Slaba kompaktnost skupa U

Slabu kompaktnost skupa U daje sledeća

Lema 2. Svaki ograničen, zatvoren i konveksan skup U iz refleksivnog Banahovog prostora B je slabo kompaktan ([7],[8]).

(a) Zatvorenost skupa U

Skup U je zatvoren ako su takvi U_k, $k=\overline{1,m}$.

Neka niz $\{u_k^\ell\}_\ell \in U_k$ konvergira ka u_k po normi iz $L^2(I)$. Onda postoji podniz $\{u_k^{\ell_p}\}_{\ell_p}$ koji konvergira ka u_k s.s. na I ([8]) i važi $0 \leqslant u_k^{\ell_p} \leqslant \beta_k$ s.s. na I, $\ell_p = \overline{1,\infty}$. Ako pustimo da

$\ell_p \to \infty$ dobijamo $0 \leqslant u_K \leqslant \beta_K$ s.s. na I. Prema tome $u_K \in U_K$, tj. U_K je zatvoren skup po normi prostora $L^2(I)$.

(b) Konveksnost skupa U

Skup U je konveksan ako su takvi U_K, $k=\overline{1,m}$.

Neka u_K, $v_K \in U_K$ i $\beta \in [0,1]$. Treba pokazati da onda i $\beta u_K + (1-\beta) v_K \in U_K$. Sabiranjem ovih dveju nejednakosti $0 \leqslant \beta u_K \leqslant \beta \beta_K$, $0 \leqslant (1-\beta) v_K \leqslant (1-\beta)\beta_K$, sledi konveksnost skupa U_K.

Prema tome, svi uslovi leme 2. su zadovoljeni, pa je skup U slabo kompaktan.

(B) Slaba poluneprekidnost odozdo kriterijuma optimizacije J(u)

Slabu poluneprekidnost odozdo kriterijuma optimizacije $J(\vec{u})$ daje sledeća

Lema 3. Neka je U konveksan skup iz Banahovog prostora B. Konveksna funkcija J(u) je slabo poluneprekidna odozdo na U tada i samo tada ako je poluneprekidna odozdo na U ([7]).

(c) <u>Konveksnost kriterijuma optimizacije J($\vec{u}$)</u>

Pošto je

(2.1) $$\varphi(\beta\vec{u}+(1-\beta)\vec{v}) = \beta\varphi(\vec{u}) + (1-\beta)\varphi(\vec{v}), \quad \beta\in[0,1]$$

onda je

(2.2) $$J(\beta\vec{u}+(1-\beta)\vec{v}) = \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ [(\varphi(\vec{u})-\bar{\varphi}) + (1-\beta)(\varphi(\vec{v})-\bar{\varphi})] \|^2_{L^2(\Sigma_G^+)}$$

Uzimajući u obzir jednakost

(2.3) $$|\beta a + (1-\beta)b|^2 = \beta|a|^2 + (1-\beta)|b|^2 - \beta(1-\beta)|a-b|^2,$$

(2.2) postaje

(2.4) $$J(\beta\vec{u}+(1-\beta)\vec{v}) = \beta\sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi(\vec{u})-\bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_G^+)} + (1-\beta)\sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi(\vec{v})-\bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_G^+)} - \beta(1-\beta)\sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi(\vec{u})-\varphi(\vec{v})) \|^2_{L^2(\Sigma_G^+)}$$

Konveksnost kriterijuma optimizacije J($\vec{u}$) dobijamo odbacivanjem poslednjeg člana sa desne strane u (2.4).

Napomena. Kriterijum optimizacije J(u) nije strogo konveksan!

(d) Poluneprekidnost odozdo kriterijuma optimizacije $J(\vec{u})$ na U

Pokažimo da je kriterijum optimizacije $J(\vec{u})$ neprekidan na U, pa će tim pre biti poluneprekidan odozdo na U.

Neka niz $\{\vec{u}^{\ell}\}_{\ell}$ konvergira ka $\vec{u}$ po normi prostora $L^2(I)^m$.

Ocenimo $|J(\vec{u}^{\ell}) - J(\vec{u})|$ odozgo.

$$(2.5) \qquad |J(\vec{u}^{\ell}) - J(\vec{u})| \le \sum_{k=1}^{m} \Big| \, \|\chi_k^+ (\varphi(\vec{u}^{\ell}) - \bar{\varphi})\|^2_{L^2(\Sigma_Q^+)} - \|\chi_k^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi})\|^2_{L^2(\Sigma_Q^+)} \Big|$$

Pošto su norme $\|\chi_k^+ \varphi(\vec{u}^{\ell})\|_{L^2(\Sigma_Q^+)}$ i $\|\chi_k^+ \bar{\varphi}\|_{L^2(\Sigma_Q^+)}$ $k=\overline{1,m}$, konačne, onda (2.5) postaje

$$(2.6) \qquad |J(\vec{u}^{\ell}) - J(\vec{u})| \le C_1 \sum_{k=1}^{m} \|\chi_k^+ (\varphi(\vec{u}^{\ell}) - \varphi(\vec{u}))\|_{L^2(\Sigma_Q^+)} \le$$

$$\le C_1 m \,(\mathrm{mes}\, Q)\, \|\varphi(\vec{u}^{\ell}) - \varphi(\vec{u})\|_{H^{1,0}(Q)}$$

Na osnovu (2.20/I), (2.6) postaje

$$|J(\vec{u}^{\ell})-J(\vec{u})| \leq m\, c_1 (mes\, G)\sqrt{c}\left(\sum_{k=1}^{m} \| u_k^{\ell} - u_k \|^2_{L^2(I)}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Kada $\ell \to \infty$, onda desna strana u (2.7) teži nuli pa je kriterijum optimizacije $J(\vec{u})$ neprekidan.

Pošto su svi uslovi leme 1. zadovoljeni, onda je skup optimalnih upravljanja U_* neprazan.

P3. KOREKTNOST POSTAVLJENOG ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Definicija 1. Zadatak

$$J(\vec{u}) \to inf\,, \quad u \in U \tag{3.1}$$

je korektno postavljen u metrici ρ ili kraće, ρ- korektno postavljen, ako

1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \phi$;

2) svaki minimizirajući niz $\{u_k\}$ zadatka (3.1) ρ- konver-

gira ka skupu U_* ([7]).

Uslovi 1) definicije 1. su zadovoljeni na osnovu leme 1. Uslov 2) nije zadovoljen. Zaista, neka je $\vec{u}^* \in U$ i neka je $\{\vec{u}^{\ell}\}_{\ell}$ minimizirajući niz zadatka $J(\vec{u}) \to \inf$, $\vec{u} \in U$, tj. $J(\vec{u}^{\ell}) \to J(\vec{u}^*)$ kada $\ell \to \infty$. Na osnovu teoreme 8. u [7, str. 55] , da bi važilo

$$J(\vec{u}^{\ell}) - J(\vec{u}^*) \geqslant \varkappa \, \| \vec{u}^{\ell} - \vec{u}^* \|^2_{L^2(I)^m} , \quad \varkappa = const ,$$

što je neophodno da bi bio ispunjen uslov 2), potrebno je izmedju ostalog da kriterijum optimizacije $J(\vec{u})$ bude strogo konveksan, a on to nije (v. (2.c)).

Prema tome zadatak $J(\vec{u}) \to \inf$, $\vec{u} \in U$, nije korektan.

P4. REGULARIZACIJA ZADATKA MINIMIZACIJE METODOM TIHONOVA

Uvedimo funkcional

$$(4.1) \qquad \Omega(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{m} \| u_k \|^2_{L^2(I)} , \qquad \vec{u} \in U_\Omega \subseteq U$$

Definicija 2. Funkcija $\Omega(u)$, definisana na skupu $U_\Omega \subseteq U$, naziva se stabilizator zadatka (1.2) u metrici ρ ili kraće ρ - stabilizator, ako :

1) $\Omega(u) \geq 0$ za svako $u \in U_\Omega$;

2) skup $\Omega_C = \{ u \in U_\Omega \mid \Omega(u) \leq C \}$ - ρ - kompaktan za svako $C \geq 0$;

3) skup $U^*_\Omega = U_\Omega \cap U_*$ - neprazan ([7]).

Neka je $U_\Omega = U$.

Da bi funkcional (4.1) bio $L^2(I)^m$ - stabilizator zadatka $J(\vec{u}) \to \inf$, $\vec{u} \in U$, treba proveriti samo uslov 2).

Da bi skup Ω_C bio $L^2(I)^m$ - kompaktan treba pokazati da je ravnomerno ograničen po normi i ravnomerno neprekidan u srednjem ([9]).

Ravnomerna ograničenost elemenata iz Ω_C po normi prostora $L^2(I)^m$ je očigledna.

Za ravnomernu neprekidnost u srednjem treba pokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$\sup_{\vec{u} \in U} \| \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) \|^2_{L^2(I)^m} < \varepsilon \tag{4.2}$$

za svako t, $t+\Delta t \in I$, $|\Delta t| < \delta$.

Razvijanjem (4.2), i uzimajući u obzir da je oscilacija funkcije v iz $L^2(I)$ definisana sa

$$\omega^2(v, \delta) = \sup_{|\Delta t| < \delta} \int_0^T | \vec{v}(t+\Delta t) - v(t) |^2 \, dt ,$$

dobijamo

$$\sup_{\vec{u} \in U} \| \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) \|^2_{L^2(I)^m} \leq \tag{4.3}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{u_k \in U_k} \sup_{|\Delta t| < \delta} \int_0^T | u_k(t+\Delta t) - u_k(t) |^2 \, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sup_{u_k \in U_k} \omega^2(u_k, \delta)$$

Desna strana u (4.3) teži nuli kada $\delta \to 0$, pa sledi (4.2).

Prema tome, funkcional (4.1) je stabilizator zadatka

$J(\vec{u}) \longrightarrow \inf$, $\vec{u} \in U$, po metrici prostora $L^2(I)^m$.

Sada, umesto zadatka $J(\vec{u}) \longrightarrow \inf$, $\vec{u} \in U$, posmatramo novi zadatak

(4.4) $\qquad T_\ell(\vec{u}) \rightarrow \inf, \quad \vec{u} \in U$,

gde je

(4.5) $$T_\ell(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_q^+)} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^\ell \| u_k \|^2_{L^2(I)} -$$

\- regularizovan kriterijum optimizacije (funkcional Tihonova),

$\{\alpha_k^\ell\}_\ell$ - niz koji teži nuli kada $\ell \rightarrow \infty$ za svako $k=\overline{1,m}$.

P5. KONJUGOVANA JEDNAČINA. PRVA APRIORNA OCENA

Konjugovana jednačina

Konjugovana jednačina se može dobiti iz uslova stacionarnosti lagranžijana $L(\varphi, \vec{u}; \psi)$ ([7]).

Lagranžijan se definiše sa

$$(5.1) \qquad L^{\ell}(\varphi, \vec{u}; \psi) = \sum_{K=1}^{m} \int_{\Sigma_q^+} \chi_K^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi})^2 \, dx\, dt +$$

$$+ \sum_{K=1}^{m} \alpha_K^{\ell} \int_0^T u_K^2 \, dt + 2\int_Q \psi \Big[-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - div(\vec{v}\varphi) + div(\hat{D}\vec{\nabla}\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \vec{\chi}\vec{u} \Big] dx\, dt ,$$

gde je

ψ - konjugovana promenljiva.

Prva varijacija lagranžijana je

$$(5.2) \qquad \delta L^{\ell}(\varphi, \vec{u}; \psi) = 2\sum_{K=1}^{m} \int_{\Sigma_q^+} \chi_K^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi})\, \delta\varphi \, dx\, dt +$$

$$+ 2 \sum_{K=1}^{m} \alpha_K^{\ell} \int_0^T u_K \, \delta u_K \, dt + 2\int_Q \psi \Big[-\frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} - div\, \vec{v}\delta\varphi +$$

$$+ div(\hat{D}\vec{\nabla}\delta\varphi) + \frac{1}{\rho}\vec{\chi}\delta\vec{u} \Big] dx\, dt$$

Promenljiva stanja u varijaciji zadovoljava sistem (1.14/I), gde umesto φ treba staviti $\delta\varphi$, a umesto $\varphi(x,0) = \varphi_0$, $\delta\varphi(x,0) = 0$.

Ako umesto četvrtog i petog člana u (5.2) stavimo

$$div\,(\psi \vec{\nabla} \delta\varphi) = \vec{\nabla}\psi \vec{\nabla}\delta\varphi + \psi\, div\,(\vec{\nabla}\delta\varphi) \quad i$$

$$div\,(\psi \hat{D} \vec{\nabla}\delta\varphi) - div\,(\delta\varphi \hat{D} \vec{\nabla}\psi) = \psi\, div\,(\hat{D}\nabla\delta\varphi) - \delta\varphi\, div\,(\hat{D}\vec{\nabla}\psi)$$

i primenimo teoremu Gausa - Ostrogradskog i uzmemo u obzir granične uslove (1.13/I) u varijaciji, onda dobijamo

$$(5.3) \qquad \delta L^{\ell}(\varphi, \vec{u}; \psi) = 2\int_Q \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + div\,(\vec{v}\psi) + div\,(\hat{D}\vec{\nabla}\psi)\right]\delta\varphi\, dx\, dt -$$

$$- 2\int_\Omega \psi(T)\,\delta\varphi(T)\, dx + 2\int_{\Sigma_o^+}\Big[-\frac{\partial\psi}{\partial\nu_o} - (\alpha + v_n^+)\psi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \chi_k^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi})\Big]\delta\varphi\, dx\, dt + 2\int_{\Sigma_o^-}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\nu_o}\psi\, dx\, dt -$$

$$- \int_{\Sigma_B^+}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu_B} + \psi v_n^+\right)\delta\varphi\, dx\, dt + 2\int_{\Sigma_B^-}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\nu_B}\psi\, dx\, dt +$$

$$+ 2\int_{\Sigma_H}\frac{\partial\psi}{\partial\nu_H}\delta\varphi\, dx\, dt + 2\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^{\ell}\int_0^T u_k\,\delta u_k\, dt +$$

$$+ \frac{2}{\rho}\int_Q \vec{\chi}\,\delta\vec{u}\,\psi\, dx\, dt$$

gde je

$$v_n = v_n^+ - v_n^- = max\{v_n, 0\} - max\{-v_n, 0\}$$

Iz uslova stacionarnosti lagranžijana $L^{\ell}(\varphi, \vec{u}; \psi)$, na osnovu (5.3), sledi

(5.4) $$-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\operatorname{div}(\vec{v}\psi)-\operatorname{div}(\hat{D}\vec{\nabla}\psi)=0\ ,\quad Q$$

(5.5) $$\psi(x,T)=\psi(T)=0\ ,\quad \Omega$$

(5.6) $$\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial\nu_0}=-(\alpha+V_n^+)\psi+\sum_{k=1}^{m}\chi_k^+(\varphi-\bar{\varphi})\ , & \Sigma_0^+\\ \psi=0\ , & \Sigma_0^-\end{cases}$$

(5.7) $$\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial\nu_B}=-V_n^+\psi\ , & \Sigma_B^+\\ \psi=0\ , & \Sigma_B^-\end{cases}$$

(5.8) $$\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial\nu_H}=0\ , & \Sigma_H\\ v_{n_H}=0\ , & \Sigma_H\end{cases}$$

(5.9) $$\operatorname{div}(\vec{v})=0\ ,\quad Q$$

Sistem (5.4) - (5.9) prestavlja spregnut sistem sistema (1.14/I).

Neka je $Q^\tau=\Omega\times(\tau,T)$.

<u>Definicija 3.</u> Za svako $\vec{u}\in U$ funkcija ψ je slabo (generalisano) rešenje graničnog zadatka (5.4) - (5.9) ako:

1) $\psi\in H^{1,0}(Q)$,

2) za svako $\tau \in I$ važi

$$(5.10)\quad \int_{Q^\tau} \frac{\partial\theta}{\partial t}\varphi\,dx\,dt + \int_{\Omega}\theta(\tau)\varphi(\tau)\,dx - \int_{Q^\tau}\theta\,div(\vec{v}\varphi)\,dx\,dt +$$

$$+ \int_{Q^\tau}\vec{\nabla}\theta\hat{\mathcal{D}}\vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt + \int_{\Sigma_0^+}\theta\Big[(\alpha+v_n^+)\varphi -$$

$$- \sum_{k=1}^{m}\chi_k^+(\varphi-\bar{\varphi})\Big]dx\,dt + \int_{\Sigma_B^{+\tau}} v_n^+\theta\varphi\,dx\,dt = 0 ,$$

za svako $\theta \in \dot{H}^{1,1}(Q)$ ([3], [4]).

Prva apriorna ocena

Ako u (5.10) stavimo $\theta = \varphi$ i uzmemo u obzir (5.6) - (5.8), dobijamo

$$(5.11)\quad \frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi^2(\tau)\,dx - \int_{Q^\tau}\varphi\,div(\vec{v}\varphi)\,dx\,dt + \int_{Q^\tau}\vec{\nabla}\varphi\hat{\mathcal{D}}\vec{\nabla}\varphi\,dx\,dt +$$

$$+ \int_{\Sigma_0^{+\tau}}(\alpha+v_n^+)\varphi^2\,dx\,dt + \int_{\Sigma_B^{+\tau}} v_n^+\varphi^2\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_{\Sigma_G^{+\tau}}\chi_k^+(\varphi-\bar{\varphi})\varphi\,dx\,dt$$

Grupisanjem članova u (5.11) i uvodjenjem bilinearne forme

$$(5.12) \qquad a(\psi,\theta) = \int_{Q^\tau} \vec{\nabla}\theta \hat{D} \vec{\nabla}\psi \, dx\,dt + \int_{\Sigma_0^{+\tau}} (\alpha + v_n^+)\theta\psi \, dx\,dt + \\ + \int_{\Sigma_B^{+\tau}} v_n^+ \theta\psi \, dx\,dt ,$$

dobijamo

$$(5.13) \qquad \frac{1}{2}\int_{\Omega} \psi^2(\tau)\,dx + a(\psi,\psi) \leq \int_{Q^\tau} |\psi \vec{v}\,\vec{\nabla}\psi| \, dx\,dt + \\ + \sum_{k=1}^{m} \int_{\Sigma_G^{+\tau}} \chi_k^+ |(\varphi-\bar{\varphi})\psi| \, dx\,dt .$$

Korišćenjem nejednakosti Bunjakovskog - Švarca, Koši-

jevu ε - nejednakost i (2.5/I), dobijamo da je

$$(5.14) \qquad \int_{Q^\tau} |\psi\vec{v}\,\vec{\nabla}\psi| \, dx\,dt \leq \frac{\varepsilon_1'}{2} \|\psi\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\bar{v}^2}{2\varepsilon_1'} \||\vec{\nabla}\psi|\|^2_{L^2(Q^\tau)} ,$$

$$(5.15) \qquad \sum_{k=1}^{m} \int_{\Sigma_G^{+\tau}} \chi_k^+ |(\varphi-\bar{\varphi})\psi| \, dx\,dt \leq m \,\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{L^2(\Sigma_G^{+\tau})} \cdot \\ \cdot \|\psi\|_{L^2(\Sigma_G^{+\tau})} \leq \frac{m\varepsilon_2'}{2} \|\varphi-\bar{\varphi}\|^2_{L^2(\Sigma_G^{+\tau})} + \frac{1}{2\varepsilon_2'} \|\psi\|^2_{L^2(\Sigma_G^{+\tau})} \leq \\ \leq \frac{m\varepsilon_2'}{2} \|\varphi-\bar{\varphi}\|^2_{L^2(\Sigma_G^{+\tau})} + \frac{\bar{C}}{2\varepsilon_2'} \|\psi\|^2_{H^{1,0}(Q^\tau)}$$

Za $a(\psi,\theta)$ bilinearna forma (5.12) je ekvivalentna normi prostora $H^{1,0}(Q^\tau)$ (v. lemu 1. u gl. I) pa, uzimajući u obzir (5.14) i (5.15), (5.13) postaje

(5.16) $$\frac{1}{2}\|\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\underset{\sim}{c}_1^2 - \frac{\bar{v}^2}{2\varepsilon_1'} - \frac{\bar{c}}{2\varepsilon_2'}\right)\|\vec{\nabla}\psi\|^2_{L^2(Q\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} m\,\varepsilon_2' \|\varphi - \bar{\varphi}\|^2_{L^2(\Sigma_G^+ \tau)} + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1' + \underset{\sim}{c}_1^2 + \frac{\bar{c}}{2\varepsilon_2'}\right)\|\psi\|^2_{L^2(Q\tau)}$$

Uvodjenjem oznake $\ell = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, gde je

$$\ell_1 = \max\left\{\frac{1}{2} m\,\varepsilon_2' ,\ \frac{1}{2}\varepsilon_1' + \underset{\sim}{c}_1^2 + \frac{\bar{c}}{2\varepsilon_2'}\right\},$$

$$\ell_2 = \min\left\{\frac{1}{2},\ \underset{\sim}{c}_1^2 - \frac{\bar{v}^2}{2\varepsilon_1'} - \frac{\bar{c}}{2\varepsilon_2'}\right\},$$

(5.16) postaje

(5.17) $$\|\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \||\vec{\nabla}\psi|\|^2_{L^2(Q\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant \ell\,\|\varphi - \bar{\varphi}\|^2_{L^2(\Sigma_G^+ \tau)} + \ell\,\|\psi\|^2_{L^2(Q\tau)}$$

Primenom leme Gronuloa ([5]) na (5.17), dobijamo

(5.18) $$\|\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \||\vec{\nabla}\psi|\|^2_{L^2(Q\tau)} \leqslant \ell\, e^{\ell T}\|\varphi - \bar{\varphi}\|^2_{L^2(\Sigma_G^+ \tau)}$$

Integraljenjem (5.18) po τ u I dobijamo prvu apriornu ocenu

(5.19) $$\|\psi\|^2_{H^{1,0}(Q)} \leq C_1 \|\varphi-\bar{\varphi}\|^2_{L^2(\Sigma^+_Q)}$$

gde je

$C = \ell e^{\ell T}$

P6. NEKE OSOBINE FUNKCIONALA TIHONOVA

(A) Stroga konveksnost

Neka je $\beta \in [0,1]$. Na osnovu (2.1) i (2.3) imamo

(6.1) $$T_\ell(\beta\vec{u}+(1-\beta)\vec{v}) = \sum_{k=1}^{m} [\beta \|\chi_k^+(\varphi(\vec{u})-\bar{\varphi})\|^2_{L^2(\Sigma^+_Q)} +$$

$$+(1-\beta)\|\chi_k^+(\varphi(\vec{v})-\bar{\varphi})\|^2_{L^2(\Sigma^+_Q)} - \beta(1-\beta)\|\chi_k^+(\varphi(\vec{u})-$$

$$-\varphi(\vec{v}))\|^2_{L^2(\Sigma^+_Q)}] + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k^\ell [\beta\|u_k\|^2_{L^2(I)} + (1-\beta)\|v_k\|^2_{L^2(I)} -$$

$$-\beta(-\beta+1)\|u_k-v_k\|^2_{L^2(I)}] = \beta T_\ell(\vec{u}) + (1-\beta)T_\ell(\vec{v}) -$$

$$-\beta(1-\beta)\sum_{k=1}^{m}[\|\chi_k^+(\varphi(\vec{u})-\varphi(\vec{v}))\|^2_{L^2(\Sigma^+_Q)} +$$

$$+\alpha_k^\ell\|u_k-v_k\|^2_{L^2(I)}].$$

Odbacivanjem norme $\sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^{+}(\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) \|^2_{L^2(I_q^+)}$ $(<\infty)$ i uvodjenjem oznake $\min \alpha_k^{\ell} = \varkappa^{\ell}$ $(\neq 0)$, $k=\overline{1,m}$, (6.1) postaje

$$T_{\ell}(\beta\vec{u} + (1-\beta)\vec{v}) \leq \beta T_{\ell}(\vec{u}) + (1-\beta) T_{\ell}(\vec{v}) - \tag{6.2}$$

$$-\beta(1-\beta)\varkappa^{\ell} \| \vec{u} - \vec{v} \|^2_{L^2(I)^m}$$

Nejednakost (6.2) odredjuje strogu konveksnost kriterijuma optimizacije $T_{\ell}(\vec{u})$.

<u>Napomena</u>. Pošto je regularizovan kriterijum optimizacije strogo konveksan onda je zadatak minimizacije (4.4) korektan (v.P3).

(B) <u>Gradijent</u>

<u>Definicija 4</u>.Neka je B Banahov prostor i neka je funkcija J(u) definisana u nekoj γ- okolini $O(u,\gamma) = \{ v \in B \mid \| v-u \|_B < \gamma \}$ tačke u. Rećićemo da je funkcija J(u) diferenciabilna u tački u ako postoji element $J'(u) \in B^*$(B^*-

konjugovan prostor prostora B), takav da priraštaj funkcije

J(u) možemo prikazati u obliku

$$\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_{B^*B} + o(h, u)$$

gde $\|h\|_B < \gamma$, $o(h,u)/\|h\|_B \to 0$ kada $\|h\|_B \to 0$.

Element $J'(u) \in B^*$ pretstavlja prvi izvod ili gradijent funkcije J(u) u tački u.

Odredimo priraštaj kriterijuma optimizacije $T_\ell(\vec{u})$.

$$(6.3)\qquad T_\ell(\vec{u}+\vec{h}) - T_\ell(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{m} \|\chi_k^+ (\varphi(\vec{u}) + \Delta\varphi - \bar{\varphi})\|^2_{L^2(\Sigma_G^+)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^\ell \|u_k + h_k\|^2_{L^2(I)} - \sum_{k=1}^{m} \|\chi_k^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi}\|^2_{L^2(\Sigma_G^+)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^\ell \|u_k\|^2_{L^2(I)}$$

Posle sredjivanja (6.3) postaje

$$(6.4)\qquad T_\ell(\vec{u}+\vec{h}) - T_\ell(\vec{u}) = 2 \sum_{k=1}^{m} \int_{\Sigma_G^+} \chi_k^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi}) \Delta\varphi \, dx\, dt +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^\ell \int_0^T u_k h_k \, dt + o(\vec{h}, \vec{u}),$$

gde je

$$(6.5) \qquad o(\vec{h},\vec{u}) = \sum_{K=1}^{m} \int_{\Sigma_q^+} \chi_K^+ |\Delta\varphi|^2 dx\,dt + \sum_{K=1}^{m} \alpha_K^{\ell} \int_0^T |h_K|^2 dt$$

Ako spregnutu jednačinu (5.4) pomnožimo sa $\Delta\Psi$ i izvršimo transpoziciju, koristeći granične uslove (1.13/I) i (5.5) - (5.9), dobićemo da je

$$(6.6) \qquad \sum_{K=1}^{m} \int_{\Sigma_q^+} \chi_K^+ (\varphi(\vec{u}) - \bar{\varphi}) \Delta\varphi\, dx\,dt = \frac{1}{\rho} \int_Q \vec{\chi}\,\vec{h}\,\Psi\, dx\,dt$$

Na osnovu (6.6), (6.4) postaje

$$(6.7) \qquad T_\ell(\vec{u}+\vec{h}) - T_\ell(\vec{u}) = \frac{2}{\rho} \sum_{K=1}^{m} \int_Q \chi_K h_K \Psi\, dx\,dt +$$

$$2 \sum_{K=1}^{m} \alpha_K^{\ell} \int_0^T u_K h_K\, dt + o(\vec{h},\vec{u}) =$$

$$= 2 \sum_{K=1}^{m} \int_{\mathcal{E}_{KT}} \left[\frac{\Psi}{\rho} + \frac{\alpha_K^{\ell}}{mes\,\mathcal{E}_K} u_K \right] h_K\, dx\,dt + o(\vec{h},\vec{u})$$

gde je

$$\mathcal{E}_{KT} = \mathcal{E}_K \times I, \quad K = \overline{1,m}.$$

Za (6.5) važi ocena

$$(6.8)\qquad |o(\vec{h},\vec{u})| \leq m\,\|\Delta\varphi\|^2_{L^2(\Sigma_q^+)} + \max_{1\leq k\leq m} \alpha_k^\ell \,\|\vec{h}\|^2_{L^2(I)^m}$$

Na osnovu (2.20/I), (6.8) postaje

$$(6.9)\qquad |o(\vec{h},\vec{u})| \leq \left(mC + \max_{1\leq k\leq m} \alpha_k^\ell \right) \|\vec{h}\|^2_{L^2(I)^m}$$

Prema tome, kriterijum optimizacije je diferenciabilan i njegov gradijent je oblika

$$(6.10)\qquad T_\ell'(\vec{u}) = \left\{ \frac{2}{\varsigma} \int_{\varepsilon_1} \psi(x,t;\vec{u})\,dx + 2\alpha_1^\ell u_1, \dots, \frac{2}{\varsigma} \int_{\varepsilon_m} \psi(x,t;\vec{u})\,dx + 2\alpha_m^\ell u_m \right\}$$

(C) <u>Pripadnost kriterijuma optimizacije $T_\ell(\vec{u})$ klasi $C^{1,1}(U)$</u>

Neka je $U \subseteq B$ i neka funkcija J(u) pripada $C^1(U)$.

<u>Definicija 5</u>. Funkcija J(u) pripada klasi $C^{1,1}(U)$ ako $J(u) \in C^1(U)$ i $J'(u)$ zadovoljava uslov Lipšica sa konstantom L, tj. ako

$$(6.11)\qquad \| J'(u) - J'(v) \|_H \leq L \| u - v \|_H$$

za svako u , $v \in U$ ([7]).

Pošto $T_\ell(\vec{u}) \in C^1(U)$ na osnovu (6.10), onda treba samo proveriti uslov (6.11).

Na osnovu (6.10), (6.11) postaje

$$(6.12) \qquad \| T_\ell'(\vec{u}+\vec{h}) - T_\ell'(\vec{u}) \|^2_{L^2(I)^m} =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{m} \int_Q \chi_k \left[\frac{1}{\rho} \Delta\psi + \frac{\alpha_k^\ell}{mes\, \mathcal{E}_k} h_k \right]^2 dx\,dt \, ,$$

gde je $\Delta\psi = \psi(\vec{u}+\vec{h}) - \psi(\vec{u})$.

Ako podintegralnu funkciju sa desne strane u (6.12) dignemo na kvadrat i primenimo Košijevu ε- nejednakost i uvedemo oznaku

$$a^\ell = \max \alpha_k^\ell / \min (mes\, \mathcal{E}_k) \, , \quad k=\overline{1,m} \, ,$$

dobijamo

$$(6.13) \qquad \| T_\ell'(\vec{u}+\vec{h}) - T_\ell'(\vec{u}) \|^2_{L^2(I)^m} \leq \frac{4m}{\rho} \|\Delta\psi\|^2_{L^2(Q)} +$$

$$+ 4 a^\ell \sum_{k=1}^{m} \| h_k \|^2_{L^2(I)}$$

Na osnovu (5.19) i (2.20/I), (6.13) postaje

$$\|T_\ell'(\vec{u}+\vec{h}) - T_\ell'(\vec{u})\|^2_{L^2(I)^m} \leq \tag{6.14}$$

$$\leq L^\ell \sum_{k=1}^{m} \|h_k\|^2_{L^2(I)} = L^\ell \|\vec{h}\|^2_{L^2(I)^m}$$

gde je

$$L^\ell = 4\left(a^\ell + \frac{1}{\varsigma}\, n \cdot m \cdot c \cdot c_1\right) \tag{6.15}$$

P7. ODREDJIVANJE MINIMIZIRAJUĆEG NIZA FUNKCIONALA TIHONOVA METODOM PROJEKCIJE GRADIJENTA

Projekciju tačke $\vec{u} \in L^2(I)^m$ na skup U obeležavamo sa $P_U(\vec{u})$ i definišemo sa

$$P_U(\vec{u}) = \{w_1, \ldots, w_m\} \tag{7.1}$$

gde je

$$w_k = \begin{cases} 0, & u_k < 0 \\ u_k, & 0 \leq u_k \leq \beta_k \\ \beta_k, & u_k > \beta_k \end{cases}, \quad k = \overline{1,m}$$

Po metodi projekcije gradijenta, minimizirajući niz

$\{u_k^\ell\}_\ell$ kriterijum optimizacije $T_\ell(\vec{u})$, odredjujemo po pravi-

lu ([7],[10],[11])

(7.2) $$u_k^{\ell+1} = P_U\,(u_k^\ell - \gamma_k^\ell\, T_\ell'(\vec{u})) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \omega_k^\ell < 0 \\ \omega_k^\ell, & 0 \leq \omega_k^\ell \leq \beta_k \\ \beta_k, & \omega_k^\ell > \beta_k\,, \end{cases} \qquad k=\overline{1,m}$$

gde je

(7.3) $$\omega_k^\ell = u_k^\ell - 2\gamma_k^\ell \left(\frac{1}{S} \int_{\mathcal{E}_k} \psi(x,t;\vec{u})\,dx - \alpha_k^\ell u_k \right)$$

Koeficijenti γ_k^ℓ se odredjuju po pravilu

(7.4) $$(0<)\,\varepsilon_0 \leq \gamma_k^\ell \leq 2/\,(L^\ell + 2\varepsilon)\,, \qquad k=\overline{1,m}$$

gde su $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ - pozitivne konstante i predstavljju parametre

metode minimizacije. Koeficijent L^ℓ je odredjen sa (6.15).

Konvergencija niza $\{\vec{u}^\ell\}$

Konvergenciju niza $\{\vec{u}^\ell\}_\ell$ ka $\vec{u}^*$, po normi prostora $L^2(I)^m$, daje

Lema 4. Neka je funkcija $J(u)$ definisana na konveksnom i zatvorenom skupu U Hilbertovog prostora H, $J(u)\in C^{1,1}(U)$, $J_* = \inf\limits_{U} J(u) > -\infty$. Neka je $\{u_k\}_k$ - niz dobijen metodom projekcije gradijenta pri proizvoljnoj početnoj vrednosti $u_o \in U$. Tada niz $\{J(u_k)\}_k$ monotono opada i $\lim\limits_{k\to\infty} \| u_k - u_{k+1}\| = 0$. Ako je, pored toga, funkcija $J(u)$ konveksna na H, a skup $M(\vec{u}_o) = \{u\in U \mid J(u) \leq J(u_o)\}$ - ograničen, onda niz $\{u_k\}_k$ minimizira funkciju $J(u)$ na U i slabo u H konvergira ka skupu U_* ; pri tome važi ocena

$$(7.5) \qquad 0 \leq J(u_k) - J_* \leq C_1 / k \ , \quad k=\overline{1,\infty} \quad , \ C_1 = \text{const}$$

Ako je funkcija $J(u)$ još i strogo konveksna na U, onda niz $\{u_k\}$ konvergira ka jednoj tački minimuma u_* po normi prostora H, pri čemu je

$$(7.6) \qquad \| u_k - u_* \|_H^2 \leq C_2 / k \ , \quad k=\overline{1,\infty} \ , \ C_2 = \text{const}$$

([7], [11]).

Zahtevi leme 4. su zadovoljeni : dopušteni skup upravljanja je zatvoren i konveksan na osnovu (2.a) i (2.b) ; kriterijum optimizacije $T_\ell(\vec{u}) \in C^{1,1}(U)$ na osnovu (6.C).

Uvedimo pojam Ω- normalnog rešenja zadatka $J(\vec{u}) \to \inf$, $\vec{u} \in U$, koji će nam biti potreban u lemi 6.

<u>Definicija 6</u>. Tačku $u_* \in U^*_\Omega = U_\Omega \cap U_*$ nazivamo normalnim rešenjem zadatka $J(u) \to \inf$, $u \in U$, po funkciji $\Omega(u)$ ili kraće, Ω- normalnim rešenjem ako

$$(7.7) \qquad \inf_{U^*_\Omega} \Omega(u) = \Omega(u_*) ,$$

([7]).

Uslovi koji garantuju egzistenciju Ω- normalnog rešenja zadatka $J(\vec{u}) \to \inf$, $\vec{u} \in U$, dati su u sledećoj lemi

<u>Lema 5</u>. Neka je $\Omega(u)$ ϱ- stabilizator zadatka $J(u) \to \inf$, $u \in U$, i neka su funkcije $J(u)$ i $\Omega(u)$ ϱ- poluneprekidne odozdo na skupu U_Ω. Tada postoji barem jedno Ω- normalno rešenje zadatka $J(u) \to \inf$, $u \in U$ ([7]).

Zahtevi leme 5. su zadovoljeni : $\Omega(\vec{u})$ je stabilizator na osnovu definicije 2. u P4. Kriterijum optimizacije $J(\vec{u})$ je poluneprekidan odozdo na U_Ω($=U$) na osnovu (2.d).

Da bi niz $\{\vec{u}^\ell\}_\ell$ konvergirao ka optimalnoj vrednosti J^* kada $T_\ell(\vec{u}^\ell) \to T_*$, treba usaglasiti nizove $\{\gamma_K^\ell\}_\ell$ i $\{\varepsilon_K^\ell\}_\ell$, gde je $\varepsilon_K^\ell = C_1/\ell$, $\ell = \overline{1,\infty}$, $k=\overline{1,m}$ odredjeno sa (7.4). Uslove pri kojima su nizovi $\{\gamma_K^\ell\}_\ell$ i $\{\varepsilon_K^\ell\}_\ell$ usaglašeni daje sledeća

Lema 6. Neka je

1) U - skup sa datom metrikom ρ ; funkcija $J(u)$ definisana i ρ- poluneprekidna odozdo na U, $J_* = \inf\limits_U J(u) > -\infty$, a skup $U_* = \{ u \in U \mid J(u) = J_* \}$ neprazan ;

2) funkcija $\Omega(u)$ definisana na skupu $U_\Omega \subseteq U$ i pretstavlja ρ- stabilizator zadatka minimizacije $J(u)$ na U ;

3) nizovi $\{\alpha_K\}$ i $\{\varepsilon_K\}$ su pozitivni i $\lim\limits_{K\to\infty} \alpha_K = \lim\limits_{K\to\infty} \varepsilon_K$, $\sup\limits_{K \geq 1} \varepsilon_K \alpha_K^{-1} < \infty$.

Tada niz $\{u_K\}_K$, odredjen nekim od postupaka minimizacije, minimizira funkciju $J(u)$ na U, ρ - regularan je i ρ- konvergira ka skupu $U_\Omega^* = U_\Omega \cap U$. Ako je pored toga

$\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k \alpha_k^{-1} = 0$, $\Omega(u)$ ρ- poluneprekidno odozdo na U_Ω, onda

važe relacije

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(u_k) = \Omega_* = \inf_{U_\Omega^*} \Omega(u) \ ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\ u_k, U_{**}) = 0 \ ,$$

gde je

U_{**} - skup Ω- normalnih rešenja zadatka $J(u) \to \inf$, $u \in U$.

Zahtevi leme 6. su zadovoljeni : kriterijum optimizacije $J(\vec{u})$ je $L^2(I)^m$- poluneprekidan odozdo na osnovu (2.d) ; $U_* = \phi$ na osnovu leme 1. u P2. ; $\Omega(\vec{u})$ je $L^2(I)^m$- stabilizator na osnovu definicije 2. P4. Nizovi $\{\varepsilon_k^\ell\}_\ell$, $k=\overline{1,m}$, su odredjeni sa (7.5) ; nizovi $\{\alpha_k^\ell\}_\ell$, $k=\overline{1,m}$, su odredjeni iz uslova $\lim \varepsilon_k^\ell(\alpha_k^\ell)^{-1}=0$: za $\varepsilon_k^\ell = C_1/\ell$, $k=\overline{1,m}$, npr. $\alpha_k^\ell = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$, $k=\overline{1,m}$.

Minimizirajući nizovi $\{u_k^\ell\}_\ell$, $k=\overline{1,m}$, dati sa (7.2) , ne mogu se odrediti eksplicitno jer ne možemo odrediti konjugovanu promenljivu Ψ koja u njema figuriše. Zato ćemo pokazati da se zadatak $J(\vec{u}) \to \inf$, $\vec{u} \in U$, može aproksimirati.

GLAVA III

U ovoj glavi su aproksimirane, metodom konačnih ele-
nata, jednačina stanja i konjugovana jednačina, a takodje
data i konvergencija približne vrednosti funkcije stanja
tačnoj, u smislu prostora $H^{1,0}(Q)$.

.. APROKSIMACIJA JEDNAČINE STANJA I KONJUGOVANE JEDNAČINE METODOM KONAČNIH ELEMENATA

snovne oznake i definicije

- konačni element (tetraedar), $\nu=\overline{1,N_T}$;

- unutrašnjost tetraedra, $\nu=\overline{1,N_T}$;

- broj tetraedara diskretizovane oblasti Ω ;

- parametar diskretizacije oblasti Ω ;

- ukupan broj čvorova diskretizovane oblasti Ω ;

- parametar diskretizacije intervala vremena $I=[0,T]$;

(Ω) - prostor deo po deo linearnih funkcija na T_ν , $\nu=\overline{1,N_T}$

$U_{k\tau}$ - diskretizovan prostor upravljanja, $k=\overline{1,m}$;

$\phi_\nu(x)$ - bazna funkcija prostora $G_h^1(\Omega)$;

$\phi_i(x)$ - bazna funkcija prostora $U_{k\tau}$;

$\varphi_h(t)$ - diskretizovana funkcija stanja pri t - fiksirano ;

$\varphi_{h\tau}$ - diskretizovana funkcija stanja po x i t ;

$u_{k\tau}$ - diskretizovana funkcija upravljanja , $k=\overline{1,m}$;

(A) <u>Diskretizacija oblasti Ω</u>

Oblast Ω diskretizujemo familijom tetraedara T_ν , $\nu=\overline{1,N_T}$, tako da : $\bigcup_{\nu=1}^{N_T} T_\nu \supset \Omega$, $\mathring{T}_\nu \cap \mathring{T}_\mu = \phi$, $\nu \neq \mu$, $\nu,\mu=\overline{1,N_T}$.

Tetraedar T_ν, $\nu=\overline{1,N_T}$, konstruišemo tako da je poluprečnik upisane kugle u tetraedar T_ν, $\nu=1,N_T$, pozitivan, tj.

$\min\limits_{1\leq\nu\leq N_T} \text{diam}\, \underline{K}_\nu = \underline{h} > 0.$

Za parametar diskretizacije uzimamo $\max\limits_{1\leq\nu\leq N_T} \text{diam}\, T_\nu = h > 0.$
Parametar diskretizacije h stoji u sledećem odnosu sa ukupnim brojem čvorova N : $h \to 0$ kada $N \to \infty$.

(B) Diskretizacija intervala vremena I

Interval vremena I diskretizujemo ravnomernom podelom dužine τ , tj. $\tau = \tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i=\overline{1,K}$; stavljamo : $t_o = 0$, $t_K = T$.

(C) Aproksimacija prostora $H^{1,0}(Q)$

Prostor $H^{1,0}(Q)$ aproksimiramo prostorom $H^{1,0}_{h\tau}(Q)$ na sledeći način

$$H^{1,0}_{h\tau}(Q) = \{ \varphi_{h\tau} \mid \varphi_{\tau}(t) = \varphi_{\tau}(j\tau), \; t \in [j\tau, (j+1)\tau), \tag{1.1}$$

$$\varphi_{h\tau}(j\tau) \in G^1_h(\Omega) \} ,$$

gde je

$G^1_h(\Omega)$ - prostor deo po deo linearnih funkcija na tetraedru T_ν , $\nu = \overline{1,N_T}$. ([14], [16], [17])

(D) Aproksimacija prostora upravljanja U

Prostor upravljanja U aproksimiramo prostorom

(1.2) $\quad U_\tau = U_{1\tau} \times \ldots \times U_{m\tau}$

gde je

(1.3) $$U_{k\tau} = \Big\{ u_{k\tau} \in L^2(I) \;\Big|\; u_{k\tau} = \sum_{i=1}^{K} u_k^i \phi ,$$

$$u_k^i = \frac{1}{\tau_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_k(s)\,ds , \quad 0 \leq u_k^i \leq \beta_k \Big\} , \qquad k = \overline{1,m} \;;$$

bazne funkcije ϕ_i, $i=\overline{1,K}$ su definisane sa

(1.4) $$\phi_i = \begin{cases} 1, & t \in I_i = [t_{i-1}, t_i) \\ 0, & t \notin I_i \end{cases}$$

(B) <u>Aproksimacija jednačine stanja</u>

Približno rešenje slabe formulacije (2.7/I) tražimo u obliku

(1.5) $$\varphi_h(t) = \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu(t)\,\phi_\nu$$

gde je

$Q_\nu(t)$ - neodredjena funkcija

Aproksimacija slabe formulacije (2.7/I) ima oblik

$$(1.6)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\varphi_h(t), \phi_\mu) + a(\varphi_h(t), \phi_\mu) = (\vec{\chi}\,\vec{u}, \phi_\mu) \\ (\varphi_h(0), \phi_\mu) = (\varphi_0, \phi_\mu), \quad \phi_\mu \in P_1 \end{cases}$$

gde je

$$a(\varphi_h(t), \phi_\mu) = \int_\Omega \phi_\mu \vec{v}\,\vec{\nabla}\varphi_h\,dx + \int_\Omega \vec{\nabla}\phi_\mu \hat{D}\,\nabla\varphi_h\,dx + \int_{\Gamma_0} \alpha\,\phi_\mu \varphi_h\,dx$$

Sistem (1.6) možemo zapisati u sledećem obliku

$$(1.7)\quad \begin{cases} \mathbb{M}\dot{\vec{Q}}(t) + \mathbb{K}\vec{Q}(t) = \vec{q}(t) \\ \vec{Q}(0) = \mathbb{M}^{-1}\vec{P} \end{cases}$$

gde je

$$\mathbb{M} = [(\phi_\nu, \phi_\mu)]_{N\times N}$$

$$\vec{Q}(t) = \{Q_1(t), \dots, Q_N(t)\}^T$$

$$\mathbb{K} = \Big[\int_\Omega \Big(\phi_\mu \sum_{k=1}^{3} v_k(t) \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_k} D_{kk} \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_k}\Big) dx + \int_{\Gamma_0} \alpha\,\phi_\nu\phi_\mu\,dx\Big]_{N\times N}$$

$$\vec{q}(t) = \Big\{\sum_{k=1}^{m} u_k(t)\int_\Omega \chi_k \phi_1\,dx, \dots, \sum_{k=1}^{m} u_k(t)\int_\Omega \chi_k \phi_N\,dx\Big\}^T,$$

$$\vec{P} = \{(\varphi_0, \phi_1), \dots, (\varphi_0, \phi_N)\}^T.$$

(F) Aproksimacija konjugovane jednačine

Približno rešenje slabe formulacije (5.10/II) tražimo u obliku

(1.8) $\Psi_h(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \Pi_\nu(t)\Phi_\nu$

gde je

$\Pi_\nu(t)$ - neodredjena funkcija

Aproksimacija slabe formulacije (5.10/II) ima oblik

(1.9) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Psi_h(t), \Phi_\mu) + \mathcal{B}(\Psi_h(t), \Phi_\mu) = \sum_{k=1}^{m} \int_{G^+} \chi_k^+ (\Psi_h(t) - \bar{\Psi}) \Phi_\mu \, dx \\ (\Psi_h(T), \Phi_\mu) = 0 \end{cases}$$

gde je

$$\mathcal{B}(\Psi_h(t), \Phi_\mu) = -\int_\Omega \Phi_\mu \, div \, \vec{V}(t) \Psi_h(t) \, dx + \int_\Omega \vec{\nabla}\Phi_\mu \hat{\mathcal{D}} \vec{\nabla} \Psi_h(t) \, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_0^+} \Phi_\mu (\alpha + V_n^+(t)) \Psi_h(t) \, dx + \int_{\Gamma_B^+} V_n^+(t) \Phi_\mu \Psi_h(t) \, dx$$

Sistem (1.9) možemo zapisati u vektorskom obliku

(1.10) $$\begin{cases} \mathbb{M} \dot{\vec{\Pi}}(t) + \mathbb{B} \vec{\Pi}(t) = \vec{h}(t) \\ \vec{\Pi}(T) = \vec{0} \end{cases}$$

gde je

$$\mathbb{B} = \Big[\int_{\Omega} \Big(-\phi_\mu \sum_{k=1}^{3} v_k(t) \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_k} D_{kk} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_k} \Big) dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_0^+} \phi_\mu (\alpha + v_n^+(t)) \phi_\nu \, dx + \int_{\Gamma_B^+} v_n^+ \phi_\mu \phi_\nu \, dx \Big]_{N \times N} ,$$

$$\vec{\Pi}(t) = \{ \Pi_1(t), \ldots, \Pi_N(t) \}^T,$$

$$\vec{h}(t) = \Big\{ \sum_{k=1}^{m} \int_{G^+} \chi_k^+ (\varphi_h(t) - \bar{\varphi}) \phi_1 \, dx, \ldots,$$

$$, \sum_{k=1}^{m} \int_{G^+} \chi_k^+ (\varphi_h(t) - \bar{\varphi}) \phi_N \, dx \Big\}^T$$

(G) Aproksimacija sistema (1.7) i (1.10) po vremenu

Sistem (1.7) i (1.10) možemo aproksimirati po vremenu, npr. eksplicitnom shemom ([12],[13])

(1.11) $$\begin{cases} \mathbb{M} \frac{1}{\tau} [\vec{Q}(t_j) - \vec{Q}(t_{j-1})] + \mathbb{K} \vec{Q}(t_{j-1}) = \vec{q}(t_{j-1}), \quad j = \overline{1,K} \\ \vec{Q}(0) = \mathbb{M}^{-1} \vec{P} \end{cases}$$

(1.12) $$\begin{cases} \mathbb{M} \frac{1}{\tau} [\vec{\Pi}(t_j) - \vec{\Pi}(t_{j-1})] + \mathbb{B} \vec{\Pi}(t_{j-1}) = \vec{h}(t_{j-1}), \quad j = \overline{1,K} \\ \vec{\Pi}(T) = \vec{0} \end{cases}$$

Napomena. Sistem (1.7) i (1.10) smo mogli aproksimirati, takodje, neprekidnom shemom ili metodom Krank-Nikolsona ([12]). U tom slučaju brzina konvergencije ostaje ista.

P2. KONVERGENCIJA

Ako od sistema (1.14/I) oduzmemo isti takav sa promenljivom $\varphi_{h\tau}$ i upravljanjem $\vec{u}_\tau$, i uvedimo oznaku $\theta_{h\tau} = \varphi - \varphi_{h\tau}$, dobićemo

(2.1) $$\frac{\partial \theta_{h\tau}}{\partial t} + div(\vec{v}\theta_{h\tau}) - div(\hat{\mathcal{D}}\vec{\nabla}\theta_{h\tau}) = \vec{\chi}(\vec{u} - \vec{u}_\tau), \quad Q$$

$$\theta_h(0) = \varphi_0 - \varphi_{0h}, \quad \Omega$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta_{h\tau}}{\partial \nu_0} = -\alpha\theta_{h\tau}, & \Sigma_0^+ \\ \theta_{h\tau} = 0, & \Sigma_0^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta_{h\tau}}{\partial \nu_B} = 0, & \Sigma_B^+ \\ \theta_{h\tau} = 0, & \Sigma_B^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta_{h\tau}}{\partial \nu_H} = 0, & \Sigma_H \\ v_{n_H} = 0, & \Sigma_H \end{cases}$$

$$div(\vec{v}) = 0, \quad Q$$

Ponavljanjem postupka iz P2. gl. I na sistem (2.1), dobijamo

(2.2) $$\|\varphi-\varphi_{h\tau}\|^2_{H^{1,0}(Q)} \leq C\left(\|\varphi_0-\varphi_{0h}\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{k=1}^{m}\|u_k-u_{k\tau}\|^2_{L^2(I)}\right)$$

Normu $\|\varphi_0-\varphi_{0h}\|_{L^2(\Omega)}$ sa desne desne strane u (2.2), možemo oceniti koristeći sledeću lemu

<u>Lema 1</u>. Neka $\theta(x)\in H^{p+1}(\Omega)$, onda postoji linearna kombinacija $\theta_h=\sum_{\nu}Q_\nu\phi_\nu$, pri čemu supp $\phi_\nu\cap\Omega\neq\phi$, tako da

(2.3) $$\|\theta-\theta_h\|_{H^s(\Omega)} \leq C' h^{p+1-s}\|\theta\|_{H^{p+1}(\Omega)}$$

gde konstanta C'ne zavisi od h i θ , $0\leq s\leq p$ ([12]).

Na osnovu (2.3) važi ocena

(2.4) $$\|\varphi_0-\varphi_{0h}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^2\|\varphi_0\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}$$

Ocenimo normu $\|u_k-u_{k\tau}\|_{L^2(I)}$ sa desne strane u (2.2).

Na osnovu (1.3) imamo

$$(2.5)\qquad \| u_K - u_{K\tau} \|^2_{L^2(I)} = \sum_{i=1}^{K} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} | u_K(t) - u_K(s) | \, ds \right|^2 dt$$

Primenjujući Helderovu nejednakost na (2.5), dobijamo

$$(2.6)\qquad \| u_K - u_{K\tau} \|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} | u_K(t) - u_K(s) |^2 ds \right] dt$$

Ako stavimo t=s-r i uvedemo oscilaciju funkcije u_K u $L^2(I)$ sa

$$(2.7)\qquad \omega_i^2(u_K,\tau) = \sup_{|r|\leq\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} | u_K(s-r) - u_K(s) |^2 ds ,$$

onda (2.6) postaje

$$(2.7)\qquad \| u_K - u_{K\tau} \|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{i=1}^{K} \omega_i^2(u_K,\tau)$$

Na osnovu (2.4) i (2.7), (2.2) postaje

$$(2.8)\qquad \| \varphi - \varphi_{h\tau} \|^2_{H^{1,0}(Q)} \leq \tilde{C} \left(h^2 + \sum_{K=1}^{m} \sum_{i=1}^{K} \omega_i^2(u_K,\tau) \right)$$

Desna strana u (2.8) teži nuli kada parametri diskretizacije h i τ teže nuli.

Prema tome važi sledeća

Lema 2. Ako je φ - rešenje zadatka (1.14/I), a $\varphi_{h\tau}$ - rešenje zadatka (1.7), onda važi ocena (2.8).

Napomena. Ako bi upravljanje $\vec{u}$ bilo gladje, tj. ako bi pripadalo prostoru $H^{\varepsilon}(I)^{m}$, $0<\varepsilon<1/2$, onda bi umesto ocene (2.8) imali

(2.9) $$\|\varphi-\varphi_{h\tau}\|^{2}_{H^{1,0}(Q)} \leq \underline{C}\,(h^{2}+\tau^{\varepsilon})$$

([16]).

Uvek postoje konstante C_1 i $C_2>0$, tako da važi $C_1\tau^{\varepsilon}\leq h^{2}\leq C_2\tau^{\varepsilon}$.

Prema tome (2.9) postaje

(2.10) $$\|\varphi-\varphi_{h\tau}\|^{2}_{H^{1,0}(Q)} \leq \underline{C}\,\tau^{\varepsilon}$$

GLAVA IV

U ovoj glavi je pokazano da se može pomoću niza približnih zadataka $J_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) \longrightarrow \inf$, $[\vec{u}]_\tau \in U_\tau$, formirati minimizirajući niz zadatka $J(\vec{u}) \rightarrow \inf$, $\vec{u} \in U$.

P1. APROKSIMACIJA ZADATKA MINIMIZACIJE

Osnovne oznake i definicije

$L^2(I)^m_\tau$ - prostor vektor-funkcija - deo po deo konstantne funkcije ;

$[\vec{u}]_\tau = ([u_1]_\tau, [u_2]_\tau, \ldots, [u_m]_\tau)$ - diskretno upravljanje,

$[\vec{u}]_\tau \in L^2(I)^m_\tau$, $[\vec{u}]_\tau = \vec{u}_\tau$ (v. gl.III).

$J_{h\tau}([\vec{u}]_\tau)$ - približna vrednost funkcionala $J(\vec{u})$.

$\Upsilon_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) = \Upsilon_{h\tau}(\vec{u}_\tau)$ (v. gl.III).

Aproksimacija zadatka minimizacije

Uvedimo u $L^2(I)^m_\tau$ skalarni proizvod

(1.1) $$\langle [\vec{u}]_\tau, [\vec{v}]_\tau \rangle_{L^2(I)^m_\tau} = \sum_{k=1}^{m} \langle [u_k]_\tau, [v_k]_\tau \rangle_{L^2(I)_\tau} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{K} \langle u_k^i, v_k^i \rangle_{L^2(I)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{K} u_k^i v_k^i \tau_i$$

i normu

(1.2) $$\| [\vec{u}]_\tau \|^2_{L^2(I)^m_\tau} = \langle [\vec{u}]_\tau, \langle \vec{u}]_\tau \rangle_{L^2(I)^m_\tau} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{K} \tau_i \, |u_k^i|^2$$

Zadatak

(1.3) $$J(\vec{u}) \longrightarrow \inf , \quad \vec{u} \in U ,$$

aproksimiramo zadatkom

(1.4) $$J_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) \longrightarrow \inf , \quad [\vec{u}]_\tau \in U_\tau$$

gde je

(1.5) $$J_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) = \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(I_G^+)} ,$$

U_τ - odredjeno sa (1.2/III), a

$\varphi_{h\tau}([\vec{u}]_\tau)$ sa (1.5/III).

P2. REGULARIZACIJA APROKSIMACIJE

Dovoljne uslove regularizacije, tj. uslove da minimizirajući niz zadatka (1.4) konvergira ka U_* (skupu optimalnih vrednosti dobijenog rešavanjem zadatka (1.3)), daje sledeća

Lema 1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \phi$; funkcija $\Omega(u)$ je definisana i nenegativna na X ;

2) niz $\{[v]_N\}$ je odredjen iz uslova

(2.1) $[v]_N \in U_N$, $T_N([v]_N) \leq T_{N*} + \mu_N$, $N = 1,\infty$

gde je

$$T_N([v]_N) = I_N([v]_N) + \alpha_N \Omega_N([v]_N) , \quad [v]_N \in U_N \text{ -}$$

funkcija Tihonova zadatka

$$I_N([v]_N) \to inf , \quad [v]_N \in U_N \subseteq X_N , \quad N = \overline{1,\infty} ;$$

$\Omega_N([u]_N)$ - data funkcija na U_N ;

$T_{N*} = \inf\limits_{U_N} T_N([u]_N)$

$\{\mu_N\}$, $\{\alpha_N\}$ - pozitivni nizovi koji konvergiraju ka nuli (ako se donja grana T_{N*} dostiže u nekoj tački iz U_N, onda se u (2.1) ne isključuje mogućnost $\mu_N=0$) ;

3) postoji niz skupova $U^{\varepsilon_N} \subseteq X$ i preslikavanja $P_N : X_N \to X$ tako, da

$$P_N([v]_N) \in U^{\varepsilon_N}, \quad N=\overline{1,\infty},$$

$$\mathcal{J}(P_N([v]_N)) - I_N([v]_N) \leq \gamma_N, \quad N=\overline{1,\infty}, \tag{2.2}$$

$$\Omega(P_N([v]_N)) \leq \Omega_N([v]_N) + \xi_N, \quad N=\overline{1,\infty} \tag{2.3}$$

gde su

$\{\gamma_N\}$ i $\{\xi_N\}$ - nizovi koji teže ka nuli ;

4) postoje preslikavanja $Q_N : X \to X_N$ tako da za svako $u_* \in U_*$ važe relacije

$$Q_N(u_*) \in U_N, \quad N=\overline{1,\infty}$$

$$I_N(Q_N(u_*)) - \mathcal{J}(u_*) \leq \beta_N, \quad N=\overline{1,\infty}, \tag{2.4}$$

$$\Omega_N(Q_N(\mathcal{M}_*)) \leq \Omega(\mathcal{M}_*) + \eta_N , \qquad N=\overline{1,\infty} ,$$

gde su

$\{\beta_N\}$ i $\{\eta_N\}$ - nizovi koji teže ka nuli ;

5) važi ocena

$$(2.5) \qquad J_* - J_*(\mathcal{E}_N) \leq \nu_N , \quad N=\overline{1,\infty}$$

$$J_*(\mathcal{E}_N) = \inf_{U^{\mathcal{E}_N}} J(u)$$

gde je

$\{\nu_N\}$ - niz koji teži ka nuli.

Tada

$$(2.6) \qquad \lim_{N\to\infty} J(P_N([v]_N)) = J_* .$$

Neka su pored uslova 1)-5) zadovoljeni još i uslovi :

6) funkcije J(u) i Ω(u) su τ- sekvencijalno poluneprekidne odozdo na X (τ- topologija prostora X) ; funkcija Ω(u) je τ- stabilizator, tj. skup $\Omega_C = \{ u \in X \mid \Omega(u) \leq C \}$ je τ- sekvencijalno kompaktan za svako $C \geq 0$; svaka tačka $v \in X$ τ- granica nekog niza $\{u_N\}$, $u_N \in U^{\mathcal{E}_N}$, $N=\overline{1,\infty}$, pripa-

da skupu U ;

7) važi relacija

$$(2.7) \quad \lim_{N\to\infty} (\beta_N + \gamma_N + \eta_N + \nu_N) / \alpha_N = 0 .$$

Tada niz $P_N([v]_N)$ τ- konvergira ka skupu

$$U_{**} = \{ w \in U_* \mid \Omega(w) = \inf_{U_*} \Omega(u) = \Omega_* \} \text{ i}$$

$$\lim_{N\to\infty} \Omega(P_N([v]_N)) = \Omega_*$$

([7]) .

Pokažimo da su ispunjeni uslovi leme 1.

Definišimo prvo preslikavanja Q_τ i P_τ i postavimo približni zadatak zadatka (4.4/II).

Preslikavanje Q_τ

Preslikavanje $Q_\tau : L^2(I)^m \to L^2(I)^m_\tau$ definiše se na sledeći način:

$$(2.8) \quad Q_\tau(\vec{u}) = [\vec{u}]_\tau = ([u_1]_\tau, \ldots, [u_m]_\tau) ,$$

le je

(2.9) $$u_{k\tau} = \sum_{i=1}^{K} u_k^i \phi_i ,$$

(2.10) $$u_k^i = \frac{1}{\tau_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_k(t)\, dt ,$$

$$\phi_i = \begin{cases} 1; & t \in [t_{i-1}, t_i) = I_i \\ 0, & t \notin I_i \end{cases} .$$

Norma elementa $Q_\tau(\vec{u}) \in L^2(I)_\tau^m$ je okarakterisana sa

$$\| Q_\tau(\vec{u}) \|^2_{L^2(I)_\tau^m} = \langle Q_\tau(\vec{u}), Q_\tau(\vec{u}) \rangle_{L^2(I)_\tau^m} = \langle [\vec{u}]_\tau , [\vec{u}]_\tau \rangle_{L^2(I)_\tau^m} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \langle [u_k]_\tau , [u_k]_\tau \rangle_{L^2(I)_\tau} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{K} | u_k^i |^2 \tau_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{\tau_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_k(t)\, dt \right)^2 \tau_i \le \sum_{i=1}^{K} \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_k^2\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T u_k^2\, dt = \| \vec{u} \|^2_{L^2(I)^m} , \text{ tj.}$$

(2.11) $$\| Q_\tau(\vec{u}) \|_{L^2(I)_\tau^m} \le \| \vec{u} \|_{L^2(I)^m}$$

<u>reslikavanje P_τ</u>

Preslikavanja $P_\tau : L^2(I)_\tau^m \rightarrow L^2(I)^m$ definišemo na

ledeći način:

(2.12) $$P_\tau([\vec{u}]_\tau) = [\vec{u}]_\tau$$

Norma elementa $P_\tau([\vec{u}]_\tau) \in L^2(I)^m$ je odredjena sa

$$.13) \quad \| P_\tau ([\vec{u}]_\tau) \|_{L^2(I)^m} = \| [\vec{u}]_\tau \|_{L^2(I)^m_\tau}$$

roksimacija funkcionala Tihonova

Funkcional Tihonova (4.5/II) aproksimiramo funkciona-

m

$$.14) \quad T^{\ell}_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) = \sum_{k=1}^{m} \| \chi^+_k (\varphi_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) - \overline{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma^+_G)} + \\ + \sum_{k=1}^{m} \alpha^{\ell}_k \| [u_k]_\tau \|^2_{L^2(I)}$$

Minimizirajući niz zadatka

$$.15) \quad T^{\ell}_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) \to min \ , \quad [\vec{u}]_\tau \in U_\tau$$

redjujemo kao u P7.gl.II metodom projekcije gradijenta.

osnovu leme 4. u P7.gl.II, imamo

$$.16) \quad T^{\ell}_{h\tau}([\vec{u}]_\tau) - T^*_{h\tau} \leq c_1' \tau \ , \quad c_1 = const \ , \quad \tau \to 0$$

Proverimo uslove 1)-7) leme 1.

$J_* > -\infty$ i $U_* \neq \phi$ na osnovu leme 1. u P2.gl.II ; stabilizator

$\Omega(\vec{u})$ je nenegativan i definisan u $L^2(I)^m$ na osnovu P4.gl.II ;

2) Stavimo $U_N = U_\tau$. Niz $\{[v]_N\}$ se odredjuje zadatkom (2.15), a iz (2.16) imamo

(2.17) $$\eta_\tau = c_1'\tau\ , \quad c_1' = const, \quad \tau \to 0$$

3) Stavimo $U^{\varepsilon_N} = U_\tau$ i odredimo $\gamma_{h\tau}$.

(2.18) $$J(P_\tau([\vec{v}]_\tau)) - J_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi([\vec{v}]_\tau) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_Q^+)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_Q^+)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{\Sigma_Q^+} \chi_k^+ [| \varphi([\vec{v}]_\tau) - \bar{\varphi} |^2 - | \varphi_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) - \bar{\varphi} |^2] dx dt$$

Dizanjem na kvadrat podintegralnih funkcija u (2.18) i uzimajući u obzir da je

$$\| \varphi([\vec{v}]_\tau) + \varphi_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) + 2\bar{\varphi} \|_{L^2(\Sigma_Q^+)} \leq \underset{\sim}{c}\ ,$$

dobijamo

(2.19) $$J(P_\tau([\vec{v}]_\tau)) - J_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) \leq$$

$$\leq \underset{\sim}{c} \int_{\Sigma_Q^+} \chi_k^+ | \varphi([\vec{v}]_\tau) - \varphi_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) | dx dt \leq$$

$$\leq \underset{\sim}{c}\, c' \int_{\Sigma_Q^+} \chi_k^+ | \varphi([\vec{v}]_\tau) - \varphi_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) |^2 dx dt \leq$$

$$\leq \underset{\sim}{c}\, c'c'' \| \varphi([\vec{v}]_\tau) - \varphi_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) \|^2_{H^{1,0}(Q)}$$

Na osnovu (2.10/III), (2.19) postaje

(2.20) $\quad J(P_\tau([\vec{v}]_\tau)) - J_{h\tau}([\vec{v}]_\tau) \leq \underset{\sim}{c}\, c'c'' \underset{\sim}{c}\, \tau^{\varepsilon} = c_1 \tau^{\varepsilon}$

Prema tome

(2.21) $\quad \gamma_{h\tau} = c_1 \tau^{\varepsilon}$

4) Odredimo $\beta_{h\tau}$ iz (2.4).

(2.22) $\quad J_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}^*)) - J(\vec{u}^*) =$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\| \chi_k^+ (\varphi_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}^*)) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_q^+)} - \right.$$

$$\left. - \| \chi_k^+ (\varphi(\vec{u}^*) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_q^+)} \right]$$

Dizanjem na kvadrat podintegralne funkcije u (2.22) i uzimajući u obzir da je

$$\| \varphi_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}^*)) + \varphi(\vec{u}^*) + \bar{\varphi} \|_{L^2(\Sigma_q^+)} \leq \tilde{c},$$

dobijamo

(2.23) $\quad J_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}^*)) - J(\vec{u}^*) \leq \tilde{c} \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^+ (\varphi(\vec{u}^*) - \varphi_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}^*)) \|_{L^1(\Sigma_q^+)} \leq$

$$\leq \tilde{C} c' \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^{\pm} (\varphi(\vec{u}*) - \varphi_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}*))) \|^2_{L^2(\Sigma_q^+)} \leq$$

$$\leq m \tilde{C} c' \underline{c} \| \varphi(\vec{u}*) - \varphi_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}*)) \|^2_{H^{1,0}(Q)}$$

Na osnovu (2.10/III), (2.23) postaje

(2.24) $\qquad J_{h\tau}(Q_\tau(\vec{u}*)) - J(\vec{u}*) \leq c_2 \tau^{\varepsilon}$

Na osnovu (2.4) i (2.24)

(2.25) $\qquad \beta_{h\tau} = c_2 \tau^{\varepsilon}$

5) Odredimo ν_τ iz (2.5).

(2.26) $\qquad J_* - J_*(\varepsilon_H) = J(\vec{u}*) - J([\vec{u}*]_\tau) =$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Big[\| \chi_k^{\pm} (\varphi(\vec{u}*) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_q^+)} - \| \chi_k^{\pm} (\varphi([\vec{u}*]_\tau) - \bar{\varphi}) \|^2_{L^2(\Sigma_q^+)} \Big]$$

Dizanjem na kvadrat podintegralnih funkcija u (2.26) i uzimajući u obzir da je

$$\| \varphi(\vec{u}*) + \varphi([\vec{u}*]_\tau) + \bar{\varphi} \|_{L^2(\Sigma_q^+)} \leq c',$$

dobijamo

(2.27) $\qquad J_* - J_*(\varepsilon_H) \leq c' \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^{\pm} (\varphi(\vec{u}*)) - \varphi([\vec{u}*]_\tau)) \|_{L^1(\Sigma_q^+)} \leq$

$$\leq c'c'' \sum_{k=1}^{m} \| \chi_k^{+} (\varphi(\vec{u}^*) - \varphi([\vec{u}^*]_\tau)) \|^2_{L^2(\Sigma_q^{+})} \leq$$

$$\leq c'c''\subseteq \| \varphi(\vec{u}^*) - \varphi([\vec{u}^*]_\tau) \|^2_{H^{1,0}(Q)}$$

Na osnovu (2.16/I), (2.27) postaje

(2.28) $$J_* - J_*(\varepsilon_N) \leq c_3 \sum_{k=1}^{m} \| u_k^* - [u_k^*]_\tau \|^2_{L^2(I)}$$

Na osnovu (2.10/III), (2.28) postaje

(2.29) $$J_* - J_*(\varepsilon_N) \leq c_3 \tau^{\varepsilon}$$

Na osnovu (2.5) i (2.29)

(2.30) $$\nu_\tau = c_3 \tau^{\varepsilon}$$

6) Kriterijum optimizacije $J(\vec{u})$ je sekvencijalno poluneprekidan odozdo na $L^2(I)^m$ na osnovu (2.d/II) ; na isti način se dokazuje sekvencijalna poluneprekidnost odozdo stabilizatora $\Omega(\vec{u})$ na $L^2(I)^m$; skup $\Omega_C = \{ \vec{u} \in L^2(I)^m \mid \Omega(\vec{u}) \leq C \}$ je sekvencijalno kompaktan za svako $C \geqslant 0$ na osnovu definicije 2. P4. gl.II.

7) Nizovi $\{\alpha_k^\ell\}_\ell$, $k=\overline{1,m}$,koji figurišu u funkcionalu Tihonova (4.5/II) odredjujemo na osnovu (2.7) u lemi 1.

Na osnovu (2.25), (2.21), (2.17), (2.30), (2.7) postaje

$$(2.31)\qquad \lim_{h,\tau\to 0} \frac{1}{\alpha_{kh\tau}} \left[(C_1+C_2+C_3)\tau^\varepsilon + C_1'\tau \right] =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{k_1}{\alpha_{k\tau}} (\tau^\varepsilon + \tau) \equiv A$$

gde je

$k_1 = \max\{C_1+C_2+C_3, C_1'\}$

Pošto je $\tau^\alpha < \tau^\beta$, $\beta < \alpha$, onda (2.31) postaje

$$(2.32)\qquad A \leq \lim_{\tau\to 0} \frac{2k_1}{\alpha_{k\tau}} \tau^\varepsilon$$

Ako stavimo

$$(2.33)\qquad \alpha_{k\tau} = \tau^\delta, \quad 0<\delta<1/2, \quad k=\overline{1,m}$$

onda je zadovoljena relacija (2.7).

Prema tome, svi uslovi leme 1. su zadovoljeni, pa se pomoću zadatka (1.4) može odrediti minimizirajući niz koji će konvergirati ka U_* - skupu optimalnih vrednosti zadatka (1.3).

ZAKLJUČAK

U ovom radu je pokazano da je moguće upravljati brzinom promene količine aerozagadjenja na izvoru, tako da maseni udeo na površi G ne predje dozvoljenu (sanitarnu) vrednost ((P2./II)).

Optimalno upravljanje (brzina promene količine aerozagadjenja na izvoru) je odredjeno kao granična vrednost minimizirajućeg niza dobijenog metodom projekcije gradijenta (P7./II).

Pošto postavljeni zadatak minimizacije nije bilo moguće rešiti u konačnom obliku, pokazano je da ga je moguće rešiti pomoću niza približnih zadataka minimizacije, tako da dobijeni niz konvergira ka optimalnoj vrednosti dobijenoj rešavanjem regularizovanog neprekidnog zadatka minimizacije (gl.IV).

Posmatrani zadatak optimalnog upravljanja može se proširiti na sledeći način:

U slučaju da se radi o disperziji "teških" čestica u atmosferi, onda bi u jednačini (1.10/I), umesto člana $div(\vec{v}\varphi)$ trebalo da stoji $\frac{\partial v_1 \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2 \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial (v_3 - v_g)\varphi}{\partial x_3}$, gde je v_g - brzina čestice usled dejstva sile zemljine teže ([1]).

U slučaju da j-ta komponenta aerozagadjenja u atmosferi hemijski reaguje, tj. nije pasivna i prelazi u p_j toksičnih komponenti po shemi $\varphi_{(j)} = \varphi_{(j)}^{(0)} \to \varphi_{(j)}^{(1)} \to \cdots \to \varphi_{(j)}^{(p_j)}$, $j=\overline{1,n}$, u intervalu vremena $I=[0,T]$, onda bi umesto sistema (1.14/I) imali sistem

$$\frac{\partial \varphi_{(j)}^{(0)}}{\partial t} + A\varphi_{(j)}^{(0)} = \frac{1}{\rho}\vec{\chi}\,\vec{u}_{(j)} \quad , \quad Q$$

$$A\varphi_{(j)}^{(1)} + \sigma_{(j)}^{(1)}\varphi_{(j)}^{(1)} - \sigma_{(j)}^{(0)}\varphi_{(j)}^{(0)} = 0 \quad , \quad Q$$

$$A\varphi_{(j)}^{(2)} + \sigma_{(j)}^{(2)}\varphi_{(j)}^{(2)} - \sigma_{(j)}^{(1)}\varphi_{(j)}^{(1)} = 0 \quad , \quad Q$$

$$A\varphi_{(j)}^{(p_j-1)} + \sigma_{(j)}^{(p_j-1)}\varphi_{(j)}^{(p_j-1)} - \sigma_{(j)}^{(p_j-2)}\varphi_{(j)}^{(p_j-2)} = 0 \quad , \quad Q$$

$$A\varphi_{(j)}^{(p_j)} - \sigma_{(j)}^{(p_j-1)}\varphi_{(j)}^{(p_j-1)} = 0 \quad , \quad Q$$

$$\varphi_{(j)}^{(\ell)}(0) = \varphi_{0(j)}^{(\ell)} \quad , \quad \Omega \quad , \quad \ell = \overline{0,p_j}$$

$$\frac{\partial \varphi_{(j)}^{(\ell)}}{\partial \nu_0} = -\alpha_{(j)}^{(\ell)} \varphi_{(j)}^{(\ell)}, \quad \Sigma_0^+, \quad \ell = \overline{0, p_j}$$

$$\varphi_{(j)}^{(\ell)} = 0, \quad \Sigma_0^-, \quad \ell = \overline{0, p_j}$$

$$\frac{\partial \varphi_{(j)}^{(\ell)}}{\partial \nu_B} = 0, \quad \Sigma_B^+, \quad \ell = \overline{0, p_j}$$

$$\varphi_{(j)}^{(\ell)} = 0, \quad \Sigma_B^-, \quad \ell = \overline{0, p_j}$$

$$\frac{\partial \varphi_{(j)}^{(\ell)}}{\partial \nu_H} = 0, \quad \Sigma_H, \quad \ell = \overline{0, p_j}$$

$$v_{n_H} = 0, \quad \Sigma_H$$

$$div(\vec{v}) = 0, \quad Q$$

gde je

$\sigma_{(j)}^{(\ell)}$ - koeficijent raspada aerozagadjenja u vazduhu,

$\ell = \overline{0, p_j}$, $j = \overline{1, n}$,

$A\cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{v}\cdot) - \mathrm{div}(\hat{D}_{(j)}\cdot)$

([1]).

Kriterijum optimizacije možemo zadati u obliku

$$J(\vec{u}^{(j)}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p_j} \| \chi_k^+ (\varphi_{(j)}^{(\ell)} - \overline{\varphi}_{(j)}^{(\ell)}) \|^2_{L^2(\Sigma_G^+)}$$

gde je

$\overline{\varphi}^{(\ell)}_{(j)}$ - dopušteni maseni udeo j-te komponente ℓ-tog raspada

$j=\overline{1,n}$, $\ell=\overline{0,p_j}$.

LITERATURA

[1] Marčuk,G.I., Matematičeskoe modelirovanie v probleme okružajuščeji sredi, M.: Nauka, 1982.

[2] Konnor,Dž.,Brebbia,K., Metod konečnih elementov v mehanike židkosti,L.:Sudostroenie, 1979.

[3] Mihajlov,V.P., Differencialnie uravnenia v časnih proizvodnih, M.: Nauka, 1976.

[4] Wu,Z.S.,Teo,K.L.,"SIAM J.Contr. and Optimiz.",1983, 21, N5,729-757

[5] Smirnov,V.I.,Kurs višei matematiki,T4,čast vtoraja, M.:Nauka,1981.

[6] Nikoljskiji,S.M.,Približenie funkciji mnogih peremennih i teoremi vloženija, M.:Nauka, 1969.

[7] Vasiljev,F.P., Metodi rešenija ekstremaljnih zadač,M.: Nauka,1981.

[8] Kolmogorov,A.N.,Fomin,S.V., Elementi teorii funkciji i funkcionaljnogo analiza, M.: Nauka 1981.

[9] Ljusternik,L.A.,Sobolev,V.I., Elementi funkcionaljnogo analiza, M.: Nauka, 1965.

[10] Céa,J.,Optimisation théorie et algorithmes,Dunod, Paris,1971.

[11] Vasiljev,F.P., Čislennie metodi rešenija ekstremaljnih zadač, M.: Nauka, 1980.

[12] Marčuk,G.I., Agoškov,V.I., Vvedenie v proekcionno setočnie metodi, M.: Nauka 1981.

[13] Bahvalov,N.S., Čislennie metodi, M.: Nauka, 1975.

[14] Malanowski,K., Control and Cybernetics, VOL.9(1980)№4

[15] Solonnikov,V.A.,Uraljceva,N.N.,Izbrannie glavi analiza i viššei algebri, Izdateljstvo Leningradskogo Universiteta, Leningrad, 1981.

[16] Glovinski,R., Lions,Ž.L., Trmoljer,R., Čislennoe issledovanie variacionnih neravenstv, M.: Mir, 1979.

[17] Babuška, I.,Aziz,A.K., Survey lecture on mathematical foundations of the finite element method.In: The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations - edited by A.K. Aziz. Academic Press, New York, 1972.