

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATICKI FAKULTET
MATEMATICKI FAKULTET

Mr. Aleksandra Jankovic, dipl. ing.

NEKI PROBLEMI NELINEARNE ANALIZE LJUSKI
METODOM KONACNIH ELEMENATA

- doktorska disertacija -

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA
Broj 9647 - Datum 25. 12. 1989.
231/1

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____

Želela bih da izrazim svoju duboku zahvalnost prof. dr. M. Berkoviću, koji mi je svojim sugestijama pružao veliku pomoć tokom izrade ovog rada.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj porodici i svojoj radnoj organizaciji Zavodi "Crvena Zastava", OOUR Institut za automobile, na razumevanju za vreme mog angažovanja na izradi rada.

Autor

SADRŽAJ

PREDGOVOR

I.1 OPŠTI DEO.....	1
I.2 UVODNE NAPOMENE PROBLEMA NELINEARNOSTI LJUSKI.....	2
I.2.1 Izbor konačnog elementa.....	3
I.2.2 Izbor numeričke integracije.....	3
I.2.3 Nelinearni odziv strukture.....	3
I.2.4 Numerička procedura.....	4

PRVI DEO: TEORIJSKE OSNOVE MODELA TANKE LJUSKE

1. GEOMETRIJA LJUSKE.....	7
2. KONSTITUTIVNI KOEFICIJENTI.....	9
2.1 Određivanje konstitutivnih koeficijenata.....	9
2.2 Numeričke vrednosti konstitutivnih koeficijenata.....	12
3. TENZOR DEFORMACIJE.....	16
3.1 Opšti oblik tenzora deformacije.....	16
3.2 Tenzor deformacije i matrice veze.....	17
3.3 Deformacija u polju konačnog elementa.....	21
4. TENZOR NAPONA. VEZA NAPON-DEFORMACIJA.....	23
4.1 Naponi tanke ljuske.....	23
4.2 Postupak računanja implicitne veze napon-deformacija....	24
5. MATRICA KRUTOSTI KONAČNOG ELEMENTA.....	29
5.1 Položajna matrica krutosti.....	29
5.2 Geometrijska matrica krutosti.....	31
5.3 Numerički rezultati dobijeni u linearnoj analizi.....	31
5.3.1 Rezultati dobijeni analizom normalnog napona S_3^3	31

DRUGI DEO: NUMERIČKE PROCEDURE ZA REŠAVANJE NELINEARNOG ODZIVA STRUKTURE U MKE I PRIMERI

1. METODE REŠAVANJA NELINEARNOG ODZIVA STRUKTURE.....	39
1.1 O nelinearnim odzivima strukture uopšte.....	39
1.2 Metod zadatog nivoa spoljašnjeg opterećenja.....	42
1.3 Metod zadatog modula pomeranja.....	49
2. NUMERIČKI PRIMERI	
2.1 Greda na dva nepokretna oslonca.....	61
2.2 Dvostrana konzola.....	67

2.3 Uklještena, kontinualno opterećena ploča.....	72
2.4 Plitka cilindrična ljuska, kontinualno opterećena.....	75
2.5 Konzola opterećena momentom savijanja.....	80
2.6 Cilindrična ljuska opterećena koncentrisanom silom.....	84
2.7 Uklješteni cilindrični luk.....	98
2.8 Kalota, opterećena vertikalnom silom na sredini.....	102
2.9 Pritisnuta ploča.....	110
2.10 Pritisnuti cilindar.....	113
2.11 Izvijanje konzole.....	118
2.12 Torzija konzole.....	121
3. ZAKLJUČCI.....	124

DODATAK I

DODATAK II

PREDGOVOR

I.1 OPŠTI DEO

U klasičnoj teoriji elastičnosti su tretirani uglavnom linearni problemi jer je njen matematički aparat bio analitičko rešavanje diferencijalnih jednačina koje opisuju problem. Međutim, u praksi je ograničen broj primera gde je ponašanje materijala ili geometrije konstrukcije linearno. Nelinearno ponašanje tankih ljuski je predmet izučavanja kako istraživača koji se bave teorijskom mehanikom, tako i inženjera, jer nelinearna analiza omogućuje određivanje kritičnih opterećenja pri izvijanju ljuski i sagledavanje ponašanja strukture i posle graničnog stanja stabilnosti (određivanje tačaka ekstremuma i bifurkacije u dijagramu pomeranje-opterećenje).

Metod konačnih elemenata, kao generalni numerički metod u strukturalnoj analizi, i razvoj digitalnih računara su omogućili da se razvije numerička procedura koja bi mogla da prati nelinearno ponašanje strukture, uključujući i velika pomeranja, velike rotacije i nelinearne karakteristike materijala.

Proučavanje fenomena nelinearnosti je skopčano sa mnogim matematičkim teškoćama i podrazumeva proučavanje niza specijalnih slučajeva u cilju identifikacije zakonitosti, na osnovu kojih se formuliše neka više ili manje generalna procedura. Da bi se numerička procedura sprovela korektno, potrebno je najpre formulisati konačni element ljuske, a zatim razviti numerički algoritam za rešavanje sistema jednačina ravnoteže strukture, uz ograničenja koja nameće nelinearno ponašanje u okolini kritičnih tačaka.

Nelinearni problemi se obično klasificiraju kao geometrijski

nelinearni, materijalno nelinearni i kombinovani - geometrijski i materijalno nelinearni. Predmet ove teze je samo geometrijska nelinearnost ljuski.

I.2 UVODNE NAPOMENE PROBLEMA NELINEARNOSTI LJUSKI

I.2.1 Izbor konačnog elementa

U toku proteklih godina teorija ljuski se uglavnom bazirala na sledećim modelima konačnih elemenata:

- na ravnom elementu za koji je osnova Kirhofova (Kirchhoff) teorija ploča
- na trodimenzionom izoparametarskom elementu ljuske
- na orijentisanom dvodimenzionom izoparametarskom elementu

S obzirom da se u teoriji orijentisanog kontinuuma pod terminom direktor podrazumeva vektor orijentacije, to će i u ovom radu biti, radi kratkoće, korišćen termin direktor.

Za svaki od ovih modela postoji više tipova konačnih elemenata, razvijenih od strane brojnih autora. Ti elementi čine jednu veoma široku lepezu različitih tipova ljuski (tanke, debele, lamelaste), različite geometrije (od analitički definisane geometrije za ploče i rotacione površi do proizvoljnih površi u prostoru).

S obzirom na zaključke o orijentisanom dvodimenzionom modelu tanke ljuske sa četvorougaoim izoparametarskim elementom, iznete u magistarskom radu [5], i u ovoj tezi je korišćen isti element, s tim što su deformacije dopunjene nelinearnom komponentom tako da imamo i nelinearne matrice krutosti. Uz to je formirana i geometrijska matrica krutosti.

Poznato je da klasična ljuska ne može da prenese spreg u tangencijalnoj ravni, pa se iz tog razloga rotacija oko normale na

površ ljuske eliminiše bilo konceptom elementa sa pet stepeni slobode, bilo ograničavanjem jedne globalne rotacije u čvoru, najbolje one koja je najbliža rotaciji oko normale. U radu sa geometrijski nelinearnim problemima je uočeno da eliminisana rotacija uzrokuje da se preostale dve globalne rotacije ne dobiju tačno, što ima za posledicu nekorektne priraštaje direktora. U dodatku II je dat originalni postupak tačnog izračunavanja sve tri globalne rotacije.

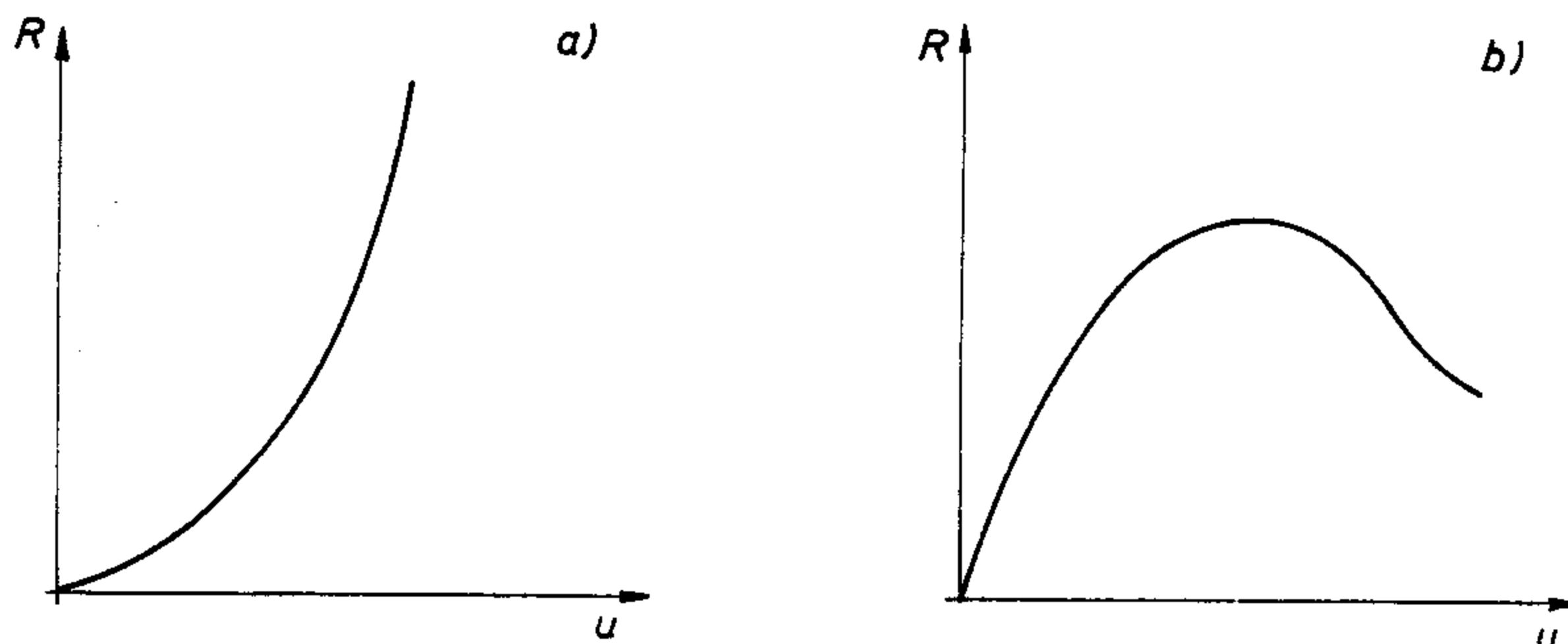
I.2.2 Izbor numeričke integracije

Pogodan izbor numeričke integracije je takode jedan od problema tanke ljuske. Integraljenje matrica krutosti koje su proizvod transversalnog smicanja je vrlo delikatan problem i zato je u ovom radu jedno poglavlje posvećeno analizi i izboru numeričke integracije.

I.2.3 Nelinearni odziv strukture

Analizirajući ponašanje tankih ljuski može da se primeti da u nekim slučajevima malih pomeranja, nelinearna komponenta deformacije može znatno da uveća deformacionu energiju ili alternativno, da znatna promena geometrije ne izazove velike dodatne napone. Linearna analiza ne proučava ove specifičnosti, pa se nameće problem iznalaženja nelinearne karakteristike pomeranje-opterećenje. Ova karakteristika u osnovi može da odslika dva tipa ponašanja strukture:

- "očvršćavanje", gde porast spoljašnjeg opterećenja dovodi do sve manjih deformacija;
- "omekšavanje", gde postoji neka granična vrednost sile i svaka mala promena sile u okolini te granične vrednosti, izaziva velike deformacije.



Sl.1. Mogući tipovi nelinearnog ponašanja
 a) očvršćavanje b) omekšavanje

Problemi prvog tipa mogu da se rešavaju klasičnim metodama za rešavanje sistema nelinearnih jednačina, Njutnov (Newton) ili modificirani Njutnov metod, i uglavnom ne dovode do numeričkih teškoća, dok problemi drugog tipa moraju da se rešavaju uz dodatne restriktivne jednačine.

I.2.4 Numerička procedura

U radu su proučeni neki tipovi metoda sa propisanim korakom opterećenja i sa propisanim modulom pomeranja. Za rešavanje ova dva tipa ponašanja strukture su u osnovi korišćeni Njutnov, i Riksov (Ricks) metod, respektivno, i učinjen je napor da se oni dograde i modifikuju sa ciljem da se ubrza konvergencija rešenja i da se postigne maksimalno uopštavanje načina rešavanja geometrijski nelinearnih problema. I za jedan i za drugi metod su dati algoritmi koji su rezultat iskustva primene nelinearne analize na niz pojedinačnih primera. Za svaki primer je komentarisano kakvih specifičnosti i teškoća je bilo u radu.

Posebno su interesantne strukture kod kojih nastaje tzv. "snap through" ili gde ima tačaka bifurkacije u dijagramu pomeranje

opterećenje, tako da su uz te primere dati dopunski komentari.

Svi opisani postupci rešavanja se temelje na linearizovanom iterativno-inkrementalnom postupku. Početno rešenje vektora pomeranja je linearno, a unutrašnje sile su računate uzimajući u obzir i nelinearnu komponentu u izrazima za deformacije, tako da se u svakom inkreментu kroz određeni broj iteracija zadovolji kriterijum konvergencije za neuravnotežene sile.

Numerički rezultati su upoređivani sa rezultatima drugih autora iz dostupne literature.

PRVI DEO: TEORIJSKE OSNOVE MODELA TANKE LJUSKE

1. GEOMETRIJA LJUSKE

2. KONSTITUTIVNI KOEFICIJENTI

2.1 Određivanje konstitutivnih koeficijenata

2.2 Numeričke vrednosti konstitutivnih koeficijenata

3. TENZOR DEFORMACIJE

3.1 Opšti oblik tenzora deformacije

3.2 Tenzor deformacije tanke ljuske i matrice veze

3.3 Deformacija u polju konačnog elementa

4. TENZOR NAPONA

4.1 Naponi tanke ljuske

4.2 Postupak računanja implicitne veze napon-deformacija

4.3 Eksplicitna veza napon-deformacija za slučaj ravnog elementa konstantne debljine

5. MATRICE KRUTOSTI KONAČNOG ELEMENTA

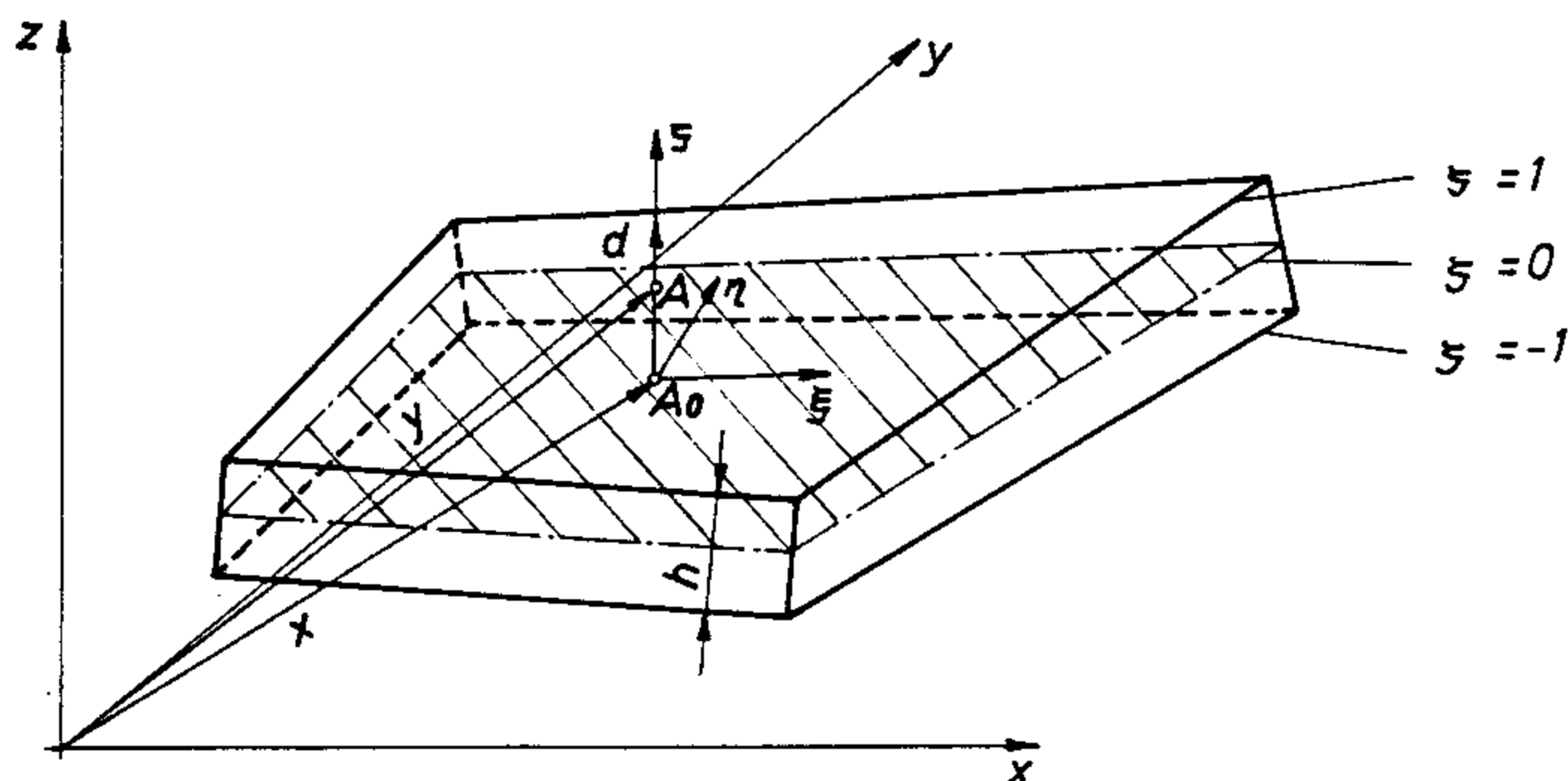
5.1 Položajna matrica krutosti

5.2 Geometrijska matrica krutosti

5.3 Numerički rezultati dobijeni u linearnoj analizi

1. GEOMETRIJA LJUSKE

U ovom poglavlju će ukratko biti izneta teorija dvodimenzionog kontinuuma i osnovne relacije vezane za definisanje njegove geometrije, konstitutivnih relacija i mera deformacije. Sve relacije su date za tanku, homogenu i izotropnu ljusku konstantne debljine. S obzirom da se ograničavamo na probleme geometrijske nelinearnosti, razmatraćemo samo linearno elastičan materijal.



Sl. 2. Orijentisani dvodimenzioni model ljuske

Položaj proizvoljne tačke tela oblika ljuske A, dat je Dekartovim (Descartes) koordinatama vektora položaja y^i :

$$y^i = x^i + \frac{1}{2} \zeta h d^i \quad \dots \dots \dots (1.1)$$

gde su:

x^i - koordinate vektora položaja tačke u srednjoj površi ljuske

($\zeta = 0$)

h - debljina ljuske

d^i - direktor ($|d|=1$)

Bazni vektori su dati relacijama,

$$y_a^i = x_a^i + \frac{1}{2} \zeta h d_a^i \quad \dots \dots \dots (1.2a)$$

$$y_3^i = \frac{1}{2} h d^i \quad \dots\dots\dots (1.2b)$$

gde donji indeksi predstavljaju diferenciranje po koordinatama ξ^a , $a=1,2$ i ξ^3 , odnosno $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$ i $\xi^3 = \zeta$.

Komponente metričkog tenzora su:

$$g_{a\beta} = \delta_{ij} y_a^i y_\beta^j \quad \dots\dots\dots (1.3a)$$

$$g_{a3} = \delta_{ij} y_a^i y_3^j \quad \dots\dots\dots (1.3b)$$

$$g_{33} = \delta_{ij} y_3^i y_3^j \quad \dots\dots\dots (1.3c)$$

Zamenom (2) u (3) dobijamo bazne vektore u obliku polinoma po :

$$g_{a\beta} = a_{a\beta} - \zeta h b_{a\beta} + \zeta^2 \frac{h^2}{4} c_{a\beta} \quad \dots\dots\dots (1.4a)$$

$$g_{a3} = \frac{h}{2} a_{a3} + \frac{h^2}{4} \zeta b_{a3} \quad \dots\dots\dots (1.4b)$$

$$g_{33} = \frac{h^2}{4} a_{33} \quad \dots\dots\dots (1.4c)$$

gde su koeficijenti a_{ij} , b_{ij} i c_{ij} ($i, j=1,2,3$; $a, \beta=1,2$) dati relacijama:

$$a_{a\beta} = \delta_{ij} x_a^i x_\beta^j \quad \dots\dots\dots (1.5a)$$

$$b_{a\beta} = -\frac{1}{2} \delta_{ij} (d_a^i x_\beta^j + d_\beta^j x_a^i) \quad \dots\dots\dots (1.5b)$$

$$c_{a\beta} = \delta_{ij} d_a^i d_\beta^j \quad \dots\dots\dots (1.5c)$$

$$a_{a3} = \delta_{ij} x_a^i d^j \quad \dots\dots\dots (1.5d)$$

$$b_{a3} = \delta_{ij} d_a^i d^j \quad \dots\dots\dots (1.5e)$$

$$a_{33} = \delta_{ij} d^i d^j \quad \dots\dots\dots (1.5f)$$

Determinanta metričkog tenzora je:

$$|g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{a\beta} & g_{a3} \\ g_{3a} & g_{33} \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

Ako se radi o ljusci konstantne debljine može da se zanemari član g_{a3} , tako da relacija (6) glasi:

$$g = |g_{ij}| \approx |g_{a\beta}| \cdot |g_{33}| \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

što je potpuno tačno za referentnu (početnu) konfiguraciju, ako se usvoji direktor u pravcu normale.

S obzirom da će sve kasnije biti rađeno metodom totalni Lagranž (total Lagrange), to će se sve veličine vezivati za početnu konfiguraciju, pa je zato potrebno i determinantu g naći u početnoj konfiguraciji. Pošto je u početnoj konfiguraciji:

$$A_{33}=1, h=H, g=G \dots\dots\dots(1.8)$$

to je:

$$G = \frac{H^2}{4} \cdot \det G_{\alpha\beta} \dots\dots\dots(1.9)$$

Imajući u vidu da je $O(H^2 c_{\alpha\beta}) \ll O(a_{\alpha\beta})$, može da se piše

$$G_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \zeta H B_{\alpha\beta} \dots\dots\dots(1.10)$$

pa je determinanta G

$$G = \frac{H^2}{4} (A - \zeta H B + \zeta^2 H^2 B_B) \dots\dots\dots(1.11)$$

gde su:

$$A = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{12} \dots\dots\dots(1.11a)$$

$$B = B_{11} A_{22} + A_{11} B_{22} - 2 A_{12} B_{12} \dots\dots\dots(1.11b)$$

$$B_B = B_{11} B_{22} - B_{12} B_{12} \dots\dots\dots(1.11c)$$

Pošto je $B_B \ll A$, sa dovoljnom tačnošću može da se smatra da je determinanta metričkog tenzora linearna po ζ , pa je:

$$\sqrt{G} = \frac{H}{2} \cdot \sqrt{A - \zeta H B} \approx \frac{H}{2} \cdot \sqrt{A} \cdot \left(1 - \zeta \frac{HB}{2A}\right) \dots\dots\dots(1.12)$$

2. KONSTITUTIVNI KOEFICIJENTI

2.1 Određivanje konstitutivnih koeficijenata

Deformacija γ_{ab} , izražena preko Džipsove (Gibbs) funkcije specifične slobodne energije i tenzora napona S^{ab} ima sledeću formu:

$$\gamma_{ab} = -\rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial S^{ab}} \dots\dots\dots(2.1)$$

gde je ρ gustina ([2]).

Za homogen izotropan elastičan materijal funkcija glasi:

$$\rho \varphi = \left(-\frac{1+\nu}{2E} G_{ac} G_{bd} + \frac{\nu}{2E} G_{ab} G_{cd} \right) S^{ab} S^{cd} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

Zamenjujući (2.2) u (2.1), za tenzor deformacije γ_{ab} se dobija:

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2E} \cdot \frac{\partial}{\partial S^{ab}} \cdot \left[(1+\nu) G_{ac} G_{bd} - \nu G_{ab} G_{cd} \right] S^{ab} S^{cd} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

Ako se i on, kao i metrički tenzor, razdvoji na komponente u srednjoj površi ($\alpha\beta$) i komponente u transverzalnim ravnima ($\alpha 3$) i (33), onda relacija (2.3) može da se napiše u obliku:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta} \\ \gamma_{\alpha 3} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline G_{\alpha\beta\gamma\delta} & G_{\alpha\beta 3\delta} & G_{\alpha\beta 33} \\ \hline & G_{\alpha 3\gamma 3} & G_{\alpha 3 33} \\ \hline \text{simetrično} & & G_{33 33} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{pmatrix} S^{\gamma\delta} \\ 2S^{\gamma 3} \\ S^{33} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

gde su pojedini konstitutivni koeficijenti eksplicitno dati relacijama (2.5):

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{E} \cdot \left[(1+\nu) G_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} - \nu G_{\alpha\beta} G_{\gamma\delta} \right] \quad \dots\dots\dots (2.5a)$$

$$G_{\alpha\beta 3\delta} = \frac{1}{2E} \cdot \left[(1+\nu) G_{\alpha 3} G_{\beta\delta} - \nu G_{\alpha\beta} G_{3\delta} \right] \quad \dots\dots\dots (2.5b)$$

$$G_{\alpha\beta 33} = \frac{1}{2E} \cdot \left[(1+\nu) G_{\alpha 3} G_{\beta 3} - \nu G_{\alpha\beta} G_{33} \right] \quad \dots\dots\dots (2.5c)$$

$$G_{\alpha 3\gamma 3} = \frac{1}{E} \cdot \left[(1+\nu) G_{\alpha\gamma} G_{33} - \nu G_{\alpha 3} G_{\gamma 3} \right] \quad \dots\dots\dots (2.5d)$$

$$G_{\alpha 3 33} = \frac{1}{2E} \cdot G_{\alpha 3} G_{33} \quad \dots\dots\dots (2.5e)$$

$$G_{33 33} = \frac{1}{E} \cdot G_{33}^2 \quad \dots\dots\dots (2.5f)$$

Zamenjujući (2.5) u (2.4) i razvijajući tenzore deformacija i napona po $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dobija se matrica konstitutivnih koeficijenata data relacijom 2.6.

Konstitutivni koeficijeti G_{ijkl} su prema izrazima (1.4) za metrički tenzor G_{mn} , funkcije konvektivne koordinate po debljini ljuske, ξ , prve i druge metričke forme površi kao i članova kojima je obuhvaćena promena debljine ljuske. Svi ovi članovi nisu od istog uticaja na ponašanje ljuske, tj. njihov doprinos u matrici elastičnosti zavisi od reda veličine člana. Selekcija u tom

$$[G] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline G_{11}G_{11} & \frac{1}{2}G_{11}G_{12} & \frac{1+\nu}{2}G_{12}^2 - \frac{\nu}{2}G_{11}G_{12} & \frac{1}{2}G_{11}G_{13} & \frac{1+\nu}{2}G_{13}G_{12} - \frac{\nu}{2}G_{11}G_{23} & \frac{1+\nu}{2}G_{13}G_{13} - \frac{\nu}{2}G_{11}G_{33} \\ \hline & \frac{1+\nu}{2}G_{11}G_{22} + \frac{1-\nu}{2}G_{12}G_{12} & \frac{1}{2}G_{12}G_{22} & \frac{1+\nu}{4}G_{11}G_{23} + \frac{1-\nu}{4}G_{12}G_{13} & \frac{1+\nu}{2}G_{13}G_{22} + \frac{1-\nu}{4}G_{12}G_{23} & \frac{1+\nu}{2}G_{13}G_{23} - \frac{\nu}{2}G_{12}G_{33} \\ \hline & & G_{22}G_{22} & \frac{1+\nu}{2}G_{12}G_{23} - \frac{\nu}{2}G_{22}G_{13} & \frac{1}{2}G_{22}G_{23} & \frac{1+\nu}{2}G_{23}G_{23} - \frac{\nu}{2}G_{22}G_{33} \\ \hline & & & \frac{1+\nu}{2}G_{11}G_{33} + \frac{1-\nu}{2}G_{13}G_{13} & \frac{1+\nu}{4}G_{12}G_{33} + \frac{1-\nu}{4}G_{13}G_{23} & \frac{1}{2}G_{13}G_{33} \\ \hline & & & & \frac{1+\nu}{2}G_{22}G_{33} + \frac{1-\nu}{2}G_{23}G_{23} & \frac{1}{2}G_{23}G_{33} \\ \hline & & & & & G_{33}G_{33} \\ \hline \end{array}$$

s i m e t r i č n o

.....(2.6)
 smislu će kasnije biti učinjena, a ovde će biti navedeni konstitutivni koeficijenti dobijeni zamenom baznih vektora (1.4) u (2.5):

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} + \zeta H B_{\alpha\beta\gamma\delta} + \zeta^2 H^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \dots\dots\dots(2.7.1)$$

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{E} \cdot [(1+\nu)A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta} - \nu A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta}] \quad \dots\dots\dots(2.7.1a)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{E} \cdot [(1+\nu)(B_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta} + A_{\alpha\gamma}B_{\beta\delta}) - \nu(B_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta} + A_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta})] \quad \dots\dots\dots(2.7.1b)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{E} \cdot [(1+\nu)B_{\alpha\gamma}B_{\beta\delta} - \nu B_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta}] \quad \dots\dots\dots(2.7.1c)$$

$$G_{\alpha\beta 3\delta} = A_{\alpha\beta 3\delta} + \zeta H B_{\alpha\beta 3\delta} + \zeta^2 H^2 C_{\alpha\beta 3\delta} \quad \dots\dots\dots(2.7.2)$$

$$A_{\alpha\beta 3\delta} = \frac{H}{4E} \cdot [(1+\nu)A_{\alpha 3}A_{\beta\delta} - \nu A_{\alpha\beta}A_{3\delta}] \quad \dots\dots\dots(2.7.2a)$$

$$B_{\alpha\beta 3\delta} = -\frac{H}{4E} \cdot [(1+\nu)(B_{\alpha 3}A_{\beta\delta} - \frac{1}{2}A_{\alpha 3}B_{\beta\delta}) - \nu(B_{\alpha\beta}A_{3\delta} - \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}B_{3\delta})] \quad \dots\dots(2.7.2b)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{H}{8E} \cdot [(1+\nu) B_{\alpha\gamma} B_{\beta\delta} - \nu B_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta}] \quad \dots\dots\dots (2.7.2c)$$

$$G_{\alpha\beta\gamma\gamma} = A_{\alpha\beta\gamma\gamma} + \xi H B_{\alpha\beta\gamma\gamma} + \xi^2 H^2 C_{\alpha\beta\gamma\gamma} \quad \dots\dots\dots (2.7.3)$$

$$A_{\alpha\beta\gamma\gamma} = \frac{H^2}{8E} \cdot [(1+\nu) A_{\alpha\gamma} A_{\beta\gamma} - \nu A_{\alpha\beta} A_{\gamma\gamma}] \quad \dots\dots\dots (2.7.3a)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\gamma} = \frac{H^2}{8E} \cdot \left[\frac{1+\nu}{2} \cdot (B_{\alpha\gamma} A_{\beta\gamma} + A_{\alpha\gamma} B_{\beta\gamma}) + \nu B_{\alpha\beta} A_{\gamma\gamma} \right] \quad \dots\dots\dots (2.7.3b)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\gamma} = \frac{H^2 (1+\nu)}{32E} \cdot B_{\alpha\gamma} B_{\beta\gamma} \quad \dots\dots\dots (2.7.3c)$$

$$G_{\alpha\gamma\gamma\gamma} = A_{\alpha\gamma\gamma\gamma} + \xi H B_{\alpha\gamma\gamma\gamma} + \xi^2 H^2 C_{\alpha\gamma\gamma\gamma} \quad \dots\dots\dots (2.7.4)$$

$$A_{\alpha\gamma\gamma\gamma} = \frac{H^2}{4E} \cdot [(1+\nu) A_{\alpha\gamma} A_{\gamma\gamma} - \nu A_{\alpha\gamma} A_{\gamma\gamma}] \quad \dots\dots\dots (2.7.4a)$$

$$B_{\alpha\gamma\gamma\gamma} = -\frac{H^2}{4E} \cdot \left[\frac{\nu}{2} (B_{\alpha\gamma} A_{\gamma\gamma} + A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\gamma}) + (1+\nu) B_{\alpha\gamma} A_{\gamma\gamma} \right] \quad \dots\dots\dots (2.7.4b)$$

$$C_{\alpha\gamma\gamma\gamma} = -\frac{H^2}{16E} \cdot B_{\alpha\gamma} B_{\gamma\gamma} \quad \dots\dots\dots (2.7.4c)$$

$$G_{\alpha\gamma\gamma\gamma} = A_{\alpha\gamma\gamma\gamma} + \xi H B_{\alpha\gamma\gamma\gamma} \quad \dots\dots\dots (2.7.5)$$

$$A_{\alpha\gamma\gamma\gamma} = \frac{H^3}{16E} \cdot A_{\alpha\gamma} \quad \dots\dots\dots (2.7.5a)$$

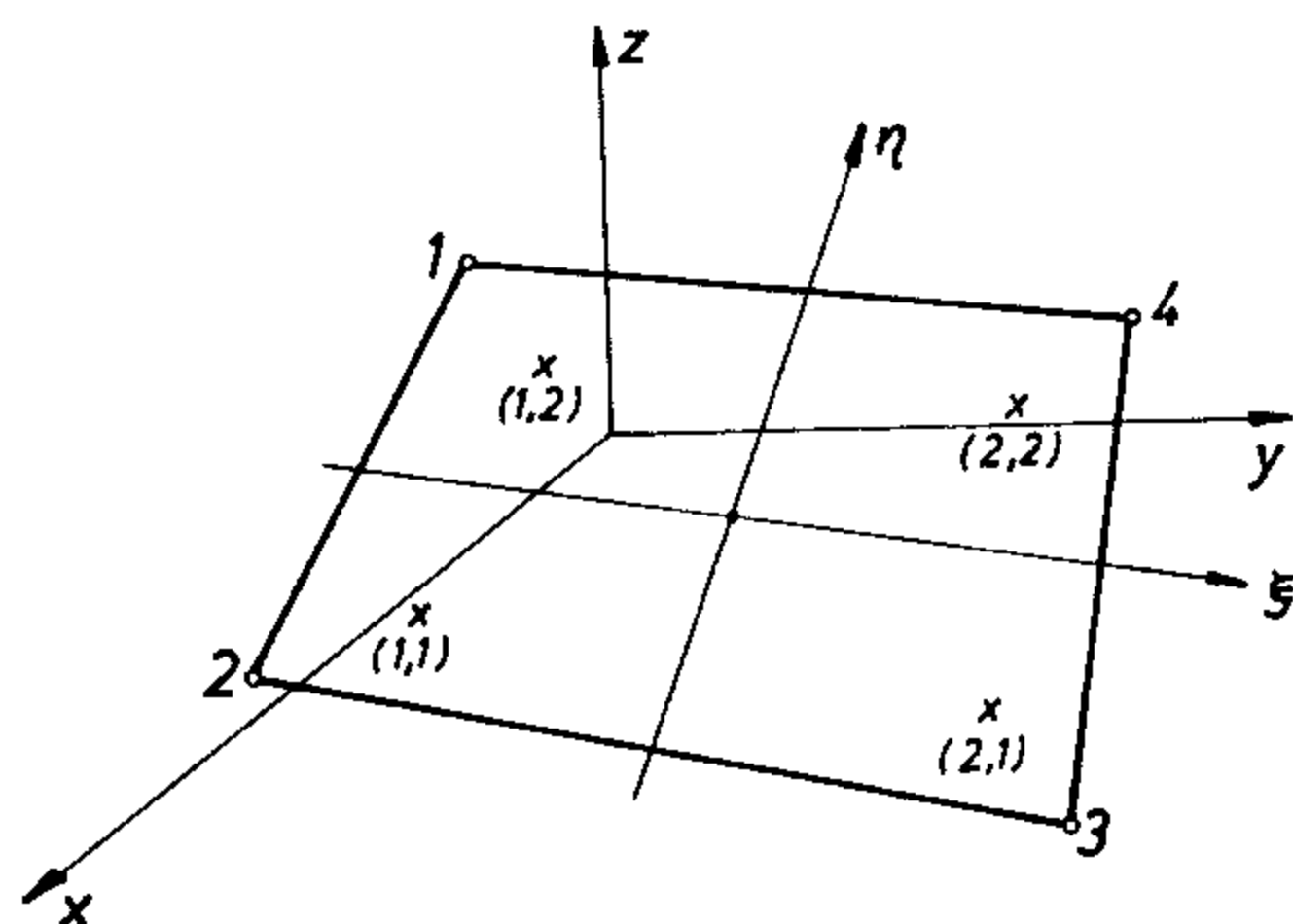
$$B_{\alpha\gamma\gamma\gamma} = \frac{H^3}{32E} \cdot B_{\alpha\gamma} \quad \dots\dots\dots (2.7.5b)$$

$$G_{\gamma\gamma\gamma\gamma} = A_{\gamma\gamma\gamma\gamma} = \frac{H^4}{16E} \quad \dots\dots\dots (2.7.6)$$

2.2 Numeričke vrednosti konstitutivnih koeficijenata

Da bi se ilustrovao uticaj pojedinih komponenata konstitutivnih koeficijenata, posmatraćemo primer ljuske na slici 3. Prikazani element nije ravan niti pravilan, a takav izbor je učinjen da ne bi bilo komponenata koje su jednake nuli zbog geometrije elementa, što bi stvorilo pogrešnu sliku o redu veličine samih konstitutivnih koeficijenata.

Za primer na slici 3 su date numeričke vrednosti koeficijenata A_{ijkl} , B_{ijkl} , C_{ijkl} računatih prema relacijama (2.7). Vrednosti se odnose na integracionu tačku (1,1), a za ostale tačke su istog reda veličine, pa ih nije potrebno navoditi.



$$E=2 \cdot 10^6 \quad \nu=0.3$$

koordinate čvorova:

$$1(-2, -4, -2)$$

$$2(13, 3, 4)$$

$$3(8, 14, -1)$$

$$4(0, 10, 3)$$

$$H=1 \quad ; \quad L=L_{\min}=\sqrt{34}=10$$

Sl.3. Linearni element ljuske

Determinanta prve i druge metričke forme su:

$$|A_{\alpha\beta}|=0.2123D+04$$

$$|B_{\alpha\beta}|=0.1243D+03$$

dok su njihove komponente date u tabeli 2.1.

tabela 2.1

α	β	$A_{\alpha\beta}$	$B_{\alpha\beta}$
1	1	0.59611D+02	0.0
1	2	0.25837D+02	-0.24064D+01
2	1	0.25837D+02	-0.24064D+01
2	2	0.46814D+02	0.27756D-16

tabela 2.2

čvor	D^x	D^y	D^z
1	-0.2315	-0.2977	0.9262
2	-0.4420	0.1969	0.8752
3	0.1907	0.4767	0.8581
4	0.5529	-0.3492	0.7566

$$A_{3333}=0.31250D-07$$

tabela 2.3

α	$A_{\alpha 333}$	$B_{\alpha 333}$
1	0.	0.1084D-24
2	0.	0.1832D-25

tabela 2.4

α	β	$A_{\alpha\beta 33}$	$B_{\alpha\beta 33}$	$C_{\alpha\beta 33}$
1	1	-0.1118D-05	0.	0.9780D-42
1	2	-0.4844D-06	-0.4512D-07	0.7335D-42
2	1	-0.4844D-06	-0.4512D-07	0.7335D-42
2	2	-0.8778D-06	0.5204D-24	0.5501D-42

tabela 2.5

α	β	$A_{\alpha 3\beta 3}$	$B_{\alpha 3\beta 3}$	$C_{\alpha 3\beta 3}$
1	1	0.9687D-05	0.	-0.4514D-42
1	2	0.4199D-05	0.3910D-06	-0.3385D-42
2	1	0.4199D-05	0.3910D-06	-0.3385D-42
2	2	0.7607D-05	-0.4510D-23	-0.2539D-42

tabela 2.6

α	β	γ	$A_{\alpha\beta\gamma 3}$	$B_{\alpha\beta\gamma 3}$	$C_{\alpha\beta\gamma 3}$
1	1	1	0.	0.2585D-22	0.
1	1	2	0.	0.8750D-23	0.1357D-23
1	2	1	0.	0.2184D-22	-0.3131D-24
1	2	2	0.	0.8404D-23	0.7827D-24
2	1	1	0.	0.1121D-22	0.1044D-23
2	1	2	0.	0.2387D-22	-0.2348D-24
2	2	1	0.	0.4834D-23	0.1018D-23
2	2	2	0.	0.1523D-22	-0.9028D-41

tabela 2.7

α	β	γ	δ	$A_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$B_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$
1	1	1	1	0.1777D-02	0.	0.
1	1	1	2	0.7701D-03	0.7172D-04	0.
1	1	2	1	0.7701D-03	0.7172D-04	0.
1	1	2	2	0.1533D-04	0.8083D-04	0.3764D-05
1	2	1	1	0.7701D-03	0.7172D-04	0.
1	2	1	2	0.1714D-02	-0.1865D-04	-0.8686D-06
1	2	2	1	0.3338D-03	0.6217D-04	0.2895D-05
1	2	2	2	0.6048D-03	0.5633D-04	-0.3340D-22
2	1	1	1	0.7701D-03	0.7172D-04	0.
2	1	1	2	0.3338D-03	0.6217D-04	0.2895D-05
2	1	2	1	0.1714D-02	-0.1865D-04	-0.8686D-06
2	1	2	2	0.6048D-03	0.5633D-04	-0.3340D-22
2	2	1	1	0.1533D-04	0.8083D-04	0.3764D-05
2	2	1	2	0.6048D-03	0.5633D-04	-0.3340D-22
2	2	2	1	0.6048D-03	0.5633D-04	-0.3340D-22
2	2	2	2	0.1096D-02	-0.1299D-20	0.3852D-39

Iz priloženih tabela 2.3÷2.7 se vidi da je članove $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ i $G_{\alpha\beta\beta\beta}$ moguće potpuno zanemariti za ljusku konstantne debljine. Takođe je očigledno da $G_{\alpha\beta\beta\beta}$ i $G_{\alpha\beta\gamma\beta}$ mogu da budu linearno zavisni od ξ . Ostalo je još da se prokomentariše član $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$. On je reda veličine koji je značajan u poređenju sa koeficijentima $G_{\alpha\beta\beta\beta}$ i $G_{\alpha\beta\gamma\beta}$, međutim, $H^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \ll A_{\alpha\beta\gamma\delta}$, što znači da $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ može da se izostavi u koeficijentu $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$, a da pritom $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ smatramo dovoljno tačnim za tanke ljuske.

To znači da za tanku ljusku konstantne debljine relacije (2.7) mogu da se uproste tako da glase:

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} + \zeta H B_{\alpha\beta\gamma\delta} \dots\dots\dots (2.8.1)$$

$$G_{\alpha\beta 33} = 0 \dots\dots\dots (2.8.2)$$

$$G_{\alpha\beta 33} = A_{\alpha\beta 33} + \zeta H B_{\alpha\beta 33} \dots\dots\dots (2.8.3)$$

$$G_{\alpha 3 \gamma 3} = A_{\alpha 3 \gamma 3} + \zeta H B_{\alpha 3 \gamma 3} \dots\dots\dots (2.8.4)$$

$$G_{\alpha 3 3 3} = 0 \dots\dots\dots (2.8.5)$$

$$G_{3333} = 0 \dots\dots\dots (2.8.5)$$

što je u saglasnosti i sa procenama iz [4].

3. TENZOR DEFORMACIJE

3.1 Opšti oblik tenzora deformacije

Iz mehanike kontinuumata je poznato da izraz za tenzor deformacije, kojim je obuhvaćen i nelinearni član po pomeranjima v^c , ima oblik:

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (y_a^c v_b^d + y_b^d v_a^c + v_a^c v_b^d) \dots\dots\dots (3.1)$$

što može da se napiše, koristeći tzv. "srednju konfiguraciju" $\bar{y}_a^c$ i na sledeći način:

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{cd} (\bar{y}_a^c v_b^d + \bar{y}_b^d v_a^c) \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\bar{y}_a^c = y_a^c + \frac{1}{2} v_a^c \dots\dots\dots (3.3)$$

Ova "srednja" konfiguracija nema značaja kao fizičko stanje, već samo kao matematička forma, jer operišući sa njom svodimo tenzor deformacije na simetričan oblik, što u nelinearnoj analizi olakšava numeričke operacije.

Ako se tenzor γ_{ab} raščlani, analogno tenzoru konstitutivnih koeficijenata, na komponente u ravni, $(\chi\psi)$ i u transverzalnim ravnima $(\chi 3)$ i (33) , prema relaciji (3.2) dobija se:

$$\gamma_{x\psi} = \frac{1}{2}\delta_{ij}(\bar{y}^i v^j + \bar{y}^j v^i) \dots\dots\dots(3.4.1)$$

$$\gamma_{x3} = \frac{1}{2}\delta_{ij}(\bar{y}^i v_3^j + \bar{y}^j v_x^i) \dots\dots\dots(3.4.2)$$

$$\gamma_{33} = \frac{1}{2}\delta_{ij}(\bar{y}_3^i v_3^j + \bar{y}_3^j v_3^i) \dots\dots\dots(3.4.3)$$

3.2 Tenzor deformacije i matrice veze

Da bi se iz relacija (3.4) dobile matrice veze deformacija-pomeranje, koje je zbog korišćenja MKE neophodno izvesti, potrebno je najpre u relacije (3.4) zameniti izraze za koordinate vektora položaja i vektora pomeranja raščlanjene na komponente tačke u srednjoj površi ljuske i na direktorsku komponentu. Direktorska komponenta pomeranja, osim priraštaja direktora ∂^i sadrži još i promenu debljine ljuske u toku deformacije, $\mathcal{H}=h-H$. Stoga mogu da se pišu sledeće relacije:

$$h^i = h d^i \dots\dots\dots(3.5.1)$$

$$v^i = u^i + \frac{1}{2}\bar{z}(\mathcal{H}d^i + H\partial^i) \dots\dots\dots(3.5.2)$$

$$\bar{y}_x^i = \bar{x}_x^i + \frac{H}{2}\bar{z}d_x^i \dots\dots\dots(3.5.3)$$

$$\bar{y}_3^i = \frac{H}{2}d^i \dots\dots\dots(3.5.4)$$

$$v_x^i = u_x^i + \frac{1}{2}\bar{z}(\mathcal{H}_x d^i + \mathcal{H}d_x^i + H\partial_x^i) \dots\dots\dots(3.5.5)$$

$$v_3^i = \frac{1}{2}(\mathcal{H}d^i + H\partial^i) \dots\dots\dots(3.5.6)$$

Zamenom (3.5) u (3.4) dobijaju se komponente deformacije u funkciji koordinate $\bar{z}$ sa sledećim koeficijentima:

$$\gamma_{x\psi} = m_{x\psi} + \bar{z} \cdot n_{x\psi} + \bar{z}^2 \cdot p_{x\psi} \dots\dots\dots(3.6)$$

$$m_{x\psi} = \frac{1}{2}\delta_{ij}(\bar{x}_x^i u_\psi^j + \bar{x}_\psi^j u_x^i) \dots\dots\dots(3.6.1)$$

$$n_{x\psi} = \frac{1}{4}\delta_{ij}H(\bar{d}_x^i u_\psi^j + \bar{d}_\psi^j u_x^i + \bar{x}_x^i \partial_\psi^j + \bar{x}_\psi^j \partial_x^i) + \frac{1}{4}\delta_{ij}[\bar{x}_x^i(\mathcal{H}_\psi \bar{d}^j + \mathcal{H}d_\psi^j) + \bar{x}_\psi^j(\mathcal{H}_x \bar{d}^i + \mathcal{H}d_x^i)] \dots\dots\dots(3.6.2)$$

$$p_{x\psi} = \frac{1}{8}\delta_{ij}H^2(\bar{d}_x^i\partial_j^j + \bar{d}_\psi^j\partial_x^i) + \frac{1}{8}\delta_{ij}H[\bar{d}_x^i(\mathcal{H}_\psi\bar{d}^j + \mathcal{H}\bar{d}_\psi^j) + \bar{d}_\psi^j(\mathcal{H}_x\bar{d}^i + \mathcal{H}\bar{d}_x^i)] \quad (3.6.3)$$

$$\gamma_{x3} = m_{x3} + \xi n_{x3} \quad (3.7)$$

$$m_{x3} = \frac{1}{4}\delta_{ij}H(\bar{x}_x^i\partial_j^j + \bar{d}^j u_x^i) + \frac{1}{4}\delta_{ij}\mathcal{H}\bar{d}^j\bar{x}_x^i \quad (3.7.1)$$

$$n_{x3} = \frac{1}{8}\delta_{ij}H^2(\bar{d}_x^i\partial_j^j + \bar{d}^j\partial_x^i) + \frac{1}{8}\delta_{ij}H\bar{d}^j(2\mathcal{H}\bar{d}_x^i + \mathcal{H}_x\bar{d}^i) \quad (3.7.2)$$

$$\gamma_{33} = m_{33} \text{ (ne zavisi od } \xi) \quad (3.8)$$

$$m_{33} = \frac{1}{8}\delta_{ij}H^2(\bar{d}^i\partial_j^j + \bar{d}^j\partial^i) + \frac{1}{4}\delta_{ij}H\bar{d}^i\bar{d}^j\mathcal{H} \quad (3.8.1)$$

Izraze za deformacije (3.6)÷(3.8) treba prevesti u domen konačnih elemenata, za šta je uobičajeno da se koordinate, direktori i pomeranja u polju elementa izražavaju preko čvornih veličina i odgovarajućih interpolacionih funkcija P^I , pa može da se piše:

$$x^i = P^I x_I^i \quad (3.9.1a)$$

$$u^i = P^I u_I^i \quad (3.9.1b)$$

$$\partial^i = P^I \partial_I^i \quad (3.9.1c)$$

$$\mathcal{H} = P^I \mathcal{H}_I \quad (3.9.1d)$$

gde je za Dekartov pravougli koordinatni sistem:

$$x^i = (x, y, z) \quad (3.9.2a)$$

$$u^i = (u, v, w) \quad (3.9.2b)$$

$$\partial^i = (\partial^x, \partial^y, \partial^z) \quad (3.9.2c)$$

Zamenjujući relacije (3.9) i njihove parcijalne izvode po konvektivnim koordinatama (ξ, η) u izraze za deformacije, dobijaju se koeficijenti m_{ij} , n_{ij} , p_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) izraženi preko matrice veze i vektora pomeranja u čvoru:

$$m_{x\psi} = \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{12} + m_{21} \\ m_{22} \end{Bmatrix} = [B_1]^I \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_I \quad (3.10)$$

$$n_{x\psi} = \begin{Bmatrix} n_{11} \\ n_{12} + n_{21} \\ n_{22} \end{Bmatrix} = \frac{H}{2} \cdot \left[[D_1]^I \quad [B_1]^I \quad [H_2]^I \right] \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \partial^x \\ \partial^y \\ \partial^z \end{Bmatrix}_I \quad (3.12)$$

$$[B_1]^I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bar{x}_\xi P_\xi^I & \bar{y}_\xi P_\xi^I & \bar{z}_\xi P_\xi^I \\ \hline \bar{x}_\xi P_\eta^I + \bar{x}_\eta P_\xi^I & \bar{y}_\xi P_\eta^I + \bar{y}_\eta P_\xi^I & \bar{z}_\xi P_\eta^I + \bar{z}_\eta P_\xi^I \\ \hline \bar{x}_\eta P_\eta^I & \bar{y}_\eta P_\eta^I & \bar{z}_\eta P_\eta^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.11)$$

$$[D_1]^I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bar{d}_\xi^x P_\xi^I & \bar{d}_\xi^y P_\xi^I & \bar{d}_\xi^z P_\xi^I \\ \hline \bar{d}_\xi^x P_\eta^I + \bar{d}_\eta^x P_\xi^I & \bar{d}_\xi^y P_\eta^I + \bar{d}_\eta^y P_\xi^I & \bar{d}_\xi^z P_\eta^I + \bar{d}_\eta^z P_\xi^I \\ \hline \bar{d}_\eta^x P_\eta^I & \bar{d}_\eta^y P_\eta^I & \bar{d}_\eta^z P_\eta^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.13)$$

$$[H_2]^I = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|} \hline (\bar{x}_\xi \bar{d}_\xi^x + \bar{y}_\xi \bar{d}_\xi^y + \bar{z}_\xi \bar{d}_\xi^z) P_\xi^I + (\bar{x}_\xi \bar{d}_\xi^x + \bar{y}_\xi \bar{d}_\xi^y + \bar{z}_\xi \bar{d}_\xi^z) P^I \\ \hline (\bar{x}_\xi \bar{d}_\xi^x + \bar{y}_\xi \bar{d}_\xi^y + \bar{z}_\xi \bar{d}_\xi^z) P_\eta^I + (\bar{x}_\xi \bar{d}_\eta^x + \bar{y}_\xi \bar{d}_\eta^y + \bar{z}_\xi \bar{d}_\eta^z) P^I + \\ + (\bar{x}_\eta \bar{d}_\xi^x + \bar{y}_\eta \bar{d}_\xi^y + \bar{z}_\eta \bar{d}_\xi^z) P_\xi^I + (\bar{x}_\eta \bar{d}_\xi^x + \bar{y}_\eta \bar{d}_\xi^y + \bar{z}_\eta \bar{d}_\xi^z) P^I \\ \hline (\bar{x}_\eta \bar{d}_\eta^x + \bar{y}_\eta \bar{d}_\eta^y + \bar{z}_\eta \bar{d}_\eta^z) P_\eta^I + (\bar{x}_\eta \bar{d}_\eta^x + \bar{y}_\eta \bar{d}_\eta^y + \bar{z}_\eta \bar{d}_\eta^z) P^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.14)$$

$$P_{\chi\psi} = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} + P_{21} \\ P_{22} \end{pmatrix}$$

$$P_{\chi\psi} = \frac{H^2}{4} \cdot [D_1]^I \left\{ \begin{array}{c} \partial^x \\ \partial^y \\ \partial^z \end{array} \right\}_I + \frac{H}{4} \cdot [H_1]^I \mathcal{H}_I \dots\dots\dots (3.15)$$

$$[H_1]^I = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|} \hline (\bar{d}_\xi^x \bar{d}_\xi^x + \bar{d}_\xi^y \bar{d}_\xi^y + \bar{d}_\xi^z \bar{d}_\xi^z) P_\xi^I + (\bar{d}_\xi^x \bar{d}_\xi^x + \bar{d}_\xi^y \bar{d}_\xi^y + \bar{d}_\xi^z \bar{d}_\xi^z) P^I \\ \hline (\bar{d}_\xi^x \bar{d}_\xi^x + \bar{d}_\xi^y \bar{d}_\xi^y + \bar{d}_\xi^z \bar{d}_\xi^z) P_\eta^I + (\bar{d}_\eta^x \bar{d}_\xi^x + \bar{d}_\eta^y \bar{d}_\xi^y + \bar{d}_\eta^z \bar{d}_\xi^z) P_\xi^I + \\ + 2 \cdot (\bar{d}_\xi^x \bar{d}_\eta^x + \bar{d}_\xi^y \bar{d}_\eta^y + \bar{d}_\xi^z \bar{d}_\eta^z) P^I \\ \hline (\bar{d}_\eta^x \bar{d}_\eta^x + \bar{d}_\eta^y \bar{d}_\eta^y + \bar{d}_\eta^z \bar{d}_\eta^z) P_\eta^I + (\bar{d}_\eta^x \bar{d}_\eta^x + \bar{d}_\eta^y \bar{d}_\eta^y + \bar{d}_\eta^z \bar{d}_\eta^z) P^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.16)$$

$$m_{\chi 3} + m_{3\chi} = \left[\frac{H}{2} [D_2]^I \quad \frac{H}{2} [B_2]^I \quad [H_3]^I \right] \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}_I \dots\dots\dots (3.17)$$

$$[D_2]^I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bar{d}^x P_{\xi}^I & \bar{d}^y P_{\xi}^I & \bar{d}^z P_{\xi}^I \\ \hline \bar{d}^x P_{\eta}^I & \bar{d}^y P_{\eta}^I & \bar{d}^z P_{\eta}^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.18)$$

$$[B_2]^I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bar{x}_{\xi} P^I & \bar{y}_{\xi} P^I & \bar{z}_{\xi} P^I \\ \hline \bar{x}_{\eta} P^I & \bar{y}_{\eta} P^I & \bar{z}_{\eta} P^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.19)$$

$$[H_3]^I = \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|c|} \hline (\bar{x}_{\xi} \bar{d}^x + \bar{y}_{\xi} \bar{d}^y + \bar{z}_{\xi} \bar{d}^z) P^I \\ \hline (\bar{x}_{\eta} \bar{d}^x + \bar{y}_{\eta} \bar{d}^y + \bar{z}_{\eta} \bar{d}^z) P^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.20)$$

$$n_{\chi 3} + n_{3\chi} = \left[\frac{H^2}{4} [D_3]^I \quad [H_4]^I \right] \cdot \begin{pmatrix} \partial^x \\ \partial^y \\ \partial^z \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}_I \dots\dots\dots (3.21)$$

$$[D_3]^I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bar{d}_{\xi}^x P^I + \bar{d}_{\xi}^x P_{\xi}^I & \bar{d}_{\xi}^y P^I + \bar{d}_{\xi}^y P_{\xi}^I & \bar{d}_{\xi}^z P^I + \bar{d}_{\xi}^z P_{\xi}^I \\ \hline \bar{d}_{\eta}^x P^I + \bar{d}_{\eta}^x P_{\eta}^I & \bar{d}_{\eta}^y P^I + \bar{d}_{\eta}^y P_{\eta}^I & \bar{d}_{\eta}^z P^I + \bar{d}_{\eta}^z P_{\eta}^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.22)$$

$$[H_4]^I = \frac{H}{4} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 2 \cdot (\bar{d}^x \bar{d}_{\xi}^x + \bar{d}^y \bar{d}_{\xi}^y + \bar{d}^z \bar{d}_{\xi}^z) P^I + (\bar{d}^x \bar{d}^x + \bar{d}^y \bar{d}^y + \bar{d}^z \bar{d}^z) P_{\xi}^I \\ \hline 2 \cdot (\bar{d}^x \bar{d}_{\eta}^x + \bar{d}^y \bar{d}_{\eta}^y + \bar{d}^z \bar{d}_{\eta}^z) P^I + (\bar{d}^x \bar{d}^x + \bar{d}^y \bar{d}^y + \bar{d}^z \bar{d}^z) P_{\eta}^I \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (3.23)$$

$$m_{33} = \frac{H^2}{4} \cdot [D_4]^I \left\{ \begin{matrix} \partial^x \\ \partial^y \\ \partial^z \end{matrix} \right\}_I + H_5 \cdot \mathcal{H}_I \dots\dots\dots (3.24)$$

$$[D_4]^I = [\bar{d}^x P^I \quad \bar{d}^y P^I \quad \bar{d}^z P^I] \dots\dots\dots (3.25)$$

$$H_5 = \frac{H}{4} \cdot (\bar{d}^x{}^2 + \bar{d}^y{}^2 + \bar{d}^z{}^2) \cdot P^I \dots\dots\dots (3.26)$$

3.3 Deformacija u polju konačnog elementa

Izrazi za deformacije γ_{ab} , dati prethodno, se odnose na neku tačku kontinuuma. Međutim, da bi se dobili izrazi koji važe u polju konačnog elementa treba Galerkinovim postupkom naći koeficijente polinoma po ξ , kojim je predstavljen tenzor deformacije γ_{ab}^* , takve da zadovoljavaju uslov:

$$\int_V (S^{cd})^T \cdot (\gamma_{ab} - \gamma_{ab}^*) \cdot dV \equiv 0 \dots\dots\dots (3.27)$$

Za γ_{ab}^* može da se pretpostavi bilo koji polinom odgovarajućeg stepena, n.pr. Ležandrov (Legendre). Primenjujući (3.27) na pojedine komponente deformacije, dobijaju se sledeće jednačine koje treba rešiti po nepoznatim koeficijentima α_{ij} , β_{ij} , θ_{ij} :

$$\int_S \int_{-1}^1 (N^{\alpha\beta} \quad M^{\alpha\beta}) \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\xi \end{matrix} \right\} \cdot [(m_{x\psi} - \alpha_{x\psi}) + \xi(n_{x\psi} - \beta_{x\psi}) + \xi^2 p_{x\psi} - \frac{1}{2} \cdot (3\xi^2 - 1)\theta_{x\psi}] \cdot \frac{H}{2} (1 - \xi \frac{HB}{2A}) dS d\xi = 0 \dots\dots\dots (3.28)$$

$$\int_S \int_{-1}^1 (V^{\alpha} \quad M^{\alpha}) \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{4}(1 - \xi^2) \\ \frac{15}{4}\xi(1 - \xi^2) \end{matrix} \right\} \cdot [(m_{x3} - \alpha_{x3}) + \xi(n_{x3} - \beta_{x3})] \frac{H}{2} (1 - \xi \frac{HB}{2A}) dS d\xi = 0 \dots\dots\dots (3.29)$$

$$\int_S \int_{-1}^1 \frac{3H}{8} (1 - \xi^2) (m_{33} - \alpha_{33}) (1 - \xi \frac{HB}{2A}) V^3 dS d\xi = 0 \dots\dots\dots (3.30)$$

Iz jednačina (3.29) i (3.30) se dobija:

$$\begin{aligned} \alpha_{x3} &= m_{x3} \\ \beta_{x3} &= n_{x3} \dots\dots\dots (3.31) \\ \alpha_{33} &= m_{33} \end{aligned}$$

dok se iz (3.28) dobijaju dve jednačine sa tri nepoznata koeficijenta, tj.:

$$\alpha_{x\psi} - \frac{HB}{6A} \beta_{x\psi} = m_{x\psi} + \frac{1}{3} p_{x\psi} + \frac{HB}{6A} n_{x\psi} \dots\dots\dots (3.32.1)$$

$$-\alpha_{x\psi} \frac{HB}{2A} + \beta_{x\psi} \frac{HB}{15A} - \theta_{x\psi} = -\frac{HB}{2A} m_{x\psi} + n_{x\psi} - \frac{3HB}{10A} p_{x\psi} \dots\dots\dots (3.32.2)$$

Ako drugu jednačinu sistema (3.32) pomnožimo sa $\frac{HB}{6A}$ i saberemo sa prvom, pa u toj novoj jednačini zanemarimo sve članove koji se množe sa $(\frac{HB}{A})^2$ (kod tanke ljuske je $(\frac{HB}{A})^2 \ll 1$), dobijamo sledeća rešenja:

$$\alpha_{x\psi} = m_{x\psi} + \frac{HB}{3A} n_{x\psi} + \frac{1}{3} p_{x\psi} \dots\dots\dots (3.33.2)$$

$$\beta_{x\psi} = n_{x\psi} \dots\dots\dots (3.33.1)$$

$$\theta_{x\psi} = 2p_{x\psi} - \frac{5HB}{2A} n_{x\psi} \dots\dots\dots (3.33.3)$$

Analizirajući pojedinačno doprinos članova $m_{x\psi}$, $n_{x\psi}$ i $p_{x\psi}$ deformaciji $\alpha_{x\psi}$, dolazi se do zaključka da može da se zadrži samo na prvom članu. Objašnjenje se sastoji u tome što je $m_{x\psi}$ reda veličine L^2 (L je minimalna dimenzija ljuske u srednjoj površi), $p_{x\psi}$ je reda veličine H^2 (H je debljina ljuske), dok je $n_{x\psi}$ reda HL , a (HB/A) reda H/L , tako da je odnos drugog i trećeg člana u $\alpha_{x\psi}$ prema prvom reda veličine $(H/L)^2$, pa se zato drugi i treći član mogu zanemariti. Sa istim objašnjenjem može da se zanemari i $\theta_{x\psi}$, pa su komponente deformacije:

$$\gamma_{x\psi} = \alpha_{x\psi} + \bar{\epsilon} \beta_{x\psi} = m_{x\psi} + \bar{\epsilon} n_{x\psi} \dots\dots\dots (3.34)$$

4. TENZOR NAPONA. VEZA NAPON-DEFORMACIJA.

4.1 Naponi tanke ljuske

Iz teorije ljuski je poznato da su rezultante pojedinačnih komponenti napona date relacijama:

- membranske sile i momenti:

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 S^{\alpha\beta} d\bar{z} \dots\dots\dots(4.1.1)$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 S^{\alpha\beta} \bar{z} d\bar{z} \dots\dots\dots(4.1.2)$$

- smičuće sile i momenti:

$$V^{\alpha} = \int_{-1}^1 S^{\alpha 3} d\bar{z} \dots\dots\dots(4.2.1)$$

$$M^{\alpha} = \int_{-1}^1 S^{\alpha 3} \bar{z} d\bar{z} \dots\dots\dots(4.2.2)$$

- sile i momenti od napona S^{33} :

$$V^3 = \int_{-1}^1 S^{33} d\bar{z} \dots\dots\dots(4.3.1)$$

$$M^3 = \int_{-1}^1 S^{33} \bar{z} d\bar{z} \dots\dots\dots(4.3.2)$$

Pretpostavljajući za membranske napone linearnu raspodelu po debljini ljuske, a za ostale kubnu uz uslov da na licima ljuske nema napona ($\bar{z}=\pm 1$, $S^{i3}=0$), dobijamo sledeće reprezentacije za napone:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} N^{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \bar{z} M^{\alpha\beta} \dots\dots\dots(4.4)$$

$$S^{\alpha 3} = \frac{3}{4} (1 - \bar{z}^2) V^{\alpha} + \frac{15}{4} \bar{z} (1 - \bar{z}^2) M^{\alpha} \dots\dots\dots(4.5)$$

$$S^{33} = \frac{3}{4}(1-\xi^2)V^3 \quad (M^3=0) \quad \dots\dots\dots(4.6.1)$$

Normalni napon S^{33} ima smisla predstaviti i kao konstantu po debljini ljuske, jer je i deformacija γ_{33} nezavisna od ξ , pa je u tom slučaju:

$$S^{33} = \frac{1}{2}V^3 \quad \dots\dots\dots(4.6.2)$$

4.2 Postupak računanja implicitne veze napon-deformacija

Da bi se došlo do relacija napon-deformacija u polju konačnog elementa, na Hukov (Hooke) zakon u inverznom obliku

$$\gamma_{ab} = G_{abcd} \cdot S^{cd} \quad \dots\dots\dots(4.7)$$

se primenjuje Galerkinov postupak

$$\int_V ((S^{cd})^T \gamma_{ab} - (S^{cd})^T G_{abcd} S^{cd}) dV = 0 \quad \dots\dots\dots(4.8)$$

Ako se umesto S^{cd} i γ_{ab} zamene odgovarajuće polinomne reprezentacije (za S^{33} je korišćena reprezentacija (4.6.1)) i zapreminski integral razdvoji na deo po površi i po debljini ljuske, dobija se sistem jednačina oblika:

$$\int_{S-1}^1 (N^{aB} \quad M^{aB} \quad V^a \quad M^a \quad V^3) \cdot ([P] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_{X\psi} \\ \beta_{X\psi} \\ \alpha_{X3} \\ \beta_{X3} \\ \alpha_{33} \end{Bmatrix} - [Q] \cdot \begin{Bmatrix} N^{aB} \\ M^{aB} \\ V^a \\ M^a \\ V^3 \end{Bmatrix}) \frac{H}{2} (1-\xi \frac{HB}{2A}) d\xi dS = 0 \quad \dots(4.9)$$

gde su matrice $[P]$ i $[Q]$:

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\xi$			
	$\frac{3}{2}\xi$	$\frac{3}{2}\xi^2$			
$[P] =$			$\frac{3}{2}(1-\xi^2)$	$\frac{3}{2}\xi(1-\xi^2)$	
			$\frac{15}{2}\xi(1-\xi^2)$	$\frac{15}{2}\xi^2(1-\xi^2)$	
					$\frac{3}{4}(1-\xi^2)$

..(4.10)

$\frac{1}{4}G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{3}{4}\xi G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{3}{4}(1-\xi^2)G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{15}{4}\xi(1-\xi^2)G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{3}{8}(1-\xi^2)G_{x\psi\alpha\beta}$
	$\frac{9}{4}\xi^2 G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{9}{4}\xi(1-\xi^2)G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{45}{4}\xi^2(1-\xi^2)G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{9}{8}\xi(1-\xi^2)G_{x\psi\alpha\beta}$
		$\frac{9}{4}(1-\xi^2)^2 G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{45}{4}\xi(1-\xi^2)^2 G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{9}{8}(1-\xi^2)^2 G_{x\psi\alpha\beta}$
			$\frac{225}{4}\xi^2(1-\xi^2)^2 G_{x\psi\alpha\beta}$	$\frac{45}{8}\xi(1-\xi^2)^2 G_{x\psi\alpha\beta}$
s i m e t r i č n o				$\frac{9}{16}(1-\xi^2)^2 G_{x\psi\alpha\beta}$

$$[Q] \dots\dots\dots (4.11)$$

Integral matrice [P] po debljini ljuske je:

$$[J_1] = \int_{-1}^1 [P] (1 - \xi \frac{HB}{2A}) d\xi$$

$$[J_1] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -\frac{HB}{6A} & & & \\ \hline -\frac{HB}{2A} & 1 & & & \\ \hline & & 2 & -\frac{HB}{5A} & \\ \hline & & \frac{HB}{A} & 2 & \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} \dots\dots\dots (4.12)$$

dok za integral matrice [Q] dobijamo, zamenjujući izraze (2.8), sledeću matricu:

$$[J_2] = \int_{-1}^1 [Q] (1 - \xi \frac{HB}{2A}) d\xi = [J_2]' - [J_2]''$$

Matrice $[J_2]'$ i $[J_2]''$ su date relacijama (4.13.1) i (4.13.2),
respektivno:

$\frac{1}{2} \cdot A_{\chi\psi\alpha\beta}$	$\frac{H}{2} \cdot B_{\chi\psi\alpha\beta}$			$\frac{1}{2} \cdot A_{\chi\psi 33}$
	$\frac{3}{2} \cdot A_{\chi\psi\alpha\beta}$			$\frac{H}{10} \cdot B_{\chi\psi 33}$
		$\frac{12}{5} \cdot A_{\chi 3 \alpha 3}$	$\frac{12H}{7} \cdot B_{\chi 3 \alpha 3}$	
			$\frac{60}{7} \cdot A_{\chi 3 \alpha 3}$	
s i m e t r i č n o				$\frac{3H^4}{80E}$

$[J_2]'$ (4.13.1)

$\frac{H^2 B}{12A} \cdot B_{\chi\psi\alpha\beta}$	$\frac{HB}{4A} \cdot A_{\chi\psi\alpha\beta}$			$\frac{H^2 B}{20A} \cdot B_{\chi\psi 33}$
	$\frac{9H^2 B}{20A} \cdot B_{\chi\psi\alpha\beta}$			$\frac{3HB}{20A} \cdot A_{\chi\psi 33}$
		$\frac{6H^2 B}{35A} \cdot B_{\chi 3 \alpha 3}$	$\frac{6HB}{7A} \cdot A_{\chi 3 \alpha 3}$	
			$\frac{10H^2 B}{21A} \cdot B_{\chi 3 \alpha 3}$	
s i m e t r i č n o				

$[J_2]''$ (4.13.2)

tako da se implicitna veza između napona i deformacija za tanku
ljusku konstantne debljine može predstaviti sledećom matričnom
jednačinom:

$$[J_1] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_{\chi\psi} \\ \beta_{\chi\psi} \\ \alpha_{\chi 3} \\ \beta_{\chi 3} \\ \beta_{33} \end{Bmatrix} - [J_2] \cdot \begin{Bmatrix} N^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha\beta} \\ V^{\alpha} \\ M^{\alpha} \\ V^3 \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

4.3 Eksplicitna veza napon-deformacija za slučaj ravnog elementa konstantne debljine

U slučaju ravnog elementa konstantne debljine je:

$$B=0 \quad \dots\dots\dots(4.15.1)$$

$$B_{ijkl}=0 \quad \dots\dots\dots(4.15.2)$$

Matrice $[J_1]$ i $[J_2]$ postaju $[J_1]^*$ i $[J_2]^*$, respektivno, i glase:

$$[J_1]^* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ \hline & & 2 & & \\ \hline & & & 2 & \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots\dots(4.16)$$

$\frac{1}{2} \cdot A_{x\psi\alpha\beta}$				$\frac{1}{2} \cdot A_{x\gamma\beta\beta}$
	$\frac{3}{2} \cdot A_{x\psi\alpha\beta}$			
		$\frac{12}{5} \cdot A_{x\beta\alpha\beta}$		
			$\frac{60}{7} \cdot A_{x\beta\alpha\beta}$	
s i m e t r i č n o				$\frac{3}{5} \cdot A_{\beta\beta\beta\beta}$

$$[J_2]^* \quad \dots\dots\dots(4.17)$$

Zamenjujući konstitutivne koeficijente iz (2.7) i rešavajući (4.14) sa matricama $[J_1]^*$ i $[J_2]^*$, dobija se da su komponente napona u funkciji deformacije sledeće:

$$N^{X\psi} = \frac{4G}{1-\nu-\frac{5}{12}\nu^2} \cdot \left[\left((1-\nu) - \frac{5}{12}\nu^2 \right) A^{X\alpha} A^{\psi\beta} + \nu \left(1 + \frac{5}{24}\nu \right) A^{\alpha\beta} A^{X\psi} \right] \alpha_{\alpha\beta} +$$

$$\frac{20G}{3 \cdot H^2} \cdot \frac{(1+\nu) \cdot \nu}{1-\nu-\frac{5}{12}\nu^2} \cdot A^{X\psi} \alpha_{33} \dots \dots \dots (4.18)$$

$$V^3 = \frac{20G}{3H^2} \cdot \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu-\frac{5}{12}\nu^2} \cdot A^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\beta} + \frac{80E(1-\nu)}{3H^4 (1-\nu-\frac{5}{12}\nu^2)} \alpha_{33} \dots \dots \dots (4.19)$$

$$M^{X\psi} = \frac{4G}{3(1-\nu)} \cdot \left[(1-\nu) \cdot A^{\alpha X} A^{\psi\beta} + \nu A^{X\psi} A^{\alpha\beta} \right] \beta_{\alpha\beta} \dots \dots \dots (4.20)$$

$$V^X = \frac{10G}{3H^2} \cdot A^{X\alpha} \alpha_{\alpha} \quad (\alpha_{\alpha} = \alpha_{3\alpha} + \alpha_{\alpha 3}) \dots \dots \dots (4.21)$$

$$M^X = \frac{14G}{15H^2} \cdot A^{X\alpha} \beta_{\alpha} \quad (\beta_{\alpha} = \beta_{3\alpha} + \beta_{\alpha 3}) \dots \dots \dots (4.22)$$

Ako se zanemari uticaj komponente (33), što je uobičajeno u teoriji tankih ljuski, za $V^3=0$ se dobija:

$$N^{X\psi} = \frac{4G}{1-\nu} \cdot \left[(1-\nu) A^{X\alpha} A^{\psi\beta} + \nu \cdot A^{\alpha\beta} A^{X\psi} \right] \cdot \alpha_{\alpha\beta} \dots \dots \dots (4.23)$$

Ukoliko se za komponentu napona S^{33} uzme raspodela (4.6.2), dobija se sledeće:

$$N_c^{X\psi} = \frac{4G}{1-\nu-\nu^2} \cdot \left[\left((1-\nu) - \nu^2 \right) A^{X\alpha} A^{\psi\beta} + \nu \cdot \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \cdot A^{\alpha\beta} A^{X\psi} \right] \cdot \alpha_{\alpha\beta} + \frac{8G}{H^2} \cdot \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu-\nu^2} A^{X\psi} \alpha_{33}$$

$$\dots \dots \dots (4.24)$$

$$V_c^3 = \frac{4E\nu}{H^2 (1-\nu-\nu^2)} \cdot A^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\beta} + \frac{16E}{H^4} \cdot \left(2 + \frac{\nu^2}{1-\nu-\nu^2} \right) \cdot \alpha_{33} \dots \dots \dots (4.25)$$

gde je indeksom "c" označena konstantna raspodela napona S^{33} po debljini ljuske.

U literaturi mogu da se nađu izrazi za napone tanke ljuske koji su identični navedenim izrazima, reference [2] i [3], kada nema komponente napona S^{33} . Pošto naponi transverzalnog smicanja $S^{\alpha 3}$ ne zavise od normalnog napona S^{33} , to za relacije (4.21) i (4.22) nema značaja njegovo postojanje niti raspodela. Isto važi i za moment $M^{\alpha\beta}$, dok izrazi za membranske sile $N^{\alpha\beta}$ i transverzalnu silu V^3 , (4.18), (4.19) i (4.24), (4.25), pri kvadratnoj, tj. konstantnoj raspodeli napona S^{33} , respektivno, nisu nađeni u raspoloživoj literaturi.

5. MATRICA KRUTOSTI KONAČNOG ELEMENTA

5.1 Položajna matrica krutosti

S obzirom na relacije (3.10), (3.12), (3.17), (3.21) i (3.24), možemo da formiramo matrice krutosti koje odgovaraju komponentama deformacije $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$, α_α , β_β , α_{33} , formirajući najpre, respektivno matrice veze:

$$[B_1] = [B_1] \dots\dots\dots (5.1.1)$$

$[B_1]$ iz (3.11)

$$[B_2] = \frac{H}{2} [D_1 \quad [B_1] \cdot [\Delta] \quad H_2] \dots\dots\dots (5.1.2)$$

$[D_1]$ i $[H_2]$ iz (3.13) i (3.14)

$$[B_3] = \frac{H}{2} [D_2 \quad [B_2] \cdot [\Delta] \quad \frac{2}{H} H_3] \dots\dots\dots (5.1.3)$$

$[B_2]$ i $[H_3]$ iz (3.19) i (3.20)

$$[B_4] = \left[\frac{H^2}{4} D_3 \cdot [\Delta] \quad H_4 \right] \dots\dots\dots (5.1.4)$$

$[D_3]$ i $[H_4]$ iz (3.22) i (3.23)

$$[B_5] = \left[\frac{H^2}{4} D_4 \cdot [\Delta] \quad H_5 \right] \dots\dots\dots (5.1.5)$$

$[D_4]$ i $[H_5]$ iz (3.25) i (3.26)

u kojima je $[\Delta]$ matrica transformacije između rotacija i direktnih pomeranja i za mala pomeranja glasi:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} & dz & -dy \\ -dz & & dx \\ dy & -dx & \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.1.6)$$

Sada matrica krutosti glasi:

$$[K] = \begin{bmatrix} [B_1]^T & [B_2]^T & [B_3]^T & [B_4]^T & [B_5]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_1] & & & & [E_{15}] \\ & [E_2] & & & \\ & & [E_3] & & \\ & & & [E_4] & \\ \text{simetrično} & & & & [E_5] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.2)$$

ili, kraće napisano:

$$[K] = \sum_{i=1}^6 [K_i] \dots\dots\dots (5.3)$$

gde su parcijalne matrice krutosti:

$$[K_i] = [B_i]^T \cdot [E_i] \cdot [B_i], \quad i=1 \div 5 \dots\dots\dots (5.4.1)$$

$$[K_6] = [B_5]^T \cdot [E_{15}] \cdot [B_1] \dots\dots\dots (5.4.2)$$

a matrice elastičnosti:

- za kvadratnu raspodelu normalnog napona S^{33} :

$$[E_1] = \frac{2GH}{1-\nu-\frac{5}{12}\nu^2} \cdot \left[\left((1-\nu)-\frac{5}{12}\nu^2 \right) A^{\lambda\alpha} A^{\psi\beta} + \nu \left(1+\frac{5}{24}\nu \right) A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} \right] \dots\dots\dots (5.5.1)$$

- za konstantnu raspodelu normalnog napona S^{33} :

$$[E_1] = \frac{2GH}{1-\nu-\nu^2} \cdot \left[(1-\nu-\nu^2) A^{\lambda\alpha} A^{\psi\beta} + \nu \left(1+\frac{\nu}{2} \right) A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} \right] \dots\dots\dots (5.5.2)$$

- bez uticaja napona S^{33}

$$[E_1] = \frac{2GH}{1-\nu} \cdot \left[(1-\nu) A^{\lambda\alpha} A^{\psi\beta} + \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} \right] \dots\dots\dots (5.5.3)$$

Matrice $[E_i]$, $i=2,3,4$ imaju jedinstvene vrednosti:

$$[E_2] = \frac{2GH}{3(1-\nu)} \cdot \left[(1-\nu) A^{\lambda\alpha} A^{\psi\beta} + \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} \right] \dots\dots\dots (5.6)$$

$$[E_3] = \frac{10G}{3H} \cdot A^{\lambda\alpha} \dots\dots\dots (5.7)$$

$$[E_4] = \frac{14G}{15H} \cdot A^{\lambda\alpha} \dots\dots\dots (5.8)$$

Matrice $[E_5]$ i $[E_{15}]$, analogno $[E_1]$, zavise od raspodele normalnog napona S^{33} i glase:

- za kvadratnu raspodelu S^{33} :

$$[E_5] = \frac{80E(1-\nu)}{6H^3 \left(1-\nu-\frac{5}{12}\nu^2 \right)} \dots\dots\dots (5.9.1)$$

$$[E_{15}] = \frac{10E\nu}{6H \left(1-\nu-\frac{5}{12}\nu^2 \right)} \cdot A^{\alpha\beta} \dots\dots\dots (5.9.2)$$

- za konstantnu raspodelu S^{33} :

$$[E_5] = \frac{8E(2-2\nu-\nu^2)}{H^3(1-\nu-\nu^2)} \dots\dots\dots (5.10.1)$$

$$[E_{15}] = \frac{2E\nu}{H(1-\nu-\nu^2)} \cdot A^{\alpha\beta} \dots\dots\dots (5.10.2)$$

5.2 Geometrijska matrica krutosti

Geometrijska krutost se javlja kao posledica postojanja napona u strukturi i neizbežna je u nelinearnoj analizi. Svakoj komponenti napona odgovara određena geometrijska krutost. Izrazi za komponente geometrijske matrice krutosti, kao i njena konfiguracija za konačni element, su dati u referenci [3], pa će ovde samo biti navedeni izrazi za sve podmatrice koje čine ovu matricu.

$$[S_1] = [P_a^I P_b^J N^{aB}] \dots\dots\dots (5.11)$$

$$[S_2] = [P_a^I P_b^J M^{aB}] \dots\dots\dots (5.12)$$

$$[S_3] = [P^I P_b^J V^B] \dots\dots\dots (5.13)$$

$$[S_4] = [P^I P_b^J M^B] \dots\dots\dots (5.14)$$

$$[S_5] = [P^I P_b^J V^3] \dots\dots\dots (5.15)$$

Svaka od ovih matrica je po strukturi dijagonalna matrica za čvor. Matrice $[S_i]$, $i=1\div 5$, treba integraliti kao i odgovarajuće položajne matrice krutosti, tj. sve matrice koje odgovaraju jednom istom naponu se računaju u istim integracionim tačkama, a zatim se krutosti sabiraju.

5.3 Numerički rezultati dobijeni u linearnoj analizi

5.3.1 Rezultati dobijeni analizom normalnog napona S^{33}

Da bi se video uticaj normalnog napona S^{33} na ponašanje ljuske, analizirano je pet primera karakteristične geometrije i oslanjanja za koje mogu da se nađu rezultati u literaturi. Rezultati dobijeni u ovom radu su tabelarno sređeni i u tabeli 5.1 je dat ugib tačke naznačene kružićem na slikama 4÷8. Pritom, brojne oznake 1÷4 obuhvataju sledeće slučajeve:

- 1 : postoje komponente napona $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, V^{α} , tj. matrice $[K_i]$,
 $i=1\div 3$
- 2 : postoje komponente napona $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, V^{α} i M^{α} tj. matrice $[K_i]$,
 $i=1\div 4$
- 3 : postoje komponente napona $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, V^{α} , M^{α} i S^{33} tj. matrice
 $[K_i]$, $i=1\div 6$, S^{33} je konstantno po debljini ljuske
- 4 : postoje komponente napona $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, V^{α} , M^{α} i S^{33} tj. matrice
 $[K_i]$, $i=1\div 6$, S^{33} je sa kvadratnom raspodelom po debljini
ljuske

U varijantama 3 i 4 čvor ima sedam stepeni slobode.

Druga, slovna oznaka varijante, označava vrstu integracije komponenti transverzalnog smicanja (α_3) i normalne komponente (33), i to:

- a : matrice $[K_i]$, $i=3\div 6$ se integrale u centru elementa (jedna tačka numeričke integracije, 1×1)
- b : matrice $[K_i]$, $i=3, 4$ i 6 se integrale u centru elementa, a matrica $[K_5]$ u četiri Gausove tačke (2×2).

U svim slučajevima $[K_1]$ i $[K_2]$ se integrale (2×2), a $[K_3]$ i $[K_4]$ (1×1), jer je u ranijem radu već analiziran uticaj broja integracionih tačaka i formula za numeričku integraciju, ne uzimajući u obzir komponentu deformacije α_{33} , tj. napon S^{33} . Pošto je zaključak iz ranijih radova bio da je najpouzdanija selektivna integracija $2\times 2+1\times 1$ (2×2 za membranske i savojne matrice krutosti, a 1×1 za matrice krutosti transverzalnog smicanja), to su ovde pravljene kombinacije samo za dodatnu deformaciju α_{33} i različite oblike napona S^{33} po debljini ljuske.

Slučajevi 1 i 2 su rađeni sa šest stepeni slobode po čvoru, a slučajevi 3 i 4 sa sedam. Za promenu po debljini ljuske $\bar{h}$ se dobijaju male vrednosti i uvođenje ovog stepena slobode neznatno menja ostale rezultate, tako da u nelinearnoj analizi, zbog jednostavnosti računanja ne mora da bude uzet u obzir. S druge strane, uvođenje komponente deformacije α_{33} , tj. pretpostavka

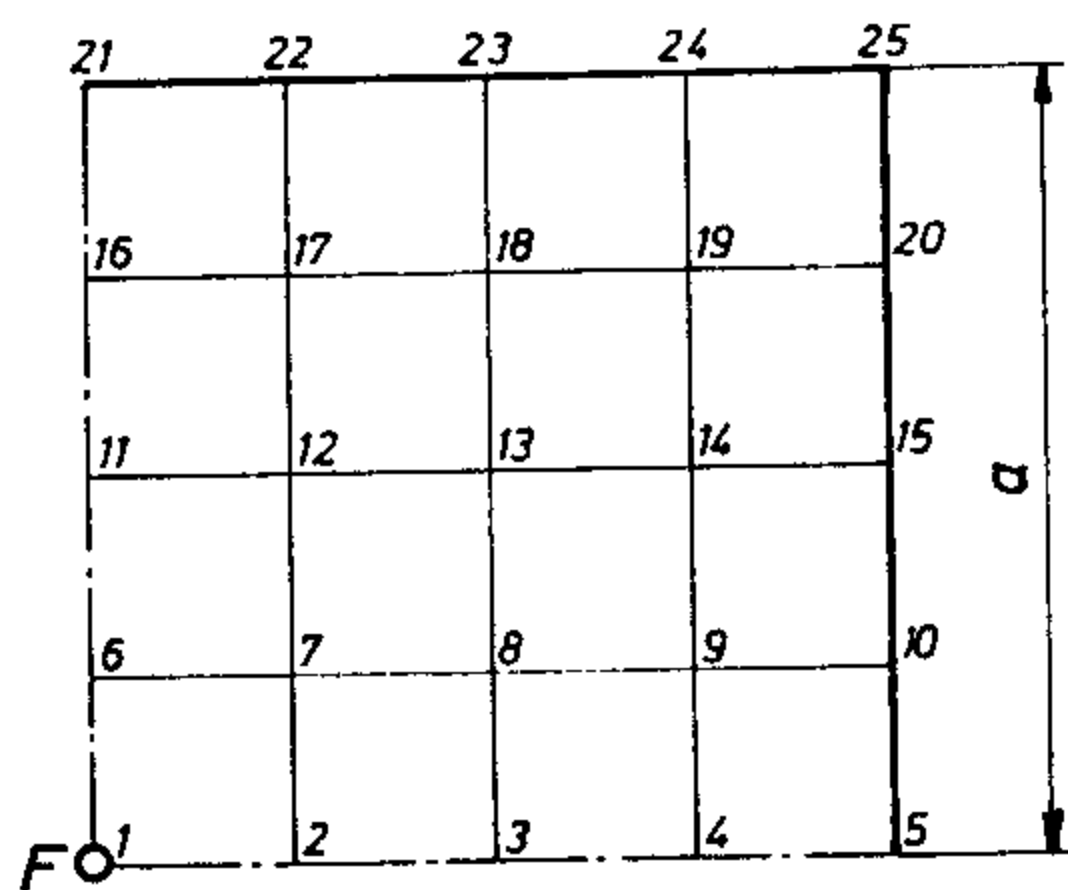
postojanja napona S^{33} sa nekom raspodelom po debljini ljuske je vrlo delikatno pitanje, jer se time ljuska čini znatno krućom.

tabela 5.1

PRIMER	1	2	3		4	
	a	a	a	b	a	b
1	0.063135	0.063135	0.063135	0.063135	0.063135	0.063135
2	0.098470	0.090511	0.013311	0.015881	0.013601	0.015454
3	7.2021	5.2132	5.0441	4.9125	5.1800	4.4111
4	0.13262	0.11757	0.05656	0.00946	0.05668	0.00740
5	3.4692	3.7778	3.2936	0.5017	3.2936	0.5295

Pored rezultata navedenih u tabeli, dobijeno je još niz rezultata za različite integracione formule (Simpsonova, Lobato, puna integracija $2 \times 2 + 2 \times 2$). S obzirom da navedene formule ne daju upotrebljive rezultate za sve testirane primere i da cilj rada i nije dublja analiza ovog problema, ti rezultati su ovde izostavljeni.

Ono što je bio cilj materije iznete do sada jeste da se pokaže da ponašanje tanke ljuske može dovoljno pouzdano da se prati sa elementom sa šest stepeni slobode po čvoru u kome nema normalnih napona S^{33} i da je takav element valjano koristiti u nelinearnoj analizi. Prema tome, svi numerički rezultati navedeni dalje u nelinearnoj analizi su dobijeni uz pretpostavku da postoje komponente deformacije $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ i $\alpha_{\alpha 3}$ i odgovarajuće komponente napona $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ i V^α , a pripadajuće matrice krutosti su integraljene selektivnom integracijom $2 \times 2 + 1 \times 1$. Izuzetak u izboru numeričke integracije je napravljen kod primera br. 8. u kome se radi o debeloj ljusci i u kome su komentarisani različiti pokušaji integraljenja smičućih matrica krutosti.



$$a=50$$

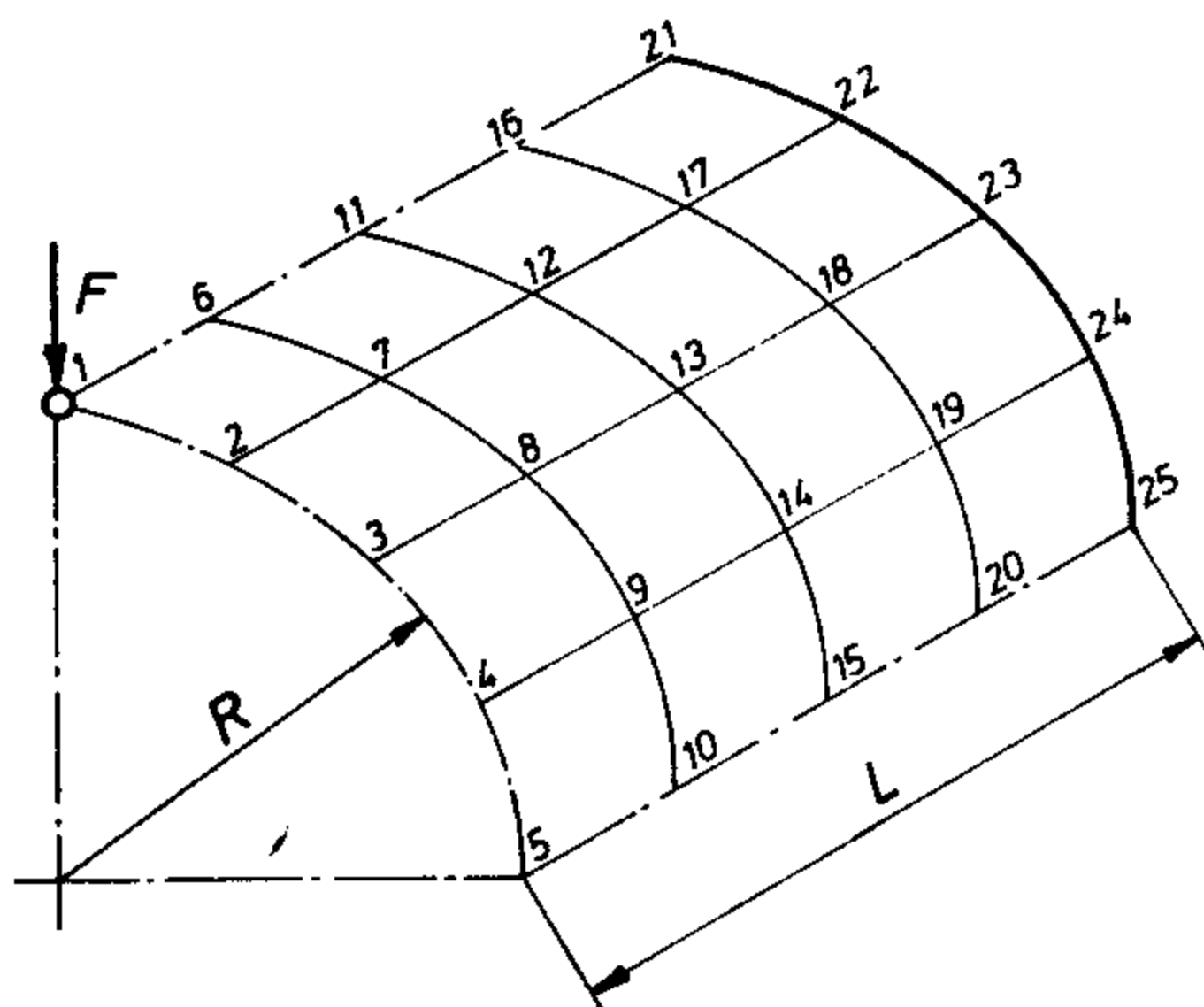
$$H=1$$

$$E=2 \cdot 10^6$$

$$\nu=0.3$$

$$F=100$$

Sl. 4. Ravna, slobodno oslonjena ploča, opterećena transverzalom silom na sredini



$$R=4.953$$

$$L=5.175$$

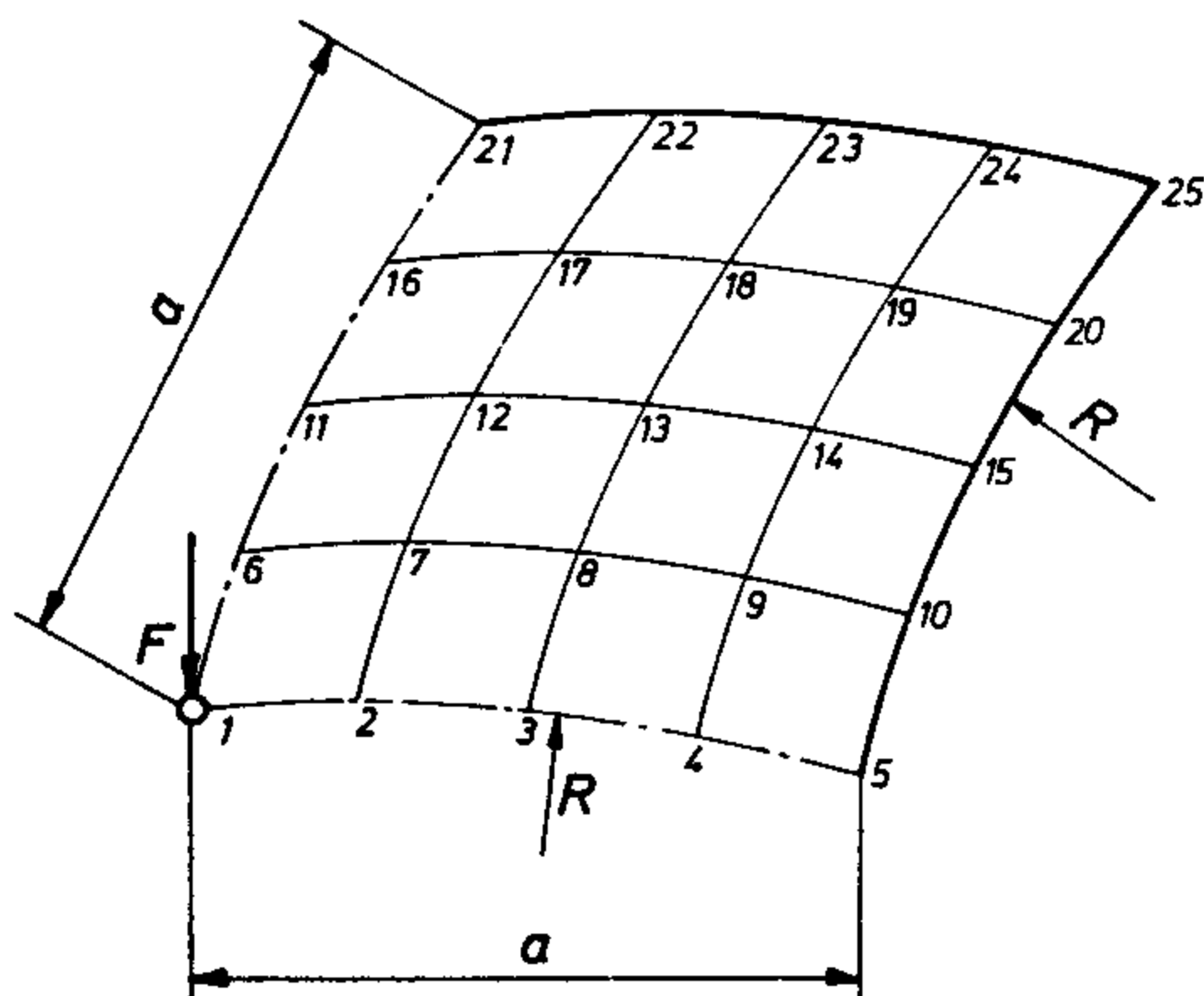
$$H=0.094$$

$$E=10.5 \cdot 10^6$$

$$\nu=0.3125$$

$$F=100$$

Sl. 5. Slobodni, pritisnuti cilindar



$$a=78.49$$

$$R=265.851$$

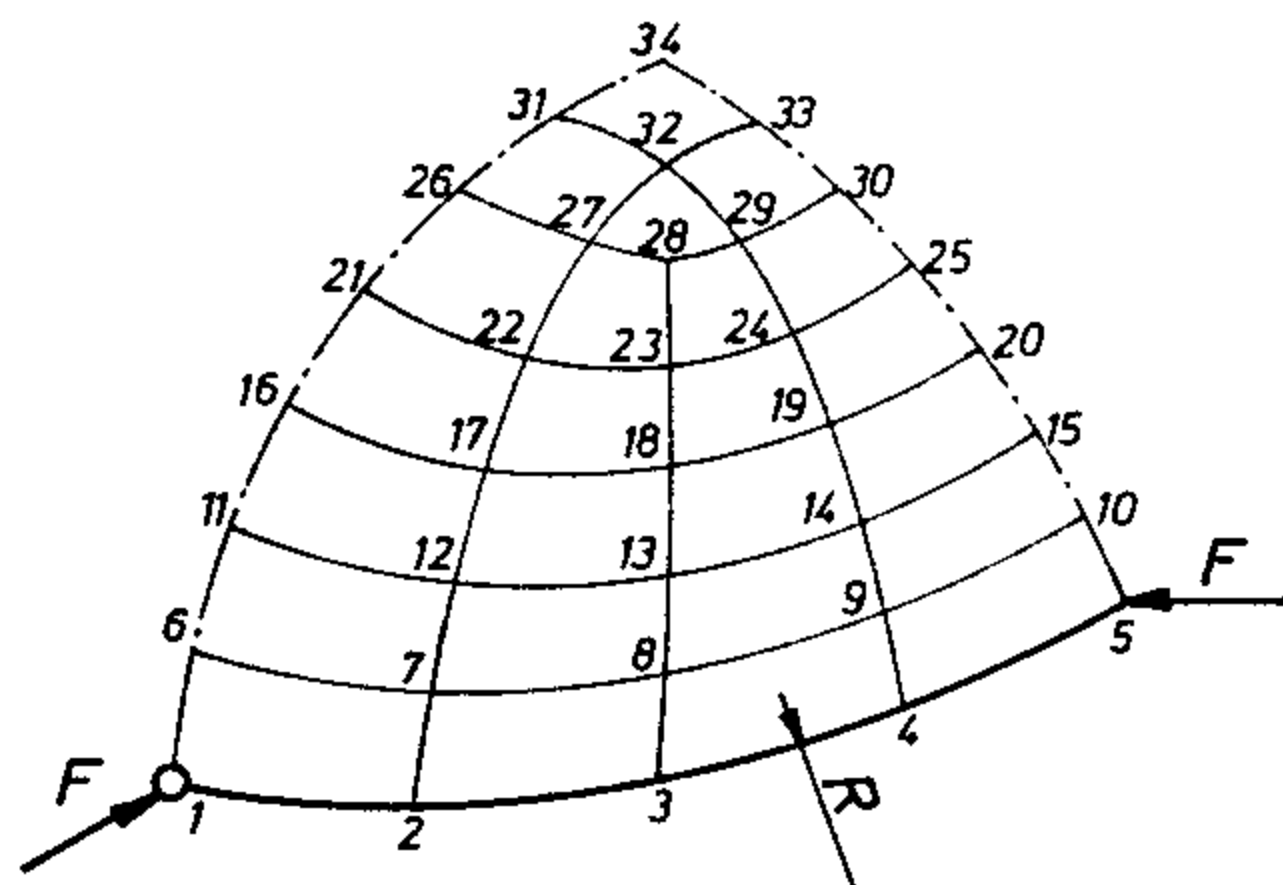
$$H=9.945$$

$$E=6895$$

$$\nu=0.3$$

$$F=5 \cdot 10^4$$

Sl. 6. Sferna ljuska zglobo oslonjena, opterećena vertikalnom silom na sredini



$$R=40$$

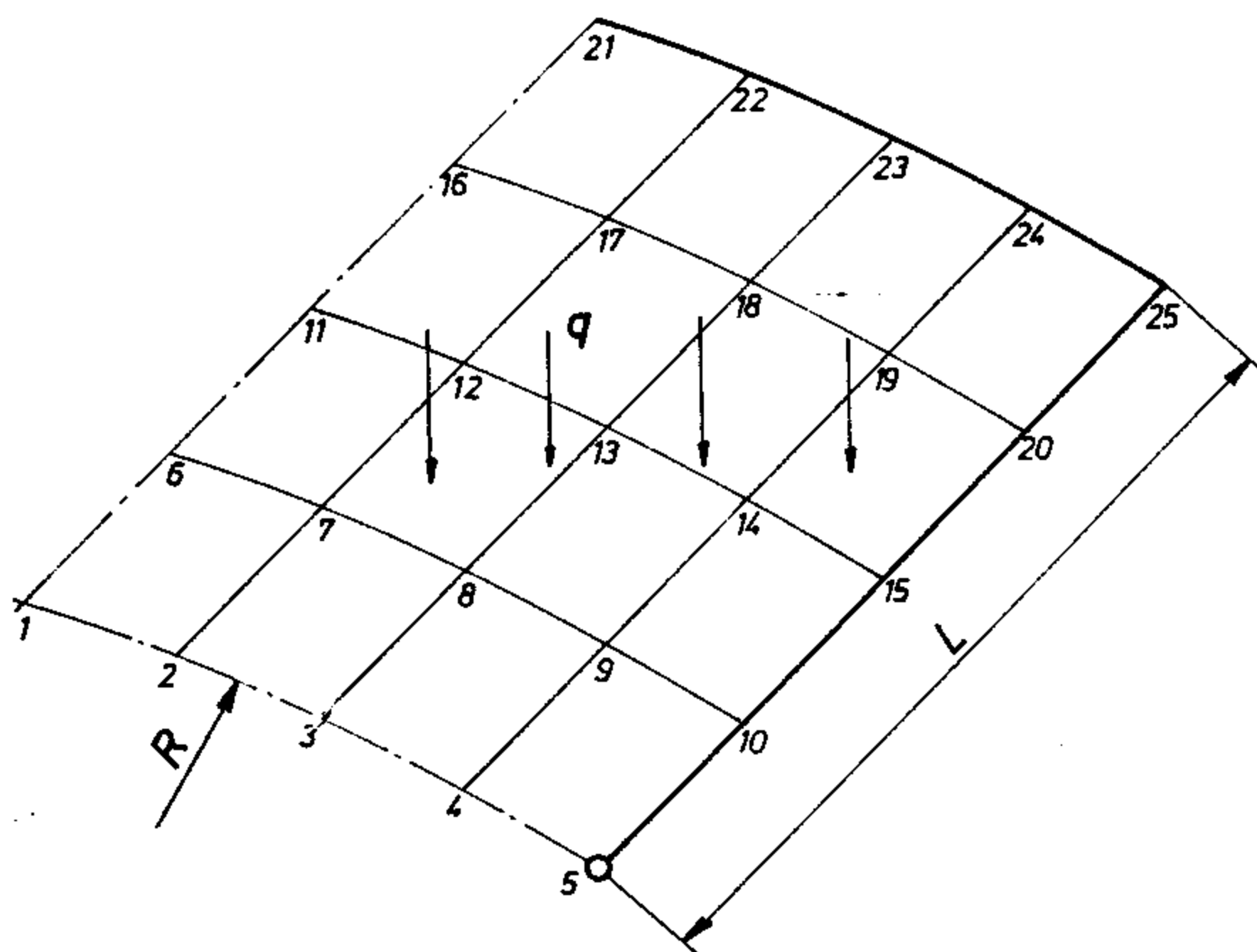
$$H=0.5$$

$$E=2 \cdot 10^6$$

$$=0.3$$

$$F=10$$

Sl. 7. Pritisnuta polulopta



$$R=300$$

$$L=300$$

$$H=3$$

$$\alpha=40^\circ$$

$$E=3 \cdot 10^6$$

$$=0$$

$$q=0.625$$

Sl. 8. Cilindrični krov, kontinualno opterećen

Zapaženo je da je ustvari problem kako integraliti matrice krutosti koje odgovaraju deformaciji α^{33} , a ne kakvu interpolaciju izabrati za napon S^{33} po debljini ljuske.

U daljem tekstu su dati numerički rezultati pomeranja svih čvorova u mreži za primere 1, 3 i 5, dobijeni sa varijantama numeričke integracije 1a i 3a, jer rezultati za ove dve varijante ne odstupaju mnogo, pa može da se smatra da je za ove primere numerička integracija napona S^{33} odgovarajuća i da kroz njih može da se prati uticaj promene debljine ljuske, $\mathcal{H}$.

REZULTATI PRIMERA 1. VARIJANTA 1A)

POMERANJA I ROTACIJE ČVOROVA

ČVOR BROJ	X TRANSLACIJA	Y TRANSLACIJA	Z TRANSLACIJA	X ROTACIJA	Y ROTACIJA	Z ROTACIJA
25	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
24	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.614010-03	0.000000+00	0.000000+00
23	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.113730-02	0.000000+00	0.000000+00
22	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.151880-02	0.000000+00	0.000000+00
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.163530-02	0.000000+00	0.000000+00
20	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-0.614010-03	0.000000+00
19	0.000000+00	0.000000+00	-0.748470-02	0.582600-03	-0.582600-03	0.000000+00
18	0.000000+00	0.000000+00	-0.140300-01	0.110550-02	-0.465640-03	0.000000+00
17	0.000000+00	0.000000+00	-0.186460-01	0.146210-02	-0.270390-03	0.000000+00
16	0.000000+00	0.000000+00	-0.203200-01	0.161570-02	0.000000+00	0.000000+00
15	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-0.113930-02	0.000000+00
14	0.000000+00	0.000000+00	-0.140300-01	0.465640-03	-0.110550-02	0.000000+00
13	0.000000+00	0.000000+00	0.268530-01	0.942350-03	-0.942350-03	0.000000+00
12	0.000000+00	0.000000+00	-0.360760-01	0.132920-02	-0.537080-03	0.000000+00
11	0.000000+00	0.000000+00	-0.394670-01	0.144200-02	0.000000+00	0.000000+00
10	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-0.151880-02	0.000000+00
9	0.000000+00	0.000000+00	-0.186460-01	0.270390-03	-0.146210-02	0.000000+00
8	0.000000+00	0.000000+00	-0.360760-01	0.537080-03	-0.132920-02	0.000000+00
7	0.000000+00	0.000000+00	-0.501110-01	0.907090-03	-0.907090-03	0.000000+00
6	0.000000+00	0.000000+00	-0.557220-01	0.116430-02	0.000000+00	0.000000+00
5	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-0.163530-02	0.000000+00
4	0.000000+00	0.000000+00	-0.203200-01	0.000000+00	-0.161570-02	0.000000+00
3	0.000000+00	0.000000+00	-0.394670-01	0.000000+00	-0.144200-02	0.000000+00
2	0.000000+00	0.000000+00	-0.557220-01	0.000000+00	-0.116430-02	0.000000+00
1	0.000000+00	0.000000+00	-0.631350-01	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

REZULTATI PRIMERA 3. VARIJANTA 1A)

POMERANJA I ROTACIJE ČVOROVA

ČVOR BROJ	X TRANSLACIJA	Y TRANSLACIJA	Z TRANSLACIJA	X ROTACIJA	Y ROTACIJA	Z ROTACIJA
25	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.128970-02	-0.128970-02	0.000000+00
24	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.114930-01	-0.114640-02	0.000000+00
23	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.242760-01	-0.826530-03	0.000000+00
22	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.336160-01	-0.462980-03	0.000000+00
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.374300-01	0.000000+00	0.000000+00
20	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.114640-02	-0.114930-01	0.000000+00
19	0.924120-03	0.924120-03	-0.258390+00	0.122840-01	-0.122840-01	0.000000+00
18	-0.787700-02	-0.293400-01	-0.526960+00	0.287200-01	-0.118410-01	0.000000+00
17	-0.825370-02	-0.563410-01	-0.735900+00	0.417920-01	-0.725800-02	0.000000+00
16	0.000000+00	-0.677090-01	-0.819120+00	0.468660-01	0.000000+00	0.000000+00
15	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.826530-03	-0.242760-01	0.000000+00
14	-0.293400-01	-0.787700-02	-0.526960+00	0.118410-01	-0.287200-01	0.000000+00
13	-0.542390-01	-0.542390-01	-0.117860+01	0.324360-01	-0.324360-01	0.000000+00
12	-0.465140-01	-0.104350+00	-0.176230+01	0.583240-01	-0.219210-01	0.000000+00
11	0.000000+00	-0.122880+00	-0.197660+01	0.669820-01	0.000000+00	0.000000+00
10	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.462980-03	-0.336160-01	0.000000+00
9	-0.563410-01	-0.825370-02	-0.735900+00	0.725800-02	-0.417920-01	0.000000+00
8	-0.104350+00	-0.465140-01	-0.176230+01	0.219210-01	-0.583240-01	0.000000+00
7	-0.100610+00	-0.100610+00	-0.301150+01	0.498570-01	-0.498570-01	0.000000+00
6	0.000000+00	-0.129510+00	-0.357460+01	0.875150-01	0.000000+00	0.000000+00
5	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-0.374300-01	0.000000+00
4	-0.677090-01	0.000000+00	-0.819120+00	0.000000+00	-0.468660-01	0.000000+00
3	-0.122880+00	0.000000+00	-0.197660+01	0.000000+00	-0.669820-01	0.000000+00
2	-0.129510+00	0.000000+00	-0.357460+01	0.000000+00	-0.875150-01	0.000000+00
1	0.000000+00	0.000000+00	-0.521630+01	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

REZULTATI PRIMERA 5. VARIJANTA 1A)

POMERANJA I ROTACIJE ČVOROVA

ČVOR BROJ	X TRANSLACIJA	Y TRANSLACIJA	Z TRANSLACIJA	X ROTACIJA	Y ROTACIJA	Z ROTACIJA
25	0.000000+00	0.116120+00	0.000000+00	0.263180-01	0.000000+00	0.000000+00
24	0.000000+00	-0.163470-01	0.000000+00	0.167150-01	0.000000+00	0.000000+00
23	0.000000+00	-0.323000-01	0.000000+00	0.373890-02	0.000000+00	0.000000+00
22	0.000000+00	-0.104220-01	0.000000+00	0.565090-03	0.000000+00	0.000000+00
21	0.000000+00	0.218450-02	0.000000+00	-0.380770-02	0.000000+00	0.000000+00
20	-0.765450+00	0.105940+00	-0.142890+01	0.227100-01	0.136950-01	0.000000+00
19	-0.368480+00	-0.144890-01	-0.862890+00	0.146880-01	0.127900-01	0.000000+00
18	-0.117310+00	-0.297940-01	-0.327120+00	0.358760-02	0.992330-02	0.000000+00
17	-0.133780-01	-0.768040-02	0.553850-01	0.265560-03	0.529130-02	0.000000+00
16	0.000000+00	0.199150-02	0.192560+00	-0.357810-02	0.000000+00	0.000000+00
15	-0.135500+01	0.787380-01	-0.254620+01	0.155610-01	0.236310-01	0.000000+00
14	-0.662830+00	-0.101210-01	-0.155830+01	0.104080-01	0.225830-01	0.000000+00
13	-0.213850+00	-0.225730-01	-0.597880+00	0.284560-02	0.181110-01	0.000000+00
12	-0.237900-01	-0.750670-02	0.106240+00	0.913580-04	0.988360-02	0.000000+00
11	0.000000+00	0.146250-02	0.362620+00	-0.262730-02	0.000000+00	0.000000+00
10	-0.171420+01	0.418040-01	-0.323640+01	0.805130-02	0.293880-01	0.000000+00
9	-0.848520+00	-0.507420-02	-0.200050+01	0.542170-02	0.284260-01	0.000000+00
8	-0.277630+00	-0.120860-01	-0.778210+00	0.158050-02	0.233560-01	0.000000+00
7	-0.309910-01	-0.411680-02	0.137220+00	0.843090-04	0.130350-01	0.000000+00
6	0.000000+00	0.749680-03	0.475370+00	-0.135470-02	0.000000+00	0.000000+00
5	-0.183630+01	0.000000+00	-0.347170+01	0.000000+00	0.313460-01	0.000000+00
4	-0.912090+00	0.000000+00	-0.215230+01	0.000000+00	0.303770-01	0.000000+00
3	-0.300020+00	0.000000+00	-0.841860+00	0.000000+00	0.251390-01	0.000000+00
2	-0.336940-01	0.000000+00	0.146670+00	0.000000+00	0.141570-01	0.000000+00
1	0.000000+00	0.000000+00	0.513970+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

ULTATI PRIMERA 3, VARIJANTA 3A)

ERANJA I ROTACIJE ČVOROVA

ČVOR BROJ	X TRANSLACIJA	Y TRANSLACIJA	Z TRANSLACIJA	X ROTACIJA	Y ROTACIJA	Z ROTACIJA	SABIJANJE
25	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.136350-02	-0.5 23790-03	0.000000+00	0.170700-02
24	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.952570-02	0.6 70930-04	0.000000+00	0.397520-02
23	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.181040-01	0.1 21530-02	0.000000+00	0.684310-02
22	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.218130-01	0.2 33800-02	0.000000+00	0.830530-02
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.226460-01	0.0 00000+00	0.000000+00	0.937650-02
20	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.128930-02	-0.8 44500-02	0.000000+00	0.348780-02
19	-0.187970-02	0.217190-01	-0.207520+00	0.996380-02	-0.8 10240-02	0.000000+00	0.383170-02
18	-0.120630-01	0.130190-01	-0.591700+00	0.223530-01	-0.5 22210-02	0.000000+00	0.503710-02
17	-0.894890-02	0.965880-02	-0.484280+00	0.307610-01	0.1 23550-04	0.000000+00	0.755620-02
16	0.000000+00	0.101710-01	-0.504260+00	0.334340-01	0.0 00000+00	0.000000+00	0.807990-02
15	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.943560-03	-0.1 78500-01	0.000000+00	0.595520-02
14	-0.234490-01	0.265350-01	-0.411560+00	0.922190-02	-0.2 08170-01	0.000000+00	0.435570-02
13	-0.487670-01	0.125620-01	-0.903160+00	0.264760-01	-0.2 15320-01	0.000000+00	0.302610-02
12	-0.451240-01	-0.894770-02	-0.129310+01	0.496150-01	-0.1 09600-01	0.000000+00	0.534440-02
11	0.000000+00	-0.156120-01	-0.154890+01	0.570900-01	0.0 00000+00	0.000000+00	0.914910-02
10	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.520730-03	-0.2 43960-01	0.000000+00	0.741410-02
9	-0.374150-01	0.182020-01	-0.562340+00	0.548800-02	-0.3 12280-01	0.000000+00	0.580020-02
8	-0.816880-01	0.652100-02	-0.137580+01	0.182230-01	-0.4 51970-01	0.000000+00	0.266320-02
7	-0.961950-01	-0.254060-01	-0.238750+01	0.448360-01	-0.3 70940-01	0.000000+00	0.202150-03
6	0.000000+00	-0.465020-01	-0.289410+01	0.818850-01	0.0 00000+00	0.000000+00	0.506810-03
5	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-0.2 70680-01	0.000000+00	0.138440-02
4	-0.427300-01	0.000000+00	-0.621940+00	0.000000+00	-0.3 52660-01	0.000000+00	0.347730-02
3	-0.906410-01	0.000000+00	-0.154720+01	0.000000+00	-0.5 32100-01	0.000000+00	0.434730-02
2	-0.123010+00	0.000000+00	-0.289220+01	0.000000+00	-0.7 41290-01	0.000000+00	0.729970-02
1	0.000000+00	0.000000+00	-0.504410+01	0.000000+00	0.0 00000+00	0.000000+00	0.169170-01

ULTATI PRIMERA 5, VARIJANTA 3A)

ERANJA I ROTACIJE ČVOROVA

ČVOR BROJ	X TRANSLACIJA	Y TRANSLACIJA	Z TRANSLACIJA	X ROTACIJA	Y ROTACIJA	Z ROTACIJA	SABIJANJE
25	0.000000+00	0.113530+00	0.000000+00	0.250510-01	0.0 00000+00	0.000000+00	0.874470-04
24	0.000000+00	-0.146550-01	0.000000+00	0.159860-01	0.0 00000+00	0.000000+00	0.827640-03
23	0.000000+00	-0.313500-01	0.000000+00	0.386600-02	0.0 00000+00	0.000000+00	0.909550-03
22	0.000000+00	-0.111060-01	0.000000+00	0.613980-03	0.0 00000+00	0.000000+00	0.919670-03
21	0.000000+00	0.694080-03	0.000000+00	-0.354340-02	0.0 00000+00	0.000000+00	0.941050-03
20	-0.724650+00	0.103540+00	-0.136000+01	0.215480-01	0.1 29710-01	0.000000+00	0.374450-03
19	-0.350320+00	-0.129260-01	-0.826280+00	0.140150-01	0.1 20020-01	0.000000+00	0.665900-03
18	-0.112360+00	-0.288400-01	-0.318840+00	0.351870-02	0.9 51090-02	0.000000+00	0.826450-03
17	-0.128370-01	-0.103130-01	0.472010-01	0.311530-03	0.5 04910-02	0.000000+00	0.110140-02
16	0.000000+00	0.614040-03	0.178090+00	-0.333430-02	0.0 00000+00	0.000000+00	0.115130-02
15	-0.128000+01	0.771090-01	-0.241940+01	0.146860-01	0.2 22980-01	0.000000+00	0.509860-03
14	-0.629330+00	-0.892810-02	-0.149080+01	0.989710-02	0.2 11440-01	0.000000+00	0.647040-03
13	-0.204660+00	-0.218380-01	-0.582450+00	0.278990-02	0.1 73420-01	0.000000+00	0.846610-03
12	-0.227950-01	-0.799160-02	0.910780-01	0.127760-03	0.9 43720-02	0.000000+00	0.106860-02
11	0.000000+00	0.406890-03	0.335870+00	-0.244090-02	0.0 00000+00	0.000000+00	0.186100-02
10	-0.161680+01	0.408160-01	-0.307150+01	0.758450-02	0.2 76540-01	0.000000+00	0.705820-03
9	-0.804840+00	-0.443120-02	-0.191240+01	0.514690-02	0.2 65660-01	0.000000+00	0.778690-03
8	-0.265570+00	-0.116860-01	-0.757910+00	0.154890-02	0.2 23420-01	0.000000+00	0.961600-03
7	-0.296900-01	-0.437940-02	0.117370+00	0.104480-03	0.1 24520-01	0.000000+00	0.166860-02
6	0.000000+00	0.177400-03	0.440400+00	-0.125380-02	0.0 00000+00	0.000000+00	0.276040-02
5	-0.173110+01	0.000000+00	-0.329360+01	0.000000+00	0.2 94740-01	0.000000+00	0.871080-03
4	-0.864850+00	0.000000+00	-0.205700+01	0.000000+00	0.2 83720-01	0.000000+00	0.174410-02
3	-0.286960+00	0.000000+00	-0.819830+00	0.000000+00	0.2 40390-01	0.000000+00	0.287550-02
2	-0.322850-01	0.000000+00	0.125180+00	0.000000+00	0.1 35260-01	0.000000+00	0.403230-02
1	0.000000+00	0.000000+00	0.476090+00	0.000000+00	0.0 00000+00	0.000000+00	0.565460-02

DRUGI DEO: NUMERIČKE PROCEDURE ZA REŠAVANJE NELINEARNOG ODZIVA
STRUKTURE U M. K. E. I PRIMERI

1. METODE REŠAVANJA NELINEARNOG ODZIVA STRUKTURE

1.1 O nelinearnim odzivima strukture uopšte

1.2 Metod zadatog nivoa opterećenja

1.3 Metod zadatog modula pomeranja

2. NUMERIČKI PRIMERI

2.1 Greda na dva nepokretna oslonca

2.2 Dvostrana konzola

2.3 Uklještena, kontinualno opterećena ploča

2.4 Plitka cilindrična ljuska, kontinualno opterećena

2.5 Konzola opterećena momentom savijanja

2.6 Cilindrična ljuska opterećena koncentrisanom silom

2.7 Uklješteni cilindrični luk

2.8 Kalota, opterećena vertikalnom silom na sredini

2.9 Pritisnuta ploča

2.10 Pritisnuti cilindar

2.11 Izvijanje konzole

2.12 Torzija konzole

3. ZAKLJUČCI

1. METODE REŠAVANJA NELINEARNOG ODZIVA STRUKTURE

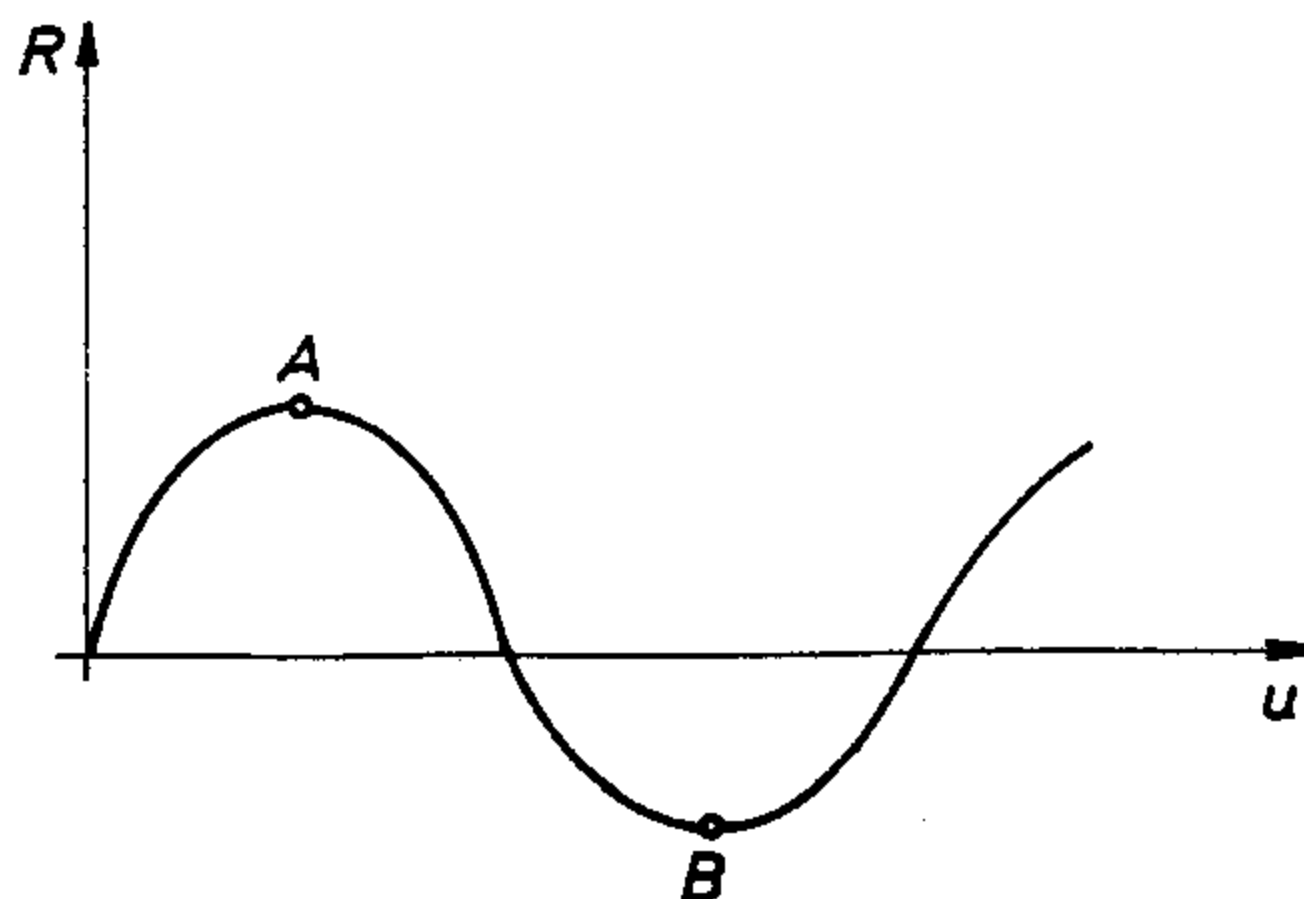
1.1 O nelinearnim odzivima strukture uopšte

U ovom delu će biti izneti problemi vezani za numeričke metode za rešavanje nelinearnog ponašanja tankih ljuski i algoritmi kojima se ti problemi potpuno ili delimično prevazilaze. Algoritmi su programirani u FORTRAN-u i primenjeni na iznalaženje karakteristike pomeranje-opterećenje kod većeg broja numeričkih primera. U radu je razmatran samo statički odziv strukture sa nepromenljivim konstitutivnim koeficijentima.

Posebna pažnja je posvećena načinu odredjivanja kritičnih tačaka u prostoru pomeranje-opterećenje i postkritičnom ponašanju strukture. Ovaj problem su tretirali do sada mnogi istraživači prevazilazeći ga uglavnom metodama "konstantne dužine luka" i metodom "konstantnog priraštaja rada spoljašnjih sila".

Pre nego što budu izložene metode rešavanja nelinearnog odziva strukture, biće ukazano na nekoliko karakterističnih tipova ponašanja tankih ljuski.

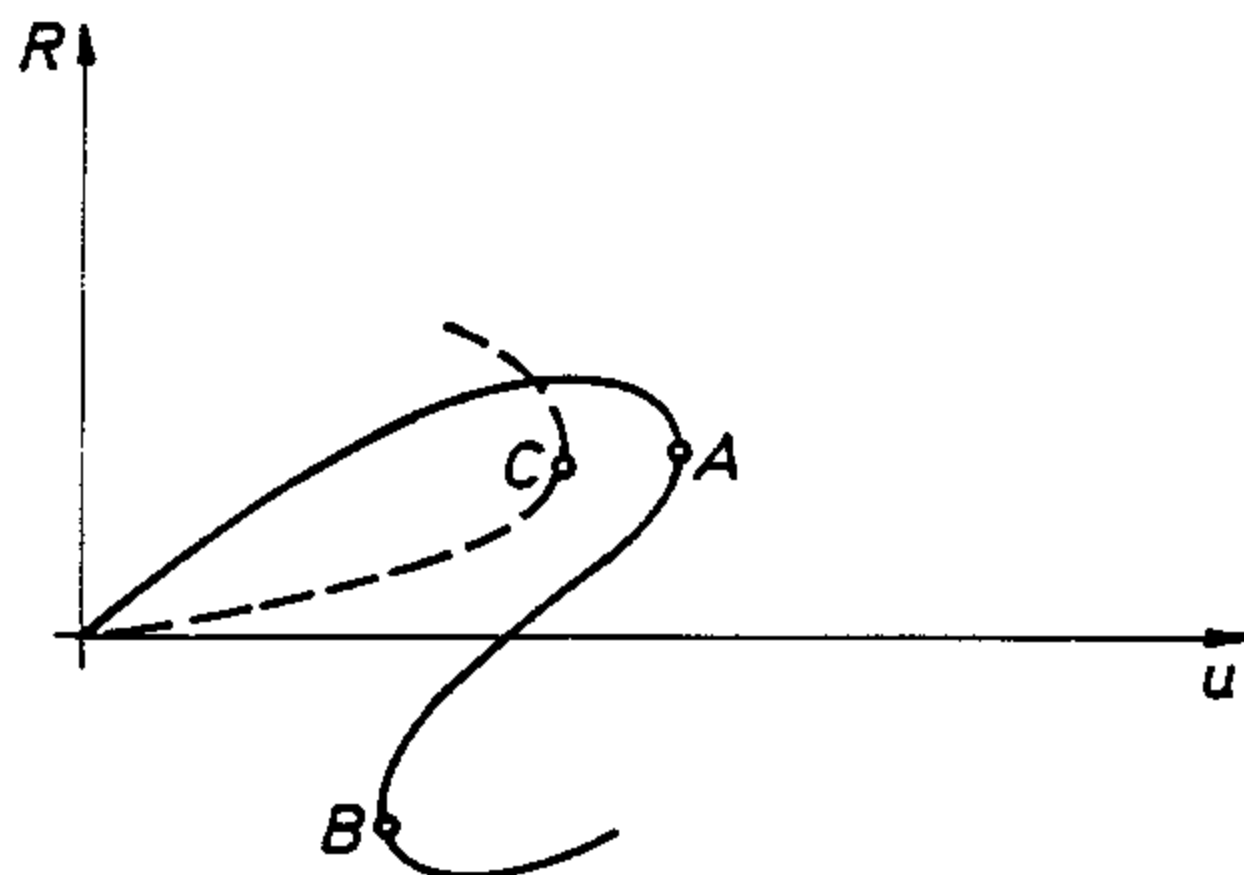
a) Strukture sa "snap-through" karakteristikom



Sl. 9. Snap-through karakteristika

Ovakav odziv predstavlja i najveći numerički problem jer lošim izborom početnog opterećenja ili propisanog pomeranja može da dođe do gubljenja stabilnosti numeričke procedure u okolini tačaka ekstremuma A i B.

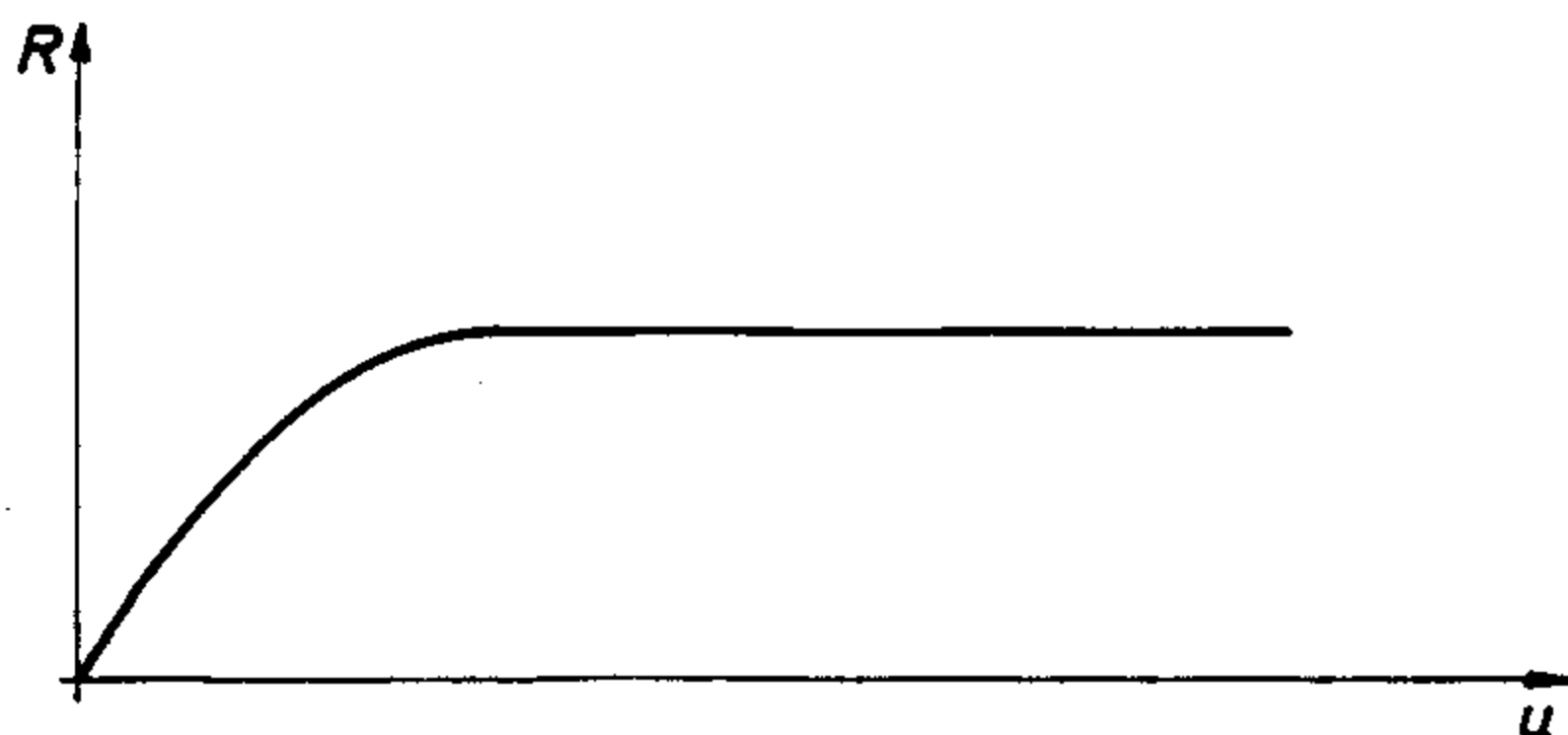
b) Strukture sa "snap-back" karakteristikom



Sl. 10. Snap-back karakteristika

Ovakvo ponašanje strukture je u osnovi veoma slično snap-through problemu. Problem kod ovakvih ponašanja je u tome što ne može, pri kontroli pomeranja, da se uzme jedna tačka strukture i prati njeno pomeranje, jer tada dolazi do teškoća pri postavljanju kriterijuma za prevazilaženje kritičnih tačaka. Treba raditi sa modulom pomeranja da bi se izbegao znak inkrementa pomeranja pojedinačne tačke. Ukoliko se radi sa modulom pomeranja, problemi snap-through i snap-back se podvode pod isti metod rešavanja odziva strukture.

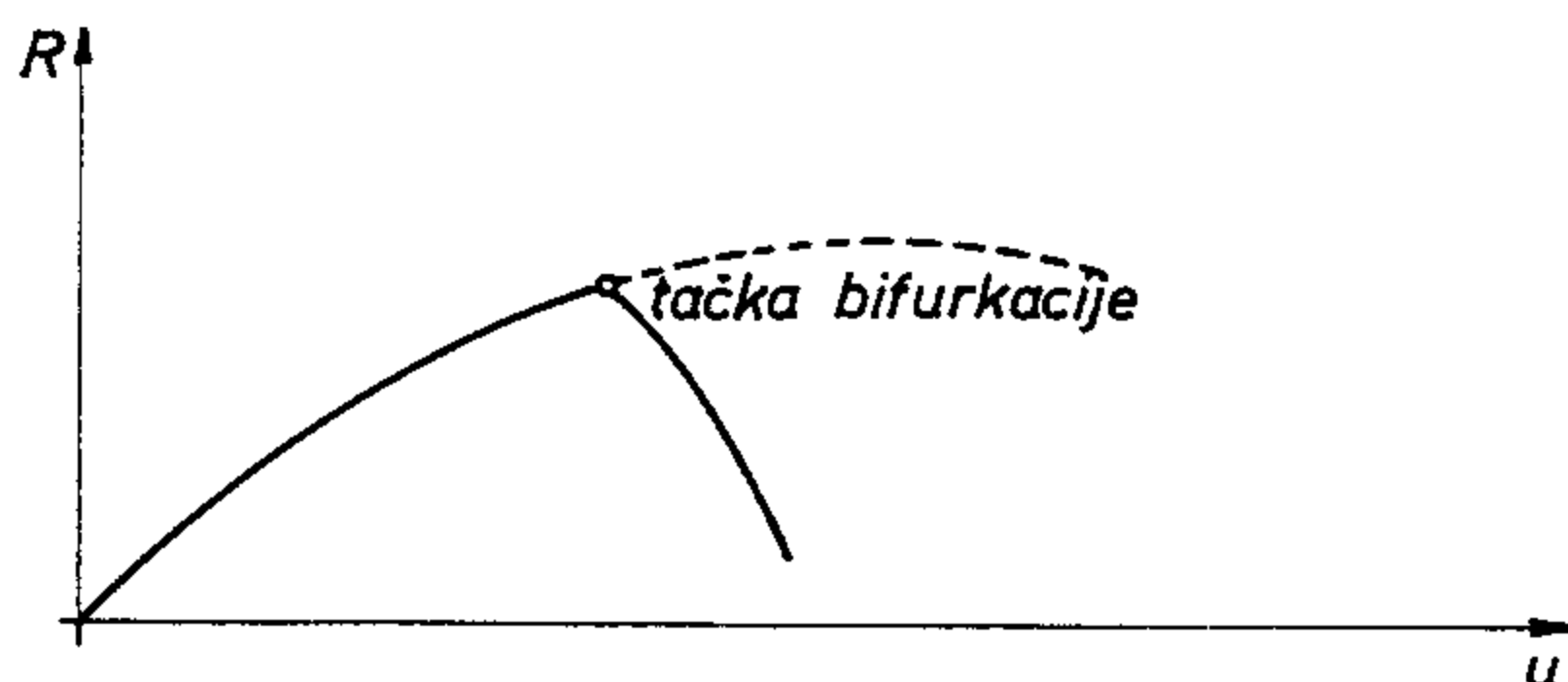
c) Strukture sa karakteristikom kolapsa



Sl. 11. Kolaps strukture

Ovakavu karakteristiku nelinearnih problema imaju aksijalno pritisnute strukture.

d) Tačke bifurkacije u karakteristici strukture



Sl. 12. Postojanje tačke bifurkacije

Nastaju najčešće kao posledica asimetrije geometrije ili opterećenja. Dovoljna su veoma mala odstupanja u geometriji ili veoma malo dodatno asimetrično spoljašnje opterećenje (tzv. poremećaj), pa da dođe do postojanja tačke bifurkacije.

e) Strukture sa karakteristikom očvršćavanja

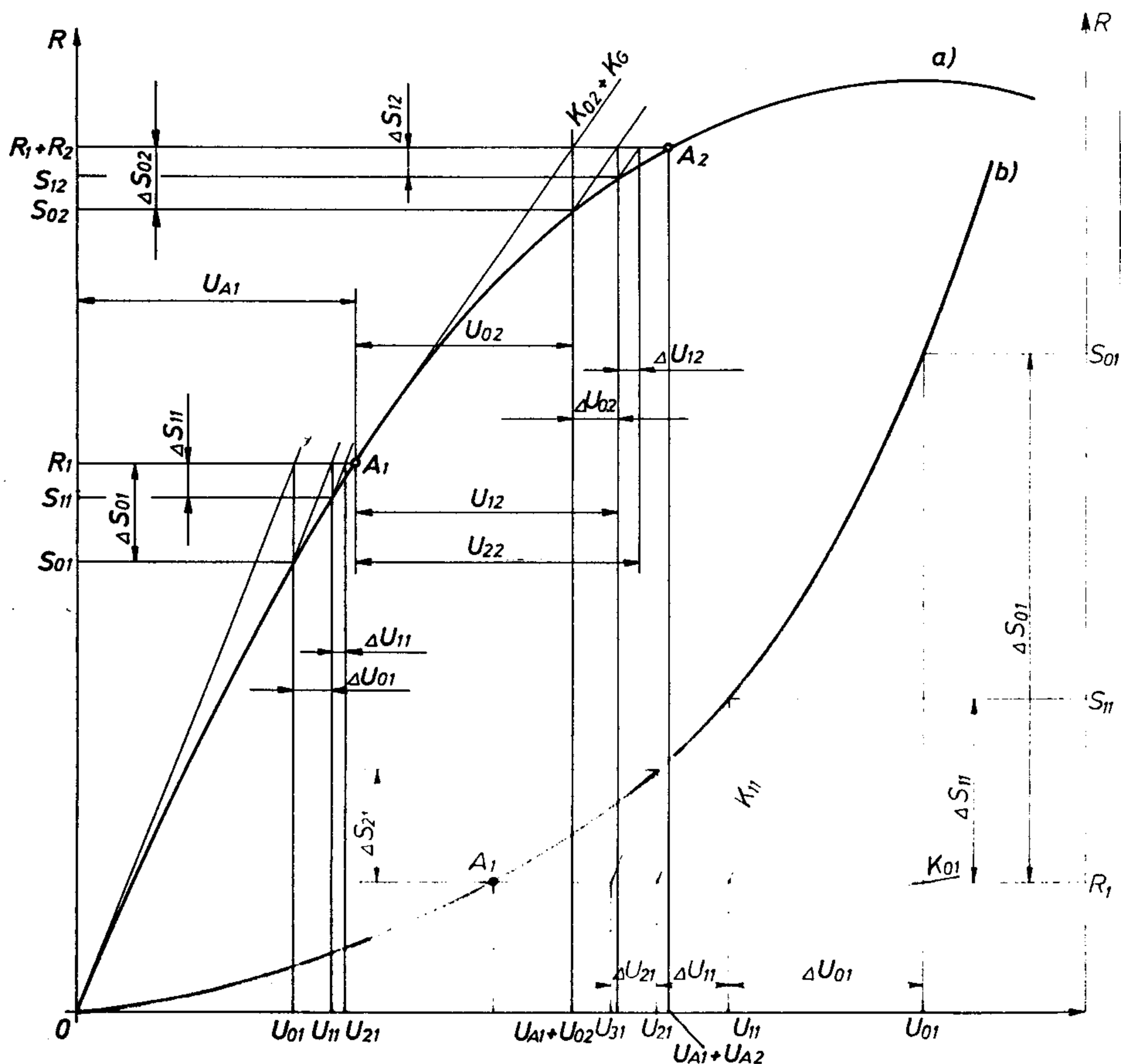


Sl. 13. Karakteristika očvršćavanja

Ovakve strukture na izazivaju nikakve numeričke teškoće pri iznalaženju njihove karakteristike ponašanja, jer se rešavaju uobičajenom Njutnovom procedurom, bilo modificiranom ili metodom punih iteracija.

U radu su date dve procedure za rešavanje sistema nelinearnih jednačina strukture formiranih metodom konačnih elemenata u prostoru pomeranje-opterećenje. Prva je metoda zadatog priraštaja spoljašnjeg opterećenja, koja ustvari predstavlja Njutnovu proceduru primenjenu na sistem nelinearnih jednačina konačnih elemenata. Druga je metoda zadatih priraštaja pomeranja, koja omogućava rešavanje problema izvijanja. U oba slučaja je primenjen metod totalni Lagranž.

1.2 Metod zadatog nivoa spoljašnjeg opterećenja



Sl. 14. Šematski prikaz metode konstantnog opterećenja u koraku

Na sl. 14. je dat šematski prikaz iteriranja za konstantni korak opterećenja. U ovom slučaju numerička procedura obuhvata sledeće:

1) Sračunavanje matrice krutosti

Položajna matrica krutosti se računa prema izrazima (5.3) i (5.4) za prvu iteraciju u svakom novom koraku (modificirani metod), za prvih m iteracija (delimično modificirani metod) ili u svakoj iteraciji (metod punih iteracija). U početnoj konfiguraciji je ova matrica označena sa $[K_{01}]$. U svim daljim označavanjima prvi indeks označava iteraciju (nulom je označena prva iteracija), a drugi korak opterećenja.

2) Rešavanje jednačine strukture

U početnoj konfiguraciji je:

$$[K_{01}] \cdot u_{01} = R_1 \dots\dots\dots (6.1)$$

gde je R_1 zadati nivo opterećenja u prvom koraku. Rešenje sistema je vektor pomeranja u_{01} , koji predstavlja linearno rešenje i ujedno prvu aproksimaciju u nelinearnom procesu.

3) Provera veličine linearnog rešenja

Da bismo bili sigurni da se radi o malim pomeranjima i rotacijama, što je i pretpostavljeno pri izvođenju matrice veze deformacija-pomeranje, uveden je kriterijum nivelisanja početnog spoljašnjeg opterećenja i to tako da maksimalno pomeranje ne bude veće od polovine debljine ljuske, a isto tako da ne bude manje od trećine debljine ljuske, da se ne bi nepotrebno išlo sa vrlo sitnim korakom. Ovakav kriterijum nalazimo i kod drugih autora (R.D. Wood, E.N. Dvorkin itd.) i on ne predstavlja neki egzaktni kriterijum koga bi se moralo pridržavati u svakoj situaciji, ali je jedna preporuka koja u većini slučajeva može dobro da posluži kao orijentacija pri izboru početnog spoljašnjeg opterećenja.

Znači,

$$\frac{H}{3} \leq u_m \leq \frac{H}{2}, \dots\dots\dots (6.2)$$

gde je H debljina ljuske, a u_m najveći ugib u strukturi.

4) Računanje unutrašnjih sila

Na sl. 14. unutrašnje sile su označene sa S_{01} .

4a) Računanje napona po jedinici dužine

Da bi se izračunali ovi naponi, koji moraju da se izračunaju i kada se računa geometrijska matrica krutosti, najpre se računaju komponente membranske, savojne i smičuće deformacije, date respektivno relacijama:

$$\epsilon_m = [\bar{B}_1] \cdot u \quad (\text{odgovara deformaciji } \alpha_{\alpha\beta}) \quad \dots\dots\dots(6.3.1)$$

$$\epsilon_b = [\bar{B}_2] \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \varnothing \end{Bmatrix} \quad (\text{odgovara deformaciji } \beta_{\alpha\beta}) \quad \dots\dots\dots(6.3.2)$$

$$\epsilon_s = [\bar{B}_3] \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \varnothing \end{Bmatrix} \quad (\text{odgovara deformaciji } \alpha_a) \quad \dots\dots\dots(6.3.3)$$

gde su matrice $[\bar{B}_i]^T$ ($i=1,2,3$) računate prema (5.1) u tzv. srednjoj konfiguraciji ($\bar{x} = x_{01} + \frac{1}{2}u_{01}$), a vektori u i $\varnothing$ su ustvari u_{01} i $\varnothing_{01}$ za prvu iteraciju u prvom koraku.

Traženi naponi $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, V^a , označeni sa

$$N^T = [N^{11} \quad 2N^{12} \quad N^{22}] \quad \dots\dots\dots(6.4.1)$$

$$M^T = [M^{11} \quad 2M^{12} \quad M^{22}] \quad \dots\dots\dots(6.4.2)$$

$$V^T = [V^{13} \quad V^{23}] \quad \dots\dots\dots(6.4.3)$$

su dati relacijama (4.23), (4.20) i (4.21), respektivno, tj. predstavljaju proizvod matrice elastičnosti i deformacije.

4b) Računanje vektora unutrašnjih sila

Računanje unutrašnjih sila se za ($H=\text{const}$) svodi na površinske integrale:

$$S_m = \int_S [\bar{B}_1]^T \cdot N dS$$

$$S_b = \int_S [\bar{B}_2]^T \cdot M dS$$

$$S_s = \int_S [\bar{B}_3]^T \cdot V dS$$

Ovde su $[B_1]^T$ matrice veze date izrazima (5.1), ali sada u tekućoj konfiguraciji ($x=x_0+u_0$).

Ukupne unutrašnje sile u elementu se dobijaju sabirajući S_a , S_b i S_c po pomeranjima za svaki čvor, a zatim slažući ove sile po elementima, kako je to uobičajeno u M.K.E. Na taj način se dobija vektor unutrašnjih sila za svako slobodno pomeranje u čvoru. Ovaj vektor je uređen na isti način kako su uređene i spoljašnje sile, tako da mogu direktno da se sračunaju neuravnotežene sile.

5) Računanje reakcija

Računanje reakcija ustvari predstavlja računanje unutrašnjih sila, ali za ograničene stepene slobode u čvoru. Kada se nađu komponente sile u čvoru ($S_x, S_y, S_z, M_x, M_y, M_z$) za slobodna pomeranja se formira vektor unutrašnjih sila, a za ograničena vektor reakcija.

6) Računanje neuravnoteženih sila

Neuravnotežene sile predstavljaju razliku spoljašnjih i unutrašnjih sila za svako slobodno pomeranje, tj.

$$\Delta S_0 = R_0 - S_0 \quad \dots\dots\dots(6.5)$$

7) Računanje modula neuravnoteženih sila

U vektoru neuravnoteženih sila ΔS_0 se najpre izvrši razdvajanje na sile i momente, a zatim se izračuna moduo jednog i drugog dela vektora posebno i uporedi sa modulima spoljašnjeg opterećenja od sila ili momenata. Odnos odgovarajućih modula treba da bude manji od zadate male veličine ϵ . Uobičajeno je da se ϵ kreće u granicama $0.01 \div 0.05$ i predstavlja toleranciju za neuravnotežene sile.

U radu je kao kriterijum konvergencije uzimano da bude manji od ϵ onaj moduo neuravnoteženih sila, za koji je moduo spoljašnjih

nule. To znači, da ako je struktura opterećena samo silama ili samo momentima, onda je merodavan moduo neuravnoteženih sila, tj. momenata, respektivno.

Ako je u prvoj iteraciji kriterijum tačnosti zadovoljen, tj.

$$|S_{01}| < \epsilon \dots\dots\dots (6.6)$$

startuje se sa novim korakom, a ako nije, sa novom iteracijom u istom koraku.

8) Nova iteracija. Računanje priraštaja pomeranja.

Ukoliko kriterijum konvergencije nije zadovoljen, neuravnotežene sile postaju spoljašnje opterećenje u drugoj iteraciji. Rešava se jednačina strukture:

$$[K_{01}] \cdot \Delta u_{01} = \Delta S_{01} \quad \text{ili} \quad [K_{11}] \cdot \Delta u_{01} = \Delta S_{01}$$

iz koje sledi priraštaj pomeranja od dejstva neuravnoteženih sila.

Ako se radi potpunom Njutnovom metodom onda se u položaju $x_{01} + u_{01}$, tekuća konfiguracija, računa nova matrica krutosti $[K_{11}]$, a ako se radi modificiranom metodom Njutna, matrica krutosti $[K_{01}]$ se zadržava u svim iteracijama tekućeg (ovde prvog) koraka. Neki primeri pokazuju bolju konvergenciju potpunim, a neki modificiranim metodom, pa je zato u programu ostavljena mogućnost izbora potpunosti metode od 1 (modificirani metod) do ukupnog broja iteracija u koraku opterećenja (potpuni Njutnov metod - full Newton).

Ukupno pomeranje na kraju druge iteracije je:

$$u_{11} = u_{01} + \Delta u_{01}$$

Sa ovim vektorom pomeranja se ponavlja postupak od tačke 4 s tim što je sada srednja konfiguracija $\bar{x} = x_{01} + \frac{1}{2}u_{11}$, a krajnja $x = x_{01} + u_{11}$.

Ako postupak konvergira, on se ponavlja dok se tačnost ne zadovolji. Pritom se srednja konfiguracija uvek računa u odnosu na početnu, što odgovara principu totalnog Lagranža.

9) Praćenje konvergencije

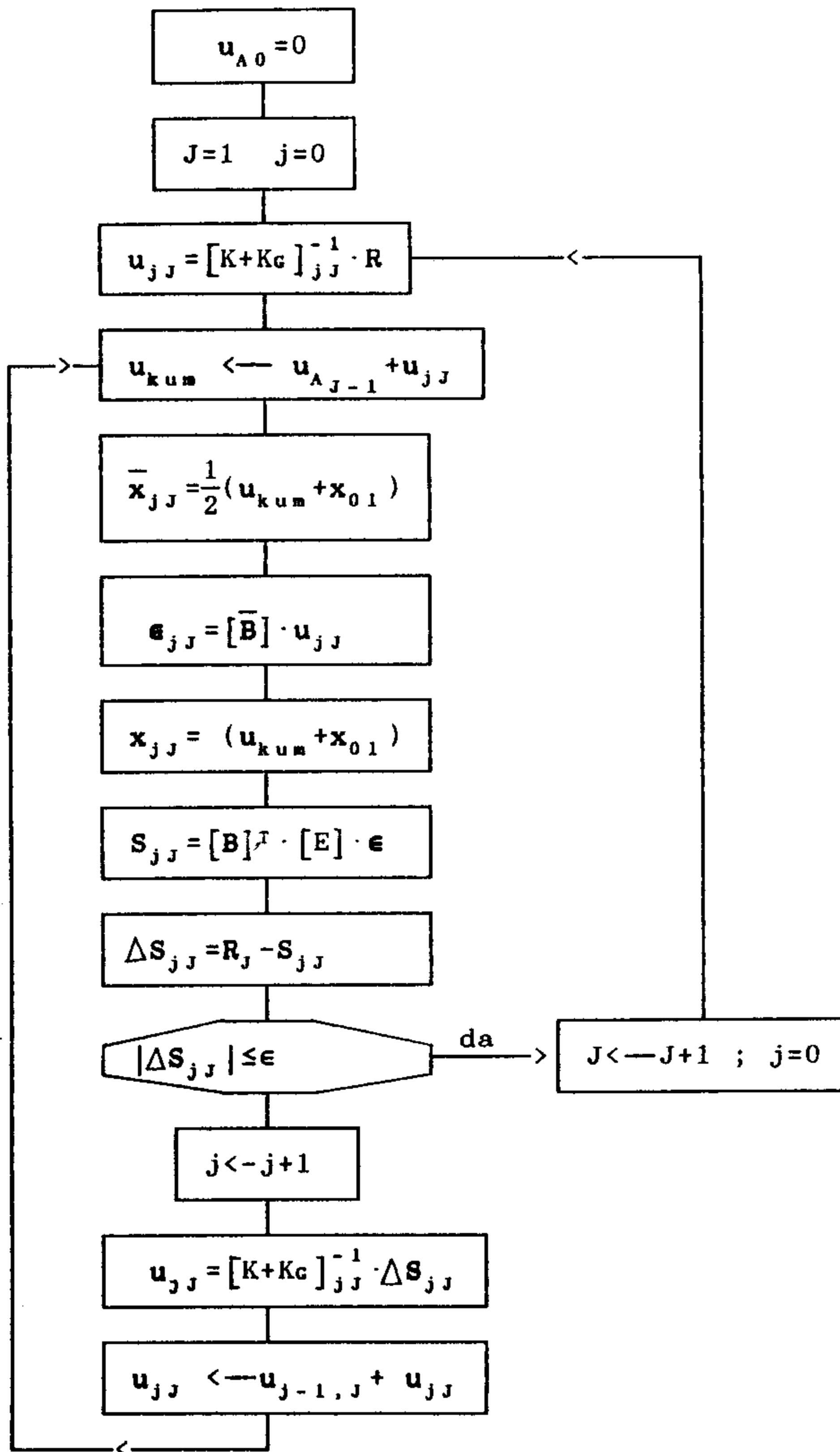
Ako se početno opterećenje odabere tako da je ugib mali, nema znatne razlike u brzini konvergencije sa varijantama od modificirane do potpune metode. Međutim, ako je pomeranje uo₁ znatno, neophodno je bar u drugoj iteraciji sračunati novu položajnu matricu krutosti da bi se obezbedila konvergencija rešenja. Ovo je evidentno na sl. 14, kriva b).

U radu je moduo neuravnoteženih sila u svakoj iteraciji uvek uporedivan sa onim iz prethodne iteracije, da bi se sagledao njegov tok. Ukoliko je on opadajući, to znači da postoji konvergencija, a ako nije, onda treba ponoviti korak ili sa manjim spoljašnjim opterećenjem ili sa nekom varijantom delimično modificiranog ili metoda punih iteracija.

10) Novi korak opterećenja

Kada se prelazi u naredni korak opterećenja, najpre se u početnoj tački koraka (A_1 na sl. 14) sračuna nova položajna matrica krutosti i njoj se doda geometrijska matrica krutosti (relacije 5.11÷5.13) i sa tom ukupnom matricom krutosti se ponavlja već opisani postupak iz prvog koraka.

Za korak J i iteraciju j u njemu, ceo postupak bi mogao da se prikaže sledećim algoritmom:

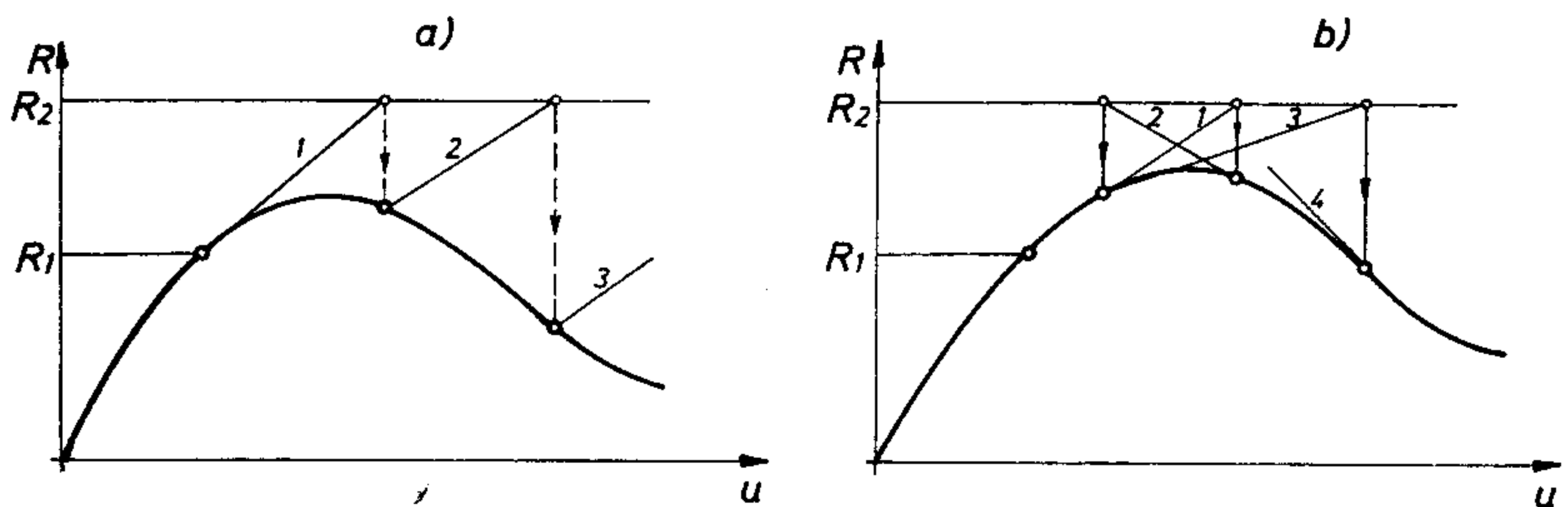


Sl. 15. Algoritam metode sa konstantnim opterećenjem u koraku

1.2 Metod zadatog modula pomeranja

1.2.1) Uvodne napomene

Njutnova procedura opisana u 1.1 nije efikasna za probleme izvijanja koje prati promena znaka determinante matrice krutosti, tj. postojanje tačaka ekstremuma u dijagramu pomeranje-opterećenje. Slika 16. jasno ilustruje nemogućnost procedure sa fiksnim opterećenjem u koraku u rešavanju problema izvijanja, tj. u praćenju ponašanja strukture u zoni postkritičnog opterećenja.



Sl. 16. Neefikasnost Njutnove metode u stacionarnoj tački

Ovaj problem je moguće prevazići promenom koraka opterećenja u okolini tačke ekstremuma uz istovremeno praćenje znaka determinante matrice krutosti. Umesto konstantnog koraka opterećenja i nalaženja pomeranja koje zadovoljava uslov ravnoteže, rešava se inverzan problem: zadaje se pomeranje ili moduo pomeranja nekog čvora ili svih čvorova u strukturi i traži se spoljašnje opterećenje sa kojim je ravnoteža zadovoljena. Ovakav prilaz se sreće u radovima nekih autora i teškoća njegove primene je u tome što zahteva da se propiše određeno, a ne bilo koje pomeranje, tj. moduo pomeranja, i što je nepodesan za praktičnu upotrebu ukoliko se ne iznađe postupak za automatsko prevazilaženje kritičnog opterećenja.

Poznato je da se u radovima mnogih autora sreću metode koje baziraju na primeni tzv. "konstantne dužine luka" (constant arc-length) ili "konstantnog priraštaja rada spoljašnjih sila" (constant increment of external work) i najčešće se kombinuju tako da se daleko od kritične tačke primenjuje prva, a u blizini kritične tačke druga metoda. U ovom radu je iznet postupak koji je po konceptu sličan metodi konstantne dužine luka, ali je modificiran tako da je primenljiv tokom celog numeričkog procesa. Proračun se odvija u više koraka sa promenljivim opterećenjem i propisanim modulom pomeranja za svaki korak. Taj moduo pomeranja je diktiran tokom numeričke procedure, tako da se zadovolje kriterijumi tačnosti i stabilnosti same procedure.

1.2.2) Restriktivna jednačina

Ono što predstavlja bitnu razliku između metode sa konstantnim opterećenjem u koraku i metode sa propisanim pomeranjem, tj. modulom pomeranja u koraku, jeste postojanje jedne restriktivne jednačine u drugom metodi, koja nije simultana jednačinama strukture, a kojom se izračunava faktor korekcije opterećenja i pomeranja, iterativno, sve dotle dok se ne zadovolji propisana tačnost za relativno pomeranje i za neuravnotežene sile. Postupak je dosta efikasan s obzirom na činjenicu da se jednačina strukture $[K] \cdot u = R$ ne remeti, a da je restriktivna jednačina, koja se uvodi, algebarska jednačina drugog stepena. Ona se formira u svakoj iteraciji, tako da se u potpunosti uklapa u inkrementalno-iterativni način proračuna.

Za ovaj metod, uz napomenu da se neće ponavljati ono što se podudara sa metodom opisanom u 1.1), faze proračuna bi bile sledeće:

1) Izbor početnog opterećenja i nalaženje linearnog rešenja

Treba formirati matricu krutosti u početnoj konfiguraciji, uzeti proizvoljno opterećenje R i podesiti ga (R_0) tako da se dobije

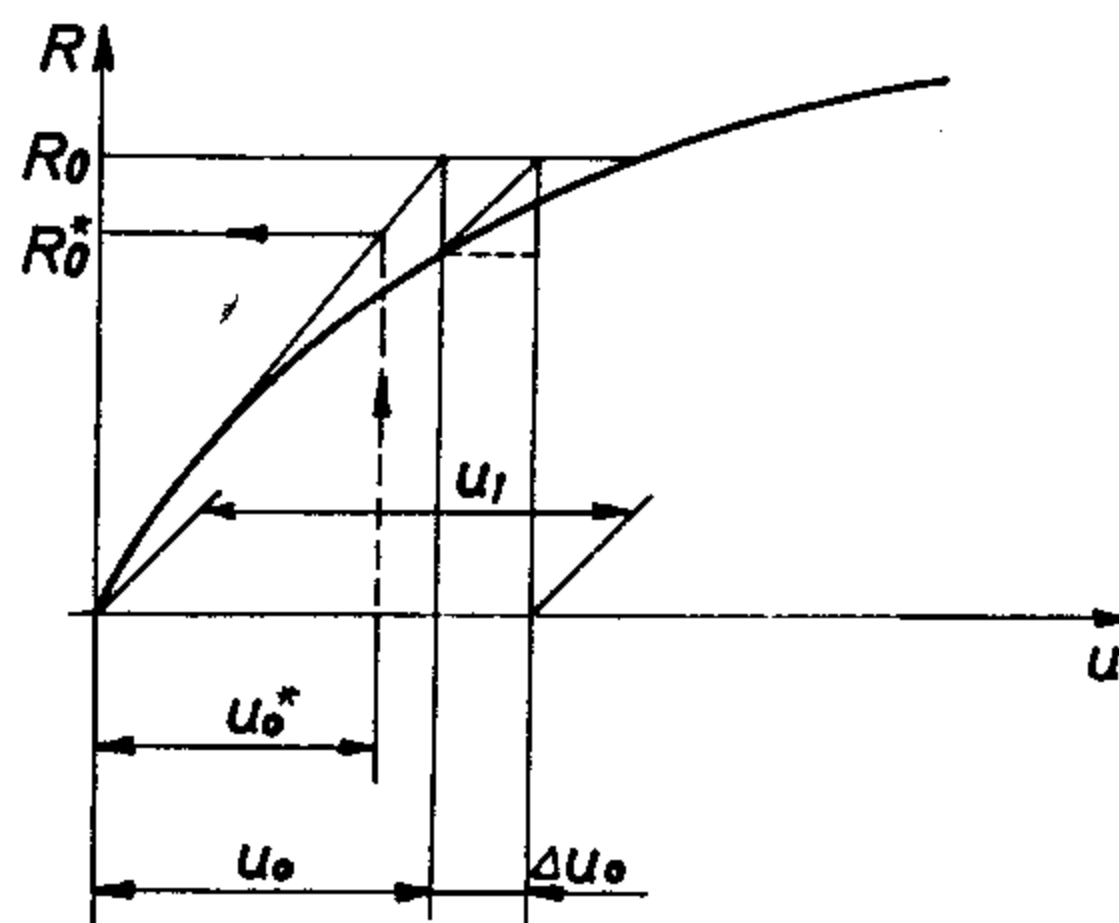
maksimalni ugib reda veličine debljine ljuske, tj. tangencijalno pomeranje u_0 .

Ovde je veoma važno pravilno izabrati početno opterećenje jer od modula linearnog rešenja zavisi veličina propisanog modula pomeranja, tj. tok cele numeričke procedure. U programskom paketu postoji jedan faktor kojim se množi spoljašnje opterećenje na početku koraka, tako da se uvek obezbede mala pomeranja i odgovarajuće Δl .

2) Nalaženje inkrementa pomeranja usled neuravnoteženih sila

Na isti način kako je opisano u postupku za Njutnove procedure, naći unutrašnje sile S_0 , neuravnotežene sile ΔS_0 i pomeranja od neuravnoteženih sila Δu_0 .

3) Računanje faktora korekcije opterećenja u koraku



Sl. 17. Korekcija spoljašnjeg opterećenja prema pomeranju

Do momenta nalaženja vektora $u + \Delta u_0$, tj. prve korekcije pomeranja u koraku, nema dodatne restriktivne jednačine. Ukoliko modul neuravnoteženih sila, $|\Delta S_0|$, (ovde se ustvari radi svuda o modulu sila ili momenata, i to ubuduće neće biti posebno naglašavano), ne zadovoljava kriterijum

$$|\Delta S_0| \leq \epsilon_0 \cdot |R_0|$$

pristupa se izračunavanju faktora korekcije opterećenja na

sledeći način: za vektor pomeranja u_0 sračunaju se moduli translatorskih i rotacionih pomeranja cele strukture $|u_{0T}|$ i $|u_{0R}|$, tj.

$$\Delta l_T = |u_{0T}|$$

$$\Delta l_R = |u_{0R}|$$

Prema očekivanom načinu deformisanja strukture, što se proceni prema geometriji strukture i vrsti spoljašnjeg opterećenja, usvaja se da restriktivna jednačina bude formirana od translatorskih pomeranja ili od rotacionih (zgodno je uzeti pomeranja ako je spoljašnje opterećenje sila, a rotacije ako je moment) ili da se formiraju dve jednačine ako postoje i sila i moment kao spoljašnje opterećenje, iz kojih će da proizađu dva faktora korekcije - jedan za silu, drugi za moment. U primerima koji su rađeni u ovom radu nije bilo slučajeva da postoji kombinovano opterećenje pa su svi rađeni sa jednom restriktivnom jednačinom, tj. koristi se Δl_T ili Δl_R , tako da je korišćena oznaka Δl .

Usvojeni ili sračunati moduo pomeranja Δl predstavlja veličinu koju treba dobiti u uslovima ravnoteže i prema tom zahtevu se koriguju vektor pomeranja i vektor spoljašnjeg opterećenja (faktor korekcije x). To znači da već dobijenom pomeranju u_1 treba dodati deo tangencijalnog pomeranja, tj. vektor kolinearan sa u_0 , tako da taj ukupni vektor pomeranja ima traženi moduo Δl , tj.:

$$(u_0 + \Delta u_0 + x \cdot u_0)^T \cdot (u_0 + \Delta u_0 + x \cdot u_0) = \Delta l^2 \quad \dots\dots\dots (7.1)$$

Iz (7.1) sledi kvadratna jednačina po x koja glasi:

$$x^2 \cdot u_0^T \cdot u_0 + 2x \cdot (u_0 + \Delta u_0)^T \cdot u_0 + (u_0 + \Delta u_0)^T \cdot (u_0 + \Delta u_0) - \Delta l^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (7.2)$$

Ako koeficijente uz x^2 , x i slobodan član označimo sa a , b i c , respektivno, jednačina (2) postaje:

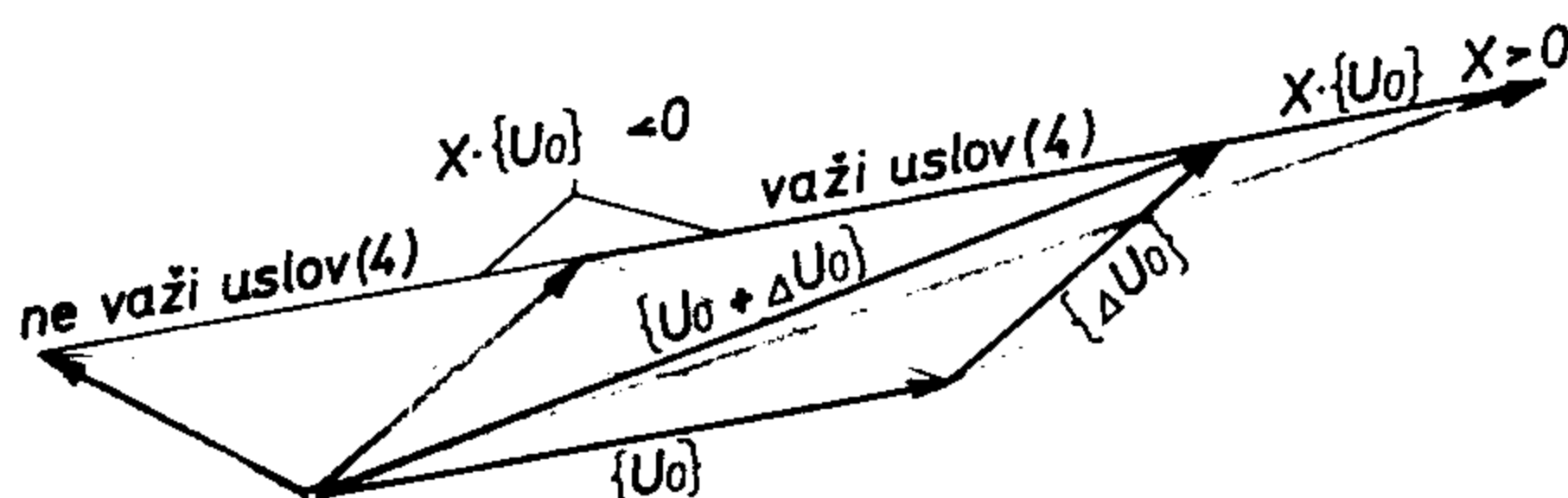
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots\dots\dots (7.3)$$

Pošto jednačina (3) ima dva rešenja, x_1 i x_2 , to znači da se dobijaju dva vektora pomeranja koji zadovoljavaju uslov (1). Prihvatljivo rešenje je ono koje ispunjava uslov:

$$u_0^T \cdot (u_0 + \Delta u_0 + x \cdot u_0) > 0 \quad \dots\dots\dots (7.4)$$

Objašnjenje za ovakav izbor korekcije je sledeće:

Ako se posmatra pomeranje jednog čvora, uslov (4) znači da ugao između vektora u_0 i vektora $u_0^* = u_0 + \Delta u_0 + x \cdot u_0$ mora da bude manji od $\pi/2$, tj., kao što se slike 18. vidi, da pozitivna



Sl. 18. Izbor faktora korekcije x

vrednost za korekciju x teorijski nije ograničena po apsolutnoj vrednosti, ali negativna jeste i to jednačinom:

$$x \cdot |u_0| < |u_0| + \frac{u_0 \cdot \Delta u_0}{|u_0|}, \text{ tj.}$$

$$x < 1 + \frac{u_0 \cdot \Delta u_0}{|u_0|^2} \quad \dots\dots\dots (7.5)$$

Uslov (4) je veoma bitno ograničenje, jer ukoliko on nije ispunjen, korigovani vektor u_0^* dovodi do divergencije rešenja i gubljenja stabilnosti numeričke procedure. Tvrdnja da korekcija x može da bude bilo koji pozitivan broj je sa aspekta korektnog toka pravca vektora pomeranja u_0^* i ne znači da će neka velika pozitivna vrednost da zadovolji i sve ostale uslove tačnosti i konvergencije koje treba ispuniti.

Ako su oba rešenja istog znaka i oba zadovoljavaju uslov (4), uzimamo ono koje je bliže tangencijalnom pomeranju, tj. ono rešenje za koje je proizvod $u_0^T \cdot u_0^*$ veći.

Ukoliko rešenja jednačine (3) nisu realna, to znači da je član koji je posledica neuravnoteženih sila suviše veliki i da korak

treba započeti sa znatno manjim opterećenjem. Ovaj problem je prevaziđen sukcesivnim polovljenjem spoljašnjeg opterećenja do dobijanja realnih rešenja. Ako se i posle određenog broja polovljenja opterećenja ne dobiju realna rešenja, ili je konvergencija spora, treba ići na metod punih iteracija, kojim se pouzdanije koriguju neuravnotežene sile.

1.2.3) Korekcija opterećenja

Kada je određeno korigovano pomeranje, treba izvršiti i korekciju spoljašnjeg opterećenja. Pošto je:

$$u_0^* = u_0 + \Delta u_0 + x \cdot u_0 \quad \dots\dots\dots(7.6)$$

to je ekvivalentna relacija, pod pretpostavkom da se matrica krutosti ne menja (ona se eventualno menja u položaju u_0^* , ali za računanje novog inkrementa Δu_1):

$$R_0^* = R_0 + \Delta S_0 + x \cdot R_0 \quad \dots\dots\dots(7.7)$$

S obzirom daje cilj da se neuravnotežene sile svedu na nulu, to znači da R_0^* biramo tako da pretpostavljamo da je $\Delta S_0 = 0$, pa sledi da spoljašnje opterećenje treba korigovati prema relaciji:

$$R_0^* = (1+x) \cdot R_0 \quad \text{za prvu iteraciju} \quad \dots\dots\dots(7.8.1)$$

$$R_i^* = R_i + x \cdot R_0' \quad \text{za } i-1 \text{ iteraciju} \quad \dots\dots\dots(7.8.2)$$

U novoj, drugoj iteraciji, spoljašnje opterećenje je R_0^* i za njega se ponavlja potpuno isti postupak kako je to rečeno u 1.1 za slučaj da se ide na sledeću iteraciju.

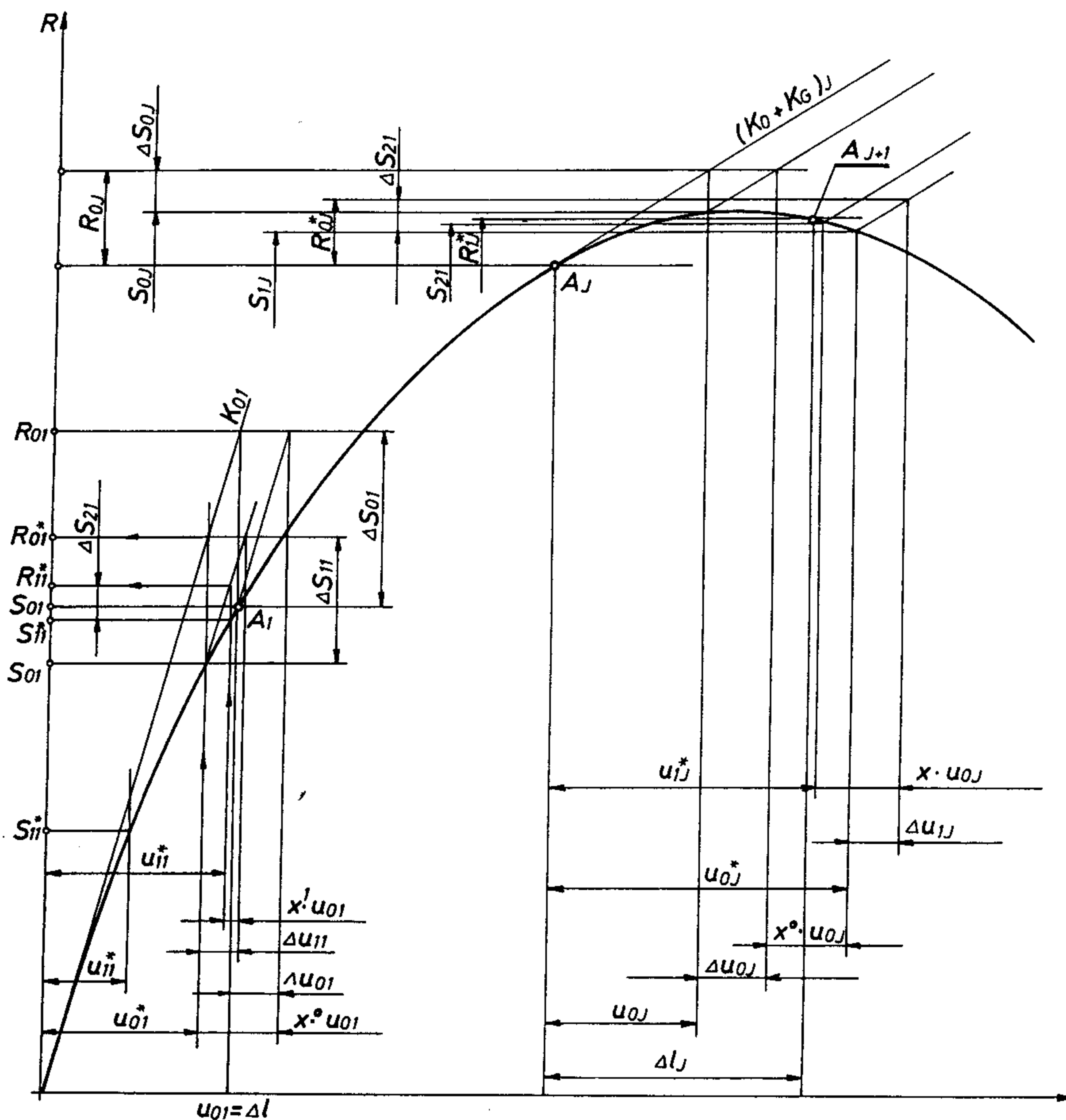
1.2.4) Provera konvergencije

Svaki put kada se izračuna korigovano pomeranje u_{i-1}^* (i -ta iteracija) računa se njegov moduo i traži da relativna greška u odnosu na korigovano pomeranje iz prethodne iteracije bude dovoljno mala, tj.

$$\frac{|u_0^* - u_0|}{|u_0^*|} < \epsilon \quad \text{za prvu iteraciju} \quad \dots\dots\dots(6.9.1)$$

$$\frac{|u_{i-1}^* - u_{i-2}|}{|u_{i-1}^*|} < \epsilon \quad \text{za ostale } (i > 2) \quad \dots\dots\dots(6.9.2)$$

Na sl. 19. je data šema algoritma sa zadatim modulom pomeranja



Sl. 19. Šema algoritma sa zadatim modulom pomeranja

Druga provera konvergencije i tačnosti sledi posle izračunavanja neuravnoteženih sila i može da se piše u obliku:

$$|R_0 - S_0| < \epsilon \text{ za prvu iteraciju} \dots\dots\dots (7.10.1)$$

$$|R_i - S_i| < \epsilon \text{ za ostale} \dots\dots\dots (7.10.2)$$

Kada su uslovi (9) i (10) zadovoljeni u prvom koraku i dobijena

ravnoteža za neko pomeranje $u_n^* \approx u_n$ (korekcija x dovoljno mala), startuje se sa novim korakom u kome imamo još i geometrijsku matricu krutosti. Postupak numeričkih izračunavanja je identičan postupku opisanom za prvi korak. Usvaja se da je opterećenje R_n^* sa kojim je završen prvi korak, početno opterećenje za drugi. Zahtevani moduo pomeranja Δl može da se odredi ponovo na isti način kao u prvom koraku, a može i da se zadrži onaj moduo sračunat u prvom. U programu je predviđen izbor Δl zavisno od prirode rešenja kvadratne jednačine, o čemu će biti komentara u numeričkim primerima.

Razlika između metoda sa propisanim modulom pomeranja i metoda sa propisanom veličinom opterećenja jeste u tome što se kod prvog algoritma svakom iteracijom vraćamo na početak koraka, tj. pomeranje dobijeno u jednom koraku je rezultat pomeranja iz zadnje iteracije, dok se kod drugog algoritma iteracije sukcesivno nadovezuju jedna na drugu.

1.2.5) Faktorizacija matrice krutosti

Važan korak pri rešavanju "snaping" i problema izvijanja je dekompozicija matrice krutosti. Na početku svakog koraka, uključujući i prvi, vrši se faktorizacija tangentne (zbir položajne i geometrijske) matrice krutosti,

$$[K] = [L] \cdot [D] \cdot [L]^T \dots\dots\dots (7.11)$$

u kojoj je $[L]$ donja trougaona matrica sa jediničnom dijagonalom, a $[D]$ dijagonalna matrica preko koje se određuje znak matrice krutosti. Neparan broj negativnih članova u matrici $[D]$ znači da je matrica krutosti promenila znak, tj. da je u dijagramu pomeranje-opterećenje pređena kritična tačka. Ukoliko je opterećenje pritom promenilo znak, onda proces može da se nastavi uobičajenim tokom. Ukoliko nije, treba smanjiti Δl (i srazmerno tome početno opterećenje u koraku zbog brže konvergencije) i

ponoviti isti korak. Programom je predviđeno sukcesivno polovljenje sve dok se ne ispuni uslov:

$$\text{sgn}[K_{01}] \cdot \text{sgn}R_{01} = \text{sgn}[K_{0J}] \cdot \text{sgn}R_{0J} \quad \dots\dots\dots(7.12)$$

gde je indeksom 0 označena prva iteracija, a indeksima 1 i J prvi i (J-1). korak, respektivno.

1.2.6) Neka zapažanja vezana za parametre x i Δl i njihov značaj za stabilnost numeričke procedure

U radovima nekih autora se u blizini kritične tačke primenjuje metod konstantnog priraštaja rada spoljašnjih sila (Dvorkin), dok drugi u toj zoni preporučuju malo Δl , a tokom celog procesa $x \leq 1$ (Criesfield). U ovom radu je pokazano da Δl u okolini kritične tačke ne mora da bude malo u odnosu na početno Δl i da ne postoji egzaktno ograničenje u pogledu apsolutne vrednosti korekcije x (uslov (4) je u tom smislu jedino ograničenje). Uslov (12) je veoma važan, jer ukoliko on nije ispunjen može da dodje, kao što će biti pokazano na numeričkim primerima, do vraćanja procesa unazad po istoj krivoj.

Još je interesantno zapaziti da u momentu postizanja konvergencije, za rešenja kvadratne jednačine (3) x_1 i x_2 važi:

$$x_1 \cdot x_2 \approx 0$$

$$|x_1| + |x_2| \approx 2$$

ukoliko se zada da je Δl u koraku moduo tangencijalnog pomeranja u prvoj iteraciji koraka. Ovo se jednostavno pokazuje korišćenjem Vijetovih formula, tj.

$$u_{0J}^T \cdot u_{0J} \cdot x^2 + 2x \cdot u_{0J}^T \cdot u_{1J} + u_{1J}^T \cdot u_{1J} - \Delta l^2 = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{u_{1J}^T \cdot u_{1J} - \Delta l^2}{u_{0J}^T \cdot u_{0J}} \approx 0 \text{ jer je pri postignutoj konvergenciji}$$

$|u_{1J}| \approx 1$, odakle sledi da je jedno od rešenja, n.pr. $x_1 \approx 0$.

$$\text{Pošto je } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ to je } x_1 + x_2 = -2 \frac{u_{1J}^T \cdot u_{1J}}{u_{0J}^T \cdot u_{0J}} = -2 \frac{1^2}{1^2} = -2$$

Ukoliko se ne odlučimo za $\Delta l = \text{const.}$ tokom cele procedure, već ga računamo u svakom koraku kao moduo tangencijalnog pomeranja u

prvoj iteraciji, ova relacija između rešenja može korisno da posluži kao kriterijum konvergencije, jer je znatno brže izračunati zbir rešenja x_1+x_2 , nego ići kompletnom procedurom, tj: najpre korigovati vektor pomeranja, zatim proveriti znak skalarnog proizvoda tog vektora i vektora iz prethodne iteracije, pa izabrati rešenje i korigovati opterećenje i najzad naći neuravnotežene sile i njihov moduo. U situaciji kada se želi brzo rešenje, ovakva provera je zadovoljavajuća.

Da bi se u startu svakog koraka izbegli imaginarni koreni kvadratne jednačine (3), moguće je Δl na početku koraka izabrati tako da ono bude funkcija pomeranja od neuravnoteženih sila kojoj treba odrediti minimum. To je moguće izvesti jednostavnim matematičkim operacijama polazeći od uslova da diskriminanta kvadratne jednačine (3) bude pozitivna:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0 \quad \dots\dots\dots(7.13)$$

Zamenjujući koeficijente a , b i c , za prvu iteraciju u koraku J (13) postaje:

$$[(u_{0J} + \Delta u_{0J})^T \cdot u_{0J}]^2 - (u_{0J}^T \cdot u_{0J}) \cdot [(u_{0J} + \Delta u_{0J})^T \cdot (u_{0J} + \Delta u_{0J}) - \Delta l^2] \geq 0 \quad \dots\dots\dots(7.14)$$

Ako su vektori, Δu_{0J} i u_{0J} dužine N , tj. ako je N broj slobodnih pomeranja, razvijajući levu stranu nejednačine (14) dolazi se do relacije

$$\Delta l^2 \geq \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N [(u_{0J})_i \cdot (u_{0J} + \Delta u_{0J})_j - (u_{0J})_j \cdot (u_{0J} + \Delta u_{0J})_i]^2 \right) / \sum_{i=1}^N (u_{0J})_i^2 \quad \dots\dots\dots(7.15)$$

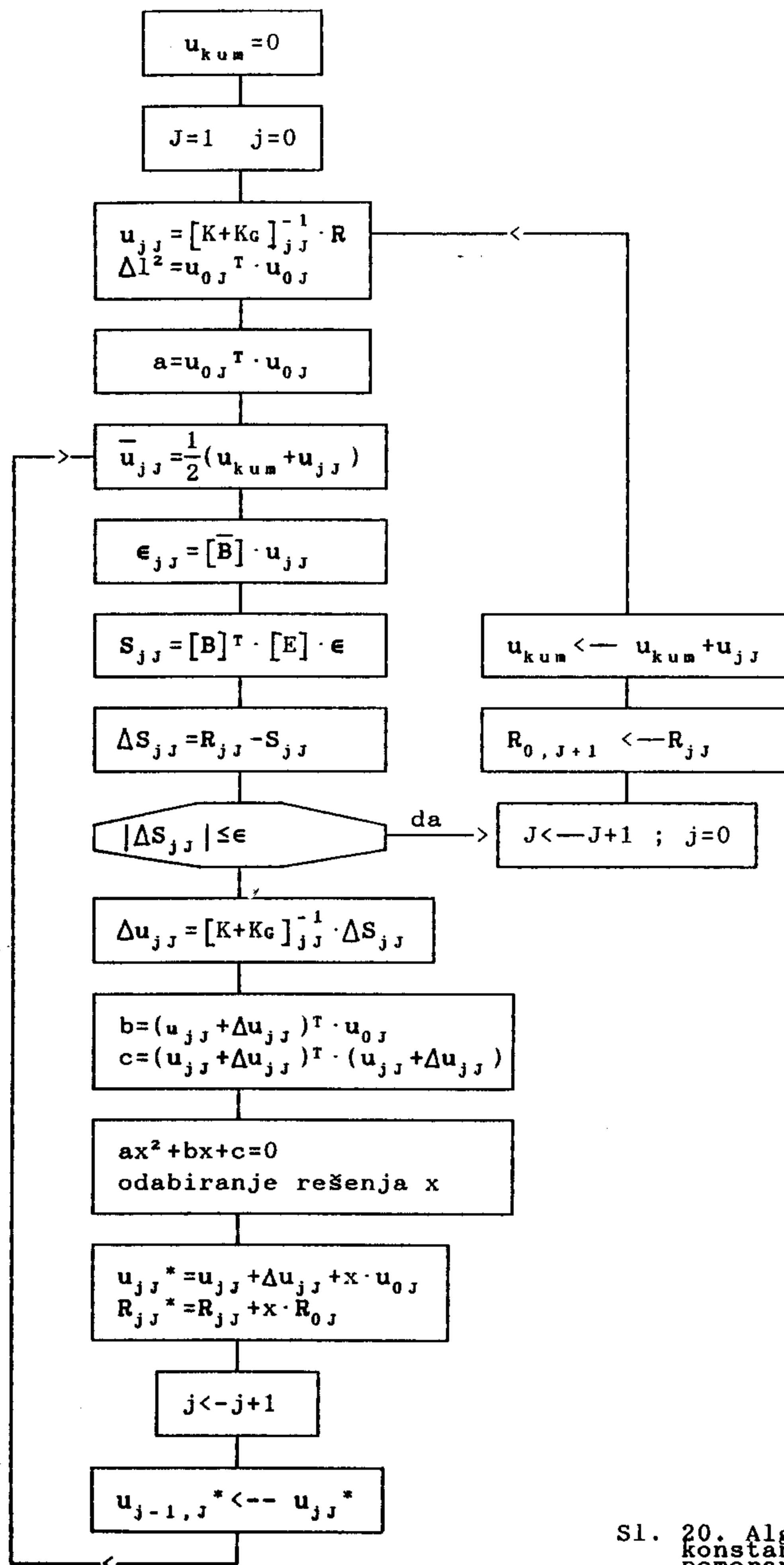
Uslov (15) omogućava da se prilikom korekcije spoljašnjeg opterećenja odabere takav moduo pomeranja koji omogućava realna rešenja kvadratne jednačine (3). Praktično, ako se spoljašnje opterećenje uzme proizvoljno, ne vodeći računa da se dobiju mali ugibi, pa se usled velikih neuravnoteženih sila dobiju velika pomeranja Δu_{0J} za Δl^2 će da se dobije veliki broj koji praktično

nema smisla, jer to znači da je prekoračen moduo pomeranja koji odgovara kritičnom opterećenju. Zato Δl treba ograničiti takvim opterećenjem sa kojim se dobijaju realni brojevi za korekciju x i koje izaziva mala pomeranja, ukoliko se radi sa konstantnom matricom krutosti u koraku, a moguće je ići i sa nešto većim pomeranjima ako se radi metodom punih iteracija u koraku.

1.2.7) Izbor stepena modificiranosti metode

Što se tiče izbora broja korekcija matrice krutosti u jednom koraku, koji ide od 1 za modificirani metod do nekog proizvoljno izabranog maksimalnog broja iteracija, zapaženo je da je konvergencija brža ako se geometrijska matrica krutosti sračuna samo na početku koraka i u koraku menja samo položajna matrica krutosti za metod punih iteracija. Pošto se geometrijska matrica krutosti računa preko napona, tj. unutrašnjih sila koje nisu u ravnoteži sa spoljašnjima, pa neuravnotežene sile mogu da budu znatne, to se tokom koraka dobijaju nerealne geometrijske krutosti koje usporavaju konvergenciju ili čak čine proces numerički nestabilnim. Kod nastanka većih pomeranja, gde su veća i pomeranja od neuravnoteženih sila, treba korigovati položajnu matricu krutosti bar u jednoj iteraciji, jer se time dobija u brzini konvergencije. Različiti numerički primeri se različito ponašaju u toku numeričke procedure sa istim kriterijumima, o čemu će biti reči kroz primere, a postojanje te šarolikosti ponašanja je uslovilo veći broj kontrolnih postupaka u programu nego što je to za svaki od primera pojedinačno potrebno, da bi se algoritam maksimalno uopštio i bio primenljiv u što je moguće većem broju slučajeva.

Ovaj metod bi mogao da se prikaže sledećim algoritmom:

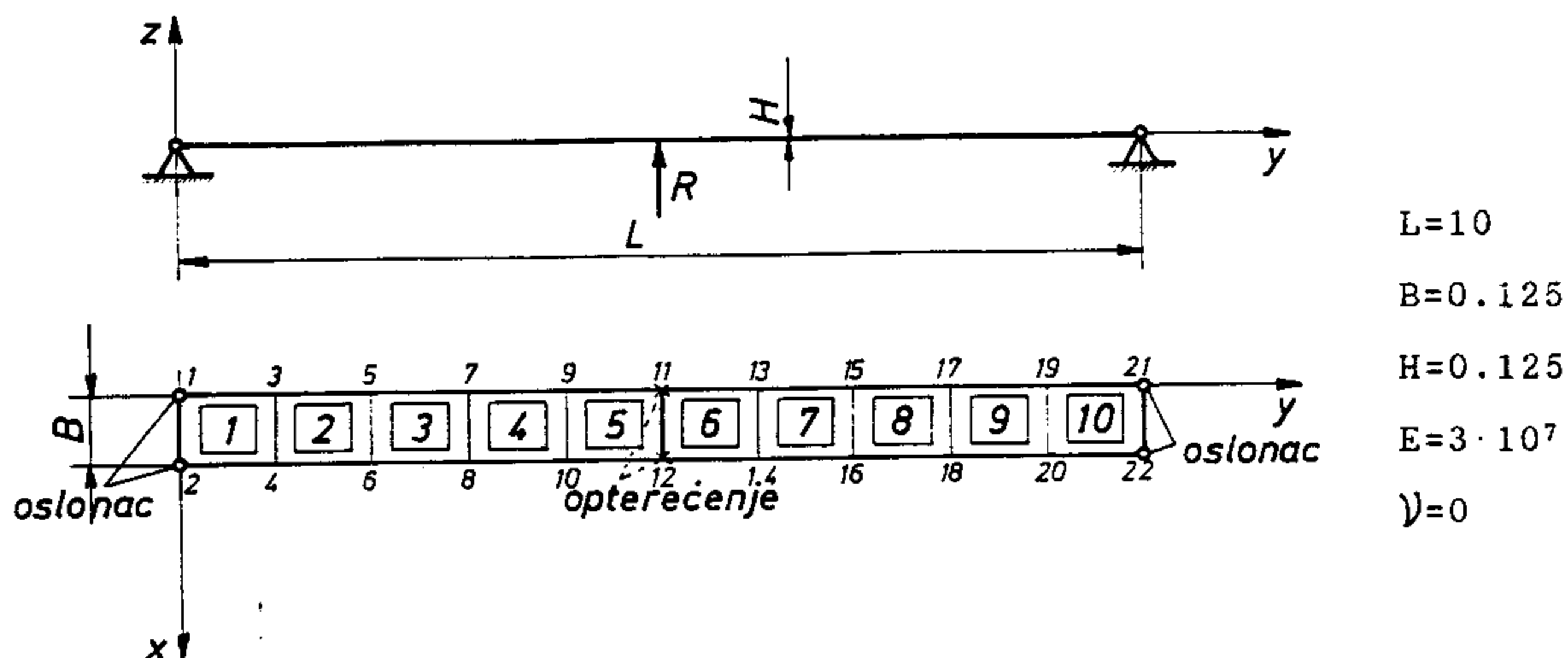


Sl. 20. Algoritam metode za konstantni moduo pomeranja u koraku

2. NUMERIČKI PRIMERI

1. Greda na dva nepokretna oslonca

Ovo je jednostavan primer koji može da se nađe u literaturi sa rešenjima ugiba i reakcija oslonaca, tako da je zgodan za testiranje. Dimenzije i mreža su dati na sl. 21.



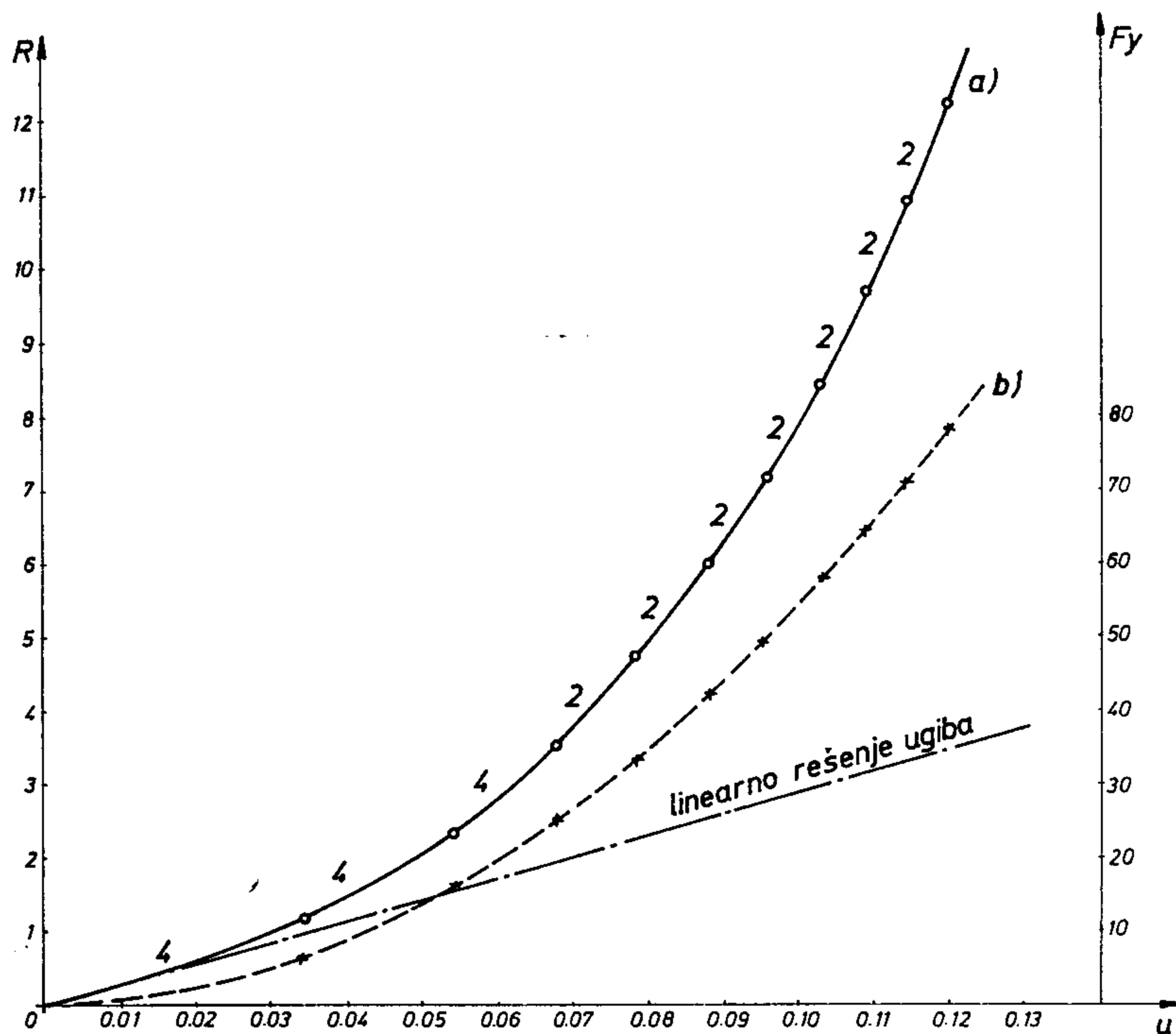
sl.21. Greda na dva nepokretna oslonca

Primer je rađen selektivnom integracijom $2 \times 2 + 1 \times 1$. U svim čvorovima je ograničeno pomeranje u_x i rotacije ϕ_y i ϕ_z .

a) Rešavanje metodom zadatog nivoa opterećenja

Zadata je vertikalna sila R u čvorovima 11 i 12 (2×6.1) koja je ravnomerno raspodeljena u 10 koraka opterećenja. Matrica krutosti je računata za prve dve iteracije svakog koraka (ovo se odnosi na položajnu matricu krutosti, dok je geometrijska računata samo u prvoj). Dozvoljeni moduo neuravnoteženih sila je 5% od spoljašnjeg opterećenja. Za ovaj primer je interesantno napomenuti da nije mogao da se uradi modificiranom metodom, tj. kada se matrica krutosti računa samo u prvoj iteraciji. Pri takvom pokušaju, moduo neuravnoteženih sila, koji je u prvoj iteraciji prvog koraka iznosio 17.44, je u toku 30 iteracija spao na 9.20, što je veoma velika vrednost u poređenju sa modulom spoljašnjih sila za

prvi korak (0.863). Kada je matrica krutosti korigovana u drugoj iteraciji, brzina konvergencije je bila zadovoljavajuća i broj iteracija za svaki korak je dat na sl. 22.



Sl. 22. Rezultati metoda konstantnog nivoa opterećenja

a) Vertikalno pomeranje opterećenih čvorova 1 i 12

b) Bočna reakcija zgloba u čvoru 1

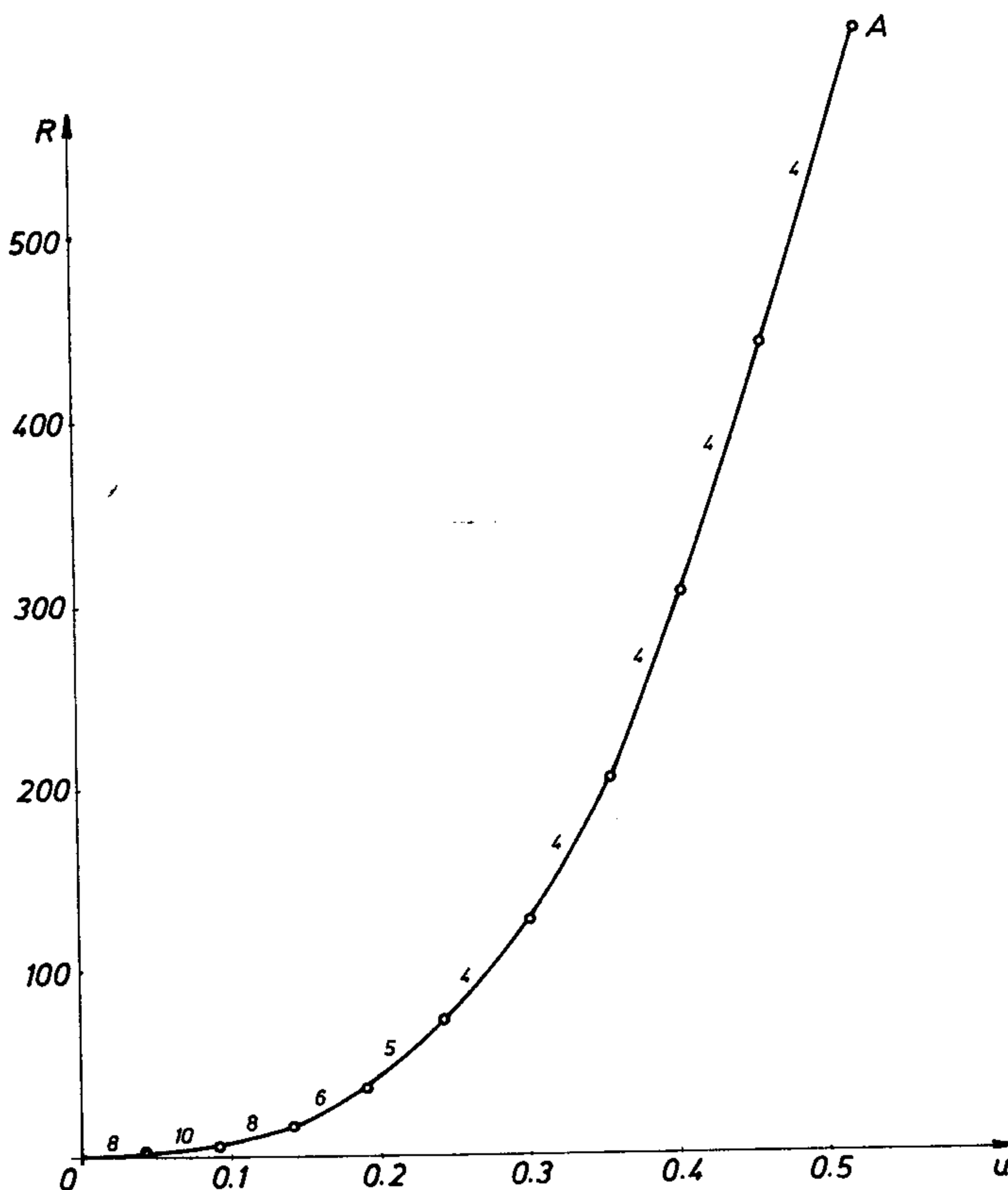
tabela 1.1

korak	a)	b)
1	3	4
2	3	4
3	4	4
4	3	2
5	3	2

Primer je urađen i metodom punih iteracija i u tabeli 1.1 je dat broj iteracija pri punom i delimičnom iteriranju (kolona "a" su pune iteracije, a kolona "b" delimične).

b) Metod zadatog modula pomeranja

Isti primer je rađen i metodom zadatog modula pomeranja. Početna sila R je odgovarala sili u jednom koraku (2×0.61) pri računanju metodom pod a). Zadati moduo pomeranja je moduo linearnog rešenja



sl. 23. Vertikalno pomeranje čvora 11 u zavisnosti od opterećenja - rezultat metode konstantnog modula pomeranja

pri opterećenju početnom silom, tj. za $R=2 \times 0.61$, $u_{z1}=0.04124$, $\Delta l=0.12876$. Ovom metodom je rađeno računajući matricu krutosti samo na početku svakog koraka, a konvergencija je postignuta jer je opterećenje kroz iteracije korigovano, tako da su neuravnotežene sile tom korekcijom smanjivane. Na sl. 23 je dat dijagram pomeranje-opterećenje u kome je naznačen i broj iteracija u svakom koraku.

Upoređujući slike 22 i 23 lako je zapaziti da se metodom zadatog modula pomeranja u koraku došlo do znatno većih pomeranja i opterećenja, mada se startovalo sa istim početnim podacima. Razlog je što ovakva i ovako opterećena struktura ima karakteristiku očvršćavanja, a rađeno je tako što se opterećenje pri kome je postignut traženi moduo pomeranja u prvom koraku uzme kao početno opterećenje za drugi korak, zatim se u drugom koraku sa njim nađe tangentno pomeranje i njegov moduo uzme kao željeni moduo u drugom koraku i tako redom, tako da je moduo traženog pomeranja Δl progresivno rastao, što je dovelo do davanja mnogo duže karakteristike pomeranje-opterećenje, uz približno isti utrošak kompjuterskog vremena.

Još jedan numerički rezultat je interesantno konstatovati. Kada je ovom metodom rađeno sa početnim opterećenjem $R(2 \times 1.22)$, tj. dva puta većim, i nađen moduo tog linearnog pomeranja koji je usvojen kao traženi moduo u prvom koraku, dobili su se na kraju prvog koraka rezultati:

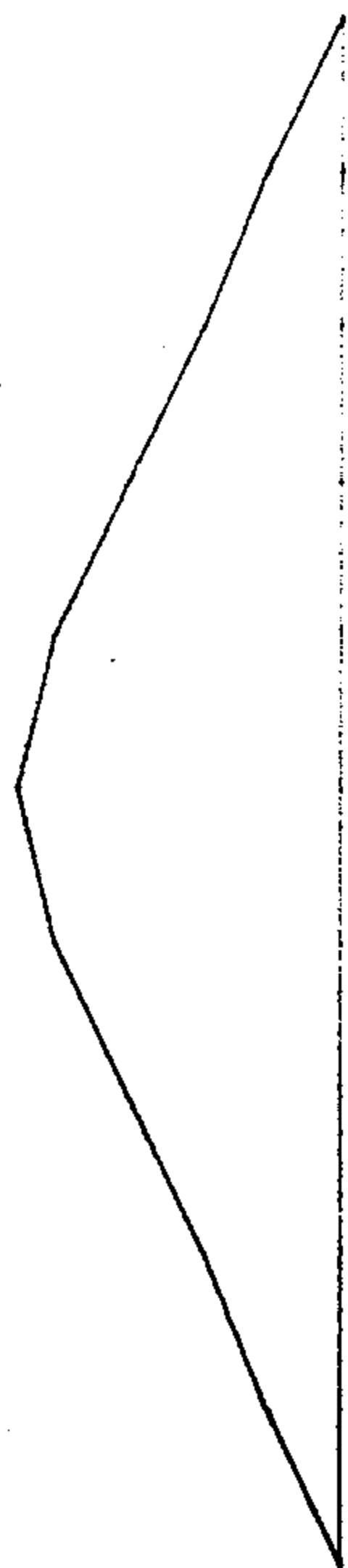
- ugib sredine grede: 0.08355
- opterećenje: 5.484
- potreban broj iteracija za tačnost od 5% : 30

Međutim, kada je drugi korak startovan kako je prethodno opisano, usled relativno velikog opterećenja, a samim tim i velikog traženog modula pomeranja za drugi korak, došlo je do divergencije - korekcija x je rasla, tako da su se za nju u jedanaestoj iteraciji drugog koraka dobila imaginarna rešenja.

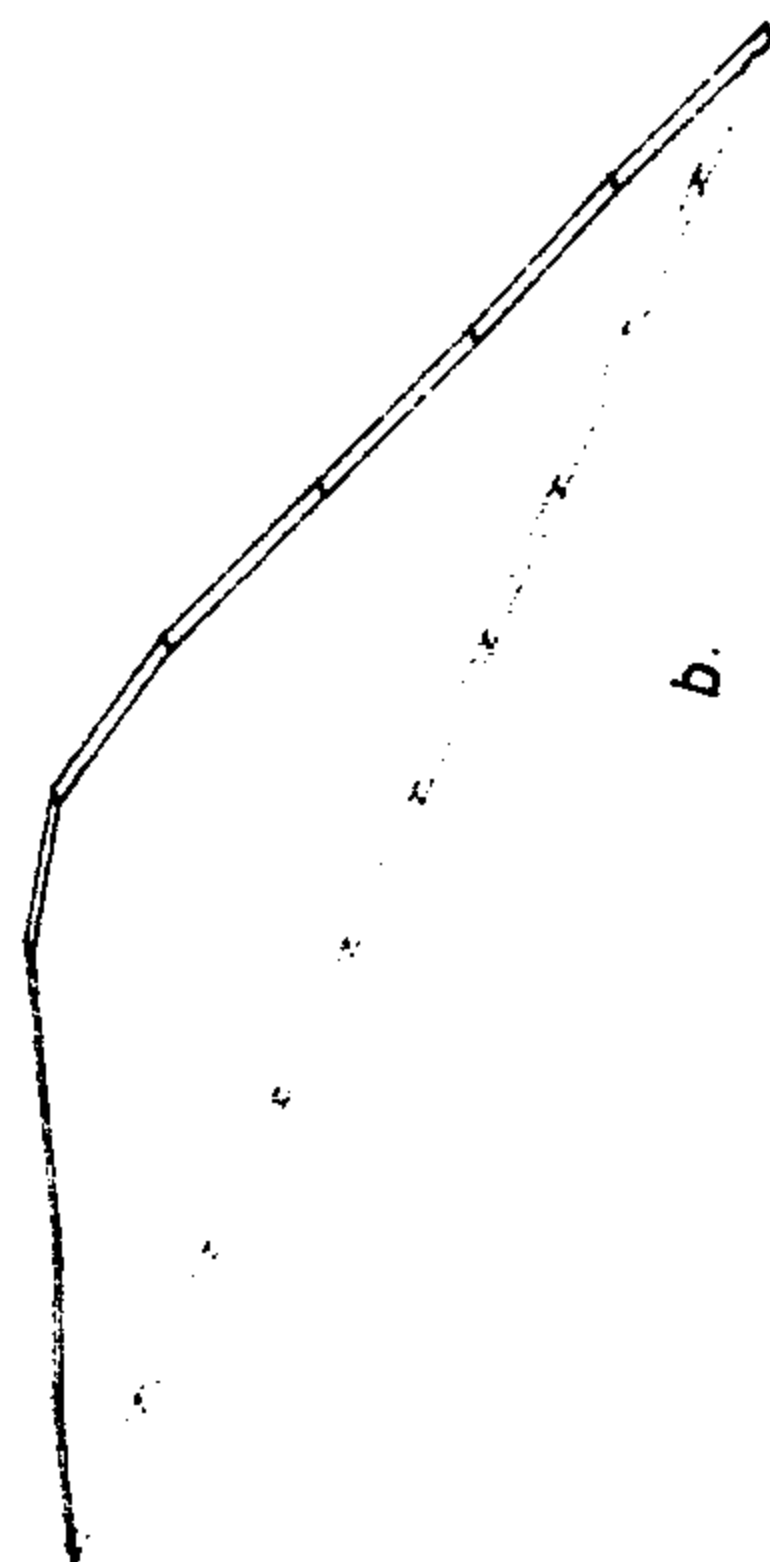
Ova konstatacija ide u prilog tvrdnji da treba voditi računa da početna pomeranja u koraku ne predju polovinu debljine ljuske. Ovo je u programu regulisano tako što se u prvoj iteraciji svakog koraka maksimalni ugib poređi sa debljinom ljuske i spoljašnje opterećenje se koriguje tako da maksimalni ugib u mreži strukture bude manji od $H/2$.

Na početku svakog novog koraka određuje se znak determinante ukupne matrice krutosti. Ona je u ovom primeru uvek pozitivno definitna.

Na slici 24 je data prostorna konfiguracija početnog i pomerenog stanja, a numeričke vrednosti odgovaraju poslednjoj tački u dijagramu na sl. 23, tj. dobijeni su metodom konstantnog modula pomeranja u koraku. Pri crtanju deformisane konfiguracije pomeranja su uvećana pet puta.



a.



b.

Sl. 24. Početna i deformisana konfiguracija grede na dva
nepokretna oslonca, opterećene vertikalnom silom na
sredini
a) u vertikalnoj ravni
b) u prostoru

2. Dvostrana konzola

Ovaj primer se razlikuje od prethodnog samo po graničnim uslovima. Najpre je rađen metodom sa konstantnim opterećenjem u koraku. Sila R je iznosila 2×1.22 , a dozvoljena neuravnoteženost 5%. U tabeli 2.1 je dat broj iteracija za prvih pet koraka opterećenja i to:

- a) položajna matrica krutosti se preračunava u svakoj iteraciji (metod punih iteracija)
- b) položajna matrica krutosti se preračunava u prve dve iteracije (delimično modificirani metod)
- c) položajna matrica krutosti se preračunava samo u prvoj, kao i geometrijska (modificirani metod)

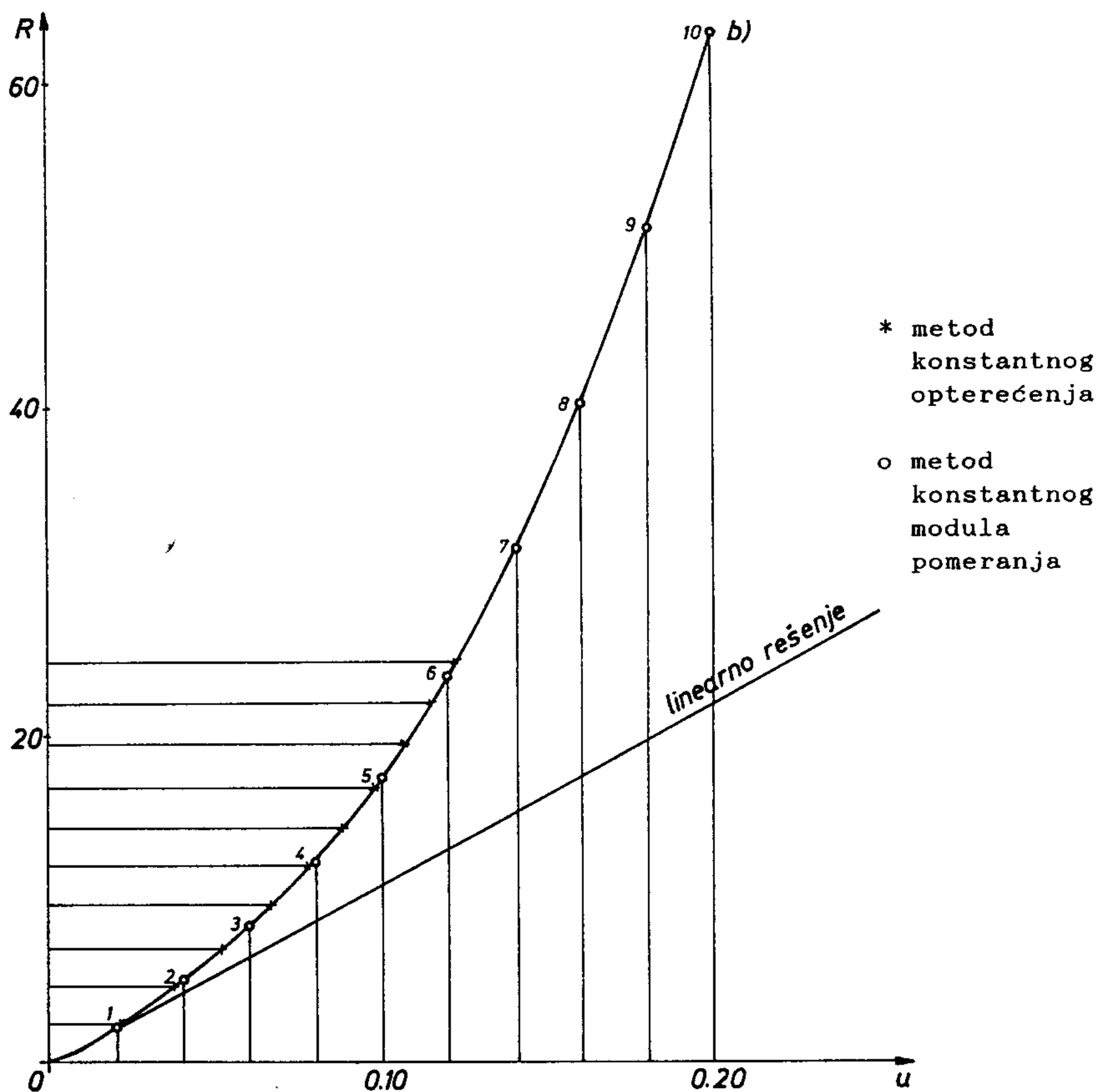
I ovaj primer spada u grupu fenomena "očvršćavanja" strukture i tokom rada nije bilo nikakvih numeričkih teškoća niti metodom sa konstantnim korakom opterećenja niti metodom sa konstantnim modulom pomeranja u koraku. Za metod konstantnog modula pomeranja

tabela 2.1

korak	a)	b)	c)
1	2	2	4
2	2	3	4
3	2	3	4
4	2	3	4
5	2	3	3

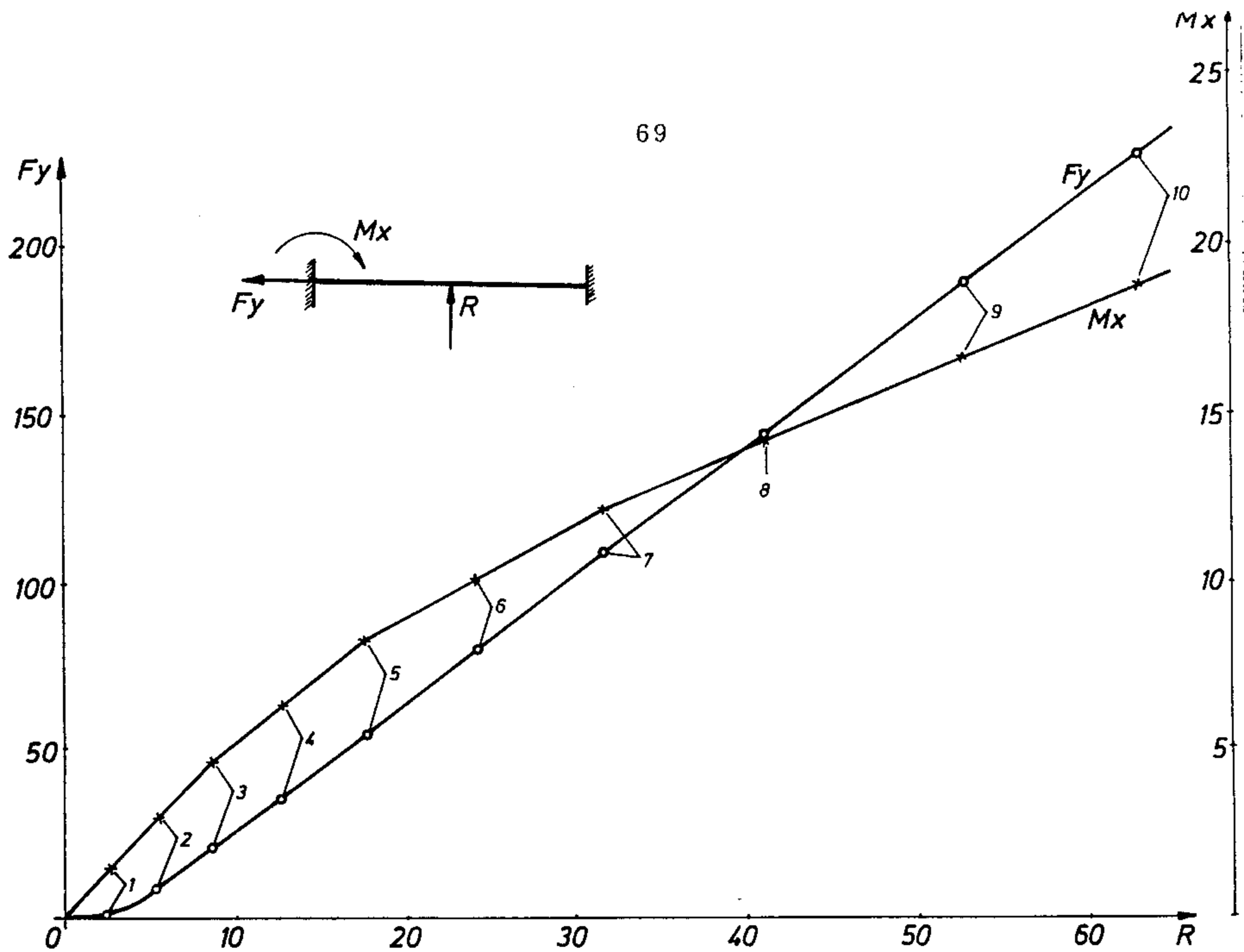
u koraku, Δl je birano kao i kod oslonjene grede: u prvom koraku je to moduo linearnog rešenja, a u narednim koracima moduo tangentnog pomeranja na početku koraka, s' tim što je početno opterećenje za svaki korak bilo ono iz prethodnog koraka, za koje je zadovoljena ravnoteža sa propisanom tolerancijom.

Determinanta ukupne matrice krutosti je uvek pozitivno definitna. Na sl. 25 je dat dijagram pomeranje-opterećenje za oba metoda, pri čemu je rađeno sa modificiranim iteracijama, a na sl. 26 zavisnost aksijalne reakcije i momenta uklještenja od veličine spoljašnjeg opterećenja.



Sl. 25. Ugib sredine dvostrane konzole zavisno od opterećenja

- * metod konstantnog opterećenja
- o metod konstantnog modula pomeranja



Sl. 26. Zavisnost reakcija F_y i M_x od spoljašnjeg opterećenja
(tačke 1÷10 odgovaraju istim tačkama na sl. 25, kriva b)

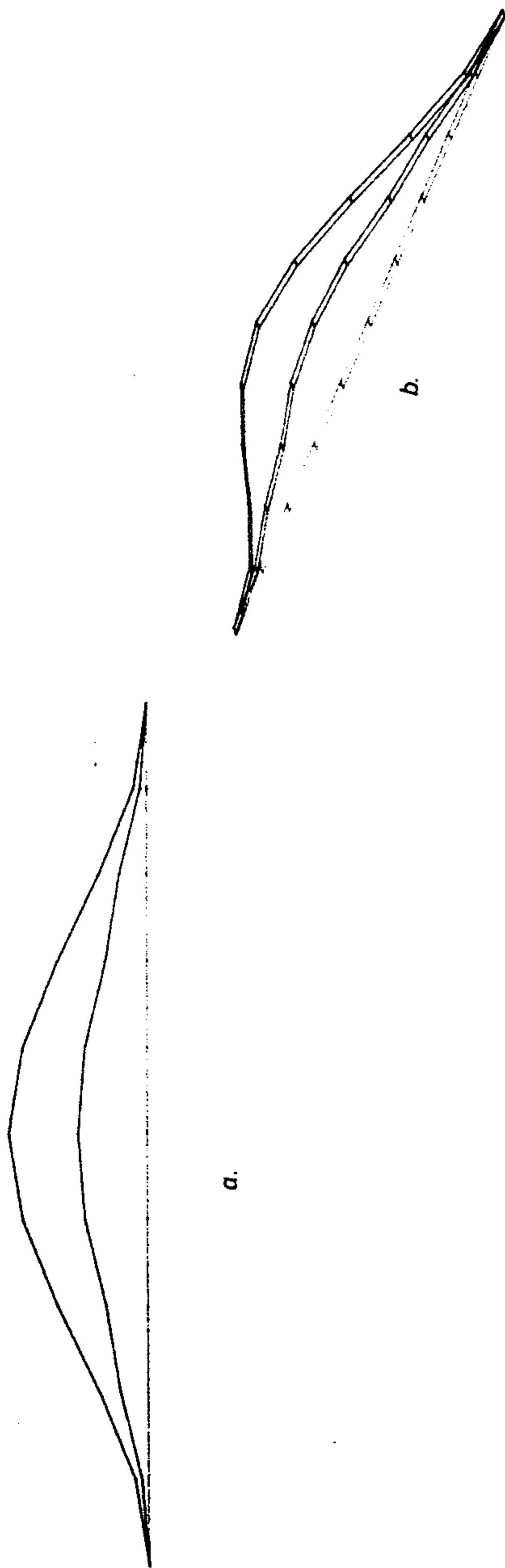
tabela 2.2

korak	a)	b)	c)	d)
1	2	4	3	3
2	2	4	4	4
3	2	4	4	4
4	2	4	4	4
5	2	3	4	4
6	2	3	4	4
7	2	3	4	4
8	2	3	4	4
9	2	3	4	4
10	2	3	4	4

U tabeli 2.2 je dat broj iteracija u koraku i to za:

- a) konstantni korak opterećenja i pune iteracije
- b) konstantni korak opterećenja i modificirane iteracije
- c) konstantni moduo pomeranja u koraku i pune iteracije
- d) konstantni moduo pomeranja u koraku i modificirane iteracije

Na sl. 27 je data prostorna nedeformisana i deformisana konfiguracija koja odgovara tačkama 5 i 10 na sl. 25 pri čemu su pomeranja uvećana 10 puta.



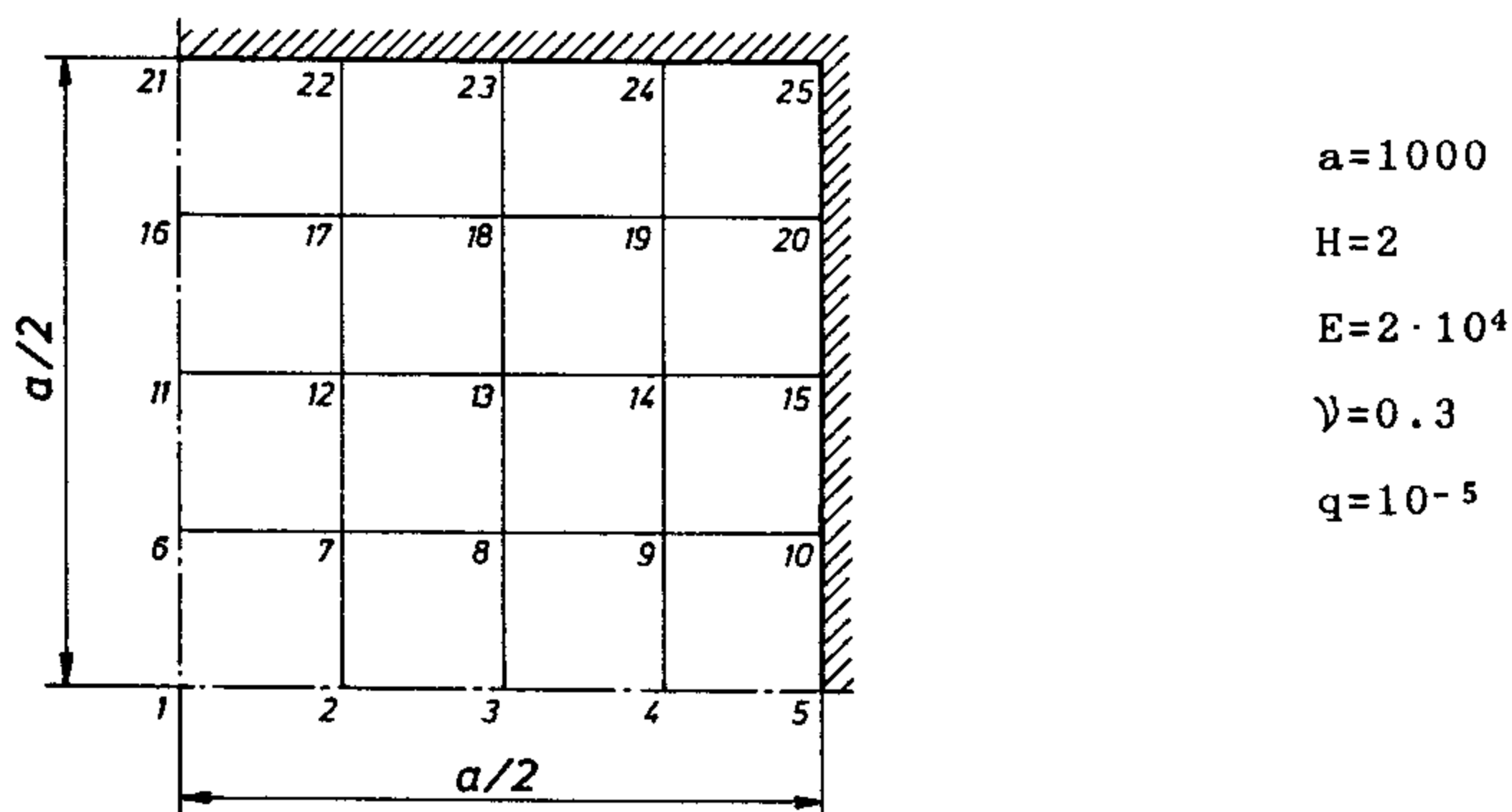
a.

b.

S1. 27. Početna i deformisane konfiguracije dvostrane konzole,
opterećene vertikalnom silom na sredini
a) u vertikalnoj ravni
b) u prostoru

3. Uklještena, kontinualno opterećena ploča

I ovo je klasičan primer očvršćavanja strukture. S obzirom na simetriju strukture, rađena je četvrtina ploče.



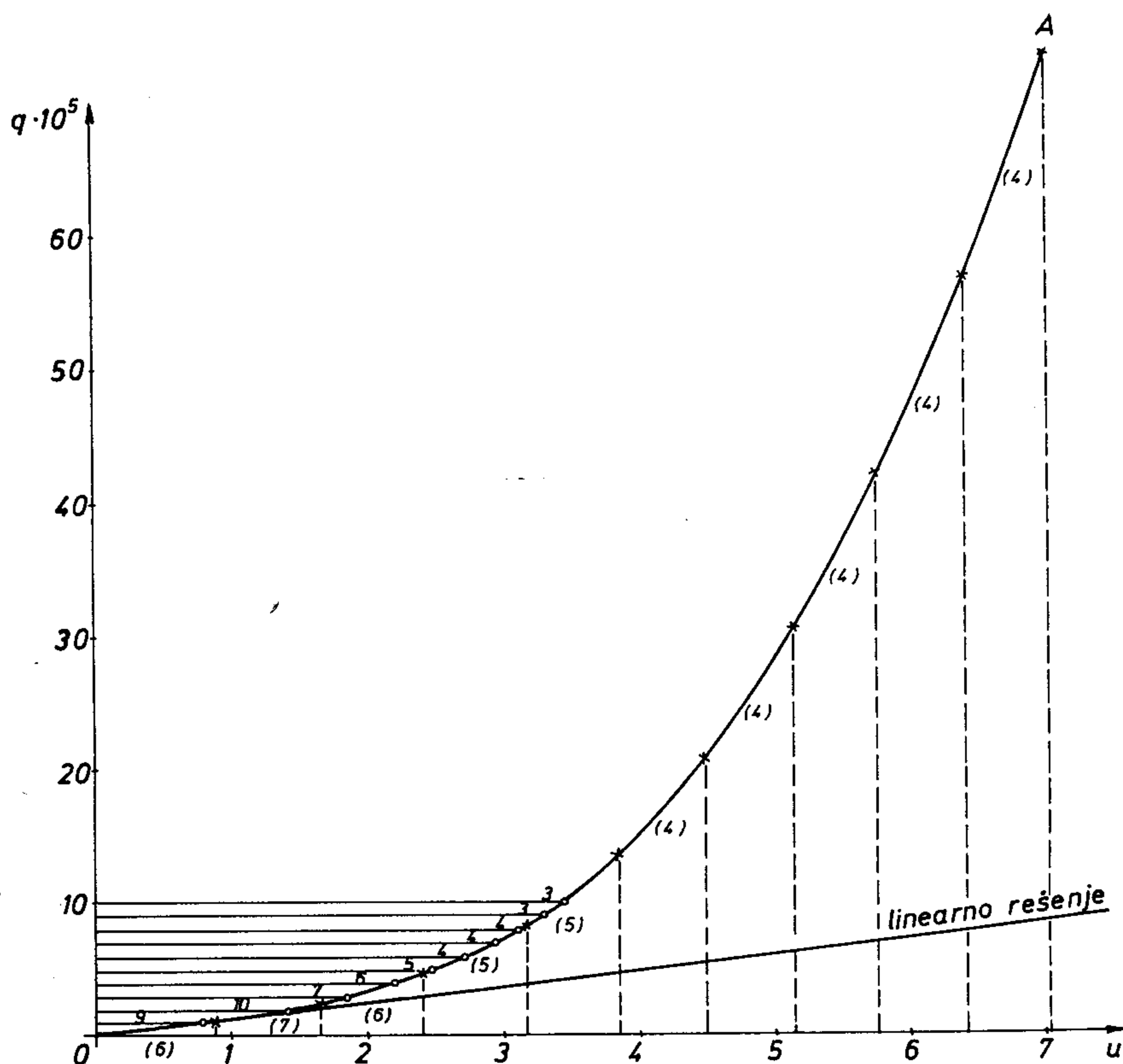
Sl. 28. Mreža i dimenzije ploče

Primer je rađen, kao i prethodna dva, sa obe metode i obe varijante iteracija (pune i modificirane). Pošto se radi o očvršćavanju strukture, čija karakteristika pomeranje-opterećenje nije suviše strma, to je razlika između broja iteracija u koraku za jednu metodu sa punim i modificiranim iteracijama neznatna, pa je na sl. 29. dat ugib centra ploče za modificirane metode sa konstantnim opterećenjem i konstantnim modulom pomeranja u koraku u zavisnosti od specifičnog opterećenja q . Rezultati su dobijeni za toleranciju za neuravnotežene sile od 5%.

Kao i do sada, determinanta ukupne matrice krutosti je uvek pozitivna.

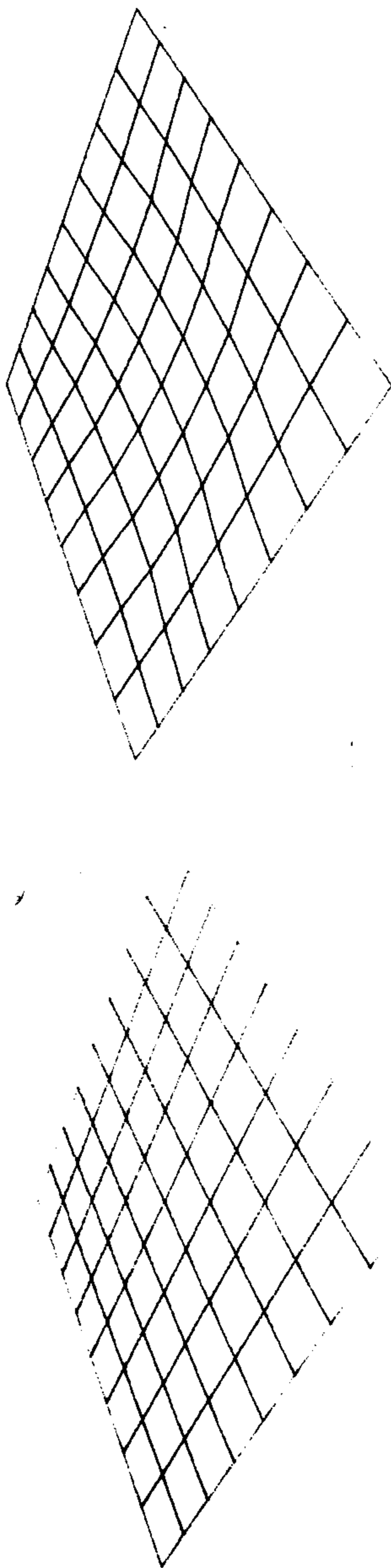
Na sl. 30 je data prostorna konfiguracija početne i pomerene strukture na kraju desetog koraka (tačka A u dijagramu na sl. 29), pri čemu su pomeranja uvećana deset puta. U ovom primeru je Δl u radu sa metodom konstantnog modula pomeranja bilo

konstantno u svim koracima, a propisano je kao moduo linearnog rešenja (prvi korak, prva iteracija).



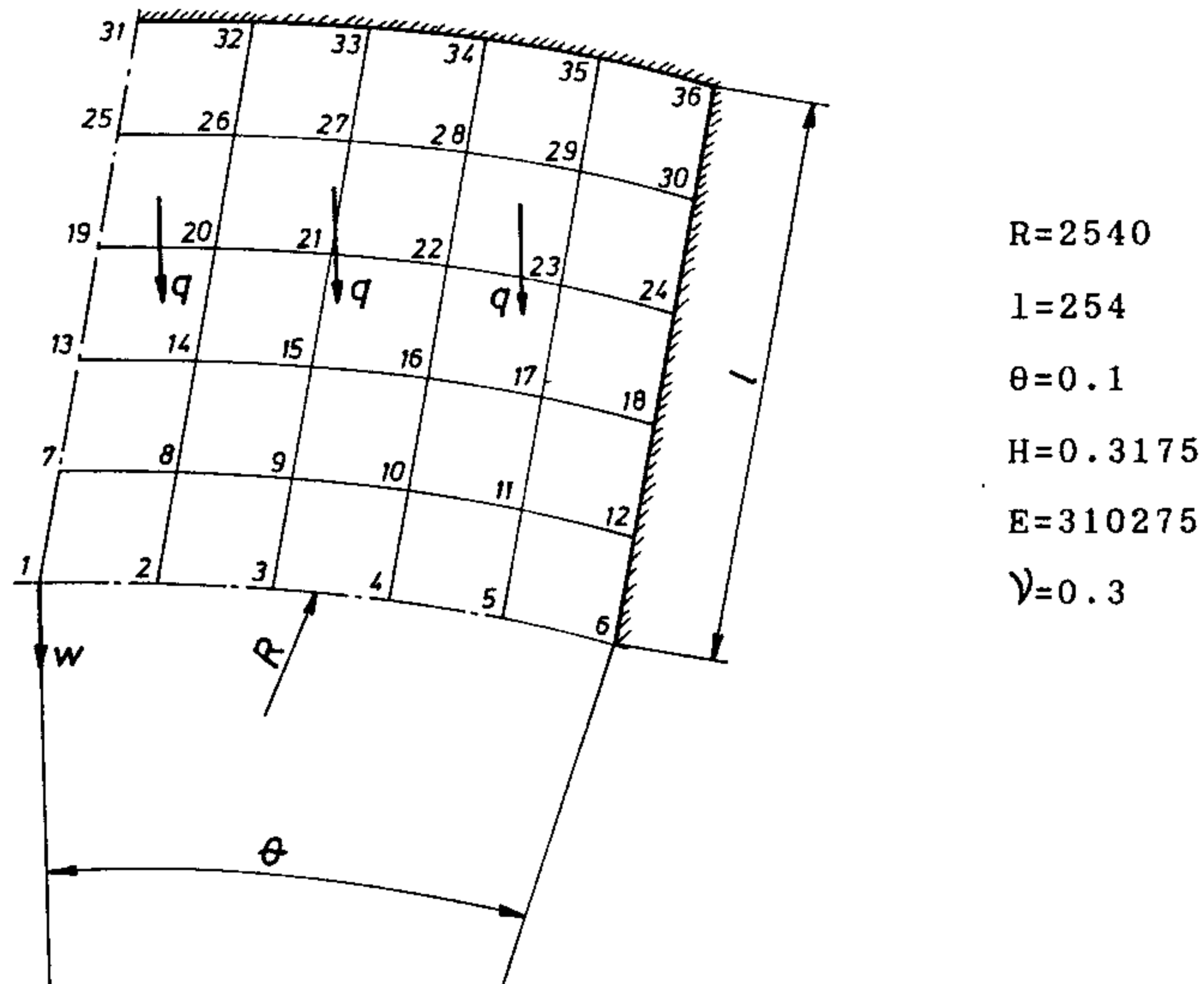
Sl. 29. Ugib centra uklještene ploče u zavisnosti od specifičnog opterećenja

- o metod konstantnog koraka opterećenja
- * metod konstantnog modula pomeranja



Sl. 30. Početna (levo) i deformisana (desno) konfiguracija
uklještene, kontinualno opterećene ploče

4. Plitka, cilindrična ljuska, kontinualno opterećena



Sl. 31. Plitka, cilindrična ljuska, kontinualno opterećena

Na sl. 31 je prikazana četvrtina plitke, cilindrične ljuske pod ravnomerno raspodeljenim vertikalnim opterećenjem. I ovaj primer ima karakteristiku očvršćavanja. Najpre je rađen sa konstantnim korakom opterećenja i računanjem matrice krutosti samo na početku koraka. Za $q=0.05$ (specifično opterećenje po jedinici površine u jednom koraku), dobijeni su rezultati u tabeli 4.1.

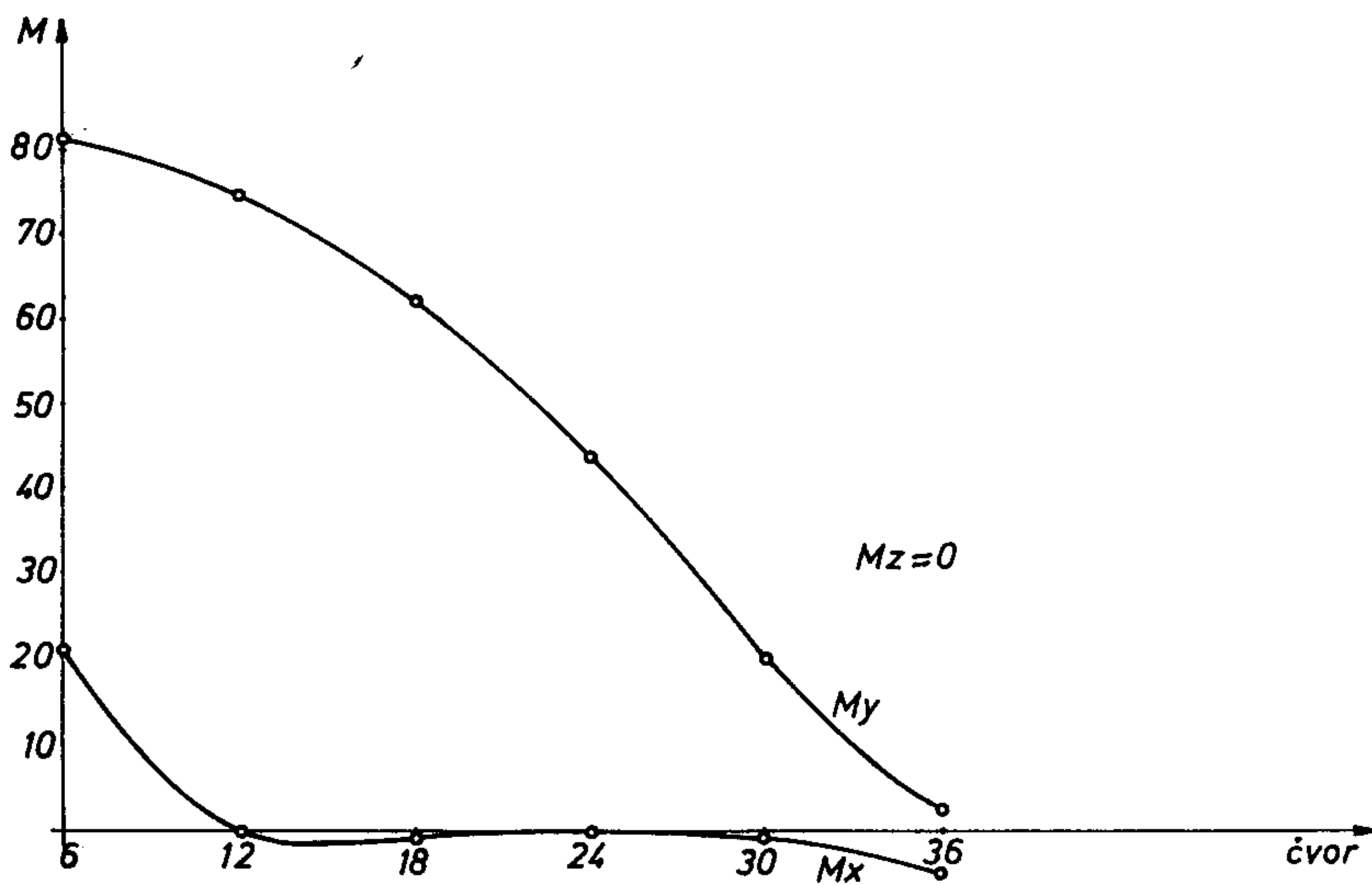
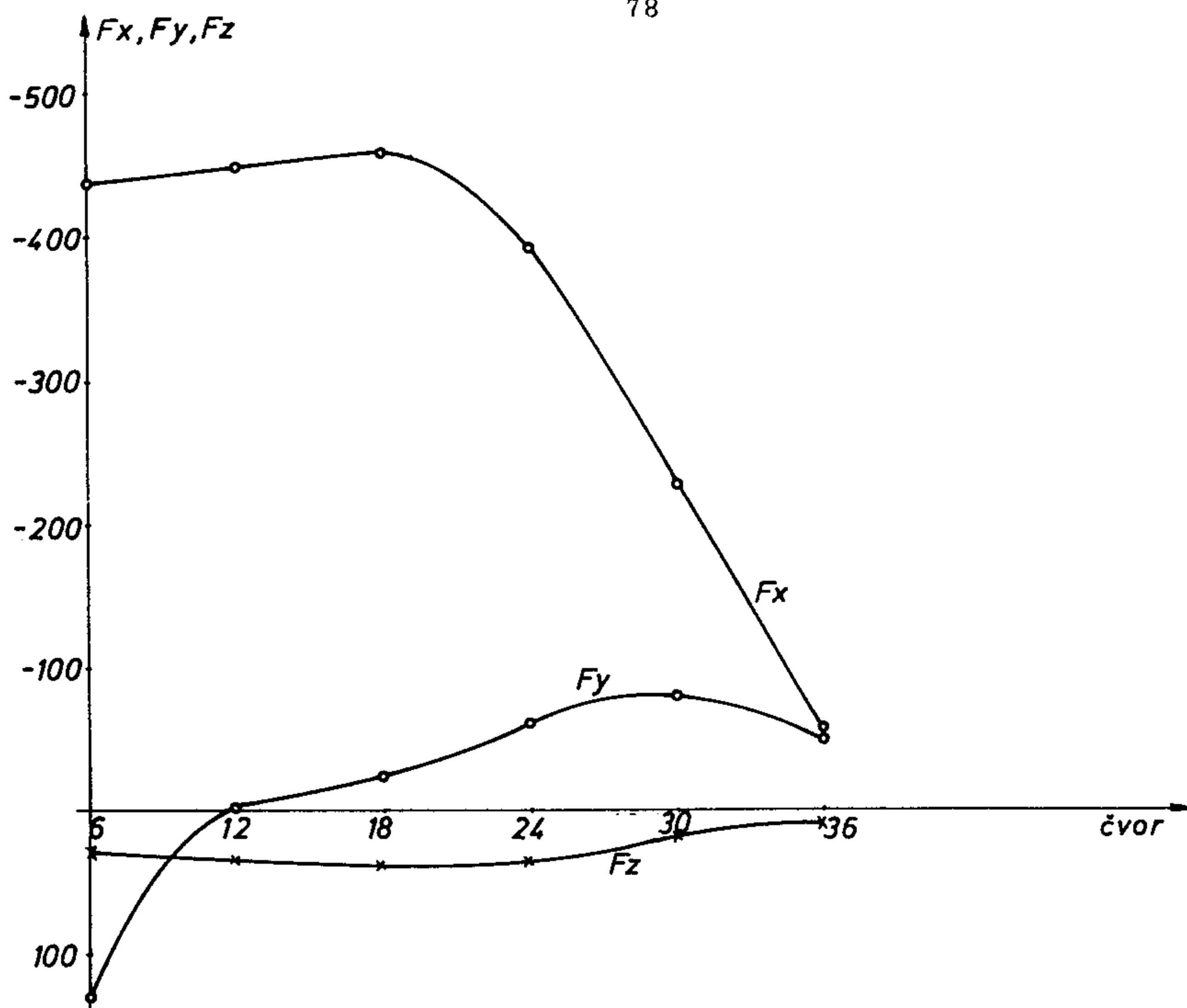
tabela 4.1

korak	br. iter	ugib w_1	opter.
1	3	0.06112	q
2	5	0.14559	$2q$
3	14	0.32222	$3q$
4	-	-	$4q$

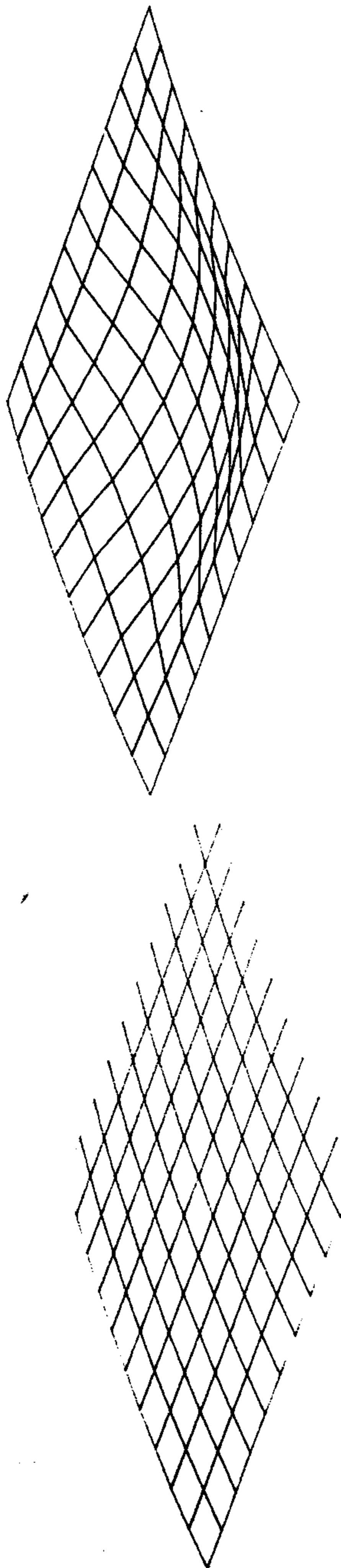
U četvrtom koraku je došlo do divergencije i u osmoj iteraciji su pomeranja prešla u zonu "overflow". U drugom pokušaju je samo smanjen korak opterećenja pet puta ($q=0.01$). Za prvih 15 koraka se došlo do ugiba 0.32294, a u sledećem, šesnaestom, se broj iteracija povećao na 9, pri čemu je na kraju koraka dobijen ugib 0.41540. U sedamnaestom koraku dolazi do divergencije, moduo neuravnoteženih sila raste (mada znatno sporije jer je sitniji korak opterećenja) i proces se prekida dostizanjem predvidjenih 30 iteracija. Može da se zaključi da bi dalje smanjivanje koraka u cilju postizanja konvergencije dovelo do veoma malog koraka u blizini prevojne tačke (sl. 32) i da to nije način da se ta tačka prevaziđe. Zato je sa istim opterećenjem po koraku (0.01) broj iteracija u kojima se preračunava matrica krutosti povećan na 2, tako da je prevojna tačka u dijagramu pomeranje-opterećenje prevaziđena korekcijom matrice krutosti (sl. 32.a).

Kada je isti primer radjen metodom sa konstantnim modulom pomeranja u koraku, konvergencija je postignuta sa modulom koji odgovara linearnom tangencijalnom pomeranju pri specifičnom opterećenju $q=0.05$ i sračunavanjem matrice krutosti samo na početku koraka. Ti rezultati su prikazani na sl. 32.b, gde je na svakom luku, koji odgovara jednom koraku, naznačen i broj iteracija koji je bio potreban da moduo neuravnoteženih sila bude manji nego 5% od modula spoljašnjih sila.

Na sl. 33. su date reakcije duž uklještene ravne ivice cilindra, a na sl. 34 prostorna konfiguracija početne i pomerene konfiguracije, koja odgovara tački A na sl. 32.b.

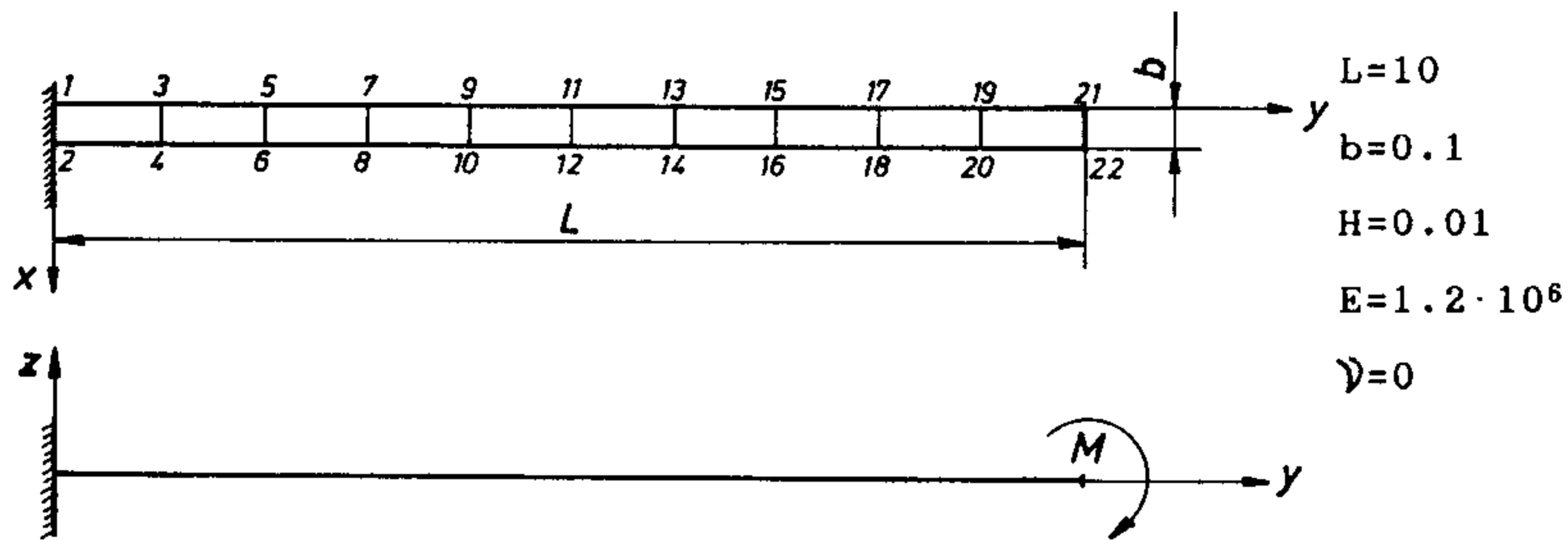


Sl. 33. Momenti uklještenja duž prave ivice ljuske



Sl. 34. Početna (levo) i deformisana (desno) konfiguracija cilindrične ljuske, kontinualno opterećene; sve ivice su uklještene

5. Konzola opterećena momentom savijanja



Sl. 35. Geometrija i mreža konzole

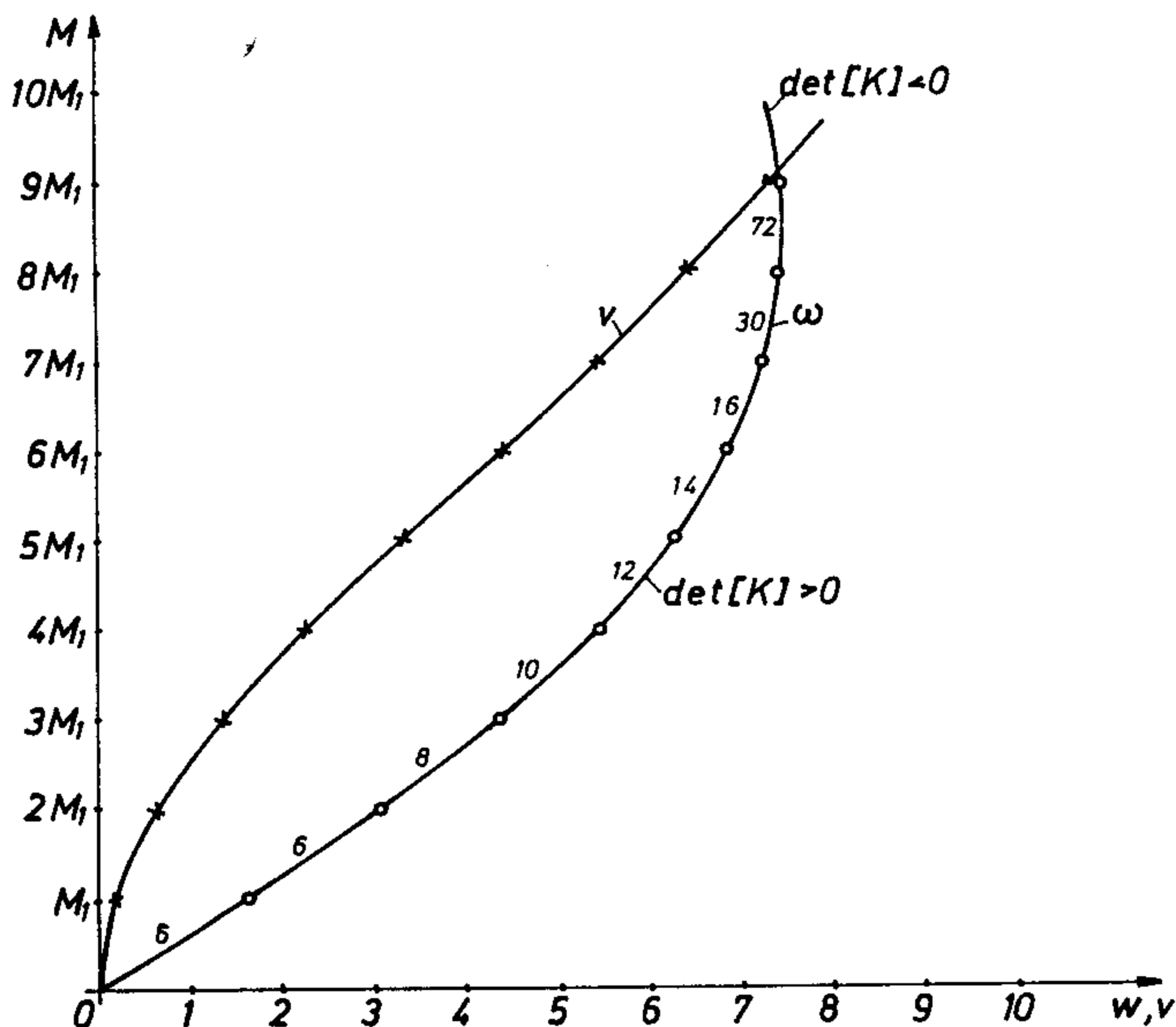
Ovde se radi o veoma tankoj ljusci koja je izložena velikim pomeranjima. Kada je rađeno metodom sa konstantnim korakom opterećenja, sa momentom $M_k = 0.628 \cdot 10^{-3}$ po koraku, dobijeno je linearno rešenje za čvorove na kraju konzole (21 i 22):

- ugib: 3.1416
- rotacija oko x-ose: 0.62832

Ako bi se i ovde poštovao kriterijum o veličini ugiba u odnosu na debljinu ljuske, trebalo bi da se radi sa veoma malim momentom, što bi imalo za posledicu veliki broj koraka opterećenja i veliko računarsko vreme.

Prvi pokušaj je bio da se samo na početku svakog koraka računaju i položajna i geometrijska matrica krutosti. Pritom se dobilo da rešenja ne konvergiraju, jer se na kraju prve iteracije dobijaju veoma velike neuravnotežene sile čiji je red veličine 10^4 puta veći od reda veličine spoljašnjih sila. Ove neuravnotežene sile izazivaju velika pomeranja, tako da se kroz nekoliko iteracija dođe do tzv. "overflow" problema na računaru, pri čemu nije moguće nastaviti numeričku proceduru. Kada se prešlo na pune iteracije, pri čemu je kao i dosad korigovana samo položajna

matrica krutosti, postignuta je konvergencija i dostignuta tačnost od 5% za neuravnotežene sile u sedmoj iteraciji. S obzirom da se ovde radi o velikim pomeranjima i velikim rotacijama bilo je interesantno videti uticaj geometrijske matrice krutosti kroz iteracije. Na osnovu dobijenih rezultata može da se izvede zaključak da je konvergencija brža ako se geometrijska matrica krutosti ne formira u svakoj iteraciji, već samo na početku koraka u ravnotežnoj tački, jer neuravnoteženi unutrašnji naponi zahtevaju dodatan broj iteracija. Metod konstantnog koraka spoljašnjeg opterećenja funkcioniše do kritične tačke, tj. dok je zadovoljen uslov $w > v$, gde su sa w i v označena pomeranja u pravcu osa z i y respektivno. U zoni $w \approx v$ konvergencija je veoma spora i tražena tačnost nije dostignuta ni u predviđenih 30 iteracija, a dalje povećanje broja iteracija i nema smisla jer moduo neuravnoteženih sila osciluje oko neke vrednosti. U okolini kritične tačke nije efikasno smanjiti korak opterećenja i raditi i dalje sa konstantnim opterećenjem u koraku, što je ilustrivano dijagra-



Sl. 36. Pomeranja konzole u zavisnosti od momenta savijanja

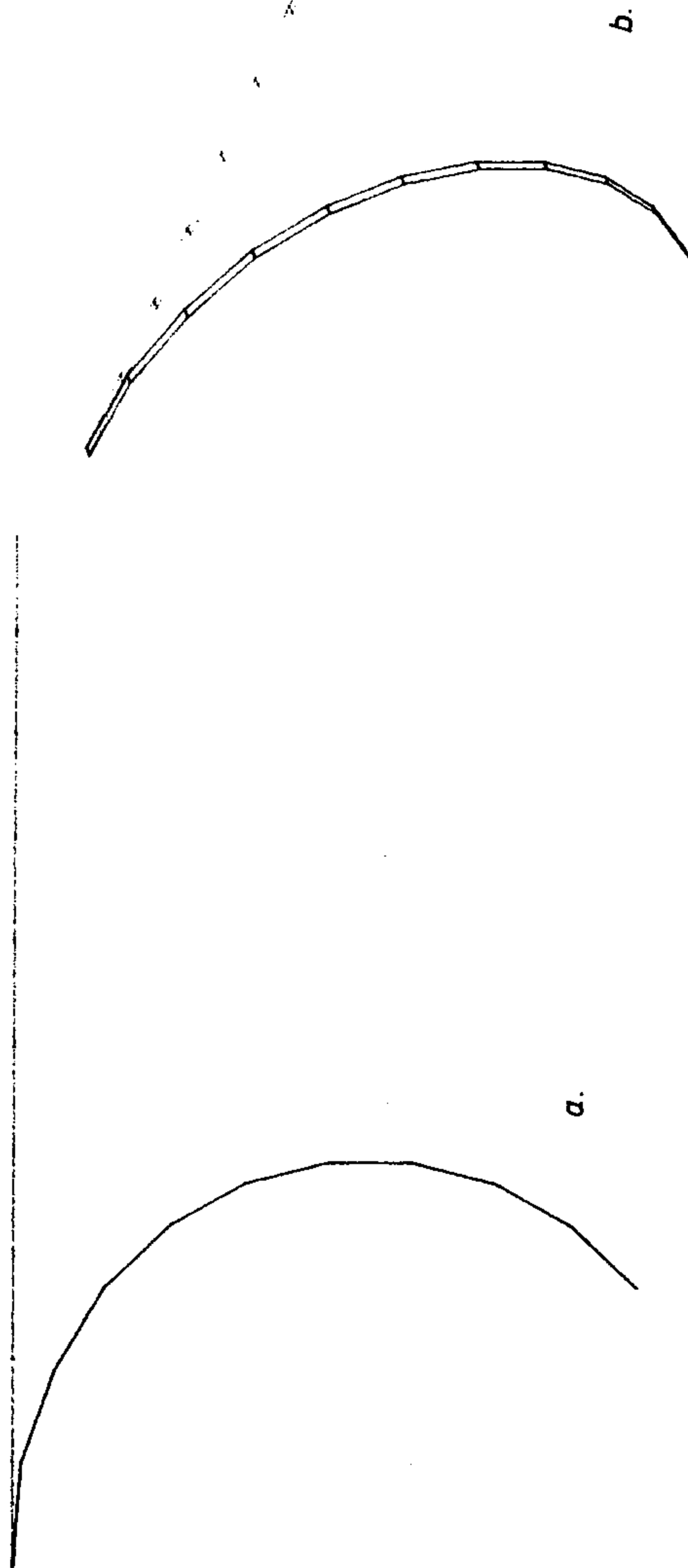
mom na sl. 36. Pomeranja prikazana na sl. 36 su dobijena sa korakom opterećenja $M_1 = 0.314 \cdot 10^{-3}$ (korak je smanjen dva puta). U prvih devet koraka ukupa matrica krutosti je na početku svakog koraka pozitivno definitna, dok je na početku desetog (najviša tačka u dijagramu na sl. 36), determinanta matrice krutosti negativna.

Na sl. 36. su prikazana pomeranja w i v za tačke na kraju konzole zavisno od spoljašnjeg momenta M , pri čemu je za svaki korak dat i broj iteracija sa kojim je postignuto $|\Delta M|/M < 5\%$.

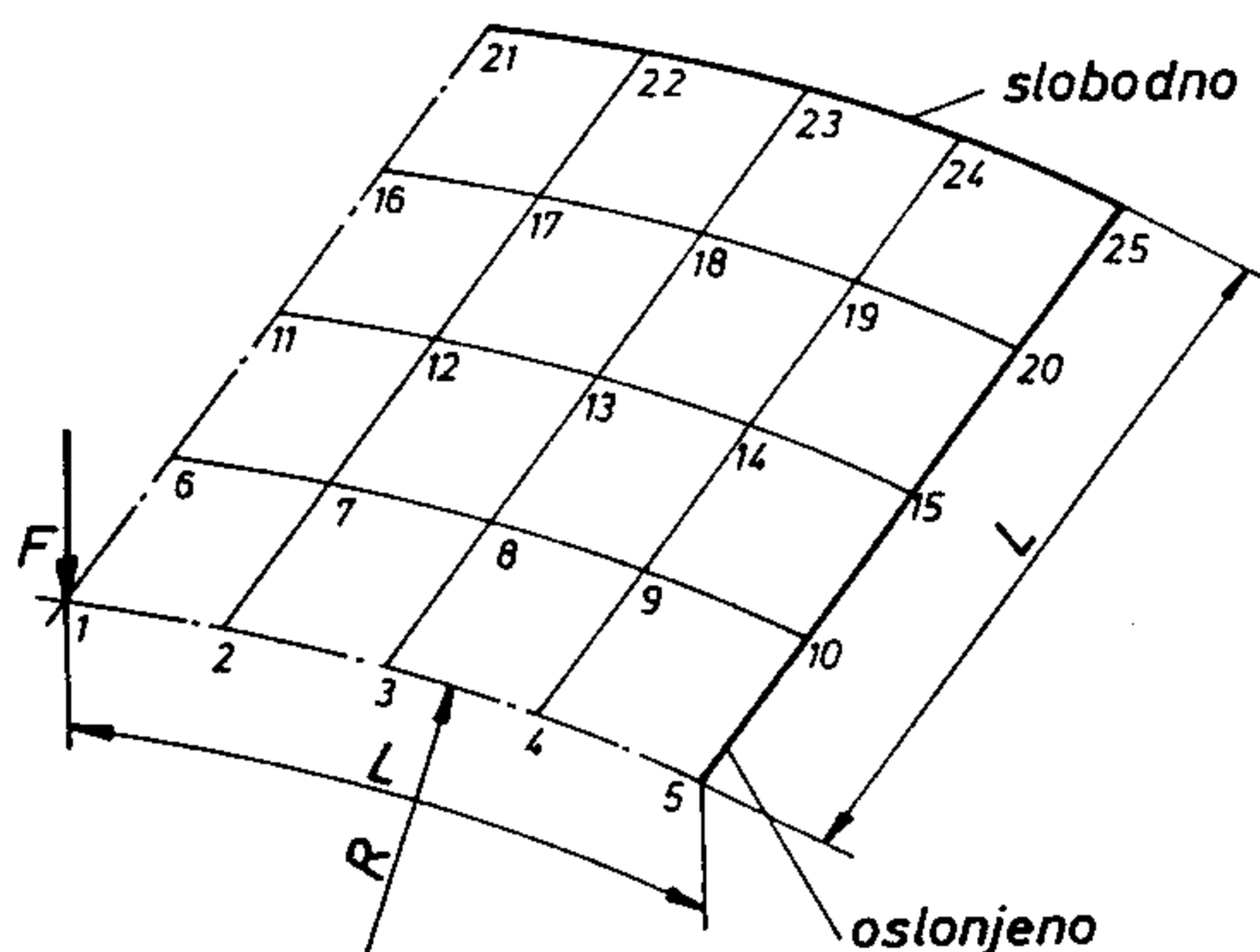
Presečna tačka krivih pomeranja w i v je označena kao kritična tačka i dalje od nje ovaj problem prelazi u grupu "snap back" problema i rešava se metodom sa konstantnim modulom pomeranja u koraku. S obzirom na činjenicu da su specifičnosti vazane za "snap through" i "snap back" probleme iscrpno opisane u narednom primeru, to se ovde neće ići dalje od pomenute kritične tačke, uz napomenu da razvijeni metodološki postupak i algoritam daju rezultate i daljim povećavanjem opterećenja.

Na sl. 37. je prikazana nedeformisana i deformisana konfiguracija u trenutku kada determinanta matrice krutosti menja znak.

Sl. 37. Savijanje konzole koncentrisanim momentom
a) u vertikalnoj ravni (pomeranja u pravoj veličini)
b) u prostoru



6. Cilindrična ljuska, opterećena koncentrisanom silom



$$R=254.$$

$$L=25.2$$

$$E=310500$$

$$H=1.27 \quad (0.635)$$

$$\nu=0.3$$

Sl. 38. Geometrija i mreža ljuske

Ovo je primer ponašanja ljuske sa "snap through" karakteristikom. Pošto i u radovima drugih autora mogu da se nađu primeri nelinearnog ponašanja sa istom karakteristikom -Riks, Ram(Ramm) i drugo - to su za prevazilaženje stacionarne tačke u dijagramu pomeranje-opterećenje korišćena i njihova iskustva, pa su u tom smislu učinjena sledeća ograničenja:

-usvojeno je da korekcija opterećenja bude $|x| \leq 1.2$ na početku koraka, što je regulisano smanjivanjem spoljašnjeg opterećenja prema relaciji

$$R_k = (1.2 \cdot R) / x$$

gde je R početno opterećenje u tekućem koraku, jednako opterećenju za koje je postignuta ravnoteža u prethodnom koraku, x dobijeno rešenje za korekciju u prvoj iteraciji, a R_k novo, korigovano opterećenje. Traženi moduo pomeranja Δl je za korak i računat prema relaciji

$$\Delta l_i = (\Delta l_p \cdot R_{i-1}) / R_0$$

gde su R_{i-1} : - R_{i-1} , opterećenje sa kojim je postignuta ravnoteža za prethodni, $(i-1)$. korak

- R_0 , početno opterećenje za prvi korak

- Δl_p , moduo pomeranja za linearno rešenje sa opterećenjem R_0

Rešavanje interaktivnim izborom modula pomeranja i opterećenja

Pošto se iz rešenja ovog primera od strane pomenutih autora vidi da je kritično opterećenje ≈ 550 (ovo je četvrtina opterećenja, jer je rađena četvrtina strukture zbog simetrije), to je Δl za prvi korak uzeto kao moduo linearnog rešenja u početnoj konfiguraciji pri ovom opterećenju, jer je ugib opterećene tačke $< H/2$, tj. $w = 0.54927 < H/2 = 0.635$. Međutim, moduo ovog linearnog rešenja je dosta veliki, tako da kritična tačka nije mogla da se pređe sa predviđenim brojem iteracija, koji je bio 10, i sa Δl_1 računatom prema navedenoj relaciji. Rezultat za prva dva koraka, koja su se završila normalno bez ikakvih dodatnih intervencija je bio:

tabela 6.1.1

korak	iter.	ugib	R_i	R_{kum}	Δl
1	3	0.55706	-550.0	-394.4	$1.38322 = \Delta l_p$
2	6	0.93328	-394.4	-538.1	$0.9 \cdot \Delta l_p$

Pošto se po rezultatu R_{kum} vidi da je opterećenje blisko kritičnom i da bi se, ako se treći korak počne sa opterećenjem 143.65 koliko je ono iznosilo na kraju drugog koraka, dobila korekcija $x \gg 1$, to je ovo opterećenje smanjeno pet puta, pa je rezultat trećeg koraka:

tabela 6.1.2

korak	iter.	ugib	R_i	R_{kum}	Δl
3	4	1.0506	-28.73	-547.4	$0.1 \cdot \Delta l_p$

Za četvrti korak je uzeto da moduo pomeranja bude pet puta manji nego za treći, a početno opterećenje je uzeto kao $1/5$ konačnog opterećenja na kraju trećeg koraka, tj. $(547.40 - 538.05)/5 = 1.868$.

U prvoj iteraciji se dobilo da korekcija treba da bude -10.816, pa je ona smanjena smanjivanjem opterećenja u odnosu dobijene i propisane korekcije, tj. $10.816/1.2$. Time se dobilo $R_4 = -0.2073$ i sa ovim opterećenjem, kao početnim za četvrti korak, ovaj korak je uspešno završen sa sledećim parametrima:

tabela 6.1.3

korak	iter.	ugib	R_i	R_{kum}	l
3	4	1.0506	-28.73	-547.4	$0.1 \cdot l_p$

Upoređivanjem trećeg i četvrtog koraka može da se uoči da se ukupno opterećenje smanjilo, što znači da je stacionarna tačka prevaziđena. Tome u prilog ide i tvrdnja da je determinanta matrice krutosti promenila znak.

Sledeći, peti korak je startovan sa $R_5 = 1.096$ (opterećenje sa promenjenim znakom, za koje je postignuta ravnoteža u četvrtom koraku), a Δl je povećano na $0.05 \Delta l_p$. Međutim, u sledećem pokušaju je smanjeno na $\Delta l_5 = 0.005 \Delta l_p$ zbog velike korekcije x , koja nije mogla da bude smanjena smanjivanjem opterećenja.

Preostali koraci su završeni sa negativnom determinantom matrice sistema i sledećim parametrima :

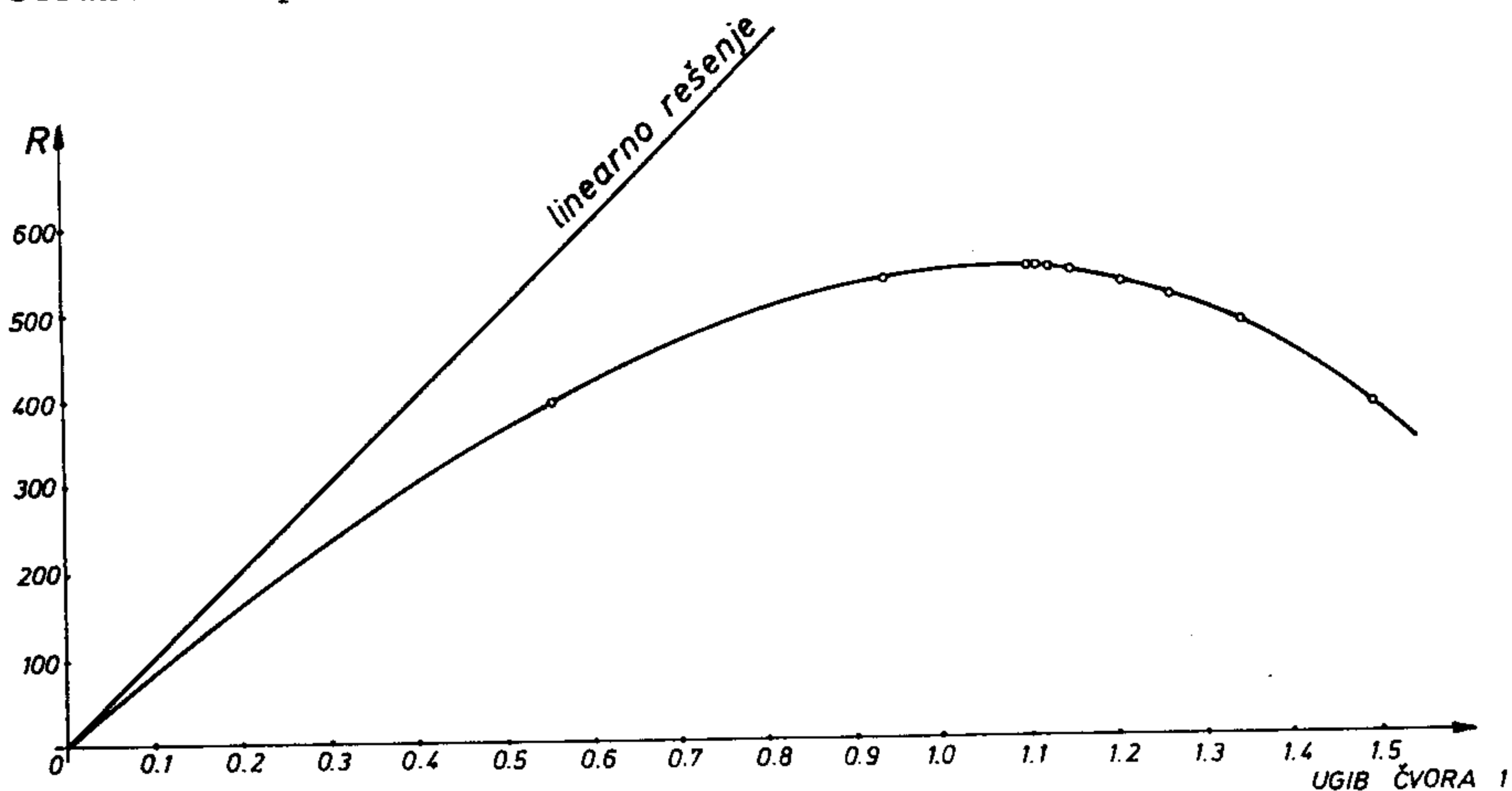
tabela 6.1.4

korak	iter.	ugib	R_i	R_{kum}	Δl
5	2	1.1227	1.096	-544.61	$0.005 \Delta l_p$
6	2	1.5449	1.689	-540.99	$0.01 \Delta l_p$
7	3	1.1982	3.623	-533.48	$0.02 \Delta l_p$
8	3	1.2619	7.504	-516.43	$0.05 \Delta l_p$
9	4	1.3420	17.06	-482.86	$0.1 \Delta l_p$
10	6	1.4872	33.57	-380.36	$0.5 \Delta l_p$

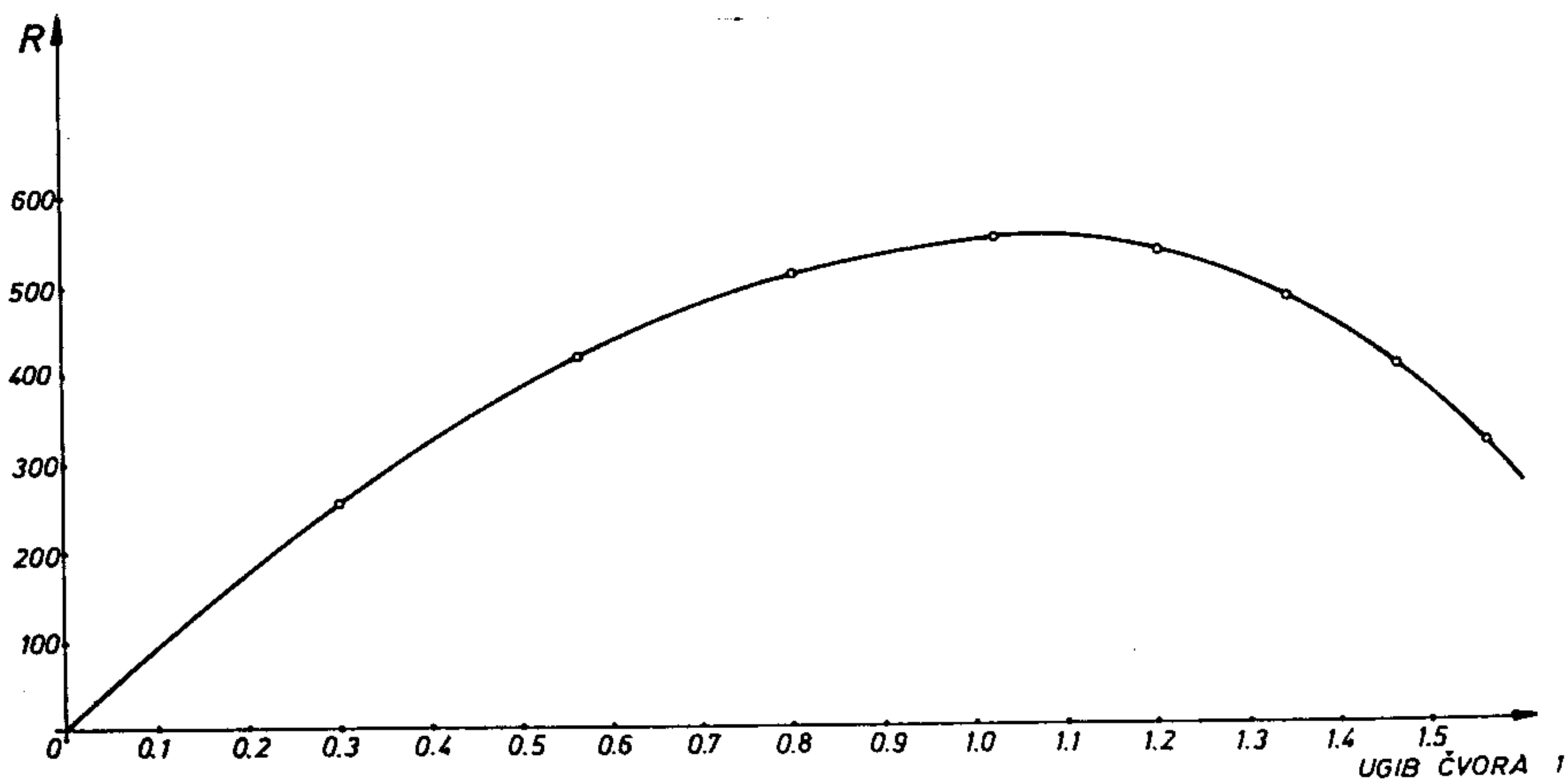
Dozvoljena neuravnoteženost je iznosila 5%. Navedeni rezultati su

predstavljeni krivom na sl. 39.

Na ovom primeru se vidi da numeričku proceduru treba optimirati sa gledišta izbora koraka opterećenja i propisanog modula pomeranja i automatizovati u opštem slučaju gde je ponašanje strukture nepoznato.



Sl. 39. Ugib opterećene tačke zaviso od sile (četvrtina ukupne sile) pri promenljivom Δl



Sl. 40. Ugib opterećene tačke pri $\Delta l = \text{const.}$

Automatizacija postupka

U cilju automatizacije postupka, analiziran je izbor opterećenja i modula pomeranja i njihova međusobna zavisnost.

U slučaju kada postoji konvergencija u koraku, u momentu kada je ravnoteža zadovoljena, važeće rešenje kvadratne jednačine teži nuli. To znači da slobodan član c teži nuli, tj.

$$(u_j + \Delta u_j)^T \cdot (u_j + \Delta u_j) - \Delta l^2 \rightarrow 0$$

Ako je ravnoteža zadovoljena pomeranja od neuravnoteženih sila su zanemarljiva u odnosu na pomeranje u koraku, tj. $|\Delta u_j| \ll |u_j|$, pa u tom slučaju može da se piše:

$$u_j^T \cdot u_j - \Delta l^2 \rightarrow 0$$

To znači da se najbrža konvergencija postiže ako se za Δl izabere moduo tangencijalnog pomeranja u koraku, a opterećenje za korak uzme tako da je moduo pomeranja od neuravnoteženih sila manji od modula tangencijalnog pomeranja. Malo Δl ili malo opterećenje u koraku R_i ne obezbeđuju brzu konvergenciju ukoliko nisu usklađeni. Ovo je praktično provereno polovljenjem parametra Δl pri nekom opterećenju za koje se dobija mali ugib, zatim polovljenjem i Δl i ΔR i na kraju samo polovljenjem opterećenja i numerički potvrđeno podacima dobijenim za korekciju x i broj iteracija u prvom koraku započeto sa $R = -300$ (ugib opterećenog čvora je iznosio 0.29960). Na osnovu tangencijalnog pomeranja je izračunat moduo pomeranja u početnoj konfiguraciji, $\Delta l_p = 0.40904$. Ugib usled neuravnoteženih sila u opterećenoj tački je iznosio -0.03851, što znači da Δl potpuno odgovara zadatom opterećenju. Menjanjem traženog modula dobijene su vrednosti za korekcije x i za broj iteracija pri tačnosti od 5%, date tabelom 6.2.

R_k je konačno opterećenje u koraku sa kojim je zadovoljena tačnost, a x_1 vrednost korekcije u prvoj iteraciji. Pošto je bilo predviđeno 20 iteracija, za modul $\Delta l_p / 16$ nema rezultata za opterećenje na kraju koraka jer nije zadovoljena propisana tačnost ni u dvadesetoj iteraciji. U okolini stacionarne tačke,

koja je i težište ove analize, utvrđeno je sledeće: par $(\Delta l, R_i)$ ne mora da bude izabran tako da korekcija x ne bude mnogo veća od 1, pa je stoga prethodna granica 1.2 pomerena na 10. Pritom su se dobila rešenja u okolini stacionarne tačke sa znatno većim modulom pomeranja Δl i sa relativno malim brojem iteracija.

tabela 6.2

Δl	iter.	ugib	R_i
Δl_p	6	.25691	329.2
Δl_p	5	-.15749	251.1
$\Delta l_p / 2$	10	-1.2931	186.0
$\Delta l_p / 4$	13	-1.2072	132.0
$\Delta l_p / 8$	18	-1.1465	113.0
$\Delta l_p / 16$	>20	-1.1036	-

Korekcija je nešto veća samo u okolini stacionarne tačke i to treba dozvoliti da se u toj zoni ne bi išlo sa velikim brojem sitnih koraka, dok je u zoni gde je krivina krive pomeranje-opterećenje mala, korekcija stvarno manja od jedinice.

tabela 6.3.1

korak	iter.	ugib	R_i	R_{kum}	Δl	sgn[K]	x_1
1	5	-.29073	-300.0	-251.15	0.40904	+	-.15766
2	5	-.56075	-251.1	-416.43	"	+	-.40444
3	5	-.80541	-165.3	-510.99	"	+	-.53149
4	5	-1.0198	-94.56	-546.52	"	+	-.88937
5	7	-1.1999	-35.53	-533.13	"	-	-4.6097
6	5	-1.3446	13.38	-481.52	"	-	1.7685
7	6	-1.4592	51.61	-404.34	"	-	.39978
8	5	-1.5569	77.18	-316.09	"	-	.11645

Prve korekcije karakteristike strukture date na sl. 39 bile su u tom smislu da se parametar Δl drži konstantnim tokom celog numeričkog procesa, a da se početno opterećenje u koraku smanjuje ukoliko su rešenja za korekciju opterećenja x velika ($x_{max}=10$). Pritom je tačnost bila 5%, a rađeno je modificiranom metodom. Ti rezultati su dati u tabeli 6.3.1.

Grafički prikaz ovih rezultata je dat na sl. 40.

Kontrola spoljašnjeg opterećenja preko neuravnoteženih sila

U program je ugrađen kriterijum da pomeranja od neuravnoteženih sila u prvoj iteraciji svakog koraka budu manja od tangencijalnog pomeranja u svakom koraku. Ako to nije slučaj, opterećenje se polovi dok se ne zadovolji ovaj kriterijum. Dobijeno opterećenje se uzima kao početno za taj tekući korak i moduo pomeranja pri tom opterećenju daje Δl za korak. Ukoliko se Δl uzme veće od ove vrednosti, postoji mogućnost da stacionarna tačka ne može da bude pređena korektno jer opterećenje ne promeni znak, a matrica krutosti promeni.

Indikator proizvoda $R \cdot \det[K]$

Za probleme tipa "snap through" treba formirati jedan novi parametar koji bi pokazivao znak proizvoda sile u koraku i determinante matrice krutosti. Taj znak, koji bi se utvrdio u početnoj konfiguraciji, treba održati do kraja, pa se stoga on u svakom novom koraku proverava na početku koraka. Ukoliko se u nekom koraku dobije suprotan znak, to znači da je ravnoteža u prethodnom koraku samo formalno zadovoljena, ali sa prevelikim traženim modulom pomeranja i da taj korak treba ponoviti sa manjim modulom Δl .

U korišćenoj numeričkoj proceduri je na početku svakog koraka vršena dekompozicija ukupne matrice krutosti da bi se našao njen znak. Ako je u koraku i :

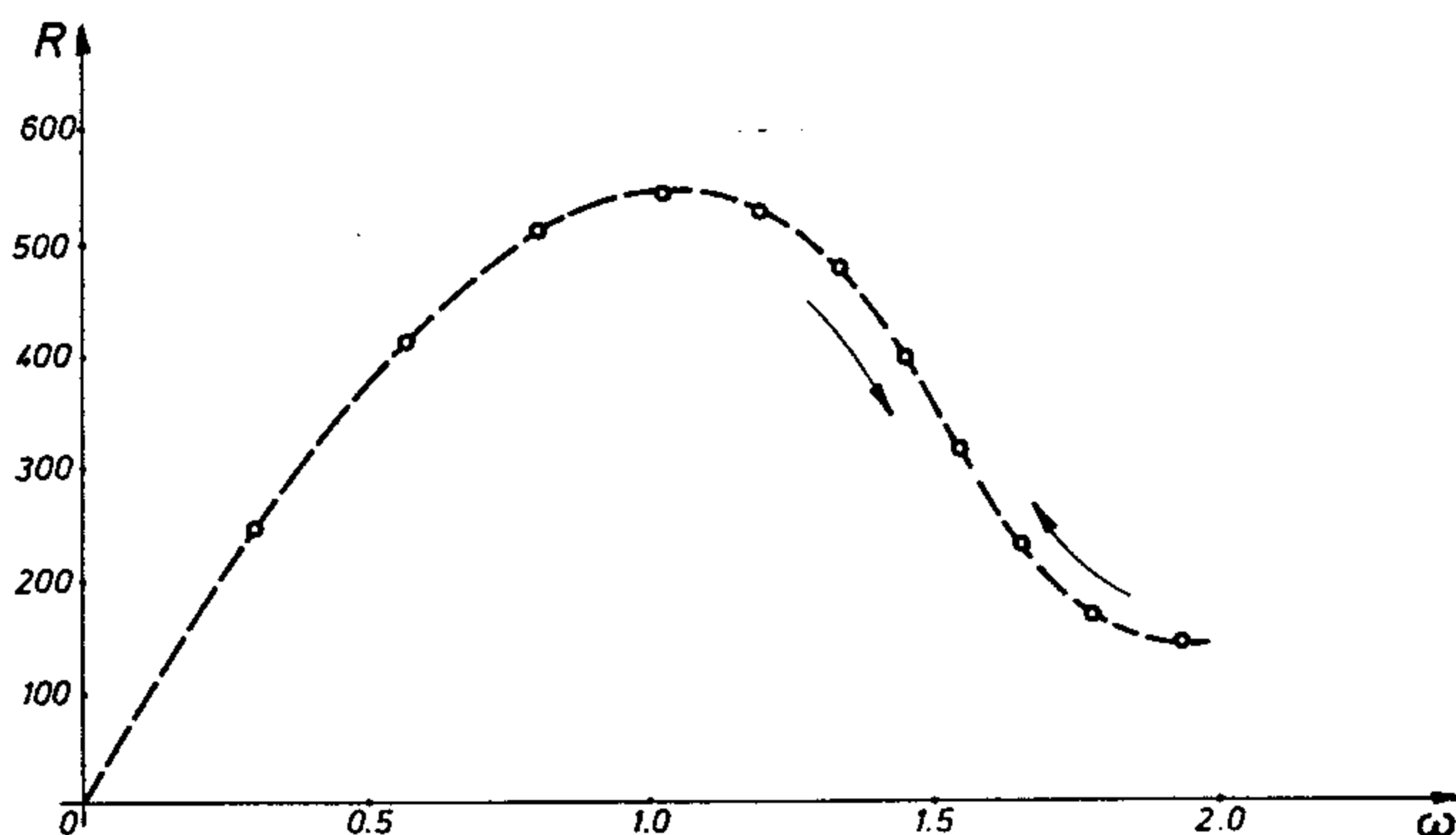
$$\text{sign}[K_0] \cdot \text{sign}R_0 = \text{sign}[K_i] \cdot \text{sign}R_i \quad \dots\dots\dots(6.a)$$

onda se korak (i-1) ponavlja sa dvostruko manjim Δl . Dešava se da se pritom dobiju znatne vrednosti faktora korekcije x , ali procedura konvergira, tako da to nije značajno i ne bi trebalo ići na smanjenje bilo modula pomeranja, bilo opterećenja. Opterećenje treba smanjiti u slučaju konjugovano kompleksnih ili velikih pozitivnih rešenja za faktor korekcije x , dok je u slučaju velikih negativnih rešenja moguće smanjiti oba parametra.

Program je tako organizovan da ako je prekinut usled bilo koje neregularnosti u toku procesa, može da bude nastavljen od tog mesta uz odgovarajuće ispravke i dopune. To je iskorišćeno za nastavak krive prikazane na sl. 40., tj. korake 9÷15 iz tabele 6.3.2. U tom nastavku se posle nekoliko koraka dobilo da ukupno opterećenje i dalje opada ($R_i > 0$), a matrica krutosti je ponovo postala pozitivno definitna, tj. relacija (6.a) nije zadovoljena. Pošto je nastavljeno dalje bez obzira na činjenicu što je uslov (6.a) neispunjen, posledica je bila da minimum krive, koji očigledno postoji, nije mogao da bude prevaziđen, već se daljim radom vraćalo unazad i to po istim tačkama, što se vidi iz tabele 6.3.2 i sa sl. 40.

tabela 6.3.2

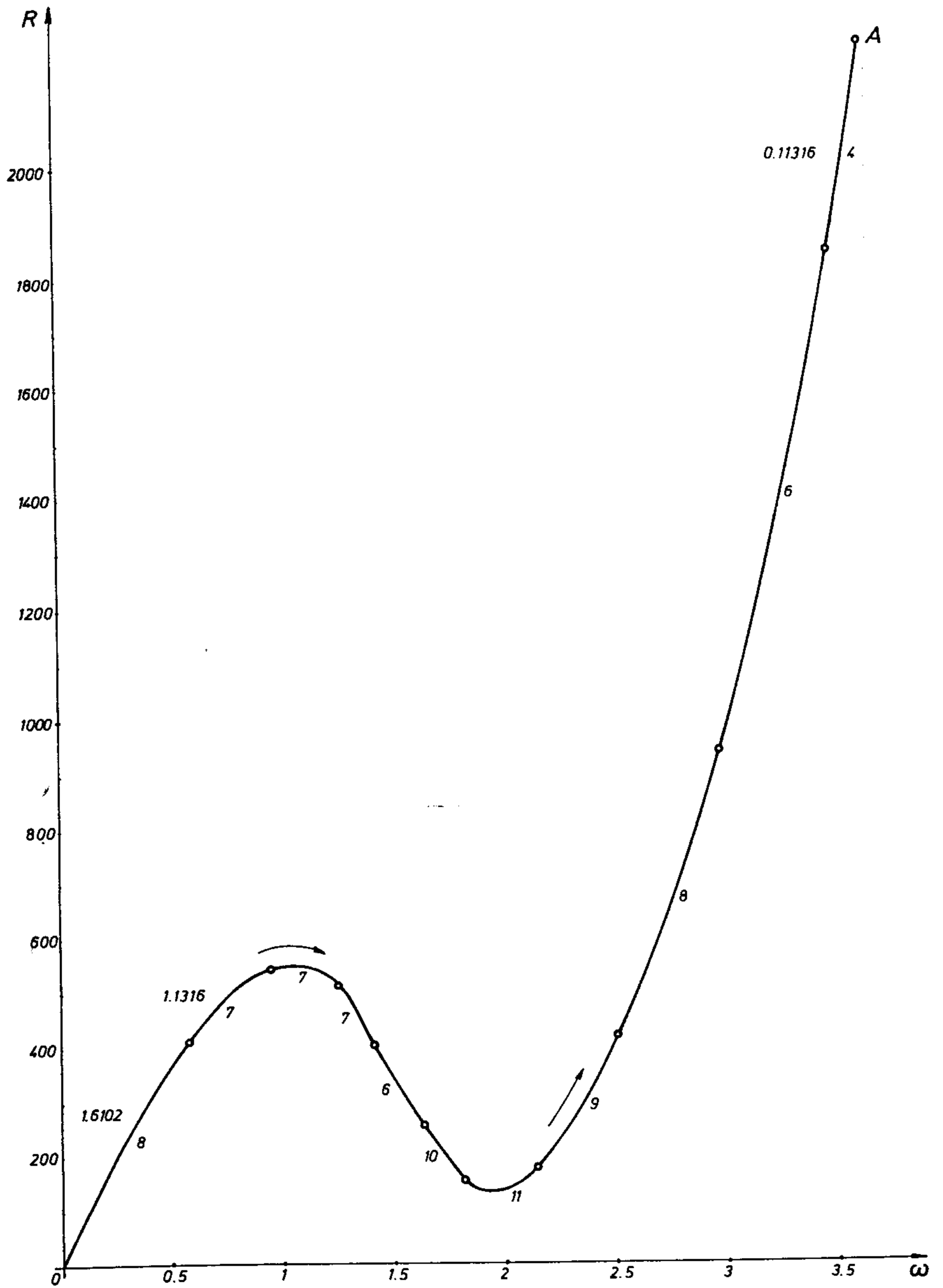
korak	iter.	ugib	R_i	R_{kum}	Δl	$\text{sgn}[K]$	x_1
9	5	-1.6567	88.25	-232.50	0.40904	-	-.07928
10	7	-1.7785	83.59	-170.83	"	-	-.34378
11	7	-1.9356	61.67	-149.85	"	*** [†]	-1.1508
12	8	-1.7785	20.98 *****	-170.83	"	-	-8.1054
13	6	-1.6567	-20.98	-232.50	"	-	1.3076
14	6	-1.5568	-61.67	-316.09	"	-	.29725
15	5	-1.4592	-83.59	-404.34	"	-	.03301



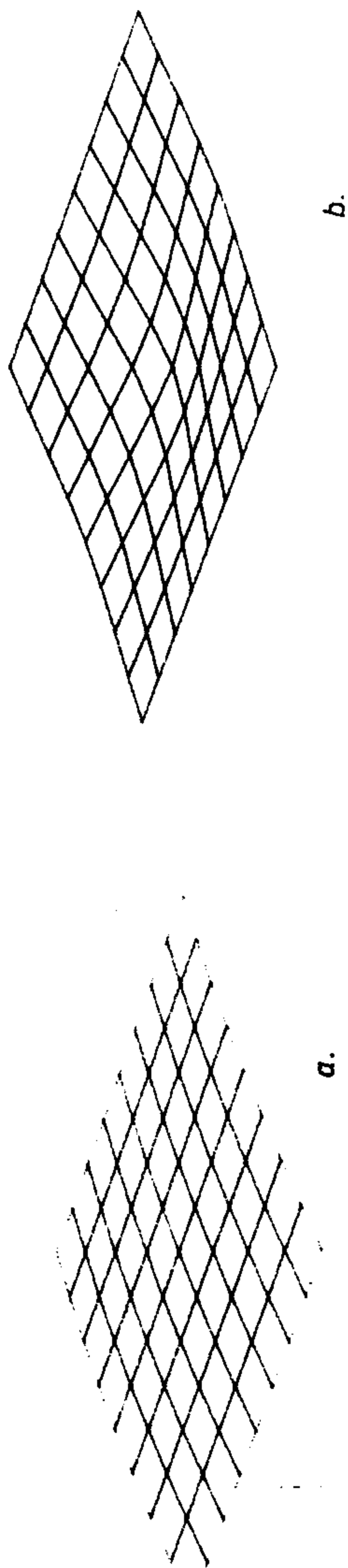
sl. 41. Vraćanje toka proračuna zbog velikog modula pomeranja

Pošto na početku dvanaestog, tj. na kraju jedanaestog koraka nije zadovoljen uslov (6.a), to je jedanaesti korak ponovljen sa $\Delta l/2$ i stacionarna tačka (minimum) je pređena.

Da bi se proverila potpuna automatizovanost procesa, isti primer je rađen još sa dva početna opterećenja: umesto -300 stavljeno je najprv -900, a zatim -100. Prvo opterećenje je preveliko jer prelazi kritično, a drugo je dosta ispod kritičnog. Međutim, pošto je kritično opterećenje nepoznato, ovde je iskorišćen kriterijum za male ugibe ($H/6 < w_{max} < H/2$), na osnovu koga je početno opterećenje korigovano i to: u prvom slučaju faktorom 0.6565, a u drugom sa 3, tako da su prema linearnim rešenjima, koja su tom prilikom dobijena, sračunati moduli pomeranja 1.6102, tj. 0.41037, respektivno. Na osnovu rezultata za drugi slučaj (sa manjim opterećenjem), nacrtan je dijagram na sl. 42, dok su na sl. 43 date prostorne konfiguracije nepomerene strukture - sl.43.a), zatim deformisane u stanju prve stacionarne tačke (maksimum), sl.43.b, druge stacionarne tačke (minimum)-sl.43.c, i ugib za stanje na kraju krive, sl.43.d.

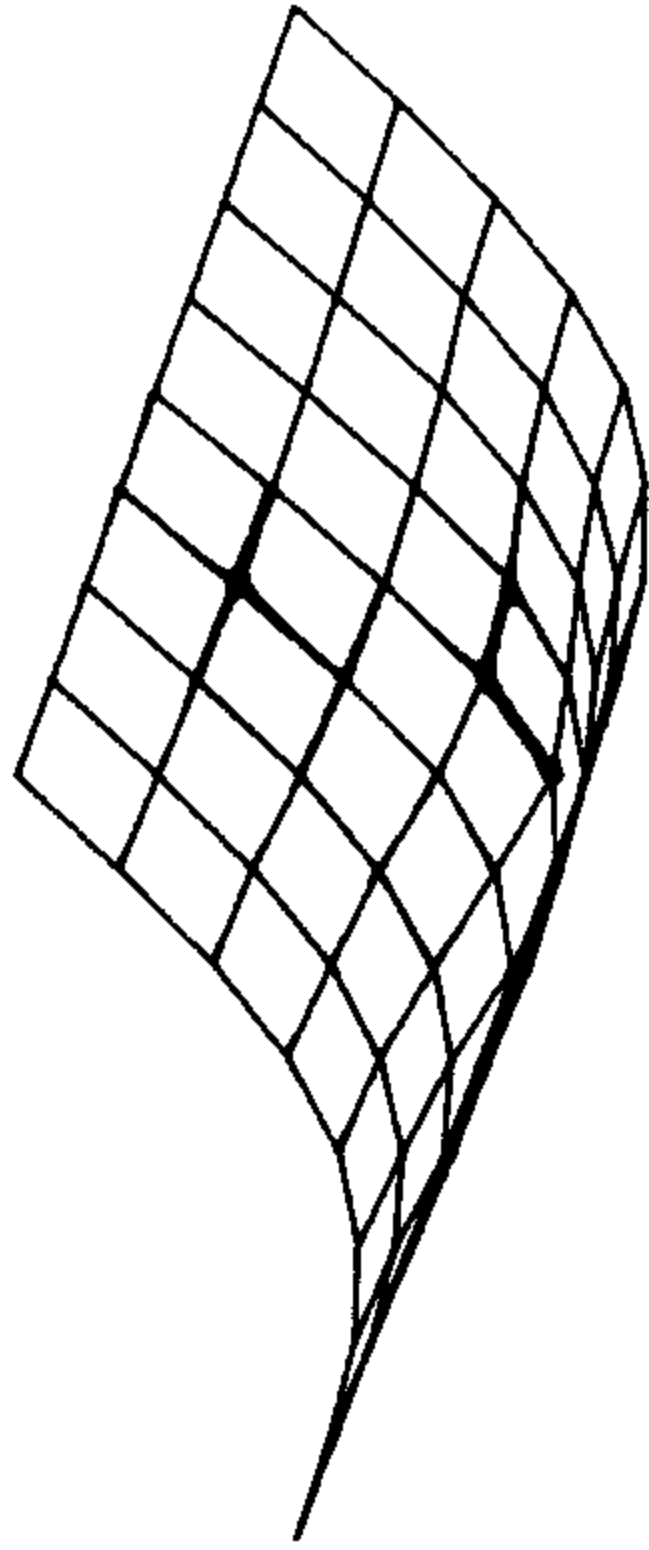


Sl. 42. Ugib središne tačke ljuske u zavisnosti od opterećenja
(deblji cilindar)

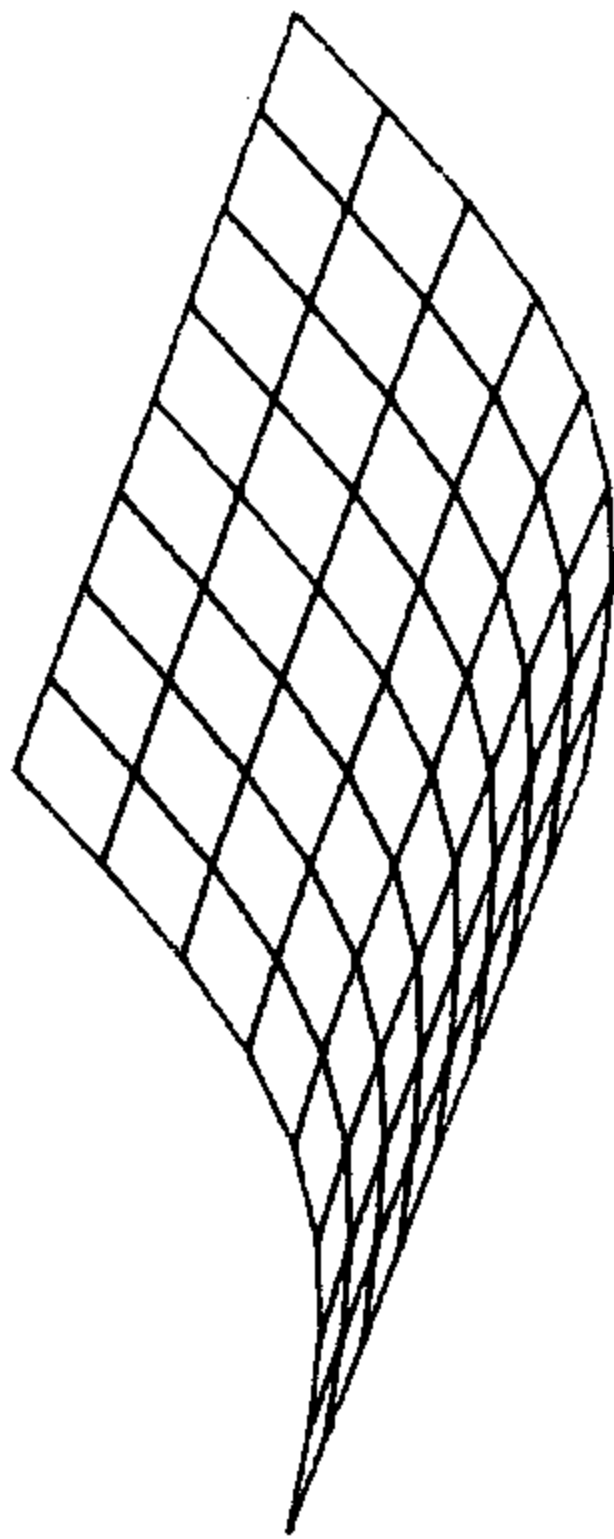


Sl. 43. Prostorne konfiguracije cilindrične ljuske, opterećene vertikalnom silom u sredini

a) početna konfiguracija	c) stanje pri minimalnoj sili
b) stanje pri maksimalnoj sili	d) konfiguracija za tačku A na sl. 3.22.

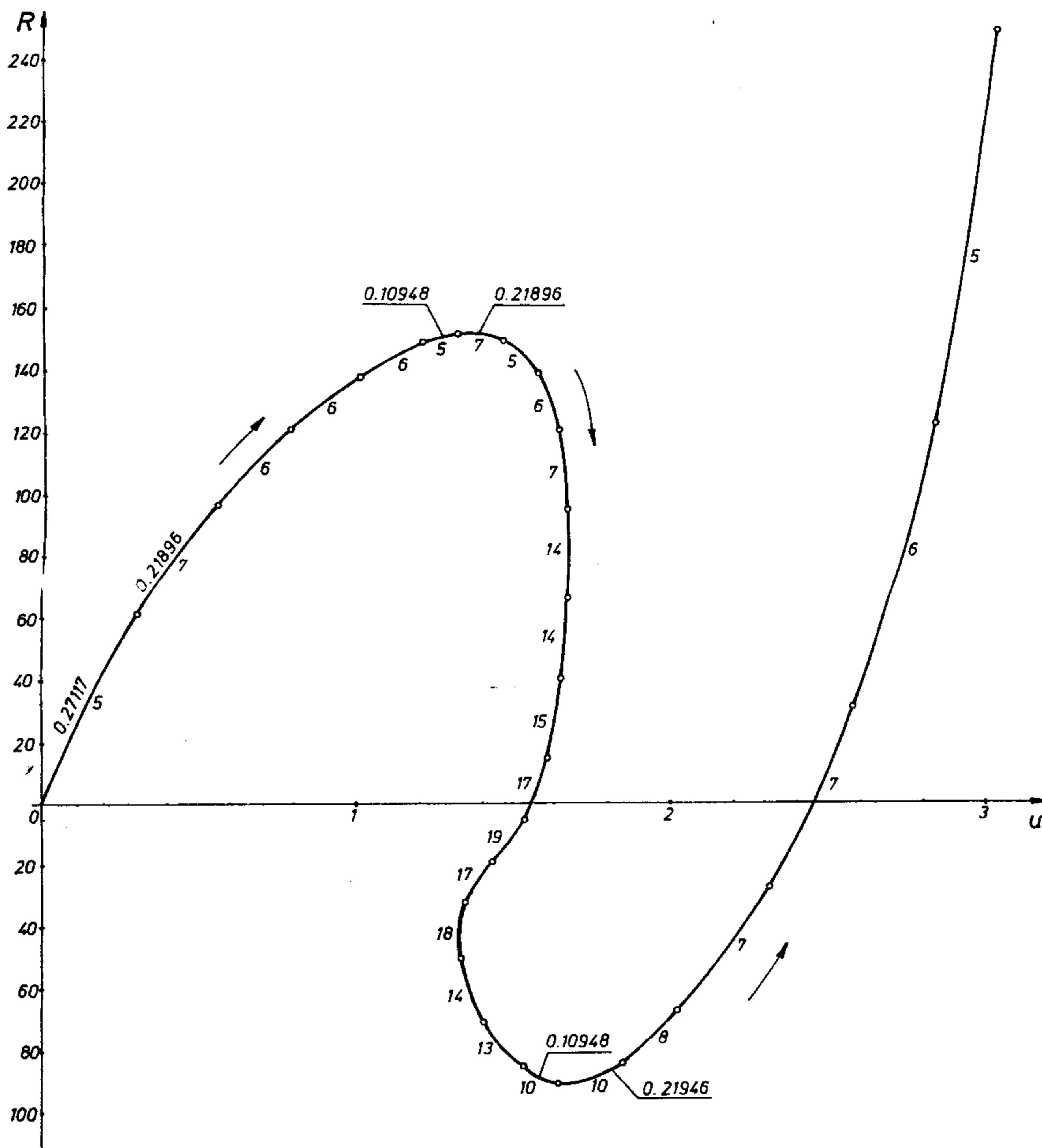


d.



c.

Tanji cilindar



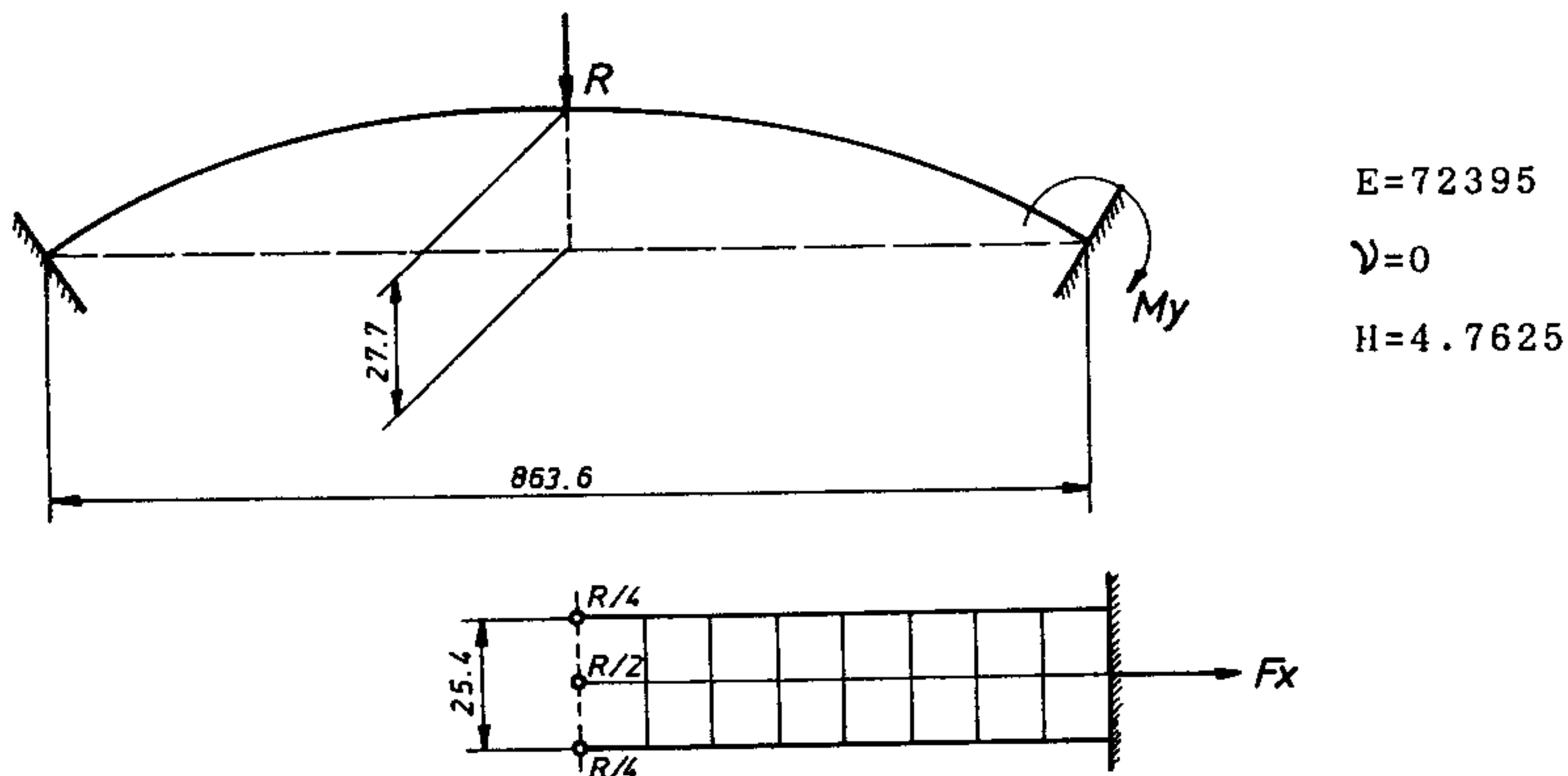
Sl. 44. Ugib središne tačke ljuske u zavisnosti od opterećenja
(tanji cilindar)

Na sl. 44 je dat ugib centralne tačke zavisno od opterećenja za tanji cilindar ($H=0.635$). Na slikama 42. i 44. su upisani i broj iteracija i moduo pomeranja za svaki korak. Za tanji cilindar je

taj moduo smanjivan u okolini stacionarnih tačaka, jer nije bila zadovoljena relacija (6.a). U ovom primeru je odmah po prelasku minimuma (druga stacionarna tačka) došlo do imaginarnih rešenja za korekciju x , što je prevaziđeno polovljenjem opterećenja uzastopno 4 puta dok se nisu dobila realna rešenja (-11.465), posle čega je konvergencija bila zadovoljena i za ovu relativno veliku korekciju, kao i moduo pomeranja (0.21948). U slučaju imaginarnih rešenja, programom je predviđeno uzastopno deljenje opterećenja pet puta, posle čega se polovi propisani moduo pomeranja dok se ne dobiju realna rešenja. Ovaj broj polovljenja je iskustveno dat (2^4 puta smanjenje) i moguće ga je interaktivno promeniti. Sa slike 44. se vidi da pomeranje opterećene tačke menja smer, pa je to objašnjenje zšto se izima moduo pomeranja, a ne određeno pomeranje u strukturi.

7. Uklješteni cilindrični luk

I ovo je primer "snap through" fenomena.



Sl. 45. Cilindrični luk, opterećen vertikalnom silom

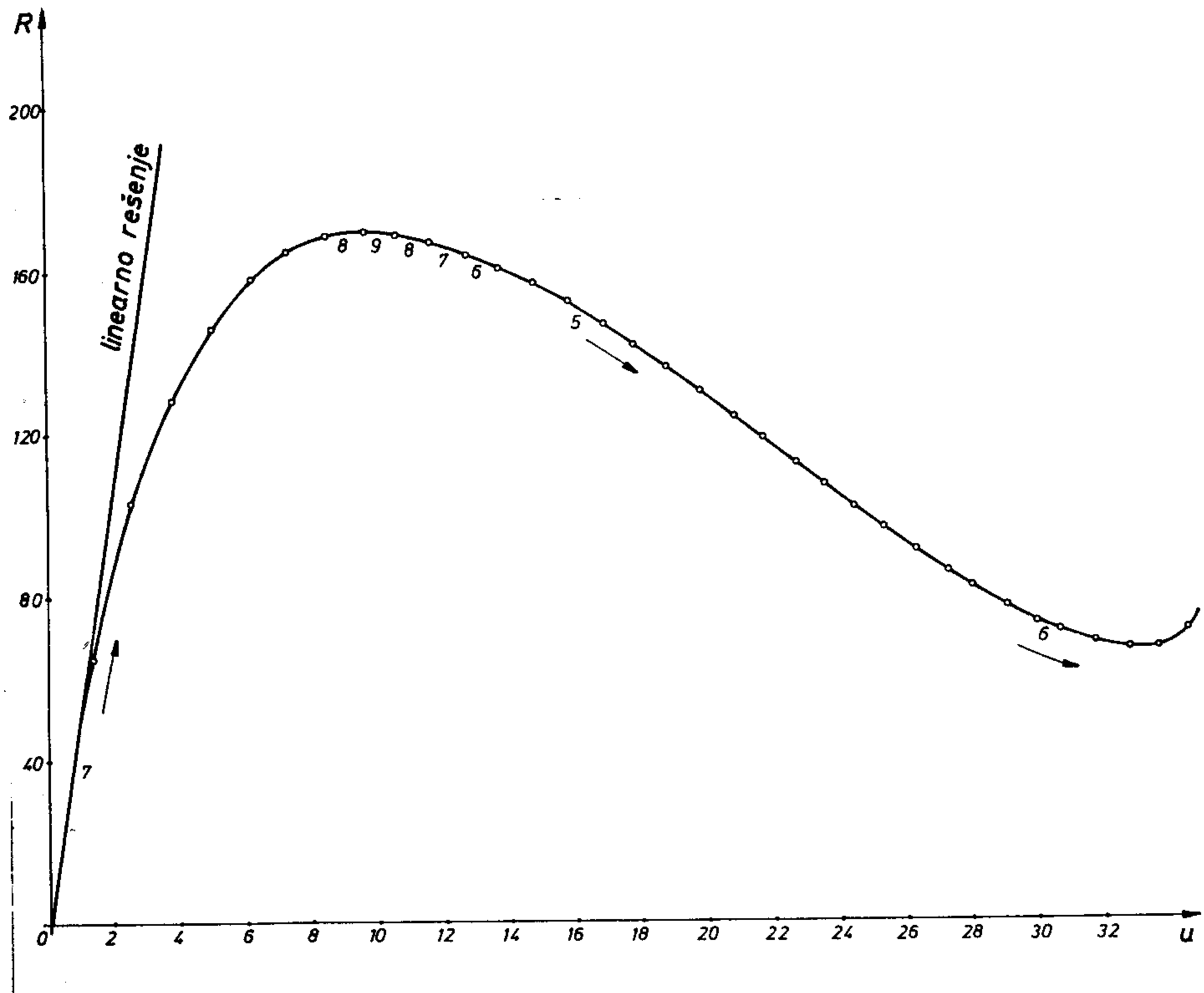
Ovaj primer je rađen metodom sa konstantnim modulom pomeranja u koraku. Sam moduo Δl je bio nepromenljiv tokom celog proračuna, a izračunat je kao moduo linearnog rešenja pri sili $R=80$. Brojna vrednost modula je $\Delta l=9.515$.

Na sl. 46.a) je dat ugib sredine luka zavisno od sile R . Svaki novi korak je označen kružićem i duž luka koji odgovara koraku je naznačen broj iteracija. Za korake gde nije naznačen nikakav broj se podrazumeva da je u njima bio potreban isti broj iteracija kao u prethodnom koraku.

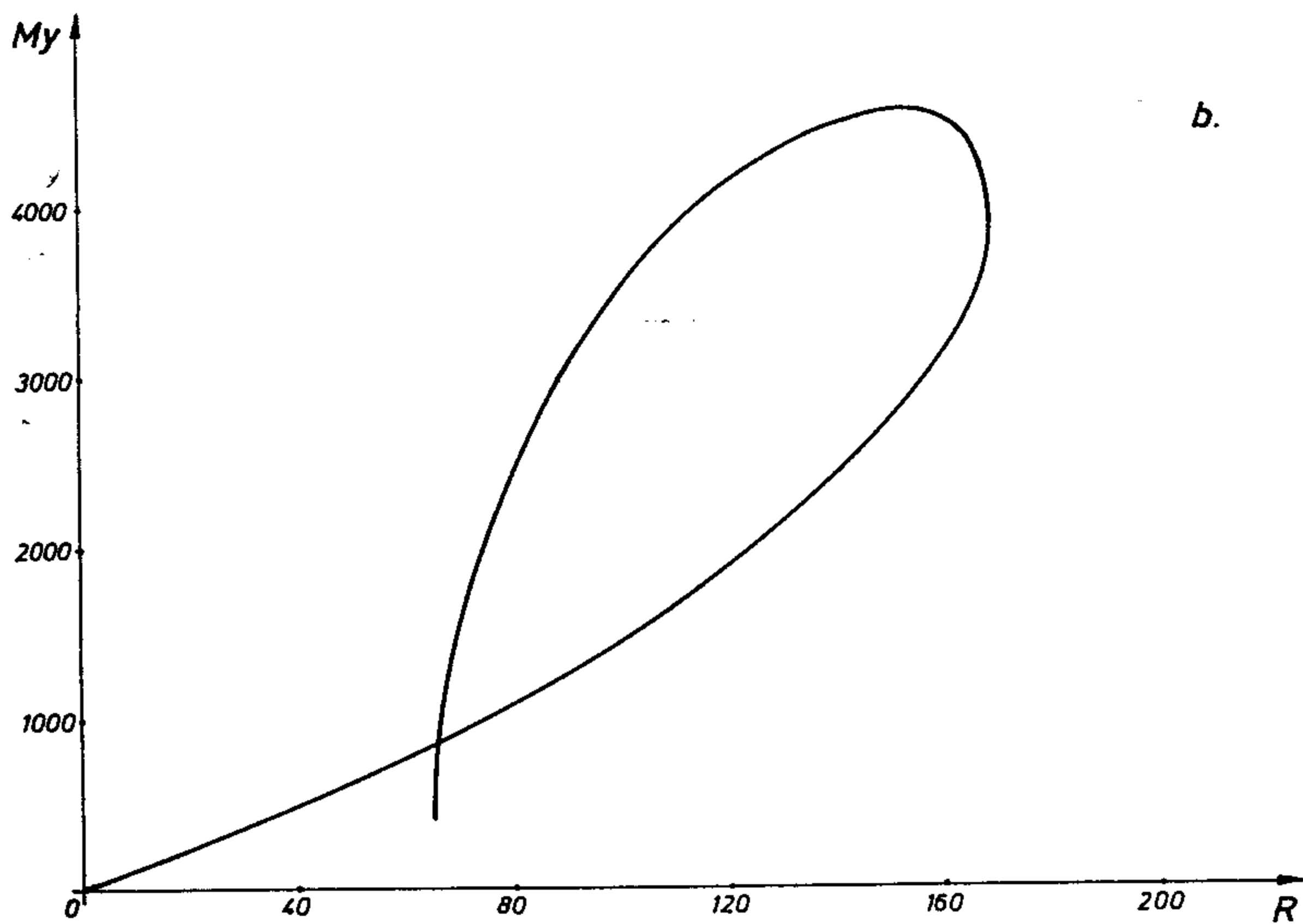
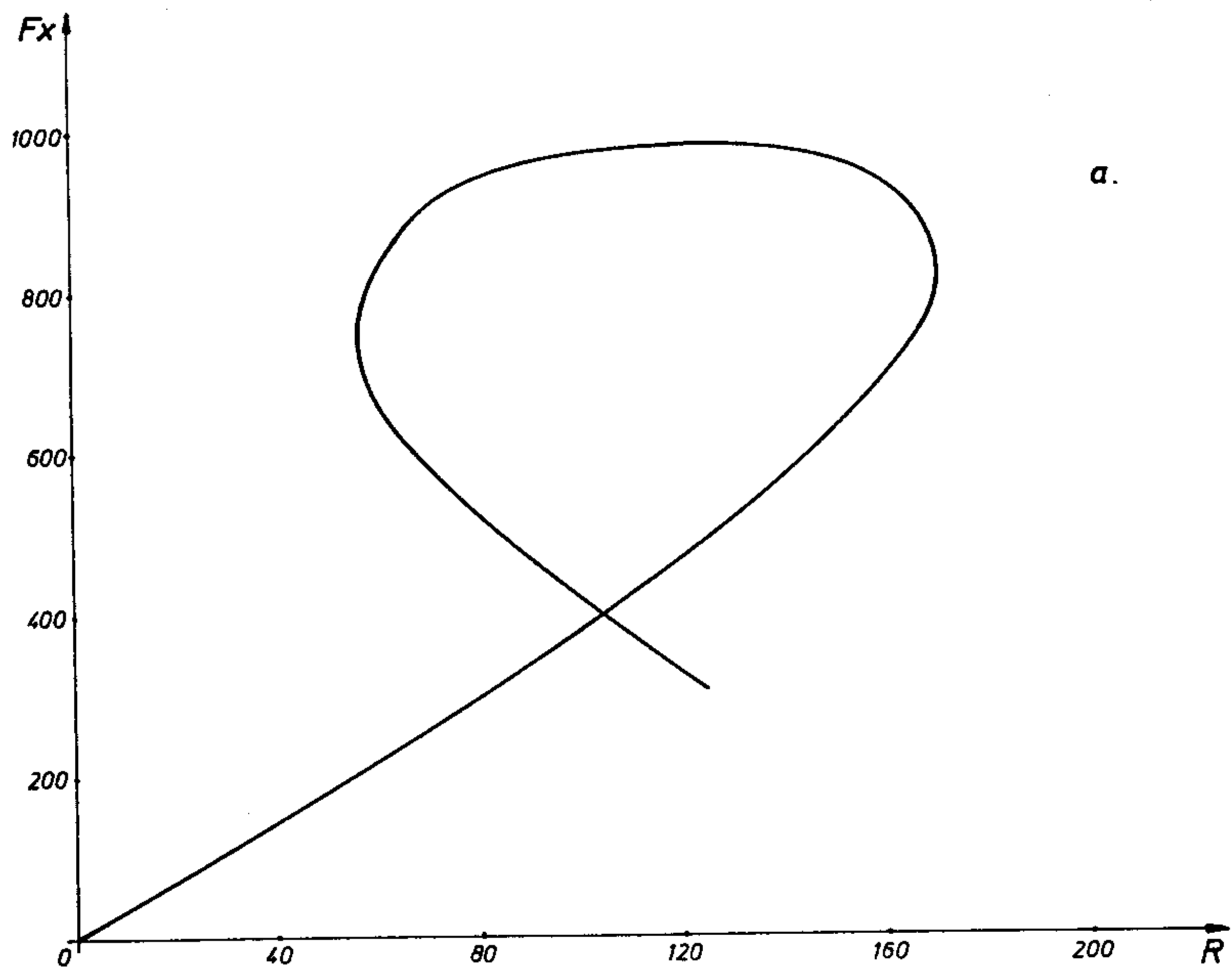
Ovaj primer je rađen pošto je ceo tok proračuna nelinearne karakteristike automatizovan, tako da nije bilo nikakvih teškoća uz opisane kontrole i ograničenja.

Na slikama 46.b) i 46.c) su date reakcije uklještenja u čvoru 18 sa sl. 45., i to: aksijalna sila F_x i moment savijanja M_y zavisno od spoljašnjeg opterećenja R .

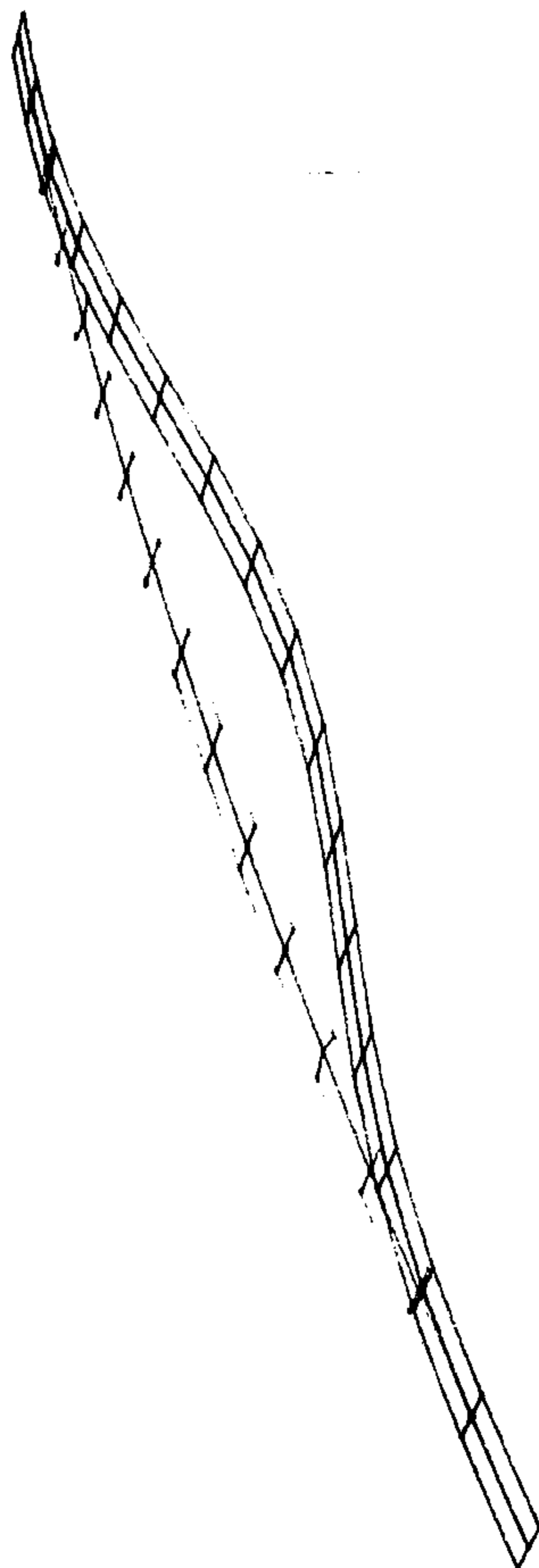
Na na sl. 47. je prikazana prostorna konfiguracija nedeformisane strukture i deformisane koja odgovara stanju strukture pri minimalnoj sili (sl. 46.)



Sl. 46. Ugib sredine luka, zavisno od spoljašnjeg opterećenja

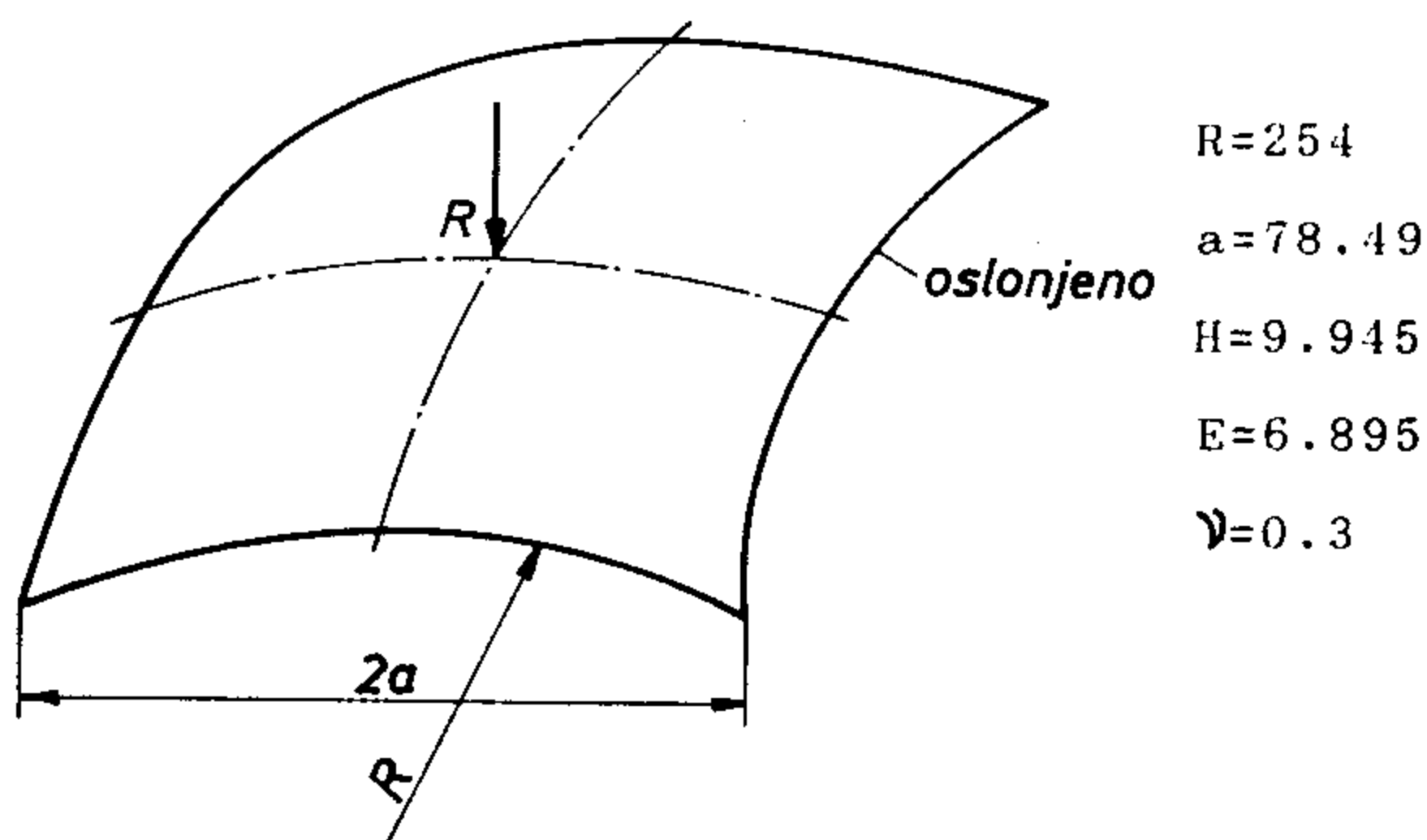


Sl. 47. Reakcije uklještenja zavisno od spoljašnjeg opterećenja
 a) horizontalna reakcija F_x u čvoru 18
 b) moment uklještenja M_y u čvoru 18



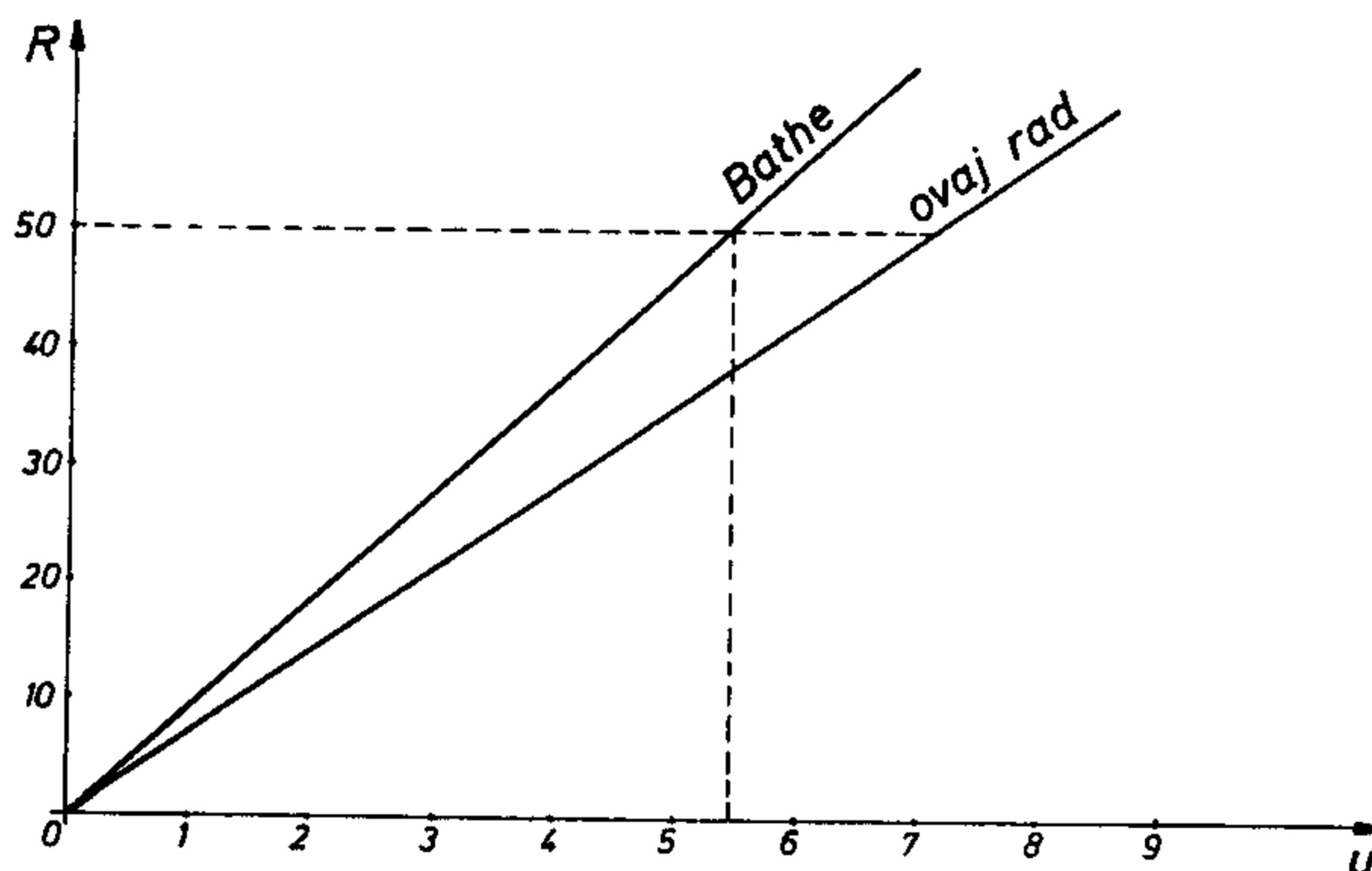
Sl. 47. Početna i deformisana konfiguracija uklještenog kružnog luka, opterećenog vertikalnom silom na sredini

8. Kalota opterećena vertikalnom silom na sredini



Sl. 48. Sferna ljuska opterećena vertikalnom silom u sredini

S obzirom na simetriju problema, radena je četvrtina kalote. Za ovaj primer se selektivom integracijom dobija da je rešenje "mekše" nego što su u svojim radovima dobili drugi autori (Bathe, Horringsmoe, Dhat, Leicester i drugi). Razlog je debljina ove ljuske. U ovom radu, rešenje je dobijeno numeričkom integracijom pogodnom za tanke ljuske, a pošto se ovde radi o debeloj ljusci, to je izračunata krutost na transverzalno smicanje manja nego što je u teoriji debelih ljuski, pa se zato i dobija "mekše rešenje".



Sl. 49. Upoređivanje linearnog rešenja sa radovima drugih autora

Na sl. 49. je dato linearno rešenje koje su dobili pomenuti autori i rešenje dobijeno u ovom radu sa mrežom 4x4 (koja odgovara diskretizaciji kod ovih autora) i selektivnom integracijom 2x2+1x1, koja je korišćena i u svim ostalim primerima.

Da bi se rešenje približilo postojećim rezultatima iz literature, vršena je korekcija matrice krutosti transverzalnog smicanja.

Najpre je konstitutivni koeficijent u ovoj matrici množen sa 10^n ($n=1\div 4$), iz čega se zaključuje da za veliku krutost pri transverzalnog smicanju, rešenje teži rešenju debele ljuske.

tabela 8.1

umnožak	ugib
1	7,1922
10^1	5,8779
10^2	5,7415
10^3	5,7278
10^4	5,7264

Druga mogućnost približavanja rešenju debele ljuske je putem numeričke integracije. Pri punoj integraciji (2x2+2x2), kod izoparametarskog elementa sa linearnom interpolacijom, rešenje je nešto kruće nego kod citiranih autora, tako da je ideja bila da se uvede jedan korekcionni parametar za matricu krutosti transverzalnog smicanja koji bi linearno zavisio od debljine ljuske i kojim bi se vršila linearna interpolacija smičuće krutosti između repernih numeričkih integracija-pune i selektivne, tj.

$$[K_s] = a[K_{sp}] + (1-a)[K_{ss}]$$

gde su:

$[K_s]$ - ukupna matrica krutosti transverzalnog smicanja

$[K_{sp}]$ - matrica krutosti transv. smicanja za punu integraciju (2x2)

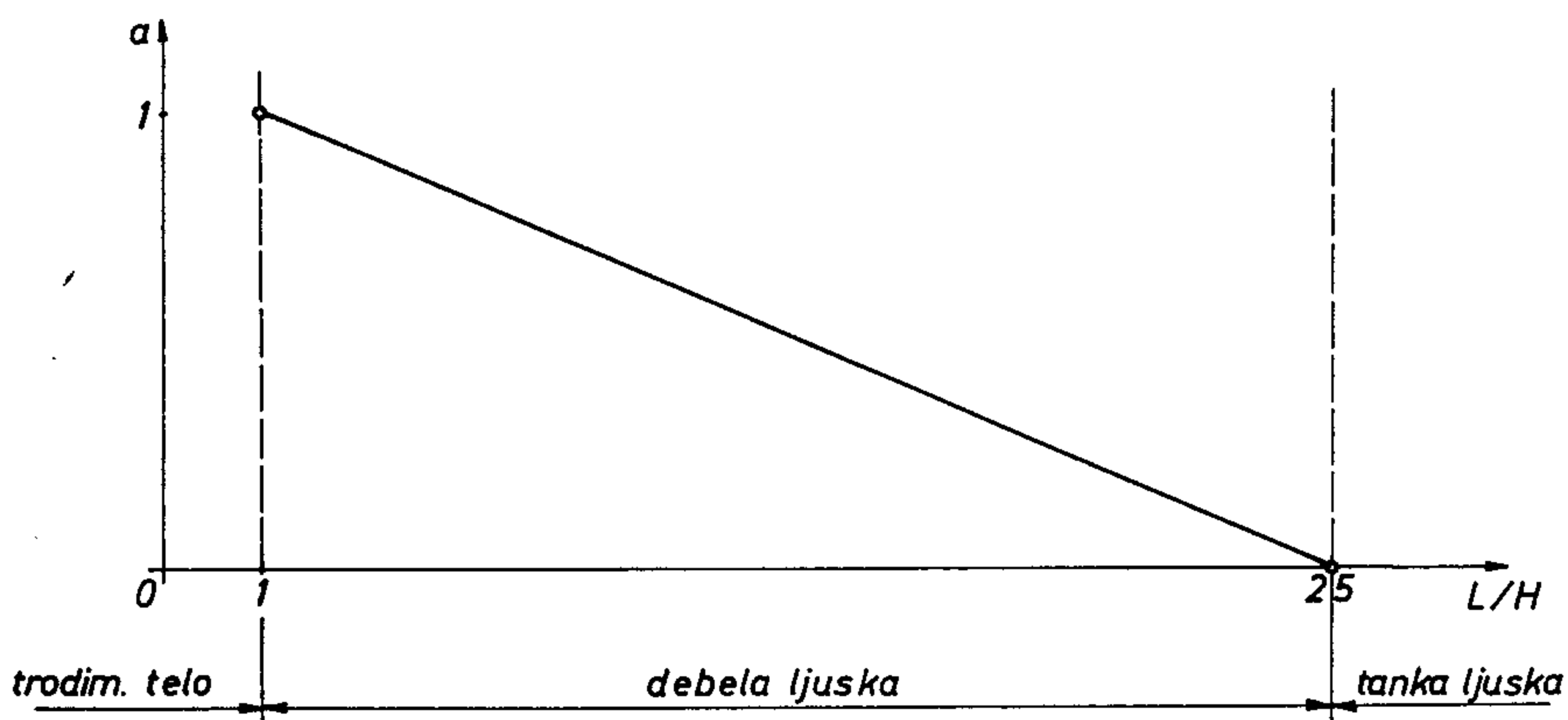
$[K_{ss}]$ - matrica krutosti transverzalnog smicanja za selektivnu integraciju (1x1)

a - korekcionni parametar

U literaturi može da se nađe podatak da se tankom ljuskom smatra ona za koju važi $L/H \geq 25$, gde je L najmanja dimenzija ljuske u srednjoj površi a H njena debljina. Ako se ovo prihvati, može da se smatra da za tanke ljuske parametar a treba da ima vrednost 0 (selektivna integracija), a za debele 1 (puna integracija). Ovo bi moglo da se iskaže linearnom zavisnošću:

$$a = \begin{cases} 0, & L/H \geq 25 \\ 25/24(1 - L/25H), & \text{za } 1 \leq L/H \leq 25 \\ 1 & \text{za } L/H = 1 \end{cases}$$

predstavljenom na sl. 50.



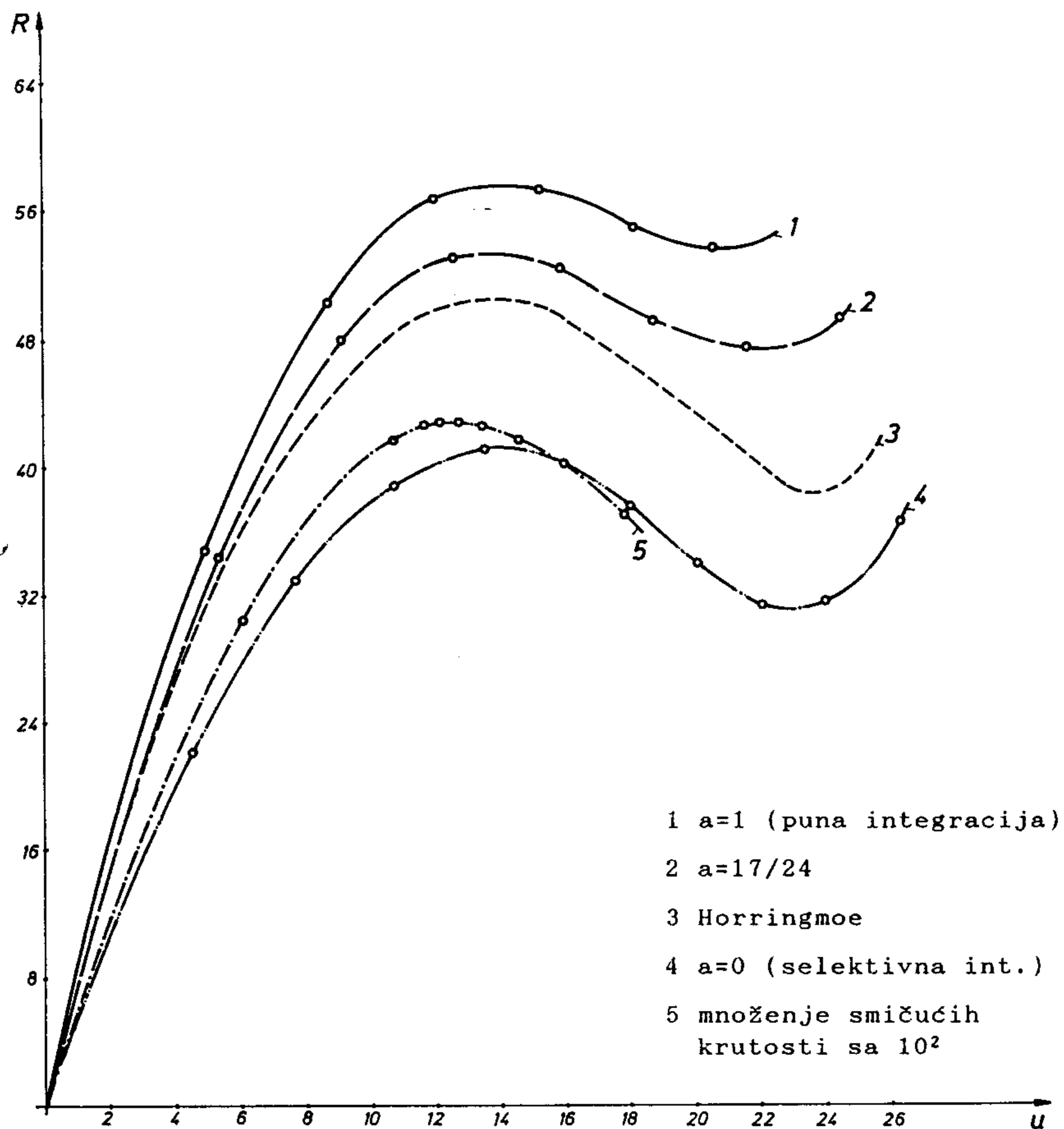
Sl. 50. Koeficijent korekcije krutosti transverzalnog smicanja u zavisnosti od debljine ljuske

Pošto je u navedenom primeru $L/H=8$ (zaokruženo na ceo broj), to je parametar $a=17/24$.

U tabeli 8.2 su dati uporedni rezultati ugiba centralne tačke pri različitim vrednostima parametra a .

tabela 8.2

a	u
1	5,208
17/24	5,532
0	7,1922



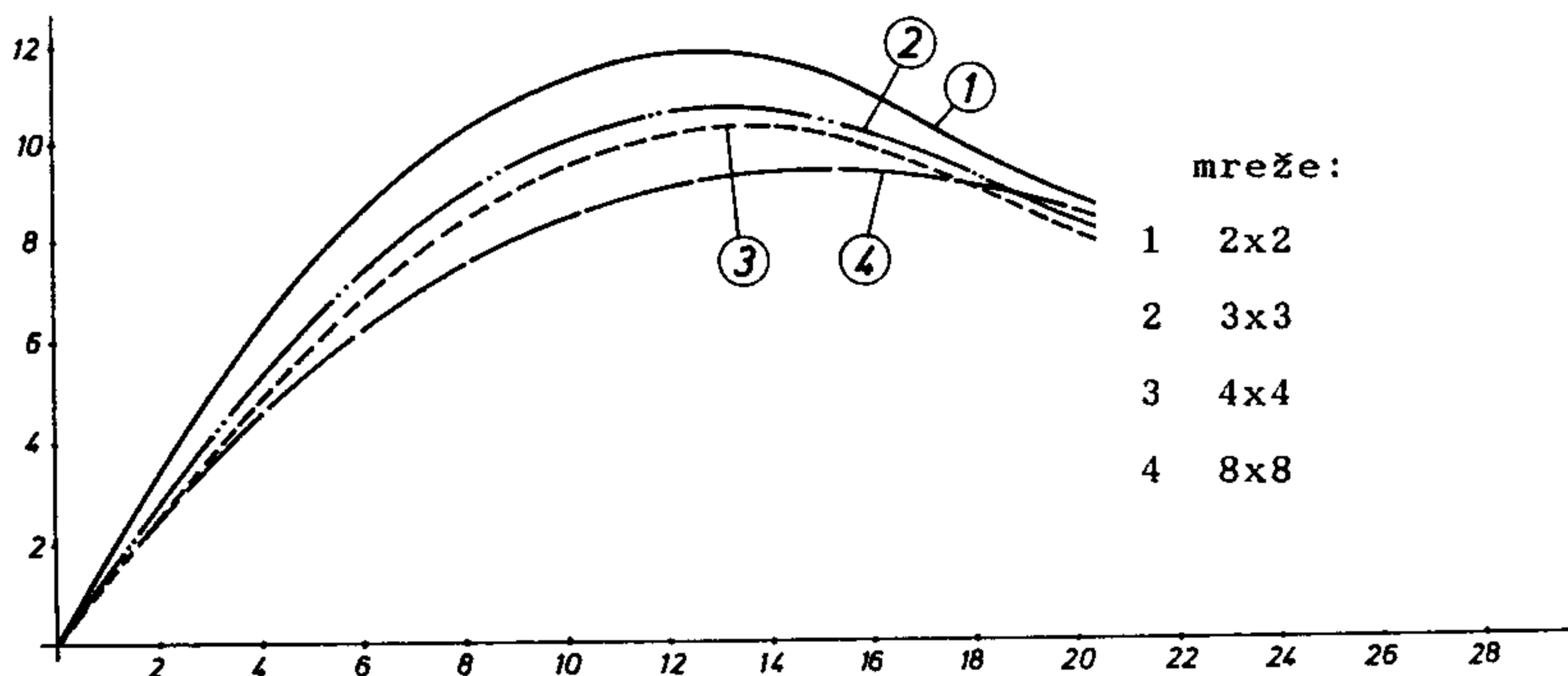
Sl. 51. Nelinearna karakteristika ugiba sredine ljuske zavisno od opterećenja za različite vrednosti koeficijenta krutosti transverzalnog smicanja

Na sl. 51. su date nelinearne karakteristike ljuske (zavisnost ugib centralne tačke-opterećenje) za različite varijante matrice krutosti transverzalnog smicanja, koja se preračunava na početku svakog koraka (modificirani metod). Pri tom je početno opterećenje iznosilo 50, a propisana tačnost 0.01. Moduo pomeranja je bio konstantan tokom celog procesa, osim što je u zoni stacionarne tačke smanjivan tamo gde promena znaka matrice krutosti i priraštaja spoljašnjeg opterećenja nije bila usaglašena.

Još je interesantno napomenuti da kada je korekcija matrice krutosti transverzalnog smicanja vršena promenom smičućeg konstitutivnog koeficijenta, pri velikim vrednostima ovog koeficijenta (10^4) nije bilo konvergencije u nelinearnom procesu. Ustvari, sa zadatim početnim opterećenjem $R=50$ se dobilo da njegova korekcija x nije realan broj, a smanjivanjem opterećenja u prvom koraku na 5, neuravnotežene sile nisu ispunile kriterijum tačnosti ni u predviđenih 20 iteracija.

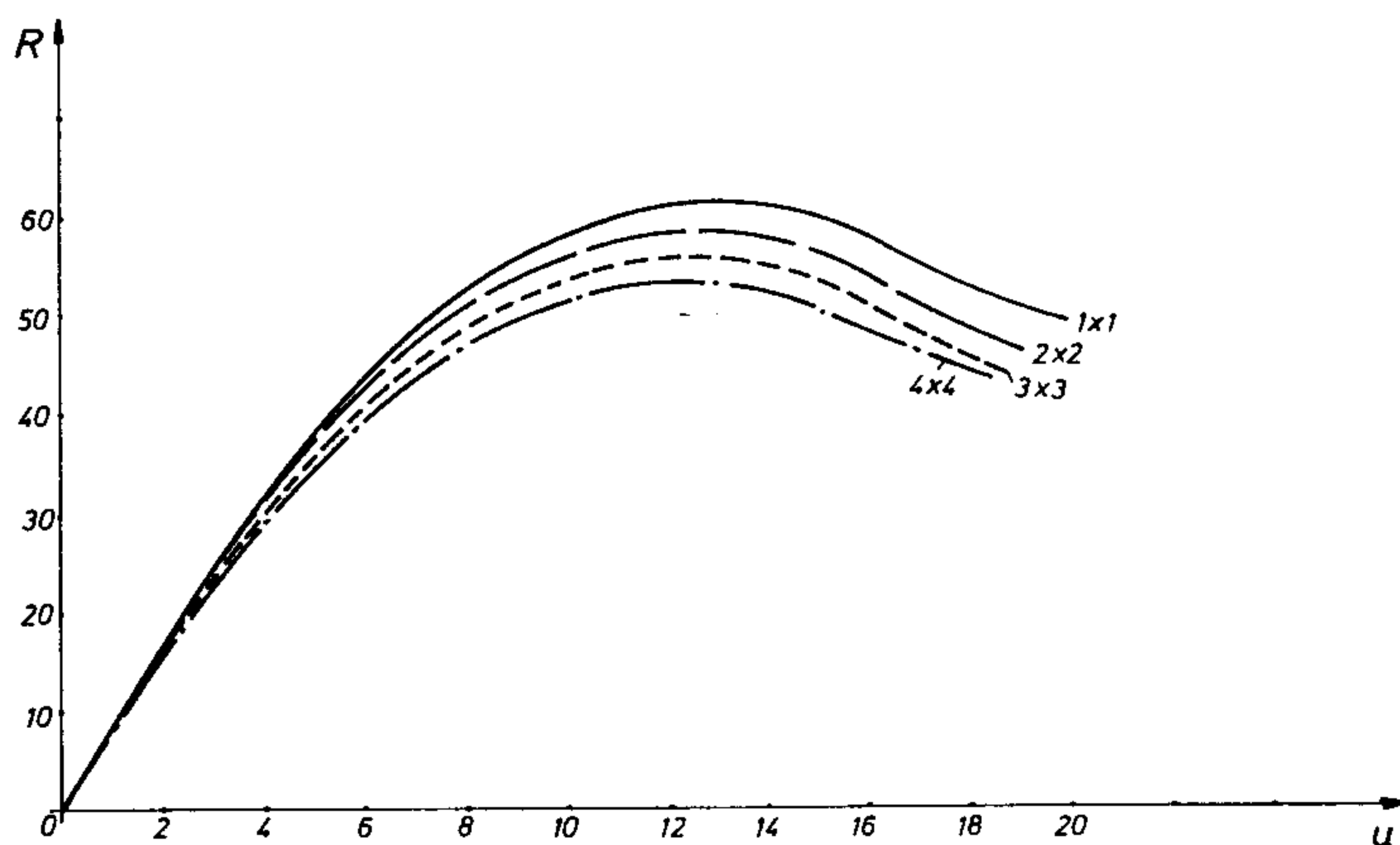
Za vrednost $s=10^3$ i početno opterećenje 5, stanje se popravilo, tj. konvergencija je bila u redu, ali je bilo potrebno mnogo koraka da bi se dobila tražena nelinearna karakteristika.

Smanjenjem s na 10^2 nije bilo ovih problema.



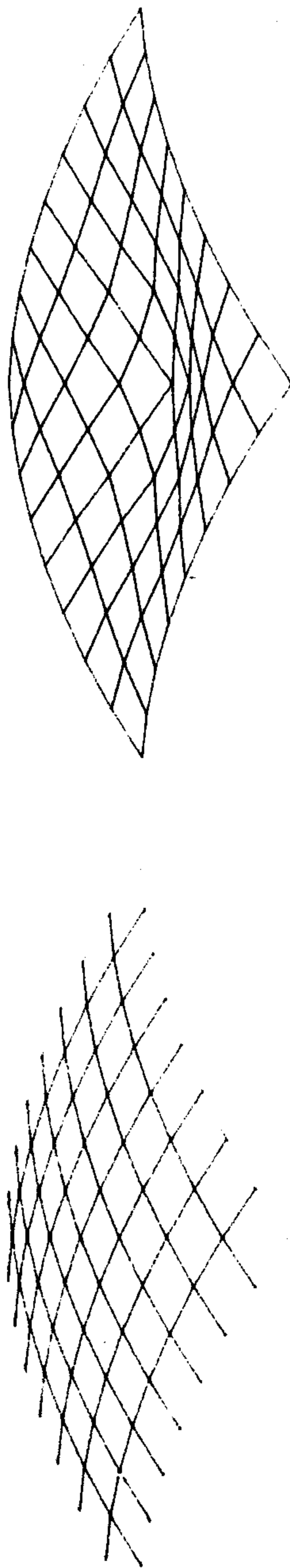
Sl. 52.a) Konvergencija nelinearnog rešenja sa gustinom mreže pri selektivnoj integraciji

Na sl. 52.a) i 52.b) je prikazana zavisnost nelinearne karakteristike strukture od mreže, pri čemu su rezultati dobijeni selektivnom, tj punom integracijom, respektivno.

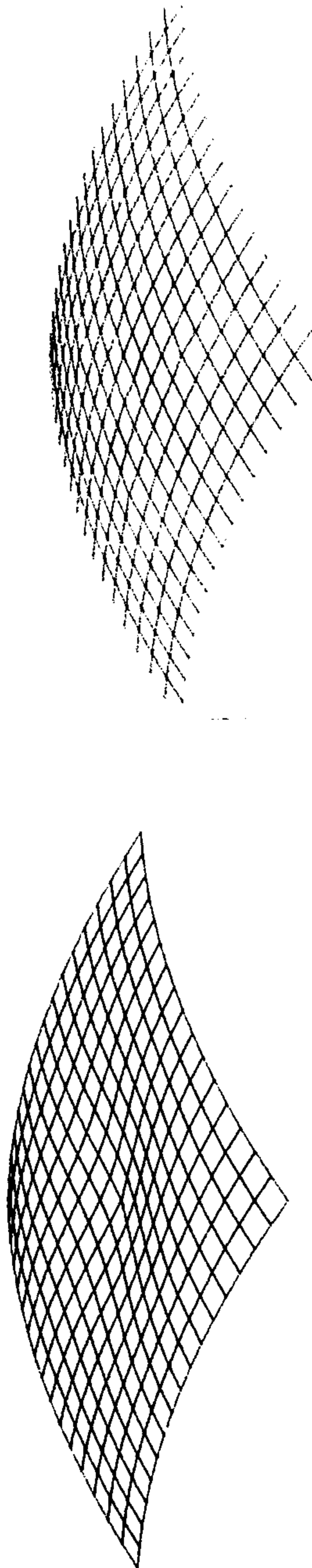


Sl. 52.b) Konvergencija nelinearnog rešenja sa gustinom mreže pri punoj integraciji

Na osnovu rezultata ovog primera se zaključuje da predloženi konačni element za nelinearnu analizu treba koristiti s posebnom pažnjom kada su u pitanju debele ljuske. Međutim, to je zapaženo već i ranije od strane Hjuza (T.J.R.Hughes) i Kanoknikulčaja (W. Kanok-Nukulchai) za linearni slučaj. Ovi autori smatraju, kao što je i ovde predloženo, da u vakvim slučajevima treba koristiti za finije mreže punu integraciju, a za grublje mreže neko srednje rešenje.

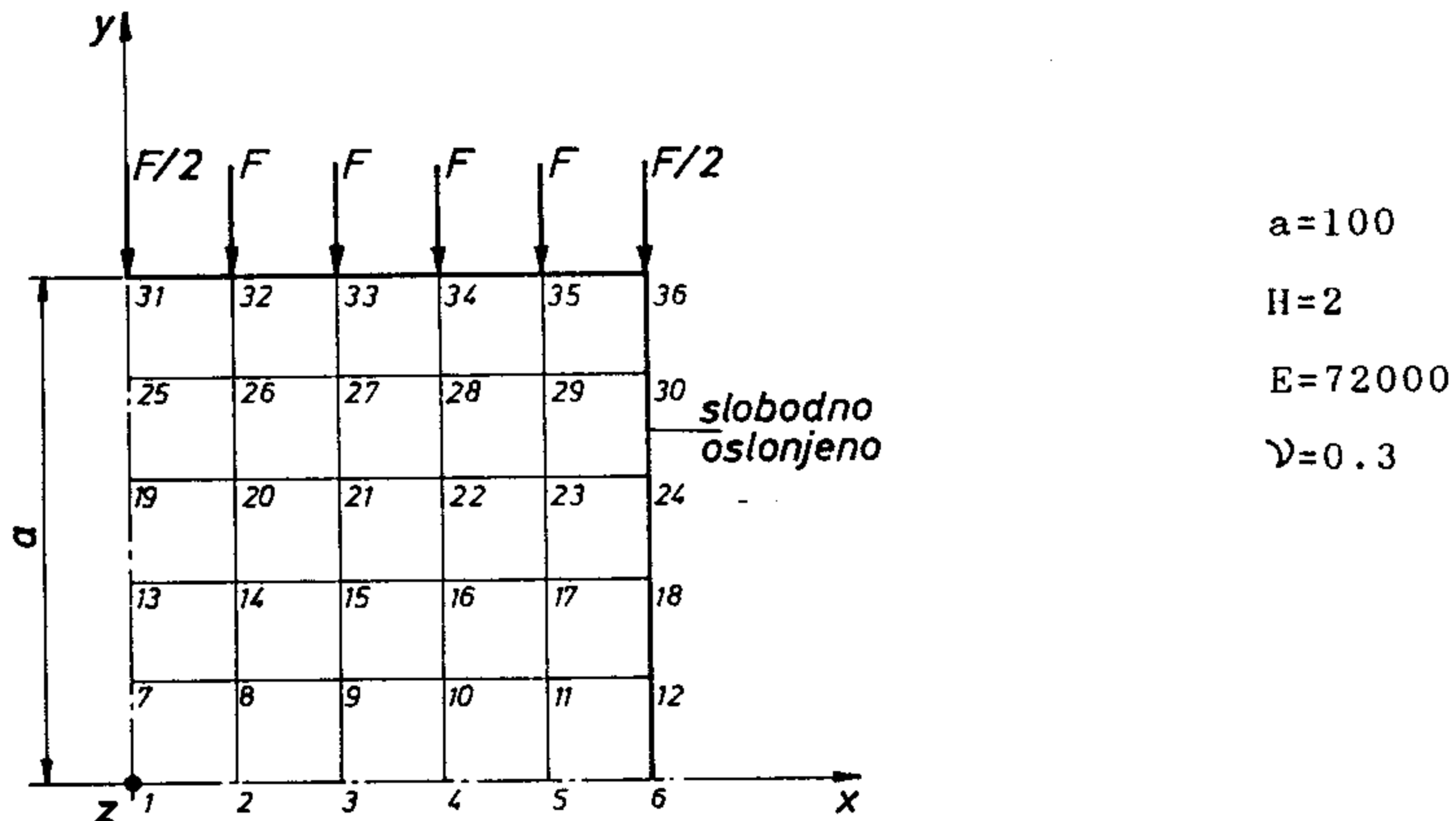


Sl. 53. Sferna ljuska: mreža 4x4 i selektivna integracija
 a) nedeformisana konfiguracija
 b) deformisana konfiguracija pri maksimalnoj sili



Sl. 54. Sferna ljuska: mreža 8x8 i puna integracija
a) nedeformisana konfiguracija
b) deformisana konfiguracija pri maksimalnoj sili

9. Pritisnuta ploča



Sl. 55. Mreža i opterećenje pritisnute ploče

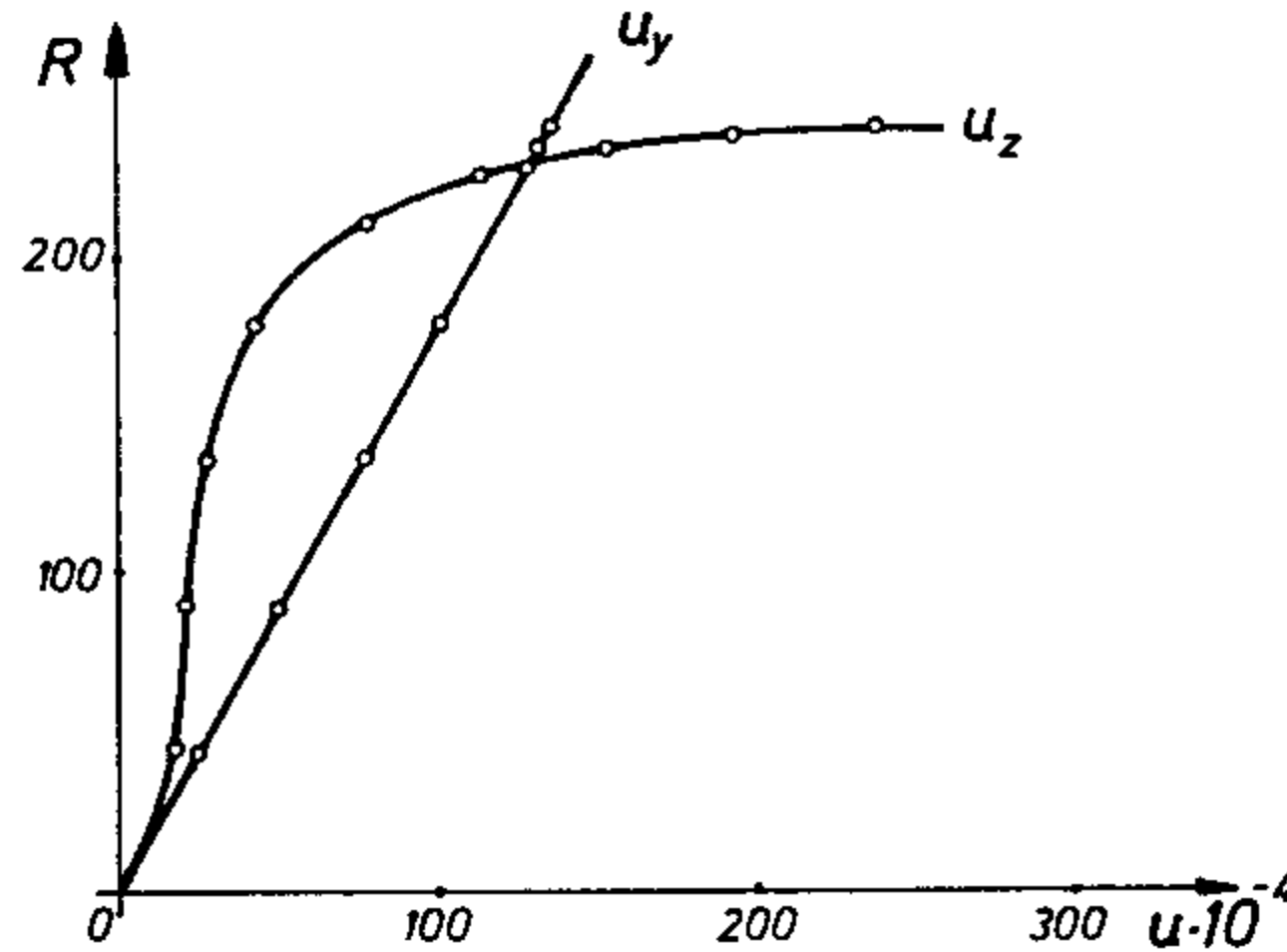
Ovo je primer ravne ploče, ravnomerno opterećene membranskim silama koje izazivaju pritisak. Pošto je kod elementa ravne ploče izvod koordinate z vektora položaja (x, y, z) po konvektivnim koordinatama elementa (ξ, η) jednak nuli i postoji komponenta direktora samo u pravcu te ose ($dx=dy=0, dz=1$), to ovakav i ovako opterećen element nema pomeranja u pravcu ose z (normalno na ploču).

Kada je primer rađen samo sa membranskim opterećenjem nije dolazilo do izvijanja ploče koje se očekivalo jer je postojalo samo pomeranje u pravcu ose y .

Rezultat ovakvog rada je bio linearna zavisnost između y -pomerenja i opterećenja.

Da bi došlo do izvijanja ploče, bilo je potrebno zadati malu inicijalnu silu normalno na ploču, tako da ona daje inicijalno pomeranje u pravcu ose z . Ova inicijalna sila je izabrana tako da deluje u centru ploče (čvor 1) i izaziva ugib $\approx 10^{-3}H$, što spada u male ugibe. Ova poremećajna ili inicijalna sila deluje samo u prvom koraku i kada se nađe ravnotežno stanje strukture, tj. ugib

koji njoj odgovara, ona se uklanja, a na deformisanu strukturu sada deluju prikazane horizontalne sile.



Sl. 56. Pomeranja pritisknutog čvora 31 (sl. 55) zavisno od spoljašnjeg opterećenja

Na sl. 56 su prikazana y i z pomeranja čvora 31 zavisno od spoljašnje sile u ovom čvoru.

Za kritičnu silu se dobila vrednost $F_k = 4470$, što predstavlja $10F$, tj. ukupnu silu u svim opterećenim čvorovima 31÷35, pomnoženu sa dva zbog simetrije strukture. Pošto je pritisknuta površina:

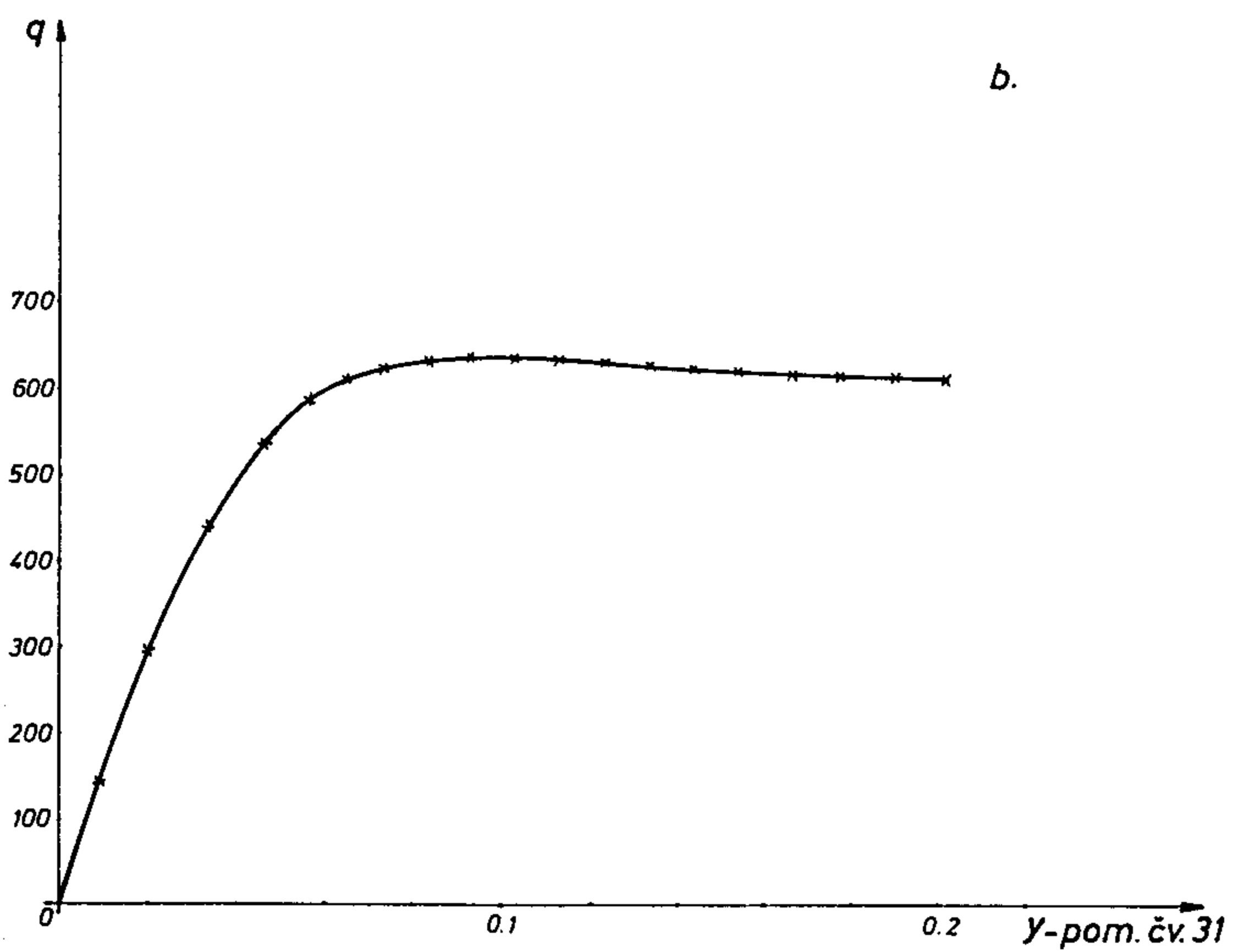
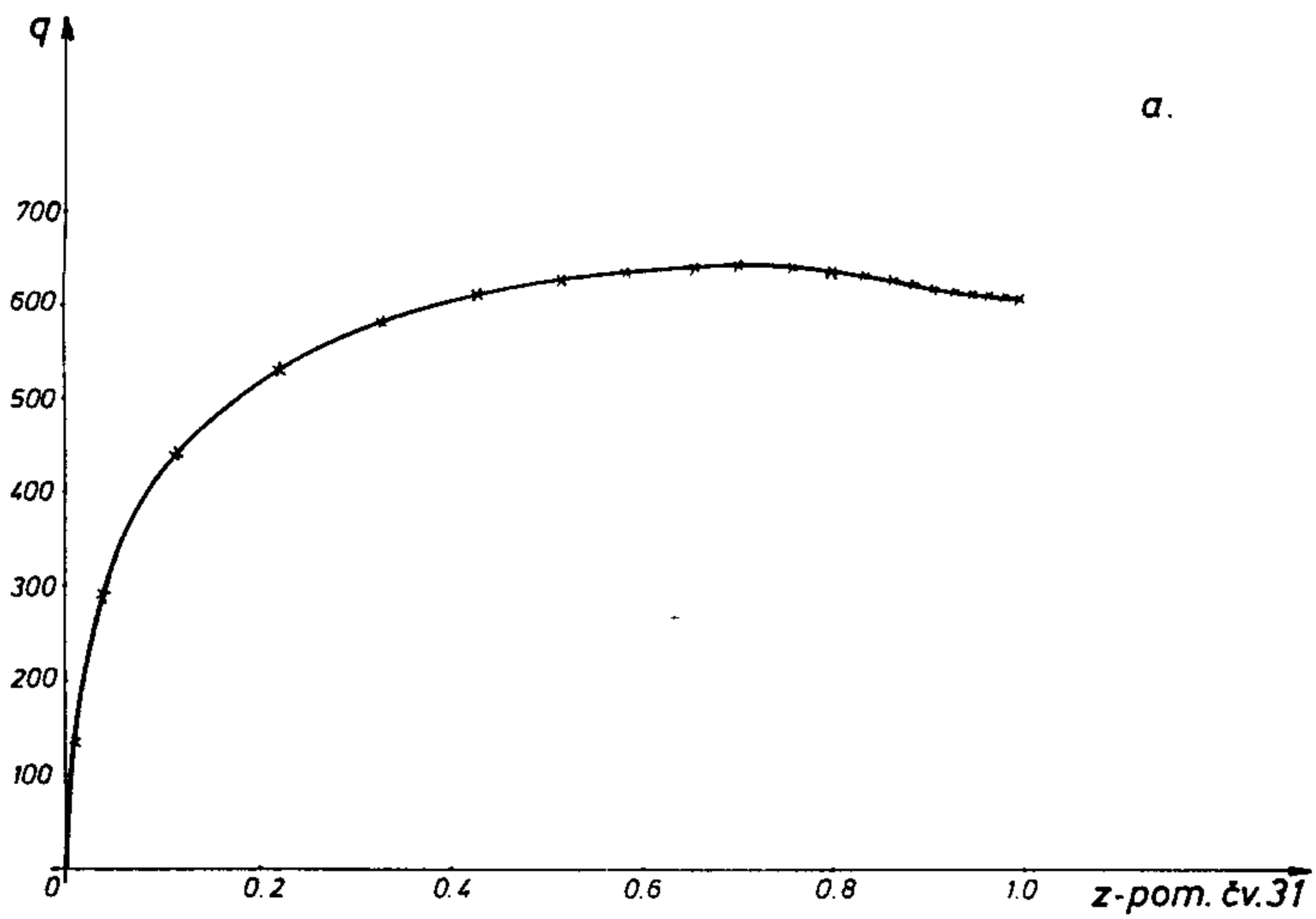
$$A = 2aH = 2 \cdot 100 \cdot 2 = 400$$

to znači da je kritični napon:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{4470}{400} = 11.175$$

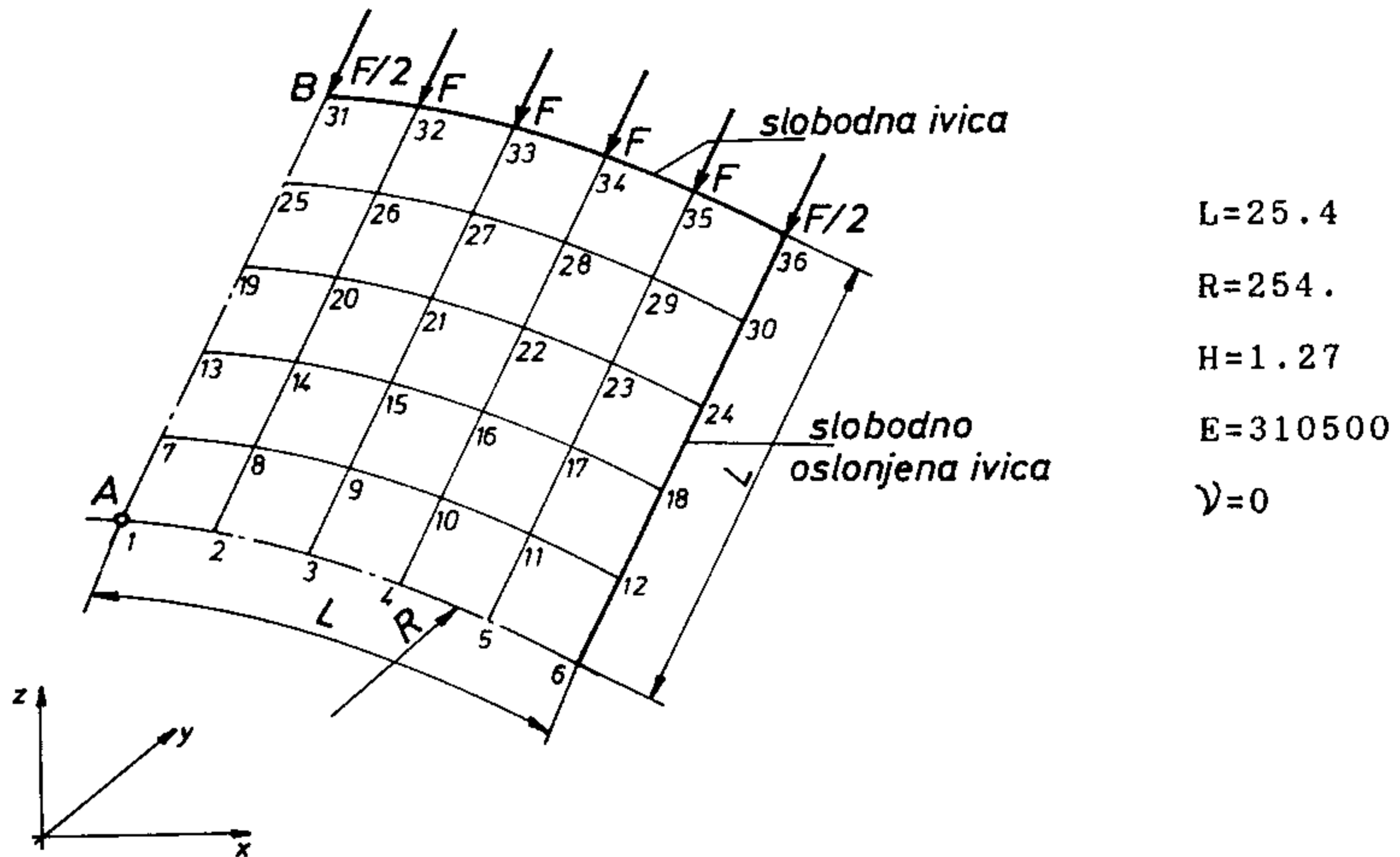
Ako se uzme da je početno opterećenje za korak (i) ono za koje je postignuta konvergencija u koraku (i-1) i ako se moduo 1 u svakom koraku računa za tangencijalno pomeranje, dobija se da su u blizini kritične tačke početno opterećenje u koraku i propisani moduo pomeranja veoma mali i teže nuli. Zato je, da bi numerička procedura bila primenljiva na sve slučajeve, dodat i uslov za Δl_{min} , tj. R_{min} . Ako je u prvom koraku ispunjen uslov za mala pomeranja, onda je u narednim koracima usvojeno da maksimalne vrednosti pomeranja, tj. opterećenja, ne budu manje od 10^{-2} od početne vrednosti. Time se sprečava preterano gomilanje tačaka oko kritična tačke.

Za silu $F > F_k = 4470$ determinanta matrice krutosti strukture postaje



Sl. 59. Zavisnost ugiba (a) i aksijalnog pomeranja (b) sredine pritisnute ivice od specifičnog opterećenja

10. Pritisnutu cilindar



Sl. 58. Geometrijske mere i mreža pritisnutog cilindra

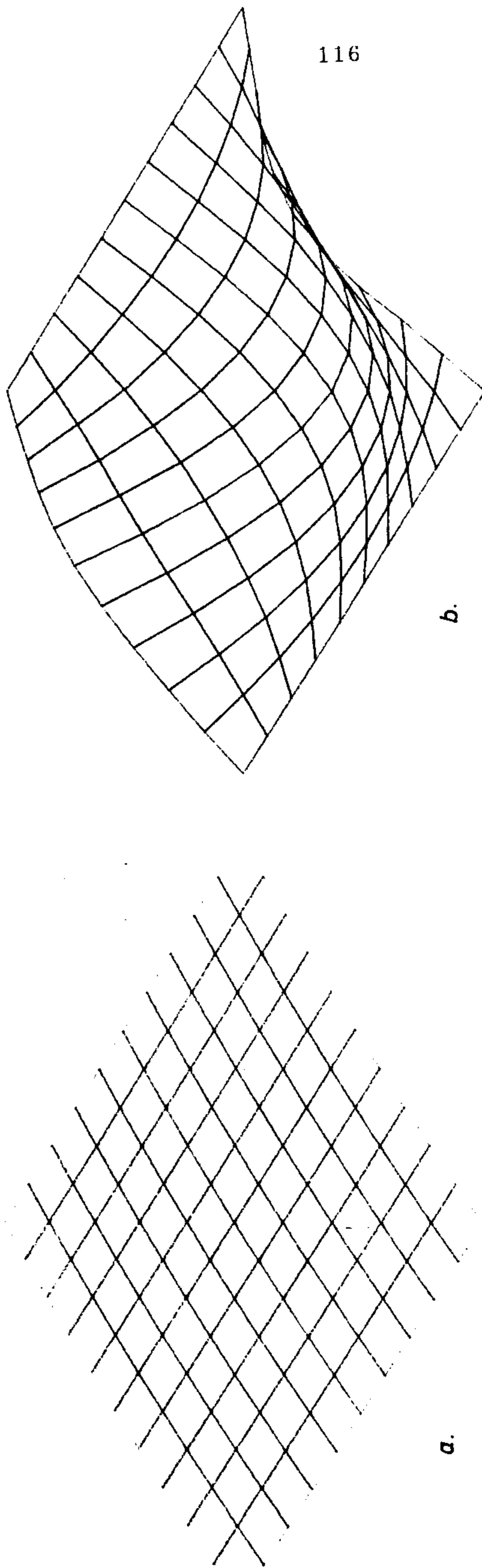
I ovo je primer izvijanja ljuske podaksijalnim opterećenjem na slobodnoj ivici. Inicijalna sila, zadata u čvoru 1 u pravcu ose $-z$, je iznosila 100, tako da je inicijalni ugib u ovom čvoru $\approx H/10$. Na sl. 59. a) i b) je data zavisnost ugiba i aksijalnog pomeranja u tački B od opterećenja po jedinici pritisnute površine, q . Pošto je pritisnuta površina $2LH$, a ukupna sila $10F$, to je specifično opterećenje q :

$$q = \frac{10F}{2LH} \approx 0.155F$$

Na sl. 60. a) i b) je na ordinatnoj osi odnos tekuće i kritične sile u čvoru, λ . Postkritično ponašanje ljuske je karakteristično jer dolazi do velikih pomeranja pri malim promenama sile.

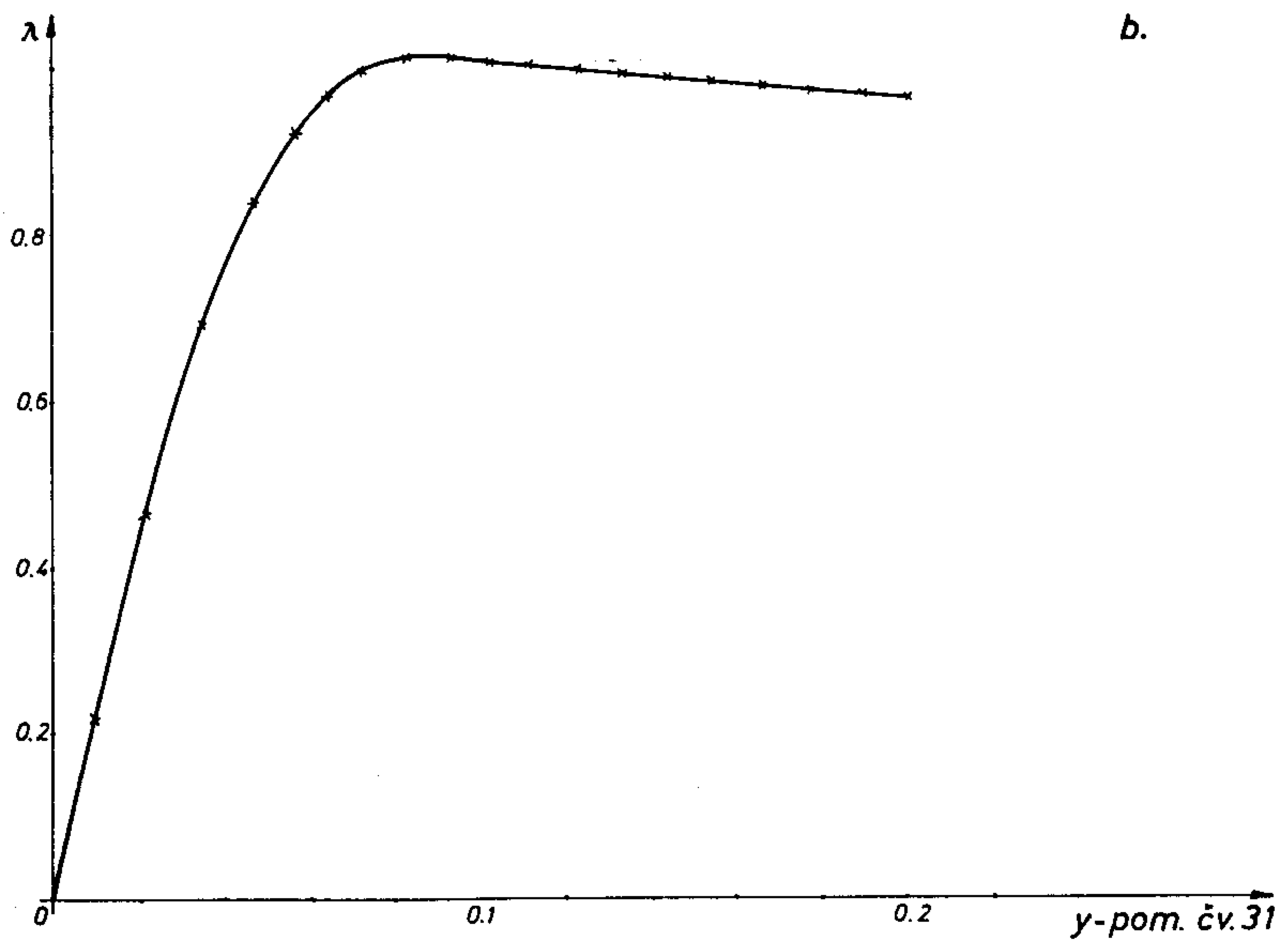
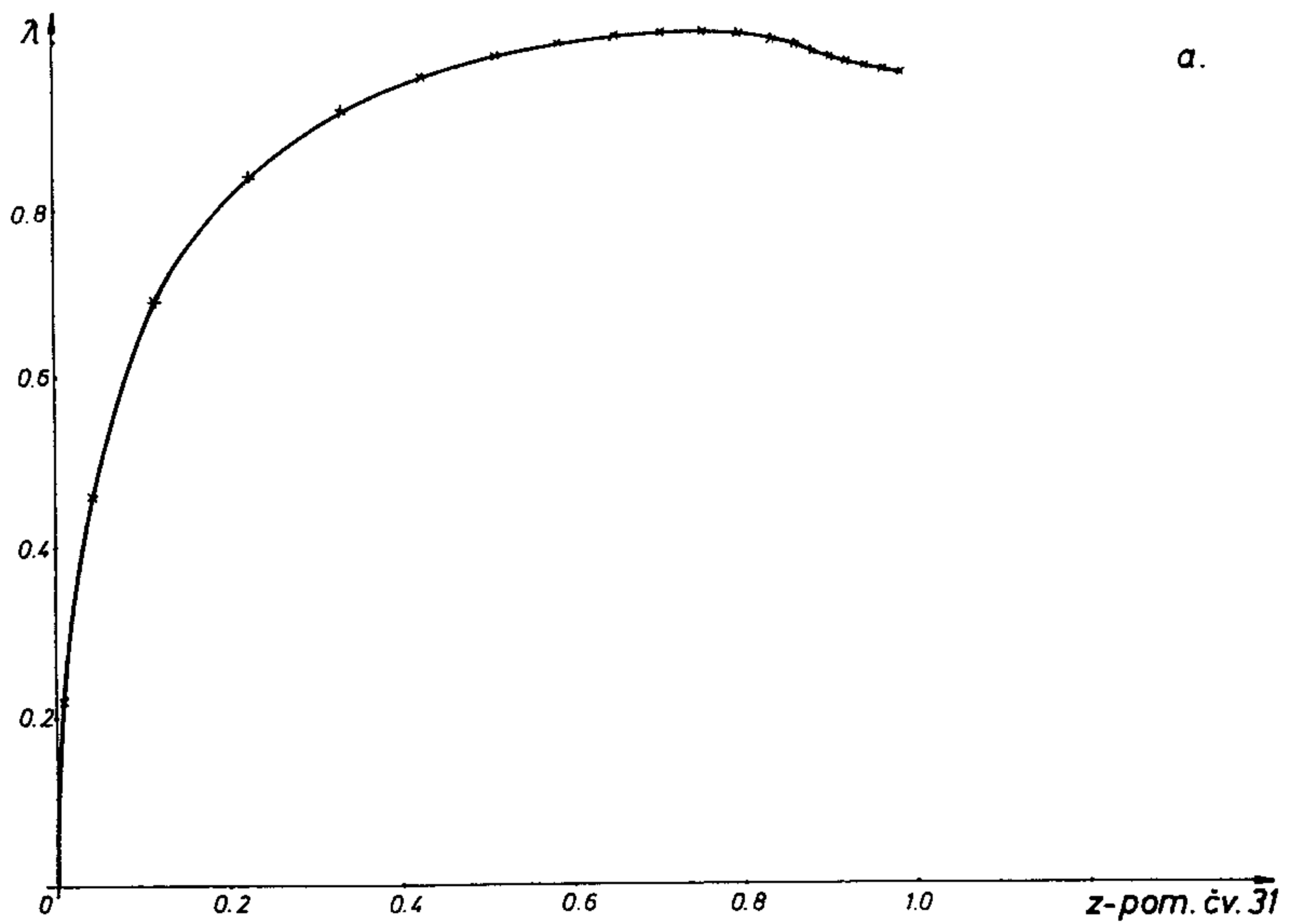
I ovaj i prethodni primer su primeri postojanja tačke bifurkacije, tj. tačke gde je postignuta maksimalna sila i gde kriva istovremeno menja konkavnost.

Na sl. 61. je data prostorna slika početne i deformisane konfiguracije za stanje koje odgovara krajnjoj tački na slikama 60.



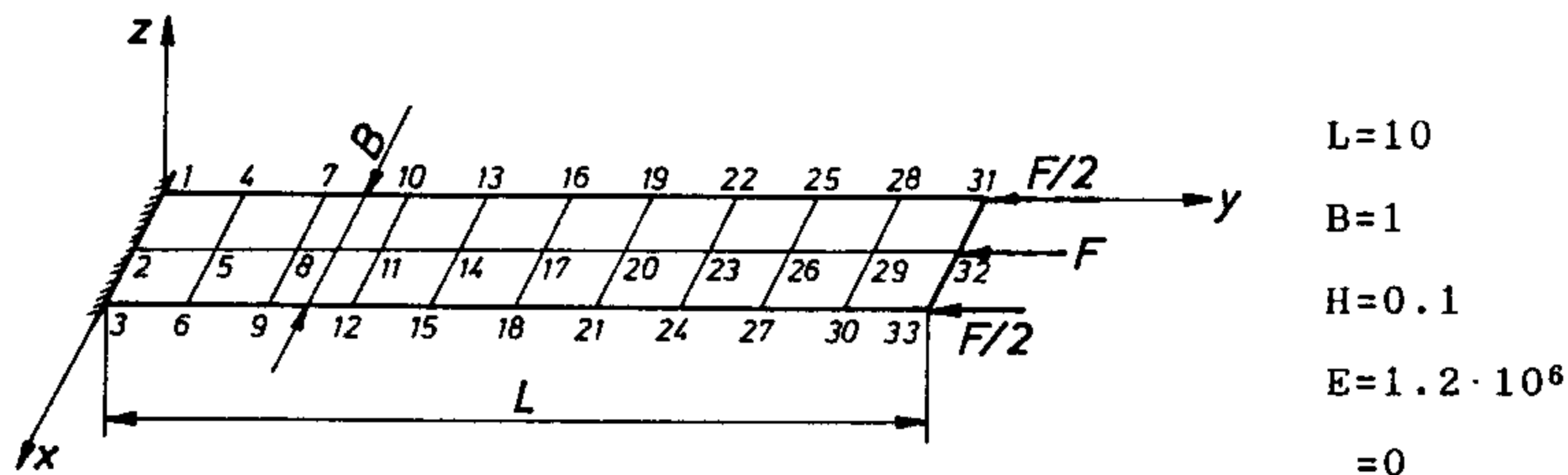
Sl. 61. Pritisnuti cilindar

- a) nedeformisana konfiguracija
- b) deformisana konfiguracija koja odgovara tački A (sl. 59)
- c) deformisana konfiguracija koja odgovara tački B (sl. 59)



Sl. 60. Zavisnost ugiba (a) i aksijalnog pomeranja (b) sredine pritisnute ivice od koeficijenta izvijanja

11. Izvijanje konzole



Sl. 62. Pritisnuta konzola

Za ovakav slučaj izvijanja je poznat analitički izraz za izračunavanje kritične sile:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

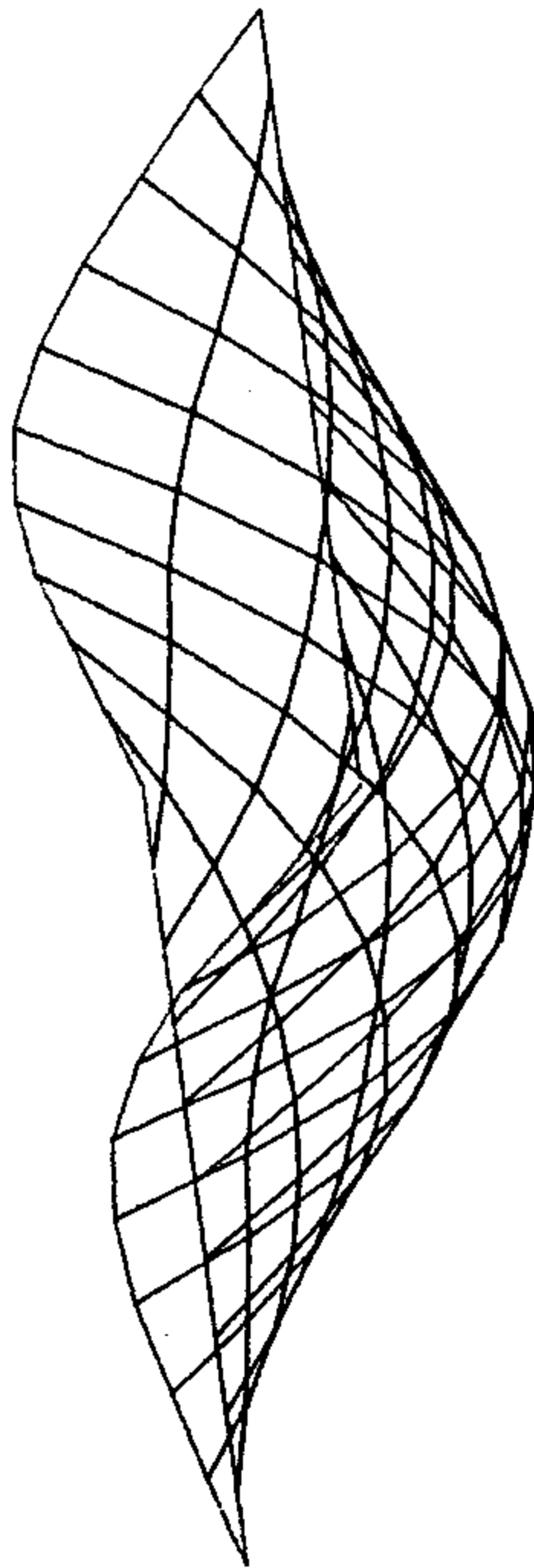
što za geometriju prikazanu na slici iznosi:

$$F_k = 2.45$$

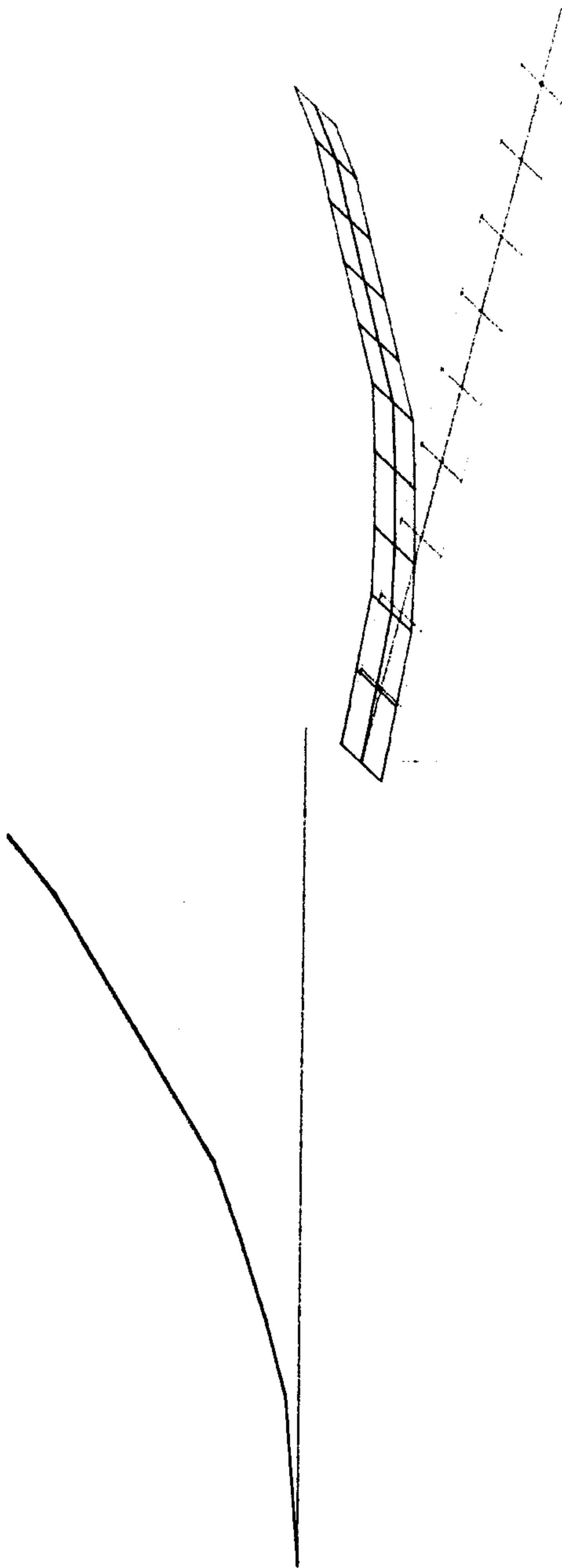
I ovde je bilo neophodno uzeti vertikalnu inicijalnu silu na kraju konzole, a ona je izabrana tako da izaziva maksimalni ugib približno jednak debljini ljuske. Moduo ovog ugiba je uzet kao propisani moduo pomeranja po koraku.

Prema [35], maksimalno vertikalno, tj. z-pomeranje se postiže pri sili $2F\sqrt{3}$, pa su na sl. 63. date deformisane konfiguracije konzole pri tri različite sile: $2F$, $2.5F$ i $2F\sqrt{3}$.

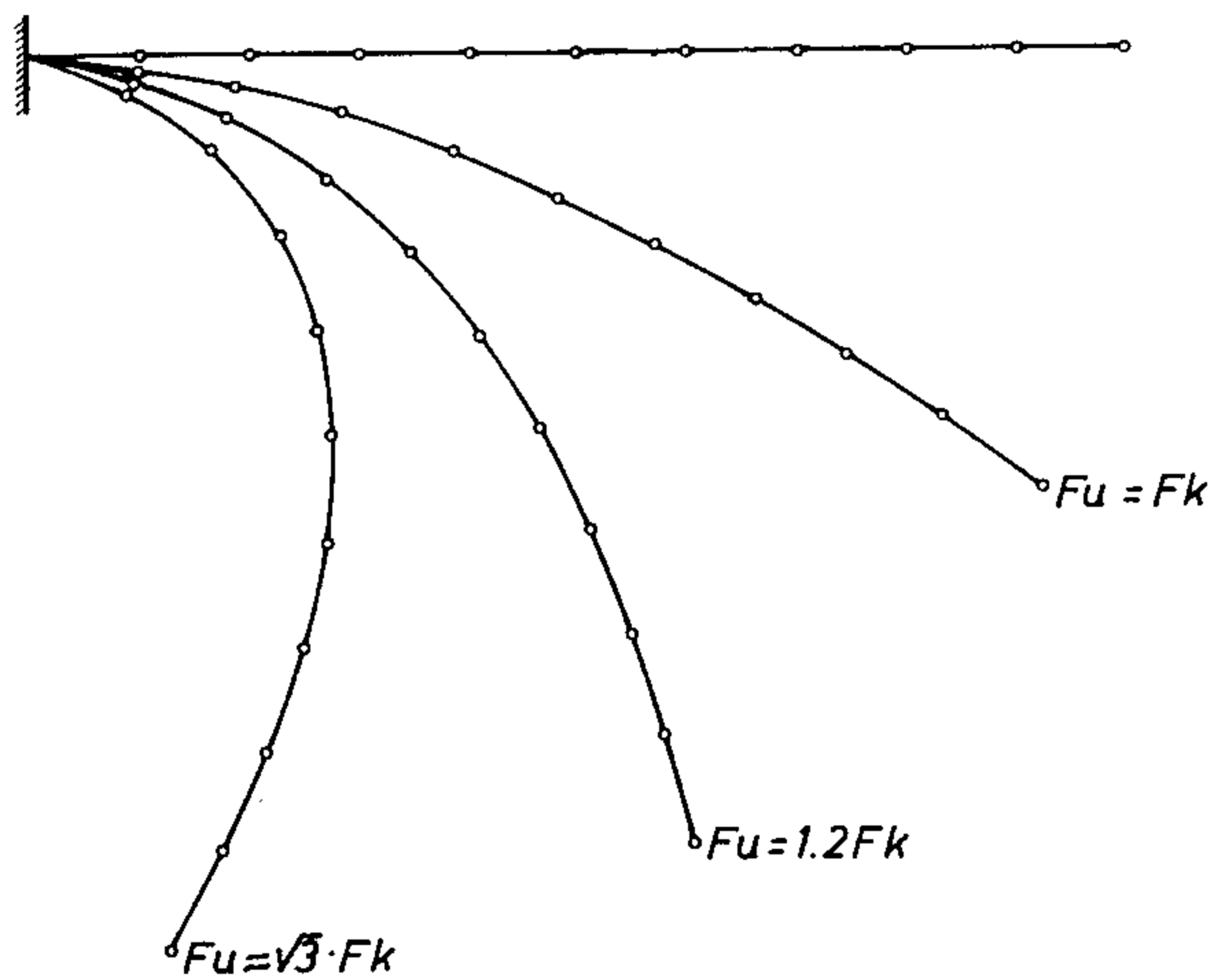
Na sl. 64. je dat dijagram zavisnosti z-pomeranja kraja konzole od aksijalne sile, a na sl. 65 prostorna konfiguracija početne i deformisane strukture pri kritičnoj sili.



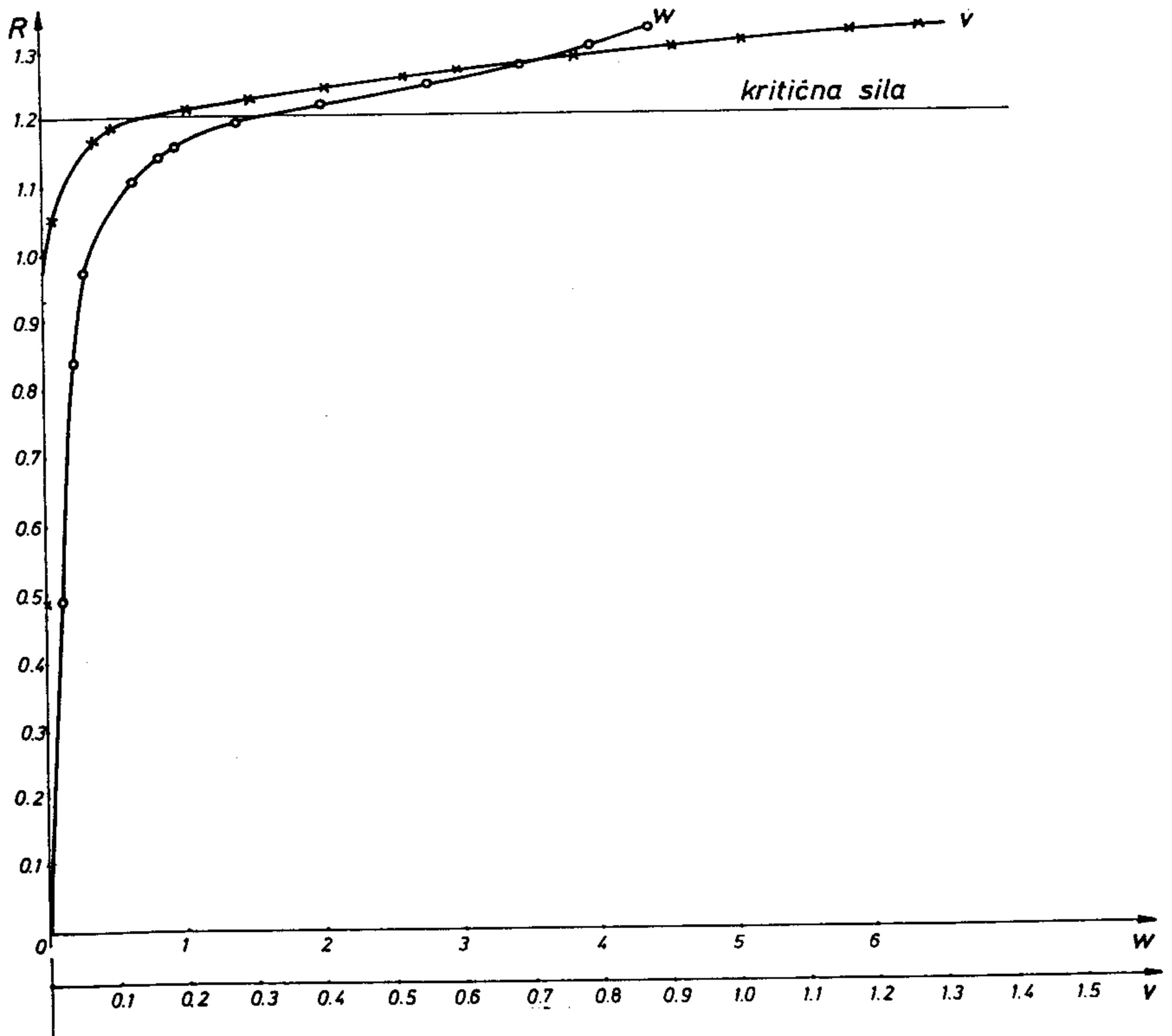
c.

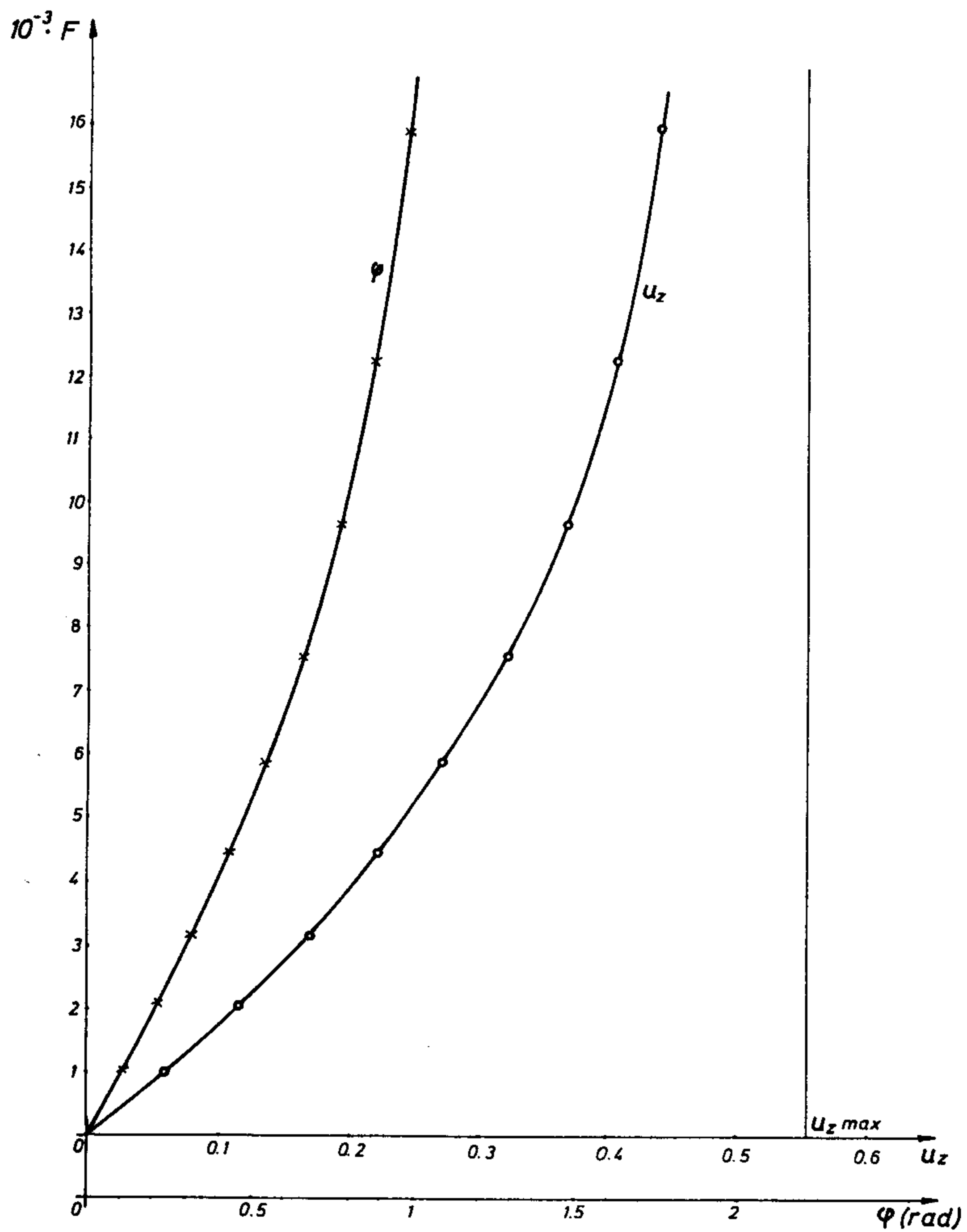


Sl. 65. Pritisnuta konzola: nedeformisana konfiguracija
i deformisana pri kritičnoj sili
a) u vertikalnoj ravni
b) u prostoru



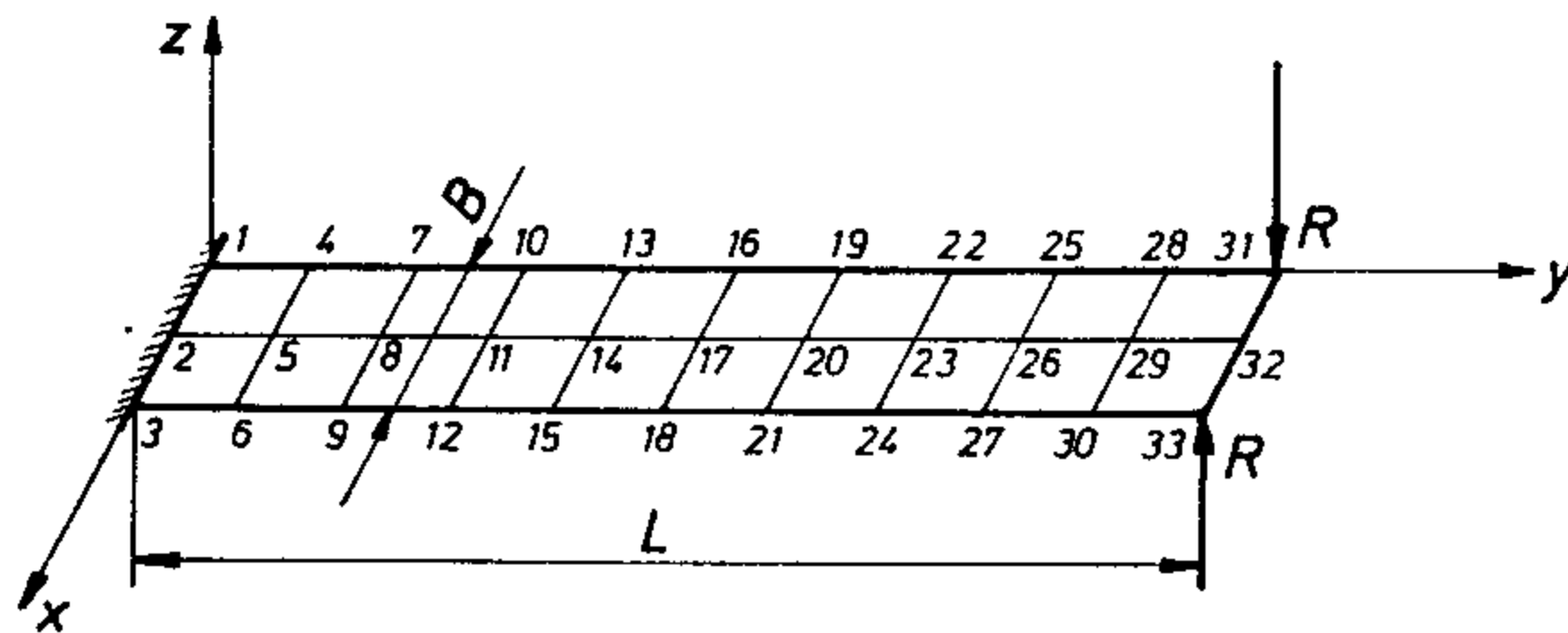
Sl. 63. Deformisana konfiguracija konzole za različite vrednosti sile na kraju konzole





Sl. 66. Nelinearna karakteristika konzole - ugao uvijanja i vertikalno pomeranje opterećenih tačaka

12. Uvijanje konzole



$$L=12$$

$$B=1.1$$

$$H=0.32$$

$$E=29 \cdot 10^6$$

$$\nu=0.22$$

Sl. 65. Geometrija i mreža konzole opterećene spregom

Rezultate ovog primera nije bilo moguće porediti sa rezultatima koji se dobijaju klasičnim inženjerskim proračunima u otpornosti materijala zato što je pretpostavljeno da sile i u deformisanoj konfiguraciji ostaju vertikalne. Pošto se kraj konzole (linija na kojoj leže čvorovi 31, 32 i 33) deformiše, tj. vrši rotaciju oko ose y , to se smanjuje komponenta spoljašnje sile normalne na ivicu 31, 32, 33, koja i čini spreg. Zato, pri određenoj veličini ugla uvijanja konzole, spreg postaje veoma mali uprkos tome što sila ima veliki porast. Ovo dovodi do veoma malih torzionih pomeranja, pa nelinearna karakteristika na dijagramu na sl. 66. ima vertikalnu asimptotu.

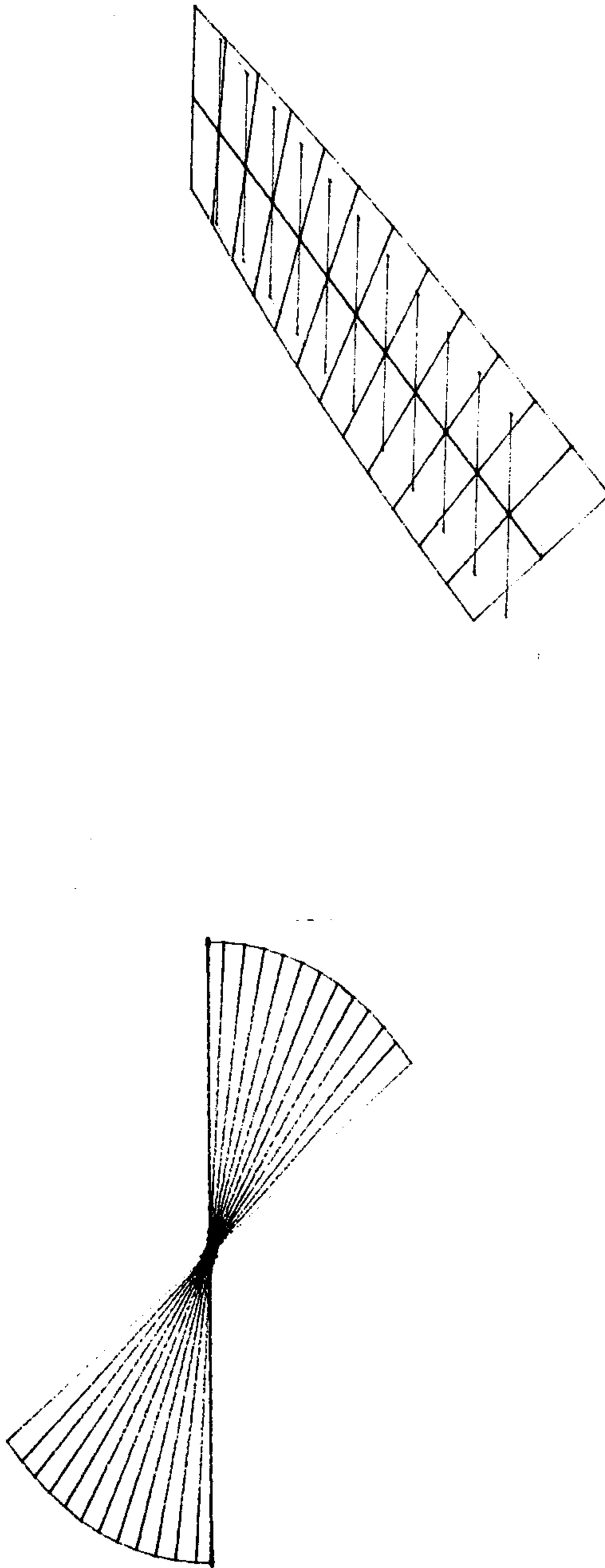
Na sl. 67. je dat prostorni izgled početne i one deformisane konfiguracije koja odgovara stanju strukture prikazanom zadnjom tačkom u dijagramu na sl. 66. Za ovu geometriju i njoj odgovarajuće naponsko stanje, determinanta matrice krutosti menja znak.

ZAKLJUČCI

Cilj ovog rada je bio da se na četvorougao ni bilinearni konačni element ljuske primeni neki od numeričkih postupaka za rešavanje geometrijski nelinearnih problema, a naročito da se taj postupak formuliše kao metoda koja će da bude primenljiva u slučajevima fenomena postkritične analize.

U tom cilju urađeno je sledeće:

1. Razmotrena je mogućnost da se postojeći konačni element ljuske, izveden u [3] i [7] i analiziran u [41], dopuni normalnim naponom S^{33} koji se inače u klasičnoj teoriji tankih ljuski zanemaruje. Osnovni razlog za ovo razmatranje bio je ispitivanje eventualnih pogodnosti ovog, u većoj meri trodimenzionalnog prilaza analizi ljuske.
2. Izvedene su matrice veze za dopunski, sedmi stepen slobode po čvoru, koji predstavlja sabijanje ljuske, tj. promenu njene debljine.
3. Date su matrice elastičnosti za slučaj da postoji normalni napon u pravcu normale na ljusku, S^{33} , uz pretpostavku da je konstantan po debljini ljuske ili da je raspodeljen kao napon transverzalnog smicanja, tj. da zavisi od kvadrata koordinate normale, .
4. Analizirana je matrica konstitutivnih koeficijenata sa aspekta reda veličine njenih članova i u tom smislu učinjena njihova selekcija prihvatljiva za praktičnu upotrebu.
5. Izvršena je provera mogućnosti primene različitih formula za numeričku integraciju matrica krutosti. Posebno je obraćena



Sl. 68. Uvijanje konzole: nedeformisana i deformisana struktura
za stanje koje odgovara tački A_1 , tj. A_2 , sl. 67.

arnih problema su data dva metoda koji se primenjuju u MKE.

a) Njutnov (constant load) metod, tj. metod konstantnog opterećenja u koraku

b) Riksov (constant arc length), tj. metod konstantnog modula pomeranja u koraku

Za drugi metod su data izvesna poboljšanja u odnosu na ono što se predlaže u literaturi (Krisfild) koja je bila na raspolaganju, tako da je samostalno urađen algoritam i napravljen program kojim se automatski prevazilaze kritične tačke pri izvijanju ljuski i u "snapping" problemima. U tom smislu je izvršena analiza parametara koji utiču na stabilnost numeričke procedure i njihovo optimiranje, tako da se kriterijumima koji su ugrađeni u program, rešava veliki broj primera.

Iz ove analize mogu da se izvedu sledeći zaključci:

1. Veoma je važan izbor veličine opterećenja u početnoj konfiguraciji, pa je zato on učinjen tako da maksimalno pomeranje u mreži strukture bude manje od $H/2$, gde je H debljina ljuske. Ovakom dobijenim vektorom pomeranja se obezbeđuje skoro optimalan moduo sa kojim je moguće postaviti nelinearnu karakteristiku.

2. Korigovanje opterećenja je veoma jednostavno jer se izvodi rešavanjem kvadratne algebarske jednačine. Za izbor rešenja su dati kriterijumi manje strogi od onih koji se navode u literaturi (Krisfild), a dovoljno pouzdani.

3. Pokazano je kako izbeći neke numeričke probleme u okolini stacionarnih tačaka kontrolom matrice krutosti i opterećenja, pogodnim izborom parametara stabilnosti numeričke procedure.

4. Dat je ubrzani postupak za rešavanje problema sa postojanjem

pažnja na integraljenje onih matrica koje povezuju deformacije $a_{\alpha\beta}$ i a_{33} i same a_{33} .

Iz svega što je urađeno može da se zaključi sledeće:

- Izoparametarski konačni element tanke ljuske sa bilinearnom interpolacijom po konvektivnim koordinatama (ξ, η) u polju elementa, je primenljiv onakav kako je dat u [3], [7] i [41] i u rešavanju geometrijski nelinearnih problema.
- Relativna promena debljine ljuske je veoma mala za testirane tanke ljuske i može da se zanemari. Uvođenje ovog stepena slobode neznatno menja numeričke vrednosti ostalih pomeranja u strukturi, a zahteva dodatni prostor i dodatne matematičke operacije.
- Uvođenje napona S^{33} je rizično za slučajeve dubokih ljuski jer način integracije predložen u radu (u centru elementa) je prihvatljiv samo za plitke ljuske, dok duboke čini znatno krućim.
- Za plitke, tanke ljuske, gde je integraljenje matrica krutosti vezanih za deformaciju a_{33} korektno, nema bitnih razlika raspodela napona S^{33} po debljini ljuske. Numerički rezultati dobijeni za S^{33} sa $\xi = \text{const}$ i sa promenom koordinate ξ po kvadratnoj paraboli, ne razlikuju se bitno.
- Problematična je integraciona formula, tj. tip numeričke integracije za matrice veze deformacije a_{33} .
- Prihvatljivo je da svi konstitutivni koeficijenti zavise linearno od ose ξ , a neke od konstitutivnih koeficijenata je moguće za tanke ljuske konstantne debljine, za koje važi Kirhofov zakon, zanemariti.

Uvažavajući ove zaključke, rađena je nelinearna analiza. U okviru nelinearne analize primenjene na rešavanje geometrijski neline-

DODATAK I

IZVOD DIREKTORA PO KONVEKTIVNIM KOORDINATAMA ELEMENTA

Dok za izvod globalnih koordinata tačaka u unutrašnjosti elementa (u numeričkoj proceduri te unutrašnje tačke su integracione tačke), po konvektivnim koordinatama a ($a=1,2$) važi relacija

$$x_a^i = X_I^i P_a^I \dots\dots\dots(1)$$

analogna relacija za direktore ne važi, jer je pri izvođenju deformacije usvojeno, saglasno Kirhofovoj teoriji, da je direktor uvek jedinična normala, zanemarujući pritom uticaj transversalnog smicanja na deformaciju direktora, što je kod tankih ljuski opravdano. Tako, pri promeni konfiguracije strukture tokom nelinearnog procesa, treba za svaku novu konfiguraciju da se formira direktor po definiciji, a zatim da se, kao funkcija konvektivnih koordinata, diferencira po istima.

Po definiciji je direktor jedinični vektor normale u tački srednje površi ljuske, pa ako su a_a bazni vektori u toj tački, direktor d je:

$$d = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|} = \frac{a_3}{|a_3|} \dots\dots\dots(2)$$

U (2), vektori a_1 i a_2 su bazni vektori osa 1 i 2, respektivno, a a_3 vektor normale u srednjoj površi.

$$a_a = (x_a, y_a, z_a), \quad x^i = (x, y, z) \dots\dots\dots(3)$$

$$a_3 = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1) = (a_{3x}, a_{3y}, a_{3z}) \dots\dots\dots(4)$$

$$a = |a_3| = \sqrt{a_{3x}^2 + a_{3y}^2 + a_{3z}^2} \dots\dots\dots(5)$$

gde su očigledno

$$a_{3x} = y_1 z_2 - z_1 y_2 \dots\dots\dots(6.1)$$

$$a_{3y} = z_1 x_2 - x_1 z_2 \dots\dots\dots(6.2)$$

$$a_{3z} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \dots\dots\dots(6.3)$$

Direktor je po definiciji (2):

$$d = \left(\frac{a_{3x}}{a}, \frac{a_{3y}}{a}, \frac{a_{3z}}{a} \right) = (d_x, d_y, d_z) \dots\dots\dots(7)$$

pa je njegov izvod po konvektivnim koordinatama

stacionarne tačke, kojim se menja moduo pomeranja od koraka do koraka. Taj postupak ne zahteva proveru za konvergenciju pomeranja i neuravnoteženih sila, već se svodi na proveru rešenja koja se dobijaju kao faktor korekcije spoljašnjeg opterećenja, što je znatno štedljivije sa aspekta potrebnih numeričkih operacija, a time i kompjuterskog vremena.

5. U dodatku II je dat postupak računanja tačnih globalnih rotacija, što je od značaja u geometrijskoj nelinearnosti gde se računa priraštaj rotacije, tj. deformacije direktora, relacijama koje važe za mala pomeranja. Nelinearna procedura je metodološki urađena po principu "totalni Lagranž", međutim, u delu koji se odnosi na rotacije, tj. deformacije direktora, je napravljen izvestan kompromis između principa total Lagrange i updated Lagrange na taj način što se pomeranjima vezujemo za početnu konfiguraciju, a rotacijama za zadnju ravnotežnu konfiguraciju, što je u saglasnosti sa Kirhofovom hipotezom o stalnoj normalnosti direktora na srednju površ ljuske i u početnoj i u deformisanoj konfiguraciji.

6. Numerički rezultati su u saglasnosti sa rezultatima koje su na istim problemima dobili drugi autori, navedeni u spisku literature.

$$P^I = \begin{cases} (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

$$P_1^I = \begin{cases} -(1-\eta)/4 \\ (1-\eta)/4 \\ (1+\eta)/4 \\ -(1+\eta)/4 \end{cases} \quad P_2^I = \begin{cases} -(1-\xi)/4 \\ -(1+\xi)/4 \\ (1+\xi)/4 \\ (1-\xi)/4 \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

$$P_{1,1}^I = 0 \quad P_{1,2}^I = P_{2,1}^I = \begin{cases} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{cases}$$

Ako se ovi izvodi zamene u (13), dobija se:

$$a_{3x,a} = \begin{cases} a_{3x,1} \\ a_{3x,2} \end{cases} = \begin{cases} y_1 z_{1,2} - z_1 y_{1,2} \\ z_2 y_{1,2} - y_2 z_{1,2} \end{cases} \dots\dots\dots (18.1)$$

$$a_{3y,a} = \begin{cases} a_{3y,1} \\ a_{3y,2} \end{cases} = \begin{cases} z_1 x_{1,2} - x_1 z_{1,2} \\ x_2 z_{1,2} - z_2 x_{1,2} \end{cases} \dots\dots\dots (18.2)$$

$$a_{3z,a} = \begin{cases} a_{3z,1} \\ a_{3z,2} \end{cases} = \begin{cases} x_1 y_{1,2} - y_1 x_{1,2} \\ y_2 x_{1,2} - x_2 y_{1,2} \end{cases} \dots\dots\dots (18.3)$$

Koristeći (14) i (17), mešoviti izvodi $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ i $z_{1,2}$ dobijaju veoma jednostavan oblik:

$$x_{1,2} = X_I P_{1,2}^I \dots\dots\dots (19.1)$$

$$y_{1,2} = Y_I P_{1,2}^I \dots\dots\dots (19.2)$$

$$z_{1,2} = Z_I P_{1,2}^I \dots\dots\dots (19.3)$$

gde su X_I, Y_I i Z_I globalne koordinate čvorova.

Pošto su parcijalni izvodi globalnih koordinata (x, y, z) , po konvektivnim koordinatama (ξ, η) , x_a, y_a, z_a , odredjeni relacijom (1), to može da se napiše matrica $[XI]$ koja sadrži prve izvode baznih vektora:

$$d, a = (dx, a \quad dy, a \quad dz, a) \dots\dots\dots(8)$$

gde su:

$$dx, a = (a_{3x}/a), a \quad ; \quad dy, a = (a_{3y}/a), a \quad ; \quad dz, a = (a_{3z}/a), a \quad \dots\dots\dots(9)$$

Pošto su relacije (9) analogne, dovoljno je naći eksplicitni izraz samo za dx, a :

$$dx, a = \frac{a_{3x, a} a - a_{3x} a, a}{a^2} = \frac{a_{3x, a}}{a} - dx \frac{a, a}{a} \quad \dots\dots\dots(10)$$

Izvod a, a se računa polazeći od relacije (5):

$$a, a = \frac{1}{2\sqrt{a_{3x}^2 + a_{3y}^2 + a_{3z}^2}} \cdot (2a_{3x, a} a_{3x} + 2a_{3y, a} a_{3y} + 2a_{3z, a} a_{3z})$$

tj.

$$a, a = \frac{1}{a} (a_{3x, a} a_{3x} + a_{3y, a} a_{3y} + a_{3z, a} a_{3z}) = dx a_{3x, a} + dy a_{3y, a} + dz a_{3z, a} \quad (11)$$

Ako se (11) zameni u (10) dobija se:

$$dx, a = \frac{a_{3x, a}}{a} - \frac{dx}{a} (dx a_{3x, a} + dy a_{3y, a} + dz a_{3z, a}) \quad \dots\dots\dots(12.1)$$

i analogno

$$dy, a = \frac{a_{3y, a}}{a} - \frac{dy}{a} (dx a_{3x, a} + dy a_{3y, a} + dz a_{3z, a}) \quad \dots\dots\dots(12.2)$$

$$dz, a = \frac{a_{3z, a}}{a} - \frac{dz}{a} (dx a_{3x, a} + dy a_{3y, a} + dz a_{3z, a}) \quad \dots\dots\dots(12.3)$$

Pre nego što relacije (12) budu napisane u matričnom obliku, treba naći eksplicitno i izraze $a_{3x, a}$, $a_{3y, a}$, $a_{3z, a}$.

Prema (6) je:

$$a_{3x, a} = y_{1, a} z_2 + y_1 z_{2, a} - z_{1, a} y_2 - z_1 y_{2, a} \quad \dots\dots\dots(13)$$

a prema (1), parcijalni izvod koordinate po osi 1($\mathcal{S}$), je

$$y_1 = Y_I P_1^I$$

pa je:

$$y_{1, a} = Y_I P_{1, a}^I \quad \dots\dots\dots(14)$$

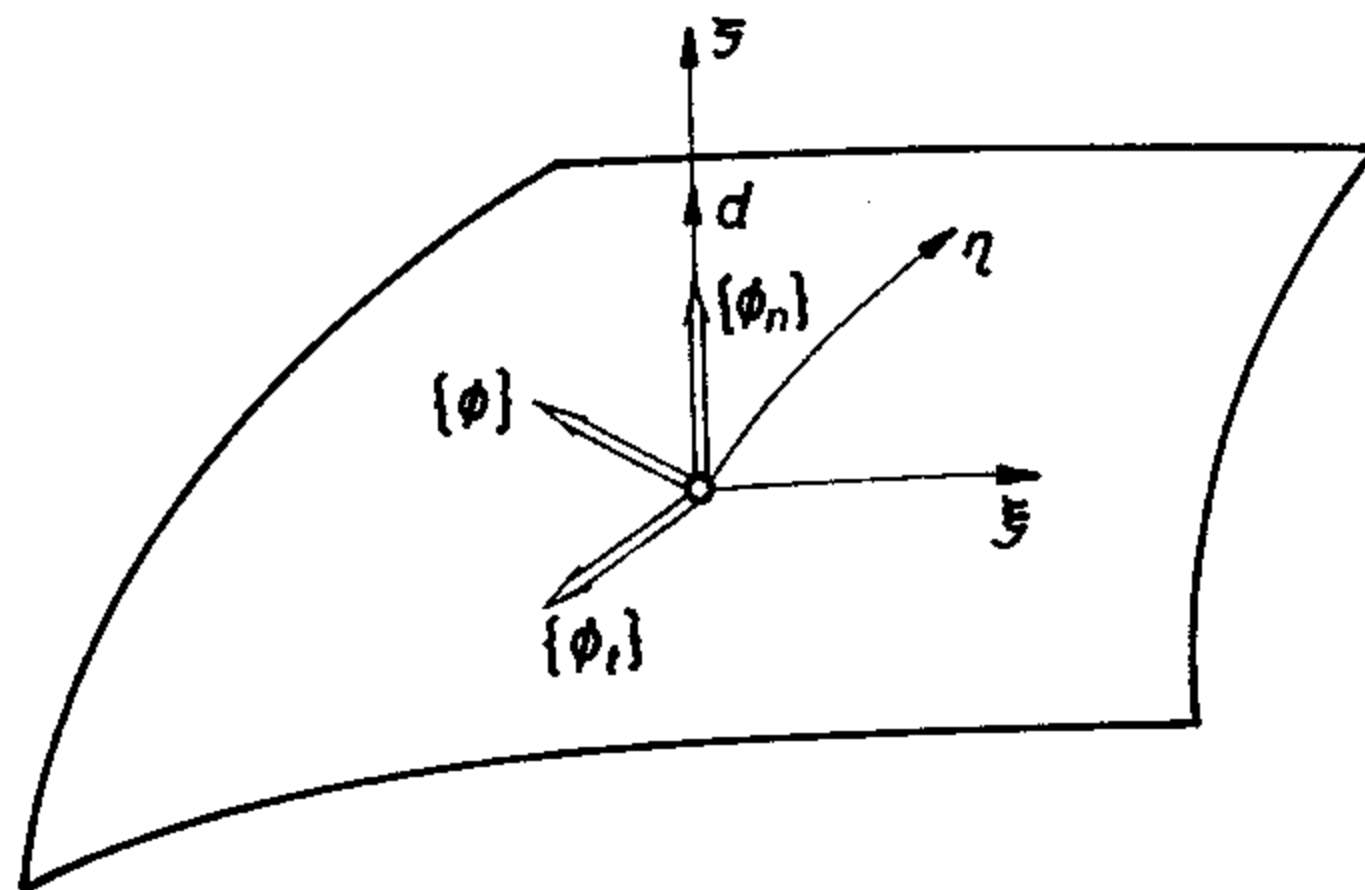
Interpolacione funkcije P^I i njihovi prvi i drugi izvodi, P^I i $P^I_{a, \mathcal{S}}$ u razvijenom obliku su:

DODATAK II

IZRAČUNAVANJE OGRANIČENE ROTACIJE I KOREKCIJA REŠENJA SLOBODNIH
ROTACIJA

II.1 Teorijsko razmatranje

Pošto je ljuska definisana kao dvodimenzioni orijentisani kontinuum u kome čestica ne može da ima sve tri rotacije kao tri nezavisna stepena slobode, to rotaciju oko normale na površ treba eliminisati.



Sl. 1. Komponente rotacije ljuske

Ako je vektor rotacije u globalnom sistemu (x, y, z) u nekoj tački,
 $\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ (1.1)

ϕ_n i ϕ_t njegove komponente u pravcu normale i u tangentnoj ravni
 $\phi = \phi_n + \phi_t$ (1.2)

a d direktor u istoj tački

$d = (d_x, d_y, d_z)$ (2)

njihov skalarni proizvod je:

$d \cdot \phi = d \cdot \phi_n + d \cdot \phi_t$ (3.1)

tj.

$d_x \phi_x + d_y \phi_y + d_z \phi_z \equiv |d| \cdot (|\phi_n| \cos(d, \phi_n) + |\phi_t| \cos(d, \phi_t))$ (3.2)

$$[XI] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1-\eta) & -(1-\xi) \\ (1-\eta) & -(1+\xi) \\ (1+\eta) & (1+\xi) \\ -(1+\eta) & (1-\xi) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_I & Y_I & Z_I \\ X_{II} & Y_{II} & Z_{II} \\ X_{III} & Y_{III} & Z_{III} \\ X_{IV} & Y_{IV} & Z_{IV} \end{bmatrix} \quad \dots (20)$$

i matrica $[X1]$ koja sadrži druge izvode:

$$[X1] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} X_I - X_{II} - X_{III} - X_{IV} \\ Y_I - Y_{II} - Y_{III} - Y_{IV} \\ Z_I - Z_{II} - Z_{III} - Z_{IV} \end{bmatrix} \quad \dots (21)$$

Matricama $[XI]$ i $[X1]$ su potpuno definisane relacije (18), pa od njih može da se formira matrica $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{3x,1} & a_{3y,1} & a_{3z,1} \\ a_{3x,2} & a_{3y,2} & a_{3z,2} \end{bmatrix} \quad \dots (22)$$

tako da relacije (12) u matričnom obliku glase:

$$[DI] = \begin{bmatrix} d_{3x,1} & d_{3y,1} & d_{3z,1} \\ d_{3x,2} & d_{3y,2} & d_{3z,2} \end{bmatrix} \quad \dots (23)$$

$$[AD] = [A] \cdot d^T \quad \dots (24)$$

$$[DI] = \frac{1}{a} \cdot ([A] - [AD] \cdot d^T) \quad \dots (25)$$

matrici krutosti sistema. Rešavajući tako redukovani sistem, dobijamo za rotacije rešenja koja nisu tačna, već linearno zavisna. Kao takva, ova rešenja mogu da se koriste za dobijanje tačnih rotacija ako se uzme u obzir činjenica da su deformacije u konvektivnom sistemu elementa numerički jednake bilo da se računaju za tri linearno zavisne jednačine i teorijski tačne rotacije $\varnothing_x$, $\varnothing_y$ i $\varnothing_z$, bilo da se dobijaju iz tri iste jednačine radeći sa tzv. redukovanim rotacijama $\varnothing_x^*$, $\varnothing_y^*$, $\varnothing_z^*$. Ova činjenica je iskorišćena za računanje tačnih rotacija preko redukovanih na taj način što su izjednačene deformacije savijanja računate preko vektora $\varnothing$ i $\varnothing^*$. Praktično se isključuje ona komponenta deformacije koja po redosledu odgovara rotaciji koja je najbliža normalni u čvoru. Ako je rotacija $\varnothing_z$ najbliža normalni, isključuje se treća jednačina za čvor J i preostalim dvema jednačinama se dodaje relacija linearne zavisnosti (4). Na taj način je za svaki čvor dobijen sistem simultanih linearno nezavisnih jednačina. S obzirom da je deformacija savijanja

$$\epsilon = \left[\begin{matrix} [DI] & [XI] \cdot [\Delta]^T \end{matrix} \right]_J \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \varnothing \end{Bmatrix}^J \dots\dots\dots (5)$$

gde su matrice $[DI]$ i $[XI]$ izvedene u dodatku I, a matrica $[\Delta]$ data relacijom (5.1.6), to jednakost deformacija savijanja može da se napiše kao

$$\epsilon = \epsilon^* \dots\dots\dots (6)$$

$$\left[\begin{matrix} [DI] & [XI] \cdot [\Delta]^T \end{matrix} \right]_J \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \varnothing \end{Bmatrix}^J = \left[\begin{matrix} [DI] & [XI] \cdot [\Delta]^T \end{matrix} \right]_J \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \varnothing^* \end{Bmatrix}^J \dots\dots\dots (7)$$

odakle sledi da pomeranja nemaju uticaja, tj.

$$[XI] \cdot [\Delta]^T \cdot \varnothing^J = [XI] \cdot [\Delta]^T \cdot \varnothing^{*J} \dots\dots\dots (8)$$

Relacija (8) je korišćena u numeričkom postupku.

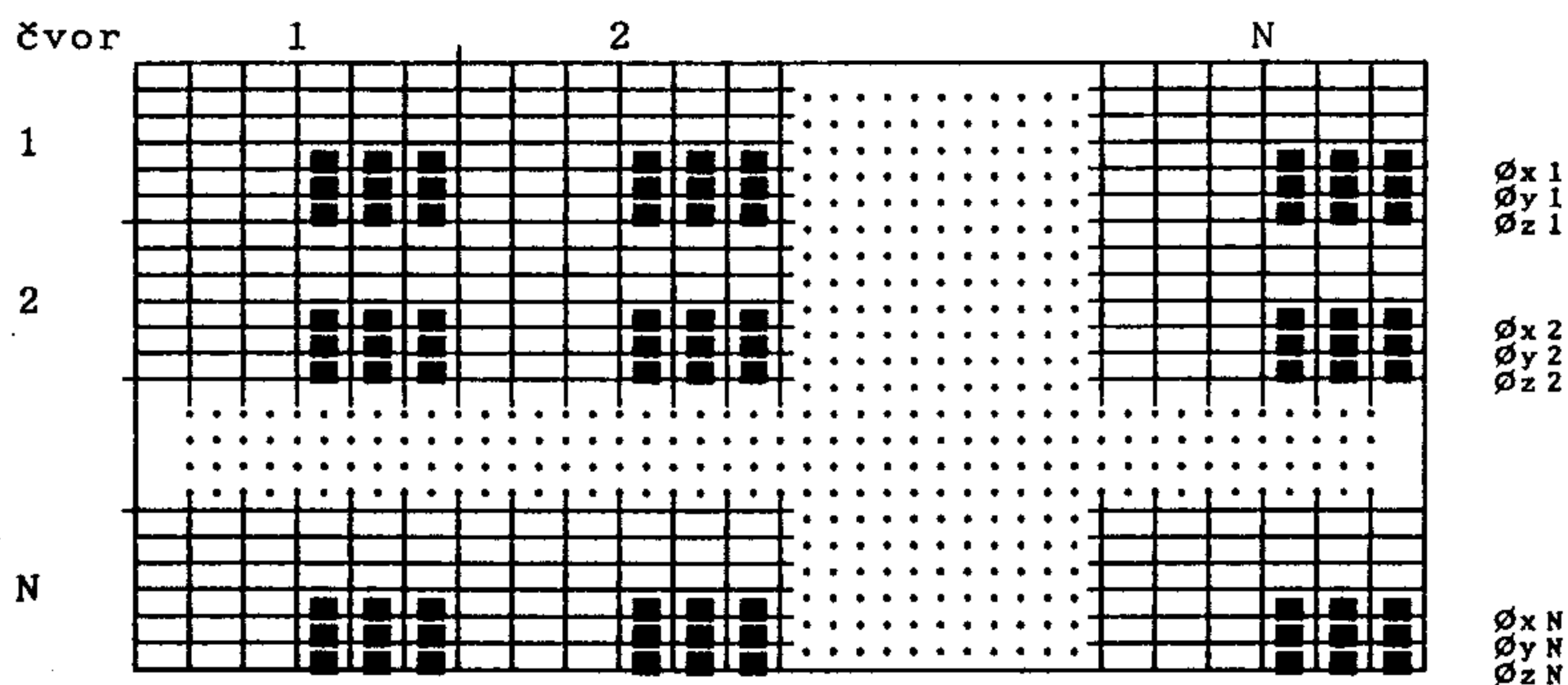
Neka je sa b_{ij} označen proizvod $[XI] \cdot [\Delta]^T$ ($i=1,2,3$; $j=1,2,3$).

Tada razvijeni oblik sistema (8) za čvor J glasi:

Na levoj strani identiteta (3) je skalarni proizvod računat preko koordinata vektora d i ϕ , a na desnoj strani po definiciji skalarnog proizvoda. Pošto je intenzitet normalne rotacije jednak nuli, a vektor tangencijalne komponente i direktor zatvaraju prav ugao, to je desna strana relacije (3) nula, odakle proizilazi da su komponente vektora rotacije međusobno linearno zavisne. Ta linearna zavisnost je izražena relacijom (4):

$$d_x \phi_x + d_y \phi_y + d_z \phi_z = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Formirajući globalnu matricu krutosti, dobija se sistem u kome ima linearno zavisnih jednačina, tj. vrste koje odgovaraju rotacijama svakog čvora su međusobno linearno zavisne. Zato za svaki čvor, u globalnom sistemu, treba da postoje dve vrste koje odgovaraju rotacijama, a ne tri.

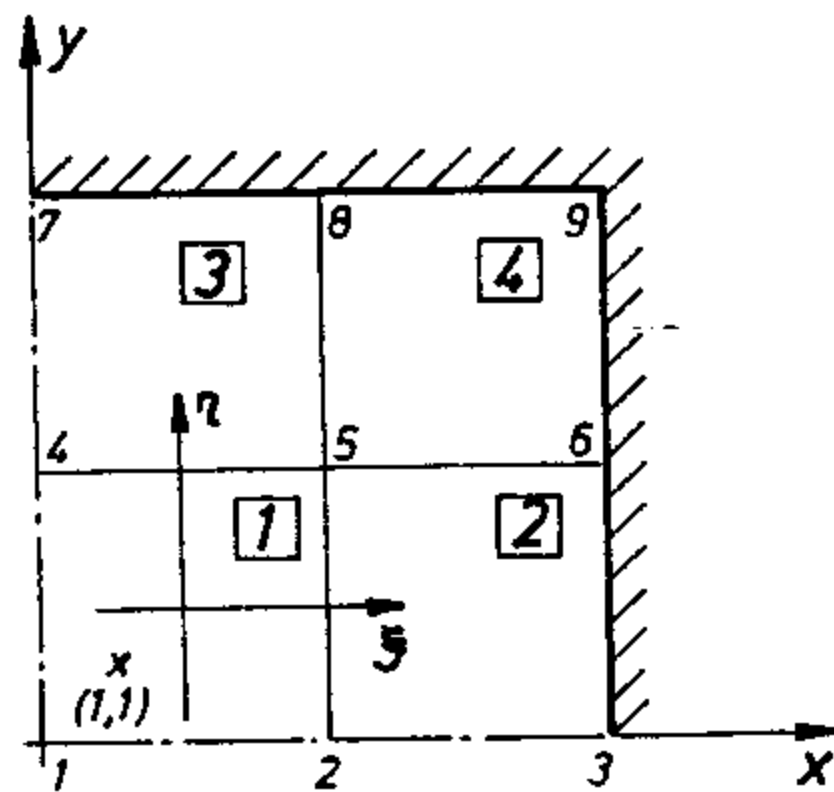


Sl. 2. Rotacije u matrici krutosti sistema

U velikim matricama, kakve se javljaju u MKE, nije praktično računati rotacije uključujući u sistem i jednačinu (4) za svaki čvor, jer se time narušava simetrija matrice krutosti sistema, a iz istih razloga nije moguće ni supstitucijom eliminisati jednu od rotacija. Zato se za svaki čvor sprečava po jedna komponenta rotacije brisanjem odgovarajuće vrste i kolone u globalnoj

ROTACIJE ČVOROVA

	X ROTACIJA	Y ROTACIJA	Z ROTACIJA
1	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
2	0.000000D+00	-0.16867D-02	0.000000D+00
3	0.000000D+00	-0.16538D-02	0.000000D+00
4	0.16867D-02	0.000000D+00	0.000000D+00
5	0.10033D-02	-0.10033D-02	0.000000D+00
6	0.000000D+00	-0.13340D-02	0.000000D+00
7	0.16538D-02	0.000000D+00	0.000000D+00
8	0.13340D-02	0.000000D+00	0.000000D+00
9	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00



Sl. 4. Mreža i oznake četvrtine ploče sa sl. 3

Pošto je u matrici krutosti elementa vrsta koja odgovara rotaciji ϕ_z nula-vrsta, ona se eliminiše i ne utiče na rezultat. To znači da preračunavanje tačnih rotacija u ovom slučaju nije potrebno, jer rešavanjem globalnog sistema dobijamo:

$$\phi = \phi^* \dots\dots\dots(10.1)$$

Treba zapaziti da su za ovaj slučaj dve komponente direktor-vektora nule, tj.:

$$d = (0,0,1) \dots\dots\dots(10.2)$$

Numeričke vrednosti matrice b_{ij} u integracionoj tački (1,1) elementa 1, sl. 4., i vektora rešenja ϕ^* za isti element (čvorovi 1,2,5,4) su:

$$\left. \begin{aligned} b_{11}\varphi_x + b_{12}\varphi_y + b_{13}\varphi_z &= b_{11}\varphi_x^* + b_{12}\varphi_y^* + b_{13}\varphi_z^* \\ b_{21}\varphi_x + b_{22}\varphi_y + b_{23}\varphi_z &= b_{21}\varphi_x^* + b_{22}\varphi_y^* + b_{23}\varphi_z^* \\ b_{31}\varphi_x + b_{32}\varphi_y + b_{33}\varphi_z &= b_{31}\varphi_x^* + b_{32}\varphi_y^* + b_{33}\varphi_z^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

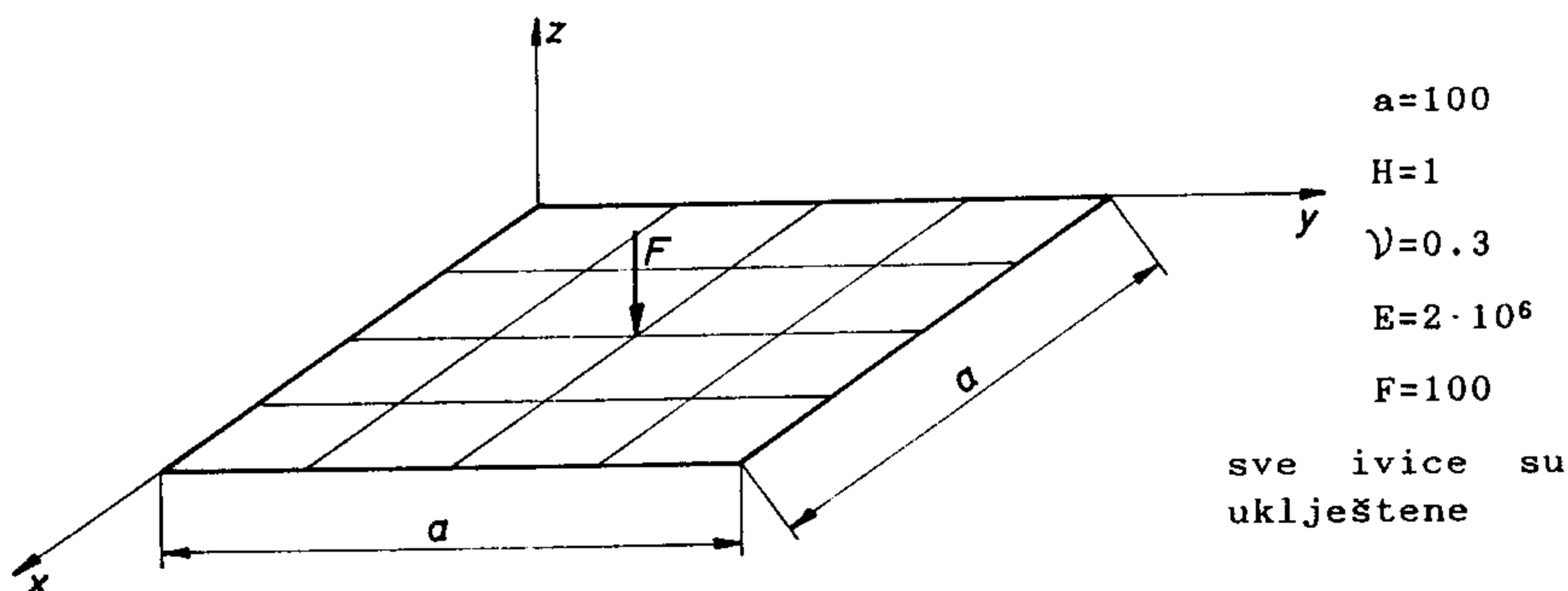
Kako je u ranijem tekstu objašnjeno, jedna od jednačina sistema (9) se zamenjuje uslovom (4).

U daljem tekstu je dato računanja tačnih rotacija sa objašnjenjima i numeričkim rezultatima dobijenim na sistemu IBM 4341.

II.2 Numerički primeri

II.2.1 Ploča u jednoj od koordinatnih ravni

U ovom slučaju svi direktori imaju pravac koordinatne ose, normalne na datu ravan, tako da je situacija jasna: ako je z-osa



Sl. 3. Horizontalna ploča opterećena koncentrisanom silom

ta normala, rotaciju φ_z treba sprečiti u svim čvorovima. Preostale dve rotacije φ_x i φ_y dobijene kao rešenja iz globalne matrice krutosti su tačne, tj. $\varphi_x = \varphi_x^*$ i $\varphi_y = \varphi_y^*$. Za konkretni primer, ploču pod dejstvom koncentrisane sile, dobijeni su sledeći rezultati za podatke na sl. 3.

Vrednost deformacije u integracionoj tački je zbir uticaja svih čvorova, ali pošto svaka rotacija mora pojedinačno da bude tačna, to od sistema (8) ne sme da se pravi neodredjen sistem, već se tačne rotacije računaju iz sistema (9) za svaki čvor. Pošto je čvor 1 uslovima simetrije ograničen u pogledu rotacija, to će (10.1) biti korišćeno za čvorove (2) i (5).

Za čvor 2:

$$1) \quad 4.93\varphi_y = 4.93 \cdot (-0.0010576)$$

$$2) \quad -4.93\varphi_x - 1.32\varphi_y = 1.32 \cdot 0.0010576$$

$$3) \quad 1.32\varphi_x = 0$$

Iz 3) sledi da je $\varphi_x = 0$, a iz 1) da je $\varphi_y = \varphi_y^* = -0.0010576$. Iz dodatne jednačine sledi $\varphi_z = 0$, mada ovu rotaciju i nije neophodno računati, jer je ograničena kao tačna rotacija oko normale.

Za čvor 5:

$$1) \quad 1.32\varphi_y = 1.32 \cdot (-0.0005297)$$

$$2) \quad -1.32\varphi_x + 1.32\varphi_y = -1.32 \cdot 0.0010576 + 1.32 \cdot (-0.0005297)$$

$$3) \quad -1.32\varphi_x = -1.32 \cdot 0.0005297$$

Ovde je lako zapaziti da je zbir prve i treće jednačine identičan drugoj, a iz prve i treće sledi, $\varphi_x = \varphi_y = 0.0005297$.

Na isti način se pokazuje za sve čvorove da su izračunate rotacije ustvari tačne.

II.2.2 Ploča je normalna na jednu od koordinatnih ravni

Ploča na sl. 5. je istih dimenzija i sa istim karakteristikama kao i ona na sl. 3., samo joj je položaj drugačiji.

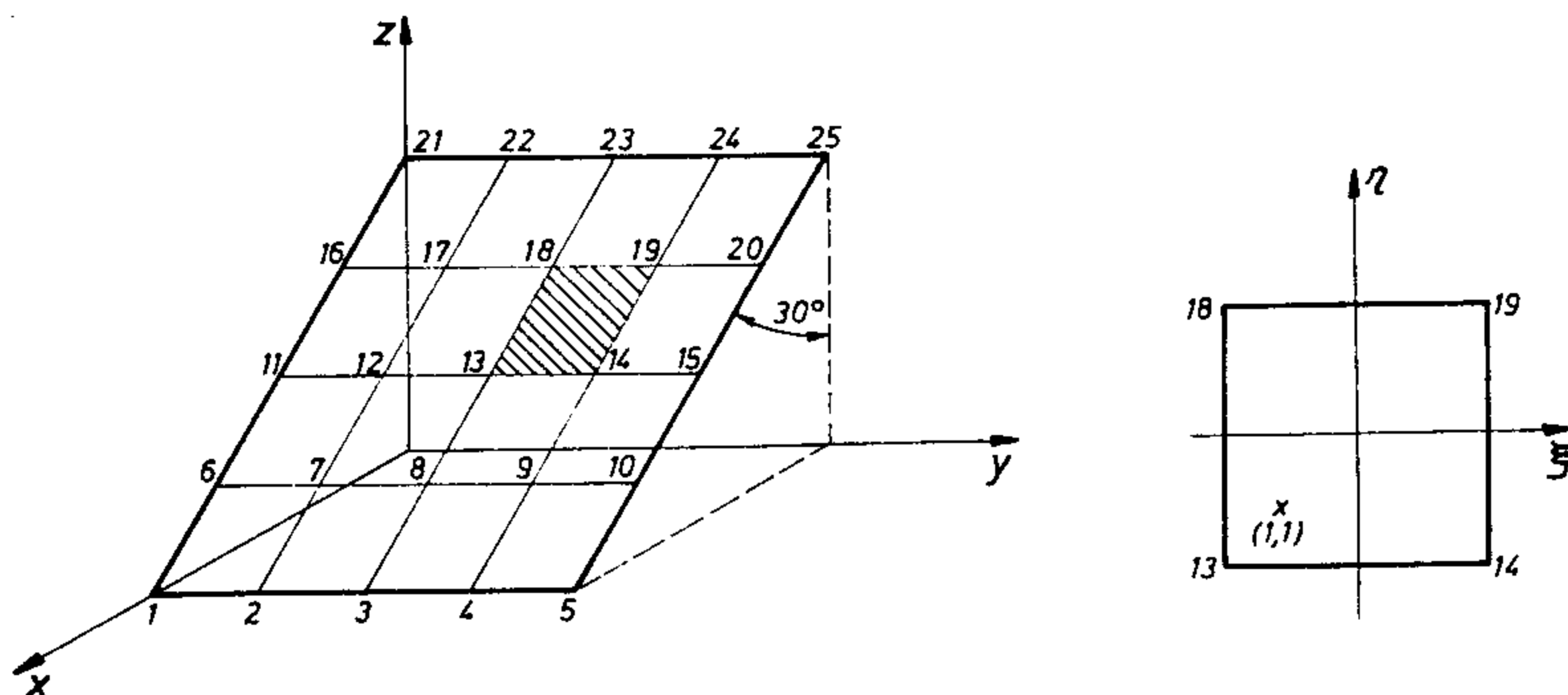
Ako je ploča u datom položaju, direktori tačaka ploče imaju projekcije na ose x i z , dok je $d_y = 0$. Za ovakav slučaj, ako se isključi rotacija φ_x ili φ_z , zavisno od toga je bliža normali na

[b] =		4.93	4.93	čvor 1
	-4.93	-4.93		
		-4.93	1.32	čvor 2
	4.93	-1.32		
		-1.32	-1.32	čvor 5
	1.32	1.32		
		1.32	-4.93	čvor 4
	-1.32	4.93		

δ^* =		čvor 1
		čvor 2
	-0.0010576	
	0.0005297	čvor 5
	-0.0005297	
	0.0010576	čvor 4

[b] =	2.46	2.46		čvor 13
		4.93	4.93	
	-4.27	-4.27		
	-2.46	0.66		čvor 14
		-4.93	1.32	
	4.27	-1.14		
	-0.66	-0.66		čvor 19
		-1.32	-1.32	
	1.14	1.14		
	0.66	-2.46		čvor 18
		1.32	-4.93	
	-1.14	4.27		

ϕ^* =		čvor 13
		čvor 14
	-0.00122160	
		čvor 19
	0.00052976	
	-0.00061179	
		čvor 18
	0.00105780	



Sl. 5. Mreža i oznake kose ploče

ploču, dobija se za ϕ_y tačna vrednost ($\phi_y^* = \phi_y$) a za preostale dve rotacije vrednosti koje treba korigovati. U ovom slučaju u matrici krutosti elementa nema nultih vrsta, pa pošto je ploča ravna, neće ih biti ni u matrici krutosti sistema. To upravo znači da isključivanje neke od jednačina povlači dobijanje rešenja koje treba korigovati.

Ako se pozovemo na relaciju (4) dobija se da je:

$$d_x \phi_x + d_z \phi_z = 0 \quad (d_y = 0) \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{tj.} \quad \frac{\phi_x}{\phi_z} = -\frac{d_z}{d_x}$$

Ako na šrafirani element primenimo relaciju (8), opet u integracionoj tački (1,1), imamo sledeće numeričke vrednosti:

Za čvor 19 je:

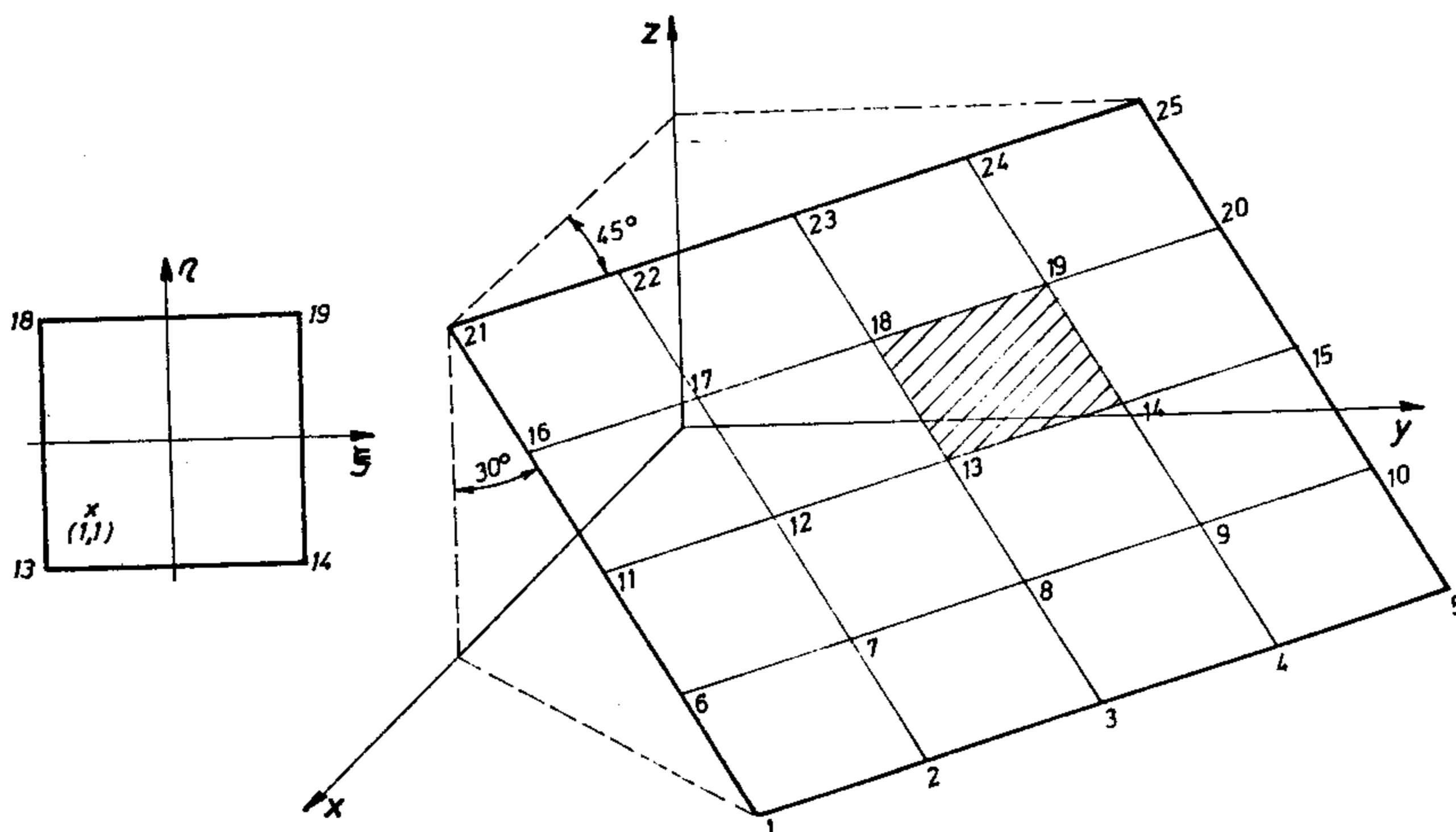
- 1) $-0.66 \cdot \phi_x + 1.14 \cdot \phi_z = -1.14 \cdot (-0.00061179)$
- 2) $-0.66 \cdot \phi_x - 1.32 \cdot \phi_y + 1.14 \cdot \phi_z = -1.32 \cdot 0.00052976 + 1.14 \cdot (-0.00061179)$
- 3) $-1.32 \cdot \phi_y = -1.32 \cdot 0.00052976$

Pošto je iz treće jednačine $\phi_y = \phi_y^*$, to proizilazi da su prva i druga jednačina ekvivalentne.

-NEKORIGOVANE ROTACIJE-

ČVOR	X-ROTACIJA	Y-ROTACIJA	Z-ROTACIJA
1	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
2	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
3	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
4	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
5	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
6	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
7	0.000000+00	-0.529760-03	0.611790-03
8	0.000000+00	-0.105780-02	-0.233650-16
9	0.000000+00	-0.529760-03	-0.611790-03
10	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
11	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
12	0.000000+00	0.448390-16	0.122160-02
13	0.000000+00	-0.830160-17	0.693890-16
14	0.000000+00	-0.558360-16	-0.122160-02
15	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
16	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
17	0.000000+00	0.529760-03	0.611790-03
18	0.000000+00	0.105780-02	0.945730-16
19	0.000000+00	0.529760-03	-0.611790-03
20	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
22	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
23	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
24	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
25	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

II.2.3 Ploča proizvoljnog položaja u prostoru



Sl. 6. Mreža i oznake proizvoljne ploče

U ovom slučaju su sve tri komponente direktora različite od nule, tako da se ne dobija tačno rešenje ni za jednu od rotacija, već sve tri treba korigovati. Postupak izračunavanja je analogan kao u primeru 2. Numeričke vrednosti za element 11 u integracionoj tački (1,1) su:

Ako uključimo i (11) sledi da je:

$$\frac{\phi_x}{\phi_z} = -\frac{0.500}{0.866}, \text{ tj. } \phi_z = -1.732 \cdot \phi_x$$

Što zamenjeno u prvu jednačinu daje:

$$\phi_x = 0.000265$$

$$\phi_y = -0.000459$$

Da su ove rotacije tačne, možemo da se uverimo i na sledeći način: u primeru horizontalne ploče, intenzitet rotacije u čvoru 5, koji odgovara čvoru 19 u ovom primeru je:

$$\phi(5) = 0.00052976 \cdot \sqrt{2} = 0.00074905$$

Za čvor 19, intenzitet rotacije je:

$$\phi(19) = 10^{-3} \cdot \sqrt{0.26488^2 + 0.52976^2 + 0.45890^2} = 0.00074905$$

Naredni rezultati predstavljaju rotacije svih čvorova u mreži kada se radi sa nekorigovanim i korigovanim rotacijama.

KOSA PLOČA (NORMALNA NA JEDNU KOORDINATNU RAVAN)
KORIGOVANE ROTACIJE ČVOROVA

ČVOR	X-ROTACIJA	Y-ROTACIJA	Z-ROTACIJA
1	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
2	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
3	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
4	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
5	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
6	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
7	-0.264880-03	-0.529760-03	0.458900-03
8	0.101160-16	-0.105780-02	-0.175260-16
9	0.264880-03	-0.529760-03	-0.458900-03
10	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
11	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
12	-0.528900-03	0.448390-16	0.916310-03
13	-0.300430-16	-0.830160-17	0.520480-16
14	0.528900-03	-0.557900-16	-0.916310-03
15	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
16	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
17	-0.264880-03	0.529760-03	0.458900-03
18	-0.409460-16	0.105780-02	0.709380-16
19	0.264880-03	0.529760-03	-0.458900-03
20	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
22	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
23	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
24	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
25	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

Primenjujući (9) i (4) sa vrednostima $[b]$ i ϕ^* dobijaju se tačne rotacije. U narednom tekstu su date rotacije svih čvorova u mreži za slučaj da se rotacije koriguju i da se ne koriguju.

KOSA PLOČA
KORIGOVANE ROTACIJE ČVOROVA

ČVOR	X-ROTACIJA	Y-ROTACIJA	Z-ROTACIJA
1	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
2	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
3	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
4	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
5	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
6	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
7	0.501730-04	-0.698870-03	0.264830-03
8	0.747840-03	-0.747840-03	-0.216840-17
9	0.698870-03	-0.501730-04	-0.264830-03
10	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
11	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
12	-0.647660-03	-0.647640-03	0.528800-03
13	-0.358440-08	0.358440-08	-0.403340-17
14	0.647640-03	0.647660-03	-0.528800-03
15	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
16	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
17	-0.698870-03	0.501730-04	0.264840-03
18	-0.747850-03	0.747850-03	-0.576310-18
19	-0.501730-04	0.698870-03	-0.264840-03
20	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
22	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
23	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
24	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
25	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

-NEKORIGOVANE ROTACIJE-

ČVOR	X-ROTACIJA	Y-ROTACIJA	Z-ROTACIJA
1	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
2	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
3	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
4	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
5	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
6	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
7	-0.579430-04	-0.807000-03	0.000000+00
8	0.747840-03	-0.747840-03	0.000000+00
9	0.807000-03	0.579430-04	0.000000+00
10	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
11	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
12	-0.863540-03	-0.863520-03	0.000000+00
13	-0.358440-08	0.358440-08	0.000000+00
14	0.863520-03	0.863540-03	0.000000+00
15	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
16	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
17	-0.807000-03	-0.579480-04	0.000000+00
18	-0.747850-03	0.747850-03	0.000000+00
19	0.579480-04	0.807000-03	0.000000+00
20	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
22	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
23	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
24	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
25	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

Rotacije računate za jedan čvor iz bilo kog elementa i u bilo kojoj integracionoj tački imaju iste vrednosti.

[b] =	3.02	-0.467	-3.49	čvor 13
	3.02	6.50	3.49	
	-2.46	-2.46		
	-3.02	4.29	-0.934	čvor 14
	-3.02	-2.68	0.934	
	2.46	-0.66		
	-0.809	0.125	0.934	čvor 19
	-0.809	-1.74	-0.934	
	0.66	0.66		
	0.809	-3.95	3.49	čvor 18
	0.809	-2.08	-3.49	
	-0.66	2.46		

ϕ^* =		čvor 13
	0.00086352	čvor 14
	0.00086352	
	0.00005795	čvor 19
	0.00080700	
	-0.00074785	čvor 18
	0.00074785	

Pošto je kroz primere već naglašena prednost modificiranog metoda u odnosu na metod punih iteracija, to će ovde biti komentarisano samo stanje matrice $[b]$ koje ima smisla uzimati u geometrijskoj nelinearnosti pri modificiranom ili punom iteriranju.

Na sl. 7. je sa "k-1" obeležena tačka u kojoj je postignuta ravnoteža strukture, tj. to je stanje od koga se počinje sa sledećim priraštajem opterećenja. Ako se radi modificiranim metodom, onda je matrica $[b]$ konstantna u koraku i tada važe relacije (12)÷(14). Međutim, ako se radi sa punim iteracijama, onda u svakoj iteraciji imamo novu matricu $[b]$ koja, ako je posledica velikih neuravnoteženih sila, nije korektna. To bi značilo da se rotacije računaju sa nekorektnom matricom koeficijenata $[b]$, što će da povuče i netačna rešenja za priraštaje rotacija koje se koriguju. Zato i kod metoda punih iteracija treba u celom koraku "k" koristiti matricu $[b]_{k-1}$ sračunatu za konfiguraciju na početku koraka.

Treba napomenuti još i sledeće: pošto je pretpostavka da se radi sa malim priraštajima rotacija, to se na početku svakog novog koraka opterećenja (i+1), tačke A_i , direktori računaju za tu korigovanu geometriju strukture, na isti način kako se računaju i na početku numeričke procedure (tačka O). Pošto se kroz korak računaju priraštaji pomeranja od neuravnoteženih sila, tu spadaju i priraštaji rotacija koji su mali, ali usled sprečavanja rotacije najbliže normalni nisu numerički tačni. Zato se unutar koraka preračunavaju tačni priraštaji rotacija vezujući se pritom za vrednosti direktora sa početka koraka, a ne za početnu konfiguraciju sa kumulativnim rotacijama, jer bi se, vezujući se za nju dobile znatne numeričke greške.

S obzirom da kumulativne rotacije ne moraju da budu male, a korišćena formula $\vartheta = [\Delta] \cdot \vartheta$ važi za male rotacije, to se pri

III.3.1 Primena u geometrijski nelinearnim problemima

Kada se radi linearna statička analiza, matrica $[b]$ ima jedinstvenu vrednost za svaki čvor. Kod nelinearne analize, s obzirom da se radi metodom totalni Lagranž, tj. sa kumulativnim pomeranjima i ukupnim naponima u tekućoj konfiguraciji, to matricu $[b]$ uzimamo za stanje na početku koraka i za modificirani metod i za metod punih iteracija, ali umesto vektora kumulativnih pomeranja možemo da koristimo priraštaje koje inače i računamo u svakoj iteraciji. To se dokazuje sledećom relacijom:

$$[b] \cdot \phi_{kum} = [b] \cdot \phi_{kum} \dots\dots\dots (12.1)$$

$$[b] \cdot (\phi_{k-1} + \Delta\phi) = [b] \cdot (\phi_{k-1} + \Delta\phi^*) \dots\dots\dots (12.2)$$

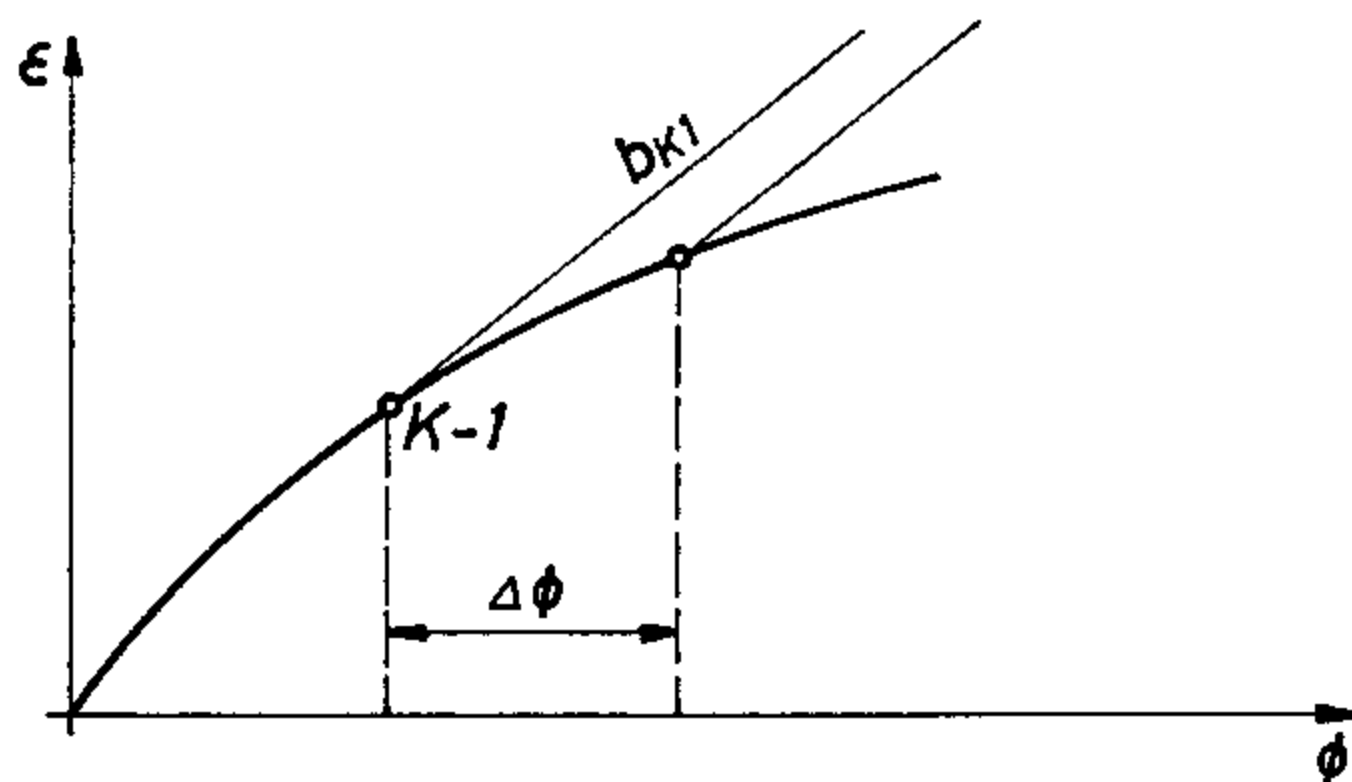
gde su ϕ_{k-1} i ϕ_{k-1}^* vektor tačnih i nekorigovanih rotacija, respektivno, iz prethodnih koraka, a $\Delta\phi$ i $\Delta\phi^*$ priraštaji istih u tekućem koraku. Pošto je ϕ_{k-1} sračunat preko vektora ϕ_{k-1}^* i matrice $[b]$, to važi jednakost:

$$[b] \cdot \phi_{k-1} = [b] \cdot \phi_{k-1}^* \dots\dots\dots (13)$$

pa iz (12.2) sledi da je:

$$[b] \cdot \Delta\phi = [b] \cdot \Delta\phi^* ,$$

tj. izjednačavaju se priraštaji deformacija, odakle se računaju tačni priraštaji rotacija ϕ i dalje sabiraju sa ϕ_{k-1} .



Sl. 7. Računanje tačnih rotacija pri iteriranju

L I T E R A T U R A

1. Editor E. Ramm: Buckling of Shell; Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium Univerzitat Stuttgart, 1982.
2. P. M. Naghdi: The Theory of Shells and Plates, "Handbuch der Physik", Berlin 1972.
3. M. Berković: Thin Shell Analysis, Advanced Topics and New Developments in Finite Element Analysis, MARC, 1979.
4. M. Berković: Equations of Motion of Shell Finite Elements, Spominski zbornik, LJubljana, 1983.
5. S. Ahmad, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz: Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, Int. J. num. Meth. Engng, vol.2, 1970.
6. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too: Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, Int. J. num. Meth. Engng, vol.3, 1971.
7. M. Berković: Thin Shell Finite Elements, Proc. 14th Yugoslav Congress Rat. Appl. Mech., Portorož, 1978.
8. W. Kanok-Nukulchai: A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis, Int. J. num. Meth. Engng, vol.14, 1979.
9. W. Kanok-Nukulchai, R. L. Taylor and T. J. R. Hughes: A Large Deformation Formulation for Shell Analysis by the Finite Element Method, Comp. & Structures, vol.13, 1981.
10. M. Berković: Thin Shell Isoparametric Elements, Finite Element Methods in the Commercial Environment, vol.1, Robinson, Bournemouth, 1978.
11. M. Berković: The Problems of thin Shell Finite Element Analysis, Naučno tehnički pregled, 1980.
12. G. Horringmoe: Hybrid Stress Finite Element Model for non-linear Shell Problems, Int. J. num. Meth. Engng, vol.12, 1978.
13. G. Mohr: A doubly curved isoparametric triangular shell element, Comp. & Structures, vol.14, 1981.
14. K. J. Bathe and L. W. Ho: A simple and effective Element for Analysis of General Shell Structures, Comp. & Structures, vol.13, 1981.
15. T. J. R. Hughes and W. K. Lin: Nonlinear finite Element Analysis of the Shell: Part I - Three dimensional Shell, Comp. Meth. Appl. Engng. 1981.

računanju srednje i tekuće konfiguracije direktora postupa na sledeći način: na početku svakog koraka se koriguju koordinate i za tu korigovanu geometriju se ponovo izračunaju direktori. Pošto se tokom koraka uvek računaju priraštaji pomeranja i priraštaji rotacija, to najpre treba korigovati rotacije, a zatim iz njih izračunati priraštaje direktora i dodati ih poslednjoj konfiguraciji direktora. Umesto ovakvog načina računanja direktora u tekućoj konfiguraciji, moguće je računati ih svaki put kao jedinične normale za tekuće koordinate, što zahteva veći broj računskih operacija.

Opisanom procedurom se tokom celog procesa eliminiše deformacija smicanja, što je u redu s obzirom da posmatramo tanke ljuske za koje je opravdana hipoteza Kirhof-Lava (Kirchhoff-Love)

Univerzitet u Beogradu
prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____

32. A. Janković: Statički proračun izoparametarskih tankih ljuski opšte geometrije, Magistarski rad, Kragujevac 1981.
33. M. Kojić, R. Slavković, A. Janković i dr.: Razvoj univerzalnog kompjuterskog programa za proračun nosećih struktura i konstruktivnih elemenata primenom metode konačnih elemenata, Naučno istraživački projekat, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Republička zajednica nauke SR Srbije i Zavodi "Crvena Zastava", 1976÷1981
34. K. J. Bathe: Finite Element Procedures for Solids and Structures-Nonlinear Analysis, MIT 1986.
35. R.D. Wood: The Application of Finite Element Methods to Geometrically Nonlinear Structural Analysis, Doc. Thesis, University of Wales, 1973.
36. E. Riks: An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, Int. J. Solids & Structures, vol. 15, 1979.
37. T. Kant, D. R. J. Owen and O. C. Zienkiewicz: A refined higher-order C^0 plate bending element, Computers & Structures vol. 15, 1982.
38. K. S. Surana: Geometrically non-linear formulation for the three dimensional solid shell transition finite elements, Computers & Structures vol. 15, 1982.
39. M. A. Crisfield: A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap through", Computers & Structures, vol. 13, 1981.
40. A. Janković, M. Berković: Numerički postupak za analizu izvijanja geometrijski nelinearnih tankih ljuski, XVI Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Bečići 1984.
41. A. Janković: Analiza stabilnosti tankih ljuski u M. K. E., Simpozijum '85, Savremeni problemi nelinearne mehanike kontinuumu, Vrnjačka Banja 1985.
42. J. L. Batoz and G. Dhatt: Incremental displacement algorithms for nonlinear problems, Int. J. num. Meth. Engng. vol 14, 1979.
43. W. E. Haisler and J. A. Strickin: Displacement incrementation in nonlinear structure analysis by the self-correcting method, Int. J. num. Meth. Engng., vol. 11, 1977.

16. C. Tahiam, L. Lachance: Linear and Nonlinear Analysis of Thin Shallow Shells by Mixed Finite Elements, Comp. & Structures, vol.5, 1975.
17. A. Pica, R. D. Wood, T. Hinton: Finite Element Analysis of Geometrically nonlinear Plate Behaviour using a Mindlin Formulation, Comp. & Structures, vol.11, 1980.
18. K. J. Bathe and S. Bolourchi: A geometric and material nonlinear plate and shell element, Comp. & Structures, vol.11, 1980.
19. A. K. Noor, C. M. Andersen: Mixed Models and Reduced Selective Integration Displacements Models for Nonlinear Shell Analysis, Int. J. num. Meth. Engng., vol. 18, 1982.
20. J. Walczak: On creep buckling analysis of structures, Comp. & Structures, vol.13, 1981.
21. E. N. Dvorkin: On Nonlinear Finite Element Analysis of Shell Structures, Doc. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1984.
22. R. J. Bathe and H. Ozdemir: Elastic-plastic Large Deformation Static and Dynamic Analysis, Comp. & Structures, vol.6, 1975.
23. S. P. Timoshenko and J.M.Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd Edn, Mc.Graw Hill, New York, 1961.
24. H. Parisch: Geometrical Nonlinear Analysis of Shells, Comp.Meth.Appl.Mech.Engng., vol.14, 1978.
25. J. S. Przemieniecki: Matrix Analysis of Local Instability in Plates, Stiffened Panels and Columns, Int.J.Num. Engng., vol.5, 1972.
26. T. Y. Yang: Elastic Snap-Through Analysis of Curved Plates Using Discrete Elements, AIAA Journal, vol.10, 1972.
27. D. G. Ashwell and R. H. Gallagher: Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, John Wiley & Sons, 1976.
28. J. T. Oden: Finite Elements of Nonlinear Continua, Mc.Graw. Hill, London, 1972.
29. S. Timošenko, S. Vojinovski-Kruger: Teorija ploča i ljuski, Građevinska knjiga, Beograd, 1962.
30. O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science, MC.Graw-Hill, London, 1971.
31. O. C. Zienkiewicz, E. Hinton: Reduced Integration Function Smoothing and Non-conformity in F.E.A., Journal of Franklin Institute, 1976.