UNIVERZITET U BEOGRADU

Zoran Golubović

TERMOMEHANIKA MATERIJALNIH POLUPROPUSTLJIVIH MEDJUPOVRŠI

(Doktorska disertacija)

Beograd, 1984.

Predgovor

Ovaj rad je saopšten na redovnim sastancima Grupe za reologiju Jugoslovenskog društva za mehaniku. Tom prilikom su vodjene veoma korisne diskusije, zbog čega se, na ovaj način, zahvaljujem svim članovima Grupe.

Posebnu zahvalnost dugujem Profesoru Dr. Jovi Jariću za nesebičnu pomoć i podsticaj u toku izrade rada.

Takodje se zahvaljujem Dr. Milanu Mitroviću, profesoru Tehnološkog fakulteta, Dr. Dušanu Vučeliću, profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta i Mr. Željku Vučiniću iz Instituta za kukuruz, Zemun polje, na korisnim razgovorima i sugestijama.

S A D R Ž A J

1. Uvod

Poznato je da granične površi i medjupovrši tela poseduju osobine koje se sasvim razlikuju od svojstava unutrašnjosti tela. Dosadašnja razmatranja fenomena površi karakterišu različiti prilazi kako sa fizičkog, tako i sa matematičkog stanovišta.

Osnovni prilaz tom problemu se zasniva na molekularnoj teoriji. U tim razmatranjima se problemi površi pokušavaju da objasne sa stanovišta osobina ponašanja molekula u površi.

Prvi značajniji prilog proučavanju tog problema sa stanovišta mehanike kontinuuma predstavlja rad Scriven-a [1] . U tom radu je fluidna deformabilna površ razmatrana kao dvodimenzionalni kontinuum. Pretpostavljajući da nema transfera mase izmedju površi i okolnog materijala, Scriven izvodi jednačine balansa mase i količine kretanja posmatrane površi.

Prilaz Scriven-a su kasnije sledili i drugi autori koji su u svojim radovima razmatrali medjupovrš kao materijalnu površ izmedju različitih faza, kao graničnu površ tela ili kao površ diskontinuiteta.

Tako su Fisher i Laeitman u svom radu [2] formulisali termodinamiku nedeformabilne površi.

Proučavajući dinamičke probleme, Gurtin i Murdoch su u svom radu [3] razmatrali probleme elestičnih površi.

Problem neviskozne fluidne nepropustljive medjupovrši razmatran je u radu Moeckel-a [4] . Polazna osnova za termodinamička razmatranja u Moeckel-ovom radu je bio Müller-ov entropijski princip [5] .

Termodinamička teorija nepropustljive, ne-proste, toplotno-provodljive fluidne medjupovrši, primenom Müller-ovog entropijskog principa, data je u radu [6] .

Treba zapaziti da je zajednička osnova svih ovih radova teorija površi diskontinuiteta ili singularnih površi.

Značajno je napomenuti da se počev od 1975. godine pojavljuje dosta radova u kojima autori pri razmatranju problema medjupovrši polaze od činjenice da, u opštem slučaju, odgovarajuće fizičke veličine okolnog materijala trpe diskontinuitet. Ta činjenica je uzeta kao polazna osnova za korišćenje uopštenih funkcija, kao što su Dirac-ova i Hevyside-ova funkcija pri izvodjenju odgovarajućih jednačina balansa.

Tako su Bedeaux, Albano i Mazur [7] formulisali neravnotežnu termodinamiku nematerijalne medjupovrši izmedju dva fluida koji se ne mogu mešati.

Ideju razvijenu u tom radu, Kovac [8] je primenio na višekomponentalni sistem koji sadrži materijalnu medjupovrš.

Koristeći ideju Bedeaux, Albano, Mazur - a, Vodák [9] je formulisao teoriju neravnotežne termodinamike nepropustljive medjupovrši. Tu opštu formulaciju, Vodák je zatim primenio na problem n - komponentalne visko-elastične mešavine fluida.

Ovaj prilaz, medjutim, dobrim delom izlazi iz domena mehanike kontinuuma. To je ujedno i bio razlog da se pri odredjivanju prilaza koji će biti korišćen u ovom radu opredelimo za onaj prilaz problemu medjupovrši koji je zasnovan na razmatranjima Müller-a. To se pre svega odnosi na razmatranja izneta u radu [10] . U tom radu Müller je ukazao na važnost proučavanja problema polupropustljivosti medjupovrši sa stanovišta termodinamike kontinuuma. Medjutim, taj rad nije imao za cilj da se isključivo bavi problemom polupropustljivosti, već da izloži jednu novu teoriju mešavina i da tu novu teoriju uporedi sa klasičnom. Zbog toga se u radu koristi model idealnog zida.

Proširujući ideju idealnog zida korišćenu u radu [10] , Müller je u radu [11] izložio neke osnove termodinamičke teorije idealne polupropustljive membrane. Naime, idealni zid , koji razdvaja mešavinu od susednog tela, razmatran je u tom radu kao model poroznog tela.

Nedostatak teorije izložene u ova dva rada ogleda se u činjenici da model idealnog zida ne odgovara, u opštem slučaju, realnom problemu polupropustljive membrane jer

i) U balansnim relacijama za idealan zid se zanamaruju svi članovi osim članova skoka i onih članova koji u sebi sadrže površinski napon;

ii) Uzima se da je idealan zid ravan;

iii) Tangencijalne komponente brzina svih sastojaka iščezavaju na zidu.

Na osnovama Müller-ove teorije, Grauel [12] je razmatrao medjupovrš kao mešavinu dva fluida koja se nalazi izmedju jedne dvokomponentalne mešavine i jednokomponentalnog materijala. Pri tome je Grauel pretpostavio da obe mešavine, ona koja čini medjupovrš i ona koja se nalazi sa jedne strane medjupovrši sadrže isti fluid, u radu označen sa II. Pošto je u tom radu medjupovrš propustljiva samo za fluid II, nameće se pitanje: da li je neophodno da medjupovrš sadrži onaj sastojak za koji je inače propustljiva ? Jer, iz Grauel-ove teorije je očigledno da drugi fluid, koji se nalazi u medjupovrši (u tom radu je označen sa 0) nije propustljiv ni za jedan od fluida izvan medjupovrši. Drugim rečima, ova teorija je primenjiva samo za posebne modele.

Zatim, u odeljku koji se odnosi na jednačine balansa medjupovrši, Grauel na primer, za jednačinu balansa mase piše

$$\partial_t \gamma_\mu - 2 \underset{n}{W}_0 K_M \gamma_\mu + (\gamma_\mu \underset{\tau}{W}_\mu^A)_{,A} + [\![\varrho_\alpha (V_\alpha^j - W_0^j) e^j]\!] = 0 . \tag{1.1}$$

Pri tome su sa μ označeni sastojci mešavine u medjupovrši, a sa α sastojci mešavine izvan medjupovrši. Očigledno je da obe mešavine imaju isti broj sastojaka. Postavlja se pitanje, šta bi bilo da je $\mu \neq \alpha$? Na primer, neka je medjupovrš jednokomponentalni materijal, a mešavina izvan medjupovrši trokomponentalna. Tada bi relacija (1.1) glasila

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad & \partial_t \gamma - 2 \underset{n}{W} K_M \gamma + (\gamma \underset{\tau}{W}^A)_{,A} \\
& + [\![\rho_\alpha (v^j_\alpha - w^j) e^j]\!] = 0 \, .
\end{aligned}
$$

Sumiranjem po α u (1.2) dobija se

$$
\begin{aligned}
(1.3)\qquad & (3)[\partial_t \gamma - 2 \underset{n}{W} K_M \gamma + (\gamma \underset{\tau}{W}^A)_{,A}] \\
& + [\![\sum_\alpha \rho_\alpha (v^j_\alpha - w^j) e^j]\!] = 0 \, .
\end{aligned}
$$

Odmah se uočava prisustvo broja (3) u prvom delu tog izraza, što je nelogično. Do istog zaključka se dolazi i analizom ostalih jednačina balansa.

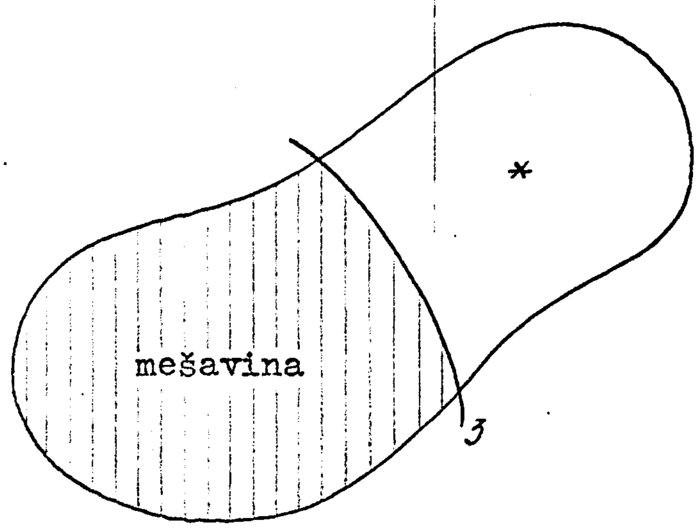
Prema tome i dalje ostaje kao otvoren problem korektnog formulisanja opšte teorije materijalne polupropustljive medjupovrši.

Ovaj rad predstavlja pokušaj da se otklone odredjeni nedostaci u prilazima dosadašnjih teorija i da se da sistematski tretman materijalnih polupropustljivih medjupovrši baziran na modernim idejama koje sada preovladjuju u mehanici kontinuuma.

On predstavlja nastavak istraživanja započetih u radu [6] . Pri formiranju modela vodjeno je računa da bude zadovoljen odredjen broj fizičkih zahteva kako bi bio obuhvaćen što veći broj problema vezanih za ponašanje realne membrane.

Na potrebu istraživanja realnih membrana ukazuju mnogi problemi koji se javljaju u mehanici, tehnici, biologiji itd. Treba odmah reći da cilj ovog rada nije vezan za mehanizam prolaska kroz medjupovrš. To je zadatak pre svega fiziko-hemičara. Cilj našeg rada je da objasni odredjene fenomene termomehaničke prirode u slučaju polupropustljive membrane, koja se zbog toga predstavlja kao materijalna dvodimenzionalna medjupovrš.

Vodeći računa o tome, usvojen je model koji je šematski prikazan na slici 1.



Slika 1.

Naime medjupovrš čini fluid $\mathcal{3}$ sa svojstvima, u opštem slučaju, različitim od svojstava okolnih fluida. Da ne bi bio prejudiciran značaj pojedinih veličina koje opisuju ponašanje medjupovrši, uzeto je da su kao površinske konstitutivne promenjive prisutne ne samo gustina i temperatura, već i njihovi gradijenti i izvodi po vremenu. Na osnovu terminologije uvedene od strane Noll-a, takvi materijali se nazivaju ne-prosti, toplotno-provodljivi fluidi. Trodimenzionalnu teoriju takvih fluida dao je I-Shih Liu [13] . Usvojeni materijal medjupovrši, na osnovu rada [14] , može biti nazvan i diferencijalni materijal prvog reda.

Sa problemom polupropustljivosti neposredno je vezan i sastav okolnog materijala. U opštem slučaju, do prolaska kroz membranu ne dolazi samo zato što se izvan medjupovrši nalazi i fluid koji čini medjupovrš, kao što je to slučaj kod Grauel-a. Zato je uzeto da se sa jedne strane medjupovrši nalazi mešavina od $\mu(\geq 2)$ fluida od kojih ni jedan ne mora da ima ista svojstva kao fluid $\mathfrak{z}$. Sa druge strane medjupovrši nalazi se fluid $*$ čija su svojstva, u opštem slučaju, različita od svojstava fluida $\mathfrak{z}$. Zbog složenosti problema, uzeto je da su svi fluidi neviskozni.

U cilju preglednosti, ceo rad je podeljen na sledeći način.

U odeljku 2 dati su osnovni elementi, definicije i osobine onih pojmova koji će biti korišćeni u kasnijim razmatranjima. U odeljku 3 su izvedene opšte jednačine balansa, kao i jednačine balansa materijala koji se nalazi u svakoj od oblasti usvojenog modela. Opšta razmatranja termodinamičkog procesa i konstitutivnih jednačina posmatrane medjupovrši, data su u odeljku 4. Zatim su te konstitutivne jednačine razmatrane sa stanovišta principa materijalne indiferentnosti. Ta razmatranja su data u odeljku 5. U odeljku 6 su iskorišćena ograničenja konstitutivnih jednačina koja su dobijena kao posledica primene entropijskog principa. Univerzalnost funkcije je pokazana u odeljku 7. Ravnotežna termodinamička razmatranja su data u odeljku 8. Konačno, u odeljku 9 su razmatrani specijalni slučajevi, a u odeljku 10 su diskutovani rezultati dobiveni u ovom radu.

2. Osnovni pojmovi i definicije

2.1. Elementi geometrije i kinematike površi

Za razmatranje materijalne polupropustljive medjupovrši nužno je poznavanje osnovnih elemenata njene geometrije i kinematike. U ovom odeljku biće navedeni samo oni elementi geometrije i kinematike površi, kao i relacije koje iz njih slede, a koje su neophodne za dalje izlaganje. Detaljnija razmatranja data su u radovima [15 - 20] .

Površ $S(t)$, koja se razmatra, nalazi se u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru. U svakoj tački površi moguće je izabrati lokalni sistem koordinata u^{α} , koje se nazivaju Gauss-ove ili površinske koordinate. Kretanje površi se posmatra u odnosu na fiksni Dekartov sistem koordinata x^{i} . Tada je tačka površi data sa

$$x^{i}= x^{i}(u^{\alpha};t) \quad , \quad i=1,2,3 \quad ; \quad \alpha=1,2 , \tag{2.1}$$

gde je t vreme. Za preslikavanje (2.1) se pretpostavlja da je glatko i predstavlja najopštiji oblik parametrizacije uočene površi.

Kretanje tačaka u površi je neprekidna transformacija u dvodimenzionalnom prostoru

(2.2) $$u^{\alpha} = u^{\alpha}(U^{\Delta};t) \,, \qquad \Delta = 1,2 \,,$$

gde su sa U^{Δ} označene konvektivne koordinate. Za tu transformaciju se pretpostavlja da je invertibilna tako da je $U^{\Delta} = U^{\Delta}(u^{\alpha};t)$.

Tada iz (2.1) i (2.2) sledi

(2.3) $$x^{i} = x^{i}(U^{\Delta};t) \,.$$

U svakoj tački površi $\mathcal{S}(t)$ se pretpostavlja da postoji vektor tangente $x^{i}_{,\alpha}$ pri čemu se sa " , " označava kovarijantno diferenciranje. Takodje, u svakoj tački površi postoji i jedinični vektor normale ν^{i}, koji je upravan na tangencijalnu ravan u toj tački i za koji važi

(2.4) $$\nu^{i} = \frac{1}{2}\varepsilon^{AB}\varepsilon^{ijk}x^{i}_{,A}x^{k}_{,B} \,,$$

pri čemu su sa ε^{AB}, odnosno, ε^{ijk} označeni ε sistemi u površi i prostoru. Tada je sigurno

(2.5) $$\nu^{i}\nu^{i} = 1 \qquad , \qquad x^{i}_{,\alpha}\nu^{i} = 1 \,,$$

za sve vreme t.

Diferencijal elementa dužine dl u površi je dat sa

(2.6) $$(dl)^2 = dx^i dx^i = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta ,$$

gde je sa

(2.7) $$g_{\alpha\beta} = x^i_{,\alpha}\, x^i_{,\beta}$$

označena prva fundamentalna forma ili metrički tenzor površi. Za njega važi

(2.8) $$g_{\beta\gamma}\, g^{\gamma\alpha} = g^{\alpha\gamma}\, g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad .$$

Često će biti korišćena Gauss-ova jednačina

(2.9) $$x^i_{,\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\, \nu^i ,$$

gde je $b_{\alpha\beta}$ druga fundamentalna forma površi. Tenzor može biti izražen u obliku

(2.10) $$b_{\alpha\beta} = - x^i_{,\alpha}\, \nu^i_{,\beta} .$$

Takodje će biti potrebna i Weingartner-ova jednačina

(2.11) $$\nu^i_{,\alpha} = - b^\gamma_\alpha\, x^i_{,\gamma} ,$$

gde je

(2.12) $$b^\gamma_\alpha = g^{\gamma\beta}\, b_{\beta\alpha} .$$

Koristeći tenzor $b_{\alpha\beta}$ mogu se dobiti dve važne skalarne invarijante:

Srednja krivina površi

(2.13) $$K_M = \frac{1}{2} b^{\alpha}_{\alpha}$$

i Gauss-ova krivina

(2.14) $$K_G \equiv det(b^{\alpha}_{\beta}) = \frac{b}{g} ,$$

gde je

(2.15) $$b \equiv det(b_{\alpha\beta}) \; , \; g \equiv det(g_{\alpha\beta}) .$$

Prema Cayley-Hamilton-ovoj teoremi za 2x2 matricu b^{α}_{β} sledi

(2.16) $$b^{\alpha}_{\gamma} b^{\gamma}_{\beta} - 2K_M b^{\alpha}_{\beta} + K_G \delta^{\alpha}_{\beta} = 0 .$$

Element površine može biti dat u obliku

(2.17) $$da = \sqrt{g}\, du^1 du^2 ,$$

odnosno

(2.18) $$da = J\sqrt{g}\, dU^1 dU^2 ,$$

gde je

(2.19) $$J = det(u^{\alpha}_{,\Delta}) .$$

Kako je metrički tenzor $G_{\Lambda\Delta}$ moguće izraziti u obliku

(2.20) $$G_{\Lambda\Delta} = g_{\alpha\beta} U^{\alpha}_{,\Lambda} U^{\beta}_{,\Delta}$$

sledi da se može pisati

(2.21) $$\sqrt{G} = J\sqrt{g}\,.$$

Koristeći (2.21) u (2.18) vidi se da je element površine moguće izraziti u obliku

(2.22) $$da = \sqrt{G}\, dU^1 dU^2.$$

Brzina čestice površi u prostoru će biti

(2.23) $$\dot{x}^i = \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{U^\Delta} = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{U^\alpha, U^\Delta} + x^i_{,\alpha} \left.\frac{\partial U^\alpha}{\partial t}\right|_{U^\Delta},$$

pri čemu je sa $/_{U^\Delta}$ naznačeno da vrednosti parametra su konstantne.

U najopštijem slučaju je

(2.24) $$\frac{\partial x^i}{\partial t} = \underset{\nu}{U}\, \nu^i + A^\alpha x^i_{,\alpha}\,,$$

gde je

(2.25) $$\underset{\nu}{U} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \nu^i$$

i naziva se brzina pomeranja površi, dok je

(2.26) $$A_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial t} x^i_{,\alpha} \quad ; \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$$

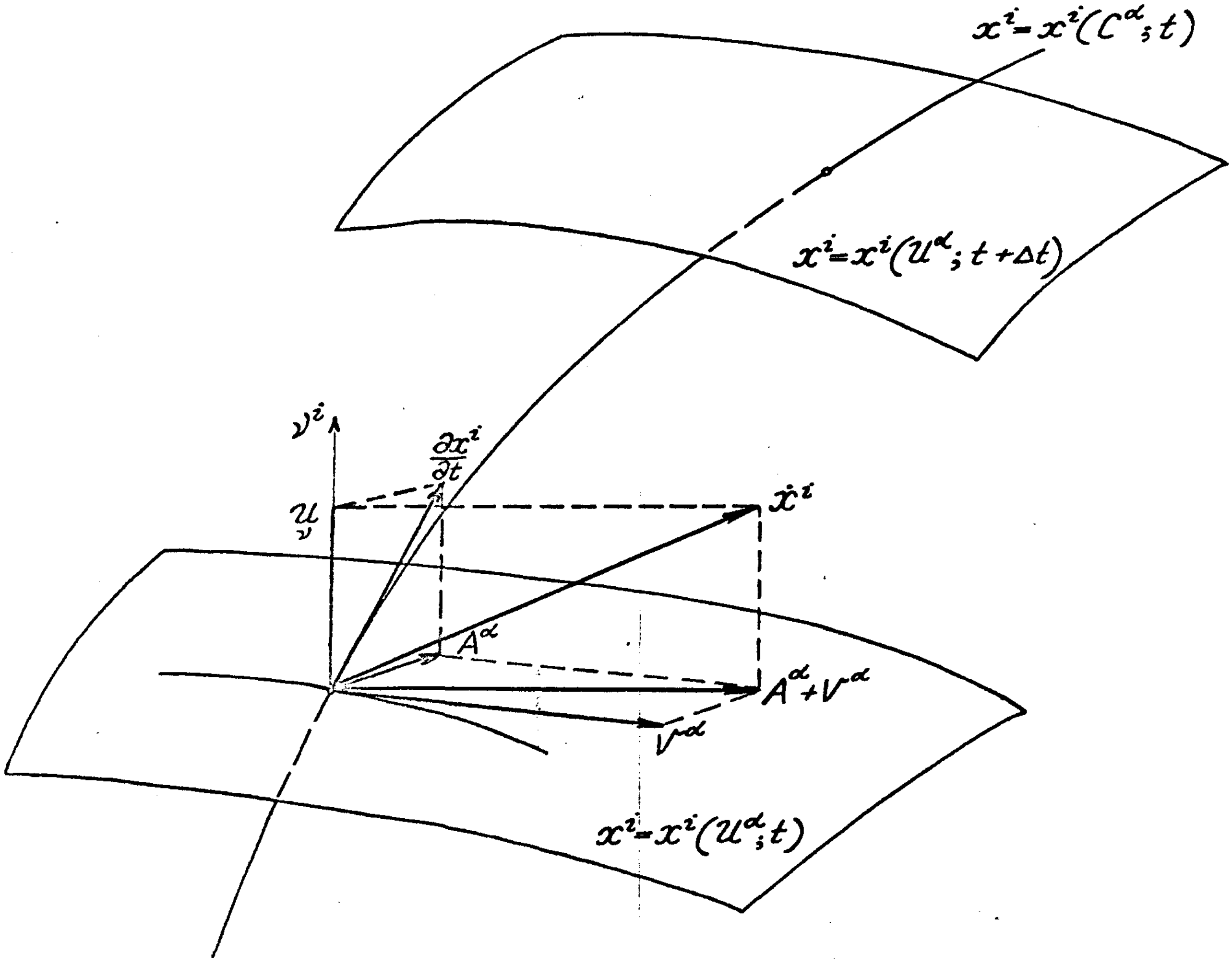
i očigledno se nalazi u tangencijalnoj ravni. U tangencijalnoj ravni se nalazi i V^{α} pri čemu je

(2.27)
$$V^{\alpha} = \frac{\partial U^{\alpha}}{\partial t}\Big/_{U^{\Delta}} .$$

Iz (2.23) i (2.24) sledi da je

(2.28)
$$A_{\beta} + V_{\beta} = \dot{x}^{i} x^{i}_{,\beta} .$$

S obzirom na sve to, slučaj najopštije parametrizacije može biti prikazan na sledeći način



Slika 2.

Ako je parametrizacija u (2.1) takva da je

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = \underset{\nu}{u}\, \nu^i , \tag{2.29}$$

onda je reč o normalnoj parametrizaciji. Takvom parametrizacijom se mnogi izrazi uprošćavaju pa će ona kao izbor parametara biti korišćena u ovom radu. Tako na primer izraz za brzinu čestice površi $S(t)$ u slučaju normalne parametrizacije postaje

$$\dot{x}^i = \underset{\nu}{u}\, \nu^i + V^{\alpha} x^i_{,\alpha} . \tag{2.30}$$

Osim toga, koristeći (2.29) pokazuje se da važi

$$\frac{\partial x^i_{,\beta}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{,\beta} = \underset{\nu}{u}_{,\beta}\, \nu^i - \underset{\nu}{u}\, b_{\beta}^{\gamma} x^i_{,\gamma} , \tag{2.31}$$

odnosno,

$$\frac{d x^i_{,\beta}}{dt} = \underset{\nu}{u}_{,\beta}\, \nu^i - \underset{\nu}{u}\, b_{\beta}^{\gamma} x^i_{,\gamma} + x^i_{,\alpha\beta} V^{\alpha} . \tag{2.32}$$

Iz definicije osnovnog metričkog tenzora površi sledi

$$\frac{d g_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 2 x^i_{,\alpha} \frac{\partial x^i_{,\beta}}{\partial t} . \tag{2.33}$$

Ako se u (2.33) iskoristi (2.31) dobija se

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = -2 \underset{\nu}{u}\, b_{\alpha\beta} , \tag{2.34}$$

odakle sledi

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = -4g \underset{\nu}{u} K_M . \tag{2.35}$$

Koristeći (2.34) pokazuje se da važi

$$\frac{d(g^{\frac{1}{2}})}{dt} = -2\sqrt{g}\, \underset{\nu}{u} K_M . \tag{2.36}$$

Za kasnija izlaganja biće potrebno naći

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial u^{\alpha}_{,\Delta}} \frac{du^{\alpha}_{,\Delta}}{dt} . \tag{2.37}$$

Kako je

$$\frac{\partial J}{\partial u^{\alpha}_{,\Delta}} = J U^{\Delta}_{,\alpha} ,$$

$$\frac{du^{\alpha}_{,\Delta}}{dt} = V^{\alpha}_{,\Delta} , \tag{2.38}$$

sledi da se (2.34) svodi na

$$\frac{dJ}{dt} = J V^{\alpha}_{,\alpha} . \tag{2.39}$$

Ako se zatim iskoriste relacije (2.18), (2.36) i (2.39) sledi da se može pisati

$$\frac{d(da)}{dt} = (V^{\alpha}_{,\alpha} - 2\underset{\nu}{u} K_M) da . \tag{2.40}$$

Iz relacije (2.5), uz korišćenje (2.31) dobija se

$$\frac{\partial \nu^i}{\partial t} = - \underset{\nu}{u}_{,\beta}\, g^{\alpha\beta} x^i_{,\alpha} , \tag{2.41}$$

za fiksne vrednosti u^{α} .
Diferenciranjem po vremenu tenzora $b_{\alpha\beta}$, uz korišćenje izraza (2.5), (2.9), (2.11) i (2.16) dobija se

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t}=\underset{\nu}{u}_{\alpha,\beta}+\underset{\nu}{u}K_{G}g_{\alpha\beta}-2\underset{\nu}{u}K_{M}b_{\alpha\beta}\,. \tag{2.42}$$

pri čemu su vrednosti u^{α} fiksne.
Treba napomenuti da relacije (2.34) i (2.42) daju tako zvani diferencijalni opis posmatrane površi i predstavljaju uslove kompatibilnosti.

Konačno, za kasniju analizu entropijske nejednačine koristićemo relaciju

$$\frac{\partial K_{M}}{\partial b_{\gamma\delta}}=\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}, \tag{2.43}$$

koja neposredno sledi iz (2.13), kao i relaciju

$$\frac{\partial K_{G}}{\partial b_{\beta\gamma}}=2K_{M}g^{\beta\gamma}-b^{\beta\gamma}, \tag{2.44}$$

koja se može dobiti iz (2.16).

2.2. Definicija i osobine operatora $[\;\;]$

Za dalja izlaganja neophodno je definisati i operator $[\;\;]$. U ovom odeljku će osim definicije biti navedene samo one osobine koje su neophodne za kasnija razmatranja. Detaljnije o ovom operatoru, koji se u literaturi naziva operator skoka ili operator diskontinuiteta, može se naći u radovima [21] , [22] .

Posmatrajmo uočenu površ $S(t)$ kao zajedničku granicu oblasti v^+ i v^- u prostoru E_3 . Neka je vektor spoljne normale površi ν^i usmeren ka unutrašnjosti oblasti v^+ . Zatim, neka je u oblastima v^+ i v^- definisana funkcija $\varphi(x)$ koja je neprekidna i diferencijabilna u okolini $S(t)$. Neka funkcija φ i njeni izvodi $\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$ teže graničnim vrednostima φ^+ i $\frac{\partial\varphi^+}{\partial x^k}$ kada se površi $S(t)$ teži po putanjama iz oblasti v^+ . Na isti način, neka funkcija φ i njeni izvodi $\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$ teže graničnim vrednostima φ^- i $\frac{\partial\varphi^-}{\partial x^k}$ kada se površi $S(t)$ teži po putanjama iz oblasti v^- . Tada važi sledeća

<u>Definicija:</u> Pod operatorom $[\![\ ]\!]$ se podrazumeva razlika vrednosti funkcije φ na površi $S(t)$, tj.

(2.45) $$[\![\varphi]\!] = \varphi^+ - \varphi^- .$$

1) <u>Operator $[\![\ ]\!]$ je linearan</u>

Dokaz: Neka su φ i ψ dve funkcije iz skupa funkcija realnih promenjivih i neka su c i d dva broja iz skupa realnih brojeva. Tada je je na osnovu definicije (2.45)

(2.46) $$[\![c\varphi + d\psi]\!] = c[\![\varphi]\!] + d[\![\psi]\!] .$$

čime je dokaz završen.

2) <u>Skok neprekidne funkcije</u>

U specijalnom slučaju kada je funkcija φ neprekidna, na osnovu definicije (2.45) sledi da je

$$[\![\varphi]\!] = 0 , \tag{2.47}$$

jer je

$$\varphi^{+} = \varphi^{-} .$$

Prethodno navedene osobine operatora $[\![\ ]\!]$ biće često korišćene u kasnijim razmatranjima.

2.3. Osnovni pojmovi teorije mešavina

Može se sa dovoljnom tačnošću reći da je ceo spoljni svet sastavljen od mešavina, odnosno, heterogenih materijala. Sama reč heterogen potiče od grčkih reči heteros=različit i genos=vrsta. Za heterogene materijale, odnosno, mešavine kaže se da su sastavljene od sastojaka ili komponenata koje su po svojoj prirodi homogene (grčki homoios=jednak).

Postoje mešavine koje imaju svostvo da se posle izvesnog vremena razdvajaju na svoje sastojke. Takve mešavine se nazivaju emulzije.

Zavisno od krupnoće sastojaka u mešavini, može se govoriti o stepenu disperziteta mešavine. U krupne ili fizičke disperzije spadaju one mešavine čiji se sastojci mogu prepoznati golim okom. Nasuprot njih, postoje i one mešavine kod kojih to nije moguće i one se nazivaju molekulske disperzije. Tada se radi o pravim rastvorima.

Na osnovu tih nekoliko činjenica vidi se da se u slučaju mešavina nailazi na mnogo veće probleme nego u slučaju homogenih materijala. To je i dovelo do toga da se u teorijama mešavina uvedu izvesna uprošćenja sa ciljem da se iskoriste analogije sa mehanikom kontinuuma jednokomponentalnih materijala.

Osnove matematičke teorije mešavina koja se i dan danas koristi postavili su A. Fick (1855) i J. Stefan (1871). Oni su pretpostavili da se svaka tačka mešavine $\underset{\sim}{x}$ može smatrati da je jednovremeno okupirana sa po jednim od svakog sastojka. Na taj način mešavina je predstavljena kao superpozicija od n jednokomponentalnih kontinuuma, od kojih svaki ima svoje individualno kretanje.

Značajan doprinos teoriji mešavina, posebno kada je u pitanju izvodjenje jednačina balansa, dao je Truesdell [22], [23], koji je predložio da se jednačine balansa i entropijska nejednačina postuliraju za svaki sastojak mešavine. U osnovama prilaza koji je dao Truesdell nalaze se sledeći njegovi principi

I) Sve osobine mešavina moraju biti matematičke posledice osobina sastojaka;

II) Kretanje sastojaka se može opisati ako se izvrši zamišljeno izdvajanje sastojaka od mešavine pri čemu se uticaj ostalih sastojaka na izdvojeni sastojak zamenjuje na odgovarajući način;

III) Kretanje mešavine može biti odredjeno istim jednačinama kao i jednokomponentalno telo.

Na ovim principima razvijale su se kasnije mnoge termodinamičke teorije mešavina [24 - 29] . S obzirom na složenost teorije mešavina uopšte, može se govoriti o većoj ili manjoj saglasnosti tih teorija sa klasičnom termohemijom, kinetičkom teorijom gasnih mešavina itd. Analiza prethodno navedenih radova sa tog stanovišta, može se naći u radovima [23] , [30] .

Dalji doprinos u razvoju teorije mešavina je dao Müller ([10] , [31]). Tako je u radu [31] pokazano da se uvodjenjem gradijenta gustine sastojka mešavine kao konstitutivne promenjive, pored ostalog, može postići saglasnost te teorije sa kinetičkom teorijom gasnih mešavina. Osim toga što ukazuje na pravilan izbor konstitutivnih promenjivih , Müller u istom radu otklanja sumnju koja je do tada postojala o tome da li se"princip" ekviprezensa može primeniti u teoriji mešavina pokazujući da je to moguće.

Već je rečeno da je u radu [10] Müller dao novi prilaz teoriji neprostih mešavina fluida koji je baziran na njegovom entropijskom principu. Suština Müllerovog entropijskog principa je u tome da se u njemu ne polazi od uobičajnih pretpostavki klasične termodinamike mehanike kontinuuma u kojima je

i) U neravnotežni procesima egzistira apsolutna temperatura T ;

ii) Priliv entropije jednak je prilivu unutrašnje energije podeljenim sa apsolutnom temperaturom, tj.

$$s = \frac{r}{T} ;$$

iii) Entropijski fluks je jednak toplotnom fluksu podeljenim sa apsolutnom temperaturom, tj.

$$\phi_i = \frac{q_i}{T} .$$

Za razliku od takvog pristupa Müller ne pretpostavlja nikakvu posebnu relaciju izmedju entropijskog i toplotnog fluksa, nego entropijski fluks razmatra kao konstitutivnu veličinu, ravnopravnu sa ostalim konstitutivnim veličinama.

On postulira entropijsku nejednačinu u obliku

(2.48) $$\rho\dot{\eta} + \phi_{i,i} = \sigma \geq 0 ,$$

za razliku od Clausius-Duhem-ove nejednačine koja u lokalnom obliku glasi

(2.49) $$\rho\dot{\eta} + \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} \geq 0 ,$$

pri čemu je ρ gustina, η entropija, a σ proizvodnja entropije.

Dalje, umesto apsolutne temperature kao nezavisne promenjive Müller uvodi pojam empirijske temperature θ . Koristeći pojam idealnog zida, Müller [5] pokazuje da je

$$\phi_i = \Lambda q_i \quad ; \qquad \Lambda = \Lambda(\theta;\dot{\theta}) \tag{2.50}$$

i da to važi za sve neprekidne izotropne sredine. S obzirom na to da Λ ne zavisi od materijalnih svojstava tela ona je univerzalne prirode i sa fizičkog stanovišta se tumači kao funkcija hladnoće. Na osnovu tog rezultata Müller pokazuje da se polje poremećaja toplote ne prostire beskonačnom brzinom , što je fizički opravdano, za razliku od dosadašnjih linearizovanih teorija toplotnog provodjenja.

U ravnotežnim razmatranjima Müller pokazuje da se veličina Λ svodi na recipročnu vrednost apsolutne temperature, tj.

$$\Lambda(\theta;0) = \frac{1}{T} \ , \tag{2.51}$$

čime se pokazuje da je apsolutna temperatura izvedena veličina u Müller-ovoj teoriji.

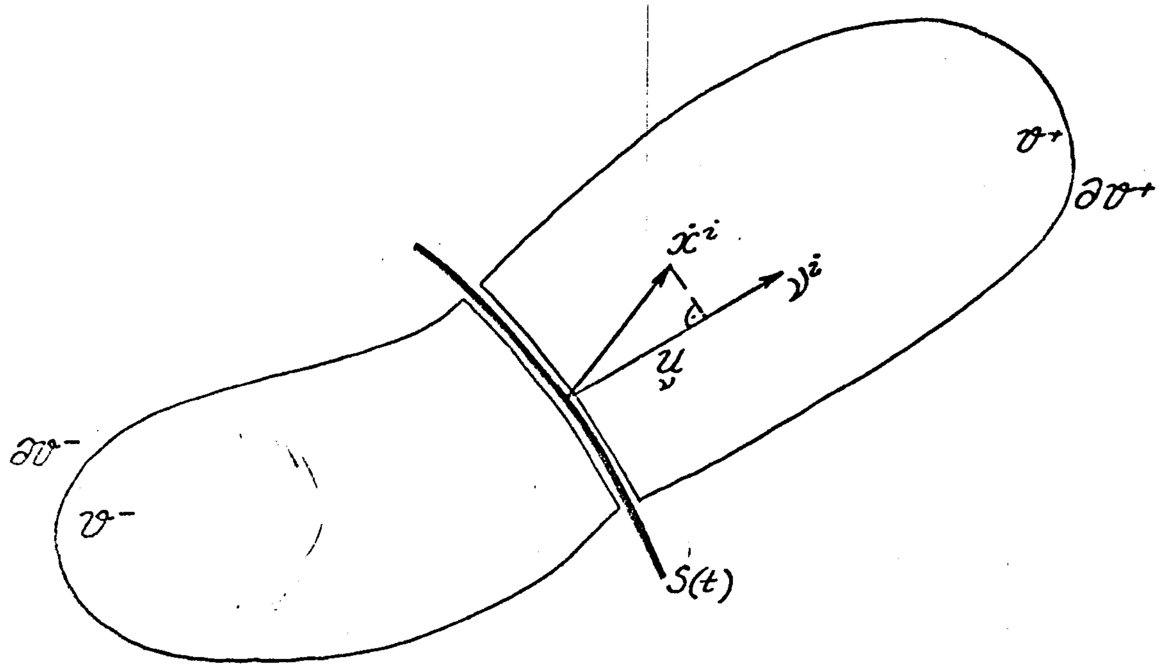
Tako izvedeni rezultati su u punoj saglasnosti sa rezultatima statističke termodinamike čime je pokazana opštost Müller-ovog entropijskog principa u slučajevima u kojima se može primeniti.

3. Jednačine balansa

3.1. Opšte jednačine balansa

Opšte jednačine balansa su izvodjene u mnogim radovima. U narednom izlaganju koristićemo prilaze Truesdell, Toupin-a [22] i Moeckel-a [4] .

Posmatra se trodimenzionalno telo $\mathcal{B}(t)$, zapremine $\mathcal{V}(t)$, koje sadrži materijalnu površ $\mathcal{S}(t)$ čije se tačke kreću brzinom $\dot{x}^i$ (vidi sliku 3).



Slika 3.

Površ $S(t)$ deli zapreminu $v(t)$ na dva dela $v^+(t)$ i $v^-(t)$ i njihova je zajednička granica, tako da je

$$v(t) = v^+(t) \cup S(t) \cup v^-(t) .$$

Granicu tela ∂v tada čine $\partial v^+(t)$ i $\partial v^-(t)$ i granična linija $\partial S(t)$. To znači da je

$$\partial v(t) = \partial v^+(t) \cup \partial S(t) \cup \partial v^-(t) .$$

Neka je sa Ψ označena proizvoljna aditivna veličina definisana za telo $\mathcal{B}(t)$. Fizičku prirodu veličine Ψ za sada nećemo precizirati. Neka je površ $S(t)$ sve vreme singularna površ za veličinu Ψ . Označimo sa $\Psi_v(x^i;t)$ i $\Psi_s(x^i;t)$ zapreminsku, odnosno, površinsku gustinu veličine Ψ . Tada je

$$\Psi = \int_{v^+ \cup v^-} \Psi_v \, dv + \int_S \Psi_s \, da . \tag{3.1}$$

Brzina promene veličine Ψ može se izraziti u obliku

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{v^+ \cup v^-} \Psi_v \, dv + \int_S \Psi_s \, da \Big) = -\int_{\partial v^+ \cup \partial v^-} \phi_v^j \, da^j - \int_{\partial S} \phi_s^\alpha \, dl_\alpha \tag{3.2}$$

$$+ \int_{v^+ \cup v^-} (p_v + s_v) \, dv + \int_S (p_s + s_s) \, da$$

Pri tome je

$da^j = \nu^j da$ - spolja orijentisani element površine;

$d\ell_\alpha = n_\alpha d\ell$ - element linije koji leži u površi S i koji je orijentisan upravno na ∂S ;

ϕ^j_v ; ϕ^j_s - površinska i linijska gustina fluksa, respektivno;

p_v ; p_s - zapreminska i površinska gustina proizvodnje, respektivno;

s_v ; s_s - zapreminska i površinska gustina priliva, respektivno;

Sada je potrebno naći materijalne izvode članova na levoj strani izraza (3.2). Za prvi od njih važi

$$\frac{d}{dt}\int_{v^+ \cup v^-} \psi_v \, dv = \frac{d}{dt}\int_{v^+} \psi_v \, dv + \frac{d}{dt}\int_{v^-} \psi_v \, dv . \tag{3.3}$$

U cilju sredjivanja tog izraza može se koristiti relacija koja u opštem slučaju glasi

$$\frac{d}{dt}\int_{v} \psi_v \, dv = \int_{v} \frac{\partial \psi_v}{\partial t} dv + \int_{\partial v} \psi_v \dot{\xi}^j da^j , \tag{3.4}$$

pri čemu je $\dot{\xi}^j$ brzina kretanja tačaka $\partial v^\pm$. Primenjujući taj izraz za svaku zapreminu posebno, pokazuje se da za zapreminu v^+ važi

$$\frac{d}{dt}\int_{v^+} \psi_v \, dv = \int_{v^+} \frac{\partial \psi_v}{\partial t} dv + \int_{\partial v^+} \psi_v \dot{\xi}^j da^j - \int_{S} \psi_v^+ u_\nu \nu^j da^j . \tag{3.5}$$

Kao što je na slici 3 prikazano, jedinični vektor normale ν^j na površi S je orijentisan ka zapremini $\mathcal{V}^+$.

Na isti način se pokazuje da za zapreminu $\mathcal{V}^-$ važi

$$(3.6)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}^-}\Psi_v\,dv = \int_{\mathcal{V}^-}\frac{\partial\Psi_v}{\partial t}dv + \int_{\partial\mathcal{V}^-}\Psi_v\dot{\xi}^j da^j + \int_S \Psi_v^- \underset{\nu}{u}\,\nu^j da^j .$$

Tada iz (3.5) i (3.6) sledi

$$(3.7)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}^+\cup\mathcal{V}^-}\Psi_v\,dv = \int_{\mathcal{V}^+\cup\mathcal{V}^-}\frac{\partial\Psi_v}{\partial t}dv + \int_{\partial\mathcal{V}^+\cup\partial\mathcal{V}^-}\Psi_v\dot{\xi}^j da^j - \int_S [\![\Psi_v]\!]\underset{\nu}{u}\,da .$$

Osim toga, potrebno je izračunati i izvod površinskog integrala na levoj strani relacije (3.2). Lako se pokazuje da je

$$(3.8)\qquad \frac{d}{dt}\int_S \Psi_s\,da = \int_S\left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial t}da + \Psi_s\frac{d(da)}{dt}\right).$$

Vodeći računa o tome da važi

$$(3.9)\qquad \frac{d\Psi_s}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi_{s,\alpha}V^{\alpha}$$

i uzimajući u obzir (2.40), sledi da se (3.8) može pisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_S \Psi_S da = \int_S \Big[\frac{\partial \Psi_S}{\partial t} + (\Psi_S V^{\alpha})_{,\alpha} - 2K_M u_\nu \Psi_S \Big] da . \tag{3.10}$$

Zamenjujući zatim (3.7) i (3.10) u (3.2) dobija se

$$\begin{aligned} &\int_{v^+ \cup v^-} \frac{\partial \Psi_v}{\partial t} dv + \int_{\partial v^+ \cup \partial v^-} (\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j) da^j \\ &+ \int_S \Big[\frac{\partial \Psi_S}{\partial t} + (\Psi_S V^{\alpha})_{,\alpha} - 2K_M u_\nu \Psi_S - [\![\Psi_v u_\nu]\!] \Big] da \\ &+ \int_{\partial S} \phi_S^{\alpha} d\ell_{\alpha} = \int_{v^+ \cup v^-} (p_v + s_v) dv + \int_S (p_S + s_S) da . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ovaj izraz se može napisati u sažetom obliku ako se na površinski integral

$$\int_{\partial v^+ \cup \partial v^-} (\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j) da^j$$

i linijski integral

$$\int_{\partial S} \phi_S^{\alpha} d\ell_{\alpha}$$

primene teoreme divergencije. Tako je

$$\begin{aligned} &\int_{\partial v^+ \cup \partial v^-} (\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j) da^j \\ &= \int_{v^+ \cup v^-} (\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j)_{,j} dv + \int_S [\![\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j]\!] \nu^j da ; \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\int_{\partial S} \phi_S^{\alpha} d\ell_{\alpha} = \int_S \phi_{S,\alpha}^{\alpha} da .$$

Tada (3.11) konačno možemo pisati u obliku

$$\int\limits_{v^+ \cup v^-} \left[\frac{\partial \Psi_v}{\partial t} + (\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j)_{,j} \right] dv$$

$$+ \int\limits_S \Big[\frac{\partial \Psi_S}{\partial t} + (\Psi_S V^\alpha + \phi_S^\alpha)_{,\alpha} - 2K_M \mathcal{U}_\nu \Psi_S$$

(3.13)

$$+ [\![\Psi_v (\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)\nu^j + \phi_v^j \nu^j]\!] \Big] da$$

$$= \int\limits_{v^+ \cup v^-} (p_v + s_v) dv + \int\limits_S (p_S + s_S) da \ .$$

Iz ovog izraza se mogu odrediti lokalni zakoni balansa za tačke okolnog materijala i tačke površi. U slučaju kada je reč o tačkama okolnog materijala, površinski članovi u (3.13) su jednaki nuli tako da dobijamo

$$\int\limits_v \left[\frac{\partial \Psi_v}{\partial t} + (\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j)_{,j} \right] dv = \int\limits_v (p_v + s_v) dv . \tag{3.14}$$

Ta jednačina mora da važi za proizvoljan izbor v , odakle sledi

$$\frac{\partial \Psi_v}{\partial t} + (\Psi_v \dot{\xi}^j + \phi_v^j)_{,j} = p_v + s_v \ , \tag{3.15}$$

što predstavlja lokalnu jednačinu balansa za sve tačke okolnog materijala.

U slučaju kada su u pitanju tačke površi S, graničnim postupkom kada v^+ , odnosno v^- teži ka nuli, tako da $\partial\mathcal{V}^+$, odnosno, $\partial\mathcal{V}^-$ konvergira ka površi S , dobijamo

$$\int_S \Big[\frac{\partial \psi_s}{\partial t} + (\psi_s v^\alpha + \phi_s^\alpha)_{,\alpha} - 2K_M u_\nu \psi_s \tag{3.16}$$
$$+ [\![\psi'_{\vartheta}(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)\nu^j + \phi^j_{\vartheta}\nu^j]\!] \Big] da = \int_S (p_s + s_s)\, da .$$

Iz (3.16) uobičajnim postupkom se dobija

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial t} + (\psi_s v^\alpha + \phi_s^\alpha)_{,\alpha} - 2K_M \dot{\xi}_\nu \psi_s \tag{3.17}$$
$$+ [\![\psi_{\vartheta}(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j) + \phi^j_{\vartheta}]\!] \nu^j = p_s + s_s ,$$

što predstavlja lokalnu jednačinu balansa za sve tačke površi $S(t)$.

3.2. Jednačine balansa za mešavinu u $\mathcal{V}^-$

Prethodno izvedene opšte jednačine balansa primenićemo za materijal koji se nalazi u svakoj od oblasti posmatranog modela.

Tako smo uzeli da se u $\mathcal{V}^-$ nalazi mešavina od $\mu(\geq 2)$ neviskoznih, nepolarnih fluida. Na osnovu klasičnog modela mešavine sledi da je za pisanje jednačina balansa A - tog sastojka moguće koristiti opštu jednačinu balansa (3.15) . Proizvolja aditivna veličina Ψ , definisana u prethodnim razmatranjima, biće sada identifikovana sa masom, količinom kretanja i energijom satojka A. Pri tome je radi preglednosti pogodno da se uvede

Tabela 1

ψ	ψ_v	ϕ^j_v	p_v	s_v
Masa sastojka	ρ_A	0	τ_A	0
Količina kr. sastojka	$\rho_A \dot{\xi}^j_A$	$-t^{jk}_A$	m^j_A	$\rho_A f^j_A$
Energija sastojka	$\rho_A(e_A+\frac{1}{2}\dot{\xi}_A^2)$	$q_A - t^{jk}_A \dot{\xi}^j_A$	ℓ_A	$\rho_A(r_A + f^j_A \dot{\xi}^j_A)$

gde je ρ_A gustina, t^{jk}_A napon, q^j_A vektor toplotnog fluksa, e_A specifična unutrašnja energija, τ_A gustina proizvodnje mase, m^j_A gustina proizvodnje količine kretanja, ℓ_A gustina proizvodnje energije, f^j_A specifična spoljašnja zapreminska sila i r_A specifičan priliv unutrašnje energije sastojka A. Velučine τ_A, m^j_A i ℓ_A mogu biti posledice hemijskih reakcija, pri čemu m^j_A i ℓ_A mogu sadržati delove koji su posledica sila interakcije i razmene energije izmedju sastojaka. Veličina f^j_A može biti sila teže, a r_A priliv unutrašnje energije kao posledica zračenja.

Tada se, koristeći podatke iz tabele 1 u opštoj jednačini balansa (3.15) dobijaju jednačine balansa mase, količine kretanja i energije sastojka

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\rho_A \dot{\xi}^j_A)_{,j} = \tau_A ;$$

$$\frac{\partial (\rho_A \dot{\xi}^k_A)}{\partial t} + (\rho_A \dot{\xi}^k_A \dot{\xi}^j_A - t^{kj}_A)_{,j} = m^k_A + \rho_A f^k_A ;$$

(3.18)
$$\frac{\partial \rho_A (e_A + \frac{1}{2}\dot{\xi}^2)}{\partial t} + \left[\rho_A (e_A + \frac{1}{2}\dot{\xi}^2_A)\dot{\xi}^j_A + q^j_A - t^{kj}_A \dot{\xi}^k_A\right]_{,j} =$$

$$= \ell_A + \rho_A (e_A + f^j_A \dot{\xi}^j_A) .$$

Masa, količina kretanja i energija mešavine keo céline moraju biti očuvane i kao posledica toga slede tri uslova

(3.19)
$$\sum_{A=1}^{\mu} \tau_A = 0 ; \quad \sum_{A=1}^{\mu} m^j_A = 0 \; ; \quad \sum_{A=1}^{\mu} \ell_A = 0 .$$

Sledeći Truesdell, Toupin-a [22] uvode se definicije gustine ρ , brzine $\dot{\xi}^i$, napona t^{ij} , specifične unutrašnje energije e , vektora toplotnog fluksa q^j , specifične spoljašnje zapreminske sile f^j i specifičnog priliva unutrašnje energije mešavine r

(3.20)
$$\rho = \sum_{A=1}^{\mu} \rho_A ;$$

(3.21)
$$\dot{\xi}^j = \sum_{A=1}^{\mu} \frac{\rho_A}{\rho} \dot{\xi}^j ;$$

(3.22)
$$t^{ij} = \sum_{A=1}^{\mu} (t^{ij}_A - \rho_A u^i_A u^j_A) ;$$

(3.23) $$e = \sum_{A=1}^{\mu} \frac{\rho_A}{\rho}\left(e_A + \frac{1}{2}u_A^2\right);$$

(3.24) $$q^j = \sum_{A=1}^{\mu}\left[q_A^j - t_A^{ij} + \rho_A\left(e_A + \frac{1}{2}u_A^2\right)u_A^j\right];$$

(3.25) $$f^j = \sum_{A=1}^{\mu} \frac{\rho_A}{\rho} f_A^j ;$$

(3.26) $$r = \sum_{A=1}^{\mu} \frac{\rho_A}{\rho} r_A ,$$

gde je $u_A^j = \dot{\xi}_A^j - \dot{\xi}^j$ i naziva se brzina difuzionog kretanja sastojka A . Osim toga, u tim izrazima figurišu sledeći članovi

$\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{\mu}\rho_A u_A^2$ - kinetička energija,

$\sum_{A=1}^{\mu} t_A^{ij} u_A^j$ - snaga napona,

$\sum_{A=1}^{\mu} \rho_A\left(e_A + \frac{1}{2}u_A^2\right)u_A^j$ - fluks energije,

$\sum_{A=1}^{\mu} \rho_A u_A^j u_A^j$ - fluks količine difutionog kretanja.

Ako se u (3.18) izvrši sumiranje po svim sastojcima i iskoristi (3.19) i (3.20-26), dobijaju se jednačine balansa mase, količine kretanja i energije posmatrane mešavine u istom obliku kao i odgovarajuće jednačine balansa za slučaj jednokomponentalnog materijala

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \varrho}{\partial t}+(\varrho \dot{\xi}^{j})_{,A}=0 ; \\
(3.27) \qquad & \frac{\partial(\varrho \dot{\xi}^{\kappa})}{\partial t}+(\varrho \dot{\xi}^{\kappa} \dot{\xi}^{j}-t^{\kappa j})_{,j}=\varrho f^{\kappa} ; \\
& \frac{\partial \varrho(e+\frac{1}{2} \dot{\xi}^{2})}{\partial t}+[\varrho(e+\frac{1}{2} \dot{\xi}^{2}) \dot{\xi}^{j}+q^{j}-t^{\kappa j} \dot{\xi}^{\kappa}]_{,j}= \\
& =\varrho(r+f^{j} \dot{\xi}^{j}) .
\end{aligned}
$$

Preostaje još da se izvede jednačina balansa entropije mešavine. U tom cilju treba aditivnu veličinu ψ identifikovati sa entropijom u materijalnoj zapremini $\mathcal{V}$. Radi preglednosti može se formirati

Tabela 2

ψ	ψ_{v}	ϕ_{v}^{j}	p_{v}	s_{v}
Enetropija	$\varrho\eta$	ϕ^{j}	σ	ϱs^{η}

gde je η entropija, ϕ^{j} fluks entropije, σ proizvodnja entropije, a s^{η} gustina priliva entropije mešavine.

Koristeći podatke iz tabele 2 u opštoj jednačini balansa (3.15) dobija se jednačina balansa entropije mešavine

$$
(3.28) \qquad \frac{\partial(\varrho \eta)}{\partial t}+(\varrho \eta \dot{\xi}^{j}+\phi^{j})_{,j}-\varrho s^{\eta}=\sigma .
$$

Poredjenjem jednačina balansa (3.27) sa opštom jednačinom balansa (3.15) pokazuje se da je moguće izvršiti identifikovanje odredjenih veličina što će biti prikazano u sledećoj

Tabela 3

ψ	ψ_v	ϕ_v^j	p_v	s_v
Masa mešavine	ρ	0	0	0
Količina kr. mešavine	$\rho\dot{\xi}^j$	$-t^{jk}$	0	ρf^j
Energija mešavine	$\rho(e+\frac{1}{2}\dot{\xi}^2)$	$q^j - t^{jk}\dot{\xi}^k$	0	$\rho(r+f^j\dot{\xi}^j)$

Dosadašnja razmatranja mešavine vršena su pod pretpostavkom da se radi o $\mu(\geqslant 2)$ komponentalnoj mešavini. S obzirom na jedan od osnovnih problema kojim se bavimo u ovom radu - problem polupropustljivosti materijalne medjupovrši, potrebno je precizirati šta se pod pojmom polupropustljivosti podrazumeva.

Definicija: Svojstvo medjupovrši da dozvoljava slobodan prolaz samo jednoj vrsti materije, naziva se polupropustljivost (semipermeabilnost).

Zbog svojstva polupropustljivosti, medjupovrš prirodno razdvaja mešavinu na dva dela: jedan koji prolazi i drugi koji ne prolazi. Tada, sa teorijskog stanovišta, se postavlja pitanje da li je moguće i ako jeste, kako razmatrati mešavinu kao dvokomponentalni materijal kod koga je jedna komponenta deo mešavine sa satojcima $B=1,\dots,n$ koje medjupovrš propušta, a druga komponenta onaj deo mešavine sa sastojcima $C=n+1,\dots,\mu$ koje medjupovrš ne propušta.

Odgovor na to pitanje može se dobiti iz samih balansnih jednačina. Razmortimo u tom cilju, recimo, balans količine kretanja. Prema definiciji mešavine, za B -ti sastojak važi

(3.29) $$\frac{\partial(\rho_B \dot{\xi}_B^{\kappa})}{\partial t} + \left(\rho_B \dot{\xi}_B^{\kappa} \dot{\xi}_B^{j} - t_B^{\kappa j}\right)_{,j} = m_B^{\kappa} + \rho_B f_B^{\kappa} .$$

Na isti način, za -ti sastojak važi

(3.30) $$\frac{\partial(\rho_C \dot{\xi}_C^{\kappa})}{\partial t} + \left(\rho_C \dot{\xi}_C^{\kappa} \dot{\xi}_C^{j} - t_C^{\kappa j}\right)_{,j} = m_C^{\kappa} + \rho_C f_C^{\kappa} .$$

Sledeći Truesdell, Toupin-a [22] možemo uvesti definicije koje će važiti za svaki od delova posmatrane mešavine. Tako se za deo mešavine koji može da prodje kroz medjupovrš može pisati

(3.31) $$\sum_{B=1}^{n} \rho_B = {}_{1}\rho ,$$

(3.32) $$\sum_{B=1}^{n} \rho_B \dot{\xi}_B^{\kappa} = {}_{1}\rho \, {}_{1}\dot{\xi}^{\kappa} .$$

$$\sum_{B=1}^{n}\left(t_B^{kj} - \varrho_B\, {}_1u_B^k\, {}_1u_B^j\right) = {}_1t^{kj}\ ; \tag{3.33}$$

$$\sum_{B=1}^{n} \varrho_B\left(e_B + \frac{1}{2}\, {}_1u_B^2\right) = {}_1\varrho\, {}_1e\ ; \tag{3.34}$$

$$\sum_{B=1}^{n}\left[q_B^j - t_B^{kj}\, {}_1u_B^j + \varrho_B\left(e_B + \frac{1}{2}\, {}_1u_B^2\right) {}_1u_B^j\right] = {}_1q^j ; \tag{3.35}$$

$$\sum_{B=1}^{n} \varrho_B f_B^j = {}_1\varrho\, {}_1f^j\ ; \tag{3.36}$$

$$\sum_{B=1}^{n} \varrho_B r_B = {}_1\varrho\, {}_1r\ ; \tag{3.37}$$

$$\sum_{B=1}^{n} \tau_B = {}_1\tau\ ; \tag{3.38}$$

$$\sum_{B=1}^{n} m_B^k = {}_1m^k ; \tag{3.39}$$

$$\sum_{B=1}^{n} l_B = {}_1l\ , \tag{3.40}$$

Pri tome je

$${}_1u_B^j = \dot{\xi}_B^j - {}_1\dot{\xi}^j\ . \tag{3.41}$$

Lako je pokazati da iz (3.32) i (3.41) sledi

$$\sum_{B=1}^{n} \varrho_B\, {}_1u_B^k = 0\ . \tag{3.42}$$

Analogne definicije možemo uvesti i za drugi deo mešavine koji ne prolazi kroz medjupovrš

(3.43) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \rho_c = {}_2\rho \quad ;$$

(3.44) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \rho_c \dot{\xi}_c^{k} = {}_2\rho_2 \dot{\xi}^{k} ;$$

(3.45) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} (t_c^{kj} - \rho_c\, {}_2u_c^{k}\, {}_2u_c^{j}) = {}_2t^{kj} ;$$

(3.46) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \rho_c (e_c + \frac{1}{2}\, {}_2u_c^{2}) = {}_2\rho_2 e ;$$

(3.47) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \left[q_c^{j} - t_c^{ij}\, {}_2u_c^{i} + \rho_c (e_c + \frac{1}{2}\, {}_2u_c^{2})\, {}_2u_c^{j} \right] = {}_2q^{j} ;$$

(3.48) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \rho_c f_c^{j} = {}_2\rho_2 f^{j} ;$$

(3.49) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \rho_c r_c = {}_2\rho_2 r ;$$

(3.50) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \tau_c = {}_2\tau ;$$

(3.51) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} m_c^{k} = {}_2m^{k} ;$$

(3.52) $$\sum_{c=n+1}^{\mu} \ell_c = {}_2\ell \quad .$$

Pri tome je odgovarajuća difuziona brzina data izrazom

(3.53) $$ {}_2u_c^j = \dot{\xi}_c^j - {}_2\dot{\xi}^j \; . $$

Analogno razmatranjema sprovedenim za prvi deo mešavine, možemo sada pokazati da i za drugi deo posmatrane mešavine važi

(3.54) $$ \sum_{C=n+1}^{\mu} \rho_C \, {}_2u_C^{\kappa} = 0 \; . $$

Tada, koristeći izraze (3.19-26), (3.31-40) i (3.43-52) pokazijemo da važi

(3.55) $$ \rho = \sum_{A=1}^{2} {}_A\rho \; ; $$

(3.56) $$ \rho\dot{\xi}^i = \sum_{A=1}^{2} {}_A\rho \, {}_A\dot{\xi}^i \; ; $$

(3.57) $$ t^{ij} = \sum_{A=1}^{2} {}_At^{ij} \; ; $$

(3.58) $$ \rho e = \sum_{A=1}^{2} {}_A\rho \, {}_Ae \; ; $$

(3.59) $$ q^j = \sum_{A=1}^{2} {}_Aq^j \; ; $$

(3.60) $$ \rho f^j = \sum_{A=1}^{2} {}_A\rho \, {}_Af^j \; ; $$

$$\rho r = \sum_{A=1}^{2} {}_A\rho_A r ; \tag{3.61}$$

$$0 = \sum_{A=1}^{2} {}_A\tau ; \tag{3.62}$$

$$0 = \sum_{A=1}^{2} {}_A m^k ; \tag{3.63}$$

$$0 = \sum_{A=1}^{2} {}_A\ell . \tag{3.64}$$

Osim toga, sumiranjem u (3.29) po svim sastojcima B prvog dela mešavine uz korišćenje izraza (3.31-32) i (3.42), dobija se

$$\frac{\partial({}_1\rho_1\dot{\xi}^k)}{\partial t} + ({}_1\rho_1\dot{\xi}^k{}_1\dot{\xi}^j - {}_1t^{kj})_{,j} = {}_1m^k + {}_1\rho_1 f^k , \tag{3.65}$$

što predstavlja jednačinu balansa količine kretanja onog dela mešavine koji ima mogućnost prolaza kroz medjupovrš.

Na isti način, polazeći od (3.30) i koristeći (3.43-44) i (3.54) dobijamo

$$\frac{\partial({}_2\rho_2\dot{\xi}^k)}{\partial t} + ({}_2\rho_2\dot{\xi}^k{}_2\dot{\xi}^j - {}_2t^{kj})_{,j} = {}_2m^k + {}_2\rho_2 f^k , \tag{3.66}$$

što predstavlja jednačinu balansa količine kretanja onog dela mešavine koji ne može da prodje kroz medjupovrš.

Iz relacija (3.65) i (3.66) uočava se istovetnost oblika zakona balansa količine kretanja odgovarajućih delova posmatrane mešavine. Očigledno je da se sumiranjem tih izraza kao rezultat dobija $(3.27)_2$, odnosno, jednačina balansa količine kretanja mešavine kao celine. Isti zaključak možemo izvesti i razmatranjem zakona balansa mase i energije.

Time je pokazano, da se sa stanovišta polupropustljivosti može izvršiti razdvajanje posmatrane mešavine od $\mu(\geq 2)$ sastojaka na dva dela, na jedan koji prolazi kroz medjupovrš i drugi koji ne prolazi. U toj analizi je očigledno korišćena definicija polupropustljivosti. Inače matematička formulacija uslova polupropustljivosti je od bitnog značaja u jednačinama balansa materijalne medjupovrši, što će biti kasnije razmatrano.

Na osnovu toga, bez gubljenja u opštosti, u daljem izlaganju biće posmatrana, sa stanovišta polupropustljivosti materijalne medjupovrši, binarna, dvokomponentalna mešavina čiji sastojak 1 , za razliku od sastojka 2 , medjupovrš propušta.

3.3. Jednačine balansa za fluid $*$ u $\mathcal{V}^+$

Već smo rekli da se sa jedne strane površi S , u $\mathcal{V}^+$, nalazi neki neviskozni, nepolarni fluid i da su mu svojstva, u opštem slučaju, različita od svojstava fluida 1 , 2 i 3 . Da bi smo to naglasili, uveli smo oznaku $*$, čime se ostavlja mogućnost da se u specijalnim slučajevima izvrši identifikovanje tog fluida sa odredjenim konkretnim fluidom.

Proizvoljna aditivna veličina, definisana u odeljku 3.1., biće sada identifikovana sa masom, količinom kretanja i energijom fluida $*$. Radi efikasnijeg pisanja balansnih jednačina za fluid $*$ može se formirati

Tabela 4

ψ	ψ_v	ϕ_v^j	p_v	s_v
Masa	ρ_*	0	0	0
Količina kretanja	$\rho_* \dot{\xi}_*^j$	$-t_*^{j\varkappa}$	0	$\rho_* f_*^j$
Energija	$\rho_*(e_* + \frac{1}{2}\dot{\xi}_*^2)$	$q_*^j - t_*^{j\varkappa}\dot{\xi}_*^j$	0	$\rho_*(r_* + f_*^j \dot{\xi}_*^j)$

Pri tome je ρ_* gustina, $t_*^{j\varkappa}$ napon, q_*^j vektor toplotnog fluksa i e_* specifična unutrašnja energija fluida $*$.

Koristeći podatke iz tabele 4 u opštoj jednačini balansa (3.15) dobijaju se jednačine balansa mase, količine kretanja i energije za fluid $*$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + (\rho_* \dot{\xi}_*^j)_{,j} = 0\,,$$

(3.67) $$\frac{\partial(\rho_* \dot{\xi}_*^\varkappa)}{\partial t} + (\rho_* \dot{\xi}_*^\varkappa \dot{\xi}_*^j - t_*^{\varkappa j})_{,j} = \rho_* f_*^j\,,$$

$$\frac{\partial[\rho_*(e_* + \frac{1}{2}\dot{\xi}_*^2)]}{\partial t} + [\rho_*(e_* + \frac{1}{2}\dot{\xi}_*^2)\dot{\xi}_*^j + q_*^j - t_*^{\varkappa j}\dot{\xi}_*^\varkappa] = \rho_*(r_* + f_*^j \dot{\xi}_*^j).$$

Preostaje još da se izvede jednačina balansa entropije za fluid $*$. U tom cilju se može formirati

Tabela 5

ψ	ψ_{v}	ϕ^{j}_{v}	p_{v}	s_{v}
Entropija	$\rho_{*}\eta_{*}$	ϕ^{j}_{*}	σ_{*}	$\rho_{*}s^{\eta}_{*}$

gde je η_{*} entropija, ϕ^{j}_{*} fluks entropije, σ_{*} proizvodnja entropije, a s^{η}_{*} specifičan priliv entropije u fluid $*$.

Koristeći podatke iz tabele 5 u opštoj jednačini balansa (3.15) dobija se jednačina balansa entropije za fluid $*$

(3.68) $$\frac{\partial(\rho_{*}\eta_{*})}{\partial t} + (\rho_{*}\eta_{*}\dot{\xi}^{j}_{*} - \phi^{j}_{*})_{,j} - \rho_{*}s^{\eta}_{*} = \sigma_{*} .$$

3.4. Jednačine balansa za materijalnu medjupovrš

Za fluid 3 , koji čini medjupovrš, pretpostavlja se, u cilju opštosti, da ima materijalna svojstva potpuno različita od onih koje poseduju fluidi 1 i 2 , odnosno, fluid $*$. Zbog toga je medjupovrš singularna površ, u opštem slučaju u odnosu na termodinamička svojstva okolnog materijala. Sa matematičkog stanovišta to znači da odgovarajuće fizičke veličine okolnog materijala imaju diskontinuitet u tačkama medjupovrši. Uticaj tih diskontinuiteta se ogleda u jednačinama balansa materijalne medjupovrši.

Za pisanje jednačina balansa za materijalnu medjupovrš koristi se opšta jednačina balansa (3.17). Aditivna veličina Ψ biće sada identifikovana sa masom, količinom kretanja i energijom medjupovrši. U tom cilju, radi veće preglednosti, pogodno je da se koristi

Tabela 6

Ψ	Ψ_s	Φ_s^j	p_s	s_s
Masa	γ	0	0	0
Količina kretanja	$\gamma \dot{x}^k$	$-S^{k\alpha}$	0	$\gamma \underset{s}{f}^k$
Energija	$\gamma(\mathcal{E}+\frac{1}{2}\dot{x}^2)$	$h^\alpha - S^{k\alpha}\dot{x}^k$	0	$\gamma(\underset{s}{r}+\underset{s}{f}^k\dot{x}^k)$

pri čemu je γ površinska gustina mase, $S^{k\alpha}$ je površinski napon, h^α je površinski vektor toplotnog fluksa, $\mathcal{E}$ je površinska specifična unutrašnja energija, $\underset{s}{f}^k$ je specifična površinska sila, a $\underset{s}{r}$ je specifičan priliv unutrašnje energije medjupovrši.

Koristeći podatke iz tabela 3 i 6 u opštoj jednačini balansa (3.17) dobijaju se jednačine

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\gamma V^\alpha)_{,\alpha} - 2\underset{\nu}{u} K_M \gamma + [\![\rho(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)]\!] \nu^j = 0 \; ;$$

(3.69)

$$\frac{\partial(\gamma \dot{x}^k)}{\partial t} + (\gamma \dot{x}^k V^\alpha - S^{k\alpha})_{,\alpha} - 2\underset{\nu}{u} K_M \gamma \dot{x}^k + [\![\rho \dot{\xi}^k (\dot{\xi}^j - \dot{x}^j) - t^{kj}]\!] \nu^j = \gamma \underset{s}{f}^k \; ;$$

$$\frac{\partial\gamma(\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{x}^2)}{\partial t}+\left[\gamma(\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{x}^2)v^{\alpha}-S^{\kappa\alpha}\dot{x}^{\kappa}+h^{\alpha}\right]_{,\alpha}-2\mathcal{U}K_M\gamma(\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{x}^2)$$

$$+[\![\rho(e+\frac{1}{2}\dot{\xi}^2)(\dot{\xi}^j-\dot{x}^j)-t^{\kappa j}\dot{\xi}^{\kappa}+q^j]\!]\nu^j-\gamma(r_s+f_s^{\kappa}\dot{x}^{\kappa}),$$

koje predstavljaju jednačine balansa mase, količine kretanja i energije za materijanu medjupovrš, respektivno.

Preostaje još da se izvede jednačina balansa entropije za materijalnu medjupovrš. Na isti način kao i do sada , a iz istih razloga, formiramo

Tabela 7

ψ	ψ_s	ϕ_s^{α}	p_s	s_s
Entropija	$\gamma\varkappa$	F^{α}	Σ	$\gamma s^{\varkappa}$

gde je $\varkappa$ površinsaka entropija, F^{α} fluks površinske entropije, Σ proizvodnja površinske entropije, a $s^{\varkappa}$ specifičan priliv površinske entropije.

Iz tabela 2 i 7 i opšte jednačine balansa (3.17) dobija se jednačina balansa entropije za materijalnu medjupovrš

$$\frac{\partial(\gamma\varkappa)}{\partial t}+(\gamma\varkappa v^{\alpha}+F^{\alpha})_{,\alpha}-2\mathcal{U}K_M\gamma\varkappa$$

(3.70)

$$+[\![\rho\eta(\dot{\xi}^j-\dot{x}^j)+\phi^j]\!]\nu^j=\Sigma+\gamma s^{\varkappa}.$$

S obzirom na složenost problema polupropustljive materijalne medjupovrši u slučaju kada je reč o termičkim i mehaničkim efektima, u daljim razmatranjima ćemo pretpostaviti da se uticaji svih spoljašnjih sila i priliva zanemaruju. To znači da balansne jednačine materijalne medjupovrši (3.69) i (3.70) sada glase

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\gamma V^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_M\gamma+[\![\rho(\dot{\xi}^j-\dot{x}^j)]\!]\nu^j=0\,;$$

$$\frac{\partial(\gamma\dot{x}^{\kappa})}{\partial t}+(\gamma\dot{x}^{\kappa}V^{\alpha}-S^{\kappa\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K\gamma\dot{x}^{\kappa}\;.$$

$$[\![\rho\dot{\xi}^{\kappa}(\dot{\xi}^j-\dot{x}^j)-t^{\kappa j}]\!]\nu^j=0\,;$$

$$(3.71)\quad \frac{\partial\gamma(\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{x}^2)}{\partial t}+\left[\gamma(\varepsilon+\tfrac{1}{2}\dot{x}^2)V^{\alpha}-S^{\kappa\alpha}\dot{x}^{\kappa}+h^{\alpha}\right]_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_M(\varepsilon+\tfrac{1}{2}\dot{x}^2)$$

$$[\![\rho(e+\tfrac{1}{2}\dot{\xi}^2)(\dot{\xi}^j-\dot{x}^j)-t^{j\kappa}\dot{\xi}^{\kappa}+q^j]\!]\nu^j=0\,;$$

$$\frac{\partial(\gamma æ)}{\partial t}+(\gamma æ V^{\alpha}+F^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_M\gamma æ$$

$$+[\![\rho\eta(\dot{\xi}^j-\dot{x}^j)+\phi^j]\!]\nu^j=\Sigma\,.$$

Množenjem balansa količine kretanja $(3.71)_2$ sa $\dot{x}^{\kappa}$, a zatim oduzimanjem tako dobivene relacije od balansa energije $(3.71)_3$, dobija se

$$(3.72)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}+(\gamma\varepsilon V^{\alpha}+h^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_M\gamma\varepsilon-S^{\kappa\alpha}\dot{x}^{\kappa}_{,\alpha}\\&+[\![\rho[e+\tfrac{1}{2}(\dot{\xi}^{\kappa}-\dot{x}^{\kappa})^2](\dot{\xi}^j-\dot{x}^j)-t^{\kappa j}(\dot{\xi}^{\kappa}-\dot{x}^{\kappa})+q^j]\!]\nu^j=0\,,\end{aligned}$$

što predstavlja jednačinu balansa unutrašnje energije materijalne medjupovrši.

Razmatranja u ovom radu se odnose na nepolarne fluide tako da čestice medjupovrši nemaju unutrašnje spregove. To znači da zakon balansa momenta količine kretanja materijalne medjupovrši glasi

$$\varepsilon^{ijk} x^j_{,\alpha} S^{k\alpha} = 0 \,. \tag{3.73}$$

Razlaganjem površinskog napona na sledeći način

$$S^{k\alpha} = S^{\alpha} \nu^k + S^{\alpha\beta} x^k_{,\beta} \tag{3.74}$$

i korišćenjem identičnosti

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} \nu^i \,, \\ \varepsilon^{ijk} x^j_{,\alpha} \nu^k &= g^{\lambda\sigma} \varepsilon_{\sigma\alpha} x^i_{,\lambda} \,, \end{aligned} \tag{3.75}$$

u (3.73), pokazuje se da je

$$S^{\alpha} = 0 \qquad \text{i} \qquad S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha} \,. \tag{3.76}$$

Na taj način (3.74) se svodi na

$$S^{k\alpha} = S^{\alpha\beta} x^k_{,\beta} \,. \tag{3.77}$$

Koristeći (2.9), (2.11), (2.30) i (3.77) dobija se

$$S^{k\alpha} \dot{x}^k_{,\alpha} = S^{\alpha\beta} (V_{\alpha,\beta} - \underset{\nu}{u}\, b_{\alpha\beta}) . \tag{3.78}$$

Uzimajući u obzir (3.78) balans unutrašnje energije (3.72) može da se piše u obliku

$$\frac{\partial(\gamma\mathcal{E})}{\partial t}+(\gamma\mathcal{E}V^{\alpha}+h^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{u}K_M\gamma\mathcal{E}-S^{\alpha\beta}(V_{\alpha,\beta}-\underset{\nu}{u}b_{\alpha\beta})$$

(3.79)
$$+[\![\varrho[e+\frac{1}{2}(\dot{\xi}^{k}-\dot{x}^{k})^2](\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})-t^{kj}(\dot{\xi}^{k}-\dot{x}^{k})+q^{j}]\!]\nu^{j}=0.$$

Konačno, jednačine balansa materijalne medjupovrši moguće je, koristeći definiciju materijalnog izvoda, pisati u sažetijem obliku

$$\dot{\gamma}+\gamma V^{\alpha}_{,\alpha}-2\underset{\nu}{u}K_M\gamma+[\![\varrho(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\nu^{j}=0;$$

$$\gamma\ddot{x}^{k}-S^{k\alpha}_{,\alpha}+[\![\varrho(\dot{\xi}^{k}-\dot{x}^{k})(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})-t^{kj}]\!]\nu^{j}=0;$$

(3.80)
$$\gamma\dot{\mathcal{E}}+h^{\alpha}_{,\alpha}-S^{\alpha\beta}(V_{\alpha,\beta}-\underset{\nu}{u}b_{\alpha\beta})$$

$$+[\![\varrho[e-\mathcal{E}+\frac{1}{2}(\dot{\xi}^{k}-\dot{x}^{k})^2](\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})-t^{kj}(\dot{\xi}^{k}-\dot{x}^{k})+q^{j}]\!]\nu^{j}=0;$$

$$\gamma\dot{\varkappa}+F^{\alpha}_{,\alpha}+[\![\varrho(\eta-\varkappa)(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\nu^{j}=\Sigma.$$

3.5. Jednačine balansa za materijalnu polupropustljivu medjupovrš

Već je rečeno da je medjupovrš propustljiva za fluid 1, a za fluid 2 deluje kao neprobojan zid. Matematička formulacija tog svojstva medjupovrši, saglasno definiciji pojma polupropustljivosti glasi

(3.81)
$$(\dot{\xi}_1^{j}-\dot{x}^{j})\nu^{j}\neq 0\ ,$$

$$(\dot{\xi}_2^j - \dot{x}^j)\nu^j = 0 \,. \tag{3.82}$$

Analizom jednačina balansa materijalne medjupovrši (3.71), (3.72) i relacija (3.81) i (3.82) pokazuje se da se uticaj okolnog materijala ogleda samo u članovima skoka. Radi lakšeg daljeg korišćenja te članove skoka možemo da označimo na sledeći način

$$\begin{aligned} J_\varrho &= [\![\varrho(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)]\!]\nu^j \,, \\ J_{\dot{\xi}} &= [\![\varrho\dot{\xi}^k(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j) - t^{kj}]\!]\nu^j \,, \\ J_e &= [\![\varrho[e + \tfrac{1}{2}(\dot{\xi}^k - \dot{x}^k)^2](\dot{\xi}^j - \dot{x}^j) - t^{kj}(\dot{\xi}^k - \dot{x}^k) + q^j]\!]\nu^j . \end{aligned} \tag{3.83}$$

Očigledno je da u svim ovim izrazima, s obzirom na (3.20-24) (kada se primene na slučaj dvokomponentalne mešavine), figurišu difuzioni članovi oba sastojka mešavine. Medjutim, kako je u našem slučaju reč o polupropustljivoj medjupovrši za koju važi (3.82), pokazaćemo da je relacije (3.83) moguće izraziti samo preko pravih unutrašnjih ("intrinsic") delova odgovarajućih veličina okolnog materijala, uticaja komponente koju medjupovrš propušta i uticaja fluida $*$.

Pod pojmom pravih unutrašnjih delova odgovarajućih fizičkih veličina mešavine podrazumeva se algebarski zbir svake komponente tih veličina mešavine, bez uticaja difuzionih članova. Saglasno tome, mogu se izrazi (3.22-24) za tenzor napona, specifičnu unutrašnju energiju i vektor toplotnog fluksa izraziti, u našem slučaju, u obliku

$$t^{ij}=t_I^{ij}-\sum_{A=1}^{2}\rho u_A^i u_A^j \, .$$

(3.84)
$$e=e_I+\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{2}\frac{\rho_A}{\rho}u_A^2 \, ,$$

$$q^j=q_I^j+\sum_{A=1}^{2}\left[-t_A^{ij}u_A^i+\rho_A\left(e_A+\frac{1}{2}u_A^2\right)u_A^j\right],$$

gde su t_I^{ij} , e_I i q_I^j pravu unutrašnji delovi tenzora napona, specifične unutrašnje energije i vektora toplotnog fluksa, definisani izrazima

(3.85)
$$t_I^{ij}=\sum_{A=1}^{2}t_A^{ij} \, ,$$
$$e_I=\sum_{A=1}^{2}\frac{\rho_A}{\rho}e_A \, ,$$
$$q_I^j=\sum_{A=1}^{2}q_A^j \, ,$$

respektivno.

U literaturi se često umesto izraza (3.84) koristi sledeći izraz za vektor toplotnog fluksa [22]

(3.86)
$$q^j=q_I^j+\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{2}\rho_A u_A^2 u_A^j \, .$$

koji se naziva "redukovani oblik" vektora toplotnog fluksa. Takav oblik izraza za vektor toplotnog fluksa je motivisan rezultatima kinetičke teorije difuzije i osim Truesdell-a, Toupin-a, navode ga i mnogi drugi autori koji se bave ireverzibilnom termodinamikom, na primer Prigogine, Müller. Iz izraza (3.86) je očigledno da $\mathcal{L}^j_I$ nije pravi unutrašnji deo jer sadrži i difuzione članove, tj.

(3.87) $$\mathcal{L}^j_I = \mathcal{L}^j_I + \sum_{A=1}^{2} (\rho_A e_A u^j_A - t^{ij}_A u^i_A).$$

Analizom pojedinih izraza u (3.83) lako se pokazuje da je

(3.88) $$J_\rho = [\rho^+(\dot{\xi}^{j+} - \dot{x}^j) - \rho^-(\dot{\xi}^{j-} - \dot{x}^j)]\nu^j .$$

Znajući da se sa jedne strane medjupovrši, u v^-, nalazi binarna mešavina, zapažamo da se iz izraza (3.88) ne vidi kako medjupovrš oseća tu mešavinu. Da bi smo to razjasnili, potrebno je posebno analizirati svaki član na desnoj strani izraza (3.88). Na osnovu usvojenog modela očigledno je da se prvi član u (3.88) može pisati u obliku

(3.89) $$\rho^+(\dot{\xi}^{j+} - \dot{x}^j) = \rho_*(\dot{\xi}^j_* - \dot{x}^j) .$$

Koristeći izraze (3.20-21), primenjene za slučaj binarne mešavine, u drugom članu izraza (3.88) dobijamo da je

(3.90) $$\rho^-(\dot{\xi}^{j-} - \dot{x}^j) = \sum_{A=1}^{2} \rho_A(\dot{\xi}^j_A - \dot{x}^j).$$

Tada, uzimajući u obzir (3.82), (3.89) i (3.90), sledi da se izraz (3.88) može pisati u obliku

(3.91) $$J_\rho = [\rho_*(\dot{\xi}^j_* - \dot{x}^j) - \rho_1(\dot{\xi}^j_1 - \dot{x}^j)]\nu^j .$$

Iz ovog izraza se jasno vidi, s obzirom na svojstvo polupropustljivosti, da veličinu $\mathcal{J}_\rho$ odredjuje samo onaj deo mešavine koji prolazi kroz medjupovrš, a ne ukupna mešavina. Time smo pokazali da se za razliku od (3.88) može dobiti jedan jasan i jednostavan izraz koji ćemo koristiti u daljim razmatranjima.

Do sličnog zaključka možemo doći i analizom veličine $\mathcal{J}_{\dot{\underset{\sim}{\xi}}}$. Najpre ćemo iskoristiti definiciju operatora skoka tako da se jednostavno dobija

$$\mathcal{J}_{\dot{\underset{\sim}{\xi}}} = \Big[\rho^{+}\dot{\xi}^{\kappa+}(\dot{\xi}^{j+}-\dot{x}^{j})-\rho^{-}\dot{\xi}^{\kappa-}(\dot{\xi}^{j-}-\dot{x}^{j}) - t^{\kappa j+}+t^{\kappa j-}\Big]\nu^{j}. \tag{3.92}$$

Dalje ćemo uzeti u obzir izraze (3.20-23) i nakon duže računice pokazujemo da je

$$\mathcal{J}_{\dot{\underset{\sim}{\xi}}} = \Big[\rho_{*}\dot{\xi}^{\kappa}_{*}(\dot{\xi}^{j}_{*}-\dot{x}^{j})-\sum_{A=1}^{2}\rho_{A}\dot{\xi}^{\kappa}_{A}(\dot{\xi}^{j}_{A}-\dot{x}^{j}) - t^{\kappa j}_{*}+\sum_{A=1}^{2}t^{\kappa j}_{A}\Big]\nu^{j} \tag{3.93}$$

Ako zatim iskoristimo (3.82) i $(3.85)_1$ sledi da se konačno može pisati

$$\mathcal{J}_{\dot{\underset{\sim}{\xi}}} = \Big[\rho_{*}\dot{\xi}^{\kappa}_{*}(\dot{\xi}^{j}_{*}-\dot{x}^{j})-\rho_{1}\dot{\xi}^{\kappa}_{1}(\dot{\xi}^{j}_{1}-\dot{x}^{j})-[\![t^{\kappa j}_{I}]\!]\Big]\nu^{j} \tag{3.94}$$

Analiza člana skoka u balansu unutrašnje energije, $\mathcal{J}_e$, medjutim, nije tako jednostavna kako sa fizičkog, tako i sa matematičkog stanovišta, zbog prisustva većeg broja članova koji imaju različita fizička tumačenja. Za njegovu analizu pogodno ga je najpre napisati u obliku

$$
J_e = \{ \rho^+[e^+ + \tfrac{1}{2}(\dot{\xi}^{k+} - \dot{x}^k)^2](\dot{\xi}^{j+} - \dot{x}^j) - t^{kj+}(\dot{\xi}^{k+} - \dot{x}^{k+}) + q^{j+}
$$

(3.95)

$$
- \rho^-[e^- + \tfrac{1}{2}(\dot{\xi}^{k-} - \dot{x}^k)^2](\dot{\xi}^{j-} - \dot{x}^j) + t^{kj-}(\dot{\xi}^{k-} - \dot{x}^{k}) + q^{j-}] \nu^j ,
$$

koji sledi iz $(3.83)_3$ i definicije skoka. Iz već spominjanih razloga, u ovoj relaciji koristimo izraze (3.20-24), zatim (3.82), tako da se nakon duže računice pokazuje da je

$$
J_e = \{ \tfrac{1}{2}\rho_*(\dot{\xi}^k_* - \dot{x}^k)^2(\dot{\xi}^j_* - \dot{x}^j) - \tfrac{1}{2}\rho_1(\dot{\xi}^k_1 - \dot{x}^k)(\dot{\xi}^j_1 - \dot{x}^j)
$$

(3.96)

$$
+ \rho_* e_*(\dot{\xi}^j_* - \dot{x}^j) - t^{kj}_*(\dot{\xi}^k_* - \dot{x}^k) + q^j_*
$$

$$
- \sum_{A=1}^{2} \rho_A e_A(\dot{\xi}^j_A - \dot{x}^j) + \sum_{A=1}^{2} t^{kj}_A(\dot{\xi}^k_A - \dot{x}^k) - \sum_{A=1}^{2} q^j_A \} \nu^j .
$$

U daljem sređivanju ovog izraza analiziraćemo najpre poslednji član. U tom cilju, koristeći $(3.84)_3$ i (3.86) lako se može zaključiti da je

$$
\sum_{A=1}^{2} q^j_A = q^j_I + \sum_{A=1}^{2} t^{ij}_A u^i_A - \sum_{A=1}^{2} \rho_A e_A u^j_A . \tag{3.97}
$$

Ovaj izraz ćemo dalje transformisati uzimajući u obzir relaciju

$$
u^i_A = \dot{\xi}^i - \dot{x}^i - (\dot{\xi}^i - \dot{x}^i) . \tag{3.98}
$$

Tada (3.97) postaje

$$
\sum_{A=1}^{2} q^j_A = q^j_I + \sum_{A=1}^{2} (t^{ij}_A - \rho_A e_A)[\dot{\xi}^j_A - \dot{x}^j_A - (\dot{\xi}^j_A - \dot{x}^j)] . \tag{3.99}
$$

$$J_e=\Big\{\tfrac{1}{2}\varrho_*(\dot\xi^{\kappa}_*-\dot x^{\kappa})^2(\dot\xi^{j}_*-\dot x^{j})-\tfrac{1}{2}\varrho_1(\dot\xi^{\kappa}_1-\dot x^{\kappa})^2(\dot\xi^{j}_1-\dot x^{j})$$

(3.100)
$$+\varrho_* e_*(\dot\xi^{j}_*-\dot x^{j})-t^{\kappa j}_*(\dot\xi^{\kappa}_*-\dot x^{\kappa})+q^{j}_*$$

$$-\sum_{A=1}^{2}\varrho_A e_A(\dot\xi^{j}-\dot x^{j})+\sum_{A=1}^{2}t^{\kappa j}_A(\dot\xi^{\kappa}-\dot x^{\kappa})-q^{j}_{I}\Big\}\nu^j.$$

Konačno. ako u tom izrazu iskoristimo $(3.85)_{1-2}$ imamo da je

$$J_e=\Big\{\tfrac{1}{2}\varrho_*(\dot\xi^{\kappa}_*-\dot x^{\kappa})^2(\dot\xi^{j}_*-\dot x^{j})-\tfrac{1}{2}\varrho_1(\dot\xi^{\kappa}_1-\dot x^{\kappa})^2(\dot\xi^{j}_1-\dot x^{j})$$

(3.101)
$$+[\![q^{j}_{I}-t^{ij}_{I}(\dot\xi^{j}-\dot x^{j})+\varrho e_{I}(\dot\xi^{j}-\dot x^{j})]\!]\Big\}\nu^j.$$

Na taj način smo pokazali da je izraz za J_e, dat u složenom obliku $(3.83)_3$, moguće izraziti preko "intrinsic" delova odgovarajućih veličina, kao i preko relativne brzine mešavine kao celine, što znatno pojednostavljuje dalja razmatranja.

Sada smo u mogućnosti da napišemo jednačine balansa za materijalnu polupropustvluvu medjupovrš. Zamenjujući (3.91), (3.94) i (3.101) u $(3.71)_{1-2}$ i (3.79) dobijamo jednačine

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\gamma V^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{U}K_M\gamma$$

$$+[\varrho_*(\dot\xi^{j}_*-\dot x^{j})-\varrho_1(\dot\xi^{j}_1-\dot x^{j})]\nu^j=0\ ,$$

$$\frac{\partial(\gamma\dot\xi^{\kappa})}{\partial t}+(\gamma\dot x^{\kappa}V^{\kappa}-S^{\kappa\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{U}K_M\gamma\dot x^{\kappa}$$

(3.102)
$$+[\varrho_*\dot\xi^{\kappa}_*(\dot\xi^{j}_*-\dot x^{j})-\varrho_1\dot\xi^{\kappa}_1(\dot\xi^{j}_1-\dot x^{j})-[\![t^{\kappa j}_{I}]\!]]\nu^j=0\ .$$

$$\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}+(\gamma\varepsilon V^{\alpha}+h^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{u}K_{M}\gamma\varepsilon-S^{\alpha\beta}(V_{\alpha,\beta}-\underset{\nu}{u}b_{\alpha\beta})$$

$$\Big[\frac{1}{2}\varrho_{*}(\dot{\xi}_{*}^{\kappa}-\dot{x}^{\kappa})^{2}(\dot{\xi}_{*}^{j}-\dot{x}^{j})-\frac{1}{2}\varrho_{1}(\dot{\xi}_{1}^{\kappa}-\dot{x}^{\kappa})^{2}(\dot{\xi}_{1}^{j}-\dot{x}^{j})$$

$$+[\![q_{I}^{j}+(\varrho e_{I}-t_{I}^{ij})(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\Big]\nu^{j}=0,$$

koje predstavljaju jednačine balansa mase, količine kretanja i energije materijalne polupropustljive medjupovrši, respektivno. One čine osnovni sistem jednačina za termomehanička razmatranja posmatrane medjupovrši.

4. Termodinamički proces za materijalnu polupropustljivu medjupovrš

Osnovni cilj termodinamike materijalne polupropustljive medjupovrši je odredjivanje njenih polja

gustine $\gamma(u^{\alpha};t)$

kretanja $\dot{x}^{\kappa}(u^{\alpha};t)$

temperature $\theta(u^{\alpha};t)$.

Pri tome se pretpostavlja egzistencija empirijske temperature materijane polupropustljive medjupovrši. U opštem slučaju θ može da ima vrednost različitu od graničnih vrednosti emepirijskih temperatura okolnog materijala. Za rešavanje tog problema koristi se pet jednačina balansa materijalne polupropustljive medjupovrši (3.102).Da bi te jednačine predstavljale tražene jednačine polja razmatranog problema, potrebno ih je dopuniti konstitutivnim jednačinama materijalne polupropustljive medjupovrši i okolnog materijala.

Za materijal medjupovrši je rečeno da je neprosti toplotno-provodljivi fluid. To znači da je skup konstitutivnih promenjivih medjupovrši dat sa

(4.1) $$\gamma \; ; \; \dot{\gamma} \; ; \; \gamma_{,\alpha} \; ; \; \theta \; ; \; \dot{\theta} \; ; \; \theta_{,\alpha} \; ; \; x^{\kappa}_{,\alpha} \; ; \; v^{\kappa} \; ; \; v^{\kappa}_{,\alpha} \, .$$

Tada, koristeći "princip" ekviprezensa, konstitutivne jednačine materijalne polupropustljive medjupovrši glase

$$
\begin{aligned}
S^{\alpha\beta} &= S^{\alpha\beta}(\gamma;\ \dot{\gamma};\ \gamma_{,\alpha};\ \theta;\ \dot{\theta};\ \theta_{,\alpha};\ x^{\kappa}_{,\alpha};\ v^{\kappa};\ v^{\kappa}_{;\alpha}) \\
\varepsilon &= \varepsilon\ (\text{------------------------}) \qquad (4.2) \\
h^{\alpha} &= h^{\alpha}(\text{------------------------}).
\end{aligned}
$$

Okolni materijal čine mešavina ne-prostih fluida u $\mathcal{V}^-$ i ne-prosti fluid $*$ u $\mathcal{V}^+$. S obzirom na osnovni cilj ovog rada, ispitivanje termomehaničkih svojstava medjupovrši, polazimo od toga da je ponašanje okolnog materijala u potpunosti poznato. Na osnovu toga smatramo da su odgovarajuće konstitutivne jednačine okolnog materijala poznate ([10] , [13]). Tada sa skupom svih tih konstitutivnih jednačina, posmatrani sistem balansnih jednačina postaje zatvoren tako da on predstavlja jednačine polja iz kojih se mogu naći tražena polja gustine, kretanja i temperature. Svako rešenje tog skupa diferencijalnih jednačina predstavlja termodinamički proces u materijalnoj polupropustljivoj medjupovrši.

5. Princip materijalne objektivnosti

5.1. Princip materijalne objektivnosti u prostoru

Konstitutivne jednačine materijala, u našem slučaju okolnog materijala i medjupovrši, moraju zadovoljavati princip materijalne objektivnosti.

Sa fizičkog stanovišta, princip materijalne objektivnosti izražava činjenicu da fizičke osobine i ponašanje materijala ne zavise od posmatrača. Uopšte gledano, sve veličine koje karakterišu neku pojavu u prirodi, nisu nezavisne od posmatrača. Za one veličine koje su nezavisne od posmatrača, kažemo da su objektivne ili indiferentne.

S obzirom na to da svakom posmatraču odgovara sistem Dekartovih koordinata u E_3, uzajamni položaj dva posmatrača odredjen je transformacijom

$$\bar{x}^i(\bar{t}) = Q^{ij}(t)x^j + c^i(t), \qquad \bar{t} = t - a, \tag{5.1}$$

gde su $\bar{x}^i, x^i$ - odgovarajući Dekartovi sistemi koordinata;

$Q^{ij}(t)$ - ortogonalni tenzor koji odredjuje rotaciju, a

$c^i(t)$ - vektor koji odredjuje translaciju koordinatnog sistema x^i u $\bar{x}^i$;

t ; $\bar{t}$ - vremena u odnosu na ta dva sistema koordinata;

a - pozitivna konstanta.

Za takav tenzor $Q^{ij}(t)$ važi

$$\overset{-1}{Q}{}^{ij}(t) = Q^{ji}(t) ,$$
$$\det(Q^{ij}(t)) = \pm 1 ,$$

za sve vreme t .

Pri takvoj transformaciji sistema koordinata odgovarajući skalari, vektori i tenzori se transformišu na odredjeni način.

Definicija: Za skalar S , vektor V^i i tenzor T^{ij} , za koje pri promeni sistema koordinata (5.1) važi

(5.2)
$$S = S ;$$
$$\bar{V}^i = Q^{ij} V^j ;$$
$$T^{ij} = Q^{ik} Q^{jl} T^{kl} ;$$

kaže se da su objektivan skalar, objektivan vektor i objektivan tenzor, respektivno.

U daljem izlaganju za nas je od posebne važnosti ponašanje konstitutivnih promenjivih datih sa (4.1) i konstitutivnih funkcija $S^{\alpha\beta}$, $\mathcal{E}$, h^{α} i drugih koja karakterišu materijalna svojstva medjupovrši pri transformaciji sistema koordinata (5.1).

Iz (2.1) i (5.1) može se zaključiti da su $x^i_{,\alpha}$ - tangentni vektori na medjupovri - objektivni jer je

$$\bar{x}^i_{,\alpha} = Q^{ij} x^i_{,\alpha} . \tag{5.3}$$

Za vektor normale na medjupovrši se može pokazati da je objektivan jer važi

$$\bar{\nu}^i = Q^{ij} \nu^j . \tag{5.4}$$

Odatle sledi da je

$$\bar{\nu}^i_{,\alpha} = Q^{ij} \nu^j_{,\alpha} . \tag{5.5}$$

tj. izvod jediničnog vektora normale po Gauss-ovim parametrima je takodje objektivan.

Na osnovu tih razmatranja sledi da je

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} \quad ; \quad \bar{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \\ \bar{K}_M &= K_M \quad ; \quad \bar{K}_G = K_G . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Po analogiji sa teorijom zapreminskih materijala uzimamo da se i odgovarajuće skalarne površinske veličine transformišu po sledećim zakonima

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \gamma \quad ; \quad \bar{\theta} = \theta \\ \dot{\bar{\gamma}} &= \dot{\gamma} \quad ; \quad \dot{\bar{\theta}} = \theta \\ \bar{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} \quad ; \quad \bar{\varkappa} = \varkappa . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Na isti način uzimamo da za površinski napon važi

(5.8) $$\bar{S}^{K\alpha} = Q^{KL} S^{L\alpha}.$$

Tada, s obzirom na (5.3) i (5.8) sledi da je

(5.9) $$\bar{S}^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}.$$

Konačno, iz (5.3) i (5.7) lako se pokazuje da je

(5.10) $$\bar{\gamma}_{,\beta} = \gamma_{,\beta} \quad ; \quad \bar{\theta}_{,\beta} = \theta_{,\beta}$$
$$\bar{h}^{\alpha} = h^{\alpha} \quad ; \quad \bar{\varphi}^{\alpha} = \varphi^{\alpha}.$$

5.2. Ograničenja konstitutivnih jednačina kao posledica principa materijalne objektivnosti u prostoru

Princip materijalne objektivnosti u prostoru postulira da su konstitutivne funkcije $S^{\alpha\beta}$, ε, h^{α} i druge objektivne pri transformaciji sistema koordinata (5.1). Ako sa K označimo bilo koju od konstitutivnih funkcija koje karakterišu materijalna svojstva medjupovrši, a sa Δ skup svih odgovarajućih konstitutivnih promenjivih datih sa (4.1), tada sledi da je

(5.11) $$K(\bar{\Delta}) = K(\Delta).$$

Uzimajući u obzir rezultate prethodnog odeljka, može se pisati

$$
\begin{aligned}
(5.12)\qquad & K(\gamma;\dot{\gamma};\gamma_{,\beta};\theta;\dot{\theta};\theta_{,\beta};Q^{ij}x^{j}_{,\alpha};Q^{ij}\nu^{j};Q^{ij}\nu^{j}_{,\alpha}) \\
& = K(\gamma;\dot{\gamma};\gamma_{,\beta};\theta;\dot{\theta};\theta_{,\beta};x^{i}_{,\alpha};\nu^{i};\nu^{i}_{,\alpha}),
\end{aligned}
$$

tj. K mora biti identički zadovoljeno za svako Δ . Očigledno je da K ne može biti proizvoljna funkcija od i da (5.12) nameće ograničenja na funkcionalni oblik zavisnosti od Δ . Na osnovu principa materijalne objektivnosti može se pokazati da K ne može zavisiti eksplicitno od $x^{i}_{,\alpha}$, ν^{i} i $\nu^{i}_{,\alpha}$, nego od veličina izvedenih preko tih veličina

$$
(5.13)\qquad
\begin{aligned}
x^{i}_{,\alpha}\, x^{i}_{,\beta} &= g_{\alpha\beta}\,; \\
x^{i}_{,\alpha}\, \nu^{i}_{,\beta} &= -b_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Na taj način se konstitutivna veličina K , neproste, toplotno-provodljive polupropustljive medjupovrši može predstaviti u obliku

$$
(5.14)\qquad K = K(\gamma;\dot{\gamma};\gamma_{,\alpha};\theta;\dot{\theta};\theta_{,\alpha};g_{\alpha\beta};b_{\alpha\beta}).
$$

Ova relacija predstavlja redukovani oblik funkcije reagovanja i kao takva identički zadovoljava princip materijalne objektivnosti u prostoru.

5.3. Princip materijalne objektivnosti u površi

Već je rečeno da se pri formulisanju konstitutivnih jednačina mora voditi računa o tome da su one nezavisne od transformacije koordinata (5.1). Takodje, konstitutivne jednačine moraju biti nezavisne od transformacije površinskih parametara pri kojima dužina linijskih elemenata površi ostaje očuvana.

Neka je jedna od takvih transformacija definisana sa

$$\bar{u}^{\alpha} = \bar{u}^{\alpha}(u^{\beta}) \quad , \quad \alpha,\beta = 1,2. \tag{5.15}$$

Za tu transformaciju se pretpostavlja da je invertibilna, tako da je

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(\bar{u}^{\beta}) \quad \text{i} \quad \det\left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\right) \neq 0 . \tag{5.16}$$

Radi veće pogodnosti uvedimo oznaku O^{α}_{β} tako da je

$$O^{\alpha}_{\beta} \equiv \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \tag{5.17}$$

Pri transformaciji površinskih parametara (5.15) transformišu se i odgovarajući skalari, vektori i tenzori.

Definicija: Za skalar S , vektor V_{α} i tenzor $T_{\alpha\beta}$, za koje pri transformaciji (5.15) važi

$$\begin{aligned} \bar{S} &= S ; \\ \bar{V}_{\alpha} &= O^{\beta}_{\alpha} V_{\beta} ; \\ \bar{T}_{\alpha\beta} &= O^{\mu}_{\alpha} O^{\nu}_{\beta} T_{\mu\nu} , \end{aligned} \tag{5.18}$$

kaže se da su objektivni površinski skalar, vektor i tenzor, respektivno.

Za gradijente gustine i temperature $\gamma_{,\alpha}$ i $\theta_{,\alpha}$ može se pokazati da se transformišu po zakonu

(5.19)
$$\gamma_{,\alpha}=O^{\beta}_{\alpha}\,\gamma_{,\beta}\,,$$
$$\theta_{,\alpha}=O^{\beta}_{\alpha}\,\theta_{,\beta}\,,$$

što znači da su, na osnovu zakona transformacije $(5.18)_2$, ti gradijenti objektivni površinski vektori.

Polazeći od zakona transformacije kvadrata elementa luka na površi

(5.20)
$$(d\ell)^2=g_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}du^{\beta}=\bar{g}_{\gamma\delta}\,d\bar{u}^{\gamma}d\bar{u}^{\delta}\,,$$

pokazuje se da je

(5.21)
$$\bar{g}_{\gamma\delta}=O^{\alpha}_{\gamma}\,O^{\beta}_{\delta}\,g_{\alpha\beta}\,.$$

odakle se vidi da je $g_{\alpha\beta}$ objektivan površinski tenzor.

Dalje se može pokazati da su srednja krivina K_M i Gauss-ova krivina K_G objektivni površinski skalari, tj.

(5.22)
$$\bar{K}_M=K_M\quad;\quad\bar{K}_G=K_G\,.$$

Analogno razmatranjima u odeljku 5.1. uzima se da su γ , $\dot{\gamma}$, θ , $\dot{\theta}$, ε , $\varkappa$ objektivni površinski skalari, φ^{α} objektivan površinski vektor, a $S^{\alpha\beta}$ objektivan površinski tenzor.

5.4. Ograničenja konstitutivnih jednačina kao posledica principa materijalne objektivnosti u površi

Na osnovu principa materijalne objektivnosti u površi konstitutivne funkcije $S^{\alpha\beta}$, $\mathcal{E}$, h^{α} i druge su nezavisne od transfromacije površinskih parametara (5.15). Da bi to bilo ispunjeno konstitutivne funkcije treba da budu izotropne funkcije u odnosu na grupu transformacija O^{α}_{β} . Za proizvoljnu skalarnu, vektorsku, odnosno tenzorsku konstitutivnu funkciju taj zahtev se može izraziti na sledeći način

$$
\begin{aligned}
& L(\gamma;\dot{\gamma};\gamma_{,\alpha};\theta;\dot{\theta};\theta_{,\alpha};g_{\alpha\beta};b_{\alpha\beta}) \\
& = L(\gamma;\dot{\gamma};O^{\beta}_{\alpha}\gamma_{,\beta};\theta;\dot{\theta};O^{\beta}_{\alpha}\theta_{,\beta};O^{\alpha}_{\gamma}O^{\beta}_{\delta}g_{\alpha\beta};O^{\alpha}_{\gamma}O^{\beta}_{\delta}b_{\alpha\beta}); \\
& \overset{-1}{O}{}^{\alpha}_{\delta}M^{\delta}(\gamma;\dot{\gamma};\gamma_{,\alpha};\theta;\dot{\theta};\theta_{,\alpha};g_{\alpha\beta};b_{\alpha\beta}) \\
& = M^{\alpha}(\gamma;\dot{\gamma};O^{\beta}_{\alpha}\gamma_{,\beta};\theta;\dot{\theta};O^{\beta}_{\alpha}\theta_{,\beta};O^{\alpha}_{\gamma}O^{\beta}_{\delta}g_{\alpha\beta};O^{\alpha}_{\gamma}O^{\beta}_{\delta}b_{\alpha\beta}); \\
& \overset{-1}{O}{}^{\alpha}_{\delta}\overset{-1}{O}{}^{\beta}_{\varepsilon}N^{\delta\varepsilon}(\gamma;\dot{\gamma};\gamma_{,\alpha};\theta;\dot{\theta};\theta_{,\alpha};g_{\alpha\beta};b_{\alpha\beta}) \\
& = N^{\alpha\beta}(\gamma;\dot{\gamma};O^{\beta}_{\alpha}\gamma_{,\beta};\theta;\dot{\theta};O^{\beta}_{\alpha}\theta_{,\beta};O^{\alpha}_{\gamma}O^{\beta}_{\delta}g_{\alpha\beta};O^{\alpha}_{\gamma}O^{\beta}_{\delta}b_{\alpha\beta}).
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Ako se uzme to u obzir i pretpostavi da su konstitutivne funkcije polinomijalne funkcije skupa iz (5.14), tada se, koristeći teoremu o reprezentaciji [32] , posebno za h^{α} i φ^{α} dobija

$$h^{\alpha}=(h_0 g^{\alpha\mu}+h_1 b^{\alpha\mu})\theta_{,\mu}+(p_0 g^{\alpha\mu}+p_1 b^{\alpha\mu})\gamma_{,\mu}\,,$$

(5.25)

$$\varphi^{\alpha}=(\varphi_0 g^{\alpha\mu}+\varphi_1 b^{\alpha\mu})\theta_{,\mu}+(\psi_0 g^{\alpha\mu}+\psi_1 b^{\alpha\mu})\gamma_{,\mu}\,.$$

Pri tome su koeficijenti

$$h_0\ ;\ h_1\ ;\ p_0\ ;\ p_1\ ;\ \varphi_0\ ;\ \varphi_1\ ;\ \psi_0\ ;\ \psi_1$$

funkcije skupa veličina

$$\gamma\ ;\ \dot{\gamma}\ ;\ \theta\ ;\ \dot{\theta}\ ;\ K_M\ ;\ K_G$$

(5.26) $$p=g^{\beta\alpha}\gamma_{,\beta}\gamma_{,\alpha}\ ;\quad q=g^{\beta\alpha}\theta_{,\beta}\theta_{,\alpha}\ ;\quad h=b^{\beta\lambda}\theta_{,\beta}\theta_{,\lambda}\ ;$$

$$r=g^{\beta\lambda}\gamma_{,\beta}\theta_{,\lambda}\ ;\quad k=b^{\beta\lambda}\gamma_{,\beta}\gamma_{,\lambda}\ ;\quad l=b^{\beta\lambda}\theta_{,\beta}\gamma_{,\lambda}\,,$$

od kojih zavise i ostale konstitutivne veličine.

6. Entropijski princip za materijalnu polupropustljivu medjupovrš

6.1. Formulacija entropijskog principa

Pored ograničenja koja na oblik funckionalne zavisnosti konstitutivnih jednačina nameće princip materijalne objektivnosti, dalja znatna ograničenja sa termomehaničkog stanovišta nameće entropijski princip. S obzirom na to da je za izvodjenje konstitutivnih jednačina okolnog materijala korišćen Müller-ov entropijski princip, ovaj princip postuliramo i za slučaj materijalne polupropustljive medjupovrši u obliku

U svakoj materijalnoj polupropustljivoj medjupovrši postoji skalrna, aditivna veličina, koja se naziva površinska entropija i koja ima nenegativnu proizvodnju Σ , tako da je

$$\frac{\partial(\gamma\varkappa)}{\partial t}+(\gamma\varkappa V^{\alpha}+F^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{U}K_{M}\gamma\varkappa +[\![\rho\eta(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})+\phi^{j}]\!]\nu^{j}=\Sigma\geqslant 0, \tag{6.1}$$

pri čemu su $\varkappa$ i F^{α} konstitutivne veličine, koje kao i ostale konstitutivne veličine zavise od skupa promenjivih (5.26).

Entropijska nejednačina je zadovoljena za svaki termodinamički proces u materijalnoj polupropustljivoj medjupovrši.

Na osnovu tako definisanog entropijskog principa sledi da nejednačina (6.1) mora da važi za sva termodinamička polja

$$\gamma(U^{\alpha},t) \quad ; \quad x^{K}(U^{t};t) \quad ; \quad \theta(U^{\alpha};t) \,,$$

koja su rešenja jednačina polja materijalne polupropustljive medjupovrši. To znači, s obzirom na (5.26), da entropijski princip nameće izvesna ograničenja na konstitutivne jednačine kako bi taj zahtev bio zadovoljen. Medjutim, zadovoljenje tog zahteva nije tako jednostavno. I-Shih Liu-ov metod [33], koji ćemo koristiti, sastoji se u sledećem

" Formira se nejednačina dodavanjem entropijskoj nejednačini linearnih kombinacija jednačina polja. Neodredjeni množioci u linearnim kombinacijama jednačina polja se nazivaju Lagranževi množioci. Ograničenja na konstitutivne jednačine onda slede iz činjenice da je tako formirana nejednačina linearna po odredjenim izvodima polja koja su proizvoljna "

U našem slučaju, nejednačina formirana primenom te metode, s obzirom na (6.1) i (3.102) glasi

$$\frac{\partial(\gamma\varkappa)}{\partial t}+(\gamma\varkappa V^{\alpha}+F^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_{M}\gamma\varkappa$$

$$-\Lambda^{\gamma}\Big[\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\gamma V^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_{M}\gamma+[\![\varrho(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\nu^{j}\Big]$$

$$-\Lambda^{\dot{x}^{\kappa}}\Big[\frac{\partial(\gamma\dot{x}^{\kappa})}{\partial t}+(\gamma\dot{x}^{\kappa}V^{\alpha}-S^{\kappa\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_{M}\gamma\dot{x}^{\kappa}$$

$$+[\![\sum_{A}\varrho_{A}\dot{\xi}_{A}^{\kappa}(\dot{\xi}_{A}^{j}-\dot{x}^{j})-t_{I}^{\kappa j}]\!]\nu^{j}\Big]$$

$$-\Lambda^{\varepsilon}\Big\{\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}+(\gamma\varepsilon V^{\alpha}+h^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_{M}\gamma\varepsilon-S^{\alpha\beta}(V_{\alpha,\beta}-\underset{\nu}{\mathcal{U}}b_{\alpha\beta})\tag{6.2}$$

$$+\frac{1}{2}[\![\sum_{A}\varrho_{A}(\dot{\xi}_{A}^{\kappa}-\dot{x}^{\kappa})^{2}(\dot{\xi}_{A}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\nu^{j}$$

$$+[\![q_{I}^{j}+(\varrho e_{I}-t_{I}^{kj})(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\nu^{j}\Big\}$$

$$+[\![\varrho\eta(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})+\phi^{j}]\!]\nu^{j}\geq 0\ .$$

Prema Liu-ovoj lemi, tih pet Lagranževih množitelja su konstitutivne funkcije i kao takve zavise od svih konstitutivnih promenjivih od kojih zavise i ostale konstitutivne veličine.

6.2. Posledice primene entropijskog principa

Entropijska nejednačina se može izraziti u ekvivalentnom obliku uzimanjem u obzir konstitutivnih pretpostavki za napon, specifičnu unutrašnju energiju, vektor toplotnog fluksa, specifičnu entropiju i vektor entropijskog fluksa. Zamenjujući ih u (6.2) može se pokazati, posle duže računice, da je tako dobivena nejednačina linearna po sledećim veličinama

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}\ ;\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\ ;\ \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial t}\ ;\ \frac{\partial \gamma_{,\alpha}}{\partial t}\ ;\ \frac{\partial \theta_{,\alpha}}{\partial t} \tag{6.3}$$

$$\gamma_{,\alpha\beta}\ ;\ \theta_{,\alpha\beta}\ ;\ V^{\beta}_{,\alpha}\ ;\ \dot{b}_{\alpha\beta}\ ;\ b_{\alpha\beta,\gamma}\ ;\ \underset{\nu}{u}\ .$$

S obzirom na njihovu proizvoljnost i linearnost, koeficijenti uz te veličine u tako dobivenoj nejednačini moraju biti jednaki nuli. Na taj način se dobijaju sledeće relacije

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \dot{\gamma}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{\gamma}} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \dot{\theta}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{\theta}} = 0\ ;$$

$$\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma_{,\alpha}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_{,\alpha}}\right) + \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \dot{\gamma}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial k^{\alpha}}{\partial \dot{\gamma}} = 0\ ;$$

$$\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta_{,\alpha}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta_{,\alpha}}\right) + \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \dot{\theta}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial k^{\alpha}}{\partial \dot{\theta}} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \gamma_{,\beta}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial k^{\alpha}}{\partial \gamma_{,\beta}}_{(\alpha\beta)} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \theta_{,\beta}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial k^{\alpha}}{\partial \theta_{,\beta}}_{(\alpha\beta)} = 0\ ;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \dot{\gamma}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial k^{\alpha}}{\partial \dot{\gamma}}\right)\gamma_{,\beta} + \left(\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \dot{\theta}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial k^{\alpha}}{\partial \dot{\theta}}\right)\theta_{,\beta} + \gamma(\varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E})\delta^{\alpha}_{\beta}$$

$$+\Lambda^{\varepsilon} S^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\gamma}\gamma\,\delta^{\alpha}_{\beta} = 0\ ; \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial b_{\alpha\beta}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_{\alpha\beta}} = 0 \;;$$

$$\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial b_{\beta\gamma}} - \Lambda^{\gamma}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial b_{\beta\gamma}}_{(\alpha\beta\gamma)} = 0 \;;$$

$$-2\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial g_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_{\alpha\beta}}\right)b_{\alpha\beta} - 2\gamma K_M(\varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E})$$
$$-\Lambda^{\varepsilon}S^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + 2\gamma K_M\Lambda^{\gamma} = 0,$$

$$\Lambda^{\dot{x}^{i}} = 0 \,.$$

Očigledno je da konstitutivne funkcije $S^{\alpha\beta}$, $\mathcal{E}$, h^{α}, $\varkappa$ i φ^{α} ne mogu na proizvoljan način da zavise od skupa konstitutivnih promenjivih (5.26) s obzirom da moraju zadovoljavati relaciju (6.4). Drukčije rečeno, te relacije nameću ograničenja na funkcionalnu zavisnost navedenog skupa konstitutivnih veličina.

S obzirom na (6.4) celikupna nejednačina se redukuje na nejednačinu

$$\begin{aligned}
&\left[\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma}\right) + \varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E} - \Lambda^{\gamma}\right]\dot{\gamma} + \gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} \\
&+\left(\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial \gamma}\right)\gamma_{,\alpha} + \left(\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial \theta}\right)\theta_{,\alpha} \\
&-\frac{1}{2}\Lambda^{\varepsilon}\left[\!\left[\sum_{A} \rho_A(\dot{\xi}^{k}_{A} - \dot{x}^{k})^2(\dot{\xi}^{j}_{A} - \dot{x}^{j})\right]\!\right]\nu^{j} \\
&-\Lambda^{\varepsilon}\left[\!\left[q^{j}_{I} + (\rho e_I - t^{ij}_{I})(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j})\right]\!\right]\nu^{j} \\
&-\Lambda^{\gamma}\left[\!\left[\rho(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j})\right]\!\right]\nu^{j} + \left[\!\left[\rho\eta(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j}) + \phi^{j}\right]\!\right]\nu^{j} \geq 0,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

koja se naziva ostatak nejednačina i koja takodje mora biti zadovoljena za svaki termodinamički proces u materijalnoj polupropustljivoj medjupovrši.

Problem odredjivanja konkretnog funkcionalnog oblika konstitutivnih veličina se svodi na analizu svake od relacija (6.4) i nejednačine (6.5). Striktno sprovedena analiza nas dovodi do redukovanog oblika konstitutivnih jednačina i Lagranževih množitelja Λ^{ε} i Λ^{γ}.

Tako se iz (5.25) i $(6.4)_{5,6}$, nakon duže računice, dobija da je

$$\varphi_{\alpha} = \Lambda^{\varepsilon} h_{\alpha} , \tag{6.6}$$

kao i

$$\frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial p} = \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial q} = \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial k} = \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial h} = \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \ell} = \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial r} = 0 . \tag{6.7}$$

Dalje je lako pokazati, s obzirom na $(6.4)_9$ i (6.6), da je

$$\frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial K_M} = \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial K_G} = 0 . \tag{6.8}$$

Tada se na osnovu (6.7) i (6.8) može pisati

$$\Lambda^{\varepsilon} = \Lambda^{\varepsilon}(\gamma ; \dot{\gamma} ; \theta ; \dot{\theta}) . \tag{6.9}$$

Zatim analiziramo ograničenje $(6.4)_8$. Koristeći pri tome $(6.4)_2$ i (6.9) dobijamo

(6.10) $$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_{\alpha\beta}} = \frac{\partial \varkappa}{\partial b_{\alpha\beta}} = 0 \; ,$$

odakle, s obzirom na (6.7) sledi

(6.11) $$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \ell} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial K_M} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial K_G} = 0 \; ,$$
$$\frac{\partial \varkappa}{\partial k} = \frac{\partial \varkappa}{\partial h} = \frac{\partial \varkappa}{\partial \ell} = \frac{\partial \varkappa}{\partial K_M} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial K_G} = 0 .$$

Dalje ispitujemo ograničenja $(6.4)_4$, iz kojih se s obzirom na $(5.25)_1$, (5.26) i (6.11) dobija

(6.12) $$p_1 = h_1 = 0 \; ,$$

(6.13) $$2\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial q} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}\right) + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \dot\theta} h_0 = 0 \; ,$$

(6.14) $$\frac{\partial \varkappa}{\partial r} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \dot\theta} p_0 = 0 \; .$$

Na isti način se, analizirajući ograničenja $(6.4)_3$, dobija (6.12) kao i

(6.15) $$2\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial p} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p}\right) + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \dot\gamma} p_0 = 0 \; ,$$

(6.16) $$\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial r} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right) + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \dot\gamma} h_0 = 0 .$$

Tada, s obzirom na (6.12) vektor toplotnog fluksa postaje

(6.17) $$h_{\alpha} = h_0 \theta_{,\alpha} + p_0 \gamma_{,\alpha} \; .$$

Na osnovu pretpostavke I-Shih Liu-a [13] o iščezavanju vektora toplotnog fluksa pri iščezavanju gradijenta temperature, iz (6.17) sledi da je

(6.18) $$p_o\big/_{\theta_{,\alpha}=0}=0\ .$$

U korišćenju preostalih ograničenja prelazimo na razmatranje ograničenja $(6.4)_7$. Koristeći (6.6) i (6.17) dobija se

(6.19) $$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\theta}}\theta_{,\beta}+\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\gamma}}\gamma_{,\beta}\right)\left(h_o\theta_{,\alpha}+p_o\gamma_{,\alpha}\right)\\&+\gamma(\varkappa-\Lambda^{\varepsilon}\varepsilon)\delta^{\alpha}_{\beta}+\Lambda^{\varepsilon}S_{\alpha\beta}-\Lambda^{\gamma}\gamma g_{\alpha\beta}=0,\end{aligned}$$

odakle, uzimajući antisimetričan deo, sledi

(6.20) $$\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\theta}}p_o-\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\gamma}}h_o=0\ .$$

Koristeći u ovom izrazu (6.18) dobija se da je

(6.21) $$\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\gamma}}=0\ ,$$

što s obzirom da Λ^{ε} ne zavisi od $\theta_{,\alpha}$ važi uvek. To znači da (6.9) postaje

(6.22) $$\Lambda^{\varepsilon}=\Lambda^{\varepsilon}(\gamma;\theta;\dot{\theta}).$$

Takodje, na osnovu (6.21), iz (6.20) zaključujemo da je

(6.23) $$p_o=0\ ,$$

ako je $\frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \theta} \neq 0$. Tada vektor toplotnog fluksa možemo pisati u obliku

(6.24) $$h_{\alpha} = h_{o}\theta_{,\alpha} .$$

Kao posledica ovog rezultata sledi da se ograničenja $(6.4)_3$ i $(6.4)_4$ svode na oblik

(6.25) $$\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma_{,\alpha}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_{,\alpha}} = 0 ,$$

(6.26) $$\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta_{,\alpha}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta_{,\alpha}}\right) + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \theta} h^{\alpha} = 0 ,$$

odakle se, koristeći $(6.4)_1$ i (5.26) izvodi zaključak da je skalarna invarijanta h_o nezavisna od $\dot{\gamma}$, $\gamma_{,\alpha}$ i $b_{\alpha\beta}$ tj.

(6.27) $$\frac{\partial h_o}{\partial \dot{\gamma}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h_o}{\partial \gamma_{,\alpha}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h_o}{\partial b_{\alpha\beta}} = 0 .$$

Takodje je, koristeći $(6.4)_1$, $(6.4)_2$ i (6.24)

(6.28) $$\frac{\partial \varkappa}{\partial \dot{\gamma}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{\gamma}} = 0 .$$

Iz $(6.4)_2$, (6.22) i (6.25) sledi da je

(6.29) $$\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma_{,\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_{,\alpha}} = 0 .$$

Analizom (6.10), (6.27), (6.28) i (6.29) zaključujemo da su $\varkappa$, $\mathcal{E}$ i h_0 nezavisni od p , h , r , k , ℓ , K_M i K_G , tj.

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa(\gamma;\theta;\dot\theta;g) \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}(\qquad\qquad) \\ h_0 &= h_0(\qquad\qquad). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Koristeći (6.21), (6.23) i (6.24) u (6.19) dobija se

$$\Lambda^{\varepsilon} S^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\gamma}\gamma\delta^{\alpha}_{\beta} + \gamma(\varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E})\delta^{\alpha}_{\beta} + \frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot\theta} h^{\alpha}\theta_{,\beta} = 0 . \tag{6.31}$$

Lako je pokazati da iz tog izraza sledi da je

$$S_{\alpha\beta} = -\sigma_0 g_{\alpha\beta} + \sigma_2 \theta_{,\alpha}\theta_{,\beta} . \tag{6.32}$$

gde je

$$\sigma_0 = -\frac{\gamma}{\Lambda^{\varepsilon}}(\Lambda^{\gamma} - \varkappa + \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E}), \tag{6.33}$$

$$\sigma_2 = -\frac{\partial \ln\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot\theta} h_0 = -\frac{1}{\Lambda^{\varepsilon}}\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot\theta} h_0 . \tag{6.34}$$

Dalje, koristeći (6.26) u (6.31)dobijamo

$$\Lambda^{\varepsilon} S^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\gamma}\gamma\delta^{\alpha}_{\beta} + \gamma(\varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E})\delta^{\alpha}_{\beta} - \gamma\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta_{,\alpha}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta_{,\alpha}}\right)\theta_{,\beta} = 0 . \tag{6.35}$$

Vodeći računa o (6.30)i (6.32) pokazujemo da iz prethodne relacije sledi

(6.36)
$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \varrho} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varrho} = \frac{\Lambda^{\varepsilon}\sigma_2}{2\gamma} .$$

Iz (6.26) je očigledno da je σ_2 funkcija samo od γ , θ , $\dot{\theta}$ i ϱ , tj.,

(6.37)
$$\sigma_2 = \sigma_2(\gamma ; \theta ; \dot{\theta} ; \varrho).$$

Jedino ograničenje iz (6.4) koje do sada nismo koristili je ograničenje $(6.4)_{10}$. Uzimajući u obzir $(6.4)_7$ i (6.26), iz $(6.4)_{10}$ se dobija

(6.38)
$$\frac{\partial \varkappa}{\partial g_{\alpha\beta}} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{h_0}{2\gamma}\frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \dot{\theta}}\theta^{,\alpha}\theta^{,\beta} .$$

Može se pokazati da je ta relacija identički zadovoljena ako se iskoristi $(6.4)_4$ i identičnost

(6.39)
$$\frac{\partial \varrho}{\partial g_{\alpha\beta}} = -g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}\theta_{,\lambda}\theta_{,\mu} .$$

Relacije $(6.4)_2$ i (6.36), tj.

(6.40)
$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \dot{\theta}} = \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{\theta}} ;$$
$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \varrho} = \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varrho} + \Lambda^{\varepsilon}\frac{\sigma_2}{2\gamma} ,$$

predstavljaju jedan sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po $\varkappa$. Egzistencija rešenja ovog sistema jednačina zahteva ispunjavanje sledećeg uslova integrabilnosti

$$\frac{\partial \ln \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \dot{\theta}} = - \frac{\dfrac{\partial \sigma_2}{\partial \dot{\theta}}}{2\gamma \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial q} + \sigma_2} . \tag{6.41}$$

U dosadašnjoj analizi ograničenja konstitutivnih jednačina, koja su posledica primene entropijskog principa, nije bila korišćena ostatak nejednačina (6.5). Ona se, pomoću (6.6) i (6.24), svodi na oblik

$$\Big[\gamma\Big(\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma}\Big) + \varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\varepsilon - \Lambda^{\gamma}\Big]\dot{\gamma} + \gamma\Big(\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}\Big)\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \gamma} h_0 \theta^{,\alpha} \gamma_{,\alpha} + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \theta} h_0 \theta^{,\alpha} \theta_{,\alpha}$$

$$-\frac{1}{2}\Lambda^{\varepsilon}\Big[\!\Big[\sum_A \varrho_A (\dot{\xi}^{r}_A - \dot{x}^{r})^2 (\dot{\xi}^{j}_A - \dot{x}^{j})\Big]\!\Big]\nu^{j} \tag{6.42}$$

$$-\Lambda^{\varepsilon}\Big[\!\Big[q^{j}_{I} + (\varrho e_{I} - t^{ij}_{I})(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j})\Big]\!\Big]\nu^{j}$$

$$-\Lambda^{\gamma}\Big[\!\Big[\varrho(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j})\Big]\!\Big]\nu^{j} + \Big[\!\Big[\varrho\eta(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j}) + \phi^{j}\Big]\!\Big]\nu^{j} \geqslant 0.$$

koja će biti predmet naše dalje analize.

Za izohorične procese, tj. kada je $\dot{\gamma}=0$, nijedna od veličina u toj nejednačini ne zavisi od $\gamma_{,\alpha}$ izuzev člana u kome $\gamma_{,\alpha}$ eksplicitno figuriše. Zbog toga mora da bude

$$\frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \gamma} = 0 . \tag{6.43}$$

Tada se (6.22) svodi na

(6.44) $$\Lambda^{\varepsilon} = \Lambda^{\varepsilon}(\theta;\dot{\theta}),$$

što predstavlja jedan od važnijih rezltata ovog rada.

Sumirajući dosadašnje rezultate ovog rada koji se izražavaju relacijama (6.6), (6.24), (6.30), (6.32), (6.37) i (6.44) sledi da se konstitutivne jednačine mogu pisati u obliku

(6.45)
$$\begin{aligned}
&\varepsilon = \varepsilon(\gamma;\theta;\dot{\theta};\varrho);\\
&\varkappa = \varkappa(\gamma;\theta;\dot{\theta};\varrho);\\
&h^{\alpha} = h_o(\gamma;\theta;\dot{\theta};\varrho)g^{\alpha\beta}\theta_{,\beta};\\
&\varphi^{\alpha} = \Lambda^{\varepsilon}(\theta;\dot{\theta})h_o(\gamma;\theta;\dot{\theta};\varrho)g^{\alpha\beta}\theta_{,\beta};\\
&S^{\alpha\beta} = -\sigma_o(\gamma;\dot{\gamma};p;\theta;\dot{\theta};\varrho;K_M;k;h;\ell;r)g^{\alpha\beta}\\
&\qquad +\sigma_2(\gamma;\theta;\dot{\theta};\varrho)\theta^{,\alpha}\theta^{,\beta},
\end{aligned}$$

i kao takve predstavljaju njihov najopštiji redukovani oblik.

Naša dalja analiza ostatka entropijske nejednačine (6.42) vezana je pre svega za članove sa skokom. S obzirom na to da se preko tih članova ogleda uticaj okolnog materijala, za dalju analizu je potrebno iskoristiti njihove konstitutivne jednačine.

Rekli smo da se u $\mathcal{V}^{-}$ nalazi mešavina ne-prostih, neviskoznih fluida. Tada je, na osnovu Müller-ove teorije date u radu [10] , vektor toplotnog fluksa dat sa

(6.46) $$\phi^j = \Lambda^e q_I^j + \sum_A \rho p_A^j \Lambda^{\rho_A}$$

gde je p_A^j specifična vrednost momenta količine kretanja sastojka A definisana sa

(6.47) $$p_A^j = \frac{\rho_A}{\rho}(\dot{\xi}_A^j - \dot{\xi}^j) = \frac{\rho_A}{\rho} u_A^j \, .$$

Λ^e i Λ^{ρ_A} u relaciji (6.46) su odgovarajući Lagranževi množitelji. S obzirom na oblik ostalih izraza u skokovima u nejednačini (6.42), očigledno je da prvi član u (6.46) nije potrebno dalje transformisati. Medjutim, kada je u pitanju drugi član, tada se za njegovo transformisanje može poći od izraza

(3.23) $$\dot{\xi}^j = \sum_A \frac{\rho_A}{\rho} \dot{\xi}_A^j \, ,$$

koristeći pri tome (3.58-59). Pokazuje se da na taj način možemo dobiti

(6.48) $$p_A^j \nu^j = \frac{\rho_A}{\rho}\left(\delta_{A1} - \frac{\rho_1}{\rho}\right)(\dot{\xi}_1^j - \dot{\xi}^j)\nu^j ,$$

odnosno,

(6.49) $$p_A^j \nu^j = \left(\delta_{A1} - \frac{\rho_A}{\rho}\right)(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)\nu^j \, .$$

Zamenom (6.49) u (6.46) dobija se izraz za entropijski fluks u pravcu normale na medjupovrš u obliku

(6.50) $$\phi^j\nu^j = \Lambda^e q_I^j \nu^j + \sum_A \left(\delta_{A1} - \frac{\rho_A}{\rho}\right)\Lambda^{\rho_A}\rho(\dot\xi^j - \dot x^j)\nu^j ,$$

koji omogućava lakšu dalju analizu članova skoka u nejednačini (6.42).

Koristeći tu istu Müller-ovu teoriju, uzimamo da je komponentalni tenzor napona dat izrazom

(6.51) $$t_A^{ij} = -\pi_A \delta^{ij} ,$$

gde je π_A termodinamički pritisak. Zamnjujući tada $(3.85)_1$, (6.43), (6.50) i (6 51) u ostatak nejednačinu (6.42) dobija se

(6.52) $$\begin{aligned}
&\left[\gamma\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\gamma} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\gamma}\right) + \varkappa - \Lambda^\varepsilon\mathcal{E} - \Lambda^\gamma\right]\dot\gamma \\
&+\gamma\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} - \Lambda^\varepsilon\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}\right)\dot\theta + \frac{\partial\Lambda^\varepsilon}{\partial\theta}h_0\theta^{,\alpha}\theta_{,\alpha} \\
&-\Lambda^\varepsilon\left[\!\left[\frac{1}{2}\sum_A \rho_A(\dot\xi_A^k - \dot x^k)^2(\dot\xi_A^j - \dot x^j)\right]\!\right]\nu^j \\
&-\Lambda^\varepsilon\left[\!\left[q_I^j + \left(e_I + \frac{\sum_A \pi_A}{\rho}\right)\rho(\dot\xi^j - \dot x^j)\right]\!\right]\nu^j \\
&-\Lambda^\gamma\left[\!\left[\rho(\dot\xi^j - \dot x^j)\right]\!\right]\nu^j + \left[\!\left[\rho\eta(\dot\xi^j - \dot x^j)\right]\!\right]\nu^j \\
&+\left[\!\left[\Lambda^e q_I^j + \sum_A\left(\delta_{A1} - \frac{\rho_A}{\rho}\right)\Lambda^{\rho_A}\rho(\dot\xi^j - \dot x^j)\right]\!\right]\nu^j \geq 0 .
\end{aligned}$$

Λ^ε i Λ^γ su funkcije samo veličina definisanih na medjupovrši, tako da je

(6.53) $$[\![\Lambda^\varepsilon]\!] = 0 \quad , \quad [\![\Lambda^\gamma]\!] = 0 .$$

Tada, uzimajući u obzir (6.53), ostatak nejednačinu (6.52) možemo pisati u obliku

$$
\begin{aligned}
&\left[\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma}\right) + \varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E} - \Lambda^{\gamma}\right]\dot{\gamma} \\
&+\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \theta} k_0 \theta^{,\alpha}\theta_{,\alpha} \\
(6.54)\qquad &-\Lambda^{\varepsilon}\left[\!\left[\frac{1}{2}\sum_A \rho_A(\dot{\xi}^j_A - \dot{x}^j)^2(\dot{\xi}^j_A - \dot{x}^j)\right]\!\right]\nu^j \\
&+\left[\!\left[(\Lambda^{\varepsilon} - \Lambda^{e})\, q^j_I\right]\!\right]\nu^j \\
&-\Lambda^{\varepsilon}\left[\!\left[\left[\frac{\sum_A \pi_A}{\rho} + e_I + \frac{\Lambda^{\gamma}}{\Lambda^{\varepsilon}} - \frac{\eta}{\Lambda^{\varepsilon}} - \sum_A\left(\delta_{A1} - \frac{\rho_A}{\rho}\right)\frac{\Lambda^{\rho_A}}{\Lambda^{\varepsilon}}\right]\rho(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)\right]\!\right]\nu^j \geq 0.
\end{aligned}
$$

Za dalju analizu ove nejednačine potrebno je najpre identifikovati veličinu Λ^{γ}. U tom cilju koristimo ideju Müller-a izloženu u radu [11] primenjenu za slučaj idealne krive:

Posmatra se propustljiva kriva koja se nalazi u medjupovrši tako da je deli na dva dela. U jednom od tih delova nalazi se fluid $\mathfrak{Z}$. Pretpostavlja se da je kriva propustljiva za fluid $\mathfrak{Z}$. Ako je površ u miru, tada će na krivoj važiti sledeći uslov

$$
(6.55)\qquad \left[\!\left[\frac{\sigma_0 - \sigma_2(\theta_{,n})^2}{\gamma} + \mathcal{E} - \frac{\varkappa}{\Lambda^{\varepsilon}} + \frac{1}{2}(v^{\alpha} - v^{\alpha}_{\varphi})(v^{\beta} - v^{\beta}_{\varphi})g_{\alpha\beta}\right]\!\right] = 0,
$$

gde je v^{α}_{φ} brzina krive. Sve veličine koje su prisutne u tom izarazu definisane su na medjupovrši. Iz (6.55) sledi da je taj izraz u skoku neprekidan na propustljivoj krivoj. Označićemo ga sa

(6.56) $$\hat{\mu}^{\gamma}=\frac{\sigma_0-\sigma_2(\theta_{,n})^2}{\gamma}+\varepsilon-\frac{\varkappa}{\Lambda^{\varepsilon}}+\frac{1}{2}(V^{\alpha}-V_{\varphi}^{\alpha})(V^{\beta}-V_{\varphi}^{\beta})g_{\alpha\beta}$$

i identifikovati sa hemijskim potencijalom. Poredjenjem tako dobijenog izraza sa izrazima za hemijski potencijal prethodnih teorija [10] , [11], [12], zapaža se proširenje koje se ogleda u članu $-\frac{\sigma_2(\theta_{,n})^2}{\gamma}$, koji, koristeći (6.34), možemo pisati u obliku

(6.57) $$-\frac{\sigma_2(\theta_{,n})^2}{\gamma}=\frac{h_0}{\gamma\Lambda^{\varepsilon}}\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\theta}}(\theta_{,n})^2.$$

Zbog toga se veličina $\hat{\mu}^{\gamma}$ definisana u (6.56) može nazvati prošireni hemijski potencijal medjupovrši. Očigledno je iz (6.57) da se izostavljanjem veličine $\dot{\theta}$ iz skupa konstitutivnih promenjivih tako dobijeni rezultati svode na rezultate prethodnih teorija. Za dalja razmatranja, pogodno je u izrazu (6.56) razdvojiti uticaj ralativnih brzina na hemijski potencijal od uticaja ostalog dela koji možemo označiti sa

(6.58) $$'\hat{\mu}^{\gamma}=\frac{\sigma_0-\sigma_2(\theta_{,n})^2}{\gamma}+\varepsilon-\frac{\varkappa}{\Lambda^{\varepsilon}}$$

i nazvati prošireni unutrašnji hemijski potencijal. Koristeći (6.33) i (6.34) u (6.38) prošireni unutrašnji hemijski potencijal medjupovrši postaje

(6.59) $$'\hat{\mu}^{\gamma}=-\frac{\Lambda^{\gamma}}{\Lambda^{\varepsilon}}+\frac{h_0}{\gamma\Lambda^{\varepsilon}}\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\theta}}(\theta_{,n})^2.$$

Na taj način smo u mogućnosti da neposredno definišemo veličinu Λ^{ϑ}, što je i bio cilj ovih poslednjih razmatranja. Iz (6.59) lako se nalazi da je

$$-\frac{\Lambda^{\vartheta}}{\Lambda^{\varepsilon}} = \acute{\mu}^{\vartheta} - \frac{h_o}{\vartheta\Lambda^{\varepsilon}}\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\dot{\theta}}(\theta_{,n})^2 = \acute{\mu}^{\vartheta}, \tag{6.60}$$

što očigledno predstavlja unutrašnji hemijski potencijal bez proširenja, zbog čega je i označen na uobičajan način sa $\acute{\mu}^{\vartheta}$.

Radi veće preglednosti pri analizi nejednačine (6.54), u daljim razmatranjima uvodimo sledeće oznake

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\sum_A \rho_A(\dot{\xi}^{k}_A - \dot{x}^{k})^2(\dot{\xi}^{j}_A - \dot{x}^{j})\nu^{j}, \\
q_{\nu} &= q^{j}_{I}\nu^{j}, \\
K_{\nu} &= \rho(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j})\nu^{j}, \\
L &= \frac{\sum_A \pi_A}{\rho} + e_I + \acute{\mu}^{\vartheta} - \frac{\eta}{\Lambda^{\varepsilon}} - \sum_A\left(\delta_{A1} - \frac{\rho_A}{\rho}\right)\acute{\mu}^{\rho_A}.
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Koristeći (6.61) u (6.54) dobija se da je

$$\begin{aligned}
&\left[\vartheta\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\vartheta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vartheta}\right) + \varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\varepsilon - \Lambda^{\vartheta}\right]\dot{\vartheta} \\
&+\vartheta\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} + \frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\theta}h_o\theta^{,\alpha}\theta_{,\alpha} \\
&-\Lambda^{\varepsilon}I^{+} + \Lambda^{\varepsilon}I^{-} - \Lambda^{\varepsilon}L^{+}K^{+}_{\nu} + \Lambda^{\varepsilon}L^{-}K^{-}_{\nu} \\
&+(\Lambda^{e+} - \Lambda^{\varepsilon})q^{+}_{\nu} - (\Lambda^{e-} - \Lambda^{\varepsilon})q^{-}_{\nu} \geq 0.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Očigledno je da se sada nameće potreba odredjivanja veličina $I^{\pm}$, $K^{\pm}$ i $L^{\pm}$. Koristeći (3.20) i (3.21) pokazuje se da iz $(6.61)_{1,3}$ sledi

$$I^{-} = I_1 + I_2 ,\qquad (6.63)$$
$$K_{\nu}^{-} = K_{\nu 1} + K_{\nu 2}$$

što se uzimajući u obzir (3.82) svodi na

$$I^{-} = I_1 - \frac{1}{2}\rho_1(\dot{\xi}_1^{k} - \dot{x}^{k})^2(\dot{\xi}_1^{j} - \dot{x}^{j}) ,\qquad (6.64)$$
$$K_{\nu}^{-} = K_{\nu 1} = \rho_1(\dot{\xi}_1^{j} - \dot{x}^{j})\nu^{j} .$$

Dalje, lako se pokazuje da je

$$I^{+} = I_{*} - \frac{1}{2}\rho_{*}(\dot{\xi}_{*}^{k} - \dot{x}^{k})^2(\dot{\xi}_{*}^{j} - \dot{x}^{j})\nu^{j} ,\qquad (6.65)$$
$$K_{\nu}^{+} = K_{\nu *} = \rho_{*}(\dot{\xi}_{*}^{j} - \dot{x}^{j})\nu^{j} .$$

Preostalo je još da se definišu veličine $L^{\pm}$. Za jednokomponentalni materijal u $\mathcal{V}^{+}$ veličina L definisana u (6.61) se svodi na

$$L^{+} = \frac{\pi_{*}}{\rho_{*}} + e_{*} - \mu^{\rho *} - \frac{\eta_{*}}{\Lambda^{\varepsilon}} ,\qquad (6.68)$$

a za mešavinu fluida u $\mathcal{V}^{-}$ pokazuje se da je

$$L^{-} = \frac{\sum_A \pi_A}{\rho} + e_I - \mu^{\rho *} + \frac{\eta}{\Lambda^{\varepsilon}} + \sum_A \left(\delta_{A1} - \frac{\rho_A}{\rho}\right)\mu^{\rho_A} .\qquad (6.69)$$

U radu [35] Müller je pokazao da su za jednokomponentalni materijal, odnosno mešavinu fluida hemijski potencijali definisani sa

$$\mu^{+} = \frac{\pi_{*}}{\rho_{*}} + e_{*} - \frac{\eta_{*}}{\Lambda^{\varepsilon}} ,$$

(6.8)

$$\mu^{-} = \frac{\sum_{A} \pi_{A}}{\rho} + e_{I} - \frac{\eta}{\Lambda^{\varepsilon}} + \sum_{A} \left(\delta_{A1} - \frac{\rho_{A}}{\rho}\right) \mu^{\rho_{A}} ,$$

respektivno. Na taj način, izraze (6.66) i (6.67) možemo pisati u obliku

(6.69)

$$L^{+} = \mu^{+} - {}'\mu^{\gamma} ,$$

$$L^{-} = \mu^{-} - {}'\mu^{\gamma} .$$

Konačno, koristeći (6.64), (6.65) i (6.69), nejednačina (6.62) postaje

(6.70)

$$\begin{aligned} \Sigma = & \left[\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma} - \Lambda^{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma}\right) + \varkappa - \Lambda^{\varepsilon} \mathcal{E} - \Lambda^{\gamma}\right] \dot{\gamma} \\ & + \gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta} - \Lambda^{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right) \dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}}{\partial \theta} h_{o} \theta^{\cdot \alpha} \theta_{, \alpha} \\ & - \Lambda^{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}(\dot{\xi}^{\kappa}_{*} - \dot{x}^{\kappa})^{2} + \mu^{+} - {}'\mu^{\gamma}\right] \underset{\nu}{K}_{*} \\ & - \Lambda^{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}(\dot{\xi}^{\kappa}_{1} - \dot{x}^{\kappa})^{2} + \mu^{-} - {}'\mu^{\gamma}\right] \underset{\nu}{K}_{1} \\ & + (\Lambda^{e+} - \Lambda^{\varepsilon}) \underset{\nu}{q}^{+} - (\Lambda^{e-} - \Lambda^{\varepsilon}) \underset{\nu}{q}^{-} \geq 0 \end{aligned}$$

i nju ćemo dalje analizirati u slučaju ravnoteže.

7. Univerzalnost funkcije Λ^{ε}

Razmatrajući problem zapreminskog materijala koji je razdvojen idealnim zidom, Müller pokazuje univerzalnost funkcije Λ^{e}. Na analogan način se može pokazati da je funkcija Λ^{ε}, materijalne polupropustljive medjupovrši, takodje, univerzalnog karaktera.

Naka se u medjupovrši nalazi materijalna kriva takva da je deli na dva dela. U svakom od tih delova neka se nalaze različiti fluidi. Za krivu kažemo da je idealna ako je takva da

a) ne poseduje singularitet gustine;

b) duž nje ne postoje nikakvi fluksevi;

c) temperatura sa obe njene strane je sve vreme ista, tj.

$$[\![\theta(t)]\!]=0 \quad ; \tag{7.1}$$

d) komponente toplotnog i entropijskog fluksa u pravcu normale na idealnu krivu su neprekidni na idealnoj krivoj, tj.

$$[\![h_{\perp}^{\alpha}]\!]=0 \quad ; \quad [\![\varphi_{\perp}^{\alpha}]\!]=0 \, . \tag{7.2}$$

Već smo pokazali da je

(6.6) $$\varphi_\alpha = \Lambda^\varepsilon h_\alpha$$

i

(6.44') $$\Lambda^\varepsilon = \Lambda^\varepsilon(\theta;\dot\theta),$$

tako da sledi

(7.3) $$\varphi^\alpha = \Lambda^\varepsilon(\theta;\dot\theta) h_\alpha .$$

Tada iz (7.1), (7.2) i (7.3) sledi da je

(7.4) $$\Lambda^{\varepsilon-}(\theta;\dot\theta) = \Lambda^{\varepsilon+}(\theta;\dot\theta)$$

i to znači da je Λ^ε jedna univerzalna funkcija θ i $\dot\theta$ u smislu da je ista za sve ne-proste, neviskozne, toplotno-provodljive fluide.

Neposredna veza izmedju dve univerzalne funkcije Λ^e i Λ^ε se može uspostaviti u slučaju ravnoteže.

8. Ravnoteža

Definicija: Pod ravnotežom se podrazumeva stacionaran i uniforman proces za medjupovrš i okolni materijal takav da su empirijske temperature medjupovrši i okolnog materijala jednake.

Radi jednostavnosti označimo sa X_i , $i=1,2,\dots,8$ veličine

(8.1) $$\dot{\delta}\ ;\ \dot{\theta}\ ;\ \theta_{,\alpha}\ ;\ \underset{\nu}{K}_{*}\ ;\ \underset{\nu}{K}_{1}\ ;\ \underset{\nu}{Q}^{+}\ ;\ \underset{\nu}{Q}^{-}$$

koje figurišu u nejednačini (6.70). Saglasno definiciji ravnoteže su sve veličine $X_i = 0$, tako da je i proizvodnja entropije Σ jednaka nuli, tj.

(8.2) $$\Sigma\big|_E = 0 .$$

Tada iz (6.70) i (8.2) sledi da Σ ima lokalni minimum u okolini ravnotežnog stanja. Sa matematičkog stanovišta to znači da Σ mora ispunjavati sledeće uslove

(8.3) $$\frac{\partial \Sigma}{\partial X_i}\bigg|_E = 0$$

i

(8.4) $$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial X_i \partial X_j}\bigg|_E$$ je nenegativno definitno.

U analizi uslova (8.3), uzimajući u obzir (8.1), polazimo od

(8.5) $$\frac{\partial \Sigma}{\partial \underset{\sim}{\varrho}^{+}}\bigg|_{E} = 0 ,$$

odakle sledi

(8.6) $$(\Lambda^{e+} - \Lambda^{\varepsilon})\big|_{E} = 0 .$$

Dalje, iz uslova

(8.7) $$\frac{\partial \Sigma}{\partial \underset{\sim}{\varrho}^{-}}\bigg|_{E} = 0 ,$$

dobijamo

(8.8) $$(\Lambda^{e-} - \Lambda^{\varepsilon})\big|_{E} = 0 .$$

Tada iz (8.6) i (8.8) sledi

(8.9) $$\Lambda^{e+}\big|_{E} = \Lambda^{e-}\big|_{E} = \Lambda^{\varepsilon}\big|_{E} .$$

Već je ranije pokazano, [10] , [13] , da se za okolni materijal univerzalna funkcija Λ^{e} u ravnoteži svodi na recipročnu vrednost apsolutne temperature, tj.

(8.10) $$\Lambda^{e}\big|_{E} = \frac{1}{T(\Theta)} ,$$

gde je $T(\Theta)$ apsolutna temperatura koja je monotono rastuća funkcija empirijske temperature Θ .

Na osnovu toga sledi da je

(8.11) $$\Lambda^{\varepsilon}\big|_{E} = \Lambda^{\varepsilon}(\theta) = \frac{1}{T(\theta)} ,$$

čime je pokazano da je u ravnoteži univerzalna funkcija Λ^{ε} takodje recipročna vrednost apsolutne temperature, zbog čega se naziva funkcija hladnoće materijalne polupropustljive medjupovrši.

Dalje, iz uslova

(8.12) $$\left.\frac{\partial \Sigma}{\partial K_{\nu *}}\right|_{E} = 0$$

sledi

(8.13) $$\mu^{+}\big|_{E} - {}'\mu^{\sigma}\big|_{E} = 0 \ ;$$

a iz uslova

(8.14) $$\left.\frac{\partial \Sigma}{\partial K_{\nu 1}}\right|_{E} = 0$$

dobijamo

(8.15) $$\mu^{-}\big|_{E} - {}'\mu^{\sigma}\big|_{E} = 0 \ .$$

Tada iz (8.13) i (8.15) sledi da je

(8.16) $$\mu^{+}\big|_{E} = \mu^{-}\big|_{E} = {}'\mu^{\sigma}\big|_{E} \ ,$$

čime je pokazano da je u ravnoteži hemijski potencijal neprekidan izmedju okolnog materijala i medjupovrši, što je saglasno sa rezultatima klasične termostatike.

Dalje, može se pokazati da je uslov $\left.\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_{,\alpha}}\right|_{E}$ identički zadovoljen.

Preostaju još dva uslova koja do sada nismo koristili

(8.17) $$\left.\frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{\gamma}}\right|_E = 0 \,,$$

(8.18) $$\left.\frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{\theta}}\right|_E = 0 \,,$$

iz kojih dobijamo, respektivno

(8.19) $$\gamma\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma}\right)\Big|_E + \left(\varkappa - \Lambda^{\varepsilon}\mathcal{E} - \Lambda^{\gamma}\right)\Big|_E = 0 \,,$$

(8.20) $$\left.\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta}\right|_E = \Lambda^{\varepsilon}\Big|_E \left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\right|_E$$

U analizi tih relacija polazimo od konstitutivne jednačine za specifičnu entopiju medjupovrši $(6.45)_2$. U ravnoteži se vidi da je $\varkappa$ funkcija samo veličina γ i θ , tj.

(8.21) $$\varkappa|_E = \varkappa|_E(\gamma; \theta; 0; 0) \,.$$

Odatle sledi da je

(8.22) $$d\varkappa|_E = \frac{\partial \varkappa|_E}{\partial \gamma}\,d\gamma + \frac{\partial \varkappa|_E}{\partial \theta}\,d\theta \,.$$

Koristeći (6.33), (6.34), (8.18) i (8.20) u (8.22) dobijamo da je

(8.23) $$d\varkappa|_E = \Lambda^{\varepsilon}|_E\left[\left(\frac{\partial \mathcal{E}|_E}{\partial \gamma} - \frac{\sigma_c|_E}{\gamma^2}\right)d\gamma + \frac{\partial \mathcal{E}|_E}{\partial \theta}\,d\theta\right].$$

Vodeći računa o tome da je u ravnoteži veličina Λ^{ε} jednaka recipročnoj vrednosti apsolutne temperature, prethodna ralacija se svodi na Gibbs-ovu jednačinu termostatike

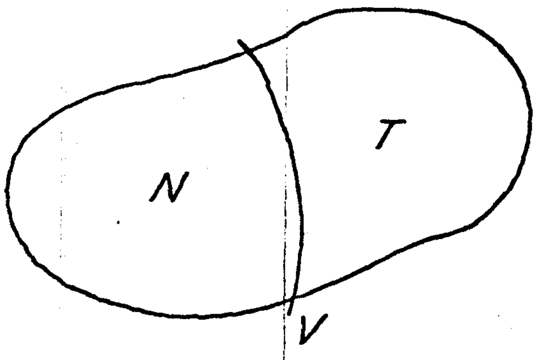
(8.24) $$d\varkappa|_E = \frac{1}{T(\theta)}\left[\frac{\partial \mathcal{E}|_E}{\partial \theta}\, d\theta + \left(\frac{\partial \mathcal{E}|_E}{\partial \gamma} - \frac{\sigma_o|_E}{\gamma^2}\right) d\gamma\right].$$

Ova jednačina predstavlja kriterijum tačnosti do sada izvedenih rezultata.

9. Specijalni slučajevi

Do sada nije bilo reči o konkretnim problemima koji su inicirali stvaranje razmatranog modela. Već smo rekli da je veliki broj takvih problema i da se oni javljaju u mehanici, tehnologiji, hemiji, medicini, biologiji, tehnici itd. Navedimo neke od njih:

1) Problem koji se javlja u petrohemiji i koji se rešava pomoću fluidnih medjupovrši, sastoji se u tome da se iz nafte, pomoću toluena izdvoje aromati. Pri tome se koristi vodena membrana koja je propustljiva za aromate. Prikaz tog modela dat je na slici 4.

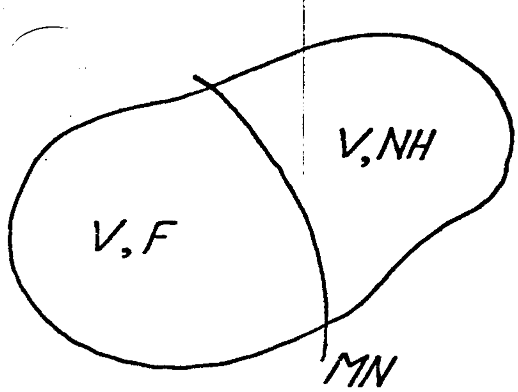


T - toluen,
N - nafta,
V - voda.

Slika 4.

Očigledno je da se ovaj problem pojavljuje kao specijalan slučaj naših dosadašnjih razmatranja i o njemu će kasnije biti više reči.

2) Postoji čitav niz problema vezanih za prečišćavanje vode. Tako je vrlo često, na primer kod otpadnih voda, prisutan veliki procenat veoma štetnog fenola. Za izdvajanje fenola iz takve vode, koristi se membrana od metilnaftalena, koja je propustljiva za fenol. Na slici 5 je dat prikaz tog modela.



V - voda,
F - fenol,
MN - metilnaftalen
NH - natrijumhidroksid.

Slika 5.

3) Postoji više prilaza u razmatranju problema solinacije - dobijanja pitke vode iz morske vode. Razlike izmedju tih prilaza se javljaju, pored ostalog i zbog različitog tretiranja morske vode - kao dvo, ili trokomponentalne mešavine. Pri tome sa za dobijanje pitke vode najčešće koriste veštačke polupropustljive membrane.

4) Problem dobijanja vode koja se koristi u medicini (koja je skoro sterilna) iz pit-

ke ili neprečišćene vode, razrešava se takodje pomoću veštačkih polupropustljivih membrana.

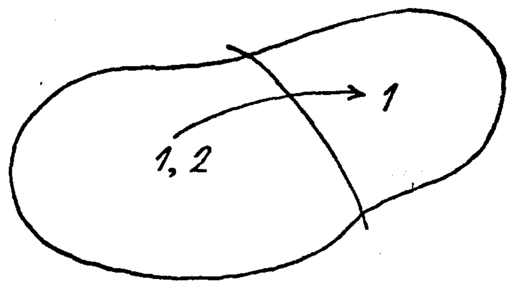
5) Polupropustljive membrane se koriste i u problemu snižavanja procenta alkohola u pivu.

6) U prehrambenoj industriji, polupropustljive membrane nailaze na sve veću primenu. Primera radi, konstatovano je da se pri proizvodnji sira gubi oko 20% belančevina. Da bi se to sprečilo, koriste se polupropustljive membrane, koje uklanjaju višak vode iz mleka, čime se procenat izgubljenih belančevina svodi na 2-3%.

....

Navodeći ove primere, želeli smo da ilustrujemo značaj problema materijalnih polupropustljivih medjupovrši u raznim oblastima ljudskog života. Sigurno je da postoje i drugi primeri kojima se to može ilustrovati. U narednim razmatranjima zadržaćemo se malo više na modelu navedenom u prvom pimeru.

I) Već smo rekli da se taj problem pojavljuje kao specijalan slučaj naših prethodnih razmatranja. On spada u klasu problema koji se mogu predstaviti na sledeći način



Slika 6.

Pošto je medjupovrš propustljiva za sastojak 1 , a nepropustljiva za satojak 2 , sledi

(3.81) $$(\dot{\xi}_1^j - \dot{x}^j)\nu^j \neq 0 ,$$

(3.82) $$(\dot{\xi}_2^j - \dot{x}^j)\nu^j = 0 .$$

Tada, koristeći (3.91), (3.94) i (3.101), sledi da se skokovi u balansu mase, količine kretanja i energije svode na oblik

(9.1) $$J_\varrho = 0 ;$$

(9.2) $$J_{\dot{\underset{\sim}{\xi}}} = -[\![t_I^{\varkappa j}]\!]\nu^j ;$$

(9.3) $$J_e = [\![q_I^j + (\varrho e_I - t_I^{ij})(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)]\!]\nu^j .$$

Na taj način, jednačine balansa materijalne polupropustljive medjupovrši, u ovom slučaju postaju jednostavnije

(9.4)
$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\gamma V^\alpha)_{,\alpha} - 2\underset{\nu}{u} K_M \gamma = 0 ;$$

$$\frac{\partial(\gamma \dot{\xi}^\varkappa)}{\partial t} + (\gamma \dot{x}^\varkappa V^\alpha - S^{\varkappa\alpha})_{,\alpha} - 2\underset{\nu}{u} K_M \gamma \dot{x}^\varkappa - [\![t_I^{\varkappa j}]\!]\nu^j = 0 ,$$

$$\frac{\partial(\gamma \mathcal{E})}{\partial t} + (\gamma \mathcal{E} V^\alpha + h^\alpha)_{,\alpha} - 2\underset{\nu}{u} K_M \gamma \mathcal{E} - S^{\alpha\beta}(V_{\alpha,\beta} - \underset{\nu}{u} b_{\alpha\beta}) + [\![q_I^j + (\varrho e_I - t_I^{ij})(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)]\!]\nu^j = 0 .$$

Koristeći Müller-ov entropijski princip i metodu I-Shih Liu-a, dolazi se do entropijske nejednačine u obliku

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\gamma\varkappa)}{\partial t}+(\gamma\varkappa V^{\alpha}+F^{\alpha})_{,\alpha}-2\mathcal{U}K_M\gamma\varkappa\\
&-\Lambda^{\gamma}\Big[\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\gamma V^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_M\gamma\\
(9.5)\quad &-\Lambda^{\dot{x}^{\varkappa}}\Big[\frac{\partial(\gamma\dot{x}^{\varkappa})}{\partial t}+(\gamma\dot{x}^{\varkappa}V^{\alpha}-S^{\varkappa\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_M\gamma\dot{x}^{\varkappa}-[\![t^{\varkappa j}]\!]\nu^{j}\Big]\\
&-\Lambda^{\varepsilon}\Big[\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}+(\gamma\varepsilon V^{\alpha}+h^{\alpha})_{,\alpha}-2\underset{\nu}{\mathcal{U}}K_M\gamma\varepsilon-S^{\alpha\beta}(V_{\alpha\beta}-\mathcal{U}b_{\alpha\beta})\\
&-[\![q_I^{j}+(\rho e_I-t_I^{ij})(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\nu^{j}\\
&+[\![\rho\eta(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})+\phi^{j}]\!]\nu^{j}\geq 0\ .
\end{aligned}$$

Iz te nejednačine, na već opisani način, slede relacije $(6.4)_{1-6}$ i $(6.4)_{8,9}$, kao i relacije

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial\gamma}-\Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial\gamma}\Big)\gamma_{,\beta}+\Big(\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial\theta}-\Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial\theta}\Big)\theta_{,\beta}+\Lambda^{\varepsilon}S^{\alpha}_{\beta}-\Lambda^{\gamma}\gamma\delta^{\alpha}_{\beta}=0,\\
(9.6)\quad &-2\gamma\Big(\frac{\partial\varkappa}{\partial g_{\alpha\beta}}-\Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial g_{\alpha\beta}}\Big)b_{\alpha\beta}-\Lambda^{\varepsilon}S^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}+2\gamma K_M\Lambda^{\gamma}=0\ .
\end{aligned}$$

Koristeći te ralacije, nejednačina (9.5) se svodi na ostatak nejednačinu koja glasi

$$\begin{aligned}
&\gamma\Big(\frac{\partial\varkappa}{\partial\gamma}-\Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}\Big)\dot{\gamma}+\gamma\Big(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta}-\Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\Big)\dot{\theta}\\
(9.7)\quad &+\Big(\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial\gamma}-\Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial\gamma}\Big)\gamma_{,\alpha}+\Big(\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial\theta}-\Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial\theta}\Big)\theta_{,\alpha}\\
&-\Lambda^{\varepsilon}[\![q_I^{j}+(\rho e_I-t_I^{ij})(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})]\!]\nu^{j}\\
&-\Lambda^{\varepsilon}[\![\rho\eta(\dot{\xi}^{j}-\dot{x}^{j})+\phi^{j}]\!]\nu^{j}\geq 0.
\end{aligned}$$

Analiza takvog skupa relacija dovodi nas do redukovanih oblika konstitutivnih relacija. Razlika izmedju tako dobijenih jednačina i konstitutivnih jednačina koje se dobijaju u opštim razmatranjima, ogleda se u izrazu za tenzor napona

$$S_{\alpha\beta} = -\sigma_0 g_{\alpha\beta} + \sigma_2 \theta_{,\alpha}\theta_{,\beta} \,. \tag{9.8}$$

gde je

$$\sigma_0 = -\frac{\Lambda^{\gamma}}{\Lambda^{\varepsilon}}\gamma \tag{9.9}$$

i

$$\sigma_2 = -\frac{\ln\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\theta} h_0 = -\frac{h_0}{\Lambda^{\varepsilon}}\frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\theta} \,. \tag{6.34}$$

Treba zapaziti da je izraz za tenzor napona u ovom slučaju definisan na potpuno isti način kao i u slučaju materijalne nepropustljive medjupovrši, [6] .
Daljom analizom ostatak nejednačine pokazujemo da se ona svodi na oblik

$$\begin{aligned}
&\Big[\gamma\Big(\frac{\partial\varkappa}{\partial\gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\gamma}\Big) - \Lambda^{\gamma}\Big]\dot{\gamma} + \gamma\Big(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}\Big)\dot{\theta} \\
&+ \frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\theta} h_0 \theta^{,\alpha}\theta_{,\alpha} + [\![(\Lambda^{e} - \Lambda^{\varepsilon}) q_I^{j}]\!]\nu^{j} \\
&- \Lambda^{\varepsilon}[\![\Big[\frac{\sum_A \pi_A}{\rho} + e_I - \frac{\eta}{\Lambda^{\varepsilon}} - \sum_A \Big(\delta_{A1} - \frac{\rho_A}{\rho}\Big)\frac{\Lambda^{\rho_A}}{\Lambda^{\varepsilon}}\Big]\rho(\dot{\xi}^{j} - \dot{x}^{j})]\!]\nu^{j} \geqslant 0 \,.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Krakterisitčno je za ovaj slučaj, na osnovu definicije modela i (3.81) i (3.82), da se dobija da je

(9.11) $$[\rho(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)]^{+}\nu^j = [\rho(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)]^{-}\nu^j = \rho_1(\dot{\xi}_1^j - \dot{x}^j)\nu^j .$$

Tada, koristeći $(6.61)_2$ i (9.11), nejednačinu (9.10) pišemo u obliku

(9.12) $$\Sigma = \left[\gamma\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\gamma}\right) - \Lambda^{\gamma}\right]\dot{\gamma} + \gamma\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}\right)\dot{\gamma} + \frac{\partial\Lambda^{\varepsilon}}{\partial\theta}k_0\theta^{,\alpha}\theta_{,\alpha} + (\Lambda^{e_+} - \Lambda^{\varepsilon})\underset{\nu}{q}^{+} + (\Lambda^{e_-} - \Lambda^{\varepsilon})\underset{\nu}{q}^{-} \geqslant 0,$$

koji je pogodan za ravnotežna razmatranja. Tako se iz uslova

(9.13) $$\left.\frac{\partial\Sigma}{\partial\dot{\gamma}}\right|_E = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial\Sigma}{\partial\dot{\theta}}\right|_E = 0 ,$$

dobiaju sledeće relacije, respektivno

(9.14) $$\gamma\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\gamma} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\gamma}\right)\Big|_E - \Lambda^{\gamma}\Big|_E = 0 .$$

(9.15) $$\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} - \Lambda^{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}\right)\Big|_E = 0 .$$

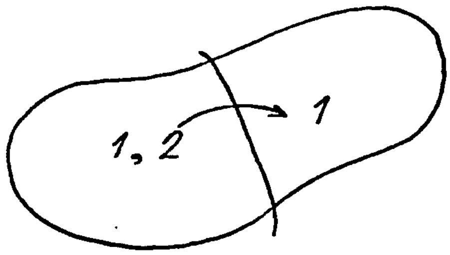
S obzirom na to da je entropija medjupovrši $\varkappa$, u ravnoteži funkcija samo γ i θ , tj.

(8.21) $$\varkappa|_E = \varkappa|_E(\gamma;\theta;0;0) ,$$

koristeći (9.9), (9.14) i (9.15) u (8.21) dobijamo dobro poznatu Gibbs-ovu jednačinu termostatike

(9.16) $$d\varkappa|_E = \frac{1}{T(\theta)}\left[\frac{\partial \mathcal{E}|_E}{\partial \theta}d\theta + \left(\frac{\partial \mathcal{E}|_E}{\partial \gamma} - \frac{\sigma_0|_E}{\gamma^2}\right)d\gamma\right].$$

II) Sam po sebi se nameće sledeći specijalan slučaj čiji je model prikazan na slici 7.



Slika 7.

U tom slučaju je

(9.17) $$(\dot{\xi}_1^j - \dot{x}^j)\nu^j = 0,$$

(9.18) $$(\dot{\xi}^j - \dot{x}^j)\nu^j \neq 0.$$

Pokazuje se u ovom slučaju da se članovi skoka, pa samim tim i jednačine balansa materijalne polupropustljive medjupovrši dobijaju iz opštih razmatranja kada se fluid $*$ identifikuje kao fluid 1 . Takodje se pokazuje, da se kao posledica primene entropijskog principa i u ovom slučaju dobijaju iste relacije kao i u opštem slučaju, tako da se daljom analizom dobijaju svi rezultati koji slede i u slučaju opštih razmatranja.

10. Zaključak

Analizirajući do sada izvedene rezultate, smatramo za potrebno da ukažemo nešto više na neke sličnosti i razlike u razmatranjima i rezultatima ovog rada u odnosu na radove nekih autora koji su se bavili ovim problemom.

Prvo: S obzirom da se problem materijalne medjupovrši, uopšte, razmatra intezivno sa stanovišta mehanike kontinuuma od nedavno, normalno je da postoje različiti prilazi. Osnovne razlike u tim prilazima se ogledaju u usvajanju matematičkog modela materijalne medjupovrši i izboru osnovnih konstitutivnih promenjivih. One su delimično proizašle iz složenosti problema, adelimično iz prirode problema koji je široko teorijski razmatran. To se konkretno može videti iz radova Müller-, Moeckel-a i Grauel-a sa jedne strane i Bedeaux, Albano i Mazur-a, Kovac-a i Vodák-a sa druge strane.

Drugo: Razlika izmedju ova dva prilaza najjasnije se ogleda u korišćenju entropijskog principa, tačnije Clausius-Duhem-ove entropijske nejednakosti (Bedeaux, Albano, Mazur, Kovac, Vodák) i entropijskog principa koji je postulirao Müller (Müller, Moeckel, Grauel).

Treće: U svim dosadašnjim prilazima razmatra se prvenstveno fluidna medjupovrš što predstavlja samo jednu klasu materijalnih medjupovrši. Time ističemo da je problem materijalnih medjupovrši i dalje otvoren i da se mogu u skoro vreme očekivati novi prilozi, koji će dati odgovore na niz pitanja, koja, izmedju ostalog, pokreću i dosadašnji prilazi.

Već smo na početku istakli da ovaj rad predstavlja prilog prilazu Müller-a i da je motivisan i da predstavlja proširenje rada [6] . Naime, u radu [6] je materijalna maedjupovrš nepropustljiva i okolni materijal je jednokomponentalan. Svojstvo polupropustljivosti dovodi do odredjenih razlika u odnosu na nepropustljivu medjupovrš, što se ogleda

a) u članovima skoka jednačina balansa medjupovrši (očigledan primer toga je nepostojanje člana skoka u balansu mase nepropustljive materijalne medjupovrši);

b) u konstitutivnoj jednačini za tenzor napona gde postoje dodatni članovi, koji su takodje posledica svojstva polupropustljivosti materijalne medjupovrši;

c) u ostatku entropijske nejednačine gde se iz istih razloga, takodje, javljaju dodatni članovi.

U odnosu na rad Müller-a [10] , koji razmatra idealan zid, ovde posmatrani model je opštiji. Ta opštost se ogleda u geometrijskom (jer materijalna medjupovrš može imati proizvoljan oblik) i fizičkom smislu (s obzirom da smo predpostavili zavisnost od $\dot{\gamma}$ i $\dot{\theta}$). Ovaj rad navodimo bez obzira na to to što je njegov osnovni osnovni predmet istraživanja bila termodinamička teorija mešavina sa stanovišta Müller-ovog principa, jer je u njemu ukazano na značaj problema polupropustljivosti materijalne medjupovrši.

Taj rad je inicirao rad Grauel-a [12] čiji se rezultati u najvećoj meri mogu porediti sa našim rezultatima. Formalno gledajući, model Grauel-a je opštiji jer razmatra mešavinsku (dvokomponentalnu) poluprošustljivu medjupovrš koja se nalazi u dvokomponentalnoj zapreminskoj mešavini. Medjutim, osnovni problem, o kome je već bilo reči, je vezan za ispravnost takvog pristupa sa stanovišta usvojenih principa teorije mešavina. Zbog toga, Grauel-ov model nema opšti karakter i predstavlja samo jedan mogući slučaj.

Za razliku od Grauel-ovog slučaja, model koji smo usvojili u potpunoj je saglasnosti sa osnovnim principima teorije mešavina i kao takav je opšti. Ta opštost se pokazuje u svodjenju μ - komponentalne mešavine na dvokomponentalnu kada nas interesuje problem polupropustljive materijalne medjupovrši. Prema tome, dvokomponentalna zapreminska mešavina se po prirodi stvari javlja u slučaju polupropustljive materijalne medjupovrši. Time se, ovim postupkom, ne isključuje razmatranje problema uticaja jedne proizvoljne komponente višekomponentalne mešavine okolnog materijala, kada postoji potreba za tim.

Nezavisno od toga, tamo gde je moguće porediti rezulatet Grauel-ovog i ovog rada, ističemo razliku, kao što je to u slučaju konstitutivnih promenjivih. U našem slučaju je taj skup proširen sa promenjivom $\dot{\delta}$ i $\dot{\theta}$, što dovodi i do razlike u konačnim rezultatima. Tako je izraz za hemijski potencijal proširen za član $\frac{h_o}{\delta\Lambda^\varepsilon}\frac{\partial\Lambda^\varepsilon}{\partial\dot{\theta}}(\theta_{,n})^2$. zbog čega ga i nazivamo prošireni hemijski potencijal.

Ne ulazeći detaljnije u druge razlike izmedju ovde izvedenih rezultata i rezultata izvedenih u radovima Müller-a [10] , [11] , Moeckel-a [5] , Grauel-a [12] , želimo da ukažemo na niz otvorenih problema termomehanike materijalnih medjupovrši. Oni su vezani za

- klase materijala medjupovrši,
- primenu rezultata u konkretnim problemima,
- rešavanje konkretnih problema.

Već smo rekli da su se dosadašnja razmatranja odnosila uglavnom na fluidne medjupovrši i da time nisu zaokružena sva teorijska istraživanja. Tako, osim rada Gurtin-a i Murdoch-a [3] , u kome je posebno razmatrana granična površ tela, problemima medjupovrši, koje se ne ponašaju kao fluidi, nije poklonjena dovoljna pažnja. U vezi toga, treba reći da pažnju zaslužuju najpre takve nepropustljive medjupovrši.

Sa matematičkog stanovišta, primena dosadašnjih rezultata na rešavanje odredjenih problema je uslovljena matematičkim teškoćama s obzirom da se problem svodi na rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina . Sem u vrlo specijalnim slučajevima, ne mogu se očekivati rešenja takvih sistema jednačina u zatvorenom obliku. Zbog toga je za očekivati da se ovakvi problemi mogu rešavati prvenstveno numeričkim metodama.

Osim toga, rezultati dosadašnjih razmatranja materijalnih nepropustljivih i polupropustljivih medjupovrši, sa stanovišta mehanike kontinuuma, nisu dovoljno korišćeni u rešavanju konkretnih problema, izmedju ostalog i zato što ne postoji zaokruženost tih teorijskih istraživanja. U tom cilju je i izvršen odredjeni pokušaj u ovom radu u delu koji se odnosi na specijalne slučajeve.

L I T E R A T U R A

[1] Scriven, L.E., : "Dynamic of a Fluid Interface", Chemical Engineering Science, 2 (1960),

[2] Fisher, G.M.C., Leitman, M.J., : "On continuum Thermodynamics with interfaces", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 30 (1968),

[3] Gurtin, M.E., Murdoch, A.I., : "A Continuum Theory of elastic Material Surfaces", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 57 (1975),

[4] Moeckel, G.P., : "Thermodynamics of an Interfaces", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 57 (1975),

[5] Müller, I., : "Die Kältenfunktion, eine universale Funktion in der Thermodynamic viscoser wärmeleitender Flüssigkeiten", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 40 (1971),

[6] Jarić, J., Golubović, Z., : Thermodynamics of Non-Simple, Heat-Conducting Interface", Journal of Thermal Stresses, primljen za štampu,

[7] Bedeaux,D., Albano,A.M., Mazur,P., : "Boundary Conditions and Non-equilibrium Thermodynamics", Physica 82A (1975),

[8] Kovac,J., : "Non-equilibrium Thermodynamics of Interfacial Systems", Physica 86A (1977),

[9] Vodák,F., : "Non-Equilibrium Thermodymanics of a Discontinuity Surface", Physica 93A (1978),

[10] Müller,I., : "Thermodynamics of mixtures of fluids", Journal de Mécanique, 14 (1975),

[11] Müller,I., : "The semipermeabilne membrane-prototype of a porous body", VI. Enconto Escociente em Meios Porosos, 1 (1978) Rio Closo, (Brasil),

[12] Grauel,A., : "Thermodynamics of an Interfacial Fluid Membrane", Phisica, 103A (1980),

[13] I-Shih Liu, : "A Non-simple Heat-conducting Fluid", Arcive for Rational Mechanics and Analysis, 50 (1973),

[14] Batra,R.C., : "Thermodynamics of simple materials of diferential type", Journal de Mécanique, 15 (1976),

[15] Socolnikoff,J.S.: "Tenzor Analysis", J.Wiley, New York (1964),

[16] McConnell,A.J., : "Applications of tensor analysis", Dover Publications, New York (1947),

[17] Aris,R., : "Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.P. (1962),

[18] Eringen,A.C., : "Mechanics of Continuua", J.Wiley, New York, London, Sidney (1967),

[19] Slattery,J., : "Momentum,Energy and Mass Transfer in Continua", McGraw-Hill (1972),

[20] Jarić,J., Milanović-Lazarević,s., : "Micropolar theory of an interface", Teorijska i primenjena mehanika, 4 (1978),

[21] Jarić,J., : "Teorija površi diskontinuiteta", Doktorska disertacija (1973),

[22] Truesdell,C., Toupin,R., : "Classical Field Theories", Handbuch der Physik, III/1, Springer (1960),

[23] Truesdell,C., : "Rational Thermodynamics", McGraw-Hill Book Company (1969),

[24] Green,A., Naghdy,P., : "A dynamical theory of interacting continua", International Journal of Engineering Science, 3 (1965),

[25] Green,A., Naghdi,P., : "A theory of mixtures", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 24 (1967),

[26] Eringen,C., Ingram,J., : "A continuum theory of chemically reacting media - I", International Journal of Engineering Science, 3 (1965),

[27] Ingram,J., Eringen,C., : "A continuum theory of chemically reacting media - II", International Journal of Engineering Science 5 (1967),

[28] Bowen,M., :"Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 24 (1967),

[29] Kelly,D., : "A reacting continuum", International Journal of Engineering Science, 2 (1964),

[30] Cvetković,P., : "Mikromorfna teorija višeg stepena heterogenih sredina", Doktorska disertacija, (1976)

[31] Müller, I., : "A Thermodynamics Theory of Mixtures of Fluids", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 28 (1967),

[32] Smith, G., : "On isotropic integrity Bases", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 18, (1965),

[33] I-Shih Liu : "Method of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Principle", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 46 (1972).