УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Инж. ВИНКО ЂУРОВИЋ

НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА

ДРУГО ИЗДАЊЕ

Научна књига
БЕОГРАД, 1961.

УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Решењем Ректора Универзитета у Београду бр. 2508/2 од 29. IX. 1960. год. а на основу закључка Комисије за универзитетске уџбенике од 24. IX. 1960. год. штампано као стални уџбеник за студенте Грађевинског факултета

За издавача *Душан Ристић*, уредник *Гордана Николић*, техн. уредник *Михаило Јозић*,
коректор *Милан Ђоковић*

Графичко предузеће „Академија", Београд — Тел. 24-701 и 20-732

Затрка Лер

ПРЕДГОВОР

Увиђајући потребу за неком књигом о Нацртној геометрији, из које би слушаоци могли да се потсете предавања или да употпуне предавања која нису могли да слушају, пуштам у штампу ову књигу. Она је и састављена не као самосталан уџбеник, него као помоћна књига. Стога су понеке конструкције понављане при решавању постављених задатака без обзира на то што су већ једном биле објашњене. На неким местима изнете су чак и грешке које се код почетника обично понављају.

И ред појединих поглавља и њихова обрада подешени су према потреби почетника и њиховом раду у школи.

При састављању ове књиге служио сам се поред остале литературе овим делима:

Dr. Emil Müller: Lehrbuch der Derstellenden Geometrie;

Димитрије Стојановић: Методика Нацртне геометрије;

K. Bartel: Kotierte Projektionen;

Ing. Domenico Tessari: La teoria delle ombre e del chiaro-scuro, и

Dr. J. Majcen: Osnove deskriptivne geometrije.

При томе сам водио рачуна о потребама школе и о могућностима слушалаца, који без икаквог претходног знања из Нацртне геометрије треба да савладају овај предмет у року од два семестра.

И ако је ова књига састављена за сразмерно кратко време и под доста неповољним околностима, надам се да ће ипак бити од користи како слушаоцима тако и самој настави.

Сматрам за дужност да и на овом месту захвалим Управи фонда задужбине поч. Луке Ћеловића-Требињца за помоћ коју ми је указала приликом штампања књиге.

Винко Ђуровић

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

Прерађујући своју *Нацртну геометрију* за друго издање настојао сам да је што више ускладим са потребама појединих факултета Техничке велике школе.

Прва поглавља остала су углавном непромењена осим ситних измена, које је наметнуло искуство у школском раду. Поглавље о коничним пресецима обрађено је сада опширније. Додата су основна правила о кривама, облим површинама и о њиховим пројекцијама. Нарочито је прерађено поглавље о продорима облих површина, а додати су нови примери. Поглавље о сенчењу померено је цело иза поглавља о пресецима и продорима, тако да сада претставља једну целину. И ту је измену наметнуло искуство у раду, а само померање условило је и делимичну измену обраде: Код косе пројекције додато је и решавање метричних задатака, а код централне пројекције измењени су називи неких елемената, док је начин обележавања остао исти.

Како поједина поглавља нисам прерађивао, било ми је тешко позивати се у сваком поглављу на литературу у којој се обрађује изложено градиво. Тај недостатак настојаћу да исправим другом приликом.

В. Ђуровић

Београд 1950 год.

Неизлечива болест отела нам је покојног професора Винка Ђуровића баш у време када је радио на припреми новог издања свог уџбеника. Покојни професор Ђуровић стигао је да сам среди рукопис до поглавља о торусу, при чему је за многе нове слике дао и скице. Остали део уџбеника дат је у штампу према последњем издању, стим што су изостављена поглавља из Централне пројекције која се на Грађевинском факултету не предаје а на Геодетском отсеку предаје се на други начин.

Редакцију припремљеног рукописа као и редакцију текста који је узет из претходног издања, а који је морао бити прилагођен извесним изменама које је покојни професор Ђуровић унео у први део књиге, извршила је веома савесно и стручно инж. Љубица Гагић, асистент пок. проф. Ђуровића. Инж. Гагић је, заједно са арх. Ненадом Грујићем, асистентом-демонстратором Катедре, израдила све нове слике за ово издање као и многе слике из претходног издања које су биле или сувише ситне или нису биле довољно јасне и прегледне.

арх. Петар Д. Анагности

Београд, септембра 1960.

САДРЖАЈ

Увод

ОРТОГОНАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА

I Положајни задаци

Страна
§ 1. Пројекцијске равни, пројекција тачке и тачке у специјалном положају — 4
§ 2. Начин цртања пројекција — 7
§ 3. Квадранти — 10
§ 4. О симетралним равнима — 12
§ 5. Октанти — 13
§ 6. Пројекција праве — 16
§ 7. Права у специјалном положају — 17
§ 8. Тачка на правој — 18
§ 9. Трагови праве — 19
§ 10. Две праве — 24
§ 11. Раван — 26
§ 12. Раван у специјалном положају — 27
§ 13. Права и тачка у равни — 28
§ 14. Раван кроз праву — 33
§ 15. Раван одређена трима тачкама — 34
§ 16. Пресек двеју равни — 36
§ 17. Раван и права ван ње — 40
§ 18. О рогљастим телима уопште — 47
§ 19. Трансформација — 48
§ 20. Окретање (Ротација) — 53

II Метрички задаци

§ 21. Права величина дужи и угао праве са *H* и *V* — 56
§ 22. Права под углом према *H* и *V* — 61
§ 23. Пројекција правог угла — 64
§ 24. Две праве под правим углом у равни — 64
§ 25. Права управна на раван и раван управна на праву — 65
§ 26. Отстојање тачке од праве — 67
§ 27. Отстојање тачке од равни — 69
§ 28. Окретање тачке око специјалне праве док не падне у њезину раван паралелну са *H* или са *V* — 69

§ 29. Угао двеју правих — 70
§ 30. Одређивање праве величине равних фигура помоћу окретања паралелно са H или са V — 71
§ 31. Угао нагиба равни према пројекциским равнима — 72
§ 32. Раван под углом према пројекциским равнима — 72
§ 33. Обарање равни — 74
§ 34. Угао двеју произвољних равни — 79
§ 35. О рогљу — 81
§ 36. О афинитету и колинеацији — 81
§ 37. Неке конструкције кривих другог реда — 86
§ 38. Задаци за вежбу — 102

III Пресеци површина (тела)

а) *Пресеци и продори рогљастих површина*

§ 39. О рогљастим површинама — 107
§ 40. Пресеци призме и пирамиде — 111
§ 41. Метода директних продора — 111
§ 42. Метода помоћу трансформације — 113
§ 43. Метода помоћу афинитета или колинеације — 114
§ 44. Метода помоћу поклопних правих — 115
§ 45. Мрежа пирамиде и мреже — 117
§ 46. Продор праве кроз пирамиду или призму — 126
§ 47. Продори призма и пирамида — 128

б) *О кривама и облим површинама*

§ 48. Постајање кривих и њихова подела — 143
§ 49. Тангента и асимптота равне криве — 144
§ 50. Крива у околини једне своје тачке — 146
§ 51. Заједничке тачке и заједничке тангенте двеју алгебарских кривих у равни — 147
§ 52. Еволута и еволвента — 149
§ 53. Конструкција тангенте и нормале на графичке криве — 150
§ 54. Кривина и круг кривине графичких кривих — 152
§ 55. Пројекција криве — 155
§ 56. Просторна крива — 155
§ 57. Пројекција просторне криве — 156
§ 58. Обле површине — 158
§ 59. Тангента и тангенциална раван на облу површину — 159

в) *Пресеци и продори облих површина*

§ 60. О облици и конусу — 160
§ 61. Пројекције облице и конуса — 161
§ 62. Пресек облице — 168
§ 63. Пресеци конуса — 173
§ 64. Мрежа конуса и облице — 191
§ 65. О лопти — 202
§ 66. О обртним површинама — 207
§ 67. О елипсоиду — 211

§ 68. О торусу — — — — — — — — — — — — — — — — 213
§ 69. Завојна крива и завојна површина — — — — — — — — — 216
§ 70. Продори облица и конуса — — — — — — — — — — — 221
§ 71. Одређивање криве продора помоћу лопте — — — — — — — 248
§ 72. Задаци за вежбу — — — — — — — — — — — — — — 249

IV Сенчење

А) *Сенчење рогљастих тела*

§ 73. Увод — — — — — — — — — — — — — — — — — 265
§ 74. Сенка тачке — — — — — — — — — — — — — — — 266
§ 75. Сенка праве — — — — — — — — — — — — — — 269
§ 76. Осветљена и неосветљена страна равни — — — — — — — 272
§ 77. О сенчењу тела у опште — — — — — — — — — — — — 275
§ 78. Сенчење рогљастих тела — — — — — — — — — — — 276
§ 79. Сенка праве по телу (Метода враћања натраг) — — — — — — 280
§ 80. Примери из техничке праксе — — — — — — — — — — 288

Б) *Сенчење облих површина*

§ 81. Увод и сенка криве — — — — — — — — — — — — 303
§ 82. Сопствена и бачена сенка конуса и облице — — — — — — — 306
§ 83. Бачена сенка на облицу и конус — — — — — — — — — 310
§ 84. Сенка криве базиса на унутрашњост облице и конуса — — — — 321
§ 85. Сенка лопте — — — — — — — — — — — — — — 326
§ 86. Сенчење обртних површина — — — — — — — — — — 331
§ 87. Одређивање изофота — — — — — — — — — — — — 336

V Котирана пројекција

§ 88. Увод и пројекција тачке — — — — — — — — — — — 344
§ 89. Пројекција праве — — — — — — — — — — — — — 344
§ 90. Интервал и пад праве — — — — — — — — — — — — 346
§ 91. Паралелне праве — — — — — — — — — — — — — 347
§ 92. Управне праве са паралелним пројекцијама — — — — — — 347
§ 93. Пресек двеју правих — — — — — — — — — — — — 348
§ 94. Раван, изохипсе равни — — — — — — — — — — — — 348
§ 95. Права у равни, раван кроз праву, линија главног пада и тачка у равни — — — — — — — — — — — — — — — — 348
§ 96. Раван одређена двема правама или трима тачкама — — — — — 349
§ 97. Пресек двеју равни и продор праве кроз раван — — — — — 350
§ 98. Права са задатим падом у произвољној равни — — — — — 352
§ 99. Раван са одређеним падом кроз задату праву — — — — — — 353
§ 100. Права управна на раван и раван управна на праву — — — — 354
§ 101. Обарање равни — — — — — — — — — — — — — — 355
§ 102. Задаци за вежбу — — — — — — — — — — — — — 357
§ 103. Пројекција просторне криве и прива са константним падом — — 361
§ 104. Претстављање терена — — — — — — — — — — — — 362
§ 105. Профили — — — — — — — — — — — — — — — 363
§ 106. Кота тачке на терену и интерполовање изохипса — — — — — 364
§ 107. Тангента и тангенцијална раван на теренску површину — — — 365

§ 108. Пад терена, интервал и линије главног пада — 365
§ 109. Повлачење линије констатног пада по терену — 366
§ 110. Пресек равни са тереном и продор праве — 367
§ 111. Пресек терена са другим површинама и продор криве кроз терен — 368
§ 112. Конструкција облe површине са задатим падом кроз неку криву — 369
§ 113. Примери — 371
§ 114. Одређивање линије насипа и усека помоћу попречних профила — 378
§ 115. Одређивање сенки у котираној пројекцији — 383

VI Кровне површине

§ 116. Увод — 383
§ 117. Једноставни кровови — 384
§ 118. Сложенији кровови — 387

VII Ортогонална аксонометрија

§ 119. Увод — 392
§ 120. Пројекција правоуглоног система оса — 393
§ 121. Примери — 398
§ 122. Положај оса и њихов избор — 400
§ 123. Одређивање сенке у аксонометрији — 401

КОСА ПРОЈЕКЦИЈА

VIII Коса аксонометрија

§ 124. Објашњење и примери — 404

IX Коса пројекција

§ 125. Увод у косу пројекцију и пројекција тачке — 408
§ 126. Пројекција праве — 410
§ 127. Пројекција равни — 412
§ 128. Пресек двеју равни — 413
§ 129. Продор праве кроз раван — 414
§ 130. Померање X-осе и прелаз на ортогоналну пројекцију — 415
§ 131. Права величина дужи — 416
§ 132. Обарање равни — 418
§ 133. Права управна на раван и раван управна на праву — 420
§ 134. Задаци за вежбу — 423
§ 135. Примери из техничке праксе у косој пројекцији — 431
§ 136. Птичја перспектива — 447

УВОД

Нацртна геометрија је наука која нас учи како ћемо нацртати равне и просторне облике и како ћемо графички решавати по положају и мери проблеме који се на њима постављају.

Према томе је циљ учења Нацртне геометрије двојак: Једно, да нас научи како ћемо нацртати неки облик (предмет) који гледамо или који само замишљамо, а друго, да нам развије способност да по цртежу добијемо што је могуће тачнију просторну претставу нацртаног предмета.

Томе правилном просторном претстављању цртежа или слика највише ће допринети ако се привикнемо већ сада, одмах у почетку, да сваки елеменат претставимо пре цртања на моделу, па макар то било на најпримитивнијем.

Само вежбање пружиће нам уз то прилике, да се привикнемо на тачно цртање.

Главна тешкоћа при цртању неког предмета (просторног облика) је та, што сви просторни облици имају три димензије, а цртеж само две. Јер цртамо обично на некој равни, а ретко када на облим површинама (живописи на сводовима). Ту тешкоћу савлађујемо на разне начине, па су тако настали и разни начини цртања. Најприроднији начин био би овај.

Замислимо да смо стали пред неко прозорско стакло и да, не померајући око, гледамо неки предмет. Са сваке тачке предмета долазиће ка оку један зрак светлости. Ми ћемо га звати *„пројекцијски зрак“*. Да тај зрак стигне до нашег ока, мора да прође кроз стакло. Када бисмо на неки начин обележили тачку где је тај зрак прошао кроз стакло, могли бисмо да кажемо да је та тачка *„слика“*, *„лик“* или *„пројекција“* оне тачке предмета са које је зрак кренуо. Свакој тачки предмета одговарала би на тај начин једна тачка на стаклу, свакој линији предмета једна линија на стаклу и обрнуто. Стакло би нам у у том случају претстављало раван на коју смо *„пројектовали“* тј. *„пројекцису раван“*, а сам цртеж на стаклу *„слику“*, *„лик“* или *„пројекцију“* оног предмета који смо посматрали (пројектовали). Када бисмо сада скинули стакло са цртежом, па га показали некоме другом, тај би цртеж могао да изазове код њега потпуну претставу предмета који смо ми посматрали, наравно, не узимајући у обзир боје и интензитет светлости, а поготово гледан са истог отстојања на ком је био када смо ми посматрали предмет. Најлепши пример оваквог цртежа је фотографија, где светлост хемиским путем обележава на стаклу или филму поједине тачке.

Пошто су сви зраци ишли ка оку, ка једном центру, овакав цртеж називамо *„централна пројекција"* или *„перспектива"*. Оваква пројекција је најприроднија и употребљава се у сликарству. У техници се употребљава ретко, једно што је тешко конструисати овакав цртеж, а друго што се по оваквом цртежу не може директно радити. Наиме, према свом отстојању од ока две исте дужи нису на цртежу подједнаке, па их не можемо одмеравати непосредно са цртежа, а ни паралелне праве не показују се као паралелне.

Место оваквог начина пројектовања замислимо да су пројекциска раван и предмет који смо цртали остали где су били, а да се наше око све више удаљава од њих. Пројекциски зраци заклапаће у том случају све мање и мање углове између себе. На концу, ако се око удаљи у бесконачност, постаће пројекциски зраци између себе паралелни.

Пројекцију коју добијамо на тај начин називамо *„паралелна пројекција"*. Сам назив долази баш отуда што су пројекциски зраци између себе паралелни. Пројекција добивена оваквим паралелним пројекциским зрацима не одговара више оној слици коју видимо оком, али зато има других добрих особина. Цртежи се много лакше конструишу, паралелне праве остају паралелне, а све су дужи на њима подједнако скраћене. То дозвољава, уз извесне услове, да се поједине дужи могу одмеравати директно са цртежа. Ради тих особина у техници се скоро искључиво употребљава паралелна пројекција.

Пројекциски зраци могу да стоје косо према пројекциској равни. Такву пројекцију зовемо *„коса пројекција"* или *„клиногонална пројекција"*. Ако зраци стоје управно на пројекциску раван, пројекцију коју на тај начин добивамо називамо *„нормална пројекција"* или *„ортогонална пројекција"*.

Једна ортогонална пројекција није у стању да потпуно одреди тачку у простору, као што ћемо видети у идућем поглављу, јер остаје неодређена висина тачке над равни. Ако ту висину (коту) на било који начин допишемо уз пројекцију тачке, добићемо тако звану *„котирану пројекцију"*.

Тиме смо приказали разне начине пројектовања и побројали врсте пројекција које ћемо овде обрађивати, а то су:

1) централна пројекција или перспектива,

2) паралелна пројекција, и то:

- а) коса пројекција,
- б) ортогонална пројекција, и
- б$_1$) котирана пројекција.

Од свих пројекција у техници се највише употребљава ортогонална пројекција. Иако и она има незгодних страна, конструкције су у њој понајлакше, а саме слике су довољно јасне и лако употребљиве.

Пре него што пођемо даље, треба да утврдимо начин обележавања и неке скраћенице.

Тачке и праве обележаваћемо латиницом, и то:

Тачке великим словима $A, B, C, R, S, \dots$ или по потреби арапским и римским бројевима.

Праве малим словима $a, b, c, p, g, \dots\dots$

Равни и криве површине малим грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ а равни такође и римским бројевима.

Углове малим грчким словима.

Од уобичајених знакова употребљаваћемо: $\parallel$ паралелан са, $\perp$ управан на и $=$ једнак.

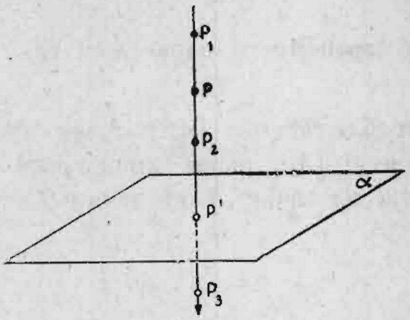
Од уобичајених скраћеница употребљаваћемо: $[AB]$ права кроз тачке A и B; $[pg]$ раван кроз праве p и g; $[Ap]$ раван кроз тачку A и праву p. Поред тога (AB) значиће дуж од тачке A до тачке B или краће дуж AB.

ОРТОГОНАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА

I. ПОЛОЖАЈНИ ЗАДАЦИ

§ 1. Пројекциске равни, пројекција тачке и тачке у специјалном положају

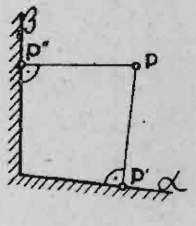
Узмимо да нам је задата у простору нека раван α и ван ње тачка P. Да бисмо одредили пројекцију тачке на раван, повући ћемо кроз тачку P пројекциски зрак управан на раван α. Тачка у којој пројекциски зрак продре кроз пројекциску раван α је P' пројекција тачке P (в. сл. 1).



Сл. 1

Тачка P' као пројекција не одређује потпуно тачку P у простору, јер P' може да буде пројекција и тачака P_1 и P_2, као и тачке P_3. Значи: P' може да буде пројекција сваке тачке P која се налази на истом пројекциском зраку. Према томе P' одређује тачку по положају, а неодређена остаје само њезина висина према равни.

Да бисмо потпуно одредили тачку, узећемо поред α још једну раван β. Повучемо ли сада кроз P нови пројекциски зрак управан на β, добићемо у његовом продору кроз β P'' нову пројекцију тачке P (в. сл. 2). Пројекције P' и P'' потпуно одређују тачку у простору. Склонимо ли тачку P, можемо поново да је поставимо на исто место. Тачка P треба да буде на пројекциском зраку кроз P' управном на α, а исто тако и на пројекциском зраку кроз P'' управном на β. Према томе, тачка P лежи у њиховом пресеку.



Сл. 2

Отуду следи:

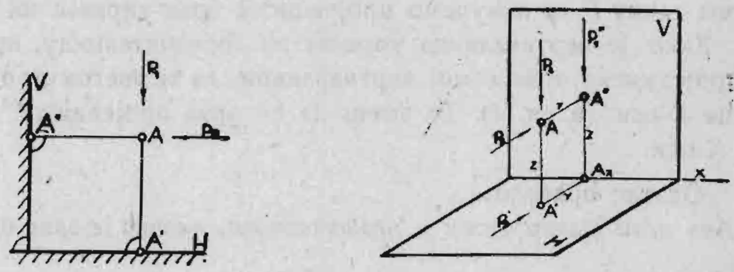
1) *Две пројекције једне тачке одређују потпуно положај те тачке у простору.*

Место да пројекциске равни α и β буду под било којим углом, узимамо их под правим углом.

Поред тога претпостављамо да је једна од њих хоризонтална, а друга, према томе, вертикална. Прву називамо *„хоризонталница“* или *„прва пројекциска раван“* и обележавамо је са H_1 или $П_1$, а другу *„вертикалница“*, или *„друга пројекциска раван“*, и обележавамо је са V, или $П_2$. И саме пројекције називамо истим именом као и пројекциске равни. P' је *„прва пројекција“* или *„хоризонтална пројекција“* тачке P, а P'' је *„друга пројекција“* или *„вертикална пројекција“* тачке P. Знак пројекције бележимо десно ианад слова којим је обележена тачка или права, и то за прву пројекцију стављамо једну цртицу, а за другу пројекцију две цртице. Тако је A' прва пројекција тачке A, а g'' друга пројекција праве g.

Хоризонталница и вертикалница секу се по једној правој. Ту праву називамо X-оса и бележимо са X (ређе ${}_1X_2$) (в. сл. 3).

Када имамо H и V, да одредимо пројекције неке тачке A поступамо овако: Повучемо кроз тачку A пројекциски зрак p_1 управан на H. Његов продор кроз H је тачка A', прва пројекција тачке A. Повучемо затим кроз исту тачку A други пројекциски зрак p_2 управан на V, па је његов продор кроз V, тачка A'', друга пројекција тачке A. Смер пројектовања обележен је у обема сликама.



Сл. 3

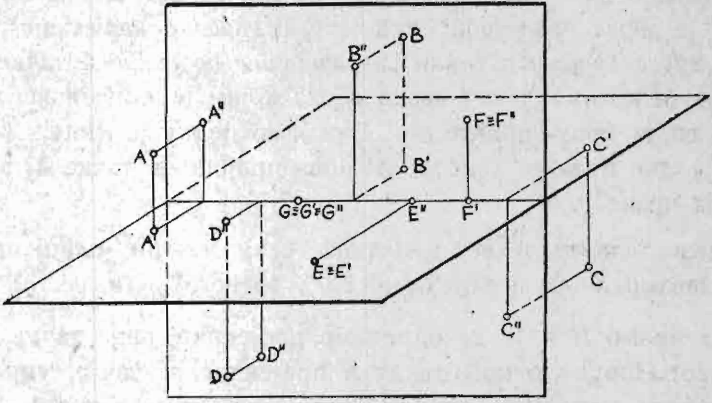
Ако из тачке A', дакле из прве пројекције тачке A повучемо праву управну на X-осу, а исто тако и из њезине друге пројекције A'', те ће се две управне праве сећи са X-осом у истој тачки A. Раван $A\,A'A''A_x$ је b на H и b на V, дакле b на X-осу.

Одатле правило:

2) *Управне на X-осу повучене из обеју пројекција једне тачке секу се у једној тачки на X-оси.*

3) *Тачка A' у H и тачка A'' у V само су онда пројекције једне тачке A, ако се управне на X-осу повучене из A' и A'' секу у једној тачки A_x на X-оси.*

Свеједно је при томе да ли тачка стоји испред *V* као тачка *A* или иза ње као тачка *B*. Свеједно да ли је тачка изнад хоризонталнице као тачке *A* и *B* или испод хоризонталнице као тачке *C* и *D* (в. сл. 4).



Сл. 4

Ако нека тачка *F* лежи у вертикалници, друга пројекција *F"* те тачке поклапаће се са самом тачком. Да одредимо прву пројекцију *F'*, треба кроз тачку *F* да повучемо пројекциски зрак управан на хоризонталницу. Како је вертикалница управна на хоризонталницу, припадаће цео тај пројекциски зрак самој вертикалници, па ће његов продор кроз *H* бити на *X*-оси. (в. сл. 4). То значи да ће прва пројекција *F'* те тачке бити на *X*-оси.

Одатле правило:

4) *Ако нека тачка лежи у вертикалници, њезина је прва пројекција на X-оси.*

Ово правило може и да се обрне:

5) *Ако прва пројекција неке тачке лежи на X-оси, сама тачка је у вертикалници.*

Како ова правила важе за све тачке у вертикалници, смемо да кажемо и ово:

6) *Цела вертикалница има своју прву пројекцију на X-оси* или *X-оса је прва пројекција целе вертикалнице.*

Потпуно је аналогно када нека тачка *E* лежи у хоризонталници. Њезина прва пројекција *E'* поклапа се са самом тачком а њезина друга пројекција *E"* лежи на *X*-оси. Аналогна су и правила:

7) *Ако нека тачка лежи у хоризонталници, друга јој је пројекција на X-оси.*

8) *Ако је друга пројекција неке тачке на X-оси, сама тачка лежи у хоризонталници.*

9) *Цела хоризонталница има своју другу пројекцију на X-оси* **или** *X-оса је друга пројекција целе хоризонталнице.*

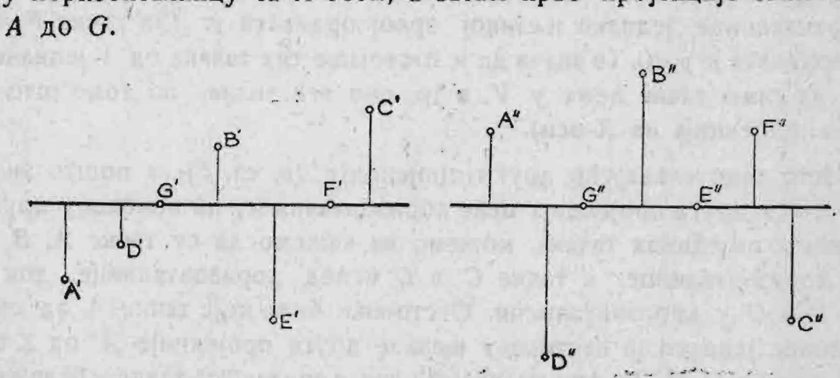
Ако нека тачка G лежи на X-оси, што значи да је и у H и у V, тада су јој и прва пројекција G' и друга пројекција G'' на X-оси.

За ове три тачке (E, F и G) дакле за било коју тачку у хоризонталници или за било коју у вертикалници или за било коју тачку на X-оси кажемо да су тачке *„у специјалном положају“.* За све остале тачке које немају један од ових положаја, кажемо да *су „произвољне тачке“, или* тачке *у „произвољном положају“.*

Реч произвољан нема у Нацртној геометрији исто значење као иначе. Када у задатку стоји: Задата произвољна тачка . . ., то не значи да смемо узети по вољи било коју тачку, него само тачку која није у неком специјалном положају.

§ 2. Начин цртања пројекција

Хоризонтална пројекција и вертикална пројекција су две слике нацртане на двема засебним равнима које стоје под правим углом, једна на хоризонталној, а друга на вертикалној. У инжењерској пракси те се пројекције (слике) и цртају одвојено. Прва пројекција (основа неког моста или зграде) црта се на једном листу хартије, док се друга, вертикална пројекција (изглед тога моста или зграде) црта на другом листу. Тако бисмо могли цртати и ми у Нацртној геометрији· Могли бисмо претпоставити да хартија на којој хоћемо да цртамо (наша цртна раван) стоји хоризонтално, да је на њу наслоњена или са њом паралелна хоризонталница нашега модела и тада на њој нацртати и саму хоризонталницу са X-осом, а затим прве пројекције свих тачака од A до G.



Сл. 5

На исти начин, поставимо ли неки други лист хартије (или овај исти на коме смо већ нацртали прву пројекцију) да стоји вертикално, дакле паралелно са вертикалницом, можемо на њему да нацртамо и саму вертикалницу са X-осом и друге пројекције свих тачака од A до G (в. сл. 5).

Уствари имали бисмо обе пројекције нацртане на истом листу, иако претпостављамо да је тај лист стајао једанпут (за I пројекцију) хоризонтално, а други пут (за II пројекцију) вертикално.

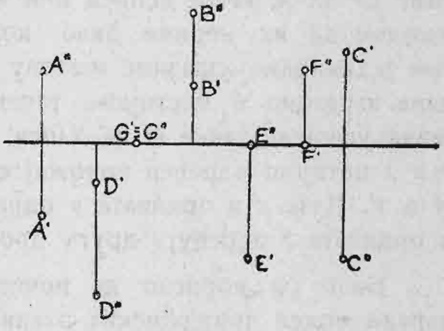
Потсетимо ли се да је X-оса прва пројекција целе вертикалнице можемо да по положају првих пројекција појединих тачака утврдимо да се тачке A, D и F налазе испред вертикалнице, а тачке B и G иза вертикалнице, док су тачке F и G у самој вертикалници, па су им прве пројекције F' и G' на X-оси. (в. сл. 5). Испред вертикалнице су све тачке чије се прве пројекције налазе на слици испред (а могло би се казати испод) X-осе. Иза вертикалнице су све тачке чије прве пројекције леже иза X-осе (а могло би се казати изнад X-осе).

Видели смо да две пројекције потпуно одређују положај тачке према пројекциским равнима. То значи да из самих њезиних пројекција можемо да одредимо колико је нека тачка удаљена од хоризонталнице и од вертикалнице. Отстојање било које тачке A од вертикалнице једнако је дужи $A' A_x$, дужи повученој из тачке A' управно на X-осу до пресека A_x са X-осом. Ту дуж називамо *„прва ордината"* тачке и обележавамо словом y. Да би разликовали тачке испред вертикалнице од оних које су иза ње, узимамо да тачке испред вертикалнице имају позитивну прву ординату $+y$, а тачке иза вертикалнице да имају негативну прву ординату $-y$. Уствари отстојање тачке A од вертикалнице је дуж $A A''$ (в. сл. 3), али из правоугаоника $A A'' A_x A'$ видимо да је та дуж једнака првој ординати $A' A_x = y$. Поред тога те се две дужи ($A' A_x$ и $A A''$) у првој пројекцији поклапају. Стога смемо одмах да кажемо да је отстојање неке тачке од вертикалнице једнако њезиној првој ординати y. (За тачке F и G прва ордината је $y = 0$. То значи да је отстојање тих тачака од V једнако 0, дакле да саме тачке леже у V, а то смо већ знали, по томе што им је прва пројекција на X-оси).

Исто тако гледајући другу пројекцију (в. сл. 5), а пошто знамо да је X-оса друга пројекција целе хоризонталнице, по положају других пројекција појединих тачака, можемо да кажемо да су тачке A, B и F изнад хоризонталнице, а тачке C и D испод хоризонталнице, док су тачке E и G у хоризонталници. Отстојање било које тачке A од хоризонталнице једнако је отстојању њезине друге пројекције A'' од X-осе, једнако дужи $A_x A''$. Ту дуж називамо *„друга ордината"* тачке и бележимо је словом z. За све тачке које су изнад хоризонталнице друге ординате су позитивне $+z$, а све тачке које су испод хоризонталнице (на слици испод X-осе) друге ординате су негативне $-z$. За тачке у H друге ординате су једнаке нули, па су и друге пројекције тих тачака (E'' и G'') на самој X-оси.

Природно да растојања између тачака A_xB_x, A_xC_x и A_xD_x на X-оси треба да буду једнака у првој и у другој пројекцији. Када бисмо хтели да узмемо још неку тачку M, па уцртали њену I пројекцију M', а тиме усвојили и неко M_x, требало би по правилу 3 да дуж $A_x\ M_x$ из прве пројекције нанесемо на X-осу друге пројекције да тако одредимо M_x у другој пројекцији, па да тек тада помоћу ње и друге ординате z усвојимо другу пројекцију M'' тачке M.

Ово пренашење дужи са X-осе из једне пројекције у другу отежава рад нарочито када је број тачака велик, а отежава и проучавање неког објекта претстављеног овако у двема одвојеним сликама (хоризонталној пројекцији и вертикалној). Стога се у Нацртној геометрији те две пројекције, прва и друга цртају преклопљене и то тако да им остане заједничка X-оса. Тим преклапањем пројекција ништа се не мења. Знамо да је прва, хоризонтална пројекција нацртана на хоризонталној равни и да је друга вертикална пројекција нацртана на вертикалној равни као пре. Само место да их као пре у сл. 5 цртамо једну до друге, цртамо их овде преклопљене (в. сл. 6) и то тако да имају заједничку X-осу.



Сл. 6

Када обе пројекције цртамо скупа овако преклопљене, испада као да смо расклопили пројекциске равни H и V, па да вертикалницу држимо вертикално, а да хоризонталницу обрћемо око X-осе док се њезин предњи позитивни део не преклопи са доњим негативним делом вертикалнице или да хоризонталницу држимо хоризонтално, а вертикалницу обрћемо око X-осе док се њезин горњи позитивни део не преклопи са стражњим негативним делом хоризонталнице. За оба случаја резултат је исти. Хоризонтална и вертикална пројекција нацртане су скупа преклопљене са заједничком X-осом.

Раније правило 2), по коме управне на X-осу повучене из прве пројекције A' неке тачке и из њезине друге пројекције A'' морају да се секу у једној тачки A_x на X-оси, сад ће да гласи:

10) *Прва и друга пројекција неке тачке стоје на правој која је управна на X-осу.*

или

11) *Две тачке, једна A' у хоризонталници, а друга A'' у вертикалници, само су онда пројекције неке тачке A у простору, ако стоје на једној правој управној на X-осу.*

На тој правој управној на X-осу су ординате нацртане тачке. Дуж од X-осе до прве пројекције A' (тачније обележено дуж $A_x\ A'$) је прва ордината y тачке A и једнака је отстојању тачке A од вертикалнице. Дуж од X-осе до друге пројекције A'' (тачније од A_x до A'') је друга ордината z те исте тачке A и једнака је отстојању тачке A од хоризонталнице (њезиној висини).

Те ординате могу да буду позитивне или негативне, већ према томе да ли је тачка испред или иза V, изнад или испод H. Поред тога можемо да их меримо било којом јединицом (m, cm, mm) и да у тим јединицама изразимо њихову дужину. Можемо да у тим јединицама изразимо и отстојања тачака A_x, B_x, C_x и других на X-оси од једне усвојене тачке O на X-оси, па нам је том дужи x и ординатама y и z потпуно одређен положај сваке тачке простора према усвојеној H и V. Дуж x и ордината y одређују прву пројекцију тачке, а дуж x и ордината z одређују другу пројекцију тачке.

Било би корисно да почетник нацрта пројекције ових тачака, изради модел пројекциских равни H и V, па да затим утврди положај сваке од њих према пројекциским равнима.

*

I Задаци за вежбу

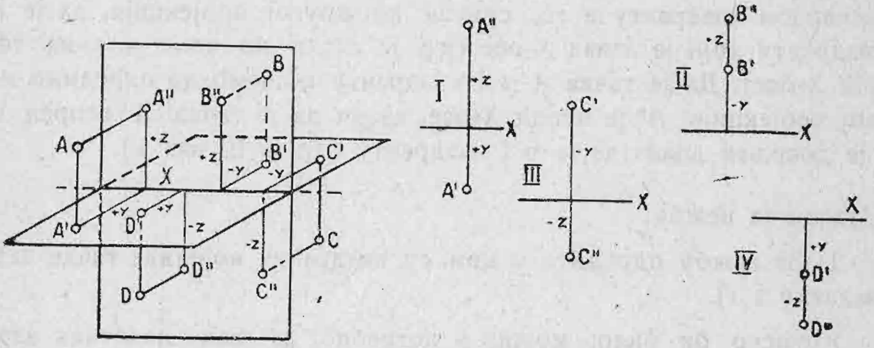
Нацртати пројекције следећих тачака и на моделу пројекциских равни утврдити њихов положај према H и V:

$A\,(2; 2; 4)$, $B\,(3; -5; 1)$, $C\,(-2; 3; 2)$, $D\,(-1; -1; 3)$, $E\,(6; -4; -1)$,
$F\,(-4; 5; -4)$, $G\,(-5; 0; 5)$, $K\,(8; 0; -3)$, $L\,(5; 5; -5)$, $N\,(-3; 0; 0)$,
$M\,(-6; 4; 0)$.

§ 3. Квадранти

Хоризонталница, као неограничена раван, дели цео простор на два дела, на део изнад H и део испод H. Исто га тако дели и вертикалница на део испред V и део иза V. На тај начин подељен је цео простор на четири дела. Те делове називамо квадрантима, а разликујемо их и обележавамо римским бројевима од I до IV и то редом како је означено на слици 7. По томе је први квадрант изнад H, а испред V; други изнад H, а иза V; трећи испод H, а иза V; док је четврти испод H, а испред V.

На сл. 7 нацртана је у сваком квадранту по једна тачка. Свака нова тачка коју узмемо може да има и позитивне и негативне ординате, а то зависи од положаја према пројекциским равнима H и V који јој одредимо, дакле од квадранта коме припадне. За тачке у појединим квадрантима видимо из слике које су им ординате позитивне, а које негативне. Тако било која тачка A првог квадранта има ординате $+y$ и $+z$, било која тачка B другог квадранта има ординате



Сл. 7

$-y$ и $+z$. Свака тачка C трећег квадранта има ординате $-y$ и $-z$, док у IV квадранту било која тачка D мора да има ординате $+y$ и $-z$. Тачке које су у специјалном положају не могу да припадну ниједном квадранту. Оне су у пројекциским равнима, па су увек на границама између два суседа квадранта. Тако тачке које леже у H $(z=0)$ леже између I и IV када имају $+y$, а између II и III када имају $-y$. Тачке у V $(y=0)$ су између I и II квадранта када им је ордината z позитивна а између III и IV када им је ордината z негативна.

Према томе можемо по самим ординатама потпуно тачно одредити ком квадранту припада која тачка, чак и не цртајући пројекције тих тачака. Само је то тешко за почетника, нарочито ако нема пред собом модел пројекциских равни. Много је лакше одредити ком квадранту припада нека тачка по положају њезиних пројекција. Стога су у сл. 7 десно нацртане одвојено обе пројекције појединих тачака A, B, C и D, а означен је и квадрант у коме је та тачка. Пројекције су нацртане обе скупа као у сл. 6 на преклопљеним равнима, јер ћемо отсада цртати само тако све пројекције. Ординате појединих тачака узете су непосредно из сл. 7 лево. На први поглед можемо да приметимо да се пројекције појединих тачака појављују у паровима обе (B' и B'') изнад X-осе или (као код тачке D) обе испод X-осе, док се код других (као код A и C) појављују појединачно једна изнад, а друга испод X-осе. Исто тако није тешко уверити се да све тачке чије се пројекције појављују у паровима, оба изнад или обе испод X-осе припадају парним квадрантима, другом или четвртом, док све друге тачке чије се пројекције појаљују непарно, једна изнад а друга испод X-осе, припадају непарним квадрантима првом или трећем. Према томе, за тачку B чије се обе пројекције B' и B'' налазе изнад

X-осе, судећи само по тим њезиним пројекцијама, можемо да кажемо да припада парном квадранту и то другом, јер је други квадрант изнад *X*-осе. Тачка *D* припада IV квадранту, јер су обе пројекције, а и IV квадрант, испод *X*-осе. За тачке *A* и *C* можемо да кажемо да су у непарном квадранту и то, судећи по другој пројекцији, да је *A* у I квадранту који је изнад *X*-осе (јер је A'', а по томе и сама тачка изнад *X*-осе). Да је тачка *A* у I квадранту можемо да одредимо и по првој пројекцији. A' је испод *X*-осе, значи да је тачка *A* испред V, а то је довољан доказ да је у I квадранту (јер је III иза *V*).

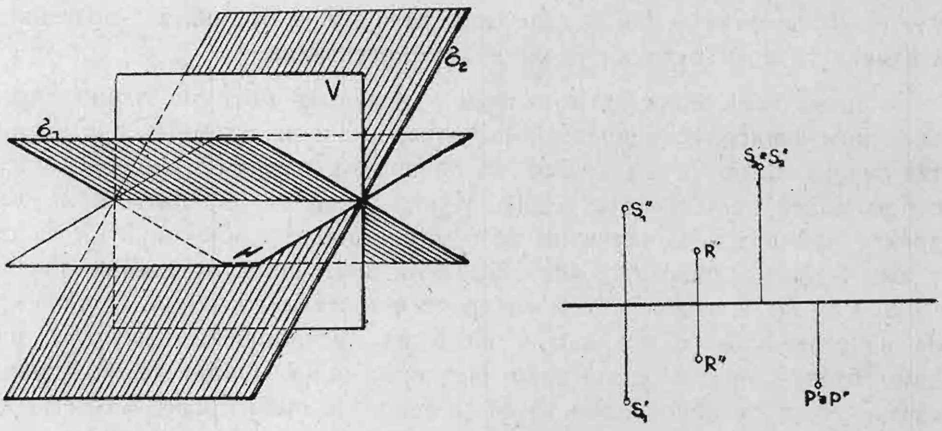
II Задаци за вежбу:

1) За вежбу одредити у ком су квадранту поједине тачке задате у задатку I 1).

Корисно би било, можда и потребно, да сваки почетник изради модел *H* и *V*, па да сваку тачку о којој се говори нацрта и види на моделу.

§ 4. О симетралним равнима

Код постављања или решевања задатака често ћемо употребљавати симетралне равни. Стога је потребно да се и са њима већ сада понешто упознамо. Симетралне равни су геометриско место тачака које су једнако удаљене од хоризонталнице и од вертикалнице. Према томе постоје две, пролазе кроз *X* осу и полове углове између *H* и *V*, а то значи да заклапају са њима углове од 45 степени. Симетралну раван која пролази кроз I и III квадрант називамо *„прва симетрална раван“* и обележавамо са σ_1, а симетралну раван која пролази кроз II и IV квадрант називамо *„друга симетрална раван“* и обележавамо са **σ_2 (в. сл.** 8).



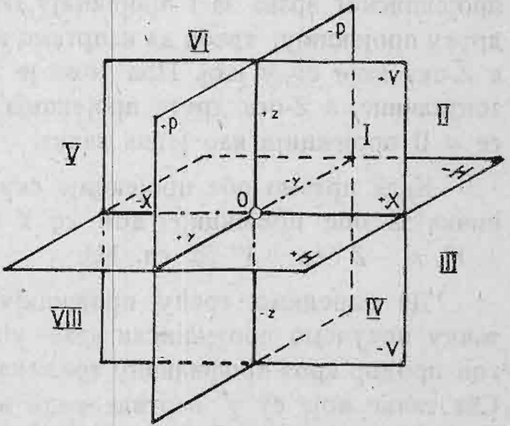
Сл. 8 и 9

Лако је одредити неку тачку тако да буде у симетралној равни. Довољно је узети нека тачку која је једнако удаљена од *H* и од *V*, којој је дакле ордината y једнака ординати z. Ако је таква тачка, као S_1 у I квадранту, или у III квадранту као тачка *R*, тада су то тачке прве симетралне равни. Још лакше је узети, и по пројекцијама препознати неку тачку друге симетралне равни (која пролази кроз II и IV квадрант). Знамо да тачке II и IV квадранта имају обе пројекције изнад или обе испод *X*-осе, а како свака тачка симетралне равни мора да има ординату y једнаку ординати z, прва и друга пројекција тих тачака морају се поклапати. Довољно је дакле узети било где неку тачку, означити да је то уједно прва и друга пројекција једне тачке, па је то једна тачка друге симетралне равни. Тако су узете тачке S_2 и *P* (в. сл. 9).

§ 5. Октанти

Поред хоризонталнице и вертикалнице узимамо често и трећу пројекциску раван управну и на *H* и на *V*. Ту трећу пројекциску раван називамо „*профилница*“, „*трећа пројекциска раван*“ или Π_3, а обележавамо је словом *P*. Праву по којој она сече хоризонталницу називамо „*Y-осу*“, а праву по којој сече вертикалницу „*Z-оса*“. На тај начин сада имамо систем трију пројекциских равни *H*, *V* и *P* које између себе стоје под правим углом и систем трију оса *X*, *Y* и *Z* које такође стоје управно једна на другу, а пролазе кроз тачку *O*, пресечну тачкуречених равни.

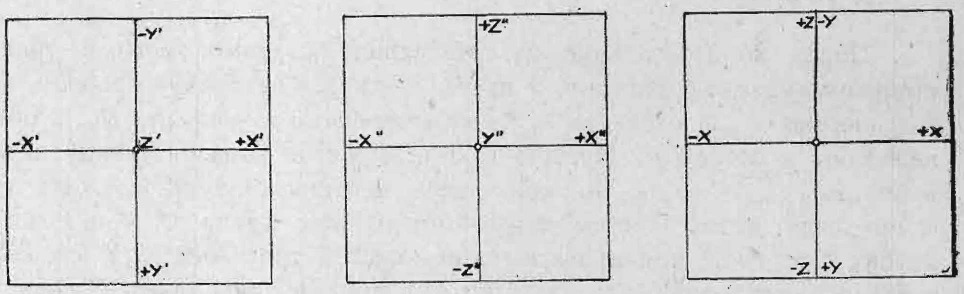
До сада су хоризонталница и вертикалница делиле простор свака на два дела, па је цео простор био подељен на четири дела, које смо називали квадрантима и обележавали римским бројевима од I до IV. Сада и профилница дели цео простор на два дела, део десно и део лево од профилнице, па је уствари цео простор подељен сада на осам делова које називамо „*октанти*“, и обележавамо римским бројевима од I до VIII и то: (истим редом као пре) од I до IV десно од профилнице, а од V до VIII исте делове лево од профилнице (в. сл. 10).



Сл. 10

Као што је раније вертикалница делила хоризонталницу на предњи позитивни и стражњи негативни део, тако сада она дели и профилницу на предњи позитивни део профилнице и стражњи негативни део профилнице. Стога је и Y-оса испред вертикалнице позитивна $+Y$, а иза вертикалнице негативна $-Y$. На исти начин дели и хоризонтачница вертикачницу, па и Z-осу на позитивни горњи део $+Z$ изнад H и на негативни доњи део $-Z$ испод H. Природно да ће сада профилница делити X-осу на позитивни део $+X$ десно од профилнице и негативни део $-X$ лево од профилнице.

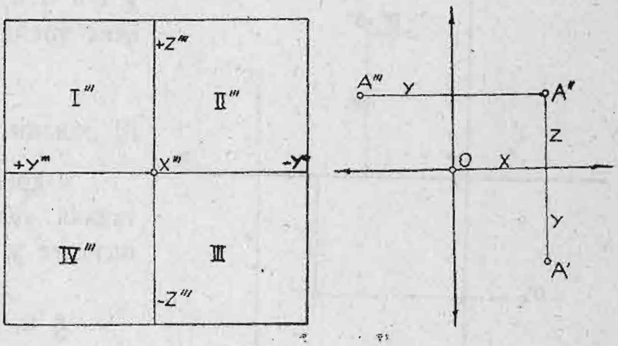
Када смо раније хтели да нацртамо прве пројекције неких тачака, цртали смо саму хоризонталницу и повлачили X-осу која је у њој. Сада поред X-осе имамо у хоризонталници и Y-осу, па ћемо цртати и њу. Као што је X-оса уствари прва пројекција целе вертикалнице, тако је сада и Y-оса прва пројекција целе профилнице (свих тачака у њој). јер су обе те равни V и P управне на H. Цела Z-оса, њезин позитивни и негативни део, показаће се у I пројекцији као сама једна тачка и поклапати са тачком O, јер је та оса управна на H, дакле у правцу пројекциског зрака за I пројекцију. Исто тако када хоћемо да цртамо другу пројекцију, треба да нацртамо вертикалницу и да повучемо X-осу и Z-осу које су у њој. При томе је X-оса друга пројекција целе хоризонталнице, а Z-оса друга пројекција целе профилнице. Оса Y показује се у II пројекцији као једна тачка.



Сл. 11

Када цртамо обе пројекције скупа, преклопљене, X-оса је заједничка за обе пројекције, док се Y и Z осе преклапају и то $+Z''$ са $-Y'$, а $-Z''$ са $+Y'$ (в. сл. 11).

Да одредимо трећу пројекцију неке тачке, треба да кроз ту тачку повучемо пројекциски зрак управан на вертикалницу, па је његов продор кроз профилницу тражена трећа, профилна пројекција тачке. Све тачке које су у вертикалници имају своју трећу пројекцију на Z-оси, па је према томе Z-оса III пројекција целе вертикалнице. Исто тако саака тачка хоризонталнице има своју III пројекцију на Y-оси, па је X-оса трећа пројекција целе хоризонталнице. Према томе у трећој пројекцији види се на први поглед у ком је квадранту која тачка. (Квадранти су на сл. 12 лево и обележени бројевима).

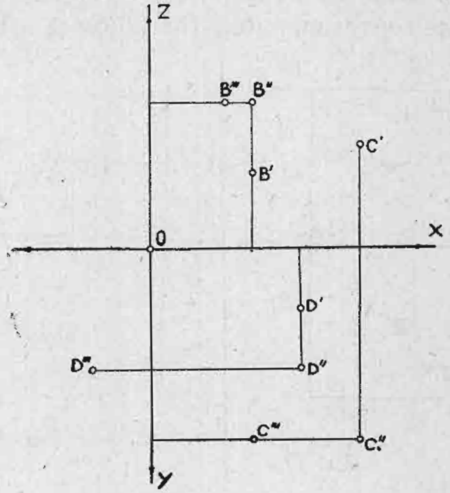


Сл. 12

Као што смо раније, када смо хтели да нацртамо прву и другу пројекцију неке тачке, преклапали хоризонталницу и вертикалницу тако да имају заједничку X-осу, тако ћемо сада, да нацртамо III пројекцију неке тачке, преклопити профилницу са вертикалницом, (са којом је већ преклопљена хоризонталница) и то тако да имају заједничку Z-осу. Хоризонталница и вертикалница су две равни које стоје под правим углом. Исто тако су и профилница и вертикалница две равни које стоје под правим углом. Према томе сва правила која важе за I и II пројекцију с обзиром на X-осу важе исто тако за II и III пројекцију с обзиром на Z-осу. Тако правило да I и II пројекција неке тачке стоје на правој управној на X-осу, гласиће сада: *друга и трећа пројекција неке тачке стоје на правој управној на Z-осу*. Као што је раније дуж $A'A_x$, прва ордината y била једнака отстојању тачке A од вертикалнице, а дуж $A''A_x$, друга ордината z једнака отстојању тачке од хоризонталнице, тако је сада дуж $A'''A_z$ једнака отстојању тачке A од вертикалнице, дакле прва ордината y, а дуж $A''A_z$ једнака отстојању тачке A од профилнице, „*трећа ордината*“ коју обележавамо са x.

(Оправданост овога почетник ће најлакше осетити, ако модел трију пројекциских равни обрне око Y-осе за 90^0 супротно сказаљкама на сату. Вертикалница ће остати вертикална и после обртања, док ће профилница скупа са Z-осом заузети хоризонталан положај и по томе постати хоризонталница).

Од пре нам је познато да две пројекције потпуно одређују положај тачке у простору. Ако дакле треба да нацртамо и трећу пројекцију неке тачке, морамо је одредити из података које нам пружају две већ задате пројекције. Предње разматрање даје нам упутство како ћемо то извести. Ако је у сл. 12 десно задата својом првом и другом пројекцијом нека тачка A, да јој одредимо трећу пројекцију треба да из њезине друге пројекције A'' повучемо праву управну на Z-осу (јер друга и трећа пројекција стоје на правој управној на Z-осу). Тим одредимо тачку A_z. Пошто сада дуж $A_z A'''$ треба да буде отстојање тачке A од вертикалнице, узмемо то отстојање, прву ординату y коју имамо у првој пројекцији, па је нанесемо од тачке A_z и тим одредимо A''', тражену трећу пројекцију тачке A. Природно да ћемо ту ординату нанашати лево од A_z (у смеру $+Y'''$) ако је позитивна $(+y)$, а десно од A_z (у смеру $-Y'''$) ако је негативна $(-y)$.



Сл. 13

Као даљи приказ тога рада узето је у сл. 13 неколико тачака у I и II пројекцији, па им је одређена трећа.

*

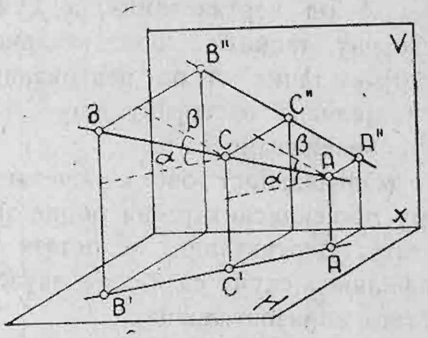
III Задаци за вежбу.

Одредити треће пројекције тачака заданих у збирци под I) и октанте у којима се налазе.

§ 6. Пројекција праве

Када нам је задата нека произвољна права, па треба да јој одредимо пројекцију, повучемо кроз сваку тачку праве по један пројекциски зрак. Сви ти зраци сачињавају једну раван управну на пројекциску раван. Пресек те равни са пројекциском равнином је пројекција задате праве. Према томе пројекција праве је поново једна права.

Ако за неку праву имамо две било које тачке па знамо и њихове пројекције, права која спаја пројекције тих двеју тачака је пројекција саме праве.



Сл. 14

Одатле следи:

1) *Пројекција праве је поново једна права.*

2) *Свака права у простору одређена је двема својим пројекцијама.*

3) *Две праве, једна у једној пројекцијској равни, а друга у другој, узете као пројекције једне праве одређују потпуно ту праву у простору.*

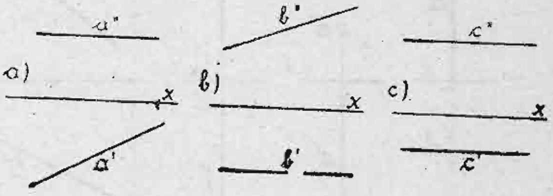
4) *Ако нека тачка A лежи на правој a, тада и A' лежи на a' и A'' на a''.*

5) *Лежи ли A' на a' и A'' на a'', тада и сама тачко A лежи на правој a.*

§ 7. Права у специјалном положају

Аналогно тачки, може и права да заузме неки специјални положај.

Тако може права да буде паралелна са хоризонталницом. У том случају све тачке праве имају једнако отстојање од H, па ће им друге ординате z бити подједнаке. То другим речима значи, да ће друга пројекција праве бити паралелна са X-осом. Прва пројекција праве може да заузме било који положај према X-оси, (види слику 15a).



Сл. 15 (a, b, c)

Одатле правило:

1) *Ако је нека права паралелна са хоризонталницом, друга јој је пројекција паралелна са X-осом.*

2) *Ако је друга пројекција неке праве паралелна са X-осом сама је права паралелна са хоризонталницом.*

Када је нека права $b \parallel V$, аналогно пређашњем случају, биће $b' \parallel X$ (сл. 15b).

Аналогна су и правила:

3) *Ако је нека права паралелна са вертикалницом, прва јој је пројекција паралелна са X-осом.*

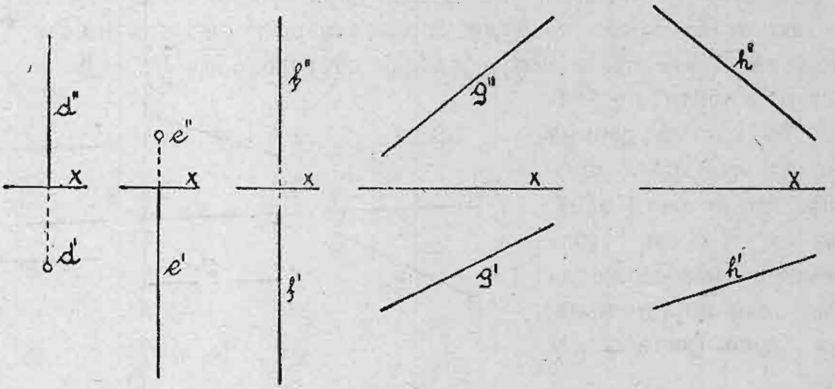
4) *Ако је прва пројекција неке праве паралелна са X-осом, сама је права паралелна са вертикалницом.*

Само по себи је јасно, да ће за праву c, која је паралелна и са H и са V бити обе пројекције c' и $c'' \parallel X$ (сл. 15c). У том случају обично кажемо, да је права паралелна са X-осом.

Права може да буде управна на пројекциску раван. Тако је права d (у сл. 15d) управна на H. Пројекциски зрак управан на H, који пролази кроз једну тачку праве, пролази кроз све њезине тачке. Услед тога ће се цела права показивати у првој пројекцији као једна тачка. Друга пројекција d'' биће управна на X-осу. Овакву праву називамо *„пројектна права“* јер је у правцу пројекциског зрака.

Исти је случај када је права $e \perp V$ (сл. 15e). И права e је пројектна права, па јој је e'' свега једна тачка, а $e' \perp X$.

На крају да споменемо још и праву f (сл. 15f), чије обе пројекције f' и f'' стоје $\perp X$. Ова права је прилично неодређена, знамо само толико, да је паралелна са профилницом. Тек када су на њој одређене и две тачке, положај праве нам постаје потпуно одређен (в. сл. 18).



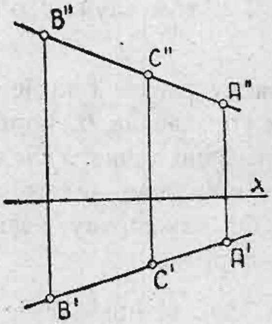
Сл. 15 (d, e, f, g, h)

Најчешћи је случај да права стоји произвољно (сл. 15 g и h). Само ова реч „*произвољно*" нема у Нацртној геометрији исто значење које има у обичном животу. „*Произвољна права*" значи права, која нема неки од наведених специјалних положаја.

(Било би подесно да почетник изради модел H и V, макар од обичног картона, па да постави писаљку или нешто слично у положај поменутих правих. Нарочито је важно да за произвољну праву на моделу одреди пројекције, а затим по уцртаним пројекцијама реконструише положај праве).

§ 8. Тачка на правој

Већ смо споменули случај да на задатој правој имамо неку тачку. Знамо да ће пројекције тачке бити на пројекцијама праве и обрнуто.



Сл. 16

Узмимо сада на произвољној правој a (a' a'') три тачке A, B и C (сл. 16). Одмах видимо да је дуж $A'C'$ једнака дужи $AC \times \cos \alpha$ и дуж $C'B'$ једнака дужи $CB \times \cos \alpha$. Права a заклапа угао α са H, односно са њеном првом пројекцијом a'.

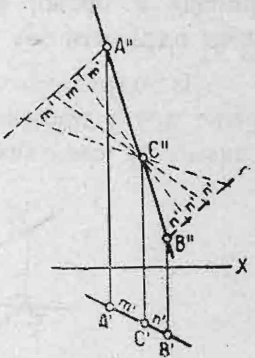
Одатле
$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}.$$

То исто важи и за вертикалну пројекцију, дакле
$$\frac{A''C''}{C''B''} = \frac{AC}{CB}.$$

Одатле следи:
$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A''C''}{C''B''},$$

а то значи да је однос првих и других пројекција двеју дужи једне праве исти, а исти је такође и однос тих дужи на самој правој.

Ово правило даје нам конструкцију како да тачно пренесемо неку тачку из једне пројекције у другу, када не можемо то ординатом, било што је мали угао под којим ордината сече праву (сл. 17), или што је сама права у правцу ординате (сл. 18).

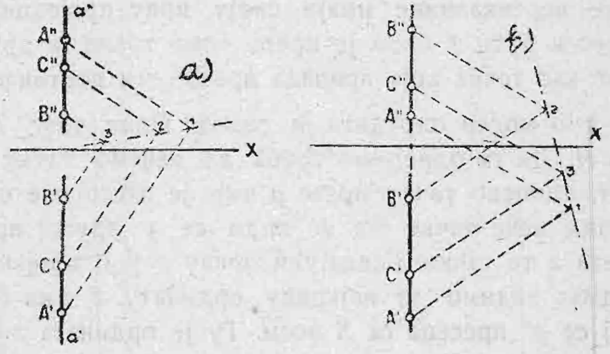


Сл. 17

Пример за први случај показан је у сл. 17. где из C' треба одредити тачан положај C''. Из A'' и B'' повучене су две паралелне праве и на њима нанете дужи m и n из прве пројекције једанпут или више пута, по потреби. Спајањем крајњих тачака добијамо на $[A''B'']$ тачку C'', а из сличности троуглова знамо да је

$$\frac{A''C''}{C''B''}=\frac{m}{n}.$$

За други случај израђен је пример у сл. 18 a и b. Сама конструкција је из слике довољно јасна. Правац помоћних права је потпуно слободан.



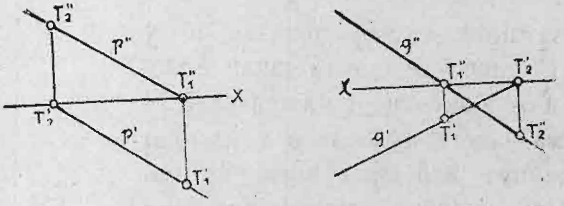
Сл. 18

§ 9. Трагови праве

Све праве продиру кроз пројекциске равни. Тачке на правој у којима та права продире кроз пројекциске равни називамо *„трагови праве“* и обележавамо словом T. По томе да ли права у тој тачки продире кроз прву, другу или трећу пројекциску раван, кажемо да је то *„први траг“* T_1, *„други траг“* T_2 или *„трећи траг“* T_3. Тако је T_1 продор праве кроз хоризонталницу, T_2 продор праве кроз вертикалницу, а T_3 продор праве кроз профилницу.

Сама дефиниција трага показује начин како да га одредимо. Траг је продор праве кроз неку раван, значи тачка која заједнички припада и правој и тој равни. Одредити траг (продор), према томе, значи одредити ону тачку која припада правој, а уједно и равни.

Да одредимо први траг T_1 праве, треба да узмемо у разматрање другу пројекцију, јер је први траг једна тачка хоризонталнице, а знамо да све тачке хоризонталнице имају своју другу пројекцију



Сл. 19

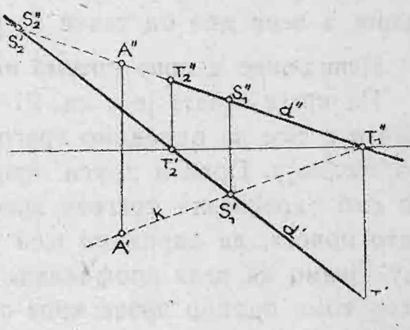
на X-оси, односно да је X-оса друга пројекција свих тачака хоризонталнице. Тачка T_1'' у којој друга пројекција p'' праве пресеца X-осу је тражени први траг. Припада правој p'', а уједно и хоризонталници. Ординатом из T_1'' можемо на p' да одредимо и његову прву пројекцију T_1' (в. сл. 19). На исти начин одредићемо и други траг T_2. Само, како је други траг продор праве кроз вертикалницу, користићемо I пројекцију, јер све тачке вертикалнице имају своју прву пројекцију на X-оси. Тачка T_2', пресек p' са X-осом је према томе тражени други траг, као продор, дакле као тачка која припада правој p и вертикалници.

Трагове смо могли одредити и овако. Први траг T_1 је продор праве p кроз H. Да га одредимо треба да нађемо тачку на правој p, која је и у H, односно тачку праве p чије је отстојање од H једнако нули. Отстојање неке тачке од H види се у другој пројекцији као друга ордината z те тачке. Гледајући праву p у II пројекцији, заправо праву p'', одмах видимо да најкраћу ординату z има она тачка T_1'' праве у којој се p'' пресеца са X осом. Ту је ордината z једнака нули. Значи да је то тражени продор праве p кроз H, тражени први траг T_1''. Тражили трагове на један или на други начин, важно је да почетник запази да за одређивање првог трага, продора кроз прву пројекциску раван, треба користити другу пројекцију, а за продор кроз II пројекциску раван, треба користити I пројекцију.

На сл. 19 нацртана је за вежбу и произвољна права g' g'', па су одређени и њезини трагови T_1 и T_2. Одређени су на исти начин као и трагови праве p. Почетницима обично прави потешкоће одређивање тачке T_2'' код оваквих случајева. Заправо они се боје да продуже другу пројекцију g'' праве и испод X-осе. Требало би да се сете, да је права произвољна, па да један њезин део може да буде изнад, а други испод H. Услед тога и g'' може да буде делом изнад, а делом испод X-осе. Осим тога, као произвољна права може да продире кроз V на њезином горњем делу изнад X (као права p) или доњем, испод X-осе (као код овог случаја).

У сл. 20 израђен је још један пример одређивања трагова задате праве d' d'', само код овог примера, осим трагова T_1 и T_2 треба да одредимо и продоре S_1 и S_2 задате праве кроз прву и другу симетралну раван.

Трагове T_1 и T_2 праве d одредимо као код предњег примера (права p на сл. 19). Остаје да овде одредимо продоре праве кроз симетралне равни. Знамо да је продор праве кроз раван једна тачка која припада и правој и равни. Како је овде у питању продор праве d кроз прву симетралну раван, а симетрална раван је баш тим одређена што су јој све тачке једнако удаљене од H колико и од V, довољно је да на правој одредимо тачку која је једнако удаљена од H колико од V, било у I или III квадранту, па је то тражени продор S_1. Обично је најлакше и најтачније конструисати праву k која је управно симетрична са d'' с обзиром на X-осу. (На слици је нацртана испрекиданом линијом). За било коју праву повучену управно на X-осу тачка на правој d'' једнако је удаљена од X-осе колико и тачка на правој k. То важи и за тачку S_1' у којој права k пресеца прву пројекцију d' задате праве d. Према томе је тачка S_1' S_1'' тачка прве симетралне равни, али и тачка задате праве d' d'', па према томе њихов тражени продор.



Сл. 20

Много лакше је одредити продор праве кроз другу симетралну раван. Како та раван пролази кроз II и IV квадрант, а све њезине тачке имају једнако отстојање од H колико од V, прве и друге пројекције свих њезиних тачака се преклапају. Према томе продорна тачка задате праве d кроз другу симетралну раван је тачка S_2' S_2'' у којој се прва пројекција d' праве пресеца са другом пројекцијом d''.

По томе што се у тачкама друге симетралне равни секу (стичу, коинцидирају) прве и друге пројекције било које праве, кажемо да је друга симетрална раван σ_2 *„раван коинциденције“* за прву и другу пројекцију.

Решимо на овом примеру још један задатак, о коме до сада нисмо говорили. Претпоставимо да су хоризонталница и вертикалница израђене од непровидног материјала, па одредимо који је део задате праве *d* у првој пројекцији видљив, а који невидљив. Исто тако који је део праве *d* видљив у другој пројекцији, а који невидљив. Свакако је у првој пројекцији видљив онај део праве који је изнад *H* (без обзира да ли је испред или иза *V*) и то до првог трага T_1, а невидљив онај део који је испод *H*. Исто је тако у другој пројекцији видљив онај део праве који је испред *V* (био он изнад или испод *H*), а невидљив део који је иза *V*.

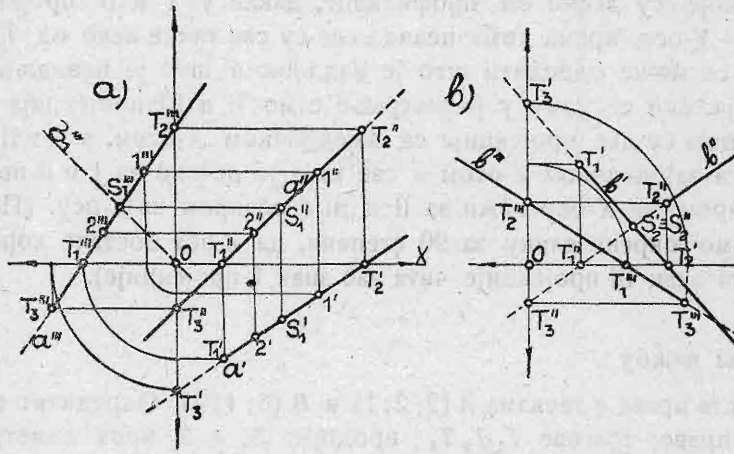
Висине тачака изнад *H* (или испод ње) видимо у другој пројекцији. То су друге ординате тачака. Према томе да одредимо који је део праве *d* у првој пројекцији видљив, треба да гледамо њезину другу пројекцују d''. Одмах видимо да је леви део праве са тачкама S_2'', T_2'' и S_1'' све до T_1'' изнад *X*-осе, а то значи да је сама права *d* на том левом делу изнад *H* и да је стога у првој пројекцији видљива. Други део праве d'', десно од T_1'' је испод *X*-осе. То значи да је сама права на том делу испод *H*, па стога у првој пројекцији невидљива. На исти начин гледајући прву пројекцију можемо да запазимо да је права d' десним делом до тачке T_2' испред *V*, а левим позади ње Стога је десни део праве *d* са тачкама T_1 и S_1 у другој пројекцији видљив, а леви део од тачке T_2 невидљив.

Невидљиве делове цртамо испрекиданом и нешто тањом линијом.

На крају задата је у сл. 21 прва и друга пројекција произвољне праве *a* с тим да одредимо трагове T_1, T_2, T_3 те праве као и њезину III пројекцију. Први и други траг праве одредимо на исти начин као што смо одређивали трагове правих *d* и *p* у сл. 19 и 20. Остаје, као нешто новога, да одредимо њен трећи траг T_3, продор кроз профилницу. Знамо да цела профилница има своју прву пројекцију на *Y*-оси. Према томе продор праве кроз профилницу, њезин трећи траг је тачка T'_3 у којој прва пројекција a' праве пресеца *Y*-осу. Место тога могли смо да кажемо. Знамо да цела профилница има своју другу пројекцију на *Z*-оси. Трећи траг T_3'' је тачка T_3'' у којој друга пројекција a'' праве пресеца *Z*-осу.

Да одредимо трећу пројекцију праве узећемо на њој две тачке $1''\,1'$ и $2''\,2'$ и одредити њихове треће пројекције $1'''$ и $2'''$. Када на тај начин одредимо трећу пројекцију a''', треба да проверимо колико је она тачно одређена. На правој су у I и II пројекцији обележене још три тачке T_1, T_2 и T_3, треба да проверимо колико су тачно одређене њихове треће пројекције. Треће пројекције и тих тачака треба да су ординатама повученим из друге пројекције управно на *Z*-осу, а њихова отстојања од *Z*-осе да су једнака првим ординатама *y* које имамо у I пројекцији. Природно да смо за одређивање треће пројекције праве место тачака 1 и 2 могли одмах употребити тачке T_1, T_2 и T_3. Тако је урађено код другог примера, праве *b* на истој слици.

Одредимо и код ових правих њихове продоре кроз симетралне равни. За праву b је то врло лако. На први поглед видимо да се прва пројекција b' пресеца са другом пројекцијом b'' у тачки $S_2'\ S_2''$. То је свакако једна тачка праве b, али и тачка друге симетралне равни. Према томе је та тачка продор праве кроз другу симетралну раван. Исто тако на први поглед можемо да запазимо да на делу праве који је нацртан на слици нема тачке у I или у III квадранту, којој би прва ордината била једнака другој. То значи да на овом делу који је нацртан права b не продире кроз прву симетралну раван. И за праву a можемо одмах да кажемо да на делу нацртаном на слици не продире кроз другу симетралну раван, јер јој се прва пројекција a' на том делу не пресеца са другом пројекцијом a''. Продор праве a кроз прву симетралну раван можемо да одредимо као код примера у сл. 20 помоћу симетричне праве k. Само овде када већ имамо нацртану и трећу пројекцију праве, може тај продор S_1 да се одреди једноставније. Знамо да цела V пошто је управна на профилницу има своју III пројекцију на једној правој, на Z-оси. Из истог разлога има и цела H своју III пројекцију на Y-оси. Како су и симетралне равни управне на профилницу (у правцу пројекциског зрака) показују се и оне у III пројекцији као праве и полове углове између H и V, односно између Z и Y-осе. На слици је нацртана само σ_1''', трећа пројекција прве симетралне равни. (Нацртана је испрекиданом линијом да се лакше запази). У њезином пресеку са a''' имамо тражену продорну тачку S_1''' праве a кроз прву симетралну раван. Ординатом управном на Z-осу одредимо њезину другу пројекцију на a'', а одатле поново ординатом управном на X прву пројекцију S_1' на a'.



Сл. 21

На крају можемо и код ових примера да одредимо који су делови праве видљиви, а који невидљиви у појединим пројекцијама, уз претпоставку да су пројекциске равни непровидне. За прву и другу одредимо то као за праву *d* у сл. 20 (из прве пројекције за другу, а из друге пројекције за прву). У трећој пројекцији видљнве су све тачке на правој, које су десно од профилнице, дакле у I и II пројекцији десно од $Z-Y$-осе, према томе невидљиве су све тачке лево од $T_3'T_3''$. Још лакше се може одредити што је видљиво а што је невидљиво у III пројекцији, ако се узму у разматрање само II и III пројекција. Јер I и II пројекција су две пројекције са заједничком X-осом, а II и III две пројекције са заједничком Z-осом и све што је речено за I и II пројекцију с обзиром на X-осу важи за II и III с обзиром на Z-осу. (Почетник нека само окрене слику за 90 степени, да Z-оса постане хоризонтална и нека знак III пројекције чита као знак I. пројекције).

*

IV Задаци за вежбу

1) Задата права g тачкама A (2; 2; 1) и B (5; 1; 4). Одредити: трећу пројекцију праве; трагове $T_1\ T_2\ T_3$; продоре S_1 и S_2 кроз симетралне равни; видљиве и заклоњене делове праве у појединим пројекцијама; кроз које квадранте пролази права; кроз које октанте.

2) Задат троугао A (4; 1; 5), B (6; 3; 1), C (2; 5; 2). Одредити трећу пројекцију троугла.

3) Задат паралелограм A (−1; 1; 1), B (3; 0; 4), C (6; 3; 2) и D (2; 4; −1). Одредити његову трећу пројекцију.

4) Задата друга пројекција троугла A (1; ? −1), B (4; ?; 3), C (6; ?; 1). Одредити прву пројекцију троугла, али тако да му трећа пројекција буде на једној правој.

5) Задата друга пројекција троугла A (1; ?; −1), B (4; ?; 3), C (6; ?; 1). Одредити прву пројекцију троугла, али тако да троугао буде:

а) у првој симетралној равни, б) паралелан са I симетралном равни,
в) у другој симетралној равни, г) паралелан са II симетралном равни.

6) Код задатака 3, 4 и 5 одредити на странама полигона тачке у којима продиру кроз H и V и кроз симетралне равни.

§ 10. Две праве

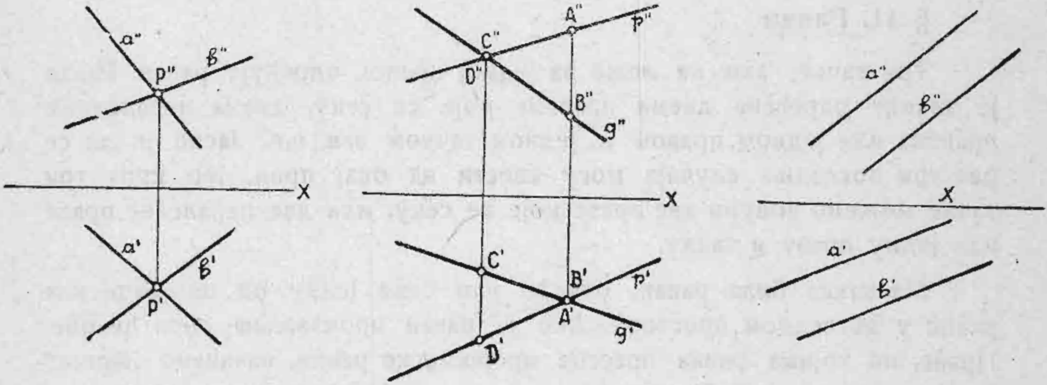
Две праве у простору или се укрштају, или се секу. За први случај кажемо да су то две витоперне или мимоилазне праве.

Када се две праве секу, оне тада имају једну заједничку тачку. Та заједничка тачка може да је у коначном простору. Тада и у обичном говору кажемо, да се праве секу. Ако је заједничка тачка у бесконачности, тада се обично каже да су те две праве паралелне. За паралелне праве имамо и другу дефиницију. Обично се каже, да су две праве паралелне, ако су тачке једне праве подједнако удаљене од друге праве. Или: две су праве паралелне ако неку трећу праву пресецају под истим углом.

У сл. 22 уцртане су две праве a и b, које се секу. Заједничка пресечна тачка P мора лежати у првој и другој пројекцији на истој ординати. Даке $[P'\ P''] \perp X$.

Ако су праве паралелне, паралелне су им прве пројекције, а исто тако и друге пројекције (види сл. 22).

На концу, ако се праве не секу, а нису ни паралелне, тада се те праве укрштају. У том случају имамо две витоперне праве p а g. Њихове пројекције могу и да се секу. Али, повучемо ли из пресечне тачке првих пројекција ординату, добићемо у другој пројекцији две потпуно одвојене тачке A'' и B''. Витоперне праве могу у једној пројекцији да буду и паралелне.



Сл. 22

Овај пример можемо да користимо, па да на њему већ сада одредимо и утврдимо један нов појам, на који ћемо се кашње често враћати. Појам видљивог и невидљивог у пројекцији.

На слици су нацртане две праве g и p које се не секу. Њихове друге пројекције g'' и p'' се ипак пресецају. То значи само да постоји један пројекциски зрак (управан на вертикалницу) који пролази и кроз једну тачку праве g и кроз једну тачку праве p, али су то две потпуно одвојене тачке, тачка C на правој g и тачка D на правој p.

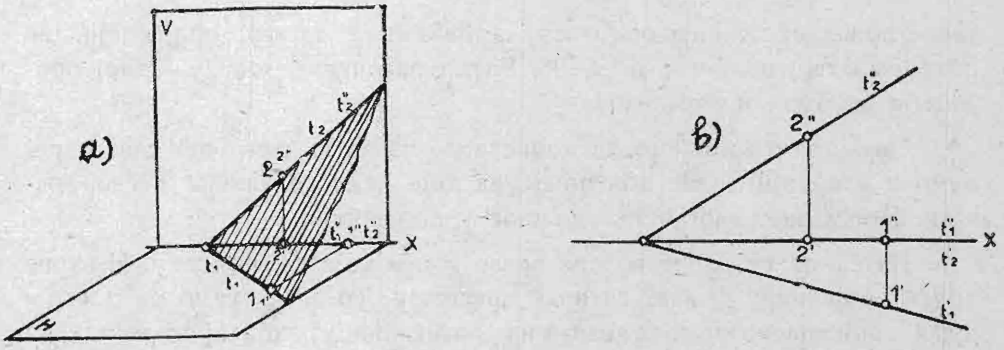
То нам је и до сада било познато. Као ново можемо да се питамо ово: Када су већ две тачке C и D на истом пројекциском зраку, која је од њих видљива, а која невидљива, јер свакако једна мора да заклања другу. Одговор је јасан: видљива је она тачка која је ближа оку које гледа ка вертикалници, односно она тачка која је удаљенија од вертикалнице. Познато нам је да се отстојање неке тачке од вертикалнице види у првој пројекцији (ордината y). Стога одредимо прве пројекције C' и D' тачака C и D, па одмах видимо да је тачка D удаљенија од вертикалнице. По томе можемо да закључимо да је тачка D у II пројекцији видљива, а тачка C невидљива. Или, смемо да кажемо, права p заклања у другој пројекцији праву g. (Тачно би било: тачка D праве p заклања тачку C праве g).

Исто тако пресецају се и прве пројекције g' и p' правих. И ту постоји један зрак ($\perp$ H) који пролази кроз тачку A праве p и кроз тачку B праве g. Из друге пројекције видимо да је тачка A виша од тачке B, па одатле следи да је у првој пројекцији видљива тачка A, или да права p заклања у првој пројекцији праву g.

§ 11. Раван

Три тачке, ако не леже на једној правој, одређују раван. Раван је такође одређена двема правама које се секу, двема паралелним правама или једном правом и једном тачком ван ње. Јасно је да се ова три последња случаја могу свести на онај први, јер кроз три тачке можемо повући две праве које се секу, или две паралелне праве или једну праву и тачку.

Ма каква била раван, она ће нам сећи једну од пројекциских равни у догледном простору. Ако је раван произвољна, сећи ће обе. Праве, по којима раван пресеца пројекциске равни, називамо „*трасе*“ и обележавамо са t. Према томе прва траса t_1 је права по којој раван сече хоризонталницу, а друга траса t_2 је права по којој раван сече вертикалницу (сл. 23). Трасе t_1 и t_2 секу се у једној тачки на X-оси (јер се три равни увек секу у једној тачки). Израз траса је незгодан као страна реч, поред речи траг, коју смо већ узимали. Остаћемо ипак



Сл. 23

при тој речи, да бисмо сада у почетку боље разликовали два разна случаја, па нам је траг T_1 тачка у којој права продире кроз H, а траса t_1 је права по којој раван пресеца H.

Две трасе t_1 и t_2 одређују потпуно раван у простору, јер су то две праве које се секу.

Често називамо саму раван по њезиним трасама, ако су нам оне већ познате. Кажемо на пр. раван t_1 t_2, за разлику од неке друге равни.

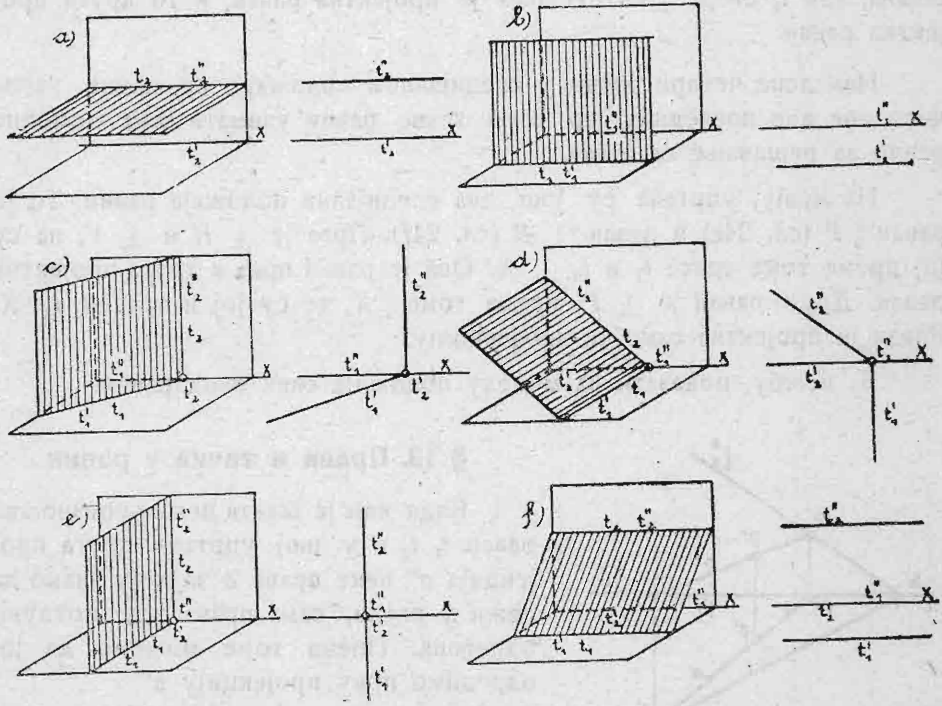
Прва траса t_1 лежи у H, па јој је друга пројекција t_1'' на X-оси. Исто тако је t_2 у V, па је t_2' на X-оси.

Према томе, имамо ли неку тачку 2 на t_2, односно 2″ на t_2'', лако одредимо и њезину прву пројекцију 2′. Биће на X-оси, а на ординати из 2″. Исто тако, ако имамо неку тачку 1′ на t_1', друга пројекција 1″ биће на X-оси. А могло би да се каже и обрнуто: Ако је на X нека тачка 1″ равни, тада је 1′ на t_1'.

Раван t_1 t_2 у сл. 23 је „*произвољна раван*“.

§ 12. Раван у специјалном положају

Исто као тачке и праве, могу и равни да заузму неки специјални положај према пројекциским равнима.



Сл. 24

Тако на пр. раван може да буде $\parallel H$. У том случају (сл. 24*a*) прва траса, пресек равни са H_1 биће у бесконачности док ће t_2 бити $\parallel X$

Таква раван, пошто је ∥ H, управна је на V, па свака њезина тачка има своју другу пројекцију на t_2'', јер је пројекциски зрак ⊥ V једна права саме равни. То значи да ће друга траса t_2'' бити друга пројекција целе равни. Одатле следи:

Ако се у некој равни једна права пројектује као тачка, цела се раван у тој пројекцији пројектује као права. За такве равни кажемо да су *„пројектне равни“* или *„зрачне равни“*. *„Прва пројектна раван“* је раван која се у H пројектује као права, а *„друга пројектна раван“* је раван која се у V пројектује као права.

Када је раван паралелна са V, прва јој је траса t_1 ∥ X. (сл. 24*b*). И ово је пројектна раван, и то прва пројектна раван.

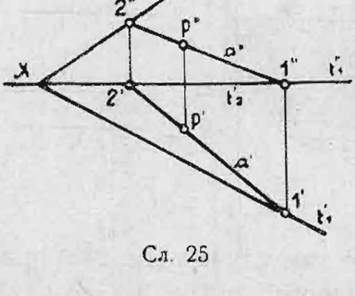
У сл. 24*c* цртана је у косој и у ортогоналној пројекцији једна раван управна на H. Прва траса t_1 равни може да заклапа било који угао са X, према положају равни, док ће јој друга траса t_2'', а то је битно, стајати управно на X-осу. Ако у овој равни имамо неку тачку, па хоћемо да јој одредимо прву пројекцију, пројекциски зрак управан на H пролазиће кроз саму раван, јер је и она ⊥ H. Прва пројекција тачке биће на t_1'. Према томе је и ово прва пројектна раван.

Аналогно је са равни управном на V. Друга јој је траса t_2 произвољна, али t_1 стоји ⊥ X. И ово је пројектна раван, и то друга пројектна раван.

Наведене четири равни у специјалном положају су важне, нарочито ове две последње, јер ћемо такве равни узимати као помоћне равни за решавање задатака.

На крају, уцртана су још два специјална положаја равни. То је раван ∥ P (сл. 24*e*) и раван ⊥ P (сл. 24*f*). Прва је ⊥ H и ⊥ V, па су јој према томе трасе t_1 и t_2 ⊥ X. Ова је раван прва и друга пројектна раван. Друга раван је ⊥ P, према томе ∥ X, те су јој и трасе t_1 t_2 ∥ X. Раван је пројектна само за профилницу.

За вежбу, показати на моделу положаје свих ових равни.



Сл. 25

§ 13. Права и тачка у равни

Када нам је задата нека произвољна раван t_1 t_2 и у њој уцртана друга пројекција a'' неке праве a за коју знамо да лежи у равни, сама права a је потпуно одређена. Према томе можемо да јој одредимо прву пројекцију a'

Продужимо a'' до пресека $2''$ са t_2'' и до пресека $1''$ са t_1'', (на X-оси).

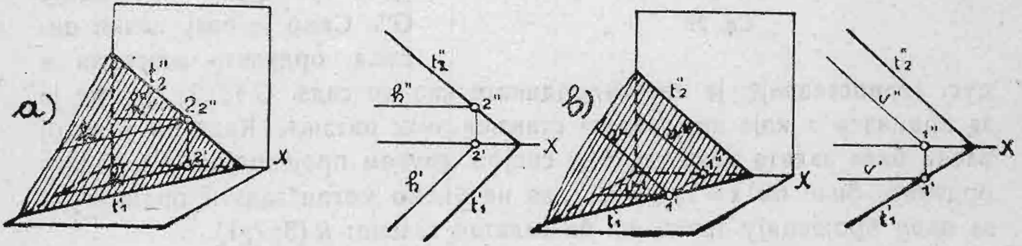
Одредимо затим прве пројекције тачака 1 и 2, па ће кроз 1′ и 2′ пролазити a' тражена прва пројекција праве.

Ако је на правој a нека тачка P и имамо на a'' тачку P'', тада је и P' на својој ординати на a'.

Тиме смо нашли и начин како ћемо одредити прву пројекцију P' неке тачке P у равни, чија нам је друга пројекција P'' задана. Кроз задану тачку P'' повучемо произвољну праву у равни и продужимо је до пресека са трасама. Тачке на трасама можемо преносити из једне пројекције у другу. Пренесимо те тачке, уцртајмо пројекцију праве и на њој ћемо имати тражену пројекцију тачке.

Место произвољне праве можемо да повучемо специјалне праве у равни. Као специјалне праве у равни могу да дођу у обзир само праве $\parallel H$ и $\parallel V$. Права паралелна са H, ако је у равни, мора да је паралелна са t_1 (јер је t_1 у H). Према томе, прва пројекција праве која лежи у произвољној равни $t_1\ t_2$ а паралелна је са H биће паралелна са t_1' а друга њезина пројекција је паралелна са X-осом (види сл. 26*a*).

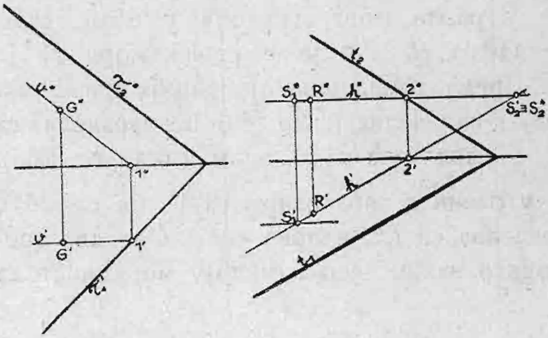
Аналогно је и са правом у равни а паралелном са V, (в. сл. 26*b*). Друга пројекција биће јој паралелна са t_2'', а прва $\parallel X$. Ове две специјалне праве у равни су нарочито важне, јер нам дају могућност да лакше решимо неке задатке. Ради тога их нарочито називамо и обележавамо. Тако ћемо праву у равни а паралелну са H називати *„прва главна линија“*, или *„прва сутражница“*, или краће *„хоризонтала“* и обележавати словом h ($h'\ h''$). Праву у равни паралелну са V називаћемо *„друга главна линија“*, или *„друга сутражница“*, или краће *„фронтала“* и обележавати словом v ($v'\ v''$).



Сл. 26

Овако узета, и прва траса t_1 равни није друго него једна од „првих главних линија“ равни, једна од „хоризонтала“ равни, само што је случајно у H. По томе она добија нарочито значење као пресек равни са пројекциском равни, дакле траг или траса равни. Исто тако и друга траса t_2 није него једна од „других главних линија“ равни, једна од „фронтала“ равни, једино што је у V, па по томе пресек равни са V, њезин други траг, друга траса t_2.

Када у произвољној равни хоћемо да узмемо неку тачку, смемо слободно да узмемо само једну пројекцију те тачке. Тачка је том једном пројекцијом и условом да лежи у равни потпуно одређена. Помоћу произвољне праве у равни или помоћу сутражнице можемо да одредимо другу пројекцију тачке. Тим јој одредимо висину изнад H, њезину другу ординату z. Никако не бисмо смели написати у задатку да је тачка у равни, а унапред задати све три њезине ординате x, y и z. Тако је у сл. 27 у произвољној равни τ задата тачка G ординатама $x=3$; $y=2$. Задата је дакле прва пројекција G' тачке. Другу пројекцију тачке одредимо помоћу сутражнице. Узмимо другу $v'\,v''$. Кроз G' повучемо v' (паралелно са X-осом) до пресека $1'$ са првом трасом. Одредимо другу пројекцију $1''$ те тачке, па ће кроз њу ићи v'' паралелно са другом трасом. Ординатом из G' одредимо на v'' тражену другу пројекцију G''. Само је овај начин писања ордината незгодан и дуг. Једноставније је писати ординате као до сада G (3; 2; ?), где је за ординату z која није задата стављен знак питања. Када би у истој равни била задата нека тачка R својом другом пројекцијом R'', задате ординате биле би $x=1$; $z=2$. Тада не бисмо могли задати ординату y за прву пројекцију тачке, па би задатак гласио: R (3; ?; 1).

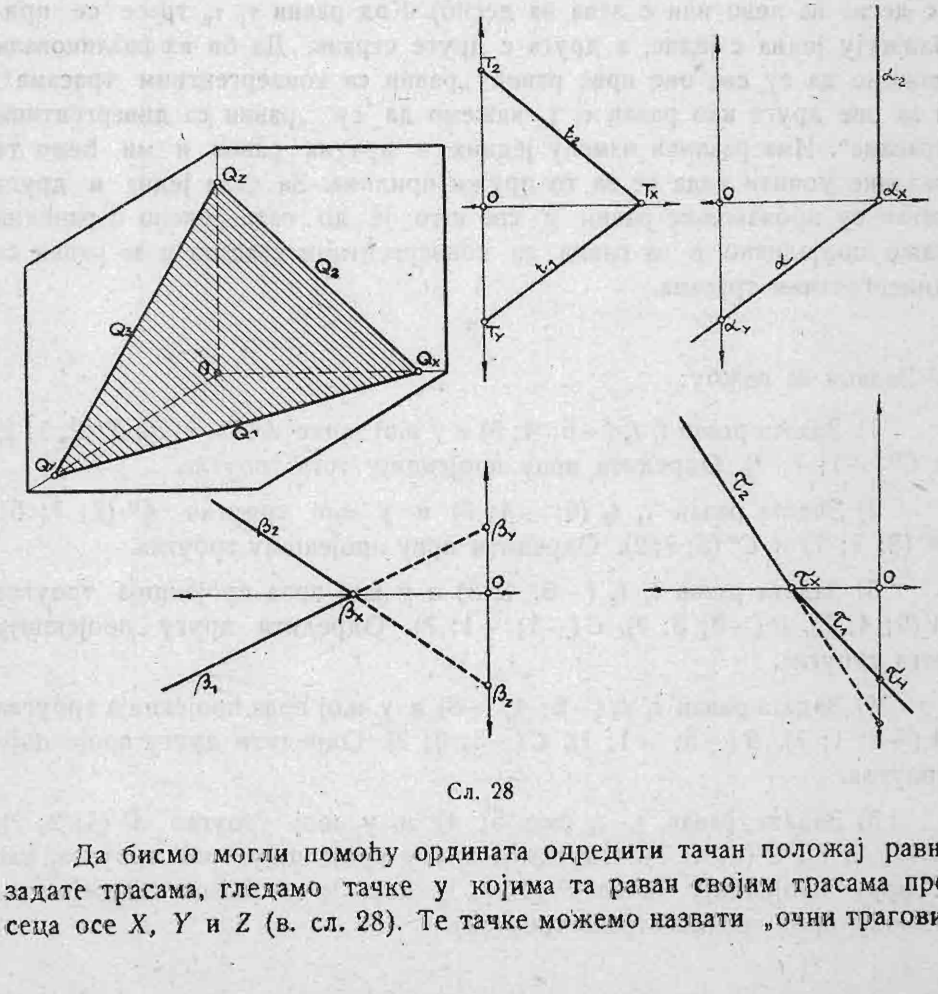


Сл. 27

Нарочит је случај када треба да у задатој произвољној равни одредимо тачку P ($y=3$; $z=2$) или, пошто је ордината x непозната, можемо написати краће за ту тачку P(?; 3; 2) (в. сл. 27). Све тачке чија је висина $z=2$ имају своју другу пројекцију на једној правој паралелној са X-осом. Ако усто те тачке треба да леже и у задатој равни, тада та права може да буде само друга пројекција једне хоризонталне праве у равни, дакле h'', друга пројекција прве сутражнице h. Продужимо одмах h'' до пресека $2''$ са другом трасом t_2'', одредимо на X-оси прву пројекцију $2'$, па кроз $2'$, а паралелно са t_1' иде h', прва пројекција сутражнице h. У I пројекцији треба да на h', одаберемо ону тачку која има отстојање од вертикалнице $y=3$ (в. сл. 27). Тако је одређена R', прва пројекција тражене тачке, па јој је на ординати и на h'' друга пројекција R''.

На овај исти начин решили бисмо задатак када би се тражило да у произвољној равни одредимо неку тачку S_1 прве симетралне равни. Једина је разлика, што би у том случају ординате y и z за ту тачку требало да буду једнаке. Када би се тражило да у произвољној равни одредимо неку тачку S_2 која припада другој симетралној равни, решење би било исто, али уствари најлакше. У том случају за $z=2$ тачке S_2 треба да буде ордината $y=-2$. Када дакле, као пре, повучемо h'' и одредимо h', треба да продужимо h' изнад X осе (јер се изнад X-осе налазе тачке са ординатом $-y$). Продужимо h' до пресека S_2 за h''. То је тражена тачка. У задатој је равни, јер је на њезиној сутражници h, а лежи у другој симетралној равни, јер јој се пројекције поклапају.

(Почетници нерадо продужавају сутражнице преко траса. Сматрају да све тачке равни треба да буду на делу равни између траса — на делу равни који је у I квадранту. Заборављају да су равни неограничене и да пројекције њихових тачака могу да буду на било ком делу H и V).



Сл. 28

Да бисмо могли помоћу ордината одредити тачан положај равни задате трасама, гледамо тачке у којима та раван својим трасама пресеца осе X, Y и Z (в. сл. 28). Те тачке можемо назвати „очни трагови“

и обележавати са T_x, T_y, T_z. Као било које друге три тачке тако и ове потпуно одређују раван $t_1\ t_2$. Разлика је у томе што је свака од ових тачака одређена само једном ординатом док су друге две ординате једнаке нули. Тако је за T_x $x=7$; $y=0$; $z=0$. Стога је раван одређена, ако напишемо $t_1\ t_2$ ($T_x=7$; $T_y=5$; $T_z=6$) или скраћено $t_1\ t_2$ (7; 5; 6). Код другог примера у сл. 28 задата је раван $\alpha_1\ \alpha_2$ (7; 5; ∞). Значи да је осни траг α_z у бесконачности, а то значи да је α_2 паралелно са Z-осом, па да је сама раван управна на хоризонталницу. На слици су нацртане и ове две равни $\beta_1\ \beta_2$ (–6; –4; –3) и $\tau_1\ \tau_2$ (–4; 4; –6). При цртању траса не треба заборавити да осни трагови T_x и T_y одређују прву трасу, а T_x и T_z другу трасу равни. Било би корисно да почетници наглашавају пуним линијама само онај део прве трасе који је испод X-осе и онај део друге трасе који је изнад X-осе. Тако је урађено на сл. 28.

Код свих равни које смо до сада цртали, па и код равни $t_1\ t_2$ трасе су се с исте стране приближавале свом пресеку са X-осом (с десна на лево или с лева на десно). Код равни $\tau_1\ \tau_2$ трасе се приближују једна с једне, а друга с друге стране. Да би их разликовали кажемо да су све оне прве равни „равни са конвергентним трасама“, а за ове друге као раван $\tau_1\ \tau_2$ кажемо да су „равни са дивергентним трасама“. Има разлика између једних и других равни и ми ћемо те разлике уочити када се за то пружи прилика. За сада једна и друга раван су произвољне равни и све што је до сада речено о равнима важи подједнако и за равни са конвергентним трасама и за равни са дивергентним трасама.

*

V Задаци за вежбу:

1) Задата раван $t_1\ t_2$ (–6; 4; 5) и у њој тачке A'' (1; ?; 5), B'' (2; ?; 1) и C'' (–1; ?; 2). Одредити прву пројекцију тога троугла.

2) Задата раван $t_1\ t_2$ (6; –4; 6) и у њој троугао A'' (7; ?; 5), B'' (8; ?; 1) и C'' (5; ?; 2). Одредити прву пројекцију троугла.

3) Задата раван $t_1\ t_2$ (–6; 4; 5) и у њој прва пројекција троугла A (2; 4; ?), B (–3; 3; ?), C (–1; –1; ?). Одредити другу пројекцију тога троугла.

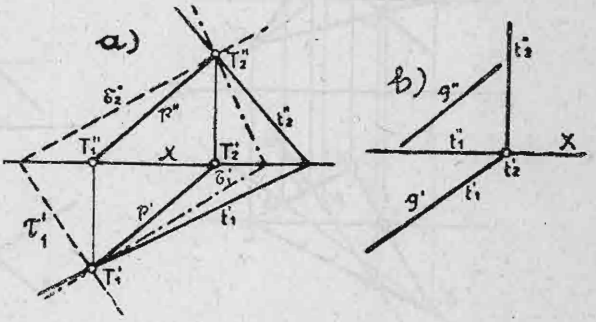
4) Задата раван $t_1\ t_2$ (–6; 4; –8) и у њој прва пројекција троугла A (–8; 1; ?), B (–5; –1; ?), C (–3; 3; ?). Одредити другу пројекцију троугла.

5) Задата раван $t_1\ t_2$ (∞; 5; 4) и у њој троугао A' (4; 2; ?), B' (7; 1; ?), C' (9; 4; ?). Одредити другу пројекцију тога троугла, као и прву пројекцију тачке P (4; ?; 1) која је у равни. (Одређивати помоћу продужених страна троугла).

6) Задата раван $t_1\ t_2\,(-6;\ 4;\ 5)$ и у њој тачке $M\,(-1;\ 2;\ ?)$, $R\,(1;\ 1;\ ?)$ и $K\,(2;\ 5;\ ?)$. Нацртати сва три могућа паралелограма (да им дијагонала буде *RK* или *MK* или *MR*) и одредити им другу пројекцију.

§ 14. Раван кроз праву или кроз тачку

Узмемо ли у сл. 25 праву *a* саму за себе, тачке 1 и 2 су њезини трагови. Исто тако су тачке 2 и 1 сл. 26 трагови правих *h* и *v*. Видимо да су сви ти трагови правих на трасама равни. То је само по себи разумљиво. Јер када нека раван ,рецимо *H*, сече произвољну раван, пресеца и све праве у равни. Природно, да ће пресечне тачке, свих пресечених правих бити на пресечној правој тих двеју равнина. Међутим, када знамо да трагови свих правих у равни треба да буду на трасама равни и обрнуто, можемо лако да решимо овај задатак: Кроз задату праву *p* повући произвољну раван.



Сл. 29

Пошто трасе равни треба да пролазе кроз трагове праве, одредимо трагове праве *p*. Свака права у *V* која пролази кроз T_2'' може да буде друга траса t_2'' тражене равни, а од пресека t_2'' са *X*-осом па кроз T_1' њезина прва траса t_1'. Задатак је неодређен, јер кроз једну праву можемо повући бесконачно много равни. У сл. 29*a* повучене су три равни.

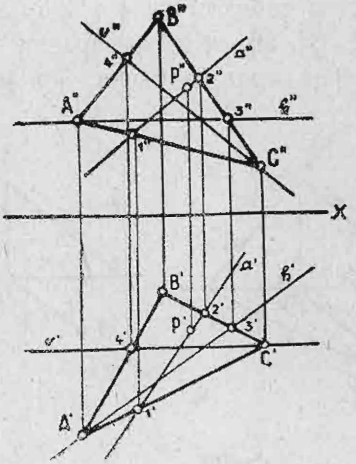
Исто толико важан је и следећи задатак: кроз задату произвољну праву *g* повући раван управну на хоризонталницу. Овај је задатак потпуно одређен, јер постоји свега једна таква раван. Тражена раван ($\perp H$) је прва пројектна раван. Цела раван и све што је у њој, има своју прву пројекцију на првој траси, па ће се према томе t_1' поклопити са g'. Друга траса равни треба да је $\perp X$, као што смо већ видели.

За вежбу израдити модел овога задатка као и другог: кроз *g* повући раван $\perp V$.

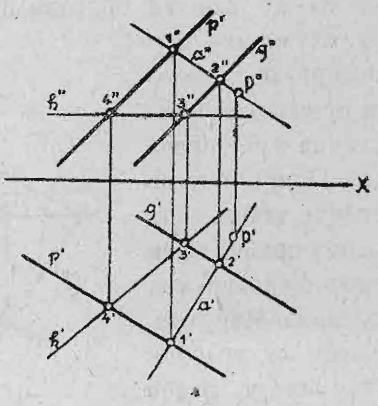
Ако задатак гласи да се кроз произвољну тачку *P* повуче нека произвољна раван, решење је исто као и у сл. 29. Кроз *P* повучемо било коју помоћну праву *a*, а кроз њезине трагове повучемо трасе тражене равни (в. сл 25). Место произвољне помоћне праве могу се употребити главне линије.

§ 15. Раван одређена трима тачкама

Ако су нам задате три тачке *A*, *B* и *C* неке равни, али тако да нису на једној правој, самим тим је раван потпуно одређена. (Кроз те три тачке можемо повући две праве које се секу, две паралелне праве или једну праву и тачку).



Сл. 30*a*



Сл. 30*b*

Тако је у сл. 30*a* задата једна раван тачкама *A*, *B* и *C* и одмах уцртан троугао *A B C*, а у сл. 30*b* друга раван паралелним правама *g* и *p*.

Ако је у тим равнима задата по једна права *a*, и то само својом другом пројекцијом *a″*, прву пројекцију *a′* праве можемо да одредимо овако: продужимо *a″* до пресека 1″ и 2″ са правима чије обе пројекције знамо. Одредимо прве пројекције тих тачака, па ће кроз 1′ и 2′ пролазити тражена прва пројекција *a′* праве *a*. Тачка *P″* на правој *a″* имаће *P′* на *a′*,

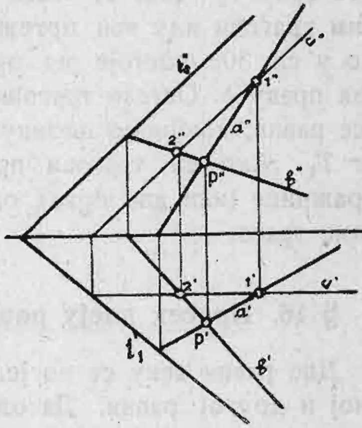
Обрнут задатак, када је у равни задата тачка *P″*, па се тражи *P′*, решавамо на исти начин. Кроз *P″* повучемо произвољну помоћну праву *a″* у равни, одредимо као пре *a′*, па је на *a′* тачка *P′*.

Често је код овако задатих равнина потребно одредити сутражнице — главне линије.

Тако је одређена прва сутражница *h* у сл. 30*a*. Пошто је $h \parallel H$ повучемо јој најпре другу пројекцију *h″* за коју знамо да мора лежати $\parallel X$, одредимо тачке 3″ и 4″ где она сече две праве познате у обема пројекцијама, па помоћу 3′ и 4′ одредимо *h′*. У првом задатку, повучена је *h″* кроз *A″*, па је *h′* одређена помоћу *A′* и 3′. Тиме је олакшана конструкција, јер смо морали цртати само једну ординату за тачку 3, а уједно, самим тим, повећана је и тачност.

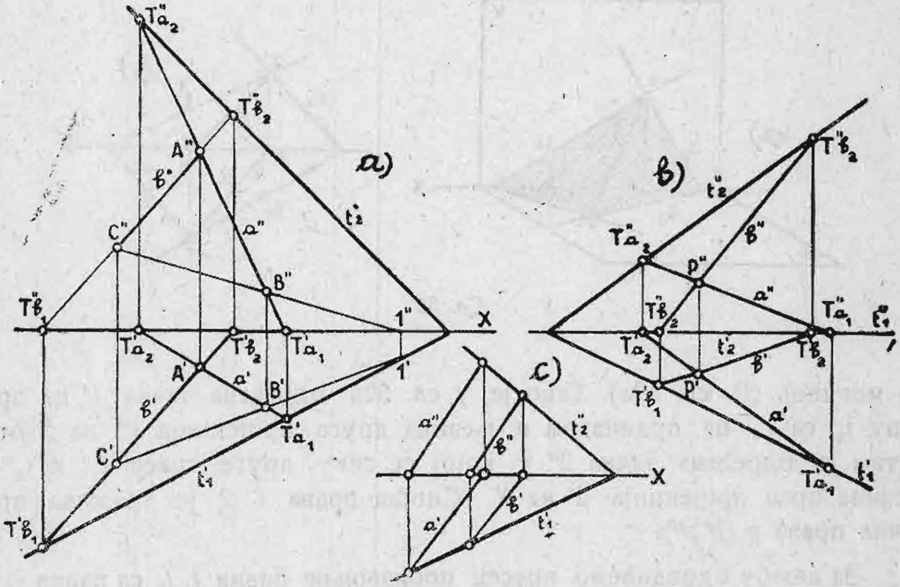
На исти начин конструисана је и друга сутражница v. Повукли смо најпре v', (за коју знамо да је $\parallel X$) и то из C', па смо је помоћу пресечне тачке $4'$ на страни $A'\,B'$ троугла пренели у другу пројекцију.

И у сл. 30*c* повучена је друга сутражница v у једној равни заданој двема правима a и b који се секу. Повучена је најпре $v' \parallel X$ и помоћу пресечних тачака 1 и 2 пренета у другу пројекцију.



Сл. 30*c*

Врло чест је задатак да се код овако задатих равнила траже трасе. Конструкција нам је већ позната, јер знамо да трасе равни треба да пролазе кроз трагове правих. У сл. 31*b* и *c* одређени су трагови задатих правих, па су кроз те трагове повучене тражене трасе равни. Пошто се трасе морају сећи у једној тачки на



Сл. 31

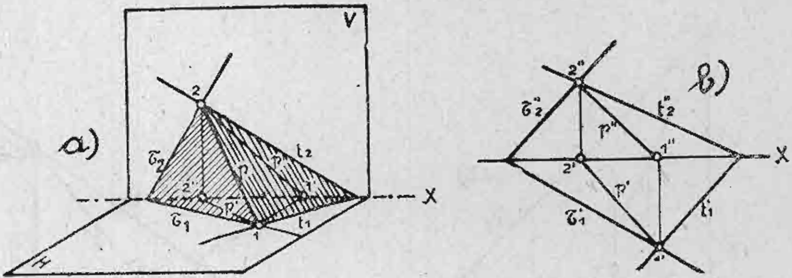
X-оси, то нам је контрола тачности. У сл. 31 код првог задатка, где је раван задата тачкама *A*, *B* и *C* продужимо само стране троугла и одредимо трагове тих правих.

Стварно су нам потребна свега три трага. Два прва одређују t_1, а кроз њезин пресек са X и кроз један други траг пролази тражена друга траса t_2''. Али се често деси да су праве задате тако незгодно да им трагови иду ван цртежа. У том случају умећемо нове праве. Тако у сл. 30*c* постоје на цртежу свега два трага: T_1 за праву a и T_2 за праву b. Остали трагови падају ван цртежа. Да ипак одредимо трасе равни, повучемо њезину другу сутражницу v и одредимо њезин траг T_1. Ако су трагови правих уопште неподесни, повучемо обе сутражнице (или две прве), одредимо њихове трагове, а помоћу њих и саме трасе.

§ 16. Пресек двеју равни

Две равни секу се по једној правој. Та пресечна права припада једној и другој равни. Да одредимо пресечну праву довољно је да одредимо две њезине тачке, дакле две тачке које припадају једној и другој равни.

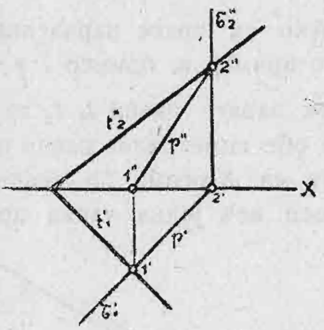
У случају да су равни које се секу задате трасама, за одређивање пресечне праве најбоље је узети тачку у којој се секу прве трасе и тачку у којој се секу друге трасе задатих равни (уколико је то могуће). (В. сл. 32*a*). Тако је у сл. 32*b* одређена тачка 1′ на пресеку t_1' са τ', па ординатом и њезина друга пројекција 1″ на X-оси. Затим је одређена тачка 2″ у којој се секу друге трасе t_2'' и τ_2'' и њезина прва пројекција 2′ на X. Спојна права 1 2 је тражена пресечна права p ($p'\,p''$).



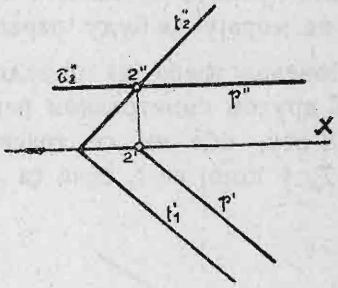
Сл. 32

За вежбу одредићемо пресек произвољне равни $t_1\,t_2$ са равни $\tau_1\,\tau_2$ управном на H. Прве трасе секу се у тачки 1′, па одредимо и 1″ на X-осовини. Друге се трасе секу у 2″, а 2″ пада на X, тачно на пресек траса. Услед тога се p' поклапа са τ_1'. То смо могли и да предвидимо, јер је раван $\tau_1\,\tau_2 \perp H$ прва пројектна раван. Све што је у њој, има своју прву пројекцију на τ_1', па према томе и пресечна права p'.

Као други пример узета је произвољна раван t_1 t_2 и одређен њезин пресек са једном равнином $\|$ H. Друге трасе секу се у $2''$ ($2'$ на X). Траса τ_1 равнине $\|$ H је у бесконачности, па ће у бесконачности



Сл. 33

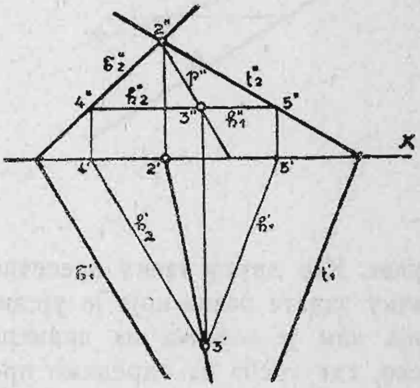


Сл. 34

бити и тачка $1'$ у којој се сече t_1' са τ_1'. Одатле следи, да ће p' као спојна права $2'$ $1'$ бити $\|$ t_1'. Раван $\|$ H је друга пројектна раван, па ће се p'' у пројекцији поклапати са τ_2''.

Пресечна права припада обема равнинама које се секу. Она је дакле, у произвољној равни t_1 t_2, али је паралелна са H, јер је у равни $\tau \| H$, што значи да је она прва сутражница равни. Одатле нам нова дефиниција за прву сутражницу:

Прва сутражница h неке равни је пресек те равни са једном равни паралелном са H. Аналогно је са другом сутражницом.



Сл. 35

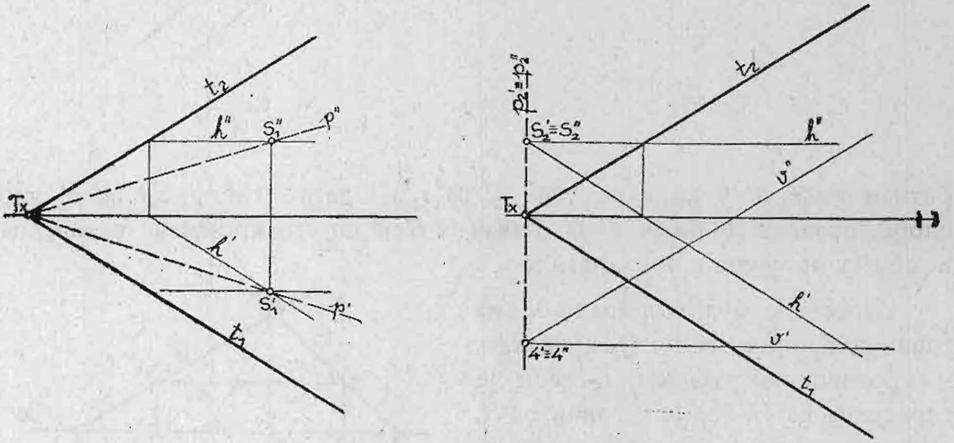
Овај пример даје нам могућност да лако одредимо пресек двеју равни, чије се прве или друге трасе секу ван цртежа. У том случају (в. сл. 35) одредимо тачку $2''$ ($2'$) коју имамо. Да одредимо још једну тачку пресечне праве, узмемо помоћну равн $\|$ H и са њом пресечемо обе равни. Помоћна раван сече их по сутражницама. У пресеку тих сутражници имамо тачку $3'$ која припада обема равнима. Тачка 3 је према томе једна тачка пресечне праве, па је $[2'\ 3'] = p'$ а $[2''\ 3''] = p''$.

У случају да обе равни које се секу пролазе кроз исту тачку P на X-оси, та је тачка већ једна тачка пресечне праве. Другу тачку пресечне праве одредимо, као код пређашњег примера, помоћном равни $\|$ H или $\|$ V.

Ако се пресек првих траса двеју равни удаљи у бесконачност, а исто тако и пресек других, удаљила се у бесконачност цела пресечна права. То значи да су задате равни између себе паралелне. Ако су две равни паралелне, паралелне су им прве трасе, а и друге.

Ово правило не важи и обрнуто. Ако су трасе паралелне, саме равни не морају да буду паралелне. Као пример в. пример *i* у сл. 37.

Понекад треба да одредимо пресек задате равни t_1 t_2 са првом или са другом симетралном равни. Како обе симетралне равни пролазе кроз *X*-осу, обе им се трасе поклапају са *X*-осом. То значи да је тачка T_x у којој се t_1 сече са t_2 на *X*-оси већ једна тачка пресечне праве. Као другу тачку пресечне праве можемо да узмемо било коју тачку задате равни која је уједно и тачка симетралне равни. Конструкција нам је позната из примера на слици 27. Тако је на слици 36 лево, где треба да одредимо пресек задате равни са првом симетралном равни, поред тачке T_x узета у задатој равни тачка S_1 (?; 2; 2). Тачка је и у првој симетралној равни, јер јој је отстојање од *V*, $y=2$, једнако отстојању од *H*, $z=2$, а усто обе ординате позитивне. Пресечна права p' p'' наглашена је испрекиданом линијом,



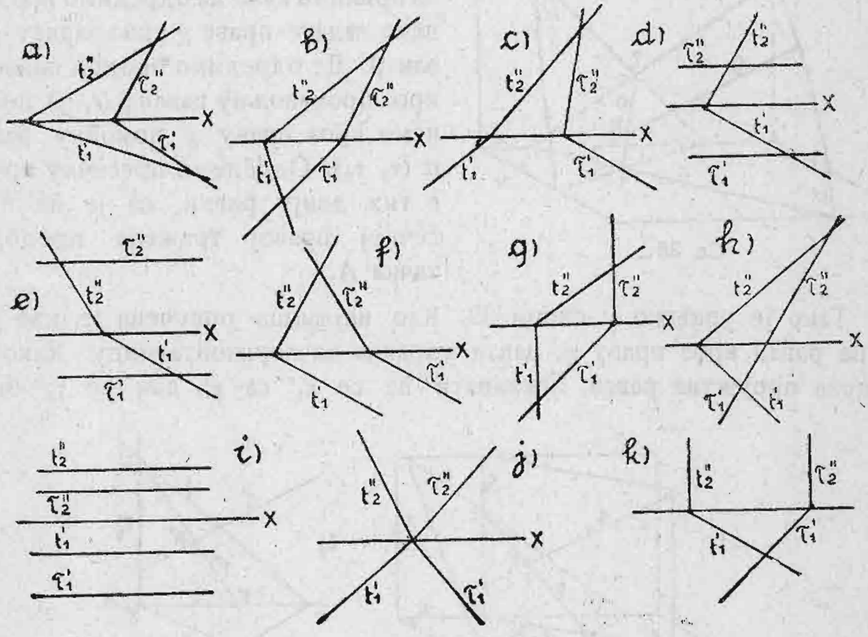
Сл. 36

На истој слици десно одређен је пресек задате равни са другом симетралном равни. За одређивање пресека узета је овде поред тачке T_x тачка S_2 задате равни. Тачка S_2 је (у другом квадранту) у другој симетралној равни, јер јој је $z=-y$. Одређена је помоћу пресека прве пројекције сутражнице h' са другом h''. Тачке T_x и S_2 одређују тражену пресечну праву p' p'' задате равни са другом симетралном равни. Ова права има нарочито значење. Свака њезина тачка има заједничку (преклопљену) прву и другу пројекцију. Значи да ће свака права те исте равни. када дође до пресека са овом правом *p*, имати у пресечној тачки скупа своју прву и другу пројекцију. Другим речима значи да се прва и друга пројекција било које праве те равни морају пресецати у једној тачки ове пресечне праве *p*. Отуда јој и назив „права коинциденције“, јер у њезиним тачкама коинцидирају прве и друге пројекције свих правих те равни. То претставља и олакшицу у конструкцији, нарочито у конструкцији помоћу сутражница. Јер ако повучемо прву пројекцију *v'* једне фронтале, да одредимо другу пројекцију, довољно је да продужимо *v'* до пресека 4' 4'' са пресечном правом *p*. Из тачке 4' 4'' иде друга пројекција *v''* паралелно са другом трасом равни.

У случају да нам раван није задата трасама, место тачке T_x узмемо још једну тачку *S*, па нам те две тачке одређују пресечну праву *p*.

VI Задаци за вежбу

За вежбу поред понављања већ решених задатака нека се одреде и пресеци равни заданих на (сл. 37).



Сл. 37

Код примера *f* (треба напоменути да је $t_1' \parallel \tau_1'$, па је тачка 1' у бесконачности, а то значи $p' \parallel t_1' \parallel \tau_1'$. За пример *i*(важи исто, само је и 2 у бесконачности, па је и $p'' \parallel t_2'' \parallel \tau_z''$. Сам положај праве *p* наћићемо овако. Помоћна раван ⊥ *H* или ⊥ *V* сече једну раван по *a* другу по *b*. Пресек правих *a* и *b* даје једну тачку која је заједничка обема равнима, а то значи да кроз њу пролази и пресечна права *p*.

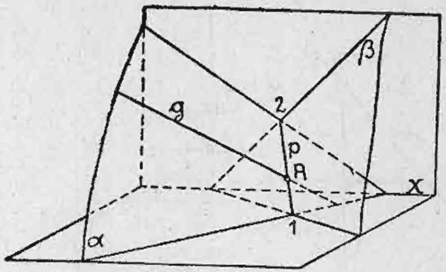
Пример *ј*) можемо да решимо као и пример у сл. 35. Једна тачка пресечне праве је тачка на *X*-оси, кроз коју пролазе обе равни. Другу тачку одредимо помоћном равни $\parallel H$ или $\parallel V$.

§ 17. Раван и права ван ње

Претпоставимо да су нам задате две равни α и β и да раван α садржи у себи праву g. За такве две равни (види сл. 38) лако можемо да одредимо пресечну праву p. Уочимо тачку 2 у којој се пресецају друге трасе, исто тако тачку 1 у којој се секу прве трасе, па је права 2 1 тражена пресечна права p.

Ако раван β пресеца равнину α по првој p, тада сече и праву g у њој и то у тачки A, која је на пресечној правој p.

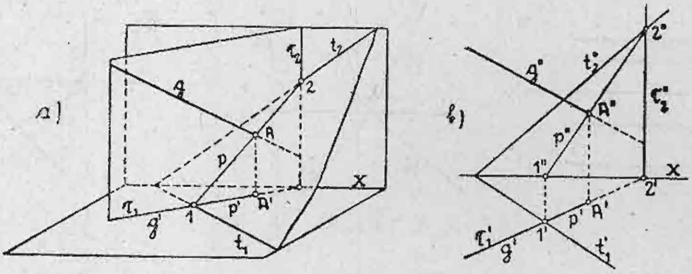
Занемаримо ли за час раван α, па се задржимо само на правој g и равни β, смемо да кажемо: права g продире кроз раван β у тачки A. Тачка A је *продорна тачка* праве g кроз раван β.



Сл. 38

Овај пример нам јасно указује на принцип како да одредимо продор неке задате праве g кроз задату раван β. Да одредимо продор праве g кроз произвољну раван β (t_1 t_2) повучемо кроз праву g помоћну раван α (τ_1 τ_2). Одредимо пресечну праву p тих двију равни, па је на пресечној правој тражена продорна тачка A.

Тако је урађено у слици 39. Као најлакша повучена је, као помоћна раван кроз праву g, раван управна на хоризонталницу. Како је то прва пројектна раван, поклапати ће се τ_1' са g', док ће τ_2'' бити



Сл. 39

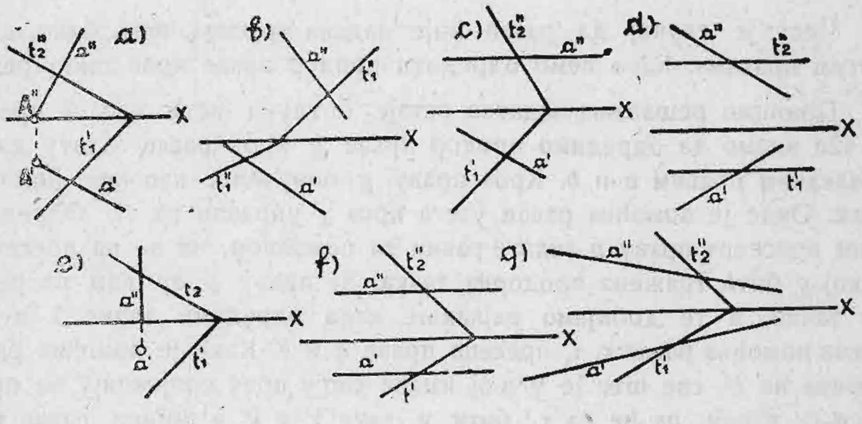
управна на *X*-осу. (У слици 39*b* где је исти задатак решаван у ортогоналној пројекцији могла би се, као помоћна раван, повући кроз праву g и раван управна на вертикалницу. Друга би јој се траса τ_2''

поклапала са g'', док би прва траса τ_1', била управна на осу X. Одређена је затим пресечна права p помоћу тачака у којима се секу трасе, па је на тој пресечној правој p тражена продорна тачка A праве g кроз задату раван t_1 t_2. (На g' је њезина прва пројекција A').

VII Задаци за вежбу

1) За вежбу нека се одреди што више продора произвољних правих кроз произвољне равни са конвергентним и дивергентним трасама.

2) Одредити продоре правих код примера нацртаних у сл. 40.



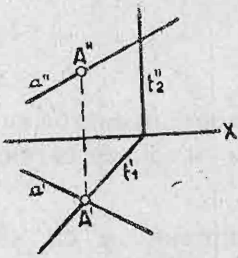
Сл. 40

Пример под a) је као у сл. 39 и понављаћемо га често када будемо одређивали пресеке рогљастих тела. Овде је боље, као помоћну раван, употребити раван $\perp$ V.

Код примера e) права a је $\perp$ H. Као помоћну раван можемо узети само раван $\perp$ H. Она је подесна и с тога, што кад имамо две такве праве, можемо употребити исту помоћну раван за обе праве. Међутим овде можемо одредити продорну тачку и на други лакши начин. Права a је управна на H, дакле прва пројектна права. Све тачке праве, па и сама продорна тачка, имају своју прву пројекцију у тачки a'. Како је продорна тачка и на равни, довољно је кроз a' повући сутражницу равни, па је на њезиној другој пројекцији друга пројекција тражене продорне тачке.

У примеру под g) може да настане тешкоћа да се трасе помоћне равни не секу на листу са трасама задане. У том случају помажемо се као код примера у сл. 35.

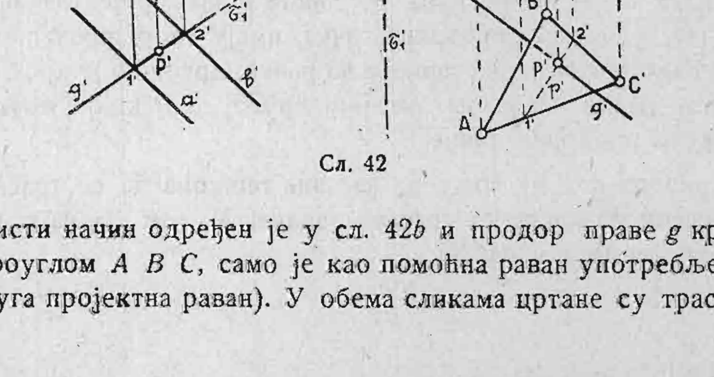
Нарочит случај узет је у сл. 41, где треба да одредимо продор произвољне праве кроз раван управну на *H*. Како је раван управна на *H*, цела раван са свим што је у њој има своју прву пројекцију на првој траси равни. Стога ће се на првој траси t_1' пројектовати и продорна тачка *A*. Пошто *A'* треба да је и на *a'*, положај јој је потпуно одређен. Ординатом одредимо и *A''* на *a''*. Конструкција, заиста, не може да буде једноставнија. (Треба запазити да ова конструкција важи само и једино за продор праве кроз пројектне равни, дакле кроз равни које су управне на једну од пројекцијских равни).



Сл. 41

Чест је случај да раван није задана трасама, него било којим другим правама. Како ћемо одредити продор праве кроз такву раван.

Принцип решавања задатка остаје потпуно исти као и пре. У сл. 42*a* имамо да одредимо продор праве *g* кроз раван задату двема паралелним правим *a* и *b*. Кроз праву *g* повучемо, као пре, помоћну раван. Овде је помоћна раван узета кроз *g* управно на *H*. Одредимо затим пресечну праву *p* задате равни са помоћном, па ће на пресечној правој *p* бити тражена продорна тачка. За праву *p* су нам потребне две тачке, а те добијамо најлакше када одредимо тачке 1 и 2 у којима помоћна раван τ_1 τ_2 пресеца праве *a* и *b*. Како је помоћна раван управна на *H*, све што је у њој имаће своју прву пројекцију на првој траси τ_1' равни, па ће на τ_1' бити и таке 1' и 2' у којима раван пресеца праве *a* и *b*. Одредимо друге пројекције 1'' и 2'' тих тачака, повучемо пресечну праву *p''*, па је на пресеку *g''* са *p''* тражена продорна тачка *P''*. Њезину прву пројекцију *P'* одредимо ординатом из *P''* на *g'*.



Сл. 42

На исти начин одређен је у сл. 42*b* и продор праве *g* кроз раван задату троуглом *A B C*, само је као помоћна раван употребљена раван ⊥ *V* (друга пројектна раван). У обема сликама цртане су трасе помоћних равнина иако нису искоришћене ни за шта. Не треба их, према томе, ни цртати.

И овде код оба примера *a*) и *b*) у сл. 42 може да се постави питање који је део праве *g* видљив, а који невидљив. Јер ако је права и била видљива, па продрла кроз раван, од продорне тачке *P* даље мора да је невидљива (јер је заклања раван).

Да одредимо да ли је у првој пројекцији слике 42 *a* права *g'* десно од продорне тачке видљива или невидљива, узећемо у разматрање тачку 2, у којој се у пројекцији пресецају две мимоилазне праве *b'* и *g'*. Одредимо ли другу пројекцију тачке 2, тачку 2″ као тачку праве *b''*, а исто тако и 2″, као тачку праве *g''*, видећемо да је тачка 2″ на правој *b''* виша, а тачка 2″ на правој *g''* нижа.

Одатле следи да је права *b* видљива, или да је права *g* у првој пројекцији невидљива (јер је заклања раван и права *b* у њој). Према томе права *g* је у правој пројекцији лево од *P'* видљива, а десно од *P'* невидљива.

Да одредимо то исто у другој пројекцији узмимо на доњем делу праве *g''*, испод продорне тачке *P''*, тачку у којој се пресецају праве *a''* и *g''*, па одредимо прве пројекције те тачке на *a'* и *g'*. Како је тачка на *a'* удаљенија ое вертикалнице него тачка на *g'*, значи да је видљива раван и права *a* у њој, а да је у другој пројекцији понова десни (доњи) део праве *g* невидљив (од продорне тачке *P''*).

Права *g* је у сл. 42*a* уцртана пуном линијом цела у обим пројекцијама. Невидљив део праве требало би цртати нешто тањом линијом и испрекидано (као у сл. 42*b*). То је отступање хотимично, да испрекидана линија не нагласи почетнику што је видљиво а што невидљиво, па да услед тога и не обрати пажњу на начин како се то одређује.

Код задатка у сл. 42*b* раван троугла ограничена је, постоји само толики део равни колики је троугао. Услед тога је права *g* цела видљива и може да је заклони само троугао и то само с једне стране од продорне тачке *P* до контуре.

Да одредимо који је део праве у другој пројекцији видљив, а који невидљив узмемо на пр. тачку 2″ у којој се пресецају *g''* и страна *B'' C''* троугла. Одредимо прву пројекцију 2′ на страни *B' C'* и на правој *g'*. Како је тачка 2′ на правој *g'* удаљенија од вертикалнице, односно ближи оку, права *g* је у другој пројекцији видљива (у тачки 2″). Стога је права од тачке 2″ до *P''* видљива и извучена пуном линијом, док је део праве од *P''* до 1″ невидљив и извучен нешто тањом и испрекиданом линијом. На исти начин одређен је видљиви и невидљиви део праве *g* у првој пројекцији.

VIII Задаци за вежбу

Код наведених задатака: одредити продор праве *g* кроз задате равни и који је део праве видљив, а који заклоњен уз претпоставку да је задата раван непровидна.

1) Раван задата двема правама *a* и *b* које се секу. Права *a* тачкама *A* (4; 1; 8), и *P* (8; 2; 4), права *b* тачкама *P* и *B* (2; 6; 2). Права *g* тачкама *E* (3; 1; 2) и *F* (10; 5; 8).

2) Раван задата троуглом *A* (0; 4; 0), *B* (4; 6; 6), *C* (7; 1; 2). Права *g* тачкама *E* (–1; 0; 1) и *F* (8; 6; 4).

3) Раван задана четвороуглом *A* (–2; 3; 1), *B* (2; 5; 7), *C* (9; 2; 9) и *D* (5; 0; 3). Права *g* тачкама *E* (–3; –1; 9) и *F* (6; 5; 3).

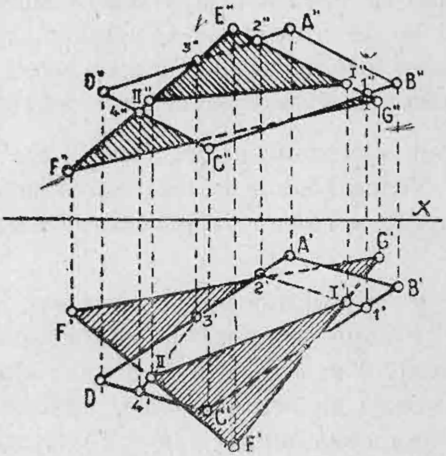
4) Раван задана двема паралелним правама *a* и *b*. Права *a* тачкама *A* (2; 1; 5) и *B* (10; 4; 5), права *b* тачкама *C* (3; 5; 2) и *D* (11; 8; 2). Права *g* тачкама *E* (9; 1; 1;) и *F* (2; 8; 6).

5) Раван задата двема правама *h* и *v* које се секу. Права *h* тачкама *A* (8; 6; 4) и *P* (2; 2; 4), права *v* тачкама *P* и *B* (–2; 2; 0). Права *g* тачкама *E* (2; 5; 8) и *F* (8; 1; 2).

6) Раван задана правама *h* и *v* као у задатку под 5), а права *g* тачкама *E* (–2; 4; 6) и *F* (4; 0; 0).

*

На крају одређен је у сл. 43 пресек двеју равни од којих је једна задата паралелограмом *ABCD*, а друга троуглом *EFG*. Пресечну праву можемо да нацртамо, ако јој одредимо две тачке. Према томе довољно је да одредимо продоре двеју страна једне фигуре кроз раван друге фигуре. На слици су одређени продори страна *EG* и *EF* троугла кроз раван паралелограма. Решење се своди на одређивање продора праве кроз раван. Продорне тачке одређене су као у сл. 42, а трасе помоћних равни, управних на *V*, нису ни цртане.



Сл. 43

Понекада је тешко одредити продоре двеју ивица једне фигуре кроз раван друге фигуре. У тим случајевима може да буде лакше одредити тражени пресек као пресек двеју равни методом помоћних равни паралелних са *H* или са *V*. Таква помоћна раван сече једну и другу задату раван по сутражницама. У пресеку тих сутражница је тачка заједничка једној и другој равни, дакле једна тачка тражене пресечне праве. Задатак нам је познат из сл. 35. Још једном помоћном равни добијамо још једну тачку, а тим и тражени пресек.

Видљиве и невидљиве делове страна задатих фигура одређујемо као у сл. 42.

*

Када продорна тачка праве кроз раван падне у бесконачност, обично се каже да је права паралелна са равни.

Права је паралелна са равни, ако је паралелним померањем можемо довести да легне у раван, или ако у равни можемо да уцртамо другу неку праву паралелну са њом.

Када нам је задата једна права *a* (a'' и a') и нека произвољна раван, да одредимо да ли је права *a* паралелна са задатом равни поступимо овако. Повучемо у равни неку праву $b'' \parallel a''$ и конструишемо b'. Ако је и $a' \parallel b'$, тада је права *a* паралелна са равни, у противном није паралелна.

Отуда принцип како ћемо решавати неколико задатака. Може да буде задата произвољна права *g* и да се тражи да кроз задату тачку *P* повучемо неку раван паралелну са датом правом. Кроз тачку *P* повучемо праву *a* паралелну са *g*. Одредимо њезине трагове, а тада кроз те трагове можемо да повучемо трасе тражене равни. Та је раван паралелна са задатом правом *g*, јер у њој постоји права $a \parallel g$. Решења има бесконачно много, јер кроз једну праву (*a*) можемо да повучемо бесконачно много равни. (Задатак за вежбу 1 и 2). Најлакше је решење када место произвољне можемо да повучемо раван управну на једну од пројекциских равни. У том је случају довољно да кроз P'' повучемо $t_2'' \parallel g''$.

Обрнути задатак, да кроз задату тачку *P* повучемо праву паралелну са задатом равни, решавамо тако да кроз *P* повучемо праву паралелну са неком правом којом је одређена задата раван. Ако је раван задата трасама, можемо повући $h'\ h'' \parallel t_1'\ t_1''$ или $v'\ v'' \parallel t_2'\ t_2''$. Ако је у задатку задата и једна од пројекција тражене праве на пр. a'', тада у равни повучемо неку праву $g'' \parallel a''$, одредимо g' па ће a' ићи кроз P' паралелно са g'. (Задатак 3, 4 и 5).

Други би задатак био: Задата произвољна права *g* и нека друга произвољна права *b*. Кроз праву *b* повући раван паралелну са правом *g*. У том случају узмемо на правој *b* било коју тачку *P* и кроз њу повучемо праву *a* паралелну са задатом правом *g*, Праве *a* и *b* одређују тражену раван. Ако треба да одредимо трасе те равни, задатак нам је познат.

Ово је заправо решење и чешћег задатка, да кроз задату тачку P повучемо раван паралелну са две задате мимоилазне праве p и g. Кроз P повучемо праву $a \parallel g$ и праву $b \parallel p$. Праве a и b одређују тражену раван, а по потреби одредимо и њезине трасе. У случају да тачка P није задана, можемо да је узмемо на једној од задатих правих (а то је предњи задатак). (Задатак 6 и 7).

Најчешћи је задатак да кроз задату тачку P повучемо раван паралелну са задатом равни. Кроз P повучемо две праве паралелне са двема правама које већ имамо у задатој равни, Ако је задата раван одређена трасама t_1 t_2 повучемо кроз тачку P праву $h \parallel t_1$ и праву $\nu \parallel t_2$, значи сутражнице тражене равни паралелне са трасама, односно сутражницама задате равни. Кроз њихове трагове пролазе трасе тражене равни и паралелне су са трасама задате. (Задатак 8 и 9).

IX Задаци за вежбу

1) Задата права g тачкама $A\,(1;\ 1;\ 5)$ и $B\,(5;\ 3;\ 1)$ и ван ње тачка P. Кроз P повући раван паралелну са правом g.

2) Задата права g тачкама $A\,(4;\ 2;\ 6)$ и $B\,(8;\ 0;\ 2)$ и ван ње тачка P. Кооз P повући раван паралелну са правом g.

3) Задата је раван троуглом $A\,(2;\ 2;\ 1)$, $B\,(4;\ 1;\ 6)$, $C\,(7;\ 4;\ 4)$ и ван ње тачка $P\,(10;\ 1;\ 3)$. Кроз P повући праву паралелну са равнином троугла.

4) Задата раван t_1 t_2 $(-6;\ 4;\ 5)$ и ван ње тачка $P\,(2;\ 2;\ 3)$. Кроз P повући праву паралелну са задатом равни.

5) Задата раван t_1 t_2 $(8;\ 4;\ 7)$ и ван ње друга пројекција неке праве g. Права g'' тачкама $A\,(5;\ ?;\ 1)$ и $P\,(8;\ 2;\ 4)$. Кроз P' повући g', али тако да права g буде паралелна са равнином t_1 t_2.

6) Задата права b тачкама $A\,(-4;\ 8;\ 0)$ и $B\,(2;\ 2;\ 3)$ и мимоилазна права g тачкама $C\,(6;\ 2{:}\ 5)$ и $D\,(10;\ 4;\ 2)$. Кроз праву b повући раван да буде паралелна са правом g.

7) Задате две мимоилазне праве, права b тачкама A $(12;\ 4;\ 2)$ и $B\,(16;\ 2;\ 5)$, права g тачкама $C\,(10;\ 2;\ 0)$ и $D\,(13;\ 4;\ 9)$. Кроз тачку $P\,(5;\ 2;\ 3)$ повући раван паралелну са правама b и g.

8) Задати троугао $A\,(2;\ 2;\ 1)$, $B\,(4;\ 1;\ 6)$, $C\,(7;\ 4;\ 4)$ и ван његове равни тачка $P\,(10;\ 1;\ 3)$. Кроз P повући раван паралелну са равнином троугла.

9) Задата раван трасама t_1 t_2 $(8;\ 4;\ 7)$ и ван ње тачка P. Кроз P повући раван паралелну са задатом равни.

10) Код задатака 6, 7, 8 и 9 одредити и трасе тражених равни

§ 18. О рогљастим телима уопште

Рогљаста тела, као што је на пр. коцка, октаедар и сл., састављена су од равни које се између себе секу. Праву по којима се секу две равни називамо *„ивица“*. Наиђе ли нека трећа раван која сече обе поменуте равни, тада она пресеца и саму ивицу. Пресечну тачку називамо *„крајња тачка ивице“* или *„врх рогља“*. Из сваке такве тачке морају да полазе најмање три ивице, јер се у њој секу најмање три равни. Сече ли се у једној тачки више равни, тада из тачке полази више ивица (врх вишестране пирамиде).

Свака права коју повучемо кроз средиште било ког конвексног рогљастог тела има са тим телом две заједничке тачке. Исто тако имаће и пројекциски зрак две заједничке тачке. Где тај зрак продре касније кроз пројекциску раван, имаћемо пројекцију не једне, него двеју тачака тела. Одатле правило:

1) *Пројекције конвексних рогљастих тела су двоструко покривене тачкама.*

Од тих тачака једне су видљиве, а друге невидљиве. Заправо, од двеју тачака које су на једном пројекциском зраку, видљива је она тачка тела кроз коју зрак идући ка пројекцијској равни продире први пут кроз тело. Друга је невидљива.

Што се више удаљавамо од средине тела размак између видљиве и невидљиве тачке на једном пројекциском зраку постаје углавном све мањи (на пр. код октаедра). На концу, наићи ћемо на такве зраке код којих је видљива и невидљива тачка заједно. За те зраке кажемо да додирују тело. Линију по којој ти зраци додирују тело називамо контуром тела. Удаљимо ли се још мало, зраци уопште неће имати заједничких тачака се телом. Одатле правило:

3) *Контура пројекције неког тела је увек видљива.*

Контура је пројекција оног полигона састављеног од ивица које деле видљиви од невидљивог дела тела.

Природно је да ће за неки нови правац пројекциског зрака исто тело имати другу контуру.

На контури су заједно и видљиве и невидљиве тачке тела. Стога могу из сваке тачке контуре да полазе и видљиве и невидљиве ивице тела. Све остале тачке пројекције, дакле све тачке унутра у контури, или су видљиве или невидљиве, па из њих могу да полазе или само видљиве или само невидљиве ивице. На основу тога, ето нам правила:

3) *Ако је нека тачка, која није на контури, видљива, видљиве су све ивице које из ње полазе. Ако је невидљива, невидљиве су и све ивице које из ње полазе.*

4) *Из тачака на контури могу да полазе и видљиве и невидљиве ивице.*

5) *Ако се пројекције двеју ивица укрштају, једна је од њих видљива, а друга невидљива.*

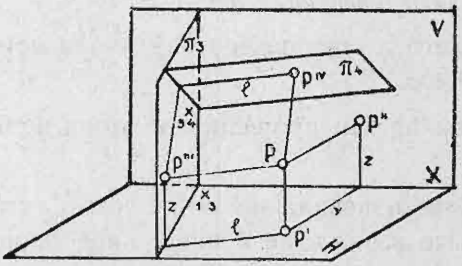
Видљива је она ивица која је удаљенија од пројекциске равни (или, што је исто, она која је ближа оку).

Има ли неки пројекциски зрак више од две тачке заједничке са телом, тада их има бесконачно много. То значи да тај зрак лежи у једној од равни тела и да ће се та раван цела пројектовати као права (пројектна раван).Овакав случај може да се деси само на контури пројекције тела.

Сва ова правила важе само за она тела, са којима било који зрак може да има само две заједничке тачке, дакле само за конвексна тела. Али тада ова правила важе за све пројекције и све врсте пројекција.

§ 19. Трансформација

Знамо да прва и друга пројекција потпуно одређују положај тачака у простору. Тај положај према пројекциским равнима иако је одређен, не мора да буде увек потпуно повољан за решавање задатка који нам је постављен. Можда би тај исти предмет, односно иста фигура, гледана са неке друге стране, а не управно на *H* и управно на *V*, добила једноставнији облик, који би опет дозвољавао једноставније решење постављеног задатка. Већ знамо како се одређује продор праве кроз произвољну раван. Знамо и то колико је лакше одредити продор праве када раван није произвољна него пројектна. Питање је, да ли можемо поставити неку нову пројекциску раван тако да задата произвољна раван буде у новој пројекцији пројектна раван? Може, и то врло једноставно. Довољно је да нову пројекциску раван поставимо управно на *H* и управно на задату произвољну раван. За нову пројекциску раван, у том случају, произвољна раван биће пројектна раван, јер стоји управо на њу (Видети на моделу).



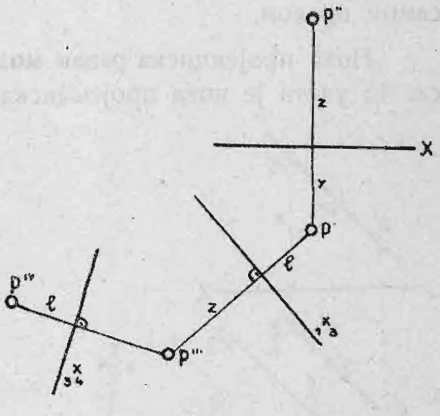
Сл. 44

То уметање нових пројекциских равни и одређивање нових пројекција називамо трансформацијом.

Трансформишу се понекад и правилна рогљаста тела, да би им се том трансформацијом дао лепши и приступачнији изглед.

Као нове пројекциске равни узимају се равни управне на једну од пројекциских равни које већ имамо. Тако је у сл. 44 узета као нова пројекциска раван једна раван управна на *H*. Саму раван, као пројекциску раван, називамо „трећа пројекциска раван“ и обележавамо са π_3. Праву по којој она сече хоризонталницу називамо „нова оса“, а обележавамо је са ${}_1X_3$ да тако нагласимо да је она пресек прве са трећом пројекциском равни. Да одредимо трећу пројекцију P''' неке тачке чије су нам две пројекције, прва и друга, већ познате, повучемо из тачке *P* нов пројекциски зрак управан на нову пројекциску раван π_3 и тачка у којој тај зрак продре кроз нову пројекциску раван је P''', тражена нова, трећа пројекција тачке.

Хоризонталница и нова пројекциска раван π_3 стоје под правим углом исто као што стоје *H* и *V*, па сва правила која важе за прву и другу пројекцију, важе и за прву и нову трећу пројекцију. Тако се управне на нову ${}_1X_3$-осу повучене из P' и P''' секу у једној тачки на ${}_1X_3$-оси. Дуж од P''' до ${}_1X_3$ је ордината једнака отстојању тачке *P* од *H*, исто што и друга ордината *z*. Дуж од P' до ${}_1X_3$ је ордината једнака отстојању тачке *P* од π_3. И као што смо пре цртали прву и другу пројекцију с обзиром на *X*-осу, тако ћемо цртати прву и трећу пројекцију с обзиром на ${}_1X_3$-осу. Повучемо из P' праву управну на ${}_1X_3$ и да на тој правој одредимо трећу пројекцију P''', нанећемо на њој од ${}_1X_3$-осе дуж *z*, отстојање друге пројекције P'' од *X*-осе. (в. сл. 45).



Сл. 45

Када смо узели нову пројекциску раван π_3 и уцртали „нову осу“ ${}_1X_3$, самим тим наглашавамо да је досадашња *X*-оса постала „стара оса“. И за трећу пројекцију кажемо да је „нова пројекција“ (на новој пројекциској равни), а како су две пројекције довољне да одреде положај тачке, самим тим је речено да је једна пројекција постала „стара пројекција“. Из правила да пројекције једне тачке морају стати на правој управној на заједничку осу, јасно је да је баш друга пројекција P'' постала непотребна „стара пројекција“. Према томе можемо да кажемо као правило: Отстојање нове пројекције P''' од нове осе ${}_1X_3$ једнако је отстојању старе пројекције P'' од старе осе *X*.

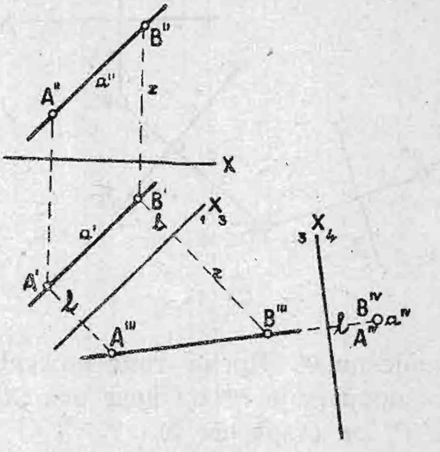
Ако нам ова једна трансформација на π_3 није довољна, можемо да поставимо још једну пројекциску раван π_4. Ту нову пројекциску раван π_4 постављамо тако да буде управна на π_3, без обзира на њезин положај према H и V. Нова пројекциска раван π_4 (в. сл. 44) сече се са π_3. Њихову пресечну праву називамо, доследно, осом и обележавамо са ${}_3X_4$ да би и тим нагласили да је то оса, права по којој се секу трећа пројекциска раван π_3 и четврта π_4. Нову пројекцију P'''' одређујемо поново зраком из P управним на π_4, а како је $\pi_4 \perp \pi_3$ важе поново за P''' и P'''' сва правила о пројекцијама тачке која важе за P' и P'', па их и цртамо као P' и P''.

Када имамо нацртане P', P'' и P''', па хоћемо да одредимо P'''', одаберемо π_4 и повучемо ${}_3X_4$. То је „нова оса“. Када за ${}_3X_4$ кажемо да је „нова оса“, смемо већ сада да кажемо за осу ${}_1X_3$ да је „стара оса“. Ако сада из P''' повучемо нову ординату управну на ${}_3X_4$ и од ${}_3X_4$ нанесемо на њој отстојање l тачке P' од ${}_1X_3$, одредићемо нову четврту пројекцију P'''' тачке P. За P'''' кажемо да је „нова пројекција“, а како знамо да две пројекције — овде P''' и P'''' са зајeдничком осом ${}_3X_4$ потпуно одређују тачку у простору — смемо по аналогији да кажемо да је P' „стара пројекција“. Према томе и овде и уопште за одређивање нових пројекција неке тачке смемо да поставимо као правило:

„Отстојање нове пројекције од нове осе једнако је отстојању старе пројекције од старе осе“.

Као први пример нека нам је задата произвољна права a с тим да јој одредимо трећу пројекцију на једну раван која је паралелна са самом правом.

Нова пројекциска раван може да буде управна на H или на V. У сл. 46 узета је нова пројекциска раван управна на H. Како се тражи да та нова раван буде и паралелна са задатом правом a, узета је нова оса ${}_1X_3$ паралелно са a'. Да одредимо трећу пројекцију праве a, узмемо на њој две повољне тачке A и B. Из A' и B' повучемо праве управне на нову осу ${}_1X_3$, па помоћу ордината z појединих тачака одредимо њихове треће пројекције A''' и B'''. Права A''' B''' је тражена трећа пројекција a''' праве a.



Сл. 46

Иако до сада нисмо говорили о томе, а ни овде му није место, ипак је довољно јасно да се произвољна дуж не показује у пројекцији у својој правој величини, него увек скраћена. Дуж се показује у правој величини једино ако је паралелна са пројекциском равни на коју се пројектује. Према томе, иако нам је првом и другом пројекцијом потпуно одређен положај праве a и дужи $A\,B$ на њој, ипак незнамо колика је њена права величина. Како смо узели да нова пројекциска раван π_3 стоји паралелно са задатом правом a, дуж $A\,B$ пројектује се у тој равни, дакле у трећој пројекцији у правој величини.

За вежбу узета је још једна пројекциска раван π_4 управна на π_3 и то тако да нова оса ${}_3X_4$ стоји управно на a'''. Како су ординате l за тачке A и B једнаке, а и ${}_3X_4$ управна на a''', цела четврта пројекција праве је само једна тачка a''''. То смо могли и предвидети, јер је $\pi_3 \parallel a$, па је $\pi_4 \perp a$. Сама задата права a је за X-осу (дакле за H и V) произвољна права, за осу ${}_1X_3$ (дакле за H и π_3) специјална права, паралелна са π_3, а за ${}_3X_4$ (дакле за π_3 и π_4) специјална права, пројектна, управна на π_4.

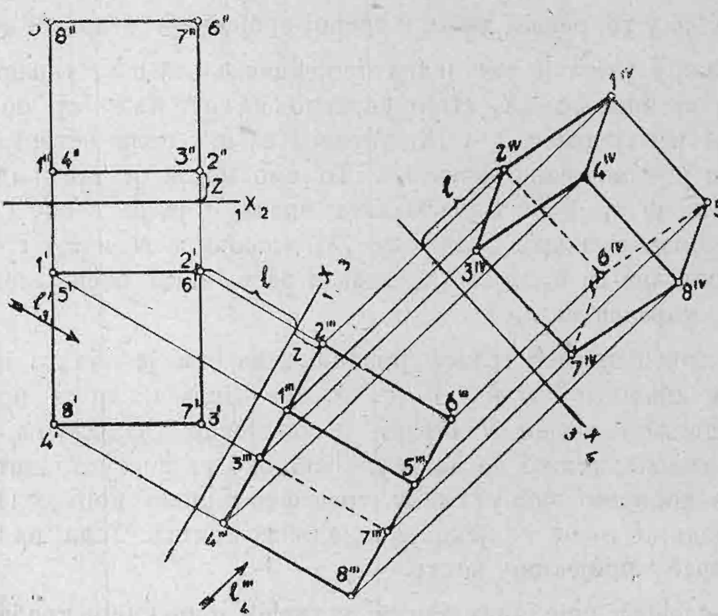
Као други пример трансформације нека нам је задата коцка са по једном пљошти $\parallel H$ и $\parallel V$. (в. сл. 47). Прва и друга пројекција овако постављене коцке у ствари је по један квадрат, па, иако су тачке обележене, тешко да ће неупућено око из њих саставити слику коцке. Да добијемо бољу слику, трансформишемо коцку. Повучемо ${}_1X_3$ и одредимо треће пројекције појединих тачака. Тада их спојимо и имамо трећу пројекцију коцке.

Код спајања појединих тачака у трећој пројекцији треба водити рачуна да свака права коју повучемо претставља трећу пројекцију једне ивице коцке, па да, према томе, смемо спојити само оне тачке које су и на коцки крајње тачке једне ивице. Даље треба водити рачуна и о томе да су на коцки неке ивице паралелне, па да и њихове пројекције морају бити паралелне. Када је цела пројекција уцртана, треба још одредити да ли су све ивице у новој пројекцији видљиве, или има нека да је невидљива. (Видљиве цртамо дебелом линијом, а невидљиве нешто тањом испрекиданом). Видљиве су, као што знамо, оне ивице или тачке, које су ближе оку или удаљеније од пројекциске равни. То отстојање од пројекциске равни π_3 видимо у првој пројекцији. (За тачке 2 и 6 је обележено са l). И смер гледања за трећу пројекцију обележен је стрелицом у првој пројекцији.

Контурне ивице су све видљиве. Остаје да одредимо за ивице $1'''\,5'''$ и $3'''\,7'''$. Ивица $1'''\,5'''$ је најудаљенија од π_3 (дакле најближа оку), па је, према томе, видљива, а ивица $3'''\,7'''$ баш обрнуто, дакле невидљива.

Како ова трећа пројекција, иако је јаснија од првих, није довољно јасна, одредићемо још једну, четврту пројекцију.

Повучемо повољну праву ${}_3X_4$ и ординате из свих тачака $1'''-8'''$ $\perp {}_3X_4$. Тада нанесемо отстојање l старе пројекције (прве) од старе осе $_1X_3$ и добијемо нове пројекције свих тачака. Код спајања тачака треба поново водити рачуна о ивицама, о томе које су са којима паралелне и, најзад, да ли су видљиве или не.



Сл. 47

Све остале тачке су на контури, па имамо да одредимо само за тачке $4''''$ и $6''''$ која је од њих видљива, а која невидљива. Из треће пројекције видимо да је $4'''$ најудаљенија од $_3X_4$ а $6'''$ најближа. Према томе је $4''''$ видљива и све три ивице које полазе из ње, а тачка $6''''$ невидљива. До истог резултата могли смо доћи и на други начин Ивице $4''''$ $8''''$ и $5''''$ $6''''$ се укрштају. Значн да је једна видљива, а друга невидљива. Из треће пројекције видимо да је ивица $4''''$ $8''''$ најудаљенија од $_3X_4$, односно прва на удару пројекциског зрака l'''_4, а ивица $5''''$ $6''''$ близу саме осовине, тако да зрак l'''_4 мора да прође кроз велики део коцке док стигне до ивице. И то је поновaн доказ да је ивица $4''''$ $8''''$ видљива, према томе и тачка $4''''$, па и остале ивице које из ње полазе.

Четврта пројекција је толико јасна да свако без двоумљења може рећи, да је то слика коцке.

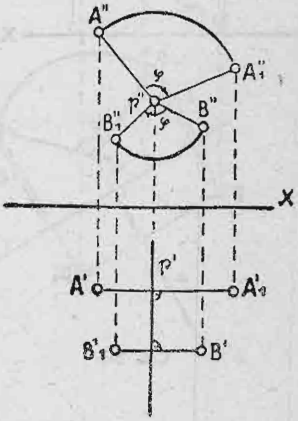
Овакав начин конструкције, да се добију јасније слике предмета није згодан. Захтева много конструкције. Касније ћемо видети лакши начин: аксонометрију или косу пројекцију. Засада је трансформација врло подесна, јер приморава почетника да тачно црта и да стално води рачуна о просторном облику површине коју црта.

§ 20. Окретање (Ротација)

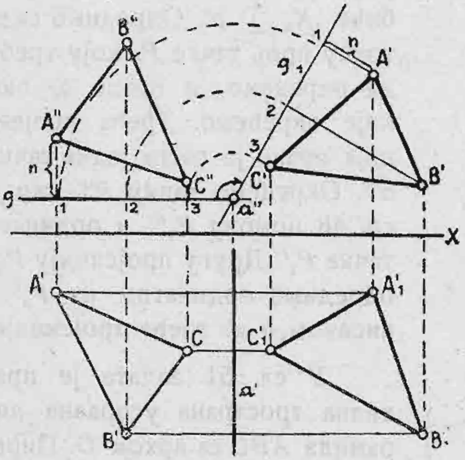
Има још један начин како да конструишемо боље, јасније пројекције предмета, а да при томе не мењамо ниуколило пројекциске равни. То је окретање. Окрећемо предмет око неке праве, коју називамо „*оса окретања*“.

При окретању свака тачка фигуре или тела описује круг, чија је раван управна на осу окретања, а чије је средиште на самој оси. Поред тога, полупречници тих кругова описују од почетног до завршног положаја сви исте углове φ.

Ако је оса окретања p управна на једну од пројекциских равни (на пр. $\perp$ V у сл. 48), кругови по којима се тачке окрећу показаће се у тој равни (у V) као кругови. Њихова раван је управна на осу p окретања, па је, с обзиром на узети положај осе p, $\perp$ H а $\parallel$ V. Ради тога се ти кругови показују у првој пројекцији као праве $\perp$ p' из A' и B', а у другој пројекцији као кругови у правој величини. Ако задатак гласи да окренемо тачке A и B око праве p за угао φ нанесемо од почетног положаја A'' p'' тај угао φ, па нам је A_1'' тражени окренути положај тачке A. Исто тако и за тачку B. Ординатом одредимо и прве пројекције A_1' и B_1'.

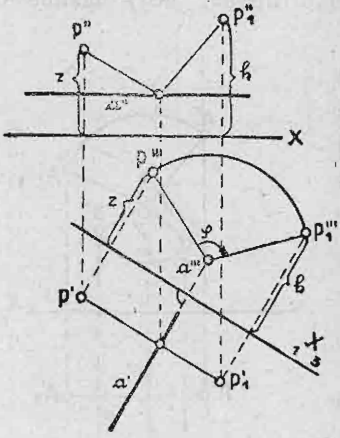


Сл. 48



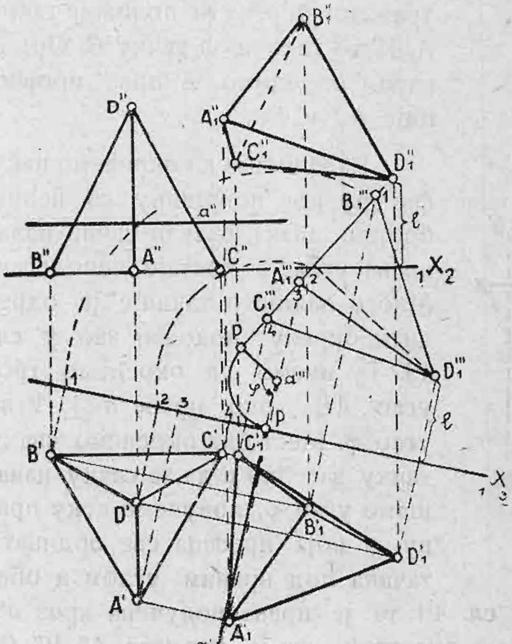
Сл. 49

Када имамо да окрећемо неку фигуру или површину са већим бројем тачака, овакав начин наношења угла φ постаје неподесан. Много лакше и тачније је одредити окренут положај као у сл. 49. Ту имамо да окрећемо троугао ABC око праве a $\perp$ V за угао φ. Место да окренемо сваку тачку засебно и да за сваку нанашамо угао φ, повучемо неку праву g која пресеца све ординате тачака под правим углом и обележимо те пресеке са 1, 2, 3. У сл. 49 та је права повучена кроз a'', што је најповољније. Сада можемо сматрати, да је троугао A'' B'' C'' својим ординатама до тачака 1 2 и 3 круто везан у један систем са правом g, и то толико круто, да када окрећемо g, окрећемо истовремено и цео троугао. Окренемо дакле праву g око a'' за угао φ, нанесемо на њој тачке 1, 2, 3. Када из тих тачака повучемо управне на g и на њима нанесемо отстојања $C''3$, $B''2$ и $A''1 = n$, имамо другу пројекцију троугла окренуту око a'' за угао φ. Прве пројекције окренутих тачака биће на ординатама, а свака на свом кругу окретања који се показује као права управна на осу окретања a'.



Сл. 50

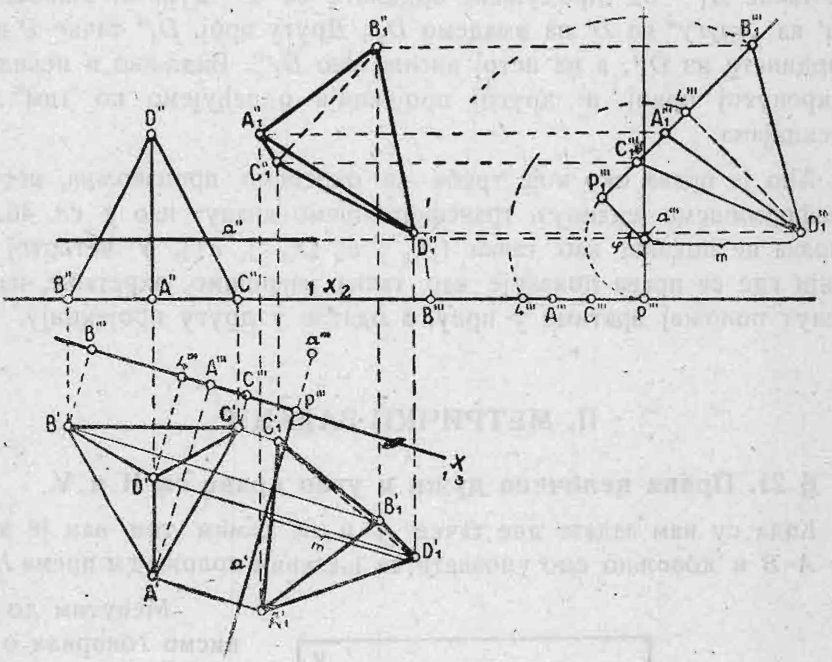
Када права око које окрећемо није управна на пројекциску раван него само паралелна са једном од њих, конструкција је мало отежана. Тако је у сл. 50 оса окретања права $a \parallel H$. Кругови по којима се тачке окрећу управни су на праву a, дакле управни и на H јер је $a \parallel H$. Пошто раван тих кругова није $\parallel V$, неће се кругови у другој пројекцији показивати у правој величини као кругови, него у скраћењу, као елипсе, па и углови окретања за поједине тачке биће или већи или мањи од своје праве величине.



Сл. 51

Да то избегнемо, уметнемо нову пројекциску раван управну на праву a. Нова оса биће ${}_1X_3 \perp a'$. Одредимо сада трећу пројекцију тачке P, коју треба да окренемо, и праве a, око које окрећемо. Трећа пројекција праве је свега једна тачка a'''. Окренемо тачку P''' као у сл. 48 помоћу P_1''' и ординате тачке P_1'. Другу пројекцију P_1'' одредимо ординатом из P_1' и висином h из треће пројекције.

У сл. 51 задата је правилна тространа усправна пирамида ABC са врхом D. Пирамиду треба да окренемо за угао $\varphi = 120^0$ око праве a (a' a'') паралелне са H. И овде повучемо одмах нову пројекциску раван ${}_1X_3 \perp a'$. Требало би да сада уцртамо трећу пројекцију пирамиде и праве. Место тога одредимо a''' трећу пројекцију праве, док за трећу пројекцију пирамиде уцртамо само ординате. Сада повучемо праву g као у сл. 49, да бисмо једноставније окренули пирамиду. Само праву g не повучемо овде као у сл. 49 кроз a''', него тако да се поклапа са ${}_1X_3$ и пресеца ординату за a''' у тачки P, а остале ординате тачака пирамиде у тачкама 1—4. Окренемо сада крути систем $a'''\ P\ g$ са трећом пројекцијом пирамиде (која није уцртана) око a''' за угао $\varphi = 120^0$ и нанесемо на g тачке 4, 3, 2 и 1. У окренутом положају уцртамо трећу пројекцију пирамиде. Тачке A, B, C су у H, па би A''', B''' и C''' биле на ${}_1X_3$ односно поклапају се са 3, 1 и 4 на g, а исто тако и у окренутом положају. Тачка D''' била би на ординати из D', а на отстојању од тачке 2 колико од D'' до X. Повучемо из тачке 2 ординату управну на окренуту праву g и нанесемо на њу ту исту дуж, па је тиме одређена D_1''' тачка D у окренутом положају. Ординатама одредимо прву окренуту пројекцију, а затим обичном трансформацијом окренуту другу (ординате из $D_1' \perp X$, а висине над X исте као над ${}_1X_3$). Шта је видљиво, а шта невидљиво, одредимо из прве и друге окренуте пројекције.



Сл. 52

Када је права a, око које имамо да окрећемо, незгодно задата, или ако је скучен простор на коме треба да цртамо, препоручује се овај други начин цртања.

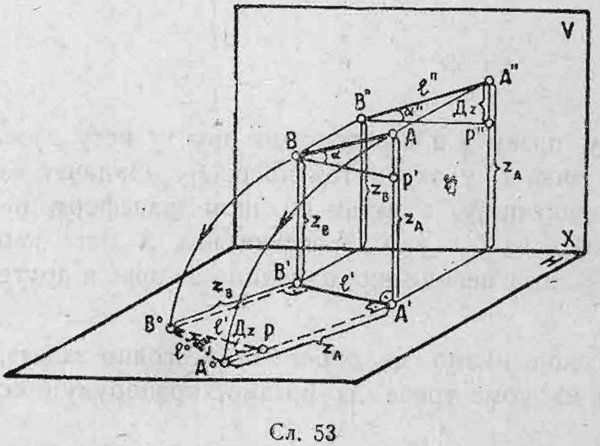
Нека је задато отприлике све исто као у сл. 51. Повучемо одмах и ${}_1X_3$ и ординате за треће пројекције појединих тачака (в. сл. 52). Само сада место да цртамо трећу и окренуту трећу пројекцију као у сл. 51, замислимо да смо скинули трећу пројекциску раван са свом осом ${}_1X_3$, па да смо је пренели тако да се ${}_1X_3$ поклопи десно са осом X. Одредимо најпре a'''. Биће на ординати из P, а на истој висини као a''. Тада окренемо праву g и уцртамо окренуту трећу пројекцију пирамиде као у сл. 51. Прву окренуту пројекцију добијали смо пре као пресек ординате са кругом по коме се та тачка у првој пројекцији окреће. Те ординате давале су заправо хоризонтално отстојање тачака од a' или a'''. То отстојање можемо и сада да одмеримо за сваку тачку и да га нанесемо у првој пројекцији од a'. Тако је хоризонтално отстојање тачке D_1''' од продужене ординате за a''' дуж m. Нанесемо га од a' на *„кругу"* из D' па имадемо D_1'. Другу пројј. D_1'' тачке D имамо на ординати из D_1', а на истој висини као D_1'''. Видљиво и невидљиво у окренутој првој и другој пројекцији одређујемо по тим двема пројекцијама.

Ако је права око које треба да окрећемо произвољна, место да трансформишемо једанпут, трансформишемо двапут као у сл. 46, док се права не покаже као тачка (${}_1X_3 \parallel a'$, ${}_3X_4 \perp a'''$). У четвртој пројекцији где се права показује као тачка извршимо окретање, па тада окренут положај вратимо у прву, а одатле у другу пројекцију.

II. МЕТРИЧКИ ЗАДАЦИ

§ 21. Права величина дужи и угао праве са H и V

Када су нам задате две тачке A и B, самим тим нам је задата дуж $A\ B$ и довољно смо упознати са њезиним положајем према H и V.



Сл. 53

Међутим до сада нисмо говорили о томе колика је та дуж, и који угао она заклапа са H или са V.

У сл. 53 задата је, у косој пројекцији, дуж l крајњим тачкама A B и повучена њезина прва пројекција l' и друга l''. Ако узмемо да је $z_A - z_B = \text{Д}z$ (= висинска разлика тачака A и B), можемо да кажемо да је $Дz=l \sin \alpha$, а $l'=l \cos \alpha$. Одатле излази да је $l' < l$, па ма какав положај имала дуж l. Једино за $\alpha=0^0$ $l'=l$. Одатле нам правило:

Пројекција дужи увек је краћа него сама дуж. Једино ако је дуж паралелна са пројекциском равнином пројекција је једнака самој дужи.

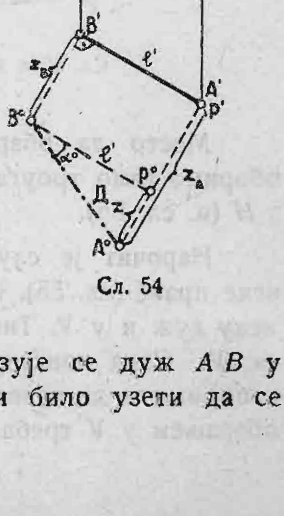
Ово правило важи за све ортогоналне пројекције. Ни у ком случају у ортогоналној пројекцији не може пројекција бити дужа од праве величине дужи.

Видели смо да нам се нека дуж показује у пројекцији у правој величини само када је паралелна са пројекциском равни. Ако нам је дакле задата нека произвољна дуж, па хоћемо да јој одредимо праву величину, не остаје нам друго него да је доведемо у такав положај да буде паралелна са пројекциском равни. То можемо да постигнемо углавном на два начина: *а*) обарањем и *b*) окретањем.

а) *Обарање дужи*

У сл. 53 имадемо дуж l и њезине пројекције l' и l''. Да одредимо праву величину дужи l, можемо да окрећемо трапез $A\ A'\ B'\ B$ око l' док не падне у H. Када трапез падне у H, пашће са њим и дуж l, па ће се показати у правој величини. То окретање називамо „*обарање*“ или „*полагање*“.

Питање је сада, како ћемо извести то обарање у ортогоналној пројекцији. У поменутом трапезу стране $B\ B'$ и $A\ A'$ (пројекциски зраци) стоје управно на l' па ће се тај прав угао показати у обореном положају као прав угао. Значи из A' и из B' повучемо у сл. 54 управне на l'. Пошто су дужи $A'\ A$ и $B'\ B$ заправо висине тачака над H, које су нам у сл. 54 претстављене другим ординатама тачака, нанесемо те друге ординате на поменутим управним, па су нам тиме одређене оборене тачке A и B. Када их спојимо, добивамо оборену дуж l. Да бисмо разликовали оборене тачке од њихових пројекција, додајемо неки знак: Обично A^0 l^0 или A^x l^x или (A) (l). Поред тога цртамо дужи испрекидано: црта тачка, да бисмо и тим нагласили да им је то права величина.

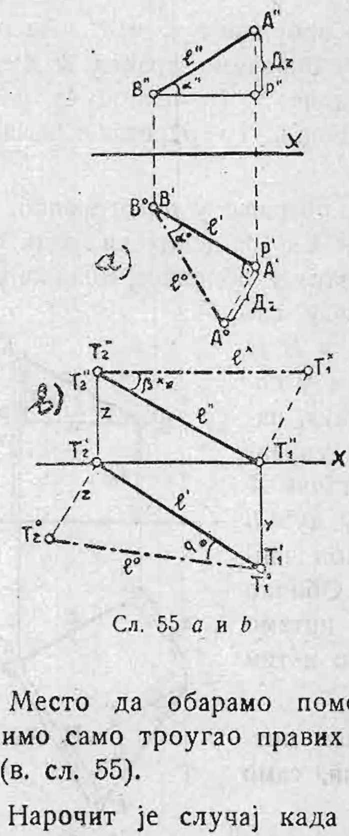


Сл. 54

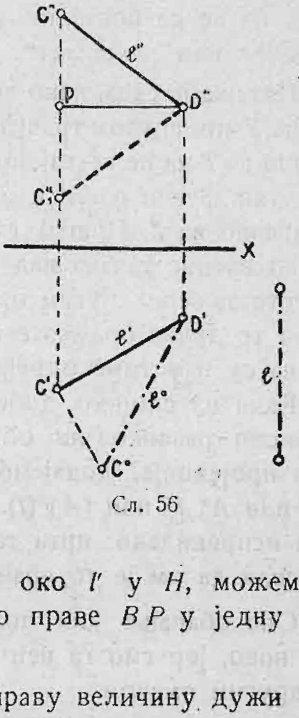
Ово обарање или полагање није нам потпуно ново, јер смо га већ једном радили, само под другим именом.

У сл. 46 одредили смо трећу пројекцију дужи $A\ B$ на нову пројекциску раван ${}_1X_3 \parallel a'$. Пошто је пројекциска раван π_3 узета $\parallel a$, показује се дуж $A\ B$ у трећој пројекцији у правој величини. Довољно би било узети да се у сл. 46 $_1X_3$ поклопи са a', па би конструкција била иста као у сл. 54.

Обарањем дужи у H одредили смо не само њезину праву величину, него и угао α који она заклапа са H. (Угао нагиба према H). То је угао који дуж, односно права заклапа са својом првом пројекцијом. Довољно би било продужити l^0 до пресека са l', па бисмо имали његову праву величину. Место тога можемо да из ниже тачке B^0 повучемо праву $B^0 P^0 \parallel l'$. Угао $A^0 B^0 P^0$ је α^0. Тиме је у слици 54 добивен један нов троугао, на коме ћемо се мало задржати. Троугао $A^0 P^0 B^0$ је правоугли троугао. Катета $B^0 P^0$ једнака је l'. Друга катета $P^0 A^0$ је висинска разлика *Дz* тачака A и B, како се то види из саме слике. Хипотенуза троугла је права величина дужи l. Овај троугао називамо „*троугао правих величина*“, а важан је по томе, што нам даје могућност решавања извесних задатака. Ради тога ћемо поново о њему говорити.



Сл. 55 *a* и *b*



Сл. 56

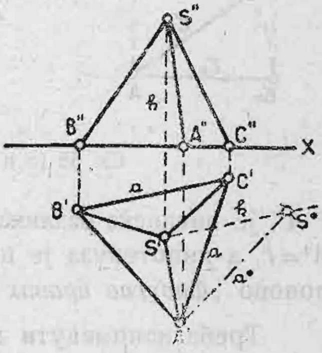
Место да обарамо поменути трапез око l' у H, можемо да оборимо само троугао правих величина око праве $B P$ у једну раван $\parallel H$ (в. сл. 55).

Нарочит је случај када одређујемо праву величину дужи $T_1 T_2$ неке праве (сл. 55). Као што смо обарали у H, можемо да оборимо неку дуж и у V. Тиме одредимо и праву вел. угла β, који дуж заклапа са V. Сама конструкција је из сл. 55 довољно јасна. Не треба напомињати да права величина неке дужи одређена обарањем у H и обарањем у V треба да је иста.

Вратимо се сада на троугао правих величина. Пошто је то правоугли троугао, када су нам задате две стране можемо да одредимо трећу. До сада смо стално имали случај да су нам задате две катете, а да тражимо хипотенузу. Једна катета l' из прве пројекције, друга катета, висинска разлика из друге пројекције дужи, па смо тражили праву величину дужи.

Може да буде задата једна катета и хипотенуза, па да се тражи друга катета, дакле задата l' и права величина, па се тражи висинска разлика (друга пројекција дужи). Тако је у сл. 56 задата прва пројекција l' дужи $C' D'$ и тачка D у другој пројекцији. Тражи се да се одреди l'', друга пројекција дужи, али тако да њезина права величина буде колика је са стране уцртана. За тачку C'' знамо само да мора бити на ординати из C', док тачку D'' имамо, а по њој и тачку P. Да одредимо потпуно C'', недостаје нам само висинска разлика тачака C и D. Стога уцртамо троугао правих величина из $C' \perp l'$ а из D' опишемо круг са $r =$ задата права величина дужи. У пресеку са управном је C^0, а према томе је $C^0 C'$ тражена висинска разлика. Нанесемо је изнад и испод P, па тако добивамо C'' и C_1'' два решења постављеног задатка.

Сада ћемо решити један такав задатак. Треба уцртати пројекције тетраедра, који једном својом пљошти лежи у H (в. сл. 57). Конструишемо најпре равностран троугао A' B' C, који лежи у H. Пошто су остала три троугла, такође равнострана, стајаће симетрично према $A' B' C$, па ће и њихове стране у I пројекцији бити симетрале углова уцртаног троугла. У пресеку тих симетрала имамо тачку S'. Друга пројекција тачака A, B и C је на X, док за S'' знамо да је на ординати из S', али јој висину над X не знамо. Значи да је и овде исти случај као у сл. 56 позната прва пројекција ивица и њихова права величина, а тражи се висинска разлика h. Права величина ивица је позната, јер је троугао $A B C$ у H, дакле у правој величини. Да одредимо висинску разлику, висину h тачке S, оборимо једну од ивица $[A S]$ и уцртамо троугао правих величина. $A' S'$ је права пројекција ивице, повучемо из $S' \perp$ на $[S' A']$ и из A' опишемо круг са $r = A'$ C' (права величина ивице). Катета S' S^0 је h, тражена висинска разлика.



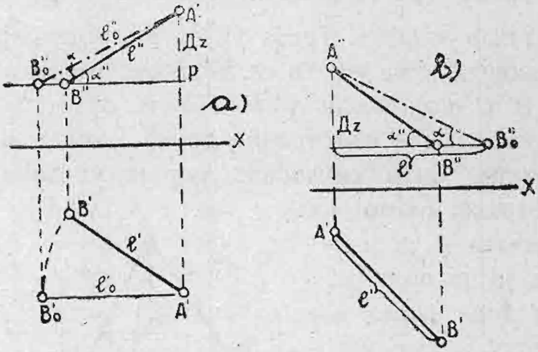
Сл. 57

За вежбу нека се реши и овај задатак. Задата произвољна права p и на њој тачка A. Нанети на p дуж од 2 см. од A навише.

Неку одређену дуж можемо да нанесемо само на правој величини. Стога узмемо још једну повољну тачку 1 на p. Помоћу 1 и A оборимо праву, и у обореном положају нанесемо од A тражену дуж. Нову добивену тачку S^0 вратимо сада у једну, па затим у другу пројекцију (Ако смо обарали у H тада је $S^0 S' \parallel A^0 A'$).

б) *Окретање дужи*

Место да дуж обарамо па да је на тај начин доведемо да буде паралелна са пројекциском равни, можемо да је окренемо. Обично окрећемо дуж око првог пројекциског зрака више тачке, и то све дотле док дуж не буде $\parallel V$. У том положају она се показује у V у правој величини. При том окретању поједине тачке описују кругове управне на осовину окретања, значи паралелне са H, па ће се у H показивати у правој величини, а у другој пројекцији као праве $\parallel X$. Тако је и у сл. 58 где треба да одредимо праву величину дужи $A\,B$, окренута та дуж око првог пројекциског зрака $A\,A'$. Нацртан је круг по коме се окреће тачка B у I и у II пројекцији. Тачка P је средиште тога круга. Када је дуж при окретању постала $\parallel V$, прва јој је пројекција $\parallel X$. Тиме је одређена тачка B_0', окренута тачка B у I пројекцији. Другу пројекцију B_0'' одредимо ординатом на II пројекцији круга. Дуж $A''\ B_0''$ је друга пројекција дужи окренуте да буде $\parallel V$; према томе је $A''\ B_0''$ права величина дужи.



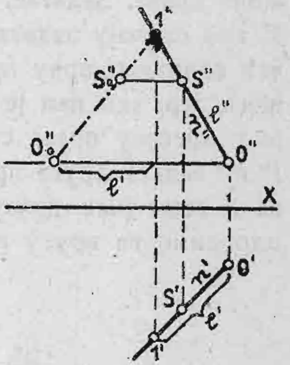
Сл. 58 (*a* и *b*)

Троугао $A''\ P\ B_0''$ је правоугли троугао. Катета $P\ A''$ је висинска разлика тачака A и B. Друга катета $B_0''\ P = B_0'\ A' = B'\ A' = l'$, а хипотенуза је права величина дужи. Према томе добили смо поново „*троугао правих величина*“.

Треба напоменути да смо могли окренути дуж и на другу страну (да тачка B_0' дође десно од A' у сл. 58*a* или лево од A' у слици 58*b*).

Ова се конструкција може и упростити. Када знамо да је дуж $P\ B_0'' = l'$ (првој пројекцији задане дужи), не треба ништа да цртамо у првој пројекцији. Повучемо само једну праву $\parallel X$ кроз нижу тачку друге пројекције дужи, и од пресека те праве са ординатом више тачке нанесемо прву пројекцију дужи. Тиме је конструкција завршена, одређена је окренута тачка B_0'', а самим тим и права величина $A''\ B_0''$ дужи. Тако је урађено у сл. 58*b*.

Као пример израђен је задатак у сл. 59. Задата је произвољна права *n* и на њој тачка *O*. Треба да нанесемо на правој *n* дуж од 1,4 *cm*, од тачке *O* на више. Узмемо на *n* још једну тачку 1 (1′ 1″), па окренемо дуж (*O* 1) ∥ *V* као у сл. 58. На правој величини 1″ O_0″ нанесемо 1,4 *см* и одредимо тачку S_0″. Сада окренемо праву натраг. Тачка *S* при окретању не мења висину. Значи повучемо из S_0″ праву ∥ *X*, па је у њеном пресеку са *n*″ тражена тачка *S*″.



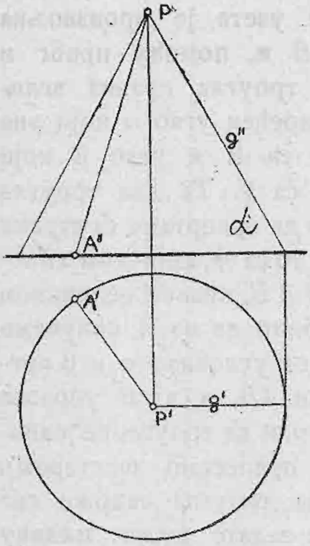
Сл. 59

Као што смо окретали дуж да буде ∥ *V*, може да се окрене и тако да буде ∥ *H*. За вежбу нека се изради и такав пример.

§ 22. Права под углом према H и V

Углове које нека права заклапа са *H* и *V* већ знамо, а одређивали смо им и праву величину обарањем праве у *H* и *V*. Такав задатак израђен је у сл. 55.

Може да се узме и обрнут задатак. Задата произвољна тачка *P* Одредити пројекције праве која пролази кроз *P*, а заклапа са *H* угао α, а са *V* угао β.

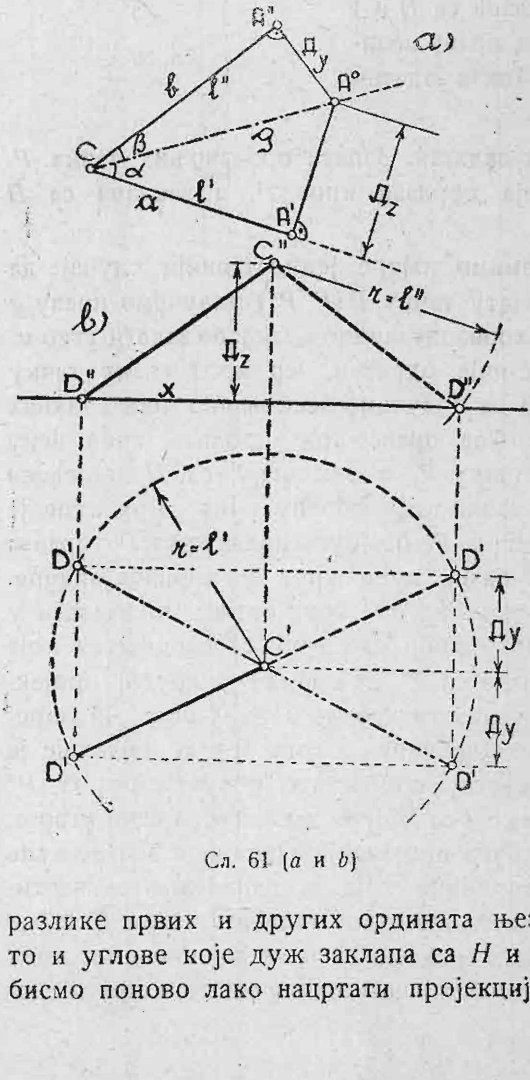


Сл. 60

Узмимо најпре једноставнији случај: да кроз задату тачку *P* (*P*′ *P*″) повучемо праву *g* која са хоризонталницом заклапа задати угао α. Задатак није одређен, јер кроз сваку тачку можемо да повучемо бесконачно много таквих правих. Све праве које пролазе кроз неку задату тачку *P*, а заклапају са *H* одређени угао α сачињавају обртну купу. Врх купе је задата тачка *P*, оса купе права кроз *P* управна на *H*, а базис купе круг у хоризонталници. Према томе ће се круг базиса показивати у првој пројекцији као круг са средиштем које се поклапа са *P*′, док ће се у другој пројекцији показивати као дуж на *X*-оси. Да одредимо полупречник *r* тога круга, најлакше је да у другој пројекцији повучемо кроз *P*″ праву *g* која са *X*-осом заклапа тражени угао α. То је друга пројекција изводнице речене купе и то изводнице која је паралелна са вертикалницом. Од њезиног пресека са *X*-осом до ординате тачке *P*′ *P*″ је тражени полупречник *r*, па одмах можемо са њим да опишемо прву пројекцију круга базиса. Ако сада било коју тачку *A*′ тога круга спојимо са врхом P' купе, та права је једно решење задатка. Из слике видимо и да је прва пројекција дужи $A\ P$ једнака полупречнику r круга базиса.

Могла је осим тачке $P'\ P''$ да буде задата и једна пројекција тражене праве. Задатак је тада одређенији, јер постоје само два решења. У том случају задатак решавамо једнако као и предњи. Само, када већ нацртамо прву пројекцију круга базиса, тачка A нам је већ одређена. Јер, ако нам је задата прва пројекција те праве кроз P', тачка A' је у пресеку праве са кругом базиса (има их две). Ако нам је поред $P'\ P''$ задата друга пројекција праве, тачка A'' је на њезином пресеку са X-осом (као другом пројекцијом круга базиса). Ординатом из A'' одредимо на кругу прву пројекцију A' (има их поново две).

*



Сл. 61 (*a* и *b*)

Мало тежи је задатак када се тражи да кроз задату тачку P повучемо праву која са хоризонталницом треба да заклапа угао α, али и са вертикалницом угао β.

Да би решење било јасније, вратимо се мало унатраг. У сл. 61*a* узета је произвољна дуж AB и, помоћу првог и другог троугла правих величина, одређен угао α који она заклапа са H и угао β који заклапа са V. Та два троугла можемо да прецртамо са стране скупа и то са заједничком хипотенузом $A\ B$, правом величином дужи (било да из A повучемо праве под угловима α и β према дужи AB, а из B управне на њих, или да троуглове једноставно пренесемо шестаром). Ова два троугла садрже све податке задате дужи: њезину прву пројекцију l' и другу l'', праву величину дужи, као и разлике првих и других ордината њезиних крајњих тачака A и B, уз то и углове које дуж заклапа са H и V. Помоћу тих података могли бисмо поново лако нацртати пројекције дужи. Узмимо један пример.

Нека нам је у сл. 61*b* задата тачка C' C'' да кроз њу повучемо праву CD под углом α према хоризонталници и углом β према вертикалници. Повучемо са стране (на слици горе) једну праву и узмемо на њој било коју тачку C. Из тачке C можемо да повучемо другу праву под углом α према првој. На њој ће да буде l' (као у сл. 61*a*), па то и напишемо. Из исте тачке C повучемо с друге стране трећу праву под углом β према првој. Како ће на њој бити друга пројекција дужи, напишемо на њој l''. Када бисмо још знали само један податак: дужину прве пројекције l', или друге l'', или праве величине l^0, или да знамо разлике првих ордината или других ордината за крајње тачке дужи CD, могли бисмо попунити слику и конструисати оба троугла правих величина, па би по њима биле одређене обе пројекције дужи односно праве CD, која се тражи. Међутим задана нам је само тачка C својим пројекцијама C' C''. Тим је одређена и њезина висина z изнад H. Друга тачка D није задана и смемо да је узмемо на било којој висини. Пошто нам је то најлакше, узмимо да ће тачка D лежати на хоризонталници. Тачка D'' лежаће тада на X-оси. Висинска разлика двеју крајњих тачака дужи CD биће тада уствари једнака висини z, тачке C. Код првог троугла правих величина (в. сл. 61*a*) стоји та висинска разлика, као катета управно на l'. Стога повуцимо у нашој слици, мало удаљеније од C, једну праву управну на l' и нанесимо од ње нагоре ту висинску разлику. Из горње њезине тачке одредимо једном правом паралелном са l' тачку D на правој коју смо били повукли као прву праву. Тим смо одредили колика је права величина дужи CD. Из тачке D можемо сада повући управне на l' и l'' и тим употпунити оба троугла правих величина.

Сада, када имамо оба троугла правих величина, можемо да нацртамо пројекције тражене праве, заправо њезине дужи CD. Знамо да све праве које пролазе кроз C и заклапају са H угао α сачињавају конус коме је тачка C врх, а базис круг у H (јер смо узели да нам је тачка D у H) а да је полупречник тога круга r једнак првој пројекцији l' дужи. Узмемо из првог троугла правих величина l' и опишемо тај круг око C'. Свака тачка тога круга може да буде D'. Уцртамо сада другу пројекцију дужи. Њезину величину l'' имамо у другом троуглу правих величина. Узмемо је и нанесемо од C'' до пресека D'' са X-осом. Ординатом из D'' одредимо на кругу прву пројекцију D' тачке D. Тим је задатак решен. Решења има четири, јер се два конуса, један под углом α према H, а други под углом β према V, а са заједничким врхом C секу по четири изводнице.

*

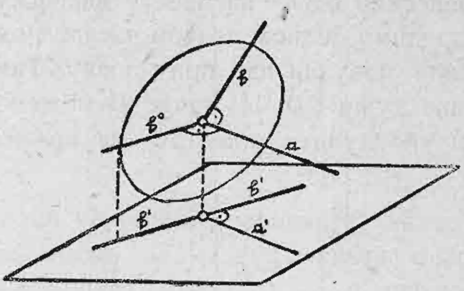
Може да буде задат следећи задатак. У произвољној равни t_1 t_2 повући праву која са хоризонталницом заклапа угао α. Решење је једноставно. Узмемо у равни било коју тачку P. Одредимо, као у сл. 60, конус који сачињавају све праве које пролазе кроз P и заклапају са H угао α. Тачке G у којима прва траса равни пресеца круг базиса дају два решења, две изводнице конуса, којима две тачке P и G леже у задатој равни.

Ако кроз неку тачку S треба да повучемо праву под углом α према H, а паралелну са задатом равни, решимо задатак као пре, па затим повучемо кроз S праве паралелне са њима.

§ 23. Пројекција правог угла

Ако две праве a и b, које се секу, заклапају прав угао, тај се прав угао може пројектовати као угао од 0°—180°, што ће зависити од положаја правих a и b према пројекциској равни. Сада треба да видимо, у ком ће се случају прав угао пројектовати поново као прав угао. Један случај знамо, када су оба крака a и $b \parallel H$ или $\parallel V$. Штогод је $\parallel H$, пројектује се у H у правој величини па и прави угао.

Поставимо ли крак a да буде паралелан са једном од пројекциских равни, рецимо $\parallel H$, а други крак b да окрећемо око a, крак b ће описивати раван β управну на a. Та раван β је управна и на H, јер је $a \parallel H$, па је управна и на a' из истог разлога. Као раван управна на H раван β је пројектна, па ће се и права b у њој, било да је $\parallel H_1$ било да је окренута у неки други положај, пројектовати на њезину прву трасу. Другим речима, то значи да ће у сваком положају праве b њезина пројекција b' заклапати са a' прав угао. Одатле правила:



Сл. 62

1) *Прав угао пројектује се као прав угао ако му је један крак паралелан са пројекциском равни.*

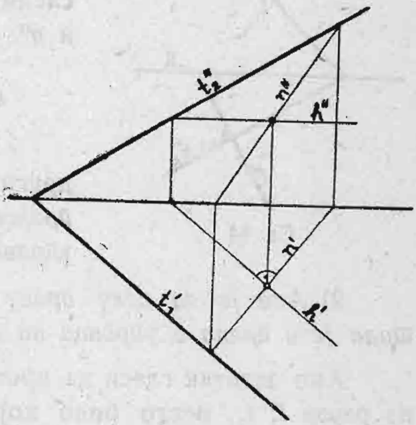
2) *Ако је пројекција неког угла, коме је један крак паралелан са пројекциском равни, прав угао, тада је сам угао прав угао.*

3) *Када је пројекција неког правог угла прав угао тада је један од кракова угла паралелан са пројекциском равни.*

§ 24. Две праве под правим углом у равни (нагибница, приклоница)

Ако у некој равни имамо две праве које између себе заклапају прав угао, тај се прави угао углавном неће показивати у пројекцијама као прав угао. Знамо да се може пројектовати као прави угао само када је једна од тих двеју правих паралелна са пројекциском равни.

У случају да се две управне праве неке равни пројектују на хоризонталницу под правим углом, одмах знамо да је једна од њих паралелна са *H*, дакле прва сутражница *h* равни. За другу праву која стоји управно на *h'*, дакле и на t_1', знамо да је права која заклапа већи угао са *H* од било које друге праве у равни. Заклапа заправо исти угао α са *H*, који заклапа и сама раван. По томе та права добија нарочито значење. Називамо је „*нагибница*", јер има исти нагиб као и сама раван, а обележавамо је обично словом *n*. Нагибница има и ту особину, да сама она (једна права, али нагибница) одређује потпуно раван. Јер ако нам је задата нагибница *n' n''* неке равни, одмах можемо да кроз неку њезину тачку повучемо прву сутражницу ($h' \perp n'$ и $h'' \parallel X$), па је тим двема правама одређена раван. Природно да се њихов прави угао неће показивати и у *V* као прави угао, јер ни *h* ни *n* нису паралелне са *V*.



Сл. 63

Може прави угао између двеју правих једне равни да се покаже у другој пројекцији као прав угао. У том случају треба једна од њих да је паралелна са *V*, дакле друга сутражница *v* равни. Друга права која је и у пројекцији управна на њу је „*приклоница*" *p* равни. Све што је речено за нагибницу с обзиром на *H* и прву пројекцију важи аналогно и за приклоницу с обзиром на *V* и II пројекцију.

Нагибница и приклоница су главне праве у равни као што су прва и друга сутражница.

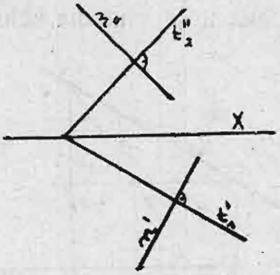
Ако кроз пресек сутражнице *h* и нагибнице *n* пролазе краци неког правог угла у тој истој равни, тај се прави угао може показати у првој пројекцији као угао већи или мањи од 90°. Ако сутражница *h* раздваја та два крака (дели њихов угао), тада се угао показује у првој пројекцији као угао мањи од 90°. Ако га дели нагибница *n*, угао се показује у првој пројекцији као угао већи од 90°.

Аналогно је у другој пројекцији, ако се место *h'* и *n'* узме у разматрање *v''* и *p''*.

§ 25. Права управна на раван и раван управна на праву

Права је управна на раван ако је управна на две праве у равни (које нису паралелне).

Када је раван задата трасама, тада од целе равни и немамо ништа друго сем две праве t_1 и t_2, па ћемо управну праву n и конструисати тако, да буде $\perp$ t_1 и t_2. Пошто је $t_1 \parallel H$, пројекција правог угла биће прав угао. Одатле следи, да ће n' бити $\perp$ t_1. Аналогно ће бити и $n'' \perp t_2''$ (в. сл. 64).



Сл. 64

Одатле правило:

1) *Ако је нека права* n *управна на раван, друга јој је пројекција* n'' *управна на* t_2'' *другу прајекцију друге трасе, а прва пројекција* n' *управна на* t_1' *прву пројекцију прве трасе.*

2) *Ако је за неку праву* a *друга пројекција* $a'' \perp t_2''$ *и* $a' \perp t_1'$, *тада је и права* a *управна на раван* t_1 t_2.

Ако задатак гласи да кроз задату тачку P повучемо праву управну на раван t_1 t_2, место било које праве n повучемо ону која пролази кроз P.

Када раван није задата трасама него на било који други начин, па треба да повучемо праву n управну на ту раван, не остаје нам ништа друго него да конструишемо сутражнице h и v равни. Тада ће бити $n'' \perp v''$ а $n' \perp h'$, јер је $v \parallel t_2$, а $h \parallel t_1$ (в. сл. 65).

За вежбу нека се израде следећи задаци:

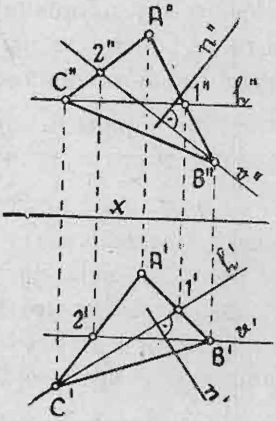
1) Задата је произвољна раван t_1 t_2 и ван ње тачка P. Одредити пројекцију тачке P на раван t_1 t_2.

Треба повући кроз P праву $\perp$ $[t_1 \ t_2]$ и одредити њен продор.

2) Исти задатак, али да је раван задата двема паралелним правама.

3) Задата је t_1 t_2 и ван ње права p. Одредити пројекцију праве на раван.

Пројекција праве одређена је пројекцијама двеју њезиних тачака. Узмемо на p две тачке A и B и поступимо као у задатку 1). Кроз продорне тачке пролази тражена пројекција праве.



Сл. 65

Место друге тачке B може се искористити продор праве p кроз раван t_1 t_2.

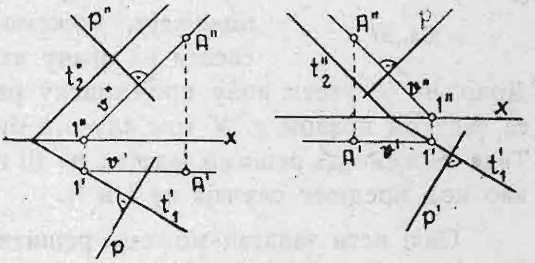
4) Задата је произвољна раван t_1 t_2 и ван ње права p. Кроз праву p повући раван управну на $[t_1 \ t_2]$.

На правој p узмемо две тачке A и B и повучемо кроз њих праве управне на задату раван t_1 t_2. Те две управне (као две $\|$ праве) одређује тражену раван, која пролази и кроз p, а њезине трасе пролазе кроз трагове управних. Место друге тачке B можемо се користити траговима праве p.

5) Задати произвољни паралелограм $A\ B\ C\ D$ или троугао $A\ B\ C$ нека је базис једне усправне призме. Одредити пројекцију призме, чије су ивице дуге 4 *cm*.

Пројекције ивица одредимо као у сл. 65, а њихову дужину као у сл. 59.

Када нам је задата произвољна права n, па тражимо раван управну на праву, решење је исто као у сл. 54. Повучемо $t_1' \perp n'$ и $t_2'' \perp n''$, и тиме је одређена управна раван. Међусобни положај праве и равни је исти као пре, па је и правдање конструкције исто.



Сл. 66 *a* и *b*

Мало тежа је конструкција када кроз неку тачку A треба да повучемо раван управну на праву p.

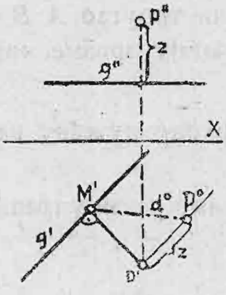
Пошто је раван одређена двема правама, најједноставније је решење да кроз тачку A повучемо прву и другу сутражницу равни. Кроз A'' повучемо $v'' \perp p''$ и $h'' \| X$, а кроз A' повучемо $h' \perp p'$ и $v' \| X$. Ако су нам потребне и трасе равни, знамо да оне пролазе кроз трагове сутражница. Поред тога знамо да оне стоје и управно на p.

Ако треба да одредимо трасе равни која пролази кроз A, и стоји $\perp p$, можемо да их одредимо и помоћу саме једне сутражнице. Тако је у сл. 66 повучена кроз A сутражница v (кроз A'' $v'' \perp p''$, а кроз A' $v' \| X$) и одређен њезин траг T_1. Кроз T_1' иде траса $t_1' \perp p'$, а из њезиног пресека са X траса $t_2'' \perp p''$.

§ 26. Отстојање тачке од праве

Приликом решавања разних задатака често треба да одредимо отстојање неке тачке од задате праве. Решење је једноставно. Из задате тачке P повучемо праву управну на задату праву g до њиховог пресека M. Дуж MP је тражено отстојање. Али пошто се прав угао показује у пројекцији као прав угао само када му је један крак паралелан са пројекциском равни, овај начин одређивања траженог отстојања можемо да користимо само када је задата права у специјалном положају. Ако је задата права произвољна, биће у произвољном положају и управна на њу повучена из задате тачке, па се тај прави угао неће показати у пројекцијама као прав угао. Уствари неможемо повући потребну управну, па ни решити задатак на овај начин.

Као пример узмимо стога да нам је задата права g паралелна са хоризонталницом и ван ње нека тачка P. Права кроз P управна на задату праву биће у првој пројекцији права из P' повучена под правим углом према g', (јер је један од та два крака, овде права g паралелна са H). Повучемо ту праву до пресека M' са g', па је дуж M' P' тражено отстојање. Треба још да одредимо праву величину те дужи. На слици је права величина одређена обарањем троугла правих величина у раван || H.



Сл. 67

У случају да је задата права g у произвољном положају, можемо је подесном трансформацијом свести на праву паралелну са пројекциском равни. Довољно је узети нову пројекциску раван π_3 тако да буде паралелна са задатом правом g. У том случају биће ${}_1X_3 \parallel g'$ (односно ${}_2X_3 \parallel g''$). Тада можемо да решимо задатак из III и I пројекције (односно из III и II) као код предњег случаја из I и II.

Овај исти задатак можемо решити и на други начин (без трансформације). Кроз задату тачку можемо повући раван управну на произвољну праву g, одредити продор M те праве кроз раван, па је дуж MP тражено отстојање тачке P од праве g.

X Задаци за вежбу

1) Одредити пројекцију тачке A $(-4;\ 4;\ 4)$ на раван t $(-8;\ 5;\ 4)$.

2) Одредити пројекцију тачке B $(-3;\ 5;\ 3)$ на раван $t_1\ t_2$ $(-5;\ -3;\ 4)$.

3) Одредити пројекцију тачке C $(-2;\ -5;\ 2)$ на раван $t_1\ t_2$ $(-7;\ 4;\ 5)$.

4) Одредити отстојање тачке P $(6;\ 5;\ 5)$ од равни задате троуглом A $(4;\ 1;\ 6)$, B $(6;\ 3;\ 1)$, C $(2;\ 5;\ 3)$ (Не цртати трасе равни).

5) Одредити отстојање тачке P $(4;\ 6;\ 6)$ од равни задате паралелограмом A $(0;\ 4;\ 4)$, B $(2;\ 1;\ 6)$, C $(4;\ 3;\ 3)$, D $(2;\ 6;\ 1)$. Без употребе траса.

6) Одредити отстојање тачке P $(5;\ 6;\ 6)$ од равни задате двема правама које се секу. Права p тачкама A $(3;\ 4;\ 1)$ и B $(6;\ 2;\ 4)$, права g тачкама B и C $(9;\ 5;\ 3)$. (Без употребе траса равни).

7) Задате две паралелне равни $t_1\ t_2$ $(6;\ 3;\ 6)$ и $\tau_1\ \tau_2$ $(10;\ 5;\ 10)$. Одредити колико је њихово међусобно растојање.

8) Задата раван $t_1\ t_2$ $(6;\ 4;\ 5)$. Одредити другу раван паралелну са задатом, а на међусобном растојању од 4 см.

9) Задат троугао $A\ (2;\ 4;\ 1)$, $B\ (4;\ 1;\ 6)$, $C\ (7;\ 6;\ 4)$ и ван њега тачка $P\ (1;\ 3;\ 3)$; не цртајући трасе равни троугла повући кроз P раван паралелну са равнином троугла. Одредити трасе нове равни и међусобно растојање тих двеју равни.

10) Задате тачке $G\ (4;\ 3;\ 4)$ и $O\ (0;\ 0;\ 0)$. Кроз тачку G повући раван управну на праву $O\ G$.

§ 27. Отстојање тачке од равни

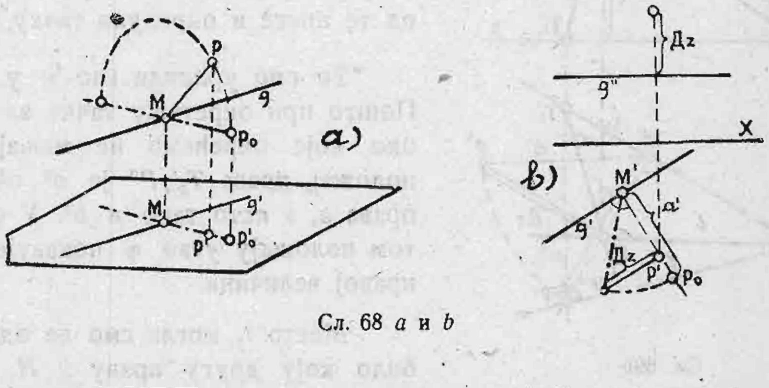
Да одредимо отстојање неке тачке P од произвољне равни $t_1\ t_2$, повучемо кроз тачку P праву управну на раван $t_1\ t_2$ и одредимо њезин продор N. Дуж $P\ N$ је тражено отстојање тачке од равни. Окретањем или обарањем одредимо и праву величину.

§ 28. Окретање тачке око специјалне праве док не падне у њезину раван паралелну са H или са V

Из наслова се подразумева да овде можемо говорити само о правим паралелним са којом од пројекциских равни.

Нека нам је у сл. 68 задата права $g \parallel H$ и ван ње тачка P. Када се тачка P окреће око g, она описује круг чија је раван $\perp g$, а полупречник $M\ P$ круга једнак је отстојању тачке P од праве g. Пошто је $g \parallel H$, раван круга је $\perp H$, па се цела раван и круг који је у њој показују као права кроз $P' \perp g'$. Када тачку окренемо око g да буде у истој хоризонталној равни са g показује се у I пројекцији у правој величини све што је у равни, па према томе и отстојање тачке од праве.

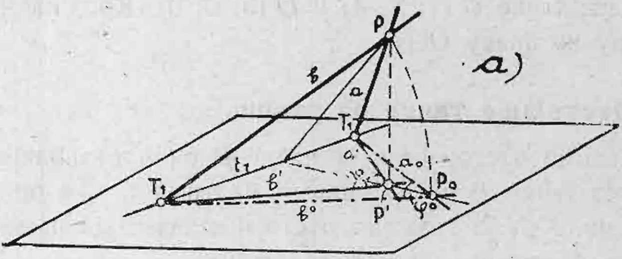
На тај начин решен је задатак у сл. 58*b*. Одређено је отстојање тачке P од праве g и његова права величина (као у сл. 57), обарањем троугла правих величина (из $P' \perp [P'\ M']$ и $[P'\ P] = Д_z$). Затим је та права величина нанета од тачке M' на управној. Тиме је одређен P_0 положај тачке P окренуте око праве $g \parallel H$ док је пала у исту хоризонталну раван са g.



Сл. 68 *a* и *b*

§ 29. Угао двеју правих

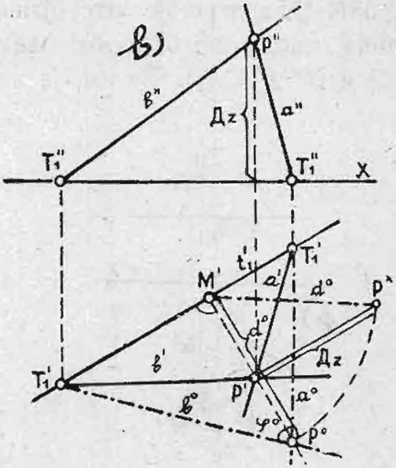
Предњи задатак, иако изгледа безначајан, даје нам могућност да решимо неколико важних проблема. Помоћу њега решићемо и



Сл. 69*a*

и овај задатак: Задате су две произвољне праве *a* и *b* које се секу у тачки *P*. Треба да одредимо праву величину угла који заклапају те две праве.

Знамо да се у правој величини показује све што је паралелно са пројекциском равни. Стога ћемо окренути и ове две праве, односно њихову раван, да буду паралелне са *H*. Тада ће се саме праве, као и угао који заклапају, показати у *H* у правој величини. Међутим то окретање неке равни у *H* или || *H* можемо да извршимо само око неке праве која је || *H*. Стога ћемо најпре одредити једну праву || *H*. У сл· 69*a* и *b* одредили смо, место било које друге праве, трасу t_1' равни, и то помоћу трагова правих *a* и *b*. Затим смо одредили отстојање тачке *P* од те праве и окренули тачку *P* у *H*.



Сл. 69*b*

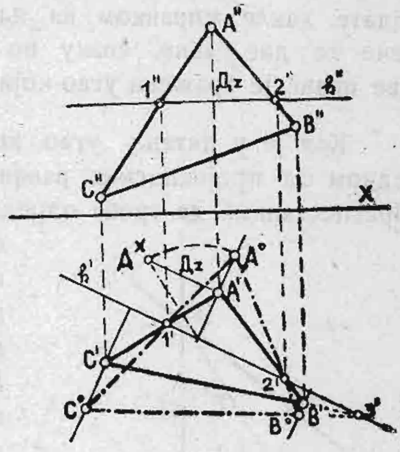
То смо урадили као и у сл. 68. Пошто при окретању тачке на правој око које окрећемо не мењају свој положај, права T_1' P^0 је a^0 окренута права *a*, а исто тако и b^0. У окренутом положају угао φ показује се у правој величини.

Место t_1 могли смо да одредимо било коју другу праву || *H*. То би била прва сутражница равни *a b*. Само окретање извршили бисмо на потпуно исти начин.

§ 30. Одређивање праве величине равних фигура помоћу окретања паралелно са H или са V

На исти начин можемо да одредимо и праву величину неке равне фигуре, нарочито ако нам нису познате трасе њезине равни. Тако је у сл. 70 задат троугао *A B C*, па треба да му одредимо праву величину.

Повучемо најпре у троуглу једну праву $h \parallel H$ ($h'' \parallel X$ и помоћу 1 и 2 у I пројекцији h'). Затим конструишемо отстојање тачке *A* од *h* и помоћу његове праве величине одредимо окренути положај тачке *A* у хоризонталну раван кроз праву *h*. Све остало урадимо као и у сл. 69. Треба напоменути, да се и тачка *B* окреће исто као и тачка *A*, па ће и њезин окренути положај као и сваке друге тачке бити на правој из *B'* управној на *h'*. За контролу, продужена је права *C' B'* до пресека 3' на *h'*. Пошто та тачка при окретању не мења свој положај, треба кроз њу да пролази и продужена права B^0 C^0.



Сл. 70

На исти начин, као што по окренутој тачки *A* нађемо окренути положај осталих тачака троугла, можемо и сваку тачку равни троугла да вратимо натраг у пројекцију, као што је на пр. тежиште троугла или средиште описаног круга.

Можемо да уцртамо и било коју нову фигуру у истој окренутој равни, па да јој окретањем натраг одредимо I, а затим и II пројекцију. На овај задатак ћемо се касније поново вратити.

XI Задаци за вежбу

1) Одредити праву величину паралелограма *A* (4; 6; 4), *B* (8; 3; 6), *C* (9; 5; 2), *D* (7; 8; 0), не цртајући трасе његове равни.

2) Задате праве *g* и *p*. Права *g* тачкама *A* (2; 6; 1) и *B* (6; 5; 5), а права *p* тачкама *B* и *C* (10; 9; 3). Одредити пројекције паралелограма коме су темена на датим правама, а дужина стране 4 см (Не цртајући трасе равни задатих правих).

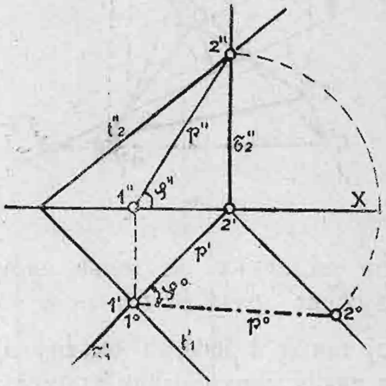
3) Задате две паралелне праве, права *a* тачкама *A* (3; 3; 1) и *B* (11; 1; 7), права *b* тачкама *B* и *C* (8; 5; 2); одредити пројекције квадрата коме су две стране на задатим правама, а једно теме у тачки *B* (Без употребе трасе равни *ab*).

4) Задат троугао *A* (2; 7; 6), *B* (6; 2; 8), *C* (8; 6; 1); одредити средиште круга описаног око троугла (без употребе траса).

§ 31. Угао нагиба равни према пројекциским равнима

Угао који између себе заклапају две задате равни одређујемо ако те две равни пресечемо трећом помоћном равни управном на обе задате, дакле управном на њихову пресечну праву. Помоћна раван сече те две равни, сваку по једној правој. Угао који заклапају те две праве је тражени угао који између себе заклапају две задане равни.

Кад је у питању угао који заклапа нека задата раван t_1 t_2 са једном од пројекциских равни, конструкција је умногоме олакшана. Претпоставимо да треба одредити угао који заклапа произвољна раван са хоризонталницом (в. сл. 71). Права по којој се секу те две задате равни је прва траса t_1 произвољне равни. Помоћна раван треба да буде управна на ту праву. Према томе помоћна раван τ је управна на хоризонталницу, а прва јој траса τ_1' управна на t_1'. Пресечна права p те помоћне равни са задатом равни t_1 t_2 је права управна на t_1, уствари нагибница равни t_1 t_2, а пресек са хоризонталницом је сама прва траса τ_1 равни, а она је уједно и прва пројекција нагибнице.



Сл. 71

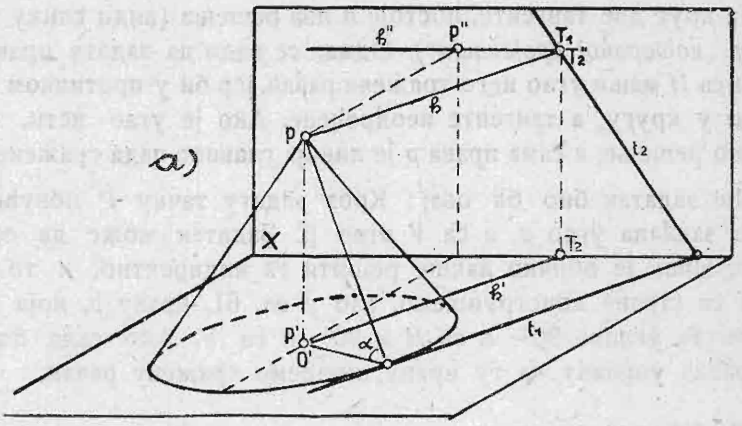
Задатак се, дакле, своди на то, да повучемо нагибницу задате равни t_1 t_2 и одредимо праву величину угла који она заклапа са својом првом пројекцијом. На слици је одређена права величина угла φ обарањем троугла правих величина у H. Конструкција је из саме слике довољно јасна.

Да је требало одредити угао који та раван заклапа са вертикалницом, повукли бисмо приклоницу равни и одредили праву величину угла који она заклапа са својом другом пројекцијом.

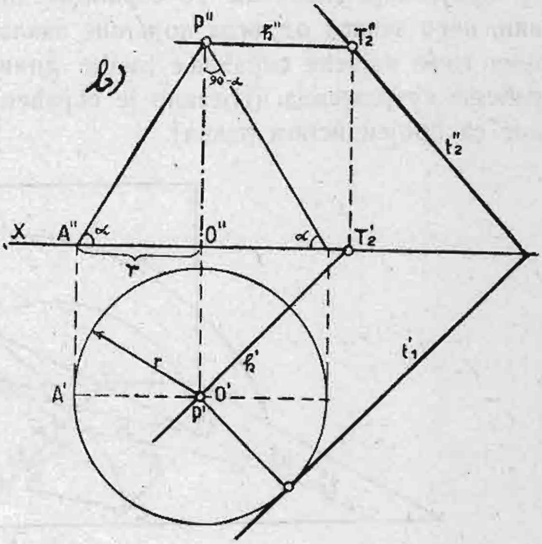
§ 32. Раван под углом према пројекциским равнима

Све равни које пролазе кроз тачку P, а заклапају угао α са неком задатом равни, додирују један конус. Тачка P је врх тога конуса, а изводнице заклапају са задатом равни угао α. Према томе довољно је да конструишемо тај конус, па ће свака раван која га додирује испуњавати тражени услов.

По том принципу решен је задатак у сл. 72. Задатак гласи: Задата је произвољна тачка P; одредити раван која пролази кроз P и заклапа угао α са H. Најпре конструишемо конус коме је врх тачка P, а базис у H (јер се тражи угао α према H). Висина z му је одређена у II пројекцији. Из P'' повучемо праву под углом $90^0-\alpha$ до пресека A'' са X, и тиме одредимо полупречник круга базиса. Средиште O базиса поклапа се са P'. Опишемо круг и тиме је конструисан конус (в. сл. 72 *a* и *b*).



Сл. 72*a*



Сл. 72*b*

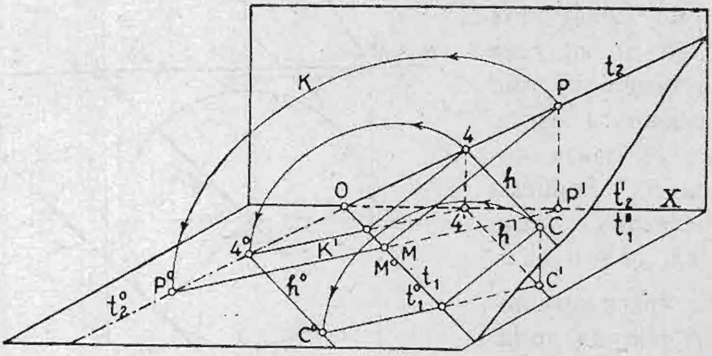
Свака права коју повучемо у H тако да додирује круг базиса може да буде прва траса тражене равни. Повучемо било коју. То нам је t_1. Другу трасу равни одредимо помоћу трага сутражнице повучене кроз задату тачку P. Задатак је као што се види неодређен, јер има бесконачно много решења.

Други задатак био би овај: Кроз задату произвољну праву p повући раван која заклапи угао α са H. Пошто раван треба да пролази кроз праву p, узмемо на правој повољну тачку P и конструишемо, као и пре конус коме је та тачка врх. Одредимо тада први траг T_1 праве p и из тога трага повучемо тангенту на круг базиса. Та тангента је прва траса тражене равни, а другу одредимо као пре (или помоћу T_2 задате праве). Прва траса мора да пролази кроз T_1, јер све праве које леже у некој равни имају своје трагове на трасама равни. Како из T_1' можемо повући на круг две тангенте, постоје и два решења (види слику за исти задатак у *„котираној пројекцији“*). Одмах се види да задата права мора заклапати са H мањи угао него тражена раван, јер би у противном траг T_1 праве био у кругу, а тангенте неодређене. Ако је угао исти, постоји свега једно решење, а сама права p је линија главног пада тражене равни.

Трећи задатак био би овај: Кроз задату тачку P повући раван која са H заклапа угао σ, а са V угао β. Задатак може да се реши директно. Ипак је обично лакше решити га индиректно, и то овако: било где са стране конструишемо, као у сл. 61, праву p, која заклапа комплементне углове $90^0-\alpha$ са H и $90^0-\beta$ са V. Ако сада повучемо кроз P раван управну на ту праву, имаћемо тражену раван.

§ 33. Обарање равни

Свака произвољна дуж коју повучемо у некој равни показиваће се у пројекцији скраћена. То скраћење није једнако за све праве у равни, него зависи од угла који оне заклапају са пројекциском равни Према томе највеће скраћење имаће линија главног пада, а најмање скраћење сутражница. (Њезино је скраћење једнако нули, јер је паралелна са пројекциском равни).



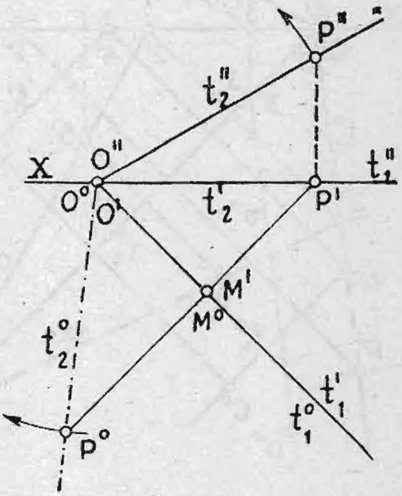
Сл. 73

Према томе ће и фигуре уцртане у произвољној равни бити у пројекцији измењене.

Треба ли да одредимо праву величину неке фигуре у равни чије пројекције имамо, не остаје нам друго него да окренемо раван тако да легне на једну од пројекциских равни (или да буде са њом паралелна). Тада ће се, као што знамо, показивати све у правој величини. Окретати неку раван док не падне у пројекциску раван можемо само око једне праве која је заједничка обема равнима. Тако ћемо неку произвољну раван t_1 t_2 окретати у H око t_1, а у V око t_2.

Ово окретање равни око трасе док не падне у пројекциску раван називамо *обарањем* или *полагањем равни.*

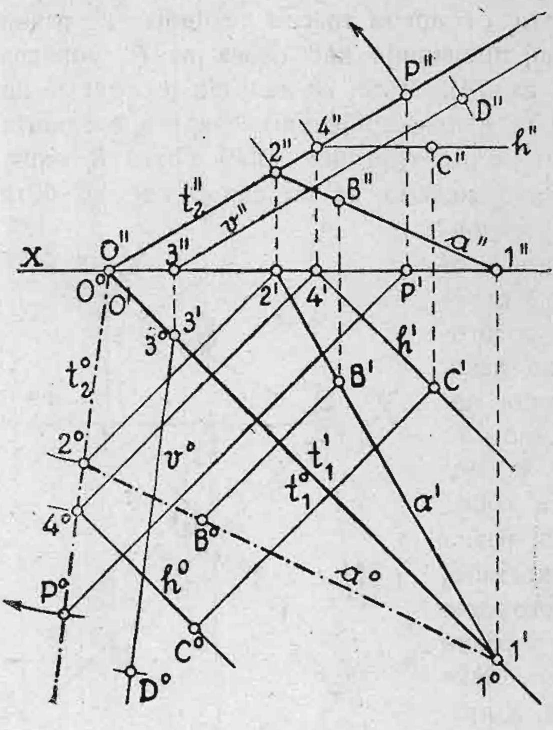
Знамо од раније, да при окретању свака тачка описује круг, који стоји управно на осовину окретања, а средиште му је на самој осовини. За случај да произвољну раван t_1 t_2 окрећемо око прве трасе t_1 док не легне на хоризонталницу, било која тачка P (P'' P') њезине друге трасе описиваће круг K чија је раван управна на осовину окретања t_1. Пошто t_1 лежи у хоризонталници, раван круга K је управна и на хоризонталницу, дакле прва пројектна раван. Ради тога ће се прва пројекција K' круга K поклапати са првом трасом те пројектне равни (в. сл. 73) и показивати у првој пројекцији као права из P' управна на прву трасу t_1' равни (види сл. 74). У сл. 73 нацртан је круг K по коме се окреће тачка P. Види се и прва пројекција K' круга, средиште K круга у пресеку K' са t_1 као и полупречник (MP) круга K окретања. Поред тога у сл. 73 лако можемо да одредимо где ће бити тачка P када раван легне на хоризонталницу. Биће на пресеку круга K са његовом првом пројекцијом K'. У сл. 74 где је иста раван нацртана у ортогоналној пројекцији није то тако лако, јер се круг K у хоризонталници поклапа са својом првом пројекцијом K'. Стога ћемо положај тачке P у обореној равни одредити на други начин. Знамо да тачка P у обореној равни мора да буде на свом кругу окретања, дакле у пројекцији на K'. Исто тако већ знамо да ће се све што је у равни показивати у правој величини, када раван легне на хоризонталницу. У правој величини ће се показати и отстојање те оборене тачке P од тачке O на X-оси, у којој се секу прва и друга траса равни. Та дуж OP је један део друге трасе, лежи у вертикалници, па се у вертикалници већ показује у правој величини. Узмемо је (дуж O'' P'') у шестар и нанесемо од O'' до пресека са K'. Тим је одређена тачка P^0, тачка P и обореној (положеној) равни, а тиме и цела раван. Како је тачка P једна тачка друге трасе равни пролазиће t_2^0 кроз P^0.



Сл. 74

Имамо ли на другој траси t_2 поред тачке P још неку тачку 4, и она ће приликом обарања равни описивати круг (као и тачка P), а у обореном положају наћиће се поново на обореној другој траси t_2^0. Довољно је да нацртамо прву пројекцију тога круга: праву кроз $4' \perp t_1'$. У њезином пресеку са t_2^0 је тражена тачка 4^0. Једине тачке равни, које приликом обарања равни не мењају свој положај, то су тачке прве трасе. Оне су на оси окретања, па остају непомерене (в. сл. 75).

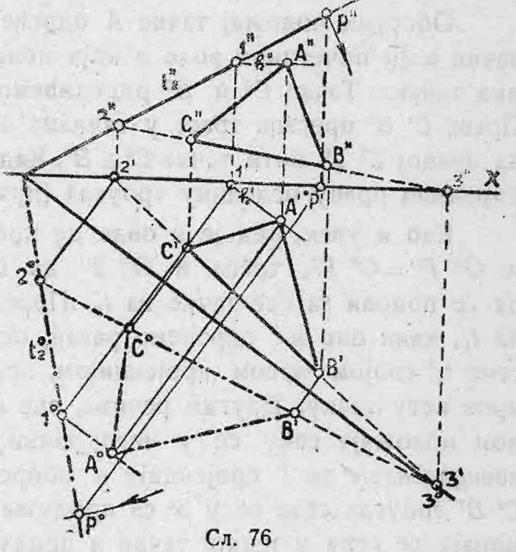
Ако у равни имамо неку праву a', да одредимо њезин положај у обореној равни, можемо да поступимо на исти начин као што смо раније одређивали другу пројекцију a'' праве. Продужимо праву до пресека $1'$ са првом трасом t_1' и до пресека $2'$ са другом трасом t_2' (на X-оси). У обореном положају тачка 1^0 остаје непомерена, а тачка 2^0 биће на t_2^0. Довољно је да нацртамо прву пројекцију круга окретања праву из $2' \perp t_1'$. Кроз тачке 1^0 и 2^0 пролази a^0, права a у обореном положају. Како је то уједно и права величина дужи од 1 до 2 цртамо је обично испрекидано: црта-тачка. Имамо ли на правој a' неку тачку B', окретаће се и тачка B при обарању по једном кругу, док и она скупа са правом a не легне на H. Према томе B^0 биће на a^0 и на кругу окретања, правој из $B' \perp t_1'$.



Сл. 75

Случај тачке B показује нам и начин како можемо да одредимо оборен положај било које тачке, која нам је задата у I пројекцији. (По истом принципу одређивали смо другу пројекцију тачке). Само место да као помоћну праву узмемо произвољну праву a, можемо да узмемо праву у специјалном положају. Тако је урађено код тачке C која нам је задата својом првом пројекцијом C'. Повучемо кроз C' прву сутражницу h' до њезиног пресека $4'$ са t_2'. Одредимо затим на t_2^0 тачку 4^0, па ће кроз 4^0 пролазити h^0, сутражница у обореном положају. Како је $h' \parallel t_1'$ остаће и $h^0 \parallel t_1'$. Тачка C^0 биће на свом кругу окретања и на h^0. Сутражницу h у обореном положају не цртамо испрекиданом линијом као остале праве у обореном положају, јер је сматрамо помоћном линијом, а поред тога она је и у првој пројекцији h' већ у правој величини.

Ако нам је задата у другој пројекцији нека тачка D'' равни и треба да одредимо њезин оборен положај, можемо да га одредимо на два начина. Можемо да кроз D'' повучемо прву сутражницу h''. Одредимо h', па је на њој D'. Када имамо D', њезин оборен положај D^0 одредимо као што смо пре одредили тачку C^0. Тај начин није цртан на слици, јер је познат. Незгода је код овог начина што морамо цртати прву пројекцију D' тачке D, а ту прву пројекцију сам задатак не тражи. Стога је бољи овај други начин (в. сл. 75). Кроз D'' повучемо другу сутражницу v'' до њезиног пресека $3''$ са t_1'' (на X-оси). Ординатом одредимо на t_1' прву пројекцију $3'$. То је уједно и тачка 3^0. Сада ће кроз тачку 3^0 пролазити поново друга сутражница v^0 у обореном положају и биће, као и у пројекцији, $\parallel t_2^0$. Тачку D^0 на њој одредимо лако. Дуж $3''\ D''$ је у другој пројекцији већ у правој величини, јер је $v \parallel V$. Узмемо је и нанесемо на v^0 од тачке 3^0. Тиме је одређена тражена тачка D^0.

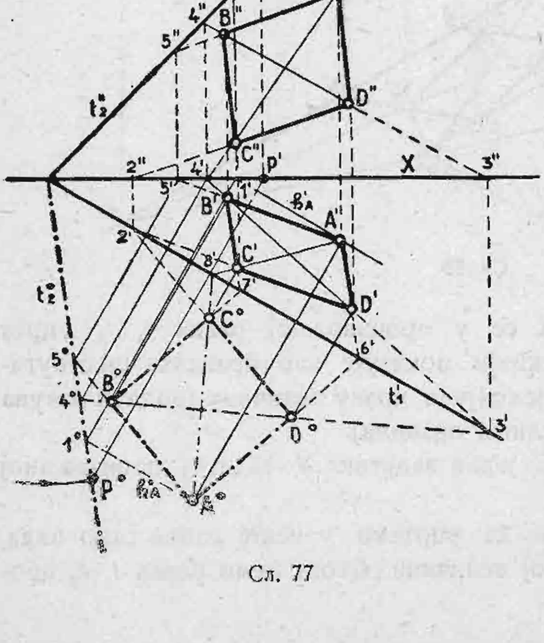


Сл. 76

На крају треба да напоменемо и ово. Могао је задатак у слици 75 да гласи и овако: Задата је произвољна раван $t_1\ t_2$ и у њезином обореном положају права a^0 са тачком B^0; треба одредити a' и B'. Задатак решимо истим линијама које су већ цртане само би их требало цртати обрнутим редом.

За вежбу израдимо следећи задатак: у произвољној равни $t_1\ t_2$ уцртан је троугао $A\ B\ C$. Треба одредитн његову праву величину.

Како су нам у овом случају (сл. 76) задате трасе равни, одредићемо праву величину троугла обарањем равни око њезине прве трасе.

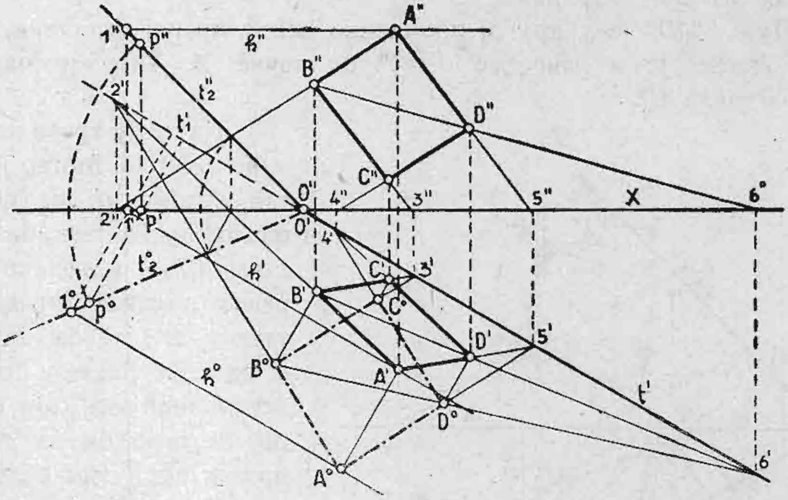


Сл. 77

Да нам трасе нису задате било би брже и лакше окренути троугао у равни || H као у сл. 70. Раван оборимо помоћу тачке P, коју слободно одаберемо на t_2 као у сл. 74.

Оборени положај тачке A одређен је помоћу сутражнице. То је начин који почетници воле и који понављају онолико пута колико год има тачака. Тачке C^0 и B^0 одредићемо помоћу продужене праве $C\ B$. Права $C'\ B'$ пресеца трасе у тачкама $3'$ и $2'$. Те тачке оборимо па ће на правој $3^0\ 2^0$ бити тачке C^0 и B^0. Када спојимо A^0 са B^0 и C^0, тиме смо одредили праву величину троугла (цртана је испрекидано: црта-тачка).

Као и увек, ред је и овде да проверимо тачност рада. Као што је $O''\ P'' = O'\ P^0$, треба и $O''\ 2''$ да буде једнако $O'\ 2^0$. Исто може да се понови за све тачке на t_2. Поред тога, видели смо да све тачке на t_1, када око ње окрећемо раван, остају непомерене. Ако нека права сече t_1' својом првом пројекцијом, пролази и њезин оборени положај кроз исту тачку. Другим речима, све праве у I пројекцији и у обореном положају секу се у истој тачки на t_1'. Према томе је t_1' права *коинциденције* за I пројекцију и оборени положај. Продужена страна $C'\ B'$ троугла сече се у $3'$ са продуженом страном $C^0\ B^0$. Исто тако морају се сећи у једној тачки и продужене остале стране.



Сл. 78

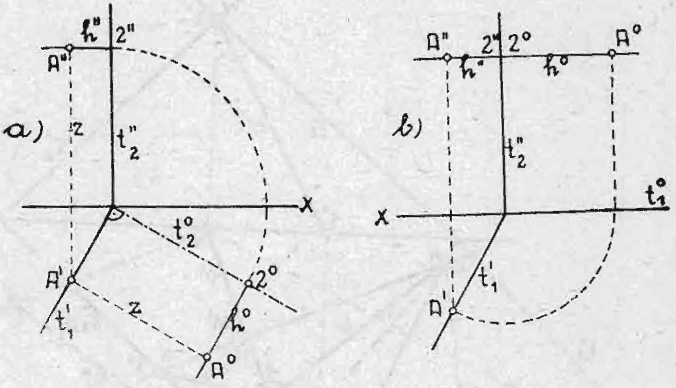
Као други задатак, нека се у произвољној равни $t_1\ t_2$ уцрта полигон који се у првој пројекцији показује као правилан шестоугаоник. Одредити му другу пројекцију и праву величину (водити рачуна о тачности, нарочито о паралелним правима).

На крају, израђен је још један задатак: У задатој произвољној равни $t_1\ t_2$ уцртати квадрат.

Правилну фигуру можемо да уцртамо у некој равни само онда, када се раван показује у правој величини. Стога ћемо раван $t_1\ t_2$ оборити у H и у обореном положају нацртати квадрат. Тај квадрат ћемо затим пренети у I, а одатле у II пројекцију. Тако је у сл. 77 пренета тачка A помоћу сутражнице h, тачке B и D помоћу продужене дијагонале $B\ D$ и, на концу, тачка C помоћу продужене стране $D\ C$. На исти начин одређена је и II пројекција.

Задатак је поновљен још једном у сл. 78, само је узет други положај траса. На ове слике вратићемо се касније.

Ако су равни у специјалном положају, дакле $\perp H$ или $\perp V$, обарање је много једноставније. За пример узета је на сл. 79 раван управна на H. Оборити је можемо у H или у V. Ако је оборимо у H, а то значи да је окрећемо око t_1, друга траса t_2^0 у обореном положају заклапаће прав угао са t_1' (јер трасе t_1 и t_2 заклапају између себе прав угао). Свака тачка A у обореном положају биће поново на свом кругу окретања (права из $A' \perp t_1'$), а отстојање од t_1' је једнако отстојању тачке од H. Пренесемо то отстојање z директно шестаром из II пројекције или помоћу h као на слици. Оборени положај равни у овом случају може да се тумачи и као трећа пројекција, где се ${}_1X_3$ поклапа са t_1'. Ми смо га раније у слици 73 и тумачили тако.



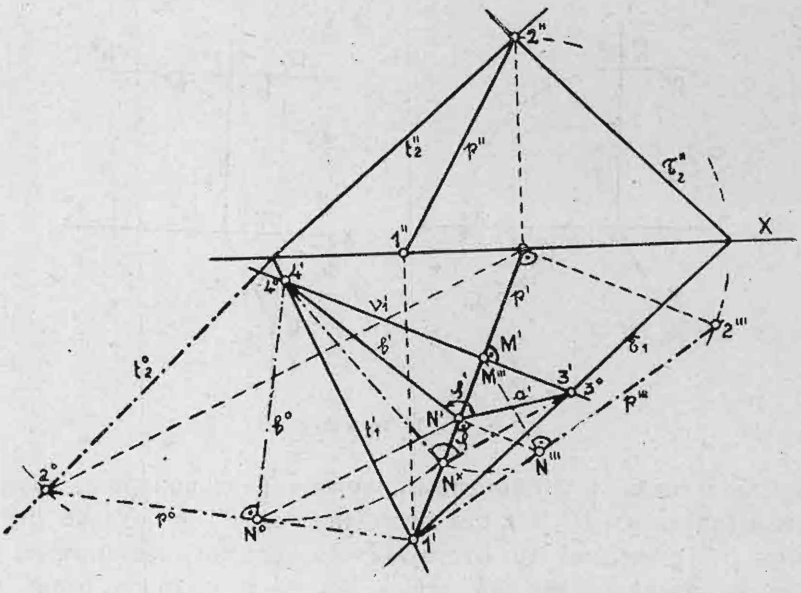
Сл. 79 (*a* и *b*)

Место у H, може да се раван обори у V. У том случају окрећемо раван око њезине друге трасе t_2''. Како је $t_2 \perp H$, кругови по којима се крећу поједине тачке, показиваће се у I пројекцији у правој величини, а у II пројекцији као праве $\perp t_2''$ (у сл. 79 то је показано за тачку A).

§ 34. Угао двеју произвољних равни

Раније смо видели да се угао двеју равни одређује на тај начин, што се те равни пресеку трећом помоћном равни управном на обе задане, или, што је исто, помоћном равни која је управна на њихову пресечну праву. Тражени угао φ је угао који заклапају праве a и b, пресечне праве помоћне равни са задатим равнима.

Ако су нам задате две равни $t_1\ t_2$ и $\tau_1\ \tau_2$, па треба да одредимо угао који оне заклапају између себе, одредимо најпре пресек p тих двеју равни (в. сл. 80). Управно на пресек p повучемо помоћну раван, али од те равни цртамо само прву трасу $\nu_1' \perp p'$. Сада треба да одредимо пресек a и b помоћне равни са задатим равнима. Две тачке тих пресечних правих већ имамо, тачке $3'$ и $4'$, где се трасе t_1' и τ_1' секу са ν_1'. Да бисмо одредили праве a и b, најбоље би било да претходно одредимо тачку N где помоћна раван ν пресеца праву p. Ту тачку можемо одредити овако: Кроз p повучемо нову пројекциску раван $\perp H$ тако, да се ${}_1X_3$ поклопи са p'. У новој пројекцији показиваће се p''' у правој величини, а помоћна раван ν, пошто је управна на нову пројекциску раван ($\nu_1' \perp {}_1X_3$), показаће се цела као једна права и то као права ν_3''' из $M''' \perp p'''$. У њиховом пресеку имамо тражену тачку N''', па је ординатом пренесемо натраг на p'. Тиме су одређене пресечне праве a' и b', а по њима и тражени угао φ' који између себе заклапају две задате равни. Праву величину угла φ одредићемо тако, што положимо троугао $3'\ N'\ 4'$ око ν_1' у H. Положену тачку N одредимо помоћу отстојања те тачке од M', које се у III пројекцији показује у правој величини. У сл. 80 означено је и то полагање.



Сл. 80

Поред овог начина одређивања угла φ постоји и други можда лакши начин, па је и он уцртан у сл. 80, а састоји се у овом: Одредимо као и раније пресек $p'\ p''$ задатих равни и повучемо помоћну раван ν као пре $\perp p$, и то поново само њезину прву трасу ν_1'. Раван

ν је упра́вна на праву p, а то значи да је права p управна на све праве у равни ν, дакле и на праве a и b. Када знамо да праве b и p стоје под правим углом, оборимо раван t_1 и t_2 у H и одредимо у њој p^0. У сл. 80 раван је оборена помоћу тачке 2 тако да p^0 можемо цртати и без t_2^0. Права b^0 треба да пролази кроз 4^0 и да је управна на p^0. У пресеку је N^0, па враћањем натраг одредимо N', тиме и φ'. Праву величину угла φ одредимо као и пре обарањем троугла $4'$ N' $3'$ око ν_1. Положај оборене тачке N одредимо помоћу праве величине дужи 4^0 N^0 на правој b.

§ 35. О рогљу

Три равни које се секу сачињавају просторни рогаљ. Праве, по којима се ове равни секу, називамо *ивицама*, а заједничку пресечну тачку *врхом рогља*. За онај део равни између двеју ивица кажемо да је *страна рогља* а углове који између себе затварају две стране називамо *углом рогља*. Према томе, код рогља разликујемо три стране и три угла.

Када имамо пројекције свих трију ивица рогља, можемо из самих пројекција да одредимо праве величине страна (углове између ивица) и углове рогља. Замислимо да је задат рогаљ једном страном на H. Тада су две ивице већ у H, а трећа ивица је пресек других двеју страна. Праву величину им одредимо обарањем у H. (У сл. 80 оборена је тако страна t_1 p рогља t_1 p τ_1). Углове рогља одредимо као у сл. 80 и у сл. 61. Ако ниједна страна не лежи у пројекциској равни, оборимо тада једну у пројекциску раван, па смо и тај задатак свели на прећашњи.

Од поменутих шест елемената (три стране и три угла рогља) могу да су нам задата само три, и то у било којој комбинацији. Увек можемо да по овим трима елементима конструишемо пројекције рогља, па да на тај начин одредимо и друга три елемента.

Таквих комбинација има углавном шест. Сад се може сматрати да смо прешли све елементе потребне за решавање ових задатака, па да, према томе, не треба о њима посебно говорити.

§ 36. О афинитету и колинеацији

Ова партија не спада овде, јер се у њој не говори ни о каквим мерама, него чисто и само о положају.

Пошто ћемо у њој говорити само онолико колико нам је потребно за рад при решавању задатака, нека остане овде, где је у ствари потребна њезина примена.

Постојили код двеју фигура такав однос, да свакој тачки једне одговара само једна тачка друге фигуре, тада кажемо да су те две фигуре сродне (на пример, као тачке на географској карти и на глобусу). Ако је тај однос такав да свакој правој једне равни одговара само једна права друге равни, такво сродство називамо *„колинеација“*. Такав однос настаје онда, када неку фигуру једне равни пројектујемо централно на другу раван. Свакој правој једне равни одговараће само једна права друге, али паралелне праве једне неће углавном бити паралелне и у другој равни.

Када је однос такав, да свакој тачки једне одговара само једна тачка друге равни, али да при томе паралелне праве остају и у другој равни паралелне, кажемо да су те две равни *афине*. Значи, да је афинитет уствари колинеација код које бесконачно удаљеној правој једне равни одговара бесконачно удаљена права друге равни. Тај се однос постиже тако, ако се на пр. нека фигура једне равни пројектује паралелним зрацима на другу раван.

Ако су две фигуре афине са неком трећом тада су и оне између себе афине. Одатле следи да су и две ортогоналне пројекције неке фигуре између себе афине.

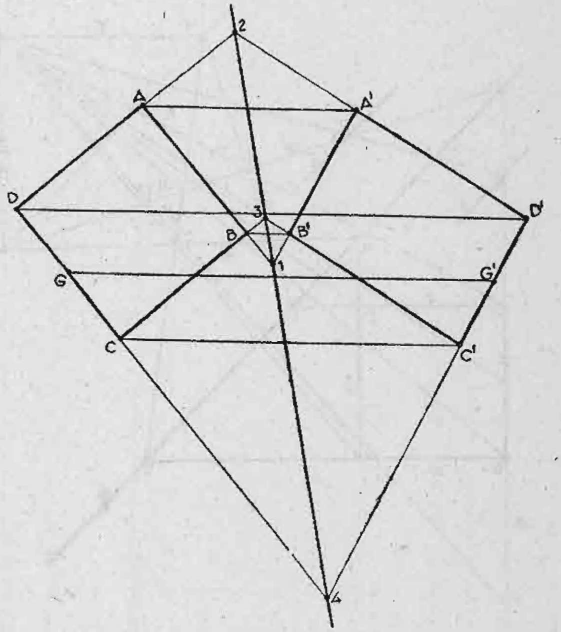
Ако су уз то две афине фигуре тако оријентисане да једна тачка одговара другој у неком сталном правцу, такав афинитет називамо *„перспективни афинитет“*. У том случају све праве једне фигуре секу се са правама које им одговарају у другој фигури на једној правој (правој коинциденције). Свака тачка те праве припада једној и другој фигури.

Стални правац у коме једна тачка одговара другој називамо *„зрак* (или *„правац“*) *афинитета“*, а сталну праву (праву коинциденције) *„оса афинитета“*.

Као пример можемо да замислимо неки троугао у произвољној равни и, за паралелне зраке светлости, његову сенку по хоризонталници. Афини су, јер свакој тачки троугла одговара у истом правцу само једна тачка сенке. Правац светлости је у овом случају зрак афинитета, а оса афинитета је права по којој се сече раван у којој је троугао са равни у којој је сенка. То је заправо права чије све тачке припадају једној и другој равни, па једина може да буде права коинциденције. У овом случају то је прва траса, као пресек произвољне равни троугла са хоризонталницом, равнином сенке. Потпуно је свеједно јесу ли то две одвојене равни, као што смо их овде речима приказали, или је то једна раван. Јер, да смо те две равни нацртали на једном листу хартије, говорили бисмо и даље о двема одвојеним равнима. Уствари била би то само једна раван, раван хартије на којој смо приказали једну и другу раван.

Када нам је позната оса афинитета и један пар тачака које одговарају једна другој, а тим и зрак афинитета, тада можемо за све тачке једне фигуре да одредимо тачке које им одговарају у другој фигури. То исто важи и за колинеацију. Само у случају колинеације, поред осе колинеације и једног пара тачака које одговарају једна другој, треба да нам је задат и *„пол“* или *„центар колинеације“* кроз који пролазе сви зраци колинеације.

Тако је у сл. 81 задат квадрат *ABCD*, оса афинитета (права) *g* и тачка *A′* која одговара тачки *A*. Треба да одредимо тачке *B′ C′ D′*. Да одредимо тражену тачку *B′*, повучемо кроз познату тачку *B* праву, али тако да пролази и кроз још једну тачку која нам је позната у обим фигурама, а да при томе пресеца и осу афинитета *g*. У овом случају познамо засад само тачку *A* у обема фигурама, тачке *A* и *A′*. Повучемо дакле праву *AB* до пресека 1 са осом *g*. Правој *A* 1 одговараће у другој фигури права *A′* 1· (Требало би писати *A′* 1′, али, да не теретимо цртеж, тачке на оси *g* бележимо само једним знаком, јер знамо да оне припадају једној и другој фигури). Када правој *A* 1 одговара права *A′* 1, тачки *B* на њој одговараће тачка *B′* на правој *A′* 1 и то на свом зраку афинитета кроз тачку *B*. На исти начин одређена је је и тачка *D′* помоћу праве *AD* 2 и праве *A′* 2 која јој одговара. Да одредимо тачку *C′* која одговара тачки *C* квадрата, можемо повући праву *BC* 3 и праву *DC* 4, јер су нам већ познате тачке и *B′* и *D′*, а могли бисмо повући и праву *AC* 5 продужену дијагоналу квадрата. Овде је најбоље да повучемо праву *DC* 4, јер се права *D′* 4 која јој одговара сече са зраком афинитета из тачке *C* под највећим углом, па је и најтачније одређена. За контролу повучемо и праве *B C* и *B′ C′*. Како оне одговарају једна другој треба да се продужене секу у једној тачки 3 на оси афинитета.



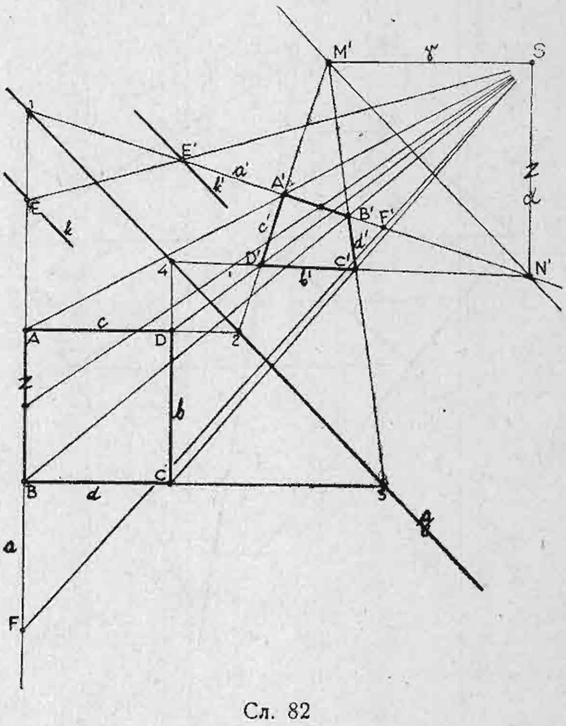
Сл. 81

Видимо да квадрату *A B C D* одговара паралелограм *A′ B′ C′ D′*, *дакле паралелним правим — паралелне праве.* То смо могли и очекивати, јер знамо да код афиних фигура бесконачно удаљеним тачкама одговарају бесконачно удаљене тачке. Исто тако, ако на страни *C D* квадрата узмемо тачку G која полови дужину те стране, тачка G' која јој одговара је расположиште стране $C' D'$.

*

Код колинеације остаје иста конструкција. Када нам је задата оса g колинеације, затим пол или центар колинеације (тачка кроз коју пролазе сви зраци колинеације) и један пар тачака које одговарају једна другој, можемо да одредимо све остале тачке фугуре која одговара задатој.

То је урађено у сл. 82 где нам је задат квадрат $A B C D$, оса g колинеације, пол или центар колинеације S и тачка A' која одговара задатој тачки A. Тачке B' и D' одређене су као код пређашњег примера помоћу правих $A B 1$ и $A D 2$, а тачка C' помоћу праве $D C 4$. Једина разлика у конструкцији је у томе што су пре зраци афинитета били сви између себе паралелни, а овде (код колинеације) сви зраци колинеације пролазе кроз пол или центар S. Битна је разлика у томе што квадрату A B C D одговара четвороугао A' B' C' D' који није паралелограм.



Сл. 82

Правој a, продуженој страни AB заданог квадрата, одговара права a', продужена страна $A' B'$ четвороугла. Узмемо ли на правој a неку нову тачку E, њој ће одговарати нека нова тачка E' на правој a' и да је одредимо, довољно је да повучемо зрак колинеације $E S$. Повучемо ли кроз S било који други зрак ε колинеације, он ће пресецати праву a у некој тачки F, а праву a' у тачки F'. Одмах смемо да кажемо тачки F праве a одговара тачка F' праве a'. Можемо да повучемо кроз тачку S и зрак колинеације α и то тако да буде паралелан са правом a. Он ће се сећи са правом a, пошто су паралелни, у њезиној безконачно удаљеној тачки N. Сећи ће се и са правом a' у тачки N'. Видимо да у овом случају бесконачно удаљеној тачки N праве a одговара на правој a' тачка N' која није бесконачно удаљена.

Права *b* (продужена страна *C D* задатог квадрата) и права *a*, као две паралелне праве секу се у својој бесконачно удаљеној тачки *N*. Та тачка *N* припада и правој *a* и правој *b*. Исто тако и тачка *N'* припада и правој *a'* и правој *b'*· То значи да продужена права *b'* мора пролазити кроз тачку *N'*, односно да се праве *a'* и *b'* морају сећи у тачки *N'*. На исти начин помоћу зрака колинеације γ, паралелног са правама *c* и *d* можемо на правама *c'* и *d'* одредити тачку *M'* која одговара бесконачно удаљеној тачки *M* у којој се секу праве *c* и *d*. Према томе права *N' M'* одговара бесконачно удаљеној правој равни задатог квадрата. Јасно је да мора бити паралелна са осом *g* колинеације.

Могли смо у сл. 82 повући и зрак β колинеације паралелан са правом *b'*. Тај би зрак пресекао праву *b* (продужену страну *CD* задатог квадрата) у тачки *R*. Тачки *R* на правој *b* свакако треба да одговара нека тачка *R'* на правој *b'* и то у пресеку праве *b'* са повученим зраком β. Али како су *b'* и β две паралелне праве, њихов пресек, тачка *R'* је у бесконачности. Када бисмо у равни квадрата повукли праву *RA*, која сече осу колинеације у тачки 5, њој би свакако одговарала права 5*A'*. Како ова права треба да пролази и кроз тачку *R'* која је бесконачно удаљена тачка праве *b'*, мора права 5 *A' R'* да буде паралелна са правом *b'*. Исто би било и са правом *B* 6 *R* односно 6 *B'*.

Видимо да код колинеације бесконачно удаљеним тачкама *N* и *M* одговарају тачке *N'* и *M'* које су у коначности (нису бесконачно удаљене), а да исто тако некој обичној тачки *R* (која није у бесконачности) може да одговара бесконачно удаљена тачка *R'*. То значи да паралелним правама *a* и *b* не одговарају паралелне праве, него две праве *a'* и *b'* које се секу у коначности. И обрнуто правама *A* 5 и *B* 6 које се секу у тачки *R* одговарају паралелне праве 5 *A'* и 6 *B'*. Услед тога квадрату *A B C D* одговара код колинеације неправилни четвороугао *A' B' C' D'*.

Видели смо већ раније да све тачке осе колинеације припадају једној и другој фигури (једном и другом систему тачака), квадрату *A B C D* и четвороуглу *A' B' C' D'*. Природно да то важи и за њезину бесконачно удаљену тачку. То је једина бесконачно удаљена тачка једне фигуре, којој одговара бесконачно удаљена тачка друге фигуре. То значи да само праве које су у равни једне фигуре паралелне са осом колинеације, остају паралелне са осом колинеације и у равни друге фигуре, која јој одговара. Тако је у сл. 82 повучена кроз тачку *E* права *k* паралелна са осом колинеације. Њој одговара права *k'* која пролази кроз тачку *E'*, а поново је паралелна са осом колинеације.

Узмимо на правој *a* поред тачака *A* и *B* још неке тачке *E* и *F*, али тако да растојања између тих тачака буду једнака. Тим тачкама одговарају на правој *a'* тачке *E' B' A' F'*. Дужи између тих тачака на правој *a'* нису једнаке него су мање уколико се тачке приближавају тачки *N'* која одговара бесконачно удаљеној тачки праве *a*. Нарочито треба нагласити да, ако тачка *B* полови дуж *A F* на правој *a*, тачка *B'* која јој одговара није располовиште дужи *A' F'* на правој *a'*. Једино ако је код колинеације нека права *k* паралелна са осом, па њој одговара права *k'* такође паралелна са осом, једнаким дужима између тачака V VI VII праве *k* одговарају једнаке и то сличне дужи између тачака V' VI' VII' праве *k'*, па према томе и располовишту неке дужи једној правој располовиште дужи која јој одговара на другој правој.

§ 37. Неке конструкције кривих другога реда

Ортогонална пројекција круга је углавном елипса. Једино када је раван круга паралелна са пројекциском равни, пројекција круга је круг. Како при решавању задатака треба често да цртамо елипсу, понекад параболу или хиперболу, наведимо већ сада понеку конструкцију тих кривих подесну за цртање, иако би о томе требало говорити касније.

Нека нам је задат неки круг. Повуцимо у том кругу било који пречник *A B*. Са обе стране тог пречника, а паралелно са њим повуцимо понеку секанту круга, док последње не додирну круг. Додирне тачке обележимо са *C* и *D*. Ако располовимо тетиве на тим секантама, њихова располовишта ће се нанизати дуж једне праве која пролази кроз тачке *C* и *D* и кроз средиште круга. Дуж *C D* је нови пречник круга. Повучемо ли нове секанте, паралелне са пречником *C D*, последње ће додиривати круг у тачкама *A* и *B*. Располовишта њихових тетива нанизаће се поново по једној правој и то по пречнику *A B* круга. Када два пречника круга, као *A B* и *C D*, имају ту особину да један полови тетиве паралелне с другим, за таква два пречника кажемо да су то два „*спрегнута пречника круга*“ („коњугована пречника круга“).

Спрегнути пречници круга стоје под правим углом.

Тангенте у крајњим тачкама двају спрегнутих пречника су наизменично паралелне.

Често кажемо да је неки пречник спрегнут са тетивама паралелним са пречником који је спрегнут са њим и обрнуто. Пошто смо пречник *A B* круга узели потпуно произвољно, а сваком пречнику одговара један који је са њим спрегнут, можемо да кажемо да у кругу има бесконачно много спрегнутих пречника.

Када одредимо пројекцију круга чија је раван произвољна, неће сви пречници круга бити једнако скраћени. Знамо да то скраћење зависи од угла који тај пречник заклапа са пројекциском равни. Највеће скраћење имаће пречник који је у правцу нагибнице а најмање, остаће заправо без скраћења, пречник који је паралелан са сутражницом равни.

*

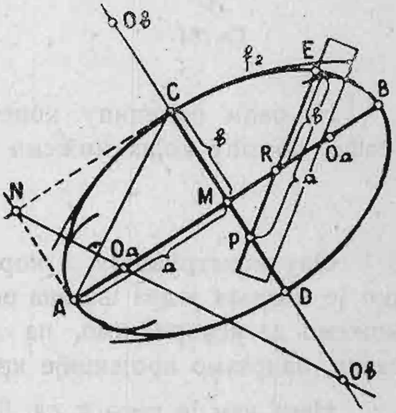
а) *Елипса*

Треба ли да одредимо пројекцију круга, можемо да одредимо пројекције појединих његових тачака, али би то био тежак и нетачан посао. Много лакше је да узмемо на кругу два спрегнута пречника, па ће пројекције тих двају спрегнутих пречника круга бити спрегнути пречници елипсе која је пројекција тога круга. Када имамо спрегнуте пречнике елипсе, сама елипса је потпуно одређена. Ако на кругу узмемо било која два спрегнута пречника, прав угао који они заклапају између себе неће се показивати у пројекцији као прав угао него било какав мањи или већи. У том случају кажемо да нам је елипса задана спрегнутим пречницима. Ако на кругу одаберемо спрегнуте пречнике тако да је један од њих паралелан са пројекциском равни, прав угао који они заклапају показаће се и у пројекцији као прав угао (јер му је један крак паралелан са пројекциском равни). У том случају имамо два спрегнута пречника који стоје под правим углом, а то су осе елипсе. У том случају кажемо да нам је елипса задана осама.

Према томе да ли је елипса задана осама или спрегнутим пречницима различита је и конструкција елипсе.

Када је елипса задана осама, а нарочито ако елипсу треба извлачити у тушу, најбоље је да одредимо додирне кругове (заправо кругове кривине) у теменима елипсе и опишемо потребне делове тих кругова. Делове елипсе између тих кругова најбоље је затим одредити методом парчета хартије.

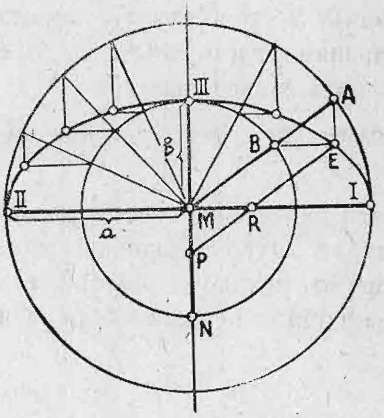
Ако су задате осе елипсе *AB* и *CD* са средиштем *M*, да одредимо средишта кругова кривине у теменима, повучемо над једном четвртином елипсе правоугаоник *AMCN* (в. сл. 83). Ако сада повучемо управну из тачке *N* на дијагоналу *AC*, у њезиним пресецима са великом и продуженом малом осом имамо тражена средишта кругова кривине у теменима елипсе. Иако теориски ови кругови имају само по четири тачке заједничке са елипсом, ипак се они поклапају графички са елипсом на прилично великом делу (в. слику). Остале делове елипсе конструисаћемо *„методом парчета хартије“*.



Сл. 83

Позната је конструкција елипсе дата у сл. 84. Повучемо над великим пречником I II круг, а исто тако и над малим III IV. Ако сада уцртамо било који полупречник и из његових пресека A и B са круговима повучемо паралелне са осама, добићемо једну тачку E елипсе. Тако је повучено неколико полупречника и уцртана горња половина елипсе.

Ова конструкција је добра, али је неподесна због тога што захтева много цртања и што елипсу не добијамо чисту. Међутим њу можемо да искористимо као доказ једне друге конструкције. Јер, ако из E повучемо праву паралелну са пречником AM до пресека R и P са осама елипсе, одмах ћемо видети да је дуж EP једнака дужи $AM=a$, јер су паралелне између паралелних линија. Исто тако је и дуж $ER=BM=b$. Према томе је дуж PR једнака разлици осовина $a-b$. Ово важи за било који пречник и било коју тачку елипсе. Другим речима, ако на некој правој нанесемо велику полуосу елипсе a и од ње одузмемо малу полуосу b, па пустимо да разлика полуоса клизи по осама елипсе, трећа тачка описаће елипсу.



Сл. 84

Место на некој правој, нанесемо те дужи на правој ивици једног парчета хартије, па помоћу њега одредимо по неколико тачака елипсе између додирних кругова које смо већ уцртали (в. сл. 83). На тај начин уједно и проверавамо докле се додирни кругови поклапају са елипсом. Овакав начин одређивања тачака елипсе називамо *„метод парчета хартије“*. Овај је метод нарочито подесан, јер не захтева никакву конструкцију, па елипса остаје потпуно чиста.

На овом принципу конструисане су нарочите справе — елипсографи, помоћу којих можемо директно нацртати елипсу.

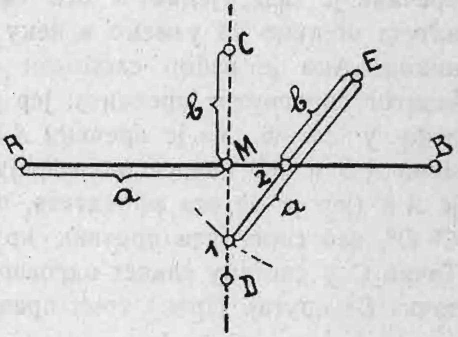
*

Ову конструкцију, а користећи се правилом да је елипса одређена ако је позната једна њезина оса и једна њезина — било која — тачка, можемо да искористимо, па да на једноставнији начин, без обарања равни, нацртамо пројекције круга.

Нека нам је тако у сл. 84a позната велика оса AB неке елипсе и њезина тачка E. Друга мала оса елипсе мора да пролази кроз располовиште M те дужи и да стоји управно на њу. Сећајући се методе *„парчета хартије“* можемо да узмемо у шестар полуосу a (дуж AM) и да је нанесемо од тачке E до пресека 1 са малом полуосом. Права E 1 је права ивица *„парчета хартије“*, дуж 1 E на њој велика полуоса a, а дуж 2 E мала полуоса b елипсе (тачка 2 је пресек праве 1 E са задатом осом *A B*). Нанесемо ту полуосу *b* с обе стране средишта *M*, одредимо тако крајње тачке *C* и *D* мале полуосе, па можемо конструисати елипсу као у слици 83.

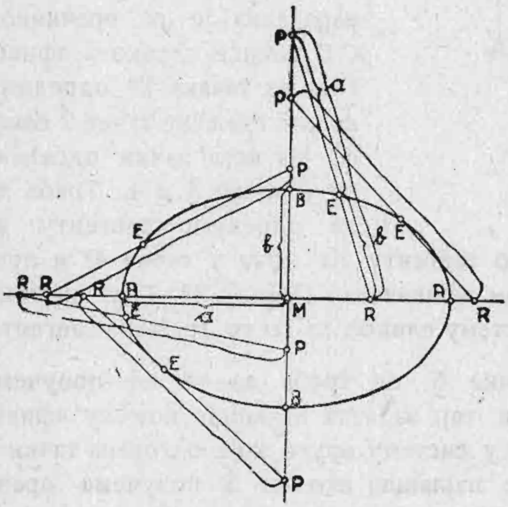
Из слике се види да би конструкција била аналогна, да нам је место велике била задата мала оса *CD*. Из тачке *E* нанели бисмо полуосовину *b* до пресека 2 са симетралом осовине *C D*, па би у продужењу праве *E* 2 и њезиног пресека 1 са осом *C D* имали дуж *E* 1 тражену велику полуосу *a* елипсе.

Ову ћемо конструкцију користити у слици 156 и 229.



Сл. 84*a*

Место да на правој ивици парчета хартије нанесемо велику полуосу *a* елипсе и од ње одузмемо малу полуосу *b*, па пуштамо да нам крајње тачке *P* и *R* тих полуоса (дакле разлика полуоса) клизе по осама елипсе, можемо нанети на правој ивици парчета хартије велику полуосу *PE* = *a* елипсе и од тачке *E* додати малу полуосу *ER* = *b* (дакле збир полуоса). Ако сада пустимо да тачка *P* клизи по малој оси, а тачка *R* по великој, тачка *E* описује понова исту елипсу (в. сл. 85).



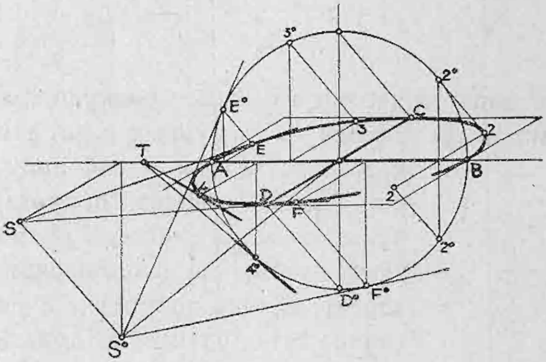
Сл. 85

Овај други начин је бољи и тачнији од првог. Јер ако претпоставимо да је тачка *P* парчета хартије постављена тачно на малу осу, а да је друга тачка *R* мало нетачна према великој оси, нетачност тачке *E* се смањује у слици 85, док се у првом случају (у сл. 83) повећава. То је нарочито важно када је разлика полуоса сразмерно малена.

*

Када је елипса задата спрегнутим пречницима (а не осама), можемо да је конструишемо на више начина, а који ћемо начин употребити, зависи од тога шта желимо.

Ако треба да нацртамо само мален део елипсе или само понеке њезине тачке, можемо их конструисати помоћу афинитета. Свака елипса је афина са кругум описаним око једног њезиног пречника. Тај пречник је тада уједно и оса афинитета. Природно да као осу афинитета можемо да узмемо и неку другу праву паралелну са тим пречником. Ако је избор слободан описиваћемо афини круг око већег задатог спрегнутог пречника, јер је тада и тачност већа. Тако је урађено у сл. 86, па је пречник *A B* оса афинитета. Спрегнутим пречницима *A B* и *C D* елипсе одговарају два спрегнута пречника круга. Један је *A B* (јер је он оса афинитета, па припада и елипси и кругу), а други C^0 D^0, као спрегнути пречник круга, треба да буде управан на *A B*. Тачки *C* у систему елипсе одговара тачка C^0 у систему круга (и тачки *D* тачка D^0 круга). Према томе права C^0 *C* или D^0 *D* је зрак афинитета. Да одредимо неку тачку елипсе, повучемо на кругу тетиву 2^0 2^0 паралелну са пречником C^0 D^0. Тој тетиви круга одговара тетива елипсе, која пролази кроз заједничку тачку II на оси афинитета, а паралелна је са пречником *C D* елипсе. Зраком афинитета из тачака 2^0 одредимо на њој тражене тачке 2 елипсе. На исти начин одређене су и тачке 3 и 4. Треба ли да одредимо тангенту на елипсу у тачки 4, конструишемо тангенту на круг у тачки 4^0 и продужимо је до пресека *T* са осом афинитета. Правој 4^0 *T* у систему круга одговара права 4 *T* у систему елипсе, па је то тражена тангента.

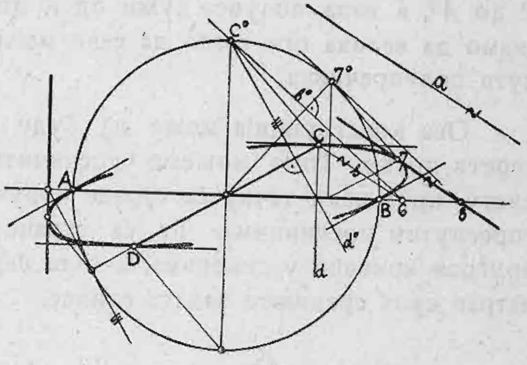


Сл. 86

Ако нам је задата нека тачка *S*, па треба да из ње повучемо тангенте на елипсу, решавамо и тај задатак најлакше помоћу афинитета. Најпре одредимо тачку S^0 у систему круга, која одговара тачки *S* у систему елипсе. Одредимо је најлакше ако из *S* повучемо праву паралелну са пречником *C D* елипсе до пресека 5 са осом афинитета, а одатле праву паралелну са пречником C^0 D^0 круга. Из тако одређене тачке S^0 повучемо тангенте на круг и одредимо додирне тачке E^0 и F^0, а саме тангенте продужимо до пресека са осом афинитета (в. сл. 86). Из њих до *S* иду тражене тангенте на елипсу, а зраком афинитета одредимо на њима и додирне тачке, место пресека са осом можемо да користимо додирне тачке *E* и *F* које пренесемо са круга.

Често се тражи да повучемо тангенте на елипсу паралелне са неком задатом правом *a*. Задатак решавамо лако помоћу афинитета

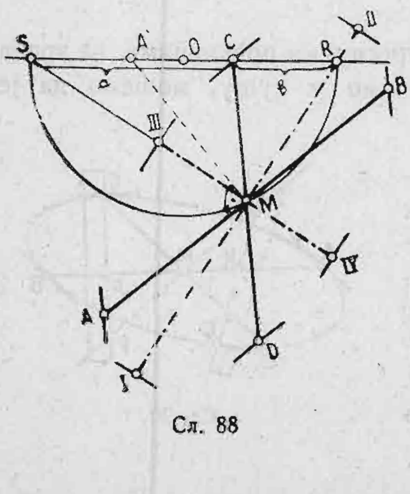
Најпре треба да одредимо праву која у систему круга одговара правој *a* задатој у систему елипсе. Зато повучемо кроз неку познату тачку на пр. кроз тачку *C* праву *b* паралелну са задатом правом *a* до пресека 6 са осом афинитета (в. сл. 87). Њој одговара у систему круга права b^0 која пролази кроз тачке 6 и C^0. Паралелно са b^0 повучемо тангенте на круг (до пресека са осом), а њима одговарају тражене тангенте на елипсу. Још боље је да, када смо одредили праву b^0 у систему круга, повучемо из средишта *M* елипсе праву управну на b^0 и тако одредимо додирну тачку 7^0 на кругу. Кроз тачку 7^0 повучемо затим тангенту на круг паралелну са b^0 до пресека 8 са осом афинитета. Кроз тачку 8 пролази тражена тангента на елипсу, паралелна са задатом правом *a*. Зраком афинитета одредимо на њој и додирну тачку 7. Тангенте, природно постоје две, али је нацртана само једна, да не терети цртеж. Зато је нацртана и тангента *t* на елипсу управна на пречник *A B*, која се често тражи у косој пројекцији као контура вертикалне обртне облице. Конструисана је помоћу паралелне праве *d* и d^0 у свему као и тангента паралелна са задатом правом *a*.



Сл. 87

*

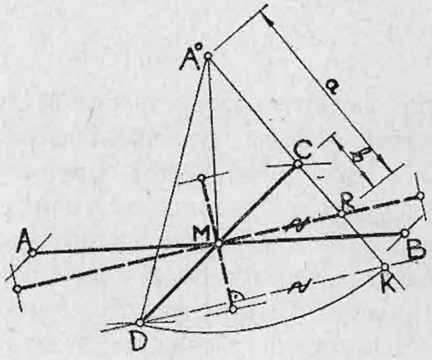
Ако треба да нацртамо целу елипсу задану спрегнутим пречницима, па још и да је извучемо у тушу, тада је најбоље да, користећи задане спрегнуте пречнике елипсе, одредимо њезине осе. Када одредимо осе, саму елипсу конструишемо помоћу кругова кривине у теменима и методом парчета хартије.



Сл. 88

Ево познате конструкције за одређивање оса елипсе када су познати њезини спрегнути пречници *AB* и *CD* (в. сл. 88) Из средишта елипсе *M* повучемо праву управну на дужи пречник *A B* и нанесемо на њој од средишта *M* до тачке A^0 дужину дужег полупречника *MA*. (Ако су оба спрегнута пречника једнака, тада на било који од њих). Тада повучемо праву $A^0 C$ и располовимо дуж $A^0 C$ на њој. Око тога располовишта *O* као средишта опишемо круг који пролази кроз сре диште M елипсе и то до пресека R и S са повученом правом A^0 C. Тим су осе одређене. Леже на правама MR и MS. Одређене су и њихове дужине. Велика полуоса једнака је дужи од S до C или од R до A^0, а мала полуоса дужи од R до C или од S до A^0. Од раније знамо да велика оса треба да сече мањи угао између два задата спрегнута полупречника.

Ова конструкција може да буде незгодна што својим линијама терети цртеж. Томе можемо доскочити на тај начин што на истом листу, кроз неку тачку са стране повучемо праве паралелне са задатим спрегнутим пречницима. Ту са стране одредимо и осе и средишта кругова кривине у теменима, а тада паралелним правама вратимо осе натраг кроз средиште задате елипсе.



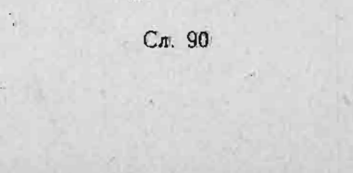
Сл. 89

За одређивање оса једноставнија је ова друга конструкција. (в. сл. 89) Из средишта M елипсе повучемо као пре праву управну на дужи задати спрегнути пречник AB и нанесемо на њој од тачке M до тачке A^0 дужину дужег полупречника AM. Повучемо затим и праву A^0 C. Могли бисмо повући и дуж A^0 D, али нам она није потребна. Ако сада на правој A^0 C од тачке A^0 до тачке K нанесемо дуж једнаку дужи A^0 D, права DK је паралелна са траженом великом осом елипсе, па можемо одмах да повучемо кроз M и саму осу. Мала оса је управна на њу. Симетрале су угла C A^0 D. Повучена велика оса сече праву A^0 C у тачки R, па је велика полуоса једнака дужи A^0 R, а мала полуоса дужи RC.

*

Када нам је задата елипса својим спрегнутим пречницима, па треба да је нацртамо целу, али да је не извлачимо у тушу, можемо да је конструишемо и на овај начин.

Из крајње тачке C краћег спрегнутог пречника повучемо управну на дуж AB и обележимо тачку R у којој се пресецају. (Ако су задати пречници једнаки, онда на било који од њих). На тој управној нанесемо од тачке C до тачке P дужину MA већег полупречника в. сл. 90. На крају повучемо још праву кроз овако

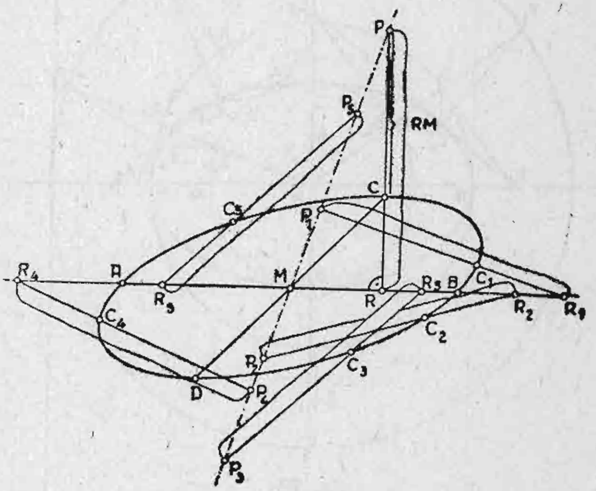


Сл. 90

одређену тачку P и кроз средиште M елипсе. Тим је конструкција завршена. Дуж управне CP поставимо праву ивицу једног парчета хартије и обележимо на њој тачке C R и P. Ако сада померамо хартију тако да се тачка R креће по пречнику AB, а тачка P по правој MP (обе с једне и друге стране средишта M елипсе), тачка C на правој ивици хартије описаће тражену елипсу. Ово је већ позната „метода парчета хартије“, али сада уопштена за било које спрегнуте пречнике елипсе (па и њезине осе).

Има случајева када ова конструкција није довољно тачна због тога што је угао између пречника AB и праве PM врло мален. Тај угао зависи од односа дужина полупречника елипсе и угла међу њима. У тим случајевима мала нетачност при постављању тачака P и R на праву и осу може да изазове велико отступање тачке C елипсе.

Стога је подеснији и тачнији овај други начин исте конструкције. Из крајње тачке C краћег пречника повучемо као пре прву управну на већи пречник и одредимо њезин пресек R са њим. Затим нанесемо поново већи полупречник AM на тој правој, али сада не као пре од тачке C преко R до P, него са друге стране од тачке C до P тако да тачка C остане између P и R (в. сл. 91). Кроз тако одређену тачку P повучемо као раније праву PM. Пустимо ли сада да се права PR (или права ивица једног парчета хартије) помера тако да тачка P клизи по правој PM, а тачка R по пречнику AMB, тачка C описиваће (притом померању) елипсу.



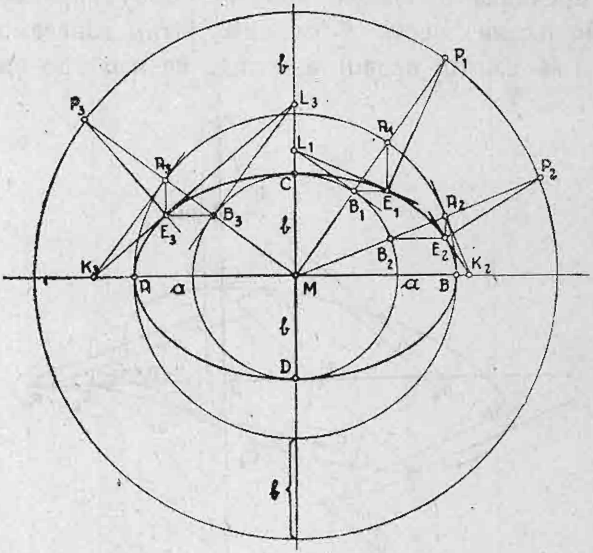
Сл. 91

Овај начин је бољи, јер се смањују отступања услед нетачног постављања тачака P и R на праву и пречник, а и угао између пречника AB и праве MP је велик (не може да буде мањи од 45⁰).

*

Поред конструкције саме елипсе често се тражи и тангента у некој тачки елипсе, понекад и нормала на елипсу. Конструкција тангенте на елипсу већ нам је позната из сл. 86. Ту је тангента у тачки 3 елипсе конструисана помоћу афинитета. На исти начин конструисане су тангенте E_1 и E_2 елипсе у сл. 92. На слици је елипса задата осама, па су око велике и мале осе описани афини кругови. За конструкцију тангенте на елипсу у тачки E_1 коришћена је мала оса елипсе као оса афинитета. У том случају тачки E_1 одговарала је на афином кругу тачка B_1. Конструисана је тангента у тачки B_1 круга и уцртана до пресека L_1 са осом афинитета. Тангента на елипсу ићи ће кроз тачку L_1 и кроз тачку E_1 елипсе. На исти начин могла се конструисати и тангента у тачки E_2 елипсе, само би тачка L_2 била превећ далеко од елипсе. Стога је у овом случају боље претпоставити да је велика оса елипсе оса афинитета и да тачки E_2 елипсе одговара тачка A_2 великог афиног круга, па тада конструисати тражену тангенту помоћу тангенте круга у A_2 и њезиног пресека K_2 са осом афинитета.

За вежбу конструисана је тангента у тачки E_3 елипсе, само је у овом случају употребљена и једна н друга оса афинитета и тангента конструисана помоћу тачака K_3 и L_3.



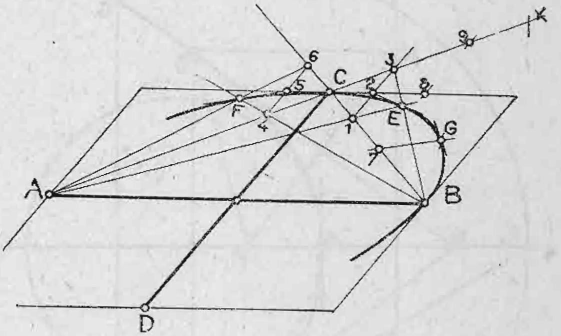
Сл. 92

Ако се тражи да поред тангенти уцртамо у тачкама E_1 E_2 и E_3 и нормале (управне) на елипсу, најлакше је поред ова два већ уцртана круга (са полупречницима a и b) уцртати и трећи са полупречником $a+b$. Пречници кругова помоћу којих су одређене тачке E_1 E_2 и E_3 елипсе, секу овај нови круг у тачкама P_1 P_2 и P_3. Праве које спајају те тачке P_1 P_2 и P_3 са тачкама E_1 E_2 и E_3 елипсе су тражене нормале на елипсу и стоје управно на тангенте елипсе у тим тачкама.

*

На крају треба навести и ову конструкцију елипсе. Подесна је када са што мање тачака треба нацртати елипсу, а нарочито је добра у централној пројекцији (перспективи), када је један од спрегнутих пречника паралелан са пројекцијском равни. Важи и када тачка M није средиште елипсе него само централна пројекција средишта круга.

Када су нам задата два спрегнута пречника AB и CD елипсе, повучемо тангенту у тачки C и праве AC и BC. Ако сада из тачке A повучемо било коју праву a, али тако да пресеца дуж BC у некој тачки 1 и из тачке 1 праву паралелну са полупречником MC, та права пресеца тангенту у C у тачки 2 а праву AC у тачки 3. (в. сл. 93). Спојимо ли сада тачке 3 и B, у пресеку те праве са правом a је тачка E елипсе, а права 2 E је тангента на елипсу у тој тачки. Исто би било да смо повукли кроз тачку B неку праву b и обележили са 4 њезин пресек са правом AC, а затим повукли из тачке 4 праву паралелну са полупречником MC до пресека 5 са тангентом у C и пресека 6 са правом BC. У пресеку праве b са правом 6 A је тачка F елипсе, а права 5 F је тангента на елипсу у тој тачки.

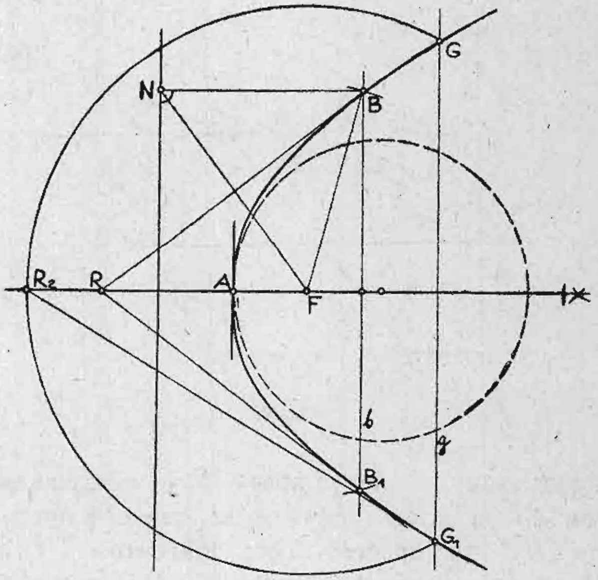


Сл. 93

Природно да све ове линије не треба цртати. Довољно је од праве d (за тачку G) повући део од тачке 7 десно. Место целе праве из тачке 7 паралелне са пречником MC, довољно је обележити у 7 њезин почетак и засећи њезине пресеке 8 са тангентом у C и 9 са правом AC. Праву 9 B не треба уопште цртати него само обележити њезин пресек G са правом d. На крају место целе тангенте 8 G, довољно је повући само мален део с једне и друге стране тачке G.

b) *Парабола*

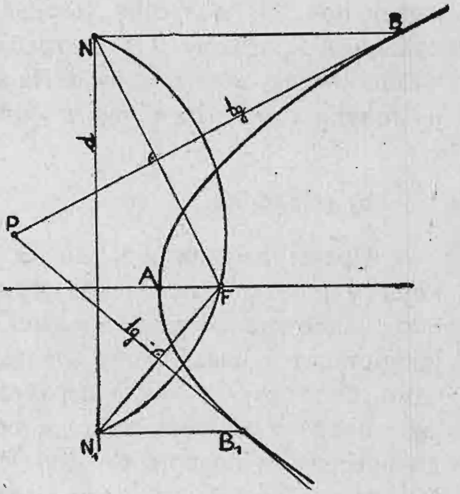
Према дефиницији, да је парабола геометриско место тачака које су једнако удаљене од једне сталне праве (директрисе параболе) и од једне сталне тачке (жиже), конструкција параболе је прилично једноставна и чиста. Када нам је задана директриса d и жижа F повучемо било коју праву b паралелну са директрисом. Одмеримо отстојање праве b од директрисе и то исто отстојање нанесемо од жиже F до пресека са правом b. Добијемо тако две тачке B и B_1 параболе. Ове две тачке B и B_1, а и било које две друге одређене на некој другој правој паралелној са директрисом стоје симетрично према правој повученој кроз жижу F управно на директрису. Та права је оса параболе, а дуж BB_1 је тетива параболе спрегнута са осом (в. сл. 94). Тачка A која полови растојање између директрисе и жиже је теме параболе. Оскулаторни круг (круг кривине) у темену параболе има своје средиште на оси параболе, а полупречник r му је једнак отстојању жиже од директрисе. Тангента у темену A је, према томе, паралелна са директрисом, односно управна на осу параболе.



Сл. 94

Да одредимо тангенту на параболу у њезиној тачки B повучемо оба потега FB и BN за ту тачку. Тангента на параболу полови њихов угао. Та је тангента симетрала дужи FN, а сече продужену осу у тачки R. Лако је увидети да је дуж FB једнака дужи FR.

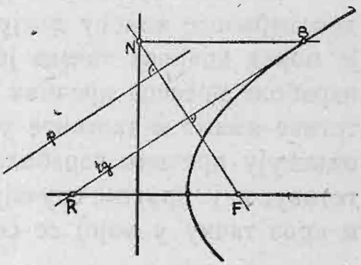
Хоћемо ли неку нову тачку параболе, конструкција је једноставна. Повучемо неку праву g управну на осу. Одмеримо њезино отстојање од директрисе, па ту дуж нанесемо с обе стране од жиже до пресека G и G_1 са g. То су две нове тачке параболе, а ако исту дуж нанесемо од жиже до пресека R_2 са осом, одредили смо и тангенте у тим тачкама (в. сл. 94).



Сл. 95

Нека нам је задато да из неке тачке P повучемо тангенте на параболу задату директрисом и жижом. Решење је једноставно ако погледамо предњу слику и сетимо се правила да је тангента симетрала дужи NF. Око задате тачке P повучемо круг који пролази кроз жижу F. (в. сл. 95). Круг пресеца директрису у тачкама N и N_1. Симетрале дужи FN и FN_1 су тражене тангенте. Ако из тачака N и N_1 повучемо потеге паралелне са осом, у њиховим пресецима са тангентама имамо и додирне тачке тражених тангената.

Када би задатак био да на параболу задату директрисом и жижом повучемо тангенту паралелну са задатом правом *p*, задатак бисмо решили на исти начин (в. сл. 96). Права управна на задату праву, *p*, повучена из жиже *F* сече директрису у тачки *N*. Симетрала дужи *F N* је тражена тангента, а потега из *N* паралелна осом одређује на тангенти и додирну тачку *B*.



Сл· 96

*

Ако у некој произвољној равни имамо параболу и хоћемо да јој одредимо ортогоналну пројекцију, свакој тачки параболе одговараће у пројекцији једна тачка, свакој тангенти тангента, па и бесконачно удаљеној тачки бесконачно удаљена тачка. Пројекција параболе биће поново парабола. Једино правом углу између тетива и осе неће, углавном, одговарати прав угао, осим у случају да је једна од тих двеју правих, тетива или оса паралелна са пројекциском равни. Пројекција тетиве остаће тетива нове параболе, али пројекција осе неће бити оса нове параболе него само пречник параболе спрегнут са поменутом тетивом.

Наведимо сада без доказа нека правила о параболи, која нам касније могу послужити да лакше нацртамо саму криву.

Ако узмемо две, било које тачке параболе, па их спојимо, та дуж је тетива параболе. Паралелно са њом можемо да повучемо колико год хоћемо нових тетива исте параболе. Располовимо ли сваку од тих тетива, њихова располовишта нанизаће се по једној правој коју називамо пречником параболе. Тај пречник је спрегнут са поменутим тетивама, а и тетиве саме су спрегнуте са тим пречником.

1) Парабола пресеца свој пречник у једној тачки и тангента у тој тачки је паралелна са тетивама које су спрегнуте са тим пречником.

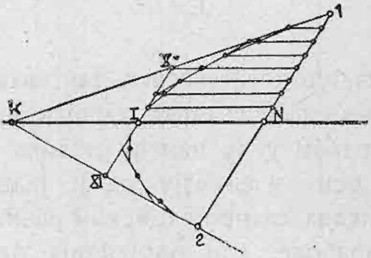
Узмемо ли неку другу тетиву параболе, која није паралелна са предњим тетивама, добићемо и неки други пречник параболе који је спрегнут са том новом тетивом, али је тај нови пречник паралелан са оним првим пречником.

2) Сви пречници параболе су паралелни између себе, а паралелни су и са осом параболе. (Јер је и оса параболе само један од њезиних пречника, са јединим разликом што су тетиве спрегнуте са осом управне на њу).

3) Када у крајњим тачкама неке тетиве повучемо тангенте на параболу, те се тангенте пресецају у једној тачки пречника спрегнутог са том тетивом.

4) Парабола пресеца тај пречник у тачки која полови дуж од пресека тангенти до располовишта тетиве.

Ова нам правила дају могућност да једноставно конструишемо део параболе између двеју задатих тачака. Парабола је одређена ако је поред крајњих тачака једне њезине тетиве позната и тачка у којој парабола пресеца пречник спрегнут са том тетивом, или када поред тетиве имамо и тангенте у њезиним крајњим тачкама. У првом случају одређују пречник параболе пресечна тачка и тачка која полови дату тетиву, а у другом случају пречник пролази кроз располовиште тетиве и кроз тачку у којој се секу дате тангенте.



Сл. 97

Код примера у сл. 97 дата је тетива са тачкама 1 и 2, а осим ње тачка I у којој парабола пресеца пречник спрегнут са датом тетивом. Одредимо ли располовиште *N* тетиве, можемо да повучемо кроз тачке *N* и I пречник параболе. По правилу 4) пренесемо по пречнику *N* дуж *N* I још једном од тачке I на даље. Тако одредимо тачку *K* у којој се пресецају тангенте на параболу у крајњим тачкама 1 и 2 дате тетиве. Повучемо и саме тангенте. По правилу 1) тангента на параболу у тачки I паралелна је са датом тетивом 1 2. Када је повучемо, видимо да она пресеца раније повучене тангенте у тачкама X и XI (в. сл. 97), које су располовишта дужи 1 *K* и 2 *K* (сличност троуглова). Исто тако дели и тачка I дуж X XI у два једнака дела.

Ову особину можемо да користимо, па да конструишемо колико год хоћемо нових тачака параболе са тангентама у свакој од њих. Јер узмемо ли у обзир нову тетиву I 2 параболе, имаћемо већ нацртане тангенте у њезиним крајњим тачкама, а и пресечну тачку XI тих тангенти. Довољно је да располовимо дужи I XI и 2 XI па је дуж која спаја та два располовишта нова тангента на параболу, а располовиште те дужи њезина додирна тачка, заправо тражена нова тачка параболе.

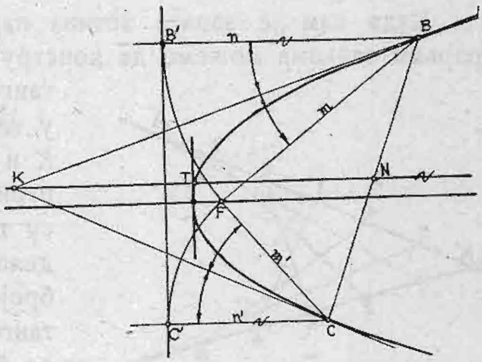
Можемо сада узети нову тетиву од те нове тачке параболе до тачке I, па поновити конструкцију. Сваки пут ћемо добити нову тангенту на параболу и додирну тачку на њој.

Неподесно је код ове конструкције оно стално делење појединих дужи на два једнака дела. То можемо да избегнемо. По правилу 2) сви пречници параболе су паралелни. Ако дакле поделимо дуж 1 *N* на 2, 4, 8, 16 или 32 дела, па кроз те деоне тачке повучемо праве паралелне са пречником *N K*, те нам праве полове све помињане тангенте. Тако је у сл. 97 подељена дуж 1 *N* на осам једнаких делова и помоћу правих из тих тачака, а паралелних са пречником конструисана горња страна параболе.

*

Када нам је задата тетива BC параболе и пресек T параболе са пречником који је спрегнут са том тетивом, знамо да је сама парабола потпуно одређена. Можемо тада да одредимо директрису и жижу параболе, а по њима све остало потребно.

Повучемо пречник NT параболе и нанесемо на њему до тачке K још једанпут дуж NT. Тако одредимо тангенте KB и KC крајњим тачкама задате тетиве. Оса параболе треба да буде паралелна са задатим пречником, а директриса управна на њега. Можемо, значи, да из тачке B повучемо праву n паралелну са пречником параболе и са друге стране тангенте праву m симетрнчну са њом (с обзиром на тангенту у тачки B). Ако се сетимо сл. 94 на тим су правим потеге параболе за тачку B. Повуцимо исто тако праве n_1 и m_1 из тачке C (в. сл. 94). У пресеку правих m и m_1 треба да буде жижа F параболе. Ако сада нанесемо дуж FB од тачке B на праву n и дуж FC од C на праву n_1, одредићемо тако на њима тачке B_1 и C_1, две тачке тражене директрисе d. Тим је и задатак решен, одређена је жижа и директриса параболе.

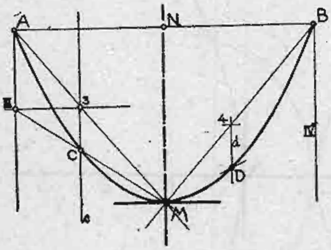


Сл. 98

*

На крају треба навести и ову конструкцију параболе, која је јако подесна за примену у „Графостатици" (в. сл. 99).

Нека нам је поново задата тетива AB параболе и тачака M у којој парабола пресеца пречник спрегнут са задатом тетивом, дакле тачка која је најудаљенија од задате тетиве или тачка у којој је тангента паралелна са задатом тетивом. Кроз располовиште N тетиве и кроз тачку M повучемо речени пречник параболе. Затим повучемо из задатих тачака A и B праве a и b паралелне са пречником, а нацртамо и дијагонале AM и BM. Хоћемо ли да одредимо тачку параболе на било којој правој c паралелној са пречником NM, повучемо ту праву и обележимо тачку 3 у којој она сече дијагоналу AM. Из тачке три повучемо праву паралелну са тетивом AB до пресека III са правом a. На пресеку праве c са новом правом III M је тражена тачка C параболе.



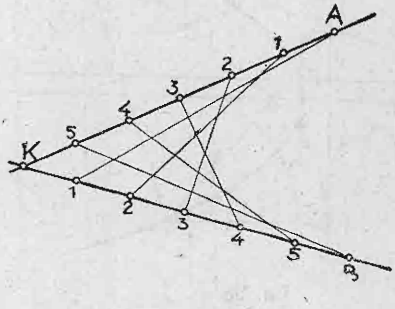
Сл. 99

Овако приказана ова конструкција и да је гломазна и да терети цртеж многим линијама, али може да се упрости. Место да цртамо праву III 3, довољно је само да обележимо њезин пресек III са правом a. Исто тако место целе праве III M, можемо само да нагласимо њезин пресек C са правом c. Тако је одређена тачка D на правој d.

*

Можда би требало навести и ову конструкцију параболе, која се често погрешно наводи као конструкција елипсе.

Када нам је задата тетива параболе са тангентама у њезиним крајњим тачкама можемо да конструишемо параболу помоћу њезиних тангената. Продужимо задате тангенте у тачкама A и B до њиховог пресека K и поделимо дужи AK и BK на исти парни број једнаких делова. На сл. 100 су те дужи подељене у шест једнаких делова, па су деоне тачке обележене бројевима од 1 до 5 и то на једној тангенти од A према K, а на другој од K према B. Спојимо ли истоимене тачке правим, те су праве тангенте на параболу (а крива која их додирује парабола). По потреби можемо да умећемо нове деоне тачке, а тиме и нове тангенте. На слици су нацртане испрекиданим линијама.

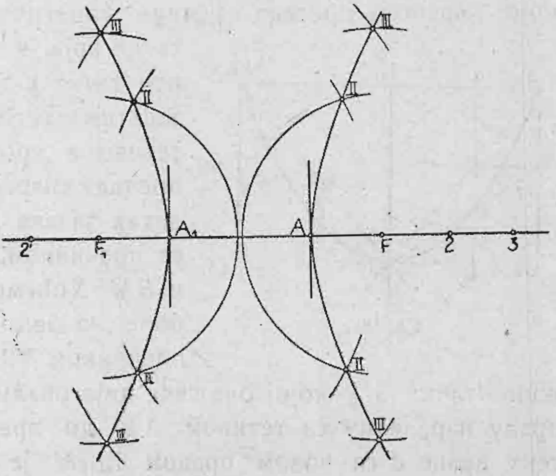


Сл. 100

*

с) *Хипербола*

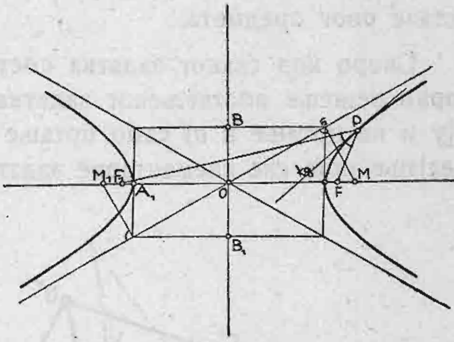
Сама дефиниција, да је хипербола геометриски положај тачака које имају једнаку разлику отстојања од двеју сталних тачака, даје сразмерно лаку конструкцију хиперболе, сличну конструкцији елипсе. Поменуте сталне тачке називамо жижама и обележавамо словима F и F_1. Права која пролази кроз жиже је реална оса хиперболе. Када су нам познате жиже и темена хиперболе A и A_1, све остале тачке можемо да конструишемо по самој дефиницији. Довољно је да на реалној оси узмемо неку тачку 2 и да са



Сл. 101

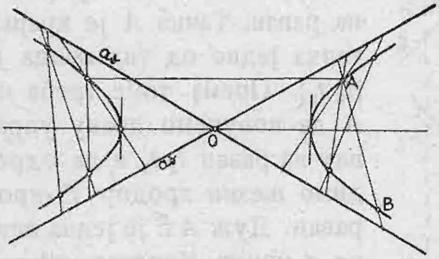
дужи $A\,2$ као полупречником опишемо круг око жиже F, а са дужи $2\,A_1$ круг око жиже F_1 (а жиже можемо и да заменимо). У пресеку тих кругова добијамо сваки пут по четири тачке хиперболе (в. сл. 101).

Повучемо ли из неке тачке P хиперболе потеге $P\,F$ и $P\,F_1$, симетрала њиховог угла је тангента на хиперболу у тачки P. Растојање темена хиперболе, дуж $A\,A_1$ је реални пречник хиперболе. Његово располовиште је средиште O хиперболе. Ако кроз средиште O повучемо праву управну на реални пречник $A\,A_1$ хиперболе и растојање $O\,F$ жиже од средишта нанесемо од темена A до пресека са том управном правом, добићемо крајње тачке B и B_1 другог, имагинарног пречника хиперболе (в. сл. 101*a*). Сада можемо да конструишемо правоугаоник коме су средишњице дужи $A\,A_1$ и $B\,B_1$. Дијагонале тога правоугаоника су асимптоте хиперболе, тангенте на хиперболу у њезиним бесконачно удаљеним тачкама. Ако из било ког темена тога правоугаоника повучемо управну на асимптоту, у њезином пресеку са осом имамо тачку M_1, средиште круга кривине за теме A_1.



Сл. 101*a*

Код одређивања пресека купе по хиперболи обично можемо да одредимо асимптоте криве и још понеку тачку саме хиперболе. У тим случајевима подесна је и ова конструкција. Претпоставимо да већ имамо асимптоте хиперболе и бар једну њезину тачку A (в. сл. 102). Кроз тачку A повуцимо неку праву која сече обе асимптоте. Та права мора да сече хиперболу у још једној тачки B. (Јер је хипербола крива другог реда). Постоји правило по коме је отстојање тачке A од пресека те праве са једном асимптотом једнако отстојању тачке B од пресека те исте праве са другом асимптотом. Повлачећи нове праве кроз A можемо да на тај начин одредимо колико хоћемо нових тачака B.



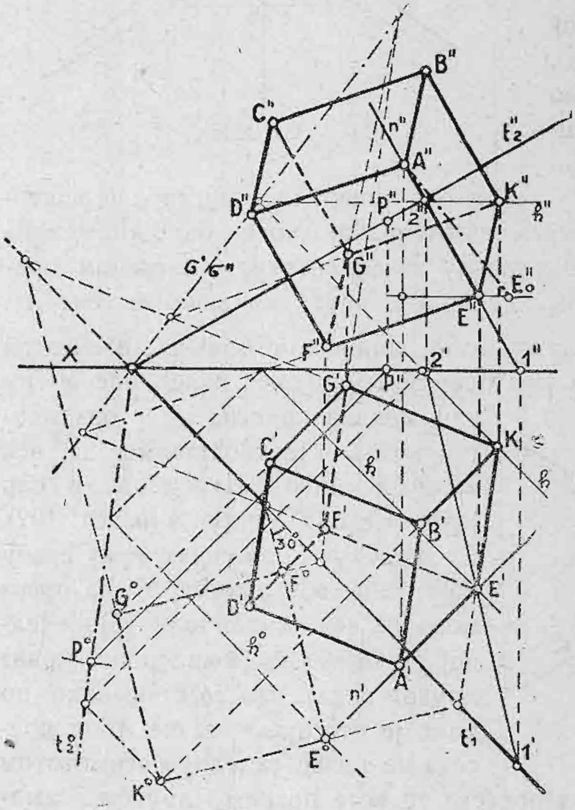
Сл 102

Природно да ова конструкција терети цртеж великим бројем линија. Ту незгоду можемо да избегнемо. Место нове праве поставимо кроз тачку A ивицу лењира, одмеримо отстојања као пре и убодом игле обележимо на цртежу нову тачку B хиперболе.

§ 38. Задаци за вежбу

Овим што је до сада речено решени су скоро сви елементарни задаци, тако рећи, азбука Нацртне геометрије. Све што отсада будемо радили у ортогоналној пројекцији ослањаће се на овим елементима. Да би, према томе, ове елементе боље усвојили решићемо за вежбу неколико теориских задатака. Решавање ових задатака допринеће много развијању моћи просторне претставе, а то је један од главних циљева наставе овог предмета.

Скоро код сваког задатка постоје у ствари два проблема: *a*) просторно решење постављеног задатка, без обзира на Нацртну геометрију и на цртање и *b*) само цртање задатка и решења, управо тачно одвајање које све елементарне задатке треба да решимо, па да дођемо до решења постављеног задатка. Ево неколико примера:



Сл. 103

1) Задата је произвољна раван t_1 t_2 и ван ње тачка *A*. Одредити пројекције коцке којој је *A* врх једног рогља, а једна се пљошт налази у равни t_1 t_2, и то тако да једна ивица квадрата заклапа са t_1 угао од 30°.

а) Просторно решење. Једна пљошт коцке лежи у равни t_1 t_2 што значи да су четири ивице коцке управне на раван. Тачка *A* је крајња тачка једне од тих ивица ⊥ $[t_1\ t_2]$. Према томе треба из *A* да повучемо праву управну на раван t_1 t_2 и да одредимо њезин продор *E* кроз раван. Дуж *A E* је једна ивица *a* коцке. Конструисаћемо у t_1 t_2 квадрат са дужином ивице *a*, али тако да је тачка *E* један врх квадрата, а да му једна страна заклапа угао од 30° са t_1. Када још из свих темена квадрата повучемо управне на раван и нанесемо на свакој дуж *A E*, имаћемо одређене све тачке тражене коцке.

б) Према томе, пошто смо уцртали задату произвољну раван t_1 t_2 и ван ње тачку *A* (*A' A''*), треба да решимо следеће елементарне задатке.

1) Из тачке A повући управну n на раван ($n'' \perp t_2''$, $n' \perp t_1'$); 2) Одредити продоре E те управне кроз задату раван. (Помоћна раван $\perp$ V сече t_1 t_2 по правој 1′ 2′, па је на њој E'); 3) Одредити праву величину дужи A E. (Одређена окретањем дужи ∥ V, дуж A'' E''_0 је права величина a свих ивица коцке); 4) задатој равни уцртати квадрат; *а*) Оборена је раван и сутражницом одређена тачка E^0. *б*) Из E^0 је уцртана права која са t_1' заклапа угао од 30^0, и нацртан квадрат E^0 F^0 G^0 K^0 са дужином стране a. — Оваквих квадрата може се уцртати четири, а да сваки има као врх E^0 и да једна ивица заклапа угао од 30^0 са t_1'. Према томе сам задатак није довољно одређен, јер има четири решења, *в*) Тачке квадрата $E^0 - K^0$ пренете су сутражницама у I и у II пројекцију, па је затим њихова тачност проверена помоћу афинитета; 5) Из тачака $E - K$ повући управне на задату раван и нанети на њима дуж a. Тиме су одређене остале тачке коцке. (Управне из E G K на раван паралелне су са E A, па је и скраћење исто и у I и II пројекцији. Повучемо управне у обим пројекцијама и нанесемо на њима дуж A' E' односно E'' A''.); 6) Спојити поједине тачке — уцртати ивице коцке — и одредити које су ивице видљиве а које невидљиве. (Уцртане су поједине ивице коцке, водећи рачуна о томе дали су паралелне. Невидљива је у I пројекцији тачка F', јер је најближа H, а исто тако у II пројекцији тачка G'' као најближа V.

Код овог задатка проверена је тачност I и II пројекције квадрата E F G K помоћу афинитета. Оса офинитета σ, пресек равни t_1 t_2 са другом симетралном равни, одређен је помоћу пресека h' и h'' за тачку K.

2) Задата је произвољна раван. Уцртати тетраедар који једном пљошти лежи на тој равни а једна му је ивица ∥ t_2.

Овај задатак решава се најлакше у обореној равни, а висина управна на t_1 t_2 одређује се као у сл. 57.

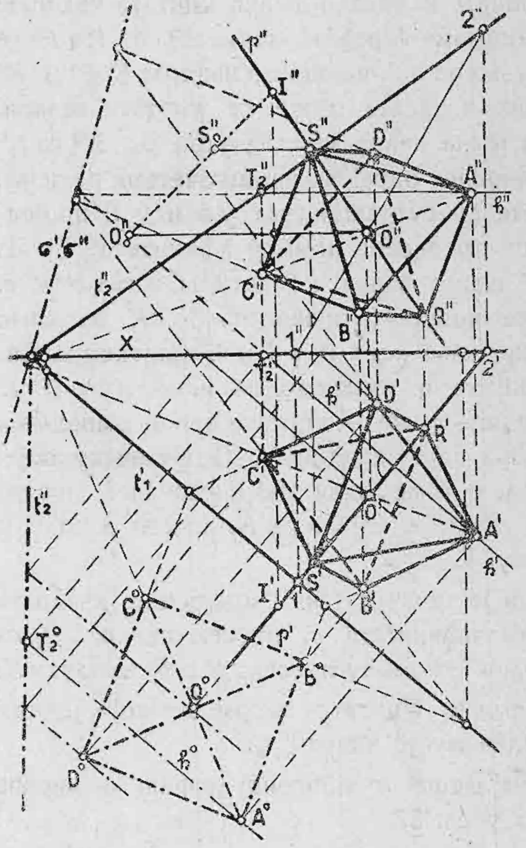
3) Задате су две паралелне праве a и b. Одредити пројекције коцке којој две ивице једне пљошти леже на правим a и b.

Кроз задате праве повући ћемо раван. (Трасе пролазе кроз трагове правих). Оборићемо раван и тиме одредити праву величину a стране коцке, која је једнака растојању задатих правих. Уцртаћемо квадрат и пренети га у обе пројекције. Затим из сваке тачке управну на раван и на њој дуж a као у сл. 59.

4) Задате су две паралелне праве. Уцртати октаедар коме две ивице леже на задатим правим.

5) Задата је произвољна права p и ван ње тачка A. Треба уцртати пројекције октаедра коме је тачка A врх једног рогља, а једна му се оса налази на p.

Ако је A један врх, а права p оса, тада се A и још три врха налазе у једној равни која пролази кроз A и стоји управно на задату праву p (в. сл. 104). Продор праве p кроз ту управну раван је средиште O октаедра. Дуж OA је дужина $^1/_2\ d$ једне полуосе. Према томе уцртаћемо у управној равни квадрат са средиштем O коме је A један врх. Тиме су одређена четири рогља, а остала два имају врхове на p, и то на растојању $^1/_2\ d$ од O.

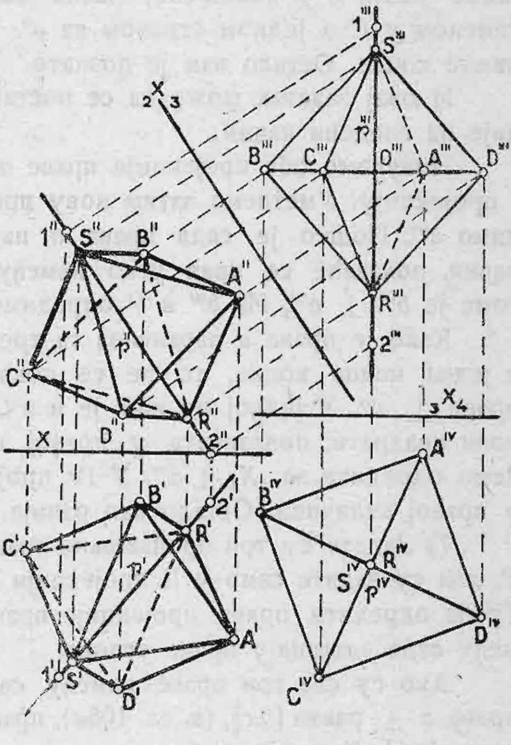


Сл. 104

Када је постављен задатак, дакле уцртана права $p'\ p''$ и ван ње тачка $A'\ A''$, урадићемо следеће: 1) Повући ћемо кроз A раван управну на p. (Помоћу сутражнице $h' \perp p'$ из A' и $h'' \parallel X$ из A'' одређен траг T_2, па кроз T_2'' пролази траса $t_2'' \perp p''$ а $t_1' \perp p'$); 2) Одредићемо продор O праве p кроз ту раван. (Помоћна раван кроз $p \perp H$ и на пресеченој правој $2''\ 1''$ тачка O''); 3) У равни $t_1\ t_2$ уцртаћемо квадрат око O, коме је A једно теме. (Оборимо раван помоћу тачке T_2 и одредимо A^0 и O^0. Дуж $A^0\ O^0$ је права величина полудијагонале $^1/_2\ d$ октаедра. Помоћу круга кроз A^0 око O^0 одредићемо квадрат $A^0 - D^0$, па га пренети у I и II пројекцију и контролисати тачност помоћу афинитета); 4) На правој p нанесемо с обе стране од O дуж $^1/_2\ d$. (То ћемо урадити као у сл. 59); 5) Спојићемо поједине тачке и одредити које су ивице видљиве а које невидљиве.

Овај исти задатак може се решити и на други начин. Ако је p једна од оса октаедра, онда ће R и S бити на њој врхови двају рогљева. Према томе постоји квадрат $A\ R\ C\ S$ у равни, коју одређује права p и тачка A. (в. сл. 104). Кроз средиште O квадрата, а управно на његову раван, пролази трећа оса октаедра. Врхови рогљева на њој једнако су удаљени од O колико и тачка A. То значи: 1). Одредићемо трасе равни која је задата правом p и тачком A (најлакше помоћу још једне праве из $A \parallel p$); 2) Оборићемо ту раван и конструисати квадрат коме је A^0 један врх а p^0 једна дијагонала. Друга дијагонала из $A^0 \perp p^0$ даје средиште O^0; 3) Пренећемо квадрат $A\ R\ C\ S$ у обе пројекције; 4) Из O повући ћемо управну на раван и на управној нанети с обе стране седишта O дуж $A\,O$. Тиме ће бити одређене све тачке.

Постоји још један врло једноставан начин за решење овог задатка, и то помоћу трансформације. Трансформишемо задату праву p и тачку A на нову раван $\parallel p$ (${}_2X_3 \parallel p''$) а затим на раван ${}_3X_4$ управну на p''' (в. сл. 105). Како је права p у III пројекцији $\parallel {}_2X_3$ показиваће се раван квадрата $A\,B\,C\,D$ као права из $A''' \perp p''$, па је у њиховом пресеку средиште O''' октаедра. Та је раван паралелна са ${}_3X_4$ а уз то је и $A''''\,p''''$ права величина отстојања тачке од праве. То значи да у IV пројекцији можемо уцртати праву величину квадрата коме је A'''' један врх, а p'''' (и на њој O'''') средиште. Тачке R и S, које су на p, одредићемо у III пројекцији наносећи од O'''' праву величину $^1/_2\,d$ полудиагонале $A'''\,p'''$. Ако пројектујемо из IV пројекције у III тачке $B\,C$ и D, можемо да уцртамо цео октаедар у III и IV пројекцији. Обичном трансформацијом вратићемо тада све тачке у II па у I пројекцију и спојити поједине тачке. На крају ћемо још одредити које су ивице видљиве а које невидљиве.



Сл. 105

Задаци 3) и 4) могу се такође решити помоћу трансформације.

6) Задате су две произвољне витоперне праве a и b под правим углом. Треба одредити пројекцију коцке којој је по једна ивица на a и b.

У овом случају не можемо ни поставити задатак без неке конструкције. Тражи се да праве заклапају између себе прав угао, а да притом буду произвољне. Тај прав угао неће се у пројекцији показати као прави угао (јер му ни један од кракова није паралелан са пројекциском равни), па га не можемо ни нацртати. Стога узмемо било коју произвољну раван $t_1\,t_2$ и нацртамо у њој било коју произвољну праву a. Свака права која је управна на ту раван управна је и на праву a у њој. Треба дакле да повучемо било коју праву b управну на раван $t_1\,t_2$ ($b' \perp t_1'$, $b'' \perp t_2''$), па је права b управна на праву a. Тим је и задатак постављен.

Пошто је раван $t_1\,t_2$ управна на праву b, биће у њој једна пљошт коцке. То значи да ће у њој бити квадрат коме је једна страна на задатој правој a, а једно теме на задатој правој b, дакле у продорној тачки C праве b кроз раван $t_1 t_2$. Према томе када повучемо праву b управну на раван $t_1 t_2$ и одредимо њезин продор C кроз ту раван, положимо раван и у положеној равни конструишемо квадрат са једним теменом у C и једном страном на a^0. Тим је одређена права величина ивице коцке. Остало нам је познато.

И овај задатак може да се постави и реши помоћу трансформације на следећи начин:

Повучемо обе пројекције праве a, док за праву b уцртамо само I пројекцију. Уметнемо затим нову пројекциску раван ${}_1X_3 \parallel a'$ и одредимо a'''. Пошто је сада права a паралелна са новом пројекциском равни, показаће се прав угао између правих као прав угао. Према томе је $b''' \perp a'''$. Из b''' и b' одредимо b''.

Како је права a паралелна са трећом пројекциском равни, а уз то и једна ивица коцке, то ће се показивати две пљошти коцке као праве $\perp a'''$. У једној од њих је и b'''. Те ће се пљошти, управо њихови квадрати, показивати у правој величини у IV пројекцији, коју ћемо одредити за ${}_3X_4 \perp a'''$. У IV пројекцији је a'''' једна тачка, а b'''' у правој величини. Остало као раније.

7) Задате су три произвољне праве a, b и c, које се секу у тачки P, али су задате само у II пројекцији а у I пројекцији једино тачка P'. Треба одредити праве пројекције правих уз претпоставку да оне између себе заклапају праве углове.

Ако су све три праве између себе под правим углом, тада је права $a \perp$ раван $[b\,c]$, (в. сл. 106a), права $b \perp [a\,c]$ и права c управна на раван $[a\,b]$. Када је управна на раван, управна је и на све праве у тој равни. Према томе права a заклапа прав угао са правом $B\,C$ у равни $b\,c$ и права c прав угао са правом $A\,B$ у равни $a\,b$. То је принцип на основу кога можемо да решимо задатак.

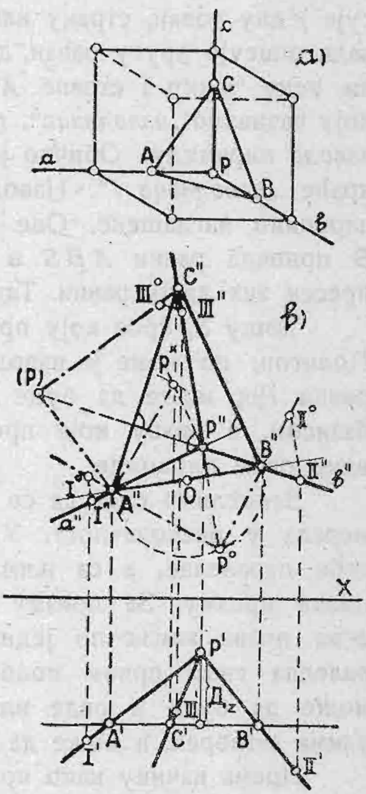
Ако у сл. 106b повучемо неку праву $\perp c''$ и одредимо њезине пресеке A'' и B'' са правима a'' b'' тада је права c управна на повучену праву $[A\,B]$. Пошто се тај прави угао показује и у II пројекцији као прав угао, значи да је један његов крак или права c или права $A\,B$ паралелна са вертикалницом, (в. § 23 правило 3.) За праву c знамо да је произвољна, јер је тако задана (а то се види и по пројекцијама правих a и b), те остаје као једина могућност да је права $[A\,B] \parallel V$. Када знамо да је права $A\,B \parallel V$, можемо око ње да оборимо троугао $A\,P\,B$, па да на тај начин одредимо праву величину страна $A\,P$ и $B\,P$. При обарању тачка P описиваће круг који ће се показивати као права из $P'' \perp A''\,B''$, а у обореном положају прав угао између правих a^0 и b^0 показиваће се у правој величини (P^0 на кругу око $A''\,B''$). Кад уцртамо оборен положај, одредимо у ствари праве величине дужи $A\,P$ и $B\,P$. Сада имамо другу пројекцију дужи $A''\,P''$ и њезину праву величину $A^0\,P^0$. Конструишемо троугао правих величина (из $P'' \perp [P''\,A'']$ и $[A''\,P^x] = [A''\,P^0]$, па смо тиме одредили и Д_y разлику отстојања од

V између тачака P и A. Тиме је одређена A', према томе и a'. Права AB је паралелна са V, па јој можемо уцртати I пројекцију $\parallel X$. Пројектујемо на њој B', па је $[P' B']$ права b'. Ако из A'' повучемо $\perp b''$ или из B'' управну на a'', добићемо на c'' тачку C'' Све што је речено за $A'' B''$ и c'' важи за $A'' C''$ и b''. Значи из A' повучемо $\parallel X$, на њој је C', а тиме је одређена и c'.

Задатак је могао да гласи и овако: Задате су у другој пројекцији три произвољне праве које се секу и прва пројекција њихове пресечне тачке. Треба одредити пројекције коцке којој је по једна ивица на тим трима правим, а дужина ивице је 2 см′.

И тај је задатак стварно решен у сл. 106, јер је на a^0 и b^0 нанета дуж 2 см и тачке I и II пренете у пројекцију. За тачку III на правој c тражена је засебно права величина дужи $P'' C''$ обарањем троугла $A'' P'' C''$ око праве $A'' C''$.

8) Задати оштроугли троугао $A B C$ чија је раван $\parallel V$ нека је раван пресек једне коцке са дужином ивице 2 см. Треба одредити пројекције коцке. Ако повучемо из $A'' \perp [B'' C'']$, из $B'' \perp [C'' A'']$ и из $C'' \perp [A'' B'']$ имаћемо тачно прећашњи задатак. Речене управне су прећашње праве a b и c, а уједно и ивице коцке.



Сл. 106 *а* и *б*

III. ПРЕСЕЦИ ПОВРШИНА (ТЕЛА)

а) Пресеци и продори рогљастих површина

§ 39. О рогљастим површинама

Пре него што почнемо говорити о пресецима рогљастих површина, конуса и облице, треба да видимо како те површине постају.

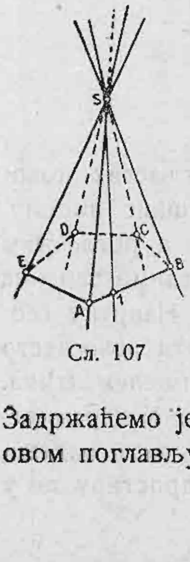
Овде морамо нарочито нагласити, да иако говоримо о рогљастим и облим „*телима*“, у Нацртној геометрији при томе мислимо само на рогљасте и обле „*површине*“. Израз „*тело*“ увукао се у Нацртну геометрију из обичног говора и она га се не може ослободити, иако често тај израз може да проузрокује погрешне појмове о појединим елементима. Свако тело има своје одређене димензије, па тако и призме, пирамиде, конуси и облице. За Нацртну геометрију, као што ћемо сада видети, призма, пирамида, облица и конус су површине које се простиру до у бесконачност, а сваки базис је само један случајан пресек те површине који ниуколико не мења особине саме површине.

Пустимо ли да једна права, која пролази кроз сталну тачку S, клизи по неком полигону чија раван не пролази кроз S, та ће права описивати пирамиду. Док права клизи страном AB полигона, она описује једну раван, страну или пљошт пирамиде. Када клизи по BC, она тада описује другу раван, другу страну или пљошт пирамиде. Спојимо ли неку тачку 1 стране AB полигона са тачком S, добијамо праву коју називамо *„изводница“*, пошто је она један од положаја праве која *изводи* пирамиду. Обично је називамо *„изводница кроз тачку 1“*, или краће *„изводница 1“*. Изводнице које пролазе кроз углове полигона нарочито наглашене. Оне припадају двема равнима. Тако изводница B припада равни ABS и равни BCS, што значи да она претставља пресек тих двеју равни. Такву изводницу називамо *„ивица“* (в. сл. 107).

Тачку S, кроз коју пролазе изводнице, називамо врхом пирамиде. Полигон, по коме је изводница клизила, — ако је полигон у једној равни (јер може да буде и просторни полигон) — обично називамо базисом, а праву која пролази кроз средиште базиса и кроз S називамо осом пирамиде.

Замислимо сада да се тачка S, кроз коју пролазе изводнице, померала у бесконачност. У том случају изводнице ће постати између себе паралелне, а са њима и ивице и оса, па ћемо место пирамиде имати призму. За призму можемо рећи да постаје на тај начин, што нека права клизи по једном полигону, а при томе остаје стално паралелна свом првом положају. Полигон по коме клизи изводница може да буде и овде или просторан или раван полигон. Обично се узима затворен, а може да буде и отворен полигон.

Према начину како постају, призма и пирамида протежу се до у бесконачност. Тако се и пирамида протеже и преко врха S и наставља се до у бесконачност другом потпуно једнаком пирамидом. Сваки раван пресек пирамиде или призме под условом да не пролази кроз врх и да није паралелан са којом од изводница можемо сматрати базисом.



Сл. 107

Обично се према броју страна полигона базиса назива призма и пирамида тространом, четвоространом, петоространом итд. Према томе да ли је базис правилна или неправилна фугура, назива се и призма односно пирамида правилном или неправилном. На концу још, ако је оса пирамиде или призме управна на раван басиса, каже се да је пирамида односно призма права, а у противном да је коса.

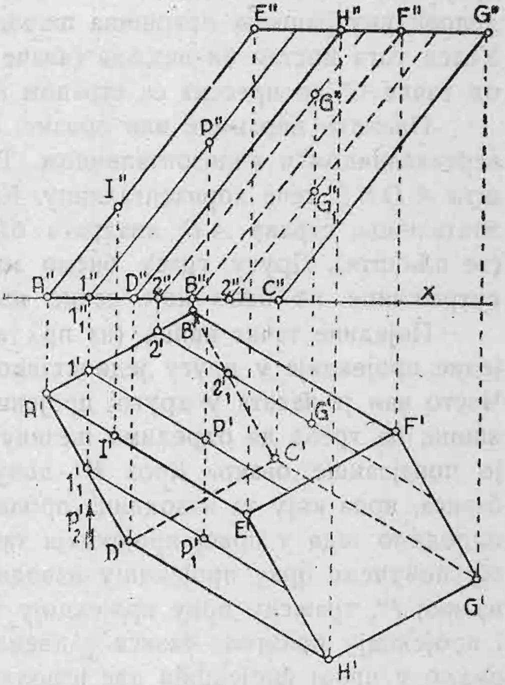
Ова подела је уобичајена, премда је погрешна. Задржаћемо је, пошто она нема никаквог утицаја на оно о чему ћемо у овом поглављу говорити. Да је погрешна, види се из следећег примера.

Неку тространу *правилну праву* пирамиду пресецимо равнином која није паралелна са базисом. Део пирамиде који је остао са врхом посматран као тело постао је сада тространа *неправилна коси* пирамида.

У сл. 108 нацртана је у обим пројекцијама правилна четворострана коса призма са доњим базисом, квадратом $ABCD$ у H и горњим базисом квадратом $EFGH$ у једној равни $\| H$.

У првој пројекцији видљив је горњи базис квадрат $E'F'G'H'$, а од доњег базиса само страна $B'A'$ и $A'D'$, јер су део видљиве контуре тела. Према томе као невидљива у првој пројекцији остаје само тачка C'. Услед тога невидљива је ивица призме $C'G'$ и стране базиса $B'C'$ и $C'D'$. Од пљошти призме видљиве су $A'E'F'B'$ и $A'E'H'D'$, или краће речено пљошти $B'A'$ и $A'D'$, док су пљошти $B'C'$ и $C'D'$ (у првој пројекцији) невидљиве. Када су пљошти $B'A'$ и $A'D'$ видљиве, природно је да су видљиве и све изводнице које их сачињавају. Остале изводнице од B' преко C' до D' су (у I пројекцији) невидљиве.

У другој пројекцији један и други базис показују се као дужи и то на контури тела. Од ивица видљиве су $A''E''$ и $C''G''$ (или краће ивице A'' и C'') јер су контурне, док је од других двеју видљива ивица $D''H''$ као ближа оку, када гледа ка вертикалници. Невидљива остаје само ивица $B''F''$.



Сл. 108

Од пљошти видљиве су $A''D''$ и $D''C''$ док су друге две $A''B''$ и $B''C''$ невидљиве. Када у хоризонталници повучемо праву $p_2' \perp X$ као прву пројекцију другог пројекциског зрака (управног на вертикалницу), видимо да нам њему паралелни зраци ударају у $A'D'$ и $D'C'$ квадрата базиса са спољне стране. То значи да су спољне стране пљошти AD и DC у другој пројекцији видљиве. Исти зраци p_2' ударају у стране $A'B'$ и $B'C'$ квадрата базиса са унутрашње стране кватрата, а то значи да су пљошти AB и BC у II пројекцији невидљиве. (Заправо, када бисмо на неки начин, отстранили пљошти AD и DC, призме, тада би пљошти AB и BC постале видљиве у другој пројекцији, али би на тај начин постале видљиве њихове унутрашње стране призме. Како у нацртној геометрији говоримо само о спољној површини призми и пирамида, конуса и облица, те спољне површине пљошти AB и BC остале би у II пројекцији невидљиве).

Касније ћемо узимати пример, где се претпоставља да су неке равни, нарочито равни басиса, или цели делови призма или пирамида отстрањени или постали провидни. Код тих примера могу и унутрашње површине појединих пљошти да постану видљиве.

Када бисмо на пр. код наше призме у сл. 108 претпоставили да је раван горњег басиса отстрањена или постала провидна, у другој пројекцији неби се мењало ништа, док би у првој пројекцији поједини делови унутрашњих површина пљошти $D'\,C'$ и $C'\,B'$ постали видљиви. Услед тога постао би видљив (иначе невидљиви) део ивице $C'\,G'$ и то од тачке G' до пресека са страном $E'\,F$.

Пљошти пирамиде или призме, посматрани као равни, секу се са вертикалницом и хоризонталницом. Тако код наше призме раван пљошти $ADHE$ сече хоризонталницу. Како су тачке A и D већ у хоризонталници, страна AD квадрата басиса је прва траса t_1' те равни (те пљошти). Другу трасу бисмо могли лако одредити помоћу прве сутражнице из било које тачке ивице A или D (н. пр. из тачке E).

Поједине тачке ивица (на пр. тачку I ивице A) пројектујемо из једне пројекције у другу једноставно ординатама као тачке на правој. Често нам је задата у другој пројекцији нека тачка P'' која није на ивици, па треба да одредимо њезину прву пројекцију P'. Одредићемо је понајлакше овако. Кроз P'' повучемо изводницу призме. Тачку басиса, кроз коју та изводница пролази обележићемо са $1''$. Ординатом одредимо тада у првој пројекцији тачку $1'$ на полигону басиса и кроз њу повучемо прву пројекцију изводнице. Ордината из P' даје нам тада на њој P', тражену прву пројекцију тачке P. Али ордината из $1''$ сече I пројекцију полигона басиса у двема тачкама, $1'$ и $1_1'$, па према томе имамо у првој пројекцији две изводнице, а слествено томе и две прве пројекције тачке P, тачке P' и P_1'. То је разумљиво. Пројекциски зрак $\perp V$ продире кроз призму двапут, на њему су две продорне тачке, које у вертикалници имају заједничку пројекцију P'', па је тачка P'' дупла тачка. Ако претпоставимо да је тачка P у II пројекцији видљива, прва јој је пројекција тачка P_1'. Ако је тачка P у другој пројекцији невидљива, прва јој је пројекција P'. У првој пројекцији обе тачке и P и P_1 су невидљиве.

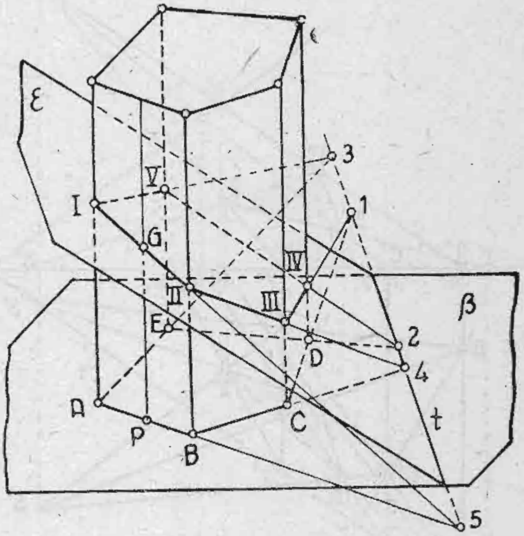
Исти је случај и кад нам је у I пројекцији задата тачка G'. Другу пројекцију G'' одредићемо понова помоћу изводнице. Само, ако је тачка G у I пројекцији видљива, припада видљивој пљошти AB призме, па је тачка $2'$ тачка басиса кроз коју изводница пролази. Одредимо $2''$, повучемо II пројекцију изводнице, па је на њој тражена тачка G''. Та је тачка у II пројекцији невидљива, јер је невидљива цела пљошт AB призме. Ако је G' невидљива тачка прве пројекције, тада припада невидљивој пљошти $B'\,C'$ а њена изводница сече басис у тачки $2_1'$.

Одредимо $2_1'''$, повучемо II пројекцију изводнице и на њој је G_1''. И ова је тачка у другој пројекцији невидљива (јер је невидљива цела пљошт BC призме).

§ 40. Пресеци призме и пирамиде

Пресечемо ли призму или пирамиду неком произвољном равни, пресек ће, у општем случају бити један полигон са истим бројем страна колико их има полигон базиса.

Свакој страни полигона базиса одговараће једна срана полигона пресека, и свакој тачки P полиѓона базиса одговараће једна тачка G пресечног полигона, и то она тачка G где изводница из P продире кроз пресечну раван (в. сл. 109). Јасно је да, према томе постоји између та два полигона нека сродност. Код пирамиде је то колинеација, где су изводнице зраци колинеације, где је врх центар или пол, а оса колинеације права по којој се сече раван базиса са пресечном равни. Код призме су полигон базиса и полигон пресека две перспективно афине фигуре. Зраци афинитета су изводнице, а оса афинитета је права по којој се сече раван базиса са пресечном равни.



Сл. 109

Ако призму пресечемо равнином паралелном са равни базиса, пресек ће бити полигон подударан са полигоном базиса.

Раван паралелна са проводницима сече призму по двема паралелним правама, двема изводницима (а може сећи и по једној ивици).

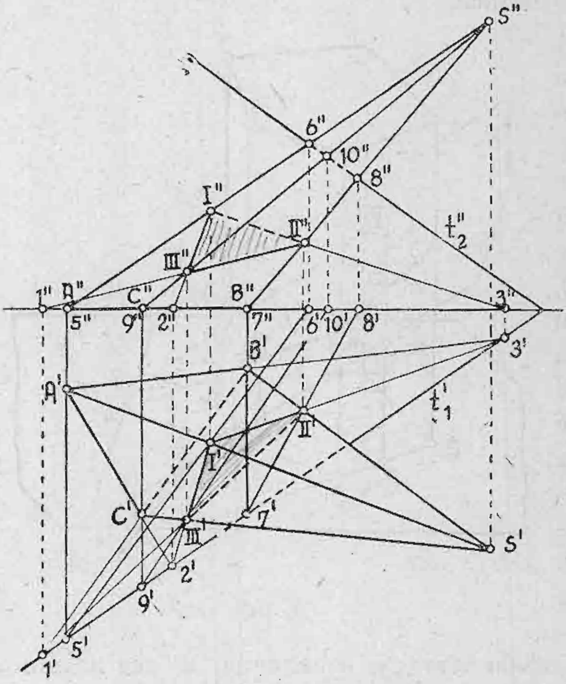
Када пирамиду пресечемо равнином паралелном са базисом, пресек је полигон сличан полигону базиса. Ако пресечна раван пролази кроз врх пирамиде а сече и полигон базиса, пресек пирамиде са том равни су две праве (две изводнице) које се секу (или једна права, ако само додирује полигон базиса). Ако пролази кроз врх пирамиде а не сече полигон базиса, тада је цео пресек те равни само једна тачка.

Узмимо сада неколико примера пресека призама и пирамида, да бисмо на њима објаснили разне методе одређивања пресека.

§ 41. Метода директних продора

У сл. 110 задата је неправилна пространа коса пирамида са базисом у H и произвољна раван t_1 t_2.

Знамо унапред да ће пресек бити троугао у равни t_1 t_2 и да ће тај троугао бити колинеаран са троуглом бизиса. Свакоме темену A, B или C троугла базиса одговараће по један, теме I, II или III троугла пресека. Како су зраци колинеације изводнице, односно ивице пирамиде, јасно је да ћемо пресечни троугао одредити на тај начин, што ћемо конструисати продоре појединих ивица кроз пресечну раван t_1 t_2.



Сл. 110

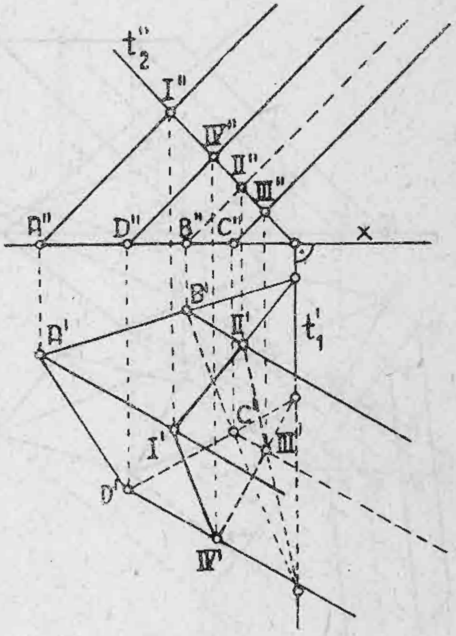
Да би смо одредили продор ивице A S, повучемо кроз њу помоћну раван $\perp$ V. Друга јој се траса поклапа са A'' S'', а прва је $\perp$ X. Помоћна раван сече се са t_1 t_2 по правој 5′ 6′ па је на њој тражена продорна тачка I′. Пренесемо је ординатом у II пројекцију. На исти начин одредимо и тачке II и III, па спојимо пресечни троугао у обема пројекцијама. Тиме је задатак решен.

Као свугде треба и овде да проверимо тачност одређеног пресечног троугла. То нам је овде лако јер знамо да је троугао базиса колинеаран са троуглом пресека, да је оса колинеације права по којој се секу равни тих двеју троуглова, дакле у овом случају права траса t_1' пресечне равни, да су ивице пирамиде зраци колинеације и према томе врх S' пирамиде пол колинеације. Пошто тачка A троугла базиса одговара тачки I троугла пресека, а тачка B тачки II, страна A' B' базиса одговараће страни I′ II′ пресека. Стога, ако продужимо страну базиса A' B' до пресека 3′ са осом колинеације t_1', продужена страна I′ II′ пресека мора такође сећи t_1' у тачки 3′. На исти начин проверимо помоћу тачака 2′ и 1′ да ли су тачно одређене и друге две стране II′ III′ и I′ III′ пресеченог троугла у првој пројекцији. И тачност друге пројекције можемо проверити помоћу истих тачака 3, 2 и 1. Видели смо да тачка 3′ лежи на продуженој страни I′ II′ троугла пресека. Све те три тачке припадају истој правој. Стога одредимо 3″, другу пројекцију тачке 3 (на X-оси, јер је тачка хоризонталнице), па продужена друга пројекција I″ II″ стране пресечног троугла мора понова да пролази кроз тачку 3″.

Ова метода „*директних продора*“ добра је (нарочито за почетнике) и може да се употреби када је мален број ивица. Код већег броја ивица захтева сувише конструкције, претрпа цртеж и постаје неупотребљива.

Нарочита је олакшица за ову методу ако је пресечна раван у специјалном положају, управна на неку од пројекциских равни. Тако је у сл. 111 узета неправилна четворострана коса призма и раван $t_1 t_2 \perp V$, па је одређен пресек.

Како је раван управна на V, све што је у равни има своју другу пројекцију на другој траси t_2''. Стога ће и тачка I II III IV у којима поједине ивице продиру кроз раван имати своје друге пројекције на t_2''. То значи да је тражени пресек већ одређен и треба још само да поменуте тачке одредимо у првој пројекцији и то ординатом сваку на својој ивици. На крају треба да помоћу афинитета проверимо да ли смо све тачке довољно тачно одредили.



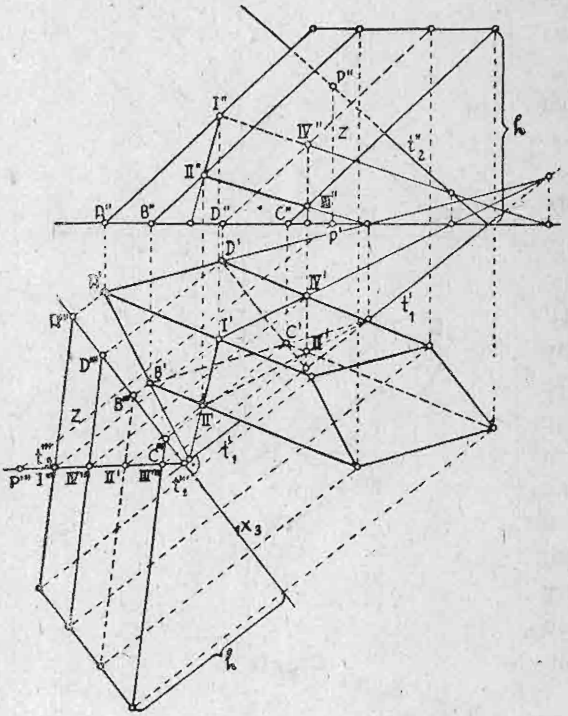
Сл. 111

§ 42. Метода помоћу трансформације

Ову олакшицу при одређивању пресека коју нам даје раван управна на једну од пројекциских равни можемо да користимо при одређивању пресека са било којом равни. Јер ако нам је као пресечена раван задата нека произвољна раван $t_1\ t_2$, можемо подесном трансформацијом претворити ту раван у раван управну на пројекциску раван.

Тако је урађено код примера на сл. 112. Ту је задата неправилна четворострана коса призма са базисом у H, а као пресечна раван произвољна раван $t_1\ t_2$. Познато нам је да је нека раван управна н. пр. на вертикалницу, ако јој је права траса управна на X-осу. Према томе, да би нам пресечна раван $t_1\ t_2$ била управна на неку раван довољно је да ту нову пројекциску раван изаберемо тако да нова оса ${}_1X_3$ буде управна на t_1'. (Као нову пројекциску раван могли бисмо узети и ${}_2X_3 \perp t_2''$, али би тада одређивање треће пројекције призме било теже, јер јој је базис у хоризонталници, а отпала би и могућност упоредног проверавања тачности одређеног пресека помоћу афинитета).

Када смо одредили ${}_1X_3$, треба да конструишемо трећу пројекцију призме и равни. Раван ће се пројектовати цела на својој трећој траси t_3''', а t_3''' треба да пролази кроз тачку t_1''', у којој нова оса пресеца t_1'. Довољно је дакле да узмемо још једну тачку равни и да јој одредимо трећу пројекцију. Као најлакша (јер јој одмах знамо обе пројекције) узета је нека тачка P на t_2, па је помоћу ординате z одређена тачка P'''. Тиме је одређена и трећа пројекција равни t_3'''. И трећу пројекцију призме конструишемо исто тако лако. Базис призме је у H, па ће поједине његове тачке имати своје треће пројекције на ${}_1X_3$. Да одредимо треће пројекције ивица, пошто њихове тачке базиса већ имамо, узећемо на једној од њих било коју тачку (овде је најлакше једну тачку горњег базиса) и одредити њезину трећу пројекцију. Тако је одређена у трећој пројекцији једна ивица призме, а остале су паралелне са њом. Да је задата место призме пирамида, место било које тачке на једној од ивица, одредили бисмо трећу пројекцију врха.



Сл. 112

Сада је у трећој пројекцији већ одређен пресечни полигон, јер се продорне тачке I''' до IV''' појединих ивица налазе на t_3'''. Можемо одмах да их ординатима одредимо у I пројекцији, проверимо тачност помоћу афинитета, а одатле у II пројекцију. И у II пројекцији треба проверити тачност помоћу пресечних тачака на оси афинитета, али и помоћу висина појединих тачака I до IV, а те висине имамо већ у III пројекцији.

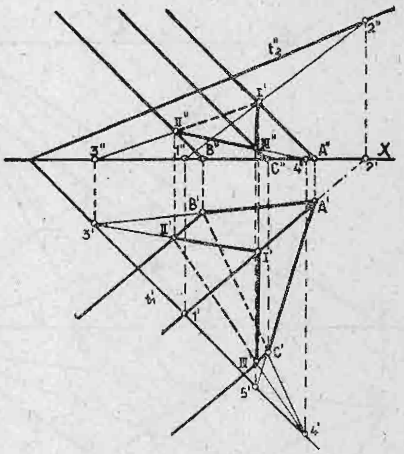
Ова је метода подесна и за случајеве када базис призме или пирамиде није у H или V, него у некој произвољној равни. Нарочито је подесна ако имамо да одредимо пресек неке коцке октаедра или било којег полиедра са неком произвољном равни,

Добра је особина ове методе и то, што се цела конструкција црта са стране, а само готови резултати долазе на своја места (ординатама у I и II пројекцију). Сама слика је на тај начин чишћа и прегледнија. (Ову ћемо особину користити када будемо тражили нормалне пресеке).

§ 43. Метода помоћу афинитета (или колинеације)

Видели смо досад да смо код сваког конструисаног пресека проверили његову тачност помоћу афинитета или колинеације.

Место самог проверавања тачности, могли бисмо да помоћу афинитета (или колинеације) конструишемо сам пресек. Познато нам је да, када знамо осу афинитета (осу колинеације), правац афинитета (центар колинеације) и један пар тачака које једна другој одговарају, све остале тачке можемо конструисати помоћу афинитата (колинеације). Такође знамо да су код призме полигони базиса и пресека перспективно афини, а полигони базиса и пресека пирамиде колинеарни. Према томе довољно је да методом продора одредимо само једну тачку пресечног полигона, а све остале можемо одредити помоћу афинитета или колинеације.



Сл. 113

Тако је у сл. 113 одређен продор I ивице A тростране косе призме кроз пресечну раван t_1 t_2. Правац афинитета су изводнице, а оса афинитета t_1', пошто је базис у H.

Везујући се за једну одређену тачку можемо увек да одредимо још једну. Знамо да ће страни $A'B'$ базиса одговарати страна I' II' пресека. Стога продужимо страну $A'B'$ до пресека 3' са t_1' (осом афинитета), па ће правој A' 3' равни базиса одговарати права I' 3' равни пресека (јер I' одговара тачки A'). У њезином пресеку са ивицом из B' имамо II' продор ивице B, тј. тражену другу тачку пресека. На исти начин помоћу A' 5' и I' 5' одређена је и трећа тачка III' пресека. За контролу продужене су и стране B' C' и II' III'. Треба да се секу у једној тачки 4' на t_1'.

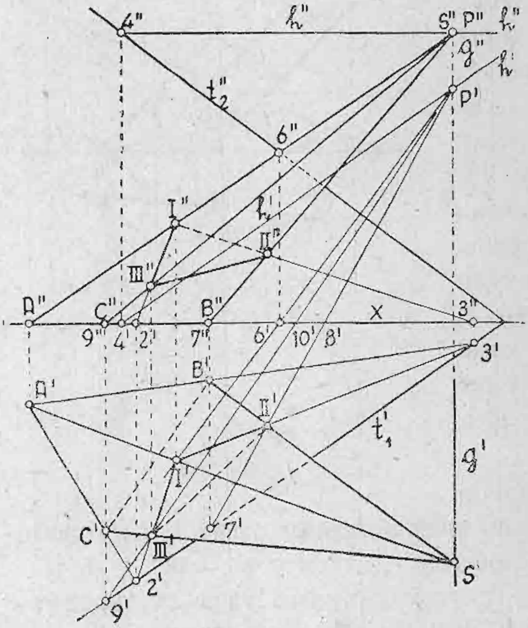
Тачке су ординатом пројектоване у II пројекцију, али је њихова тачност проверена помоћу тачака 3'' и 4'', кроз које треба да пролазе продужене стране пресечног троугла.

Одмах је јасно да најпре треба одредити ону тачку пресека која је најудаљенија од осе афинитета, јер се тада код других тачака више смањују ситна отступања од тачности приликом конструкције тачке I'.

Ова метода је најбржа и најлакша од свих, али има један велики недостатак. Цела конструкција пресека везана је само за једну тачку. Ако је та тачка погрешна, погрешан је цео пресек, а ако је само недовољно тачна, нетачан је мање-више цео пресек.

§ 44. Метода помоћу поклопних правих

Када смо у сл. 110 тражили продоре појединих ивица пирамиде кроз пресечну раван t_1 t_2 употребљавали смо помоћне равни $\perp$ V пову чене кроз те ивице. Те су помоћне равни секле раван t_1 t_2 по правама (5, 6) (7, 8) и (9, 10). Права 5 6 има своју прву пројекцију $(5' 6')$ потпуно одвојену, али јој се друга пројекција $(5'' 6'')$ поклапа са другом пројекцијом ивице A'' S''. Исто тако и друге праве (јер леже у помоћним равнима повученим кроз поједине ивице, али управним на вертикалницу). Ради те особине (да им се друге пројекције поклапају са другим пројекцијама ивица) називамо ове праве *„поклопне праве“*.



Сл. 114

Помоћне равни $\perp V$ повучене кроз ивице пирамиде (сачињавају један прамен равни) пролазе кроз врх S пирамиде, па се између себе секу по једној правој (прамењачи) управној на вертикалницу која пролази кроз врх пирамиде. Обележимо ту праву са g. Раван t_1 t_2 пресеца све те помоћне равни. Пресеци су праве, поклопне праве (5 6), (7 8) и (9 10), (прамен зракова), али пресеца и праву g у једној тачки (темену прамена) коју ћемо обележити словом P. Природно је да тада све поклопне праве пролазе кроз ту тачку P. Како је права g управна на вертикалницу, друга јој је пројекција само једна тачка g'', па се на њој и P'' поклапа са S''. Када бисмо одредили прву пројекцију P'. тачке P, све би прве пројекције поклопних правих пролазиле кроз P'. То је лако, јер је P једна тачка равни t_1 t_2, па P' одредимо сутражницом h из тачке P'· (в. сл. 114).

Када имамо тачку P' довољна нам је још по једна тачка, па да нам поклопне праве буду одређене. Као другу тачку можемо узети или тачке $6'$ $8'$ и $10'$ или $5'$ $7'$ и $9'$. Оне друге тачке су повољније, јер смањују нетачности у раду, а ако их је на слици немогуће (или их је тешко) одредити, онда се могу користити тачке $6'$ $8'$ и $10'$. На слици 114 су узете тачке $7'$ и $9'$ док је за тачку I' узета тачка $6'$ (јер је траса t_1' ради уштеде у простору нацртана кратко, па тачке $5'$ на цртежу нема).

Ако је место пирамиде задана призма, принцип рада остаје исти. Помоћне равни кроз ивице призме биће паралелне (свежањ равни, па ће паралелне бити и поклопне праве (свежањ зракова). Одредимо једну аналогно правој $5'$ $6'$), па су све друге паралелне и можемо да их одмах повучемо кроз тачке $7'$ и $9'$ (аналогно примеру у слици 114).

Ова је метода добра и једноставна, али даје довољно тачне разултате само када је задата коса пирамида или призма. Тачност је све мања у колико се поједине изводнице, ближе тому да буду паралелне са профилницом. Ако је нека изводница баш паралелна са профилницом њезин продор не можемо да одредимо овом методом.

*

Поред ових наведених метода постоје још и многе друге. Коју ћемо методу када употребити, зависи углавном од задатка који треба да решимо.

Када је базис у V, све три поменуте методе остају потпуно исте, једино при објашњавању требало би прву пројекцију заменити другом.

Ако је базис у произвољној равни, обично је најподеснија метода помоћу трансформације.

§ 45. Мрежа пирамиде и призме

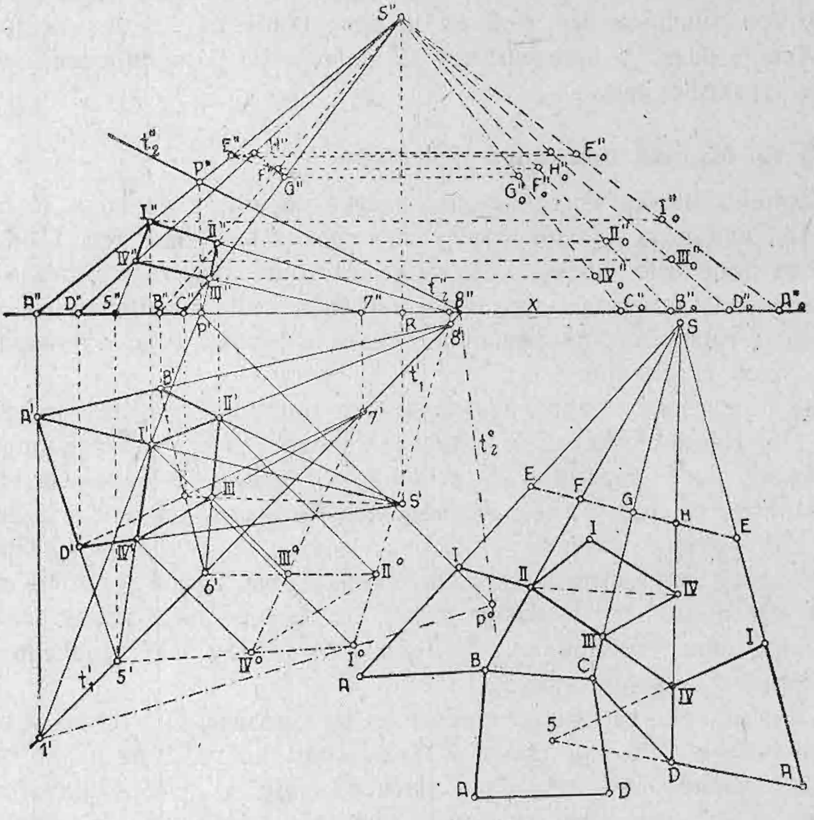
Хоћемо ли да израдимо модел неке пирамиде од врха до базиса (сл. 115), или дела призме између два паралелна базиса (сл. 116), онда треба да одредимо мрежу. Мрежа се састоји од мреже омотача и од базиса. Мрежа омотача n-тростране пирамиде биће n троуглова, а мрежа омотача n-тростране призме биће n паралелограма, или n трапеза, ако базиси нису паралелни.

Као пример за одређивање мреже пирамиде израђен је задатак у сл. 115. Најпре је методом колинеације одређен пресек четворостране неправилне косе пирамиде са равни t_1 t_2, а затим је одређена мрежа.

Мрежа се састоји од четвороугла базиса и од омотача састављеног од четири троугла. Пошто се мрежа црта у правој величини, то треба да одредимо праве величине свих дужи. Праве величине страна базиса већ имамо, јер је базис сам у H. Да одредимо праве величине појединих ивица пирамиде, окренемо их да буду $\parallel$ V (наносећи од R десно прве пројекције ивица).

Сада можемо да конструишемо мрежу омотача. Повучемо повољну праву и узмемо на њој тачку S. Тада нанесемо од S на правој праву величину ивице A (= A''_0 S''). Претпоставимо да је SA једна страна пљошти ABS пирамиде, па конструишемо тај троугао. Из A опишемо круг $r = A'B'$, а из S круг $r = S''B''_0$; у пресеку тих кругова је тачка B, па одмах и уцртамо троугао. Сада на исти начин на страни SB доцртамо троугао BSC и тако редом све остале троуглове омотаче. Изломљену линију $A \cdot BCDA$, коју добијемо на тај начин, називамо линијом базиса. На било коју страну те линије ослонимо полигон базиса. У слици полигон базиса ослоњен је на страну BC, а како је тај полигон у I пројекцији већ у правој величини, пренесемо га најлакше помоћу страна и дијагонала.

Остаје још да на мрежи уцртамо пресечни полигон. Пошто на мрежи већ имамо све ивице пирамиде, треба само да уцртамо на њима тачке I—IV пресека. То ћемо урадити најлакше ако одредимо праве величине дужи од тачака базиса до тачака пресека. За тачку *I на пр.* пошто смо већ одредили окретањем праву величину ивице *A S*, довољно је да нађемо у окренутом положају и тачку I. Како тачке при окретању не мењају висину, биће I_0'' на правој $\| X$ из I''. Нанесемо на ивици A_0S мреже дуж A_0'' I_0'' и тиме одредимо на мрежи пресечну тачку I. Исто урадимо и за остале тачке пресека. Добивене тачке спојимо, па имамо на мрежи *„линију пресека“*. Мрежа је сва у правој величини, а то значи да смо индиректно одредили праву величину свих страна полигона пресека. На крају треба још да нацртамо на мрежи и сам



Сл. 115

полигон пресека ослоњен на било коју страну линије пресека. Место да тражимо праве величине дијагонала, најбоље је да обарањем равни t_1 t_2 одредимо праву величину целог пресечног полигона. Раван је у сл. 115 оборена помоћу тачке *P*, а полигон I^0—IV^0 конструисан помоћу афинитета. Природно да овако одређене праве величине појединих страна пресека треба да буду једнаке правим величинама истих страна одређеним на мрежи. Када и то проверимо, нацртамо сам пресечни полигон I—IV на мрежи, ослањајући га на страну II III пресечне линије.

Постоји још један врло једноставан начин да проверимо тачност рада. Да проверимо колико смо тачно пренели, односно конструисали, на мрежи линију пресека.

Када смо хтели да одредимо помоћу колинеације тачку IV пресечног четвороугла, продужили смо страну A' D' базиса до пресека $5'$ са осом колинеације t_1'. Права, коју у равни пресека одговара овој правој A' $5'$ мора да пролази кроз $5'$ и I'. Када смо је повукли, одредили смо тиме тачку IV' и страну I' IV' четвороугла пресека. Међутим страна A' D' базиса је прва траса пљошти A' D' S' и када смо продужили страну самим тим смо проширили пљошт од A' до $5'$. Видимо сада у првој пројекцији: ако се продужи страна A' D' базиса и страна I' IV' пресека, те се две продужене праве секу (у проширеној пљошти) у тачки $5'$. Природно да то исто важи и за те исте стране на мрежи. Разлика је једино што је троугао A' $5'$ I' у првој пројекцији у скраћењу, док је исти троугао A 5 I на мрежи у правој величини. Међутим страна A' $5'$ троугла лежи у хоризонталници, па се у првој пројекцији показује у правој величини. Измеримо је и треба да је једнака дужи A 5 на мрежи.

За сада нам је ово само начин проверавања тачности рада. Кашње, када будемо тражили мреже конуса и облице, биће нам ово начин за конструкцију тангенти на криве базиса и пресека.

Код примера рађеног у овој слици замишљено је да је горњи део пирамиде, од пресека до врха, скинут (отстрањен). Услед тога је четвороугао пресека постао видљив, па је пресек и доњи део ивица извучен дебље, а горњи део ивица (као конструктиван део) само танким цртама.

На истом примеру решен је још један задатак. Задата је на ивици A нека тачка E, па се тражи најкраћи пут од тачке E око пирамиде понова до тачке E.

Задатак можемо решити само на мрежи, јер ће се на мрежи тражени најкраћи пут показати као права. Стога одредимо најпре праву величину дужи $A\,E$ и нанесемо помоћу ње тачку E на мрежу, и то на обе ивице $A\,S$. Дуж повучена кроз те две тачке E даје нам тражени најкраћи пут. Дуж $E\,E$ пресеца ивице пирамиде (на мрежи) у тачкама $E\,F\,G\,H\,E$, па ће нам те тачке одређивати у пројекцијама најкраћи пут по појединим пљоштима пирамиде. Да одредимо пројекције тих тачака нанесемо дуж $B\,F$ са мреже на окренуту ивицу S'' B_0'', тиме одредимо F_0'' одатле је вратимо у другу пројекцију, а затим и у прву. Остале тачке исто тако.

Ако је место неправилне косе, задата правилна права пирамида са базисом у H, одређивање мреже остаје исто као у предњем задатку. Једино је рад олакшан утолико што су све ивице једнаке и све пљошти омотача подударни троуглови. Стога тражимо само праву величину једне ивице, па на њој одређујемо и праве величине отстојања тачака пресека од тачака базиса.

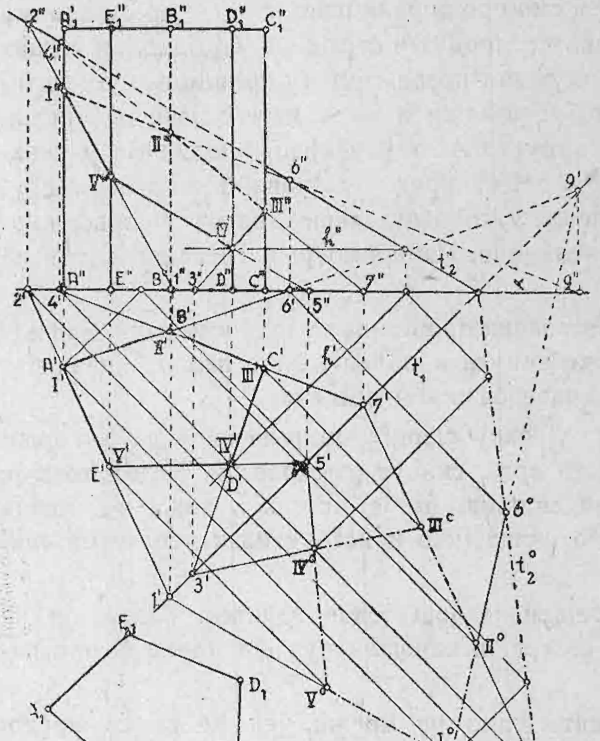
*

Као други пример задата је у сл. 116 неправилна петострана права призма са базисом у *H* и произвољна раван t_1 t_2. Треба одредити пресек призме са том равни и мрежу призме.

Ивице призме су у специјалном положају, управне на хоризонталницу. Њихове тачке продора кроз раван t_1 t_2 поклапају се у *H* са првим пројекцијама тачака базиса, а друге им пројекције можемо одредити помоћним равнима ⊥ *H*. Тако су одређени продори I″ и V″ помоћном равни кроз страну *A′ E′* базиса и тачке II′ и III′ помоћном равни кроз страну *B′ C′* базиса (задатак нам је познат из примера у сл. 40*e*). Тачка IV″ одређена је на други начин. Она претставља продор ивице *D* кроз раван t_1 t_2, па је она и једна тачка ивице *D D*, и једна тачка равни t_1 t_2. Како нам је прва пројекција IV′ већ позната, другу пројекцију IV″ одредимо једноставно сутражницом *h* као тачку равни.

Тачност пресека у II пројекцији проверимо и помоћу тачака 1, 3, 5, 7 и 9, на оси афинитета t_1. На крају оборимо раван и одредимо праву величину пресека.

Да пређемо сада на одређивање мреже.



Сл. 116

Призма је права, а то значи да ивице призме заклапају са равни базиса прав угао. Према томе ивица кроз *A* заклапа прав угао са страном *A B* базиса, а исто тако и са страном *A E*. На мрежи се показује све у правој величини, па ће и тај прави угао остати прав, то значи да ће се на мрежи стране *A B* и *A E* показати као једна права управна на ивицу из *A*.

Што важи за ивицу из *A*, важи и за све остале ивице призме. Отуд следи да ће се линија базиса код праве призме показивати на мрежи као права управна на ивице призме.

Пошто је и базис само један пресек призме, можемо да кажемо ово правило:

Пресечни полигон неке призме са равни управном на ивице призме показује се на мрежи као права управна на ивице.

Према томе конструкција мреже у овом случају је врло једноставна. Повучемо једну праву и на њој од тачке *A* нанесемо редом стране базиса *A B* до *E A*. Њихове праве величине имамо у I пројекцији. Тиме је уцртана линија базиса. Из добивених тачака повучемо праве управне на линију базиса, па ће нам оне претстављати на мрежи ивице призме. Све су ивице подједнако дуге и показује се у II пројекцији у правој величини. Нанесемо њихову дужину од тачака доњег базиса, па тако добивамо и тачке горњег базиса, а тиме и линију горњег базиса на мрежи.

Мрежа омотача је у овом случају један правоугаоник, састављен од пет правоугаоника, тј. пет страна призме.

Линију пресека одредимо овде такође врло лако, јер се отстојања тачака пресека I—V до тачака базиса *A—E* показују у II пројекцији такође у правој величини. Одмеримо их директно и нанесемо на мрежу. Када уцртамо на мрежи и линију пресека, треба да проверимо да ли се тако одређене праве величине страна полигона пресека слажу са правом величином у обореној равни.

На крају уцртамо на мрежи полигоне базиса и пресека. (Ради уштеде у простору доњи базис није уцртан).

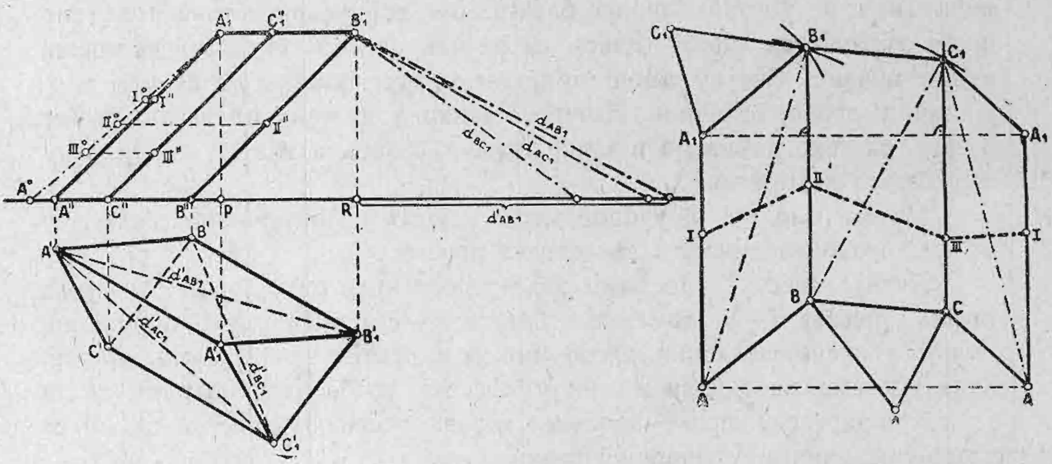
И овде као и код прошлог примера (код мреже пирамиде), може да се провери колико је на мражи тачно конструисана линија пресека. Све пљошти призме налазе се у једној равни, оној равни на којој је нацртана мрежа. Пошто је свака пљошт за себе једна раван, коју можемо замислити проширеном на све стране колико хоћемо, то значи да је раван мреже прекривена са онолико равни колико призма има пљошти. Одатле следи да на мрежи можемо нацртати сваку тачку која се налази у равни било које пљошти призме. Тако можемо да одредимо тачку 5 коју смо већ употребили да проверимо тачност тачака V и IV пресечног петоугла. Тачка 5 се налази на пресеку продужене стране *E D* базиса и продужене стране V IV пресека. Дуж *E* 5 је на мрежи у правој величини, а и у I пројекцији *E'* 5' је у правој величини, јер лежи у хоризонталници. Ако је мрежа тачно нацртана, треба те две дужи да су једнаке.

*

Мало теже је одређивање мреже за косу призму. Ивице призме нису управне на раван базиса, па линија базиса на мрежи неће бити права управна на изводнице, него неки изломљени полигон.

У слици 117 узета је као пример тространа неправилна коса призма са базисом $A B C$ у H и горњим базисом $A_1 B_1 C_1 \parallel H$. Мрежа омотача биће састављена од три паралелограма. Стране базиса показују се у I пројекцији у правој величини, а праву величину ивица призме одредимо тиме што једну ивицу $A A_1$ окренемо $\parallel V$. Остале су све једнаке.

Иако су нам сада познате праве величине свих страна, ипак не можемо да конструишемо мрежу, јер не знамо углове између страна појединих паралелограма. И те углове могли бисмо лако одредити једноставним обарањем појединих пљошти призме у H. Тако бисмо, да одредимо угао између стране $A B$ базиса и ивице $A A_1$, оборили у H



Сл. 117

пљошт $A'B'B_1'A_1'$ призме. Оборили бисмо око прве трасе $A'B'$ те пљошти. Да одредимо тачку A_1^0, тачку A_1 у обореном положају, довољно би било повући из A_1' праву управну на $A'B'$ (прву пројекцију круга обртања) и нанети на њој од тачке A' праву величину ивице $A A_1$. Угао $A_1^0 A'B'$ је права величина траженог угла. Тим је одређена права величина пљошти $A B B_1 A_1$ призме. На исти начин могли бисмо одредити и праве величине осталих пљошти, па би нам тако била одређена мрежа омотача.

Овај начин је прегледан и тачан, али је незгодан, јер оборене пљошти терете цртеж. Стога је боље, када већ знамо праве величине свих страна, одређивати поједине паралелограме помоћу дијагонале, место као пре помоћу углова. Да нацртамо паралелограм $A B B_1 A_1$ (када су нам већ познате праве величине страна), довољно је да одредимо праву величину једне његове дијагонале. На сл. 117 одређена је права величина дијагонале $A B_1$, и то окретањем $\parallel V$. Сада можемо да нацртамо паралелограм. Повучемо са стране (или чак на другој хартији) неку праву, нанесемо на њој ивицу AA_1 у правој величини и обележимо крајње тачке A и A_1. Та ивица је једна страна троугла $AA_1\ B_1$, па можемо нанети троугао. (Из A_1 страну $A_1\ B_1$ која је једнака страни AB базиса, а из A дијагоналу AB_1, којој смо сада одредили праву величину). Када тако одредимо тачку B_1, можемо лако да допунимо паралелограм $AA_1\,B_1\,B$. Тим је нацртана на мрежи једна пљошт омотача. Остале одредимо на исти начин ослањајући их на већ одређену страну претходне пљошти. Природно да за сваку пљошт треба да одредимо праву величину једне њезине дијагонале. Све најгорње тачке тих дијагонала су на истој висини код овог примера. Да цртеж (друга пројекција призме) остане што чишћа, померане су дијагонале у окренутом положају $\parallel V$ (дакле њихови троуглови правих величина) као да све дијагонале пролазе кроз тачку B. Заправо нанашане су прве пројекције свих дијагонала од тачке R десно по осовини X.

Овај начин одређивања мрежа је лакши од пређашњег, али може да буде нетачан. Тачку B_1 одредили смо као пресек двају кругова. Ако је тај пресек под оштрим углом може тачка да буде нетачна. Код сваке пљошти понавља се иста конструкција и ако се те ситне нетачности случајно саберу, може крајња тачка A_1 да буде погрешна. Стога се овај начин одређивања мреже може употребити само ако призма има мањи број страна.

Лако можемо да одредимо да ли је мрежа тачно одређена. Када бисмо хтели да направимо модел призме, најпре бисмо отсекли целу мрежу. Затим бисмо обртали пљошт $AA_1\ B_1\,B$ око ивице $B_1\ B$. При том обртању описивала би тачка A_1 круг, чија је раван управна на $B_1\,B$ (осу обртања), па би се на мрежи показивао као права из A_1 управна на $B_1\,B$. Даље бисмо морали обртати исту пљошт скупа са пљошти $BB_1\ C_1\,C$ око ивице $C_1\,C$. Понова би тачка A_1 описивала неки круг управан на осу обртања, који би се на мрежи показивао као права из A_1, управна на ивицу $C_1\,C$. Како су ове ивице на мрежи паралелне, поклопила би се ова управна са пређашњом управном. Престали бисмо обртати пљошти када би се лева ивица $A_1\,A$ преклопила са десном. Природно да би се тада лёва тачка A_1 морала поклопити са десном тачком A_1. То значи да лева и десна тачка A_1 треба да леже на мрежи на једној правој управној на ивице призме. Та је права нацртана у сл. 117 и прав угао је обележен. (Ово је само груб начин проверавања тачности, јер још остаје могућност да је дијагонала прве пљошти узета нетачно мало дужа, а дијагонала друге пљошти нетачно мало краћа, па да се нетачности случајно потиру).

У сл. 117 узете су у другој пројекцији тачке I, II и III на ивицама призме као тачке пресека призме са неком равни. Те су тачке нанете и на мрежу, а нанете су помоћу њихових отстојања од тачака базиса, а праве величине тих отстојања одређене су на ивицама окренутим || V.

*

Много бољи начин за одређивање мреже је помоћу нормалног пресека.

Видели смо да се линија пресека са неком равни управном на ивице призме показује на мрежи као права управна на ивице. То правило можемо да искористимо за конструисање мреже.

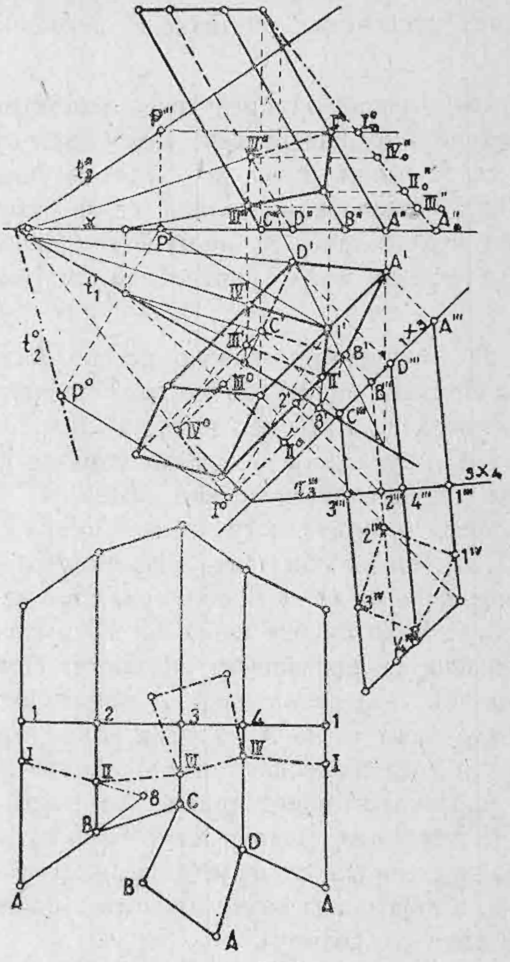
У сл. 118 задата је неправилна четворострана коса призма и произвољна раван $t_1\, t_2$. Треба одредити пресек и мрежу призме.

Пресек конструишемо помоћу афинитета пошто најпре одредимо продор I ивице A. Затим оборимо раван и одредимо праву величину пресечног четвороугла.

Мрежу призме одредићемо помоћу нормалног пресека, помоћу пресека са једном равни управном (нормалном) на ивице призме.

Трасе такве равни стоје у обема пројекцијама управно на пројекције ивица. Пресек призме са управном равни одредићемо помоћу трансформације као у сл. 112. Нова оса $_1X_3$ треба да је управна на прву трасу управне равни, дакле паралелна са I пројекцијом ивица призме. Повучемо $_1X_3$ и одредимо трећу пројекцију призме. Одредимо је помоћу тачака $A''' - D'''$ базиса на $_1X_3$ и помоћу III пројекције највише тачке ивице .

Сада треба да одредимо τ'''_3 трећу трасу управне равни, која је уједно $\perp {}_1X_3$. Само нам за то није потребна никаква конструкција. Ако је $_1X_3$ правилно уцртана паралелно са изводницама призме, тада τ'''_3 треба да је управна на трећу пројекцију ивица. То значи да прву и другу трасу управне равни не морамо уопште ни да цртамо. Повучемо само у III пројекцији било коју праву управну на III пројекцију



Сл. 118

ивица, па нам је она III пројекција управне равни, а уједно њезина трећа траса τ'''_3.

Како је та раван управна на нову пројекцијску раван пројектује се на τ'''_3 све што је у равни, па и пресек $1'''$ $2'''$ $3'''$ $4'''$.

Тиме је одређен нормални пресек, а сада још треба да одредимо његову праву величину и отстојање његових тачака од тачака базиса.

Оса ${}_1X_3$ узета је паралелно са I пројекцијом ивица, према томе ивице призме као и дужи на њима (на пр. дуж $1'''$ A''') показују се у III пројекцији у правој величини.

Полигон $1'''$—$4'''$ налази се у равни τ'''_3, која је управна на трећу пројекциску раван. Оборимо ли ту раван, одредићемо праву величину полигона. Место тога можемо и саму нашу управну (нормалну) раван τ да сматрамо као нову четврту пројекциску раван (јер је раван τ управна на трећу пројекциску раван ${}_1X_3$). У том случају нова оса ${}_3X_4$ поклопила би се се τ_3.

Пошто је полигон 1—4 паралелан са том равни, заправо лежи у њој показиваће се у IV пројекцији у правој величини. Тако ћемо урадити у сл. 118. Да бисмо одредили $2''''$, повучемо из $2'''$ ординату управну на ${}_3X_4$. Она се поклапа са трећом пројекцијом ивице B. Отстојање тачке $2''''$ од ${}_3X_4$ једнако је отстојању $2'$ од ${}_1X_3$ (Трансформација). Али одмах видимо да је то отстојање једнако као и отстојање тачке B' од ${}_1X_3$, што значи да тачку $2'$ нисмо морали ни одређивати. Поготово нећемо цртати тачке 1, $3'$ и $4'$. За тачку $1''''$ повучемо ординату и нанесемо од ${}_3X_4$ дуж од A' до ${}_1X_3$. Аналогно урадимо за тачке $3''''$ и $4''''$, па затим нацртамо и сам полигон. Сада имамо све што нам је потребно, те можемо да конструишемо мрежу призме.

Повучемо једну хоризонталну праву и на њој нанесемо редом све стране полигона нормалног пресека из IV пројекције. Тиме добијемо на правој тачке 1, 2, 3, 4 и 1. Сама права претставља на мрежи призме линију нормалног пресека. Праве управне на њу кроз тачке 1—4—1 претстављају на мрежи ивице призме. Лако нам је, према томе, одредити и линију базиса на мрежи. Треба само да на ивицама мреже нанесемо растојања тачака базиса од тачака нормалног пресека. Тако за тачку A нанесемо од 1 дуж $1'''$ A'''. За остале тачке конструкција је иста. Линију горњег базиса одредимо на тај начин, што од тачака доњег базиса нанесемо на ивицама мреже праву величину целих ивица.

Линију пресека призме са произвољном равни t_1 t_2 конструишемо на мрежи најлакше, ако на појединим ивицама мреже нанесемо растојање од тачака базиса до тачака I—IV тога пресека. Та растојања су одређена на скици тиме што је за тачку I окренута ивица A, да буде $\parallel V$, па је на тако окренутој ивици одређен и положај окренуте тачке I. Како су све остале ивице једнаке величине, а и крајње тачке су им на истим висинама, биле би и у окренутом положају све паралелне. Према томе можемо на овој једној ивици A, коју смо већ окренули $= V$, одредити тачке II до IV, па су нам отстојања тих тачака пресека од тачака базиса сва одређена. Нанесемо их на ивице мреже и нацртамо линију пресека.

Место да окрећемо ивице || *V* и тачке I–IV на њима, можемо да одредимо праве величине дужи од тачака пресека до тачака базиса и помоћу III пројекције. Знамо да се ивице призме показују у трећој пројекцији у правој величини. Довољно је према томе да одредимо трећу пројекцију тачака I–V, па су нам тражене праве величине дужи (од тачака базиса до тачака пресека) одређене. Овај начин је бољи нарочито у случајевима када базис призме није у *H* него у некој произвољној равни.

Као раније, треба и овде да проверимо тачност рада. Овде имамо за то више могућности. Како је мрежа у правој величини, добивене стране линије пресека на мрежи треба да су једнаке правим величинама тих истих страна које смо одредили обарањем равни t_1 t_2. И стране линија базиса на мрежи треба да су једнаке правој пројекцији базиса (јер је базис у *H*). Поред тога хоризонталница и пресечна раван t_1 t_2 отсецају на пљошти *A B* призме трапез *A B* I II. Стране *A B* и I II су афине и секу се, када се довољно продуже, у тачки 8 на t_1. Троугао *A* 8 I лежи у проширеној пљошти *A B* призме, услед чега ће се и на мрежи показивати у правој величини. Према томе продужимо ли стране *A B* и I II на мрежи, сећи ће се и оне у тачки 8, али тада дуж 8 *A* са мреже треба да је једнака дужи 8′ *A*′, јер је I пројекција већ права величина те дужи.

На крају уцртамо још на мрежи полигон пресека I–IV и оба полигона базиса.

Ова метода има поред тачности и ту добру страну, што цела конструкција за одређивање мреже пада ван пројекција призме, па својим линијама не терети главни део слике.

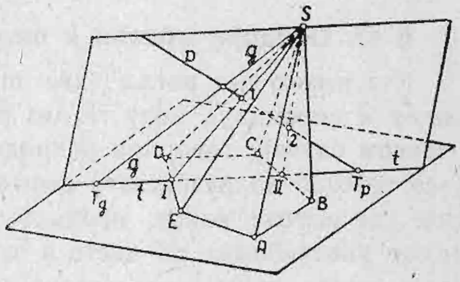
§ 46. Продор праве кроз пирамиду или призму

Пре него што почнемо да говоримо о продорима, треба да решимо основни задатак, наиме да одредимо продор праве кроз рогљасту или облу површину.

Принцип решавања остаје исти као и код продора праве кроз раван. Повучемо кроз праву неку помоћну раван, одредимо пресек те равни са површином или телом, па је на том пресеку и на правој тражена продорна тачка.

Помоћну раван кроз праву смемо узети како год хоћемо. Стога изаберемо такву, да нам буде што лакше одредити њезин пресек са површином.

Тако ћемо у примеру на сл. 119 где се тражи продор праве *p* кроз пирамиду, узети као помоћну раван ону раван која пролази кроз *p* и кроз врх *S* пирамиде. Таква помоћна раван сече пирамиду по двема изводницама.



Сл. 119

Саму раван одредимо када из врх *S* повучемо праву *g*, која пролази и кроз било коју тачку *R* праве *p*. Праве *p* и *g* одређују помоћну раван. Помоћу њихових трагова T_p и T_g одредимо трасу *t* помоћне равни на равни базиса. Сада видимо да нам помоћна раван сече раван базиса по правој *t* (по својој траси), а сам базис (петоугао базиса, вођицу пирамиде) у тачкама I и II. Кроз те тачке пролазиће изводнице *S* I и *S* II, по којима помоћна раван сече пирамиду. Тачке 1 и 2 на тим изводницама су тражене тачке у којима права *p* продире кроз пирамиду.

Место да праву *g* повучемо кроз врх пирамиде и кроз било коју тачку *R* задате праве *p*, па да нам помоћна раван буде одређена двема правама које се секу у тачки *R*, можемо да повучемо праву *l* да пролази кроз врх пирамиде и да стоји паралелно са задатом правом *p*. У том случају помоћна раван је одређена двема паралелним правама *p* и *l*. Одредимо продоре тих правих кроз раван базиса пирамиде, па је тим одређена и траса равни. Природно да траса треба да буде иста као пре, јер је и помоћна раван иста: пролази кроз задату праву *p* и кроз врх *S* пирамиде.

Остаје још да одредимо који су делови праве видљиви, а који невидљиви. Свакако делови праве ван контуре пирамиде, су видљиви. Део праве између тачака 1 и 2, који је у пирамиди, сматрамо да не постоји, па га на сликама цртамо танком испрекиданом линијом. Остаје, уствари, да одредимо да ли је видљив или не део праве од леве контуре до тачке 1 и од тачке 2 до десне контуре. Изводница I *S* је у равни *DES* и како је (у овој пројекцији) та раван видљива, видљива је њезина тачка 1, па према томе и права *p* од тачке 1 до леве контуре. Исто тако можемо да кажемо: тачка 2 је у невидљивој равни (*BCS*), па је невидљив део праве од тачке 2 до десне контуре.

Исту такву помоћну раван узели бисмо и да је место пирамиде конус. Када би место пирамиде била призма или облица, требало би да помоћна раван кроз *p* буде паралелна са изводницама призме или облице. У том случају права *g* пролазила би кроз неку тачку праве *p*, а била би паралелна са изводницама.

Сем ових помоћних равни могу да се употребе и било које друге можда пројектне равни, или чак и обле површине. У сваком случају главно је то, да конструкција пресека са тим помоћним равнима (или површинама) буде што тачнија и што једноставнија.

§ 47. Продори призма и пирамида

Кад имамо два рогља (две пирамиде, две призме или по једну призму и пирамиду), могу та два рогља да имају заједничких тачака. У таквом случају говоримо о продору рогљева. Под *продором* би заправо требало подразумевати само онај случај, када цео један рогаљ, дакле све његове ивице, продиру кроз други рогаљ. Међутим, реч продор употребљава се често и за случај када само један део једног рогља, дакле само неке његове ивице, продиру кроз други рогаљ. Овакав случај требало би називати *задором* рогљева.

Већ одавде се назире и начин како ћемо одредити продор или задор. Одредимо продоре ивица једног рогља кроз други и обрнуто, па добивене тачке спојимо правима. На тај начин добијамо један просторни полигон, који називамо линијом продора или задора. Свака страна тог полигона претставља пресек по једне пљошти једног и другог рогља.

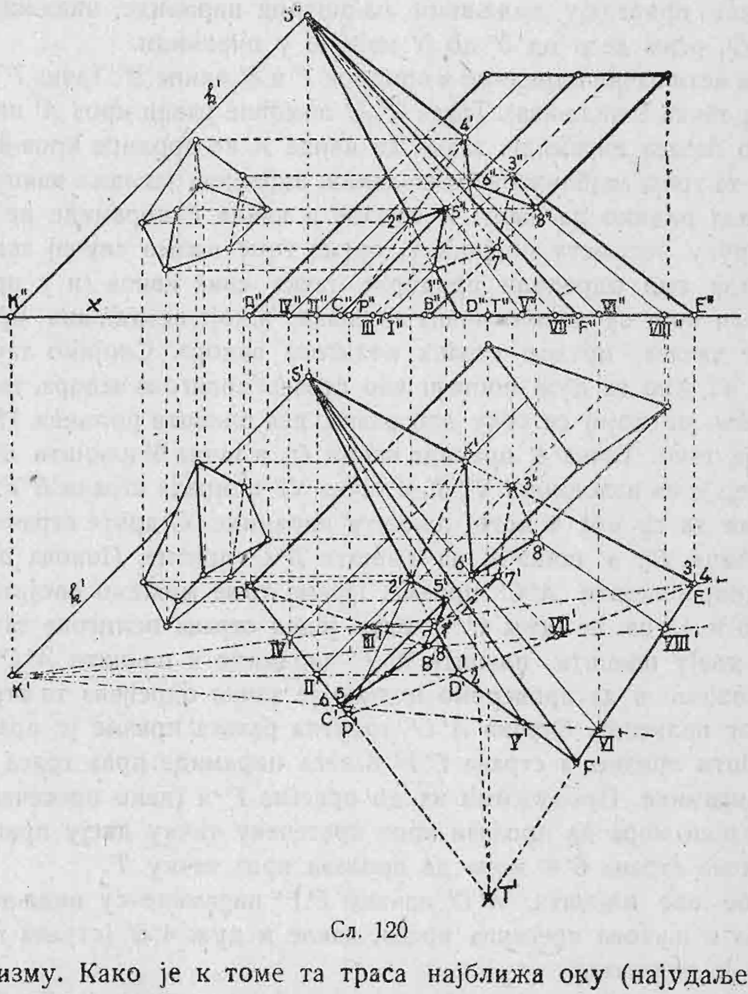
Као први пример одређивања продора рогљастих површина узмимо (у сл. 120) једну неправилну тространу косу призму и једну неправилну тространу косу пирамиду са базисама ABC и DEF у хоризонталници и одредимо њихов продор.

Да решимо задатак одредићемо продоре ивица пирамида кроз призму и продоре ивица призме кроз пирамиду. Упоредо ћемо одређивати који су делови тих ивица видљиви, а који невидљиви. На крају ћемо спојити те добивене тачке продора појединих ивица и тиме уцртати стране траженог полигона продора.

Да одредимо придор ивице DS пирамиде кроз призму, треба да повучемо кроз ту ивицу помоћну раван паралелну са ивицама призме. Такву раван можемо одредити тим што кроз било коју тачку ивице повучемо неку праву k паралелну са ивицама призме. Али, како има више ивица пирамиде, (а за сваку треба да то урадимо), најбоље је да праву k повучемо кроз врх S пирамиде. Одмах одредимо и продор K те праве кроз раван базиса. (Овде први траг K' праве k, јер су оба базиса у хоризонталници). Права $D'\,K'$ је траса помоћне равни у равни базиса. Како она сече троугао базиса призме у тачкама I′ и II′, помоћна раван пресецаће призму по изводницама кроз I′ и II′. На њима ће да буду продорне тачке 1′ и 2′ ивице D' кроз призму. Тачка 1′ припада видљивој пљошти $C'\,B'$ призме, па је и сама видљива. Исто тако видљива је и тачка 2′, јер је на видљивој пљошти $C'\,A'$ призме. Према томе биће (у првој пројекцији) видљива ивица D од тачке D' до 1′ и од тачке 2′ до S'. Део ивице од 1′ до 2′ је у призми, сматрамо га као и да не постоји, па га цртамо танко и испрекидано.

На исти начин помоћном равни кроз ивицу *E* дакле помоћу трасе *K′ E′*, одредимо и продорне тачке 3′ и 4′ ивице *E′* кроз призму. Тачка 4′ је на видљивој пљошти *A′ C′* призме, дакле и сама видљива, а тачка 3′ на невидљивој пљошти *A′ B′* па стога невидљива. Према томе је ивица *E* од тачке *E′* до контуре призме видљива (јер је и сама контурна), одатле до тачке 3′ невидљива, од тачке 3′ до 4′ као да не постоји (јер је у призми), а од 4′ до врха *S′* понова видљива.

Помоћна раван кроз ивицу *F* (заправо њезина права траса *F′ K′*) не сече троугао базиса призме. То значи да сама ивица *F* не продире кроз призму. Како је к томе та траса најближа оку (најудаљенија од вертикалнице), призма неможе да је заклони. Стога је ивица *F′ S′* цела видљива.



Сл. 120

Када смо одредили продоре ивица пирамиде кроз призму, пређемо на одређивање продора ивица призме кроз пирамиду. Да одредимо продор ивице *C′* кроз пирамиду, треба да повучемо помоћну раван кроз ту ивицу и кроз врх *S′* пирамиде. Најлакше одредимо ту раван двема паралелним правама. Једна од тих правих је сама ивица *C'*, а као другу повучемо из врха *S* праву паралелну са њом. Та права је поново она иста права *k* са трагом *K'*, коју смо раније цртали. Траса *C' K'* помоћне равни кроз ивицу *C'* пролазиће понова кроз *K'*, а исто тако и друге помоћне равни кроз остале ивице призме. Стога тачку *K'* називамо *„кључна тачка“* и обележавамо словом *K*. Траса *C' K'* сече стране троугла базиса пирамиде у тачкама V' и VI', саму пирамиду сече помоћна раван по изводницама V' *S'* и VI' *S'*, па су тачке 5' и 6' на њима тражене тачке продора ивице *C'* кроз пирамиду. Како обе тачке припадају видљивим пљоштима пирамиде, видљива је цела ивица *C'*, осим дела од 5' до 6' који је у пирамиди.

На исти начин одредимо и продоре 7' и 8' ивице *B'*. Тачка 7' је невидљива, а тачка 8 видљива). Траса *K' A'* помоћне равни кроз *A'* не пресеца троугао базиса пирамиде, значи да ивица *A* не продире кроз призму, и како је та траса најближа вертикалници, пирамида заклања ивицу *A'*.

Сада видимо да ивица *A* призме и ивица *F* пирамиде не продиру кроз другу рогљасту површину, према томе имамо случај задора.

Када смо одредили продорне тачке свих ивица (и у пројекцији нагласили који су делови ивица видљиви, а које невидљиви) пређемо на спајање тачака, цртање страна полигона задора. Спојимо тачку 6' са тачком 4'. Ако та дуж постоји као страна полигона задора, тада је она део праве по којој се секу две равни, две пљошти рогљева. Испитајмо да ли је тако. Тачка 4' припада ивици *E'*, а тачка 6' пљошти *E' F'* пирамиде (јер је на изводници VI' *S'*, а тачка VI' припада страни *E' F'* базиса). То значи да су обе у истој пљошти пирамиде. С друге стране тачка 6' је на ивици *C'*, а тачка 4' на пљошти *A' C'* призме. Понова припадају обе једној пљошти *A' C'* призме. Према томе можемо спојити те две тачке 6 и 4, па ће дуж 6' 4' бити једна страна полигона задора као пресек двеју пљошти, пљошти *E' F'* пирамиде и пљошти *A' C'* призме.

Можемо и да проверимо колико је тачно одређена та страна 6' 4' задорног полигона. Страна *A' C'* троугла базиса призме је права траса те пљошти призме, а страна *E' F'* базиса пирамиде прва траса пљошти *E F S* пирамиде. Продужимо их до пресека *T'* и (како пресечена права двеју равни мора да пролази кроз пресечену тачку двеју првих траса) продужена страна 6' 4' мора да пролази проз тачку *T'*.

Обе ове пљошти, *A' C'* призме *E' F'* пирамиде су видљиве, па је видљива и њихова пресечна права, дакле и дуж 4' 6' (страна полигона задора) је видљива.

Почели смо од тачке 6' и спојили је са тачком 4'. Да би наставили даље са цртањем страна просторног полигона задора, треба да видимо коју тачку продора смемо сада да спојимо са тачком 4'. (То спајање тачака задаје обично почетницима велике потешкоће). Како свакој тачки задора одговара на изводници једна тачка базиса, па пр. тачки 6' тачка VI', тако су означене (истим бројевима) и тачке базиса које одговарају тачкама продора појединих ивица. Поред *E'*, писани су бројеви 3 и 4, јер су тачке 3′ и 4′ продора на ивици *E*′, поред *C*′ бројеви 5 и 6, јер су продорне тачке 5′ и 6′ на ивици *C*′. Само су те тачке остављене на слици и у тексту без икаквог знака.

Спајајући тачке задора кренули смо од тачке 6′ (на базису од тачке VI′) и њу спојили са тачком 4′ (на базису њој одговара тачка 4 поред *E*′). Ако сада наставимо да идемо дуж страна троугла базиса пирамиде у истом смеру, дакле овде супротном од смера сказаљке на сату, пружа нам се могућност да тачку 4′ спојимо са тачкама 7′ или са 2′ или са 1′. То се види по томе што су тачке 4, VII′, 2 и 1 на истој страни *E*′ *D*′ троугла базиса, а то значи да су тачке 4′, 7′, 2′ и 1′ на истој пљошти *E*′ *D*′ *S*′ пирамиде. Коју од тих тачака смемо да спојимо са тачком 4′ видећемо по призми. Претпоставимо да бисмо хтели спојити тачку 4′ са тачком 7′. Продорној тачки 4′ одговара на призми тачка IV′ стране *A*′ *C*′ троугла базиса, продорној тачки 7′ тачка 7 поред *B*′ на троуглу базиса призме. Тачка IV′ и тачка 7 поред *B*′ не припадају истој страни троугла базиса призме, а то значи, да тачка 4′ и 7′ не припадају једној (истој) пљошти призме. Према томе тачку 4′ не смемо спојити са тачком 7′ јер та права не би претстављала пресечну праву двеју пљошти (једне пљошти призме и једне пљошти пирамиде).

Када несмемо спојити тачку 4′ са тачком 7′, да видимо дали бисмо смели спојити тачку 4′ са тачком 2′. Тачки 4′ одговара на базису призме тачка IV′, а тачки 2′ тачка II′. Те две тачке IV′ и II′ су на истој страни троугла базиса призме, значи да обе тачке 4′ и 2′ припадају истој пљошти *A*′ *C*′ призме. Према томе смемо спојити тачку 4′ са тачком 2′, јер ће та дуж претстављати пресек пљошти *E*′ *D*′ пирамиде са пљошти *A*′ *C*′ призме. Пљошт *A*′ *C*′ је видљива али је пљошт *E*′ *D*′ пирамиде невидљива, па ће дуж 4′ 2′ (страна полигона задора) бити невидљива. Колико је та страна тачно одређена проверимо помоћу тачке *P*′ у којој се секу продужене прве трасе *E*′ *D*′ и *A*′ *C*′ пљошти, Како из сваке обичне тачке полигона продора полазе само две стране полигона (јер се три равни секу по трима правима, а једна од њих је ивица) а у тачки 4′ имамо већ две, можемо да идемо даље (Можда би било добро да почетници прецртају тачке (4 и 2) на троуглу базиса а — осим почетне тачке VI′ — које одговарају већ спојеним тачкама (4′ и 2′) полигона задора).

Идући даље у истом смеру по троуглу базиса пирамиде од тачке 2 поред *D*′ видимо да тачку 2′ можемо да спојимо једино са тачком V′, јер је то једина тачка на страни *D*′ *F*′ троугла. Тачке II′ и 5 поред *C*′ су и код призме на истој страни троугла базиса, а исто тако и на једној пљошти пирамиде, па их можемо спојити. Обе те пљошти, и *D*′ *F*′ и *A*′ *C*′ су видљиве према томе видљива је и страна 2′5′ полигона задора.

Како на страни *D*′ *F*′ троугла базиса пирамиде идући у истом смеру од тачке V′ нема више ни једне тачке да одговара некој тачки задора, остаје нам само да се од тачке V′ вратимо натраг по истом троуглу, али сада у супротном смеру, дакле у смеру сказаљке на сату. Само одређивање тачака сада је олакшано тиме што већ спојене тачке не улазе више у разматрање. (Стога је и препоручено да се прецртају). Како су оба рогља конвексна остаје да спајамо остале тачке редом: тачку V′ са 1 поред *D′* (дакле тачку 5′ продора са тачком 1′), затим 1 поред *D′* са VII′ (1′ са 7′), даље VII′ са 3 поред *E* (7′ са 3′), 3 поред *E′* са VIII′ (3′ са 8′) и на крају тачку VIII′ са тачком VI′ (8′ са 6′). Природно да пре сваког спајања треба проверити, да ли се обе тачке које хоћемо да спојимо налазе и на једној пљошти призме. Треба и да одредимо за сваку спојену дуж (страну полигона задора) да ли је видљива или не. Видљива је ако су видљиве (у тој пројекцији) обе пљошти чији је она пресек, а невидљива је ако је и само једна од пљошти невидљива.

Код овог примера може лако да се провери и следеће правило. Ако се две видљиве контурне ивице (код облих површина изводнице) укрштавају, једна прелази преко контуре друге површине као видљива а друга као невидљива. Тако за контурне изводнице *E′* и *B′* од тачке укрштања иде ивица *B′* до тачке 8′ као видљива, али је зато контурна ивица *E′* до тачке 3′ невидљива. Код контурних ивица *B′* и *D′* иде *D′* као видљива до 1′ па је *B′* до 7′ невидљива. Са горње стране, од врха *S′*, иду обе контурне ивице пирамиде као видљиве преко контурне ивице *A′* призме, стога је контурна ивица *A′* призме између њих невидљива. Само у случају да се две контурне ивице (или изводнице) секу, могу обе да иду као невидљиве а и као видљиве. (Ово исто правило важи и за контурне изводнице код облих површина).

Другу пројекцију 1″ до 8″ полигона задора одредимо помоћу ордината, јер су то тачке појединих ивица. Ако је угао између друге пројекције ивице и ординате мален, тада другу пројекцију тачке можемо да одредимо и помоћу изводнице другог рогља. Тако је на слици (без стварне потребе) одређена тачка 8″. Тачка 8 је једна тачка ивице *B* призме, али како је тачка 8 и на изводници VIII *S* пирамиде, одређена је друга пројекција VIII″ тачке VIII базиса и повучена друга пројекција VIII″ *S″* те изводнице пирамиде. На њезином пресеку са ивицом *B″* призме је тражена тачка 8″. За контролу треба повући и ординату 8′ 8″. Када су одређене друге пројекције продорних тачака, треба да одредимо који су делови појединих ивица видљиви, а који невидљиви. На крају нацртамо и стране полигона задора. Поједине тачке продора ивица спајамо истим редом којим су спојене у првој пројекцији. При том спајању треба проверавати и њихову тачност, а то можемо и у другој пројекцији помоћу оних истих пресечних тачака првих траса. (На слици су нанете тачке *T″* и *P″*). Такође треба при том цртању појединих страна полигона задора одредити, и на цртежу нагласити, које су стране (у другој пројекцији) видљиве а које невидљиве.

Код овог примера извучено је са стране језгро. Језгро је онај део обају рогљева, који је услед задора или продора постао заједнички једном и другом рогљу (овде призми и пирамиди). Сама конструкција је врло једноставна. Све тачке померене су за исту дуж паралелно са X-осом и понова спојене.

Видели смо код овог задатка да смо кључну тачку K' одредили тим што смо из врха S пирамиде повукли праву k паралелну са ивицама призме и одредили њезин продор кроз раван базиса. Према томе она зависи само од положаја врха S и од правца ивице призме. Положај базиса призме или пирамиде (или број страна базиса) нема никаквог утицаја на K'. То значи. Иза како смо одредили K' можемо повући трасе помоћних равни кроз ивице пирамиде, а тада померати и окретати базис призме и поставити га тако да, по жељи, продире кроз пирамиду само једна, две, више њих или све ивице призме и обрнуто. Главно је да нове ивице призме буду понова паралелне са правом k.

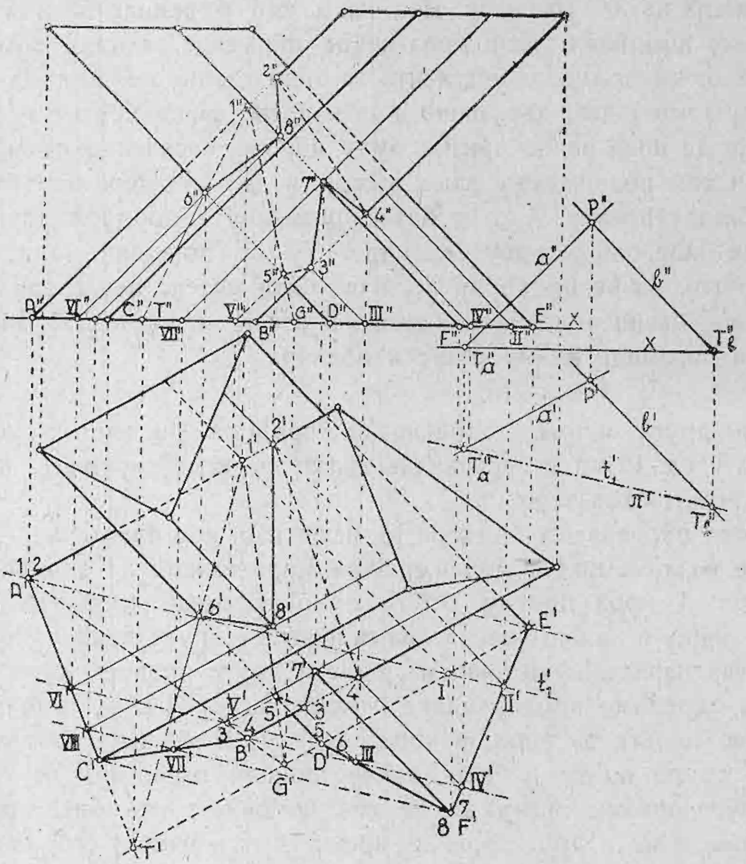
При том подешавању ваља настојати да базис пирамиде буде што ближи базису призме. Ако су базиси размакнути, продорне тачке ивица пирамиде биће ближе врху пирамиде. Ту су поједине ивице блиске једна другој, па ће продорни полигон бити мален, неугледан, а и нетачан. Овај начин подешавања задатка остаје непромењен, ако место призме и пирамиде имамо конус и облицу.

*

Као други пример одређивања продора рогљастих површина узете су у сл. 121 две неправилне тростране косе пирамиде, па треба да одредимо њихов задор.

Начин одређивања продора је исти као код прећашњег задатка, једина је разлика код помоћних равни. Када хоћемо да одредимо продор ивице A кроз призму $D\,E\,F$, помоћна раван треба да пролази кроз ту ивицу и да буде паралелна са ивицама друге призме. У ствари, та је раван паралелна са ивицама једне и друге призме. Када будемо хтели да одредимо продор ивице F кроз призму $A\;B\;C$, помоћна раван ће поново морати да пролази кроз ивицу F и да буде паралелна са ивицама друге призме, биће дакле понова паралелна на ивицама једне друге призме. Значи да ће све помоћне равни бити паралелне са ивицама једне и друге призме, према томе и између себе паралелне. Да би их могли користити треба да одредимо њихов траг у равни базиса призме $A\,B\,C$ и у равни базиса призме $D\,E\,F$. Код овог задатка оба базиса су у једној (истој) равни, па нам је довољан само један траг помоћне равни на тој једној равни обају базиса, а како је та раван хоризонталница, сам тражени траг биће траса t_1 (помоћне) равни. Да је конструишемо, узмемо било где са стране неку тачку P (P' и P'') и кроз њу повучемо две праве a и b. Праву a паралелну са ивицама једне призме, а праву b паралелну са ивицама друге призме. Одредимо прве трагове тих правих, па ће кроз прве трагове пролазити прва траса t_1' равни. Прве трасе свих помоћних равни биће паралелне са овом трасом t_1' (јер су и саме равни паралелне).

Хоћемо ли да одредимо продор ивице A кроз призму $D\,E\,F$ повучемо кроз A' трасу t_1 помоћне равни. (Да би се трасе одвајале на слици од осталих конструкција, цртане су испрекидано црта-тачка). Та траса пресеца троугао *D′ E′ F′* базиса друге призме у тачкама I′ и II′, а то значи да сама помоћна раван сече призму *D E F* по изводницама које пролазе кроз тачке I′ и II′. Нацртамо их и на њима су тражене продорне тачке 1′ и 2′ ивице *A*. Тачка 2′ је видљива, јер је на видљивој пљошти *E′ F′* призме, а тачка 1′ невидљива, јер је пљошт *D′ E′* невидљива. Према томе је ивица *A′* од тачке *A′* (као контурна ивица)



Сл. 121

видљива до укрштања са контуром друге призме. Одатле је невидљива до тачке 1′. Од 1′ до 2′ као да не постоји, јер је у другој призми, а од тачке 2′ до горњег базиса поново видљива.

Одређивање продорних тачака, ивица и видљивих или невидљивих делова на њима потпуно је исто као код прошлог примера, па нема потребе да га овде још једном објашњавамо. Како трасе помоћних равни кроз ивице *C′* и *E′* не пресецају троугао базиса друге призме, (а то значи да саме ивице не продиру) имамо и овде случај задора.

И цртање појединих страна просторног полигона задора је потпуно исто, а исти је и начин на који можемо да проверавамо коју тачку продора са којом смемо спојити. Само би код овог примера, ако се као права страна полигона споје тачке 8′ и 2′, било подесније пратити које се тачке могу спајати на троуглу базиса призме $A\ B\ C$. У том случају ишли би по троуглу $A'\ B'\ C'$ од тачке VIII′ у смеру сказаљке на сату преко A' и B' до тачке VII′, а одатле у супротном смеру натраг до тачке VIII′. (Ивица C' не продире, па од тачке VII′ преко C' до тачке VIII′ нема ни једне тачке базиса која би — у правцу изводница — одговарала некој тачки полигона задора). Све остало ради се потпуно исто као код прошлог задатка.

Помоћне равни (њихове прве трасе) одредили смо код овог примера тиме што смо из једне тачке P повукли једну праву a паралелну са изводницама једне призме, а другу праву b паралелну са изводницама (или ивицама) друге призме. Према томе оне зависе једино и само од правца тих изводница (или ивица), а ниуколико од положаја базиса (или број страна базиса). То значи да и овде можемо по жељи померати и окретати базисе и подесити положај призме по жељи и постављеном задатку (продор, задор). Ова иста примедба о подешавању задатака важи и у случају да су нам место двеју призми задате две облице (или призма или облица).

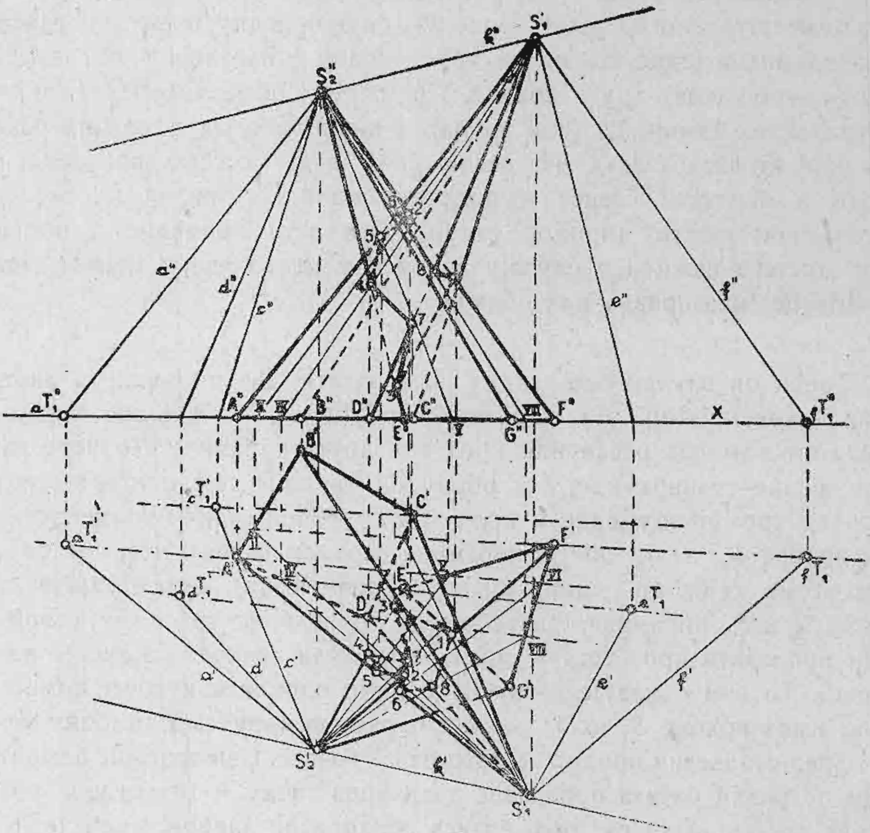
*

Трећи би случај био да су нам задате две пирамиде и да тражимо њихов продор. Да одредимо продор ивице A једне пирамиде морала би помоћна раван ићи кроз врх друге пирамиде. То исто важи за све ивице те пирамиде, а и обрнуто. Главно је да све помоћне равни повучене кроз ивицу једне и кроз врх друге пирамиде пролазе уствари кроз врхове S_1 и S_2 обеју пирамида (прамен равни). Све ће се оне према томе сећи по једној правој k (прамењачи), која пролази кроз врхове S_1 и S_2 пирамида. Одатле следи да ће и све трасе тих помоћних равни пролазити кроз траг K праве k (прамен зракова t коме је тачка K теме). То нам показује начин како ћемо одредити и трасе помоћних равни. Кроз врхове S_1 и S_2 задатих пирамида повучемо помоћну праву k и одредимо њезин продор K кроз раван базиса. Сви трагови помоћних равни по равни базиса пролазиће тада кроз тачку K (стога је и зовемо кључна тачка). Ако су оба базиса у хоризонталници, онда је K у ствари K_1' први траг праве k, а трагови помоћних равни по равни базиса стварно прве трасе помоћних равни. Ако су базиси пирамида један у једној, а други у другој равни, треба да одредимо пресечну праву тих двеју равни, а тада продор K_1 праве k кроз једну и продор K_2 кроз другу раван базиса. Трагови помоћних равни ићи ће кроз K_1 (и тачку на базису ивице) до пресечне праве, а одатле кроз K_2 или обрнуто.

Подешавање задатака могуће је овде, јер права k зависи само од положаја врхова пирамида, па базисе пирамида смемо померати и окретати како год хоћемо.

Ако су базиси пирамида у хоризонталници, а врхови на истој висини (изнад хоризонталнице), права *k* је хоризонтална, а њезин први траг иде у бесконачност. Тада је права *k* прва сутражница свих помоћних равни, па су им прве трасе између себе паралелне и паралелне са *k'*. То је и најбољи случај, јер је тада лако подесити задатак да продор буде у пројекцијама леп и уочљив.

Најгори је случај када су врхови пирамида на тако маленој висинској разлици, да права *k* продире кроз раван базиса јако далеко. Може да се деси да њезина продорна тачка *K* падне и ван цртежа.



Сл. 122

Решење задатка остаје и тада исто само је отежано одређивање (цртање) траса помоћних равни по равни базиса. Одредимо на било који начин једну, остале можемо и помоћу сличних троуглова).

У сл. 122 нацртан је такав случај. Задате су две пирамиде, обе са базисима на хоризонталници, али су врхови S_1 и S_2 дати тако да кључна тачка *K'* пада ван цртежа. Повучена је права *k* кроз врхове S_1 и S_2 пирамида и, како први траг те праве пада ван цртежа, прву трасу помоћне равни треба да одредимо на било који други начин. Овде је то најлакше овако.

Треба ли да одредимо продор ивице F пирамиде EFG са врхом S_2 кроз другу пирамиду са врхом S_1 повучемо из врха S_1 праву f паралелну са ивицом FS_2. Те две праве одређују сада једну раван и то раван која пролази кроз ивицу F и кроз врх S_1 друге пирамиде, дакле баш нашу помоћну раван. Одредимо одмах продор праве f кроз раван базиса, овде {први траг T_1, па ће кроз тај траг и тачку F пролазити права траса помоћне равни. Траса сече базис четворостране пирамиде у тачкама I′ и II′, значи да помоћна раван сече пирамиду по изводницама I′S_1' и II′S_1', па су на тим изводницама продорне тачке 1′ и 2′ ивице E. Помоћне равни кроз све остале ивице одредимо на исти начин. Остало нам је познато из ранијих примера.

Ако је која ивица једне или друге пирамиде скоро паралелна ординати, прва пројекција трага била би несигурна (нетачна) услед малог угла између ординате и праве паралелне са ивицом. У том случају, везујући се за већ једну одређену трасу и праву k можемо да одредимо ову нову трасу помоћу сличности троуглова.

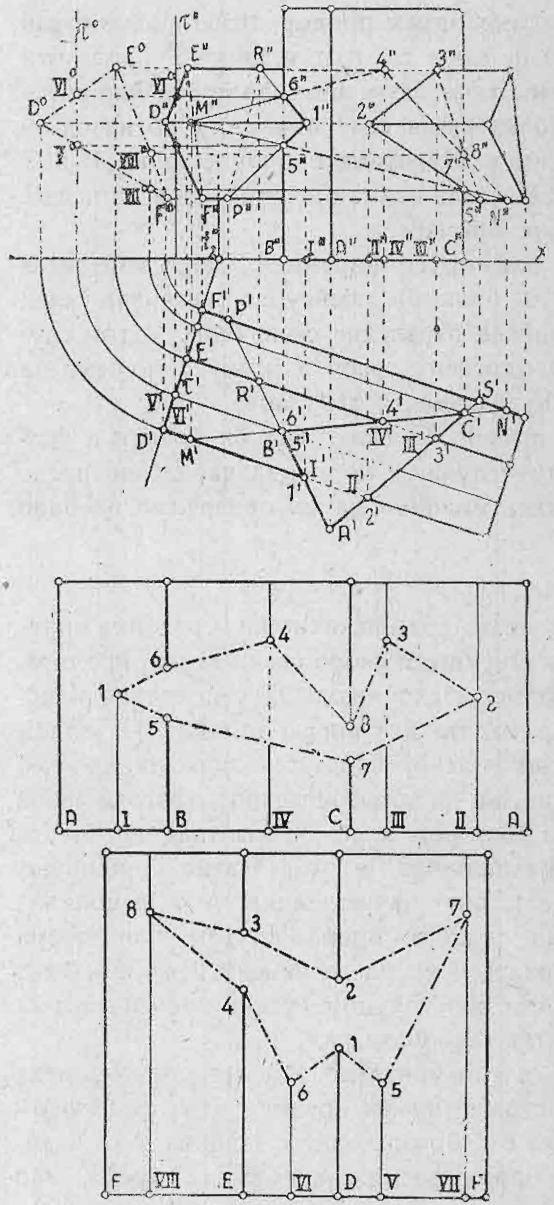
У случају да су врхови превећ блиски, били би блиски и трагови паралелних правих. У том случају, место да паралелне праве вучемо из врха друге пирамиде, можемо да их повлачимо из било које подесније тачке на правој k.

*

На овај начин, како смо до сада радили, помоћним равнима повученим кроз ивице рогљева можемо решити скоро сваки случај продора. Да олакшамо конструкцију можемо доскочицама да у неколико изменимо задатак. Ако су нам на пр. задата два рогља од којих је једном базис у хоризонталници а другом у некој произвољној равни, можемо продужити ивице тога другога рогља до хоризонталнице, трагове ивица сматрати теменима новог базиса тога рогља, па су нам тада оба базиса у хоризонталници. Конструкција продора је тим знатно упрошћена.

Само не треба сматрати да је овај начин једини. Ако је положај задатих рогљева нарочит било једнога према другом или према пројекциским равнима, метода рада може да се измени. До тих измена може да дође или због нетачности конструкције (услед превећ оштрих углова), или што та измена знатно олакшава рад.

Ево пар примера, да се и са тим упознамо. Као први пример нека су задате две неправилне тростране праве призме, једна са базисом ABC у хоризонталници, а друга са хоризонталним ивицама и са базисом DEF у равни $\perp H$. Да одредимо помоћне равни треба, као раније, да узмемо неку тачку P и да кроз њу повучемо праву a паралелну са ивицама вертикалне призме и праву b паралелну са ивицама хоризонталне призме. Те две праве одређују помоћну раван, а тада треба да одредимо њезин траг (трасу) по равни базиса. Како су базиси један у H, а други у равни $\perp H$ треба да одредимо трасе помоћне равни и на једној и на другој равни базиса. Од двеју правих које одређују помоћну раван једна је управна на *H* (права *a*). Услед тога је цела раван управна на хоризонталницу и цела ће јој се прва пројекција поклапати са правом трасом. Према томе прва траса (траг у равни базиса *A B C* вертикалне призме) поклапаће се са првом пројекцијом праве *b*. Значи да је прва траса помоћних равни паралелна са ивицама хоризонталне призме. Друга траса, траг помоћне равни по равни базиса хоризонталне призме је вертикалан (⊥ *H*), јер је помоћна раван ⊥ *H*, а и раван базиса хоризонталне призме је ⊥ *H*. Обележаваћемо је словом τ.



Сл. 123

Да одредимо продор ивице *D* повучемо кроз *D* помоћну раван. Прва јој се траса поклапа са *D'*, а базис вертикалне призме сече у тачкама I' и II'. То значи да помоћна раван сече вертикалну призму по изводницама I и II, па су на њима продорне тачке 1″ и 2″ ивице *D* кроз вертикалну призму. Обе су тачке на видљивим пљоштима, према томе је цела ивица *D″* видљива сем дела између 1″ и 2″. На исти начин одређене су и продорне тачке 3″ и 4″ ивице *E* (Стварно за ове тачке 1 – 4 нису требале никакве помоћне равни. Пљошти вертикалне призме су управне на хоризонталницу и цела се призма пројектује као троугао *A' B' C'*. Продорне тачке 1' – 4' ивица *D'* и *E'* одмах се виде и можемо ординатима да им одредимо другу пројекцију). Од ивица вертикалне призме само ивице *B* и *C* продиру кроз хоризонталну призму. Пошто су те ивице вертикалне, пројектују се у *H* свака као једна тачка *B'* или *C'*, али ће тада и прве пројекције њихових продорних тачака 5′ и 6′ падати скупа са B' (7′ и 8′ скупа са C'). То мало помаже. Друге пројекције тих тачака не можемо да одредимо, јер незнамо њихове висине. Да одредимо продорне тачке 5 и 6 ивице B можемо да повучемо помоћну раван. Прва јој траса пролази кроз B' и паралелна је са ивицама хоризонталне призме, а траг τ по равни базиса хоризонталне облице показиваће се као једна тачка (јер је $\perp H$). Можемо одмах да уцртамо и другу пројекцију τ'' тога трага. У другој пројекцији се види, да тај траг пресеца троугао $D'' E'' F''$ базиса хоризонталне призме у тачкама V″ и VI″, а то значи да помоћна раван сече хоризонталну призму по изводницама из V″ и VI″. На њиховом пресеку са ивицом B'' су тражене продорне тачке 5″ и 6″. Обе су у видљивим пљоштима хоризонталне призме, па је ивица B'' цела видљива осим дела од 5″ до 6″. Исто тако одређене су и продорне тачке 7″ и 8″ ивице C'.

Само је пресек трага τ'' са странама троугла $D'' E'' F''$ под маленим углом, па су тачке V″ и VI″ прилично несигурне. (Још горе је са тачком VIII″). То је последица положаја равни базиса према вертикалници, па је троугао $D'' E'' F''$ у великом скраћењу. Лако можемо отстранити ту нетачност, ако саму раван са троуглом и трагом помоћне равни окренемо у вертикалницу око њезине друге трасе t_2'' (која је управна на X-осу). У окренутом положају угао пресека са τ^0 биће већи, па ће и тачке V⁰ и VI⁰ бити тачније. Како при окретању тачке не мењају висину, смемо да повлачимо изводнице хоризонталне призме из тачака V⁰ и VI⁰ као што смо их повукли пре из тачака V″ и VI″.

Место да раван базиса окрећемо у V око њезине друге трасе постигли бисмо још већу тачност, када бисмо одредили базис хоризонталне призме у вертикалници. Довољно би било продужити прве пројекције ивица од пресека са X-осом и одредити друге пројекције тих тачака. Тај пресек призме са вертикалницом био би нови базис призме. И прве трасе помоћних равни продужавали би до X-осе, па би њихови трагови по равни новог базиса хоризонталне призме биле стварне друге трасе, а и оне су управне на X-осу.

*

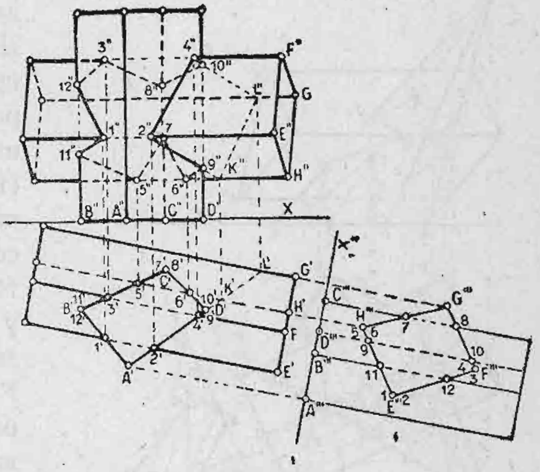
Код овог задатка можемо лако да видимо, да помоћне равни узете паралелно са изводницама једне и друге призме, и ако скоро увек дају добра решења, ипак нису увек и најбоље. Узмимо овде какве друге помоћне равни. У првој пројекцији видимо да пљошт $C' A'$ вертикалне пирамиде сече ивице D' и E' у тачкама 2′ и 3′. Када бисмо проширили раван преко ивице C' пресецала би тако проширена раван и ивицу F' у тачки S'. Тада би пресецала целу хоризонталну призму и то по троуглу 2, 3, S па можемо да му одредимо и другу пројекцију 2″ 3″ и S''. Раван је ишла кроз ивицу C. На пресеку ивице са тим троуглом биће продорне тачке 7″ и 8″ ивице C'' кроз хоризонталну призму. Тако смо одредили продорне тачке ивице C. Поред тога знамо да ова раван ипак постоји, бар онај њезин део између ивица A и C. Према томе постоји и део пресечног троугла између тих двеју ивица. Страна 2′ и 3′ је видљива, а исто тако и део од 2″ до 7″ друге стране док је трећа страна од 3″ до 8″ невидљива. Те стране су већ стране просторног полигона задора. Још боље би било да смо као помоћну раван узели проширену пљошт $B' C'$ вертикалне призме. Она сече хоризонталну призму по троуглу $M\,4\,N$. На његовој другој пројекцији имали би смо продорне тачке 5″ и 6″ ивице B и 7″ и 8″ ивице C, а поред тога и стране 8″ 4″, 4″ 6″ и 5″ 7″ полигона задора. Према томе код овог, а и код идућег примера овако узете помоћне равни дају (тачно одређене) тачке продора појединих ивица, а уједно и стране продорног полигона. Али овакве равни можемо да употребимо само у случајевима када су ивице једне призме управне на неку пројекциску раван.

Код овог примера одређене су и мреже обеју призама. Призме су праве, па ће им линије базиса на мрежи бити управне на ивице. Код вертикалне призме показује се базис у I пројекцији у правој величини, а ивице у II пројекцији. Код хоризонталне призме су у I пројекцији ивице у правој величини, а праву величину базиса одредили смо већ раније, када смо његову раван окренули у вертикалницу. Тачке на ивицама нанесемо на мрежу као раније тачке пресека, а остале тачке помоћу изводница и тачака на базису. Полигони базиса нису уцртани на мрежама ради уштеде у простору.

Пошто смо на двема мрежама два пута одредили полигон продора треба да су праве величине његових страна на једној и другој мрежи једнаке.

На овом примеру, где су ивице призми у специјалном положају, видели смо три начина како можемо да решимо задатак. Први начин је општи начин са помоћним равнима паралелним са изводницама једне и друге призме. (Окретањем у V равни базиса хоризонталне призме избегли смо нетачност пресека код тачака V″ и VIII″). Други је био у ствари поново исти први начин, али са изменом задатка. Место правог базиса хоризонталне призме, продужили смо ивице хоризонталне призме до пресека са вертикалницом, па смо тај пресек призме са вертикалницом, употребили као базис хоризонталне призме. (Постиже се већа тачност). Трећи начин је био: место уобичајених помоћних равни употребити друге неке равни. Овде су као помоћне равни узете проширене пљошти вертикалне призме. (Поред продорних тачака појединих ивица добијали смо и стране полигона задора).

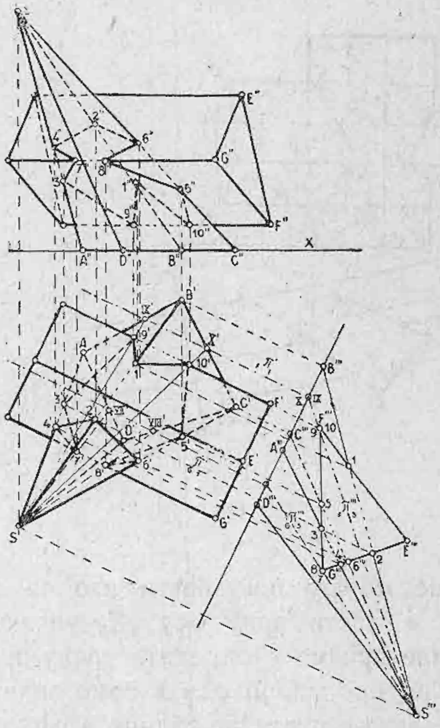
Овај задатак може да се реши још на један начин. Већ смо видели да продоре 1′ – 4′ ивице хоризонталне призме имамо одмах у првој пројекцији (услед тога што се пљошти вертикалне призме про јектују као дужи), па их можемо ординатама одредити у II пројекцији. Видели смо да имамо и продорне тачке 5′ – 8′ ивица вертикалне призме, али само у I пројекцији. Другу им пројекцију не можемо одредити, јер не знамо њихову висину. Само од себе се намеће да одредимо неку нову пројекцију, где ће се пљошти хоризонталне призме пројектовати целе као дужи (стране базиса). Та нова пројекција дала би нам и те висине. Тако је решен пример у слици 124. Задате су две четворостране призме у положају скоро истом као код задњег примера. Продорне тачке ивица *E F H* хоризонталне призме кроз пљошти вертикалне призме, тачке 1′ до 6′ видимо одмах у првој пројекцији, јер се целе те пљошти поклапају у хоризонталници са странама базиса. Друге пројекције тих тачака одредимо једноставно ординатама. Да одредимо продоре ивица *B C D* вертикалне призме кроз пљошти хоризонталне призме, можемо одредити нову пројекцију у којој ће се пљошти хоризонталне призме показати целе као дужи (и поклапати са четвороуглом базиса). То значи, да се у новој пројекцији ивице хоризонталне призме морају показивати као тачке. Овде је то лако постићи. Довољно је узети нову осу ${}_1X_3$ управну на прве пројекције ивица хоризонталне призме и одредити трећу пројекцију једне и друге призме. У трећој пројекцији одмах ћемо видети тражене продорне тачке 7‴ до 12‴ ивица вертикалне облице, а њихова отстојања од ${}_1X_8$ су висине над хоризонталницом. Тим су одређене продорне тачке свих ивица једне и друге призме, треба да их још спојимо, па је задатак решен. Ако при спајању тачака наиђемо на тешкоће, лако можемо и овде, као код предњег примера да користимо пресеке са проширеним пљоштима вертикалне призме. У слици је нацртана само једна, *A′ D′* и њезин пресек четвороугао 2″ 4 ″ *L″ K″*.



Сл· 124

*

Овај начин, помоћу треће пројекције може да се користи увек када су ивице неке призме паралелне са *H* или *V*, јер се тада свака пљошт призме пројектује као једна права и поклапа са пројекцијом стране базиса. Нарочито је подесан код примера у слици 125, где је задата неправилна четворострана коса пирамида са базисом *A B C D* у хоризонталници и неправилна тространа права призма са ивицама паралелним са хоризонталницом. Поставимо нову пројекцијску раван ${}_1X_3$ управно на прве пројекције ивица призме. У тој равни ивице EF и G призме пројектоваће се као тачке, а цела призма као троугао $E'''\ F'''\ G'''$. Стога одмах видимо тачке 1, 2, 3, 4, 5 и 6 у којима ивице B''', A''' и C''' пирамиде продиру кроз призму. Те тачке пренесемо ординатама у I и II пројекцију, па затим одредимо (и при извлачењу нагласимо) који су делови тих ивица видљиви а који невидљиви у I и затим у II пројекцији.



Сл. 125

Остаје још да одредимо продоре ивица призме кроз пирамиду. Да одредимо продор ивице F кроз пирамиду, повучемо помоћну раван π која пролази кроз ту ивицу и кроз врх S пирамиде. Ивица F је $\parallel H$, па ће прва траса помоћне равни π бити паралелна са I пројекцијом ивице. Поред тога се цела ивица F пројектује у III пројекцији као тачка, а то значи да ће помоћна раван кроз F бити управна на III пројекциску раван и да ће се цела пројектовати у својој III траси, а да ће јој прва траса бити $\perp {}_1X_3$. Повучемо ту III трасу кроз S''' и F'''. Од њезиног пресека са ${}_1X_3$ иде I траса $\perp {}_1X_3$.

Та I траса пресеца базис пирамиде у тачкама IX′ и X′, а то значи да помоћна раван сече пирамиду по изводницама IX′ S' и X' S'. На изводницама и на ивици F' су продорне тачке 9′ и 10′. Њихову II пројекцију одредимо ординатама. Продоре 7 и 8 ивице G одредимо на исти начин, а одмах затим одредимо и нагласимо који су делови тих ивица видљиви, а који невидљиви у првој и другој пројекцији.

Како се спајају поједине тачке полигона задора познато нам је из ранијих примера, али код овог задатка можемо да се користимо и пресецима пирамиде са проширеним равнима призме. Тако би проширена раван $E'''\ G'''$ призме (в. III пројекцију) секла пирамиду по једном четвороуглу, а ми можемо да користимо онај његов део који стварно постоји, део између ивица E и G: то су стране 6′ 2′ и 2′ 4′ (види прву пројекцију) и од других двеју страна делове 6′ 8′ и 4′ 7′.

б) О кривама и облим површинама

§ 48. Постојање кривих и њихова подела

Када се нека тачка стално помера, пут који она описује тим померање називамо кривом линијом или краће кривом. Ако су све тачке те криве у једној равни, за такву криву кажемо да је крива у равни или равна крива. Она је само једноструко повијена (на пр. елипса). Ако све тачке нису у једној равни, тада је крива двоструко повијена, а такву криву називамо просторна крива (на пр. завојна крива).

Може да постоји неко правило по коме се тачка помера. На пример тачка се помера у равни, али тако да је збир њезиних отстојања од других двеју задатих тачака исте равни стално једнак (елипса), или: тачка се помера у простору, али тако да задржи једно стално одстојање од једне задате праве, а исто тако и једне задате тачке (продор облице кроз лопту). У оба ова случаја можемо да одредимо неограничен број тачака криве. Исто тако може да буде задата крива само цртежом (графички), али нам је тада одређен само њезин нацртани део.

Када правило по коме настаје крива можемо да изразимо неком једначином, кажемо да је крива аналитичка, и то алгебарска или трансцендентна.

Док у непосредној близини било које тачке неке криве постоји с једне и друге стране још по једна бесконачно блиска тачка криве, тада кажемо да је крива непрекидна (с обзиром на тачке). Према томе прекидна (с обзиром на тачке) може да буде нека крива само на свом слободном врху. Крива може да има једну или више грана, може да има и бесконачно удаљених тачака, али је крива у свим својим тачкама ипак непрекидна, ако су јој поједине гране затворене. Затворене могу да буду у коначности (на пр, елипса) или у бесконачности (н. пр. парабола, хипербола, права). Алгебарске криве су непрекидне у свим својим тачкама.

Задржимо се сада само на алгебарским кривама у равни. За криве у равни можемо да кажемо следећа правила:

1) *Равну криву n-тог реда сече свака права њезине равни у n тачака.*

Овде треба бројати понаособ тачке које су се услед нарочитог положаја праве поклопиле (на пр. тачке на тангенти) или су постале имагинарне.

И бесконачно удаљена права сече сваку криву n-тог реда у n тачака. Као и све остале тачке могу и ове (бесконачно удаљене) тачке да буду реалне (на пр. код хипорболе), реалне поклопљене (код параболе) или имагинарне (на пр. код елипсе).

2) *Имагинарне тачке пресека неке реалне криве са реалном правом појављују се увек у паровима спрегнуте.*

Услед тога било која права мора да сече криву непарног реда (на пр. трећег) најмање у једној реалној тачки.

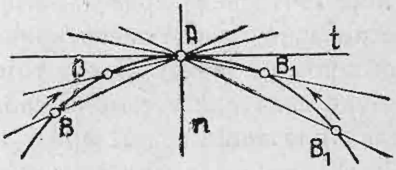
3) *Крива коју било која права њезине равни сече у n тачака реалних одвојених (или поклопљених) или имагинарних јесте алгебарска крива n-тог реда.*

Претпоставља се да нам је познато правило по коме крива постаје. У противном могли бисмо, на пример, прогласити да је крива другог реда свака нацртана крива јајастог облика.

Једина крива првог реда је права. Криве већег реда могу се распасти у криве нижег реда. Тако се крива другог реда може распасти у две криве првог реда (две праве). Исто тако крива четвртог реда може се распасти у две криве другог реда (две елипсе) или у четири криве првог реда (четири праве).

Криве другог реда су елипса (круг) парабола и хипербола. Једним именом називамо ове криве конични пресеци.

Свака крива другог реда има две бесконачно удаљене тачке. Те тачке могу да буду спрегнуте имагиране (код елипсе), реалне поклопљене (код параболе — на оси) или реалне одвојене (код хиперболе — на асимптотама). Према томе могли бисмо за коничне пресеке да кажемо: Крива другог реда је елипса (круг) парабола или хипербола према томе да ли она сече бесконачно удаљену праву своје равни у спрегнутим имагираним тачкама или у реалним тачкама и то поклопљеним или одвојеним.



Сл. 126

Две праве можемо сматрати као распаднуту криву другог реда и то две реалне праве које се секу у коначности као распаднуту хиперболу, две реалне праве (које се секу у бесконачности) које се поклапају као распаднуту параболу, а две спрегнуте имагиране праве које се секу у реалној тачки као распаднуту елипсу.

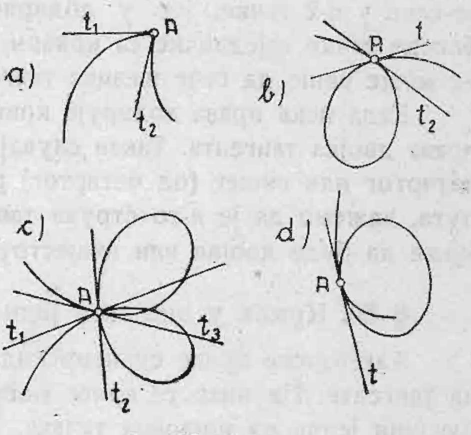
§ 49. Тангента и асимптота равне криве

Узмимо на кривој две тачке A и B. Део криве који је између тих двеју тачака зовемо лук. Права повучена кроз тачке A и B је секанта (сечица) криве, а сама дуж AB је тетива.

Пустимо ли да тачка A остане непомична, и да се тачка B помера по кривој, окретаће се секанта AB око тачке A. Када се тачка B бесконачно приближи тачки A, заузеће секанта AB један одређени гранични положај према кривој. Такву секанту која пролази кроз две бесконачно блиске тачке криве називамо тангента (дирка) криве, а тачка A је њезина додирна тачка. Ако сада узмемо поново једну тачку B_1 криве, али с друге стране тачке A и пустимо да се B_1 постепено приближава тачки A, окретаће се и нова секанта око тачке A. На концу заузеће та нова секанта неки гранични положај када се тачка A_1 бесконачно приближи тачки A. Тај положај, може да буде онај исти који је ранија секанта била заузела (в. сл. 126), а то значи да крива има у тачки *A* само једну тангенту. Може да буде и неки други положај (в. сл. 127*a*), а то би значило да крива у тој тачки има две тангенте. У првом случају кажемо да је крива непрекидна с обзиром на тангенте, а у другом да је крива прекидна с обзиром на тангенте.

Све алгебарске криве су непрекидне с обзиром на тангенте.

Ипак може да се деси да и алгебарска крива има у некој тачки две, три, па и више тангента, али то значи да крива пролази кроз ту тачку два, три или више пута. Према томе крива има понова само по једну тангенту на сваку грану која пролази кроз ту тачку (в. сл. 127 *b* и *c*). Такве тачке називамо двојне, тројне, четвороструке, *n*-то струке тачке криве. Понекад кажемо да су то једноструке, двоструке, *n*-то струке чворне тачке (или чворови) криве.



Сл. 127 *a*, *b*, *c* и *d*

Свака права која пролази кроз неку *n*-то струку тачку *A* криве сече криву у *n* тачака само тангента на било коју грану криве у тачки *A* има једну тачку више и то *n*-то струку тачку *A* и њој бесконачно блиску тачку оне гране криве, на коју је тангента. Према томе сече криву у $n+1$ тачака. Одатле следи да (нераспаднута) алгебраска крива *n*-тог реда може да има само *n*-1 струку тачку. Значи да се двојна тачка може појавити тек код кривих трећег реда. Ако крива другог реда има једну двојну тачку, тада се та крива распада у две праве.

Нарочити је случај двојне тачке када у њој крива додирује саму себе (в. сл. 127*d*).

Двојне и вишеструке тачке називамо нарочитим (сингуларним) тачкама криве.

Као што смо одредики тангенту у било којој тачки *A* криве можемо да одредимо и тангенту у бесконачно удаљеној тачки *C* криве. Да одредимо тангенту у тачки *A*, узели смо секанту *A B* и пустили да се тачка *B* помера по кривој ка тачки *A*. При том померању тачке *B* окретала се секанта *A B* око тачке *A* док није заузела свој гранични положај тангенте у *A*. Узмимо сада на кривој неку коначну тачку *D*, па повуцимо из *D* праву ка бесконачно удаљеној тачки *C*, криве. Пустимо ли сада да се тачка *D* помера по кривој ка бесконачној удаљеној тачки *C*, помераће се и секанта *DC*, али сада паралелно са својим првим (положајем) идући стално ка бесконачно удаљеној тачки *C*. Када се тачка *D* приближи бесконачно тачки *C* заузеће секанта *CD* свој гранични положај који називамо асимптотом. Асимптота је према томе, коначан део тангенте у бесконачно удаљеној тачки криве.

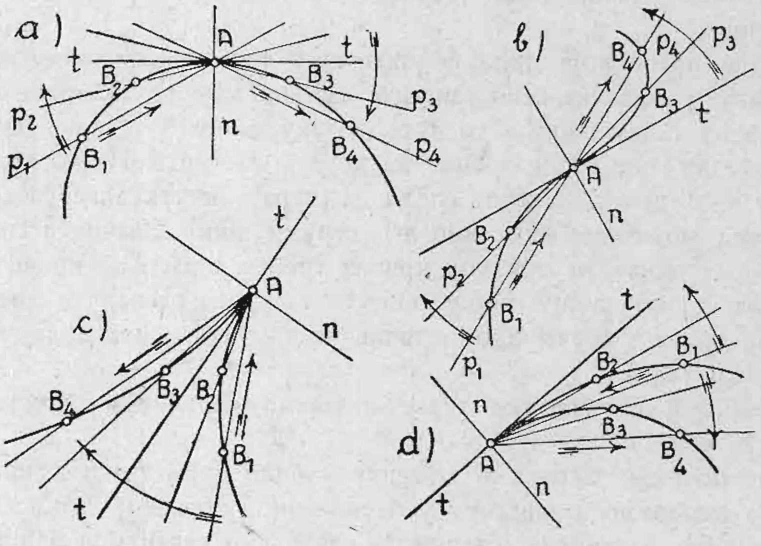
И бесконачно удаљена тачка може да буде двојна (или вишеструка) тачка криве. У том случају имамо две паралелне асимптоте (или више њих).

Ако нека права додирује криву n-тог реда, тада може још и да је сече у n-2 тачке, јер у додирној тачки има већ две бесконачно блиске тачке заједничке са кривом. Према томе криву другог реда не може више да сече њезина тангента.

Када нека права додирује криву два пута, тада кажемо да је та права двојна тангента. Такзв случај може да се појави тек код кривих четвртог или вишег (од четвртог) реда. Када права додирује криву n пута, кажемо да је n-то струка тангента. И бесконачно удаљена права може да буде двојна или вишеструка тангента криве.

§ 50. Крива у околини једне своје тачке

Алгебарске криве су непрекидне и с обзиром на тачке и с обзиром на тангенте. Па ипак те криве могу имати разне облике у непосредној близини једне од њихових тачака. Да то испитамо претпоставимо да



Сл. 128*a*, *b*, *c* и *d*

је крива постала на овај начин. Око тачке *A* окреће се нека права *p*, а у исто време помера се дуж праве *p* друга нека њезина тачка *B*. Тим својим померањем тачка *B* описује криву (в. сл. 128).

Када тачка *B* стигне бесконачно близу тачке *A*, заузме и права *p* положај тангенте на криву. Код даљег мењања положаја праве *p* и тачке *B* (на њој) постоје две могућности. Може права *p* да задржи исти смер свог окретања око тачке *A*, а може и да га промени. Исто тако може и тачка B да настави своје померање дуж праве p у истом смеру (преко тачке A), а може да промени смер (па да се врати од тачке A натраг) одатле четири случаја:

1) Ни права ни тачка не мењају смер кретања. У том случају имамо обичну тачку криве. Гледамо ли криву са стране тангенте кажемо да је крива конвексна (испупчена), гледамо ли је са стране криве кажемо да је крива конкавна (удубљена) (в. сл. 128*a*).

2) Права мења смер окретања, а тачка не мења смер померања. Права се окреће у смеру сказаљке на сату ($p_1 p_2 t$) до положаја, па се враћа у обрнутом смеру ($t p_3 p_4''$), а тачка се од A_1 до A_4 помера по правој стално у истом смеру. Сама крива лежи најпре с једне стране тангенте, а касније с друге стране, тако да у тачки A показује превој. Тачку A називамо у овом случају *„превојна тачка“* криве, а тангенту на криву у тачки A *„превојна тангента“*.

Секанта AB_1 (в. сл. 128*b*) сече криву још у једној тачки (B_4), а када се тачка B_1 бесконачно приближи тачки A, приближиће се исто тако и та друга тачка. Према томе превојна тангента има три бесконачно блиске тачке заједничке са кривом. Она додирује и сече криву у додирној тачки.

3) Права не мења смер окретања, а тачка мења смер померања. Права p се окреће од p_1 ка p_4 стално у истом смеру док се тачка B помера најпре ка тачки A, а кашње се од ње удаљава померајући се по правој p поново истим путем, али у супротном смеру (в. сл. 128*c*).

Тачку A криве коју добијамо на овај начин називамо *„повратна тачка“* и то *„повратна тачка прве врсте“* или *„двострано повратна тачка“*.

Треба напоменути да у повратној тачки може да буде само једна тангента на криву, јер, да су две тангенте, била би крива у тачки A прекидна с обзиром на тангенте. То овде не може да буде, јер говоримо само о алгебарским кривама (у равни).

Свака права повучена кроз тачку A има две тачке заједничке са кривом (као код двојне тачке) само тангента t има три.

4) И права и тачка мењају смер кретања.

У сл. 128*d* окреће се права p око тачке A у смеру сказаљке на сату до свог граничног положаја t, па се тада враћа натраг у супротном смеру. И тачка B помера се ка тачки A, па одатле у супротном смеру натраг. Овакву тачку A криве називамо *„повратна тачка друге врсте“* или *„једнострано повратна тачка“*.

§ 51. Заједничке тачке и заједничке тангенте двеју алгебарских кривих у равни.

Ако две алгебарске криве исте равни имају једну заједничку тачку, могу у тој тачки да имају једну заједничку тангенту, а могу и две тангенте. У првом случају кажемо да се криве додирују. У другом случају кажемо да се криве секу, а угао између двеју тангенти у пресечној тачки даје нам угао под којим се те две криве секу. Тај угао може да буде и прав угао, па у том случају кажемо да се криве секу под правим углом, ортогонално. Нарочит је случај када нека права сече криву под правим углом. У том случају називамо ту праву *„управна на криву“* или *„нормална на криву”*.

Наведимо сада без доказа нека правила о кривама.

1) *Две алгебарске криве у истој равни једна g-тог, а друга q-тог реда (ако немају једну заједничку грану криве) имају $g \cdot q$ заједничких тачака.*

Раније смо рекли да свака права сече криву n-тог реда у n-тачака. Права је крива првог реда $g=1$, а за криву је $q=n$. Број заједничких тачака, према горњем правилу треба да је $g \cdot q=1 \cdot n=n$. Две криве другог реда имају четири заједничке тачке (секу се у четири тачке). ($g=2$, $q=2$, $g \cdot q=2 \cdot 2=4$). Крива другог реда и крива трећег реда секу се у 6 тачака. ($g=2$, $q=3$, $g \cdot q=2 \cdot 3=6$). Природно да се у број заједничких тачака морају убројати и имагинарне тачке (имагинарни пресеци).

2) *Ако две алгебарске криве у истој равни једна g-тог а друга q-тог реда имају више од $g \cdot q$ заједничких тачака, тада их имају бесконачно много, целу једну заједничку грану.*

3) *Кад нека крива четвртог реда има четири двојне тачке од којих три нису на једној правој, тада се та крива (четвртог реда) распада у две криве другог реда.*

Познато је да 5 тачака потпуно одређују криву другог реда. Ако кроз четири двојне тачке задате криве четвртог реда и кроз још једну њезину тачку (дакле кроз 5 тачака) повучемо криву другог реда, тада ће та крива другог реда имати са задатом кривом четвртог реда $4 \cdot 2+1=9$ тачака заједничких. По правилу 1) смеле би да имају само $4 \cdot 2=8$ заједничких тачака. Одатле следи да задата крива четвртог реда садржи у себи целу ову криву другог реда као своју засебну грану. И како је ова грана крива другог реда, остатак (друга грана) криве четвртог реда не може да буде друго него крива другог реда. Према томе крива четвртог реда са четири двојне тачке (од којих три нису на једној правој) распада се у две криве другог реда.

За случај праве где је $g=1$ и криве ($q=n$) исто правило под 2) гласило би:

4) *Ако нека права има са кривом n-тог реда више од n заједничких тачака тада крива садржава целу праву као једну своју грану.*

Слично пређашњем правилу може да се каже:

5) *Ако нека крива n-тог реда има једну n-то струку тачку распада се у n правих.*

Одатле следи:

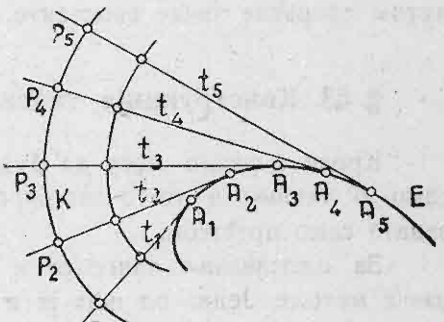
6) *Ако нека крива другог реда има једну двојну тачку распада се у две праве.*

§ 52. Еволута и еволвента.

Све нормале на једну криву K додирују неку нову криву E коју називамо „*еволута*" криве K. (За круг еволута је једна једина тачка, средиште самог круга).

Пустимо ли да се нека права t окреће око неке задате криве E, а да при том окретању ни мало не клизи по кривој E, свака тачка те праве описиваће једну нову криву K. Крива E је еволута те нове криве K. Права t која се окреће око криве E уствари је тангента на саму криву E. Два њезина узастопна бесконачно блиска положаја t_1 и t_2 можемо сматрати да су постала на тај начин што се права t_1 окренула око тачке A_1. На тај начин два бесконачно блиска положаја тачке P положај P_1 и P_2 могу се сматрати као мален део круга описаног око тачке A_1. У том је случају лук $P_1 P_2$ у тачки P_1 управан на праву t_1. Одатле следи да је крива E, коју смо раније уцртали потпуно произвољно, у ствари еволута криве K. Саму криву K називамо „*еволвента*" криве E (в. сл. 129).

Тачку P смо узели било где на правој t, па одатле следи да можемо повући бесконачно много еволвента. Према томе било које две еволвенте неке криве имају заједничке нормале и отсецају на тим нормалама стално једнаку дуж. Криве са тим особинама називамо „*паралелне криве*" или „*еквидистантне криве*".

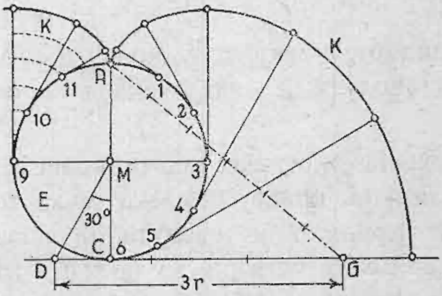


Сл. 129

Најлакше је замислити да је еволвента настала овако. Око криве је намотана нека нерастегљива нит. Ако отегнемо ту нит, па је станемо одмотавати стално отегнуту, њезина крајња тачка описиваће еволвенту криве, око које је била намотана нит.

Одатле и једноставна метода конструкције еволвенте. Довољно је од неке почетне тачке A на кривој до било које суседне тачке B исте криве одредити тачну дужину лука и ту дужину нанети по тангенти у B од саме додирне тачке B. Тако добивена тачка је једна тачка еволвенте задате криве.

Најлакше је конструисати еволвенту круга. Круг је у сл. 130 подељен у 12 једнаких делова и из тачака 1—6 повучене тангенте. Затим је на свакој тангенти од додирне тачке нанесена у истом смеру права величина лука од тачке A до додирне тачке те тангенте. На крају су тако добивене тачке спојене што правилнијом кривом, која уз то пресеца све тангенте под правим углом.



Сл. 130

Дужину лука код једног круга можемо довољно тачно одредити на овај начин. Повучемо било који пречник круга. У сл. 130 повучен је пречник AB. У једној од његових крајњих тачака (овде у C) повучемо тангенту на круг. Затим из средишта M круга повучемо праву под 30° према пречнику AC до пресека D са том тангентом. Ако од тачке D нанесемо по тангенти три пута полупречник r круга до тачке G, дуж AG је једнака половини обима круга. (Констр. А. А. Кохански, грешка 0,00006 r). Поделимо ли ту дуж у 6 једнаких делова одредили смо праву величину лука између појединих подеоних тачака на кругу и можемо лако конструисати еволвенту.

Када бисмо узели да је крај нити баш у тачки A круга, па да нит сада понова намотамо на круг E, еволвента K би се приближавала својој еволути (круг E) док је на крају неби секла у тачки A и то под правим углом. Када бисмо то исто урадили и са друге стране круга, еволвента би имала у тачки A повратну тачку прве врсте.

Из овог примера се види да су пресечне тачке еволвенте са еволутом повратне тачке еволвенте.

§ 53. Конструкција тангенте и нормале на графичке криве

Криве у равни могу да буду аналитичке (до сада смо говорили само о таквим и то о алгебарским), а могу да буду и графичке, задате само цртежом.

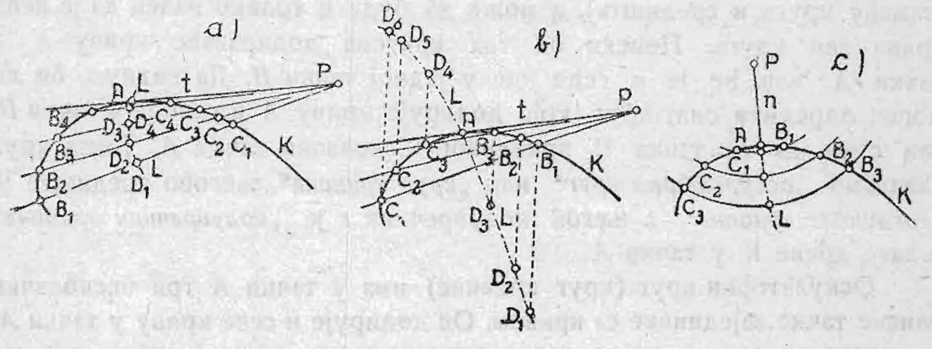
За одређивање тангента и нормала на графичке криве постоје разне методе. Једна од њих је и метода „*криве грешака*“.

Овде ћемо решити по један пример најважнијих задатака који могу да се поставе.

1) Одредити тангенту у тачки A задате криве. Задатак можемо решити једноставно лењиром приближујући се тачки са конкавне стране криве. Постоје и нарочити лењири са огледалом у коме се огледа крива. Помоћу таквог лењира може се довољно тачно одредити нормала на криву у тачки A, а самим тим и тражена тангента. Поред тога постоје и нарочите конструкције. Те су конструкције прилично гло-

мазне, а услед преоштрог угла секанти са кривом (у близини тангенте) недовољно тачне.

2) Из задате тачке P ван криве повући тангенту на криву. Саму тангенту могли бисмо одредити као пре лењиром. Теже је одредити тачно додирну тачку. За то је подесна конструкција из сл. 131*a*. Из задате тачке P повучемо неколико секанта криве. Располовимо поједине тетиве BC и кроз њихова располовишта D повучемо што правилнију криву L. У пресеку криве L са задатом кривом K је додирна тачка A тражене тангенте.



Сл. 131 *a*, *b* и *c*

Незгодно је код ове конструкције што се тачка A појављује као последња тачка криве L. Заправо тачка A лежи на кривој L ван оног дела који је одређен тачкама D. Према томе лежи на недовољно одређеном делу криве, па услед тога сама тачка може да не буде довољно тачна.

Стога је боља конструкција у сл. 131*b*. Ту је решен још једном исти задатак, али сада директно помоћу *„криве грешака"*. Из тачке P повучене су поново секанте и тим одређене тачке B и C. Тада су, у било ком правцу, повучене паралелне праве из тачака B и C, па су из тих тачака нанете по паралелним правама дужине тетива и то из тачака B с једне стране криве, а из тачака C с друге. На тај начин су одређене тачке $D_1 - D_6$. На крају је кроз те тачке повучена што правилнија крива L (крива грешака). У њезином пресеку са задатом кривом K је додирна тачка A тражене тангенте.

3) На задату криву повући тангенту паралелну са неком задатом правом a. Задатак је исти као и пређашњи, па је и решење исто. Једино ће сада секанте бити све паралелне и паралелне са задатом правом a (јер је уствари сада тачка P у бесконачности).

4) Из задате тачке P повући управну (нормалу) на задату криву K. Око задате тачке P повучемо неколико кругова да секу задату криву. Располовимо тако одређене лукове BC и кроз та располовишта повучемо што правилнију криву L. То је крива грешака (в. сл. 131*c*).

Њезина пресечна тачка *A* са задатом кривом *K* одређује *AP*, тражену управну *n*.

§ 54. Кривина и круг кривине графичких кривих

Узмимо било какву графичку криву *K* и повуцимо тангенту *t* у било којој њезиној тачки *A*. Можемо сада да повучемо бесконачно много кругова који додирују криву *K* (имају са њом две бесконачно блиске тачке) у тачки *A*. Сви ти кругови додирују и тангенту *t* у тачки *A*. Средишта кругова су на управној *n* криве кроз тачку *A* круг може да буде толико велик да је цео уцртани део криве у њему (између круга и средишта), а може да буде и толико мален да је цела крива ван круга. Понеки од тих кругова додираваће криву *K* у тачки *A*, али ће је и сећи још у једној тачки *B*. Да видимо, би ли могли одредити онај круг, који додирује криву *A* и сече је у тачки *B*, али стим да се тачка *B* приближи бесконачно тачки *A*. Такав круг називамо *„оскулаторни круг"* или *„круг кривине"*, његово средиште је *„средиште кривине"*, а његов полупречник *r* је *„полупречник кривине"* задате криве *K* у тачки *A*.

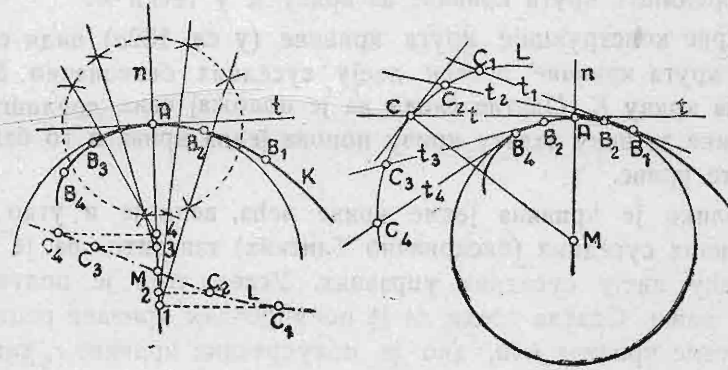
Оскулаторни круг (круг кривине) има у тачки *A* три бесконачно блиске тачке заједничке са кривом. Он додирује и сече криву у тачки *A*.

Ово што је сада речено о оскулаторном кругу (кругу кривине) даје нам и упутство како да га конструишемо. У тачки *A* задане криве повучемо управну на криву. Повучемо тада један круг који додирује криву у *A* и сече је у тачки *B*. Приближујући по управној средиште круга тачки *A* тражимо речени гранични положај (да се тачка *B* бесконачно приближи тачки *A*).

Тачније можемо да одредимо средиште и полупречник кривине помоћу криве грешака. Повучемо у тачки *A* задате криве тангенту *t* и нормалу *n*. Десно и лево од тачке *A* узмемо на кривој *K* бар по две тачке B_1 B_2 и B_3 B_4. Сада одредимо средиште кругова, који додирују криву *K* у тачки *A*, а пролазе и кроз једну од тачака $B_1 - B_4$. Та средишта леже на управној *n*. Тако је за круг који поред *A* пролази и кроз тачку B_1 одређено средиште, тачка 1, у пресеку управне са симетралом дужи $A\,B_1$. На исти начин одређена су средишта 2, 3 и 4 за кругове који пролазе кроз тачке $B_2 - B_4$. Из тих тачака $1-4$ повучемо сада паралелне праве (најбоље да су $\parallel t$) и нанесемо на њима од управне *n* тетиве појединих тачака *B*. (Дужи $1\,C_1 = A\,B_1$, $2\,C_2 = A\,B_2$). Када тако одређене тачке *C* спојимо што правилнијом кривом *L*, уцртали смо криву грешака (в. сл. 132*a*). Њезин пресек *M* са управном *n* је тражено средиште круга кривине.

(Хоћемо ли да у тачки *A* задате криве повучемо круг кривине, дакле круг који у *A* додирује и сече криву, па узмемо да му је средиште у тачки 1, тај круг додирује криву у *A*, али је сече у тачки B_1. Те две тачке нису бесконачно близу, грешка је према томе тетива

AB_1 или дуж $1\,C_1$. Узмемо ли средиште у тачки 2, круг сече криву у тачки B_2. Грешка је мања, тетива $A\,B_2$ или дуж $2\,C_2$ за криву L. За круг чије је средиште у тачки 3 пресечна тачка B_3 је на другој страни криве K. Грешка, тетива $A\,B_3$ је с друге стране криве K, па је и дуж $3\,C_3$ за криву нанета с друге стране управне n. Исто важи и за круг са средиштем у тачки 4. Ради тога се крива L, која пролази кроз тачке C, назива крива грешака. Како смо позитивне грешке наналазили с једне стране управне n, а негативне са друге њезине стране, вероватно је да ће у тачки M, где крива грешка L пресеца управну n, грешка бити најмања. То значи да ће отстојање пресечне тачке B од тачке A бити најмање могуће. Према томе M је тражено средиште круга кривине. Тачност тачке M зависи од тачности којом је конструисана и нацртана крива грешака L, а своди се практично на то да тачке C буду што ближе тачки M).



Сл. 132*a* и *b*

Други начин како можемо да одредимо средиште кривине је помоћу еквитангенциалне криве.

Нека нам је као пре задата графичка крива K и на њој тачка A, па треба да одредимо средиште оскулаторног круга у A (средиште круга кривине, средиште кривине или полупречник кривине у тачки A).

Повучемо најпре тангенту t и управну n на криву у тачки A. Затим узмемо још по неку тачку B криве (B_1 до B_4) десно и лево од тачке A, па и у тим тачкама повучемо тангенте $t_1 - t_4$ на криву K. Ако сада на свим тангентама нанесемо исту дуж и то од додирне тачке са исте стране, одредићемо на тангентама нове тачке C ($C_1 - C_4$ C). То су тачке еквитангенциалне криве L за криву K. Спојимо их што правилнијом кривином. (Име еквитангенциалне криве дато је по једнаким дужинама на свакој тангенти). Нормала на еквитангенциалну криву у тачки C сече нормалу n криве K у тачки M. Тачка M је тражено средиште круга кривине оскулаторног круга за криву K у тачки A (в. сл. 132 *b*).

Доказ за ову конструкцију је једноставан. Лако се уверити да је еквитангенциална крива неког задатог круга понова круг и то круг са истим средиштем. Описује га тачка C троугла ACM када се тачка A окреће по задатом кругу око тачке M. (Дуж AM је полупречник задатог круга, а дуж CM полупречник његовог еквитангенциалног круга). Узмемоли дакле (у сл. 132*b*) да је тачка M средиште круга кривине, тада тај круг има у тачки A три бесконачно блиске тачке заједничке са задатом кривом K. У том случају смемо узети на кривој K три блиске тачке B_2 A B_3 и сматрати да оне леже и на кругу кривине. (Теориски требало би узети три бесконачно блиске тачке). Према томе и тачке C_2 C и C_3 еквитангенциалне криве биће уствари три тачке еквитангенциалног круга, а како знамо да се средиште круга налази на управној на кругу, повучемо из C управну на еквитангенциалну криву и у њезином пресеку M са управном на K је тражено средиште круга кривине за криву K у тачки A.

Из прве конструкције круга кривине (у сл. 132*a*) види се да је средиште круга кривине пресек двеју суседних бесконачно блиских нормала на криву K. Одатле следи да је положај свих средишта кругова кривине за неку задату криву понова једна крива и то баш еволута задате криве.

У колико је кривина једне криве већа, већи је и угао између двеју њезиних суседних (бесконачно блиских) тангенти, па је већи и угао између двеју суседних управних. Услед тога је полупречник кривине r мањи. Одатле следи да је полупречник кривине реципрочна вредност саме кривине или, ако је полупречник кривине r, сама кривина је једнака $\frac{1}{r}$.

Код превојне тачке неке криве кривина је бесконачно мала и круг кривине прелази у тангенту. Услед тога је полупречник кривине бесконачно велик. У повратној тачки је круг кривине свега једна тачка (сама повратна тачка), па је полупречник кривине $r = O$, а услед тога кривина бесконачно велика.

Ако задата крива (графичка или аналитичка) има неку осу симетрије, а да је при том пресечна тачка криве са том правом (осом симетрије) обична тачка криве (на пр. елипса и њезина оса), тачку у којој та оса симетрије сече криву називамо теме криве. Ако код такве криве неки додирни круг у темену сече криву још у једној тачки B, сећи ће је и у тачки C, која је симетрична тачки B (са друге стране криве). Смањујемо ли постепено полупречник додирног круга, приближаваће се тачка B постепено темену, али ће се исто тако приближавати темену и њој симетрична тачка C. Приближи ли се B бесконачно темену, додирни круг постаће круг кривине (оскулаторни круг), али ће се исто тако приближити бесконачно темену и тачка *C*. Према томе круг кривине у темену неке криве има четири бесконачно блиске тачке заједничке са кривом. Такав круг називамо хипероскулаторни круг.

§ 55. Пројекције криве

Повуцимо кроз сваку тачку неке равне криве *K* пројекциски зрак. Ако сви ти зраци пролазе кроз једну тачку *O* у коначности (т. зв. центар пројекције) сви ће пројекциски зраци сачињавати конус коме је тачка *O* врх. Ако је тачка *O* у бесконачности, пројекциски зраци биће између себе паралелни, па ће сачињавати једну облицу. Пресечемо ли тај конус или облицу неком равни, пресек ће бити понова једна крива *K'*. Прогласимо ли да је речена пресечна раван пројекциска раван, тада је крива *K'* пројекција криве *K* на тој равни. Једино ако је тачка *O* узета у равни криве *K*, пројекциски зраци леже сви у тој равни, па ће и пројекција криве бити свега једна права. Искључимо ли тај случај можемо да кажемо, да ће суседне тачке криве *K* бити и у пројекцији суседне тачке криве *K'*, тангенте *t* криве *K* остаће тангенте *t'* у истим тачкама *K'*, па ће и асимптоте остати асимптоте. Све сингуларне тачке, двојне вишеструке, превојне или повратне задржаће и у пројекцији своје особине. И имагинарне тачке криве *K* имаће своје пројекције као имагинарне тачке криве *K'*.

Према томе можемо да кажемо следеће правило:

Алгебарске криве у равни n-тог реда остају и у пројекцији (паралелној или централној) криве истог реда.

§ 56. Просторна крива

Раније смо већ рекли колико је потребно о начину како замишљамо да постаје нека просторна крива. Тангенту, секанту и тетиву просторне криве дефинишемо и одређујемо као и код криве у равни.

Сваку раван коју повучемо кроз тангенту *t* у некој тачки *A* криве називамо тангенциалном равни у тачки *A*.

Повуцимо тангенциалну раван кроз тангенту *t* у некој тачки *A* криве, али тако да сече криву још у једној тачки *B*, па пустимо да се тачка *B* помера по кривој ка тачки *A*. Услед тога померања тачке *B* по кривој, окретаће се тангенциална раван око тангенте док не заузме један одређен гранични положај и то у оном моменту, када се тачка *B* бесконачно приближи тачки *A*. У том положају раван има три бесконачно блиске тачке заједничке са кривом, а саму раван у том пололожају називамо *„оскулаторна раван“* криве у тачки *A*.

Ако просторна крива има неку раван симетрије, пресечне тачке криве са том равни називамо теменима крива. Када нека тангенциална раван у темену сече криву у још једној тачки *B* криве, сече је и у њој симетричној тачки *C*. Оскулаторна раван имаће у том случају четири бесконачно блиске тачке заједничке са равнином. Такву раван називамо хипероскулаторна раван. Хипероскулаторна раван може да се појави само у темену неке просторне криве.

Оскулаторна раван за неку криву у равни је сама раван криве, па је она на тај начин оскулаторна раван за све тачке криве.

Сваку праву коју повучемо кроз додирну тачку *А* криве управно на тангенту криве (у тој тачки) називамо *„нормала“* или *„управна“* криве. Таквих нормала има бесконачно много, а све скупа сачињавају једну раван коју називамо *„нормална раван“*, и обележићемо је словом ν. Пресек нормале равни са оскулаторном равни називамо *„главна нормала“* и обележавамо словом *n*. На главној нормали је средиште круга кривине.

Раван управна на оскулаторну раван, а повучена кроз тангенту криве је *„бинормална раван“* или *„раван ректификације“*. Њезин пресек са нормалном равни је *„бинормала“*.

Ове три равни оскулаторна, нормална и бинормална раван сачињавају просторни правоугли рогаљ који следи просторну криву из тачке у тачки.

И просторну криву можемо да испитујемо у околини једне њезине тачке *А* исто као што смо раније испитивали криву у равни. Можемо да замислимо да је део криве у непосредној близини тачке *А* настао тако што се нека тангенциална раван β окретала око тангенте, а у исто време права *b* те равни пролазећи кроз *А* окретала око тачке *А*, док се нека тачка *В* приближавала тачки *А* померајући се по правој *b*. Према томе да ли раван β права *b* и тачка *В* мењају или задржавају смер свог померања може да наступи 8 разних случајева.

За једну тачку *А* просторне криве кажемо да је обична тачка криве, ако у тој тачки *А* крива прилази кроз оскулаторну и нормалну раван, али остаје с исте стране бинормалне равни (в. сл. 133*а*).

§ 57. Пројекција просторне криве

Повуцимо кроз сваку тачку неке просторне криве пројекциске зраке било паралелне, било да пролазе кроз неко средиште *О*, па те пројекциске зраке пресецимо једном равнином *П*. Ако узмемо да је та раван *П* пројекциска, тада је сам пресек постао пројекција просторне криве на раван *П*.

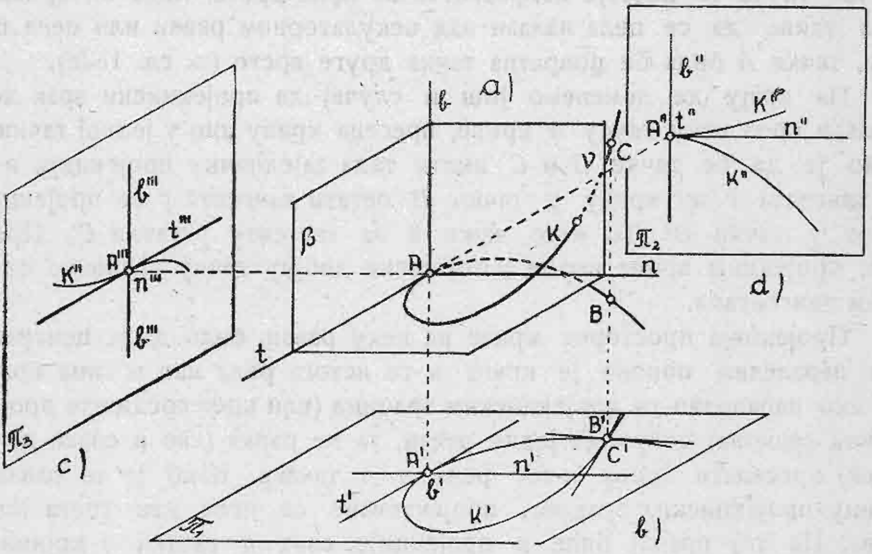
Када је тачка *О*, центар пројекције (било да је у коначности или бесконачности) лежи ван оскулаторне равни тачке *А* просторне криве *К*, тада пројекција *К'* криве *К* задржава у тачки *А'* исти карактер као и крива *К* у тачки *А*.

Свака тангента на криву у некој тачки пројектоваће се као тангента на криву у пројекцији те тачке.

Ако крива има сингуларних тачака, те ће сингуларне тачке остати у пројекцији сингуларне тачке криве, али ћемо сада видети како и обичне тачке просторне криве могу у пројекцији да постану сингуларне тачке.

Треба овде нагласити да све што говоримо о пројекцији криве важи и за сенку криве, јер пројекција и сенка постају на исти начин, једина је разлика што код пројекција говоримо о пројекциским зрацима, а код сенке о светлим (светлосним) зрацима.

Ако је средиште зракова тачка O (у коначности или бесконачности) на оскулаторној равни за обичну тачку A криве, тада је пројекција тачке A, сингуларна тачка пројекције криве K.



Сл. 133 *a*, *b*, *c* и *d*

У сл. 133 узета је просторна крива K и у њезиној обичној тачки A одређене и нацртане оскулаторна, нормална и бинормална раван (а самим тим и тангента t_1, главна нормала n и бинормала b).

Узмемо ли први случај да средиште O пројекциских зракова не лежи у оскулаторној равни (а овде ћемо и претпоставити и да је у бесконачности, да би слика била једноставнија) пројекција криве K на раван $П_1$ биће крива K'. Пројекција A' обичне тачке A криве K остаје обична тачка криве K', а исто тако и пројекција t' тангенте t у тачки A остаје обична тангента криве K' у тачки A'.

Претпоставимо сада други (раније поменути) случај, да је тачка O у оскулаторној равни. Претпоставимо ли и овде да је O у бесконачности, пројекциски зраци биће паралелни са оскулаторном равни. Услед тога оскулаторна раван постаје пројектна раван, па ће се цела раван са свим што је у њој пројектовати на било коју раван $П_3$ као једна права. Услед тога A''', пројекција обичне тачке A криве K, постаје превојна тачка криве K''', а тангента t''' превојна тангента. Јер је t''' пројекција целе оскулаторне равни, па су на њој и пројекције оних трију бесконачно блиских тачака криве које оскулаторна раван има заједничке са кривом K (в. сл. 133*c*).

Узмимо и један нарочити случај. Узмимо да су пројекциски зраци паралелни са оскулаторном равни, али да су паралелни и са тангентом у A. (Значи да претпостављамо, да је средиште O пројекциских зракова на самој тангенти и то у њезиној бесконачно удаљеној тачки, а било би исто и да је тачка O у коначности на t). Пројекција A'' обичне тачке A постаје повратна тачка прве врсте. Када би крива K била таква, да се цела налази над оскулаторном равни или цела под њом, тачка A била би повратна тачка друге врсте (в. сл. 133*d*).

На крају да поменемо још и случај да пројекциски зрак који пролази кроз неку тачку A криве, пресеца криву још у једној тачки C. Јасно је да ће тачке B и C имати тада заједничку пројекцију и да ће тангента t на криву у тачки B остати тангента t' на пројекцију криве у тачки B'. То исто важи и за тангенту у тачки C'. Према томе пројекција криве имаће у тој тачки двојну тачку са двема одвојеним тангентама.

Пројекција просторне криве на неку раван, било да је централна или паралелна, поново је крива и то истога реда као и сама крива. Јер ако паралелно са пројекциским зрацима (или кроз средиште пројекциских зракова) повучемо једну раван, та ће раван (као и свака друга раван) пресецати криву n-тог реда у n тачака. Како је та раван у правцу пројекциских зракова, пројектоваће се цела као свега једна права. На тој правој биће и пројекције свих n тачака у којима је раван пресекла просторно криву n-тог реда, а то је доказ да је K', пројекција просторне криве K n-тог реда, поново крива n-тог реда.

Ако је средиште пројекције у једној тачки саме криве, а крива је n-тог реда, пројекција те просторне криве је крива $(n-1)$ реда. Ако је средиште пројекције у некој двојној тачки криве K, n-тог реда тада јој је пројекција крива $(n-2)$ реда.

§ 58. Обле површине

Ако се нека линија (крива или права) постојано покреће по неком правилу, све њезине тачке скупа описују облу површину. Саму ту линију у сваком положају који она при том померању заузима, називамо изводница. И сама изводница може за време померања да остане подударна, а може и да се постојано мења по неком правилу. На тај начин све су тачке обле површине одређене и могу да се конструишу.

Поред оваквих (аналитичких површина употребљавају се у техници и површине које су задате само графички. Тако може нека површина да буде задата једним низом подударних или сличних кривих (попречни пресеци корита лађе) или само једним системом произвољних кривих са одређеним растојањима (топографске карте). Такве површине називамо графичке површине.

Ако било која права продире кроз неку аналитичку површину коначан број пута, површина је алгебарска, ако продре бесконачан број пута, површина је трансцедентна.

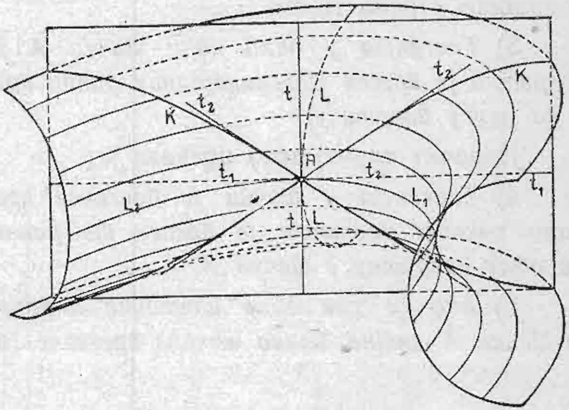
Кроз алгебарску површину *n*-тог реда продире свака права *n* пута (ако та права већ не припада самој површини).

Сваки пресек обле површине *n*-тог реда са неком равни је крива *n*-тог реда.

Површина *m*-тог реда сече се са другом неком површином *n*-тог реда по просторној кривој *m.n*-тог реда (имају заједничку једну просторну криву *m.n*-тог реда).

§ 59. Тангента и тангенциална раван на облу површину

Права која продире кроз неку облу површину је секанта те површине. Ако се две продорне тачке *A* и *B* те праве приближе бесконачно једна другој, права ће у том случају да додирује површину, па је зато називамо тангента на површину у тачки *A*. Узмемо ли такву тангенту *t* у некој тачки *A* обле површине, па повучемо кроз њу било коју раван, та ће раван пресецати површину по некој кривој *L*. Крива *L* додириваће тангенту *t* у тачки *A* (јер пролази кроз обе бесконачно блиске тачке *A* и *B* праве *t*, које припадају пресечној површини). Узмимо и другу неку криву L_1 површине, али такву да пролази кроз исту тачку *A* и тангенту t_1 која додирује ту криву у *A*, па кроз тангенту *t* и t_1 повуцимо раван. Та раван сећи ће облу површину по некој кривој *K* која са правима *t* и t_1 има по две заједничке тачке. То може да буде само ако је тачка *A* двојна тачка криве *K*, дакле ако крива *K* пролази кроз тачку *A* два пута (са две одвојене гране). У том случају имаће крива *K* у тачки *A* две одвојене тангенте t_2 (друге неке а не *t* и t_1) које могу бити реалне или имагинарне као и сама крива *K*. Као пример узета је у сл. 134 унутрашња површина торуса и тачка *A* на најмањем кругу торуса. Тангента *t* је вертикална, а t_1 хоризонтална, па је крива *L* пресек торуса са равнима кроз осу, а L_1 са равном управном на осу торуса (дакле сам најмањи круг).



Сл. 134

1) *Све тангенте у једној обичној тачки обле површине припадају тангенциалној равни те површине у тачки А.*

Тангенциалној равни у тачки *А* неке обле површине припадају све тачке те површине које су бесконачно блиске тачки *А*. Осим тога она сече површину по једној кривој која у *А* има двојну тачку. Тангенциална раван је одређена када су познате две, било које тангенте у тачки *А*.

Према томе облу површину другог реда сече њезина тангенциална раван по двема правама. Те праве могу да буду реалне одвојене (код ротационог хиперболоида) или бесконачно блиске (код облице, конуса) или пак имагиране (код лопте).

Ако обла површина садржи у себи неку праву *а* тада тангенциалној равни у било којој тачки *А* те праве припада цела права *а*. Одатле правило:

2) *Тангенциална раван додирује развојну површину дуж једне изводнице.*

Када се две површине секу по некој кривој, тада тангента у било којој тачки *А* те криве припада тангенциалној равни у тачки *А* једне површине, а исто тако и тангенциалној равни у тачки *А* друге површине. Према томе:

3) *Тангента у било којој тачки А продорне криве двеју облих површина је пресек тангенцијалних равни повучених у тачки А на једну и на другу површину.*

Нарочит случај тога правила је:

4) *Тангента у тачки А пресечне криве неке обле површине са било каквом равнином је пресек те равнине са тангенциалном равни на облу површину у тачки А.*

5) *Ако се две обле површине додирују у једној тачки А, тада је тачка А двојна тачка њихове пресечне (продорне) криве.*

в) Пресеци и продори облих површина

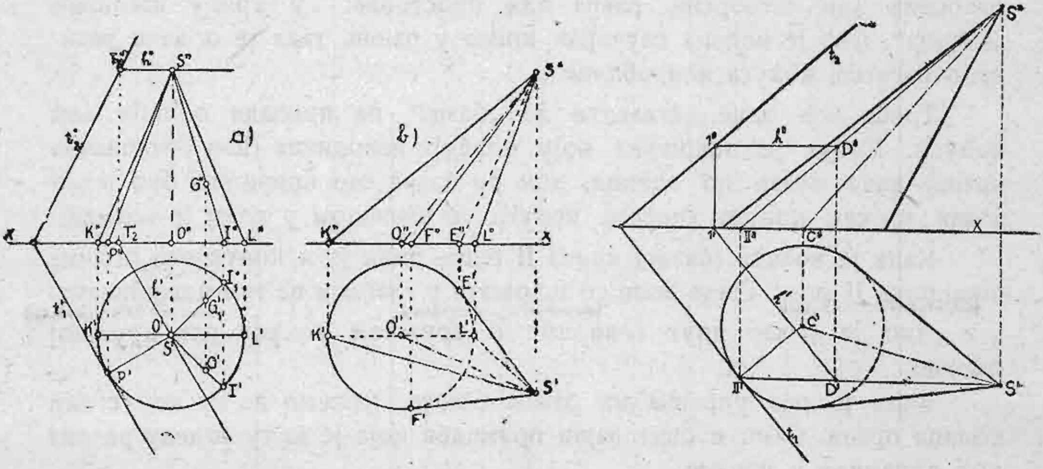
§ 60. О облици и конусу

Када нека права пролази кроз једну сталну тачку *S*, а при томе клизи по каквој кривој, она тада описује конус (купу, стожац). Ако права при том клизању остаје стално паралелна свом првом положају, тада она место конуса описује облицу (цилиндар, ваљак).

Могли бисмо према томе да кажемо, да је конус пирамида, а облица призма са бесконачним бројем страна или ивица.

Исто тако могли бисмо казати да је облица конус са бесконачно удаљеним врхом и призма да је пирамида са бесконачно удаљеним врхом.

лих, зваћемо изводница PS, или краће изводница P. Њезину другу пројекцију одредимо помоћу P'', друге пројекције тачке P, која је на оси X. Од свих изводница у другој пројекцији једино су наглашене крајње, контурне изводнице конуса. То су изводнице које пролазе



Сл. 135 *a*, *b* и *c*

кроз тачке K'' и L'' које су најудаљеније од средишта O'' у другој пројекцији базиса. Прве пројекције K' и L' тих тачака стоје на пречнику круга паралелном са осом X. Како се код овог примера поклапа пројекција S' врха са пројекцијом O' средишта круга базиса, поклапају се и прве пројекције ових изводница K и L са пречником $K'\,L'$ круга. То значи да су изводнице K и L паралелне са вертикалницом. Услед тога показују се у вертикалној пројекцији у правој величини и те изводнице и углови које оне заклапају са осом конуса и са хоризонталницом.

Треба ли да одредимо прву пројекцију неке тачке G, чију другу пројекцију G'' имамо, повучемо кроз G'' изводницу до њезиног пресека I'' са кругом базиса (на оси X). Одредимо затим ординатом I', прву пројекцију те тачке на кругу базиса. Тим је одређена прва пројекција $I'\,S'$ изводнице, а на њој је тражена прва пројекција G' тачке G. Како ордината из I'' пресеца прву пројекцију круга базиса у двема тачкама I' и I_1', постоје и две прве пројекције изводнице $I''\,S''$, па према томе и две прве пројекције G' и G_1' тачке G.

Тачка G у другој пројекцији је видљива, ако јој је прва пројекција G'. Ако је G'_1 њезина прва пројекција, сама тачка G у другој пројекцији је невидљива.

У другој пројекцији видљиве су све изводнице почев од контурне изводнице K' преко тачке P' до контурне изводнице L', а невидљиве су све изводнице, које пролазе кроз тачке горње половине круга (у првој пројекцији), од тачке L' преко I_1' до K'.

У првој пројекцији, код овог случаја, све су изводнице видљиве. Тачка S' пада у круг, па нема видљиве контуре за прву пројекцију (а цртамо само доњи део конуса од врха до базиса).

Зауставимо ли праву при клизању на било којој тачки криве тај положај праве, односно ту праву називамо изводницом конуса или облице.

Крива по којој изводница склизи може да буде било каква: отворена или затворена, равна или просторна. Ту криву називамо „вођица“. Ако је вођица случајно крива у равни, тада је обично називамо базисом конуса или облице.

Треба већ овде нагласити да „базис“ не припада облици или конусу. Конус је површина коју описује изводница (као бесконачна права) када клизи по вођици, док би базис као површина био један раван пресек конуса (пресек конуса са равнином у којој је вођица).

Када је вођица (базис) крива II реда, онда је и конус или облица површина II реда. Овде ћемо се задржати у главном на тим површинама.

Ако је базис круг говоримо о кружном конусу или кружној облици.

Када је оса управна на раван базиса, кажемо да су конус или облица прави. Само и овде важи примедба која је за ту поделу речена код пирамиде и призме.

У случају да је базис круг, а оса управна на базис, за такве конусе и облице кажемо да су *обртни, ротациони.* За те површине можемо рећи да постају на тај начин, што се једна права обрће око друге праве. Ако се те две праве секу (у коначности), имамо ротациони, обртни конус, ако (се секу у бесконачности, дакле ако) су паралелне, имамо ротациону, обртну облицу.

§ 61. Пројекције облице и конуса

Када смо раније имали да нацртамо пројекције призме или пирамиде, задатак је био једноставнији. Нацртали смо полигон базиса у обим пројекцијама, а тада смо имали да уцртамо одређен број ивица. Лако смо одредили и које су ивице биле видљиве у првој, а које видљиве или невидљиве у другој пројекцији. Тим је задатак био решен. Од свих ивица одвајале су две, које су другој пројекцији биле контурне, а исто тако и друге две које су у I пројекцији биле контурне.

Нека нам је сада задато да нацртамо пројекције једног ротационог конуса са базисом у хоризонталници (в. сл. 135*a*). Нацртамо круг базиса са средиштем O' било где у хоризонталници и одредимо његову другу пројекцију на оси X. Оса конуса је права кроз O управна на раван базиса, дакле управна на H. Ако на њој изаберемо било коју тачку S, можемо да је прогласимо врхом конуса (јер у задатку тај врх није ничим ближе одређен). Тиме је конус потпуно одређен.

Спојимо ли било коју тачку P' базиса са врхом S', свака таква права је једна изводница конуса. Ову изводницу, за разлику од оста-

Када би био задат коси кружни конус са базисом у хоризонталници, као у сл. 135*b*, прва пројекција S' врха падала би ван круга базиса. У том случају одредимо контурне изводнице за другу пројекцију као и код пређашњег случаја. Тачке K' и L' леже у I пројекцији на пречнику круга базиса паралелном са X-осовином, као и пре, али прве пројекције тих контурних изводница нису више паралелне са осом X, па ни саме контурне изводнице нису паралелне са вертикалницом.

Како је S' ван прве пројекције круга базиса, постоје код овог примера и контурне изводнице за I пројекцију конуса.

Контурне изводнице за I пројекцију су тангенте повучене на круг базиса из врха S'. Те тангенте додирују круг у тачкама E' и F', па су тачке E и F контурне тачке базиса у првој пројекцији конуса.

На слици су нацртане прве пројекције изводница K и L, контурних изводница за другу пројекцију. Изводница K је у I пројекцији видљива, а изводница L невидљива. Исто тако одређене су и II пројекције изводнице E и F, контурних за I пројекцију конуса. Изводница E је у другој пројекцији невидљива, а изводница F је видљива.

Као и раније у II пројекцији видљиве су све изводнице од тачке K' круга базиса преко тачке F' до L', а невидљиве од L' преко тачке E' до K'. Исто тако видљиве су у I пројекцији све изводнице од тачке E' преко K' до тачке F' круга, а остале изводнице од F' преко L', до E' су невидљиве.

Решимо у сл. 135*a* још и овај задатак. Одредити тангенциалну раван која додирује задати конус по изводници PS.

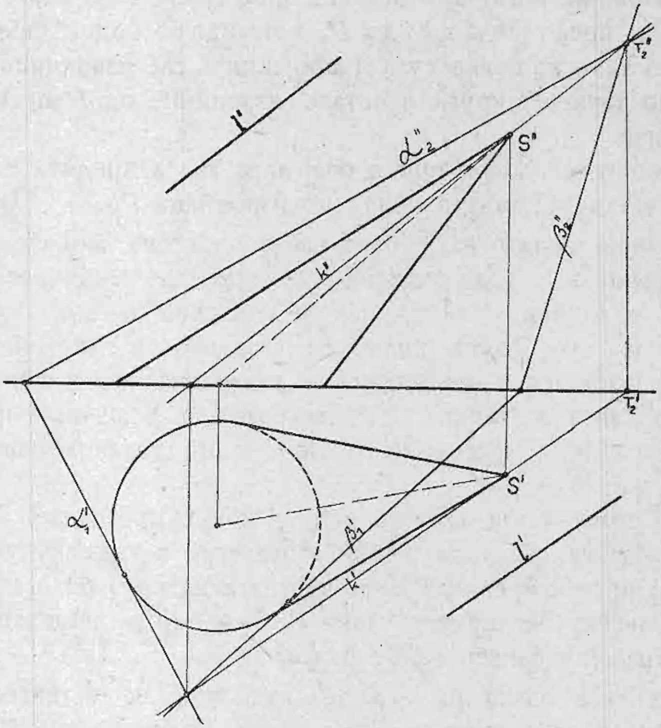
Од раније знамо да је нека раван одређена, ако су нам познате две њезине праве. Код тражене тангенциалне равни позната нам је права $P\,S$, изводница конуса, јер је тражено да тангенциална раван пролази кроз њу. Другу праву ћемо одредити лако, ако се сетимо правила 4) из § 59 о тангентама и тангенциалним равнима. По том правилу тангента у тачки A криве пресека неке обле површине са било којом равни је пресек те равни са тангенциалном равни на површину у тачки A.

Према томе: нашу облу површину, конус, пресекла је раван базиса по кругу базиса. Та иста раван базиса сече и тражену тангенциалну раван, а тај пресек треба да буде тангента на круг базиса. Можемо да повучемо тангенту на круг у тачки P. Тим смо решили задатак. Одредили смо тражену тангенциалну раван.

Поред тога базис је у хоризонталници, па је тангента на круг базиса уједно и прва траса тражене тангенциалне равни. Другу трасу можемо да одредимо помоћу сутражнице из било које тачке изводнице. Овде је најлакше повући сутражницу h из врха $S\,(h' \parallel t_1'$ а $h'' \parallel X)$. Одредимо траг T_2'' сутражнице, па кроз T_2'' и кроз пресек t_1' са X пролази друга траса t_2'' тражене тангенциалне равни.

Исти задатак решен је још једном у сл. 135*b* код косог конуса. Одређене су трасе t_1 и t_2 тангенцијалне равни која додирује конус дуж изводнице *PS*. Раван је одређена на исти начин, истим линијама као пре, па су праве и тачке обележене истим словима као пре. И опис конструкције остаје, према томе, исти. За вежбу (да се избегне честа грешка почетника) решимо исти задатак још једампут. Нека је задата у првој пројекцији тачка *D'* косог конуса у сл. 135*c*. Треба да повучемо раван која додирује конус у тој тачки. Познато нам је да раван која додирује конус (тангенцијална раван) додирује тај конус дуж једне изводнице. Стога нацртамо изводницу *S' D'* и одредимо тачку II' у којој она сече круг базиса. Одредимо и другу пројекцију те изводнице и на њој другу пројекцију *D''* задате тачке. Само одређивање траса тражене додирне равни остаје потпуно исто као код двају предњих примера. (Једино што, за одређивање друге трасе, можемо повући сутражницу *h' h''* кроз тачку *D*).

Има случајева када треба да повучемо тангенцијалну раван на конус, али у једном задатом правцу *l' l''*. То значи да тражена тангенцијална раван треба да буде паралелна са задатом правом *l' l''*. Узмимо да нам је у сл. 136 задат коси кружни конус са базисом у



Сл. 136

хоризонталници и права $l' \, l''$. Познато нам је да тангенцијалне равни додирују конус дуж једне изводнице, па да све оне пролазе и кроз врх конуса. Ако дакле у сл. 136 повучемо кроз врх конуса праву $k' \, k''$ паралелно са задатом правом l, то је већ једна од правих, које ће нам одређивати тражене тангенцијалне равни. Одредимо и њезин траг у равни базиса конуса. Овде је то први траг T_1 праве k. Кроз тај траг треба да пролази прва траса тражене тангенцијалне равни, а како она треба и да додирује круг базиса конуса. Решења постоје два, јер из тачке T_1' можемо повући две тангенте на круг. Оне га додирују у тачкама II' и III', а то значи да одређене тангенцијалне равни додирују конус по изводницама II S и III S. Друге трасе тих равни одредимо као раније. (Треба да пролазе и кроз други траг T_2'' праве l). Овај ћемо задатак чешће помињати када будемо говорили о сенкама. Права l претстављаће нам тада правац светлости, изводнице II S и III S границу између осветљеног и неосветљеног дела конуса, а трасе тангенцијалних равни границу бачене сенке на раван базиса, хоризонталницу и на вертикалницу.

Овде треба нарочито нагласити, да су оба конуса и ротациони и коси претстављени у слици само делимично: од врха до базиса, дакле само један део доње половине конуса. Не треба заборавити да су изводнице конуса праве (а не дужи), па би, код овако задатих конуса, требало цртати и горњи њихов део изнад врха S.

*

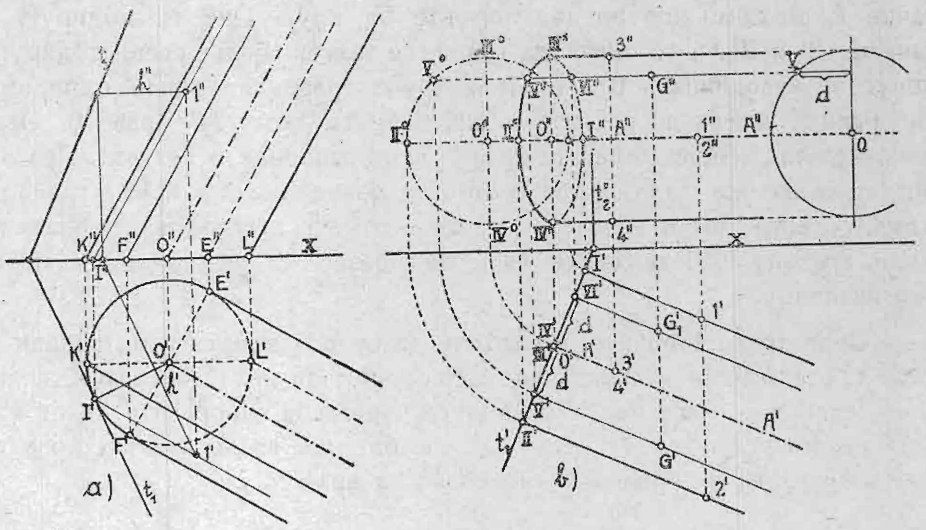
Сличан задатак решаван је још једном у сл. 137. Ту је тражено да се нацртају пројекције косе кружне облице са базисом у хоризонталници.

Решење је исто као и код косог конуса. Контурне изводнице за II пројекцију пролазе кроз тачке K'' и L'', чије прве пројекције K' и L' леже на пречнику круга базиса паралелном са осом X. Једина је разлика код контурних изводница за I пројекцију. Код облице оне су паралелне, па су контурне тачке базиса E' и F' на једном пречнику круга и то на пречнику управном на пројекције изводница.

Које су изводнице видљиве а које невидљиве одређујемо као код конуса, или као раније код призме.

На исти начин одређујемо и прву пројекцију неке тачке на облици чију другу пројекцију знамо.

И тангенцијалну раван одређујемо као код конуса, помоћу тангенте на криву базиса и изводнице по којој раван додирује облицу. На слици је нацртана прва траса t_1' тангенцијалне равни на облицу у тачки I' базиса. Та раван додирује облицу дуж изводнице кроз тачку I. Да одредимо другу трасу t_2'' равни, узмемо на тој изводници неку тачку $l' \, l''$, па кроз њу повучемо сутражницу h' h''. Одредимо њезин други траг T_2'', а тим и другу трасу t_2''. (Почетник треба да види и уочи да друга траса t_2'' није паралелна са другом пројекцијом изводница облице, јер изводнице саме нису паралелне са V. Једино када су изводнице облице паралелне са V, додирна изводница постаје друга сутражница тангенцијалне равни, па је и друга траса паралелна са другом пројекцијом те изводнице, односно свих изводница).



Сл. 137*a* и *b*

Пројекција ротационе облице са базисом у *H* овде није цртана, јер не претставља ништа новога, а упознаћемо се са њом када будемо говорили о мрежи облице.

У слици 137*b* треба да нацртамо пројекције једне ротационе облице, чија је оса *A* – *A* паралелна са хоризонталницом.

Ако нам је поред осе задат и полупречник круга базиса можемо одмах да нацртамо контурне изводнице за прву и другу пројекцију облице. Базис ротационе облице је круг, чија је раван управна на осу облице, дакле управна и на хоризонталницу. Један пречник круга биће хоризонталан и показиваће се у I пројекцији у правој величини. Нанесемо га десно-лево од осе и можемо да повучемо контурне изводнице облице у првој пројекцији. Како је тај пречник хоризонталан биће му друга пројекција || *X*, поклапаће се са другом пројекцијом осе, па ће се са другом пројекцијом осе поклапати и друге пројекције обеју изводница, које су у првој пројекције биле контурне.

Исто тако постоји на кругу базиса и један пречник управан на хоризонталницу, паралелан са вертикалницом. Тај ће се пречник показати у II пројекцији у правој величини. Нанесемо га и одредили смо контурне изводнице за II пројекцију облице. Прве пројекције тих контурних изводница поклапаће се са првом пројекцијом осе. Узмемо ли на контурним изводницама по једну тачку 3″ и 4″ прве ће им пројекције бити на првим пројекцијама тих изводница, али у цртежу на првој пројекцији осе. Исто тако ако узмемо на другој пројекцији осе две тачке 1″ и 2″ и кажемо да су то пројекције тачака облице (а не осе) прве су им пројекције 1′ и 2′ на контурним изводницама.

Природно да би пројекције облице биле јасније када бисмо нацртали и њезин базис. Знамо да је раван базиса управна на осу дакле и на хоризонталницу, па можемо одмах уцртати трасе t_1' и t_2''. Сам круг базиса, вођица облице, показиваће се у I пројекцији као дуж од једне до друге контурне изводнице, а у другој пројекцији као елипса. Да одредимо ту елипсу у другој пројекцији узмемо на кругу два спрегнута пречника: један I′ II′ хоризонталан, а други III′ IV′ вертикалан. О њима смо говорили када смо одређивали видљиве контуре облице, па нам је лако одредити њихове друге пројекције I″—IV″ и конструисати тражену елипсу.

Остаје још да одредимо прву пројекцију неке тачке *G* облице која нам је задата у другој пројекцији. И овде ћемо повући кроз *G″* изводницу облице до њезиног пресека V″ са кругом (елипсом) базиса. Тачку V можемо лако да одредимо у I пројекцији. Кроз V′ пролазиће прва пројекција исте изводнице, па ће на њој бити и I пројекција *G′* задате тачке.

Овако одређена прва пројекција обично није довољно тачна. Нетачно је хоризонтално отстојање прве пројекције изводнице од осе облице. Нетачност се појављује услед малог угла између ординате и прве пројекције круга, а нарочито услед нетачности у конструкцији елипсе.

Да ту нетачност отклонимо могли бисмо окренути раван базиса око њезине друге трасе t_2'' док не легне на вертикалницу. Тачка V не мења своју висину при том окретању, па ће се у окренутом положају показати да тачка V^0 на окренутом кругу базиса у продужењу саме изводнице кроз *G″*. Када имамо овако тачно одређену тачку V^0 окренемо је натраг у I пројекцију. На овај начин имамо сада тачно одређено хоризонтално отстојање изводнице од прве пројекције осе, а по томе и тачно одређену прву пројекцију *G′* тачке *G*.

Место да тачку V^0 пројектујемо најпре на окренуту прву трасу, па да је тада скупа са трасом окрећемо у прву пројекцију и тако одредимо V′, лакше је да у окренутој равни одмеримо хоризонтално отстојање *d* од V^0 до осе, па да га шестаром нанесемо право на прву пројекцију круга мерећи од осе.

Незгода је код овакве конструкције што окрећући раван око њезине друге трасе може круг базиса да падне превећ далеко од облице, а може да се и делимично поклопи са својом другом пројекцијом, елипсом. Поред тога знамо да целу раван окрећемо у вертикалницу само зато да би нам се круг показао у правој величини. Како његову праву величину већ од раније знамо (јер нам је познат полупречник облице) можемо да га нацртамо где хоћемо, довољно је да средиште круга узмемо на висини осе облице.

Најбоље би било да круг у правој величини нацртамо тако да му се средиште поклапа са средиштем *O''* елипсе. Ако нећемо да том конструкцијом теретимо пројекцију облице, нацртамо га било где са стране. На слици је цртан са стране десно и то само пола круга, јер нам је толико довољно да одредимо хоризонтално отстојање *d* изводнице од осе.

На крају још једна примедба. Изводница коју смо провукли кроз задату тачку *G''* сече базис облице у тачки V'', па је *G'* тражена прва пројекција. Али та иста изводница сече базис и у тачки VI''. Можемо да одредимо VI' (једнако као и V') и на изводници из VI' имамо G_1'. Ако је *G'* прва пројекција тачке *G*, сама тачка је у другој пројекцији видљива. Ако је G_1' прва пројекција, тачка *G* је у другој пројекцији невидљива.

У другој пројекцији видљиве су све тачке облице чије се прве пројекције налазе од осе (дакле од најгорње и најдоње изводнице III' и IV') до контурне изводнице II', а невидљиве све тачке, чије се прве пројекције налазе између осе облице и *X*-осе. Исто тако видљиве су у хоризонталници све тачке, чије се друге пројекције налазе изнад друге пројекције осе облице, а невидљиве све тачке чије су друге пројекције испод осе облице.

§ 62. Пресек облице

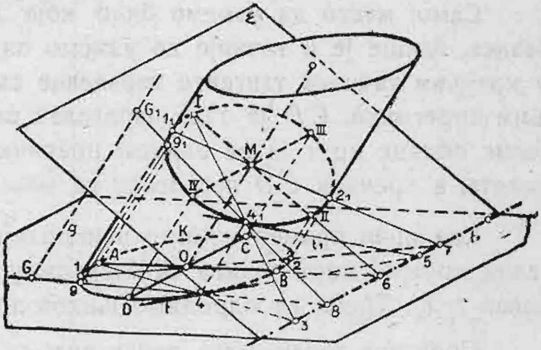
Пресек неке облице са било каквом равни биће уопште једна крива. Када је облица другог реда, и пресечна крива је другог реда. У овом поглављу задржаћемо се, углавном, само на облицама другог реда.

Раван паралелна са равни базиса сече облицу по кривој подударној са кривом базиса. Раван паралелна са изводницама сече облицу по двема изводницама (и та пресечна линија је другог реда, али се распала у две праве). Те две изводнице могу да се поклопе у једну. У том случају кажемо да пресечна раван додирује облицу (тангенцијална раван).

Обично пресечна раван нема овакав нарочит положај према облици него је у произвољном положају према њој.

Искључујући гранични случај да је пресечна раван паралелна са изводницама облице, можемо за све остале равни да кажемо: ако је базис затворена крива II реда (елипса или круг) биће и пресечна крива затворена. Ако је базис отворена крива II реда (парабола или хипербола), биће и пресек отворена крива II реда.

У сваком случају кривој базиса одговара крива пресека. Свакој тачки криве базиса одговараће само једна тачка криве пресека, и то баш она тачка, где изводница из тачке базиса продире кроз раван пресека. Одатле следи да су криве базиса и пресека две перспективно афине фигуре. Правац афинитета су изводнице, а оса афинитета је права по којој се сече раван базиса са равни пресека. Ако је базис у H, оса афинитета је t_1'. То важи, природно, и за облице II реда. Тако ће у слици 138 кругу базиса одговарати елипса пресека. У сл. 138 нацртана је коса облица, чији се круг базиса налази у H, па је пресечена произвољном равни ε. Оса афинитета је t_1.



Сл. 138

Пошто знамо да су базис и пресек две афине фигуре, а уз то знамо још и осу и правац афинитета, довољно је да имамо један пар тачака које једна другој одговарају, па можемо да одредимо целу криву пресека помоћу самог афинитета.

Тачки G у слици 138 одговара тачка G_1 праве g која је паралелна са изводницама. Повучемо ли у H праву $[G\,8]$ тако да пресеца круг базиса у двема тачкама 9 и 4, њој одговара права $[8\,G_1]$ у равни пресека. Тачкама 9 и 4 одговараће тачке 9_1 и 4_1 праве $[8\,G_1]$, и то на изводницама из 9 и 4. Тако смо одредили две тачке пресечне елипсе. Повуцимо у тачки 4 тангенту на круг и продужимо је до пресека 5 са осом афинитета. Правој $[4\ 5]$ у H одговара права $[5\ 4_1]$ у ε. Права $[4\ 5]$ је тангента на круг базиса и има две бесконачно блиске тачке заједничке са њим. И права $[4\ 5_1]$ мора да има две бесконачно блиске тачке заједничке са елипсом пресека, па је она према томе тангента на пресечну елипсу.

Повлачећи све нове и нове праве кроз тачку G можемо да одредимо произвољан број тачака пресечне криве, па чак и тангенту у свакој тачки. На тај начин можемо да конструишемо целу криву пресека. Такав начин био би неподесан ради многих линија, а поред тога могао би да испадне и нетачан ако тачка G није подесно изабрана.

Место тога много је лакше одредити пресек помоћу спрегнутих пречника. Узмемо на кривој базиса два спрегнута пречника. Из њихових крајњих тачака $A\,B$ и $C\,D$ повучемо изводнице и одредимо продоре тих изводница кроз пресечну раван. Продорне тачке I—IV биће крајње тачке двају спрегнутих пречника пресечне криве. Како су пречници базиса афини са пречницима пресека, то ће и тачка M одговарати тачки O. Значи да је средиште пресечне елипсе поново на оси облице.

Само, место да узмемо било која два спрегнута пречника криве базиса, лакше је и тачније да узмемо она два од којих један $A\,B$ има у крајњим тачкама тангенте паралелне са осом афинитета, а други, са њим спрегнути, $C\,D$ је тада паралелан са њом. У случајевима када је базис облице круг (а не елипса) пречник $A\,B$ је управан на осу афинитета, а пречник $C\,D$ паралелан са њом.

Као први пример узмимо најопштији случај. У сл. 139 задата је једна кружна коса облица са базисом у хоризонталници и произвољна раван $t_1\ t_2$. Треба да одредимо њихов пресек.

Пресечна раван није паралелна са изводницама, па пресек неће бити две праве. Исто тако пресечна раван није паралелна са равнином базиса (а ни симетрична са њом с обзиром на раван управну на осу) да би пресек могао да буде круг. Према томе остаје једина могућност, да је пресечна крива елипса.

Поред тога већ знамо да је пресечна елипса афина са кругом базиса, да су зраци афинитета изводнице облице, а да је прва траса t_1' пресечне равни оса афинитета.

Елипсу пресека одредићемо најлакше помоћу спрегнутих пречника. Како је средиште елипсе пресека на оси облице, свеједно је која ћемо два спрегнута пречника изабрати на кругу базиса (сваком пару спрегнутих пречника круга базиса одговараће поново један пар спрегнутих пречника елипсе пресека).

Стога узмемо на кругу базиса два спрегнута пречника. Један $A\,B$ у чијим су крајњим тачкама тангенте паралелне са осом афинитета t_1', дакле уствари овде, где је базис облице круг (а не елипса), узмемо пречник $A\,B$ управан на прву трасу t_1' пресечне равни, па је други, са њим спрегнути $C\,D$ паралелан са њом.

Повучемо изводнице из тачака A' и B' круга и одредимо им друге пројекције. Продори ових изводница кроз пресечну раван биће тачке I и II, које ће понова бити крајње тачке једног спрегнутог пречника елипсе пресека. Пошто ћемо пресек одређивати помоћу афинитета, одредићемо најпре продор изводнице A (јер је удаљенија од осе афинитета). Повучемо помоћну раван кроз изводницу A и одредимо продор I′ те изводнице кроз пресечну раван. Ординатом (или сутражницом одредимо другу пројекцију I″ те тачке.

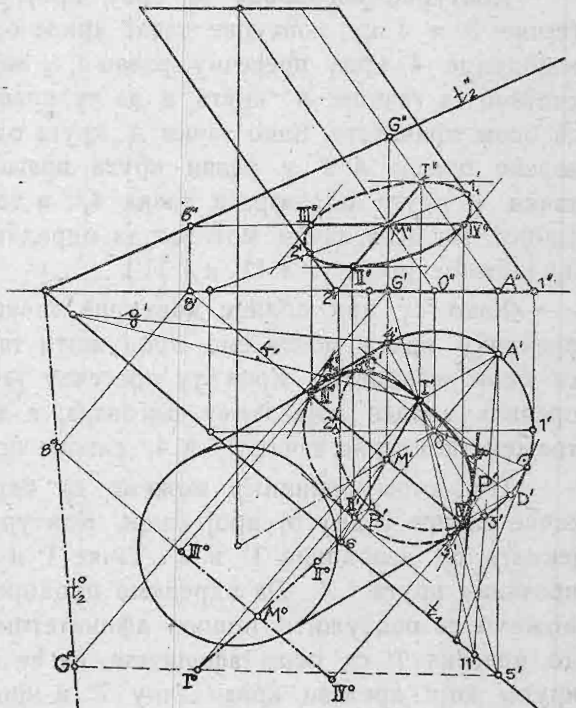
Сада имамо све што је потребно за даљи рад помоћу афинитета: имамо осу афинитета t_1', зрак афинитета (изводнице облице) и један пар тачака A' и I′, које једна другој одговарају.

Продужимо пречник круга $A'\ B'$ до пресека $6'$ са осом афинитета, па правој $A'\ 6'$ круга одговара права I′ 6′ елипсе. Тачки B' круга одговара тачка II′ елипсе, а тачки O' тачка M'. Друге пројекције II″ и M'' тих тачака одредимо или ординатом на изводници B'' и оси облице, или тачније помоћу друге пројекције I″. 6″ праве I 6.

Тачке I и II су крајње тачке спрегнутом пречника елипсе пресека, који одговара пречнику $A\,B$ круга базиса, а тачка M је средиште елипсе. Други спрегнути пречник III′ IV′ елипсе пресека треба да одговара другом спрегнутом пречнику $C'\ D'$ круга базиса. Како је овај паралелан са осом афинитета t_1', биће са њом паралелан и пречник III′ IV′ елипсе. Поред тога пречник ће пролазити кроз M', па можемо одмах да га нацртамо. Можемо да му нацртамо и другу пројекцију, јер је пречник III IV $\parallel t_1$ дакле $\parallel H$. Уствари он је прва сутражница равни $t_1\ t_2$, па му је друга пројекција паралелна са осом X. То нам даје и могућност да проверимо колико је тачно одређена тачка M''. Она треба да је на сутражници и на оси облице, а к тому у првој и другој пројекцији на својој ординати. Уз то треба да је други траг $8'\,8''$ сутражнице на другој траси равни.

Крајње тачке III′ и IV′ тога пречника одредимо једноставно његовим пресеком са изводницама из C' и D' а ординатама одредимо и њихове друге пројекције III″ IV″.

Треба још да проверимо да ли су полупречници тачно одређени. Да ли је дуж I M = II M и III M = IV M. Ако су тачно одређени, можемо да нацртамо (конструишемо) елипсу пресека, па је задатак потпуно решен.



Сл. 139

Приликом конструисања елипсе, која је задата спрегнутим пречницима, лако могу да се поткраду ситне нетачности. Услед тога елипса или не долази до контурних изводница или прелази преко њих.

Таква нетачност је јако незгодна, јер се лако запази, а теориски претставља крупну грешку.

Елипса пресека је геометриско место тачака где поједине изводнице облице продиру кроз пресечну раван. Како раван није паралелна са изводницама, продиру кроз њу све изводнице, па и контурне. Ради тога мора елипса пресека да дође до контурних изводница. Исто тако била би грешка када би елипса пресека ишла преко контурне изводнице, јер ван контурне изводнице не постоје неке изводнице облице, па не може да буде ни продорних тачака.

Када већ знамо да елипса пресека долази до контурних изводница облице, а да преко њих не иде, према томе да их додирује, ред је да одредимо те тачке. То су *„контурне тачке криве пресека“*. Да их одредимо довољно је да одредимо продор контурних изводница кроз раван пресека.

Контурне изводнице за прву пројекцију су изводнице 3′ и 4′ (тачке 3 и 4 су контурне тачке криве базиса). Да одредимо продор изводнице 4 кроз пресечну равао $t_1 t_2$ најлакше је да тачку 4′ круга спојимо са тачком A' круга и да ту праву продужимо до пресека 9′ са осом афинитета. Како тачки A' круга одговара тачка I′ елипсе одговараће правој $A'9'$ у равни круга права I′9′ у равни елипсе, па ће тачки 4′ круга одговарати тачка $4_1'$, а то је тражена контурна тачка елипсе. На исти начин можемо да одредимо и другу контурну тачку $3_1'$ (помоћу праве $A'3'11'$ и I′11′).

Како су код облице контурне тачке 3′ и 4′ базиса на једном пречнику круга могли смо продужити тај пречник круга до пресека са осом афнитета. Кроз ту пресечну тачку и кроз M' пролазио би пречник елипсе који њему одговара, а на пречнику елипсе биле би тражене контурне тачке $3_1'$ и $4_1'$ елипсе пресека.

По истом принципу можемо да одредимо контурне тачке пресечне елипсе у другој пројекцији. Контурне изводнице за другу пројекцију су изводнице 1″ и 2″. Тачке 1′ и 2′ и првој пројекцији су на пречнику круга $\| X$. Да одредимо продоре ових контурних изводница можемо се послужити поново афинитетом. Продужимо пречник 1′2′ до пресека 7′ са осом афинитета, па ће овом продуженом пречнику круга, који пролази кроз тачку 7′ и кроз средиште O' круга, одговарати пречник елипсе, који ће пролазити кроз тачку 7′ и кроз тачку M' елипсе, (јер средишту O' круга одговара средиште M' елипсе). Само нас онај пречник у првој пројекцији уопште не интересује. Он нам служи да помоћу њега одредимо продоре контурних изводница

1'' и 2'' за другу пројекцију. Стога одредимо 7'', нацртамо другу пројекцију 7''M'' тог продуженог пречника елипсе, па су на њој тражене контурне тачке $1_1''$ и $2_1''$ елипсе пресека.

И на овом примеру одређена је за било коју тачку P' круга тачка P_1' елипсе. Одређена је помоћу афинитета, а на исти начин одређена је и тангента у P_1.

На крају је обарањем равни одређена и права величина пресечне елипсе.

*

Као други пример пресека облице неком равни можемо овде поменути задатак који смо решавали (у сл. 137).

У том задатку требало је да одредимо базис задате ротационе облице. Како је базис само један равни пресек облице имали смо у ствари код тог задатка први пример пресека облице са неком равни. Пресечна раван је била управна на осу облице и управна на хоризонталницу. Услед тога је пресек био круг који се у првој пројекцији показивао као дуж I' II' (са средиштем O' на оси). Другу пројекцију тога круга пресека одредили смо помоћу спрегнутих пречника I II и III IV.

Још два примера пресека облице решаваћемо када будемо говорили о мрежи облице. Први код кружне праве облице са базисом у *H* (в. сл. 151), а други код косе кружне облице (у сл. 152).

§ 63. Пресеци конуса

Пресек конуса са неком равни је крива и то крива истога реда којега је и сам конус,

Овде ћемо се задржати углавном само на конусима другога реда.

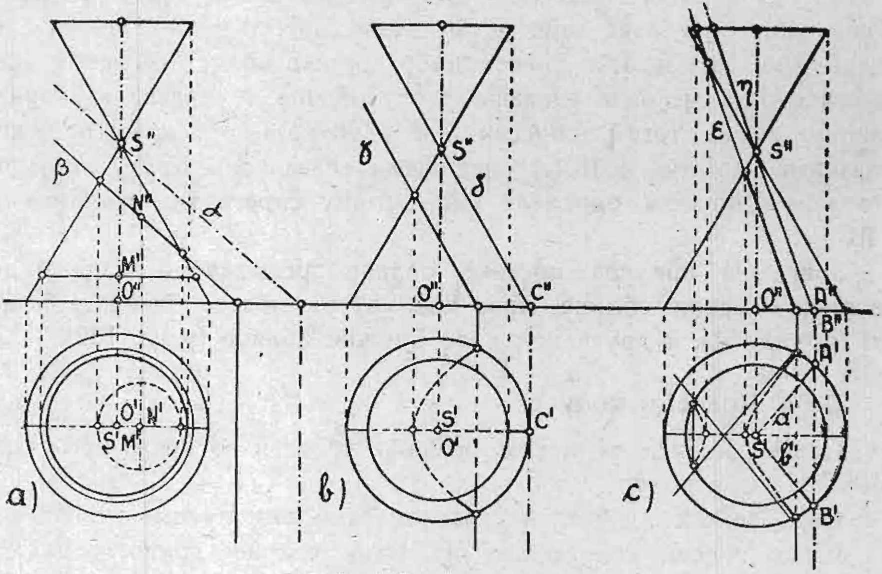
Раван пресек конуса другога реда је крива другог реда. Само и ако је крива базиса таквог конуса затворена крива другог реда, може пресечна крива да буде и затворена и отворена, уопште било која крива другог реда.

Свакој тачки криве базиса одговара једна тачка криве пресека и то она тачка у којој изводница конуса која пролази кроз ту тачку базиса, продре крез пресечну раван. Како све изводнице пролазе кроз врх конуса, кроз једну тачку у коначности, крива базиса и крива пресека су две колинеарне фигуре, где су изводнице зраци колинеације, а врх конуса њихов пол. Баш услед тога може да се деси, да једној тачки базиса, која је у коначности одговара нека тачка пресечне криве, али тачка која је у бесконачности. Природно да се то може десети само онда када је пресечна раван паралелна са тим зраком колинеације, паралелна са том изводницом. Одатле следи да пресек неког кружног конуса може да буде елипса (круг), парабола или хипербола, а то зависи од положаја пресечне равни према конусу.

Да видимо сада какав треба да буде положај равни према конусу, па да пресеци конуса буду разне криве другог реда. Претпоставимо да је конус ротациони са кругом базиса у хоризонталници, а да су пресечне равни управне на вертикалницу.

1а) Ако је пресечна раван α паралелна са равнином базиса пресечна крива је круг и то круг сличан кругу базиса (в. сл. 140*a*).

1) Ако је пресечна раван β постављена косо према равнини базиса, али тако да ипак сече све изводнице конуса пресечна крива је затворена крива и то елипса (в. сл. 140*a*). Добро је да већ овде запазимо да средиште N елипсе пресека није на оси конуса, па да, према томе, средишту круга базиса не одговара средиште елипсе пресека и обрнуто (као што је био случај код облице).



Сл. 140*a*, *b* и *c*

2) Ако је пресечена раван γ паралелна са једном изводницом конуса (у слици 140*b* паралелно са десном контурном изводницом), тада та раван пресеца све изводнице у коначности, само ту једну, са којом је паралелна, сече у бесконачности. Пресечна крива има једну тачку у бесконачности (с једне стране је отворена), а то значи да је парабола.

3) Ако је пресечна раван ε паралелна са двема изводницама (у сл. 116*c* паралелна са изводницама *a* и *b*) њезини пресеци са тим изводницама биће у бесконачности. Крива ће имати две бесконачно удаљене тачке, биће на две стране отворена, према томе хипербола.

4) Ако пресечна раван пролази кроз врх конуса, а сече круг базиса, пресечна крива биће две изводнице, две праве. (У сл. 140*c* пресечна раван η сече конус по изводницама *a* и *b*). Пресечна крива је

и овде крива другог реда, али у врху има двојну тачку, па се услед тога распада (у две криве нижег реда) у две праве.

5) Ако пресечна раван пролази кроз врх конуса, а само додирује криву базиса, пресечна крива је једна права. Пресечна раван (у сл. 140*b* раван δ) је стварно тангенциална раван на конус, она га додирује по једној изводници (двема изводницама које се поклапају); па је та изводница пресечна крива.

6) Ако пресечна раван пролази кроз врх конуса, али не сече његов базис, пресечна крива је само једна тачка. (Ова пресечна раван сече круг базиса у двема имагинарним тачкама, према томе сече конус по двема имагинарним правама, које пролазе кроз једну реалну тачку пресека, кроз врх).

Према томе пресек конуса са неком равни може да буде било која крива другога реда: хипербола, парабола, елипса (круг), а могу да буду две праве које се секу, једна права, (заправо две преклопљене праве) и једна тачка. (Уствари требало би овде бројати само три прве криве, јер су друге три, као што смо раније видели, само распаднуте три прве криве).

*

За нас је важно да видимо како ћемо да одредимо:

1) по којој кривој задата раван t_1 t_2 пресеца задати конус и

2) како да поставимо пресечну раван, па да нам она пресеца задати конус по оној кривој коју ми желимо.

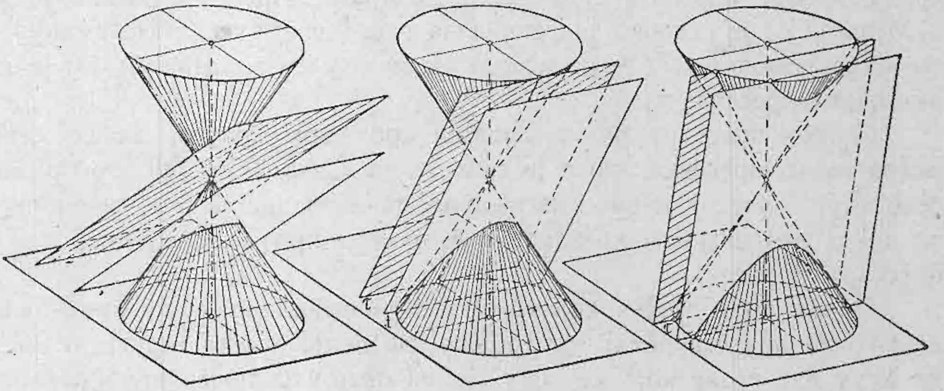
Једно и друго одређујемо по истом принципу. Тај принцип испољава се из раније наведених шест случајева пресека, а познат нам је од раније, када смо говорили о бесконачно удаљеним тачкама криве. Бесконачно удаљене тачке криве пресека једног конуса могу да се појаве само ако је нека изводница конуса паралелна са пресечном равни. Према томе хоћемо ли да одредимо по којој кривој II реда задата раван пресеца конус, треба да испитамо да ли је нека изводница конуса паралелна са задатом пресечном равни.

Повучемо кроз врх конуса раван паралелну са задатом пресечном равни и одредимо њезину трасу у равни базиса конуса. Ако та траса пресеца криву базиса конуса у двема реалним одвојеним тачкама A и B, тада задата раван сече конус по хиперболи. (Јер паралелна раван сече конус по двема одвојеним реалним изводницама a и b, па су оне паралелне са пресечном равни) (в. сл. 140*c*).

Ако та траса сече криву базиса конуса у двема бесконачно блиским тачкама (ако је додирује у некој тачки C), тада задата раван сече конус по параболи (сл. 140*b*).

Ако траса паралелне равни сече криву базиса конуса у двема имагинарним тачкама (дакле ако је не сече) пресечна раван пресеца конус по елипси (кругу).

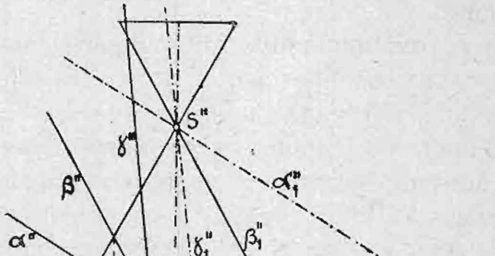
Ради бољег прегледа додата је слика 141 где су претстављена сва три случаја са пресечном равни t и паралелном равни τ повученом кроз врх конуса.



Сл. 141

По истом принципу решавамо и обрнут задатак: када је задат конус како да поставимо пресечну раван, па да пресечна крива буде она коју хоћемо.

У сл. 142 задат је као пре ротациони конус са базисом, кругом у хоризонталници. Поред конуса задата је једна права t у хоризонталници,



Сл. 142

а управна на вертикалницу. Кроз праву t (t' t'') треба повући раван која сече задани конус по хиперболи. (Како је права $t \perp V$ биће и тражена раван $\perp$ V и пројектоваће се цела на својој другој траси). Повучемо из врха конуса неку раван γ_1''' тако да сече конус по двема одвојеним изводницама. (Прва траса равни сече круг базиса конуса у двема одвојеним тачкама). Ако из t'' повучемо $\gamma'' \parallel \gamma_1''$, та раван сече конус по хиперболи. (По хиперболи сече конус и свака друга раван паралелна са равнином γ_1).

Ако се тражи да раван кроз t сече конус по параболи, довољно је да повучемо кроз врх конуса ону раван β_1 која додирује конус. У сл. 118 раван β_1 је повучена тако да додирује конус по изводници L. Раван β повучена кроз $t'' \parallel \beta_1$ сече конус по параболи.

Тражи ли се непресечна раван кроз t сече конус по елипси, повучемо било коју раван α_1 кроз врх, али тако да не сече круг базиса. Раван α повучена кроз $t'' \parallel \alpha_1''$ сече конус по елипси.

На крају да приметимо још и ово. Када је било тражено да пресечна раван кроз t сече конус по параболи повукли смо кроз врх конуса раван β_1, која је додиривала конус по изводници L. Место те равни могли смо да повучемо другу раван, која би додиривала конус по изводници K. Раван повучена из t'' паралелна са њом секла би конус поново по параболи.

Када је било тражено да раван кроз t'' сече конус по хиперболи, повуки смо раван γ_1 кроз врх, тако да сече базис конуса. Таквих има бесконачно много, заправо све које можемо да повучемо између контурних изводница L и K. Свака раван паралелна са једном од тих равни сече конус по хиперболи.

Све остале равни повучене кроз врх, а да не секу базис конуса одређују равни које секу конус по елипси (кругу).

*

Да видимо сада како ћемо одредити сам пресек конуса. Почнимо са елипсом.

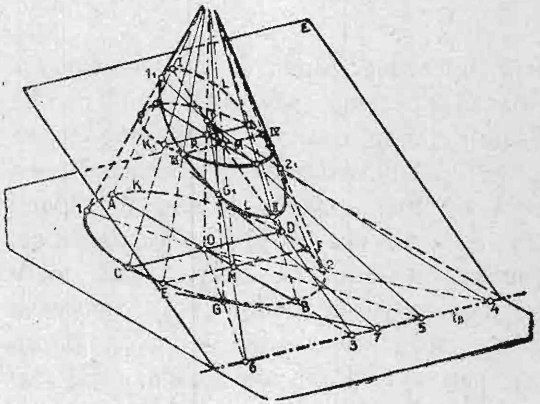
У сл. 143 нацртана је једна хоризонтална раван и један ротациони конус са врхом S чији је круг базиса у реченој хоризонталној равни. Даље је нацртана произвољна раван ε која пресеца конус, а пресеца и хоризонталну раван по правој t_B (траси пресечне равни на равни базиса конуса).

Како је врх S конуса изнад пресечне равни ε, а базис конуса испод ње, смемо тврдити да раван пресеца све изводнице, па ће пресечна крива бити елипса. Свакој тачки базиса одговараће једна тачка пресека (и обрнуто) и то у правцу изводница конуса. Према томе крива базиса и крива пресека су две колинеарне фигуре. Зраци колинеације су изводнице конуса, врх конуса S је пол колинеације, а оса колинеације је права t_B (права по којој се секу равни обеју колинеарних фигура). Требало би још да узмемо било коју тачку на равни базиса, да повучемо кроз њу зрак колинеације и да одредимо продор тога зрака кроз пресечну раван ε. Када би имали и тај пар тачака, које одговарају једна другој, могли бисмо, по правилима колинеације да одредимо повољан број тачака пресечне елипсе, да одредимо и тангенте у тим тачкама, па би тако одредили саму елипсу пресека. Само овакав начин био би неподесан, па ћемо и овде одредити спрегнуте пречнике елипсе.

Видели смо раније да средиште M елипсе пресека не одговара средишту O круга базиса. То значи да пречници круга базиса неће одговарати пречницима елипсе пресека, него њезиним тетивама и обрнуто. Према томе од свих пречника круга базиса само један одговара једном пречнику елипсе пресека. (Онај на коме је средиште елипсе). Познато нам је да су тангенте у крајњим тачкама било ког пречника између себе паралелне. Знамо и то да паралелним правим код колинеације не одговарају паралелне праве, а да остају између себе паралелне само оне праве које су паралелне са осом колинеације (в. сл. 143). Одатле следи, да само пречник базиса, чије су тангенте (а и њихов спрегнути пречник) паралелне са осом колинеације може да одговара пречнику елипсе пресека. Када је крива базиса круг, тај је пречник управан на осу колинеације.

Узмимо сада на кривој базиса такав пречник *A B* коме су тангенте у крајњим тачкама паралелне са осом колинеације. Повуцимо изводнице из његових крајњих тачака *A* и *B* и одредимо тачку I продора удаљеније изводнице *A S* кроз пресечну раван. Када имамо и њу, можемо да одредимо све остало помоћу колинеације. Тако, да одредимо продор II изводнице *B* кроз пресечну раван, продужимо пречник *A O B* криве базиса, до пресека 3 са осом колинеације t_B. Правој *A* 3 у равни базиса одговара права I 3 у равни пресека. Тачки *B* одговара тачка II, а тачки *O* тачка *P*, на оси конуса.

Дуж I II је пречник елипсе пресека. Међутим тачка *P* није средиште елипсе (иако одговара средишту круга базиса). Према томе други спрегнути пречник елипсе неће одговарати пречнику *C D* круга.



Сл. 143

Средиште *M* елипсе одредимо када располовимо дуж I и II. Том средишту *M* елипсе одговара тачка *N* круга (на пречнику *A B*), па ће и други спрегнути пречник елипсе одговарати тетиви *E F* круга која пролази кроз *N* а $\parallel C D \parallel t_B$. Значи да ће други пречник елипсе пролазити кроз *M* и бити $\parallel E F \parallel t_B$, јер су колинеарни. Крајње тачке III и IV можемо да одредимо на два начина. Помоћу колинеације, јер ако пречник III IV одговара тетиви *E F*, крајње тачке III и IV су на изводницама *E* и *F*. Овај начин је једноставан, али је често нетачан, јер се поједине праве секу под сувише оштрим углом. Стога је обично тачнији овај други начин: Пречник III IV је паралелан са равни базиса, а његове крајње тачке леже на омотачу конуса. Треба, дакле, да одредимо продор те хоризонталне праве кроз конус. Стога пресечемо конус равнином која је паралелна са базисом и пролази кроз пречник III IV, дакле кроз средиште елипсе пресека. Пресек је круг са средиштем R на оси конуса, а његов пресек са пречником III IV елипсе даје тражене крајње тачке III и IV тога пречника.

Тиме је потпуно одређена елипса па је решен и постављени задатак. Остаје да и овде, као раније код облице, одредимо контурне тачке пресечне криве.

Контурне изводнице конуса пролазе кроз тачке 1 и 2 базиса. Да одредимо контурну тачку 2_1 пресечне елипсе треба да одредимо продор контурне изводнице 2 кроз пресечну раван. Повучемо помоћну праву кроз тачку 2 и кроз било коју тачку круга за коју знамо која јој тачка одговара на елипси. Тако је овде повучена права $O\,2$ (јер тачки O одговара на елипси тачка P) и продужена до пресека 4 на оси колинеације. Правој $O\,4$ базиса одговара права $P\,4$ елипсе пресека, па тачки 2 одговара тачка 2_1. Тачка 2_1 је тражена десна контурна тачка пресечне елипсе. Леву контурну тачку 1_1 одредимо на исти начин.

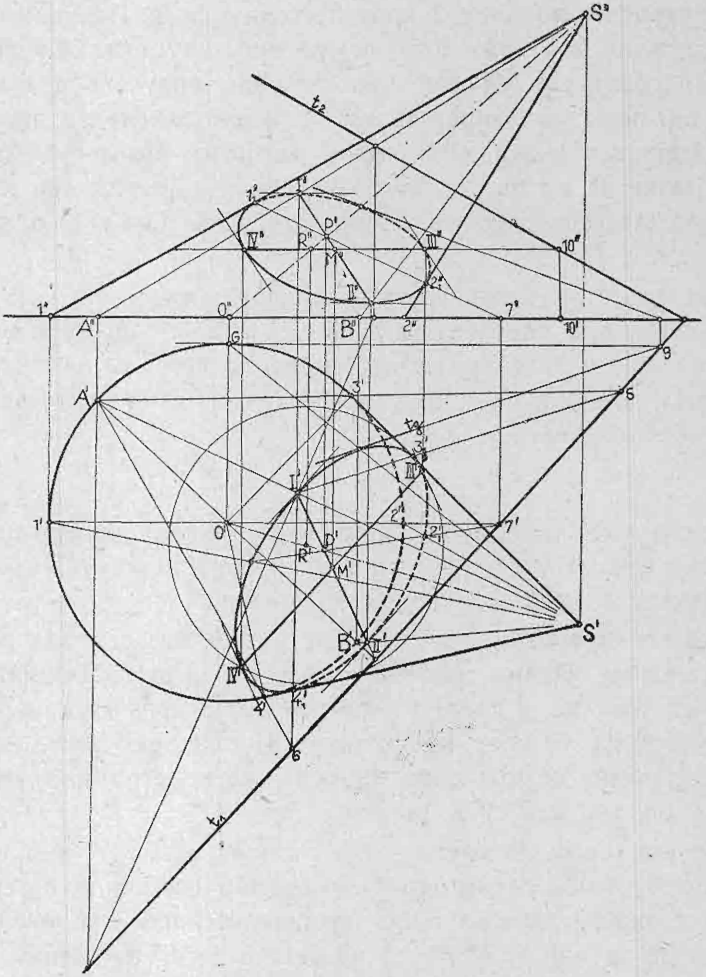
На крају је у слици узета на кривој базиса било која тачка G, помоћу колинеације одређена је тачка G_1 која јој одговара на елипси, а затим је понова помоћу колинеацаје одређена и тангента на пресечну елипсу у тачки G_1. Конструкција је из слике довољно јасна и нема потребе описивати је.

*

Пређимо сада на примере. Као први пример узмимо најопштији случај. Нека нам је у сл. 144 задат коси кружни конус са базисом у хоризонталници и произвољна пресечна раван $t_1\ t_2$.

Из самих пројекција се види да је цео базис испод равни $t_1\ t_2$ а врх S изнад ње. Према томе можемо рећи да ће пресек бити елипса. Знамо поред тога да је пресечна елипса колинеарна са кругом базиса, те да је S центар, а t_1 оса колинеације. Поновићемо још једном целу конструкцију, иако се код овог примера све конструкције виде скоро исто као у сл. 143 где су и описане.

Повучемо пречник круга $A'B' \perp t_1$ и из тачака A и B изводнице у обим пројекцијама. Затим одредимо продор изводнице $A\,S$ кроз $t_1\,t_2$. Продорна тачка I је крајња тачка пречника елипсе. Сам пречник одредимо када продужимо $A'\ B'$ до пресека $8'$ са t_1' и спојимо $8'$ са I' и $8''$ са I''. На изводници B имамо тачку II елипсе, а на оси тачку P које одговарају тачкама B и O круга. Тиме је одређен пречник I II елипсе. Када га располовимо одредимо и средиште M елипсе. Други спрегнути пречник круга био би паралелан са тангентама на круг у тачкама A и B дакле $\parallel t_1$. Према томе и други пречник елипсе пресека биће паралелан са t_1. Значи да се други пречник елипсе налази на сутражници h равни $t_1\,t_2$ кроз тачку M. Повучемо ту сутражницу $h'\,h''$, па нам је она уједно и контрола да ли је тачка M тачно одређена. Да одредимо крајње тачке III и IV тога пречника пресечемо конус равнином кроз пречник, а уједно $\parallel H$. Како је та раван паралелна са базисом, сече конус по кругу K_1 коме је средиште тачка R на осовини конуса, а полупречник r дужи од R'' до пресека са контурним изводницама. Одредимо R' и опишемо круг. Пошто раван сече све изводнице конуса мора K_1' да додирује контурне изводнице у I пројекцији. На пресеку пречника са овим кругом су крајње тачке III' и IV' пречника.



Сл. 144

Тиме је стварно одређена I и II пројекција пресечне елипсе. Остаје још да одредимо контурне тачке. Контурне изводнице II пројекције пролазе кроз тачке 1'' и 2'' круга базиса. Те тачке стоје у I пројекцији на једном пречнику ($1'$ $2'$) $\parallel X$. Продужимо пречник $1'$ $0'$ $2'$ до пресека $7'$ на t_1', оси колинеације. Правој $1'$ $0'$ $2'$ $7'$ круга одговара права $7'$ P' елипсе, па су на њој, а на изводницама из $1'$ и $2'$ тражене тачке $1_1'$ и $2_1'$. У I пројекцији те тачке нам нису потребне, него само у II пројекцији. Стога се обично не цртају ни изводнице из $1'$ и $2'$, ни права [$7'$ P'], него се одмах одреди $7''$ и повуче права [$7''$ P'']. У пресеку њезином са контурним изводницама су контурне тачке $1_1''$ и $2_1''$. Конструкција је у свему иста као и код облице, једино код конуса средишту круга не одговара средиште елипсе, него тачка P, па и права није [$7''$ M''] као код облице, него [$7''$ P''].

Контурне изводнице I пројекције пролазе кроз тачке $3'$ и $4'$. Продоре тих изводница, дакле контурне тачке за I пројекцију, одређујемо лако помоћу колинеације. Правој A' $3'$ $5'$ одговара права $5'$ I', а тачки $3'$ тачка $3_1'$. Тачку $4_1'$ одредимо на исти начин. На крају одређена је тачка G_1 елипсе и тангента на елипсу у тој тачки.

*

Као други пример пресека конуса узмемо ротациони конус са кругом у хоризонталници, па га пресецимо произвољном равни t_1 t_2 (сл. 145).

И овде се јасно види да је врх конуса изнад пресечне равни, а његов базис испод ње. Раван, дакле, пресеца све изводнице конуса, па ће пресечна крива бити елипса. Да одредимо елипсу пресека, узмемо, као код примера у сл. 143, пречник AB круга, управан на t_1' (јер су тангенте у његовим крајњим тачкама A и B паралелне са t_1). Повучемо и изводнице AS и BS у обим пројекцијама (у првој се поклапају са пројекцијом пречника AB) и одредимо њихове продоре I и II кроз пресечну раван.

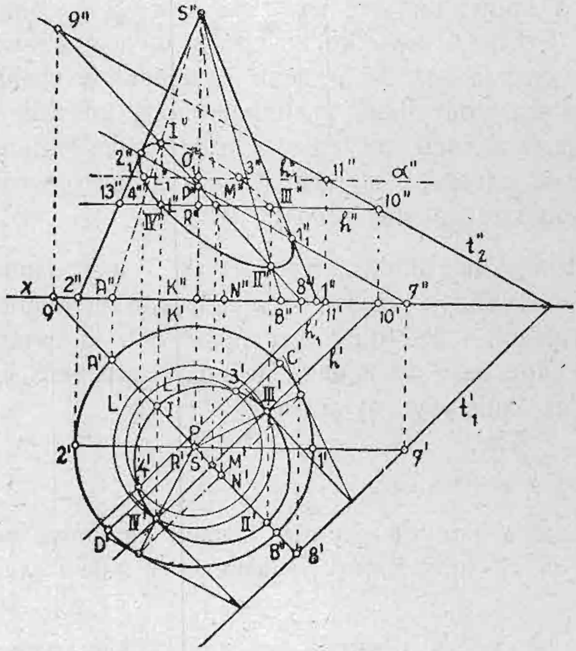
Како је конус прав, обе те изводнице стоје у једној равни повученој кроз осу, а управној на H. Ту раван може да искористимо као помоћну раван за одређивање продора тих изводница. Пресечном правом $8''$ $9''$ одредимо обе продорне тачке I'' II'', па их пренесемо и у хоризонталницу.

Када смо тако одредили један пречник пресечне елипсе, располовимо га и у располовишту је средиште M елипсе. Кроз средиште пролази други спрегнути пречник, а знамо да је он паралелан са осом колинеације t_1, дакле уствари прва сутражница h пресечне равни. То искористимо да проверимо и тачност тачке M, јер траг 10 сутражнице h треба да је на t_2.

Да одредимо крајње тачке III и IV тога пречника пресечемо конус хоризонталном равнином кроз сутражницу h (и кроз средиште

M елипсе). Та раван сече конус по кругу, коме је средиште *R*, а полупречник је једнак дужи од средишта R'' до контурних изводница $r = (R''\ 13'')$. Нацртамо прву пројекцију тога круга и у његовом пресеку са h' имамо тражене крајње тачке III' IV' пречника.

Остаје још да одредимо контурне тачке за другу пројекцију. Контурне изводнице су 1 и 2, а тачке $1'$ и $2'$ круга леже у I пројекцији на пречнику круга $\parallel X$. Продужимо као раније, тај пречник до пресека $7'$ са t_1', па ће правој $O'\ 7'$ круга одговарати права $P'\,7'$ елипсе. Уцртамо још одмах другу пројекцију $7''\ P''$, па су на њој тражене контурне тачке $1_1''$ и $2_1''$. Како је конус прав, права 7 *P* је $\parallel V$, према томе друга сутражница равни.



Сл. 145

У првој пројекцији контурних тачака нема, јер нема ни контуре конуса. Према томе све је одређено и можемо да конструишемо пресечну елипсу у обим пројекцијама.

*

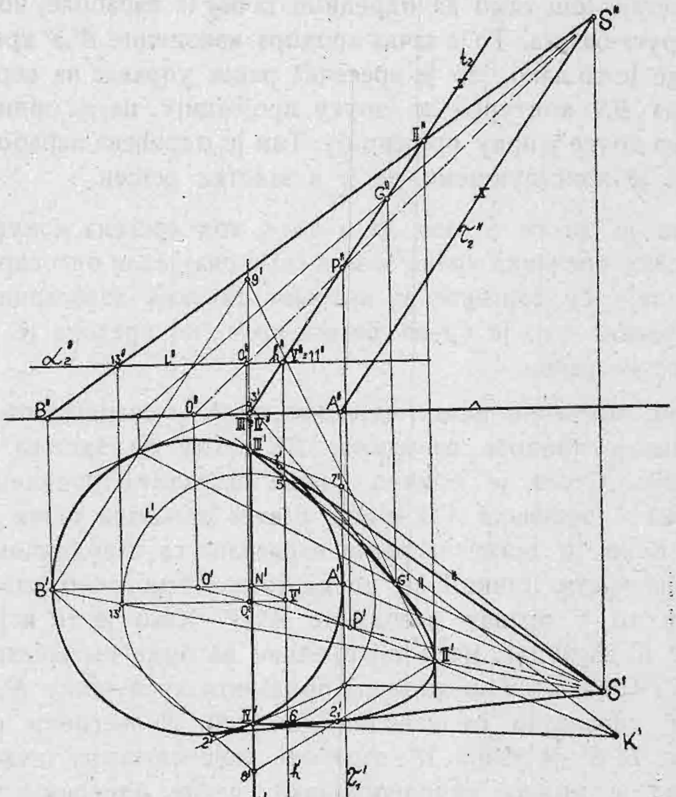
По неки пут се у задатку не тражи цела пресечна крива него само један њезин део. У том случају овај начин одређивања пресека помоћу спрегнутих пречника неби се исплатио. Превећ је обиман. Остало би нам да тражене тачке одредимо помоћу колинеације. И тај начин је незгодан: једно што незнамо које изводнице да одаберемо, а друго што пресеци често нису довољно тачни. Можда је тада бољи начин одређивања појединих тачака пресечне криве помоћу пресека са помоћним равнима.

У сл. 145 је узета хоризонтална помоћна раван α и одређен њезин пресек са пресечном равни $t_1\ t_2$ и са конусом. Пресек са равни $t_1\ t_2$ је сутражница h_1 која пролази кроз пресечну тачку 11 других траса, па можемо да јој нацртамо и прву пројекцију h_1'. Пресек помоћне равни α са конусом је круг L_1 коме је средиште O_1'' на оси, конуса, а полупречник, као раније, од O_1'' до контуре. Нацртамо I пројекцију тога круга L_1', па су нам његовим пресецима са сутражницом h_1' две тачке 3' и 4' тражене пресечне криве. Друге пројекције 3'' и 4'' одредимо ординатом на h_1''.

Овај начин је довољно тачан, а може се употребити када год површину, чији пресек тражимо, можемо да сечемо неким помоћним равнима по круговима, дакле код било које обртне површине. Стога ћемо се често враћати на ову методу.

*

У првом и другом примеру пресек конуса била је елипса. У сл. 146 задат је коси кружни конус са базисом у H и пресечна раван $t_1\ t_2$ управна на вертикалницу.



Сл. 146

Из слике се види да је раван паралелна са контурном изводницом, односно да би паралелна раван $\tau_1\ \tau_2$ повучена кроз врх конуса додиривала базис и сам конус. То је доказ, да раван сече конус по параболи.

Знамо да ће и овде пресечна крива бити колинеарна са кривом базиса. Зраци колинеације су изводнице конуса. Врх конуса је пол, центар колинеације, а оса колинеације је права по којој се секу раван криве базиса (овде H) и задата раван пресечне криве (раван t_1' t_2''), према томе овде прва траса t_1' пресечне равни.

Две тачке пресечне криве већ имамо. То су тачке III′ и IV′ у којима прва траса пресечне равни сече круг базиса. Дуж III′ IV′ је тетива круга базиса. Кроз располовишта N' те тетиве пролази пречник $A'B'$ круга, који је са њом спрегнут. Та иста дуж је и тетива пораболе пресека (јер је на оси колинеације), спрегнута са пречником I′ II′ параболе, који одговара пречнику $A'B'$ круга, а који такође треба да пролази кроз N'. Пошто је за одређивање параболе довољно да поред њезине тетиве имамо и крајњу тачку пречника спрегнутог са том тетивом, остаје још само да одредимо тачку II′ параболе, која одговара тачки B' круга базиса. То је тачка продора изводнице $B'S'$ кроз пресечну раван. Овде је то лако, јер је пресечна раван управна на вертикалницу, а изводница BS контурна за другу пројекцију, па је ординатом пројектујемо из друге у прву пројекцију. Тим је одређена парабола пресека, можемо да је конструишемо, па је и задатак решен.

Важно је да се запази да и овде, код пресека конуса по параболи, од свих пречника криве базиса само онај један одговара пречнику параболе, чије су тангенте у крајњим тачкама паралелне са трасом пресечне равни. Ако је крива базиса круг, тај пречник је управан на трасу пресечне равни.

Обично пресечна раван није, као овде, у специјалном положају, па одређивање продора изводнице BS може да захтева неподесну конструкцију. Стога је обично лакше одредити пречник параболе овако. Тачка A пречника AB криве базиса одговара тачки I пречника параболе. Како је пресечна раван паралелна са изводницом AS, сече је у бесконачности. Тачка I′ је, према томе, бесконачно удаљена тачка параболе и то у правцу изводнице $A'S'$. Како је то и једна тачка пречника I′ II′ параболе, мора тај пречник да буде паралелан са изводницом $A'S'$. Пошто знамо да мора пролазити кроз тачку N', повучемо га кроз N' паралелно са изводницом $A'S'$. У његовом пресеку са изводницом $B'S'$ је тачка II′ параболе, која одговара тачки B' криве базиса. Ово је можда најједноставнији начин одређивања параболе пресека, јер не захтева никакве конструкције, не користи чак ни другу пројекцију.

Као обично, треба и овде да одредимо контурне тачке криве пресека. Код овог примера долази у обзир само тачка на изводници $2'S'$. Одредићемо је помоћу колинеације. Спојићеме тачку $2'$ са тачком B', јединoм којој знамо и одговарајућу тачку II′ на параболи и продужити до пресека 8′ са осом колинеације. Правој *B*′ 8′ у равни круга одговара права 8′ II′ у равни параболе. На њој, а на зраку колинеације, изводници 2′ *S*′ је тражена контурна тачка $2_1'$ параболе.

Овај начин одређивања параболе пресека није једини. Параболу можемо одредити и на друге начине, као што смо одређивали и пресечну елипсу.

Можемо да одредимо помоћу колинеације већи број тачака и тангенту у свакој, па да тако одредимо саму параболу. На сл. 146 одређена је тако тачка G_1' која одговара тачки *G*′ круга базиса. Повучена је права *B*′ *G*′ 9′ у систему круга базиса. Њој одговара права II′ 9′ у систему параболе, а тачки *G*′ круга тачка G_1' параболе на зраку колинеације *G*′ *S*′. Повучемо ли и тангенту на круг у тачки *G*′ до пресека 3′ са осом, њој ће одговарати права 3′ G_1' која је тангента на параболи у тачки G_1'.

Други начин био би одређивање појединих тачака параболе пресека методом директних продора. У овом случају то је нарочито лако, јер је пресечна раван у специјалном положају. На слици је нацртана конструкција за одређивање оне исте тачке G_1'. Овај начин је неподесан. Захтева много конструкције, а услед незгодног положаја изводница према равни пресека често и недовољно тачан.

Као трећи начин треба и овде споменути методу помоћних равни. Употребићемо га и код параболе само када треба да одредимо мален део те криве. Помоћне равни бирамо тако да нам буде што лакше одредити њихов пресек са конусом и са задатом пресечном равни. Када је базис у хоризонталници, као овде, најподесније су, као помоћне равни, хоризонталне равни (као у сл. 146).

На слици 146 узета је таква хоризонтална помоћна раван са другом трасом α_2''. Она сече конус по кругу *L*″ коме је средиште O_1'' на оси конуса, а полупречник једнак дужи O_1'' 13″. Ординатом одредимо O_1' и опишемо круг *L*′. Полупречник $r = (O_1''\ 13'')$ не би требало ни узимати (осим за контролу), јер знамо да и у првој пројекцији тај круг *L*′ треба да дорирује обе контурне изводнице. Иста помоћна раван сече и задату пресечну раван. Како је хоризонтална сече је по првој сутражници h_1 коју одредимо помоћу пресека 11″ 11′ других траса равни. Пресечне тачке 5′ и 6′ круга L_1' и сутражнице h_1' припадају и конусу и задатој пресечној равни, оне су, према томе две њихове заједничке тачке, две тачке њиховог пресека, уствари две тачке тражене параболе.

Одређивање тангенте у појединим тачкама параболе већ је показано и нема потребе понављати га. Потешкоћа се појављује код одређивања тангенте у тачкама III′ и IV′, јер су те тачке на оси колинеације, па за одређивање тангенте немамо него ту једну тачку.

Свакако и у тим тачкама тангента на параболу је права по којој се сече тангенцијална раван на конус са пресечном равни t_1 t_2 у којој је парабола. Повучемо ли у тачки III′ тангенту на круг базиса, та тангента је уједно и прва траса тангенцијалне равни која додирује конус дуж изводнице III′ S'. (На слици та изводница није нацртана). Та траса пресеца у тачки 7′ прву трасу τ_1' равни τ_1 τ_1 коју смо били повукли кроз врх конуса паралелно са равнином пресека t_1 t_2 тако да је додиривала конус дуж изводнице A' S'. Свакако је права 7′ S' пресек тангенцијалне равни са том паралелном равнином τ_1 τ_2, (јер обе, као тангенцијалне равни, пролазе кроз врх конуса). Како је пресечна раван t_1 t_2 паралелна са равни τ_1 τ_2, мора и њезин пресек са тангенцијалном равни да буде паралелан са пресеком 7′ S'. Значи да је тангента на параболу у тачки III′ паралелна са правом 7′ S', па је тако и нацртамо.

Продужимо ли ту тангенту, пресећи ће се у тачки K са продуженим пречником N' II′ параболе. На исти начин одредимо и тангенту у тачки IV′, па продужена, мора и она да пролази кроз тачку K', јер је парабола симетрична с обзиром на пречник и то у правцу тетива спрегнутих са њим. Према томе, ове тангенте није требало ни одређивати. Када смо већ одредили тетиву III′ IV′ параболе и крајњу тачку II′ пречника спрегнутог са њом, из раније показане конструкције параболе следе све остале њезине тачке. По тој конструкцији довољно је само на продуженом пречнику нанети од II′ још једном дуж N' II′, па је тим одређена тачка K', а по њој и тангенте на параболу у тачкама III′ и IV′.

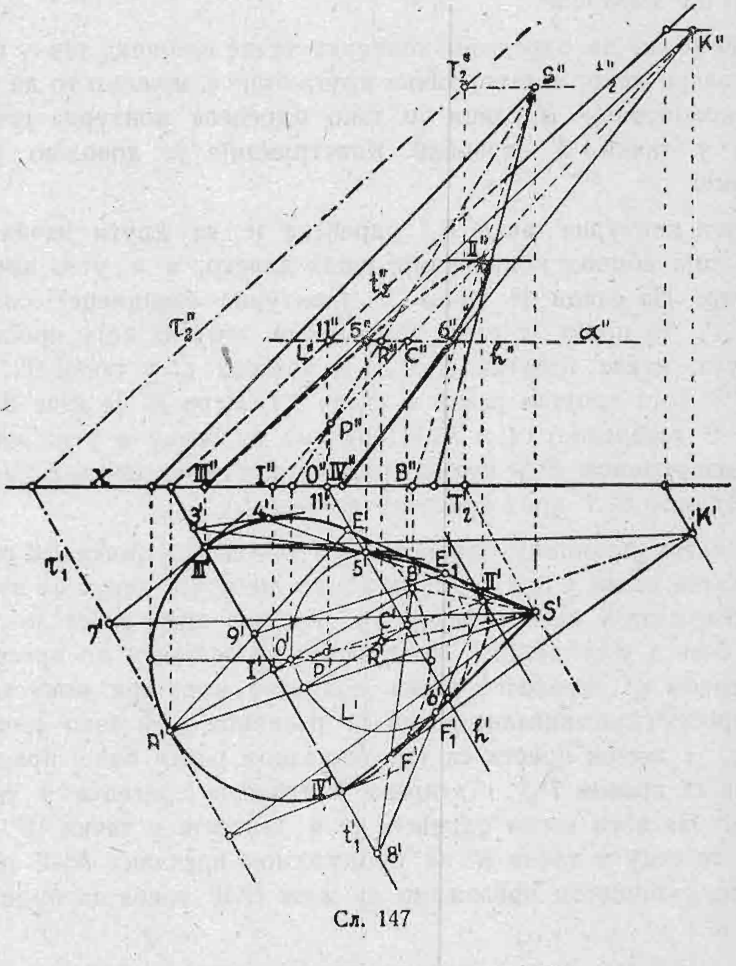
Као други пример нека нам је у сл. 147 задат кос кружни конус са базисом у хоризонталници. Треба да одредимо параболу пресека тога конуса са једном равни, чија прва траса заклапа са осом X угао од 60°.

Да раван пресече конус по параболи, треба да та раван буде паралелна са једном изводницом конуса. То значи следеће. Треба најпре да повучемо тангенцијалну раван на конус тако да јој прва траса заклапа угао од 60° са осом X, а тада свака друга раван паралелна са њом сече конус по параболи.

Тангенцијалну раван одредимо тангентом на круг (под углом од 60° према X-оси) и изводницом конуса која пролази кроз додирну тачку A'. Тангента је уједно и прва траса τ_1' тангенцијалне равни. Другу трасу τ_2'' одредимо помоћу прве сутражнице из врха S' S'' и њезиног другог трага T_2''.

Паралелно са трасама τ_1' τ_2'' повучемо (где хоћемо) трасе t_1' t_2'' пресечне равни. Сада је задатак постављен и можемо да почнемо са одређивањем параболе пресека.

Како је базис конуса круг, одаберимо пречник A' B' управан на t_1' и нацртамо изводнице A S и B S. Прва траса t_1' пресеца круг базиса у тачкама III′ и IV′. То су већ две тачке параболе и то две најниже тачке оног дела параболе који желимо да одредимо. Сем тога прва траса t_1' пресеца пречник A' B' базиса у тачки N'. Пречнику A' B' круга одговараће један пречник параболе пресека. Тачки B' одговараће тачка II′ (продорна тачка изводнице B' S'), а тачки A бесконачно удаљена тачка параболе, јер је изводница A' S' паралелна са пресечном равнином t_1 t_2. Одредимо те тачке. Тачку II′, продор изводнице B' S' кроз



Сл. 147

пресечну раван t_1 t_2 можемо одредити као раније, а можемо и овако. Пресечна раван t_1 t_2 сече троугао A' S' B', а како је она паралелна са изводницом A' S' (јер је тако узета) сећи ће речени троугао по правој из тачке N', а паралелној са изводницом A' S'. У њезином пресеку са изводницом B' S' је тражена тачка II′ параболе. Тачка B' круга одговара тачки II′ параболе, а тачки N' круга та иста тачка N' параболе (јер је на оси колинеације). Према томе пречнику $A'B'$ круга одговара пречник N' II' параболе и, како су тангенте у тачкама B' и II' паралелне са тетивом III' IV', она је спрегнута и са пречником $A'B'$ круга и са пречником II' N' параболе. И код овако објашњене конструкције пречник N' II' параболе је паралелан са изводницом $A'S'$, јер је на њој бесконачно удаљена тачка параболе.

Када имамо ове три тачке, тетиву III' IV' и тачку II' најудаљенију од те тетиве, дакле крајњу тачку пречника параболе спрегнутог са том тетивом, задатак је решен, јер можемо да конструишемо све остале тачке параболе.

Хоћемо ли да одредимо контурне тачке или неку тачку параболе која одговара некој задатој тачки круга базиса, можемо то да урадимо помоћу колинеације. У слици је тако одређена контурна тачка F_1' и тангента у тачки 5' параболе. Конструкција је довољно јасна из саме слике.

Друга контурна тачка E_1' одређена је на други начин, јер би конструкција помоћу колинеације ишла далеко, а и угао пресека би био оштар. На слици је тачка E' (контурне изводнице) спојена са тачком A'. Та права је прва траса равни троугла која пролази кроз врх конуса, дакле троугла $E'S'A'$ и пресеца t_1' у тачки 9'. Како је права $A'S'$ тога троугла равни τ, раван $t_1 t_2$ мора да је сече по правој из тачке 9' паралелној са $A'S'$. Повучемо ту праву и у њезином пресеку са изводницом $E'S'$ имамо тражену контурну тачку E_1' (као продор изводнице $E'S'$ кроз пресечну раван $t_1 t_2$).

По истом принципу одређена је и тангента у тачки III' параболе. Тангенциална раван у тачки III' на конус додирује конус по изводници III' S', (садржава у себи и тачку S'). Њезина прва траса је тангента на круг базиса у тачни III'. Продужимо ту тангенту до пресека 7' са првом трасом τ_1' паралелне равни повучене кроз врх конуса. Права $7'S'$ је пресек тангенциалне равни са равнином τ, а како је пресечна раван $t_1 t_2 \parallel \tau$ њезин пресек са тангенциалном равни биће права из III' паралелна са правом $7'S'$. Та права је тражена тангента у тачки III' параболе. На исти начин одређена је и тангента у тачки IV'. Те две тангенте се секу у тачки K' на продуженом пречнику N'II' параболе. За контролу тачности понављамо да дуж N'II' треба да буде једнака дужи II'K'.

Остаје још да целу пресечну параболу пројектујемо у вертикалницу и да јој конструишемо другу пројекцију. Конструкција је из саме слике довољно јасна.

Код овог задатка одредили смо криву пресека из саме једне (хоризонталне) пројекције, а да другу пројекцију нисмо употребили баш ни за коју конструкцију. То је увек могуће код коничних пресека, кад год је поред пресечних равни позната и паралелна раван повучена кроз врх конуса, па био пресек елипса, парабола или хипербола.

Чак и пресек са хоризонталним помоћним равнима α'' можемо да одредимо из саме прве пројекције. У слици је узета таква раван α'' одређен њезин пресек h' са пресечном равни $t_1 t_2$ и круг L' пресека конуса са његовим средиштем R' на оси конуса. У пресеку h' са L' су две тачке 5′ и 6′ параболе.

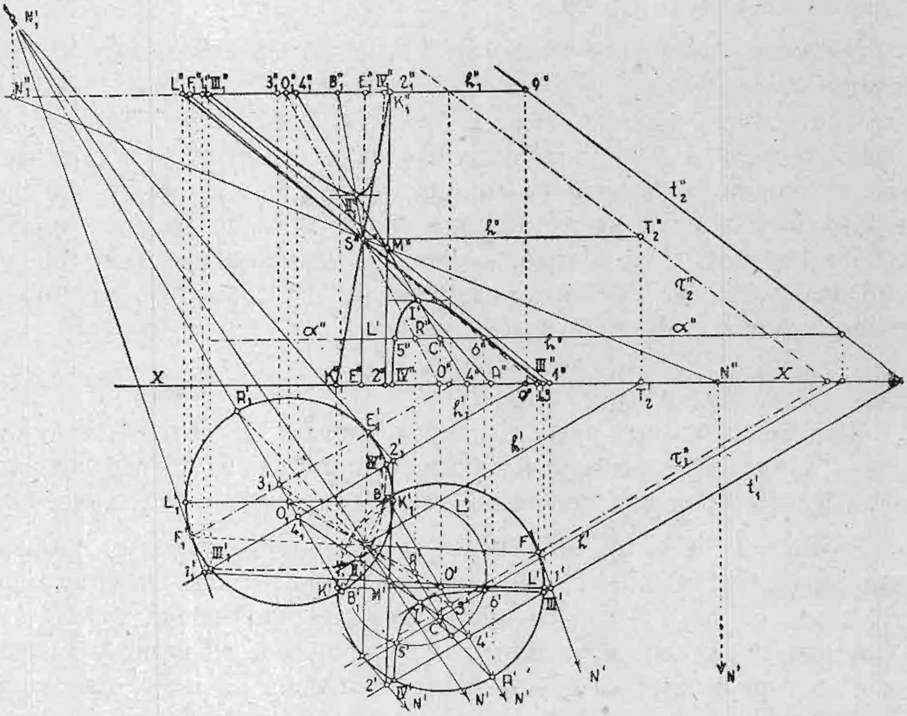
Међутим друга пројекција није потребна, јер сутражница h' сече пречник $N'\text{II}'$ параболе у тачки C', а средиште R' круга L' треба да је на оси конуса, али тако да је $C'R' \parallel A'B'$. Тачке $A'B'C'$ и R' су све у равни троугла $A'S'B'$, а хоризонталница (у којој су $A'B'$) је паралелна са помоћном равни α (у којој су тачке C' и R'). Сам круг L сече све изводнице конуса, па у првој пројекцији мора да додирује обадве видљиве контуре. Ако у првој пројекцији нема контуре, тада продужимо праву $C'R'$ до пресека са изводницом $A'S'$ или $B'S'$, па је полупречник круга од R' до те пресечне тачке).

*

Као задњи пример пресека конуса узимамо да нам је задат кос кружни конус са базисом у хоризонталници. Тај конус треба да пресечемо једном произвољном равни, али тако да пресек буде хипербола.

Знамо да ће раван сећи конус по хиперболи, ако је пресечна раван паралелна са двема изводницама конуса. Стога помоћу прве сутражнице из врха S конуса повучемо неку произвољну раван $\tau_1 \tau_2$ но с тим да τ_1' пресеца круг базиса. На слици сече τ_1' базис у тачкама E' и F', а горњи базис сече иста раван у тачкама E_1' и F_1'. Сам конус сече та раван по изводницама $E'S'E_1'$ и $F'S'F_1'$. (Да би се ова раван и њезини пресеци одвајали од равни $t_1 t_2$, цртана је испрекидано црта-тачка). Свака друга раван паралелна са овом сече конус по хиперболи. У сл. 148 узета је раван $t_1 t_2$. Њезина прва траса t_1' пресеца базис конуса у тачкама III′ и IV′ и то су већ две тачке тражене хиперболе. Иста раван сече и круг горњег базиса у двема тачкама, па су и то две тачке горње гране хиперболе. Хоћемо ли да одредимо тачке на пречнику хиперболе узмемо и овде, као код пређашњих пресека, два спрегнута пречника, један паралелан са првом трасом t_1' а други спрегнут са њим. Како је овде базис круг, други спрегнути пречник је $A'B'$ управан на t_1'. Траса t_1' пресеца пречник $A'B'$ у тачки 4′, а сама раван сече пречник $A_1'B_1'$ горњег базиса у тачки $4_1'$ (Повучена сутражница h_1' је стварно прва траса равни $t_1 t_2$ пресека у равни горњег базиса). Повучемо ли из крајњих тачака A' и B' пречника круга управног на t_1' изводнице конуса, њихове продорне тачке биће тачке на пречнику хиперболе. Саме продорне тачке можемо да одредимо као пре. Изводнице $A'S'B'S'$ одређују једну раван, у којој је оса конуса и пречник

$A'B'$. Пресечна раван t_1 t_2 сече ту раван по једној правој, чије две тачке $4'$ и $4_1'$ већ знамо. Тим је одређена та пресечна права. Она пресеца изводнице A' и B' у тачкама I' и II'. Права $4'$ $4_1'$ је пречник хиперболе, (јер одговара пречнику $A'B'$ круга базиса), а тачке I' и II" су тачке на пречнику хиперболе (јер одговарају тачкама A' и B' круга базиса).



Сл. 148

Остале тачке хиперболе можемо одредити у свему као што смо пре одредили тачке параболе: директним продорима изводница, помоћу колинеације или методом помоћних равни паралелних са кругом базиса.

Да би тачније одредили хиперболу треба да јој одредимо асимптоте. И њих ћемо одредити по истом принципу као што смо раније одређивали тангенте у тачкама III' и IV' параболе. Повучемо тангенциалне равни које додирују конус по изводницама E' и F' (по којима раван τ пресеца конус). Тангенте на круг базиса у тачкама E' и F' пресецају прву трасу t_1' у тачкама 2' и 1'. То значи да пресечна раван t_1 t_2 сече ове тангенциалне равни, а како је t_1 $t_2 \parallel \tau_1 \tau_2$, сече их по правама паралелним са изводницама $E'S'$ и $F'S'$. Те две праве су асимптоте хиперболе. Оне се секу у једној тачки M' на пречнику I' II' хиперболе, која баш полови дуж од I' до II'. Тангенте у тачкама E' и F' круга секу се у једној тачки N' на продуженом пречнику $A'B'$ круга базиса.

Исто тако и тангенте у тачкама E_1' и F_1' горњег базиса секу се у тачки N_1' на пречнику $A_1' B_1'$. Права $N' N_1'$ пролази кроз S' и кроз M', и то служи као контрола тачности.

Када су нам познате асимптоте и само једна тачка хиперболе, можемо да конструишемо све остале њезине тачке. Та конструкција нам је позната из сл. 102. Овде имамо асимптоте и шест тачака хиперболе.

Како је цео задатак решен само у првој пројекцији, конструишемо накнадно и другу пројекцију.

§ 64. Мрежа конуса и облице

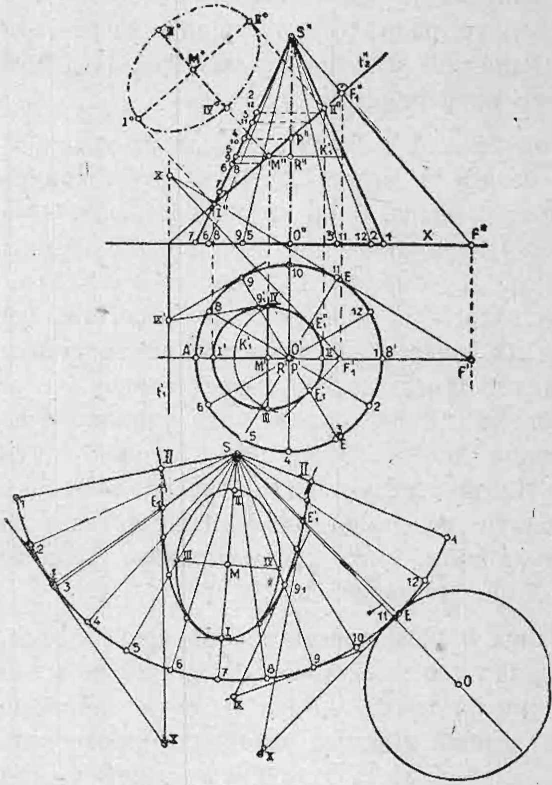
Конуси и облице су обле површине, које су настале кретањем једне праве. При том кретању права или пролази стално кроз једну тачку — врх S конуса, или пак остаје паралелна самој себи. И у једном и у другом случају могу се ради тога те површине развити (расклопити у једну раван). Ради те особине називамо их *„развојне површине“* или површине које се могу развити.

Претпоставимо и код конуса као и код пирамиде да тражимо мрежу само оног дела између базиса и врха. Код ротационог конуса развијена површина, дакле мрежа омотача, биће кружни исечак. Полупречник круга биће једнак правој величини једне изводнице, а дужина лука једнака обиму круга базиса. Да бисмо одредили дужину лука, довољно је да поделимо круг базиса на неколико делова. Поједине тачке обележимо бројевима, па их нанесемо на мрежу уз претпоставку да је лук једнак тетиви. Види се одмах да је лакше радити ако је базис подељен на једнаке делове и да ће тачност бити утолико већа уколико базис поделимо на више делова. Обично је довољно да се базис подели у 12 до 24 дела. Грешка коју чинимо нанашајући тетиву као да је она једнака луку смањује се тиме, што добивене тачке на мрежи не спајамо изломљеном линијом, него неком кривом. Луци те криве су опет већи од тетива које смо нанашали.

Иако је код конуса и облица II реда пресек поново крива II реда, та крива на мрежи промени толико своје особине, да је не можемо другачије конструисати сем тачку по тачку. Стога ћемо је најлакше одредити ако и на конусу и на мрежи уцртамо изводнице кроз поделоне тачке базиса. (Пресеци тих изводница са пресечном кривом уједно су продори кроз пресечну раван). Пренесемо затим на мрежу те тачке помоћу њихових отстојања од базиса (или врха). Добивене тачке спојимо што правилнијом кривом, па нам та крива претставља линију пресека на мрежи.

На тај начин постепено смо заменили мрежу конуса мрежом једне вишестране пирамиде уписане у конус, па то можемо да сматрамо и за правило. Хоћемо ли да одредимо мрежу неког конуса упишемо у конус вишестрану пирамиду (12 — или 16-тbuilt-in торострану). Одредимо мрежу омотача те уписане пирамиде и добивене тачке базиса и пресека спојимо што правилнијим кривама. Тиме је довољно тачно одређена мрежа омотача конуса. Исти принцип важи и за мрежу омотача облице, само место пирамиде упишемо призму.

Тако је у сл. 149 одређена мрежа ротационог конуса и његовог пресека са равни t_1 t_2 $\perp$ V. У конус је уписана 12-торострана пирамида. Све изводнице код овог конуса су једнаке, а контурне изводнице у II пројекцији показују се у правој величини. Може се сматрати да су контурне изводнице окренути положај ($\parallel$ V) свих осталих изводница. На тај начин одређена је у сл. 149 права величина отстојања тачака пресека од тачака базиса (или од врха).



Сл. 149

Линија базиса у овом случају је круг. Да бисмо што тачније уцртали линију пресека, треба да одредимо тангенте у неким њезиним тачкама.

Свака тангента на криву пресека има заједничке са њом две бесконачно блиске тачке. Развијемо ли омотач, поклопиће се тангенцијална раван те тангенте са равни развијеног омотача. То значи да ће тангента криве пресека остати тангента у истој тачки и на линији пресека на мрежи. У сл. 149 одређена је на мрежи тангента у тачки 9_1 линије пресека. Најпре помоћу тангенте у тачки 9′ и пресека IX′ са осом колинеације одредимо тангенту на криву пресека $9_1'$ у I пројекцији. Затим пренесемо ту тангенту на мрежу помоћу троугла 9_1 9 IX. Овде је то једноставно, јер су код ротационог конуса тангенте на круг базиса управне на изводнице конуса, а сем тога се и дуж (9 IX) показује у првој пројекцији у правој величини. Стога кроз тачку 9 мреже повучемо управну на изводницу и на тој управној нанесемо дуж (9 IX). Права

IX 9_1 је тангента на линију пресека мреже у тачки 9_1. Може да се постави питање на коју страну треба од тачке 9 нанети дуж 9 IX). Одговор видимо јасно у I пројекцији. Тачка IX при развијању омотача доћи ће на ону страну, где су подеоне тачке на базису обележене бројевима мањим од 9.

Сем тангента у овако произвољним тачкама криве треба да одредимо и тангенте у специјалним тачкама. Као специјалне тачке у овом случају могу да се узму сем почетне и завршне тачке II још и најнижа тачка I криве и највиша тачка. Највиша тачка II узета је и као почетна и као завршна. У тим тачкама, као што се види у I пројекцији, тангента стоји управо на изводницу. Тангента у тачки I стоји са доње стране криве, а у тачки II са горње стране. То значи да с обе стране криве постоји по једна тачка у којој тангента прелази с једне стране криве на другу. Такве тачке зовемо превојне тачке криве, а саме тангенте превојне тангенте.

Које ће тачке криве пресека бити превојне тачке на линији пресека мреже, то одређујемо овако. Одредимо пројекцију F_1 врха S на раван пресека t_1 t_2 (помоћу продора F_1 праве из врха $\perp$ t_1 t_2). Повучемо из F_1 тангенте на пресечну елипсу, па су додирне тачке E_1 тражене превојне тачке линије пресека на мрежи. Како је лакше конструисати тангенту на круг него на елипсу, место да те тачке одређујемо у пресечној равни, одредимо их у равни базиса помоћу тачке F. Тачка F је продор праве из $S \perp t_1$ t_2 кроз раван базиса. Саму тангенту одредимо на мрежи као пре за тачку 9_1. Како се из једне тачке могу повући само две тангенте на криву II реда, то и превојне тачке могу да буду или две, или ниједна.

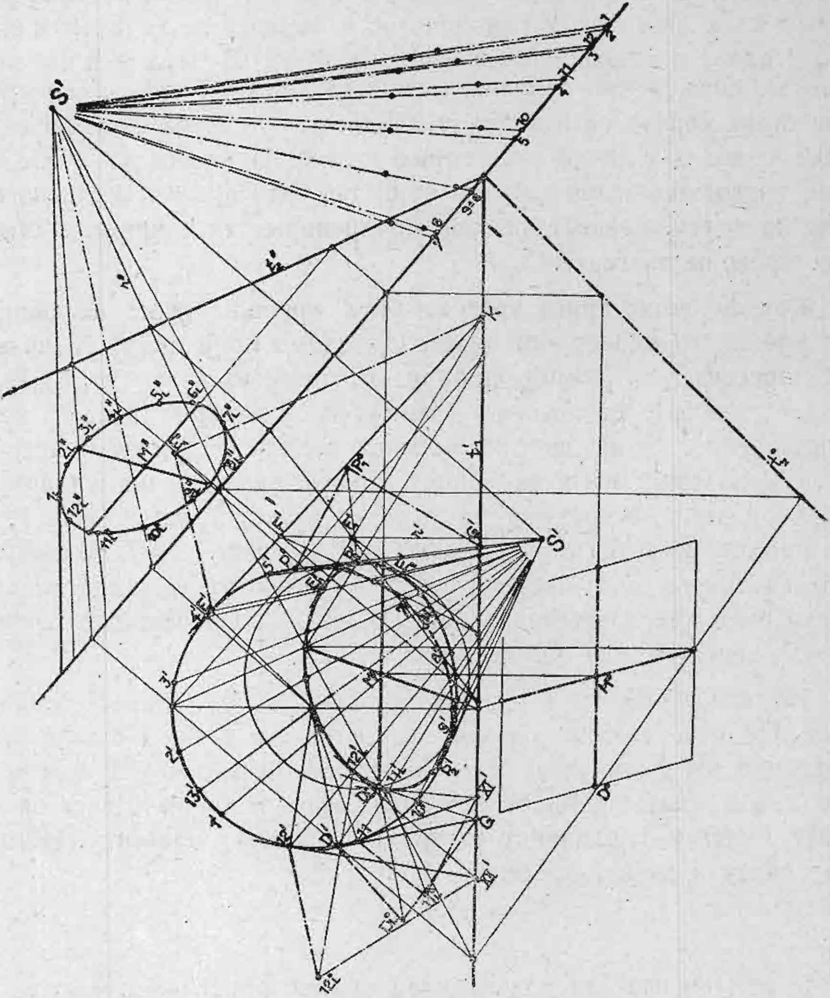
На крају, додат је мрежи омотача и круг базиса ослоњен на тачку 11, а и елипса пресека ослоњена на тачку I линије пресека. Претходно јој је одређена права величина обарањем у V око t_2''. При томе треба имати у виду, да крива базиса и линија базиса на мрежи морају имати у заједничкој тачки 11 заједничку тангенту. Исто важи и за елипсу и линију пресека.

*

У сл. 150 нацртан је још један пример одређивања мреже конуса. Задат је кос кружни конус са базисом у H и произвољна раван t_1 t_2. Треба да одредимо пресек и мрежу.

Међусобни положај конуса и пресечне равни скоро је потпуно исти као у сл. 145, па и њихов пресек одредимо као пре.

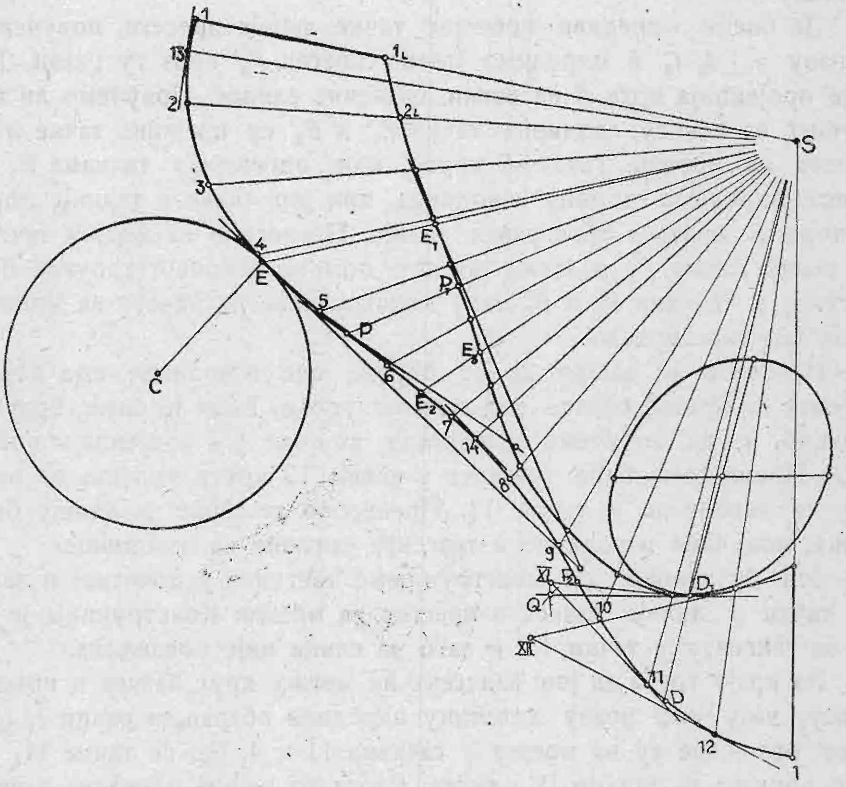
Да бисмо одредили мрежу омотача конуса, поделимо круг базиса на 12 једнаких делова и из појединих тачака повучемо изводнице. Тиме смо уписали у задати конус дванаестострану пирамиду. Другим речима, заменили смо конус дванаестоространом пирамидом. Одредимо мрежу пирамиде (као у сл. 115), па добивене тачке линије базиса и линије пресека спојимо што правилнијим кривама. Ако је елипса пресека тачно одређена и тачно конструисана, можемо сматрати пресек појединих изводница са елипсом као тачно одређене продоре тих изводница кроз пресечну раван. Не морамо да их још једном нарочито конструишемо.



Сл. 150

За одређивање праве величине отстојања тачака елипсе пресека од тачака базиса користимо већ уцртане изводнице окренуте ∥ *V*. (Тачке пресека на тако окренутим изводницама неће се поређати по некој кривој II реда).

Да добијемо што правилније уцртане линије базиса и пресека, треба да конструишемо тангенте на те криве у што више тачака. Као пример конструисаћемо у слици 150 тангенту у тачки 12_L елипсе. Најпре одредимо у I пројекцији тангенту у тачки 12_L пресечне елипсе и то помоћу тангенте на круг у тачки 12 и њезиног пресека XII са осом колинеације, а тада ту тангенту пренесемо на мрежу помоћу троугла 12 XII 12_L Само да бисмо се могли користити тим троуглом на мрежи, треба да му одредимо праву величину. Њу одредимо обарањем троугла у *H*. Тангента на круг (12 XII) је у *H*. Она је према томе прва траса тангенцијалне равни или равни троугла. При обарању тачка 12_L описује круг који се показује (у I пројекцији) као права управна на тангенту [12 XII]. Оборени положај 12^0_L одредимо тако што од тачке 12' нанесемо на управну у правој величини отстојање тачке 12 круга до 12_L елипсе. Када смо одредили праву величину троугла, нанесемо га на мрежу где већ имамо једну његову страну 12 12_L. На тај смо начин одредили тражену тангенту у тачки 12_L, али уједно и у тачки 12 линије базиса.



Сл. 150*a*

Сем тангената у овако произвољним тачкама треба да одредимо и тангенте у превојним тачкама линије пресека и линије базиса. Превојне тачке неке криве на мрежи одредимо на тај начин, што претходно нађемо пројекцију врха конуса на раван те криве, а затим из те пројекције врха повучемо тангенте на саму криву. Додирне тачке су превојне тачке те криве на мрежи омотача конуса. Превојне тачке за линију базиса одредимо врло лако. Базис је у *H*, па је *S'* већ пројекција врха на раван криве. Тангенте из S' на кривој базиса су контурне изводнице конуса за I пројекцију. Оне додирују базис у тачкама P и P_2. Одредићемо у сл. 150 само превојну тангенту у тачки P. Најпре пренесемо саму тачку P на линију базиса мреже, и то помоћу њезиног отстојања од тачке 10 ка тачки 9, које се у I пројекцији показују у правој величини. Затим повучемо изводницу из P, па је њезин пресек са линијом пресека тачка P_1 коју смо већ раније конструисали као контурну тачку пресека. Дуж $(P_1\ P)$ на мрежи је права величина растојања тих двеју тачака.

Тангента на базис у P и тангента на елипсу у P_1 поклапаће се у I пројекцији са пројекцијом контурне изводнице, па ће се и њихов заједнички пресек G' са t_1' поклапати са контурном изводницом. Саме тангенте пренесемо на мрежу помоћу троугла $P\,G\,P_1$ као и пре за тачку 12.

Да бисмо одредили превојне тачке линије пресека, повучемо из S праву $n \perp t_1\ t_2$ и одредимо њезин пресек F_1' кроз ту раван. Тачка F_1 је пројекција врха S на равни пресечне елипсе. Повучемо ли из F_1 тангенте на елипсу, додирне тачке E_1' и E_2' су превојне тачке линије пресека на мрежи. Тачке E круга, које одговарају тачкама E_1 и E_2 елипсе, одредимо помоћу изводница, или још боље и тачније помоћу продора F праве n кроз раван базиса. Пренесемо на мрежу тачку E, као раније тачку P_1, а затим тангенте помоћу обореног троугла $E\,E_2\,Z$. Тангенте у тачкама P_2 и E_1 нису конструисане ни нанете на мрежу да не би теретиле цртеж.

Нарочито је важно да се одреде оне изводнице код којих је тангента на кривој базиса под правим углом. Када је базис круг у H довољно је да повучемо изводницу која се у I пројекцији поклапа са O'. Према томе биће тангента у тачки 13 круга управна на изводницу, а такође и у тачки 14. Пренесемо те тачке на линију базиса мреже, повучемо изводнице и тангенте управне на изводнице.

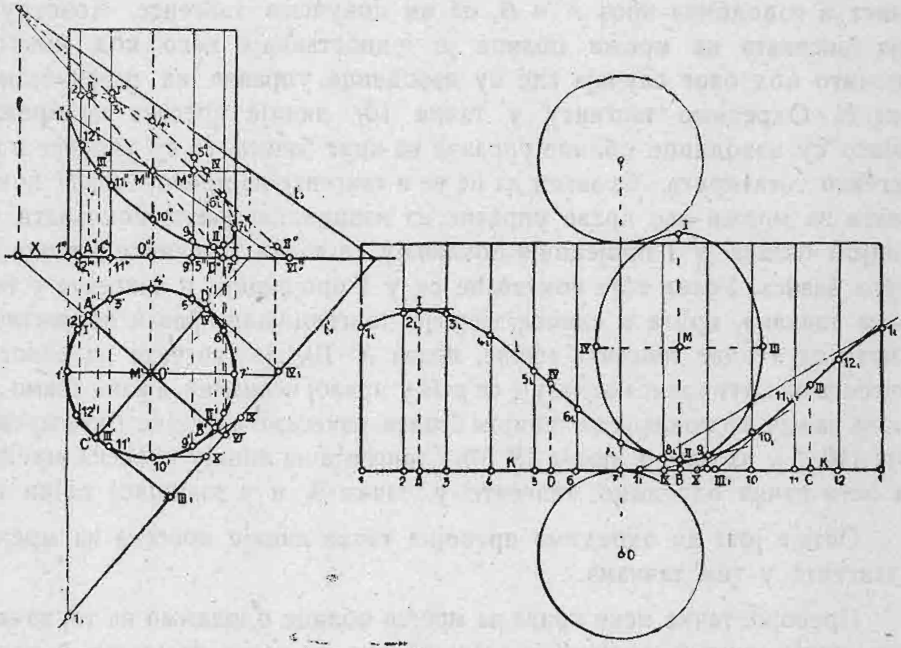
Још би требало да конструишемо тангенте у почетној и завршној тачки 1 линија базиса и пресека на мрежи. Конструкција је иста као за тангенту у тачки 12, и зато на слици није понављана.

На крају треба да још нанесемо на мрежу круг базиса и пресечну елипсу, чију смо праву величину одредили обарањем равни $t_1\ t_2$. Те криве ослоњене су на мрежу у тачкама 11 и 4, јер се тачка 11_L случајно поклапа са тачком IV елипсе. Стога су најпре одређене тангенте у тим тачкама мреже, а тада конструисане саме криве K и L.

*

Мрежу омотача облице конструишемо по истом принципу као и мрежу конуса. Упишемо у облицу 12–24 страну призму и одредимо њезину мрежу са тачкама пресека. Затим тачке базиса и тачке пресека на мрежи спојимо што правилнијим кривима, па су нам то линије базиса и пресека. Мрежа је утолико тачнија, уколико призма има више страна. Обично је довољно 12—16.

Као први пример узета је у слици 151 обртна облица са базисом у H, па је пресечена произвољном равни t_1 t_2. Пресек је одређен по принципу објашњеном у слици 139. Узета су два спрегнута пречника круга базиса: $A'\,B' \perp t_1'$ и $C'\,D' \parallel t_1'$. Продори изводница из њихових крајњих тачака дају крајње тачке пречника елипсе пресека. Како су изводнице управне на H, њихове продорне тачке I′—IV′ поклапају се са тачкама $A'-D'$. Друге пројекције тачака I и II одредимо методом продора са помоћном равнином $\perp$ H кроз изводнице A и B. Тачке III″ и IV″ су на првој сутражници кроз M' M''.



Сл. 151

Пречници I II и III IV елипсе пресека заклапају прав угао (осе елипсе), а права величина пречника I II одређена је окретањем $\parallel$ V.

Да бисмо одредили мрежу, поделимо круг базиса у 12 једнаких делова. (Шестоугаоник из тачке 4 и из 1). Узмемо ли две подеоне тачке (1 и 7) на пречнику $\parallel$ X, поклапаће се у II пројекцији по две и две изводнице. Повучемо их и њихове пресеке са елипсом L'' обележимо са $1_L''$ до $12_L''$. Тиме смо уписали у облици призму и одредили продоре њезиних ивица кроз пресечну раван.

Сада можемо да конструишемо мрежу. Призма је усправна, па ивице заклапају прав угао са странама базиса. Ради тога ће се полигон базиса показивати на мрежи као права управна на ивице, потпуно исто као код примера у сл. 116. Према томе и линија базиса облице биће једна права, а цела мрежа омотача један правоугаоник. (Дужина изводница показује се у II пројекцији у правој величини). Код овог случаја било би добро узети већи број подеоних тачака на базису (а најбоље одредити дужину лука по коханском).

Када смо уцртали мрежу омотача и изводнице, нанесемо на њима тачке пресека. Отстојања тих тачака од базиса нанашамо из II пројекције, где су већ у правој величини. Поред тих тачака нанесемо на мрежи највишу тачку I и најнижу II. Тангенте у тим тачкама су $\| t_1 \| H$, а како су изводнице у овом случају $\perp H$, тангенте су управне на изводнице. Тачке I и II нанесемо на мрежу помоћу тачака A и B базиса и изводница кроз A и B, па им повучемо тангенте. Конструкција тангената на мрежи облице је једноставнија него код конуса, нарочито код овог случаја где су изводнице управне на раван базиса и на H. Одредимо тангенту у тачки 10_L линије пресека на мрежи. Пошто су изводнице облице управне на круг базиса, то су управне и на тангенте тога круга. То значи да ће се и тангенте на кривој базиса показивати на мрежи као праве управне на изводнице, дакле поклапати са линијом базиса. У I пројекцији поклапају се тачка 10 елипсе и тачка 10 круга базиса. Услед тога поклапаће се у I пројекцији и тангенте у тим двема тачкама, круга и елипсе (јер је тангенцијална раван пројектна). Пошто су те две тангенте афине, права $X'\ 10_L'$ је тангента на елипсу. Тангента на круг базиса показује се у H у правој величини, а како знамо да се она на мрежи поклапа са линијом базиса, нанесемо од тачке 10 на мрежи дуж ($10\ X$), па нам је права $[X\ 10_L]$ тангента на линију пресека мреже. На исти начин одредимо тангенте у тачки 9_L и у завршној тачки 1_L.

Остаје још да одредимо превојне тачке линије пресека на мрежи и тангенте у тим тачкама.

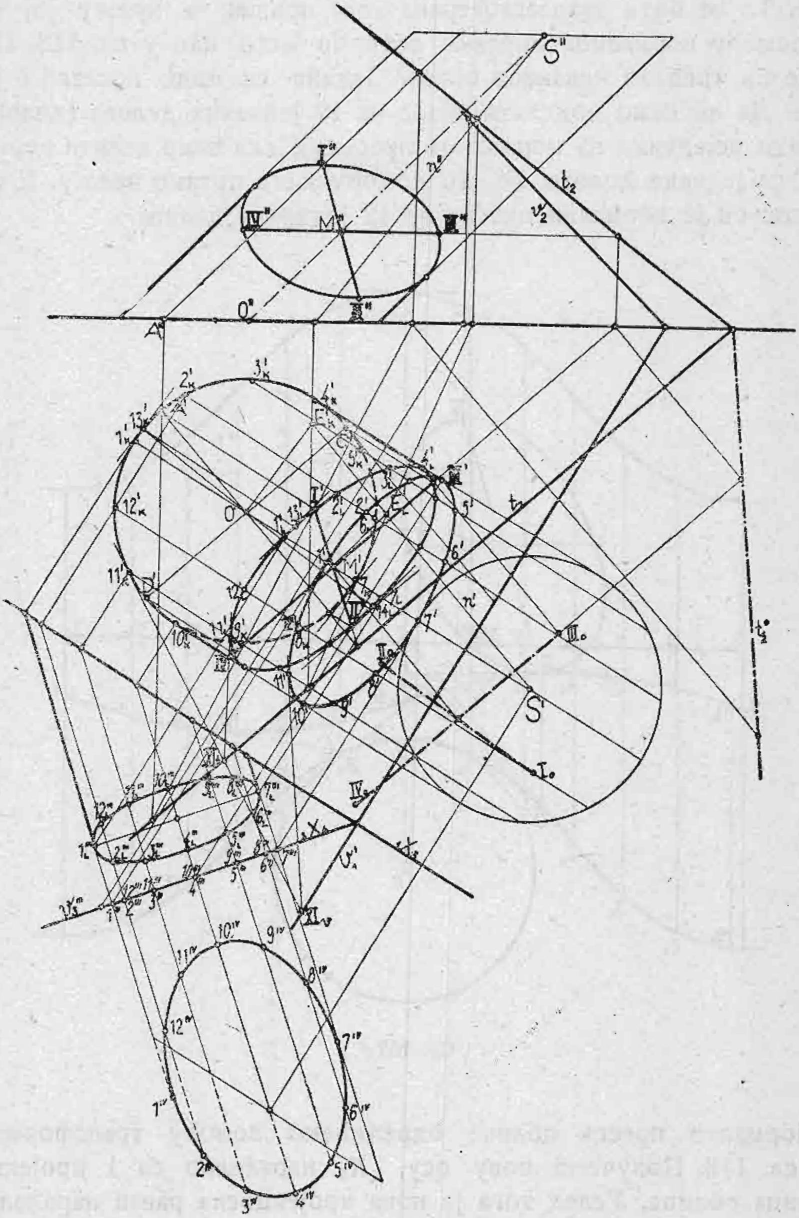
Превојне тачке неке криве на мрежи облице одредимо на тај начин, што конструишемо пројекцију осе облице на раван те криве, и паралелно са том пројекцијом повучемо тангенте на криву. Додирне тачке су тражене превојне тачке те криве на мрежи.

Код примера у сл. 127 оса је управна на H, па ће пројекција осе на раван $t_1\ t_1$ бити у I пројекцији $\perp t_1'$. Тангенте на кривој пресека, паралелне са том пројекцијом осе, додириваће криву у тачкама III' и IV'. Нанесемо те тачке на криву мреже и конструишемо тангенте као раније у тачки 10_L. Када имамо на мрежи све тачке и потребне тангенте, уцртамо што правилније линију пресека.

На крају уцртана је на мрежи елипса пресека и круг базиса. Те криве имају у додирним тачкама заједничке тангенте са мрежом.

*

Као последњи пример из ове партије задата је у сл. 152 коса кружна облица са базисом у *H* и произвољна раван t_1 t_2. Треба да одредимо пресек и мрежу облице.

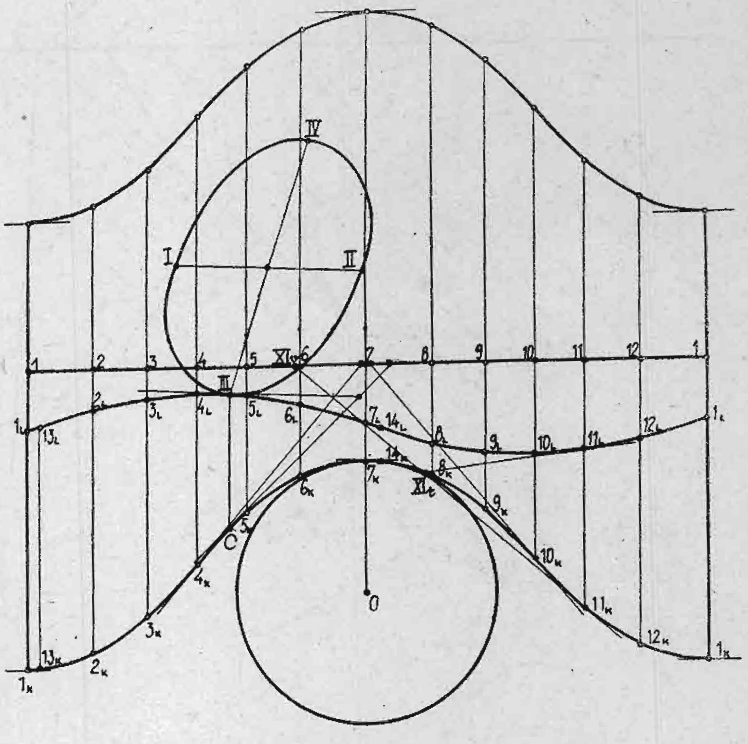


Сл. 152

Задатак је исти као у сл. 139, па је и пресек одређен на исти начин. Опис конструкције не понављамо, али је у слици 152 нацртана **сва** конструкција.

Тиме је решен први део задатка, одређен је пресек облице, а сада треба да јој одредимо мрежу.

Да одредимо мрежу облице, уписаћемо у облици 12-тострану призму. То ће бити дванаестострана коса призма, а мрежу јој одредимо помоћу нормалног пресека потпуно исто као у сл. 118. Према томе не би требало никаквог описа. Једино се овде поставља једно питање. Да ли ћемо поделити базис на 12 једнаких делова (делови ће тада бити неједнаки на нормалном пресеку), или ћемо делити нормални пресек на једнаке делове, пошто помоћу њега цртамо мрежу. У слици 152 подељен је нормални пресек на 12 једнаких делова.



Сл. 152*a*

Нормални пресек облице одредићемо помоћу трансформације, као у сл. 118. Повучемо нову осу, $_1X_3$ паралелно са I пројекцијом изводница облице. Услед тога је нова пројекциска раван паралелна са изводницама, па ће се изводнице показивати у III пројекцији у правој величини. Сем тога овако постављена пројекциска раван управна је на нормалну раван v_1' v_2' јер је $_1X_3 \perp v_1'$ па ће се цела раван показивати у III пројекцији као једна права и поклапати са v_3'''. Одредимо сада III пројекцију круга базиса O''' и $1_K'''$ $7_K'''$.

Трећу пројекцију изводница одредимо помоћу III пројекције средишта горњег базиса, а III пројекцију равни и уједно v_3''' помоћу III пројекције тачке P на v_2''. Ако је све тачно рађено, треба да је III пројекција изводница $\perp$ v_3'''. Нормални пресек показује се у III пројекцији као дуж $1'''\ 7'''$; где је $1'''\ 7'''$ један пречник елипсе пресека $\parallel$ v_3''' а други се пречник $4'''\ 10'''$ $\perp$ v_3''' показује као тачка на оси облице. Одредимо I пројекцију овог нормалног пресека помоћу пречника $1'\ 7'$ и $4'\ 10'$ (заправо оса) и конструишемо елипсу. Затим одредимо његову IV пројекцију уз претпоставку да се $_3X_4$ поклапа са v_3''' као у сл. 95. У IV пројекцији нормални пресек показује се у правој величини.

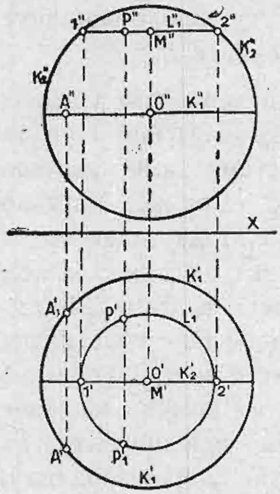
Сада поделимо у IV пројекцији нормални пресек на 12 једнаких делова, обележимо подеоне тачке и повучемо изводнице 1—12 у свима пројекцијама. Тачке 1—12 су тачке нормалног пресека N; њима одговарају тачке 1_K—12_K круга K базиса, а 1_L—12_L су продорне тачке изводница кроз раван $t_1\ t_2$, дакле тачке пресечне елипсе L.

Нормални пресек N показиваће се на мрежи као права управна на изводнице. Повучемо стога једну праву, нанесемо на њој 12 пута растојање подеоних тачака нормалног пресека, па смо тиме нацртали на мрежи линију N нормалног пресека и тачке 1 – 12 – 1 на њој. Управно на њу повучемо изводнице кроз све подеоне тачке. Тада нанесемо на свакој изводници растојање тачке нормалног пресека од тачке базиса, које нам се показује у III пројекцији у правој величини. Тиме смо одредили на мрежи и тачке базиса. Нанесемо ли од њих на горе праву величину целе изводнице, добијамо и тачке горњег базиса. Остаје још да нанесемо на мрежу тачке пресека. Нанашамо их помоћу њиховог отстојања од тачака базиса. То отстојање одредимо или пројектујући тачке пресечне елипсе из I пројекције у III, сваку на своју изводницу, или окретањем изводнице $\parallel V$. У слици су код овог примера пројектоване тачке пресечне елипсе из I пројекције у III (да би се показао и тај начин, пошто су раније код мреже призме те исте дужи одређене окретањем изводница $\parallel V$).

Када на мрежи омотача имамо све тачке базиса и пресека, уцртамо те линије што тачније,

Конструкција тангенте за поједине тачке облице много је једноставнија него за тачке на мрежи конуса. Као пример конструишемо тангенте у тачкама изводница 11 која пресеца криве $K\ L$ и N у тачкама 11_K 11_L и 11. Све три тангенте на криве у тим тачкама леже у истој тангенцијалној равни која додирује облицу по изводници 11. Најпре повучемо тангенту на круг базиса у тачки 11_K која је уједно прва траса поменуте тангенцијалне равни. Како је t_1' оса афинитета између круга базиса и елипсе L, то ће и права $[XI_t\ 11_L]$ бити тангента на елипсу пресека у тачки 11_L. Исто тако је и права $[XI_v\ 11]$

тангента у тачки 11 на елипсу нормалног пресека N, јер је ν_1' оса афинитета између базиса и нормалног пресека. Раван $\nu_1\ \nu_2$ је управна на изводнице, па свака линија у њој заклапа прав угао са изводницама облице. Тај угао се на мрежи показује као прав угао, па ће се тангента на нормални пресек у било којој тачки поклопити на мрежи са правом N. Како се тангента на круг показује у I пројекцији у правој величини (јер је у H), нанесемо на мрежу из 11_K до N дуж $(11_K\ XI_\nu)$. Права $[XI_\nu\ 11_k]$ је тангента на линију K базиса у тачки 11_K. Ако од 11_K нанесемо по тој тангенти дуж $(11_K\ XI_l)$ из I пројекције, права $[XI_l\ 11_L)$ је тангента на линију L пресека у тачки 11_L.



Сл. 153

Превојне тачке за неку криву на мрежи одредимо, као што смо пре видели, на тај начин, што одредимо пројекцију осе на раван те криве и паралелно са том пројекцијом повучемо тангенте на криву. Те тангенте су превојне тангенте, а додирне тачке су превојне тачке криве на мрежи. Тако смо на сл. 152 одредили пројекцију $M'\ E_L'$ осе облице на раван пресека помоћу праве $n \perp t_1 t_2$ из средишта горњег базиса и њезиног продора E_L кроз $t_1 t_2$. Пошто је теже конструисати додирну тачку тангенте на елипсу него на круг, то одредимо помоћу E_K' праву $O'\ E_K'$ афину са $M'\ E_L'$. Тиме је одређена афина тангента и афина тачка 13_K. Одређивање ових тангената на мрежи исто је као и за тачке 11.

Превојне тачке за линију базиса на мрежи су тачке 4_K и 10_K на контурним изводницама. Круг базиса је у H, па је I пројекција осе уједно и пројекција осе на раван базиса.

Круг базиса ослоњен је на мрежу у тачки 7, где је тангента управна на изводницу, а елипса пресека на тачку III линије пресека. Конструисана је најпре тангента у тачки III мреже, па је затим уцртана права величина елипсе.

§ 65. О лопти

а) Пројекција лопте

Лопта је геометриско место тачака које имају подједнако отстојање r од једне сталне тачке O. Стална тачка O је средиште лопте, а r је њезин полупречник.

Ортогонална пројекција лопте је круг описан око средишта O са полупречником r. Тај круг је видљива контура лопте.

У сл. 153 уцртане су пројекције једне лопте. Видљива контура лопте је круг K_2''. Пошто се пројектује као круг (у правој величини), значи да му је раван $\parallel V$. Стога је I пројекција K_2' дуж 2 r кроз O' а $\parallel X$.

Све тачке лопте испред K_2' су видљиве у II пројекцији, док су оне иза K_2', дакле између K_2' и X, невидљиве.

Аналогно важи и за круг K_1, који је видљива контура лопте у I пројекцији.

б) Раван пресек лопте

Пресек лопте са било којом равни је круг. Средиште M тога круга је на правој повученој из средишта O лопте управно на пресечну раван. Кругове K_1 и K_2 можемо сматрати према томе као пресеке лопте са равнима $\parallel H$ и $\parallel V$, повученим кроз срадиште лопте. Кругове чија раван пролази кроз средиште лопте називамо *„највећи кругови лопте“*.

У слици 153 пресечена је лопта једном равни $\parallel H$. Њезин пресек је круг L_1 који се у II пројекцији показује као дуж $1'' \, 2''$. Средиште тога круга је M'' на управној из O'', а полупречник је дуж $M'' 1'' = M'' 2''$. Како се M' поклапа са O', то можемо одмах да уцртамо и L_1'.

в) Тачка на лопти

Ако је нека тачка A на контурном кругу лопте (A' на K'), тада је и њезина друга пројекција на II пројекцији тога круга (A'' на K_1''). Тачка A'' је уједно и II пројекција тачке A_1'.

Да бисмо одредили и I пројекцију произвољне тачке P'' на лопти, пресечемо лопту једном равни $\parallel H$ кроз P'', одредимо као пре L_1', па је на L_1' тачка P'. Природно да поред P' и овде мора да постоји P_1'. P_1 је у II пројекцији видљиво, а P невидљиво.

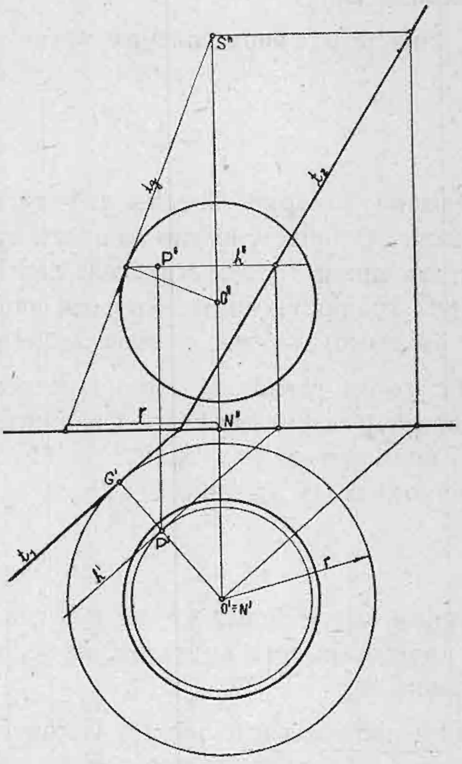
Место равни $\parallel H$ могли смо употребити раван $\parallel V$, а употребићемо ону, која нам даја чистије пресеке, а тиме и већу тачност.

г) Тангенцијална раван на лопту

Раван која додирује лопту стоји управно на полупречник лопте који полази од додирне тачке. Треба ли да у сл. 154 повучемо тангенцијалну раван на лопту у тачки $P' \, P''$, повучемо полупречник $P \, O$ лопте и конструишемо раван која пролази кроз тачку P, а стоји управно на тај полупречник. Конструкција (помоћу сутражница) позната нам је из сл. 135 и нема потребе да је понављамо.

Обично је једноставнији овај други начин одређивања тангенцијалне равни на лопту, нарочито када се тражи само њезина прва траса.

Ако у неки обртни конус уметнемо лопту, лопта ће додиривати конус дуж једног круга. Природно да тада у свакој тачки тога круга постоји једна раван која је тангенцијална раван и на конус и на лопту. То можемо да користимо па да једноставније одредимо тангенцијалну раван на лопту.



Сл. 154

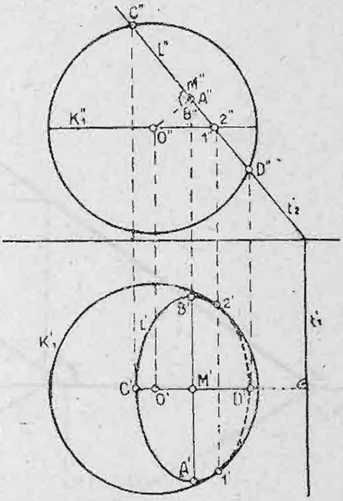
Нека нам је задато да у сл. 154 одредимо тангенцијалну раван на лопту у њезиној тачки P. Повучемо кроз тачку P хоризонталан круг L'' L' лопте. (Тај смо круг већ морали нацртати да одредимо прву пројекцију P' тачке). Ако у контурној тачки $1''$ тога круга L'' повучемо тангенту на контуру лопте, та је тангента у другој пројекцији контурна изводница конуса који додирује лопту по кругу L. Како оса конуса треба да пролази кроз средиште лопте и да буде управна на раван круга L, она је овде вертикална. Услед тога нам је одмах познат врх S'' конуса, средиште N'' круга базиса и његов полупречник r. У првој се пројекцији поклапају тачке S' и N' са средиштем O', па можемо да нацртамо прву пројекцију конуса, заправо само његов круг базиса са полупречником r. Тангенцијална раван која додирује конус у тачки P додирује га дуж целе изводнице P S. Повучемо изводницу P' S' до пресека G' са кругом базиса. Тангента на круг базиса у тачки G' је прва траса t_1' тангенцијалне равни на конус у тачки P, а уједно и тангенцијалне равни на лопту у тачки P. Ако се тражи и друга траса равни, одредимо је помоћу сутражнице h' h'' кроз врх S или кроз тачку P.

д) Пресек са произвољном равни

Већ смо рекли да је пресек лопте са неком равни круг. Да видимо сада како ћемо да одредимо тај круг, ако пресечна раван није паралелна са неком пројекциском равни.

Најлакши је случај када је пресечна раван управна на једну од пројекциских равни. Тако је у сл. 155 узета раван t_1 t_2 управна на вертикалницу. У другој пројекцији поклапа се тада круг L'' са t_2'' и пројектује се као дуж C'' D''. Средиште M круга је на правој повученој из средишта O лопте управно на пресечну раван. Повучемо је у обим пројекцијама (управно на пројекцију трасе) и ординатом из M'' одредимо M'. Полупречник круга је $r = (C'' M'') = (M'' D'')$.

У првој пројекцији пројектоваће се круг L пресека као елипса. Да је одредимо узећемо, као раније, два спрегнута пречника круга и одредити њихове прве пројекције. Пречник CD показује се у другој пројекцији у правој величини. То значи да је паралелан са вертикалницом, па да је у првој пројекцији паралелан са X-осом. Повучемо га кроз M' и ординатама одредимо на њему C' и D'. Други пречник AB, спрегнут са CD треба да је управан на њега, дакле управан и на V. Цео се стога пројектује у другу пројекцију као једна тачка, па се A'' и B'' поклапају са M''. У првој пројекцији управан је на X-осу и показује се у правој величини. Стога лако одредимо на њему крајње тачке A' и B'. Треба запазити да је пречник C' D' на нагибници равни ($\perp t_1'$), а пречник A' B' на првој сутражници ($\parallel t_1'$). Стога се у првој пројекцији показују као осе елипсе.



Сл. 155

Остаје да видимо да ли круг K L' додирује контуру K_1' лопте и ако додирује одредимо контурне тачке. Из друге пројекције одмах видимо да је за прву пројекцију тачка C видљива, а тачка D невидљива. То значи да прва пројекција пресечног круга L' мора да долази до контуре. Нацртамо другу пројекцију K_1'' контурног круга и видимо да га t_2'' сече у тачки $1''$ $2''$. Значи да су тачке $1'$ и $2'$ тражене контурне тачке у првој пројекцији.

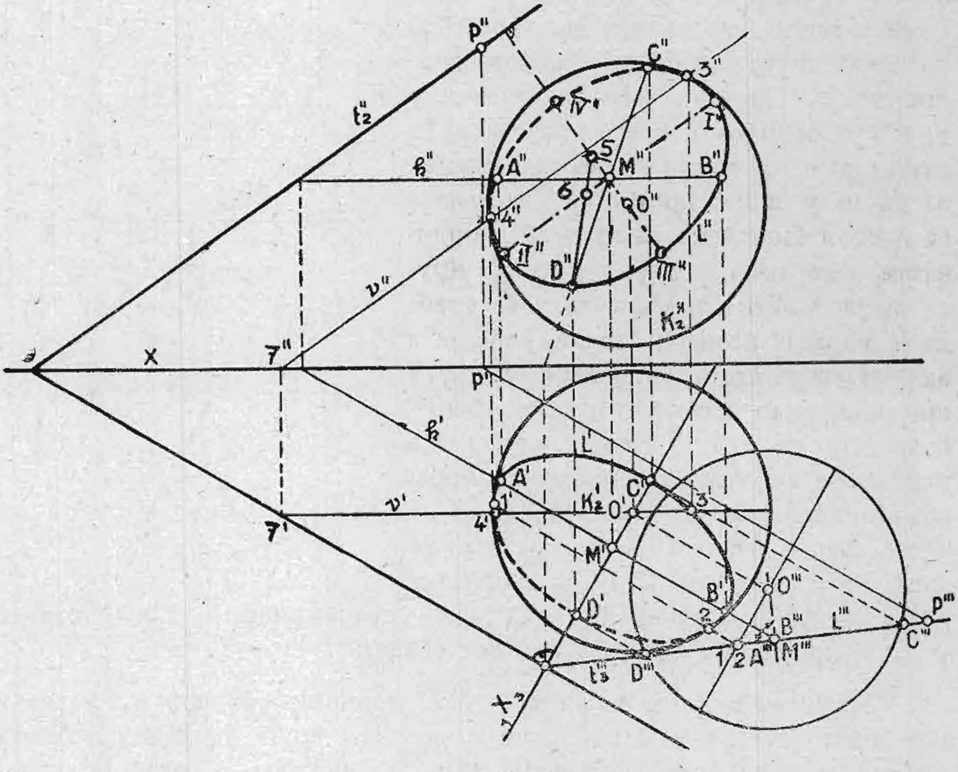
*

Ако је пресечна раван произвољна, тада и ту раван сведемо трансформацијом на предњи случај.

У сл. 156 имамо лопту и треба да одредимо њезин пресек са произвољном равни t_1 t_2.

Повучемо нову ${}_1X_3$ осу управну на t_1'. (Ради уштеде у простору ${}_1X_3$ повучена је кроз O'). Раван t_1 t_2 је управна на нову пројекциску раван и цела се пројектује у својој III траси t_3'''. Одредимо t_3''' помоћу тачке P на t_2 и трећу пројекцију лопте помоћу средишта O'''.

Сада можемо да одредимо осе елипсе L' помоћу III пројекције исто онако, као што смо је у претходном задатку одредили помоћу II пројекције. И контурне тачке $1'$ и $2'$ за I пројекцију одредимо на исти начин као пре. Пренесемо ли затим тачке A—D у II пројекцију, имамо спрегнуте пречнике за L''. Тиме је одређена елипса, друга пројекција пресечног круга. Ту елипсу било би лакше конструисати, када бисмо место спрегнутих пречника имали њезине осе. Овде је осе лако одредити. Велика оса I″ II″ биће једнака пречнику пресечног круга, а може се пројектовати у правој величини једино ако је ∥ V (дакле ∥ t_2''). Друга мала оса елипсе стоји ⊥ I″ II″ (⊥ t_2''), а величину b јој одредимо као у сл. 84*a*. Ако се сетимо конструкције елипсе „*методом парчета хартије*“ можемо и овде да узмемо у шестар велику осу $a = (M''\ \mathrm{I}'') = (M'''\ D''')$, па да је нанесемо из било које познате тачке елипсе D'' до пресека 5 са малом осовином. Права D'' 5 је права ивица „*парчета хартије*“, дуж D'' 5 је велика полуоса a елипсе, а дуж D'' 6 је тражена мала полуоса b. Узмемо је и нанесемо од M'' до III″ и од IV″, па имамо осе елипсе L''.

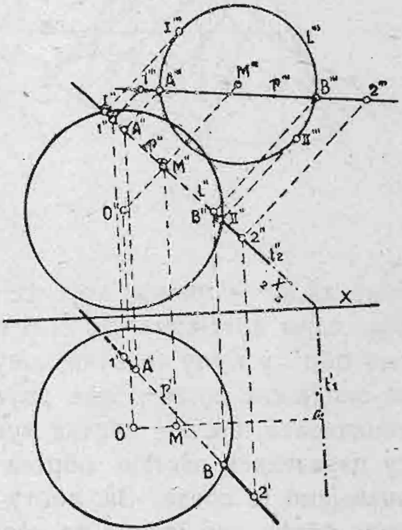


Сл. 156

У I пројекцији видимо да K_2' сече L'. То значи да крива L долази у II пројекцији до видљиве контурне лопте. Да одредимо тачно те тачке пресечемо и лопту и пресечну раван $t_1\ t_2$ оном равнином у којој је видљива контурна лопта K_2''. То је раван $\parallel V$ повучена кроз средиште лопте. Она сече лопту по кругу K_2, који већ имамо у II пројекцији, а раван $t_1\ t_2$ по сутражници v. Сутражница v пролази кроз тачку 7 у којој се секу прве трасе. Повучемо ту сутражницу v'', па су у њезином пресеку са K_2'' тражене две контурне тачке $3''$ и $4''$ пресечног круга L у другој пројекцији. (Помоћу ових тачака можемо да проверимо и тачност конструкције за L', јер тачке $3'$ и $4'$ треба да су на v' а и на L').

ђ) *Продор праве кроз лопту*

Треба ли да одредимо продор праве кроз лопту, повучемо кроз праву неку помоћну раван и одредити круг по коме та раван сече лопту. На пресеку праве са тим кругом су тражене продорне тачке.



Сл. 157

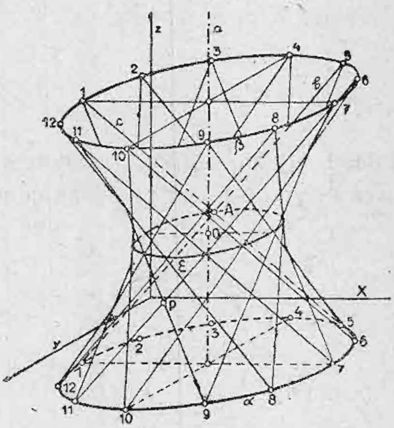
У сл. 157 треба да одредимо продор произвољне праве p кроз задату лопту. Као помоћну раван кроз праву p узмемо раван $t_1\ t_2 \perp V$. Круг по коме та раван сече лопту показивао би се у I пројекцији као елипса. Место да конструишемо ту елипсу, одредимо раће III пројекцију и круга и праве на нову пројекциску раван чија се оса ${}_2X_3$ поклапа са p'' (и са t_2''). Круг L''' ($r = M''\ \text{I}'' = M''\ \text{II}''$) и права p''' секу се у тачкама A''' и B'''. То су тражене тачке у којима права p продире кроз лопту. Ординатама их пренесемо у II и у I пројекцију. Овако одређену трећу пројекцију круга и праве могли бисмо сматрати и као оборени положај помоћне равни када бисмо је око t_2'' оборили у V.

У слици је наглашено који је део праве p видљив, а који невидљив.

§ 66. О обртним површинама

Обртне, ротационе површине су оне површине које настају када се нека линија (права или крива, или делом права, а делом крива) обрће око неке праве. Ту праву називамо *оса обртне површине*. Свака тачка линије при обртању описује круг чија је раван управна на осу, а чије се средиште налази на оси.

Одатле следи да је пресек обртне површине са било којом равни управном на осу круг. Пресечемо ли обртну површину неком равни која пролази кроз осу, дакле сече све кругове по којима се обрћу поједине тачке, пресек ће бити нека линија коју називамо *меридијан*. Када бисмо пустили да се сада меридијан обрће око осе, добили бисмо поново исту обртну површину. (Јер линија која је описивала обртну површину није морала да лежи у истој равни са осом, нити уопште у једној равни, али би се поједине тачке обртале по истим круговима као пре. Најбоље то приказује пример у сл. 158 где се око осе обрће мимоилазна права, а меридијан је хипербола). Сви меридијани једне обртне површине су подударни. Ако је раван једног меридијана паралелна са неком пројекциском равни, тада је пројекција тог меридијана углавном контура обртне површине за ту пројекцију.



Сл. 158

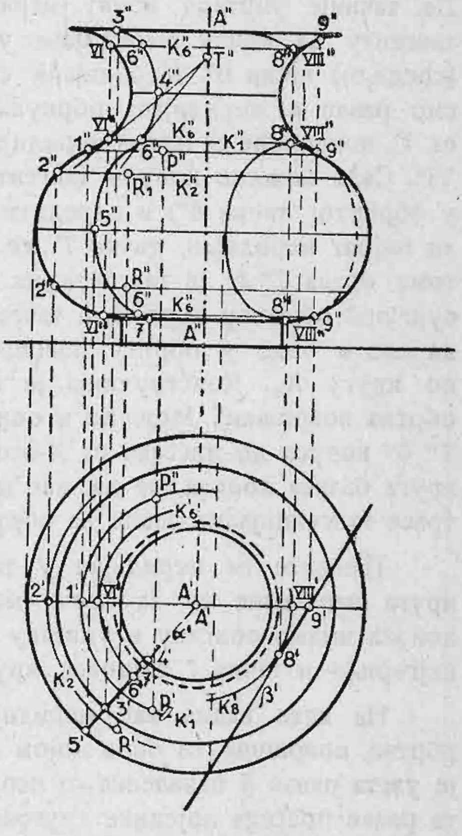
Обртна површина може да буде алгебарска или графичка, већ према томе да ли је линија која се обрће алгебарска или графичка (одређена само цртежом). До сада познајемо три обртне површине. Упознали смо обртну купу (обртни конус) и обртну облицу, које настају када се око једне праве обрће друга права. Ако се те две праве секу у коначности, настаје обртна купа, а ако се секу у бесконачности (ако су паралелне) настаје обртна облица. Трећа обртна површина коју познајемо је лопта. За лопту можемо рећи да настаје, ако се неки круг обрће око једног од својих пречника.

За све ове три површине знамо одредити пројекције, пројекције појединих њихових тачака и пресеке са равнима било да су оне управне на осу или прелазе кроз њу или да су у било ком положају према оси.

Пре него пређемо даље, да се упознамо са другим алгебарским обртним површинама (углавном елипсоидом, параболоидом и хиперболоидом, а затим и турусом). Узмимо једну графичку обртну површину.

Графичке обртне површине задате су обично својом осом и једним меридијаном паралелним са пројекциском равни, дакле видљивом контуром. Ако је меридијан просторучна крива, код задатка је обично нацртана само једна његова половина, с једне стране осе. Пошто се тачке обрћу по круговима друга је страна потпуно симетрична и то управно на осу.

Нека нам је у сл. 159 задата таква обртна површина својом осом $A - A$ управном на H и меридијаном, видљивом контуром за другу пројекцију. Уколико се тражи и прва пројекција површине, треба нацртати највећи круг, као контурни, затим најмањи, а од осталих само најгорњи и најдоњи. Све остало црта се само по потреби. Прва пројекција задатог меридијана, контурног за другу пројекцију има своју прву пројекцију на правој кроз A' паралелној са X-осом. Ако је задана друга пројекција P'' неке тачке површине, прву јој пројекцију одредимо као код лопте. Пресечемо површину равнином управном на осу, дакле хоризонталном. Раван сече површину који се у V показује као дуж K_1'', а меридијан сече у тачки $1''$. Можемо одмерити полупречник и нацртати прву пројекцију K_1' круга, или одредити $1'$, па описати исти круг. Ординатом одредимо на K_1' тражене прве пројекције. Ако је P'' видљива тачка површине, прва јој је пројекција P'. Ако је невидљива, тада P_1'. Нека је задана тачка R својом првом пројекцијом и треба да јој одредимо другу. Кроз R' повучемо круг K_2' по коме се та тачка обрће. Круг пресеца прву пројекцију контурног меридијана у тачки $2'$. Ординатом одредимо другу пројекцију $2''$ на меридијану, па кроз њу повучемо $K_2'' \parallel X$. На њему је тражена друга пројекција R''. Како на меридијану постоје две тачке $2''$ постоје и две друге пројекције тачке R. Тачка R_1'' је у првој пројекцији видљива тачка, а R'' невидљива. У другој су пројекцији обе тачке видљиве.



Сл. 159

Као други задатак на овом примеру треба да одредимо пресек задате обртне површине са равнином α која пролази кроз њезину осу, дакле нови меридијан површине у равни α. (Нацртан је само видљиви део). Раван је управна на H и када повучемо прву трасу α' равни, на њој је и прва пројекција траженог меридијана. Одмах можемо запазити тачке 3′ и 7′ у којима раван пресеца највиши и најнижи круг, као и тачке 4′ и 5′ у којима сече највећи и најмањи. Друге им пројекције одредимо ординатама. Желимо ли да између тих тачака уметнемо још коју, узмемо неку тачку 6′ на првој траси. Помоћу круга и тачке VI′ на контурном меридијану одредимо јој другу пројекцију као пре тачке *R*. У овом случају постоје у другој пројекцији три тачке 6″. Да тачније уцртамо криву меридијана пожељно је да одредимо и тангенту на криву меридијана у појединим тачкама. Одредимо је у (средњој) тачки 6″. Меридијани су сви подударни. Ако замислимо да смо раван α меридијана обрнули око осе тако да постане паралелна са *V*, поклопиће се њезин меридијан са контурним, а тачка 6″ са тачком VI″. Сада можемо повући тангенту на меридијан у тачки VI″ (заправо у обрнутој тачки 6″) и одредити њезин пресек *T*″ са осом. Вратимо ли натраг меридијан, тачка *T*″ се неће померати, јер је на оси. Према томе права *T*″ 6″ је тангента на меридијан у тачки 6″. Тачка 6 описује при обртању круг *K*, а тангента кунус са врхом у тачки *T*. Значи да смо и овде у обртну површину уписали конус који је додирује по кругу K_6. Конструкција је иста као код лопте (јер је и лопта обртна површина). Можемо и овде да продужимо контурну изводницу *T*″ 6″ конуса до пресека са *X*-осом, да одредимо тако полупречник *r* круга базиса конуса, па да, као код лопте за тачку *P*, одредимо овде трасе тангенцијалне равни на обртну површину у тачки 6.

Тангенте на меридијан у тачки 5 највећег и тачки 4 најмањег круга паралелне су са осом (место описаног и уписаног додирног конуса имамо описану и уписану додирну облицу). Тангенте у тачки 3 најгорњег и тачки 7 најдоњег круга су хоризонталне.

На исти начин као меридијан можемо да одредимо и пресек обртне површине са било којом равни паралелном са осом. На слици је узета раван β паралелна са осом, дакле управна на *H*. Тачке у којима та раван пресеца поједине кругове обртне површине узимамо и одређујемо као што смо пре узели и одредили тачку 6 приликом одређивања меридијана. Једино може да се овде појави најнижа и највиша тачка пресечне криве. То су тачке криве које су најближе оси површине. Одредимо их ако у првој пројекцији повучемо из *A*′ праву управну на раван, до пресека *B*′ са равни. Друге им пројекције одредимо као и код тачке *R*. Како су то најниже и највише тачке пресечне криве, тангенте у тачкама *B* су хоризонталне. Тангенту у било којој тачки пресечне криве одређујемо као пресек тангенцијалне равни на површину у тој тачки са равнином пресека. (Види пример код пресека торуса).

Треба одредити и да ли крива пресека долази у другој пројекцији до контуре, па одредити и контурне тачке. У првој пројекцији одмах видимо да раван β' пресеца контурни меридијан у тачки 9'. Ординатом одредимо одмах друге пројекције 9". У овом случају има их три.

Пресек обртне површине са произвољном равни нећемо овде цртати да не преоптерети слику. Тај је задатак решен у сл. 161 код торуса.

§ 67. О елипсоиду

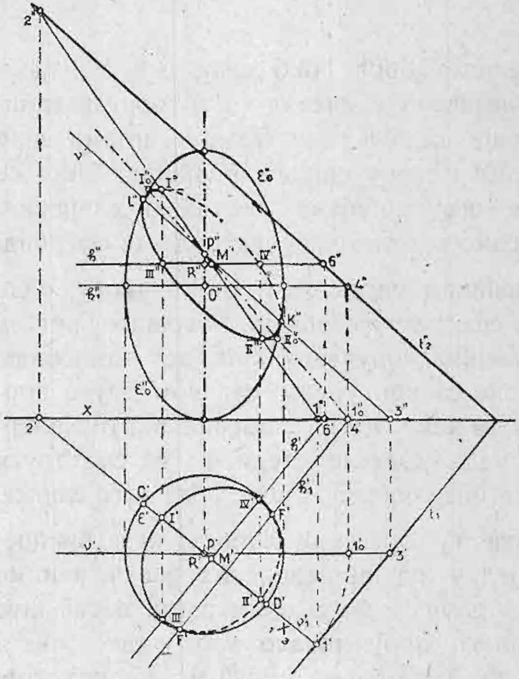
Пустимо ли да се нека елипса обрће око своје осе, добијамо нову површину (или тело) које називамо елипсоид (и то обртни елипсоид). Само у Нацртној геометрији, када и разматрамо и цртамо неко „тело“, разматрамо и цртамо само његову спољну површину. Ако се елипса обрће око своје велике осе, добијамо издужени елипсоид. Ако се обрће око мале осе добијамо спљоштени елипсоид или сфероид.

Пресечемо ли елипсоид равнином управном на његову осу, овде хоризонталном равни, као и код сваке друге обртне површине, пресек ће бити круг. Пресечемо ли равнима повученим кроз осу елипсоида, пресек ће бити елипсе подударне са контурном елипсом друге пројекције. Већ по томе можемо да кажемо да је елипсоид обртна површина и то алгебарска другог реда. Одатле следи, да ће сви други пресеци са произвољним равнима бити криве другог реда и то елипсе.

Најлакше би било одредити ту пресечну елипсу, када би пресечна раван била управна на једну од пројекциских равни, рецимо управна на вертикалницу. У том случају би се цела раван и све што је у њој, дакле и пресечна крива, пројектовало као једна права и поклапало са другом трасом равни. Тада бисмо имали исти случај који смо имали код пресека лопте са равни управном на вертикалницу (види сл. 155). Једино што је код лопте био пресек круг који се у првој пројекцији показивао као елипса, док је овде и сама крива пресека и њезина пројекција елипса. Важно је да се овде запази, да велика оса пресечне криве стоји на правој управној на прву трасу пресечне равни, дакле на нагибници равни повученој кроз прву пројекцију осе обртне површине, а њезине крајње тачке I и II да су на контури друге пројекције. У располовишту дужи I II је средиште криве. Други пречник пресечне криве је паралелан са првом трасом пресечне равни. Крајње тачке III и IV тога пречника (заправо мале осе елипсе) одредимо хоризонталном помоћном равни, као продор те хоризонталне праве кроз обртну површину.

Мало тежи је случај када имамо да одредимо пресек обртне површине са произвољном равни. Такав случај узет је у сл. 160. Код лопте смо и тај општи случај решавали као онај први већ поменути. Подесном трансформацијом, ${}_1X_3 \perp t_1'$ свели смо произвољну пресечну раван на случај пресечне равни управне на једну од пројекцисих равни. Нова, трећа пројекција потпуно је заменила другу пројекцију из случаја пресека са равнином управном на вертикалницу.

Само код елипсоида постоји једна мала потешкоћа. У трећој новој пројекцији елипсоид изгледа потпуно исто као у другој пројекцији, а то значи да бисмо морали конструисати поново исту елипсу. То треба, а и можемо избећи. Повучемо нову, трећу пројекциску раван са осом $_1X_3$ кроз прву пројекцију осе елипсоида, а управно на прву трасу t_1' пресечне равни. Помоћу нагибнице $1'$ $2'$ и њезине друге пројекције $1''$ $2''$ одредимо продор P осе елипсоида кроз пресечну раван t_1'' t_2''. Место да одређујемо трећу пројекцију елипсоида и пресечне равни, обрнемо сада ту нову пројекциску раван око осе елипсоида, тако да постане паралелна са вертикалницом. У првој пројекцији поклопиће се обрнута оса $_1X_3$ са правом повученом кроз прву пројекцију осе елипсоида, а паралелно са старом осом X. Трећа, овако обрнута пројекција елипсоида поклопиће се потпуно са досадашњом другом пројекцијом. Остаје још да одредимо и обрнуту нагибницу. Њезина тачка $1'$, када је обрнемо, биће у тачки $1_0'$. Одредимо јој и другу пројекцију $1_0''$, а како тачка P при обртању не мења свој положај (јер је на оси обртања), права $1_0''\,P''$ биће обрнута нагибница пресечне равни. То је уједно и обрнута трећа траса, односно трећа пројекција целе пресечне равни. Према пређашњем на контури елипсоида су крајње тачке I_0'' и II_0'' тога пречника пресечне елипсе. Нацртајмо у другој пројекцији кругове по којима се те тачке обрћу (то су праве паралелне са X-осом), па ће на необрнутој нагибници ($1''$ P'') бити друге пројекције тих тачака. Тако смо одредили крајње тачке једног спрегнутог пречника пресечне елипсе. Пројектујемо их и у прву пројекцију. У располовишту пречника I II је средиште M елипсе пресека. Како је пречник I II на нагибници, дакле управан на прву трасу равни, други спрегнути пречник треба



Сл. 160

да буде паралелан са првом трасом, дакле на сутражници h (хоризонтали). Крајње му тачке III и IV одредимо на познат начин, као продоре те хоризонталне праве кроз елипсоид. (На слици није та конструкција потпуно нацртана). Остаје још да одредимо контурне тачке за прву и другу пројекцију.

У другој пројекцији видимо да је тачка I у првој пројекцији видљива, а тачка II невидљива. По томе знамо да пресечна крива у првој пројекцији долази до контуре. Да одредимо контурне тачке, пресечемо и елипсоид и пресечну раван једном хоризонталном равни кроз средиште елипсоида (заправо кроз највећи круг, који је у првој пројекцији контура елипсоида). Та раван сече елипсоид по највећем кругу, који је у првој пројекцији контура елипсоида, а пресечну раван по сутражници (хоризонтали) h_1. У њиховом пресеку имамо две тражене контурне тачке F'.

У другој пројекцији видљива је тачка III, а тачка IV невидљива. Да одредимо контурне тачке K'' и L'', пресечемо елипсоид и пресечну раван $t_1' \, t_2''$, равнином кроз осу елипсоида паралелном са вертикалницом, заправо кроз прву пројекцију видљиве контуре за другу пројекцију. Пресек елипсоида је контурни меридијан друге пројекције, а пресек пресечне равни је сутражница (фронтала) v''. У њиховом пресеку су тражене контурне тачке K'' и L''.

*

§ 68. О торусу

а) О торусу у опште

Торус (прстенасто тело) је површина коју описује лопта када се окреће око једне праве. Праву $A-A$ око које се окреће лопта називамо *осом торуса*. Средиште лопте описује круг чија је раван управна на осу. Опишемо ли око сваке тачке тога круга лопту са неким сталним полупречником r, површину која додирује све те лопте називамо торусом. Одатле нам конструкција како да одредимо пројекције торуса, ако његова оса није управна на пројекциску раван (в. сл. 182).

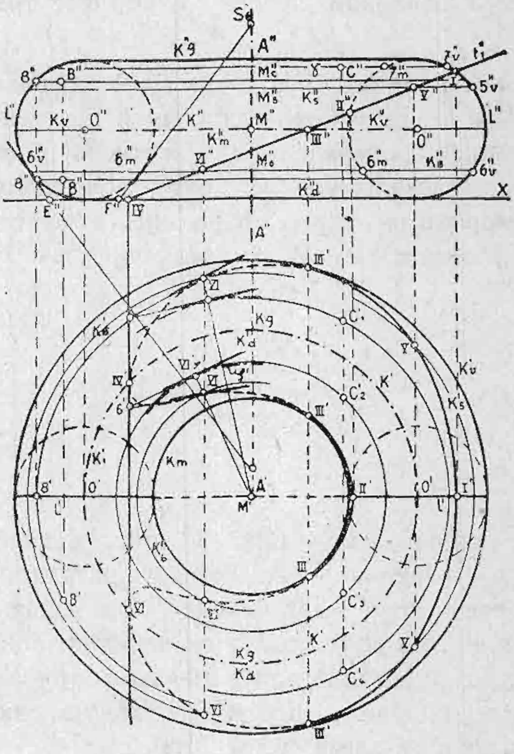
У сл. 161 нацртане су пројекције торуса чија је оса $[A-A] \perp H$.

б) Тачка на торусу

У Нацртној геометрији посматрамо само површину неког тела. Можемо стога претпоставити да торус постаје ако се око осе $A-A$ окреће један круг L чија раван пролази кроз средиште лопте и осу $A \; A$, а полупречник r му је једнак полупречнику лопте. Тај круг L је највећи круг лопте, а у II пројекцији сачињава, у овом случају, један део видљиве контуре торуса. Код обртних површина такве линије као што је овај круг називаћемо *меридианом*.

Свака тачка круга L описује при окретању око осе $A - A$ један круг. Одатле следи да је пресек торуса са равни управном на осу $A - A$ круг.

У сл. 161 где је оса $A - A \perp H$, највећи и најмањи круг K_v и K_m сачињавају видљиву контуру торуса у I пројекцији. У другој пројекцији ти се кругови поклапају са K'' другом пројекцијом круга по коме се окреће средиште O лопте или средиште круга L. Највиши и најнижи круг K_g и K_d сачињавају делове видљиве контуре торуса у II пројекцији, док се у I пројекцији поклапају са K'.



Сл. 161

Тачке тих кругова као и кругова L (са контуре II пројекције) можемо да пројектујемо из једне пројекције у другу једноставно ординатом.

Ако нам је у II пројекцији задата било која тачка C'' торуса, прву ћемо јој пројекцију најлакше одредити ако кроз ту тачку повучемо раван $\gamma \perp A - A$, заправо овде $\gamma \parallel H$. Пресек равни γ са торусом су два круга којима је средиште Mc на оси $A - A$, а чији су полупречници $r = (Mc'' \; 7_m'')$ и $R = (M_c'' \; 7_v'')$. Уцртамо ли те кругове у I пројекцији, ордината из C'' сече их у четири тачке $C_1' - C_4'$. Значи да за једну тачку друге пројекције имамо четири тачке у првој пројекцији. То је могуће стога, што је торус површина IV реда. У I пројекцији видљиве су све четири тачке, док је C'' видљива само онда, ако јој је I пројекција тачка C_4'.

Када је задата нека тачка B' (у I пројекцији), а треба да јој одредимо II пројекцију, најбоље је да повучемо хоризонтални круг на коме она лежи. Тачку $8'$ у којој тај круг пресеца L' пренесемо ординатом у II пројекцију на L''. Кроз $8''$ пролазиће II пројекција круга као права $\parallel X$, а на њој и на ординати из B' је тражена тачка B''. Како на L'' могу да буду две тачке $8''$, постоје и две тачке B''. Ако је B' видљива тачка I пројекције, друга јој је пројекција горња тачка B'', а у противном доња.

в) Раван пресек торуса

Пресечемо ли торус неком равни управном на осу, као пресечну линију добијамо два круга. Пресечна раван која пролази кроз осу пресеца торус поново по два круга, које називамо *„меридијанима“*. У оба ова случаја пресек је крива четвртог реда која се распада у две криве другог реда.

Свака друга раван сече торус по кривој IV реда. У сл. 161 пресечен је торус равни $t_1\, t_2 \perp V$. Неке тачке пресечне криве можемо одмах одредити ординатом из II пројекције. То су тачке I и II, у којима раван пресеца L''. Обе тачке су на горњој половини торуса и стога су видљиве у I пројекцији. Даље можемо одмах да одредимо прву пројекцију тачака III у којима раван пресеца највећи круг K_v и најмањи круг K_m торуса. Те су тачке уједно, и контурне тачке за I пројекцију. Делови пресечне криве III II III и III I III су у I пројекцији видљиви, а све остало је невидљиво. На крају имамо на t_1' тачке IV', где раван пресеца најнижи круг торуса. Траса t_1' је тангента на кривој пресека у тим тачкама.

Обично нам ове тачке нису довољне да тачно нацртамо пресечну криву. Нове тачке пресечне криве одредимо најлакше помоћним равнима. Помоћне равни узећемо управне на осу торуса, јер дају најједноставније пресеке, кругове. То су и у овом случају понова хоризонталне равни. Узмимо такву помоћну раван. Она сече торус по двама круговима K_6'', великом ($R = M_6''\ 6_v''$) и малом (унутрашњим) ($r = M_6''\ 6_m''$), а пресечну раван $t_1\, t_2$ по једној сутражници h. (У овом случају где је $t_1\, t_2 \perp v$, сутражница h' поклапа се са ординатом). У пресеку h' са првом пројекцијом кругова су тражене тачке VI'. На исти начин одредимо и тачке V', само сутражница не пресеца мањи круг.

Тангента у било којој тачки P криве пресека је права по којој пресечна раван $t_1\, t_2$ сече тангенцијалну раван повучену на торус у тачки P.

Да бисмо одредили тангенте на криву у тачкама VI' треба према томе да одредимо најпре тангенцијалне равни на торус у тим тачкама.

Како је торус ротациона површина, то можемо да упишемо или опишемо око њега конус који додарује торус по једном кругу. У свакој тачки тога круга имају торус и конус заједничку тангенцијалну раван. Стога тај конус називамо тангенцијалним конусом.

Хоћемо ли да повучемо тангенцијалну раван на торус у унутрашњој тачки VI, конструишемо најпре тангенцијални конус који додирује торус по унутрашњем кругу ($r = M_6'' \; 6_m''$) кроз тачку V'. Контурна изводница $S'' \; F''$ тога конуса је тангента на меридиан L'' у тачки $6_m''$. Према томе врх S_6'' конуса је на оси $A'' - A''$ као и средиште круга базиса, а полупречник круга базиса је дуж од осовине до F''. Уцртамо тај круг φ у I пројекцији и повучемо изводницу конуса која пролази кроз тачку VI'. Та изводница пресеца φ' у тачки VI'_{φ}. Тангента на круг φ' у тачки VI'_{φ} је прва траса тангенцијалне равни на конус у тачки VI', а према пређашњем и тангенцијалне равни на торус у тачки VI'. Пресек те тангенцијалне равни са равни $t_1 \; t_2$ је тангента на криву пресека у тачки VI'. Сам пресек одредимо врло лако. Једна тачка пресека је тачка у којој се секу прве трасе пресечних равни, а друга тачка је сама тачка VI'. Двема тачкама одређена је пресечна права, а тиме и тражена тангента.

Тангента на пресечној кривој у тачки VI' на већем кругу торуса ($R = M_6'' \; 6_v''$) одређена је на исти начин. Тангента у $6_v''$ на L'' сече осовину $A'' \; A''$ испод H, па је конус изврнут, а полупречник круга базиса му је од осе $A'' - A''$ до E''.

69. Завојна крива и завојна површина

а) Завојна крива

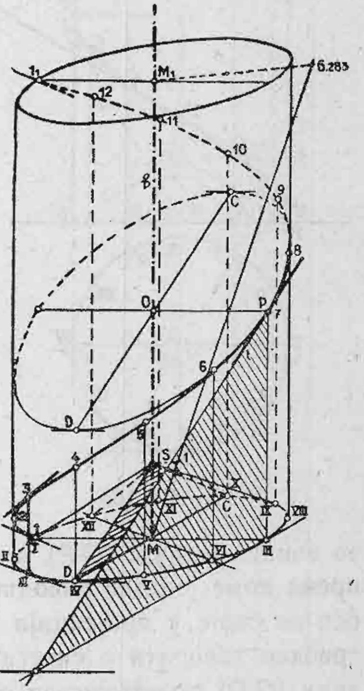
Ако се нека тачка P окреће око једне праве b, а при томе се помера у правцу праве стално за извесну дуж која је пропорционална углу обртања, добијамо једну линију коју називамо *„завојна крива“* или *„завојница“*.

Одмах видимо да се тачка P помера по ротационој облици. Праву b називамо осом. Ако је оса $b \perp H$, прва пројекција завојне криве биће круг. Пут који пређе тачка док се обрне за 360° око праве b називамо *„један ход“* завојне криве, а дуж за коју се тачка P за то време померила у правцу осе *„висина хода“* и обележавамо са h. Није тешко увидети да ће се завојна крива на развијеној површини облице (на мрежи) показати као права. Угао који она заклапа са линијом базиса на мрежи биће α, а $tg\, \alpha = \dfrac{h}{2 r \pi}$. Одатле следи да свака тангента, у било којој тачки завојне криве, заклапа исти угао α са H (јер претпостављамо да је $b \perp H$). Према томе ће све те тангенте бити паралелне са изводницама једног ротационог конуса, чије изводнице заклапају са равни базиса угао α. Ако конструишемо такав конус, конструисали смо и тангенте у било којој тачки завојне криве. Најбоље је узети да се врх налази на оси b, а да се базис поклапа са I пројекцијом криве. У том случају треба да одредимо само висину k. То је лако, јер је $k : r = tg\,\alpha$, а пошто је $tg\,\alpha = h : 2\,r\,\pi$, то значи да је

$$\frac{k}{h} = \frac{r}{2\,r\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi}$$

И сама конструкција те висине k је једноставна $2\pi = 6{,}283$. Ако је $(M_1\,M)$ висина хода h, па из M повучемо било коју праву и на њој нанесемо у било којој размери дуж 6,238, а при томе обележимо на њој и поделу 1, тада ће права из 1, а паралелна са правом $[6{,}283\ M_1]$ давати на осовини тачку S, тражени врх конуса. Овај конус називамо „*конус завојне криве*“. Саму конструкцију тангенте помоћу овог конуса показаћемо касније, када будемо говорили о конструкцији завојне криве.

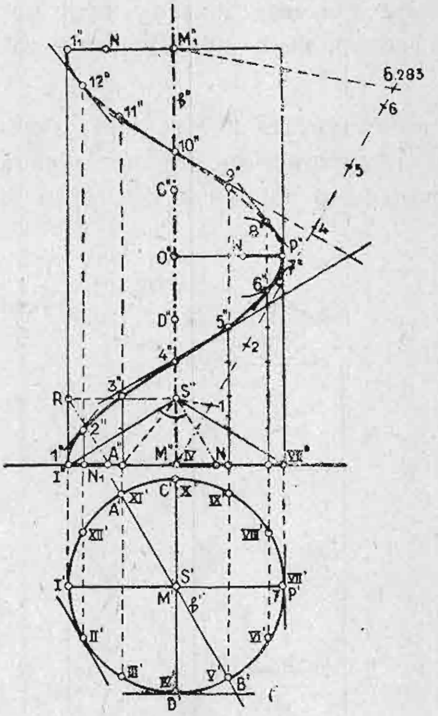
Завојну криву можемо најлакше конструисати на следећи начин. Ако нам је задана оса $b \perp H$ и прва пројекција ротационе облице по којој се обрће задата тачка P, поделимо тај круг у што више једнаких делова, и обележимо деоне тачке, па из сваке деоне тачке повучемо изводницу облице. У сл. 162 и 163 подељен је круг у 12 једнаких делова и тачке обележене бројевима I—XII. Затим поделимо и висину хода на исти број једнаких делова (овде 12 делова). Ако сада претпоставимо да је тачка I уједно и 1, почетна тачка завојне криве, па на изводници из II нанесемо један дванаести део висине хода, на изводници из III два дела, на изводници из IV три дела, добићемо на тај начин тачке 1, 2, 3, 4—12 завојне криве.



Сл. 162

Хоћемо ли да одредимо и тангенте у појединим тачкама криве, конструишемо конус завојне линије према пређашњем опису. Да одредима тангенту у тачки 7 која је обележена и са P, повучемо тангенцијалну раван на облицу у тачки 7. Тангента на круг базиса у тачки VII биће прва траса те тангенцијалне равни (в. сл. 162). Ако сада паралелно са том равни повучемо раван кроз осу конуса, односно паралелно са реченом трасом нову трасу кроз M, та нова раван сече конус по двема изводницама $[IV\ S]$ и $[X\ S]$. Једна од њих је тангента на завојну криву у тачки 7. На слици је шрафирана тангенцијална раван на облицу у тачки 7, а (у другом правцу) шрафирана је и та нова раван паралелна са њом, а повучена кроз врх конуса.

На исти начин одређена је у сл. 163 тангента у тачки 2 криве. Повучена је у I пројекцији тангента на круг у тачки II, која је уједно и прва траса тангенцијалне равни. Затим је повучена паралелно са њом прва траса паралелне равни кроз M' до пресека A' и B' са базисом конуса. Изводница $[A'' S'']$ је паралелна са траженом тангентом у $2''$. Одредимо на тај начин тангенте у свим тачкама криве, па нам је друга пројекција довољно тачно одређена. Нарочито треба да одредимо тангенте у оним тачкама криве, које се у пројекцији поклапају са осом. Оне су паралелне са контурним изводницама конуса.



Сл 163

Раније смо већ повукли тангенту у тачки P завојне криве. Повуцимо сада кроз ту тангенту неку раван, али тако да поред двеју бесконачно блиских тачака на тангенти, има још једну бесконачно блиску тачку заједничку са завојном кривом. Та ће раван бити оскулаторна раван завојне криве у тачки P, јер има са њом заједничке три бесконачно блиске тачке заједничке са кривом. Оскулаторна раван у тачки P завојне криве пролази кроз тангенту t на криву у тој тачки и кроз дуж $(O P) \perp t$, која је главна нормала криве у тој тачки, а претставља и најкраће отстојање тачке P од осе b. Оскулаторна раван сече обртну облицу завојне линије по елипси која пролази кроз P, а средиште јој је тачка O. Једна оса те елипсе је дуж $(O P)$, а друга оса $(C D)$ је паралелна са тангентом t, према томе једнака изводници конуса, дужи $(S\,\mathrm{IV})$. (У сл. 162 ове две осе не стоје у пројекцији под правим углом, па је уместо о осама требало говорити о спрегнутим пречницима). Ако уцртамо и ту осовину $(C D)$ конструисали смо оскулаторну елипсу за тачку P завојне криве. Теоријски ова елипса има само три бесконачно блиске тачке заједничке са завојном кривом, али, ако уцртамо елипсу, видећемо да се она добрим делом поклапа са самом кривом.

Ову оскулаторну елипсу можемо да искористимо при конструкцији завојне криве у ортогоналној пројекцији, да бисмо што тачније одредили криву у оним тачкама где контура ротационе облице додирује завојну криву.

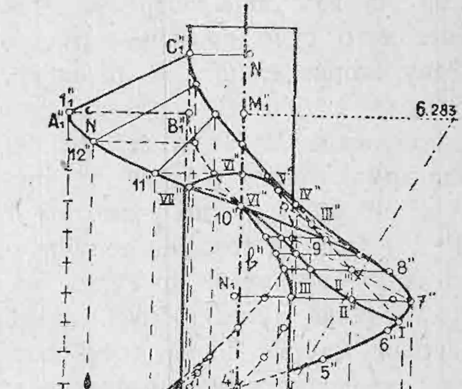
И конструкција оскулаторне елипсе у многоме је олакшана тиме, што се осе елипсе показују у пројекцији стварно као осе, јер је (P O) || V. Друга оса (C D) је паралелна са изводницом (S IV) конуса и исте дужине. Можемо је уцртати, али нам није потребна. Чак ни саму елипсу не морамо да цртамо, него само додирни круг те елипсе у крајњој тачки осе (O P). Оскулаторна елипса за тачку P'', са средиштем O'' и полуосама O'' P'' и O'' C'' или O'' D'' подударна је са елипсом са средиштем M'' и полуосама M'' 1″ и M'' S''. Да бисмо одредили полупречник додирног круга елипсе у тачки 1″, требало би да саставимо правоугаоник S'' R 1″ M'' и да повучемо из R управну на дијагоналу S'' 1″. Дуж (1″ N_1) била би тражени полупречник. Место тога можемо да повучемо из S'' управну на контурну изводницу 1″ S'' конуса, па је дуж (M'' N) једнака дужи (1″ N_1), дакле једнака траженом полупречнику додирног круга. Према томе конструкција додирног круга или тачније речено оскулаторне елипсе за тачке завојне криве на контури ротационе облице врло је једноставна. Довољно је да из врха S'' конуса завојне криве повучемо управну на контурну изводницу конуса, па је дуж (M'' N) једнака траженом полупречнику додирног круга.

б) Завојна површина

Пустимо ли да се нека права креће по завојној линији а да при томе испуњава и неки други услов, добивамо завојну (хеликоидну) површину. Сваки положај праве називамо изводницом. Ако се две узастопне изводнице секу, тада се површина може развити у једну раван, а такву површину називамо развојна површина. Ако су две узастопне изводнице витоперне, витоперан је и тај мали елемент завојне површине, па према томе и цела завојна површина. Таква се површина не може развити у једну раван и стога кажемо да је то неразвојна (завојна) површина. На пример ако нека права стално клизи по завојној линији, а при томе пролази кроз једну тачку осе, она описује завојну површину која је развојна јер се две узастопне изводнице (у овом случају све) секу у једној тачки. Ако пак нека права клизи стално једном тачком по завојној линији, а друга јој се тачка помера по оси сразмерно оној по завојници, завојна површина коју та права описује је неразвојна површина (јер се две узастопне изводнице мимоилазе). Код оваквих површина можемо разликовати два случаја. Изводница може да буде управна на осу, а може да заклапа са њом и неки други угао. Код првог случаја говоримо о нормалној завојној површини (нормалном хеликоиду), а у другом случају о косој завојној површини (косом хеликоиду).

Поред призме и облице ове се површине појављују понајчешће код свих грана инжењерске делатности. У архитектури завојне степенице, у инжењерству круна неког пута у паду са одређеном кривином нису друге неке нормалне завојне површине (нормални хеликоиди). Површина насипа (или усека) код таквог пута је коса завојна површина (кос хеликоид). Највећа им је примена у машинској техници, довољно је да споменемо завртње.

Као пример уцртана је у сл. 164 завојна површина коју описује троугао $A\ B\ C$ када се окреће око вертикалне осе b. Раван троугла пролази при том окретању стално кроз осу. Тачке A, B и C описују при окретању завојне криве од којих су криве B и C подударне, јер обе тачке имају иста отстојања од осе. Страна $A\ B$ троугла описује нормалну, а страна $A\ C$ косу завојну површину. Саме криве конструисане су потпуно исто као у слици 163. Одређен је конус завојне криве A са контурном изводницом $A''\ S''$ и криве B са контурном изводницом $B''\ S''$. Конструисани су и полупречници додирних кругова у контурним тачкама ($M''\ N$ за криву A и $M''\ N_1$ за криву B и C). Уцртане су тачке у дванаест положаја и сваки положај обележен је бројевима 1–12 али само за криву тачке A. На горњем делу, од тачке 7–12 уцртан је у сваком положају и троугао $A''\ B''\ C''$.



Сл. 164

Из саме слике одмах је јасно да нацртане криве неће сачињавати видљиву контуру завојне површине. Права $A''\ C''$ у положају 8 и 9 лежи ван тих кривих, а такође и у положају 2 и 3. Како су изводнице сразмерно ретке, уметнемо на том делу нове. На слици је уцртана једна између тачака 8 и 9 (односно 2 и 3). Видљива контура је крива која додирује све те изводнице. Та је крива конвексна према завојној површини, а додирује криве A'' и C''.

в) Пресек завојне површине

На слици је узета једна раван управна на H, па је одређен пресек завојне површине са том равни. Пресек је једна крива, коју одредимо на тај начин што из I пројекције пренесемо у другу тачке II—VI у којима раван пресеца поједине изводнице површине. (Тачку VI″ на изводници $A'' C''$ одредимо као у сл. 17 или 18). Тачке I″ и VII″ пренесемо директно на криву тачке A.

Да је раван $\perp$ V (или $\parallel$ H), конструисали бисмо криву на исти начин пренашајући тачке и друге пројекције у прву. Ако су пренете тачке сувише размакнуте, умећемо по потреби нове изводнице.

На слици је уцртана и облица са $r=(C\ b)$, па она у доњем делу заклапа завојну површину.

§ 70. Продори облица и конуса

Још у почетку смо били рекли да конуси и облице постају на исти начин као и пирамиде и призме, једино с том разликом, што полигон по коме се права креће има бесконачан број страна. Према томе и при одређивању продора служићемо се истим принципима и истим методма. Како ћемо се овде задржати у главном само на површинама II реда то значи да ће продорна крива бити крива IV реда.

Као први пример сл. 165 узећемо две косе кружне облице са базисима у хоризонталници и одредити њихов продор (задор). Десну облицу са средиштем O круга базиса називаћемо *велика облица*, а леву са средиштем O_1 *мала облица*.

Тачке продора одређиваћемо, као раније код продора призме, помоћним равнима паралелним са изводницама једне и друге облице. Да те равни одредимо узмемо било коју помоћну тачку P негде са стране и повучемо кроз њу једну праву паралелну са изводницама велике облице и једну паралелну са изводницама мале облице. (Ради уштеде у простору на слици је нацртана нова X-оса паралелна са старом, па су ту узете и тачка P и обе праве). Помоћу трагова T_1' ових правих одредимо прву трасу t_1' помоћне равни.

Како ће све равни паралелне са изводницама обеју облица имати прву трасу π паралелну са t_1', можемо да их одмах употребимо. Најпре ћемо повући $\parallel$ t_1' тангенте на оба базиса облице. Те тангенте нам јасно показују, да код овог примера имамо случај задора. Видимо да има један део изводница велике облице, а и један део изводница мале облице које не продиру кроз другу облицу.

Хоћемо ли да одредимо тачке продорне криве повучемо неку помоћну раван π_1 $\parallel$ t_1'. Прва траса те помоћне равни пресеца базис велике облице у тачкама V' и K', а базис мале облице у тачкама VII′ и VIII′. То значи да раван сече велику облицу по изводницама V' и K', а малу по изводницама VII′ и VIII′. Повучемо те изводнице и у њиховим пресецима имамо тачке 5′ 6′ 7′ и 8′. Могли бисмо сада узети било где нове помоћне равни, па бисмо помоћу сваке добили нове четири тачке продорне криве. То би било неумесно, јер ипак не бисмо одредили криву довољно тачно.

Стога ћемо одредити најпре оне нарочите (специјалне) тачке криве, које су важне, јер одређују облик и изглед продорне (задорне) криве у једној и другој пројекцији. Нарочите тачке продорне криве у главном су ове. Двојне тачке (уколико их има), тачке на последњим изводницама једне површине, које још продиру кроз другу површину и на крају, контурне тачке продорне криве.

Тангенте које смо повукли $\parallel t_1'$ на оба базиса додирују велики базис у тачки A', а мала у тачки B'. Тангента ($\parallel t_1'$) у A' пресеца базис мале облице у тачкама I′ и II′, а тангента у B' пресеца базис велике облице у тачкама III′ и IV′. По томе одмах видимо да продорна крива нема ни једну двојну тачку, јер продорна крива има двојну тачку само у случају ако две површине које се продиру имају у једној тачки заједничку тангенцијалну раван. Та тачка је тада двојна тачка продорне криве и има две одвојене тангенте.

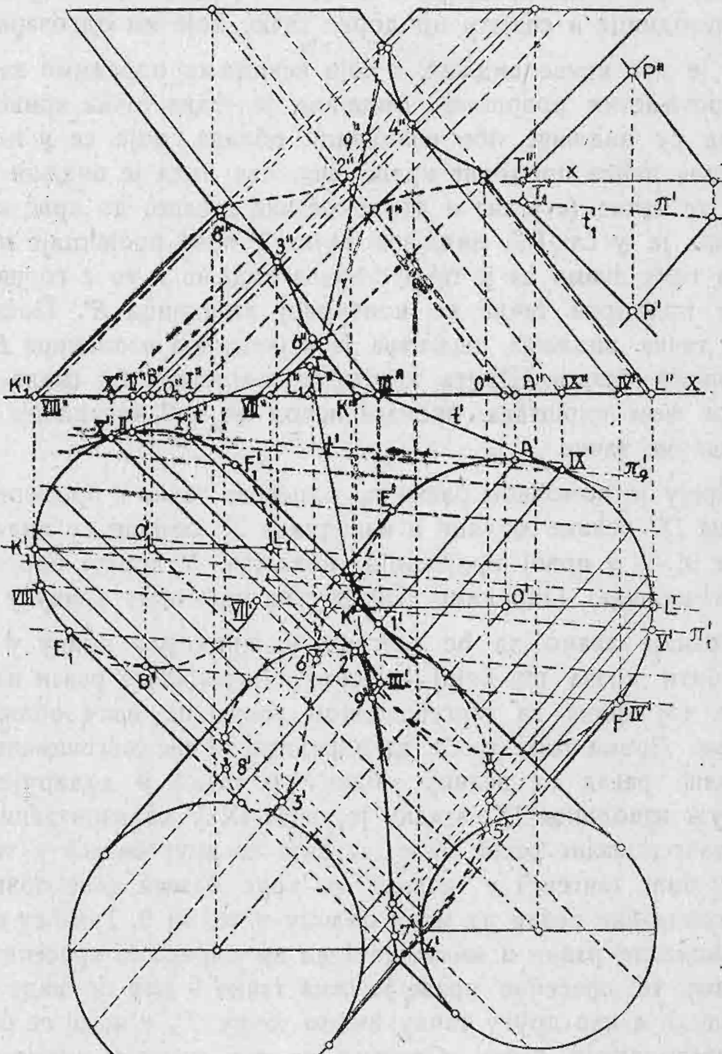
У овом случају, судећи по тангенти у A', видимо да све изводнице од I′ преко B' до II′ мале облице продиру кроз велику облицу, а онај мањи део изводница, од II′ до I′, не продире. Према томе ће продорна крива ићи од изводнице I′ до изводнице II′. Те две изводнице биће тангенте на продорну криву и то у својим продорним тачкама 1′ и 2′ (на изводници A' велике облице). Исто тако одредимо продорне тачке 3′ и 4′ изводница III′ и IV′ велике облице (у пресеку са изводницом B' мале облице), па су изводнице III′ и IV′ тангенте на продорну криву у тим тачкама. Другу пројекцију тачака 1 и 2 одредимо или ординатом на другој пројекцији изводнице A', или боље у пресеку других пројекција изводнице A'' са изводницама I″ и II″. Тачке 1 и 2 су у првој пројекцији видљиве, а у другој невидљиве.

Као нарочите тачке треба да одредимо контурне тачке продорне криве за прву пројекцију и за другу. То значи да треба да одредимо продорне тачке контурних изводница за прву и за другу пројекцију и то контурних изводница велике и мале облице. Контурне изводнице велике облице у другој пројекцији су изводнице K'' и L''. Да одредимо продор изводнице K повучемо кроз K' помоћну раван. То је раван π_1' коју смо повукли већ раније и помоћу ње одредили тражене тачке 6′ и 8′, али уједно и тачке 5′ и 6′. Одредимо и друге пројекције тих тачака, па су тачке 6″ и 8″ тражене контурне тачке. На исти начин одредимо и продорне тачке изводнице L.

Контурне тачке продорне криве у првој пројекцији на великој облици леже на контурним изводницама E' F' велике облице. Стога одредимо продоре тих изводница и то помоћном равни $\parallel t_1'$ кроз изводницу E' и помоћном равни кроз изводницу F'. Те продорне тачке пројектујемо и у вертикалницу, где ће бити обичне тачке друге пројекције продорне криве.

Потпуно на исти начин одредимо и контурне тачке прве пројекције на малој облици. Контурне изводнице су E_1' и F_1'.

Поред ових треба да одредимо и контурне тачке продорне криве у другој пројекцији. Оне ће бити продорне тачке контурних изводница K и L велике, а K_1 и L_1 мале облице. Одредимо их у првој пројекцији, па их пројектујемо у другу.



Сл. 165

Како поред ових нарочитих тачака продорне криве одређујемо сваком помоћном равни још по две обичне тачке криве, обично су саме ове тачке довољне да потпуно одреде криву продора. Ако су на неком месту тачке сувише удаљене једна од друге попунимо тачке које недостају новим помоћним равнима.

Када имамо довољан број тачака, спојимо их што правилнијом кривом. Којим ћемо редом спајати тачке овде је лакше одредити него код рогљастих површина. Довољно је почети од једне било које тачке на једној облици, видети која јој тачка базиса одговара и да ли је то горња или доња тачка продора, а затим ићи редом по базису од изводнице до изводнице и спајати продорне тачке које им одговарају.

Који је део криве видљив, а који невидљив одредимо као и код продора рогљастих површина. Видљива је једна тачка криве само у случају да су видљиве обе изводнице облица, које се у њој секу. Ако је једна тачка продорне криве видљива, тада је видљив цео део криве од те тачке (с једне и друге њезине стране) до прве контурне тачке. Тако је у сл. 165 видљива тачка 2′ прве пројекције продорне криве. По тому знамо да је тај део криве видљив и то с горње стране до горње продорне тачке на контурној изводници *E*′. Пошто је та контурна ,тачка видљива, видљива је и контурна изводница *E*′ од ње па до горњег базиса. Друга контурна изводница E_1' (мале облице), која се са њом укрштава, пролази испод ње као невидљива до прве своје продорне тачке.

На крају је помоћном равни π_9' одређена тачка 9 продорне криве. (Изводница IX′ велике облице и изводница X′ облице су видљиве, па је и тачка 9′ — у првој пројекцији – видљива. У другој пројекцији је тачка 9 невидљива). Одредимо тангенту на продорну криву у тачки 9.

Од раније знамо да ће тангента на продорну криву у њезиној тачки 9 бити права по којој се сече тангенциална раван на велику облицу у тој тачки са тангенциалном равни на малу облицу у тој истој тачки. Према томе треба да одредимо те две тангенциалне равни. Тангенциална раван на велику облицу у тачки 9 додирује велику облицу дуж изводнице IX, а како је тачка IX у хоризонталници, прва траса те тангенциалне равни биће тангента на круг базиса у тачки IX′. Исто тако биће тангента у тачки X′ на круг базиса мале облице прва траса тангенциалне равни на малу облицу у тачки 9. Тиме су одређене обе тангенциалне равни и имамо још да им одредимо пресечну праву. Једна тачка те пресечне праве је сама тачка 9 (јер припада једној и другој равни), а као другу тачку имамо тачку *T*′, у којој се секу прве трасе тангенциалних равни. Спојимо те две тачке и имамо тражену тангенту на кривој задора у тачки 9′. (Тангенту у другој пројекцији одређују друге пројекције тих истих тачака 9″ и *T*″).

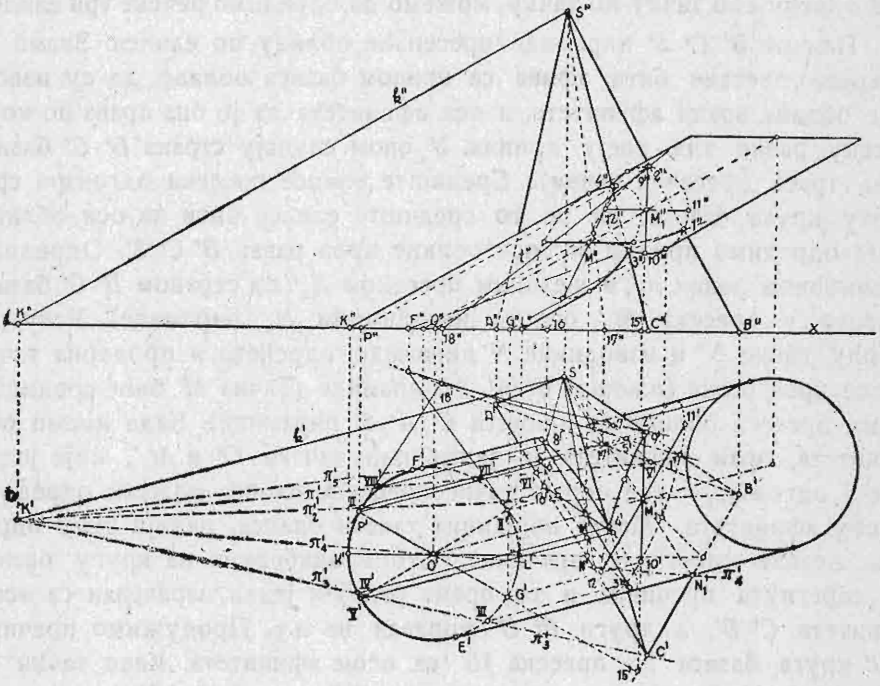
*

Као други пример продора узмемо у сл. 166 једну косу кружну облицу и неправилну тространу косу пирамиду са базисима у хоризонталници.

Помоћне равни треба да повлачимо кроз врх пирамиде а паралелно са изводницама облице да би секле обе површине по изводницама. Стога је из врха S конуса повучена у слици права k паралелно са изводницама облице и одређен њезин продор K' кроз хоризонталницу (раван базиса пирамиде и облице).

Свака права повучена у хоризонталници кроз тачку K' може да буде прва траса помоћне равни, јер ће та раван пролазити кроз врх S пирамиде и бити паралелна са изводницама облице. Сећи ће, према томе обе површине по изводницама.

Када имамо кључну тачку K' повучемо из ње „*шангенше*" на оба базиса, па одмах видимо да и овде имамо случај задора. Ивица A пирамиде не продире кроз облицу, а исто тако и мањи део изводница облице (између тачака III′ и IV′) не продире кроз пирамиду.



Сл. 166

Повучемо ли кроз K' било коју помоћну раван π_1', та ће раван сећи базис пирамиде у тачкама V′ и VI′, а базис облице у тачкама VII′ и VIII′. Саме површине пирамиде и облице сећи ће по изводницама које пролазе кроз те тачке базиса. У пресецима тих изводница имамо четири тачке 5′ 7′, 6′ и 8′ продорне криве.

Повлачећи нове помоћне равни добили би сваком од њих по четири нове тачке криве задора. Природно да ће између њих бити нарочито наглашене продорне тачке ивица B и C пирамиде. Стога их одредимо. Повучемо помоћне равни π_2' кроз B' и π_3' кроз C и из њихових пресечних тачака I′ II′, III′ и IV′ са кругом базиса повучемо изводнице облице. У њиховим пресецима са ивицама пирамиде имамо продорне тачке 1′ и 2′ ивице B' и 3′ и 4′ ивице C'.

Важно је и овде да видимо и да унапред знамо каква ће бити продорна крива и којега ће реда бити. Овде имамо задор облице и пирамиде. Како је пирамида тространа, све три стране (пљошти) пирамиде пресецаће облицу. Одатле следи да ће, у овом случају, крива задора бити састављена од (делова) трију елипса. Према томе место да наставимо са одређивањем криве задора помоћним равнима, па да тако одређујемо тачку по тачку, можемо да одредимо речене три елипсе.

Пљошт B' C' S' пирамиде пресецаће облицу по елипси. Знамо да ће крива пресека бити афина са кривом базиса облице, да су изводнице облице зраци афинитета, а оса афинитета да је она права по којој се секу равни тих двеју кривих. У овом случају страна B' C' базиса (прва траса пресечне равни). Средиште елипсе пресека одговара средишту круга базиса, па ће то средиште елипсе бити на оси облице. Стога одредимо продор M_1' осе облице кроз раван B' C' S'. Одредимо га помоћном равни π_4' и њезиним пресеком N_1' са страном B' C' базиса (заправо у пресеку M_1' осе са изводницом N_1' пирамиде). Успут је помоћу тачке N' и изводнице N пирамиде одређена и продорна тачка M' осе кроз раван (пљошт) C' A' S' пирамиде (Тачка M' биће средиште елипсе пресека облице са пљошти C' A' S' пирамиде). Када имамо осу афинитета, зрак афинитета је један пар тачака O' и M_1', које једна другој одговарају, све остале тачке пресечне елипсе можемо одредити помоћу афинитета. Место појединих тачака елипсе, радије ћемо одредити њезине спрегнуте пречнике. Стога одаберемо на кругу базиса два спрегнута пречника и то према ранијем један паралелан са осом афинитета C' B', а други P' G' управан на њу. Продужимо пречник P' G' круга базиса до пресека 15′ са осом афинитета. Како тачки O' тога пречника одговара на елипси тачка M_1', правој O' 15′ круга одговараће права M_1' 15′ елипсе, тачки P' једне праве тачка 9′ друге, исто тако тачки G' тачка 10′. Према томе пречнику P' G' круга одговара пречник 9′ 10′ елипсе. Други пречник круга паралелан је са осом афинитета,па ће и други пречник елипсе (пречник 11′ 12′) бити паралелан са њом. И како је оса афинитета (прва траса пресечне равни) $\parallel H$, показиваће се овај пречник у правој величини. Стога узмемо једноставно полупречник круга базиса и нанесемо га с једне и са друге стране средишта M_1', па имамо и крајње тачке 11′ и 12′ другог спрегнутог пречника тражене елипсе.

Тиме је тражена елипса одређена. Да би је тачније уцртали, треба да јој одредимо контурне тачке на облици. То су продорне тачке контурних изводница E' и F' облице кроз раван пљошти $B'\,C'$ (оне стварно не постоје јер пљошт не пресеца целу облицу). Ова елипса је пресек облице са равнином пљошти $B'\,C'\,S'$. Али како од те равни постоји као пљошт пирамиде само онај део између ивица $B'\,S'$ и $C'\,S'$, постојаће као стварни пресек само део елипсе између ивица $B'\,S'$ и $C'\,S'$. (Остало је танко извучено само као конструктивни део). Од тог дела елипсе видљив је горњи део између тачака 2′ и 4′, док је доњи део између тачака 3′ и 1′ (у првој пројекцији) невидљив.

Другу пројекцију одредимо најлакше помоћу тачака 15″ и M_1'', док су тачке 9″ и 10″ на изводницама облице из P'' и G''. (Тачке 11″ и 12″ одредимо ординатама на хоризонталном пречнику кроз M_1''). За другу пројекцију елипсе треба одредити и њезине контурне тачке на изводницама K'' и L''. Продоре тих изводница одредимо у I пројекцији, па их пренесемо ординатом. (На слици то није нацртано, да не терети цртеж).

Другу елипсу, пресек облице са равнином пљошти $A\,C$, одредимо на потпуно исти начин. Оса афинитета је страна $A'\,C'$ базиса, а управан на њу је пречник $U'\,V'$ круга базиса. Том пречнику 0′ 16′ круга одговара пречник $16'\,M'$ елипсе, а крајње тачке крајњим тачкама и то на изводницама облице као зрацима афинитета.

Трећа елипса, пресек са равнином пљошти $A'\,B'\,S'$ била би јако издужена, а баш мален њезин део је стварни пресек пљошти. Стога је тај малени део одређен тачка по тачка пресечним равнима, као што смо видели за тачке 5′ и 7′. Као нарочите тачке треба на том делу одредити контурну тачку за прву пројекцију. Сем тога треба одредити изводницу пирамиде која још последња продире кроз облицу, јер ће она бити тангента на елипсу. Одредимо је када из кључне тачке K' повучемо помоћну раван π_5' која додирује круг базиса облице. То је изводница 17′. Не треба заборавити, да је овај део елипсе афин кругу базиса облице, а да је оса афинитета у овом сучају права $A'\,B'$ као прва траса пресечне равни, пљошти $A'\,B'\,S'$. То може да се користи да се одреде тангенте на елипсу у тачки 2 и 1. Тачки 2′ елипсе одговара тачка II′ круга базиса. Повучемо ли тангенту t' на круг базиса у тачки II′ и то до пресека 18′ са осом афинитета, тој тангенти круга одговараће тангента 18′ 2′ у тачки 2′ пресечне елипсе. На исти начин одређена је и тангента у тачки 1′, а и њихове друге пројекције.

Поред ових помоћних равни могли бисмо у овом случају употребити и друге. Тако бисмо као помоћне равни могли узети равни паралелне са хоризонталницом. Такве равни секле би облицу по круговима подударним са кругом базиса (а са средиштима на осовини облице) а пирамиду по троугловима сличним троуглу базиса. Као треће могли бисмо употребити равни управне на вертикалницу а паралелне са изводницама облице. Оне би секле облицу по изводницама, а пирамиду по троугловима који би између себе били сви слични и колинеарни са троуглом базиса.

*

Као трећи пример узмимо у слици 167 једну косу кружиу облицу, којој је базис круг γ у вертикалници, а оса паралелна са хоризонталницом. Друга површина нека је обртни конус са базисом кругом у хоризонталници. Конус треба да додирује облицу с обе њезине стране.

Пошто нацртамо облицу у обим пројекцијама и конструишемо њезин нормални пресек δ (елипсу) у обим пројекцијама (као други базис облице), треба да одредимо пројекције конуса тако да он испуњава постављени услов, да додирује облицу у двема тачкама.

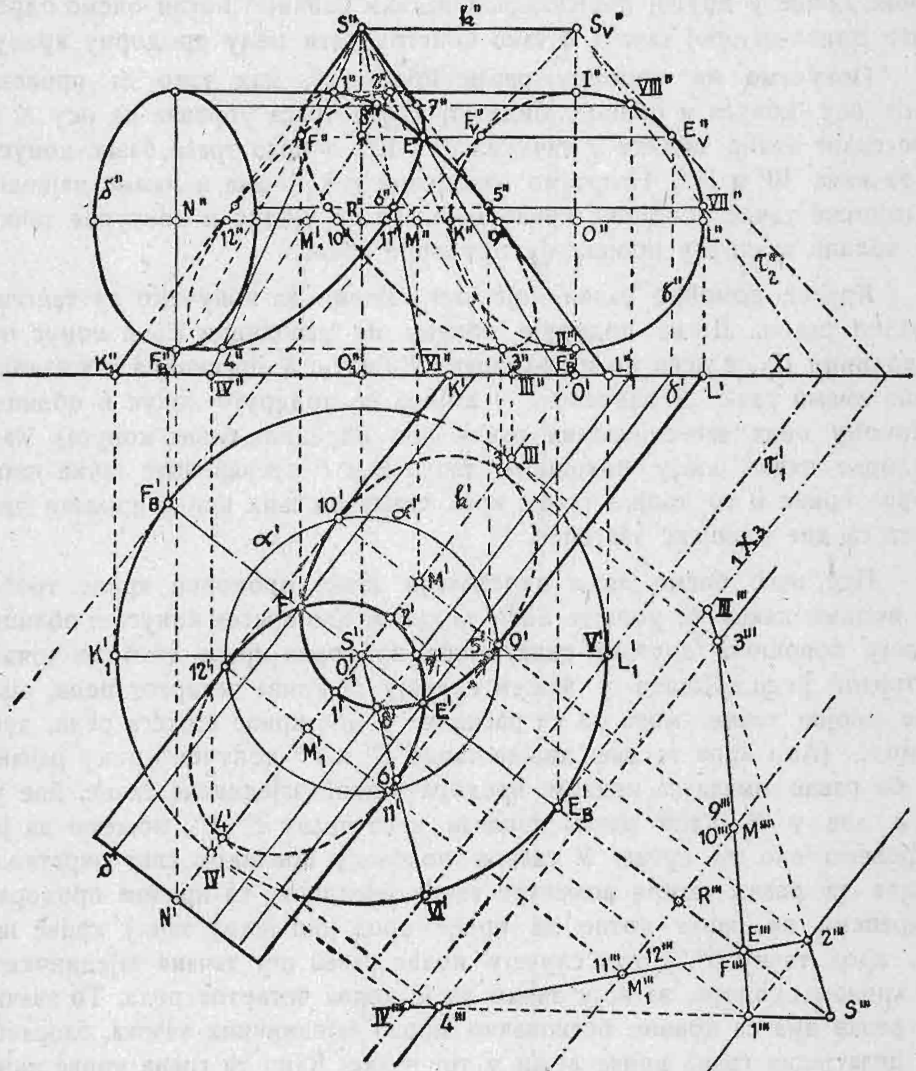
Конус је обртни са базисом у H. Да би могао додиривати облицу у двема тачкама, треба да стоји симетрично према њој. Значи да ће се прва пројекција S' врха поклапати са једном тачком пројекције осе облице. Са тачком S' поклапаће се и O', прва пројекција средишта круга базиса конуса који је у H. Узмемо S' (и O'), па тада нацртамо и другу пројекцију осе. *Како висина конуса није задата узмемо је онолику колика ће бити најподеснија.*

Остаје још да одредимо полупречник круга базиса. Одредимо га овако. Ако се облица и конус додирују у двема тачкама, треба да у тим тачкама имају заједничке тангенцијалне равни. Те ће равни додиривати облицу свака по једној изводници, а како су изводнице облице паралелне са хоризонталницом, биће и прве трасе тих тангенциалних равни паралелне са изводницама (или са осом облице). Осим тога ће се равни сећи по једној правој (k' k'') која пролази кроз врх S конуса и стоји паралелно са изводницама облице. Та права је и прва сутражница тих равни. *Повуцимо ту праву* k' k'' *и одредимо њезин продор* S_v'' *кроз вертикалницу.* Сада су нам одређене друге трасе тражених тангенцијалних равни. Оне морају пролазити кроз S_v'' и додиривати круг γ'' базиса облице. Повучемо их до пресека са осом X, па се одатле настављају прве трасе паралелно са првом пројекцијом осе облице. Те равни треба да додирују и конус. Према томе круг базиса конуса треба да додирује те прве трасе. Тим је одређен полупречник круга базиса конуса, а додирне тачке E_b' и F_b' одређују и додирне изводнице конуса. Оне стоје у I пројекцији управно на осу облице. Одредимо другу пројекцију круга базиса и нацртамо контурне изводнице K_1'' L_1'' конуса.

Тим је задатак постављен и можемо да пређемо на одређивање продорне криве. Код овог задатка имамо случај продора конуса и облице. Помоћне равни треба да пролазе кроз врх конуса и да буду паралелне са изводницама облице као код прошлог задатка. Стога повучемо и овде из врха S' S'' конуса праву k' k'' паралелну са изводницама облице и одредимо њезин продор S_V'' кроз вертикалницу, јер је вертикалница раван базиса облице. Тачка S_V'' је *„кључна тачка“*, па

ЉВ.

ће кроз њу пролазити друге трасе свих помоћних равни. Базис конуса је у хоризонталници, па би требало одредити и продор праве $k' k''$ кроз хоризонталницу. То би била *„кључна тачка“* за хоризонталницу кроз коју би пролазиле све прве трасе помоћних равни. Овде је права *k* хоризонтална (јер је паралелна са изводницама хоризонталне облице, па ће њезин продор кроз хоризонталницу бити у бесконачности. Према



Сл. 167

томе прве трасе помоћних равни биће паралелне са првом пројекцијом изводнице облице.

На слици је нацртана једна помоћна раван. Друга јој траса τ_2'' пролази кроз тачку S_V'' и пресеца круг базиса облице у тачкама VIII'' и VII″. Од њезиног пресека са X-осовином наставља се прва траса τ_1', која сече круг базиса конуса у тачкама VI′ и V′. Нацртамо изводнице V, VI, VII и VIII по којима раван сече конус, и облицу, па у њиховим пресецима имамо четири тачке 5 до 8 тражене продорне криве. Ова помоћна раван узета је тако да пролази кроз контурну изводницу конуса ($V' = L_1'$), па су тачке 5″ и 7″ контурне тачке продорне криве у другој пројекцији. Оваквим равнима могли бисмо одредити довољан број тачака и тако конструисати целу продорну криву·

Повучемо ли помоћну раван кроз S_V'', или тако да пролази кроз осу конуса и облице, биће јој друга траса управна на осу X и пресецаће базис облице у тачкама I″ и II″, а прва траса базис конуса у тачкама III′ и IV′. Нацртамо изводнице тих тачака и имамо највише и најниже тачке продорне криве 1 – 4. То су уједно и контурне тачке на облици за другу пројекцију продорне криве.

Крајње помоћне равни које још можемо да повучемо су тангенциалне равни. Десна додирује облицу по изводници E_V и конус по изводници E_B, а лева по изводницама F_V и F_B. У пресецима тих изводница имамо тачку E односно F у којима се додирују конус и облица. (Помоћу ових тангенциалних равни смо одредили базис конуса). Као додирне тачке двеју површина, тачке E и F су нарочите тачке продорне криве и то двојне тачке, кроз сваку од њих крива пролази два пута са две одвојене тангенте.

Пре него бисмо даље одређивали тачке продорне криве треба да видимо каква ће уопште бити та крива. Као пресек конуса и облице (двеју површина другога реда) мора продорна крива да буде крива четвртог реда. Пошто у нашем случају та крива четвртог реда, има две двојне тачке, мора да се распадне у две криве нижега реда, две елипсе. (Ако кроз те две двојне тачке E'' и F'' повучемо неку раван, та би раван имала са кривом продора четири заједничке тачке, две у E и две у F. Како раван пролази кроз праву $E''\ F''$, можемо да је окрећемо око те праве. У сваком положају приликом свог окретања имаће та раван четири поменуте тачке заједничке са кривом продора. Окренемо ли раван дотле да прође кроз још једну тачку криве на пр. кроз тачку 6″, у том случају имаће раван пет тачака заједничких са кривом продора, за коју знамо да је крива четвртог реда. То значи да раван има са кривом бесконачно много заједничких тачака, заправо да цела једна грана криве лежи у тој равни. Како та грана криве није нека права, а мора да лежи на површини облице, јасно је да та грана може да буде само затворена крива другог реда, овде елипса. Према томе и онај остатак криве који не припада овој грани треба да је крива другог реда. Одатле следи да је крива продора уствари крива четвртог реда, која се, пошто има две двојне тачке, распала у две криве другог реда, у овом случају две елипсе.

Када то знамо нећемо даље тражити поједине тачке продорне криве помоћним равнима, него ћемо радије одредити спрегнуте пречнике елипса. Тачке $1''$ и $2''$ су на најгорњој изводници I'' облице, а $3''$ и $4''$ на најдоњој изводници II''. Према томе пречнику I'' II'' круга базиса одговараће пречник $1''$ $3''$ једне елипсе и пречник $2''$ $4''$ друге елипсе. Средишту O'' круга базиса одговараће на оси облице средишта M'' и M''_1 двеју елипса. Са пречником I'' II'' спрегнут је на кругу базиса пречник K'' L'', па ће тим тачкама одговарати крајње тачке спрегнутих пречника обеју елипса. Да их одредимо треба да нађемо продоре изводница K и L кроз површину конуса. То може постићи помоћном равни кроз K'' и другом кроз L'', или још лакше ако облицу и конус пресечемо хоризонталном равнином кроз те две изводнице. Та раван сече облицу по изводницама K и L, које су у I пројекцији контурне, а конус по кругу α са средиштем R на оси конуса и полупречником од R'' до контуре конуса. Нацртамо прву пројекцију α' тога круга и у његовом пресеку са (контурним) изводницама K' и L' имамо тражене крајње тачке $9'$ $10'$ $11'$ и $12'$ других спрегнутих пречника елипса. Те су тачке уједно и контурне тачке за прву пројекцију.

Конструишемо речене две елипсе, па је продорна крива одређена.

Место помоћних равни паралелних са изводницама облице, а кроз врх конуса, могли бисмо одређивати криву продора хоризонталним помоћним равнима, оваквим какве смо употребили за одређивање тачака 9—12.

На крају још једна примедба. Облица и конус стоје потпуно симетрично према равни повученој кроз њихове осе. Услед тога свакој тачки продорне криве с једне стране те равни одговара симетрично једна тачка с друге стране и то тако да су две симетричне тачке на правој која је управна на раван симетрије. Према томе када бисмо у овом случају пројектовали саме површине (конус и облицу) а и продорну криву на саму раван симетрије, или на било коју другу раван паралелну са њом, на пр. на ${}_1X_3$, по две тачке продорне криве (две симетричне тачке) имале би заједничку пројекцију на тој равни. Свака тачка пројекције продорне криве била би двојна. Услед тога крива четвртог реда морала би се показати као крива другог реда. Али као све остале симетричне тачке, поклапале би се овде (на тој равни симетрије) и две двојне тачке E и F (јер су и оне симетричне). Услед тога би крива другог реда (јер би се тако пројектовала продорна крива на симетричној равни) имала једну двојну тачку (поклопљене тачке E''' и F'''), па би се распала у две праве; праву $1'''$ $3'''$ и праву $2'''$ $4'''$ које се секу у тачки E''' F'''.

На слици је узета нова пројекциска раван ${}_1X_2$ паралелна са равнином симетрије и одређена трећа пројекција конуса облице и продорне криве.

*

За вежбу, а и што ће касније имати директне примене, решен је у сл. 168 следећи задатак.

Задата су у хоризонталници два подударна круга са средиштима *M* и *N*. Та два круга нека су базиси двеју косих облица. Изводнице облице *N* заклапају у обим пројекцијама угао од 45° са осом *X*. Облица *M* задата је само у првој пројекцији, а другу јој пројекцију треба одредити уз претпоставку да се осе облица секу.

Прва пројекција *O'* тачке у којој се секу осе облица већ је одређена првом пројекцијом оса. Другу пројекцију *O''* одредимо једноставно ординатом на оси облице *N*.

Помоћне равни за одређивање тачака продорне криве, а паралелне са изводницама обеју облица овде су већ одређене. Довољно је да претпоставимо да се помоћна тачка *P* из сл. 163 поклапа са тачком *O' O''*. Осе облица су тада праве повучене из *P* паралелно са изводницама једне и друге облице. Тачке *M'* и *N'* су први трагови тих правих, па је права *M' N'* прва траса τ_1'.

Узмимо баш ту помоћну раван (кроз средишта задатих кругова). Њезина прва траса τ_1' сече кругове базиса у тачкама I' II' III' и IV', а сама раван сече облице по изводницама које полазе из тих тачака. Њихови пресеци 1' 2' 3' и 4' су четири тачке продорне криве. Лако је одредити и тангенте на криву продора у овим тачкама. Тангенте у тачкама I'—IV' су све четири паралелне, па су са њима паралелне и тангенте у тачкама 1'—4'.

Свака нова помоћна раван даће нам четири нове тачке продорне криве. Тако помоћна раван τ^1 ($\| \tau_1'$) сече базисе облица у тачкама IX'—XII'. На пресецима изводница кроз те тачке имамо четири тачке 9'—12' продорне криве.

Подесним одабирањем помоћних равни можемо да одредимо све контурне тачке продорне криве за једну и другу облицу у првој и другој пројекцији. То су нарочите тачке продорне криве. Оне су одређене и у слици наглашене кружићима, али им конструкција није извучена да не терети цртеж.

По томе што су базиси облица *M* и *N* подударни кругови, а осе облица се секу (у тачки *O*) можемо да закључимо да се облице додирују. И стварно, ако повучемо паралелно са τ_1' нову помоћну раван тако да додирује базис облице *M* у тачки V', та иста раван додирује и базис друге облице у тачки VI'. Изводнице V' и VI' секу се у тачки *E'*. Та помоћна раван је тангенциална раван за обе облице, па је тада тачка *E* тачка у којој се облице додирују и стога двојна тачка продорне криве. Паралелно са τ_1' можемо да повучемо и другу тангенту на круг базиса *M*, а та ће да додирује и базис облице *N*. У пресеку изводница кроз додирне тачке VII' и VIII' имамо тачку *F'* другу додирну тачку задатих облица и другу двојну тачку продорне криве.

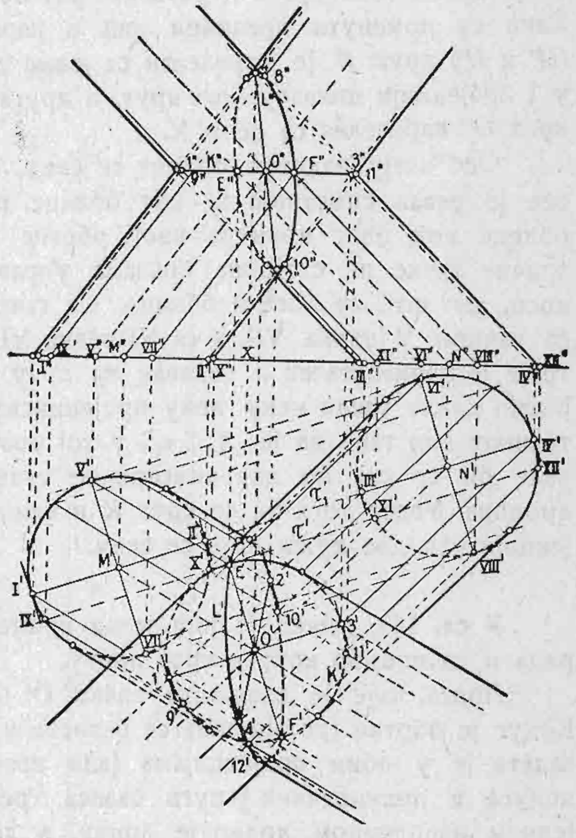
Ове две двојне тачке *E* и *F* су важне нарочите тачке криве продора. Крива продора је крива четвртог реда. Како има две двојне тачке*E* и *F*, знамо да се та крива мора распасти у две криве другог реда. Овде, пошто имамо продор двеју облица, криве могу да буду само затворене криве другог реда, дакле елипсе (или круг) *K* и *L*.

Када имамо помоћне равни, па смо већ одредили нарочите тачке продорне криве, а сада по двојним тачкама знамо карактер и ред продорне криве, можемо да одредимо, ако хоћемо, још по неку обичну тачку криве продора, па да тада нацртамо саму криву.

Међутим, када већ знамо да се крива продора као крива четвртог реда распада у две елипсе *K* и *L*, можда би било лакше (или бар свакако тачније) да одредимо те криве помоћу спрегнутих пречника.

Познато нам је да су све криве другог реда, које су повучене на некој облици афине са кривом базиса. То можемо да користимо, па да помоћу афинитета одредимо ове две криве *K* и *L*, распаднуту криву продора.

Двојне тачке *E'* и *F'* продорне криве припадају обема елипсама *K'* и *L'*, а одговарају (афине су са) тачкама V' и VII' базиса облице *M'* (односно тачкама VI' и VIII' базиса облице *N*). Како су тачке V' и VII' односно VI' и VIII' крајње тачке једног пречника круга базиса, треба и тачке *E'* и *F'* да су две крајње тачке једног пречника елипса *K'* и *L'*, а тачка *O'* њихово заједничко средиште.



Сл. 168

Са пречником V' VII' круга *M'* спрегнут је пречник I' II'' (односно са пречником VI' VIII' пречник III' IV' круга *N'*). Тим ће тачкама базиса одговарати крајње тачке пречника елипсе *K'* и *L'* и то оних пречника који су спрегнути са заједничким пречником *E'* и *F'* Повучемо изводнице облица из речених тачака и у њиховим пресецима имамо тачке 1' 2' 3' и 4'. Оне нам одређују тражене пречнике 1' 3' елипсе *K'* и 2' 4' елипсе *L'*.

Већ раније смо били одредили тангенте у тачкама 1'-4', а сада треба још да приметимо да су те тангенте паралелне све између себе, али да су паралелне и са пречником E' F', као што и треба да буде код спрегнутих пречника. Лако је уочити да пречник E' F' треба да буде паралелан и једнак са пречницима V′ VII односно VI′ VIII′ базиса. Исто тако да је пречник 1′ 3′ криве K' паралелан и једнак са пречницима I′ II′ односно III′ IV′ базиса. Одатле следи да је крива K' одређена двама спрегнутим пречницима који су под правим углом и једнаки, па да је према томе крива K уствари круг подударан са круговима базиса. Како су поменути пречници још и паралелни са круговима базиса (M' и N') круг K је паралелан са њима дакле хоризонталан. Стога се у I пројекцији показује као круг, а друга ће му пројекција бити дуж кроз O'' паралелна са осом X.

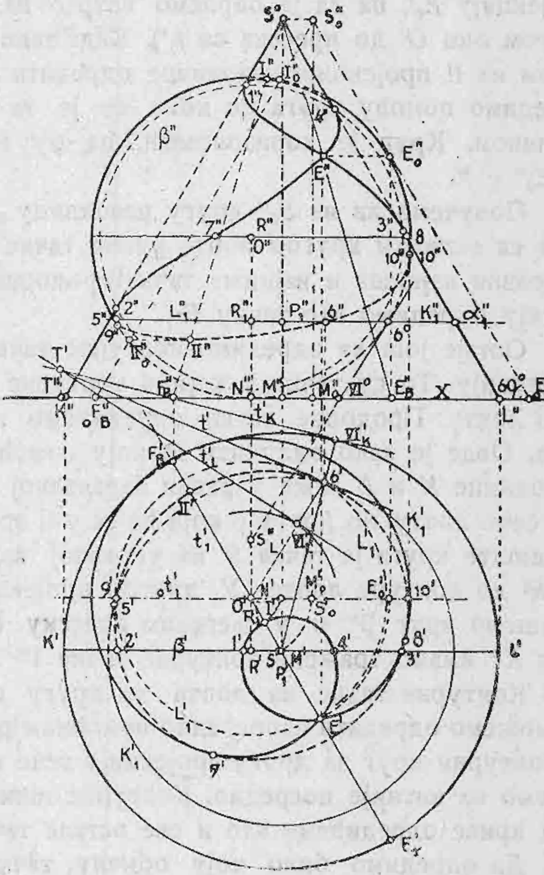
Осе двеју задатих облица се секу. Раван коју одређују ове две осе је раван симетрије за обе облице, па и за криву продора. Само облице код овог примера нису обртне него косе. Услед тога симетричне тачке не стоје на правама управним на раван симетрије него косо, као што су косе и облице. Са тачком E је симетрична тачка F, са тачком V тачка VII, а са VI тачка VIII. Према томе правац симетрије је хоризонталан и управан на прву трасу равни симетрије. Када бисмо дакле узели неку нову пројекциску раван управну на хоризонталницу али тако да је ${}_1X_3 \parallel \tau_1'$, у тој новој пројекциској равни поклапале би се све по две симетричне тачке облица, па и тачке криве продора. Услед тога би се крут K и елипса L показивале у новој пројекцији као две дужи које се секу.

*

У сл. 169 решен је још један пример продора површина другог реда и то продор конуса кроз лопту.

Лопта, чије је средиште тачка O' O'', стоји на хоризонталници. Конус је обртни (ротациони) са базисом у хоризонталници. Оса конуса задата је у обим пројекцијама (као права управна на H), али врх конуса и полупречник круга базиса треба изабрати тако да конус једном изводницом додирује лопту, а да му изводнице заклапају са хоризонталницом угао 60⁰.

Раван повучена кроз осу конуса и средиште лопте је раван симетрије за обе површине. Како само једна изводница конуса додирује лопту, мора та изводница да лежи у равни симетрије. (Да је ван равни требало би одмах да постоји и друга симетрична са њом). Раван симетрије пролази кроз средиште лопте O и кроз осу конуса M. Услед тога је $\perp H$, а прва јој траса t_1' пролази кроз прве пројекције O' и M' S'. Та раван сече лопту по великом кругу, а конус по (оси и) двема изводницама F_B S и E_B S, од којих удаљенија E_B S додирује лопту заклапајући при том угао од 60⁰ са H. Пошто t_1' није $\parallel X$, неће се ни велики круг лопте ни углови изводница показивати у II пројекцији у правој величини. Да би смо их могли уцртати требало би или оборити раван симетрије H око t_1' или одредити њезину III пројекцију на некој новој пројекциској равни ${}_1X_3 \parallel t_1'$. Место тога можемо обрнути ту раван да постане паралелна са вертикалницом. Обрнућемо је око вертикалне праве повучене кроз средиште лопте. Обрнута раван биће у првој пројекцији права ${}_0t_1'$ повучена кроз O', паралелно са осом X. Обрнемо и тачку M' око O' док и она не дође на обрнуту трасу равни. Из тако обрнуте тачке M_0' одредимо ординатом њену другу пројекцију M_0'', а одмах затим нацртамо и другу пројекцију обрнуте осе. Круг по коме раван t пресеца лопту поклопиће се (овако обрнут) са видљивом контуром лопте у II пројекцији. Према томе можемо сада у овако обрнутој равни нацртати и изводнице ${}_0E_B''\ S_0''$ и ${}_0F_B''\ S_0''$ по којима раван t пресеца конус. Изводницу ${}_0E_B''\ S_0''$ одредимо ако нацртамо праву тако да заклапа са X-осом угао од 60^0, а додирује лопту. Додирна тачка E_0'' је тачка у којој се према задатку морају додиривати лопта и конус. Тачка S_0'', у којој права пресеца другу пројекцију обрнуте осовине конуса, је обрнути врх конуса. На крају пресек ${}_0E_B''$ те праве са осе X је једна тачка базиса конуса, док је дуж $M_0''\ {}_0E_B''$ права величина полупречника круга базиса.



Сл. 169

Када имамо тај полупречник можемо нацртати прву пројекцију круга базиса за конус. У његовом пресеку са t_1' су тачке E_B' и F_B', а ординатама можемо на X-оси да им одредимо друге пројекције као и друге пројекције тачака L и K за контурне изводнице конуса. Врх конуса S_0'' нам је одређен у обрнутој равни. Пошто при обртању не мења висину, можемо да му одредимо праву другу пројекцију S''. Она је на необрнутој оси и на самом кругу обртања, правој из $S_0'' \parallel X$.

Када имамо базис и врх S'' конуса задатак је постављен, па можемо да нацртамо изводнице које смо помињали и да пређемо на одређивање криве продора.

Најпре да одредимо специјалне тачке, јер их већ имамо у окренутој равни. То је, као најважнија, тачка E у којој се две површине додирују, па ће ради тога бити двојна тачка продорне криве. Ту тачку већ имамо у обрнутој равни t. Можемо ординатом да јој одредимо прву пројекцију E_0', па да је обрнемо натраг на изводницу $E_B'\ S'$ (заправо кругом око O' до пресека са t_1'). Када тако одредимо E' можемо ординатом на II пројекцији изводнице одредити E''. Тачније можемо E'' да одредимо помоћу круга по коме се је та тачка E окретала скупа са равнином. Круг је хоризонталан, па му је друга пројекција права из $E_0'' \parallel X$.

Повучемо ли из S_0'' другу изводницу $_0F_B''$ конуса у њеном пресеку са великим кругом лопте имамо тачке I_0'' и II_0''. То су у обрнутој равни највиша и најнижа тачка продорне криве. Прву и другу пројекцију одредимо као тачку E.

Остаје још да одредимо контурне тачке продорне криве за другу пројекцију. То су тачке у којима контурне изводнице K и L продиру кроз лопту. Продорне тачке одредићемо као обично помоћним равнима. Овде је лако одлучити се коју помоћну раван да употребимо. Изводнице K и L леже у равни паралелној са вертикалницом, а та раван сече лопту по кругу β који ће се у II пројекцији показати као круг. Средиште круга је тачка R' на управној из O', а полупречник му је од R' до контуре лопте. У другој пројекцији R'' се поклапа са O''. Опишемо круг β'' и у његовом пресеку са контурним изводницама L'' и K'' имамо тражене контурне тачке $1''$ $2''$ $3''$ и $4''$.

Контурне тачке на лопти за другу пројекцију продорне криве не можемо одредити непосредно помоћном равни, јер раван $\parallel V$ у којој је контурни круг за другу пројекцију сече конус по хиперболи. Одредићемо их касније посредно. Контурне тачке на лопти за прву пројекцију криве одредићемо као и све остале тачке.

Да одредимо било коју обичну тачку криве продора узећемо као и раније помоћне равни. Може да се постави питање које равни. Помоћне равни кроз врх конуса као што смо до сада употребљавали код продора биле би овде незгодне, јер секу лопту по круговима који се у пројекцијама показују као елипсе. Могле би се употребити равни кроз осу конуса, али би их требало сваку понаособ обртати да постану $\parallel V$. Равни $\parallel V$ нису подесне јер, (сем једне коју смо већ искористили за контурне тачке) секу конус по хиперболама. Остају још равни паралелне са хоризонталницом. Оне секу и лопту и конус по круговима, који се у хоризонталници показују у правој величини. Тако је узета и на слици обележена хоризонтална помоћна раван α_1'' Она сече конус по кругу K_1 коме је средиште P_1'' на оси, а полупречник од P_1'' до обележене тачке на контури конуса. Исто тако сече лопту по кругу L_1 коме је средиште R_1'' на вертикали из O'', а полупречник му је дуж $R_1''\,6^0$. Средишта тих кругова поклапају се у I пројекцији са O' односно S' Нацртамо их и у њиховом пресеку имамо две тачке $5'$ и $6'$ криве продора.

Свака нова помоћна раван даће нам по две нове тачке криве продора, па тако можемо одредити повољан број тачака. Како имамо највишу тачку I и најнижу тачку II продорне криве, знамо одакле докле треба да узимамо помоћне равни, ако узмемо више или ниже пресечни кругови (L и K) неће имати реалних заједничких тачака.

Помоћна раван коју повучемо кроз средиште лопте сећи ће лопту по великом кругу дакле кругу који је у I пројекцији видљива контура лопте, па ће тачка $7'$ и $8'$ на њему бити контурне тачке продорне криве у I пројекцији.

Када смо одредили довољан број тачака спојимо их у првој пројекцији. Права коју повучемо кроз $O' \| X$ пресеца ту криву у двема тачкама $9'$ и $10'$. Како је речена права делимично прва пројекција круга који је у вертикалници видљива контура лопте, тачка $9''$ и $10''$ су контурне тачке продорне криве на другој пројекцији лопте. На овај начин можемо увек да одредимо индиректно контурне тачке, када директно одређивање захтева много конструкције.

Одредимо на концу и тангенту у тачки 6 продорне криве. Тангента ће и овде бити пресек тангенцијалне равни на конус у тачки 6 и тангенцијалне равни на лопту у тачки 6. Тангенцијална раван на конус додириваће конус по изводници VI_K кроз тачку 6, а одређује је та изводница и тангента t_K' на круг базиса у тачки VI_K'. Та је тангента уједно и права траса тангенцијалне равни на конус. Тангенцијална раван на лопту у тачки 6 одређена је овде помоћу конуса, који додирује лопту по кругу L_1 на коме је тачка 6. Контурна изводница тога додирног конуса у другој пројекцији треба да додирује лопту у тачки 6^0 (контурној тачки круга L_1 у другој пројекцији). Сама та тангента на лопту потпуно одређује додирни конус. Врх S_L'' му је на оси на вертикалној правој кроз средиште лопте O'', а базис је круг у хоризонталници са средиштем N'' и полупречником $N''\,\mathrm{VI}^0$. Опишемо (делимично) тај круг базиса у I пројекцији и уцртамо изводницу $6'\,N'$. Том изводницом одредимо на базису тачку VI_L', која одговара тачки 6 додирног конуса. Тангенциална раван, која додирује тај додирни конус дуж изводнице $6'\,N'$, додирује и лопту у тачки 6. Повучемо њену прву трасу, тангенту t_L' на круг базиса у тачки VI_L'. Тим је одређена тражена тангента, јер као пресек ових двеју тангенцијалних равни, пролази кроз тачку $6'$ и тачку T' у којој се секу две прве трасе t_K' и t_L' тангенцијалних равни.

Продорна крива је и у овом случају крива четвртог реда, која у E има једну двојну тачку. Она се у обим пројекцијама и показује као крива IV реда. Конус и лопта имају једну раван симетрије. То је раван t_1' о којој смо у почетку говорили, а која пролази кроз осу конуса и средиште лопте. И тачке продорне криве биће симетричне према овој равни. Стога ће се пројекције тачака продорне криве на тој равни симетрије, или којој другој паралелној са њом, поклапати све две и две. Пројекција продорне криве састојаће се према томе од самих двојних тачака, па се мора показивати као крива другог реда, у овом случају парабола.

За вежбу могли бисмо одредити трећу пројекцију криве продора на неку раван ${}_1X_8 \| t_1'$ или решити цео задатак тако постављен да је та симетрална раван t_1' паралелна са вертикалницом.

*

Задаци које смо до сада решавали били су теоријски нарочито прва два. Површине су постављене потпуно произвољно без икакве везе са површинама какве се употребљавају у инжењерској пракси. И решавали смо их углавном теориски, равнима које обе површине секу по изводницама. Успут смо указивали и на друге метода решавања. У инжењерској пракси, када се појављују овакве површине, облице, конуси, лопте и обртне површине обично имају неки нарочити положај: или су вертикалне или хоризонталне (јер их је у пракси лакше тако извести). Када их треба претставити цртежом и решити у цртежу неки проблем на њима, дајемо им неки нарочити положај према пројекциским равнинама или управно на њих или паралелно са њима. Природно да такав нарочити (свакако једноставнији) положај тих површина омогућава и једноставнији начин решавања постављених задатака. Циљ је низа идућих примера продора облих површина да нас упознају са тим формама и проблемима из инжењерске праксе.

Први примери сл. 170 нека буду у неку руку прелазни. Као први пример нека нам је задата једна обртна облица са кругом базиса у H и осом A-$A \perp H$ и једна обртна облица са осом B-$B \| H$.

Цела вертикална облица показује се у I пројекцији као круг (јер су јој изводнице $\perp H$), па се ради тога одмах види узајамни положај ових двеју задатих облица. Види се да облице имају заједничких тачака, да све изводнице хоризонталне облице продиру кроз вертикалну, према томе да овде имамо случај продора (а не задора). Видимо још да контурна изводница за прву пројекцију хоризонталне облице, додирује у тачки I' вертикалну облицу. Како се тачка I налази и на једној изводници вертикалне облице, постоји раван која пролази кроз те две изводнице и додирује (баш по тим изводницама) обе облице. Значи да се две облице додирују у тачки I, па ће тачка I бити двојна тачка продорне криве. Крива ће кроз њу пролазити два пута и имати у њој две одвојене тангенте.

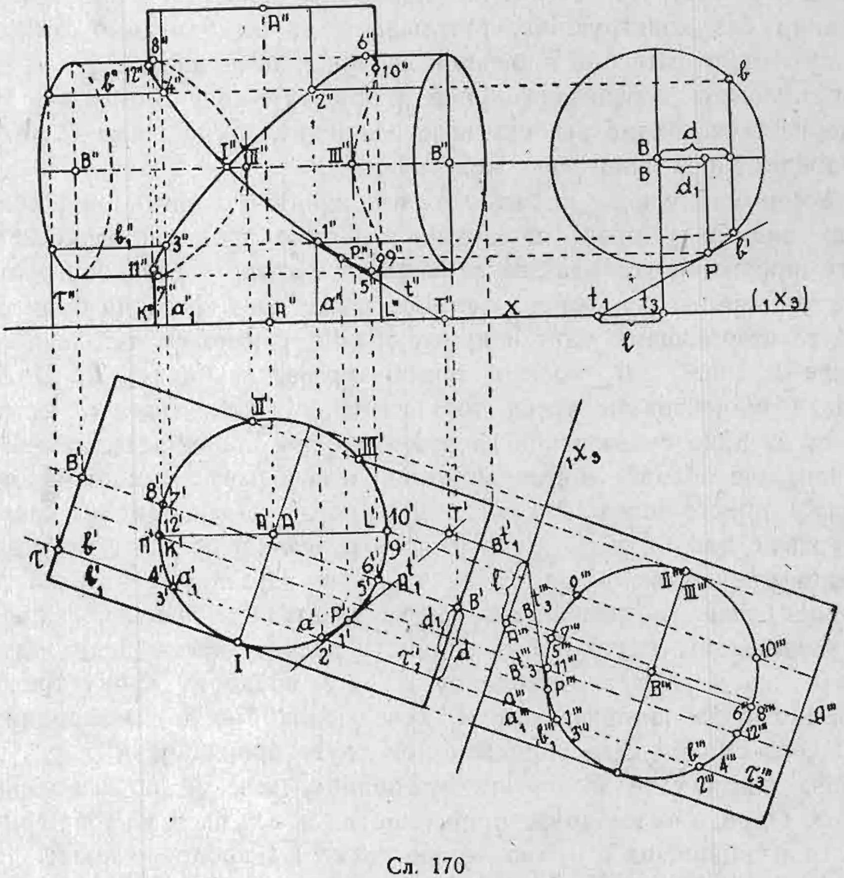
Тачку I можемо да одредимо лако ординатом у другој пројекцији, јер знамо да се контурне изводнице прве пројекције поклапају у другој пројекцији са осом $B''-B''$ облице. У првој пројекцији имамо, без икакве конструкције, и тачке II′ и III′ у којима друга контурна изводница хоризонталне облице продире кроз вертикалну облицу. Другу пројекцију тих тачака II″ и III″ одредимо као и тачку I″. На исти начин можемо да одредимо и продорне тачке контурних изводница за другу пројекцију хоризонталне облице. То су најгорња и најдоња изводница облице, које се у првој пројекцији поклапају са осовином облице. Њихове продорне тачке $5'\,6'$ и $7'\,8'$ видимо одмах у првој пројекцији, а друге пројекције одредимо ординатама.

То су уосталом све тачке продорне криве које смо могли да одредимо без конструкције. Могли смо да их одредимо само зато, што су нам познате обе пројекције њихових изводница, а услед нарочитог положаја вертикалне облице (пројектује се у H цела као круг) продорне тачке имамо већ одређене. Ни једну другу тачку не можемо да одредимо без било какве конструкције.

Узмимо таку неку произвољну изводницу b' хоризонталне облице. Одмах видимо у првој пројекцији и њезине продорне тачке $2'$ и $4'$. Друге пројекције тих тачака не можемо одредити без конструкције. Стога је најбоље да узмемо помоћну раван. Ова треба да буде паралелна са изводницама једне и друге облице, а како су изводнице вертикалне облице $\perp H$, мора и помоћна раван да биде $\perp H$. Цела ће се раван пројектовати услед тога на својој првој траси τ_1' и поклапати са b'. Како су на слици нацртана у обим пројекцијама оба базиса хоризонталне облице, могли бисмо користити раван једнога од базиса за даљу конструкцију. Види се у I пројекцији да помоћна раван τ_1' сече раван овог базиса. Сече је по вертикалној правој τ' чију другу пројекцију τ'' можемо одмах да уцртамо. Права τ је заправо траса помоћне равни на равнини базиса хоризонталне облице. Она пресеца другу пројекцију круга базиса облице у двема тачкама. Једна од њих је тачка на базису за изводницу b чију продорну тачку тражимо. Природно је да помоћна раван τ_1' сече облицу по двема изводницама b' и b_1', па смо им сада одредили две друге пројекције b'' и b_1''. Иста помоћна раван сече и вертикалну облицу, сече је по изводницама a' и a_1'. Одредимо им друге пројекције a'' и a_1'', па у њиховим пресецима са изводницама b имамо четири тачке 1-4 продорне криве.

Само овако одређене тачке продора нису довољно тачне. Друге пројекције изводница b смо одредили пресеком елипсе са једном правом. Тај пресек је нетачан (а још нетачнији би био да смо изводницу b' узели ближе контурној изводници). Да ту нетачност избегнемо, а и да не цртамо елипсу у II пројекцији, ако случајно није већ нацртана као овде, најбоље је узети нову пројекциску раван и то управну на осу хоризонталне облице и одредити трећу пројекцију. За тако узету осу ${}_1X_3$ трећа пројекција вертикалне облице биће потпуно иста као и друга пројекција, само ће контурне изводнице бити друге.

(Контурна је постала изводница на којој је додирна тачка I). Трећа пројекција хоризонталне облице биће круг са средиштем B''', трећом пројекцијом осе. Помоћна раван сећи ће ову нову пројекциску раван по једној правој управној на осу ${}_1X_3$. Та права је τ_8''', уствари трећа траса саме помоћне равни. Сада имамо прву и трећу пројекцију облица и прву и трећу трасу помоћних равни. Из прве пројекције видимо да помоћна раван сече вертикалну облицу по изводницама a и a_1 (τ_1' пресеца круг базиса у тачкама a' и a_1'). У трећој пројекцији видимо да τ_3''' пресеца базис хоризонталне облице у тачкама b''' и b_1'''. По томе



Сл. 170

знамо да помоћна раван сече хоризонталну облицу по изводницама b и b_1. Само сада можемо потпуно тачно да нацртамо у другој пројекцији те две изводнице b'' и b_1'', јер у трећој пројекцији имамо њихову тачну висину над хоризонталницом (или – што је лакше одмеравати – висинску разлику изводница b'' и b_1'' према другој пројекцији осе B облице). У пресеку тих изводница a и b имамо сада тачно одре ђене тачке $1''$ – $4''$ криве продора.

Узмемо ли нову помоћну раван добићемо нове четири тачке продорне криве. Важно је да одредимо контурне тачке на вертикалној облици за другу пројекцију продорне криве. Да их одредимо повучемо помоћну раван кроз изводницу K'. (Висинску разлику тих тачака 11 и 12 према оси B видимо у трећој пројекцији, па је нанесемо на K'' изнад и испод $B''-B''$). Помоћна раван кроз L одредиће нам тачно контурне тачке $9''$ и $10''$.

Када смо одредили све нарочите тачке и довољан број обичних тачака криве продора можемо да нацртамо саму криву. То је спајање овде олакшано тиме што у првој пројекцији можемо директно да читамо која је тачка са којом спојена. Поред тога знамо да је крива четвртог реда и да ће се у првој пројекцији, а и у трећој показивати као круг дакле као крива II реда.

У слици је узета у првој пројекцији било која тачка P' продорне криве, па треба да одредимо тангенту на криву продора у тој тачки.

Помоћном равни кроз P' одредимо P''', а тиме висину тачке P'' над хоризонталницом. Сада треба да повучемо тангенцијалне равни на обе облице у тачки P. Тангенцијална раван на вертикалну облицу у тачки P је пројектна раван, а прва јој је траса ${}_At_1'$ тангента на круг базиса у тачки P'. Тангенцијалну раван на хоризонталну облицу одредимо исто тако у трећој пројекцији. Само код ове тангенцијалне равни поред треће трасе ${}_Bt_3'''$ треба да одредимо и прву трасу ${}_Bt_1'$, јер ћемо у пресеку првих траса ${}_At_1'$ и ${}_Bt_1'$ имати тачку T', која нам поред тачке P одређује тражену тангенту. (Тангенцијална раван додирује хоризонталну облицу по изводници кроз тачку P. Та је изводница хоризонтална и по томе прва сутражница тангенцијалне равни. Стога је прва траса ${}_Bt_1'$ паралелна са првом пројекцијом изводнице).

Када је задатак решен, видимо да нам је трећа пројекција служила само зато да би што тачније одредили висину изводница b хоризонталне облице. Место тога могли бисмо да замислимо негде са стране окренут базис хоризонталне облице са средиштем B на продуженој другој пројекцији осе. Када повучемо помоћну раван τ_1' кроз изводнице a' и a_1' да одредимо висину изводнице b и b_1 можемо урадити ово. Узмемо хоризонтално растојање од τ_1' до B' B', па ту дуж d нанесемо од тог средишта круга B по хоризонталном пречнику и из крајње тачке повучемо вертикалу. У пресецима те вертикале са кругом имамо тачке које одређују изводнице b и b_1. Исто тако помоћу хоризонталног отстојања d_1 одређена је висина тачке P. И тангенту у P можемо да одредимо горе на кругу. Повучемо тангенту t_3 и гледамо где она пресеца осу X. Хоризонтално отстојање l од пресечне тачке t_1 до средишта B круга можемо да нанесемо у I пројекцији од осе $B'-B'$, па смо одредили положај прве трасе ${}_Bt_1'$.

Овај круг са средиштем B на продуженој оси B'' можемо да сматрамо према томе или као окренути базис хоризонталне облице, или као трећу пројекцију за нову осу ${}_1X_3$ нацртану најпре на уобичајено место, а тада пренету скупа са осом ${}_1X_3$ и постављену тако да се ${}_1X_3$ поклапа са X-осом.

*

Као други пример нека је у сл. 171 задата понова иста хоризонтална облица, а место вертикалне облице кос кружни конус са базисом у хоризонталници. Треба да одредимо криву задора и тангенту у било којој тачки те криве.

Код овог задатка можемо да одредимо криву продора углавном на два начина. Можемо да употребимо као помоћне равни, равни које пролазе кроз врх конуса а стоје паралелно са изводницама облице, а можемо да употребимо као помоћне равни и равни паралелне са хоризонталницом.

Равни паралелне са H секу конус по круговима са средиштима на оси конуса. Одредимо на оси прве пројекције средишта тих кругова, па можемо да нацртамо кругове. Као контролу тачности гледамо да ли ти кругови додирују обе контурне изводнице I пројекције. Исте равни секу облицу по двема изводницама. Прве пројекције тих изводница одредимо најтачније помоћу хоризонталног отстојања од осе облице, а то отстојање одредимо на обрнутом кругу базиса као код прошлог задатка.

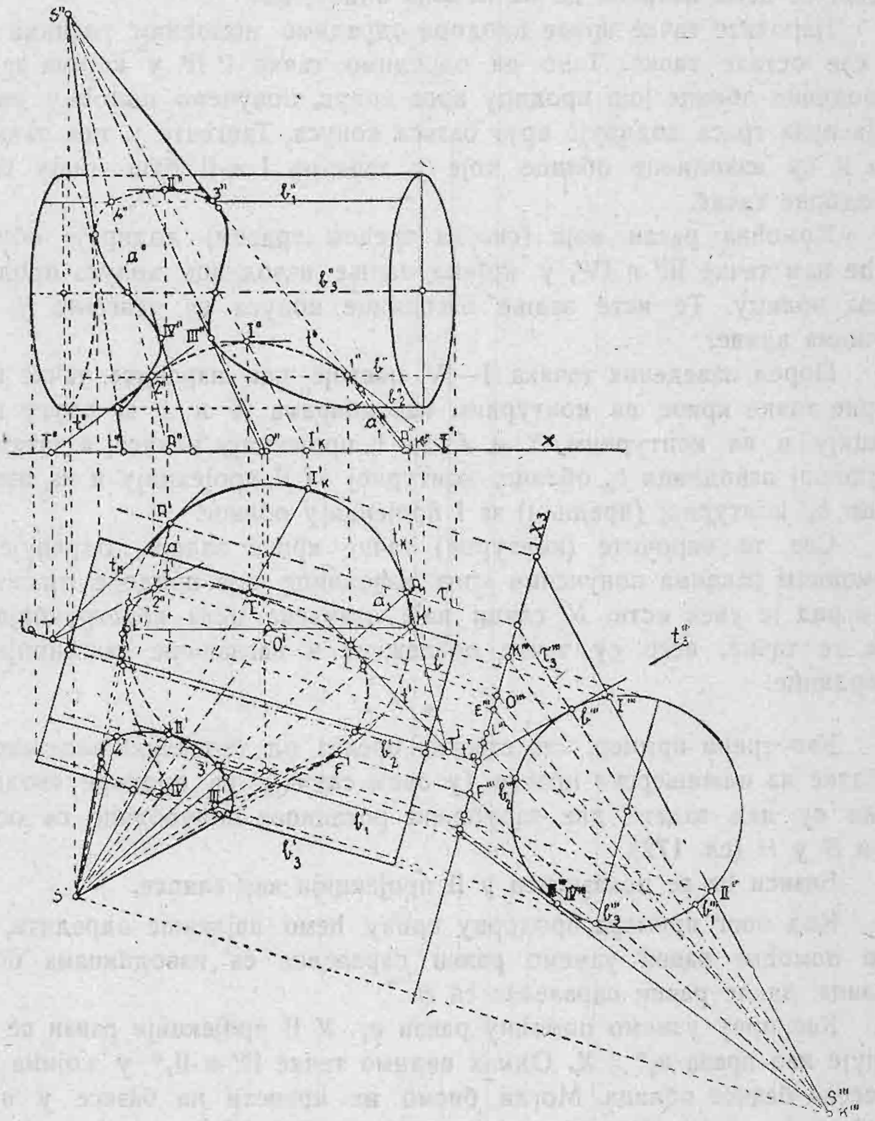
Ове помоћне равни не би биле подесне. У тачкама I′ и II′ изводнице облице додирују пресечни круг конуса. У суседним тачкама изводнице секу кругове, али су пресеци несигурни, јер су изводнице облице скоро тангенте на круг. Код овог примера заклапају и ординате са првом пројекцијом осе конуса сразмерно мален угао. Када би тај угао био још мањи, нетачна би била и средишта пресечних кругова на конусу. Услед ових нетачности добивене тачке неби давале тачну и мирну криву четвртог реда.

Али главна потешкоћа у раду са хоризонталним помоћним равнима у овом случају (а и сличним) је та, што помоћу њих можемо да одредимо само контурне тачке на облици, а остале нарочите тачке не можемо.

Из тих разлога задатак је решаван помоћним равнима паралелним са изводницама облице, а кроз врх конуса. За рад с оваквим равнима треба одредити кључну тачку и имати базисе обеју површина. Како се базис облице показује у II пројекцији као елипса са великом разликом полуоса, одређена је и овде, као код прошлог примера, III пројекција облице и конуса и то на равни ${}_1X_3$ управној на осу облице. Изводнице облице су управне на ту нову раван, цела облица показује се као круг и поклапа са кругом базиса, па се и кључна тачка K''' поклапа са трећом пројекцијом S''' врха конуса. Помоћне равни биће такођер управне на нову пројекциску раван, дакле прве трасе τ_1' управне на ${}_1X_3$ (паралелне са хоризонталним изводницама облице).

Из треће пројекције се види да ни све изводнице облице не продиру кроз конус, ни све изводнице конуса не продиру кроз облицу, да је овде случај задора двеју површина.

Да одредимо неку тачку криве задора повучемо било коју помоћну раван. Трећа траса τ_8''' те равни треба да пролази кроз кључну тачку K''' (овде уједно и S'''), а прва траса τ_1' је паралелна са изводницама



Сл. 171

облице. По трећој траси видимо да помоћна раван сече облицу по изводницама b''' и b_1''' и можемо да их повучемо у првој пројекцији. Прва траса τ_1' пресеца базис конуса у тачкама A' и A_1'. Повучемо изводнице a' и a_1' конуса које одговарају тим тачкама и у њиховим пресечним тачкама са изводницама b' и b_1' облице имамо четири тачке 1'—4' криве задора. Другу пројекцију тих тачака одредимо помоћу изводница или једноставно трансформацијом из III и I пројекције.

Тангенту у тачки 1 и 2 криве задора одредимо потпуно исто као код предњег задатка. Сви су елементи конструкције једнако обележени, па нема потребе да их понова описујемо.

Нарочите тачке криве продора одредимо помоћним равнима као и све остале тачке. Тако да одредимо тачке I' II' у којима задње изводнице облице још продиру кроз конус, повучемо помоћну раван, чија прва траса додирује круг базиса конуса. Тангенте у тим тачкама I и II су изводнице облице које у тачкама I и II баш имају своје продорне тачке.

Помоћна раван која (својом трећом трасом) додирује облицу даће нам тачке III' и IV', у којима задње изводнице конуса продиру кроз облицу. Те исте задње изводнице конуса су тангенте у тим тачкама криве.

Поред наведених тачака I—IV постоје као нарочите тачке контурне тачке криве на контурним изводницама K и L за другу пројекцију и на контурним E и F за I пројекцију конуса, а затим на најдоњој изводници b_2 облице, контурној за II пројекцију и на изводници b_3' контурној (предњој) за I пројекцију облице.

Све те нарочите (контурне) тачке криве задора, одређује се помоћним равнима повученим кроз изводнице чије продоре тражимо. Сам рад је увек исти. У слици није извучена цела конструкција за све те тачке, него су тачке обележене и наглашене тангенцијалне изводнице.

*

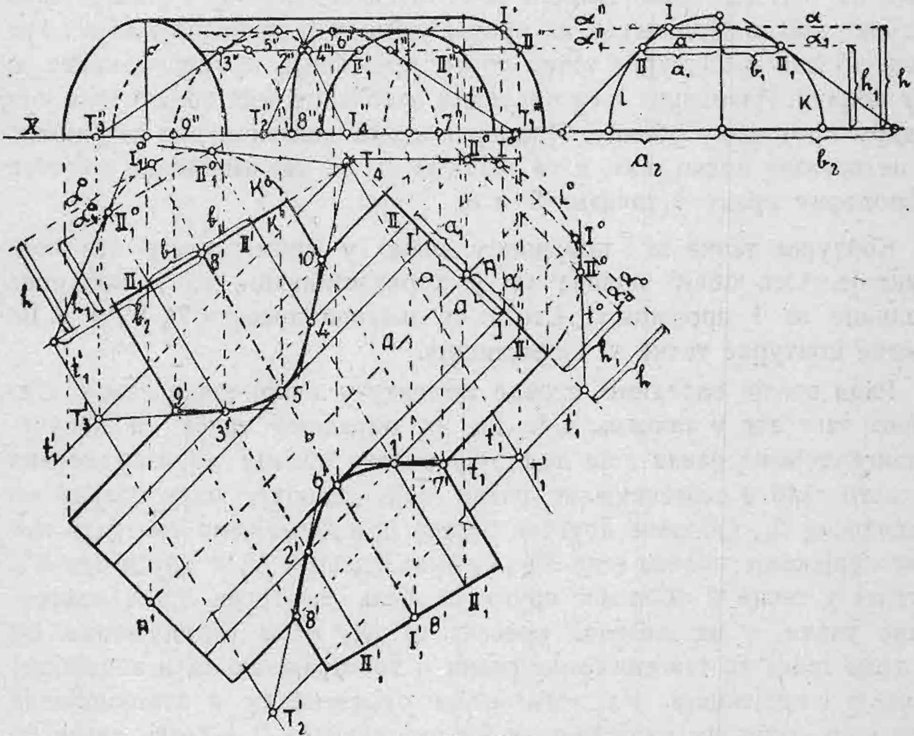
Као трећи пример, као стварни прелаз од теориских задатака на задатке из инжењерске праксе (у овом случају на продоре сводова) нека су нам задате две зарубљене ротационе полуоблице са осама A и B у H (сл. 172).

Базиси ће се показивати у II пројекцији као елипсе.

Код овог примера продорну криву ћемо најлакше одредити ако као помоћне равни узмемо равни паралелне са изводницама обеју облица, дакле равни паралелне са H.

Као прву узмемо помоћну раван α_1. У II пројекцији раван се показује као права $\alpha_1'' \parallel X$. Одмах видимо тачке II'' и II_1'' у којима она пресеца базисе облица. Могли бисмо их пренети на базисе у прву пројекцију и повући кроз њих изводнице, па би у пресецима тих изводница имали тачке 1'—4' продорне криве. Само су базиси у другој пројекцији елипсе, па се тачке II'' и II_1'' не би смеле употребити за даљу конструкцију осим ако их нарочито не конструишемо као пресеке праве са елипсом. Стога је најбоље да те тачке одредимо директно у I пројекцији. Оборимо базисе K и L полуоблица у хоризонталницу око њихових хоризонталних пречника. У обореном положају за оба базиса нанесемо и α_1^0, оборени положај помоћне равни, тиме што нанесемо њезину висину h_1 над хоризонталницом. У пресеку α_1^0 са K^0 и L^0 имамо тачке II_1^0 и II^0. Вратимо их натраг у I пројекцију на K' и L', па повучемо прве пројекције изводница по којима помоћна раван α_1 пресеца облице. У њиховим пресецима имамо тачке 1′ 2′ 3′ и 4′ продорне криве. Ординатама их пројектујемо на α_1''.

Кругове базиса K и L обарали смо у H само зато да би тачно одредили хоризонтално отстојање од осе облице оних изводница по



Сл. 172

којима помоћна раван α_1 пресеца облице. То смо могли да постигнемо, као код ранијих примера окренутим круговима базиса. На слици су с десне стране нацртана оба круга базиса K и L и то оба са истим средиштем на продуженим осама облица (на X-оси). (Ради уштеде у простору нацртане су само половине — заправо четвртине — тих кругова). Продужена раван α_1'' пресеца те кругове, мањи K у тачки II_1, а већи L у тачки II. Тражена хоризонтална отстојања пресечних изводница од оса обележена су на слици са a_1 и b_1. Узмемо их и нанесемо сваку на своју облицу у I пројекцији. Тиме су одређене тачке 1′-4′.

Сваком новом равни добићемо по четири нове тачке продорне криве. Само и овде треба да одредимо најпре специјалне тачке *продорне криве*. То су двојне, највише, најниже и контурне. У овом случају, двојних тачака нема, најниже тачке су уједно и контурне тачке за I пројекцију.

Највише тачке продорне криве одредимо када повучемо помоћну раван α' која додирује мању облицу. Раван сече (заправо додирује) малу облицу по најгорњој изводници која се у I пројекцији поклапа са осом B' мале облице. Велику облицу сече по изводницама I које нанесемо у првој пројекцији помоћу њиховог хоризонталног отстојања a од осе. Пресечне тачке $5'$ и $6'$ тих изводница су највише тачке продорне криве. Ординатом их пројектујемо у II пројекцију на α'', где су оне уједно и контурне тачке друге пројекције продорне криве за малу облицу. Изводнице I су последње изводнице веће облице које још продиру кроз мању облицу. Продорна крива долази до тих изводница, али не прелази преко њих, а то значи да су те две изводнице тангенте на продорну криву у тачкама $5'$ и $6'$.

Контурне тачке за I пројекцију имамо у овом случају без конструкције. Осе обеју облица су у хоризонталници, па и контурне изводнице за I пројекцију. Стога су њихови пресеци $7'$, $8'$, $9'$ и $10'$ тражене контурне тачке за I пројекцију.

Ради вежбе одредимо и овде тангенту у некој тачки криве. Одредимо тангенте у тачкама 1-4. Да их одредимо треба да повучемо тангенцијалне равни које додирују велику облицу по изводницама II, а исто тако и тангенцијалне равни које додирују малу облицу по изводницама II_1. Оборене кругове базиса L^0 и K^0 можемо сматрати као треће пројекције облица (где би ${}_1X_3$ била једанпут L', а други пут K'). Тангента у тачки II обореног круга L^0 била би трећа траса тангенциалне равни, а из њезиног пресека са ${}_1X_3$ осом (продуженим L') иде прва траса те тангенцијалне равни и то паралелно са изводницама облице у I пројекцији. На исти начин одређене су и тангенцијалне равни које додирују малу облицу по изводницама II_1. Треће трасе су на слици нацртане, али нису обележене, а прве трасе – све четири – обележене су само са t_1'. Пресечне праве ових тангенцијалних равни су тражене тангенте. Одредимо их помоћу тачака $1-4$ и пресека T_1-T_4 првих траса тангенцијалних равни.

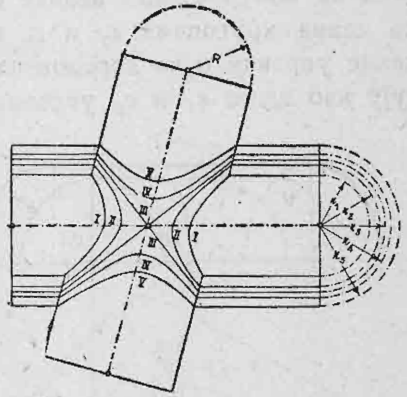
Када место оборених кругова K^0 и L^0 употребимо за конструкцију криве окренуте кругове K и L, одредимо прве трасе t_1' на исти начин, помоћу хоризонталног отстојања од осе, као што смо раније одређивали прве пројекције пресечних изводница облица. Повучемо тангенте у тачкама II (на L) и II_1 (на K) и продужимо их до пресека са осом X. Тим је одређено хоризонтално отстојање a_2 и b_2 првих траса t_1' од оса облица у I пројекцији. (Да не терети цртеж обележено је само отстојање b_2 код леве тангенцијалне равни за малу облицу).

На концу неколико речи о самој кривој продора. Крива је просторна четвртог реда. Како се ради о пуном продору, крива има две одвојене гране (обе гране су просторне криве). Поред тога обе облице су ротационе и обе осовине леже у хоризонталници. Према томе овом делу изнад хоризонталнице одговара исти такав део облице испод хоризонталнице. Свакој тачки облице изнад *H* одговара једна тачка исте облице испод *H* и то тако да права која спаја те две тачке стоји управно на *H*. Услед тога ће се у првој пројекцији поклапати све симетричне тачке. То важи и за тачке продорне криве. То значи да ће се прва пројекција продорне криве (и ако је крива просторна четвртог реда) показати као крива другог реда (јер су јој све тачке двојне). У овом случају као хипербола.

*

Како се овај случај често понавља у инжењерској пракси нацртана је још једном прва пројекција истог задатка где је за једну облицу (већу) задржан увек исти полупречник *R*, док је за другу (мању) облицу задржана оса и пресечна тачка оса, али је полупречник *r* мењан.

Код првог случаја где је полупречник r_1 мање облице осетљиво мањи од полупречника *R* велике облице продорна крива је иста као код пређашњег задатка. (Крива четвртог реда, која се услед симетричног положаја облица према хоризонталници показује у I пројекцији као крива II реда, као хипербола).



Сл. 173

У другом случају узет је полупречник r_2 нешто већи. Продорна крива остаје у пројекцији хипербола, једино су се темена приближила.

Код трећег случаја, где су полупречници *R* и r_3 узети једнаки, облице се додирују у највишој тачки. Најгорња тачка криве продора је двојна тачка криве. Услед симетрије и њој симетрична најдоња тачка је двојна тачка криве. Услед тога ће се и у првој пројекцији, где се продорна крива ради симетрије пројектује као крива другог реда појавити двојна тачка (пројекције најгорње и најдоње двојне тачке криве), па ће се крива даље распасти и показати у I пројекцији као две праве.

Узмемо ли као четврти случај да је r_4 већи од *R* вратили смо се уствари на први случај, само је сада мања облица постала већом. Продорна крива је у I пројекцији понова хипербола само сада обрнута на другу страну.

На слици је одређен и пети случај где је r_5 узет још већи. Крива продора је као пре код случаја I.

Из слике се види да у случају где су $r=R$ пројекција продорне криве заузима положај асимптоте за пројекције продорних кривих свих осталих случајева.

*

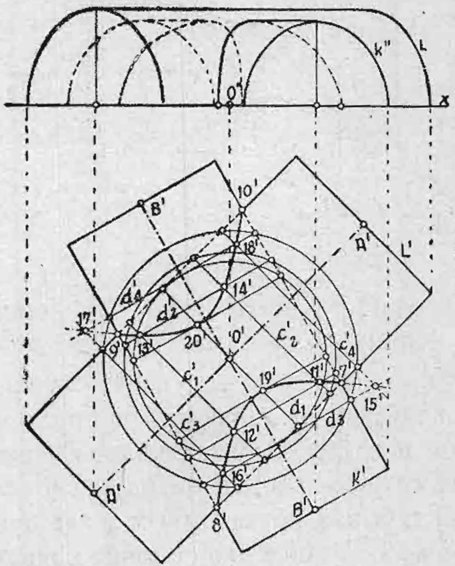
§ 71. Одређивање криве продора помоћу лопте

Продор који смо малочас одредили у сл. 172 можемо да одредимо и на други начин, помоћу лопте (в. сл. 174).

Познато је да лопта, чије се средиште налази на оси неке обртне облице, пресеца ту облицу по двама круговима управним на осу облице. То исто важи и за обртни конус и за било коју другу обртну површину.

Ту особину можемо да искористимо, па да помоћу ње одредимо продор облица (в. сл. 174).

Повучемо једну лопту којој је средиште на оси једне и друге облице, дакле у њиховом пресеку O', а полупречник нешто мало већи од полупречника велике облице. Та лопта сече велику облицу по двама круговима c_1 и c_2 који су управни на осу $A—A$ облице, дакле управни и на хоризонталницу, па се у првој пројекцији показују као праве c_1' и c_2' управне на A' A'. Саме праве c_1' и c_2' одредимо тако, што спојимо тачке пресека контурних изводница облице и контурног (највећег) круга лопте. (И контурне изводнице облице и највећи круг лопте леже у H). Исто тако сече лопта и малу облицу по двама круговима d_1 и d_2, а и одредимо их на исти начин.



Сл 174

Ови кругови леже на облицама, али истовремено и на лопти, па се секу. Њихове пресечне тачке 11'—14' су заједничке једној и другој облици. Према томе то су тачке криве продора. Друге пројекције ових тачака одредимо као пројекције тачака на лопти или помоћу изводница облице.

Овом методом, помоћу лопте, можемо да одредимо повољан број тачака продорне криве, само не можемо да одредимо директно специјалне тачке на њој.

Најмања лопта коју можемо употребити је лопта којој је полупречник једнак полупречнику веће облице. Та лопта додирује већу облицу по једном кругу, а пресеца малу по *двама* круговима. Мали кругови су тада у првој пројекцији тангенте на пресечну криву.

Узмемо ли лопту већу од прве, добићемо понова четири тачке продорне криве тачке 15′—18′. Од тих тачака две су реалне тачке продорне криве, јер се у тачки 16′ пресеца круг c_3' са d_3' а у тачки 18′ круг c_4 ′са d_4'. Друге две тачке 15′ и 17′, и ако су стварне тачке хиперболе, ипак су имагинарне тачке криве продора. Оне леже ван контура велике и мале облице. У њима се не пресецају кругову d_3' са c_4' и c_3' са d_4' него само графичко продужење њихових првих пројекција. Природно да им ради тога не можемо ни на који начин одредити друге пројекције.

Тангенте у појединим тачкама овако одређене криве продора можемо да одредимо на исти начин као што смо их раније одређивали. Има и други начин можда подеснији али ће о њему бити речи касније, када цео задатак будемо решавали само помоћу лопте.

§ 72. Задаци за вежбу

На крају овог поглавља узећемо неколико задатака онаквих и онако постављених како се постављају у инжењерској пракси. Може при томе да се говори о продорима сводова, може о пресецима цеви, може о везама канала, према примени и материјалу од кога се у пракси изводе. За Нацртну геометрију елементи су код свих тих форми увек исти: облице, конуси, лопте, обртне површине. И задатак је увек исти: одреди пресек или продор.

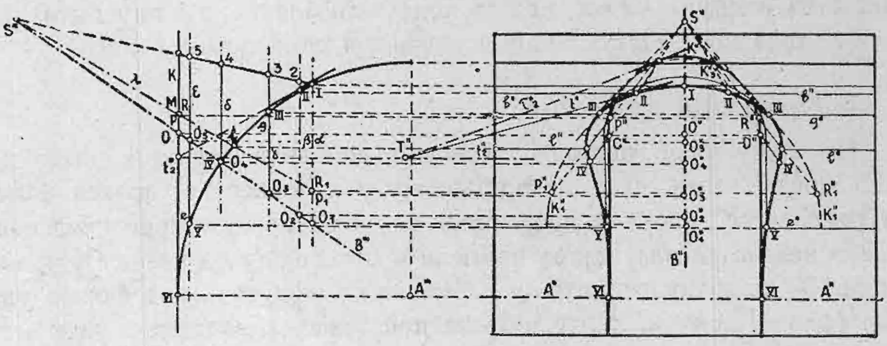
Као први пример из продора сводова узећемо један полуобличаст свод са хоризонталном осом $A-A$ и један коси кружни конус. Од најниже изводнице облице наставља се на доле вертикална тангенцијална раван, која у овом примеру претставља раван зида. У тој истој равни је и круг K, базис конуса. И од конуса задржана је само горња половина, па се и конус наниже наставља својим вертикалним тангенцијалним равнима. Стога је и за круг базиса K'' уцртана само горња половина, а од тачака C'' и D'' настављају се вертикалне тангенте на круг. Цео задатак уцртан је у сл. 175 у II и III пројекцији. У III пројекцији изостављен је знак пројекције.

Све равни паралелне са равни зида секу конус по круговима, јер су паралелне са равни базиса. Средишта тих кругова су на оси конуса. Тако раван γ сече конус по кругу K_3''' коме је средиште тачка O_3''' на оси конуса. Полупречник круг r једнак је дужи од O_3''' до 3′′′. Иста раван сече облицу по изводници g, која се у III пројекцији показује као тачка g'''. Помоћу O_3'' на оси конуса S'' B'' уцртамо другу пројекцију круга K_3'' и повучемо g'', па су на њиховом пресеку две тачке III продорне криве.

Узмемо ли још неку такву помоћну раван, сваком од њих добићемо по две нове тачке продорне криве.

Само и у овом случају претходно треба да одредимо специјалне тачке продорне криве. Најпре треба да одредимо највишу тачку I. Она се налази на највишој, контурној изводници конуса у III пројекцији, и можемо да је пренесемо у II пројекцију без икакве конструкције. Затим треба да одредимо тачке IV у којима продиру кроз облицу најниже изводнице конуса (изводнице кроз тачке *C* и *D*). У III пројекцији поклапају се те изводнице са осом конуса. На њима су и тачке IV‴. Да бисмо им одредили II пројекцију, повучемо кроз IV‴ помоћну раван δ, па тачке IV″ одредимо као и пре тачке III″.

Тачке IV су важне по томе што деле продорну линију на два дела. Горњи део од IV преко I до IV је продор конуса кроз облицу, дакле крива IV реда. Доњи део линије продора испод тачака IV су делови елипса, по којима вертикалне тангенцијалне равни на конус секу



Сл. 175

облицу. Ти делови елипса иду доле до тачке VI, до најниже изводнице облице. Одатле на доле испод тачака IV наставља се линија продора правима по којима се секу вертикалне тангенцијалне равни на конус и облицу.

И доњи део криве продора, за који знамо да се састоји од делова елипса, можемо да одредимо истим системом помоћних равни као и горњи део. Као пример повучена је помоћна раван ε. Она сече облицу по изводници *e*, а конус по кругу K_5, чије је средиште O_5, а полупречник *r* једнак дужи O_5''' 5‴. Ова иста помоћна раван ε сече вертикалне тангенциалне равни на конус по двема правима које се у II пројекцији показују као вертикалне тангенте на круг K_5'',

Најниже тачке VI″ криве одређене су као пресек најниже изводнице полуоблице са вертикалним тангентама на круг *K*″ базиса конуса.

Место помоћних равни паралелних са базисом конуса можемо да употребимо и друге помоћне равни. Овде долазе у обзир равни које су паралелне са изводницама облице, а пролазе кроз врх конуса. Такве помоћне равни употребљавали смо и пре приликом решавања теориских задатака.

За вежбу, повучена је таква помоћна раван λ. У III пројекцији она се цела пројектује на својој трећој траси, па одмах видимо изводницу l''' по којој сече облицу. Исто тако одмах видимо и тачке P''' и R''' по којима раван λ сече базис конуса (круг K). Одредимо II пројекцију тих тачака, P'' и R'' на K'', па су $[S'' P'']$ и $[S'' R'']$ II пројекције изводница по којима раван λ сече конус. Повучемо ли и l'', у њезином пресеку са поменутим изводницама имамо две тачке продорне криве. Овај систем помоћних равни је исто тако добар као и први, јер помоћу њега можемо да одредимо и све нарочите тачке продорне криве. Помоћу њега су одређене контурне тачке продорне криве за конус у II пројекцији. То су продори контурних изводница конуса за другу пројекцију, које небисмо били могли директно одредити првим системом помоћних равни. Овај систем помоћних равни је нарочито подесан у случају, када осовина облице није $\parallel X$, него само $\parallel H$ (в. сл. 177). Деси се понекад да је базис ближи врху него тачкама продорне криве, па поједине тачке не можемо да одредимо довољно тачно. Ту нетачност можемо лако да отклонимо овако: пресечемо конус неком равни паралелном са базисом, па нов пресек сматрамо да је базис. У сл. 175 узета је раван α кроз највишу тачку I продорне криве, па је круг K_1 са средиштем O_1 употребљаван као нови базис конуса. Раван λ сече тај базис у тачкама P_1 и R_1. Изводнице конуса у II пројекцији одређене су много тачније помоћу ових тачака, а њихова евентуална нетачност код тачке продора смањује се пропорционално отстојању од врха, уместо да се повећава као пре.

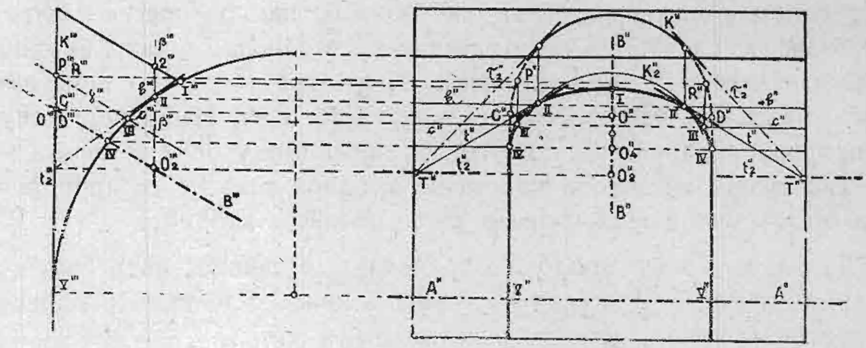
Да бисмо криву продора одредили што тачније, потребно је да одредимо тангенте у појединим тачкама криве. Као пример одређена је тангента на кривој продора у тачки II.

Знамо да је тангента пресек тангенцијалних равни на конус и на облицу. Пресек тих двеју тангенцијалних равни одређивали смо досад помоћу тачке чију тангенту тражимо и помоћу пресека траса на H или V. Како овде немамо ни H ни V, то не можемо употребити праве трасе. Стога ћемо изабрати неку другу раван која нам је најподеснија, па ћемо одредити пресек тангенцијалних равни са том равни. И те пресеке називамо обично трасама. Тако ћемо овде одредити „трасе“ тангенцијалних равни на проширеној равни зида. Та нам је раван најподеснија, јер у њој већ лежи базис конуса.

У III пројекцији лако повучемо тангенцијалну раван на облицу у тачки II''' и одредимо њезину трасу t_2''' на раван зида. Ту трасу t_2'' уцртамо одмах и у II пројекцији. Тангенцијалну раван на конус и њезину трасу на раван зида одредимо у II пројекцији. Изводница конуса кроз тачку II'' криве пресеца базис у једној тачки. Тангента на круг базиса у тој тачки заједно са поменутом изводницом одређује тангенцијалну раван на конус, а уједно је и њезина траса τ_2'' на равни зида. Тиме је одређена тангента *t''*, јер као пресек двеју тангенцијалних равни мора да пролази кроз II'' и кроз тачку *T''* у којој се секу две трасе.

*

У сл. 176 нацртан је други пример продора сводова. Пример је у суштини потпуно исти као и први, само је место косог кружног конуса узета коса кружна облица са базисом у продуженој равни зида. Продорна крива поклапа се и овде у III пројекцији са пројекцијом хоризонталне облице, а види се само у II пројекцији. И овде је она састављена од три дела: горњи део је крива IV реда као продор двеју облица. Средњи део, од тачака IV до V, су криве II реда, заправо два дела кругова по којима вертикалне тангенцијалне равни на облицу, секу хоризонталну облицу. Како су те равни управне на осу *A – A* хоризонталне облице, то се оне у II пројекцији показују као праве. Најнижи део (испод тачака V) су две праве по којима се пресецају вертикалне тангенцијалне равни на хоризонталну и косу облицу.



Сл. 176

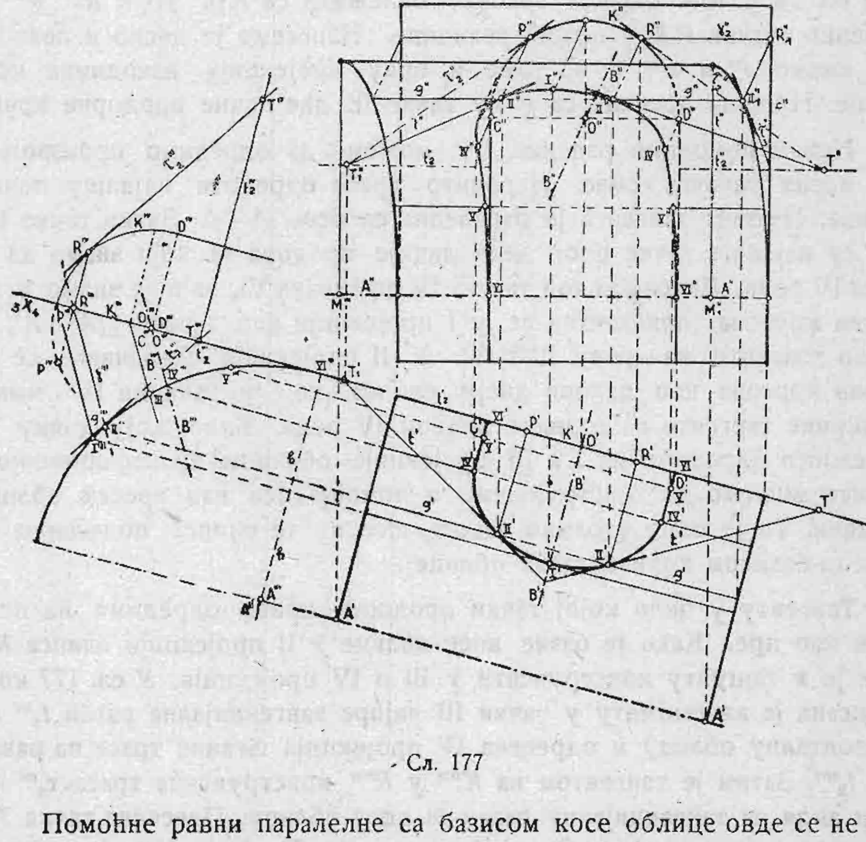
Као помоћне равни можемо и овде да употребимо равни паралелне са базисом косе облице. У слици је повучена једна таква раван β и помоћу ње одређена тачка II (на изводници *b''* и кругу K_2'' са средиштем O_2''). Поред тих помоћних равни можемо да употребимо и равни паралелне са изводницама обеју облица. Тако је повучена помоћна раван γ и на пресеку изводница кроз *P''* и *R''* са изводницом *c''* одређена тачка III продорне криве.

На крају је одређена и тангента на кривој продора у тачкама II. Трасе тангенцијалне равни узете су и овде у продуженој равни зида.

*

Овај исти пример решаваћемо у сл. 177 још једанпут, само оса *A – A* хоризонталне облице није у овом случају ‖ *V*, а задатак је задат у I и II пројекцији. Како се базиси обеју облица показују у II пројекцији као елипсе, одређивање криве продора из I и II пројекције било би нетачно. Стога ћемо радије узети нову пројекциску раван ${}_1X_3$

управну на осу $A'-A'$ и одредити трећу пројекцију обеју облица. Продорну криву конструисаћемо из I и III пројекције, па ћемо је тада преносити у II пројекцију (трансформација). Место такве треће пројекциске равни могли бисмо сматрати пројекциском равни саму раван левог базиса хоризонталне облице, пројектовати на њу једну и другу облицу, па тада окренути раван око њезине друге трасе да постане паралелна са вертикалницом. Уствари то је исто као да смо задржали већ поменуту трећу пројекциску раван, одредили трећу пројекцију облица, (као што је урађено на слици), али тада скинули ту трећу пројекцију скупа са ${}_1X_3$, па је поставили горе тако да се ${}_1X_3$ поклопи са продуженом осом X, услед чега би се $A'''A'''$ нашло на продуженој другој пројекцији $A''A''$ осовине хоризонталне облице.



Сл. 177

Помоћне равни паралелне са базисом косе облице овде се не могу употребити, јер су оне пројектне равни за I и III пројекцију, док би се кругови у њима показивали у II пројекцији као елипсе. Место њих употребићемо равни паралелне са изводницама обеју облица.

У сл. 177 повучена је таква раван γ (γ'''). Она сече хоризонталну облицу по изводници g чију I пројекцију g' можемо одмах да уцртамо. Другу пројекцију g'' те исте праве одредимо помоћу њезине висинске разлике над осом AA облице (нанашајући над $A''A''$ отстојање тачке g'''

од праве $A''' VI'''$). Иста та раван γ сече раван зида по „траси“ γ_2, а базис косе облице K''' у тачкама P''' и R'''. То значи да раван γ сече косу облицу по изводницама које пролазе кроз P и R. Могли бисмо одредити P'' и R'' као пресек праве γ_2'' са K'', али како је K'' елипса, те тачке неби биле довољно тачне. Стога ћемо изводнице кроз P и R одредити у I пројекцији и то помоћу тачака P' и R'. Те две тачке леже симетрично према оси $B' B'$, а тетива $P R$ круга базиса показује се у I пројекцији у правој величини. Праву величину те тетиве одредимо тако, што одредимо IV пројекцију круга K за случај да је нова оса ${}_3X_4$ она права која у III пројекцији претставља раван зида. Тачка R'''' налазила би се на својој ординати $\perp {}_3X_4$ а на кругу K''''. (Тај исти круг K'''' може да се сматра и као оборени положај круга K, само би га у том случају требало бележити са K^0). Дуж $R'''' R''''$ је половина тетиве $P R$ у правој величини. Нанесемо је десно и лево од O' и имамо P' и R', а по томе и прву пројекцију изводница косе облице. Њихови пресеци са g' су тачке II$'$ две тачке продорне криве.

Новим помоћним равнима $\parallel \gamma$ можемо да одредимо произвољан број нових тачака криве. Нарочито треба одредити највишу тачку I криве. Њезина тангента је паралелна са осом $A - A$. Затим тачке IV, које су најниже тачке оног дела линије продора за који знамо да је крива IV реда. Делови испод тачака IV до тачака VI, за које знамо да су делови кругова, показиваће се у I пројекцији као праве $\perp A' - A'$, и то као тангенте на криву IV$'$I$'$IV$'$. У II пројекцији показиваће се ти делови кррмгова као делови двеју елипса, које у тачкама IV$''$ имају заједничке тангенте са горњом кривом IV реда. Било коју тачку V$''$ тих елипса одредимо из I и III пројекције обичном трансформацијом. (Елипсе можемо да конструишемо и помоћу оса као пресек облице са равни. То је овде утолико лакше, што су те елипсе подударне са елипсом-базисом хоризонталне облице).

Тангенту у било којој тачки продорне криве одредимо на исти начин као пре. Како је базис косе облице у II пројекцији елипса K'', боље је и тангенту конструисати у III и IV пројекцији. У сл. 177 конструисана је за тангенту у тачки III најпре тангенцијална раван t_3''' на хоризонталну облицу и одређена IV пројекција њезине трасе на раван зида t_2''''. Затим је тангентом на K'''' у R'''' конструисана траса τ_2'''' на равни зида за тангенцијалну раван на косу облицу. Пресечна тачка T'''' тих двеју траса одређује тражену тангенту. Њезину I пројекцију T' одредимо помоћу хоризонталног растојања $T'''' T'''$ које се и у I пројекцији показују у правој величини од тачке O'. Симетрична је тачка T_1'.

Продорну криву могли бисмо одредити у овом случају и у самој II пројекцији. Узмемо ли у равни зида неку хоризонталну праву γ_2'', та нам права претставља пресек једне помоћне равни γ са равни базиса косе облице. Пошто γ_2'' пресеца базис K'' у тачкама P'' и R'', значи да су изводнице кроз те тачке пресек равни γ са косом облицом. Права $R_1''\,II_1''$ је пресек те исте помоћне равни γ са равни базиса хоризонталне облице. То значи да раван γ сече хоризонталну облицу по изводници g''. У пресеку g'' са изводницама косе облице имамо две тачке II продорне криве. У сл. 177 уцртана је и конструкција тангенте на продорној кривој у тачки II''. Ова конструкција продорне криве није довољно тачна, јер су тачке R'' и II_1'' пресеци правих са елипсама, а како ти пресеци нису конструисани, не бисмо их смели употребљавати за даље конструкције.

Овај исти пример решаван је још једном као задњи задатак из „*косе пројекције*". Једино је тамо додата и дебљина зида и сводова, па је цео задатак добио други облик.

*

Као даљи пример продора сводова задата је у сл. 178 хоризонтална полуоблица паралелна са V и једна полулопта са средиштем O. Полуоблица се наставља наниже вертикалном тангенцијалном равни као код ранијих задатака, а лопта се наставља доле вертикалном тангенцијалном облицом. Задатак је уцртан у I, II и III пројекцији.

Криву продора можемо да одредимо помоћу хоризонталних равни и помоћу вертикалних равни паралелних са осом AA.

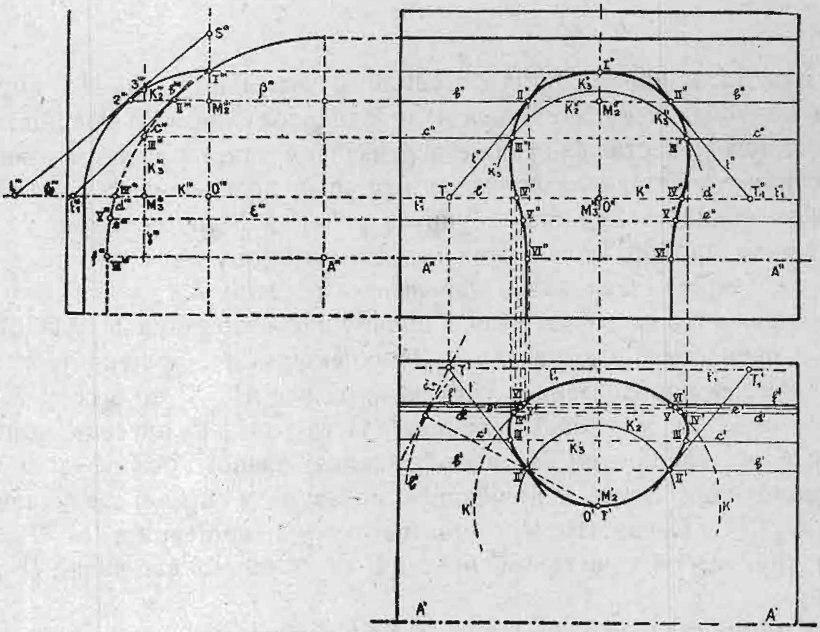
Хоризонтална раван β сече облицу по изводници b. Из III пројекције пренесемо је директно у II пројекцију, а I пројекцију b' одредимо помоћу хоризонталног отстојања од осе A'—A' које се у III пројекцији показује у правој величини. Иста раван β пресеца лопту по кругу K_2 са средиштем M_2 на вертикалној правој кроз O, а са полупречником који се у III пројекцији показује у правој величини као дуж $M_2'''\,2'''$. Средиште M_2' поклапа се у I пројекцији са O'. Опишемо круг K_2' и у његовом пресеку са b' имамо две тачке II' криве продора.

Узмимо сада као помоћну раван вертикалну раван γ (види III пројекцију). Та раван сече облицу по изводници c (c'' и c' одредимо као пре b'' и b'). Полулопту сече иста раван по полукругу K_3''' са средиштем M_3''' и полупречником ($M_3'''\,3'''$). Тачка M_3 поклапа се у II пројекцији са O''. Уцртамо K_3'' и у његовом пресеку са c'' су две тачке III'' криве продора.

Ова два система помоћних равни дају тачке продорне криве са подједнаком тачношћу и са подједнаким бројем линија конструкције. У случају да оса хоризонталне облице није паралелна са V, не можемо да употребимо вертикалне равни, него само хоризонталне.

Код одређивања криве продора треба и овде одредити најпре специјалне тачке криве. Најпре највишу тачку I. Затим тачке IV где највећи круг лопте продире кроз облицу и на концу тачке VI, где најнижа изводница *f* облице продире кроз вертикалну облицу која продире лопту. Ове тачке деле криву продора на три одвојена дела. Највиши део је крива IV реда као продор облице и лопте. Средњи део од тачака IV до VI су делови криве IV реда као пресеци хоризонталне облице са вертикалном облицом и на концу испод тачака VI су две праве по којима тангенцијална раван на облицу сече вертикалну облицу.

Део продорне криве између тачака IV и VI пројектује се у првој пројекцији на највећем кругу *K'* лопте. Да бисмо одредили II пројекцију било које тачке V тога дела криве, повучемо у III пројекцији неку изводницу *e'''*. Одредимо јој као пре II и I пројекцију, па је на *e'* већ тачка *V'*, а на ординати тачка V''.



Сл. 178

Како су површине које се пресецају површине II реда са тангенцијалним прелазима у раван (или вертикалну облицу), то ни крива пресека нема ниједне тачке са две тангенте. Стога у I пројекцији крива продора прелази у тачкама IV' тангенциално у круг *K'* до тачака VI.

Тангенту у било којој тачки продорне криве, на пр. у тачки II, одредимо као раније. Могли бисмо и у овом случају одредити трасе тангенцијалних равни на проширеној равни зида, само је овде ипак боље одредити их на било којој хоризонталној равни. Таква канструкција тангенте остаје непромењена и за случај да оса *A—A* хоризонталне облице није || *V*.

У сл. 178 конструисане су трасе тангенцијалних равни на хоризонталној равни кроз средиште O лопте. Траса t_1 конструисана је у III пројекцији. Она је паралелна са изводницама облице, па јој I пројекцију t_1' одредимо помоћу отстојања од O', $(O'\ t_1') = (O'''\ t_1''')$, а II пројекцију t_1'' једноставно ординатом из t_1'''.

Тангенцијалну раван на лопту одредимо помоћу тангенцијалног конуса (као тангенцијалну раван на торус у сл. 161). Конус ће додиривати лопту по кругу K_2. Његова је контурна изводница тангента на лопту у тачки $2'''$.

Према томе је врх конуса тачка S''' на вертикали кроз O''', а дуж $O'''\ L'''$ је полупречник круга базиса. Уцртамо тај круг l' у I пројекцији и повучемо изводницу конуса кроз тачку II'. (Врх S' се поклапа са O'). Ако у тачки где та изводница сече круг базиса повучемо тангенту на круг, та нам је тангента траса τ_1' тангенцијалне равни на конус, а уједно и на лопту у тачки II. У пресеку траса t_1' и τ_1' имамо тачку T', која нам са II' одређује тражену тангенту на кривој продора у тачки II.

*

Код досадашњих примера главни свод била је хоризонтална полуоблица, па смо одредили продоре косог конуса, косе облице и лопте кроз њу. Сада ћемо узети два нова примера, где је главни свод лопта, а други коса кружна облица и коси кружни конус.

У сл. 179 задат је пример продора косих кружних облица са осама A—A и B—B кроз лопту са средиштем O. Лопта претставља свод над неким округлим простором, а косе облице претстављају отворе на том своду као округли прозори. Код овог задатка нацртане су и дебљине зида и сводова, али су продорне криве одређене само за доње површине, па су у I пројекцији уцртане као видљиве, иако су невидљиве. Оса B-B облице је у равни $\parallel V$ кроз O, а оса A-A у равни $\perp V$ кроз O. Како су поред тога облице и прозори подударни, може се сматрати да је облица B''—B'' трећа пројекција облице A—A. Да положај косих облица није такав, морали бисмо цртати III пројекцију и једне и друге облице.

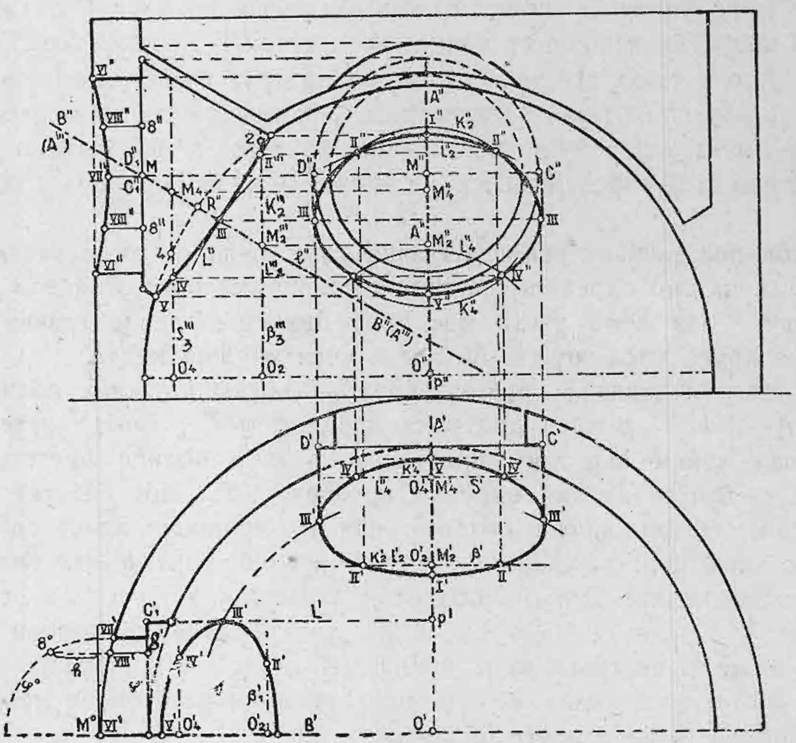
Помоћне равни за одређивање криве продора узећемо паралелне са базисом облице A—A. Такве равни секу облицу и лопту по круговима који се у II пројекцији показују опет као кругови.

Као прву узмимо раван β, која се у трећој пројекцији показује као вертикална права β_3'''. Она сече лопту по кругу L_2 са средиштем O_2 које се у II пројекцији поклапа са O'' и полупречником $O_2\ 2$. Раван β је $\parallel V$, па јој прву пројекцију, односно прву трасу одредимо као праву $\beta_1' \parallel X$, на хоризонталном отстојању $O''\ O_2$ од O'. Како су обе косе облице подударне и симетричне, можемо одмах ту раван да уцртамо и за облицу B—B, па је $\beta_1' \perp B'$—B' а на ординати из β'''. Иста раван β пресеца косу облицу по кругу K_2 са средиштем M_2 а са полупречником од M_2 до контурне изводнице облице. Пренесемо M_2 у II пројекцију на A''—A'' и опишемо оба круга L_2'' и K_2''. У њиховом пресеку су две тачке II'. Ординатама их пренесемо у I и у III пројекцију на β. Пошто су облице подударне и симетричне према осовини лопте, то смемо помоћу отстојања M_2' II' нанети тачку II' и на облицу B'—B'.

На исти начин одређене су тачке IV помоћу равни δ.

Највише и најниже тачке I и V криве продора одредимо директно из III пројекције помоћу ордината.

Контурне тачке III за облицу *B B* одредимо помоћу равни ∥ *V* повучене кроз контурну изводницу у I пројекцији. Та раван сече лопту по кругу *L'* са средиштем *P'* и полупречником од *P'* до контурне



Сл. 179

лопте, а облицу по контурној изводници. Контурна изводница поклапа се у другој пројекцији са осом *B'' B''* облице, а средиште *P''* поклапа се са средиштем *O''* лопте. Нацртамо ли другу пројекцију *L''* круга, у његовом пресеку са изводницом (а она се поклапа са *B'' B''*) и имамо тражену тачку III''. Ординатом је пренесемо у прву пројекцију облице *B-B*. Услед симетрије можемо да одредимо и контурне тачке III за облицу *A-A* у првој пројекцији помоћу хоризонталног круга лопте, а на исти начин и (помоћу истог хоризонталног круга) а њихове друге пројекције. Круг се показује у II пројекцији као права из III''' ∥ *X*.

На истом примеру решен је још један задатак, продор двеју облица. Отвор прозора је хоризонтална облица, а спољна површина зида је вертикална облица; према томе, спољни отвор прозора ће бити продорна крива тих двеју облица. Код прозора са косом облицом *A—A* та је хоризонтална облица управна на *V*, па се продорна крива пројектује као круг. У I пројекцији вертикална облица показује се као круг, па са њом и продорна крива. Остаје дакле само да одредимо II пројекцију те криве код прозора са косом облицом *B—B*. У I пројекцији ту криву већ имамо као лук VII′ VI′ VII′ (цртана је само половина VII′ VI′).

Највишу и најнижу тачку VI можемо одмах да пренесемо ординатом у II пројекцију. Исто тако и тачку VII на контурној изводници I пројекције која се у II пројекцији поклапа са хоризонталном осовином облице. Остале тачке одредимо помоћу изводница. Узмемо у I пројекцији било коју тачку VIII′ криве и повучемо кроз њу изводницу облице до пресека 8′ са кругом φ' базиса. Да бисмо одредили ту изводницу у II пројекцији, потребна нам је само њезина висина изнад или испод хоризонталног пречника круга φ. Стога оборимо било где круг φ и одредимо на φ^0 тачку 8^0. Повучемо ли кроз M^0 хоризонтални полупречник круга ($\parallel \varphi'$), имамо одмах тражену висинску разлику *h*. Нанесемо је изнад и испод средишта *M* у II пројекцији, тиме одредимо изводнице 8″, па су на ординатама тражене тачке VIII″.

Овде треба напоменути да је раван повучена кроз осу хоризонталне облице и кроз средиште лопте раван симетрије за облицу и за лопту. Стога ће се продорна крива, која је у ствари крива IV степена, пројектовати као крива II степена. У овом случају то ће бити хипербола као у I пројекцији у сл. 172. То исто важи и за II пројекцију продорне криве за косу облицу *B B* и лопту.

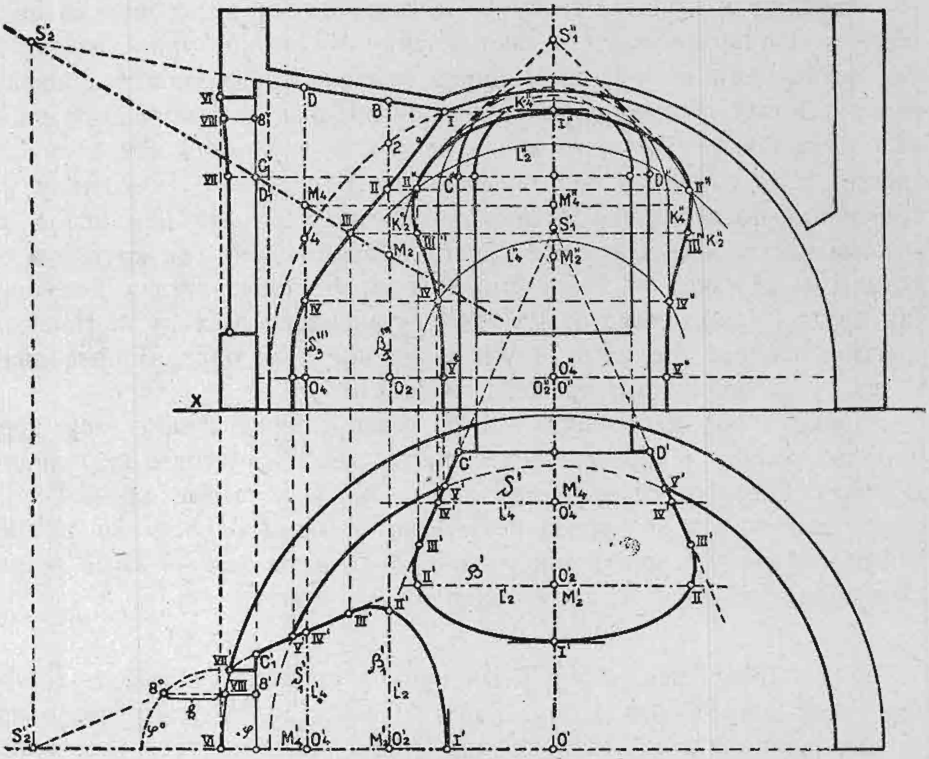
*

У сл. 180 решен је још један пример продора сводова, и то продор косог конуса кроз лопту. Задатак је постављен исто као и пређашњи, једино место косих облица имамо косе конусе. Сем тога и прозори нису округли као пре, него полуокругли (са четвртастим доњим делом). Услед тога задржана је само горња половина конуса, док се на доње настављају вертикалне тангенцијалне равни као у сл. 175.

И криву продора одређујемо исто као код предњег задатка помоћним равнима паралелним са базисом конуса S_1. Тако је помоћу равни β одређена тачка II криве. Конструкција доњих тачака продорне криве разликује се мало од горњих. Раван δ пресеца лопту по кругу L_4, а коси конус по кругу K_4. Средиште круга K_4 је M_4, а полупречник $r=(M_4\,D)$. Како се горња половина тога круга не сече са L_4, повучемо вертикалне тангенте на круг K_4'', па у пресеку ових тангената са L_4'' имамо две тачке IV″ продорне криве. Значи да су ове две тачке на оном делу криве продора, где вертикалне тангенцијалне равни на конусу пресецају лопту.

Према томе то су делови кругова (као код задатка у сл. 175), који се у II пројекцији показују као елипсе, а у I пројекцији као праве и поклапају са контурним изводницама конуса.

Када то знамо, можемо да одредимо много лакше тачке доњег дела криве. Довољно је да повучемо прву трасу помоћне равни $\delta_1 \parallel X$. Она сече лопту по кругу L_4' чије је средиште O_4, а полупречник $r =$ дужи од O_4' до пресека δ' са контурним кругом лопте. Уцртамо II пројекцију тога круга L_4''. Траса δ' пресеца контурне изводнице конуса у тачкама IV'. Како су то већ I пројекције тражених тачака криве, пренесемо их ординатама на L_4'' па су тиме потпуно одређене.



Сл. 180

Највишу и најнижу тачку криве одредимо као пре. Само најниже тачке III оног дела криве где конус продире кроз лопту, дакле продоре најнижих изводница полуконуса (контурних изводница за I пројекцију) овде не можемо одредити онако лако као пре. Стога обично одредимо што тачније криву у III пројекцији, па у њеном пресеку са осом конуса имамо тражену тачку III. (Контурне изводнице за I пројекцију поклапају се у III пројекцији са осом). Природно да ту тачку можемо и директно да одредимо. Довољно је да конструишемо елипсу, II пројекцију круга по коме тангенцијална раван на конус а део елипсе од III до V је доњи део саме криве продора.

Ова метода рада може да се примени само када је оса конуса у равни управној на вертикалницу или у равни паралелној са њом (а једна и друга $\perp H$). Ако положај није такав, не остаје друго него да га подесном трансформацијом приведемо на тај положај. Решимо тада задатак у I и III пројекцији, па тада пројектујемо решење (трансформацијом) и другу пројекцију.

*

Овим смо израдили по један пример свих важнијих комбинација облице, конуса и лопте, који се обично појављују код сводова и видели методе којима се одређују њихови продори. Исти ови елементи појављују се и другим гранама инжењерске праксе нарочито у машинству и решавају се истим методама. Нема потребе да понављамо исте примере дајући им само други спољни облик.

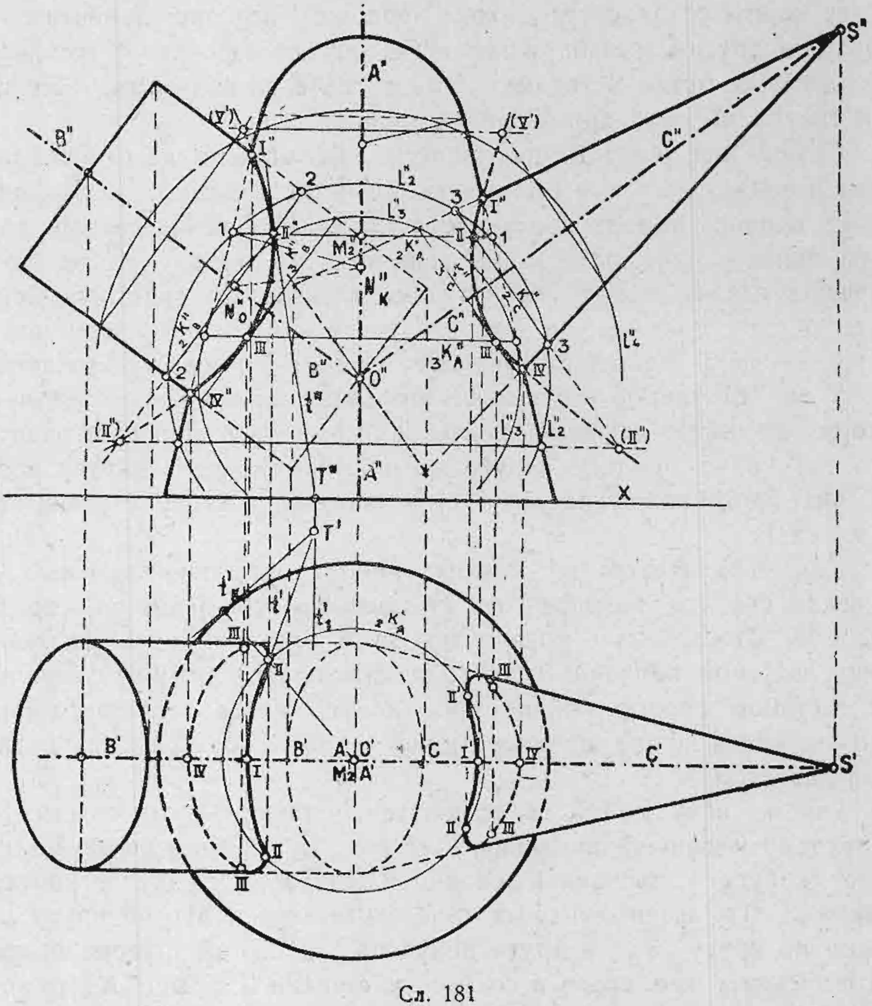
Остаје још једна група примера које можемо да решимо овим истим методама, јер су и састављени од истих елемената, али је одређивање продора помоћу лопте много лакше. Поред ње постоји друга група примера које можемо да решимо само помоћу лопте. То су случајеви где се поред обртних површина другог реда појављују и друге обртне површине, а помоћне равни кроз осовину или управне на њу не дају једноставне пресеке. Узмимо по један такав пример.

У сл. 181 узет је вертикалан зарубљен обртни конус са базисом у хоризонталници, завршен са горње стране тангенциалном лоптом. Кроз тај конус продире зарубљена обртна облица и обртни конус. Осе тих трију површина секу се у тачки O и стоје у равни паралелној са V.

Код овог задатка не можемо повући такве помоћне равни које би секле све три површине по изводницама осим једне која пролази кроз осе. Стога бисмо морали поделити задатак у два задатка, па једним системом помоћних равни одредити продор двају конуса, а другим системом продор облице кроз конус. Место тога много лакше ћемо одредити криве продора помоћу лопте. Метода рада позната нам је из сл. 174.

Узмемо неку лопту са средиштем у тачки O где се секу осе и повучемо њезину II пројекцију. Тај круг L_2'' пресеца контуре вертикалног конуса у тачкама 1, облице у тачкама 2, а другог конуса у тачкама 3. То значи да лопта сече вертикални конус по кругу ${}_2K_A''$ облицу по кругу ${}_2K_B''$, а други конус по ${}_2K_C''$. Ти се кругови показују у II пројекцији као праве и секу се у тачкама II''. Круг ${}_2K_A$ је хоризонталан; уцртамо његову прву пројекцију, па су на ${}_2K_A'$ прве пројекције тачака II. Ако продужимо кругове ${}_2K_B''$ и ${}_2K_C''$ и доњи круг по коме лопта L_2'' сече вертикални конус, добићемо још две тачке пресечне криве тачке (II''). Те су две тачке имагинарне. Исто тако добићемо имагинарне тачке II пројекције криве продора ако узмемо много веће помоћне лопте, на пр. лопту са контуром L_4''.

Важно је одредити тачке које можемо да добијемо помоћу најмање лопте. Контурни круг најмање могуће *помоћне лопте* L_3'' додирује контурне изводнице вертикалног конуса у двема тачкама. Значи да са вертикалним конусом има заједнички само један круг ${}_3K_A''$. Иста лопта сече облицу и други конус по круговима ${}_3K_B''$ и ${}_3K_C''$, па у њиховим пресецима имамо тачке III'' продорне криве. Пошто су кругови ${}_3K_B''$ и ${}_3K_C''$ најближи кругови тачки O'', који још дају тачке продорне криве, значи да су њихове II пројекције уједно тангенте на II пројекцију криве продора у тачкама III''.



Сл. 181

Контурне тачке I'' и IV'' за другу пројекцију имамо без конструкције у II пројекцији, јер се контурне изводнице између себе секу, а контурне тачке за I пројекцију не можемо у овом примеру у опште да одредимо помоћу лопте сем случајно.

Раван у којој су осе задатих површина је раван симетрије за све три површине. Како је она и паралелна са вертикалницом, поклапаће се у другој пројекцији све по две тачке продорних кривих. Стога ће се продорне криве четвртог реда показивати у вертикалној пројекцији као криве другог реда, као две хиперболе. (Цртана је од сваке само једна страна).

Тангенту у било којој тачки криве могли бисмо одредити на исти начин како смо и до сада одређивали (као пресечну праву тангенцијалних равни на једну и на другу површину кроз узету тачку). Само је овде то мало отежано тиме што осе конуса и облице нису управне на једну од пројекциских равни. Стога ћемо овде употребити други принцип.

Познато нам је да се две лопте (ако се секу) секу по једном кругу. Раван тога круга је управна на праву *g* која пролази кроз средишта обеју лопта. Природно да и све тангенте на круг пресека леже у тој равни. Ако су случајно средишта једне и друге лопте једнако удаљена од пројекциске равни, права *g* је паралелна са њом, па је раван круга управна на ту пројекциску раван. Услед тога се цео круг пројектује у тој равни као једна дуж управна на праву *g*, а скупа са кругом и све његове тангенте.

То можемо да користимо овде, па да одредимо тантенту у било којој тачки продорне криве. Одредимо тангенту *t''* у тачки II'' криве продора конуса и облице.

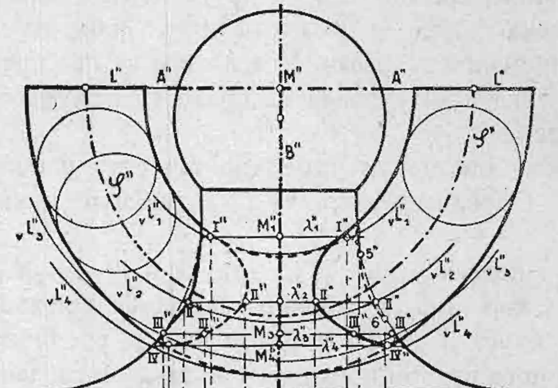
Тачку II смо добили као пресек круга $_2K_A''$ конуса и круга $_2K_B''$ облице. Одредимо сада лопту која има заједничке тангенцијалне равни са конусом у свакој тачки круга $_2K_A''$. То је лопта чије је средиште N_K'' на оси конуса, а одредимо га правом повученом из тачке 1 управно на контурну изводницу конуса. Ако из тачке 2 повучемо праву управну на контурну изводницу облице, у њезином пресеку N_O'' са осом *B'' B''* облице имамо средиште лопте, која додирује облицу, или која у свакој тачки круга $_2K_B''$ има тангенцијалне равни заједничке са облицом. Тачка II'' припада једној и другој лопти, значи да се ове две лопте са средиштима N_O'' и N_K'' секу. Како су та два средишта једнако удаљена од вертикалнице, пресечни круг тих двеју лопта показиваће се као права кроз тачку II'' управна на праву *g* повучену кроз оба средишта N_O'' и N_K'' лопте. Скупа са пројекцијом круга је и пројекција тражене тангенте на криву продора у тачки II''. Тиме је задатак решен, одређена је тражена тангента, јер се код техничких цртежа ретко када цртају две пројекције продорних кривих.

Ако случајно треба да цртамо I пројекцију криве, као што је и овде цртамо, прву пројекцију тангенте можемо да одредимо на било који најподеснији начин. Тангента на криву продора у тачки II припада тангенцијалној равни на конус у тачки II и тангенцијалној равни на облицу у тачки II. Стога продужимо другу пројекцију тангенте и одредимо у пресеку са *X*-осом њен први траг *T''*. Како тангента припада тангенцијалној равни на конус, треба да је прва пројекција *T'* тога трага на првој пројекцији t_K' трасе тангенцијалне равни на конус. Њу лако одредимо. Повучемо изводницу конуса кроз тачку II' до пресека са кругом базиса и у пресечној тачки повучемо тангенту t_K' на круг. То је прва траса тангенцијалне равни. На њој је *T'*, па је права *T'* II' прва пројекција тражене тангенте *t'* на криву продора у тачки II.

*

Као други пример задата је у сл. 182 једна ротациона површина са вертикалном осом *B B* и доња половина једног торуса са хоризонталном осом *A—A*. Осе се секу у тачки *M*. Треба да одредимо криву продора ових двеју површина.

Треба напоменути да унутрашња и спољна видљива контура торуса у II пројекцији нису елипсе. Оне су еквидистанте оне елипсе φ'' која је II пројекција круга по коме се окреће средиште лопте која описује торус. Видљиве контуре II пројекције додирују највеће кругове лопти које повучемо око појединих тачака елипсе φ'' (в. § 68).



Сл. 182

Продорну криву у овом случају не можемо да одредимо помоћним равнима, па ћемо је одредити помоћу лопти.

Узмемо неку лопту са средиштем у пресечној тачки *M* оса и уцртамо јој контуру у II пројекцији. Тај круг $_VL_3''$ пресеца контуру ротационе површине у двема тачкама. Када их спојимо, добијемо пројекцију λ_3'' круга, по коме лопта сече ротациону површину, па уцртамо и његову I пројекцију λ_3'. Иста лопта сече торус по два круга K_3, чије су равни управне на осу *A—A*, па се према томе показују у I пројекцији као праве ⊥ *A'—A'*. Нацртамо I пројекцију лопте — круг $_HL_3'$, па у његовом пресеку са *L'* (они се секу, јер су у истој равни) имамо две тачке 3' и 5'. Кроз њих пролазе кругови K_S'. У њиховом пресеку са кругом λ_3' имамо четири тачке III' продорне криве. Ординатама одредимо на λ_3'' њихове II пројекције.

Хоћемо ли да одредимо највишу тачку продорне криве, повучемо помоћну лопту тако да додирује торус по најмањем кругу, тј. лопту чија контура $_HL_1'$ пролази кроз тачку 1' круга L'. По другој пројекцији $_VL_1''$ те исте лопте видимо да она сече ротациону површину по кругу λ_1''. У пресеку λ_1' са најмањим кругом торуса имамо две највише тачке I' продорне криве. На исти начин одређене су најниже тачке криве (помоћу лопте кроз тачку 4') и контурне тачке за I пројекцију торуса (помоћу лопте кроз тачке 2' и 6'). Контурне тачке за II пројекцију торуса не можемо уопште да одредимо у овом случају, јер не знамо ни I пројекцију контуре. Контурни меридиани ротационе површине пројектују се у I пројекцији као права || X. Њезин пресек са I пројекцијом криве продора даје контурне тачке криве у II пројекцији.

IV. СЕНЧЕЊЕ

А) Сенчење рогљастих тела

§ 73. Увод

Пре него што почнемо да говоримо о одређивању сенки, треба да видимо какве врсте осветлења постоје и какво ћемо осветлење узимати у обзир када будемо говорили о сенкама.

У Нацртној геометрији је потпуно свеједно дали је осветљење природно или вештачко; важан је само положај извора светлости према осветљеном предмету. Ако је извор светлости близу предмета, зраци светлости се распростиру из извора на све стране. За извор светлости претпостављамо да је свега једна светла тачка, центар зракова, па такво осветљење називамо *„централно осветљење“*.

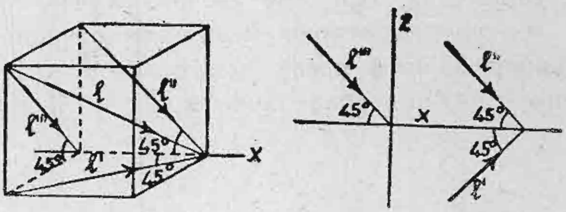
Ако извор светлости (светлу тачку, центар осветљења) узмемо јако далеко од предмета (на пр. сунце), зраци светлости заклапаће између себе толико мали угао, да се сме претпоставити да су паралелни. То значи, претпостављамо да је извор светлости бесконачно удаљен, а само осветљење називамо *„паралелно осветљење“*.

Обе претпоставке, да је извор светлости само једна светла тачка и код паралелног осветљења да је та тачка у бесконачности одговарају природи. Оне доводе чак до тога да је граница конструисане сенке једна линија потпуно наглашена и оштра. У природи оштре сенке не постоје, већ само слабији или оштрији прелази из осветљеног у сенку. То долази отуда што је извор светлости велик, па један његов део још осветљава, док је други већ заклоњен. Ипак остајемо при овим претпоставкама, јер нам оне јако олакшавају конструкцију.

Централно осветљене употребљава се ретко када, и то када се желе постићи нарочити ефекти. Оно се употребљава нарочито када се у перспективи претставља унутрашњост неке зграде.

За сада ћемо се задржати само на паралелном осветљењу.

Паралелно осветљење потпуно је задато својим правцем и смером. Довољно је, дакле, да нам је својим пројекцијама задат један зрак, једна права *l* (*l' l''*) и она нам потпуно одређује правац осветљења. Стрелица на тој правој означава смер осветљења.



Сл. 183

Обично се узима да је правац осветљења из I квадранта ка *X*-оси и то с лева на десно.

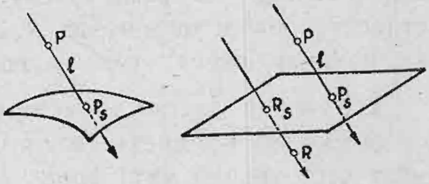
Врло често се употребљава осветљење под 45°''. Осветљење је добило назив по томе што пројекције зрака светлости *l' l''* заклапају са *X*-осом угао од 45°.

Сам зрак је уствари телесна дијагонала једне коцке којој је једна пљошт ∥ *H*, а једна ∥ *V*. Ово се осветљење употребљава нарочито у архитектури, јер је природно, а многе конструкције сенки су олакшане.

§ 74. Сенка тачке

Сенку неке тачке *P* одредићемо ако кроз тачку повучемо зрак светлости. Где тај зрак продре кроз неку површину или раван, ту је тачка P_s сенка тачке *P*. (в. сл. 183).

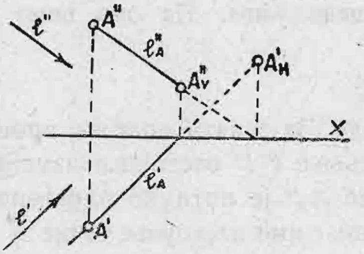
Одмах се види да је одређивање сенке чист положајни задатак, па ћемо у целом овом делу о сенчењу имати прилике да решавамо само положајне задатке.



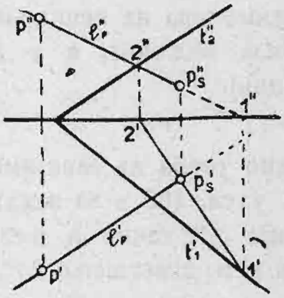
Сл. 184

За тачку P_s кажемо да је стварна сенка тачке *P* када се смер $P-P_s$ поклапа са смером светлости. У противном кажемо да је замишљена – имагинарна – сенка, као на пр. тачка R_s за *R* у сл. 184. Ипак кажемо да је права сенка само она, где зрак светлости који пролази кроз тачку *P* продре по први пут кроз неку површину. Сви други, каснији продори тога зрака кроз неке друге, удаљеније површине су само замишљене сенке тачке *P*. Често ћемо одређивати и те замишљене сенке, да бисмо тиме олакшали конструкцију.

Као први пример за одређивање сенке неке тачке узета је у слици 185 произвољна тачка *A* (*A' A''*) и зрак светлости *l' l''*. Кроз *A* повучемо у обим пројекцијама зрак светлости и тражимо продор тога зрака. Зрак продире кроз V, па је A_V'' стварна сенка тачке A. Тачка A_V'' је други траг зрака l. Па, као што смо одредили други траг праве, можемо да одредимо и први траг A_H'. Тачка A_H' била би сенка тачке A на H, али је та сенка имагинарна сенка. Стварна сенка је A_v (на вертикалници), као тачка у којој је зрак светлости продро по први пут кроз неку раван пошто је прошао кроз тачку A.



Сл. 185

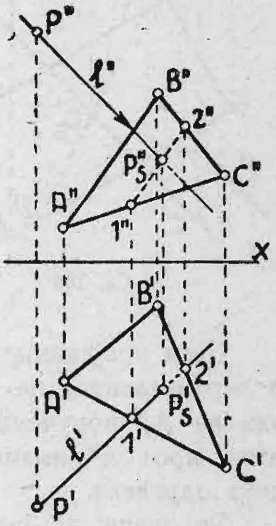


Сл. 186

Сенке на вертикалници обележавамо малим словом V десно испод слова које обележава тачку или праву, сенке на хоризонталници исто тако малим словом H, а све остале сенке малим словом S.

У сл. 186 израђен је други пример, где је сенка P_s тачке P *„пала“* на задату произвољну раван t_1 t_2. Цео проблем одређивања сенке тачке P свео се на то да кроз тачку P повучемо зрак светлости и одредимо његов продор кроз раван t_1 t_2. Природно је да бисмо и овде могли да одредимо $P_н$ и P_v, али би то биле само имагинарне сенке.

Потпуно је свеједно да ли је раван задата трасама или на било који други начин. Принцип остаје исти: Повучемо зрак светлости кроз задату тачку и одредимо продор тога зрака кроз најближу раван. Тако је у сл. 187 одређена сенка тачке P на раван троугла A B C. Одређивање самог продора познато нам је из сл. 42.



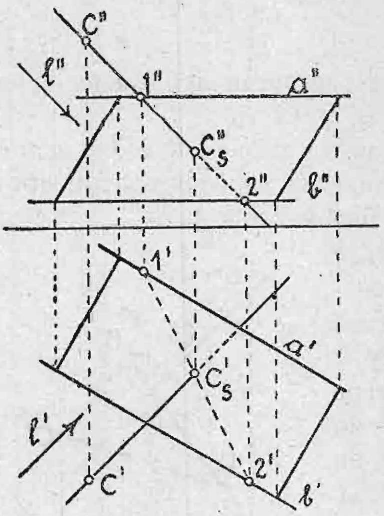
Сл. 187

Као врло чест случај узет је пример у сл. 188 где треба да одредимо сенку тачке C' C'' на неку раван одређену двема правама a и b. Задатак је решен као пре. Повучен је кроз задату тачку зрак светлости l' и l'', па је одређен његов продор кроз задату раван. Као помоћна раван кроз зрак светлости узета је раван управна на вертикалницу, пренете су ординатама у I пројекцију продорне тачке 1 и 2 правих *a* и *b* кроз помоћну раван и тиме одређена права пресека 1′ 2′ помоћне равни са задатом равнином. На њој је продорна тачка C_s' зрака светлости *l*′ кроз задату раван дакле тражена сенка тачке *C*.

Код ова три последња случаја требало би још проверити да ли је тражена сенка тачке пала на ону страну равни коју у тој пројекцији видимо или на невидљиву страну равни. У првом би случају сама сенка била видљива, а у другом невидљива. На ово ћемо се вратити доцније.

*

Једно треба да запазимо већ сада. За задати положај произвољне тачке *A* у сл. 185 и за задато осветљење *l*′ *l*″ отстојање између друге пројекције *A*″ тачке и њезине сенке A_v'' је потпуно одређено. Задржимо ли исто осветљење *l*′ *l*″, а мало смањимо отстојање тачке *A* од вертикалнице (тако да *A*′ буде ближе *X*-оси) смањиће се самим тим и отстојање од *A*″ до A_v''. И обрнуто, повећамо ли отстојање тачке *A* од вертикалнице, удаљиће се и A_v'' од *A*″. Сенка ће у том случају бити (нижа) дубља. Одатле можемо да по дубини сенке доносимо закључке о отстојању тачке од површине на коју она баца своју сенку. (Реч *„дубина“* сенке овде је само делимично тачна. Она у сликарству — и архитектури — има шире значење).



Сл. 188

Стварно, ако нам је задат зрак светлости *l*′ *l*″ и сама друга прекција *A*″ неке тачке *A* са неком A_v'' тачке, можемо лако да одредимо прву пројекцију *A*′ тачке.

Прва пројекција *A*′ биће свакако на ординати из *A*″. Тачка A_v је на вертикалници, па је A_v' на *X*-оси и на ординати из A_v''. Ако сада из A_v' повучемо зрак светлости *l*′, у његовом пресеку са ординатом кроз *A*″ имамо тражену прву пројекцију *A*′ тачке *A*. Тиме је тачка одређена.

То значи да једна ортогонална пројекција неке тачке и њезина сенка потпуно одређују тачку у простору.

Јер ако имамо у простору неку произвољну тачку *A*, па хоћемо да одредимо пројекцију те тачке на неку раван, повучемо из тачке *A* пројекциски зрак управан на ту раван. Продорна тачка је пројекција тачке *A*. Хоћемо ли да одредимо сенку те исте тачке *A* на исту раван, урадимо исто што и пре: повучемо из тачке *A* зрак светлости ка равни и у продору је тражена сенка. Оба пута смо радили исто, повукли зрак кроз тачку A до продора кроз раван. Само смо први пут повукли зрак управан на пројекциску раван и добили пројекцију A'', а други пут коси зрак (светлости) и добили сенку A_v'' тачке. Прву зовемо ортогонална пројекција а за другу (за сенку) бисмо могли казати да је коса пројекција тачке. Њих две, како смо видели, потпуно одређују тачку у простору.

Ради тога се нарочито за архитектонске објекте, одређују и цртају у плановима сенке, да би се помоћу њих у једној пројекцији (изгледу зграде) нагласила и отстојања појединих тачака од неке равни (пластика објекта).

§ 75. Сенка праве

Повучемо ли кроз сваку тачку неке праве p зрак светлости, сви ти зраци сачињаваће једну раван. Ту раван називамо *„светла раван“* кроз праву p (или светла раван праве p). Пресек ове светле равни са било којом површином биће p_s сенка праве p.

Одатле следује:

1) *Сенка праве по некој равни је понова једна права.*

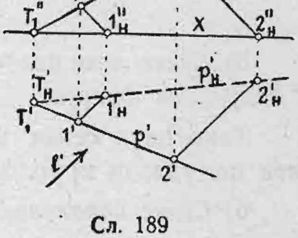
У слици 189 задата нам је произвољна права p и зрак светлости l, па треба да одредимо сенку праве.

Знамо да ће сенка праве бити понова права. Стога ћемо узети на правој p две тачке 1 и 2 и одредити њихове сенке. Обе сенке 1_H и 2_H падају случајно на H. Када их спојимо, добијамо p_H тражену сенку праве p.

Вредно је овде запазити следеће: У колико је тачка удаљенија од равни на коју баца своју сенку, у толико је и сенка удаљенија од саме тачке. Тако је $2_H'$ више удаљена од $2'$ него $1_H'$ од $1'$, јер је тачка 2 удаљенија од H него тачка 1.

Продужимо праву p до продора T_1 кроз H. Траг T_1 налази се у H, па је и његова сенка на H понова та иста тачка T_1'. То значи да сенка p_H' праве p по H мора да пролази кроз T_1'. Ако се уз то сетимо и светле равни, можемо да нагласимо и ово важно правило:

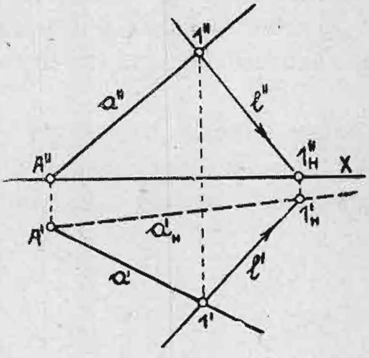
2) *Сенка праве по некој равни пролази кроз продор праве кроз ту раван.*



Сл. 189

Природно да ћемо где год можемо користити ово правило било да нам је траг већ познат било да га можемо одредити лакше него сенку друге које тачке.

Тако у сл. 190 задата произвољна права a (a' a''), која пролази из тачке A у H и треба да одредимо њезину сенку. Тачка A је први траг праве a. Бачена сенка по H мора да пролази кроз ту тачку. Као другу тачку узмемо било коју тачку 1 на правој и одредимо њезину сенку $1_H'$. Бачена сенка по H је права A' $1_H'$.



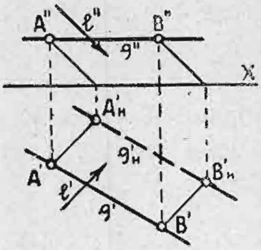
Сл. 190

Ово правило важи и за случај када је продорна тачка бесконачно удаљена. У том ће случају сенка праве ићи кроз бесконачно удаљен продор праве. Другим речима:

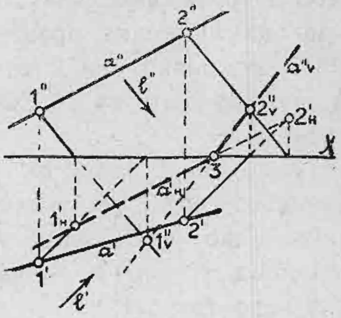
3) *Ако је нека права паралелна са равнином по којој баца своју сенку тада је сенка праве паралелна са самом правом.*

У сл. 191 одређена је помоћна тачка A и B сенка праве g која је $\parallel$ H. Пошто су тачке A и B једнако удаљене од H, троуглови A A' A_H' и B B' B_H' су подударни. Одатле следи да је g_H' $\parallel$ g'. Исто тако следи и да је дуж A' B' једнака дужи A_H' B_H'. То значи:

4) *Ако нека дуж баца своју сенку по некој равни са којом је паралелна тада је и сенка дужи паралелна са том дужи а и једнако дуга.*



Сл. 191



Сл. 192

5) *Сенка неке равне фигуре по равни паралелној са равнином фигуре је подударна фигура.*

Тако ће и сенка круга по равни паралелној са равнином круга бити подударан круг, а сенка средишта биће средиште сенке.

6) *Сенке паралелних правих по било којој равни између себе су паралелне.*

Јер су светле равни повучене кроз паралелне праве између себе паралелне, па су и њихови пресеци са неком новом равнином паралелни.

Из истог разлога следи:

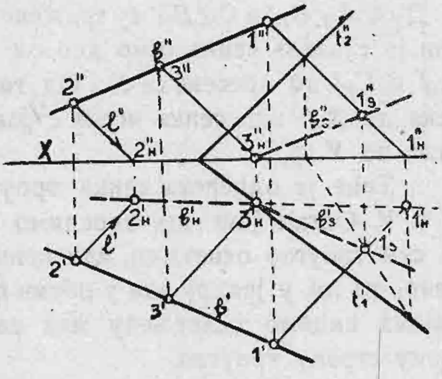
7) *Сенке једне праве по паралелним равнима су паралелне.*

8) *Сенке једне праве по двема равнима секу се у једној тачки на пресечној правој тих двеју равнина.*

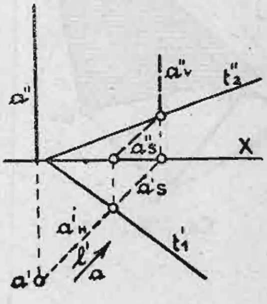
Ово правило следи из познатог правила да се три равни секу у једној тачки. Тако се у сл. 192 светла раван кроз праву a сече са H по a_H, а са V по a_V, али се тада a_H и a_V морају сећи у једној тачки на X-оси која је пресек H и V. Тачка 3 је тачка у којој се секу те три равни.

Сама сенка праве a одређена је помоћу сенки двеју њезиних тачака 1 и 2. Сенка a_H помоћу стварне сенке $1_H'$ и имагинарне $2_H'$ јер тачка 2 баца сенку на V. Исто тако је a_V одређена помоћу $2_V''$ и имагинарне сенке $1_V'$.

У сл. 193 решен је још један такав пример. Одређена је сенка праве b по H и произвољној равни $t_1\, t_2$. Сенка b_H' одређена је помоћу сенки тачака 1 и 2 на H и пресеца t_1' у тачки $3_H'$. За $1_H'$ можемо



Сл. 193



Сл. 194

одмах да знамо да је имагинарна сенка, јер пада испод равни $t_1\, t_2$. Одредимо ли продор тога зрака кроз $t_1\, t_2$, тај продор биће $1_s'\, 1_s'$, стварна сенка тачке 1. Права $b_s'\, b_s''$ је сенка праве b по равни $t_1\, t_2'$. Можемо да одредимо и тачку 3 праве b која баца своју сенку 3_H на t_1. Довољно је да из $3_H'$ повучемо l' и из $3_H''$ l'', па су на пресеку са b' и b'' тражене тачке $3'$ и $3''$. Пошто су $3'$ и $3''$ пројекције једне тачке 3 праве b, треба да су на ординати $\perp$ X.

Када је нека права управна на једну од пројекцијских равнина, тада је и светла раван кроз ту праву управна на ту исту пројекциску раван. Према томе се цела светла раван и све што је у њој пројектује као једна права у правцу светлости (в. сл. 194).

9) *Ако је нека права управна на једну од пројекциских равни, њезина је сенка по тој пројекциској равни у правцу светлости.*

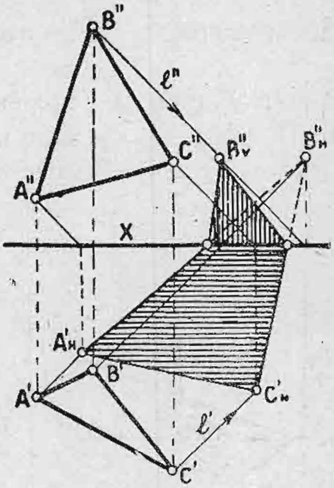
10) *Ако се нека права пројектује као тачка у једној од пројекциске равни, тада се њезина сенка пројектује у тој пројекциској равни као права у правцу светлости, без обзира на какву површину пада.*

При одређивању сенке неког предмета можемо много скратити и упростити конструкцију, ако се корисно послужимо овим правилима.

Као пример може да послужи задатак у слици 198.

§ 76. Осветљена и неосветљена страна равни

У сл. 195 задат је троугао $A\,B\,C$ и произвољан зрак светлости $l'\ l''$. Треба одредити сенке троугла. Повући ћемо кроз све три тачке по један зрак светлости и одредити њихове продоре кроз H или V. Одмах ћемо видети да тачке A и C бацају своју сенку на H, а тачка B на V. Дуж $A_H'\,C_H'$ је сенка стране $A\,C$ по H. Да би одредили сенке и осталих двеју страна по H, одредимо B_H', имагинарну сенку тачке B на H. Дуж $A_H'\,B_H'$ и $C_H'\,B_H'$ су тражене сенке, али је стварна сенка само део од тачака A_H' и C_H' до пресека са X. Од тих пресека до B_V'' иде сенка истих страна троугла по V.



Сл. 195

Тиме је одређена сенка троугла на H и V. Остаје још да одредимо да ли је сам троугао осветљен, или тачније речено, да ли у једној или у обема пројекцијама видимо осветљену или неосветљену страну троугла.

Са најпримитивнијег модела можемо лако да се уверимо да у I и у II пројекцији видимо исту страну равни, ако су трасе t_1 и t_2 задате равни конвергентне (в. сл. 77). Исто тако за једну раван са дивергентним трасама (в. сл. 78), да јој у I пројекцији видимо једну страну, а у другој пројекцији другу.

Када раван није задата трасама, него на други начин, то распознавање — да ли раван видимо у обема пројекцијама с исте стране, — остаје понова врло једноставно. У равнима на сл. 77 и 78 уцртан је по један квадрат. Ако у сл. 77 у II пројекцији кренемо из D'' преко $C''\ B''$ и A'' до D'' описаћемо једну затворену криву у смеру сказаљке на сату. Ако то исто поновимо у I пројекцији од D' преко $C'\ B'$ и A' до D', дакле прелазимо тачке истим редом као пре, описаћемо поново једну затворену криву у смеру сказаљке.

У сл. 78 у II пројекцији је потпуно исто као у сл. 77, али у I пројекцији, читајући тачке истим редом, описујемо затворену линију баш у противном смеру.

Када је нека равна фигура задата тако да њене тачке, читане у смеру сказаљке на сату, иду у обема пројекцијама истим редом $D''\ C''\ B''\ A''$ и $D'\ C'\ B'\ A'$, тада раван те фигуре има конвергентне трасе.

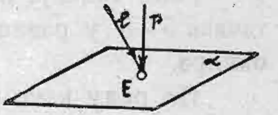
Што је главно, ту фигуру видимо у обема пројекцијама с исте стране. Ако читамо у истом смеру, па тачке мењају свој ред $D'' C'' B'' A''$, а I пројекција $D' A' B' C'$, тада раван фигуре има дивергентне трасе и услед тога самој фигури видимо у I пројекцији једну страну а у II пројекцији другу.

Према томе троугао у сл. 195 видимо у обема пројекцијама с исте стране. Остаје још да утврдимо да ли је та страна осветљена или не.

За ону страну неке равни која је окренута ка извору светлости, кажемо да је *„осветљена“*. Дакле, осветљена је она страна равни у коју ударају директно зраци када долазе из извора светлости. За другу страну равни кажемо да је неосветљена или да је *„у сопственој сенци“*.

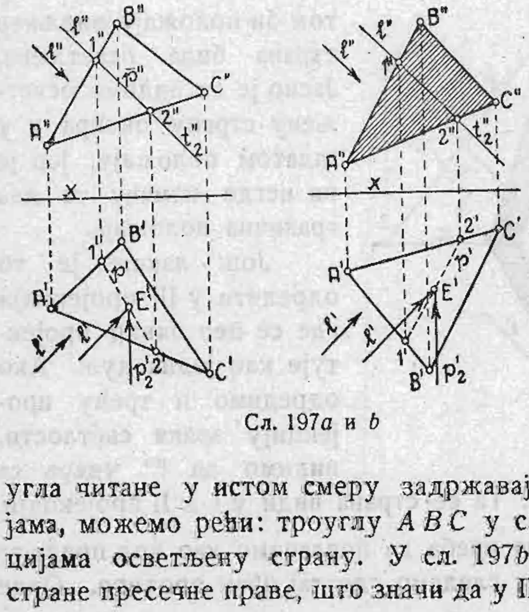
Према томе када хоћемо да дознамо да ли неку раван видимо у пројекцији са осветљене или неосветљене стране, узећемо на равни било коју тачку E и повући кроз њу пројекциски зрак и зрак светлости.

Ова два зрака кроз тачку E одређују једну пројектну раван у правцу светлости која пресеца задату раван. Ако оба зрака долазе ка тачки E са исте стране пресечне праве, видимо раван у тој пројекцији са осветљене стране. Ако долазе ка E са разних страна пресечне праве, видимо неосветљену страну равни.



Сл. 196

У сл. 197 a и b задат је у обема пројекцијама по један троугао и зрак светлости l. Треба да видимо која се страна троугла види у којој пројекцији. Да би одредили да ли у II пројекцији видимо осветљену или неосветљену страну троугла, повући ћемо пројектну раван $(\perp V)$ у правцу светлости $(t_2'' \parallel l'')$ и одредити пресек p те равни са равнином троугла. Кроз било коју тачку E' тога пресека p' повући ћемо зрак светлости l' и прву пројекцију пројекциског зрака $p_2 \perp V$. У сл. 197a оба зрака су с исте стране пресечне праве p'. Према томе у II пројекцији видимо осветљену страну троугла. Како тачке троугла читане у истом смеру задржавају исти ред у обема пројекцијама, можемо рећи: троуглу $A B C$ у сл. 197a видимо у обема пројекцијама осветљену страну. У сл. 197b зраци долазе сваки са своје стране пресечне праве, што значи да у II пројекцији видимо неосветљену



Сл. 197a и b

страну троугла. Како код троугла у сл. 197*b* тачке читане у истом смеру мењају у I пројекцији свој ред, можемо рећи да сам троугао видимо у I пројекцији са друге, дакле са осветљене стране.

Овај начин одређивања да ли видимо осветљену или неосветљену страну једне равни захтева бар нешто конструкције. Може да доведе почетника и до забуне, нарочито ако је раван у склопу неког рогљастог тела, где треба водити рачуна и о томе да ли је раван видљива или невидљива.

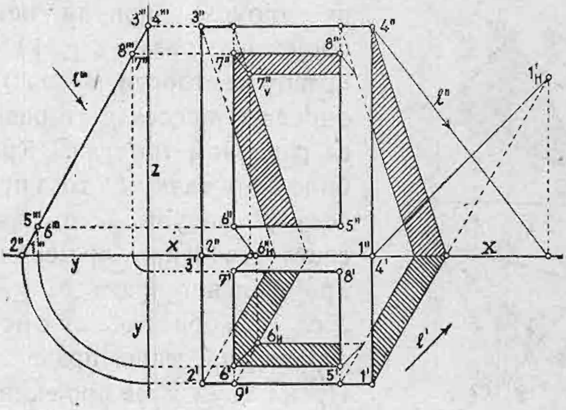
Код појединих задатака, а нарочито код задатака из инжењерске праксе, то се одређује много једноставније.

Ево једног примера. У сл. 198 задат је правоугаоник 1—4 који се ивицом 1 2 наслања на *H*, а ивицом 3 4 на *V*. Из њега је исечен мањи правоугаоник 5—8 тако да у ствари остаје само један правоугаони оквир са паралелним ивицама. За задато осветљење треба да одредимо сенку тог оквира.

Ради тачније претставе, а стварно да одредимо и прве пројекције тачака 5 - 8 у равни великог правоугла, нацртана је и III пројекција оквира.

По реду како су обележене тачке 1—4 знамо да видимо у обим пројекцијама исту страну оквира. Остаје да одредимо дали је та страна осветљена или није. Према задатом осветљењу *l'* и *l''* хоризонталница и вертикалница су осветљене.

Када би око ивице 1 2 окретали оквир док постане ∥ *V*, у том би случају видљива страна била осветљена. Када бисмо некако одмакли вертикалницу, па оквир окретали око стране 1 2 док не падне на хоризонталницу, и у том би положају видљива страна била осветљена. Јасно је да видимо осветљену страну оквира и у задатом положају, јер је он негде између та два гранична положаја.



Сл. 198

Још лакше је то одредити у III пројекцији где се цео оквир пројектује као једна дуж. Ако одредимо и трећу пројекцију зрака светлости, видимо да *l'''* удара са спољне стране на раван оквира. Та се страна види у I и II пројекцији.

Да нађемо бачену сенку не треба да повлачимо као код предњег задатка *l'* и *l''* из сваке тачке и гледамо где тај зрак продире. Овде могу да сс користе правила о сенкама праве из § 75, па да се одреди сенка са што мање конструкције.

Одредимо сенку стране 1 4. Тачка 1 је у H, а тачка 4 у V, па ће им сенке бити те исте тачке (трагови стране). Сама страна 1 4 бацаће своју сенку по H и по V. Одредимо најпре сенку те стране по H. За то нам је довољна сенка само једне тачке те стране, јер по правилу 2) сенка треба да прође кроз тачку $1'$. Место било које друге тачке (а сваку другу бисмо морали одређивати) узмемо тачку 4 и помоћу l' и l'' из $4'$ и $4''$ одредимо имагинарну сенку $4_H'$ те тачке на хоризонталници. Права $1' 4_H'$ је сенка стране 1 4 по H. Али од те сенке је стварна сенка по H само део од $1'$ до пресека са осовином X. Даља сенка ићи ће по V и то (по правилу 2) од те пресечне тачке до тачке $4''$. Тим је одређена сенка стране 1 4 по H и по V. Страна 2 3 правоугаоника је паралелна са страном 1 4, па ће (по правилу 6) њезине сенке по H и V бити паралелне са сенкама ивице 1 4. Стране 1 2 и 3 4 су у H односно у V, па су оне уједно и бачене сенке по тим равнима.

Остаје да одредимо сенке унутрашњега правоугаоника 5—8. Место да повлачимо l' и l'' из тачака 6 и 7 и тако одредимо сенку те стране, продужићемо радије страну $6' 7'$ до пресека $9'$ са страном $1' 2'$. Како је страна 1 2 великог правоугаоника у H, тачка 9 је први траг стране 6 7 малог правоугаоника. По правилу 2) сенка те стране по H треба да пролази кроз $9'$. Уз то је страна 6 7 паралелна са страном 1 4, по правилу 6) биће им и сенке по H и V паралелне, те можемо да их нацртамо. Зраком l' из $6'$ одредимо на тој сенци $6_H'$, а зраком l'' из $7''$ одредимо $7_V''$. На исти начин одредимо сенке 5 8 малог правоугаоника. Стране 5 6 и 7 8 су паралелне са H односно V. Користећи правило 3) или 4) повучемо одмах њихове сенке из $6_H'$ и $7_V''$.

Одредили смо на тај начин сенке свих страна, а да при томе нисмо конструисали него сенку једне једине тачке (тачке 4).

§ 77. О сенчењу тела у опште

Као што смо у § 18 видели за пројекциске зраке, исто тако имаће и зраци светлости по две тачке заједничке са неким телом: једну, у којој зраци долазећи из извора светлости продиру кроз тело по први пут, и другу где зраци светлости напуштају тело, пошто су прошли кроз његову шупљину. На самом телу запажамо тада два одвојена дела: један део тела на који директно падају зраци светлости долазећи из извора светлости те га осветљавају, и други део на који ударају зраци светлости с унутрашње стране површине тела, и то они зраци који су, прошавши већ једном кроз тело, „изгубили“ своју светлост. За први део кажемо да је *„осветљени део“* тела, а за други неосветљени, да је *„у сопственој сенци“*.

Поставимо сада иза овог тела неку раван, али тако окренуту да зраци светлости ударају директно у њу. Нова раван ће бити осветљена сва у колико пређашње тело није на своме осветљеном делу одузело светлост понеким зрацима. Где ти зраци ударе у нову раван остаће раван без осветљења. Ово неосветљено поље на новој равни називамо „*бачена сенка*“. Уместо равни може се поставити нека већа површина. Одатле следује:

1) *Бачена сенка може да падне само и једино на неку раван или површину која би иначе по свом положају била осветљена.*

2) *Бачену сенку могу да бацају само осветљене тачке.*

Ако се удаљујемо са зраком светлости све више од средишта тела, осветљена и неосветљена тачка тела на том зраку биће, у главном, све ближе. На крају обадве ће се наћи заједно. То се дешава на оним зрацима који само додирују тело. Сви такви зраци скупа сачињавају једну облицу (код облих тела) или призму (код рогљастих тела), такозвану „*светлу облицу*“ или „*светлу призму*“. (Код централног осветљења требало би говорити о светлом конусу или светлој пирамиди, где би врх био извор светлости).

Линија по којој светла облица или призма додирују тело дели осветљени део тела од дела који је у сопственој сенци. Ту линију називамо „*граница сопствене сенке*“ или „*раставница*“.

Бачена сенка тела појављује се услед тога што тело задржава на себи осветлење оних зракова који продиру кроз тело. Сви ти зраци налазе се унутра светле облице или призме, па ће се и бачена сенка тела простирати само до пресека светле облице или призме са равнином или површином на коју пада бачена сенка. Према томе:

3) *Контуру бачене сенке даје сенка границе сопствене сенке, сенка раставнице.*

Из овога што смо до сада рекли види се да код одређивања сенке постоје два одвојена задатка. Један је одређивање границе сопствене сенке, а други одређивање контуре бачене сенке. Међутим последње правило спаја та два задатка и потчињава један другом. Који ћемо пре решавати, да ли сопствену или бачену сенку, зависиће углавном од тела чију сенку тражимо и од његовог положаја.

За сада ћемо се задржати само на одређивању сенке рогљастих тела.

§ 78. Сенчење рогљастих тела

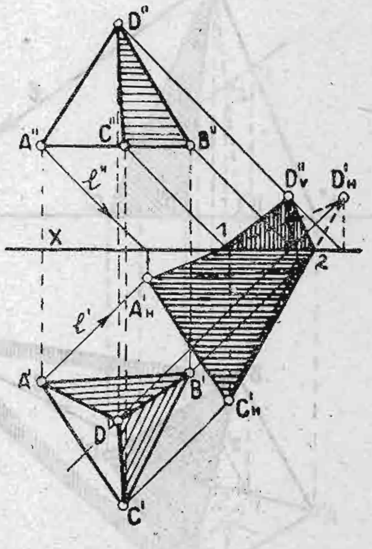
Као први пример нека нам је задат тетраедар $A—D$ коме је једна пљошт $\| H$ и произвољан зрак светлости $l' l''$. Треба да одредимо сопствену и бачену сенку тетраедра.

Коју ћемо сенку пре одредити сопствену или бачену обично је свеједно код свих задатака. Стога одређујемо најпре ону која захтева мање конструкције.

Код овог примера знамо само да је пљошт ABC у сопственој сенци. Она је паралелна са хоризонталницом према томе горња, унутрашња страна пљошти је осветљена, а како ми говоримо само о спољној страни (овде о доњој), она је у сопственој сенци. За пљошт ACD смемо да тврдимо да је осветљена. Јер када би је окренули око $A'C'$ да легне $\parallel H$ њезина спољна, видљива страна била би осветљена. Исто тако била би осветљена спољна, видљива страна када бисмо окренули пљошт око $A'C'$ да буде $\perp H$ (да се цела пљошт пројектује као једна дуж, дуж $A'(C')$. Према томе пљошт ACD је осветљена (њезина спољна видљива страна) и у задатом положају, који је између обадва ($\parallel H$ и $\perp H$).

Код пљошти $B'C'D'$ не можемо тако да тврдимо. Када бисмо пљошт окренули око $B'C'$ да буде $\parallel H$, видљива спољна страна пљошти била би осветљена. Када бисмо је окренули (око $B'C'$) да постане $\perp H$, видљива спољна страна пљошти била би у сопственој сенци. (Цела пљошт у том случају пројектује се као дуж $B'C'$ а зрак светлости l' удара у њу са унутрашње стране тетраедра). Како је пљошт $\parallel H$ осветљена, а $\perp H$ у сопственој сенци, треба да наиђе приликом окретања око $B'C'$ на један гранични положај, где је баш у правцу светлости. Да ли је задати положај пљошти пре или после тога не може да се зна без конструкције. Ово исто важи и за пљошт ABD.

Према томе хоћемо ли да одредимо границу сопствене сенке потребна нам је нека конструкција. С друге стране, када би је већ и знали, да одредимо бачену сенку требају нам сенке бар трију тачака. Само од себе се намеће да, место конструкције за одређивање границе сопствене сенке, одредимо у овом случају сенку и четврте тачке, па ће нам контура бачене сенке одредити ивице које сачињавају границу сопствене сенке (раставницу).



Сл. 199

Стога су овде одређене бачене сенке тачака A—D. Тачка D баца своју сенку на V, а остале на H. Како нам требају све у истој равни одредимо и имагинарну сенку D_H'.

Када их повежемо видимо да сенке ивица AC, CD и DA сачињавају контуру бачене сенке. То значи да су те ивице граница сопствене сенке. Према томе пљошт ACD је осветљена, а све остале су у сопственој сенци.

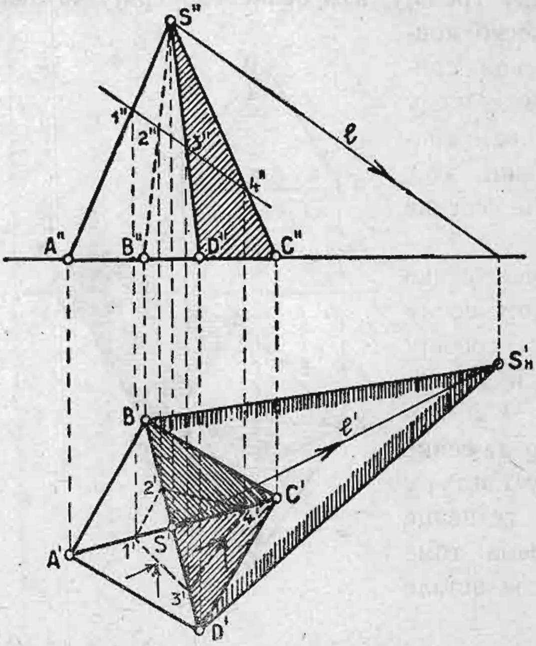
Од бачене сенке важи као њезина контура сенка $A_H' C_H'$. Од стране $C_H' D_H'$ остаје као стварна сенка само део од C_H' до тачке 2, на оси X, а даља сенка те исте ивице иде по V од 2 до D_V''. Исто тако и страна $A_H' D_H'$ остаје као стварна сенка до тачке 1. а одатле иде сенка по V ка тачки D_V''.

Раније смо били одредили и B_H' сенку тачке B за коју сада знамо да није осветљена. Поред тога знамо и правило 2, из § 77 које каже да бачену сенку могу да бацају само осветљене тачке. То долази отуда што смо ми раније повукли кроз тачку B зрак светлости $l' l''$ (једну праву) и одредили њезин продор кроз H. Наша је дужност да (накнадно) одредимо је ли то стварна или само имагинарна сенка. Сада видимо да је имагинарна, као што су имагинарне и сенке ивица AB и BC. На слици су нацртане, а све те сенке падају унутра контуре. Исто тако пале би унутра контуре и сенке свих тачака пљошти ABD. То би биле у неку руку стварне сенке, јер су тачке осветљене, али оне не постоје и ми их не одређујемо сем у случају да су нам потребне за било коју другу конструкцију.

*

Сличан је задатак када имамо да одредимо сенке неке пирамиде. Тако је у сл. 200 задата правилна четворострана пирамида са базисом у H, и произвољан зрак светлости. Треба да одредимо сопствену и бачену сенку.

И овде бисмо могли најпре да одредимо помоћу конструкције из сл. 197 које су равни осветљене, а које у сопственој сенци. Та је конструкција и уцртана. Повучена је друга пројектна раван у правцу светлости и одређен њезин пресек, четвороугао 1 2 3 4 са пирамидом. Затим су у било којој тачки пресечне праве $1' 3'$ и $3' 4'$ повучени зраци пројекције и светлости. Из те конструкције се види да је раван ASD у II пројекцији осветљена, а раван DSC у сопственој сенци. Само ова конструкција може лако да збуни почетника, јер већ код равни ASB, судећи по истој конструкцији, треба закључити да је раван неосветљена, а раван (спољна страна пљошти ASB пирамиде је осветљена. То долази отуда што раван ASB има дивергентне трасе, па се у II пројекцији види унутрашња страна, а у I пројекцији спољна. Конструкција показује да је раван у II пројекцији осветљена. То је



Сл. 200

тачно. Неосветљена је унутрашња страна равни (пљошти $A\,S\,B$), а то је баш доказ да је спољна страна пљошти осветљена. Ми испитујемо и водимо рачуна само о спољним површинама. Због тога је ова конструкција незгодна.

Много брже и лакше решићемо задатак, ако одредимо најпре бачену сенку. Базис пирамиде је у H, па су тачке A' B' C' и D' уједно и сенке тих тачака на H. Да одредимо сенке ивица пирамиде довољно је, према томе, да одредимо још сенку врха S на H (без обзира да ли је то стварна или имагинарна сенка). Када одредимо S_H' спојићемо ту тачку са тачкама базиса. Добивене праве су сенке појединих ивица пирамиде.

Одмах видимо да су праве $B'\,S_H'$ и $D'\,S_H'$ контуре бачене сенке, што значи да су ивице $B\,S$ и $D\,S$ граница сопствене сенке. Тиме је задатак решен. Пошто је S_H' стварна сенка, одредили смо бачену и сопствену сенку.

Ову конструкцију можемо рекапитулирати као неко правило. Сенку пирамиде одредићемо најлакше, ако одредимо сенку врха на раван базиса и из те сенке врха повучемо тангенте на базис. Додирне тачке тангенти показују које ивице пирамиде сачињавају границу сопствене сенке, а саме тангенте су контура бачене сенке пирамиде по равни базиса.

Израз *„повучемо тангенте на базис“* је неправилан када знамо да је базис полигон. Остаћемо ипак при том изразу, јер ће нам тада исто правило важити и за одређивање сенке конуса.

Ако сенка врха пада у сам полигон базиса, тада су све пљошти пирамиде осветљене.

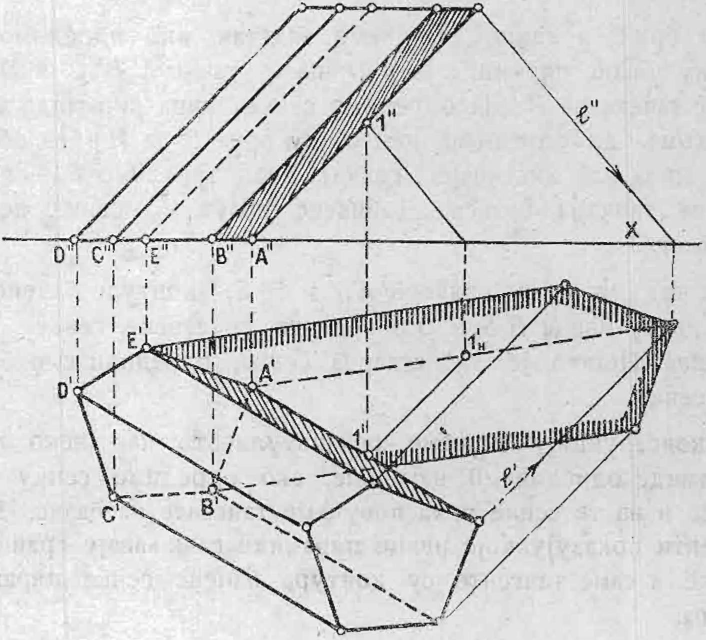
*

Аналогна је конструкција за одређивање сопствене и бачене сенке призме. У сл. 201 задана је произвољна коса петострана призма са базисом у H и треба да одредимо сопствену и бачену сенку призме за зрак светлости l' l''.

Све ивице призме су паралелне међу собом, па ће и њихове сенке бити паралелне. Стога ћемо одредити сенку једне — било које — ивице по H на пр. сенку ивице из A. Сенка A_H' се поклапа са A', јер је A у H, а као другу тачку узећемо $1_H'$. Права A' $1_H'$ је сенка ивице из A по H. Паралелно са њом можемо да повучемо из тачака базиса сенке осталих ивица. Сенке ивица из E и B су крајње, што значи да су оне контура бачене сенке, а да су саме ивице граница сопствене сенке.

И овде бисмо могли да кажемо правило аналогно предњем. Да одредимо сенку призме, конструишемо сенку једне њезине ивице по равни базиса. Паралелно са конструисаном сенком ивице повучемо тангенте на базис. Додирне тачке одређују ивице које су на граници сопствене сенке, а саме тангенте су контура бачене сенке на раван базиса.

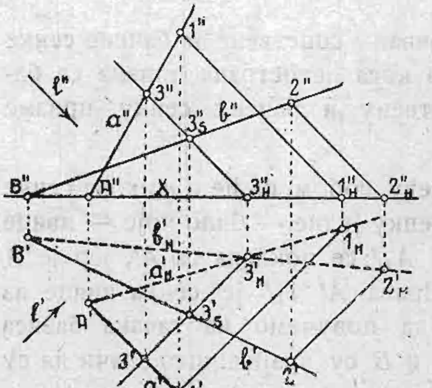
У сл. 201 одређена је накнадно и сенка горњег базиса по *H* и *V*.



Сл. 201

§ 79. Сенка праве по телу (Метода враћања натраг)

Нека су нам задате две праве *a* и *b* и зрак светлости *l*. Треба да одредимо сенке.



Сл. 202

Место да узмемо по две тачке на свакој правој, па да помоћу њих одредимо сенке правих, узећемо по једну (1 на *a* и 2 на *b*), а место било које друге тачке одредићемо прве трагове *A* и *B*. Конструишемо сенке тачке 1 и 2, па су $1_H'$ A' сенка праве *a* и $2_H'$ B' сенка праве *b*.

Остаје још да видимо да ли права *a* баца своју сенку на праву *b*. Просторно решење било би ово. Кроз праву *a* требало би повући светлу раван и одредити продор праве *b* кроз ту раван. Задатак прилично обиман, а може да се реши једноставније.

Када смо већ одредили сенке обеју правих, можемо увек лако да одредимо за сваку тачку праве где јој је сенка и обрнуто за сваку тачку сенке којој је тачки праве та тачка бачена сенка. Довољно је само да повучемо зрак светлости и одмах ћемо видети којој тачки праве одговара нека тачка сенке.

На слици видимо да се сенке правих a и b, a_H' и b_H' пресецају. Обележимо пресечну тачку са $З_H'$. Ако претпоставимо да је $З_H'$ једна тачка сенке a_H', можемо да повучемо зрак светлости l' из $З_H'$, па ћемо одредити тачку $З'$ праве a' која баца ту сенку. Претпоставимо ли да је $З_H'$ једна тачка сенке праве b', тада је $З_S'$ на истом зраку l' она тачка праве b, која ту сенку баца. За нас је важно да су тачке $З'$ и $З_S'$ на истом зраку l' светлости (који пролази и кроз $З_H'$). Тим је и задатак решен. Јер када су на истом зраку светлости значи да тачка $З'$ праве a' баца своју сенку $З_S'$ на праву b'. Друге пројекције тих тачака одредимо или помоћу ордината, а помоћу l'' проверимо тачност, или помоћу l'' из тачке $З_H''$ (на оси X), па ординатама проверимо тачност за $З''$ и $З_S''$.

Овај начин посредног одређивања сенке, где најпре одредимо сенку праве (или уопште неке линије, или склопа неких линија) која сенку баца и оне праве (или површине) на коју сенка пада на неку нову раван, па да одатле враћамо оне сенке које су нам потребне, називамо „*метода враћања натраг*“.

Ова метода је врло једноставна и корисна утолико више што се обично траже и сенке на неку раван, уствари на H или V.

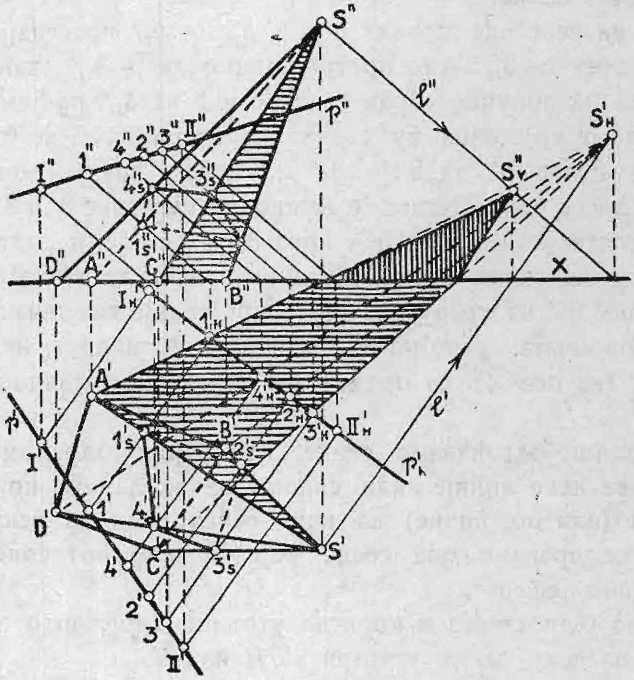
(Овако узета изгледа ова метода нова, а уствари није ништа друго но просторно решење задатка које смо раније поменули. Сенка a_H' праве и сама права a, замислимо ли и зраке светлости који пролазе кроз a, није ништа друго но светла раван повучена кроз праву a. Сенка a_H' је њезина прва траса. Да одредимо продор праве b кроз ту раван, треба да кроз праву b повучемо помоћну раван. Потпуно је слободно да било коју раван узмемо као помоћну, главно је да пролази кроз b и да је што лакше одредити њезин пресек са задатом равни. Стога овде као помоћну раван узмемо понова светлу раван кроз праву b, а b_H' јој је прва траса. Како су обе равни светле равни, обе су паралелне са зраком светлости l, стога ће и њихова пресечна права бити $\parallel l$. Повучемо ту пресечну праву (l') из тачке $З_H'$ као пресека првих траса задате и помоћне равни, па је на њој $З_S'$ тражена тачка продора праве b кроз светлу раван повучену кроз a. У продужењу l' је тачка $З'$ праве a која баца ту сенку $З_S'$.

*

За вежбу израдимо пар примера.

Нека нам је задата неправилна четворострана коса пирамида са базисом у H и произвољна права p ван ње. Треба да одредимо сенке за осветљење l' l''.

Одредимо најпре сенку S_H' врха пирамиде на раван базиса и повучемо из ње тангенте на базис. Пошто те тангенте додирују базис у тачкама A' и C', ивице AS и CS су границе сопствене сенке. Према томе осветљене су пљошти ADS и DCS пирамиде, а остале су у сопственој сенци. Саме тангенте су контура бачене сенке. Од њиховог пресека са X осом сенка пада по V, и то ка тачки S_V''. Сенка праве p одређена је помоћу тачака I и II праве (в. сл. 203). Цела конструкција позната нам је из ранијих примера.



Сл. 203

Остаје још да видимо да ли права p баца своју сенку и по пирамиди. Пошто се сенка праве сече са сенком пирамиде, можемо одмах рећи да права p баца своју сенку по пирамиди. Сенка може да падне само на раван ADS и DCS, јер су то једине две осветљене равни пирамиде. Према конструкцијама које смо до сада упознали, требало би узети на p две тачке, повући кроз њих зраке светлости, па одредити њихове продоре кроз раван ADS. Спојна права тих продора била би сенка праве p по тој равни. Ова би конструкција била прилично незгодна због тога што захтева много линија.

Тражену сенку можемо да одредимо много брже а и тачније методом враћања натраг.

Видимо на слици да се сенка p_H' праве p пресеца са сенком $A'\,S_H'$ ивице A и то у тачки $1_H'$. Значи да је тачка $1_H'$ уједно и сенка неке тачке 1 на правој p и сенка неке тачке 1 на ивици A. Ако из $1_H'$ повучемо зрак светлости l' одредићемо и тачку $1'$ на правој p' и њену сенку $1_S'$ на ивици $A'S'$. На потпуно исти начин, помоћу тачке $3_H'$ одредимо тачку $3'$ праве p' и тачку $3_S'$ ивице $C'S'$ у којој тачка $3'$ баца своју сенку. Само су те две тачке $1_S'$ и $3_S'$ у разним равнима ASD и CSD. Да одредимо сенку праве p по тим равнима треба нам још бар једна тачка. Најбоље је да одредимо сенку праве p на ивици $D'S'$. Зато нацртамо сенку $D'\,S_H$ те ивице по H и обележимо са 4_H, тачку у којој она сече p_H'. Зрак l' кроз $4_H'$ одређује нам и тражену сенку $4_S'$ и тачку $4'$ праве p' која је баца.

Дуж $1_S'$ $4_S'$ је сенка праве p' по пљошти $A'S'D'$ пирамиде, а дуж $4_S'$ $3_S'$ сенка пљошти $C'D'S'$. Друге пројекције одредимо као код предњег задатка или ординатама или помоћу зрака l''. Тиме је и задатак решен.

Овде би требало додати још и ово. Као што смо одредили сенку праве p на ивици D, можемо на исти начин да одредимо и сенку $2_S'$ на ивици $B'S'$. Дуж $1_S' 2_S'$ била би сенка праве p' по пљошти $A'S'B'$, а дуж $2_S'$ $3_S'$ сенка по пљошти $B'S'C'$. И овде смо дошли до немогућег резултата, да права p баца своју сенку на равни које нису осветљене. Одговор је једноставан. Да одредимо сенку праве p повукли смо кроз њу светлу раван. Где та раван сече хоризонталницу, имамо p_H' сенку праве по хоризонталници, где сече пирамиду, ту је сенка по пирамиди. Али је пресек светле равни са задатом четвоространом пирамидом четвороугао $1_S'-4_S'$. Од тога чисто геометриског решења ми треба да одредимо које су стране четвороугла стварна сенка, а које само замишљена. Али и сада замишљене сенке $1_S'$ $2_S'$ и $2_S'$ $3_S'$ постале би стварне сенке на унутрашњу површину пирамиде, када бисмо некако отстранили њезине пљошти ASD и DSC.

Ово је нарочито наведено, као и сенка B_H' тачке B код прошлог примера, да би се могло нагласити, да свака сенка коју смо успели да одредимо не мора самим тим да буде стварна сенка.

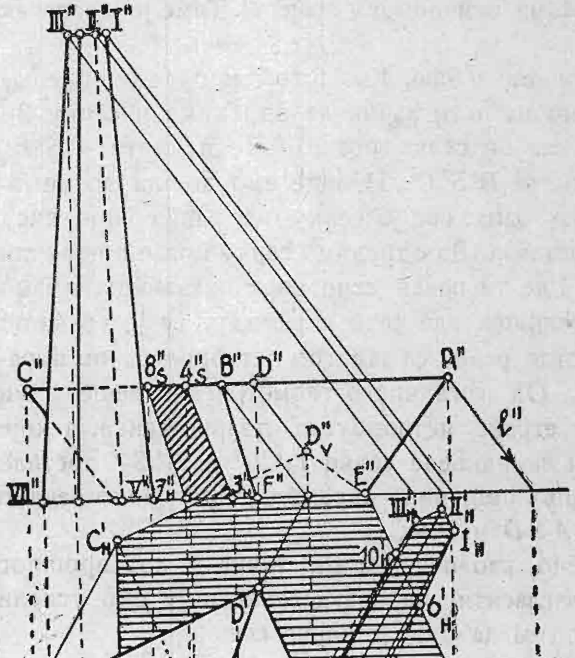
*

У сл. 204 решен је један пример одређивања бачене сенке методом враћања натраг где је зарубљеној вертикалној пирамиди и хоризонталној зарубљеној призми дат приближан облик чесме са коритом. Да задатак буде једноставнији зарубљена призма, *„корито“* нема дебљине. Тако је хоризонталница уједно и дно *„корита“*, а стране *„корита“* четири косе равни.

Како је горња пљошт призме отстрањена видимо у I пројекцији унутрашњу страну призме (корита) а у II пројекцији спољну. Ако је једна коса страна корита са унутрашње стране осветљена, са спољне је у сопственој сенци и обрнуто. Услед тога је цео горњи четвороугао $A-D$ граница сопствене сенке. Када то знамо, место да испитујемо која је коса раван у I пројекцији осветљена а која није, одредимо бачену сенку четвороугла $A'-D'$ по хоризонталници, па ће нам та сенка показати које су равни осветљене. То је утолико лакше што је четвороугао $A-D$ паралелан са H, па ће му сенка на H бити подударан четвороугао.

На слици је помоћу l' и l'' одређена сенка A_H' тачке A. Ивица $A'B$ баца по H себи паралелну сенку. Повучемо је и зраком l' из B' одредимо на њој B_H'. Одатле се наставља сенка ивице BC. Нацртамо је $\parallel B'C'$, а крајњу тачку C_H' одредимо поново зраком l' из C'. Из A_H'

и C_H' повучемо на исти начин сенке других двеју ивица (до пресека са осом X). На слици су помоћу D_V'' одређене и сенке тих ивица по V и ако нису видљиве.



Сл. 204

Како је доњи правоугаоник $E-K$ у H, можемо одмах уцртати и сенке косих ивица корита. Сенке $E'A_H'$ и $G'C_H'$ сачињавају контуру бачене сенке. То значи да су оне граница сопствене сенке и да су равни $A'D'K'E'$ и $C'D'K'G'$ у I пројекцији осветљене а друге две у сопственој сенци.

Бачена сенка ивице $B'A'$ иде по дну корита од B_H' до $1_S'$. Ту престаје раван дна, па ће даља сенка ивице ићи по равни $A'E'K'D'$ и то од тачке $1_S'$ до тачке A' (у којој ивица $B'A'$ продире кроз раван по којој баца своју сенку).

Исто тако и ивица $B'C'$ баца своју сенку по дну корита од B_H' до $2_S'$, а одатле по косој равни корита од $2_S'$ до C'.

Код вертикалне зарубљене пирамиде и ако немамо врха лако одредимо сенке тачака I II и III. Све три падају на H, па одмах повучемо I_H' V' и III_H' VII' контуре бачене сенке. Тиме је одређена и граница сопствене сенке и које равни су осветљене, а које нису.

Сенка пирамиде пада преко сенке призме. То значи да ће сенка *„чесме“* падати по *„кориту“*. Контуру те бачене сенке сачињаваће понова сенка ивица I' V' и III' VI'', које су границе сопствене сенке.

Сенка ивице V′ I′ иде по H од V′ ка I_H'. Иде само до тачке $3_H'$, јер ту наилази на трасу косе равни корита. Даља сенка ићи ће по спољној страни те равни. Да је одредимо гледамо где се сече сенка те ивице пирамиде са сенком (B_H' $2_S'$) горње ивице косе равни. То је тачка $4_H'$. Повучемо ли из $4_H'$ зрак l' одредимо тачку $4_S'$, где сенка ивице пирамиде пада на горњу ивицу косе равни и саму тачку 4′ која баца ту сенку. Дуж $3_H'$ $4_S'$ је сенка те ивице пирамиде по косој равни корита. Сенка пада на спољну осветљену страну, па је у I пројекцији невидљива (и цртана испрекиданом линијом). Тачке су ординатама пренете у II пројекцију и уцртана сама дуж.

Од $4_H'$ иде сенка понова по H (по дну корита док у тачки $5_H'$ не наиђе на трасу друге косе равни корита. Сенку ивице пирамиде по тој равни одредимо као пре, помоћу тачке $6_H'$ и зрака l' из ње. Дуж $5_H'$ $6_S'$ је сенка ивице по тој косој равни.

У I пројекцији видимо осветљену страну те равни, па је и сенка видљива. Њезина друга пројекција није нацртана, јер је цела раван невидљива. Од $6_H'$ до I_H' сенка иде поново по хоризонталници.

На исти начин одређене су помоћу тачака $7_H' - 10_H'$ и сенке ивица VII′ III′ пирамиде по косим равнима корита. Тим је и задатак решен. Једино су још на крају шрафиране површине које су у сенци. Шрафиране су као и код прошлих задатака површине које су у сопственој сенци ређим и тањим правама, а површине под баченом сенком гушћим и дебљим.

Задатак у овој слици можемо да користимо као пример за један врло једноставан начин одређивања дали у пројекцији видимо осветљену или неосветљену страну неке равни.

Овде је то лако јер све косе равни, а има их четири на пирамиди и четири на „*кориту*", имају своју прву трасу.

Хоћемо ли да одредимо да ли у једној од пројекција видимо осветљену или неосветљену страну неке равни, одредимо стварну сенку једне тачке те равни на раван на којој је траса. (Овде сенку на хоризонталницу, јер имамо прве трасе свих равни).

Ако су и сама тачка и њезина сенка с исте стране трасе равни, тада видимо у тој пројекцији осветљену страну равни; ако је тачка с једне стране а њезина сенка са друге стране, видимо у тој пројекцији неосветљену страну равни.

Тако је за раван A' D' K' E' тачка A' и њена сенка A_H' с исте стране трасе E' K' равни. Стога видимо у првој пројекцији осветљену страну равни. За раван A' B' F' E' тачка A' је с једне, а њена сенка A_H' са друге стране (продужене) трасе F' E', по томе смемо да закључимо да у првој пројекцији видимо неоствтељену страну равни.

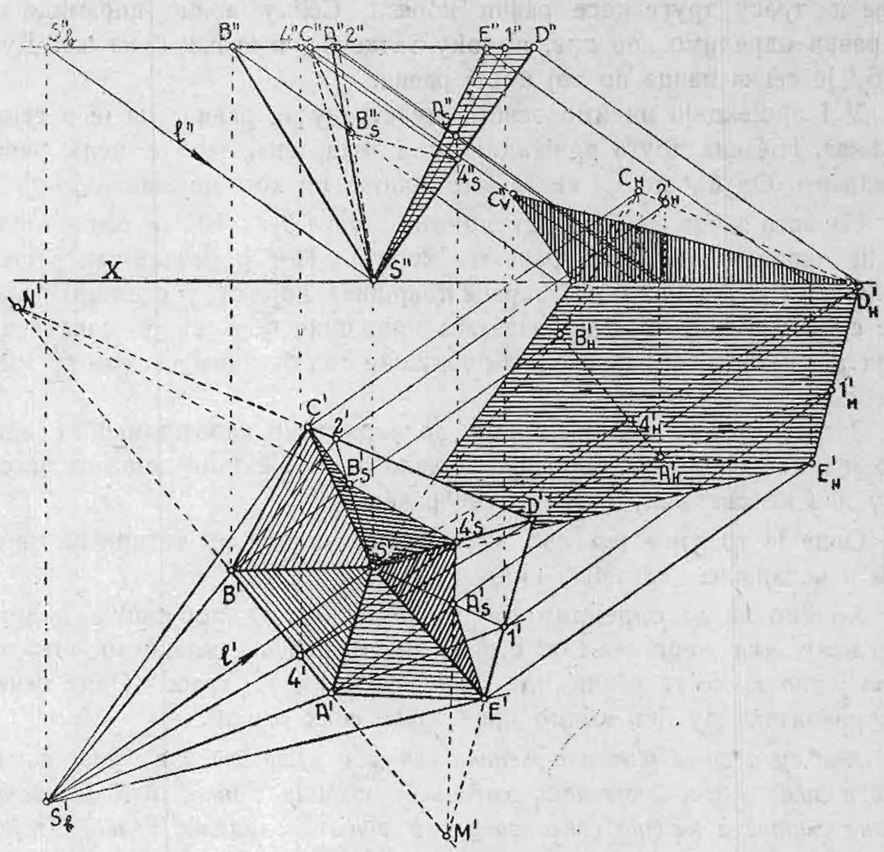
Тако исто можемо да проверимо помоћу тачке C' и C_H' да ли су осветљене или неосветљене видљиве стране двеју осталих косих равни

„корита“, а на исти начин помоћу тачака I′ и III′ и њихових сенки I_H' и III_H' све четири пљошти пирамиде.

Ако случајно немамо трасе равни у тој пројекцији или место траса имамо пресеке равни са неком другом равни $t_1\ t_2$ на коју је теже одредити бачену сенку тачке, пресечемо раван коју испитујемо једном равнином паралелном са пројекциском равни, па на њој одредимо сенку тачке. Сутражница нам тада замењује трасу.

*

Још један задатак из сенчења решен је у сл. 205 и то баш да се види како за одређивање бачене сенке методом враћања натраг могу да се употребе и замишљене (имагинарне) сенке на било којој равни.



Сл. 205

На слици је нацртана неправилна петострана пирамида са врхом *S* у хоризонталници, док је базис у једној хоризонталној равни изнад *H*. Поред тога замишља се да је раван базиса отстрањена, или провидна, па се у првој пројекцији види унутрашњост пирамиде. Треба да одредимо границу сопствене сенке и сенку базиса на унутрашњост пирамиде.

Хоћемо ли да одредимо границу сопствене сенке пирамиде (познато нам је правило) треба да одредимо сенку врха на раван базиса, па да из те сенке повучемо *„тангенте“* на полигон базиса. Овде је врх S доле а полигон базиса, петоугао $A-E$ над њим. Стога ће сенка S_b' врха S на раван базиса бити имагинарна сенка. Исто тако биће имагинарне и сенке $A'\,S_b'-E'\,S_b'$ појединих ивица пирамиде по тој равни базиса. Једино ће стварна сенка бити сенка петоугла базиса. Петоугао $A'-E'$ је у тој равни, па је он сам себи и бачена сенка. За конструкцију сенке нема никакве разлике да ли су то стварне или само замишљене сенке.

По *„тангентама“* из S_b' на полигону базиса видимо да су ивице $C\,S$ и $E\,S$ границе сопствене сенке. Према томе са унутрашње стране осветљене су пљошти $C'\,S'\,D'$ и $D'\,S'\,E'$, док су остале у сопственој сенци. У другој пројекцији видимо спољне стране пљошти пирамиде. Природно је да су спољне стране осветљене гдегод су унутрашње у сопственој сенци и обрнуто.

Ради тога је цео петоугао базиса граница сопствене сенке, па ће ивице $E'\,A'$, $A'\,B'$ и $B'\,C'$ бацати своју сенку на унутрашњост пирамиде. Те сенке треба да одредимо.

На слици се види да се имагинарна сенка ивице $D'\,S'$ сече са (стварном) сенком стране $A'\,B'$ базиса у тачки $4'$. (Требало би писати $4_b'$). Повучемо ли из те тачке зрак l' одредићемо тачку $4_S'$ бачену сенку тачке $4'$ стране $A'\,B'$ базиса на ивицу $D'\,S'$ пирамиде. Тиме је уствари одређена цела сенка. Јер део ивице $A'\,B'$ од тачке $4'$ до A' бацаће своју сенку по пљошти $E'\,D'$. Та сенка мора пролазити кроз $4_S'$. Продужимо ли страну базиса $D'\,E'$ проширили смо самим тим и пљошт $D'\,S'\,E'$ јер јој је права $D'\,E'$ траса у равни базиса. Продужена страна $B'\,A'$ продираће кроз тако проширену пљошт $D'S'\,E'$ у тачки M', јер су праве $A'\,B'$ и $D'\,E'$ у истој равни базиса. По правилу 2) о сенкама правих мора сенка праве $4'\,A'\,M'$ пролазити кроз тачке $4_S'$ и M'. Зраком l' из A' одредимо на њој A_S' сенку тачке A'. Када имамо A_S', сенка ивице $A'\,E'$ по пљошти $D'\,S'\,E'$ биће $A_S'\,E'$.

На исти начин, а помоћу продорне тачке N', одређене су по пљошти $D'\,S'\,C'$ сенке ивица $4'\,B'$ и $B'\,C'$.

Тачку B_S', сенку тачке B', (а исто тако и A_S') могли смо одредити и на други начин, не користећи тачку N'. Ивица $S'\,B'$ је једна права и можемо да је продужимо изнад равни базиса колико год хоћемо. Доњи део ивице од S' до B', баца по равни базиса имагинарну сенку од S_b' до B'. Горњи, продужени део те ивице, пошто је изнад равни базиса, бацаће по тој равни стварну сенку. Та сенка (као сенка исте праве по истој равни) мора да буде продужење сенке $S_b'\,B'$. Тако продужена сенка ивице B' пресеца сенку стране $D'\,C'$ базиса (а и саму страну, јер су скупа) у тачки $2'$. Пошто се сенке секу, значи да једна тачка продужене ивице B' баца своју сенку у тачки $2'$ на страну $C'\,D'$

базиса. Зраком l' из $2'$ могли бисмо да одредимо и тачку ивице која ту сенку баца, али то није потребно. Овде нам треба одредити сенку ивице $B'S'$ по пљошти $A'S'D'$. Како већ имамо једну тачку, тачку $2'$ те сенке, сама сенка је одређена, јер сенка мора да пролази кроз врх S' као продор ивице $B'S'$ кроз пљошт $C'S'D'$. Када знамо да је $2'S'$ сенка ивице $B'S'$ по пљошти $C'S'D'$, лако одредимо, зраком l' из B', сенку B_S' тачке B' на ту раван.

На исти начин можемо с друге стране да одредимо сенку тачке A' на пљошт $D'S'E'$. Продужимо $S_b'A'$ сенку ивице A' по равни базиса до пресека $1'$ са страном базиса $D'E'$. Права $S'1'$ је сенка ивице A по пљошти $D'S'E'$, а зраком l' из A' одредимо тражену сенку A_S'.

Друге пројекције тачака одредимо као раније.

На крају, да задатак буде потпуно решен, одређена је и сенка пирамиде по H и V. Конструкција је једноставна и из саме слике довољно јасна. И сенку по H могли смо користити за конструкцију сенке на унутрашњост пирамиде методом враћања натраг. Конструкција је у слици нацртана и дајемо је без описа.

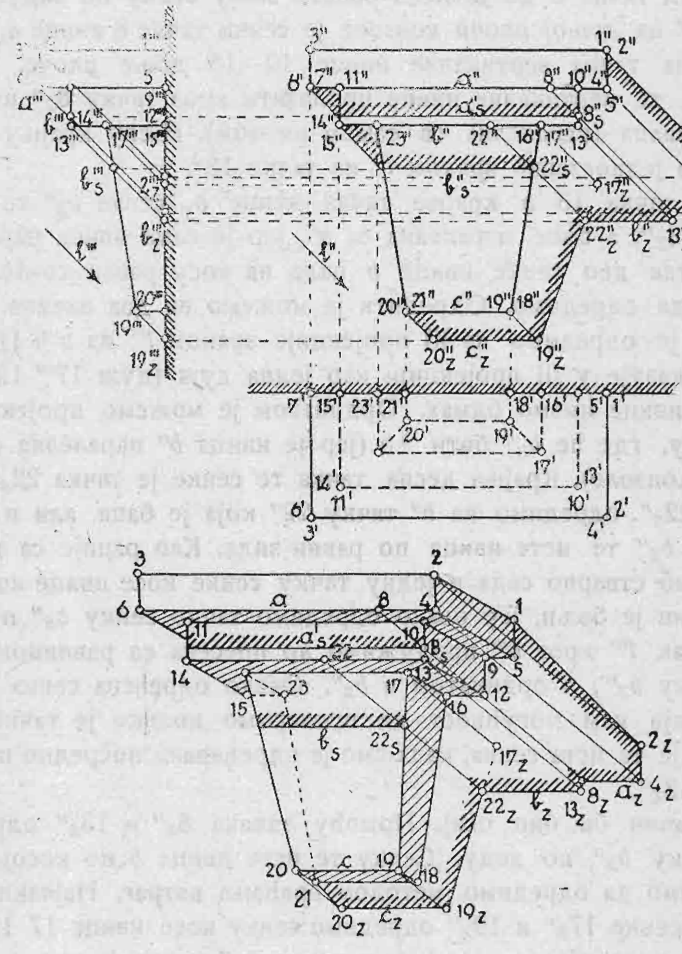
§ 80. Примери из техничке праксе

Пређимо сада на практичне задатке. Као први пример одредићемо сенку једне конзоле, и то сопствену сенку и бачену сенку по самој конзоли и по зиду. Конзола је састављена од три дела: од саме конзоле, једне зарубљене призме, и од двеју плоча над њом. Уцртана је у трима пројекцијама. Осветлење је узето под 45°. Сенке су конструисане у II и III пројекцији, а I пројекција додата је само ради контроле и вежбе.

Најпре ћемо одредити које су равни осветљене а које нису, нарочито за другу пројекцију, јер ћемо сенке цртати само у њој. Како почетницима при одређивању сенке највећу тешкоћу ствара недовољна могућност просторног претстављања самог тела, додата је слици и коса пројекција конзоле са сенкама.

Најгорња раван обеју плоча је осветљена, јер је $\parallel H$, што значи да су све супротне, дакле све доње равни у сопственој сенци. Исто тако осветљене су и обе равни плоча које се виде у II пројекцији, јер су $\parallel V$, а и коса раван конзоле. То се види одмах у III пројекцији, где се цела раван показује као права. Зраци l''' падају директно на њу. Према томе границу сопствене сенке сачињаваће ивице a, b и 19—20. Равни параделне са профилницом (види II пројекцију) леве су осветљене, а десне у сопственој сенци, а исто тако и косе бочне стране конзоле. Према томе граница сопствене сенке за горњу плочу биће просторни полигон 7, 6, 4, 2, 1, за доњу плочу аналоган полигон, а за конзолу 16, 17, 19, 20, 21. Сенке страна ових полигона даваће контуру бачене сенке. Природно је да ће сенку бацати само они делови полигона сопствене сенке који су осветљени, а не они на које пада сенка неког горњег дела конзоле.

Одредићемо најпре бачену сенку горње плоче. Ивица 1, 2 је $\perp V$, па ће своју сенку бацати по зиду у правцу l''. Крајњу тачку $2_Z''$ одредимо помоћу зрака l''' из $2'''$. Од $2_Z''$ се наставља сенка ивице 2 4. Ивица је паралелна са зидом, на који баца сенку, па је и сенка паралелна са ивицом. Њу ћемо повући до пресека $4_Z''$ са l'' из $4''$. Одатле



Сл. 206

се наставља сенка ивице a. И њу можемо директно повући, јер је ивица a паралелна са зидом. Само ивица a не баца сенку по зиду, него делимично и по конзоли, управо по равни доње плоче паралелној са V. Како се у III пројекцији ивица a показује као тачка a''', а поменута раван као права, сенку ивице одредићемо лако помоћу l''' и тада повучемо одмах II пројекцију a_S''. Важно је сада одредити да ли a_S'' иде дуж целе равни доње плоче. Крајња лева тачка ивице a је 6. Повући ћемо из $6''$ зрак l'' и, како он сече a_S'' лево од равни плоче, значи да сама сенка a_S'' иде све до левог краја плоче. Уједно ће се са зраком l'' тачке $6''$ поклапати у другој пројекцији и сенка ивице 7 6 по равни зида, јер је сама ивица управна на V. Крајња десна тачка сенке a_S'' по равни доње плоче је тачка $8_S''$. Повучемо ли кроз тачку $8_S''$, с обе њене стране зрак l'', одредићемо тачку $8''$ ивице a'' која баца ту сенку, а уједно и $8_Z''$, сенке те тачке на зиду. Јер сада знамо да ће део ивице a од тачке 8 до тачке 4 бацати своју сенку по зиду.

Тачка $8_S''$ на доњој плочи конзоле је сенка тачке 8 ивице a, али је уједно и једна тачка вертикалне ивице 10—13 доње плоче. Према томе ће сенка те вертикалне ивице пролазити кроз тачку $8_Z''$ на зиду и биће вертикална (паралелна са самом ивицом). Њену крајњу тачку $13_Z''$ одредимо једноставно зраком l'' из тачке $13''$.

Како је тачка 13 и крајња тачка ивице b, сенка b_Z'' те ивице полазиће од $13_Z''$, а биће паралелна са b'', јер је сама ивица паралелна са зидом. Један део сенке ивице b пада на косу раван конзоле. Ту сенку треба да одредимо. Одредити је можемо на два начина. Бољи начин је, да је одредимо из III пројекције зраком l''' из b'''. Цела се коса раван показује у III пројекцији као једна дуж (дуж $17'''$ $19'''$), па сенку b_S''' те ивице имамо одмах. Ординатом је можемо пројектовати у II пројекцију, где ће b_S'' бити $\| b$ (јер је ивица b'' паралелна са том косом равни конзоле). Крајња десна тачка те сенке је тачка $22_S''$, зраком l'' кроз $22_S''$ одредимо на b'' тачку $22''$ која је баца, али и сенку $22_Z''$ на сенци b_Z'' те исте ивице по равни зида. Као раније са тачком 8 одредили смо стварно сада и једну тачку сенке косе ивице конзоле.

Овај начин је бољи, јер овако одредимо тачно сенку b_S'' по конзоли. Ако зрак l''' кроз b''' продужимо до пресека са равнином зида, одредимо сенку b_Z''', а ординатом и b_Z''. Овако одређена сенка b_Z'' на равни зида даје нам могућност да проверимо колико је тачно била одређена раније та иста сенка, када смо је одређивали посредно помоћу тачака $8_Z''$ и $13_Z''$.

Други начин би био овај. Помоћу тачака $8_Z''$ и $13_Z''$ одредили смо били сенку b_Z'' по зиду. Сенку те исте ивице b по косој равни конзоле можемо да одредимо методом враћања натраг. Најлакше нам је да помоћу сенке $17_Z''$ и $19_Z''$ одредимо сенку косе ивице 17 19 конзоле по равни зида. Сенка те ивице и сенка b_Z'' ивице b по зиду секу се у тачки $22_Z''$. Зраком l'' из $22_Z''$ можемо да одредимо и тачку $22'$ ивице b'' и њену сенку $22_S''$ на косој ивици конзоле. Сенка b_S'' мора да пролази кроз $22_S''$ и да буде $\| b''$. Овај бисмо начин употребили када нам не би била задата трећа пројекција конзоле. У том случају било би отежано из I и II пројекције одредити сенку ивице b по косој равни конзоле.

Када имамо сенку $22_Z''$ као сенку једне тачке косе ивице конзоле, сенку саме ивице одредимо помоћу сенке још једне њене тачке. Најлакше помоћу сенке тачке 19, коју одредимо као $2_Z''$. Даља граница сопствене сенке је ивица *c*. Њену сенку c_z'' повучемо из $19_z'' \parallel c''$, јер је ивица *c* паралелна са зидом, а тачка 19 јој је крајња тачка. Другу крајњу тачку $20_z''$ одредимо зраком l'' из $20''$. Даљу сенку баца ивица 20 21, а када је управна на вертикалницу (и зид), сенка јој је у правцу светлости, па се поклапа са l''.

Додамо ли још сенку ивице 14 15, која је такође у правцу светлости, одредили смо све сенке.

*

Као други пример одређивања сенке узет је у сл. 207 један део ливеног постоља, па су за осветљење под 45⁰ одређене сенке.

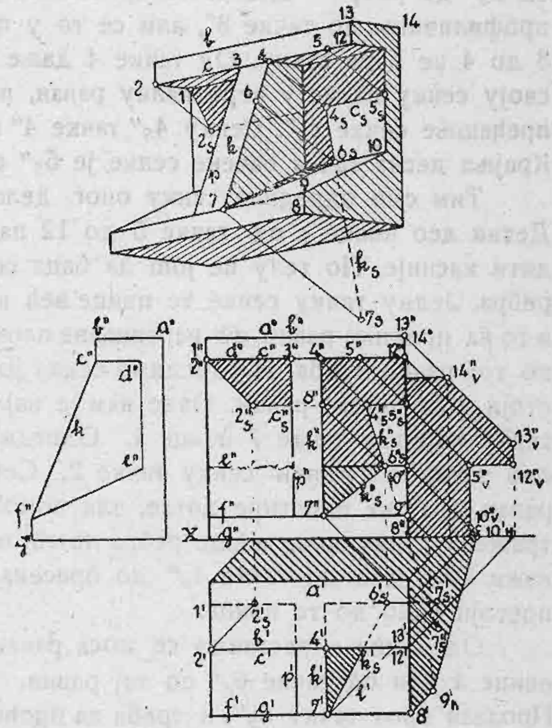
И код овог примера поред прве и друге пројекције уцртана је и трећа пројекција (и ако је нећемо употребити ни за коју конструкцију) а такође и аксонометриска слика тела, све то да би била што тачнија просторна претстава предмета, чије сенке хоћемо да одредимо.

За дато осветљење (под 45⁰) осветљена је вертикалница и све равни паралелне са њом. Тако је у другој пројекцији осветљена раван $b''\,c''$ горње плоче, раван $d''\,e''$ вертикалне плоче и раван $f''\,g''$ доње плоче. То се најбоље види у III пројекцији, где се те равни пројектују као праве. У трећој пројекцији види се исто тако да су осветљене и косе равни $e''\,f''$ доње плоче и коса раван $p''\,k''$ ребра. Према томе осветљене су све равни које се виде у II пројекцији.

То исто важи и за I пројекцију, где се поред двеју поменутих косих равни види још само најгорња раван $a'\,b'$ која је $\parallel H$, па је и она осветљена.

У сопственој сенци су само доња раван *cd* најгорње плоче, вертикална раван кроз ивицу *a* вертикалне плоче две равни паралелне са профилницом: једна на ребру кроз ивицу *k*, а друга крајња десно кроз тачке 8 до 14.

Према томе границу сопствене сенке сачињавају ивице 1—2, 2—12, 12—13, 13—14 ивица, а и вертикална ивица кроз леви крај ивице *a*. Затим ивице 8—9, 9—10 и вертикална ивица 10—11. На ребру само ивица *k*.



Сл. 207

Да одредимо бачену сенку (тачније речено контуру бачене сенке) довољно је да одредимо сенке тих ивица. Ако и одредимо сенку неке друге ивице или сенку неке тачке која не припада овим ивицама, њихове сенке пашће унутра границе бачене сенке, па је такав рад узалудан, уколико нам те сенке нису потребне за проверавање тачности или за неку другу конструкцију.

Почнимо са ивицом a. Њена сенка падаће по предњој равни вертикалне плоче. Како је та раван паралелна са самом ивицом, биће $c_S'' \parallel c''$. Довољно је дакле да одредимо сенку само једне, било које тачке те ивице. Најподесније нам је да одредимо сенку тачке 2, јер јој већ имамо обе пројекције. Поред тога то је и крајња лева тачка ивице, па ће нам $2_S''$ бити и крајња лева тачка сенке. Сенку тачке 2 одредимо пресеком зрака l' из тачке $2'$ са првом пројекцијом равни $d'e'$, па је ординатом пројектујемо на l''. Десно од $2_S''$ ићи ће сенка $c_S'' \parallel c''$, а лево ће се настављати сенка ивице 1 2. Њена сенка нам је већ одређена јер сенку $2_S''$ тачке 2 већ имамо, а тачка 1 је продор ивице кроз раван по којој баца своју сенку. Уосталом ивица је управна на вертикалницу, па јој је сенка у правцу светлости (l''). Сенка c'' иде десно од $2_S''$ до ребра. Одатле би се ломила по равни ребра паралелно са профилницом до тачке $3''$, али се то у пројекцији не види. Део ивице 3 до 4 не баца сенку. Од тачке 4 даље десно бацаће ивица c понова своју сенку на исту вертикалну раван, па ће и сама бити продужење прећашње сенке c_S''. Сенку $4_S''$ тачке $4''$ на њој одредићемо помоћу l''. Крајња десна тачка бачене сенке је $5_S''$ сенка тачке $5''$.

Тим смо одредили сенку оног дела ивице c који пада по телу. Десни део ивице c од тачке 5 до 12 падаће по V, па ћемо га одредити касније. По телу ће још да баца своју сенку ивица k косе равни ребра. Једну тачку сенке те ивице већ имамо. То је $4_S''$ сенка тачке $4''$ и то на предњој равни de вертикалне плоче. Да одредимо сенку ивице k по тој равни треба да одредимо сенку још једне тачке ивице, јер ивица стоји косо према равни. Овде нам је најлакше одредити на истој равни сенку најдоње тачке 7 ивице k. Одредимо је на исти начин као што смо раније одредили сенку тачке 2. Сенка $7_S''$ је имагинарна, јер се раван $d''e''$ не простире дотле, али помоћу ње можемо да уцртамо $к_S''$, тражену сенку косе ивице ребра по тој вертикалној равни. Од те сенке важи само део од тачке $4_S''$ до пресека $6_S''$ са ивицом e'', јер раван постоји само до те ивице.

Од ивице e наставља се коса раван ef постоља, па ће и сенка ивице k ићи од тачке $6_S''$ по тој равни. Сама сенка је већ одређена. Пролази кроз тачку $6_S''$, а треба да прође и кроз тачку $7''$, јер је тачка 7 продор ивице k кроз косу раван ef на којој је сенка.

У првој се пројекцији вертикална раван de не види и од целе сенке коју смо до сада одредили видеће се само сенка ивице k по косој равни ef. Одредимо k_S' помоћу тачке $6_S'$ на ивици e'.

Остаје још да одредимо сенку тела по H и по V. Ивица 8—9 је $\perp H$, па ће јој сенка бити по H у правцу светлости. Крајњу тачку $9_H'$ одредимо помоћу l'' из тачке $9''$ и његовог продора кроз H. Тачка $9_H'$ је већ једна тачка сенке ивице 9—10. Како та ивица стоји косо према H треба да одредимо сенку још једне њене тачке. Одредимо $10_H'$ и сенка ивице по H биће дуж $9_H'$—$10_H'$. Од те сенке је стварна сенка само од $9_H'$ до пресека са осом X, јер је $10_H'$ имагинарна сенка. Услед тога стварна сенка ивице ићи ће од пресека са осом X ка $10_V''$ стварној сенци тачке 10.

Из $10_V''$ се наставља сенка ивице 10—11, а како је ивица вертикална дакле $\parallel V$, остаће вертикална и њена сенка. Сенку може да баца само осветљени део ивице од $10'$ до $5_S''$. Зраком l'' и $5_S''$ лако одредимо тачку $5_V''$, која јој одговара на сенци ивице. Тако одређена тачка $5_V''$ је већ једна тачка сенке c_V'' ивице c по V. Сама сенка c_V'' биће $\parallel c''$, јер је ивица $c \parallel V$. Из крајње њене тачке $12_V''$ наставља се сенка ивице 12—13, која је вертикална као и сама ивица. Најгорњу тачку $13_V''$ одредимо помоћу зрака l'' из тачке $13''$. Са тим зраком се поклапа сенка ивице 13—14, јер је ивица $\perp V$. Крајњу тачку $14_V''$ те сенке одредимо помоћу l' из тачке $14'$. На крају повучемо још из $14_V''$ сенку a_V'' ивице a и то $a_V'' \parallel a''$. Сенка је на вертикалници дакле позади постоља и услед тога постаје невидљива. Исто тако невидљива је и сенка по вертикалници вертикалне ивице, која полази из крајње леве тачке ивице a. Од сенке целе те ивице остаје видљив само мален део који пада на хоризонталницу, а тај је у правцу l'.

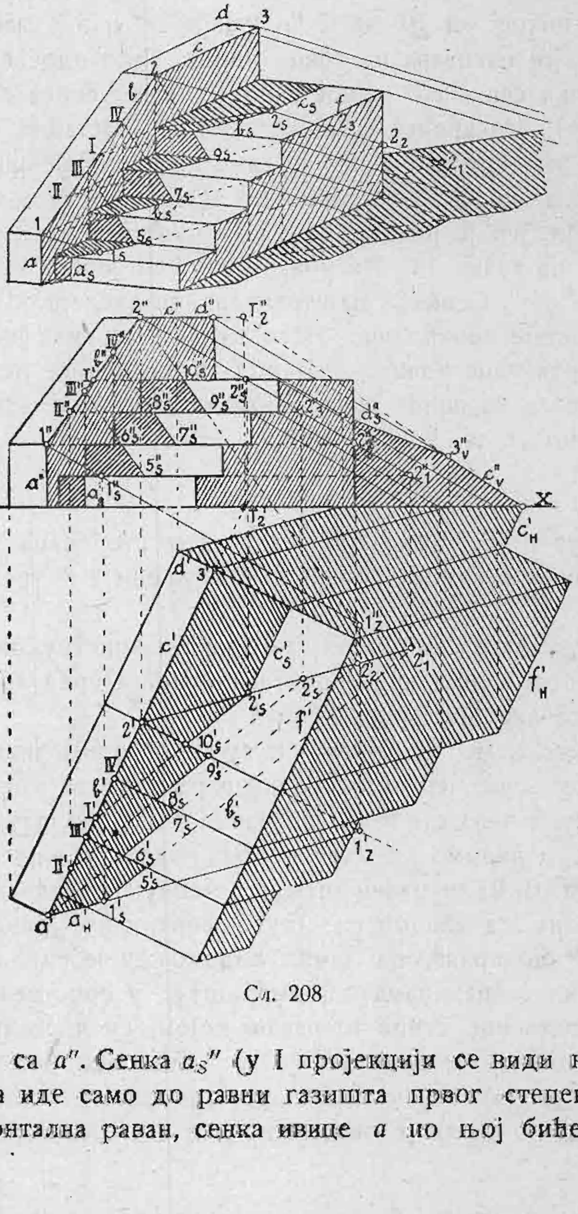
*

Као трећи задатак узет је у сл. 208 један део степеница са одмориштем и ниско зиданом оградом. За задато осветљење $l' l''$ треба одредити сенке.

Да би се боље распознавале саме сенке, а и њихова конструкција постављене су степенице под углом према вертикалници. Поред тога дата је и код овог примера аксонометриска слика.

За задато осветљење можемо да кажемо да су газишта појединих степени и одморишта осветљени, јер су те равни паралелне са хоризонталницом. Осветљена су и чела степени. Те равни се пројектују у хоризонталници као праве и видимо да светлост (l') удара у њих са спољне стране. То исто важи и за равни ограде: чеону вертикалну са ивицом a и хоризонталну са ивицом c. Друге вертикалне равни ограде пројектују се у H као праве, па одмах видимо да је спољна осветљена, а унутрашња, ка степеницама и одморишту, у сопственој сенци. Исто тако је у сопственој сенци и раван којом су пресечне степенице. Из прве се пројекције види да је у сопственој сенци и раван (спољна страна равни) којом завршава одмориште и зид ограде. Остаје још да видимо да ли је осветљена или не коса горња раван ограде у којој је ивица *b*. Раван заклапа са *H* неки угао. Када би се тај угао смањивао раван би на концу постала хоризонтална. У том положају била би осветљена. Да би место тога угао почео да расте, раван би могла да постане вертикална. У том положају била би осветљена (као продужење доње осветљене вертикалне равни ограде). Природно је да ће та раван и у овом задатом положају, који се налази између та два крајња, бити осветљена.

Према томе границу сопствене сенке ограде сачињаваће ивице *a*, *b*, *c*, *d* и вертикална ивица која пролази кроз крајњу леву тачку ивице *d*. Граница сопствене сенке одморишта биће ивице *e* и *f*, а код степена оне дужи по којима пресечна вертикална раван (кроз ивицу *f*) пресеца газишта и чела појединих степена.



Сл. 208

Када знамо границу сопствене сенке можемо да пређемо на одређивање бачене сенке. Код одређивања бачене сенке треба обично почети одозго, јер може да се деси, да одредимо сенке неких ивица, а касније утврдимо да су све те ивице већ у сенци неког горњег дела истог (или другог) тела. Овде се то не може десити, па ћемо сенке одређивати одоздо на горе.

Ивица *a* је ⊥ *H*, па ће јој сенка по *H* бити у правцу *l*. Та сенка важи само до чеоне (вертикалне) равни првог степена и даља сенка a_S'' пада баш по тој равни, а паралелна је са *a*″. Сенка a_S'' (у I пројекцији се види као само једна тачка) може да иде само до равни газишта првог степена. Како је газиште хоризонтална раван, сенка ивице *a* по њој биће понова у правцу *l*′. Када би вертикална ивица *a* била неограничено дуга, њена сенка ишла би вертикално по челу I степена, па у правцу l' по газишту I степена. Затим би ишла вертикално по челу II степена и тако редом преко свих степена. У II пројекцији виделе би се само вертикалне сенке по челима степена, (а у првој би се пројекцији те сенке пројектовале свака као једна тачка) док би се у I пројекцији виделе само сенке по газиштима и показале би се као једна права (из a') у правцу l'.

Како ивица *a* није неограничена, него јој је крајња тачка 1, треба да одредимо где та тачка баца своју сенку. Стога повучемо из $1''$ зрак l'' и видимо да тај зрак продире у $1_S''$ кроз газиште (раван газишта) првог степена. Ординатом одредимо на l' тачку $1_S'$, па како је и $1_S'$ на газишту првог степена смемо да тврдимо да је $1_S'$ стварна сенка тачке 1.

Од тачке $1_S'$ настављаће се по равни газишта првог степена сенка ивице *b*. Како је та ивица коса, треба поред $1_S'$ да одредимо сенку још једне њене тачке. Најлакше нам је одредити сенку тачке 2. Стога повучемо у обим пројекцијама зрак светлости из те тачке. У вертикалници видимо на l'' тачку $2_1''$, у којој тај зрак продире кроз хоризонталну раван газишта првог степена. Одредимо ли (ординатом на l') прву пројекцију $2_1'$ те тачке видећемо, да је то имагинарна сенка тачке, јер се газиште не простире до ње. Права $1_S'\,2_1'$ је сенка ивице *b* по газишту првог степена. Од те сенке само дуж од $1_S'$ до $5_S'$ је стварна сенка, јер само дотле постоји газиште. Остало је замишљена сенка по проширеној равни газишта.

Сенке ове исте ивице *b* по газиштима осталих степена биће паралелне са сенком b_S' по газишту првог степена, јер су равни газишта свих степена паралелне (хоризонталне). Према томе можемо те сенке лако одредити, довољно је да одредимо сенку само једне тачке ивице на свакој равни. Стога продужимо у II пројекцији равни газишта појединих степена и гледамо где зрак светлости l'' из тачке $2''$ продире кроз те равни. То су тачке $2_2''$ $2_3''$ и најгорња $2_S''$ као продор тога зрака кроз раван одморишта. Одредимо ли ординатом на l' прве пројекције тих тачака, можемо да уцртамо тражене сенке ивице *b* по газиштима степена и одморишту. Тако ће сенка по газишту другог степена бити права кроз $2_2'$ паралелна са b_S'. Природно да ће од те сенке бити стварна сенка само дуж од $6_S'$ до $7_S'$, на трећем степену само дуж $8_S'$ $9_S'$, а на одморишту дуж $10_S'$ до $2_S'$. Одатле видимо да је стварна сенка тачке 2 тачка 2_S на равни одморишта. Све остале су само замишљене сенке, које смо одређивали и користили за конструкцију.

Када смо одредили сенке ивице *b* по газиштима, (а само тај део сенке ивице *b* се види у I пројекцији) можемо ординатама да одредимо друге пројекције тачака $5_S - 10_S$ и да помоћу тих тачака одредимо сенке исте ивице *b* по челима степена. То ће бити сенке ивице *b* које ће се једино видети у II пројекцији. Како се тачка $5_S''$ и $6_S''$ налази у равни чела другог степена природно је да ће дуж $5_S''$ $6_S''$ бити тражена сенка ивице *b* по челу другог степена. На исти начин одредимо сенке по челу трећег степена и одморишта. И те дужи треба да су паралелне, као сенке једне праве по трима паралелним равнима.

Као што смо и раније радили, могли бисмо и сада овде, после одређивања сенки ивице *b* проверити колико су тачно одређене. Овде су равни по којима пада сенка или хоризонталне или вертикалне, а права *b*, која сенку баца, у произвољном положају. Према томе тачност сенке најлакше ћемо одредити помоћу трагова (продора праве кроз равни на које баца своју сенку). Знамо да сенка праве мора да пролази кроз њен траг.

Да проверимо тачност сенке по равнима газишта, одредимо продоре ивице *b* кроз те равни. То нам је лако у II пројекцији. Продужимо само раван газишта (и одморишта) до пресека са b'', па имамо тачку I″ као траг у равни одморишта, тачку II″ као траг у (проширеној) равни газишта трећег степена и тачку 1″ као траг на газишту другог степена. Ако те тачке пројектујемо ординатама на b', сенка ивице по равни одморишта треба да прелази кроз I′ остале кроз II′ и 1′, а да су при томе паралелне са $1_S'-2_1'$.

На исти начин проверимо тачност сенке ивице *b* по равнима чела степена. Равни чела су вертикалне и продорне ивице *b* кроз те равни можемо одмах да обележимо у првој пројекцији (јер се целе равни пројектују као праве). То су тачке III′, IV′ и 2′. Пројектујемо ли те тачке на b'', сенка $5_S''$ $6_S''$ ивице *b* по равни чела другог степена мора да пролази кроз тачку III″, која је траг (продор) ивице *b* кроз ту раван. Исто тако сенка по челу одморишта кроз тачку 2″. Поред тога све три ове сенке треба да су између себе паралелне.

Могли смо уз то да одредимо и саму сенку ивице *b* по једној од тих равни. Тако да одредимо сенку ивице *b* по челу одморишта, пошто траг ивице (тачку 2″) већ имамо, довољно је да одредимо још сенку једне њене тачке. Најбоље је да одредимо сенку тачке 1. Стога продужимо l' до пресека $1_Z'$ са продуженом равни чела одморишта, па је то тражена сенка тачке 1. Одредимо ли другу пројекцију $1_Z''$ те тачке, дуж $1_Z''$ 2″ је тражена сенка ивице *b* по проширеној равни чела одморишта. Тачке $9_S''$ и $10_S''$ треба да буду на тој сенци.

Да наставимо са одређивањем бачене сенке. Одредили смо сенку ивице *b* и видели како се може проверити њена тачност. Од тачке $2_S'$ даље бацаће своју сенку ивица *c* и то најпре по равни одморишта. Како је ивица *c* хоризонтална дакле паралелна са равни по којој баца своју сенку, биће c_S'' паралелна са самом ивицом *c*.

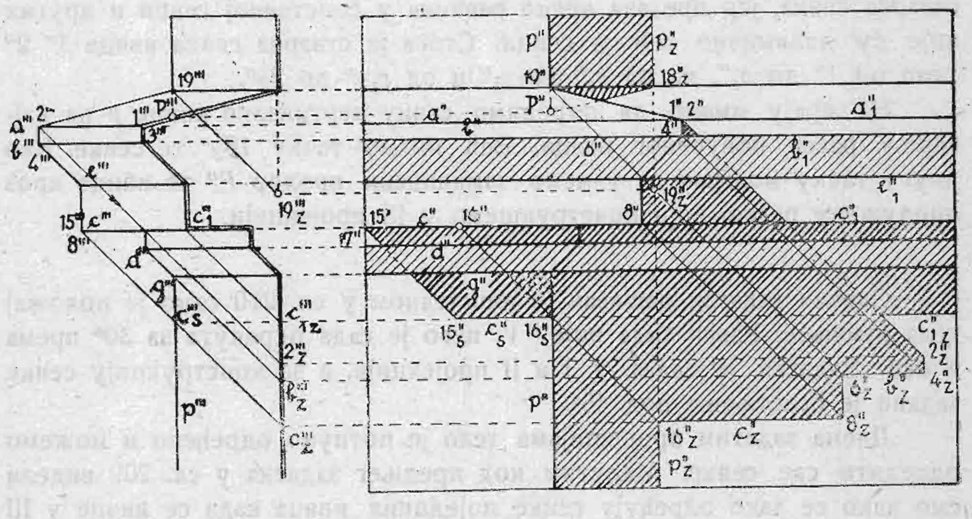
Тиме су одређене све сенке које падају по степеницама. Одређивање сенке по *H* и *V* је познато и из саме слике довољно јасно. Може једино да се напомене да је сенка c_V'' ивице c по V одређена помоћу другог трага T_2'' те ивице, па до тачке $3_V''$. Исто тако је и од тачке $3_V''$ даље одређена сенка d_S'' ивице d по V помоћу другог трага T'' продужене ивице d.

*

У сл. 209 одређене су сенке једног венца на зиду са правоугаоним преломом и то за осветљење под 45°.

И овде ћемо најпре одредити које су равни осветљене а које у сопственој сенци. Из III пројекције видимо да су све равни венца које су паралелне са равнинама зида осветљене. (Све су те равни ‖ V). Косе равни венца пројектује се такође у III пројекцији као праве и видимо да је најгорња коса раван осветљена, а доње две $[b\ e]$ и $[d\ g]$ (и равни паралелне са њима на повученом зиду) неосветљене. Управо код ових равни је нешто нарочито. Паралелне су са зраком светлости, што значи да зраци клизе по самој равни. Према томе раван није осветљена, а све што је у њој баца своју сенку на трасу равни. Тако ће ивица b бацити своју сенку на ивицу e. Од равни венца на прелому зида осветљена је само најгорња коса раван, док су остале све у сопственој сенци. То се види у II пројекцији, где се све те равни пројектују као праве.

Најгорња граница сопствене сенке је ивица b, за коју смо већ видели да баца своју сенку по ивици e. То исто важи и за ивицу b_1 на повученом делу венца (десно). Ивица c бацаће своју сенку c_S'' по



Сл. 209

зиду. Њу ћемо одредити помоћу l''' из c''' и тачке c_S'''. На исти начин одређена је и c_{1Z}'' сенка повучене ивице на повучен зид. Пошто ивица c'' иде лево само до тачке 15'', то ће и крајња лева тачка сенке c_S'', тачка $15_S''$ бити на зраку l'' из тачке $15''$. Са тим се зраком поклапа и сенка ивице $15''$ $17''$, јер је ивица сама $\perp V$. Треба приметити, да сенка иде само од $17''$ до d'' и од g'' до $15_S''$, јер је коса раван $d\ g$ у сопственој сенци, па на њу не може да пада бачена сенка. Остало би још да се одреди сенка ивице d'', управо њеног крајњег дела лево који је осветљен. Како је и раван $d\ g$ у правцу светлости, то сенка ивице d пада на ивицу g. У ствари остаје без сенке.

Вратимо се сада за час на ивицу c'' и њену сенку c_S''. Крајња тачка сенке c_S'' је тачка $16_S''$ на p''. Зраком l'' одредићемо на c'' тачку $16''$ која баца ту сенку. Део ивице c'' од $16''$ до $8''$ бацаће сенку c_Z'' по повученом зиду. Ту сенку одредићемо помоћу c_Z'' са l''' из c'''. На зрацима l'' из $16'$ и $8''$ су крајње тачке те сенке. Како је $16_S''$ једна тачка ивице p'', која је такође граница сопствене сенке, то ће кроз $16_Z''$ пролазити сенка p_Z'', а биће $\| p''$, јер је p паралелна са зидом. Сенка p_Z'' повучена је од $16_Z''$ на доле и горе изнад најгорње ивице венца, јер се претпоставља да је p'' продужена високо над венцем. Пошто смо ову сенку p_Z'' одредили индиректно, контролисана је њена тачност помоћу сенке тачке 19, где та ивица p пресеца најгорњу ивицу венца.

Из тачке $8_Z''$ наставља се сенка вертикалне ивице $8''$ $6''$. Како је $6''$ уједно и сенка једне тачке ивице b'', наставиће се из $6_Z''$ сенка b_Z''. Тако ћемо одредити сенку $4_Z''$, и сенку $4_Z''$ $2_Z''$ вертикалне ивице $4''$ $2''$. Од $2_Z''$ ићи ће сенка ивице $2''$ $1''$. Како је та ивица $\perp V$, то ће јој сенка бити у правцу l''. И код ове сенке треба гледати где је она стварна сенка, јер прелази преко равнина у сопственој сенци и других које су делимично већ у сенци. Стога је стварна сенка ивице $1''$ $2''$ само од $1''$ до b_1'', па од e_1'' до c_1'' и од c_{1Z}'' до $2_Z''$.

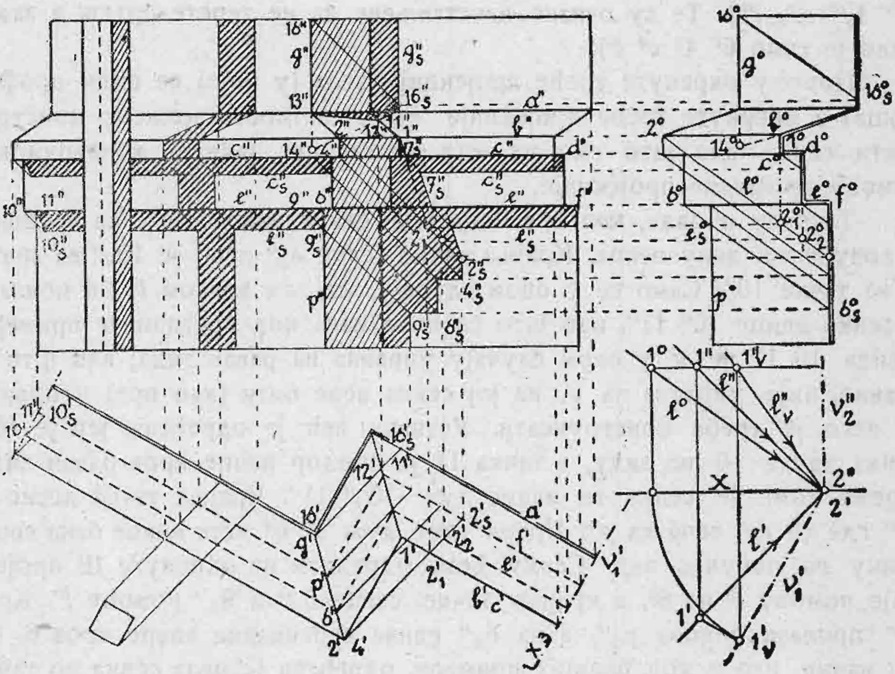
На крају имамо да одредимо сенку вертикалне ивице p на најгорњу раван повученог венца. Већ имамо тачку $18_Z''$ те сенке. Као другу тачку можемо да узмемо замишљени продор P'' те ивице кроз продужену раван, који конструишемо у III пројекцији.

*

Сличан задатак решаван је још једном у сл. 210 само је положај тела измењен. Раван зида није $\| V$, него је сада окренута за 30° према X-оси. Задатак је задат у I и II пројекцији, а за конструкцију сенке задано је осветљење под 45°.

Двема задатим пројекцијама тело је потпуно одређено и можемо одредити све сенке. Међутим код предњег задатка у сл. 209 видели смо како се лако одређују сенке појединих ивица када се ивице у III пројекцији показују као тачке, а равни као праве.

У профилној пројекцији код овог задатка поједине ивице венца не би се пројектовале као тачке, јер нису $\|$ X-оси. Да бисмо ипак могли имати III пројекцију, где се поједине ивице венца пројектују као тачке, место на профилницу одредићемо трећу пројекцију на нову пројекциску раван ${}_1X_3$ управну на ивице венца. Само ту нову, трећу пројекцију не цртамо као обично код трансформације (оборену у *H*), него је цртамо као у сл. 52, тако да се нова ${}_1X_3$-оса поклопи са осом *X*.



Сл. 210

Положај тако одређене III пројекције је исти као да смо нову пројекциску раван ${}_1X_3$ окренули око њене друге трасе, док се поклопила са *V* (као у сл. 123). Природно је да у овако окренутој III пројекцији не можемо за конструкцију сенке употребљавати зрак l''', него морамо и њега окренути.

Било где са стране уцртамо осу *X* и из повољне њене тачке 2 повучемо l' и l''. Тада из те исте тачке 2 повучемо праву v_1' управну на ивице венца, дакле паралелну са поменутом осом ${}_1X_3$. То би уствари била прва траса те нове пројекциске равни (управне на ивице венца). Друга траса биће v_2'' из $2'' \perp X$, јер је раван $\perp H$. Ако хоћемо сада да одредимо пројекцију зрака светлости на ту нову раван, узећемо на зраку две тачке 1 и 2 и пројектовати их управно на нову раван. Тако ће пројекциски зрак из $1' \perp {}_1X_3$ продирати кроз нову пројекциску раван у тачки $1_V'$, а тачка 2 је већ узета тако да буде на *X* и на ${}_1X_3$. Место да цртамо III пројекцију као обично на ординати из $1' \perp {}_1X_3$, окренућемо сада пројекциску раван ${}_1X_3$ скупа са l_V' око v_2'', док се не поклопи са *V*. У слици уцртан је круг по коме се окреће тачка $1_V'$. Како та тачка при окретању не мења висину, лако ћемо јој, као раније, одредити окренути положај 1^0. Пошто тачка 2 и при овом окретању остаје непомерена, права $2''$ 1^0 биће l^0, окренута трећа пројекција зрака светлости. (Све тачке ове нове окренуте пројекције требало би да носе знак окренуте треће пројекције дакле $6_0'''$ $4_0'''$ c'''_0 l'''_0. Те су ознаке изостављене да не терете цртеж а задржано је само 6^0 4^0 c^0 l^0).

Помоћу окренуте треће пројекције тела (у којој се види профил венца) и окренуте треће пројекције зрака светлости можемо конструисати сенке, као што смо их код пређашњег задатка конструисали помоћу профилне пројекције.

Тако су и овде, као пре, одређене сенке ивица e и c на предњем и повученом делу венца. Крајња тачка сенке e_S'' лево је $10_S''$ на зраку l'' из тачке $10''$; Само се у овом случају, са тим зраком l'' не поклапа и сенка ивице $10''$ $11''$, као што се поклапала код пређашњег примера. Ивица 10 11 је и у овом случају управна на раван зида; али што је главно, није управна на V, па јој сенка неће бити (као пре) у правцу l'', него је треба конструисати. Уствари већ је одређена, јер је $10_S''$ сенка тачке 10 на зиду, а тачка 11 је продор ивице кроз раван зида. Према томе је сенка те ивице дуж $10_S''$ $11''$. Крајња тачка десно је $9_S''$ где се e_S'' сече са p''. Према томе дуж $9''$ $6''$ исте ивице баца своју сенку на повучен зид. Сенку ћемо одредити из окренуте III пројекције помоћу l^0 из 6^0, а крајње тачке сенке $6_S''$ и $9_S''$ помоћу l''. Кроз $9_S''$ пролази понова p_S'', а из $6_S''$ сенка вертикалне ивице кроз 6. На тај начин, као и код ранијих примера, одређена је цела сенка до тачке $2_S''$. Одатле ће се настављати сенка ивице 2—1 која пада по равнима $b\,c$, $d\,e$ и по равни зида. Пошто су све те три равни паралелне, биће паралелне и сенке ивице 2—1 по њима. За сенку по равни $b\,c$ одредићемо у III пројекцији продор 2_1 зрака l из тачке 2 кроз проширену раван $b\,c$, па ћемо ординатом пројектовати ту тачку на l''. Тражена сенка биће тада дуж $1''$ $2_1''$. Од тога је стварна сенка од тачке $1''$ до $7_S''$ на ивици c''. Сенка по равни d'' e'' биће паралелна и пролазиће кроз тачку $2_2''$ коју одредимо као пре тачку $2_1''$. Од те сенке стварна је само дуж од e'' до c_S''. Пресек сенке са сенком c_S'' обележимо са $7_S''$. Како је пређашња (горња) тачка $7_S''$ била на ивици c'', ова нова (доња) тачка $7_S''$ на c_S'', сенци ивице c, а обе на сенци ивице $1''$ $2''$, јасно је да тачке $7_S''$ треба да су на истом зраку светлости l''.

Баш то можемо, да искористимо као други начин да одредимо сенку ивице $1''$ $2''$ по равни d'' e''. Сенка ивице $1''$ $2''$ по равни b'' c'' иде од тачке $1''$ до тачке $7_S''$. Тачка $7_S''$ је на ивици c'', па ће и њена сенка $7_S''$ бити на сенци e_S'' ивице c''. Одатле ће се настављати сенка ивице $1''$ $2''$ и биће паралелна са сенком по равни $b\,c$. Паралелна са њима је и сенка ивице по зиду, а пролази кроз $2_S''$. Пресечна тачка ове сенке са e_S'' треба да је на истом зраку l'' на коме је и пресек сенке исте ивице са ивицом e'' у равни d'' e''. Још остаје да одредимо сенку ивице g. Она пада по повученом зиду и по косим равнима повученог венца и венца на прелому. Најлакше би било одредити је из I пројекције, јер се g' пројектује као тачка, па помоћу тачака 11 и 12 имамо одмах све три сенке. Међутим и ове сенке можемо лако одредити из II и окренуте III пројекције. Довољно је узети на g неку тачку 16 и одредити помоћу l'' и l^0 њену сенку $16_S''$ на раван повученог зида. Кроз $16_S''$ иде $g_S'' \parallel g''$ до пресека $11_S''$ са a''. Даљу сенку по косој равни повученог венца одредићемо као код пређашњег задатка, помоћу тачке $11_S''$ и продора $14''$ ивице g кроз ту раван. Та сенка важи до тачме $12_S''$а одатле иде по косој равни венца на прелому, и то од $12_S''$ до стварног продора $13''$.

За вежбу нека са одреде све ове сенке из I и II пројекције.

У овом задатку додата је једна вертикална четвртаста греда, па треба одредити сенке које она баца по равнима зида и венца. Задатак се решава врло једноставно из I пројекције, јер су сенке ивица греде у правцу l' а равни на које сенке падају прве пројектне равни. Ради тога све сенке преносимо директно ординатама, само сенку по косој равни венца морамо да одредимо. Али ни то није нека тешка конструкција, јер имамо већ сенке на двема ивицама те равни, па треба само да их спојимо. Ипак и код овако једноставно конструисаних сенки треба проверити тачност. И то је овде врло лако. Сенка по равни $d\,e$ долази до једне тачке ивице e''. Исто тако сенка по зиду полази од једне тачке на e_S''. Већ одатле следује да те две тачке треба да су на једном зраку l'', у толико пре што су обе те тачке сенка једне тачке на вертикалној ивици греде. На слици је та контрола израђена за сва четири скока сенке.

*

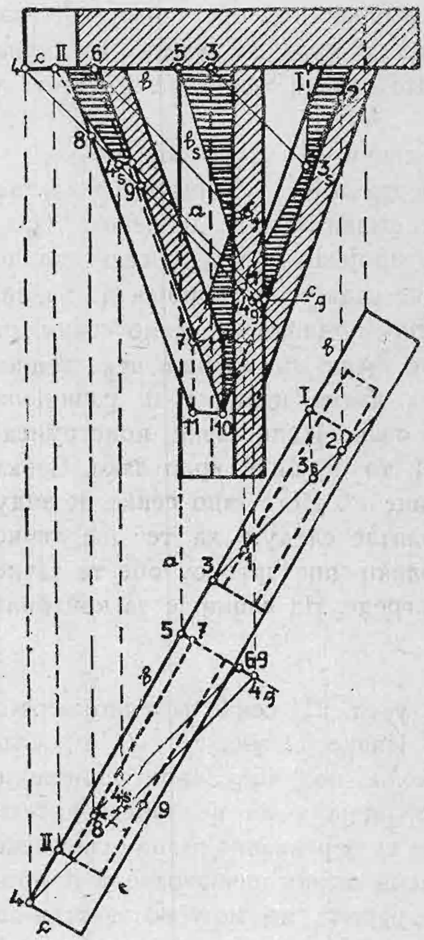
Као последњи задатак одређена је у сл. 211 сенка на једној вертикалној греди са јастуком и пајантима. Ивице јастука су $\parallel H$, а заклапају са X-осом угао од 60^0. Осветљење под 45^0. Знаци пројекције изостављени су на слици у обема пројекцијама да не терете цртеж.

Из I пројекције видимо одмах које су вертикалне равни осветљене а које не, па су равни у сопственој сенци одмах шрафиране у II пројекцији. Једино за косу раван предњег пајанта не можемо за сада да кажемо да ли је осветљена или не. (За раван стражњег пајанта можемо да кажемо да је осветљена. Када би се окретала око пресека са вертикалном гредом, па постала $\parallel H$ или вертикална, у оба положаја била би осветљена. Према томе осветљена је и у овом свом положају, који је између та два).

Да пређемо на одређивање бачене сенке. Одредићемо најпре сенку по видљивој косој равни стражњег пајанта. На њу може да баца сенку ивица a греде и ивица b јастука. Ивица a пројектује се у I пројекцији као тачка. Њена је сенка у правцу l' и пресеца ивице поменуте равни у тачкама $1'$ и $2'$. Пренећемо ординатама те тачке у

II пројекцију, па је $1''\ 2''$ тражена сенка ивице *a*. Сенку најгорње тачке 3 одредићемо зраком l'' из $3''$.

Тачка 3 је уједно и једна тачка ивице *b*, па ће и сенка b_S'' пролазити кроз $3_S''$. Као другу тачку сенке b_S'' можемо узети тачку I, продор ивице *b* кроз проширену косу раван пајанта. Тај продор I′ одредићемо у I пројекцији, где нам је већ нацртан пресек косе равни пајанта са доњом равни јастука. Истој равни припада и ивица *b*, па треба само да продужимо поменути пресек до b' и имаћемо продорну тачку I′. Дуж $I''\ 3_S''$ је тражена сенка b_S'', али од те дужи стварна сенка је само део од $3''$ до пресека са контурном ивицом пајанта. Да конструкција буде јаснија уцртана је сенка b_S и у I пројекцији, и ако је невидљива.



Сл. 211

Сада ћемо одредити сенку на видљивој страни вертикалне греде. Сенку ће бацати понова ивица *b*. Да би је одредили, довољно је да одредимо имагинарну сенку 4 крајње тачке 4 на проширену раван. Кроз $4_g''$ и кроз продорну тачку $5''$ пролази b_S. Треба још одредити сенке ивица предњег пајанта по овој истој равни. Пајант је зарубљена четворострана призма са базисом (правоуглом) на овој осветљеној равни греде. Да одредимо сенку ивице, невидљиве у II пројекцији одредићемо сенку тачке 6 на проширену осветљену раван греде, јер је то раван базиса. Права $7''\ 6_g''$ је сенка ивице, а уједно и „тангента" на базис. Друга паралелна тангента пролази кроз тачку 10 базиса. Те две тангенте су и бачена сенка пајанта по равни. Од прве је стварна сенка од $7''$ до пресека са b_S'' а од друге од $10''$ до пресека са ивицом, која је граница сопствене сенке. По тим тангентама знамо и да је ивица из $10''$ граница сопствене сенке, те да је видљива коса раван пајанта осветљена.

Чим је осветљена, падаће на њу сенка јастука. Да ту сенку одредимо наћи ћемо сенку тачке 4 на ту косу раван пајанта. Раван је одређена ивицама из 10 и 11. Повућићемо зрак l' и l'' из тачке 4 и одредити продор тога зрака кроз раван. Задатак је исти као у сл. 42*a*. Продорну тачку $4_S''$ одредићемо помоћу пресека 8 9. По положају сенке $4_S''$ видимо да ће контуру бачене сенке сачињавати сенке ивица *b* и ивице *c*. Сенку ивице *b* одредићемо помоћу $4_S''$ и продора II″ ивице кроз косу раван, а ивица *c* је паралелна са равнином, па ће и сенка бити из $4_S''$ паралелна са самом ивицом. Ову сенку могли смо одредити и методом враћања натраг. На слици је повучена c_g'' замишљена сенка ивице *c* на раван стуба. Њен пресек са сенком ивице кроз 10 одређује сенку ивице *c* по косој равни пајанта. Остало као пре. Тиме су одређене све сенке. Требало би још одредити сенке по *H* и *V*, али оне нису тражене. Када би било задато да се израде и сенке на *H* и *V*, требало би најпре конструисати те сенке, па би сенке по телу одредили лакше методом враћања натраг.

И ове сенке по телу могле су се много лакше одредити помоћу треће окренуте пројекције, где би $_1X_8$ била паралелна са ивицом *b*.

Као задатак за вежбу, нека се одреде понова ове сенке на оба поменута начина.

Б) Сенчење облих површина

§ 81. Увод и сенка криве

Сви принципи које смо досад изнели о одређивању сопствене и бачене сенке важе у потпуности и код одређивања сенки на облим површинама.

Природно је да ће се поједине конструкције унеколико изменити. Стога ћемо узети један низ примера и на њима показати углавном све конструкције и методе помоћу којих ћемо касније моћи да одређујемо сенке било какве површине.

*

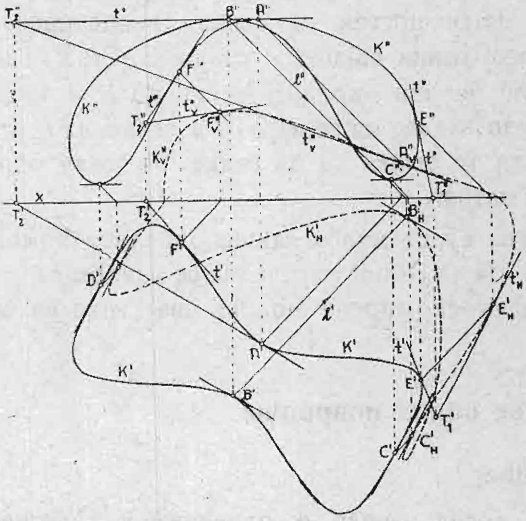
Пре него пређемо на одређивање сенке облих површина да видимо како ћемо одредити сенку неке криве.

Свака крива, била просторна или у равни, била аналитичка или графичка одређена је двема пројекцијама. Када имамо две пројекције сваке тачке криве можемо да одредимо сенку сваке тачке на било коју раван или површину. Како је сенка неке тачке уствари њена коса пројекција, важе за сенке криве углавном сва правила која важе за пројекције криве. Ако су нам позната правила по којима постаје крива, природно да ћемо та правила користити и при конструкцији њене сенке.

У сл. 212 задата је прва и друга пројекција просторне криве *K*. (Крива *K* је просторна крива четвртог реда, конструисана као продор хоризонталне облице и хоризонталне полуоблице чије су осе под правим углом). За осветљење под 45° треба да одредимо сенку криве на *H* и *V*.

Сенка криве је одређена сенкама појединих тачака, а на слици је уцртана конструкција (l' и l'') само за најгорње тачке A и B, најдоње тачке C и D и две произвољне тачке E и F. Тачка A и F бацају своју сенку на V, а све остале на H.

У тачки E повучена је у обим пројекцијама тангента t на криву. Тангента t има у E две бесконачно блиске тачке заједничке са кривом K. Ако одредимо сенку тангенте t, одредили смо самим тим и сенке тих двеју бесконачно блиских тачака криве. То значи да је сенка тангенте неке криве поново тангента на бачену сенку криве.



Сл. 212

Сенка тачке E пада на H, па треба да одредимо и сенку тангенте t по H. Да је одредимо требају нам сенке двеју тачака. Једна од тих двеју може да буде тачка E, а као другу најлакше нам је да узмемо траг T_1' тангенте на H, јер знамо да сенка праве пролази кроз траг праве. Стога су продужене обе пројекције тангенте t и одређен први траг T_1', па је права T_1' E_H' сенка t_H' тангенте по H. Она је уједно и тангента на криву K_H' (бачену сенку криве K) у тачки E_H'.

У тачкама B' C' и D', чије сенке падају на H, тангенте су хоризонталне, па ће и њихове сенке пролазити кроз B_H' C_H' и D_H' и бити паралелне са самим тангентама.

Тачка F баца сенку на вертикалницу. Да одредимо тангенту на криву K_V'' бачене сенке у тачки F_V'', повучемо у обим пројекцијама тангенту t на криву K у тачки F и одредимо њен други траг T_2''. Права T_2'' F_V'' је сенка t_V'' тангенте, а уједно и тражена тангента на криву K_V'' у тачки F_V''. На исти начин одређена је и тангента у тачки A_V''.

*

Други пример одређивања сенке неке криве обрађен је у сл. 213. У слици је нацртан круг K паралелан са вертикалницом, а наслоњен на хоризонталницу. За задато осветлење l' l'' треба да одредимо бачену сенку.

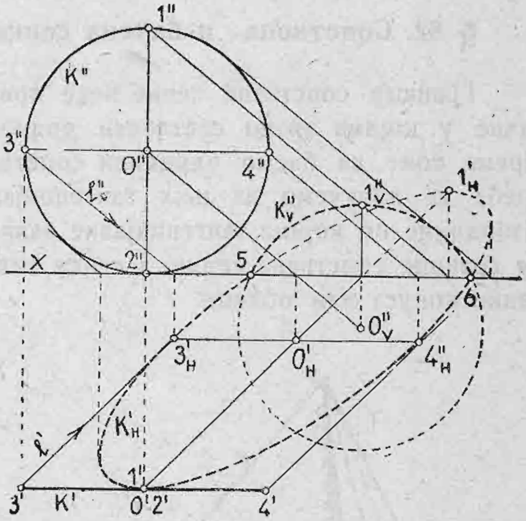
Сенку би могли одредити као код прошлог примера тражећи сенку појединих тачака. Тако је одређена на пр. сенка $3_H'$ тачке 3 и

$1_V''$ тачке 1, а тако ћемо одређивати сенку и касније, када год нам буде требала сенка само малог дела круга.

Када се као овде тражи сенка целог круга, тада ћемо је лакше и тачније одредити овако.

Повучемо ли (за одређивање сенке) зрак светлости кроз сваку тачку круга, сви ти зраци сачињаваће једну облицу. Зраци светлости су изводнице те облице, а базис је круг K кроз чије тачке пролазе зраци. Такву облицу назваћемо *свешла облица*. Ако наиђе нека раван, пресећи ће облицу. Свака тачка тога пресека биће продор једног зрака светлости кроз ту раван, према томе биће сенка једне тачке круга. Значи да ће пресек светле облице са том равни бити сенка круга по равни.

У овом случају светла облица је коса кружна облица, површина другог реда. Њен пресек са неком равни је крива другог реда. Ако је пресечна раван паралелна са равнином базиса, пресек ће бити подударна крива. Ако је пресечна раван произвољна, пресек ће бити елипса. (Само раван која је симетрична са равнином базиса у правцу зрака светлости сече облицу по кругу, а раван паралелна са зрацима светлости сече облицу по двема изводницама. Ову раван не би требало ни узимати у обзир, јер уствари није ни осветљена, па на њу ни не пада сенка).



Сл. 213

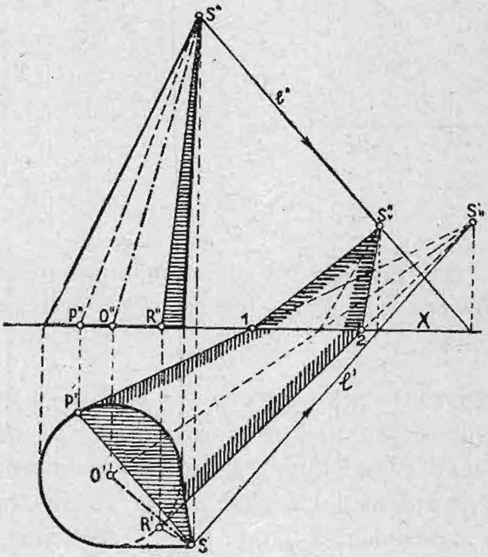
Код нашег случаја тачка 1 круга базиса баца своју сенку на V, а тачка 3 на H. Значи да ће сенка круга падати делом на V, делом на H. Према оном што је горе речено сенка круга K по вертикалници биће подударан круг K_V'', јер је раван на коју пада сенка паралелна са равнином круга (пресечна раван паралелна са базисом светле облице). Сенка по хоризонталници биће елипса.

Да одредимо сенку по вертикалници, за коју сада знамо да је круг, довољно је да одредимо сенку O_V'' средишта круга на вертикалници, па ће сенка средишта круга бити средиште круга бачене сенке. Сенка O_V'' је овде замишљена сенка, али без обзира на то, опишемо око ње круг K_V'' (подударан са K''), па је његов горњи део од тачке 5 преко $1_V''$ до 6 стварна сенка круга по вертикалници.

Видели смо да ће сенка круга K по хоризонталници бити елипса. Да је одредимо, узмемо на кругу два спрегнута пречника. На слици су узети пречници 1–2 и 3–4 (1–2 управан, а 3–4 паралелан са првом трасом равнине круга) и одређене сенке њихових крајњих тачака на хоризонталници. Тада су $1_H'$ $2_H'$ и $3_H'$ $4_H'$ два спрегнута пречника елипсе бачене сенке. Средиште елипсе је O_H' стварна сенка средишта круга. Конструишемо елипсу, па је њен део од тачке $2_H'$ до тачке 5 и 6 на оси X стварна сенка круга K по хоризонталници.

§ 82. Сопствена и бачена сенка конуса и облице

Границу сопствене сенке неке површине уопште сачињавају оне тачке у којима зраци светлости додирују (тангирају) ту површину. Према томе да бисмо одредили сопствену сенку конуса или облице, треба да повучемо на њих тангенцијалне равни у правцу светлости. Изводнице по којима тангенцијалне равни додирују конус или облицу су границе сопствене сенке, а сенке тих изводница су контуре бачене сенке конуса или облице.



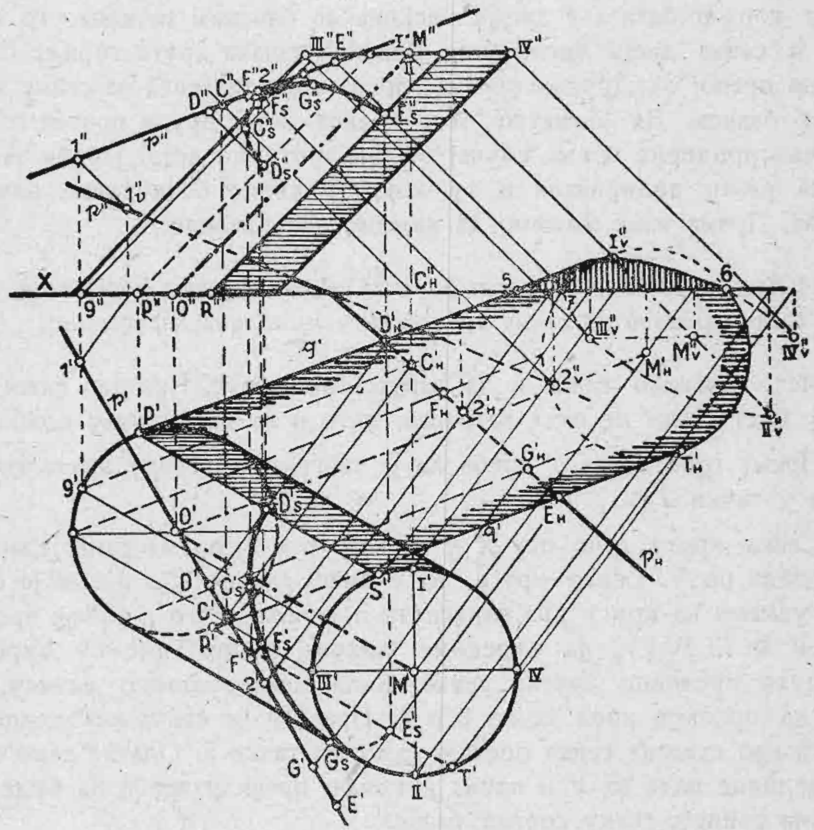
Сл. 214

Да бисмо одредили сопствену и бачену сенку косог кружног конуса са базисом у H (в. сл. 214), одредићемо сенку врха на раван базиса и из те сенке S_H' (без обзира да ли је она стварна или имагинарна) ћемо повући тангенте на круг базиса. Тангенте додирују базис у тачкама P' и R'. Раван $S'\,P'\,S_H'$ је тангенцијална раван на конус, јер је одређена тангентом на кривој базиса и изводницом кроз додирну тачку те тангенте, сем тога она је и у правцу светлости, јер садржи у себи зрак l' кроз тачку S'. Исто важи и за раван $S'\,R'\,S_H'$. Према томе су изводнице $P\,S$ и $R\,S$ границе сопствене сенке конуса. Сенке тих изводница су контура бачене сенке, али само до тачака 1 и 2. Даља сенка иде од 1 и 2 ка S_V'' стварној сенци врха конуса.

Видимо да за одређивање сопствене и бачене сенке конуса важи исто правило које смо били поставили за одређивање сенке пирамиде.

*

Аналогно је и одређивање сопствене и бачене сенке облице. Тако ћемо у сл. 215 одредити границу сопствене и бачене сенке за косу кружну зарубљену облицу са базисом у H. Као код призме, одредимо и овде сенку једне изводнице или осе на раван базиса. Помоћу сенке M_H' средишта горњег базиса одредимо сенку осе $O'M_H'$ на H. Раван $O'M'M_H'$ одређена је правцем осе и зраком светлости, што значи да је паралелна са тангенцијалним равнима на облицу у правцу светлости. Ако дакле паралелно са $O'M_H'$ повучемо тангенте g' и d на круг базиса, изводнице $P'S'$ и $R'T'$ су границе сопствене сенке, а праве g' и q' њихове сенке односно контура бачене сенке облице по H.



Сл. 215

Ако су случајно изводнице облице управне на једну од пројекцисих равни, сенке изводница су у правцу пројекције зрака светлости. Значи: довољно је само у правцу светлости повући тангенте на базис.

На овом примеру треба да решимо још један задатак. Како је облица зарубљена, то треба да одредимо и бачену сенку горњег базиса. Тај базис је хоризонталан круг и како сенка M_H' његовог средишта пада на H, то ће сенка круга по H бити подударан круг. Да видимо сада положај тога круга према правој q' и g'. Раван $R' T' T_H'$ је тангенцијална раван на облицу у правцу светлости. Права q' је права траса те равни, заправо пресек те равни са H. Све што је у равни има своју сенку на том пресеку дакле на q'. Стога је q' бачена сенка изводнице, $R' T'$. Раван $R' T' T_H'$ као тангенцијална раван додирује и круг горњег базиса у двема бесконачно блиским тачкама. То значи да ће и сенка двеју бесконачно блискик тачака круга горњег базиса бити на правој q'. Другим речима, права q' је тангента на сенку круга горњег базиса. Да је место овог базиса неки други пресек облице или нека продорна крива, случај би био потпуно исти, јер би тангенцијална раван додиривала и ту криву у двема бесконачно блиским тачкама. Према томе можемо да кажемо као правило.

1) *Код зарубљене облице бачена сенка границе сопствене сенке стоји тангенцијално на сенку криве којом је облица зарубљена.*

Исто правило важи и за зарубљени конус. Правило важи и за случај када сенка не пада на раван, него и на било какву површину.

Према томе права q' треба да је тангента на сенку круга горњег базиса у тачки T_H'.

Сенка круга сече осу X у тачкама 6 и 7; према томе један део сенке пада по V. Сенка круга по V биће елипса. Да бисмо је одредили, узмемо на кругу два спрегнута пречника, и то најбоље пречник I II $\perp V$ и III IV $\| V$, па одредимо њихове сенке. Тиме су одређени спрегнути пречници бачене сенке. Када конструишемо елипсу, она мора да пролази кроз тачке 6 и 7. Права g' је сенка изводнице PS по H и као стварна сенка постоји само до тачке 5. Одатле даље сенка те изводнице пада на V и према предњем правилу треба да буде тангента на елипсу, сенку горњег базиса.

*

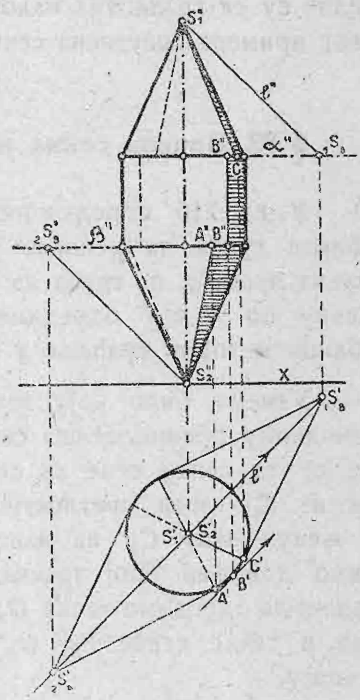
У слици 216 нацртана је комбинација ротационе облице и двају конуса са заједничким базисима и истом осом S_1 S_2. Одређена је само граница сопствене сенке.

Како су изводнице облице управне на H, то ће њихова сенка бити у правцу l'.

Повучемо ли тангенте на круг базиса $\| l'$ видимо да је изводница из B' граница сопствене сенке облице. Повучемо и њену II пројекцију и тачке на базисима обележимо са B''. Одредимо затим сенку врха S_1 горњег конуса на раван α његовог базиса. Ако из ${}_1S_B'$ повучемо тангенте на базис, изводнице кроз додирне тачке C' су границе сопствене сенке горњег конуса. За доњи конус конструкција остаје потпуно иста, без обзира на то што је ${}_2S_B'$ само имагинарна сенка врха S_2' на раван β базиса. Према томе изводнице из A' су границе сопствене сенке доњег конуса. Границе су повучене у II пројекцији и обележене, а сама сенка шрафирана.

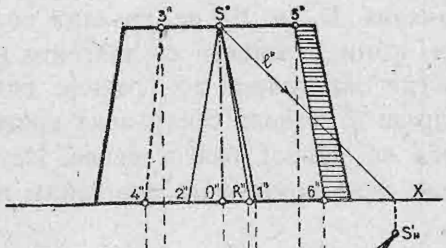
Овај задатак је решен, иако не претставља ништа ново, само зато да би почетници видели да се код оваквих комбинација конуса и облице граница сопствене сенке конуса не наставља из тачке B'', границе сенке облице на заједничком базису.

На ову слику ћемо се вратити када будемо говорили о сенчењу ротационих површина.



Сл. 216

*



Сл. 217

Деси се понекад да сенка врха на раван базиса пада ван цртежа, нарочито код зарубљених конуса. У том случају из било које тачке S осе конуса повучемо мањи конус са сличним базисом и паралелним изводницама. Одредимо сенку врха малог конуса на раван базиса и помоћу тангента и додирних тачака одредимо границу сопствене сенке малог конуса. Границе сопствене сенке великог конуса су паралелне са њима. Ако је I пројекција врха заједничка као у сл. 217, продужимо само изводнице R' S' и P' S'. Када је оса коса права, а I пројекција врха уопште није нацртана,повучемо тангенте на кривој базиса паралелне са тангентама $S_H' P'$ и $S_H' R'$. Кроз додирне тачке пролазе границе сопствене сенке, а паралелне су са границама малог конуса. (Као код пређашњег, тако ни код овог примера сопствена сенка у I пројекцији није шрафирана).

§ 83. Бачена сенка на облицу и конус

У сл. 215 поред конструкције сопствене и бачене сенке косе облице треба да решимо још један задатак. Задата је наиме, произвољна права p, па треба да одредимо њену сенку по H, V и по облици. Сенку по H и V одредимо помоћу сенки двеју тачака, а сенку по облици методом враћања у натраг.

Узмемо било коју тачку 9′ на кругу базиса и повучемо из ње изводницу облице. Њена сенка бeће паралелна са сенком осе. Видимо да се та сенка сече са сенком p_H' праве p у тачки C_H'. Повучемо ли из C_H' зрак светлости l', имамо одмах тачку C' на правој p' и њену сенку C_S' на изводници 9′. На тај начин можемо да одредимо довољан број тачака, па да тако одредимо сенку. Нарочито је важно да одредимо тачке D_S и E_S на границама сопствене сенке облице, као и тачке сенке F_S'' G_S' на контурним изводницама за II и I пројекцију.

Сама крива бачене сенке ће бити крива II степена као пресек облице са светлом равни кроз праву p. У овом случају то ће бити елипса. Зраци светлости из D и E су крајњи зраци који још имају заједничких тачака са облицом. Заправо и они не продиру кроз облицу, него је само додирују у тачкама D_S и E_S на граници сопствене сенке облице. Према томе ти зраци светлости су тангенте на кривој бачене сенке, и то у тачкама где она долази до границе сопствене сенке облице. Да је место праве p бацала сенку нека крива, последњи зрак био би опет тангента на кривој бачене сенке. Исто тако било би и да је место облице нека друга обла површина, па зато можемо рећи:

1) *У оној тачки, где бачена сенка неке линије (праве или криве) долази на границу сопствене сенке било какве обле површине, зрак светлости је тангента на кривој бачене сенке у тој тачки.*

Ово правило важи за све пројекције и за све врсте пројекција.

*

У сл. 218 узете су две зарубљене облице са заједничком равни базиса и заједничком вертикалном осом; треба да одредимо сопствену и бачену сенку.

Да бисмо одредили границу сопствене сенке, повучемо тангенте на кругове базиса у правцу l'. (То је правац сенке изводница по равни базиса, јер су изводнице управне на H). Додирне тачке B' и C' су уједно и I пројекције изводница које су границе сопствене сенке у II пројекцији.

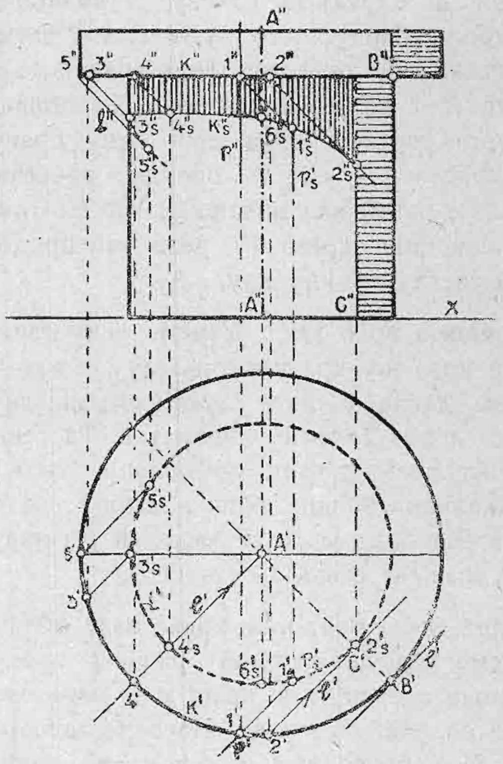
Као други део задатка треба да одредимо бачену сенку доњег круга K веће облице на мању, доњу облицу. Ако кроз сваку тачку тога круга повучемо зрак светлости, сви ти зраци скупа сачињаваће једну облицу којој је базис круг K а оса паралелна са l. Ту облицу називамо „*светла облица*“ аналогној светлој равни кроз неку праву. Када нека раван или површина пресече ту светлу облицу, пресечна крива биће сенка круга K по тој равни или површини. Према томе сенка K_S круга K по доњој облици биће крива IV реда као продор те доље вертикалне облице кроз светлу облицу круга K.

Саму сенку можемо да одредимо врло лако. Узмемо неку тачку 1 ($1'$ $1''$) на кругу K и повучемо кроз њу праву p паралелну са изводницама облице на коју пада сенка, дакле у овом случају вертикалну. Права p је $\perp$ H, па ће њена сенка по H бити у правцу l'. Та сенка иде до пресека са L', а даља сенка праве p пада по облици. Како је права p узета паралелно са изводницама облице, биће и сама сенка p_S паралелна са p. Чим имамо p_S'' и знамо да је то сенка праве p'', повучемо из $1''$ зрак l'', па је на p_S'' тражена сенка $1_S''$ тачке 1.

(Према томе тачка 1_S је једна тачка продорне криве мале облице кроз светлу облицу. Тачку 1_S смо одредили помоћу равни p p_S која је у правцу светлости, јер садржи и зрак l, а права p је паралелна са изводницама вертикалне доње облице. Значи да смо овде за одређивање тачака продорне криве K_S употребили као помоћне равни, равни паралелне са изводницама обеју облица, исто као и ко̂д теориских задатака).

Када нам је та конструкција позната, не морамо за сваку нову тачку повлачити и нову помоћну праву p. Узмемо само неку тачку 4 и повучемо из ње l' и l''. Где l' пресеца L', ту је сенка $4_S'$ а на ординати и на l'' тачка $4_S''$. На тај начин одредимо довољан број тачака и спојимо криву. Као специјалну тачку треба да одредимо тачку бачене сенке на контури сопствене сенке. Одредимо је тако, што кроз C' повучемо $1'$. Тај зрак пресеца K' у тачки $2'$, значи да тачка 2 баца своју сенку на граници сопствене сенке доње облице. Помоћу l'' из $2''$ одредимо ту тачку. У тачки $2_S''$ зрак l'' је тангента на кривој бачене сенке. Важно је да одредимо и контурну тачку $3_S''$ бачене сенке. Одредимо је на исти начин као тачку 2, 2_S, помоћу l' из I пројекције контурне изводнице. У тачки $3_S''$, као контурној тачки, контурна изводница је тангента на K_S''.

Погрешно би било повући зрак l'' из контурне тачке $5''$ горње облице н његов пресек са контурном изводницом сматрати за контурну тачку бачене сенке. Из I пројекције се јасно види да тачка 5 баца своју сенку позади на облицу. Стога је $5_S''$ одвојена од контуре и невидљива.



Сл. 218

Код овог примера узето је осветљење под 45°. Услед тога је лева контурна изводница симетрична, обзиром на светлу раван кроз осу, са изводницом која се у II пројекцији поклапа са осом облице. Исто тако је симетричан и круг K. Стога ће бачена сенка K_S'' пресецати ту изводницу у тачки $6_S''$ на истој висини на којој је тачка $3_S''$. Ово важи само и једино за случај када l' заклапа угао од 45° са X-осом, али важи за све ротационе површине са вертикалном осом.

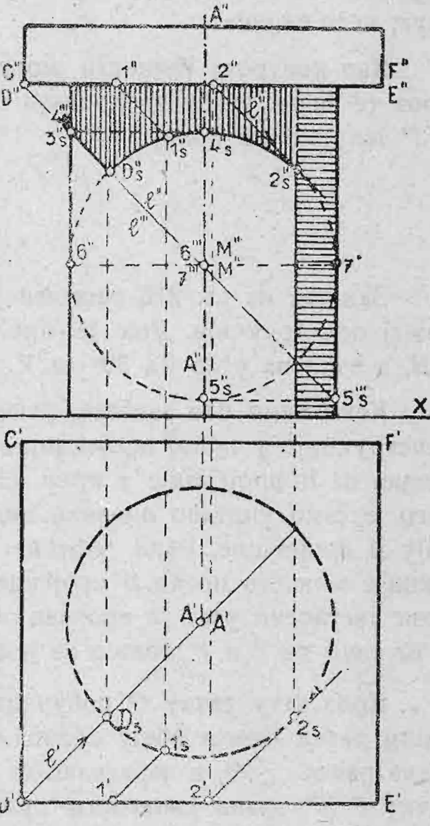
Ако пратимо криву K_S'', видимо да се она пење од тачке $2_S''$ ка средини облице, а исто тако и од тачке $3_S''$. Према томе видљиви део криве K_S'' треба да има неку највишу тачку са хоризонталном тангентом. То ће бити свакако сенка оне тачке круга K, која је најближа облици у правцу зрака светлости, а то је тачка 4' на зраку l' из A'. Тачка $4_S''$ је највиша тачка бачене сенке и тангента на K_S'' је у тој тачки хоризонтална.

Ова конструкција важи за све ротационе површине са вертикалном осом.

Тиме смо одредили и све специјалне тачке криве бачене сенке, што значи да је и сама сенка потпуно одређена. Сенка облица на H и V није конструисана, јер се то у задатку није ни тражило, а конструкција је позната. Природно да смо и ову сенку могли одредити методом враћања унатраг. За то би довољно било одредити сенку круга K на H. У овом случају то би захтевало много више рада и цртања.

*

Сличан пример задат је у сл. 219, али место зарубљене горње облице имамо овде над доњом облицом једну четвртасту плочу. Осветљење је под 45^0. Границу сопствене сенке облице одредимо као пре. Од границе сопствене сенке плоче могу бацити своју сенку на облицу само ивице $C\,D$ и $D\,E$. Према томе бачена сенка по облици биће две криве II реда као пресек облице са светлим равнима кроз праве $C\,D$ и $D\,E$. Ивица $C\,D$ је управна на V, па ће њезина сенка бити $\parallel$ l'' и то од контурне тачке $3_S''$ до сенке тачке D. Саму сенку D_S'' одредимо помоћу зрака l' l'' из D као раније. Сенка ивице $D\,E$ показиваће се као крива, а можемо да је одредимо тачку по тачку, као код предходног задатка.



Сл. 219

Пошто знамо да је та сенка крива II реда можда бисмо је могли лакше и тачније одредити помоћу спрегнутих пречника или оса.

Да бисмо одредили лакше криву, одредимо III пројекцију целог тела уз претпоставку да се Z-оса поклапа са осом $A\,A$ облице. Како је тело потпуно симетрично обзиром на ту осу, изводница која се у II пројекцији поклапа са осом A'' A'' поклапаће се у III пројекцији са контурном изводницом друге пројекције. Исто тако и трећа пројекција ивице $D\,E$ поклопиће се са другом пројекцијом ивице $C\,D$. Зрак светлости l''' такође се поклапа са l'', јер је осветљење под 45^0. У трећој пројекцији сенка ивице $D\,E$ показује се као права од тачке $4_S'''$ до $5_S'''$. Како је та сенка пресек облице, одмах знамо да ће то бити елипса. Дуж $4_S'''$ $5_S'''$ је права величина једног пречника, пресек са осом је средиште M''', а друга је оса $6'''$ $7'''$ управна на профилницу, па се поклапа са M'''. Вратимо сада тачке 4—7 у II пројекцију и тиме нам је тражена сенка одређена. Како је l''' под 45^0, то ће бити дуж $4_S''$ M'' једнака дужи $6''$ M''. Према томе елипса бачене сенке показиваће се у II пројекцији као круг. Од тога круга стварна сенка је лук D_S'' до $2_S''$.

Да осветљење није под 45°, требало би само одредити l''', остало би било све као и овде, једино сенка не би била у II пројекцији круг, него елипса.

Као контрола тачности могу да нам послуже тачке D_S'' и $2_S''$. Кроз те тачке треба да пролази бачена сенка, а у тачки $2_S''$ треба да је l'' тангента на криву.

*

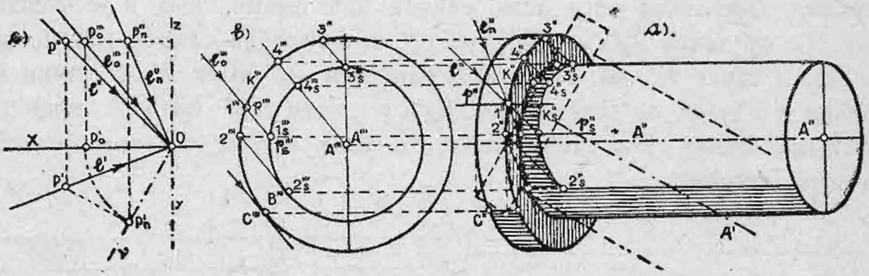
Задатак из сл. 218 решаван је још једном у сл. 220 само је положај осе друкчији. Док је пре оса била управна на H, сада је оса $\parallel H$, а заклапа угао од 30° са V.

Како ћемо цео задатак решити у II и окренутој III пројекцији, конструкције у првој пројекцији свеле би се на просто преношење тачака из II пројекције у прву. Стога I пројекција овде није обрађена, него је само уцртано онолико колико је било потребно за конструкцију II пројекције. Ради уштеде у простору уцртана је таква I пројекција тачкасто преко II пројекције, а оса X није уопште повлачена. Зрак светлости узет је произвољно и уцртан је на засебној слици c), и то тако да l' и l'' полазе из једне тачке O на X-оси.

Кроз исту тачку O повучемо праву v паралелну са првом пројекцијом равни базиса обеју облица. Према томе права v је прва траса једне равни $\perp H$, а паралелне са базисима облица. Ако сада било коју тачку P' P'' зрака светлости пројектујемо ортогонално на ту раван, добићемо помоћу P_n'' и O ортогоналну пројекцију l_n'' зрака светлости на раван базиса. Сада већ можемо да конструишемо сенке и то у самој другој пројекцији. Познато нам је правило: Ако је нека права управна на пројекциску раван, њена је сенка по тој равни у правцу зрака светлости. Изводнице облице су управне на раван базиса (значи $\perp v$), па ће према томе њихова сенка по равни базиса (паралелној са v) бити у правцу l_n''.

Повучемо тангенте $\parallel l_n''$ на криве базиса и тиме одредимо границе сопствене сенке. Ако хоћемо да одредимо сенку тачке $1''$ круга K'', повучемо кроз $1''$ праву p'' паралелну са изводницама. Сенка те праве по равни базиса ићи ће у правцу l_n'' до пресека са базисом мале облице. Даља сенка p_S'' ићи ће по малој облици, и то паралелно са изводницама. На њој, а истовремено и на зраку l'' из $1''$ биће $1_S''$ тражена сенка тачке $1''$.

Према томе, конструкција је као и пре, само место l' имамо l_n'' и радимо све у једној пројекцији. Остале тачке криве K_S'', па и специјалне тачке, одредимо на исти начин.



Сл. 220 *a*, *b* и *c*

Ова је конструкција врло једноставна, али је нетачна по томе што се ради све на елипсама. Ту нетачност можемо да избегнемо ако уцртамо *„окренуту трећу пројекцију“*. Ако раван базиса окренемо да легне на *V*, показаће се кругови базиса као кругови (види сл. *b*). Да бисмо са њима могли радити, треба да заједно са равни окренемо и њену пројекцију зрака l_n''. То урадимо у сл. *c*) и на тај начин добијемо зрак l_0'''. Помоћу тога зрака конструишемо све потребно у окренутој III пројекцији (сл. *b*) као што смо пре конструисали у I пројекцији помоћу l'.

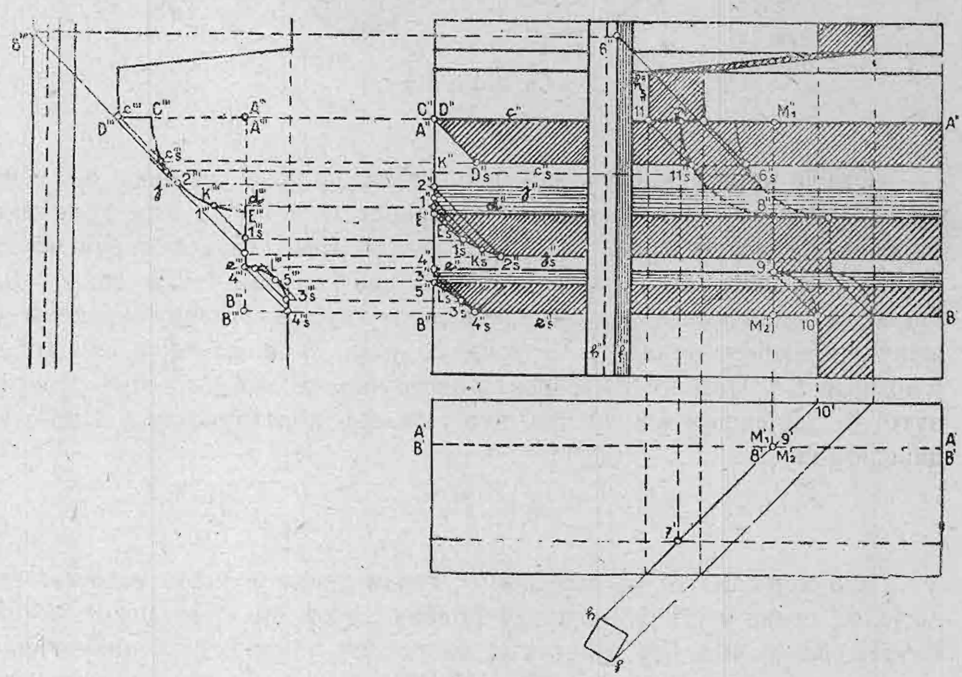
*

Као нов задатак за одређивање сенки узето је једно тело састављено од равни и двеју облица у облику неког архитектонског венца. Осветљење је под 45⁰. Задатак је постављен у I и II пројекцији. Како у задатку постоје две облице, па треба да одређујемо и сенке по облицама, треба да уцртамо и ону пројекцију у којој се изводнице облица пројектују као тачке. То је овде профилна пројекција, па ћемо и сенке конструисати помоћу II и III пројекције.

У профилници одмах видимо које су равни осветљене а које нису, јер се све површине показују као праве и кругови. (Отуда и име *„профилница“* овој пројекциској равни, што се у њој види тачан профил венца). Повучемо ли уз то и тангенте || l''' на облице, можемо да кажемо да ће сенку бацати ивица *c* по горњем делу облице, затим граница сопствене сенке горње облице, изводница *j*, по доњој равни и на крају ивица *e* испод границе сопствене сенке доње облице.

Сенку ивице *c* одредимо помоћу l''' из c''', па је одмах повучемо у II пројекцији. Десно иде сенка до краја. Лево иде само до тачке

D_S'', а одатле се наставља сенка ивице $C D$. Како је ивица $C D \perp V$, сенка јој је у правцу l''. Сенку изводнице j одредимо на исти начин као и крајњу њену леву тачку $2_S''$. Одатле даље наставља се сенка круга K базиса облице. Сенка ће бити део елипсе као сенка круга K по равни. Две тачке тога дела елипсе већ имамо, као и тангенте у њима. То су тачке $2_S''$ у којој је j_S'' тангента на елипсу (по правилу 1 § 82), и тачке E'', односно E_S''. Тангента на круг K у тачки E је управна на V, па ће тангента на K_S'' у тачки E_S'' бити у правцу l''. Одредимо сенку још неке тачке 1 тога круга, па нам је сенка довољно одређена.



Сл. 221

Најнижа сенка је e_S'' сенка ивице e и то до крајње леве тачке $4_S''$. Одатле даље наставља се сенка круга L базиса доње облице, заправо дела од тачке 4 до 5 по доњем делу облице. Та сенка требало би да буде крива четвртог реда као продор светле облице кроз облицу. Како ћемо мало касније видети и та је сенка L_S'' крива II реда (јер доња облица и светла облица кроз L имају заједнички базис L). Одредимо сенку још неке тачке, као на пр. 3 3_S, па нам је крива довољно одређена. У тачки $4_S''$ је тангента на криву L_S'' бачене сенке $\parallel l''$, јер је тангента на круг L у тачки 4 $\perp V$.

Важно је да се код овог примера запази разлика на линији бачене сенке у тачкама D_S'', $2_S''$ и $4_S''$. У тачки D_S'' имамо пресек двеју правих c_S'' и $C_S'' D_S''$, у тачки $4_S''$ пресек елипсе L_S'' са правом e_S'', а у тачки $2_S''$ елипса K_S'' бачене сенке прелази тангенцијално у праву j_S''. Тај тангенцијални прелаз криве у праву појављује се само када је права j_S'' сенка границе сопствене сенке неке обле површине, а тачка $2_S''$ сенка њене крајње тачке на кривој базиса или неког другог пресека или продора (в. правило 1 § 82).

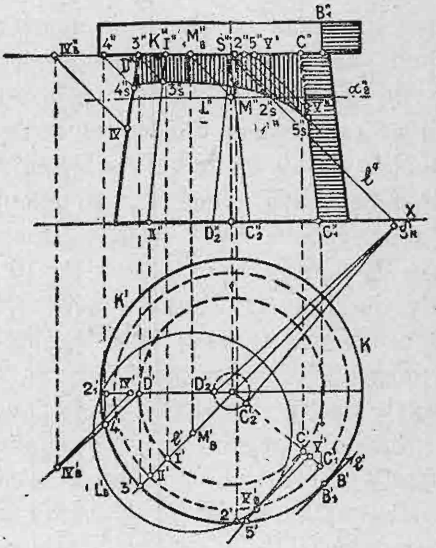
На истом примеру решен је још један задатак. Задат је испред венца четвртаст вертикалан стуб и треба да одредимо његову сенку по венцу. Конструкција бачене сенке по равнима позната нам је од раније (в. сл. 210), а довољно је јасна и из саме слике. Сенка по облицама биће пресек облица са светлим равнима кроз облице h и f, које се у I пројекцији показују као праве $\| l'$. Тако ће сенка ивице h' по горњој облици бити елипса са средиштем M_1' и полуосама $M_1' 7'$ и $M_1' 8'$, а по доњој облици поново елипса са средиштем M_2' и полуосама $M_2' 9'$ и $M_2' 10'$. Пренесемо ли те тачке у II пројекцију, видимо да је полуоса $7'' M_1''$ једнака полуоси $8'' M_1''$, а то значи да се елипсе бачене сенке пројектују као кругови. То смо могли и очекивати, пошто знамо да је l под 45°. Уопште светла раван сече цео венац тачно по профилу. То је случај увек код осветљења под 45°, па се овај профил може употребити место III пројекције за одређивање сенки. Тачка $11'$ је на ивици c'' и на сенци ивице h по највишој равни венца. Сенка се према томе наставља на облици по кругу из тачке $11''_S$, где је права $11''\ 11''_S$, зрак l''. Према томе кроз $11''_S$, мора да пролази и сенка c_S''.

*

Пређимо сада на конструкцију бачене сенке на конус. Као први задатак узмимо вертикални ротациони зарубљени конус и на њему зарубљену ротациону облицу на истој оси.

Сопствену сенку облице одредимо помоћу тангенте $\| l'$, а конуса као у сл. 217 помоћу смањеног конуса са врхом S у равни горњег базиса.

По конусу ће бацати сенку доњи круг K облице. Бачена сенка биће крива IV реда као продор конуса кроз светлу облицу круга K. Поједине тачке одредићемо најлакше методом враћања унатраг. Али онај обичан начин, да одредимо сенку конуса и круга на неку раван, био би у овом случају неподесан, јер би сенка врха побегла сувише далеко. Место тога можемо да поступимо овако. Узмемо било коју хоризонталну раван α (α_2'') на висини где мислимо да ће бити сенке. Раван α сече конус по кругу L са средиштем M на оси и полупречником од M'' до контурне изводнице. Тај круг уцртамо и у I пројекцији. Раван α је паралелна са равни круга K; ако, дакле одредимо сенку круга K на раван α, та ће се сенка показати у I пројекцији као круг K_α'. Тамо где круг K_α' пресеца круг L', имамо две тачке бачене сенке. Радећи на овај начин, морамо за сваку нову раван уцртати два круга. Стога ћемо конструкцију мало изменити, и то, место да одређујемо сенку круга K на раван α, одредићемо имагинарну сенку круга L на раван круга K. Одредимо је помоћу сенке M_B' средишта, а сенка се показује у I пројекцији поново као подударан круг L_B'. У пресеку кругова L_B' и K' имамо тачку $2'$ и $2_1'$ круга K', које своју сенку бацају на L'. Како нам сенка у I пројекцији није потребна, није у слици ни уцртан круг L', него је само одређена тачка $2''$ на K'' и помоћу l'' њена сенка $2_S''$ на L'' (заправо на α_2''). Тачка $2_1''$ није преношена у II пројекцију, јер њена сенка пада на невидљиви део конуса. Сваком новом равни α добићемо нове тачке сенке, па на тај начин можемо да одредимо целу криву бачене сенке.



Сл. 222

Овај начин је добар и лак, али помоћу њега уопште не можемо да одредимо специјалне тачке, сем случајно.

Стога ћемо за те тачке употребити други начин, заправо две разне конструкције.

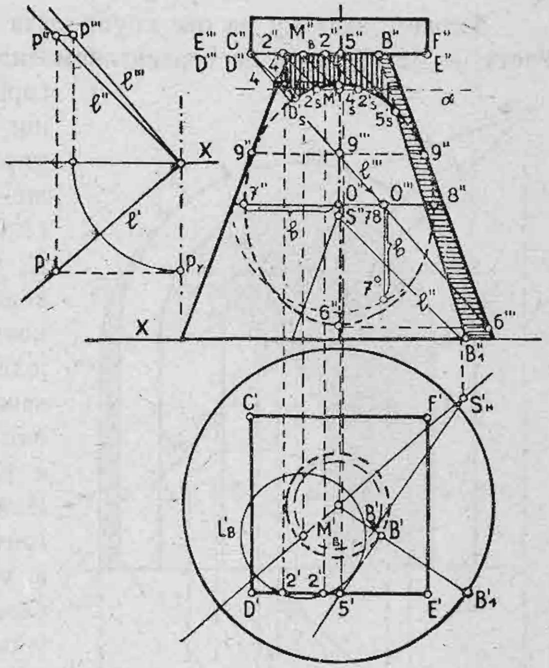
Да бисмо одредили највишу тачку бачене сенке, повучемо светлу раван кроз осу. У I пројекцији она се поклапа са l' из A' и видимо да сече конус по изводници I′ II′, а круг K' у тачки 3. Пренесемо у II пројекцију изводнице I″ II″ и тачку 3″, па је $3_S''$ на зраку l'' из 3″ највиша тачка бачене сенке. (Хоризонтална тангента на кривој у тој тачки није уцртана).

Да бисмо одредили контурну тачку $4_S''$ сенке, послужићемо се понова методом враћања унатраг. Одредићемо имагинарну сенку контурне изводнице на раван круга K. Тачка 4′ у којој та сенка сече круг K' је тачка 4, чија је сенка $4_S''$ контурна тачка бачене сенке. Сенку контурне изводнице можемо да одредимо на два начина. Једну тачку већ имамо; то је тачка D на горњем базису, а која је већ у равни круга K. Као другу тачку узмемо било коју тачку IV″ изводнице, па одредимо њену сенку, а тиме уједно и сенку саме изводнице. Други начин је овај: Раван круга K је паралелна са равни доњег базиса конуса и $\parallel H$. Одредимо сенку контурне изводнице $D_2 S$ малог конуса по H, па је са њом паралелна сенка контурне изводнице D зарубљеног конуса. Тачку $5_S''$ бачене сенке на граници сопствене сенке нађемо на исти начин као и тачку $4_S''$.

Овај други начин може да се употреби за одређивање целе криве бачене сенке.

*

Други пример узмимо да је састављен аналогно другом примеру из сенчења облице.



Сл. 223

Узмимо зарубљен вертикални конус са четвртастом плочом на горњем базису. Осветљење нека буде произвољно l' l''.

Границу сопствене сенке конуса одредимо помоћу малог конуса са врхом S. Бачену сенку по конусу, односно сенку ивица $C D$ и $D E$ можемо да одредимо као и пре.

Повучемо неку помоћну хоризонталну раван α која сече конус по кругу L са средиштем M на оси конуса. Помоћу сенке средишта M круга одредимо имагинарну сенку L на раван ивица $C D$ и $D E$. Сенка L_B' пресеца ивицу $D'E'$ у двема тачкама $2'$. Значи да те тачке бацају своју сенку на круг L. Помоћу зрака l'' из тачака $2''$ одредимо те сенке $2_S''$. Само и овде ће крива бачене сенке бити састављена од двеју кривих II реда као што је била код облице у сл. 219. Одредићемо их као и тамо. Сенка ивице $C D$ биће у правцу l'', па је лако нацртамо. За сенку ивице $D E$ треба да пређемо, као и пре, у трећу пројекцију. Само у овом случају треба да одредимо и трећу пројекцију зрака светлости, јер је осветљење l' l'' овде произвољно. То урадимо било где са стране.

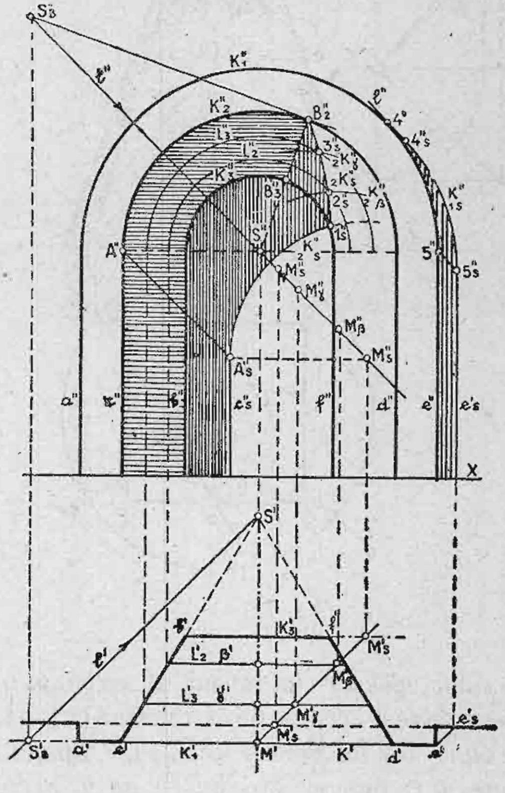
У III пројекцији сенка ивице $D''' E'''$ по конусу показује се као дуж $4''' 6'''$ у правцу l'''. Како знамо да је то елипса, одредимо јој средиште O''', са којим се поклапају и крајње тачке друге осе $7'''$ и $8'''$. Одредимо затим II пројекцију тачака 4, 6 и O и повучемо осу 7 8. Њене крајње тачке $7''$ и $8''$ одредимо најлакше ако одредимо праву величину осе. Стога пресечемо конус хоризонталном равни кроз средиште O'''. Тачке $7'''$ и $8'''$ су на пресечном кругу. Оборимо га око хоризонталног пречника, па је дуж O''' 7^0 тражена права величина полуосе b. Нанесемо ту дуж десно и лево од O'', па смо одредили тачке $7''$ и $8''$.

Лако је увидети да су тачке $9''$ контурне тачке елипсе бачене сенке.

Тачку бачене сенке на граници сопствене сенке конуса можемо да одредимо исто као код прошлог задатка.

*

Задњем задатку из ове групе дата је опет архитектонска форма. Узета је једна ниша на вертикалном зиду. Горњи део нише сачињава горња половина једног зарубљеног конуса са хоризонталном осом управном на зид и на V. Наниже се настављају вертикалне тангенцијалне равни на конус. Круг K_2 базиса испада мало ван равни зида. Око њега је описан други концентричан круг K_1 као базис једне ротационе облице. На тај начин образован је као неки праг око нише са полукруговима K_2'' и K_1'' и ивицама a'', c'', d'' и e''. Ивице b'' и f'' су вертикалне тангенте на круг K_3'' мањег базиса, а уједно и пресеци равни тога базиса са вертикалним тангенцијалним равнима на конус. Траже се сопствене и бачене сенке за осветљење под 45⁰.



Сл. 224

Границу сопствене сенке конуса одредимо помоћу имагинарне сенке врха S на раван базиса и тангенте из S_B'' на K_2''. Изводница B_2'' B_3'' је граница сопствене сенке. Пошто је у сопственој сенци и изводница A'' S'', значи да је у сопственој сенци и цела раван $[b''$ $c'']$. Тангента $\parallel l''$ на круг K_1' одређује границу сопствене сенке облице и видимо да су изводнице од $4''$ до $5''$ у сопственој сенци.

Према томе ће своју сенку на унутрашњост нише бацати круг K_3'' од тачке B_2'' до A'' и ивица c'', а на раван зида изводница $4''$ облице, затим део круга K_1'' од тачке $4''$ до $5''$ и најзад ивица e''.

Сенка круга K_2 на раван мањег базиса биће подударан круг. Одредимо помоћу l' и l'' сенку средишта M и око M_S'' опишемо круг ${}_2K_S''$. Зрак l'' из A'' показује најнижу тачку бачене сенке круга. Од A_S'' наставља се (тангенцијално на ${}_2K_S''$) сенка c_S ивице c''. С друге стране сенка ${}_2K_S''$ сече круг K_3'' малог базиса у тачки $1_S''$. Одатле ће сенка круга K_2'' ићи по конусу. Две тачке те сенке већ имамо: то су тачка $1_S''$ и тачка B_2''.

Да бисмо одредили још коју тачку сенке, повучемо неку раван β паралелну са равнима базиса. Раван β сече конус по кругу L_2' са средиштем O_2' на оси конуса. Друга пројекција O_2'' поклапа се са S'' и M'', па опишемо горњу половину круга L_2''.

Сенка круга K_2 по равни β биће подударан круг. Одредимо само сенку средишта M и око M_β'' опишемо круг ${}_2K''_\beta$. Цела та сенка ${}_2K_\beta''$ је имагинарна сенка круга K_2'' на помоћној равни β, једино је тачка $2_S''$ реална тачка сенко где ${}_2K_\beta''$ пресеца L_2''.

На слици је на исти начин узета и помоћна раван γ, па је помоћу ње одређена тачка $3_S''$. Затим је повучена крива бачене сенке. У идућем поглављу видећемо да је та крива један део елипсе.

Сенку круга K_1 на раван зида одредимо помоћу сенке ${}_1M_S'$ средишта, а зрацима l'' тачке $4_S''$ и $5_S''$ на њој. Од зида до $4_S''$ биће сенка изводнице 4 у правцу l'', а од $5_S''$ наниже наставља се сенка ивице e ($e_S'' \parallel e''$ и тангенцијално на ${}_1K_S''$).

§ 84. Сенка криве базиса на унутрашњост облице и конуса

Код практичних задатака често се дешава да крива базиса баца своју сенку на унутрашњост облице или конуса. Стога ћемо овде решити по један такав задатак.

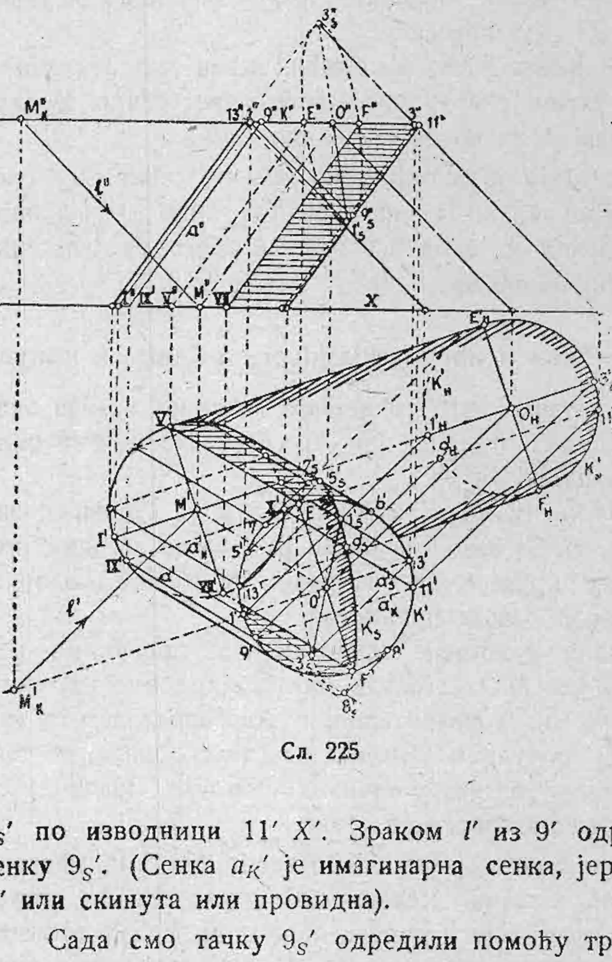
Узмимо најпре зарубљену косу кружну облицу. Горњи базис круг K нека је у равни $\parallel H$. За зрак светлости l' l'' треба да одредимо сопствену сенку и сенку круга K на унутрашњост облице (уз претпоставку да је раван горњег базиса провидна).

Да одредимо границу сопствене сенке облице поступимо као раније у сл. 215. Сенку осе MO на раван базиса одредимо најлакше помоћу сенке O_H' тачке O на хоризонталници. Ако паралелно са том сенком $M'O_H'$ (осе $M'O'$) повучемо тангенте на базис облице, те тангенте додирују круг доњег базиса у тачкама V′ и VII″. Значи да су изводнице V E и VII F граница сопствене сенке.

Видљиви делови површине који су у сопственој сенци шрафирани су танким хоризонталним правама. Делови који су са спољне стране осветљени с унутрашње су стране у сопственој сенци. Услед тога цео круг K, горњи базис је граница сопствене сенке, а његова сенка биће контура бачене сенке. Један део те сенке пада на H, а други део на унутрашњост саме облице. Како је круг $K \parallel H$ његова је сенка по хоризонталници подударан круг описан око тачке O_H' сенке средишта O' самог круга.

Други део круга K баца своју сенку по унутрашњости саме облице. Ту сенку можемо одредити на више начина. Можемо да је одредимо тачку по тачку. Да одредимо на пр. сенку тачке 9′ повучемо кроз ту тачку помоћну праву a' паралелну са осом облице и одредимо њену сенку a_S' по облици. Зраком l' одредимо тада на њој тражену тачку $9_S'$.

Помоћна права a' повучена кроз тачку 9′ је изводница IX′ облица. Њена сенка a_H' по H је права из IX′ паралелна са сенком $M' O'_H$ осе. Та сенка важи до пресека X′ са кругом базиса. Одатле иде по облици. Како је права a паралелна са изводницама облице, поклапаће се a_S' са изводницом X′ 11′.



Сл. 225

Овај начин је добар, јер се може применити када је крива K било каква крива на облици (на пр. продорна крива). Недостатак му је што захтева много линија и то дугих.

У овом случају можемо да избегнемо тај недостатак, ако место стварне сенке a_H' употребимо имагинарну a_K' на равни криве K. Горњи базис K облице паралелан је са доњим (и $\parallel H$). Сенка праве a по равни круга K биће $a_K' \parallel a_H'$. Сенка a_K' сече круг K' у тачки 11′ а одатле се наставља као a_S' по изводници 11′ X'. Зраком l' из 9′ одредимо на њој тражену сенку $9_S'$. (Сенка a_K' је имагинарна сенка, јер је раван горњег базиса K' или скинута или провидна).

Сада смо тачку $9_S'$ одредили помоћу троугла a_K', a_S' и l'. Природно је да ће величина троугла (дакле и отстојање сенке неке тачке) зависити од дужине стране a_K' троугла. Та страна ће бити највећа када пролази кроз средиште круга, овде за тачку 1′ и $1_S'$, а најкраћа у тачкама E и F. У тим тачкама је a_K' тангента на круг K' и има са њим заједничке две бесконачно блиске тачке. Значи да је страна a_K' троугла бесконачно мала, а услед тога је бесконачно мален и цели троугао, па и његова страна $E' E_S'$. Одатле следи да ће бачена сенка

K_S круга K базиса по унутрашњости облице пролазити кроз тачке E и F тога круга које су на граници сопствене сенке.

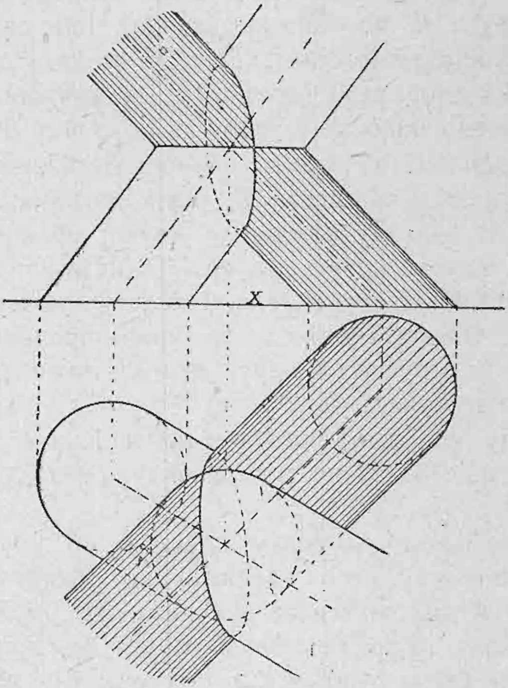
На крају поменимо да смо тачку $9_S'$ могли одредити и методом враћања натраг. Продужена права a_H' је уједно и сенка изводнице X′ 11′. Она сече у тачки $9_H'$ сенку K_H' круга K по H. Зраком l' из $9_H'$ можемо одредити и тачку 9′ на кругу и њезину сенку $9_S'$ на изводници X′ 11′.

Да видимо још каква ће бити крива бачене сенке. Да одредимо сенку круга K на унутрашњост облице треба да кроз сваку тачку круга повучемо зрак светлости. Сви ти зраци сачињаваће светлу облицу круга K. (То је коса кружна облица са базисом кругом K. Доњи базис, базис у хоризонталници био би пресек те светле облице са H дакле круг K_H, или сенка круга K по хоризонталници). Где ова светла облица пресеца задату облицу ту је сенка круга K по задатој облици. Тај пресек је крива четвртог реда (продор двеју кружних облица). Али ако на кругу K узмемо било коју тачку на пр. тачку 9′, видимо да кроз њу пролази изводница (a') задате облице. Исто тако пролази кроз тачку 9′ круга K и зрак светлости l', једна изводница светле облице. Значи да тачка 9′ припада и једној и другој облици па да је према томе једна тачка њихове криве продора. То исто важи и за било коју другу тачку круга K. Према томе круг K је један део криве продора тих двеју облица. Одатле следи да се крива продора распала у два дела; један део је круг K, а други део K_S може да буде само крива другог реда дакле елипса (или круг).

На крају, ако погледамо прву пројекцију продорне криве K и K_S'' можемо да се сетимо правила 3 из § 51. И по том правилу крива K_S'' треба да буде елипса (или круг).

Када то знамо можемо да одредимо K_S сенку круга K по унутрашњости облице не тачку по тачку него директно као елипсу. Довољно је да узмемо на кругу K два спрегнута пречника, да одредимо сенке њихових крајњих тачака, па ће те сенке бити крајње тачке двају спрегнутих пречника бачене сенке (елипсе K_S). Место да узмемо било која два спрегнута пречника круга K боље да узмемо пречник EF, јер кроз те његове крајње тачке пролази крива бачене сенке, (па њихове сенке не морамо одређивати) и пречник 1′ 3′. Сенку $1_S'$ тачке 1′ одредимо на познати начин (а ако хоћемо и имагинарну сенку $3_S'$ тачке 3). Дуж $1_S'$ $3_S'$ је једна, а $E'F'$ други спрегнути пречник елипсе бачене сенке. Тим је задатак решен само би ипак требало поред спрегнутих пречника одредити и нарочите тачке елипсе. Као нарочите тачке овде долазе у обзир контурне тачке за обе пројекције. За прву пројекцију сенка $5_S'$ тачке 5 на контурној изводници 6′, а одредимо је ако кроз 6′ повучемо имагинарну сенку контурне изводнице по равни круга K' и то до пресека 5′ са самим кругом. (Круг K је уједно и своја бачена сенка на тој равни). За другу пројекцију је сенка $9_S''$. Њу смо већ раније одредили и не помињући да је изводница X – 11 контурна изводница за другу пројекцију. Сем ових тачака, контурних за зарубљену облицу, треба да одредимо и контурне тачке за светлу облицу. Контурне изводнице светле облице у првој пројекцији јесу тангенте на K' паралелне са l'. Стварна контурна изводница је кроз тачку $7'$, имагинарна кроз тачку 8. На познат начин одредимо сенку $7_S'$ (и $8_S'$). За другу пројекцију контурне изводнице светле облице пролазе кроз најгорње тачке $13''$ и $11''$ контурних изводница задате облице. Сенке су конструисане у I пројекцији и тачке наглашене кружићима, али конструкција није извучена да не терети слику.

На крају још једна примедба. Овај задатак потпуно је исти као задатак који смо решавали у сл. 167. Задате облице у тој слици подударне су са облицама у овој слици. Постоји само разлика у начину обележавања појединих тачака. Тако је средиште базиса десне облице обележено раније словом N' а сада словом O_H'. Сада је та облица светла облица и O_H' је сенка средишта горњег базиса, заједничког круга K' са средиштем O'. Раније је права τ' била прва траса помоћне равни (паралелне са изводницама обеју облица) и секла је облицу M' по изводницама IX' и X', а облицу N' по изводницама XI' и XII'. Сада је та иста права обележена са a_H' као сенка изводнице $IX'\,9'$ (или a') по хоризонталници. Значи да је та права и овде прва траса равни (светле равни) повучене кроз изводницу a' у правцу светлости, (паралелно са изводницама једне и друге облице), дакле понова прва траса исте равни. Пређашњи круг K, као један део криве продора, сада је горњи базис задате зарубљене облице и базис (горњи базис) светле облице. Други део криве продора, елипса L, сада је обележен са K_S као сенка круга K по унутрашњости облице.



Сл. 226

У сл. 226 нацртане су још једном обе облице и њихова продорна крива баз икакве конструкције. Једино су извучене понеке изводнице светле облице да би се тако одвојила од задате облице.

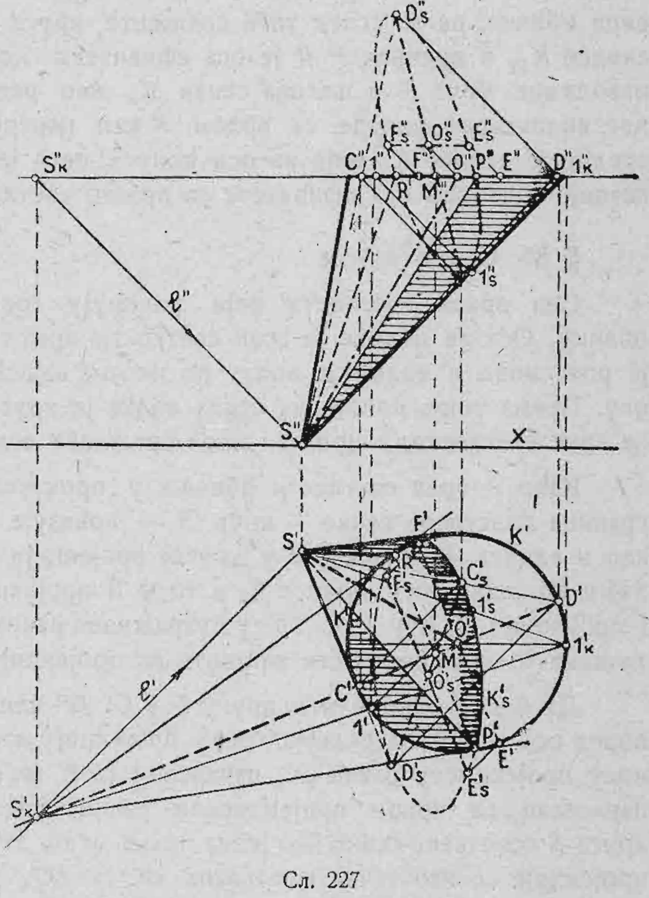
*

Сличан пример решаван је у сл. 227, само је место облице узет изврнути коси конус са кругом базиса у равни $\parallel H$.

Сопствену сенку одредимо помоћу имагинарне сенке врха на раван базиса, па су изводнице P и R тражене границе.

Бачена сенка круга K базиса на унутрашњост конуса биће и овде елипса према истом правилу као и код задњег задатка.

Да бисмо одредили сенку тачке $1'$ круга K', замислимо као и пре, да смо продужили изводницу $1'$ S' изнад базиса. Њена сенка по равни базиса мора пролазити кроз тачку $1'$ и кроз сенку S_K' врха. Та сенка сече круг K' у тачки $1_K'$, па сенка изводнице S' $1'$ по унутрашњости конуса пада по изводници $1_K'$ S'. Зраком l' из $1'$ одредимо тражену сенку $1_S'$.



Сл. 227

И овде може да се тумачи ова конструкција као метода враћања натраг. Да бисмо видели где пада сенка на осветљену изводницу $1_K'$ S', одредимо њену (имагинарну) сенку $1_K'$ S_K' на раван круга K' базиса. Круг K' је уједно и своја сенка у равни базиса. Пошто се сенка изводнице и сенка круга секу у тачки $1'$, значи да тачка $1'$ баца своју сенку на изводницу S' $1_K'$. Одредимо је помоћу l'.

Свакој тачки круга K одговара једна тачка бачене сенке, и то у правцу светлости. Према томе, те две фигуре — круг K и његова сенка, елипса K_S – јесу две афине фигуре, па ће и сенка O_S, средишта O' круга бити средиште елипсе K_S'. Хоћемо ли дакле да одредимо спрегнуте пречнике бачене сенке, узмемо два коњугована пречника круга. Узећемо пречник C' D' и E' F' који је управан на њега а паралелан са секантом P' R'. Секанта P' R' је уједно и оса афинитета. Одредимо сенку тачке C' и имагинарну сенку тачке D', па је C_S' D_S' један пречник елипсе. Сенка O_S' средишта O' на том пречнику је располовиште дужи, дужи $C_S' D_S'$ и средиште елипсе K_S'. Како је пречник $E' F'$ паралелан са осом афинитета $P' R'$, биће и његова сенка паралелна са њим. Повучемо га кроз O_S', а крајње тачке E_S' и F_S' одредимо помоћу l' као сенке тачке E' и F'.

Тиме је одређена елипса бачене сенке K_S.

Постоји разлика између сенке круга базиса на унутрашњост облице и на унутрашњост конуса.

Код обеју површина бачена је сенка афина са кругом базиса у правцу светлости. Ипак има мало разлике. Бачена сенка је раван пресек површине. Стога је код облице K_S афина са K и у правцу изводница облице, па је услед тога средиште круга K уједно и средиште елипсе K_S, а пречник $P\ R$ је оса афинитета. Код конуса, обзиром на изводнице, круг K и његова сенка K_S као раван пресек конуса, су две колинеарне фигуре са врхом S као центром колинеације. Стога средиште елипсе K_S није на оси конуса, него је секанта $P R$ оса колинеације (односно оса афинитета за правац светлости l).

§ 85. Сенка лопте

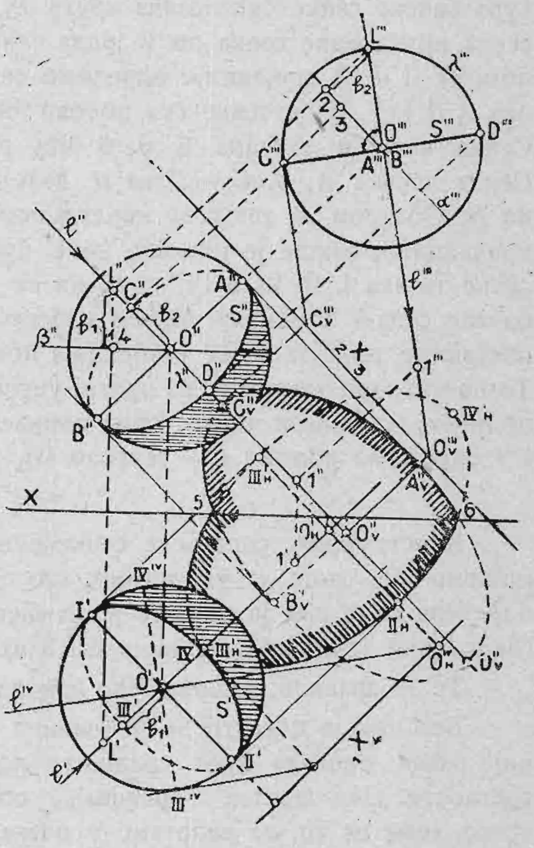
Сви зраци светлости који додирују лопту сачињавају светлу облицу. Оса те облице је зрак светлости кроз средиште лопте. Облица је ротациона, а додирује лопту по њеном највећем кругу управном на осу. Према томе, сопствена сенка лопте је круг чија раван је управна на зрак светлости, а пролази кроз средиште лопте.

Како је зрак светлости обично у произвољном положају, то се граница сопствене сенке — круг S — показује у обема пројекцијама као и елипса. И у првој и у другој пројекцији можемо лако да одредимо по једну осу елипсе S, и то у II пројекцији $(A''\ B'') \perp l''$, а у I пројекцији $(\mathrm{I}'\ \mathrm{II}'') \perp l'$. То су сутражнице равни круга S, а у крајњим тачкама је зрак светлости тангента на пројекцију лопте.

Да бисмо одредили и другу осу $C''\ D''$ елипсе S'' у II пројекцији, поред осе $A''\ B''$, одредимо трећу пројекцију лопте и зрака светлости на нову пројекциску раван ${}_2X_3$ паралелну са l'' (в. сл. 228). Како је зрак l''' паралелан са новом пројекциском равни, показиваће се цела раван круга S сопствене сенке као једна права, и то $S''' \perp l'''$. Пречник $A'''\ B'''$ пројектује се као тачка и поклапа се са O''', док се други пречник $C'''\ D'''$ показује у правој величини. Можемо одмах да га пројектујемо у II пројекцију, па нам је елипса S'' потпуно одређена. Пречник $C\ D$ је паралелан са новом пројекциском равни ${}_2X_3$, па у II пројекцији треба да је паралелан са ${}_2X_3$; стога се $C''\ D''$ поклапа са l''.

Тачке A, B, C и D могли бисмо из II и III пројекције да пренесемо у I пројекцију, па да на тај начин одредимо спрегнуте пречнике за I пројекцију границе сопствене сенке S'. Покушаћемо ипак да одредимо радије осе и за елипсу S', а да при томе не понављамо конструкцију из II пројекције.

Круг λ''' је контура III пројекције лопте, па се у II пројекцији показује као права λ'' и поклапа са l''. Зрак l''' сече тај круг и тачка L''' је најосветљенија тачка лопте, јер је једина тачка лопте у којој осветљење пада под правим углом. Повучемо ли кроз средиште лопте раван паралелну са вертикалницом, показаће се њена трећа пројекција као права $\alpha''' \parallel {}_2X_3$. Ордината $L'''\ L''$ сече α''' у тачки 2, а продужена ордината $C'''\ C''$ у тачки 3. Добили смо на тај начин у III пројекцији два правоугла троугла O''' 2 L''' и C''' 3 O'''. По томе, што су им стране наизменично управне, они су слични, а како су им хипотенузе једнаке, они су и подударни. То значи то, да је катета L''' 2 једнака катети O''' 3.



Сл. 228

Дуж L''' 2 је отстојање најсветлије тачке лопте од равни повучене кроз средиште лопте а паралелне са другом пројекциском равни. Дуж O''' 3 је једнака малој полуоси $(C''\ O'') = b_2$ вертикалне пројекције круга S, границе сопствене сенке. Према томе можемо да кажемо:

1) *Мала полуоса b елипсе S, границе сопствене сенке лопте у некој пројекцији, једнака је отстојању најсветлије тачке лопте од равни повучене кроз средиште лопте а паралелно са том пројекциском равни.*

Ако дакле у II пројекцији повучемо кроз O'' хоризонталну раван β'', дуж L'' 4 је једнака малој полуоси b_1 елипсе S'.

Конструкција сопствене сенке лопте постаје на тај начин врло једноставна. Трећу пројекцију не треба уопште цртати. Довољно је претпоставити да су се II и III пројекција преклопиле, а одредити само

l''' помоћу разлике првих ордината између једне његове тачке и O. Зрак l''' из O''' даје непосредно L''', па је $(L''' L'')$ и b_2, а $(L'' 4) \parallel b_1$.

*

На истој слици одређена је и бачена сенка лопте по V и H. Контура бачене сенке биће сенка круга S, границе сопствене сенке. Као сенка круга биће сенка по V једна елипса. Одредимо је најлакше ако помоћу II и III пројекције одредимо сенке оса $A\,B$ и $C\,D$. Пошто је оса $A\,B \parallel V$, биће сенке оса поново осе елипсе бачене сенке по V. Сенка сече у тачкама 5 и 6 осу X, па даља сенка пада по H. Сенка тачака A, B, C и D на H дале би спрегнуте пречнике сенке по H. Обзиром на тешкоће конструисања елипсе одређене спрегнутим пречницима, лакше је помоћу нове пројекциске равни ${}_1X_4$ одредити сенке тачака I, II, III и IV на H, па на тај начин одредити осе елипсе бачене сенке. Само да би се избегло непотребно цртање, нову осу поставимо тако да се IV пројекција лопте поклопи са I пројекцијом. То постигнемо тако, што на правој управној на l' из O' нанесемо другу ординату средишта лопте. Кроз добивену тачку пролази ${}_1X_4 \parallel l'$. Зрак l'''' одредимо помоћу O_H' заправо O_H'''' на оси ${}_1X_4$ и $O''''=O'$.

*

Конструкцију сопствене сенке лопте и њене бачене сенке H и V можемо још више да упростимо, ако се сетимо правила, да је елипса одређена када нам је позната једна њена оса и осим те осе још једна (било која) тачка елипсе (види сл. 84*a*).

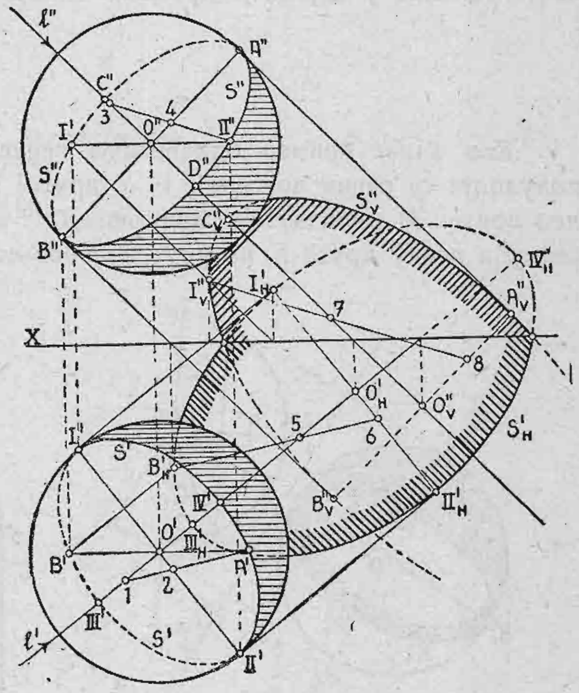
То је правило искориштено при одређивању сенке лопте у сл. 229.

Већ нам је познато да је граница сопствене сенке лопте круг S чија раван пролази кроз средиште лопте, а стоји управно на смер светлости. Цео задатак одређивања сопствене сенке лопте своди се према томе на то, да нацртамо у познатој равни пројекције тога круга S коме је средиште тачка O средиште лопте а полупречник једнак полупречнику лопте.

Зрак светлости је обично произвољна права $l'\,l''$, стога је у произвољном положају и раван круга S, која је управна на $l'\,l''$. То значи да ће се граница сопствене сенке, круг S показивати у обим пројекцијама као елипса. Једини пречник круга који ће се показивати у правој величини у првој пројекцији је пречник I′ II′, који је паралелан H дакле прва сутражница равни, па према томе управан на l'. Тај је пречник I′ II′ уједно и велика оса елипсе S'.

Исто тако је у другој пројекцији пречник $A''\,B''$ (управан на l'' и друга сутражница равни) велика оса елипсе S'', друге пројекције границе S сопствене сенке.

Да потпуно одредимо елипсу S' потребно нам је да осим велике осе I′ II′ имамо још једну тачку. Овде је то лако одредити, јер је оса $A''\ B''$ на другој сутражници равни, па јој је прва пројекција права кроз O' паралелна са X-осом. Повучемо је и одредимо на њој ординатама тачке A' и B'.



Сл. 229

Сада имамо велику осу $I'\ II'$ и још једну тачку елипсе, тачку A' или B' Малу полуосу b елипсе можемо да одредимо ако од тачке A' нанесемо до пресека 1 на малој полуоси дужину a велике полуосе. Права A' 1 пресеца велику осу елипсе у тачки 2. Сетимо ли се конструкције елипсе помоћу „*парчета хартије*“, дуж A' 2 је мала полуоса b. Нанесемо је од средишта O' елипсе, одредимо тачке $III'\ IV'$, а тиме и другу осу елипсе S', прве пројекције тражене сопствене сенке лопте.

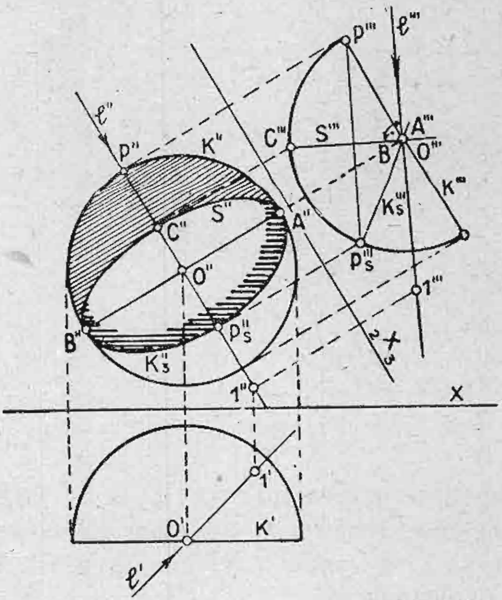
На исти начин одредимо и елипсу S''. Дуж $A''\ B''$ је велика оса елипсе, и поред ње одредимо тачке I'' и II'' које су као што знамо на првој сутражници. Нанесемо ли и овде из тачке II'' велику полуосу $a=r$ до пресека 3 са малом полуосом, дуж II'' 4 је мала полуоса елипсе за другу пројекцију S''.

Када нацртамо елипсе S' и S'' можемо на исти начин да одредимо и бачену сенку лопте по H и V. Одредимо најпре сенку S_H'. Оса $I'\ II'$ је $\parallel H$ и $\perp l'$ стога ће и њена сенка $I_H'\ II_H'$ бити оса бачена сенке и то мала оса елипсе S_H'. Осим те осе одредимо сенку још једне тачке, најлакше B_H' сенку тачке B' чије обе пројекције већ имамо. Нанесемо ли сада од B_H' до пресека 5 са великом осом дужину мале полуосе $O_H'\ II_H'=b=r$ и продужимо праву B_H' 5 до пресека 6 са малом осом, дуж B_H' 6 је велика полуоса елипсе S_H'. Нанесемо је $\perp I_H'\ II_H'$, па смо тиме одредили бачену сенку S_H' (а уједно и тачке III_H' и IV_H'). Као стварна сенка по хоризонталници важи део до тачака пресека са осом X.

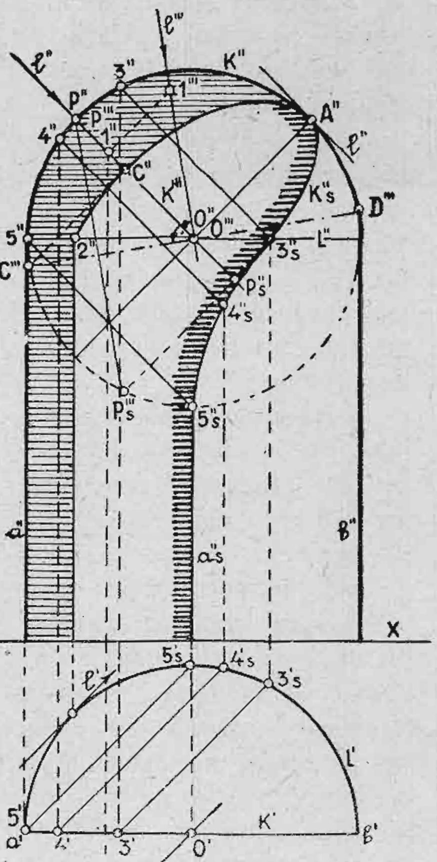
И бачену сенку по вертикалници одредимо на исти начин. Сенка $A_V''\ B_V''$ је мала полуоса бачене сенке. Одредимо и сенку I_V'' тачке I, па малом полуосом $A_V''\ O_V''=b=r$ одредимо праву I_V'' 7 и на њој тачку 8, а тиме и велику полуосу $I_V''\ 8 = a$. Нанесемо полуосу a на правој из $O_V'' \perp A_V''\ B_V''$, па нам је одређена елипса S_V'' бачене сенке на V. И S_V'' важи само до пресека са X-осом, а мора да је сече у истим тачкама у којима је пресекла елипса S_H'.

*

Као даљи пример одређивања сенке на лопту узета је шупља полулопта са равни пресека $\parallel V$. У другој пројекцији види се конкавни део лопте. За произвољно осветљење $l'\ l''$ треба да одредимо сопствену сенку и сенку круга K на унутрашњост лопте.



Сл. 230



Сл. 231

Оредимо најпре III пројекцију лопте и зрака светлости на нову пројекциску раван ${}_2X_3 \parallel l''$. Круг K показаће се као пречник K''' лопте $\parallel {}_2X_3$. Сопствену сенку S''' и S'' одредимо као раније, помоћу осе $A''\ B''$ и полуосе $C''\ O''$.

Бачена сенка круга K на унутрашњост лопте биће, према пређашњем правилу, крива II реда, дакле поново круг K_S који ће се у II пројекцији показивати као елипса. Круг K_S пролази кроз тачке A и B, па је $A''\ B''$ једна оса елипсе

K_S''. Затим одредимо сенку тачке P, па је P_S'' крајња тачка друге полуосе елипсе K_S'', јер је тачка P крајња тачка полупречника круга K, који заклапа прав угао са пречником $A\,B$.

И код ове слике нису уцртане сенке у I пројекцији.

*

На крају имамо у сл. 231 један практичан пример. Задата је полуобличаста вертикална ниша која се горе над кругом L завршава четвртином лопте. Треба да одредимо сопствену и бачену сенку нише у II пројекцији за осветљење под 45°.

Сопствена сенка облице одређена је помоћу тангенте $\| \, l'$ и повучена у II пројекцији до тачке $2''$ на кругу L''. Сопствена сенка лопте и бачена сенка круга K по лопти одређена је на исти начин као код прећашњег задатка. Једино овде није цртана као пре цела трећа пројекција. Она нам у ствари и није потребна. Ако претпоставимо да је ${}_2X_3 \, \| \, l''$ и да се III пројекција лопте поклапа са K'' и O''' са O'', довољно је да одредимо l''' (помоћу отстојања од l' до $K' \, \| \, X$). Пречник $C''' \, D''' \perp l'''$ је III пројекција границе сопствене сенке. Пренесемо C'', па је та граница одређена, али елипса важи само од A'' до $2''$. И бачену сенку K_S'' одредимо као пре, помоћу сенке тачке P'' круга K''. И та сенка K_S'' важи само од тачке A'' до пресека $3_S''$ са кругом L''. Тачка $3''$ је последња тачка која још баца своју сенку на лопту. Остале, ниже тачке круга K бацају своју сенку на облицу. Тако одредимо сенку тачке $4''$ круга K'' помоћу зрака l'' и l' из $4'$ на K' до пресека 4_S са облицом. Најнижа је тачка сенка $5_S''$ најниже тачке круга 5, па ће се из $5_S''$ наставити сенка a_S'' изводнице a.

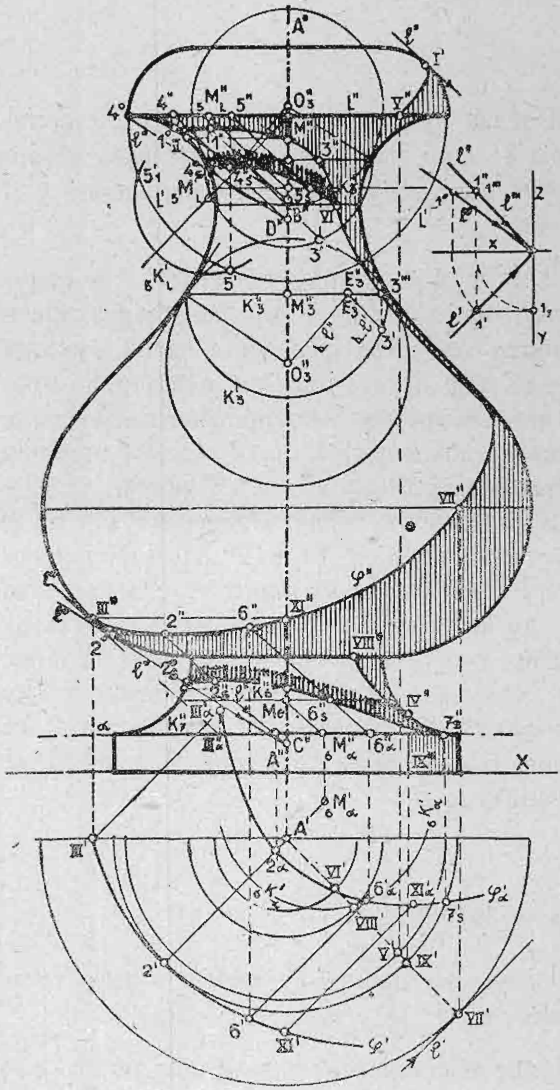
§ 86. Сенчење обртних површина

У сл. 232 задата нам је једна ротациона површина и смер светлости l' l'', па треба да одредимо сопствену и бачену сенку.

Граница сопствене сенке биће нека сложена линија, коју не можемо да одредимо на други начин, сем тачку по тачку.

Контурне тачке I, II, III и IV границе сопствене сенке одредимо када повучемо тангенте $\| \, l''$ на контурне меридијане.

На меридијану постоје тачке у којима можемо да повучемо вертикалне тангенте. Једна од њих је и тачка где највећи круг сече меридијан. То значи да можемо повући једну вертикалну облицу која додирује ротациону површину баш по том највећем кругу. У свима тачкама тога круга обе површине имаће заједничке тангенцијалне равни, дакле и оне у правцу светлости. То значи да ће на граници сопствене сенке облице бити једна тачка сопствене сенке ротационе површине и то на додирном кругу. Тако је помоћу тангенте ∥ l' одређена граница сопствене сенке облице, изводница кроз тачку VII'. У пресеку те изводнице са II пројекцијом додирног круга имамо тачку VII'', т. ј. једну тачку тражене границе сопствене сенке. На исти начин одређене су тачке V'',VI'', VII'' и VIII''. Најнижи део ротационе површине је облица, па сопствену сенку одредимо као сенку облице. Тачке V'—IX' стоје на правој кроз A' управној на l'.



Сл. 232

Даље тачке сенке можемо да одредимо на меридијану који се поклапа са II пројекцијом осе $A'' A''$. Тај се меридијан налази у равни паралелној са профилницом, а тачке сопствене сенке на њему можемо одредити најлакше помоћу l'''. Конструишемо са стране l''', трећа пројекција поменутог меридијана поклапа се са контурним меридијаном ако узмемо да је оса $A-A$ уједно и Z осовина. Тангенте ∥ l''' дају тачке X и XI које затим вратимо у II пројекцију на меридијан који се поклапа са $A''-A''$. Како у овом случају l' заклапа са X-осом угао од 45°, поклапа се l''' са l'', па су услед тога тачке II'' и X'' као и III'' и XI'' на истој висини.

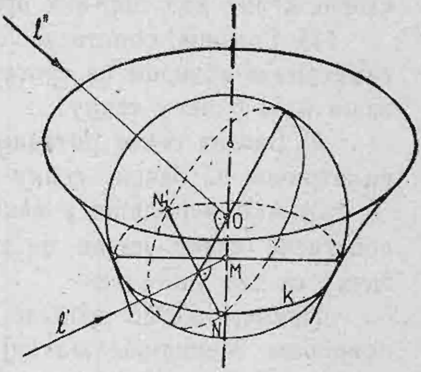
На крају још да одредимо највишу тачку 1'' и најнижу тачку 2'' границе сопствене сенке. Те две тачке налазе се на меридијану који се налази у светлој равни кроз осу. Да бисмо их одредили, окренемо и меридијан и зрак светлости око осе AA док не буду $\parallel V$. Зрак је окренут са стране помоћу тачке 1^0, а меридијан се поклапа са контурним. Тангенте $\parallel l^0$ дају тачке 1^0 и 2^0. Те тангенте секу се са осом $A''A''$ у тачкама B'' и C''. При окретању натраг тачке 1^0 и 2^0 описују хоризонталне кругове, а тачке $B''C''$ остају непомерене. Значи да ће тачке $2''$ и $3''$ бити на зрацима l'' из B'' и C'' а на хоризонталним круговима из 1^0 и 2^0.

Све тачке које смо досад одредили јесу специјалне тачке границе сопствене сенке. Оне су обично довољне да покажу смер и облик границе сопствене сенке.

*

Ако хоћемо да одредимо још коју тачку границе сопствене сенке, на неком паралелном кругу K повучемо неку другу ротациону површину која задату површину додирује по кругу K. Одредимо границу сопствене сенке те друге површине, па је у њеном пресеку са додирним кругом K једна тачка тражене сенке. Као помоћне ротационе површине долазе у обзир само конус и лопта, јер можемо лако да одредимо њихове пројекције и њихове сопствене сенке. Обично се употребљавају само лопте.

У сл. 223 нацртана је једна ротациона површина и на њој паралелни круг K. Затим је нацртана лопта, са средиштем O на оси, која ту ротациону површину додирује по кругу K. Да одредимо тачке N и N_1 границе сопствене сенке ротационе површине, конструишемо за задати зрак светлости границу S сопствене сенке лопте. Где та граница пресеца круг K, имамо две тачке N границе сопствене сенке ротационе површине. Од тих двеју тачака једна је обично невидљива, па је и не цртамо.

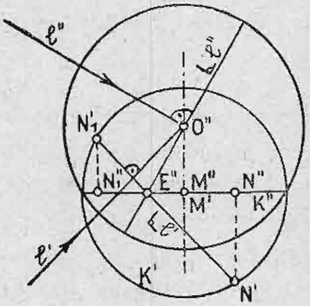


Сл. 233

Конструкција изгледа компликована када се овако описује, али је једноставна ако се одбаци све оно што није потребно.

Код ротационих површина црта се обично само II пројекција, па ћемо и лопту цртати само у II пројекцији. Поред тога знамо да је граница сопствене сенке лопте круг, чија раван стоји управно на зрак светлости, а средиште се поклапа са средиштем лопте. Један пречник тога круга је $\perp l''$ а $\parallel V$. Према томе сећи ће у тачки E'' онај пречник круга K који је паралелан са V. Како су тражене тачке N и у хоризонталној равни круга K, и у равни сопствене сенке лопте која је $\perp l'\,l''$, то ће оне бити на пресечној правој тих двеју равни. То значи да ће тачке $N'\,N_1'$ бити на обореном кругу K, или на његовој првој пројекцији K', дакле на једној правој која је управна на l' а пролази кроз тачку E. Конструкција је приказана у сл. 234 где је нацртана друга пројекција додирне лопте са средиштем O'' и додирни круг K''. Затим је тај круг оборен или му је уцртана I пројекција уз претпоставку да X-оса пролази кроз средиште M'' круга K''.

У сл. 234 узмимо хоризонтални круг K_3'' ротационе површине и одредимо на њему тачку 3'' границе сопствене сенке. Помоћу тангенте на меридијан у контурној тачки круга K'' одредимо најпре средиште O_3'' додирне лопте и опишемо другу пројекцију лопте. (Узета су заправо два круга K_3'' тако, да је O_3'' код једног изнад а код другог испод K_3''). Управном на l'' из O_3'' одредимо E_3''. Тада уцртамо I пројекцију K'_3 паралелног круга уз претпоставку да X-оса пролази кроз M_3''. Тачка E_3' поклапа се са E_3'', јер је на X-оси. Пресек равни у којој је сопствена сенка лопте са хоризонталном равни круга K биће права кроз $E_3' \perp l'$. Уцртамо је, па је у њеном пресеку са K' тражена тачка 3′ сопствене сенке. Ординатом одредимо 3'' на K''. Круг који претставља II пројекцију лопте није потребан за конструкцију, па га обично и не цртамо. Исто тако није потребно цртати ни цео круг K_3', него само онај део где је тачка 3′. На овај начин конструкција испада прилично једноставна и, што је најважније, не захтева много цртања.



Сл. 234

*

А сада да наведемо без доказивања нека правила о граници сопствене сенке код обртних површина.

1) Граница сопствене сенке било које ротационе површине је симетрична обзиром на светлу раван повучену кроз осу. Исто правило важи и за бачену сенку.

2) Бачена сенка ротационе површине на било коју раван косо је симетрична на бачену сенку осе.

3) Ако меридијан у некој тачки мења полупречник кривине, крива сопствене сенке имаће на хоризонталном кругу кроз ту тачку једну тачку са две тангенте.

Пример за ово правило имамо у сл. 231. Сама ниша је ротациона површина. Меридијан од највише тачке па до тачке 5″ има исту кривину, а од 5″ наниже нагло прелази у праву. Стога на хоризонталном кругу кроз тачку 5″ крива сопствене сенке има тачку 2″ са две тангенте. Таква је и тачка VI у сл. 232 јер меридијан мења полупречник кривине.

4) Ако меридијан у једној тачки има две тангенте, тада је граница сопствене сенке на паралелном кругу кроз ту тачку прекинута.

Као пример може да послужи паралелни круг L'' у сл. 232, а још боље пример у сл. 216.

5) Ако је граница сопствене сенке таква крива, да на њу можемо да повучемо тангенту у правцу светлости, тада та граница сопствене сенке баца сенку на исту ротациону површину. Речена тангента је тада уједно тангента и на кривој бачене сенке.

*

Као други део задатка на слици 232 треба да одредимо бачену сенку. Сенку ће да баца на горњем делу круг L'', а на доњем крива φ'' као граница сопствене сенке.

Сенку круга L'' одредимо на исти начин као код примера сл. 222 методом враћања унатраг. Једина је разлика у томе, што смо тамо имали I пројекцију нацртану одвојено, док овде прву пројекцију круга L цртамо на самој II пројекцији и то тако да се I и II пројекција средишта круга поклапају.

Хоћемо ли да нађемо сенку на неком паралелном кругу K_5, одредимо имагинарну сенку ${}_5M_L''$ и ${}_5M_L'$ његовог средишта M_5 на раван круга L. Тиме је одређена и сенка ${}_5K_L'$ самога круга на тој равни док се сенка круга L поклапа са L'. Те две сенке секу се у $5'$, што значи да тачка $5''$ круга L'' баца своју сенку на паралелни круг K_5''. Сенка друге пресечне тачке $5_1'$ пада на невидљиви део површине. Да не бисмо узалуд тражили сенке по круговима где сенке нема, потребно је да одредимо најпре највишу тачку бачене сенке. Она ће бити у светлој равни кроз осовину. Одређујемо је као и пре што смо одредили највишу тачку $1''$ сопствене сенке помоћу l^0, када светлу раван окренемо $\|$ V. Сенку баца тачка $4''$. Све остале тачке сенке су ниже од $4_S''$, па тако треба узимати и паралелне кругове.

Ова метода враћања натраг је незгодна због тога, што помоћу ње не можемо да одредимо специјалне тачке – контурну тачку и тачку на граници сопствене сенке – друкчије, сем да одређујемо и сенке тих линија на равни круга L.

Другу сенку баца граница сопствене сенке φ. И ту сенку одредимо методом враћања натраг. Одаберемо неку хоризонталну раван α, одредимо на њој I пројекцију криве која баца сенку, а затим помоћу φ' и φ'' сенку криве по тој равни. Даља конструкција је позната. На слици је уцртана конструкција сенке тачке 6 на кругу K_6. Одређена је и највиша тачка $2''$ бачене сенке. Како је овде зрак l' под 45^0 према X-оси, леви контурни меридијан је за светлу раван кроз осу симетричан са меридијаном који се поклапа са осом. Стога ће бачена сенка на оба та меридијана бити на истој висини. На тај начин одређена је контурна тачка. Ово исто важи и за горњу сенку.

Сенка φ_a' пада на круг K_7' у тачки $7_s'$, па је то већ тачка сенке.

*

Поред наведене методе постоји и ова. Ротациону површину пресечемо једним системом равни у правцу светлости а управних на H и одредимо II пројекције тих пресека. Тангенте паралелне са l'' повучене на те криве пресека дају тачке границе сопствене сенке, а поновни пресек тих тангената са доњим делом истих кривих даје тачке бачене сенке.

Ова метода је приступачнија почетнику, али није довољно тачна и захтева много конструкције. Употребљава се код површина које су задате графички—једним системом линија,—као и код одређивања сенке на терену у котираној пројекцији.

§ 87. Одређивање изофота

а) О јачини осветљења уопште

Код свих досадашњих примера говорили смо само о томе, да ли је неки део површине тела осветљен или је у сопственој сенци. Па ипак нити су сви осветљени делови једнако осветљени нити сви делови у сенци једнако неосветљени. Природно је да су јаче осветљени они делови површине на које зраци светлости падају под већим углом. Познато је правило из оптике да је јачина (интензитет) осветљења неке равни $i = \cos \alpha$, где је α угао између зрака светлости и праве управне на раван.

Колико ће део те светлости рефлектовати површина предмета зависи од материјала од кога је предмет израђен и од тога како је обрађена његова површина. Јер површина може да буде потпуно углачана (предмети од племенитих метала), полууглачана и неуглачана (површина камена, модели од гипса). Поред ових постоје још и провидне површине (код предмета од стакла). Углачане површине рефлектују највише светлости. Оне рефлектују на посматрача и извор светлости, па се та тачка показује на површини као нарочито осветљена. Положај те тачке не зависи само од положаја површине према извору светлости него и од положаја тачке из које се површина посматра. Стога такве површине не можемо овде узети у обзир као ни провидне површине. Неуглачане површине рефлектују само мален део светлости која на њих пада, али је рефлектују подједнако на све стране. Услед тога јачина осветљења појединих делова таквих површина зависи само од њиховог положаја према извору светлости и не мења се ако површину посматрамо са разних положаја. Овде ћемо се задржати само код таквих површина, а и код полууглачаних, јер и оне имају скоро исте особине као и неуглачане.

б) Изофоте (линије једнаког осветљења)

Видели смо да јачина осветљења неке равни зависи само од угла под којим падају зраци светлости на ту раван. Код сваке тачке обле површине јачина осветљења једнака је јачини осветљења $i = \cos \alpha$ коју има тангенцијална раван обле површине у тој тачки. Ако померимо тангенцијалну раван по облој површини тако, да угао α остане исти, добићемо на облој површини једну нову тачку која има исту јачину осветљења као пређашња. Померамо ли и даље раван на исти начин, добићемо читав низ тачака на облој површини које имају све једнаку јачину осветљења. Линију коју можемо повући кроз те тачке називамо линијом једнаког осветљења или грчким именом *„изофота“*. Јасно је да таквих изофота има бесконачно много на облој површини. Такође је јасно да се две изофоте не могу сећи у некој тачки површине сем ако је та тачка нека специјална тачка површине, али у том случају кроз ту тачку пролази бесконачно много изофота (врх конуса).

в) *Изофоте лопте*

Да видимо како ћемо одредити изофоте код лопте. Познато је да све управне повучене на тангенцијалне равни лопте пролазе кроз средиште лопте. Стога ће све тангенцијалне равни на лопту, чије управне заклапају исти угао α са зраком светлости, сачињавати конус коме је оса зрак светлости повучене кроз средиште лопте. Према томе изофоте лопте су кругови чије су равни управне на зрак светлости, а чија су средишта на зраку повученом кроз средиште лопте. Лако се може увидети да ће тачке неке изофоте бити у толико јаче осветљене у колико је веће остојање равни те изофоте од средишта лопте. За најудаљенију тачку биће $\alpha = O^0$, па је $\cos\alpha = 1$. Услед тога је $i = 1$, а сама тачка најјаче осветљена тачка лопте. То је она тачка у коју удара зрак светлости који пролази кроз средиште лопте, а која нам је позната од раније. Најслабије осветљене тачке биће на изофоти чија раван пролази кроз средиште лопте. За тангенцијалне равни у тим тачкама је $\alpha = 90^0$, па је $\cos\alpha = O$, а услед тога $i = O$. То значи да су те тачке без осветљења, дакле граница сопствене сенке, а и то нам је познато од пре. Како на лопти има бесконачно много изофота, разумљиво је да их нећемо моћи све цртати, нити их нагласити све на цртежу разним тоновима боје. Стога се осветљени део лопте подели обично на паран број делова (4 до 12), па се те изофоте цртају, а делови лопте између две суседне изофоте сматрају као једнако осветљени.

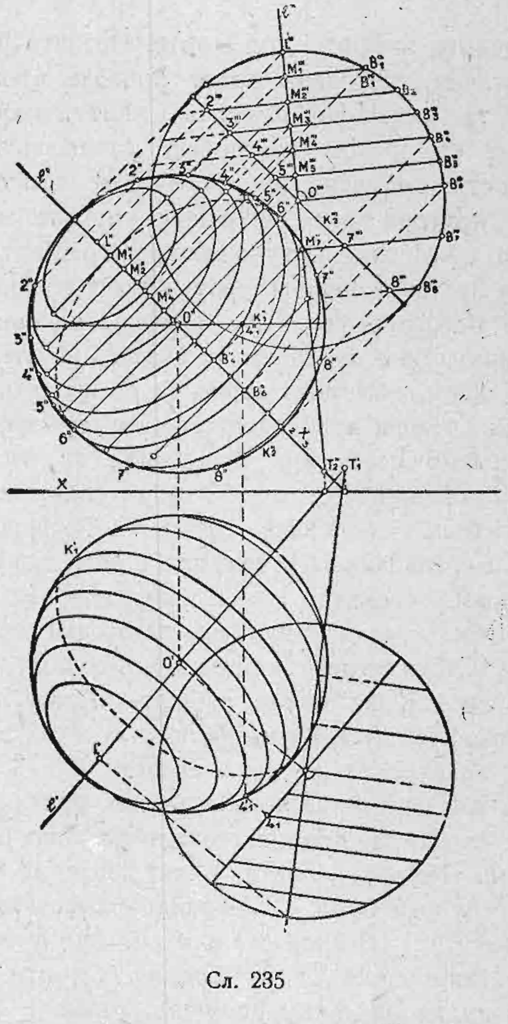
Када би нам била задата нека лопта и зрак светлости $l \parallel V$, у другој би се пројекцији граница сопствене сенке показивала као пречник круга видљиве контуре управан на l''. Најсветлија тачка лопте била би на пресеку l'' са контуром лопте. Таква је лопта у сл. 236*c* где је зрак l' l'' произвољан али је окренут да буде $\parallel V$. Граница сопствене сенке показује се као пречник $(6^0\ 6^0) \perp l^0$ кроз O'' или O^0. Ако у тој слици поделимо растојање најсветлије тачке L^0 од средишта лопте у шест једнаких делова и кроз сваку деону тачку повучемо раван $\perp l^0$, добићемо у тим равнима пет нових изофота лопте које се показују као тетиве $(1^0\ 1^0)$ до $(5^0\ 5^0) \perp l^0$.

Како на део лопте који је у сопственој сенци падају зраци који се рефлектују са осталих површина, поделимо и тај део лопте у једнак број делова као и осветљени, али обележимо сваки други део.

На тај начин добијамо још две изофоте $(7^0\ 7^0)$ и $(8^0\ 8^0)$. Обично сматрамо да је површина лопте између изофота 6 и 7 без осветљења, дакле најтамнија, површина између изофота 7 и 8 да је осветљена једнако као и површина између изофота 5 и 6, и на крају остали део лопте да је осветљен као онај део између изофота 5 и 4.

*

Ако је зрак светлости произвољан изофоте лопте показаће се у пројекцији као сличне елипсе. Њихова конструкција показана је у сл. 235.



Сл. 235

Као раније, када смо тражили границу сопствене сенке, повучемо нову пројекциску раван $_2X_3 \parallel l''$. Ради уштеде у простору повучемо је $_2X_3$ кроз зрак l'' који пролази кроз O''. У III пројекцији граница сопствене сенке показује се као права кроз O''', а $\perp$ l'''. Ако дуж од L''' до O''' поделимо у шест једнаких делова и повучемо кроз деоне тачке праве $\perp$ l''' одредићемо III пројекције изофота лопте од 1 до 6. Средишта су им тачке $M_1''' - M_5'''$ и O''' на l''' а полупречници дужи $(M_1'''\ B_1''') - (M_5'''\ B_5''')$ и $(O'''\ B_6''')$. На исти начин одредимо изофоте 7 и 8.

Изофоте ће се у II пројекцији показивати као сличне елипсе, а одредимо их као што смо раније одређивали границу сопствене сенке (в. сл. 209). Тако ће за изофоту 4 средиште M_4'' бити на l''. Једна оса елипсе је $\parallel$ V, па се показује као права $\perp$ l'' и то у правој величини и можемо да је пренесемо директно из III пројекције (дуж $M_4'''\ B_4'''$). Друга оса елипсе поклапаће се у пројекцији са l'', а крајњу јој тачку B_4'' одредимо директно ординатом из B_4'''. Све остале изофоте одредићемо на исти начин.

Како су изофоте кругови дакле равни пресеци лопте, важно је да знамо где ти кругови (у пројекцији елипсе) додирују видљиву контуру лопте. Видљива контура лопте је круг K_2'' који се у III пројекцији показује као права K_2''' кроз O''', а $\parallel$ l'' или ${}_2X_3$. У III пројекцији одмах видимо да равни изофота секу тај круг у тачкама $2'''-8'''$, па те тачке пројектујемо ординатама на K_2''. Тако одређене тачке $2''-8''$ су контурне тачке истоимених изофота у II пројекцији. (Природно је да у II пројекцији постоје по две тачке $2''-8''$. Ординате су повучене само до ближих тачака да не би теретиле цртеж). Крајње тачке великих осовина за све изофоте налазе се на елипси којој је O'' средиште, а крајње тачке оса, тачке $6''$ и L''. Све ниже (фокуси) леже на једном кругу око O''.

Да одредимо I пројекцију изофота најбоље је да поновимо поново исту конструкцију. У том случају узмемо да се ${}_1X_3$ поклапа са зраком l' повученим кроз O'. На слици је конструкција нацртана без обележавања и без ордината. Једино је обележена контурна тачка $4_1'$ на кругу K_1'. Тачка $4_1''$ треба да је на II пројекцији K_1'' (контурног круга за I пројекцију) и на II пројекцији изофоте 4, дакле на њиховом пресеку.

Да је место произвољног зрака светлости задато осветљење под 45°, I и II пројекције изофота биле би подударне.

Ако треба да обојимо пројекције лопте, поступићемо овако. У мало воде ставимо четкицом једну кап туша (јако концентрисаног правог кинеског туша) и пређемо тиме целу лопту сем дела у изофоти 1. Када се потпуно осуши додамо раствору још једну кап туша, па превучемо све остало сем дела у изофоти 2. Поновимо тако још двапут до изофоте 3 и 4. Пети пут пређемо само део лопте између изофота 5 и 8, а шести пут само између изофота 6 и 7. Када се потпуно осуши превучемо целу пројекцију лопте једним тоном било које боје.

г) *Конструкција изофота на ротационим површинама*

Треба ли да одредимо изофоте на некој ротационој површини поступићемо на исти начин као када смо одређивали поједине тачке сопствене сенке. Уписаћемо у ротационој површини лопту која ту површину додирује по једном кругу. Затим ћемо конструисати изофоте лопте. Где те изофоте пресецају додирни круг имаћемо тачке на ротационој површини са одређеном јачином осветљења. Поновићемо затим исту конструкцију за нови суседни круг и добити на њему нове тачке. Радећи тако добићемо на површини цео један систем тачака и када спојимо истоимене тачке добићемо тражене изофоте површине.

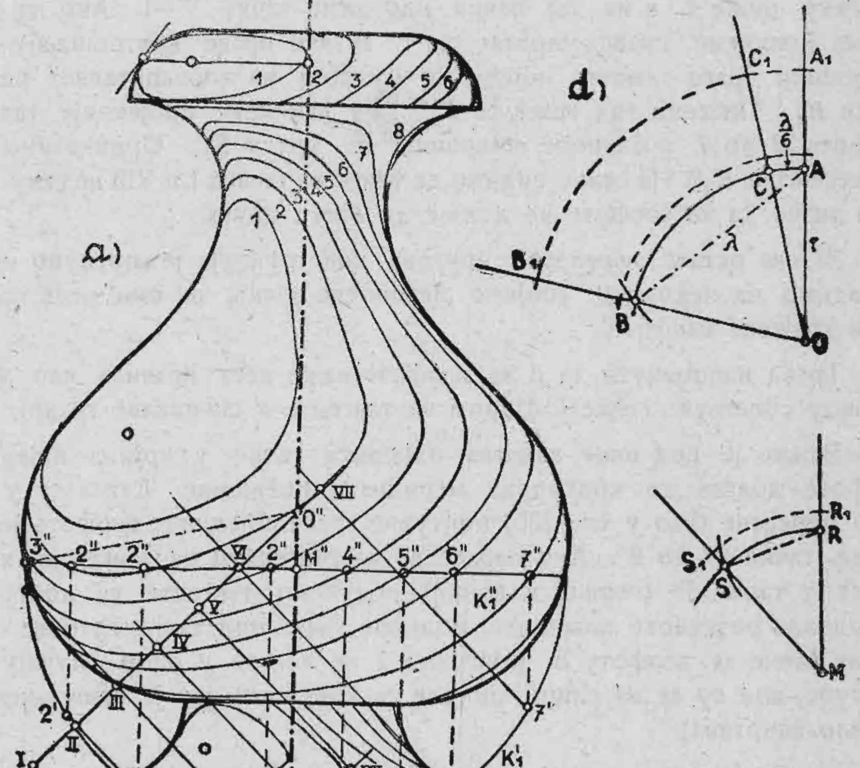
Било би јако незгодно када бисмо морали за сваку лопту конструисати све изофоте у толико пре што нам оне нису ни потребне него само по две тачке у равни додирног круга. (Заправо само она једна која је видљива). Као што смо пре одредили директно само оне две тачке границе сопствене сенке које су на додирном кругу, можемо сада и овде, на основу истог принципа, одредити пресечне тачке појединих изофота.

Изофоте лопте налазе се у паралелним равнима управним на смер светлости. Ако те равни пресечемо једном хоризонталном равни пресеци ће бити паралелне праве управне на l'. Како су равни подједнако удаљене између себе, биће и пресечне праве на подједнаким растојањима. Та се међусобна растојања пресечних правих неће мењати ако хоризонталну раван узмемо ближе или даље од средишта лопте. Исто тако неће се мењати ни дуж λ. Овде ћемо са λ обележавати растојање пресечних правих (или краће „траса“) по којима раван изофоте 6 (границе сопствене сенке) и раван паралелна са њом а повучена кроз најсветлију тачку лопте секу речену хоризонталну раван.

У сл. 236*b* одређено је то отстојање. Оборен је зрак светлости у хоризонталну раван кроз средиште лопте (помоћу тачке 1^0). Затим је одређен и његов продор кроз лопту L^0 (јер се у обореном положају поклапа са K_1' онај круг који се налази у равни $\perp$ H повученој кроз l' и O'). Ако сада из L^0 повучемо управну на l^0 у њезином пресеку са l' имаћемо тачку τ^0. Права $[L^0\,\tau^0]$ претставља у обореном положају раван повучену кроз најосветљенију тачку лопте а паралелну са равнима изофота. У обореном положају претставља права која се поклапа са l' хоризонталну раван кроз средиште лопте. Према томе је дуж $(O'\,\tau^0)$ тражена дуж λ. (У слици 236*b* и *c* узето је средиште лопте O на X-оси, па се I и II пројекција лопте поклапају. Сем тога узето је у целој слици осветљење под 45⁰).

Код неког сталног осветљења l' l'' дуж λ мења се само ако се промени полупречник лопте, али се и тада мења пропорционално том полупречнику. Стога можемо негде са стране конструисати „угао смањивања“. Повучемо неку праву и око њене тачке O опишемо круг (сл. 236*d*) са полупречником r лопте из сл. *b*). Затим из тачке A праве засечемо на том кругу дуж λ и тако одредимо тачку B. Дуж $\lambda = (O'\,\tau^0)$ из сл. *b*). Како ће нам за конструкцију требати шестина дужи λ, засечемо из A и ту дуж, па је (AC) шестина дужи λ. За било коју другу лопту са полупречником $r_1 = (O\,A_1)$ биће $(A_1\,B_1) = \lambda_1$, а $(A_1\,C_1) =$ = шестину λ_1.

Сада имамо све потребне елементе и можемо да пређемо на примере. У сл. 236*a* узета је иста ротациона површина из сл. 232 па треба да за осветљење под 45⁰ одредимо на њој изофоте. Узмемо на површини било који паралелни круг K_1''. Кроз контурну тачку тога круга повучемо тангенту на контурни меридиан површине. Управна на ту тангенту повучена из контурне тачке K_1'' одређује на оси ротационе површине тачку O'', средиште лопте која додирује површину по кругу K_1''. Повучемо ли из O'' праву $\perp$ l'' до пресека VI са K_1'', а одатле праву $\perp$ l' имаћемо у њеном пресеку са K_1' (првом пројекцијом круга K_1) тачку $6'$ и на ординати $6''$ границе сопствене сенке. Ово нам је до сада познато из раније. Права из VI $\perp$ l' претставља пресек равни изофоте 6 са хоризонталном равни круга K_1. Равни осталих изофота пресецаће раван хоризонталног круга K_1 по правим $\perp$ l' на размацима једнаким шестини λ_1. Стога конструишемо те дужи



Сл. 236 *a*, *b*, *c*, *d*, и *e*

у сл. 236*d*). Дуж $(O\,A_1)$ је полупречник уписане лопте, $(A_1 B_1)$ је дуж λ, а $(A_1 C_1)$ је шестина дужи λ. Нанесемо на правој $\perp l''$ из VI шест пута шестину дужи λ и на тај начин одредимо тачке V—I. Ако из тих тачака повучемо праве управне на l' те нам праве претстављају у I пројекцији трасе равнина појединих изофота на хоризонталној равни круга K_1. Пресеци тих траса са K_1' дају нам прве пројекције тачака изофота 2 до 7 ротационе површине на кругу K_1. Ординатима их пренесемо на K_1''. Из слике видимо да трасе из тачака I и VIII не секу K_1', а то значи да те изофоте не долазе до овога круга.

За све остале паралелне кругове конструкција је потпуно иста. Израдимо их неколико, спојимо истоимене тачке, па смо тиме одредили тражене изофоте.

Треба напоменути да и за изофоте важе иста правила као и за границу сопствене сенке (обзиром на тангенте и специалне тачке).

Важно је код овог задатка одредити тачке у којима поједине изофоте долазе до контурних меридиана површине. Стога су у сл. 236*b* одређене (као у сл. 235) контурне тачке појединих изофота једне лопте, тачке 2″ до 8″. Ако паралелно са тангентом на контурни круг лопте у тачки 5″ (горњој и доњој) повучемо тангенте на контурне меридиане ротационе површине, додирне тачке тих тангенти биће контурне тачке за изофоту 5. (Изофоте 1 не долазе у овом случају до контуре, али су се на слици спојиле са контуром, јер је сама контура дебело нацртана).

Такође је важно одредити тачно где се налазе највише и најниже тачке појединих изофота, јер методом помоћу уписаних лопти те тачке не можемо да одредимо. Ако их случајно и нађемо нису довољно тачне. У сл. 236*c* уцртане су понова пројекције исте лопте (O' и O'' на X) и зрак светлости $l'\ l''$ који пролази кроз O. Кроз зрак светлости повучемо раван $\perp H$ па ту раван окренемо паралелно са V скупа са зраком l и кругом K, по коме та раван сече лопту. Добијамо у II пројекцији l^0 и K^0. (Требало би писати l_0'' и K_0''). У њиховом пресеку је најосветљенија тачка L^0 лопте. Ако дуж $L_0\,O''$ поделимо у шест једнаких делова и из деоних тачака повучемо управне на l^0, биће дужи $(1^0\,1^0)$—$(8^0\,8^0)$ окренуте друге пројекције изофота лопте а саме тачке 1^0—8^0 окренуте најгорње или најдоње тачке истоимених изофота. Вратимо ли раван натраг, све ће се те тачке окретати по круговима који се у II пројекцији показују као хоризонталне праве а средишта су им M'' на вертикалној оси кроз средиште лопте. У слици је показана конструкција за најосветљенију тачку L. Све остале тачке, на пр. тачке 2, окретаће се по круговима, па ће смањење отстојања $(2^0\,M_2''):(2''\,M_2'')$ бити исто као $(L^0\,M''):(L''\,M'')$. Стога конструишемо угао скраћења и за та отстојања. У сл. 218*e*) је $(M\,R)=(L^0\,M'')$ а $(R\,S)=(M''\,L'')$.

Хоћемо ли да на најгорњем делу ротационе површине одредимо најсветлију тачку, повучемо на меридиан тангенту паралелну са тангентом на круг K^0 у тачки L^0. Додирна тачка даје контурну тачку круга по коме се окреће тачка L. Саму тачку L'' одредимо помоћу угла скраћења. Дуж $(M R_1)$ је полупречник круга по коме се L окреће, а $(R_1 S_1)$ је отстојање тачке L'' од осовине. Тачка L'' обележена је на слици само маленим кружићем, а исто тако L^0 и M_1''. Потпуно на исти начин можемо да одредимо све остале најсветлије тачке површине (има их три), а такође највише и најниже тачке појединих изофота.

*

Ако је меридиан ротационе површине једна права ротациона облица или конус тада су изофоте такође праве. Оне су заправо на изводницама те површине. Конструишемо их понова помоћу уписане лопте. Тако су на слици конструисане изофоте облице која је најдоњи део задате ротационе површине. Конструкција је потпуно иста као раније и на слици је уцртана. Једина је разлика што је средиште паралелног круга уједно и средиште уписане лопте, па кроз то средиште пролази и прва пројекција трасе VI. Конструкција је нацртана у слици.

*

Треба напоменути да код произвољне ротационе површине обично имамо по неку тачку у којој зрак светлости пада на површину под правим углом. Те тачке називамо *„айсолуйно најосвейљеније йачке“* површине. Код облице, најдоњег дела површине, нема апсолутно најсветлије тачке. Најсветлији део те облице је онај између изофота 2''. За тај део, заправо за тачке у том делу кажемо да су *„релайивно најосвейљеније йачке“* облице.

Ово исто важи за све конусе и облице.

*

Ако поред ротационе површине постоји нека раван па треба да одредимо јачину осветљења на њој, повучемо паралелно са том равни тангенцијалну раван на површину. Раван има исти степен осветљења као и додирна тачка на површини. Треба при томе да пазимо с које стране видимо раван. Ако место ротационе површине имамо лопту лакше је конструисати управну на раван и одредити на њој дужину r лопте. Повучемо ли исту дуж из средишта лопте друга крајња тачка је на површини лопте и одређује степен (јачину) осветљења.

*

Треба напоменути да је бачена сенка увек тамнија од сопствене сенке. Поред тога она је у толико тамнија у колико пада на јаче осветљени део површине.

Према томе када бисмо хтели да потпуно завршимо задатак у (сл. 236*a*) требало би још да одредимо бачену сенку. (Као у сл. 232). Затим бисмо прешли на бојење.

Сопствену сенку прешли бисмо онолико пута како је речено код лопте, али бисмо при томе прелазили сваки пут и бачену сенку. Иза тога би прешли на бојење бачене сенке. Додајући сваки пут туша као раније прешли би најпре сву бачену сенку до изофоте 6. Затим поново сву бачену сенку до изофоте 5, док би на крају (дванаести пут) превукли само бачену сенку унутра изофоте 1.

V. КОТИРАНА ПРОЈЕКЦИЈА

§ 88. Увод и пројекција тачке

Из увода знамо да једна пројекција не одређује потпуно тачку у простору. Остаје неодређено њено отстојање од пројекциске равни. Додамо ли пројекцији ту удаљеност тачке, тј. њезину висину, тзв. *„коту“*, тада је тачка потпуно одређена.

По томе што се пројекцијама појединих тачака дописују коте, ова се пројекција зове *„котирана пројекција“*.

Код претстављања терена за техничке сврхе употребљава се скоро искључиво котирана пројекција. Ради тога је она потребна сваком техничару.

Коте које дописујемо пројекцијама појединих тачака односе се или на пројекциску раван, или обично на неку другу раван коју замишљамо паралелном са пројекциском.

Све тачке које имају исту коту припадају једној хоризонталној равни, коју називамо *„висинска раван“*. Ако је кота неке висинске равни цео број, такву раван називамо *„главна висинска раван“*.

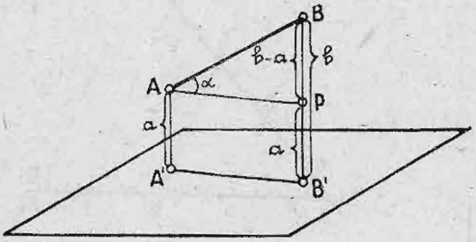
Висине тачака задате су нам котама, бројевима, а не цртежом Па и пројекција сама, ако претставља неки терен, није никада у правој величини, него смањена. Према томе треба да знамо размеру у којој је цртано, или однос у коме је све смањено.

Размера може да буде произвољна. Обично је задата једним разломком (1 : 100, 1 : 200, 1 : 1000) или графички, где било која дуж претставља јединицу дужине. Код техничних радова (код профила река, железница и сл). појављују се понекад на истом цртежу и по две размере, и то једна за пројекцију, а друга за висине.

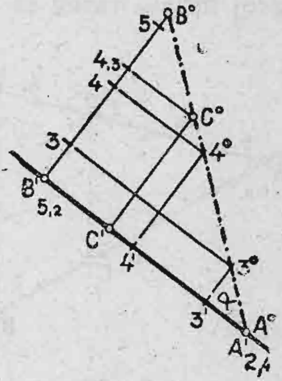
§ 89. Пројекција праве

Када су нам задате две тачке, одређена је и права која кроз њих пролази. Значи можемо да одредимо праву величину дужи и угао који она заклапа са *H*. Сем тога можемо да одредимо коту било које тачке те праве.

Праву величину дужи одређујемо обарањем. Само у котираној пројекцији никада не обарамо у пројекциску раван цео трапез између дужи и њене пројекције (в. сл. 237). То би захтевало велик цртеж нарочито када су коте велике. Стога радије обарамо само троугао $A\,B\,P$, троугао правих величина, у висинску раван доње тачке. Тако је у сл. 238 оборена дуж $A'B'$ у висинску раван 2,4 (цртано је у размери 1 : 100). Тачка B^0 налази се на управној из B', а на отстојању $5{,}2-2{,}4=2{,}8$. Дуж $A^0\,B^0$ је права величина задате дужи, а угао α је угао који она заклапа са H. Да би одредили коту неке тачке C' на дужи $A'B'$, одредимо њен оборени положај C^0. Дуж $C'\,C^0$ је висинска разлика тачака A и C. Измеримо ту дуж и видимо да је кота тачке $C=2{,}4+1{,}9=4{,}3$.



Сл. 237

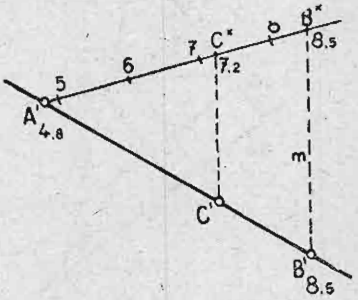


Сл. 238

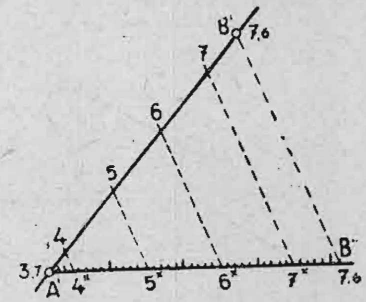
На истој дужи можемо да нанесемо тачке са заданом котом, на пр. тачке са котом 3 и 4. Најлакше је да нанесемо тачке са траженим котама на ординати тачке B^0. Ако из тих тачака 3 и 4 повучемо хоризонталне праве ($\| A'B'$), добићемо на $[A^0\,B^0]$ тачке 3^0 и 4^0, а тиме и тражене тачке $3'$ и $4'$. Повучене хоризонталне праве $[3^0\,3]$ и $[4^0\,4]$ претстављају пресеке троугла $A\,B\,P$ са главним висинским равнима 3 и 4.

Ова конструкција уколико се тиче одређивања кота појединих тачака дужи је неподесна, јер захтева много линија. Може да се поједноставни. Из сл. 238 лако се види да је $A'B' : A'C' = B'B^0 : C'C^0$. То значи да су растојања тачака A', B' и C' у истом односу као и њихове висинске разлике. Одатле нам нова лакша конструкција за одређивање коте неке тачке на правој.

Ако у сл. 239 треба да одредимо коту тачке C' на правој $A'(4{,}8)$ $B'(8{,}5)$, повучемо из ниже тачке A' било коју помоћну праву. Нанесемо затим по тој правој од тачке A' висинску разлику тачака A и $B=8{,}5-4{,}8=3{,}7$ и то у било којој размери, а најбоље у размери $1=10$ mm. Добијену тачку $B^{\times}$ спојимо са B' и паралелно са њом повучемо праву из C' до пресека са $A'B^{\times}$. Како су висинске разлике пропорционалне отстојању од тачке A, биће дуж $A'C^x$ висинска разлика тачака A и C. И то одмеравање можемо да поједноставнимо. На дуж помоћне праве положимо размерник тако да се тачка 4,8 на размернику поклапа са A'. Тачка B^x пада на поделу размерника 8,5. Одмах видимо да се C^x поклапа са тачком 7,2 на размернику, а то значи да је 7,2 кота тачке C. На тај начин можемо најлакше да одредимо на задатој правој тачке са пуним котама.



Сл. 239



Сл. 240

Тај задатак решен је у сл. 240, где је на помоћној правој нацртана милиметарска подела.

Одређивање тачака са пуном котом на некој правој називамо *„градуирање праве"*.

§ 90. Интервал и пад праве

Главне висинске равни су на подједнаким растојањима. Стога ће на подједнаким растојањима бити и тачке са пуним котама 4, 5 и 6 неке праве, а према томе и њихове пројекције. Та растојања пројекција називамо *„интервал"* и обележавамо их словом i. Према томе: *Интервал једне праве је растојање пројекција двеју њезиних тачака са висинском разликом један.*

Тако је у сл. 240 интервал праве $A'B'$ дуж (4–5) или (5–6) или (6–7), а у сл. 238 дуж (3'–4').

Лако је увидети, нарочито из сл. 238, да је интервал утолико већи, уколико је мањи угао α који заклапа праве са пројекциском равни. Тако је за $\alpha = 90^0$ $i = 0$, за $\alpha = 45^0$ $i = 1$, а за $\alpha = 0^0$ $i = \infty$.

Однос између висинске разлике Δz или краће z двеју тачака неке праве и растојања њихових пројекција називамо *„пад"* праве и бележимо са p. Тај однос је у ствари тангенс угла α, који та права заклапа са пројекциском равни. Према томе је $p = tg\,\alpha = \frac{z}{l'}$. Узмемо ли у разматрање две тачке на правој, чија је висинска разлика један, тада је $z = 1$ а $l' = i$, па ће образац гласити $p = \frac{1}{i}$, а то значи да су пад и интервал реципрочне вредности.

Пад неке праве изражавамо обично разломком 1 : 1, 2 : 3, 1 : 2, или у процентима 5%, 8%, 10%. Како се у пројекцији појављује само интервал, а пад не види, имамо две врсте задатака. Први је задатак: задата је произвољна права $A' B'$, па треба одредити њезин пад. Најпре градуирамо праву и измеримо колико је милиметара дуг њезин интервал. Тада према размери у којој је цртана права израчунамо колико јединица износи та дужина интервала. Сам пад је реципрочна вредност интервала. Узмимо један пример: Претпоставимо да је права цртана у размери 1 : 500 (2 mm = 1 m), а да је дужина интервала 16 mm. Према томе је $i = 8$ m, а пад $p = \frac{1}{i} = 1 : 8$, или $p = \frac{1}{i} = \frac{1}{8} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$.

Други задатак је овај: задата је пројекција неке праве и кота једне њезине тачке A; потребно је градуирати праву уз претпоставку да је пад *а*) 1 : 25, *б*) 5%. Размера 1 : 200 (5 mm = 1 m). Овде треба да израчунамо колики је интервал. *а*) $p = 1 : 25 = \frac{1}{25} = \frac{1}{i}$. Одатле $i = 25$ m а то у размери 1 : 200 износи 25 × 5 mm = 12,5 cm. *б*) $p = 5\% = \frac{5}{100} = $ $= \frac{1}{20} = \frac{1}{i}$, па је $i = 20$ m, или за слику 20 × 5 mm = 10 cm.

Смер пада означава се стрелицом од више тачке ка нижој.

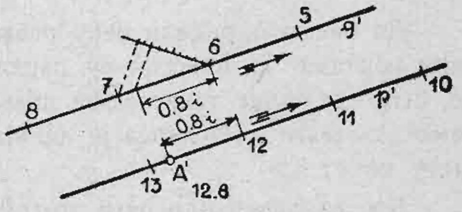
§ 91. Паралелне праве

Ако су две праве паралелне, треба да су паралелне и њихове пројекције. Поред тога, пошто имају исти пад, треба да су им једнаки интервали, а и смер пада да је исти. Према томе:

Две праве су паралелне, ако паралелним померањем могу да се преклопе.

За вежбу, повуцимо кроз тачку A са котом 12,8 праву p паралелну са задатом правом g (сл. 241).

Кроз A' повучемо $p' \parallel g'$. Интервал за p' је исти као и за g', само треба да одредимо дуж 0,8 i да бисмо на правој p' дошли од A' до тачке са котом 12. Стога на правој g' одредимо на познати начин било коју тачку са котом 0,8, на пр. 6,8.

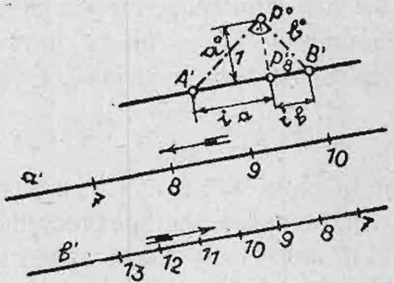


Сл. 241

§ 92. Управне праве са паралелним пројекцијама

Нека нам је у сл. 242 задана градирана права a' и поред ње друга права $b' \parallel a'$ са једном тачком на коти 11. Треба да одредимо интервал праве b' уз претпоставку да праве a и b заклапају између себе прав угао.

Узмемо са стране неку тачку са било којом котом, на пр. $P'(8)$. Кроз ту тачку повучемо праву $\parallel a'$ и нанесемо интервал 7—8. Тиме добијемо тачку A' са котом 7. Оборимо ли сада тачку P у висинску раван 7 ($P'P^0=1$), права $A'P^0$ је оборена права a. Оборена права b, или било која права са њом паралелна, стајаће управно на a^0. Повучемо b^0 кроз P^0 и тиме одредимо тачку B' на помоћној правој.



Сл. 242

Дуж $A'P'$ је i_a интервал праве a, дуж $P'B'$ је i_b, интервал праве b'. Ако нанесемо тај интервал с обе стране тачке 11, самим тим смо градуирали праву b'. Смер пада праве b' је супротан смеру праве a'.

Троугао $A'P^0B'$ је правоугли троугао, па су дужи $(A'P') \times (B'P') = (P'P^0)^2$ или $i_a \times i_b = 1$. То значи да су i_a и i_b реципрочне вредности. На основу тога можемо рећи, да две праве са паралелним пројекцијама стоје под правим углом, ако су им падови супротног смера, а интервали реципрочни.

§ 93. Пресек двеју правих

Две праве се секу ако имају једну заједничку тачку. Ако пројекције двеју задатих правих a' и b' имају једну заједничку тачку P', довољно је да видимо да ли P као тачка праве a и као тачка праве b има исту коту. Ако је кота иста, праве се секу, а ако није иста, праве се укрштају.

Касније, када будемо говорили о равни, видећемо много лакши начин како да одредимо да ли се две праве секу (в. § 96).

§ 94. Раван, изохипсе равни

Да бисмо одредили неку раван, гледамо њене пресеке са висинским равнима. Ти пресеци су паралелне праве, а главна им је одлика то, што све тачке такве једне праве имају исту висину. Стога их зовемо „*изохипсе*". Изохипса је линија, чије све тачке имају исту висину (исту коту).

Две изохипсе одређују потпуно раван. Обично се цртају изохипсе са пуним котама.

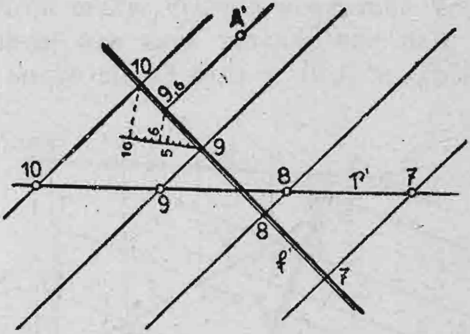
§ 95. Права у равни, раван кроз праву, линија главног пада и тачка у равни

Права p', која лежи у задатој равни, сече све изохипсе равни. Пресечне тачке на правој имају исту коту као и пресечне изохипсе на равни. Према томе:

Ако права лежи у равни, тачке са пуним котама праве леже са истоименим изохипсама равни (в. сл. 243).

Исто важи и обрнуто:

Пролази ли нека раван кроз задату праву, изохипсе равни пролазе кроз тачке на правој са истоименим котама.

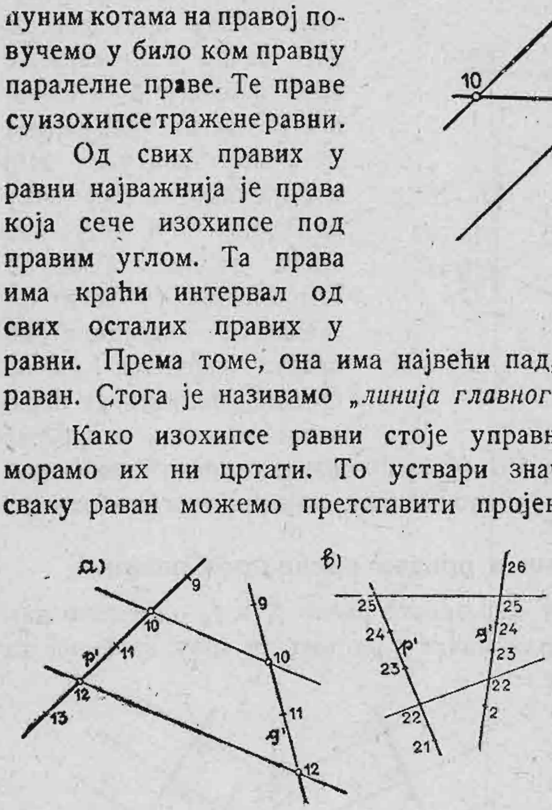


Сл. 243

Према томе ако треба кроз задату праву p' да повучемо раван, довољно је да кроз тачке са пуним котама на правој повучемо у било ком правцу паралелне праве. Те праве су изохипсе тражене равни.

Од свих правих у равни најважнија је права која сече изохипсе под правим углом. Та права има краћи интервал од свих осталих правих у равни. Према томе, она има највећи пад, заправо исти пад као и сама раван. Стога је називамо *„линија главног пада“* равни.

Како изохипсе равни стоје управно на линију главног пада, не морамо их ни цртати. То уствари значи, да у котирној пројекцији сваку раван можемо претставити пројекцијом саме једне њене праве, њене линије главног пада. Да бисмо је могли разликовати од осталих правих, цртамо линију главног пада двема правим, и то једном дебљом и једном тањом поред ње (в. сл. 243).



Сл. 244 *a* и *b*

Ако имамо пројекцију A' неке тачке у задатој равни, самим тим је тачка A потпуно одређена. Да бисмо одредили коту те тачке, повучемо кроз A' било коју праву g' у равни. Коту тачке A одредимо као коту тачке на правој g. Место тога можемо да повучемо кроз A' изохипсу равни и то до пресека са линијом главног пада f', па одредимо коту те изохипсе. Тако је одређена кота A' у сл. 243.

§ 96. Раван одређена двема правама или трима тачкама

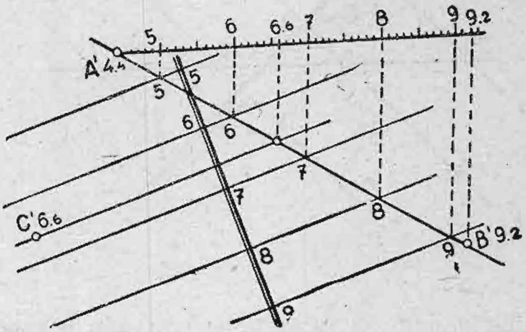
Раван може да буде задата двема правим које се секу (или су паралелне). У том случају обе праве припадају равни. Праве које спајају тачке са истим котама на једној и другој задатој правој јесу изохипсе равни. Према томе оне морају да буду између себе паралелне (в. сл. 244*a*).

Одатле нам ново једноставно правило по коме можемо лако да одредимо, да ли се две задате праве секу или не.

Две се задате праве секу, ако су паралелне оне праве које спајају тачке са истим котама на једној и на другој правој.

У противном случају задате праве се не секу (в. сл. 244*b*).

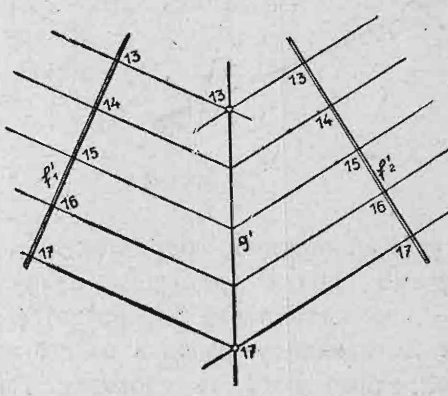
Као нов задатак нека нам је задата једна раван трима тачкама $A'(4, 4)$, $B'(9, 2)$ и $C'(6, 6)$. Да бисмо одредили изохипсе равни, повучемо праву кроз две задате тачке и то најбоље кроз најнижу A' и највишу B'. Затим градуирамо ту праву (као у сл. 240) и одредимо на њој тачку са котом 6, 6 коју има трећа задата тачка C'. Спојимо ли ту тачку са тачком C', одредили смо правац изохипса равни. Остале изохипсе су паралелне са њом, а пролазе кроз тачке са пуним котама праве $A'B'$. На крају можемо да повучемо и линију главног пада равни. Повучено је било где с тим да је управна на изохипсе.



Сл. 245

§ 97. Пресек двеју равни и продор праве кроз раван

Праву g' по којој се секу две задате равни f_1 и f_2 одредимо најлакше тако, што одредимо две тачке у којима се секу изохипсе са истим котама једне и друге равни. Како пресечна права g' припада и једној и другој равни, то се морају на њој налазити пресеци и свих осталих изохипса са истим котама.

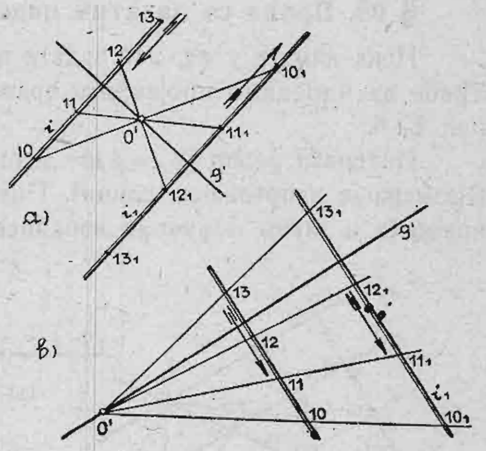


Сл. 246

Ако задате равни имају једнак пад, пресечна права је симетрала угла који заклапају изохипсе.

Овај случај је важан код одређивања пресека кровних површина.

Ако су нам задате две равни чије су изохипсе паралелне, биће и њихова пресечна права паралелна са изохипсама. Да бисмо је одредили, повучемо било коју помоћну раван и одредимо праве по којима она сече и једну и другу раван. Тачка у којој се секу те две праве је једна тачка тражене пресечне праве.



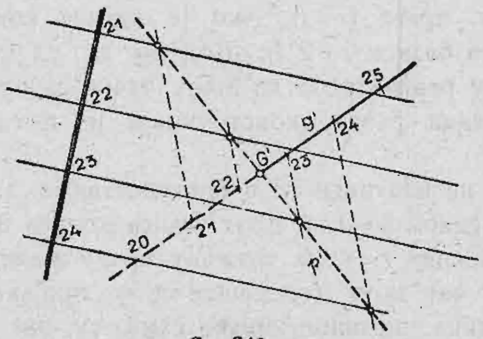
Сл. 247

Овај начин је добар и тачан, али захтева много цртања. Стога одредимо радије пресек као у сл. 247. Спојимо правама тачке са истим котама на линијама главног пада једне и друге равни, на пр. 10_1 10 и 12_1 12. Те две праве секу се у тачки *O'*. Њено отстојање од линија главног пада равни је у истом односу као и интервали самих равни. Спојимо ли још две тачке са истим котама и та права мора пролазити кроз *O'*, па ће кроз њу пролазити и пресечна права, јер је хоризонтална и сече линије главног пада у тачкама са истом котом.

Пресек произвољне равни са неком хоризонталном равни биће хоризонтална права, дакле изохипса произвољне равни са котом коју има хоризонтална раван.

Две су равни паралелне ако су им линије главног пада две паралелне праве.

У сл. 248 задата је произвољна раван и нека права *g'*; треба да одредимо продор праве кроз раван. Кроз праву *g* повучемо било коју помоћну раван. (Изохипсе помоћне равни повучене су у слици цртицама). Одредимо пресек помоћне равни са задатом равни, па је на пресечној правој *p'* тражена продорна тачка *G'*.



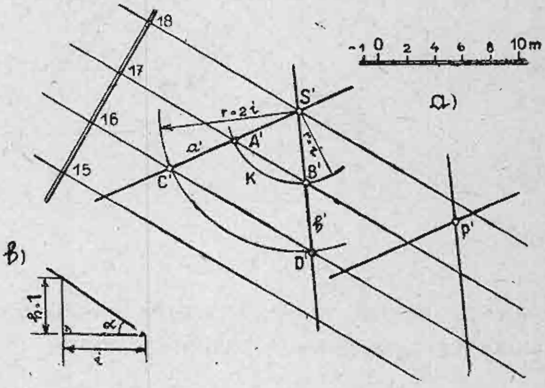
Сл. 248

Да видимо још код овог примера који је део праве *g'* видљив а који невидљив. Узмемо на правој *g'* тачку са котом 24. Са њом се у пројекцији поклапа једна тачка равни. Како та тачка равни лежи између изохипса 21 и 22, њезина је кота између 21 и 22. Тачка праве је видљива, јер је виша и раван је не заклања. Према томе видљив је део праве од G' ка тачки са котом **24**, а други је део невидљив, јер га заклања раван. (Са тачком 21 праве g' поклапа се тачка равни чија је кота између 23 и 24. Раван је виша и стога заклања праву).

§ 98. Права са задатим падом у произвољној равни

Нека нам је у сл. 249 задата произвољна раван α са падом 1 : 4. Треба да одредимо пројекцију праве која лежи у тој равни, а има пад 1 : 5.

Интервал равни је $i = 4$ m Значи: за висинску разлику 1 m $i = 4$ m. (Размера је нацртана на слици). Повучемо линију главног пада, градуирамо је и затим повучемо изохипсе равни.



Сл. 249 *a* и *b*

Права са падом 1 : 5 имаће $i = 5$ m. Ако та права лежи у задатој равни, треба да су њене тачке са пуним котама на истоименим изохипсама равни. Стога узмемо на изохипси 18 неку тачку S' и нанесемо од S' до идуће ниже изохипсе 17 дуж од 5 m (у размери) колики је интервал тражене праве. На тај начин добијемо тачку A' или B', па су праве $A'S' = a'$ и $B'S' = b'$ пројекције тражене праве.

Ову конструкцију било би правилније тумачити овако. Све праве које пролазе кроз тачку S, а имају задат известан пад, сачињавају један конус. Узмемо ли да је висина конуса $h = 1$, тада је полупречник круга базиса једнак интервалу праве ($r = i$). Ако је висина конуса $h = 2$, тада је полупречник круга базиса $r = 2$ i). Додамо ли уз то и правило, да све праве које су у равни треба да имају тачке са пуним котама на истоименим изохипсама равни, конструкција је потпуно одређена.

Узмемо на равни тачку S' на изохипси 18 и претпоставимо да је то врх поменутог конуса са висином $h = 1$ m. Круг базиса конуса биће у висинској равни 17, а полупречник $r = i$. За тражену праву са падом 1:5 биће $r = i = 5$ m опишемо тај круг (средиште се у пројекцији поклапа са S'). Од свих изводница уцртаног конуса само су оне две праве у задатој равни, чије тачке са котом 17 леже на изохипси 17. То су тачке A' и B', где круг базиса пресеца изохипсу 17 равни. Права $A'S'$ је тражена права a' и $B'S'$ права b'.

Узмемо ли да је висина конуса $h = 2$ m, тада је базис конуса круг на коти 16 са полупречником $r = 2$ $i = 2 \times 5$ m $= 10$ m. Пресеци

C' и D' тога круга са изохипсом 16 одређују поново исте праве a' и b' које смо већ пре одредили.

За висину конуса узимамо већу од $h = 1$ ако тачке A' и B' испадају толико близу да праве a' и b' нису довољно тачно одређене.

Ако је у равни задата нека тачка P', чија кота није цео број, конструкција праве са датим падом је тежа. Задатак решимо индиректно. Конструишемо праву кроз неку тачку S' са пуном котом, а тада повучемо кроз P' праву паралелну са њом. Тако је урађено у сл. 249.

Права може да буде задата својим углом α према пројекциској равни место падом. У том случају израчунамо интервал графички као у сл. 249*b*. (Сл. 249*b* нацртана је у четири пута већој размери).

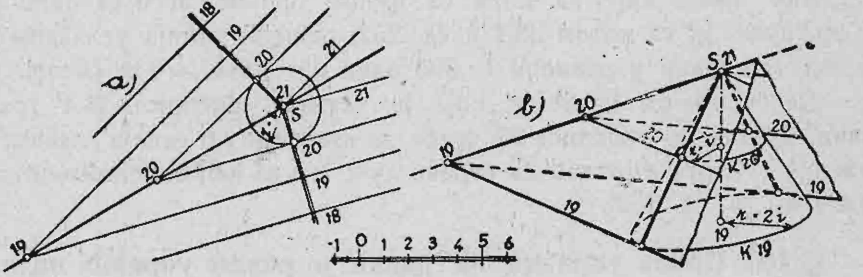
Природно је да пад праве треба да је мањи од пада равни. Ако је пад исти, тражена права је паралелна са линијом главног пада равни.

§ 99. Раван са одређеним падом кроз задату праву

Све равни које пролазе кроз неку тачку S, а имају једнак пад, додирују један конус. Врх конуса је тачка S, оса конуса стоји вертикално, а изводнице имају исти пад као и тражене равни. Према томе свака изводница конуса може да буде линија главног пада једне равни.

У сл. 250 треба да повучемо раван са падом 2 : 3 кроз задату праву g.

Одаберемо било коју тачку са пуном котом, на пр. тачку 21 и у тој тачки поставимо врх S реченог конуса. Ако претпоставимо да је висина конуса $h = 1$, круг базиса конуса биће на коти 20, а његов полупречник $r = i$ $(i = 1{,}5\ \mathrm{m})$.



Сл. 250 *a* и *b*

Раван која додирује тај конус, а пролази кроз задату праву g јесте тражена раван. Ако нека раван додирује конус, њена изохипса 20 додирује круг базиса конуса. Између свих додирних правих одаберемо ону која пролази кроз тачку са котом 20 на правој g. Друга, горња изохипса 21 пролази кроз врх S конуса, а паралелна је са изохипсом 20.

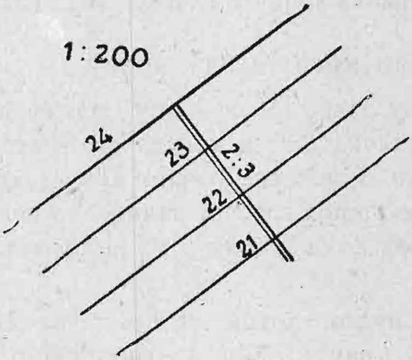
Тиме је задатак решен, јер повучена раван пролази кроз задату праву g а додирује конус, па има пад 2 : 3.

Како из тачке са котом 20 на правој можемо да повучемо две тангенте на круг базиса конуса, постоје два решења. Значи да кроз задату праву можемо да повучемо две равни са траженим падом.

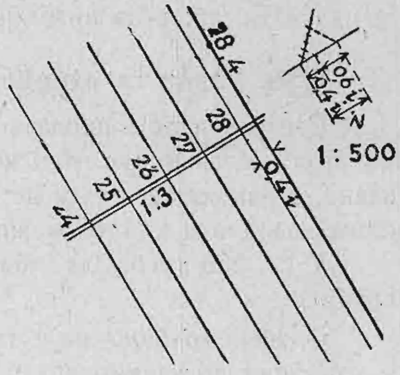
*

Други лакши пример истог задатка био би случај када треба да повучемо раван са задатим падом кроз задату хоризонталну праву.

Такав задатак решен је у сл. 251. Задата права p' је хоризонтална са котом 24. Према томе, она је већ изохипса 24 тражене равни. Линија главног пада управна је на њу и можемо одмах да је градуирамо (разм. 1 : 200, m $i = 1{,}5 = 7{,}5$ mm.



Сл. 251



Сл. 252

Ако права није на коти са пуним бројем, него са било којим на пр. права g' са котом 28,4 и сл. 252, решење остаје углавном исто. За пад 1:3 равни у размери 1 : 500 биће интервал $i = 3$ m $= 6$ mm.

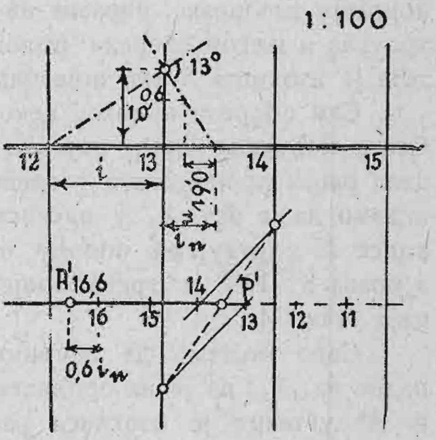
Да бисмо од праве g' која је уствари изохипса 28,4 тражене равни, дошли до изохипсе 28, треба да нанесемо по линији главног пада дуж 0,4 i. Стога уцртамо са стране дуж i и на њој одредимо потребну дуж 0,4 i (в. сл. 252).

§ 100. Права управна на раван и раван управна на праву

Ако је нека права n управна на задату раван, онда она стоји под правим углом и према њеним изохипсама, па ће се тај угао показивати као прав угао и у пројекцији. То значи да су права n и линија главног пада равни две праве под правим углом, а њихове пројекције да су паралелне. Тај нам је случај познат из сл. 242. За вежбу решен је ипак један задатак у сл. 253. У размери 1 : 100 задата је произвољна раван и ван ње тачка A' са котом 16,6. Кроз A треба да повучемо праву управну на раван.

У висинску раван 12 оборимо линију главног пада, заправо њену дуж 12 – 13 и то око њене пројекције. Права 12 13^0 је оборена линија главног пада равни, а управна на њу кроз тачку 13^0 претставља праву паралелну са траженом управном правом, Од њеног пресека са пројекцијом линије главног пада па до тачке 13 биће i_n интервал тражене управне праве. Како је кота тачке A' 16,6 да бисмо одредили тачку 16 на управној правој потребна нам је дуж од 0,6 i_n. И ту дуж одредимо на обореној правој (в. слику 253).

У слици је повучена помоћна раван заправо њене изохипсе 13 и 14, па је помоћу њеног пресека са задатом равни одређен продор управне праве. Видљиви део праве је наглашен.

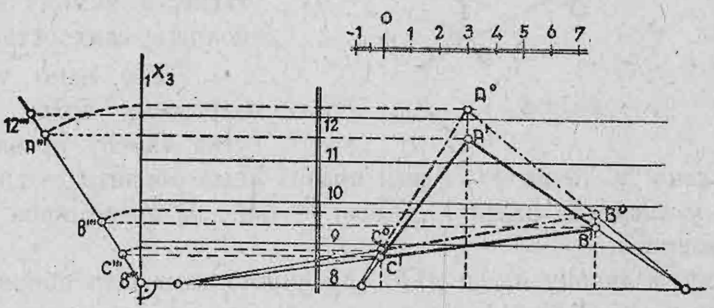


Сл. 253

За обрнут задатак: кроз тачку A' повући раван управну на задату праву, решење остаје потпуно исто. Довољно би било сматрати у сл. 253 задату линију главног пада за праву, па би управна права кроз A' била линија главног пада тражене равни.

§ 101. Обарање равни

Понекад треба да одредимо праву величину неке фигуре у произвољној равни. И у котираној пројекцији најлакше то постижемо обарањем равни. Разлика је једино у томе, што смо пре обарали раван



Сл. 254

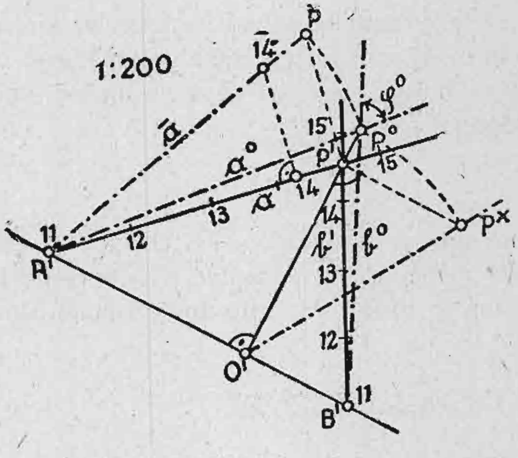
обично у хоризонталницу око њене праве трасе, док ћемо сада обарати раван у било коју главну висинску раван, и то око изохипсе равни која има исту коту.

Тако ћемо у сл. 254 да би одредили праву величину троугла $A'B'C'$, оборити задату раван у главну висинску раван 8. Према томе права око које обарамо је изохипса 8 задате равни.

Све тачке при обарању описују кругове који се у пројекцији показују као праве управне на осу обртања, изохипсу 8. Пројекција троугла и његов оборени положај су две афине фигуре, а оса афинитета је изохипса 8 око које окрећемо.

Сам оборени положај неке тачке одредимо помоћу III пројекције. Стога повучемо нову осу $_1X_3$ управно на изохипсе равни, па ће се цела раван пројектовати у трећој пројекцији као права. При томе замишљамо да је оса $_1X_3$ у висинској равни 8. Трећу пројекцију $12'''$ изохипсе 12 одређујемо помоћу ординате и висинске разлике $(12-8=4)$, а права $8'''$ $12'''$ је трећа пројекција равни. На њој је и трећа пројекција тачке A.

Сада можемо да оборимо раван. Окренимо A''' око $8'''$ док не падне на $_1X_3$, па је на ординати тражена тачка A^0. (Ордината из A' и из A^0 уствари је изохипса равни кроз тачку A). Оборени положај осталих тачака одредимо или на исти начин, или помоћу афинитета.



Сл. 255

Овај задатак можемо решити и без треће пројекције, и то по истом принципу као што смо решили задатак у сл. 69. Јер ако се у обореном положају показују све дужи у правој величини, довољно је да одредимо праву величину једне подесне дужи. Њом одредимо оборени положај једне тачке, а помоћу афинитета положај свих осталих.

Тако ћемо у сл. 255 одредити праву величину угла између правих a' и b', које се секу у тачки P'. Раван правих ћемо оборити око њене изохипсе 11 у висинску раван 11. Тачка P^0 биће на правој кроз P' управној на изохипсу.

Праву величину дужи $A'P'$ одређујемо тиме што оборимо праву a' помоћу тачака 11 и 14, саму за себе, у висинску раван 11 (као у сл. 238), па ту дуж нанесемо на поменуту управну. Угао $A'P^0B'$ је тражена права величина угла између правих a' и b'.

*

Овим смо прешли све елементе који ће нам бити потребни при решавању задатака у котираној пројекцији, било теориских било практичних. По потреби, смемо и у котираној пројекцији да уводимо нове пројекциске равни као што смо их већ и увађали.

Овде ћемо се задржати углавном на решењу задатака који могу имати практичну примену у техници.

§ 102. Задаци за вежбу

Као први пример нека нам је задата једна коса раван са падом 1 : 4 у размери 1 : 200, а сем ње хоризонтални правоугаоник *A'—D'* на коти 36 (в. сл. 256).

Коса раван претставља терен, рецимо неку ливаду на којој треба израдити хоризонталну платформу у облику правоугаоника *A—D*.

Платформа не лежи по терену, јер јој тачка *A* има коту 36, док терен на истом месту има коту око 37,2. Исто тако и тачка *C* није на терену, јер јој је кота понова 36, а кота терена око 34,7. Једино су на терену тачке *M* и *N*, односно дуж *MN* изохипсе 36 као пресек хоризонталне равни платформе са косом равни терена.

Значи да једним делом треба да копамо терен док се не усечемо до ивица *MA*, *AB* и *BN* и заравнимо земљиште између њих. Са друге стране морамо насипати земљу да бисмо се попели до ивица *NC*, *CD* и *DM* (и заравнимо насип између њих). Откопана замља не може дуго да остане вертикална, а нарочито насипана, него се сама одроњава даље од ивице *CD*, док коначно не заузме известан пад на коме може сама да се одржи.

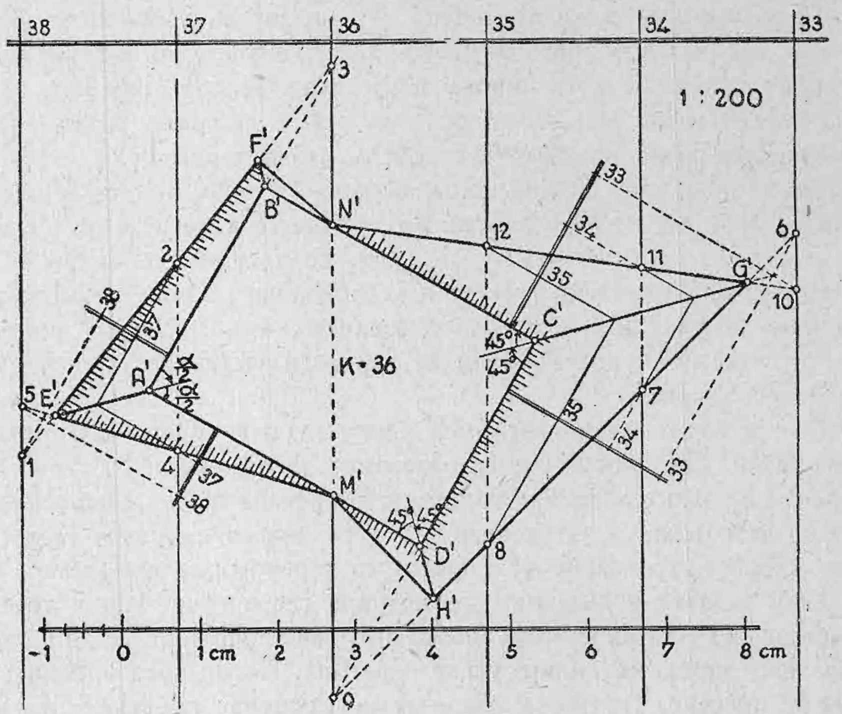
Према томе морамо насипати земљу и преко ивице *CD* по некој косој равни. Ту косу раван називамо *„раван насипа“*, или боље *„површина насипа“*, а линију по којој она пресеца терен *„линија насипа“*. Како то исто важи и за усечени део, то имамо и *„раван усека“* или боље *„површину усека“* и њен пресек са тереном *„линију усека“*.

Наш задатак у Нацртној геометрији састоји се баш у томе, да за постављени задатак конструишемо потребне површине усека и насипа, па да тада одредимо линије усека и насипа. Поред тога одређиваћемо уздужне пресеке, *„уздужне профиле“* и попречне пресеке, *„нормалне профиле“*. Ти профили дају јаснију претставу радова које треба извршити, а по њима се рачуна и обим, па следствено томе и коштање тих радова.

Нагиб, односно пад површине усека и насипа зависи углавном од врсте материјала у коме се ради. Што је материјал чвршћи и отпорнији, то се дозвољава све већи пад. Код здравог земљишта обично се узима за усек 1 : 1, а за насип 2 : 3.

Претпоставимо те нагибе код примера у сл. 256, па решимо задатак.

Најпре треба да конструишемо равни насипа кроз ивице *N' C'*, *C' D'* и *C' M'*. Како су те ивице хоризонталне, свака је од њих већ једна изохипса равни. Повучемо одмах линије главног пада, па их градуирамо. Пад равни насипа је $p = \frac{2}{3} = \frac{1}{1{,}5}$, а како је $p = \frac{1}{i'}$, значи да је $i = 1{,}5$ m. Према томе у размери 1 : 200, где је 5 mm = 1 m, биће $i = 1{,}5 \times 5$ mm = 7,5 mm. Тај задатак нам је познат из сл. 249. Ако повучемо изохипсе тих равни насипа, можемо да одредимо и њихове пресеке са тереном. Тако се истоимене изохипсе терена и равни насипа кроз ивицу *CD* секу у тачкама 9, 8, 7 и 6. Кроз те тачке пролази линија насипа. (Она је у овом случају једна права као пресек двеју равни). На исти начин одређена је и линија насипа *N*, 12, 11, 10 за раван насипа повучену кроз ивицу *NC*. Равни насипа кроз ивице *NC* и *CD* сећи ће се по правој која пролази кроз тачку *C*. Како те равни имају исти пад, то ће пресечна права бити симетрала угла који заклапају изохипсе. У овом случају биће и симетрала угла који заклапају ивице *NC* и *CD*, јер су и те ивице хоризонталне, заправо и оне су изохипсе самих равни насипа. Ову праву пресека сећи ће обе линије насипа, и то обе у истој тачки *G*, јер се три равни или три површине уопште секу увек у једној тачки. Остаје још да одредимо раван насипа и линију насипа за ивицу *DM*. Конструкција је потпуно иста као за ивицу *NC*. Само у овом случају терен је једна раван, па ће линија насипа бити такође једна права. Сем тога ће се раван насипа сећи са равни насипа кроз ивицу *CD* по симетрали угла у *D*. Линија



Сл. 256

насипа за ивицу *CD* сече ту симетралу у тачки *H'*. Према томе линија насипа за ивицу *M' D'* биће дуж *M' H'*.

Потпуно на исти начин одређене су и равни и линије усека за ивице *M' A'*, *A' B'* и *B' N'*. Једина је разлика у томе, што је код равни усека пад 1 : 1, па је интервал $i=1$ m$=5$ mm. Конструкција је из слике довољно јасна, те није потребно да се описује.

*

Као други пример задата је у сл. 257, а у размери 1 : 400 једна раван са падом 1 : 4 и пројекција једне праве са падом $8^0/_0$ и са тачком *A* на коти 42. Задата права је оса пута који треба да је широк 4 m. Треба да одредимо линије насипа и усека.

Најпре градуирамо осовину пута ($p=8^0/_0=\frac{8}{100}=\frac{1}{12,5}$, $i=12{,}5$ m $12{,}5\times 2{,}5$ mm $=31{,}25$ mm $=i$). Ширина пута је 4 m = 10 mm, па ту ширину нанесемо по пола с обе стране осовине. Тиме су одређене ивице пута. Сматра се да је круна пута једна раван, а да је осовина пута њена линија главног пада. Можемо дакле да повучемо изохипсе, па да тако градуирамо и обе ивице пута.

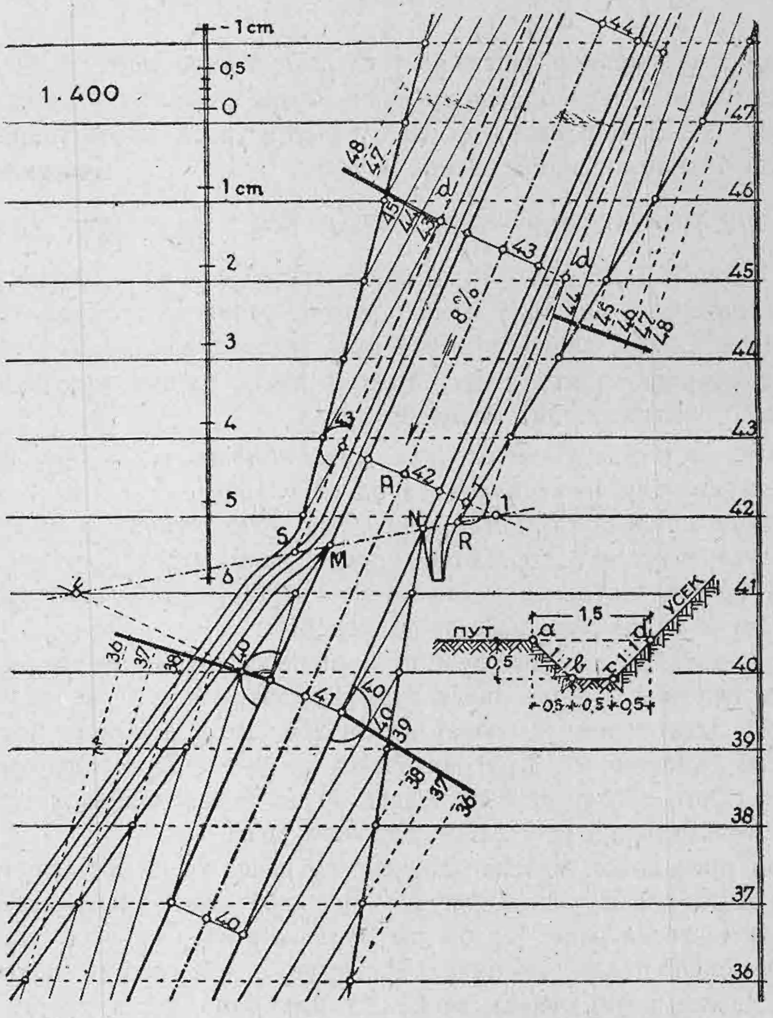
Тачка са котом 40 на осовини пута поклапа се у пројекцији са тачком терена чија је висина мања од 37. Значи да је пут у насипу. Тачка 43 се поклапа са тачком терена на коти између 45 и 46. Та је тачка пута у усеку. Одредимо пресек равни пута и равни терена (помоћу пресека истоимених изохипса 41 и 42) и тиме смо одредили тачке *M* и *N* ивица пута које су на терену.

Сада можемо да конструишемо равни насипа. Треба да повучемо равни са падом 2 : 3 кроз ивице пута од тачака *M* и *N* ка тачкама са котом 40. Задатак нам је познат из сл. 250. Врхове конуса поставимо у тачкама са котом 41. Кругови базиса са $r=i=3{,}75$ mm налазе се на коти 40. Стога су тангенте из тачака 40 на те кругове изохипсе равни насипа. Конструкција је у слици довољно јасна.

Код пређашњег задатка одређене су равни усека исто као и равни насипа. Коса раван усека повучена је кроз саму ивицу платформе. У пракси се то не ради, јер би сва вода која пада на усек и која се слива са терена текла по путу. Стога се с обе стране пута праве канали. Канал (јарак, кунета) може да има било какав пресек, то ће зависити од врсте терена, количине воде, материјала од кога је рађен а и од прописа и обичаја краја у коме се ради. У овом поглављу усвојићемо пресек канала какав је нацртан на слици. Види се да би раван пута, када би је проширили, секла раван усека по правој *d*. Та је права паралелна са ивицом пута а на отстојању од 1,5 m'. Уцртамо те праве *d* с обе стране пута, а између њих и пута пројекције ивица *b* и *c*. Тиме су канали нацртани, а равни усека одређујемо сада од праве *d* као да је то ивица пута.

Равни усека кроз косе праве *d* одређујемо поново као у сл. 250. Разлика је само утолико, што равни иду изнад праве, па и конусе треба узети обрнуте: са врхом доле.

Врхови су узети у тачкама са котом 42, па им је круг базиса ($r = i = 1$ m $= 2{,}5$ mm) на коти 43. Тангенте из тачака са котом 43 су изохипсе равни усека. Из тачака 43 повучене су линије главног пада равни усека, затим изохипсе и на крају одређене линије усека с обе стране пута.



Сл. 257

Крајња тачка линије усека била би тачка *R* на ивици *d*. Међутим ту она не престаје јер је канал дубок 0,5. Стога канал треба копати даље, све док његово дно — не мењајући пад — не избије на површину терена. Према томе треба продужити дно канала још за нешто мало виже од пола интервала терена, али тако, да ивице дна буду управне на изохипсе терена. Раван дна ће се завршити по једној правој паралелној са изохипсама терена, а крајње тачке на ивицама *b* и *c* спојимо кривим са тачкама *R* и *N*. Ово испуштање воде из канала сме да се дозволи само у случају када вода, текући по терену, неће падати на насип, тј. само у случају када се линија главног пада терена — повучена из краја канала — не приближује линији насипа. У противном треба канал водити дуж насипа, и то на 1 m' отстојања од линије насипа. Тако је урађено на сл. 257 од тачке *S* надоле.

Треба напоменути да изохипсе помоћу којих смо конструисали линије насипа и усека нису никакве помоћне линије, него стварне изохипсе равни насипа и усека. С почетка је тешко водити рачуна о томе где оне постоје, а где не постоје. Али када су већ одређене линије насипа и усека, треба оне делове на равнима усека или насипа појачати, а остале делове (до линије главног пада) извући танко и испрекидано (види слику). Исто тако и изохипсе терена на делу где је пројекција пута са равнима усека и насипа, треба да су извучене танко и испрекидано, јер на том делу терен не постоји. Погрешно би било да се ма где на терену појаве два система изохипса које се укрштају.

§ 103. Пројекција просторне криве и крива са константним падом

Било која произвољна просторна крива одређена је када имамо њену пројекцију и коте довољног броја тачака.

Пројекциски зраци кроз поједине тачке криве сачињавају једну облицу којој је базис сама пројекција криве. Развијемо ли ту облицу у једну раван (мрежа облице), задата просторна крива постаће крива у равни која нам у неку руку карактерише просторну криву.

Сл. 258

У сл. 258 *a*) имамо такву просторну криву, а у сл. 258 *b*) ту исту криву на развијеној облици. Као базис облице узимамо обично пројекцију криве на главну висинску раван тачке са најнижом пуном котом. Мрежа облице биће утолико тачнија, уколико лукове између двеју суседних тачака са познатим котама поделимо на више делова.

Помоћу развијене криве можемо лако да одредимо коту било које тачке I' на кривој. Нанесемо на базис тачку I', па је на ординати и на кривој тачка I. Коту тачке I израчунавамо ако коти 5 тачке

A додамо ординату (I′I). Аналогно можемо да одредимо и тачке са било којом котом на кривој.

Исто тако можемо лако да одредимо и тангенту у било којој тачки криве. Тангента *t′* у тачки *D′* (8) треба да је тангента на пројекцију криве, а такође је и *t* тангента на развијену криву у тачки *D*. Њен пресек са висинском равни 7 даје и интервал *i* тангенте, па можемо да градуирамо *t′*. Пад криве у тачки *D* једнак је паду њезине тангенте у тој тачки.

Нарочито су важне криве са константним падом. Све тангенте у било којој тачки такве криве имају једнак интервал. Таква крива, ако је развијемо, показује се као права. Услед тога су и пројекције тачака са пуним котама криве на подједнаким растојањима, ако та растојања меримо по пројекцији криве. Та растојања називамо интервалом криве.

Према томе такву линију са константним падом можемо да градуирамо као да је нека права, једино интервал не меримо праволиниски, него по округлини пројекције саме криве.

Трасе путева или железница уколико нису праве, обично су криве константног пада.

§ 104. Претстављање терена

Најважнији део котиране пројекције, нарочито за техничаре, јесте претстављање терена и решавање задатака на теренским површинама.

У котираној пројекцији претстављамо теренске површине системом хоризонталних линија. То су линије по којима висинске равни секу терен. Свака тачка једне такве линије има исту висину. Стога те линије називамо изохипсама (линијама једнаких висина).

Ако такве линије претстављају морско дно, називамо их *„изобате“* (линије једнаких дубина).

Обично се цртају изохипсе са пуним котама, а висине изохипса се исписују на њиховим пројекцијама.

Што су гушће изохипсе, на мањим висинским растојањима, тим ће све тачније бити одређен сам терен. Јасно је да се две изохипсе једног терена не могу никада сећи. Ако се на једном делу поклапају, значи да је терен на том делу вертикалан.

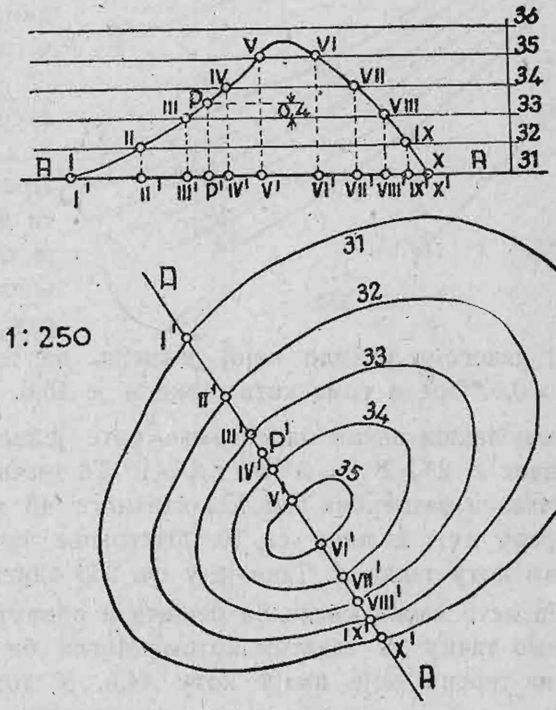
Делови терена између изохипса потпуно су неодређени. Обично претпостављамо да је терен између изохипса прав. Претпостављамо и то, да на терену леже све тачке дужи која својим крајњим тачкама сече две суседне изохипсе под углом што ближем 90⁰. И саме изохипсе нису потпуно тачне. Топографским снимањем одреде се поједине тачке изохипса, па се те тачке накнадно споје кривама.

§ 105. Профили

Профилима називамо пресеке терена (и онога што се налази на њему) равнима управним на пројекциску раван. Пресечемо ли терен неком било каквом вертикалном облицом, па ту облицу развијемо, такав развијени пресек називамо такође профилом. Такав је уздужни профил неког пута, када сечемо терен по траси пута, па тај пресек развијемо.

У сл. 259 уцртане су изохипсе неког терена, па треба да одредимо профил *А—А*.

Кроз повучену праву *А—А* замислимо вертикалну раван и одредимо њен пресек са тереном. Пресек је једна линија, а на њој су нам тачно познате само оне тачке I—X у којима профилна раван *А—А* пресеца изохипсе. Та линија пресека поклапа се у пројекцији са правом *А—А* (првом трасом профилне равни). Да бисмо могли видети пресек, оборимо профилну раван на пројекциску раван или на било коју другу висинску раван. Обично обарамо на висинску раван најниже изохипсе, а у обореном положају конструишемо све тачке које су нам одређене. У овом случају тачке I—X.



Сл. 259

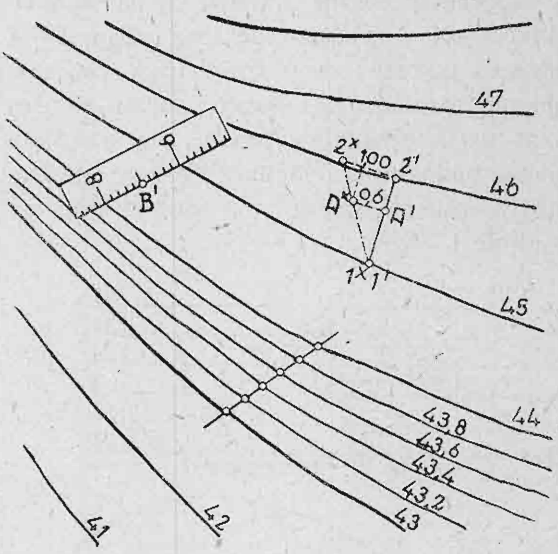
Место да обарамо пресеке око праве *А—А* па да се профил преклопи са изохипсама, можемо било где са стране, па чак и на другом листу да повучемо хоризонталну праву *А—А* и да на њој пренесемо тачке I′ до X′. Сматрамо ли да је повучена права на висини 31, можемо одмах да нацртамо у заданој размери пресеке профилне равни са осталим висинским равнима 32—36. Тачке II—IX биће свака на својој висинској равни, а на управној на *А—А* из тачака II′—IX′. Одређене тачке спојимо што правилнијом кривом. Та крива је профил терена. Коту било које тачке терена на профилу одредимо као пре у сл. 258· На исти начин можемо да одредимо на профилу тачке са задатом котом.

Ако су, обзиром на дужине, висинске разлике сувише мале, можемо их повећати на тај начин што ћемо висине нанашати у другој размери, на пр. 10 или 100 пута већој од размера за дужине.

Када терен није сечен по правој него по било каквој линији, профил одредимо као у сл. 258. (Тачке *A*—*H* претстављале би пресеке профилне облице са изохипсама терена).

§ 106. Кота тачке на терену и интерполовање изохипса

Најтачније можемо да одредимо коту неке тачке на терену, ако кроз ту тачку повучемо профилну раван и одредимо профил терена. Тако је у сл. 259 одређена кота тачке *P'*. Само овај начин захтева много конструкције.



Сл. 260

Довољно тачан је и овај други начин, који не захтева скоро никакву конструкцију. Треба ли да одредимо коту тачке *A* терена у слици 260 повучемо кроз *A'* дуж 1' 2', тако да сече суседне изохипсе 45 и 46 под углом што ближим 90°. Према ранијој претпоставци, та дуж лежи по терену, па је тачка *A* стварно на њој. Оборимо дуж 1 2 у висинску раван 45. Висинску разлику 1 нанесемо у било којој размери, па одмах видимо да је дуж $A' A^{\times} = 0{,}6$. Према томе кота тачке *A* је 45,6.

Још лакши начин одређивања коте једне тачке на терену даје нам однос $2'\,2^{\times} : 2'\,1' = A'\,A^{\times} : A' = 1'$. То значи да можемо поред тачке *A'* поставити размерник тако да изохипсе 45 и 46 отсецају на њему што краћу дуж дељиву са 10. Отстојање тачке *A'* од изохипсе 45 даје нам коту тачке *A*. Тако је у сл. 260 одређена кота 44,5 тачке *B'*.

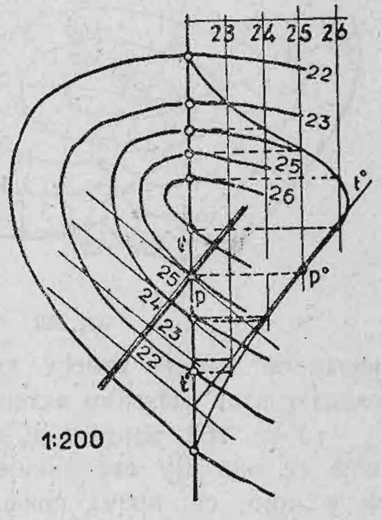
На исти начин могли би решити и обрнут задатак, да на терену одредимо тачку са задатом котом. Могли би чак да одредимо све тачке на терену које имају коту 44,5. У том случају одредили би што више таквих тачака, па их спојили кривом. Та крива била би нова изохипса терена са котом 44,5. Ово одређивање нових изохипса називамо „*интерполовање изохипса*“. У сл. 260 интерполоване су између изохипса 43 и 44 четири нове изохипсе на подједнаким висинским размацима.

Интерполоване изохипсе довољно су тачне и смеју се употребити за сваку конструкцију, исто као и остале задате изохипсе.

§ 107. Тангента и тангенцијална раван на теренску површину

Ако је потребно да у било ком правцу повучемо тангенту на површину терена у некој тачки *P*, повучемо кроз *P'* у том правцу профилну раван и конструишемо профил. Тангента на профил у тачки P^0 је тражена тангента (в. сл. 261). Пресеци те тангенте t^0 са висинским равнима дају тачке са пуним котама. Ако их вратимо натраг у пројекцију, самим тим је градуирана тангента *t'*. Кроз тачку *P* можемо на тај начин да повучемо бесконачно много тангената. Ако тачка *P* није нека специјална тачка површине терена, онда све те тангенте леже у једној равни – тангенцијалној равни површине терена у тачки *P*.

Треба ли да одредимо тангенцијалну раван на површину терена у тачки *P'*, довољне су нам две тангенте. Једну већ имамо (то је тангента *t'* коју смо сада одредили). Као другу тангенту најлакше нам је да повучемо тангенту на изохипсу кроз тачку *P*. Поред тога што нам је ту тангенту најлакше повући, она је и хоризонтална, па је према томе већ и изохипса тражене тангенцијалне равни. Линија главног пада је управна на њу, а остале изохипсе треба да пролазе кроз тачке са пуним котама на тангенти *t'*.



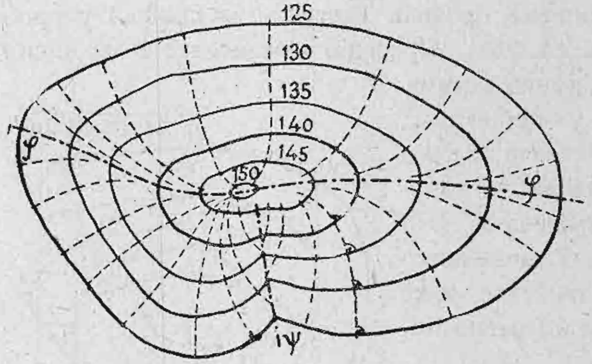
Сл. 261

Ако тачка *P'* није на изохипси, интерполујемо нову изохипсу која пролази кроз њу, па конструкција тангенцијалне равни остаје иста.

§ 108. Пад терена, интервал и линије главног пада

Тангенцијална раван у текој тачки површине терена има исти пад који има и сама површина у тој тачки. Од свих тангената кроз једну тачку терена највећи пад има она, која је у правцу линије главног пада тангенцијалне равни.

Кренимо од додирне тачке тангенцијалне равни у правцу њене линије главног пада до идуће тачке терена и повуцимо у тој тачки нову тангенцијалну раван. Добићемо нову тангенцијалну раван и нову линију главног пада. У правцу нове линије главног пада пођимо до суседне тачке терена, па и кроз њу повуцимо тангенцијалну раван. На тај начин, од тачке до тачке, обележићемо по терену једну линију која се од свих осталих линија повучених по терену одваја по томе што има највећи пад. Стога такву линију називамо *„линија главног йада йерена“*. (То је линија по којој би се кретала по терену кап воде, када на њу неби деловала ниједна сила сем земљине теже). Линије главног пада терена управне су и на терену и у пројекцији на изохипсе терена. Оне су према томе ортогоналне трајекторије изохипса. Кроз сваку тачку терена пролази само једна линија главног пада. Једино ако је у некој тачки тангенцијална раван на теренску површину хоризонтална, кроз ту тачку пролази бесконачно много линија главног пада.



Сл. 262

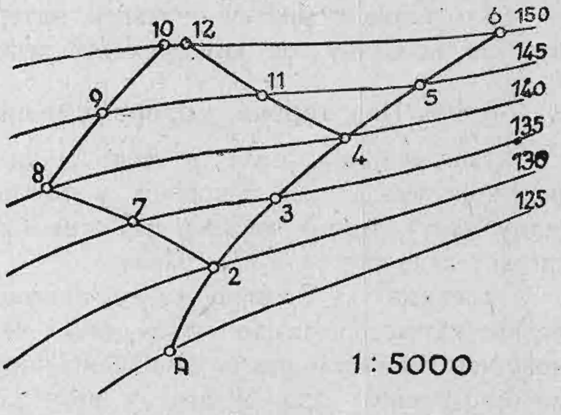
По линијама главног пада лако можемо да увидимо да је пад неког терена утолико већи, уколико су ближе његове изохипсе. Размак између двеју суседних изохипса, а у правцу линије главног пада називамо интервалом теренске површине.

У сл. 262 уцртана је вододелница φ. То је линија по терену од које се одвајају све линије главног пада. Уцртана је такође и крива ψ у којој се, према конфигурацији терена, стичу поједине линије главног пада и по којој би се најлакше могао да појави поток.

§ 109. Повлачење линије константног пада по терену

При пројектовању путева, железница, канала и сл. потребно је да ти објекти иду што више по терену (да би се избегли трошкови око израде усека и насипа), а да при том задрже свој предвиђени пад. (Поред пада морају те трасе да задрже и друге карактеристике као полупречнике кривина и друго о чему не можемо овде говорити).

У сл. 263 задат је у размери 1:5000 један терен. Треба да из тачке *A* на коти 125 повучемо трасу неког пута са константним падом 8% до коте 150.

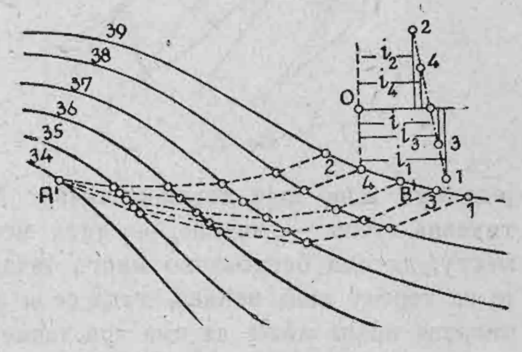


Сл. 263

Одредимо најпре колики треба да је интервал. $p = 8\% = \frac{8}{100} = \frac{1}{12{,}5} = \frac{1}{i}$, дакле $i = 12{,}5\,\mathrm{m}$. Изохипсе терена задате су висинском разликом 5 m. Значи да би стигли са падом $8^0/_0$ од једне задате изохипсе до идуће потребно нам је $J = 5i = 12{,}5 \times 5 = 62{,}5$m. У размери 1:5000 где 2 mm = 10 m, или 1 m = 0,2 mm, $J = 62{,}5 \times 0{,}2 = 12{,}5$ mm. Узмимо ту дуж и нанесимо је од тачке *A'* до идуће изохипсе. На тај начин одредимо тачке 2, 3, 4, 5 и 6, Спојимо ли те тачке што правилнијом кривом, та крива претставља тражену трасу пута. Решење није тачно, јер је лук *A'* 2 нешто дужи од праволиниског растојања тачака *A* и 2, па је и пад трасе нешто мањи од $8^0/_0$. Тачније би било да смо најпре интерполовали изохипсе на 1 m и по њима радили. Разлика између лука и тетиве била би мања, а тиме и решење тачније.

Траса *A'*—6 није једино решење задатка. У сл. 263 уцртане су још две варијанте [*A'* 2 7 8 9 10] и [*A'* 2, 3, 4, 11, 12].

Други сличан задатак решаван је у сл. 264. На задатом терену изабране су две тачке *A'* и *B'*. Треба по терену да повучемо линију од тачке *A'* до *B'* али тако, да на целој својој дужини задржи исти пад.



Сл. 264

Задатак можемо да решимо само пробањем, јер пад не може да буде задат. Узмемо стога неки интервал i_1 за који мислимо да ће бити тачан. Наносећи га од *A'* од изохипсе до изохипсе стигнемо до тачке 1. Значи да је i_1 био превелик. Смањимо га на i_2. Са њим стигнемо до тачке 2, јер смо га превише смањили. Поновимо исти покушај са i_3 и i_4, па долазимо до тачака 3 и 4. Да не би дуго лутали, повучемо на некој правој од тачке *O* поједине интервале $i_1 - i_4$. Затим из крајњих тачака нанесемо на управној разлике *B'* 1 и *B'* 3 с једне стране, ако је *i* био превелик, а са друге стране ако је *i* био премален. Спојимо ли тако добијене тачке 1—4 једном кривом, њен пресек са правом даје прилично тачно интервал *i* који решава задатак.

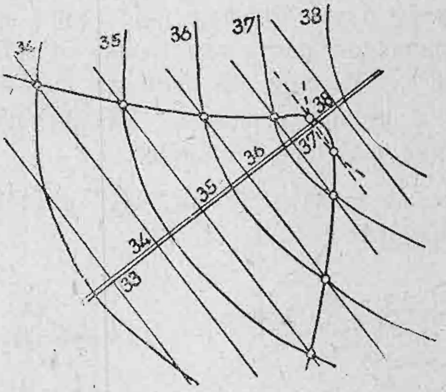
§ 110. Пресек равни са тереном и продор праве

Пресек теренске површине са једном равни биће углавном нека крива линија. Поједине тачке те криве линије имамо у пресеку истоимених изохипса терена са изохипсама пресечне равни (в. сл. 265). Ако су те тачке сувише размакнуте, или ако на појединим местима не одређују довољно кривину линије, можемо да интерполујемо нове изохипсе и тиме конструишемо нове тачке. Тако је у слици интерполована изохипса 37,5. Спојимо тачке у којима се секу истоимене изохипсе што правилнијом кривом, па је та линија тражени пресек терена са задатом равни.

Лежи ли у равни нека права, њезин продор кроз површину терена биће на линији пресека.

Према томе хоћемо ли да одредимо продор неке праве кроз површину терена, треба и овде да повучемо кроз праву неку помоћну раван.

Из саме слике је довољно јасно да нека права може продирати кроз терен два па и више пута. То зависи од облика терена и положаја праве према њему. Једино вертикална права продире кроз терен само једанпут. (Ово није довољно тачно. Ако на терену постоји нека вертикална стена — литица, — тада вертикална права може, на таквом месту, да има бесконачно много тачака заједничких са тереном. Ако је на терену нека пећина, тада се и изохипсе терена укрштају и вертикална права може да има три тачке продора кроз површину терена. Али такве су појаве на терену изузетне и сме да се каже, да вертикална права продире кроз терен само у једној тачки).



Сл. 265

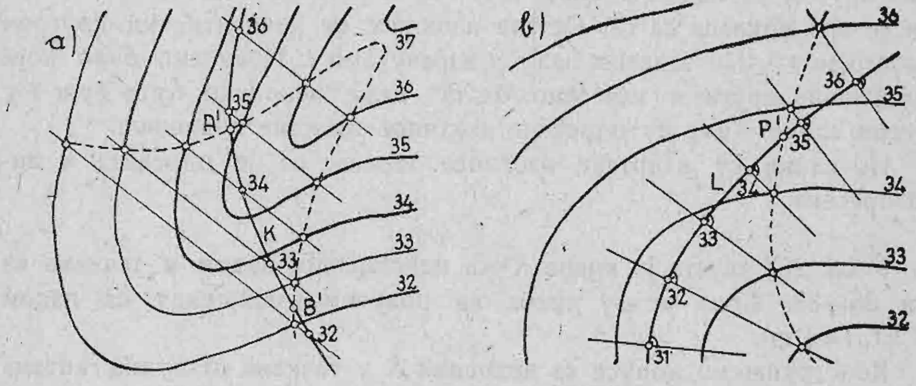
§ 111. Пресек терена са другим површинама и продор криве кроз терен

Пресек површине терена са било каквом другом површином конструишемо на исти начин као и пресек са равни. Одредимо пресеке истоимених изохипса и спојимо те тачке што правилнијом кривом, па нам је та крива тражена линија пресека.

И продор неке криве кроз површину терена одређујемо по истом принципу као и продор праве кроз терен. Кроз задату криву повучемо било какву површину и одредимо њен пресек са тереном, па је на пресечној линији тражена продорна тачка.

Тако кроз криву *K* у сл. 266*a*) повучемо облицу са хоризонталним изводницама и одредимо њен пресек са линијом пресека. Тачке *A'* и *B'* су тражене тачке продора.

У сл. 266*b*) повучена је као помоћна површина кроз криву *L* неразвојна површина, чије изохипсе стоје управно на *L'*. Одређен је пресек те површине са тереном и на њему тражена продорна тачка *P'*. (Овај други начин је обично бољи. Да је крива *L* траса неког пута, повучене изохипсе биле би изохипсе површине пута, па би на пресечној линији имали и продорне тачке обеју ивица пута).



Сл. 266 *a* и *b*

Продор неке линије (било праве или криве) кроз површину терена можемо да одредимо и помоћу профила повученог кроз саму линију. Овај начин је тачнији, али захтева много цртања.

§ 112. Конструкција обле површине са задатим падом кроз неку криву

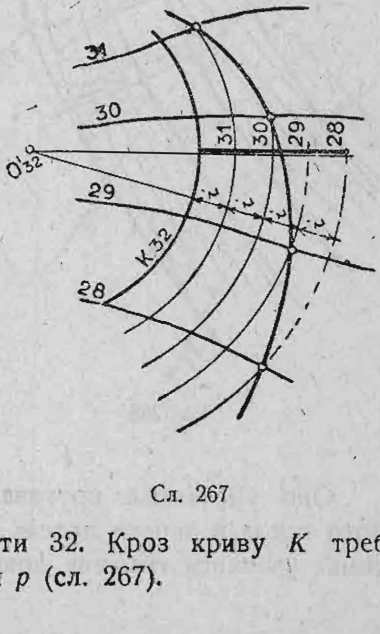
Овај задатак је аналоган задатку када кроз задату праву треба да повучемо раван са задатим падом. И овде треба да разликујемо случај када је задата крива хоризонтална од случаја када задата крива има константан пад (неки други случај и не долази у обзир).

Принцип решења задатка је овај. Кроз сваку тачку криве повучемо по један конус чије изводнице имају тражени пад. Површина која додирује све те конусе је тражена површина.

Изохипсе конуса су кругови, чија се средишта у пројекцији поклапају са пројекцијом врха. За висину конуса $h=1$, $r=1\,i$; за $h=2$, $r=2\,i$ итд. Ако крива површина додирује све те конусе, њене изохипсе додирују изохипсе конуса које су на истој коти.

Према томе, изохипсе тражене површине биће на подједнаком растојању између себе, а то растојање је *i*.

Као први пример узмемо да нам је задата хоризонтална крива *K'* на коти 32. Кроз криву *K* треба да повучемо површину са задатим падом *p* (сл. 267).



Сл. 267

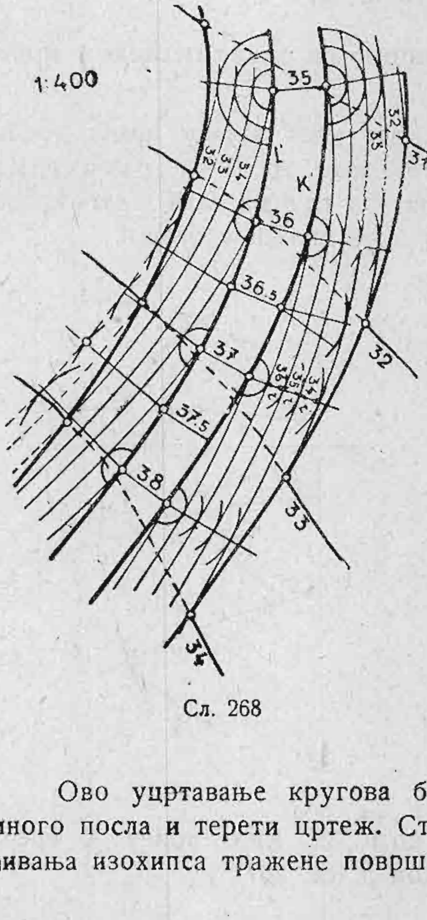
Задата крива K' је део круга са средиштем O'. Према томе, решење је врло једноставно. Површина која пролази кроз хоризонтални круг K са падом p биће конус коме је K изохипса са котом 32, а чији се врх поклапа са O'. Остале изохипсе су концентрични кругови на растојању i. По задатом паду p израчунамо i. Повучемо било који полупречник круга и нанесемо од K' даље неколико пута дуж i у размери слике. Тиме су одређене изохипсе тражене површине.

На слици су нацртане изохипсе терена, па је одређена и линија пресека.

*

У сл. 268 задата је крива K' са константним падом и тачкама на коти 35—38. Кроз криву треба да повучемо површину са падом p (1 : 1, $i=1$ m).

Конструишемо конусе са врховима S у тачкама са пуним котама на кривој. За висину $h=1$ m конуса са врхом у тачки 37 биће базис на коти 36 и то круг са $r=i=1$ m. У размери 1 : 400 $r=i=2{,}5$ mm. За $h=2$ m биће круг са $r=2\,i=5$ mm на коти 35. Одредимо базисе тога конуса још на котама 34, 33 и 32. Затим конструишемо исте такве конусе у свима осталим тачкама са пуном котом на K'.



Сл. 268

Тражена површина додирује све те конусе, па ће и њене изохипсе додиривати истоимене изохипсе појединих конуса. Тако ће изохипса 35 површине полазити из тачке са котом 35, на K', па ће додиривати први круг око тачке са котом 36, други круг око тачке 37, а трећи круг око тачке 38. (Сви су ти кругови на висини 35). Остале изохипсе конструишемо на исти начин. Из слике се види да су све додирне тачке за исти конус на једној правој. Та права је пројекција изводнице по којој површина додирује конус. Сем тога та права сече све изохипсе под правим углом, па је тиме она уједно и линија главног пада за тражену површину на том месту. Обично се те праве цртају за сваки конструисани конус.

Ово уцртавање кругова базиса прилично је незгодно, захтева много посла и терети цртеж. Стога је бољи овај други начин одређивања изохипса тражене површине.

У слици је поред криве K' нацртана крива L' на подједнаким отстојањима. Стварно је замишљено да су криве K' и L' ивице једног пута, па су повучене и изохипсе 35—38 површине тога пута.

Да би конструисали површину насипа са падом $p=1:1$ кроз криву L', одредимо једну њену изохипсу. На слици је одређена изохипса 32. Изохипса 32 треба да додирује базис свих конуса на висинској равни 32. Конструишемо те базисе. За конус са врхом на коти 35 биће висина $h=35-32=3$, па ће круг базиса имати $r=3\,i$. За конус са врхом у 36 биће $r=4\,i$. Аналогно биће и за остале тачке. Ако су ти конуси сувише ретки, можемо да уметнемо и друге. Тако су у слици нацртани и базиси конуса са врхом у тачкама са котом 36,5 и 37,5. Конус са врхом у 36,5 има висину $36{,}5-32=4{,}5$, а $r=4{,}5\,i$.

Крива која додирује све те кругове је тражена изохипса 32 додирне површине. Ако додирне тачке изохипса са круговима базиса спојимо правама са врховима конуса, те су праве, као што смо видели, пројекције изводница по којима тражена површина додирује конусе. Те изводнице су управне на изохипсе и у простору и у пројекцији. Значи да су линије главног пада тражене површине. Према томе одређене су нам и остале изохипсе. Довољно је да градуирамо те праве (линије главног пада) и да повучемо криве које су управне на те праве а пролазе кроз њихове тачке са истим котама.

На слици су уцртане и изохипсе неког терена, па је одређен пресек површина насипа са тим тереном.

§ 113. Примери

Како је цела Котирана пројекција обрађена овде скоро искључиво с обзиром на инжењерску праксу, требало би и примере узимати директно из саме инжењерске праксе. Али то је овде немогуће из следећег разлога: у пракси се иде за тим да усеци и насипи буду што мањи, да би се што је могуће више смањило коштање. Овде, баш обрнуто, треба да су усеци и насипи што већи, да би поједине конструкције биле што јасније.

Као први пример нека нам је на неком терену задата платформа $ABCD$, којој су три стране праве, а четврта CD полукружна. Платформа је на коти 41 и до ње води рампа са падом од $12{,}5_0/^0$ (в. сл. 269 размера 1 : 400). Треба да одредимо линије насипа и усека и пресек RS.

Изохипса 41 терена сече платформу у тачкама M и N. Према томе ће тачке A и B бити у усеку, а остали делови платформе са рампом у насипу.

Одредићемо најпре површине насипа и линије насипа. Нека нам је задат пад насипа 2 : 3. (Интервал је $i=1{,}5$ m, а у размери 1 : 400 $i=1{,}5\times2{,}5$ mm $=3{,}75$ mm).

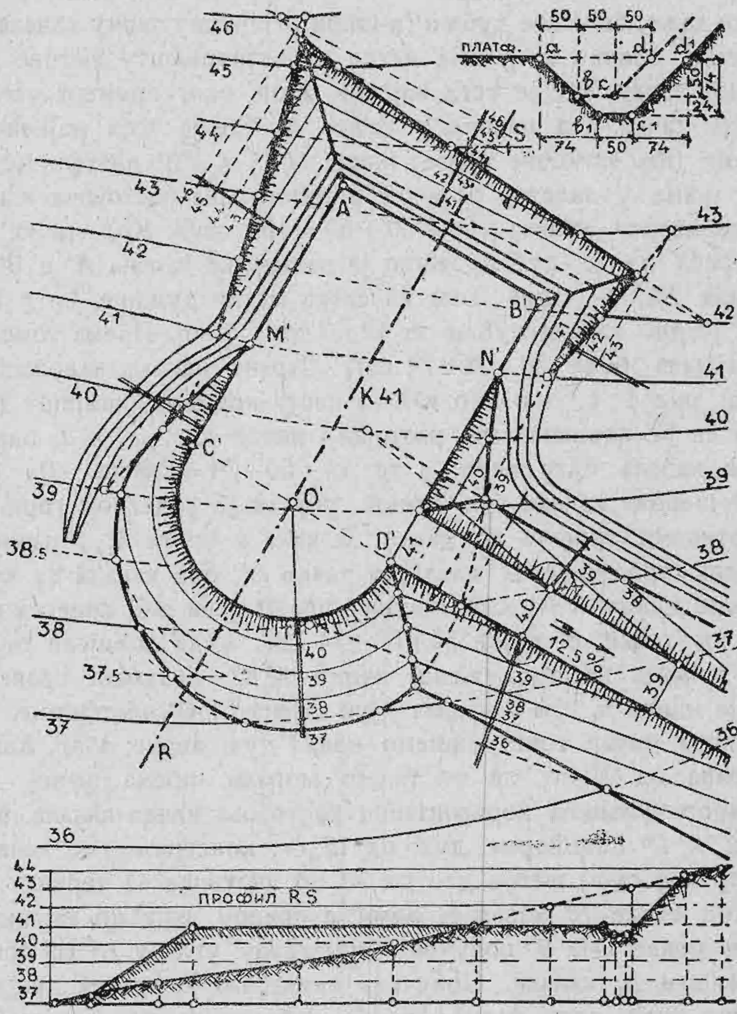
Ивице *MC* и *ND* платформе су хоризонталне и на коти 41. Површине насипа кроз те ивице биће равни, а конструишемо их као раније у сл. 256. Тако је за раван насипа кроз ивицу *MC* повучена линија главног пада ($\perp MC$), градуирана и повучене су изохипсе 40 и 39. Затим су одређене пресечне тачке тих изохипса са изохипсама терена. На тај начин одређена је линија насипа за ивицу *MC* (пролази и кроз тачку *M*). На исти начин одређена је раван насипа и линија насипа за ивицу *ND*. Та је раван конструисана и одређена линија насипа као да уопште нема рампе. На крају је конструисана површина насипа за хоризонталан полукруг *CD* са средиштем *O*. Конструкција је позната из сл. 269. Изохипсе површине насипа су кругови. Повучемо било који полупречник кроз *O'* и градуирамо га. Тај је полупречник у ствари изводница конуса насипа. Изохипсе (кругове) повучемо до крајњих могућих изводница, дакле до изводница кроз тачке *C* и *D*, или — у пројекцији — до правих *O'C'* и *O'D'*, Од тих изводница даље настављају се равни насипа *M'C'* и *N'D'*. Те равни имају исти пад, а поред тога су и ивице *MC* и *ND* тангенте на полукруг *CD*. Стога ће и изохипсе тих равни бити тангенте на истоимене изохипсе конуса насипа, а додириваће их у тачкама праве *O'C'* и *O'D'*.

У пресецима кругова са истоименим изохипсама терена имамо тачке линије насипа. Ако су ове сувише размакнуте, интерполујемо и на терену и на конусу по једну изохипсу између задатих. Тако су у слици одређене тачке линије насипа са котама 38,5 и 37,5. На делу између двеју тачака са котом 37 спушта се линија насипа испод изохипсе 37 и то отприлике за једну десетину интервала 37—36 терена. Према томе тај исти део линије мора да се спусти и на површини насипа за око једну десетину интервала насипа испод изохипсе 37 насипа. Погрешно би било претпоставити да на том делу линија насипа иде по изохипси насипа — кругу са котом 37. Ово наглашавамо, јер је једна десетина интервала насипа јако мала дуж (0,375 mm) и у слици је није било могуће одвојити од круга на коти 37. (Најнижу тачку могли би тачно одредити помоћу профила повученог на оном месту где се линија главног пада конуса поклапа у пројекцији са линијом главног пада терена).

Од ове линије насипа важи само део између изводница *O'C'* и *O'D'*, дакле лево до тачке 1. Одатле се наставља линија насипа за ивицу *C'M'*, коју смо већ одредили. Она се наставља тангенцијално, јер је и сама раван насипа тангенцијална на конус.

Равни насипа за рампу одредимо као раније. Конструкција нам је позната из сл. 257, па је не треба описивати, као ни одређивање линија насипа. Ове се равни секу са површинама насипа које смо већ одредили на насутом делу платформе. Линије пресека одређујемо када спојимо тачке у којима се пресецају истоимене изохипсе.

Са горње стране на слици сече се раван насипа рампе са равни насипа кроз ивицу $N'D'$. Пресек је права која полови угао између изохипса, дакле симетрала њиховог угла. Треба запазити да та права није уједно и симетрала угла између ивица рампе и платформе (јер изохипсе нису паралелне са ивицом рампе). С доње стране сече се раван насипа рампе са конусом. Пресек треба да је крива II реда.



Сл. 269

Пошто изводнице конуса имају исти пад као и раван, једна је изводница конуса паралелна са пресечном равни. Стога ће пресечна крива бити парабола (заправо један део параболе). Линије насипа рампе и платформе треба да се на обема странама секу у једној тачки пресечне линије.

Око дела платформе, који је у усеку, треба да конструишемо канал који ће скупљати и одводити воду. Овде је потешкоћа са каналом у томе, што су ивице платформе хоризонталне, а канал мора да има известан пад, ако хоћемо да се у њему вода не задржава. И тај пад дна канала зависи углавном од материјала од кога је израђен. Овде ћемо претпоставити да дно канала има пад 2%. На највишој тачки имаће канал свој нормални профил као код ранијег примера, а што иде даље, биће све дубљи (и шири). Највишу тачку канала узмемо где хоћемо; обично се узима негде у располовишту његове дужине, или у оној тачки где је усек највећи. Код овог примера узећемо да је највиша тачка дна канала у тачки *A*, где је усек највећи. Стога продужимо (као помоћне праве) ивице *M'A'* и *A'B'* платформе и нанесемо на њима у задатој размери хоризонтална растојања ивица *a*, *b*, *c* и *d* нормалног канала (50 + 50 + 50 = 150 cm'). Код тачке *B'* дно канала треба да је дубље. Како је растојање тачака *A'* и *B'* 12 m, а пад канала 2%, — дакле 2 cm на сваки метар дужине, — у тачки *B'* треба да је дно канала дубље за 12 × 2 cm = 24 cm. Према томе укупна дубина канала биће 50 + 24 = 74 cm'. Стране канала задржавају при томе свој пад 1 : 1, а и дно канала своју нормалну ширину (50 cm'). То значи да ће хоризонтална растојања ивице *a*, b_1, c_1 и d_1 овако продубљеног канала бити већа, и то 74 + 50 + 74 = 198 cm. Да би овај прорачун ширине канала био јаснији, уцртан је у десном горњем углу слике цртицама профил нормалног канала у тачки *A'*, а пуним линијама пресек продубљеног канала у тачки *B'*; оба канала су котирана. Продужимо ивицу *B' N'* као помоћну праву и на њој нанесемо у датој размери од тачке *B'* дужи 74 + 50 + 74 cm'. Када добијене тачке спојимо са тачкама на продуженој ивици *A' M'*, повучене праве су нам пројекције ивица *b*, *c* и *d* канала дуж стране *A' B'* платформе.

На исти начин конструишемо канал дуж ивице *A' M'*. Како је та ивица краћа од 12 m', да не бисмо морали, према њеној дужини, понова прорачунавати хоризонтална растојања ивица канала, нанесемо на страни *A' C'* платформе дуж од 12 m', конструишемо канал као и пре, па цртамо само његов део од *A'* до изохипсе 41 терена.

И код тачке *B'* канал се ломи, а прелом можемо најлакше конструисати овако. Из *B'* повучемо симетралу угла у *B'* до пресека са првом ивицом b_1 канала. Повучена симетрала је пресек двеју страна канала (јер имају исти пад 1 : 1). Из добијене тачке повучемо праву под 45° до пресека са другом ивицом c_1' дна канала. Ова права на цртежу није повучена, иако би требало, јер је она пресек равни дна канала дуж ивице *A' B'* и *B' N'*. Из тако добијене тачке на ивици c_1' дна канала повучемо праву која заклапа угао од 45° са ивицом d_1' канала. Та је права већ пресечна права за раван усека дуж ивица *A' B'* и *B' N'*. Повучемо ли из добијених тачака управне на већ конструисане ивице b_1, c_1 и d_1 канала, пошто су и ивице платформе по 90°, то ће нам бити ивице канала дуж стране B' N' платформе. Повучемо их до пресека са изохипсом 41 терена.

Када су конструисане ивице канала, нарочито ивице d, можемо да конструишемо раван усека и линије усека дуж ивица A' B', B' N' и A' M'. (Изохипсе тих равни паралелне су са ивицама d канала, јер нам оне, као што смо раније видели, замењују ивице платформе проширене преко отвора канала.

Канале треба продужити док се вода својим природним током не прелије по терену. Само треба водити рачуна о томе да воду смемо испустити из канала само у случају ако се она својим природним током, — дуж линија главног пада терена, — удаљује од насипа. У противном треба продужити канал. Стога је леви канал продужен до испод изохипсе 39 терена, а десни је спроведен дуж целе горње линије насипа рампе. Ово продужавање канала црта се само шематски као да је свугде нормалан пресек канала 50 cm дубок, и то тако да је најближа ивица 1 m удаљена од линије насипа.

На крају конструисан је и тражени профил RS. Конструкција је позната, па је дајемо без описа.

*

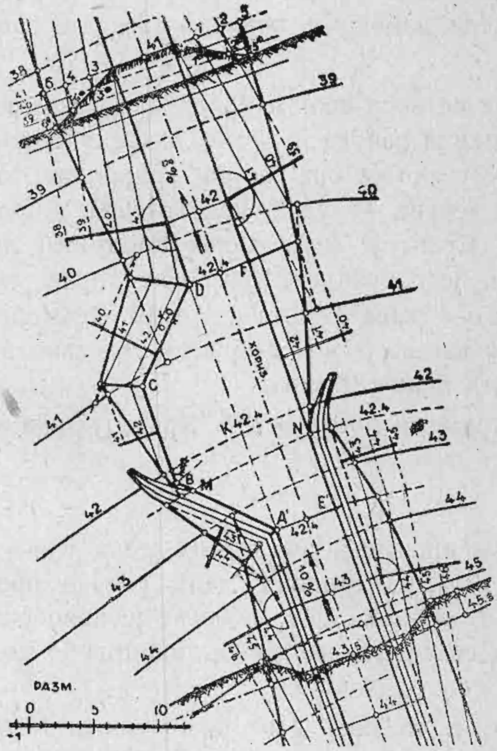
Као други пример задат је на произвољном терену један пут са проширењем. Пут је у паду од $10^0/_0$, на средњем делу где је проширење $ABCD$ он је хоризонталан на коти **42**,4, а даље је поново у паду, и то $8^0/_0$. Да не би морали сваки пут рачунати, нацртан је код овог примера размерник.

Најпре ћемо градуирати пут, и то онај део који има пад $10^0/_0$. Интервал тога дела пута биће $i = 10$ m. Тачка E је на коти 42,4. Да би од ње дошли до тачке са котом 43 треба нам 0,6 $i = 6$ m', јер је висинска разлика 43—42,4 = 0,6 m'. Од тачке 43 нанесемо цео интервал 10 m и имамо тачку 44. Доњи део пута има пад $8^0/_0$, дакле интервал $i = 12{,}5$. За 1 m висинске разлике $i = 12{,}5$ m. Од тачке F са котом 42,4 до тачке са котом 42 висинска је разлика 0,4 m, па ће хоризонтално отстојање тих тачака на траси пута (у пројекцији) бити $0{,}4\,i = 0{,}4 \times 12{,}5$ m $=5$ m'. Нанесемо ли одатле даље цео интервал, имаћемо тачку са котом 41.

Када је пут котиран, треба да видимо како он стоји према терену. Лако се запажа да је део пута са $8^0/_0$ пада у насипу, а други део у усеку. Према томе пут пресеца терен негде на хоризонталном делу пута. Да би одредили тачно продоре ивица пута кроз терен, интерполујемо изохипсу терена са котом 42,4. Њен пресек са ивицама пута даје продорне тачке M и N пута кроз терен.

Сада можемо да пређемо на одређивање насипа и усека. За насип нека је задат пад 1 : 2, а за усек 2 : 3. Раван насипа за део пута у паду одредимо као раније помоћу конуса. Врхови конуса су на коти 42, а базиси — кругови са $r = i = 2$ m — на коти 41.

За хоризонтални део пута изохипсе равни биће паралелне са самим ивицама, дакле линије главног пада управне на ивице. Малу потешкоћу може да претставља градуирање тих линија главног пада ради тога, што су ивице на коти 42,4. Да би одредили изохипсе са котом 42, треба да нанесемо дуж од 0,4 $i = 0,8$ m (јер је висинска разлика 42,4—42 = 0,4 m).



Сл. 270

Обична је грешка код почетника, да забораве конструисати и уцртати пресеке појединих равни насипа. Како све равни насипа имају једнак пад интервали су им једнаки, па су праве по којима се оне секу симетрале углова између изохипса пресечних равни. У тачкама *B* и *C* те су симетрале углова изохипса уједно и симетрале ивица платформе, јер су изохипсе паралелне са тим ивицама. (Ивице су хоризонталне, па су и оне изохипсе равни. У тачки *D* пресечна права је симетрала угла између изохипса, али није симетрала угла између ивица, јер је ивица пута у паду и није паралелна са изохипсама.

Понајчешће почетници забораве да конструишу и уцртају пресек равни насипа у тачки *F*. Ивице платформе и пута заклапају у пројекцији угао од 180^0, али су то две одвојене ивице: једна хоризонтална, а друга у паду. Стога имају и две одвојене равни насипа чије се изохипсе не поклапају него секу. На слици је тај пресек конструисан и уцртан, а конструисано је и продужење линије насипа за једну и другу раван.

Одређивање линија насипа познато нам је од пре, па је нацртано без описа.

Пре него што пређемо на одређивање равни и линија усека, треба да конструишемо канале поред ивица пута. Како је пад усека 2 : 3, то ће и профил канала бити мало измењен. Страна канала од ивице пута до ивице дна канала има пад 1 : 1, ширина и дубина канала остају као пре 50 cm, а супротна страна има пад 2 : 3 као и раван усека. Према томе ће хоризонтална растојања ивица канала бити 50+50++75 cm'. Где ивице пута нису у паду, него хоризонталне, треба да дамо каналу известан пад. Усвојићемо и овде 2%. У пројекцији ће се тај пад видети по томе, што ће услед веће дубине канала бити већа хоризонтална растојања ивица. Та би проширења требало конструисати дуж ивица *EN* и *AM*. Да не би двапут рачунали та растојања, – пошто ивице нису исте дужине, – продужимо ивице пута преко *N* и *M* на 10 m и израчунамо растојања за ту дужину (70+50+105), па их нанесемо а ивице канала уцртамо само до пресека са изохипсом 42,4 терена. Остало нам је познато од пре, а и у слици је довољно јасно нацртано.

На крају су на истом примеру уцртана два попречна пресека (нормална профила), и то један у насипу, а други у усеку. Пут је код оба случаја у паду, па би било незгодно узимати профиле било где. Узимају се обично у тачкама пута са пуним котама, или у таквим тачкама чије коте можемо лако да одредимо. Стога су профили узети у тачкама са котом 41 и 43,5. Праве повучене кроз те тачке а управно на осовину пута претстављају нам вертикалне равни, па треба да одредимо њихове пресеке. Задатак нам је познат од раније. Сам пресек (профил) можемо да цртамо негде са стране, па чак и на засебном листу, али можемо да га цртамо и на самом месту где је пут пресечен. У овом последњем случају претпостављамо да је профил оборен у ону висинску раван, која има исту коту као и тачка пута кроз коју је профил узет. Тако ћемо нормални профил у насипу цртати у висинској равни 41, а онај у усеку у висинској равни 43,5. Поред тога претстављамо да нам управна на трасу пута, која обележава пројекцију профилне равни, претставља на профилу висинску раван са котом коју на том месту има пут (круна пута). На тај начин круна пута остаје непомерена (уцртана је већ чим је повучена права која означава раван профила). Све тачке са мањим котама долазе испод ње, а све тачке са већим котама изнад ње.

Код цртања профила најпре се конструише пресек (линија) терена. Код профила у коти 41 на нашем примеру одређивање пресека терена је мало отежано, јер профилна раван (управна на осовину пута) не пресеца ниједну изохипсу пута. Пресек ипак можемо да одредимо. Довољно је да узмемо неколико тачака терена на самој правој која показује раван профила, па да размерником одредимо њихове коте. Тако су одређене тачке са котама 38.23, 38.25 и 38,27 и уцртане на профилу.

Када смо уцртали круну пута и пресек терена, можемо да одредимо пресеке равни насипа. Видимо где раван профила пресеца поједине изохипсе равни насипа, обележимо те тачке са 1, 2, 3 и 4, па сваку од тих тачака спустимо (управно на трасу профилне равни) на своју висинску раван, које пре тога уцртамо. Тако одређене гачке $1^0 2^0$ и $3^0 4^0$ спојимо правима, па нам те праве претстављају у профилу равни насипа. Према томе обе те праве морају да пролазе кроз крајње тачке круне пута (јер равни насипа пролазе кроз ивице пута). Када те праве продужимо оне пресецају у тачкама 5^0 и 6^0 пресек (линију) терена на профилу. Према томе, тачке 5^0 и 6^0 су две тачке где равни насипа секу терен. Краће речено, тачке 5^0 и 6^0 су две тачке линије насипа. То значи да тачке 5^0 и 6^0 треба да буду на ординатама управним на раван профила а повученим из тачака 5 и 6. (Тачке 5 и 6 су тачке у којима профилна раван сече линије насипа). На исти начин одређен је и други попречни профил у тачки са котом 43,5 пута.

Профилна раван стоји управно на осовину пута и на његове ивице, па није управна на изохипсе равни насипа (јер је пут у паду, па изохипсе равни насипа нису паралелне са ивицама пута). Према томе праве $1^0-2^0-5^0$ и $3^0-5^0-6^0$ на профилу неће имати пад 1 : 2 колико је тражено за равни насипа, него нешто мало мањи. Та је разлика, између задатог пада и онога који се показује на профилу утолико мања, уколико је пад пута мањи и уколико је пад насипа (односно усека) већи. Уопште, код нормалних случајева у инжењерској пракси та је разлика толико мала, да се на цртежу не може ни проверити. А када је пут хоризонталан и та мала разлика нестаје, јер су изохипсе насипа (односно усека) паралелне са ивицама пута, па је профилна раван у правцу линије главног пада насипа (или усека).

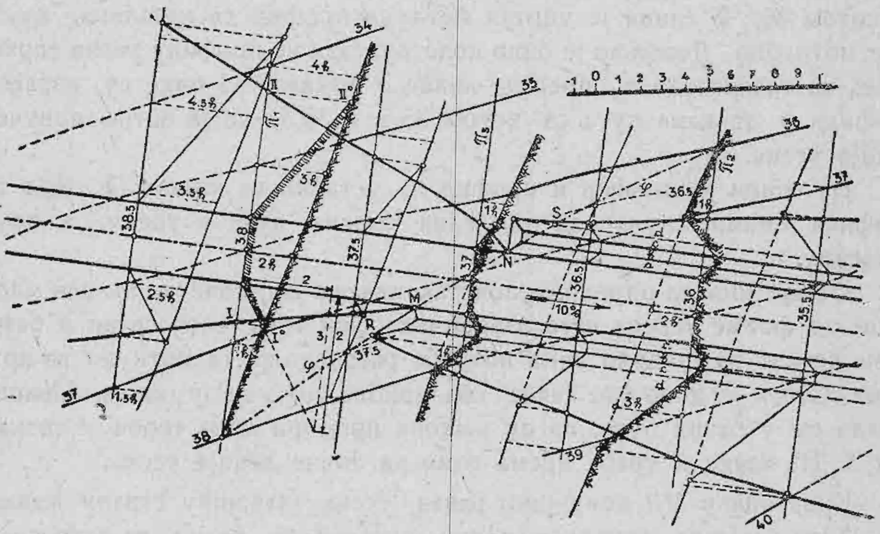
Ако занемаримо ту малу разлику, можемо да нацртамо профил пута много лакше. Када имамо на профилу уцртану круну пута и пресек (линију) терена, повучемо из крајњих тачака круне пута праве са траженим падом (овде 1 : 2 и 2 : 3), па нам је профил пута потпуно одређен. Тачке 5^0 и 6^0 неће се практично разликовати од тачака 5^0 и 6^0 одређених стварним обарањем.

§ 114. Одређивање линија насипа и усека помоћу попречних профила

Овакво цртање попречних профила може да се искористи и као метода за директно одређивање линија насипа и усека. Та је метода нарочито подесна код примера где су изохипсе терена скоро паралелне са трасом пута. Узмемо ли у обзир да се у инжењерској пракси настоји да се трасе путева повлаче што паралелније са изохипсама терена, да би се избегли велики и скупи радови, ова метода добија још већи значај и скоро искључиву примену. Ово утолико пре, што се попречни профили морају цртати већ и ради одређивања обима радова.

Као пример задат је произвољан терен и на њему траса неког пута са падом 10% и тачком са котом 38. Треба да одредимо линије усека и насипа с тим, да насип има пад 2:3, а усек 1:1. Ширина пута 3 m. Размерник је нацртан на слици.

Уцртамо ивице пута и градуирамо трасу. Као код ранијих задатака, можемо и овде одмах да кажемо да је пут код тачке са котом 38 у насипу, а код тачке са котом 36 у усеку. Да би одредили тачно где ивице пута продиру кроз терен, конструишемо пресек равни пута са површином терена. Пресек је крива φ, па су тачке M и N продорне тачке ивица пута. (Како су тачке у којима се секу изохипсе 36, 37 и 38 много размакнуте, интерполоване су изохипсе 36,5 и 37,5, па је крива φ одређена много тачније). Линије насипа и усека одредићемо помоћу попречних профила. Као први одредићемо профил у тачки пута са котом 38. Профилна раван π_1 стоји управно на пројекцију осовине пута (и на H). Круна пута на профилу поклапа се са π_1.



Сл. 271

Пресек (линију) терена на профилу конструишемо када оборимо тачке у којима π_1 пресеца поједине изохипсе терена (висинске разлике су написане на профилу и нанете $\perp \pi_1$). Када већ имамо на профилу круну пута и линију терена, можемо да уцртамо равни насипа. Те равни показиваће се на профилу као праве које полазе из крајњих тачака круне пута, а имају пад 2:3. Нанесемо у било којој размери на профилу две јединице вертикално, а одатле три јединице хоризонтално, па је тиме конструисана та права, односно раван насипа на профилу. Та права сече линију терена у тачки I°. Вратимо је натраг ($\perp \pi_1$), па је тачка I једна тачка тражене линије насипа. Исто тако је одређена и тачка II са друге стране пута.

Да не би морали сваки пут конструисати праву са задатим падом (нарочито када пут није прав), постоје готови шаблони (а могу и да се израде од картона или дрвета) у виду малих троуглова. Тиме се конструкција профила јако упрошћава и своди, у ствари, једино на одређивање пресека (линије) терена.

Када одредимо неколико оваквих профила и сваким профилом по једну, односно две тачке линије насипа, можемо да спојимо одређене тачке што правилнијом кривом. Тиме су одређене линије насипа. Ако су тачке са пуним котама сувише размакнуте можемо, ради веће тачности, да уметнемо између њих и друге профиле у тачкама трасе чије коте унапред одредимо. Тако су у слици израђени профили у тачкама 38,5 и 37,5.

Потпуно на исти начин конструишу се профили за део пута који је у усеку. Једино је код усека боље уцртати најпре ивице канала, а затим профиле. Тако је у слици конструисан профил π_2 у тачки пута са котом 36. У слици је уцртан потпуни профил са каналима, али то није потребно. Довољно је било конструисати на профилу равни (праве) усека из тачака где π_2 пресеца ивице *d* канала. И овде су израђени профили у тачкама пута са котом 35,5 и 36,5, па је затим повучена линија усека.

На слици је израђен и профил π_3 у тачки са котом 37. Код тог профила имамо случај да је једна страна пута у усеку, а друга у насипу.

Остаје још да одредимо почетак канала. Тај почетак зависи много више од форме терена него завршетак. Сем тога је то ситан и безначајан детаљ, па стварно нема потребе разрађивата га потпуно на цртежима. Стога је довољно тачна ова приближна конструкција. Ивице *d* канала су у равни пута, па су њихови продори кроз терен у тачкама *R* и *S*. Из тачке *R* треба према томе да почне линија усека.

Кроз праву *MR* повучемо раван усека (завршну страну канала) 1:1. Када би сада одредили тачно пресеке те равни са странама и дном канала, конструкција би била исправна и тачна. Међутим, како немамо изохипсе тих равни, а и њихова конструкција је прилично тешка услед малих димензија канала на цртежу, смемо да урадимо овако. Претпоставимо да се та раван сече са странама канала по симетралама углова које ивица *RM* заклапа са ивицом пута и ивицом *d* канала. Дно канала сећи ће по правој $\parallel$ *RM*. Ова конструкција је врло једноставна а и прилично тачна, јер се обично симетрале не разликују много од стварних пресека, нарочито не на тако кратким дужима.

Ако на цртежу немамо конструисану криву φ, може почетак канала да се назначи на цртежу као што је урађено на слици код тачке *N*.

*

На крају задат је у сл. 272 неки терен и на њему трасе двају путева. Траса са тачкама *A B C D E* (или краће траса *BC*) и траса са тачкама *FG* (или краће траса *FG*). Пут са трасом *BC* је широк 4 m. На делу од *D—E* је хоризонталан на коти 76, а остали делови су у паду, и то до D 4%, а од E 8%. Други пут је 3 m широк, од тачке F до G хоризонталан на коти 76, а остали делови у паду 5%. За усек се предвиђа пад 1:1, а за насип 2:3. Размера је нацртана на плану.

Градуирамо трасе и повучемо изохипсе круне пута (на делу где је траса округла изохипсе иду кроз средиште III круга). Оба пута су у насипу сем дела пута BC, коме је тачка D и део у паду 4% у усеку.

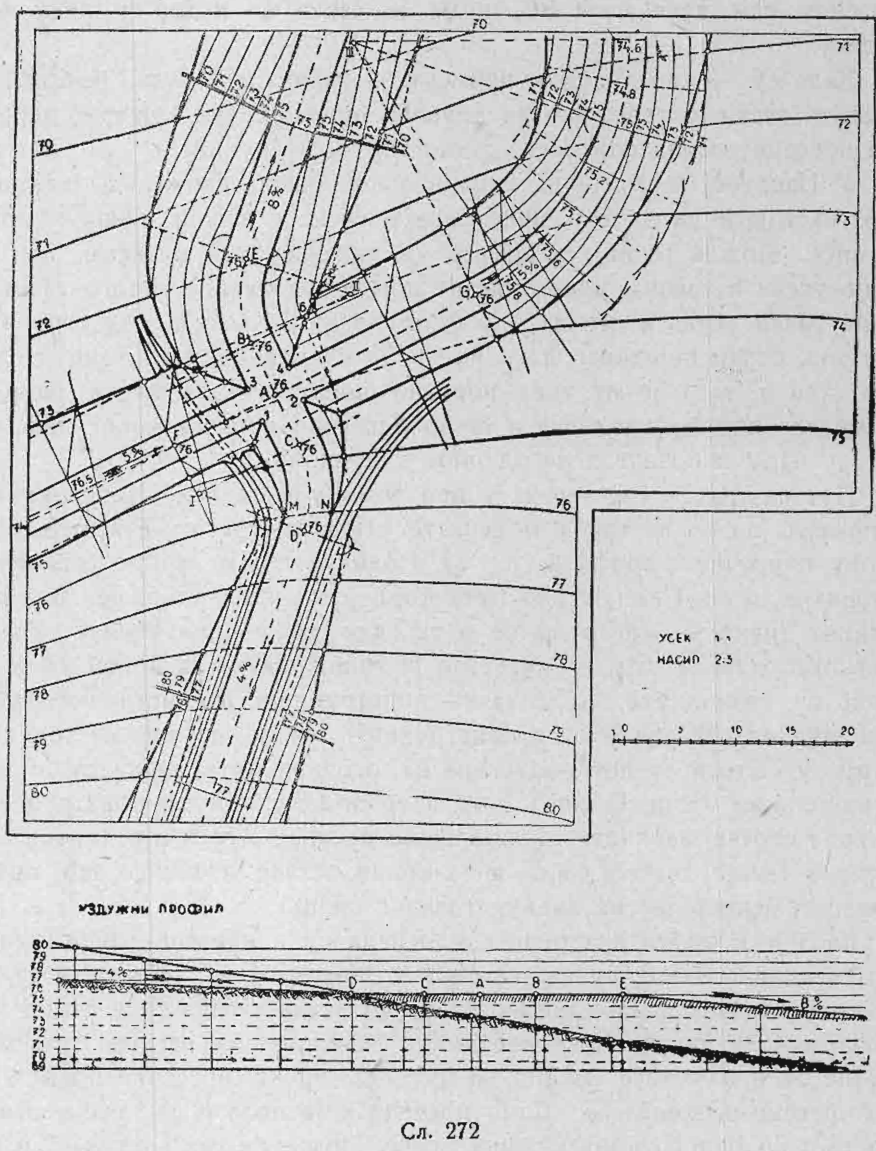
Када су — као на овом примеру — задата два пута, најбоље је решавати сваки за себе, као да други не постоји. Тек накнадно одреде се и пресеци насипа или усека једног пута са другим.

У Нацртној геометрији, нарочито код овако сложених задатака, треба настојати да се што више линија усека и насипа реши помоћу изохипса. Можда то није у складу са инжењерском праксом, али су линије усека и насипа, конструисане помоћу изохипса, много тачније, а саме равни усека и насипа много уочљивије. Касније, код стручних предмета, сваки појединац лако ће прећи на методу рада помоћу профила. Али и тада ће му увек корисно послужити запажена тачност ове методе помоћу изохипса и тачно одвајање хоризонталног дела од онога у паду и правог дела од оног у кривини.

Пут са трасом BC решен је цео помоћу изохипса. Конструкције су познате, па их не треба описивати. Пут са трасом EG решен је помоћу попречних профила, јер су изохипсе терена скоро паралелне са ивицама пута. Само је део пута који је у кривини решен помоћу изохипса (иако је могло да се и тај део реши профилима). Услед малог пада пута — 5% — интервал је велик. Тачке са котом 76 и 75 толико су размакнуте, да је тачна конструкција изохипса немогућа. Исто тако би нетачна била и конструкција линија насипа на толиком растојању. Стога су интерполоване на осовини пута тачке са висинском разликом 0,2 m. Помоћу њих, и то помоћу конуса, конструисане су с обе стране изохипсе 71 површина насипа. Затим су (цртицама) повучене линије главног пада и на концу остале изохипсе као ортогоналне трајекторије тих линија (главног пада).

Када је и други пут решен, одређени су и пресеци равни насипа на раскрсници. Ивице путева се секу у тачкама 1—4. Оба пута су на том делу хоризонтална. Стога ће пресеци равни насипа бити симетрале углова између ивица. Како већ имамо изохипсе за насипе пута BC, уцртане су и изохипсе насипа за пут FG, па ће пресечне праве ићи кроз пресеке изохипса 75. Само пресеци који полазе из тачака 3 и 4 не остају по целој својој дужини праве. Праве су само од 3—5 и од 4—6 као пресеци двеју равни. Од тачке B, — заправо од полупречника B II — пут је у кривини, а површина насипа конус. Услед тога пресеци од тачака 5 и 6 даље неће бити праве, него криве, и то, као што знамо од пре, делови парабола. (С десне стране та парабола ишла би до тачке 7, па би се поново настављала као права. Та права претстављала би пресек равни насипа пута *FG* са равни насипа оног дела пута *BC* који је иза тачке *E* у паду. Ово је наведено ради примера, јер насип не постоји ни до тачке 7).

Канал из усека пута *BC* спроведен је испод насипа пута *FG* док вода уз природан пад дуж линија главног пада терена може да се сама



Сл. 272

удаљава од насипа. С друге стране треба повући канал поред насипа пута *FG*, да би га штитио од површинске воде. (Да цртеж не би био оптерећен, канал је нацртан само делимично).

Испод задатка уцртан је и профил пута *BC*.

§ 115. Одређивање сенки у котираној пројекцији

За одређивање сенки у котираној пројекцији важе сва правила која смо пре навели за ортогоналну пројекцију уопште. Према томе нема ништа новога да се помене. Једино могу да се наведу упутства за одређивање сопствене и бачене сенке код теренских површина, које су нам се у котираној пројекцији појавиле као нешто ново.

Сопствену и бачену сенку теренске површине најлакше ћемо одредити ако пресечемо терен једним системом равни управних на *H* а у правцу светлости *l'*. Када конструишемо те профиле, па повучемо на њих тангенте у правцу светлости, додирне тачке тих тангената биће тачке границе сопствене сенке. Ако продужимо те тангенте док оне понова продру кроз терен, те продорне тачке биће тачке бачене сенке.

Знамо ли унапред да нека друга линија баца своју сенку по терену, можемо бачену сенку да конструишемо и овако. Одредимо сенку те линије на висинску раван било које изохипсе терена. Тамо где бачена сенка пресеца изохипсу, имамо тачке бачене сенке.

Хоћемо ли да одредимо још неку тачку сенке, померимо бачену сенку линије на прву нижу висинску раван у којој постоји и изохипса терена. Тиме добијамо, као пре, нове тачке бачене сенке. То померање сенке може да се изведе тако, да се бачена сенка линије на било којој хоризонталној равни конструише на провидној хартији и да се на тој сенци нарочито нагласе сенке двеју размакнутих тачака *A* и *B*. На цртежу се само повуку зраци светлости из тих тачака *A* и *B* и јасно градуирају. Померање бачене сенке из једне висинске равни у другу врши се стварним померањем провидне хартије и то тако, да тачке A_S и B_S падну на ону коту зрака из *A* и *B* за коју се висинску раван тражи сенка.

VI. КРОВНЕ ПОВРШИНЕ

§ 116. Увод

Одређивање пресека кровних површина учи се у Нацртној геометрији као део примењене Нацртне геометрије. Обично се предаје иза Котиране пројекције, јер се и примери из пресека кровних конструкција решавају обично у једној пројекцији.

Као задатак за Нацртну геометрију могло би да се узме само одређивање пресека кровних површина. Међутим уз тај задатак појављује се још један, а то је одређивање склопа кровних површина и њихов пад. Овај други део задатка зависи од много чега, као на пр. од основе зграде, врсте материјала од које је кровни покривач, од месних климатских прилика, од естетске целине коју мора да сачињава кров са осталим деловима зграде.

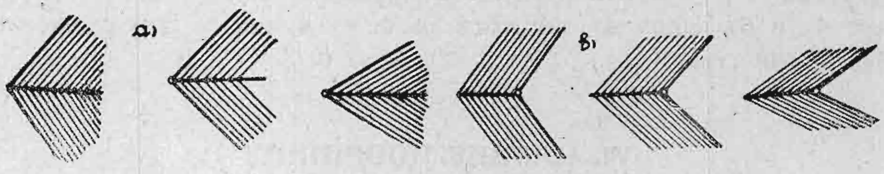
Природно да о свим тим елементима не можемо водити рачуна у Нацртној геометрији. У Нацртној геометрији претпостављаћемо да све равни крова имају једнак пад и да су стрехе свих кровних равни хоризонталне и на истој висини. (Стрехом ћемо називати овде најнижу хоризонталну ивицу сваке поједине кровне равни). Када је задата основа неке зграде, ове две претпоставке чине да је задатак потпуно одређен и да постоји само једно решење.

Овако постављен задатак спада у ред положајних задатака и може да се реши у самој једној пројекцији чак и без обзира на пад крова. Друга пројекција се често црта ради боље претставе и ради одређивања правих величина.

У том случају треба да знамо колики је пад крова. Пад крова зависи, без обзира на естетску страну, углавном од материјала од кога је кровни покривач и од климатских прилика. Код наших задатака узимаћемо пад 2 : 3 до 1 : 1.

Приликом решавања задатака стално ћемо се враћати на ова два елементарна правила:

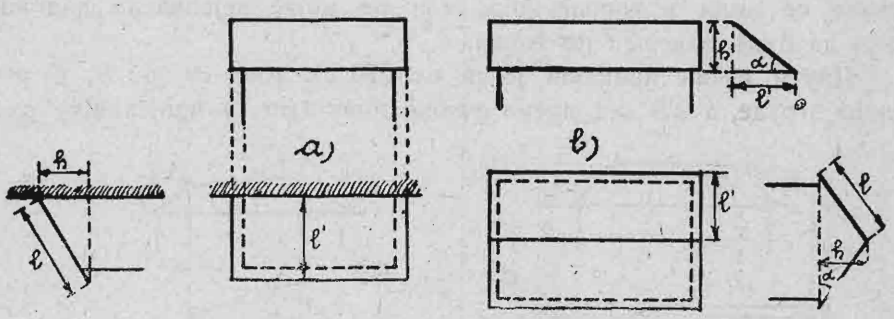
1) *Две кровне равни са паралелним стрехама секу се по правој која је паралелна са стрехама.* У пројекцији она полови растојање задатих стреха, па је свака њена тачка једнако удаљена и од једне и од друге стрехе. Ту хоризонталну пресечну праву називамо *„слеме“*. (Овде су узете у обзир претпоставке да су стрехе паралелне и на истој висини, а падови равни једнаки). Друго правило било би: *Две кровне равни, чије стрехе нису паралелне, секу се по правој која пролази кроз пресечну тачку стреха и у пројекцији полови угао који заклапају стрехе.* Свака тачка пресечне праве једнако је удаљена и од једне и од друге стрехе. (Природно да и овде важе предње претпоставке о стрехама и падовима). Ове пресечне праве дају изглед крову. Стога су важне колико и слеме, па имају нарочито име. Ако је угао који сачињавају ове две стрехе у основи зграде испупчен угао, тада пресечну праву називамо *„грбина“* крова (в. сл. 273*a*). Ако је угао упуштен, пресечну праву називамо *„увала“* крова (в. сл. 273*b*).



Сл. 273 *a* и *b*

§ 117. Једноставни кровови

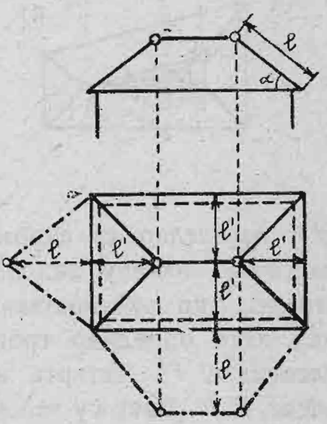
Од свих кровова најједноставнији је *„кров на једну воду“*. Овакви кровови употребљавају се само за мале зграде, а за веће једино ако је зграда узидана, то јест ако се једним дужим зидом ослања на комшиско имање. Од зидова код оваквог крова два дужа су хоризонтална, али на разним висинама, а код друга два зида највиша ивица има исти пад као и кров. Ширина крова, односно дужина *b* рогова види се у III пројекцији (сл. 274*a*).



Сл. 274 *a* и *b*

Друга врста крова је „*кров на две воде*". Зграда је овде покривена двема кровним равнима (сл. 274*b*). У профилној пројекцији види се ширина крова. Од зидова два су хоризонтална и на истој висини, а два завршавају „*ластавицом*": имају завршетак са истим падом као и кровне равни.

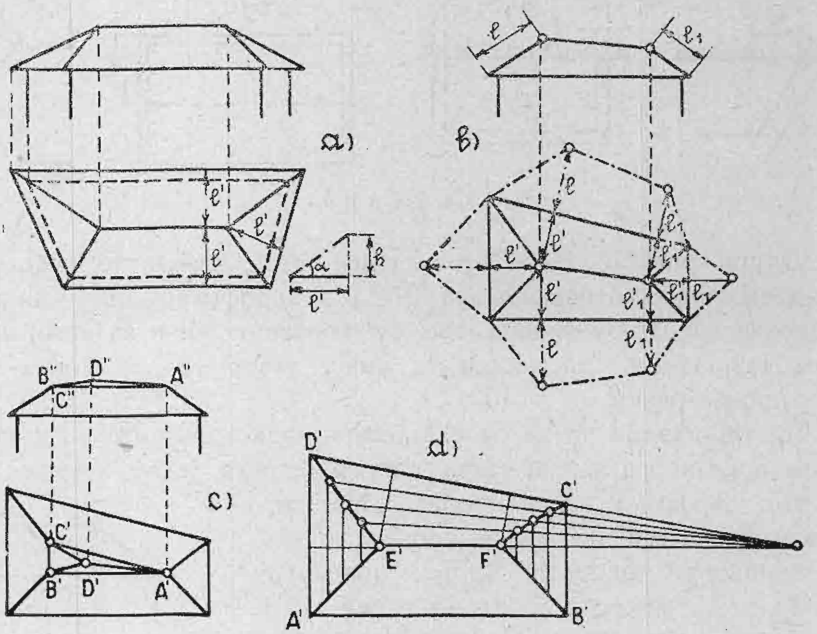
Претпоставимо ли да су сва четири зида хоризонтална и на истој висини, а да поред сваког зида постоји стреха једне кровне равни, добијамо „*кров на четири воде*". Тиме смо уствари дошли до оне форме кровова о којима ћемо овде говорити. Кровне површине се секу, а као пресеке добивамо слеме и четири грбине (в. сл. 275). Ако нам је задат пад или угао нагиба α, можемо да уцртамо другу пројекцију и да одредимо праву величину кровних равни. Конструкција је довољно јасна на самој слици. Основа зграде не мора да буде правоугаоник. Два зида су обично паралелна, а друга два могу да буду под било којим углом. Ако су два дужа зида паралелна, решење остаје као и пре, тј. имамо слеме и четири грбине (в. сл. 276*a*). Ако су паралелна два краћа зида, или ако чак ни та два нису паралелна, решење се мало мења. Имамо четири грбине као пре, али слеме није слеме, него понова једна грбина, пошто није хоризонтално (в. сл. 276*b*).



Сл. 275

Овакво „*косо слеме*" није лепо, па се кровна конструкција обично дотерује тако, да слеме — бар за око — буде хоризонтално. Има за то више начина, а показаћемо само два. У сл. 276*c* задржана је висина тачке *A* као висина крова, па су све кровне равни пресечене на тој висини једном хоризонталном равни. На тај начин добивен је на крову хоризонталан троугао *ABC*. Тај троугао се покрива другим материјалом — обично лимом — са што мањим падом, а и поједине равни немају исти пад. Гледа ли се кров одоздо са улице, ивица *AB* заклања горњи кров са малим падом, па изгледа да је та ивица слеме. Из даљине се види и горњи кров, али он може неједнаким падовима равни да буде подешен по жељи.

Други начин приказан је на сл. 276 *d*). Ако су *A*, *B*, *C* и *D* углови зграде, а *AB* зид према улици, повучемо (у пројекцији) праву



Сл. 276 *a*, *b*, *c* и *d*

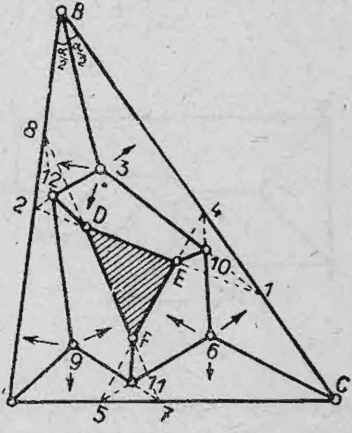
E' F паралелно са зидом *A' B'* и то тако, да буде отприлике на пола растојања између зидова *A' B'* и *C' D'*. Ту праву сматрамо као слеме зграде. Ако претпоставимо да равни крова *AB*, *BC* и *AD* имају исти пад, лако одредимо грбине *A' E'* и *B' F'*. Тиме је одређена и дужина слемена *E' F'*. Четврта кровна површина пролази кроз стреху *C' D'* и слеме *E' F'*. Како су те две праве витоперне, кровна површина неће бити раван него нека праволиниска површина (завојна површина). Да би одредили ту површину, — а уједно и да би конструисали њен пресек са равнима *C' B'* и *A' D'*, — спустимо из тачака *E'* и *F'* управне на *A' D'*, *D' C'* и *C' B'*. Те управне поделимо на једнак број делова. (У слици су подељене свака у четири једнака дела). Кроз подеоне тачке повучемо праве, па ће то бити изохипсе паралелне са стрехом, а за праволиниску површину ићи ће кроз тачку у којој се, у пројекцији, секу стреха *C'D* и слеме *E' F'*. У пресеку изохипса имамо поједине тачке грбина *F' C'* и *E' D'*. Грбине у овом случају нису праве, него криве, али се та кривина на крову слабо запажа.

Оба ова случаја под *c*) и *d*) стварно не спадају овде. Показана су тек толико да се виде и та решења. Код свих идућих задатака водићемо рачуна само о претпоставкама које смо навели у уводу, а нимало о изгледу крова.

§ 118. Сложенији кровови

Као први пример нека нам је задата основа једне зграде (сл. 277). Зграда је у облику троугла *ABC* и са троугластим двориштем *DEF*. Треба да одредимо кровне равни и њихове пресеке. Постоји само једно решење, ако се тачно придржавамо претпоставки. Да их поновимо. 1) Над сваким зидом постоји стреха једне кровне равни. 2) Све стрехе су хоризонталне и на истој висини. 3) Све равни крова имају исти пад. Сем ових претпоставки постоји још једна, коју намеће сама конструкција покривача. То је да на крову несме никада да се појави нека хоризонтална увала. Касније ћемо видети још један пропис, који ће унеколико изменити нашу прву претпоставку.

Пређимо на решавање постављеног задатка. На згради имамо три спољна зида и три дворишна, па ћемо по првој претпоставци имати шест кровних равни. Пресеци равни чије се стрехе секу биће у пројекцији симетрале углова које заклапају стрехе. Тако ће пресек равни *AB* и *BC*, бити симетрала угла у тачки *B*.



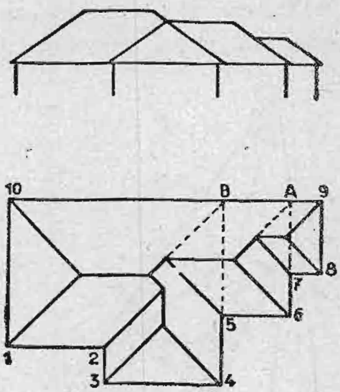
Сл. 277

Само по себи се разуме, да ће и тај пресек — та грбина — престати тамо, где престане једна од равни које су се по њој секле. Обе равни *AB* и *BC* секу се у овом случају са равни *DE*. (Равни крова називамо и обележавамо обично по њиховим стрехама). Да бисмо одредили те пресеке, продужимо стреху *DE* до пресеке 1 и 2 са стрехама *CB* и *BA*. Пресеци ће бити поново симетрале углова у 1 и 2. Симетрала из 1 сече се са симетралом из *B* у тачки 3. Чим се две пресечне праве кровних равни, — биле оне слемена, грбине или увале, — секу у једној тачки, кроз ту тачку пролази најмање још једна пресечна права. (То је врх једног рогља.) Одатле следи да и симетрала угла из тачке 2 мора да пролази кроз тачку 3. Ни грбина 1 3 не остаје у целој својој дужини. Раван *DE* престаје, односно сече се са равни *EF* и то по ували, симетрали угла у *E*. Та се увала сече у тачки 10 са грбином 1 3. Према томе, грбина 1 3 важи до тачке 10 као пресек равни *BC* са равни *EF*. И ту грбину одредимо најлакше помоћу пресека продужених стреха, и то као симетралу угла у тачки 4. Остале пресеке одредимо на потпуно исти начин. Конструкција се само понавља, а из слике је све довољно јасно.

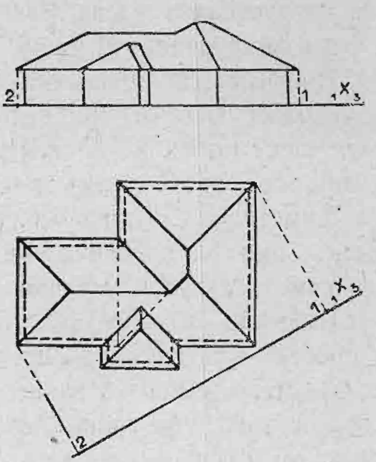
Основа зграде узета је у овој слици потпуно произвољно; тежило се за тим да конструкција буде јасна, без икаквог обзира на могућност извођења и на естетску страну крова. Код идућих задатака узимаћемо примере из праксе.

У сл. 278 решен је кров једне зграде. Зидови зграде су сви под правим углом, па су симетрале углова (грбине и увале) под углом од 45°. Решење је врло једноставно. Довољно је само водити рачуна о томе, која се раван са којом сече. Конструкција је сва уцртана, па је и из слике довољно јасна. На овом примеру уцртана је и друга пројекција крова.

Обично се друга пројекција не црта овако с лица, него се кров пројектује на неку другу пројекциску раван која није паралелна са неким истакнутим правцем зидова. Тиме се на слици постиже бољи преглед кровних равни и њихових пресека. Тако је у сл. 279 друга пројекција крова конструисана на једној равни ${}_1X_3$ која заклапа угао од 30° према главном правцу зидова зграде. Сама пројекција црта се или на ${}_1X_3$, или било где на листу. Најпре се поједине тачке зидова и крова пројектују ординатама $\perp {}_1X_3$ (на слици су уцртане и обележене само ординате из крајњих тачака крова и њихове продорне тачке 1 и 2), а тада се за поједине тачке наносе висине. Висина неке тачке крова зависи од пада кровне равни и од хоризонталног отстојања те тачке од стрехе. Нацртамо било где са стране усвојени пад кровних равни, па на тој слици можемо да одредимо висину било које тачке крова.



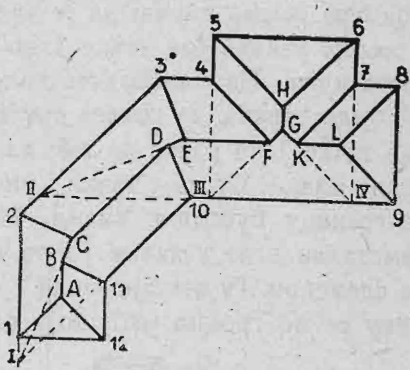
Сл. 278



Сл. 279

У сл. 280 решен је један пример крова код кога стрехе нису све под правим углом. Решење је једноставно; треба само водити рачуна о томе, која се раван са којом сече.

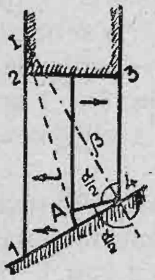
Тако се равни 2 – 1 и 1 – 12 секу по симетрали угла у 1, а равни 1 – 12 и 12 – 11 по симетрали у 12. Те симетрале важе као стварне грбине дотле, док се не пресеку у тачки *A*. Код *A* нестаје равни 1 – 12, па се даље секу равни 1 – 2 и 12 – 11. Како су им стрехе паралелне, секу се по слемену које пролази кроз A. Само и равни 12 – 11 убрзо нестаје, јер се сече са равни 11 – 10 по ували, симетрали угла у тачки 11. Како се та увала сече са слеменом из A у тачки B, од те тачке даље секу се равни 1 – 2 и 11 – 10. Њихов пресек одредимо најлакше ако продужимо стрехе до пресека I. Пресек треба да је симетрала угла у тачки I, али треба да пролази и кроз тачку B. Даља конструкција назначена је на слици и треба да је пратимо увек истим описом.



Сл. 280

Поред трију претпоставки које важе као правила за одређивање склопа кровних равни, постоји још и једно правило о којем досад нисмо говорили. Правило гласи: *Вода са крова не сме да иде на суседно имање. Исто тако не сме да иде ни на неки зид који се пење изнад крова.* У тим случајевима је дозвољено да вода тече својим природним падом по кровној равни паралелно са границом суседног имања или дуж вишег зида.

Као пример задата је у слици 281 једна једноставна зграда која је са обе стране „*узидана*“ (с обе стране има суседна имања). Према томе може кров да буде само на две воде. Како су поред тога обе стрехе 1 – 2 и 3 – 4 паралелне, пресек кровних равни биће слеме. Када смо одредили склоп кровних равни и њихов пресек, треба да видимо како отиче вода по крову с обзиром на суседе. Стога повучемо линије главног пада равни (које иду управно на стрехе) и видимо да су линије главног пада паралелне са границом суседног имања у тачкама 2 и 3, (јер су стрехе управне на границу имања). У тачки 1 вода се природним падом удаљује од суседног имања, док у тачки 4 вода пада на суседно имање. Према томе овакав склоп кровних равни може остати у тачкама 1, 2 и 3, а код тачке 4 треба нешто да изменимо.

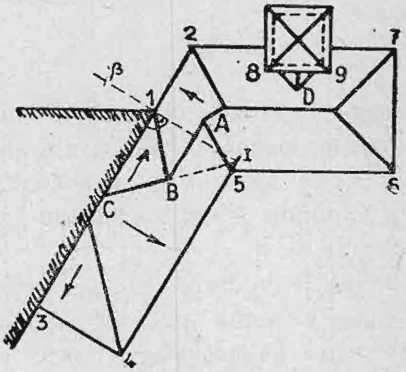


Сл. 281

Правилно је решење да на оваквим местима уметнемо нову кровну раван, чија је стреха β управна на границу суседног имања. Уметнута раван β сећи ће се са равни 3 – 4 по ували која у пројекцији полови у тачки 4 угао α, који заклапају стрехе. Та увала сече пређашње слеме у тачки A. Од тачке A до суседног имања имаћемо грбину по којој се сече раван 1 – 2 са равни β. Ту грбину одредимо најлакше помоћу тачке I у којој се секу продужене стрехе и помоћу симетрале угла из I. Симетрала треба да пролази кроз тачку A. (Било би нетачно одредити најпре грбину — симетралу угла из I, — па из њезиног пресека A

са слеменом повући увалу $A-4$. Грбина и слеме су обично под малим углом, па је пресечна тачка A нетачна, а по њој и увала A 4).

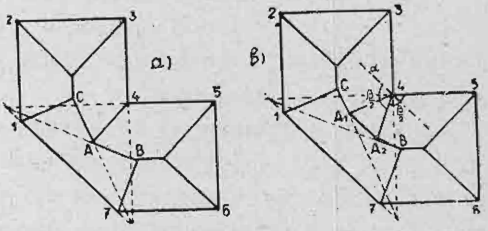
Други мало сложенији пример решен је на слици 282. Код тог примера имамо случај да је зид $3-2$ делом слободан (од тачке 1 до 2), а делом узидан (од тачке 1 до 3). Поред тога постоји на згради четвртаста кула. На слободном делу зида $2-3$ од тачке 2 до тачке 1 сме да буде стреха. Та кровна раван сече се са равни $4-5$ по слемену (AB). Од тачке 1 та раван не сме даље да постоји, јер би вукла воду на суседно имање. Стога у тачки 1 уметнемо нову раван са стрехом β управном на границу суседног имања. Раван β сече се са равни $1-2$ по ували, симетрали угла у тачки 1 и та увала постоји све до тачке B, где се сече са слеменом. Ту нестаје равни $1-2$, па се од B даље секу равни β и $4-5$. Секу се по грбини (BC) коју одредимо као симетралу угла из тачке I, у којој се секу продужене стрехе. Остала конструкција пресека кровних равнина позната нам је од пре.



Сл. 282

И раван $2-7$ водила би воду на зид $8-9$ куле. Стога и ту у тачки 8 и 9 уметнемо по једну нову раван. Висину тих тачака не знамо, па нећемо ни цртати стрехе уметнутих равни. Знамо да стрехе треба да су управне на зид $8-9$, па су и изохипсе тих равни управне на зид. Изохипсе равни $2-7$ су паралелне са стрехом $2-7$. Уметнуте равни сећи ће се са равни $2-7$ по симетралама углова које заклапају изохипсе. Повучемо их из 8 и 9 до њиховог пресека D. Одатле даље појавиће се пресек ових двеју уметнутих равни, слеме које од D иде управно на зид $8-9$.

Ово уметање нових равни користи се често и за мењање облика крова. У сл. 283 *a*) решен је кров задате зграде по претпоставкама, по којима смо и до сада радили. Грбине AB и AC над зидом $1-7$ заиста би давале ружан изглед крову. Да би се тај недостатак умањио, уметнута је у сл. 283*b*) код истог примера у тачки 4 нова раван, чија је стреха паралелна са стрехом [1 7] и пролази кроз тачку 4. Нова раван α сече се са равни [4 5] по ували (A_2 4) која у тачки 4 полови угао β њихових стреха. Исто тако се сече по ували (A_1 4) са равни [4 3]. Од A_1 до A_2 појавило се слеме као пресек равни [1 7] и α. Тиме је изглед крова поправљен. У пракси било би најбоље спојити тачке

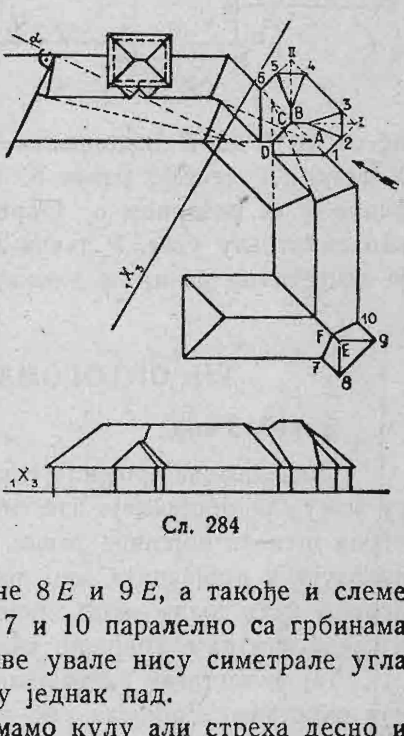


Сл. 283

C и *B* новим слеменом. Услед тога појавиле би се нове увале *C* 4 и *B* 4. Нова уметнута раван *BC* 4 неби имала исти пад као остале равни, те стога овакво решење у Нацртној геометрији није дозвољено. Уопште у Нацртној геометрији треба избегавати уметање нових равни где год то није апсолутно потребно.

На крају решен је још један сложен задатак и израђен изглед крова на пројекциску раван $_1X_3$. Конструкција је нацртана у сл. 284 и довољно је јасна, па је не треба описивати. Можда је боље да код овог примера набројимо уобичајне грешке многих почетника.

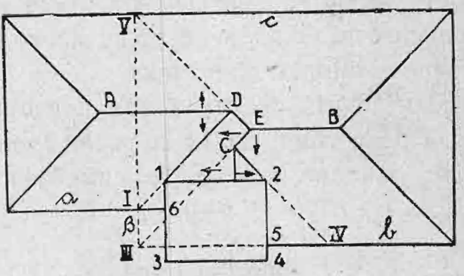
На делу крова од тачке 1 до тачке 6 над сваким зидом постоји раван и све те равни имају исти пад. Према томе, све ће се равни сећи по симетралама углова које заклапају њихове стрехе. Те симетрале (грбине крова) секу се између себе, а у пресечним тачкама престаје понека раван. Тако у тачки *A* престаје раван [2 3], па се даље пресецају равни [1 2] и [3 4]. Секу се по симетрали из I. Исто важи и са друге стране, где од тачке *B* постоји симетрала из II. Од пресека *C* даље постоји слеме *CD*. Почетници одреде обично две симетрале у тачки 2 и 5, продуже их до пресека, а тада из пресечне тачке повуку грбине ка 3 и 4. Ту је погрешна већ сама пресечна тачка, а тако повучене грбине нису симетрале углова (сем ако је основа правилан полигон), па одатле следи да равни немају једнак пад. Слична је и обична грешка на делу крова 7 до 10. Почетници обично реше исправно грбине 8*E* и 9*E*, а такође и слеме од *E* ка *F*. Али тада повуку увале из 7 и 10 паралелно са грбинама 8*E* и 9*E*. Грешка је у томе, што такве увале нису симетрале угла између равни, а то значи да равни немају једнак пад.



Сл. 284

Нарочит је случај ако на згради имамо кулу али стреха десно и лево од куле није иста права као код прећашњег примера (стреха 2 7 у сл. 282). Тако код примера у сл. 285 лево од куле имамо стреху *a*, а десно стреху *b*, две потпуно одвојене стрехе. Услед тога тачке 1 и 2 крова на угловима куле нису на истој висини. (Висина неке тачке крова је сразмерна хоризонталном отстојању те тачке од стрехе. Како је хоризонтално отстојање тачке 2 од стрехе *b* веће него отстојање тачке 1 од стрехе *a*, тачка 2 је као тачка крова на већој висини него тачка 1).

Кровне равни *a* и *b* вукле би воду на зид 1–2 куле. Стога уметнемо нове равни кроз тачке 1 и 2 као код ранијег примера. Стрехе тих уметнутих равни стоје управно на зид 1–2 куле, па ће се те уметнуте равни сећи са равнима a и b крова по симетралама углова (под 45°) повученим из тачке 1 и 2. Само се те две праве неће сећи јер нису у једној равни: лева је у равни a, десна у равни b. Стога треба да одредимо стреху β равни уметнуте кроз тачку 1 и да одредимо где се она сече са равнином b. Продужимо наниже пресечну праву (симетралу угла у тачки 1) до пресека I са стрехом a, па ће кроз тачку I пролазити стреха β. У тачки III она пресеца продужену стреху b. Из те тачке III ишао би по симетрали угла пресек равни b са уметнутом равни β и секао се са симетралом из тачке 2 у тачки C. (Сада се ове две симетрале секу јер су обе у истој равни b крова). Из тачке C ићи ће управно на зид 1—2 куле пресек (слеме) двеју уметнутих равни, док ће се од C до E настављати пресек уметнуте равни β са равнином b. У тачки E нестаје равни b, па ће се настављати пресек уметнуте равни β са равнином c. Одредимо га помоћу пресека V стреха и то као симетралу угла. У тачки D нестаје уметнуте равни β. Остало нам је познато од раније и довољно јасно из слике.



Сл. 285

VII. ОРТОГОНАЛНА АКСОНОМЕТРИЈА

§ 119. Увод

Ортогонална пројекција, поред својих добрих особина, има понекад ту ману, да пројекције извесних тела нису довољно јасне. То долази отуда што се поједине равни, — а често и читави системи равни, — показују у пројекцији као праве. Како се то у природи никада не дешава када голим оком посматрамо, то нисмо навикнути на ту појаву и слика нам није довољно јасна.

Тај недостатак настојали смо да умањимо помоћу трансформације или окретања. Добијали смо пројекције које су биле јасније и приступачније неувежбаном оку, али је конструкција била дуга и неподесна.

Исти циљ можемо да постигнемо аксонометријом, и то много једноставније и лакше.

Код сваког техничког предмета, а само такви се и претстављају у аксонометрији, можемо да запазимо три наглашена правца ивица. Обично те ивице заклапају између себе прав угао.

Замислимо да смо око тела, које хоћемо да нацртамо, поставили један правоугаони систем оса XYZ и то тако, да се поједине осе поклапају са наглашеним правцем ивица. У том случају свака тачка тела потпуно је одређена у односу према тако постављеном координатном систему, а исто тако и према пресецишту осовина O.

Узмимо затим тело заједно са правоуганим системом осовина, па га поставимо пред пројекциску раван, али тако да ниједна осовина не буде паралелна са пројекциском равни. Ако сада ортогонално пројектујемо на раван и осе и тело, добијамо аксонометриску пројекцију. По томе што пројектујемо ортогонално, називамо ову пројекцију *ортогонална аксонометрија*.

Према томе, ортогонална аксонометрија није нека нова пројекција, него само нов начин конструисања пројекције тела. У аксонометрији се свака тачка пројекције тела конструише према једном правоуганом систему оса, који је везан за само тело. Тај систем је пројектован ортогонално на пројекциску раван, али у таквом положају, да му ниједна осовина није паралелна са пројекциском равни.

Природно да ће у пројекцији осе бити скраћене, а исто тако и јединице дужине на њима. Према томе, када већ имамо пројекције оса, треба да одредимо та скраћења, а тада можемо да пређемо на конструкцију пројекције самог тела.

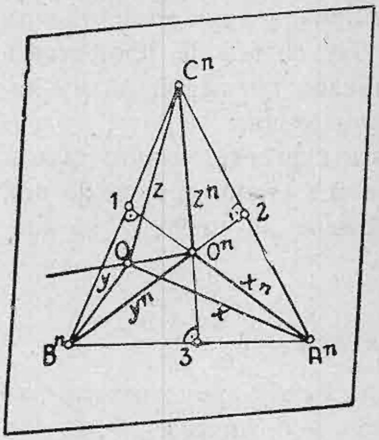
§ 120. Пројекције правоуганог система оса

Поставимо ли правоугани систем оса XYZ пред пројекциску раван тако да ниједна оса није паралелна са њом, пројекциска раван, или друга нека раван паралелна са њом, сећи ће осе у тачкама $A^n B^n C^n$. Три правоугаоне осе одређују три равни. Осе XY аксонометриску хоризонталницу, XZ аксонометриску вертикалницу, а ZY аксонометриску профилницу. Када пројекциска раван пресече осе XYZ у тачкама $A^n B^n C^n$, самим тим пресекла је и ове равни: аксонометриску хоризонталницу по правој $A^n B^n$, аксонометриску вертикалницу по правој $A^n C^n$ и аксонометриску профилницу по правој $C^n B^n$. На тај начин пројекциска раван пресекла је рогаљ трију правоуганих оса по троуглу $A^n B^n C^n$. Поједине стране троугла су у ствари трасе равни рогља. Стога тај троугао називамо *троугао траса* (в. сл. 286).

Оса X је управна на раван $B^n O C^n$, па ће и у пројекцији бити управна на њезину трасу $X^n \perp [A^n C^n]$. Исто тако $Y^n \perp [A^n C^n]$ и $Z^n \perp [A^n B^n]$. Према томе пројекције оса XYZ су висине троугла траса $A^n B^n C^n$, а пројекција тачке O — пресека оса — је пресечна тачка висина.

Троугао $A^n O B^n$ је правоугли троугао (в. сл. 286). Ако из тачке O спустимо управну на хипотенузу тога троугла $A^n B^n$, ова ће је пресецати у тачки 3, која лежи између тачака $A^n B^n$. Права $O\,3$ је линија главног пада за раван $A^n O B^n$, јер је управна на њену трасу $A^n B^n$. Стога ће и у пројекцији права $O^n 3$ бити управна на трасу, а то значи да лежи у продужењу пројекције Z^n осе Z. Повучемо ли у равни $C^n O B^n$ из O управну на $C^n B^n$, поново ће пројекција те праве бити $\perp C^n B^n$, дакле у продужењу осе X^n и тачака 1 између тачака B^n и C^n. За трећу раван и тачку 2 важи исто.

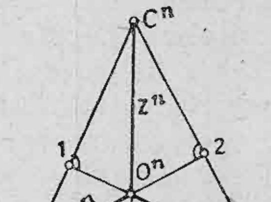
То је доказ да у сваком случају пројекција O^n сецишта оса мора да буде у троуглу $A^n B^n C^n$, дакле у „*троуглу траса*". Одатле следи да полуосе које пресеца пројекциска раван заклапају у пројекцији између себе тупе углове. Такође следи и то, да троугао траса мора да буде оштроугли троугао.



Сл. 286

Обрнуто, ако на пројекциској равни узмемо неку тачку O^n, па из ње повучемо три праве под тупим углом X^n Y^n и Z^n, можемо да конструишемо троугао коме су поменуте праве делови висина. Довољно је да на X^n узмемо тачку A^n, па повучемо $[A^n B^n] \perp Z^n$, $[B^n C^n] \perp X^n$ и $[C^n A^n] \perp Y^n$. Продужимо сада висине, а њихове пресеке са странама троугла обележимо са 1, 2 и 3 (в. сл. 287). Претпоставимо ли да је тачка O^n произвољна тачка и да је троугао $A^n B^n C^n$ у пројекциској равни, није тешко одредити положај тачке O у простору тако, да праве A^n O и O 1 стоје под правим углом. Довољно је да у пројектној равни кроз 1 O^n A^n опишемо полукруг са пречником $2r = 1\ A^n$. Тражена тачка O је у пресеку пројекциског зрака из O^n са тим полукругом. Праве A^n O и O^n 1 стоје под правим углом.

Спојимо ли тачку O са тачкама A^n, B^n и C^n, добићемо три праве X, Y Z, чије смо пројекције већ раније уцртали. Права X је управна и на праву O 1, али је управна и на праву B^n C^n (јер се угао пројектује као прав угао, а крак B^n C^n је у пројекциској равни). Према томе права X је управна на целу раван B^n O C^n, а што је овде најважније, она је управна и на праве Y и Z. Што важи за праву X, важи и за праве Y и Z, јер смо пројектну раван могли узети и кроз Y^n или Z^n уместо кроз X^n. Тиме је доказано правило: *Ако у пројекциској равни узмемо било коју тачку O^n и из ње повучемо три полузрака X^n, Y^n и Z^n који између себе заклапају тупе углове, та три полузрака су ортогоналне пројекције трију полуоса XYZ које пролазе кроз тачку O и заклапају између себе праве углове.*

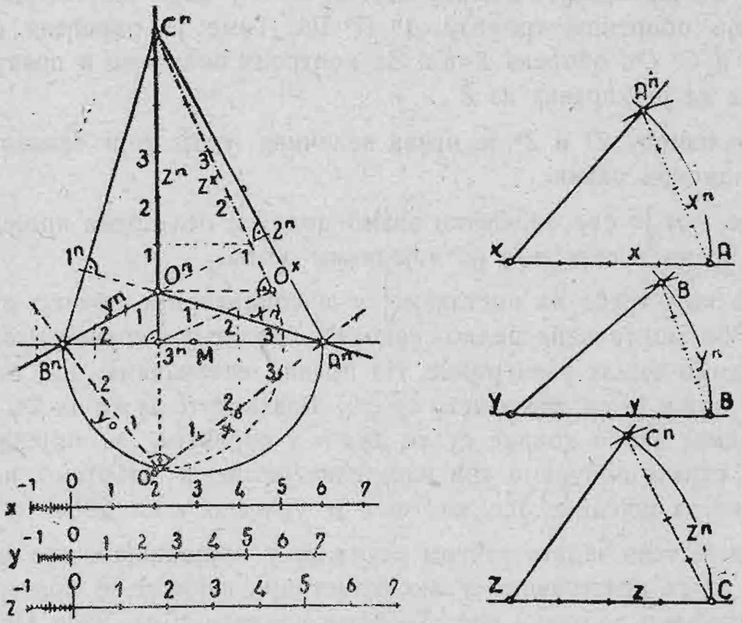


Сл. 287

Само овом једном пројекцијом потпуно је одређен систем ових трију оса; остаје још само неодређено његово отстојање од пројекциске равни. (Претпостављамо при томе да знамо да ли је рогаљ између оса XYZ окренут пројекциској равни својом оштром или шупљом страном).

Чим је једном пројекцијом одређен положај оса, можемо да одредимо и скраћења на њима. (Сличан задатак решавали смо у сл. 83).

У сл. 188*a* кроз тачку O^n повучене су три полуосе X^n Y^n Z^n као пројекције полуоса X Y Z, које пролазе кроз тачку O, а заклапају између себе праве углове. Оса Z^n стоји под правим углом према равни X^n Y^n, Y^n према равни Z^n X^n, а X^n према равни Y^n Z^n. Ако у равни X^n Y^n повучемо праву $A^n B^n \perp Z^n$, права AB је управна на осу Z. Како се тај угао показује и у пројекцији као прав угао, значи да је једна од тих двеју правих паралелна са пројекциском равни (в. § 23, правило 3). Пошто за осу Z знамо да је у произвољном положају, значи да је права $A^n B^n$ или паралелна са пројекциском равни, или да се налази у самој равни. Чим то знамо, можемо да одредимо праву величину троугла A^n O^n B^n. То је правоугли троугао, па када га оборимо око A^n B^n прави угао у O показаће се у правој величини. Око дужи $A^n B^n$ опишемо полукруг (средиште M је у располовишту дужи). При обарању тачка O описује круг, који се у пројекцији показује као права из $O^n \perp [A^n B^n]$. У пресеку те управне са полукругом око $(A^n B^n)$ је O^0 оборена тачка O. Тиме смо оборили и осе X и Y, па је $(O^0 A^n)$ права величина дужи $A^n O^n$ на X-оси, а $(O^0 B^n)$ права величина дужи $B^n O^n$ на Y^n. Повучемо ли из B^n $\perp X^n$ и из $A^n \perp Y^n$, добићемо C^n на Z^n, тиме смо уцртали троугао траса. Сада бисмо могли одредити праву величину дужи $O^n C^n$ обарањем троугла B^n O^n C^n, као што смо оборили троугао A^n O^n B^n.



Сл. 288 *a*, *b* и *c*

Уместо тога повуцимо кроз Z пројектну раван. Њена траса поклапа се са Z^n, па је управна на $[A^n B^n]$ и сече је у тачки $З^n$. У тој пројектној равни налази се оса Z са тачком O и C^n и дуж $З^n$ O равни X Y. Оса Z је управна на раван X Y, па заклапа прав угао и са правом $З^n$ O која је у њој. Оборимо ту пројектну раван. У обореном положају тачака O^x биће на ординати из $O^n \perp Z^n$, а дуж O^n $З^n$ показиваће се у правој величини. Нацртамо ту ординату и из тачке $З^n$ нанесемо до ње праву величину дужи $З^n$ O^n, коју имамо (O^0 $З^n$) на већ раније обореном троуглу A^n O^0 B^n. Тиме је одређена оборена тачка O^x и O^x C^n, оборена Z-оса. За контролу повучемо и праву O^x Z^n; она треба да је управна на Z'.

Угао између Z^x и Z^n је права величина угла који заклапа Z-оса са пројекциском равни.

Тиме нам је све одређено: знамо положај оса према пројекциској равни, а знамо и скраћења на појединим осама.

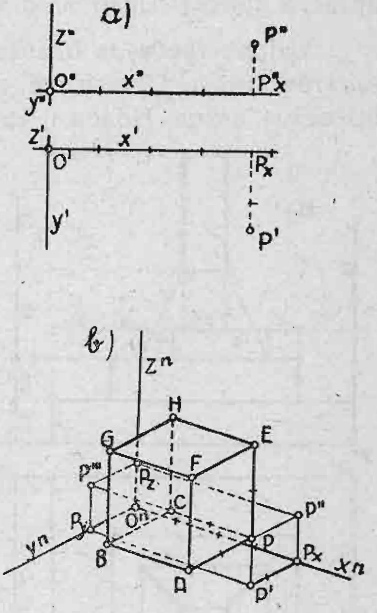
Тела која треба да поставимо у аксонометрији обично су котирана. Да би могли непосредно наносити дужи у скраћењу, за сваку осу израдимо одмах размернике. На правим величинама оса нанесемо јединице дужи [у сл. 288 нанети су cm]. Вратимо те дужи на X^n, Y^n и Z^n и тиме одмах знамо колике су те дужи у скраћењу за поједине осе. Негде са стране повучемо три паралелне праве и нацртамо на њима размернике за поједине осе, као што је урађено у сл. 288*b*.

Када је тело задато тачним цртежом у пројекцијама али без кота, па треба да га претставимо у аксонометрији, најбоље је конструисати углове скраћења за сваку осу. То ћемо урадити у сл. 288*c*. Повучемо једну праву и на њој узмемо тачку X. Са дужином O^0 A^n из сл. 288*a* опишемо круг који пресеца праву у тачки A. Дуж XA је права величина дужи на X-оси од тачке O^n до A^n. Ако сада узмемо пројекцију те дужи, дакле дуж O^n A^n, па њоме опишемо круг око тачке A до пресека са пређашњим кругом, добићемо тачку A^n. Кроз X и A^n повучемо праву, па је тиме конструисан угао скраћења. Правој величини дужи XA одговара у скраћењу за X-осу дуж AA^n. Да би одредили скраћење било које друге дужи, опишемо са том дужи део круга око тачке X. Растојање пресека тога круга са крацима XA и XA^n даје ту исту дуж скраћену у размери за X-осу. То исто урадимо и за остале осе.

У сл. 289*a* уцртана је тачка P у двема пројекцијама и нацртан координатни систем. Ту тачку треба уцртати у ортогоналној аксонометрији. Како положај оса према пројекциској равни и њихова скраћења зависе само од угла који затварају између себе X^n Y^n и Z^n, узећемо овде осе паралелне са осама у сл. 288. Тиме је одређен положај оса, а што је још важније, одређено је и њихово скраћење.

Када смо уцртали осе (в. сл. 289*b*) а знамо и њихова скраћења, можемо да нанесемо тражену тачку P. Нанесемо у правцу X-осе од тачке O^n 4 cm у скраћењу за X-осу. Тиме одредимо тачку P^x. Одатле повучемо у правцу Y^n осе, и у њезином скраћењу дуж од 1,5 cm и најзад у правцу Z^n осе дуж од 1 cm у скраћењу за осу Z. Крајња тачка те дужи је тражена тачка P^n.

Када знамо аксонометриску пројекцију неке тачке и бар једну њену ординату, можемо да одредимо све њене остале пројекције. Нека нам је као пример позната ордината $y = 1{,}5$ cm тачке P^n. Одмах можемо да одредимо аксонометриску другу P'' пројекцију тачке P. Довољно је да из P^n повучемо праву у правцу Y^n-осе и да на њој од P^n нанесемо дуж 1,5 cm у скраћењу за Y^n-осовину.



Сл. 289 *a* и *b*

Чим имамо аксонометриску пројекцију P^n и још једну пројекцију тачке — на пр. аксонометриску другу пројекцију P'' — сама тачка нам је потпуно одређена с обзиром на ординатни систем X^n Y^n Z^n. Све остале аксонометриске пројекције можемо да конструишемо из ових двеју познатих. Ако из P^n повучемо ординату z и паралелно са њом из P'' до пресека P_x са X-осом, у пресеку ординате из P^n и праве $\parallel Y^n$ из P_x имамо аксонометриску прву пројекцију P'. (Тачку P' имамо на цртежу већ од раније када смо одређивали P^n). И аксонометриску трећу пројекцију P''' одредимо на исти начин помоћу ординате паралелне X^n из P^n и на њој паралелне из P' до пресека са Y^n.

Израз аксонометриска прва, аксонометриска друга и аксонометриска трећа пројекција је сувише дуг. Скратићемо га на тај начин, што ћемо изостављати реч *„аксонометриска“*. Када убудуће будемо говорили о првој, другој или трећој пројекцији, подразумеваће се да говоримо о аксонометриској, јер неке друге пројекције у аксонометрији и нема.

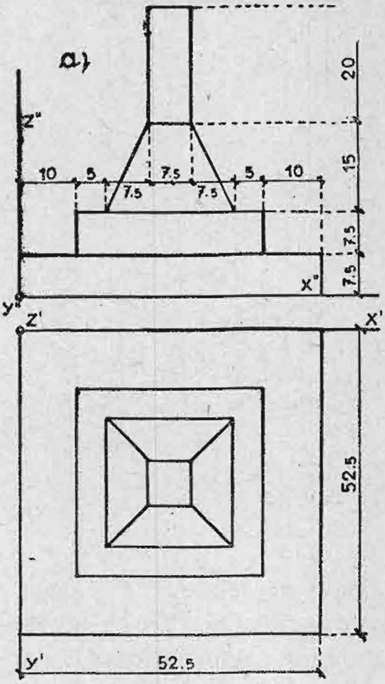
У сл. 289*b* решен је још један задатак. Уцртана је коцка са ивицом $a = 2$ cm којој је тачка P један врх, а ивице су јој паралелне са осама XYZ.

Из тачке P^n повучемо ивице паралелне са осама и нанесемо на њима дуж од 2 cm у размери оне осе са којом је ивица паралелна. Тако одредимо тачке A E C. Остале ивице су паралелне са овима.

§ 121. Примери

Можемо сада прећи на претстављање неког тела у аксонометрији. Као први пример задато нам је у сл. 290*a* једно постоље са тачним котама. Само постоље састављено је од једне веће четвртасте плоче и друге мање симетрично над њом. Над овом плочом, опет симетрично, стоји једна зарубљена четвртаста пирамида, а над њом четвртаста призма. Цело тело задато је у првој и другој пројекцији.

Најпре треба да одаберемо правац и положај оса *X Y Z* према задатом телу. Правац се сам намеће: *X*, *Y* и *Z* биће паралелне са правцима ивица. Положај тачке *O* може да се узме гдегод се хоће. Обично се узима да је *Z*-оса уједно и вертикална оса симетрије тела. Овде ћемо узети да је *O* у доњем углу плоче. Тако су осе и назначене у обема пројекцијама.



Сл. 290*a*

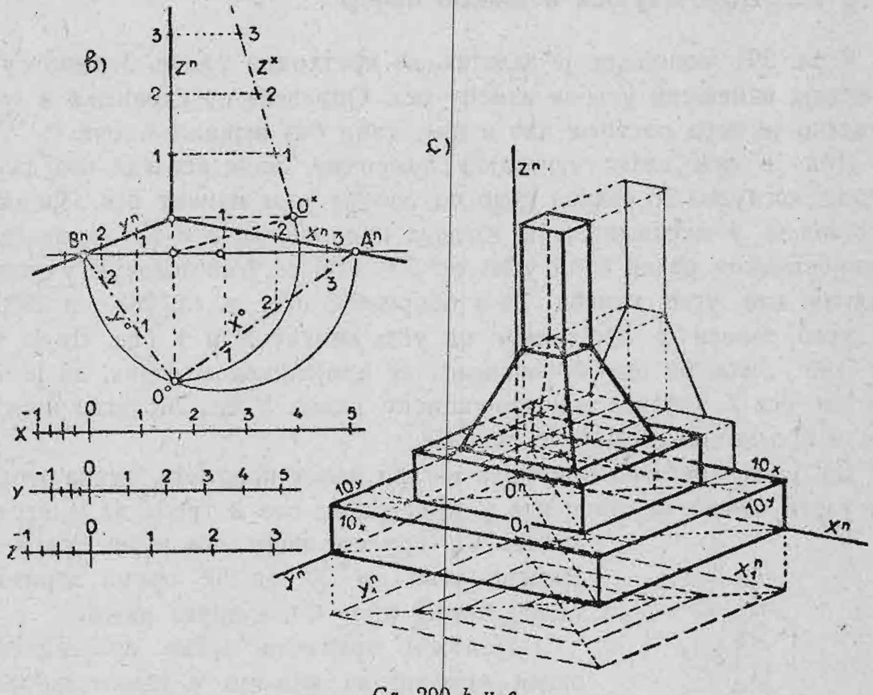
У сл. 290*b* уцртане су пројекције оса и одређена њихова скраћења, а затим су конструисани размерници за све три осе као пре.

Само тело обично се не црта на истим осама где су тражена скраћења, него се пројекције оса још једном паралелно прецртају, па се на њима решава задатак. Тако је урађено и на слици.

Најпре ћемо уцртати доњу плочу. Један јој је угао у тачки O^n, а по једна ивица се поклапа са X^n и Y^n. Нанесемо ли на тим осама дуж од 52,5 (на свакој оси у одговарајућој размери), одредили смо још две тачке квадрата. Паралелним ивицама употпунимо квадрат. Из свака крајње ивице кватрата иде по једна вертикална ивица. Повучемо је и нанесемо на њој дуж 7,5 mm у размери за *Z*-осу. Тиме су одређене све тачке доње плоче, па повучемо и њене ивице. Ивице се спочетка повлаче танким пуним линијама, јер може горњи део тела да заклони неку ивицу која би иначе била видљива.

Горња плоча лежи једним квадратом симетрично на горњој равни доње плоче. Тај квадрат је за 10 mm са свих страна мањи од квадрата доње плоче. Узмемо стога у размери за *X*-осу дуж од 10 mm и нанесемо је у правцу X^n из сваког угла. На исти начин нанесемо 10 mm у правцу *Y*-осе. Када добијене тачке спојимо правима $\parallel X$ и $\parallel Y$, одредили смо доњи квадрат горње плоче. Ради симетрије треба да тачке овога квадрата леже на дијагоналама квадрата доње плоче. Висине одредимо као пре.

На горњој равни мање плоче наслања се доњи базис зарубљене пирамиде. Одредимо га као пре. Ивице пирамиде нису паралелне ни са којом осом, па их зато морамо конструисати. Када смо већ одредили тачке доњег базиса, најлакше нам је да још одредимо тачке горњег базиса пирамиде. Њих ћемо најлакше одредити помоћу прве пројекције и висине. Али прву пројекцију не морамо да цртамо баш на самој хоризонталници, већ можемо да је конструишемо на било којој хоризонталној равни чија нам је висина позната. То је баш велико преимућство аксонометрије, што пројекције можемо цртати и на било којој равни паралелној са пројекциском равни. Тиме је обично олакшана сама конструкција, а сем тога може да се пребаци тамо где ће најмање сметати другим конструкцијама. Овде ћемо прву пројекцију горњег базиса пирамиде конструисати у истој равни у којој је и доњи базис. Како је горњи базис опет квадрат као и доњи, конструишемо га на исти начин. Његове тачке треба да су такође на дијагоналама горње равни плоче. Из пројекције повучемо ординате $\parallel Z$ и нанесемо на њима висину 15 mm у скраћењу за ту осовину. Када тако одредимо тачке горњег базиса, можемо да повучемо ивице пирамиде, а затим да конструишемо највишу призму.



Сл. 290 *b* и *c*

Када је све конструисано, нагласимо дебљим линијама видљиве ивице, а невидљиве тањим и испрекиданим.

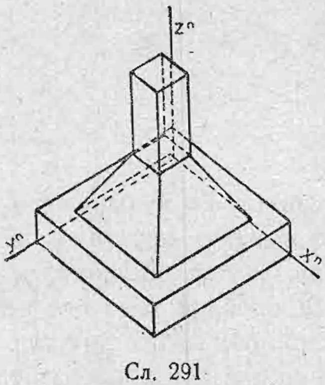
У слици је уцртана друга пројекција тела. Њена конструкција је довољно јасна из саме слике. Уцртана је и прва пројекција, али не на стварној аксонометриској хоризонталници, него на некој другој равни X_1^n Y_1^n, где је тачка O^n померена у правцу Z^n за 10 mm у размери Z. Ово померање аксонометриских пројекциских равни је дозвољено. Помераћемо понајчешће вертикалницу (ради сенке).

§ 122. Положај оса и њихов избор

У сл. 291 поновљен је задатак из претходне слике. Једино су у пројекцији измењени углови између оса. Одређена су скраћења и конструисано је исто постоље као и пре, само без најниже плоче.

Док је пре слика изгледала природно, овде изгледа као да се постоље нагнуло. То зависи само од избора угла између оса. Предмет претстављен у аксонометрији изгледа природан, ако Z-оса не заклапа са пројекциском равни већи угао од 20°. (Тај се угао показује у правој величини као угао између Z^n и оборене Z осе, в. сл. 288 *a* и 290 *b*). Сам угао зависи у пројекцији од угла између X и Y осе. Да је тај угао 180° била би оса Z паралелна са пројекциском равни, да је 90° била би оса Z управна на пројекциску раван. У сл. 291 угао између Z-осе и пројекциске равни је око 45°.

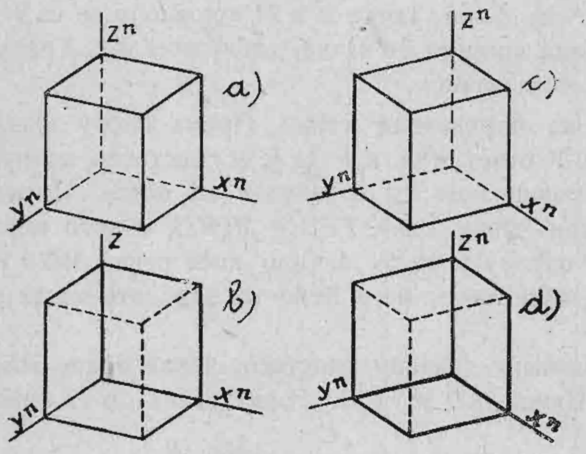
Да би се постигао природан изглед неког предмета, треба отприлике узети овакав положај оса у пројекцији: оса Z треба да је вертикална; од других двеју оса једна треба да заклапа угао од 20° до 30° према хоризонталној правој кроз O^n, а друга мањи.



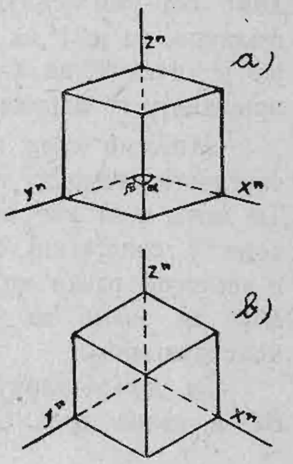
Сл. 291

Положај предмета према пројекциској равни можемо да мењамо и самим избором које су ивице видљиве. У сл. 292 *a* и *b*) прецртане су осе из сл. 290, па је уцртана једна коцка. Узмемо ли да у пројекцији видимо шупљу страну рогља између оса, тада на слици видимо коцку гледану одозго наниже и са десна на лево. Заменимо ли видљиве ивице невидљивим и обрнуто (види под *b*), онда исту коцку гледамо одоздо навише и то са лева на десно. У овом случају видљив је оштар део рогља на осама. Ако прецртамо осе тако да X-оса са Z-осом заклапа угао који је пре заклапала Y-оса и обрнуто (види под *b* и *c*), положај коцке се поново мења.

Ако осе X и Y заклапају са Z-осом једнак угао, конструкција је нешто једноставнија, јер обе осе имају иста скраћења. Незгодно је то, што се једна дијагонала поклапа са осом Z. За архитектонске детаље овакав систем је уопште неупотребљив (в. сл. 293 *a*). Када све три осе заклапају између себе једнаке углове (120°), скраћења су



Сл. 292 *a, b, c* и *d*



Сл. 293 *a* и *b*

за све три осе иста, а коцка се у том случају показује као шестоугаоник (в. сл. 293 *b*). Оваква слика се назива *„изометрија“*.

§ 123. Одређивање сенке у аксонометрији

Још одмах на почетку овога дела смо нагласили, да је ортогонална аксонометрија обична ортогонална пројекција и за ортогоналну аксонометрију важе сва правила за одређивање сенки која су важила у ортогоналној пројекцији. Такође смо рекли, да свака тачка може да има четири пројекције, и то аксонометриску, а затим прву, другу и трећу пројекцију. Али нам је тачка потпуно одређена и онда када имамо само две од тих пројекција. Обично имамо аксонометриску пројекцију, а поред ње још једну.

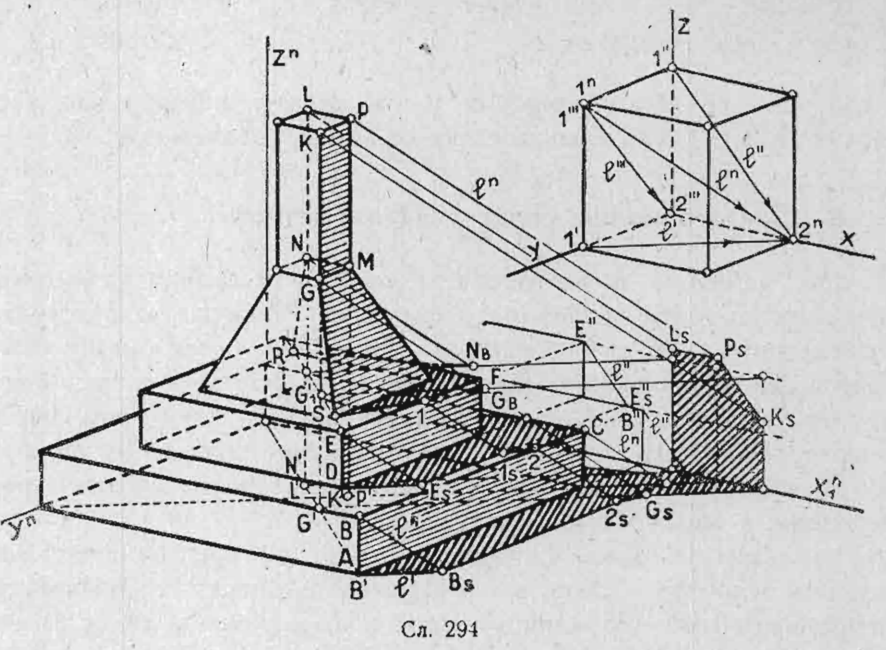
Када нам је тачка одређена, можемо да конструишемо сенку тачке на било коју раван, као и на аксонометриску хоризонталницу, вертикалницу или профилницу. Исто тако можемо за сваку раван да одредимо да ли је осветљена или не. И правац светлости треба да нам је задат у двема пројекцијама.

Као први пример сенчења нека нам је задато исто постоље из сл. 290, и то са истим осама. Треба да конструишемо сопствену и бачену сенку за осветљење под 45°.

Када је конструисана аксонометриска пројекција постоља, треба да одредимо пројекције зрака светлости. За осветљење под 45° знамо да је то осветљење код кога зрак светлости пролази телесном дијагоналом коцке. Стога било где са стране конструишемо коцку у истом систему оса и са истим скраћењима. Дијагонала $1^n 2^n$ је аксонометриска пројекција зрака светлости l^n (или краће *„аксонометриски зрак)“*. Како нам сама аксонометриска пројекција није довољна, то треба да одредимо бар још једну. Овде је то врло једноставно. Тачка 1 је у профилници, па је $1'$ на Y, а $1''$ на Z-оси. Тачке $2'$ и $2''$ поклапају се са 2^n, јер је тачка 2^n на X-оси. Када спојимо те тачке, добијемо l' и l''. Трећу пројекцију l''' одредимо на исти начин.

Можемо сада прећи на одређивање сенке. Према смеру зрака светлости знамо да су H и V осветљене, а P да је у сопственој сенци. То важи и за све остале равни које су паралелне са њима. Према томе у сопственој су сенци равни CBA, FED и $MPKG$, а исто тако и аналогне равни које су окренуте ка V. Једино косе равни MGS и MNR не знамо да ли су осветљене, него ћемо то одредити касније конструкцијом.

За доњу плочу сачињавају границу сопствене сенке ивице AB, BC и ивица кроз $C \parallel X$. Ивица AB је $\perp H$. Њена сенка по H биће у правцу светлости (l'). Повучемо је, а крајњу тачку одредимо помоћу аксонометриског зрака l^n из B. У пресеку l^n са l^1 је B_s — сенка тачке B на H. Како је ивица $BC \parallel H$, биће и њена сенка паралелна са BC. Крајња тачка је опет на зраку l^n из C. И трећа ивица је $\parallel H$, па њена сенка полази из C_s, и то је паралелна са самом ивицом. Сенке ових двеју последњих ивица смо одредили без обзира да ли ће их делимично прекрити нека друга сенка.



Сл. 294

Граница сопствене сенке за горњу плочу је аналогна граници сопствене сенке за доњу плочу. Сенка пада по хоризонталној равни доње плоче. Стога је и бачена сенка одређена на исти начин као сенка доње.

Даљу сенку ће бацити коса ивица SG зарубљене пирамиде. Тачка S је у хоризонталној равни горње плоче; стога ће сенка ивице падати на ту раван, која је у ствари и раван базиса пирамиде. Једну тачку бачене сенке већ имамо. То је тачка S, јер је она продорна тачка ивице кроз равни. Као другу тачку конструишемо сенку тачке G. Најпре одредимо њену I пројекцију G_1' на раван горње плоче. Она је на дијагонали. Помоћу l' из G_1' и l^n из G^n одређена је сенка G_B на поменутој равни. Тачка G_B пада ван квадрата базиса пирамиде. То значи да је раван SGM у сопственој сенци. Поновимо ли исту конструкцију за ивицу NR, видимо јасно да су те две сенке уједно и контура бачене сенке по равни базиса, што значи да су те две ивице границе сопствене сенке зарубљене пирамиде. Сенка SG_B пресеца у тачки 1 ивицу EF горње плоче. Даља сенка горњег дела ивице SG треба да пада на неку другу раван. Одредимо сенку 1_s те тачке 1 на раван доње плоче (помоћу l^n из 1 до пресека са сенком $E_s F_s$). Из 1_s наставиће се сенка ивице SG по равни доње плоче, а како је ова раван паралелна са горњом, то ће и сенка бити паралелна са SG_B. И ова сенка долази у тачки 2 до крајње ивице равни, па ће даља сенка падати по хоризонталници. Можемо да је одредимо помоћу 2_s исто као што смо одредили горњу помоћу 1_s, јер је горња раван плоче $\parallel H$. Ипак је боље да конструишемо ту сенку и директно, без обзира на 2_s. Одредимо стварну I пројекцију G' тачке G на H и конструишемо њену сенку на хоризонталници (l' из G' и l^n из G). Сенка G_s треба да лежи на сенци ивице SG, коју смо већ одредили помоћу 2_s.

Из G_s наставља се сенка ивице GK, која је граница сопствене сенке највише призме. Сенка пада на хоризонталницу, јер смо осу X померили у правцу Y-осе, да би сенка добила лепши изглед. Тим померањем осе X удаљили смо уствари вертикалницу од нашег постоља и то за отстојање колико је од пређашње X^n-осе до нове X_1^n у правцу Y-осе. По тако продуженој хоризонталници ићи ће сенка ивице GK у правцу l' јер је ивица $GK \perp H$. Од пресека са осом X_1^n ићи ће сенка по вертикалници и биће паралелна са самом ивицом. Најгорњу тачку сенке K_s одредимо зраком l^n из K.

Тиме је одређена већ и једна тачка сенке ивице KP. Одредимо још сенку тачке P. Сенка пада по V, али како немамо другу пројекцију P'', то ћемо одредити сенку помоћу P' и l. Прва пројекција P' лежи на дијагонали најниже равни. Да бисмо одредили сенку тачке P' замислимо да треба да одредимо сенку праве PP'. Како је права управна на H, то ће њена сенка по хоризонталници ићи у правцу l' од P' до пресека са X_1^n. Одатле даље ићи ће сенка по вертикалници, и то паралелно са самом правом (као пре сенка ивице GK). Највишу тачку P_s одредимо помоћу l^n из P. Дуж KP је сенка ивице KP. Ова конструкција тачке P_s није била потребна. Ивица KP је $\perp V$, па јој је сенка у правцу l''. Могли смо одмах да је повучемо из $K_s \parallel l''$ до пресека са l^n из P. Прва конструкција сенке P_s показана је само стога што она претставља уствари једну методу. У аксонометрији ћемо често одређивати сенку неке тачке помоћу замишљене праве која пролази кроз ту тачку.

Ивица PL је $\parallel V$, па је и сенка ивице паралелна са самом ивицом. Сенке ивица LN и NR одредимо на исти начин као и сенке ивица KG и GS.

На слици је уцртана делимично и друга пројекција постоља на помереној вертикалници, па су сенке ивица EF и BC одређене из II пројекције помоћу l''.

Из овог примера већ може да се види колико је лакше конструисати сенке у аксонометрији него досад у двема пројекцијама. А ипак сенке се одређују по истим принципима и по истим правилима. То долази отуд, што су аксонометриске слике приступачније почетнику. Оне саме стварају просторну преставу тела и границе сопствене сенке, па почетник може целу своју пажњу да обрати на саму конструкцију сенки. Сем тога и поједини елементи, праве и равни су већином у специјалном положају.

КОСА ПРОЈЕКЦИЈА

VIII. КОСА АКСОНОМЕТРИЈА

§ 124. Објашњење и примери

У овој се књизи нећемо упуштати у решавање теориских задатака у аксонометрији, нити уопште било каквих задатака где би сем положаја појединих елемената долазила у обзир и њихова права величина. Стога можемо већ сада да пређемо на *„Косу аксонометрију“*.

Код ортогоналне аксонометрије узимали смо пројекције правоугаоног система оса. Самим тим нам је био одређен и њихов положај према пројекциској равни, те смо одмах могли да одредимо скраћења на појединим осама. Већ та конструкција скраћења је незгодна, а поред тога неподесно је и цртање самог тела помоћу три размерника.

Ту тешкоћу можемо да умањимо ако правоугаони систем оса не пројектујемо ортогонално на пројекциску раван, него косо, под било којим углом према пројекциској равни. Можда ће бити јасније ако можемо овако. Место да одредимо ортогоналну пројекцију правоугаоног система оса на пројекциску раван, одредимо његову сенку. Само ћемо тај зрак светлости називати *„коси пројекциски зрак“*. Знамо да сенка неке произвољне дужи може да буде краћа од саме дужи, може да буде дужа, а може да буде и баш једнака са њом. Све то зависи само од правца светлости.

Исто тако и овде можемо повољним избором косог пројекциског зрака да подесимо да нам јединице дужи на осама буду у косој пројекцији аксонометрије онако скраћене како желимо. Како нам је избор пројекциског зрака слободан, изаберемо га тако да бар две осе имају исто скраћење, или боље речено да две осе остану без скраћења. Могли бисмо подесити и да све три осе остану без скраћења, али се тај случај избегава, јер слике изгледају развучене.

За нас је најважније питање какве три осе смемо да узмемо на цртежу и каква скраћења на њима. На то питање даје нам потпун одговор Полкеово правило које гласи:

Три произвољне дужи $O^s A^s$, $O^s B^s$ *и* $O^s C^s$ *на пројекциској равни (уједно и равни цртања) које полазе из једне тачке* O^s *јесу коса пројекција трију једнаких дужи које полазе из тачке* O, *а заклапају праве углове између себе. Једини је услов да речене четири тачке* A^s, B^s, C^s *и* O^s *не леже на једној правој.*

Правац пројекциског зрака остаје нам непознат, али нам он није ни потребан када се и онако не упуштамо у решавање метричких задатака.

Доказ Полкеовог правила и начин како се изналази правац косог пројекциског зрака нећемо овде изводити, а може да се нађе у великом броју дела о Нацртној геометрији.

Практично значи Полкеово правило ово. Смемо узети на цртежу осе како хоћемо, и смемо усвојити на њима скраћења која хоћемо, па да ипак те осе са тим скраћењима претстављају косу пројекцију трију једнаких дужи под правим углом.

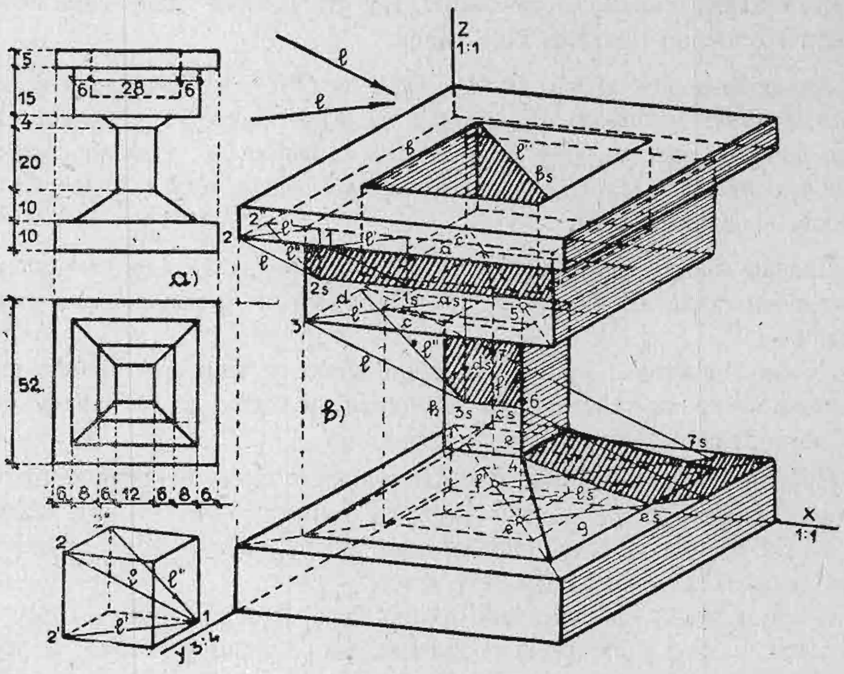
Обично ћемо узимати, као и пре, осу Z вертикално, Y-осу под 30°, па чак и под 45° према хоризонталној правој кроз O, а осу X под нешто мањим углом. При томе ће Z и X-оса бити без скраћења, дакле 1:1, а оса Y са скраћењем 3:4 или неким другим (ређе и она 1:1).

Како је оваква коса аксонометрија уствари исто што и сенка, важе за њу сва правила која важе за сенке, односно сва правила која важе за паралелну пројекцију уопште. Другим речима, то значи: када смо једном изабрали пројекције оса и скраћења на њима, конструкција тела и сенки остаје иста као код ортогоналне аксонометрије.

Ево једног примера. У сл. 295*a*) задато је једно тело са свим потребним котама. Треба да то тело претставимо у косој аксонометрији и да му одредимо сенке.

У сл. 295*b* изабране су осе као што је пре речено и усвојена скраћења.

Конструкција тела је потпуно иста као пре и са слике је довољно јасна, па је дајемо без икаквог описа. Пређимо одмах на одређивање сенке. На слици нам је задат зрак светлости аксонометриском пројекцијом *l* и аксонометриском првом пројекцијом *l'*. (Од сада па надаље за аксонометриску пројекцију нећемо стављати никакав знак. Стога ће слово *p* на слици значити аксонометриску пројекцију праве *p*, а *p'* аксонометриску прву пројекцију те праве). Тим двема пројекцијама *l* и *l'* зрак светлости је потпуно одређен. При одређивању сенки ће нам бити потребне и друге пројекције *l''* и *l'''*, па их одредимо одмах сада. Да је осветљење под 45⁰, зрак *l* био би, као и пре, телесна дијагонала коцке, па би пројекције *l'*, *l''* и *l'''* биле дијагонале страна коцке. Али и овде можемо да одредимо пројекције *l'*, *l''* и *l'''* на сличан начин.



Сл. 295

Једино *l* неће бити дијагонала коцке, него неког другог паралелопипеда чије су ивице паралелне са осама *X Y Z*. Конструишимо такав паралелопипед. Из било које тачке 1 (види слику испод 295*a* повуцимо *l* и *l'* и на *l* узмимо било коју тачку 2. Пројекциским зраком ‖ *Z* одредимо 2' на *l'*. Тиме је конструкција готова. Дуж 2' 1 је дијагонала правоугаоника базиса чије су стране ‖ *X* и *Y*, а висина паралелопипеда је дуж 2' 2. Уцртамо паралелопипед, па су дијагонале пљошти тражене пројекције *l'*, *l''* и *l'''*.

Од видљивих површина у сопственој су сенци равни паралелне са профилницом. Остаје као неодређена једино коса раван са ивицом g. (Предња коса раван је осветљена. Јер када би се окретала око доње хоризонталне ивице, па постала $\parallel H$ или $\parallel V$, у оба та случаја била би осветљена. Према томе она је осветљена и у овом средњем положају). Код овог примера почнимо са одређивањем бачене сенке одозго, јер је то и природније. Ивица b бацаће своју сенку на раван удубљења паралелну са V. Како је $b \perp V$, биће $b_s \parallel l''$. Сенка ивице a падаће на вертикалну раван кроз ивицу c. Да би је одредили, узмемо на a једну тачку 1. Замислимо ли кроз тачку 1 неку вертикалну праву, њена имагинарна сенка по хоризонталној равни квадрата са страном a било би у правцу l' до пресека са c' (c' је пресек вертикалне равни кроз c са хоризонталном равни кроз a или њена прва пројекција на тој равни). Одатле даље ишла би вертикално стварна сенка замишљене вертикалне праве кроз 1 по равни $c\,c'$. На њој, а на зраку l из 1 биће 1_s, сенка тачке 1 на вертикалној равни кроз c. Кроз 1_s ићи ће a_s сенка ивице a и биће $\parallel a$, јер је $a \parallel c$. Десно иде a_s до краја равни, а лево до 2_s, коју одредимо помоћу зрака l из 2. Од 2_s лево настављаће се сенка ивице која из 2 иде $\perp V$. Ради тога ће и сенка бити $\parallel l''$.

Лакше је било узети одмах тачку 2 (место 1), па одредити њену другу пројекцију $2''$ на раван на коју пада сенка, дакле на вертикалну раван кроз c ($2''$ је на продуженој c'). Дуж $2''\,2$ баца своју сенку по равни cc' у правцу l'' из тачке $2''$. Тачка 2_s је крајња тачка. Из 2_s десно иде сенка $a_s \parallel a$ до краја равни, а лево сенка ивице $2''\,2 \parallel l''$, понова од 2_s до краја равни. За контролу одређена је сенка тачке 2 помоћу l' као пре 1_s.

На тај начин одређене су сенке ивице c и d на вертикалну раван $[e\,h]$ стуба. Одређене су помоћу сенке тачке 3. Једино је овде било нешто теже одредити трасу односно пресек равни $[e\,h]$ са равни $[c\,d]$, јер се те две равни на телу не секу. Одредили смо је овако. Продужена ивица e продире кроз раван квадрата $c\,d$ у тачки 5 на дијагонали квадрата. Према томе тражени пресек (траса) пролази кроз тачку 5 и иде $\parallel c \parallel X$. На тој продуженој траси је друга пројекција $3''$ тачке 3. (Треба напоменути да тачке $2''$ и $3''$ нису стварне друге пројекције тачака 2 и 3, јер нису у V. Остаћемо при том обележавању ($2''$ и $3''$) и називу, јер смемо претпоставити да смо за сваку од тих конструкција померили вертикалницу тамо где нам је била потребна).

Остаје још да одредимо сенке ивица e и f на косе равни и на горњу хоризонталну раван плоче. Одређивање сенке по некој косој (дакле произвољној) равни увек је теже него по некој равни у специјалном положају. Стога одредимо и овде најпре сенку ивице e на хоризонталну раван плоче, и то утолико пре што уопште не знамо да ли је коса раван осветљена или не. Како је ивица $e \perp H$, прва ће јој пројекција на горњој равни плоче бити тачка e', на дијагонали квадрата

Бачена сенка e_s по тој равни биће у правцу l' кроз тачку e'. Тачка у којој e_s пресеца ивицу g је једна тачка сенке ивице e по косој равни. Спојимо је са 4, па би то била сенка ивице e по косој равни. Треба још да одредимо да ли је то стварна сенка или имагинарна (на унутрашњој страни равни). Пошто та сенка заклапа са e_s мањи угао него зрак l, значи да је стварна сенка, а сама раван да је осветљена. Сенка тачке 4 падала би унтра у квадрат базиса (зрак l из 4 до пресека са e_s). Ивица e није цела осветљена, него само до тачке 6. Треба видети где та тачка баца сенку. Зрак l из 6 сече e_s баш на крајњој ивици равни плоче. То значи да су обе сенке ивице e, које смо повукли, стварне сенке.

Остаје још сенка ивице f. Одредимо је на исти начин као и e_s. Треба и код ње видети да ли сенка ивице d пресеца f_s. Најлакше би било одредити сенку ивице d по хоризонталној равни плоче помоћу сенке тачке 3. Сенка d_s ишла би из $3_s \parallel d \parallel Y$. Како је та конструкција позната, одредимо исту сенку на други заобилазни начин, који ће нам служити касније код другог примера. Одредимо сенку d_s ивице d по невидљивој равни $f\ h$ стуба. Та сенка $d_s \parallel d$ мора да пролази кроз тачку у којој l'' из $3''$ сече ивицу h, јер је l'' сенка ивице d по равни $e\ h$. У тачки 7 сече d_s ивицу f. Горњи део ивице f изнад тачке 7 је у сенци. Кроз 7_s на равни плоче ићи ће $d_s \parallel d \parallel Y$.

Конструкција сенки по H и V остаје потпуно иста као код пређашњег задатка, и зато није ни цртана ради уштеде у простору.

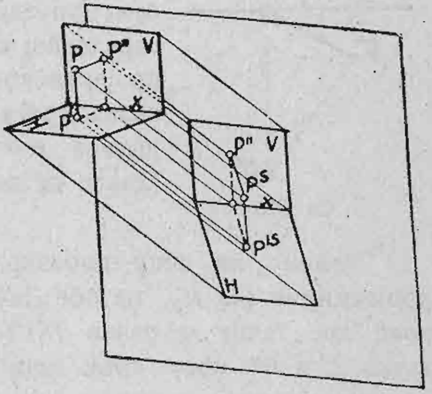
IX. КОСА ПРОЈЕКЦИЈА

§ 125. Увод у косу пројекцију и пројекција тачке

Ако код косе аксонометрије узмемо осе X и Z без скраћења, па још подесимо да и угао између њих буде прав угао, долазимо до једног новог случаја. Цела аксонометриска вертикалница показује се у правој величини. Потсетимо се да је коса пројекција исто што и сенка, а да се сенка неке фигуре појављује у правој величини, ако је раван фигуре паралелна са равни на коју баца своју сенку. (Случај да су те две равни симетричне према зраку овде искључујемо). То значи да у овом случају осе X и Z (дакле цела аксонометриска вертикалница) стоје паралелно са пројекциском равни и да је оса Y управна на њу. Према томе положај правоугаоног система оса према пројекциској равни потпуно нам је одређен (сем његовог отстојања од пројекциске равни). Уз то знамо и скраћење на оси Y, па нам је потпуно одређен и правац косог пројекциског зрака.'

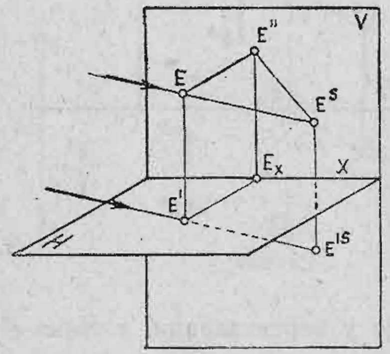
На тај начин дошли смо до стварне *„Косе пројекције“*.

Принцип косе пројекције је овај. Узмемо хоризонталницу и вертикалницу, па их поставимо тако да вертикалница буде паралелна са неком новом вертикалном пројекциском равни Π која је уједно и раван цртања. Ако сада хоризонталницу и вертикалницу, са свим што је у њиховом склопу, пројектујемо косим паралелним зрацима на нову пројекциску раван, пројекција коју на тај начин добивамо је *„коса пројекција“*. У сл. 296 узета је у систему H и V тачка P и одређене њезине пројекције P' и P'', па је затим са H и V пројектована и тачка са својим пројекцијама на Π. Већ пре смо видели да се све што је у V показује у новој, косој пројекцији у правој величини јер је $V \parallel \Pi$.



Сл. 296

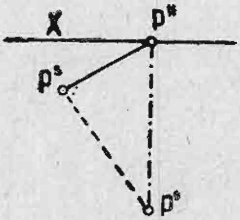
Ништа се неће променити ако узмемо да се вертикалница поклапа са новом пројекциском равни као у сл. 297. У том случају је права $[E'' E^s]$ ортогонална пројекција косог пројекциског зрака. Уједно је и дуж $(E'' E^s)$ коса пројекција дужи $(E'' E)$ управне на пројекциску раван Π. Када би нам још била позната и права величина те управне дужи, пројекциски зрак био би нам потпуно одређен. Место овако произвољне тачке E узима се за одређивање косог пројекциског зрака нека тачка P у хоризонталници.



Сл. 297

У сл. 298 дуж $(P^s P'')$ је коса пројекција ординате тачке P, дакле дужи од P управне на Π. Како је тачка P узета у H, тачка P^s је уједно и P'^s, прва коса пројекција тачке. Права величина ординате обично нам је позната (јер претпостављамо скраћење 3:4, 2:3 или било које друго), стога можемо да оборимо прву пројекцију око X-осе. Повучемо из P'' вертикалну праву ($\perp X$) и на њој нанесемо од тачке P'' у правој величини ординату тачке P. Добивену тачку требало би обележити са P^0, јер је то оборен положај тачке. Ипак ћемо је радије обележити са P', јер је то уједно и расклопљена прва пројекција. То ће нас потсећати да је дуж од P' до X прва ордината тачке, дакле права величина дужи $(P^s P'')$.

Троугао $P^s P'' P'$ који ћемо називати *„пројекциски троугао“* одређује потпуно положај и смер косог пројекциског зрака. Сам пројекциски троугао је коса пројекција једног равнокраког правоуглаоног троугла коме је једна катета $[P'' P]$ управна на V, а друга катета $[P'' P']$ у V (заправо у обореној H). Значи да је сам троугао у равни управној на H и V, дакле паралелној са профилницом. Тачка P^s је траг косог пројекциског зрака, права $[P^s P'']$ његова ортогонална друга пројекција, а дуж $[P^s P']$ је коса пројекција тетиве лука по коме смо обарали H у V (дакле праве под 45^0 у равни $\perp H$ и $\perp V$).

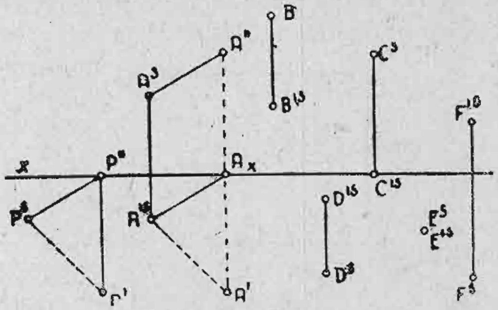


Сл. 298

*

Узмемо ли неку произвољну тачку E са њеном ортогоналном I пројекцијом (на H), па обе тачке косо пројектујемо на Π, добићемо нове две тачке у равни Π. Тачку E^s косу пројекцију произвољне тачке E и E'^s косу прву пројекцију исте тачке (в. сл. 297). Лако је увидети из саме слике да ће коса пројекција и коса прва пројекција неке тачке стајати увек на једној правој управној на X, на ординати. Када су нам задате те две тачке P^s и P'^s, а уз то знамо и *„пројекциски троугао“* потпуно нам је одређен положај тачке P у простору. Као пример узмимо у сл. 299 тачку A^s, A'^s. Како је на слици уцртан и пројекциски троугао P^s P'' P' можемо повући из A'^s праву паралелну $[P^s P'']$. Њен пресек са осом X одређује тачку A_x кроз коју пролази ордината тачке. Права паралелна $[P^s P'']$ из A^s одређује на тој ординати A'', а права паралелна $[P^s P'']$ из A'^s одређује на њој A'. Тим смо одредили ортогоналне пројекције тачке A, па према томе и положај тачке A према пројекциским равнима H и V.

На исти начин можемо да одредимо ортогоналне пројекције и осталих тачака. Тачка A је у I квадранту, тачка B у II, тачка F у III, а тачка D у IV. Тачка C је у вертикалници, а тачка E у хоризонталници.



Сл. 299

*

За косу пројекцију важе сва основна правила која су важила за ортогоналну пројекцију. Стога се сви положајни задаци могу решити директно и на исти начин као у ортогоналној пројекцији, само ако се не употребе трагови.

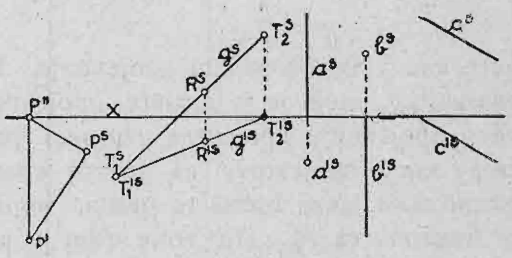
§ 126. Пројекција праве

Коса пројекција неке тачке и њена коса прва пројекција скупа одређују потпуно тачку у простору. Одатле следи да коса пројекција једне праве и њена коса прва пројекција одређују неку праву у простору. Тако су у сл. 300 уцртане коса пројекција g^s праве g и коса прва пројекција g'^s. Те две пројекције потпуно одређују у простору положај праве g — када нам је на слици уцртан и пројекциски троугао $P^s\ P''\ P'$ —. Други траг T_2 праве g одређен је на исти начин и истим помоћним линијама као и у ортогоналној пројекцији. Први траг $T_1{}^s$ добијамо у косој пројекцији директно у пресеку косе и косе прве пројекције праве без икакве друге конструкције или линије. Та разлика — према конструкцији првог трага T_1' у ортогоналној пројекцији — долази отуда, што се у косој пројекцији не цртају пројекције праве на H и V, него само једна пројекција и то обично прва пројекција g'^s (као овде у слици), а место друге пројекције (пројекције на V) црта се сама права g^s.

На правој g^s узета је нека тачка R^s, па је ординатом одређена и њена прва пројекција R'^s, потпуно једнако као у ортогоналној пројекцији.

Права a показује се у првој пројекцији као само једна тачка a'^s, а друга коса пројекција јој је a^s, управна на X-осу. Сама права a је управна на хоризонталницу. Ако је коса пројекција b^s неке праве свега једна тачка, а коса права $b'^s \perp X$, сама права b је у правцу пројекциског зрака.

Права c управна на вертикалницу, има своју косу и косу прву пројекцију у правцу ординате $P^s\ P''$ из пројекције троугла. Праве $\parallel V$ и $\parallel X$ имају пројекције као у ортогоналној пројекцији, док праву паралелну са H (јер другу пројекцију праве обично не цртамо) препознајемо по томе што су јој обе пројекције — коса и коса прва — између себе паралелне. (Отстојање тачке R^s од R'^s на правој g у сл. 300 једнако је отстојању тачке R од хоризонталнице. Ако су све тачке праве једнако удаљене од H — дакле ако је права паралелна са хоризонталницом, — све косе пројекције тачака треба да су једнако удаљене од својих косих првих пројекција, па према томе, обе пројекције — коса и коса прва — треба да су између себе паралелне).



Сл. 300

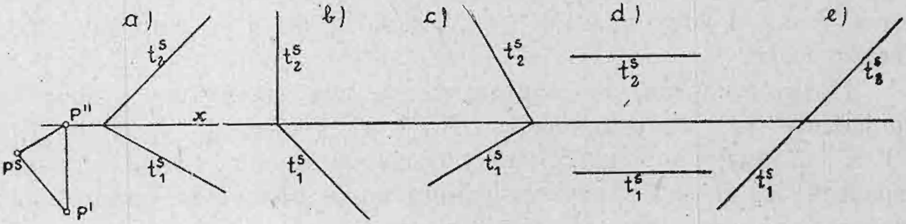
Ако су обе пројекције праве, коса и коса прва, управне на осу X положај праве није довољно одређен (као ни у ортогоналној пројекцији). Да права буде потпуно одређена треба да су на њој обележене пројекције двеју одвојених тачака. Оваква права, и ако су јој обе пројекције управне на X-осу, не лежи у равни паралелној са профилницом (као што би то било да су то ортогоналне пројекције).

Права *g* је произвољна права, док су остале праве у нарочитом (специјалном) положају.

§ 127. Пројекција равни

Када су равни одређене трасама, све остају као у ортогоналној пројекцији. Једина је разлика код равни управне на вертикалницу. У ортогоналној пројекцији прва траса t_1' је у том случају управна на осу X, док је у косој пројекцији траса t_1^S паралелна са страном $P^S P''$ пројекцисног троугла (у ствари је поново управна на осу X, али се таква права t_1^S показује као права $\| P^S P''$).

У слици 301 нацртана је под *a*) произвољна раван t^s_1 t^s_2. До ње под *b*) нацртане су трасе равни управне на H. Раван под *c*) је управна на вертикалницу, па јој је прва траса t^s_1 паралелна са страном $P^s P''$ пројекцисног троугла. Под *d*) је нацртана раван паралелна са осом X. Обе су јој трасе, као и у ортогоналној пројекцији паралелне са X-осовином. Раван паралелна са V има прву трасу $t^s_1 \| X$, а раван $\| H$ има другу трасу $t^s_2 \| X$. На слици нису нацртане ни једна ни друга, јер су исте као у ортогоналној пројекцији. На крају је под *e*) претстављена раван $t^s_1 t^s_2$ која је у правцу пројекцисног зрака. Значи да је то за косу пројекцију пројектна (зрачна) раван и све што је у равни има своју косу пројекцију на другој траси t^s_2. Како је и прва траса t_1 равни само једна права те равни, мора и њена коса пројекција t^s_1 да се поклопи са t^s_2. По томе баш и распознајемо овакву (пројектну) раван, што су јој трасе преклопљене: t^s_1 у продужењу t^s_2 или обрнуто.



Сл. 301

*

Задаци: права у равни, тачка у равни, раван кроз праву, специјална раван кроз праву, права паралелна са равнином, раван паралелна са правом и слични положајни задаци решавају се исто као у ортогоналној пројекцији и помоћу истих линија, ако се не употребе трагови.

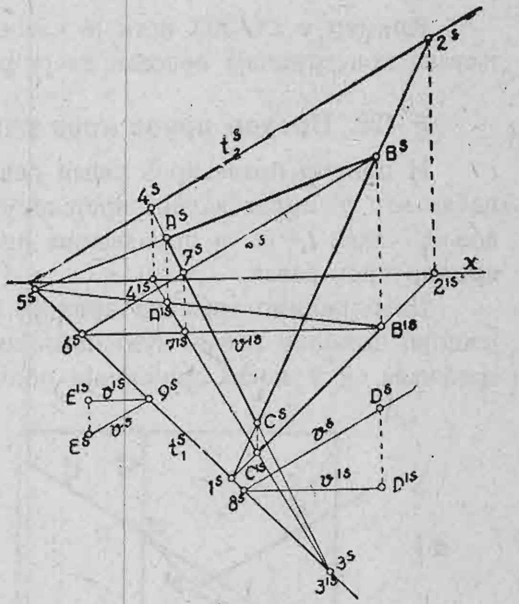
За вежбу решен је у сл. 302 следећи задатак. Задан је у косој и косој првој пројекцији троугао ABC, треба одредити трасе његове равни.

Трасе одређујемо помоћу трагова продужених страна троугла. Друге трагове 2^s и 4^s одређујемо исто као у ортогоналној пројекцији у пресеку првих пројекција првих са X-осом. Прве трагове 1^s 3^s и 5^s појединих продужених страна добијамо једноставно у пресецима косих пројекција тих продужених страна са њиховим косим првим пројекцијама.

Хоћемо ли да одредимо другу сутражницу равни (док још није одређена друга траса) повучемо њену прву пројекцију $v'^s \parallel X$. Како v'^s пресеца троугао $A'^s\, B'^s\, C'^s$ у тачкама B'^s и $7'^s$ можемо те две тачке пренети ординатама на косу пројекцију троугла. Тачке B^s 7^s одређују v^s, тражену косу пројекцију друге сутражнице.

Конструкција је иста као у ортогоналној пројекцији, али ако се користи прва траса t_1^s равни, конструкција се мења, постаје једноставнија. Продужена прва пројекција v'^s пресеца t^s_1 у тачки 6^s. То је први траг тражене сутражнице, па је права 6^s B^s њена коса пројекција v^s.

Треба ли да одредимо косу пројекцију било које тачке чију косу прву пројекцију D'^s већ имамо, можемо кроз D'^s да повучемо v'^s до пресека 8^s са t_1^s. Кроз 8^s пролази v^s, па је на њој и на ординати тражена тачка D^s. На исти начин одређена је из E^s прва пројекција E'^s те тачке.



Сл. 302

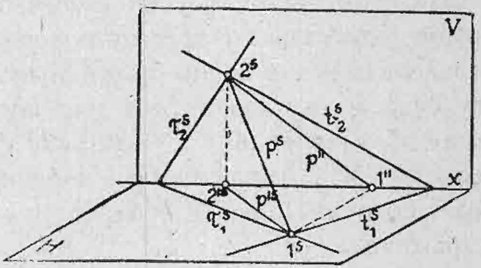
Прву сутражницу h у косој пројекцији обично не употребљавамо, јер се обично не црта коса друга пројекција. У овом случају могли бисмо је одредити јер нам је позната прва траса равни па би све прве сутражнице биле паралелне са њом.

*

Код овог примера се види да је прва траса t_1^s права коинциденције за косу и косу прву пројекцију. Према томе је t_1^s осовина афинитета за косу и косу прву пројекцију.

§ 128. Пресек двеју равни

Пресек двеју равни одредимо двема тачкама које су заједничке једној и другој равни. Најлакше нам је и у косој пројекцији ако узмемо тачку 1 у којој се секу прве трасе и тачку 2 у којој се секу друге трасе.



Сл. 303

Тако су у слици 303 за задате равни t_1^s t_2^s и τ_1^s τ_2^s узете тачке 1^s на пресеку првих траса и 2^s на пресеку других траса и спојене. Спојна права 1^s 2^s је тражена пресечна права p^s двеју задатих равни.

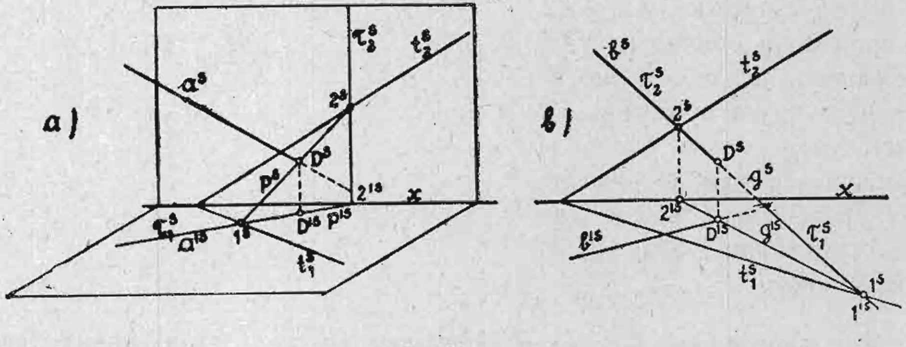
Косу прву, а по потреби и косу другу пројекцију p'^s и p''^s пресечне праве одредимо помоћу пројекција тих истих тачака 1 и 2.

Пример у сл. 303 исти је као пример у сл. 32*a*) којим је објашњавана конструкција пресека двеју равни.

§ 129. Продор праве кроз раван

И продор праве кроз раван решава се у косој пројекцији на исти начин као у ортогоналној пројекцији. У слици 304*a* задата је произвољна раван t_1^s t_2^s и произвољна права a^s a'^s, па треба да одредимо продор кроз раван.

Да одредимо тражени продор, повучемо, као у ортогоналној пројекцији, помоћну раван. Као помоћна раван кроз задату праву употребљава се у косој пројекцији обично раван управна на хоризонталницу. Повучемо је, одредимо њен пресек p^s са задатом равнином t_1^s t_2^s, па је на пресечној правој p^s тражена тачка D^s продора праве *a* кроз раван.



Сл. 304 *a* и *b*

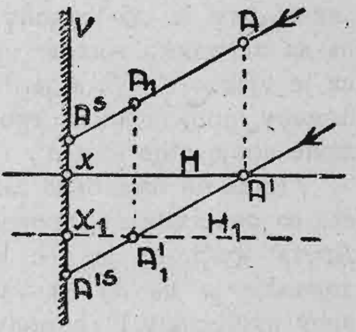
Помоћну раван кроз праву *a* управну на вертикалницу употребљавамо ретко када, јер да је одредимо требало би најпре да конструишемо косу другу пројекцију праве коју обично не цртамо.

У косој пројекцији употребљава се као помоћна раван и пројектна раван (в. сл. 301*e*). Таква је помоћна раван повучена у сл. 304*b*) кроз праву b^s. Друге трасе секу се у тачки 2^s, прве у тачки 1^s. Одређена је коса прва пројекција g'^s пресечне праве g, па је на њој тачка D'^s. Ординатом одредимо D^s на b^s.

§ 130. Померање *X*-осе и прелаз на ортогоналну пројекцију

Решавање метричких задатака у косој пројекцији отежано је услед тога што се прва пројекција не показује у правој величини. Ради тога за решавање метричких задатака прелазимо делимично у ортогоналну пројекцију, па даље решавамо директно, а можемо прећи у ортогоналну пројекцију, решити цео задатак у ортогоналној пројекцији, а тада готова решења вратити натраг у косу пројекцију. Овај други начин је обично неподесан, јер захтева много конструкције и тиме терети цртеж.

Код прелаза из косе пројекције у ортогоналну деси се често да конструкција испадне гломазна нарочито ако су поједине тачке превише удаљене од вертикалнице. Да то избегнемо можемо померити осу *X*. То померање *X*-осе приказано је у сл. 305. На слици се вертикалница и хоризонталница показују као праве, а оса *X* као тачка. За ту *V* и *H* узета је нека тачка *A*, одређена њена ортогонална пројекција A' на *H*, а тада одређена коса пројекција A^s и A'^s. Ако задржимо A^s и A'^s где су и биле, а осу *X* спустимо до положаја X_1, тиме смо уствари спустили хоризонталницу. Услед тога спуштања хоризонталнице мења се и положај тачке *A*. Прва пројекција долази у положај A_1', а сама тачка у A_1. Уствари испада да смо спуштајући осу *X* приближили тачку *A* вертикалници. Да место једне тачке *A* имамо више тачака, спуштањем *X*-осе (или хоризонталнице) приближиле би се све оне вертикалници и то све за исту дуж. Према томе међусобни положај тих тачака неби се ни најмање изменио. То значи да померањем *X*-осе не мењамо задатак нити његово решење, једино олакшавамо конструкцију.

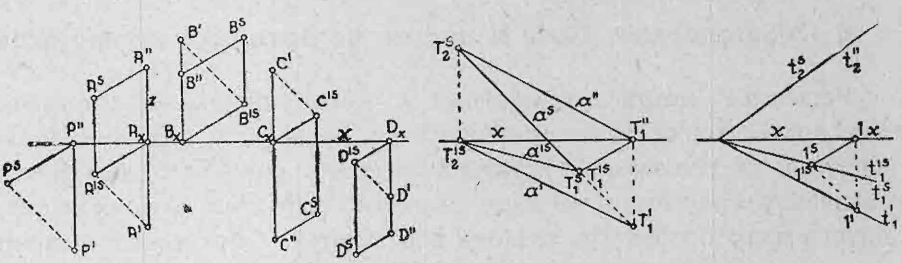


Сл. 305

*

Ако нам је познат пројекциски троугао, прелаз из косе пројекције у ортогоналу је врло једноставан. Да одредимо другу пројекцију A'' задате тачке A^s A'^s, повучемо из A^s праву управну на *V*. (в. сл. 306). Та права је паралелна са страном P^s P'' пројекциског троугла. Да одредимо где та права продире кроз *V*, повучемо из A'^s

праву $\perp V$, (заправо понова паралелно са страном $P^s P''$). То је уствари коса пројекција прве ординате тачке A и у њезином пресеку са X је тачка A_x. Ордината из A_x ($\perp X$) одређује на реченој управној на V тражену другу пројекцију A'' тачке A. Продужимо ли ординату, можемо помоћу тетиве обарања (паралелно са страном $P^s P'$ пројекцискoг троугла) одредити на њој и прву пројекцију A' тачке A.



Сл. 306

На исти начин одређене су ортогоналне пројекције осталих тачака. Тачка A је у I квадранту, B у II, C у III, а тачка D у четвртом квадранту.

Ако треба да одредимо ортогоналне пројекцији неке праве, најлакше нам је да помоћу a^s и a'^s одредимо трагове $T_2{}^s$ и $T_1{}^s$ праве, па да одредимо њихове ортогоналне пројекције. Други траг $T_2{}^s$ је у V, па је уједно и T_2'', а за $T_1{}^s$ одредимо ортогоналне пројекције T_1' и T_1'' помоћу пројекциског троугла као за тачку P^s. Тим су одређене тражене пројекције a' и a''.

Када би нам била задата нека раван својим трасама $t_1{}^s$ и $t_2{}^s$ прелаз на ортогоналну пројекцију био би једноставнији него код праве. Друга траса $t_2{}^s$ је већ у V, па је она уједно и t_2''. Да одредимо t_1' довољно је да на $t_1{}^s$ узмемо било коју тачку 1^s и да јој одредимо прву пројекцију $1'$ (помоћу пројекциског троугла). Тим је одређена и t_1'.

§ 131. Права величина дужи

Права величина дужи одређује се у косој пројекцији као у ортогоналној пројекцији. Конструкција је ипак мало отежана услед тога што се прва пројекција (заправо цела хоризонталница) у косој пројекцији показује измењена (скраћена или продужена).

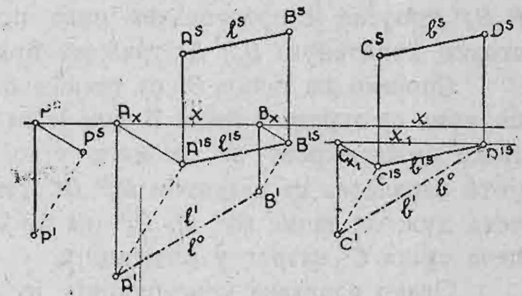
Из увода знамо да је вертикалница у косој пројекцији паралелна са пројекциском равни (или да се са њом поклапа). Услед тога ће се у косој пројекцији показивати у правој величини све оно што је у вертикалници или паралелно са њом. Према томе, ако хоћемо да одредимо праву величину неке дужи, оборићемо је у V, или окренути да постане паралелна са њом.

Ако је нека дуж паралелна са вертикалницом, тада нам није потребна конструкција, сама дуж се већ у пројекцији показује у правој величини.

Када је дуж паралелна са хоризонталницом, тада је њена прва пројекција l'^s паралелна са косом пројекцијом l^s дужи, али је паралелна и са самом дужи l. Како се хоризонталница у косој пројекцији показује измењена, треба да је расклопимо, окренемо око осе X у вертикалницу, па ће се тек тада показивати дуж у правој величини.

Тако је урађено у слици 307. Прва пројекција l'^s дужи оборена је у V тим што су (на познат начин) одређене ортогоналне прве пројекције крајњих тачака A и B дужи.

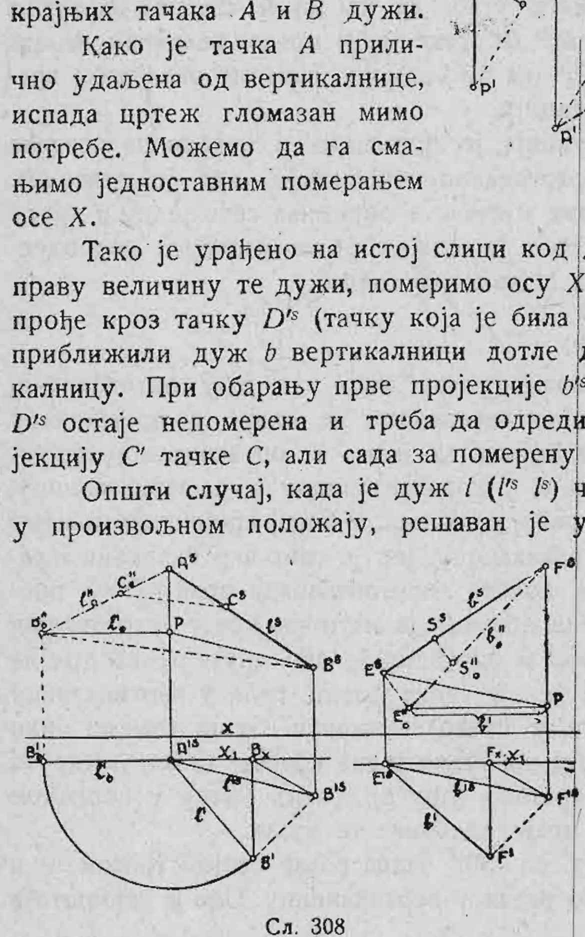
Како је тачка A прилично удаљена од вертикалнице, испада цртеж гломазан мимо потребе. Можемо да га смањимо једноставним померањем осе X.



Сл. 307

Тако је урађено на истој слици код дужи b^s $b'^s \parallel H$. Да одредимо праву величину те дужи, померимо осу X. Померамо је дотле, док X_1 прође кроз тачку D'^s (тачку која је била ближа старој X-оси). Тим смо приближили дуж b вертикалници дотле да је тачка D пала у вертикалницу. При обарању прве пројекције b'^s дужи у вертикалницу тачка D'^s остаје непомерена и треба да одредимо само оборену прву пројекцију C' тачке C, али сада за померену осу X_1.

Општи случај, када је дуж l (l'^s l^s) чију праву величину тражимо у произвољном положају, решаван је у сл. 308. Задата дуж l са крајњим тачкама A и B је у произвољном положају. Да јој одредимо праву величину окренућемо је да буде $\parallel V$. Тим ћемо конструисати троугао правих величина који нам даје праву величину.



Сл. 308

Најпре повучемо из ниже тачке B^s праву паралелну са првом пројекцијом A'^s B'^s дужи. Тако одредимо тачку P и са њом висинску разлику (P A^s) двеју крајњих тачака дужи. Затим померимо осу X до положаја X_1 кроз тачку A'^s, па одредимо (за X_1) ортогоналну прву пројекцију l дужи. Сада можемо да окренемо (око пројекциског зрака кроз A) саму дуж да буде паралелна са V. Око тачке A'^s окренута је l' док није постала $\parallel X$ заправо док тачка B_0' није пала на X_1. У том положају тачка B_0''

треба да буде у вертикалници, на ординати из B_0', а да при том не мења своју висину. Стога је повучена из тачке P хоризонтална права, па је на њој B_0''.

Дуж B_0'' A^s је тражена права величина дужи l. На слици је уствари нацртан троугао правих величина A^s P B_0''. Страна A^s P је висинска разлика двеју крајњих тачака дужи, друга катета, страна P B_0'' троугла је ортогонална прва пројекција l' дужи, па је трећа страна, хипотенуза B_0'' A^s тражена права величина дужи.

Спојимо ли тачку B^s са тачком B_0'' спојна права је секанта лука по коме се окретала тачка B док је пала у вертикалницу. Свака друга тачка дужи окреће се за исти угао, па ће јој и секанта окретања бити паралелна са секантом B_0'' B^s. Тако је на правој величини нанета нека дуж од тачке B_0'' до C_0'' па је (помоћу секанте окретања) враћена тачка C^s натраг у пројекцију.

Овако нацртана конструкција је прегледна и понајвише потсећа на исту конструкцију у ортогоналној пројекцији, али је незгодна. Заузима много места, а к томе и секанта окретања сече једну и другу праву под оштрим углом. Стога је можда бољи распоред код одређивања праве величине дужи b^s на истој слици.

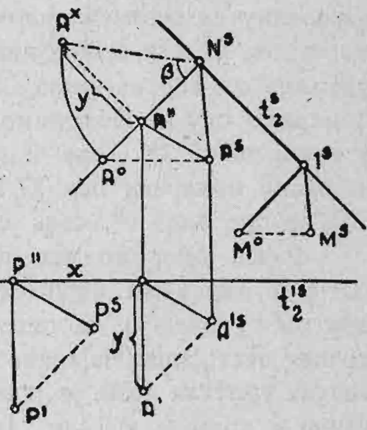
§ 132. Обарање равни

У косој пројекцији обарамо раван исто као и у ортогоналној пројекцији, окрећемо је око неке праве док не падне у пројекциску раван или док не постане паралелна са њом. У ортогоналној пројекцији могли смо обарати раван и у хоризонталницу и у вертикалницу, јер су се обе показивале у правој величини. У косој пројекцији можемо да обарамо раван само у вертикалницу, јер је само вертикалница паралелна са пројекциском равни, док се хоризонталница показује у пројекцији измењена. И сам начин обарања је исти као пре у ортогоналној пројекцији. Узмемо неку тачку и окрећемо је око друге трасе док не падне у вертикалницу. Када је та тачка равни пала у вертикалницу свака дуж равни показује се у правој величини. Стога узмемо било коју дуж, да јој је тачка коју окрећемо једна крајња тачка, а друга крајња тачка да је на оси окретања (другој траси). Тачку у обореном положају одредимо помоћу праве величине те дужи.

Као пример задата је у сл. 309 једна раван својом трасом t_2^s и тачком A^s. Треба да оборимо раван у вертикалницу. Ово је најопштији и најчешћи случај.

Да оборимо раван окренућемо тачку A око t_2 док не падне у V. Зато нам треба одредити отстојање тачке A од трасе t_2 равни. То отстојање је хипотенуза једног правоуглог троугла, коме је једна катета отстојање тачке A од вертикалнице (дакле једнака дужи $A\,A''=$ $=y$), а друга катета отстојање друге пројекције A'' тачке од друге трасе t_2^s равни (t_2^s је уједно и t_2'').

На познат начин одредимо другу пројекцију A'' тачке A и њену прву ординату y. Ако сада кроз A'' повучемо управну на t_2^s до пресека N^s одредили смо и отстојање тачке A'' од t_2^s. Тиме су одређене обе катете реченог троугла, па можемо да га нацртамо у обореном положају. Довољно је да из A'' повучемо управну на праву A'' N^s и да на њој нанесемо од тачке A'' дуж y. Одредимо тако тачку A^x switch обореног троугла. Дуж A^x N^s је права величина отстојања тачке A од трасе t_2. Нанесемо ту дуж од тачке N^s на праву повучену кроз A'' управно на t^s и тако одредимо тачку A^0, тачку A у обореном положају. Тим је одређен оборени положај равни.



Сл. 309

Дуж A^s N^s је коса пројекција отстојања тачке A од трасе t_2, дуж N^s A^0 је та иста дуж оборена у вертикалницу (окренута око t_2 док је пала у вертикалницу), а дуж A^s A^0 је тетива окретања. Желимо ли да одредимо оборени положај било које друге тачке M^s равни, повучемо најкраће отстојање тачке M од трасе t_2 до пресека 1^s са трасом (дуж M^s $1^s \parallel A^s N^s$), тала из тачке 1^s повучемо то исто отстојање у обореном положају (права из $1^s \perp t_2^s$), па тетивом окретања одредимо на њој оборен положај M^0 тачке M (M^s $M^0 \parallel A^s$ A^0).

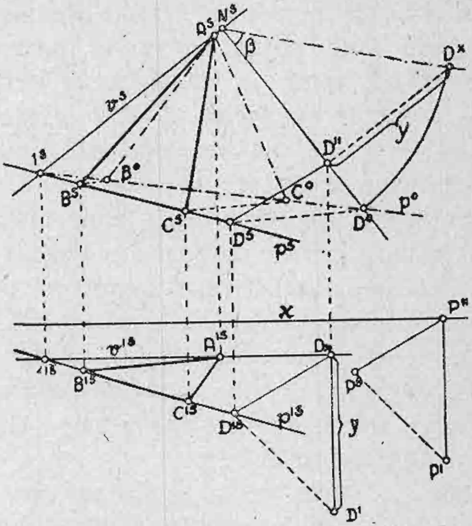
Свакој тачки равни у косој пројекцији одговара само једна тачка равни у обореном положају и то у правцу тетиве окретања. Како се све тачке једне равни окрећу за једнак угао, тетиве окретања су паралелне за све тачке равни. Према томе свака фигура равни у косој пројекцији је афина са том фигуром у обореном положају. Оса афинитета је друга траса t_2^s, а правац афинитета је тетива окретања. Значи да када знамо један пар тачака које једна другој одговарају, све остале тачке можемо да одредимо и помоћу афинитета.

За вежбу решимо следећи задатак: Задата је произвољна права p (p^s p'^s) и ван ње произвољна тачка A (A^s A'^s); треба одредити пројекције равностраног троугла, коме је тачка A један угао, а друга два угла леже на правој p.

Права p и тачка A одређују једну раван, па ће и троугао лежати у тој равни, а да уцртамо троугао треба да оборимо раван.

Да би могли оборити раван требало би да имамо њену другу трасу, али да уштедимо конструкцију око одређивања трасе, поступимо радије овако. Кроз тачку A повучемо другу сутражницу v равни. Прва јој пројекција v'^s пролази кроз A'^s и пресеца праву p'^s у тачки $1'^s$. Коса пројекција v^s треба да пролази понова кроз A^s и кроз тачку 1^s, коју одредимо ординатом из $1'^s$ на правој p^s. Сада можемо да оборимо раван око v^s на исти начин као што смо је пре обарали око t_2^s, само сада неће бити раван оборена у вертикалницу, него у неку раван паралелну са вертикалницом, а кроз сутражницу v. (Ову конструкцију могли би, можда природније, тумачити и овако. Тачка A је прилично удаљена од вертикалнице. Да би конструкција била мање разбацана, померимо осу X. Померимо је толико да X_1 прође кроз A'^s и пресече p'^s у некој тачки $1'^s$. Тада ће права A^s 1^s бити друга траса t_2^s равни $[Ap]$ за овако померену осу X. По овом новом тумачењу права кроз $A'^s \parallel X$, која је пре била v'^s, сада је X_1, а ранија права v^s сада је t_2^s).

Раван оборимо као раније. Узмемо на правој p неку тачку D (D^s D'^s) одредимо најкраће отстојање те тачке од v^s (или од t_2^s по другом тумачењу), па тада оборимо тачку D помоћу тог њеног најкраћег отстојања. Најкраће отстојање тачке D од v^s (или t_2^s) је хипотенуза троугла коме је једна катета отстојање тачке D од вертикалне равни у којој је v^s (или t_2^s), а друга катета једнака отстојању друге пројекције D'' тачке D — на вертикалној равни кроз v^s (или t_2^s) — од v^s (или t_2^s). Одредимо стога D'' и D', а тиме и y, повучемо из D'' $\perp$ v^s (или t_2^s) до пресека N^s и оборимо тај троугао (D'' D N^s). Дуж D^x N^s је тражено најкраће отстојање, па га нанесемо на реченој нормали кроз D'' од тачке N^s. Тако одређена тачка D^0 је тачка D у обореном положају.



Сл. 310

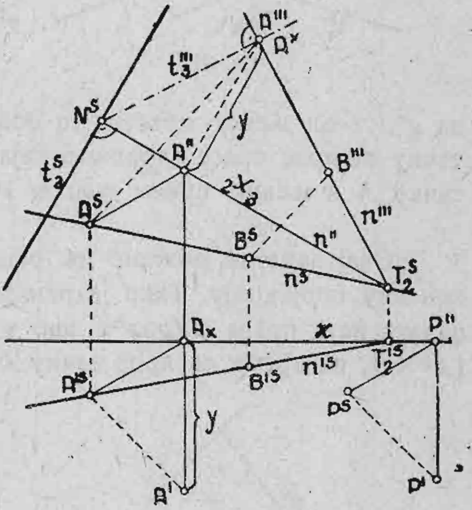
Тачка D је једна тачка праве p, значи да ће p^0 пролазити кроз D^0, а како је тачка 1^s на оси окретања, права 1^s D^0 биће p^0, оборена права p. И тачка A^s је на оси окретања и она остаје непомерена, па можемо да уцртамо тражени равнострани троугао у обореном положају. Тачке B^0 и C^0 су његови углови на правој p^0. Вратимо их натраг у пројекцију помоћу тетива окретања C^0 C^s и B^0 B^s које су паралелне са D^0 D^s. Одредимо још прве пројекције B'^s и C'^s на p'^s, па можемо да нацртамо тражени троугао.

§ 133. Права управна на раван и раван управна на праву

Праву управну на раван и раван управну на праву одређујемо поново делимичним прелазом на ортогоналну пројекцију.

Као најчешћи случај решен је у сл. 311 следећи задатак. Задата је произвољна раван другом трасом t_2^s и тачком A, па треба да кроз тачку A повучемо праву n управну на раван.

Одредимо најпре A'' и отстојање y тачке A од V. Тада повучемо из A'' праву n'' управно на трасу t_2^s, која је уједно и t_2''. По правилима ортогоналне пројекције права n'' је већ друга пројекција тражене управне праве n. Права n'' пресеца t_2^s у тачки N^s (уједно и N''), па је дуж $A'' N^s$ уједно и друга пројекција најкраћег отстојања тачке A од t_2, стварно друга пројекција линије главног пада повучене кроз тачку A до трасе. Да одредимо праву величину тога отстојања, оборимо као раније правоугаони троугао $N^s A'' A$ око n. Повучемо из A'' управну на n'', па нанесемо од A'' отстојање y тачке A од вертикалнице, па је тако оборен речени троугао и одређена $A^x N^s$ права величина отстојања $A N$. Раван троугла $A'' N^s A$ је управна на V, а n'' је траса те равни. Можемо узети да је та раван нова пројекциска раван. Права n'' била би уједно и нова оса $_2X_3$, па би A^x била уједно и A''', а права величина најкраћег отстојања $A N$ била би трећа траса t_3''' задате равни. Не само трећа траса него, како је n'' (или $_2X_3$), управна на t_2^s, задата раван је управна на нову пројекциску раван $_2X_3$, па се цела показује као једна права t_3'''. Права n''' коју повучемо кроз $A''' \perp t_3'''$ је трећа пројекција тражене праве кроз A управне на задату раван. Пресек те праве n''' са n'' (или $_2X_3$) је продор те управне кроз вертикалницу, тачка T_2^s (уједно T_2''' или T_2'').



Сл. 311

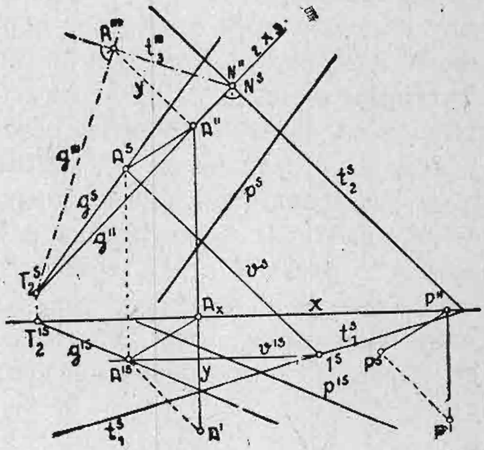
Тим је одређена тражена управна права. Коса јој је пројекција n^s права $A^s\ T^s_2$, а косу прву пројекцију одредимо лако (ординатом на X), па је n'^s права $T_2'^s\ A'^s$.

Треба ли да на одређеној управној нанесемо од тачке A било коју дуж, нанесемо је у III пројекцији (јер је III пројекција уједно и права величина) од тачке A''' до неке тачке B''', па је тада помоћу тетиве окретања $\parallel A'''\ A^s$ вратимо у косу пројекцију B^s, а одатле ординатом у прву пројекцију B'^s на n'^s.

*

На исти начин решавамо и обрнути задатак: одредити раван која пролази кроз задату тачку A и стоји управно на задату праву p ($p^s\ p'^s$).

Кроз задату тачку A ($A^s\ A'^s$) повучемо нову праву g ($g^s\ g'^s$) паралелну са правом p и одредимо њен други траг T_2^s. Тада одредимо ортогоналне пројекције A'' и A' тачке A и њену ординату y. Права која пролази кроз A'' и T_2^s (а T_2^s је уједно и T_2'') је g'' друга пројекција праве g. Сада можемо да оборимо троугао $T_2^s A'' A$ око g'' помоћу ординате y, или да одредимо трећу пројекцију тога троугла, ако претпоставимо да је g'' уједно и нова оса ${}_2X_3$. У трећој пројекцији показује се права g (g''') у правој величини. Друга траса t_2'' тражене управне равни (а t_2'' је уједно и t_2^s) треба да буде управна на g'' (по правилима која важе за ортогоналну пројекцију), дакле управна на нову осу ${}_2X_3$. Одатле следи да ће се цела тражена управна раван показивати у III пројекцији као једна права и то као права t_3''' кроз A''', управна на g'''. Повучемо ли је, пресецаће у тачки N осу ${}_2X_3$ или g''. Тачка N је уједно и N''' и N'' и N^s, па је тако и обележена.

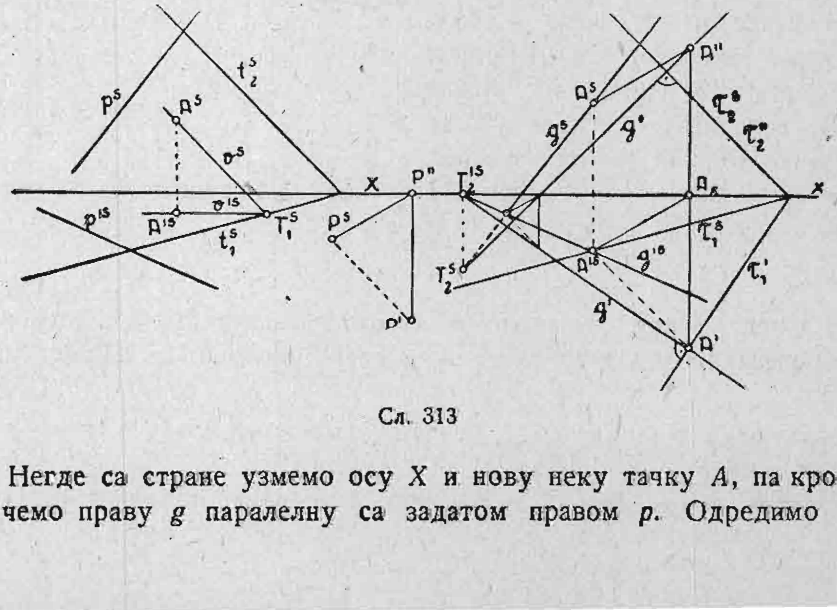


Сл. 312

Тиме је задатак решен, t_2^s пролази кроз N^s и стоји управно на g'', а од њеног пресека са осом X ићи ће прва траса t^s_1. Другу тачку те прве трасе одредимо најлакше сутражницом $\nu^s\ \nu'^s$ кроз задату тачку A и њеним првим трагом 1^s.

*

Овај задатак можемо да решимо и потпуним прелазом на ортогоналну пројекцију. Тако је решен пример у сл. 313. Лево је на слици задата иста права p ($p^s\ p'^s$) као у прошлој слици и ван ње тачке A ($A^z\ A'^s$), па треба да кроз тачку A повучемо раван управну на праву p.



Сл. 313

Негде са стране узмемо осу X и нову неку тачку A, па кроз њу повучемо праву g паралелну са задатом правом p. Одредимо тада ортогоналне пројекције g'' и g' праве g. За тај прелаз најподесније је користити трагове праве, нарочито други траг. Ако су трагови превише близу, као на овом примеру, узмемо било коју другу тачку праве. На слици је узета баш тачка A, па су одређене A' и A''.

Свака раван која је управна на праву g има трасу $\tau_2'' \perp g''$ и прву трасу $\tau_1' \perp g'$. Повуцимо једну такву раван $\tau_2'' \tau_1'$. Да би нам понован прелаз на косу пројекцију био што лакши, место било које друге повучена је τ_1' која случајно пролази кроз тачку A'.

Када је на тај начин одређена управна раван, вратимо је поново у косу пројекцију. Друга траса τ_2^s поклапа се са τ_3'', а прва траса τ_1^s (а то је и $\tau_1'^s$) пролази кроз пресек τ_2^s са X-осом и кроз тачку A'^s (јер је A' прва ортогонална пројекција те тачке у хоризонталници).

Остаје још да паралелно са том равни $\tau_1^s \tau_2^s$ повучемо у слици лево нову раван кроз тачку A. Нову паралелну раван одредимо најлакше помоћу сутражнице v^s (кроз тачку A^s) и v'^s (кроз A'^s) и њеног трага T_1^s. Кроз T_1^s пролази $t_1^s \parallel \tau_1^s$, а од пресека са осом X права $t_2^s \parallel \tau_2^s$, па је одређена тражена раван кроз тачку A управна на праву p.

Овим начином потпуним прелазом на ортогоналну пројекцију конструкција је можда једноставнија. Свакако је чешћа, јер целу конструкцију можемо да изведемо са стране, па да готове трасе нанесемо где треба, као што је урађено на слици. Ипак је први иачин подеснији кад год у траженој управној равни треба да нешто уцртамо (дакле када треба да раван оборимо).

На овај начин, потпуним прелазом на ортогоналну пројекцију можемо да решимо и први задатак: повући праву p управну на задату раван. Конструкција, чак и линије остају исте само их цртамо обрнутим редом.

§ 134. Задаци за вежбу

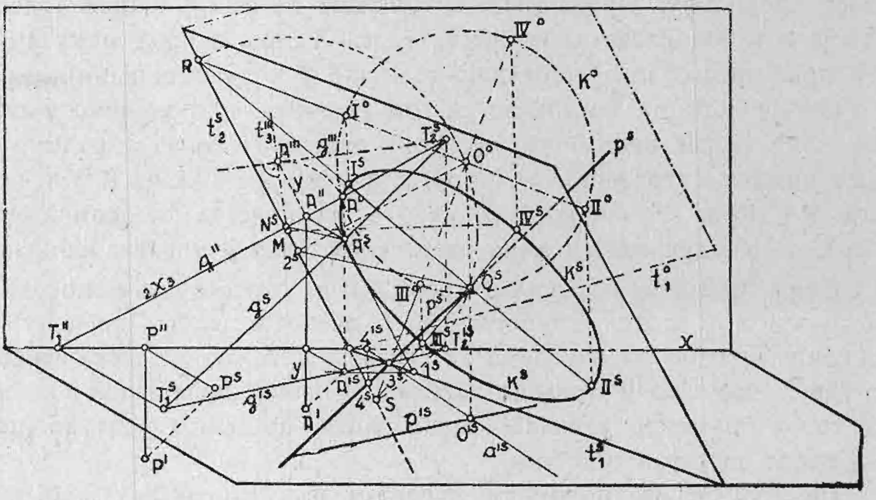
За вежбу решимо овај задатак: Задата произвољна права p и ван ње тачка A. Треба нацртати круг по коме се окреће тачка A око праве p.

Када се нека тачка A окреће око праве p, описује круг K, чија је раван управна на праву p. Средиште O тога круга је продор праве кроз ту управну раван, а полупречник r је растојање тачке A од тачке O.

Према томе да решимо постављени задатак, треба да решимо ове основне задатке: 1) Кроз задату тачку A повући раван управну на задату праву p. 2) Одредити продор O праве p кроз ту управну раван. 3) Оборити раван и нацртати круг K коме је средиште тачка O, а полупречник дуж OA. 4) Вратити раван натраг и нацртати косу пројекцију круга K.

Пошто треба да оборимо раван, први задатак, повући раван управну на праву, решимо делимичним прелазом на ортогоналну пројекцију. Задатак је исти као у сл. 312, па решење не морамо поново описивати. И поједини су елементи (тачке и праве) једнако обележени. Једина је разлика у пројекциском троуглу и положају праве p.

2) Продор праве p кроз управну раван одредимо помоћу пројектне равни повучене кроз праву p. Прва и друга траса са те помоћне равни поклапају се са пројекцијом p^s саме праве. Праве се трасе секу у тачки 3^s, а друге трасе у тачки 4^s. Одредимо косе прве пројекције



Сл. 314

тих тачака. ($4'^s$ је на X-оси,а $3'^s$ се поклапа са 3^s), па је права a'^s, која пролази кроз $4'^s$ $3'^s$, пресечна права управне равни са помоћном равни. У њеном пресеку са p'^s је O'^s коса прва пројекција тражене тачке O, продора праве p кроз управну раван.

3) У трећој пројекцији види се A''' N^s, најкраће отстојање тачке A од друге трасе t_2^s управне равни у правој величини. Помоћу њега оборена је тачка A око t_2^s у вертикалницу. Дуж A^s N^s је коса пројекција тога најкраћег отстојања. Дуж N^s A^s је то исто отстојање оборено у V, а дуж A^s A^0 је тетива окретања. Сличним троуглом O^s 2^s O^0 одредимо и O^0 оборену тачку O, средиште траженог круга K. Сам круг K^0 можемо сада да нацртамо. Полупречник му је дуж A^0 O^0.

4) Сада треба да вратимо натраг у косу пројекцију оборену раван скупа са кругом K. Круг ће се у косој пројекцији показивати као елипса (јер није паралелан са вертикалницом). Та елипса K^s биће афина са кругом K^0 у обореној равни. Оса афинитета је друга траса t_2^s равни (јер смо око ње обарали раван), а зраци афинитета су секанте окретања. Стога ћемо изабрати на кругу K^0 два спрегнута пречника, па ће косе пројекције њихових крајњих тачака I II и III IV бити крајње

тачке двају спрегнутих пречника елипсе. Како нам је избор спрегнутих пречника потпуно слободан, одабираћемо она два, која ће и у косој пројекцији бити под правим углом. Да одредимо те пречнике повучемо кроз тачке O^0 и O^s круг са средиштем M на t_2^s. Свакако ће тачка M бити на симетрали дужи O^0 O^s. Тај круг пресеца t_2^s у тачкама R и S. Ако из тачака R и S повучемо праве кроз O^0, у њиховим пресецима са кругом K^0 имамо крајње тачке $\mathrm{I}^0-\mathrm{IV}^0$ двају спрегнутих пречника круга K^0. Како су тачке R и S на оси афинитета можемо да повучемо из њих две праве кроз O^s, па ће то бити спрегнути пречници елипсе K^s, а крајње су им тачке $\mathrm{I}^s-\mathrm{IV}^s$ на тетивама окретања кроз тачке $\mathrm{I}^0-\mathrm{IV}^0$. И ови су спрегнути пречници под правим углом, према томе осе елипсе K^s.

*

Други задатак нека гласи овако: Задата је произвољна раван t_2^s t_1^s и у њој тачка R^s; треба одредити пројекцију октаедра коме је задата тачка R^s врх једног рогља, једна му је дијагонала управна на задату раван, а величина једне полудијагонале задата. Пројекциски троугао нацртан је код тачке R (R'^s R_x R').

Тачка R треба да буде један врх октаедра. Други врх S стаће на диагонали октаедра која пролази кроз врх R и стоји управно на задату раван t_2^s t_1^s. Остале четири тачке (четири врха рогљева) стоје у равни паралелној са задатом равнином, која пролази кроз тачку O, располовиште дијагонале R S. Та нам раван није задата нити је, за сада, било чим одређена. Стога ћемо у задатој равни t_1^s t_2^s конструисати квадрат A B C D око тачке R^s са задатом величином полудиагонале. Као што је тачка R^s пројекција тачке O^s (а из тачке S^s) на задатој равни t_1^s t_2^s, тако ће и четвороугао A^s B^s C^s D^s бити пројекција осталих четири врхова октаедра на равни t_1^s t_2^s.

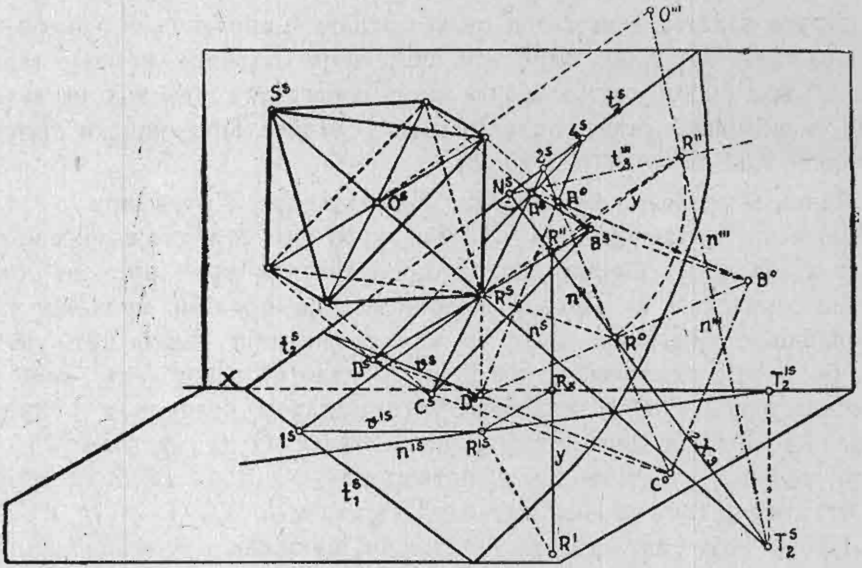
Према томе да одредимо тражени октаедар треба да решимо следеће основне задатке: 1) Задата је тачка R у равни; одредити R'^s 2) Кроз тачку R повући праву управну на раван t_1^s t_2^s и нанети на њој двапут по пола диагонале октаедра. 3) Оборити задату раван и конструисати у њој квадрат A^0 B^0 C^0 D^0 са средиштем R^0 тако да му је полудиагонала задате величине. 4) Вратити натраг у косу пројекцију раван са реченим квадратом. 5) Померити четвороугао A^s B^s C^s D^s у правцу управно на раван за дужину полудиагонале, тако да му се средиште R^s поклопи са O^s.

Коса прва пројекција R'^s тачке одређена је у слици помоћу сутражнице v^s, њеног пресека 1^s са правом трасом и косе прве пројекције v'^s.

Тада је одређена друга пројекција R'' тачке R и отстојање у те тачке од вертикалнице. Кроз R'' повучена је друга пројекција n'' управне на раван ($n'' \perp t_2^s$). Затим је одређена трећа пројекција R''' уз претпоставку да се ${}_2X_3$ поклапа са n''. Тиме је одређена трећа пројекција t_3'''

задате равни (права $N^s\ R'''$), па према томе и трећа пројекција управне n''' (из R''' права $n''' \perp t_3'''$). Пружимо ли ту управну n''' преко R''', можемо нанети на њој задату дужину полудијагонале, јер се нормала n показује у трећој пројекцији у правој величини. Тако одредимо у трећој пројекцији O''', средиште траженог октаедра.

Помоћу R''' одредимо R^0 у обореној равни. Дуж $R'''\ N^s$ је права величина (нормалног) отстојања тачке R од трасе t_2. Положимо раван тиме што положимо тачку R''' кругом око N^s на n''. Тачка R^0 је тачка R у положеној равни. Сада можемо око R^0 (као средишта) конструисати квадрат $A^0\ B^0\ C^0\ D^0$. Како за тај квадрат није постављен никакав нарочити услов, осим што му је задата дужина полудијагонале, повучемо кроз R^0 било које две праве под правим углом, нанесемо на њима задату полудијагоналу, па је квадрат одређен.



Сл. 315

Сада је све одређено и можемо вратити натраг у косу пројекцију. Најпре одредимо управну n^s. Она пролази кроз R^s, а такође и кроз траг T_2^s, који смо одредили пре у пресеку n''' са $_2X_3$ (или са n''). Када смо ту управну обарали у вертикалницу око њене друге пројекције n'' (или када смо јој одредили трећу пројекцију за осу $_2X_3$ која се поклапа са n''), тачка R дошла је из положаја R^s у положај R'''. Права $R^s\ R'''$ је тетива окретања за тачку R. Све остале тачке управне праве n окрећу се за исти угао, па су им и секанте окретања свима паралелне. То нам даје могућност да одредимо O^s на n^s када имамо већ нанету тачку O'''. Довољно је да из O''' повучемо секанту окретања паралелну са $R'''\ R^s$. Тачка O^s је средиште октаедра, а пренесемо ли дуж $R^s\ O^s$ још једном по управној n^s имамо и најгорњу тачку S^s октаедра. Остаје да вратимо у косу пројекцију квадрат $ABCD$ који смо већ нацртали у обореној равни. И то ћемо урадити помоћу секанти окретања. Средиште квадрата у обореном положају је тачка R^0. Значи да је права R^s R^0 секанта окретања за тачку R. Како се све остале тачке равни при полагању равни обрћу за исти угао, биће паралелне секанте окретања за све тачке равни. Према томе четвороугао $ABCD$, у косој пројекцији и исти четвороугао у обореном положају су две афине фигуре. Смер афинитета су секанте окретања ($\| R^s R^0$), а оса афинитета је друга траса t_2^s. Четвороугао A^s B^s C^s D^s можемо сада лако одредити. Продужимо дијагоналу A^0 C^0 до пресека 2^s са осом афинитета t_2^s. Кроз 2^s пролазиће (и кроз R^s) иста дијагонала у косој пројекцији, а тачке A^s и C^s на њој одредимо помоћу секанти окретање из A^0 и C^0. На исти начин одређена је и друга дијагонала са крајњим тачкама B^s D^s, само тачка 3^s на t^s није нацртана ради уштеде у простору.

Да проверимо тачност можемо да продужимо стране A^0 D^0 и A^s D^s четвороугла. Продужене морају да се секу у једној тачки (4^s) на t_1^s. Тако одређени четвороугао A^s B^s C^s D^s је (ортогонална) пројекција за задату раван t_1^s t_2^s оних четири врха октаедра који леже у равни управној на дијагоналу R^s S^s, дакле паралелно са задатом равни t_1^s t_2^s, а која пролази кроз средиште октаедра O^s. Саме тачке октаедра можемо према томе одредити тиме што из тачака $A^s - D^s$ повучемо праве управне на раван ($\| n^s$) и нанесемо на свакој од њих пола дијагонале, дакле дуж R^s O^s. (Лакше је да место тога повучемо кроз O^s дијагонале паралелне са A^s C^s и B^s D^s и да пројектујемо на њих те крајње тачке A^s—D^s у правцу управне на раван).

Када су тако одређене све тачке октаедра спојимо их наглашавајући при томе које су ивице видљиве а које невидљиве.

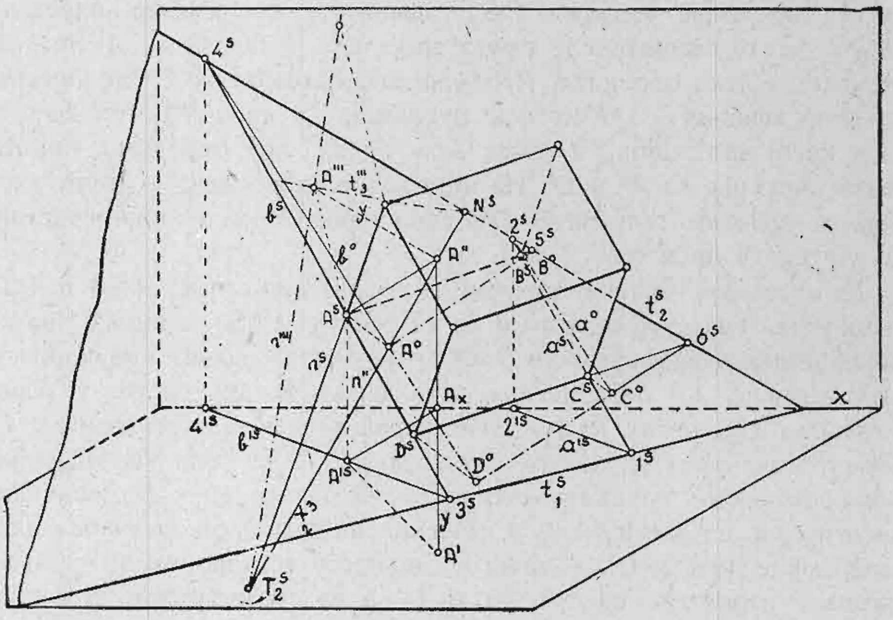
*

Скоро потпуно на исти начин решен је и овај задатак: Задата произвољна права a (a^s a'^s) и ван ње тачка A (A^s A'^s); треба одредити коцку којој је задата тачка A један врх, а једна јој ивица лежи на задатој правој a.

Из самог задатка је јасно, да ће једна пљошт коцке, квадрат $ABCD$ лежати у равни коју одређују тачка A и права a. Када уз то једна страна тога квадрата лежи на правој a, супротна му страна мора лежати на правој b која пролази кроз тачку A, а паралелна је са правом a.

Стога повучемо кроз тачку A праву b паралелну са a и одредимо трасе t_1^z и t_2^s равни коју одређују те две праве. Одредимо их помоћу трагова 1^s 2^s и 3^s 4^s правих a и b.

Сада можемо положити раван и у положеној равни уцртати квадрат $ABCD$. Раван положимо као раније око t_2^s помоћу тачке A, њене друге пројекције A'' и најкраћег отстојања $A^s N^s$ тачке A од друге трасе t_2^s. Праву величину $A''' N^s$ (тога отстојања) одредимо помоћу треће пројекције за ${}_2X_3 = n''$. Кроз A^0 пролази b^0 права b у обореном положају, а по правилима афинитета пролази b^0 и кроз тачку 4^s на оси афинитета t_2^s. Са b^0 биће паралелна права a^0, а пролазиће кроз тачку 2^s. Дуж $A^0 B^0$, повучена из A^0, је једна страна обореног квадрата. Нанесемо исту дуж по правама a^0 и b^0 од тачака A^0 и B^0,



Сл. 316

па је одређен тражени квздрат $A^0 B^0 C^0 D^0$. Вратимо га натраг у косу пројекцију помоћу секанти окретања ($\| A^0 A^s$) на праве a^s и b^s.

Тим је одређена она пљошт којом коцка лежи на равни $a A$. Да одредимо остале тачке коцке довољно је да из тачака A^s B^s C^s и D^s повучемо управне на раван и да на тим управним нанесемо дужину једне ивице коцке. То можемо да урадимо најлакше за тачку A^s. Њену другу пројекцију већ имамо од раније, а и трећу пројекцију A''' за ${}_2X_3 = n''$. Права $N^s A'''$ је трећа пројекција t_3''' равни, па је права повучена кроз A''' управно на t_3''' трећа пројекција n''' тражене управне на раван. У пресеку n''' са ${}_2X_3$ (или n'') је продор те управне кроз вертикалницу дакле T_2'''. (Уједно је T_2''' и друга пројекција T_2'' јер је на n'', а такође и T_2^s, јер је у вертикалници). Значи да је права T_2^s A^s коса пројекција n^s тражене управне на раван. Како је n'' у правој величини, продужимо је преко A''' и нанесемо на њој од тачке A''' дужину A^0 B^0 једне стране (квадрата) коцке. Тако одређену нову тачку коцке вратимо натраг у косу пројекцију на n^s. Вратимо је помоћу тетиве окретања паралелне са $A''' A_1$. Остале ивице коцке управне на раван паралелне су са овом ивицом и једнаке су дужине. Тим су одређене све тачке коцке и можемо да нацртамо њену косу пројекцију.

*

У сл. 317 решен је следећи задатак. Задата тачка O (O^s O'^s) је средиште лопте са одређеним полупречником r. Треба нацртати косу пројекцију лопте и за задато осветљење l^s l'^s одредити њену сопствену и бачену сенку.

Коса пројекција лопте је елипса. Заправо косу пројекцију лопте можемо сматрати сенком лопте на пројекциску раван (на вертикалницу) с тим да се зрак светлости поклапа са зраком пројекције. У том случају бачена сенка лопте на пројекциску раван је пресек светле облице повучене око лопте (дакле пресек обртне облице) са пројекциском равни. Како је зрак светлости (овде пројекциски зрак) кос према пројекциској равни, пресек светле облице може да буде само елипса. Мала оса те елипсе је управна на пројекциски зрак ($\perp$ P^S P'') и једнака пречнику лопте, а жиже F_1^s и F_2^s елипсе су косе пројекције крајњих тачака оног пречника, који је управан на пројекциску раван.

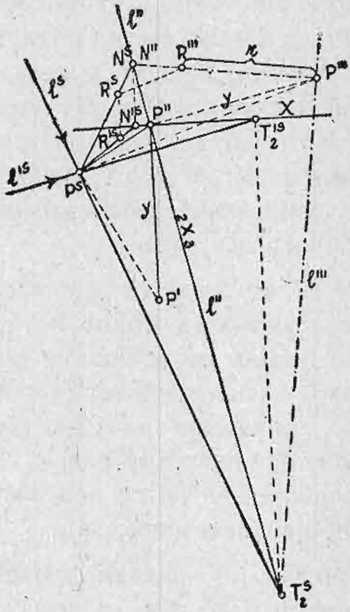
(Када произвољна раван пресече обртну облицу, пресек је елипса са средиштем на оси облице. Жиже те елипсе су тачке у којима лопте уписане у облицу додирују пресечну раван. Како су средишта тих двеју лопта такође на оси облице јасно је да је ексцентрицитет елипсе — отстојање жиже од средишта — једнак пројекцији на пресечну раван оног пречника лопте који је управан на пресечну раван — пречника од жиже до средишта лопте. Пројекција, где се подразумева да су изводнице облице паралелне са пројекциским зраком).

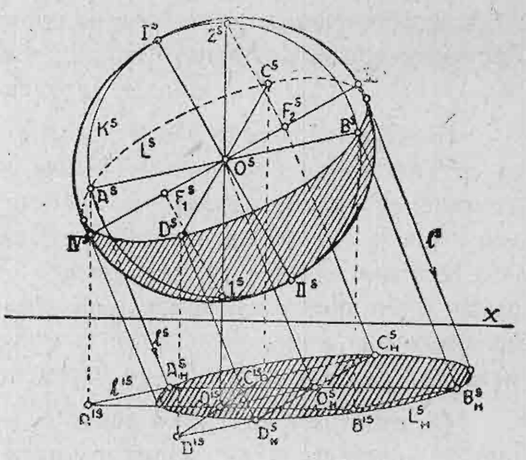
Да нацртамо контролу лопте (у косој пројекцији) нацртамо најпре око O^S пројекцију K^S великог круга K лопте паралелног са пројекциском равни ($\parallel V$). Пројекциски зрак (права $\perp$ V) је $\parallel$ Y-осом и паралелан са страном P^S P'' пројекциског троугла. Према томе пречник I^S II^S круга K^S, а $\perp$ Y-осу је мала оса елипсе (контуре лопте). Пројекција пречника лопте управног на пројекциску раван (дакле $\perp$ V) је $\parallel$ Y-осом ($\perp$ $[\mathrm{I}^S\ \mathrm{II}^S]$ и $\parallel [P^S\ P']$). Пројекције крајњих тачака $F_1{}^S$ и $F_2{}^S$ тога пречника, које су уједно и жиже елипсе одредимо помоћу пројекциских троуглова O^S 1^S $F_1{}^S$ и O^S 2^S $F_2{}^S$. Сада је потпуно одређена елипса, контура лопте, јер је велика полуоса елипсе једнака дужи $F_1{}^S$ I^S или $F_2{}^S$ II^S и можемо да је нацртамо.

Као други део задатка треба да одредимо сопствену и бачену сенку лопте. Да та конструкција не терети цртеж својим линијама, узмемо са стране паралелну X-осу, и неку тачку P у хоризонталницу. Кроз тачку P^S (уједно и P'^S) повучемо зрак светлости l^S l'^S и одредимо његов други траг $T_2{}^S$.

Граница сопствене сенке лопте је велики круг L лопте чија је раван управна на зрак светлости. Да одредимо елипсу L^S, косу пројекцију тога круга L, одаберемо на кругу два спрегнута пречника. Најбоље је узети пречник AB паралелан са пројекциском равни (на сутражници равни кроз O^S) и други CD који је управан на AB. Он је управан на сутражницу и према томе линија главног пада саме равни круга L.

Да их одредимо морамо прећи делимично на ортогоналну пројекцију. Одредимо P'', па је права $T_2{}^S\,P''$ друга пројекција l'' зрака светлости. Друга траса t_2'' и $t_2{}^S$ равни управне на зрак светлости (дакле друга траса равни круга L) је управна на l'', а исто тако и њена друга сутражница. Стога повучемо одмах кроз O^S праву $\perp$ l'' и како је та права паралелна са пројекциском равни ($\parallel V$) све се дужи на њој показују у правој величини. Стога у пресеку те праве са кругом K^S имамо крајње тачке A^S и B^S једног спрегнутог пречника круга L^S. Други пречник $C^S\,D^S$ одредимо у трећој пројекцији, где се ${}_2X_3$ поклапа са l''. Трећу пројекцију P''' конструишемо помоћу њеног отстојања y од V (из пројекциског троугла $P^S\;P''\;P'$ за тачку P). Права $T_2{}^S\;P'''$ је трећа пројекција l'' зрака светлости, а права управна на њу, дакле права N'' (уједно N^S) P''' је трећа пројекција равни управне на зрак l. То је трећа пројекција равни круга L, а дуж $N''\;P'''$ је права величина најкраћег отстојања тачке P од друге трасе равни, према томе права величина линије главног пада равни. На њој можемо да нанесемо полупречник лопте од тачке P''' до R''', па да тако одређен други спрегнути пречник круга L вратимо натраг у косу пројекцију. Тачку R^S на $P^S\,N^S$ одредимо помоћу тетиве окретања паралелне са $P'''\,P^S$. Паралелно са $P^S\,R^S$ нанесемо из O^S с обе стране исту дуж, одредимо тако тачке C^S и D^S





Сл. 317

другог пречника, па нам је одређена елипса L^S, коса пројекција границе сопствене сенке.

Остаје још да одредимо бачену сенку лопте. Знамо да ће контура бачене сенке лопте бити бачена сенка границе сопствене сенке. Стога одредимо косу прву пројекцију круга L, јер за одређивање сенке треба да имамо две пројекције сваке тачке. Средиште O'^S већ имамо, јер нам је тако задата тачка O. Пречник $A\,B$ је сутражница равни круга L, па ће му прва пројекција бити паралелна са осом X. Повучемо је кроз O'^S и ординатама одредимо крајње тачке A'^S и B'^S. Прву пројекцију пречника $C\,D$ одредимо у слици са стране. Ординатом одредимо N'^S, на X-оси, па је на правој $N'^S\ P^S$ (уједно P'^S) прва пројекција R'^S тачке R. Повучемо кроз O'^S праву паралелну са $P^S\ N'^S$ и ординатама одредимо на њој C'^S и D'^S. Сада можемо помоћу l^S и l'^S одредити сенке тачака $A\,B$ и $C\,D$. Све те сенке падају на H, па су $A_H{}^S\ B_H{}^S$ и $C_H{}^S\ D_H{}^S$ два спрегнута пречника елипсе $L_H{}^S$ сенке круга L.

§ 135. Примери из техничке праксе у косој пројекцији

Овде ћемо се задржати на решавању практичних задатака, и то истих онаквих какве смо већ решавали у ортогоналној аксонометрији. Заправо и начин решавања тих задатака је потпуно исти, па све ове задатке које ћемо сада решити можемо да сматрамо и као примере из ортогоналне или косе аксонометрије. Једина је разлика што се код косе пројекције све оно што је у V или у некој равни $\parallel V$ показује у правој величини. Услед тога је и пројекција круга паралелног са V поново круг. Има и других разлика. Тако у ортогоналној аксонометрији пројекција лопте је круг, а у косој аксонометрији и косој пројекцији елипса, али те се разлике код ових задатака не појављују.

Као први нека нам је задат један задатак сличан ономе из сенчења који смо решили у сл. 211. Место једног јастука имамо овде два са по два пајанта, а последњи су $\parallel X$ и $\parallel Y$.

Осе X и Z су под правим углом и без скраћења, док је оса Y под 30° према X са скраћењем 3 : 4.

Ортогонална пројекција овде није уцртана ради уштеде у простору. Пошто је тело већ познато а конструкција у косој пројекцији иста и једноставна као и у аксонометрији, то јој опис није потребан.

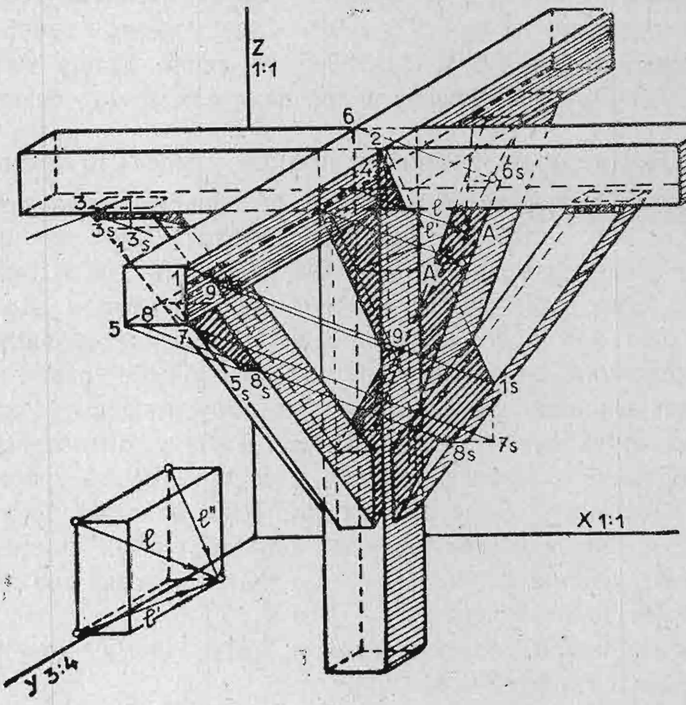
Зрак светлости задат је са l и l', па је као код прошле слике одређено l''.

Знак косе пројекције није писан да не би теретио цртеж.

Конструкција сенки за онај део тела који имамо у слици 211 довољно је позната и не треба је понављати. Решава се све по истим принципима, само овде треба конструисати прву пројекцију на доњој равни јастука паралелно са Y. На том делу овде се појављују и нове сенке. Јастук $\parallel X$ бациће своју сенку на стражњи пајант. Границу бачене сенке сачињаваће сенке доње предње ивице и горње стражње.

Те сенке можемо најлакше одредити овако. Продужимо вертикалну ивицу стуба до пресека 6 са горњом стражњом ивицом пајанта. Продужимо и сенку те ивице, па ће кроз 6_s пролазити сенка ивице пајанта и бити паралелна са самом ивицом. Продужимо ли и ивицу кроз тачку 5 пајанта || *V*, чију сенку већ имамо, до пресека са предњом доњом ивицом пајанта || *X*, кроз сенку пресечне тачке ићи ће сенка те ивице и бити поново паралелна са самом ивицом.

Та иста предња доња ивица јастука бацаће своју сенку на своје пајанте. Сенку ивице на раван паралелну са *V* нађемо помоћу сенке тачке 3 на тој равни (исто као сенку ивице *a* помоћу 1_s код задатка у сл. 295. Мало теже би било одредити сенку те исте ивице на косу раван пајанта. Конструкцију можемо да упростимо ако одредимо имагинарну сенку те исте ивице на стражњу вертикалну раван пајанта. Одредимо је помоћу сенке ${}_1 3_s$ тачке 3 као пре, а сама сенка је паралелна са ивицом. Кроз тачке у којима стварна и имагинарна сенка секу ивице косе равни пајанта пролази тражена бачена сенка. Остале сенке могу да остану без описа, јер је конструкција позната.

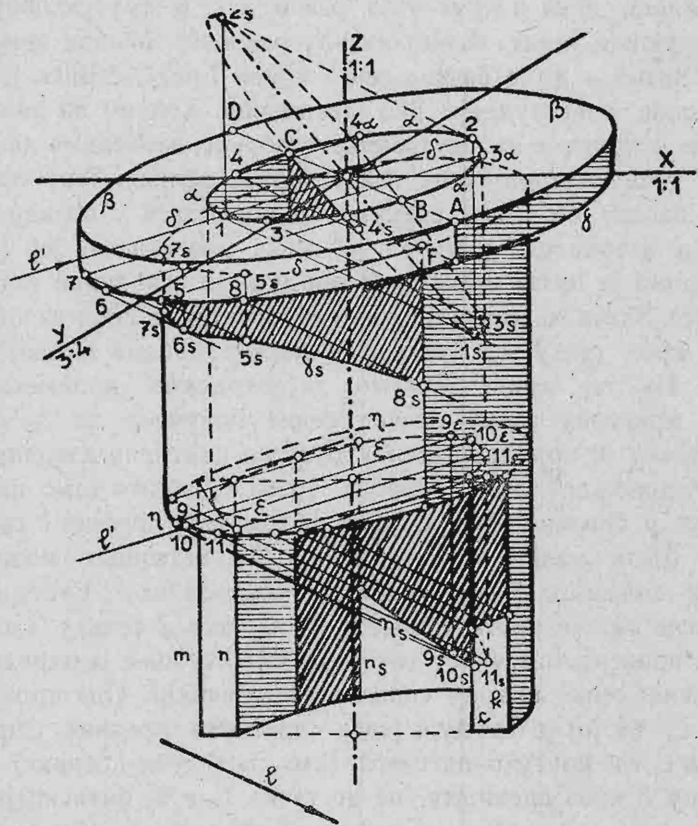


Сл. 318

*

Као даљи пример узета је једна округла цев са прстенастом плочом одозго. Цев је засечена једном равни || *V* кроз осу и двема || *H*, а отсечени део је отстрањен. Оса цеви узета је || *Z*-осом, па се па се сви кругови пројектују као елипсе. Према томе и овај задатак је исти као да је у ортогоналној или косој аксонометрији. Осветлење је задато двема пројекцијама.

На примеру постоје три облице: унутрашња са базисом α на горњој равни плоче, спољна са базисом δ на доњој равни плоче и спољна облица плоче са горњим и доњим круговима β и γ. Хоризонтална раван сече спољну облицу цеви по кругу η, а унутрашњу по кругу ε. Најдоњи полукругови нису обележени.



Сл. 319

Сви кругови пројектују се као елипсе које су одређене двама спрегнутим пречницима, и то једним у правцу X (1 : 1), а другим у правцу Y (3 : 4). Треба напоменути да видљива контура облице додирује круг (елипсу) базиса. Према томе не сме код круга (елипсе) γ да се појави угао где крива прелази у контурну изводницу.

Као главни задатак може овде да се сматра одређивање сенки. Границу сопствене сенке одредимо лако помоћу тангенте $\parallel l'$, јер су све облице $\perp H$. Тако је видљива граница за горњу плочу изводница кроз A, а невидљива изводница кроз D.

За унутрашњу облицу цеви изводнице кроз тачке B (невидљива) и C (видљива). Пошто су два круга α и β концентрични, тачке A, B, C и D треба да су на једном пречнику (спрегнутим са пречником који је $\parallel l$). Видљива граница сопствене сенке за спољну облицу цеви пролази кроз тачку F.

Сенку ће бацати: круг α на унутрашњост облице, круг γ по спољној облици цеви и круг η по равни $m\,k$ и унутрашњој облици.

Конструкција сенке базиса на унутрашњост облице позната нам је од пре. Знамо и да је бачена сенка крива II реда, елипса. Ипак ћемо поновити опис конструкције бар делимично. Хоћемо ли да одредимо сенку тачке 4 круга α на унутрашњост облице, замислимо да је изводница кроз тачку 4 продужена изнад базиса облице. Тако продужена изводница бацала би своју сенку по равни базиса у правцу l' (јер је базис $\parallel H$, а изводница $\perp H$). Та је сенка имагинарна, јер је облица шупља. Једино је права сенка тако продужене изводнице тачка 4_α на кругу базиса. Значи да сенка продужене изводнице пада на облицу по изводници кроз тачку 4_α. Зраком l из 4 одредимо на њој тражену сенку 4_s. На тај начин можемо да одредимо произвољан број тачака. За контурну тачку бачене сенке повучемо из 3_α l' и тиме одредимо тачку 3, која своју сенку баца на контурну изводницу. Овај начин није довољно тачан. Обично треба одредити само пар тачака бачене сенке у близини тачке C. Баш на том делу пресеци l' са елипсом су нетачни (ради малог угла пресека). Ту нетачност можемо бар донекле да смањимо. Пречник $B\,C$ је управан на l'. Стога он треба да полови све тетиве круга у правцу l', па тако и тетиву $(4\,\alpha\,4)$. Тиме можемо да проверимо тачност тачке 4_α. Много боље је одредити целу елипсу бачене сенке помоћу спрегнутих пречника. Она пролази кроз тачке B и C, па јој је та дуж један спрегнути пречник. Спрегнутом пречнику $B\,C$ на кругу α одговара (као спрегнути пречник) пречник 1 2, на зраку l' кроз средиште, па ће тачке 1_s и 2_s бити крајње тачке другог спрегнутог пречника за елипсу бачене сенке. (Сенку 1_s тачке 1 треба да одредимо у сваком случају, јер је то једна тачка сенке чија је тангента $\parallel BC$. Поред тога одредили смо и тангенту на елипсу бачене сенке у тачки C. Она је паралелна са $[1_s\,O]$. Поред тога је и део елипсе од тачке C до 4_s конкаван према тачки B).

Бачена сенка круга (елипсе) γ на спољну облицу цеви је крива IV реда. Одредимо је тачку по тачку. Задатак је исти као у сл. 218. Да би одредили сенку неке тачке 5, замислимо да смо кроз тачку 5 повукли једну праву паралелну са изводницама облице. Та права бацаће по равни круга γ сенку у правцу l'. Сенка је имагинарна, али њен пресек 5_δ са кругом δ одређује изводницу облице на коју пада стварна сенка замишљене праве. Зрак l из 5 одређује на њој тражену сенку 5_s.

Обично се најпре одреде специјалне тачке, а то су највиша тачка бачене сенке, па затим контурна тачка и тачка на граници сопствене сенке облице. Тачку 6, која баца највишу тачку бачене сенке, одредимо када из средишта круга γ (уједно и δ) повучемо зрак *l*. Тачка 6_s је најближа кругу δ у правцу изводница. Тангента у 6_s на криву бачене сенке је паралелна са тангентом на круг (елипсу) у тачки 6, дакле паралелна са пречником кроз тачку *F* или *A D*. Контурна изводница пролази кроз тачку 7_δ круга δ базиса. Зраком *l'* из 7_δ одредимо тачку 7 круга γ која баца сенку на контурну изводницу, па је 7_s контурна тачка бачене сенке. Ако кроз *F* повучемо *l'*, одредимо тачку 8 на γ, која своју сенку 8_s баца на границу сопствене сенке. Тангента на криву бачене сенке у тачки 8_s је $\|$ *l*.

Круг η баца своју сенку на раван *m n* и *c k*, као и на унутрашњу облицу цеви. Раван *m k* је $\|$ *V*. Сенка круга η биће елипса. Одредимо је као елипсу помоћу спрегнутих пречника или тачку по тачку. Конструкција је позната. Сенка круга η на унутрашњу облицу цеви је крива IV реда, а одредимо је потпуно исто као и сенку круга γ. Једино овде пада сенка на конкавни део круга ε. На слици је обележена конструкција за произвољну тачку 9, за најнижу тачку 10_s бачене сенке и за контурну тачку 11_s.

Сенку баца и ивица *n*. Сенку одредимо помоћу *l'* из тачке где *n* пролази кроз ε.

Хоризонталница и вертикалница нису задате, па зато нећемо ни конструисати сенку тела по њима.

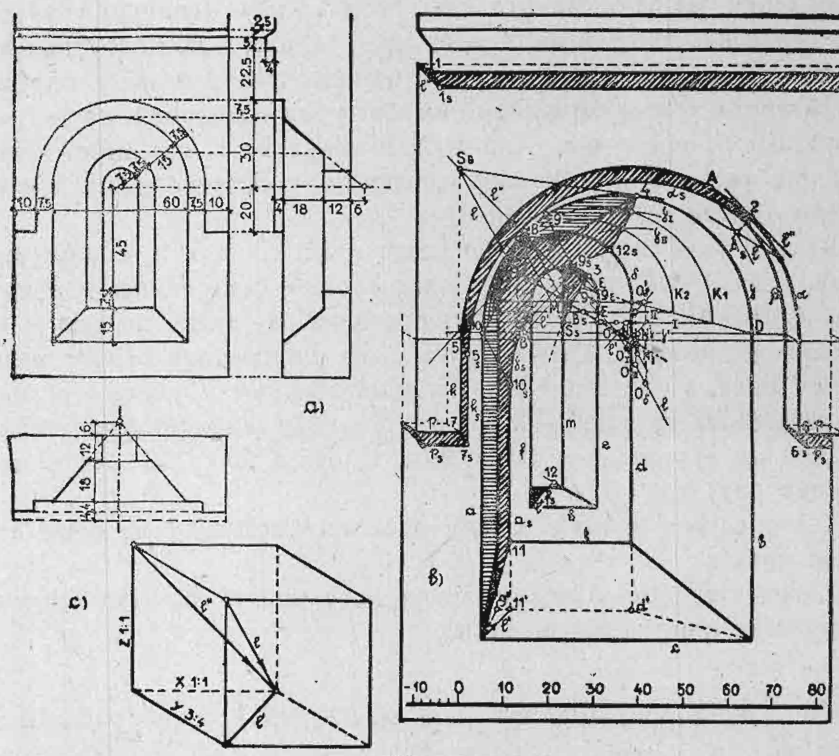
*

Као други пример задат је у сл. 320 један полукружни прозор са удубљењем у зиду. Задатак је уцртан (у смањеној размери) у ортогоналној пројекцији. Треба га уцртати у косој пројекцији и то тако, да је *Y*-оса под 30^0 према *X* и са скраћењем 3:4. Поред тога треба одредити сенке за осветлење под 45^0.

Пошто нацртамо осе, повучемо полукруг γ око тачке *O* и ивице *a*, *b* и *c*. Кроз тачку *O* повучемо осу конуса $\|$ *Y*, одредимо његов врх и уцртамо најдоње изводнице конуса. Затим у истој хоризонталној равни кроз *O* уцртамо целу прву пројекцију тела, а тада попунимо све ивице.

У сопственој сенци је коса раван кроз ивицу *a* до прозора. Све остале видљиве равни су осветљене. Знамо при том да су све равни паралелне са профилницом невидљиве и у сопственој сенки, а исто тако и равни $\|$ *H* са доње стране.

Облица α β је $\perp$ *V*, па њену сопствену сенку одредимо помоћу тангенте на круг α у правцу *l''*. Изводница кроз тачку 2 $\|$ *Y* је тражена граница сопствене сенке. Границу сопствене сенке конуса над удубљењем за прозор одредимо помоћу сенке врха на равни базиса. Базис је круг γ у равни $\|$ *V*. Повучемо *l''* из средишта *O* круга базиса и у пресеку са зраком l из врха имамо S_B, имагинарну сенку врха на раван базиса. Тангента из S_B на круг базиса одређује тачку 4. Кроз њу пролази и изводница која је граница сопствене сенке конуса. За малу полуоблицу изнад прозора одређена је граница сопствене сенке, изводница из тачке 3, исто као и за велику полуоблицу α β. (Било би боље да смо обе тачке 2 и 3 одредили помоћу управне на l'' из средишта круга базиса. Овде је то могуће, јер су базиси у равнима ∥ V и показују се у правој величини).



Сл. 320 *a*, *b* и *c*

Бачену сенку најгорњег венца одредимо помоћу сенке тачке 1 на исти начин као сенку ивица c и d помоћу тачке 3 и 3_s у сл. 295. Сенка круга α падаће на вертикалну раван круга γ. Како је круг паралелан са равни на коју баца сенку, то ће сенка круга бити подударан круг. Довољно је да одредимо сенку средишта N круга на поменуту раван. Сенка N_s је средиште круга α_s бачене сенке. Лево тај круг иде до 5_s, јер је тачка 5 најнижа тачка круга, а десно до пресека са кругома β. Од 5_s наставља се сенка ивице κ ($k_s \| k$), затим ивице p ($p_s \| p$), и на крају сенка ивице $\perp V$ која је $\| l''$. Од пресека са β сенка α_s ићи ће по облици. То је сенка круга базиса на унутрашњост облице. Конструкција нам је позната, само место са l' радимо са l'', јер је облица $\perp V$. На сенци је одређена тачка A_s.

Круг γ бацаће сенку на раван кругова δ и ε. И та сенка γ_s је поново круг, а одредимо је помоћу сенке O_δ средишта O на продужену раван круга δ. Сенка γ_s важи од тачке 10_s до 12_s уколико не пада на отвор прозора. Од тачке 10_s до 11 наставља се $a_s \| a$, а од тачке 11 сенка исте ивице a по косој равни. Та сенка мора да пролази и кроз продорну тачку (где се секу ивице a и c), па је тиме одређена. За контролу одређена је и прва пројекција $11'$ тачке 11 на хоризонталну раван кроз ивицу c. Зрак l' треба да пролази кроз поменуту продорну тачку и кроз $11'$. Од тачке 12_s до тачке 4 сенка пада по конусу. То је сенка круга базиса по унутрашњости конуса, дакле део елипсе, а одредићемо га као у сл. 224 помоћу имагинарних сенки на уметнутим равнима. Повучемо тако једну раван паралелну са кругом γ базиса, дакле овде $\| V$. Она сече хоризонталну раван по правој I, а конус по кругу K_1. Сенка круга γ по овој равни биће круг γ_I, а одредимо га када одредимо сенку O_I средишта O круга γ на овој равни. (Повучемо O зрак l' до пресека са правом I. Тачка O_I је на ординати из те тачке пресека, а на зраку l из O). Круг γ_I је уствари имагинарна сенка, тј. сенка по равни која не постоји. Једино је стварна сенка тачка у којој γ_I пресеца круг K_I. На исти начин одређена је још једна тачка на кругу K_2.

Остаје још да одредимо сенку круга ε и круга γ на унутрашњост полуоблице и равни em прозора. Од круга ε баца сенку по унутрашњости облице само део од тачке 3 до тачке 9. Конструкција нам је позната. На слици је одређена сенка тачке 9 исто као што је пре одређена сенка тачке A.

Ова конструкција је иста било да одређујемо сенку базиса на облицу, било на призму. Главно је да је базис нека фигура у равни (тј. да није просторна фигура). Према томе могли бисмо на исти начин одредити и сенке тачака круга ε (да круг није делом у баченој сенци) и на раван em. И ту раван можемо да сматрамо као део облице којој су базис ивице e и f и круг ε. Смемо сматрати за саставни део линије базиса смањене облице и део круга γ^s од тачке 9 до пресека круга са ивицом f. Сенку G било које тачке G тога дела круга γ_s одредили би као и сенку тачке 9 или A. Тај део круга γ_s је имагинарна сенка круга γ на раван базиса ове облице. (Имагинарна је стога, што је облица шупља). Ипак свакој тачки круга γ_s одговара у правцу светлости l једна тачка круга γ. Тако и тачки G одговара на кругу γ тачка G_s. То значи да је тачка G_s стварна сенка тачке G, сенка једне тачке круга γ на унутрашњост наше облице.

Дошли смо до једног новог принципа који често може да нам олакша конструкцију сенке. Када нека линија баца своју сенку на унутрашњост облице, одредимо сенку те линије на раван базиса. Ту сенку сматрамо као саставни део базиса, па одредимо њену сенку на унутрашњост облице.*)

---

*) Место речи „облица" можемо да кажемо „призма"

На слици сенка није на тај начин одређена, већ помоћу прве пројекције на хоризонталној равни кроз осу конуса. Прва пројекција круга γ у тој равни је права D 10, а прва пројекција равни *em* је права из $E \parallel Y$ (најдоња изводница полуоблице прозора). Да бисмо одредили сенку било које тачке B круга γ, одредићемо њену прву пројекцију B'. Продужена права $B'B$ баца своју сенку по хоризонталној равни у правцу l'. Од пресека тога зрака са I пројекцијом равни *em* сенка праве је паралелна са самом правом. Зраком l из B одређујемо на њој B_s, сенку тачке B круга γ на раван *em*. Обрнутим редом (најпре l') одређена је и тачка C круга која своју сенку баца на ивицу *m*. Сенка круга γ по равни *em* прелази тангенциално у сенку истог круга по унутрашњости полуоблице прозора.

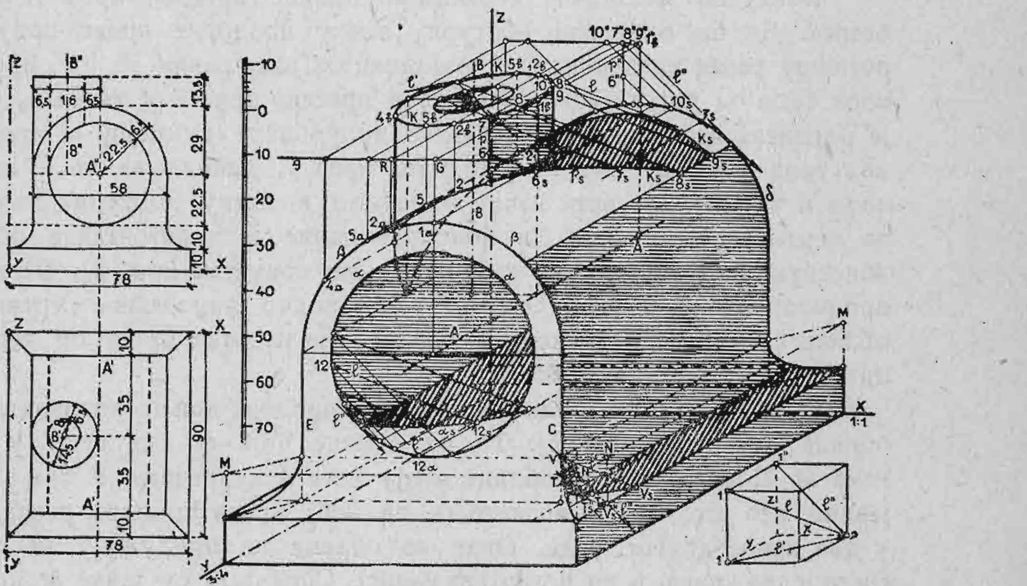
*

У сл. 321 задат је нов пример где поред сенки треба да одредимо и један продор. Главни део тела су две облицe, од којих је једна (мања) вертикална, а друга хоризонтална и управна на V. Од хоризонталне облице постоји само горња половина, јер се наниже наставља вертикалним тангенцијалним равнима. И те равни престају, па се на истој висини и оне и равни базиса настављају у нове тангенцијалне облице, заправо четвртине облица од вертикалне тангенцијалне равни до најдоње изводнице. Те најдоње изводнице су већ горње ивице четвртастог постоља.

Уцртамо најпре осе XYZ, а на њима најнижу плочу (постоље). На горњој њеној равни одредимо прве пројекције тачака E, C и D, најнижих тачака ивица по којима се секу тангенцијалне равни на облицу са равнима базиса. Затим повучемо саме ивице и одредимо на њима најниже тачке E, C и D и највише у висини осе хоризонталне облице. Тачке E, C и D одређују највише изводнице по којима нам облице додирују вертикалне равни. Продужимо ли вертикалне ивице постоља и нанесемо на њима полупречник тих облица ($r = 10$), одредимо и тачке M кроз које пролазе осе облица. Када највише тачке ивица кроз E и C спојимо хоризонталном дужи, та је дуж пречник круга базиса хоризонталне облице. То значи да је располовиште те дужи средиште круга, а уједно и једна тачка осе $A - A$. ($\parallel Y$). Средиште круга другог базиса треба да је на истој оси и на правој $\parallel X$ повученој кроз највишу тачку ивице из D. (Поред тога растојање између ова два средишта кругова треба да буде 70 у скраћењу за Y). Опишемо полукруг β и δ, а затим и круг α, који је предњи базис унутрашње шупље облице.

Да би одредили положај вертикалне (мале) облице, најбоље је да располовимо дуж између два средишта базиса и да из располовишта повучемо праву $\parallel X$ до пресека са левом најнижом изводницом хоризонталне полуоблице. Те две тачке су, према задатку, на контурним изводницама вертикалне облице у другој пројекцији. Повучемо те изводнице, па ако на њима изнесемо дуж 29+13,5=42,5 одредили смо тиме пречник || X-осом круга базиса вертикалне облице. Тиме је одређено и средиште базиса и оса $B-B$. Круг базиса показује се као елипса (јер је || H). Један спрегнути пречник имамо Он је || X, а други треба да је || Y. Повучемо га и нанесемо у скраћењу $r=14{,}5$. На истим спрегнутим пречницима нанесемо и дужине полупречника базиса унутрашње облице па конструишемо обе елипсе.

Тиме је задатак постављен и можемо да пређемо на решавање. Одмах видимо да вертикална облица продире кроз хоризонталну. Стога ћемо најпре одредити тај продор. Помоћне равни за одређивање појединих тачака продорне криве узећемо паралелно са изводницама једне и друге облице, дакле паралелно са профилницом. Повуцимо такву раван кроз осу A, A хоризонталне облице. Она додирује малу облицу по изводници помоћу које смо конструисали крајњу тачку 1_b пречника || X. Помоћна раван сече раван базиса хоризонталне облице по правој || Z повученој кроз средиште, а раван базиса мале облице по правој која пролази кроз поменуту крајњу тачку 1_b пречника || X и



Сл. 321

стоји || Y-осом. Тачка G која се налази на једној и другој пресечној правој припада дакле равнима једног и другог базиса. Према томе права g, која пролази кроз G а паралелна је са X-осом, претставља пресек тих двеју равни базиса. (Праву g можемо одредити и тако, што на вертикали из средишта базиса хоризонталне облице нанесемо висину мале облице 29+13,4). Повучена помоћна раван додирује вертикалну облицу по наведеној изводници. Њена траса у равни базиса додирује базис у тачки 1_b. Хоризонталну облицу сече по највишој изводници, јер њена траса у равни базиса хоризонталне облице сече круг β у тачки 1_a. У пресеку тих двеју изводница имамо једну тачку продорне криве. Како је изводница из 1_a последња изводница хоризонталне облице која још продире кроз вертикалну, то је она уједно и тангента на криву продора у тачки где се секу изводнице кроз 1_b и 1_a.

Да би одредили још неку тачку продора, повучемо било коју помоћну раван. Најбоље је узети неку тачку R на правој g и повући пресеке помоћне равни са равнима базиса. Пресек са равни базиса вертикалне облице пресеца круг (елипсу) базиса у тачкама 2_b, што значи да помоћна раван сече облицу по двема изводницама кроз тачке 2_b. Исто тако сече хоризонталну облицу по изводници 2_a. У пресеку тих изводница имамо две тачке 2 продорне криве.

И овде треба одредити најпре специјалне тачке криве. Једну смо већ одредили. То је тачка 1 као највиша тачка криве продора. Најнижа тачка је она на најнижој изводници хоризонталне облице (полуоблице). Како помоћна раван додирује обе облице, продорна крива пролази кроз ту тачку двапут и има у њој две одвојене тангенте.

Контурна изводница вертикалне облице пролази кроз тачку 4_b базиса. Да би одредили контурну тачку продорне криве, повучемо помоћну раван кроз контурну изводницу. Траса равни је $\parallel Y$, пролази кроз 4_b, а од пресека са g иде $\parallel Z$ и пресеца круг β у тачки 4_a. Тиме је одређена изводница хоризонталне полуоблице на којој је тражена контурна тачка 4. Како је изводница кроз 4_a невидљива, то је невидљива и тачка 4. На исти начин одредимо и десну контурну тачку 8 на вертикалној облици. За контурне тачке 5 хоризонталне облице конструкција је иста, само помоћну раван повучемо кроз 5_a. Од криве продора видљив је само део 5 2 1 8. Продор унутрашње вертикалне облице са унутрашњом хоризонталном није нацртан да не би теретио цртеж.

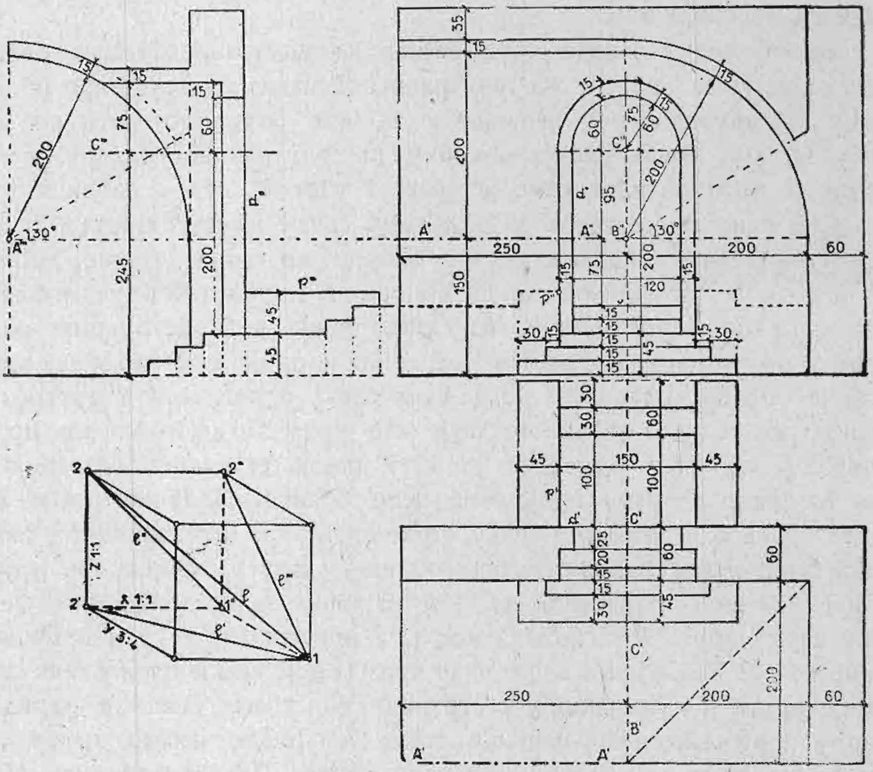
Остаје још да одредимо међусобне продоре доњих хоризонталних облица (четвртина облица). То су облице чије се осе секу у тачкама M. Поред тога све облице имају исти полупречник. У тим случајевима, као што нам је познато (в. сл. 226), крива продора распада се у две криве другог реда. Овде се облице не продужују, па остаје свега једна крива, и то четвртина елипсе. Средишта су тачке M, крајње тачке једних (хоризонталних) спрегнутих полупречника су тачке $E\,C\,D$, а вертикални полупречници иду од тачака M до највиших тачака вертикалних ивица постоља. Конструишемо те елипсе (водећи рачуна о тангентама у крајњим тачкама), па је задатак потпуно уцртан.

Још треба да одредимо сенке за осветљење под 45°. Са стране уцртамо коцку, па су тиме одређени зраци $l\ l'\ l''$. Границе сопствених сенки на вертикалним облицама одредимо помоћу l' а на хоризонталним помоћу l''. Од доњих хоризонталних малих облица две се виде. Предња, чија је оса $\parallel X$, цела је осветљена (четвртина облице), јер су тангенцијалне равни у крајњим изводницама $\parallel H$, и $\parallel V$, дакле, обе осветљене. Да би одредили границу сопствене сенке за другу облицу чија је оса $\parallel Y$, треба да пресечемо облицу једном равни $\parallel Y$ (јер су оба пресека, две пресечне елипсе у произвољним равнима, па би требало тражити сенку изводница на раван базиса). Пресек облице са неком равни $\parallel V$ биће круг, јер је облица ротациона и оса $\perp V$. Одредимо пресек са равни базиса хоризонталне полуоблице. Продужимо ли праву $E\,C$ до пресека N са осовином, биће N тражено средиште круга базиса) а C му је једна тачка. Тангента $\parallel l''$ на тај круг даје границу сопствене сенке. У сопственој сенци су и две равни паралелне са профилницом.

Бачену сенку бацаће круг базиса на унутрашњост мање вертикалне облице и круг α на унутрашњост мање хоризонталне облице. Сенку на унутрашњост вертикалне облице одредимо потпуно исто као у сл. 319. Конструкција за сенку по унутрашњости хоризонталне облице је потпуно иста, само је место l' узет l'', јер је облица $\perp V$.

Сем ових сенки треба да одредимо сенку круга базиса K и границе сопствене сенке вертикалне облице по хоризонталној облици. Већ једном је наглашено, али да поновимо. Када треба одредити сенку било чега по некој облици, најједноставнија је конструкција ако се пређе у ону пројекциIу где се цела облица пројектује као једна крива. Овде је облица управна на V, па ћемо сенку одређивати у другој пројекцији, где се цела облица показује као круг. Да неби морали цртати поново и тај круг, померена је V у раван стражњег базиса, па је круг δ уједно и друга пројекција целе облице. Повучемо ли из средишта круга δ вертикалну праву, то ће бити – као што знамо од раније — контурна изводница вертикалне облице у другој пројекцији. Зраком $\perp V$ ($\parallel Y$) из 1_b одредимо на њој највишу тачку $1_b''$, а тиме већ и једну тачку круга K базиса. Сам круг K показиваће се у II пројекцији као права $\parallel X$. Крајња тачка пречника кроз 1_b даје нам и крајњу тачку пројекције круга K. Пројекцију p'' границе сопствене сенке p одредимо помоћу пројекције њене највише тачке 7. Пошто имамо другу пројекцију, пређимо на конструкцију саме сенке. Да би одредили сенку тачке 7 на облицу, можемо да кажемо овако: Права $7''\ 7$ је $\perp V$, па њена сенка иде по V у правцу l''. Од пресека $7_s''$ са кругом δ сенка пада по облици, и то по изводници кроз тачку $7_s''$. Зраком l из 7 одредимо тражену сенку 7_s. На овај начин одредили смо сенку тачке 7, без обзира јели то сенка праве p или круга K, па ћемо и све остале тачке одредити на исти начин. Сенка праве p по облици биће део елипсе која свакако мора да пролази кроз најнижу продорну тачку. Пошто је права p граница сопствене сенке, светла раван кроз праву p тангира вертикалну облицу, па тангира и продорну криву. Отуда следи да ће и бачена сенка границе сопствене сенке p почињати тангенцијално на продорну криву (имаће са њом заједничку тангенту). Како је тачка 7_s

удаљена од ове почетне тачке сенке, то узмемо на p још неку тачку 6 и помоћу $6''$ на p'' одредимо њену сенку 6_s. Тиме је сенка p довољно одређена. Сенке појединих тачака круга одредимо на исти начин као 7_s. Повучемо ли тангенту на круг $\delta \parallel l''$, видимо да су тачке $8''$ и $9''$ последње тачке круга K'' које још могу да баце своју сенку на хоризонталну облицу, бацају је још на границу њене сопствене сенке. Зрацима l из 8 и 9 одредимо сенке 8_s и 9_s тих тачака. Како су 7_s и 9_s тачке у којима бачена сенка K_s долази до границе сопствене сенке, то ће зраци l бити тангенте на K_s у тим тачкама. Пре смо поменули



Сл. 322a

да светла раван кроз p тангира вертикалну облицу. Услед тога тангира и круг K у тачки 7. То значи да ће криве K_s и p_s имати у тачки 7_s заједничку тангенту. Међу специјалним тачкама сенке круга K треба одредити ону тачку (10_s) у којој је зрак l тангента на K_s. Исти зрак l додирује и круг (елипсу) K у тачки 10. Тај зрак је у ствари видљива контура светле облице кроз круг K. Најзад треба проверити да ли се на слици види и бачена сенка невидљиве границе сопствене сенке. Одређена је сенка највише тачке те праве. Пошто је та тачка на слици видљива, треба одредити сенку бар још једне тачке те праве.

Остаје још да одредимо сенку вертикалне ивице кроз тачку C и дела пресечне елипсе на малу доњу облицу. Облица је $\perp$ V па ћемо и у овом случају сенке одређивати у другој пројекцији. Пређашњи пресек те облице, круг са средиштем N можемо сада да сматрамо као II пројекцију облице уз претпоставку да смо V померили у раван предњег базиса хоризонталне облице. Да би одредили сенку једне тачке T елипсе, одредимо њену другу пројекцију T'' на кругу. Помоћу l'' из T'', а у пресеку T_s'' са кругом око N нађемо изводницу облице по којој баца сенку права (изводница) T'' T, па зраком из T одредимо сенку T_s. Највиша тачка C елипсе баца своју сенку на најнижу изводницу облице. (Та тачка је за сенку обележена сада и словом V). Бачена сенка је и овде део елипсе.

Сенке по пројекциским равнима нису конструисане ради уштеде у простору, Њихова конструкција нека остане као задатак за вежбу.

*

На крају је решен још један пример. У сл. 322*a* задат је у ортогоналној пројекцији пример једног свода са свим потребним котама. Свод треба претставити у косој пројекцији и одредити сенке. Осветљење је узето под 45°, али зрак светлости иде из II квадранта ка X-оси, тако да је вертикалница у сопственој сенци.

Код овога примера можда је ипак најбоље уцртати најпре прву пројекцију, а тада све остало наносећи за сваку тачку потребну висину. Тако су одређене ивице зидова, осе A—A и B—B облица, и нормални пресеци главних сводова, елипсе α α_1 и кругови β β_1. Затим уцртамо доњи део врата са степеницама и оградним зидовима споља, а тада одредимо положај осе C—C и на њој средишта кругова ε γ δ_4 и δ_2. Опишемо ли још те полукругове, задатак је постављен.

Сад можемо да пређемо на други део задатка, на одређивање продора. Све облице су хоризонталне. Помоћне равни — паралелне са хоризонталницом — сећи ће све облице по изводницама, а равни њихових базиса по хоризонталним правим, и то облицу A—A по правим $\parallel$ Y, а облице B—B и C—C по правим $\parallel$ X. На слици је уцртана једна помоћна раван, и то баш она која пролази кроз средиште круга δ_1 (уједно и кроз средиште круга δ, који је помоћни базис унутрашње површине мале облице на унутрашњој равни зида). Раван пресеца базисе облица у тачкама 1_α и 1_β. Повучемо ли из тих тачака изводнице облица, имаћемо у њиховом пресеку једну тачку 1_η продорне криве. Облице A—A и B—B имају једнак полупречник, а и осе им се секу, па ће продорна крива бити елипса η. Њу лакше и тачније можемо да одредимо као елипсу помоћу спрегнутих пречника, него овако тачку по тачку. Иста раван, ако је довољно проширимо, сече унутрашњу раван зида по правој $\parallel X$ кроз тачку ${}_1 1_\alpha$. Та права пресеца круг δ, помоћни базис мале облице, па ако из пресечних тачака повучемо изводнице мале облице (паралелно са C—C), добићемо две тачке 1_δ продорне криве. Како је помоћна раван узета кроз средиште полукруга δ, то су тачке 1_δ на најнижим изводницама полуоблице и деле продорну криву на два одвојена дела: горњи део је крива IV реда као продор двеју облица, а доњи два дела елипсе (заправо кругова који се показују као елипсе), по којима вертикалне тангенцијалне равни на полуоблицу C—C секу облицу A—A. Доњи делови су подударни са делом елипсе α од тачке 1_δ до најниже тачке. Горњи део можемо да одредимо само тачку по тачку помоћним равнима. Као специјалне тачке треба да одредимо највишу тачку, контурну десну и тачке на изводници облице A—A која се у пројекцији поклапа са највишом изводницом.

Продори спољних површина облица, уколико су видљиви, одређују се на исти начин. У овом случају види се само мали део елипсе η_1.

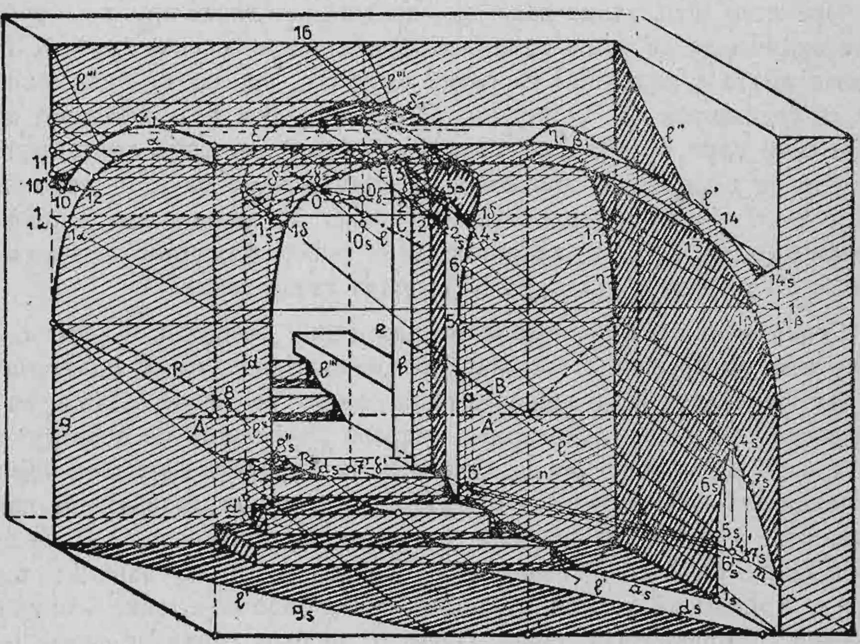
Тиме је решен стварни први део задатка: претстављено је задато тело у косој пројекцији. Можемо сада да пређемо на одређивање сенки. Према пројекцијама задатог зрака светлости видимо да су све равни паралелне са H осветљене, а да је V у сопственој сенци, као и све видљиве равни које су са њом паралелне. Осветљене су такође и видљиве равни паралелне са профилницом. Границу сопствене сенке облице B—B (изводнице кроз тачке 13 и 14) одредимо помоћу l'', а исто тако за облице са осом C—C. Смер зрака l''' може одмах да нам каже да је унутрашња површина облице A—A у сопственој сенци, а спољна осветљена.

Контуру бачене сенке даваће сенка ивице g. Како је та ивица $\perp H$, биће $g_s \parallel l'$. Повучемо ли из највише тачке те ивице зрак l, видимо да сенка те тачке пада на саму ивицу патоса. Према томе не морамо тражити сенку круга (елипсе) α. Горњи део те исте ивице g бацаће сенку на косу раван отпорника за свод A—A и по спољној површини облице. Да би избегли конструкцију сенке по косој равни, повучемо нову помоћну раван кроз најнижу изводницу спољне облице, дакле и кроз тачку 10, а $\parallel H$. Сама ивица g продире кроз ту раван у тачки $10''$ ($[10''\ 10] \parallel Y$). Сенка ивице по тој помоћној равни биће у правцу l'. Тачка 12, где се та сенка сече са најнижом изводницом облице, јесте тачка стварне сенке ивице g по косој равни. Спојимо ли тачку 12 са 11 (продорном тачком ивице кроз косу раван), сенка је одређена. Остала сенка по спољној површини облице није видљива, као ни сенка највише ивице $\parallel X$. Сенка те највише ивице по зиду $\parallel Y$

биће у правцу l'''. И облица $B—B$ бацаће сенку на косу раван отпорника, а одредимо је једноставно помоћу зрака l'' из тачке 14.

Сада одредимо сенке спољних степеница. Пресек тих степеница са оградним зидом је уствари њихова трећа пројекција. Сенка по зиду биће $\parallel l'''$, а по самим степеницама паралелна са ивицама. На исти начин одредимо и сенке унутрашњих степеница.

Од ивица на вратима сенку ће бацати спољна ивица *d*. Све равни на које сенка пада паралелне су са *H*, па ће сенка бити у правцу l'. Повучемо је по равни одморишта из најниже тачке саме ивице. Сенка d_s иде до крајње ивице I одморишта. Зраком *l* одредимо сенку те



Сл. 322*b*

тачке на сенци ивице I по доњем степену, а одатле иде сенка поново $\parallel l'$. На исти начин одредимо и сенку по најнижем степену и по патосу. Само треба проверити да ли је та сенка d_s по патосу тачна, јер смо је одредили без конструкције. Овде је и то лако, јер је $d_s \parallel l'$, а већ од раније имамо прву пројекцију ивице *d* у равни патоса (јер смо из I пројекције конструисали цело тело). Повучемо ли из највише тачке ивице *d* зрак *l*, видећемо да та тачка баца своју сенку ван уцртаног дела патоса. Кроз врата ће се видети и један део сенке ивице *p* левог оградног зида. Тачка 8 је друга пројекција те ивице на спољној равни зида, па јој сенку $8_s''$ одредимо најлакше помоћу l''. Кроз $8_s''$ пролази p_s и иде $\parallel p$. Са друге стране сенку ће бацати ивица *b* најпре $\parallel l'$

по равни одморишта, а затим по равни $[c\ a]$, и то $b_s \parallel b$. Сенку највише тачке 2 одредимо помоћу l. Од 2_s наставља се сенка круга γ, и то најпре по равни $[c\ a]$, а после по унутрашњој површини облице C—C, којој је стварни базис полукруг δ_2 над ивицом c. Сенку било које тачке 3 круга γ одредимо најлакше ако замислимо да смо кроз тачку 3 повукли праву паралелну са изводницама облице, дакле $\parallel C$ или $\parallel Y$. Сенка те праве по равни базиса ићи ће $\parallel l''$ до пресека са кругом δ_2 (или са неком другом тачком ивице c). Одатле даље ће ићи по облици и то по њеној изводници (или по равни $[c\ a]$ паралелно са поменутом правом, $\parallel Y$). Где зрак l из тачке 3 сече ту изводницу (или праву $\parallel Y$) биће сенка 3_s.

Пре него што одемо даље са одређивањем сенке круга γ, требало би да видимо да ли је он осветљен или га покрива сенка круга ε. Како је раван круга ε паралелна са равни круга γ, то ће ε_s бити поново круг са средиштем O_s. Одредимо O_s (помоћу l' и l) и опишемо круг ε_s. Он сече круг γ у тачки 3. Значи да се из 3_s наставља сенка круга ε. Место да је одређујемо директно, претпостављамо да је ε_s део базиса облице C—C и одредићемо сенку те криве. Та метода нам је позната од раније (в. сл. 320), а сенке појединих тачака одредимо као и сенку тачке 3. (И пресек круга ε_s са δ_2 је једна тачка сенке).

Сенку ивице a одредимо исто као сенку ивице d. Сенка a_s по патосу иде до пресека 1_s са најнижом ивицом зида, па се одатле пење по зиду $\parallel a$. Тачка 5_s је највиша тачка сенке те ивице. Даље ће се настављати сенка продорне криве, заправо круга који се показује као елипса и то од тачке 5 до 4_s. Сенку ћемо одредити најлакше помоћу I пројекције. Само ћемо прву пројекцију цртати на проширеној равни одморишта, а та раван пресеца зидове по правима n и m. Прва пројекција криве од 5 до 4_s налазиће се на правој $\parallel Y$ из најниже тачке ивице c. Хоћемо ли да конструишемо сенку било које тачке 6 те криве, одредимо I пројекцију 6′ тачке. Права [6′ 6] баца сенку по равни $[m\ n]$ у правцу l' до пресека $6_s'$ са m. Одатле иде сенка по зиду паралелно са самом правом. Зраком l одредимо саму тачку 6_s. На исти начин одређена је и сенка највише тачке 4_s. Али ову сенку стварно није требало овако конструисати. Сама крива је круг који се пројектује као елипса подударна са α. Сенка пада на раван паралелну са равни круга, па је и сама бачена сенка подударна елипса. Из 4_s наставља се сенка круга ε. Можемо да је одредимо директно. Прва пројекција круга били би на правој кроз најниже тачке ивице b и d, а конструкција сенке иста као за тачку 6. Место тога можемо да одредимо сенку и индиректно као сенку круга ε. Прва пројекција криве је тада права кроз најнижу тачку ивице b и c. На слици је показана конструкција сенке 7.

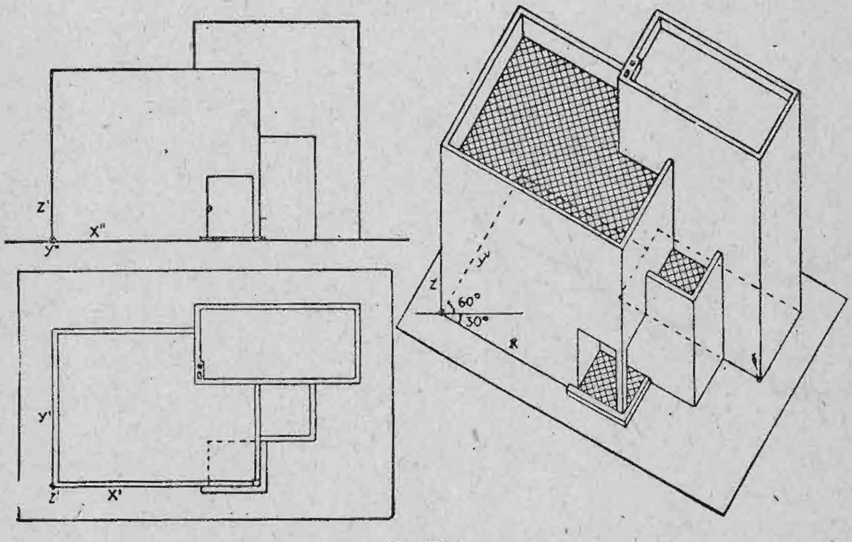
Тиме је задатак потпуно решен.

*

Сваки нови задатак поставио би понеки нови проблем, па чак и ови исти задаци када би само променили угао осе Y и њено скраћење, а нарочито смер светлости. Ипак може се сматрати да је у овом низу решених задатака дато довољно елемената на основу којих се сваки почетник може снаћи пред било којим проблемом. При томе ипак једино и само систематско вежбање може оспособити да се за сваки проблем нађе најједноставније и најтачније решење.

§ 136. Птичја перспектива

До сада смо претпостављали код свих решених примера да је нова пројекциска раван π паралелна са вертикалницом. Услед тога је ортогонална друга пројекција остајала у косој пројекцији непромењена. Претпоставимо ли да је нова пројекциска раван π паралелна са хоризонталницом заклапаће у косој пројекцији осе X и Y између себе угао од 90°, док ће оса Z заклапати са њима било који угао. Сем тога показиваће се осе X и Y у правој величини, а Z-оса у неком скраћењу (као пре оса Y). Праву косу пројекцију називамо *„Птичја перспектива“* или *„Кавалијерова перспектива“* а често се чује и назив *„Изометрија“*. (Назив изометрија није нарочито подесан, јер не наглашава главну особину те врсте пројекције него само каже да су скраћења на осама, на свим трима, једнака, а то може да се подеси и у аксонометрији в. сл. 293.



Сл. 323

Обично се узима да оса *X* заклапа угао од 30° са неком хоризонталном правом на цртежу. Оса *Y* заклапа тада угао од 60° са истом правом, а *Z*-оса обично стоји на цртежу вертикално. Оса *Z* може да има било које скраћење, а обично се црта и она без скраћења.

Тако је у сл. 323 претстављена шематски једна зграда, која је задата двема ортогоналним пројекцијама. Сенка није конструисана да не терети цртеж а конструкција је једноставна.

Овако конструисане слике изгледају природне. Као да се предмет посматра са веће висине. Отуда и име птичја перспектива. И сама конструкција слике је врло једноставна. Стога се много употребљава у архитектури, а нарочито кад треба приказати неко насеље. У том случају може директно да се искористи основа насеља, па се директно на њој нанашају висине појединих тачака на *Z*-(осу, чији се правац и скраћење изабере слободно по вољи и укусу.